Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

João Coelho Silva Filho

Contribuições aos Métodos de Procura dos Códigos de Treliça Ótimos Sobre Novas Partições de Reticulados

Campinas
2008

João Coelho Silva Filho

Contribuições aos Métodos de Procura dos Códigos de Treliça Ótimos Sobre Novas Partições de Reticulados

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Prof. Dr. Walter da Cunha Borelli
Co-orientadora: Profa. Dra. Emília Rosa M. Marques

Campinas
2008

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Silva Filho, João Coelho
SI38c	Contribuições aos métodos de procura dos códigos de treliça ótimos sobre novas partições de reticulados / João Coelho Silva Filho. --Campinas, SP: [s.n.], 2008.
	Orientadores: Walter da Cunha Borelli, Emília de Mendonça Rosa Marques.
	Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
	1. Teoria dos erros. 2. Teroia dos reticulados. 3. Teoria da codificação. 4. Codigos de controle de erros (Teoria da informação). 5. Sistemas decimais de codigos binario. I. Borelli, Walter da Cunha. II. Marques, Emília de Mendonça Rosa. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Contributions to the search methods of optimum trellis codes on new lattices partitioning
Palavras-chave em Inglês: Trellis codes, Error-correcting code and lattices, Lattices partitioning, Theory encoded
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática
Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica
Banca examinadora: Mércio Botelho Faria, Henrique Lazari, Renato Baldini Filho, Reginaldo Palazzo Junior
Data da defesa: 12/12/2008
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

João Coelho Silva Filho
Licenciado em Matemática – UFMA
Mestre em Matemática – DMAT-UFPB

Contribuições aos Métodos de Procura dos Códigos de Treliça Ótimos Sobre Novas Partições de Reticulados

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Walter da Cunha Borelli
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr.
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Renato Baldini Filho
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Mercio Botelho Faria
DMAT/UFV

Prof. Dr. Henrique Lazari
DMAT/UNESP

Campinas
2008

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: João Coelho Silva Filho

Data da Defesa: 12 de dezembro de 2008

Título da Tese: "Contribuições aos Métodos de Procura dos Códigos de Treliça Ótimos Sobre Novas Partições de Reticulados"

Prof. Dr. Walter da Cunha Borelli (Presidente): ______________________

Prof. Dr. Mércio Botelho Faria: ______________________

Prof. Dr. Henrique Lazari: ______________________

Prof. Dr. Renato Baldini Filho: ______________________

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior: ______________________

Aos meus filhos, Ana e Sandino, e à minha esposa, Rosimar.

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Walter Borelli, pela orientação e colaboração na realização desta tese.

À minha co-orientadora Profa. Dra. Emília Rosa, pela co-orientação e incentivo.

À Rosimar, Ana, Sandino, João Magarefe, meus irmãos e toda minha família, pelo constante apoio afetivo, pelo incentivo e por compreender minha falta em muitos momentos importantes de suas vidas.

Aos meus amigos: Andréia, Clarice, Daniel, Giulliano, João Henrique, Júlio, Juliana, Lourival Góis, Luzinete, Polyane, Ricardo de Oliveira, Ricardo Coelho, Renato, Talia, Taís, Vandenberg, Vagner e Walter, pelo apoio pessoal e científico.

Aos demais colegas do Departamento de Telemática pelo prazer da convivência.

Aos professores do DEMATI-UEMA, pela liberação para o doutorado.

À UNICAMP pela boa estrutura que oferece aos estudantes e pesquisadores.

À banca examinadora, pela disposição em julgar esta tese.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para elaboração desta tese.

À UEMA, pelo apoio financeiro.

Procure ser uma pessoa de valor, em vez de procurar ser uma pessoa de sucesso. O sucesso é conseqüência.

Albert Einstein

Resumo

Esta tese apresenta contribuições aos esquemas de modulação codificada para os códigos de treliça sobre partições de reticulados. Uma das principais contribuições é a construção dos códigos de treliça sobre novas partições de reticulados e também em cadeias de partições. Para otimizar a procura dos códigos de treliça ótimos, é construído um algoritmo de procura. É proposta uma classe de equivalência utilizada para excluir as matrizes geradoras de códigos equivalentes, sendo que esta classe de equivalência quando aplicada ao algoritmo de procura dos códigos de treliça ótimos diminui a quantidade de matrizes geradoras a ser investigada. Apresentam-se, vários exemplos de códigos de treliça sobre reticulados quociente nos espaços bi-dimensional, tridimensional e tetra-dimensional com satisfatórios ganhos de codificação e menor energia média das constelações de sinais.

Palavras-chave: Teoria da Codificação; Códigos de Treliça; TCM; Códigos Corretores de Erros e Reticulados; Partição de Reticulados.

Abstract

This thesis presents some contributions to the coded modulation schemes for the trellis codes based on lattices partitioning. One of the main contributions is the construction of the trellis codes based on novel lattices partitioning and also on chains partitioning. In order to optimize the search for the optimum trellis codes, a search algorithm was proposed. An equivalence class is proposed to exclude the generator matrix of equivalent codes. This equivalence class, when applied to the search algorithm for optimum trellis codes, reduces quite strongly the number of generator matrices to be investigated. Several examples of trellis codes on lattices quotient are shown in bi-dimensional, three-dimensional and tetra-dimensional spaces with satisfactory coding gain and lower average energy of the signal constellations.

Key-words: Coding theory; Trellis code; TCM; Error-correcting code and lattices; Lattices partitioning.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Notação

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano de dimensão n
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathcal{A}$	Anel
Λ	Reticulado lambda
Γ	Subreticulado gama
$\mathbb{Z}_m$	Conjunto das classes residuais módulo m
$\mathbf{G}$	Grupo
H	Subgrupo
$\mathbf{x}$	Vetor x
$S_{\mathbb{R}^n}$	Conjunto das simetrias do $\mathbb{R}^n$
$V(E_\rho(\mathbf{0}))$	Esfera de raio ρ com centro na origem
$d^2_{\min}(\Lambda)$	Distância quadrática mínima em Λ
$d(\Lambda)$	Determinante da matriz geradora de Λ
$[\Lambda : \Gamma]$	Índice de Γ em Λ
$T(\Lambda)$	Translação por elementos de Λ
$V(\Lambda)$	Volume de uma região fundamental de Λ
Δ	Densidade do reticulado
δ	Densidade de centro do reticulado
K	Corpo de números
$\mathbb{Z}_K$	Anel dos inteiros sobre K
S	Constelação de sinais
R	Reticulado quociente
d	Distância do código de treliça
$d_{\min}$	Distância mínima no reticulado quociente
d_{free}	Distância livre do código de treliça
$N(g)$	Norma ou energia de $g \in R$
M	Pontos da constelação codificada
N	Pontos da constelação não-codificada

$\mathcal{G}$	Ganho de codificação
k_1	Entradas do codificador
k_2	Entradas não-codificadas
V	Memórias
v	Memórias por entradas
G	Matriz geradora do código
ρ	Taxa do código
p	Energia média da constelação
p^u	Energia média da constelação não-codificada
GN	Matriz norma
GR	Matriz dos rótulos
Δ_{inf}	Limitante inferior do d_{free}
Δ_{sup}	Limitante superior do d_{free}
L	Comprimento do caminho fechado da treliça

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

As relações existentes entre os sistemas de comunicação e a geometria foram iniciadas por Shannon, em 1948, através do teorema de codificação de canais, onde um conjunto de sinais é utilizado de forma adequada à teoria de codificação de canais e cada sinal é representado por um ponto no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. O método de expressar um conjunto de palavras-código é associado ao problema geométrico de representar pontos regularmente uniformes em regiões de um subespaço do $\mathbb{R}^n$, onde figuras geométricas uniformes representam os reticulados. Estes reticulados constituem uma ferramenta importante na teoria da codificação, tanto para códigos de bloco quanto para códigos de treliça, [5].

No trabalho de Ungerboeck [26], os processos de codificação e modulação foram tratados simultaneamente. Muitos pesquisadores colaboraram na estruturação dessa nova linha de pesquisa, dentre eles, Conway e Sloane [5], Calderbank [3] e Forney [7] e o próprio Ungerboeck, [27].

A pesquisa em modulação codificada é atualmente dividida em dois grandes grupos: TCM (Trellis Code Modulation) e BCM (Block Code Modulation). No primeiro grupo os codificadores geram códigos convolucionais, os quais foram utilizados por Ungerboeck na representação dos códigos por treliça. No outro grupo os codificadores geram códigos de bloco.

Os códigos de treliça dos esquemas de codificação aqui propostos são utilizados para codificar seqüências de dados representados por vetores sobre um alfabeto dado por um anel $\mathcal{A}$, onde um codificador convolucional mapeia uma constelação de sinais fixa no espaço Euclidiano. As entradas do codificador são seqüências do alfabeto do anel e as saídas são pontos de uma constelação de sinais dada por um reticulado quociente, o qual é obtido do quociente de um reticulado Λ por um subreticulado Γ de Λ, ou seja, os símbolos de saída são classes laterais de um reticulado. Este método de construção também foi utilizado por Forney, [6], e Calderbank e Marzo, [2]. A construção é feita escolhendo-se um reticulado e um subreticulado, para em seguida, construir o codificador convolucional para a constelação de sinais do reticulado quociente selecionado. Este processo permite que a codificação seja trabalhada com constelações de sinais maiores, reticulados de dimensão elevada e de maior densidade, sendo estas utilizadas na procura de códigos com melhores ganhos de codificação. O desempenho destes códigos está diretamente relacionado à energia média da constelação de sinais.

A utilização de reticulados em espaços Euclidianos de dimensão elevada, tem a finalidade de garantir uma transmissão próxima do ideal de Shannon, com uma probabilidade de erro controlada. A necessidade de particionamento de reticulados surge em muitas aplicações, entre essas, a aplicação aos códigos de treliça. O reticulado é particionado com a finalidade de aumentar a distância mínima entre os elementos do reticulado, reduzindo a probabilidade de erros de codificação. As idéias de subconjuntos especiais formuladas por Borelli [1], motivaram o trabalho de escolha de subconjuntos especiais de matrizes norma pesquisado por Rosa [12], sendo esta, a direção seguida nesta tese.

A pesquisa apresentada nesta tese, determina as matrizes geradoras de códigos de treliça, utilizando o resultado do Teorema 3.1, reduzindo o número de matrizes a ser investigada. É construída uma matriz de rótulos, simplificando o cálculo dos espectros de peso, através da tabela de Cayley, introduzindo uma nova forma de representação dos códigos de treliça, tornando mais eficiente o algoritmo de procura por código ótimo. No algoritmo de procura, fixados os parâmetros do codificador do código de treliça e para um determinado reticulado e subreticulado, pode se determinar um código ótimo(maior distância mínima), toda vez que a procura seja exaustiva, isto é, quando considerado todos os possíveis codificadores para aqueles parâmetros e determinado reticulado. Aplicando operadores lineares com propriedades que ligam estruturas algébricas aos códigos de treliça, são determinadas novas classes de equivalências entre os códigos de treliça. É desenvolvido um algoritmo de procura dos códigos ótimos utilizando os conceitos de matriz dos rótulos, tabela de Cayley e classes de equivalência. O algoritmo é utilizado em vários exemplos de códigos de treliça sobre novas partições de reticulados e cadeia de reticulados. Neste exemplos, são apresentados alguns códigos de treliça ótimos com razoável ganho de codificação.

1.2 Descrição do Trabalho

A presente tese é composta por seis capítulos, sendo o primeiro esta introdução.

O capítulo 2 é uma apresentação dos conceitos, definições e propriedades de estruturas algébricas importantes para esse trabalho, como grupo, anel, corpo e reticulado, visando dar um suporte preliminar ao desenvolvimento da tese, estabelecendo uma notação padrão, propiciando uma compreensão do conteúdo principal do trabalho. O capítulo está dividido em três seções. A primeira enfoca a teoria dos reticulados, a segunda faz uma representação geométrica dos reticulados algébricos sobre corpos quadráticos e na última seção estão as constelações de sinais.

No capítulo 3 são apresentadas as definições e propriedades dos reticulados quociente e dos códigos de treliça, além de ser mostrada a relação entre os dois. Em seguida é proposta a construção dos reticulados quociente para o código de treliça. A finalidade deste capítulo é determinar os reticulados quociente para construção de melhores códigos de treliça, para em seguida, apresentar as matrizes dos códigos de treliça ótimos. Uma outra contribuição contida neste capítulo é a elaboração e demonstração de um teorema que explicita as matrizes geradoras dos códigos de treliça. Na seção 3.4, definem-se os conceitos e as propriedades de matriz norma do código de treliça, matriz dos rótulos e o conceito de subconjuntos especiais. Estes elementos, são determinantes na procura dos códigos de treliça ótimos. Ainda neste capítulo é verificado que o desempenho do código de treliça está relacionado à ordem do reticulado quociente, ao número de memórias e, principalmente, ao melhor reticulado para o sistema de codificação. Na seção 3.5 são dados exemplos de reticulados quociente em $\mathbb{R}^2$ para códigos de treliça que apresentam bons desempenhos. Também são construídas as constelações de melhor energia média e comparados os ganhos de codificação entre vários códigos de treliça. Foram comparadas as partições de reticulados derivadas de reticulados quadrados e hexagonais mostrando a vantagem desses sobre os primeiros, em relação a energia mínima. Os melhores ganhos de codificação foram alcançados nos reticulados geometricamente representados por figuras regulares.

O capítulo 4 mostra a existência de classes de equivalência entre os códigos de treliça. A existência é demonstrada pela aplicação de importantes conceitos de álgebra linear e teoria de grupos. Os grupos gerados pela composição de operadores lineares agindo nas colunas da matriz geradora do código de treliça, mostram que vários códigos de treliça em partições de reticulados de um mesmo esquema de codificação são equivalentes, ou seja, apresentam o mesmo espectro de peso.

No capítulo 5 gera-se um processo de procura por códigos de treliça ótimos, onde são dadas duas contribuições ao algoritmo de procura dos códigos ótimos feito em [12], [15] e [16]. A primeira contribuição é a aplicação do Teorema 3.1 que define as matrizes geradoras de códigos e a representação pela matriz de rótulos e, a segunda é a aplicação das classes de equivalências determinando as várias matrizes geradoras dos códigos de treliça equivalentes. Ambas as contribuições, tornam a procura por códigos ótimos mais eficientes do que aquela baseada na matriz norma e em apenas na classe de equivalência do grupo diedral considerado em [12]. Além destas contribuições citadas neste capítulo, apresenta-se a construção de códigos de treliça em novas partições e cadeias de partições de reticulados do $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^8$, alguns destes sendo códigos ótimos com ganho razoável de codificação, fortalecendo os resultados obtidos. Os resultados de Calderbank, [3], feitos para reticulados de $\mathbb{Z}^2$, são estendidos às dimensões 3 e 4. No espaço tridimensional são construídos códigos de treliça com desempenhos expressivamente elevados. No espaço tetradimensional são construídas constelações de sinais com energia média de baixa cardinalidade, sendo o melhor resultado para as partições de reticulados em $\mathbb{Z}^4$. Na última seção são construídos alguns códigos de treliça com entradas sobre o anel $\mathbb{Z}_4$.

A conclusão, as considerações finais e as propostas para trabalhos futuros são descritas no capítulo 6. No desenvolvimento das pesquisas de elaboração desta tese, foram produzidas algumas publicações em anais de congressos, as quais estão referenciadas na bibliografia da tese.

Capítulo 2

Reticulados e Constelações

Neste capítulo apresentam-se as definições e propriedades necessárias para o entendimento dos capítulos seguintes. As propriedades algébricas e geométricas sobre empacotamento esférico são os referenciais teóricos para o entendimento dos reticulados. Esses reticulados são identificados como representações geométricas ou grades geométricas dos números algébricos. O estudo dos empacotamentos esféricos em espaços do $\mathbb{R}^n$ é uma ferramenta bastante usada na teoria da codificação, estabelecendo uma relação estreita entre reticulados e códigos. Para um estudo mais aprofundado sobre esses conceitos, são indicadas as referências [5] e [17].

2.1 Anéis e Corpos

Esta seção é utilizada para apresentar as definições básicas das seguintes estruturas algébricas: grupos, anéis e corpos. O Leitor que deseje aprofundar-se nestes conceitos pode consultar, [9], [10] e [17].

Definição 2.1 *Um conjunto não vazio* $\mathbf{G}$ *munido com uma operação binária*

$$\begin{aligned} * : \quad & \mathbf{G} \times \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G} \\ & (a, b) \longmapsto a * b \end{aligned}$$

é um **grupo** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *Existe* $e \in \mathbf{G}$ *tal que* $e * a = a * e = a, \forall a \in \mathbf{G}$;

2. *Para todo* $a \in \mathbf{G}$, *existe* $b \in \mathbf{G}$ *tal que* $b * a = a * b = e$;

3. $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in \mathbf{G}$.

O grupo é **abeliano** ou **comutativo** se

$$a * b = b * a, \forall a, b \in \mathbf{G}.$$

Se a notação utilizada para a operação no grupo $\mathbf{G}$ é aditiva ou multiplicativa, é dito que $\mathbf{G}$ é um **grupo aditivo** ou **grupo multiplicativo**, respectivamente.

Definição 2.2 *Um* **anel** *é um conjunto não vazio $\mathcal{A}$ equipado com duas operações binárias, adição $(x, y) \to x + y$ e multiplicação $(x, y) \to xy$ com as seguintes propriedades:*

1. *$\mathcal{A}$ é um grupo comutativo sob a adição;*
2. *$x(yz) = (xy)z, \forall x, y, z \in \mathcal{A}$;*
3. *$x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz, \forall x, y, z \in \mathcal{A}$;*

Definição 2.3 *Para definir um* **corpo** *segue a cadeia de definições:*

1. *Se em um anel $\mathcal{A}$ existe $1 \in \mathcal{A}$ tal que $x1 = 1x = x, \forall x \in \mathcal{A}$, é dito que $\mathcal{A}$ é um* **anel com identidade***;*
2. *Se $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$, é dito que $\mathcal{A}$ é um* **anel comutativo***;*
3. *Se para todos $x, y \in \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é um anel comutativo com unidade, se*

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0,$$

   é dito que $\mathcal{A}$ é um **domínio***;*

4. *Se para todo $x \in \mathcal{A} - \{0\}$, $\mathcal{A}$ um domínio, existir $y \in \mathcal{A}$ tal que $xy = yx = 1$, é dito que $\mathcal{A}$ é um* **corpo***.*

Definição 2.4 *Sejam* $\mathbf{G}$ *um grupo e H um subconjunto de G. Então é dito que H é um* **subgrupo** *de* $\mathbf{G}$*, em símbolo $H \leq \mathbf{G}$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$H \neq \emptyset$;*
2. *$ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H$.*

Definição 2.5 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Então é dito que H é um* **subgrupo normal** *de* $\mathbf{G}$*, se*

$$Ha = aH, \forall a \in \mathbf{G}, \text{ isto é, } aHa^{-1} = H, \forall a \in \mathbf{G}.$$

Observação 2.1 *Todo subgrupo de um grupo abeliano é normal.*

O conjunto

$$S_{\mathbb{R}^n} = \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ é uma bijeção}\}$$

é um grupo simétrico.

2.2 Reticulados

Nesta seção são apresentadas as definições e propriedades algébricas e geométricas dos reticulados e empacotamentos esféricos.

A **norma quadrática** $\|x\|^2$ de um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é a soma dos quadrados de suas componentes. A **distância Euclidiana quadrática** entre dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é a norma quadrática de sua diferença, isto é,

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 .$$

Uma **esfera** em $\mathbb{R}^n$ com centro $\mathbf{c}$ e raio ρ consiste de todos os pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 = \rho^2$ e escreve-se,

$$E_\rho(\mathbf{c}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 = \rho^2\}.$$

O **volume** de $E_\rho(\mathbf{0})$ é definido por

$$V(E_\rho(\mathbf{0})) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \rho^n}{G\left(\frac{n+2}{2}\right)},$$

onde

$$G(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \alpha > 0,$$

é a função gama.

Sendo n um inteiro positivo, há dois casos a serem considerados:

1. Se n é par, ou seja, $n = 2k$, então

$$V(E_\rho(\mathbf{0})) = \frac{\pi^k \rho^{2k}}{k!};$$

2. Se n é ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$, então

$$V(E_\rho(\mathbf{0})) = \frac{2^{2k+1} k! \pi^k \rho^{(2k+1)}}{(2k + 1)!}.$$

Observação 2.2 $V(E_\rho(\mathbf{c})) = V(E_\rho(\mathbf{0}))$, *pois o volume é invariante por translação.*

Um **empacotamento esférico** Λ em $\mathbb{R}^n$ de raio ρ consiste de uma seqüência infinita de pontos $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots$ em $\mathbb{R}^n$, tais que

$$\|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j\|^2 \geq 4\rho^2,$$

para todo $i \neq j$. Os $\mathbf{c}_i$ são os centros das esferas e ρ é o **raio de empacotamento** e, neste caso,

$$d^2_{\min}(\Lambda) = 4\rho^2,$$

onde $d^2_{\min}(\Lambda)$ é a distância Euclidiana quadrática mínima entre os elementos de Λ, isto é, a distância intraconjunto de Λ.

Definição 2.6 *Um subgrupo aditivo em* $\mathbb{R}^n$ *é* **discreto** *se sua interseção com qualquer subconjunto limitado em* $\mathbb{R}^n$ *é finita.*

Definição 2.7 *Um* **reticulado** Λ *é um subgrupo aditivo discreto em* $\mathbb{R}^n$ *ou, equivalentemente, os centros do empacotamento esférico de* Λ *formam um grupo aditivo sob a adição de vetores.*

Exemplo 2.1 $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ *é um reticulado de* $\mathbb{R}^n$*.*

Teorema 2.1 *Seja* Λ *um reticulado em* $\mathbb{R}^n$*. Então* Λ *é gerado, como* $\mathbb{Z}$*-módulo, por* m *vetores linearmente independentes sobre* $\mathbb{R}$*, neste caso* $m \leq n$*.*

Seja $\Lambda = \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle$ um reticulado em $\mathbb{R}^n$ gerado por n vetores linearmente independentes $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ sobre $\mathbb{R}$. Se $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, então a matriz

$$M = [\mathbf{x}_i : 1 \leq i \leq n],$$

cujas linhas são os vetores $\mathbf{x}_i$ é chamada uma **matriz geradora** do reticulado Λ, e os elementos do reticulado Λ consistem de todos os vetores $\mathbf{u}M$, onde $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$.

