



Victor Pellanda Dardengo

# Análise de Planos de Medição para Estimação de Estado de Sistemas de Energia Elétrica

Campinas  
2013





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Victor Pellanda Dardengo

# Análise de Planos de Medição para Estimação de Estado de Sistemas de Energia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Madson Cortes de Almeida

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Energia Elétrica.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO VICTOR PELLANDA DARDENGO E ORIENTADA PELO PROF. DR. MADSON CORTES DE ALMEIDA.

---

Campinas  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

D246a Dardengo, Victor Pellanda, 1988-  
Análise de planos de medição para estimação de estado de sistemas de energia elétrica / Victor Pellanda Dardengo. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Madson Cortes de Almeida.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistema de energia elétrica. 2. Sistemas de Energia elétrica - Estimação de estado. I. Almeida, Madson Cortes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Analysis of measurement plans for power systems state estimation

**Palavras-chave em inglês:**

Electrical power system

Electrical power system - State estimation

**Área de concentração:** Energia Elétrica

**Titulação:** Mestre em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:**

Madson Cortes de Almeida [Orientador]

Renato Machado Monaro

Luiz Carlos Pereira da Silva

**Data de defesa:** 31-10-2013


**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Victor Pellanda Dardengo

**Data da Defesa:** 31 de outubro de 2013

**Título da Tese:** "Análise de Planos de Medição para Estimação de Estado de Sistemas de Energia Elétrica"

Prof. Dr. Madson Cortes de Almeida (Presidente):  \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Renato Machado Monaro:  \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Luiz Carlos Pereira da Silva:  \_\_\_\_\_



A DEUS, AOS MEUS PAIS CELSO E  
ARLINDA, A MINHA IRMÃ RAQUEL.





## AGRADECIMENTOS

Agradeço,

ao professor Madson pela oportunidade, confiança, incentivo, ensinamentos transmitidos, dedicada orientação e conselhos que levarei para toda à vida;

aos Professores Gilmar Barreto, Carlos Murari e Rafael Mendes pela orientação no PED e ensinamentos não somente acadêmicos mas também pessoais;

aos colegas de trabalho de DSEE, em especial ao LE 19 e LE 23;

ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pela apoio financeiro concedido;

ao meus amigos de república pelos momentos vividos juntos;

à minha família pelo apoio em todas as dificuldades;

a todos que de alguma forma colaboraram com a realização deste trabalho.



“Se você tiver uma maçã, e eu tiver uma maçã, e trocarmos as maçãs, então cada um continuará com uma maçã. Mas se você tiver uma idéia, e eu tiver uma idéia, e trocarmos estas idéias, então cada um de nós terá duas idéias.”

George Bernard Shaw



## RESUMO

No planejamento de sistemas de medição para estimação de estado de sistemas de energia elétrica são definidos os tipos, a localização e a quantidade de medidores. Um plano de medição adequado deve garantir a observabilidade da rede, viabilizando a estimação do estado de toda a rede, e permitir a filtragem de erros grosseiros. Para que os erros grosseiros possam ser filtrados é necessário que no plano de medição não estejam presentes medidas e conjuntos críticos. Neste contexto, esta dissertação propõe uma nova metodologia de análise de observabilidade baseada no estimador linearizado regularizado e apresenta duas técnicas de classificação de medidas capazes de identificar medidas críticas, medidas pertencentes a conjuntos críticos e medidas redundantes. A primeira técnica é baseada na fatoração da matriz Gram das medidas e a segunda é baseada na fatoração da matriz Jacobiana das medidas. Além disso, são estudadas e aplicadas técnicas de fatoração com números inteiros que conferem maior robustez às metodologias de classificação de medidas. São apresentados testes realizados em redes de pequeno e médio porte que apontam o bom funcionamento dos métodos desenvolvidos e estudados.

Palavras-chave: Estimação de estado, observabilidade, medidas críticas, conjuntos críticos, Eliminação de Gauss, matriz de Gram, matriz Jacobiana, análise de redundância, fatoração com inteiros.



## ABSTRACT

In planning of power systems state estimation are defined the type, the location and the number of meters. An adequate measurement plan have to ensure the observability of the network, enabling the state estimation of the entire network, and allow filtering of gross errors. In order to filter gross errors is necessary in the measurement plan is not present critical measurements and critical sets. In this context, this work proposes a new observability analysis methodology based on the regularized weighted least squares DC state estimator and presents two measurements classification techniques capable of identifying critical measurements, measurements belonging to critical sets and redundant measurements. The first technique is based on the factorization of the measurement Gram matrix and second is based on the factorization of the measurement Jacobian matrix. Furthermore, are studied and applied factorization techniques with integers numbers which give greater robustness to measurements classification methodologies. Tests are presented in small and medium networks size showing the proper functioning of developed and studied methods.

Keywords: State estimation, observability, critical measurements, critical sets, Gauss elimination, Gram matrix, Jacobian matrix, redundancy analysis, integer factorization.





## LISTA DE ACRÔNIMOS E NOTAÇÃO

EE	Estimador de Estado
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
MDC	Máximo Divisor Comum
SEE	Sistemas de Energia Elétrica
$A$	matriz de Gram
$A_b$	matriz de Gram relacionada as medidas da base
$\tilde{A}$	matriz de Gram fatorada
$e$	vetor contendo os erros das medidas
$G$	matriz Ganho das medidas
$G_r$	matriz Ganho do modelo linearizado regularizado
$H$	matriz Jacobiana linearizada relacionada as medidas
$H_b$	matriz Jacobiana relacionada as medidas da base
$\tilde{H}$	matriz Jacobiana fatorada
$I$	matriz Identidade de dimensão apropriada
$J$	matriz Jacobiana do modelo linearizado regularizado
$L$	matriz triangular inferior referente a fatoração $LU$
$L_b$	matriz associada a porção da matriz $L$ relacionada as medidas da base
$L_1$	matriz referente a porção da matriz $L$ associada as medidas da base mais a parcela associada as pseudomedidas inseridas
$M$	matriz associada a porção da matriz $L$ relacionada as medidas redundantes
$m$	representa o número de medidas
$n$	representa o número de barras da rede
$Pl$	matriz de permutação de linhas
$Pc$	matriz de permutação de colunas
$P_{k-m}$	representa o fluxo entre às barras $k$ e $m$
$r$	vetor de resíduos
$S$	matriz de ponderação das pseudomedidas
$u$	vetor de pseudomedidas
$V$	matriz de ponderação do modelo linearizado regularizado
$W$	matriz de ponderação das medidas
$z$	vetor de medidas disponíveis
$\bar{z}$	representa o vetor de medidas e pseudomedidas
$\theta$	vetor de variáveis de estado



# Lista de Figuras

1.1	Etapas da Estimação de Estado (adaptado)(ALMEIDA, 2007) . . . . .	2
2.1	Rede de 8 barras com medidas . . . . .	8
2.2	Rede de 8 barras com medidas . . . . .	11
2.3	Rede de 8 barras com medidas . . . . .	14
2.4	Rede de 8 barras com medidas . . . . .	17
2.5	Rede de 6 barras com medidas de fluxo e injeção de potência . . . . .	23
2.6	Rede de 14 barras do IEEE com medidas . . . . .	27
2.7	Ilhas considerando apenas as medidas de fluxo . . . . .	28
2.8	Rede de 118 barras do IEEE não observável . . . . .	31
3.1	Rede de 6 barras com medidas . . . . .	37
3.2	Rede de 4 barras observável . . . . .	43
3.3	Rede de 4 barras não observável . . . . .	44
3.4	Rede de 14 barras do IEEE observável . . . . .	45
3.5	Rede de 14 barras do IEEE não observável . . . . .	50
3.6	Rede de 118 barras do IEEE não observável . . . . .	51
4.1	Fatoração LU de H. . . . .	70
4.2	Rede de 6 barras e plano de medição observável. . . . .	75
4.3	Rede de 4 barras observável . . . . .	82
4.4	Rede de 4 barras não observável . . . . .	84
4.5	Rede de 14 barras do IEEE observável. . . . .	87
4.6	Rede de 14 barras do IEEE não observável . . . . .	91
4.7	Rede de 118 barras do IEEE não observável . . . . .	95
5.1	Rede de 6 barras com medidas . . . . .	108
5.2	Rede de 4 barras observável . . . . .	112

5.3	Rede de 14 barras do IEEE observável . . . . .	114
5.4	Rede de 118 barras do IEEE observável . . . . .	117

# Lista de Tabelas

2.1	Ramos Não Observáveis - Figura 2.8. . . . .	30
3.1	Análise do plano de medição - Figura 3.2. . . . .	44
3.2	Análise do plano de medição - Figura 3.3. . . . .	45
3.3	Análise do plano de medição - Figura 3.4 . . . . .	49
3.4	Análise do plano de medição - Figura 3.5 . . . . .	50
3.5	Análise do plano de medição - Figura 3.6 . . . . .	52
4.1	Resultado da análise do plano de medição. . . . .	81
4.2	Análise do plano de medição - Figura 4.3. . . . .	84
4.3	Análise do plano de medição - Figura 4.4. . . . .	85
4.4	Análise do plano de medição - Figura 4.5. . . . .	90
4.5	Análise do plano de medição - Figura 4.6 . . . . .	94
4.6	Análise do plano de medição - Figura 4.7 . . . . .	96
5.1	Análise do plano de medição - Figura 5.2. . . . .	113
5.2	Análise do plano de medição - Figura 5.3. . . . .	116
5.3	Exemplo de pivôs duvidosos . . . . .	118
5.4	Análise do plano de medição - Figura 5.4. . . . .	118
5.5	Tempo de processamento. . . . .	119



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Análise de Observabilidade Baseada no Estimador CC Regularizado</b>	<b>5</b>
2.1	Estimador de Estado Linearizado . . . . .	6
2.2	Estimador de Estado Linearizado Regularizado . . . . .	12
2.3	Análise de Observabilidade a partir do Estimador CC Regularizado . . . . .	20
2.3.1	Comparação com o Algoritmo Proposto por A. Monticelli . . . . .	26
2.4	Resultados . . . . .	27
2.5	Rede 14 barras do IEEE . . . . .	27
2.6	Rede 118 barras do IEEE . . . . .	29
2.7	Testes adicionais . . . . .	32
2.8	Conclusão . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos Usando a Matriz de Gram</b>	<b>33</b>
3.1	Propriedades da Matriz de Gram . . . . .	33
3.1.1	Análise de Redundância das Medidas . . . . .	36
3.2	Identificação de Conjuntos Críticos . . . . .	40
3.2.1	Mudança de Base . . . . .	40
3.2.2	Algoritmo para Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos Baseado nas Propriedades . . . . .	40
3.3	Resultados . . . . .	42
3.3.1	Rede de 4 barras . . . . .	43
3.3.2	Rede de 14 barras do IEEE . . . . .	45
3.3.3	Rede de 118 barras do IEEE . . . . .	50
3.3.4	Testes adicionais . . . . .	52
3.4	Conclusão . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos Usando a Matriz Jacobiana</b>	<b>55</b>
4.1	Estratégias de Pivoteamento . . . . .	55
4.1.1	Pivoteamento Parcial . . . . .	57
4.1.2	Pivoteamento Parcial com Escala . . . . .	61
4.1.3	Pivoteamento Completo . . . . .	64
4.1.4	Pivoteamento Completo com Escala . . . . .	67
4.2	Análise de Redundância . . . . .	69
4.2.1	Matriz de Sensibilidades . . . . .	73
4.3	Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos . . . . .	79
4.4	Resultados . . . . .	82
4.4.1	Rede de 4 barras . . . . .	82
4.4.2	Rede de 14 barras do IEEE . . . . .	85
4.4.3	Rede de 118 barras do IEEE . . . . .	93
4.4.4	Testes adicionais . . . . .	96
4.5	Conclusões . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Estratégias de Fatoração com Números Inteiros Aplicada a Matriz de Gram</b>	<b>99</b>
5.1	Eliminação de Gauss com Aritmética Inteira . . . . .	99
5.1.1	Eliminação de Gauss Livre de Divisão . . . . .	101
5.1.2	Eliminação de Gauss Livre de Divisão com MDC . . . . .	102
5.1.3	Eliminação de Gauss Livre de Fração . . . . .	103
5.2	Resultados . . . . .	111
5.2.1	Rede de 4 barras Observável . . . . .	111
5.2.2	Rede de 14 barras do IEEE . . . . .	113
5.2.3	Rede de 118 barras do IEEE . . . . .	116
5.2.4	Testes adicionais . . . . .	119
5.3	Conclusão . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Conclusões Gerais</b>	<b>123</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Seleção das Medidas Não Redundantes</b>	<b>129</b>
A.1	Algoritmo para Seleção de Medidas Não Redundantes . . . . .	129



## Introdução

Fred Schweppe, em 1968, introduziu o conceito da estimação de estado para Sistemas de Energia Elétrica (SEE). Ele definiu o Estimador de Estado (EE) como um algoritmo de processamento de dados para a conversão de leituras redundantes e outras informações disponíveis em uma estimativa do estado de um sistema de energia elétrica (WU, 1990).

No processo clássico de Estimação de Estado, ilustrado na Figura 1.1, admite-se que a topologia da rede, representada por seu modelo Barra/Ramo, e os parâmetros da rede são conhecidos e estão corretos (MONTICELLI, 1999). Assim, se o sistema de medição é adequadamente planejado, os valores estimados serão mais confiáveis que os valores medidos, já que a redundância nas medições permitirá a filtragem de eventuais erros presentes nas medidas. Portanto, o EE atua como um filtro suavizando estatisticamente pequenos erros inerentes às medições e suprimindo erros grosseiros associados ao mau funcionamento do sistema de aquisição de dados.

De maneira geral, o processo de estimação de estado é realizado a partir de três funções básicas: a análise da observabilidade, a estimação do estado e o tratamento de erros grosseiros. Além dessas funções, há uma fase de processamento topológico e uma fase de pré-filtragem das medidas lógicas e analógicas.

No processador topológico, os estados de chaves e disjuntores são usados para definir a topologia e fornecer o modelo Barra/Ramo da rede. No bloco de pré-filtragem, a topologia, as medidas lógicas e as medidas analógicas são verificadas a partir de testes simples, como a verificação dos balanços de correntes nos nós, de forma a avaliar a sua coerência. Caso sejam detectados grandes incoerências, algumas medidas podem ser descartadas ou a topologia da

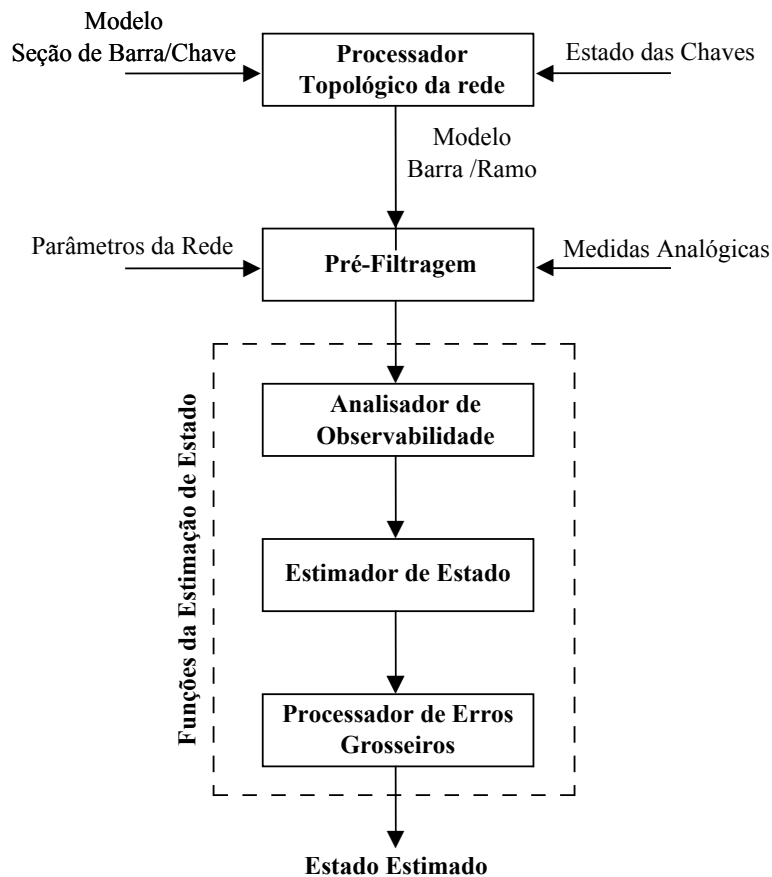


Figura 1.1: Etapas da Estimação de Estado (adaptado)(ALMEIDA, 2007)

rede pode ser modificada.

Na fase de análise de observabilidade é verificado se o conjunto de medidas disponíveis é suficiente para que o estado de toda a rede seja estimado. Em caso afirmativo, a rede é dita observável. Caso contrário, a rede é dita não observável e as porções observáveis ou ilhas observáveis do sistema devem ser identificadas. Em princípio, os sistemas devem ser projetados para serem observáveis, entretanto, mudanças na topologia da rede, falhas em equipamentos de medição e de comunicação podem tornar o sistema temporariamente não observável. Note que em uma rede observável não há garantias de que os erros poderão ser filtrados. Para garantir a filtragem dos erros é necessário analisar o grau de redundância das medidas.

Atualizada a topologia do SEE e analisada a sua observabilidade, o estimador de estado irá fornecer uma estimativa para o estado das partes observáveis do sistema. Por fim, a função de tratamento de erros realizará testes estatísticos para detectar, identificar e eliminar medidas contendo erros grosseiros. O tratamento de erros grosseiros é iterativo e a cada erro

eliminado o estado é estimado novamente.

