

Contribuições à Análise de Estabilidade Robusta de Polinômios

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

Paulo James de Oliveira
Graduado em Física - IF/UFBA
Mestre em Engenharia Elétrica - DEE/UFES

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres** — FEEC/UNICAMP

em 28 de março de 2003 perante a Banca Examinadora

Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres	FEEC/UNICAMP (Orientador)
Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara	DEE/EESC/USP
Prof. Dr. Nir Cohen	DMA/IMECC/UNICAMP
Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val	FEEC/UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

OL4c

de Oliveira, Paulo James

**Contribuições à Análise
de Estabilidade Robusta de Polinômios**

Paulo James de Oliveira.–Campinas,SP:[s.n.], 2003.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação

1. Teoria do controle. 2. Liapunov, funções de.
3. Sistemas lineares invariantes no tempo.

I. Peres, Pedro Luis Dias.

II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

*Um caminho termina e outro começa,
uma porta se fecha, outra se abre.
Você atinge o cume, sempre existirá
um mais elevado.*

Autor desconhecido

Agradecimentos

“Tudo em nossas vidas, todas as coisas que gastam tanto de nosso tempo e de nossa energia para serem construídas, tudo é passageiro, tudo é feito de areia, o que permanece é só o relacionamento com as pessoas”

Autor desconhecido

Ao longo desta jornada pude desfrutar da colaboração de um número considerável de velhos e novos amigos e também da ajuda de tantos outros incógnitos. Todas essas pessoas, direta ou indiretamente, tiveram participação neste trabalho. Seria descortesia de minha parte deixar de mencioná-las neste momento em que meu objetivo é alcançado e que, espero, apresenta-se coroado de pleno êxito. Tentarei pois citá-las em maior número possível, pedindo perdão àqueles que, por eventuais esquecimentos, aqui não estejam relacionados. Primeiramente gostaria de agradecer à galera do Baba do Mata Fome, ao pessoal do Fala Sério Futebol Clube, time do qual tive a honra de ser sócio fundador, e aos forrozeiros da Cooperativa Brasil, essa turma foi responsável pela diminuição acentuada no ritmo de queda e embranquecimento de meus cabelos; ao companheiro dos cafés da tarde, meu amigo, Hadi Khalifa; aos colegas de república, Erinaldo, Sérgio Barros, Eurípedes, Marcelo, Bottoli e Ginalber que, pelo convívio fraternal, foram como minha segunda família em Campinas; aos colegas dos laboratórios do DMCSI, João Viana, Anabel, Maurício Bordon, Fernando Torrico, Gilmar Barreto e do DT, Rúbia, Tatiane, Edvaldo, Luis, Cristiane, Simone, Márcia e Edmilson pelo companheirismo e disponibilidade para ajudar a qualquer tempo; às amigas Luciana Martinez, Patrícia Amâncio e minha doce Alessandra Ambrósio (in memoriam) meu carinho sempre; à família Kacenenbogen Guimarães que me acolheu como um filho; aos colegas do DCET/UNEB, em especial, Maria Pimenta, Evangivaldo e Tânia Regina pelas inúmeras vezes em que foram solicitados e que prontamente me atenderam, igualmente aos colegas da PPG/UNEB, muito carinhosamente, Ângela Python

e Nélia Salles; aos colegas de equipe Ricardo Oliveira, Vinícius Montagner e Valter Leite; esses, por estarem muito próximos, não tiveram escolha, a vocês obrigado pela paciência. Um agradecimento especial aos mestres, Celso Munaro, Nir Cohen, Celso Bottura e Pedro Peres.

Tenho para com vocês uma dívida de gratidão imensa e meu coração pequeno reserva a todos um espaço do tamanho da Bahia.

— Muito obrigado!

Por fim nunca poderia ser esquecido o prestimoso apoio financeiro, meus agradecimentos à CAPES que ajudou a tornar materialmente possível a realização deste trabalho.

Resumo e Abstract

Resumo

Em linhas gerais, o principal aspecto considerado nesta tese é a localização de zeros de polinômios com coeficientes definidos por incertezas paramétricas reais estruturadas. Três conjuntos particulares são discutidos: um politopo de intervalos reais, um elipsóide e um politopo de matrizes polinomiais. Os resultados são obtidos, basicamente, a partir das propriedades geométricas dos conjuntos envolvidos (incertezas intervalares e elipsoidais) e por desigualdades matriciais lineares (incertezas politópicas matriciais).

Abstract

In general lines, the main aspect considered in this thesis is the location of zeros of polynomials with coefficients defined by structured real parametric uncertainties. Three particular sets are analyzed: a real interval polytope, an ellipsoid and a polytope of matrix polynomials. The results are obtained, basically, from the geometric properties of the involved sets (interval and ellipsoidal uncertainties) and by linear matrix inequalities (matrix polytopic uncertainties).

Prefácio

O presente texto constitui minha tese de doutorado em Teoria de Sistemas de Controle. O passo inicial foi a dissertação de mestrado [13], sobre a estabilidade robusta de sistemas a tempo contínuo com incertezas definidas por intervalos, defendida em novembro de 1997, no Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Espírito Santo, sob a orientação do Professor Celso José Munaro. Durante o processo de finalização desse trabalho havia a possibilidade concreta de realizar o doutoramento na Espanha, em outra área da Engenharia de Controle; contudo, a aceitação de um artigo contendo uma síntese dos resultados obtidos durante o mestrado, no “The 39th Midwest Symposium on Circuits and Systems” [42] e a proposta do Professor Celso de continuidade do trabalho em um nível mais aprofundado foram fatores determinantes para que eu decidisse manter meu interesse em questões relacionadas à robustez de polinômios.

Munaro apresentou-me ao Professor Bottura do Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes, da Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação da UNICAMP, que me aceitou como aluno e por intermédio do qual iniciei o doutoramento.

Durante o primeiro semestre de 1998 conheci Nir Cohen, professor do Instituto de Matemática da UNICAMP que, juntamente com seus colegas Avraham Levkovich e Ezra Zaheb, estava trabalhando em um artigo sobre resposta em frequência de sistemas incertos a tempo discreto definidos por polinômios intervalares. Em virtude do interesse que apresentava sobre o tema, que inclusive fora colocado como uma possibilidade de pesquisa futura em minha dissertação de mestrado, o Professor Cohen convidou-me para participar do trabalho. O artigo, intitulado “Frequency Response Envelopes of a Family of Uncertain Discrete-Time Systems” [10] foi aceito para publicação na revista “Circuits, Systems and Signal Processing” e seu conteúdo constitui o capítulo 1 desta tese. O capítulo 2 aborda o problema da estabilidade de família

de polinômios esféricos e foi resultado de um estudo especial, realizado no primeiro semestre de 2000, na Universidade Federal do Espírito Santo, sob orientação conjunta dos professores Munaro e Bottura, este estudo especial culminou com a elaboração do artigo “A design contribution to \mathcal{H}_∞ – robust controllers for spherical plant family” [21] aceito para publicação no “43rd Midwest symposium on Circuits and Systems”. Em agosto de 2001, agora sob orientação do Professor Pedro Peres, iniciei a pesquisa sobre estabilidade robusta de polinômios e desigualdades matriciais lineares; novamente a conclusão desses estudos foi organizada na forma de um artigo intitulado “A New LMI Condition for Robust Stability of Polynomial Matrix Polytopes” [18] que foi submetido para a revista “IEEE Transactions on Automatic Control”, tendo sido aceito e publicado em outubro de 2002; o material desse artigo constitui o capítulo 3 desta monografia.

Por fim, o título da tese reflete bem a motivação e o processo de construção deste trabalho. O uso da expressão “estabilidade robusta” remete ao ponto de vista da Engenharia de Controle; entretanto, numa visão meramente matemática, pode-se dizer que o tema é sobre a localização de zeros em regiões específicas do plano complexo para algumas geometrias especiais de conjuntos de polinômios.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo e Abstract	v
Prefácio	vi
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
Introdução Geral	1
1 Envelopes de Resposta em Frequência	5
1.1 Introdução	6
1.2 Preliminares: O Conjunto de Valores	9
1.3 A Divisão Primária	10
1.4 O Algoritmo Primário	13
1.5 Construção do Algoritmo Secundário	14
1.5.1 Identificando Módulo Mínimo Zero	15
1.5.2 Computando os Envelopes de Fase	17
1.5.3 Computando os Envelopes de Módulo Mínimo	18
1.5.4 Computando os Envelopes de Módulo Máximo	21
1.5.5 O Algoritmo Secundário	22
1.5.6 Um exemplo numérico	24
1.6 Conclusão	26

2	Plantas Elipsoidais e Controle \mathcal{H}_∞	33
2.1	Introdução	33
2.2	Problema e Principal Resultado	34
2.3	Um exemplo numérico	39
2.4	Conclusão	41
3	Uma Nova Condição LMI	42
3.1	Introdução	42
3.2	Preliminares	44
3.3	Condições para a Estabilidade do Politopo \mathfrak{P}	46
3.4	Exemplos	52
3.5	Conclusão	57
	Conclusão	61
	Bibliografia	64

Lista de Figuras

1.1	O conjunto de valores e suas margens de fase e amplitude.	7
1.2	A origem dentro do conjunto de valores.	15
1.3	Pontos de mudança de fase.	18
1.4	Ponto de mudança de módulo mínimo	19
1.5	Pontos de mudança de módulo máximo.	21
1.6	Envelope de módulo versus frequência. Os pontos de mudança aparecem sobre o eixo de frequências.	27
1.7	Envelope de fase versus frequência. Os pontos de mudança aparecem sobre o eixo de frequências. Nada é indicado entre os dois pontos de mudança de módulo zero.	28
2.1	Problema de sensibilidade mista SISO.	35
2.2	O conjunto de valores de $A(j\omega, Q)$	36
2.3	Conjunto espectral do numerador e do denominador de $P(s, \hat{q})$	41
3.1	Lugar das raízes para politopo do exemplo contínuo.	55
3.2	Lugar das raízes para politopo do exemplo discreto.	56

Lista de Tabelas

1.1	Pontos de mudança primária. As frequências 0 , $\pi/3$ e $2\pi/3$ são pontos de mudança redundantes, nas quais os polinômios exteriores permanecem os mesmos mas revertem seu ordenamento.	27
1.2	Pontos de mudança de módulo mínimo. Um intervalo $[p_i, p_j]$ indica que o módulo mínimo é obtido sobre uma borda entre p_i e p_j . Estes pontos são indicados por “o” sobre o eixo ω na figura 1.6.	29
1.3	Pontos de mudança de módulo máximo. Estes pontos são indicados por “★” sobre o eixo ω na figura 1.6.	30
1.4	Pontos de mudança de fase mínima. Estes pontos são indicados por “o” sobre o eixo ω na figura 1.7. Os números em negrito indicam pontos de mudança de módulo zero.	31
1.5	Pontos de mudança de fase máxima. Estes pontos são indicados por “★” sobre o eixo ω na figura 1.7. Os números em negrito indicam pontos de mudança de módulo zero.	32
3.1	Politopos estáveis identificados para $n = 1$ (caso contínuo).	58
3.2	Politopos estáveis identificados para $n = 1$ (caso discreto).	58
3.3	Politopos estáveis identificados para $n = [2, 4]$ e $d = [2, 4]$ casos contínuo e discreto.	59
3.4	Tempo médio (segundos) para avaliação de um politopo estável para $n = [1, 4]$, $d = \{[5, 7], [2, 4]\}$ e $N = \{[5, 7], [2, 5]\}$ com L3, L2, T1 e T2.	60

Introdução Geral

Modelos matemáticos de sistemas físicos traduzem apenas parte da realidade que se deseja representar. As diferenças entre o modelo e o sistema representado dependem das suposições feitas e podem ser tratadas como incertezas associadas à estrutura proposta. Como os sistemas lineares e invariantes no tempo constituem a única classe de sistemas para a qual existe alguma teoria geral, razoável e amplamente difundida, é freqüente, entre engenheiros de controle e projetistas trabalhar com um modelo matemático nominal que atenda a essas características. Entretanto, se for desejável uma representação que englobe todas as particularidades do sistema, envolvendo aspectos tais como não linearidades, variação temporal e incertezas paramétricas, a utilização de um modelo nominal representa, geralmente, uma simplificação grosseira.

A despeito dessas considerações, ao se projetar um controlador, espera-se que o mesmo garanta um funcionamento confiável do sistema, independentemente da presença de incertezas tanto em relação ao modelo matemático quanto aos distúrbios externos a serem rejeitados ou minimizados. Quando esse comportamento é obtido diz-se que o controlador atende “robustamente” os requisitos de desempenho ou estabilidade exigidos. Em particular, o comportamento de qualquer controlador sob incertezas é um aspecto vital em muitos sistemas de controle, sendo, na maioria das vezes admitido como hipótese crítica, que o controlador projetado não permita variação nos próprios parâmetros [32].

O tema “robustez” somente começou a receber uma atenção mais ampla, na teoria de controle, a partir dos anos 70, quando se constatou que os métodos correntes de síntese de sistemas de controle careciam de garantias de estabilidade e desempenho robustos sob as mais diversas formas de incertezas [5]. Obviamente, uma estrutura de abordagem para a análise e síntese de sistemas de controle que envolva a possibilidade de variações contínuas e aleatórias das grandezas físicas (ou parâmetros) manipuladas em um determinado processo requer um tratamento bastante complexo, e isto signi-

fica, na maioria das vezes, uma dificuldade concreta que inviabiliza a implementação prática. Como exemplo, o problema de estabilidade e/ou desempenho sob incertezas reais paramétricas ficou, por um longo período, completamente ignorado pelos teóricos de controle, graças à percepção de que o tratamento de incertezas paramétricas seria um difícil obstáculo a impedir a obtenção de resultados elegantes e de técnicas computacionais efetivas. Uma mudança significativa desse quadro ocorreu no início dos anos 80 quando os pesquisadores ocidentais tomaram conhecimento da publicação do “Teorema de Kharitonov”. Kharitonov mostrou que a estabilidade “Hurwitz” de uma família de polinômios de grau invariante, porém arbitrário, correspondendo a um hipercubo no espaço dos coeficientes, podia ser verificada analisando-se apenas a estabilidade de quatro polinômios pré definidos. Esse resultado é extremamente atraente pois a tarefa aparentemente impossível de verificar a estabilidade de um conjunto infinito de polinômios pode agora ser realizada de modo simples, por exemplo usando as condições de “Routh-Hurwitz”, sobre apenas quatro polinômios fixados, independentemente do grau ou da dimensão do conjunto de parâmetros incertos envolvidos.

É a partir deste momento que ocorre o ressurgimento do interesse no estudo da estabilidade robusta sob incertezas paramétricas, propiciando o desenvolvimento de um número razoável de trabalhos impulsionados pela crença de que tal problema poderia ser abordado sem conservadorismos ou sobrelimitações e com eficiência computacional construída diretamente da teoria e, também, pela eficácia e transparência dos métodos que exploram as propriedades algébricas e geométricas da região de estabilidade no espaço dos parâmetros; a esse respeito ver [2], [5] e as referências neles citadas.

Neste ponto torna-se necessário enfatizar que o foco principal deste trabalho é analisar problemas de robustez envolvendo incertezas paramétricas reais estruturadas para as quais resultados tipo “Kharitonov” não podem ser aplicados, num contexto de análise e, muito menos, de síntese. A grosso modo, esse trabalho é aplicado mais diretamente à análise da localização de raízes de polinômios cujos coeficientes dependem dos parâmetros incertos. Do ponto de vista da teoria de controle, a motivação para estudar essas novas ferramentas é o fato de que muitos problemas de desempenho robusto de sistemas realimentados podem ser reduzidos a problemas equivalentes envolvendo raízes de polinômios.

Resultados derivados do “Teorema de Kharitonov” são amplamente empregados em procedimentos de análise e de síntese de controladores robustos para sistemas a tempo contínuo, quer através da generalização de ferramentas clássicas (diagramas de

Nyquist, Bode e Nichols) quer no desenvolvimento de novos procedimentos de síntese $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$. Entretanto, todos estes resultados não se aplicam a sistemas a tempo discreto. Isto porque a determinação do comportamento de uma família de polinômios com incertezas reais definidas em intervalos a partir de um número finito de seus elementos somente é possível para uma região de interesse que é convexa e cuja recíproca é também convexa, o que não é o caso do disco unitário [47]. Para uma região Ω , sua recíproca Ω^{-1} é dada por: $\Omega^{-1} = \{z; zy = 1 \text{ para algum } y \in \Omega\}$. Outro ponto a ser observado é que mesmo para estruturas incertas independentes, se existir uma relação de vínculo entre os coeficientes, por exemplo, se o conjunto de parâmetros for um hiperelipsoide e não mais um hipercubo, não faz mais sentido referir-se a polinômios de Kharitonov, pois neste caso o conjunto de valores em questão não possui vértices. Outro tópico interessante é que, mesmo para polinômios com estruturas incertas independentes e parâmetros definidos em intervalos, domínio em que valem os resultados tipo Kharitonov, inexistem uma extensão correspondente aplicável à análise da alocação de zeros de politopo de matrizes polinomiais. Resultados para sistemas multivariáveis usando esta abordagem são objetos de pesquisas recentes. Alguns artigos têm sido dedicados a essa questão, por exemplo, [49] e [50], mas não têm recebido a devida divulgação.

Neste trabalho serão abordados os problemas de alocação robusta, no círculo unitário, de famílias de polinômios cujos coeficientes pertencem a intervalos, aqui denominadas de famílias de polinômios intervalares. Mais especificamente, é desenvolvida uma estratégia para a construção de envelopes de resposta em frequência para um sistema a tempo discreto, definido por uma planta intervalar, isto é, por uma função de transferência cujos numerador e denominador são polinômios intervalares. Note que se o interesse é restrito somente à verificação da estabilidade robusta do polinômio intervalar, uma vez construído seu conjunto de valores, o trabalho se resume à aplicação do teorema da exclusão do zero [2]. Outro tópico abordado é o procedimento de síntese \mathcal{H}_∞ para sistemas cujos parâmetros incertos possuem uma relação de vínculo que, no caso particular, constitui um hiperelipsoide no espaço dos parâmetros. Os conjuntos de funções com tais características são denominados famílias de plantas elipsoidais. Os resultados desenvolvidos permitem que estratégias conhecidas de compensação em frequências – diagramas de Bode, moldagem de malha, etc, sejam empregadas de forma a ampliar a aplicação de procedimentos conhecidos de projetos de controladores. Também será considerado o problema da localização robusta de

zeros de politopos de matrizes polinomiais utilizando-se como instrumento de análise um conjunto de desigualdades matriciais lineares obtidas nos vértices do politopo, cuja viabilidade representa uma condição suficiente para atestar a inserção de todos os zeros em determinadas regiões de interesse, em particular, o semi-plano esquerdo do plano complexo e o círculo unitário.

Com o intuito de cumprir estes objetivos, esta tese está dividida em três capítulos da seguinte forma: o capítulo 1 é dedicado ao desenvolvimento de um conjunto de funções destinadas à construir o envelope de frequências de uma família de intervalo plantas para o caso discreto; no capítulo 2 é apresentada uma contribuição a um procedimento de síntese \mathcal{H}_∞ para o caso de incertezas elipsoidais e, no capítulo 3, é apresentada uma nova condição em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMI – Linear Matrix Inequalities) para a estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais.

Capítulo 1

Envelopes de Resposta em Frequência de uma Família de Sistemas Incertos a Tempo Discreto

Neste capítulo, é apresentado um algoritmo eficiente para a construção exata do envelope de Bode (ganho e fase) de um filtro de ordem n (uma função racional biprópria ou estritamente própria cujo denominador tem grau n) com incertezas intervalares nos coeficientes. Em um primeiro momento, a estrutura do conjunto de valores é usada para reduzir a ordem da complexidade de 2^n para n^2 . Em seguida, o problema é reduzido basicamente à determinação de um número relativamente pequeno de raízes de certos polinômios.

