

Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



Rubens Hideo Korogui

**Filtragem Robusta, Modelos com
Atrasos e Certificação de Desempenho**
Aplicação em Sistemas Elétricos

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Automação.

Orientador: **Prof. Dr. José Claudio Geromel**

Campinas, SP
2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

K843f Korogui, Rubens Hideo
Filtragem robusta, modelos com atraso e certificação
de desempenho: aplicação em sistemas elétricos /
Rubens Hideo Korogui. – Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientador: José Claudio Geromel.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Sistemas de lineares. 2. Teoria de controle. 3.
Sistemas de controle por realimentação. 4. Kalman,
Filtragem de. I. Geromel, José Claudio. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica
e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Robust filtering, time-delay models and performance
certificate: application to electric systems
Palavras-chave em Inglês: Linear systems, Control theory, Feedback control systems,
Filtering, Kalman
Área de concentração: Automação
Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora: Alexandre Trofino Neto, João Manoel Gomes da Silva Jr.,
João Marcos Travassos Romano, Renato da Rocha Lopes
Data da defesa: 08/05/2009
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica.

Rubens Hideo Korogui

Engenheiro EletricistaFEEC/UNICAMP(2004)

Mestre em Engenharia ElétricaFEEC/UNICAMP(2006)

Filtragem Robusta, Modelos com Atrasos e Certificação de Desempenho

Aplicação em Sistemas Elétricos

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação.

Data da defesa: 08 de Maio de 2009.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Claudio Geromel

Orientador

Prof. Dr. Alexandre Trofino NetoDAS/UFSC

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.UFRGS-RS

Prof. Dr. João Marcos Travassos RomanoFEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Renato da Rocha LopesFEEC/UNICAMP

Campinas, SP

2009

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Rubens Hideo Korogui

Data da Defesa: 8 de maio de 2009

Título da Tese: "Filtragem Robusta, Modelos com Atrasos e Certificação de Desempenho - Aplicação a Sistemas Elétricos"

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente): _____

Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto: _____

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior: _____

Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes: _____

Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano: _____

Resumo

Uma das temáticas abordadas neste trabalho é o problema de filtragem robusta em norma \mathcal{H}_2 para sistemas lineares a tempo contínuo e a tempo discreto. Consideramos que os sistemas estão sujeitos a incertezas paramétricas inicialmente do tipo politópicas e, em seguida, do tipo que admite representação linear fracionária. Calculamos limitantes inferior e superior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação, resolvendo-se problemas minimax, escrevendo-os em formato de desigualdades matriciais lineares LMI. Dessa maneira calculamos um intervalo de otimalidade que permite certificar o desempenho do filtro robusto projetado. Em seguida, aplicamos a metodologia proposta em problemas de estimação envolvendo um motor de indução trifásico e uma linha de transmissão com derivação. O presente trabalho também apresenta o que chamamos de sistema linear de comparação, cuja proposta é servir como alternativa para estudar sistemas com atraso. Utilizando a substituição de Rekasius construímos um sistema linear invariante no tempo que permite obter informações sobre a estabilidade e o cálculo de norma \mathcal{H}_∞ para sistemas desta classe. Em vista da formulação através de matrizes de representação de estado é possível estender sem maiores dificuldades os resultados para o projeto de controladores via realimentação de estado e de filtros para sistemas com atraso.

Palavras-chave: Sistemas lineares, filtragem robusta \mathcal{H}_2 , certificação de desempenho, sistemas com atraso, teoria \mathcal{H}_∞ .

Abstract

One of the themes considered in this work is the robust \mathcal{H}_2 filtering design problem for linear time invariant continuous and discrete time systems. We assume that the systems are subject to parametric uncertainty, initially of the polytopic type and later as linear fractional transformation parametric uncertainties. We calculate lower and upper bounds to the \mathcal{H}_2 squared norm of the estimation error by means of the equilibrium solution of a minimax problem, that can be formulated in a linear matrix inequality framework. Under this approach we provide an optimality gap that allows us to certify the performance of the designed robust filter. Afterwards, we apply the proposed methodology to estimation problems involving a three-phase induction motor and a transmission line with a stub. This work also considers what we call a linear comparison system, whose goal is to serve as an alternative to study time-delay systems. Using the Rekasius substitution we construct a linear time invariant system that allows us to get information about stability and \mathcal{H}_∞ norm of this class of systems. Based on this approach in terms of state space matrices it is possible to extend the results to state feedback design and filtering design without any further assumptions.

Keywords: Linear systems, robust \mathcal{H}_2 filtering, performance certificate, time delay systems, \mathcal{H}_∞ theory.

Agradecimentos

Antes de iniciar tecnicamente este trabalho, gostaria de agradecer ao professor Geromel pelo entusiasmo com que se dedica à pesquisa, que me serve de estímulo para continuar trilhando este caminho, e também pelas discussões que me permitiram amadurecer como pesquisador. Não poderia deixar de mencionar também os mais de 150 cafés pagos na cantina, fundamentais para a conclusão deste trabalho!

É com imensa gratidão que cito também meus pais Takehiko e Esmeralda, que muito me incentivaram durante toda a minha trajetória acadêmica, além de minha irmã Cristina que me apoiou e torceu com bastante intensidade pelo meu sucesso.

Queria deixar também algumas palavras aos meus amigos do Clube dos 13: Pateta, Elias, Leo, Roger, Anzai, Kazuo, Filipe, Rafael, Ricardo, Cincoetti, Sako, Tiago e Mitsumoto. Os quais tenho certeza de que não deixaram de torcer pelo meu sucesso desde a época da graduação. É uma pena que as restrições geográficas tornaram as agradáveis patuscadas mais raras. Um abraço a todos!

E é claro, não posso deixar de mencionar a grande importância da convivência com Andrea Martin, que nos últimos anos vem mostrando uma criatividade bastante singular, provavelmente assessorada por algumas pessoas do parágrafo anterior, ao escolher os presentes de aniversário que ganhei nos últimos anos.

Não posso deixar de mencionar as discussões teóricas (às vezes medonhas) que tive com meu amigo fugido do país, André Fioravanti, que muito contribuíram para o andamento das pesquisas e, em particular, devo a ele os dados do Exemplo 6.5. Seria também uma injustiça não mencionar a importância da convivência com o Alim, que além dos auxílios técnicos me proporcionou vários momentos interessantes de reflexão sobre política, economia, educação e afins. Por último, mas não menos importante, destaco o grande apoio técnico e da ala feminina no laboratório, representada pela Grace.

Preciso deixar registrado que esta tese não estaria completa sem a ajuda de minha amiga de longa data Taís Nitsch Mazzola, a quem devo o título deste trabalho. Também quero deixar algumas linhas um grande abraço ao pessoal do fretado de Jundiaí, em especial a Vitória Cipolla, Luís Peroni, Rodrigo Muraro, Gustavo Almeida, Priscila Vagione, Karina Maretti e Maria Clara Fregolente.

Seria injusto que não agradecesse também à Zilda Padovan e ao Edmundo Gomes pelos inúmeros socorros prestados durante todos esses anos dentro da FEEC.

E é claro que sem o apoio financeiro da FAPESP não seria possível concluir o texto que é apresentado em seguida.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xvii
1 Introdução	1
1.1 Notação	4
2 Fundamentos matemáticos	5
2.1 Definição do problema de filtragem	5
2.2 Filtragem em norma \mathcal{H}_2	6
2.2.1 Sistemas a tempo contínuo	8
2.2.2 Sistemas a tempo discreto	9
2.3 Filtragem robusta de sistemas LTI	10
2.4 Norma \mathcal{H}_∞ de sistemas LTI	11
2.4.1 Realimentação de estado	13
2.4.2 Filtragem	15
2.5 Considerações finais	17
3 Filtragem linear robusta em norma \mathcal{H}_2	19
3.1 Formulação do problema de filtragem robusta	20
3.2 Filtragem ótima robusta em norma \mathcal{H}_2	22
3.3 Desempenho otimista	24
3.4 Desempenho robusto	31
3.5 Exemplos	35
3.5.1 Sistemas a tempo contínuo	36
3.5.2 Sistemas a tempo discreto	40
3.6 Considerações finais	42
4 Sistemas sujeitos a incertezas com representação linear-fracionária	43
4.1 Formulação do problema	44
4.2 Desempenho otimista	46

4.3	Desempenho robusto	47
4.4	Exemplos	53
4.4.1	Sistemas a tempo contínuo	53
4.4.2	Sistema a tempo discreto	56
4.5	Considerações finais	57
5	Problemas práticos de filtragem robusta em norma \mathcal{H}_2	59
5.1	Motor de indução trifásico	60
5.2	Linha de transmissão com derivação	63
5.3	Considerações finais	70
6	Análise de sistemas com atraso através de funções racionais	71
6.1	Sistemas com retardo e sistema de comparação	73
6.2	Análise de estabilidade	75
6.2.1	Exemplos	78
6.3	Cálculo de norma \mathcal{H}_∞	83
6.3.1	Exemplos	86
6.4	Realimentação de estado	89
6.4.1	Exemplos	93
6.5	Projeto de filtros	96
6.5.1	Exemplo	105
6.6	Sistemas neutros	108
6.6.1	Exemplos	111
6.7	Considerações finais	114
7	Conclusões e perspectivas	115
	Referências bibliográficas	117
A	Resultados auxiliares	123

Lista de Figuras

2.1	Estrutura de filtragem	5
4.1	Estrutura de filtragem para sistemas LFT.	44
5.1	Simulação temporal para o motor de indução.	63
5.2	Esquema de uma linha de transmissão.	64
5.3	Linha operando a 1 kHz.	66
5.4	Linha operando a 20 kHz.	66
5.5	Simulação temporal para o filtro conectado à linha.	69
5.6	Diagramas de valores singulares para o erro de estimação.	69
6.1	Mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ para $\kappa = 1,5$	80
6.2	Mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ para $\kappa = 1,0$	80
6.3	Mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ para o Exemplo 6.5.	81
6.4	Norma \mathcal{H}_∞ em função do atraso para o Exemplo 6.6.	87
6.5	Norma \mathcal{H}_∞ em função do atraso para o Exemplo 6.7.	88
6.6	Comparação entre limitantes inferiores para $\ T(\tau, s)\ _\infty$	88
6.7	Norma \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada do Exemplo 6.8.	94
6.8	Norma \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada do Exemplo 6.9.	95
6.9	Norma \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada do Exemplo 6.10.	95
6.10	Norma \mathcal{H}_∞ do erro de estimação versus atraso.	106
6.11	Diagramas de valores singulares.	106
6.12	Diagramas de valores singulares para os filtros LTI e não-racional.	107
6.13	Simulação temporal para o desempenho do filtro.	108
6.14	Mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^*, j\omega)$ para o Exemplo 6.12.	111
6.15	Norma \mathcal{H}_∞ versus atraso para o sistema neutro do Exemplo 6.12.	112
6.16	Comportamento de τ versus λ para o sistema neutro do Exemplo 6.12.	112
6.17	Norma \mathcal{H}_∞ versus atraso para o sistema neutro do Exemplo 6.13.	113

Lista de Tabelas

3.1	Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo contínuo - Exemplo 3.1.	37
3.2	Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo contínuo [29] - Exemplo 3.1.	38
3.3	Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo discreto - Exemplo 3.4.	40
3.4	Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo discreto - Exemplo 3.5.	41
3.5	Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo discreto - Exemplo 3.6.	42
4.1	Sistema LFT a tempo contínuo - Exemplo 4.1.	54
4.2	Sistema LFT a tempo discreto - Exemplo 4.3.	57
5.1	Valores nominais dos parâmetros do motor de indução [13].	61
5.2	Desempenho \mathcal{H}_2 para o filtro do motor de indução.	62
5.3	Filtragem para a linha de transmissão.	68

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^{n \times m}$	- Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$.
$\mathbb{C}^{n \times m}$	- Conjunto das matrizes complexas de dimensão $n \times m$.
\mathbb{R}	- Conjunto dos números reais.
\mathbb{Z}	- Conjunto dos números inteiros.
X'	- Transposto da matriz X .
X^{\sim}	- Transposto conjugado da matriz X .
$X \geq (>)0$	- Matriz simétrica X é semi-definida (definida) positiva.
$X \leq (<)0$	- Matriz simétrica X semi-definida (definida) negativa.
$\sigma(X)$	- Valor singular máximo da matriz X .
j	- $\sqrt{-1}$
$\text{co}\{\cdot\}$	- Combinação convexa.
$\text{diag}\{X, Y\}$	- Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes X e Y .
$\det X$	- Determinante da matriz X .
$\text{tr}(X)$	- Traço da matriz X , que é igual à soma de seus autovalores.
X^{-1}	- Inversa da matriz X .
*	- Cada um dos elementos simétricos em relação à diagonal principal de uma matriz simétrica
\square	- Fim de prova.
\diamond	- Fim de exemplo.

Trabalhos Publicados Pelo Autor

- J. C. Geromel , R. H. Korogui and J. Bernussou. “On \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Robust Output Feedback Control for Continuous-Time Polytopic Systems”. IET Control Theory & Applications. Vol. 1, No 5, pp. 1541-1549, September 2007.
- J. C. Geromel and R. H. Korogui. “ \mathcal{H}_2 Robust Filter Design with Performance Certificate via Convex Programming”. *Automatica*, Vol. 44, No. 4, pp.937-948, April 2008.
- R. H. Korogui and J. C. Geromel. ”Robust \mathcal{H}_2 Filtering Filtering for LTI Systems with Linear Fractional Representation”. To appear in the International Journal of Control, 2009.
- R. H. Korogui and J. C. Geromel. “Robust \mathcal{H}_2 Filtering for Continuous- time Systems with Linear Fractional Representation”. *In Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, pp. 1164-1170, Seoul, South Korea, July 2008.
- R. H. Korogui and J. C. Geromel. “Robust \mathcal{H}_2 Filtering for Discrete LTI Systems with Linear Fractional Representation”. *In Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1164-1170, Cancun, Mexico, December 2008.

Capítulo 1

Introdução

Antes de iniciarmos uma discussão mais aprofundada a respeito dos temas tratados neste trabalho, apresentamos um panorama geral dos próximos capítulos, que abordam o problema de filtragem robusta, o estudo de sistemas com atraso e algumas aplicações práticas em engenharia elétrica.

O problema de estimação é bastante antigo e pode ser dividido em duas categorias. Uma delas consiste em estimar uma grandeza corrompida por ruído, separando-o daquilo que realmente desejamos conhecer. Outra categoria de problemas de estimação corresponde a estimar uma grandeza não mensurável a partir de informações sobre alguma outra acessível. Em ambas as situações é necessário projetar um dispositivo denominado filtro cujo objetivo é fornecer a grandeza de interesse, geralmente lançando mão de algumas informações a respeito dos ruídos presentes no sistema [1]. No contexto de filtragem robusta trabalhamos com a hipótese adicional de que o sistema que fornece as grandezas de nosso interesse apresenta incertezas paramétricas, de modo que uma especificação para o projeto é a de que o erro entre a saída do filtro e a grandeza a ser estimada seja o menor possível para a situação de incerteza mais desfavorável. Em teoria de controle é comum quantificarmos a medida do erro de estimação através de uma norma, que é uma função convexa [4], e de posse do modelo matemático para o sistema em estudo é possível formular o problema de projeto do filtro robusto como um problema *minimax* [58]. Utilizando este procedimento mostramos neste trabalho que é possível manipular convenientemente a formulação *minimax* a fim de calcularmos limitantes inferior e superior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação.

Dentre as classes de incertezas paramétricas consideramos no presente texto aquelas que pertencem a um conjunto convexo, mas que podem interferir no modelo matemático de duas maneiras. Tratamos as incertezas que afetam de maneira linear as matrizes da representação de estado do sistema, os quais são classificados como sistemas politópicos [25]. Por sua vez, há as incertezas que afetam de maneira não linear as matrizes de representação de estado e o nosso

interesse reside naquelas que podem ser escritas no formato *linear fracionário* [33], [36], [52]. Para as duas classes de incertezas propomos projetar filtros robustos sem a limitação de que a sua ordem seja igual à ordem do sistema, com o objetivo de obtermos um filtro com desempenho melhor em relação aos resultados propostos na literatura conhecida até o momento.

Utilizando nossa abordagem para o projeto de filtros robustos, aplicamos o procedimento descrito neste trabalho na estimação do fluxo magnético no entreferro de um motor de indução trifásico e também na estimação de tensões em uma linha de transmissão monofásica na qual há um terminal de derivação. Com relação ao motor de indução, consideramos um modelo clássico existente na literatura [13], [42], de modo que sob a hipótese de incerteza no valor de uma indutância de acoplamento o modelo matemático é escrito em formato linear fracionário ou também conhecido como LFT¹. Para o problema de filtragem envolvendo a linha de transmissão desenvolvemos um modelo expresso por equações a diferenças, que envolve os coeficientes de reflexão de tensão em seus terminais. Nesta situação também verificamos que se houver incerteza em qualquer coeficiente de reflexão o modelo matemático é representado em formato LFT.

Em relação ao outro tema apresentado neste trabalho, os sistemas com atraso pertencem a uma classe de equações diferenciais funcionais, caracterizadas por possuírem dimensão infinita. O grande interesse nessa área pode ser explicado por alguns fatores [31], [57]. Primeiramente é inegável o fato de que os sistemas físicos apresentam atraso em sua dinâmica interna, além do fato que sensores, atuadores e canais de comunicação utilizados em sistemas em malha fechada também introduzem atrasos. Em segundo lugar, as técnicas clássicas de projeto de sistemas de controle não conseguem ser aplicadas a esse tipo de sistemas, a ponto de fazê-los atingir um desempenho satisfatório. Em terceiro lugar, há situações em que a inserção voluntária de atrasos pode melhorar o desempenho dos sistemas de controle [71]. Por fim, os sistemas com atraso podem surgir como simplificações em modelos descritos por equações diferenciais parciais [31].

Sob essas perspectivas, a busca por procedimentos eficientes de análise e de projeto de sistemas de controle que apresentem atrasos em sua dinâmica ou na saída tem sido exaustivamente reportadas na literatura. Uma abordagem para os problemas que envolvam atrasos consiste em aproximar o operador atraso $e^{-\tau s}$ (no domínio da frequência) por uma função de transferência racional, dentre as quais podemos citar a aproximação de Padé [46]. Entretanto, para obtermos resultados cada vez mais precisos é imprescindível considerarmos funções de transferências racionais de ordem cada vez mais elevada [72], que por sua vez levam a um aumento de complexidade no projeto de filtros e controladores. Na tentativa de exportar as condições de estabilidade de sistemas com funções de transferências racionais para os sistemas com atraso são utilizadas com alternativa as funções de *Lyapunov-Krasovskii* [16], [10] que permitem estender o conceito de

¹Do inglês Linear Fractional Transformation [73].

estabilidade quadrática.

Neste trabalho abordamos os problemas envolvendo sistemas lineares sujeitos a atraso utilizando a *substituição de Rekasius* [56], que nos permite substituir o operador atraso (que é uma função de transferência não racional) por uma função de transferência racional de primeira ordem. Dessa maneira, ao invés de manipularmos um sistema LTI² de dimensão infinita [57] nós consideramos outro de dimensão finita. Esta substituição não é uma mera aproximação [50], [51], [68], na realidade ela é exata em uma determinada circunstância, motivo pelo qual os resultados apresentados na literatura para cálculo da margem de estabilidade de sistemas com atraso são bastante precisos.

Em vista desse fato damos ênfase ao estudo de estabilidade de sistemas com atraso manipulando suas matrizes de representação de estado de maneira a definir um sistema LTI, denominado *sistema de comparação*, o qual pretendemos empregar como alternativa à manipulação do sistema original, com atraso. A grande vantagem deste procedimento é o de que as ferramentas para análise e projeto de sistemas de controle lineares são inúmeras na literatura e tem se mostrado bastante eficientes. Assim, estabelecemos uma analogia entre o estudo de estabilidade de sistemas com atraso e de sistemas de comparação empregando o critério de Nyquist [5] e mostramos também de que forma é possível avaliar o desempenho dos primeiros, no contexto de norma \mathcal{H}_∞ , utilizando as informações sobre os segundos. Os resultados obtidos em análise nos possibilitou estendê-los para o projeto de controladores via realimentação de estado e de filtros, ainda considerando o desempenho em norma \mathcal{H}_∞ .

Sob este panorama, os capítulos subsequentes estão divididos de acordo com o seguinte conteúdo:

Capítulo 2: Neste capítulo definimos o problema de filtragem e, em particular o problema de filtragem em norma \mathcal{H}_2 , dando particular atenção à sua formulação através de problemas de otimização convexos. Também consideramos os problemas de projeto de controladores via realimentação de estado e de filtros para sistemas LTI no contexto de norma \mathcal{H}_∞ , mediante o cálculo das suas soluções centrais, obtidas de soluções de desigualdades de Riccati. Também mostramos como converter o cálculo da solução central para os dois problemas para o contexto de LMIs.

Capítulo 3: Abordamos neste capítulo o problema de filtragem robusta para sistemas LTI politópicos tanto no contexto de sistemas a tempo contínuo, como no contexto de sistemas a tempo discreto. Propomos o cálculo de limitantes inferior e superior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação através da resolução de problemas convexos e comparamos nossa

²Do inglês Linear Time Invariant.

proposta de projeto com alguns resultados da literatura.

Capítulo 4: No Capítulo 4 estendemos os resultados sobre filtragem robusta para tratarmos de sistemas cujas incertezas são escritas no formato LFT.

Capítulo 5: Este capítulo é destinado à aplicação de nossa proposta de filtragem robusta para dois sistemas reais, utilizando o modelo matemático da literatura para um motor de indução trifásico e também desenvolvemos um modelo a tempo discreto para uma linha de transmissão monofásica.

Capítulo 6: Neste capítulo tratamos dos sistemas com atraso, definindo um sistema de comparação de dimensão finita. Abordamos os problema de análise de estabilidade, cálculo de norma \mathcal{H}_∞ e síntese de controladores e filtros empregando esse sistema de comparação.

Capítulo 7: Finalizamos este trabalho com as conclusões obtidas e algumas perspectivas para trabalhos futuros.

Apêndice: Incluímos no apêndice alguns resultados de algebra linear necessários em certas manipulações algébricas realizadas ao longo do texto.

Antes de abordarmos os tópicos mencionados nesta introdução, apresentamos a seguir a notação adotada no decorrer do texto.

1.1 Notação

Ao longo deste trabalho procuramos manter a notação uniforme, de modo que letras maiúsculas denotam matrizes, letras minúsculas denotam vetores e letras gregas minúsculas denotam escalares. Funções de transferências de sistemas LTI a tempo contínuo ou a tempo discreto são representadas por

$$G(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = C(\zeta I - A)^{-1} B + D \quad (1.1)$$

na qual as matrizes reais A , B , C e D têm dimensões compatíveis com as regras que definem o produto matricial e definem uma possível realização em espaço de estado. Sem ambigüidade, $G(\omega)$ denota $G(j\omega)$ para sistemas a tempo contínuo ou ainda $G(\omega) = G(e^{j\omega})$ para sistemas a tempo discreto, com $\omega \in \mathbb{R}$. Além disso utilizamos a notação $G(\zeta) = G(s)$ para funções de transferências de sistemas a tempo contínuo, em que s é a variável da transformada de Laplace. Para qualquer sinal real ξ , definido no contexto de sistemas a tempo contínuo ou a tempo discreto, $\hat{\xi}$ denota sua Transformada de Laplace ou sua Transformada \mathcal{Z} , respectivamente.

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos

Neste capítulo expomos alguns fundamentos matemáticos utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Embora eles estejam amplamente reportados na literatura, optamos por resumí-los neste capítulo a fim de facilitar a leitura do texto. Inicialmente consideramos o problema de projeto de filtros para sistemas LTI de dimensão finita, enfocando a minimização da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação e, a seguir, formulamos o correspondente problema de filtragem robusta através de um problema minimax. Posteriormente apresentamos os conceitos relacionados à Teoria \mathcal{H}_∞ que envolvem o cálculo de norma e os projetos de controladores via realimentação de estado e de filtros com estrutura do tipo observador de estado, ambos para sistemas LTI de dimensão finita. Neste contexto, a ênfase é dada à determinação do controlador e do filtro centrais e mostramos como converter as desigualdades de Riccati correspondentes a essas formulações em problemas de otimização convexos.

2.1 Definição do problema de filtragem

Matematicamente, o problema de filtragem tem como ponto de partida a descrição clássica apresentada na Figura 2.1 em termos de funções de transferências e que se aplica tanto a sistemas a tempo contínuo como a sistemas a tempo discreto.

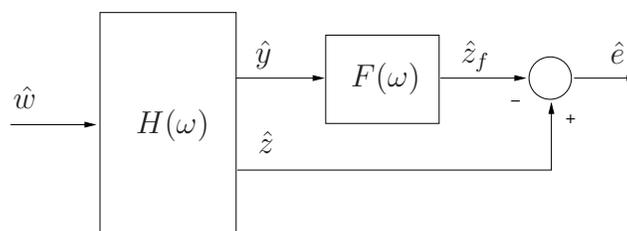


Figura 2.1: Estrutura de filtragem

A partir da entrada externa $\hat{w} \in \mathbb{R}^{m_w}$ o sistema linear, denotado pela função de transferência $H(\omega)$ gera um sinal $\hat{y} \in \mathbb{R}^{r_y}$ mensurável e, simultaneamente, um sinal $\hat{z} \in \mathbb{R}^{r_z}$ ao qual não temos acesso e que deve ser estimado. Portanto, podemos adotar a seguinte partição para a função de transferência $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \left[\begin{array}{c} T(\omega) \\ S(\omega) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_y & D_y \\ \hline C_z & D_z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} C_y \\ C_z \end{array} \right] (\zeta I - A)^{-1} B + \left[\begin{array}{c} D_y \\ D_z \end{array} \right] \quad (2.1)$$

na qual consideramos que o sistema tem ordem n e as matrizes da sua representação de estado têm dimensões compatíveis com as regras que definem o produto matricial e com as dimensões dos sinais envolvidos no processo.

Neste contexto, o filtro $F(\omega)$ deve ser projetado de forma que sua saída \hat{z}_f seja a melhor estimativa possível para o sinal \hat{z} a partir da informação contida em \hat{y} . Em termos matemáticos, a especificação de desempenho pode ser traduzida no seguinte problema de otimização:

$$\min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} J(F(\omega), H(\omega)) \quad (2.2)$$

em que $J(F(\omega), H(\omega))$ é um critério adequadamente definido para expressar a magnitude do erro de estimação \hat{e} e o conjunto \mathcal{F} engloba todos os filtros $F(\omega)$ factíveis para o problema. Seguindo as hipóteses comumente adotadas na literatura, caracterizamos \mathcal{F} como o conjunto de filtros estáveis, lineares, racionais e causais.

2.2 Filtragem em norma \mathcal{H}_2

De maneira geral, o critério de desempenho $J(F(\omega), H(\omega))$ em (2.2) é definido em termos de uma norma do erro de estimação \hat{e} . Na literatura encontramos abordagens tratando do problema em norma \mathcal{H}_2 e em norma \mathcal{H}_∞ , sendo a primeira nosso enfoque no momento.

A filtragem em norma \mathcal{H}_2 consiste em projetar um filtro $F(\omega)$ que minimiza a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação \hat{e} . Na situação em que todos os parâmetros do modelo (2.1) são conhecidos e o ruído de entrada \hat{w} é gaussiano, obtemos o célebre filtro de Kalman, que é linear e, como consequência das condições de otimalidade, possui a mesma ordem da planta [1],[8]. Entretanto, na presença de incertezas paramétricas o filtro $F(\omega)$ robusto deve garantir um limite superior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação, independentemente dos parâmetros incertos, sobre os quais apenas sabemos que pertencem a um conjunto conhecido [61], [69].

Em razão do fato de podermos calcular a norma \mathcal{H}_2 de sistemas dinâmicos resolvendo-se

problemas de otimização convexos, parece natural tentarmos converter os problemas de síntese de filtros para o mesmo contexto [24]. Esses problemas são expressos através de restrições classificadas como desigualdades matriciais lineares, denotadas neste trabalho pela abreviação LMIs¹ [3]. Ademais, a solução de problemas LMIs tem sido facilitada, em certos aspectos, devido ao desenvolvimento de algoritmos eficientes para sua resolução, utilizando como ponto de partida a representação em termos de equações de estado.

Vamos considerar, como hipótese inicial, que todos os parâmetros do sistema (2.1) são precisamente conhecidos e definir a seguinte função de transferência entre o ruído \hat{w} e o erro de estimação \hat{e}

$$E(\omega) = S(\omega) - F(\omega)T(\omega) \quad (2.3)$$

sendo que admitimos a seguinte realização em espaço de estado para o filtro $F(\omega) \in \mathcal{F}$:

$$F(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & D_F \end{array} \right] \quad (2.4)$$

cujas matrizes têm dimensões compatíveis com as regras que definem o produto matricial e com a conexão apresentada na Figura 2.1.

Partindo da definição (2.3) e utilizando as funções de transferências com realizações dadas em (2.1) e (2.4) temos

$$\begin{aligned} E(\zeta) &= (C_z - D_F C_y)(\zeta I - A)^{-1} B - C_F(\zeta I - A_F)^{-1} B_F D_y + \\ &\quad - C_F(\zeta I - A_F)^{-1} B_F C_y(\zeta I - A)^{-1} B + (D_z - D_F D_y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

que também pode ser expressa, de forma equivalente, por

$$E(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ B_F C_y & A_F & B_F D_y \\ \hline C_z - D_F C_y & -C_F & D_z - D_F D_y \end{array} \right] \quad (2.6)$$

Deve ficar claro neste ponto que o critério fundamental para o projeto do filtro $F(\omega)$ é o de que a função de transferência do erro de estimação $E(\omega)$ seja estável. Devido à hipótese sobre o conjunto \mathcal{F} feita anteriormente, na qual não impomos qualquer realização especial para os filtros factíveis, é imprescindível que a matriz A do sistema (2.1) seja *Hurwitz*² no caso contínuo e *Schur*³ no caso discreto. Entretanto, esta hipótese sobre a estabilidade de $H(\omega)$ pode ser descartada

¹Do inglês Linear Matrix Inequalities.

²Uma matriz Hurwitz é aquela cujos autovalores têm parte real negativa.

³Uma matriz Schur é aquela cujos autovalores têm módulo menor que 1.

quando o filtro $F(\omega)$ possuir uma estrutura do tipo observador de estado [8].

A partir da realização definida em (2.6), formulamos a seguir os problemas de minimização da norma \mathcal{H}_2 da função de transferência entre a entrada exógena \hat{w} e o erro de estimação \hat{e} no contexto de sistemas a tempo contínuo e também no contexto de sistemas a tempo discreto. Em ambos os casos o filtro ótimo obtido na resolução desses problemas, conhecido como filtro de Kalman estacionário, apresenta a mesma ordem da função de transferência $H(\omega)$ como consequência das condições de otimalidade [1].

2.2.1 Sistemas a tempo contínuo

Conhecida a representação de estado do erro de estimação $E(\omega)$, dada em (2.6), e supondo que ela seja estável, sua norma \mathcal{H}_2 no contexto de sistemas a tempo contínuo é definida, para $\mathcal{D} = 0$, por [8]

$$\|E(\omega)\|_2^2 = \text{tr}(\mathcal{B}'\mathcal{P}_o\mathcal{B}) = \text{tr}(\mathcal{C}\mathcal{P}_c\mathcal{C}') \quad (2.7)$$

em que as matrizes \mathcal{P}_o e \mathcal{P}_c são denominadas, respectivamente, gramiano de observabilidade e gramiano de controlabilidade e são soluções únicas das seguintes equações de Lyapunov [8]:

$$\mathcal{A}'\mathcal{P}_o + \mathcal{P}_o\mathcal{A} + \mathcal{C}'\mathcal{C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_o = \int_0^\infty e^{\mathcal{A}'t}\mathcal{C}'\mathcal{C}e^{\mathcal{A}t} dt \geq 0 \quad (2.8)$$

e

$$\mathcal{A}\mathcal{P}_c + \mathcal{P}_c\mathcal{A}' + \mathcal{B}\mathcal{B}' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_c = \int_0^\infty e^{\mathcal{A}t}\mathcal{B}\mathcal{B}'e^{\mathcal{A}'t} dt \geq 0 \quad (2.9)$$

sendo que a unicidade das soluções de (2.8) e (2.9) é consequência do fato de que a matriz A é Hurwitz.

Devemos ressaltar que as duas formas de cálculo de norma \mathcal{H}_2 apresentadas, de fato, fornecem o mesmo resultado, pois a igualdade expressa em (2.7) é consequência de que $\|E(\omega)\|_2 = \|E(\omega)'\|_2$. É importante verificar também que os gramianos soluções de (2.8) e (2.9) são semi-definidos positivos. Porém, ao perturbarmos ligeiramente as equações de Lyapunov associadas a eles substituindo-se $\mathcal{C}'\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}'\mathcal{C} + \varepsilon I$ em (2.8) e $\mathcal{B}'\mathcal{B}$ por $\mathcal{B}'\mathcal{B} + \varepsilon I$ em (2.9), com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, as novas soluções das equações de Lyapunov modificadas são definidas positivas estritas (veja discussão em [9]). Sob esta ressalva, o problema (2.2) no contexto de norma \mathcal{H}_2 para sistemas a tempo contínuo pode ser expresso pelo problema de otimização convexo

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(\mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B}) \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{C}'\mathcal{C} < 0 \\ & \mathcal{P} > 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

em cuja solução ótima a matriz \mathcal{P} tende ao gramiano de observabilidade, ou pelo seu equivalente

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C}') \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{A}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A}' + \mathcal{B}\mathcal{B}' < 0 \\ & \mathcal{P} > 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que, por sua vez, a solução ótima na variável \mathcal{P} tende ao gramiano de controlabilidade. Nos problemas (2.10) e (2.11) deve ficar claro que a variável \mathcal{P} presente em cada um não apresenta o mesmo valor nas respectivas soluções ótimas, apesar de as funções objetivo o fazerem, devido à relação (2.7).

Além disso, em (2.10) e (2.11) verificamos que as desigualdades de Lyapunov envolvidas são não lineares, em virtude da presença das variáveis do filtro $F(\omega)$ na matriz \mathcal{A} . Para contornar esta dificuldade adota-se um procedimento introduzido em [24], que consiste em particionar adequadamente a matriz \mathcal{P} e sua inversa, além de definir uma matriz de transformação que torne as restrições do problema lineares nas variáveis envolvidas. Tal procedimento será explicitado no próximo capítulo.

2.2.2 Sistemas a tempo discreto

De maneira análoga ao tratamento dado na seção anterior, o valor da norma \mathcal{H}_2 para a função de transferência estável $E(\omega)$ definida por (2.6), no contexto de sistemas a tempo discreto, é calculada da seguinte maneira:

$$\|E(\omega)\|_2^2 = \text{tr}(\mathcal{B}'\mathcal{P}_o\mathcal{B} + \mathcal{D}'\mathcal{D}) = \text{tr}(\mathcal{C}\mathcal{P}_c\mathcal{C}' + \mathcal{D}\mathcal{D}') \quad (2.12)$$

sendo que o gramiano de observabilidade \mathcal{P}_o e o gramiano de controlabilidade \mathcal{P}_c , relativos aos sistemas a tempo discreto, são soluções das seguintes equações de Lyapunov

$$\mathcal{A}'\mathcal{P}_o\mathcal{A} - \mathcal{P}_o + \mathcal{C}'\mathcal{C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_o = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}'^{k-1} \mathcal{C}'\mathcal{C}\mathcal{A}^{k-1} \geq 0 \quad (2.13)$$

e

$$\mathcal{A}\mathcal{P}_c\mathcal{A}' - \mathcal{P}_c + \mathcal{B}\mathcal{B}' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_c = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^{k-1} \mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}^{k-1} \geq 0 \quad (2.14)$$

A observação sobre as duas maneiras de se calcular a norma \mathcal{H}_2 feita no caso de sistemas contínuos vale para sistemas a tempo discreto, ou seja, as expressões em (2.12) são consequência de que $\|E(\omega)\|_2 = \|E(\omega)'\|_2$. Além disso, a existência de soluções únicas para (2.13) e (2.14) decorre do fato de que a matriz \mathcal{A} é Schur. Por fim, ao perturbarmos ligeiramente as equações de

Lyapunov (2.13) e (2.14), utilizando o mesmo artifício do caso contínuo, podemos obter soluções definidas positivas estritas para as equações modificadas. Portanto, no contexto de otimização convexa, o cálculo da norma \mathcal{H}_2 para o erro de estimação \hat{e} de sistemas a tempo discreto é expresso pelo seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(\mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B} + \mathcal{D}'\mathcal{D}) \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{P} - \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{A} - \mathcal{C}'\mathcal{C} > 0 \\ & \mathcal{P} > 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

cujas solução ótima é tal que a matriz \mathcal{P} tende a \mathcal{P}_o , ou pelo seu equivalente

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C}' + \mathcal{D}\mathcal{D}') \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{P} - \mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{A}' - \mathcal{B}\mathcal{B}' > 0 \\ & \mathcal{P} > 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

em cuja solução ótima \mathcal{P} tende a \mathcal{P}_c . Novamente é importante salientar que a variável \mathcal{P} presente em ambos os problemas não possui o mesmo valor na solução ótima.

Outra semelhança dos problemas de otimização convexos tratados aqui com os problemas formulados pra o caso contínuo é a existência de produto entre variáveis nas restrições de (2.15) e (2.16). Portanto, faz-se necessário adotar a estratégia apresentada em [24] para tornar as restrições envolvidas nos problemas (2.15) e (2.16) linear em relação às suas variáveis.

2.3 Filtragem robusta de sistemas LTI

O enfoque dado até este ponto ao problema de filtragem em norma \mathcal{H}_2 lança mão da hipótese de que o modelo do sistema que queremos filtrar é perfeitamente conhecido. Porém esta suposição não é válida em muitas situações, ou devido a erros na identificação de modelos de sistemas dinâmicos ou porque os parâmetros do sistemas sofrem alterações ao longo do tempo. Neste contexto em que o modelo matemático não é perfeitamente fiel à realidade o filtro $F(\omega)$ a ser projetado deve ter como característica adicional ser robusto, isto é, ele deve apresentar um desempenho satisfatório na presença de incertezas paramétricas no modelo do sistema a ser filtrado, o que normalmente não é garantido se o projeto envolver apenas o conhecimento do modelo nominal [69], [70].

Assim, o problema (2.2) torna-se mais complicado pois a função de transferência $H(\omega)$ e, conseqüentemente, $T(\omega)$ e $S(\omega)$, não são totalmente conhecidas. A única informação disponível a respeito do sistema é que $H(\omega)$ pertence a um conjunto \mathcal{H} conhecido. Portanto, (2.2) passa a

ser escrito como um problema minimax [58], cuja formulação é:

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{H \in \mathcal{H}} J(F(\omega), H(\omega)) \quad (2.17)$$

Este problema pode ser interpretado no sentido de que devemos projetar um filtro $F(\omega)$ que forneça a melhor estimativa para o sinal \hat{z} , considerando a pior condição de incerteza possível. Além disso, é necessário notar que sua solução depende fortemente do modelo de incerteza adotado, ou seja, do conjunto \mathcal{H} , da definição do critério de desempenho $J(\cdot)$ e também do conjunto \mathcal{F} de filtros factíveis. Devemos notar que a existência de uma solução de equilíbrio $J^* = (F(\omega)^*, H(\omega)^*)$ para o problema (2.17) implica que $J(F(\omega)^*, H(\omega)) \leq J^* \leq J(F(\omega), H(\omega)^*)$ para todo $H(\omega) \in \mathcal{H}$ e $F(\omega) \in \mathcal{F}$, sendo $J^* = J(F(\omega)^*, H(\omega)^*)$ o menor custo garantido, $F(\omega)^*$ é o melhor filtro e $H(\omega)^*$ representa a situação mais desfavorável de incerteza paramétrica.

Uma interpretação interessante para o problema (2.17) é a de que ele representa uma disputa entre o homem e a natureza [58]. Isto é, em um dado momento a natureza seleciona os valores de incertezas para as quais o homem deve projetar um filtro que minimize o erro de estimação. Em seguida, para o filtro previamente projetado, a natureza altera os valores das incertezas, aumentando o erro de estimação, o que força o homem a re-projetar o filtro para a nova realidade e assim continua o ciclo. Quando este ciclo atingir um ponto de equilíbrio obteremos o filtro ótimo robusto associado à pior condição de incerteza.

Entretanto, o cálculo da solução ótima global deste problema é, em geral, muito complicado e nem sempre há garantias da existência de solução e como conseqüência, no caso geral não se sabe a ordem do filtro ótimo, nem mesmo se ela é finita. Entretanto, recentemente foi provado que para uma classe particular de incertezas do tipo politópicas [24], é possível calcular a solução ótima de (2.17). A dificuldade em calcular o valor ótimo da norma do erro nos leva a procurar por soluções sub-ótimas, que garantem um limitante superior para o critério de desempenho $J(\cdot)$, ou seja, tenta-se calcular um custo garantido. O tratamento matemático para esta classe de problemas é deixado para o capítulo seguinte.

