

Controle de Sistemas Lineares Discretos
através de Desigualdades Matriciais Lineares

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Domingos Cândido Wong Ramos
Graduado em Engenharia Elétrica - FEEC/UNICAMP

em 19 de Fevereiro de 1998 perante a Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres FEEC/UNICAMP (Orientador)

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por *Domingos Cândido Wong Ramos* e aprovada pela Comissão Julgadora em 19 de Fevereiro de 1998.

Pedro Luis Dias Peres

Orientador

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	R.147c
V	Ex.
TOMBO BC/	34066
PROC.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29/05/98
N.º CPD	

CM-00112901-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R147c

Ramos, Domingos Cândido Wong
**Controle de Sistemas Lineares Discretos através de
Desigualdades Matriciais Lineares.** / Domingos
Cândido Wong Ramos.-Campinas,SP:[s.n.], 1998.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação

1. Sistemas de tempo discreto. 2. Teoria do controle.
3. Otimização matemática. I. Peres, Pedro Luis Dias.
- II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Banca Examinadora

- Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (Presidente)
Prof. Livre Docente – Departamento de Telemática – FEEC/UNICAMP

- Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri
Prof. Adjunto – Departamento de Automação e Sistemas – UFSC

- Prof. Dr. Yaro Burian Jr.
Prof. Titular – Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes – FEEC/UNICAMP

- Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr. (Suplente)
Prof. Titular – Departamento de Telemática – FEEC/UNICAMP

A quem pela sua graça me foi concedido o privilégio
de ver a luz pela primeira vez.

Agradecimentos

Ao "mestre", Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres, pela sublime orientação.

Ao Gaspar, à Flávia, à Thindeka (Juninha), ao Zi e ao Bernardo pela afável convivência.

Colegas e professores da FEEC/UNICAMP cujos nomes não citarei, pelo motivo já consagrado do possível esquecimento de alguns, e todos que direta ou indiretamente, consciente ou inconscientemente contribuíram para a concretização deste objetivo pessoal, sintam-se contemplados pelos meus sinceros agradecimentos impregnados com a mais pura honestidade.

Finalmente, à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho aborda a caracterização de leis de controle de realimentação de estados para sistemas lineares discretos através de desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMI's — Linear Matrix Inequalities), tendo como critério de desempenho as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

A matriz de ganho de realimentação de estados, usualmente determinada a partir da solução de uma equação de Riccati, é obtida como resultado de procedimentos convexos de otimização descritos em termos de LMI's, primeiramente através da parametrização convexa da solução da equação de Riccati e, em seguida, definindo um novo espaço paramétrico, convexo em relação às matrizes do sistema, permitindo assim a incorporação de restrições adicionais no projeto de controle.

Também é apresentado um procedimento convexo de otimização para a caracterização de ganhos de realimentação de estados que realizam uma alocação de pólos numa coroa circular, um problema de interesse no estudo de propriedades de codificadores convolucionais aplicadas à criptografia.

Abstract

This work deals with the characterization of state feedback control laws for linear discrete-time systems through linear matrix inequalities (LMI's), with \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms as performance criteria.

The matrix of state feedback gains, usually determined from the solution of a Riccati equation, is obtained as a result of convex optimization procedures, described in terms of LMI's, firstly by parametrizing the convex solution of the Riccati equation and, secondly, by defining a new parametric space, which is convex with respect to the matrices of the system, thus allowing the incorporation of additional constraints to the controller design.

A convex optimization procedure for the characterization of the state feedback gains that allocate the closed-loop poles of the system into a circular crown is also presented. This problem is of particular interest on the study of convolutional encoders properties applied to cryptography.

Conteúdo

1	Introdução Geral	1
2	Desigualdades Matriciais Lineares na Teoria de Controle	5
2.1	Introdução	5
2.2	Definições e preliminares	7
2.3	Desigualdades matriciais lineares — LMIs	11
2.4	Conclusão	11
3	Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	12
3.1	Introdução	12
3.2	Definições e preliminares	12
3.3	Otimização \mathcal{H}_2	14
3.4	Otimização \mathcal{H}_∞	19
3.5	Conclusão	27
4	Alocação de Pólos numa Coroa Circular	28
4.1	Introdução	28
4.2	Definições e preliminares	29
4.3	Métodos clássicos de alocação de pólos	30
4.4	Alocação em coroa circular via análise convexa	30
4.5	Conclusão	35
5	Exemplos de Aplicação	36
5.1	Introdução	36
5.2	Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	36
5.3	Alocação em coroa circular	55
5.4	Aplicação em códigos convolucionais	57
5.5	Conclusão	61
6	Conclusão Geral	63
	Bibliografia	64

Lista de Figuras

4.1	Região de alocação desejada	32
5.1	Norma \mathcal{H}_2 em malha fechada para cada vértice do politopo de incertezas. . .	39
5.2	Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ em malha fechada para cada vértice do politopo de incertezas. . .	42
5.3	Norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada para cada vértice do politopo de incertezas. . .	44
5.4	Helicóptero.	46
5.5	Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 1 — controle \mathcal{H}_2 com ganho centralizado).	48
5.6	Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 2 — controle \mathcal{H}_2 com ganho descentralizado).	49
5.7	Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 3 — controle \mathcal{H}_∞ com ganho centralizado).	51
5.8	Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 4 — controle \mathcal{H}_∞ com ganho descentralizado).	52
5.9	Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 5 — controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com ganho centralizado).	53
5.10	Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 6 — controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com ganho descentralizado).	54
5.11	Resultado da alocação de pólos para o sistema do <i>Exemplo 5.3.1</i> . Pólos originais dados por 'o' e alocados com a matriz K denotados '*'.	56
5.12	Resultado da alocação de pólos para o sistema do <i>Exemplo 5.3.2</i> . Pólos originais dados por 'o' e alocados com a matriz K denotados '*'.	58
5.13	Codificador convolucional.	59
5.14	Codificador com realimentação.	60
5.15	Resultado da alocação de pólos do codificador. Pólos originais dados por 'o', alocados com a matriz K por '*' e da matriz alocada A_a por '+'.	62

Capítulo 1

Introdução Geral

Para a realização de várias tarefas em engenharia, diversos sistemas são projetados e implementados em todos os níveis de detalhe. Tais sistemas são também controlados (isto é, sofrem uma interferência externa proposital e intencional) com vista a atender determinadas especificações de desempenho. A alteração do comportamento do sistema é tratada pela engenharia de controle através da adição de sensores, que medem os vários sinais do sistema e sinais de comando externos e da obtenção dos sinais dos atuadores, a partir dos sinais medidos, para realimentação. A engenharia de controle envolve diversos aspectos tais como, modelagem ou identificação, configuração de controle, projeto e implementação do controlador e teste e validação do sistema de controle [2].

No caso particular do projeto do controlador, algumas especificações são necessárias: de desempenho, de robustez e da lei de controle. Especificações de desempenho descrevem o comportamento do sistema em malha fechada, na presença do controlador, sendo dadas quantitativa e qualitativamente, por exemplo, pela estabilidade em malha fechada, sinais de controle limitados, rejeição de distúrbios e ruídos e respostas particulares a sinais de referência ou de comando.

Especificações de robustez podem ser caracterizadas por parâmetros como sensibilidade, estabilidade robusta e desempenho robusto e descrevem o comportamento do sistema na ocorrência de erros de modelamento ou identificação, alterações físicas de valores dos componentes, não linearidades ignoradas no projeto do controlador, alteração do ponto de operação e falhas nos atuadores e/ou sensores.

Especificações sobre a lei de controle são, por exemplo, estabilidade do controlador em malha aberta, descentralização e ordem do controlador baixa, refletindo-se numa estrutura mais simples.

O problema que se coloca então é o da determinação da existência ou não de um controlador dadas as especificações do sistema a ser controlado, a configuração de controle desejada e o conjunto de especificações de projeto do controlador.

De forma geral, os métodos usados no projeto de controladores são divididos em duas categorias: métodos clássicos que envolvem a descrição dos sistemas através de funções de transferência e os métodos modernos (métodos baseados no espaço de estados) que lidam com sistemas descritos por equações diferenciais. Especificamente, os métodos para projeto de controladores são divididos em métodos sintéticos e analíticos e de otimização de parâmetros.

Nos métodos sintéticos, o controlador é construído de forma incremental adicionando

estruturas específicas (que tem algum comportamento físico conhecido: *notch filter*, filtro passa-baixas e seções *lead-lag*) fazendo com que o projetista tenha um entendimento físico do comportamento do controlador. Em sistemas tipo SISO de ordem baixa as técnicas usadas são o método do lugar das raízes e diagramas de Nyquist, de Bode e Nichols. No caso de sistemas relativamente complexos e de ordem maior são usados métodos de otimização numérica de parâmetros. A obtenção de uma lei de controle que satisfaz as especificações de projeto, nos casos em que esta existe, não é feita de acordo com um algoritmo bem definido e pode portanto depender da experiência, talento e um pouco de sorte do projetista. Um aspecto negativo destes métodos é o fato de que a não obtenção de um controlador adequado, por parte do projetista, não responde de forma conclusiva sobre a questão da existência ou não do controlador pretendido nem sobre os limites de desempenho do sistema em malha fechada.

Os métodos analíticos no espaço de estados, por outro lado, baseiam-se na solução analítica de um problema de projeto de controlador ótimo ou sub-ótimo que satisfaz as especificações desejadas. Um resultado importante é o princípio da separação, a partir do qual uma planta de um sistema linear e invariante pode ser estabilizada por um controlador que consiste num observador de estados e um ganho de realimentação de estados. Alguns problemas conhecidos são o problema linear quadrático (LQR), o problema linear quadrático gaussiano (LQG) e o *loop transfer recovery* (LTR). As técnicas usadas envolvem a seleção de matrizes de ponderação e adição de ruídos e dinâmicas fictícias ao modelo do sistema. Os controladores obtidos, além de estabilizar a planta, são em geral de ordem elevada, e técnicas de redução de modelos devem ser aplicadas para a obtenção de um controlador de ordem razoável que mantenha o desempenho adequado, de acordo com as especificações de projeto. As dificuldades com estes métodos residem na tradução de aspectos físicos do projeto do controlador em matrizes de ponderação e dinâmicas fictícias.

Finalmente, os métodos de otimização de parâmetros tratam do ajuste de parâmetros de uma estrutura conhecida de controlador. Por exemplo, tem-se o controlador PI (com os parâmetros K_p e K_i na sua função de transferência) ou controladores representados por modelos no espaço de estados, de ordem fixa, cujas matrizes contêm os parâmetros como elementos, sob alguma forma canônica. Após a escolha de uma função custo que mede a qualidade do desempenho do sistema e a adição de outras restrições, os parâmetros são obtidos a partir da solução, quase sempre numérica, de problemas de otimização não-lineares. Valores realistas são necessários para a inicialização dos algoritmos de otimização e as soluções obtidas podem ser apenas locais pelo fato do problema ser geralmente não-convexo.

Ao longo do texto, discutir-se-á a obtenção de controladores baseados em realimentação de estados, para sistemas discretos lineares, através de métodos analíticos onde as funções objetivo são descritas a partir das matrizes de transferência do sistema (normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞).

O critério quadrático ou \mathcal{H}_2 se preocupa com uma medida média de desempenho, sendo comumente utilizado em problemas estocásticos e nem sempre é satisfatório sob o ponto de vista de projeto para sistemas determinísticos. Mais recentemente, a inclusão de características de atenuação de perturbações passou a ser também necessária, e a norma \mathcal{H}_∞ surgiu como uma especificação de robustez do sistema [47]. Ao longo dos anos 80, inúmeros trabalhos trataram do tema, mostrando que a norma \mathcal{H}_∞ de um sistema é menor que um limitante prescrito γ se e somente se uma certa equação matricial do tipo Riccati admitir uma solução definida positiva [10]. O desenvolvimento de resultados análogos para sistemas

discretos aconteceu em seguida [22], [42], [46].

Embora o controlador \mathcal{H}_∞ ótimo possa ser obtido, na maior parte das aplicações procura-se caracterizar um certo nível de atenuação de distúrbios γ não necessariamente mínimo. Dessa forma, ainda usando a caracterização de soluções a partir de equações e inequações matriciais do tipo Riccati, associa-se a uma certa atenuação $\gamma > 0$ uma família de controladores. Uma solução que mistura as características de atenuação de perturbações com minimização quadrática do sinal de saída é ditada pela escolha, dentre os controladores que asseguram um limitante \mathcal{H}_∞ , daquele que minimiza um critério quadrático \mathcal{H}_2 . Este é o chamado problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Em sua formulação mais simples, as mesmas ponderações são usadas para as medidas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , e uma função objetivo que é um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 é utilizada (conhecida como custo auxiliar) [21]. O valor ótimo do problema com essa função custo auxiliar é dada pela solução de uma equação de Riccati modificada. A função custo é um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada, e a igualdade ocorre quando $\gamma \rightarrow \infty$.

Apesar dos inúmeros trabalhos abordando a equação de Riccati, condições de existência de soluções [41] e métodos numéricos de resolução [46], a extensão dos resultados para tratar restrições adicionais não é imediata. De fato, a parametrização dos controladores via equação de Riccati não define um conjunto convexo, e a convexidade, sem dúvida nenhuma, desponta como a mais importante propriedade no cálculo de controladores com características de otimalidade [4], [15], permitindo lidar simultaneamente com várias especificações de projeto, como por exemplo a descentralização e a presença de incertezas. Além disso, problemas convexos contam hoje em dia com inúmeros algoritmos especializados para a resolução numérica dos procedimentos de otimização com pacotes computacionais como o LMILab, LMISol, LMITOOL [12], [8], [20], a maioria explorando métodos de pontos interiores [13], [29].

Neste trabalho, as condições de otimalidade do problema de realimentação de estado \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ são obtidas a partir dos gramianos de controlabilidade e de observabilidade, resultando nas conhecidas equações de Riccati. A seguir, condições equivalentes são desenvolvidas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities — LMIs), tornando convexos os problemas a serem resolvidos. Essas condições, entretanto, não podem tratar sistemas incertos, pois a expressão do ganho de realimentação de estados depende explicitamente das matrizes do sistema. Uma parametrização alternativa é então apresentada, também em termos de LMIs, mantendo a convexidade. Para sistemas precisamente conhecidos, sob certas condições, os ganhos obtidos dessa nova parametrização igualam-se àqueles fornecidos pelas equações de Riccati; para sistemas incertos, obtêm-se controladores do tipo custo garantido [18]. Restrições adicionais, como controle descentralizado, podem ser incorporadas.

O trabalho está organizado como segue. O capítulo 2 dá destaque ao surgimento e à utilização das desigualdades matriciais lineares em teoria de controle. O conceito de decomposição em valores singulares de uma matriz é usado na obtenção da pseudo-inversa e uma discussão sobre os conceitos de matriz (semi)definida positiva e complemento de Schur é apresentada. Finalmente, a entidade desigualdade matricial linear é definida.

O capítulo 3 apresenta o sistema linear sob estudo e algumas definições e, em seguida, o problema \mathcal{H}_2 é abordado: i) através da equação de Riccati; ii) a partir de LMIs que parametrizam a mesma solução de Riccati; iii) a partir de LMIs descritas em outro espaço paramétrico. Nos itens i) e ii) o ganho de realimentação depende explicitamente das matrizes

do sistema, o que não ocorre em iii). O mesmo desenvolvimento é mantido na abordagem do controlador central \mathcal{H}_∞ porém, as condições ii) e iii) expressas em termos de LMIs são apenas necessárias, exigindo um teste adicional para a suficiência. Alguns resultados preliminares são também apresentados e o problema de otimização \mathcal{H}_∞ é discutido.

Um problema de alocação de pólos numa coroa circular via realimentação de estados, para o caso de sistemas discretos precisamente conhecidos, é analisado no capítulo 4 e condições necessárias e suficientes para tal são obtidas. Mostra-se que a matriz de ganho do controlador pode ser obtida a partir de um problema equivalente de otimização convexa. A motivação para este capítulo nasceu de estudos sobre a estrutura e as propriedades de codificadores convolucionais (em telecomunicações) feitos sob diferentes abordagens ([39] e demais referências internas), em particular da abordagem sobre estabilidade e robustez dos codificadores convolucionais apresentada em [5] via método do lugar das raízes.

A partir da representação do codificador convolucional por um diagrama de estados particionado que fornece o seu comportamento “estático”, o mesmo pode ser modelado como sendo um sistema linear discreto invariante ou variante no tempo, descrito no espaço de estados. Assim, de acordo com a posição dos pólos do sistema linear discreto que descreve o codificador convolucional, este pode ser classificado como estável ou instável, ou seja, que produz códigos com boa capacidade de correção de erros ou códigos catastróficos, respectivamente.

Usando então funções lineares ou não-lineares de estados, um ganho de realimentação K pode ser calculado alterando a posição dos pólos de forma arbitrária (desde que o sistema seja controlável) e imprimindo ao codificador as características desejadas (cifragem ou correção de erros). Este resultado leva a uma proposta de um sistema criptográfico convencional cuja *chave* passa a ser o ganho K .

Neste capítulo, mostra-se que a obtenção deste ganho pode então ser feita através da solução rápida e eficiente de um problema de otimização, descrito em termos LMI's.

Exemplos de aplicação que demonstram os resultados dos capítulos 3 e 4 são apresentados e discutidos no capítulo 5.

Um capítulo contendo as conclusões gerais encerra o trabalho.

Capítulo 2

Desigualdades Matriciais Lineares na Teoria de Controle

2.1 Introdução

A estabilidade de um sistema dinâmico pode ser verificada de diversas formas: critérios de *Nyquist*, de *Routh-Hurwitz*, métodos no espaço da frequência e do tempo, etc, [9], [11], [30], [31].

O uso de LMIs (Linear Matrix Inequalities)¹ na análise de sistemas dinâmicos data de 1890 com a introdução, por Lyapunov, daquela que é hoje conhecida como teoria de Lyapunov [28]. A estabilidade de um sistema representado por uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (2.1)$$

é garantida se e somente se existir uma matriz simétrica P tal que

$$A'P + PA < \mathbf{0}, \quad P > \mathbf{0} \quad (2.2)$$

A relação (2.2) é uma forma de LMI, a primeira a ser usada para analisar a estabilidade de um sistema. A solução de (2.2) pode ser feita de forma analítica, através da solução de um conjunto de equações lineares, bastando para isto escolher alguma matriz $Q = Q' > \mathbf{0}$ e fazer $A'P + PA = -Q$.

Meio século depois, na década de 40, na ex-União Soviética, Lur'e, Postnikov e outros utilizaram os métodos de Lyapunov no estudo de estabilidade de um sistema de controle com não-linearidades no atuador. Neste problema, o critério de estabilidade tinha a forma de LMI mas as restrições eram expressas em termos de desigualdades polinomiais. A solução era feita "a mão" e para sistemas pequenos (até terceira ordem) apenas.

No início da década de 60, Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores reduziram a solução do problema de Lur'e (expresso em LMIs) a uma solução através de um critério gráfico simples, usando o hoje conhecido *positive-real lemma*. Outros critérios e suas variações (critérios de Popov, do círculo, de Tsytkin) foram desenvolvidos permitindo resolver sistemas maiores mas com apenas uma não-linearidade.

¹O termo LMI foi introduzido por J. C. Willems [44] por analogia com o termo *desigualdade linear* usado para restrições do tipo $a_i'x \leq b_i$, $i = 1, \dots, p$.

No final da década de 60, o *positive-real lemma* (e extensões) foi alvo de um estudo mais aprofundado que evidenciou as relações deste lema com as idéias de passividade, critério do *small-gain* e controle ótimo quadrático. O lema diz basicamente o seguinte:

Dadas as matrizes $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ e assumindo a hipótese $D + D' > \mathbf{0}$ e que o par (A, B) é controlável, tem-se as seguintes afirmações equivalentes [4]:

1. O sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

é passivo se

$$\int_0^T u(t)'y(t)dt \geq 0$$

para todo $u(t)$ e $T \geq 0$, com $x(0) = \mathbf{0}$.

2. A matriz de transferência $H(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$ é positiva real, isto é

$$H(s) + H(s)^* \geq \mathbf{0}$$

para todo s tal que $\text{Re}(s) \geq 0$.

3. A LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -(D + D') \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (2.3)$$

é factível na variável $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$.

A solução da LMI que aparece no *positive-real lemma* (2.3) poderia então ser obtida através da solução de uma equação algébrica de Riccati (e a matriz Hamiltoniana associada). Assim, a LMI (2.3) é factível se e somente se existe uma matriz real $P = P' > \mathbf{0}$ que satisfaz a seguinte equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA + (PB + C')(D + D')^{-1}(B'P + C) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

As relações entre o *positive-real lemma*, determinados problemas de controle ótimo quadrático e a existência de soluções simétricas para a equação algébrica de Riccati apropriada foram descritas por Willems em [44] e [45]. Por exemplo, em [44], mostra-se que a LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + Q & PB + C' \\ B'P + C & R \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

que surge de um problema de controle ótimo quadrático, tem como soluções matrizes $P = P'$ que são também soluções da equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA - (PB + C')R^{-1}(B'P + C) + Q = \mathbf{0}$$

e podem ser obtidas, por exemplo, através de uma decomposição em autovalores e autovetores da matriz Hamiltoniana associada.

Na década de 80, mostrou-se que problemas de teoria de controle e sistemas, expressos em termos de LMIs, poderiam ser formulados como problemas de otimização convexa e a solução obtida através de métodos computacionais. Foram então desenvolvidos poderosos e eficientes métodos de pontos interiores para resolver problemas lineares, quadráticos (convexos) descritos por LMIs, que surgem em teoria de controle e sistemas.

Neste capítulo será apresentado primeiramente o conceito de decomposição em valores singulares. Em seguida, a decomposição em valores singulares é usada na obtenção da pseudo-inversa (ou inversa de *Moore-Penrose*) de uma matriz. Os conceitos de matriz (semi)definida positiva são obtidos através da noção de pseudo-inversa. O complemento de Schur (útil na conversão de inequações não-lineares convexas em LMIs) e a definição de LMI são finalmente abordados [4], [29].