Embora não seja discutido aqui, o algoritmo aplica-se facilmente a filtros com coeficientes complexos sob incertezas intervalares; o problema torna-se trivial no caso de coeficientes complexos com incertezas na forma de disco, fornecendo limites analíticos práticos, porém conservadores, para o envelope de Bode. O leitor interessado pode consultar [10] para maiores detalhes.

1.1 Introdução

Num contexto de análise, o teorema das bordas [3] constitui-se em ferramenta bastante eficiente para testar a estabilidade robusta de uma família de polinômios cujos coeficientes são funções afins dos parâmetros incertos tanto para sistemas a tempo contínuo quanto a tempo discreto. Contudo, a dependência do número de bordas expostas com a dimensão do espaço de incertezas ($n2^{(n-1)}$), conduz à necessidade de testar uma quantidade proibitiva delas quando os polinômios envolverem um grande número de coeficientes incertos. Para sistemas a tempo contínuo, a aplicação de resultados derivados do teorema de Kharitonov, como o teorema das trinta e duas bordas, que simplifica bastante a utilização das bordas do conjunto de valores de uma família de intervalos de polinômios na análise de estabilidade e desempenho robustos; e o teorema das 16 plantas, que facilita ainda mais a solução destes problemas, são amplamente empregados. Ocorre porém que, conforme [47], resultados tipo Kharitonov, isto é, que um conjunto finito de elementos seja necessário e suficiente para descrever o comportamento de toda a família de polinômios, não se aplicam a domínios de estabilidade convexos cujas recíprocas não sejam também convexas. Esta é exatamente a situação aqui discutida: análise de um intervalo de plantas cujo domínio de estabilidade é o disco unitário. A família em questão pode ser descrita como

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_\ell z^\ell} \quad (1.1)$$

sendo que os coeficientes a_i ($i = 0, \dots, m$) e b_j ($j = 0, \dots, \ell$) pertencem a intervalos reais prescritos

$$\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \quad i = 0, \dots, m \quad \underline{b}_j \leq b_j \leq \bar{b}_j, \quad j = 0, \dots, \ell \quad (1.2)$$

Mais precisamente, o problema a ser tratado é a determinação dos limites de fase e ganho para o diagrama de Bode com a_i e b_i variando nos seus respectivos intervalos. Para cada $z = e^{j\omega}$ fixado, esses limites são definidos por

$$\bar{M} = \max |H(z)| \quad \underline{M} = \min |H(z)| \quad \bar{\phi} = \max \arg H(z) \quad \underline{\phi} = \min \arg H(z)$$

como ilustrado na figura 1.1. Quando z percorre o círculo unitário, os extremos em módulo e fase descrevem os envelopes de incertezas para o diagrama de Bode conforme detalhado nas figuras 1.6 e 1.7. Em cada z os extremos dos polinômios do numerador

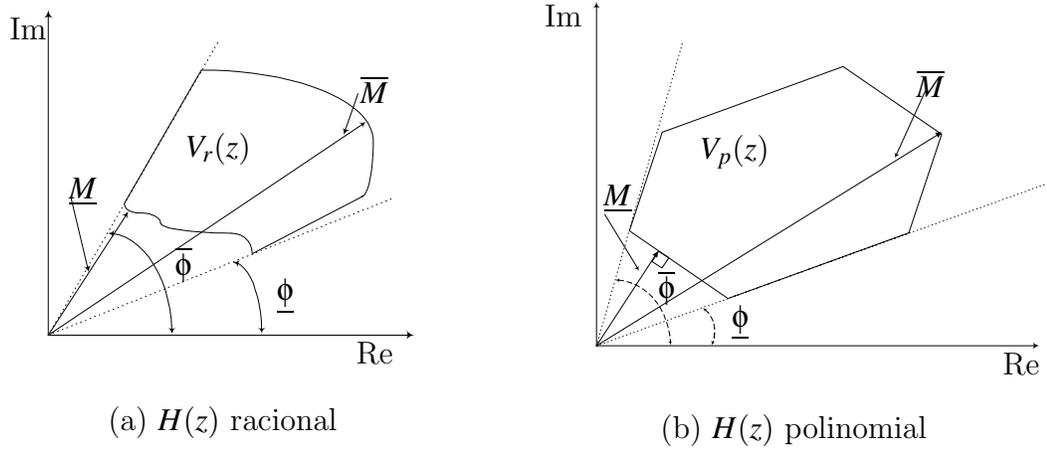


Figura 1.1: O conjunto de valores e suas margens de fase e amplitude.

e do denominador de $H(z)$ determinam de modo único os extremos de $H(z)$. Mais precisamente, tem-se que

$$\overline{M}_H = \frac{\overline{M}_N}{\underline{M}_D}, \quad \underline{M}_H = \frac{\underline{M}_N}{\overline{M}_D}, \quad \overline{\phi}_H = \overline{\phi}_N - \underline{\phi}_D, \quad \underline{\phi}_H = \underline{\phi}_N - \overline{\phi}_D$$

sendo que os subscritos H , N e D referem-se à função de transferência racional, ao numerador e ao denominador, respectivamente, em (1.1). Deste modo, embora algum cuidado deva ser tomado devido à natureza cíclica da função de fase, é suficiente investigar os polinômios $N(z)$ e $D(z)$ ao invés da função racional $H(z)$. Esta redução implica considerável simplificação geométrica nos cálculos dos envelopes de Bode. Portanto, a análise será restrita a um intervalo de família de polinômios \mathcal{P} dado por:

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n \quad \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \overline{\alpha}_i \quad i = 0, \dots, n \quad (1.3)$$

Uma abordagem numérica simples para calcular o envelope de Bode para (1.3), usando métodos gráficos, poderia ser empregada para desenhar os valores complexos de $P_i(e^{j\omega_k})$ para um conjunto finito de elementos P_i tomados na fronteira de \mathcal{P} , isto é: $P_i \in \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ em uma grade bastante densa de frequências $\omega_k \in \Omega \subset [0, 2\pi)$. Contudo, como o tamanho do conjunto de elementos na fronteira de \mathcal{P} , no pior caso, é proporcional a 2^n , a complexidade cresce exponencialmente com o grau n e, portanto, esta abordagem pode não ser viável para polinômios de grau elevado. Neste sentido um exame detalhado da geometria do conjunto de valores de $H(z)$ conduz a um algoritmo mais eficiente que pode reduzir a complexidade total à ordem de n^2 , e fornece os envelopes exatos de módulo e fase de toda a família \mathcal{P} . Este algoritmo é intitulado *Algoritmo*

Primário e baseia-se no fato de que o círculo unitário se divide na união de no máximo $2(n+1)$ “arcos primários”, e um conjunto de no máximo $2(n+1)$ polinômios de \mathcal{P} pode ser associado a cada arco, de modo que sobre cada arco primário o envelope de Bode desses polinômios é idêntico ao de toda a família \mathcal{P} . Esse algoritmo, abordado adiante, é extremamente simples e usa exclusivamente matemática simbólica. Uma vez executado, podem-se aplicar os métodos de amostragem gráfica e desenhar os envelopes de Bode, agora com a complexidade da ordem de n^2 .

Cada arco primário é subdividido em arcos secundários sobre os quais os envelopes de fase e ganho de toda a família \mathcal{P} são obtidos identicamente por um único elemento $P_k(z) \in \mathcal{P}$ com coeficientes fixos. Desse modo, calcular os envelopes de Bode para qualquer $z = e^{j\omega}$ sobre este sub-arco se reduz a avaliar o polinômio com coeficientes fixos P_k em z . O algoritmo que realiza essa subdivisão, identificando os polinômios P_k relevantes, é denominado de *Algoritmo Secundário*. Praticamente todo o trabalho envolvido nesse algoritmo é despendido na subdivisão em arcos secundários cujos pontos extremos são identificados como raízes de módulos unitários especiais de certos polinômios auxiliares associados com o conjunto \mathcal{P} . Uma vez calculados os arcos secundários, a determinação dos envelopes de Bode é reduzida a simples combinações indexadas dentre os polinômios relevantes. No pior dos casos, é necessário calcular as raízes de $10(n+1)$ polinômios de grau $2n$. Embora a complexidade computacional seja ainda considerável, a maioria dessas raízes pode ser descartada logo de início por não ter módulo unitário; além do mais, como será visto, um procedimento seqüencial no algoritmo permite descartar muitas das raízes de módulos unitários que são irrelevantes.

O principal fator na obtenção destes resultados simplificados reside na geometria do conjunto de valores de \mathcal{P} em uma dada freqüência ω que, segundo [34], é definido como

$$V(\omega) \doteq \{P(e^{j\omega}); P \in \mathcal{P}\}$$

Para uma família \mathcal{P} , o conjunto $V(\omega)$ é sempre um polígono convexo simétrico conforme representado na figura 1.1 (b), diferentemente do que ocorre com uma família racional (figura 1.1 (a)). Os polinômios mapeados sobre os vértices e bordas de $V(\omega)$ são denominados respectivamente *polinômios exteriores* e *polinômios bordas*.

Quando ω varia no intervalo $[0, 2\pi)$, o conjunto de valores muda, no plano complexo, sua posição e forma. Em particular, o conjunto de polinômios exteriores pode mudar em algumas freqüências críticas, denominadas *pontos de mudança primária*.

Existem no máximo $2(n+1)$ desses pontos que são obtidos de forma simples e independente dos valores extremos $\bar{\alpha}_i$ e $\underline{\alpha}_i$. O Algoritmo Primário utiliza esses pontos como extremidades da divisão de arcos, e escolhe o conjunto de polinômios exteriores sobre cada arco como o conjunto $\tilde{\mathcal{P}}$ de amostras nas quais os limitantes \bar{M} , $\underline{\phi}$, $\bar{\phi}$ ocorrem, sendo que o limitante \underline{M} pode ocorrer também sobre um polinômio borda.

Em síntese, todo o trabalho pode ser resumido em determinar raízes de polinômios, o que, em geral, não é uma tarefa muito fácil. Contudo, as raízes procuradas devem possuir módulo unitário e satisfazer algumas restrições adicionais, reduzindo assim a dificuldade inicial. É importante ressaltar que os Algoritmos Primário e Secundário podem ser aplicados a polinômios com coeficientes complexos com incertezas intervalares e esféricas sendo que, neste último caso, o conjunto de valores é um círculo cujo raio independe da frequência e cujo centro pode ser calculado diretamente, fornecendo limitantes extremamente simples para os envelopes de Bode de uma família de intervalos de polinômios \mathcal{P} .

1.2 Preliminares: O Conjunto de Valores

Seja a família de intervalos de polinômios \mathcal{P} descrita por (1.3). Para cada frequência ω , o conjunto de valores de \mathcal{P} em $z = e^{j\omega}$ é definido como o conjunto complexo

$$V(\omega) = \{P(z); P \in \mathcal{P}\} \quad (1.4)$$

É bem conhecido que $V(\omega)$ é um polígono simétrico convexo cujas posição e forma mudam continuamente com a frequência $\omega \in [0, 2\pi)$ [34] e [39]. O centro de massa de $V(j\omega)$ corresponde ao polinômio central definido por

$$P_0(z) = \frac{1}{2} \sum (\underline{\alpha}_i + \bar{\alpha}_i) z^i \quad (1.5)$$

O número de bordas de $V(\omega)$ é no máximo $2(n+1)$. De fato, o número preciso de bordas é $2n'$, sendo n' o número de coeficientes que variam em intervalos. Cada coeficiente variando em um intervalo contribui para o conjunto de valores com duas bordas paralelas, cada qual com comprimento $\bar{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i$. Em particular, o perímetro é dado por $2 \sum (\bar{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i)$. A única exceção é para $n' = 1$, quando as duas bordas coincidem.

À medida em que ω cresce, as duas bordas do conjunto de valores que representam variações no valor de α_i rotacionam com uma velocidade angular i fixa e ângulos res-

pectivos $i\omega$ e $i\omega + \pi$. Diferentes bordas movem-se com distintas velocidades angulares. Essa dinâmica caracteriza o formato do conjunto de valores. Assumindo que para dado ω todos os n' pares de bordas paralelas têm declives distintos, o número de vértices do conjunto de valores é precisamente $2n'$. A cada vértice \mathbf{v} corresponde um único polinômio $P(z)$ no conjunto \mathcal{P} , denominado *polinômio exterior* associado a \mathbf{v} . Nominalmente, tem-se $\mathbf{v} = P(e^{i\omega})$. Estes polinômios exteriores, denotados $P_1(z), P_2(z), \dots, P_{2n'}(z)$, são ordenados, a partir de um vértice arbitrário, no sentido anti-horário, ao longo da fronteira do conjunto de valores. Deste modo, dois polinômios extremos consecutivos diferem por um coeficiente simples. De modo mais preciso, para todo $k \in \{1, \dots, 2n'\}$ a expressão $P_{k+1}(z) - P_k(z)$ é um monômio na forma

$$P_{k+1}(z) - P_k(z) = \varepsilon(\overline{\alpha}_m - \underline{\alpha}_m)z^m \quad (1.6)$$

para algum $m = m(k) \in \{0, \dots, n\}$ e $\varepsilon = \varepsilon(k) \in \{-1, 1\}$. Vale observar que se $k = 2n'$ então $k+1$ deve ser interpretado como sendo $k=1$.

O conjunto \mathcal{P} é, geometricamente, uma caixa no espaço dos polinômios. Seus vértices são os polinômios extremos, ou seja, os polinômios $P(z)$ para os quais $\alpha_i = \underline{\alpha}_i$ ou $\alpha_i = \overline{\alpha}_i$ para todo $i \in [0, n]$. Um polinômio exterior é um polinômio extremo, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. De fato, muitos dos $2n'$ polinômios extremos são mapeados no interior do conjunto de valores.

1.3 A Divisão Primária

Cada borda do conjunto de valores possui, como função da frequência, uma velocidade angular diferente. Conseqüentemente, existe um número finito de frequências críticas nas quais as inclinações das diferentes bordas coincidem, diminuindo assim o número de bordas do conjunto de valores. Quando ω , à medida em que aumenta, se aproxima de uma dessas frequências, polinômios exteriores migram para o interior do conjunto e novos polinômios exteriores tomam seus lugares. Esses valores de ω constituem pontos importantes do conjunto de valores e serão estudados detalhadamente.

DEFINIÇÃO 1.1 *A frequência $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ é um ponto de mudança primária se o número de bordas de $V(\omega_0)$ for menor que $2n'$.*

O número de pontos de mudança primária depende diretamente do número de coeficientes que variam em intervalos. Por exemplo, se somente um dos coeficientes

é um intervalo, não existem pontos de mudança primária, e o conjunto de valores é um segmento de reta em todas as frequências. O seu comprimento é fixo e seu ponto médio coincide com o polinômio central $P_0(z)$ definido em (1.5), e o ângulo de inclinação do segmento varia com velocidade angular constante como uma função de ω .

LEMA 1.1 $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ é um ponto de mudança primária se e somente se:

- i. $\omega_0 = \pi\mu/\xi$ para algum μ, ξ inteiros com $0 \leq |\mu| < \xi \leq n$;
- ii. Existem dois coeficientes variando em intervalos α_i e α_k tais que ξ divide $|k-i|$.

Prova: Sejam α_i e α_k dois coeficientes variando em intervalos. Então, o conjunto de valores em ω_0 tem bordas com ângulos $i\omega_0, i\omega_0 + \pi, k\omega_0, k\omega_0 + \pi$. Nota-se facilmente que dois desses ângulos e, conseqüentemente, os outros dois, coincidem se e somente se $(k-i)\omega_0$ é um múltiplo de π , e isto é o que está expresso em (i) e (ii). \square

Como pode ser notado, a condição (i) depende apenas do grau n , enquanto a condição (ii) está relacionada aos coeficientes que variam em intervalos mas não com os valores particulares $\underline{\alpha}_i$ e $\bar{\alpha}_i$. Se todos os coeficientes variam em intervalos, a condição (ii) torna-se redundante. Além disto, segundo [39], o número de bordas do conjunto de valores em um ponto de mudança primário $\omega = \pi\mu/\xi$ é $2n''(\omega)$, sendo $n''(\omega)$ o número de diferentes valores $m \pmod{\xi}$ para todos os m cujos coeficientes α_m variam em intervalos.

Existem pontos de mudança primária especiais ω_0 para os quais o conjunto de polinômios exteriores, quando $\omega > \omega_0$, coincide com o conjunto de polinômios exteriores para $\omega < \omega_0$. Estes pontos são denominados redundantes.

TEOREMA 1.1 *Seja $\omega_0 = \pi\mu/\xi$ um ponto de mudança primária. Assuma que μ e ξ são primos entre si, isto é $(\mu, \xi) = 1$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i. ω_0 é um ponto de mudança redundante;
- ii. O conjunto de valores em ω_0 degenera-se em um segmento de reta;

iii. ξ divide $|k - i|$ para todo par α_k, α_i de coeficientes que variam em intervalos.

Prova: Seguindo o argumento do LEMA 1.1, ξ divide exatamente todos os diferentes $|k - i|$ quando todos os ângulos do conjunto de valores coincidem ($\pmod{\pi}$) ou seja, quando o conjunto de valores $V(\omega_0)$ se degenera em um segmento de reta. Desse modo, (ii) e (iii) são equivalentes.

Para demonstrar a equivalência entre (i) e (iii), observa-se que os polinômios exteriores para $\omega < \omega_0$ são pontos extremos de um conjunto convexo e descrevem um movimento suave; portanto, têm uma aproximação linear na vizinhança de ω_0 . Além disto, o conjunto de valores tem um perímetro fixo e, portanto, se um polinômio exterior cruza a borda determinada por seus dois vizinhos, este cruzamento é perpendicular. Além disso, como as inclinações das bordas mudam linearmente, o polinômio exterior dado atravessa a borda diretamente para o outro lado. A argumentação rigorosa desses fatos pode ser encontrada em [38] e [40].

Em seguida mostra-se que (i) implica (ii). Se \mathcal{P} é um intervalo de polinômio simples, o conjunto de valores é um segmento de reta em todas as frequências e nada resta a ser provado. De outro modo, quando ω se aproxima de ω_0 por valores inferiores, ao menos um polinômio extremo P_k cruza a borda $P_{k-1}P_{k+1}$. Se o conjunto de valores em ω_0 não é um segmento de reta, P_k não pode emergir para o outro lado da borda para assumir seu papel como um polinômio exterior, contradizendo a hipótese (i).

Reciprocamente, demonstra-se que (ii) implica em (i). De fato, para eliminar o efeito da translação, deve-se considerar o conjunto de valores da família $\mathcal{P} - \mathcal{P}_0$, centrado na origem para todo ω . Se em ω_0 este conjunto é um segmento de reta, a simetria da aproximação linear em torno de ω_0 mostra que para ε pequeno o conjunto de valores $V(\omega + \varepsilon)$ é aproximado pelo conjunto simétrico $V(\omega_0 - \varepsilon)$, com cada ponto mapeado em sua imagem simétrica através do segmento de reta $V(\omega_0)$. Em particular, para ε pequeno, tanto convexidade quanto pontos extremos são preservados. \square

Para $n' \geq 2$, os pontos $z = \pm 1$ (correspondendo a $\omega = 0, \pi$) são sempre pontos de mudança redundantes, já que correspondem a $\xi = 1$ e, portanto, dividem quaisquer diferenças $|k - i|$ no TEOREMA 1.1. De modo alternativo, pode ser testado diretamente que o conjunto de valores de qualquer intervalo de polinômios com coeficientes reais degenera-se, nestes pontos, em intervalos reais.

1.4 O Algoritmo Primário

Os pontos de mudança primária dividem o círculo unitário em um conjunto finito de “arcos primários”. Uma importante propriedade destes arcos é expressa pelo seguinte teorema.