2.4 Norma \mathcal{H}_∞ de sistemas LTI

A norma \mathcal{H}_2 , considerada nas seções anteriores, é uma medida de desempenho de sistemas dinâmicos baseada na sua resposta ao impulso. Entretanto há um segundo tipo de norma com objetivo de caracterizar sistemas dinâmicos, mas que qualifica sua resposta em frequência e é chamada de norma \mathcal{H}_∞ [73]. Neste trabalho a abordagem via norma \mathcal{H}_∞ é considerada apenas para sistemas a tempo contínuo, em razão do fato de que seu propósito é caracterizar a medida

de desempenho de sistemas LTI com atraso. Tomando um sistema dinâmico que possa ser representado pela função de transferência $H(s)$ temos que o valor

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} \sigma(H(s)) \quad (2.18)$$

é sua norma \mathcal{H}_∞ , sendo que o operador $\sigma(\cdot)$ denota o valor singular máximo e este valor é finito apenas quando $H(s)$ é analítica e, portanto, limitada no semiplano complexo direito aberto [8], [73]. Quando $H(s)$ representar a função de transferência de um sistema LTI estável, podemos escrever (2.18) na forma equivalente [8], [73]:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma(H(j\omega)) \quad (2.19)$$

Com esta relação podemos concluir que uma possibilidade para o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ de um sistema dinâmico é através de uma busca linear em frequência, via decomposição em valores singulares de $H(j\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Entretanto, para sistemas representados por funções de transferências racionais, segundo a realização⁴

$$H(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (2.20)$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$, o cálculo em (2.19) pode ser feito mediante uma abordagem via programação convexa, expressando este problema em termos de LMIs [3]. Neste contexto podemos enunciar o teorema a seguir [8], [73].

Teorema 2.1 *Considerando um sistema LTI com função de transferência $H(s)$ dada em (2.20) com pólos estáveis, então a restrição $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ para um dado $\gamma > 0$ é equivalente a uma das afirmações a seguir:*

a) Para $\gamma^2 > \sigma(D'D)$ existe uma solução $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \geq 0$, que satisfaz a desigualdade

$$A'P + PA + C'C + (PE + C'D)(\gamma^2 I - D'D)^{-1}(E'P + D'C) < 0 \quad (2.21)$$

b) Para $\gamma^2 > \sigma(DD')$ existe uma solução $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \geq 0$, que satisfaz a desigualdade

$$AP + PA' + EE' + (PC' + ED')(\gamma^2 I - DD')^{-1}(CP + DE') < 0 \quad (2.22)$$

⁴Em (2.20) E representa uma matriz constante, de modo que o contexto não permitirá confundí-la com a função de transferência $E(\omega)$ do erro de estimação considerada anteriormente.

Prova: A prova da equivalência entre o enunciado e o item *a)* deste teorema pode ser realizada partindo-se da definição (2.19), de modo a obtermos $H(j\omega) \sim H(j\omega) < \gamma^2 I$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Então com a aplicação do Lema de Kalman-Yakubovich-Popov [55] e do complemento de Schur (veja Lema A.4) obtemos a desigualdade de Riccati (2.21). A equivalência entre os itens *a)* e *b)* vem do fato de que $\|H(s)\|_\infty = \|H(s)'\|_\infty$. \square

A importância deste teorema reside no fato de que para verificarmos a condição $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ é necessário e suficiente verificar uma das duas condições fornecidas, que podem ser convertidas em LMIs mediante a aplicação do complemento de Schur. Mais ainda, para calcularmos a norma \mathcal{H}_∞ de um dado sistema LTI basta minimizarmos o escalar $\gamma > 0$, considerando uma das duas restrições (2.21) ou (2.22). Também é importante ressaltar que, se na desigualdade (2.21) o par (A, C) for observável então existe uma solução P definida positiva estrita que a satisfaz quando trocamos o sinal de desigualdade pelo de igualdade [8]. De forma análoga, se o par (A, B) for controlável então existe $P > 0$ que satisfaz (2.22) quando trocamos o sinal de menor pelo sinal de igual [8]. Nesses dois casos obtemos as chamadas equações de Riccati, sendo que cada qual possui uma única solução $P > 0$ se a matriz A for Hurwitz [8].

Mesmo que as condições de observabilidade e controlabilidade não sejam válidas, é possível perturbarmos ligeiramente as desigualdades do Teorema 2.1 ao substituírmos $C'C$ por $C'C + \varepsilon I$ em (2.21) e BB' por $BB' + \varepsilon I$ em (2.22), com $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, a fim de que possamos permutar os sinais de desigualdade em (2.21) e (2.22) por igualdades e assim utilizar rotinas numéricas que resolvem equações de Riccati [8]. Desse modo, as soluções obtidas sejam definidas positivas estritas.

Um outro ponto de fundamental importância é o de que o resultado do Teorema 2.1 pode ser estendido para tratar dos problemas de síntese de controladores via realimentação de estado e de filtros. Entretanto, nestes contextos as desigualdades (2.21) e (2.22) são não lineares nas variáveis envolvidas, sendo necessário manipulá-las convenientemente para que possamos calcular controladores e filtros utilizando as ferramentas disponíveis na literatura para tratar de equações algébricas de Riccati. Estes aspectos são tratados a seguir.

2.4.1 Realimentação de estado

Para abordar o problema de realimentação de estado vamos considerar o sistema $H(s)$ dado em (2.20), ao qual foi adicionada uma entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^q$, segundo a realização em espaço de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Gu(t) + Dw(t) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Nosso objetivo é projetar uma lei de controle do tipo $u(t) = Kx(t)$, de modo que o sistema em malha fechada dado por

$$H_K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + BK & E \\ \hline C + GK & D \end{array} \right] \quad (2.24)$$

seja estável e apresente um desempenho \mathcal{H}_∞ pré-especificado. Antes de aplicarmos o Teorema 2.1 vamos adotar algumas simplificações clássicas para o problema de realimentação de estado, que corresponde à condição de ortogonalidade entre as matrizes $G'[C \ D] = 0$ [8]. Desse modo, para atendermos a restrição $\|H_K(s)\|_\infty < \gamma$ aplicamos a restrição (2.21) ao sistema (2.24) obtendo a seguinte desigualdade não linear nas variáveis $P \geq 0$ e K

$$\begin{aligned} A'P + PA + C'C - P(B(G'G)^{-1}B' - E(\gamma^2 I - D'D)^{-1}E')P + \\ + (G'GK + B'P)'(G'G)^{-1}(G'GK + B'P) < 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Devido à estrutura da restrição (2.25), uma solução bastante utilizada na literatura é a chamada solução central, na qual o termo quadrático que envolve a variável K é zerado e assim obtemos o chamado ganho de realimentação de estado central [8]

$$K_0 = -(G'G)^{-1}B'P_0 \quad (2.26)$$

sendo que a matriz $P_0 \geq 0$ é solução factível (também chamada de estabilizante) da inequação de Riccati (2.25) obtida com a anulação do termo quadrático. Novamente vale aqui o comentário feito anteriormente de que é possível converter a desigualdade (2.25) em uma igualdade perturbando o termo $C'C$, ao substituí-lo por $C'C + \varepsilon I$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, e assim obtermos uma solução P definida positiva estrita.

Neste contexto, suponha que $P_0 > 0$ seja a solução central da equação de Riccati resultante da perturbação sobre (2.25) e que $P > 0$ seja uma outra solução qualquer da equação de Riccati obtida também após perturbarmos (2.25). Se subtrairmos a equação de Riccati relativa à variável P da equação relativa à variável P_0 obtemos como resultado, após algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} \tilde{A}'(P - P_0) + (P - P_0)\tilde{A} - (P - P_0)(B(G'G)^{-1}B' - E(\gamma^2 I - D'D)^{-1}E')(P - P_0) + \\ + (G'GK + B'P)'(G'G)^{-1}(G'GK + B'P) = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

na qual a matriz $\tilde{A} = A - B(G'G)^{-1}B'P_0 + E(\gamma^2 I - D'D)^{-1}E'$ é estável [8] e portanto, para que (2.27) se mantenha deve ser satisfeita a condição $P \geq P_0$. A conclusão a respeito deste desenvolvimento é a de que podemos obter o controlador central convertendo a desigualdade

(2.25) em um problema de programação convexa. De fato, multiplicando (2.25) por P^{-1} em ambos os lados e definindo as novas variáveis $W = P^{-1} > 0$ e $L = KW$ podemos escrevê-la em formato LMI após aplicação de complemento de Schur (veja Lema A.4). Portanto, o controlador central pode ser calculado como a solução ótima do problema de otimização a seguir

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(W^{-1}) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} AW + WA' + BL + L'B' & E & WC' + L'G' \\ * & -\gamma^2 I & D' \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

cuja função objetivo pode ser convertida em uma função convexa ao definirmos uma matriz $Q > W^{-1} > 0$ [4] e empregarmos o complemento de Schur. Assim, minimizando o traço de Q também estamos minimizando o traço de W^{-1} , fazendo, portanto, com que a matriz P se aproxime arbitrariamente da matriz P_0 , correspondente à solução central.

De maneira análoga ao desenvolvido nesta seção podemos adaptar o procedimento para o cálculo da solução central de filtros \mathcal{H}_∞ na forma de observador de estado, conforme discutido a seguir.

2.4.2 Filtragem

A formulação do problema de filtragem em norma \mathcal{H}_∞ é análoga à que foi desenvolvido para a norma \mathcal{H}_2 anteriormente. Entretanto, considerando a estrutura da Figura 2.1, no presente contexto não é necessário fazer qualquer hipótese estatística sobre o ruído \hat{w} , o que evidencia uma certa propriedade de robustez já associada aos filtros \mathcal{H}_∞ [62]. A única hipótese sobre o ruído \hat{w} é a de que ele é quadraticamente integrável. Vamos considerar duas saídas do sistema $H(s)$ em (2.20), de acordo com a seguinte realização em espaço de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Ew(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_y w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nosso objetivo é, assim como na Seção 2.2, projetar um filtro que forneça a melhor estimativa para $z(t) \in \mathbb{R}^{r_z}$ a partir do sinal $y(t) \in \mathbb{R}^{r_y}$, porém considerando agora que o erro de estimação é quantificado em termos de sua norma \mathcal{H}_∞ [62]. Aqui vamos supor que o filtro tem como estrutura

$$\begin{aligned} \dot{x}_F(t) &= A_F x_F(t) + B_F y(t) \\ z_F(t) &= C_F x_F(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

na qual $A_F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $C_F \in \mathbb{R}^{r_z \times n}$, o que caracteriza um filtro de ordem completa.

Sem perda de generalidade, [8], [73], ao impormos que o filtro tenha uma estrutura do tipo observador de estado, suas matrizes da realização em espaço de estado são dadas por $(A_F, B_F, C_F) = (A - LC_y, L, C_z)$ e, portanto, o comportamento dinâmico do erro de estimação $z(t) - z_F(t)$ é governado pelo sistema

$$H_F(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - LC_y & E - LD_y \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right] \quad (2.31)$$

Assim, de acordo com o Teorema 2.1 para que a restrição $\|H_F(s)\|_\infty < \gamma$ seja satisfeita é necessário e suficiente que a seguinte desigualdade não linear, obtida de (2.22), seja factível nas variáveis $P \geq 0$ e L (veja [8] e [73] para maiores detalhes)

$$\begin{aligned} & PA'_f + PA_f + E_f E'_f - P (C'_y (D_y D'_y)^{-1} C_y - \gamma^{-2} C'_z C_z) P + \\ & + (LD_y D'_y - PC'_y - ED'_y) (D_y D'_y)^{-1} (LD_y D'_y - PC'_y - ED'_y)' < 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

sendo as matrizes $A_f = A - ED'_y (D_y D'_y)^{-1} C_y$ e $E_f = E(I - D'_y (D_y D'_y)^{-1} D_y)$. Devido à estrutura de (2.32) podemos calcular o filtro central zerando o termo quadrático que depende do ganho L , em analogia ao problema de realimentação de estado, e obtendo o ganho do filtro central

$$L_0 = (P_0 C'_y + ED'_y) (D_y D'_y)^{-1} \quad (2.33)$$

para o qual a matriz $P_0 \geq 0$ é solução factível da desigualdade de Riccati obtida de (2.32) quando o termo quadrático que depende de L é zerado.

No cálculo do filtro central podemos calcular uma solução da equação de Riccati $P_0 > 0$ quando perturbamos ligeiramente (2.32) ao substituirmos $E_f E'_f$ por $E_f E'_f + \varepsilon I$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Supondo também que $P > 0$ seja uma outra solução qualquer da equação de Riccati obtida também após perturbarmos (2.32), subtraindo as equações de Riccati relativas às matrizes P e P_0 , respectivamente, chegamos à relação

$$\begin{aligned} (P - P_0) \tilde{A}' + \tilde{A} (P - P_0) - (P - P_0) (C'_y (D_y D'_y)^{-1} C_y - \gamma^{-2} C'_z C_z) (P - P_0) + \\ + (LD_y D'_y - PC'_y - ED'_y) (D_y D'_y)^{-1} (LD_y D'_y - PC'_y - ED'_y)' = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

na qual a matriz $\tilde{A} = A_f + \gamma^{-2} P_0 C'_z C_z - P_0 C'_y (D_y D'_y)^{-1} C_y$ é estável [8] e portanto, para que (2.34) se verifique é necessário que $P \geq P_0$. Sob esta consideração e em face do que discutimos para o problema de realimentação de estado também podemos obter o filtro central resolvendo-se

um problema de otimização convexa. Assim, multiplicando a desigualdade (2.32) por P^{-1} em ambos os lados e definindo as novas variáveis $W = P^{-1}$ e $F = P^{-1}L$, a aplicação do complemento de Schur à nova desigualdade obtida nos permite concluir que o ganho do filtro central é obtido a partir da solução ótima do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(W^{-1}) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} A'W + WA - FC_y - C'_yF' & C'_z & WE - FD_y \\ * & -\gamma^2 I & D' \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

que pode ser transformado em um problema convexo, utilizando o mesmo artifício discutido no problema de realimentação de estado, de modo que na solução ótima o valor de W^{-1} aproxima-se arbitrariamente de P_0 , correspondente à solução central do problema de filtragem.

2.5 Considerações finais

Neste capítulo definimos, em termos gerais, o problema de filtragem a ser tratado ao longo do trabalho e nos concentramos no problema de filtragem em norma \mathcal{H}_2 . Discutimos sobre a propriedade de robustez que deve ser associada ao projeto do filtro $F(\omega)$, a fim de levar em consideração a existência de incertezas paramétricas no modelo do sistema. Entretanto, o preço pago por essa restrição adicional é o aumento da complexidade do projeto.

A partir do enfoque dado ao problema (2.2) no contexto de otimização convexa, vamos buscar sua solução através de formulações do tipo LMI, em virtude do vasto ferramental disponível na literatura para tratar desses problemas. Apenas uma ressalva deve ser feita com relação aos problemas de otimização formulados neste capítulo, nos quais buscamos o mínimo de uma função objetivo, sujeita a desigualdades matriciais estritas. Nestes casos, os conjuntos de soluções factíveis são abertos e, portanto, deveríamos calcular o ínfimo da função objetivo. Porém a ferramenta utilizada para resolver tais problemas são os algoritmos de pontos interiores, de modo que a diferença entre a solução obtida via cálculo do ínfimo e a solução obtida via cálculo do mínimo pode ser controlada ajustando-se a precisão do algoritmo.

Outro tópico importante deste capítulo é a abordagem dos problemas de cálculo e síntese envolvendo norma \mathcal{H}_∞ . Apresentamos o procedimento de cálculo de norma \mathcal{H}_∞ baseado na existência de uma solução semi-definida positiva para a equação de Riccati, bem como estendemos este resultado para calcularmos o controlador e o filtro centrais para sistemas LTI de dimensão finita quando impomos um determinado valor para a norma \mathcal{H}_∞ da saída de interesse em cada problema. Ao final, discutimos também como converter o cálculo das soluções centrais associadas

aos problemas de síntese para formatos LMI, passíveis de serem resolvidos com as ferramentas de programação convexa disponíveis na literatura.

Capítulo 3

Filtragem linear robusta em norma \mathcal{H}_2

Conforme discutido no capítulo anterior, o problema de filtragem robusta representa uma abordagem mais concreta da realidade, uma vez que os modelos adotados estão, invariavelmente, sujeitos a incertezas paramétricas. Essas incertezas paramétricas são agrupadas, na literatura, em duas classes: as incertezas limitadas em norma [61] e as incertezas pertencentes a um conjunto convexo [24]; sendo esta última a origem da classe dos sistemas politópicos, que são alvo de estudo neste trabalho.

A grande dificuldade envolvida no projeto de filtros robustos reside na necessidade de se calcular um único filtro linear capaz de assegurar um desempenho satisfatório para todos os possíveis modelos gerados a partir do conjunto de incertezas, garantindo que a norma do erro de estimação seja menor que um determinado custo garantido [34].

Apresentamos aqui um dos resultados principais deste trabalho, que consiste em uma nova técnica de projeto de filtros robustos, na medida em que calculamos limitantes inferior e superior para a norma do erro de estimação, apresentada também em [27]. Desse modo, conseguimos avaliar a diferença de desempenho entre o filtro robusto e o filtro ótimo mediante a distância entre os limitantes de desempenho. Esta idéia não é inédita e foi adotada em [29], onde também foram calculados limitantes superior e inferior para o desempenho robusto de filtros \mathcal{H}_2 . A abordagem de [29] consiste em projetar um filtro robusto a partir da combinação convexa dos filtros de Kalman correspondentes a cada um dos vértices de um simplex unitário [4] Λ de parâmetros incertos. Uma vez obtidos os filtros de Kalman e os respectivos valores de \mathcal{H}_2 do erro de estimação relativos a cada vértice do politopo de incertezas, o limitante inferior é prontamente determinado como sendo a maior norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação, dentre todos os vértices.

O procedimento adotado neste capítulo tem algumas semelhanças com o de [29], no sentido de que também considera informações sobre o filtro correspondente ao limitante inferior para o cálculo do filtro robusto. Entretanto, o limitante inferior proposto aqui está relacionado com um

filtro classificado como *otimista*, calculado de maneira a considerar todos os vértices do politopo de incertezas em um único problema e não à busca pelo vértice mais desfavorável. Utilizando nossa abordagem provamos que o limitante inferior proposto em [29] é sempre menor ou igual ao nosso, permitindo uma avaliação menos conservadora do desempenho do filtro robusto. Além disso, caso a situação de incerteza mais desfavorável corresponda a um dos vértices do politopo de incertezas, então o valor ótimo da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação é igual ao nosso limitante inferior.

Nossa abordagem envolve a manipulação de funções de transferências e, portanto, tratamos apenas dos sistemas lineares e invariantes no tempo. Além disso, o enfoque do problema de filtragem via norma \mathcal{H}_∞ não é possível com a técnica adotada.

3.1 Formulação do problema de filtragem robusta

Retomando o problema de filtragem robusta apresentado na Seção 2.3, cuja formulação matemática é repetida a seguir por conveniência,

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{H \in \mathcal{H}} J(F(\omega), H(\omega)) \quad (3.1)$$

partimos da hipótese de que a função de transferência $H(\omega)$ definida em (2.1) não é perfeitamente conhecida. A única informação disponível é a de que ela pertence a um determinado conjunto \mathcal{H} conhecido e neste trabalho adotamos a hipótese clássica de que \mathcal{H} é um conjunto de funções de transferência estáveis, de mesma ordem n e sujeitas a incertezas paramétricas do tipo politópicas. Ou seja:

$$\mathcal{H} = \left[\text{co} \left\{ \begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_{yi} & D_{yi} \\ \hline C_{zi} & D_{zi} \end{array} \right\}, \forall i = 1, \dots, N \right] \quad (3.2)$$

onde N é o número de vértices do politopo ao qual pertencem as matrizes da representação de estado do sistema e operador co denota a combinação convexa [4].

Portanto, todos os elementos do conjunto \mathcal{H} são funções de transferências de mesma ordem n , obtidas a partir da combinação convexa das matrizes indicadas em (3.2). Desse modo, outra maneira de representar cada elemento de \mathcal{H} é denotá-lo por $H(\lambda, \omega)$, cuja realização em espaço de estado é

$$H(\lambda, \omega) = \left[\begin{array}{c} T(\lambda, \omega) \\ S(\lambda, \omega) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_\lambda & B_\lambda \\ \hline C_{y\lambda} & D_{y\lambda} \\ \hline C_{z\lambda} & D_{z\lambda} \end{array} \right] \quad (3.3)$$

sendo que as matrizes envolvidas na descrição acima são definidas por

$$\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \\ C_{y\lambda} & D_{y\lambda} \\ C_{z\lambda} & D_{z\lambda} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_{yi} & D_{yi} \\ C_{zi} & D_{zi} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e, por sua vez, λ é um vetor pertencente ao simplex unitário

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (3.5)$$

Com relação ao critério de desempenho $J(\cdot)$ no problema (3.1), no presente trabalho adotamos o funcional $J(F(\omega), H(\lambda, \omega)) = \|E(\lambda, \omega)\|_2^2$, correspondente ao quadrado da norma \mathcal{H}_2 da função de transferência entre a entrada externa \hat{w} e o erro de estimação \hat{e} . De acordo com as definições em (3.3) e a Figura 2.1, temos $E(\lambda, \omega) = S(\lambda, \omega) - F(\omega)T(\lambda, \omega)$.

Em decorrência das considerações acima mencionadas, o problema (3.1) passa a ser expresso na seguinte forma

$$J^* = \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} J(F(\omega), H(\lambda, \omega)) = \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \|S(\lambda, \omega) - F(\omega)T(\lambda, \omega)\|_2^2 \quad (3.6)$$

cuja solução de equilíbrio J^* , se existir, é muito difícil de ser calculada [58]. A principal razão deste fato é a dependência altamente não linear da função de transferência $H(\lambda, \omega)$ com relação ao parâmetro $\lambda \in \Lambda$, o que torna o problema de maximização em (3.6) complicado de ser resolvido. Este fato é bastante evidente quando a matriz A_λ não é constante com $\lambda \in \Lambda$, uma situação que ocorre freqüentemente na prática, de modo que o conjunto \mathcal{H} em geral não é convexo.

A maneira clássica de se abordar o problema (3.6), e bastante utilizada na literatura, é definir um custo garantido $J_u(F(\omega))$ tal que $J(F(\omega), H(\lambda, \omega)) \leq J_u(F(\omega))$, para todo $\lambda \in \Lambda$ e considerar um subconjunto de filtros factíveis $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}$, de modo a obter a relação

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} J(F(\omega), H(\lambda, \omega)) \leq \min_{F \in \mathcal{F}_u} J_u(F(\omega)) \quad (3.7)$$

Quando o subconjunto \mathcal{F}_u for composto apenas pelos filtros lineares de ordem completa de \mathcal{F} o problema de minimização à direita em (3.7) pode ser expresso em termos de LMIs e, portanto, é possível resolvê-lo com o ferramental disponível na literatura [24]. Na sua solução ótima obtemos o filtro robusto $F^0(\omega) \in \mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}$.

Ao denotarmos por $J^* = J(F^*(\omega), H(\lambda^*, \omega))$ o valor ótimo do problema à esquerda da desi-

gualdade em (3.7), correspondente ao melhor filtro $F^*(\omega)$ associado à pior incerteza λ^* , temos

$$\begin{aligned} J^* = J(F^*(\omega), H(\lambda^*, \omega)) &= \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} J(F(\omega), H(\lambda, \omega)) \\ &\leq J(F^0(\omega), H(\lambda^*, \omega)) \\ &\leq J_u(F^0(\omega)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da relação (3.8) é imediato concluir que o principal objetivo de qualquer método de projeto de filtro robusto é definir um custo funcional $J_u(\cdot)$ de modo a se obter a menor diferença possível entre o limitante superior $J_u(F^0(\omega))$ e o ótimo global J^* . Neste contexto, um ponto de grande relevância é investigar a respeito da existência de um custo funcional $J_u(\cdot)$ de modo que o problema envolvendo custo garantido seja convexo e a igualdade $J_u(F(\omega)) = J^*$ seja assegurada. Infelizmente, os resultados divulgados na literatura até o presente momento parecem indicar que esta igualdade não ocorre. Na verdade, para que o problema de projeto via custo garantido seja convexo apenas os filtros de ordem completa podem ser considerados no conjunto \mathcal{F}_u . Entretanto não há evidências de que o filtro ótimo seja tal que $F^*(\omega) \in \mathcal{F}_u$.

Apesar desta dificuldade em se obter o ótimo global do problema (3.6), há esforços contínuos para reduzir o conservadorismo no cálculo do custo garantido $J_u(F^0(\omega))$. Por exemplo, encontramos diversos trabalhos que empregam funções de Lyapunov dependentes de parâmetros [2], outros que realizam buscas unidimensionais em parâmetros de projetos [2], [12] ou ainda envolvendo projeto de filtros de ordem reduzida [66].

3.2 Filtragem ótima robusta em norma \mathcal{H}_2

Em meio à discussão sobre o problema da otimalidade do custo garantido, existem situações em que é possível calcular a solução ótima global para o problema de filtragem robusta (3.6). Um desses casos é apresentado em [30] e suas linhas gerais são discutidas nesta seção devido a sua importância para o presente trabalho. Outra situação especial é considerada em [54], no qual o problema de filtragem robusta é tratado em termos de incertezas sobre as densidades espectrais de energia do sinal a ser estimado e do ruído presente no problema.

O problema solucionado em [30] considera um conjunto particular para caracterizar as funções de transferências $H(\lambda, \omega)$ incertas. Dessa maneira, vamos considerar no problema (3.6) um conjunto $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}$ definido por

$$\tilde{\mathcal{H}} = \text{co} \{H_1(\omega), H_2(\omega), \dots, H_N(\omega)\} = \sum_{i=1}^N \lambda_i H_i(\omega) \quad (3.9)$$

de modo que cada função de transferência $H_i(\omega)$ possui realização em espaço de estado dada por

$$H_i(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_{yi} & D_{yi} \\ \hline C_{zi} & D_{zi} \end{array} \right], \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

Sob esta hipótese, a função de transferência entre a entrada exógena \hat{w} e o erro de estimação \hat{e} , de acordo com a Figura 2.1, é dada por

$$E(\lambda, \omega) = E_\lambda(\omega) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)) \quad (3.11)$$

que é linear no parâmetro $\lambda \in \Lambda$ e, portanto, o máximo existente no problema (3.6) fica escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max_{H \in \tilde{\mathcal{H}}} \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega) \right) \right\|_2^2 &= \\ &= \max_i \left\{ \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 : i = 1, \dots, N \right\} \\ &= \min_{\gamma} \left\{ \gamma : \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \leq \gamma : i = 1, \dots, N \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo que partimos do fato que $\|\cdot\|_2$ é uma função convexa [4], e assim seu máximo ocorre em um dos vértices do politopo Λ definido em (3.5). Conseqüentemente, o problema (3.6) passa a ser expresso, em sua forma primal, por

$$\min_{\gamma, F(\omega) \in \mathcal{F}} \left\{ \gamma : \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \leq \gamma : i = 1, \dots, N \right\} \quad (3.13)$$

que é convexo nas variáveis λ e $F(\omega)$, nos levando à conclusão de que o gap de dualidade é nulo na solução ótima. Portanto, podemos expressá-lo, de forma equivalente, pelo seu problema dual dado por

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^N \lambda_i \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \quad (3.14)$$

Segundo o desenvolvimento anterior e conforme discutido em [30], ao considerarmos o conjunto $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}$ no problema (3.6), este admite solução ótima e podemos calculá-la através de um problema expresso por LMIs, tanto para sistemas a tempo contínuo, como para sistemas a tempo discreto. O resultado desta abordagem é que o filtro ótimo robusto apresenta ordem igual ao produto da ordem do sistema (n) pelo número de vértices do politopo Λ (N), descartando

eventuais cancelamentos entre pólos e zeros [30].

A ressalva a ser feita sobre o resultado de [30] é a de que, normalmente, não é possível escrever $H(\lambda, \omega)$ como uma combinação convexa de funções de transferências $H_i(\omega) = H(e_i, \omega)$, $\forall i = 1, \dots, N$, onde $e_i \in \mathbb{R}^N$ denota a i -ésima coluna da matriz identidade e define um dos N vértices do politopo Λ . Neste caso mais geral, a proposta de projeto apresentada aqui não se aplica.

Por outro lado, o trabalho [30] aponta na direção de que o filtro ótimo para o problema original (3.6) pode ter ordem superior à ordem da planta. Transportando este pensamento ao problema de custo garantido é possível conjecturar que independentemente de como definimos o custo $J_u(F(\omega))$, talvez não seja possível diminuir arbitrariamente a distância entre J^* e $J_u(F^0(\omega))$.

Em face desta perspectiva, a abordagem deste trabalho para o projeto de filtros robustos é a de estender os resultados apresentados em [30], para tratar de sistemas politópicos mais gerais. Introduzimos uma estratégia para o cálculo de um limitante inferior para o problema (3.6), uma vez que este limitante pode ser calculado via problemas em formato LMI e, portanto, possível de ser resolvido com o ferramental computacional disponível. Ao resolvermos este problema de desempenho otimista obtemos um filtro que não é robusto, porém vamos utilizar algumas características deste filtro para projetar o filtro robusto e assim, determinar um custo garantido para o problema (3.6).

3.3 Desempenho otimista

O objetivo desta seção é calcular um limitante inferior para a solução de equilíbrio do problema (3.6), deixando claro que não impomos a restrição de que o filtro ótimo associado a esse limitante inferior deva possuir a mesma ordem da planta. Para tal vamos utilizar os resultados obtidos em [30] e discutidos na Seção 3.2 e adaptá-los ao problema genérico considerado em (3.6), conforme [27].

Uma estratégia para calcularmos um limitante inferior para a solução de equilíbrio J^* de (3.6) é restringir o conjunto sobre o qual calculamos o máximo. Partindo do fato de que o conjunto dos vértices do politopo Λ é um subconjunto de Λ , obtemos a partir de (3.6):

$$\begin{aligned}
J^* &\geq \min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} \max_{i=1, \dots, N} J(F(\omega), H_i(\omega)) \\
&\geq \min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} \max_{i=1, \dots, N} \|S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega)\|_2^2 \\
&\geq \min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(S_i(\omega) - F(\omega)T_i(\omega) \right) \right\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.15}$$

sendo que a última desigualdade provém do fato que a função $\|\cdot\|_2$ é convexa e, portanto, seu máximo ocorre em um dos vértices do polítopo Λ . O ponto importante em (3.15) é o de que o problema minimax à direita pode ser resolvido exatamente, de acordo com os resultados de [24], de modo que nosso propósito passa a ser resolver o seguinte problema que fornece um limitante inferior para J^* :

$$J_L = \min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \|E_\lambda(\omega)\|_2^2 \quad (3.16)$$

em que a função de transferência do erro de estimação $E_\lambda(\omega) = S_\lambda(\omega) - F(\omega)T_\lambda(\omega)$ depende linearmente de $\lambda \in \Lambda$.

Ao considerarmos que o filtro otimista admite a seguinte realização em espaço de estado:

$$F_L(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right] \quad (3.17)$$

a dinâmica do erro de estimação, tendo como base a correspondência entre (2.5) e (2.6), fica caracterizada pela função de transferência

$$E_\lambda(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}_E & \mathcal{B}_{E\lambda} \\ \hline \mathcal{C}_E & \mathcal{D}_{E\lambda} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_E & 0 & B(\lambda) \\ B_L C_Y & A_L & B_L D_{y\lambda} \\ \hline C_Z - D_L C_Y & -C_L & D_{z\lambda} - D_L D_{y\lambda} \end{array} \right] \quad (3.18)$$

de ordem $2nN$, pois $\dim(A_i) = \dim(A_E) = \sum_{i=1}^N \dim(A_i)$, e as matrizes que descrevem esta realização em espaço de estado são definidas por

$$\left[\begin{array}{c|c} A_E & B(\lambda) \\ \hline C_Y & D_{y\lambda} \\ \hline C_Z & D_{z\lambda} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & & & \lambda_1 B_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & A_N & \lambda_N B_N \\ \hline C_{y1} & \cdots & C_{yN} & \sum_{i=1}^N \lambda_i D_{yi} \\ \hline C_{z1} & \cdots & C_{zN} & \sum_{i=1}^N \lambda_i D_{zi} \end{array} \right] \quad (3.19)$$

onde optamos por permitir que apenas as matrizes que multiplicam a entrada externa \hat{w} sejam afetadas pelo parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$, como consequência da linearidade de $E_\lambda(\omega)$ em relação a $\lambda \in \Lambda$.

Em (3.19) fica claro que a dimensão da matriz A_E é $Nn \times Nn$, em que n é a dimensão de cada uma das matrizes A_1, \dots, A_N ; o que está de acordo com o fato de que as funções de transferências $S_\lambda(\omega)$ e $T_\lambda(\omega)$ são de ordem Nn , desconsiderando possíveis cancelamentos entre pólos e zeros.

Tendo em mente a realização em termos de espaço de estado para a função de transferência

$E_\lambda(\omega)$, vamos tratar da solução do problema (3.16) no contexto de LMIs. O teorema enunciado a seguir enfoca o problema para sistemas a tempo contínuo.

Teorema 3.1 (Sistemas a tempo contínuo) *O problema de projeto do filtro $F_L(\omega)$ definido por (3.16) é equivalente ao seguinte problema no contexto de programação convexa*

$$J_L = \inf_{\sigma, \mathcal{Y} \in \Phi} \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, \forall i = 1, \dots, N \} \quad (3.20)$$

onde $\mathcal{Y} = (W_i, X, L, K)$ e Φ é o conjunto das matrizes reais $W_i = W_i'$, $X = X'$, K e L de dimensões compatíveis com as regras que definem o produto matricial, tais que

$$D_{zi} - KD_{yi} = 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B(e_i)'X + D_{yi}'L' \\ * & X \end{bmatrix} > 0 \quad (3.22)$$

para todo $i = 1, \dots, N$ e

$$\begin{bmatrix} A_E'X + XA_E + C_Y'L' + LC_Y & C_Z' - C_Y'K' \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

Como consequência das condições de otimalidade de (3.20), o filtro ótimo associado ao problema (3.20) é dado por

$$F_L(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_E + X^{-1}LC_Y & -X^{-1}L \\ \hline C_Z - KC_Y & K \end{array} \right] \quad (3.24)$$

Prova: Primeiramente devemos notar que a matriz A_E em (3.18) é Hurwitz, em função da hipótese de que $H_\lambda(\omega)$ é assintoticamente estável para todo $\lambda \in \Lambda$ e de que $F(\omega) \in \mathcal{F}$ também é um filtro estável. Portanto, concluímos que existe o gramiano de observabilidade $\mathcal{Q} \geq 0$, solução da equação de Lyapunov

$$A_E'\mathcal{Q} + \mathcal{Q}A_E + C_E'C_E = 0$$

e também a partir do fato de que $\mathcal{D}_{E\lambda} = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, como consequência de (3.21), reescrevemos o problema (3.16) na forma equivalente

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in \Lambda} \|E_\lambda(\omega)\|_2^2 &= \max_{\lambda \in \Lambda} \text{tr}(\mathcal{B}'_{E\lambda} \mathcal{Q} \mathcal{B}_{E\lambda}) \\ &= \max_{i=1, \dots, N} \text{tr}(\mathcal{B}'_{Ei} \mathcal{Q} \mathcal{B}_{Ei}) \\ &= \inf_{\sigma, W_i, \mathcal{P} > 0} \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, \forall i = 1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde as novas variáveis W_i e $\mathcal{P} > 0$ satisfazem as LMIs

$$\begin{aligned} W_i &> \mathcal{B}'_{Ei} \mathcal{P} \mathcal{B}_{Ei}, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \mathcal{A}'_E \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A}_E + \mathcal{C}'_E \mathcal{C}_E &< 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

No desenvolvimento realizado em (3.25) devemos notar que a segunda igualdade é consequência do fato que $\mathcal{B}_{E\lambda}$ é linear em relação a $\lambda \in \Lambda$, implicando que o máximo indicado ocorre em um dos vértices i do polítopo Λ , pois a função objetivo do problema de maximização é convexa [58]. Por sua vez, lançando mão dos argumentos de que o máximo de um conjunto de N valores é igual ao seu menor limitante superior e de que qualquer matriz $\mathcal{P} > 0$ factível segundo a restrição em (3.26) satisfaz $\mathcal{P} > \mathcal{Q}$, então existe $\mathcal{P} > 0$ suficiente próxima ao gramiano de observabilidade $\mathcal{Q} \geq 0$ de maneira a garantir a terceira igualdade em (3.25).

Com esses resultados, o problema (3.16) pode ser escrito na forma equivalente

$$J_L = \inf \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, \quad \forall i = 1, \dots, N \} \quad (3.27)$$

no qual o ínfimo é calculado com relação às variáveis σ , W_i , $\mathcal{P} > 0$, A_L , B_L , C_L e D_L satisfazendo as desigualdades matriciais não-lineares a seguir, obtidas a partir do complemento de Schur aplicado às restrições (3.26):

$$\begin{bmatrix} W_i & \mathcal{B}'_{Ei} \mathcal{P} \\ * & \mathcal{P} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'_E \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A}_E & \mathcal{C}'_E \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

Essas $N + 1$ restrições podem ser escritas de maneira linear em relação às variáveis através de uma transformação biunívoca introduzida em [24], onde é proposto particionar a matriz \mathcal{P} e a sua inversa, além de definir uma matriz de transformação \mathcal{T} , de acordo com as dimensões dos blocos constituintes da matriz A_E definida em (3.18):

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & Y^{-1}V \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Levando em consideração que o filtro e a planta possuem a mesma ordem, ou seja $\dim(A_L) = \dim(A_E) = nN$, aplicamos o procedimento adotado em [24], que consiste em multiplicar (3.28) à esquerda por $\text{diag}(I, \mathcal{T})$ e à direita pelo seu transposto, bem como multiplicar (3.29) à esquerda por $\text{diag}(\mathcal{T}, I)$ e à direita pelo seu transposto. Assim, definem-se as mudanças de variáveis

$L = UB_L$, $G = C_L V' Y^{-1}$, $Q = UA_L V' Y^{-1}$, $K = D_L$ e $Z = Y^{-1}$ de modo a reescrever as desigualdades (3.28) e (3.29) nas suas formas equivalentes:

$$\begin{bmatrix} W_i & B(e_i)'X + D'_{yi}L' & B(e_i)'Z \\ * & X & Z \\ * & * & Z \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (3.31)$$

e

$$\begin{bmatrix} XA_E + LC_Y + A'_E X + C'_Y L' & C'_Z - C'_Y K' & XA_E + LC_Y + A'_E Z + Q \\ * & -I & C_Z - KC_Y - G \\ * & * & A'_E Z + ZA_E \end{bmatrix} < 0 \quad (3.32)$$

com relação às novas variáveis matriciais W_i , X , Z , L , G e Q .

Analisando a LMI (3.32), sem perda de generalidade podemos escolher $Q = -XA_E - LC_Y - A'_E Z$ e $G = C_Z - KC_Y$, ainda preservando a otimalidade da solução. Pelo mesmo argumento, podemos fixar $V = Y$ e fazemos $Z \rightarrow O^+$ de forma que $A'_E Z + ZA_E < 0$, a qual certamente é satisfeita uma vez que A_E é assintoticamente estável por hipótese. Com essas manipulações obtemos as LMIs (3.22) e (3.23) e o filtro (3.24) é obtido invertendo-se as mudanças de variáveis empregadas.

Para finalizar a prova, utilizando novamente os resultados de [24], verifica-se que as desigualdades (3.31) e (3.32) são satisfeitas pelas mesmas variáveis matriciais não importando a ordem do filtro $F_L(\omega)$, sob a ressalva de que não deve ser menor que a ordem da planta, conforme discutido em [24]. Convém ressaltar que para $\dim(A_L) > \dim(A_E)$ sempre é possível construir um filtro ótimo que forneça o mesmo valor de J_L obtido com um filtro de ordem completa, isto é, de ordem nN [24], [9]. Ou seja, o filtro linear de ordem completa é o filtro ótimo para o problema considerado. \square

É importante mencionar que a linearidade da função de transferência $E_\lambda(\omega)$ com relação ao parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$ é de fundamental importância para obtermos os resultados do Teorema 3.1, pois o gramiano de observabilidade independe de λ . Além disso, dois outros aspectos são relevantes sobre este teorema. Primeiramente, para sistemas perfeitamente conhecidos, ou seja quando $N = 1$, o Teorema 3.1 fornece o filtro de Kalman estacionário. Em segundo lugar, como foi provado em [30], para a classe especial de sistemas politópicos de modo que $H(\lambda, \omega)$ é linear em relação a $\lambda \in \Lambda$, o Teorema 3.1 leva à solução ótima do problema (3.18); conforme discutido anteriormente para esta classe particular de sistemas politópicos, (3.15) é satisfeita na igualdade.

Tendo em mente que a realização em espaço de estado para a função de transferência $E_\lambda(\omega)$ pode caracterizar tanto sistemas a tempo contínuo como sistemas a tempo discreto, a versão

correlata do Teorema 3.1 para sistemas a tempo discreto é apresentada na seqüência.