Para detectar, identificar e eliminar erros grosseiros e, portanto, garantir uma boa estimativa do estado da rede, é fundamental que o conjunto de medidas seja redundante. Entretanto, considerando os custos envolvidos, frequentemente os sistemas de energia não são monitorados em seu nível ideal (FILHO et al., 2001). Além disso, mesmo quando um plano de medição é projetado para ser adequado, fatores como mudanças na topologia da rede, a ocorrência de contingências e o mau funcionamento do sistema de aquisição de dados, podem resultar na diminuição da redundância a níveis críticos, podendo levar até mesmo à perda de observabilidade. Quando a perda de uma medida reduz o tamanho das porções observáveis da rede, dizemos que esta é uma medida crítica. Quando a perda de uma medida faz com que outras medidas se tornem críticas, dizemos que a medida perdida mais as novas medidas críticas formam um conjunto crítico.

As principais implicações de se ter medidas e conjuntos críticos em um plano de medição, são (COSTA; PIAZZA; MANDEL, 1990):

- se uma medida crítica é perdida as porções observáveis da rede são reduzidas;
- erros grosseiros em medidas críticas não podem ser detectados;
- erros grosseiros em medidas pertencentes a conjuntos críticos podem ser detectados mas não podem ser identificados.

Portanto, um plano de medição desejável deve tornar a rede plenamente observável e não deve conter medidas ou conjuntos críticos.

Dentro desse contexto, esta dissertação apresenta metodologias para avaliação de planos de medição para estimação de estado. No Capítulo 2 é proposto um algoritmo para análise de observabilidade baseado no estimador de estado linearizado regularizado. Com este mecanismo é possível saber se uma rede é observável e, caso ela não seja, é possível identificar as ilhas observáveis. A grande vantagem deste mecanismo é ser não iterativo, ao contrário da maioria das metodologias propostas na literatura. No Capítulo 3 é apresentado um algoritmo baseado nas propriedades da matriz de Gram das medidas que permitem identificar medidas críticas e conjuntos críticos de um plano de medição (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2008a). No Capítulo 4 é apresentada uma alternativa a metodologia apresentada no Capítulo 3. Esta metodologia alternativa utiliza as propriedades da matriz Jacobiana das medidas

(EXPÓSITO; ABUR, 1998). Como os algoritmos de detecção de medidas e conjuntos críticos são baseados na fatoração de matrizes, no Capítulo 5 a Eliminação de Gauss clássica e versões baseadas em aritmética inteira são apresentadas e aplicadas a fim de evitar erros de arredondamento, truncamento e de identificação de pivôs nulos que podem comprometer as análises realizadas. As técnicas de Eliminação de Gauss usando apenas fatores inteiros foram inicialmente propostas em 1968 por Bareiss (BAREISS, 1968). Para fins ilustrativos, as técnicas de Eliminação de Gauss com fatores inteiros são aplicadas ao método de classificação de medias baseado na matriz de Gram. Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões desta dissertação.

## Análise de Observabilidade Baseada no Estimador CC Regularizado

Antes de estimar o estado de um SEE a análise da observabilidade da rede deve ser realizada. Nesta análise, dependendo do número, do tipo e da localização das medidas disponíveis, a rede é classificada como observável ou não observável. Caso a rede seja não observável, as porções observáveis da rede, conhecidas como ilhas observáveis, devem ser identificadas.

A análise da observabilidade de uma rede pode ser efetuada a partir de abordagens topológicas, numéricas ou híbridas. Entre as abordagens topológicas destacam-se aquelas propostas por Clements, Wollenberg, Krumpholz e Davis entre 1975 e 1983 nas referências (CLEMENTS; KRUMPHOLZ; DAVIS, 1975), (KRUMPHOLZ; CLEMENTS; DAVIS, 1980), (CLEMENTS; KRUMPHOLZ; DAVIS, 1981), (CLEMENTS; KRUMPHOLZ; DAVIS, 1982) e (CLEMENTS; KRUMPHOLZ; DAVIS, 1983). Em 1985, Monticelli e Wu, (MONTICELLI; WU, 1985a) introduziram uma proposta para análise de observabilidade que poderia levar em conta aspectos numéricos e topológicos. Esta abordagem numérica foi estendida para estimadores ortogonais (MONTICELLI; WU, 1986), para o método de equações normais com restrição de igualdade (WU; LIU; LUN, 1988) e para formulação com matrizes de blocos esparsos (NUCERA; BRANDWAJN; GILLES, 1993). Os métodos híbridos foram inicialmente propostos em 1988 por Contaxis and Korres na referência (CONTAXIS; KORRES, 1988).

Este capítulo apresenta um método numérico não iterativo de análise de observabilidade baseado na solução Regularizada do Estimador de Estado Linearizado. Para permitir a

compreensão da metodologia proposta, o estimador de estado linearizado convencional, o conceito de regularização e aspectos da identificação de ilhas observáveis são apresentados.

## 2.1 Estimador de Estado Linearizado

Para análises de observabilidade e identificação de medidas e conjuntos críticos em sistemas de energia elétrica, geralmente adota-se a abordagem linearizada do estimador de estado (estimador CC), uma vez que admite-se que há um número suficiente de medidas de tensão e que as medidas de potências (injeções e fluxos) são obtidas aos pares, ou seja, para cada medida ativa há uma medida reativa correspondente (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2008b).

Nesse contexto, considere um sistema de energia com  $n$  barras, no qual  $m$  quantidades são medidas. Suponha ainda que a topologia e os parâmetros da rede elétrica são conhecidos. Se as tensões complexas nas barras forem estimadas a partir dos dados disponíveis, todas as demais grandezas de interesse poderão ser calculadas. Dessa forma, as tensões complexas nas barras são um conjunto de variáveis de estado do problema (COSTA; SALGADO, 2002).

O conjunto de medidas tomadas ao longo da rede elétrica, as variáveis de estado do sistema e os erros de medição podem ser relacionados através do seguinte modelo de medição linearizado:

$$z = H\theta + e \tag{2.1}$$

no qual:

- $z$  é o vetor contendo as  $m$  medidas disponíveis;
- $H$  é a matriz Jacobiana linearizada  $m \times n$ ;
- $\theta$  é o vetor contendo as  $n$  variáveis de estado do problema;
- $e$  é o vetor contendo os erros das medidas;
- $m$  é o número de medidas;
- $n$  é o número de barras da rede;

No estimador CC são adotadas as mesmas hipóteses simplificadoras utilizadas no fluxo de potência linearizado e, assim, os fluxos e as injeções de potências ativas são calculados por:

$$P_{i,j} = \frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} \quad (2.2)$$

$$P_i = \sum_{k \in \Omega_i} P_{i,k} \quad (2.3)$$

onde  $x_{ij}$  é a reatância série do ramo que conecta as barras  $i$  e  $j$ , e  $\Omega_i$  é o conjunto de barras adjacentes à barra  $i$ .

Note que como as magnitudes das tensões nas barras são supostamente constantes, as únicas variáveis a serem estimadas são ângulos das tensões nas barras, ou seja, o vetor de estados reduz-se ao vetor  $\theta$  (COSTA; SALGADO, 2002). O vetor de medidas poderá ser formado por medidas de fluxo de potência ativa, medidas de injeção de potência ativa e medidas de ângulo das tensões das barras.

O vetor de resíduo das medidas é definido como:

$$r = z - H\hat{\theta} \quad (2.4)$$

onde  $r$  representa a diferença entre os valores medidos,  $z$ , e seus correspondentes valores estimados  $\hat{z} = H\hat{\theta}$ . Note que  $\hat{\theta}$  contém o valor estimado para os ângulos das barras.

Para obter a melhor estimativa  $\hat{\theta}$  para o sistema sobredeterminado (2.1), é adotado o método dos mínimos quadrados ponderados. Nele, o estado estimado  $\hat{\theta}$  é aquele que minimiza o índice  $J(\hat{\theta})$  (MONTICELLI, 1999):

$$J(\hat{\theta}) = [z - H\hat{\theta}]' W [z - H\hat{\theta}] \quad (2.5)$$

A matriz  $W$  é uma matriz diagonal contendo os pesos das medidas. Em  $W$  as medidas mais importantes ou mais confiáveis são associadas a pesos maiores. Comumente,  $W$  contém

o inverso da covariância das medidas (MONTICELLI, 1999):

$$W = R_z^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & & & & \\ & \sigma_2^{-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_m^{-2} \end{pmatrix}_{m \times m} \quad (2.6)$$

onde  $\sigma_i$  e  $\sigma_i^2$  são respectivamente o desvio-padrão e a variância da  $i$ th medida.

Desse modo, o estado estimado  $\hat{\theta}$  que minimiza o índice (2.5) é:

$$\hat{\theta} = G^{-1}H'Wz \quad (2.7)$$

onde  $G = H'WH$ , é denominada matriz Ganho.

Quando o sistema é observável, a matriz Jacobiana e, conseqüentemente, a matriz Ganho têm *posto* completo, isto é, elas possuem *posto* igual ao número de variáveis de estado desconhecidas. Nesses caso a matriz  $G$  pode ser invertida e (2.7) pode ser resolvida.

Para ilustrar a aplicação do estimador linearizado, no exemplo a seguir o estimador CC é aplicado a uma rede observável. Esta rede foi obtida na referência (MONTICELLI, 1999).

**Exemplo 2.1.1.** *Considere o plano de medição descrito na Figura 2.1. Todos os ramos da rede são representados por reatâncias unitárias, as variâncias de todas as medidas são iguais a  $10^{-4}$ , e seus valores medidos são:  $P_2^{med} = -1$  p.u.,  $P_3^{med} = 1$  p.u.,  $P_4^{med} = -2$  p.u.,  $P_7^{med} = 2$  p.u.,  $P_{1-3}^{med} = 1$  p.u.,  $P_{4-6}^{med} = -2$  pu,  $P_{5-3}^{med} = -1$  p.u.,.*

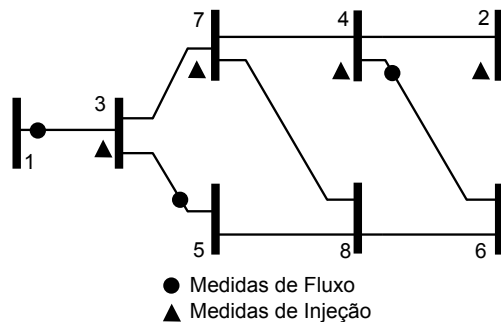


Figura 2.1: Rede de 8 barras com medidas (MONTICELLI, 1999)

A matriz Jacobiana, o vetor de medidas e a matriz de ponderação são dadas por:



$$H = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 \\ \theta_1 & \left( \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & & & & & & & \\ P_2 & & \left( \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & & & & & & \\ P_3 & & & \left( \begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & & & & & \\ P_4 & & & & \left( \begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & & & & \\ P_7 & & & & & \left( \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & & & \\ P_{1-3} & & & & & & \left( \begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & & \\ P_{4-6} & & & & & & & \left( \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \\ P_{5-3} & & & & & & & & \left( \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{matrix}$$

$$z = \begin{matrix} \theta_1 \\ P_2^{med} \\ P_3^{med} \\ P_4^{med} \\ P_7^{med} \\ P_{1-3}^{med} \\ P_{4-6}^{med} \\ P_{5-3}^{med} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 10^{10} & & & & & & & & \\ & 10^4 & & & & & & & \\ & & 10^4 & & & & & & \\ & & & 10^4 & & & & & \\ & & & & 10^4 & & & & \\ & & & & & 10^4 & & & \\ & & & & & & 10^4 & & \\ & & & & & & & 10^4 & \\ & & & & & & & & 10^4 \end{pmatrix}$$

O ângulo ( $\theta_1$ ) foi adotado como referência angular e, portanto, seu peso é superior aos pesos das demais medidas. A matriz Ganho é dada por:

$$G = H'WH = 10^5 \begin{pmatrix} 100000 & 0 & -0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & -0.4 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ -0.4 & 0 & 1.2 & 0.1 & -0.4 & 0 & -0.6 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & 0.1 & 1.2 & 0 & -0.4 & -0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & -0.4 & 0 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.4 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -0.6 & -0.6 & 0.1 & 0.1 & 1.1 & -0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & -0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Através de (2.7), tem-se que o estado estimado da rede é:

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Os resíduos das medidas são:

$$r = z - H\hat{\theta} = 10^{-13} \begin{pmatrix} -0.0622 \\ 0 \\ 0.4707 \\ -0.1954 \\ -0.0533 \\ 0.1821 \\ -0.0444 \end{pmatrix}$$

Como os resíduos são pequenos, considera-se que o estado estimado é de boa qualidade. Por fim, de posse dos ângulos estimados são calculados os fluxos de potência ativa.

$$P_{k-m} = \begin{pmatrix} P_{1-3} & 1 \\ P_{2-4} & -1 \\ P_{3-5} & 1 \\ P_{3-7} & 1 \\ P_{4-6} & -2 \\ P_{4-7} & -1 \\ P_{5-8} & 2 \\ P_{6-8} & 3 \\ P_{7-8} & 2 \end{pmatrix}$$

Considere agora que medidas são perdidas devido a falhas nos sistemas de comunicação e o plano de medição se reduz ao mostrado na Figura 2.2.

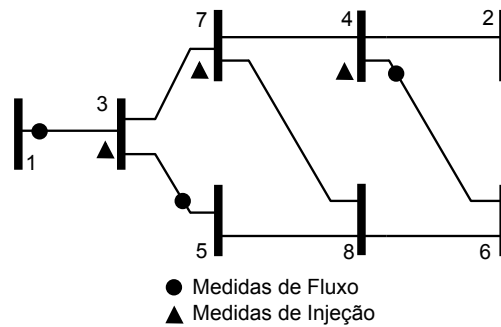


Figura 2.2: Rede de 8 barras com medidas (MONTICELLI, 1999)

Neste caso, o posto da matriz  $H$  e, conseqüentemente, o posto da matriz  $G$  serão incompletos e, portanto, o estado estimado não pode ser calculado de (2.7).

Para redes não observáveis, usando o conceito de regularização é possível resolver a inviabilidade matemática resultante da falta de medidas e, assim, obter uma estimativa para o estado da rede (ALMEIDA; GARCIA; ASADA, 2012). A partir dessa estimativa é possível ainda encontrar as ilhas observáveis da rede.

## 2.2 Estimador de Estado Linearizado Regularizado

Seja novamente o modelo de medidas representado por (2.1). Considere agora que, além das medidas disponíveis para estimação de estado, há pseudomedidas de ângulo das tensões nas  $n$  barras da rede. Nessa situação o problema é dito regularizado (ALMEIDA; GARCIA; ASADA, 2012). Nesse contexto, as matrizes Jacobiana e de ponderação podem ser reescritas como:

$$J = \begin{pmatrix} H \\ \dots \\ I \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$V = \begin{pmatrix} W & \vdots & 0 \\ \dots & \cdot & \dots \\ 0 & \vdots & S \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

onde  $H$  e  $W$  são como definidas anteriormente,  $I$  é a matriz identidade de ordem  $n$  representando a matriz Jacobiana das pseudomedidas de ângulo das tensões e  $S$  é uma matriz diagonal cujos elementos são os pesos das pseudomedidas de ângulo, como segue:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_p^{-2} & & & \\ & \sigma_p^{-2} & & \\ & & \sigma_p^{-2} & \\ & & & \sigma_p^{-2} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (2.10)$$

sendo  $\sigma_p$  e  $\sigma_p^2$  o desvio-padrão e a variância das pseudomedidas, respectivamente.

Considerando as novas matrizes Jacobiana,  $J$ , e de ponderação,  $V$ , a matriz de Ganho linearizada regularizada pode ser escrita como (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2006):

$$G_r = J'VJ = (H'WH + S) \quad (2.11)$$

Por definição  $S$  é não singular, conseqüentemente,  $G_r$  tem sempre *posto* completo. Assim, a solução do estimador linearizado regularizado mostrada abaixo sempre pode ser

obtida, mesmo que a rede seja não observável.

$$G_r \hat{\theta} = J'V\bar{z} = \begin{pmatrix} H'W & S \end{pmatrix} \bar{z} \quad (2.12)$$

O novo vetor  $\bar{z}$  é dado por:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} z \\ \dots \\ u \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

onde  $z$  é o vetor contendo as medidas reais e  $u$  contém as pseudomedidas de ângulo.

A matriz  $S$  é conhecida como termo de regularização da matriz Ganho e este procedimento é conhecido como regularização de Tikhonov (TIKHONOV; V.Y., 1977).

Observe que no estimador regularizado deve haver um comprometimento entre os valores da variância das medidas e os valores das variâncias das pseudomedidas para que o estado estimado atenda às medidas disponíveis. Em geral, recomenda-se que as medidas recebam variâncias pequenas e as pseudomedidas recebam variâncias elevadas. Assim, as pseudomedidas terão pequena influência no estado estimado das ilhas observáveis, apesar de definirem completamente o estado estimado das porções não observáveis da rede (OLIVEIRA, 2012). Na análise de observabilidade, uma boa prática é usar para as variâncias das pseudomedidas o inverso das variâncias das medidas.

Para fins de comparação, o estimador CC regularizado é aplicado às redes do Exemplo 2.1.1.