TEOREMA 1.2 *Admitindo que o intervalo de frequência $[\omega_1, \omega_2]$ representa um arco primário, as seguintes afirmações são válidas:*

- i. O conjunto de $2n'$ polinômios exteriores, juntamente com sua ordem cíclica induzida, é o mesmo para todo $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$.*
- ii. O perímetro do conjunto de valores é independente de $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$.*

Prova: Vértices dos conjuntos de valores podem ser criados ou aniquilados somente quando os ângulos de duas ou mais bordas consecutivas coincidem, ou seja em um ponto de mudança primária. Então, se para algum ω sobre o arco dado, $P_k(z)$ é o polinômio extremo mapeado no vértice do conjunto de valores, pela mudança contínua dos ângulos no conjunto de valores, $P_k(z)$ é mapeado no mesmo vértice para todo $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$. Por (1.6), $|P_{k+1}(z) - P_k(z)| = \bar{\alpha}_m - \underline{\alpha}_m$ independentemente de z . Desse modo, cada borda do conjunto de valores tem um comprimento fixo. \square

O *Algoritmo Primário* rastreia as mudanças nos polinômios exteriores em cada ponto de mudança primária. Nos pontos de mudança redundante, a demonstração do TEOREMA 1.2 indica as mudanças necessárias: o conjunto de polinômios exteriores permanece o mesmo, porém está refletido, ou seja seu ordenamento cíclico tem que ser invertido. Quando o ponto de mudança primária ω_0 não é um ponto redundante, embora o conjunto de valores não seja reduzido a um segmento de reta, seu número de bordas diminui. Isto significa que diversos polinômios exteriores vizinhos, por exemplo P_k até $P_{k'}$ com $(k' - k \geq 2)$, tornam-se colineares em ω_0 . No espaço dos polinômios, a face do politopo \mathcal{P} que contém os polinômios P_k até $P_{k'}$ é reduzida a um segmento de reta no plano complexo, sendo que P_k e $P_{k'}$ estão diagonalmente opostos sobre esta face. A dinâmica desta face na vizinhança de ω_0 é a mesma descrita anteriormente, ou seja, devido à aproximação linear sua imagem no plano complexo é refletida sobre um segmento de reta $P_k P_{k'}$. Deste modo, quando ω passa por ω_0 , os polinômios P_{k+1}

até $P_{k'-1}$ são substituídos por outros polinômios da mesma face. Nominalmente, pelos polinômios P'_{k+1} até $P'_{k'-1}$ que são simétricos a P_{k+1} até $P_{k'-1}$ com respeito à diagonal $P_k P_{k'}$.

Na maioria das vezes, somente duas bordas irão coincidir, isto é $k' = k + 2$. Admita que os polinômios exteriores envolvidos são P_k , P_{k+1} e P_{k+2} . Então, em ω_0 o polinômio P_{k+1} tem que ser substituído por $P'_{k+1} := P_k + P_{k+2} - P_{k+1}$. É importante notar que os quatro polinômios envolvidos são todos polinômios extremos em \mathcal{P} e formam uma face bi-dimensional no politopo \mathcal{P} . No caso mais geral, $k' - k \geq 2$, os novos polinômios serão $P'_t = P_k + P_{k'} - P_{k'+k-t}$ com $t = k + 1, \dots, k' - 1$.

O *Algoritmo Primário* é fornecido a seguir, admitindo-se como conhecidos o grau n e os intervalos $[\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i]$ para a família \mathcal{P} .

ALGORITMO PRIMÁRIO

1. Encontrar os polinômios exteriores ordenados para uma frequência positiva suficientemente pequena. Estes são obtidos por

$$\begin{aligned} P_k(z) &= \sum_{i=1}^{m(n'-k)} \underline{\alpha}_i z^i + \sum_{i=m(n'-k+1)}^n \bar{\alpha}_i z^i, \quad k = 1, \dots, n' \\ P_{k+n'}(z) &= \sum_{i=1}^{m(n'-k)} \bar{\alpha}_i z^i + \sum_{i=m(n'-k+1)}^{n-1} \underline{\alpha}_i z^i, \quad k = 1, \dots, n' \end{aligned} \quad (1.7)$$

Os valores $m(k)$ definidos em (1.6) correspondem à seqüência crescente de índices dos coeficientes incertos α_i .

2. Encontrar todos os pontos de mudança primária, usando o LEMA 1.1 e o TEOREMA 1.1.
3. Usar as reflexões de face, conforme explicado anteriormente, para atualizar a lista de polinômios exteriores em todos os pontos de mudança primária no intervalo $(0, \pi)$. O comportamento de $V(\omega)$ em $(\pi, 2\pi)$ pode ser completado por simetria usando o fato que $V(\omega) = \bar{V}(2\pi - \omega)$.

1.5 Construção do Algoritmo Secundário

A determinação dos envelopes de módulo e fase da família de intervalos \mathcal{P} pela resposta em frequência de um polinômio específico com coeficientes fixados, para cada

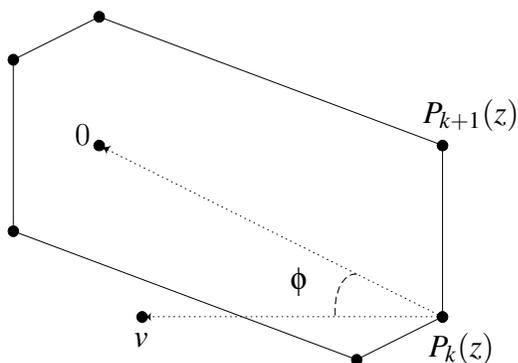


Figura 1.2: A origem dentro do conjunto de valores.

arco secundário, é obtida pela aplicação do *Algoritmo Secundário* dividido em diversas etapas detalhadas a seguir.

1.5.1 Identificando Módulo Mínimo Zero

Para encontrar os limitantes \underline{M} , $\underline{\phi}$ e $\overline{\phi}$, é imperativo isolar primeiramente as frequências em que a origem entra ou sai do conjunto de valores. Obviamente, quando a origem pertence ao conjunto de valores, o módulo mínimo é zero.

DEFINIÇÃO 1.2 *Assuma que ω não é um ponto de mudança primária. Diz-se que ω é um ponto de mudança de módulo zero se a origem pertence ao conjunto de valores em ω , mas não na vizinhança de ω .*

TEOREMA 1.3 *Assuma que ω não é um ponto de mudança primária. Então,*

- i. O módulo mínimo de $\mathcal{P}(z)$ é zero se e somente se os $2n'$ números complexos $Z_k(z) := P_{k+1}\overline{P}_k(z)$ estão no semiplano superior fechado.*
- ii. Além disto, se ω é um ponto de mudança de módulo zero, então um dos valores $Z_k(z)$ é real.*

Para computação dos números $Z_k(z)$ será utilizada a seguinte fórmula:

$$\left(\frac{1}{\bar{\alpha}_m - \underline{\alpha}_m}\right) \text{Im}\{Z_k(z)\} = \varepsilon(k) \text{Im}\{z^{m(k)} \bar{P}_k(z)\} = \varepsilon(k) \text{Im}\{z^{m(k)} \bar{P}_{k+1}(z)\} \quad (1.8)$$

que é uma conseqüência imediata de (1.6)

Prova:

(i) Considerando a figura 1.2 e lembrando que o ordenamento cíclico de $P_k(z)$ é anti-horário, a origem está dentro do conjunto de valores se e somente se para cada k um observador em $P_k(z)$, olhando para $P_{k+1}(z)$, vê a origem à sua esquerda. Defina-se “esquerda” como qualquer direção com 90° do vetor $v = j(P_{k+1}(z) - P_k(z))$. Deste modo, a origem está no interior do conjunto de valores se e somente se o produto interno

$$\text{Re}\{j(P_{k+1}(z) - P_k(z))(-\bar{P}_k(z))\}$$

é não negativo ou, equivalentemente, o correspondente ângulo ϕ na figura 1.2 é agudo. Eliminando o fator $-j$, obtém-se uma expressão equivalente

$$\text{Im}\{(P_{k+1}(z) - P_k(z))(-\bar{P}_k(z))\} \geq 0$$

e, removendo o número real $|P_k(z)|^2$, obtém-se $\text{Im}\{Z_k(z)\} \geq 0$, como requerido.

(ii) Se todas as inequações são restritas a ω , por continuidade, também valem em uma pequena vizinhança de ω . Deste modo, pela DEFINIÇÃO 1.2, ω não é um ponto de mudança de módulo zero. \square

É possível utilizar o TEOREMA 1.3 para identificar os pontos de mudança de módulo zero, e assim isolar os sub-arcos sobre os quais o módulo mínimo é identicamente zero. Isto pode ser feito de duas maneiras:

- a. Algebricamente: usando computação simbólica com polinômios cujos coeficientes variam em intervalos reais em duas variáveis reais x, y ($z = x + jy$);
- b. Numericamente: Usando métodos de determinação de raízes (Newton-Raphson, por exemplo) e trabalhando com uma variável ω .

A abordagem algébrica é viável somente para problemas de complexidade limitada. Além disto, produz muitas raízes que não satisfazem a positividade exigida no TEOREMA 1.3 (parte i) e que, portanto, são irrelevantes.

1.5.2 Computando os Envelopes de Fase

Assumindo que, numa dada frequência ω , a origem não pertence ao conjunto de valores e que ω não corresponde a um ponto de mudança primária, as fases geradas pelo conjunto de valores formam um setor convexo com abertura menor que 180° conforme mostrado na figura 1.1. A “fase nominal” deste setor é determinada pelo “polinômio do centro de massa” $P_0(z)$ definido em (1.5). Este setor não é necessariamente simétrico em torno da fase nominal.

Para computar os limites de fase em ω , é suficiente verificar as fases dos $2^{n'}$ polinômios vértices. Entretanto, uma vez que o Algoritmo Primário tenha sido executado, basta verificar as fases de $2^{n'}$ polinômios exteriores. Quando ω varia ao longo de um dado arco primário os limites de fase podem ser determinados dentro deste conjunto de polinômios previamente fixados. Além disso, as mudanças somente ocorrem entre um polinômio e um de seus dois vizinhos. O que se deseja é identificar as frequências em que ocorrem essas mudanças.

DEFINIÇÃO 1.3 *Assuma que ω não é um ponto de mudança primária e que também não pertence a um sub-arco de módulo zero. Então ω é um ponto de mudança de fase se $\underline{\phi}$ ou $\bar{\phi}$ trocam de polinômios em ω .*

TEOREMA 1.4 *Assuma que ω não é um ponto de mudança primária e que também não pertence a um sub-arco de módulo zero. Então ω é um ponto de mudança de fase somente se $z = e^{j\omega}$ é uma raiz de módulo unitário de uma das funções:*

$$\Phi_k(z) = \text{Im}\{P_k(z)z^{-m(k)}\} \quad (1.9)$$

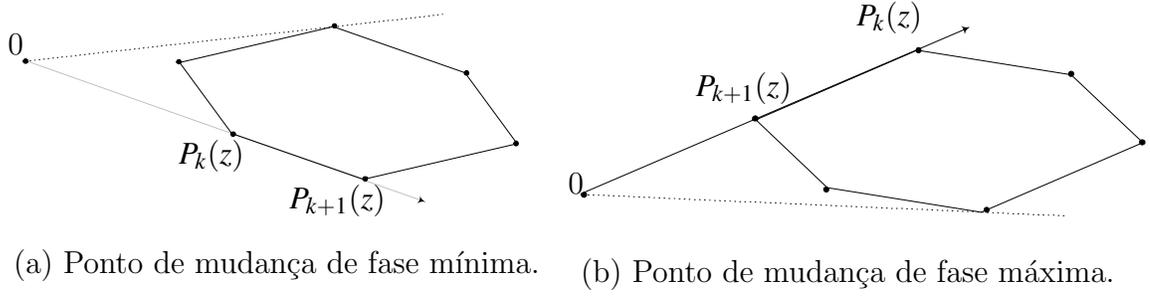
com $m(k)$ definido em (1.6).

Prova: Considerando a figura 1.3 e assumindo que ω é um ponto de mudança de fase, ou seja, ponto no qual $\underline{\phi}$ muda de $P_k(z)$ para $P_{k+1}(z)$ ou vice versa, tem-se que as fases de $P_k(z)$ e $P_{k+1}(z)$ são iguais. Escolhendo m e ε como em (1.6), constata-se que

$$P_{k+1}(z)z^{-m} = P_k(z)z^{-m} + \varepsilon(\bar{\alpha}_m - \underline{\alpha}_m)$$

e portanto os quatro pontos

$$0, \quad P_k(z)z^{-m}, \quad P_{k+1}(z)z^{-m} \quad \text{e} \quad (\bar{\alpha}_m - \underline{\alpha}_m)$$



(a) Ponto de mudança de fase mínima. (b) Ponto de mudança de fase máxima.

Figura 1.3: Pontos de mudança de fase.

são colineares. Como $(\bar{\alpha}_m - \underline{\alpha}_m)$ é positivo, conclui-se que $P_k(z)z^{-m}$ é real e portanto (1.9) é válida. \square

O TEOREMA 1.4 pode ser usado para computar os limites de fase precisos para a família \mathcal{P} , aplicando-se idéias similares às utilizadas na seção anterior. Existe, contudo, uma vantagem considerável na abordagem numérica, pois as raízes das funções Φ_k na variável ω podem ser computadas progressivamente ao longo do arco primário, sendo que a cada frequência, associada com $P_k(z)$, é necessário apenas encontrar a próxima raiz de $\Phi_k(z)\Phi_{k-1}(z)$.

1.5.3 Computando os Envelopes de Módulo Mínimo

Enquanto $\underline{\phi}$ e $\bar{\phi}$ são fornecidos por diferentes polinômios nos pontos de mudança, o polinômio que indica o módulo mínimo \underline{M} é único para todas as frequências. Contudo, sobre alguns intervalos de frequência, este valor é fornecido por um polinômio exterior e, em outros intervalos, é atingido sobre uma borda do conjunto de valores. O objetivo deste tópico é identificar esses intervalos de frequência e os pontos de mudança que os caracterizam.

DEFINIÇÃO 1.4 *Assumindo que ω não é um ponto de mudança primária e que também não pertence a um sub-arco de módulo zero, ω é um ponto de mudança de módulo mínimo se o módulo mínimo é atingido por um dos polinômios vértices P_k em ω , mas não em uma pequena vizinhança de ω .*

A família \mathcal{P} tem $2^{n'}$ polinômios extremos e $n'2^{n'-1}$ bordas; contudo, aplicando o Algoritmo Primário, o trabalho é reduzido a testar os $2n'$ polinômios exteriores P_1 até

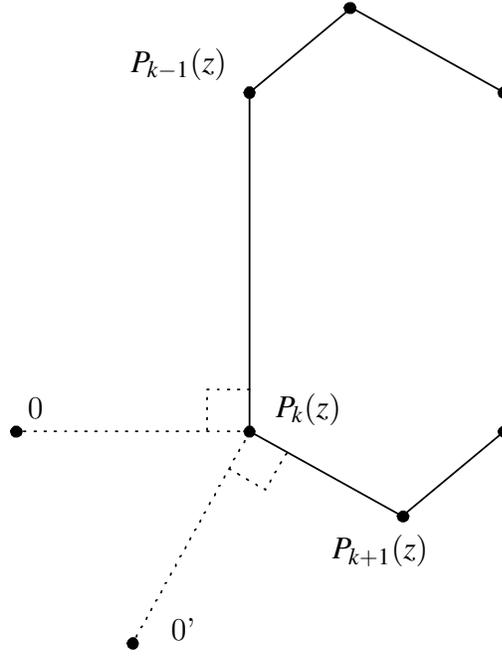


Figura 1.4: Ponto de mudança de módulo mínimo

$P_{2n'}$ e as $2n'$ bordas da forma $P_k P_{k+1}$. As bordas conectando P_k e P_{k+1} constituem uma família de um parâmetro da forma $\gamma P_k + (1 - \gamma) P_{k+1}$, $\gamma \in (0, 1)$.

TEOREMA 1.5 *Assumindo que ω não é um ponto de mudança primária e que também não pertence a um sub-arco de módulo zero, ω é um ponto de mudança de módulo mínimo fornecido por P_k , envolvendo a borda $P_k P_{k+1}$ (respectivamente, $P_k P_{k-1}$), somente se $z = e^{j\omega}$ é zero da função $U_k(z) = \text{Re}\{z^{-m(k)} P_k(z)\}$ (respectivamente, $V_k(z) = \text{Re}\{z^{-m(k-1)} P_k(z)\}$).*

Prova: Escolha $q = k \pm 1$. Considerando a figura 1.4 e denotando por ψ o ângulo entre os segmentos $P_k(z) P_q(z)$ e $P_k(z) 0$, para que $P_k(z)$ atinja o módulo mínimo deve-se ter $\psi \geq \pi/2$. Para ω ser um ponto de mudança, $\psi \leq \pi/2$ também deve valer, portanto $\psi = \pi/2$. Deste modo, a condição de ortogonalidade $\text{Re}\{(\bar{P}_q(z) - \bar{P}_k(z)) P_k(z)\} = 0$ é obtida. Agora, aplicando (1.6) e ignorando o fator real ε (note que se $q = k - 1$ então k deve ser substituído em (1.6) por $k - 1$), obtém-se $U_k(z) = 0$ ou $V_k(z) = 0$, conforme estabelecido. \square

Para dividir o círculo unitário em sub-arcos de módulo mínimo, utilizam-se tanto os pontos de mudança primária quanto os pontos de mudança de módulo mínimo. Dentro de cada sub-arco, quando ω se desloca de um para outro ponto de mudança, a evolução do módulo mínimo pode assumir uma das seguintes formas:

- i. A origem pertence ao conjunto de valores, e neste caso o módulo mínimo é identicamente zero;
- ii. O módulo mínimo está em um determinado vértice representado por P_k ;
- iii. O módulo mínimo se desloca ao longo de uma borda da forma

$$\gamma(\omega)P_k + (1 - \gamma(\omega))P_{k+1}$$

Esses diferentes casos podem ser facilmente classificados em termos das partes real e imaginária dos números complexos $P_k(z)z^{-m(k)}$ e $P_k(z)^{-m(k-1)}$. Quando ocorre o caso (iii) os dois polinômios em questão, $P_k(z) = a_1 + jb_1$ e $P_{k+1}(z) = a_2 + jb_2$, têm que ser avaliados e a solução do problema de minimização, para o módulo, é fornecida pela expressão

$$\gamma(\omega) = \frac{a_2(a_2 - a_1) + b_2(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

ou, em termos equivalentes, com $z = e^{j\omega}$:

$$\gamma(\omega) = \frac{\text{Re}\{(\bar{P}_{k+1}(z) - \bar{P}_k(z))P_{k+1}(z)\}}{|P_{k+1}(z) - P_k(z)|^2} \quad (1.10)$$

Um pouco mais de manipulação algébrica conduz à seguinte expressão para o módulo mínimo:

$$\underline{M}(\omega) = \frac{|\text{Im}\{\bar{P}_{k+1}(z)P_k(z)\}}{|P_{k+1}(z) - P_k(z)|} \quad (1.11)$$

Com base nessas observações empíricas pode-se conjecturar que ao longo de cada sub-arco do tipo (iii) o coeficiente γ muda monotonicamente entre 0 e 1. Mais ainda, os sub-arcos do tipo (ii) e (iii) normalmente aparecem intercalados (veja por exemplo a tabela 1.2). Uma exceção desta regra pode ocorrer em um ponto de mudança redundante, como ilustrado no exemplo numérico (veja tabela 1.2 em $\omega = \pi/3$).

