



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E  
DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

**Análise do Comportamento Seletivo em Frequência de  
Grades Dielétricas com Periodicidade em Duas Dimensões**

**Ivan Torres Lima Junior**

Eng. Eletricista pela Universidade Federal da Bahia.

Orientador: **Atílio José Giarola**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por: Ivan Torres Lima Junior e aprovada pela Comissão Julgadora em 27/02/98.

A handwritten signature in black ink, which appears to read "Atílio", is written over a horizontal line.

Orientador

Campinas-SP Brasil  
Fevereiro - 1998

L628a

33551/BC



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E  
DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

**Análise do Comportamento Seletivo em Frequência de  
Grades Dielétricas com Periodicidade em Duas Dimensões**

**Ivan Torres Lima Junior**

Eng. Eletricista pela Universidade Federal da Bahia.

Orientador: **Atílio José Giarola**

Campinas-SP Brasil  
Fevereiro - 1998



## **Banca Examinadora:**

- Prof. Dr. Atílio José Giarola - Presidente  
Doutor pela Universidade de Washington - USA 1963  
Local de Trabalho: Departamento de Microonda e Óptica  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas
- Prof. Dr. Antonio Cezar de Castro Lima – Membro Externo  
Doutor pela Universidade de Kent at Canterbury - Inglaterra 1994  
Local de Trabalho: Departamento de Engenharia Elétrica  
Escola Politécnica  
Universidade Federal da Bahia
- Prof. Dr. Rui Fragassi Souza - Membro  
Doutor pela Universidade de Cornell - USA 1976  
Local de Trabalho: Departamento de Microonda e Óptica  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas
- Prof. Dr. Evandro Conforti – Suplente  
Doutor pela Universidade Estadual de Campinas – 1983  
Local de Trabalho: Departamento de Microonda e Óptica  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

## Agradecimentos

- Ao Professor Atílio José Giarola pela sugestão do tema, pela orientação e por ter acreditado em nosso trabalho.
- Ao Professor Antônio Cezar de Castro Lima pelo apoio durante a graduação e pelo incentivo e recomendações para o início da minha carreira acadêmica.
- Ao Professor Hugo Henrique Hernández Figueroa, pelo apoio, orientação e incentivo, tendo em vista a abertura de novos horizontes para a minha realização profissional.
- Aos demais Professores da UNICAMP que contribuíram para a minha formação durante o curso de mestrado. Em especial os Professores Rui Fragassi Souza, Evandro Conforti e Maurício Silveira.
- À UNICAMP e ao Governo do Estado de São Paulo pela possibilidade de realizar o mestrado no Brasil.
- Aos colegas do DMO, em especial Nildsen, Helder, Pablo, Cosme, Vitaly, Yoshino, Rubens e Adriano pelo coleguismo e pelas excelentes discussões.
- À CAPES pelo suporte financeiro e ao Sistema Telebrás pelo suporte parcial durante parte do curso.
- Aos meus pais Ivan e Eliza, aos meus irmãos Luciano e Robertinho e familiares, pelo apoio e incentivo durante todas as etapas de minha vida.
- À minha companheira Aurenice pelo inestimável apoio e por ter partilhado comigo dos momentos de alegria e de dificuldades.

## Resumo

Este trabalho analisa as características de propagação da onda eletromagnética e a seletividade em frequência de grades dielétricas com periodicidade em duas dimensões, tendo em vista a aplicação destas como superfícies dicróicas na faixa de ondas milimétricas.

Na formulação deste trabalho inicialmente são obtidas as constantes de propagação dos modos ao longo da direção transversal à periodicidade através da obtenção das soluções possíveis de dois sistemas de equações lineares; estes são constituídos pelas equações integrais formadas pela utilização da função diádica de Green do espaço livre e pela utilização do teorema da corrente volumétrica equivalente induzida, que é associada a uma expansão adequada do campo elétrico no interior do dielétrico. Após a determinação destes, que se caracterizam como os autovalores, as autofunções podem ser obtidas a partir da resolução dos sistemas de equações lineares homogêneas. Estas autofunções caracterizam o campo elétrico no interior do dielétrico, a partir do qual se pode construir o vetor potencial de Hertz para a caracterização da distribuição dos campos no interior das células. Uma vez conhecida a distribuição dos campos em uma estrutura infinita, a obtenção dos coeficientes de transmissão e reflexão em grades periódicas, constituídas por estas estruturas, podem ser obtidas com a aplicação da continuidade dos componentes tangenciais dos campos elétricos e magnéticos nas fronteiras entre a camada periódica e as camadas homogêneas que a envolvem.

## Summary

This work analyzes the propagation characteristics of electromagnetic waves and the frequency selectivity of dielectric gratings with periodicity in two dimensions, having in mind their applications as dichroic surfaces in the millimeter wave band.

In the formulation of this work, the propagation constants of the modes along the direction transverse to the periodicity, are initially obtained by searching for the possible solutions of two systems of linear equations. These equations result from the integral equations formed by utilizing the free space dyadic Green function and the equivalent induced volume current theorem, associated to an adequate electric field expansion inside the dielectric. After the evaluation of these solutions, that are characterized as the eigenvalues, the eigenfunctions may be obtained from the solution of the systems of homogeneous and linear equations. These eigenfunctions characterize the electric field inside the dielectric, and are used to construct the Hertz vector potential and the field distribution inside each cell. Once the field distribution in the infinite structure is known, the transmission and reflection coefficients in periodic gratings, consisting of these structures, may be obtained with the application of the continuity condition of the tangential components of the electric and magnetic fields at the interfaces between the periodic layer and surrounding homogeneous layers.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Introdução . . . . .	3
1.2	Objetivos e organização do trabalho . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Estudo das Características de Propagação em Arranjos Infinitos de Guias de Onda Dielétricos Anisotrópicos Retangulares</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	Formulação básica . . . . .	10
2.3	Obtenção da função de Green . . . . .	12
2.4	Formulação da equação integral . . . . .	15
2.4.1	Funções de expansão do grupo 1 . . . . .	17
2.4.2	Funções de expansão do grupo 2 . . . . .	20
2.5	Obtenção das curvas de dispersão e distribuição dos campos . . . . .	22
2.6	Resultados numéricos . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Análise do Espalhamento de Grades Dielétricas com Periodicidade em Duas Dimensões</b>	<b>36</b>
3.1	Introdução . . . . .	36
3.2	Caracterização dos campos propagando-se nas camadas uniformes . . . . .	37
3.3	Caracterização dos campos propagando-se na camada periódica . . . . .	39
3.4	Cálculo dos campos espalhados pela grade . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Análise do Comportamento Seletivo em Frequência de Grades Dielétricas</b>	<b>48</b>
4.1	Introdução . . . . .	48
4.2	Aspectos teóricos . . . . .	49
4.3	Características de propagação e de espalhamento em camadas dielétricas homogêneas . . . . .	51

4.4	Características de seletividade em frequência de camadas dielétricas periódicas	54
5	Conclusões	63
A	Vetor Potencial de Hertz Elétrico	68
B	Expressões Algébricas	70

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução

As grades dielétricas são estruturas constituídas por uma ou mais camadas com variação periódica no seu índice de refração, inseridas entre outras camadas uniformes, conforme mostrado na Fig. 1-1.

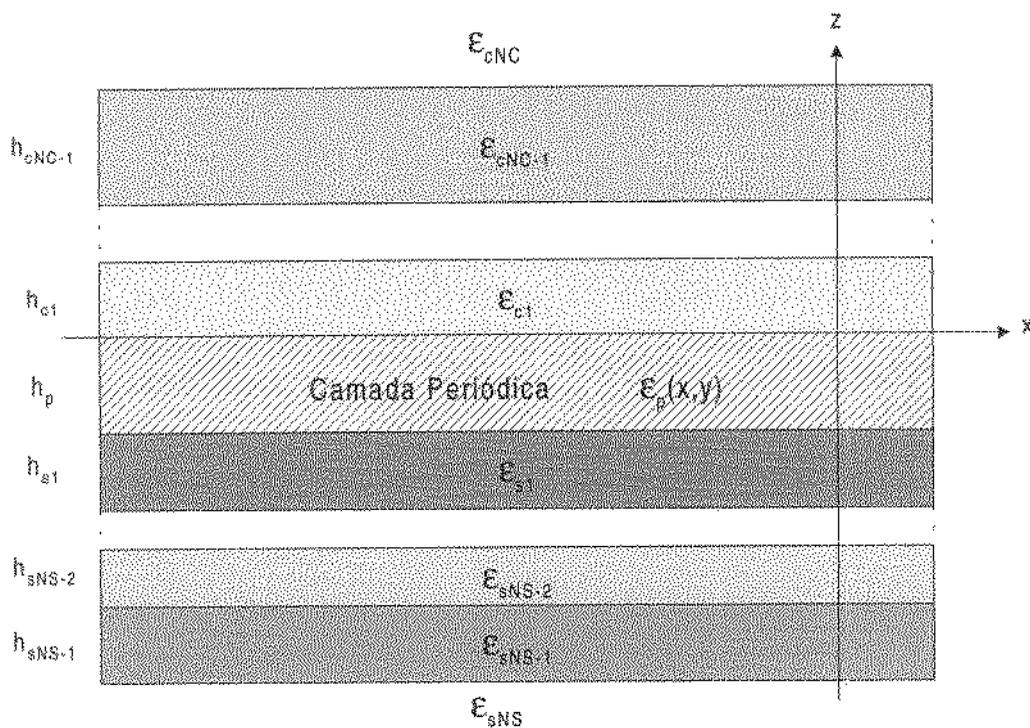


Fig. 1-1: Grade dielétrica constituída por uma camada com variação periódica na permissividade inserida entre outras camadas dielétricas uniformes.

Atualmente as grades dielétricas são utilizadas em vários dispositivos aplicáveis no

campo de microondas e óptica, tais como em eletro-óptica, óptica integrada e eletrônica quântica, entre outros. Dentre os dispositivos que utilizam grades de dielétricas podem ser destacados: antenas, lasers, divisores e combinadores de feixes, moduladores, acopladores, filtros, multiplexadores e demultiplexadores por divisão de comprimento de onda, interconectores ópticos e superfícies antirefletoras [1]-[5]. As estruturas dielétricas periódicas foram inicialmente propostas por Bertoni *et al.* [6] para serem utilizadas como superfícies dicróicas na faixa de ondas milimétricas, devido a suas características seletivas em frequência. Em virtude destes dispositivos apresentarem perdas menores em ondas milimétricas quando comparados com as superfícies dicróicas metálicas, normalmente constituídas por arranjos periódicos de dipólos impressos [7]-[9], as grades dielétricas se apresentam como uma alternativa para a construção de dispositivos seletivos em frequência.

Em suas diversas aplicações as grades podem ser passivas ou ativas. Além de dielétricos, os materiais constituintes podem ser: cristais fotorefrativos, semicondutores ou metais, entre outros. Quanto à geometria, entre os exemplos existentes na literatura, encontram-se grades finas, espessas ou corrugadas em diferentes perfis, as quais podem ser cascadeadas ou superpostas em um mesmo volume [1]-[5].

O estudo das grades dielétricas envolve problemas típicos de guiamento de ondas nas direções longitudinal e transversal à periodicidade. Para a sua análise, a qual depende também da configuração do guia e da onda incidente, diversos métodos foram utilizados, dentre os quais encontram-se a teoria modal rigorosa, apresentada por Peng *et al.* [2], [10], a qual foi estendida por Costa e Giarola [11]-[13] para células periódicas com múltiplas camadas, e a teoria rigorosa dos modos acoplados, apresentada por Glitsys e Gaylord [14], [15].

Em todos estes estudos, as estruturas de grades apresentavam periodicidade em apenas uma dimensão. Yang *et al.* [16] desenvolveram um dos primeiros trabalhos sobre as características de propagação em estruturas dielétricas com periodicidade em duas dimensões. Tratavam-se de arranjos periódicos infinitos de guias de onda dielétricos isotrópicos, os quais foram analisados apenas em seus modos naturais, utilizando o método dos momentos. Yang [17] voltou a analisar os modos naturais de grades dielétricas com periodicidade em duas dimensões, porém com formas arbitrárias, utilizando o método das diferenças finitas. Neste trabalho, Yang propôs a utilização destas estruturas em microondas e óptica, uma vez que estas apresentam bandas de propagação proibidas semelhantes às apresentadas pelos cristais elétricos. Yang [18] utilizou, novamente, o método dos momentos para analisar as características das ondas guiadas em arranjos periódicos de guias de onda dielétricos finitos

ao longo do eixo  $z$ , mas ainda em seus modos naturais, isto é, somente com excitação ao longo do eixo  $z$ .

Neste trabalho foi estendida a análise da equação integral com o método dos momentos apresentada por Yang *et al.* [16], tendo em vista a obtenção da distribuição dos campos e dos modos que podem se propagar em arranjos de guias de onda dielétricos anisotrópicos com uma incidência arbitrária ao longo do plano  $xz$ . Uma vez que o arranjo se torna limitado na região  $0 < z < -h_p$  e envolvido por camadas homogêneas nas regiões superior e inferior à camada periódica, o espalhamento nesta estrutura pode ser obtido como um problema de valores de contorno. A camada periódica das grades dielétricas analisadas neste trabalho corresponde a um arranjo de guias de onda dielétricos retangulares, Fig. 1-2. Peng e Morris [19] analisaram, durante o desenvolvimento do presente trabalho, a seletividade em frequência de camadas periódicas semelhantes às aqui analisadas, porém utilizando o método da onda acoplada.

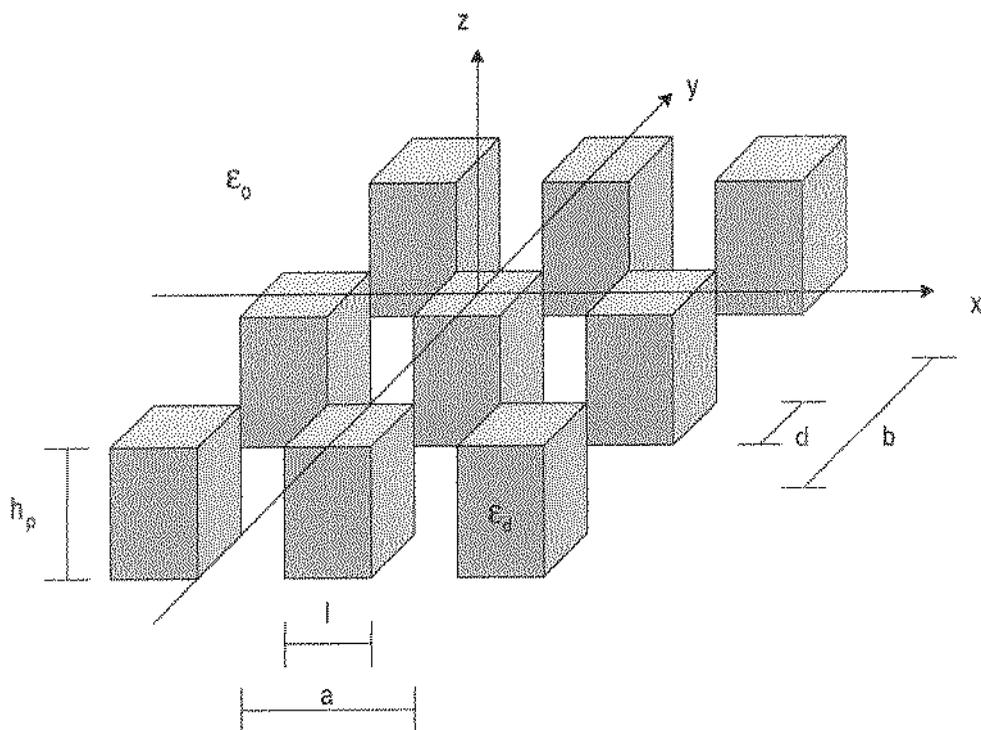


Fig. 1-2: Camada constituída por um arranjo periódico de guias de onda dielétricos anisotrópicos retangulares.

## 1.2 Objetivos e organização do trabalho

Este trabalho se propõe a analisar o comportamento dos coeficientes de transmissão e reflexão de grades dielétricas, Fig. 1-1, com a camada periódica semelhante à mostrada na Fig. 1-2, tendo em vista a aplicação destas como superfícies dicróicas na faixa de ondas milimétricas.

Supõe-se que os guias de onda retangulares dielétricos são estruturas periódicas e infinitas ao longo das direções  $x$  e  $y$ , e que a onda plana incide sobre eles em uma direção contida em um plano perpendicular a uma das direções periódicas. Deste modo trata-se de um problema de três dimensões. Além disso, supõe-se também que cada uma das camadas dielétricas homogêneas que constituem a grade é composta por material isotrópico e não magnético.

No Capítulo 2 é apresentada uma formulação para a análise das características de propagação em estruturas constituídas por um arranjo periódico de guias de onda dielétricos anisotrópicos retangulares. As análises consideram dois grupos de modos definidos por dois conjuntos de funções de expansão do campo elétrico no interior do guia. A inclusão da excitação ao longo do plano  $xz$  [21] e exploração da anisotropia [20] são algumas das contribuições deste trabalho. A finalidade deste capítulo é que, a partir da determinação das constantes de propagação e da distribuição dos campos propagando-se nas estruturas periódicas infinitas, pode-se caracterizar a propagação e a distribuição dos campos em estruturas periódicas confinadas, que é o caso das grades dielétricas. Neste capítulo também são mostrados resultados numéricos ilustrando a aplicação do modelo, onde são obtidas as constantes de propagação e a distribuição dos campos para algumas configurações selecionadas.

No Capítulo 3 é apresentada uma modelagem para a distribuição dos campos nas camadas homogêneas e nas camadas periódicas de grades dielétricas, utilizando os resultados do Capítulo 2, de modo a que seja possível a aplicação das condições de contorno nas fronteiras entre as camadas e, conseqüentemente, caracterizar o espalhamento proporcionado pelas grades dielétricas sob incidências arbitrárias, no plano  $xz$ , de ondas eletromagnéticas.

No Capítulo 4 são apresentados resultados para análise do comportamento seletivo em frequência de grades dielétricas, incluindo resultados que validam esta formulação com outras existentes na literatura, para alguns casos particulares, bem como a exploração de algumas configurações de projeto para a utilização das grades dielétricas com periodicidade em duas dimensões como superfícies dicróicas.

Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões obtidas no decorrer deste trabalho, bem como sugestões para futuras pesquisas.

Todos os programas desenvolvidos para resolver e validar numericamente a formulação proposta foram desenvolvidos no decorrer deste trabalho. O código fonte e as informações sobre sua utilização encontram-se no relatório técnico RT DMO 033 [28].

## Capítulo 2

# Estudo das Características de Propagação em Arranjos Infinitos de Guias de Onda Dielétricos Anisotrópicos Retangulares

### 2.1 Introdução

Neste capítulo são estudadas as características de propagação em estruturas formadas por arranjos periódicos infinitos de guias de onda dielétricos anisotrópicos retangulares semelhantes ao mostrado na Fig. 2-1. A análise apresentada aplica-se aos modos propagando-se ao longo da região transversal à periodicidade, eixo  $z$ , e ao longo do eixo  $x$ . O uso do teorema de Floquet e da condição de continuidade dos campos nas fronteiras, ao longo do eixo  $y$ , onde a estrutura também apresenta periodicidade, reduz a análise a uma única célula característica da grade periódica para dois grupos de funções de expansão, que correspondem aos modos TE e TM, para o caso particular em que a estrutura se torna infinita ao longo do eixo  $y$ , fazendo  $d = b$ .

Uma formulação para a análise das características de propagação em arranjos infinitos de guias de onda dielétricos isotrópicos foi apresentada por Yang *et al.* [16], onde somente eram analisadas as estruturas em seus modos naturais. O principal objetivo do presente trabalho é estender esta análise para consideração de excitação ao longo do eixo  $x$  em estruturas com periodicidade em duas dimensões, melhorar a formulação de modo a se obter uma distribuição dos campos mais precisa no interior das células, além de analisar o

efeito da introdução da anisotropia.

Os resultados apresentados mostram o efeito da inclusão da periodicidade ao longo do eixo  $y$  e da introdução da anisotropia na estrutura. O entendimento das características de propagação apresentadas neste capítulo é útil para as análises de espalhamento e guiamento de ondas em dispositivos constituídos por estas mesmas estruturas, porém truncados ao longo do eixo  $z$  de modo a se constituírem em camadas finitas.

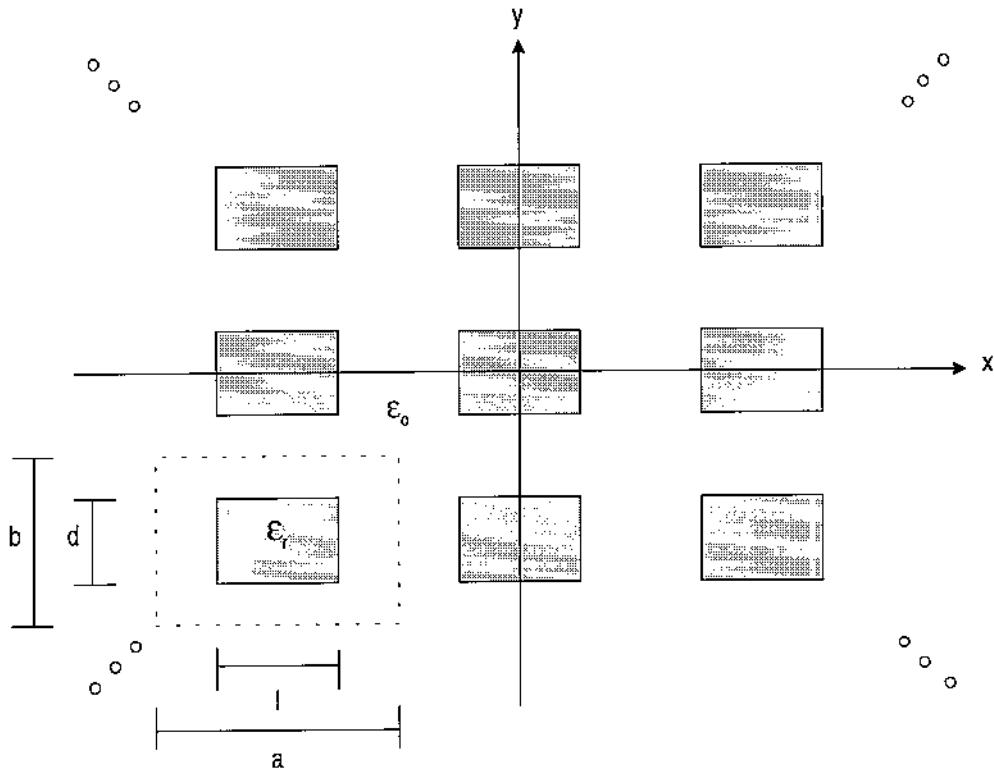


Fig. 2-1: Arranjo periódico infinito de guias de onda dielétricos anisotrópicos retangulares.

A permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do arranjo de guias de onda retangulares são definidas como

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

e

$$\mu = \mu_0. \quad (2.2)$$

## 2.2 Formulação básica

Em virtude da periodicidade da estrutura, se forem conhecidos os campos eletromagnéticos dentro da célula retangular, com largura  $a$  e altura  $b$ , mostrada na Fig. 2-1, podem ser deduzidos os campos em qualquer outro lugar do espaço. As equações de Maxwell para os campos dentro da célula periódica são

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \vec{E}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o\vec{H}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + j\omega\epsilon_o\vec{E}, \quad (2.5)$$

onde  $\vec{J}_e$  é densidade de corrente volumétrica equivalente induzida. Esta densidade de corrente pode ser escrita como segue

$$\vec{J}_e = \begin{cases} j\omega\epsilon_o (\bar{\epsilon}_r - \bar{I}) \cdot \vec{E}, & \text{no interior do dielétrico;} \\ 0, & \text{fora do dielétrico;} \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $\bar{I} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$  é o tensor unicidade.

Supõe-se que os campos analisados possuem uma dependência temporal na forma  $e^{j\omega t}$ , sendo  $\omega$  a frequência angular, e propagação ao longo do eixo  $z$  na forma  $e^{-j\beta z}$ , onde  $\beta$  é a constante de fase a ser determinada, as quais, por conveniência, iremos omitir. Para a solução de (2.4) e (2.5) pode-se utilizar o vetor potencial de Hertz elétrico, descrito no Apêndice A.

O vetor potencial de Hertz elétrico é dado por

$$\vec{\Pi}_e = \Pi_{ex}\hat{x} + \Pi_{ey}\hat{y} + \Pi_{ez}\hat{z}, \quad (2.7)$$

que satisfaz à equação de Helmholtz não homogênea, dada por

$$\nabla_t^2 \vec{\Pi}_e + (k_o^2 - \beta^2) \vec{\Pi}_e = -\vec{J}_e, \quad (2.8)$$

onde  $\nabla_t$  é o operador nabla operando nas coordenadas transversais à direção da propagação  $z$ , o qual fornece as seguintes componentes de campo elétrico

$$E_x = -j\omega\mu_o\Pi_x + \frac{1}{j\omega\varepsilon_o}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi_x + \frac{\partial}{\partial y}\Pi_y - j\beta\Pi_z\right), \quad (2.9)$$

$$E_y = -j\omega\mu_o\Pi_y + \frac{1}{j\omega\varepsilon_o}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi_x + \frac{\partial}{\partial y}\Pi_y - j\beta\Pi_z\right), \quad (2.10)$$

$$E_z = -j\omega\mu_o\Pi_z - \frac{\beta}{\omega\varepsilon_o}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Pi_x + \frac{\partial}{\partial y}\Pi_y - j\beta\Pi_z\right), \quad (2.11)$$

A solução da equação diferencial parcial (2.8) pode ser escrita, em forma integral, como sendo

$$\vec{\Pi}_e = \iint G(x, x', y, y') \vec{I} \cdot \vec{J}_e dx' dy', \quad (2.12)$$

onde a função de Green,  $G(x, x', y, y')$ , é a solução de (2.8) quando o valor absoluto da corrente de excitação for uma fonte delta de Dirac,  $\delta(x-x')\delta(y-y')$ . Devido à periodicidade apresentada pela estrutura ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , de tal forma que uma posição em  $(x, y)$  se repete em  $(x + na, y + mb)$ , onde  $n$  e  $m$  são números inteiros com valores estendendo-se de  $-\infty$  a  $+\infty$ , o teorema de Floquet assegura que as infinitas ondas propagando-se na estrutura, conhecidas como harmônicas espaciais, podem modelar adequadamente a distribuição dos campos ao longo das direções  $x$  e  $y$ , com periodicidade igual à da constante dielétrica.

À semelhança do que foi feito por Yang *et al.* [16], iremos usar o teorema de Floquet com respeito à variável  $x$  e as condições de contorno de que os componentes dos campos em  $y = -\frac{b}{2}$  e  $y = +\frac{b}{2}$  são iguais. Esta hipótese é verdadeira, desde que se analisem apenas os modos naturais da estrutura, como é o caso da análise desenvolvida por Yang *et al.* [16]. Entretanto, para o caso de excitação através de onda plana incidente externamente, ao longo da direção  $y$ , os campos seriam iguais em amplitude mas iriam diferir de uma fase  $k_{yn}b$ . Portanto, ao ser aplicada a condição de igualdade dos campos em  $y = -\frac{b}{2}$  e  $y = +\frac{b}{2}$ , supõe-se que, se houver excitação de uma onda plana na estrutura, ela se fará ao longo do eixo  $x$ .