O **determinante** do reticulado Λ é o valor absoluto do determinante de uma matriz geradora M, isto é,

$$d(\Lambda) = |\det(M)|\,. \tag{2.1}$$

O determinante do reticulado está bem definido, pois $d(\Lambda)$ é independente da $\mathbb{Z}$-base escolhida para Λ.

Sejam Λ um reticulado de $\mathbb{R}^n$ e Γ um subreticulado de Λ. Considere $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ uma $\mathbb{Z}$-base de Λ e $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ uma $\mathbb{Z}$-base de Γ. Como $\mathbf{y}_j \in \Lambda$, existem únicos $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{x}_i, \quad \text{com} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Se $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, então

$$[\Lambda : \Gamma] = \det(\mathbf{B}) = \frac{d(\Lambda)}{d(\Gamma)}$$

é chamado o **índice** de Γ em Λ. Note que, $[\Lambda : \Gamma]$ depende somente de Λ e Γ, não das $\mathbb{Z}$-bases escolhidas para Λ e Γ. Pela regra de Cramer, obtém-se que

$$d\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{y}_i, \quad \text{com} \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$d\Lambda \subseteq \Gamma \subseteq \Lambda,$$

onde $d\Lambda = \{d\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Lambda\}$ é um reticulado. Portanto, $\{d\mathbf{x}_1, \ldots, d\mathbf{x}_n\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de Γ.

Proposição 1 *Sejam Λ um reticulado de $\mathbb{R}^n$ e Γ um subreticulado de Λ. Então:*

1. *Para cada $\mathbb{Z}$-base $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de Λ existe uma $\mathbb{Z}$-base $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ de Γ tal que*

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^{i} b_{ij}\mathbf{x}_j,$$

onde $b_{ij} \in \mathbb{Z}$, $b_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

2. *Para cada $\mathbb{Z}$-base $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ de Γ existe uma $\mathbb{Z}$-base $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de Λ tal que*

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^{i} b_{ij}\mathbf{x}_j,$$

onde $b_{ij} \in \mathbb{Z}$, $b_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

Corolário 2.1 *Sejam Λ um reticulado de $\mathbb{R}^n$ e Γ um subreticulado de Λ. Então:*

1. *Para cada $\mathbb{Z}$-base $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de Λ existe uma $\mathbb{Z}$-base $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ de Γ tal que*

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^{i} b_{ij}\mathbf{x}_j,$$

onde $b_{ij} \in \mathbb{Z}$, $b_{ii} > 0$ e $0 \leq b_{ji} < b_{jj}$, $1 \leq i \leq n$.

2. *Para cada $\mathbb{Z}$-base $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ de Γ existe uma $\mathbb{Z}$-base $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de Λ tal que*

$$\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^{i} b_{ij}\mathbf{x}_j,$$

onde $b_{ij} \in \mathbb{Z}$, $b_{ii} > 0$ e $0 \leq b_{ji} < b_{ii}$, $1 \leq i \leq n$.

Considerando d_Γ o índice de Γ em Λ, tem-se pela proposição 1, que

$$d_\Gamma = \prod_{i=1}^{n} |b_{ii}| \,.$$

Mas, pelo Corolário 2.1 todo $\mathbf{x} \in \Lambda$ está na mesma classe como exatamente um dos vetores

$$c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n, 0 \leq c_j < b_{jj}.$$

Portanto, $d_\Gamma = [\Lambda : \Gamma]$.

Corolário 2.2 *Sejam Λ um reticulado de $\mathbb{R}^n$ e Γ um subreticulado de Λ. Então o índice de Γ em Λ é igual a $[\Lambda : \Gamma]$.*

Observação 2.3 *Sejam G um grupo abeliano livre de posto n e H um subgrupo próprio de G. Então $[G : H]$ é finito se, e somente se, os postos de G e H são iguais.*

Seja Λ um reticulado em $\mathbb{R}^n$. Então obtém-se uma partição de $\mathbb{R}^n$ em classes de equivalência módulo Λ, isto é, dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} (\operatorname{mod} \Lambda)$ se, e somente se, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \Lambda$. Assim, a classe de equivalência de $\mathbf{x}$ ou a translação do reticulado Λ por $\mathbf{x}$ é o conjunto

$$\mathbf{x} + \Lambda = \{\mathbf{x} + \lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

Note que, $\mathbf{x} + \Lambda$ pode ser caracterizado como o conjunto de pontos em $\mathbb{R}^n$ que são gerados pelo grupo das translações por elementos de Λ, ou seja,

$$T(\Lambda) = \{t_\lambda : \mathbf{y} \longmapsto \mathbf{y} + \lambda : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda\},$$

agindo no ponto inicial $\mathbf{x}$, tem-se

$$\mathbf{x} + \Lambda = \{t_\lambda(\mathbf{x}) : t_\lambda \in T(\Lambda)\}.$$

Uma região em $\mathbb{R}^n$ que contém um e somente um ponto de cada classe lateral de Λ em $\mathbb{R}^n$ é chamada de **região fundamental**. Note que a região fundamental não é única, mas toda região fundamental tem o mesmo volume, pois o volume é invariante por translação. O

volume fundamental de um reticulado Λ é o volume de uma região fundamental, o qual será denotado por $V(\Lambda)$.

Seja $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ uma $\mathbb{Z}$-base para o reticulado Λ. Então o conjunto

$$\mathbf{P} = P(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i : 0 \leq a_i < 1 \right\},$$

é uma região fundamental de Λ. De fato, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $\mathbf{x} = b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n$, $b_i \in \mathbb{R}$. Para cada i, $b_i = c_i + a_i$, onde $c_i \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq a_i < 1$, tem-se $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{r}$ com $\mathbf{y} \in \Lambda$ e $\mathbf{r} \in \mathbf{P}$. Finalmente, se $\mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{r}'$ com $\mathbf{y}' \in \Lambda$ e $\mathbf{r}' \in \mathbf{P}$, então $\mathbf{y} + \mathbf{r} = \mathbf{y}' + \mathbf{r}'$ se, e somente se, $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, pois $0 \leq |a_i - a_i'| < 1$ e $c_i - c_i' \in \mathbb{Z}$. A região fundamental $\mathbf{P}$ é chamada **região fundamental básica** para Λ.

Lema 1 *Seja Λ um reticulado em $\mathbb{R}^n$. Então $V(\Lambda) = d(\Lambda) = V(P)$.*

Seja Λ um reticulado em $\mathbb{R}^n$. A **densidade** de Λ é definida por

$$\Delta = \frac{V(E_\rho(\mathbf{0}))}{V(\Lambda)}$$

e a **densidade de centro** de Λ é definida por

$$\delta = \frac{\Delta}{V(E_1(\mathbf{0}))}.$$

Exemplo 2.2 *Considerando o reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ um reticulado em $\mathbb{R}^2$. Então o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base para o reticulado Λ. O raio de empacotamento é $\rho = \frac{1}{2}$ e*

$$d(\Lambda) = V(\Lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Além disso, a densidade de Λ é $\Delta = \frac{\pi}{4}$ e a densidade de centro $\delta = \frac{1}{4}$.

Corolário 2.3 *Sejam Λ um reticulado em $\mathbb{R}^n$ e Γ um subreticulado de Λ. Então*

$$[\Lambda : \Gamma] = \frac{V(\Lambda)}{V(\Gamma)}. \tag{2.2}$$

Em particular, $[\Lambda : r\Lambda] = r^n$, para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Corolário 2.4 *Sejam Λ, Γ e Π reticulados em $\mathbb{R}^n$ tais que $\Pi \subseteq \Gamma \subseteq \Lambda$. Então*

$$[\Lambda : \Pi] = [\Lambda : \Gamma][\Gamma : \Pi].$$

Lema 2 *Sejam Λ um reticulado de $\mathbb{R}^n$ e Γ um subreticulado de Λ. Então existe apenas um número finito de reticulados Γ' entre Γ e Λ.*

Corolário 2.5 *Sejam Λ um reticulado em $\mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{Z}_+$. Então existe apenas um número finito de reticulados Γ em $\mathbb{R}^n$ que contém Λ e tal que $[\Gamma : \Lambda] = r$.*

2.3 Reticulado Quadrado e Hexagonal

Na construção de reticulados no espaço Euclidiano, faz-se necessário desenvolver a teoria dos reticulados algébricos, apresentando os resultados da teoria dos números algébricos construídos com base nos subcorpos e subanéis complexos definidos em [5] e [17].

Um **corpo quadrático** é um corpo de números K de dimensão 2 sobre $\mathbb{Q}$, onde $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Teorema 2.2 *Seja $d \in \mathbb{Z}$ livre de quadrado. Então*

$$\mathbb{Z}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & se\ d \equiv 2\ ou\ 3 (\operatorname{mod} 4), \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] & se\ d \equiv 1 (\operatorname{mod} 4). \end{cases}$$

Para simplificar a maneira de escrever os inteiros algébricos com $d \equiv 1(\text{mod})4$, é introduzida a notação

$$\eta = \frac{1+\sqrt{d}}{2},$$

o qual é raiz de $\operatorname{irr}(\eta, \mathbb{Q}) = x^2 - x + \frac{1-d}{4}$. Assim, se $d \equiv 1 \operatorname{mod} 4$, então $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\eta]$.

Teorema 2.3 *Se $d \equiv 2$ ou $3(\operatorname{mod} 4)$, então $B = \{1, \sqrt{d}\}$ é a base minimal de $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Se $d \equiv 1(\operatorname{mod} 4)$, então $B = \{1, \eta\}$ é a base minimal de $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\eta]$.*

Seja $K = \mathbb{Q}[\theta]$. Então é fácil verificar que os conjugados $\sigma_i(\theta) = \theta_i$ de θ não necessitam ser elementos de K. Assim, é dito que σ_i é real se $\sigma_i(K) \subseteq \mathbb{R}$, caso contrário, é complexo. Se σ_i é complexo, então $\overline{\sigma}_i : K \to \mathbb{C}$ definida por $\overline{\sigma}_i(\beta) = \overline{\sigma_i(\beta)}$ é um homomorfismo injetivo tal que $\overline{\sigma}_i \neq \sigma_i$ e $\overline{\sigma}_i^2 = \sigma_i$. Assim é denotado os homomorfismos injetivos reais por $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, os complexos por $\sigma_{k+1}, \overline{\sigma}_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+l}, \overline{\sigma}_{k+l}$ e $n = k + 2l$.

Proposição 2 *Seja $\varphi : K \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$\varphi(\alpha) = (\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_k(\alpha), \operatorname{Re}(\sigma_{k+1}(\alpha)), \operatorname{Im}(\sigma_{k+1}(\alpha)), \ldots, \operatorname{Re}(\sigma_{k+l}(\alpha)), \operatorname{Im}(\sigma_{k+l}(\alpha))).$$

Então:

1. *φ é um homomorfismo injetivo;*

2. *$\varphi(a\alpha) = a\varphi(\alpha)$ para todo $a \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in K$.*

O homomorfismo φ da Proposição 2 é utilizado pra construção dos reticulados.

Teorema 2.4 *Se $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ é uma base de K sobre $\mathbb{Q}$, então $\{\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{R}$. Em particular, se $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ é uma base integral de K sobre $\mathbb{Q}$, então*

$$\Lambda = \varphi(\mathbb{Z}_K) = \langle \varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1}) \rangle$$

é um reticulado em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.5 *Sejam $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ uma base de K sobre $\mathbb{Q}$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ os homomorfismos injetivos de K em $\mathbb{C}$ e $\Gamma = \langle \varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1}) \rangle$ um reticulado em $\mathbb{R}^n$. Então*

$$V(\Lambda) = 2^{-l}\sqrt{|D(B)|}.$$

Se $d < 0$ e $d \equiv 2$ ou $3 (\mathrm{mod}\, 4)$, então $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$,

$$\mathbb{Z}_K = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ e } \operatorname{irr}(\eta, \mathbb{Q}) = x^2 - d.$$

Seja $B = \{1, \sqrt{d}\}$ uma base minimal para $\mathbb{Z}_K$ e $\sigma : K \to \mathbb{C}$ um homomorfismo injetivo. Então, dado $\alpha \in K$, onde $\alpha = a + b\sqrt{d}$ com $a, b \in \mathbb{Q}$, obtém-se que

$$\sigma(\alpha) = a + b\sigma(\sqrt{d}) \;\text{ e }\; d = \sigma(d) = \sigma(\sqrt{d})^2.$$

Logo, $\sigma(\sqrt{d}) = \sqrt{d}$ ou $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$. Portanto,

$$\sigma(\alpha) = \alpha \;\text{ ou }\; \sigma(\alpha) = \overline{\alpha}.$$

Assim, existem apenas dois homomorfismos injetivo $\sigma, \overline{\sigma} : K \to \mathbb{C}$. Logo, $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(\alpha) = (\mathrm{Re}(\sigma(\alpha)), \mathrm{Im}(\sigma(\alpha)))$$

é um homomorfismo injetivo e $\Lambda_2 = \varphi(\mathbb{Z}_K)$ é um reticulado em $\mathbb{R}^2$ gerado por $\varphi(1)$ e $\sigma(\sqrt{d})$, isto é,

$$B' = \{(1, 0), (0, \sqrt{-d})\}$$

é uma $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^2$. Como os vetores da base B' são ortogonais tem-se que o ângulo entre eles é igual $\frac{\pi}{2}$. Portanto, as regiões fundamentais básicas são retângulos. Em particular, se $d = -1$, então a região fundamental básica é um quadrado, isto é, Λ_2 é gerado por $(1, 0)$ e $(0, 1)$, que é o reticulado $\mathbb{Z}^2$, Figura 2.1.

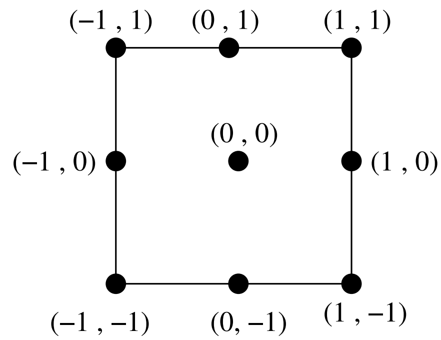

Figura 2.1: Reticulado Quadrado

Se $d < 0$ e $d \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, então $K = \mathbb{Q}[\eta]$,

$$\mathbb{Z}_K = \{\frac{a + b\sqrt{d}}{2} : a, b \in \mathbb{Z},\ \text{com a mesma paridade}\ \}$$

e

$$\mathrm{irr}(\eta, \mathbb{Q}) = x^2 - x + \frac{1-d}{4}.$$

Seja $B = \{1, \eta\}$ uma base minimal para $\mathbb{Z}_K$ e $\sigma : K \to \mathbb{C}$ um homomorfismo injetivo. Então dado $\alpha \in K$, onde $\alpha = a + b\eta$ com $a, b \in \mathbb{Q}$, obtém-se que

$$\sigma(\alpha) = a + b\sigma(\eta).$$

Logo, $\sigma(\eta) = \eta$ ou $\sigma(\eta) = \overline{\eta}$. Portanto,

$$\sigma(\alpha) = \alpha \text{ ou } \sigma(\alpha) = \overline{\alpha}.$$

Assim, existem apenas dois homomorfismos injetivo $\sigma, \overline{\sigma} : K \to \mathbb{C}$. Logo, $\varphi : K \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(\alpha) = (\mathrm{Re}(\sigma(\alpha)), \mathrm{Im}(\sigma(\alpha)))$$

é um homomorfismo injetivo e $\Lambda_1 = \varphi(\mathbb{Z}_K)$ é um reticulado em $\mathbb{R}^2$ gerado por $\varphi(1)$ e $\sigma(\eta)$,isto é,

$$B' = \{(1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{-d}}{2})\}$$

é uma $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^2$. Como $d \leq -3$, tem-se que o ângulo A entre os vetores da base B', dado por

$$\cos A = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1-d}{4}} = \frac{2}{1-d},$$

é menor que ou igual $\frac{\pi}{3}$. Portanto, as regiões fundamentais básicas são hexágonos, pois o ângulo é invariante por isometrias. Em particular, se $d = -3$, então a região fundamental

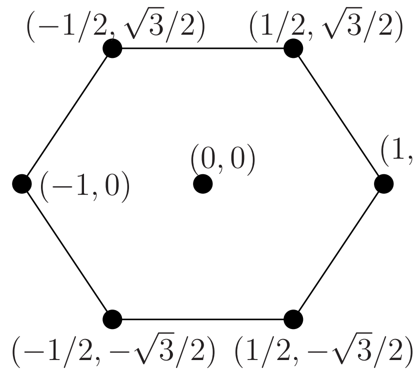

Figura 2.2: Reticulado Hexagonal

básica é um hexágono regular, Figura 2.2. Este hexágono regular é o reticulado com maior densidade no plano.

Se Λ é um reticulado identificado pelo anel de inteiros algébricos $\mathbb{Z}_K$ com $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, então

$$V(\Lambda) = \begin{cases} \sqrt{|d|} & \text{se } d \equiv 2 \text{ ou } 3 (\mathrm{mod}\, 4) \\ \frac{\sqrt{|d|}}{2} & \text{se } d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

e

$$\Delta = \begin{cases} \frac{\pi}{4\sqrt{|d|}} & \text{se } d \equiv 2 \text{ ou } 3 (\mathrm{mod}\, 4) \\ \frac{\pi}{2\sqrt{|d|}} & \text{se } d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4). \end{cases}$$

Além disso, $V(E_\rho(0)) = \frac{\pi}{4}$, para todo $d \in \mathbb{Z}$ com d livre de quadrados e $d < 0$. A Tabela 2.1 mostra algumas densidades de reticulados identificados por anel de inteiros algébricos, [17] e [23].

d	$V(E_\rho(0))$	$V(\Lambda)$	Δ
-1	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{4} = \mathbf{0,7854}$
-2	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{8} = 0,5554$
-3	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} = \mathbf{0,9069}$
-5	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{5}$	$\frac{\pi\sqrt{5}}{20} = 0,3512$
-7	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\frac{\pi\sqrt{7}}{14} = 0,5937$
-10	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{10}$	$\frac{\pi\sqrt{10}}{40} = 0,248\,36$
-11	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{11}}{2}$	$\frac{\pi\sqrt{11}}{22} = 0.473\,61$

Tabela 2.1: A Densidade de Alguns Reticulados

2.4 Constelações de Sinais

Nesta seção é apresentado o conceito de **constelação de sinais** e a identificação das constelações com os grupos, [8].

Uma constelação de sinais S é qualquer subconjunto de pontos discreto de $\mathbb{R}^n$, onde é possível realizar uma identificação destes pontos por sinais e que é considerado um espaço de sinais, [4] e [6]. Os elementos de uma constelação de sinais S é um subconjunto finito de pontos do espaço Euclidiano, isto é, é um subconjunto finito de sinais em um espaço de sinais.

Em uma constelação de sinais S, dados $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in S$, existe $\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi(\mathbf{s}_1) = \mathbf{s}_2 \text{ e } \varphi(\mathbf{s}_2) = \mathbf{s}_1.$$

Se $\Psi(S) = \{\varphi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n) : \varphi(S) = S\}$, então

$$S = \{\varphi(\mathbf{s}_0) : \varphi \in \Psi(S)\} = \bigcup_{\varphi \in \Psi(S)} \{\varphi(\mathbf{s}_0)\}.$$

O grupo das simetrias $\Psi(S)$ de uma constelação de sinais é necessário para gerar S e um grupo $G(S)$ de S é um subgrupo de $\Psi(S)$ suficiente para gerar S de qualquer $\mathbf{s}_0 \in S$. Se $G(S)$ é o grupo gerador de uma constelação de sinais S e $\mathbf{s}_0 \in S$, então

$$S_g = \bigcup_{\varphi \in G(S)} \{\varphi(\mathbf{s}_0)\}$$

e o mapeamento $\mu : G(S) \to S$, definido por $\mu(\varphi) = \varphi(\mathbf{s}_0)$ é bijetivo. O mapeamento μ induz a uma estrutura de grupo em S.

Para uma constelação de sinais, existe um rotulamento isométrico entre um grupo e uma partição da constelação de sinais induzida pela partição do grupo gerador da constelação de sinais. Assim, se H é um subgrupo normal de $G(S)$, então

$$S = \bigcup_{\phi \in \varphi_g H} \{\phi(\mathbf{s}_0)\} = \bigcup_{\varphi \in H} \{\varphi_g(\varphi(\mathbf{s}_0))\},$$

onde $\varphi_g \in G(S)$ é a órbita de $\mathbf{s}_0$ sob a classe lateral $\varphi_g H$. Logo,

$$S = \bigcup S_g.$$

Para uma partição S/S' existe um grupo isomorfo ao grupo quociente $G(S)/G(S')$ e um rotulamento isométrico da partição S/S' é um mapeamento $\mu : G \to S/S'$ definido por

$$\mu(g) = \varphi_g(S').$$

A **energia média mínima** p de uma constelação de sinais $\{x_1, \ldots, x_m\}$, com m pontos, é dada por

$$p = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 \frac{1}{m},$$

onde d_i denota a distância do ponto x_i a x_0, em que x_0 é o centro de massa da constelação. A região fundamental obtida do particionamento de reticulados apresenta a menor energia média associada às constelações de sinais.

Capítulo 3

Códigos de Treliça sobre Partições de Reticulados

Neste capítulo são estudadas as partições de reticulados e suas relações com os códigos de treliça. Os reticulados quociente formados pelas partições de reticulados geram constelações de sinais, por representantes de classes laterais. Em particular, são escolhidas as partições com os subreticulados de melhor densidade, de modo a obter constelações de sinais de menor energia média, ou seja, a melhor densidade é procurada nesse reticulado e nos subreticulados provenientes desse reticulado.