Teorema 3.2 (Sistemas a tempo discreto) *O problema de projeto do filtro $F_L(\omega)$ definido por (3.16) é equivalente ao seguinte problema no contexto de programação convexa*

$$J_L = \inf_{\sigma, \mathcal{Y} \in \Phi} \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, \forall i = 1, \dots, N \} \quad (3.33)$$

onde $\mathcal{Y} = (W_i, X, L, K)$ e Φ é o conjunto das matrizes reais $W_i = W_i'$, $X = X'$, K e L de dimensões compatíveis com as regras que definem o produto matricial, tais que

$$\begin{bmatrix} W_i & B(e_i)'X + D'_{yi}L' & D'_{zi} - D'_{yi}K' \\ * & X & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.34)$$

para todo $i = 1, \dots, N$ e

$$\begin{bmatrix} X & A'_E X + C'_Y L' & C'_Z - C'_Y K' \\ * & X & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.35)$$

Além disso, o filtro ótimo associado ao problema (3.33) é dado por

$$F_L(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_E + X^{-1}LC_Y & -X^{-1}L \\ \hline C_Z - KC_Y & K \end{array} \right] \quad (3.36)$$

Prova: A prova deste teorema apresenta as mesmas linhas gerais da prova do Teorema 3.1. Utilizando a mesma argumentação para concluir que a matriz \mathcal{A}_E é estável e o fato de que o gramiano de observabilidade $\mathcal{Q} \geq 0$, solução da equação de Lyapunov $\mathcal{Q} - \mathcal{A}'_E \mathcal{Q} \mathcal{A}_E - \mathcal{C}'_E \mathcal{C}_E = 0$, é independente de $\lambda \in \Lambda$, podemos reescrever o problema (3.18) de forma equivalente:

$$J_L = \inf \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, \forall i = 1, \dots, N \} \quad (3.37)$$

no qual o ínfimo é calculado com relação às variáveis σ , W_i , $\mathcal{P} > 0$, A_L , B_L , C_L e D_L satisfazendo as desigualdades matriciais não-lineares a seguir:

$$\begin{bmatrix} W_i & \mathcal{B}'_{Ei} \mathcal{P} & \mathcal{D}'_{Ei} \\ * & \mathcal{P} & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{A}'_E \mathcal{P} & \mathcal{C}'_E \\ * & \mathcal{P} & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.39)$$

Ao utilizarmos novamente a partição da matriz \mathcal{P} e a matriz de transformação \mathcal{T} definidas em (3.30) empregamos um procedimento análogo para alterar as desigualdades (3.38) e (3.39). Assim, as mudanças biunívocas de variáveis introduzida em [24], destacadas na prova do teorema anterior, nos permitem escrever as desigualdades anteriores segundo as LMIs (3.34) e (3.35) e com as suas inversões recuperamos as matrizes do filtro $F_L(\omega)$ em (3.37). \square

De maneira geral, os comentários feitos a respeito do Teorema 3.1 permanecem válidos para o Teorema 3.2. Quando não há incertezas sobre o sistema, isto é $N = 1$, obtemos o filtro de Kalman estacionário discreto e para a classe especial de sistemas politópicos, em que $H(\lambda, \omega)$ é linear com relação a $\lambda \in \Lambda$, o Teorema 3.2 fornece a solução ótima global para o problema (3.16).

A partir da estrutura do filtro otimista $F_L(\omega)$, tanto para sistemas a tempo contínuo quanto para sistemas a tempo discreto, e da estrutura da matriz A_E em (3.19), concluímos que a ordem do filtro é maior que a ordem da planta. Este fato é consequência das condições de otimalidade do problema (3.16), pois se $n = \dim(A_i)$, para todo $i = 1, \dots, N$, na solução ótima $\dim(A_L) = \dim(A) = Nn$. Entretanto, nos exemplos resolvidos na Seção 3.5 constata-se que a ordem do filtro é menor que Nn , devido a cancelamentos entre pólos e zeros, embora ela ainda seja maior que n , o que contribui para obtermos um desempenho melhor em relação a outros filtros da literatura, conforme evidenciado também em [29]. Ainda com relação a [29] é importante ressaltar que seu limitante inferior proposto é sempre menor ou igual ao proposto pelo problema (3.15), sendo consequência da relação [58]

$$\min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} \max_{i=1, \dots, N} J(F(\omega), H_i(\omega)) \geq \max_{i=1, \dots, N} \min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} J(F(\omega), H_i(\omega)) \quad (3.40)$$

o que permite uma avaliação menos conservadora da qualidade do filtro robusto a ser projetado.

Para finalizar a discussão, devemos salientar que não é possível calcular um limitante inferior para o erro de estimação em um problema de filtragem em norma \mathcal{H}_∞ , nos moldes apresentados até aqui. Assim como discutido em [30], a razão deste fato é a de que não é possível, mesmo no caso em que o sistema $H(\lambda, \omega)$ depende de maneira linear em relação ao parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$, escrever a solução da equação de Riccati independente de $\lambda \in \Lambda$. O que possibilitou a obtenção dos resultados dos Teoremas 3.1 e 3.2 e de [30] foi o fato de que, para o caso de incerteza paramétrica considerada, os gramianos são independentes do parâmetro incerto.

3.4 Desempenho robusto

A partir do método como foi calculado o filtro $F_L(\omega) \in \mathcal{F}$ na seção anterior, fica claro que ele não é um filtro robusto, na medida em que o critério de desempenho J_L não pode ser garantido para todo $\lambda \in \Lambda$. Portanto devemos calcular um filtro $F_H(\omega) \in \mathcal{F}$ associado a um critério de desempenho robusto mínimo J_H , ou seja, que possa ser garantido para todo $\lambda \in \Lambda$. Uma das maneiras mais simples de se obter um limitante superior para J^* em (3.6) é resolver o problema de minimização sobre um subconjunto de \mathcal{F} , isto é, $F(\omega) \in \mathcal{F}_H \subset \mathcal{F}$ ao invés de $F(\omega) \in \mathcal{F}$, implicando em

$$\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} J(F(\omega), H(\lambda, \omega)) \leq \min_{F \in \mathcal{F}_H} \max_{\lambda \in \Lambda} J(F(\omega), H(\lambda, \omega)) \quad (3.41)$$

Conforme dito anteriormente, a escolha do conjunto dos filtros factíveis \mathcal{F}_H é crucial para a qualidade do projeto e, neste trabalho, propomos incorporar no projeto do filtro robusto algumas informações sobre o filtro otimista $F_L(\omega)$ calculado na seção anterior. Sob esta perspectiva definimos o conjunto \mathcal{F}_H como o conjunto de filtros lineares invariantes no tempo, estáveis e causais com realização dada por

$$F_H(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_H & D_H \end{array} \right] \quad (3.42)$$

em que A_L e B_L são as matrizes da representação de estado do filtro otimista $F_L(\omega)$, previamente calculadas, e C_H e D_H , de dimensões compatíveis, são as variáveis a serem determinadas. O motivo dessa escolha reside no fato de que $F_L(\omega) \in \mathcal{F}_H$ para uma escolha apropriada das matrizes C_H e D_H . Portanto, o problema à direita da desigualdade em (3.41) é expresso por

$$\min_{F \in \mathcal{F}_H} \max_{\lambda \in \Lambda} \|E(\lambda, \omega)\|_2^2 = \min_{F \in \mathcal{F}_H} \max_{\lambda \in \Lambda} \|S(\lambda, \omega) - F(\omega)T(\lambda, \omega)\|_2^2 \quad (3.43)$$

e a realização da função de transferência $E(\lambda, \omega)$ é dada por

$$E(\lambda, \omega) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}_\lambda & \mathcal{B}_\lambda \\ \hline \mathcal{C}_\lambda & \mathcal{D}_\lambda \end{array} \right] \quad (3.44)$$

sendo que as matrizes da representação de estado de $E(\lambda, \omega)$ são combinações convexas das seguintes matrizes extremas:

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_L C_{yi} & A_L \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ B_L D_{yi} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_i = [C_{zi} - D_H C_{yi} \quad -C_H], \quad \mathcal{D}_i = D_{zi} - D_H D_{yi} \quad (3.45)$$

para todo $i = 1, \dots, N$.

Em decorrência do desenvolvimento acima, nota-se que a grande dificuldade em resolver o problema (3.43) está no fato de que as funções de transferências $S(\lambda, \omega)$ e $T(\lambda, \omega)$ dependem de maneira não linear com o parâmetro $\lambda \in \Lambda$. Entretanto, mesmo com este cenário adverso é possível calcular um limitante superior para a função objetivo do problema (3.43) utilizando os resultados em [26] e [11] que consideram sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto, respectivamente. O que deve ficar claro neste ponto é o fato de que a abordagem adotada leva em consideração que duas das matrizes de representação de estado do filtro $F_H(\omega) \in \mathcal{F}_H$ estão fixas, o que nos permite lançar mão de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros no projeto do filtro robusto. Neste contexto, o teorema a seguir explora uma propriedade importante da função objetivo em (3.43) para sistemas a tempo contínuo.

Teorema 3.3 (Sistemas a tempo contínuo) *Para um dado par de matrizes (C_H, D_H) de dimensões apropriadas, considere as matrizes $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{D}_i)$ dadas em (3.45), satisfazendo $\mathcal{D}_i = 0$ e as LMIs*

$$\begin{bmatrix} G\mathcal{A}_i + \mathcal{A}'_i G' & P_i + \mathcal{A}'_i U' - G & \mathcal{C}'_i \\ * & -U - U' & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

e

$$\begin{bmatrix} W_i & \mathcal{B}'_i V \\ * & V + V' - P_i \end{bmatrix} > 0 \quad (3.47)$$

com relação às variáveis matriciais $P_i = P'_i > 0$, $W_i = W'_i > 0$, G , U e V para todo $i = 1, \dots, N$. Então a seguinte desigualdade é verdadeira:

$$\|E(\lambda, \omega)\|_2^2 < \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{tr}(W_i), \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (3.48)$$

Prova: É imediato que $\mathcal{D}_i = 0$ e $P_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, N$ implicam, respectivamente, em $\mathcal{D}_\lambda = 0$ e $P_\lambda > 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Além disso \mathcal{A}_i é estável para todo $i = 1, \dots, N$ por construção.

Multiplicando cada uma das desigualdades (3.46) pelo respectivo $\lambda_i \geq 0$, somando o resultado e aplicando o complemento de Schur à sua terceira linha e coluna, obtemos:

$$\begin{bmatrix} G\mathcal{A}_\lambda + \mathcal{A}'_\lambda G' + \mathcal{C}'_\lambda \mathcal{C}_\lambda & P_\lambda + \mathcal{A}'_\lambda U' - G \\ * & -U - U' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.49)$$

a qual, se multiplicada à esquerda por $[I \ \mathcal{A}'_\lambda]$ e à direita pelo seu transposto fornece a desigual-

dade de Lyapunov dependente de parâmetros $\mathcal{A}'_\lambda P_\lambda + P_\lambda \mathcal{A}_\lambda + \mathcal{C}'_\lambda \mathcal{C}_\lambda < 0$ válida para todo $\lambda \in \Lambda$. Conseqüentemente a desigualdade

$$P_\lambda > \int_0^\infty e^{\mathcal{A}'_\lambda t} \mathcal{C}'_\lambda \mathcal{C}_\lambda e^{\mathcal{A}_\lambda t} dt \quad (3.50)$$

também se verifica para todo $\lambda \in \Lambda$.

Por sua vez, multiplicando cada uma das desigualdades (3.47) pelo respectivo $\lambda_i \geq 0$ e somando o resultado para todo $i = 1, \dots, N$ concluímos que V é uma matriz não singular que satisfaz $V + V' > P_\lambda > 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, através da aplicação do complemento de Schur à desigualdade resultante obtemos

$$W_\lambda > \mathcal{B}'_\lambda V (V + V' - P_\lambda)^{-1} V' \mathcal{B}_\lambda > \mathcal{B}'_\lambda P_\lambda \mathcal{B}_\lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (3.51)$$

onde a segunda desigualdade decorre do fato que para $P_\lambda > 0$ e V não singular vale $V' P_\lambda^{-1} V \geq V + V' - P_\lambda$.

Logo podemos escrever utilizando (3.50) e (3.51)

$$\text{tr}(W_\lambda) > \text{tr}(\mathcal{B}'_\lambda P_\lambda \mathcal{B}_\lambda) > \text{tr}\left(\mathcal{B}'_\lambda \int_0^\infty e^{\mathcal{A}'_\lambda t} \mathcal{C}'_\lambda \mathcal{C}_\lambda e^{\mathcal{A}_\lambda t} dt \mathcal{B}_\lambda\right) = \|E(\lambda, \omega)\|_2^2, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (3.52)$$

Como W_λ é linear com relação a $\lambda \in \Lambda$, obtemos (3.48) e concluímos a prova. \square

Este teorema apresenta duas características fundamentais para o projeto de filtros robustos em norma \mathcal{H}_2 . A primeira é a dependência linear do conjunto de LMIs (3.46) com relação às matrizes \mathcal{C}_i para todo $i = 1, \dots, N$. Pois a partir de (3.45) a mesma afirmação pode ser feita com relação ao par de variáveis (C_H, D_H) , o qual pode ser introduzido no conjunto de variáveis do problema sem dificuldades adicionais, portanto. A segunda característica é a dependência linear do limitante superior (3.48) em relação ao parâmetro $\lambda \in \Lambda$, o que nos permite definir o limitante superior J_H da forma

$$\begin{aligned} J_H &= \inf_{\mathcal{X} \in \Omega} \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{tr}(W_i) \\ &= \inf_{\sigma, \mathcal{X} \in \Omega} \{\sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, \forall i = 1, \dots, N\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

no qual $\mathcal{X} = (P_i, W_i, U, G, V, C_H, D_H)$ e Ω é o conjunto convexo definido por $P_i > 0$, $\mathcal{D}_i = 0$ e pelas LMIs (3.46) - (3.47), para todo $i = 1, \dots, N$. Portanto, a solução ótima deste problema pode ser calculada por qualquer programa computacional que resolva LMIs, obtendo o custo

garantido J_H e o filtro robusto $F_H(\omega)$ a ele associado, dado por (3.42).

De maneira análoga ao desenvolvimento da seção anterior, a seguir é apresentada a versão a tempo discreto do Teorema 3.3.

Teorema 3.4 *Para um dado par de matrizes (C_H, D_H) de dimensões apropriadas, considere as matrizes $(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{D}_i)$ dadas em (3.45), satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} G\mathcal{A}_i + \mathcal{A}'_i G' - P_i & \mathcal{A}'_i U' - G & \mathcal{C}'_i \\ * & P_i - U - U' & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.54)$$

e

$$\begin{bmatrix} W_i & \mathcal{B}'_i V & \mathcal{D}'_i \\ * & V + V' - P_i & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.55)$$

com relação às variáveis matriciais $P_i = P'_i > 0$, $W_i = W'_i > 0$, G , U e V para todo $i = 1, \dots, N$. Então a seguinte desigualdade é verdadeira:

$$\|E(\lambda, \omega)\|_2^2 < \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{tr}(W_i), \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (3.56)$$

Prova: A prova deste teorema segue os mesmos passos dados na prova do Teorema 3.3 e, portanto, será omitida aqui. \square

A análise do Teorema 3.4 evidencia que, de forma semelhante ao caso contínuo, as restrições (3.54) e (3.55) são lineares em relação às matrizes \mathcal{C}_i e \mathcal{D}_i e, conseqüentemente, também o são em relação ao par de variáveis matriciais (C_H, D_H) . Considerando, agora no contexto de sistemas a tempo discreto, $\mathcal{X} = (P_i, W_i, G, U, V, C_H, D_H)$ e Ω o conjunto convexo definido por $P_i > 0$ e pelas LMIs (3.54)-(3.55), o limitante superior J_H é calculado resolvendo-se o problema convexo (3.53) e o filtro robusto $F_H(\omega)$ é obtido através de (3.42).

É importante ressaltar que, em geral, o filtro $F_L(\omega)$ associado ao limitante inferior J_L e o filtro $F_H(\omega)$ associado ao limitante superior J_H não coincidem. Entretanto a constatação de que a relação

$$J_L \leq \underbrace{\min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} J(F(\omega), H(\lambda, \omega))}_{J^*} \leq \max_{\lambda \in \Lambda} J(F_H(\omega), H(\lambda, \omega)) \leq J_H \quad (3.57)$$

sempre é verdadeira nos permite dizer que o filtro robusto $F_H(\omega)$ proposto apresenta um intervalo

de desempenho, em relação ao limitante inferior, não maior que $J_H - J_L$. Ou seja, quanto menor esta diferença, melhor é a qualidade do filtro robusto.

Finalmente, é interessante notar nos Teoremas 3.3 e 3.4 que as variáveis matriciais G , U e V podem ser interpretadas como variáveis de folga, cujos papéis são tornar lineares as restrições do problema, expressando-as através de LMIs, apesar da dependência não linear dos gramianos e do quadrado da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação com relação ao parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$.

3.5 Exemplos

Após expormos a teoria que suporta nossa abordagem, nesta seção comparamos o desempenho do filtro robusto proposto com várias estratégias de projeto existentes na literatura. Lançando mão da notação adotada nas seções 3.3 e 3.4 adotamos o seguinte algoritmo para o cálculo do filtro robusto e a respectiva certificação de otimalidade, aplicável a sistemas a tempo contínuo e a sistemas a tempo discreto:

Algoritmo 3.1

1. A partir da representação das matrizes da representação de estado da planta, calcule a solução ótima do seguinte problema de otimização convexo

$$J_L = \inf_{\sigma, \mathcal{Y} \in \Phi} \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, \forall i = 1, \dots, N \} \quad (3.58)$$

e determine o critério de desempenho otimista J_L , a função de transferência do filtro

$$F_L(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_E + X^{-1}LC_Y & -X^{-1}L \\ \hline C_Z - KC_Y & K \end{array} \right] \quad (3.59)$$

e a sua realização mínima através do eventual cancelamento de pólos e zeros. Nos exemplos resolvidos a seguir, esta etapa foi implementada com o emprego da função `minreal` do Matlab, com tolerância de 10^{-5} .

2. De posse da realização mínima do filtro otimista, resolva o seguinte problema de otimização convexo

$$J_H = \inf_{\sigma, \mathcal{X} \in \Omega} \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, \forall i = 1, \dots, N \} \quad (3.60)$$

e determine o critério de desempenho robusto J_H e o respectivo filtro robusto com função

de transferência dada por

$$F_H(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_H & D_H \end{array} \right] \quad (3.61)$$

A quantia $J_H - J_L$ é uma certificação de desempenho do filtro robusto informando indiretamente o quão longe o filtro robusto se encontra do filtro ótimo. É importante ressaltar também que a ordem do filtro robusto é igual à ordem do filtro otimista.

Enfatizamos, novamente, que os problemas (3.58) e (3.61) são problemas puramente LMIs e, portanto, podem ser resolvidos pelas ferramentas computacionais disponíveis na literatura em uma única execução do algoritmo 3.1. Isso contrasta com alguns métodos existentes na literatura, no quais são realizadas buscas unidimensionais [2] ou bidimensionais [12] em parâmetros de projeto.

Por outro lado, (3.58) e (3.61) podem apresentar um número muito grande de LMIs e de variáveis, os quais dependem, de certa forma, de Nn (a dimensão do simplex unitário Λ multiplicada pela dimensão de cada função de transferência correspondente aos vértices do conjunto \mathcal{H}). Isso vai de encontro com o fato de que a complexidade do problema minimax (3.6) cresce conforme n e N aumentam. Entretanto, este é o preço a ser pago a fim de obtermos um filtro robusto com um intervalo de otimalidade relativamente pequeno, o que implica em algumas vezes em um desempenho quase-ótimo.

Os testes computacionais mostram que o problema (3.61) consome mais tempo que o problema (3.58) e também que a eficiência numérica aumenta significativamente desde que a LMI

$$\left[\begin{array}{cc} \rho I & V - G \\ * & \rho I \end{array} \right] > 0 \quad (3.62)$$

com $\rho > 0$ suficientemente grande seja introduzida no conjunto de factibilidade Ω . Em todos os exemplos resolvidos verifica-se que na solução ótima a restrição (3.62) permanece inativa, ou seja $\|V - G\|_\infty \ll \rho$.

3.5.1 Sistemas a tempo contínuo

Consideramos a seguir três exemplos extraídos da literatura para ilustrar o método de projeto de filtros robustos para sistemas a tempo contínuo e realizamos algumas comparações de desempenho.

Exemplo 3.1 O primeiro exemplo é tratado nos trabalhos [2], [24], [29] e [66], nos quais um

Incerteza	J_u [ref]	J_H	J_L	Filtro robusto
\mathcal{G}_1	2,382 [66]	2,1147	2,1144	$\frac{-1,1651(\zeta + 1,55)}{(\zeta + 280,1)(\zeta + 0,1679)}$
\mathcal{G}_2	2,382 [66]	2,1144	2,1144	$\frac{-1,163(\zeta + 1,554)}{(\zeta + 280)(\zeta + 0,1679)}$
\mathcal{G}_3	6,2846 [2]	6,2660	6,2451	$\frac{-0,053485(\zeta + 15,88)}{(\zeta + 212,2)(\zeta + 0,3385)}$
\mathcal{G}_4	93,365 [66]	15,8921	15,5091	$\frac{0,38817(\zeta - 0,02347)}{(\zeta + 0,2469)(\zeta + 317,9)}$
\mathcal{G}_5	100,963 [66]	13,7425	12,7187	$\frac{0,96248(\zeta + 0,3906)(\zeta^2 - 0,02628\zeta + 1,554)}{(\zeta + 258,7)(\zeta + 0,5124)(\zeta^2 + 0,8017\zeta + 1,643)}$

Tabela 3.1: Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo contínuo - Exemplo 3.1.

sistema de segunda ordem invariante no tempo definido pela realização em espaço de estado

$$H(\omega) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 + 0,3\alpha & -2 & 0 \\ 1 & -0,5 & 1 & 0 \\ \hline -100 + 10\beta & 100 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.63)$$

depende de dois parâmetros incertos reais α e β . Na Tabela 3.1 mostramos, para os seguintes conjuntos de incertezas

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{(\alpha, \beta) : |\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1\} \\ \mathcal{G}_2 &= \{(\alpha, \beta) : |\alpha| \leq 1, \beta = \alpha\} \\ \mathcal{G}_3 &= \{(\alpha, \beta) : |\alpha| \leq 2, \beta = \alpha\} \\ \mathcal{G}_4 &= \{(\alpha, \beta) : |\alpha| \leq 3, |\beta| \leq 1\} \\ \mathcal{G}_5 &= \{(\alpha, \beta) : |\alpha| \leq 3, \beta = \alpha\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

o melhor custo garantido disponível na literatura denotado por J_u para filtros de ordem completa, o limitante superior J_H , o limitante inferior J_L e o filtro robusto $F_H(\omega)$.

Com relação aos conjuntos de incertezas \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 e \mathcal{G}_3 nossa proposta permite obter um filtro robusto \mathcal{H}_2 muito próximo do ótimo, com uma precisão menor que 0,5%. Nessas três situações a ordem do filtro é a mesma da ordem da planta, após seis (para \mathcal{G}_1) ou dois (para \mathcal{G}_2 e \mathcal{G}_3) cancelamentos entre pólos e zeros do filtro $F_L(\omega)$, utilizando-se uma precisão de 10^{-5} como

Incerteza	\mathcal{G}_1	\mathcal{G}_2	\mathcal{G}_3	\mathcal{G}_4	\mathcal{G}_5
J_H	2,114	2,115	6,266	21,566	26,434
J_L	2,114	2,114	6,245	15,509	12,093

Tabela 3.2: Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo contínuo [29] - Exemplo 3.1.

parâmetro da função `minreal` do Matlab.

Para os conjuntos de incertezas representados por \mathcal{G}_4 e \mathcal{G}_5 nosso método proporciona filtros robustos com desempenho melhores que os melhores filtros disponíveis na literatura. É interessante observar que para as incertezas definidas por \mathcal{G}_4 , o filtro robusto obtido é de segunda ordem, apesar de $F_L(\omega)$ definido em (3.59) ser de ordem $Nn = 8$. Entretanto, ao projetarmos o filtro para \mathcal{G}_5 obtemos um filtro robusto de ordem 4, ou seja, neste caso não conseguimos cancelar zeros e pólos. Este fato parece indicar que para incertezas mais severas (note que para que $H(\omega)$ dada em (3.63) permaneça estável devemos ter $\alpha < 10/3$), a ordem elevada de $F_H(\omega)$ parece ser decisiva para melhorar o desempenho.

Fazendo uma comparação com os resultados obtidos em [29] resumidos na Tabela 3.2, verificamos que os valores de J_L e J_H obtidos para os conjuntos de incertezas \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 e \mathcal{G}_3 são idênticos aos obtidos utilizando nossa proposta (Tabela 3.1). Com relação aos conjuntos \mathcal{G}_4 e \mathcal{G}_5 nosso método atingiu valores consideravelmente menores para J_H . Porém é necessário ressaltar que os filtros robustos calculados em [29] para estes exemplos são de ordem nN pois eles são combinações convexas de filtros de Kalman calculados em cada um dos vértice do polítopo Λ .

Para finalizar a discussão a respeito deste exemplo, devemos ressaltar que todos os filtros da literatura referenciados na Tabela 3.1 são de ordem completa, isto é, da mesma ordem da planta $H(\omega)$. Com relação a este aspecto, nosso método é mais flexível, uma vez que a partir da solução de LMIs é possível obter filtros de ordens diversas. Na realidade, a ordem do filtro robusto é uma consequência da solução do problema (3.58) que fornece um limitante inferior J_L para o custo \mathcal{H}_2 ótimo. \diamond

Exemplo 3.2 O segundo exemplo escolhido para ilustrar nossa proposta é resolvido em [60] e corresponde a um sistema mecânico de quarta ordem, cuja planta $H(\omega)$ é definida pela realização em (3.65), a qual depende do parâmetro incerto $\delta \in \mathbb{R}$. Considerando $|\delta| \leq 1$, com a aplicação do Algoritmo 3.1 obtemos o limitante inferior $J_L = 0,9735$, o limitante superior $J_H = 1,1456$ e um filtro robusto associado ao limitante superior de ordem 6 dado por (3.66) obtido após o cancelamento de dois pólos e zeros idênticos na obtenção do filtro otimista $F_L(\omega)$.

Verificamos que nosso método é ligeiramente superior ao método de [60], que encontra um

limitante superior $J_u = 1,20$. Porém este não é o melhor que pode ser obtido por busca exaustiva da ordem, dos zeros e dos pólos da função de transferência de um multiplicador dinâmico.

$$H(\omega) = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 - 1,5\delta & 2 + 1,5\delta & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 + 3\delta & -4 - 3\delta & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.65)$$

$$F_H(\zeta) = \frac{0,78622(\zeta + 0,4955)(\zeta^2 + 0,04815\zeta + 0,6377)(\zeta^2 + 1,472\zeta + 3,121)}{(\zeta^2 + 0,05125\zeta + 0,6338)(\zeta^2 + 0,655\zeta + 0,871)(\zeta^2 + 1,507\zeta + 3,38)} \quad (3.66)$$

É necessário enfatizar também que poderíamos cancelar mais dois pólos e dois zeros em $F_H(\omega)$ dado em (3.66), de forma a obter o filtro de ordem menor

$$F_H(\zeta) = \frac{0,78622(\zeta + 0,4955)(\zeta^2 + 1,472\zeta + 3,121)}{(\zeta^2 + 0,655\zeta + 0,871)(\zeta^2 + 1,507\zeta + 3,38)} \quad (3.67)$$

sem impactos significativos no desempenho do filtro robusto, que passaria a ter a mesma ordem da planta $H(\omega)$ em (3.65). \diamond

Exemplo 3.3 Este exemplo foi extraído do trabalho [64], no qual um sistema é caracterizado pela realização em espaço de estado

$$H(\omega) = \left[\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 + 5\delta & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 10 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.68)$$

e o parâmetro incerto real pertence ao intervalo $|\delta| \leq 1$. Aplicando o algoritmo 3.1 para estimarmos as duas variáveis de estado do sistema, obtemos $J_L = 116,4356$, $J_H = 116,8938$ e o filtro robusto de segunda ordem

$$F_H(\zeta) = \frac{1}{(\zeta + 13,72)(\zeta + 3,718)} \left[\begin{array}{c} 16,4718(\zeta + 3,093) \\ 0,94734(\zeta + 1,079) \end{array} \right] \quad (3.69)$$

que corresponde a um filtro quase-ótimo, uma vez que a diferença entre os limitantes é inferior a

J_u [ref]	J_H	J_L	Filtro robusto
51,43 [61]	51,3809	51,3809	$\frac{-0,004905(\zeta - 0,9193)}{(\zeta - 1,246 \times 10^{-6})(\zeta - 0,7722)}$
0,6194 [32]	0,6153	0,6153	$\frac{-0,0090191(\zeta - 0,7561)}{(\zeta - 0,7722)}$

Tabela 3.3: Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo discreto - Exemplo 3.4.

0,4%. O resultado apresentado em [64] fornece um limitante superior para o quadrado da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação ligeiramente superior a 120. \diamond

3.5.2 Sistemas a tempo discreto

Nesta seção consideramos três exemplos de sistemas a tempo discreto extraídos da literatura para efeito de comparação com o nosso método. Em cada um dos exemplos determinamos um filtro próprio e um filtro estritamente próprio impondo, neste último caso, a restrição adicional $D_H = 0$. Os dados apresentados nas Tabelas 3.3 a 3.5 apresentam o melhor custo garantido J_u existente na literatura para as duas formas de projeto, o limitante superior proposto pela nossa abordagem J_H , o limitante inferior J_L e o filtro robusto. A primeira linha de cada tabela refere-se ao desempenho do filtro estritamente próprio e a segunda, ao do filtro próprio.

Exemplo 3.4 Este primeiro exemplo é tratado em [29], [32], [63] e [69], onde a realização da planta, em espaço de estado, é dada por

$$H(\omega) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -0.5 & -6 & 0 \\ 1 & 1 + \delta & 1 & 0 \\ \hline -100 & 10 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.70)$$

sendo que o parâmetro incerto real pertence ao intervalo $|\delta| \leq 0,3$. De acordo com a tabela 3.3 concluímos, neste caso, que o filtro robusto é ótimo, pois os limitantes J_H e J_L são idênticos. Um fato interessante é o de que o filtro robusto ótimo próprio é de primeira ordem. Os resultados de [29] fornecem como limitante inferior para o custo garantido \mathcal{H}_2 o mesmo valor apresentado primeira linha da Tabela 3.3 e 51,384 para o correspondente limitante superior. Entretanto é necessário ressaltar que o filtro calculado em [29] tem ordem 4 e é estritamente próprio, como consequência das condições de otimalidade da solução encontrada. \diamond

J_u [ref]	J_H	J_L	Filtro robusto
56,60 [63]	56,0013	54,2035	$\frac{0,0018619(\zeta + 4,735)}{(\zeta - 2,213 \times 10^{-5})(\zeta + 0,8507)}$
0,3891 [32]	0,2533	0,2255	$\frac{-0,010193(\zeta + 0,932)}{(\zeta + 0,8506)}$

Tabela 3.4: Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo discreto - Exemplo 3.5.

Exemplo 3.5 O segundo exemplo, também resolvido em [29], [32], [63] e [69], corresponde ao sistema cuja realização em espaço de estado é definida por

$$H(\omega) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -0,8187 + \delta & -6 & 0 \\ 1 & -0,9854 + 2\delta & 1 & 0 \\ \hline -100 & 10 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.71)$$

para a qual o parâmetro real incerto δ pertence ao intervalo $|\delta| \leq 0,08$. Os valores apresentados na Tabela 3.4 indicam que a nossa proposta de projeto fornece filtros robustos com desempenho melhores que os obtidos com os métodos existentes na literatura conhecida até o momento. Notamos também neste exemplo que o filtro robusto próprio é de primeira ordem. Por sua vez, os resultados de [29] fornecem, para o filtro estritamente próprio, o mesmo limitante inferior da Tabela 3.4 e um valor consideravelmente menor para o limitante superior, a saber 54,284, de modo que a diferença entre os limitantes em [29] é de 0,15%. Mais uma vez é importante ressaltar que as condições de otimalidade da solução obtida em [29] fornecem um filtro de ordem 4 estritamente próprio. \diamond

Exemplo 3.6 Este terceiro exemplo, extraído de [45], apresenta a realização em espaço de estado dada por

$$H(\omega) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0,95 & -0,10 + \delta & 1 & 0 \\ 0,05 & 0,95 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.72)$$

na qual o parâmetro real incerto δ pertence ao intervalo $|\delta| \leq 0,05$. Os resultados apresentados na Tabela 3.5 evidenciam o fato de que os filtros robustos próprio e estritamente próprio correspondem aos filtros ótimos relativos a cada contexto, uma vez que neste exemplo as diferenças entre os limitantes J_H e J_L são praticamente nulas. \diamond

J_u [ref]	J_H	J_L	Filtro robusto
1,887 [45]	1,8412	1,8412	$\frac{0,63939(\zeta - 0,9224)}{(\zeta - 0,3528)(\zeta - 0,9079)}$
—	0,6480	0,6480	$\frac{0,64807(\zeta - 8,107 \times 10^{-6})(\zeta - 0,9134)}{(\zeta - 0,3528)(\zeta - 0,9079)}$

Tabela 3.5: Desempenho \mathcal{H}_2 a tempo discreto - Exemplo 3.6.

Um aspecto geral, válido indistintamente para sistemas a tempo contínuo e sistemas a tempo discreto, é o de que os filtros robustos propostos têm desempenho superior aos filtros existentes na literatura. Em alguns casos podemos dizer que o custo garantido \mathcal{H}_2 não pode ser melhorado, uma vez que a solução ótima do problema (3.6) foi (para efeitos práticos) atingida. Além disso, diferentemente dos filtros existentes na literatura, muitos dos filtros robustos, mas nem todos, apresentam ordem igual à da planta.

A qualidade dos resultados obtidos parecem decorrer de dois fatos: a proximidade do custo garantido J_L em relação ao custo ótimo J^* e a possibilidade real de se calcular o filtro otimista $F_L(\omega)$. Merece destaque também o fato de que uma maneira simples e precisa de se calcular um limitante inferior para o custo ótimo é útil na avaliação de desempenho de qualquer filtro robusto. Sob este aspecto devemos notar que o filtro proposto por [2] no exemplo 3.1 e os filtros de [63] e [32] para o exemplo 3.4 são praticamente ótimos.

3.6 Considerações finais

O tratamento dado ao problema de filtragem robusta proposto neste trabalho envolve, em uma etapa inicial, o cálculo de um limitante inferior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação. Este problema é expresso em função de LMIs e fornece um filtro otimista cuja ordem não é necessariamente igual à ordem da planta, o que contribui para melhorar a performance do projeto, fato também ilustrado pelos resultados de [29].

Utilizando algumas características do filtro otimista projetamos um filtro robusto, associado a um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação, com ordem igual à do filtro otimista. Este segundo problema também é expresso em função de LMIs e o desempenho do filtro robusto é avaliado através da distância entre os limitantes superior e inferior. Alguns exemplos resolvidos evidenciam a superioridade da nossa estratégia em comparação com os métodos existentes na literatura, o que parece ser consequência da qualidade do limitante inferior e da flexibilidade existente sobre a ordem do filtro robusto.

Capítulo 4

Sistemas sujeitos a incertezas com representação linear-fracionária

No capítulo anterior propusemos um novo método para o projeto de filtros robustos para sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto, o qual é composto por duas etapas: primeiramente calculamos um limitante inferior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação, o que nos permite avaliar a qualidade de qualquer projeto, e em seguida projetamos um filtro robusto usufruindo de algumas informações obtidas do desempenho otimista do filtro.

Uma limitação da nossa proposta reside na hipótese de que as matrizes da representação de estado do sistema dependem de forma linear em relação ao parâmetro incerto. Entretanto, existem sistemas cujos modelos matemáticos dependem de forma não linear das incertezas paramétricas, o que motivou o estudo de técnicas mais generalistas de projeto de filtros robustos, como por exemplo [32], [60], [64] e [67]. Uma das maneiras utilizadas para representar essas incertezas é o formato LFT¹ [36], [52], [73], cujo tratamento matemático é possível graças às teorias de multiplicadores [33] e de IQCs² [48]. Em [32] e [67] é proposta uma forma alternativa de se representar as incertezas paramétricas que afetam de maneira não linear os sistemas dinâmicos, tendo como objetivo melhorar o desempenho do filtro robusto.

Neste capítulo estendemos os resultados do Capítulo 3 e de [27] para tratar de sistemas cujas incertezas admitem representação na forma linear fracionária ou LFT tanto no contexto de sistemas a tempo contínuo [39], [41] como no contexto de sistemas a tempo discreto, [40], [41]. Partimos da hipótese de que as incertezas são do tipo politópicas, de modo que o cálculo do limitante inferior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação e o correspondente filtro otimista sejam calculados de maneira idêntica à empregada no Capítulo 3. Para concluir o projeto, além

¹Do inglês Linear Fractional Transformation.

²Do inglês Integral Quadratic Constraints.

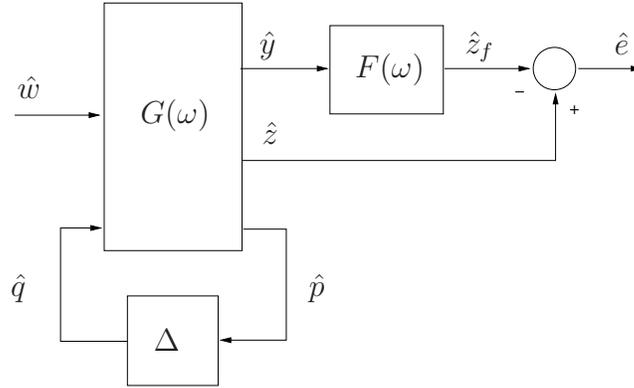


Figura 4.1: Estrutura de filtragem para sistemas LFT.

de utilizarmos algumas características do filtro otimista, lançamos mão dos resultados sobre multiplicadores [33] a fim de levarmos em conta a classe de incertezas consideradas no cálculo do filtro robusto.

4.1 Formulação do problema

A representação do esquema de filtragem para um sistema LFT é apresentado na Figura 4.1, na qual $F(\omega)$ denota o filtro a ser projetado e o sistema sujeito a incertezas paramétricas é composto pela malha de realimentação formada por $G(\omega)$ e Δ . $G(\omega)$ denota a função de transferência de um sistema linear e invariante no tempo com representação de estado totalmente conhecida e Δ corresponde às incertezas paramétricas atuantes no sistema, de modo que a representação de estado relativa à Figura 4.1 é dada por

$$\begin{aligned}
 \partial x &= Ax + Eq + Bw \\
 p &= C \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + Dq \\
 q &= \Delta p, \quad \Delta \in \Xi \\
 y &= C_y x + D_y w \\
 z &= C_z x + D_z w
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde ∂x representa $\dot{x}(t)$ no contexto de sistemas a tempo contínuo ou $x(k+1)$ no contexto de sistemas a tempo discreto, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $q \in \mathbb{R}^m$ e $p \in \mathbb{R}^r$ são variáveis internas, $w \in \mathbb{R}^{m_w}$ é a entrada externa, $y \in \mathbb{R}^{r_y}$ é a saída mensurável e $z \in \mathbb{R}^{r_z}$ é a saída a ser estimada.

As incertezas paramétricas do sistema representado por Δ são modeladas através de uma estrutura do tipo LFT, na qual a incerteza é interpretada como uma realimentação fictícia entre

a saída p e a entrada q . Essas incertezas são representadas pela matriz Δ que é um elemento do conjunto Ξ , cujo papel é definir a classe de incertezas paramétricas consideradas no problema. No contexto deste trabalho consideramos

$$\Xi = \text{co} \{ \Delta_i : i = 1, \dots, N \} \quad (4.2)$$

onde as N matrizes Δ_i são conhecidas. Portanto, todo elemento $\Delta \in \Xi$ pode ser escrito na forma $\Delta_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Delta_i$, para algum λ pertencente ao simplex unitário

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (4.3)$$

Dessa maneira, assumindo que todas as matrizes em (4.1) apresentam dimensões compatíveis com as regras que definem o produto matricial e com as dimensões dos sinais envolvidos, a função de transferência $H(\omega)$ entre a entrada exógena \hat{w} e as saídas \hat{y} e \hat{z} é definida como sendo

$$H(\lambda, \omega) = \begin{bmatrix} T(\lambda, \omega) \\ S(\lambda, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_\Delta(\lambda)}{C_y} & \frac{B_\Delta(\lambda)}{D_y} \\ \frac{C_z}{C_y} & \frac{D_z}{D_y} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde as matrizes afetadas pelo parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$ têm a seguinte estrutura

$$\begin{bmatrix} A_\Delta(\lambda) & B_\Delta(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + E(I - \Delta_\lambda D)^{-1} \Delta_\lambda C \quad (4.5)$$

Esta relação explicita a dependência não linear das matrizes da representação de estado do sistema com relação ao parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$ desde que $D \neq 0$ e, neste caso, lançamos mão da hipótese que $\det(I - \Delta_\lambda D) \neq 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, podemos considerar que a matriz C pode ser convenientemente particionada para caracterizar as incertezas nas matrizes A e B , de modo que podemos definir $C = [C_A \ C_B]$.

Devemos notar que o modelo (4.4) é bastante geral e recai na representação LFT considerada em [32] e [67] para uma escolha adequada das matrizes C , D , E e da estrutura de $\Delta \in \Xi$. Além disso, enfatizamos que no presente trabalho consideramos incertezas paramétricas do tipo politópicas e não limitadas em norma, como em [64]. Sob este contexto e assim como no problema tratado no Capítulo 3, o projeto do filtro $F(\omega)$ tem como especificação que sua saída seja a melhor estimativa possível do sinal z conhecendo-se apenas a informação contida em y , sendo o parâmetro de desempenho para medir a qualidade do projeto a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação. Outra hipótese importante neste problema é a de que $H(\lambda, \omega)$ é estável e tem ordem n para

todo $\lambda \in \Lambda$. Em termos matemáticos, o problema que desejamos resolver é expresso de maneira idêntica ao que foi apresentado no Capítulo 3:

$$J^* = \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} J(F(\omega), H(\lambda, \omega)) = \min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \|S(\lambda, \omega) - F(\omega)T(\lambda, \omega)\|_2^2 \quad (4.6)$$

no qual a função de transferência do erro de estimação $E_F(\lambda, \omega) = S(\lambda, \omega) - F(\omega)T(\lambda, \omega)$ depende de maneira não linear em relação o parâmetro $\lambda \in \Lambda$, tornando-o de difícil solução. O procedimento adotado neste capítulo para contornar a dificuldade de tratarmos diretamente (4.6) é similar ao desenvolvido no capítulo anterior e os resultados são generalizados para tratar de sistemas com incertezas do tipo LFT [41].