O teorema de Floquet, aplicado ao eixo  $x$ , garante que as harmônicas espaciais possuam uma variação de fase conhecida ao longo desta direção, dada por  $k_{xn}a$ , onde  $a$  é a periodicidade da estrutura ao longo do eixo  $x$  e  $k_{xn}$  é a constante de fase da  $n$ -ésima harmônica espacial, na direção  $x$ , conhecida como número de onda de Floquet, dada por

$$k_{xn} = k_{xo} + \frac{2\pi n}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.13)$$

onde  $k_{xo}$  é o número de onda da harmônica espacial fundamental e está associada com a ressonância da estrutura, sendo esta livre ou forçada. Esta será forçada caso exista excitação externa,  $k_{xo} \neq 0$ .

### 2.3 Obtenção da função de Green

A função de Green para o problema proposto deverá satisfazer à seguinte equação não homogênea de Helmholtz

$$\left[ \nabla_t^2 + k_o^2 - \beta^2 \right] \vec{\Pi}_e = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -\delta(ma + x - x') \delta(y - y') e^{-jk_{xo}(x-x')} \hat{e}, \quad (2.14)$$

onde  $\hat{e}$  é o vetor unitário ao longo da direção do campo elétrico.

Além das funções delta de Dirac, que estão associadas às fontes na Equação (2.14), é acrescentado também um fator  $e^{-jk_{xo}(x-x')}$ , que representa a incidência de uma onda plana ao longo do eixo  $x$ .

Devido à periodicidade nas direções  $x$  e  $y$ , citadas no Capítulo 2, a expressão geral de  $G(x, x', y, y')$  apresenta a forma

$$G(x, x', y, y') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n F_n^x(x, x') F_n^y(y, y'), \quad (2.15)$$

onde  $D_n$  são coeficientes e  $F_n^x(x, x')$  e  $F_n^y(y, y')$  são funções a serem determinadas.

Devido à periodicidade e à inexistência de excitação externa ao longo do eixo  $y$ , a dependência da função de Green, com relação a esta variável, pode ser dada pela seguinte equação

$$F_n^y(y, y') = \cos[k_{ym}|y - y'| + \phi_y]. \quad (2.16)$$

Para satisfazer à condição de que  $F_n^y\left(\frac{-b}{2}, y'\right) = F_n^y\left(\frac{b}{2}, y'\right)$ , uma das soluções é  $\phi_y = -k_{ym}\frac{b}{2}$ .

A partir do teorema de Floquet, com relação à variável  $x$ , tem-se

$$k_{xn} = k_{xo} + \frac{2\pi n}{a}. \quad (2.17)$$

Os modos naturais da estrutura são obtidos mediante a condição de que  $k_{x_0} = 0$ , como feito por Yang *et al.* [16]. Entretanto, se for incidida uma onda plana na estrutura,  $k_{x_0}$  será diferente de zero. Assim, se uma onda plana incidir com um ângulo  $\theta$  com relação ao eixo  $z$ , ao longo do plano  $xz$ , então

$$k_{x_0} = k \text{ sen } \theta, \quad (2.18)$$

onde  $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  seria o número de onda da camada homogênea da qual proviria a onda plana incidente da camada periódica, se esta fosse limitada em  $z$ . Na análise deste capítulo, onde a estrutura é infinita em  $z$ ,  $\theta$  será definido por,

$$\theta = \text{arcsen} \left( \frac{k_{x_0}}{k_0} \right). \quad (2.19)$$

Substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \left[ \begin{array}{l} (k_0^2 - \beta^2 - k_{yn}^2) F_n^y(y, y') F_n^x(x, x') \\ + F_n^y(y, y') \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_n^x(x, x') \\ + 2k_{yn} \text{sen} \left( k_{yn} \frac{b}{2} \right) \delta(y - y') F_n^x(x, x') \end{array} \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -\delta(ma + x - x') \delta(y - y') e^{-jk_{x_0}(x-x')}. \quad (2.20)$$

Supondo que

$$F_n^x(x, x') = e^{-jk_{xn}(x-x')}. \quad (2.21)$$

Portanto,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \left[ \begin{array}{l} [k_0^2 - \beta^2 - k_{yn}^2 - k_{xn}^2] F_n^y(y, y') F_n^x(x, x') \\ + 2k_{yn} \text{sen} \left( k_{yn} \frac{b}{2} \right) \delta(y - y') F_n^x(x, x') \end{array} \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -\delta(ma + x - x') \delta(y - y') e^{-jk_{x_0}(x-x')}. \quad (2.22)$$

Do teorema da divergência,

$$[k_0^2 - \beta^2 - k_{yn}^2 - k_{xn}^2] = 0. \quad (2.23)$$

Portanto,

$$k_{yn}^2 = k_0^2 - \beta^2 - k_{xn}^2 \quad (2.24)$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n 2k_{yn} \operatorname{sen} \left( k_{yn} \frac{b}{2} \right) \delta(y - y') F_n^x(x, x') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -\delta(ma + x - x') \delta(y - y') e^{-jk_{zo}(x-x')}. \quad (2.25)$$

Uma vez que  $e^{-jk_{zo}(x-x')}$  é fator comum em (2.25), pode ser cancelado. Uma vez que  $\delta(y - y')$  também é fator comum, pode-se integrar ambos os termos em  $(y - y')$  no intervalo de  $-\frac{b}{2}$  a  $+\frac{b}{2}$ . Como resultado, obtém-se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n 2k_{yn} \operatorname{sen} \left( k_{yn} \frac{b}{2} \right) e^{-j\frac{2\pi n}{a}(x-x')} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -\delta(ma + x - x'). \quad (2.26)$$

Sabe-se que qualquer função periódica pode ser reproduzida como uma somatória infinita de harmônicos com coeficientes adequados, desta forma,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(ma + x - x') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n e^{-j\frac{2\pi n}{a}(x-x')}. \quad (2.27)$$

Para se obter os coeficientes  $G_n$  de (2.27), basta multiplicar ambos os lados desta equação por  $e^{+j\frac{2\pi n'}{a}(x-x')}$  e integrar ambos os lados em  $(x - x')$  de  $\frac{-a}{2}$  a  $\frac{+a}{2}$ , como segue

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \delta(ma + x - x') e^{+j\frac{2\pi n'}{a}(x-x')} d(x - x') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-j\frac{2\pi n}{a}(x-x')} e^{+j\frac{2\pi n'}{a}(x-x')} d(x - x'). \quad (2.28)$$

A integral no primeiro membro de (2.28) é trivial e dada por

$$\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \delta(ma + x - x') e^{+j\frac{2\pi n'}{a}(x-x')} d(x - x') = \delta_{m0}, \quad (2.29)$$

e a integral no segundo membro também é trivial e dada por

$$\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-j\frac{2\pi n}{a}(x-x')} e^{+j\frac{2\pi n'}{a}(x-x')} d(x - x') = a\delta(n - n'). \quad (2.30)$$

Portanto, de (2.28), (2.29) e (2.30) obtém-se

$$G_n = \frac{1}{a}. \quad (2.31)$$

Desta forma, a equação (2.27) é dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(na + x - x') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} e^{-j\frac{2\pi m}{a}(x-x')}. \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.26), obtém-se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n 2k_{yn} \operatorname{sen}\left(k_{yn}\frac{b}{2}\right) e^{-j\frac{2\pi n}{a}(x-x')} = - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} e^{-j\frac{2\pi m}{a}(x-x')}. \quad (2.33)$$

Finalmente, o coeficiente  $D_n$  da Equação (2.26) pode ser obtido de (2.33), com o seguinte resultado

$$D_n = \frac{-1}{2ak_{yn} \operatorname{sen}\left(k_{yn}\frac{b}{2}\right)}. \quad (2.34)$$

Substituindo as expressões (2.16), (2.21) e (2.27) em (2.15), obtém-se a seguinte equação

$$G(x, x', y, y') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-e^{-jk_{zn}(x-x')} f_n(y-y')}{2a}, \quad (2.35)$$

onde

$$k_{yn} = \pm \sqrt{k_o^2 - \beta^2 - k_{zn}^2} \quad (2.36)$$

e

$$f_n(y-y') = \frac{\cos\left[k_{yn}|y-y'| - k_{yn}\frac{b}{2}\right]}{k_{yn} \operatorname{sen}\left(k_{yn}\frac{b}{2}\right)}. \quad (2.37)$$

## 2.4 Formulação da equação integral

O campo elétrico no interior do dielétrico é definido da seguinte forma

$$\vec{E}^d = E_x^d \hat{x} + E_y^d \hat{y} + E_z^d \hat{z}. \quad (2.38)$$

Usando as Equações (2.9)-(2.12), as seguintes equações integrais podem ser formuladas

$$E_x^d = \iint_d G_{xx} E_x^d dx' dy' + \iint_d G_{xy} E_y^d dx' dy' + \iint_d G_{xz} E_z^d dx' dy', \quad (2.39)$$

$$E_y^d = \iint_d G_{yx} E_x^d dx' dy' + \iint_d G_{yy} E_y^d dx' dy' + \iint_d G_{yz} E_z^d dx' dy', \quad (2.40)$$

$$E_z^d = \iint_d G_{zx} E_x^d dx' dy' + \iint_d G_{zy} E_y^d dx' dy' + \iint_d G_{zz} E_z^d dx' dy'. \quad (2.41)$$

As expressões de  $G_{ij}$ , com  $i, j = x, y$  ou  $z$ , podem ser obtidas a partir das Equações (2.39) a (2.41), utilizando o procedimento a seguir.

Inicialmente o vetor potencial de Hertz elétrico que satisfaz à Equação (2.8) é obtido utilizando as Equações (2.12) e (2.35).

$$\Pi_x^d = \iint_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{-1}{2a} e^{-jk_{zn}(x-x')} f_n(y, y') \right] j\omega \varepsilon_o (\varepsilon_{xx} - 1) E_x^d dx' dy', \quad (2.42)$$

$$\Pi_y^d = \iint_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{-1}{2a} e^{-jk_{zn}(x-x')} f_n(y, y') \right] j\omega \varepsilon_o (\varepsilon_{yy} - 1) E_y^d dx' dy', \quad (2.43)$$

$$\Pi_z^d = \iint_d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{-1}{2a} e^{-jk_{zn}(x-x')} f_n(y, y') \right] j\omega \varepsilon_o (\varepsilon_{zz} - 1) E_z^d dx' dy'. \quad (2.44)$$

Substituindo as Equações (2.42) a (2.44) em (2.9) obtém-se

$$G_{xx} = (\varepsilon_{xx} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2a} (k_o^2 - k_{zn}^2) e^{-jk_{zn}(x-x')} f_n(y, y'), \quad (2.45)$$

$$G_{xy} = (\varepsilon_{yy} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2a} k_{zn} e^{-jk_{zn}(x-x')} \frac{\partial}{\partial y} f_n(y, y'), \quad (2.46)$$

$$G_{xz} = (\varepsilon_{zz} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta}{2a} k_{zn} e^{-jk_{zn}(x-x')} f_n(y, y'). \quad (2.47)$$

Analogamente, de (2.10) obtém-se

$$G_{yx} = (\varepsilon_{xx} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2a} k_{zn} e^{-jk_{zn}(x-x')} \frac{\partial}{\partial y} f_n(y, y'), \quad (2.48)$$

$$G_{yy} = (\varepsilon_{yy} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2a} \left[ (k_o^2 - k_{zn}^2) f_n(y, y') + 2\delta(y - y') \right] e^{-jk_{zn}(x-x')}, \quad (2.49)$$

$$G_{yz} = (\epsilon_{zz} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j\beta}{2a} e^{-jk_{zn}(x-x')} \frac{\partial}{\partial y} f_n(y, y'). \quad (2.50)$$

Finalmente, de (2.11) obtém-se

$$G_{zx} = (\epsilon_{xx} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta}{2a} k_{zn} e^{-jk_{zn}(x-x')} f_n(y, y'), \quad (2.51)$$

$$G_{zy} = (\epsilon_{yy} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j\beta}{2a} e^{-jk_{zn}(x-x')} \frac{\partial}{\partial y} f_n(y, y'), \quad (2.52)$$

$$G_{zz} = (\epsilon_{zz} - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2a} (k_o^2 - \beta^2) e^{-jk_{zn}(x-x')} f_n(y, y'). \quad (2.53)$$

Para resolver as equações integrais (2.39)-(2.41), foi utilizado o método dos momentos. Segundo este método, o campo elétrico desconhecido é expandido, no interior do dielétrico, por um conjunto de funções de expansão conhecidas. Estas funções satisfazem às equações rotacionais de Maxwell, ao teorema da divergência, bem como à periodicidade da estrutura. Em adição, devido à simetria, existem dois conjuntos de modos que podem se propagar independentemente.

#### 2.4.1 Funções de expansão do grupo 1

As funções de expansão deste grupo correspondem, no caso em que  $k_{xo} = 0$ , aos modos  $E_{p,(2q-1)}^x$  ou  $E_{p,2q}^y$  de um guia de onda dielétrico retangular aberto, de acordo com a classificação de Marcatili [24]:

$$E_x^d = \sum_{k=-K}^K A_k e^{-jk_{zk}x} \cos(k_{ak}^x y), \quad (2.54)$$

$$E_y^d = \sum_{k=-K}^K B_k e^{-jk_{zk}x} \sen(k_{ak}^y y), \quad (2.55)$$

$$E_z^d = \frac{1}{j\beta\epsilon_{zz}} \left( \epsilon_{xx} \frac{\partial E_x^d}{\partial x} + \epsilon_{yy} \frac{\partial E_y^d}{\partial y} \right), \quad (2.56)$$

onde

$$k_{zk} = k_{xo} + \frac{2\pi k}{a}, \quad (2.57)$$

$$k_{ak}^x = \pm \sqrt{\varepsilon_{xx} k_o^2 - \beta^2 - k_{xk}^2}, \quad (2.58)$$

$$k_{ak}^y = \pm \sqrt{\varepsilon_{yy} k_o^2 - \beta^2 - k_{xk}^2}. \quad (2.59)$$

Substituindo (2.54)-(2.56) em (2.39) e resolvendo a dependência em  $x$ , através da aplicação da transformada de Fourier, com período  $l$ , na faixa que se estende de  $x = -\frac{l}{2}$  a  $x = +\frac{l}{2}$ , obtém-se equações diferentes para os coeficientes de cada uma das harmônicas de Fourier, diferenciadas pelo índice  $v$ . A dependência em  $y$  é resolvida através da integração ao longo do eixo  $y$ , na faixa que se estende de  $y = 0$  a  $y = +\frac{d}{2}$ , de onde obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\sum_{k=-K}^K \Omega_{v,k} f_{xa} A_k = \frac{-1}{2a} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-K}^K \Omega_{v,n} f_{n,k} \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_{xx} - 1) (k_o^2 - k_{xn}^2) H_x^1 A_k - (\varepsilon_{yy} - 1) j k_{xn} H_y^4 B_k \\ + (\varepsilon_{zz} - 1) k_{xn} \left[ k_{xk} \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} H_x^1 A_k + j k_{ak}^y \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}} H_y^1 B_k \right] \end{array} \right\}, \quad (2.60)$$

onde,

$$\Omega_{v,k} = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{+jk_{xlv}x} e^{-jk_{xk}x} dx, \quad (2.61)$$

$$f_{n,k} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{+jk_{zn}x'} e^{-jk_{xk}x'} dx', \quad (2.62)$$

$$k_{xlv} = k_{xo} + \frac{2\pi v}{l}, \quad (2.63)$$

$$H_i^1 = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} \cos(k_{ak}^i y') f_n(y, y') dy' dy, \quad i = x, y, \quad (2.64)$$

$$H_i^2 = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} \text{sen}(k_{ak}^i y') f_n(y, y') dy' dy, \quad i = x, y, \quad (2.65)$$

$$H_i^3 = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} \cos(k_{ak}^i y') \frac{\partial}{\partial y} f_n(y, y') dy' dy, \quad i = x, y, \quad (2.66)$$

$$H_i^A = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \text{sen} \left( k_{ak}^i y' \right) \frac{\partial}{\partial y} f_n(y, y') dy' dy, \quad i = x, y, \quad (2.67)$$

$$f_{ia} = \int_0^{\frac{a}{2}} \cos \left( k_{ak}^i y \right) dy, \quad i = x, y, \quad (2.68)$$

$$f_{ib} = \int_0^{\frac{b}{2}} \text{sen} \left( k_{ak}^i y \right) dy, \quad i = x, y, \quad (2.69)$$

cujas expressões algébricas completas se encontram no Apêndice B.

O sistema de equações obtido de (2.60), para diferentes valores de  $v$ , é constituído por  $4K + 2$  incógnitas constituídas pelos coeficientes desconhecidos  $A_k$  e  $B_k$ , onde  $k$  varia de  $k = -K$  a  $K$ , e  $2V + 1$  equações, que estão constituídas na faixa de  $v = -V$  a  $V$ . A função de Green também está truncada em  $2N + 1$  termos, com  $n$  variando de  $n = -N$  a  $N$ .

É importante citar que a obtenção das diferentes equações, na formulação de Yang *et al.* [16], é efetuada através dos diferentes coeficientes da transformada de Fourier, na faixa que se estende de  $x = -\frac{a}{2}$  a  $x = +\frac{a}{2}$ . Isto representa uma aproximação desnecessária, uma vez que se pretende satisfazer às Equações (2.39)-(2.41) apenas no interior do dielétrico,  $x = -\frac{l}{2}$  a  $x = +\frac{l}{2}$ , como efetuado no presente trabalho.

Substituindo (2.54)-(2.56) em (2.41), eliminando as dependências em  $x$  e  $y$ , da mesma maneira que no caso anterior, obtém-se

$$\sum_{k=-K}^K \Omega_{v,k} \begin{bmatrix} -f_{xa} k_{xk} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} A_k \\ + f_{ya} k_{yk} \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} B_k \end{bmatrix} = \frac{-1}{2a} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-K}^K \Omega_{v,n} f_{n,k} \left\{ \begin{array}{l} -(\epsilon_{xx} - 1) j \beta^2 k_{xn} H_x^1 A_k \\ + (\epsilon_{yy} - 1) \beta^2 H_y^1 B_k + \\ (\epsilon_{zz} - 1) (k_o^2 - \beta^2) \begin{bmatrix} -j k_{xk} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} H_x^1 A_k \\ + k_{yk}^y \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} H_y^1 B_k \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (2.70)$$

Devido ao teorema da divergência, apenas duas das três Equações (2.39)-(2.41) são independentes. Desta forma, o conjunto de equações formado pelos  $2V + 1$  diferentes valores possíveis para  $v$ , na faixa de  $v = -V$  a  $V$ , para os sistemas de equações em (2.60) e (2.70), fornecem  $4V + 2$  equações para as  $4K + 2$  incógnitas. Para resolver este sistema é necessário fazer  $V = K$ , o que resulta em um sistema de equações lineares, em relação a  $A_k$  e  $B_k$ , homogêneo, e com uma quantidade de equações igual ao de incógnitas. Conseqüentemente, trata-se de um sistema solúvel, apesar de indeterminado.

Este sistema de equações pode ser escrito na seguinte forma matricial,

$$M(\beta) = \begin{bmatrix} K_{v,k}^{11} & \cdots & K_{v,k}^{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ K_{v,k}^{21} & \cdots & K_{v,k}^{22} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k \\ \vdots \\ B_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

onde os coeficientes  $K_{v,k}^{11}$ ,  $K_{v,k}^{12}$ ,  $K_{v,k}^{21}$  e  $K_{v,k}^{22}$  são obtidos de (2.60) e (2.70), os quais são expressos a seguir

$$K_{v,k}^{11} = \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \frac{\Omega_{v,n} f_{n,k}}{-2a} H_x^1 \left[ (\varepsilon_{xx} - 1) (k_o^2 - k_{xn}^2) + (\varepsilon_{zz} - 1) \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} k_{xn} k_{xk} \right] \right\} - \Omega_{v,k} f_{xa}, \quad (2.72)$$

que estão relacionados aos coeficientes  $A_k$  de (2.60), e

$$K_{v,k}^{12} = \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \frac{\Omega_{v,n} f_{n,k}}{-2a} j k_{xn} \left[ -(\varepsilon_{yy} - 1) H_y^4 + (\varepsilon_{zz} - 1) \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}} k_{ak}^y H_y^1 \right] \right\}, \quad (2.73)$$

que estão relacionados aos coeficientes  $B_k$  de (2.60). Já os termos relacionados aos coeficientes desconhecidos  $A_k$  e  $B_k$ , de (2.70), são dados, respectivamente, por

$$K_{v,k}^{21} = \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \frac{\Omega_{v,n} f_{n,k}}{-2a} j H_x^1 \left[ -(\varepsilon_{xx} - 1) \beta^2 k_{xn} - (\varepsilon_{zz} - 1) \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} k_{xk} (k_o^2 - \beta^2) \right] \right\} + \Omega_{v,k} j k_{xk} f_{xa} \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} \quad (2.74)$$

e

$$K_{v,k}^{22} = \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \frac{\Omega_{v,n} f_{n,k}}{-2a} \left[ \begin{array}{c} (\varepsilon_{yy} - 1) \beta^2 H_y^4 \\ + (\varepsilon_{zz} - 1) \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}} k_{ak}^y (k_o^2 - \beta^2) H_y^1 \end{array} \right] \right\} - \Omega_{v,k} k_{ak}^y f_{ya} \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}}. \quad (2.75)$$

## 2.4.2 Funções de expansão do grupo 2

As funções de expansão deste grupo correspondem, no caso em que  $k_{xo} = 0$ , aos modos  $E_{p,2q}^x$  ou  $E_{p,(2q-1)}^y$  de um guia de onda dielétrico retangular aberto, de acordo com a classificação de Marcatili [24]:

$$E_x^d = \sum_{k=-K}^K A_k e^{-jk_{xk}x} \text{sen}(k_{ak}^x y), \quad (2.76)$$

$$E_y^d = \sum_{k=-K}^K B_k e^{-jk_{xk}x} \cos(k_{ak}^y y), \quad (2.77)$$

$$E_z^d = \frac{1}{j\beta\epsilon_{zz}} \left( \epsilon_{xx} \frac{\partial E_x^d}{\partial x} + \epsilon_{yy} \frac{\partial E_y^d}{\partial y} \right). \quad (2.78)$$

Substituindo (2.76)-(2.78) em (2.40) e (2.39), resolvendo a dependência em  $x$  e em  $y$  da mesma maneira utilizada em (2.60), obtém-se, respectivamente,

$$\sum_{k=-K}^K \Omega_{v,k} f_{ya} B_k = \frac{-1}{2a} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-K}^K \Omega_{v,n} f_{n,k} \left\{ \begin{array}{l} -(\epsilon_{xx} - 1) j k_{xn} H_x^4 A_k \\ + (\epsilon_{yy} - 1) (k_o^2 - k_{yn}^2) H_y^1 B_k \\ + (\epsilon_{yy} - 1) 2 f_{ya} B_k + \\ + (\epsilon_{zz} - 1) \left[ j k_{xk} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} H_x^4 A_k + k_{ak}^y \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} H_y^4 B_k \right] \end{array} \right\}, \quad (2.79)$$

$$\sum_{k=-K}^K \Omega_{v,k} f_{xb} A_k = \frac{-1}{2a} \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-K}^K \Omega_{v,n} f_{n,k} \left\{ \begin{array}{l} (\epsilon_{xx} - 1) (k_o^2 - k_{xn}^2) H_x^2 A_k \\ - (\epsilon_{yy} - 1) j k_{xn} H_y^3 B_k \\ - (\epsilon_{zz} - 1) k_{xn} \left[ \begin{array}{l} -k_{xk} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} H_x^2 A_k \\ + j k_{ak}^y \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} H_y^2 B_k \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (2.80)$$

Organizando a matriz dos coeficientes da mesma maneira empregada no grupo 1, de acordo com (2.71), obtém-se

$$K_{v,k}^{11} = \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \frac{\Omega_{v,n} f_{n,k}}{-2a} j H_x^4 \left[ -(\epsilon_{xx} - 1) k_{xn} + (\epsilon_{zz} - 1) \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} k_{xk} \right] \right\}, \quad (2.81)$$

$$K_{v,k}^{12} = \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \frac{\Omega_{v,n} f_{n,k}}{-2a} \left[ (\epsilon_{yy} - 1) \left[ (k_o^2 - k_{yn}^2) H_y^1 + 2 f_{ya} \right] + (\epsilon_{zz} - 1) \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} k_{ak}^y H_y^4 \right] \right\} - \Omega_{v,k} f_{ya}, \quad (2.82)$$

que estão relacionados aos coeficientes  $A_k$  e  $B_k$ , de (2.79), e

$$K_{v,k}^{21} = \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \frac{\Omega_{v,n} f_{n,k}}{-2a} H_x^2 \left[ (\epsilon_{xx} - 1) (k_o^2 - k_{xn}^2) + (\epsilon_{zz} - 1) \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} k_{xn} k_{xk} \right] \right\} - \Omega_{v,k} f_{xb}, \quad (2.83)$$

$$K_{v,k}^{22} = \sum_{n=-N}^{+N} \left\{ \frac{\Omega_{v,n} f_{n,k}}{-2a} j k_{zn} \left[ (\varepsilon_{yy} - 1) H_y^3 + (\varepsilon_{zz} - 1) \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}} k_{ak}^y H_y^2 \right] \right\}, \quad (2.84)$$

que estão relacionados aos coeficientes  $A_k$  e  $B_k$  de (2.80).

## 2.5 Obtenção das curvas de dispersão e distribuição dos campos

O sistema constituído pelas Equações (2.60) e (2.70), para o grupo 1, e o sistema constituído pelas Equações (2.79) e (2.80), para o grupo 2, são homogêneos. Estes são funções dos parâmetros da estrutura, bem como da constante de fase  $\beta$ , que é o parâmetro a ser determinado para uma dada expansão com  $2K + 1$  funções, o que resulta em matrizes de ordem  $4K + 2$ . Para que soluções não triviais existam, o determinante das matrizes deve ser nulo. Isto resulta em uma equação característica para cada um dos grupos, expressa na forma

$$\text{Det}[M(\beta)] = 0, \quad (2.85)$$

onde  $M(\beta)$  é a matriz dos coeficientes de (2.71), para cada um dos grupos.

As soluções destas equações características são os autovalores correspondentes às constantes de fase dos modos de cada grupo. Um método direto para resolver uma equação de uma variável é o algoritmo da bissecção. Esse algoritmo requer que a função mude de sinal na vizinhança de uma raiz. Portanto, para que este algoritmo funcione, é importante selecionar duas das três equações integrais, (2.39)-(2.41), para as quais as raízes degeneradas, nas quais não ocorre inversão de sinal, são evitadas. A escolha das Equações (2.39) e (2.41), para o grupo 1, e (2.39) e (2.40), para o grupo 2, satisfazem a esta condição.