O objetivo é selecionar os reticulados quociente para os códigos de treliça, procurar os códigos ótimos e em seguida investigar os ganhos de codificação.

As principais contribuições deste capítulo são: O Teorema 3.1 que define as matrizes formadas pelas partições e pelos parâmetros do código, que são geradoras de código de treliça; a proposta da matriz dos rótulos para ser usada na procura de códigos ótimos, através da tabela de Cayley; a procura da melhor partição de reticulado a ser utilizada na construção do código de treliça; e também são determinadas as entradas não-codificadas que apresentam ganhos de codificação significativos.

3.1 Reticulados Quociente

Nesta seção são definidos os conceitos e propriedades dos reticulados quociente, bem como a construção de partições de reticulados. Para isso, apresenta-se o conceito de grupos quociente, outros inerentes a estes e algumas propriedades.

Sejam G um grupo aditivo e H um subgrupo de G. A relação $\backsim$ em G, definida por:

$$x \backsim y \Leftrightarrow \exists\ h \in H \text{ tal que } x = y + h$$

é uma relação de equivalência.

O conjunto $\{x \in G \mid x \backsim y\} = \{x + h \mid h \in H\}$ será denotado por $x + H$ e denominado classe lateral à esquerda de H em G. Similarmente, $H + x$ é a classe lateral à direita de H em G. A cardinalidade da classe lateral à direita (esquerda) é denotado por $(G : H)$.

Definição 3.1 *Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G. O grupo quociente de G por H, denotado por $\frac{G}{H}$ ou simplesmente G/H é o conjunto das* classes laterais *com a operação induzida de G.*

Por definição, $\frac{G}{H} = \{x + H \mid x \in G\}$. Além disso, $x, y \in G$ estão na mesma classe lateral, se $x - y \in H$.

Considerando-se Λ um reticulado e Γ um subreticulado. Então, Λ é um grupo e Γ um subgrupo de Λ. Logo, existe um conjunto quociente Λ/Γ, o qual é também um reticulado, denominado *reticulado quociente* e denotado por:

$$\frac{\Lambda}{\Gamma} = \{\mathbf{x} + \Gamma \mid \mathbf{x} \in \Lambda\}.$$

A classe lateral,

$$\mathbf{x} + \Gamma = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \Gamma\}$$

pode ser representada por um vetor $\mathbf{x}$ denominado o **vetor mínimo**, o qual é o **representante** ou **líder** da classe, onde

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \min \|\mathbf{y}\|^2 \text{ tal que } \mathbf{y} \in \mathbf{x} + \Gamma.$$

Ainda, denota-se $(\Lambda : \Gamma) = \frac{|V(\Gamma)|}{|V(\Lambda)|}$.

A operação em $\frac{\Lambda}{\Gamma}$ é definida como sendo

$$(\mathbf{x} + \Gamma) + (\mathbf{y} + \Gamma) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \Gamma \; \forall x, y \in \Lambda.$$

Esta operação é bem definida e satisfaz as condições:

1. $0 + \Gamma$ é o elemento neutro da operação em $\frac{\Lambda}{\Gamma}$.

2. $\mathbf{x} + \Gamma = \mathbf{y} + \Gamma$ se, e somente se, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \Gamma$, e neste caso denota-se por $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} (\operatorname{mod} \Gamma)$.

Escreve-se $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y} (\operatorname{mod} \Gamma)$, quando os elementos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de Λ estão na mesma classe lateral, isto é, representam o mesmo elemento em Λ/Γ.

Sejam Λ um reticulado e $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ uma seqüência de subreticulados de Λ, de modo que Γ_i é um subreticulado de Γ_j para todo $i < j$. Então existe uma cadeia de partições de reticulados, descrita por

$$\Lambda/\Gamma_1/\Gamma_2/\cdots/\Gamma_m,$$

onde

$$\Lambda/\Gamma_1/\Gamma_2/\cdots/\Gamma_m = \{\mathbf{x} + \Gamma_m \mid \mathbf{x} \in \Lambda/\Gamma_1/\cdots/\Gamma_{m-1}\}.$$

3.2 Códigos de Treliça

O sistema de codificação do código de treliça utilizado nesta tese é uma alternativa à utilização das partições de conjunto [27]. O código de treliça utiliza uma constelação de sinais formada por pontos de uma partição de reticulado no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ n-dimensional. Um subreticulado Γ é construído a partir de um reticulado Λ, formando um reticulado quociente Λ/Γ finito. Uma seqüência de dados é introduzida na entrada do codificador convolucional, gerando uma saída em Λ/Γ, enquanto outra seqüência é utilizada para selecionar os pontos das classes laterais. Estas classes laterais $g \in \frac{\Lambda}{\Gamma}$ constituem uma constelação de sinais em $\mathbb{R}^n$. O esquema de codificação do código de treliça é apresentado na Figura 3.1.

Este processo permite a codificação de constelações com cardinalidade elevada em reticulados de ordem elevada. O particionamento do reticulado é escolhido considerando-se as constelações de sinais de menor energia média mínima p, e em seguida, inicia-se a procura otimizada dos códigos ótimos.

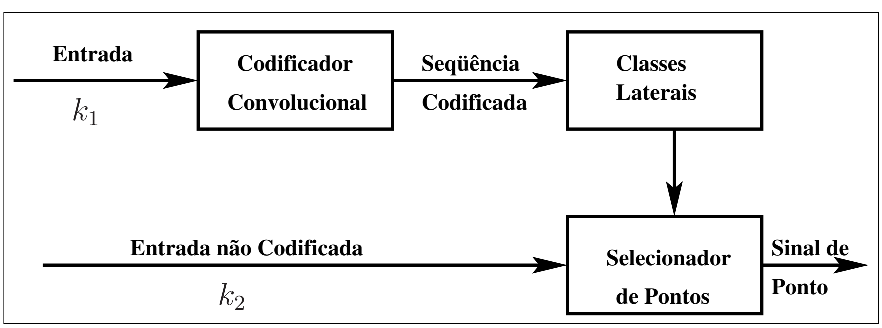

Figura 3.1: Codificador do Código de Treliça

Para o código de treliça é escolhido um reticulado Λ em $\mathbb{R}^n$ e um subreticulado Γ de Λ. Se $\{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$ é uma base do reticulado Λ, então a matriz

$$P = [\mathbf{x_i} \mid 1 \leq i \leq n],$$

onde os $\mathbf{x_i}$ são vetores linha, é a matriz geradora do reticulado Λ. O hiperplano formado pelos pontos $\alpha_1\mathbf{x_1}+\ldots+\alpha_n\mathbf{x_n}$, onde $0 \leq \alpha_i \leq 1$, é a região fundamental do hiperplano do reticulado Λ, onde o volume é dado por $\det \Lambda = |P|$, [17] e [25]. A matriz $P = \{\mathbf{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$ é a matriz de Λ, $Q = \{\mathbf{y_i} : 1 \leq i \leq n\}$ é a matriz de Γ e

$$|R| = |\Lambda/\Gamma| = |\det Q| \,/\, |\det P| \,.$$

Se $\{\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_n}\}$ é uma base do subreticulado Γ, então $P = [\mathbf{y_i} \mid 1 \leq i \leq n]$ é a matriz geradora de Γ, denotada por $\Gamma = P\Lambda$, onde P é a matriz de um isomorfismo aplicado em Λ.

A *norma* ou *energia* de $g \in R$ é definida como sendo

$$N(g) = \min\{N(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in g + \Gamma\},$$

onde

$$N(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

A *distância mínima quadrática* Euclidiana no reticulado quociente é definida por $d^2_{\text{min}} = N(g)$. Se μ é a menor norma quadrática não-nula no subreticulado Λ e se λ é a menor norma quadrática não-nula em Γ, então $d^2_{\text{min}} = \lambda\mu$. A distância livre, d_{free}, do código é o valor mínimo dentre todas as métricas dos caminhos fechados com início e final no estado inicial da treliça do codificador. A distância mínima do código de treliça é dada por

$$d = \min\left\{d^2_{\text{min}}, d_{\text{free}}\right\}. \tag{3.1}$$

O codificador é composto por V memórias, um alfabeto $\mathcal{A}$ de tamanho q, q^V estados e k_1 entradas. O codificador possui q^{k_1} entradas e $|R|$ saídas. O código de treliça possui $k = k_1 + k_2$ bits de entrada e um ponto de saída entre os $|R|$ pontos distintos da constelação de sinais, onde k_1 é o número de bits codificados pelo codificador e k_2 é o número de bits não-codificados usados na escolha de um entre os q^{k_2} pontos.

A constelação de sinais é formada por $M = |R|\, q^{k_2}$ pontos de R, sendo q^{k_2} pontos em cada classe lateral de R e a constelação de sinais do sistema não-codificado é formada por $N = q^k$ pontos.

Os símbolos de entradas são supostos independentes e identicamente distribuídos e todos os pontos da constelação são igualmente distribuídos. A norma média da constelação é dada por p e a razão para o sistema da constelação codificada é $\frac{d}{p}$. O ganho de codificação do código de treliça é definido por

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{d}{p} \div \frac{d^u}{p^u}\right) \;\; dB, \tag{3.2}$$

onde d^u é a distância quadrática Euclidiana mínima para constelação não-codificada, p^u é a norma média para a constelação não-codificada e a razão para o sistema não-codificado é $\frac{d^u}{p^u}$.

Quando $k_2 \to \infty$ o ganho de codificação se aproxima de

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{n+2}{3}\frac{d}{d_2}\Delta^{\frac{2}{n}}m^{\rho_1}\right) dB,$$

onde Δ é a densidade de Λ e ρ_1 é a taxa fracionária do código. Além disso,

$$10\log_{10}\left(\frac{n+2}{3}\frac{d}{d_2}\Delta^{\frac{2}{n}}m^{\rho_1}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{n+2}{3}\frac{d}{d_2}m^{\rho_1}\right) + \frac{2}{n}10\log_{10}\Delta.$$

3.3 A Construção do Código de Treliça

A construção do código de treliça inicia-se com a escolha de um reticulado Λ e de uma matriz P, aplicada em Λ, onde P é um endomorfismo, obtendo-se um subreticulado $\Gamma = P\Lambda$. O determinante da matriz do subreticulado Γ amplia a distância no subreticulado Γ em relação à distância no reticulado Λ. O número de classes laterais de Γ em Λ, isto é, a ordem de R ou o índice $(\Lambda : \Gamma)$ é calculado através de (2.1) e (2.2).

Em seguida, são determinadas as k_1 entradas do codificador convolucional e o valor k_2 para definir o número de pontos da constelação de sinais, selecionando q^{k_2} pontos de cada classe lateral. Também são definidos o número de memórias V e o alfabeto de entrada q. Algumas entradas da matriz geradora do código podem ser nulas, logo $V \leq vk_1$, onde v é o número máximo de memórias em cada entrada, ou seja, $v = \max v_j$. Assim, gera-se o código de treliça com parâmetros (k_1, V, q), sobre o reticulado quociente $(\Lambda : \Gamma)$. A matriz geradora do código é representada por

$$G = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} g_{vk_1} & \cdots & g_{v1} & \cdots & g_{0k_1} & \cdots & g_{01} \end{array}\right], \qquad (3.3)$$

onde $g_{ij} \in R$. Se os símbolos de entrada são u_{ij}, onde $(u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0k_1})$ é o bloco de entrada atual e $(u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1k_1})$ é o bloco de entrada anterior, e assim sucessivamente, então a saída é definida por

$$g = \sum_{i=0}^{v}\sum_{j=1}^{k_1} u_{ij}g_{ij}.$$

A taxa do código é

$$\rho = (k/n)\log_2 q \text{ bits/dimensão}$$

e a taxa fracionária é

$$\rho_1 = k_1 \log_2 q / \log_2 |R|.$$

A seqüência de símbolos de entradas sobre o anel $\mathcal{A}$ de tamanho $k = k_1 + k_2$ é tal que, os primeiros k_1 símbolos de cada bloco são introduzidos no codificador, produzindo uma saída $g \in R$, enquanto os k_2 símbolos restantes são usados para selecionar um dos q^{k_2} símbolos da constelação de sinais contido em cada classe lateral. E esta é formada por $M = |R|\, q^{k_2}$ pontos de R. A estrutura do codificador do código de treliça está representada na Figura 3.2.

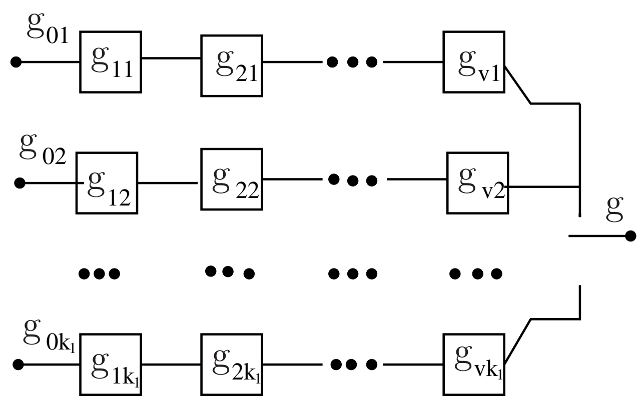

Figura 3.2: A Estrutura do Codificador do Código de Treliça

A constelação não-codificada é formada por $N = q^{k_1+k_2}$ pontos de sinais e é considerada perfeitamente ajustada, quando é da forma $N = (2b)^n$, onde $b \in mathbbN$. A constelação utilizada é formada por

$$(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_m}) \quad \text{com} \quad x_i \in \{\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(2b-1)\}. \tag{3.4}$$

A distância mínima quadrática nesta constelação é

$$d^u = \|x_i - x_j\|^2 = 4,$$

com x_i e x_j em (3.4). Se a constelação é perfeitamente ajustada, então a energia média é definida como, [3],

$$p^u = \frac{1}{3} n(4b^2 - 1).$$

A Figura 3.3 apresenta a constelação não-codificada com 2^4 pontos, denominada constelação não-codificada $16 - QASK$ (16 Quadrature Amplitude Shift Keying).

Os códigos de treliça distintos são gerados pela combinação dos elementos das colunas, formadas por classes laterais do reticulado quociente R. As matrizes geradoras G, são as que satisfazem a condição de gerar o reticulado quociente na saída do codificador, isto é, a matriz G contém um subconjunto de geradores do reticulado quociente R.

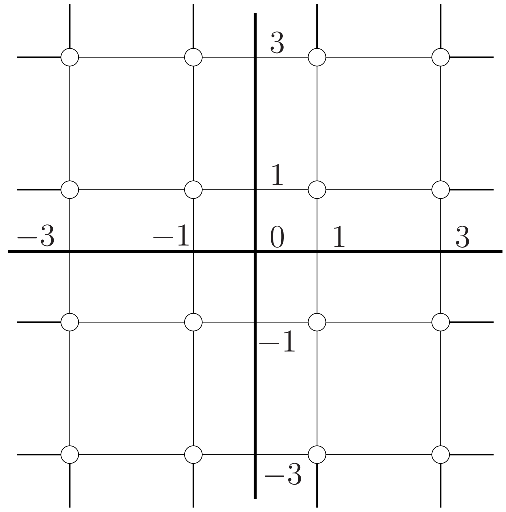

Figura 3.3: Constelação Não-Codificada com 16 Pontos $(16 - QASK)$

A máxima distância mínima d do código de treliça é alcançada quando a distância livre do código é maximizada, pois a distância mínima quadrática d_2 no subreticulado Γ tem valor fixo determinado pela partição do reticulado. Para maximizar o d_{free} são procurados os reticulados, comparando a densidade, é otimizado o número de memórias V do codificador e, principalmente, escolhidas as matrizes geradoras adequadas. Portanto, os parâmetros (k_1, V, q), a partição de reticulado Λ/Γ e a matriz geradora são considerados de modo que o sistema de codificação gere códigos de treliça com a distância livre d_{free} próxima da distância da partição d_2.

Definição 3.2 *Um código de treliça é denominado* **código de treliça ótimo** *quando sua distância mínima d, (c.f. 3.1) é a máxima entre os demais códigos de treliça do mesmo esquema de codificação.*

Definidos os parâmetros (k_1, V, q) do código de treliça, as matrizes do código possuem $V + k_1$ colunas todas não-nulas. Estes parâmetros permitem a formação de

$$|R|^{V+k_1} - 1 \tag{3.5}$$

matrizes. Uma grande quantidade destas matrizes geram códigos de treliça, isto é, não são todas as $|R|^{V+k_1} - 1$ matrizes que geram código. As matrizes que geram códigos de treliça estão entre as matrizes de (3.5), considerando as matrizes que satisfazem a condição de gerar o reticulado quociente na saída do codificador e estas são as matrizes geradoras de códigos de treliça.

Teorema 3.1 *Considere um código de treliça com parâmetros* (k_1, V, q) *sobre um reticulado quociente de ordem* $|R|$*. Então, existem*

$$n(G) = \lambda\, |R|^{V+k_1-m} \tag{3.6}$$

matrizes geradoras G *de códigos de treliça, onde* m *é o número de classes laterais que geram o reticulado quociente* R*, descrito por* $m = \#\langle g_1, \ldots, g_m\rangle$*, e* λ *é o número de maneiras de gerar* R*.*

Prova. Como R é um reticulado finito, tem-se que R é finitamente gerado. Então, existe um número finito de elementos $g_i \in R$, $i = 1, \ldots, m$, tal que

$$R = \langle g_1, \ldots, g_m\rangle,$$

isto é, R é gerado por m elementos $g_1, \ldots, g_m$, com $m \leq V + k_1$. A maneira de gerar R não é única, mas é um número finito de maneiras e todas tem m elementos. Pois, R é gerado por m elementos, com $m \leq |R| - 1$.

A classe lateral g_1 é escolhida entre as $|R|$ classes laterais do grupo finitamente gerado, assim, tem-se um número finito de possibilidade $n(g_1)$ para g_1. Analogamente, tais argumentos são válidos para os demais $m - 2$ elementos, pois o elemento neutro não consta entre os geradores. Assim, existem

$$\lambda = n(g_1) \cdot \cdots \cdot n(g_{m-1})$$

maneiras de gerar o reticulado quociente R. Portanto, existem $|R|$ maneiras para as $V+k_1-m$ colunas de G, que são as classes laterais de R, e λ maneiras para as m colunas restantes, isto é, tem-se

$$n(G) = \lambda\, |R|^{V+k_1-m}$$

maneiras de construir matrizes geradoras de códigos de treliça. ■

Exemplo 3.1 *Considere o reticulado quociente* $R = \frac{\Lambda}{\Gamma}$*, onde* $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ *e* $\Gamma = \langle(2,2)\,;(2,-2)\rangle$*, com* 8 *estados e* 2 *entradas sobre* $A = \mathbb{Z}_2$*, isto é, com parâmetros* $(2,3,2)$*. As classes laterais são*

$$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (-1,0), (0,-1), (1,-1) \text{ e } (2,0).$$

Observe que R *é gerado pelas classes* g_1 *e* g_2*, onde*

$$|\langle g_1\rangle| = 4, |\langle g_2\rangle| = 2 \text{ e } g_2 \notin \langle g_1\rangle.$$

Como R é um grupo abeliano, tem-se que $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ e $g_1 = (1,0), (0,1), (-1,0)$ ou $(0,-1)$ e $g_2 = (1,1)$ ou $(1,-1)$, onde $n(g_1) = 4$ e $n(g_2) = 2$. Para gerar R tem-se,

$$\lambda = n(g_1) \cdot n(g_2) = 8$$

maneiras. Portanto, somente $8 \cdot 8^3$ matrizes G geram códigos de treliça, dentre as $8^5 - 1$ matrizes não-nulas possíveis.

3.4 Matriz Norma e Subconjuntos Especiais

Uma matriz geradora G está associada a um código de treliça sobre reticulados quociente, onde o número de linhas de G é a dimensão do reticulado. As colunas de G são as classes laterais de Λ/Γ e G está definida pelos parâmetros: número k_1 de entradas do codificador, número de memórias V e alfabeto de tamanho q. Além disso, G possui $k_1 + V$ colunas (3.3).

Existe um número expressivo de matrizes geradoras $G = [g_{ij}]_{n\times(V+k_1)}$, onde tais matrizes possuem a característica de gerar o reticulado quociente R na saída do codificador, como definido na Seção 3.3.

O objetivo é determinar matrizes geradoras de códigos de treliça ótimos, isto é, códigos que alcancem o valor máximo para a distância mínima d, fixados a partir dos parâmetros (k_1, V, q), sobre um alfabeto q-ário em um anel $\mathcal{A}$ e uma partição de reticulado Λ/Γ.

Para otimizar a procura necessita-se definir a matriz linha com entradas sobre as normas quadráticas das classes laterais, denotada por:

$$GN = \left[\ |g_{vk_1}| \quad \cdots \quad |g_{v1}|\ | \quad \cdots \quad |\ |g_{0k_1}| \quad \cdots \quad |g_{01}|\ \right],$$

onde as respectivas colunas são as normas $\|g\|$ das classes laterais do reticulado quociente $R = \Lambda/\Gamma$.

A matriz linha, onde as entradas são as normas quadráticas $\|g_{ij}\|$ das classes laterais de R é denominada de **matriz norma**. A matriz geradora G de um código de treliça ótimo está dentro do melhor subconjunto especial, representado por uma matriz norma, que maximiza a distância do código.

Cada matriz norma GN distinta determina um subconjunto de matrizes geradoras. Os melhores blocos de k_1 colunas são aqueles que possuem as maiores normas para as possíveis q^{k_1} entradas, tais matrizes particionam o conjunto das matrizes geradoras dos códigos de treliça e são denominadas de **subconjuntos especiais**. Além disso, os subconjuntos especiais contém os códigos de treliça ótimos.