2.2 Definições e preliminares

Um instrumento usado na análise das características de uma matriz é a decomposição em valores singulares. Os valores singulares de uma matriz são caracterizados como se segue:

Definição: (Valores singulares de uma matriz) Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. As raízes quadradas não-negativas dos autovalores de A^*A são chamados valores singulares de A , denotados $\sigma_i(A)$, $i = 1, \dots, m$.

Os valores singulares de A são reais visto que A^*A é hermitiana e semi-definida positiva. Mais ainda, $m - \text{rank}(A)$ valores singulares são nulos.

Os valores singulares da matriz A podem ser colocados em evidência conforme o Teorema 2.1 [48].

TEOREMA 2.1 Decomposição em valores singulares. *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e com rank igual a k . Então, existem duas matrizes unitárias U e V tais que*

$$U^*AV = S \quad (2.5)$$

e os elementos não nulos de S aparecem na diagonal principal, (i, i) , $i = 1, \dots, k$. Esses elementos são positivos e não-decrescentes.

□

Os valores singulares de A aparecem nas posições (i, i) , $i = 1, \dots, \min[n, m]$ da matriz S . Mais ainda,

$$A^*A = VS^*U^*USV^* = VS^*SV^* = VDV^* \quad (2.6)$$

onde

$$D = \text{diag} \{ \sigma_i^2(A), i = 1, \dots, m \} \quad (2.7)$$

Se $m > n$, a matriz A possui $m - n$ valores singulares nulos.

A matriz A possui inversa à direita ($X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tal que $AX = I$) e inversa à esquerda ($Y \in \mathbb{C}^{m \times n}$ tal que $YA = I$) se e somente se tiver rank completo de linhas e de colunas, respectivamente. As matrizes inversas à direita e à esquerda, dentre muitas outras possíveis, podem ser dadas por

$$X = A^*(AA^*)^{-1} \quad Y = (A^*A)^{-1}A^*$$

Se a matriz A não tiver rank completo nem de linhas nem de colunas, as matrizes inversas à esquerda e à direita não existem. Não obstante, a pseudo-inversa, denotada A^\dagger , existe e é definida como a solução única do sistema de equações:

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ (XA)^* = XA \\ (AX)^* = AX \end{cases} \quad (2.8)$$

A matriz A^\dagger satisfaz também as seguintes propriedades:

- (i) $(A^*A)^\dagger = A^\dagger A^{\dagger*}$
- (ii) $(A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger$
- (iii) $A^\dagger = A^{-1}$ se A é quadrada e não singular.
- (iv) A equação $AX = B$ tem solução se e somente se $AA^\dagger B = B$. Neste caso, X é a solução se e somente se existir Y tal que

$$X = A^\dagger B + (I - A^\dagger A)Y$$

A solução é única se e somente se $(I - A^\dagger A) = \mathbf{0}$.

A obtenção de A^\dagger pode ser feita de duas maneiras diferentes. Primeiro, se a matriz A puder ser escrita na forma

$$A = BC$$

com B apresentando rank completo de colunas e C rank completo de linhas, então

$$A^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \quad (2.9)$$

Segundo, se a decomposição em valores singulares de A é conhecida,

$$U^*AV = S = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

com Σ quadrada e não singular, então

$$A^\dagger = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} U^* = VTU^* \quad (2.11)$$

De fato,

$$A^\dagger AA^\dagger = VTU^*USV^*VTU^* = VTSTU^* = VTU^* = A^\dagger$$

$$AA^\dagger A = USV^*VTU^*USV^* = USTSV^* = USV^* = A$$

Com base na noção de pseudo-inversa, o conceito de matriz (semi)definida positiva é agora colocado, para uma matriz real quadrada e simétrica [1].

TEOREMA 2.2 *Seja uma matriz real simétrica com dimensões $(n + m) \times (n + m)$ e particionada da seguinte maneira*

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S'_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

S_{11} e S_{22} têm dimensões $n \times n$ e $m \times m$, respectivamente.

(i)

$$S \geq \mathbf{0} \iff S_{11} \geq \mathbf{0}, S_{11}S_{11}^\dagger S_{12} = S_{12}, S_{22} - S'_{12}S_{11}^\dagger S_{12} \geq \mathbf{0} \quad (2.13)$$

(ii)

$$S > \mathbf{0} \iff S_{11} > \mathbf{0}, S_{11} - S_{12}S_{22}^\dagger S'_{12} > \mathbf{0}, S_{22} - S'_{12}S_{11}^{-1}S_{12} > \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Prova:

Ponto (i)

Suficiência: $S \geq \mathbf{0}$ pode ser escrito como $S = HH'$ onde H é uma matriz de $n + m$ linhas, particionada

$$H = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

e X e Y possuem n e m linhas respectivamente. Assim,

$$HH' = \begin{pmatrix} XX' & XY' \\ YX' & YY' \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

e portanto, $S_{11} = XX' > \mathbf{0}$ e $S_{12} = XY'$. Segue também que $S_{11}S_{11}^\dagger = XX^\dagger$, de onde se conclui que

$$S_{11}S_{11}^\dagger S_{12} = (XX^\dagger)(XY') = (XX^\dagger X)Y' = XY' = S_{12} \quad (2.16)$$

Tomando também

$$U = Y - S'_{12}S_{11}^\dagger X \quad (2.17)$$

verifica-se que

$$UU' = S_{22} - S'_{12}S_{11}^\dagger S_{12} \geq \mathbf{0} \quad (2.18)$$

Necessidade: Sejam

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ X &= S_{11}^{1/2}U \\ Y &= S'_{12}S_{11}^\dagger S_{11}^{1/2}U + (S_{22} - S'_{12}S_{11}^\dagger S_{12})^{1/2}V \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dado que $UV' = \mathbf{0}$ (uma matriz $n \times m$), a partir das propriedades da pseudo-inversa, tem-se:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' & Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S'_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Ponto (ii)

Suficiência: Se $S > \mathbf{0}$, e portanto todos os menores principais tem determinante positivo, então $S_{11} > \mathbf{0}$ e $S_{22} > \mathbf{0}$. Escrevendo

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.21)$$

onde

$$A = (S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S'_{12})^{-1} \quad (2.22)$$

e

$$C = (S_{22} - S'_{12}S_{11}^{-1}S_{12})^{-1} \quad (2.23)$$

como $S^{-1} > \mathbf{0}$ então, $A > \mathbf{0}$ e $C > \mathbf{0}$ e portanto A^{-1} e C^{-1} também

Necessidade: De $S_{11} > \mathbf{0}$ segue $S'_{11}S_{11}^{-1}S_{12} \geq \mathbf{0}$ e então

$$S_{22} = (S_{22} - S'_{12}S_{11}^{-1}S_{12}) + S'_{12}S_{11}^{-1}S_{12} > \mathbf{0} \quad (2.24)$$

Tomando

$$\begin{aligned} A &= (S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S'_{12})^{-1} \\ B &= -S_{11}^{-1}S_{12}(S_{22} - S'_{12}S_{11}^{-1}S_{12})^{-1} \\ C &= (S_{22} - S'_{12}S_{11}^{-1}S_{12})^{-1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

mostra-se que

$$S \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.26)$$

indicando que S é não singular, ou seja, $S > \mathbf{0}$. \square

Obs.: O ponto (ii) do Teorema 2.2 pode ser re-escrito como

$$S > \mathbf{0} \iff S_{11} > \mathbf{0}, S_{22} > \mathbf{0}, S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S'_{12} > \mathbf{0}, S_{22} - S'_{12}S_{11}^{-1}S_{12} > \mathbf{0} \quad (2.27)$$

Agora, com base nos conceitos de pseudo-inversa e matriz (semi)definida, o complemento de Schur é colocado.

Dadas as matrizes Q e R , simétricas, a relação

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (2.28)$$

é equivalente a

$$R \geq \mathbf{0}, Q - SR^\dagger S' \geq \mathbf{0}, S(\mathbf{I} - RR^\dagger) = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Para verificar (2.28) e (2.29) considere U uma matriz ortogonal que diagonaliza R na forma

$$U'RU = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

onde $\Sigma > \mathbf{0}$ e diagonal. A restrição (2.28) é válida se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & S_1 & S_2 \\ S_1' & \Sigma & \mathbf{0} \\ S_2' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (2.31)$$

onde $[S_1 \ S_2] = SU$, com partição adequada. A relação (2.31) por sua vez é válida, com $S_2 = \mathbf{0}$, se e somente se $S(\mathbf{I} - RR^\dagger) = \mathbf{0}$ e

$$\begin{bmatrix} Q & S_1 \\ S_1' & \Sigma \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \iff Q - SR^\dagger S' \geq \mathbf{0} \quad (2.32)$$

Verifica-se portanto que restrições não lineares do tipo (2.29) podem ser representadas pela LMI dada em (2.28).

2.3 Desigualdades matriciais lineares — LMIs

Uma desigualdade matricial linear é uma restrição do tipo [4]

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > \mathbf{0} \quad (2.33)$$

onde $x \in \Re^m$ é variável e as matrizes $F_i = F_i' \in \Re^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$ são dadas.

$F(x)$ é definida positiva, isto é,

$$u' F(x) u > 0, \quad \forall u \in \Re^n, \quad u \neq \mathbf{0} \quad (2.34)$$

A LMI $F(x) > \mathbf{0}$ é uma restrição convexa e pode representar uma grande variedade de restrições convexas em x como por exemplo, inequações lineares, inequações quadráticas (convexas), desigualdades de normas de matrizes e restrições que surgem em problemas de teoria de controle como são os casos da inequação de Lyapunov e inequações matriciais quadráticas convexas.

2.4 Conclusão

A partir dos conceitos de decomposição em valores singulares e de pseudo-inversa de uma matriz foram obtidas as definições de matriz (semi)definida positiva, desigualdade matricial linear e complemento de Schur.

A importância das LMIs na teoria de controle ficou evidenciada uma vez que muitos dos problemas que surgem neste campo podem ser formulados como problemas de otimização convexa, descritos por LMIs, com solução obtida através de métodos numéricos de programação matemática, computacionalmente poderosos e eficientes.

Capítulo 3

Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

3.1 Introdução

Ao longo deste capítulo, discutir-se-á o problema de controle ótimo, tendo como critério as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Um ganho de realimentação de estados K , que assegura a estabilidade do sistema em malha fechada, será obtido, mediante otimização de algum critério: i) através da equação de Riccati; ii) a partir de LMIs que parametrizam a mesma solução de Riccati; iii) a partir de LMIs descritas em outro espaço paramétrico.

Nos itens i) e ii) o ganho de realimentação depende explicitamente das matrizes do sistema, o que não ocorre no item iii). Dado esse fato, a parametrização obtida em iii) permite o tratamento de incertezas tendo como resultado controladores do tipo custo garantido.

Na abordagem do controlador central \mathcal{H}_∞ , as condições de otimalidade obtidas para ii) e iii), expressas em termos de LMIs, são apenas necessárias, tornando imperioso um teste adicional para validar a suficiência.

3.2 Definições e preliminares

Os sistemas a serem considerados são lineares, invariantes no tempo e descritos por equações de estado a diferenças

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (3.1)$$

nas quais $x_k \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado, $u_k \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de controle, $w_k \in \mathfrak{R}^l$ é o vetor de distúrbios externos e $y_k \in \mathfrak{R}^r$ é o vetor de saída controlada. As matrizes A , B_1 , B_2 , C e D são supostas conhecidas e com dimensões apropriadas. Assumem-se também as seguintes hipóteses:

hipótese 1: $C'D = 0$;

hipótese 2: $D'D > 0$.

A hipótese 1 (ortogonalidade) significa que não há ponderação cruzada entre o estado x e controle u e não acarreta perda de generalidade, tornando as expressões matemáticas mais simples; a hipótese 2 é necessária para assegurar a existência de ganhos finitos.

A lei de controle, obtida a partir do estado x mediante um ganho de realimentação $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ a determinar

$$u = Kx \quad (3.2)$$

é tal que a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida.

Definem-se então as matrizes de malha fechada

$$A_f \triangleq A + B_2K \quad (3.3)$$

$$C_f \triangleq C + DK \quad (3.4)$$

e o conjunto de ganhos estabilizantes

$$\mathcal{K} \triangleq \{K : A_f \text{ é assint. estável} \} \quad (3.5)$$

ou seja, todos os autovalores do sistema em malha fechada estão no interior do círculo de raio unitário centrado na origem do plano complexo. A matriz de transferência do distúrbio externo w para a saída controlada y é dada por

$$H(z) = C_f(zI - A_f)^{-1} B_1 \quad (3.6)$$

Para $K \in \mathcal{K}$ e $z = \exp(j\omega)$, definem-se as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência, respectivamente:

$$\|H\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr} \{H[\exp(j\omega)]^* H[\exp(j\omega)]\} d\omega \quad (3.7)$$

$$\|H\|_\infty \triangleq \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} \sigma_{\max} \{H[\exp(j\omega)]\} \quad (3.8)$$

A norma \mathcal{H}_2 de uma matriz de transferência estável pode ser calculada a partir dos gramianos de controlabilidade e observabilidade, isto é,

$$\|H\|_2^2 = \text{Tr} (B_1' L_o B_1) = \text{Tr} (C_f L_c C_f') \quad (3.9)$$

com L_c e L_o matrizes simétricas soluções das equações discretas de Lyapunov

$$A_f L_c A_f' - L_c + B_1 B_1' = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

$$A_f' L_o A_f - L_o + C_f' C_f = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Por outro lado, a norma \mathcal{H}_∞ pode ser calculada através de procedimentos de busca unidimensional utilizando a própria definição ou a partir da relação entre um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma \mathcal{H}_∞ e a existência de uma matriz definida positiva P [46], [22], [42]:

LEMA 3.1 *Considere (A_f, B_1) controlável e (A_f, C_f) observável. Então,*

$\|H\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se a desigualdade

$$A_f' P A_f - P + C_f' C_f + \gamma^{-2} P B_1 (I + \gamma^{-2} B_1' P B_1)^{-1} B_1' P \leq \mathbf{0} \quad (3.12)$$

admitir $P = P' > \mathbf{0}$ como solução.

A partir do Lema 3.1, um procedimento iterativo pode ser formulado para o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ , no qual baixa-se gradativamente o valor de γ até o limite de existência de uma solução definida positiva P para (3.12).

A descrição de sistema dada em (3.1) também vale para o caso em que as matrizes do sistema são incertas e pertencem a um poliedro do qual se conhecem os vértices. A planta é, então, descrita como a combinação convexa dos vértices de um politopo de incertezas:

$$(A, B_1, B_2, C, D) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A, B_1, B_2, C, D)_i, \quad \xi_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \quad (3.13)$$

Para a quintupla (A, B_1, B_2, C, D) fixa, valem os cálculos acima de norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Se as expressões resultantes do problema de controle forem afins nas matrizes do sistema, pode-se então analisar e sintetizar um controlador para uma planta com incertezas nos parâmetros, colocando cada restrição do problema expressa em termos das matrizes que descrevem os vértices do politopo de incertezas.

Das definições acima, alguns problemas podem ser formulados como são os casos do problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 [33], e o de controle ótimo \mathcal{H}_∞ e suas extensões para o caso incerto (chamados de problemas de custo garantido [16], [35]), todos baseados na definição de um critério de desempenho a partir da norma da matriz de transferência. Se os mesmos forem definidos dentro de um espaço paramétrico adequado, os ganhos estabilizantes podem ser obtidos a partir de um conjunto convexo, possibilitando assim a extensão dos resultados para sistemas incertos (utilizando o conceito de estabilização quadrática [15], [34]).

Um caso conhecido é o da caracterização do conjunto de ganhos estabilizantes \mathcal{K}_γ , a partir da relação entre a norma \mathcal{H}_∞ e a existência de uma matriz definida positiva, colocada no Lema 3.1.

$$\mathcal{K}_\gamma \triangleq \{K : A_f \text{ é assint. estável e } \|H\|_\infty \leq \gamma\} \quad (3.14)$$

Se o conjunto \mathcal{K}_γ é convexo, permite-se a extensão dos resultados para o caso incerto, no chamado problema de estabilidade quadrática com nível γ prescrito de atenuação de distúrbios [17].

Uma vez caracterizado o conjunto \mathcal{K}_γ , a imposição de um outro critério de desempenho pode determinar a escolha particular de um elemento $K \in \mathcal{K}_\gamma$. No caso da escolha da norma \mathcal{H}_2 , tem-se o problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Com a definição de um custo auxiliar, que é um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 , pode-se obter uma solução aproximada para o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [18], [49].

Outras extensões possíveis para os problemas mencionados acima envolvem, por exemplo, o problema do controle descentralizado [14]; o problema de realimentação de saída [19], [36], [37]; o problema de controle com alocação de pólos em sub-regiões do plano complexo [38].

3.3 Otimização \mathcal{H}_2

A partir da discussão sobre o cálculo da norma \mathcal{H}_2 e da caracterização de todos os ganhos de realimentação de estados que estabilizam o sistema, define-se o problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 , apresentado nas seguintes formas equivalentes:

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H\|_2^2 \quad (3.15)$$

sujeito a

$$(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

e

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H\|_2^2 \quad (3.17)$$

sujeito a

$$(A + B_2K)W(A + B_2K)' - W + B_1B_1' = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Chamando de $W = W'$ a variável dual associada à restrição (3.16) tem-se, a partir de (3.15)-(3.16):

$$\min_{K, P} Tr(B_1'PB_1) \quad (3.19)$$

sujeito a

$$W : (A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

O lagrangeano $\mathcal{L}(P, W, K)$ é dado por

$$\mathcal{L}(P, W, K) = Tr\{B_1'PB_1 + W[(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK)]\} \quad (3.21)$$

As condições de estacionariedade do lagrangeano, que fornecem as condições necessárias de otimalidade do problema ótimo \mathcal{H}_2 , são (3.22)-(3.24):

$$(A + B_2K)W(A + B_2K)' - W + B_1B_1' = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

$$(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

$$2[D'DK + B_2'PB_2K + B_2'PA]W = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Se a matriz W for definida positiva, então, de (3.24) tem-se

$$K = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA \quad (3.25)$$

e, nesse caso, a solução em termos do ganho de realimentação de estados dada por (3.25) é única, ótima e assegura a estabilidade do sistema em malha fechada.

Substituindo (3.25) em (3.23), obtém-se

$$A'PA - P - A'PB_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA + C'C = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

que é a equação de Riccati para sistemas discretos no tempo. Da matriz solução P , de (3.26) tem-se o valor ótimo da norma \mathcal{H}_2 que é dado portanto por

$$\min \|H\|_2^2 = Tr(B_1'PB_1) \quad (3.27)$$

A condição $W > \mathbf{0}$ é sempre assegurada desde que o par (A_f, B_1') seja observável. Uma condição suficiente para tal é dada por $\text{rank } B_1 = n$. Alternativamente, a minimização de $Tr(C_f'WC_f')$ sujeito a (3.22) conduz às mesmas condições de otimalidade.

O problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 formulado como um problema de otimização representado pelas equações (3.19)-(3.20) pode ser transformado num problema convexo descrito por desigualdades matriciais lineares, mediante uma adequada mudança de variáveis. Mais ainda, pelo fato do critério (3.19), linear em P , levar sempre a solução do problema para a solução maximal da equação de Riccati (garantindo a igualdade), a equação (3.26) pode ser substituída por uma inequação de menor ou igual a zero.

TEOREMA 3.1 *Considere o seguinte problema de otimização*

$$\min_{X, Y} \text{Tr}(X) \quad (3.28)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & Y \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} Y & YC' & YA' \\ CY & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ AY & \mathbf{0} & Y + B_2(D'D)^{-1}B_2' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.30)$$

$$Y > \mathbf{0} \quad (3.31)$$

com $Y = Y' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $X = X' \in \mathfrak{R}^{l \times l}$.

A solução ótima é tal que $P = Y^{-1}$ é a solução da equação de Riccati (3.26)

$$\text{Tr}(X) = \text{Tr}(B_1'Y^{-1}B_1) = \min \|H\|_2^2 \quad (3.32)$$

O ganho ótimo de realimentação é dado por

$$K = -(D'D + B_2'Y^{-1}B_2)^{-1}B_2'Y^{-1}A \quad (3.33)$$

Prova: De (3.30) e (3.31), usando complemento de Schur [4], tem-se que

$$Y - YC'CY \geq YA' \left[Y + B_2(D'D)^{-1}B_2' \right]^{-1} AY \quad (3.34)$$

Aplicando o lema da inversa¹ em (3.34) obtém-se

$$YA' \left[Y^{-1} - Y^{-1}B_2(D'D + B_2'Y^{-1}B_2)^{-1}B_2'Y^{-1} \right] AY - Y + YC'CY \leq \mathbf{0} \quad (3.35)$$

Multiplicando à esquerda e à direita por Y^{-1} , mostra-se que (3.35) é equivalente à equação (3.26) com $P = Y^{-1}$ e a igualdade trocada por uma desigualdade.

$$A'Y^{-1}A - Y^{-1} - A'Y^{-1}B_2(D'D + B_2'Y^{-1}B_2)^{-1}B_2'Y^{-1}A + C'C \leq \mathbf{0} \quad (3.36)$$

Esta equivalência pode ser mostrada no sentido inverso, ou seja, a partir de (3.30)-(3.31) com $Y = P^{-1}$.

De (3.29) e (3.31) tem-se:

$$X \geq B_1'Y^{-1}B_1 \implies \text{Tr}(X) \geq \text{Tr}(B_1'Y^{-1}B_1) \quad (3.37)$$

A minimização (3.28) sem nenhuma restrição sobre X conduz $\text{Tr}(X)$ para o seu valor mínimo, estabelecendo a igualdade em (3.37). \square

O caráter convexo da formulação permite também a incorporação de restrições adicionais, como, por exemplo, uma estrutura particular para Y (uma maneira de obter tal estrutura seria fixar alguns elementos iguais a zero).

¹Lema da inversa: $(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$.