Uma vez que os autovalores das equações características são determinados, as autofunções relacionadas a cada um dos autovalores podem ser obtidas através da resolução do sistema de equações a ele associado. Uma vez que se trata de um sistema de equações lineares homogêneo, os valores de  $A_k$  e  $B_k$  que se obtém deste novo sistema devem ser normalizados em relação a um coeficiente escolhido. As funções de expansão, (2.54)-(2.56), para o grupo 1, e (2.76)-(2.78), para o grupo 2, com os coeficientes obtidos da resolução dos sistemas de equações, são as autofunções das equações características que modelam a distribuição dos campos no interior do dielétrico, a partir das quais são obtidas, para cada um dos grupos, as distribuições dos campos nas células das estruturas periódicas, utilizando

as Equações (2.9)-(2.11).

## 2.6 Resultados numéricos

Para resolver numericamente as características de propagação de ondas eletromagnéticas utilizando a teoria apresentada neste capítulo, foi utilizada a linguagem de programação FORTRAN 77. Todos os parâmetros são normalizados no início da execução do programa de modo a se eliminar a dimensão de comprimento e estabelecer os passos internos de varredura independentes dos parâmetros de entrada.

Para encontrar os autovalores da equação característica, (2.85), foi utilizado como base o método da bissetriz, que simplesmente procura por inversões no sinal da função. Devido à função  $Det[M(\beta)]$  se mostrar extremamente mau comportada com relação ao parâmetro  $\beta$ , foi necessário utilizar um artifício para reduzir o passo utilizado. Este artifício consiste em se acompanhar, também, as inversões de sinal na derivada da função, que pode conter uma raiz, mesmo que a função não mude de sinal no passo seguinte em função de uma variação extremamente rápida no comportamento da função, quando comparada com o passo utilizado.

Nas Figs. 2-2 e 2-3 encontram-se curvas de  $\beta$  x  $Det[M(\beta)]$ . Na Fig. 2-2 as raízes da função  $Det[M(\beta)]$  fornecem as constantes de propagação dos modos propagantes, enquanto que na Fig. 2-3 as raízes encontradas representam as constantes de propagação dos modos evanescentes. Os parâmetros  $\epsilon_r$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $l$  e  $d$  representam a permissividade, as dimensões da célula periódica e do guia, mostrados na Fig. 2-1.  $\theta$  é caracterizado pela Equação (2.18),  $N$  caracteriza o truncamento da função de Green, (2.54), e  $K$  determina o truncamento da expansão do campo elétrico no interior do dielétrico, (2.54)-(2.56). Apesar desses gráficos terem sido obtidos para uma determinada configuração, é possível observar o comportamento típico desta função, que é constituído de uma série de raízes, que são os autovalores da equação característica, e de uma série de indeterminações, que estão relacionadas aos pólos da função  $Det[M(\beta)]$ .

Para a comparação dos resultados deste trabalho com os apresentados por Yang *et al.* [16], quando apenas foram analisados os modos naturais, fêz-se  $k_{z0} = 0$ . Os resultados são mostrados nas Figs. 2-4 e 2-5, onde uma boa convergência foi observada para os quatro primeiros modos pares em  $x$ , do grupo 1, e para o primeiro modo par em  $x$ , do grupo 2. Observa-se que, apesar daquele modelo [16] apresentar uma aproximação desnecessária na formulação, citado durante o desenvolvimento do presente trabalho, os autovalores dela

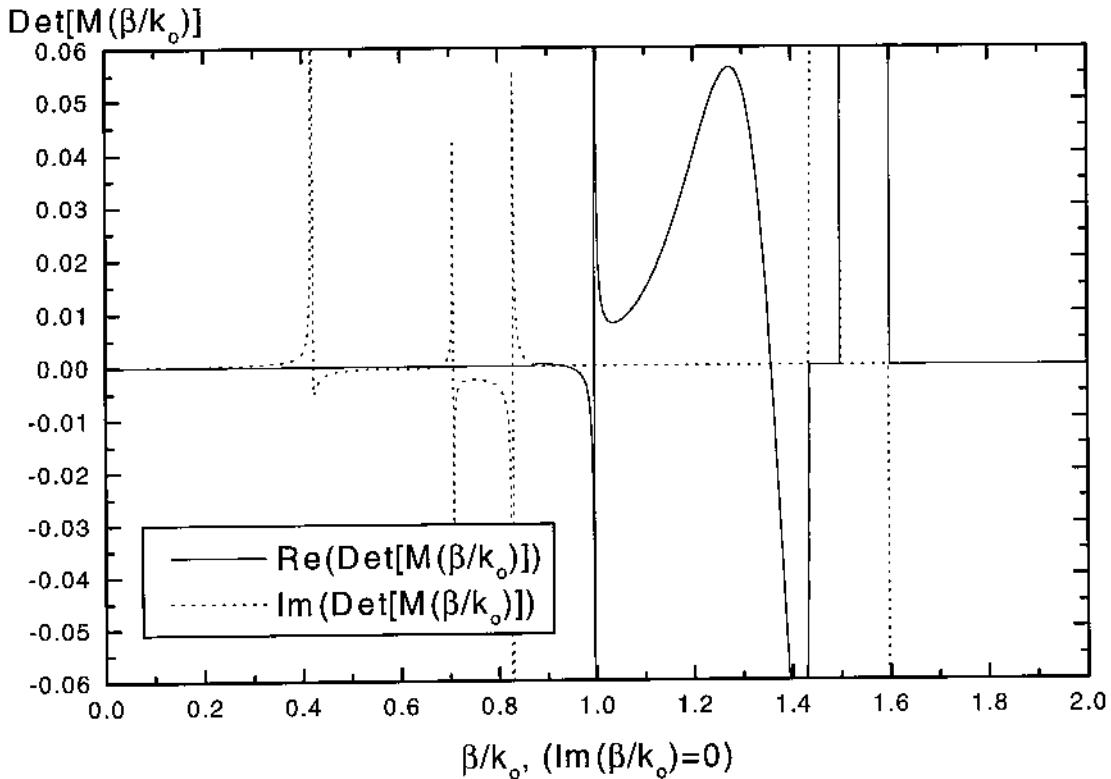


Fig. 2-2: Curva  $\beta \times Det[M(\beta)]$  para as funções de expansão do grupo 1. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 15$ ,  $k_o = 463$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $a = 2,142$  cm,  $b = 1,5$  cm,  $l = 0,926$  cm,  $d = 0,8$  cm. Onde  $Im(\beta) = 0$ .

obtidos apresentaram uma boa aproximação para os modos fundamentais. No entanto, o mesmo não poderia dizer-se com respeito à distribuição dos campos que aquela formulação poderia proporcionar, a qual não foi apresentada naquele trabalho.

Para a comparação dos resultados deste trabalho com os resultados apresentados por Lewys e Hessel [26] e Costa e Giarola [11], foi estudada uma estrutura periódica infinita com guias de onda retangulares dielétricos, no caso particular em que a dimensão do guia ao longo de  $y$  seja tal que a estrutura se reduza a um arranjo periódico de lâminas. Isto é feito com  $d = b$  na Fig. 2-1. Na Fig. 2-6 são mostrados resultados obtidos através da expansão do campo elétrico pelas funções do grupo 1, as quais correspondem à propagação em lâminas devido a uma excitação TM. Uma boa convergência é observada na curva onde  $d = b$ . Observa-se uma redução nos valores das constantes de propagação na medida em que a relação  $d/b$  vai sendo reduzida. Na Fig. 2-7 são mostrados resultados da expansão do

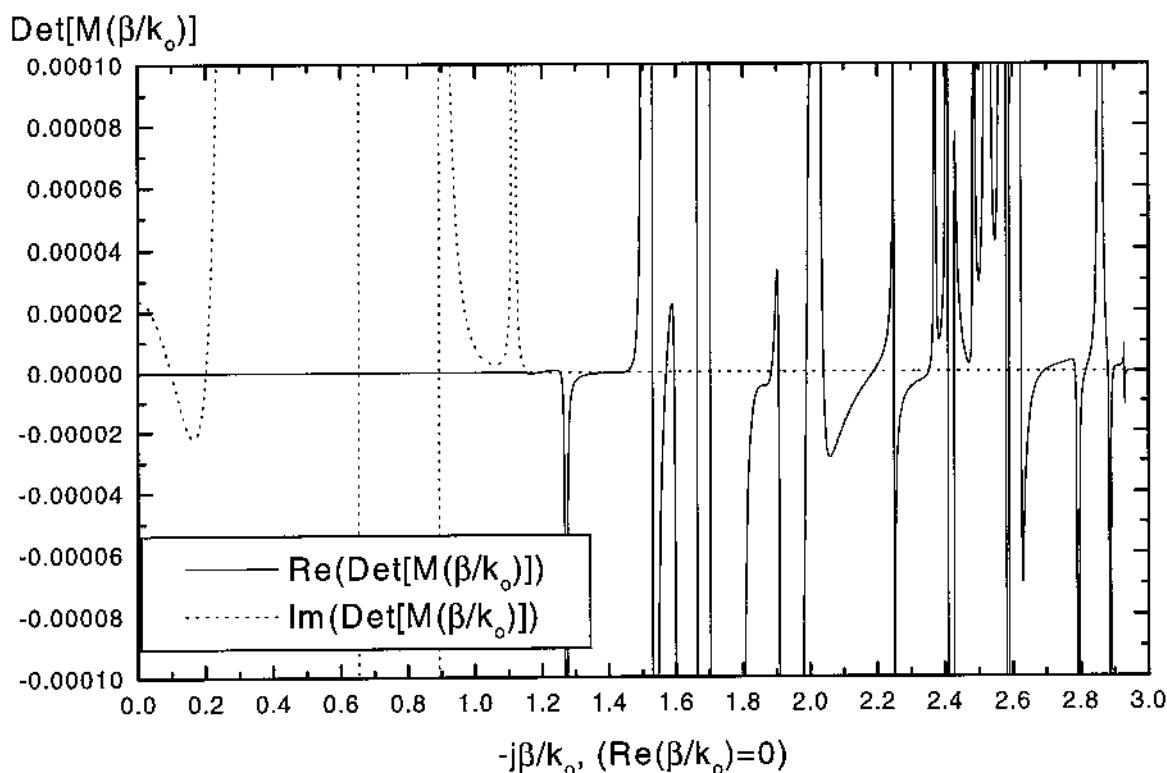


Fig. 2-3: Curva  $\beta \times Det[M(\beta)]$  para as funções de expansão do grupo 1. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 15$ ,  $k_o = 463$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $h_p = 0,4363$ ,  $a = 2,142$  cm,  $b = 1,5$  cm,  $l = 0,926$  cm,  $d = 0,8$  cm. Onde  $Re(\beta) = 0$ .

campo elétrico pelas funções do grupo 2, as quais correspondem à propagação em lâminas devido a uma excitação TE, onde também se observa uma redução nos valores das constantes de propagação com a redução da relação  $d/b$ .

Na Fig. 2-8 são mostrados resultados obtidos com a variação da anisotropia e da relação  $d/b$ , para o grupo 1, de funções de expansão. Na Fig. 2-9 são obtidos resultados com a mesma geometria para o grupo 2, onde a constante de propagação normalizada permaneceu praticamente inalterada com a modificação da anisotropia. Para demonstrar a dependência das funções do grupo 2, com relação à anisotropia, na Fig. 2-10 foram gerados dois diagramas de dispersão para a mesma estrutura, uma isotrópica e a outra com uma alteração em um dos elementos do tensor permissividade em relação à primeira. Observou-se que para os modos fundamentais, como na Fig. 2-7, houve apenas uma pequena diferença entre as duas curvas. Para os modos de mais alta ordem foram verificadas diferenças notáveis, resultado

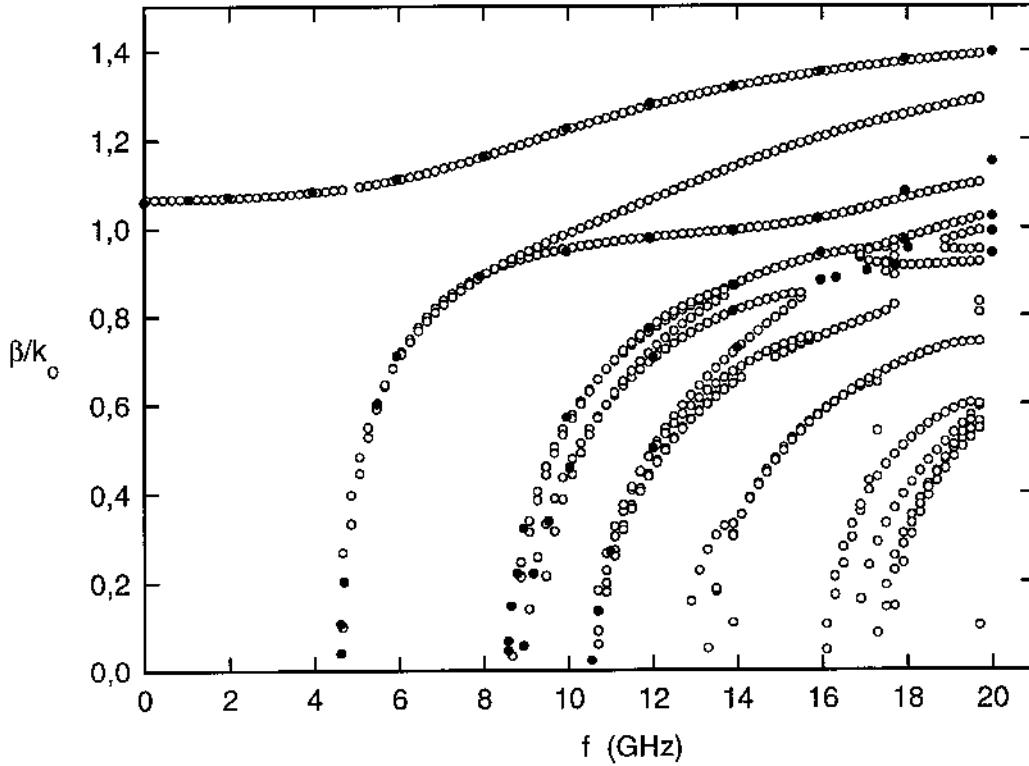


Fig. 2-4: Características de Dispersão para os modos reais, do grupo 1, de funções de expansão do campo elétrico. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 10$ ,  $\theta = 0$ ,  $\epsilon_r = 2,25$ ,  $a = 6$  cm,  $b = 3$  cm,  $l = 2,324$  cm,  $d = 1,162$  cm. Os pontos cheios são os resultados obtidos por Yang *et al.* [16], para o seu grupo I.

de uma forte dependência com a anisotropia.

Considerando que  $xy$  é o plano de incidência de uma onda plana que excita a estrutura com periodicidade em duas dimensões, não existe variação de fase ao longo do eixo  $y$ ,  $k_{yr} = 0$ . Como duas funções iguais devem apresentar iguais coeficientes de Fourier, a aplicação da transformada com período  $d$ , aplicável à igualdade (2.6), para a obtenção do harmônico fundamental,  $r = 0$ , resulta que as funções de expansão do grupo 2 não podem ser excitadas por uma onda plana TM devido à dependência cossenoidal destes campos, restrita ao componente  $E_y$ . As funções de expansão do grupo 1, por sua vez, somente apresentam coeficientes de Fourier de ordem  $r = 0$  para os campos  $E_x$  e  $E_z$ , não podendo, portanto, ser excitadas por uma onda plana TE. Esta relação exclusiva entre o tipo de polarização com o grupo de funções de expansão que ele excita, somente seria modificado no caso do tensor permissividade da camada periódica, (2.1), apresentar elementos fora da

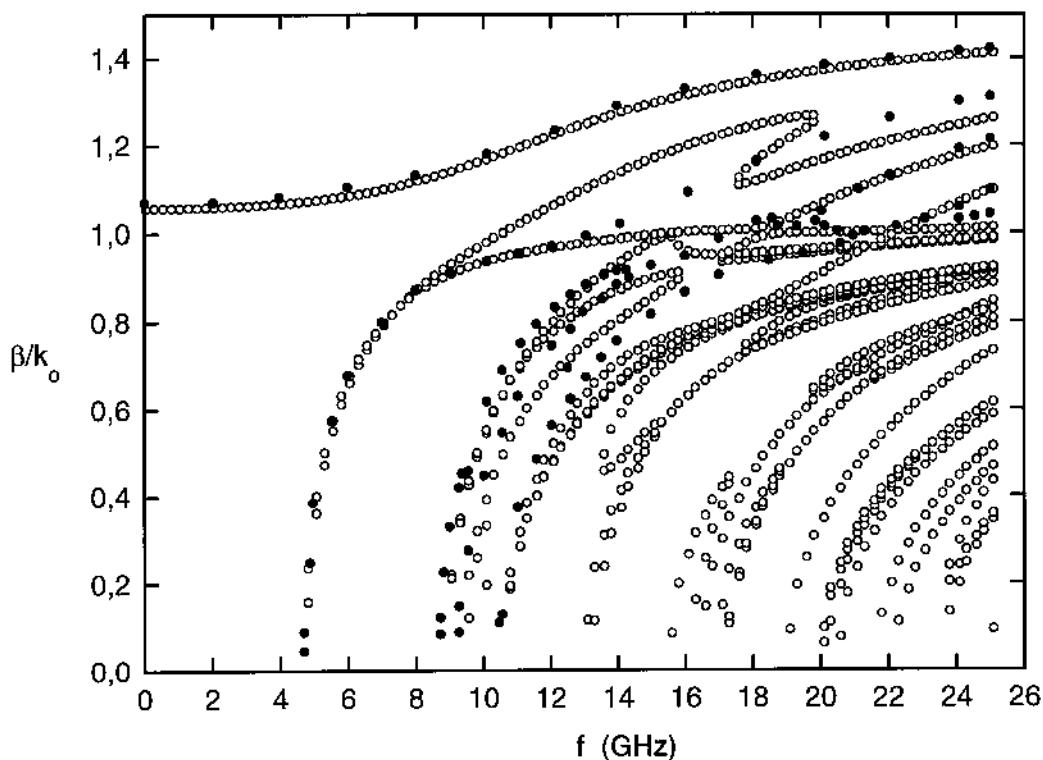


Fig. 2-5: Características de Dispersão para os modos reais, do grupo 2, de funções de expansão do campo elétrico. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 10$ ,  $\theta = 0$ ,  $\epsilon_r = 2,25$ ,  $a = 6$  cm,  $b = 3$  cm,  $l = 2,324$  cm,  $d = 1,162$  cm. Os pontos cheios são os resultados obtidos por Yanget *al.* [16], para o seu grupo IV.

diagonal.

Apesar das funções de expansão do grupo 2 somente poderem ser excitadas por ondas planas TE, estas também espalham ondas eletromagnéticas do tipo TM, mas restritas aos modos de ordem superior,  $r \neq 0$ . O mesmo fenômeno foi observado nas funções de expansão do grupo 1, que espalham ondas planas TE somente para os modos superiores ao fundamental.

Uma vez que os autovalores são obtidos, as autofunções associadas também podem ser obtidas resolvendo-se o sistema de equações lineares. A partir dos autovalores, a distribuição dos campos elétrico (2.9)-(2.11) e magnético (A.10) podem ser obtidas. Nas Figs. 2-11 e 2-12 é mostrado o componente  $E_y$  da distribuição do campo elétrico em uma célula para o modo fundamental das funções de expansão do grupo 2 com  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $K = 2$ ,  $V = 65$ ,  $k_0 = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142$  cm,  $b = 1,5$  cm,  $l = 0,926$  cm e  $d = 0,8$  cm. Nas Figs. 2-13

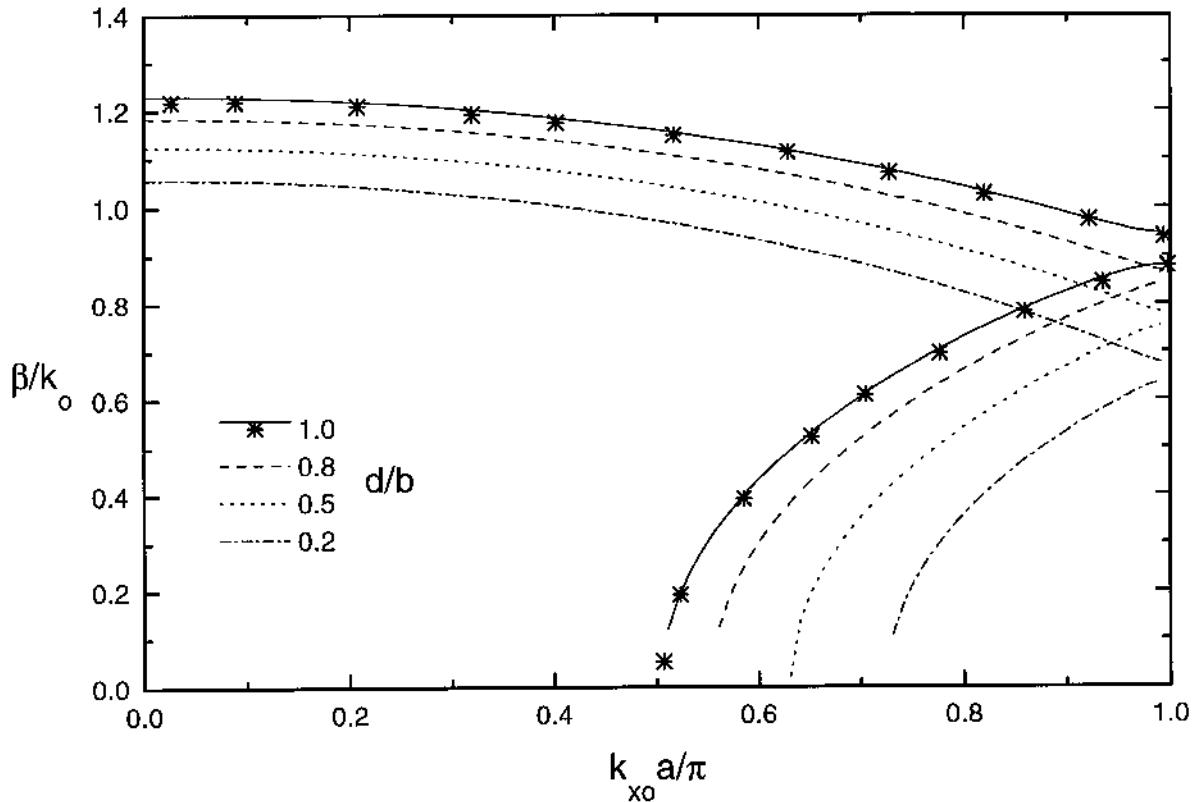


Fig. 2-6: Constante de fase normalizada,  $\beta/k_0$ , como uma função do número de onda normalizado,  $k_{x0}a/\pi$ , do grupo 1. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 10$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_0 = 176 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,0 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$ . As estrelas são resultados de Lewys e Hessel [26], para excitação TM.

e 2-14 é mostrado o componente  $E_x$  do campo elétrico obtido com as funções de expansão do grupo 1. Como o sistema de equações resolvido é homogêneo, a solução obtida está normalizada pelo coeficiente  $A_1$ , no caso das funções de expansão do grupo 1, e  $B_1$ , no caso das funções de expansão do grupo 2. A normalização também pode ser feita levando-se em consideração a energia que se propaga na estrutura. Como será mostrado no capítulo seguinte, onde foi estudado o espalhamento em uma camada finita ao longo do eixo  $z$ , o fator normalizante para a solução do sistema de equações homogêneo não é um fator crítico, pois uma vez que as condições de contorno são aplicadas para uma dada incidência, a distribuição dos campos em qualquer região do espaço fica perfeitamente caracterizada.

Em todos os gráficos da distribuição do campo elétrico, são mostrados, também, os componentes da expansão do campo elétrico no interior do dielétrico. A igualdade forçada

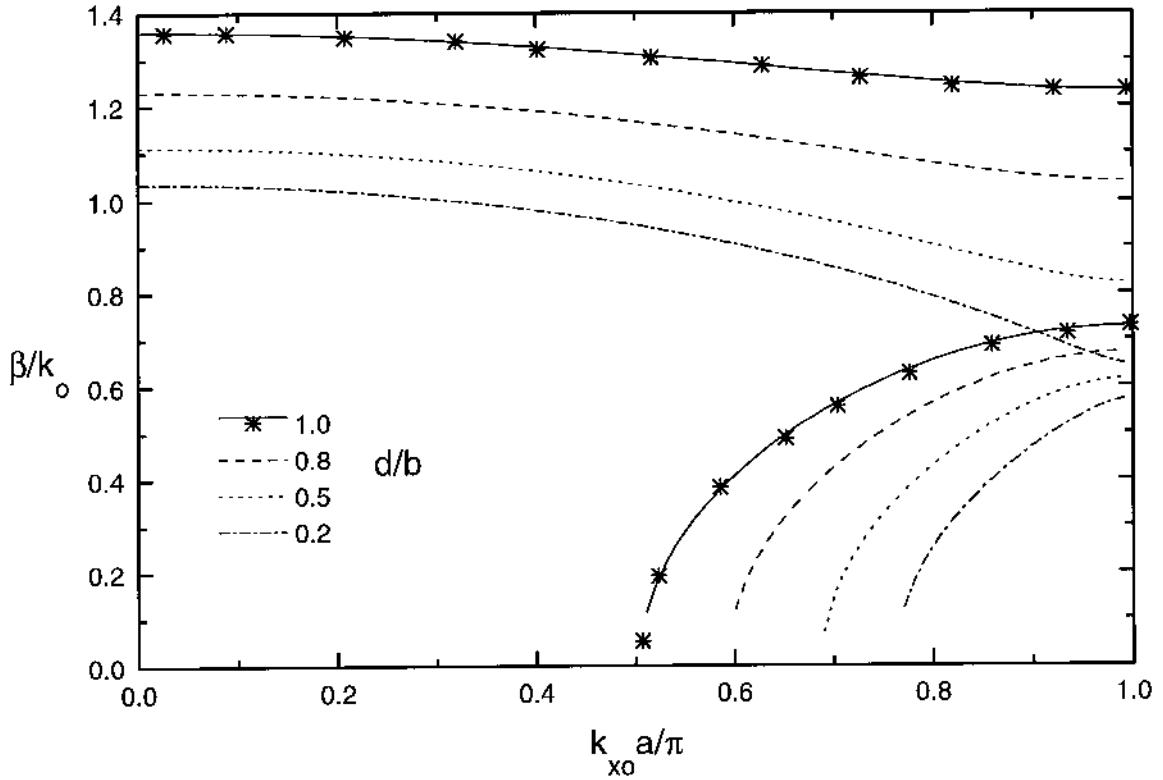


Fig. 2-7: Constante de fase normalizada,  $\beta/k_0$ , como uma função do número de onda normalizado,  $k_{x0}a/\pi$ , do grupo 1. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 10$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_0 = 176 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,0 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$ . As estrelas são resultados de Costa e Giarola [11], para excitação TE.

nas Equações (2.38)-(2.41), obtida aqui numericamente, pode ser validada graficamente a partir da comparação do campo elétrico em toda a célula com o campo elétrico expandido no interior do dielétrico, pelas funções de expansão dos grupos 1 e 2. Uma vez que esta convergência é observada, significa que o campo elétrico está satisfazendo aos teoremas da divergência e da corrente volumétrica equivalente induzida.