4.2 Desempenho otimista

Um limitante inferior para o valor ótimo (4.6) pode ser determinado utilizando a mesma argumentação da Seção 3.3, manipulando o domínio do problema de maximização em (4.6). Lançando mão do fato de que o conjunto dos vértices do politopo Λ é um de seus subconjuntos obtemos como limitante inferior para J^* em (4.6):

$$J^* \geq \min_{F(\omega) \in \mathcal{F}} \max_{\lambda \in \Lambda} \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(S(e_i, \omega) - F(\omega)T(e_i, \omega) \right) \right\|_2^2 = J_L \quad (4.7)$$

onde e_i denota a i -ésima coluna da matriz identidade de ordem N .

A análise de (4.7) permite concluir que o cálculo do limitante inferior proposto é obtido considerando a função de transferência $E_{F\lambda}(\omega) = S_\lambda(\omega) - F(\omega)T_\lambda(\omega)$, que depende linearmente em relação ao parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$. Portanto, o problema à direta da desigualdade em (4.7) pode ser calculado com exatidão, empregando a mesma abordagem do Capítulo 3. Ao supormos que o filtro proveniente da solução ótima do problema de cálculo de J_L possui realização dada por (3.17), a realização da função de transferência de $E_{F\lambda}(\omega)$ em termos de matrizes de representação de estado é dada por:

$$E_{F\lambda}(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}_E & \mathcal{B}_E \\ \hline \mathcal{C}_E & \mathcal{D}_E \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_E & 0 & B(\lambda) \\ B_L C_Y & A_L & B_L D_y \\ \hline C_Z - D_L C_Y & -C_L & D_z - D_L D_y \end{array} \right] \quad (4.8)$$

na qual, devido à linearidade de $E_{F\lambda}(\omega)$ em relação à $\lambda \in \Lambda$, apenas a matriz $B(\lambda)$ é afetada pela incerteza paramétrica $\lambda \in \Lambda$ e a matriz A_E possui estrutura bloco diagonal. Sob essas

observações adaptadas ao contexto de incertezas com representação LFT temos que as matrizes indicadas em (4.8) denotam

$$\left[\begin{array}{c|c} A_E & B(\lambda) \\ \hline C_Y & D_y \\ \hline C_Z & D_z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_\Delta(e_1) & & & \lambda_1 B_\Delta(e_1) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & A_\Delta(e_N) & \lambda_N B_\Delta(e_N) \\ \hline C_y & \cdots & C_y & D_y \\ \hline C_z & \cdots & C_z & D_z \end{array} \right] \quad (4.9)$$

de modo que, assim como discutido no Capítulo 3, a matriz A_E da forma bloco diagonal tem dimensão $nN \times nN$, em concordância com o fato de que as funções de transferência $S_\lambda(\omega)$ e $T_\lambda(\omega)$ são de ordem nN (desconsiderando-se eventuais cancelamentos entre pólos e zeros).

Em função da notação introduzida em (4.8) e (4.9) o limitante inferior J_L pode ser calculado aplicando-se diretamente os Teoremas 3.1 e 3.2 no contexto de sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto, respectivamente. Assim, o filtro otimista obtido das correspondentes soluções ótimas dos teoremas mencionados tem, em geral, ordem nN em consequência das condições de otimalidade dos problemas e é dado por

$$F_L(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_E + X^{-1}LC_Y & -X^{-1}L \\ \hline C_Z - KC_Y & K \end{array} \right] \quad (4.10)$$

Entretanto, não estão descartados possíveis cancelamentos entre pólos e zeros de $F_L(\omega)$, de modo que o filtro otimista de realização mínima pode apresentar ordem n_f menor que nN . Além disso, se a pior incerteza $\lambda^* \in \Lambda$ for tal que $\lambda^* = e_i$ para algum $i = 1, \dots, N$, então $J^* = J_L$.

Antes de abordarmos o projeto do filtro robusto é importante ter em mente que a escolha dos vértices de Λ , e portanto de Ξ , para o projeto do filtro otimista pode levar ao valor de um limitante inferior J_L relativamente distante da solução ótima J^* para o problema (4.6). O motivo para tal possibilidade reside no fato de que as matrizes da representação de estado de $H(\lambda, \omega)$ dependem de maneira não linear em relação aos parâmetros incertos, conforme explicitado em (4.5).

4.3 Desempenho robusto

A maneira como foi calculado o filtro otimista $F_L(\omega)$ nos permite concluir que ele não é um filtro robusto, pois seu desempenho J_L não pode ser garantido para todo $\lambda \in \Lambda$, ou em outras palavras, para todo $\Delta \in \Xi$. A fim de projetarmos um filtro robusto associado a um custo

garantido para todo $\lambda \in \Lambda$ propomos que ele possua a seguinte estrutura

$$F_H(\omega) = \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_H & D_H \end{array} \right] \quad (4.11)$$

que parametriza, em função de C_H e D_H , um conjunto de filtros lineares e invariantes no tempo $\mathcal{F}_H \subset \mathcal{F}$ que contém características do filtro otimista. Dessa maneira, podemos dizer que para uma escolha adequada das matrizes C_H e D_H o filtro $F_L(\omega) \in \mathcal{F}_H$. Restringindo o conjunto factível de filtros robustos, concluímos que um limitante superior para o problema (4.6) é dado por

$$J^* \leq \min_{F \in \mathcal{F}_H} \max_{\lambda \in \Lambda} \|S(\lambda, \omega) - F(\omega)T(\lambda, \omega)\|_2^2 = J_H \quad (4.12)$$

Ao conectarmos este filtro ao sistema (4.1) a dinâmica do sistema aumentado é dada por

$$\begin{aligned} \partial \tilde{x} &= \mathcal{A}\tilde{x} + \mathcal{E}q + \mathcal{B}w \\ p &= \mathcal{C} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} + \mathcal{D}q \\ q &= \Delta p, \quad \Delta \in \Xi \\ e &= \mathcal{C}_e \tilde{x} + \mathcal{D}_e w \end{aligned} \quad (4.13)$$

no qual o novo vetor de estado $\tilde{x} = [x'_F \ x']'$ é composto pelas variáveis de estado do filtro e da planta, respectivamente, e particionando $\mathcal{C} = [\mathcal{C}_A \ \mathcal{C}_B]$ as matrizes indicadas em (4.13) são definidas da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{E} \\ \hline \mathcal{C}_A & \mathcal{C}_B & \mathcal{D} \\ \hline \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A_L & B_L C_y & B_L D_y & 0 \\ 0 & A & B & E \\ \hline 0 & C_A & C_B & D \\ \hline -C_H & C_z - D_H C_y & D_z - D_H D_y & \end{array} \right] \quad (4.14)$$

Devemos notar que as matrizes que definem a dinâmica do sistema aumentado (4.14) não são definidas da maneira usual, em consequência da definição do vetor de estado \tilde{x} . Esta descrição evita que particionemos linhas e colunas das matrizes E e C ao definirmos \mathcal{E} e \mathcal{C} e não sobrecarrega a notação. Com a notação adotada, a realização da função de transferência do erro de estimação é

$$E_F(\lambda, \omega) = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}_\Delta(\lambda) & \mathcal{B}_\Delta(\lambda) \\ \hline \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \end{array} \right] \quad (4.15)$$

na qual a definição $[\mathcal{A}_\Delta(\lambda) \ \mathcal{B}_\Delta(\lambda)] = [\mathcal{A} \ \mathcal{B}] + \mathcal{E}(I - \Delta_\lambda \mathcal{D})^{-1} \Delta_\lambda \mathcal{C}$ explicita a dependência não

linear de $E_F(\lambda, \omega)$ e, em particular, de $A_\Delta(\lambda)$ e $B_\Delta(\lambda)$ em relação ao parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$. Com o propósito de levar em conta este fato, os dois teoremas enunciados a seguir permitem calcular um limitante superior J_H para o custo ótimo J^* em (4.6) no contexto de sistemas a tempo discreto e no contexto de sistemas a tempo contínuo utilizando multiplicadores [33] para caracterizar as incertezas paramétricas.

Teorema 4.1 (Sistemas a tempo contínuo) *Suponha que o filtro $F_H(\omega)$ de ordem n_f , com realização dada por (4.11), seja tal que $\mathcal{D}_e = 0$ e que existam um multiplicador simétrico $\Pi \in \mathbb{R}^{(r+m) \times (r+m)}$ satisfazendo a restrição linear de dimensão infinita*

$$\begin{bmatrix} I & \Delta'_\lambda \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} I \\ \Delta_\lambda \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (4.16)$$

e matrizes simétricas positivas definidas $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{(n_f+n) \times (n_f+n)}$ e $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{r_z \times r_z}$ satisfazendo as LMIs

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{C}_e \\ * & \mathcal{P} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} & \mathcal{P}\mathcal{B} & \mathcal{P}\mathcal{E} \\ * & -I & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}' & 0 \\ \mathcal{D}' & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

Então a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação satisfaz $\|E_F(\lambda, \omega)\|_2^2 < \text{tr}(\mathcal{W})$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Prova: Considerando $\lambda \in \Lambda$ arbitrário, porém fixo, ao considerarmos a relação $q = \Delta_\lambda p$ em (4.13) e multiplicarmos (4.16) à direita por p e à esquerda por p' temos

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \\ q \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{C}' & 0 \\ \mathcal{D}' & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \\ q \end{bmatrix} > 0 \quad (4.19)$$

que juntamente com (4.18) nos permite escrever

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \\ q \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} & \mathcal{P}\mathcal{B} & \mathcal{P}\mathcal{E} \\ * & -I & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \\ q \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

A partir do sistema (4.13) verificamos que esta desigualdade pode ainda ser fatorada, uma vez

que as componentes do vetor $[\tilde{x}' \ w' \ q']$ não são independentes. De fato, a partir da relação

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \frac{w}{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ (I - \Delta_\lambda \mathcal{D})^{-1} \Delta_\lambda \mathcal{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

concluimos que ao substituí-la em (4.20) obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'_\Delta(\lambda)\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A}_\Delta(\lambda) & \mathcal{P}\mathcal{B}_\Delta(\lambda) \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.22)$$

Como consequência dos fatos de que $\mathcal{P} > 0$ e $\mathcal{D}_e = 0$ temos

$$\mathcal{P}^{-1} > \int_0^\infty e^{\mathcal{A}_\Delta(\lambda)t} \mathcal{B}_\Delta(\lambda) \mathcal{B}_\Delta(\lambda)' e^{-\mathcal{A}'_\Delta(\lambda)t} dt \quad (4.23)$$

implicando que

$$\|E_F(\lambda, \omega)\|_2^2 < \text{tr}(\mathcal{C}_e \mathcal{P}^{-1} \mathcal{C}_e') < \text{tr}(\mathcal{W}) \quad (4.24)$$

onde a segunda desigualdade em (4.24) é resultado da aplicação do complemento de Schur a (4.17). Concluimos assim a prova do teorema, uma vez que $\lambda \in \Lambda$ é arbitrário. \square

Antes de prosseguirmos é necessário tecer alguns comentários a respeito dos resultados apresentados. Inicialmente caracterizamos as incertezas paramétricas considerando um conjunto infinito de restrições lineares, denotado por (4.16). Entretanto, este conjunto pode ser satisfeito se assegurarmos a factibilidade de N LMIs, como será discutido mais adiante, através de uma escolha adequada da estrutura do multiplicador Π . Em segundo lugar, o Teorema 4.1 é uma generalização dos resultados sobre teoria de multiplicadores de [33], uma vez que a presença de incertezas paramétricas atuando nas matrizes A e B do sistema (4.1) podem ser tratadas sem dificuldades adicionais. Por outro lado, devemos atentar para o fato de que manipulações da desigualdade (4.18) precisam ser feitas com cuidado devido às dimensões dos blocos matriciais em cada parcela. Finalmente, devido à relação (4.21), na qual as componentes do vetor considerado não são independentes em função do modelo (4.13), este teorema apresenta um certo grau de conservadorismo na maneira de se calcular um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação em (4.12). A seguir enunciamos o teorema correlato ao anterior, porém no contexto de sistemas a tempo discreto.

Teorema 4.2 (Sistemas a tempo discreto) *Considere a estrutura do filtro $F_H(\omega)$ dada em*

(4.11), um multiplicador simétrico $\Pi \in \mathbb{R}^{(r+m) \times (r+m)}$ que satisfaz a restrição linear de dimensão infinita (4.16) e matrizes simétricas definidas positivas $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{(n_f+n) \times (n_f+n)}$ e $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{r_z \times r_z}$ que satisfazem as LMIs

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{C}_e & \mathcal{D}_e \\ * & \mathcal{P} & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{P}\mathcal{A} & \mathcal{P}\mathcal{B} & \mathcal{P}\mathcal{E} \\ * & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{C}' & 0 \\ \mathcal{D}' & I \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.26)$$

Então a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação satisfaz $\|E_F(\lambda, \omega)\|_2^2 < \text{tr}(\mathcal{W})$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Prova: A prova deste teorema segue as linhas gerais da prova anterior, com uma ressalva feita à manipulações algébricas utilizadas. Inicialmente precisamos recordar que para um $\lambda \in \Lambda$ fixo e arbitrário vale a relação (4.19). Então, após aplicarmos o complemento de Schur à restrição (4.26) e multiplicarmos o resultado por $[\tilde{x}' \ w' \ q']$ à esquerda e por seu transposto à direita obtemos, usando (4.19):

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \\ q \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{P} - \mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{A} & -\mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{B} & -\mathcal{A}'\mathcal{P}\mathcal{E} \\ * & I - \mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{B} & -\mathcal{B}'\mathcal{P}\mathcal{E} \\ * & * & -\mathcal{E}'\mathcal{P}\mathcal{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \\ q \end{bmatrix} > 0 \quad (4.27)$$

Novamente, é necessário ressaltar que as componentes do vetor $[\tilde{x}' \ w' \ q']$ não são independentes, o que é caracterizado pela relação (4.21). Tendo em vista este fato e a definição das matrizes $\mathcal{A}_\Delta(\lambda)$ e $\mathcal{B}_\Delta(\lambda)$, a partir de (4.27) escrevemos a desigualdade

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}' \\ \mathcal{B}' \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}' \\ \mathcal{B}' \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_\Delta(\lambda) - \mathcal{A} & \mathcal{B}_\Delta(\lambda) - \mathcal{B} \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_\Delta(\lambda)' - \mathcal{A}' \\ \mathcal{B}_\Delta(\lambda)' - \mathcal{B}' \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_\Delta(\lambda)' - \mathcal{A}' \\ \mathcal{B}_\Delta(\lambda)' - \mathcal{B}' \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_\Delta(\lambda) - \mathcal{A} & \mathcal{B}_\Delta(\lambda) - \mathcal{B} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

que pode ser ainda fatorada adequadamente e reescrita na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_\Delta(\lambda) \\ \mathcal{B}'_\Delta(\lambda) \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_\Delta(\lambda) & \mathcal{B}_\Delta(\lambda) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.29)$$

A partir do fato de que $\mathcal{P} > 0$ e considerando a nomenclatura das matrizes da representação de

estado do erro de estimação em (4.15), de (4.29) concluímos que a matriz P satisfaz a desigualdade

$$\mathcal{P}^{-1} > \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_{\Delta}^{k-1}(\lambda) B_{\Delta}(\lambda) B'_{\Delta}(\lambda) \mathcal{A}_{\Delta}^{k-1}(\lambda) \quad (4.30)$$

que, por sua vez, nos leva à relação

$$\|E_F(\lambda, \omega)\|_2^2 < \text{tr}(\mathcal{C}_e \mathcal{P}^{-1} \mathcal{C}'_e + \mathcal{D}_e \mathcal{D}'_e) < \text{tr}(\mathcal{W}) \quad (4.31)$$

na qual a segunda desigualdade provém da aplicação do complemento de Schur à restrição (4.27). Este passo conclui a prova do teorema proposto. \square

As observações referentes ao Teorema 4.1 também se aplicam às características correlatas das restrições do Teorema 4.2. Outra observação pertinente a ambos os teoremas é uma consequência das estruturas das restrições (4.16), (4.18), (4.17), (4.25) e (4.27), que nos permite procurar por soluções dependentes de parâmetros no projeto do filtro robusto. Se considerarmos que o conjunto dos multiplicadores é parametrizado pela estrutura

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} R_i & -G \\ -G' & -Q \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.32)$$

na qual suas matrizes internas têm dimensões compatíveis com a definição do produto matricial e $Q > 0$, verificamos que a factibilidade das N LMIs definidas por

$$\begin{bmatrix} I & \Delta'_i \end{bmatrix} \Pi_i \begin{bmatrix} I \\ \Delta_i \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.33)$$

garante a factibilidade de (4.16) por condições de convexidade [4]. Sob esses aspectos podemos enunciar novas versões para os Teoremas 4.1 e 4.2 de modo a considerar variáveis dependentes de parâmetros, a fim de reduzir o conservadorismo no cálculo do filtro robusto e do desempenho a ele associado. A mudança de variáveis $(P, W, \Pi) \rightarrow (P_{\lambda}, W_{\lambda}, \Pi_{\lambda})$ faz com que as novas restrições dos Teoremas 4.1 e 4.2 possam ser verificadas ao trocarmos o conjunto infinito de restrições (4.16) pelas N LMIs (4.33), bem como as restrições (4.18), (4.17), (4.26) e (4.25) são satisfeitas nas novas variáveis ao considerarmos que cada uma delas deve ser satisfeita nas variáveis P_i e W_i , para todo $i = 1, \dots, N$. Com esta nova abordagem o limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação passa a ser $\|E_F(\lambda, \omega)\|_2^2 < \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{tr}(W_i)$.

As manipulações algébricas aplicadas aos teoremas deste capítulo fornecem condições de

calcularmos um filtro robusto na forma (4.11) e um limitante superior J_H para seu desempenho dado por

$$J_H = \inf_{\sigma, W_i, P_i, \Pi_i, C_H, D_H} \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma, i = 1, \dots, N \} \quad (4.34)$$

sendo que as variáveis matriciais W_i , P_i , Π_i , C_H e D_H devem satisfazer as LMIs (4.33), (4.18) e (4.17), para todo $i = 1, \dots, N$, no contexto de sistemas a tempo contínuo. No projeto de filtros para sistemas a tempo discreto, as variáveis matriciais do problema (4.34) devem satisfazer as LMIs (4.33), (4.26) e (4.25) também para todo $i = 1, \dots, N$.

4.4 Exemplos

Nesta seção vamos considerar dois exemplos extraídos da literatura com a finalidade de ilustrar o método do projeto de filtros robustos para sistemas sujeitos a incertezas com representação LFT apresentado neste capítulo. O procedimento adotado é idêntico ao descrito pelo Algoritmo 3.1, apresentado no Capítulo 3, com a ressalva de que o projeto de $F_H(\omega)$ envolve a resolução do problema (4.34) e, assim como enfatizado anteriormente, a diferença $J_H - J_L$ fornece uma medida da qualidade do projeto, permitindo avaliar a distância entre o filtro robusto calculado e o filtro robusto ótimo. Com a finalidade de assegurar estabilidade numérica do algoritmo adicionamos ao conjunto das restrições do problema (4.34) a desigualdade $GG' < \rho^2 I$ sobre a matriz G do multiplicador Π_λ , com $\rho \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, em analogia à restrição (3.62) inserida no Capítulo 3. É importante ressaltar neste ponto que as mesmas considerações feitas a respeito dos problemas de cálculo de J_L e de J_H para sistemas com incertezas politópicas permanecem válidas quando tratamos de incertezas com representação LFT; o problema (4.34) demanda um tempo de processamento maior que a resolução do problema (4.7).

4.4.1 Sistemas a tempo contínuo

Consideramos dois exemplos para ilustrar o projeto de filtros para sistemas a tempo contínuo. O primeiro exemplo trata de um sistema sujeito a incertezas paramétricas na forma LFT ao passo que o segundo trata da aplicação dos métodos desenvolvidos neste capítulo para filtrar sistemas politópicos. Com base nos valores numéricos obtidos podemos fazer alguns comentários a respeito dos resultados do Teorema 4.1.

Exemplo 4.1 Os dados a seguir foram extraídos de [67], que trata do problema de filtragem de sistemas incertos sujeitos a incertezas paramétricas não lineares utilizando dois tipos de modelos.

J_H	$\max_{\lambda \in \Lambda} J(F_H(\omega), H(\lambda, \omega))$	J_L
1,4477	0,7003	0,0388

Tabela 4.1: Sistema LFT a tempo contínuo - Exemplo 4.1.

Um deles é a representação denominada pelos autores de [67] de NFT³ e o outro corresponde à representação LFT, ambas relativas a um sistema incerto de ordem 2. Para o modelo LFT as incertezas paramétricas são representadas pela matriz $\Delta = \text{diag}(\lambda I, (1 - \lambda)I)$ cujos blocos diagonais são de ordem 6 e o parâmetro incerto $\lambda \in [0, 1]$. Seguindo a notação de (4.1) temos:

$$A = \begin{bmatrix} -0,7 & -1,0 \\ 0,1 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$C_y = \begin{bmatrix} -100 & 100 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$C_A = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 \\ 0,10 & 0,25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0,25 & 0 \\ 0,10 & 0,25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,30 & 0,20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,40 & 0,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,10 & 0,20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,20 & 0,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,20 & 0,30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Na Tabela 4.1 fornecemos os valores do limitante superior J_H para a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação, o valor do custo garantido exato calculado para o filtro $F_H(\omega)$ projetado e o valor do limitante inferior J_L . É imediata a conclusão de que a distância entre os limitantes que qualificam o desempenho do filtro é grande, dando indícios de que a incerteza paramétrica é severa para o sistema, o que reflete na baixa qualidade do valor de J_L . Além disso, sendo o filtro robusto dado por

$$F_H(\omega) = -2,1289 \frac{(\zeta + 0,2199)}{(\zeta + 299,9)(\zeta + 0,0713)} \quad (4.38)$$

³Do inglês Nonlinear Fractional Transformation.

concluimos que houve o cancelamento de 2 pólos e 2 zeros do filtro otimista $F_L(\omega)$.

Para finalizar a discussão deste exemplo, destacamos que em [67] não é calculada a norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação, e portanto não é possível estabelecer comparações entre os métodos de projeto. \diamond

Exemplo 4.2 Os dados deste exemplo foram extraídos de [64] e correspondem também ao Exemplo 3.3. Utilizando a notação para representação LFT introduzida em (4.1), temos os seguintes dados:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & B & E \\ \hline C_A & C_B & D \\ \hline C_y & D_y & \\ \hline C_z & D_z & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} -1 & 1 & 10 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right] \quad (4.39)$$

e a incerteza paramétrica é caracterizada por $\Delta \in \text{co}\{-1, 1\}$. Ao aplicarmos o Algoritmo 3.1, adaptado ao problema de incertezas com representação LFT, calculamos o limitante inferior $J_L = 116,4363$, o limitante superior $J_H = 235,2254$ e o correspondente filtro robusto

$$F_H(\omega) = \frac{1}{(\zeta + 13,73)(\zeta + 3,717)} \begin{bmatrix} 16,9695(\zeta + 2,795) \\ -0,11694(\zeta + 6,308) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

enquanto [64] fornece o custo garantido $J_u = 122,8697$. É aparente, neste caso, que ao tratarmos de sistemas politópicos sob a óptica dos resultados deste capítulo os resultados são mais conservadores em relação aos reportados no Capítulo 3. \diamond

O resultado do Exemplo 4.2 remeta a uma análise mais detalhada do resultado do Teorema 4.1. Ao impormos que a matriz D do sistema (4.1) é nula, obtemos da relação (4.5)

$$\left[A_\Delta(\lambda) \quad B_\Delta(\lambda) \right] = \left[A + E\Delta_\lambda C_A \quad B + E\Delta_\lambda C_B \right] = \left[\tilde{A}_\lambda \quad \tilde{B}_\lambda \right] \quad (4.41)$$

Conforme discutido em [36] e [38], na situação em que as matrizes da representação de estado são lineares em relação ao parâmetro incerto $\lambda \in \Lambda$, seria mais adequado considerar o conjunto $\Xi = \text{co} \left\{ \left[\tilde{A}_i \quad \tilde{B}_i \right] \right\}$. Sob esta hipótese é necessário impor em (4.1) $A = 0$, $E = I$ e $C = [I \quad I]$ a fim de caracterizar um sistema politópico. Desta forma, as restrições do Teorema 4.1 podem ser relaxadas para o projeto do filtro robusto. Inicialmente, observamos que as alterações propostas no modelo (4.1) afetam consideravelmente a LMI (4.18), de maneira que, conforme discutido

em [36] e [38], para que ela seja menos conservadora devemos considerar (4.33) satisfeita na igualdade. Assim, obtemos restrições com estrutura semelhante às apresentadas no Teorema 3.3.

4.4.2 Sistema a tempo discreto

Exemplo 4.3 Os dados a seguir foram extraídos do artigo [32], no qual é considerado um sistema a tempo discreto de ordem 2, que assim como no Exemplo 4.1, pode ser tratado na representação NFT ou LFT. Para a última representação as incertezas paramétricas são caracterizadas por $\Delta = \text{diag}(\lambda I, (1 - \lambda)I)$ cujos blocos diagonais têm dimensão 6×6 e $\lambda \in [0, 1]$. Os resultados do projeto dos filtros robusto estão resumidos na Tabela 4.2, que apresenta o custo garantido J_u fornecido por [32], o limitante superior J_H , o custo garantido para o filtro robusto projetado e o valor do limitante inferior J_L .

$$A = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,5 \\ 0,2 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2,0 & 0 \\ 1,5 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$C_y = \begin{bmatrix} -10 & 10 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$C_A = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,20 \\ 0,10 & 0,20 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0,10 & 0 \\ 0,25 & 0,10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,10 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,20 & 0,15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,10 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,20 & 0,15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,10 & 0,20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Em todas as condições de projeto não foi possível cancelar pólos e zeros do filtro otimista, implicando no fato de que o filtro robusto $F_H(\omega)$ tem ordem 4 em todas as situações. Para este exemplo verificamos que o melhor projeto obtido por [32], correspondente a um filtro próprio, remete a um custo garantido $J_u = 0,1524$. Por outro lado, o melhor projeto empregando nosso método atinge um custo garantido $\mathcal{H}_2 J_H = 0,0867$, o que representa uma redução de 43% no valor da medida de desempenho comparada com [32], e o filtro robusto correspondente tem

Método	J_u [32]	J_H	$\max_{\lambda \in \Lambda} J(F_H(\omega), H(\lambda, \omega))$	J_L
NFT ($D_H \neq 0$)	0,1524	—	—	—
LFT ($D_H \neq 0$)	1,2089	0,0867	0,0782	0,0703
NFT ($D_H = 0$)	4,1534	—	—	—
LFT ($D_H = 0$)	—	4,0556	4,0415	4,0374

Tabela 4.2: Sistema LFT a tempo discreto - Exemplo 4.3.

função de transferência

$$F_H(\omega) = -0,0562 \frac{(\zeta + 0,5688)(\zeta - 0,04081)(\zeta^2 - 1,574\zeta + 0,6221)}{(\zeta + 0,5541)(\zeta - 0,729)(\zeta - 0,7982)(\zeta + 0,0060)} \quad (4.45)$$

Além disso, podemos notar que a distância entre os limitantes obtidos pelos resultados deste capítulo é menor que 24%. \diamond

Para finalizar esta seção é importante ressaltar que, de maneira análoga ao caso a tempo contínuo, ao considerarmos sistemas politópicos encontramos problemas similares de conservadorismo aos reportados anteriormente, no contexto de sistemas a tempo contínuo. Além disso, devido à sua particularidade, os problemas que envolvem incertezas descritas na forma LFT podem ser tratados com ferramentas especialmente desenvolvidas para este fim, portanto utilizando os resultados de [59] poderíamos obter um filtro robusto que fornecesse um menor intervalo de otimalidade $J_H - J_L$ e, conseqüentemente, um filtro robusto mais próximo do filtro ótimo.

4.5 Considerações finais

Neste capítulo estendemos os resultados sobre filtragem robusta do Capítulo 3 ao tratarmos de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas do tipo LFT. A proposta do cálculo do limitante inferior para o custo garantido \mathcal{H}_2 do erro de estimação é idêntica à que foi desenvolvida para sistemas politópicos no Capítulo 3, o que pode levar a um certo conservadorismo em sua determinação uma vez que não são exploradas as características não lineares do modelo. Por sua vez, o limitante superior J_H é calculado lançando mão dos resultados sobre multiplicadores na caracterização de incertezas politópicas [33]. A comparação com um exemplo a tempo discreto obtido da literatura mostrou-se favorável ao método proposto neste trabalho. Por outro lado, ao tentarmos aplicar os mesmos resultados para sistemas politópicos percebemos um conservadorismo na formulação do problema, que pode ser contornado mediante uma nova análise do modelo proposto em (4.1).

No próximo capítulo utilizamos os resultados apresentados até aqui para tratar de aplicações práticas, mais especificamente o problema de filtragem do fluxo magnético em um motor de indução e a estimação de tensão em uma linha de transmissão.

Capítulo 5

Problemas práticos de filtragem robusta em norma \mathcal{H}_2

No Capítulo 4 apresentamos a teoria para o projeto de filtros robustos para sistemas sujeitos a incertezas do tipo LFT. Neste capítulo aplicaremos os resultados anteriores para tratar de problemas reais de filtragens e, com este fim, apresentamos modelos matemáticos que descrevem o comportamento dinâmico de um motor de indução trifásico [39] e de uma linha de transmissão monofásica [40], [41].

Inicialmente consideramos um motor de indução trifásico modelado como um sistema linear a tempo contínuo e que apresenta incerteza na indutância de enrolamento. Seu modelo é desenvolvido nas variáveis de correntes e tensões de estator, descritas no sistema de referência síncrono (veja [13], [42] e [43]). Em seguida estabelecemos como objetivo estimar o fluxo magnético concatenado a partir de informações sobre a velocidade do rotor e as correntes de estator, porém existindo a dificuldade de que os parâmetros elétricos do modelo não são precisamente conhecidos, em função de alterações na temperatura de operação do motor [13]. Neste caso constatamos que o modelo matemático admite a representação das incertezas na forma LFT e problema pode ser expresso de acordo com a formulação (4.6).

Em seguida descrevemos o comportamento dinâmico de uma linha de transmissão monofásica que possui uma derivação através de um conjunto de equações a diferenças. Este modelo é desenvolvido lançando mão do conceito de coeficientes de reflexão [47] e, assim, escrevemos um modelo a tempo discreto cujos parâmetros admitem representação LFT. O objetivo do problema é estimar a tensão no terminal de derivação conhecendo-se a tensão em outro terminal da linha, porém sem o conhecimento da impedância conectada ao terminal de derivação da linha. Novamente, a formulação matemática do problema remete aos resultados obtidos no Capítulo 4.

5.1 Motor de indução trifásico

Os motores de indução são amplamente utilizados na indústria devido ao seu custo relativamente baixo e robustez. Entretanto, eles são pouco utilizados em tarefas que requerem precisão, pois são mais difíceis de se controlar, se comparados aos motores de corrente contínua [13]. Entre outros aspectos, uma das causas deste problema é a necessidade de se controlar o fluxo magnético, pois ele é desconhecido, além do fato de os parâmetros elétricos do modelo (não linear) variarem com a temperatura de operação. A maneira mais utilizada na literatura para analisar um motor de indução sob aspectos semelhantes aos motores de corrente contínua é escrever as tensões e correntes do estator e do rotor em um sistema de referência de dois eixos que giram na velocidade síncrona [13], [43]. Neste contexto, utilizamos um modelo para o motor de indução trifásico equilibrado com variáveis expressas no referencial síncrono, a partir do qual desejamos estimar o fluxo magnético produzido pelas correntes do rotor.

Denotamos as variáveis de estado do modelo por i_{ds} e i_{qs} as correntes do estator correspondentes aos eixos direto (d) e em quadratura (q), respectivamente, ϕ_{dr} e ϕ_{qr} os fluxos concatenados do rotor projetados nos eixos d e q , respectivamente, e a velocidade do rotor por ν . As entradas do sistema são as tensões de estator v_{ds} e v_{qs} , relativas aos eixos d e q respectivamente, e o torque na carga T_c . Desse modo obtemos um modelo não linear de 5ª ordem [42]:

$$\begin{aligned}
\frac{di_{ds}}{dt} &= -\frac{L_r^2 R_s + L_m^2 R_r}{L_r \sigma} i_{ds} + \omega_s i_{qs} + \frac{R_r L_m}{L_r \sigma} \phi_{dr} + \frac{L_m}{\sigma} \nu \phi_{qr} + \frac{L_r}{\sigma} v_{ds} \\
\frac{di_{qs}}{dt} &= -\omega_s i_{ds} - \frac{L_r^2 R_s + L_m^2 R_r}{L_r \sigma} i_{qs} - \frac{L_m}{\sigma} \nu \phi_{dr} + \frac{R_r L_m}{L_r \sigma} \phi_{qr} - \frac{L_r}{\sigma} v_{qs} \\
\frac{d\phi_{dr}}{dt} &= \frac{R_r L_m}{L_r} i_{ds} - \frac{R_r}{L_r} \phi_{dr} + (\omega_s - \nu) \phi_{qr} \\
\frac{d\phi_{qr}}{dt} &= \frac{R_r L_m}{L_r} i_{qs} - (\omega_s - \nu) \phi_{dr} - \frac{R_r}{L_r} \phi_{qr} \\
\frac{d\nu}{dt} &= -\frac{p}{J} (i_{qs} \phi_{dr} - i_{ds} \phi_{qr}) - \frac{f}{J} \nu - \frac{p}{J} T_c
\end{aligned} \tag{5.1}$$

para o qual podemos definir uma indutância de acoplamento $L_f = \sigma/L_r$ e ainda considerar que $L_m = L_r$, a fim de obter um modelo na nomenclatura apresentada em [13], de onde também foram extraídos os valores nominais dos parâmetros utilizados em (5.1) e declarados na Tabela 5.1. De posse desses valores, ao linearizarmos o modelo (5.1) em torno de um ponto de equilíbrio caracterizado por $(v_{ds0}, v_{dr0}, \nu_0) = (0, 127, 358,15)$, calculamos $(i_{ds0}, i_{qs0}, \phi_{dr0}, \phi_{qr0}, T_{c0}) = (2,8690, 4,9125, 0,3132, -0,0106, -10,9662)$. O modelo linearizado obtido deve ser empregado na estimação dos fluxos ϕ_{dr} e ϕ_{qr} a partir dos valores das demais variáveis de estado do sistema [39].

$R_s = 1$ [Ω]	resistência do estator
$R_r = 1,18$ [Ω]	resistência do rotor
L_s	indutância do estator
L_r	indutância do rotor
$L_m = 11,6$ [mH]	indutância de magnetização
$L_f = 3,7$ [mH]	indutância de acoplamento
$\sigma = L_s L_r - L_m^2$	coeficiente de acoplamento
$\omega_s = 377$ [rad/s]	velocidade síncrona
$p = 2$	número de pólos
$J = 0,1$ [kg m ²]	momento de inércia da carga
$f = 0,07$ [N m s]	coeficiente de atrito viscoso

Tabela 5.1: Valores nominais dos parâmetros do motor de indução [13].

A fim de caracterizarmos o problema de acordo com o que foi desenvolvido no Capítulo 4 [39] denotamos o vetor de variáveis de estado por $\eta = [i_{ds} \ i_{qs} \ \phi_{dr} \ \phi_{qr} \ \nu]'$ e o vetor de entradas por $v = [v_{ds} \ v_{qs} \ T_c \ w_{y1} \ w_{y2} \ w_{y3}]'$, no qual os sinais adicionais representam os ruídos de medição. Dessa forma escrevemos o sistema linearizado de acordo com a notação em (4.1) para $x = \eta - \eta_0$ e $w = v - v_0$ e considerando que a indutância de acoplamento L_f pode apresentar variação de até 15% em módulo. Sob estas considerações as matrizes da representação de estado de (4.1) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{R_s + R_r}{L_f} & \omega_s & \frac{R_r}{L_m L_f} & \frac{\nu_0}{L_f} & \frac{\phi_{qr0}}{L_f} \\ -\omega_s & -\frac{R_s + R_r}{L_f} & -\frac{\nu_0}{L_f} & \frac{R_r}{L_m L_f} & -\frac{\phi_{dr0}}{L_f} \\ R_r & 0 & -\frac{R_r}{L_m} & \omega_s - \nu_0 & -\phi_{qr0} \\ 0 & R_r & \nu_0 - \omega_s & -\frac{R_r}{L_m} & \phi_{dr0} \\ -\frac{p\phi_{qr0}}{J} & \frac{p\phi_{dr0}}{J} & \frac{pi_{qs0}}{J} & -\frac{pi_{ds0}}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_f} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{J} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_f} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} R_s + R_r & 0 & -\frac{R_r}{L_m} & -\nu_0 & -\phi_{qr0} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s + R_r & \nu_0 & -\frac{R_r}{L_m} & \phi_{dr0} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Ordem do filtro	J_H	$\max_{\lambda \in \Lambda} J(F_H(\omega), H(\omega))$	J_L
6	0,2763	0,2661	0,2660

Tabela 5.2: Desempenho \mathcal{H}_2 para o filtro do motor de indução.

e para completar a caracterização das incertezas paramétricas $D = \text{diag}(-1, -1)$ e $\Delta = \text{diag}(\delta L_f, \delta L_f)$, com $\delta L_f \in [-0,15, 0,15]$. Devido ao fato de que as grandezas medidas são as correntes de estator e a velocidade do rotor, temos também

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Finalmente, impomos como objetivo estimar as correntes ϕ_{dr}/L_m e ϕ_{qr}/L_m , o que nos fornece indiretamente os respectivos fluxos magnéticos, assim

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_m} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

A estratégia de estimar a corrente é necessária pois o problema do projeto do filtro robusto é mal condicionado. Este fato está associado a uma particularidade da matriz A em (5.2), que possui autovalores com constantes de tempo entre 2 [ms] e 500 [ms].

Com todos os dados em mãos, aplicamos o algoritmo 3.1 adaptado ao contexto do Capítulo 4 e calculamos um filtro otimista $F_L(\omega)$ de ordem 10 e o correspondente limitante inferior expresso na Tabela 5.2. Após aplicação da função `minreal` com tolerância de 10^{-5} obtemos um filtro com realização mínima de 6ª ordem. Resolvendo o problema (4.34) obtemos o limitante superior J_H dado na Tabela 5.2 e o filtro robusto $F_H(\omega)$ de ordem 6. A partir dos dados da Tabela 5.2 verificamos que a distância entre os limitantes de desempenho do filtro é de apenas 0,4%, indicando que o filtro robusto calculado é praticamente ótimo. A fim de deixar a análise do problema mais completa, na situação em que não há incerteza paramétrica, isto é, $\delta L_f = 0$ obtemos um filtro ótimo de 5ª ordem de forma que o quadrado da norma do erro de estimação vale 0,2448. Para finalizar, apresentamos na Figura 5.1 os resultados da simulação temporal do desempenho do filtro robusto calculado quando a incerteza sobre a indutância de acoplamento vale $\delta L_f = -0,15$ e o sistema linearizado evolui a partir de uma entrada impulsiva.

As curvas contínuas na Figura 5.1 representam os valores verdadeiros das correntes ϕ_{dr}/L_m e ϕ_{qr}/L_m , ao passo que as linhas tracejadas denotam os sinais estimados pelo filtro. É possível

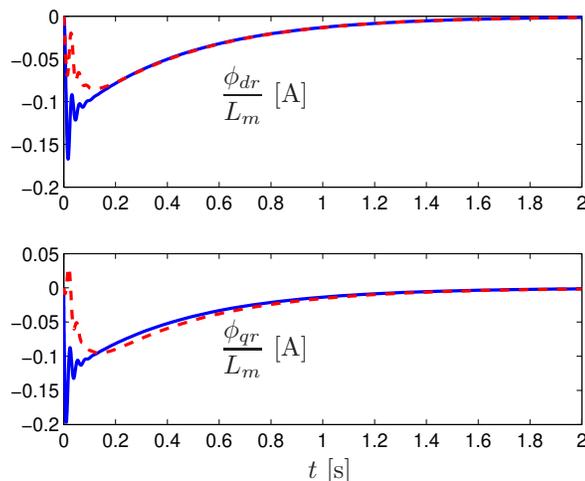


Figura 5.1: Simulação temporal para o motor de indução.

concluir que a partir de, aproximadamente, 0,2 [s] os erros entre os sinais são praticamente nulos, evidenciando a qualidade do filtro robusto projetado.

5.2 Linha de transmissão com derivação

Nesta seção nos dedicamos a duas tarefas, primeiramente modelamos de uma linha de transmissão monofásica, à qual está conectado um trecho de derivação e que alimenta uma carga conhecida para, em seguida, projetarmos um filtro robusto a fim de estimar a tensão no terminal de derivação conhecendo-se apenas a tensão sobre a carga. Neste problema assumimos que a impedância no terminal de derivação é desconhecida, o que nos leva a um modelo, no contexto de sistemas a tempo discreto, com parâmetros que admitem representação LFT [40], [41]. Iniciamos a caracterização do problema considerando o esquema da linha de transmissão apresentada na Figura 5.2.