Apesar do Teorema 3.1 permitir o tratamento do problema de otimização \mathcal{H}_2 através de uma descrição via LMIs num espaço convexo proporcionando uma parametrização convexa da solução de Riccati (e por conseqüência, de um subconjunto de \mathcal{K} de ganhos estabilizantes ótimos dependentes das matrizes de ponderação C e D), ainda não é possível tratar sistemas incertos. Isto deve-se à dependência explícita que o ganho de realimentação de estados K mantém com as matrizes do sistema A , B_2 e D [33].

Uma parametrização alternativa do problema \mathcal{H}_2 , em termos de LMIs, é tratada no Teorema 3.2.

TEOREMA 3.2 *Considere o seguinte problema de otimização*

$$\min_{X, Y, Z} \text{Tr} \{C'CY + D'DX\} \quad (3.38)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z' & Y \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} Y & AY + B_2Z & B_1 \\ YA' + Z'B_2' & Y & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.40)$$

$$Y > \mathbf{0} \quad (3.41)$$

com $Y = Y' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $X = X' \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$.

A solução ótima é tal que

$$\text{Tr} (C'CY + D'DX) = \min \|H\|_2^2 \quad (3.42)$$

e o ganho ótimo é dado por

$$K = ZY^{-1} \quad (3.43)$$

Prova: De (3.40) e (3.41), usando complemento de Schur [4], tem-se

$$(A + B_2ZY^{-1})Y(A + B_2ZY^{-1})' - Y + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad (3.44)$$

indicando que com $K = ZY^{-1}$, $W = Y$ e a igualdade substituída pela desigualdade, obtém-se uma equivalência com (3.22). A equivalência pode ser mostrada no sentido inverso, partindo de (3.22) com $Y = W$ e $Z = KY$.

A restrição (3.39) implica, com (3.41), $X \geq ZY^{-1}Z'$. Portanto (lembrando da hipótese de ortogonalidade $C'D = \mathbf{0}$) a função objetivo traduz-se em

$$\begin{aligned} \text{Tr} (C'CY + D'DX) &\geq \text{Tr} (C'CY + D'DZY^{-1}Z') \\ &= \text{Tr} [(C + DZY^{-1})Y(C + DZY^{-1})'] \geq \min \|H\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

A minimização do critério linear (3.38) sem nenhuma restrição adicional sobre X conduz (3.45) ao seu valor mínimo garantindo $X = ZY^{-1}Z'$. Com $Y = W$ e $Z = KY$ e $X = ZY^{-1}Z'$ factíveis para (3.38)-(3.41) a igualdade $\text{Tr} (C'CY + D'DX) = \min \|H\|_2^2$ é verificada. \square



A função objetivo no Teorema 3.2 não está na forma de LMI mas, com uma manipulação adequada, chega-se ao problema convexo abaixo, que fornece como solução o mesmo ganho ótimo \mathcal{H}_2 .

TEOREMA 3.3 *Considere o seguinte problema de otimização*

$$\min_{X, Y, Z} \text{Tr}(X) \quad (3.46)$$

sujeito a

$$Y > \mathbf{0} \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} Y & YC' + Z'D' \\ CY + DZ & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.48)$$

$$\begin{bmatrix} Y & AY + B_2Z & B_1 \\ YA' + Z'B_2' & Y & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.49)$$

com $Y = Y' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $X = X' \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$.

A solução ótima é tal que

$$\text{Tr}(X) = \min \|H\|_2^2 \quad (3.50)$$

e o ganho ótimo de realimentação de estados é dado por

$$K = ZY^{-1} \quad (3.51)$$

Prova: De (3.47) e (3.48), tem-se

$$X \geq (CY + DZ)Y^{-1}(CY + DZ)' = (C + DZY^{-1})Y(C + DZY^{-1})' \quad (3.52)$$

e portanto

$$\text{Tr}(X) \geq \text{Tr}(C + DZY^{-1})Y(C + DZY^{-1})' \quad (3.53)$$

Por outro lado (3.47) e (3.49) implicam

$$(A + B_2ZY^{-1})Y(A + B_2ZY^{-1})' - Y + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad (3.54)$$

indicando que $K = ZY^{-1}$ é um ganho estabilizante que assegura, pela minimização de (3.46) o ótimo para (3.53) e, verificando portanto, (3.50). \square

Nesta nova formulação, o problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 é visto como um problema de otimização convexa envolvendo apenas LMIs. O tratamento de sistemas incertos, com incertezas pertencentes a domínios poliedrais convexos [15] é agora possível, na medida em que a expressão atual do ganho, $K = ZY^{-1}$, não mais depende explicitamente das matrizes do sistema e todas as LMIs envolvem de maneira afim as matrizes do problema. Os resultados obtidos dos Teoremas 3.1 e 3.2 levam ao mesmo ganho obtido da solução da equação de Riccati (3.26) para sistemas discretos precisamente conhecidos, isto é,

$$K = ZY^{-1} = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA \quad (3.55)$$

Formulações equivalentes, transformando o problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 em um problema convexo, podem ser encontradas em [33], [25].

3.4 Otimização \mathcal{H}_∞

A partir da caracterização do conjunto \mathcal{K} de todos os ganhos de realimentação de estado que estabilizam o sistema, define-se o problema de otimização \mathcal{H}_∞ , apresentado nas seguintes formas equivalentes:

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H\|_\infty \quad (3.56)$$

ou

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \gamma \quad (3.57)$$

sujeito a

$$\|H\|_\infty \leq \gamma \quad (3.58)$$

Do Lema 3.1, que apresenta a relação entre a norma \mathcal{H}_∞ de uma matriz de transferência e a existência de uma matriz definida positiva, pode-se formular o mesmo problema como

$$\min_{K \in \mathcal{K}, P} \gamma \quad (3.59)$$

sujeito a

$$P = P' > \mathbf{0} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} (A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK) \\ + \gamma^{-2}PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2}B_1'PB_1)^{-1}B_1'P \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Deve-se notar que esta formulação do problema (3.59)-(3.61) não é convexa nas variáveis de interesse γ , P e K .

Um problema modificado, onde $\gamma > 0$ é dado e um critério baseado na norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência (dito custo auxiliar) é definido, leva ao chamado controlador central \mathcal{H}_∞ , em que a existência de uma matriz $P = P' > \mathbf{0}$ solução de uma equação de Riccati e o ganho K verificam o Lema 3.1. O custo auxiliar é dado pela função $Tr(B_1'PB_1)$ e o problema de otimização é colocado como se segue:

$$\min_{K, P} Tr(B_1'PB_1) \quad (3.62)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} (A + B_2K)'P(A + B_2K) - P \\ + \gamma^{-2}PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2}B_1'PB_1)^{-1}B_1'P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Chamando de $W = W'$ a variável dual associada à restrição (3.63), obtém-se o lagrangeano $\mathcal{L}(P, W, K)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P, W, K) = Tr \left\{ B_1'PB_1 + W[(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P \right. \\ \left. + \gamma^{-2}PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2}B_1'PB_1)^{-1}B_1'P + (C + DK)'(C + DK)] \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

As condições de estacionariedade do lagrangeano, que fornecem as condições necessárias de otimalidade do problema do controlador central \mathcal{H}_∞ , são (3.65)-(3.67):

$$(A + B_2K)W(A + B_2K)' - W + B_1B_1'$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma^{-2} B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' P B_1)^{-1} B_1' P W + \gamma^{-2} W P B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' P B_1)^{-1} B_1' \\
& - \gamma^{-4} B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' P B_1)^{-1} B_1' P W P B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' P B_1)^{-1} B_1' = \mathbf{0} \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A + B_2 K)' P (A + B_2 K) - P + \gamma^{-2} P B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' P B_1)^{-1} B_1' P \\
& + (C + D K)' (C + D K) = \mathbf{0} \quad (3.66)
\end{aligned}$$

$$2 [D' D K + B_2' P B_2 K + B_2' P A] W = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

Supondo que W é definida positiva, de (3.67) tem-se:

$$K = -(D' D + B_2' P B_2)^{-1} B_2' P A \quad (3.68)$$

Substituindo em (3.68) em (3.66) e lembrando da hipótese de ortogonalidade obtém-se:

$$\begin{aligned}
& A' P A - P - A' P B_2 (D' D + B_2' P B_2)^{-1} B_2' P A \\
& + C' C + \gamma^{-2} P B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' P B_1)^{-1} B_1' P = \mathbf{0} \quad (3.69)
\end{aligned}$$

que é a equação de Riccati associada ao problema de controle \mathcal{H}_∞ [46]. Da matriz solução, P , de (3.69), tem-se o ganho estabilizante de realimentação de estados K (para o controlador central \mathcal{H}_∞), dado por (3.68) que pertence ao conjunto \mathcal{K}_γ e o custo auxiliar que é um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 :

$$\text{Tr} (B_1' P B_1) \geq \|H\|_2^2 \quad (3.70)$$

Deve-se notar que nesta abordagem, com o controlador central obtido a partir da solução de uma equação de Riccati de maneira similar à do controle ótimo \mathcal{H}_2 , e a partir da definição de uma função de custo auxiliar, a parametrização resultante não é convexa (vide em particular a equação (3.65)).

Portanto, não se faz possível nem o tratamento direto do problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ (minimização de γ) nem o tratamento de sistemas incertos (K depende explicitamente das matrizes do sistema). Entretanto, uma substituição da igualdade por uma desigualdade em (3.63) (ou equivalentemente, em (3.69)), sem perda de generalidade, e uma manipulação adequada das desigualdades obtidas leva a uma parametrização convexa em termos de LMIs.

TEOREMA 3.4 *Considere o seguinte problema de otimização, com $\gamma > 0$ dado:*

$$\min_{X, Y} \text{Tr} (X) \quad (3.71)$$

sujeito a

$$Y > \mathbf{0} \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & Y \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.73)$$

$$\begin{bmatrix} Y & \gamma^{-1} B_1 & Y C' & Y A' \\ \gamma^{-1} B_1' & \mathbf{I} + \gamma^{-2} X & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C Y & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ A Y & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Y + B_2 (D' D)^{-1} B_2' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.74)$$

com $Y = Y' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $X = X' \in \mathfrak{R}^{l \times l}$. Se a solução ótima é tal que

$$X = B_1' Y^{-1} B_1 \quad (3.75)$$

então

$$P = Y^{-1}, \quad \text{Tr}(X) = \text{Tr}(B_1' Y^{-1} B_1) \geq \|H\|_2^2 \quad (3.76)$$

O ganho do controlador central \mathcal{H}_∞ dado por

$$K = -(D'D + B_2' Y^{-1} B_2)^{-1} B_2' Y^{-1} A \quad (3.77)$$

assegura $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

Prova: De (3.72) e (3.74), levando em conta (3.75) e usando complemento de Schur, tem-se

$$Y - \gamma^{-2} B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' Y^{-1} B_1)^{-1} B_1' - Y C' C Y - Y A' [Y + B_2 (D'D)^{-1} B_2']^{-1} A Y \geq \mathbf{0} \quad (3.78)$$

Multiplicando (3.78) à esquerda e à direita por Y^{-1} obtém-se

$$Y^{-1} - \gamma^{-2} Y^{-1} B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' Y^{-1} B_1)^{-1} B_1' Y^{-1} - C' C - A' [Y + B_2 (D'D)^{-1} B_2']^{-1} A \geq \mathbf{0} \quad (3.79)$$

Aplicando o Lema da Inversa (veja a nota ao pé da página 16) em (3.79) verifica-se que

$$\begin{aligned} A' Y^{-1} A - Y^{-1} - A' Y^{-1} B_2 (D'D + B_2' Y^{-1} B_2)^{-1} B_2' Y^{-1} A \\ + \gamma^{-2} Y^{-1} B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' Y^{-1} B_1)^{-1} B_1' Y^{-1} + C' C \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.80)$$

é a equação de Riccati (3.69) com $P = Y^{-1}$ e a igualdade trocada por uma desigualdade. A equivalência pode ser mostrada no sentido inverso, ou seja, a partir de (3.80), (3.77) e (3.75), levando para (3.63). Com o ganho K dado por (3.77), a equação (3.80) pode ser re-escrita como (3.61), e com $X = B_1' Y^{-1} B_1$ tem-se

$$\text{Tr}(B_1' Y^{-1} B_1) \geq \|H\|_2^2 \quad (3.81)$$

□

A minimização em (3.71) envolve X que também aparece nas restrições (3.73) e (3.74) e, assim, a igualdade $X = B_1' Y^{-1} B_1$ não é garantida. Portanto, o Teorema 3.4 fornece apenas uma condição necessária para a obtenção, de maneira convexa, de uma solução P da equação de Riccati (3.69), estando a suficiência dependente da igualdade, testada a posteriori, na restrição (3.73).

Condições suficientes são obtidas na literatura [18], a partir de aproximações. Uma condição suficiente para a existência de $Y = P^{-1}$ é obtida da aproximação

$$\mathbf{I} \cong \mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' Y^{-1} B_1 \quad (3.82)$$

Assim, o termo $\gamma^{-2} X$ no bloco (2,2) de (3.74) é desprezado e não se faz necessária a verificação da igualdade em (3.73) pois, se existe $Y > \mathbf{0}$ que satisfaz (3.74) com esta aproximação, então o mesmo Y também verifica (3.74) com o termo $\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' Y^{-1} B_1$.

O caráter de necessidade do Teorema 3.4 e a dependência do ganho de realimentação das matrizes do sistema impedem, como no caso da parametrização do controlador central \mathcal{H}_∞ a partir da equação de Riccati associada, o tratamento do problema ótimo \mathcal{H}_∞ e de sistemas incertos.

Condições necessárias e suficientes para o controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ são apresentadas em [25] em termos de expressões convexas, mas envolvendo termos não-lineares.

Uma solução em termos de LMIs utilizando um espaço paramétrico aumentado é apresentada em [49]. O teorema a seguir apresenta uma solução alternativa em termos de LMIs.

TEOREMA 3.5 *Considere o seguinte problema de otimização*

$$\min_{X, Y, Z} \text{Tr} \{C'CY + D'DX\} \quad (3.83)$$

sujeito a

$$Y > \mathbf{0} \quad (3.84)$$

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z' & Y \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.85)$$

$$\begin{bmatrix} Y & B_1 & T & J & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ T' & \mathbf{0} & Y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ J' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} & H \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & H' & Y \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.86)$$

com $J = AYC' + B_2ZC' + AZ'D' + B_2XD'$, $T = AY + B_2Z$, $H = CY + DZ$ e, ainda $Y = Y' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $X = X' \in \mathfrak{R}^{m \times m}$. Se a solução ótima é tal que

$$X = ZY^{-1}Z' \quad (3.87)$$

então

$$\text{Tr} \{C'CY + D'DX\} \geq \|H\|_2^2 \quad (3.88)$$

O ganho ótimo dado por

$$K = ZY^{-1} \quad (3.89)$$

garante que $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

Prova: Supondo (3.87) satisfeita e usando a hipótese de ortogonalidade e complemento de Schur, as restrições (3.84) e (3.86) levam a uma equivalência com

$$\begin{aligned} & Y - B_1B_1' - (AY + B_2Z)Y^{-1}(AY + B_2Z)' - (AY + B_2Z)Y^{-1}(CY + DZ)' \\ & \times [\gamma^2I - (CY + DZ)Y^{-1}(CY + DZ)]^{-1}(CY + DZ)Y^{-1}(AY + B_2Z)' \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Definindo $K = ZY^{-1}$ e usando A_f e C_f , (3.90) pode ser re-escrita como

$$A_fYA_f' - Y + A_fYC_f'(\gamma^2I - C_fYC_f')^{-1}C_fYA_f' + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad (3.91)$$

Multiplicando por γ^{-2} e re-escrevendo, tem-se

$$A_f \left[\gamma^{-2}Y + \gamma^{-2}YC'_f(\gamma^2I - C_fYC'_f)^{-1}C_fY \right] A'_f - \gamma^{-2}Y + \gamma^{-2}B_1B'_1 \leq \mathbf{0} \quad (3.92)$$

Aplicando o lema de inversa, obtém-se

$$A_f \left[\gamma^{-2}(Y^{-1} - \gamma^{-2}C'_fC_f)^{-1} \right] A'_f - \gamma^{-2}Y + \gamma^{-2}B_1B'_1 \leq \mathbf{0} \quad (3.93)$$

Definindo

$$V = \gamma^{-2}(Y^{-1} - \gamma^{-2}C'_fC_f)^{-1} \implies Y = \gamma^2(V^{-1} + C'_fC_f)^{-1} \quad (3.94)$$

e substituindo em (3.93), obtém-se

$$A_fVA'_f - (V^{-1} + C'_fC_f)^{-1} + \gamma^{-2}B_1B'_1 \leq \mathbf{0} \quad (3.95)$$

Aplicando novamente o lema de inversão de matrizes, chega-se a

$$A_fVA'_f - V + VC'_f(\mathbf{I} + C_fVC'_f)^{-1}C_fV + \gamma^{-2}B_1B'_1 = \mathbf{0} \quad (3.96)$$

que assegura $\|H\|_\infty \leq \gamma$ (vide [42]).

Mais ainda, partindo da premissa que se (3.91) é satisfeita, então $Y \geq L_c$ e portanto vale (3.54), a relação (3.88) fica provada. \square

A caracterização do conjunto \mathcal{K}_γ pode ser feita de maneira convexa definindo-se uma parametrização adequada. Antes disso, alguns resultados são necessários [49], [25], [46].

LEMA 3.2 $\|H\|_\infty \leq \gamma \iff \exists P = P' > \mathbf{0}$

$$A_fPA'_f - P + PC'_f(\mathbf{I} + C_fPC'_f)^{-1}C_fP + \gamma^{-2}B_1B'_1 = \mathbf{0} \quad (3.97)$$

LEMA 3.3 $\|H\|_\infty \leq \gamma \iff \exists Y = Y' > \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} A_f \\ C_f \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} A'_f & C'_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1B'_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

admitir $Y = Y' > \mathbf{0}$ como solução.

A relação entre os resultados dos lemas 3.2 e 3.3 é dada por [49]:

LEMA 3.4 Se $\exists P = P' > \mathbf{0}$ satisfazendo o lema 3.2, então:

a) A matriz simétrica definida positiva \hat{Y} dada por

$$\hat{Y} = \gamma^2(P^{-1} + C'_fC_f)^{-1} \quad (3.99)$$

é tal que

$$A_f\hat{Y}A'_f - \hat{Y} + A_f\hat{Y}C'_f(\gamma^2\mathbf{I} - C_f\hat{Y}C'_f)^{-1}C_f\hat{Y}A'_f + B_1B'_1 = \mathbf{0} \quad (3.100)$$

b) Qualquer $Y = Y' > \mathbf{0}$ satisfazendo o lema 3.3 é tal que $\hat{Y} \leq Y$.

Prova: Para mostrar o item a), multiplica-se (3.91) por γ^{-2} obtendo-se

$$A_f[\gamma^{-2}\hat{Y} + \gamma^{-2}\hat{Y}C_f'(\gamma^2\mathbf{I} - C_f\hat{Y}C_f')^{-1}C_f\hat{Y}]A_f' - \gamma^{-2}\hat{Y} + \gamma^{-2}B_1B_1' = \mathbf{0} \quad (3.101)$$

Usando o lema de inversão de matrizes, tem-se

$$A_f[\gamma^{-2}(\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}C_f'C_f)^{-1}]A_f' - \gamma^{-2}\hat{Y} + \gamma^{-2}B_1B_1' = \mathbf{0} \quad (3.102)$$

Denotando

$$P = \gamma^{-2}(\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2}C_f'C_f)^{-1} \quad (3.103)$$

obtem-se \hat{Y} dado por (3.99) que aplicado a (3.102) leva ao Lema 3.2. O item b) decorre de propriedades da equação matricial discreta de Riccati [41]. \square

Os resultados dos lemas anteriores não envolvem de maneira convexa as variáveis de interesse (o ganho K aparece embutido nas matrizes de malha fechada A_f e C_f). Definindo-se um novo espaço paramétrico, obtém-se uma caracterização convexa do conjunto \mathcal{K}_γ .

TEOREMA 3.6 *Dado $\gamma > 0$, existe $K \in \mathcal{K}_\gamma$ se e somente se existir $W = W' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $X = X' \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tais que*

$$W > \mathbf{0} \quad (3.104)$$

$$\begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.106)$$

e o ganho é dado por

$$K = ZW^{-1} \quad (3.107)$$

Prova:

Primeiramente mostra-se a necessidade. Pelo Lema 3.3, dado $\gamma > 0$, existe $K \in \mathcal{K}_\gamma$ se e somente se existir $Y = Y' > \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{bmatrix} (A + B_2K) \\ (C + DK) \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} (A + B_2K)' & (C + DK)' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Reescrevendo, tem-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & YK' \\ KY & KYK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & C' \\ B_2' & D' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & YK' \\ KY & KYK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Definindo as matrizes $W = Y$, $X = KYK'$ e $Z = KY$, (3.104)-(3.106) são verificadas.

Agora mostra-se a suficiência. De (3.104) e (3.106), obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A + B_2 ZW^{-1} \\ C + DZW^{-1} \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} (A + B_2 ZW^{-1})' & (C + DZW^{-1})' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ D \end{bmatrix} [X - ZW^{-1}Z'] \begin{bmatrix} B_2' & D' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.110)$$

A restrição (3.105) implica $X \geq ZW^{-1}Z'$. Assim, definindo $K = ZW^{-1}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_f \\ C_f \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} A_f' & C_f' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

que, pelo Lema 3.3, assegura $\|H\|_\infty \leq \gamma$. Caracterizado o conjunto \mathcal{K}_γ , de maneira convexa, o ganho ótimo é então obtido de um problema de otimização. \square

TEOREMA 3.7 *Considere o seguinte problema de otimização*

$$\min_{\delta, X, W, Z} \delta \quad (3.112)$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \quad (3.113)$$

$$\begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.115)$$

com $W = W' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $X = X' \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$.