Para evidenciar as características de guiamento dos campos, nas Figs. 2-15 e 2-16 encontram-se mostrados a distribuição dos campos  $H_x$ , para o grupo 2, e  $H_y$  para o grupo 1, respectivamente, para os modos fundamentais destes grupos. Nas Figs. 2-17 e 2-18 encontram-se mostrados gráficos semelhantes aos primeiros, exceto pelo fato da primeira figura estar associada ao quarto modo do grupo 1 e a segunda figura ao segundo modo do grupo 2.

Como já era esperado, para o caso geral  $d \neq b$ , observa-se que as funções de expansão

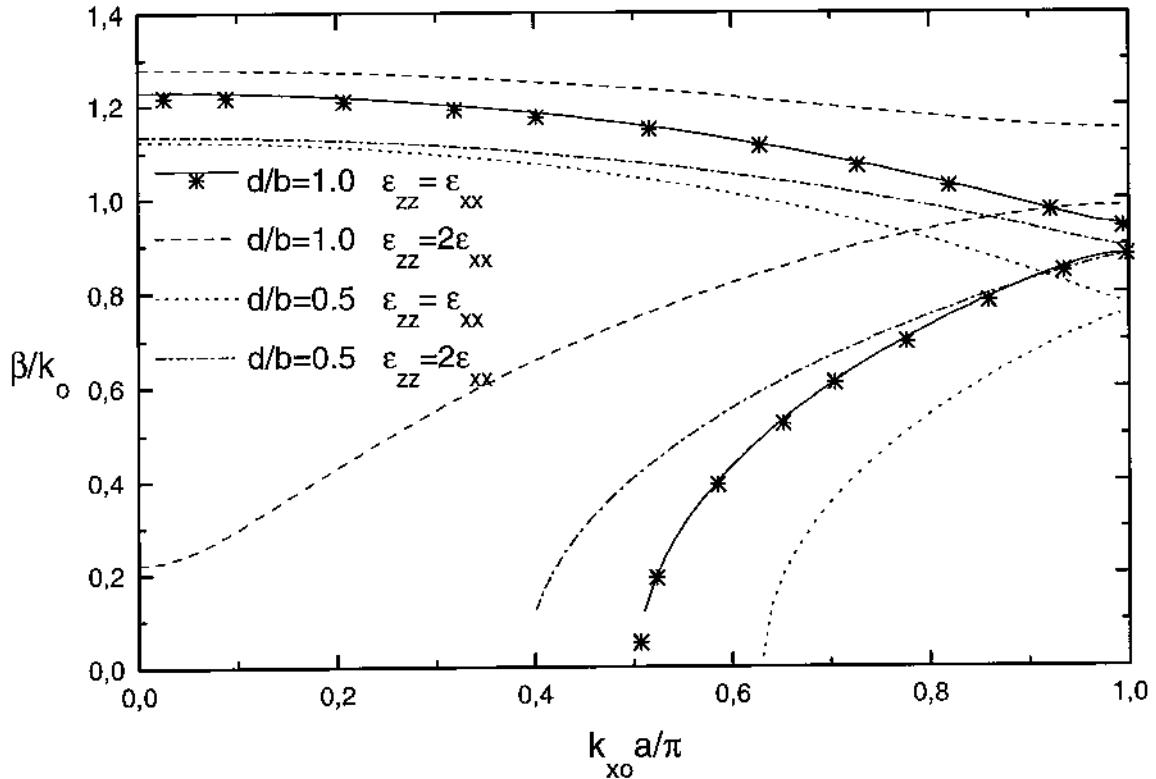


Fig. 2-8: Constante de fase normalizada,  $\beta/k_0$ , como uma função do número de onda normalizado,  $k_{x0}a/\pi$ , do grupo 1. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 10$ ,  $d = 1,0$  cm,  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 2,56$ ,  $k_0 = 176$  m $^{-1}$ ,  $a = 2,142$  cm,  $b = 1,0$  cm,  $l = 0,926$  cm. As estrelas são resultados de Lewys e Hessel [26], para excitação TM.

do grupo 2 estão associadas, principalmente, à propagação de ondas eletromagnéticas do tipo TE para os modo fundamentais, isto é, o campo  $E_y \gg E_x$ . Pode ser efetuado um teste de coerência nos resultados observando a descontinuidade do componente normal do campo elétrico,  $E_y$ , nas fronteiras do dielétrico: em  $y = -\frac{d}{2}$  e  $y = +\frac{d}{2}$ , onde existe uma variação do campo  $E_y$  de aproximadamente  $18/6,5 = 2,77$ . Este valor é muito próximo da permissividade elétrica relativa do guia,  $\epsilon_r = 2,56$ , o que sugere uma continuidade do componente normal da densidade do campo elétrico,  $D_y$ , surgida naturalmente da resolução do problema com a formulação apresentada. O mesmo efeito foi observado no componente  $E_x$  do campo elétrico, para o grupo 1.

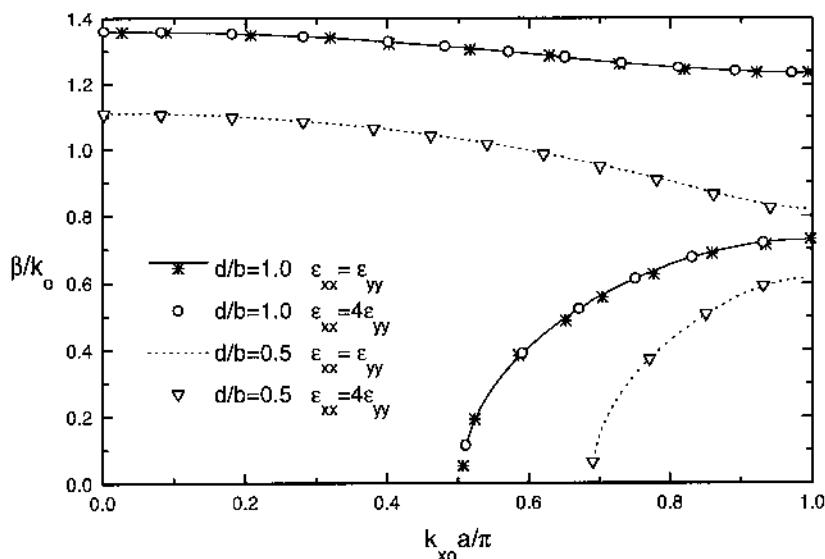


Fig. 2-9: Constante de fase normalizada,  $\beta/k_0$ , como uma função do número de onda normalizado,  $k_{x0}a/\pi$ , do grupo 2. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 10$ ,  $d = 1,0$  cm,  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 2,56$ ,  $k_0 = 176$  m<sup>-1</sup>,  $a = 2,142$  cm,  $b = 1,0$  cm,  $l = 0,926$  cm. As estrelas são resultados de Costa e Giarola [11], para excitação TE.

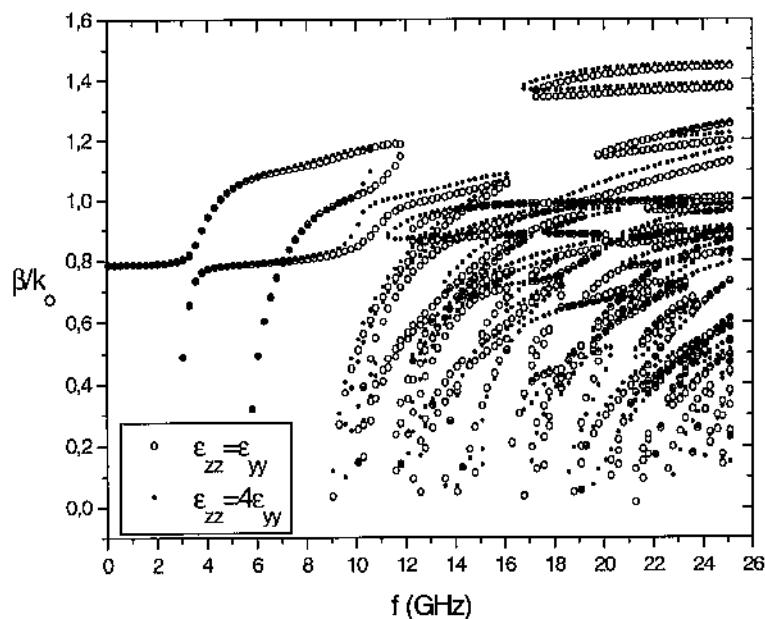


Fig. 2-10: Características de dispersão para os modos reais, do grupo 2, de funções de expansão do campo elétrico. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 10$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 2,25$ ,  $a = 6$  cm,  $b = 3$  cm,  $l = 2,324$  cm,  $d = 1,162$  cm.

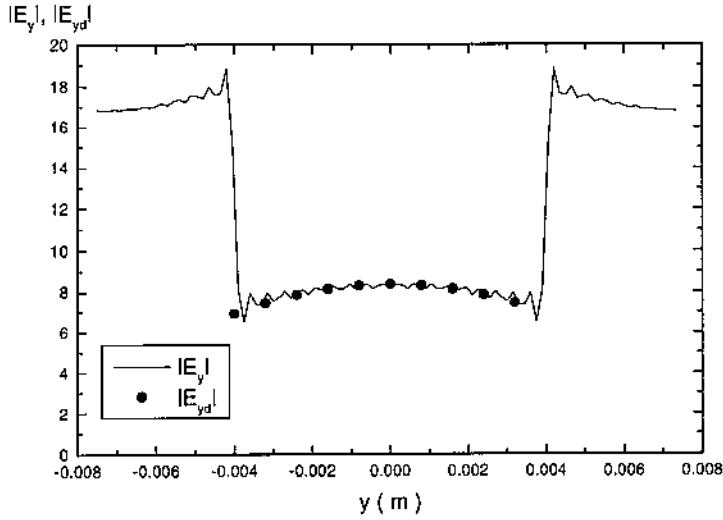


Fig. 2-11: Distribuição normalizada do campo  $E_y$  do modo fundamental do grupo 2, em uma célula ao longo do eixo  $y$ , com  $x = l/4$ . Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 35$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_o = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,5 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$  e  $d = 0,8 \text{ cm}$ . Também mostrado, com pontos, a expansão do campo elétrico no interior do dielétrico:  $E_{yd}$ .

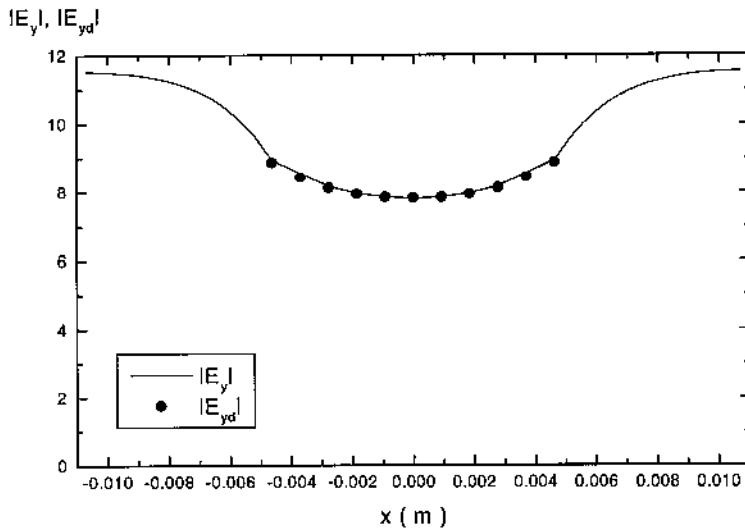


Fig. 2-12: Distribuição normalizada do campo  $E_y$  do modo fundamental do grupo 2, em uma célula ao longo do eixo  $x$ , com  $y = d/4$ . Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 35$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_o = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,5 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$  e  $d = 0,8 \text{ cm}$ . Também mostrado, com pontos, a expansão do campo elétrico no interior do dielétrico:  $E_{yd}$ .

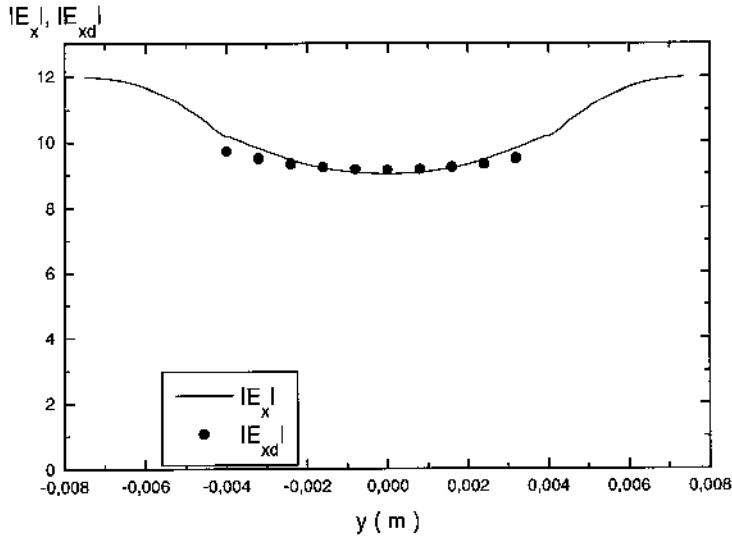


Fig. 2-13: Distribuição normalizada do campo  $E_x$  do modo fundamental do grupo 1, em uma célula ao longo do eixo  $y$ , com  $x = l/4$ . Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 65$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_o = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,5 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$  e  $d = 0,8 \text{ cm}$ . Também mostrado, com pontos, a expansão do campo elétrico no interior do dielétrico:  $E_{xd}$ .

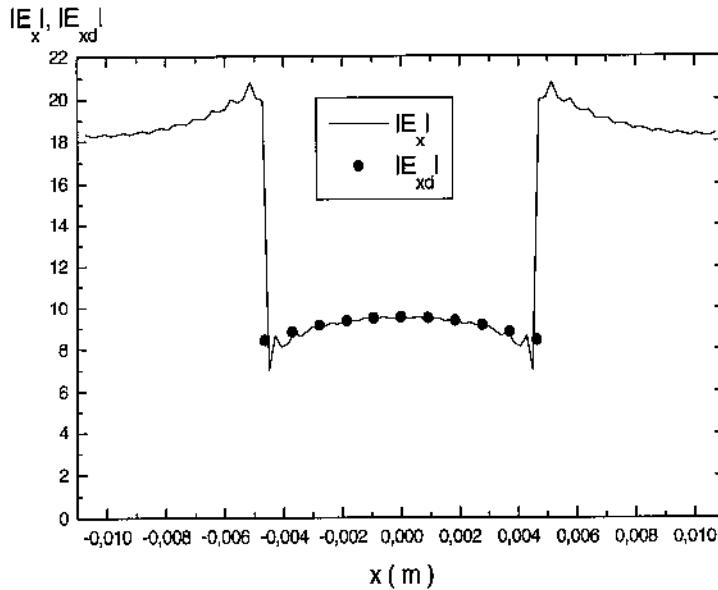


Fig. 2-14: Distribuição normalizada do campo  $E_x$  do modo fundamental do grupo 1, em uma célula ao longo do eixo  $x$ , com  $y = d/4$ . Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 65$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_o = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,5 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$  e  $d = 0,8 \text{ cm}$ . Também mostrado, com pontos, a expansão do campo elétrico no interior do dielétrico:  $E_{xd}$ .

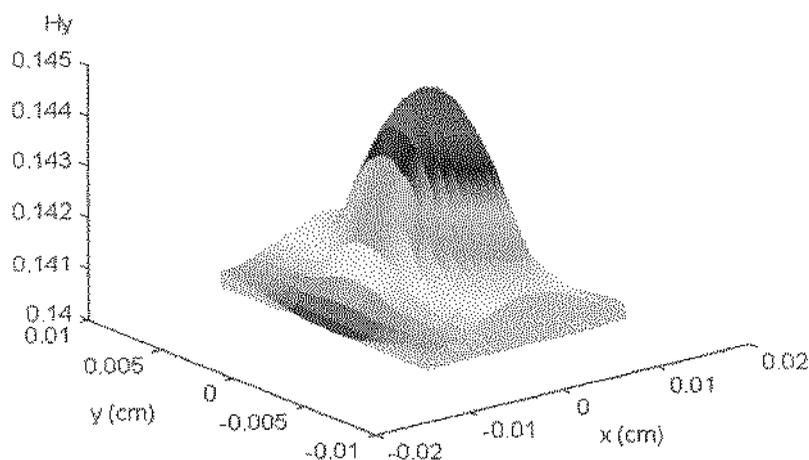


Fig. 2-15: Distribuição normalizada do módulo do campo  $H_y$  do modo fundamental do grupo 1, em uma célula ao longo do plano  $xy$ . Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 15$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_o = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,5 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$  e  $d = 0,8 \text{ cm}$ .

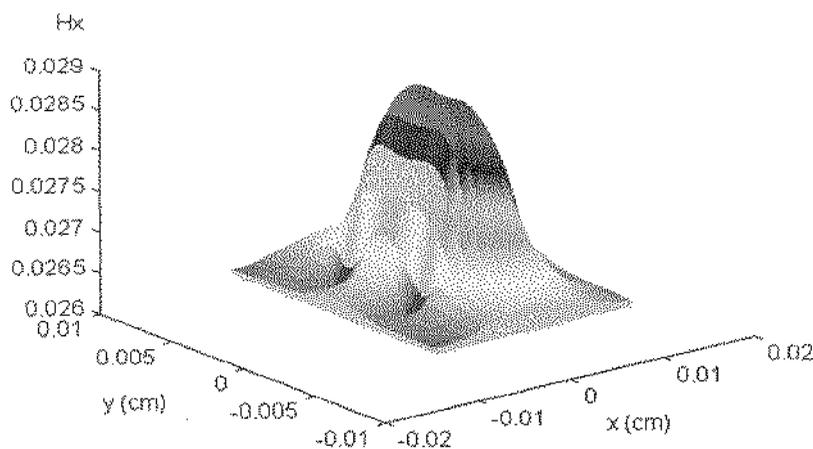


Fig. 2-16: Distribuição normalizada do módulo do campo  $H_x$  do modo fundamental do grupo 2, em uma célula ao longo do plano  $xy$ . Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 15$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_o = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,5 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$  e  $d = 0,8 \text{ cm}$ .



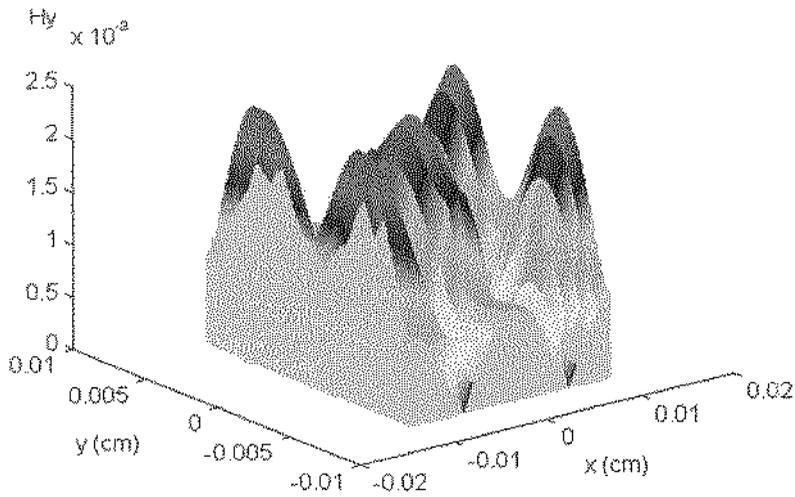


Fig. 2-17: Distribuição normalizada do módulo do campo  $H_y$  do quarto modo do grupo 1, em uma célula ao longo do plano  $xy$ . Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 15$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_o = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,5 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$  e  $d = 0,8 \text{ cm}$ .

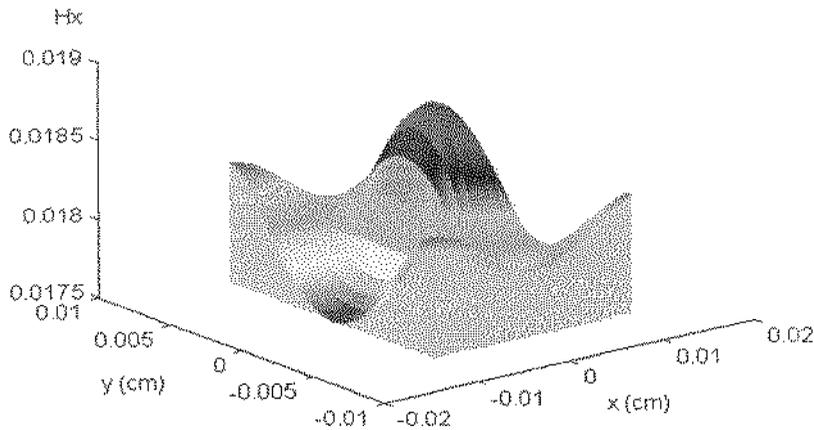


Fig. 2-18: Distribuição normalizada do módulo do campo  $H_x$  do segundo modo do grupo 2, em uma célula ao longo do plano  $xy$ . Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 15$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $k_o = 62,875 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 2,142 \text{ cm}$ ,  $b = 1,5 \text{ cm}$ ,  $l = 0,926 \text{ cm}$  e  $d = 0,8 \text{ cm}$ .

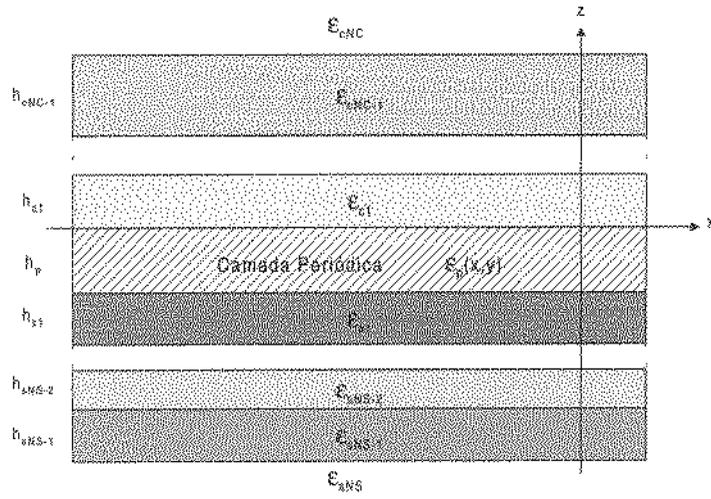
## Capítulo 3

# Análise do Espalhamento de Grades Dielétricas com Periodicidade em Duas Dimensões

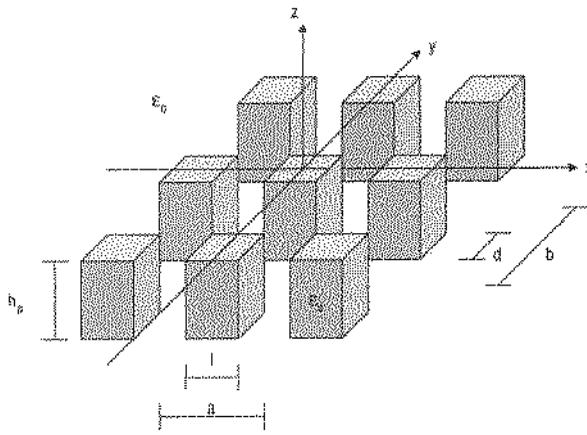
### 3.1 Introdução

Neste capítulo são estudadas as características da propagação de ondas eletromagnéticas em arranjos periódicos de guias de onda dielétricos anisotrópicos retangulares, em  $x$  e  $y$ , e estendendo-se de  $z = 0$  a  $z = -h_p$ , com carregamento nesses dois planos por múltiplas camadas dielétricas homogêneas, estendendo-se de  $z = 0$  a  $z = +\infty$ , no semi-espaço superior, e de  $z = -h_p$  a  $z = -\infty$ , no semi-espaço inferior, como mostra a Fig. 3-1.

A distribuição dos campos na camada homogênea é obtida a partir da solução da equação de Helmholtz [25], enquanto que a distribuição dos campos na camada periódica é obtida a partir da formulação do capítulo anterior, onde foram analisados arranjos periódicos ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  e infinitos ao longo do eixo  $z$ . Desta forma, as estruturas são tridimensionais e considera-se que os materiais constituintes das camadas dielétricas homogêneas são uniformes, não magnéticos ( $\mu = \mu_0$ ) e isotrópicos. Com estas restrições, o espalhamento de ondas eletromagnéticas por grades dielétricas, semelhantes à mostrada na Fig. 3-1, pode ser analisado como um problema de valor de contorno, em que os campos propagando-se em todas as regiões podem ser determinados.



(a)



(b)

Fig. 3-1: (a) - Grade dielétrica constituída por múltiplas camadas dielétricas. (b) Camada periódica da grade dielétrica.