As matrizes normas selecionam as matrizes geradoras G dos códigos de treliça ótimos. Esta seleção, realizada pelos subconjuntos especiais, verifica os limitantes máximos e mínimos para a distância livre, d_{free}, do código. As matrizes geradoras dos códigos de treliça ótimos são as matrizes que representam os códigos de maior d_{free}. A procura por tais matrizes envolve a escolha das colunas que contém um conjunto gerador e também a escolha das colunas que maximizam os limitantes Δ_{inf} e Δ_{sup}.

O limitante inferior Δ_{inf} está associado aos ramos da treliça que partem e retornam ao estado S_0. Assim,

$$\Delta_{\text{inf}} = \min_{\{u_l\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{s} u_{1j} g_{vj} + \sum_{j=s+1}^{k_1} u_{1j} g_{(v-1)j} \right\| \right\} + \min_{\{u_l\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{1j} g_{0j} \right\| \right\}, \tag{3.7}$$

onde u_{1j} é o bloco de entrada do conjunto

$$\mathcal{U} = \{u_l = (u_{lk_1}, \ldots, u_{l1}) \mid u_l \neq 0\},$$

com $l = 1, \ldots, (|q|^{k_1} - 1)$ e $s = V - k_1(v-1)$, [12].

O limitante superior Δ_{sup} é calculado somente para os caminhos fechados associados às seqüências mínimas de entrada:

$$\Delta_{\text{sup}} = \min_{\{u_l\}} \left\{ \sum_{i=0}^{v} \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{1j} g_{ij} \right\| \right\}, \tag{3.8}$$

onde $g_{ij} = 0$ quando não existe memória associada a coluna j do codificador.

Exemplo 3.2 *Considere o codificador com parâmetros* $(2,4,2)$*. Então, a matriz geradora é dada por:*

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} g_{22} & g_{21} & g_{12} & g_{11} & g_{02} & g_{01} \end{array}\right].$$

Sabendo que $\mathcal{U} = \{(0,1);(1,0);(1,1)\}$*,* $V = 4$*,* $v = 2$ *e* $s = 1$*. Assim, os limitantes* Δ_{inf} *(3.7) e* Δ_{sup} *(3.8) são dados, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{inf}} = \min\{&\|0\cdot g_{22} + 1\cdot g_{21}\|, \|1\cdot g_{22} + 0\cdot g_{21}\|, \|1\cdot g_{22} + 1\cdot g_{21}\|\} \\ &+ \min\{\|0\cdot g_{01} + 1\cdot g_{02}\|, \|1\cdot g_{01} + 0\cdot g_{02}\|, \|1\cdot g_{01} + 1\cdot g_{02}\|\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{sup}} &= \min\left\{ \sum_{i=0}^{2} \|0\cdot g_{i1} + 1\cdot g_{i2}\|, \sum_{i=0}^{2} \|1\cdot g_{i1} + 0\cdot g_{i2}\|, \sum_{i=0}^{2} \|1\cdot g_{i1} + 1\cdot g_{i2}\| \right\} \\ &= \min\left\{ \begin{array}{c} \|0\cdot g_{01} + 1\cdot g_{02}\| + \|0\cdot g_{11} + 1\cdot g_{12}\| + \|0\cdot g_{21} + 1\cdot g_{22}\|, \\ \|1\cdot g_{01} + 0\cdot g_{02}\| + \|1\cdot g_{11} + 0\cdot g_{12}\| + \|1\cdot g_{21} + 0\cdot g_{22}\|, \\ \|1\cdot g_{01} + 1\cdot g_{02}\| + \|1\cdot g_{11} + 1\cdot g_{12}\| + \|1\cdot g_{21} + 1\cdot g_{22}\| \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A procura por códigos de treliça ótimos inicia-se com a ordenação das normas entre as classes laterais $g+\Gamma$, $g \in \Lambda$. O conjunto de normas $\{N_1, \ldots, N_{k_1}\}$ seleciona os melhores blocos de norma. As colunas da matriz GN são escolhidas de modo a garantir a maximização dos limitantes do d_{free}, apresentados em (3.7) e (3.8), determinando os melhores subconjuntos especiais.

O procedimento utilizado é a ordenação das normas das classes laterais, calculadas para as k_1 primeiras e k_1 últimas colunas de GN, correspondentes as k_1 últimas entradas de GN. O objetivo é calcular o maior valor para a expressão

$$\max \left\{ \min_{u_l \neq 0} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l_j} g_{ij} \right\| \right\} \right\}. \tag{3.11}$$

A procura de um valor expressivamente alto para o Δ_{sup}, consiste em procurar os maiores blocos de normas associadas as k_1 primeiras e últimas colunas de GN, e também aos s blocos compostos de k_1 colunas intermediárias.

Para encontrar os blocos com as melhores k_1 colunas, é construída uma **tabela de norma ordenada**. O objetivo desta tabela é listar todos os blocos de normas e classes laterais, valorizando a ordem de cada k_1 bloco, quanto ao valor da Equação (3.11), do maior para o menor. A organização da tabela está distribuída em 5 colunas. A primeira coluna da tabela ordenada é reservada aos blocos das k_1 normas, ordenada dentre os blocos com maior valor calculados em (3.11). A segunda coluna consiste da combinação das k_1 classes laterais, cujas normas estão alocadas na coluna 1. Na terceira coluna é considerada cada combinação listada na coluna 2 referente a cada possível entrada não-nula do codificador e o valor da norma da classe lateral de saída é dado por

$$|g| = \left| \sum_{j=1}^{k_1} u_{ij} g_{ij} \right|.$$

Este valor é alocado na linha da combinação considerada e na posição referente a entrada utilizada. A quarta coluna é obtida da terceira considerando o mínimo entre os valores de cada linha, dado pela Equação (3.11),

$$\min_{u_l \neq 0} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l_j} g_{ij} \right\| \right\}. \tag{3.12}$$

A quinta coluna consiste dos valores máximos dentre os valores na coluna 4, que é exatamente a Equação (3.11).

Feita a lista de todos o blocos $\{N_1, \ldots, N_{k_1}\}$, excluído os blocos com normas nulas, inicia-se a ordenação decrescente dos blocos, de acordo com os valores obtidos na coluna 5. Esta ordenação é utilizada para determinar os subconjuntos especiais, que são constituídos dos primeiros blocos da tabela ordenada.

As matrizes normas escolhidas são aquelas que possuem os primeiros blocos da tabela ordenada das normas e classes laterais nas primeiras e últimas colunas, maximizando o Δ_{inf}. Nas colunas intermediárias é repetido esse bloco de norma, quantas vezes se fizer necessário, considerando que k_1 é múltiplo do número de colunas intermediárias. Caso o número de colunas intermediárias não seja múltiplo de k_1, retira-se os $k_1 - s$ menores normas do bloco. Neste procedimento, o subconjunto especial encontrado necessita pertencer ao conjunto das matrizes geradoras de códigos de treliça, ou seja, no subconjunto especial, as classes laterais são escolhidas de modo a conter um conjunto de geradores do reticulado quociente. Assim, são trocadas as classes laterais nas normas intermediárias, de modo que contenha um conjunto de geradores do reticulado quociente entre as colunas de GN e gerar o código na saída do codificador.

O subconjunto especial pode conter matrizes geradoras de códigos catastróficos, caso existam, descartam-se esses e é realizada uma nova escolha.

Exemplo 3.3 *Sejam Λ/Γ um reticulado quociente, onde $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e $\Gamma = \langle(2,2),(2,-2)\rangle$ e considere um codificador com parâmetros $(2,4,2)$. Então, o bloco de normas é $\{N_1, N_2\}$. As classes laterais do reticulado quociente são*

$$(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (-1,0), (0,-1), (1,-1) \text{ e } (2,0).$$

O conjunto de entradas não-nulas possíveis é $\mathcal{U} = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$. A Tabela 3.1 apresenta o conjunto ordenado de normas. As normas que maximizam a Equação 3.11 e, conseqüentemente, o Δ_{sup} e Δ_{inf} são os blocos de normas $\{4,2\}$ e $\{2,2\}$, respectivamente.

Exemplo 3.4 *Considere o reticulado quociente R e o código do Exemplo 3.2 com parâmetros $(2,4,2)$. A matriz geradora é dada por*

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} g_{22} & g_{21} & g_{12} & g_{11} & g_{02} & g_{01} \end{array}\right],$$

onde as duas últimas colunas estão associadas às entradas do codificador e as demais estão associadas às memórias. Como o objetivo é apresentar um exemplo de subconjuntos especiais,

$k_1 = 2$	R	$\mathcal{A} = \mathbb{Z}_2$	min	max
$\{N_1, N_2\}$	Líderes	$(0,1),(1,0),(1,1)$	Eq. 3.12	Eq. 3.11
$\{4,2\}$	$(2,0),(1,1)$	4 , 2 , 2	2	2
	$(2,0),(1,-1)$	4 , 2 , 2	2	
$\{2,2\}$	$(1,1),(1,1)$	2 , 2 , 0	0	
	$(1,1),(1,-1)$	2 , 2 , 4	2	2
	$(1,-1),(1,-1)$	2 , 2 , 0	1	
$\{4,1\}$	$(2,0),(1,0)$	4 , 1 , 1	1	
	$(2,0),(0,1)$	4 , 1 , 1	1	1
	$(2,0),(-1,0)$	4 , 1 , 1	1	
	$(2,0),(0,-1)$	4 , 1 , 1	1	
$\{2,1\}$	$(1,1),(1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,1),(0,1)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,1),(-1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,1),(0,-1)$	2 , 1 , 1	1	1
	$(1,-1),(1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,-1),(0,1)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,-1),(-1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,1),(0,-1)$	2 , 1 , 1	1	
$\{1,1\}$	$(1,0),(1,0)$	1 , 1 , 2	1	
	$(1,0),(0,1)$	1 , 1 , 4	1	
	$(1,0),(-1,0)$	1 , 1 , 0	0	
	$(1,0),(0,-1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,1),(0,1)$	1 , 1 , 2	1	1
	$(0,1),(0,-1)$	1 , 1 , 0	0	
	$(-1,0),(-1,0)$	1 , 1 , 4	1	
	$(-1,0),(0,-1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,-1),(0,-1)$	1 , 1 , 4	1	
$\{4,1\}$	$(2,0),(2,0)$	4 , 4 , 0	0	0

Tabela 3.1: Tabela de Normas Ordenadas do Exemplo 3.3

será usada a Tabela 3.1, selecionando os melhores blocos de k_1 normas. Tais blocos são dados por

$$GN_1 = \left[\begin{array}{cccccccc} 4 & 2 & | & 1 & 1 & | & 2 & 4 \end{array}\right] \quad e \quad GN_2 = \left[\begin{array}{cccccccc} 2 & 2 & | & 1 & 2 & | & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Nos blocos intermediários, das matrizes normas GN_1 e GN_2, foram feitas substituições de modo que o conjunto de geradores está contido nas GN e as melhores normas estão nos blocos extremos das k_1 primeiras e últimas colunas. A matriz GN_1 está associada a 24 matrizes G, pois

$$n(g_{01}) \cdot n(g_{02}) \cdot n(g_{11}) \cdot n(g_{12}) \cdot n(g_{21}) \cdot n(g_{22}) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$$

onde $n(g_{ij})$ é o número de possibilidades para as classes laterais g_{ij}. Dentre as 24 possibilidades, considera-se

$$G_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Para a matriz geradora G, obtém-se os seguintes limitantes:

$$\begin{aligned} \Delta_{\inf} &= \min\left\{\|0\cdot(2,0)+1\cdot(1,1)\|, \|1\cdot(2,0)+0\cdot(1,1)\|, \|1\cdot(2,0)+1\cdot(1,1)\|\right\} \\ &+ \min\left\{\|0\cdot(2,0)+1\cdot(1,1)\|, \|1\cdot(2,0)+0\cdot(1,1)\|, \|1\cdot(2,0)+1\cdot(1,1)\|\right\} \\ &= \min\{2,4,2\} + \min\{2,4,2\} = 4 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_{\sup} = \min\Big\{ & \|0\cdot(2,0)+1\cdot(1,1)\| + \|0\cdot(0,1)+1\cdot(0,1)\| + \|0\cdot(1,1)+1\cdot(2,0)\|, \\ & \|1\cdot(2,0)+0\cdot(1,1)\| + \|1\cdot(0,1)+0\cdot(0,1)\| + \|1\cdot(1,1)+0\cdot(2,0)\|, \\ & \|1\cdot(2,0)+1\cdot(1,1)\| + \|1\cdot(0,1)+1\cdot(0,1)\| + \|1\cdot(1,1)+1\cdot(2,0)\| \Big\} \\ = \min\{ & 2+1+4, 4+1+2, 2+2+2\} = 6. \end{aligned}$$

O cálculo do d_{free} é obtido pelo algoritmo de Viterbi, [11, 27], onde $4 \leq d_{free} \leq 6$. Para o código de treliça gerado por G, $d_{free} = 6$ e a distância mínima no subreticulado é $d^2_{\min} = 8$. Logo,

$$d = \min\{8, 6\} = 6.$$

Para o cálculo dos espectros de peso, os elementos do reticulado quociente R são rotulados de 0 a $(|R|-1)$ e, com isso, define-se uma nova matriz, a matriz dos rótulos, dada por

$$GR = (g_{1j})_{1\times(V+k_1)}, \tag{3.13}$$

onde $g_{1j} = 0, 1, \ldots, (|R|-1)$. Nesta matriz as classes laterais g são substituídas por números (rótulos) que representam as classes laterais. O objetivo de construir a matriz dos rótulos, é para que seja utilizada a tabela de Cayley ao cálculo dos espectros de peso, simplificando as operações.

3.5 As Partições e os Códigos

Nesta seção são dados vários exemplos de construções de partições de reticulados que são utilizadas na construção de códigos de treliça.

O objetivo é mostrar que o desempenho do código de treliça também está relacionado à utilização de reticulados quociente que possibilitem a construção de constelações de sinais com menor energia média. Os dois primeiros exemplos mostram que a escolha adequada do subreticulado diminui a energia média p, o que é uma contribuição direta no ganho de codificação. No Exemplo 3.7 é usado o reticulado hexagonal, que apresenta as constelações com menor energia média.

A Figura 3.4 mostra a estrutura de um codificador convolucional com 3 memórias, utilizado nos exemplos desta seção.

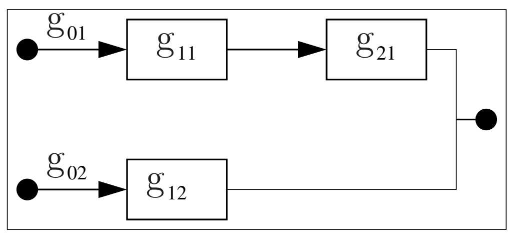

Figura 3.4: Estrutura de um Codificador com 8 Estados

Exemplo 3.5 *Considere o reticulado quociente* $R = \frac{\Lambda}{\Gamma}$, *com* $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ *e* $\Gamma = P\Lambda$, *onde*

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então, $\Gamma = \langle (4,0)\,;(0,2)\rangle$. *Seja o codificador* $(2,3,2)$, *apresentado na Figura 3.4. A Tabela 3.2 apresenta as classes laterais, os rótulos, as normas e as ordens de* $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{P\mathbb{Z}^2}$. *A operação em* R *é mostrada na tabela de Cayley, a saber, Tabela 3.3. Os subconjuntos especiais que contém um conjunto de códigos ótimos, são selecionados analisando a Tabela 3.4. A matriz norma*

$$GN = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

contém um conjunto de códigos de treliça ótimos. No subconjunto especial, representado por GN, *é realizada a procura das matrizes geradoras dos códigos ótimos. A matriz geradora*

$$G = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

formulada a partir da GN, gera um código ótimo. O cálculo dos espectros de peso é feito através da matriz dos rótulos GR, dada em (3.13), onde

$$GR = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Aplicando as Equações (3.9) e (3.10), na matriz dos rótulos GR, obtém-se os seguintes limitantes:

$$\Delta_{\text{inf}} = \min\{2,4,2\} + \min\{2,4,2\} = 4$$

e

$$\Delta_{\text{sup}} = \min\{4+2+0, 2+1+4, 2+5+4\} = 6.$$

Assim, tem-se $4 \leq d_{free} \leq 6$. *Através de cálculos, encontram-se as distâncias,* $d_{free} = 5$ *e* $d = \min\{5,8\} = 5$.

No Exemplo 3.5, são consideradas as constelações da forma $M = 8 \cdot 2^{k_2}$. As constelações do sistema não-codificado são da forma $N = 2^{k_1+k_2}$. A média na constelação não-codificada é calculada por

$$p^u = \frac{1}{2^k} \sum x_i^2,$$

onde

$$x_i \in \{(\pm1,\pm1), (\pm1,\pm3), (\pm3,\pm1), (\pm3,\pm3), \cdots\}.$$

Em particular, se a constelação é da forma $N = (2 \cdot b)^n$ (perfeitamente ajustada), tem-se que $p^u = \frac{1}{3}n(4b^2 - 1)$, onde b é determinado em (3.4).

$R = \frac{\mathbb{Z}^2}{P\mathbb{Z}^2}$	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0)$	0	0	0
$(1,0)$	1	1	4
$(2,0)$	2	4	2
$(-1,0)$	3	1	4
$(1,1)$	4	2	4
$(0,1)$	5	1	2
$(1,-1)$	6	2	4
$(2,1)$	7	5	2

Tabela 3.2: Normas e Rótulos do Reticulado $\mathbb{Z}^2/P\mathbb{Z}^2$

As constelações de sinais, formadas pelo reticulado $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{P\mathbb{Z}^2}$ são apresentadas na Figura 3.5, contendo 8, 16, 32, 64 e 128 pontos, com centro no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ do sistema Euclidiano. Os ganhos de codificação para as constelações de 32, 64 e 128 pontos são apresentados na Tabela 3.5.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	7	4	5	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	5	6	7	4
4	4	7	6	5	2	1	0	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	0	3	2	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabela 3.3: Tabela de Cayley do Reticulado $\mathbb{Z}^2/P\mathbb{Z}^2$ do Exemplo 3.5

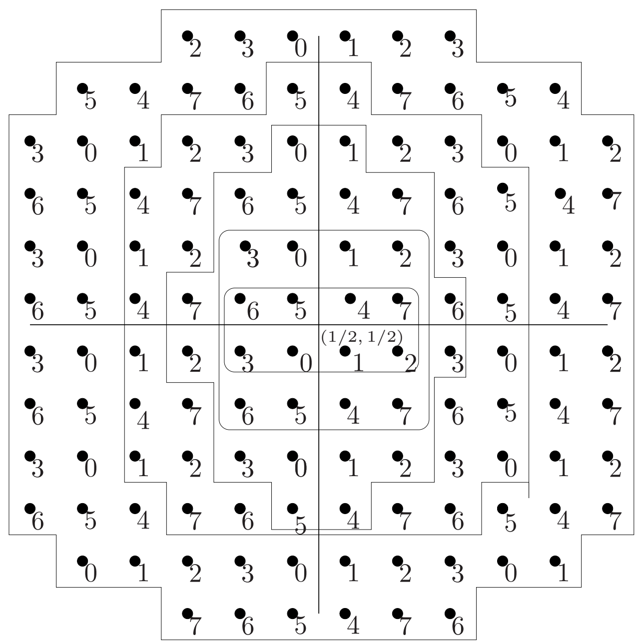

Figura 3.5: Constelações com 8, 16, 32, 64 e 128 pontos em $\frac{\mathbb{Z}^2}{P\mathbb{Z}^2}$

Exemplo 3.6 *Considere o reticulado quociente* $R = \frac{\Lambda}{\Gamma}$, *onde* $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, $\Gamma = Q\Lambda$ *e*

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

O codificador possui 8 estados e $k_1 = 2$ *entradas em* $\mathbb{Z}_2$. *A Tabela 3.6 apresenta as classes laterais, os rótulos, as normas e as ordens de* $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$, *com a operação definida na Tabela 3.7. A seleção do subconjunto especial para a matriz norma é retirada da Tabela 3.1. A matriz norma*

$$GN = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

contém um conjunto de códigos de treliça ótimos. Ao procurar as matrizes geradoras em

$k_1 = 2$	$R = \mathbb{Z}^2/P\mathbb{Z}^2$	$A = \mathbb{Z}_2$	min	max
$\{N_1, N_2\}$	Líderes	$(0,1),(1,0),(1,1)$	Eq. 3.12	Eq. 3.11
$\{4,2\}$	$(2,0),(1,1)$	4 , 2 , 4	2	2
	$(2,0),(1,-1)$	4 , 2 , 2	2	
$\{2,2\}$	$(1,1),(1,1)$	2 , 2 , 4	2	2
	$(1,1),(1,-1)$	2 , 2 , 0	0	
	$(1,-1),(1,-1)$	2 , 2 , 4	2	
$\{5,4\}$	$(2,1),(2,0)$	5 , 4 , 1	1	1
$\{5,2\}$	$(2,1),(1,1)$	5 , 2 , 1	1	1
	$(2,1),(1,-1)$	5 , 2 , 1	1	
$\{5,1\}$	$((2,1),(1,0)$	5 , 1 , 2	1	
	$(2,1),(-1,0)$	5 , 1 , 2	1	1
	$(2,1),(0,1)$	5 , 1 , 4	1	
$\{4,1\}$	$(2,0),(1,0)$	4 , 1 , 1	1	
	$(2,0),(-1,0)$	4 , 1 , 1	1	1
	$(2,0),(0,1)$	4 , 1 , 5	1	
$\{2,1\}$	$(1,1),(1,0)$	2 , 1 , 5	1	
	$(1,1),(-1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,1),(0,1)$	2 , 1 , 1	1	1
	$(1,-1),(1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,-1),(-1,0)$	2 , 1 , 5	1	
	$(1,-1),(0,1)$	2 , 1 , 1	1	
$\{1,1\}$	$(1,0),(1,0)$	1 , 1 , 4	1	
	$(1,0),(-1,0)$	1 , 1 , 0	0	1
	$(1,0),(0,1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(-1,0),(-1,0)$	1 , 1 , 4	1	
	$(-1,0),(0,1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,1),(0,1)$	1 , 1 , 0	1	

Tabela 3.4: Tabela de Normas Ordenadas do Exemplo 3.5

k_2	ρ	M	d	p	N	d^u	p^u	$\mathcal{G}$
2	2,0	2^5	5	5,5	2^4	4	10	3,566
3	2,5	2^6	5	10,25	2^5	4	20	3,872
4	3,0	2^7	5	20,5	2^6	4	42	4,084

Tabela 3.5: Ganhos de Codificação do Exemplo 3.5

$R = \frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0)$	0	0	1
$(1,0)$	1	1	4
$(0,1)$	2	1	4
$(-1,0)$	3	1	4
$(0,-1)$	4	1	4
$(1,1)$	5	2	2
$(1,-1)$	6	2	2
$(2,0)$	7	4	2

Tabela 3.6: Normas e Rótulos do Reticulado $\mathbb{Z}^2/Q\mathbb{Z}^2$

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	7	5	0	6	4	2	3
2	2	5	7	6	0	3	1	4
3	3	0	6	7	5	2	4	1
4	4	6	0	5	7	1	3	2
5	5	4	3	2	1	0	7	6
6	6	2	1	4	3	7	0	5
7	7	3	4	1	2	6	5	0

Tabela 3.7: Tabela de Cayley do Reticulado $\mathbb{Z}^2/Q\mathbb{Z}^2$

GN, encontra-se a matriz geradora

$$G = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

A matriz dos rótulos é dada por

$$GR = \left[\begin{array}{ccccccc} 7 & \mid & 5 & 1 & \mid & 7 & 6 \end{array}\right].$$

Aplicando as Equações 3.9 e 3.10 à matriz dos rótulos GR, tem-se os seguintes limitantes:

$$\Delta_{\text{inf}} = \min\{4,2,2\} + \min\{2,4,2\} = 4$$

e

$$\Delta_{\text{sup}} = \min\{4+2+0, 2+1+4, 2+1+4\} = 6.$$

Assim, $4 \leq d_{free} \leq 6$ e a distância livre $d_{free} = 5$. Logo, $d = \min\{5,8\} = 5$.