A solução ótima do problema fornece

$$\sqrt{\delta} = \min \|H\|_\infty \quad (3.116)$$

e o ganho ótimo \mathcal{H}_∞ , de realimentação de estados, é dado por

$$K = ZW^{-1} \quad (3.117)$$

Prova: O Teorema 3.6 garante a existência de um conjunto \mathcal{K}_γ dadas W , X e Z que satisfazem (3.104)-(3.105). O mesmo, portanto, é válido para (3.114)-(3.115) com δ no lugar de γ^2 . A minimização de δ em (3.112) sobre um espaço convexo se encarrega de conduzir (3.116) ao ótimo global. \square

No Teorema 3.5, a função objetivo a ser minimizada não aparece expressa em termos de LMIs. Agora, a partir da caracterização convexa do conjunto de ganhos \mathcal{K}_γ , uma nova parametrização é definida para o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, com custo auxiliar dado por

$$\text{Tr}((C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})') \quad (3.118)$$

resultando no seguinte problema de otimização:

TEOREMA 3.8 *Considere o seguinte problema de otimização, com $\gamma > 0$ dado*

$$\min_{V, W, X, Z} \text{Tr}(V) \quad (3.119)$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \quad (3.120)$$

$$\begin{bmatrix} W & WC' + Z'D' \\ CW + DZ & V \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.121)$$

$$\begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.123)$$

com $V = V' \in \mathfrak{R}^{r \times r}$, $W = W' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $X = X' \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$.

A solução ótima do problema fornece

$$\text{Tr}(V) = \text{Tr}(C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})' \geq \|H\|_2^2 \quad (3.124)$$

O ganho ótimo de realimentação dado por

$$K = ZW^{-1} \quad (3.125)$$

garante $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

Prova: Dadas V , W , X e Z que satisfazem (3.121)-(3.123), o Teorema 3.6 garante a existência de um ganho de realimentação de estados dado por (3.125) que pertence ao conjunto \mathcal{K}_γ . A relação (3.124) é provada a partir de (3.121), usando complemento de Schur, isto é

$$V \geq (CW + DZ)W^{-1}(CW + DZ)' = (C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})' \quad (3.126)$$

Da descrição do sistema em malha fechada, verifica-se que $K = ZW^{-1}$, e

$$\text{Tr}(V) \geq \text{Tr}(C_f W C_f') \geq \|H\|_2^2 \quad (3.127)$$

A minimização do objetivo linear (3.119) sujeito a restrições convexas e descritas em termos de LMIs garante, dadas as condições de existência da solução, o ótimo global para o limitante superior da norma \mathcal{H}_2 dado pela função custo auxiliar. \square

Como as desigualdades apresentadas pelos Teoremas 3.6, 3.7 e 3.8 são afins nas matrizes A , B_1 , B_2 , C e D , e o ganho ótimo K não depende explicitamente dessas matrizes, os resultados podem ser estendidos para sistemas incertos. Em particular, o Teorema 3.7 permite tratar de forma direta o problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ . Os problemas de otimização associados são convexas, tendo portanto garantida a convergência para a solução ótima global. Restrições adicionais poderiam ainda ser incorporadas, como por exemplo, a descentralização do ganho, impondo-se Z e W bloco diagonais.

3.5 Conclusão

Neste capítulo, a partir da definição de critérios de desempenho baseados na norma da matriz de transferência (normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞), problemas de controle ótimo por realimentação de estado para sistemas lineares discretos no tempo foram abordados.

A obtenção do controlador que garante a estabilidade do sistema em malha fechada foi feita: i) através da equação de Riccati; ii) a partir de LMIs que parametrizam a mesma solução de Riccati; iii) a partir de LMIs descritas em outro espaço paramétrico adequado, onde os ganhos estabilizantes podem ser obtidos a partir de um conjunto convexo, possibilitando assim a extensão dos resultados para sistemas incertos (os chamados problemas de estabilização quadrática com custo garantido \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ [15], [34]).

Nos itens i) e ii) o ganho de realimentação depende explicitamente das matrizes do sistema, o que não ocorre no item iii). Dado esse fato, a parametrização obtida em iii) permite o tratamento de incertezas tendo como resultado controladores do tipo custo garantido.

Na abordagem do controlador central \mathcal{H}_∞ , as condições de otimalidade obtidas para ii), expressas em termos de LMIs, são apenas necessárias, exigindo um teste adicional para validar a suficiência. No novo espaço paramétrico descrito em iii) as condições obtidas são necessárias e suficientes.

As soluções propostas são obtidas a partir de problemas de otimização convexas, descritos em termos de desigualdades matriciais lineares, que podem ser resolvidos numericamente de maneira eficaz, explorando as potencialidades de inúmeros pacotes computacionais especializados hoje existentes [12], [8], [20].

Na formulação dos problemas no novo espaço paramétrico em iii), além da extensão imediata para o tratamento de sistemas com incertezas paramétricas, restrições adicionais poderiam ainda ser incorporadas, como por exemplo, a descentralização do ganho, impondo-se Z e Y bloco diagonais.

Capítulo 4

Alocação de Pólos numa Coroa Circular

4.1 Introdução

As raízes do polinômio característico de uma equação que representa o modelo matemático de um sistema, ou simplesmente pólos do sistema, determinam os comportamentos qualitativo e quantitativo do mesmo. Assim, por exemplo, a localização dos pólos de um sistema em determinadas regiões do plano complexo pode caracterizar a estabilidade ou instabilidade, de acordo com o tipo de sistema (contínuo ou discreto). Outras características como *overshoot*, tempo de estabelecimento, tempo de subida, erros em regime, etc., podem ser também analisadas.

A posição dos pólos de um sistema no plano complexo pode ser modificada através de um controle por realimentação, de forma precisa, isto é, indicando a localização específica, ou arbitrária, especificando uma região de alocação no plano complexo. Portanto, conhecidas as especificações de desempenho que um determinado sistema deva atender, um controlador pode ser obtido, modificando a posição inicial dos pólos.

Em técnicas de alocação de pólos através do lugar das raízes, a posição dos pólos é alterada mediante um ganho de realimentação constante. Em conjunto com o critério de *Routh-Hurwitz*, as regiões de estabilidade em função do ganho podem ser obtidas. Casos em que mais de um ganho é ajustado, como em controladores PID e seus derivados, são tratados na literatura. O controlador final, que melhor atende as especificações de desempenho, é obtido tanto por métodos de tentativa e erro bem como por técnicas de *self-tuning*.

O comportamento em regime de um sistema devido a entradas senoidais é também determinado pelas raízes da equação característica e pode ser descrito através de um diagrama polar, de Bode ou de Nichols.

Métodos de controle e compensação usando esses diagramas (compensadores *lead*, *lag*) são também conhecidos [9], [30], [11], permitindo obter através da introdução de pólos e zeros e conseqüente alteração do lugar das raízes original, sistemas em malha fechada que atendam as especificações desejadas (resposta transitória rápida, tempo de acomodação, rejeição de ruídos, erro em regime baixo, etc.).

No espaço de estados a análise do comportamento dinâmico do sistema é feita a partir de duas características: controlabilidade e observabilidade.

Se um sistema dinâmico, linear e invariante no tempo é controlável (sua matriz de controlabilidade apresenta *rank* completo de linhas), os autovalores do sistema em malha fechada podem ser arbitrariamente alocados mediante realimentação de estados, pressupondo que estes estejam disponíveis. Quando não é o caso, um estimador de estados assintótico pode ser obtido, fornecendo a estimativa do estado necessária para o controlador. Para tal é necessário que o sistema seja também observável. Estimadores assintóticos de ordem reduzida podem ser também obtidos levando a controladores baseados em observadores de estado.

No caso em que o sistema não é controlável e/ou observável, transformações de similaridade podem ser aplicadas resultando nas formas canônicas controlável, observável e decomposição canônica de Kalman sendo a alocação, então, possível apenas para as partições controlável e observável evidenciadas.

Nos métodos acima descritos, ditos clássicos, a obtenção do controlador que aloca os pólos com vista a garantir um determinado desempenho é feita interativamente, por tentativa e erro e o sucesso pode depender da experiência do projetista.

Por outro lado, a alocação de pólos via otimização convexa, leva a controladores ótimos, segundo um determinado critério que é minimizado globalmente [3].

O problema de controle com restrições adicionais de alocação de pólos em malha fechada, de forma que especificações de atenuação mínima de distúrbios, decaimento mínimo da resposta temporal, mínimo fator de amortecimento e outras características da resposta transiente do sistema em malha fechada sejam atendidas, é discutido em [7] (e demais referências internas) via realimentação de estados ou de saída. O problema inicial é convertido em um problema de otimização convexa tendo como função objetivo a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência em malha fechada sujeita a inequações de Lyapunov modificadas que caracterizam entre outros aspectos uma classe geral de regiões convexas do plano complexo onde se deseja alocar os pólos do sistema em malha fechada.

Neste capítulo pretende-se discutir o problema da alocação de pólos de um sistema discreto em malha fechada, via realimentação de estados, em uma coroa circular, utilizando análise convexa. Este problema é de particular interesse na área de telecomunicações em aplicações envolvendo realimentação de estados em codificadores convolucionais no estudo de codificação e criptografia [39].

4.2 Definições e preliminares

Os sistemas a serem considerados são lineares, discretos, invariantes no tempo e descritos por equações de estado a diferenças

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{cases} \quad (4.1)$$

nas quais $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e $y_k \in \mathbb{R}^r$ é o vetor saídas medidas. As matrizes A , B e C são supostas conhecidas e com dimensões apropriadas. Neste trabalho considera-se $C = I$, ou seja, apenas a realimentação de estados.

A lei de controle a ser utilizada é obtida a partir do estado x_k mediante um ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a determinar

$$u_k = Kx_k \quad (4.2)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho de realimentação de estados que garante a estabilidade do sistema em malha fechada. A matriz de malha fechada é dada por

$$A_f \triangleq A + BK \quad (4.3)$$

4.3 Métodos clássicos de alocação de pólos

Os autovalores do sistema em malha fechada dado por (4.3) podem ser arbitrariamente alocados sempre que o par (A, B) for controlável. O ganho de realimentação de estados obtido estabelece a posição dos pólos no plano complexo conferindo ao sistema em malha fechada propriedades de estabilidade, robustez, rastreamento assintótico, rejeição de distúrbios e desacoplamento.

Quando a posição dos pólos em malha fechada é previamente estabelecida, o ganho de realimentação de estados é obtido em função dessa alocação desejada.

No caso de sistemas SIMO (*single-input, multiple-output*) controláveis, um método de obtenção do ganho de realimentação de estados K que aloca os pólos do sistema em malha fechada numa posição desejada do plano complexo é obtida a partir da fórmula de Ackerman. O algoritmo é descrito em [6] e uma implementação é feita na rotina *acker* do MATLAB [27]. Outro método possível pode ser derivado do cálculo de $\det(sI + A + BK)$ e da comparação com os coeficientes do polinômio característico do sistema em malha fechada dos autovalores desejados.

Para sistemas MIMO (*multiple-input, multiple-output*) controláveis, o cálculo do ganho de realimentação de estados pode ser obtido de várias maneiras. Uma possibilidade seria reduzir o problema multivariável num problema monovariável e usar o método para sistemas SIMO [6]. A partir da transformação de similaridade do par (A, B) que evidencia a forma canônica controlável multivariável e da comparação com o polinômio característico do sistema em malha fechada com os autovalores desejados, o ganho de realimentação de estados pode ser também obtido.

Outro método para o cálculo do ganho de realimentação de estados baseado na solução de uma equação de Lyapunov é descrito em [6] e uma implementação é feita na rotina *place* do MATLAB.

Em problemas do tipo *LQR/LQG*, a posição dos pólos é determinada pelo ganho de realimentação de estados obtido de tal maneira que uma função custo que pondera estados, controle e saídas seja minimizada ou uma estimação ótima de estados seja alcançada para um conjunto de matrizes de covariância de ruídos do processo e do sensor. Exemplos de rotinas usadas no cálculo do ganho de realimentação de estados em problemas do tipo *LQR/LQG*, tanto para sistemas contínuos como para sistemas discretos, são descritos no MATLAB.

4.4 Alocação em coroa circular via análise convexa

A estabilidade de um sistema discreto é assegurada se o raio espectral da matriz de sistema A é menor que um, ou seja, $\rho(A) < 1$. As propriedades de controlabilidade, observabilidade e estabilidade são descritas nos seguintes teoremas (4.1-4.4) e no Lema 4.1, amplamente tratados na literatura [6], [24], [48] e, por isso, aqui apresentados sem prova:

TEOREMA 4.1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) O par (A, B) é controlável.
- (ii) A matriz de controlabilidade

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

tem rank completo de linhas.

- (iii) A matriz $[A - \lambda I \ B]$ tem rank completo de linhas para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (iv) Seja λ um autovalor de A e x o autovetor correspondente, isto é, $x^*A = x^*\lambda$, então $x^*B \neq 0$.
- (v) Os autovalores de $A + BK$ podem ser alocados arbitrariamente, mediante um ganho adequado K , desde que os autovalores complexos apareçam aos pares e conjugados.

TEOREMA 4.2 As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O par (A, B) é estabilizável.
- (ii) A matriz $[A - \lambda I \ B]$ tem rank completo de linhas para todo $|\lambda| \geq 1$.
- (iii) Para todos autovalores λ e seus respectivos autovetores x tais que $x^*A = x^*\lambda$ e $|\lambda| \geq 1$, $x^*B \neq 0$.
- (iv) Existe uma matriz K tal que $A + BK$ é estável.

TEOREMA 4.3 As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O par (C, A) é observável.
- (ii) A matriz de observabilidade

$$V = \begin{bmatrix} C' & (CA)' & (CA^2)' & \dots & (CA^{n-1})' \end{bmatrix}' \quad (4.5)$$

tem rank completo de colunas.

- (iii) A matriz $[A' - \lambda I \ C']'$ tem rank completo de colunas para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (iv) Seja λ um autovalor de A e x o autovetor correspondente, isto é, $Ax = \lambda x$, então $Cx \neq 0$.
- (v) Os autovalores de $A + LC$ podem ser alocados arbitrariamente, mediante um ganho adequado L , desde que os autovalores complexos apareçam aos pares e conjugados.
- (vi) O par (A^*, C^*) é controlável.

TEOREMA 4.4 As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O par (C, A) é detectável.
- (ii) A matriz $[A' - \lambda I \ C']'$ tem rank completo de colunas para todo $|\lambda| \geq 1$.

- (iii) Para todos autovalores λ e seus respectivos autovetores x tais que $Ax = \lambda x$, $Cx \neq 0$.
- (iv) Existe uma matriz L tal que $A + LC$ é estável.
- (v) O par (A^*, C^*) é estabilizável.

LEMA 4.1 Sejam Q uma matriz simétrica e a seguinte equação de Lyapunov

$$APA^* - P + Q = 0 \quad (4.6)$$

Se P é solução de (4.6), então

- (a) $|\lambda_i(A)| \leq 1$ se $P > 0$ e $Q \geq 0$
- (b) A é estável se $P \geq 0$, $Q \geq 0$ e o par (Q, A) for detectável.

A figura 4.1 mostra a região, definida por σ (centro dos dois círculos) e pelos raios interno (ρ_{in}) e raio externo (ρ_{ex}), na qual serão alocados os pólos do sistema em malha fechada no problema a ser discutido nesta seção.

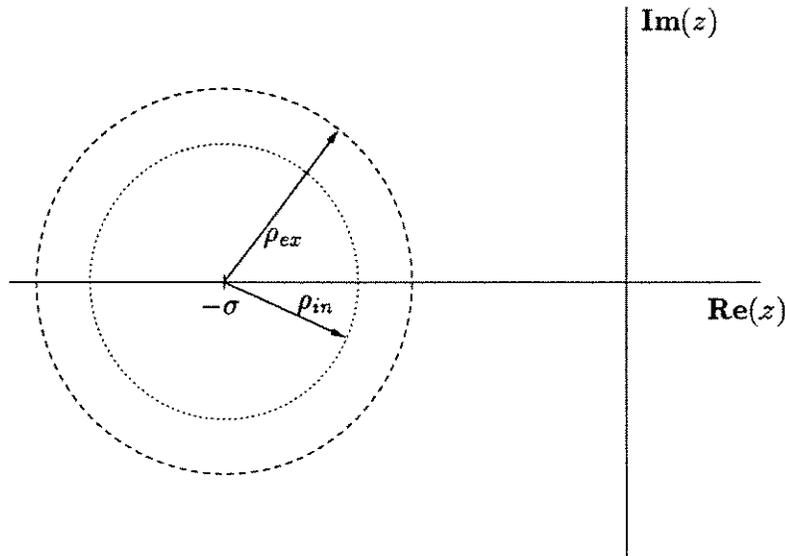


Figura 4.1: Região de alocação desejada

A condição necessária para que um sistema em malha fechada tenha os seus pólos dentro do círculo unitário [38], pode ser obtida a partir do Lema 4.1.

$$|\lambda_i(A + BK)| < 1, \quad i = 1 \dots n \iff (A + BK)P(A + BK)' - P < 0, \quad P > 0 \quad (4.7)$$

De igual forma, para que os autovalores tenham módulo menor que um valor positivo ρ , que configura um determinado raio de um círculo, a seguinte condição deve ser verificada:

$$\begin{aligned} |\lambda_i(A + BK)| < \rho &\iff |\lambda_i(A + BK)| / \rho < 1 \\ &\iff (A + BK)P(A + BK)' - \rho^2 P < 0, \quad P > 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Um círculo de raio ρ centrado em $-\sigma$ teria a seguinte condição

$$\begin{aligned} |\lambda_i(A + \sigma\mathbf{I} + BK)| < \rho &\Leftrightarrow |\lambda_i(A + \sigma\mathbf{I} + BK)| / \rho < 1 \\ \Leftrightarrow (A + \sigma\mathbf{I} + BK)P(A + \sigma\mathbf{I} + BK)' - \rho^2 P < \mathbf{0}, P > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

A estabilidade assintótica do sistema em malha fechada pode ser verificada através de uma função de Lyapunov [6] adequada, definida como:

$$v(x_k) = x_k' P x_k, P > \mathbf{0} \quad (4.10)$$

A partir de (4.10) e lembrando que para o sistema em malha fechada

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k$$

tem-se

$$\begin{aligned} v(x_{k+1}) - v(x_k) &= x_{k+1}' P x_{k+1} - x_k' P x_k \\ &= x_k' (A + BK)' P (A + BK) x_k - x_k' P x_k \\ &= x_k' [(A + BK)' P (A + BK) - P] x_k \end{aligned} \quad (4.11)$$

Verifica-se portanto que a condição para que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável, isto é

$$v(x_k) > 0, v(x_{k+1}) - v(x_k) < 0 \quad (4.12)$$

é dada por

$$(A + BK)' P (A + BK) - P < \mathbf{0}, P > \mathbf{0} \quad (4.13)$$

resultando em

$$|\lambda_i(A + BK)| < 1, i = 1 \dots n$$

A condição colocada em (4.13) é equivalente (por complemento de Schur [4]) a

$$\begin{bmatrix} P & P(A + BK) \\ (A + BK)' P & P \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.14)$$

Multiplicando à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & (A + BK)P^{-1} \\ P^{-1}(A + BK)' & P^{-1} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.15)$$

Definindo $W = P^{-1}$ reescreve-se (4.15) como

$$\begin{bmatrix} W & (A + BK)W \\ W(A + BK)' & W \end{bmatrix} > \mathbf{0}, W > \mathbf{0} \quad (4.16)$$

que é equivalente a

$$(A + BK)W(A + BK)' - W < \mathbf{0}, W > \mathbf{0} \quad (4.17)$$

verificando a condição obtida a partir do Lema 4.1, em (4.7).

O lema a seguir apresenta as condições para que os pólos do sistema em malha fechada estejam numa coroa circular definida por dois raios, interno e externo, designados ρ_{in} e ρ_{ex} respectivamente. Definindo as matrizes

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+q) \times (n+q)}, \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+q) \times n} \quad (4.18)$$

e usando uma descrição aumentada do sistema em malha fechada, tem-se:

LEMA 4.2 *O sistema em malha fechada apresenta pólos numa coroa circular definida pelos raios ρ_{in} e ρ_{ex} , isto é*

$$\rho_{in} < |\lambda_i(A + BK)| < \rho_{ex}, \quad i = 1 \dots n \quad (4.19)$$

se existir $W \geq \mathbf{0}$, particionada na forma

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

tal que

$$G' [FWF' - \rho_{ex}^2 W] G < \mathbf{0} \quad (4.21)$$

e

$$G' [-FWF' + \rho_{in}^2 W] G < \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Prova: Da inequação (4.21), usando as partições de W e F obtém-se

$$G' \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \rho_{ex}^2 \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \right\} G < \mathbf{0} \quad (4.23)$$

que pode ser re-escrita como

$$G' \begin{bmatrix} A(W_1 A' + W_2 B') + B(W_2' A' + W_3 B') - \rho_{ex}^2 W_1 & -\rho_{ex}^2 W_2 \\ -\rho_{ex}^2 W_2' & -\rho_{ex}^2 W_3 \end{bmatrix} G < \mathbf{0} \quad (4.24)$$

ou ainda

$$AW_1 A' + BW_2' A' + AW_2 B' + BW_3 B' - \rho_{ex}^2 W_1 < \mathbf{0} \quad (4.25)$$

Como $W \geq \mathbf{0} \implies W_3 \geq W_2' W_1^{-1} W_2$ pode-se substituir W_3 por $W_2' W_1^{-1} W_2$ conservando a restrição (4.25) sem alterar o sentido da desigualdade acima. Assim, tem-se então

$$AW_1 A' + BW_2' W_1^{-1} W_1 A' + AW_1 W_1^{-1} W_2 B' BW_2' W_1^{-1} W_1 W_1^{-1} W_2 B' - \rho_{ex}^2 W_1 < \mathbf{0} \quad (4.26)$$

Definindo o ganho de realimentação como sendo $K = W_2' W_1^{-1}$ e rearranjando os termos, obtém-se

$$(A + BK)W_1(A + BK)' - \rho_{ex}^2 W_1 < \mathbf{0} \iff |\lambda_i(A + BK)| < \rho_{ex}, \quad i = 1 \dots n \quad (4.27)$$

A partir da equação (4.22), seguindo passos similares, chega-se à expressão

$$- [AW_1A' + BW_2'A' + AW_2B' + BW_3B'] + \rho_{in}^2 W_1 < \mathbf{0} \quad (4.28)$$

Levando em conta que $W \geq \mathbf{0} \implies W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2$ e usando a definição de ganho considerada acima, pode-se reescrever (4.28) como

$$-(A + BK)W_1(A + BK)' + \rho_{in}^2 W_1 < \mathbf{0} \iff |\lambda_i(A + BK)| > \rho_{in}, \quad i = 1 \dots n \quad (4.29)$$

A descrição do problema é convexa na variável de interesse W e a igualdade $W_3 = W_2'W_1^{-1}W_2$ é garantida pela utilização do critério de otimização $\min Tr(W)$. O ganho ótimo de realimentação de estados, segundo a função objetivo minimizada, que garante a localização dos pólos na coroa circular definida é dado por

$$K = W_2'W_1^{-1} \quad (4.30)$$

□

Assim, o problema de alocação de pólos de um sistema em malha fechada pode ser formulado como um problema de otimização em termos de LMI's, solucionado por pacotes que implementam métodos numéricos especializados para programação matemática convexa:

$$\min Tr(W) \quad (4.31)$$

sujeito a

$$W \geq \mathbf{0} \quad (4.32)$$

$$G' [FWF' - \rho_{ex}^2 W] G < \mathbf{0} \quad (4.33)$$

$$G' [-FWF' + \rho_{in}^2 W] G < \mathbf{0} \quad (4.34)$$

4.5 Conclusão

O problema da alocação de pólos de um sistema em malha fechada discreto e precisamente conhecido, via realimentação de estados, foi discutido.