### 3.2 Caracterização dos campos propagando-se nas camadas uniformes

As expressões dos componentes, transversais a  $z$ , dos campos propagantes nas regiões uniformes, externas à camada periódica, nas regiões  $z > 0$  e  $z < -h_p$ , são descritas, de acordo com o teorema de Floquet, numa somatória de modos na forma

$$E_y^{ri} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \Delta_{rinr}^{yTE} A_{rinr}^{+TE} + \Delta_{rinr}^{yTM} A_{rinr}^{+TM} \right] e^{-j\beta_{rinr}(z-z_{ri})} \\ + \left[ \Delta_{rinr}^{yTE} A_{rinr}^{-TE} - \Delta_{rinr}^{yTM} A_{rinr}^{-TM} \right] e^{+j\beta_{rinr}(z-z_{ri})} \end{array} \right\} e^{-jk_{xn}z} e^{-jk_{yr}y}, \quad (3.1)$$

$$H_x^{r_i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[ -\Gamma_{r_{inr}}^{xTE} A_{r_{inr}}^{+TE} - \Gamma_{r_{inr}}^{xTM} A_{r_{inr}}^{+TM} \right] e^{-j\beta_{r_{inr}}(z-z_{r_i})} \\ & + \left[ \Gamma_{r_{inr}}^{xTE} A_{r_{inr}}^{-TE} - \Gamma_{r_{inr}}^{xTM} A_{r_{inr}}^{-TM} \right] e^{+j\beta_{r_{inr}}(z-z_{r_i})} \end{aligned} \right\} e^{-jk_{xn}x} e^{-jk_{yr}y}, \quad (3.2)$$

$$E_x^{r_i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[ -\Delta_{r_{inr}}^{xTE} A_{r_{inr}}^{+TE} + \Delta_{r_{inr}}^{xTM} A_{r_{inr}}^{+TM} \right] e^{-j\beta_{r_{inr}}(z-z_{r_i})} \\ & + \left[ -\Delta_{r_{inr}}^{xTE} A_{r_{inr}}^{-TE} - \Delta_{r_{inr}}^{xTM} A_{r_{inr}}^{-TM} \right] e^{+j\beta_{r_{inr}}(z-z_{r_i})} \end{aligned} \right\} e^{-jk_{xn}x} e^{-jk_{yr}y}, \quad (3.3)$$

$$H_y^{r_i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[ -\Gamma_{r_{inr}}^{yTE} A_{r_{inr}}^{+TE} + \Gamma_{r_{inr}}^{yTM} A_{r_{inr}}^{+TM} \right] e^{-j\beta_{r_{inr}}(z-z_{r_i})} \\ & + \left[ \Gamma_{r_{inr}}^{yTE} A_{r_{inr}}^{-TE} + \Gamma_{r_{inr}}^{yTM} A_{r_{inr}}^{-TM} \right] e^{+j\beta_{r_{inr}}(z-z_{r_i})} \end{aligned} \right\} e^{-jk_{xn}x} e^{-jk_{yr}y}, \quad (3.4)$$

onde

$$\Delta_{r_{inr}}^{yTE} = \frac{k_{xn}}{k_t}, \quad (3.5)$$

$$\Delta_{r_{inr}}^{yTM} = \frac{k_{yr}\beta_{r_{inr}}}{k_t k_{r_i}}, \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{r_{inr}}^{xTE} = \frac{k_{xn}\beta_{r_{inr}}}{k_t k_{r_i} \eta_{r_i}}, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{r_{inr}}^{xTM} = \frac{k_{yr}}{k_t \eta_{r_i}}, \quad (3.8)$$

$$\Delta_{r_{inr}}^{xTE} = \frac{k_{yr}}{k_t}, \quad (3.9)$$

$$\Delta_{r_{inr}}^{yTE} = \frac{k_{xn}\beta_{r_{inr}}}{k_t k_{r_i}}, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{r_{inr}}^{yTE} = \frac{k_{yr}\beta_{r_{inr}}}{k_t k_{r_i} \eta_{r_i}}, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{r_{inr}}^{yTM} = \frac{k_{xn}}{k_t \eta_{r_i}}, \quad (3.12)$$

$$\eta_{\tau i} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{\tau i}}}, \quad (3.13)$$

$$\beta_{\tau inr} = \pm \sqrt{k_{\tau i}^2 - k_{x_n}^2 - k_{y_r}^2}, \quad (3.14)$$

$$k_{x_n} = k_{x_0} + \frac{2\pi n}{a}, \quad (3.15)$$

$$k_{y_r} = \frac{2\pi r}{b}, \quad (3.16)$$

$$k_t = \sqrt{k_{x_n}^2 + k_{y_r}^2}, \quad (3.17)$$

$$k_{\tau i} = \sqrt{\varepsilon_{\tau i}} k_0 \quad (3.18)$$

Onde o índice  $\tau$  determina a região considerada,  $\tau = c$  ou  $\tau = s$ , para as regiões superior e inferior, respectivamente, e o índice  $i$  determina a camada na região considerada. O número de camadas considerado em cada região é arbitrário e igual a NC ou NS. O parâmetro  $z_{\tau i}$  é dado por  $z_{\tau i} = \sum_{j=0}^i h_{\tau j}$ , com  $h_{c1} = 0$  e  $h_{s1} = -h_p$ . As amplitudes  $A_{\tau inr}^{\pm TE}$  e  $A_{\tau inr}^{\pm TM}$  estão associadas às ondas propagando-se ao longo das direções  $\pm z$ , com constante de fase  $\beta_{\tau inr}$ .

Os campos descritos por (3.1)-(3.4) obedecem, para cada modo, à equação de Helmholtz [25].

$$\nabla^2 \vec{F}_j(x, y, z) + k^2(x, y, z) \vec{F}_j(x, y, z) = 0, \quad (3.19)$$

com  $\vec{F}_j = \vec{E}_j$  ou  $\vec{H}_j$ .

### 3.3 Caracterização dos campos propagando-se na camada periódica

Como a estrutura periódica analisada no Capítulo 2 era invariante ao longo do eixo  $z$ , foi possível obter as constantes de fase  $\beta_{gm}$ , associada aos  $m$  modos dos grupos 1 e 2, propagando-se ao longo do eixo  $z$ . Com a limitação da altura da camada periódica, de um

lado, em  $z = 0$ , e do outro, em  $z = -h_p$ , os modos e respectivos valores de  $\beta_{gm}$  continuam a existir em  $0 \geq z \geq -h_p$ .

Para que as condições de contorno em  $z = 0$  e  $z = -h_p$  sejam satisfeitas, o vetor potencial de Hertz do tipo elétrico na região periódica, definido no Apêndice A, pode ser expresso como uma combinação linear da totalidade desses modos, como segue,

$$\vec{\Pi}_g(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ P_{gmn}^+ \vec{\Pi}_{gmn}^+(y) e^{-j\beta_{gm}z} + P_{gmn}^- \vec{\Pi}_{gmn}^-(y) e^{+j\beta_{gm}z} \right] e^{-jk_x x}, \quad (3.20)$$

onde

$$\vec{\Pi}_{gmn}^{\pm}(y) = \Pi_{gmnx}(y) \hat{x} + \Pi_{gmny}(y) \hat{y} + \Pi_{gmnz}^{\pm}(y) \hat{z}, \quad (3.21)$$

$g$  identifica o grupo, 1 ou 2,  $m$  o autovalor, o qual é enumerado a partir de 0, e  $n$  o modo de Floquet ao longo do eixo  $x$ .

As expressões de  $\Pi_{gmnx}(y)$ ,  $\Pi_{gmny}(y)$  e  $\Pi_{gmnz}^{\pm}(y)$ , são dadas por (2.42)-(2.44) com  $E_{xm}^d$ ,  $E_{ym}^d$  e  $E_{zm}^d$  dadas por (2.54)-(2.56), para o grupo 1, e (2.76)-(2.78), para o grupo 2, que são as funções de expansão do campo elétrico no interior do dielétrico para cada modo  $m$ .

Os valores de  $\beta_{gm}$ ,  $A_{gmk}$  e  $B_{gmk}$ , para os modos enumerados por  $m$ , dos grupos  $g = 1$  e  $g = 2$ , podem ser obtidos mediante o uso do método dos momentos com a formulação desenvolvida no Capítulo 2, para a estrutura periódica se estendendo de  $-\infty \leq z \leq +\infty$ . Portanto, (3.20) é completamente conhecido, a menos dos coeficientes  $P_{mn}^{\pm}$ , os quais são obtidos através da imposição das condições de contorno em  $z = 0$  e  $z = -h_p$ , que requerem a continuidade dos componentes tangenciais dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  nas fronteiras da camada periódica.

Em virtude da periodicidade, em  $y$ , das expressões de  $\Pi_{mnx}(y)$ ,  $\Pi_{mny}(y)$  e  $\Pi_{mnz}^{\pm}(y)$ , estas podem ser expandidas em série de Fourier:

$$\Pi_{gmnx}(y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Pi_{gmnrx} e^{-jk_y r y}, \quad (3.22)$$

$$\Pi_{gmny}(y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Pi_{gmnr y} e^{-jk_y r y}, \quad (3.23)$$

$$\Pi_{gmnz}^{\pm}(y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Pi_{gmnz}^{\pm} e^{-jk_{yr}y}, \quad (3.24)$$

onde

$$\Pi_{gmnrx} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Pi_{gmnx}(y) e^{+jk_{yr}y} dy, \quad (3.25)$$

$$\Pi_{gmnry} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Pi_{gmnx}(y) e^{+jk_{yr}y} dy, \quad (3.26)$$

$$\Pi_{gmnrz}^{\pm} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Pi_{gmnz}^{\pm}(y) e^{+jk_{yr}y} dy, \quad (3.27)$$

$$k_{yr} = \frac{2\pi r}{b}. \quad (3.28)$$

Substituindo as Equações (2.42)-(2.44) em (3.25)-(3.27), obtém-se as seguintes expressões:

$$\Pi_{gmnrx} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{-1}{2a} e^{+jk_{xm}x'} e^{+jk_{yr}y} f_{mn}(y, y') j\omega\epsilon_o (\epsilon_{xx} - 1) E_{gx}^d dx' dy' dy, \quad (3.29)$$

$$\Pi_{gmnry} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{-1}{2a} e^{+jk_{xm}x'} e^{+jk_{yr}y} f_{mn}(y, y') j\omega\epsilon_o (\epsilon_{yy} - 1) E_{gy}^d dx' dy' dy, \quad (3.30)$$

$$\Pi_{gmnrz}^{\pm} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{-1}{2a} e^{+jk_{xm}x'} e^{+jk_{yr}y} f_{mn}(y, y') j\omega\epsilon_o (\epsilon_{zz} - 1) E_{gz}^d dx' dy' dy. \quad (3.31)$$

Os componentes dos campos elétrico,  $\vec{E}$ , e magnético,  $\vec{H}$ , são obtidos do vetor potencial de Hertz,  $\vec{\Pi}$ , a partir da equação vetorial (A.9), os quais estão desenvolvidos nas equações (2.9)-(2.11), e (A.10). Esta última ainda pode ser expandida da seguinte forma:

$$H_x = \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z}, \quad (3.32)$$

$$H_y = \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}, \quad (3.33)$$

$$H_z = \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}. \quad (3.34)$$

Portanto, as expressões dos componentes dos campos na região periódica, são

$$E_{gx}^P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} P_{gm}^+ \left[ \begin{array}{l} -j\omega\mu_0\Pi_{gmnrx} - \frac{k_{zn}^2}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrx} \\ -\frac{k_{zn}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnry} - \frac{\beta_{gm}k_{zn}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz}^+ \end{array} \right] e^{-j\beta_{gm}z} \\ + P_{gm}^- \left[ \begin{array}{l} -j\omega\mu_0\Pi_{gmnrx} - \frac{k_{zn}^2}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrx} \\ -\frac{k_{zn}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnry} + \frac{\beta_{gm}k_{zn}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz}^- \end{array} \right] e^{+j\beta_{gm}z} \end{array} \right\} e^{-jk_{zn}x} e^{-jk_{yr}y}, \quad (3.35)$$

$$E_{gy}^P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} P_{gm}^+ \left[ \begin{array}{l} -j\omega\mu_0\Pi_{gmnry} - \frac{k_{zn}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrx} \\ -\frac{k_{yr}^2}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnry} - \frac{\beta_{gm}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz}^+ \end{array} \right] e^{-j\beta_{gm}z} \\ + P_{gm}^- \left[ \begin{array}{l} -j\omega\mu_0\Pi_{gmnry} - \frac{k_{zn}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrx} \\ -\frac{k_{yr}^2}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnry} + \frac{\beta_{gm}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz}^- \end{array} \right] e^{+j\beta_{gm}z} \end{array} \right\} e^{-jk_{zn}x} e^{-jk_{yr}y}, \quad (3.36)$$

$$H_{gx}^P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} P_{gm}^+ \left[ -jk_{yr}\Pi_{gmnrz}^+ + j\beta_{gm}\Pi_{gmnry} \right] e^{-j\beta_{gm}z} \\ + P_{gm}^- \left[ -jk_{yr}\Pi_{gmnrz}^- - j\beta_{gm}\Pi_{gmnry} \right] e^{+j\beta_{gm}z} \end{array} \right\} e^{-jk_{zn}x} e^{-jk_{yr}y}, \quad (3.37)$$

$$H_{gy}^P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} P_{gm}^+ \left[ -j\beta_{gm}\Pi_{gmnrx} + jk_{zn}\Pi_{gmnrz}^+ \right] e^{-j\beta_{gm}z} \\ + P_{gm}^- \left[ +j\beta_{gm}\Pi_{gmnrx} + jk_{zn}\Pi_{gmnrz}^- \right] e^{+j\beta_{gm}z} \end{array} \right\} e^{-jk_{zn}x} e^{-jk_{yr}y}. \quad (3.38)$$

### 3.4 Cálculo dos campos espalhados pela grade

Uma vez que os valores de  $\beta_{gm}$ ,  $A_{gmk}$  e  $B_{gmk}$  são obtidos numericamente, as integrais que aparecem nas Equações (3.25)-(3.27) podem ser realizadas, de forma que  $\Pi_{gmnrx}$ ,  $\Pi_{gmnry}$ ,  $\Pi_{gmnrz}^{\pm}$  e, conseqüentemente, os componentes dos campos, podem ser resolvidos numericamente.

Da aplicação da continuidade dos campos elétrico e magnético, dados por (3.1)-(3.4), nas regiões homogêneas, e por (3.35)-(3.38), na região periódica, em  $z = 0$  e  $z = -h_p$ , obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$E_y^P(z=0) = E_y^{cl}(z=0) \implies \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} Q_{2mnry}^{Pc+} P_{2m}^+ + Q_{2mnry}^{Pc-} P_{2m}^- \\ + Q_{1mnry}^{Pc+} P_{1m}^+ + Q_{1mnry}^{Pc-} P_{1m}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{clnr}^{yTE} A_{clnr}^{+TE} + \Delta_{clnr}^{yTM} A_{clnr}^{+TM} \\ + \Delta_{clnr}^{yTE} A_{clnr}^{-TE} - \Delta_{clnr}^{yTM} A_{clnr}^{-TM} \end{array} \right\}, \quad (3.39)$$

$$H_x^P(z=0) = H_x^{cl}(z=0) \implies \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_{2mnrx}^{Pc+} P_{2m}^+ + R_{2mnrx}^{Pc-} P_{2m}^- \\ + R_{1mnrx}^{Pc+} P_{1m}^+ + R_{1mnrx}^{Pc-} P_{1m}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\Gamma_{clnr}^{xTE} A_{clnr}^{+TE} - \Gamma_{clnr}^{xTM} A_{clnr}^{+TM} \\ + \Gamma_{clnr}^{xTE} A_{clnr}^{-TE} - \Gamma_{clnr}^{xTM} A_{clnr}^{-TM} \end{array} \right\}, \quad (3.40)$$

$$E_x^P(z=0) = E_x^{cl}(z=0) \implies \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} Q_{2mnrx}^{Pc+} P_{2m}^+ + Q_{2mnrx}^{Pc-} P_{2m}^- \\ + Q_{1mnrx}^{Pc+} P_{1m}^+ + Q_{1mnrx}^{Pc-} P_{1m}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{clnr}^{xTE} A_{clnr}^{+TE} + \Delta_{clnr}^{xTM} A_{clnr}^{+TM} \\ -\Delta_{clnr}^{xTE} A_{clnr}^{-TE} - \Delta_{clnr}^{xTM} A_{clnr}^{-TM} \end{array} \right\}, \quad (3.41)$$

$$H_y^P(z=0) = H_y^{cl}(z=0) \implies \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_{2mnry}^{Pc+} P_{2m}^+ + R_{2mnry}^{Pc-} P_{2m}^- \\ + R_{1mnry}^{Pc+} P_{1m}^+ + R_{1mnry}^{Pc-} P_{1m}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\Gamma_{clnr}^{xTE} A_{clnr}^{+TE} + \Gamma_{clnr}^{xTM} A_{clnr}^{+TM} \\ + \Gamma_{clnr}^{xTE} A_{clnr}^{-TE} + \Gamma_{clnr}^{xTM} A_{clnr}^{-TM} \end{array} \right\}, \quad (3.42)$$

$$E_y^P(z=-h_p) = E_y^{s1}(z=-h_p) \implies \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} Q_{2mnry}^{Ps+} P_{2m}^+ + Q_{2mnry}^{Ps-} P_{2m}^- \\ + Q_{1mnry}^{Ps+} P_{1m}^+ + Q_{1mnry}^{Ps-} P_{1m}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{slnr}^{yTE} A_{slnr}^{+TE} + \Delta_{slnr}^{yTM} A_{slnr}^{+TM} \\ + \Delta_{slnr}^{yTE} A_{slnr}^{-TE} - \Delta_{slnr}^{yTM} A_{slnr}^{-TM} \end{array} \right\}, \quad (3.43)$$

$$H_x^P(z=-h_p) = H_x^{s1}(z=-h_p) \implies \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_{2mnrx}^{Ps+} P_{2m}^+ + R_{2mnrx}^{Ps-} P_{2m}^- \\ + R_{1mnrx}^{Ps+} P_{1m}^+ + R_{1mnrx}^{Ps-} P_{1m}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\Gamma_{slnr}^{xTE} A_{slnr}^{+TE} - \Gamma_{slnr}^{xTM} A_{slnr}^{+TM} \\ + \Gamma_{slnr}^{xTE} A_{slnr}^{-TE} - \Gamma_{slnr}^{xTM} A_{slnr}^{-TM} \end{array} \right\}, \quad (3.44)$$

$$E_x^P(z = -h_p) = E_x^{s1}(z = -h_p) \implies \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} Q_{2mnrx}^{Ps+} P_{2m}^+ + Q_{2mnrx}^{Ps-} P_{2m}^- \\ + Q_{1mnrx}^{Ps+} P_{1m}^+ + Q_{1mnrx}^{Ps-} P_{1m}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{slnr}^{xTE} A_{slnr}^{+TE} + \Delta_{slnr}^{xTM} A_{slnr}^{+TM} \\ -\Delta_{slnr}^{xTE} A_{slnr}^{-TE} - \Delta_{slnr}^{xTM} A_{slnr}^{-TM} \end{array} \right\}, \quad (3.45)$$

$$H_y^P(z = -h_p) = H_y^{s1}(z = -h_p) \implies \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_{2mnry}^{Ps+} P_{2m}^+ + R_{2mnry}^{Ps-} P_{2m}^- \\ + R_{1mnry}^{Ps+} P_{1m}^+ + R_{1mnry}^{Ps-} P_{1m}^- \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\Gamma_{slnr}^{xTE} A_{slnr}^{+TE} + \Gamma_{slnr}^{xTM} A_{slnr}^{+TM} \\ + \Gamma_{slnr}^{xTE} A_{slnr}^{-TE} + \Gamma_{slnr}^{xTM} A_{slnr}^{-TM} \end{array} \right\}, \quad (3.46)$$

onde

$$Q_{gmnrz}^{Pc\pm} = -j\omega\mu_0\Pi_{gmnrz} - \frac{k_{xn}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz} - \frac{k_{yr}^2}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz} \mp \frac{\beta_{gm}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz}^{\pm}, \quad (3.47)$$

$$R_{gmnrz}^{Pc\pm} = -jk_{yr}\Pi_{gmnrz}^{\pm} \pm j\beta_{gm}\Pi_{gmnrz}, \quad (3.48)$$

$$Q_{gmnrz}^{Ps\pm} = -j\omega\mu_0\Pi_{gmnrz} - \frac{k_{zn}^2}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz} - \frac{k_{xn}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz} \mp \frac{\beta_{gm}k_{zn}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz}^{\pm}, \quad (3.49)$$

$$R_{gmnrz}^{Ps\pm} = \mp j\beta_{gm}\Pi_{gmnrz} + jk_{zn}\Pi_{gmnrz}^{\pm}, \quad (3.50)$$

$$Q_{gmnrz}^{Ps\pm} = \left[ -j\omega\mu_0\Pi_{gmnrz} - \frac{k_{xn}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz} - \frac{k_{yr}^2}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz} \mp \frac{\beta_{gm}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz}^{\pm} \right] e^{\pm j\beta_{gm}h_p}, \quad (3.51)$$

$$R_{gmnrz}^{Ps\pm} = \left[ -jk_{yr}\Pi_{gmnrz}^{\pm} \pm j\beta_{gm}\Pi_{gmnrz} \right] e^{\pm j\beta_{gm}h_p}, \quad (3.52)$$

$$Q_{gmnrz}^{Ps\pm} = \left[ -j\omega\mu_0\Pi_{gmnrz} - \frac{k_{zn}^2}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz} - \frac{k_{xn}k_{yr}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz} \mp \frac{\beta_{gm}k_{zn}}{j\omega\epsilon_0}\Pi_{gmnrz}^{\pm} \right] e^{\pm j\beta_{gm}h_p}, \quad (3.53)$$

$$R_{gmnr}^{Ps\pm} = \left[ \mp j\beta_{gm}\Pi_{gmnrx} + jk_{xn}\Pi_{gmnrz}^{\pm} \right] e^{\pm j\beta_{gm}h_p}. \quad (3.54)$$

O sistema de equações constituído por (3.39)-(3.46), para cada  $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$  e  $r = 0, \pm 1, \dots, \pm R$ , é um sistema constituído por  $8(2N+1)(2R+1)$  equações e  $4[(M+1) + (2N+1)(2R+1)]$  incógnitas. Considerando  $M = 2N$  tem-se um número de equações maior que o número de incógnitas. Portanto, são escolhidas  $4(2N+1)[1 + (2R+1)]$  equações dentre as possíveis, desde que envolvam todas as variáveis a serem determinadas com coeficientes não nulos. Estas são:  $P_{2m}^+, P_{2m}^-, P_{2m}^+, P_{2m}^-$ , que caracterizam a distribuição dos campos na camada periódica, e  $A_{r\sin r}^{+TE}, A_{r\sin r}^{-TE}, A_{r\sin r}^{+TM}, A_{r\sin r}^{-TM}$ , que caracterizam a distribuição dos campos nas camadas homogêneas.

Nas fronteiras  $z = z_{si} \neq -h_p$ , abaixo da camada periódica, utilizando as equações (3.1)-(3.4), a aplicação das condições de contorno permite relacionar as constantes  $A_{\sin r}^{+TE}$ ,  $A_{\sin r}^{-TE}$ ,  $A_{\sin r}^{+TM}$ ,  $A_{\sin r}^{-TM}$ , e  $A_{sknr}^{+TE}$ ,  $A_{sknr}^{-TE}$ ,  $A_{sknr}^{+TM}$ ,  $A_{sknr}^{-TM}$ , associadas ao  $n, r$ -ésimo modo da  $i$ -ésima camada e da  $k$ -ésima camada, respectivamente. Essa relação pode ser representada matricialmente como segue

$$\begin{bmatrix} A_{si}^{+TE} \\ A_{si}^{-TE} \\ A_{si}^{+TM} \\ A_{si}^{-TM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{si11} & m_{si12} & m_{si13} & m_{si14} \\ m_{si21} & m_{si22} & m_{si23} & m_{si24} \\ m_{si31} & m_{si32} & m_{si33} & m_{si34} \\ m_{si41} & m_{si42} & m_{si43} & m_{si44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{sk}^{+TE} \\ A_{sk}^{-TE} \\ A_{sk}^{+TM} \\ A_{sk}^{-TM} \end{bmatrix}, \text{ ou} \quad (3.55)$$

$$A_{si} = m_{si} A_{sk}, \text{ com } k = i + 1, i = 1, \dots, NS - 1. \quad (3.56)$$

Neste sistema de equações  $A_{si}^{+TE}$  e  $A_{si}^{+TM}$  representam matrizes coluna constituídas por  $(2N+1)(2R+1)$  linhas, e os termos  $m_{si_{a,b}}$  são matrizes quadradas de ordem  $[(2N+1)(2R+1)] \times [(2N+1)(2R+1)]$ , cujas expressões estão desenvolvidas no Apêndice B.

A aplicação sucessiva da Equação (3.55) permite escrever a seguinte relação entre as amplitudes dos campos nas camadas  $s_1$  e  $s_{NS}$

$$A_{s_1} = M_s A_{s_{NS}}, \text{ com} \quad (3.57)$$

$$M_s = \prod_{i=1}^{NS-1} m_{si} = \begin{bmatrix} M_{s11} & M_{s12} & M_{s13} & M_{s14} \\ M_{s21} & M_{s22} & M_{s23} & M_{s24} \\ M_{s31} & M_{s32} & M_{s33} & M_{s34} \\ M_{s41} & M_{s42} & M_{s43} & M_{s44} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Analogamente, a aplicação das condições de contorno nas fronteiras  $z = z_{ci} \neq 0$ , permite escrever a seguinte relação matricial entre as constantes  $A_{c_{nr}}^{+TE}$ ,  $A_{c_{nr}}^{-TE}$ ,  $A_{c_{nr}}^{+TM}$ ,  $A_{c_{nr}}^{-TM}$ , e  $A_{c_{nr}}^{+TE}$ ,  $A_{c_{nr}}^{-TE}$ ,  $A_{c_{nr}}^{+TM}$ ,  $A_{c_{nr}}^{-TM}$ ,

$$\begin{bmatrix} A_{ci}^{+TE} \\ A_{ci}^{-TE} \\ A_{ci}^{+TM} \\ A_{ci}^{-TM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{ci11} & m_{ci12} & m_{ci13} & m_{ci14} \\ m_{ci21} & m_{ci22} & m_{ci23} & m_{ci24} \\ m_{ci31} & m_{ci32} & m_{ci33} & m_{ci34} \\ m_{ci41} & m_{ci42} & m_{ci43} & m_{ci44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ck}^{+TE} \\ A_{ck}^{-TE} \\ A_{ck}^{+TM} \\ A_{ck}^{-TM} \end{bmatrix}, \text{ ou} \quad (3.59)$$

$$A_{ci} = m_{ci} A_{ck}, \text{ com } k = i + 1, i = 1, \dots, NC - 1. \quad (3.60)$$

Os elementos  $A_{ci}^{\pm TE}$ ,  $A_{ci}^{\pm TM}$  também são matrizes coluna constituídas por  $(2N + 1)(2R + 1)$  linhas, e os termos  $m_{ci_{a,b}}$  são matrizes de ordem  $[(2N + 1)(2R + 1)] \times [(2N + 1)(2R + 1)]$ , cujas expressões também estão desenvolvidas no Apêndice B.

A relação entre as amplitudes dos campos nas camadas  $c_1$  e  $c_{NC}$  são

$$A_{c_1} = M_c A_{c_{NC}}, \text{ com} \quad (3.61)$$

$$M_c = \prod_{i=1}^{Nc-1} m_{ci} = \begin{bmatrix} M_{c11} & M_{c12} & M_{c13} & M_{c14} \\ M_{c21} & M_{c22} & M_{c23} & M_{c24} \\ M_{c31} & M_{c32} & M_{c33} & M_{c34} \\ M_{c41} & M_{c42} & M_{c43} & M_{c44} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Conforme citação no Capítulo 1, nas aplicações em que as grades dielétricas são utilizadas, estas podem ser excitadas por uma onda plana incidindo sobre elas a partir das regiões exteriores ( $c_{NC}$  ou  $s_{NS}$ ). Considera-se que, no caso de haver excitação, ela se dá a partir da região  $c_{NC}$ , onde os elementos das matrizes coluna  $A_{c_{ncnr}}^{+TE}$ ,  $A_{c_{ncnr}}^{-TE}$ ,  $A_{c_{ncnr}}^{+TM}$  e  $A_{c_{ncnr}}^{-TM}$ , das regiões externas à grade, devem obedecer às seguintes condições:

$$\left. \begin{aligned} A_{sNsnr}^{+TE} &= 0 \\ A_{sNsnr}^{+TM} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.63)$$

e

$$\left. \begin{aligned} A_{cNCnr}^{-TE} &= \delta_{no} \delta_{ro} \\ A_{cNCnr}^{-TM} &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ para incidência TE,} \quad (3.64)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} A_{cNCnr}^{-TE} &= 0 \\ A_{cNCnr}^{-TM} &= \delta_{no} \delta_{ro} \end{aligned} \right\}, \text{ para incidência TM.} \quad (3.65)$$

Desta forma, todos os demais coeficientes desconhecidos podem ser obtidos a partir das condições de fronteira descritas neste capítulo. Após determinar os demais coeficientes desconhecidos, dentre os quais se encontram  $A_{cNCnr}^{+TE}$ ,  $A_{cNCnr}^{+TM}$  e  $A_{sNCnr}^{-TE}$ ,  $A_{sNCnr}^{-TM}$ , é possível determinar as amplitudes dos campos espalhados pela grade dielétrica. Com a aplicação das Equações (3.63) e (3.64) ou (3.65), para excitação TE ou TM, respectivamente, o sistema de Equações (3.39)-(3.46) pode ter a ordem reduzida de  $4(2N+1)[1+(2R+1)]$  para  $4(2N+1)(2R+1)$ . Esta redução se deve ao fato de que, conforme verificado no Capítulo 2, em uma incidência TE ou TM somente as funções de expansão dos grupos 2 ou 1, respectivamente, são necessárias para caracterizar os campos no dielétrico. Ainda nestes casos, não devem ser incluídas no sistema as equações relacionadas ao coeficiente  $r=0$ , dos campos que apresentam dependência senoidal, pois estas transformariam a matriz dos coeficientes em uma matriz singular.