As constelações de sinais do reticulado $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$ são apresentadas na Figura 3.6. As constelações contém 8, 16, 32, 64 e 128 pontos, com centro no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Os ganhos de codificação para as constelações de 32, 64 e 128 pontos, são apresentados na Tabela 3.8.

k_2	ρ	M	d	p	N	d^u	p^u	$\mathcal{G}$
2	2,0	2^5	5	5,25	2^4	4	10	3,768
3	2,5	2^6	5	1,25	2^5	4	20	3,872
4	3,0	2^7	5	20,5	2^6	4	42	4,084

Tabela 3.8: Ganhos do Exemplo 3.6

No reticulado quociente $\frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$, as classes laterais são bem distribuídas e para a constelação de 128 pontos a energia média da constelação é igual à energia média de cada classe lateral. Além disso, o reticulado quociente $\frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$ apresenta melhor desempenho em relação ao reticulado $\frac{\mathbb{Z}^2}{P\mathbb{Z}^2}$.

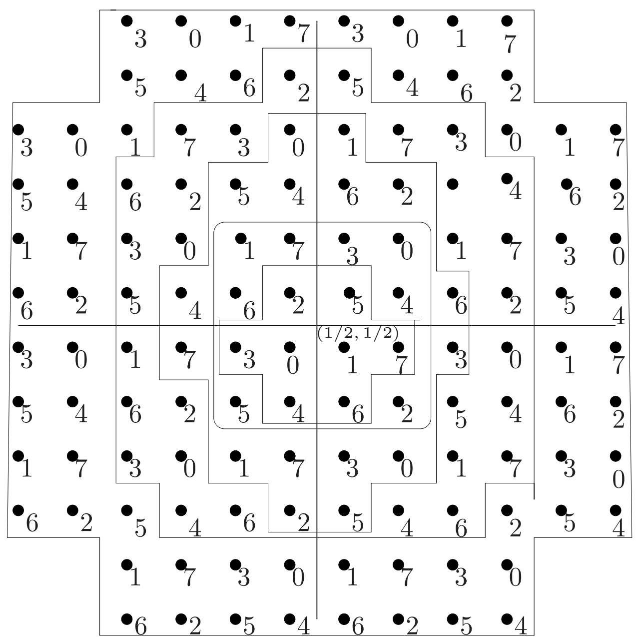

Figura 3.6: Constelações com 8, 16, 32, 64 e 128 pontos em $\frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$

O melhor ganho de codificação ocorre nos códigos que utilizam o reticulado quociente $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$, em relação aos que utilizam o reticulado quociente $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{P\mathbb{Z}^2}$. Tal afirmação é justificada pelo maior valor de densidade no subreticulado $Q\mathbb{Z}^2$. Nos reticulados gerados pela matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

a densidade é $\Delta = 0,555$. Para o subreticulado $P\mathbb{Z}^2$, da matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

a densidade é $\Delta = 0.392$.

$R = \frac{\Lambda}{S\Lambda}$	Rótulo	$\| \|$	$\| \|$
$(0,0)$	0	0	1
$\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$	1	1	8
$(-1,0)$	2	1	4
$\left(-1/2, \sqrt{3}/2\right)$	3	1	8
$\left(0, \sqrt{3}\right)$	4	3	2
$\left(1/2, -\sqrt{3}/2\right)$	5	1	8
$(1,0)$	6	1	4
$\left(-1/2, -\sqrt{3}/2\right)$	7	1	8

Tabela 3.9: Normas e Rótulos do Reticulado $\Lambda = S\Lambda$

Exemplo 3.7 *Considere os parâmetros do código do Exemplo 3.6, o reticulado hexagonal*

$$\Lambda = \left\langle (1,0), (1/2, \sqrt{3}/2) \right\rangle$$

e $\Gamma = S\Lambda$ *o subreticulado de* Λ*, onde*

$$S = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

A norma em Γ *é* $m = \det S = 4\sqrt{3}$ *e* $|R| = \frac{|\det S|}{|\det \Lambda|} = 8$*. A Tabela 3.9 mostra as classes laterais, os rótulos, as normas e as ordens de* $R = \frac{\Lambda}{S\Lambda}$*. A operação em* $R = \frac{\Lambda}{S\Lambda}$ *está definida na Tabela 3.10. A matriz norma que representa um subconjunto especial é dada por*

$$GN = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

A matriz geradora é

$$G = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$$

e a matriz dos rótulos é

$$GR = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Aplicando as Equações 3.9 e 3.10 na matriz dos rótulos GR*, tem-se os seguintes limitantes:*

$$\Delta_{\text{inf}} = \min\{1,3,1\} + \min\{1,3,1\} = 2$$

e

$$\Delta_{\text{sup}} = \min\{3+1+0, 1+1+3, 1+3+3\} = 4.$$

Assim, $2 \leq d_{free} \leq 4$*. A distância livre* $d_{free} = 4$*,* $d^2_{\min} = 7$ *e* $d = \min\{4,7\} = 4$*.*

A Figura 3.7 apresentam as constelações de sinais com 8, 16, 32, e 64 pontos para o reticulado quociente $R = \Lambda/S\Lambda$. As energias médias desta constelação são $p = 1,21,\ 2,33,$

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Tabela 3.10: Tabela de Cayley do Reticulado $\Lambda = S\Lambda$

$k_1 = 2$	$R = \Lambda/S\Lambda$	$A = \mathbb{Z}_2$	min	max
$\{N_1, N_2\}$	Líderes	$(0,1),(1,0),(1,1)$	Eq. 3.12	Eq. 3.11
$\{3,1\}$	$(0,\sqrt{3}),(-1,0)$	3 , 1 , 1	1	
	$(0,\sqrt{3}),(1,0)$	3 , 1 , 1	1	
	$(0,\sqrt{3}),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	3 , 1 , 1	1	
	$(0,\sqrt{3}),(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	3 , 1 , 1	1	1
	$(0,\sqrt{3}),(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$	3 , 1 , 1	1	
	$(0,\sqrt{3}),(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$	3 , 1 , 1	1	
$\{1,1\}$	$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	
	$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 3	1	
	$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	
	$(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}),(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	
	$(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	
	$(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}),(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	1
	$(-1,0),(-1,0)$	1 , 1 , 3	1	
	$(-1,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	
	$(-1,0),(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	3	
	$(-1,0),(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	
	$(1,0),(1,0)$	1 , 1 , 3	1	
	$(1,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	
	$(1,0),(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	
	$(1,0),(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$	1 , 1 , 1	1	

Tabela 3.11: Tabela de Normas Ordenadas do Exemplo 3.7

k_2	ρ	M	d	p	N	d^u	p^u	$\mathcal{G}$
2	$2,0$	2^5	4	$4,46$	2^4	4	10	$3,507$
3	$2,5$	2^6	4	$8,89$	2^5	4	20	$3,521$
4	$3,0$	2^7	4	$1,7$	2^6	4	42	$3,753$

Tabela 3.12: Ganhos do código do Exemplo 3.7

$4,46$ e $8,89$, respectivamente. A constelação está centralizada em $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ e os ganhos de codificação são apresentados na Tabela 3.12, para as constelações de 32 e 64 pontos.

O reticulado quociente proposto no Exemplo 3.7 possui menor energia média quando comparado aos reticulados de $\mathbb{Z}^2$, usados nos Exemplos 3.5 e 3.6.

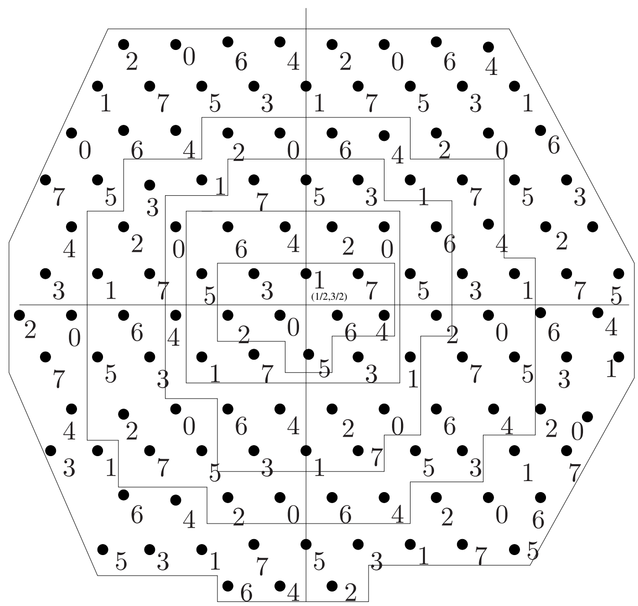

Figura 3.7: Constelações com 8, 16, 32 e 64 pontos em $\frac{\mathbb{Z}^2}{S\mathbb{Z}^2}$

Para verificar o impacto no aumento de memórias do código de treliça, é considerado o código $(2,4,2)$ da Figura 3.8. Assim, tem-se a matriz norma

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Tal matriz é um dos subconjuntos especiais. A matriz geradora é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

e a matriz dos rótulos é

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 5 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

A distância deste código é ampliada em relação à distância do código do Exemplo 3.6.

k_2	ρ	M	d	p	N	d^u	p^u	$\mathcal{G}$
2	$2,0$	2^5	6	$5,25$	2^4	4	10	$4,559$
3	$2,5$	2^6	6	$10,25$	2^5	4	20	$4,664$
4	$3,0$	2^7	6	$20,5$	2^6	4	42	$4,876$

Tabela 3.13: Ganhos do Exemplo 3.6 para o codificador de 16 estados

k_2	ρ	M	d	p	N	d^u	p^u	$\mathcal{G}$
2	$2,0$	2^5	5	$4,46$	2^4	4	10	$4,476$
3	$2,5$	2^5	5	$8,89$	2^5	4	20	$4,490$
3	$2,5$	2^5	5	$17,70$	2^6	4	42	$4,722$

Tabela 3.14: Ganhos para o codificador de 16 estados do Exemplo 3.7

Tem-se $d_{\text{free}} = 6$ e $d = \min\{6, 8\} = 6$. Os ganhos de codificação, neste código, são apresentados na Tabela 3.13.

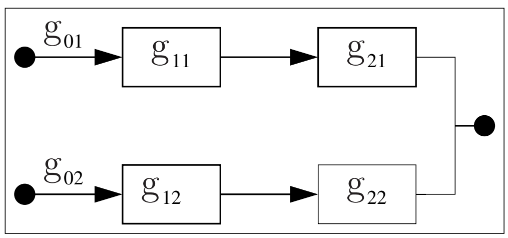

Figura 3.8: Estrutura do Codificador de 16 Estados

De maneira análoga, para o Exemplo 3.7, a matriz norma é

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

A matriz dada por

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{array}\right]$$

é uma das matrizes geradoras de um código de treliça ótimo associado a GN. A matriz geradora G será representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 4 & 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right].$$

A distância é igual $d_{\text{free}} = 4$ e $d = \min\{4, 7\} = 4$. Os ganhos de codificação deste código são apresentados na Tabela 3.14.

O resultado mais importante verificado nestes dois exemplos é que o aumento no número de entradas não-codificadas k_2, ocasiona um aumento considerável no ganho de codificação, somente quando k_2 é acrescentado de modo a formar uma constelação perfeitamente ajustada.

Em particular, no Exemplo 3.6, quando k_2 aumenta de 2 para 3, tem-se que o ganho de codificação aumenta $0,105$; e quando k_2 aumenta de 3 para 4, o ganho de codificação aumenta $0,212$ (Tabela 3.13). Logo, o ganho de codificação adquirido com o aumento da entrada não-codificada é significativo quando este acréscimo forma uma constelação da forma

$$N = q^{k_1+k_2} = (2b)^n,$$

ou seja, uma constelação perfeitamente ajustada.

3.6 Considerações Finais

As tabelas de ganho de codificação apresentadas, mostram as melhores partições de um reticulado para a determinação de classes laterais que formam os códigos de treliça com melhores desempenhos. As constelações de sinais mapeadas por reticulados hexagonais apresentam as melhores energias médias quando comparadas às partições de reticulados de $\mathbb{Z}^2$. Além disso, as partições de reticulados, onde os subreticulados são representados por figuras geométricas regulares, proporcionam ganhos de codificação consideráveis. Portanto, é proposto o uso de reticulados quociente geometricamente regulares para a construção de códigos de treliça ótimos. Também é verificado que o acréscimo da entrada não-codificada apresenta ganho significativo quando a constelação formada é perfeitamente ajustada.

Capítulo 4

Classe de Equivalência dos Códigos de Treliça

Neste capítulo é apresentada uma classe de equivalência de códigos de treliça sobre partições de reticulados representados por matrizes geradoras G, onde as classes laterais da partição formam as colunas desta matriz. A equivalência dos códigos de treliça é obtida através da utilização de operadores lineares com propriedades estruturais que ligam as estruturas algébricas dos grupos aos códigos de treliça. A existência da equivalência entre os códigos de treliça em subconjuntos especiais é mostrada a partir da determinação dos espectros de pesos dos códigos de treliça.

A principal contribuição deste capítulo é apresentar uma ferramenta a ser usada na determinação dos códigos de treliça equivalentes e esta classe de equivalência é utilizada no processo de determinação dos códigos ótimos existentes nos subconjuntos especiais.

Para verificar os conceitos abordados neste capítulo e analisar a existência da equivalência dos códigos de treliça, são dados exemplos de códigos de treliça e verificados os espectros de pesos nos códigos equivalentes determinados. Os espectros de pesos são determinados nos caminhos fechados (com início e final no estado zero) para um comprimento L fixo.

4.1 Classe de Códigos Equivalentes

Nesta seção são usadas as transformações lineares para mostrar que vários códigos de treliça sobre partições de reticulados são equivalentes. Também é mostrado o Teorema 4.1 que caracteriza a equivalência destes códigos.

Dada uma partição de reticulado em um espaço de dimensão n, onde as classes laterais $g = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R = \Lambda/\Gamma$. Considere uma família de transformações lineares, definida por

$$\varphi : R \longrightarrow R, \tag{4.1}$$

$$g_i \longmapsto g_j$$

tal que $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, com

$$\begin{cases} y_i = x_j, \text{ para algum } i, j \in \{1, \ldots, n\}, \\ y_i = -x_i, \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ e/ou} \\ y_i = x_i, \text{ para os demais.} \end{cases}$$

A transformação linear

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

é denominada de **operador linear**. Se $\varphi\left(g\right) = g$, φ é denominado de operador identidade e é indicado por I.

Definição 4.1 *Dois códigos convolucionais C_1 e C_2 são ditos códigos equivalentes, se seus espectros de pesos são iguais e é indicado por $C_1 \equiv C_2$.*

Teorema 4.1 *Considere C_1 um codificador convolucional com k_1 entradas e V memórias gerado pela matriz*

$$G = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} g_{vk_1} & \cdots & g_{v1} & \cdots & g_{0k_1} & \cdots & g_{01} \end{array}\right].$$

Se $\varphi : R \to R$ é uma composição formada por uma família de operadores lineares, tal que $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_m$, com as $\varphi_l(g_i) = g_j$, $1 \leq l \leq m$, e

$$\varphi(G) = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} \varphi(g_{vk_1}) & \cdots & \varphi(g_{v1}) & \cdots & \varphi(g_{0k_1}) & \cdots & \varphi(g_{01}) \end{array}\right].$$

Então o código convolucional C_2 gerado por $\varphi(G)$ é equivalente ao código C_1 gerado por G.

Prova. Devemos que código C_1 e equivalente a C_2, se somente, $\left\|\varphi\left(g\right)\right\| = \left\|g\right\|$., isto é, φ é uma entre classes laterais de mesma norma.

Por definição

$$\|g\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

mas, de (4.1) tem-se que

$$\|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sum_{j=1}^{n} y_j^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\varphi(g)\| &= \sum x_i^2 + \sum (-x_i)^2 + \sum x_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|g\|\,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\varphi\,(g)\| = \|g\|\,.$$

Nestas condições, pode-se concluir que

$$\left\|\sum_{i,j} u_{ij}\varphi(g_{ij})\right\| = \left\|\sum_{i,j} u_{ij} g_{ij}\right\|.$$

Além disso, se φ_1 e φ_2 são dois operadores lineares, então o operador composição $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ é tal que:

$$\|(\varphi_1 \circ \varphi_2)(g)\| = \|\varphi(g)\| = \|g\|\,.$$

Portanto, $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_m$ é tal que:

$$\|(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_m)(g)\| = \|\varphi(g)\| = \|g\|\,.$$

■

Exemplo 4.1 *Considere o código* $(2, 4, 2)$ *sobre o reticulado quociente* $\frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$*, Exemplo 3.6. A matriz geradora*

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

representa um código de treliça ótimo. Para a seqüência fechada

$$u_{21}u_{22}\ \ u_{11}u_{12}\ \ u_{01}u_{02}\ \ = 00\ \ 00\ \ 11,$$

as saídas são $(1, -1)$, $(1, 1)$, *e* $(1, -1)$, *nesta ordem. O peso da seqüência supracitada é* $2 + 2 + 2 = 6$. *Agora, seja* $\phi : R \to R$ *um operador linear tal que* $\phi(x, y) = (y, x)$. *Aplicando* ϕ *em* G, *tem-se*

$$\phi(G) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Para a seqüência fechada

$$00\ \ 00\ \ 11,$$

as saídas são $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ *e o peso é* $2 + 2 + 2 = 6$. *Verificando que* G *e* $\phi(G)$ *possuem os mesmos pesos para esta seqüência.*

4.2 Aplicação da Equivalência aos Códigos de Treliça

Em uma classe de equivalência dos códigos de treliça em partições de reticulados, as matrizes geradoras diferem entre si, por permutações das classes laterais com mesma norma. Neste caso, dois códigos de treliça C_1 e C_2 são equivalentes se um é obtido da permutação das classes laterais com mesma norma, considerando a existência da aplicação de um operador linear agindo sobre as classes laterais substituídas. Nas duas subseções seguintes são mostrados dois casos para verificar a existência da equivalência e os espectros de pesos dentro das classes de equivalências.

4.2.1 Classe de Equivalência no Reticulado Quadrado

Considere a partição de reticulado $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$, onde

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

e os operadores lineares

$$\rho, \phi : R \to R,$$

com

$$\rho(x, y) = (y, x) \quad \text{e} \quad \phi(x, y) = (-y, x). \tag{4.2}$$

As classes laterais de R e as imagens $\rho(R)$ e $\phi(R)$ estão apresentadas na Tabela 4.1.

$R = \frac{\mathbb{Z}^2}{P\mathbb{Z}^2}$	$\rho(R)$	$\phi(R)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
$(0,1)$	$(1,0)$	$(-1,0)$
$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(0,-1)$
$(0,-1)$	$(-1,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,-1)$
$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$
$(2,0)$	$(2,0)$	$(2,0)$

Tabela 4.1: Imagens dos Operadores Lineares da Equação 4.2

O conjunto dos operadores com a operação de composição possui uma estrutura de grupo, de modo que:

$$\begin{cases} (\rho \circ \rho)(x, y) = \rho^2(x, y) = I(x, y) = (x, y), \\ (\phi^2 \circ \phi^2)(x, y) = \phi^4(x, y) = I(x, y) = (x, y), \\ (\phi^3 \circ \rho)(x, y) = (\rho \circ \phi)(x, y) = (x, -y). \end{cases}$$

O operador linear ρ tem ordem 2 e ϕ tem ordem 4, ou seja, $\rho^2 = I$ e $\phi^4 = I$, e escreve-se $|\rho| = 2$ e $|\phi| = 4$. Logo o conjunto $\{\rho, \phi\}$ munido da operação de composição, $\circ$, gera um grupo

$$(\mathbf{G}, \circ) = \langle \rho, \phi \rangle,$$

descrito por:

$$\mathbf{G} = \{I, \phi, \phi^2, \phi^3, \rho, \phi\rho, \phi^2\rho, \phi^3\rho\}. \tag{4.3}$$

O grupo $\mathbf{G}$ possui ordem $|\mathbf{G}| = 8$ e é isomorfo ao grupo diedral D_4 das simetrias espaciais do quadrado. Por simplicidade escreve-se apenas $\phi\rho$, ao invés de $\phi \circ \rho(x, y)$.