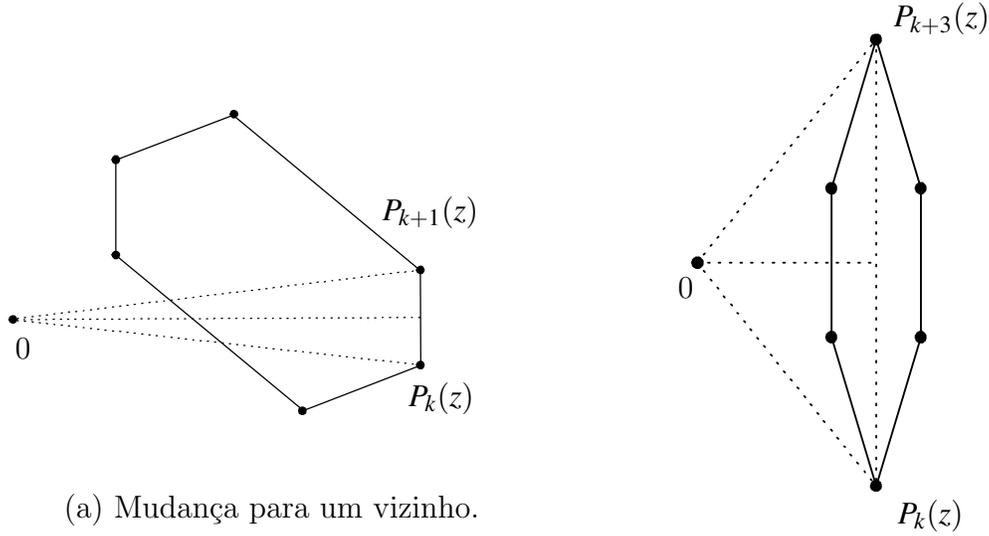


Figura 1.5: Pontos de mudança de módulo máximo.

1.5.4 Computando os Envelopes de Módulo Máximo

Como pode ser constatado na figura 1.5 os módulos máximos em ω sempre são atingidos nos vértices do conjunto de valores, e podem ser encontrados pelo cálculo e comparação de todos os $2^{n'}$ polinômios extremos de \mathcal{P} . O Algoritmo Primário reduz a busca para $2n'$ polinômios exteriores, os quais determinam todos os vértices do conjunto de valores. Quando ω percorre um arco primário, pode ocorrer do módulo máximo se deslocar de um vértice para um outro vértice fora de sua vizinhança (veja figura 1.5 (b)); este tipo de salto não acontece para os outros três limitantes \underline{M} , $\underline{\phi}$ e $\bar{\phi}$. Tal acontecimento torna um pouco mais complexo o algoritmo de busca envolvido. Assumindo que o máximo módulo no ponto de mudança é indicado por P_k , então a procura pelo próximo ponto de mudança deve, em princípio, ser baseada nos índices $i \neq k$ para os quais $|P_k(z)| = |P_i(z)|$. Desse modo, para \bar{M} deve ser testado se as $2n' - 1$ funções auxiliares se anulam em $z = e^{j\omega}$ para algum ω , ao invés de apenas duas como ocorre para \underline{M} e para os envelopes de fase $\underline{\phi}$ e $\bar{\phi}$. Portanto, o cálculo de \bar{M} é, em certo sentido, o gargalo do algoritmo no que diz respeito à complexidade computacional.

1.5.5 O Algoritmo Secundário

Assuma que a família \mathcal{P} é dada. O dado relevante é o grau n e os intervalos de incertezas $|\underline{\alpha}_j, \bar{\alpha}_i|$. No que segue, é descrito um algoritmo que combina os Algoritmos Primário e Secundário discutidos nas seções anteriores. É presumido o conhecimento dos pontos de mudança (primários e secundários) já devidamente ordenados. Os pontos primários são calculados de acordo com o LEMA 1.1 e o TEOREMA 1.1. Os demais pontos são calculados através dos polinômios auxiliares descritos nas seções 1.5.1 a 1.5.4.

Inicialmente, devem ser encontrados os índices ou rotuladores dos polinômios exteriores para um pequeno valor positivo da frequência ω , baseando-se em (1.7). Obviamente, $P_{n'}$ e $P_{2n'}$ são os únicos candidatos para \bar{M} , $\underline{\phi}$ e $\bar{\phi}$. Contudo, se a origem estiver dentro do conjunto de valores, diz-se que o caso é “zero \underline{M} ” e \underline{M} , $\underline{\phi}$ e $\bar{\phi}$ não estarão associados a polinômios exteriores, ou seja, não serão rotulados. De outro modo, diz-se que o caso é “positivo \underline{M} ” e \underline{M} , $\underline{\phi}$ e $\bar{\phi}$ serão rotulados.

Uma nova rotulação de \underline{M} , $\underline{\phi}$ e $\bar{\phi}$ é realizada nos pontos de mudança, sempre em ordem crescente. Este processo é descrito pelo seguinte fluxograma:

FLUXOGRAMA DO ALGORITMO SECUNDÁRIO

- (a) Vá para o próximo ponto de mudança ω .
- (b) Se $\omega = \pi$, pare.
- (c) Se ω é um ponto de mudança de módulo máximo, atualize o índice para o polinômio relevante, de acordo com a seção 1.5.4.
- (d) Se ω não é um ponto de mudança primária, vá para (h).
- (e) Aplique o Algoritmo Primário, apresentado na seção 1.4, para atualizar o conjunto de polinômios exteriores, substituindo cada P_k pelo seu apropriado polinômio refletido P'_k e preserve os índices k de todos os polinômios exteriores não refletidos.
- (f) Se um polinômio exterior P_k , substituído no passo (e), rotula $\underline{\phi}$ ou $\bar{\phi}$, então o índice vai para o seu novo substituto P'_k .

- (g) Se P_k é substituído em (e), e P_k ou uma borda que o contém rotula \underline{M} , então o índice vai para a borda que contém seus dois vizinhos. O valor preciso de γ pode ser computado usando (1.10) e (1.11).
- (h) Se o estado corrente é “zero \underline{M} ”, vá para (l).
- (i) Se ω é um ponto de mudança de módulo zero, vá para (m).
- (j) Se ω é um ponto de mudança de fase, atualize o rótulo de fase relevante de acordo com a seção 1.5.2.
- (k) Se ω é um ponto de mudança de módulo mínimo, atualize o rótulo para o módulo relevante, o qual pode ser um polinômio exterior simples ou um borda definida por dois polinômios exteriores vizinhos. No último caso, as fórmulas (1.10), (1.11) são usadas para calcular o polinômio borda que rotula \underline{M} em todas as frequências no arco secundário dado. Vá para (a).
- (l) Se ω é um ponto de módulo zero, declare “positivo \underline{M} ”. Assuma que a origem deixa o conjunto de valores em (P_k, P_{k+1}) . Então P_{k+1} rotula $\underline{\phi}$ e P_k rotula $\bar{\phi}$. \underline{M} é rotulado pela borda $P_k P_{k+1}$ e (1.10), (1.11) dão o exato polinômio borda que rotula \underline{M} . Vá para (a).
- (m) Descarte os rótulos para \underline{M} , $\underline{\phi}$ e $\bar{\phi}$ e declare “zero \underline{M} ”. Vá para (a).

Como pode ser notado, o fluxograma é completamente combinatório, exceto para o passo (a), que exige maior demanda computacional. As seções 1.5.1 a 1.5.4 reduzem esta tarefa ao cômputo de raízes de equações polinomiais. Para valores moderados de n' , isto pode ser feito por meio de pacotes de fatorização polinomial que calculam todas as raízes. Muitas raízes são irrelevantes, por duas razões: ou não têm módulo unitário, ou refletem coincidências de módulo ou fase que não envolvem os polinômios rotulados.

Para problemas de ordem elevada, os pontos de mudança são calculados em valores crescentes de frequência usando rotinas do tipo Newton-Raphson. Neste ponto, somente as raízes relevantes são consideradas: em cada ponto de mudança ω_k , calcula-se a primeira raiz $\omega' > \omega$ que envolve qualquer um dos polinômios auxiliares relevantes. Algumas regras envolvendo os quatro processos para identificar os polinômios que fornecem os envelopes de frequência, ou polinômios rotuladores, podem ajudar a reduzir o número de polinômios auxiliares relevantes a um mínimo possível. As observações

básicas relativas a estas regras são mostradas a seguir, sem muito rigor nas provas. Todas podem ser deduzidas a partir das discussões contidas neste capítulo.

- a) Os quatro polinômios que atingem as quatro fronteiras invariavelmente aparecem nesta ordem cíclica: \underline{M} , $\underline{\phi}$, \overline{M} , $\overline{\phi}$. Isto, em particular, coloca uma restrição sobre os possíveis saltos de \overline{M} .
- b) Desenharam-se duas linhas perpendiculares passando por P_0 (polinômio central), com uma das linhas passando pela origem. Os limites para $\underline{\phi}$ e $\overline{\phi}$ são separados pela linha passando pela origem; os limites para \underline{M} e \overline{M} são separados pela outra linha. Isto pode colocar restrições adicionais sobre \overline{M} .
- c) Assume-se que a origem não pertence ao conjunto de valores. Se um dos dois polinômios exteriores mais próximos do polinômio rotulador de módulo mínimo não for um polinômio rotulador de fase, então o próximo ponto de mudança de módulo zero não pode ocorrer antes de um ponto de mudança de fase. Isto eliminará a necessidade de busca por raízes entre os diversos pontos de mudança de módulo zero.
- d) Ao contrário do caso de estabilidade Hurwitz, não é verdade que a estabilidade Schur tem sempre um sentido fixo de rotação relativa. O sentido local de rotação do conjunto de valores relativo à origem pode ser determinado em alguns casos. Por exemplo, se P_0 gira no sentido horário, então a rotação relativa é anti-horária. A observância deste fato ajuda a reduzir o trabalho de encontrar o zero, localmente, por aproximadamente um fator de dois.

1.5.6 Um exemplo numérico

O seguinte exemplo numérico foi calculado em um PC usando [41] e [52]. O procedimento para mapear os envelopes de amplitude e fase de $P(z)$ está resumido nas tabelas 1.1 a 1.5 e nas figuras 1.6 e 1.7. A única diferença do algoritmo em relação à descrição da seção anterior é que, devido ao baixo valor de n' , os zeros foram calculados de uma só vez. Considere o polinômio de ordem $n = 6$

$$P(z) = \sum_{i=0}^6 \alpha_i z^i$$

definido em termos dos coeficientes

$$\alpha_1 = -0.4659, \quad \alpha_2 = 0.5387, \quad \alpha_4 = -0.13, \quad \alpha_5 = -0.6$$

e dos intervalos incertos

$$\alpha_0 \in [0.1568, 0.6568], \quad \alpha_3 \in [-0.0004, 0.496], \quad \alpha_6 \in [1, 1.5]$$

O Algoritmo Primário: Os seis pontos de mudança primária em $[0, \pi)$ são dados na tabela 1.1. Como $n' = 3$, o conjunto de valores é um hexágono simétrico não-regular, como por exemplo na figura 1.1 (a). Os pontos de mudança redundantes são $0, \pi/3, 2\pi/3$. Nestes pontos, o conjunto de valores é reduzido a um segmento de reta; nos outros pontos de mudança primária, o conjunto torna-se um paralelepípedo. Os seis polinômios exteriores sobre cada um dos seis arcos, no sentido anti-horário, também são mostrados na tabela 1.1.

O Algoritmo Secundário: Os polinômios $Z_k(z)$ do TEOREMA 1.3 foram encontrados algebricamente, e seus zeros foram computados numericamente. Entre estes zeros encontraram-se somente dois pontos de mudança de módulo zero: **0.4665** e **0.6552**. Esses pontos aparecem em negrito nas tabelas 1.2 a 1.5

Os zeros dos polinômios $\Phi_k(z)$ do TEOREMA 1.4 foram calculados em seguida. Os zeros que efetivamente estavam nos pontos de mudança de fase foram listados em ordem crescente nas tabelas 1.4 e 1.5. O envelope de fase relevante foi desenhado na figura 1.7 usando o pacote gráfico do Matlab. Observa-se nesta figura que os envelopes $\underline{\phi}$ e $\overline{\phi}$ não foram definidos entre os dois pontos de mudança de módulo zero.

Depois, usando o TEOREMA 1.5, os zeros de $U_k(z)$ e $V_k(z)$ foram encontrados. Estes zeros, que são pontos de mudança de módulo mínimo, são listados em ordem crescente na tabela 1.2, junto com os dois pontos de mudança de módulo zero. Nesta caso **M** é obtido sobre uma borda do conjunto de valores, e os dois vértices relevantes são identificados nesta tabela.

Finalmente, os pontos de mudança de módulo máximo da tabela 1.3 foram obtidos entre os pontos que satisfazem uma equação da forma $|P_k(z)| = |P_i(z)|$. O envelope de módulo completo é descrito na figura 1.6. Note que **M** não está desenhado entre os dois pontos de mudança de módulo zero.

Convém lembrar que a rotulação secundária pode ocorrer em ponto de mudança primária. No exemplo, isto ocorre somente uma vez, em $\pi/3$, um ponto de mudança redundante, que é incluído na tabela 1.2: em $\pi/3$ uma mudança de módulo mínimo “não-padrão” é registrada na tabela 1.2.

Como o exemplo envolve um polinômio de ordem relativamente pequena, nenhuma das regras que foram apresentadas na última seção foi necessária.

1.6 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado um método preciso e efetivo para computar os envelopes de módulo e fase para a resposta em frequência de um filtro digital $H(z)$ com numerador e denominador contendo coeficientes incertos definidos em intervalos. O método é baseado em uma partição dupla do espectro de frequências $\omega \in [0, 2\pi)$. A partição primária identifica os polinômios exteriores, ou seja, aqueles que determinam a forma do conjunto de valores. A partição secundária particulariza os polinômios exteriores que atingem os limites em questão. Todos os pontos que surgem destas partições foram obtidos como raízes de polinômios explícitos relacionados à família $H(z)$.

O mesmo problema para filtros analógicos foi considerado em [39] e uma análise mais detalhada da natureza do conjunto de valores para o caso contínuo foi desenvolvida em [13]. O conjunto de valores para sistemas em tempo contínuo é mais simples, pois é um retângulo com lados paralelos aos eixos real e imaginário. Conseqüentemente, existem somente quatro polinômios (conhecidos como polinômios de Khari-tonov), independentemente da frequência; portanto, o estágio da divisão primária é bastante simplificado no caso contínuo. A divisão secundária, em ambas situações, é bastante similar.

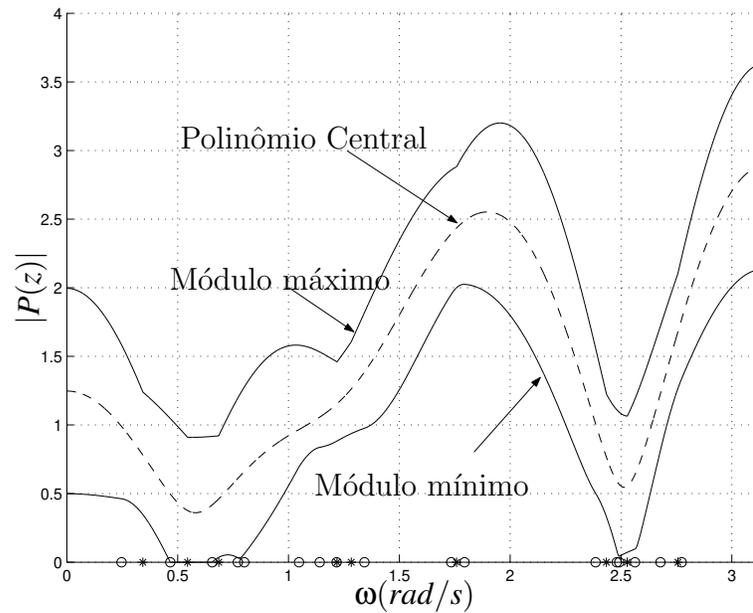


Figura 1.6: Envelope de módulo versus frequência. Os pontos de mudança aparecem sobre o eixo de frequências.

Intervalo		Polinômios Exteriores Ordenados
0	$\pi/6$	$p_0, p_1, p_3, p_7, p_6, p_4$
$\pi/6$	$\pi/3$	$p_5, p_1, p_3, p_2, p_6, p_4$
$\pi/3$	$\pi/2$	$p_5, p_4, p_6, p_2, p_3, p_1$
$\pi/2$	$2\pi/3$	$p_0, p_4, p_6, p_7, p_3, p_1$
$2\pi/3$	$5\pi/6$	$p_0, p_1, p_3, p_7, p_6, p_4$
$5\pi/6$	π	$p_5, p_1, p_3, p_2, p_6, p_4$

Tabela 1.1: Pontos de mudança primária. As frequências 0 , $\pi/3$ e $2\pi/3$ são pontos de mudança redundantes, nas quais os polinômios exteriores permanecem os mesmos mas revertem seu ordenamento.

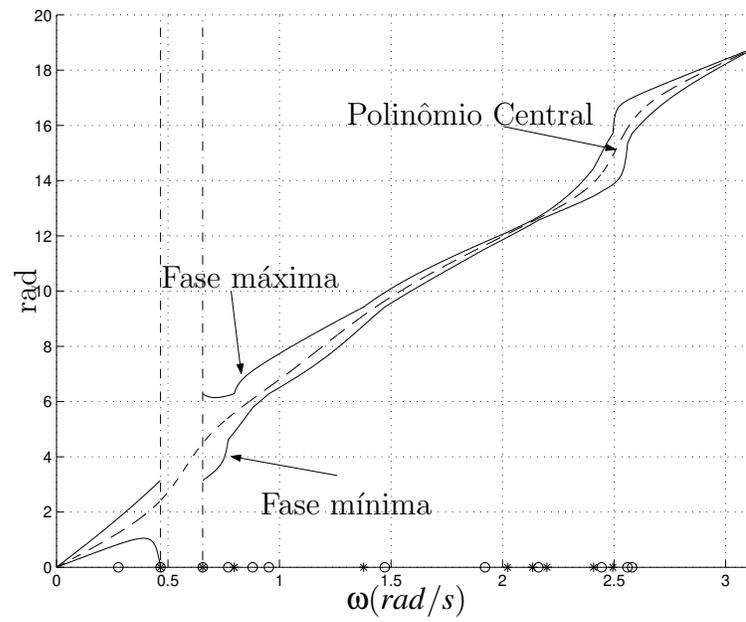


Figura 1.7: Envelope de fase versus frequência. Os pontos de mudança aparecem sobre o eixo de frequências. Nada é indicado entre os dois pontos de mudança de módulo zero.

Frequência	De	Para
0.2465	p_0	$[p_0, p_1]$
0.4665	$[p_0, p_1]$	—
0.6552	—	$[p_3, p_2]$
0.7710	$[p_3, p_2]$	p_2
0.8006	p_2	$[p_2, p_6]$
$\pi/3$	$[p_2, p_6]$	$[p_2, p_3]$
1.1405	$[p_2, p_3]$	p_3
1.2167	p_3	$[p_3, p_1]$
1.3423	$[p_3, p_1]$	p_1
1.7342	p_1	$[p_1, p_0]$
1.7938	$[p_1, p_0]$	p_0
2.3854	p_0	$[p_0, p_1]$
2.4807	$[p_0, p_1]$	p_1
2.4920	p_1	$[p_1, p_3]$
2.5627	$[p_1, p_3]$	p_3
2.6778	p_3	$[p_3, p_2]$
2.7736	$[p_3, p_2]$	p_2

Tabela 1.2: Pontos de mudança de módulo mínimo. Um intervalo $[p_i, p_j]$ indica que o módulo mínimo é obtido sobre uma borda entre p_i e p_j . Estes pontos são indicados por “o” sobre o eixo ω na figura 1.6.