A partir dos conceitos de controlabilidade, observabilidade e inequação de Lyapunov para sistemas discretos, condições necessárias e suficientes para a existência de um ganho de realimentação de estados que aloca os pólos do sistema em malha fechada numa coroa circular previamente determinada foram obtidas. Essas condições são equivalentes a restrições de Lyapunov modificadas e determinam uma região de factibilidade convexa que pode ser descrita em termos de desigualdades matriciais lineares.

A obtenção do ganho de realimentação foi então obtida a partir de um problema de otimização convexa. Aproveitando o caráter convexo da formulação do mesmo, métodos matemáticos de programação convexa podem ser utilizados para a obtenção de uma solução de forma rápida e eficiente.

A presença de incertezas nas matrizes de sistema resulta num problema de otimização não convexo e, portanto, a extensão dos resultados obtidos no caso precisamente conhecido não pode ser feita.

Capítulo 5

Exemplos de Aplicação

5.1 Introdução

Neste capítulo são mostrados exemplos de aplicação que validam os resultados da discussão sobre otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e alocação de pólos em coroa circular especificada por raios interno, ρ_{in} e externo, ρ_{ex} , usando realimentação de estados, apresentados nos capítulos 3 e 4 respectivamente.

Os sistemas considerados são lineares, discretos e invariantes no tempo. Nos exemplos relativos ao capítulo 3 a descrição do sistema é feita pelas matrizes A , B_1 , B_2 , C e D como em (3.1), com as hipóteses $C'D = \mathbf{0}$ e $D'D > \mathbf{0}$ satisfeitas, tendo sido tratados um exemplo acadêmico e um sistema real (modelo simplificado de um helicóptero), enquanto que nos relacionados ao capítulo 4 os sistemas são descritos pelas matrizes de sistema A e B , geradas randomicamente e de modo que o sistema seja controlável. Neste caso, as matrizes C e D não são relevantes no problema de otimização (vide página 35) que fornece o ganho de realimentação de estados e portanto não são apresentadas. Ainda utilizando os resultados do capítulo 4, uma aplicação em códigos convolucionais é apresentada.

Os resultados numéricos apresentados foram obtidos a partir da solução computacional dos problemas de otimização associados aos teoremas apresentados nos capítulos em questão. Na implementação das rotinas computacionais que resolvem os referidos problemas foi usado o pacote *LMITool* [20] do *Scilab* [23].

5.2 Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Considere o seguinte modelo dado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0.2113 & 0.0087 & a_{13} \\ 0.0824 & a_{22} & 0.8075 \\ 0.7599 & 0.8474 & 0.4832 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.6135 & 0.6538 \\ 0.2749 & 0.4899 \\ b_{31} & 0.7741 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Nos casos cujos resultados tratam do sistema incerto, os seguintes parâmetros são considerados incertos, definindo um domínio de incertezas poliedral de oito vértices descritos pelos

pares (A_i, B_{2j}) , $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 2$, denotados $(A, B_2)_l$, $l = 1, \dots, 8$:

$$a_{22} = 0.8096 \pm 0.0904, \quad a_{13} = 0.4524 \pm 0.0476$$

$$b_{31} = 0.8807 \pm 0.0193$$

Nos demais casos, considerar-se-ão os valores nominais dos parâmetros, isto é, $a_{22} = 0.8096$, $a_{13} = 0.4524$ e $b_{31} = 0.8807$.

Caso 1

Utilizando o Teorema 3.1 e considerando o sistema nominal, obtêm-se as matrizes X e Y que fornecem a parametrização convexa da solução de Riccati.

$$X = \begin{bmatrix} 1.3155 & 0.3543 & 0.1123 \\ 0.3543 & 2.1725 & 0.7432 \\ 0.1123 & 0.7432 & 1.7567 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.7951 & -0.1313 & 0.0047 \\ -0.1313 & 0.5599 & -0.2285 \\ 0.0047 & -0.2285 & 0.6656 \end{bmatrix}$$

O ganho de realimentação associado e o valor ótimo da norma \mathcal{H}_2 ao quadrado são dados respectivamente por

$$K = -(D'D + B_2Y^{-1}B_2)^{-1}B_2'Y^{-1}A = \begin{bmatrix} -0.2968 & -0.3758 & -0.3114 \\ -0.2302 & -0.4953 & -0.4997 \end{bmatrix}$$

$$\|H\|_2^2 = 5.2447$$

igualando os valores obtidos pela solução direta da equação de Riccati.

Caso 2

Aplicando agora o Teorema 3.2, ainda para o sistema nominal, obtêm-se a partir do problema de otimização nas variáveis X , Y e Z a matriz de ganhos de realimentação de estados através de uma parametrização que independe explicitamente das matrizes do sistema. Comparando com o exemplo anterior, verifica-se que esta parametrização, assim como aquela, captura a solução ótima de Riccati.

$$X = \begin{bmatrix} 0.3421 & 0.4370 \\ 0.4370 & 0.6076 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.4532 & -0.3954 & -0.0969 \\ -0.3954 & 1.6427 & -0.1199 \\ -0.0969 & -0.1199 & 1.1991 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.2525 & -0.4626 & -0.2996 \\ -0.0903 & -0.6626 & -0.5175 \end{bmatrix}$$

O controlador é dado por

$$K = ZY^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2968 & -0.3758 & -0.3114 \\ -0.2302 & -0.4953 & -0.4997 \end{bmatrix}$$

e o valor ótimo da norma \mathcal{H}_2 ao quadrado é

$$\|H\|_2^2 = 5.2447$$

A parametrização oferecida pelo Teorema 3.2 permite o tratamento de sistemas incertos. Os resultados abaixo demonstram que o controlador fornece um custo garantido para todas as matrizes pertencentes ao domínio de incertezas e em particular para os vértices, conforme gráfico da Figura 5.1.

$$X = \begin{bmatrix} 0.3414 & 0.4749 \\ 0.4749 & 0.7365 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.6308 & -0.5013 & -0.0637 \\ -0.5013 & 1.7679 & -0.1640 \\ -0.0637 & -0.1640 & 1.2261 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.2783 & -0.4496 & -0.3025 \\ -0.0682 & -0.7763 & -0.5458 \end{bmatrix}$$

O controlador que estabiliza quadraticamente a planta e o custo garantido são dados respectivamente por

$$K = ZY^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2956 & -0.3670 & -0.3111 \\ -0.2330 & -0.5545 & -0.5314 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(C'CY + D'DX) = 5.7026$$

O valor do custo garantido também é um limitante para o quadrado da norma \mathcal{H}_2 do sistema nominal em malha fechada $\|H\|_2^2 = 5.2447$.

Caso 3

O mesmo exemplo de otimização \mathcal{H}_2 (sistema nominal) é agora tratado pelo Teorema 3.3, com a função objetivo linear.

As matrizes obtidas que descrevem, também neste caso, a solução ótima de Riccati são

$$X = \begin{bmatrix} 1.4532 & -0.3954 & -0.0969 & -0.2525 & -0.0903 \\ -0.3954 & 1.6427 & -0.1199 & -0.4627 & -0.6626 \\ -0.0969 & -0.1199 & 1.1991 & -0.2996 & -0.5175 \\ -0.2525 & -0.4627 & -0.2996 & 0.3421 & 0.4370 \\ -0.0903 & -0.6626 & -0.5175 & 0.4370 & 0.6075 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.4532 & -0.3954 & -0.0969 \\ -0.3954 & 1.6427 & -0.1199 \\ -0.0969 & -0.1199 & 1.1991 \end{bmatrix}$$

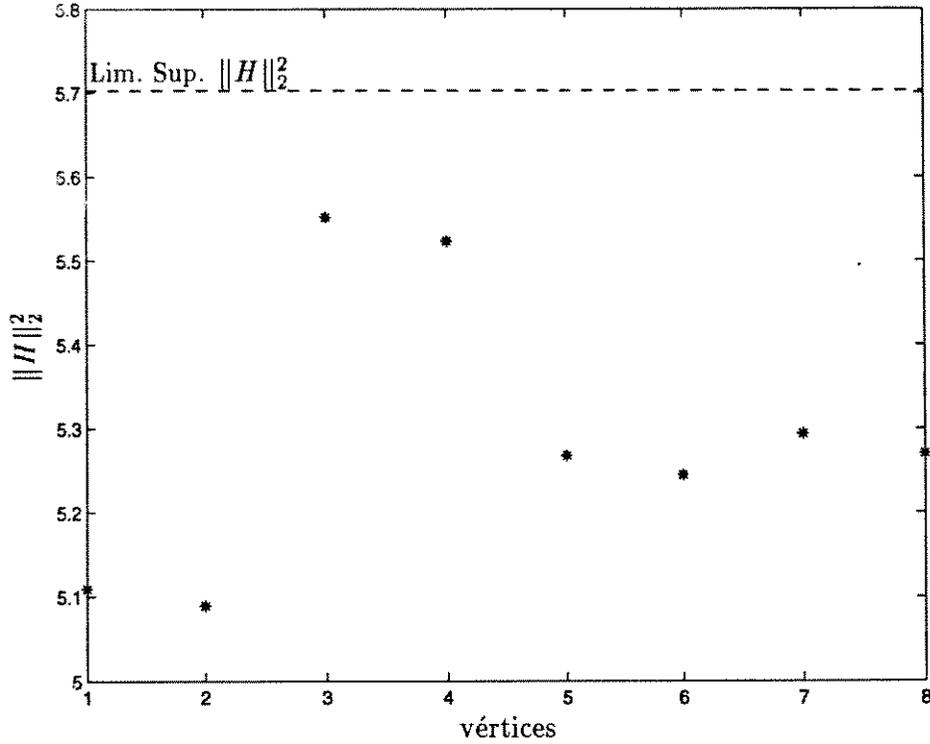


Figura 5.1: Norma \mathcal{H}_2 em malha fechada para cada vértice do politopo de incertezas.

$$Z = \begin{bmatrix} -0.2525 & -0.4627 & -0.2996 \\ -0.0903 & -0.6626 & -0.5175 \end{bmatrix}$$

e o controlador, parametrizado de forma independente em relação às matrizes do sistema, é dado por

$$K = ZY^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2968 & -0.3758 & -0.3114 \\ -0.2302 & -0.4953 & -0.4997 \end{bmatrix}$$

O valor da norma \mathcal{H}_2 ao quadrado dada por $\text{Tr}(X)$ reproduz o valor obtido através das abordagens propostas nos exemplos anteriores e mostra portanto a validade desta parametrização.

$$\|H\|_2^2 = 5.2447$$

A parametrização oferecida pelo Teorema 3.3 permite também o tratamento de sistemas incertos. Os resultados abaixo demonstram que o controlador fornece um custo garantido para todas as matrizes pertencentes ao domínio de incertezas e em particular para os vértices, conforme gráfico da Figura 5.1.

$$X = \begin{bmatrix} 1.6308 & -0.5013 & -0.0637 & -0.2783 & -0.0682 \\ -0.5013 & 1.7680 & -0.1640 & -0.4496 & -0.7764 \\ -0.0637 & -0.1640 & 1.2261 & -0.3024 & -0.5458 \\ -0.2783 & -0.4496 & -0.3024 & 0.3414 & 0.4749 \\ -0.0682 & -0.7764 & -0.5458 & 0.4749 & 0.7364 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.6308 & -0.5013 & -0.0637 \\ -0.5013 & 1.7680 & -0.1640 \\ -0.0637 & -0.1640 & 1.2261 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.2783 & -0.4496 & -0.3024 \\ -0.0682 & -0.7764 & -0.5458 \end{bmatrix}$$

O controlador que estabiliza quadraticamente a planta e o custo garantido, $Tr(X)$, são dados respectivamente por

$$K = ZY^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2956 & -0.3670 & -0.3111 \\ -0.2330 & -0.5545 & -0.5314 \end{bmatrix}$$

$$Tr(X) = 5.7026$$

igualando os valores obtidos no caso anterior, demonstrado que a manipulação que transforma a função objetivo em uma função linear preserva todas as características do problema.

Caso 4

O problema de estabilização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é abordado, com base no Teorema 3.4, considerando-se o sistema nominal. Além dos dados do sistema, é também considerado o valor de atenuação de distúrbios, $\gamma = 3$. As matrizes que parametrizam o controlador ótimo segundo a norma prescrita de distúrbios γ , de forma similar ao caso da otimização \mathcal{H}_2 já apresentado, e com a condição (3.75) verificada, são dadas por

$$X = \begin{bmatrix} 1.6441 & 0.7014 & 0.2471 \\ 0.7014 & 3.5950 & 1.5895 \\ 0.2471 & 1.5895 & 2.6152 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.6644 & -0.1393 & 0.0219 \\ -0.1393 & 0.4096 & -0.2358 \\ 0.0219 & -0.2358 & 0.5236 \end{bmatrix}$$

e o controlador é

$$K = -(D'D + B_2'Y^{-1}B_2)^{-1}B_2'Y^{-1}A = \begin{bmatrix} -0.3183 & -0.4177 & -0.3336 \\ -0.2369 & -0.5665 & -0.5681 \end{bmatrix}$$

Comparando os valores de $Tr(X) = 7.8543$ e o valor real da norma \mathcal{H}_2 ao quadrado do sistema em malha fechada $\|H\|_2^2 = 5.3269$, verifica-se que o primeiro é portanto, neste caso, o limitante superior já esperado. O controlador obtido garante que o valor da $\|H\|_\infty = 2.4081$ do sistema em malha fechada é menor que $\gamma = 3$.

Caso 5

Agora, ainda para o sistema nominal, trata-se o problema anterior através do Teorema 3.5, que fornece uma parametrização alternativa do ganho K que independe explicitamente das matrizes do sistema. As matrizes solução que parametrizam o controlador são

$$X = \begin{bmatrix} 0.3914 & 0.5006 \\ 0.5006 & 0.7231 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.7497 & -0.5579 & 0.0013 \\ -0.5579 & 1.7076 & -0.2709 \\ 0.0013 & -0.2709 & 1.2767 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.3278 & -0.4392 & -0.3141 \\ -0.0950 & -0.6786 & -0.5665 \end{bmatrix}$$

e verificam a condição (3.87) que garante a validade do resultado. A matriz de ganhos de realimentação de estados associada é

$$K = ZY^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3192 & -0.4144 & -0.3337 \\ -0.2333 & -0.5630 & -0.5630 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que os valores das normas \mathcal{H}_2 ao quadrado e \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada, dadas por $\|H\|_2^2 = 5.3180$ e $\|H\|_\infty = 2.4213$, são inferiores aos seus limitantes superiores $Tr(C'CY + D'DX) = 5.8487$ e $\gamma = 3$, respectivamente. Vale lembrar que, para este sistema em malha fechada, o valor ótimo para o quadrado da norma \mathcal{H}_2 é dado pela solução de Riccati, apresentado nos casos 1, 2 e 3, que é $\|H\|_2^2 = 5.2447$.

Os resultados abaixo demonstram a validade da parametrização oferecida pelo Teorema 3.5 no tratamento de sistemas incertos com a obtenção de um controlador que fornece um custo garantido (normas \mathcal{H}_2 ao quadrado e \mathcal{H}_∞) para todas as matrizes pertencentes ao domínio de incertezas e em particular para os vértices, conforme ilustrado na Figura 5.2. Pode-se observar que a atenuação de distúrbios caracterizado pelo valor da norma \mathcal{H}_∞ em cada vértice é menor que o limitante superior, $\gamma = 3$, dado.

$$X = \begin{bmatrix} 0.4327 & 0.5861 \\ 0.5861 & 0.9296 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2.1483 & -0.7201 & 0.1515 \\ -0.7201 & 1.8249 & -0.3836 \\ 0.1515 & -0.3836 & 1.3874 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.4436 & -0.3909 & -0.3711 \\ -0.1308 & -0.7805 & -0.6382 \end{bmatrix}$$

O controlador que estabiliza quadraticamente a planta e o custo garantido, $Tr(C'CY + D'DX)$, são dados respectivamente por

$$K = ZY^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3207 & -0.4136 & -0.3469 \\ -0.2353 & -0.6496 & -0.6139 \end{bmatrix}$$

$$Tr(C'CY + D'DX) = 6.7229$$

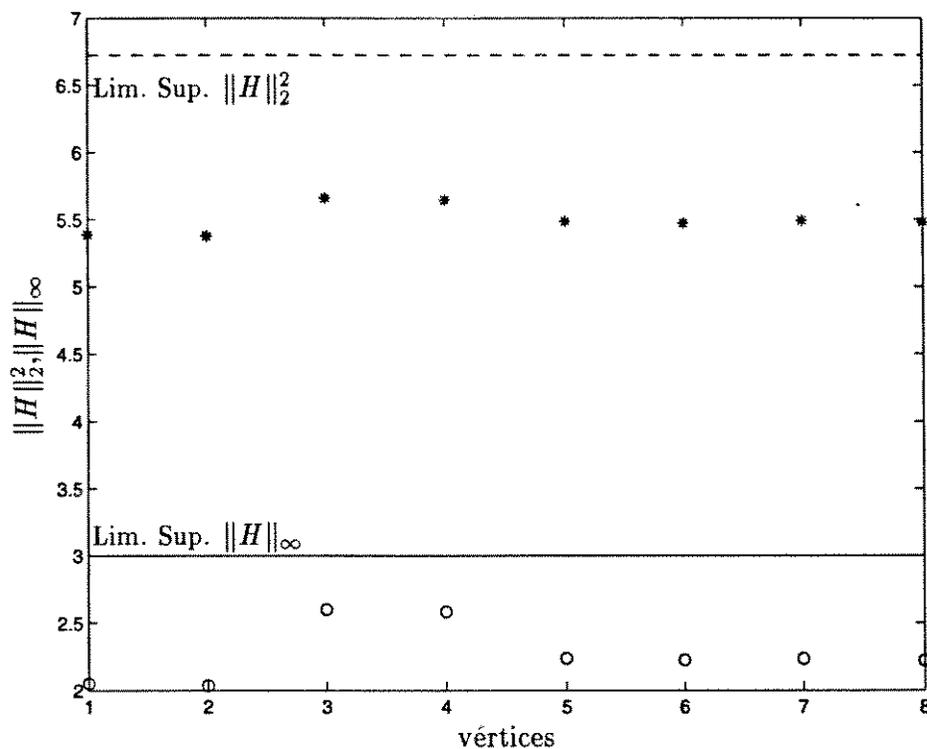


Figura 5.2: Normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ em malha fechada para cada vértice do polítopo de incertezas.

Caso 6

O valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ , em malha fechada, é obtido para o sistema nominal através do problema de otimização apresentado no Teorema 3.7. A minimização da função objetivo sobre o conjunto \mathcal{K}_γ , caracterizado de maneira convexa no Teorema 3.6, fornece as seguintes matrizes que parametrizam o controlador:

$$X = \begin{bmatrix} 1.8802 & -0.2704 \\ -0.2704 & 2.1319 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 2.9679 & -0.6655 & 0.2784 \\ -0.6655 & 1.8210 & -0.9626 \\ 0.2784 & -0.9626 & 2.3050 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.8494 & -0.3455 & -0.4607 \\ -0.4167 & -0.4623 & -1.0561 \end{bmatrix}$$

O controlador ótimo que minimiza a norma \mathcal{H}_∞ é dado por

$$K = ZW^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3681 & -0.5215 & -0.3732 \\ -0.2347 & -0.7275 & -0.7337 \end{bmatrix}$$

O valor mínimo da norma \mathcal{H}_∞ é

$$\|H\|_\infty = 2.0190$$

A minimização da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada, produzida pelo controlador acima, conduz por outro lado a um menor desempenho em termos do quadrado da norma \mathcal{H}_2 ($\|H\|_2^2 = 6.0685$) em relação aos casos anteriores.