Um gerador com força eletromotriz denotada por $V(k)$ e impedância interna Z_g alimenta uma linha de transmissão de comprimento 2ℓ , que por sua vez alimenta uma carga com impedância de entrada Z_c . A uma distância ℓ do terminal conectado à fonte (ponto M) há uma derivação de comprimento ℓ , a qual alimenta uma carga com impedância de entrada Z_d . Consideramos que a linha de transmissão é ideal e, portanto, ela é caracterizada pelos parâmetros elétricos de capacitância e indutância por unidade de comprimento [47], simbolizados pelas letras C e L , respectivamente. Através desses parâmetros é possível definir a impedância característica da linha $Z_0 = \sqrt{L/C}$ e a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas $v = 1/\sqrt{LC}$ [47], suposta a mesma para todas as frequências. Assim constituímos o modelo a tempo discreto

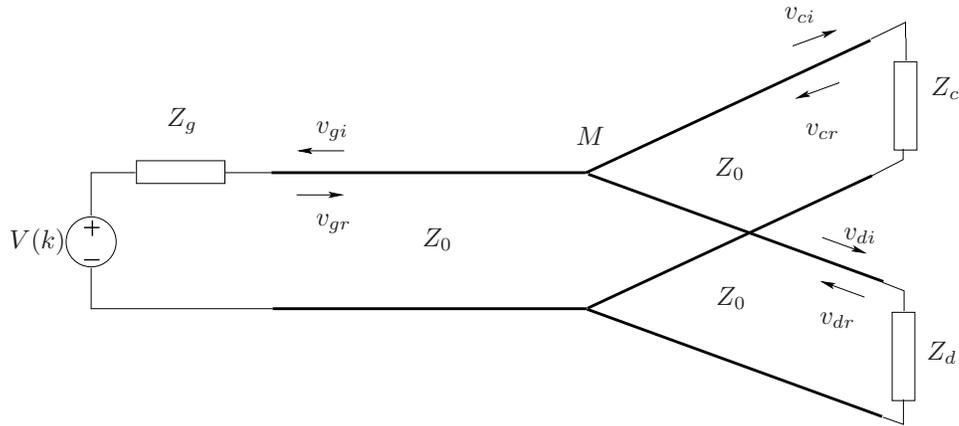


Figura 5.2: Esquema de uma linha de transmissão.

considerando que as tensões são amostradas com um período T_S igual ao tempo necessário para a onda se propagar de qualquer uma das extremidades até o ponto M , ou seja, $T_S = \ell\sqrt{LC}$.

De acordo com a nomenclatura empregada na Figura 5.2, denotamos as ondas de tensões, a cada instante de tempo $k \geq 0$, por $v_{ci}(k)$ e $v_{cr}(k)$ como sendo as tensões incidente e refletida na impedância Z_c , $v_{di}(k)$ e $v_{dr}(k)$ as tensões incidente e refletida na impedância Z_d e $v_{gi}(k)$ e $v_{gr}(k)$ as tensões incidente e refletida no terminal conectado ao gerador. Para desenvolver o modelo dinâmico da linha de transmissão também é necessário definir os coeficientes de reflexão de tensão [47] nas impedâncias conectadas a cada um dos terminais da linha e também no ponto M . Segundo [47], para ondas de tensão se propagando nos sentidos definidos por v_{ci} , v_{di} e v_{gi} temos

$$\Gamma_c = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0}, \quad \Gamma_d = \frac{Z_d - Z_0}{Z_d + Z_0}, \quad \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}, \quad (5.6)$$

ao passo que no ponto M definimos $\Gamma_m = (Z_0/2 - Z_0)/(Z_0/2 + Z_0) = -1/3$ que depende apenas da impedância característica da linha de transmissão. Com esses elementos em mãos e a partir da Figura 5.2, podemos escrever as seguintes equações a diferenças de segunda ordem:

$$v_{ci}(k+2) = (1 + \Gamma_m)[v_{dr}(k) + v_{gr}(k)] + \Gamma_m v_{cr}(k) + (1 + \Gamma_m) \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} V(k) \quad (5.7)$$

$$v_{di}(k+2) = (1 + \Gamma_m)[v_{cr}(k) + v_{gr}(k)] + \Gamma_m v_{dr}(k) + (1 + \Gamma_m) \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} V(k) \quad (5.8)$$

$$v_{gi}(k+2) = (1 + \Gamma_m)[v_{cr}(k) + v_{dr}(k)] + \Gamma_m v_{gr}(k) + \Gamma_m \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} V(k) \quad (5.9)$$

nas quais o coeficiente $1 + \Gamma_m$ é conhecido como coeficiente de transmissão no ponto M . Ainda utilizando o esquema da Figura 5.2 definimos as somas das tensões incidentes e refletidas em

cada uma das terminações da linha de transmissão por

$$v_c(k) = v_{ci}(k) + v_{cr}(k) = (1 + \Gamma_c)v_{ci}(k) \quad (5.10)$$

$$v_d(k) = v_{di}(k) + v_{dr}(k) = (1 + \Gamma_d)v_{di}(k) \quad (5.11)$$

$$v_g(k) = v_{gi}(k) + v_{gr}(k) = (1 + \Gamma_g)v_{gi}(k) \quad (5.12)$$

e assim, após algumas manipulações algébricas sobre as equações (5.7)-(5.9) obtemos o seguinte modelo em termos de representação de estado

$$\eta(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Phi_\Delta & 0 \end{bmatrix} \eta(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_\Delta \end{bmatrix} V(k) \quad (5.13)$$

no qual $\eta(k) = [v_c(k) \ v_d(k) \ v_g(k) \ v_c(k+1) \ v_d(k+1) \ v_g(k+1)]'$ é o vetor de variáveis de estado e as matrizes com sub-índice Δ são definidas por:

$$\Phi_\Delta = (1 + \Gamma_m) \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_m \Gamma_c}{1 + \Gamma_m} & \frac{(1 + \Gamma_c) \Gamma_d}{1 + \Gamma_d} & \frac{(1 + \Gamma_c) \Gamma_g}{1 + \Gamma_g} \\ \frac{(1 + \Gamma_d) \Gamma_c}{1 + \Gamma_c} & \frac{\Gamma_m \Gamma_d}{1 + \Gamma_m} & \frac{(1 + \Gamma_d) \Gamma_g}{1 + \Gamma_g} \\ \frac{(1 + \Gamma_g) \Gamma_c}{1 + \Gamma_c} & \frac{(1 + \Gamma_g) \Gamma_d}{1 + \Gamma_d} & \frac{\Gamma_m \Gamma_g}{1 + \Gamma_m} \end{bmatrix}, \quad \Psi_\Delta = \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} \begin{bmatrix} (1 + \Gamma_m)(1 + \Gamma_c) \\ (1 + \Gamma_m)(1 + \Gamma_d) \\ \Gamma_m(1 + \Gamma_g) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

e, conforme a notação apresentada no Capítulo 4, remetem à existência de parâmetros incertos no modelo (5.13).

Uma vez obtidas as equações do modelo a tempo discreto é necessário validá-las, por exemplo, comparando (5.13) com os resultados do modelo de linha de transmissão existente no ambiente `Matlab/Simulink`. A linha utilizada para simulação ao longo de toda esta seção tem como parâmetros elétricos $L = 0,26$ [mH/km] e $C = 95$ [nF/km], comprimento $\ell = 0,2$ [km] e, conforme dito anteriormente, ela é suposta ideal. A partir desses parâmetros físicos, o período de amostragem utilizado é de $T_S = 1$ [μ s]. Primeiramente consideramos $V(k)$ como sendo um trem de pulsos de amplitude 10 [V], frequência 1 [kHz] e ciclo de trabalho de 50% e as impedâncias do gerador e da carga são, respectivamente, $Z_g = 1$ [k Ω] e $Z_c = 2$ [k Ω]; supomos também que o terminal do ramo de derivação está em aberto, fazendo com que $\Gamma_d = 1$. Na Figura 5.3 verificamos o comportamento da tensão $v_c(k)$ sobre a carga obtido pelo modelo `Matlab`, em linhas tracejadas, e a mesma tensão obtida com as equações (5.13), em linhas cheias. Em seguida consideramos $Z_g = 50$ [Ω], $Z_c = 100$ [Ω], mantendo o terminal de derivação em aberto, e aplicamos um trem de pulsos $V(k)$ com amplitude 10 [V], frequência 20 [kHz] e ciclo de trabalho de 50%. Para

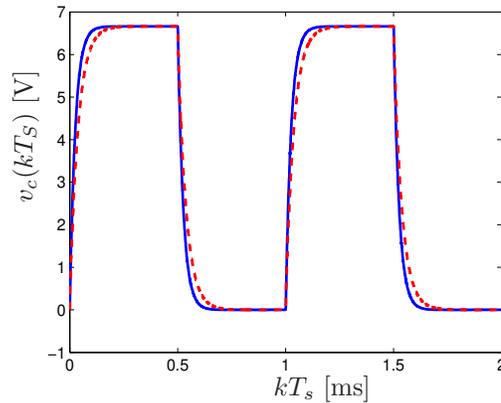


Figura 5.3: Linha operando a 1 kHz.

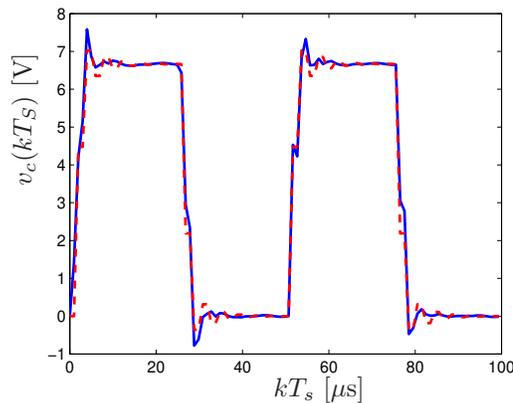


Figura 5.4: Linha operando a 20 kHz.

esta simulação, a tensão $v_c(k)$ é mostrada na Figura 5.4 em linhas tracejadas correspondendo ao modelo `Matlab` e em linhas cheias o resultado correspondente ao modelo (5.13). A qualidade do modelo proposto é aparente, uma vez que apenas pequenos erros existem durante o transitório, como observado nas Figuras (5.3) e (5.4).

Uma vez comprovada a validade do modelo (5.13) para a linha de transmissão, assumimos, a partir deste ponto, que a linha de transmissão opera em um estado $\eta_0(k)$ devido a uma entrada conhecida $V_0(k)$ e ainda $Z_g = 1$ [k Ω] e $Z_c = 2$ [k Ω]. Então devido à linearidade do modelo (5.13) podemos definir um novo vetor de estado $x(k) = \eta(k) - \eta_0(k)$ e a nova entrada $w(k) = [V(k) - V_0(k) \quad w_c(k)]'$, que concatena, respectivamente, a variação do sinal injetado na linha e um ruído de medição. Além disso, consideramos que a impedância Z_d é desconhecida e, conseqüentemente, também o coeficiente de reflexão Γ_d , cuja única informação disponível é a de que ele pertence a um intervalo conhecido $[\Gamma_{dmin}, \Gamma_{dmax}]$. Sob este contexto, devemos projetar um filtro robusto de modo a minimizar o quadrado da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação da tensão

$v_d(k)$ conhecendo-se apenas a tensão $v_c(k)$.

A construção das matrizes Φ_Δ e Ψ_Δ em (5.14) evidenciam que, em relação ao parâmetro Γ_d , o modelo está descrito pelo formato LFT, de modo que a representação de estado introduzida em (4.1) é perfeitamente aplicável ao problema proposto. Assim, as matrizes nominais referentes à representação (4.1) são denotadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Phi & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Psi & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

onde a segunda coluna em B leva em consideração a entrada correspondente ao ruído de medição e as matrizes internas utilizadas nesta definição são expressas por

$$\Phi = (1 + \Gamma_m) \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_m \Gamma_c}{1 + \Gamma_m} & 0 & \frac{(1 + \Gamma_c) \Gamma_g}{1 + \Gamma_g} \\ \frac{\Gamma_c}{1 + \Gamma_c} & 0 & \frac{\Gamma_g}{1 + \Gamma_g} \\ \frac{(1 + \Gamma_g) \Gamma_c}{1 + \Gamma_c} & 0 & \frac{\Gamma_m \Gamma_g}{1 + \Gamma_m} \end{bmatrix}, \quad \Psi = \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} \begin{bmatrix} (1 + \Gamma_m)(1 + \Gamma_c) \\ (1 + \Gamma_m) \\ \Gamma_m(1 + \Gamma_g) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Para completar a caracterização do modelo em relação ao parâmetro incerto Γ_d definimos também as matrizes

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1 + \Gamma_g}{1 + \Gamma_c} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = (1 + \Gamma_m) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1 + \Gamma_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Gamma_c}{1 + \Gamma_c} & \frac{\Gamma_m}{1 + \Gamma_m} & \frac{\Gamma_g}{1 + \Gamma_g} & 0 & 0 & 0 & \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

e ainda $D = \text{diag}(-1, 0)$ e $\Delta = \text{diag}(\Gamma_d, \Gamma_d)$ evidenciam como Γ_d afeta de maneira não linear as matrizes em (5.13).

Sob a hipótese de que a diferença de tensão sobre a carga Z_d , $v_c(k) - v_{c0}(k)$, é medida por um sensor com ganho estático igual a 10 e este sinal é corrompido por um ruído aditivo $w_c(k)$ temos as matrizes de saída

$$C_y = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

e finalmente, com o objetivo de estimar a tensão $v_d(k) - v_{d0}(k)$, amplificada pelo mesmo ganho

Γ_{dmin}	Γ_{dmax}	Ordem	J_H	$\max_{\lambda \in \Lambda} J(F_H(\omega), H(\lambda, \omega))$	J_L
0,8	0,9	12	0,4024	0,3977	0,3804
0,5	0,9	12	0,5117	0,4860	0,3963
0,3	0,9	12	0,5760	0,5356	0,4000
0,0	0,9	10	0,6701	0,6104	0,4012
-0,3	0,9	12	0,7658	0,6691	0,4010
0,5	0,8	6	0,3597	0,3493	0,3215
0,0	0,8	6	0,4333	0,4116	0,3216
-0,3	0,8	6	0,4981	0,4423	0,3216

Tabela 5.3: Filtragem para a linha de transmissão.

estático do sensor utilizado na medida anterior, definimos também

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Para diversos valores admissíveis de Γ_{dmin} e Γ_{dmax} satisfazendo as restrições $-1 < \Gamma_{dmin}$ e $\Gamma_{dmax} < 1$ [47], a Tabela 5.3 fornece a ordem do filtro robusto, o limitante superior J_H para o custo \mathcal{H}_2 , o valor exato do custo garantido calculado por busca exaustiva e o limitante inferior J_L . É necessário enfatizar que à medida que Γ_{dmax} se aproxima de 1 (indicando que $Z_d \rightarrow \infty$) percebemos uma aparente singularidade no problema do cálculo do limitante superior J_H , conseqüência do mal condicionamento do problema. Nessas situações, a ordem do filtro robusto é o dobro da ordem do sistema que descreve a linha de transmissão, como pode ser verificado na maioria dos casos em que $\Gamma_{dmax} = 0,9$, indicando que não ocorrem cancelamentos entre pólos e zeros do filtro $F_L(\omega)$. Ao reduzirmos Γ_{dmax} para 0,8 notamos que ocorre cancelamentos entre pólos e zeros do filtro otimista, resultando em um filtro robusto de ordem 6.

A fim de tornar a análise mais completa apresentamos a simulação temporal quando $\Gamma_d = 0,8$, para um filtro projetado sob a condição $0,5 \leq \Gamma_d \leq 0,8$. É importante notar que para este intervalo ao qual pertence Γ_d , a impedância Z_d está entre $3Z_0$ e $9Z_0$. Na Figura 5.5, em linha contínua, apresentamos o valor exato da tensão $v_d(k) - v_{d0}(k)$ e o sinal estimado corresponde à linha tracejada, obtidos após a aplicação de um impulso de amplitude 10 [V] na entrada do sistema. Verificamos que após 30 [μs], aproximadamente, os dois sinais são praticamente iguais.

Por sua vez, a Figura 5.6 apresenta alguns diagramas de valores singulares da função de transferência do erro de estimação, sendo os valores nas ordenadas expressos em dB e considerando o filtro robusto obtido anteriormente. No gráfico à esquerda mostramos apenas os diagramas de valores singulares para as situações em que $\Gamma_d = 0,5$, que corresponde à curva inferior, e $\Gamma_d = 0,8$, correspondente à curva superior. Com a intenção de avaliar o comportamento do erro

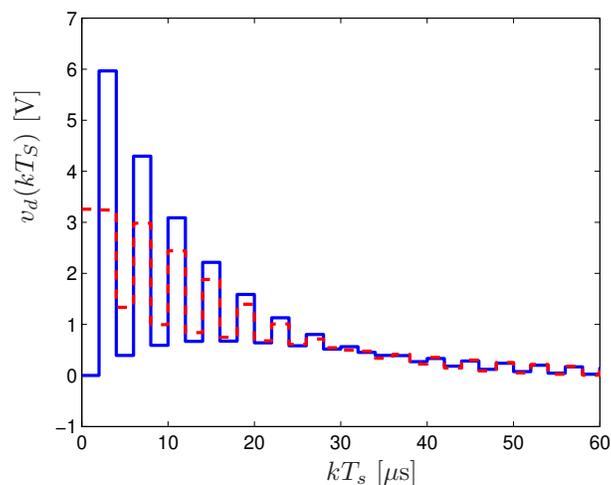


Figura 5.5: Simulação temporal para o filtro conectado à linha.

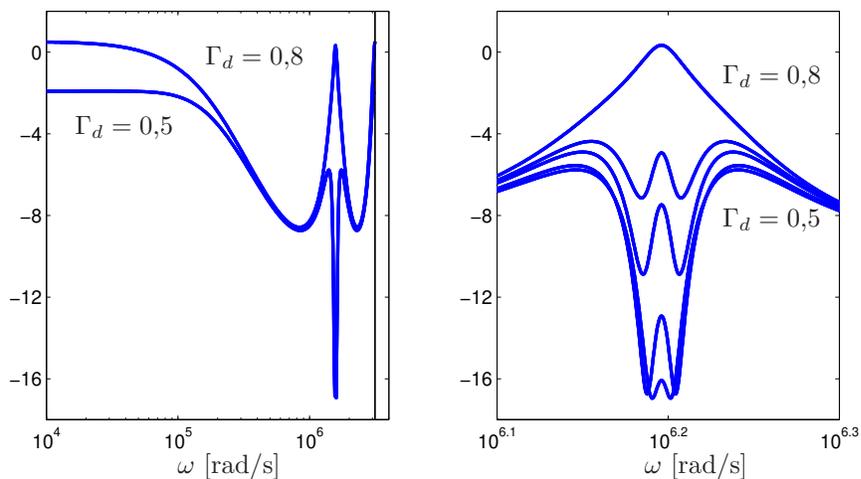


Figura 5.6: Diagramas de valores singulares para o erro de estimação.

de estimação em torno da frequência $\omega = 10^{6,2}$ [rad/s], realizamos uma ampliação do diagrama de valor singular anterior em torno desta frequência e consideramos outros valores intermediários para o parâmetro Γ_d no gráfico da direita da Figura 5.6. Notamos que a curva correspondente a $\Gamma_d = 0,5$ está associada com o melhor desempenho do filtro robusto, de modo que aumentando o valor de Γ_d verificamos também um aumento no módulo do erro de estimação em cada frequência. Ao atingirmos o valor $\Gamma_d = 0,8$, temos a condição de incerteza paramétrica mais severa para o filtro.

5.3 Considerações finais

Neste capítulo ilustramos o projeto de filtros robustos em norma \mathcal{H}_2 aplicando-os a um motor de indução trifásico e uma linha de transmissão monofásica, modelados através de equações diferenciais e equações a diferenças, respectivamente. Os resultados das simulações numéricas evidenciam que o método proposto não atinge limitantes de desempenho J_L e J_H bastante próximos como verificado no exemplo do Capítulo 3. Por outro lado, verificamos que a distância entre o custo \mathcal{H}_2 verdadeiro e os limitantes é relativamente pequena, além do fato de que os problemas discutidos neste capítulo apresentam singularidades, a ponto de degradar as soluções obtidas em algumas situações.

Capítulo 6

Análise de sistemas com atraso através de funções racionais

Neste capítulo abordamos os sistemas afetados por atraso, que ocorrem em diversos problemas reais, como sistemas de manufatura, motores de combustão interna ou na simplificação de eventos modelados por equações diferenciais parciais (veja [31] e [57] para uma lista de alguns exemplos dessa classe de sistemas). Por outro lado, há situações em que atrasos são inseridos no sistema de forma artificial, seja nos processos de transmissão de sinais em canais de comunicação, ou ainda propositalmente para melhorar o desempenho de sistemas em malha fechada. Os sistemas com atraso são caracterizados por possuírem dimensão infinita, sendo esta uma das razões de que os problemas de análise de estabilidade e de síntese apresentam elevada complexidade.

Uma das maneiras de se abordar o problema de análise de estabilidade para sistemas com atraso é manipular diretamente sua equação característica e avaliar suas raízes em função do valor do atraso. Entretanto, em virtude da existência de infinitas raízes para as equações características dessa classe de sistemas foram desenvolvidos na literatura alguns métodos menos árduos de tratar o problema. A idéia fundamental é calcular uma margem de estabilidade, mediante a definição de um intervalo admissível para o valor do atraso de modo que o sistema ainda permaneça estável [6], [7]. Neste contexto foram desenvolvidas duas categorias para o procedimento de análise de estabilidade: aquelas que levam em conta o valor do atraso e as que não o consideram, sendo que na segunda, em que condições de estabilidade independem do valor de atraso, os resultados tendem a ser mais conservadores que na primeira.

Em [50] e [68] é aplicado o critério de Routh-Hurwitz para polinômios específicos e assim são determinadas suas raízes que se encontram sobre o eixo imaginário. O passo seguinte é verificar se essas raízes, parametrizadas pelo valor do atraso, são estabilizantes (se movem para o semi-plano complexo esquerdo) ou desestabilizantes (movem-se para o semi-plano complexo direito). Uma

outra abordagem, realizada no domínio da frequência, lança mão do critério de Nyquist [65], [71] e determina o número de raízes instáveis da equação característica em função do valor do atraso. Mais recentemente vem sendo exploradas as funções de Lyapunov-Krasovskii [10], [16], [21], que estendem o conceito de estabilidade quadrática [3] para sistemas com atraso, mas que fornecem apenas condições suficientes de estabilidade. Uma outra abordagem para o mesmo problema é tratada em [72], onde é definido um *sistema de comparação*, lançando-se mão de aproximações de Padé que nos permite determinar sistemas LTI com funções de transferências racionais de ordem crescente, porém finita, viabilizando o cálculo de margens de estabilidade e limitantes para o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema com atraso. Mostra-se também que à medida que a ordem da aproximação de Padé cresce, a qualidade dos resultados em [72] também cresce. Além dessas, há outras formas de se estudar a estabilidade de sistemas com atraso, como lançar mão de IQCs [35], ou via manipulação das matrizes da representação em espaço de estado do sistema [6].

O enfoque dado neste capítulo segue a direção tomada em [72] e baseia-se na definição de um sistema linear e invariante com o tempo representado por uma função de transferência racional, denominado *sistema de comparação* [28], cujas propriedades nos permitem concluir sobre o comportamento do sistema com atraso original. Inicialmente manipulamos as matrizes da representação de estado do sistema com atraso, sem realizar o cálculo explícito de sua equação característica [28]. Dessa maneira aplicamos o critério de Nyquist [5] a uma equação característica específica de modo a inferir sobre sua estabilidade. Em seguida, manipulamos a equação característica do nosso sistema de comparação de maneira análoga ao realizado anteriormente e determinamos a margem de estabilidade deste último, também empregando o critério de Nyquist. Verificamos, ao final, que apenas sob circunstâncias específicas a estabilidade de ambos é equivalente [28].

Com o intuito de caracterizar o desempenho de sistemas com atraso provamos que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema de comparação proposto fornece um limitante inferior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema com atraso. Além disso, mediante o comportamento da norma \mathcal{H}_∞ é possível determinar a margem de estabilidade do sistema com atraso, uma vez que ele se torna ilimitada à medida que o valor de atraso se aproxima do limite de estabilidade. Finalmente, em vista dos resultados obtidos no cálculo de norma \mathcal{H}_∞ verificamos que o emprego do *sistema de comparação* proposto também apresenta resultados satisfatórios no projeto de controladores via realimentação de estado e também de filtros, impondo-se limitantes inferiores e superiores para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema com atraso.

É preciso ressaltar que os sistemas com atraso podem ser divididos em duas classes: os sistemas com retardo e os sistemas neutros, que serão caracterizados neste capítulo. Neste trabalho nos concentramos apenas nos sistemas com retardo e mostramos ao final do capítulo

como estender os resultados para os sistemas neutros.

6.1 Sistemas com retardo e sistema de comparação

Os sistemas com retardo são caracterizados por possuírem atraso apenas no seu estado, de acordo com a realização a seguir

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + E_0w(t) \quad , \quad x(t) = 0 \quad \forall t \in [-\tau, 0] \\ z(t) &= C_0x(t) + C_1x(t - \tau) + D_0w\end{aligned}\tag{6.1}$$

na qual $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ representa a entrada externa e $z(t) \in \mathbb{R}^r$ é a saída de interesse. Partimos das hipóteses de que o sistema evolui a partir de condições iniciais nulas e de que o atraso $\tau \geq 0$ é uma constante em relação ao tempo. Dessa maneira, a função de transferência da entrada $w(t)$ para a saída $z(t)$

$$T(\tau, s) = (C_0 + C_1e^{-s\tau}) (sI - A_0 - A_1e^{-s\tau})^{-1} E_0 + D_0\tag{6.2}$$

é não-racional e, em geral, possui infinitos pólos. Este fato torna os problemas de análise de estabilidade e de síntese de sistemas com atraso bastante árduos, o que tem levado diversos autores a buscar soluções que não envolvam diretamente a manipulação de (6.2).

Dentro deste contexto, nossa proposta é utilizar o resultado amplamente conhecido como substituição de Rekasius [56], segundo a qual para $s = j\omega$, com $\omega \in \mathbb{R}$, a igualdade

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - s/\lambda}{1 + s/\lambda}\tag{6.3}$$

não é uma mera aproximação. Na realidade ela vale para um determinado $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte relação [15], [31]

$$\frac{\omega}{\lambda} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\tag{6.4}$$

Devemos atentar para o fato de que a definição clássica $\lambda = 2/\tau$, correspondente à aproximação de Padé de primeira ordem, no lado direito de (6.3) é uma aproximação imprecisa para altas frequências. Por outro lado, para uma determinada frequência $\omega = \omega_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $\lambda_0 = \omega_0/\operatorname{tg}(\omega_0\tau/2)$, o valor de $e^{-\tau s}$ pode ser calculado exatamente através da função racional no lado direito da igualdade (6.3) em $\lambda = \lambda_0$; fato que levou [50] e [51] a obterem resultados precisos no cálculo de margens de estabilidade para sistemas com atraso.

Em vista da igualdade (6.3) nossa proposta é substituir o operador não racional $e^{-\tau s}$ pela função racional no sistema (6.1) de modo a definir o que chamamos de *sistema de comparação*.

Este sistema tem como realização em espaço de estado

$$H(\lambda, s) = \left[\begin{array}{c|c} A(\lambda) & E \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda I & 0 \\ A_0 + A_1 & A_0 - A_1 - \lambda I & E_0 \\ \hline C_0 + C_1 & C_0 - C_1 & D_0 \end{array} \right] \quad (6.5)$$

na qual apenas a matriz $A(\lambda)$ depende do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Este sistema LTI apresenta a propriedade $H(\lambda, j\omega) = T(\tau, j\omega)$ sempre que as constantes reais λ , τ e ω estiverem relacionadas por (6.4). De fato, calculando explicitamente a função de transferência relativa à realização (6.5), para $s = j\omega$, obtemos utilizando a relação do Lema A.1

$$\begin{aligned} H(\lambda, s) &= C(sI - A(\lambda))^{-1}E + D \\ &= ((C_0 + C_1)\lambda + (C_0 - C_1)s)(s^2I - (A_0 - A_1 - \lambda I)s - (A_0 + A_1)\lambda)^{-1}E_0 + D_0 \\ &= (C_0(\lambda + s) + C_1(\lambda - s))((sI - A_0)(\lambda + s) - A_1(\lambda - s))^{-1}E_0 + D_0 \\ &= \left(C_0 + C_1 \frac{\lambda - s}{\lambda + s}\right) \left(sI - A_0 - A_1 \frac{\lambda - s}{\lambda + s}\right)^{-1} E_0 + D_0 \\ &= T(\tau, s) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Uma das relevâncias desta relação é que sob certas circunstâncias a serem discutidas posteriormente, a estabilidade de $H(\lambda, s)$ implica na estabilidade de $T(\tau, s)$ e vice-versa. Além disso ela é de extrema importância nos problemas de síntese de controladores e filtros, como será visto mais adiante.

É importante salientar que para um dado par $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R}^2$ existem infinitos valores de $\tau \geq 0$ satisfazendo a relação (6.4), parametrizados por

$$\tau = \frac{2}{\omega} \left(\arctg \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) + \ell\pi \right), \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (6.7)$$

onde $\arctg(\cdot)$ tem como conjunto imagem o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. A partir desta expressão e da relação (6.6) fica aparente que se o sistema $H(\lambda, s)$ tem pólos sobre o eixo imaginário para $\lambda = \lambda_0$, correspondentes à frequência $\omega = \omega_0$, então é possível calcular valores do parâmetro $\tau = \tau_0$, dados por (6.7), tais que o sistema $T(\tau, s)$ também tenha pólos puramente imaginários. Portanto, poderíamos concluir que a partir da hipótese de que o sistema $T(0, s)$ seja estável é possível determinar menor valor $\tau^* > 0$ de modo que $T(\tau, s)$ seja assintoticamente estável em todo o intervalo $\tau \in [0, \tau^*)$, utilizando os limites de estabilidade do sistema de comparação $H(\lambda, s)$. Entretanto, como será discutido a seguir, isso é verdade apenas para uma classe de sistemas com retardo.

Ainda com relação à expressão (6.7), é importante destacar que a determinação de $\tau^* > 0$ a partir de λ também envolve o valor da frequência $\omega \in \mathbb{R}$ e, assim, é necessário levar em conta que o parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, conforme discutido em [68]. Porém, se $\lambda < 0$ o sistema $H(\lambda, s)$ é instável, conforme será visto na próxima seção, de modo que o sistema de comparação não pode ser empregado no problema de análise de estabilidade, nem do cálculo de norma \mathcal{H}_∞ .

Uma vez introduzido o sistema de comparação (6.5), assumimos ao longo deste capítulo que o par $(A(\lambda), C)$ é observável para todo $\lambda > 0$ e, conseqüentemente, não há cancelamento entre pólos e zeros da função $H(\lambda, s)$, que apresenta ordem invariante $2n$ com relação a $\lambda > 0$, portanto.

6.2 Análise de estabilidade

Nesta seção abordamos o problema padrão no estudo de estabilidade de sistemas com atraso, que consiste em determinar o valor $\tau^* > 0$ de modo que o sistema (6.1) seja assintoticamente estável para todo $\tau \in [0, \tau^*)$. Um fator adverso associado à determinação de τ^* está no cálculo dos pólos da função de transferência $T(\tau, s)$, soluções da equação característica $\Delta_T(\tau, s) = 0$, sendo

$$\Delta_T(\tau, s) = \det (sI - A_0 - A_1 e^{-s\tau}) \quad (6.8)$$

uma função transcendental que, em geral, possui uma infinidade de raízes finitas e por isso traz consigo complicações no estudo de sistemas com atraso.

Por outro lado, podemos reescrever (6.8) em uma forma alternativa, fatorando o termo $(sI - A_0 - A_1)$ e obtendo a nova função

$$\Psi(\tau, s) = \frac{\Delta_T(\tau, s)}{\Delta_T(0, s)} \quad (6.9)$$

que, em termos das matrizes da representação de estado em (6.1) e do atraso τ é dada por

$$\Psi(\tau, s) = \det (I + (sI - A_0 - A_1)^{-1} A_1 (1 - e^{-s\tau})) \quad (6.10)$$

Dessa maneira, podemos aplicar o critério de Nyquist [5], utilizando princípio da variação do argumento de $\Psi(\tau, s)$ para concluir sobre o número de raízes de (6.8) no interior do semi-plano complexo direito aberto. Este procedimento é válido mesmo que a função de transferência considerada seja não racional, veja [71].

Se assumirmos que o sistema com atraso é assintoticamente estável quando $\tau = 0$, então as n raízes de $\Delta_T(0, s) = \det (sI - A_0 - A_1) = 0$ estão localizadas no semiplano complexo esquerdo aberto e de acordo com [7] existe τ^* . Então, o critério de Nyquist garante que todas as raízes de

(6.8) também possuem parte real negativa desde que o mapeamento de $\Psi(\tau, j\omega)$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$ e τ fixo, não envolva a origem do plano complexo. Ao notarmos que $\Psi(\tau, j0) = \Psi(\tau, j\infty) = 1$, esta condição pode ser verificada graficamente com relativa facilidade. Além disso, se aumentarmos continuamente τ , a partir de $\tau = 0$, utilizando o mapeamento da função em (6.10) é possível determinar o par (τ^*, ω^*) , correspondente à primeira ocorrência da igualdade $\Psi(\tau^*, j\omega^*) = 0$. Pelo argumento exposto anteriormente, τ^* calculado desta forma define a margem de estabilidade para o sistema com retardo (6.1).

De posse desses resultados concluímos que é totalmente viável determinar a margem de estabilidade de (6.1) aplicando-se o critério de Nyquist após manipularmos convenientemente a equação característica (6.9). Associado a esse fato, em virtude da substituição de Rekasius (6.3) ser válida para $s = j\omega$, podemos empregar um procedimento análogo ao realizado anteriormente para determinar a margem de estabilidade do sistema de comparação (6.5). Utilizando a expressão (A.3) do Apêndice A a equação característica relativa a (6.5) é dada por

$$\begin{aligned}\Delta_H(\lambda, s) &= \det(sI - A(\lambda)) \\ &= \det((s + \lambda)(sI - A_0) + (s - \lambda)A_1)\end{aligned}\quad (6.11)$$

que é um polinômio de ordem $2n$ e, portanto, admite $2n$ raízes. Após fatorarmos o operando dentro do determinante, podemos escrever (6.11) como a divisão de polinômios

$$\Phi(\lambda, s) = \frac{\Delta_H(\lambda, s)}{(s + \lambda)^n \det(sI - A_0 - A_1)} \quad (6.12)$$

que ainda pode ser explicitada em termos das matrizes A_0 , A_1 e do parâmetro λ por

$$\Phi(\lambda, s) = \det\left(I + (sI - A_0 - A_1)^{-1}A_1 \frac{2s}{s + \lambda}\right) \quad (6.13)$$

e apresenta a propriedade $\Phi(\lambda, j\omega) = \Psi(\tau, j\omega)$, como consequência da substituição de Rekasius (6.3). Também neste caso verificamos que vale a igualdade $\Phi(\lambda, j0) = \Phi(\lambda, j\infty) = 1$.

Ao assumirmos, como feito anteriormente, que $A_0 + A_1$ é Hurwitz, o mapeamento de $\Phi(\lambda, j\omega)$ nos permite duas conclusões possíveis. A primeira é a de que se, para algum $\lambda > 0$, a origem não é envolvida por $\Phi(\lambda, j\omega)$, então nenhuma raiz de $\Delta_H(\lambda, s)$ possui parte real positiva e, portanto a matriz $A(\lambda)$ é Hurwitz. A segunda situação corresponde ao caso em que a origem não é envolvida pelo mapeamento de $\Phi(\lambda, s)$ para algum $\lambda < 0$. Neste caso n zeros de $\Delta_H(\lambda, s)$ estão no semi-plano complexo direito aberto e, portanto, a matriz $A(\lambda)$ apresenta apenas n autovalores com parte real negativa. Em qualquer uma dessas situações é possível determinar o

par (λ^o, ω^o) correspondente à primeira ocorrência da igualdade $\Phi(\lambda^o, j\omega^o) = 0$. Porém, o valor de λ^o corresponde ao limite de estabilidade do sistema de comparação (6.5) desde que $\lambda^o > 0$.

Neste ponto, é interessante avaliar o comportamento de $\Delta_H(\lambda, s)$ em valores extremos do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Inicialmente, para $|\lambda|$ suficientemente grande, (6.11) e (6.12) conduzem a

$$\Delta_H(\lambda, s) \approx (s + \lambda)^n \det(sI - A_0 - A_1) \quad (6.14)$$

como conseqüência do fato que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \Phi(\lambda, s) = 1$, em (6.12). Nesta situação verificamos que n raízes da equação característica referente ao sistema de comparação tendem para $-\lambda$, enquanto as demais n raízes se aproximam assintoticamente dos autovalores de $A_0 + A_1$, localizados no semiplano complexo esquerdo aberto, por hipótese. De posse dessa informação, podemos determinar λ^o decrescendo continuamente λ a partir de valores suficientemente grandes. A outra situação importante é avaliar o que ocorre quando $\lambda = 0$. Sob esta circunstância, a equação característica (6.11) fica na forma

$$\Delta_H(0, s) = s^n \det(sI - A_0 + A_1) \quad (6.15)$$

que, junto com (6.14), nos permite concluir sobre a existência de $\lambda^o > 0$. Em primeiro lugar é imediato que as raízes de (6.11) são contínuas em relação ao parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Ao assumirmos que $A_0 + A_1$ é Hurwitz, então $H(\lambda, s)$ é estável para $\lambda \rightarrow \infty$ e, por sua vez, se supusermos que $A_0 - A_1$ não é Hurwitz, então $H(\lambda, s)$ é instável para $\lambda = 0$. Utilizando o argumento de continuidade, concluímos que, sob as hipóteses consideradas, existe $\lambda^o > 0$ que determina a margem de estabilidade para o sistema de comparação (6.5). Entretanto, é importante ressaltar que a condição de que as matrizes $A_0 + A_1$ e $A_0 - A_1$ não sejam simultaneamente Hurwitz é apenas suficiente para a existência de $\lambda^o > 0$.

Uma vez discutidas as maneiras de se analisar a estabilidade do sistema com retardo (6.1) e do correspondente sistema de comparação (6.5) é interessante estudar as relações entre ambos resultados, em vista da analogia no processo de determiná-las. Como conseqüência da aplicação do critério de Nyquist à equação característica (6.8), após obtermos o par (τ^*, ω^*) , correspondente ao limite de estabilidade do sistema com atraso, podemos calcular λ^* que satisfaz $\omega^*/\lambda^* = \text{tg}(\omega^*\tau^*/2)$. Para esses valores concluímos que $\Phi(\lambda^*, j\omega^*) = 0$, porém não temos como garantir, de antemão, que o par (λ^*, ω^*) determina um limite de estabilidade para o sistema de comparação; o que podemos afirmar é que $\lambda^* \leq \lambda^o$. No caso em que $\lambda^* = \lambda^o > 0$ podemos afirmar, então, que para todo $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$ e todo $\tau \in [0, \tau^*)$ o sistema com retardo e o sistema de comparação são assintoticamente estáveis.

Partindo, agora, do par (λ^o, ω^o) , correspondente à primeira passagem de $\Phi(\lambda, j\omega)$ pela origem

do plano complexo, podemos calcular o menor valor $\tau^o > 0$ que garante a igualdade $\omega^o/\lambda^o = \text{tg}(\omega^o\tau^o/2)$. Devido à substituição de Rekasius (6.3) concluímos que $\Psi(\tau^o, j\omega^o) = 0$ e a única afirmação possível é a de que $\tau^o \geq \tau^*$. Também neste caso, para afirmarmos que τ^o corresponde ao limite de estabilidade do sistema com retardo devemos verificar se $\tau^o = \tau^* > 0$ é válida.

Antes de prosseguir é importante ressaltar que a relação entre a estabilidade de sistemas com retardo e dos correspondentes sistemas descritos por funções racionais não é inédita, mas é tratada em diversos trabalhos da literatura, como [50], [51], [68]. Entretanto, os métodos referenciados necessitam calcular explicitamente a equação característica do sistema com atraso. Nossa proposta para análise de estabilidade do sistema (6.1) envolve apenas a manipulação das matrizes da representação de estado e a utilização do critério de Nyquist, cuja análise gráfica é relativamente simples para abordagem proposta.

6.2.1 Exemplos

Nesta seção ilustramos o método proposto para o cálculo da margem de estabilidade para sistemas com retardo mediante a resolução de alguns exemplos e realizamos os cálculos referentes aos correspondentes sistemas de comparação, com a finalidade de estabelecer uma relação entre as margens de estabilidade.