Considerando o codificador de parâmetros $(2, 4, 2)$ sobre o reticulado quociente $\Gamma = Q\Lambda$ do Exemplo 3.6, onde as classes laterais estão na Tabela 3.6. A matriz norma do subconjunto especial que contém os códigos de treliça ótimos, é dada por:

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

Seja a matriz geradora de um código de treliça ótimo,

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 7 & 5 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right]. \tag{4.4}$$

Aplicando os operadores lineares do grupo $\mathbf{G}$, dado em (4.3), obtém-se 8 matrizes geradoras $\mathbf{G}(GR)$ distintas, correspondentes a 8 códigos equivalentes. O grupo das matrizes formuladas a partir da aplicação do grupo $\mathbf{G}$ sobre a matriz geradora G é

$$\mathbf{G}(GR) = \{I(GR), \phi(GR), \phi^2(GR), \phi^3(GR), \rho(GR), \phi\rho(GR), \phi^2\rho(GR)\phi^3\rho(GR)\}.$$

Assim, $\mathbf{G}(GR) =$

$$\Big\{\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 7 & 5 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 7 & 6 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 7 & 5 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 7 & 6 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right],$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 7 & 5 & 2 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 7 & 6 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 7 & 5 & 4 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 7 & 6 & 1 & 4 & 6 & 7 \end{array}\right]\Big\},$$

nesta ordem.

Analisando as colunas da matriz GN, observa-se que existem 2, 4, 4 e 2 possibilidades para as colunas 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Portanto, tem-se 64 matrizes geradoras distintas, onde várias destas matrizes geradoras de códigos de treliça apresentam os mesmos espectros de pesos, ou seja, vários códigos de treliça deste esquema de codificação são equivalentes.

$R = \frac{\Lambda}{S\Lambda}$	$\rho(R)$	$\phi(R)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$(-1,0)$	$(-1,0)$	$(1,0)$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$(0,\sqrt{3})$	$(0,\sqrt{3})$	$(0,\sqrt{3})$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(-1,0)$
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Tabela 4.2: Imagens dos Operadores Lineares da Equação 4.5

4.2.2 Classe de Equivalência no Reticulado Hexagonal

Considere a partição de reticulado $R = \frac{\Lambda}{S\Lambda}$, onde $\Lambda = \left\langle (1,0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \right\rangle$ e

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Sejam os operadores lineares

$$\rho, \phi : R \to R,$$

tais que

$$\rho(x,y) = (x,-y) \text{ e } \phi(x,y) = (-x,y). \tag{4.5}$$

As classes laterais de R e as imagens $\rho(R)$ e $\phi(R)$ estão na Tabela 4.2.

A operação de composição dos operadores ρ e ϕ é definida por:

$$\begin{cases} (\rho \circ \rho)(x,y) = I(x,y), \\ (\phi \circ \phi)(x,y) = I(x,y), \\ (\phi \circ \rho)(x,y) = (\rho \circ \phi)(x,y). \end{cases}$$

Estes operadores com a operação de composição possui uma estrutura de grupo, onde a ordem dos elementos ρ e ϕ é 2. Logo o conjunto $\{\rho, \phi\}$ munido da operação de composição, gera um grupo $(\mathbf{G}, \circ) = \langle \rho, \phi \rangle$, descrito por:

$$\mathbf{G} = \{I, \rho, \phi, \rho\phi\}.$$

O grupo $\mathbf{G}$ possui ordem $|\mathbf{G}| = 4$ e é isomorfo ao grupo de Klein.

Considere o codificador de parâmetros $(2,4,2)$, sobre o reticulado quociente hexagonal do Exemplo 3.7 da Tabela 3.9. O subconjunto especial que contém os códigos de treliça ótimos é dado pela matriz norma

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Seja a matriz geradora de um código de treliça ótimo,

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{array}\right],$$

representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Aplicando os operadores lineares do grupo $\mathbf{G}$, tem-se 4 matrizes geradoras $\mathbf{G}(GR)$ distintas, correspondentes a 4 códigos equivalentes:

$$\mathbf{G}(GR) = \{I(GR), \rho(GR), \phi(GR), \rho\phi(GR)\} =$$

$$\left\{\left[\begin{array}{cccccc} 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 7 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cccccc} 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 7 \end{array}\right]\right\}$$

nesta ordem.

Analisando as colunas da matriz G, observa-se que existem 6 possibilidades para as colunas 2, 3, 4 e 5, mostrando a existência de 1296 matrizes geradoras para a GN, onde várias destas matrizes geradoras são de códigos de treliça ótimos. Logo, tem-se 1296 matrizes geradoras distintas com vários códigos de treliça equivalentes.

4.3 Espectro de Peso e Classe de Equivalência

Para o esquema de codificação do código de treliça, com parâmetros (k_1, V, q) e uma partição de reticulado Λ/Γ, cada caminho fechado da treliça está associado à uma seqüência de bits de entrada. Os caminhos fechados de comprimento L, onde o comprimento L é a quantidade de ramos do caminho fechado da treliça, que inicia e termina no estado zero, com seqüências de blocos com k_1 bits e seqüência inicial não-nula. Mas, após uma quantidade de blocos k_1, os demais blocos de entrada são nulos, onde o comprimento de cada seqüência é superior a $\frac{V}{k_1}$. A quantidade máxima de blocos k_1 da seqüência de entrada é dada por:

1. $(L - v)$, se $V \equiv 0 (\operatorname{mod} k_1)$;

2. $(L - v + 1)$, no caso contrário.

Considerando o código $(2, 4, 2)$, por exemplo, as seqüências fechadas são de comprimento $L = 3$,

$$S_1 = 00\ 00\ 10,\ \ S_2 = 00\ 00\ 01 \text{ e } S_3 = 00\ 00\ 11,$$

onde na seqüência em S_1: 10 é o primeiro bloco de entrada e 00 é o segundo e terceiro bloco. De forma análoga para S_2 e S_3. Existem 9 seqüências fechadas de comprimento $L = 4$ e 36 de comprimento $L = 5$. As seqüências são aplicadas nas matrizes geradoras, representadas pela matriz dos rótulos (Equação 4.4), que são as matrizes $\mathbf{G}(GR)$ obtidas através do grupo de composição dos operadores (Equação 4.3).

Para determinar os espectros de peso de um código de treliça, são construídas as seqüências de caminho da treliça, referente aos bits de entradas, onde os caminhos fechados são seqüências com bloco inicial de k_1 bits não-nulo, que após uma determinada quantidade de blocos não-nulos, todos os demais blocos de bits de entrada são nulos. Após, construídas as seqüências, inicia-se a procura dos caminhos com mesma métrica.

A métrica de cada caminho fechado para a seqüência de entrada é calculado, determinando a classe lateral e a respectiva métrica, para cada ramo do caminho fechado representado na treliça do código. A soma das métricas para todos os ramos de um caminho fechado é a métrica do caminho considerado e o mesmo é classificado pela sua métrica. A classificação final dos caminhos, para todas as seqüências de entradas, determina o espectro de peso.

Exemplo 4.2 *Considere o esquema de codificação com parâmetros* $(2, 4, 2)$ *e a partição de reticulados* $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{Q\mathbb{Z}^2}$*, Exemplo 3.6. Entre os subconjuntos especiais determinados na Tabela 3.1, considere o subconjunto especial da matriz norma*

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right], \tag{4.6}$$

que possui 64 *matrizes geradoras, divididas em* 8 *classes de equivalências, Tabela 4.3, isto é,* 8 *classes com cada classe representando* 8 *matrizes com os mesmos espectros de pesos, onde estas* 8 *matrizes são geradas através do grupo* $\mathbf{G}$.

A quantidade de caminhos fechados da treliça do codificador convolucional, é listada de acordo com as variáveis métricas e comprimento L do caminho fechado. Os caminhos fechados da treliça são maiores ou iguais ao Δ_{inf}, particularmente, a métrica de cada caminho fechado é igual ou superior ao d_{free} do código de treliça. Os limitantes e d_{free} das classes de equivalências da Tabela 4.3, estão na Tabela 4.4.

$G_{1j} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$G_{2j} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$G_{3j} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$G_{4j} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$G_{5j} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$G_{6j} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$G_{7j} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$G_{8j} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tabela 4.3: Classes de Equivalências da Matriz Norma 4.6, onde $1 \leq j \leq 8$

C. Equivalência	Δ_{inf}	Δ_{sup}	d_{free}
G_{1j}	4	6	6
G_{2j}	4	6	5
G_{3j}	4	7	5
G_{4j}	4	6	4
G_{5j}	4	4	4
G_{6j}	4	7	5
G_{7j}	4	6	5
G_{8j}	4	4	4

Tabela 4.4: Limitantes e d_{free} dos Códigos de Treliça da Classe G_{ij}, onde $1 \leq i \leq 8$

Exemplo 4.3 *Seja o codificador convolucional do Exemplo 4.2. Neste esquema de codificação escolhido, considere a matriz geradora das classes de equivalência G_{1j}, dada por*

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 7 & 5 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{array} \right]. \tag{4.7}$$

A Tabela 4.5 apresenta o espectro de peso da classe de equivalência do código ótimo (Equação 4.7), iniciando pelo menor caminho ($L = 3$) até o caminho $L = 8$. A menor métrica é a distância do código, d_{free}. Similarmente, é apresentado o espectro de peso das classes de equivalência para os demais grupos de códigos de treliça equivalentes.

A Tabela 4.6 descreve os códigos da classe de equivalência G_{1j}, detentora dos códigos de treliça ótimos, porém equivalentes.

C \ M	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	26
$L = 3$	1	2																		
$L = 4$	1	5	2		1		1													
$L = 5$	5	10	8	8	6	2	4	4	1											
$L = 6$	9	16	16	32	31	20	22	16	12	6	1			2						
$L = 7$	12	24	34	74	99	96	98	82	66	56	24	10	9	4	6	2				
$L = 8$	13	30	64	152	228	300	361	352	323	280	217	128	67	48	34	28	10	2	2	1

M - Métrica do Caminho C - Comprimento do Caminho

Tabela 4.5: Os Espectros de Pesos das Matrizes Geradoras $\mathbf{G}(GR_{1j})$

$G_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$G_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0-1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$G_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$G_{14} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$G_{15} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$G_{16} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$G_{17} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$G_{18} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Tabela 4.6: Os Códigos de Treliças da Classe de Equivalência G_{1j}

4.4 Considerações Finais

Uma classe de equivalência foi apresentada através da aplicação de operadores lineares que apresentam estruturas de grupos, mostrando uma relação entre as estruturas algébricas e a teoria de codificação. A aplicação das propriedades de grupo e álgebra linear aos subconjuntos especiais é uma ferramenta para otimização da procura dos códigos de treliça ótimos. A classe de equivalência usada nos algoritmos de procura dos códigos de treliça ótimos, dentre os subconjuntos especiais, diminui consideravelmente a quantidade de matrizes geradoras a serem investigadas pelo algoritmo. A proposta é implementar ao algoritmo de procura, os resultados das classes de equivalências.

Capítulo 5

Códigos de Treliça

Neste capítulo são mostradas várias construções de códigos de treliça, usando partições de reticulados em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^8$, com a finalidade de verificar que a dimensão do reticulado pode melhorar o desempenho do código de treliça, que também está relacionado ao número de memórias, tamanho da constelação, quantidade de entradas utilização de reticulados quociente que permitam construir constelações de sinais com menor energia média entre as partições possíveis.

No desenvolvimento do algoritmo de procura por códigos de treliça ótimos, baseados em [14], [13] e [12], é proposta a sistematização do uso das classes de equivalências como método de otimização dessa procura. Este processo inicia-se com a procura do reticulado Λ e de um subreticulado Γ de Λ, formando um reticulado quociente, para em seguida definir os parâmetros (k_1, V, q) do código de treliça. Em seguida são escolhidos os blocos de normas $(N_1, \cdots, N_{k_1})$, com as maiores normas ocupando o primeiro e também o último bloco (com as k_1 colunas cada) da matriz GN. Calculado o Δ_{inf} e o Δ_{sup}, são inseridas as colunas intermediárias que contém um conjunto gerador do reticulado quociente que maximiza o Δ_{sup}. O cálculo do d_{free} é feito sempre na procura por uma aproximação ou mesmo pelo alcance do Δ_{sup}. A procura é feita sobre os subconjuntos especiais para identificar os códigos de treliça ótimos e as matrizes geradoras de códigos equivalentes são descartadas (esta equivalência é mostrada pelo Teorema 4.1, após construída as transformações no reticulado quociente).

Caso exista outras matrizes GN com mesmo espectro de peso, o processo anterior é repetido na nova matriz norma escolhida. Finalmente, são apresentados os códigos de treliça com d_{free} máximo entre todas as G, ou seja, são apresentados os códigos de treliça ótimos para o esquema de codificação. A Figura 5.1 apresenta um fluxograma completo do processo de procura por códigos de treliça ótimos proposto nesta tese.

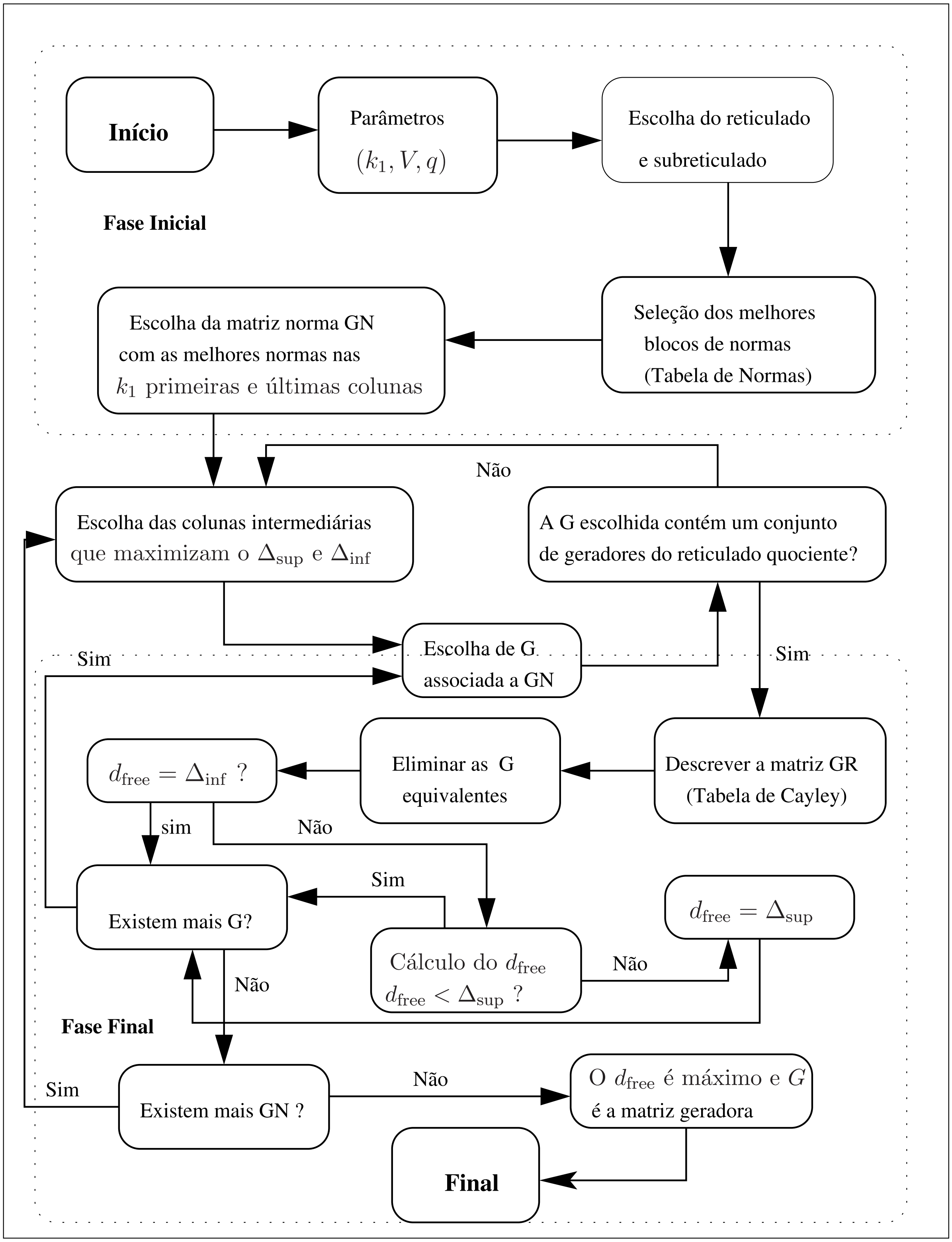

Figura 5.1: Fluxograma Para Procura de Códigos de Treliça Ótimos

5.1 Códigos de Treliça em Partições de $\mathbb{Z}^2$

Os códigos de treliça utilizados nesta tese são baseados em reticulados quociente considerando-se o critério de densidade, que neste caso são os reticulados quadrado e o hexagonal, mostrados na Tabela 2.1. O objetivo é investigar os reticulados quociente, associá-los aos melhores códigos de treliça, procurar os códigos de treliça ótimos do sistema de codificação construído a partir destas partições e estudar o desempenho destes códigos.

5.1.1 Reticulado Quociente com 8 Classes Laterais

Nesta seção são considerados os reticulados quociente sobre $\mathbb{Z}^2$ contendo 8 classes laterais. Os parâmetros para o esquema de codificação são determinados, o reticulado quociente é construído de maneira compatível ao número de classes laterais com propriedades algébricas e geométricas necessárias, e em seguida, são determinados os códigos de treliça para o reticulado quociente, concluindo com a procura dos códigos de treliça ótimos. Nesta seção, também é verificado que o desempenho do ganho de codificação é alterado com o acréscimo nos pontos da constelação de sinais, e o aumento no número de memórias do código.

Considere $R = \Lambda/\Gamma$ como sendo uma partição de reticulado, para $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e $\Gamma = P_1\Lambda$, onde

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$R = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (-1,0), (0,-1), (1,-1), (2,0)\}.$$

Seja um codificador convolucional com parâmetros $(2,4,2)$. Então o conjunto de normas é $\{N_1, N_2\}$ e a matriz geradora é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} g_{22} & g_{21} & | & g_{12} & g_{11} & | & g_{02} & g_{01} \end{bmatrix}.$$

As duas últimas colunas estão associados às entradas do codificador e as demais às memórias. Os subconjuntos especiais, ou seja, onde se encontra as melhores normas, são selecionadas na Tabela 3.1 de classes laterais e normas ordenadas, sendo utilizados os blocos de normas que maximizam o Δ_{inf} e Δ_{sup}, enquanto as que anulam a Equação (3.11) são descartadas, pois não são utilizadas na construção dos códigos de treliça ótimos.

As normas que maximizam o Δ_{inf} e Δ_{sup}, a saber, as normas das k_1 primeiras e das k_1 últimas colunas de G, que constarão nos códigos de treliça ótimos, têm seis possibilidades para dispor as colunas das extremidades, visto que a ordem em $\{N_1, N_2\}$ não é levada em conta. Pelo Teorema 4.1, várias matrizes geradoras apresentam códigos equivalentes [20].

As matrizes normas

$$GN_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right], \quad GN_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$
$$\text{e } GN_3 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad (5.1)$$

são as matrizes normas satisfatórias, ou seja, as normas associadas às matrizes geradoras de códigos ótimos, os subconjuntos especiais. Existem várias possibilidades para escrever a matriz G, particularmente, para a GN_3 de (5.1), uma matriz geradora é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]. \qquad (5.2)$$

Pelo Teorema 4.1, várias destas matrizes geram códigos equivalentes. Para efetuar o cálculo dos espectros de pesos é determinada a matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 7 & 5 & 6 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right],$$

onde são utilizada a Tabela 3.6 e a Tabela de Cayley (Tabela 3.7) para efetuar as operações. Para este código tem-se os seguintes limitantes: $\Delta_{\text{inf}} = 4$ e $\Delta_{\text{sup}} = 7$. Efetuando-se o cálculo segue que a distância é $d_{\text{free}} = 6$ e $d = \min\{8, 6\} = 6$. Para as constelações de sinais com 32 e 128 pontos com centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, o desempenho de ganho de codificação é apresentado na Tabela 5.1. A constelação não-codificada $N = 2^{k_1+k_2}$, para $k_2 = 2$ e 4, é dada por $N = 2^4$ e 2^6 pontos, a energia média alcança $p = 5$ e $20,5$, e as constelações não-codificadas são $p^u = 10$ e 42, respectivamente. Além disso, os códigos convolucionais deste sistema de codificação são não-catastróficos. Note que o aumento do número de pontos na constelação de sinais proporciona um acréscimo no ganho de codificação.

Considerando os parâmetros $(2, 6, 2)$, tem-se um código com 64 estados. Assim, um código de treliça é representado pela matriz geradora

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right], \qquad (5.3)$$

que representa um código ótimo, onde a matriz dos rótulos é dada por

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 7 & 5 & 6 & 1 & 2 & 5 & 6 & 5 \end{array}\right].$$

Os limitantes são: $\Delta_{\text{inf}} = 4$ e $\Delta_{\text{sup}} = 7$. Efetuando-se o cálculo da distância do código, obtém-se $d_{\text{free}} = 7$ e assim $d = \min\{8, 7\} = 7$. Utilizando-se uma constelação de sinais de 32

k_2	Taxa	M	N	$\frac{d}{p}$	$\frac{d^u}{p^u}$	Ganho
2	2	2^5	2^4	$6/5$	$4/10$	$4,771$
4	3	2^7	2^6	$6/20,5$	$4/42$	$4,876$

Tabela 5.1: Ganhos do Código do Reticulado $\frac{\mathbb{Z}^2}{P\mathbb{Z}^2}$

e 128 os ganhos de codificação são dados por

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{7}{5} \div \frac{4}{10}\right) = 5,441 \quad dB \ \text{ e } \ \mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{7}{20.5} \div \frac{4}{42}\right) = 5,545 \quad dB,$$

respectivamente.