A parametrização oferecida pelo Teorema 3.7 permite também o tratamento de sistemas incertos. Os resultados abaixo demonstram que o controlador fornece um limitante da norma \mathcal{H}_∞ para todas as matrizes pertencentes ao domínio de incertezas e em particular para os vértices, conforme mostra a Figura 5.3.

$$X = \begin{bmatrix} 1.2966 & 0.4338 \\ 0.4338 & 1.9648 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 3.5616 & -0.6984 & 0.3336 \\ -0.6984 & 1.9533 & -1.0722 \\ 0.3336 & -1.0722 & 2.6152 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.9780 & -0.3027 & -0.5939 \\ -0.6144 & -0.5811 & -1.1950 \end{bmatrix}$$

O controlador que estabiliza quadraticamente a planta, minimizando o limitante $\sqrt{\delta}$ da norma \mathcal{H}_∞ do sistema para quaisquer valores dos parâmetros incertos é dado por

$$K = \begin{bmatrix} -0.3337 & -0.4846 & -0.3832 \\ -0.2596 & -0.8039 & -0.7534 \end{bmatrix}$$

e o custo garantido é

$$\sqrt{\delta} = 2.2392$$

Caso 7

Discute-se o problema abordado no Caso 5, agora com uma função objetivo linear e a mesma parametrização do controlador que independe explicitamente das matrizes do sistema, sobre o mesmo conjunto convexo tratado no Teorema 3.6. As matrizes que parametrizam a solução de atenuação prescrita ($\gamma = 3$) são

$$X = \begin{bmatrix} 0.3915 & 0.5006 \\ 0.5006 & 0.7231 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1.7497 & -0.5579 & 0.0013 \\ -0.5579 & 1.7076 & -0.2709 \\ 0.0013 & -0.2709 & 1.2767 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.3278 & -0.4392 & -0.3142 \\ -0.0949 & -0.6786 & -0.5665 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1.7497 & -0.5579 & 0.0013 & -0.3278 & -0.0949 \\ -0.5579 & 1.7076 & -0.2709 & -0.4392 & -0.6786 \\ 0.0013 & -0.2709 & 1.2767 & -0.3142 & -0.5665 \\ -0.3278 & -0.4392 & -0.3142 & 0.3915 & 0.5006 \\ -0.0949 & -0.6786 & -0.5665 & 0.5006 & 0.7231 \end{bmatrix}$$

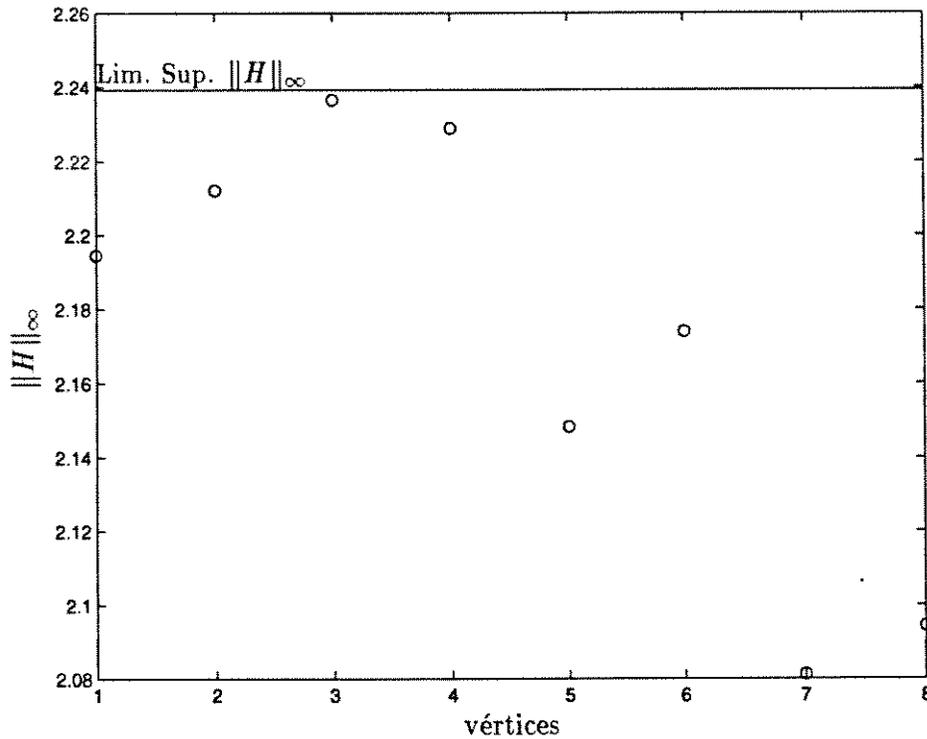


Figura 5.3: Norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada para cada vértice do politopo de incertezas.

A matriz de ganhos de realimentação de estados associado é dado por

$$K = ZW^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3192 & -0.4144 & -0.3337 \\ -0.2333 & -0.5629 & -0.5629 \end{bmatrix}$$

fornecendo como limitante superior e valor exato da norma \mathcal{H}_2 ao quadrado, $Tr(V) = 5.8487$ e $\|H\|_2^2 = 5.3180$, respectivamente. O valor da norma \mathcal{H}_∞ é $\|H\|_\infty = 2.4213$. Pode-se constatar que os resultados da aplicação do Teorema 3.8 reproduzem os obtidos com a aplicação do Teorema 3.5, apresentados no Caso 5.

O tratamento de sistemas incertos, pela parametrização oferecida no Teorema 3.8 fornece os resultados abaixo. O controlador fornece um custo garantido para todas as matrizes pertencentes ao domínio de incertezas e em particular para os vértices, conforme gráfico da Figura 5.2. Além disso a norma \mathcal{H}_∞ permanece sempre menor que $\gamma = 3$.

$$X = \begin{bmatrix} 0.4327 & 0.5861 \\ 0.5861 & 0.9296 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 2.1483 & -0.7201 & 0.1515 \\ -0.7201 & 1.8249 & -0.3836 \\ 0.1515 & -0.3836 & 1.3874 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.4436 & -0.3909 & -0.3711 \\ -0.1308 & -0.7805 & -0.6382 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 2.1483 & -0.7201 & 0.1515 & -0.4436 & -0.1308 \\ -0.7201 & 1.8249 & -0.3836 & -0.3909 & -0.7805 \\ 0.1515 & -0.3836 & 1.3874 & -0.3711 & -0.6382 \\ -0.4436 & -0.3909 & -0.3711 & 0.4327 & 0.5861 \\ -0.1308 & -0.7805 & -0.6382 & 0.5861 & 0.9296 \end{bmatrix}$$

O controlador que estabiliza quadraticamente a planta e o limitante superior da norma \mathcal{H}_2 ao quadrado do sistema em malha fechada, $Tr(V)$, são dados respectivamente por

$$K = ZW^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3207 & -0.4136 & -0.3469 \\ -0.2353 & -0.6496 & -0.6139 \end{bmatrix}$$

$$Tr(V) = 6.7229$$

Otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: Helicóptero

Considere agora o exemplo do problema de controle de vôo de uma aeronave do tipo VTOL (do inglês, *vertical takeoff and landing*), apresentado em [26], [43]. A dinâmica da aeronave VTOL, neste caso um helicóptero, no plano vertical, é dada pela equação diferencial

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$, $x \in \mathbb{R}^4$ é o vetor de estados e $u \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de controle. As componentes do vetor de estados e do vetor de controle são:

- x_1 : velocidade horizontal [nós],
- x_2 : velocidade vertical [nós],
- x_3 : taxa de variação do ângulo de *pitch* [graus/s],
- x_4 : ângulo de *pitch* [graus],
- u_1 : ângulo de *pitch* coletivo,
- u_2 : ângulo de *pitch* cíclico longitudinal.

Essencialmente, o controle do movimento longitudinal do helicóptero é feito através da variação do ângulo de *pitch* (ângulo de ataque em relação ao ar) das pás da hélice. A componente u_1 do vetor de controles altera o ângulo de ataque de todas as pás da hélice, simultaneamente e no mesmo montante, produzindo a ascensão. Portanto, esta componente é usada principalmente no controle do movimento vertical do helicóptero.

Por outro lado, a componente u_2 do vetor de controles altera o ângulo de ataque de cada pá no movimento de rotação. Devido a esta inclinação, o movimento do helicóptero ganha uma componente na direção horizontal, produzindo então um deslocamento não só para cima ou para baixo mas também para frente.

A Figura 5.4 apresenta esquematicamente as variáveis envolvidas no problema de controle do movimento longitudinal do helicóptero.

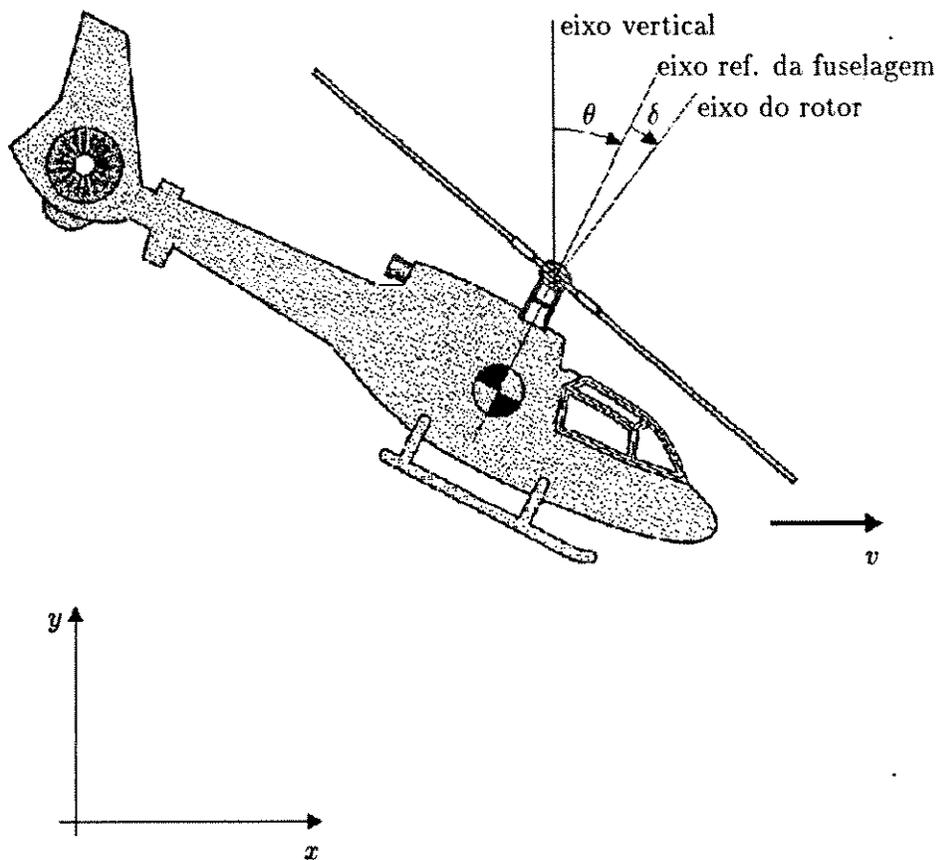


Figura 5.4: Helicóptero.

Legenda:

θ : Ângulo de *pitch* da fuselagem,

δ : Ângulo de inclinação do rotor,

v : Velocidade horizontal,

x, y : Eixos de referência no plano vertical.

Em condições típicas de carga e vôo, à velocidade do vento de 135 nós, o modelo linearizado e discretizado com $T = 0.2$ s, considerando um segurador de ordem zero, é dado pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9927 & 0.0048 & -0.0053 & -0.0931 \\ 0.0082 & 0.8154 & -0.0717 & -0.7351 \\ 0.0191 & 0.0627 & 0.8924 & 0.2398 \\ 0.0019 & 0.0066 & 0.1882 & 1.0254 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.0912 & 0.0302 \\ 0.6690 & -1.3961 \\ -1.0145 & 0.7951 \\ -0.1042 & 0.0827 \end{bmatrix}$$

Os elementos das três primeiras linhas das matrizes A e B_2 sofrem variações significativas em função da velocidade do vento. Nos casos a serem discutidos, considerar-se-ão apenas os valores nominais colocados nas matrizes A e B_2 acima apresentadas. Sejam também

$$B_1 = \mathbf{I}_{4 \times 4}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Os controladores por realimentação de estados a serem obtidos são baseados nas normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ da função de transferência de w para y , como discutido no capítulo 3.

Caso 1

Usando o Teorema 3.3 obtêm-se as seguintes matrizes que parametrizam o controlador ótimo centralizado que minimiza o critério quadrático \mathcal{H}_2 :

$$X = \begin{bmatrix} 8.8943 & 0.6487 & 2.2929 & 3.3869 & -0.7956 & -2.3092 \\ 0.6487 & 1.5964 & 0.1608 & 0.7456 & 0.6182 & 0.3083 \\ 2.2929 & 0.1608 & 6.6371 & -2.5235 & 0.7702 & 0.8462 \\ 3.3869 & 0.7456 & -2.5235 & 5.3354 & 0.9657 & -2.2236 \\ -0.7956 & 0.6182 & 0.7702 & 0.9657 & 1.8184 & 0.0925 \\ -2.3092 & 0.3083 & 0.8462 & -2.2236 & 0.0925 & 1.3296 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 8.8943 & 0.6487 & 2.2929 & 3.3869 \\ 0.6487 & 1.5963 & 0.1608 & 0.7456 \\ 2.2929 & 0.1608 & 6.6370 & -2.5235 \\ 3.3869 & 0.7456 & -2.5235 & 5.3353 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -0.7956 & 0.6182 & 0.7702 & 0.9657 \\ -2.3092 & 0.3083 & 0.8462 & -2.2236 \end{bmatrix}$$

O controlador associado é dado por

$$K = ZY^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5691 & 0.1789 & 0.6157 & 0.8085 \\ -0.1693 & 0.4197 & 0.0438 & -0.3473 \end{bmatrix}$$

e a norma \mathcal{H}_2 ao quadrado vale $\|H\|_2^2 = 25.6112$. A Figura 5.5 mostra a evolução dos estados do sistema em malha fechada com ganho descentralizado, para entrada nula, partindo da condição inicial $x_0 = [0.8 \ 0.9 \ 0.7 \ 1.1]'$.

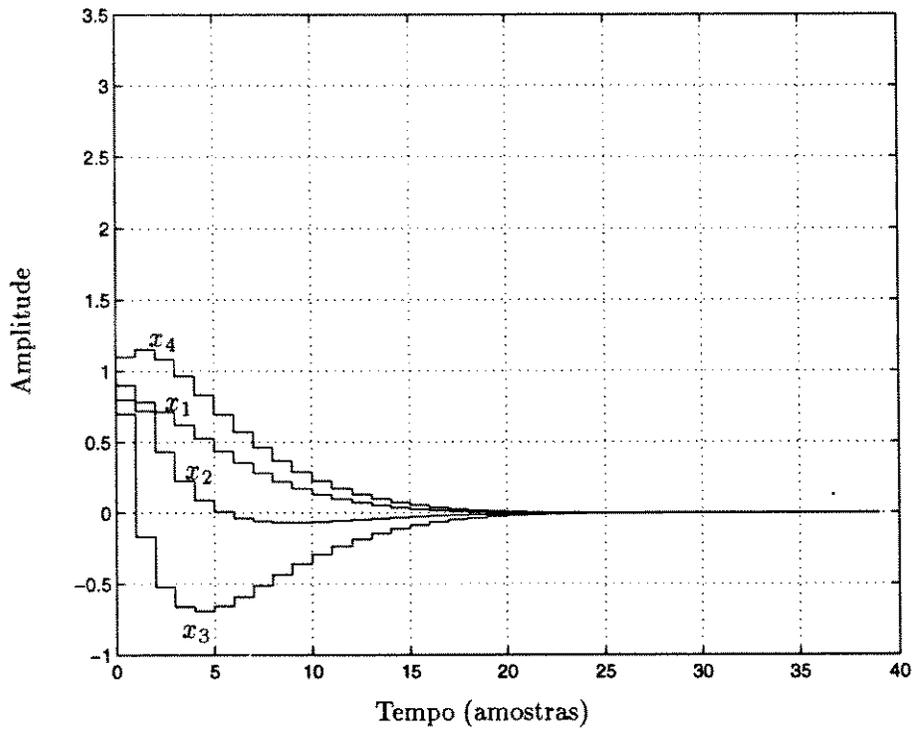


Figura 5.5: Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 1 — controle \mathcal{H}_2 com ganho centralizado).

Caso 2

Agora, o mesmo problema de minimização do critério quadrático \mathcal{H}_2 é tratado ainda com o Teorema 3.3, porém com o controlador sujeito a uma restrição de descentralização¹, cuja estrutura é do tipo

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix}$$

obtendo-se

$$X = \begin{bmatrix} 106.9439 & 0 & 0 & 0 & 0.6014 & 0 \\ 0 & 48.0191 & -0.3981 & 14.6827 & 0 & -11.5932 \\ 0 & -0.3981 & 22.5213 & -5.4509 & 0 & -3.9838 \\ 0 & 14.6827 & -5.4509 & 6.9660 & 0 & -4.4888 \\ 0.6014 & 0 & 0 & 0 & 0.0048 & 0 \\ 0 & -11.5932 & -3.9838 & -4.4888 & 0 & 6.5438 \end{bmatrix}$$

¹Uma condição suficiente para a imposição de uma estrutura descentralizada para o ganho K é obtida simplesmente retirando-se do procedimento de otimização alguns elementos das matrizes Z e Y , de maneira a forçar $K = ZY^{-1}$ a ser bloco diagonal.

$$Y = \begin{bmatrix} 106.9425 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 48.0177 & -0.3981 & 14.6827 \\ 0 & -0.3981 & 22.5199 & -5.4509 \\ 0 & 14.6827 & -5.4509 & 6.9646 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.6014 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11.5932 & -3.9838 & -4.4888 \end{bmatrix}$$

O controlador descentralizado associado é dado por

$$K = ZY^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0056 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2351 & -0.5536 & -1.5733 \end{bmatrix}$$

O custo garantido \mathcal{H}_2 dado por $Tr(X) = 190.9989$ é um limitante superior para o valor quadrático real da norma do sistema em malha fechada $\|H\|_2^2 = 78.3161$.

A Figura 5.6 mostra a evolução dos estados do sistema em malha fechada com ganho descentralizado, para entrada nula, partindo da condição inicial $x_0 = [0.8 \ 0.9 \ 0.7 \ 1.1]'$.

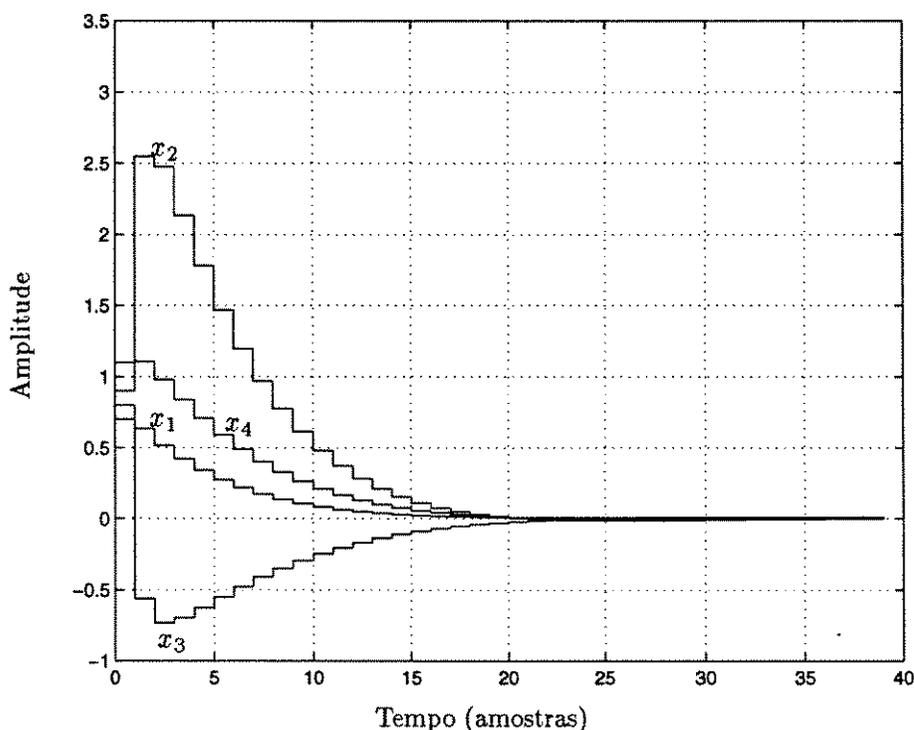


Figura 5.6: Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 2 — controle \mathcal{H}_2 com ganho descentralizado).

Comparando a evolução no tempo para o sistema realimentado nota-se que, no controle descentralizado, alguns estados atingem valores mais elevados do que no caso centralizado, embora a otimização da norma \mathcal{H}_2 assegure um tempo de estabilização de mesma ordem (cerca de 20 instantes de tempo) nos dois casos.

Caso 3

Trata-se então o problema de atenuação máxima de distúrbios. Usando o Teorema 3.7, obtêm-se as seguintes matrizes que fornecem o valor ótimo para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada:

$$X = \begin{bmatrix} 51.7973 & -17.1199 \\ -17.1199 & -44.4193 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 5.7854 & -1.8794 & -4.3020 & 7.1962 \\ -1.8794 & 75.5609 & -24.2020 & 2.1213 \\ -4.3020 & -24.2020 & 65.2551 & -10.1623 \\ 7.1962 & 2.1213 & -10.1623 & 12.2280 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -4.8962 & 2.9325 & 31.6308 & 3.4930 \\ -5.5454 & 30.8080 & -2.5200 & -4.4148 \end{bmatrix}$$

O controlador ótimo de realimentação de estados que minimiza a norma \mathcal{H}_∞ é dado por

$$K = ZW^{-1} = \begin{bmatrix} -5.2359 & 0.0462 & 0.7808 & 4.0079 \\ -1.1935 & 0.3948 & 0.0823 & 0.3412 \end{bmatrix}$$

O valor ótimo da norma \mathcal{H}_∞ é

$$\|H\|_\infty = 10.4143$$

O mesmo resultado é obtido em [37], usando um algoritmo de planos de corte.

A Figura 5.7 mostra a evolução dos estados do sistema em malha fechada com ganho centralizado, para entrada nula, partindo da condição inicial $x_0 = [0.8 \ 0.9 \ 0.7 \ 1.1]'$.