**Exemplo 2.2.1.** *O estimador CC regularizado é aplicado à rede observável do Exemplo 2.1.1, a qual é mostrada abaixo novamente. Todas as condições adotadas no Exemplo 2.1.1, são mantidas.*

*De acordo com as Equações (2.8), (2.9) e (2.13). A matriz Jacobiana, ( $J$ ), a matriz de ponderação, ( $V$ ), e o vetor de medidas, ( $\bar{z}$ ), são os seguintes:*

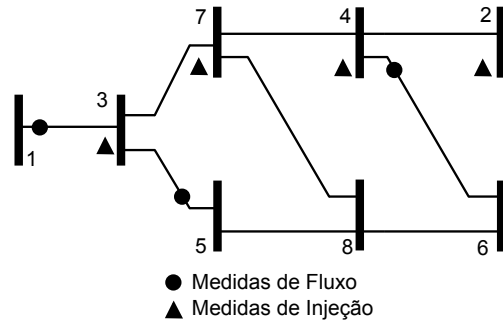


Figura 2.3: Rede de 8 barras com medidas (MONTICELLI, 1999)

$$J = \begin{pmatrix} H \\ \dots \\ I \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_7 \\ P_{1-3} \\ P_{4-6} \\ P_{5-3} \\ \hline \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{array} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 \\ & 1 & & -1 & & & & \\ -1 & & 3 & & -1 & & -1 & \\ & -1 & & 3 & & -1 & -1 & \\ & & -1 & -1 & & & 3 & -1 \\ 1 & & -1 & & & & & \\ & & & 1 & & -1 & & \\ & & & & -1 & & & 1 \\ \hline 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 2.1250 \\ -1.8750 \\ 1.1250 \\ -0.8750 \\ 0.1250 \\ 1.1250 \\ 0.1250 \\ -1.8750 \end{pmatrix}$$

e o vetor de resíduos das medidas por:

$$r = z - H\hat{\theta} = 10^{-6} \begin{pmatrix} 0.0149 \\ 0.1732 \\ -0.0522 \\ 0.0019 \\ 0.0261 \\ -0.0317 \\ 0.0186 \end{pmatrix}$$

Novamente os resíduos calculados foram baixos, o que significa que o estado estimado foi de boa qualidade. Os fluxos de potência ativa calculados para cada ramo através dos estados estimados é:

$$P_{k-m} = \begin{pmatrix} P_{1-3} & 1 \\ P_{2-4} & -1 \\ P_{3-5} & 1 \\ P_{3-7} & 1 \\ P_{4-6} & -2 \\ P_{4-7} & -1 \\ P_{5-8} & 2 \\ P_{6-8} & 3 \\ P_{7-8} & 2 \end{pmatrix}$$



Note que o vetor  $P_{k-m}$  encontrado com o estimador linearizado regularizado é idêntico ao encontrado pelo estimador clássico, o que indica a proximidade do estado estimado pelos dois estimadores.

Considere agora a rede não observável do Exemplo 2.1.1. Por simplicidade a rede e o plano de medição são reproduzidos novamente na Figura 2.4. Todas as demais condições são mantidas.

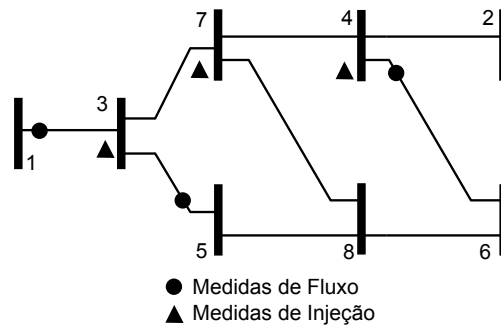


Figura 2.4: Rede de 8 barras com medições (MONTICELLI, 1999)

A matriz Jacobiana, ( $J$ ), a matriz de ponderação, ( $V$ ), e o vetor de medidas, ( $\bar{z}$ ), são mostrados abaixo:

$$J = \begin{pmatrix} H \\ \dots \\ I \end{pmatrix} = \begin{array}{c} P_3 \\ P_4 \\ P_7 \\ P_{1-3} \\ P_{4-6} \\ P_{5-3} \\ \hline \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{array} \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 \\ -1 & & & 3 & & -1 & & -1 & \\ & -1 & & & 3 & & -1 & -1 & \\ & & -1 & -1 & & & & 3 & -1 \\ 1 & & -1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & & \\ & & & -1 & & 1 & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 2.0213 \\ -1.4255 \\ 1.0213 \\ -0.7021 \\ 0.0213 \\ 1.2979 \\ 0.0213 \\ -2.2553 \end{pmatrix}$$

$$r = z - H\hat{\theta} = 10^{-6} \begin{pmatrix} 0.1378 \\ 0.0666 \\ -0.0196 \\ 0.0503 \\ 0.0075 \\ 0.0261 \end{pmatrix}$$

*Note que mesmo para a rede não observável foi possível encontrar um estado para toda a rede. Além disso, como os resíduos das medidas foram baixos, o estado estimado aderiu bem aos valores medidos. Analisando o vetor de fluxos de potências ativas percebe-se que para os ramos observáveis, ( $P_{1-3}$ ,  $P_{3-5}$ ,  $P_{3-7}$  e  $P_{4-5}$ ), os fluxos são os mesmos obtidos no caso da rede observável e, portanto, o estado estimado para as partes observáveis da rede é de boa qualidade.*

$$P_{k-m} = \begin{pmatrix} P_{1-3} & 1 \\ P_{2-4} & -0.7234 \\ P_{3-5} & 1 \\ P_{3-7} & 1 \\ P_{4-6} & -2 \\ P_{4-7} & -0.7234 \\ P_{5-8} & 2.2766 \\ P_{6-8} & 3.5532 \\ P_{7-8} & 2.2766 \end{pmatrix}$$

Baseado no estimador de estado linearizado regularizado, a seguir é proposta uma

metodologia de análise de observabilidade. Esta metodologia é uma contribuição original deste trabalho.

Em (ALMEIDA; GARCIA; ASADA, 2012), um processo similar de identificação de ilhas observáveis é desenvolvido, entretanto, enquanto em (ALMEIDA; GARCIA; ASADA, 2012) a metodologia baseia-se nas variâncias dos fluxos estimados, a metodologia aqui a ser proposta será baseada apenas nos fluxos de cada ramo. Além disso, como poderá ser notado na seção seguinte, a alocação das pseudomedidas entre os dois métodos também ocorre de maneira distinta.

## **2.3 Análise de Observabilidade a partir do Estimador CC Regularizado**

Baseado na solução de mínimos quadrados ponderados de um estimador CC regularizado, o método apresentado nesta seção permite dizer se uma rede é ou não observável além de identificar as ilhas observáveis caso a rede não seja observável. O mecanismo proposto é baseado em um processo numérico não iterativo. Para tal, ao contrário do procedimento de regularização descrito em (ALMEIDA; GARCIA; ASADA, 2012), onde as pseudomedidas são alocadas em todas as barras da rede, na metodologia aqui proposta, as pseudomedidas são alocadas apenas em barras específicas da rede.

Para a seleção das pseudomedidas considere apenas as medidas de fluxo disponíveis. Forme ilhas observáveis aglutinando os ramos que contenham medições de fluxo. Inclua pseudomedidas de ângulo em todas as barras isoladas, mais uma pseudomedida em cada ilha formada.

Note que para a alocação das pseudomedidas foi levado em consideração apenas as medidas de fluxo. Como os ramos os quais contém alguma medida de fluxo é considerado observável, dessa forma tem-se de maneira fácil e rápida algumas porções da rede as quais já podem ser definidas como observáveis, assim não sendo mais necessário alocar pseudomedidas em todas as barras. Com uma menor quantidade de pseudomedidas alocadas, a tendência é que o estado estimado se aproxime mais do estado real que uma estimação realizada com uma grande quantidade de pseudomedidas.

Assim, a nova matriz Jacobiana ( $J_n$ ) será dada por:

$$J_n = \begin{pmatrix} H \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

onde  $I_n$  é a matriz Jacobiana das pseudomedidas alocadas.

Note que caso o plano de medição original não tenha nenhuma medida de fluxo de potência,  $I_n$  será uma matriz identidade.

O estado estimado a partir desse procedimento é dado por:

$$\hat{x} = G_n^{-1} J_n' V \bar{z} \quad (2.15)$$

onde  $G_n = J_n' V J_n$ .

Para identificar as ilhas observáveis atribua o valor zero para todas as medidas disponíveis e valores aleatórios para as pseudomedidas alocadas. Além disso, como as medidas disponíveis são mais confiáveis que as pseudomedidas alocadas, adote variâncias para as pseudomedidas iguais ao inverso das variâncias das medidas.

Nessas condições, os fluxos calculados com o estado estimado serão aproximadamente nulos nos ramos observáveis e não nulos nos ramos não observáveis. Por simplicidade, como geralmente é feito nos algoritmos de análise de observabilidade, as reatâncias dos ramos são todas unitárias (MONTICELLI; WU, 1985a)(MONTICELLI; WU, 1985b).

De acordo com as condições estabelecidas, o seguinte algoritmo baseado no estimador regularizado CC é proposto:

---

**Algoritmo 2.3.1:** Análise de Observabilidade a partir do Estimador CC Regularizado

---

**Passo 1:** Determine:  $W_{i,i} = 10^a$  e  $z = 0$  para todas as medidas;

**Passo 2:** Determine:  $S_{k,k} = 10^{-a}$  e  $u_{k,1} = n_b$ , onde  $k$  varia de 1 até o número de pseudomedidas alocadas e  $n_b$  é o número da barra a qual foi alocada a pseudomedida;

**Passo 3:** Resolva o estimador CC conforme a Equação (2.15);

**Passo 4:** Calcule os fluxos nos ramos;

$$|P_{k-m}| = |\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_m|$$

**Passo 5:** Se  $|P_{k-m}| < \varepsilon = 10^{-a}$ , o ramo  $k - m$  é observável. Caso contrário, o ramo é não observável;

**Passo 6:** Agrupe os ramos observáveis formando as ilhas observáveis.

---

No **Passo 2**, apesar de ter sido definido  $u_{k,1} = n_b$ ,  $u_{k,1}$  poderia receber quaisquer valores aleatórios sem perda de eficiência do método. Para sistemas maiores, ainda recomenda-se que  $u_{k,1} = 1, 2, 3, \dots$

Note ainda que no algoritmo é requerido um limiar,  $\varepsilon = 10^{-a}$ , para detectar fluxos nulos. Na metodologia proposta o valor de  $a$  deve ser o maior possível. Isto garante ponderações distintas para medidas e pseudomedidas. Com uma distinção maior entre pesos de medidas e pseudomedidas, a diferença entre os módulos dos fluxos calculados nos ramos observáveis e nos ramos não observáveis ficam maiores, facilitando então a classificação correta dos ramos. Dessa forma, nos testes realizados o valor de  $a$  pôde ser determinado empiricamente de modo simples. Na prática,  $a$  é limitado apenas pelo condicionamento numérico da matriz Ganho regularizada, já que para altos valores de  $a$ , como  $a = 8, 9, \dots$ , a matriz regularizada pode ficar próximo a singularidade.

Para ilustrar o funcionamento do algoritmo proposto, a seguir são apresentados alguns exemplos.

**Exemplo 2.3.1.** *Considere o sistema de 6 barras mostrado abaixo, obtido de (ABUR; EXPÓSITO, 2004). O parâmetro  $a$  é definido igual a 4 e as reatâncias do ramos são unitárias.*

*A matriz Jacobiana,  $(H)$ , e de peso das medidas,  $(W)$ , são dadas por:*

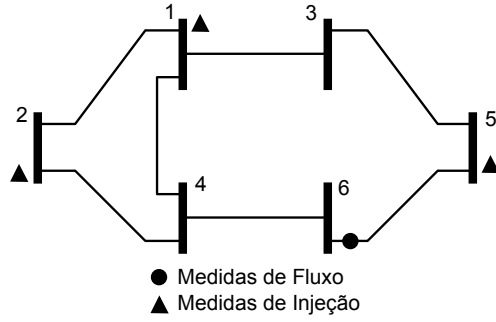


Figura 2.5: Rede de 6 barras com medidas de fluxo e injeção de potência

$$H = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ P_{6-5} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ P_1 & \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_5 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} W = \begin{pmatrix} 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 \end{pmatrix}$$

Considerando apenas as medidas de fluxo de potência, o ramo 5 – 6 é observável e as barras 1, 2, 3 e 4 são isoladas. Portanto, pseudomedidas de ângulo são alocadas as barras 1, 2, 3, 4 e 6. Com isso, as matrizes  $I_n$ ,  $S$  e o vetor  $\bar{z}$  são:

$$I_n = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \theta_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_6 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix} \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Então, o estado estimado obtido de (2.15) é:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 2.9905 \\ 2.6415 \\ 4.0377 \\ 2.2924 \\ 4.0377 \\ 4.0377 \end{pmatrix}$$

e o fluxo de potência de cada ramo:

$$|P_{k-m}| = \begin{pmatrix} |P_{1-2}| \\ |P_{1-3}| \\ |P_{3-5}| \\ |P_{5-6}| \\ |P_{6-4}| \\ |P_{4-2}| \\ |P_{1-4}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3491 \\ 1.0472 \\ 5.8869 \times 10^{-10} \\ 3.9245 \times 10^{-10} \\ 1.7452 \\ 0.3491 \\ 0.6981 \end{pmatrix}$$

Note que somente os ramos 3 – 5 e 5 – 6 ficaram abaixo do limiar adotado de  $10^{-4}$  e, portanto, esses ramos são observáveis.

**Exemplo 2.3.2.** Considere novamente o sistema de 6 barras da Figura 2.5 e descarte a medida  $P_{6-5}$ . O parâmetro  $a$  é definido igual a 4 e as reatâncias são unitárias.



As matrizes envolvidas são descritas abaixo:

$$H = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ P_1 & \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_5 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad W = \begin{pmatrix} 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \theta_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_5 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta_6 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Note que como a rede não contém nenhuma medida de fluxo, as pseudomedidas de ângulo são alocadas em todas as barras e, conseqüentemente,  $I_n$  é uma matriz identidade. O estado estimado obtido de (2.15) e o fluxo calculado em cada ramo é mostrado abaixo:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 2.5727 \\ 2.5818 \\ 2.5455 \\ 2.5909 \\ 4.4182 \\ 6.2909 \end{pmatrix}$$

$$|P_{k-m}| = \begin{matrix} |P_{1-2}| \\ |P_{1-3}| \\ |P_{3-5}| \\ |P_{5-6}| \\ |P_{6-4}| \\ |P_{4-2}| \\ |P_{1-4}| \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.0091 \\ 0.0273 \\ 1.8727 \\ 1.8727 \\ 3.7000 \\ 0.0091 \\ 0.0182 \end{pmatrix}$$

*De acordo com o limiar adotado nenhum ramo é observável.*

### 2.3.1 Comparação com o Algoritmo Proposto por A. Monticelli

O método proposto neste capítulo possui similaridades com o método proposto por A. Monticelli nas referências (MONTICELLI; WU, 1985a) e (MONTICELLI; WU, 1985b), uma vez que ambos requerem a inclusão de pseudomedidas de ângulo. Entretanto, algumas diferenças importantes devem ser destacadas.

Na proposta de A. Monticelli, durante a fatoração triangular da matriz Ganho pseudomedidas de ângulo são alocadas em todas as barras onde ocorrem pivôs nulos. Além disso, todas as medidas e pseudomedidas recebem pesos unitários. No método proposto nesta dissertação, a alocação de pseudomedidas é feita de acordo com as medidas de fluxo disponíveis. Assim, geralmente, a quantidade de pseudomedidas alocadas é maior. Além disso, são adotados pesos diferentes para medidas e pseudomedidas.

Os aspectos destacados permitem que o método proposto nesta dissertação identifique as ilhas observáveis em apenas um passo. Ao contrário, a metodologia de A. Monticelli requer a remoção das injeções irrelevantes para confirmar as ilhas observáveis e, portanto, sua metodologia é iterativa.

Ambas metodologias apresentam praticamente o mesmo custo computacional, entretanto, na metodologia iterativa, a cada passo realizado a matriz Ganho deve ser atualizada e fatorada, e portanto para que isso possa ser feito de maneira eficiente, alguma técnica matemática, como por exemplo *Lema de Modificação da Matriz Inversa*, deve ser aplicada para a atualização e fatoração da matriz sem que seja necessário remonta remontá-la toda

novamente. Dessa forma, a proposta de A. Monticelli torna-se mais complexa quanto a sua implementação quando comparada com a metodologia proposta.

## 2.4 Resultados

Para verificar a robustez do método proposto testes foram realizados em diversas redes. A seguir são apresentados testes realizados nas redes de 14 e 118 barras do IEEE (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*). Em todos os testes os ramos foram representados por reatâncias unitárias. Todos os resultados obtidos foram comparados com os resultados obtidos pelo algoritmo das referências (MONTICELLI; WU, 1985a) e (MONTICELLI; WU, 1985b).

## 2.5 Rede 14 barras do IEEE

Considere o plano de medição mostrado na figura abaixo.

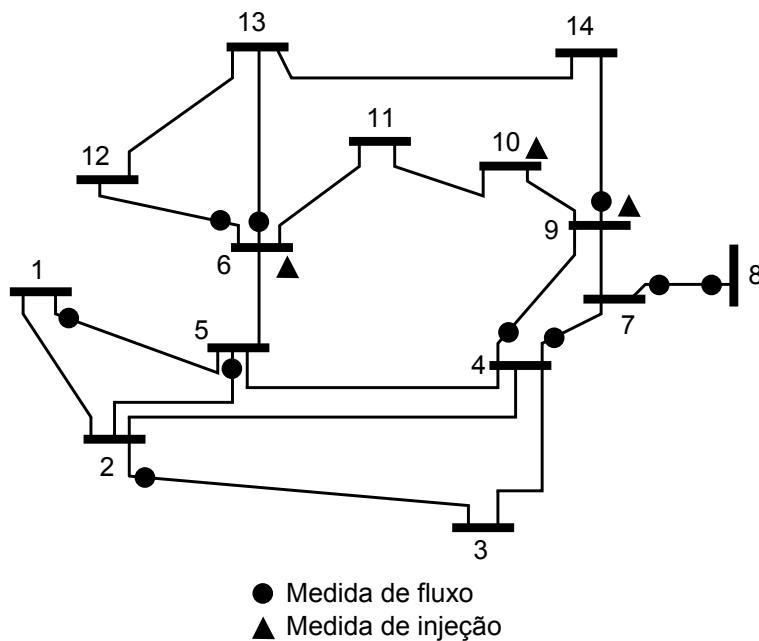


Figura 2.6: Rede de 14 barras do IEEE com medidas

Para encontrar as pseudomedidas de ângulo requeridas pelo método proposto, considere apenas as medidas de fluxo. Neste caso, as ilhas mostradas na Figura 2.7 são encontradas.