Os números de onda fundamentais de Floquet, neste caso, são dados por

$$k_{xo} = \sqrt{\varepsilon_{cNC}} k_o \sin \theta, \quad (3.66)$$

$$k_{yo} = 0, \quad (3.67)$$

para as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\theta$  é o ângulo que a onda plana incidente, no meio  $c_{NC}$ , forma com o eixo  $z$ . Portanto, os números de onda de Floquet, para todos os modos, também são conhecidos através das Equações (3.15) e (3.28).

## Capítulo 4

# Análise do Comportamento Seletivo em Frequência de Grades Dielétricas

### 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estudar as características de difração de ondas eletromagnéticas em grades dielétricas, como o mostrado na Fig. 4-1, utilizando a teoria dos capítulos anteriores, explorando o potencial de uso destas como superfícies dicróicas para a faixa de ondas milimétricas.

A proposta da utilização de grades dielétricas em dispositivos seletivos em frequência, feita inicialmente por Bertoni *et al.* [6], se deveu às menores perdas apresentadas pelas grades dielétricas na difração de ondas eletromagnéticas, quando comparadas com os arranjos periódicos de condutores.

As formulações apresentadas por Costa e Giarola [12], para incidência TE, e Silva *et al.* [29], para incidência TM, utilizam a análise modal rigorosa para obter o espalhamento em estruturas com periodicidade em uma dimensão. Para a comparação dos resultados das formulações de Costa e Giarola [12] e Silva *et al.* [29], com a formulação do presente trabalho, escolheu-se uma célula da Fig. 2-1, com a dimensão  $d = b$ . Desta forma, a estrutura tem sua periodicidade reduzida ao eixo  $x$ . Em seguida, são mostradas várias configurações de grades dielétricas onde se procura mostrar o comportamento seletivo em frequência quando são alterados diversos parâmetros da estrutura.

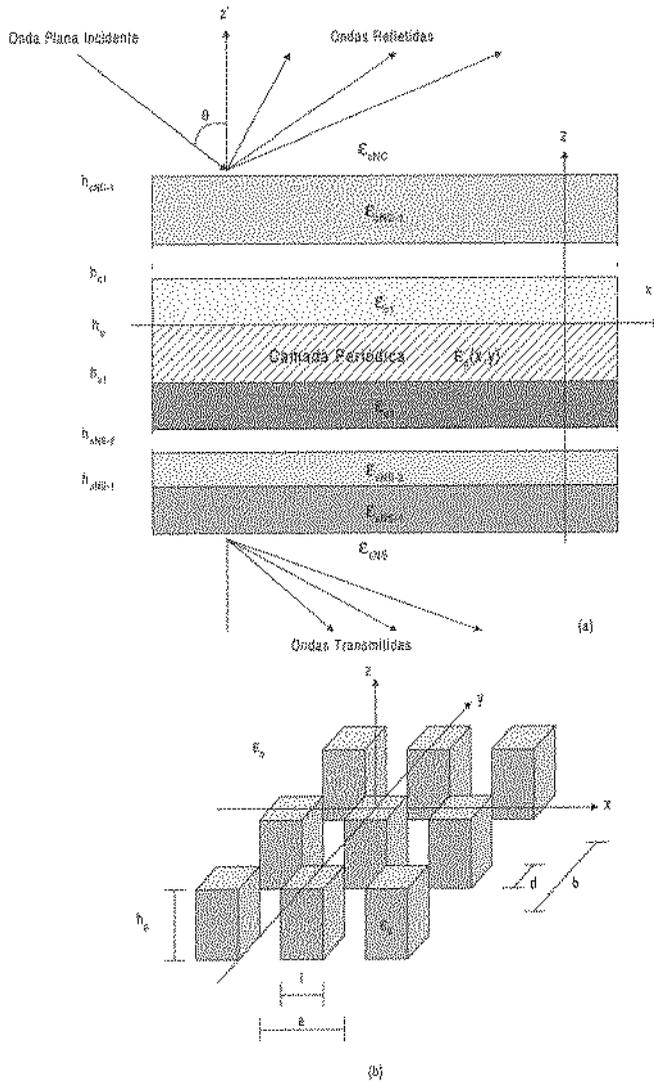


Fig. 4-1: (a) - Grade dielétrica constituída por múltiplas camadas dielétricas, excitada por uma onda plana incidente ao longo do plano  $xz$ . (b) Camada periódica da grade dielétrica.

## 4.2 Aspectos teóricos

De acordo com a teoria apresentada no Capítulo 3, quando uma grade dielétrica for excitada por uma onda plana, a partir da região  $NC$ , em uma direção que forma um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ , conforme mostrado na Fig. 4-1, esta suportará um número infinito de modos propagando-se individualmente como ondas planas. Cada um destes modos possui números de onda ao longo do eixo  $z$  diferentes em cada camada dielétrica; entretanto, os números de onda ao longo dos eixos  $x$ ,  $k_{xn}$ , e  $y$ ,  $k_{yn}$ , são os mesmos em qualquer região da grade.

Uma vez que a camada periódica da grade é a responsável pelas anomalias nos coeficientes de transmissão e reflexão das grades periódicas, possuindo as camadas homogêneas apenas um papel secundário na sintonia da seletividade [13], as grades periódicas serão aqui

exploradas envolvidas por regiões não elétricas,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , e não magnéticas,  $\mu = \mu_0$ .

Quando algum modo é excitado na camada periódica, ao longo da superfície  $z = 0$ , ele será multiplamente refletido dentro dela. As ondas propagando-se dentro da camada periódica recebem energia de ondas planas incidindo de uma das regiões exteriores, neste trabalho escolhida como a região  $c$  ( $z > 0$ ), e espalham ondas planas em ambas as direções:  $c$ , ondas refletidas, e  $s$  ( $z < -h_p$ ), ondas transmitidas. A composição de fase ao longo da direção  $z$  dos modos excitados é tal que, dependendo da frequência, eles podem combinar-se construtivamente ao longo da superfície  $z = 0$ , mas destrutivamente ao longo da superfície  $z = -h_p$ , para intensificar os campos das ondas refletidas, ou, de maneira inversa, a interferência entre os modos excitados pode ocorrer de modo a intensificar os campos das ondas transmitidas.

A partir das Equações (3.63)-(3.65), onde as incidências TE e TM estão normalizadas, os coeficientes de difração podem ser obtidos utilizando-se as seguintes expressões:

$$R_{nr}^{TE} = A_{cNCnr}^{+TE}, \quad (4.1)$$

$$R_{nr}^{TM} = A_{cNCnr}^{+TM}, \quad (4.2)$$

$$T_{nr}^{TE} = A_{sNCnr}^{-TE}, \quad (4.3)$$

$$T_{nr}^{TM} = A_{sNCnr}^{-TM}, \quad (4.4)$$

para cada  $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$  e  $r = 0, \pm 1, \dots, \pm R$ .

Uma vez que, com este trabalho, se pretende enfocar principalmente a aplicação das grades dielétricas como estruturas seletivas em frequência, é interessante fazer com que a energia das ondas planas espalhadas pela estrutura nas regiões homogêneas estejam contidas somente no modo fundamental, ( $n = 0, r = 0$ ), de modo que os coeficientes de difração possam ser reduzidos a um único coeficiente de transmissão,  $T_{o,o}$ , e um único de reflexão,  $R_{o,o}$ . No entanto a formulação fornece os demais coeficientes de difração, quer eles sejam propagantes ou evanescentes, isto é, radiem ou não energia da estrutura.

Para garantir que somente o modo fundamental, em  $x$  e  $y$ , se propague nas regiões homogêneas é necessário garantir a seguinte relação:

$$k_o^2 \varepsilon_{\max} \geq |k_{xn} \hat{x} + k_{yr} \hat{y}|^2, \quad (4.5)$$

somente para  $(n = 0, r = 0)$ , onde

$$\varepsilon_{\max} = \max(\varepsilon_{c_{NC}}, \varepsilon_{c_{NS}}). \quad (4.6)$$

Esta condição pode ser reescrita, somente para o modo  $(n = 0, r = 0)$ , da seguinte forma:

$$k_o h_p \leq \frac{2\pi}{\left(\sqrt{\varepsilon_{\max}} + \sqrt{\varepsilon_{c_{NC}}} \sin \theta\right)} \frac{h_p}{a}, \quad (4.7)$$

considerado que o modo seguinte ao fundamental é o  $(n = -1, r = 0)$ , aplicável às configurações exploradas neste trabalho.

Se a Equação (4.7) for satisfeita, então tem-se que:

$$|R_{o,o}|^2 + |T_{o,o}|^2 \cong 1. \quad (4.8)$$

Embora somente o modo  $(n = 0, r = 0)$  transporte energia da grade dielétrica para o espaço livre, se a Equação (4.7) for satisfeita, os demais modos, quer sejam propagantes ou não, devem ser considerados na região periódica, em virtude de apresentarem influência na caracterização dos campos e, conseqüentemente, no espalhamento. Desta forma, para efeito de simulação, aos parâmetro  $N$  e  $R$  deste capítulo, que caracterizam o número de modos de Floquet ao longo das direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, foram atribuídos o mesmo valor de  $K$  utilizado na obtenção da distribuição dos campos na estrutura infinita, desenvolvida no Capítulo 2.

### 4.3 Características de propagação e de espalhamento em camadas dielétricas homogêneas

A distribuição e o espalhamento de ondas eletromagnéticas em camadas dielétricas homogêneas já estão bem explorados na literatura. Mas as suas características podem ajudar a interpretar os resultados do espalhamento em uma camada dielétrica periódica.

As Equações (3.1)-(3.4) modelam os campos em camadas homogêneas para os harmônicos do número de onda fundamental, em  $x$  e  $y$ , os quais são definidos pela periodicidade da camada periódica envolvida no problema. Para um caso simples de uma única camada homogênea, conforme a Fig. 4-2, com permissividade  $\varepsilon_r$  e espessura  $h_p$  particulares, en-

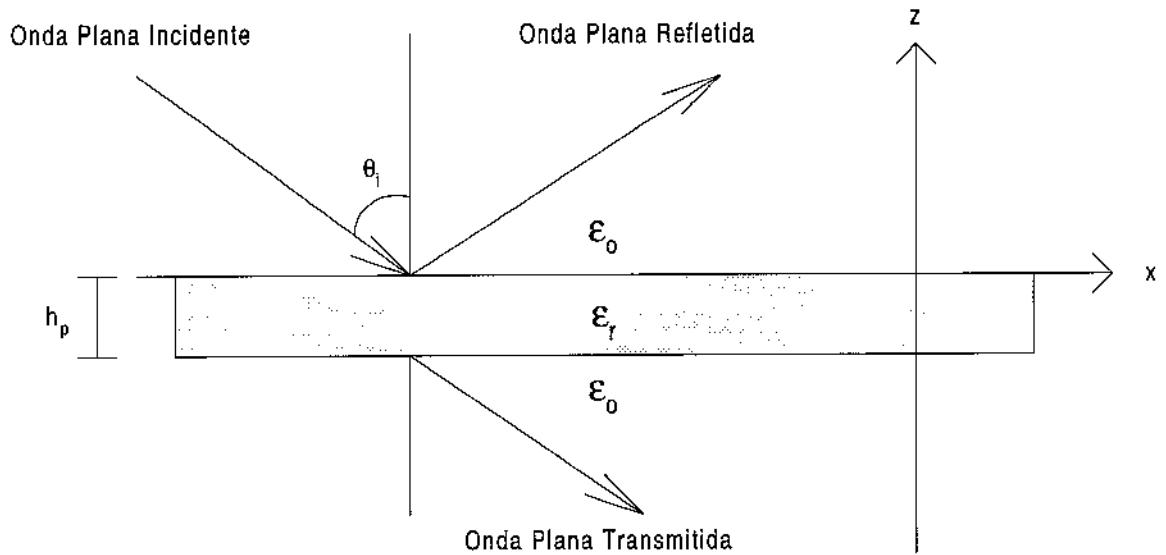


Fig. 4-2: Camada dielétrica homogênea sob a incidência de uma onda plana. Parâmetros:  $\epsilon_r = 1,6747$  e  $h_p = 4,363$  cm, envolta por espaço livre.

volvida por espaço livre e sob a incidência de uma onda plana do tipo TE ou TM, os coeficientes de reflexão são mostrados na Fig. 4-3. Nessa situação, somente um modo em  $\beta$ , ao longo do eixo  $z$ , e  $k_x$ , ao longo do eixo  $x$ , são excitados, uma vez que não existe periodicidade na estrutura. Nesta configuração, a camada dielétrica homogênea também é conhecida como filtro de meia-onda, pois a espessura da camada corresponde a múltiplos da metade do comprimento de onda, ao longo da direção transversal à camada, das únicas frequências nas quais ocorre a transmissão total, expressa pela Equação (4.9), para ambas as incidências de ondas eletromagnéticas TE ou TM. A transmissão total que ocorre para algumas frequências é devida à composição de fase do único modo que pode ser excitado na camada devido ao campo incidente nas fronteiras.

$$h_p = n \frac{\lambda}{2} \cos \theta_h, \quad (4.9)$$

com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e

$$\text{sen } \theta_h = \frac{\beta_i}{\beta_h} \text{sen } \theta_i, \quad (4.10)$$

onde

$$\beta_i = \pm \sqrt{k_o^2 - k_x^2}, \quad (4.11)$$

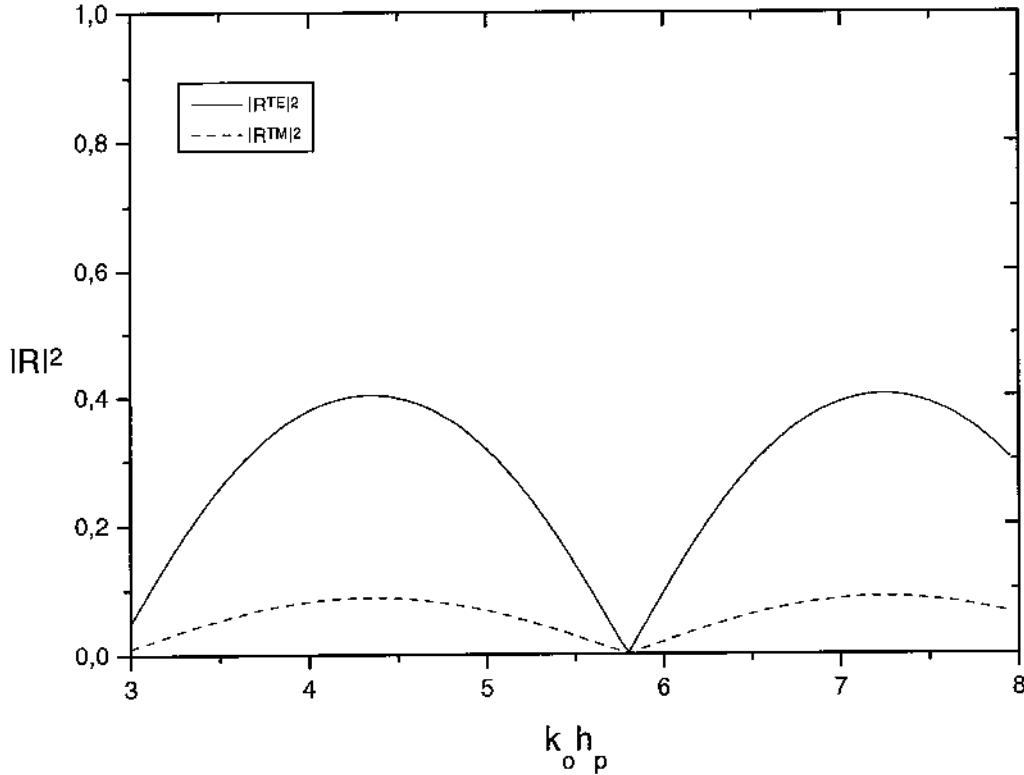


Fig. 4-3: Quadrado dos Coeficientes de reflexão, para incidência de ondas planas dos tipos TE e TM, em função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , a partir da fronteira superior de uma camada dielétrica homogênea, com  $\epsilon_r = 1,6747$  e  $h_p = 4,363$  cm, envolta por espaço livre.

$$\beta_h = \pm \sqrt{k_0^2 \epsilon_r - k_x^2}. \quad (4.12)$$

Nestas expressões,  $\theta_i$  corresponde ao ângulo de incidência da onda plana da camada exterior,  $\theta_h$  corresponde ao ângulo de transmissão da onda plana na região dielétrica,  $\beta$  corresponde ao número de onda ao longo do eixo  $z$ , na camada exterior, e  $\beta_z$  corresponde ao número de onda ao longo do eixo  $z$ , na camada homogênea.

Na Fig. 4-4 são mostrados os modos guiados por uma camada homogênea com  $\epsilon_r = 1,6747$  e  $h_p = 4,363$  cm, envolta por espaço livre. Observa-se que nenhum destes modos pode ser excitado a partir de uma onda eletromagnética incidindo nas fronteiras, pois nestas frequências a Equação (4.11), aplicável nas regiões exteriores à camada homogênea, retorna uma constante de propagação evanescente ao longo da direção  $z$ , transversal às fronteiras

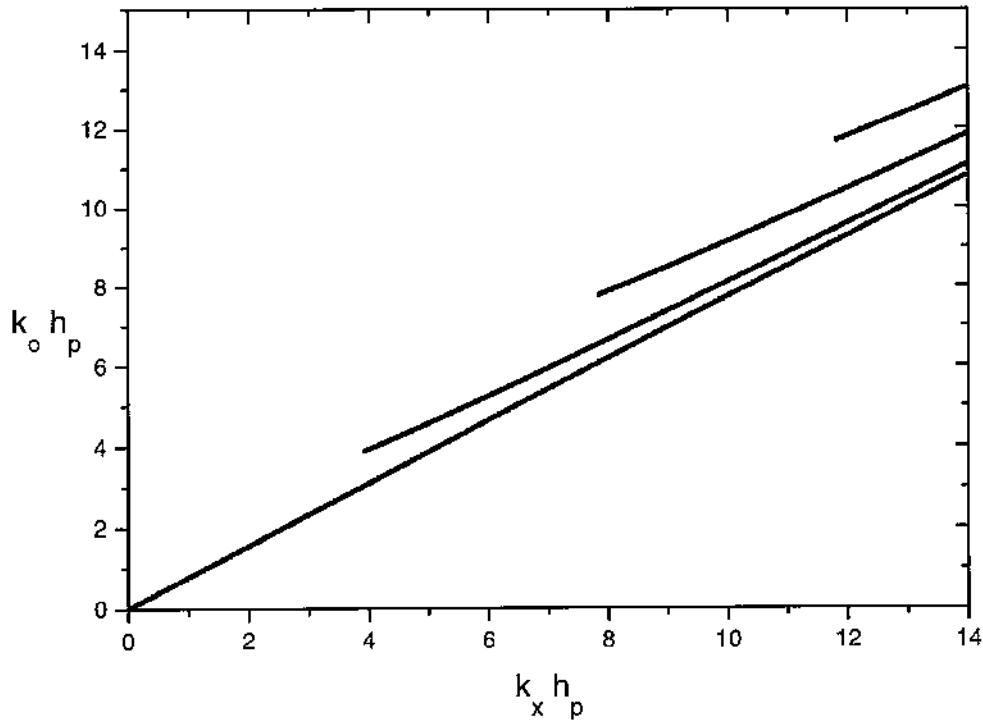


Fig. 4-4: Modos TE guiados por uma camada dielétrica homogênea com  $\epsilon_r = 1,6747$  e  $h_p = 4,363$  cm, envolta por espaço livre.

da camada dielétrica.

#### 4.4 Características de seletividade em frequência de camadas dielétricas periódicas

A existência de modos guiados longitudinais, isto é, ao longo do plano  $xy$ , em camadas homogêneas, mostrados na Fig. 4-4, sugere fortemente que as grades periódicas apresentem também características semelhantes. Embora nas primeiras verificou-se que os modos guiados não podem ser excitados por uma onda eletromagnética externa, conforme citado no item anterior, a inclusão da periodicidade na estrutura propicia a propagação de harmônicas do número de onda fundamental da onda incidente,  $k_{x0}$ , no interior da camada dielétrica. Espera-se que fortes alterações na distribuição dos campos ocorram no interior da camada periódica, quando uma destas harmônicas entra em ressonância com um dos modos guiados pela estrutura. Estas ressonâncias, certamente, são as responsáveis pela ocorrência das

anomalias. Alguns autores também sugeriram a mesma explicação para esse fenômeno [2], [12].

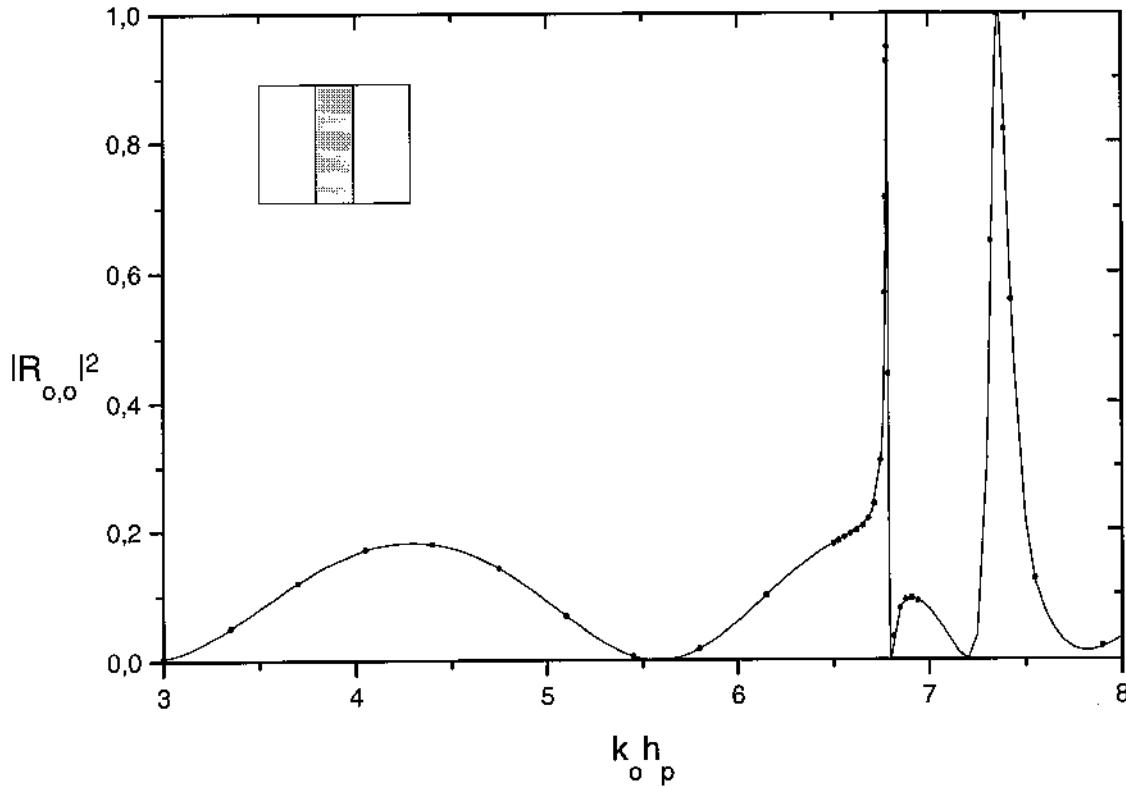


Fig. 4-5: Quadrado do coeficiente de reflexão para o modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{0,0}^{TE}|^2$ , em função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , para incidência TE em uma grade com periodicidade em uma dimensão. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 4$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $a = 2,142$  cm,  $b = 0,7$  cm,  $l = 0,926$  cm,  $d = 0,7$  cm e  $h_p = 4,363$  cm. Os pontos são resultados obtidos com a formulação de Costa e Giarola [12].

Na Fig. 4-5 são mostrados resultados comparando esta formulação com a apresentada por Costa e Giarola [12] para incidência TE, onde uma ótima convergência foi observada para o quadrado do coeficiente de reflexão do modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{0,0}|^2$ , como função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , para o caso particular de uma grade constituída por um arranjo periódico de lâminas dielétricas. Os parâmetros  $\epsilon_r$ ,  $h_p$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $l$  e  $d$  representam a permissividade, as dimensões da camada, da célula periódica e do guia, mostrados na Fig. 4-1.  $\theta$  é caracterizado pela Equação (2.18),  $N$  caracteriza o truncamento da função de Green, (2.54), e  $K$  determina o truncamento da expansão do campo elétrico no interior do dielétrico, (2.54)-(2.56), e o número de modos de Floquet ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ ,

(3.35)-(3.38). Ao parâmetro  $M$ , que diz respeito ao número de modos que se propagam ao longo do eixo  $z$ , é atribuído o valor  $2K$ .