Caso 4

Considerando então um controlador com a estrutura descentralizada anteriormente definida, obtêm-se para o mesmo problema de máxima rejeição

$$X = \begin{bmatrix} 7.5926 & 0 \\ 0 & 122.4816 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 10.4648 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 672.7176 & -403.4438 & 90.6644 \\ 0 & -403.4438 & 308.7966 & -36.5784 \\ 0 & 90.6644 & -36.5784 & 18.6382 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -8.9137 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 175.9193 & -172.9802 & 1.9960 \end{bmatrix}$$

O controlador com a estrutura descentralizada particular é dado por

$$K = ZW^{-1} = \begin{bmatrix} -0.8518 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3125 & -0.4160 & -2.2295 \end{bmatrix}$$

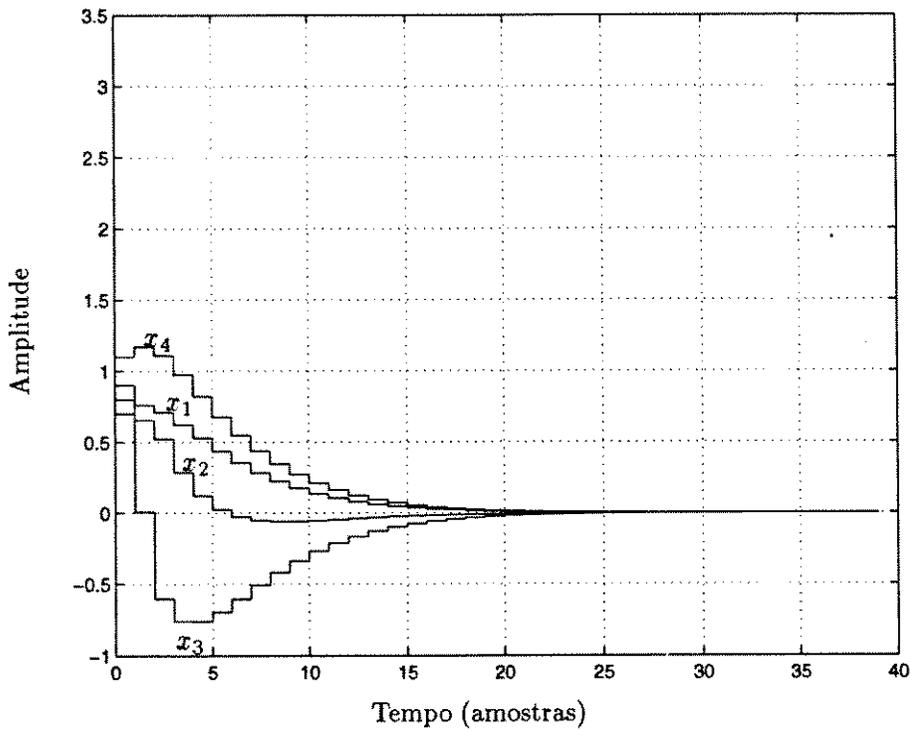


Figura 5.7: Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 3 — controle \mathcal{H}_∞ com ganho centralizado).

e fornece $\sqrt{\delta} = 33.9859$ que é um custo garantido para o valor real da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada dado por $\|H\|_\infty = 31.1172$. Note que a imposição de uma estrutura particular ao ganho K força o valor da norma \mathcal{H}_∞ a aumentar, introduzindo também uma diferença entre o limitante $\sqrt{\delta}$ e o valor real da norma.

A Figura 5.8 mostra a evolução dos estados do sistema em malha fechada com ganho descentralizado, para entrada nula, partindo da condição inicial $x_0 = [0.8 \ 0.9 \ 0.7 \ 1.1]'$.

Nota-se neste caso um comportamento dinâmico bastante degradado com a estrutura descentralizada; em geral, a otimização \mathcal{H}_∞ está sujeita a tempos de estabilização maiores (por não se ocupar da integral quadrática da saída), mas para o controle centralizado (Caso 3) o resultado obtido acabou se aproximando bastante do obtido com controle centralizado \mathcal{H}_2 (veja Figura 5.5).

Caso 5

O problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é agora tratado, ainda para o mesmo sistema, com base no Teorema 3.8, considerando um controlador centralizado e rejeição mínima de perturbações fixada em $\gamma = 12.0$. As matrizes que parametrizam o controlador centralizado que garante a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada menor que 12.0 são

$$X = \begin{bmatrix} 6.7337 & 1.0319 \\ 1.0319 & 2.9558 \end{bmatrix}$$

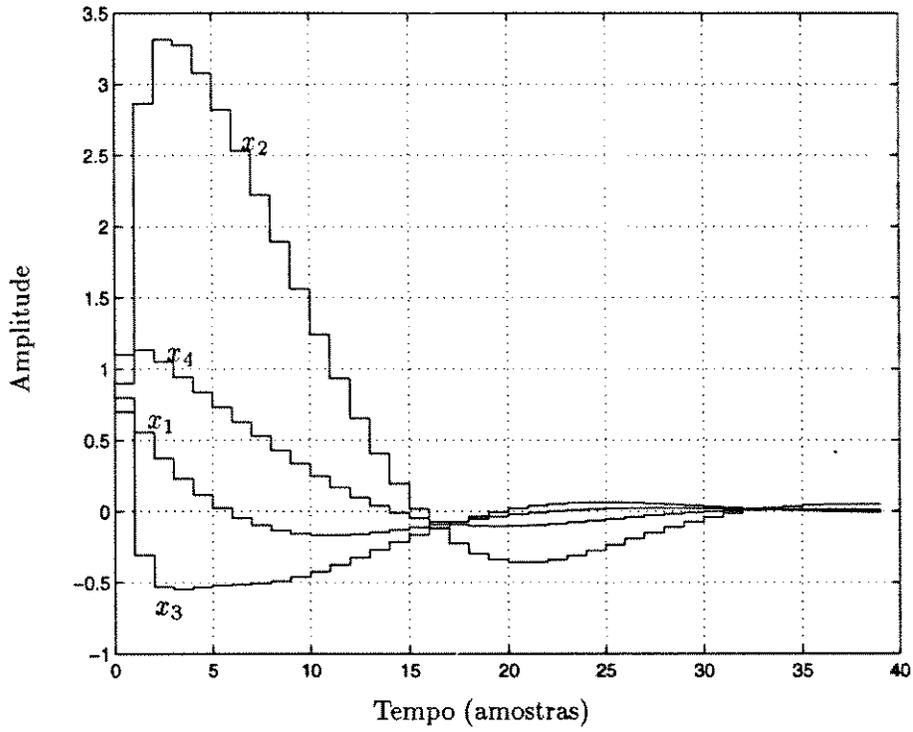


Figura 5.8: Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 4 — controle \mathcal{H}_∞ com ganho descentralizado).

$$W = \begin{bmatrix} 7.7770 & 0.4207 & -0.2432 & 7.0160 \\ 0.4207 & 2.4646 & -1.0112 & 1.4427 \\ -0.2432 & -1.0112 & 19.1096 & -6.6679 \\ 7.0160 & 1.4427 & -6.6679 & 10.8670 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -1.4386 & 1.2851 & 2.7490 & 1.5622 \\ -4.2457 & 0.5333 & 2.2935 & -4.6876 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 7.7770 & 0.4207 & -0.2432 & 7.0160 & -1.4386 & -4.2457 \\ 0.4207 & 2.4646 & -1.0112 & 1.4427 & 1.2851 & 0.5333 \\ -0.2432 & -1.0112 & 19.1096 & -6.6679 & 2.7490 & 2.2935 \\ 7.0160 & 1.4427 & -6.6679 & 10.8670 & 1.5622 & -4.6876 \\ -1.4386 & 1.2851 & 2.7490 & 1.5622 & 6.7337 & 1.0319 \\ -4.2457 & 0.5333 & 2.2935 & -4.6876 & 1.0319 & 2.9558 \end{bmatrix}$$

e o controlador associado é dado por

$$K = ZW^{-1} = \begin{bmatrix} -1.5704 & 0.1586 & 0.6729 & 1.5495 \\ -0.4004 & 0.4225 & 0.0730 & -0.1842 \end{bmatrix}$$

O custo garantido \mathcal{H}_2 é dado por $Tr(V) = 49.9077$ e os valores reais das normas \mathcal{H}_2 ao quadrado e \mathcal{H}_∞ , $\|H\|_2^2 = 33.1084$ e $\|H\|_\infty = 11.7298$ respectivamente, são menores que os seus limitantes.

A Figura 5.9 mostra a evolução dos estados do sistema em malha fechada com ganho centralizado, para entrada nula, partindo da condição inicial $x_0 = [0.8 \ 0.9 \ 0.7 \ 1.1]'$.

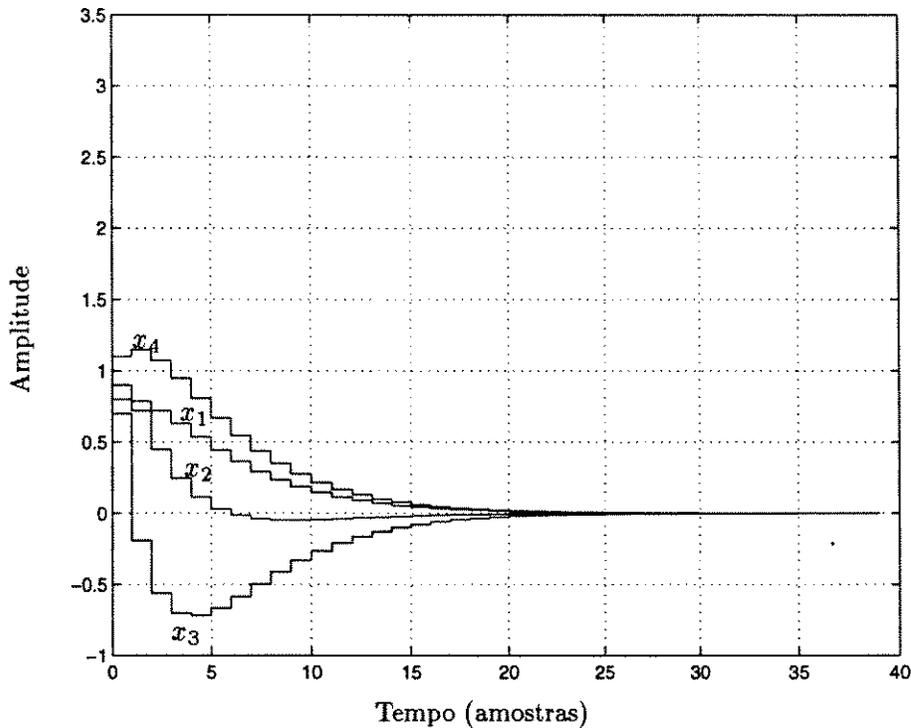


Figura 5.9: Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 5 — controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com ganho centralizado).

Caso 6

Usando o Teorema 3.8, ainda para o mesmo problema, com valor de rejeição de distúrbios $\gamma = 35.0$ e um controlador restrito à estrutura particular anteriormente colocada, obtêm-se o custo garantido $Tr(V) = 1026.7753$ que é um limitante para o valor real da norma \mathcal{H}_2 ao quadrado do sistema realimentado, $\|H\|_2^2 = 112.1456$. O valor real da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada, $\|H\|_\infty = 31.8735$, mostra que o γ dado é também um custo garantido. As matrizes solução que permitem obter estes custos garantidos são dadas por

$$X = \begin{bmatrix} 8.2605 & 0 \\ 0 & 111.2482 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 10.6629 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 601.0004 & -352.9773 & 86.9712 \\ 0 & -352.9773 & 276.3303 & -33.5770 \\ 0 & 86.9712 & -33.5770 & 19.2729 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} -9.3852 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 148.0078 & -155.1457 & 0.0472 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 10.6629 & 0 & 0 & 0 & -9.3852 & 0 \\ 0 & 601.0005 & -352.9773 & 86.9712 & 0 & 148.0078 \\ 0 & -352.9773 & 276.3303 & -33.5770 & 0 & -155.1457 \\ 0 & 86.9712 & -33.5770 & 19.2729 & 0 & 0.0472 \\ -9.3852 & 0 & 0 & 0 & 8.2605 & 0 \\ 0 & 148.0078 & -155.1457 & 0.0472 & 0 & 111.2482 \end{bmatrix}$$

e o controlador por

$$K = ZW^{-1} = \begin{bmatrix} -0.8802 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1975 & -0.5292 & -1.8107 \end{bmatrix}$$

A Figura 5.10 mostra a evolução dos estados do sistema em malha fechada com ganho descentralizado, para entrada nula, partindo da condição inicial $x_0 = [0.8 \ 0.9 \ 0.7 \ 1.1]'$.

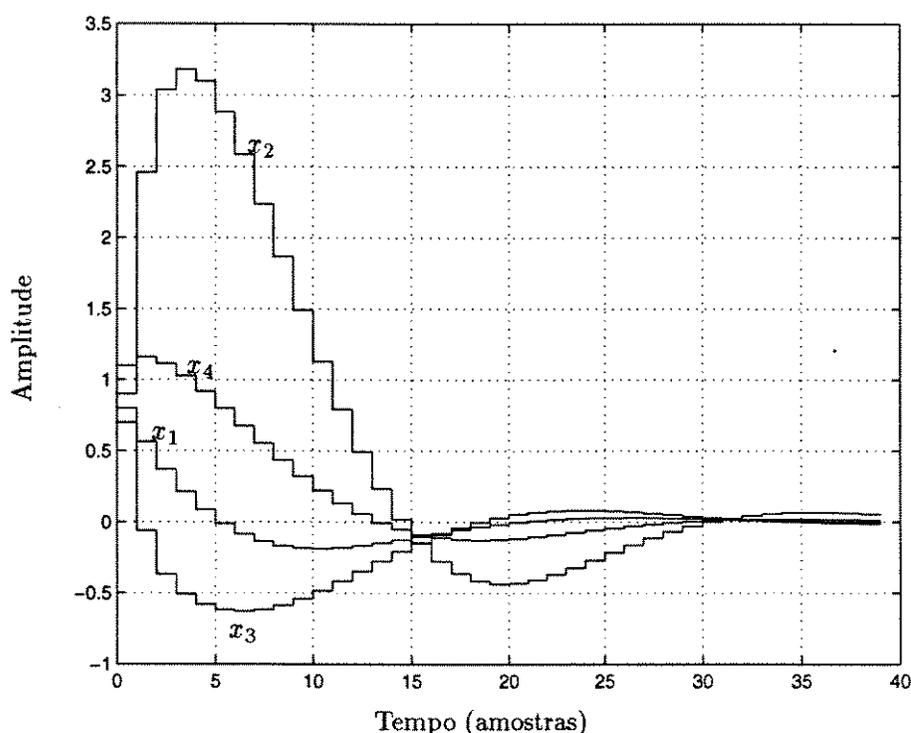


Figura 5.10: Evolução dos estados do sistema para uma dada condição inicial (Caso 6 — controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com ganho descentralizado).

Novamente verifica-se uma degradação na evolução dos estados quando a estrutura descentralizada é imposta. Nota-se também que a otimização mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ permite a obtenção de comportamentos intermediários entre o ótimo \mathcal{H}_2 e o ótimo \mathcal{H}_∞ .

Esses 6 casos diferentes estudados fornecem instrumentos para que o projetista possa escolher entre realimentar ou não um dado estado, otimizar um critério quadrático (norma \mathcal{H}_2), rejeitar ao máximo (isto é, otimizar a norma \mathcal{H}_∞) as perturbações ou preferir um compromisso entre a norma \mathcal{H}_2 e a norma \mathcal{H}_∞ (controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$).

5.3 Alocação em coroa circular

Exemplo 5.3.1

Considere o sistema discreto caracterizado pelas matrizes A e B , e a coroa circular descrita pelos raios ρ_{in} e ρ_{ex} .

$$\rho_{in} = 0.30, \rho_{ex} = 0.50$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.7616 & 0.6381 & -0.1885 & -1.7087 \\ 1.4740 & 0.2547 & -1.0327 & 0.0699 \\ 0.8530 & -0.6834 & -0.9239 & -1.3773 \\ 0.7223 & 0.8145 & 2.7267 & -0.1728 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.6020 & -0.7004 \\ -1.5620 & -0.8262 \\ -0.3889 & 1.1324 \\ 0.6543 & -0.2330 \end{bmatrix}$$

A matriz \mathcal{W} , e suas submatrizes W_1 e W_2 , obtidas do problema de otimização descrito na página 35 são

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0.3241 & -0.2244 & -0.3493 & -0.2941 & 0.9806 & -0.6312 \\ -0.2244 & 3.1491 & -0.8861 & 0.3279 & 0.3849 & 1.7563 \\ -0.3493 & -0.8861 & 0.8313 & 0.2821 & -1.5189 & 0.2331 \\ -0.2941 & 0.3279 & 0.2821 & 0.2901 & -0.8964 & 0.6155 \\ 0.9806 & 0.3849 & -1.5189 & -0.8964 & 3.5222 & -1.4796 \\ -0.6312 & 1.7563 & 0.2331 & 0.6155 & -1.4796 & 1.9722 \end{bmatrix}$$

O ganho de realimentação de estados que aloca os pólos na coroa circular desejada é

$$K = \begin{bmatrix} -0.1476 & -0.0350 & -1.2543 & -1.9805 \\ -0.2422 & 1.5380 & 2.6443 & -2.4345 \end{bmatrix}$$

O módulo dos pólos do sistema em malha aberta e em malha fechada é dado respectivamente por, d e d_1

$$d = \begin{bmatrix} 2.3859 \\ 2.3859 \\ 2.2030 \\ 1.0020 \end{bmatrix}, d_1 = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \\ 0.5000 \\ 0.5000 \end{bmatrix}$$

A Figura 5.11 mostra o resultado da alocação.

Exemplo 5.3.2

Considere o sistema discreto caracterizado pelas matrizes A e B , e a coroa circular descrita pelos raios ρ_{in} e ρ_{ex} .

$$\rho_{in} = 0.99, \rho_{ex} = 1.01$$

$$A = \begin{bmatrix} -1.3378 & -1.3320 & 0.5300 & 0.8371 & -2.5103 & 0.4349 & 0.4985 \\ 0.8703 & -1.2012 & 1.2174 & -0.3679 & 1.3834 & 1.3892 & -1.5371 \\ 0.4497 & 1.9581 & -1.6397 & 0.5706 & 0.3831 & 1.2663 & -0.5934 \\ -2.7072 & -1.1122 & -0.9939 & 1.7581 & -0.4836 & 1.7831 & 0.8536 \\ 0.3392 & 0.0658 & 0.3095 & 1.0221 & -0.5268 & -0.7252 & -0.1861 \\ -0.1678 & 0.0021 & -1.0279 & -1.3112 & 0.4516 & 0.6381 & 0.2052 \\ -1.4067 & 1.0911 & -0.7399 & -0.4136 & 1.0435 & 0.8896 & -0.0095 \end{bmatrix}$$

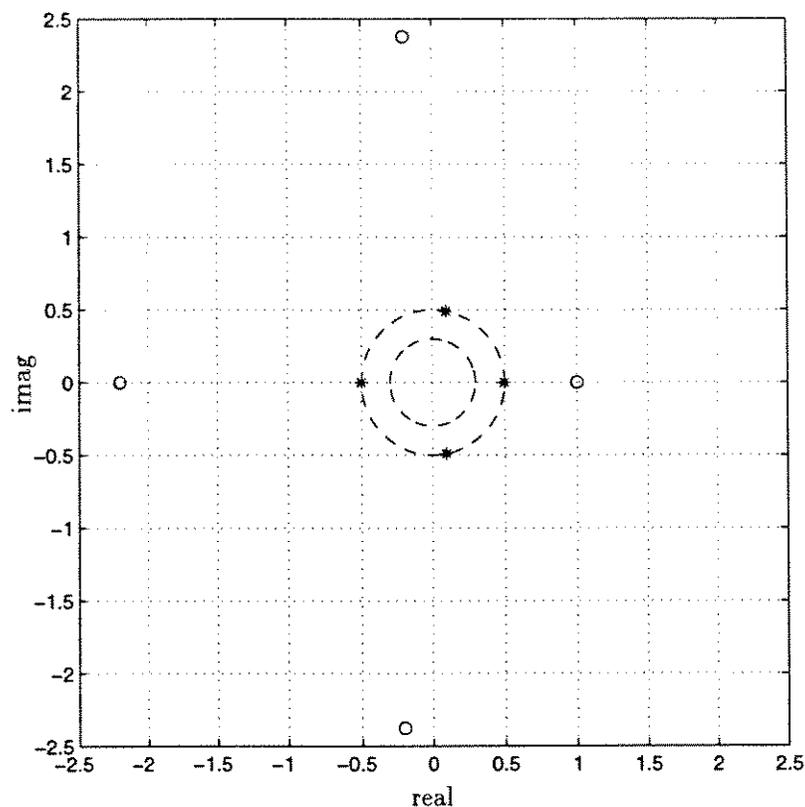


Figura 5.11: Resultado da alocação de pólos para o sistema do *Exemplo 5.3.1*. Pólos originais dados por 'o' e alocados com a matriz K denotados '*'.

$$B = \begin{bmatrix} 0.8034 & 0.0634 & 0.1022 \\ -0.6951 & 0.5468 & -2.4172 \\ -0.3908 & 2.2649 & -0.3514 \\ 0.9290 & 1.0487 & 3.2011 \\ -1.5525 & -0.0211 & -0.2452 \\ -0.3911 & -0.8966 & 0.0752 \\ 0.2503 & 1.4135 & 0.7157 \end{bmatrix}$$

A matriz \mathcal{W} , e suas submatrizes W_1 e W_2 , obtidas do problema de otimização

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0.1758 & -0.0616 & -0.0067 & 0.0550 & 0.0406 & 0.0421 & 0.1308 \\ -0.0616 & 0.0656 & 0.0264 & -0.0073 & -0.0160 & 0.0240 & -0.0172 \\ -0.0067 & 0.0264 & 0.0641 & -0.0605 & -0.0325 & 0.0460 & 0.0633 \\ 0.0550 & -0.0073 & -0.0605 & 0.1640 & 0.0743 & -0.0006 & -0.0030 \\ 0.0406 & -0.0160 & -0.0325 & 0.0743 & 0.0514 & -0.0005 & 0.0278 \\ 0.0421 & 0.0240 & 0.0460 & -0.0006 & -0.0005 & 0.0837 & 0.1264 \\ 0.1308 & -0.0172 & 0.0633 & -0.0030 & 0.0278 & 0.1264 & 0.3854 \\ 0.0519 & -0.0057 & -0.0433 & 0.0876 & 0.0397 & -0.0186 & -0.0318 \\ 0.0074 & -0.0255 & 0.0368 & -0.1033 & -0.0371 & 0.0005 & 0.0574 \\ 0.0175 & -0.0245 & 0.0147 & -0.0360 & -0.0195 & -0.0118 & -0.0469 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0519 & 0.0074 & 0.0175 \\ -0.0057 & -0.0255 & -0.0245 \\ -0.0433 & 0.0368 & 0.0147 \\ 0.0876 & -0.1033 & -0.0360 \\ 0.0397 & -0.0371 & -0.0195 \\ -0.0186 & 0.0005 & -0.0118 \\ -0.0318 & 0.0574 & -0.0469 \\ 0.0783 & -0.0543 & -0.0150 \\ -0.0543 & 0.0872 & 0.0285 \\ -0.0150 & 0.0285 & 0.0480 \end{bmatrix}$$

O ganho de realimentação de estados que aloca os pólos na coroa circular desejada é

$$K = \begin{bmatrix} 0.7501 & 1.0179 & -0.2796 & 0.2269 & -0.0119 & -0.7307 & -0.0033 \\ 0.0800 & -0.2874 & 0.2343 & -0.6006 & 0.0428 & -0.3564 & 0.1797 \\ 0.1237 & -0.7231 & 0.8639 & -0.0051 & 0.0531 & 0.0906 & -0.3715 \end{bmatrix}$$

O módulo dos pólos do sistema em malha aberta e em malha fechada é dado respectivamente por, d e d_1

$$d = \begin{bmatrix} 2.657 \\ 2.657 \\ 3.028 \\ 1.532 \\ 1.662 \\ 1.662 \\ 0.455 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \begin{bmatrix} 1.010 \\ 1.009 \\ 1.009 \\ 1.009 \\ 1.009 \\ 1.010 \\ 1.010 \end{bmatrix}$$

A Figura 5.12 mostra o resultado da alocação.