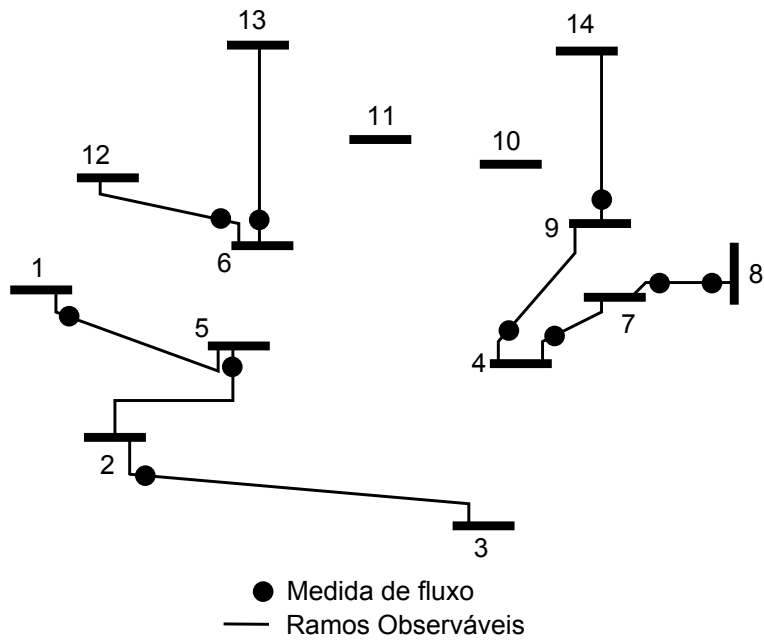


Figura 2.7: Ilhas considerando apenas as medidas de fluxo

De acordo com a Figura 2.7, pseudomedidas de ângulo devem ser inseridas nas barras 1, 4, 6, 10 e 11 da rede. Definindo o parâmetro  $a$  igual a 5, o seguinte estado da rede foi estimado.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 8.5 \\ 1.5 \\ 5 \\ 8.5 \\ 8.5 \\ 8.5 \\ 8.5 \\ 8.5 \\ 5 \\ 5 \\ 8.5 \end{pmatrix}$$

Analisando os fluxos de potência calculados a partir do estado estimado nota-se que os

ramos 2 – 4, 3 – 4, 4 – 5, 5 – 6, 6 – 11 e 13 – 14 são não observáveis.

$$|P_{k-m}| = \begin{matrix} |P_{1-2}| \\ |P_{1-5}| \\ |P_{2-3}| \\ |P_{2-4}| \\ |P_{2-5}| \\ |P_{3-4}| \\ |P_{4-5}| \\ |P_{4-7}| \\ |P_{4-9}| \\ |P_{5-6}| \\ |P_{6-11}| \\ |P_{6-12}| \\ |P_{6-13}| \\ |P_{7-8}| \\ |P_{7-9}| \\ |P_{9-10}| \\ |P_{9-14}| \\ |P_{10-11}| \\ |P_{12-13}| \\ |P_{13-14}| \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.9999 \\ 0 \\ 6.9999 \\ 6.9999 \\ 0 \\ 0 \\ 3.5 \\ 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

De acordo como o algoritmo proposto por A. Monticelli a medida  $P_6$  é identificada como irrelevante. Assim, para identificar as ilhas observáveis, seria necessário remover  $P_6$  e repetir o procedimento. Ao contrário, na metodologia proposta nesta dissertação o procedimento foi realizado apenas uma vez.

## 2.6 Rede 118 barras do IEEE

Para o plano de medição mostrado na Figura 2.8, aplicando o algoritmo proposto, 16 ramos foram identificados como não observáveis e demonstrados na Tabela 2.1. Foram necessárias 29 pseudomedidas de ângulo para regularizar o sistema.

Tabela 2.1: Ramos Não Observáveis - Figura 2.8.

<u>Ramos Não Observáveis</u>
60 – 62
61 – 62
62 – 66
66 – 67
85 – 86
86 – 87
85 – 88
85 – 89
88 – 89
89 – 90
89 – 90
91 – 92
94 – 96
95 – 96
98 – 100
99 – 100

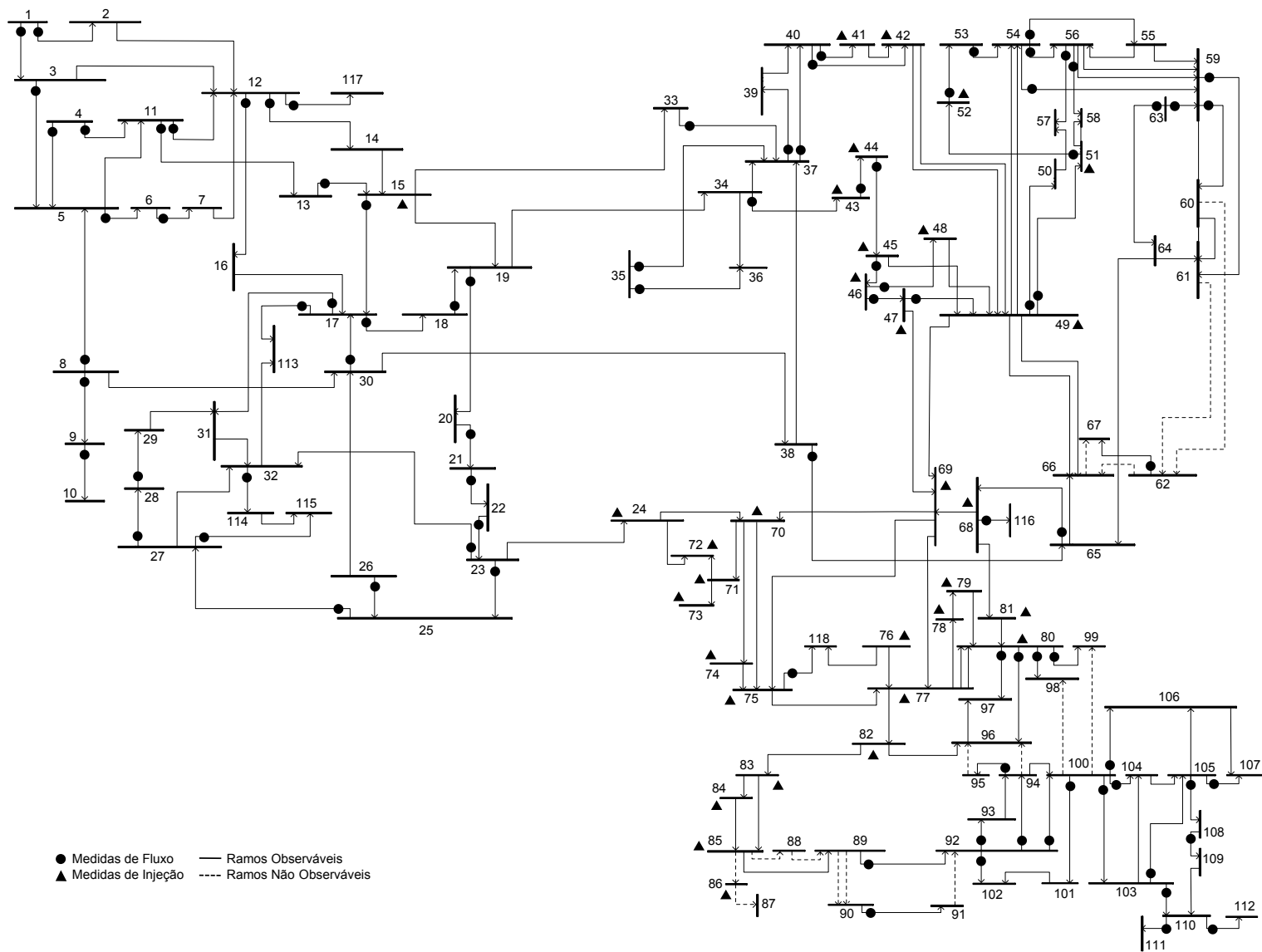


Figura 2.8: Rede de 118 barras do IEEE não observável

## 2.7 Testes adicionais

Diversas simulações foram realizadas para diferentes redes e planos de medição, incluído redes de 4 até 300 barras. Em todos os testes realizados a identificação das ilhas observáveis se deu de maneira correta. Em todos os testes foi adotado  $a = 5$ , assim tornando a matriz Ganho regularizada distantes da sua singularidade e conseguindo valores de módulos de fluxos nos ramos observáveis e não observáveis bem distintos.

## 2.8 Conclusão

Este capítulo apresentou um método de identificação de ilhas observáveis não iterativo. O método é baseado na solução de mínimos quadrados do estimador de estado CC regularizado. A regularização consiste em alocar pseudomedidas de ângulos em barras que são selecionadas de acordo com as medidas de fluxo disponíveis. Ao contrário do estimador CC convencional, as medidas e pseudomedidas são ponderadas. Foi proposto o uso de pesos elevados para medidas e de pesos baixos para pseudomedidas.

A partir do estado estimado pelos estimador CC regularizado os fluxos de potência são calculados e então, os ramos são classificados em observáveis e não observáveis. Os testes indicaram que a identificação de ilhas observáveis ocorre de modo correto mesmo na presença de injeções irrelevantes, o que torna a metodologia computacionalmente promissora.

A implementação do método é simples, uma vez que pouco ajustes devem ser feitos no estimador de estado CC clássico. Testes realizados com redes entre 4 a 300 barras apontaram a robustez do método proposto.



## Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos Usando a Matriz de Gram

Nomeada em homenagem a Jorgen Pederson Gram, a matriz de Gram apresenta diversas aplicações no ramo da engenharia como, por exemplo, na identificação de sistemas, modelagem de *spectrums* de densidade de energia, reduções de modelo e análise de observabilidade. Dentro do contexto de análise de observabilidade, este capítulo apresentará um método numérico para a identificação de medidas e conjuntos críticos para a estimação de estados em SEE. Para isso, algumas propriedades da matriz de Gram serão descritas de forma a auxiliar a compreensão da metodologia. Ao fim, um algoritmo que requer apenas a eliminação de Gauss da matriz de Gram, sem reordenação de linhas e colunas, será apresentado.

### 3.1 Propriedades da Matriz de Gram

Normalmente, em análise de observabilidade, assume-se que as medidas são tomadas aos pares e que há um número suficiente de medidas de tensão disponíveis (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2008b). Sendo assim, o modelo de medição linear é suficiente para a análise e a classificação das medidas disponíveis para estimação estado. O modelo de medição linear é dado por:

$$z = H\theta + e$$

onde o vetor  $z$  contém as medidas disponíveis, o vetor  $\theta$  contém as variáveis de estado, ou

seja, os ângulos das tensões nas barras, a matriz Jacobina  $H$  relaciona as medidas às variáveis de estado e o vetor  $e$  contém os erros nas medições.

Se  $h'_j$  ( $h_j$  transposto) é a  $j$ th linha de  $H$  e  $m$  medidas são consideradas, a matriz Jacobiana pode ser representada por:

$$H = \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ \dots \\ h'_m \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

A matriz de Gram ( $A$ ) associada aos vetores,  $h_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  é, então, formada pelos seus produtos internos, ou produtos escalares, como segue:

$$A = HH' = \begin{pmatrix} h'_1 h_1 & \dots & h'_1 h_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h'_m h_1 & \dots & h'_m h_m \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

onde o elemento  $A_{ij} = h'_i h_j$  é o produto interno dos vetores  $h_i$  e  $h_j$ .

Das propriedades de álgebra linear, tem-se que a matriz de Gram é Hermitiana semi-definida positiva e o posto ( $A$ ) = posto ( $H$ ) (JAIN; GUPTA, 1970). Desse modo, a matriz  $A$  é não singular, se e apenas se  $n-1$  linhas de  $H$  forem linearmente independentes.

Uma propriedade fundamental da matriz de Gram é enunciada e demonstrada no exemplo abaixo.

**Exemplo 3.1.1.** *Seja  $u$  e  $y$  dois vetores ( $n \times 1$ ), não nulos e linearmente dependentes.*

*Portanto, existem dois escalares  $\alpha$  e  $\beta$ , com pelo menos um deles não nulo, tal que:*

$$\alpha u' + \beta y' = 0$$

*Assumindo que  $\alpha \neq 0$ , é possível escrever:*

$$u' = -\frac{\beta}{\alpha} y' = ky'$$

A matriz de Gram correspondente aos vetores  $u$  e  $y$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} u' \\ y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'u & u'y \\ y'u & y'y \end{bmatrix}$$

Realizando a fatoração da matriz  $A$  tem-se:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u'u & u'y \\ 0 & y'y - \frac{y'u}{u'u}u'y \end{bmatrix}$$

Além disso, o pivô associado ao vetor  $y$  é nulo, como segue:

$$y'y - \frac{y'u}{u'u}u'y = y'y - \frac{y'(ky)}{k^2(y'y)}(ky') = y'y - y'y = 0$$

Generalizando, é possível afirmar que se o pivô  $\tilde{A}_{j,j}$  é nulo, então, o vetor  $h'_j$  é linearmente dependente, ou redundante, a pelo menos um dos vetores  $h'_i$   $i = 1, \dots, j - 1$ . Como cada vetor está associado a uma medida, é possível afirmar que se o pivô  $\tilde{A}_{j,j}$  é nulo, então, a medida  $j$  é redundante a pelo menos uma das medidas fatoradas antes da medida  $j$ .

A fatoração triangular da matriz de Gram corresponde a ortogonalização de Gram-Schmidt das linhas da matriz  $H$ , quando as operações lineares são também aplicadas a esta matriz (PURSELL; TRIMBLE, 1991).

Suponha agora que  $A$  é formada apenas por linhas linearmente independentes, ou seja, apenas por medidas não redundantes. Podemos decompor esta matriz como:

$$A = HH' = LU \tag{3.3}$$

onde  $L$  é uma matriz triangular inferior e  $U$  é uma matriz triangular superior inversível. Realizando a fatoração de Gauss na matriz aumentada  $[HH'|H]$  (com dimensões  $m \times (m+n)$ ), chega-se em  $[U|Q]$ , onde  $Q = (L^{-1})'$  e portanto:

$$QQ' = L^{-1}HH'(L^{-1})' = U(L^{-1})' \tag{3.4}$$

Uma vez que  $QQ'$  é simétrica e  $U(L^{-1})$  é uma matriz triangular superior,  $QQ'$  deve ser uma matriz diagonal e, portanto, as linhas não nulas de  $Q$  são ortogonais e suas respectivas medidas formam uma base do sistema (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2009).

Portanto, se  $\tilde{A}$  for a matriz de Gram fatorada, tem-se em resumo que (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2008a):

- Se o pivô de  $\tilde{A}_{jj}$  é nulo, então o vetor  $h'_j$  é linearmente dependente a pelo menos um vetor  $h'_i, i = 1, \dots, j - 1$ , ou seja, a medida  $z_j$  forma um conjunto redundante com pelo menos uma das medidas já fatoradas;
- Se existem  $n-1$  pivôs diferentes de zero em  $\tilde{A}$ , o sistema é observável e as medidas associadas aos pivôs não nulos formam uma base;
- Se estiverem disponíveis apenas as medidas de uma base, todas as medidas são críticas e a rede é dita minimamente observável;
- Alterando a ordem de fatoração das medidas, diferentes bases podem ser determinadas.

Um algoritmo rápido, simples e direto para a identificação da observabilidade e de uma base para a rede é apresentado no Apêndice A.

Após a identificação de uma base para o sistema, as relações de redundância entre as medidas podem ser estabelecidas, uma vez que as medidas fora da base podem ser escritas como combinações lineares das medidas da base. Determinar essas relações de redundância é parte importante na identificação das medidas e conjuntos críticos.

### 3.1.1 Análise de Redundância das Medidas

Dado um sistema observável contendo  $n$  barras e  $m$  medidas, é possível identificar  $n - 1$  medidas que formam uma base e, assim, obter uma matriz Jacobiana contendo apenas as medidas da base ( $H_b$ ). Nesse contexto, qualquer medida que esteja fora da base pode ser escrita como uma combinação linear das  $n - 1$  medidas da base, com segue (ALMEIDA; ASADA; GARCIA,

2008a):

$$h'_j = \left( \alpha_1^j \quad \dots \quad \alpha_i^j \quad \dots \quad \alpha_{n-1}^j \right) \begin{pmatrix} h'_1 \\ \dots \\ h'_i \\ \dots \\ h'_{n-1} \end{pmatrix} = \alpha^j H_b \quad (3.5)$$

Os elementos não nulos do vetor  $\alpha^j$  mostram como devem ser combinadas as linhas de  $H_b$  para formar a correspondente linha da  $j$ th medida, ou seja, mostram quais as medidas de  $H_b$  são redundantes a  $j$ th medida.

O cálculo do vetor  $\alpha^j$  pode ser realizado diretamente através da equação (3.5), já que  $H_b$  possui *posto* completo. Entretanto, pós multiplicando a Equação (3.5) por  $H'_b$ , tem-se (3.6):

$$\alpha^j A_b = h'_j H'_b \quad (3.6)$$

Se a Equação (3.6) for utilizada para o cálculo do vetor  $\alpha^j$ , note que parte do processo de fatoração de  $A_b$  já foi realizado durante a identificação das medidas redundantes. Isso torna menor o custo computacional de obtenção do vetor  $\alpha^j$ .

A seguir é apresentado um exemplo numérico que ilustra a aplicação desses conceitos.

**Exemplo 3.1.2.** Considere o sistema de seis barras da Figura 3.1. Os ramos são representados por reatâncias unitárias e as medidas são processadas na seguinte ordem:  $P_{1-4}$ ,  $P_{1-6}$ ,  $P_{6-4}$ ,  $P_{3-2}$ ,  $P_{2-5}$ ,  $P_1$ ,  $P_6$  e  $P_2$ .