Exemplo 6.1 Este primeiro exemplo foi extraído de [50], onde a dinâmica do sistema com retardo (6.1) é caracterizada pelas matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1,0 & 13,5 & -1,0 \\ -3,0 & -1,0 & -2,0 \\ -2,0 & -1,0 & -4,0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -5,9 & 7,1 & -70,3 \\ 2,0 & -1,0 & 5,0 \\ 2,0 & 0,0 & 6,0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

tais que $A_0 + A_1$ é Hurwitz, mas $A_0 - A_1$ não o é. Considerando inicialmente o sistema de comparação calculamos $\lambda^o = 12,0695$, para o qual a matriz $A(\lambda^o)$ possui 4 autovalores com parte real negativa sendo os outros dois autovalores $s = \pm j3,0352$, levando-nos à conclusão de que $\omega^o = 3,0352$ [rad/s]. Desse modo, determinamos através de (6.4) $\tau^o = 0,1623$ [s]. Com a aplicação do critério de Nyquist para o sistema com atraso calculamos, por sua vez, $\tau^* = \tau^o$, em concordância com o resultado de [50] e além disso $\omega^* = \omega^o$. Neste caso a estabilidade do sistema de comparação implica na estabilidade do sistema com atraso e vice-versa. \diamond

Exemplo 6.2 Este exemplo, também extraído da literatura, é apresentado em [49] onde a representação de estado do sistema (6.1) é tal que $A_0 + A_1$ é Hurwitz, mas $A_0 - A_1$ não o é, sendo

as matrizes A_0 e A_1 dadas por

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2,0 & 0,0 \\ 0,6 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,0 \\ -0,6 & -2,4 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

A partir do mapeamento relativo ao sistema de comparação calculamos que sua margem de estabilidade é definida por $\lambda^o = 3,4$ e a frequência correspondente à passagem de $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ pela origem é $\omega^o = 2,1817$ [rad/s]. Por sua vez, aplicando o critério de Nyquist ao sistema com retardo obtemos $\tau^* = 0,5230$ [s] e $\omega^* = \omega^o$, sendo verificada a igualdade $\tau^* = \tau^o$, com τ^o obtido da relação (6.4) utilizando o par (λ^o, ω^o) . Assim, o limite de estabilidade para o sistema com retardo obtido neste exemplo também pode ser inferido pelo limite de estabilidade do correspondente sistema de comparação. \diamond

Exemplo 6.3 O segundo exemplo é proposto em [19], onde um sistema com retardo possui representação de estado (6.1) tal que $A_0 + A_1$ é Hurwitz, mas não $A_0 - A_1$, sendo as matrizes A_0 e A_1 definidas a seguir

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Com o mesmo procedimento adotado no exemplo anterior determinamos, para o sistema de comparação, $\lambda^o = 0,1$ e a frequência correspondente $\omega^o = 0,4359$ [rad/s]. Com esses dados, a relação (6.4) fornece $\tau^o = 6,1725$ [s], que é idêntico ao valor τ^* obtido com a aplicação do critério de Nyquist para o sistema com retardo. É importante enfatizar que o valor encontrado é ligeiramente superior ao melhor resultado $\tau^* = 4,47$ [s] fornecido em [19]. \diamond

Exemplo 6.4 Neste exemplo empregamos o critério de Nyquist para determinar a margem de estabilidade de um sistema com retardo cujas matrizes que descrevem sua dinâmica são

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = -\kappa \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Considerando inicialmente $\kappa = 1,5$ temos que $A_0 + A_1$ e $A_0 - A_1$ não são simultaneamente Hurwitz e, nestas condições, apresentamos na Figura 6.1 os mapeamentos $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ relativos ao sistema com retardo e ao sistema de comparação em linhas cheia e tracejada, respectivamente. Mediante uma busca linear calculamos $\lambda^o = 1,4462$ e a correspondente frequência de

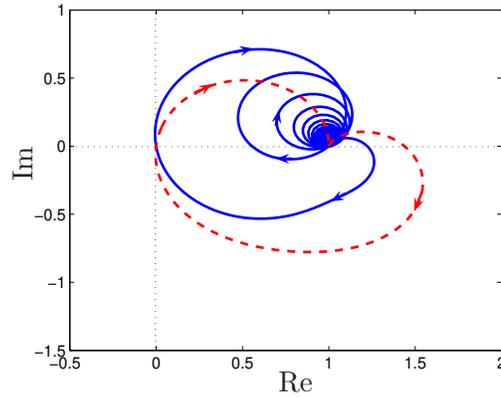


Figura 6.1: Mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ para $\kappa = 1,5$.

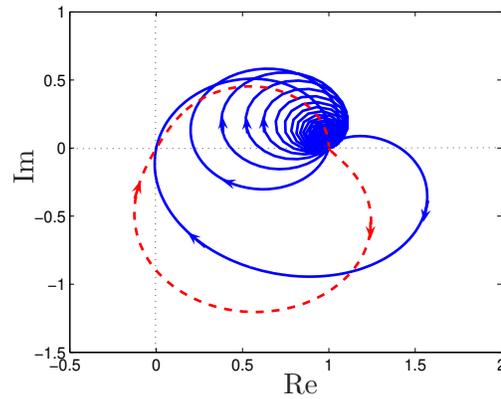


Figura 6.2: Mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ para $\kappa = 1,0$.

cruzamento com o zero $\omega^o = 4,4371$ rad/s, que determinam, neste caso, o limite de estabilidade para o sistema de comparação. Por outro lado, o critério de Nyquist aplicado ao sistema com retardo nos forneceu $\tau^* = 0,5661$ [s] e $\omega^* = \omega^o$. A análise mais detalhada desses resultados nos permite concluir que ao calcularmos τ^o utilizando o par (λ^o, ω^o) em (6.4), encontramos $\tau^o = \tau^*$ e, além disso, com (τ^*, ω^*) substituídos em (6.4) temos, por sua vez, $\lambda^* = \lambda^o$. Portanto, para esta situação a estabilidade do sistema de comparação para $\lambda \in (\lambda^o, \infty)$ é equivalente à estabilidade do sistema com retardo para $\tau \in [0, \tau^*)$ e vice-versa.

Se fixarmos, agora, $\kappa = 1,0$ temos que $A_0 + A_1$ e $A_0 - A_1$ são ambas Hurwitz e na Figura 6.2 apresentamos, para este caso, os mapeamentos $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ em linhas cheia e tracejada, respectivamente. Assim, a análise gráfica nos permite determinar os valores $\lambda^o = -0,14$ e $\omega^o = 1,6960$ [rad/s], relativos à primeira ocorrência de $\Phi(\lambda, j\omega) = 0$. Porém, como $\lambda^o < 0$ concluímos que a matriz $A(\lambda)$ possui três autovalores (dentre seis) com parte real positiva para $\lambda \in (\lambda^o, 0)$, implicando que o sistema de comparação não é estável para todo $\lambda \in (\lambda^o, \infty)$.

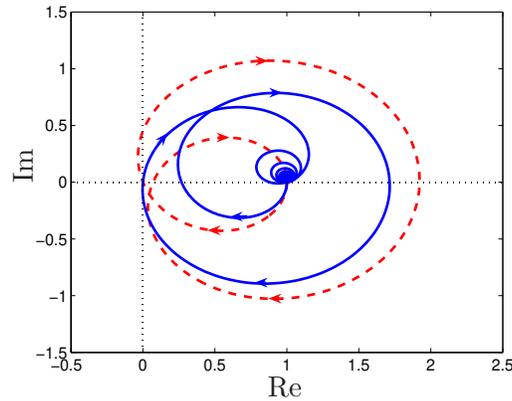


Figura 6.3: Mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ para o Exemplo 6.5.

Por outro lado, aplicando o critério de Nyquist ao sistema com atraso determinamos o limite de estabilidade $\tau^* = 1,96$ [s] e a correspondente frequência de cruzamento com o zero $\omega^* = \omega^o$. De posse desses valores, substituímos o par (λ^o, ω^o) , previamente determinado, na expressão (6.4) e obtemos $\tau^o = (2/\omega^o) (\arctg(\omega^o/\lambda^o) + \pi) = \tau^*$. Utilizando o par (τ^*, ω^*) a expressão (6.4) nos fornece, por sua vez, $\lambda^* = \lambda^o$.

Verificamos que para $\kappa = 1,0$ não é possível estabelecer uma equivalência entre a estabilidade do sistema com atraso e do sistema de comparação. Por outro lado, quando o mapeamento $\Phi(\lambda^o, j\omega) = 0$ verificamos também que $\Psi(\tau^*, j\omega) = 0$, ambos na frequência $\omega = \omega^o = \omega^*$. Por esta razão pudemos determinar, neste exemplo, o limite de estabilidade τ^* para o sistema com atraso analisando apenas a primeira passagem dos dois mapeamentos pela origem do plano complexo. \diamond

Exemplo 6.5 Este exemplo tem como objetivo ilustrar o fato de que a estabilidade do sistema de comparação não garante necessariamente a estabilidade do sistema com retardo e vice-versa. Para tal, consideramos as matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,05 & -0,38 & -0,05 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,06 & 0,22 & -0,65 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

sendo $A_0 + A_1$ Hurwitz, mas não $A_0 - A_1$. Na Figura (6.3) apresentamos em linha tracejada o mapeamento de $\Phi(\lambda^o, j\omega)$ para o qual $\lambda^o = 0,6920$, que é a margem estabilidade do sistema de comparação, e a correspondente frequência de cruzamento com a origem é $\omega^o = 0,0801$ [rad/s]. Por sua vez, na mesma figura, em linha contínua temos o mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$, sendo o

limite de estabilidade para o sistema com retardo $\tau^* = 2,084$ [s] e a correspondente frequência de cruzamento com a origem $\omega^* = 1,0$ [rad/s].

Neste caso, utilizando o par (λ^o, ω^o) obtemos da relação (6.4) $\tau^o = 2,8874$ [s] $> \tau^*$ e, por sua vez, o par (τ^*, ω^*) fornece, também via (6.4), o valor $\lambda^* = 0,5843 < \lambda^o$. Portanto, concluímos que nem sempre a margem de estabilidade do sistema de comparação fornece a correspondente margem de estabilidade do sistema com atraso e vice-versa. \diamond

Os exemplos apresentados nos fornecem algumas conclusões importantes. Inicialmente, para que o mapeamento $\Phi(\lambda, j\omega)$ forneça informações sobre a estabilidade do sistema de comparação é imprescindível que exista $\lambda^o > 0$, conforme ilustra o Exemplo 6.4. Além disso, este mesmo exemplo evidencia que mesmo que $A(\lambda)$ seja Hurwitz para todo $\lambda > 0$, não podemos garantir que o correspondente sistema com retardo seja estável para todo $\tau \geq 0$, analogamente ao que é discutido em [68]. Mais ainda, o Exemplo 6.5 ilustra que a estabilidade do sistema de comparação para todo $\lambda > \lambda^o > 0$ não implica que o sistema com atraso seja estável para todo $\tau \in [0, \tau^o)$, pois é possível que $\tau^o > \tau^*$. Na mesma linha de raciocínio, a estabilidade do sistema de comparação para todo $\tau \in [0, \tau^*)$ não assegura a estabilidade do correspondente sistema de comparação para todo $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$ pois não está descartada a hipótese de que $\lambda^* < \lambda^o$.

Enfatizamos novamente que a equivalência entre as margens de estabilidade do sistema com atraso e do correspondente sistema de comparação só ocorre quando tivermos $\lambda^o = \lambda^* > 0$ e $\tau^o = \tau^*$, o que parece ser verdadeiro sempre que $\omega^o = \omega^*$. Entretanto, a caracterização da classe de sistemas para os quais tal fato é verdadeiro não é simples. Por outro lado, os exemplos resolvidos apresentam a característica comum de que em todos eles a matriz $A(\lambda)$ é Hurwitz para todo $\lambda \in (2/\tau^*, \infty)$, o que não é uma simples coincidência, como discutimos no lema a seguir.

Lema 6.1 *Suponha que a matriz $A_0 + A_1$ seja Hurwitz e que o sistema com retardo associado seja estável para $\tau \in [0, \tau^*)$. Então, para todo $\lambda \in (2/\tau^*, \infty)$ o sistema de comparação é estável. Além disso, para λ pertencente ao intervalo considerado e para qualquer $\omega \in \mathbb{R}$ o valor do menor atraso $\tau > 0$ que satisfaz $\omega/\lambda = \text{tg}(\omega\tau/2)$ pertence ao intervalo $[0, \tau^*)$.*

Prova: Seguindo a notação adotada anteriormente, associamos ao sistema de comparação o par (λ^o, ω^o) correspondente à primeira passagem por zero de $\Phi(\lambda, j\omega)$. Se $\lambda^o \leq 0$ então a primeira parte do lema segue imediatamente, uma vez que neste caso o sistema de comparação é estável para todo $\lambda > 0$.

Considerando, por sua vez, $\lambda^o > 0$ temos que o sistema de comparação é estável para todo $\lambda \in (\lambda^o, \infty)$. Neste caso a igualdade $\omega^o/\lambda^o = \text{tg}(\omega^o\tau^o/2)$ fornece $\tau^o \geq \tau^* \geq 0$ pois, em primeiro lugar $\Psi(\tau^o, j\omega^o) = \Phi(\lambda^o, j\omega^o) = 0$ e, em segundo lugar, não pode existir um valor de atraso $0 < \tau \leq \tau^*$ satisfazendo $\Psi(\tau, j\omega) = 0$ para algum $\omega \in \mathbb{R}$. Uma vez que a relação

$\tau^o = 2/\omega^o \arctg(\omega^o/\lambda^o) \leq 2/\lambda^o$ concluímos que $\lambda^o \leq 2/\tau^o \leq 2/\tau^*$, o que completa a prova da primeira parte do lema.

Finalmente, a partir da relação $\tau = 2/\omega \arctg(\omega/\lambda) \leq 2/\lambda$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$, e do fato de que $\lambda > 2/\tau^*$, segue a segunda afirmação. \square

A importância deste resultado reside no fato de que para a classe de sistemas com retardo tais que $A_0 + A_1$ é Hurwitz, quando $\lambda > 0$ é suficientemente grande concluímos que o sistema de comparação é estável e o valor do atraso extraído pela substituição de Rekasius (6.4) mantém o sistema com retardo estável, qualquer que seja o valor de frequência $\omega \in \mathbb{R}$ considerado.

Muito embora as margens de estabilidade do sistema com retardo (6.1) e do seu correspondente sistema de comparação (6.5) não sejam equivalentes em todas as situações, é possível ainda contornar esta dificuldade analisando o comportamento da norma \mathcal{H}_∞ de ambos os sistemas, de acordo com os resultados da próxima seção.

6.3 Cálculo de norma \mathcal{H}_∞

Um aspecto importante no estudo de sistemas com atraso envolve o cálculo de norma \mathcal{H}_∞ , que quantifica uma medida de desempenho do sistema. Por definição [8] para qualquer $\tau \in [0, \tau^*)$ não há grandes dificuldades em se calcular

$$\|T(\tau, s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma(T(\tau, j\omega)) \quad (6.21)$$

a qual, para um sistema com atraso assintoticamente estável, é a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência da entrada $w(t)$ para a saída de interesse $z(t)$. Considerando um valor de atraso $\tau > 0$ fixo o valor da norma é prontamente calculado mediante uma busca linear em relação a $\omega \geq 0$ juntamente com a decomposição em valores singulares de $T(\tau, j\omega)$. Entretanto, apesar de imediata, esta técnica para o cálculo do supremo em (6.21) pode não ser a melhor escolha em vista do tempo computacional necessário para completá-la.

Deve-se ficar claro que o cálculo por manipulação direta da norma \mathcal{H}_∞ de $T(\tau, s)$ só é possível quando esta função de transferência for completamente conhecida. Entretanto, ao abordarmos os problemas de síntese de controladores e de filtros o cálculo de $\|T(\tau, s)\|_\infty$ torna-se muito mais complicado, pois a sua manipulação direta é praticamente impossível de ser realizada, uma vez que $T(\tau, s)$, neste caso, depende das variáveis do problema. Conseqüentemente, a pesquisa por métodos de projeto que contornem esta dificuldade é fundamental, em particular as abordagens que envolvam a utilização de LMIs, como por exemplo [10], [14], [17], [18], [19], [20], [21], [22].

Sob o aspecto da necessidade em se desenvolver técnicas de projeto que não manipulem diretamente a função de transferência do sistema com atraso, propomos a utilização da função racional $H(\lambda, s)$ para o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ , bem como para a síntese de controladores e filtros. Neste contexto, é fundamental a hipótese da existência do parâmetro $\lambda_o > 0$, garantindo que a matriz $A(\lambda)$ seja Hurwitz pra todo $\lambda \in (\lambda_o, \infty)$. Formalmente temos a seguinte definição:

$$\lambda_o = \inf\{\lambda \mid A(\lambda) \text{ é Hurwitz}\} \quad (6.22)$$

a qual implica imediatamente que $\lambda_o > 0$ e também nos permite concluir que se $A_0 + A_1$ for Hurwitz, mas $A_0 - A_1$ não o for, então $\lambda_o = \lambda^\circ$. Caso $\lambda \notin (\lambda_o, \infty)$, a igualdade $\|H(\lambda, s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma(H(\tau, j\omega))$ não é válida e a norma $\|H(\lambda, s)\|_\infty$ torna-se ilimitada. Dentro deste contexto, uma maneira de relacionar as normas $\|T(\tau, s)\|_\infty$ e $\|H(\lambda, s)\|_\infty$ é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 6.1 *Considere $A_0 + A_1$ Hurwitz. Para cada $\lambda \in (\lambda_o, \infty)$ defina $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que*

$$\alpha = \arg \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma(H(\lambda, j\omega)) \quad (6.23)$$

e calcule $\tau(\lambda)$ através da relação $\alpha/\lambda = \text{tg}(\alpha\tau/2)$. Sob estas condições se $\tau(\lambda) \in [0, \tau^*)$ então $\|H(\lambda, s)\|_\infty \leq \|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$.

Prova: Considerando $\lambda \in (\lambda_o, \infty)$ concluímos imediatamente que a estabilidade assintótica de $H(\lambda, s)$ é assegurada. Dessa maneira, a norma \mathcal{H}_∞ de $H(\lambda, s)$ existe e de (6.23) segue que $\|H(\lambda, s)\|_\infty = \sigma(H(\lambda, j\alpha))$. Como $\tau(\lambda)$ calculado, através da frequência α , deve pertencer ao intervalo $\tau(\lambda) \in [0, \tau^*)$, então a função de transferência $T(\tau(\lambda), s)$ também é assintoticamente estável. Portanto, a partir da igualdade (6.6) e da definição (6.21) temos

$$\begin{aligned} \|H(\lambda, s)\|_\infty &= \sigma(H(\lambda, j\alpha)) \\ &= \sigma(T(\tau(\lambda), j\alpha)) \\ &\leq \|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty \end{aligned} \quad (6.24)$$

o que conclui a prova do teorema proposto. \square

É importante salientar na relação (6.6) que a aproximação

$$H(\lambda, s) \approx (C_0 + C_1)(sI - A_0 - A_1)^{-1}E_0 + D_0 \quad (6.25)$$

é válida para $\lambda \rightarrow \infty$ e, neste caso, todos os pólos de $H(\infty, s)$ se encontram no semi-plano

complexo esquerdo aberto, por hipótese. Mais ainda, verificamos de (6.6) que $H(\infty, s) = T(0, s)$ e sendo ambas estáveis por hipótese, a relação entre as normas apresentada no Teorema 6.1 é satisfeita na igualdade quando $\lambda \rightarrow \infty$ e $\tau = 0$, isto é, $\|H(\infty, s)\|_\infty = \|T(0, s)\|_\infty < \infty$.

Outra observação importante com relação ao Teorema 6.1 é sobre a possibilidade de que para algum $\lambda \in (\lambda_o, \infty)$ o valor do atraso a ele associado, calculado utilizando (6.23), pode ser tal que $\tau(\lambda) \notin [0, \tau^*)$. Nesta situação, o limitante inferior fornecido pelo Teorema 6.1 continua válido, porém apenas em um subconjunto do intervalo (λ_o, ∞) . Este aspecto é explicitado no corolário a seguir, através do qual será possível impor um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema com atraso para os problemas de síntese tratados mais adiante.

Corolário 6.1 *Considere $A_0 + A_1$ Hurwitz. Então, para qualquer parâmetro $\gamma > \|H(\infty, s)\|_\infty$ dado, existe $\lambda_\gamma \geq \lambda_o$ e $\tau_\gamma \leq \tau^*$ de modo que a desigualdade*

$$\|H(\lambda, s)\|_\infty \leq \|T(\tau, s)\|_\infty < \gamma \quad (6.26)$$

vale para todo $\lambda \in (\lambda_\gamma, \infty)$ e todo $\tau(\lambda) \in [0, \tau_\gamma)$ dados pelo Teorema 6.1.

Prova: Inicialmente devemos notar que para $\lambda \rightarrow \infty$ a função de transferência $H(\infty, s)$ é assintoticamente estável. Outra informação importante é a de que $\tau(\lambda) = (2/\alpha)\arctg(\alpha/\lambda) \leq 2/\lambda$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e assim temos que $\tau(\lambda) = 0$, independente de $\alpha \in \mathbb{R}$. Conseqüentemente, $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ é contínua em $\tau(\infty) = 0$, uma vez que vale a igualdade $H(\infty, s) = T(0, s)$.

A partir da relação $\|H(\infty, s)\|_\infty = \|T(0, s)\|_\infty < \gamma$, também podemos concluir que, se for assegurada a continuidade da função $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ em relação a $\lambda > 0$, é possível reduzir λ desde valores suficientemente grandes atingimos um valor $\lambda_\gamma \geq \lambda_o$ correspondente a $\tau(\lambda_\gamma) = \tau_\gamma \leq \tau^*$, ainda preservando (6.26). \square

Antes de prosseguirmos é necessário discutir os resultados apresentados até aqui. O Teorema 6.1 enfatiza que nem sempre é possível obter, através da varredura do intervalo $\lambda \in (\lambda_o, \infty)$, um limitante inferior para $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ válido para todo $\tau(\lambda) \in [0, \tau^*)$. Por outro lado, o Corolário 6.1 afirma que é possível determinar um sub-intervalo de $\lambda \in (\lambda_o, \infty)$ tal que a relação $\|H(\lambda, s)\|_\infty \leq \|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty < \gamma$ seja sempre verdadeira. Além disso, é importante ter em mente que o cálculo do sub-intervalo cujo ínfimo é λ_γ deve ser feito com cuidado devido à eventual ocorrência de soluções múltiplas para $\alpha(\lambda)$ no problema (6.23). Tais soluções múltiplas podem gerar descontinuidades no valor associado do atraso $\tau(\lambda)$ obtido da relação não-linear do Teorema 6.1. A conclusão a respeito desta discussão é a de que uma condição suficiente para garantir a desigualdade (6.26) é impor a continuidade da função $\tau(\lambda)$ em todo o intervalo (λ_γ, ∞) , o que deve ser feito via procedimento numérico de análise do comportamento de $\tau(\lambda)$.

A partir dos resultados desta seção propomos um procedimento numérico para calcularmos a norma \mathcal{H}_∞ de $T(\tau, s)$, bem como intervalos $\lambda \in (\lambda_\gamma, \infty)$ e $\tau(\lambda) \in [0, \tau_\gamma)$ que garantem o limite superior $\gamma > 0 \in \mathbb{R}$ para $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$. Os passos são descritos pelo algoritmo a seguir.

Algoritmo 6.1

1. Gere uma seqüência estritamente decrescente $\lambda_k = \{\infty, \dots, \lambda_0\}$ e tome $k = 0$.
2. Utilizando λ_k calcule $\alpha_k = \arg \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma(H(\lambda_k, j\omega))$ e o correspondente $\tau_k = \tau(\lambda_k)$ pela relação do Teorema 6.1.
3. Se $\tau(\lambda)$ for contínua e $d\tau(\lambda)/d\lambda < 0$ em $\lambda = \lambda_k$ e $\|T(\tau_k, s)\|_\infty < \gamma$ incremente k e retorne ao passo 2. Caso contrário pare e defina $\lambda_\gamma = \lambda_{k-1}$ e $\tau_\gamma = \tau_{k-1}$.

Com relação ao passo 3 são necessárias algumas observações. A primeira delas remete à verificação sobre o valor da norma \mathcal{H}_∞ de $T(\tau, s)$, que é fundamental para impormos o limitante γ , bem como para o cálculo de λ_γ e τ_γ . Em segundo lugar, o teste sobre a continuidade de $\tau(\lambda)$ deve ser feito numericamente, verificando-se sobre eventuais variações bruscas no valor $|\tau_k - \tau_{k-1}|$ em relação ao valor de $|\lambda_k - \lambda_{k-1}|$. Lembrando que $\tau(\lambda)$ calculado segundo a expressão do Teorema 6.1 satisfaz $\tau(\lambda) < 2/\lambda$, para garantir a continuidade de $\tau(\lambda)$ e, ao mesmo tempo, impedir que valores diferentes de λ forneçam valores idênticos para o atraso $\tau(\lambda)$ propomos impor $-2/\lambda_k^2 < d\tau(\lambda)/d\lambda < 0$, em $\lambda = \lambda_k$, que pode ser aproximada pela condição:

$$0 < \tau_k - \tau_{k-1} < \frac{2}{\lambda_k^2}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \quad (6.27)$$

A imposição da continuidade da função $\tau(\lambda)$ e de que $d\tau(\lambda)/d\lambda < 0$ são importantes na medida em que λ decresce, $\tau(\lambda)$ cresce continuamente e, conforme nos aproximamos do valor $\tau \rightarrow \tau^*$, o valor de $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ torna-se ilimitado. Dessa maneira conseguimos detectar a margem de estabilidade τ^* através do comportamento da norma \mathcal{H}_∞ de $T(\tau(\lambda), s)$. Como último comentário, o resultado do Lema 6.1 é relevante neste ponto, uma vez que se adotarmos a seqüência estritamente decrescente $\lambda_k = \{\infty, \dots, 2/\tau^*\}$ então $\tau_k \in [0, \tau^*)$ automaticamente.

6.3.1 Exemplos

Utilizando o ferramental apresentado até aqui empregamos o Algoritmo 6.1 no cálculo da norma \mathcal{H}_∞ de alguns sistemas com atraso tratados na literatura. Com o objetivo de ilustrar a qualidade do limitante inferior, fornecido pelo sistema de comparação, segundo o Teorema 6.1 não impusemos o limitante $\gamma > 0$ existente no passo 3.

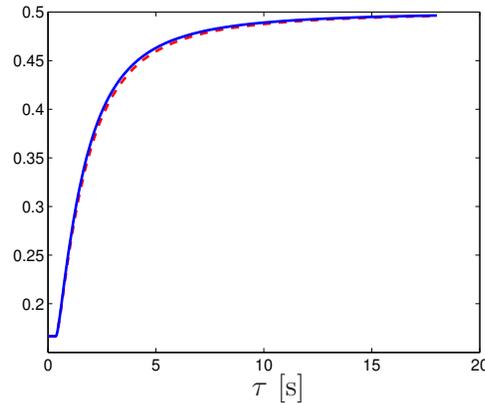


Figura 6.4: Norma \mathcal{H}_∞ em função do atraso para o Exemplo 6.6.

Exemplo 6.6 Os dados deste exemplo foram extraídos de [19], cujas matrizes A_0 e A_1 foram apresentadas no Exemplo 6.3. As demais matrizes que caracterizam o sistema (6.1) são dadas por

$$E_0 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1,0 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

com as quais é importante ressaltar que a função de transferência (6.2) é dada por $T(\tau, s) = -0,5/(s+2+e^{-s\tau})$, deixando claro que o par $(A(\lambda), C)$, na representação (6.5), não é observável. Desse modo, a função de transferência do sistema de comparação $H(\lambda, s)$ é sempre de 1ª ordem, levando-nos a considerar um sistema com retardo caracterizado por $A_0 = -2,0$, $A_1 = -1,0$, $E_0 = -0,5$, $C_0 = 1,0$ e $C_1 = D_0 = 0$. Para este novo sistema calculamos $\lambda^o = \lambda^* = 0$ e o correspondente atraso máximo $\tau^* \rightarrow \infty$.

Na Figura 6.4 apresentamos, em linha contínua, o valor $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ em função de cada valor de $\tau(\lambda)$, bem como o valor do limitante inferior, em linha tracejada, obtidos através do Algoritmo 6.1. Percebemos na figura que a diferença entre as duas curvas é muito pequena, evidenciando a qualidade do resultado obtido com o sistema de comparação na caracterização do sistema com retardo original. Verificamos ainda graficamente que o intervalo entre $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ e o correspondente limitante inferior para $\tau = 0,846$ [s] é dado por $[0,2330, 0,2365]$ e por $[0,4510, 0,4550]$ para $\tau = 4,4$ [s]. \diamond

Exemplo 6.7 O segundo exemplo desta seção foi extraído de [49], cujas matrizes que descrevem sua dinâmica são apresentadas em (6.17), no Exemplo 6.2, e a seguir

$$E_0 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,2 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

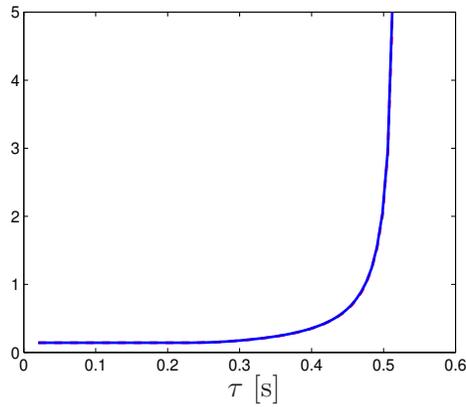


Figura 6.5: Norma \mathcal{H}_∞ em função do atraso para o Exemplo 6.7.

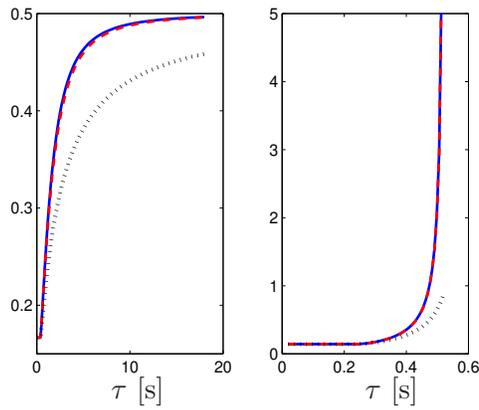


Figura 6.6: Comparação entre limitantes inferiores para $\|T(\tau, s)\|_\infty$.

Com esses dados apresentamos na Figura 6.5 o valor exato de $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$, em linha contínua, e seu limitante inferior segundo proposto pelo Teorema 6.1, em linha tracejada. A análise das curvas nos permite concluir que o limitante inferior praticamente coincide com o valor exato da norma \mathcal{H}_∞ do sistema com retardo e quando $\lambda \rightarrow \lambda^*$ verificamos que $\tau(\lambda) \rightarrow \tau^*$, fazendo com que a quantia $\|T(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ torne-se ilimitada. Neste caso particular o par $(\lambda_\gamma, \tau_\gamma)$ coincide com (λ^*, τ^*) . \diamond

Para finalizar a discussão sobre o cálculo de norma \mathcal{H}_∞ para sistemas com retardo enfatizamos que o cálculo de limitantes de critérios de desempenho foi proposto no artigo [72]. Seus autores propõe substituir o operador $e^{-\tau s}$ por uma aproximação diagonal de Padé [46] de ordem m com a qual conseguem calcular limitantes superior e inferior para $\|T(\tau, s)\|_\infty$, com $\tau \in [0, \tau^*)$. Para os dois exemplos considerados nesta seção verificamos que a substituição proposta em [72] para $m = 1$ fornece um limitante inferior abaixo do obtido a partir do Teorema 6.1. Este fato pode

ser verificado na Figura 6.6, na qual consideramos novamente as curvas das Figuras 6.4 e 6.5 e também inserimos em linha pontilhada o valor proposto por [72].

Por outro lado, é importante mencionar que ao escolher a ordem da aproximação de Padé com $m = 2$ o limitante inferior de [72] torna-se praticamente idêntico ao fornecido pelo Teorema 6.1 e quando $m \geq 3$ o limitante inferior proposto em [72] é praticamente idêntico ao valor exato da norma \mathcal{H}_∞ de $T(\tau, s)$. Uma importante consideração a tecer quanto a este aspecto é a de que para abordar os problemas de síntese, a aproximação de Padé de ordem $m \geq 2$ é acompanhada de uma alta complexidade na formulação do problema, fazendo com que seja preferível manter $m = 1$.

Enfatizamos novamente que a importância do Algoritmo 6.1 para o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ de um sistema com retardo está calcada na possibilidade de realizarmos a síntese de controladores e de filtros utilizando o sistema de comparação, uma vez que nestes casos a manipulação direta da função de transferência $T(\tau, s)$ é inviável. Sob este contexto, na próxima seção discutimos a utilização do sistema de comparação (6.5) na síntese de controladores via realimentação de estado, tendo como base para método de projeto o Algoritmo 6.1.

6.4 Realimentação de estado

Após apresentarmos o sistema de comparação (6.5) proposto para estudo de sistemas com retardo (6.1) e ilustrarmos sua aplicação no estudo de estabilidade e de cálculo de norma \mathcal{H}_∞ damos um passo adiante e abordamos o problema da realimentação de estado com restrição de desempenho em norma \mathcal{H}_∞ [28]. Com esta finalidade consideramos o sistema com retardo (6.1) ao qual é adicionada uma entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^q$, fornecendo o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + B_0u(t) + E_0w(t) \quad , \quad x(t) = 0 \quad \forall t \in [-\tau, 0] \\ z(t) &= C_0x(t) + C_1x(t - \tau) + G_0u(t) + D_0w \end{aligned} \quad (6.30)$$

Como anteriormente, partimos da hipótese de que o sistema parte de condições iniciais nulas e que o atraso $\tau \geq 0$ é constante em relação ao tempo. O objetivo do problema considerado nesta seção é projetar um controlador via realimentação de estado da forma

$$u(t) = K_0x(t) + K_1x(t - \tau) \quad (6.31)$$

o qual, ao ser conectado ao sistema (6.30) fornece um sistema em malha fechada com realização na forma (6.1) e cuja função de transferência $T_K(\tau, s)$ dependente dos ganhos K_0 e K_1 do controlador. Para este novo sistema com retardo verificamos que também é possível definir um sistema de

comparação para o sistema em malha fechada, denotado $H_K(\lambda, s)$, e cuja realização em termos de matrizes da representação de estado

$$H_K(\lambda, s) = \left[\begin{array}{c|c} A(\lambda) + BK & E \\ \hline C + GK & D \end{array} \right] \quad (6.32)$$

é obtida por analogia ao procedimento utilizado na definição de (6.5), de modo que

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \quad G = G_0, \quad D = D_0 \quad (6.33)$$

e o ganho $K \in \mathbb{R}^{q \times 2n}$ relativo ao sistema de comparação tem como estrutura

$$K = \begin{bmatrix} K_0 + K_1 & K_0 - K_1 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

É importante observar que a função de transferência $H_K(\lambda, s)$ em (6.32) apresenta a estrutura clássica de malha fechada, obtida via realimentação de estado. Mais ainda, uma vez calculado o ganho de realimentação K , os valores de $K_0 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $K_1 \in \mathbb{R}^{q \times n}$, correspondentes ao sistema com retardo, são prontamente determinados. Com este argumento em mente, propomos abordar o problema de realimentação de estado para sistemas com retardo (6.30) lançando mão do sistema de comparação (6.32). Em função dos resultados obtidos nas seções anteriores, a estratégia consiste em substituir o cálculo de um ganho $K \in \mathbb{R}^{q \times 2n}$ (6.34), se existir, que satisfaça a desigualdade $\|T_K(\tau, s)\|_\infty < \gamma$ resolvendo-se o problema de determinar o ganho $K \in \mathbb{R}^{q \times 2n}$ (6.34) que garanta

$$\|H_K(\lambda, s)\|_\infty < \|T_K(\tau, s)\|_\infty < \gamma \quad (6.35)$$

Utilizando este procedimento o ganho K em (6.34) é determinado facilmente através das ferramentas disponíveis na literatura, pois $H_K(\lambda, s)$ é uma função de transferência de um sistema LTI de ordem $2n$. De fato, partindo da condição que $\gamma^2 I - D'D > 0$, das hipóteses clássicas de ortogonalidade $G'[C \ D] = 0$, $D'C = 0$ e também $G'G = I$, comumente adotadas na literatura, temos que a solução central do problema (6.35) (veja [8], [73]) é dada por $K = -B'P$, onde $P = P' > 0$ é uma matriz que depende do parâmetro λ e satisfaz a seguinte desigualdade de Riccati:

$$A(\lambda)'P + PA(\lambda) + C'C - P(BB' - E(\gamma^2 I - D'D)^{-1}E')P < 0 \quad (6.36)$$

A primeira ressalva com relação a (6.36) é a de que satisfeitas as condições de observabilidade do par $(A(\lambda), C)$ e de controlabilidade do par $(A(\lambda), B)$, a equação de Riccati obtida substituindo-se a desigualdade em (6.36) por igualdade admite uma única solução estabilizante

definida positiva [8]. Em segundo lugar, quando $\lambda \rightarrow \infty$ a solução $P > 0$ de (6.36) possui uma estrutura particular, conforme mostrado no próximo teorema e, além disso, vale a igualdade $H_K(\infty, s) = T_K(0, s)$ para o correspondente ganho K obtido da solução da desigualdade de Riccati (6.36).

Teorema 6.2 *Considere o valor previamente fornecido $\gamma > \min_K \|H_K(\infty, s)\|_\infty$. Então, para $\lambda > 0$ suficientemente grande a solução central de (6.36), definida pelo par (K, P) , é tal que a matriz P^{-1} tem a estrutura particular*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} Z + Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

na qual as matrizes $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são definidas positivas. Além disso, as relações $\|H_K(\infty, s)\|_\infty = \|T_K(0, s)\|_\infty < \gamma$ são verdadeiras.

Prova: Como indicado anteriormente, a hipótese de que $\gamma > \min_K \|H_K(\infty, s)\|_\infty$ implica que (6.36) admite uma solução definida positiva. Assim, particionando $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ em quatro blocos matriciais $n \times n$ da seguinte forma

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} > 0 \quad (6.38)$$

verificamos que a desigualdade de Riccati (6.36), após multiplicada em ambos os lados por P^{-1} pode ser escrita na forma $\Pi + \lambda\Gamma < 0$ sendo

$$\begin{aligned} \Pi = P^{-1} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_0 + A_1 & A_0 - A_1 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_0 + A_1 & A_0 - A_1 \end{bmatrix} P^{-1} + \\ & + P^{-1} C' C P^{-1} - (B B' - E(\gamma^2 I - D' D)^{-1} E') \end{aligned} \quad (6.39)$$

e

$$\Gamma = \begin{bmatrix} U + U' & \hat{X} - U \\ \hat{X} - U' & -2\hat{X} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

dependentes apenas dos quatro blocos que compõem P^{-1} , mas independentes de λ . Além disso, ao considerarmos a matriz auxiliar

$$\Sigma = \begin{bmatrix} I & (1/2)(U - \hat{X})\hat{X}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

propomos utilizá-la para fatorar $\Pi + \lambda\Gamma < 0$. Mediante algumas manipulações algébricas verifi-

camos

$$\Gamma = \Sigma \begin{bmatrix} (1/2)(U + \hat{X})\hat{X}^{-1}(U + \hat{X})' & 0 \\ 0 & -2\hat{X} \end{bmatrix} \Sigma' \quad (6.42)$$

e devido ao fato de que a matriz no bloco diagonal superior em (6.42) é definida positiva, para que a desigualdade de Riccati $\Sigma^{-1}(\Pi + \lambda\Gamma)\Sigma'^{-1} < 0$ seja satisfeita para $\lambda > 0$ suficientemente grande são necessárias duas condições

- A primeira é a de que $\hat{X} = -U = Q > 0$ e conseqüentemente, ao definirmos $Z = X - Q > 0$, segue imediatamente a estrutura em (6.37).
- A segunda condição é a de que o bloco diagonal superior da matriz $\Sigma^{-1}\Pi\Sigma'^{-1} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ deve ser definido negativo, ou seja

$$(A_0 + A_1)Z + Z(A_0 + A_1)' + Z(C_0 + C_1)'(C_0 + C_1)Z - (B_0B_0' - E_0(\gamma^2I - D'D)^{-1}E_0') < 0 \quad (6.43)$$

Então, ao calcularmos o ganho de realimentação de estado $K = -B'P$, com P^{-1} dada em (6.37), a estrutura do ganho K em (6.34) nos permite escrever

$$K_0 + K_1 = -B_0'Z^{-1} \quad (6.44)$$

Conseqüentemente, após multiplicarmos ambos os lados da desigualdade (6.43) por Z^{-1} , concluímos que um ganho de realimentação calculado por (6.44) impõe que $\|T_K(0, s)\|_\infty < \gamma$. Finalmente, laçando mão do mesmo argumento utilizado para obtermos (6.25), a igualdade $\|H_K(\infty, s)\|_\infty = \|T_K(0, s)\|_\infty$ segue imediatamente, provando o presente teorema. \square

Este teorema é de particular importância, uma vez que ele afirma que para $\lambda > 0$ suficientemente grande a solução central da inequação de Riccati (6.36) apresenta uma estrutura particular e, além disso, o ganho de realimentação de estado calculado é tal que as normas $\|H_K(\infty, s)\|_\infty$ e $\|T_K(0, s)\|_\infty$ são idênticas. Dessa maneira, os resultados do Teorema 6.1 nos levam a concluir que existe um intervalo $\lambda \in (\lambda_\gamma, \infty)$ de modo que

$$\|H_K(\lambda, s)\|_\infty \leq \|T_K(\tau, s)\|_\infty < \gamma \quad (6.45)$$

para cada $\tau \in [0, \tau_\gamma)$, sendo que λ_γ e τ_γ são calculados utilizando-se o seguinte algoritmo, semelhante ao Algoritmo 6.1:

Algoritmo 6.2

1. Gere uma seqüência estritamente decrescente $\lambda_k = \{\infty, \dots, 0\}$ e tome $k = 0$.
2. Utilizando λ_k determine o ganho de realimentação de estado $K_k = K(\lambda_k) = -B'P(\lambda_k)$, onde $P(\lambda_k) > 0$ é solução da inequação de Riccati (6.36).
3. A seguir, calcule $\alpha_k = \alpha(\lambda_k) = \arg \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma(H_K(\lambda_k, j\omega))$ e o correspondente $\tau_k = \tau(\lambda_k)$ pela relação do Teorema 6.1.
4. Se $\tau(\lambda)$ for contínua e $d\tau(\lambda)/d\lambda < 0$ em $\lambda = \lambda_k$ e $\|T_{K_k}(\tau(\lambda_k), s)\|_\infty < \gamma$ incremente k e retorne ao passo 2. Caso contrário pare e defina $\lambda_\gamma = \lambda_{k-1}$ e $\tau_\gamma = \tau_{k-1}$.