Frequência	De	Para
0.3428	p_7	p_6
0.5444	p_6	p_4
0.6851	p_4	p_5
1.2186	p_5	p_4
1.2833	p_4	p_6
1.7584	p_6	p_7
2.4340	p_7	p_6
2.5275	p_6	p_4
2.7563	p_4	p_5

Tabela 1.3: Pontos de mudança de módulo máximo. Estes pontos são indicados por “★” sobre o eixo ω na figura 1.6.

Frequência	De	Para
0.2775	p_3	p_1
0.4665	p_1	—
0.6552	—	p_2
0.7696	p_2	p_6
0.8797	p_6	p_4
0.9523	p_4	p_5
1.4722	p_5	p_4
1.9211	p_4	p_0
2.1608	p_0	p_1
2.4440	p_1	p_3
2.5603	p_3	p_7
2.5803	p_7	p_6

Tabela 1.4: Pontos de mudança de fase mínima. Estes pontos são indicados por “o” sobre o eixo ω na figura 1.7. Os números em negrito indicam pontos de mudança de módulo zero.

Frequência	De	Para
0.4665	p_0	—
0.6552	—	p_3
0.7969	p_3	p_2
1.3772	p_2	p_3
2.0224	p_3	p_7
2.1341	p_7	p_6
2.1987	p_6	p_4
2.4079	p_4	p_0
2.4945	p_0	p_1

Tabela 1.5: Pontos de mudança de fase máxima. Estes pontos são indicados por “★” sobre o eixo ω na figura 1.7. Os números em negrito indicam pontos de mudança de módulo zero.

Capítulo 2

Plantas Elipsoidais e Controle \mathcal{H}_∞

Neste capítulo, é dada uma contribuição à síntese de controladores robustos \mathcal{H}_∞ para um sistema dinâmico cujos parâmetros incertos obedecem a uma desigualdade elipsoidal, ou simplesmente, para família de plantas elipsoidais. Isto é feito através de um procedimento de síntese para o problema de sensibilidade mista no qual as funções de ponderação são obtidas a partir de considerações sobre a geometria do conjunto de valores do numerador e do denominador da planta. O resultado proposto permite também, conhecidas as funções de ponderação, determinar a máxima variação paramétrica de uma família de plantas elipsoidais tal que o sistema em malha fechada continue estável.

2.1 Introdução

Desde que Kharitonov [33] publicou seu amplamente aceito teorema, um número considerável de resultados envolvendo problemas de análise de sistemas definidos por intervalo de plantas e procedimentos de síntese de controladores robustos para tais sistemas tem sido desenvolvido. Contudo, a despeito da quantidade de trabalhos produzidos e de sua grande importância teórica, o modelamento de sistemas com incertezas estruturadas definidas sob a forma de intervalos revela-se, em geral, bastante conservador e, portanto, menos interessante quanto à sua aplicação prática.

Embora a existência de um vínculo entre parâmetros incertos possa significar apenas uma idealização matemática, muitos algoritmos de identificação de sistemas forne-

cem, como forma de reduzir o aspecto conservador inerente à abordagem por variações paramétricas, conjuntos de incertezas definidos sob a forma de hiperelipsoides [48]. É neste fato que reside o interesse pelo desenvolvimento de ferramentas de projeto de controladores robustos para sistemas contendo incertezas elipsoidais.

Em artigo recente [11] o problema do projeto de controladores robustos para sistemas com incertezas paramétricas sob a forma de intervalos é abordado. Isto é feito com base no procedimento de síntese \mathcal{H}_∞ desenvolvido em [36], utilizando uma proposta originalmente sugerida em [4], no qual um projeto de controlador robusto para um intervalo de plantas é obtido pela substituição das incertezas paramétricas por uma faixa de incertezas não estruturadas em torno da função de transferência do modelo nominal da planta. O ponto fundamental é a consideração de perturbações agindo separadamente no numerador e no denominador da planta ao invés de perturbações estruturadas sobre a planta nominal. Como implicação direta, obtém-se as funções de ponderação combinando-se apenas dois polinômios de Kharitonov. Contudo, ao levar-se em conta a existência de um vínculo entre os parâmetros incertos ou, mais especificamente, que o conjunto de incertezas forma uma elipsóide no espaço dos parâmetros, a aplicação de técnicas envolvendo abordagens tipo Kharitonov não é mais possível. Entretanto, a geometria simples do conjunto de valores das funções decorrentes da consideração desse tipo de estrutura incerta e, conseqüentemente, as expressões algébricas dela derivadas, permitem, com pequenas modificações, a aplicação do método proposto em [11] ao problema do projeto de controladores robustos \mathcal{H}_∞ para sistemas contendo incertezas elipsoidais.

2.2 Problema e Principal Resultado

Dado o sistema SISO representado na figura 2.1, no qual $V(s)$ é um filtro que molda o distúrbio w , e $W_1(s)$ e $W_2(s)$ são filtros de ponderação para a saída do sistema realimentado e para a entrada da planta, respectivamente, deseja-se determinar um controlador $C(s)$ utilizando o procedimento proposto em [4] e, em seguida, determinar uma variação paramétrica \mathbf{p} tolerável tal que o sistema em malha fechada, com a família de plantas elipsoidais $P(s, \mathbf{Q}, \mathcal{R})$, ainda permaneça estável. Uma família de plantas elipsoidais nada mais é que a representação matemática de um sistema dinâmico cujos parâmetros incertos obedecem a uma desigualdade elipsoidal. Deste modo

$P(s, Q, \mathcal{R})$ será representada por [2]

$$P(s, Q, \mathcal{R}) = \left\{ P(s, q, r); P(s, q, r) = \frac{N(s, q)}{D(s, r)}, q \in Q, r \in \mathcal{R} \right\} \quad (2.1)$$

$$Q = \{q : q^T W q \leq \rho^2\} \quad \mathcal{R} = \{r : r^T \Upsilon r \leq \rho^2\} \quad (2.2)$$

com

$$N(s, q) = N_0(s) + \sum_{i \in I_N} q_i s^i, \quad D(s, r) = D_0(s) + \sum_{i \in I_D} r_i s^i \quad (2.3)$$

sendo famílias esféricas de polinômios associados ao numerador e ao denominador da planta; I_N e I_D são conjuntos de índices associados aos componentes dos vetores “ q ” e “ r ” que surgem como parâmetros incertos nos coeficientes do numerador e denominador, respectivamente, e $W = \text{diag}\{\omega_i^2, i = 1, 2, \dots, w\}$ e $\Upsilon = \text{diag}\{\nu_i^2, i = 1, 2, \dots, v\}$ são matrizes de ponderação das incertezas.

Por esta notação, a planta nominal será expressa como

$$P(s, 0, 0) = P_0(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s)} = \frac{N(s, 0)}{D(s, 0)} \quad (2.4)$$

É importante observar que, para existir um controlador estabilizante, ρ deve ser tal que não ocorra cancelamento pólo-zero instável na família de plantas elipsoidais $P(s, Q, \mathcal{R})$. A determinação, em malha aberta, de uma faixa de variação paramétrica admissível pode ser feita usando-se a abordagem desenvolvida em [53] ou gerando-se os conjuntos espectrais [2] do numerador e do denominador da planta para diferentes valores de ρ e excluindo-se aqueles para os quais existem intersecções no semi-plano direito do plano complexo entre os respectivos conjuntos espectrais.

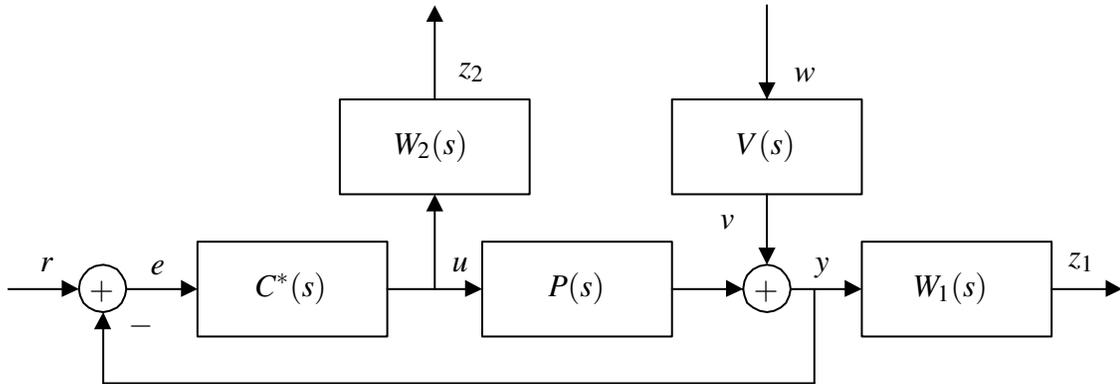


Figura 2.1: Problema de sensibilidade mista SISO.

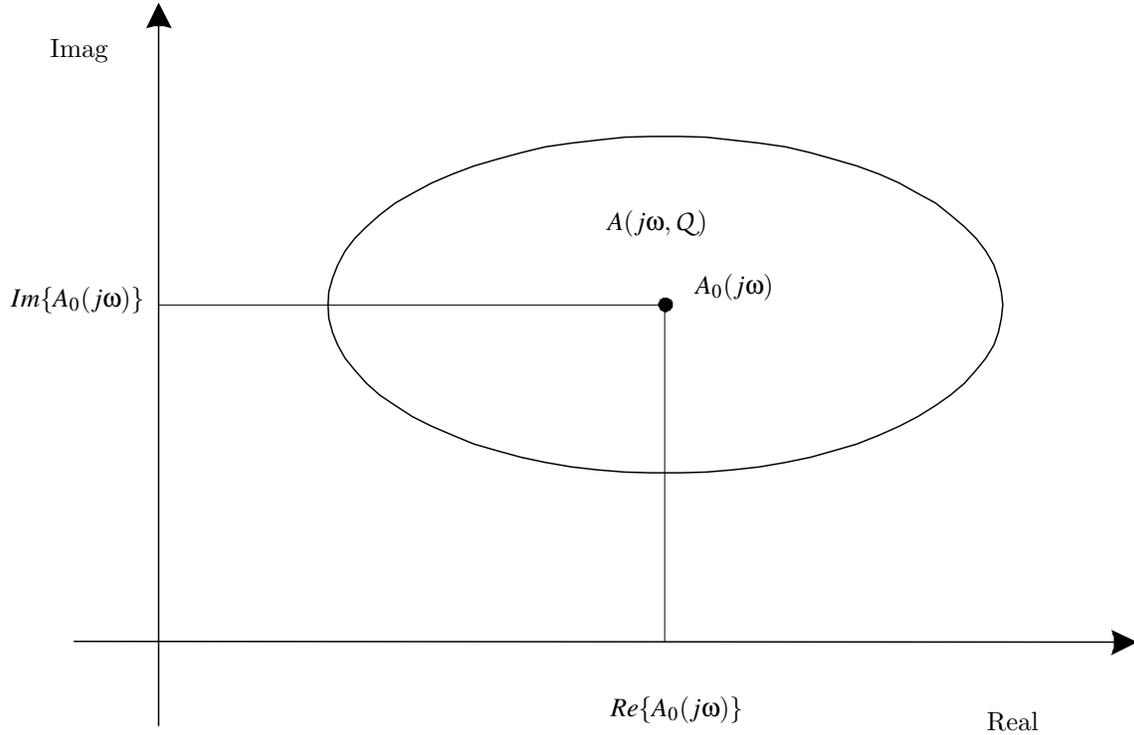


Figura 2.2: O conjunto de valores de $A(j\omega, Q)$

Considere uma família genérica de polinômios elipsoidais dada por:

$$A(s, Q) = \left\{ A(s, q); A(s, q) = A_0(s) + \sum_{i \in I_A} q_i s^i \right\} \quad (2.5)$$

com

$$A_0(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n \quad q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_i \ \dots]^T \in Q \quad \text{e} \quad i \in I_A \quad (2.6)$$

O conjunto de valores de uma tal família, para um determinado valor $s = j\omega$, $\omega \neq 0$ é, conforme visto na figura 2.2, uma elipse com eixos principais paralelos aos eixos cartesianos e cujos semi comprimentos são dados por [2]

$$R_{A(j\omega, Q)} = \rho \left(\sum_{\substack{i \text{ par} \\ i \in I_A}} w_i^2 \omega^{2i} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad I_{A(j\omega, Q)} = \rho \left(\sum_{\substack{i \text{ ímpar} \\ i \in I_A}} w_i^2 \omega^{2i} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

nas direções real e imaginária, respectivamente.

A característica do conjunto de valores de uma família de polinômios elipsoidais permite afirmar de imediato que, para $\omega \neq 0$,

$$\sup_{A(j\omega, q) \in A(j\omega, Q)} |A(j\omega, q) - A_0(j\omega)| = \max \{R_{A(j\omega, Q)}, I_{A(j\omega, Q)}\} \quad (2.8)$$

Quando $\omega = 0$ o conjunto de valores reduz-se a um intervalo real dado por

$$A(j0, Q) = [a_0 - \rho_0; a_0 + \rho_0] \quad (2.9)$$

com ρ_0 significando a tolerância admissível para o coeficiente a_0 .

A síntese de um controlador robusto $C(s)$ baseada na teoria de controle \mathcal{H}_∞ desenvolvida em [36] é feita pela minimização da função de sensibilidade mista dada por

$$\|V \sim V(S \sim SW_1 \sim W_1 + U \sim UW_2 \sim W_2)\|_\infty \quad (2.10)$$

com respeito a todos os controladores estabilizadores, sendo $S(s)$ a função de sensibilidade da planta e $U(s)$ a função de sensibilidade do controle, $V \sim(s) = V(-s)$ e as demais funções são definidas similarmente. O resultado fundamental apresentado para o problema de sensibilidade mista [36] afirma que:

TEOREMA 2.1 *O sistema em malha fechada representado na Figura 2.1 para uma planta incerta genérica $P(s) = N(s)/D(s)$ cuja função de transferência nominal é dada por $P_0(s) = N_0(s)/D_0(s)$ permanece estável sob todas as perturbações tais que*

$$\left| \frac{D(s) - D_0(s)}{D_0(s)V(s)W_1(s)} \right|^2 + \left| \frac{N(s) - N_0(s)}{N_0(s)V(s)W_2(s)} \right|^2 < \frac{1}{\delta} \quad (2.11)$$

para $s = j\omega$ se

$$\| |VW_1S|^2 + |VW_2U|^2 \|_\infty < \delta \quad (2.12)$$

O TEOREMA 2.1 vale para polinômios incertos genéricos $D(s)$ e $N(s)$. Desse modo, pode ser aplicado aos polinômios elipsoidais $N(s, Q)$ e $D(s, \mathcal{R})$. Além disto, como a família de plantas elipsoidais é conhecida, as funções de ponderação $V(s)W_1(s)$ e $V(s)W_2(s)$ podem, sobre o eixo $j\omega$, ser convenientemente escolhidas de modo a satisfazer:

$$|VW_1| > \frac{1}{|D_0|} \max \left\{ \left(\sum_{\substack{i \text{ par} \\ i \in I_D}} v_i^2 \omega^{2i} \right)^{1/2} ; \left(\sum_{\substack{i \text{ ímpar} \\ i \in I_D}} v_i^2 \omega^{2i} \right)^{1/2} \right\} \quad (2.13)$$

$$|VW_2| > \frac{1}{|N_0|} \max \left\{ \left(\sum_{\substack{i \text{ par} \\ i \in I_N}} w_i^2 \omega^{2i} \right)^{1/2} ; \left(\sum_{\substack{i \text{ ímpar} \\ i \in I_N}} w_i^2 \omega^{2i} \right)^{1/2} \right\} \quad (2.14)$$

Conseqüentemente, usando a teoria de controle \mathcal{H}_∞ padrão, o controlador próprio e racional $C^*(s)$ é obtido como resultado da minimização de

$$\| |VW_1S|^2 + |VW_2U|^2 \|_\infty \quad (2.15)$$

cujo valor ótimo é atingido em δ^* . A partir deste resultado é possível determinar, para o conjunto planta nominal-controlador, uma variação paramétrica elipsoidal ρ tolerada que depende das funções de ponderação $W_1(s)$, $W_2(s)$ e $V(s)$. A resposta a esta questão coincide parcialmente com o resultado fornecido em [11]. Ou seja, dado o par $\{C^*(s), P_0(s)\}$, o valor de ρ para o qual o sistema em malha fechada continua estável é

$$\rho_{max} = \min \left\{ \rho_0, \rho^* = \frac{1}{\sqrt{2\delta^*}} \right\} \quad (2.16)$$

Neste caso, ρ_0 o máximo valor de ρ para o qual o termo do coeficiente de ordem zero do polinômio de malha fechada não muda de sinal, seu valor numérico é obtido a partir do resultado proposto em [6]. Neste ponto cabe uma observação importante: quando os parâmetros incertos são definidos em um hipercubo, o resultado fornecido pelo procedimento desenvolvido em [11] já leva em conta a condição para $\omega = 0$ pois $P(j0, Q, \mathcal{R})$ reduz-se naturalmente a um intervalo; o mesmo não ocorre para incertezas elipsoidais e, por esta razão, esse resultado deve ser testado a posteriori. Talvez seja possível também, para o caso elipsoidal, introduzir esta condição no algoritmo proposto em [36], porém essa tarefa foge ao escopo do presente trabalho.

TEOREMA 2.2 *Admitindo que $\rho_{max} = \rho^*$, sobre o eixo jw , e levando-se em conta a escolha feita para as funções de ponderação em (2.13) e (2.14), então para qualquer $P(s, q, r) \in P(s, Q, \mathcal{R})$*

$$\left| \frac{D(s) - D_0(s)}{D_0(s)V(s)W_1(s)} \right|^2 + \left| \frac{N(s) - N_0(s)}{N_0(s)V(s)W_2(s)} \right|^2 < \frac{1}{\delta^*}$$

Prova: De fato, com $|VW_1|$ e $|VW_2|$ escolhidos de modo a satisfazerem (2.13) e (2.14) tem-se que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{D(s) - D_0(s)}{D_0(s)} \right| &< \frac{1}{|D_0(s)|} \max \{R_{D(s, \mathcal{R})}, I_{D(s, \mathcal{R})}\} \\ &< \rho^* |V(s)W_1(s)| = \frac{1}{\sqrt{2\delta^*}} |V(s)W_1(s)| \quad (2.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{N(s) - N_0(s)}{N_0(s)} \right| &< \frac{1}{|N_0(s)|} \max \{R_{N(s, \mathcal{Q})}, I_{N(s, \mathcal{Q})}\} \\ &< \rho^* |V(s)W_2(s)| = \frac{1}{\sqrt{2\delta^*}} |V(s)W_2(s)| \quad (2.18) \end{aligned}$$

A substituição deste resultado em (2.11) permite concluir, de imediato, pelo TEOREMA 2.1, que o sistema incerto $\{C^*(s), P(s, \mathcal{Q}, \mathcal{R})\}$, permanece robustamente estável. \square

2.3 Um exemplo numérico

O seguinte exemplo numérico foi originalmente apresentado em [22] e discutido no contexto de uma família elipsoidal de plantas como um exercício proposto em [2]. Esse exemplo é particularmente interessante porque o polinômio do denominador, tanto o nominal quanto o perturbado, têm raízes sobre o eixo imaginário e, por esta razão, o resultado apresentado em [23] não pode ser empregado.