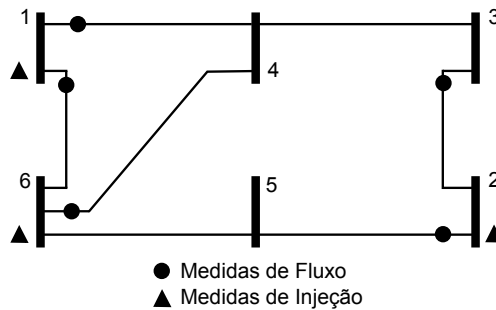


Figura 3.1: Rede de 6 barras com medidas (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2009)

As matrizes Jacobiana e de Gram do sistema acima são dadas, respectivamente, por (3.7) e (3.8).

$$H = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \begin{matrix} P_{1-4} \\ P_{1-6} \\ P_{6-4} \\ P_{3-2} \\ P_{2-5} \\ P_1 \\ P_6 \\ P_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 1 & -4 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Fatorando a matriz  $A$  são encontrados cinco pivôs não nulo e três pivôs nulos conforme mostra a Equação (3.9). Como há  $n-1$  pivôs não nulos a rede é observável e as medidas associadas a estes pivôs formam uma base. Os pivôs nulos se referem às medidas  $P_{6-4}$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , portanto, estas medidas são redundantes e, a partir da Equação (3.6), podem ser escritas como uma combinação linear das medidas da base. Estas relações de redundância são

mostradas na Equação (3.10).

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 0 & 0 & 1.5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} -P_{6-4} + P_{1-4} - P_{1-6} = 0 \\ -P_1 + P_{1,4} + P_{1,6} = 0 \\ -P_2 + P_{2,5} - P_{3,2} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

As medidas da base e as medidas redundantes também podem ser relacionadas na forma de um *tableau*, como mostrado abaixo. No *tableau*, cada linha se refere a uma medida fora da base e cada coluna se refere a uma medida disponível. Assim, por exemplo, a terceira linha do *tableau* se refere à medida  $P_2$  e a segunda coluna do *tableau* se refere à medida  $P_{1-6}$ .

	$P_{1-4}$	$P_{1-6}$	$P_{3-2}$	$P_{2-5}$	$P_6$	$P_{6-4}$	$P_1$	$P_2$
$P_{6-4}$	1	-1	0	0	0	-1	0	0
$P_1$	1	1	0	0	0	0	-1	0
$P_2$	0	0	-1	1	0	0	0	-1

(3.11)

A análise do *tableau* mostra que as colunas mais à direita, associadas às medidas redundantes, formam uma matriz identidade negativa. Além disso, como a coluna correspondente à medida  $P_6$  é nula, esta medida não é redundante a nenhuma das medidas disponíveis e, portanto,  $P_6$  é uma medida crítica, logo, se ela for removida a rede se tornará não observável.

Supondo que a medida  $P_2$  seja removida, a terceira linha e a última coluna do *tableau* deverão ser descartadas, como segue.

	$P_{1-4}$	$P_{1-6}$	$P_{3-2}$	$P_{2-5}$	$P_6$	$P_{6-4}$	$P_1$
$P_{6-4}$	1	-1	0	0	0	-1	0
$P_1$	1	1	0	0	0	0	-1

(3.12)

No novo *tableau* verifica-se o aparecimento de duas novas medidas críticas,  $P_{3-2}$  e  $P_{2-5}$ . Portanto, as medidas  $P_2$ ,  $P_{3-2}$  e  $P_{2-5}$  formam um conjunto crítico, já que a perda de qualquer uma destas medidas faz com que as outras duas medidas tornem-se críticas.

## 3.2 Identificação de Conjuntos Críticos

Se as medidas disponíveis forem classificadas em medidas da base e medidas fora da base, os conjuntos críticos podem ser divididos em dois tipos:

- Tipo 1: formado por uma medida fora da base e uma ou mais medidas da base;
- Tipo 2: formado por duas ou mais medidas da base.

Para identificar os conjuntos críticos do Tipo 1, basta remover do *tableau* inicial as medidas fora da base, uma por vez, e verificar se novas medidas críticas surgiram devido a esta remoção. A medida removida mais as novas medidas críticas formam um conjunto crítico. Portanto, para que todos os conjuntos críticos do Tipo 1 sejam identificados, todas as medidas fora da base devem ser removidas uma por vez, sempre partindo do *tableau* inicial.

Para a detecção dos conjuntos críticos do Tipo 2, as medidas não críticas da base devem ser removidas uma por vez. Entretanto, para ser removida uma medida deve estar fora da base e, portanto, torna-se necessário realizar uma mudança de base. Nesta mudança, uma medida da base será substituída por uma medida redundante a ela que esteja fora da base.

### 3.2.1 Mudança de Base

A mudança de base ocorre quando há necessidade de trocar uma medida da base por uma medida redundante a ela que esteja fora da base. Em termos do *tableau*, esta mudança de base corresponde à permutação das colunas associadas às duas medidas, seguida da fatoração do *tableau*, de modo que a porção associada às medidas fora da base formem novamente uma matriz identidade negativa. O exemplo a seguir resume este procedimento.

**Exemplo 3.2.1.** De acordo com o *tableau* (3.11), a medida  $P_{6-4}$  pode ser escrita como uma combinação linear das medidas  $P_{1-4}$  e  $P_{1-6}$ . Assim, a medida  $P_{6-4}$  que está fora da base



pode substituir tanto a medida  $P_{1-4}$  quanto a medida  $P_{1-6}$  que estão na base. Por exemplo, para fazer a troca das medidas  $P_{1-4}$  e  $P_{6-4}$ , tem-se:

A troca das colunas  $P_{1-4}$  e  $P_{6-4}$ ,

$P_{6-4}$	$P_{1-6}$	$P_{3-2}$	$P_{2-5}$	$P_6$	$P_{1-4}$	$P_1$	$P_2$
-1	-1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	-1	0
0	0	-1	1	0	0	0	-1

A fatoração da coluna  $P_{1-4}$  até que se obtenha novamente uma matriz identidade negativa do lado direito do tableau.

$P_{6-4}$	$P_{1-6}$	$P_{3-2}$	$P_{2-5}$	$P_6$	$P_{1-4}$	$P_1$	$P_2$
1	1	0	0	0	-1	0	0
1	2	0	0	0	0	-1	0
0	0	-1	1	0	0	0	-1

No novo tableau a medida  $P_{1-4}$  não pertence mais a base, tendo sido substituída por  $P_{6-4}$ . Desse modo, a medida  $P_{1-4}$  pode ser removida e um eventual conjunto crítico contendo  $P_{1-4}$  pode ser identificado.

Analisando mais detalhadamente o tableau (3.11), observe que a medida da base  $P_{1-4}$  poderia ser substituída pelas medidas  $P_{6-4}$  ou  $P_1$  que estão fora da base. Do mesmo modo, a medida da base  $P_{1-6}$  também poderia ser substituída pelas medidas  $P_{6-4}$  ou  $P_1$  que estão fora da base. As medidas da base  $P_{3-2}$  e  $P_{2-5}$  só poderiam ser substituídas pela medida  $P_2$  que está fora da base. Por fim, a medida  $P_6$  não poderia ser substituída, uma vez que ela é crítica e, portanto, não é redundante a qualquer uma das medidas disponíveis.

### 3.2.2 Algoritmo para Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos Baseado nas Propriedades da Matriz de Gram

Baseado nas propriedades anteriores, (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2009) propôs o seguinte algoritmo para a identificação de medidas e conjuntos críticos:

---

**Algoritmo 3.2.1:** Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos Baseado nas Propriedades da Matriz de Gram

---

**Passo 1:** Monte e fature a matriz de Gram. As medidas associadas aos pivôs não nulos são as medidas da base;

**Passo 2:** Calcule os vetores  $\alpha$  associados às medidas redundantes e forme o *tableau* inicial;

**Passo 3:** As medidas da base cujas colunas são nulas no *tableau*, são as medidas críticas;

**Passo 4:** Remova do *tableau* inicial uma medida que está fora da base. Se novas medidas críticas aparecerem, forme um conjunto crítico contendo as novas medidas críticas mais a medida removida. Retorne ao *tableau* inicial. Repita este procedimento até que todas as medidas fora da base tenham sido removidas;

**Passo 5:** Remova do *tableau* uma medida da base que não seja crítica e nem pertença a um conjunto crítico. Se novas medidas críticas surgirem, forme um conjunto crítico contendo as novas medidas críticas mais a medida removida. Retorne ao *tableau* inicial e repita este passo até que todas as medidas da base que não sejam críticas e que não pertençam a conjuntos críticos tenham sido removidas;

**Passo 6:** As medidas que não são críticas e nem pertencem a conjuntos críticos, são redundantes.

---

Observe que no **Passo 3** são identificadas as medidas críticas, enquanto que nos **Passos 4 e 5** são identificados os conjuntos críticos dos Tipos 1 e 2, respectivamente.

Note que o algoritmo apresentado pode ser facilmente implementado, uma vez que apenas a Eliminação de Gauss (sem reordenação de linhas e colunas) é requerida.

### 3.3 Resultados

Nesta sessão serão apresentados alguns testes realizados nos sistemas de 4 barras da referência (FILHO et al., 2001), 14 barras do IEEE apresentado em (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2009) e 118 barras do IEEE. Testes adicionais foram realizados e serão comentados ao final desta sessão. Em todos os testes, os ramos foram representados por reatâncias unitárias. Os resultados foram obtidos com o algoritmo desenvolvido no Matlab.

### 3.3.1 Rede de 4 barras

#### Rede Observável

Para o plano de medição mostrado na Figura 3.2, as medidas foram processadas na seguinte ordem:  $P_{1-2}$ ,  $P_{1-3}$ ,  $P_{3-2}$  e  $P_2$ .

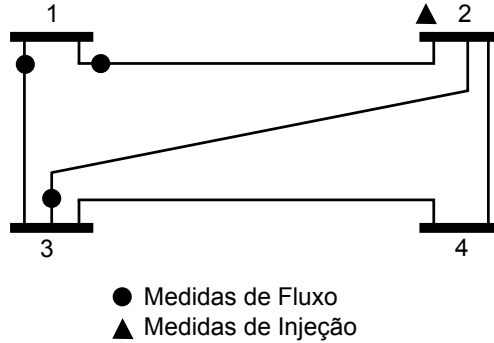


Figura 3.2: Rede de 4 barras observável (FILHO et al., 2001)

A matriz de Gram fatorada ( $\tilde{A}$ ) é dada por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3333 \end{pmatrix}$$

Note que há  $n-1$  pivôs diferentes de zero em  $\tilde{A}$ , portanto, o sistema é observável e as medidas associadas aos pivôs não nulos formam uma base para o sistema de medição. Dessa forma, o seguinte *tableau* inicial é formado:

$$\begin{array}{ccc|c} P_{1-2} & P_{1-3} & P_2 & P_{3-2} \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Como a coluna referente a  $P_2$  é nula, ela é uma medida crítica. Além disso, a eliminação de  $P_{3-2}$  implica no surgimento de duas novas medidas críticas ( $P_{1-2}$  e  $P_{1-3}$ ) e, portanto, um conjunto crítico do Tipo 1 é formado pelas medidas  $P_{1-2}$ ,  $P_{1-3}$  e  $P_{3-2}$ .

Neste caso, como todas as medida já foram classificadas, não é necessário executar o **Passo 5** do algoritmo. A Tabela 3.1 resume a análise do plano de medição.

Tabela 3.1: Análise do plano de medição - Figura 3.2.

	Medidas
Medidas Críticas	$P_2$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{1-2}, P_{1-3}, P_{3-2}$
Conjunto Crítico Tipo 2	-
Medidas Redundantes	-

### Rede Não Observável

Agora suponha que devido a uma falha de comunicação as medidas  $P_{3-2}$  e  $P_2$  foram temporariamente perdidas. Com isso, o sistema deixa de ser observável, como mostra a Figura 3.3, já que  $P_2$  era uma medida crítica.

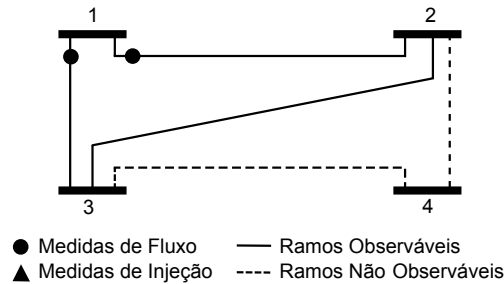


Figura 3.3: Rede de 4 barras não observável

Fatorando as medidas na seguinte ordem:  $P_{1-2}$  e  $P_{1-3}$ , a matriz  $(\tilde{A})$  é dada por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Como há apenas apenas dois pivôs não nulos na matriz de Gram fatorada, então, confirma-se que a rede é não observável. Além disso, como não há pivôs nulos, todas as medidas do plano de medição são críticas. A Tabela 3.2 resume a análise deste novo plano de medição.



$$H = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 & \theta_7 & \theta_8 & \theta_9 & \theta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \\ \begin{matrix} P_{1-5} \\ P_{1-2} \\ P_{2-3} \\ P_{2-5} \\ P_{4-7} \\ P_{4-9} \\ P_{7-8} \\ P_{6-11} \\ P_{6-12} \\ P_{6-13} \\ P_{12-13} \\ P_{9-10} \\ P_{9-14} \\ P_6 \\ P_3 \\ P_{10} \\ P_{12} \\ P_9 \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)
\end{matrix}$$

Na matriz de Gram fatorada são observados os seguintes pivôs nulos:  $\tilde{A}_{4,4}$ ,  $\tilde{A}_{11,11}$ ,  $\tilde{A}_{16,16}$ ,  $\tilde{A}_{17,17}$ ,  $\tilde{A}_{18,18}$ . Além disso, como há treze pivôs não nulos a rede é observável e estes pivôs não nulos definem uma base para o plano de medição. As medidas associadas aos pivôs nulos podem ser escritas como combinações lineares das medidas da base e, portanto, colocadas na forma de um *tableau*. A matriz  $\tilde{A}$  e o *tableau* formado são mostrado a seguir:



$P_{1-5}$	$P_{1-2}$	$P_{2-3}$	$P_{4-7}$	$P_{4-9}$	$P_{7-8}$	$P_{6-11}$	$P_{6-12}$	$P_{6-13}$	$P_{9-10}$	$P_{9-14}$	$P_6$	$P_3$	$P_{2-5}$	$P_{12-13}$	$P_{10}$	$P_{12}$	$P_9$
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
1	-1	-2	0	-1	0	2	1	1	-2	0	-1	-1	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	1	-2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	-1



De acordo com o *tableau*, a coluna associada a medida  $P_{7-8}$  é nula, portanto, conforme o **Passo 3** do algoritmo, esta é uma medida crítica. Seguindo para o **Passo 4**, ao remover a medida  $P_{10}$ , surgem quatro novas medidas críticas,  $P_{2-3}$ ,  $P_{6-11}$ ,  $P_6$  e  $P_3$ . Assim, um conjunto crítico do Tipo 1 é formado pela medida eliminada mais as novas medidas críticas. Removendo agora a medida  $P_9$ , outro conjunto crítico do Tipo 1 composto pelas medidas  $P_9$ ,  $P_{4-7}$  e  $P_{9-14}$ , é identificado. Ao remover as demais medidas fora da base, não são identificados novos conjuntos críticos.

Passando para o **Passo 5**, uma mudança de base é realizada entre as medidas  $P_{1-5}$  e  $P_{2-5}$ . Em seguida, a medida  $P_{1-5}$  é eliminada e, então, a medida  $P_{1-2}$  é apontada como crítica. Assim, as medidas  $P_{1-5}$  e  $P_{1-2}$  formam um conjunto crítico do Tipo 2. Ao remover as demais medidas da base ainda não classificadas, não são formados novos conjuntos críticos.

A Tabela 3.3 mostra o resumo da análise do plano de medição da Figura 3.4. Todas as medidas não mostradas na tabela são redundantes.

Tabela 3.3: Análise do plano de medição - Figura 3.4

	Medidas
Medidas Críticas	$P_{7-8}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{10}, P_{2-3}, P_{6-11}, P_6, P_3$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_9, P_{4-7}, P_{9-14}$
Conjunto Crítico Tipo 2	$P_{1-5}, P_{1-2}$

## Rede Não Observável

Considere que no sistema de medição anterior as medidas  $P_{1-5}$ ,  $P_{1-2}$  e  $P_{2-5}$  foram perdidas, como mostra a Figura 3.5.

Após a fatoração da matriz de Gram foram encontrados doze pivôs não nulos o que confirma a não observabilidade da rede. A ordem de fatoração adotada foi a mesma do teste anterior e o seguinte *tableau* foi formado:

$P_{2-3}$	$P_{4-7}$	$P_{4-9}$	$P_{7-8}$	$P_{6-11}$	$P_{6-12}$	$P_{6-13}$	$P_{9-10}$	$P_{9-14}$	$P_6$	$P_3$	$P_{10}$	$P_{12-13}$	$P_{12}$	$P_9$
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	1	-2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	-1

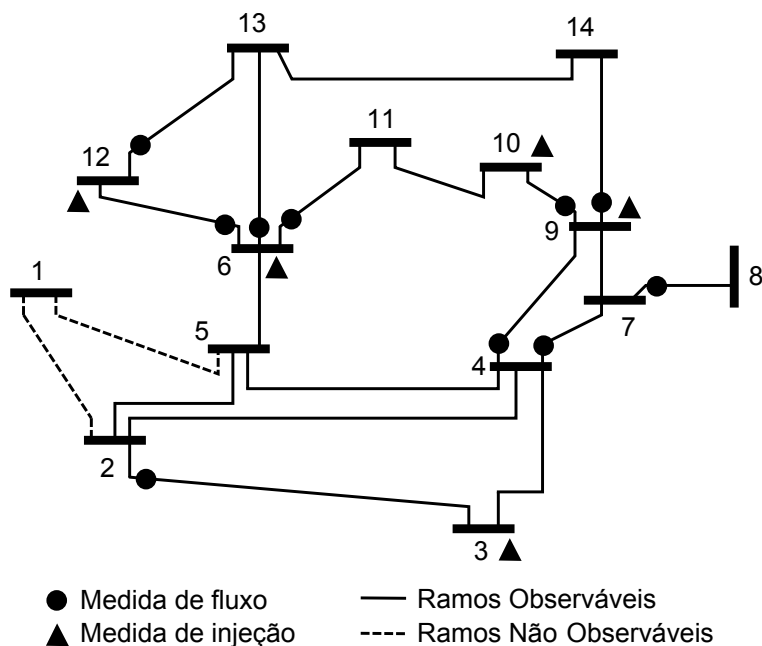


Figura 3.5: Rede de 14 barras do IEEE não observável

Conforme o *tableau*, as medidas  $P_{2-3}$ ,  $P_{7-8}$ ,  $P_{6-11}$ ,  $P_6$ ,  $P_3$  e  $P_{10}$  são consideradas críticas, uma vez que suas colunas correspondentes são nulas. Eliminando a medida  $P_9$  surgem quatro novas medidas críticas e, portanto, é formado um conjunto crítico do Tipo 1. Ao eliminar as demais medidas fora da base não são formados novos conjuntos críticos. Nenhum conjunto crítico do Tipo 2 foi encontrado para esta rede.