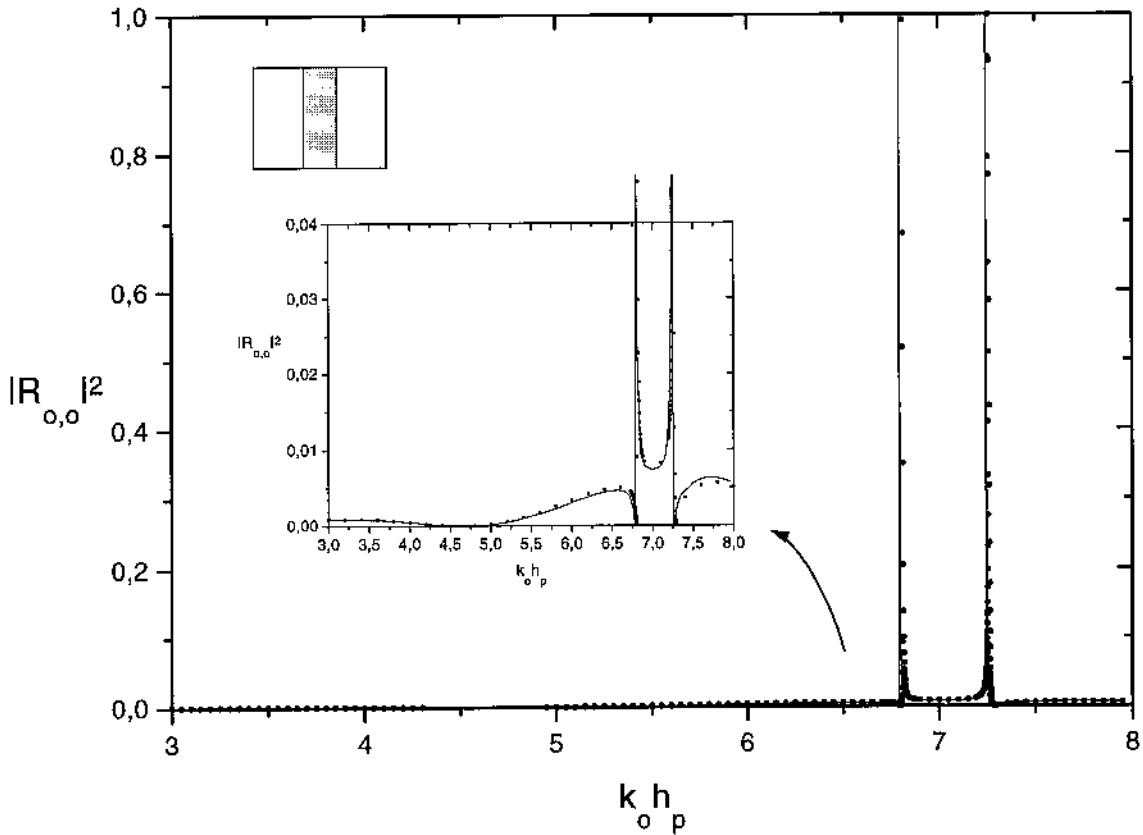


Fig. 4-6: Quadrado do coeficiente de reflexão para o modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{0,0}^{TM}|^2$ , em função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , para incidência TM em uma grade com periodicidade em uma dimensão. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 4$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $a = 2,142$  cm,  $b = 0,7$  cm,  $l = 0,926$  cm,  $d = 0,7$  cm e  $h_p = 4,363$  cm. Os pontos são resultados obtidos com a formulação de Silva *et al.* [29].

Analisando a Fig. 4-5 na faixa de  $k_0 h_p = 3$  a  $k_0 h_p = 5,5$  observa-se que a camada dielétrica periódica se comporta, aproximadamente, como a camada homogênea cuja característica seletiva em frequência encontra-se na Fig. 4-3, que, por conveniência, foi escolhida de tal forma que a sua permissividade correspondesse à permissividade média da camada periódica mostrada na Fig. 4-5. Isto se deve ao fato de que somente um dos modos ao longo do eixo  $z$  é não evanescente, fazendo com que a camada dielétrica periódica apresente características de espalhamento muito semelhantes às de uma camada homogênea. Acima desta frequência, os demais modos deixam de ser evanescentes na camada periódica, atuando de

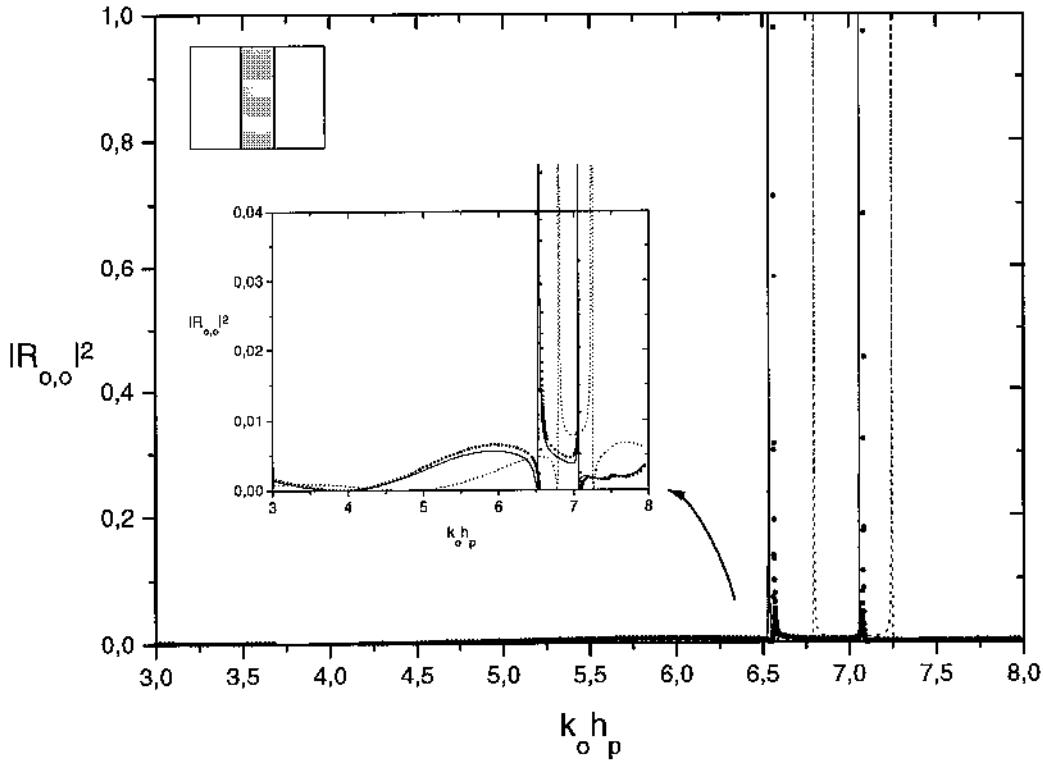


Fig. 4-7: Quadrado do coeficiente de reflexão para o modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{0,0}^{TM}|^2$ , em função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , para incidência TM em grades com periodicidade em uma dimensão. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 4$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $a = 2,142$  cm,  $b = 0,7$  cm,  $l = 0,926$  cm,  $d = 0,7$  cm e  $h_p = 4,363$  cm. Na curva pontilhada são mostrados os resultados para uma camada isotrópica com  $\epsilon_r = 2,56$ . Na curva contínua são mostrados resultados para uma camada anisotrópica com  $\epsilon_{xx} = 2,56$  e  $\epsilon_{zz} = 1,3\epsilon_{xx}$ . Os pontos são resultados obtidos com a formulação de Silva *et al.* [29], para a camada anisotrópica.

maneira mais significativa na composição da fase nas fronteiras e, conseqüentemente, no espalhamento.

Na Fig. 4-6 são mostrados resultados comparando esta formulação com a apresentada por Silva *et al.* [29], para incidência TM, em uma grade dielétrica, onde uma boa convergência foi observada para o quadrado do coeficiente de reflexão do modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{0,0}|^2$ , como função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , para o caso particular de uma grade constituída por um arranjo periódico de lâminas dielétricas isotrópicas. Utilizando aquela mesma formulação, foi possível, também, a validação do modelo do presente trabalho para estruturas periódicas dielétricas anisotrópicas. Na Fig. 4-7 são mostrados os resultados obtidos para duas grades: uma anisotrópica, com  $\epsilon_{zz} = 1,3\epsilon_{xx}$ , que apresentou uma

boa convergência, quando comparada com os resultados de Silva *et al.* [29], e novamente foram mostrados os resultados para uma grade dielétrica isotrópica, para ilustrar o efeito da introdução da anisotropia.

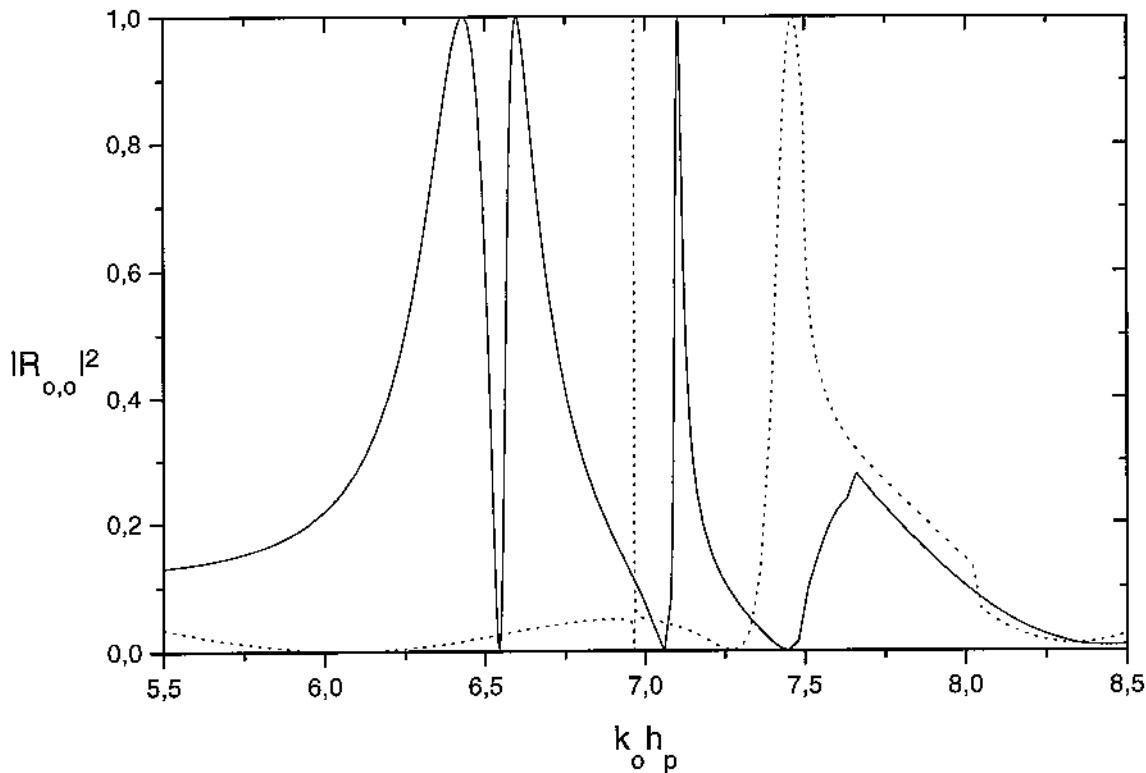


Fig. 4-8: Quadrado do coeficiente de reflexão para o modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{0,0}^{TE}|^2$ , em função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , para incidência TE em grades com periodicidade em duas dimensões. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 12$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $a = 4,284$  cm,  $b = 2,5$  cm,  $d = 2,0$  cm e  $h_p = 8,726$  cm. Na curva contínua são mostrados os resultados para uma grade com  $l = 1,852$  cm. Na curva pontilhada são mostrados os resultados para uma grade com  $l = 2,032$  cm.

A Fig. 4-8 ilustra o efeito da variação da dimensão do guia ao longo do eixo  $x$  sobre o espalhamento, proporcionado por uma incidência TE, onde verificou-se uma redução no número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , onde ocorrem as anomalias com o aumento na dimensão  $l$ . A ocorrência deste fenômeno se deve ao aumento da permissividade média da camada periódica. Este aumento propicia um incremento na constante de propagação ao longo do eixo  $z$ ,  $\beta_{gm}$ , e, conseqüentemente, na composição de fase nas fronteiras entre as ondas que se propagam nas direções  $\pm z$ , de tal forma que as anomalias passam a ocorrer em frequências inferiores às da camada original.

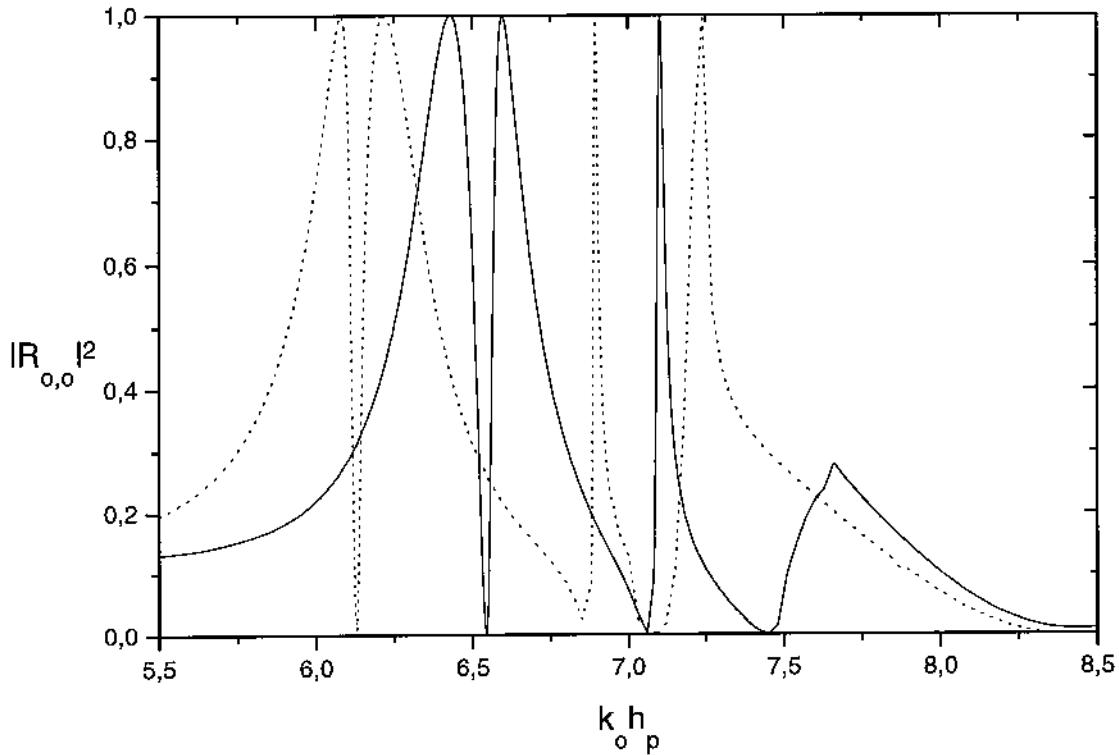


Fig. 4-9: Quadrado do coeficiente de reflexão para o modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{o,o}^{TE}|^2$ , em função do número de onda normalizado,  $k_o h_p$ , para incidência TE em grades com periodicidade em duas dimensões. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 12$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $a = 4,284$  cm,  $b = 2,5$  cm,  $l = 1,852$  cm,  $d = 2,0$  cm e  $h_p = 8,726$  cm. Na curva contínua são mostrados os resultados para  $\theta = 45^\circ$ . Na curva pontilhada são mostrados os resultados para  $\theta = 50^\circ$ .

A Fig. 4-9 ilustra o efeito da variação do ângulo de incidência da onda plana TE, onde verificou-se uma redução nos números de onda normalizados,  $k_o h_p$ , onde ocorrem as anomalias, com o aumento de  $\theta$  de  $45^\circ$  para  $50^\circ$ , que teve, como consequência, um aumento dos valores de  $k_{x0}$  em relação aos respectivos valores de  $k_o$ . Conseqüentemente, as ressonâncias responsáveis pelas anomalias passaram a existir em valores de  $k_o$  inferiores. Foi observado, também na Fig. 4-9, o surgimento de uma anomalia em  $k_o h_p \cong 7,25$  para  $\theta = 50^\circ$  que não existia em  $\theta = 45^\circ$ . Isto se deveu ao fato de que acima de  $k_o h_p \cong 7,5$ , onde deveria ocorrer a anomalia no caso em que  $\theta = 45^\circ$ , o modo  $n = -1$  começa a se propagar nas camadas homogêneas e radia parte da energia da onda plana incidente em uma direção definida por  $k_{x-1}$ .

A Fig. 4-10 ilustra o efeito da introdução da anisotropia na estrutura periódica com incidência TM. Neste caso uma das camadas apresenta anisotropia uniaxial, com  $\epsilon_{zz} =$

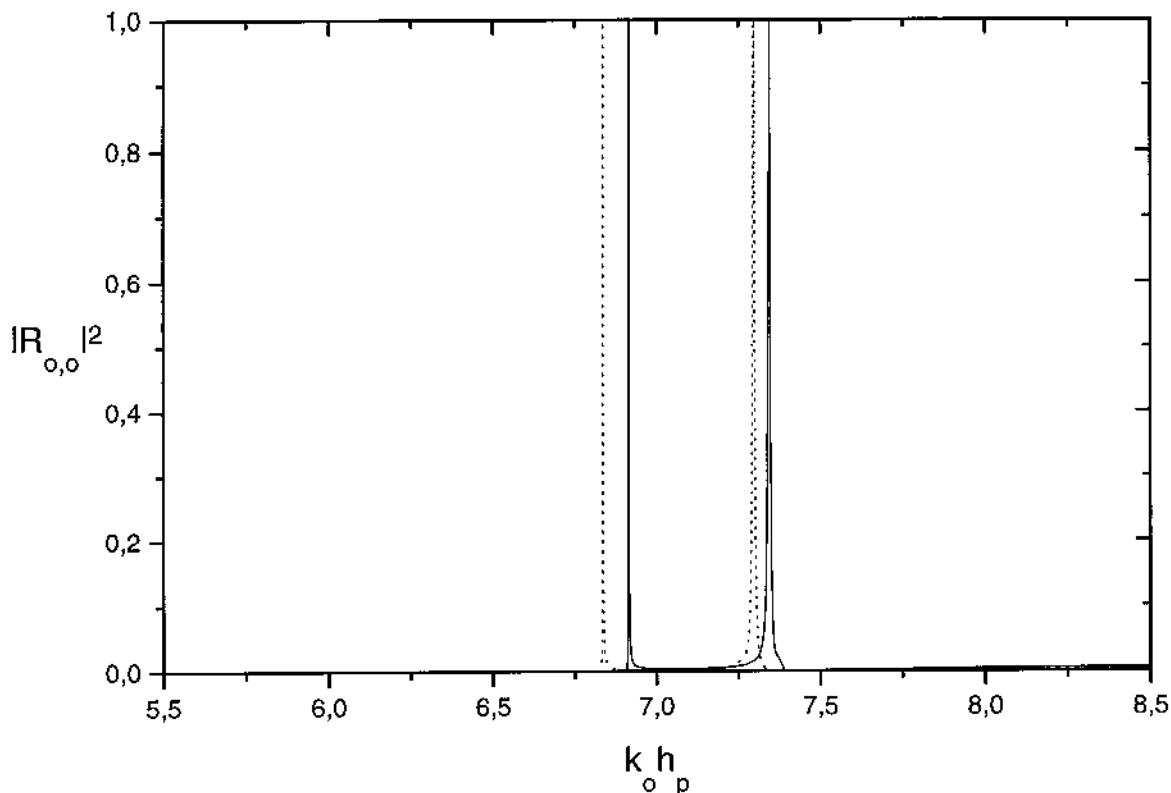


Fig. 4-10: Quadrado do coeficiente de reflexão para o modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{0,0}^{TM}|^2$ , em função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , para incidência TM em grades com periodicidade em duas dimensões. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 6$ ,  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 2,56$ ,  $a = 4,284$  cm,  $b = 2,5$  cm,  $l = 1,852$  cm,  $d = 2,0$  cm e  $h_p = 8,726$  cm. Na curva contínua são mostrados os resultados para  $\epsilon_{zz} = \epsilon_{xx}$ . Na curva pontilhada são mostrados os resultados para  $\epsilon_{zz} = 1,1\epsilon_{xx}$ .

$1,1\epsilon_{xx}$ . Como o tensor diagonal da grade anisotrópica é superior, ainda que em somente um dos seus componentes, ao da camada isotrópica, espera-se uma redução nas frequências onde ocorreram as anomalias, em virtude do incremento da permissividade média da estrutura, conforme a interpretação da Fig. 4-8 para incidência TE. Neste caso o desvio das duas anomalias, com a variação no tensor permissividade, não foi homogêneo. A explicação para isto seria que, na primeira anomalia, onde houve uma variação mais significativa na frequência central, o componente  $E_z$  do campo elétrico é mais significativo na composição do campo do que na segunda anomalia.

A Fig. 4-11 ilustra o efeito da variação do ângulo de incidência da onda plana TM sobre o espalhamento da grade dielétrica, cuja interpretação é semelhante à proferida a respeito

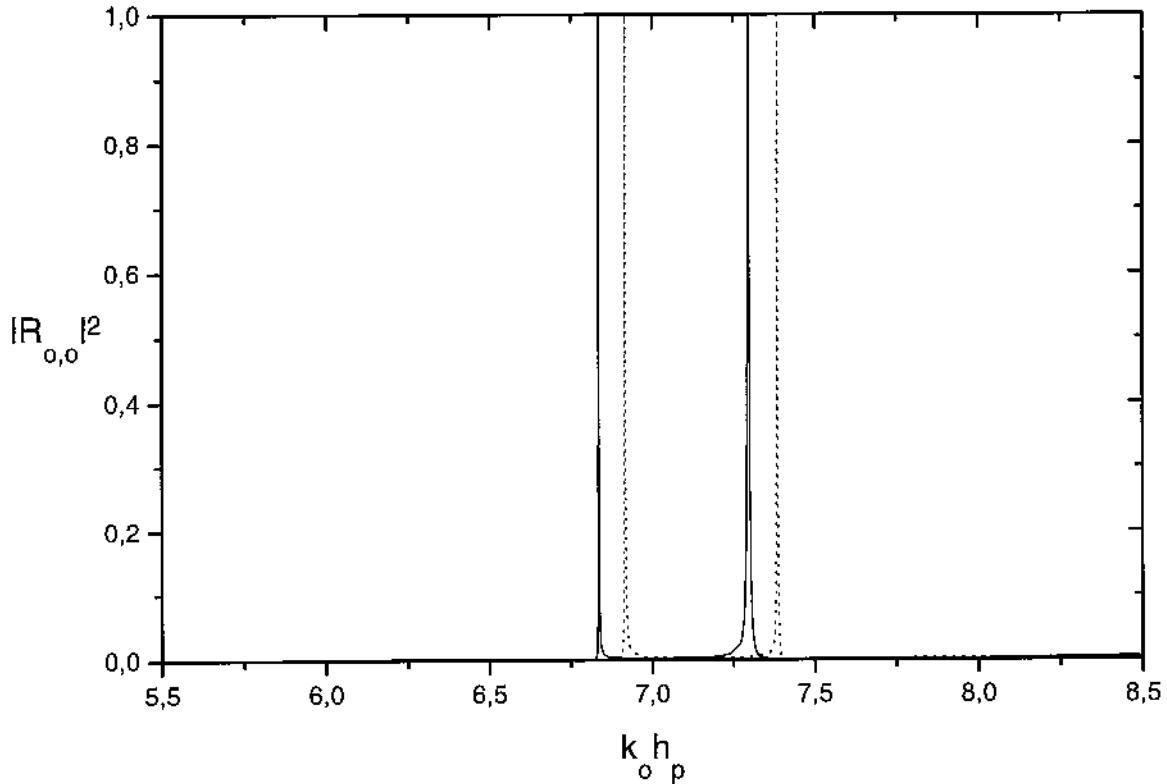


Fig. 4-11: Quadrado do coeficiente de reflexão para o modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{0,0}^{TM}|^2$ , em função do número de onda normalizado,  $k_0 h_p$ , para incidência TM em grades com periodicidade em duas dimensões. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 6$ ,  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 2,56$ ,  $\epsilon_{zz} = 1,1\epsilon_{xx}$ ,  $a = 4,284$  cm,  $b = 2,5$  cm,  $l = 1,852$  cm,  $d = 2,0$  cm e  $h_p = 8,726$  cm. Na curva contínua são mostrados os resultados para  $\theta = 43^\circ$ . Na curva pontilhada são mostrados os resultados para  $\theta = 45^\circ$ .

da variação do ângulo de incidência de uma onda plana TE, mostrada na Fig. 4-9.

A Fig. 4-12 ilustra o efeito da variação de  $d$ , que é a dimensão do guia ao longo do eixo  $y$ , sobre o espalhamento da grade dielétrica. Nela foi observado que as alterações nos números de onda normalizados, onde ocorrem algumas das anomalias, foram muito semelhantes às mostradas na Fig. 4-8, onde foi variado o parâmetro  $l$ , que é a dimensão do guia ao longo do eixo  $x$ , na mesma proporção. Portanto, a interpretação da variação das frequências onde ocorreram as anomalias da Fig. 4-8 também se aplica a este caso.

Na Tabela 4.1 encontram-se as larguras de linha das três primeiras anomalias da curva contínua contida em cada um dos gráficos citados.

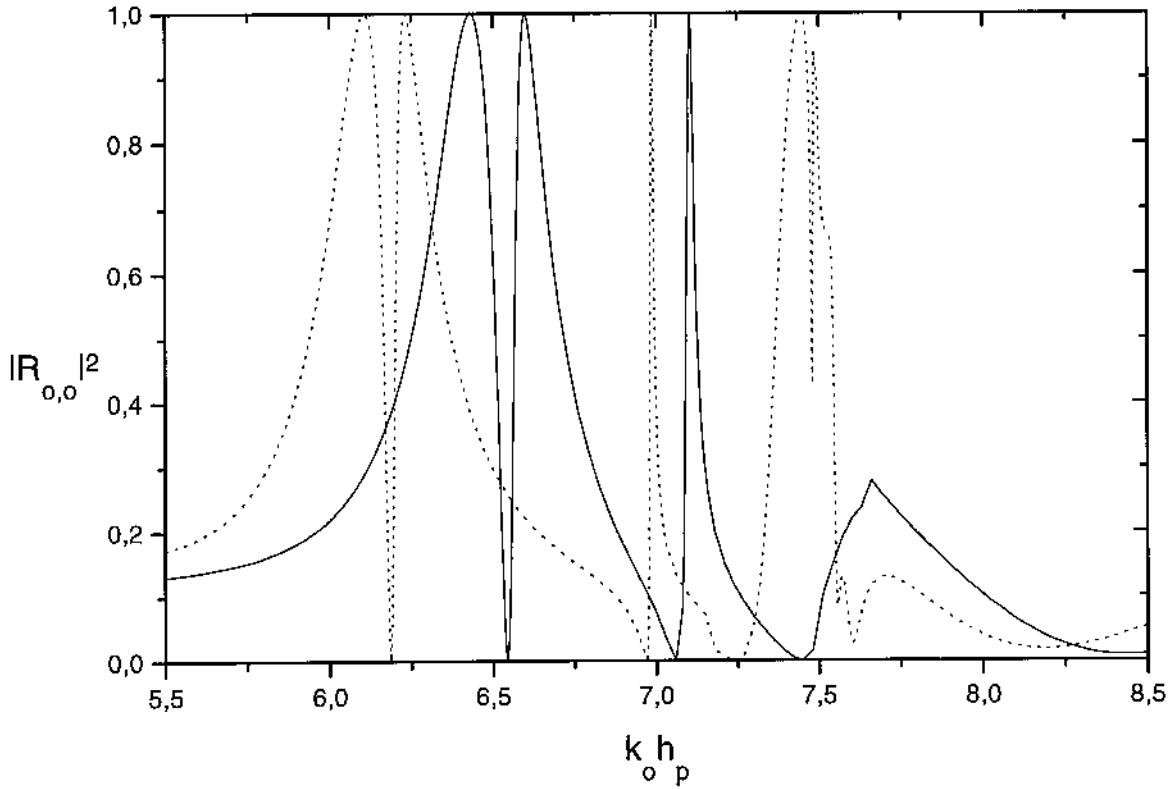


Fig. 4-12: Quadrado do coeficiente de reflexão para o modo  $(n = 0, r = 0)$ ,  $|R_{o,o}^{TE}|^2$ , em função do número de onda normalizado,  $k_o h_p$ , para incidência TE em grades com periodicidade em duas dimensões. Parâmetros:  $K = 2$ ,  $N = 12$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\epsilon_r = 2,56$ ,  $a = 4,284$  cm,  $b = 2,5$  cm,  $l = 1,852$  cm e  $h_p = 8,726$  cm. Na curva contínua são mostrados os resultados para uma grade com  $d = 2,0$  cm. Na curva pontilhada são mostrados os resultados para uma grade com  $d = 2,2$  cm.