Considere, na figura 2.1, a planta $P(s)$ que representa um sistema de controle de profundidade de um submarino descrita por

$$P(s) = \frac{(s + 0.2)^2}{s^2 + 0.01}$$

Admita que é permitido aos parâmetros do sistema uma variação de 20% em torno de seus valores nominais. Portanto em lugar de $P(s)$, tem-se

$$P(s, q, r) = \frac{(s + 0.2 + q)^2}{s^2 + 0.01 + r}$$

com

$$|q| \leq 0.04 \quad |r| \leq 0.002$$

Note que o numerador de $P(s, q, r)$ não é uma família elipsoidal de polinômios. Adotando o procedimento de sobrelimitação discutido em [2] obtém-se a família elipsoidal de plantas descrita por

$$P(s, \hat{q}, r) = \frac{N(s, \hat{q})}{D(s, r)} = \frac{s^2 + (0.4 + \hat{q}_2)s + (0.04 + \hat{q}_1)}{s^2 + 0.01 + r}$$

$$P(s, 0, 0) = P_0(s) = \frac{N(s, 0)}{D(s, 0)} = \frac{s^2 + 0.4s + 0.04}{s^2 + 0.01}$$

$$\hat{q}_2^2 + \hat{q}_1^2 \leq \rho^2, \quad v_0^2 r^2 \leq \rho^2, \quad \rho = 0.082, \quad v_0 = 41$$

É verificado, pelos conjuntos espectrais do numerador e do denominador da planta $P(s, \hat{q}, r)$, conforme mostra a figura 2.3, que não há cancelamento pólo-zero instável com esta variação admissível de parâmetros e, portanto, um compensador estabilizante pode existir. Neste sistema, em particular, o cancelamento pólo-zero instável ocorre somente para $\rho = 0.4$. Objetiva-se agora a determinação do controlador $C(s)$ que minimiza a norma H_∞ da função de sensibilidade mista para a planta $P(s, 0, 0)$.

De acordo com (2.13) e (2.14), as funções de ponderação podem ser escolhidas tais que

$$|VW_1| \geq \left| \frac{1}{s^2 + 0.01} \right|, \quad |VW_2| \geq \left| \frac{s + 1}{s^2 + 0.4s + 0.04} \right|$$

para $s = j\omega$.

De acordo com [36] $V(s) = M(s)/D_0(s)$ deve ser biprópria, com $M(s)$ tendo como raízes o lugar no plano complexo onde se deseja alocar os pólos dominantes do sistema em malha fechada, $M(s) = s^2 + 1.5s + 0.463$ por exemplo; $W_1(s) = A_1(s)/B_1(s)$ e $W_2(s) = A_2(s)/B_2(s)$ são escolhidas como: $A_1(s) = 1$, $B_1(s) = s + 0.463$, $A_2(s) = s^2 + 5s + 1$ e $B_2(s) = s + 1.5$. Após minimizar (2.15) usando o procedimento desenvolvido para o projeto de controlador \mathcal{H}_∞ em [36], obtém-se $\delta^* = 59.1945$, e portanto a partir de (2.16) resulta $\rho^* = 0.0919$. Como a variação máxima admitida é $\rho = 0.082$, isto significa que o controlador obtido seria capaz de manter a estabilidade do sistema em malha fechada para todas as possibilidades de variações paramétricas admissíveis. A função de transferência do controlador é dada por:

$$C^*(s) = \frac{3.4837s + 5.2255}{s^2 + 2.6210s + 0.0992}$$

Contudo a condição para $\omega = 0$, calculada a posteriori para esse controlador, estabelece que a máxima variação não deve exceder a $\rho_0 = 0.004$.

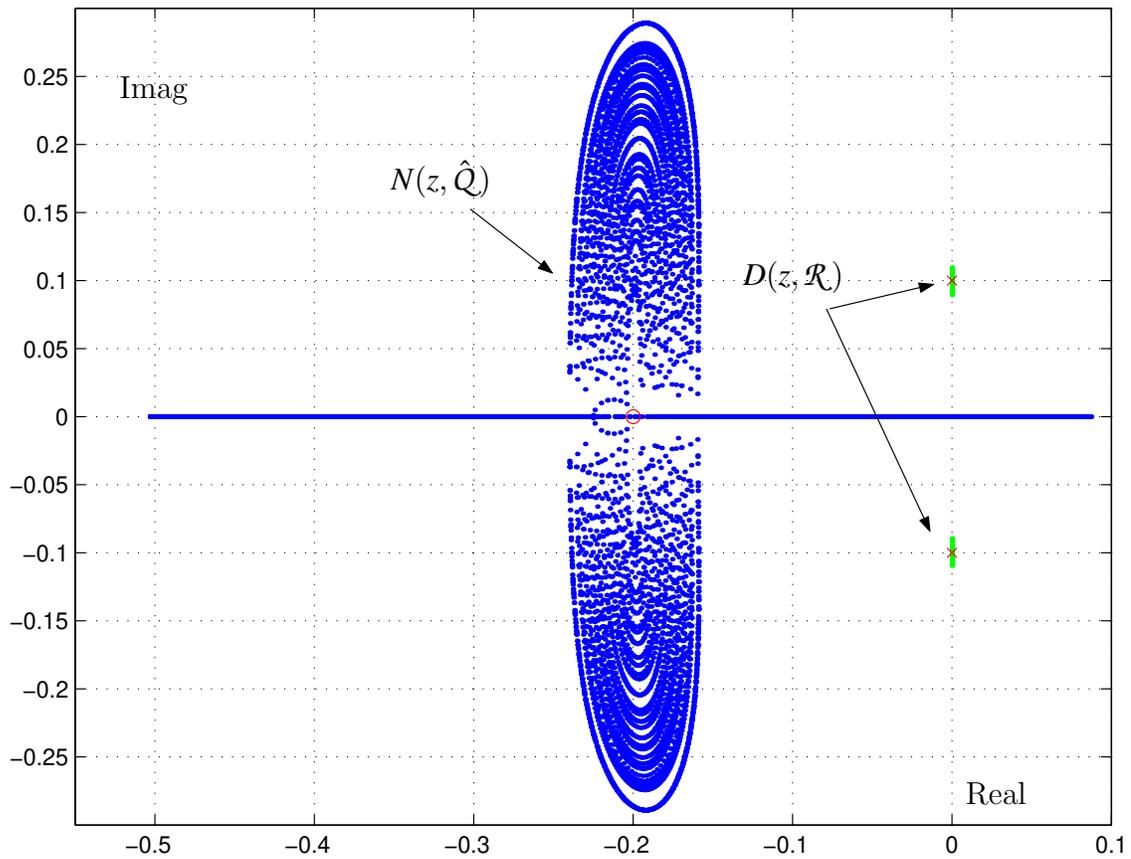


Figura 2.3: Conjunto espectral do numerador e do denominador de $P(s, \hat{q})$

2.4 Conclusão

Este capítulo abordou o problema do projeto de controladores \mathcal{H}_∞ para famílias esféricas de plantas. A escolha adequada para as funções de ponderação permitiu obter uma expressão analítica que fornece uma variação paramétrica admissível na planta tal que a mesma permaneça estável em malha fechada. O resultado teórico foi aplicado a um exemplo proposto na literatura.

Capítulo 3

Uma nova condição LMI para estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais

Uma condição suficiente para a estabilidade robusta de um politopo de matrizes polinomiais é apresentada. O resultado é baseado em desigualdades matriciais lineares formuladas nos vértices do politopo de incertezas que, se factíveis, fornecem uma função de Lyapunov dependente de parâmetro que garante a estabilidade de qualquer polinômio matricial no domínio de incertezas. São analisados os casos de estabilidade a tempo contínuo (semi-plano esquerdo) e a tempo discreto (círculo unitário). Experimentos numéricos mostram que as condições propostas produzem resultados menos conservadores quando comparados aos obtidos com a estabilidade quadrática e aos de um outro método recente da literatura.

3.1 Introdução

Matrizes polinomiais constituem um ferramental importante para o estudo de sistemas de controle. A dinâmica de muitos sistemas é descrita de maneira mais natural através de representações lineares fracionais ou por matrizes cujos coeficientes são polinômios [31], e várias abordagens de análise e de controle de sistemas se baseiam

em matrizes polinomiais (por exemplo, a abordagem polinomial [35] e a abordagem comportamental [51]).

Em uma descrição por frações de matrizes, a matriz polinomial do denominador fornece informações sobre a dinâmica e a estabilidade do sistema [30], e o posicionamento dos zeros da matriz polinomial do denominador está associado a especificações de desempenho [1].

Na presença de parâmetros incertos, a análise da estabilidade robusta de sistemas dinâmicos passa pela verificação da estabilidade de matrizes polinomiais incertas, e uma das formas mais gerais de representação de incertezas paramétricas é a politópica [2]. Nas duas últimas décadas, inúmeros trabalhos sobre controle robusto para sistemas lineares incertos representados por modelos de estado e também por modelos freqüenciais têm surgido, e uma das metodologias mais empregadas é a baseada em funções de Lyapunov (veja por exemplo [2], [5] e [8]). Uma boa discussão sobre a importância de matrizes polinomiais, a análise da estabilidade robusta de polinômios e a evolução dos métodos numéricos para a verificação das condições de estabilidade pode ser encontrada em [28] e [29]. Para um estudo mais aprofundado sobre a natureza e propriedades gerais das matrizes polinomiais recomenda-se [26].

Testes de estabilidade para polinômios têm tido destaque na literatura especializada nos últimos anos, como por exemplo o resultado de Kharitonov [33] para polinômios com coeficientes definidos por intervalos, ou o teorema das bordas [3] para politopos de polinômios. Veja também [2] e [5] para maiores detalhes sobre estabilidade robusta de polinômios. Entretanto, a extensão desses resultados para tratar politopos de matrizes polinomiais não parece ser imediata, e testes conclusivos sobre a estabilidade de famílias de polinômios cujos coeficientes são funções multilineares dos parâmetros de incertezas são problemas NP-difíceis [7].

Em [28], condições formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *LMIs — Linear Matrix Inequalities*) recentemente publicadas na literatura para testar a estabilidade de um politopo de matrizes [25], [12], [43] foram estendidas para o caso de politopos de matrizes polinomiais. Mais recentemente, novas condições LMI menos conservadoras foram publicadas para a análise de estabilidade de sistemas lineares discretos [44] e contínuos no tempo [45], [46].

Neste trabalho, condições suficientes para a estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais são formuladas em termos de LMIs, obtidas a partir da extensão dos resultados de [44], [45], [46]. Essas condições produzem resultados menos conser-

vadores que os obtidos com métodos baseados na estabilidade quadrática, e em geral, menos conservadores que os de [28], principalmente quando a complexidade (isto é, grau, ordem e número de vértices) dos politopos de matrizes polinomiais aumenta, como mostram os testes realizados com polinômios matriciais estáveis na seção de exemplos. A estabilidade robusta do politopo é assegurada por um simples teste de viabilidade de um conjunto de LMIs definidas nos vértices do domínio de incertezas, realizado de maneira eficiente com algoritmos de complexidade polinomial [24].

3.2 Preliminares

Considere uma matriz polinomial quadrada $A(s)$ de dimensão n e grau d com coeficientes complexos que se escreve

$$A(s) = A^0 + A^1 s + \dots + A^d s^d \quad (3.1)$$

Um zero de $A(s)$ pode ser definido [30] como o valor complexo ζ para o qual ocorre uma perda de posto da matriz $A(s)$, ou seja, $\text{posto } A(\zeta) < \text{posto } A(s)$, e pode ser determinado através do cômputo do determinante de $A(s)$. Definida uma subregião \mathcal{D} do plano complexo, o problema de análise da \mathcal{D} -estabilidade de $A(s)$ se resume a determinar condições para que os zeros de $A(s)$ pertençam a \mathcal{D} .

Dadas N matrizes polinomiais $A_1(s), \dots, A_N(s)$ de dimensão n e grau d , define-se o politopo \mathfrak{P} como sendo o conjunto de todas as matrizes polinomiais que se escrevem como

$$A(s, \lambda) = \lambda_1 A_1(s) + \dots + \lambda_N A_N(s); \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \quad (3.2)$$

O objetivo deste capítulo é estabelecer condições que garantam que o politopo \mathfrak{P} seja \mathcal{D} -estável, isto é, que todas as matrizes polinomiais $A(s, \lambda)$ sejam \mathcal{D} -estáveis. Uma definição bastante abrangente para domínios de estabilidade \mathcal{D} é dada por [28]

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}^* B \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} < 0 \right\} \quad (3.3)$$

com $[\cdot]^*$ representando o conjugado transposto de $[\cdot]$. A escolha da matriz $B = B^* \in \mathbb{C}^2$ define a região a ser estudada. Neste trabalho, as regiões consideradas são o semi-plano esquerdo (análise de estabilidade de sistemas contínuos no tempo) e o círculo

unitário (estabilidade de sistemas discretos no tempo), descritas respectivamente pelas matrizes

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Para detalhes referentes a outras formas de definição de regiões do plano complexo, veja [9], [29], [43]. Por simplicidade, e sem perda de generalidade, assume-se que não há no politopo \mathfrak{P} matrizes polinomiais com zeros no infinito, e também que o termo de grau d é uma matriz identidade de dimensão n denotada por \mathbf{I}_n [29].

Antes de passar aos resultados de estabilidade de matrizes polinomiais e à condição de estabilidade robusta proposta neste trabalho, defina a matriz constante $\mathcal{A}_j \in \mathbb{C}^{n \times (d+1)n}$ como

$$\mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} A_j^0 & A_j^1 & \cdots & A_j^d \end{bmatrix} \quad , \quad A_j^d = \mathbf{I}_n \quad (3.5)$$

contendo as matrizes coeficientes associadas com a matriz polinomial

$$A_j(s) = A_j^0 + A_j^1 s + \cdots + \mathbf{I}_n s^d \quad (3.6)$$

de dimensão n e grau d . Denotando por $\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} \in \mathbb{C}^{(d+1)n \times dn}$ uma base do espaço nulo à direita da matriz \mathcal{A}_j , ou seja, $\mathcal{A}_j \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} = 0$, e lembrando que por hipótese $A^d = \mathbf{I}_n$, tem-se

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}_n \\ -A_j^0 & -A_j^1 & \cdots & -A_j^{d-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Note que, utilizando a estrutura acima para a matriz $\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}$, tem-se que $\mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}$ é uma base para o espaço nulo à direita de $\mathcal{A}(\lambda)$ dado por

$$\mathcal{A}(\lambda) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{A}_j \quad ; \quad \lambda_j \geq 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \quad (3.8)$$

que se escreve

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}_n \\ -\sum_{j=1}^N \lambda_j A_j^0 & -\sum_{j=1}^N \lambda_j A_j^1 & \cdots & -\sum_{j=1}^N \lambda_j A_j^{d-1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Finalmente, defina a matriz de projeção $\mathcal{R} \in \mathbb{C}^{2dn \times (d+1)n}$ dada por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e denote \otimes como produto de Kronecker [30].

3.3 Condições para a Estabilidade do Politopo \mathfrak{P}

Nesta seção, são apresentadas condições de estabilidade de matrizes polinomiais precisamente conhecidas, e condições de estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais (estabilidade quadrática e uma condição suficiente de estabilidade robusta) sem especificar a região \mathcal{D} investigada (deixando portanto em função da matriz B definida em (3.3)), conforme apresentado em [28]. A partir desses resultados já conhecidos, serão enunciados os teoremas que constituem a principal contribuição deste trabalho.

LEMA 3.1 *A matriz polinomial precisamente conhecida $A_j(s)$ é estável se e somente se existir uma matriz $P_j \in \mathbb{C}^{dn \times dn}$ solução do problema de viabilidade das LMIs:*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^* (B \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} < 0 \quad (3.11)$$

$$P_j = P_j^* > 0 \quad (3.12)$$

Prova: Veja [29].

LEMA 3.2 *O politopo de matrizes polinomiais \mathfrak{P} é robustamente estável se existirem matrizes $P_j \in \mathbb{C}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$ e $Q \in \mathbb{C}^{2dn \times n}$ solução do problema de viabilidade das LMIs:*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{A}_j \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B \otimes P_j & Q \\ Q^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{A}_j \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.13)$$

$$P_j = P_j^* > 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.14)$$

Prova: A prova pode ser vista em [28]. A idéia principal (originalmente proposta em [25]) é explorar a existência da variável Q , que representa um grau de liberdade a mais no problema e que é comum às LMIs dadas na equação (3.13), para construir uma condição de estabilidade simultaneamente linear em A_j e P_j . Note que (3.13) pode ser reescrita como

$$\mathcal{R}^*(B \otimes P_j)\mathcal{R} + \mathcal{A}_j^* Q^* \mathcal{R} + \mathcal{R}^* Q \mathcal{A}_j < 0 \quad (3.15)$$

que, multiplicada termo a termo por λ_j e somada sobre todos os j 's, fornece

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{A}(\lambda) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B \otimes P(\lambda) & Q \\ Q^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{A}(\lambda) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

com $\mathcal{A}(\lambda)$ dada em (3.8) e

$$P(\lambda) = P(\lambda)^* = \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j > 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \quad (3.17)$$

A partir de (3.16), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}^* \begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{A}(\lambda) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B \otimes P(\lambda) & Q \\ Q^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{A}(\lambda) \end{bmatrix} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} &= \\ &= \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}^* \mathcal{R}^*(B \otimes P(\lambda))\mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} < 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usando-se o resultado do LEMA 3.1, conclui-se que a matriz polinomial $A(s, \lambda)$ dada em (3.2) é estável para todo λ admissível e, portanto, o politopo \mathfrak{P} é estável. \square

Uma condição mais conservadora para a estabilidade robusta do politopo \mathfrak{P} é obtida quando se exige, no LEMA 3.2, que $P = P_1 = P_2 = \dots = P_N$, resultando na condição enunciada no lema a seguir (estabilidade quadrática de politopos de matrizes polinomiais).

LEMA 3.3 *O politopo de matrizes polinomiais \mathfrak{P} é quadraticamente estável se e somente se existirem matrizes $P \in \mathbb{C}^{dn \times dn}$ e $Q \in \mathbb{C}^{2dn \times n}$ solução do problema de viabilidade das LMIs:*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{A}_j \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B \otimes P & Q \\ Q^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{A}_j \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.19)$$

$$P = P^* > 0 \quad (3.20)$$

Prova: A partir dos resultados anteriores e por analogia com o conceito de estabilidade quadrática de sistemas lineares, a prova é imediata [28].

Note que a estabilidade de um politopo de matrizes polinomiais descrito por $\mathcal{A}(\lambda)$ pode ser verificada através da expressão que está no lado direito de (3.18), isto é, se para todo λ considerado no domínio de incertezas existir uma matriz $P(\lambda) = P(\lambda)^* > 0$ verificando

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}^* \mathcal{R}^*(B \otimes P(\lambda)) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} < 0 \quad (3.21)$$

então o politopo é estável.

Usando o LEMA 3.1, pode-se analisar um ponto precisamente conhecido dentro do domínio e, com o LEMA 3.3, constata-se a estabilidade quadrática do politopo. O LEMA 3.2 estabelece uma condição suficiente para que a combinação convexa das matrizes $P_j = P_j^* > 0$ forneça uma matriz $P(\lambda)$ solução de (3.21). Através do LEMA 3.2, a condição (3.21) pode ser testada sem a necessidade de uma discretização exaustiva do espaço de parâmetros λ (apenas a viabilidade das LMIs descritas nos N vértices do politopo precisa ser verificada). Note também que, para as duas regiões de estabilidade descritas através das matrizes B_c e B_d em (3.4), a estabilidade quadrática do politopo de matrizes polinomiais poderia ser investigada diretamente através da existência de uma mesma matriz $P = P^* > 0$ satisfazendo a expressão (3.21) nos vértices do politopo, sem portanto a necessidade da matriz Q e da formulação aumentada do LEMA 3.3.

Os teoremas a seguir fornecem novas condições suficientes para que $P(\lambda)$ dado por (3.17) satisfaça (3.21). O resultado é uma extensão de condições recentemente publicadas para análise de estabilidade robusta de politopos de matrizes [44], [45], [46].