A Tabela 3.4 mostra o resumo da análise do plano de medição da Figura 3.5. Todas as medidas não mostradas na tabela são redundantes.

Tabela 3.4: Análise do plano de medição - Figura 3.5

	Medidas
Medidas Críticas	$P_{2-3}, P_{7-8}, P_{6-11}, P_6, P_3, P_{10}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_9, P_{4-7}, P_{4-9}, P_{9-10}, P_{9-14}$
Conjunto Crítico Tipo 2	-

### 3.3.3 Rede de 118 barras do IEEE

Para o sistema de 118 barras do IEEE, considere o plano de medição descrito na Figura 3.6.

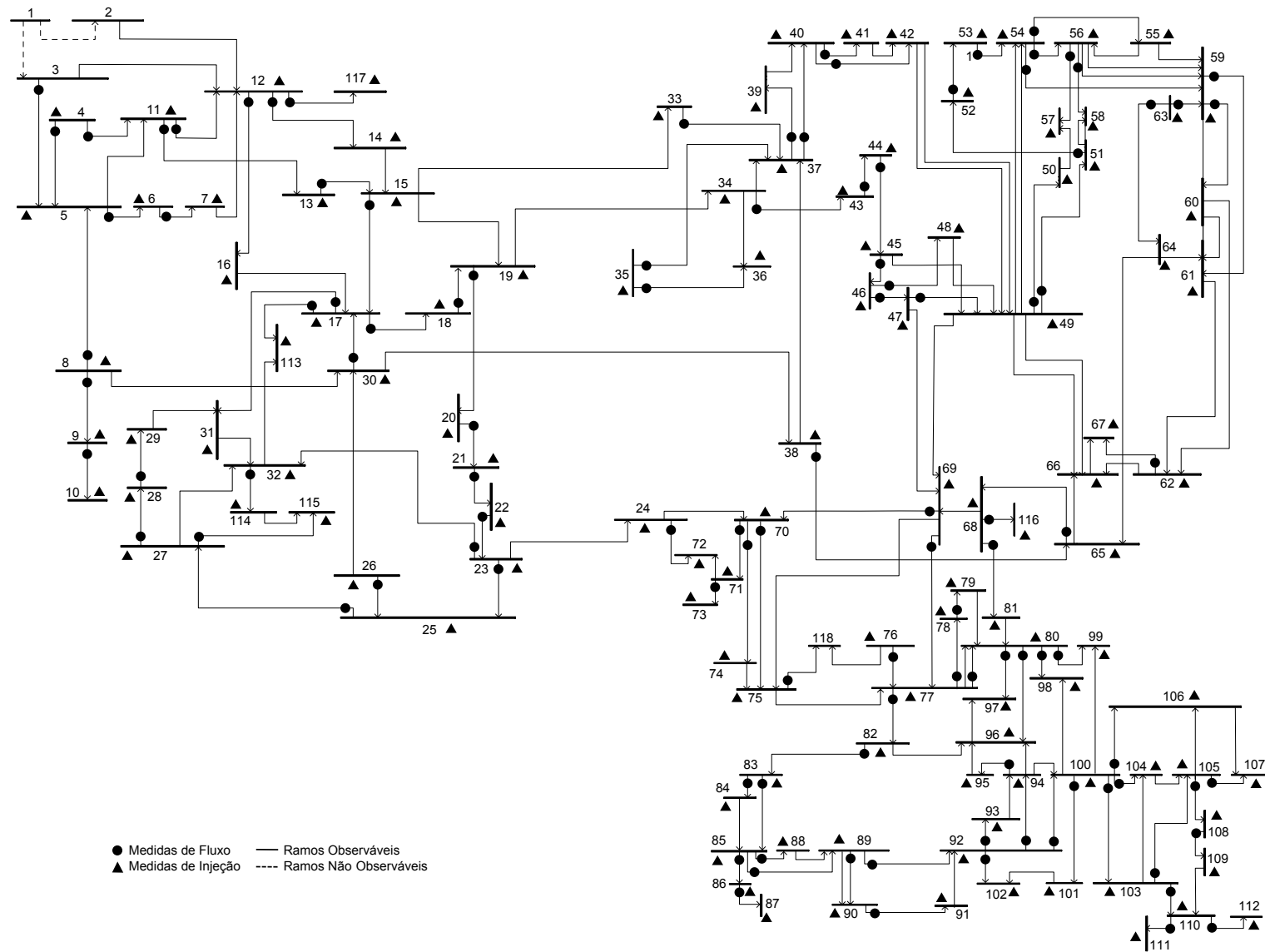


Figura 3.6: Rede de 118 barras do IEEE não observável

Na matriz  $\tilde{A}$  observam-se 116 pivôs não nulos e, portanto, a rede é não observável. Além disso, foi detectado uma medida crítica e dois conjuntos críticos do Tipo 1, como mostra a tabela abaixo:

Tabela 3.5: Análise do plano de medição - Figura 3.6

	Medidas
Medidas Críticas	$P_{12}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_5, P_{3-5}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{117}, P_{12-117}$

### 3.3.4 Testes adicionais

Diversos outros testes foram realizados em redes de maior porte, incluindo uma rede de 300 barras. Nas simulações foram variadas as topologias das redes e os planos de medição, sendo realizados na plataforma Matlab..

De modo geral, o algoritmo se mostrou robusto sendo considerado adequado para a aplicação no planejamento e na análise de sistemas de medição.

Destaca-se ainda que para todos os testes realizados, mudando a ordem de fatoração das medidas, é possível que um conjunto crítico antes classificado como do Tipo 1 seja classificado como do Tipo 2 e vice-versa. Este tipo de mudança não traz nenhum prejuízo ao processo de identificação, uma vez que os conjuntos que sofreram essa mudança de classificação são compostos pelas mesmas medidas de antes da mudança.

## 3.4 Conclusão

Este capítulo apresentou um algoritmo numérico para identificação de medidas e conjuntos críticos em planos de medição para estimação de estado de sistemas de energia elétrica. A partir da fatoração da matriz de Gram é identificado um conjunto de medidas que torna a rede minimamente observável e, em seguida, são determinadas as relações de redundância entre estas e as demais medidas.

Ao término da fatoração da matriz de Gram, se a quantidade de pivôs não nulos for

igual a  $n-1$ , onde  $n$  é o número de barras da rede, o sistema é dito observável.

O método proposto é robusto, rápido e simples, uma vez que requer apenas a eliminação de Gauss, sem reordenação de linhas e colunas, para a sua implementação.



# Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos Usando a Matriz Jacobiana

Nomeada em homenagem ao matemático alemão Carl Gustav Jakob Jacobi, a matriz Jacobiana é formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial. Sua aplicação se estende aos ramos da Matemática, Física, Engenharia, entre outros. Neste capítulo, um algoritmo para a identificação de medidas e conjuntos críticos a partir da matriz Jacobiana das medidas disponíveis para a estimação de estado é apresentado. Em muitos aspectos, a metodologia a ser apresentada é similar a desenvolvida no Capítulo 3. De forma a facilitar o entendimento do método, alguns conceitos relacionados a pivoteamento parcial e completo serão discutidos.

## 4.1 Estratégias de Pivoteamento

As soluções numéricas de sistemas lineares podem ser obtidas por métodos diretos ou exatos e métodos iterativos ou de aproximação. Os *métodos diretos* são aqueles que determinam, a menos dos erros de arredondamento, a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações. Já os *métodos iterativos*, partem de uma estimativa inicial e conduzem a uma solução aproximada, caso ela exista, através de um processo repetitivo (RUGGIERO; LOPES, 2000).

Uma das principais fontes dos erros observados nos métodos diretos e indiretos são as aproximações inerentes aos processos de fatoração requeridos na busca das soluções. De

acordo com o método da Eliminação de Gauss, em cada etapa  $k$  do processo de fatoraçoão é necessário calcular um multiplicador  $\mu_{i,k} = \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{kk}}$ . Note que se o elemento  $\lambda_{k,k} \simeq 0$ , o multiplicador poderá assumir valores muito elevados. Como computadores digitais realizam cálculos com aritmética de precisão finita, ocorrerão arredondamentos e, conseqüentemente, perda de precisão (RUGGIERO; LOPES, 2000). Veja o exemplo a seguir (BURDEN, 2005).

**Exemplo 4.1.1.** *Considere o sistema  $\Lambda x = b$ , dado por:*

$$\begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 \\ 5.291 & -6.13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{pmatrix}$$

*A solução exata deste problema é  $x_1 = 10$  e  $x_2 = 1$ .*

*Aplicando a eliminação de Gauss neste sistema e usando aritmética de quatro dígitos para a representação numérica, o primeiro pivô será  $\lambda_{1,1}^{(1)} = 0.003$ . Este pivô apresenta um valor relativamente baixo e, portanto, o multiplicador  $\mu_{2,1}$  requerido para zerar o termo  $\Lambda_{2,1}$  será:*

$$\mu_{2,1} = \frac{5.291}{0.003} = 1763.6\bar{6}$$

*Devido à precisão numérica adotada este multiplicador é arredondando para 1764. Fatorando a matriz aumentada do sistema com seus devidos arredondamentos, obtemos:*

$$\begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{pmatrix}$$

*Após a fase de retro substituição obtém-se  $x_2 = 1.001$ , o qual é um valor próximo à solução exata. Contudo, devido ao baixo valor do pivô  $\lambda_{1,1}$ , a variável  $x_1$  calculada por:*

$$x_1 \approx \frac{59.17 - (59.14)(1.001)}{0.003} = -10.00$$

*apresenta valor estimado bastante distante do seu valor exato.*

Em sistemas maiores os erros de arredondamento podem se propagar aumentando ainda mais a diferença entre as soluções obtidas e as soluções exatas.



Este exemplo ilustra a dificuldade do método padrão de eliminação de Gauss quando há pivôs  $\lambda_{k,k}^{(k)}$  com módulos muito pequenos. Para contornar tais problemas é possível adotar estratégias de pivoteamento. Nessas estratégias as linhas e/ou colunas podem ser permutadas durante a fatoração de modo que pivôs muito grandes ou muito pequenos possam ser evitados.

#### 4.1.1 Pivoteamento Parcial

É a estratégia de pivoteamento mais simples. Nela, o elemento de maior módulo entre os coeficientes da coluna a ser fatorada é selecionado como pivô. Assim, para fatorar a coluna  $k$  de uma matriz de  $m$  linhas, o pivô selecionado  $\lambda_{p,k}$  é tal que:

$$|\lambda_{p,k}| = \max_{k \leq i \leq m} |\lambda_{i,k}|, \quad (4.1)$$

Em seguida é realizada a permutação entre as linhas  $k$  e  $p$  e a fatoração é realizada.

**Exemplo 4.1.2.** *Considere novamente a aritmética de quatro dígitos para arredondamento e o sistema linear descrito no Exemplo 4.1.1:*

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ \Lambda_2 : 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \end{cases}$$

*Para fatorar a primeira coluna, o maior valor desta coluna é escolhido como pivô, isto é:*

$$\max \{ |\lambda_{1,1}^{(1)}|, |\lambda_{2,1}^{(1)}| \} = \max \{ |0.003|, |5.291| \} = |5.291| = |\lambda_{2,1}^{(1)}|$$

*Em seguida é realizada a permutação entre as linhas de modo que a linha contendo o pivô selecionado seja a primeira, uma vez que se está fatorando a primeira coluna, como segue:*

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \\ \Lambda_2 : 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \end{cases}$$

*Note que a ordem das colunas ou ordem das variáveis é mantida. Para este sistema, o*

multiplicador  $\mu_{2,1}$  é dado por:

$$\mu_{2,1} = \frac{0.003}{5.291} = 0.000567$$

e a operação  $\Lambda_2 - \mu_{2,1}\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$  resulta em:

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 5.2913x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \\ \Lambda_2 : \qquad \qquad \qquad 59.14x_2 = 59.14 \end{cases}$$

Dessa maneira, chega-se a solução exata do problema, com  $x_1 = 10$  e  $x_2 = 1$ .

As permutações de linhas também podem ser realizadas com o auxílio de matrizes de permutação  $Pl$ . Assim, para permutar as linhas  $i$  e  $j$  de  $\Lambda$  basta tomar uma matriz identidade de ordem  $m$  e permutar as linhas  $i$  e  $j$  desta matriz para obter  $Pl$ . A matriz permutada será:

$$\Lambda^1 = Pl^1\Lambda$$

o índice <sup>1</sup> indica que esta é a primeira permutação realizada em  $\Lambda$ .

Se  $k$  operações de permutação forem realizadas, a matriz de permutação final será formada pelo produto das  $k$  matrizes de permutação responsáveis por cada uma das permutação, ou seja,

$$Pl = Pl^{(k)}Pl^{(k-1)} \dots Pl^{(1)} \tag{4.2}$$

e

$$\Lambda^k = Pl\Lambda \tag{4.3}$$

O exemplo ilustra o uso de matrizes de permutação.

**Exemplo 4.1.3.** Considere a matriz  $\Lambda$  descrita abaixo:

$$\Lambda = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Para realizar a troca das linhas 2 e 5 de  $\Lambda$ , a matriz de permutação requerida é:

$$Pl^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz  $\Lambda$  com as linhas permutadas é:

$$\Lambda^1 = Pl^1 \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Para realizar a troca entre as linhas 2 e 3 de  $\Lambda^1$ , temos:

$$Pl^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^2 = Pl^2\Lambda^1 = Pl^2Pl^1\Lambda = Pl\Lambda = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que a permutação das linhas não altera as posições das colunas.

Em geral, o uso do pivoteamento parcial é suficiente para evitar erros de arredondamento. Entretanto, em alguns casos, somente a permutação de linhas não é suficiente como mostra o exemplo abaixo (GAMBILL, 2011).

**Exemplo 4.1.4.** *Considere o sistema linear abaixo. A aritmética de arredondamento de quatro dígitos será adotada novamente.*

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 30.00x_1 + 591400x_2 = 591700 \\ \Lambda_2 : 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$$

O primeiro pivô será:

$$\max \left\{ |\lambda_{1,1}^{(1)}|, |\lambda_{2,1}^{(1)}| \right\} = \max \{ |30.00|, |5.291| \} = |30.00| = |a_{1,1}^{(1)}|$$

logo não é necessária a permutação de linhas e o multiplicador  $\mu_{i,k}$  é dado por:

$$\mu_{2,1} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764$$

O sistema fatorado com os devidos arredondamentos é:

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 30.00x_1 + 591400x_2 \approx 591700 \\ \Lambda_2 : \quad \quad - 104300x_2 \approx 104400 \end{cases}$$

o qual fornece a mesma solução não precisa do Exemplo 4.1.1:  $x_2 \approx 1.001$  e  $x_1 \approx -10.00$ .

Para resolver problemas dessa ordem é possível aplicar o pivoteamento parcial com escala descrito a seguir.

### 4.1.2 Pivoteamento Parcial com Escala

O primeiro passo desta estratégia de pivoteamento é a definição de um fator de escala,  $s_i$ , para cada linha  $i$  da matriz a ser fatorada. O fator de escala será o elemento de maior módulo de cada linha da matriz. Os fatores  $s_i$  são calculados apenas uma vez no início do processo de fatoração e são definidos por (BURDEN, 2005):

$$s_i = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_{ij}| \quad (4.4)$$

Em seguida, o pivô para a fatoração da coluna  $k$  será o  $\lambda_{p,k}$  que satisfaça:

$$\frac{|\lambda_{p,k}|}{s_p} = \max_{k \leq i \leq m} \frac{|\lambda_{i,k}|}{s_i} \quad (4.5)$$

Note que a presença de linhas nulas causarão uma indefinição matemática e a impossibilidade de se obter uma solução. Entretanto, como as matrizes a serem fatoradas são matrizes Jacobianas que representam planos de medição, não há esta possibilidade.

O exemplo a seguir ilustra a aplicação desta técnica de pivoteamento.