Observe que o aumento do número de memórias no código de treliça também ocasionou um acréscimo no ganho de codificação.

5.1.2 Reticulado Quociente com 16 Classes Laterais

Nesta seção é considerada uma partição para um reticulado quociente contendo 16 classes laterais. O objetivo é analisar o comportamento dos códigos de treliça quando aumenta o número de palavras-código.

Considere o reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e $\Gamma = 4\mathbb{Z}^2$ um subreticulado de Λ. A matriz de Γ é dada por

$$4\mathbb{Z}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

O reticulado quociente $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{4\mathbb{Z}^2}$ é uma partição de Λ e a Tabela 5.2 mostra os rótulos, normas e ordens de R. É utilizado um codificador com parâmetros $(2, 4, 2)$. Os subconjuntos especiais têm bloco de norma $\{N_1, N_2\} = \{8, 4\}$ para os códigos de treliça ótimos e uma matriz norma é dada por

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 8 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 \end{array}\right].$$

Uma matriz para o código ótimo é a matriz

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]. \tag{5.4}$$

Para efetuar o cálculo dos espectros de pesos, a matriz geradora é representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 15 & 9 & 10 & 1 & 10 & 15 \end{array}\right].$$

Os limitantes são: $\Delta_{\text{inf}} = 8$ e $\Delta_{\text{sup}} = 13$. A distância do código é $d_{\text{free}} = 13$, e assim $d = \min\{16, 13\} = 13$. Para uma constelação de 64 sinais, tem-se que $p = 10,25$ e $p^u = 10$.

$R = \frac{\mathbb{Z}^2}{4\mathbb{Z}^2}$	Rótulo	Norma	Ordem	R	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0)$	0	0	1	$(-1,-1)$	8	2	4
$(1,0)$	1	1	4	$(2,0)$	9	4	2
$(0,1)$	2	1	4	$(0,2)$	10	4	2
$(-1,0)$	3	1	4	$(1,2)$	11	5	4
$(0,-1)$	4	1	4	$(2,1)$	12	5	4
$(1,1)$	5	2	4	$(-1,2)$	13	5	4
$(1,-1)$	6	2	4	$(2,-1)$	14	5	4
$(-1,1)$	7	2	4	$(2,2)$	15	8	2

Tabela 5.2: Normas e Rótulos do Reticulado $\frac{\mathbb{Z}^2}{4\mathbb{Z}^2}$

O ganho de codificação é

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{13}{10.25} \div \frac{4}{10} \right) = 5,012 \quad dB.$$

O aumento do número de classes laterais, neste caso, proporcionou aumento no ganho de codificação.

5.1.3 Reticulado Quociente com 32 Classes Laterais

Nesta seção procura-se aumentar o número de classes laterais no reticulado quociente, com a finalidade de se obter um aumento no ganho de codificação sem alteração nos parâmetros. Será utilizado um reticulado com propriedades algébricas e geométricas semelhante ao reticulado quociente formado a partir de $P_1\Lambda$, Seção 5.1.1.

Considere $R = \Lambda/\Gamma$ uma partição de reticulado, para $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e $\Gamma = P_4\Lambda$, onde

$$P_4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda um codificador convolucional com parâmetros $(2,4,2)$. A Tabela 5.3 mostra os rótulos, as normas e as ordens do reticulado $R = \frac{\mathbb{Z}^2}{P_4\mathbb{Z}^2}$. Os subconjuntos especiais com melhor conjunto de normas $\{N_1, N_2\}$ para os códigos de treliça ótimos determinam um conjunto de matrizes norma com possibilidades de conter matrizes geradoras de códigos de treliça ótimos, dentre tais matrizes está a matriz norma

$$GN = \begin{bmatrix} 16 & 8 & | & 1 & 10 & | & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

No subconjunto associado a matriz GN, tem-se que a matriz geradora para o código ótimo é dada por

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \tag{5.5}$$

$R = \frac{\mathbb{Z}^2}{P_4\mathbb{Z}^2}$	Rótulo	Norma	Ordem	R	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0)$	0	0	1	$(0,-3)$	16	9	8
$(1,0)$	1	1	8	$(1,2)$	17	5	8
$(0,1)$	2	1	8	$(-1,2)$	18	5	8
$(-1,0)$	3	1	8	$(1,-2)$	19	5	8
$(0,-1)$	4	1	8	$(-1,-2)$	20	5	8
$(1,1)$	5	2	4	$(2,1)$	21	5	8
$(1,-1)$	6	2	4	$(-2,1)$	22	5	8
$(-1,1)$	7	2	4	$(2,-1)$	23	5	8
$(-1,-1)$	8	2	4	$(-2,-1)$	24	5	2
$(2,0)$	9	4	4	$(1,3)$	25	10	4
$(0,2)$	10	4	4	$(-1,3)$	26	10	4
$(-2,0)$	11	4	4	$(3,1)$	27	10	4
$(0,-2)$	12	4	4	$(-3,1)$	28	10	4
$(3,0)$	13	9	8	$(2,2)$	29	8	2
$(0,3)$	14	9	8	$(2,-2)$	30	8	2
$(-3,0)$	15	9	8	$(4,0)$	31	16	2

Tabela 5.3: Normas e Rótulos do Reticulado $\frac{\mathbb{Z}^2}{P_4\mathbb{Z}^2}$

e a matriz dos rótulos é a matriz

$$GR = \left[\begin{array}{cccccccc} 31 & 29 & | & 1 & 24 & | & 30 & 31 \end{array}\right].$$

Os limitantes neste caso são: $\Delta_{\text{inf}} = 16$ e $\Delta_{\text{sup}} = 25$. Efetuando-se o cálculo da distância, tem-se que $d_{\text{free}} = 22$ e $d = \min\{32, 22\} = 22$. Para uma constelação codificada de 64 sinais, tem-se que a energia média é $p = 10,25$, sendo que a constelação não-codificada é $p^u = 6$. Assim, o ganho de codificação deste esquema é

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{22}{10.25} \div \frac{4}{6}\right) = 5,078 \quad dB.$$

Este reticulado, apesar de ter as mesmas propriedades algébricas e geométricas do reticulado $P_1\Lambda$, apresentou um aumento no ganho de codificação com o aumento no número de classes laterais.

Para o esquema de codificação com parâmetros $(2,6,2)$, isto é, um esquema que exige 64 estados, a matriz geradora de um código ótimo é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \tag{5.6}$$

e a matriz dos rótulos é

$$GR = \left[\begin{array}{ccccccccccc} 31 & 29 & | & 24 & 2 & | & 26 & 29 & | & 30 & 29 \end{array}\right].$$

$R=\mathbb{Z}^2/P_2\mathbb{Z}^2/P_3\mathbb{Z}^2$	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0)$	0	0	1
$(1,1)$	1	2	4
$(-1,-1)$	2	2	4
$(1,-1)$	3	2	4
$(-1,1)$	4	2	4
$(2,0)$	5	4	2
$(0,2)$	6	4	2
$(2,2)$	7	8	2

Tabela 5.4: Classes Laterais, Normas e Rótulos do Reticulado $R=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$

Os limitantes são: $\Delta_{\text{inf}} = 16$ e $\Delta_{\text{sup}} = 34$ e a distância do código de treliça é $d = \min\{32, 26\} = 26$, pois o $d_{\text{free}} = 26$. Assim, para a constelação de 64 sinais, o ganho de codificação é

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{26}{10,25} \div \frac{4}{6}\right) = 5,803 \quad dB.$$

Neste caso, a ampliação do número de memória ocasionou um acréscimo no ganho de codificação.

5.1.4 Reticulado Quociente com 8 Classes Laterais em uma Cadeia de Partições

Nesta seção é empregada uma nova construção de partições de reticulados, a saber, a partição em cadeia. A finalidade é construir um reticulado quociente compatível com o número desejado de palavras-código.

Considere o reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e os subreticulados Γ_1 e Γ_2 de Λ, onde as matrizes de Γ_1 e Γ_2 são

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

respectivamente. O reticulado quociente $\Gamma_1 = P_2\Lambda$ é uma partição de $\Lambda = \mathbb{Z}^2$. O reticulado quociente $\Gamma_2 = P_3\Lambda$ é uma partição de Γ_1 e a partição em cadeia $R = \Lambda/P_2\Lambda/P_3\Lambda$ é o reticulado quociente $R = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$. A Tabela 5.4 mostra as classes laterais, os rótulos, as normas e as ordens.

Utilizando-se o codificador com parâmetros $(2,4,2)$, os subconjuntos especiais com melhores blocos de norma $\{N_1, N_2\}$ para as k_1 primeiras e k_1 últimas colunas são

$$\{(2,2),(2,0)\} \;\text{ e }\; \{(2,0),(0,2)\}.$$

Logo, para uma matriz norma dada por

$$GN = \left[\begin{array}{ccccccccc} 8 & 4 & \mid & 2 & 2 & \mid & 4 & 8 \end{array}\right],$$

pode-se considerar a matriz geradora para o código ótimo dada por

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right],$$

onde a matriz dos rótulos neste caso é dada por

$$GR = \left[\begin{array}{cccccccc} 7 & 6 & \mid & 1 & 3 & \mid & 6 & 7 \end{array}\right].$$

Os limitantes, calculados com o auxílio da Tabela de Cayley são: $\Delta_{\text{inf}} = 8$ e $\Delta_{\text{sup}} = 14$. A distância livre do código é $d_{\text{free}} = 12$, e assim, $d = \min\{16, 12\} = 12$. Para uma constelação codificada de 32 sinais com centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tem-se a constelação não-codificada com $N = 2^4$, $p = 10,125$ e $p^u = 10$. Assim, o ganho de codificação é

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{12}{10,125} \div \frac{4}{10} \right) = 4,717 \quad dB.$$

A cadeia de partição foi usada para construir um reticulado quociente com 8 classes laterais. Mas, o processo não ocasionou um acréscimo no ganho de codificação por utilizar a partição de reticulado $\frac{\mathbb{Z}^2}{P_1\mathbb{Z}^2}$. Nesta nova partição houve aumento na energia média. Entretanto, a distância livre d_{free} não aumentou na mesma proporção.

Portanto, a partição em cadeia é um recurso utilizado na busca por um número compatível de classes laterais, mas o mesmo não decorre necessariamente em melhoria do ganho de codificação.

5.2 Códigos de Treliça sobre Partições de Reticulado em $\mathbb{Z}^3$

Nesta seção são construídas partições de reticulados, obtendo-se reticulados quociente em $\mathbb{Z}^3$ contendo 4 e 8 classes laterais. O objetivo é analisar o esquema de codificação dos códigos de treliça no espaço tridimensional. Os reticulados em $\mathbb{Z}^3$ podem nem sempre apresentar ganhos de codificação satisfatórios quando comparados aos reticulados de dimensão 2, mas sempre apresentam menor energia mínima para as constelações de sinais. A procura por códigos de treliça no $\mathbb{R}^3$, explorado nesta tese, é uma sugestão de códigos de treliça que apresentam ganhos de codificação excelentes.

Considere a partição de reticulado $R = \Lambda/\Gamma$, onde $\Lambda = \mathbb{Z}^3$ e $\Gamma = S_1\Lambda$, com

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Tabela 5.5 mostra as classes laterais, normas, rótulos e ordens de R, e o codificador utilizado tem parâmetros $(2, 4, 2)$. O melhor bloco de normas é o bloco $\{1, 1\}$ a matriz GN é única e

$R = \frac{\mathbb{Z}^3}{S_1\mathbb{Z}^3}$	Rótulo	Norma	ordem
$(0, 0, 0)$	0	0	1
$(1, 0, 0)$	1	1	2
$(0, 1, 0)$	2	1	2
$(0, 0, 1)$	3	1	2

Tabela 5.5: Classes Laterais do Reticulado Quociente $\frac{\mathbb{Z}^3}{S_1\mathbb{Z}^3}$

dada por:

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A matriz geradora de um código ótimo é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

e é representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

As distâncias são $d_{\text{free}} = 3$ e $d = \min\{3, 4\} = 3$. Para uma constelação de 8 e 64 sinais com centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, as energias média das constelações codificadas são $p = 0,75$ e $3,5$, para as constelações não-codificadas são $p^u = 3$ e 15, respectivamente. Assim, os ganhos de codificação são

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{3}{0.75} \div \frac{4}{3}\right) = 4,771 \quad dB \text{ e } \mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{3}{3.5} \div \frac{4}{15}\right) = 5,071 \quad dB.$$

Para um código sobre um reticulado quociente com 8 classes laterais, considere a partição de reticulado $R = \Lambda/\Gamma$, onde $\Lambda = \mathbb{Z}^3$ e $\Gamma = S_2\Lambda$, com

$$S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

As classes laterais, normas, rótulos e ordens de R são dadas na Tabela 5.6 e o codificador tem parâmetros $(2, 4, 2)$.

$R = \frac{\mathbb{Z}^3}{S_2\mathbb{Z}^3}$	Rótulo	Norma	ordem
$(0,0,0)$	0	1	1
$(1,0,0)$	1	1	2
$(0,1,0)$	2	1	2
$(0,0,1)$	3	1	2
$(1,1,0)$	4	2	2
$(1,0,1)$	5	2	2
$(0,1,1)$	6	2	2
$(1,1,1)$	7	3	2

Tabela 5.6: Classes Laterais do Reticulado Quociente $\frac{\mathbb{Z}^3}{S_2\mathbb{Z}^3}$

O melhor bloco de normas é dado por $\{2,2\}$ e uma matriz GN é dada por

$$GN = \left[\begin{array}{ccccccccc} 2 & 2 & | & 1 & 1 & | & 2 & 2 \end{array}\right].$$

A matriz geradora de um código ótimo é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{5.7}$$

e é representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & | & 1 & 2 & | & 3 & 1 \end{array}\right].$$

As distâncias são $d_{\text{free}} = 5$ e $d = \min\{5,8\} = 5$. Para uma constelação de 16 e 128 sinais com centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, para $k_2 = 1$ e 4, respectivamente, a energia média das constelações são $p = 1,75$ e $5,875$, as médias das constelações não-codificadas são $p^u = 3$ e 15. Assim, os ganhos de codificação são

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{5}{1.75} \div \frac{4}{6}\right) = 6,320 \quad dB \text{ e } \mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{5}{5.875} \div \frac{4}{15}\right) = 5,040 \quad dB,$$

respectivamente. A Figura 5.2, mostra os pontos das constelações de sinais para 8, 16, 32 e 64 pontos do reticulado $\frac{\mathbb{Z}^3}{S_2\mathbb{Z}^3}$.

Este código de treliça sobre $\mathbb{Z}^3$, apresenta um bom desempenho, mas, o aumento no número de pontos da constelação de sinais, não ocasionou um aumento no ganho de codificação. O aumento na cardinalidade da constelação, utilizou um valor para a entrada não-codificada k_2, de modo a formar uma constelação perfeitamente ajustada.

No próximo caso é utilizada uma partição em cadeia, o recurso de utilizar uma cadeia de partições de reticulados tem a finalidade de adequar as classes laterais às palavras-código. Na

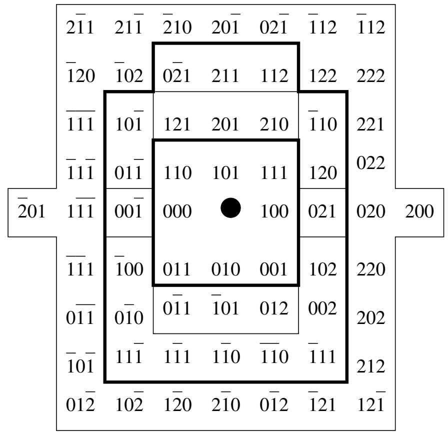

Figura 5.2: Pontos das Constelações de Sinais do Reticulado $\frac{\mathbb{Z}^3}{S_2\mathbb{Z}^3}$

cadeia de partições seguinte é considerada a procura por um reticulado de 8 classes laterais obtida a partir de uma partição de reticulado com 32 classes laterais.

Seja a partição de reticulado $R = \Lambda/\Gamma$, onde $\Lambda = \mathbb{Z}^3$ e $\Gamma = S_3\Lambda$, com

$$S_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

As classes laterais, normas, rótulos e ordem são apresentadas na Tabela 5.7 e o codificador tem parâmetros $(2, 4, 2)$. Entre os melhores blocos de normas, tem-se $\{4, 4\}$. Uma possível matriz GN é

$$GN = \left[\begin{array}{ccccccccc} 4 & 4 & | & 5 & 1 & | & 4 & 4 \end{array}\right].$$

A matriz geradora do código ótimo é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

e é representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cccccccc} 23 & 24 & | & 28 & 1 & | & 25 & 23 \end{array}\right].$$

A distância livre do código é $d_{\text{free}} = 11$ e $d = \min\{5, 8\} = 5$. Para uma constelação de 8 e 128 sinais com centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, onde $k_2 = 1$ e 4, respectivamente, a energia média das constelações são $p = 2,25$ e $14,8$, a média dos sistemas não-codificados são $p^u = 3$ e 15, nesta ordem. Assim, os ganhos de codificação são

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{5}{2.25} \div \frac{4}{3}\right) = 5,185 \quad dB \text{ e } \mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{5}{14.8} \div \frac{4}{15}\right) = 4,452 \quad dB.$$

$R = \frac{S_3\mathbb{Z}^3}{Q\mathbb{Z}^3}$	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0,0)$	0	0	1
$(1,1,1)$	1	3	2
$(-1,1,1)$	2	3	2
$(1,-1,1)$	3	3	2
$(1,1,-1)$	4	3	2
$(2,0,0)$	5	4	2
$(0,2,0)$	6	4	2
$(0,0,2)$	7	4	2

Tabela 5.7: Classes Laterais do Reticulado $\frac{S_3\mathbb{Z}^3}{Q\mathbb{Z}^3}$

Os ganhos de codificação nas partições em cadeia são expressivos, mas são inferiores às partições simples. A partição em cadeia é utilizada apenas como uma ferramenta de construção de reticulados quociente compatível ao número de classes laterais desejadas. Nestas sub-partições obtidas da partição em cadeia, a energia média da constelação codificada aumenta em proporção inversa ao acréscimo da constelação não-codificada, diminuindo o ganho de codificação.

5.3 Códigos de Treliça em Partições de $\mathbb{Z}^4$

Nesta seção são mostradas as vantagens da construção de códigos de treliça sobre reticulados em $\mathbb{Z}^4$. Os resultados obtidos em $\mathbb{R}^4$ serão comparados aos resultados do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Os reticulados quociente usados nos códigos de treliça serão construídos a partir de reticulados com melhor empacotamento esférico. Os reticulados de dimensão 4 alcançam uma densidade de até $\Delta = 0,6168$ [5]. São utilizadas partições e cadeia de partições de reticulados com 8 e 16 classes laterais.

5.3.1 Reticulado Quociente com 8 Classes Laterais em $\mathbb{Z}^4$

Para a construção de um reticulado quociente com 8 classes laterais em $\mathbb{Z}^4$, considere uma partição de $\mathbb{Z}^4$ induzida por uma matriz de um subreticulado de $\mathbb{Z}^4$ com determinante igual a 8. E em particular, é escolhido um subreticulado com a melhor densidade em $\mathbb{Z}^4$.

Considere a partição de reticulado $R = \Lambda/\Gamma$, para $\Lambda = \mathbb{Z}^4$ e $\Gamma = Q_1\Lambda$, onde

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

para um codificador convolucional com parâmetros $(2,4,2)$. As classes laterais, normas,

$R = \frac{\mathbb{Z}^4}{Q_1\mathbb{Z}^4}$	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0,0,0)$	0	0	0
$(1,0,0,0)$	1	1	2
$(0,1,0,0)$	2	1	2
$(0,0,1,0)$	3	1	2
$(0,0,0,1)$	4	1	2
$(1,1,0,0)$	5	2	2
$(1,0,1,0)$	6	2	2
$(1,0,0,1)$	7	2	2

Tabela 5.8: Normas e Rótulos do Reticulado $\frac{\mathbb{Z}^4}{Q_1\mathbb{Z}^4}$

rótulos e ordens do reticulado quociente estão na Tabela 5.8. O bloco de k_1 normas que maximizam o Δ_{inf} e Δ_{sup}, isto é, o subconjunto especial onde encontra-se os códigos das GN contendo os códigos ótimos, é o bloco $\{2,2\}$. Assim, é única a possibilidade para escrever as colunas das extremidades. Para a matriz norma

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right],$$

tem-se um conjunto de matrizes geradoras G, mas pelo Teorema 4.1 muitos destes códigos de treliça são equivalentes. Existem pelo menos duas matrizes que geram códigos distintos, a saber:

$$G_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{5.8}$$

para as classes laterais dadas por $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0)\}$ e

$$G_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

para $\{(1,1,0,0),(1,0,0,1)\}$.

Considerando-se G_1, tem-se um código de treliça ótimo, representado pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 5 & 6 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{array}\right].$$

Os limitantes são: $\Delta_{\text{inf}} = 4$ e $\Delta_{\text{sup}} = 5$. O $d_{\text{free}} = 5$ e $d = \min\{8, 5\} = 5$. Para a constelação codificada com 32 sinais de centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e energia média $p = 2$, tem-se a constelação não-codificado $p^u = 4$. Além disso,

$$N = 2^{k_1+k_2} = 2^{2+2} = 16 = (2b)^n = (2 \cdot 1)^4.$$

Portanto, o ganho de codificação é

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{5}{2} \div \frac{4}{4} \right) = 3,979 \quad dB.$$

Para um esquema de codificação com parâmetros $(2, 6, 2)$, a matriz geradora

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{5.9}$$

representa um código de treliça ótimo. A matriz dos rótulos é

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{array}\right].$$

Para este código os limitantes são: $\Delta_{\text{inf}} = 4$ e $\Delta_{\text{sup}} = 7$. Efetuando-se o cálculo da distância do código, tem-se que $d_{\text{free}} = 7$ e $d = \min\{8, 7\} = 7$. Assim, o ganho de codificação deste código é

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{7}{2} \div \frac{4}{4} \right) = 5,441 \quad dB.$$

5.3.2 Reticulado Quociente com 16 Classes Laterais em $\mathbb{Z}^4$

Nesta seção são apresentadas duas partições de reticulados, a primeira partição é o reticulado finito $R = 2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_2$ e a segunda é uma partição em cadeia de $\Lambda = \mathbb{Z}^4$. O objetivo é comparar o ganho de codificação entre uma partição simples e uma partição em cadeia.