A primeira observação pertinente é a de que quando o algoritmo é interrompido, além do par $(\lambda_\gamma, \tau_\gamma)$ também calculamos os ganhos K_k tais que $\|T_{K_k}(\tau_k, s)\|_\infty < \gamma$ para cada $\tau_k \in [0, \tau_\gamma]$. Em segundo lugar, a continuidade de $K(\lambda)$ e de $\tau(\lambda)$ em $\lambda = \lambda_k$ garantem que $\|T_{K(\lambda)}(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ também seja contínua em $\lambda = \lambda_k$. Neste caso impomos, além da continuidade, o fato de que $\tau(\lambda)$ é uma função de λ utilizando a condição (6.27). Em terceiro lugar, caso $T_{K_k}(\tau_k, s)$ esteja no limiar de estabilidade, sua norma \mathcal{H}_∞ torna-se ilimitada, assim como discutido na seção anterior. Finalmente, empregando o mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 6.1, concluímos que o valor $\|H_{K_k}(\lambda_k, s)\|_\infty$ fornece um limitante inferior para a norma \mathcal{H}_∞ de $T_{K_k}(\tau_k, s)$.

Antes de resolver alguns exemplos para ilustrar nosso método de projeto, enfatizamos que mesmo não sendo verdadeiras as condições de observabilidade de $(A(\lambda), C)$ e controlabilidade de $(A(\lambda), B)$, a inequação (6.36) pode ser substituída por uma igualdade, de modo que podemos procurar por uma solução $P = P'$ definida positiva. Isto é realizado substituindo-se a matriz $C'C$ por $C'C + \varepsilon I$, com $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Em função desta perturbação, é possível utilizar rotinas numéricas eficientes destinadas a resolver equações de Riccati. Tendo em mente este comentário e os resultados obtidos nesta seção apresentamos a seguir alguns exemplos que ilustram a aplicação do Algoritmo 6.2.

6.4.1 Exemplos

Exemplo 6.8 O primeiro exemplo corresponde aos dados encontrados em [49] e já apresentados nos Exemplos 6.2 e 6.7. As matrizes necessárias para completar a caracterização do sistema (6.30) são

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

e na Figura 6.7 apresentamos os limitantes superior e inferior em linhas tracejadas para $\|T_K(\tau, s)\|_\infty$ e seu valor exato em linha contínua, considerando $\gamma = 0,4$. Escolhendo $\lambda = 0,65$ obtivemos de

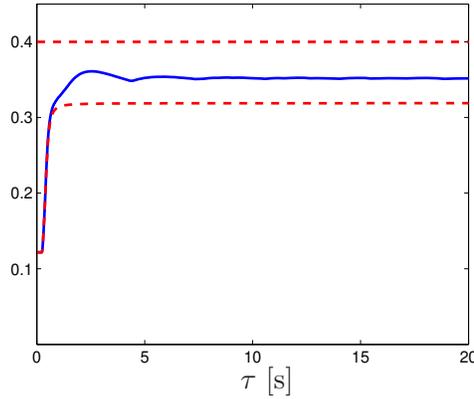


Figura 6.7: Norma \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada do Exemplo 6.8.

uma das iterações do Algoritmo 6.2 $\tau(\lambda) = 1,9702$ [s] os ganhos de realimentação de estado são dados por

$$K_0(\lambda) = \begin{bmatrix} -0,6164 & -3,9562 \end{bmatrix}, K_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1,2489 & 3,6279 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

o valor correspondente da norma \mathcal{H}_∞ para o sistema é malha fechada é $\|T_K(\tau(\lambda), s)\|_\infty = 0,3568$ e seu limitante inferior é $\|H_K(\lambda, s)\|_\infty = 0,3177$.

Verificamos, conforme indica a Figura 6.7, que é possível calcular ganhos de realimentação de estado que garantem $\|T_K(\tau, s)\|_\infty < \gamma$ para praticamente qualquer valor de atraso $\tau \geq 0$. \diamond

Exemplo 6.9 O segundo exemplo desta seção foi extraído de [17], cujas matrizes relativas à representação de estado (6.30) são dadas por

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, E_0 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Uma vez que, $\min_K \|T_K(0, s)\|_\infty = 0,411$, realizamos o projeto via realimentação de estado fixando $\gamma = 0,42$, que é sensivelmente inferior ao custo garantido $\mathcal{H}_\infty \bar{\gamma} = 0,73$ considerado em [17]. Empregando o Algoritmo 6.2 calculamos $\lambda_\gamma = 1,68$ e $\tau_\gamma = 1,19$ [s] e, na Figura 6.8, apresentamos em linhas tracejadas os limitantes superiores e inferiores para $\|T_K(\tau, s)\|_\infty$ e seu valor exato em linhas contínuas, para cada $\tau \in [0, \tau_\gamma)$. Devemos notar que os valores do limitante inferior e o valor exato da norma \mathcal{H}_∞ coincidem para todos os valores de atraso, com exceção dos valores na proximidade de τ_γ .

Para o sistema considerado não é possível calcular ganhos de realimentação que garantam o

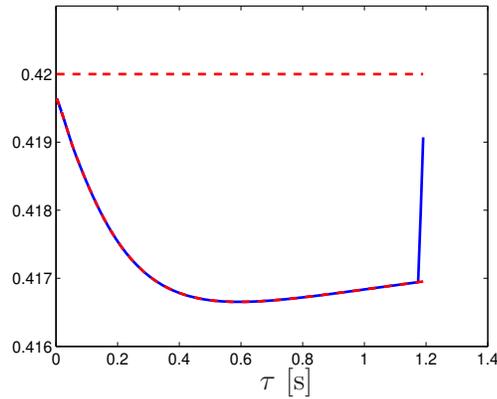


Figura 6.8: Norma \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada do Exemplo 6.9.

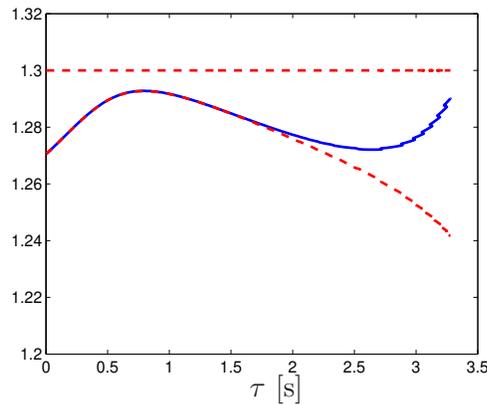


Figura 6.9: Norma \mathcal{H}_∞ para o sistema em malha fechada do Exemplo 6.10.

limitante $\gamma = 0,42$ para qualquer valor de atraso $\tau \geq 0$, em contraste com o exemplo anterior. \diamond

Exemplo 6.10 O terceiro exemplo consiste em controlar um sistema representado pela conexão em cascata de duas funções de transferências racionais conectadas por meio de um canal que gera um atraso. As matrizes correspondentes à representação de estado (6.30) são dadas por

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Seguindo a mesma notação adotada nos dois exemplos anteriores, em linhas tracejadas temos os

limitantes inferior e superior para $\|T_K(\tau, s)\|_\infty$ na Figura 6.9 e em linha contínua o valor exato da norma, calculada para cada $\tau \in [0, 3,27]$ [s], correspondente a $\lambda \in (10^{-4}, 10^3)$ e considerando $\gamma = 1,30$. Diferentemente do que ocorre para os dados do Exemplo 6.9, o valor do limitante inferior coincide com a verdadeira norma \mathcal{H}_∞ apenas para $\tau \in [0, 1,5)$ [s]. \diamond

Como comentário final, é importante mencionar que o intervalo $\tau \in [0, \tau_\gamma)$ depende fortemente do valor $\gamma > 0$ especificado pelo projetista. Em geral, este intervalo torna-se menor à medida que diminuimos γ . Por fim, reiteramos o que as Figuras 6.7 a 6.9 ilustram que, para valores relativamente pequenos de atraso, o limitante inferior praticamente coincide com o valor exato da norma $\|T_K(\tau, s)\|_\infty$.

Antes de prosseguirmos é necessário fazer alguns comentários, tomando como ponto de partida os resultados apresentados e ilustrados nesta seção. Voltando nossa atenção para a inequação de Riccati (6.36), após multiplicá-la em ambos os lados por $W = P^{-1}$ e definirmos a matriz $Y = KW$, podemos escrevê-la no seguinte formato LMI

$$\begin{bmatrix} A(\lambda)W + WA(\lambda)' + BY + Y'B' & E & WC' + YG' \\ * & -\gamma^2 I & D' \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.52)$$

Devido ao fato de que $A(\lambda)$ é linear em relação ao parâmetro λ , se (6.52) for satisfeita, simultaneamente, para $\lambda \rightarrow \infty$ e para $\lambda = \lambda_\gamma$, então ela vale para todo $\lambda \in [\lambda_\gamma, \infty)$. Calculando, então, um ganho K , solução da LMI (6.52) para todo o intervalo $\lambda \in (\lambda_\gamma, \infty)$, podemos aplicar o Algoritmo 6.1 e determinar o intervalo $\tau \in [0, \tau_\gamma)$ para o qual o sistema em malha fechada $T_K(\tau, s)$, com K fixo, seja estável e satisfaça a condição $\|T_K(\tau, s)\|_\infty < \gamma$. Ou seja, certificamos que o ganho K obtido é robusto no intervalo $\tau \in [0, \tau_\gamma)$. Por outro lado, é importante levar em consideração o resultado do Teorema 6.2, o qual afirma que a matriz $W = P^{-1}$ tem uma estrutura particular quando $\lambda \rightarrow \infty$ e que, portanto, deve ser preservada na LMI (6.52). Sob esta circunstância é aparente que a abordagem proposta para a limitação da norma \mathcal{H}_∞ de $T_K(\tau, s)$ impõe um certo conservadorismo no projeto do ganho de realimentação de estado robusto K , de modo que o valor de $\tau_\gamma \geq 0$ proveniente deste cálculo seja relativamente pequeno.

6.5 Projeto de filtros

Seguindo adiante com a proposta de explorar as características do sistema de comparação definido em (6.5), vamos abordar o problema de filtragem em norma \mathcal{H}_∞ para sistemas com retardo [37]. Neste contexto podemos enumerar dois objetivos de projeto. Um deles corresponde

a projetar um filtro de modo a fazer com que o erro de estimação seja estável e sua norma \mathcal{H}_∞ esteja abaixo de um valor pré-especificado para o maior valor possível de atraso $\tau \geq 0$. Ou ainda, o objetivo do projeto pode ser atingir o menor nível de desempenho \mathcal{H}_∞ para um dado valor de atraso $\tau \geq 0$.

Dentro desses contextos, podemos encontrar trabalhos na literatura que utilizam uma abordagem baseada na equação de Riccati, como por exemplo [53], o qual considera apenas a saída mensurável sujeita a atraso. Ou ainda, há diversos artigos que utilizam uma abordagem baseada em funções de Lyapunov-Krasovskii que permitem tratar de modelos mais gerais, incluindo atraso variante no tempo, e leva a uma formulação através de LMIs, como em [11], [18] e [14]. Nessas abordagens são amplamente estudados os filtros projetado para garantir um desempenho em norma \mathcal{H}_∞ , que são de grande importância prática pois, dentre outras possíveis, eles possibilitam a detecção de falhas em sistemas [23] e a estimação de sinais em canais de comunicação [44].

Essa importância dos filtros \mathcal{H}_∞ nos motiva a tratar de seu projeto para o sistema com retardo (6.1), do qual podemos medir uma saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a fim de estimar um outro sinal $z(t) \in \mathbb{R}^r$. Em termos de representação através de variáveis de estado vamos considerar o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + E_0w(t) \quad , \quad x(t) = 0 \quad \forall t \in [-\tau, 0] \\ y(t) &= C_{y0}x(t) + C_{y1}x(t - \tau) + D_yw(t) \\ z(t) &= C_{z0}x(t) + C_{z1}x(t - \tau) + D_zw(t) \end{aligned} \quad (6.53)$$

para o qual assumimos novamente que o atraso $\tau \geq 0$ é constante em relação ao tempo e que o sistema é estável e evolui a partir de condições iniciais nulas. Nosso objetivo de projeto é, então, obter um filtro com realização em espaço de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_F(t) &= A_{F0}x_F(t) + A_{F1}x_F(t - \tau) + B_{F0}y(t) \\ z_F(t) &= C_{F0}x_F(t) + C_{F1}x_F(t - \tau) \end{aligned} \quad (6.54)$$

na qual $x_F(t) \in \mathbb{R}^n$ e $z_F(t) \in \mathbb{R}^r$ deve ser a melhor estimativa para o sinal $z(t)$ considerando um desempenho expresso através da norma \mathcal{H}_∞ . A conexão entre (6.53) e (6.54) fornece um sistema que descreve a dinâmica do erro de estimação $\varepsilon(t) = z(t) - z_F(t)$ definida pelas equações de estado semelhantes às que descrevem (6.1)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= F_0\xi(t) + F_1\xi(t - \tau) + G_0w(t) \\ \varepsilon(t) &= J_0\xi(t) + J_1\xi(t - \tau) \end{aligned} \quad (6.55)$$

onde $\xi(t) = [x(t)' \quad x_F(t)']' \in \mathbb{R}^{2n}$ denota o vetor de estado relativo ao erro de estimação e as

matrizes indicadas em (6.55) são definidas por

$$F_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ B_{F_0}C_{y_0} & A_{F_0} \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_{F_0}C_{y_1} & A_{F_1} \end{bmatrix}, G_0 = \begin{bmatrix} E_0 \\ B_{F_0}D_y \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} C_{z_0} & -C_{F_0} \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} C_{z_1} & -C_{F_1} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Dessa forma, a função de transferência relativa a (6.55), denotada

$$T_F(\tau, s) = (J_0 + J_1 e^{-\tau s})(sI - F_0 - F_1 e^{-\tau s})^{-1} G_0 \quad (6.58)$$

apresenta estrutura idêntica à descrita por (6.2) e o sub-índice F denota sua dependência em relação às matrizes do filtro (6.54).

O objetivo considerado no projeto de (6.55) reside em garantir $\|T_F(\tau, s)\|_\infty < \gamma$ para $\tau \in [0, \tau^*)$ e $\gamma > 0$ dado. Devido à dificuldade associada em manipular diretamente a função de transferência não racional $T_F(\tau, s)$ propomos estender os resultados obtidos nas Seções 6.3 e 6.4 e substituí-la por uma função de transferência racional, a qual deve ser utilizada para projetar o filtro em questão. Isto é feito empregando-se a mesma manipulação utilizada para obter (6.5), ou seja, definimos um sistema de comparação LTI de ordem $4n$ relativo a (6.55), cuja realização em espaço de estado é dada por

$$H_F(\lambda, s) = \left[\begin{array}{c|c} F(\lambda) & G \\ \hline J & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda I & 0 \\ F_0 + F_1 & F_0 - F_1 - \lambda I & G_0 \\ \hline J_0 + J_1 & J_0 - J_1 & 0 \end{array} \right] \quad (6.59)$$

que apresenta uma propriedade interessante e fundamental para o projeto do filtro (6.55). Ao aplicarmos sobre (6.59) a transformação de similaridade representada pela matriz de permutação dada a seguir

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

cujos blocos matriciais internos têm dimensão $n \times n$ e ainda $T^{-1} = T$, obtemos o sistema equivalente

$$H_F(\lambda, s) = \left[\begin{array}{cc|c} A(\lambda) & 0 & E \\ \hat{L}C_y & \hat{A}(\lambda) & \hat{L}D_y \\ \hline C_z & -\hat{C} & 0 \end{array} \right] \quad (6.61)$$

para o qual as matrizes $A(\lambda)$, E , C_y e C_z estão definidas em (6.5) e as novas matrizes denotam

$$\hat{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda I \\ A_{F0} + A_{F1} & A_{F0} - A_{F1} - \lambda I \end{bmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{F0} \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C_{F0} + C_{F1} & C_{F0} - C_{F1} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Tais manipulações algébricas evidenciam que o sistema de comparação $H_F(\lambda, s)$, com realização dada em (6.61), pode ser descrito como o resultado da conexão entre o sistema de comparação relativo ao sistema (6.53) com o sistema de comparação correspondente ao filtro (6.54). Assim, em uma primeira análise concluiríamos que a realização em (6.61) apresenta a estrutura clássica para o projeto de filtros LTI, entretanto as matrizes $\hat{A}(\lambda)$ e \hat{L} possuem estruturas particulares originárias da descrição do sistema de comparação para o filtro (6.54). A fim de contornar este inconveniente propomos projetar um filtro de ordem completa para o sistema de comparação relativo a (6.53) utilizando a abordagem clássica de norma \mathcal{H}_∞ e, a seguir, aplicar uma transformação de similaridade adequada para recuperarmos as matrizes com estrutura $\hat{A}(\lambda)$ e \hat{L} , uma vez que a função de transferência $H_F(\lambda, s)$ não é alterada com esse procedimento.

Dessa maneira, em um primeiro momento substituímos as variáveis matriciais $(\hat{A}(\lambda), \hat{L}, \hat{C})$ em (6.61) por matrizes genéricas de mesmas dimensões (A_F, L_F, C_F) e, posteriormente, calculamos uma matriz não-singular $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ de forma que

$$(\hat{A}(\lambda), \hat{L}, \hat{C}) = (VA_F V^{-1}, VL_F, C_F V^{-1}) \quad (6.63)$$

É importante ressaltar que esta transformação de similaridade existe desde que $p \leq n$, ou seja quando a dimensão do sinal medido $y(t)$ for menor ou igual à dimensão do vetor de estado $x(t)$, sendo não única quando $p < n$. Este ponto e a forma de como obter V são discutidos com mais detalhes no Lema 6.2, mais adiante. Adotando um procedimento de projeto semelhante ao que foi realizado para a realimentação de estado, vamos calcular um filtro de modo a satisfazer as restrições

$$\|H_F(\lambda, s)\|_\infty \leq \|T_F(\tau, s)\|_\infty < \gamma \quad (6.64)$$

Como ponto de partida consideramos inicialmente apenas a restrição $\|H_F(\lambda, s)\|_\infty < \gamma$, que é um problema clássico em teoria \mathcal{H}_∞ [8] e cuja solução, para $\gamma > 0$ dado, é o chamado filtro central. Este filtro central tem estrutura de observador de estado em relação ao sistema de comparação correspondente a (6.53) e sua realização em função das matrizes de representação de estado é

$$\left[\begin{array}{c|c} A_F & L_F \\ \hline C_F & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A(\lambda) - L_F C_y & L_F \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right] \quad (6.65)$$

para a qual o ganho do filtro é dado por

$$L_F = PC'_y(D_y D'_y)^{-1} + ED'_y(D_y D'_y)^{-1} \quad (6.66)$$

sendo que a matriz $P = P' > 0$ depende do parâmetro $\lambda \in (\lambda_o, \infty)$ e é solução da desigualdade de Riccati

$$\tilde{A}(\lambda)P + P\tilde{A}(\lambda)' + \tilde{E}\tilde{E}' - P(C'_y(D_y D'_y)^{-1}C_y - \gamma^{-2}C'_z C_z)P < 0 \quad (6.67)$$

na qual as matrizes indicadas são

$$\tilde{A}(\lambda) = A(\lambda) - ED'_y(D_y D'_y)^{-1}C_y \quad \text{e} \quad \tilde{E} = E(I - D'_y(D_y D'_y)^{-1}D_y) \quad (6.68)$$

Uma observação importante neste ponto é que vamos supor que o sistema (6.53) é estável, bem como o sistema de comparação a ele associado. Esta última hipótese implica, no projeto do filtro (6.65), que a matriz $A(\lambda)$ é Hurwitz, o que é verdade se considerarmos o intervalo $\lambda \in (\lambda_o, \infty)$, segundo a definição (6.22).

Analogamente ao que foi discutido no problema de realimentação de estado, a observabilidade do par $(\tilde{A}(\lambda), C_y)$ e a controlabilidade do par $(\tilde{A}(\lambda), \tilde{E})$ asseguram, também neste caso, que a equação de Riccati obtida ao considerarmos a igualdade em (6.67) admite uma solução $P = P' > 0$. Além disso, da teoria \mathcal{H}_∞ [73], para $\gamma > 0$ dado a existência de $P > 0$ satisfazendo (6.67) é uma condição necessária e suficiente para a existência de um filtro LTI de ordem completa que assegure a restrição de norma \mathcal{H}_∞ (6.64). Neste caso o filtro procurado é dado por (6.65) (veja [8] e [73]), cuja função de transferência não é alterada se empregarmos uma transformação de similaridade adequada para escrever suas matrizes de representação de estado segundo (6.62) e recuperarmos as matrizes do filtro original (6.54). Neste contexto, o lema a seguir indica como obter a matriz V que estabelece a transformação de similaridade necessária para completar o projeto do filtro (6.54).

Lema 6.2 *Suponha que $\dim(y) = p \leq n = \dim(x)$, $\lambda > 0$ e a matriz*

$$V = \begin{bmatrix} N \\ \lambda^{-1}NA_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (6.69)$$

é não singular, na qual $N' \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ pertence ao espaço nulo gerado por L'_F . Sob estas condições, a igualdade (6.63) vale.

Prova: Devido ao fato de que $L_F \in \mathbb{R}^{2n \times p}$ a existência de uma matriz N de rank completo implica em $p \leq n$. Em vista disso, a prova deste lema segue da constatação de que para

garantirmos a igualdade em (6.63) é necessário que as matrizes definidas em (6.62) satisfaçam

$$\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} V L_F = 0 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} V A_F V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda I \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

Sendo que a primeira condição segue diretamente da definição de N , ao passo a relação

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda I \end{bmatrix} V - \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} V A_F = N A_F - N A_F = 0 \quad (6.71)$$

leva à verificação da segunda igualdade. \square

O emprego da transformação de similaridade proposta requer algumas considerações. Em geral verificamos que $p \leq n$ e, neste caso a matriz de transformação de similaridade V não é única, uma vez que a equação $L'_F N' = 0$ admite várias soluções de rank completo. Além disso, embora a escolha de V não altere o valor de $\|H_F(\lambda, s)\|_\infty$ ela pode modificar o valor de $\|T_F(\tau, s)\|_\infty$, uma vez que V não define uma transformação de similaridade aplicada para o filtro original (6.54). Este fato é discutido mais adiante, onde além de calcularmos como $T_F(\tau, s)$ depende de V , também propomos uma maneira de inserir o cálculo desta transformação de similaridade no projeto do filtro (6.54). No momento, discutimos o comportamento da solução da desigualdade de Riccati (6.67) para valores de λ suficientemente grandes e, de forma análoga ao problema de realimentação de estado, percebemos que a matriz P em (6.67) apresenta uma estrutura particular nesta situação, conforme apresentado no teorema a seguir.

Teorema 6.3 *Considere o valor previamente fornecido $\gamma > \min_F \|H_F(\infty, s)\|_\infty$. Então, para $\lambda > 0$ suficientemente grande a solução central de (6.67), definida pelo par (L_F, P) , é tal que a matriz P tem a estrutura particular*

$$P = \begin{bmatrix} Z + Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

na qual as matrizes $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são definidas positivas. Além disso, as relações $\|H_F(\infty, s)\|_\infty = \|T_F(0, s)\|_\infty < \gamma$ são verdadeiras.

Prova: A prova deste teorema segue as idéias utilizadas na prova do Teorema 6.2. Particionando P conforme a nomenclatura utilizada em (6.38) para definir P^{-1} , podemos reescrever a desigualdade de Riccati (6.67) na forma $\Pi + \lambda \Gamma < 0$. Neste caso, Γ é dada por (6.40), mas Π é ligeiramente diferente, em função da estrutura da matriz $\tilde{A}(\lambda)$. Nesta situação, a primeira condição a ser satisfeita para garantir a validade da desigualdade de Riccati é a de que $\hat{X} = -U = Q > 0$, devido à condição sobre o bloco diagonal superior da matriz diagonal obtida na fatoração de Γ

em (6.42). Portanto definindo $Z = X - Q > 0$ segue (6.72).

A segunda condição requer que o bloco diagonal superior da matriz $\Sigma^{-1}\Pi\Sigma'^{-1} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ seja definido negativo, com Π dada por

$$\Pi = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 - \tilde{A}_1 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 - \tilde{A}_1 \end{bmatrix} P + \tilde{E}\tilde{E}' - P(C_y'(D_y D_y')^{-1}C_y - \gamma^{-2}C_z' C_z)P \quad (6.73)$$

sendo $\tilde{A}_0 = A_0 - E_0 D_y'(D_y D_y')^{-1}C_{y0}$, $\tilde{A}_1 = A_1 - E_0 D_y'(D_y D_y')^{-1}C_{y1}$ e a matriz Σ definida em (6.41). Esta condição, por sua vez, implica na desigualdade

$$(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1)Z + Z(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1)' + \tilde{E}_0\tilde{E}_0' - Z(C_{y0} + C_{y1})'(D_y D_y')^{-1}(C_{y0} + C_{y1})Z + \\ + \gamma^{-2}Z(C_{z0} + C_{z1})'(C_{z0} + C_{z1})Z < 0 \quad (6.74)$$

na qual $\tilde{E}_0 = E_0(I - D_y'(D_y D_y')^{-1}D_y)$. Realizando, então, o cálculo ganho $L_F = [L_{F1} \ L_{F2}]'$ do filtro segundo (6.66), com P dada por (6.72), obtemos

$$L_{F1} + L_{F2} = (Z(C_{y0} + C_{y1})' + E_0 D_y') (D_y D_y')^{-1} \quad (6.75)$$

Por outro lado, utilizando o resultado do Lema A.1 para o cálculo de inversas de matrizes, temos

$$(sI - A(\lambda))^{-1} L_F = \begin{bmatrix} Is^{-1} & (s\lambda^{-1}(sI - A_0 + A_1) + sI - A_0 - A_1)^{-1} \\ 0 & s(s(sI - A_0 + A_1) + \lambda(sI - A_0 - A_1))^{-1} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} L_{F1} \\ s^{-1}(A_0 + A_1)L_{F1} + L_{F2} \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

a partir da qual concluímos que para $\lambda \rightarrow \infty$ vale a aproximação

$$(sI - A(\lambda))^{-1} L_F \approx \begin{bmatrix} (sI - A_0 - A_1)^{-1} (L_{F1} + L_{F2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.77)$$

para qualquer valor de L_F , mas com $|s|$ finito. Dessa maneira chegamos na expressão para o filtro LTI

$$C_F(sI - A_F)^{-1}L_F = (C_{z0} + C_{z1})(sI - A_0 - A_1)^{-1}(L_{F1} + L_{F2})(C_{y0} + C_{y1}) \quad (6.78)$$

evidenciando o fato de que o filtro (6.65) corresponde ao filtro central associado ao sistema LTI obtido quando $\tau = 0$. Conseqüentemente, a igualdade $\|H_F(\infty, s)\|_\infty = \|T_F(0, s)\|_\infty$ é verdadeira,

concluindo a prova do teorema proposto. \square

A importância deste teorema é análoga à do Teorema 6.2, na medida em que ele afirma que para λ suficientemente grande a solução central $P > 0$ da desigualdade de Riccati (6.67) apresenta uma estrutura particular, gerando um filtro tal que as normas $\|H_F(\infty, s)\|_\infty$ e $\|T_F(0, s)\|_\infty$ coincidam. Dessa maneira, em função do Teorema 6.1 podemos afirmar que existe um intervalo $\lambda \in (\lambda_\gamma, \infty)$ de modo que

$$\|H_F(\infty, s)\|_\infty \leq \|T_F(0, s)\|_\infty < \gamma \quad (6.79)$$

para cada $\tau \in [0, \tau_\gamma)$. O cálculo dos valores de λ_γ e τ_γ deve ser realizada através de um algoritmo semelhante aos Algoritmos 6.1 e 6.2.

Algoritmo 6.3

1. Gere uma seqüência estritamente decrescente $\lambda_k = \{\infty, \dots, \lambda_o\}$ e tome $k = 0$.
2. Utilizando λ_k encontre a solução da inequação de Riccati (6.67) e o filtro (6.65) definido pela realização em espaço de estado $(A_{Fk}, L_{Fk}, C_{Fk}) = (A_F(\lambda_k), L_F(\lambda_k), C_F(\lambda_k))$.
3. Calcule a matriz de transformação de similaridade dada por (6.69) e as matrizes na estrutura do sistema de comparação para o filtro $(\hat{A}(\lambda_k), \hat{L}, \hat{C})$ através de (6.63)
4. A seguir, calcule $\alpha_k = \alpha(\lambda_k) = \arg \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma(H_F(\lambda_k, j\omega))$ e o correspondente $\tau_k = \tau(\lambda_k)$ pela relação do Teorema 6.1.
5. Se $\tau(\lambda)$ for contínua e $d\tau(\lambda)/d\lambda < 0$ em $\lambda = \lambda_k$ e $\|T_F(\tau_k, s)\|_\infty < \gamma$, incremente k e retorne ao passo 2. Caso contrário pare e defina $\lambda_\gamma = \lambda_{k-1}$ e $\tau_\gamma = \tau_{k-1}$.

Através deste algoritmo garantimos que $\|T_F(\tau_k, s)\|_\infty < \gamma$ para cada $\tau_k \in [0, \tau_\gamma)$ e o limitante inferior fornecido pelo Corolário (6.1) é válido, pois devido à continuidade de $\tau(\lambda)$ e das matrizes do filtro em relação a $\lambda \in (\lambda_\gamma, \infty)$ a continuidade de $\|T_F(\tau(\lambda), s)\|_\infty$ está assegurada em $\lambda = \lambda_k$. Mais uma vez, a imposição da continuidade de $\tau(\lambda)$ em $\lambda = \lambda_k$ é feita lançando mão da condição (6.27). Em segundo lugar, se a função de transferência do erro de estimação $T_{Fk}(\tau_k, s)$ estiver no limiar de sua estabilidade, detectamos esta situação verificando o comportamento da norma \mathcal{H}_∞ dessa função de transferência. Por fim, podemos substituir a inequação de Riccati (6.67) por uma equação e, assim, procurar por uma solução $P > 0$ estabilizante ao substituir a matriz $\tilde{E}\tilde{E}'$ por $\tilde{E}\tilde{E}' + \varepsilon I$ com $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Dessa maneira é possível utilizar rotinas numéricas de alto desempenho para resolver a equação de Riccati.

Neste ponto vamos avaliar o efeito da transformação de similaridade V , fornecida pelo Lema 6.2, na definição da função de transferência $T_F(\tau, s)$. Como em geral temos $p < n$, a primeira informação que temos de levar em conta é a de que a matriz $V \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ não é única. Além disso, a função de transferência $H_F(\lambda, s)$ é invariante com a escolha de V , pois $\text{diag}\{I, V\}$ define uma transformação de similaridade para o sistema LTI (6.61), de forma que, utilizando o filtro (6.65), obtemos a seguinte realização para a dinâmica do erro de estimação

$$\begin{aligned} H_F(\lambda, s) &= \left[\begin{array}{c|c} A_H & E_H \\ \hline C_H & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A(\lambda) & 0 & E \\ L_F C_y & A(\lambda) - L_F C_y & L_F D_y \\ \hline C_z & -C_z & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A(\lambda) - L_F C_y & E - L_F D_y \\ \hline C_z & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6.80)$$

Por sua vez, ao aplicarmos a transformação de similaridade descrita pela matriz V , dada em (6.69) e de modo a satisfazer (6.63), podemos escrever as matrizes da função de transferência $T_F(\tau, s)$ na seguinte forma:

$$F_0 + F_1 e^{-\tau s} = \left[\begin{array}{cc} R(A(\lambda) + \lambda I) \Theta(s) & 0 \\ R V L_F C_y \Theta(s) & R V (A_F + \lambda I) V^{-1} \Theta(s) \end{array} \right], \quad G_0 = \left[\begin{array}{c} R E \\ R V L_F D_y \end{array} \right] \quad (6.81)$$

$$J_0 + J_1 e^{-\tau s} = \left[\begin{array}{cc} C_z \Theta(s) & -C_F V^{-1} \Theta(s) \end{array} \right] \quad (6.82)$$

nas quais $R = [0 \ I]$ e $\Theta(s) = [0,5(1 + e^{-s\tau})I \ 0,5(1 - e^{-s\tau})I]^t$. Por outro lado, se definirmos novas matrizes $\tilde{R} = \text{diag}\{R, R\}$, $\tilde{\Theta}(s) = \text{diag}\{\Theta(s), \Theta(s)\}$ e $\tilde{V} = \text{diag}\{I, V\}$ reescrevemos a função de transferência do erro de estimação como sendo

$$\begin{aligned} T_F(\tau, s) &= C_H \tilde{V}^{-1} \tilde{\Theta}(s) (sI - \tilde{R} \tilde{V} (A_H + \lambda I) \tilde{V}^{-1} \tilde{\Theta}(s))^{-1} \tilde{R} \tilde{V} E_H \\ &= C_H \Omega(s) (sI - (A_H + \lambda I) \Omega(s))^{-1} E_H \end{aligned} \quad (6.83)$$

de modo que a segunda igualdade foi obtida empregando-se o Lema A.3, com a matriz $\Omega(s)$ dada a seguir

$$\Omega(s) = \tilde{V}^{-1} \tilde{\Theta}(s) \tilde{R} \tilde{V} = \text{diag} \{ \Theta(s) R, V^{-1} \Theta(s) R V \} \quad (6.84)$$

As manipulações algébricas realizadas em função da transformação de similaridade proposta no Lema 6.2 colocam em evidência que a função de transferência do filtro não racional (6.54)

depende da matriz V , utilizada para obtermos a realização $(\hat{A}(\lambda), \hat{L}, \hat{C})$. Portanto, cada matriz V fornecida pelo Lema 6.2 assegura a validade da desigualdade $\|H_F(\lambda, s)\|_\infty \leq \|T_F(\tau, s)\|_\infty$, de forma que seu lado esquerdo seja constante com V , ao passo que seu lado direito varia com a escolha dessa matriz V . Assim, existe uma transformação de similaridade ótima, obtida através da resolução do problema

$$V = \arg \inf_{V \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}} \|T_F(\tau, s)\|_\infty \quad (6.85)$$

mas cuja solução é extremamente difícil de ser calculada. A seguir apresentamos um exemplo que ilustra a aplicação do Algoritmo 6.3, bem como um procedimento simplificado para resolver (6.85) e verificar numericamente o efeito da matriz V . O que deve ficar claro na resolução do problema (6.85) é o fato de que o filtro LTI de ordem finita é completamente conhecido.

6.5.1 Exemplo

Nesta seção consideramos um problema clássico de filtragem em sistemas de comunicação, que consiste em separar a parcela do sinal de um sinal corrompido por ruído aditivo em um canal de transmissão que apresenta um atraso, veja [30] e [44].

Exemplo 6.11 As matrizes correspondentes ao modelo em espaço de estado (6.53) são denotadas por $A_0 = \text{diag}\{A_{0s}, A_{0n}\}$, $A_1 = \text{diag}\{A_{sn}, A_{sn}\}$ e $E_0 = \text{diag}\{E_{0s}, E_{0n}\}$ sendo

$$A_{0s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad A_{0n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad A_{sn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{0s} = E_{0n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.86)$$

e as matrizes de saída são definidas da forma $C_{y0} = C_{z0} = [C_s \ 0 \ 0]$, $C_{y1} = [0 \ 0 \ C_n]$, $C_{z1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ e $D_y = [0 \ D_{yn}]$ nas quais

$$C_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{yn} = 0,5 \quad (6.87)$$

Este sistema possui ordem 4 e duas saídas. A primeira saída corresponde ao sinal corrompido por um ruído que sofreu atraso e a segunda saída é o sinal que desejamos estimar. Inicialmente, com a aplicação do critério de Nyquist calculamos que o limite de estabilidade para o sistema de comparação $H(\lambda, s)$ é $\lambda_o = \lambda^o = \lambda^* = 1$, e o correspondente limite de estabilidade para $T(\tau, s)$ é $\tau^* = \pi/2$ [s], além do qual a dinâmica do erro de estimação $T_F(\tau, s)$ deixa de ser estável.

O filtro LTI de ordem finita, segundo a estrutura (6.65), possui $L_F \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ e, assim, devemos escolher a matriz $N' \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$ de acordo com o Lema 6.2, a partir do espaço nulo de L'_F , que é definido por 7 vetores de dimensão 8. Para ilustração do Algoritmo 6.3 adotamos N simplesmente como os 4 primeiros vetores obtidos com a aplicação da rotina `null` do `Matlab`.

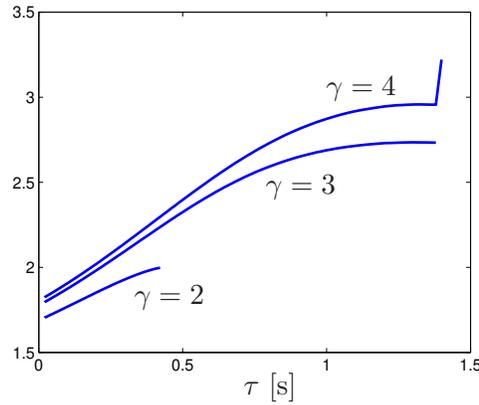


Figura 6.10: Norma \mathcal{H}_∞ do erro de estimação versus atraso.

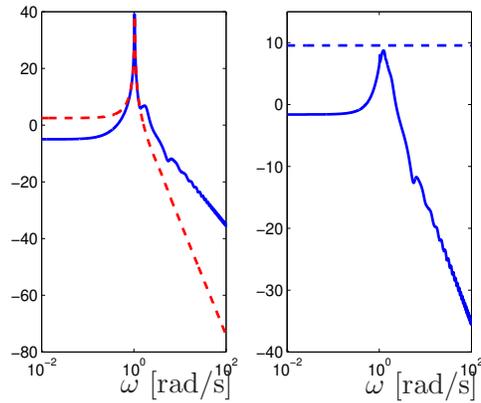


Figura 6.11: Diagramas de valores singulares.

Na Figura 6.10 apresentamos a norma \mathcal{H}_∞ do erro de estimação como função de cada valor de atraso $\tau(\lambda)$ calculado através do Algoritmo 6.3. Tendo em mente que $\lambda_o = \lambda^\circ = \lambda^* = 1$ depende apenas do sistema considerado e não do valor fornecido de γ , verificamos que para $\gamma = 4$ e $\gamma = 3$ o máximo valor de atraso atingido $\tau_\gamma \approx 1,385$ [s] corresponde a $\lambda_\gamma = 1,065$, que é um valor bastante próximo a λ^* , e é limitado pelo valor pré-especificado para o nível \mathcal{H}_∞ . Considerando $\gamma = 2$ atingimos um valor de atraso máximo $\tau_\gamma \approx 0,42$ [s] muito menor em relação às situações anteriores. Nessas três situações analisadas verificamos que os valores obtidos para τ_γ são limitados pelo valor pré-especificado γ para o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ do erro de estimação. É importante ressaltar também, com relação à Figura 6.10, que o limitante inferior proposto a partir dos resultados do Teorema 6.1 praticamente coincide com o valor de $\|T_F(\tau, s)\|_\infty$, à exceção das proximidades de τ^* quando $\gamma = \{3, 4\}$.

A fim de analisarmos o comportamento de um dos filtros no domínio da frequência, para $\gamma = 3$ e $\tau = 1,385$ [s] fornecemos na Figura 6.11 alguns diagramas de valores singulares. No gráfico

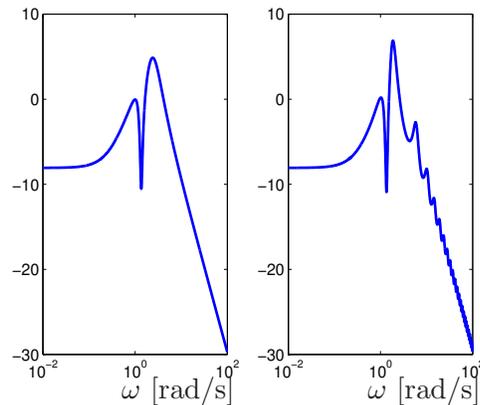


Figura 6.12: Diagramas de valores singulares para os filtros LTI e não-racional.

da esquerda, na Figura 6.11, observamos o diagrama da função de transferência da entrada $w(t)$ para a saída estimada $z_F(t)$ em linha contínua e, em linha tracejada, o diagrama correspondente à função de transferência da entrada $w(t)$ para a saída de interesse $z(t)$. Por sua vez, a curva em linha contínua no gráfico da direita na Figura 6.11 representa o diagrama de valor singular da função de transferência $T(\tau, s)$ da entrada $w(t)$ para o erro de estimação $\varepsilon(t) = z(t) - z_F(t)$ produzido com o filtro calculado e, em linha tracejada, o valor $\gamma = 3$ expresso em dB. Notamos que o filtro projetado para o máximo valor de atraso é bastante satisfatório na estimação do sinal $z(t)$ e o valor de $\|T_F(\tau, s)\|_\infty \approx 2,73$, em $\omega^* = 1,24$ [rad/s], é o menor nível que poderíamos alcançar, uma vez que ele é igual ao limitante inferior calculado para o valor de atraso $\tau(\lambda = 1,065) = 1,385$ [s].