**Exemplo 4.1.5.** *Usando a aritmética de arredondamento de 3 dígitos, considere o sistema linear descrito abaixo (BURDEN, 2005):*

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 7x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 69 \\ \Lambda_2 : 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 8 \\ \Lambda_3 : 6x_1 + 16x_2 + 9x_3 = 55 \end{cases}$$

*Inicialmente, os fatores de escalonamento de cada linha da matriz de coeficientes são calculados como segue:*

$$s_1 = \max\{|7|, |10|, |15|\} = 15$$

$$s_2 = \max\{|2|, |1|, |1|\} = 2$$

$$s_3 = \max\{|6|, |16|, |9|\} = 16$$

Em seguida, para selecionar o primeiro pivô, os fatores  $\frac{|\lambda_{p,1}|}{s_1}$  são obtidos.

$$\frac{|\lambda_{1,1}|}{s_1} = \frac{7}{15} = 0.467, \quad \frac{|\lambda_{2,1}|}{s_2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{|\lambda_{3,1}|}{s_3} = \frac{6}{16} = 0.375$$

Como  $\frac{|\lambda_{2,1}|}{s_2}$  é o maior fator, as linhas 1 e 2 devem ser permutadas e a Eliminação de Gauss é aplicada à primeira coluna, como segue:

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 8, & s_1 = 2 \\ \Lambda_2 : 7x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 69, & s_2 = 15 \\ \Lambda_3 : 6x_1 + 16x_2 + 9x_3 = 55, & s_3 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 8, & s_1 = 2 \\ \Lambda_2 : 6.5x_2 + 11.5x_3 = 41, & s_2 = 15 \\ \Lambda_3 : 13x_2 + 6x_3 = 31, & s_3 = 16 \end{cases}$$

Em seguida, para selecionar o segundo pivô, os fatores  $\frac{|\lambda_{p,2}|}{s_2}$  são obtidos.

$$\frac{|\lambda_{2,2}|}{s_2} = \frac{6.5}{15} = 0.433, \quad \frac{|\lambda_{3,2}|}{s_3} = \frac{13}{16} = 0.813$$

Como  $\frac{|\lambda_{3,2}|}{s_3} > \frac{|\lambda_{2,2}|}{s_2}$ , as linhas 2 e 3 devem ser permutadas como segue:

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 8, & s_1 = 2 \\ \Lambda_2 : 13x_2 + 6x_3 = 31, & s_2 = 16 \\ \Lambda_3 : 6.5x_2 + 11.5x_3 = 41, & s_3 = 15 \end{cases}$$

Note que os valores de  $s_i$  são permutados junto com as linhas. Por fim, aplicando a fatoração à segunda coluna, chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \Lambda_1 : 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 8, & s_1 = 2 \\ \Lambda_2 : & 13x_2 + 6x_3 = 31, & s_2 = 16 \\ \Lambda_3 : & & 8.5x_3 = 25.5, & s_3 = 15 \end{cases}$$

Aplicando a retro substituição encontra-se a solução exata do problema, dada por:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 3$ .

Caso o pivoteamento parcial sem escala tivesse sido utilizado a solução encontrada seria aproximada.

Apesar dos avanços conseguidos com o pivoteamento parcial com escala, há casos onde esta metodologia pode falhar. O exemplo a seguir ilustra um caso de falha.

**Exemplo 4.1.6.** Considere a matriz aumentada abaixo, onde  $c$  é um valor muito grande, isto é  $c \gg 1$  (GAMBILL, 2011):

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & b \\ \hline 2 & 2c & 2c \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Aplicando o pivoteamento parcial com escala, tem-se:

$$\begin{aligned} s_1 &= \max\{|1|, |1|\} = 1 \\ s_2 &= \max\{|2|, |2c|\} = 2c \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\lambda_{1,1}}{s_1} = \frac{1}{1} = 1$$

e

$$\frac{\lambda_{2,1}}{s_2} = \frac{2}{2c} \approx 0$$

Como  $\frac{\lambda_{1,1}}{s_1}$  é maior que  $\frac{\lambda_{2,1}}{s_2}$ , não há necessidade de permutação entre linhas. Assim, ao

realizar a fatoração tem-se:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & & b \\ \hline 2 & 2c & & 2c \\ 0 & 1-c & & 2-c \end{array}$$

Como  $c \gg 1$  e devido a precisão numérica limitada de computadores e calculadoras, a matriz ampliada pode ser escrita como:

$$\Lambda = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & & b \\ \hline 2 & 2c & & 2c \\ 0 & -c & & -c \end{array}$$

A solução exata para este sistema é  $x_1 = x_2 = 1$ , entretanto de acordo com a fatoração acima, o seguinte resultado é encontrado,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$ .

Uma estratégia de pivoteamento capaz de contornar o problema mostrado neste exemplo, conhecida o pivoteamento completo, é apresentada a seguir.

### 4.1.3 Pivoteamento Completo

No pivoteamento completo podem ocorrer permutações de linhas e colunas. Sua complexidade de programação e o tempo computacional requeridos são superiores ao pivoteamento parcial (GAMBILL, 2011)(RUGGIERO; LOPES, 2000).

Na fatoração da coluna  $k$  o pivô será o elemento de maior módulo entre todos os elementos posicionados abaixo da linha e da coluna  $k$  e que, portanto, ainda não foram fatorados. Ou seja,

$$\lambda_{p,t} = \max_{k \leq i \leq m, k \leq j \leq n} |\lambda_{i,j}| \quad (4.6)$$

Encontrado  $\lambda_{p,t}$ , as linhas  $k$  e  $p$  e as colunas  $k$  e  $t$  devem ser permutadas de modo que  $\lambda_{p,t}$  se torne o próximo pivô. Estas permutações implicam na mudança das posições das variáveis, ao contrário do que ocorria no pivoteamento parcial. Para facilitar a compreensão desta técnica, veja o exemplo abaixo onde o problema 4.1.6 é resolvido com pivoteamento



completo.

**Exemplo 4.1.7.** *Considere novamente a matriz ampliada abaixo, onde  $c$  é um valor muito grande, isto é  $c \gg 1$  (GAMBILL, 2011):*

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & & b \\ \hline 2 & 2c & & 2c \\ 1 & 1 & & 2 \end{array}$$

*Para fatorar a primeira coluna o  $\lambda_{1,2} = 2c$  é selecionado. Note que este pivô corresponde ao maior elemento da matriz. Assim, as colunas 1 e 2 devem ser permutadas, como segue:*

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & & b \\ \hline 2c & 2 & & 2c \\ 1 & 1 & & 2 \end{array}$$

*Aplicando a Eliminação de Gauss padrão, tem-se:*

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & & b \\ \hline 2c & 2 & & 2c \\ 0 & 1 - \frac{1}{c} & & 1 \end{array}$$

*Como  $c \gg 1$  e devido a precisão numérica limitada de computadores e calculadoras, a seguinte aproximação pode ser feita,  $1 - \frac{1}{c} \approx 1$ , logo:*

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & & b \\ \hline 2c & 2 & & 2c \\ 0 & 1 & & 1 \end{array}$$

*Aplicando a retro substituição encontra-se  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 1$ , que é a solução exata do problema.*

Para simplificar a realização das permutações, uma matriz de permutação de colunas,

$P_c$ , similar à matriz de permutação de linhas  $P_l$  pode ser usada. Se forem realizadas  $k$  permutações de colunas, a matriz de permutação final será:

$$P_c = P_c^1 P_c^2 \dots P_c^k \quad (4.7)$$

A matriz com todas as  $k$  permutações de colunas pode ser calculada por:

$$\Lambda^k = \Lambda P_c \quad (4.8)$$

Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 4.1.8.** *Considere a matriz  $\Lambda$ :*

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

*Como a matriz a ser fatorada possui quatro colunas, para permutar as colunas 1 e 3 de  $\Lambda$  a matriz  $P_c$  será uma matriz identidade com as colunas 1 e 3 permutadas, como mostrado abaixo:*

$$P_c^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Portanto,*

$$\Lambda^1 = \Lambda P_c^1 = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{matrix} & x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Se uma nova permutação for realizada, trocando as colunas 1 e 2 de  $\Lambda^{(1)}$ , tem-se:

$$P_c^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\Lambda^2 = \Lambda^1 P_c^2 = \Lambda P_c^1 P_c^2 = \Lambda P_c = \begin{matrix} & x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

A seguir é apresentado o pivoteamento completo com escala que em princípio é mais robusto que o pivoteamento completo apresentado.

#### 4.1.4 Pivoteamento Completo com Escala

O mecanismo de escalonamento apresentado na seção 4.1.2 também pode ser aplicado ao pivoteamento completo. Para isso, na fatoração da coluna  $k$ , o pivô será o elemento  $\lambda_{p,t}$ , tal que:

$$\frac{|\lambda_{p,t}|}{s_p} = \max_{k \leq i \leq m, k \leq j \leq n} \frac{|\lambda_{i,j}|}{s_i} \quad (4.9)$$

O exemplo a seguir ilustra a aplicação do pivoteamento completo com escala.

**Exemplo 4.1.9.** *Considere a matriz aumentada descrita abaixo:*

$$\Lambda = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Inicialmente os fatores  $s_i$  são calculados como segue:

$$s_1 = \max\{|1|, |-1|, |1|\} = 1$$

$$s_2 = \max\{|-1|, |3|, |-1|\} = 3$$

$$s_3 = \max\{|0|, |-1|, |1|\} = 1$$

Em seguida são calculadas as frações (4.9), como segue:

$$\frac{|\lambda_{1,1}|}{s_1} = \frac{|\lambda_{1,2}|}{s_1} = \frac{|\lambda_{1,3}|}{s_1} = \frac{|\lambda_{2,2}|}{s_2} = \frac{|\lambda_{3,2}|}{s_3} = \frac{|\lambda_{3,3}|}{s_3} = 1$$

$$\frac{|\lambda_{2,1}|}{s_2} = \frac{|\lambda_{2,3}|}{s_2} = \frac{1}{3}$$

e

$$\frac{|\lambda_{3,1}|}{s_3} = 0$$

Como há mais de uma fração com o valor máximo, igual a um, a fração  $\frac{|\lambda_{1,1}|}{s_1}$  é selecionada e  $\lambda_{1,1}$  é determinado como o primeiro pivô. Assim, fatorando a primeira coluna de  $\Lambda$ , tem-se:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Na fatoração da segunda coluna as frações,  $\frac{|\lambda_{i,j}|}{s_i}$ , obtidas são:

$$\frac{|\lambda_{2,2}|}{s_2} = \frac{2}{3} = 0.666\bar{6} \quad \frac{|\lambda_{2,3}|}{s_2} = \frac{0}{3} = 0$$

e

$$\frac{|\lambda_{3,2}|}{s_3} = \frac{|\lambda_{3,3}|}{s_3} = \frac{1}{1} = 1$$

Para o novo pivô é escolhido  $\lambda_{3,2}$ , já que desta maneira é necessária apenas a permutação entre as linhas 2 e 3, sem a necessidade de se realizar troca de colunas. Portanto, tem-se:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

e

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Realizando a retro substituição os valores  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 1$ , que são os valores exatos encontrados.

Apesar das estratégias de pivoteamento buscarem melhorar a precisão numérica da resolução de sistemas lineares, nenhuma delas garante resultados livres de erros. Além disso, não é possível garantir que um dos métodos apresentados seja sempre melhor que os demais.

## 4.2 Análise de Redundância

No Capítulo 3 foi apresentada uma metodologia para a identificação de medidas e conjuntos críticos baseada na fatoração da matriz de Gram das medidas. Como a matriz de Gram é simétrica, para a sua fatoração não é requerida nenhuma estratégia de pivoteamento. Neste capítulo, a identificação das medidas e conjuntos críticos será baseada na fatoração da

matriz Jacobiana, a qual requer o uso de técnicas de pivoteamento.

Apesar de requerer o pivoteamento completo para a sua fatoração, a matriz Jacobiana,  $H$ , apresenta um alto grau de esparsidade, sendo até mesmo superior à esparsidade da matriz de Gram. Dessa forma, utilizando-se técnicas de fatoração que levam em consideração a esparsidade da matriz, os custos computacionais podem ser reduzidos. Entretanto, neste trabalho nenhuma destas técnicas foi utilizada.

Por simplicidade, o modelo de medição adotado é rerepresentado abaixo:

$$z = H\theta + e$$

A matriz Jacobiana,  $H_{m \times n}$ , pode ser fatorada, com pivoteamento completo, resultando na seguinte forma:

$$H = LU \tag{4.10}$$

Se a rede for observável, então  $L$  é uma matriz trapezoidal  $m \times n$  e  $U$  uma matriz triangular superior  $n \times n$ , como mostrado na Figura 4.1 (GU; CLEMENTS; DAVIS, 1983) (MONTICELLI, 1999).

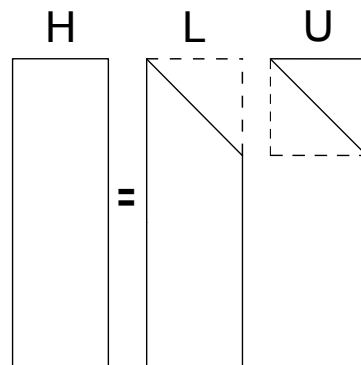


Figura 4.1: Fatoração LU de  $H$ .

Dessa maneira, a matriz  $H$  pode ser particionada de forma que as primeiras  $k$  linhas

são linearmente independentes, como mostrado em (4.11).

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ \dots \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ M \end{pmatrix} (U) \quad (4.11)$$

onde:

- $H_1 = L_1U$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ ;
- $L_1$  é uma matriz triangular inferior  $n \times n$ ;
- $U$  é uma matriz triangular superior  $n \times n$ ;
- $H_2$  é uma matriz retangular  $(m - n) \times n$ ;
- $M$  é uma matriz retangular  $(m - n) \times n$ .

Nesse contexto, o conjunto de medidas também pode ser particionado, de forma que:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ \dots \\ H_2 \end{pmatrix} \theta \quad (4.12)$$

onde  $z_1$  representa um conjunto de medidas linearmente independentes (medidas da base) e  $z_2$  é um conjunto de medidas redundantes às medida  $z_1$ .

As medidas redundantes,  $z_2$ , podem ser expressas como uma combinação linear do conjunto de medidas linearmente independente,  $z_1$ . Essas combinações podem ser obtidas através da equação abaixo (EXPÓSITO; ABUR, 1998):

$$\begin{aligned} z_2 &= H_2H_1^{-1}z_1 \\ &= ML_1^{-1}z_1 \\ &= Sz_1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde:

$$\begin{aligned} S &= H_2 H_1^{-1} \\ &= M L_1^{-1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

A matriz  $S$  é chamada de matriz de Sensibilidades, uma vez que seus elementos carregam a informação da sensibilidade entre  $z_1$  e  $z_2$ , e é idêntica a  $\alpha$  obtido em (3.6). Suas linhas se referem às medidas redundantes e suas colunas se referem às medidas da base. Assim, cada linha de  $S$  mostra a combinação linear das medias de  $z_1$  necessárias para descrever as medidas de  $z_2$ . Portanto, uma coluna nula em  $S$  indica que a medida de  $z_1$  associada a esta coluna é crítica.

Uma outra forma compacta para representar as combinações lineares é através de um *tableau*, como segue:

$$\begin{array}{c|c} \text{medidas da base} & \text{medidas redundantes} \\ \hline S & -I \end{array} \quad (4.15)$$

onde  $-I$  é uma matriz identidade negativa.

O exemplo a seguir ilustra como obter o *tableau* contendo as relações de redundância a partir da matriz Jacobiana.

**Exemplo 4.2.1.** *Considere um plano de medição onde as medidas  $z_1 = (z_c \ z_d \ z_e)'$  formam uma base e as medidas  $z_2 = (z_a \ z_b)'$  são redundantes às medidas da base.*

*Tem-se através de (4.13) que:*

$$\begin{pmatrix} z_a \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_c \\ z_d \\ z_e \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z_c \\ z_d \\ z_e \end{pmatrix}$$

*logo:*

$$\begin{aligned} z_a &= z_c + z_d \\ z_b &= z_d - z_e \end{aligned}$$



A representação na forma tableau seria:

$$\begin{array}{ccc|cc} z_c & z_d & z_e & z_a & z_b \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Após a determinação da matriz de Sensibilidades,  $S$ , o algoritmo para a identificação das medidas e conjuntos críticos é o mesmo, a partir do **Passo 3**, apresentado no Capítulo 3.

#### 4.2.1 Matriz de Sensibilidades

Para formar a matriz de Sensibilidades, as matrizes Jacobianas,  $H_1$ , contendo apenas medidas linearmente independentes e,  $H_2$ , contendo as demais medidas do plano de medição, devem ser identificadas. Além disso, a matriz  $H_1$  e, conseqüentemente, a matriz  $L_1$  devem possuir *posto* completo.

Em sistemas observáveis  $H_1$  será formada por  $n - 1$  medidas linearmente independentes mais uma referência angular alocada em qualquer barra do sistema. Para sistemas não observáveis  $H_1$  não possuirá *posto* completo, o que impede sua inversão e a obtenção de (4.14). Nesses casos é necessário completar o *posto* de  $H_1$  através de um processo de regularização, onde pseudomedidas de ângulo são alocadas em barras do sistema. As pseudomedidas de ângulo inseridas devem ser críticas com relação as medidas disponíveis. Desse modo, elas não irão interferir no processo de identificação das medidas e conjuntos críticos.

Durante a fatoração da matriz  $H$  serão incluídos números 1 no lugar dos pivôs nulos. Este procedimento corresponde à alocação de uma pseudomedida de ângulo crítica. Na fatoração serão usadas técnicas de pivoteamento de linhas e colunas.

Definindo  $\tilde{H}$  como a matriz Jacobiana fatorada através do processo de pivoteamento completo, com ou sem escala, as  $k$  primeiras linhas não nulas de  $\tilde{H}$  representam um conjunto de medidas linearmente independentes. As demais linhas (linhas nulas) estão associadas a medidas redundantes à base. Nesse caso, se  $k + 1 = n$  a rede é observável. Caso contrário, devem ser alocadas  $n - k$  pseudomedidas de ângulo para completar o *posto* de  $H_1$ .

Se  $H_b$  é a matriz formada pelas linhas não nulas de  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{H}_1$ , que deve ter *posto* completo,

pode ser escrita como:

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} H_b \\ \dots \\ H_{ref} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} h_{b_{1,1}} & \dots & h_{b_{1,k}} & h_{b_{1,k+1}} & \dots & h_{b_{1,n}} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{b_{k,k}} & h_{b_{k,k+1}} & \dots & h_{b_{n,n}} \\ \hline & & 0 & & & I \end{array} \right) \quad (4.16)$$

A matriz identidade  $I$  contém as pseudomedidas de ângulo necessárias para completar o *posto* de  $H_1$  mais a pseudomedida de ângulo que é a referência angular da rede. Portanto, se a rede é observável a matriz  $I$  conterá apenas a referência angular e será  $I = 1$ .