Considere a partição de reticulado $R = \Lambda/\Gamma$, onde $\Lambda = \mathbb{Z}^4$, $\Gamma = Q_2\Lambda$ e

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$R=\frac{\mathbb{Z}^4}{Q_2\mathbb{Z}^4}$	Rótulo	Norma	Ordem	R	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0,0,0)$	0	0	1	$(0,1,1,0)$	8	2	2
$(1,0,0,0)$	1	1	2	$(0,1,0,1)$	9	2	2
$(0,1,0,0)$	2	1	2	$(0,0,1,1)$	10	2	2
$(0,0,1,0)$	3	1	2	$(0,1,1,1)$	11	3	2
$(0,0,0,1)$	4	1	2	$(1,0,1,1)$	12	3	2
$(1,1,0,0)$	5	2	2	$(1,1,0,1)$	13	3	2
$(1,0,1,0)$	6	2	2	$(1,1,1,0)$	14	3	2
$(1,0,0,1)$	7	2	2	$(1,1,1,1)$	15	4	2

Tabela 5.9: Normas e Rótulos do Reticulado Quociente $\frac{\mathbb{Z}^4}{Q_2\mathbb{Z}^4}$

As classes laterais desta partição de reticulado são mostradas na Tabela 5.9. Será utilizado um codificador com parâmetros $(2,4,2)$. Para a matriz norma dada por

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right],$$

uma matriz geradora para o código é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

e a matriz dos rótulos é determinada por

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 15 & 5 & 4 & 1 & 10 & 15 \end{array}\right].$$

Os limitantes são: $\Delta_{\text{inf}} = 4$ e $\Delta_{\text{sup}} = 6$. A distância do código é $d = \min\{5, 16\} = 5$, pois o $d_{\text{free}} = 5$. Para uma constelação codificada de 64 sinais com centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, a energia média é $p = 2,5$ e a constelação do sistema não-codificada é $p^u = 4$. Assim, o ganho de codificação do código é

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{6}{2,5} \div \frac{4}{4}\right) = 3,802 \quad dB.$$

Ainda para a determinação de partições com 16 classes laterais, é considerada a matriz

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e a cadeia de partições $\mathbb{Z}^4/Q_1\mathbb{Z}^4/Q_3\mathbb{Z}^4$ com um codificador com parâmetros $(2,4,2)$. As classes laterais desta cadeia de partição estão na Tabela 5.10.

$R = \mathbb{Z}^4/Q_1\mathbb{Z}^4/Q_3\mathbb{Z}^4$	Rótulo	Norma	Ordem	R	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0,0,0)$	0	0	1	$(-1,1,1,-1)$	8	4	2
$(1,1,1,1)$	1	4	2	$(2,0,0,0)$	9	4	2
$(-1,1,1,1)$	2	4	2	$(0,2,0,0)$	10	4	2
$(1,-1,1,1)$	3	4	2	$(0,0,2,0)$	11	4	2
$(1,1,-1,1)$	4	4	2	$((0,0,0,2)$	12	4	2
$(1,1,1,-1)$	5	4	2	$(2,2,0,0)$	13	8	2
$(-1,-1,1,1)$	6	4	2	$(2,0,2,0)$	14	8	2
$(-1,1,-1,1)$	7	4	2	$(2,0,0,2)$	15	8	2

Tabela 5.10: Normas e Rótulos do Reticulado $\frac{Q_1\Lambda}{Q_2\Lambda}$

A matriz norma escolhida dentre os melhores blocos de norma é

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 8 & 8 & 4 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right],$$

e uma matriz para o código é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A matriz dos rótulos é dada por

$$GR = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 13 & 15 & 2 & 1 & 14 & 13 \end{array}\right].$$

Os limitantes são: $\Delta_{\text{inf}} = 16$ e $\Delta_{\text{sup}} = 20$. Efetuando-se o cálculo da distância do código, tem-se que $d_{\text{free}} = 18$ e $d = \min\{18, 32\} = 18$. Para uma constelação de 64 sinais, tem-se que a energia média é $p = 7,25$, e a constelação do sistema não-codificada é $p^u = 4$. Assim, o ganho de codificação deste código é:

$$\mathcal{G} = 10\log_{10}\left(\frac{18}{7,25} \div \frac{4}{4}\right) = 3,949 \quad dB.$$

5.3.3 Reticulado Quociente com 16 Classes Laterais em uma Cadeia de Partições

Nesta seção são utilizadas duas partições de reticulados em $\mathbb{Z}^4$, objetivando a construção de um reticulado quociente com 16 classes laterais em uma partição em cadeia.

Sejam Γ_1 e Γ_2 dois subreticulados de $\mathbb{Z}^4$, onde $\Gamma_1 = \frac{\Lambda}{U_1\Lambda}$ e $\Gamma_2 = \frac{\Lambda}{U_2\Lambda}$, com

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } U_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$R = \frac{U_1\Lambda}{U_2\Lambda}$	Rótulo	Norma	Ordem	R	Rótulo	Norma	Ordem
$(0,0,0,0)$	0	0	1	$(-1,0,1,0)$	8	2	2
$(1,1,0,0)$	1	2	2	$(-1,0,0,1)$	9	2	2
$(1,0,1,0)$	2	2	2	$(0,-1,1,0)$	10	2	2
$(1,0,0,1)$	3	2	2	$(0,-1,0,1)$	11	2	2
$(0,1,1,0)$	4	2	2	$(0,0,-1,-1)$	12	2	2
$(0,1,0,1))$	5	2	4	$(1,1,1,1)$	13	4	2
$(0,0,1,1)$	6	2	2	$(-1,1,1,1)$	14	4	2
$(-1,1,0,0)$	7	2	2	$(2,0,0,0)$	15	4	2

Tabela 5.11: Normas e Rótulos do Reticulado $\frac{U_1\Lambda}{U_2\Lambda}$

Uma nova partição de Γ_1 por Γ_2, consiste do reticulado quociente $R = \frac{U_1\Lambda}{U_2\Lambda}$, cujas classes laterais estão mostradas na Tabela 5.11, juntamente com seus rótulos, normas e ordem.

Utilizando-se o codificador convolucional com parâmetros $(2,4,2)$, os subconjuntos especiais com melhores blocos de norma $\{N_1, N_2\}$ para as k_1 primeiras e últimas colunas são os blocos

$$\{(2,0,0,0),(1,1,1,1)\} \text{ e } \{(2,0,0,0),(-1,1,1,1)\}.$$

Para a matriz norma dada por

$$GN = \begin{bmatrix} 4 & 4 & | & 2 & 2 & | & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

uma matriz para o código ótimo é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

e a matriz dos rótulos é determinada por

$$GR = \begin{bmatrix} 7 & 5 & | & 4 & 3 & | & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Os limitantes são: $\Delta_{\text{inf}} = 8$ e $\Delta_{\text{sup}} = 12$. A distância do código é $d_{\text{free}} = 10$ e $d = \min\{10, 16\} = 10$. Para uma constelação codificada de 64 sinais com centro em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, a energia média é $p = 4$ e a média para a constelação não-codificada é $p^u = 4$. O ganho de codificação é

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{10}{4} \div \frac{4}{4} \right) = 3,979 \quad dB.$$

5.4 Uma Partição de Reticulado em $\mathbb{Z}^8$

Nesta seção é apresentado um reticulado quociente com 8 classes laterais em $\mathbb{Z}^8$. O objetivo é verificar que os códigos de treliça em um espaço n-dimensional são análogos aos espaços de dimensões anteriormente mencionadas. Para isso, necessita-se apenas investigar os reticulados quociente com ordem 2^m, e em especial os subreticulados geometricamente regulares onde o reticulado quociente construído apresenta melhor densidade.

Seja a partição de reticulado $R = \Lambda/\Gamma$, onde $\Lambda = \mathbb{Z}^8$, $\Gamma = U\Lambda$ e

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

As classes laterais, normas e rótulos de R estão na Tabela 5.12 e o esquema de codificação com parâmetros $(2, 4, 2)$.

$R = \frac{\mathbb{Z}^3}{U\mathbb{Z}^8}$	Rótulo	Norma
$(0,0,0,0,0,0,0,0)$	0	0
$(1,0,0,0,0,0,0,0)$	1	1
$(0,1,0,0,0,0,0,0)$	2	1
$(0,0,1,0,0,0,0,0)$	3	1
$(0,0,0,1,0,0,0,0)$	4	1
$(1,1,0,0,0,0,0,0)$	5	2
$(0,1,1,0,0,0,0,0)$	6	2
$(0,1,1,0,0,0,0,0)$	7	2

Tabela 5.12: Classes Laterais do Reticulado Quociente $\frac{\mathbb{Z}^8}{U\mathbb{Z}^8}$

Os melhores blocos de normas são dados pelos blocos de rótulos $\{5,6\}, \{5,7\}$ e $\{6,7\}$. A matriz GN é

$$GN = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

A matriz geradora de um código ótimo é

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{5.10}$$

e é representada pela matriz dos rótulos

$$GR = \left[\begin{array}{ccccccccc} 5 & 6 & | & 1 & 4 & | & 7 & 5 \end{array}\right].$$

A distância do código é $d_{\text{free}} = 5$ e $d = \min\{5, 8\} = 5$. Para uma constelação codificada de 512 sinais com centro em $(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$, a energia média da constelação é $p = 2,25$, a média para a constelação não-codificada é $p^u = 8$. O ganho de codificação é

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{5}{2,25} \div \frac{4}{8} \right) = 6,478 \quad dB.$$

Este ganho de codificação é um valor significativo para este esquema de codificação.

A Tabela 5.13 mostra que vários destes códigos de treliça sobre as novas partições de reticulados, construídas neste capítulo, têm ganhos de codificação mais elevados, quando comparados aos ganhos de codificação alcançados por Caderbank [3] e por Rosa [12].

espaço	ρ	Classes Laterais	Estados	Código	Constelação	Ganho de Codificação
$\mathbb{R}^2$	2	8	16	(5.2)	2^5	4,771
$\mathbb{R}^2$	3	8	16	(5.2)	2^7	4,876
$\mathbb{R}^2$	2	8	64	(5.3)	2^5	5,441
$\mathbb{R}^2$	2,5	16	16	(5.4)	2^6	5,012
$\mathbb{R}^2$	3	8	64	(5.3)	2^7	5,545
$\mathbb{R}^3$	2	8	16	(5.7)	2^7	5,040
$\mathbb{R}^3$	1	8	16	(5.7)	2^4	6,320
$\mathbb{R}^4$	1	8	64	(5.9)	2^5	5,441
$\mathbb{R}^8$	1	8	16	(5.10)	2^9	6,478

Tabela 5.13: Resumo dos Ganhos de Codificação dos Códigos de Treliça em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^8$

5.5 Códigos de Treliça Sobre o Anel $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_4$

Nesta seção são apresentados os resultados para esquemas que envolvem códigos de treliça com parâmetros $(k_1, V, 4)$ e partições de reticulados usadas anteriormente neste trabalho, modificando o esquema de entrada para o anel $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_4$.

Seja um código de treliça com 2 memórias sobre o anel $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_4$, isto é, um código com 16 estados e uma constelação de 64 sinais. Escolhe-se o reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, o subreticulado $\Gamma = P\mathbb{Z}^2$, onde $P_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz do subreticulado gerado por $\langle (2,2), (2,-2) \rangle$ (Exemplo 3.6) e $k_1 = 1$. A matriz norma é dada por

$$GN = \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

e a matriz geradora do código de treliça é dada por

$$G = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O código alcança uma distância livre $d_{\text{free}} = 9$, $d = \min\{9, 16\} = 9$ e a energia média da constelação é $p = 10$. Para a constelação do sistema não-codificado a energia média é $p^u = 6$. Assim, o ganho de codificação para este código é dado por

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{9}{10} \div \frac{4}{10} \right) = 3,522 \quad dB.$$

Utilizando um reticulado quociente com 16 classes laterais, um código de treliça com 2 memórias sobre $\mathbb{Z}_4$, tem-se 16 estados e uma constelação de 64 sinais. O reticulado escolhido é $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, o subreticulado é $\Gamma = 4\mathbb{Z}^2$ e $k_1 = 1$. A matriz norma é dada por:

$$GN = \left[\begin{array}{c|c|c} 5 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

e a matriz geradora do código de treliça é dada por

$$G = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A distância do código é $d_{\text{free}} = 12$, $d = \min\{12, 16\} = 12$ e a energia média da constelação é $p = 10.25$. Para a constelação do sistema não-codificado a média é $p^u = 10$. Assim, o ganho de codificação para este código é dado por

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{12}{10,25} \div \frac{4}{10} \right) = 4,664 \quad dB. \tag{5.11}$$

5.6 Considerações Finais

As partições de reticulados no espaço Euclidiano tridimensional, $\mathbb{R}^3$, apresentam um bom desempenho em relação ao ganho de codificação em $\mathbb{R}^2$. As partições em $\mathbb{R}^4$ apresentam bons resultados em relação a energia média. As partições em cadeia são usadas unicamente para procurar um reticulado quociente com um número de classes laterais compatível e desejável. A utilização da partição em cadeia aumenta a distância intra-partição e não fornece aumento de energia média. As novas partições com a implementação das classes de equivalências, da Tabela de Cayley e da definição das matrizes que geram códigos de treliças, demonstram uma contribuição a construção dos códigos de treliças sobre reticulados quociente, além de simplificar a procura por códigos de treliça ótimos. Acredita-se que os métodos aplicados neste capítulo podem ser estendidos para dimensões superiores.

Capítulo 6

Conclusões

Esta tese foi resultado de evolução de estudos, visando propor um algoritmo eficiente de procura de códigos de treliça ótimos, baseados em partições de reticulados.

Este capítulo, destina-se a uma discussão final, propondo ressaltar e comentar os pontos relevantes desta tese, propor novos trabalhos e apontar novas diretrizes neste esquema de codificação. A tese aqui apresentada, aponta resultados e propõe métodos de construção e otimização de procura por códigos de treliça ótimos via reticulados quociente. Este trabalho apresentou algumas contribuições e resultados que podem ser resumidos nos seguintes:

1. Utilização da tabela de Cayley e do reticulado hexagonal nos códigos de treliça via partições de reticulados;

2. Determinação das matrizes que geram códigos de treliça a partir da partição de reticulado e dos parâmetros dados, diminuindo o número de matrizes a serem investigadas na procura de códigos de treliça ótimos;

3. Implementação da equivalência dos códigos de treliça na procura dos códigos de treliça ótimos;

4. Construção de novas partições de reticulados em dimensões superiores às construídas por Calderbank [3] e Rosa [12];

5. Determinação de novos códigos de treliça ótimos sobre reticulados quociente em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^8$.

Os melhores reticulados quociente em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^8$ foram selecionados e os códigos de treliça ótimos para estes reticulados foram determinados. Em outras dimensões podem ser encontradas partições de reticulados com boa densidade e gerar códigos de treliça com bons desempenhos.

No desenvolvimento das pesquisas desta tese, foram produzidas algumas publicações e apresentações em anais de congresso:

1. Códigos Treliça Baseados em Reticulados Finitos Sobre Corpos Quadráticos (resumo), XXIX CNMAC, Campinas/SP, Setembro-2006;

2. Construção de Códigos Treliça Baseados em Reticulados Quocientes sobre os Corpos Quadráticos, VI ERMAC-R3, João Pessoa/PB, Novembro-2006;

3. Construção de Reticulados Quocientes sobre Corpos Quadráticos, VI ERMAC-R3, João Pessoa/PB, Novembro-2006;

4. Algoritmo para Determinar Grupo de Classes via Reticulados, 65^0 SBA, São João del-Rei/MG, Maio-2007;

5. Partições de Reticulados Aplicadas aos Códigos Treliça, XXX CNMAC, Florianópolis/SC, Setembro-2007;

6. Classe de Equivalência de Códigos de Treliça Via Partições de Reticulados, VII ERMAC-R3, Recife/PE, Novembro-2007;

7. Novas Partições de Reticulados Aplicadas à Construção de Códigos de Treliça Ótimos, ERMAC-Bauru, Bauru/SP, Junho-2008.

Algumas publicações estão disponíveis na internet e todas apresentadas na bibliografia: [18], [19], [20], [21], [22], [23] e [24]. Os conteúdos do capítulo 3 (Códigos de Treliça sobre Partições de Reticulados), do capítulo 4 (Classe de Equivalência dos Códigos de Treliça) e do capítulo 5, foram publicados, em parte, em anais de congresso, sendo que nesta tese, abordou-se esses temas com mais detalhes, trazendo exemplos que elucidam a utilização dos conceitos.

6.1 Propostas Para Trabalhos Futuros

A pesquisa apresentada nesta tese deve motivar novos trabalhos na área de codificação, destacando os seguintes pontos em abertos:

1. Novas partições de reticulados em sub-espaços do $\mathbb{R}^n$ superiores aos utilizados nesta tese, generalizando as partições de reticulados em dimensões 2^n;

2. Novos esquemas de códigos de treliça e melhor ganho de codificação;

3. Pesquisar a existência de novas classes de equivalência dentre os códigos de treliça.

Bibliografia

[1] W. C. Borelli. *Convolutional Codes for Multi-Levi Data transmission*. Phd thesis, University of Kent, England, July 1983.

[2] A. R. Calderbank and J. E. Mazo. A new description of trellis codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 30(6):784–791, November 1984.

[3] A. R. Calderbank and N. J. A. Sloane. New trellis codes based on lattices and cosets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 33(2):177–195, March 1987.

[4] E. D. Carvalho. *Construção e Rotulamento de Constelações de sinais Geometricamente Uniforme*. PhD thesis, UNICAMP, Campinas, Brasil, 2004.

[5] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[6] G. D. Forney. Coset codes: Ii-bionary lattices and retated codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(5):1152–1187, September 1988.

[7] G. D. Forney, R. G. Gallager, and G. R. Lang. Efficient modulation for band-channels. *IEEE Journal Selective Areas Commun*, 2:632–647, September 1984.

[8] G. D. Forney Jr. Geometrically uniforme codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37:1241–1260, 1991.

[9] A. L. Garcia and Y. Lequain. *Álgebra: Um Curso de Introdução*. IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[10] A. Gonçalves. *Introdução à Álgebra*. IMPA - Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1999.

[11] R. Johannesson and K. Zingangirov. *Fundamentals of Convolutional Coding.* IEEE Press, New York, 1999.

[12] E. M. Rosa. Códigos treliça baseados em partições de reticulados: Propriedades estruturais e determinação de códigos Ótimos. Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, Brasil, 1999.

[13] E. M. Rosa, W. C. Borelli, and P. G. Farrell. Procedimentos simples para procura de códigos Ótimo, através de matrizes geradoras representas por cosets. In *In XIV Simpósio Brasileiro de telecomunicações*, volume 2, pages 655–660, Curitiba, Brasil, 1996.

[14] E. M. Rosa, W. C. Borelli, and P. G. Farrell. A formalized optimum code search for q-ary trellis codes. In *IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM'97)*, pages 1–6, Phoenix, USA, 1997.

[15] E. M. Rosa, W. C. Borelli, and P. G. Farrell. Novos procedimentos simples para procura de códigos Ótimo baseados em partições de reticulados. In *In XV Simpósio Brasileiro de telecomunicações*, pages 479–483, Recife - Brasil, 1997.

[16] E. M. Rosa, W. C. Borelli, and P. G. Farrell. Special subset and optimum codes based on lattices and cosets. In *Proceedings of the 1997 IEEE International Symposium on Information Theory*, page 521, Ulm, Germany, July 1997.

[17] J. C. Silva Filho. Corpos quadráticos e reticulados. Master's thesis, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Brasil, Junho 2001.

[18] J. C. Silva Filho, W. C. Borelli, and E. M. R. Marques. Construção de códigos de treliça baseados em reticulados finitos sobre corpos quadráticos. In *XXIX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, Campinas, Brasil, Setembro 2006.

[19] J. C. Silva Filho, W. C. Borelli, and E. M. R. Marques. Construção de códigos treliça baseados em reticulados quociente sobre os corpos quadráticos. In *VI ERMAC - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, Joao Pessoa, Brasil, Novembro 2006.

[20] J. C. Silva Filho, W. C. Borelli, and E. M. R. Marques. Classe de equivalência de códigos de treliça via partições de reticulados. In *Anais do VII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC)*, Recife, PE, Brasil, Novembro 2007.

[21] J. C. Silva Filho, W. C. Borelli, and E. M. R. Marques. Partições de reticulados aplicadas aos códigos de treliça. In *Anais do XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC)*, Florianópolis, Brasil, Setembro 2007.

[22] J. C. Silva Filho, W. C. Borelli, and E. M. R. Marques. Novas partições de reticulados aplicadas à construção de códigos de treliça ótimos. In *ERMAC - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, Bauru, Brasil, Junho 2008.

[23] J. C. Silva Filho, W. C. Borelli, and A. A. Silva. Construção de reticulados quociente sobre corpos quadráticos. In *VI ERMAC - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, João Pessoa, Brasil, Novembro 2006.

[24] J. C. Silva Filho, W. C. Borelli, A. A. Silva, and E. M. R. Marques. Algoritmo para determinar grupo de classes via reticulados. In *Seminário Brasileiro de Análise - SBA*, S. J. del-Rei - UFSJ, Maio 2007.

[25] N. Sommer, M. Feder, and O. Shalvi. Low density lattice codes. In *International Symposium on Information Theory*, Seatt, USA, July 2006.

[26] G. Ungerboeck. Channel coding and multilevel / phase signal. *IEEE Transactions on Information Theory*, 10, May 1977.

[27] G. Ungerboeck. Channel coding with multilevel phase signal. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28:55–67, January 1982.