5.4 Aplicação em códigos convolucionais

Neste exemplo a metodologia de alocação de pólos numa coroa circular através da matriz de ganho de realimentação de estados será aplicada a um sistema discreto linear que descreve o comportamento estático de um codificador convolucional [39].

A motivação para este exemplo é a de usar a realimentação de estados em codificadores convolucionais como uma forma de analisar suas propriedades estruturais. Para tal, emprega-se uma função de realimentação de estados do codificador convolucional com o objetivo de alterar convenientemente a estrutura da treliça do codificador original, de modo a realizar a cifragem da informação a ser transmitida bem como a correção de erros. Estes objetivos são alcançados através da alocação dos pólos do codificador convolucional em regiões apropriadas do círculo de raio unitário que podem ser especificadas por exemplo como uma coroa circular de raios interno ρ_{in} e externo ρ_{ex} .

Em [5], mostra-se que para valores específicos do ganho de realimentação K , obtido via método do lugar das raízes, os pólos de um codificador convolucional inicialmente situados próximos à origem do círculo de raio unitário (codificador estável) passam a estar localizados próximos à circunferência de raio unitário (codificador instável). Como consequência, certas transições na treliça deixam de existir ou os pesos de Hamming das palavras-código ramo são

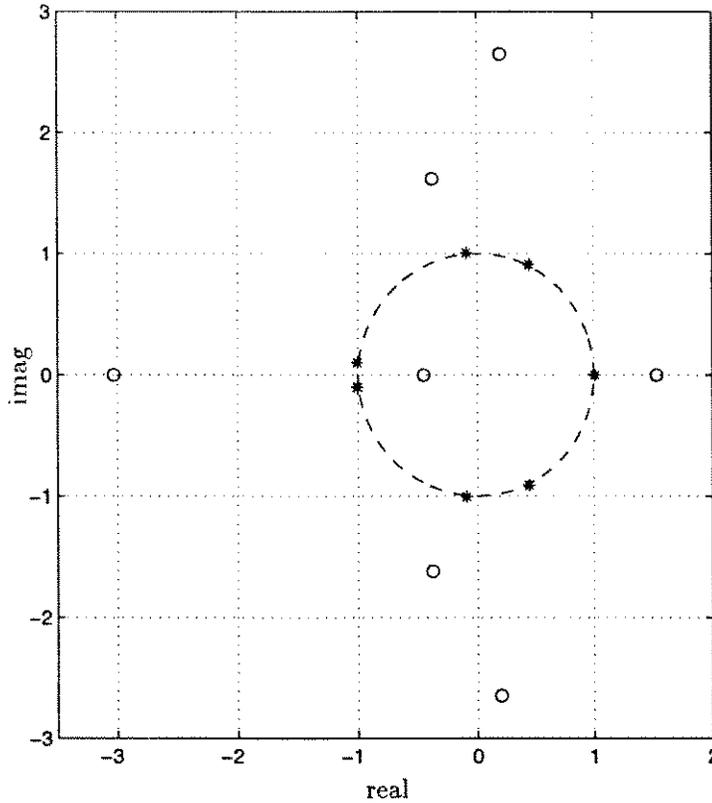


Figura 5.12: Resultado da alocação de pólos para o sistema do *Exemplo 5.3.2*. Pólos originais dados por 'o' e alocados com a matriz K denotados '*'.

menores, alterando as características do codificador. Este resultado conduz a uma proposta de um sistema criptográfico convencional cuja *chave* passa a ser o ganho K .

O codificador convolucional consiste de registros de deslocamentos, somadores modulo 2 e de um serializador para justapor as saídas paralelas e a sua representação pode ser vista na Figura 5.13. Assim, um codificador é especificado através da tripla (n, k, m) onde n denota o comprimento do rótulo associado à cada transição (palavra-código ramo), k denota o comprimento dos dígitos de informação a serem codificados, e m denota o número de memórias.

Além desta, o codificador convolucional pode ser representado por um diagrama de estados, ou por uma treliça, ou por um diagrama de estados particionado. Estas representações são utilizadas de acordo com o objetivo a ser alcançado. Por exemplo, a representação por uma treliça fornece o comportamento dinâmico e estrutural do codificador, enquanto que a representação por um diagrama de estados particionado fornece o comportamento "estático". É este aspecto que é utilizado no modelamento do codificador como sendo um sistema linear discreto podendo ser invariante ou variante no tempo. Conseqüentemente, o codificador pode ser caracterizado como sendo um sistema descrito pelas equações de estado e de saída, ou seja,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde x_k denota o estado do sistema no instante k , A é a matriz de transição entre os estados

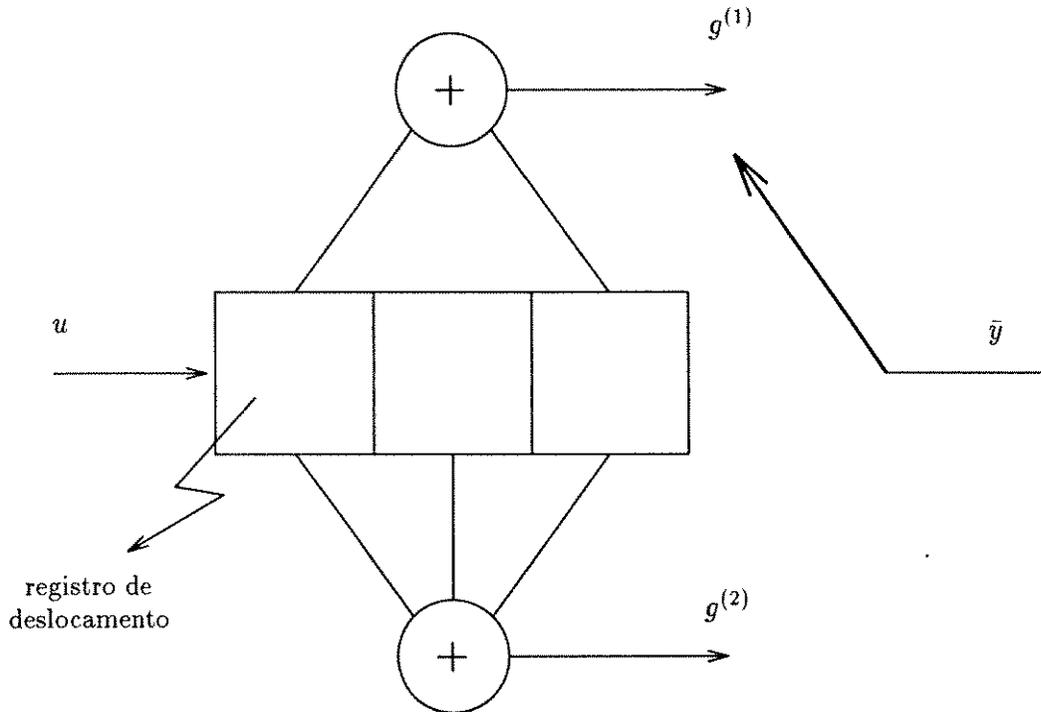


Figura 5.13: Codificador convolucional.

intermediários, B é a matriz entrada consistindo das transições entre o estado zero e os estados intermediários, e C é a matriz de saída consistindo das transições entre os estados intermediários e o estado zero, e y_k é a saída.

A consequência desta caracterização permite fazer uso de técnicas e conceitos da teoria de controle no sentido de análise de estabilidade e classificação do codificador como controlável e/ou observável [5]. No caso do codificador ser controlável, é possível aplicar um ganho K de modo a alterar a localização dos pólos. O processo usado para a alteração dos pólos estabelece um procedimento de classificação dos codificadores como estáveis ou instáveis ou, equivalentemente, códigos com boa capacidade de correção de erros e códigos catastróficos.

Todavia, para se alcançar a eficiência de obtenção de bons códigos para aplicações em codificação de canal bem como para cifragem necessitamos utilizar uma técnica de controle em malha fechada atuando na dinâmica dos estados. A Figura 5.14, ilustra o processo de realimentação a ser empregado.

O controle a ser utilizado é do tipo $u_k = Kx_k$. Substituindo u_k em (5.1), o sistema em malha fechada é então

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k. \quad (5.2)$$

A matriz B pode conter mais de uma coluna o que facilita a alocação desejada. Isto implica que mais de uma função de realimentação de estados estará influenciando na dinâmica do novo codificador, ou seja, a treliça associada a este novo codificador será diferente em termos de transições entre estados e também dos valores dos pesos de Hamming das palavras-código ramo.

alocação numa coroa circular de raios $\rho_{in} = 0.99$ e $\rho_{ex} = 1.01$, obtêm-se

$$K = \begin{bmatrix} -23.6328 & 42.4144 & -50.9923 & 114.1282 & -56.7700 & 49.6339 & 3.8798 \\ 88.9927 & -76.8227 & 60.4852 & -124.7693 & 379.9015 & -363.2387 & -19.8880 \end{bmatrix}$$

Para a implementação do cifrador, os valores devem se restringir a um campo determinado pelo valor de D . Assim, mediante uma aproximação adequada, obtemos o correspondente ganho $K_c = MK$, onde M é uma matriz diagonal com elementos uniformizadores de cada linha.

$$K_c = \begin{bmatrix} -D & D & -D & 1 & -D & D & D^2 \\ D & -D & D & -D & 1 & -1 & -D^2 \end{bmatrix}$$

A matriz alocada A_a obtida a partir do ganho de realimentação de estados K_c (após os arredondamentos que forem necessários) é então dada por

$$A_a = \begin{bmatrix} D^2 & D^2 & D^0 & D^2 & D^2 & \boxed{D^3} & D^2 \\ D^2 & D^4 & D^2 & D^2 & D^0 & \boxed{D^3} & D^2 \\ \boxed{-D^3} & D^2 & D^2 & D^2 & D^2 & D^0 & D^2 \\ D^3 & D & D^3 & D & D & \boxed{D^4} & D \\ D & \boxed{-D^2} & D^2 & D & D & \boxed{-D} & D \\ D & D & D & \boxed{-D^2} & \boxed{D} & \boxed{-D} & D \\ D & D & D^3 & D & \boxed{D} & \boxed{-D} & D^3 \end{bmatrix}$$

e a matriz A original é facilmente obtida de $A = A_a - BK_c$, na recepção.

Os elementos da matriz A_a ressaltados indicam alterações nos pesos de Hamming das palavras-código ramo bem como na orientação implicando na não existência de transições entre estados. A consequência só da diminuição dos pesos de Hamming conduz a códigos com poder de correção de erros menor do que o original. A Figura 5.15 mostra o resultado da alocação.

Note que as aproximações necessárias para restringir os valores reais ao campo de trabalho (potências de D) praticamente levam os pólos aos seus valores originais.

5.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados exemplos que ilustram a alocação de pólos via análise convexa, baseada nos resultados do capítulo 3 e 4.

Para ilustrar os resultados do capítulo 3, relativos à otimização $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, dois exemplos foram apresentados. O primeiro deles, gerado randomicamente, foi abordado exhaustivamente por todos os procedimentos de otimização apresentados ao longo do capítulo. O segundo exemplo, um sistema real, foi tratado apenas com os Teoremas 3.3, 3.7 e 3.8.

Em relação ao método para alocação em uma coroa circular, os pólos do sistema em malha fechada atestam a validade da proposta de alocação baseada no problema de otimização equivalente. Os valores dos raios interno e externo foram variados de acordo com a precisão desejada e os autovalores do sistema em malha fechada sempre ficam na região definida. Podem, entretanto, surgir dificuldades na obtenção da solução quando a dimensão do sistema aumenta, gerando problemas mal condicionados.

Capítulo 6

Conclusão Geral

Neste trabalho procurou-se discutir a obtenção de controladores via realimentação de estados, para sistemas lineares discretos e invariantes no tempo, tendo como critério de desempenho as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , através de problemas de otimização descritos em termos de desigualdades matriciais lineares.

Através dessa mesma abordagem, mostra-se que é possível fazer a alocação de pólos em subregiões do plano complexo. Em particular, estudou-se a alocação no interior de uma coroa circular, problema que possibilitou uma aplicação na área de criptografia em códigos convolucionais [39].

Partindo de condições conhecidas na literatura que relacionam as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com desigualdades matriciais, mostrou-se que após algumas manipulações algébricas e/ou mudanças de variáveis é possível obter um ganho de realimentação de estados com características de otimalidade através de problemas convexos descritos em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs), que podem ser resolvidos de maneira eficaz através de algoritmos de complexidade polinomial. Em particular, foram apresentadas parametrizações em termos de LMIs afins em relação a todas as matrizes envolvidas, com a expressão do ganho independente explicitamente das matrizes do sistema, permitindo assim a extensão imediata para o caso incerto [32], [40].

A seguir, demonstrou-se como a alocação de pólos pode ser obtida, de forma alternativa aos métodos clássicos, através de um problema de otimização convexa onde as restrições são equivalentes a inequações discretas de Lyapunov modificadas. Apesar de ter sido tratado apenas o caso de alocação numa coroa circular, considerando sistemas lineares discretos invariantes no tempo e precisamente conhecidos, ficou claro que um procedimento similar pode ser usado de maneira mais ampla (alocação de pólos em qualquer região do plano complexo) desde que o conjunto de restrições que descrevem a região de alocação defina um espaço paramétrico convexo.

Uma possível direção de aprofundamento sugerida seria a extensão da formulação convexa em termos de LMIs apresentada para tratar o caso de estabilização \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ através de realimentação dinâmica de saída, tanto para sistemas precisamente conhecidos quanto para sistemas incertos descritos por matrizes pertencentes a domínios polidrais convexos. Outra vertente seria o estudo de incertezas nos controladores.

Poderiam eventualmente ser tratados problemas de: controle \mathcal{H}_∞ com parâmetros não-lineares ajustáveis em sistemas “descriptor”; domínio de estabilidade em sistemas lineares; controle robusto multi-objetivo; funções de Lyapunov com parâmetros dependentes, etc.

Bibliografia

- [1] A. Albert. Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(2):434–440, 1969.
- [2] S. Boyd, C. Barratt, and S. Norman. Linear controller design: limits of performance via convex optimization. *Proc. IEEE*, 78(3):529–574, 1990.
- [3] S. P. Boyd and C. H. Barratt. *Linear Controller Design: Limits of Performance*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1991.
- [4] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 1994.
- [5] C. E. Câmara. *Estabilidade e Robustez de Códigos Convolucionais com Aplicação à Correção de Erros e Criptografia*. Master's thesis, FEE/UNICAMP, 1989. Em Português.
- [6] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [7] M. Chilali and P. Gahinet. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, 1996.
- [8] M. C. de Oliveira, D. P. de Farias, and J. C. Geromel. *LMISol User's Guide (version 1.0)*. Campinas, Brasil, 1997.
- [9] R. C. Dorf and R. H. Bishop. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1995.
- [10] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. Francis. State space solutions to the standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34:831–847, 1989.
- [11] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 2nd edition, 1990.
- [12] P. Gahinet and A. Nemirovskii. *LMILab—A Package for Manipulating and Solving LMI's (version 2.0)*. France, 1993.
- [13] P. Gahinet and A. Nemirovskii. General-purpose LMI solvers with benchmarks. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 3162–3165, San Antonio, USA, 1994.

- [14] J. C. Geromel, J. Bernussou, and P. L. D. Peres. Decentralized control through parameter space optimization. *Automatica*, 30(10):1565–1578, 1994.
- [15] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29:381–402, 1991.
- [16] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. \mathcal{H}_2 guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 57(4):853–864, 1993.
- [17] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. \mathcal{H}_∞ control of discrete-time uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1072–1075, 1994.
- [18] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. A convex approach to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for discrete-time uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(6):1816–1833, 1995.
- [19] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):997–1003, 1996.
- [20] L. El Ghaoui, R. Nikoukhah, and F. Delebecque. *LMITOOL: A front-end for LMI optimization user's guide*. France, 1995. Available via anonymous ftp to ftp.ensta.fr, under /pub/elghaoui/lmitool.
- [21] W. M. Haddad, D. S. Bernstein, and D. Mustafa. Mixed-norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ regulation and estimation: the discrete-time case. *Systems & Control Letters*, 16:235–247, 1991.
- [22] P. A. Iglesias and K. Glover. State space approach to discrete-time \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Control*, 54:1031–1073, 1991.
- [23] INRIA - Institute National de Recherche en Informatique et Automatique, France. *Scilab*, 1993.
- [24] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1980.
- [25] I. Kaminer, P. P. Khargonekar, and M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems via convex optimization. *Automatica*, 29(1):57–70, 1993.
- [26] L. Keel, S. P. Bhattacharyya, and J. W. Howze. Robust control with structured perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(1):68–78, 1988.
- [27] J. N. Little and A. J. Laub. *Control System Toolbox User's Guide*. The Mathworks, Inc., USA, 1990.
- [28] A. M. Lyapunov. *Problème Generale de la Stabilité du Mouvement*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ., 1949. French translation in 1907, photo-reproduced in *Annals of Mathematics*.
- [29] Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994. volume 13 of *Studies in Applied Mathematics*.

- [30] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ., 1970.
- [31] K. Ogata. *Discrete-Time Control Systems*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ., 1987.
- [32] R. M. Palhares, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Alternative LMIs characterization of \mathcal{H}_2 and central \mathcal{H}_∞ discrete-time controllers. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1495–1496, Kobe, Japan, 1996.
- [33] P. L. D. Peres and J. C. Geromel. \mathcal{H}_2 control for discrete-time systems: optimality and robustness. *Automatica*, 29:225–228, 1993.
- [34] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded uncertain domains. *Automatica*, 29(2):491–493, 1993.
- [35] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. Convex analysis of discrete-time uncertain \mathcal{H}_∞ control problem. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 521–526, Brighton, UK, 1991.
- [36] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. \mathcal{H}_2 output feedback control for discrete-time systems. In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, volume 3, pages 2429–2433, Baltimore, USA, 1994.
- [37] P. L. D. Peres and S. R. Souza. \mathcal{H}_∞ decentralized output feedback control for discrete-time uncertain systems. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, volume 4, pages 2926–2930, Seattle, USA, 1995.
- [38] P. L. D. Peres, C. K. Umezu, and G. Guaitoli. \mathcal{H}_2 control of uncertain discrete-time systems with regional pole constraint. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 565–570, Lake Buena Vista, USA, 1994.
- [39] D. C. W. Ramos, C. E. Câmara, P. L. D. Peres, and R. Palazzo Jr. Considerações sobre a realimentação de estados em codificadores convolucionais com aplicações em codificação e criptografia. In *Anais do XV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, volume 1, pages 258–262, Recife-PE, Brasil, 1997.
- [40] D. C. W. Ramos, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres. Caracterização de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos por desigualdades matriciais lineares. In *Anais do 11^o Congresso Brasileiro de Automática*, volume 1, pages 61–66, São Paulo-SP, Brasil, 1996.
- [41] A. C. M. Ran and R. Vreugdenhil. Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous and discrete-time systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 99:63–83, 1988.
- [42] C. E. De Souza and L. Xie. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback \mathcal{H}_∞ controllers. *Systems & Control Letters*, 18:61–71, 1992.

-
- [43] N. Sundararajan. Sensitivity reduction in aircraft control systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-14(2):292–297, 1978.
- [44] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):621–634, 1971.
- [45] J. C. Willems. On the existence of a nonpositive solution to the Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5), 1974.
- [46] I. Yaesh and U. Shaked. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: \mathcal{H}_∞ optimal linear control and filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1264–1271, 1991.
- [47] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximative inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):301–320, 1981.
- [48] K. Zhou, K. Glover, and J. C. Doyle. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, USA, 1995.
- [49] F. J. V. Zuben, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. A linear optimization approach to \mathcal{H}_∞ and mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time uncertain systems. *SBA Controle & Automação*, 8(3):113–120, 1997.