Fig.	1	2	3
4-5 - TE 1D	0,435	2,75	
4-8 - TE 2D	2,636	0,2006	0,298
4-6 - TM 1D	0,0578	0,0636	
4-7 - TM 2D	0,0665	0,0749	
4-10 - TM 2D	0,0177	0,0825	
4-11 - TM 2D	0,0179	0,0756	

Tabela 4.1: Larguras de linha de meia potência desnormalizadas das três primeiras anomalias das grade dielétricas das Figs. citadas. As anomalias correspondem unicamente às encontradas nas curvas contínuas dos respectivos gráficos. As larguras de linha se encontram expressas em  $m^{-1}$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

Neste trabalho foram analisadas as características de propagação de ondas eletromagnéticas em grades dielétricas constituídas por arranjos de guias de onda dielétricos anisotrópicos retangulares, periódicos em  $x$ ,  $y$  e infinitos em  $z$ , utilizando o método dos momentos e a função de Green em conjunto com o teorema da corrente volumétrica equivalente induzida. Além desta abordagem representar uma extensão à formulação de Yang *et al.* [16], ela é original também porque corrige uma aproximação desnecessária efetuada por aqueles autores na constituição das equações dos sistemas, conforme citado no Capítulo 2.

Para a análise das características de difração foi utilizada a formulação para a caracterização dos campos, em estruturas infinitas em  $z$ , desenvolvida no Capítulo 2, aplicando as condições de continuidade dos campos elétricos e magnéticos nas fronteiras entre a camada periódica e as camadas homogêneas.

Foram analisadas várias configurações de grades, onde verificou-se a dependência das características de seletividade em frequência da camada periódica com relação a vários parâmetros da estrutura. Nestas configurações foram observadas várias faixas de frequência nas quais as grades apresentaram ótimas características de seletividade em frequência que as colocam como uma alternativa para as superfícies dicróicas constituídas por materiais condutores.

Os resultados obtidos com a formulação proposta foram comparados com outras formulações obtidas da literatura, para alguns casos particulares, onde uma ótima convergência foi observada.

Ao contrário das estruturas dielétricas com periodicidade em uma dimensão, as estruturas dielétricas com periodicidade em duas dimensões ainda se encontram pouco exploradas em suas características de propagação e de difração, haja vista a pouca literatura existente

sobre o assunto. A inclusão de periodicidade ao longo de outra dimensão proporciona mais um parâmetro de ajuste das características de seletividade em frequência, tendo em vista a satisfação dos requisitos de projeto.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, Peng e Morris [19] publicaram um dos primeiros trabalhos apresentando as características de difração de arranjos dielétricos periódicos, com periodicidade em duas dimensões, utilizando o método rigoroso da onda acoplada. Para a comparação direta entre os dois métodos seria necessário generalizar um pouco mais a formulação do presente trabalho, tendo em vista permitir a presença de um substrato dielétrico no qual seria inserido o arranjo de guias de onda dielétricos anisotrópicos retangulares. Para tanto, bastaria modificar a aplicação do teorema da corrente volumétrica equivalente induzida, na formulação apresentada, tendo em vista substituir, nas Equações (2.5)-(2.6), apenas a diferença entre a permissividade do guia periódico e a do substrato pela corrente volumétrica equivalente induzida.

Para se estudar a influência das perdas dielétricas bastaria incluir o coeficiente  $\epsilon''$  na Equação (2.1). Costa [13] constatou que as perdas dielétricas contribuem para a redução do fator Q das anomalias, onde verificou-se que, além das perdas absorverem uma parte da energia do campo incidente, elas influenciam também na composição de fase nas fronteiras, modificando as frequências onde ocorrem as anomalias.

Embora a formulação aqui desenvolvida tenha atingido aos objetivos para os quais foi formulada, ela apresenta uma séria restrição: o tempo de processamento excessivo para analisar o espalhamento de uma camada simples, que pode requerer várias horas de uma das seis CPU's de uma SPARCstation 1.000 da SUN.

Caso haja interesse em explorar estruturas onde a permissividade apresenta distribuição arbitrária na célula, a solução seria investir em outros métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (FEM) e o método das diferenças finitas no domínio dos tempos (FDTD) ou no domínio das frequências (FDFD).

Para resolver numericamente os passos citados nos Capítulos 2, 3 e 4 para a obtenção das características de propagação e do espalhamento em uma camada, foi necessário desenvolver um programa em FORTRAN 77, o qual contém todas as rotinas efetivamente utilizadas para a obtenção dos resultados aqui apresentados. O código fonte do programa pode ser encontrado no relatório técnico RT DMO 033 [28].

# Referências

- [1] T.K. Gaylord e M.G. Moharam, "Analysis and Application of Optical Diffractions by Gratings", *Proceedings IEEE*, vol. 73, pp. 894-938, maio 1985.
- [2] S. T. Peng, T. Tamir e H. L. Bertoni, "Theory of Periodic Dielectric Waveguides", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, pp. 123-133, janeiro 1975.
- [3] C. Elachi, "Waves in Active and Passive Periodic Structures. - A Review", *Proceedings IEEE*, vol. 64, pp. 1666-1698, dezembro 1976.
- [4] "Grating Diffraction", Ed. T. K. Gaylord e E. N. Glytsys, *Journal Opt. Soc. America A*, vol. 7, n. 8, pp. 1357-1566, agosto 1990.
- [5] "Grating Diffraction", Ed. T. K. Gaylord e E. N. Glytsys, *Journal Opt. Soc. America A*, vol. 7, n. 9, pp. 1661-1800, setembro 1990.
- [6] H. L. Bertoni, L. S. Cheo e T. Tamir, "Frequency Selective Reflection and Transmission by a Periodic Layer", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 37, pp. 78-83, janeiro 1989.
- [7] R. Mitra, C. H. Chan e T. Cwik, "Techniques for Analysing Frequency-Selective Surface - A Review", *Proceedings IEEE*, vol. 76, pp. 1593-1615, dezembro 1988.
- [8] C. H. Chan e Raj Mitra, "On the Analysis of Frequency-Selective Surfaces Using Subdomain Basis Functions", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 38, pp. 78-83, janeiro 1990.
- [9] E. A. Parker, A. N. A. El Sheikh e A. C. de C. Lima, "Convolutated Frequency-Selective Array Elements Derived from Linear and Crossed Dipoles", *IEE Proceedings-H*, vol. 140, n. 5, pp. 378-380, outubro 1993.

- [10] S. T. Peng, "Rigorous Formulation of Scattering and Guidance by Dielectric Gratings Waveguides: General Case of Oblique Incidence", *Journal Opt. Soc. America A*, vol. 6, pp. 1869-1883, dezembro 1989.
- [11] J. C. W. Albuquerque Costa e A. J. Giarola, "Electromagnetic Wave Propagation in Multilayer Dielectric Periodic Structures", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.41, pp. 1432-1438, 1996.
- [12] J. C. W. Albuquerque Costa e A. J. Giarola, "Analysis of Dielectric Grating Waveguides for the Design of Dichroic Structures", *International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering*, vol.6, n. 2, pp. 128-145, outubro 1993.
- [13] J. C. W. Albuquerque Costa, "Análise do Comportamento Seletivo em Frequência de Guias de Onda com Grade Dielétrica". Tese de doutoramento aprovada pela comissão julgadora em 11 de abril de 1994 na Universidade Estadual de Campinas.
- [14] E. N. Glitsys e T. K. Gaylord, "Tree-Dimensional Vector Coupled-Wave Analysis of Planar Grating Diffraction", *Journal Opt. Soc. America A*, vol. 73, pp. 1105-1112, agosto 1983.
- [15] E. N. Glitsys e T. K. Gaylord, "Tree-Dimensional (Vector) Rigorous Coupled-Wave Analysis of Anisotropic Grating Diffraction", *Journal Opt. Soc. America A*, vol. 7, pp. 1399-1420, agosto 1990.
- [16] H. Y. Yang, J.A. Castaneda, e N.G. Alexopoulos, "An Integral Equation Analysis of an Infinite Array of Rectangular Dielectric Waveguides", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.38, pp. 873-880, julho 1990.
- [17] H. Y. Yang, "Finite Difference Analysis of 2-D Photonic Crystals", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 44, pp. 2688-2695, dezembro 1996.
- [18] H. Y. Yang, "Characteristics of Guided and Leaky Waves on Multilayer Thin-Film Structures with Planar Material Gratings", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 45, pp. 428-435, março 1997.
- [19] Song Peng e G. M. Morris, "Resonant Scattering from Two-Dimensional Gratings", *Journal Opt. Soc. America A*, vol. 13, n. 5, pp. 993-1005, maio 1996.
- [20] I. T. Lima Jr. e A. J. Giarola, "Electromagnetic Wave Propagation in Two Dimensional Anisotropic Dielectric Gratings". *Proc. 1997 IEEE International Antennas and*

*Propagation Symposium and URSI Radio Science Meeting*, Montreal, Canadá, pp. 2.400-2.403, junho 1997.

- [21] I. T. Lima Jr. e A. J. Giarola, "Electromagnetic Wave Propagation in a Periodic Array of Rectangular Dielectric Waveguides", *Proc. 1997 SBMO/IEEE Microwave Theory and Techniques International Microwave and Optoelectronics Conference*, Natal-RN, Brasil, pp. 413-418, agosto 1997.
- [22] I. T. Lima Jr. e A. J. Giarola, "Analysis of Two-Dimensional Dielectric Gratings for the Design of Dichroic Structures", *Proc. 22nd International Conference on Infrared and Millimeter Waves*, Wintergreen, Virginia, USA, p. 342, junho 1997.
- [23] C. T. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, IEEE PRESS Series on Electromagnetic Waves, 2nd ed., 1994.
- [24] E.A. Marcatili, "Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics", *Bell Syst. Tech. J.*, pp. 2071-2103, setembro 1969.
- [25] C. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley, 1989.
- [26] L.R. Lewys e A. Hessel, "Propagation Characteristics of Periodic Array of Dielectric Slabs", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.19, pp. 276-286, março 1971.
- [27] J.E. Goel, "Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics", *Bell Syst. Tech. J.*, pp. 2071-2103, setembro 1969.
- [28] I. T. Lima Jr. e A. J. Giarola, "Programa de Simulação da Tese: Análise das Características Seletivas em Frequência de Grades Dielétricas com Periodicidade em Duas Dimensões", Relatório Técnico DMO 033, fevereiro 1998.
- [29] N. F. L. da Silva, J. C. W. Albuquerque Costa e A. J. Giarola, "Multilayer Anisotropic Dielectric Grating Waveguides", *Proc. 1997 SBMO/IEEE Microwave Theory and Techniques International Microwave and Optoelectronics Conference*, Natal-RN, Brasil, pp. 425-430, agosto 1997.

## Apêndice A

# Vetor Potencial de Hertz Elétrico

O vetor potencial de Hertz, do tipo elétrico, pode se definido como

$$\vec{\Pi}_e = \Pi_x \hat{x} + \Pi_y \hat{y} + \Pi_z \hat{z}, \quad (\text{A.1})$$

tal que

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{\Pi}_e. \quad (\text{A.2})$$

Com  $\vec{H}$  dado por (A.2), substituído na equação de Maxwell,  $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o \vec{H}$ , fornece

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o \nabla \times \vec{\Pi}_e. \quad (\text{A.3})$$

A expressão (A.3) pode ser obtida do rotacional da seguinte expressão

$$\vec{E} = -j\omega\mu_o \vec{\Pi}_e + \nabla\phi_e, \quad (\text{A.4})$$

tendo em vista a seguinte identidade vetorial  $\nabla \times \nabla\phi_e = 0$ . Fica, deste modo, definido o potencial escalar de Hertz do tipo elétrico,  $\phi_e$ .

Pode-se, agora, substituir  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$ , dados por (A.2) e (A.4), respectivamente, na outra equação de Maxwell,  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + j\omega\varepsilon_o \vec{E}$ , fornecendo o seguinte resultado

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e = \vec{J}_e + j\omega\varepsilon_o \left[ -j\omega\mu_o \vec{\Pi}_e + \nabla\phi_e \right], \quad (\text{A.5})$$

ou

$$\left[ \nabla (\nabla \cdot \vec{\Pi}_e) - j\omega\varepsilon_o \nabla\phi_e \right] = \vec{J}_e + \nabla^2 \vec{\Pi}_e + k_o^2 \vec{\Pi}_e, \quad (\text{A.6})$$

onde  $k_o^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o$  é o quadrado do número de onda do espaço livre.

Para que a definição de  $\vec{\Pi}_e$  seja unívoca, é necessário, além de (A.2), a imposição de uma condição restritiva em  $\vec{\Pi}_e$ , à semelhança da imposição de uma condição de Lorentz (Lorentz Gauge) em potenciais vetoriais. Será imposta a seguinte condição de calibre

$$\nabla \left( \nabla \cdot \vec{\Pi}_e \right) = j\omega\varepsilon_o \nabla \phi_e. \quad (\text{A.7})$$

Como resultado,  $\vec{\Pi}_e$  deverá satisfazer à equação não homogênea de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_e + k_o^2 \vec{\Pi}_e = -\vec{J}_e \quad (\text{A.8})$$

e os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  serão dados por

$$\vec{E} = -j\omega\mu_o \vec{\Pi} + \frac{1}{j\omega\varepsilon_o} \nabla \left( \nabla \cdot \vec{\Pi}_e \right), \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{\Pi}_e. \quad (\text{A.10})$$

## Apêndice B

# Expressões Algébricas

Neste apêndice são mostradas as expressões algébricas completas das equações que foram desenvolvidas no decorrer deste trabalho mas que, por conveniência, não foram apresentadas ou foram apresentadas apenas em sua forma integro-diferencial.

Seguem, abaixo, expressões algébricas das equações integrais mostradas no Capítulo 2:

$$\text{Eq.(2.61):} \quad \Omega_{v,k} = \frac{\text{sen}[(k_{xlv} - k_{xk})\frac{l}{2}]}{(k_{xlv} - k_{xk})\frac{l}{2}} \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Eq.(2.62):} \quad f_{n,k} = \frac{2 \text{sen}[(k_{xn} - k_{xk})\frac{l}{2}]}{k_{xn} - k_{xk}} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Eq.(2.64):} \quad H_i^1 = \frac{-2 \text{sen}(k_{ak}^i \frac{d}{2})}{k_{ak}^i [(k_{ak}^i)^2 - k_{yn}^2]} + \frac{\text{sen}(k_{yn} \frac{d}{2})}{k_{yn}^2 \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen}[(k_{ak}^i - k_{yn})\frac{d}{2} + k_{yn} \frac{b}{2}]}{k_{ak}^i - k_{yn}} \\ + \frac{\text{sen}[(k_{ak}^i + k_{yn})\frac{d}{2} - k_{yn} \frac{b}{2}]}{k_{ak}^i + k_{yn}} \end{array} \right\}, i = x, y, \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Eq.(2.65):} \quad H_i^2 = \frac{2[\cos(k_{ak}^i \frac{d}{2}) - 1]}{k_{ak}^i [(k_{ak}^i)^2 - k_{yn}^2]} + \frac{1 - \cos(k_{yn} \frac{d}{2})}{k_{yn}^2 \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen}[(k_{ak}^i - k_{yn})\frac{d}{2} + k_{yn} \frac{b}{2}]}{k_{ak}^i - k_{yn}} \\ - \frac{\text{sen}[(k_{ak}^i + k_{yn})\frac{d}{2} - k_{yn} \frac{b}{2}]}{k_{ak}^i + k_{yn}} \end{array} \right\}, i = x, y, \quad (\text{B.4})$$

Eq.(2.66):

$$H_i^3 = \frac{2[1-\cos(k_{ak}^i \frac{d}{2})]}{(k_{ak}^i)^2 - k_{yn}^2} + \frac{\cos(k_{yn} \frac{d}{2}) - 1}{k_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \left\{ \frac{\text{sen}[(k_{ak}^i - k_{yn}) \frac{d}{2} + k_{yn} \frac{b}{2}]}{k_{ak}^i - k_{yn}} + \frac{\text{sen}[(k_{ak}^i + k_{yn}) \frac{d}{2} - k_{yn} \frac{b}{2}]}{k_{ak}^i + k_{yn}} \right\}, i = x, y, \quad (\text{B.5})$$

Eq.(2.67):

$$H_i^4 = \frac{-2 \text{sen}(k_{ak}^i \frac{d}{2})}{(k_{ak}^i)^2 - k_{yn}^2} - \frac{\text{sen}(k_{yn} \frac{d}{2})}{k_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \left\{ \frac{\text{sen}[(k_{ak}^i + k_{yn}) \frac{d}{2} - k_{yn} \frac{b}{2}]}{k_{ak}^i + k_{yn}} - \frac{\text{sen}[(k_{ak}^i - k_{yn}) \frac{d}{2} + k_{yn} \frac{b}{2}]}{k_{ak}^i - k_{yn}} \right\}, i = x, y, \quad (\text{B.6})$$

Eq.(2.68):

$$f_{ia} = \frac{\text{sen}(k_{ak}^i \frac{d}{2})}{k_{ak}^i}, i = x, y, \quad (\text{B.7})$$

Eq.(2.69):

$$f_{ib} = \frac{[1-\cos(k_{ak}^i \frac{d}{2})]}{k_{ak}^i}, i = x, y. \quad (\text{B.8})$$

Expressões algébricas das equações integrais mostradas no Capítulo 3:

Eq.(3.29):

$$\begin{aligned} \Pi_{1mnrx} &= \frac{j\omega\epsilon_o(\epsilon_{ri}-1)A_{gk}f_{n,k}}{-2abk_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \{I_{ax} + I_{bx} + I_{cx}\}, \\ \Pi_{2mnrx} &= \frac{j\omega\epsilon_o(\epsilon_{ri}-1)A_{gk}f_{n,k}}{-2abk_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \{I_{ay} + I_{by} + I_{cy}\}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Eq.(3.30):

$$\begin{aligned} \Pi_{1mnry} &= \frac{j\omega\epsilon_o(\epsilon_{ri}-1)B_{gk}f_{n,k}}{-2abk_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \{I_{ay} + I_{by} + I_{cx}\}, \\ \Pi_{2mnry} &= \frac{j\omega\epsilon_o(\epsilon_{ri}-1)B_{gk}f_{n,k}}{-2abk_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \{I_{ax} + I_{bx} + I_{cx}\}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Eq.(3.31):

$$\begin{aligned} \Pi_{1mnrz}^{\pm} &= \frac{j\omega\epsilon_o(\epsilon_{zz}-1)[\mp k_{xk}\epsilon_{xx}A_{gk} \pm jk_{ak}^y\epsilon_{yy}B_{gk}]f_{n,k}}{-2ab\beta_{gm}\epsilon_{zz}k_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \{I_{ax} + I_{bx} + I_{cx}\}, \\ \Pi_{2mnrz}^{\pm} &= \frac{j\omega\epsilon_o(\epsilon_{zz}-1)[\mp k_{xk}\epsilon_{xx}A_{gk} \pm jk_{ak}^y\epsilon_{yy}B_{gk}]f_{n,k}}{-2ab\beta_{gm}\epsilon_{zz}k_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})} \{I_{ay} + I_{by} + I_{cy}\}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde,

$$I_{ai} = \frac{-2k_{yn} \text{sen}(k_{yn} \frac{b}{2})}{(k_{ak}^i)^2 - (k_{yn})^2} \left\{ \frac{\text{sen}[(k_{yr} + k_{ak}^i) \frac{d}{2}]}{k_{yr} + k_{ak}^i} + \frac{\text{sen}[(k_{yr} - k_{ak}^i) \frac{d}{2}]}{k_{yr} - k_{ak}^i} \right\} \quad (\text{B.12})$$

$$+ \left\{ \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^i - k_{yn}) \frac{d}{2} + k_{yn} \frac{b}{2} \right]}{k_{ak}^i - k_{yn}} + \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^i + k_{yn}) \frac{d}{2} - k_{yn} \frac{b}{2} \right]}{k_{ak}^i + k_{yn}} \right\} \\ \left\{ \frac{\text{sen} \left[ (k_{yr} + k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{yr} + k_{yn}} + \frac{\text{sen} \left[ (k_{yr} - k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{yr} - k_{yn}} \right\}, i = x, y,$$

$$I_{bx} = \frac{1}{(k_{yn})^2 - (k_{yr})^2} \left\{ \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^x - k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{ak}^x - k_{yn}} + \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^x + k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{ak}^x + k_{yn}} \right\} \quad (\text{B.13}) \\ \left\{ \begin{array}{l} -j k_{yr} \cos \left( k_{yr} \frac{b}{2} \right) - k_{yr} \text{sen} \left( k_{yr} \frac{b}{2} \right) \\ + \left[ j k_{yr} \cos \left[ k_{yn} \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] + k_{yn} \text{sen} \left[ k_{yn} \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] \right] \\ \left[ \cos \left( k_{yr} \frac{d}{2} \right) - j \text{sen} \left( k_{yr} \frac{d}{2} \right) \right] \end{array} \right\},$$

$$I_{cx} = \frac{1}{(k_{yn})^2 - (k_{yr})^2} \left\{ \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^x - k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{ak}^x - k_{yn}} + \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^x + k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{ak}^x + k_{yn}} \right\} \quad (\text{B.14}) \\ \left\{ \begin{array}{l} j k_{yr} \cos \left( k_{yr} \frac{b}{2} \right) - k_{yr} \text{sen} \left( k_{yr} \frac{b}{2} \right) \\ + \left[ -j k_{yr} \cos \left[ k_{yn} \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] + k_{yn} \text{sen} \left[ k_{yn} \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] \right] \\ \left[ \cos \left( k_{yr} \frac{d}{2} \right) + j \text{sen} \left( k_{yr} \frac{d}{2} \right) \right] \end{array} \right\},$$

$$I_{by} = \frac{1}{(k_{yn})^2 - (k_{yr})^2} \left\{ \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^y - k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{ak}^y - k_{yn}} - \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^y + k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{ak}^y + k_{yn}} \right\} \quad (\text{B.15}) \\ \left\{ \begin{array}{l} -k_{yn} \cos \left( k_{yr} \frac{b}{2} \right) - j k_{yn} \text{sen} \left( k_{yr} \frac{b}{2} \right) \\ + \left[ -k_{yn} \cos \left[ k_{yn} \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] + k_{yr} \text{sen} \left[ k_{yn} \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] \right] \\ \left[ \cos \left( k_{yr} \frac{d}{2} \right) - j \text{sen} \left( k_{yr} \frac{d}{2} \right) \right] \end{array} \right\},$$

$$I_{cy} = \frac{1}{(k_{yn})^2 - (k_{yr})^2} \left\{ \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^y - k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{ak}^y - k_{yn}} - \frac{\text{sen} \left[ (k_{ak}^y + k_{yn}) \frac{d}{2} \right]}{k_{ak}^y + k_{yn}} \right\} \quad (\text{B.16}) \\ \left\{ \begin{array}{l} -k_{yn} \cos \left( k_{yr} \frac{b}{2} \right) - j k_{yn} \text{sen} \left( k_{yr} \frac{b}{2} \right) \\ + \left[ k_{yn} \cos \left[ k_{yn} \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] + j k_{yr} \text{sen} \left[ k_{yn} \left( \frac{b}{2} - \frac{d}{2} \right) \right] \right] \\ \left[ \cos \left( k_{yr} \frac{d}{2} \right) + j \text{sen} \left( k_{yr} \frac{d}{2} \right) \right] \end{array} \right\},$$

Em seguida, são mostradas as expressões completas das sub-matrizes  $m_{vi}$ , que são os elementos da matrizes (3.58) e (3.62), que relacionam os coeficientes da camada  $i$  aos



$$m_{41}^{\tau} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \Delta_{2\tau k}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y - \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{2\tau k}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Delta_{2\tau k}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y - \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{2\tau k}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y \\ + \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau k}^y \Gamma_{2\tau k}^x \Gamma_{2\tau i}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{2\tau k}^x \Gamma_{2\tau i}^y - \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{2\tau k}^y - \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau k}^y \end{array} \right]}{2(\Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y) (\Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y) e^{-j\phi_{\tau i}}}, \quad (\text{B.29})$$

$$m_{42}^{\tau} = \frac{\left[ \begin{array}{l} -\Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau k}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y - \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau k}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau k}^y \\ -\Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau k}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y - \Delta_{1\tau k}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y + \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y \Gamma_{1\tau k}^x \Gamma_{2\tau i}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{1\tau k}^x \Gamma_{2\tau i}^y \end{array} \right]}{2(\Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y) (\Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y) e^{-j\phi_{\tau i}}}, \quad (\text{B.30})$$

$$m_{43}^{\tau} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \Delta_{2\tau k}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y - \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{2\tau k}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Delta_{2\tau k}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y - \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{2\tau k}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y \\ -\Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau k}^y \Gamma_{2\tau k}^x \Gamma_{2\tau i}^y - \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{2\tau k}^x \Gamma_{2\tau i}^y + \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{2\tau k}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau k}^y \end{array} \right]}{2(\Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y) (\Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y) e^{-j\phi_{\tau i}}}, \quad (\text{B.31})$$

$$m_{44}^{\tau} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau k}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau k}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau k}^y \\ + \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau k}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y + \Delta_{1\tau k}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y + \Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y \Gamma_{1\tau k}^x \Gamma_{2\tau i}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y \Gamma_{1\tau k}^x \Gamma_{2\tau i}^y \end{array} \right]}{2(\Delta_{2\tau i}^x \Delta_{1\tau i}^y + \Delta_{1\tau i}^x \Delta_{2\tau i}^y) (\Gamma_{2\tau i}^x \Gamma_{1\tau i}^y + \Gamma_{1\tau i}^x \Gamma_{2\tau i}^y) e^{-j\phi_{\tau i}}}. \quad (\text{B.32})$$

Onde os parâmetros  $\Delta$  e  $\Gamma$  se encontram desenvolvidos no Capítulo 3, e

$$\phi_{\tau i} = \begin{cases} -h_{si}, & \tau = s \\ h_{ci}, & \tau = c \end{cases}. \quad (\text{B.33})$$