TEOREMA 3.1 (caso contínuo): *O politopo de matrizes polinomiais \mathfrak{P} é robustamente estável se existirem matrizes $P_j \in \mathbb{C}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$, solução do problema de viabilidade das LMIs:*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_c \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} < -\mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.22)$$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_c \otimes P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} + \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k}^* \mathcal{R}^*(B_c \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k} < \frac{2}{N-1} \mathbf{I} \quad (3.23)$$

$$j = 1, \dots, N-1 \quad ; \quad k = j+1, \dots, N$$

$$P_j = P_j^* > 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.24)$$

com B_c , $\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}$ e \mathcal{R} dados, respectivamente, em (3.4), (3.7) e (3.10). No caso afirmativo, $P(\lambda)$ dada por (3.17) é definida positiva e satisfaz (3.21) para todo $\mathcal{A}(\lambda)$.

Prova: É claro que $P(\lambda)$ dada por (3.17) é definida positiva. Utilizando $A(\lambda)$ dado em (3.8) e desenvolvendo (3.18) com B_c , $\mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}$ e \mathcal{R} dados respectivamente em (3.4), (3.9) e (3.10), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}^* \mathcal{R}^*(B_c \otimes P(\lambda)) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_c \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} + \\ &\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \lambda_j \lambda_k \left(\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_c \otimes P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} + \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k}^* \mathcal{R}^*(B_c \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Impondo as condições (3.22)-(3.23) do teorema (note que $\lambda_j \lambda_k \geq 0$) tem-se

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}^* \mathcal{R}^*(B_c \otimes P(\lambda)) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} < - \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \lambda_j \lambda_k \frac{2}{N-1} \right) \mathbf{I} \leq 0 \quad (3.26)$$

pois a expressão dentro dos parênteses é sempre maior ou igual a zero. De fato,

$$0 \leq \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\lambda_j - \lambda_k)^2 = (N-1) \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \lambda_j \lambda_k \quad (3.27)$$

Algumas observações podem ser feitas sobre o resultado do Teorema 3.1. Primeiramente, é importante observar que não há perda de generalidade ao se impor que o lado direito da condição (3.22) seja menor que $-\mathbf{I}$, já que a expressão é homogênea em P_j e a estabilidade dos vértices do politopo é condição necessária para a estabilidade do domínio. Essa folga é utilizada na condição (3.23), à qual se permite que seja até definida positiva. Note também que, para polinômios matriciais precisamente conhecidos ($N = 1$), apenas a condição (3.22) precisa ser testada para $P_1 = P_1^* > 0$, recaindo-se portanto no resultado do Lema 3.1. Além disso, se existe uma mesma matriz $P = P^* > 0$ verificando as condições do LEMA 3.3 (ou seja, o politopo é quadraticamente estável), então $P = P_1 = P_2 = \dots = P_N$ é uma solução viável para (3.22), o que implica que (3.23) é sempre verificada neste caso. Como conclusão, as condições do TEOREMA 3.1 englobam a estabilidade quadrática como um caso particular. Em termos de complexidade, métodos de resolução baseados em pontos interiores requerem um número de operações em ponto flutuante da ordem de $O(K^3L)$, sendo K o número de variáveis escalares envolvidas no problema e L o número de linhas das LMIs [8], [24]. Embora o número de variáveis escalares envolvidas no Teorema 3.1

$(Ndn(dn+1)/2)$ seja menor do que no LEMA 3.2 $(Ndn(dn+1)/2+2dn^2)$, o número de LMIs, dado por $N(N+3)/2$, cresce com N^2 e esse fator torna-se preponderante para N grande ($N > 20$). Finalmente, é interessante observar que, assim como o resultado do LEMA 3.2 recai na análise de estabilidade robusta de sistemas com incerteza politópica [43] para $A_j(s) = A_j - s\mathbf{I}_n$ com $j = 1, \dots, N$, as condições do TEOREMA 3.1 também se reduzem ao resultado de [45], [46]. Este fato é verificado, por manipulação algébrica elementar, substituindo $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j}^* = [I \ A_j^*]$ e $\mathcal{R} = I_{2n}$ em (3.22) e (3.23).

TEOREMA 3.2 (caso discreto): *O politopo de matrizes polinomiais \mathfrak{P} é robustamente estável se existirem matrizes $P_j \in \mathbb{C}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$, soluções do problema de viabilidade das LMIs:*

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j} < -\mathbf{I} \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_k} + \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_k}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j} + \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j} \\ & < \frac{1}{(N-1)^2} \mathbf{I}, \quad j = 1, \dots, N, \quad k \neq j, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_\ell} + \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_\ell}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j} + \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_k}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_\ell} + \\ & \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_\ell}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_k} + \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_\ell) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_k} + \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_k}^* \mathcal{R}^* (B_d \otimes P_\ell) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j} \\ & < \frac{6}{(N-1)^2} \mathbf{I}, \quad j = 1, \dots, N-2, \quad k = j+1, \dots, N-1, \quad \ell = k+1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$P_j = P_j^* > 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.31)$$

com B_d , $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}_j}$ e \mathcal{R} dados, respectivamente, em (3.4), (3.7) e (3.10). No caso afirmativo, $P(\lambda)$ dada por (3.17) é definida positiva e satisfaz (3.21) para todo $\mathfrak{A}(\lambda)$.

Prova: Claramente, $P(\lambda)$ dada por (3.17) é definida positiva pois (3.31) é verificada. Utilizando $A(\lambda)$ dado em (3.8) e desenvolvendo (3.21) com $B = B_d$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}(\lambda)}$ e \mathcal{R} dados

respectivamente por (3.4), (3.9) e (3.10), e usando-se o fato que $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$ tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P(\lambda)) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^3 \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} + \\
&\sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \lambda_j^2 \lambda_k \left(\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k} + \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} + \right. \\
&\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} \left. + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \lambda_j \lambda_k \lambda_\ell \left(\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_\ell} + \right. \right. \\
&\mathcal{N}_{\mathcal{A}_\ell}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_k) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} + \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_\ell} + \mathcal{N}_{\mathcal{A}_\ell}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_j) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k} + \\
&\left. \left. \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_\ell) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k} + \mathcal{N}_{\mathcal{A}_k}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P_\ell) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}_j} \right) \right) \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Impondo as condições (3.28)-(3.30) e lembrando que $\lambda_j \geq 0, \forall j$ resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)}^* \mathcal{R}^*(B_d \otimes P(\lambda)) \mathcal{R} \mathcal{N}_{\mathcal{A}(\lambda)} &< - \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \lambda_j^2 \lambda_k \right. \\
&\left. - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \lambda_j \lambda_k \lambda_\ell \right) \mathbf{I} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Para analisar o sinal da expressão dentro dos parênteses acima, usando o resultado de [44], defina os escalares Θ e Ω como sendo:

$$0 \leq \Theta \triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \lambda_j (\lambda_j - \lambda_k)^2 = (N-1) \sum_{j=1}^N \lambda_j^3 - \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \lambda_j^2 \lambda_k \quad (3.34)$$

$$0 \leq \Omega \triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N-1} \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \neq j, k}}^N \lambda_j (\lambda_k - \lambda_\ell)^2 = (N-2) \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \lambda_j^2 \lambda_k - 6 \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \lambda_j \lambda_k \lambda_\ell \quad (3.35)$$

e compute $(N-1)\Theta + \Omega \geq 0$, que se escreve

$$(N-1)^2 \sum_{j=1}^N \lambda_j^3 - \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \lambda_j^2 \lambda_k - 6 \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \lambda_j \lambda_k \lambda_\ell \geq 0 \quad (3.36)$$

implicando que o termo dentro dos parênteses em (3.33) é sempre positivo, e que (3.21) é válida, e portanto o teorema está provado.

Assim como no caso contínuo, pode-se impor, sem perda de generalidade, que o lado direito de (3.28) seja menor que $-\mathbf{I}$ (condição necessária para a estabilidade, que define uma pequena folga para os termos cruzados j, k e ℓ , explorada pelo teorema).

Note também que o resultado do TEOREMA 3.2 engloba a estabilidade quadrática como um caso particular, pois se existe uma $P = P^* = P_1 = P_2 = \dots = P_N > 0$ satisfazendo (3.28), então (3.29) e (3.30) são sempre satisfeitas. Para $N = 1$, apenas (3.28) precisa ser verificada (recaindo-se no resultado do LEMA 3.1), e obviamente a condição (3.30) só precisa ser considerada nos casos em que $N \geq 3$. Note que, no caso discreto, houve um aumento da complexidade em relação ao resultado do TEOREMA 3.1, pois embora o número de variáveis escalares tenha se mantido igual a $Ndn(dn + 1)/2$, o número de LMIs agora é dado por $(N^3 + 3N^2 + 8N)/6$. Finalmente, observe que no caso de matrizes polinomiais na forma $A_j(s) = A_j - s\mathbf{I}_n$ com $j = 1, \dots, N$, as condições do TEOREMA 3.2 também se reduzem ao resultado de estabilidade robusta de sistemas discretos [44]. Novamente, por manipulação algébrica elementar, basta substituir $\mathcal{N}_{\mathcal{A}_j}^* = [I \ A_j^*]$ e $\mathcal{R} = I_{2n}$ em (3.28), (3.29) e (3.30).

Apesar de apenas o semi-plano esquerdo e o círculo unitário centrado na origem terem sido investigados neste trabalho, outras regiões de estabilidade poderiam ser analisadas, resultando em extensões dos teoremas 3.1 e 3.2 para diferentes matrizes B . Por exemplo, a \mathcal{D} -estabilidade de politopos de matrizes polinomiais em relação a um círculo de raio r , com centro em $(-d - r, 0)$, deslocado de uma distância d à esquerda do eixo imaginário, como descrito em [27], poderia ser investigada através das condições do Teorema 3.2, trocando-se B_d por

$$B_{rd} = \begin{bmatrix} 2d + d^2/r & 1 + d/r \\ 1 + d/r & 1/r \end{bmatrix}$$

3.4 Exemplos

Uma comparação numérica utilizando-se valores de $n \in [1, 4]$, $d \in [2, 4]$ e $N \in [2, 5]$ foi realizada para os casos contínuo e discreto no tempo. Para cada situação 100 politopos de matrizes polinomiais foram gerados (no caso escalar, isto é, $n = 1$, foram 1000 politopos de polinômios para $d \in [2, 7]$ e $N \in [2, 7]$) adotando-se o seguinte procedimento: i) Os vértices do politopo são gerados com matrizes cujos elementos são números reais uniformemente distribuídos no intervalo $[-1, 1]$; ii) Para cada vértice, é garantido inicialmente pelo menos um zero com parte real no intervalo $[-5 \times 10^{-2}, -1 \times 10^{-5}]$ (caso contínuo) ou valor absoluto no intervalo $[0.95, 0.98]$ (caso discreto). iii) Os zeros dos politopos são calculados através de uma varredura fina e determina-se o zero com maior parte real σ_{max} (caso contínuo) ou maior valor absoluto

r_{max} (caso discreto). Em seguida todo o politopo é deslocado de maneira a garantir que exista pelo menos um zero com parte real no intervalo $[-0.001, -1 \times 10^{-5}]$ (caso contínuo) ou com valor absoluto no intervalo $[0.98, 0.999]$ (caso discreto). O deslocamento é feito substituindo-se s por $s + \sigma_{max} + \epsilon$ (caso contínuo) ou s por $s/(r_{max}/\epsilon)$ (caso discreto). Esta estratégia foi adotada visando compor um conjunto de politopos estáveis porém próximos da fronteira de instabilidade.

Quando os politopos gerados possuem zeros muito distantes da fronteira de instabilidade, os resultados do LEMA 3.2, TEOREMA 3.1 e TEOREMA 3.2 são praticamente iguais. Por outro lado, se esses zeros estiverem muito próximos da fronteira de instabilidade, o critério quadrático praticamente não obtém êxito. Por esse motivo, para “calibração” estabeleceu-se como referência o número de politopos detectados pelo critério de estabilidade quadrática. Para os politopos escalares com $N = 2$ e $d = 2$ e para os politopos matriciais no caso contínuo com $N = 2$, $n = 2$ e $d = 2$, um número em torno de 30%. Para os politopos matriciais no caso discreto este percentual de acerto ficou em torno de 20%. Com esses critérios os resultados do LEMA 3.2, TEOREMA 3.1 e TEOREMA 3.2 tornam-se distinguíveis.

As tabelas 3.1 e 3.3(a) mostram os resultados para o caso contínuo. A condição do LEMA 3.3 (L3) é sem dúvida a mais conservadora (de fato, o LEMA 3.2 e o TEOREMA 3.1 englobam os resultados de L3). Em geral, o TEOREMA 3.1 (T1) fornece resultados menos conservadores do que o LEMA 3.2 (L2). Embora L2 forneça resultados um pouco melhores do que T1 para casos de dimensões pequenas, com o aumento da complexidade essa tendência se inverte. Para o caso escalar ($n = 1$), T1 identifica mais politopos estáveis do que L2 em 18 dos 36 casos (12 empates), com percentagens relativas de 0.1% a 22.7% (média de 5.0%). Quando L2 ganha (somente 6 casos) as percentagens vão de 0.5% a 6.8% (média de 3.1%). Para $n = [2, 4]$, L2 identifica mais politopos estáveis somente em 3 casos, com percentagens relativas de 1.0% a 4.0% com média de 2.8%. T1 ganha em 26 casos (7 empates), com percentagens relativas de 2.1% a 72.4% (média de 35.1%).

Os resultados para o caso discreto são muito similares, como mostrado nas tabelas 3.2 e 3.3(b). Novamente, L3 constitui-se no teste mais conservador. L2 fornece resultados levemente melhores no caso escalar ($n = 1$), identificando mais politopos estáveis em 14 dos 36 experimentos (11 empates), com percentagens relativas de 0.1% a 5.1% (média de 1.2%). O TEOREMA 3.2 (T2) acerta em 11 casos, com percentagens relativas de 0.1% a 2.2% (média de 0.9%). T2 torna-se mais efetivo nas avaliações

quando a complexidade dos testes aumenta, vencendo, para $n = [2, 4]$, em 23 casos dos 36 pesquisados (2 empates), com percentagens relativas de 1.0% a 34.2% (média de 10.2%). Já L2 fornece resultados positivos em 11 casos, com percentagens relativas de 1.0% a 5.1% (média de 2.2%).

Três exemplos particulares foram também investigados. No primeiro, foi gerado um polinômio escalar ($n = 1$) com coeficientes confinados a determinados intervalos. O objetivo deste exemplo é mostrar que com o aumento da complexidade do problema (associada ao aumento do número de vértices do politopo), a condição apresentada em L2 pode falhar, enquanto que T1 confirma a estabilidade do politopo. O politopo de polinômios escalares sob análise é descrito como

$$a(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + s^4$$

com coeficientes α_i , $i = 0, \dots, 3$, pertencendo aos seguintes intervalos

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\in [0.0683, 3500.4237] & \alpha_1 &\in [683.9193, 1476.1494] \\ \alpha_2 &\in [220.2668, 279.9684] & \alpha_3 &\in [25.024, 26.5218] \end{aligned}$$

Usando-se o resultado de Kharitonov [33], sabe-se que para concluir sobre a estabilidade do politopo considerado é necessário e suficiente testar apenas os quatro polinômios

$$\begin{aligned} a_1(s) &= 0.0683 + 683.9193s + 279.9684s^2 + 26.5218s^3 + s^4 \\ a_2(s) &= 3500.4237 + 1476.1494s + 220.2668s^2 + 25.024s^3 + s^4 \\ a_3(s) &= 3500.4237 + 683.9193s + 220.2668s^2 + 26.5218s^3 + s^4 \\ a_4(s) &= 0.0683 + 1476.1494s + 279.9684s^2 + 25.024s^3 + s^4 \end{aligned}$$

Tanto L2 quanto T1 concluem positivamente sobre a estabilidade do politopo formado pelos polinômios $\{a_1(s), a_2(s), a_3(s), a_4(s)\}$. Entretanto, L2 falha ao serem considerados todos os $N = 16$ vértices existentes no problema, o que não ocorre com T1.

Como segundo exemplo, foi considerado um politopo de matrizes polinomiais, caso contínuo no tempo, de dimensão $n = 2$, grau $d = 2$ e vértices $N = 3$ dados por

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.73 & -0.14 & 0.69 & -0.60 & 1 & 0 \\ -0.98 & 0.94 & -0.08 & 1.09 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.62 & 0.56 & 0.37 & 0.74 & 1 & 0 \\ 0.27 & 0.73 & -0.17 & 0.15 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.12 & 0.18 & -0.07 & 1 & 0 \\ 0.36 & 0.26 & 0.84 & 0.80 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os testes baseados na estabilidade quadrática (L3) e na estabilidade robusta de L2 falharam, mas T1 obteve uma solução viável:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 42.2 & -7.9 & 33.1 & 7.6 \\ -7.9 & 35.7 & -17.0 & 16.4 \\ 33.1 & -17.0 & 55.6 & 5.4 \\ 7.6 & 16.4 & 5.4 & 35.4 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 19.7 & 15.6 & 10.4 & 2.8 \\ 15.6 & 48.9 & 6.1 & 4.4 \\ 10.4 & 6.1 & 48.3 & 0.1 \\ 2.8 & 4.4 & 0.1 & 77.5 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 48.2 & 12.7 & -2.2 & 29.7 \\ 12.7 & 16.1 & -2.9 & 26.1 \\ -2.2 & -2.9 & 34.1 & -9.1 \\ 29.7 & 26.1 & -9.1 & 49.0 \end{bmatrix}$$

garantindo a estabilidade robusta do politopo, como pode ser verificado na figura 3.1.

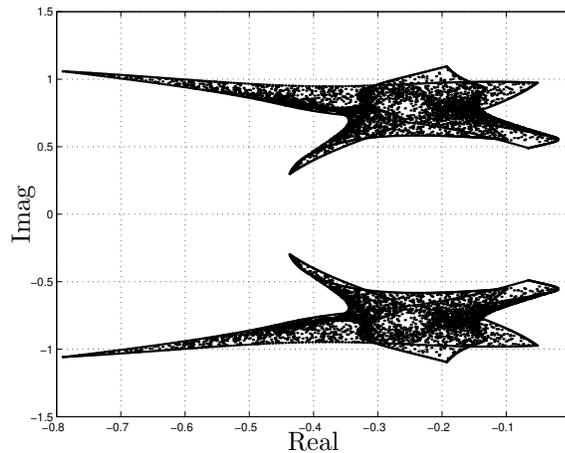


Figura 3.1: Lugar das raízes para politopo do exemplo contínuo.