Ainda para os valores $\gamma = 3$ e $\tau = 1,385$ [s] apresentamos, na Figura 6.12, o diagrama de valor singular para as funções do filtro LTI racional (6.65) no gráfico à esquerda e o correspondente diagrama para o filtro não-racional (6.54), obtido com a transformação de similaridade introduzida no Lema 6.2, no gráfico à direita. Verificamos alguma semelhança entre ambos, principalmente nas baixas frequências, mas com a ressalva de que apenas o filtro representado no diagrama da direita foi projetado para tratar com o problema do atraso $\tau = 1,385$ [s].

Com a finalidade de completar a avaliação de desempenho do filtro projetado apresentamos, na Figura 6.13, três simulações temporais, nas quais consideramos que as duas entradas ruidosas do canal de comunicação são $w_1(t) = w_2(t) = e^{-0,1t} \text{sen}(\omega_n t)$ com $\omega_n = \{\omega^*/2, \omega^*, 2\omega^*\}$ e $\omega^* = 1,24$ [s] é a frequência na qual ocorre o pico do diagrama de valor singular na Figura 6.12. Nas três situações da Figura 6.13 as curvas em linha cheia correspondem ao sinal estimado $z_F(t)$, ao passo que as linhas tracejadas representam o sinal verdadeiro $z(t)$. Comparando os resultados das simulações verificamos que o desempenho do filtro é satisfatório ao reduzir substancialmente o erro de estimação após poucos períodos de tempo. \diamond

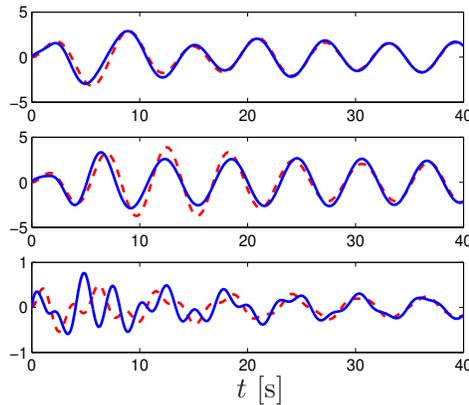


Figura 6.13: Simulação temporal para o desempenho do filtro.

No exemplo considerado é possível avaliar também o efeito da escolha da matriz $V \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$, obtida através da base ortonormal gerada pela rotina `null` $(L'_F)' \in \mathbb{R}^{7 \times 8}$ do `Matlab`. Uma maneira de fazê-lo é considerar as 35 possibilidades para a matriz V em cada iteração do Algoritmo 6.3 e escolher V_k que resolve o problema (6.85) e que também deve garantir a estabilidade da matriz $F_{0k} + F_{1k}$, cujas parcelas são definidas em (6.56). As curvas obtidas em função deste método se assemelham bastante com as obtidas na Figura 6.11, como esperado, pois a diferença entre o limitante inferior fornecido pelo Teorema 6.1 e $\|T_F(\tau, s)\|_\infty$ é praticamente nula e, conforme dissemos anteriormente, $H(F(\lambda, s))$ é invariante com a transformação de similaridade V . Portanto, o melhor filtro passível de ser calculado é aquele que garante $\|H_F(\lambda, s)\|_\infty = \|T_F(\tau, s)\|_\infty$ e também $\|H_F(\lambda, s)\|_\infty < \gamma$.

6.6 Sistemas neutros

Esta seção é dedicada a discutir brevemente sobre uma segunda classe de sistemas com atraso denominados sistemas neutros, também abordados em diversos trabalhos na literatura, como por exemplo [18], [19], [22]. Estes sistemas são descritos pela seguinte representação em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) - F_1 \dot{x}(t - \tau) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + E_0 w(t) \quad (6.88a)$$

$$z(t) = C_0 x(t) + C_1 x(t - \tau) + D_0 w(t) \quad (6.88b)$$

para a qual assumimos, novamente, que as condições iniciais são nulas (isto é $x(t) = 0$, $t \in [-\tau, 0]$) e o atraso $\tau \geq 0$ é constante em relação ao tempo. É imediato constatar, a partir de (6.88), que os sistemas com retardo podem ser classificados como sistemas neutros com $F_1 = 0$, razão pela

qual decidimos utilizar nesta seção a mesma notação utilizada nas Seções 6.2 e 6.3. Adotando um procedimento similar utilizado na definição de $H(\lambda, s)$ em (6.5), associamos a (6.88) o sistema de comparação caracterizado pela função de transferência

$$\begin{aligned} H(\lambda, s) &= \left[\begin{array}{c|c} A(\lambda) & E \\ \hline C & D \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda I & 0 \\ \hline \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 & \tilde{A}_0 - \tilde{A}_1 - \lambda \Pi & \tilde{E}_0 \\ \hline C_0 + C_1 & C_0 - C_1 & D_0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6.89)$$

sendo as matrizes \tilde{A}_0 , \tilde{A}_1 e \tilde{E}_0 obtidas multiplicando-se, respectivamente, A_0 , A_1 e E_0 à esquerda por $(I + F_1)^{-1}$ e definimos a matriz $\Pi = (I + F_1)^{-1}(I - F_1)$. Denotando ainda $T(\tau, s)$ a função de transferência não racional relativa a (6.88) temos

$$T(\tau, s) = (C_0 + C_1 e^{-\tau s}) (sI - A_0 - (A_1 + F_1 s)e^{-\tau s})^{-1} E_0 + D_0 \quad (6.90)$$

e a igualdade $H(\lambda, j\omega) = F(\tau, j\omega)$ é verdadeira para as constantes $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$ satisfazendo a relação (6.4). De fato, através de algumas manipulações algébricas é possível verificar a igualdade

$$\begin{aligned} H(\lambda, s) &= C (sI - A(\lambda))^{-1} E + D \\ &= ((C_0 + C_1)\lambda + (C_0 - C_1)s) \times \\ &\quad \times ((I + F_1)s^2 - (A_0 - A_1 - \lambda(I - F_1))s - (A_0 + A_1)\lambda)^{-1} E_0 + D_0 \\ &= (C_0(\lambda + s) + C_1(\lambda - s)) ((sI - A_0)(\lambda + s) - (F_1 s + A_1)(\lambda - s))^{-1} E_0 + D_0 \\ &= \left(C_0 + C_1 \frac{\lambda - s}{\lambda + s} \right) \left(sI - A_0 - (A_1 + F_1 s) \frac{\lambda - s}{\lambda + s} \right)^{-1} E_0 + D_0 \\ &= T(\tau, s) \end{aligned} \quad (6.91)$$

quando $s = j\omega$, como conseqüência da substituição de Rekasius (6.3).

No contexto de sistemas neutros é necessário tomar cuidado com as características da matriz F_1 antes de fazermos qualquer análise. Se assumirmos que todos os autovalores da matriz F_1 encontram-se no interior do círculo unitário complexo, concluímos que a matriz $-\Pi$ é bem definida, de modo que seus autovalores estão localizados no semiplano complexo esquerdo aberto. Esta hipótese é geralmente adotada nos trabalhos da literatura (veja [19]) e com base nela podemos estabelecer uma relação sobre a estabilidade das funções de transferências $T(\tau, s)$ e $H(\lambda, s)$, nos mesmos moldes do que foi feito na Seção 6.2. Considerando inicialmente a função de trans-

ferência do sistema neutro (6.90), podemos escrever sua equação característica na forma

$$\Psi(\tau, s) = \frac{\Delta_T(\tau, s)}{\Delta_T(0, s)} \quad (6.92)$$

sendo a função $\Psi(\tau, s)$ definida por

$$\Psi(\tau, s) = \det \left(I + \left[(I - F_1) \left(sI - \Pi^{-1}(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1) \right) \right]^{-1} (A_1 + F_1 s)(1 - e^{-\tau s}) \right) \quad (6.93)$$

Portanto, a discussão realizada na Seção 6.3 a respeito do mapeamento de (6.10) também vale aqui. Ou seja, se $A_0 + A_1$ for Hurwitz as raízes de $\Delta_T(0, s) = \det((I - F_1)s - A_0 - A_1) = 0$ estão localizadas no semi-plano complexo esquerdo aberto. Dessa maneira, enquanto $\Psi(\tau, j\omega)$, com $\omega \in \mathbb{R}$, não envolver a origem do plano complexo concluímos que $\Delta_T(\tau, s) = 0$ tem raízes com parte real negativa. Então é possível determinar o limite de estabilidade de $T(\tau, s)$ mediante a aplicação do critério de Nyquist, obtendo o par (τ^*, ω^*) , que corresponde à primeira ocorrência de $\Psi(\tau^*, \omega^*) = 0$.

Se lançarmos mão da análise do sistema de comparação caracterizado por $H(\lambda, s)$, concluímos que sua equação característica pode ser escrita como a divisão de polinômios

$$\Phi(\lambda, s) = \frac{\Delta_H(\lambda, s)}{\det(sI + \lambda\Pi) \det(sI - \Pi^{-1}(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1))} \quad (6.94)$$

na qual

$$\Phi(\lambda, s) = \det \left(I + 2s \left[(I - F_1)(sI + \lambda\Pi) \left(sI - \Pi^{-1}(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1) \right) \right]^{-1} (F_1\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1) \right) \quad (6.95)$$

é tal que $\Phi(\lambda, j\omega) = \Psi(\tau, j\omega)$ sempre que os parâmetros λ , τ e ω estiverem relacionados através de (6.4). Uma análise atenta de (6.94) nos leva concluir que para $\lambda \rightarrow \infty$ os pólos de $H(\lambda, s)$ tendem para os autovalores de $-\lambda\Pi$ e também para os autovalores de $\Pi^{-1}(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1)$, permitindo-nos afirmar que se o sistema neutro (6.90) é estável para $\tau = 0$, então $H(\infty, s)$ também é estável. A consequência deste fato é a de que, também para sistemas neutros, é possível decrescer continuamente o valor de λ até determinarmos o par (λ^o, ω^o) correspondente à primeira vez em que o mapeamento $\Phi(\lambda, j\omega)$ passa pela origem. Se o valor $\lambda^o > 0$ concluímos que o par (λ^o, ω^o) representa o limite de estabilidade para $H(\lambda, s)$.

Analogamente à discussão para sistemas com retardo, se ao calcularmos λ^* tal que $\omega^*/\lambda^* = \text{tg}(\omega^*\tau^*/2)$ e $\lambda^o = \lambda^* > 0$, então a estabilidade de $T(\tau, s)$ para $\tau \in [0, \tau^*)$ implica na estabilidade de $H(\lambda, s)$ para $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$. Por sua vez, ao determinarmos τ^o de modo que $\omega^o/\lambda^o = \text{tg}(\omega^o\tau^o/2)$

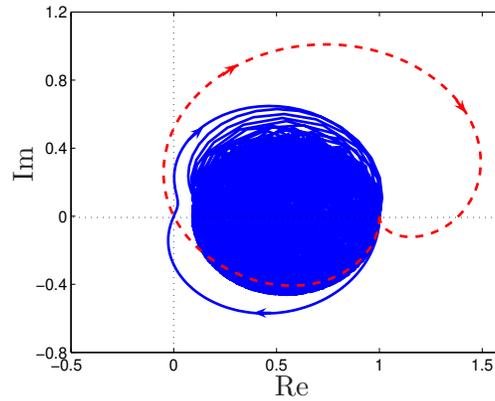


Figura 6.14: Mapeamento de $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^*, j\omega)$ para o Exemplo 6.12.

e se $\tau^o = \tau^*$, então a estabilidade de $H(\lambda, s)$ para $\lambda \in (\lambda^o, \infty)$ implica na estabilidade de $T(\tau, s)$ para $\tau \in [0, \tau^*)$. É importante reiterar que a classe de sistemas para a qual vale $\lambda^o = \lambda^*$ é difícil de ser caracterizada, fazendo com que a equivalência entre a estabilidade de $H(\lambda, s)$ e $T(\tau, s)$ não possa ser estabelecida sempre. Neste trabalho as comparações entre as margens de estabilidade é possível graças à análise dos mapeamentos $\Psi(\tau, j\omega)$ e $\Phi(\lambda, j\omega)$.

Além dos resultados sobre análise de estabilidade, os resultados para o cálculo de norma \mathcal{H}_∞ e, em particular o Algoritmo 6.1, também são aplicáveis aos sistemas neutros, considerando-se as modificações adequadas nas expressões matemáticas utilizadas.

6.6.1 Exemplos

Com a finalidade de ilustrar a análise de sistemas neutros através dos métodos deste capítulo, consideramos alguns exemplos extraídos da literatura.

Exemplo 6.12 Neste primeiro exemplo utilizamos os dados presentes em [19], com matrizes A_0 e A_1 dadas em (6.18), no Exemplo 6.3. Além disso a matriz

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0,8 & 0 \\ 0,8 & -0,1 \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

têm como autovalores $-0,1$ e $-0,8$. Verificando a estabilidade do sistema de comparação, calculamos que seu limite de estabilidade corresponde a $\lambda^o = 0,0912$, correspondente de à frequência $\omega^o = 0,4387$ [rad/s]. Por sua vez, o critério de Nyquist aplicado ao sistema neutro fornece $\omega^* = \omega^o$ e o valor de atraso máximo $\tau^* = 6,2263$ [s], que é idêntico ao valor τ^o obtido da relação (6.4) utilizando o par (λ^o, ω^o) . Verificamos que este valor é ligeiramente superior ao

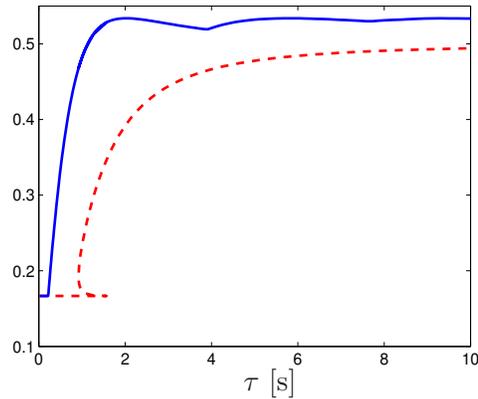


Figura 6.15: Norma \mathcal{H}_∞ versus atraso para o sistema neutro do Exemplo 6.12.

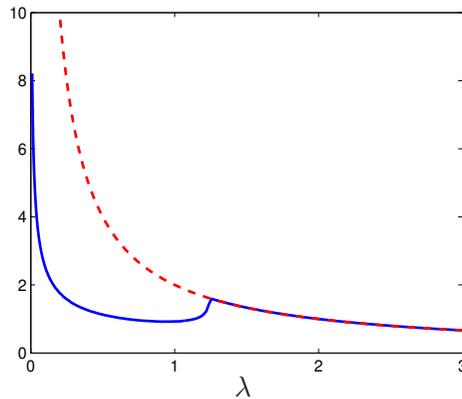


Figura 6.16: Comportamento de τ versus λ para o sistema neutro do Exemplo 6.12.

valor $\tau^* = 3,9$ [s] fornecido em [19]. Na Figura 6.14 apresentamos os mapeamentos das funções $\Psi(\tau^*, j\omega)$ e $\Phi(\lambda^*, j\omega)$ para os dados considerados, em linha contínua e em linha tracejada, respectivamente.

Com relação ao cálculo de norma \mathcal{H}_∞ para este sistema, o problema da não observabilidade do par $(A(\lambda), C)$ em (6.89) existe aqui, de modo que o cancelamento entre pólos e zeros ocorre com os pólos que contribuem para impor a margem de estabilidade para o sistema neutro e para o sistema de comparação. Dessa maneira, para os dados fornecidos em [19] devemos considerar o sistema neutro com realização reduzida $A_0 = -2$, $A_1 = -1$, $F_1 = -0,8$, $E_0 = -0,5$, $C_0 = 1$ e $C_1 = D_0 = 0$, que é estável $\tau \geq 0$ e, além disso, $\lambda^o = \lambda^* = 0$, como também foi constatado no Exemplo 6.3.

Utilizando este sistema reduzido apresentamos na Figura 6.15 o limitante inferior pra $\|T(\tau, s)\|_\infty$ em linha tracejada e seu valor verdadeiro em linha contínua, calculados mediante o resultado do Teorema 6.1. Entretanto, neste caso não inserimos a restrição $d\tau(\lambda)/d\lambda < 0$ para ava-

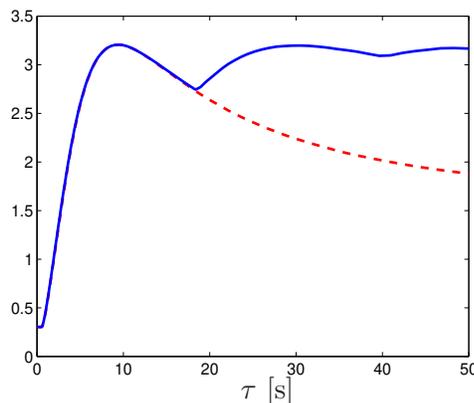


Figura 6.17: Norma \mathcal{H}_∞ versus atraso para o sistema neutro do Exemplo 6.13.

liar sua influência. Inicialmente verificamos a igualdade $\|H(\infty, s)\|_\infty = \|T(0, s)\|_\infty = 0,1667$ e também o fato que a frequência $\alpha(\lambda)$ calculada utilizando o Teorema 6.1 é contínua em todo o intervalo $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$. Entretanto, verificamos que o limitante inferior para a norma \mathcal{H}_∞ de $T(\tau(\lambda), s)$ apresenta o comportamento mostrado na Figura 6.15, mantendo-se constante para $\lambda \in (1,2458, \infty)$, correspondente a $\tau(\lambda) \in [0, 1,6054)$, mas para valores de λ fora deste intervalo há uma alteração brusca em seu comportamento, reflexo do comportamento de $\tau(\lambda)$.

Analisando, então, mais atentamente a função $\tau(\lambda)$ apresentamos na Figura 6.16 em linha tracejada a curva correspondente a $2/\lambda$ e em linha contínua a curva relativa a $\tau(\lambda)$. Observamos que vale a relação $\tau(\lambda) \leq 2/\lambda$, já discutida anteriormente, e que $\tau(\lambda)$ é contínua para todo $\lambda > 0$. Por outro lado, para $\lambda < 1,2458$ ocorre uma descontinuidade na derivada de $\tau(\lambda)$ devido a uma variação brusca também na função $\alpha(\lambda)$. Dessa maneira, devemos ter cautela ao interpretarmos os valores de limitante inferior fornecido por $\|H(\lambda, s)\|_\infty$ e mostrados na Figura 6.15. Devido ao fato de que um determinado valor de atraso τ_k pode ser gerado por λ_k s diferentes, então a esse atraso está associado mais de um valor de $\|H(\lambda_k, s)\|_\infty$. Portanto, o verdadeiro limitante inferior para $\|T(\tau_k, s)\|_\infty$ deve ser tomado como o máximo dentre os possíveis limitantes inferiores. \diamond

Exemplo 6.13 Este terceiro exemplo considera o cálculo de norma \mathcal{H}_∞ de um sistema com atraso sob a ótica do Teorema 6.1, considerando os seguintes dados extraído de [19]:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 \\ 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_0 = 0 \quad (6.98)$$

para os quais o sistema de comparação $H(\lambda, s)$ tem como limite de estabilidade $\lambda^o = 0$. Apli-

cando, por sua vez, o critério de Nyquist ao sistema neutro determinamos a margem de estabilidade $\tau^* = \infty$, em concordância com os resultados de [19], levando-nos à conclusão de que neste caso $\lambda^* = \lambda^o = 0$. Assim, na Figura 6.17 apresentamos em linha tracejada o limitante inferior para $\|T(\tau, s)\|_\infty$, fornecido pelo Teorema 6.1, e seu valor exato em linha contínua. Notamos claramente que para um atraso $0 \leq \tau \leq 20$ [s] os dois valores praticamente coincidem e verificamos também que a norma \mathcal{H}_∞ de $T(\tau, s)$ permanece sempre abaixo de 3,5. \diamond

6.7 Considerações finais

Este capítulo apresenta uma abordagem para o estudo de sistemas com atraso através da definição de um sistema LTI, chamado de *sistema de comparação*, o qual possibilita obter resultados bastante satisfatórios. A abordagem dos problemas de análise de estabilidade e de cálculo de norma \mathcal{H}_∞ utilizando tal técnica, para uma determinada classe de sistemas com atraso, permite estender os resultados para o projeto de controladores via realimentação de estado e para o projeto de filtros, em cujos contextos também obtemos resultados expressivos quanto ao critério de desempenho do sistema. A característica mais importante da utilização do sistema de comparação é a de que é possível manipular exclusivamente sistemas LTIs de ordem finita.

É aparente que a abordagem dada ao estudo de sistemas com atraso apresentada neste capítulo abre espaço para o estudo de projeto de controladores e filtros robustos, capazes de tratar do problema de atraso incerto, porém constante no tempo. Além disso é importante um análise mais aprofundada da viabilidade do emprego do sistema de comparação para se calcular um limitante superior para o desempenho \mathcal{H}_∞ do sistema com atraso sem ter que recorrer à manipulação direta de uma função não-racional.

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas

Finalizamos esta dissertação reunindo as contribuições dos capítulos apresentados até aqui e enumerando algumas linhas de pesquisa a serem trilhadas futuramente.

Inicialmente tratamos do projeto de filtros robustos em norma \mathcal{H}_2 para sistemas politópicos, para o qual desenvolvemos procedimentos a fim de avaliar o desempenho do filtro através do cálculo de limitantes inferior e superior para o quadrado da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação. Assim é possível calcular o grau de subotimalidade do filtro robusto em relação ao filtro ótimo, o qual certamente é menor que o intervalo definido pelos limitantes. Uma importante vantagem do método desenvolvido consiste no fato de que o cálculo dos referidos limitantes é realizado mediante a resolução de problemas escritos em formato LMI, dentre os quais o cálculo do limitante inferior é o que apresenta menor custo computacional.

O ponto fundamental no cálculo do limitante superior para o custo garantido \mathcal{H}_2 é o de que utilizamos a informação extraída da resolução do problema associado ao limitante inferior. Isto é, na medida que o cálculo do limitante inferior fornece um filtro correspondente a um desempenho otimista, tomamos sua matriz dinâmica e sua matriz de entrada para fixá-las como matrizes do filtro robusto. Dessa maneira, verificamos nos exemplos resolvidos o melhor desempenho do nosso método em relação aos demais trabalhos da literatura conhecidos até o momento. Em vista dos resultados numéricos obtidos devemos enfatizar ainda que, assim como alguns resultados já publicados indicam, para obtermos um menor erro de estimação parece ser inevitável lançar mão de filtros de ordem maior que a ordem do sistema considerado.

Mostramos ainda que o procedimento é aplicável ao projeto de filtros robustos para sistemas politópicos e também para sistemas LFT. No primeiro caso as matrizes da representação de estado dependem linearmente das incertezas paramétricas, enquanto que no segundo caso elas dependem de maneira não linear em relação aos parâmetros incertos do modelo. Por fim, é importante mencionar que os resultados são aplicáveis tanto a sistemas a tempo contínuo como

a sistemas a tempo discreto, bem como sua possibilidade de abordar problemas reais, como os exemplos envolvendo o motor de indução e a linha de transmissão indicam.

Com relação a perspectivas, o enfoque dado ao problema de filtragem robusta em norma \mathcal{H}_2 abre espaço para a investigação sobre possíveis características de robustez relativas ao filtro que fornece o limitante inferior, bem como à formulação de um problema análogo no contexto de norma \mathcal{H}_∞ . Entretanto, este último apresenta a grande dificuldade de que parece não existir uma classe de incertezas paramétricas para a qual seja possível calcular a solução ótima de equilíbrio do problema minimax \mathcal{H}_∞ .

Analisando agora os resultados obtidos em análise e síntese de sistemas com atraso, apresentamos neste trabalho um sistema LTI de ordem finita, cuja proposta é ser um análogo ao primeiro. Através da substituição de Rekasius é possível escrever um sistema LTI de comparação, parametrizado por um escalar real, relacionado com o valor do atraso no sistema original. Mostramos que o cálculo da margem de estabilidade do sistema com atraso pode ser feito sem maiores problemas empregando o critério de Nyquist a uma equação característica convenientemente fatorada, corroborando os resultados existentes na literatura. Entretanto, devemos ressaltar que o enfoque dado ao problema neste trabalho envolveu a representação de estado do sistema e não foi necessário calcular explicitamente a equação característica (transcendental) do sistema com atraso.

Com relação a critério de desempenho, provamos ainda que o sistema de comparação fornece um limitante inferior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema com atraso, as quais se mantiveram bastante próximas nos exemplos considerados. Este fato nos motivou, então, a abordar o projeto de controladores via realimentação de estado e projeto de filtros utilizando o sistema de comparação. Novamente, sua utilização mostrou-se muito eficiente nos problemas de síntese, de acordo com os exemplos resolvidos.

Dentre as linhas de pesquisa abertas no contexto de estudo de sistemas com atraso via funções de transferências racionais podemos citar, como primeiro objetivo, o projeto de controladores dinâmicos via realimentação de saída, nos mesmos moldes apresentados neste trabalho. Além disso parece promissora a possibilidade de síntese de filtros e controladores robustos, capazes de garantir a estabilidade e o desempenho para atrasos incertos pertencentes a um intervalo de atrasos admissíveis, mas constantes no tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Filtering*. Electrical Engineering Series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979.
- [2] K. A. Barbosa, C. E. de Souza, and A. Trofino. Robust \mathcal{H}_2 Filtering for Uncertain Linear Systems: LMI Based Methods with Parametric Lyapunov Functions. *Systems and Control Letters*, 54(3):251–262, March 2005.
- [3] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [4] S. P. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2004.
- [5] R. Brockett and C. Byrnes. Multivariable Nyquist Criteria, Root Loci, and Pole Placement. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1):271–284, February 1981.
- [6] J. Chen, G. Gu, and C. N. Nett. A New Method for Computing Delay Margins for Stability of Linear Delay Systems. *Systems & Control Letters*, 26(2):107–117, September 1995.
- [7] J. Chiasson. A Method for Computing the Interval of Delay Values for which a Differentian-Delay System is Stable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(12):1176–1178, December 1988.
- [8] P. Colareri, J. C. Geromel, and A. Locatelli. *Control Theory and Design - An RH_2 and RH_∞ Viewpoint*. Academic Press, New York, 1997.
- [9] M. C. de Oliveira. *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*. PhD thesis, FEEC/UNICAMP, Campinas, SP, Maio 1999.
- [10] M. C. de Oliveira and J. C. Geromel. Synthesis of Nonrational Controllers for Linear Delay Systems. *Automatica*, 40(2):171–188, February 2004.

-
- [11] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. LMI Characterization of Structural and Robust Stability: The Discrete-Time Case. *Linear Algebra and its Applications*, 296(1-3):27–38, July 1999.
- [12] Z. Duan, J. Zhang, C. Zhang, and E. Mosca. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Filtering for Uncertain Linear Systems. *Automatica*, 42(11):1919–1926, November 2006.
- [13] C. Duval, G. Clerc, and Y. Le Gorrec. Induction Machine Control Using Robust Eigens-structure Assignment. *Control Engineering Practice*, 14(1):29–43, January 2006.
- [14] U. Shaked E. Fridman and L. Xie. Robust H_∞ Filtering of Linear Systems With Time-Varying Delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1):159–165, January 2003.
- [15] C. Ebenbauer and F. Allgöwer. Stability Analysis for Time-Delay Systems using Rekasius’s Substitution and Sum of Squares. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5376–5381, San Diego, CA, USA, December 2006. IEEE.
- [16] E. Fridman. New Lyapunov-Krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems. *Systems & Control Letters*, 43(4):309–319, July 2001.
- [17] E. Fridman and U. Shaked. H_∞ -State-Feedback Control of Linear Systems with Small Delays. *Systems & Control Letters*, 33(3):141–150, March 1998.
- [18] E. Fridman and U. Shaked. A New H_∞ Filter Design for Linear Time Delay Systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(11):2839–2843, November 2001.
- [19] E. Fridman and U. Shaked. A Descriptor System Approach to H_∞ Control of Linear Time-Delay Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2):253–270, February 2002.
- [20] E. Fridman and U. Shaked. H_∞ -Control of Linear State-Delay Descriptor Systems: an LMI Approach. *Linear Algebra and its Applications*, 351-352:271–302, August 2002.
- [21] E. Fridman and U. Shaked. Delay-Dependent Stability and H_∞ Control: Constant and Time-Varying Delays. *International Journal of Control*, 76(1):48–60, January 2003.
- [22] E. Fridman and U. Shaked. An Improved Delay-Dependent H_∞ Filtering of Linear Neutral Systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(3):668–673, March 2004.
- [23] Z. Gao and S. X. Ding. State and Disturbance Estimator for Time-Delay Systems With Application to Fault Estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(12):5541–5551, December 2007.

-
- [24] J. C. Geromel. Optimal Linear Filtering Under Parameter Uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1):168–175, January 1999.
- [25] J. C. Geromel and M. C. de Oliveira. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Robust Filtering for Convex Bounded Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(1):100–107, January 2001.
- [26] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI Characterization of Structural and Robust Stability. *Linear Algebra and its Applications*, 285(1-3):69–80, December 1998.
- [27] J. C. Geromel and R. H. Korogui. \mathcal{H}_2 Robust Filter Design with Performance Certificate via Convex Programming. *Automatica*, 44(4):937–948, April 2008.
- [28] J. C. Geromel and R. H. Korogui. On a Rational Comparison System for Stability Analysis and \mathcal{H}_∞ Control Design of Time Delay Systems. *Submitted*, February 2009.
- [29] J. C. Geromel and R. C. D. Martins. A New Method to \mathcal{H}_2 Robust Filter Design. *Linear Algebra and its Applications*, 430(1):145–154, January 2009.
- [30] J. C. Geromel and L. A. V. Regis Filho. \mathcal{H}_2 Optimal Robust Filtering. *European Journal of Control*, 12:30–39, December 2005.
- [31] K. Gu and S.-I. Niculescu. Survey on Recent Results in th Stability and Control of Time-Delay Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control - Transactions of the ASME*, 125(2):158–165, June 2003.
- [32] N. T. Hoang, H. D. Tuan, P. Apkarian, and S. Hosoe. Robust Filtering for Discrete Nonlinear Fractional Transformation Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 51(11):587–592, November 2004.
- [33] T. Iwasaki and S. Hara. Well Posedness of Feedback Systems: Insights into Exact Robustness Analisys and Approximate Computations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5):619–630, May 1998.
- [34] B. N. Jain. Guaranteed Error Estimation in Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(2):230–232, April 1975.
- [35] M. Jun and M. G. Safonov. IQC Robustness Analysis for Time-Delay Systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11(15):1455–1468, December 2001.
- [36] R. H. Korogui. Análise de Estabilidade e Realimentação de Estado de Sistemas Dinâmicos Politépicos via Multiplicadores. Master’s thesis, FEEC/Unicamp, Campinas, SP, Abril 2006.

- [37] R. H. Korogui, A. R. Fioravanti, and J. C. Geromel. On a Rational Transfer Function Based Approach to \mathcal{H}_∞ Filtering Design for Time-Delay Linear Systems. *Submitted*, January 2009.
- [38] R. H. Korogui and J. C. Geromel. Análise de Estabilidade e Realimentação de Estado de Sistemas Politópicos utilizando Multiplicadores e Funções de Lyapunov Dependentes de Parâmetros. In *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática*, pages 37–42, Salvador, BA, Outubro 2006. SBA.
- [39] R. H. Korogui and J. C. Geromel. Robust \mathcal{H}_2 Filtering for Continuous Time Systems with Linear Fractional Representation. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, pages 2675–2680, Seoul, South Korea, July 2008. IFAC.
- [40] R. H. Korogui and J. C. Geromel. Robust \mathcal{H}_2 Filtering for Discrete LTI Systems with Linear Fractional Representation. In *Proceedings of the 47th IEEE CDC*, pages 1902–1907, Cancun, Mexico, December 2008. IEEE.
- [41] R. H. Korogui and J. C. Geromel. Robust \mathcal{H}_2 Filtering for LTI Systems with Linear Fractional Representation. *International Journal of Control*, To appear, 2009.
- [42] R. Krishnan. *Electric Motor Devices : Modelling, Analysis and Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [43] W. Leonhard. *Control of Electrical Drives*. Electric Energy Systems and Engineering Series. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1985.
- [44] H. Li and M. Fu. A Linear Matrix Inequality Approach to Robust \mathcal{H}_∞ Filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(9):2338–2350, September 1997.
- [45] L. Li, Z. Q. Luo, T. N. Davidson, K. M. Wong, and E. Bossé. Robust Filtering via Semidefinite Programming with Applications to Target Tracking. *SIAM Journal on Optimization*, 12(3):740–755, 2002.
- [46] J. R. Martinez. Transfer Functions of Generalized Bessel Polynomials. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 24(6):325–328, June 1977.
- [47] R. E. Matick. *Transmission Lines for Digital and Communication Networks*. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [48] A. Megretski and A. Rantzer. System Analysis via Integral Quadratic Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6):819–830, June 1997.

-
- [49] S. I. Niculescu. \mathcal{H}_∞ Memoryless Control with an α -Stability Constraint for Time-Delay Systems: An LMI Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5):739–743, May 1998.
- [50] N. Olgac and R. Sipahi. An Exact Method for the Stability Analysis of Time-Delayed Linear Time-Invariant (LTI) Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):793–797, May 2002.
- [51] N. Olgac and R. Sipahi. An Improved Procedure in Detecting the Stability Robustness of Systems With Uncertain Delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(7):1164–1165, July 2006.
- [52] D. Peaucelle and D. Arzelier. Robust Performance Analysis with LMI-Based Methods for Real Parametric Uncertainty via Parameter-Dependent Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4):624–630, April 2001.
- [53] A. W. Pila, U. Shaked, and C. E. de Souza. \mathcal{H}_∞ Filtering for Continuous-Time Linear Systems with Delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(7):1412–1417, July 1999.
- [54] H. V. Poor. On Robust Wiener Filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):531–536, March 1980.
- [55] A. Rantzer. On the Kalman-Yakubovich-Popov Lemma. *Systems and Control Letters*, 28(1):7–10, June 1996.
- [56] Z. V. Rekasius. A Stability Test for Systems with Delays. In *Proceedings of Joint Automatic Control Conference*, 1980.
- [57] J.-P. Richard. Time Delay Systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, October 2003.
- [58] R. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Press, 1970.
- [59] C. W. Scherer. Relaxations for Robust Linear Matrix Inequality Problems with Verifications for Exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(2):365–395, 2005.
- [60] C. W. Scherer and I. E. Köse. Robustness with Dynamic IQCs: An exact State-Space Characterization of Nominal Stability with Applications to Robust Estimation. *Automatica*, 44(7):1666–1675, July 2008.

- [61] U. Shaked and C. E. de Souza. Robust Minimum Variance Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(11):2474–2483, November 1995.
- [62] U. Shaked and Y. Theodor. \mathcal{H}_∞ -Optimal Estimation: A Tutorial. In *Proceedings of the 31st IEEE CDC*, volume 2, pages 2278–2286, Tucson, Arizona, December 1992. IEEE.
- [63] U. Shaked, L. Xie, and Y. C. Soh. New Approachs to Robust Minimum Variance Filter Design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(11):2620–2629, November 2001.
- [64] K. Sun and A. Packard. Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Filters for Uncertain LFT Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5):715–720, May 2005.
- [65] YA. Z. Tsyppkin and M. Fu. Robust Stability of Time-Delay Systems with an Uncertain Time-Delay Constant. *International Journal of Control*, 57(4):865–879, April 1993.
- [66] H. D. Tuan, P. Apkarian, and T. Q. Nguyen. Robust and Reduced-Order Filtering: New LMI-Based Characterizations and Methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(12):2975–2984, December 2001.
- [67] H. D. Tuan, P. Apkarian, and T. Q. Nguyen. Robust Filtering for Uncertain Nonlinearly Parametrized Plants. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(7):1806–1815, July 2003.
- [68] K. Walton and J. E. Marshall. Direct Method for TDS Stability Analysis. *IEE Proceedings, Part D*, 134(2):101–107, March 1987.
- [69] L. Xie and Y. C. Soh. Robust Kalman Filtering for Uncertain Systems. *System and Control Letters*, 22(2):123–129, February 1994.
- [70] L. Xie, Y. C. Soh, and C. R. de Souza. Robust Kalman Filtering for Uncertain Discrete-Time Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1310–1314, June 1994.
- [71] K. Youcef-Toumi and J. Bobbett. Stability of Uncertain Linear Systems with Time Delay. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control - Transactions of the ASME*, 113(4):558–567, December 1991.
- [72] J. Zhang, C. R. Knospe, and P. Tsiotras. New Results for the Analysis of Linear Systems with Time-Invariant Delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(12):1149–1175, October 2003.
- [73] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.

Apêndice A

Resultados auxiliares

Apresentamos neste apêndice alguns resultados auxiliares utilizados nas deduções de expressões apresentadas ao longo deste trabalho. Inicialmente apresentamos como obter a inversa de um matriz descrita por blocos matriciais, utilizada para obtermos as relações (6.6) e (6.91).

Lema A.1 *Considere as matrizes $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ não singular e $Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $Z \in \mathbb{C}^{r \times m}$ e $W \in \mathbb{C}^{r \times m}$. Então*

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & (W - ZX^{-1}Y)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -ZX^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Prova: A prova deste lema é decorrência da validade da seguinte fatoração

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ ZX^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & W - ZX^{-1}Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X^{-1}Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

desde que exista X^{-1} . □

Uma consequência imediata da relação (A.2) e necessária para a dedução de (6.12) e (6.94) é a de que

$$\det \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \det X \det (W - ZX^{-1}Y) \quad (\text{A.3})$$

Outra importante ferramenta na manipulação de inversas de matrizes é o lema apresentado a seguir:

Lema A.2 *Dadas as matrizes $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ não singular, $Y \in \mathbb{C}^{n \times r}$ e $Z \in \mathbb{C}^{r \times n}$ de tal forma que*

as inversas indicadas a seguir existam, então verificamos que

$$(X + YZ)^{-1} = X^{-1} \left(X - Y (I + ZX^{-1}Y)^{-1} Z \right) X^{-1} \quad (\text{A.4})$$

Prova: Uma dentre as possíveis provas deste lema remete ao cálculo da solução do sistema [4]

$$(X + YZ)u = b \quad (\text{A.5})$$

que pode ser feita definindo-se a variável auxiliar $v = Zu$, de modo que podemos reescrever (A.5) na forma

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

do qual extraímos $u = X^{-1}(b - Yv)$ e por conseqüência

$$v = ZX^{-1}(b - Yv) = (I + ZX^{-1}Y)^{-1} ZX^{-1}b \quad (\text{A.7})$$

dessa maneira, concluímos que a solução de (A.5) é dada por

$$u = X^{-1}(I - Y(I + ZX^{-1}Y)ZX^{-1})b \quad (\text{A.8})$$

o que conclui a prova do lema enunciado. \square

Como conseqüência direta do lema de inversão de matrizes podemos enunciar o resultado a seguir.

Lema A.3 Dadas as matrizes $Y \in \mathbb{C}^{n \times r}$ e $Z \in \mathbb{C}^{r \times n}$ e um parâmetro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de tal forma que as inversas indicadas a seguir existam, então podemos afirmar que

$$(\alpha I + YZ)^{-1} Y = Y (\alpha I + ZY)^{-1} \quad (\text{A.9})$$

Prova: A prova deste lema consiste em aplicarmos o Lema A.2, por exemplo, no lado esquerdo de (A.9) e subtrairmos do resultado a expressão do seu lado direito. Dessa maneira temos:

$$\begin{aligned} (\alpha I + YZ)^{-1} Y - Y (\alpha I + ZY)^{-1} &= \alpha^{-1} Y - \alpha^{-1} Y (\alpha I + ZY)^{-1} ZY - Y (\alpha I + ZY)^{-1} \\ &= \alpha^{-1} Y - \alpha^{-1} Y (\alpha I + ZY)^{-1} (ZY + \alpha I) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

provando o lema proposto. \square

Com este resultado em mãos, concluímos que a relação (6.83) é conseqüência da aplicação direta do Lema A.3 à expressão do lado direito na primeira igualdade, considerando $Y = \tilde{R}\tilde{V}$ e $Z = (A_H + \lambda I) \tilde{V}^{-1} \tilde{\Theta}(s)$.

Outro resultado importante para este trabalho é o complemento de Schur, que nos permite transformar uma desigualdade matricial não linear em uma LMI.

Lema A.4 *Considerando as matrizes $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z = Z' \in \mathbb{R}^{m \times m}$, então cada um dos conjuntos*

$$a) \{X > 0, Z - YX^{-1}Y' > 0\}$$

$$b) \{Z > 0, X - Y'Z^{-1}Y > 0\}$$

é equivalente à LMI

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.11})$$

Prova: A equivalência entre o ítem a) e (A.11) vem do fato de que podemos escrever a matriz em (A.11) de acordo com (A.2)

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Z - YX^{-1}Y' \end{bmatrix} T' > 0 \quad (\text{A.12})$$

pois X^{-1} existe e ainda a matriz

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ YX^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

é invertível, pois tem todos os autovalores iguais a 1. Dessa forma concluímos a prova da primeira parte do lema. A prova da equivalência entre o ítem b) e (A.11) é feita de maneira análoga, fatorando-se convenientemente (A.11) considerando que Z^{-1} existe. \square