Para o terceiro e último exemplo, como ilustração do caso discreto, foi gerado um politopo de matrizes polinomiais com $n = 2$, $d = 2$ e $N = 3$ vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.76 & 0.90 & 0.21 & 1 & 0 \\ 0.34 & 0.65 & -0.43 & -0.42 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.60 & -0.52 & -0.01 & 0.30 & 1 & 0 \\ -0.65 & 0.59 & 0.31 & -0.79 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.18 & -0.62 & -0.83 & -0.41 & 1 & 0 \\ 0.35 & -0.42 & 0.21 & 0.29 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O lugar das raízes está mostrado na figura 3.2. Também nesse caso, falharam os testes

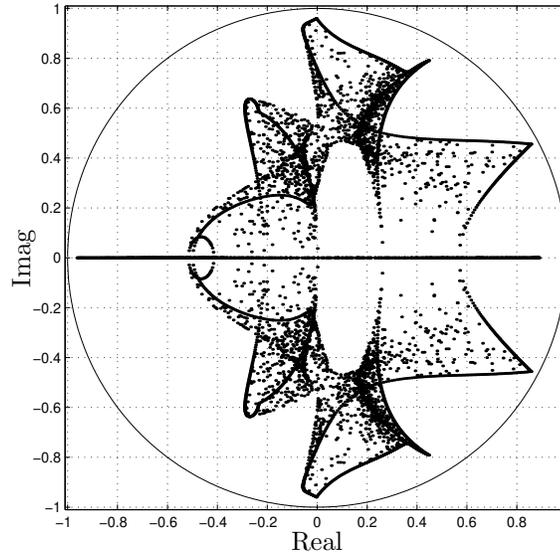


Figura 3.2: Lugar das raízes para politopo do exemplo discreto.

de L2 e L3, e apenas T2 forneceu solução viável:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 181.0 & 148.5 & 73.8 & -119.4 \\ 148.5 & 225.6 & 136.3 & -68.4 \\ 73.8 & 136.3 & 158.1 & 2.7 \\ -119.4 & -68.4 & 2.7 & 175.0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 256.1 & 50.9 & 52.8 & 42.0 \\ 50.9 & 103.9 & 23.0 & -37.6 \\ 52.8 & 23.0 & 335.3 & 69.6 \\ 42.0 & -37.6 & 69.6 & 149.1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 88.4 & -4.4 & -61.4 & 13.4 \\ -4.4 & 298.1 & 10.6 & -47.8 \\ -61.4 & 10.6 & 260.1 & 130.9 \\ 13.4 & -47.8 & 130.9 & 427.9 \end{bmatrix}$$

É importante ressaltar que, embora as condições L2 e as propostas neste trabalho (T1 e T2) contenham o teste de estabilidade quadrática (L3) como um caso particular,

L2 e T1/T2 são condições suficientes independentes. Em outras palavras, podem existir politopos estáveis identificados por T1/T2 mas não por L2 e vice-versa. A análise numérica apresentada mostra que, com o aumento na complexidade dos testes (n , d e N crescentes), as condições T1/T2 reconhecem mais politopos estáveis do que L2.

Os testes foram realizados em um AMD K7 Athlon 1.4 GHz com 256 Mbytes de memória RAM usando MATLAB e o pacote *LMI Control Toolbox* [24]. O tempo médio de CPU gasto em cada teste de politopo é mostrado na tabela 3.4 (considerando somente os casos em que o tempo gasto foi maior ou igual a 0.1 segundos). O tempo médio para L3 foi computado independentemente da existência ou não de uma solução viável; para L2, T1 e T2, somente avaliações factíveis foram consideradas.

3.5 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentadas novas condições suficientes para análise de estabilidade de politopos de matrizes polinomiais, para sistemas contínuos e discretos no tempo, que se mostraram de maneira geral menos conservadoras que as existentes na literatura. A estabilidade robusta do politopo deriva de um simples teste de viabilidade de LMIs descritas apenas em função dos vértices do politopo, que pode ser realizado de maneira eficiente por métodos numéricos de complexidade polinomial.

d	2			3			4			5			6			7		
	N	L3	L2	T1	L3	L2												
2	331	1000	1000	367	1000	1000	349	1000	1000	327	1000	1000	322	1000	1000	296	998	1000
3	185	1000	1000	184	997	990	180	1000	1000	146	1000	1000	114	998	999	111	987	998
4	87	1000	1000	90	991	967	79	998	993	50	998	1000	47	984	998	24	958	999
5	57	1000	1000	51	990	958	41	992	995	14	990	997	24	965	999	15	915	998
6	24	1000	1000	33	980	932	19	979	987	13	974	996	11	915	998	5	855	999
7	17	1000	1000	20	969	903	7	970	978	7	925	993	4	860	996	4	772	999

Tabela 3.1: Politopos estáveis identificados para $n = 1$ (caso contínuo).

d	2			3			4			5			6			7		
	N	L3	L2	T2	L3	L2												
2	364	1000	1000	344	1000	1000	283	1000	1000	262	1000	1000	284	1000	1000	254	1000	1000
3	105	1000	991	55	1000	994	27	1000	998	33	1000	997	24	1000	1000	23	1000	1000
4	21	1000	985	8	993	986	2	995	995	2	999	998	3	1000	999	1	1000	1000
5	8	1000	981	3	971	983	0	992	989	1	993	991	0	999	998	0	1000	1000
6	2	1000	959	0	950	969	0	975	985	0	988	993	0	997	998	0	996	997
7	0	1000	949	0	925	946	1	973	981	0	987	993	0	994	998	0	994	998

Tabela 3.2: Politopos estáveis identificados para $n = 1$ (caso discreto).

n	d	2			3			4			2			3			4		
		L3	L2	T1	L3	L2	T1	L3	L2	T1	L3	L2	T2	L3	L2	T2	L3	L2	T2
2	2	28	100	96	23	98	97	20	98	98	16	99	94	13	99	99	8	100	99
	3	4	89	86	2	92	94	1	93	95	1	92	88	0	97	95	0	98	98
	4	2	76	90	1	80	89	0	78	96	0	80	81	0	90	92	0	93	96
	5	1	64	88	1	72	93	0	65	93	0	70	75	0	81	88	0	88	95
3	2	23	100	100	14	99	99	15	98	98	9	99	95	7	99	98	5	100	99
	3	2	80	92	2	81	96	1	84	97	1	88	87	0	95	96	0	97	98
	4	2	48	82	0	48	91	0	51	96	0	74	83	0	84	92	0	87	99
	5	2	40	90	1	40	87	1	44	95	0	58	74	0	72	90	0	80	97
4	2	27	96	96	14	97	97	16	98	98	5	99	96	4	100	99	4	100	99
	3	1	67	88	1	77	97	2	65	96	0	87	90	0	94	97	0	97	100
	4	0	43	86	0	37	92	0	50	94	0	72	83	0	87	92	0	89	99
	5	1	25	81	0	24	87	0	28	89	0	52	79	0	73	92	0	79	98

(a) Caso Contínuo

(b) Caso Discreto

Tabela 3.3: Polítopos estáveis identificados para $n = [2,4]$ e $d = [2,4]$ casos contínuo e discreto.

n	d	5			6			7			5			6			7		
		L3	L2	T1	L3	L2	T1	L3	L2	T1	L3	L2	T2	L3	L2	T2	L3	L2	T2
1	5	0.1	0.3	0.2	0.2	0.7	0.3	0.3	1.8	0.6	0.1	0.1	0.6	0.2	0.3	1.2	0.3	0.8	1.8
	6	0.1	0.4	0.2	0.2	1.1	0.5	0.4	3.5	1.1	0.1	0.2	1.2	0.2	0.5	2.0	0.4	1.5	3.6
	7	0.1	0.6	0.4	0.3	2.2	0.9	0.5	6.3	1.8	0.1	0.4	2.2	0.2	0.9	3.9	0.4	3.1	7.1
		2			3			4			2			3			4		
2	4	0.1	0.1	0.1	0.3	0.4	0.2	0.8	2.6	0.5	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3	0.6	0.8	1.5	1.6
	5	0.1	0.1	0.1	0.3	0.8	0.4	0.9	4.6	1.0	0.1	0.1	0.4	0.3	0.7	1.4	1.0	3.2	3.6
3	2	0.2	0.1	0.1	1.1	0.9	0.2	4.4	3.9	0.5	0.2	0.1	0.1	1.1	0.4	0.2	4.5	2.8	0.7
	3	0.4	0.3	0.1	1.7	2.8	0.4	7.6	13.2	1.4	0.3	0.2	0.2	1.6	1.8	1.0	7.2	9.7	3.5
	4	0.5	0.9	0.2	2.1	6.5	1.1	9.9	33.2	4.0	0.5	0.5	0.7	2.1	3.5	2.3	9.9	25.7	9.6
	5	0.6	1.4	0.3	2.9	12.6	1.8	12.3	47.5	7.3	0.6	0.9	1.4	2.8	9.1	6.1	12.3	39.3	20.1
4	2	1.0	0.6	0.1	6.6	5.1	0.4	30.8	25.0	1.9	1.1	0.4	0.2	6.7	3.5	0.7	28.4	17.3	2.9
	3	1.5	2.4	0.2	11.7	15.4	1.1	48.3	81.8	7.3	1.6	1.4	0.7	11.4	11.2	3.2	46.1	44.0	12.4
	4	2.0	6.7	0.6	15.5	35.4	2.8	61.2	197.3	21.3	2.1	3.4	2.2	15.0	28.4	9.1	58.7	100.8	36.4
	5	2.7	6.8	0.9	19.0	64.8	6.6	75.2	252.4	50.2	2.8	8.8	4.2	18.7	39.9	19.5	73.6	231.9	98.4

(a) Caso contínuo

(b) Caso discreto

Tabela 3.4: Tempo médio (segundos) para avaliação de um politopo estável para $n = [1, 4]$, $d = \{[5, 7], [2, 4]\}$ e $N = \{[5, 7], [2, 5]\}$ com L3, L2, T1 e T2.

Conclusão

Esta tese foi construída a partir de uma coletânea de artigos cujo ponto central é a análise da localização de zeros de certas famílias de polinômios com coeficientes reais. Este é um tema que se insere no conjunto de problemas da teoria de controle robusto. Basicamente o tema tratado aqui remete para a análise de sistemas com incertezas paramétricas estruturadas e sua abordagem foi fortemente embasada nos aspectos geométricos dos conjuntos de incertezas. As particularidades inerentes ao formato do conjunto de valores dos polinômios cujos coeficientes são limitados em intervalos, como no caso do capítulo 1, ou vinculados pela equação de uma elipsóide, como no capítulo 2, permitiram a dedução de funções limitantes. No capítulo 3, os vértices de um politopo no espaço das matrizes polinomiais, forneceram um número finito de testes a partir dos quais todo o comportamento da família poderia ser avaliado. Para reforçar estes propósitos os resultados foram aplicados a exemplos ilustrativos.

Mais especificamente, os objetivos do presente trabalho consistiram em tratar os seguintes assuntos:

- Construção dos envelopes de frequência da função de transferência a tempo discreto de uma família de plantas com incertezas em intervalos;
- Determinação de funções de ponderação apropriadas para o problema de sensibilidade mista levando em conta parâmetros incertos limitados por um conjunto elipsoidal;
- Desenvolvimento de um procedimento para a análise da estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais.

Os temas discutidos nesta tese estão centrados basicamente num contexto de análise, a possibilidade deles serem estendidos como aplicações em procedimentos de síntese de controladores robustos é objeto de interesse para futuras investigações. A

continuidade do trabalho, principalmente do conteúdo discutido no capítulo 3, tem rendido algumas outras publicações que estão, de certo modo, vinculadas a esta problemática. Esses trabalhos são listados a seguir, juntamente com seus respectivos resumos:

- “A new LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes”. [19] A sufficient condition for checking the robust stability of a polytope of polynomial matrices is proposed in this paper. A simple feasibility test performed in a convex set of linear matrix inequalities defined at the vertices of the polytope yields sufficient conditions for the robust stability of the entire domain. Both continuous-time (left half-plane) and discrete-time stability (unit disk) are investigated. Numerical comparisons with quadratic stability results and with another method recently appeared in the literature show that the conditions proposed provide, in general, less conservative results.
- “LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: a numerical comparison”. [15] In this paper, several numerical experiments are performed in order to compare three linear matrix inequalities based sufficient conditions for the robust stability of linear systems in polytopic domains. The conditions are the quadratic stability and two recently appeared robust stability conditions based on parameter dependent Lyapunov functions: one using extra variables and augmented equations and the other using a larger number of equations. From the examples, it is possible to infer about the conservativeness of the conditions and also about the cases in which an equivalence exists. Both continuous-time and discrete-time systems are investigated.
- “Estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo através de desigualdades matriciais lineares”. [14] Neste trabalho é feito um estudo comparativo entre condições suficientes para a análise de estabilidade de sistemas lineares discretos no tempo com incertezas politópicas formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares. A estabilidade robusta é garantida a partir da existência de uma função de Lyapunov: i) independente dos parâmetros (estabilidade quadrática); ii) dependente de parâmetros. No segundo caso, são apresentadas e comparadas duas abordagens recentes da literatura, que obtém a função de Lyapunov dependente de parâmetros a partir de um teste de viabilidade de um

conjunto de desigualdades matriciais lineares formuladas nos vértices do politopo de incertezas.

- “Uma nova condição LMI para estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais”. [20] Uma condição suficiente para a estabilidade robusta de um politopo de matrizes polinomiais é proposta neste artigo. O resultado é baseado em desigualdades matriciais lineares formuladas nos vértices do politopo de incertezas que, se factíveis, fornecem uma função de Lyapunov dependente de parâmetro que garante a estabilidade de qualquer polinômio matricial no domínio de incerteza. São analisados os casos de estabilidade a tempo contínuo (semiplano esquerdo) e a tempo discreto (círculo unitário). Experimentos numéricos mostram que as condições propostas produzem resultados menos conservativos quando comparadas a métodos recentes da literatura.
- “ \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions”. [16] In this paper, a linear matrix inequality approach to compute \mathcal{H}_2 guaranteed costs by means of parameter dependent Lyapunov functions is proposed. The uncertain linear systems are supposed to belong to convex bounded domains (polytope type uncertainty). Both continuous-time and discrete-time systems are investigated and the results are illustrated by means of numerical examples.
- “ \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions”. [17] A linear matrix inequality approach to compute \mathcal{H}_∞ guaranteed costs by means of parameter dependent Lyapunov functions is presented in this paper. The uncertain linear systems are supposed to belong to convex bounded domains (polytope type uncertainty). Less conservative evaluations are obtained, in both continuous-time and discrete-time systems, as illustrated by means of numerical examples.
- “Improved LMI conditions for \mathcal{D} -stability of polynomial matrix polytopes”. [37] Improved linear matrix inequality (LMI) conditions are given to test if the zeros of all polynomial matrices belonging to a polytope lie inside a specific convex region \mathcal{D} in the complex plane. These conditions, formulated at the vertices of the polytopic uncertainty domain, generalize and encompass recently appeared results.

Bibliografia

- [1] J. Ackermann. *Robust Control: Systems with Uncertain Parameters*. Springer Verlag, London, England, 1993.
- [2] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, USA, 1994.
- [3] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, e H. Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1:61–71, 1988.
- [4] S. Bhattacharyya, L. H. Keel, e S. P. Bhattacharyya. Robust stabilizer synthesis for interval plants using \mathcal{H}_∞ methods. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3003–3008, 1993.
- [5] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, e L. H. Keel. *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice-Hall Publishing Co., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [6] R. M. Biernacki, Hwang H, e S. P. Bhattacharyya. Robust stability with structured real parameter perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32:495–506, 1987.
- [7] V. D. Blondel e J. N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9):1249–1274, September 2000.
- [8] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.
- [9] M. Chilali e P. Gahinet. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, March 1996.

- [10] N. Cohen, A. Levkovich, P. de Oliveira, e E. Zeheb. Frequency response envelopes of a family of uncertain discrete-time systems. *Technion EE Dept, technical report 1304*, Haifa - Israel, January 2002.
- [11] K. B. Datta e V. V. Patel. \mathcal{H}_∞ – based synthesis for a robust controller of interval plants. *Automatica*, 32(11):1575–1579, 1996.
- [12] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, e J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [13] P. J. de Oliveira. Análise e controle de sistemas incertos definidos por intervalos de polinômios. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, novembro 1996.
- [14] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, e P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2884–2889, Natal, RN–Br, Setembro 2002.
- [15] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, e P. L. D. Peres. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: a numerical comparison. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 644–649, Las Vegas–USA, December 2002.
- [16] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, e P. L. D. Peres. \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 2002. submitted.
- [17] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, e P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. In *4th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Milan, Italy, June 2003.
- [18] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres. A new LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(47):1775 – 1779, October 2002.
- [19] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres. A new LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. In *Proceedings of the 41st IEEE*

- Conference on Decision and Control*, pages 670–675, Las Vegas–USA, December 2002.
- [20] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres. Uma nova condição LMI para estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2872–2877, Natal, RN–Br, Setembro 2002.
- [21] P. J. de Oliviera. A design contribution to \mathcal{H}_∞ – robust controllers for spherical plant family. *IEEE 43rd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, August 8 - 11 2000.
- [22] R. C. Dorf. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley, 1974.
- [23] J. C. Doyle. Robustness of multiloop linear feedback systems. In *Proceedings of 17th IEEE Conference on Decision Control*, pages 12–18, 1979.
- [24] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, e M. Chilali. *LMI Control Toolbox for use with Matlab*. User’s Guide, The Math Works Inc., 1995.
- [25] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, e L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80, December 1998.
- [26] I. Gohberg, P. Lancaster, e L. Rodman. *Matrix Polynomials*. Academic Press, New York, NY, USA, 1982.
- [27] W. M. Haddad e D. S. Bernstein. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1):54–69, January 1992.
- [28] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, e M. Šebek. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *Automatica*, 37(3):461–468, March 2001.
- [29] D. Henrion, O. Bachelier, e M. Šebek. \mathcal{D} –stability of polynomial matrices. *International Journal of Control*, 74(8):845–846, May 2001.
- [30] T. Kailath. *Linear System*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1980.
- [31] W. C. Karl e G. C. Verghese. A sufficient condition for the stability of interval matrix polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7):1139–1143, July 1993.

- [32] L. H. Keel e S. P. Bhattacharyya. Robust, fragile or optimal? *IEEE Transactions on Automatic Control*, 8(42):1098–1105, August 1996.
- [33] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14:2086–2088, 1978.
- [34] J. Kogan. *Robust Stability and Convexity: An Introduction*. Lectures Notes in Control and Information Science, Springer, London, 1995.
- [35] V. Kučera. *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*. Wiley, Chichester, England, 1979.
- [36] H. Kwakernaak. *The polynomial approach to \mathcal{H}_∞ – optimal regulation*, volume 1946. Lectures Notes in Mathematics, Spring-Verlag, Berlin, 1990.
- [37] V. J. S. Leite, P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres. Improved LMI conditions for \mathcal{D} – stability of polynomial matrix polytopes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003. submitted.
- [38] A. Levikovich. Frequency response of uncertain systems. M. sc., E. L. Technion, Haifa, Israel, July 1994.
- [39] A. Levkovich, N. Cohen, e E. Zeheb. A root distribution criterion for an interval polynomial in a sector. *IMA Journal of Mathematic, Control and Information*, 13:321–333, 1996.
- [40] A. Levkovich, E. Zeheb, e N. Cohen. Frequency response envelopes of a family of uncertain continuous-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I, Fundamental Theory and Applications*, 3(42):156–165, 1995.
- [41] The Mathworks, Inc., USA. *Matlab User's Guide*, 1991.
- [42] C. J. Munaro e P. J. Oliviera. On the synthesis of robust controllers via thirty-two edge theorem. In *Proceedings of the IEEE 39th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, volume 3, pages 1252–1255, Lansing, MI, USA, August 18 - 21 1996.

- [43] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, e J. Bernussou. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.
- [44] D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378, August 2001.
- [45] D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, volume 1, pages 4073–4078, Arlington, VA, June 2001.
- [46] D. C. W. Ramos e P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.
- [47] A. Rantzer. A weak Kharitonov theorem holds if and only if the stability region and its reciprocal are convex. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 3:55–62, 1993.
- [48] E. Walter e H. Piet-Lahanier. Estimation of parameters bounds from bounded-error dates: survey. *Mathematics and Computers in Simulation*, 32:449–468, 1990.
- [49] L. Wang, Z. Wang, e W. Yu. Stability pf polytopic polynomial matrices. *IMA Preprint Series*, February 2002.
- [50] L. Wang, Z. Wang, L. Zhang, e W. Yu. Edge theorem for multivariable systems. *IMA Preprint Series*, October 2002.
- [51] J. C. Willems. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(3):259–294, March 1991.
- [52] S. Wolfram. *The Mathematica Book, 3rd ed.* Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996.
- [53] Q. H. Wu. On the radius of parity interlacing property of plant family with parameter uncertainty. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2294–2299, Phoenix, Arizona, December 1999.