Note ainda que com a fatoração triangular de  $H$  levando a  $\tilde{H}_1$ , uma parte significativa do processo de inversão de  $H_1$ , necessário para a obtenção de  $S$ , já terá sido realizado.

De forma similar,  $L_1$  será dada por:

$$L_1 = \begin{pmatrix} L_b \\ \dots \\ L_{ref} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & 0 \\ l_{k,1} & \dots & 1 & & & \\ \hline & & 0 & & & I \end{array} \right) \quad (4.17)$$

onde  $L_b$  contém os fatores relacionados com a decomposição de  $H_b$  e  $L_{ref}$  contém os fatores relacionados as pseudomedidas de ângulos alocadas.

Os exemplos a seguir ilustram a obtenção da matriz  $S$  em caso de rede observável e um caso de rede não observável.

**Exemplo 4.2.2.** *Considere a rede e o plano de medição mostrados na Figura 4.2.*

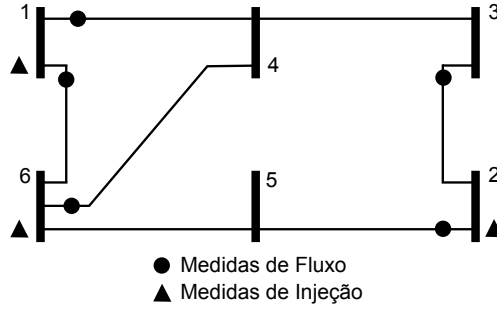


Figura 4.2: Rede de 6 barras e plano de medição observável.  
(ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2009)

A matriz de Jacobiana contendo toda as medidas do plano de medição é:

$$H = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \begin{matrix} P_{1-4} \\ P_{1-6} \\ P_{6-4} \\ P_{3-2} \\ P_{2-5} \\ P_1 \\ P_6 \\ P_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.18)$$

Fatorando a matriz  $H$  a partir da estratégia de pivoteamento completo com escala, chega-se a:

$$\tilde{H} = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \begin{matrix} P_{1-4} \\ P_{3-2} \\ P_{2-5} \\ P_{1-6} \\ P_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{matrix} P_1 \\ P_{6-4} \\ P_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como a referência angular ainda não foi adotada, a matriz  $\tilde{H}$  possui cinco linhas não nulas e, portanto, a rede é observável. Assim, a matriz  $H_b$  é dada então por:

$$H_b = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \begin{matrix} P_{1-4} \\ P_{3-2} \\ P_{2-5} \\ P_{1-6} \\ P_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e as medidas  $P_{1-4}$ ,  $P_{3-2}$ ,  $P_{2-5}$ ,  $P_{1-6}$  e  $P_6$  formam um conjunto de medidas linearmente independentes e, portanto, uma base para o sistema. Para que  $\tilde{H}_1$  tenha posto completo é necessário incluir uma pseudomedida de ângulo como referência angular. Assim, de acordo com (4.16), tem-se:

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} H_b \\ \dots \\ H_{ref} \end{pmatrix} = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \\ \begin{matrix} P_{1-4} \\ P_{3-2} \\ P_{2-5} \\ P_{1-6} \\ P_6 \\ \theta_6 \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$L_1 = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Através da equação (4.13) a matriz de Sensibilidades ( $S$ ) pode ser calculada como segue:

$$S = \begin{matrix} & P_{1-4} & P_{3-2} & P_{2-5} & P_{1-6} & P_6 & \theta_6 \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_{6-4} \\ P_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Note que a pseudomedida de ângulo é crítica e, portanto, sua coluna correspondente na matriz  $S$  é nula.

**Exemplo 4.2.3.** Considere novamente a rede mostrada na Figura 4.2, entretanto, com plano de medição formado por:  $P_{1-4}$ ,  $P_{1-6}$ ,  $P_{6-2}$ ,  $P_1$ .

Fatorando a matriz  $H$  com o auxílio da técnica de pivoteamento completo com escala, chega-se a:

$$\tilde{H} = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_4 & \theta_3 & \theta_2 & \theta_5 & \theta_6 \\ \begin{matrix} P_{1-4} \\ P_{1-6} \\ P_{6-4} \\ P_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As duas linhas nulas de  $\tilde{H}$  indicam as medidas  $P_{6-4}$  e  $P_1$  são redundantes às medidas  $P_{1-4}$  e  $P_{1-6}$ , logo a matriz  $M$  é formada por:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Apesar da redundância no plano de medição o sistema é não observável, pois o conjunto de medidas linearmente independente é formado apenas por duas medidas  $P_{1-4}$  e  $P_{1-6}$ , quando seriam necessárias cinco medidas.

Para viabilizar o cálculo da matriz  $S$ , são alocadas pseudomedidas de ângulos nas seguintes barras 2, 3, 5 e 6 como pode ser visto na equação (4.16). Uma dessas pseudomedidas é vista como a referência angular da rede.

$$\tilde{H}_1 = \begin{array}{c} P_{1-4} \\ P_{1-6} \\ P_{\theta_3} \\ P_{\theta_2} \\ P_{\theta_5} \\ P_{\theta_6} \end{array} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_4 & \theta_3 & \theta_2 & \theta_5 & \theta_6 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Através de (4.17), tem-se ainda que:

$$L_1 = \left( \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Assim, de (4.14) é obtido  $S$ .

$$S = \begin{array}{c} P_{1-4} \quad P_{1-6} \quad \theta_3 \quad \theta_2 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \\ P_{6-4} \left( \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

### 4.3 Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos

A identificação das medidas e conjuntos críticos a partir da fatoração da matriz Jacobiana é, em muitos aspectos, similar a metodologia apresentada no Capítulo 3, uma vez que  $\alpha$  e  $S$  definem as combinações lineares das medidas da base que descrevem as medidas redundantes. A grande diferença entre as metodologias reside no modo como  $\alpha$  e  $S$  são calculadas, uma a partir da matriz de Gram e a outra a partir da matriz Jacobiana.

Após o cálculo de  $S$ , as medidas e os conjuntos críticos são obtidos pelo mesmo procedimento descritos no Capítulo 3. Uma medida crítica é identificada através de uma linha nula em  $S$  e os conjuntos críticos do Tipo 1 e do Tipo 2 através da análise do *tableau*. O algoritmo mostrado abaixo descreve o procedimento detalhadamente.

---

**Algoritmo 4.3.1:** Identificação de Medidas e Conjuntos Críticos Baseado nas Propriedades da Matriz Jacobiana

---

**Passo 1:** Montagem e fatoração da matriz Jacobiana;

Monte a matriz Jacobiana e faça a decomposição conforme (4.10) usando estratégias de pivoteamento completo.

**Passo 2:** Formação de  $L_1$  e  $M$ ;

Identifique as medidas linearmente independentes e as medidas redundantes. Forme  $L_1$  considerando a porção de  $L$  associada às medidas linearmente independentes. Forme  $M$  a partir da porção de  $L$  que contém as medidas redundantes à base.

**Passo 3:** Formação do *tableau* inicial;

De posse de  $M$  e  $L_1$  calcule através de (4.13) a matriz de Sensibilidades e forme o *tableau* inicial. As colunas de  $S$  e do *tableau* inicial que contém as pseudomedidas de ângulo serão nulas.

**Passo 4:** Identificação das Medidas Críticas;

As colunas nulas do *tableau* inicial se referem as medidas críticas.

**Passo 5:** Identificação dos Conjuntos Críticos Tipo 1;

Remova uma medida redundante do *tableau* inicial, ou seja, exclua do *tableau* inicial a linha correspondente a esta medida. Se novas medidas críticas surgem, forme um conjunto crítico contendo as novas medidas críticas mais a medida removida. Retorne ao *tableau* inicial. Repita este procedimento até que todas as medidas redundantes tenham sido testadas.

**Passo 6:** Identificação dos Conjuntos Críticos Tipo 2;

Selecione na base uma medida não crítica e que não pertença a nenhum conjunto crítico já identificado. Realize uma mudança de base envolvendo a medida selecionada obtendo um novo *tableau*. Elimine do novo *tableau* a medida selecionada. Se novas medidas críticas surgirem, forme um conjunto crítico contendo as novas medidas críticas mais a medida removida. Retorne ao *tableau* inicial e repita este passo até que todas as medidas da base não críticas e não pertencentes a conjuntos críticos tenham sido testadas.

---

A partir da formação do *tableau* inicial, o algoritmo 4.3.1 acima é idêntico ao descrito



no Capítulo 3.

O exemplo a seguir ilustra a aplicação do algoritmo 4.3.1.

**Exemplo 4.3.1.** *Considere novamente a rede e o plano de medição mostrados na Figura 4.2.*

*A matriz  $S$  dessa rede foi obtida no Exemplo 4.2.2 e mostrada abaixo por simplicidade.*

$$S = \begin{matrix} & P_{1-4} & P_{3-2} & P_{2-5} & P_{1-6} & P_6 & \theta_6 \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_{6-4} \\ P_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

*Descartando a pseudomedida  $\theta_6$ , o seguinte tableau é formado:*

$P_{1-4}$	$P_{3-2}$	$P_{2-5}$	$P_{1-6}$	$P_6$	$P_1$	$P_{6-4}$	$P_2$
1	0	0	1	0	-1	0	0
1	0	0	-1	0	0	-1	0
0	-1	1	0	0	0	0	-1

*Como a coluna de  $P_6$  é nula, esta é uma medida crítica.*

*Executando o **Passo 5** do algoritmo, a retirada da medida  $P_2$  implica no surgimento de duas novas medidas críticas,  $P_{3-2}$  e  $P_{2-5}$ , portanto, um conjunto crítico do Tipo 1 é formado pelas medidas  $P_2$ ,  $P_{3-2}$  e  $P_{2-5}$ . Executando o **Passo 6** nenhum conjunto crítico do Tipo 2 é formado. A Tabela 4.1 mostra o resultado da análise do plano de medição.*

Tabela 4.1: Resultado da análise do plano de medição.

	Medidas
Medidas Críticas	$P_6$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_2, P_{3-2}, P_{2-5}$
Conjunto Crítico Tipo 2	-

## 4.4 Resultados

Diversas simulações foram realizadas a fim de demonstrar os resultados da metodologia proposta. Com o propósito de testar a robustez da metodologia, diferentes planos de medição foram analisados em redes de 4 a 300 barras.

As simulações foram realizadas em computador Core i7, 2.GHz em plataforma MatLab e a estratégia de pivoteamento completo com escala foi adotada durante o processo de fatoração da matriz Jacobiana. Além disso, em todos os planos de medição não foi adotado nenhuma referência angular, logo um sistema é observável tendo  $n - 1$  medidas linearmente independentes.

### 4.4.1 Rede de 4 barras

#### Rede Observável

A rede de quatro barras e um plano de medição são mostrados na Figura 4.3. A matriz Jacobiana associada é:

$$H = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ P_{1-2} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_{1-3} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ P_{3-2} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

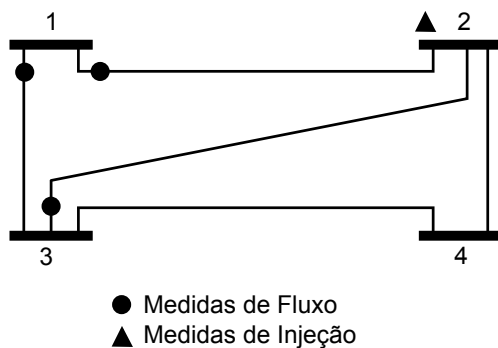


Figura 4.3: Rede de 4 barras observável (FILHO et al., 2001)

Fatorando  $H$  com o pivoteamento completo com escala encontra-se o seguinte resultado:

$$\tilde{H} = \begin{array}{c} \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \\ P_{1-2} \\ P_{1-3} \\ P_2 \\ \hline P_{3-2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As linhas não nulas de  $\tilde{H}$  indicam as medidas que formam a base do sistema, ou seja,  $P_{1-2}$ ,  $P_{1-3}$  e  $P_2$ . Para este plano de medição foram encontradas  $n - 1$  medidas linearmente independentes e, portanto, o sistema é observável. As linhas de  $L$  associadas com as medidas redundantes formam a matriz  $M$  abaixo.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como o sistema é observável é necessário alocar uma pseudomedida de ângulo. Assim, através de (4.17), tem-se que  $L_1$  é dado por:

$$L_1 = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e através de (4.14), a matriz  $S$  é dada por:

$$S = \begin{matrix} & P_{1-2} & P_{1-3} & P_2 & \theta_4 \\ P_{3-2} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Eliminando a coluna da referência angular, o seguinte *tableau* inicial é formado:

$$\begin{array}{ccc|c} P_{1-2} & P_{1-3} & P_2 & P_{3-2} \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Como a coluna de  $P_2$  é nula, ela é uma medida crítica. Com a eliminação de  $P_{3-2}$  surgem duas novas medidas críticas,  $P_{1-2}$  e  $P_{1-3}$ , logo, um conjunto crítico Tipo 1 é formado pelas medidas  $P_{3-2}, P_{1-2}$  e  $P_{1-3}$ . O resumo da análise do plano de medição é mostrado abaixo.

Tabela 4.2: Análise do plano de medição - Figura 4.3.

	Medidas
Medidas Críticas	$P_2$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{1-2}, P_{1-3}, P_{3-2}$
Conjunto Crítico Tipo 2	-

## Rede Não Observável

No caso anterior, suponha que as medidas  $P_{3-2}$  e  $P_2$  foram perdidas como mostra a Figura 4.4.

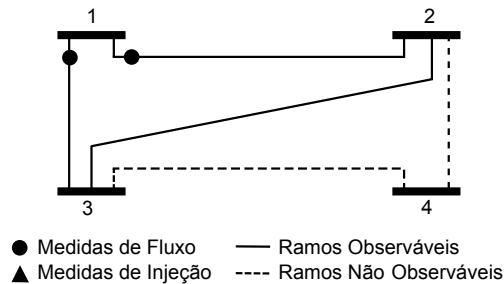


Figura 4.4: Rede de 4 barras não observável

Logo  $\tilde{H}$  é dada por:

$$\tilde{H} = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_3 & \theta_2 & \theta_4 \\ P_{1-2} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ P_{1-3} & & & & \end{matrix}$$

Como todas as linhas de  $\tilde{H}$  são não nulas, o plano de medição contém apenas medidas críticas, como mostra a Tabela 4.3. Além disso, o sistema é considerado não observável, uma vez que apenas duas medidas são determinadas linearmente independentes.

Tabela 4.3: Análise do plano de medição - Figura 4.4.

	Medidas
Medidas Críticas	$P_{1-3}, P_{1-3}$
Conjunto Crítico Tipo 1	-
Conjunto Crítico Tipo 2	-

## 4.4.2 Rede de 14 barras do IEEE

### Rede Observável

Baseado no plano de medição descrito na Figura 4.5, o seguinte resultado é encontrado para a matriz Jacobiana fatorada e sua correspondente matriz  $L$ .

$$\tilde{H} = \begin{array}{c}
\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9 \quad \theta_{10} \quad \theta_{11} \quad \theta_{12} \quad \theta_5 \quad \theta_{13} \quad \theta_{14} \\
P_{1-5} \left( \begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
P_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P_{2-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P_{6-12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right)
\end{array}$$

e

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

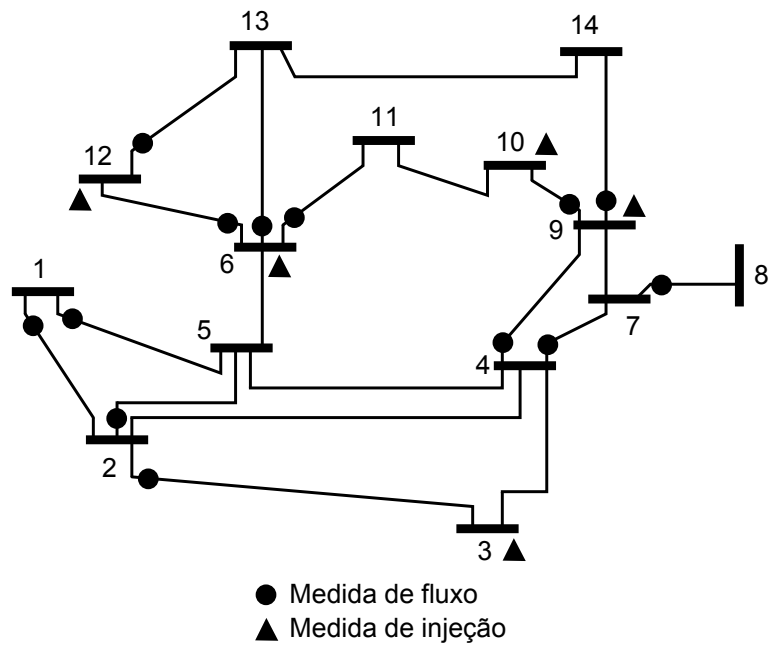


Figura 4.5: Rede de 14 barras do IEEE observável.

Analisando  $\tilde{H}$  observa-se que  $P_6, P_{2-5}, P_{6-12}, P_{12}$  e  $P_9$  são medidas redundantes à base formada. Além disso, a matriz  $M$  correspondente é mostrada a seguir.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como foram encontradas 13 medidas linearmente independentes, a rede é observável. Adicionando um pseudomedida de ângulo como referência angular o *posto* de  $\tilde{H}$  é completado. Em seguida, utilizando (4.17) encontra-se a matriz  $L_1$  abaixo.

$$L_1 = \left( \begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

De posse de  $L_1$  e  $M$  é calculada a matriz  $S$ . Eliminando a coluna correspondente a referência angular chega-se ao *tableau* inicial abaixo.



$P_{1-5}$	$P_{1-2}$	$P_{2-3}$	$P_{4-7}$	$P_{6-11}$	$P_{4-9}$	$P_{7-8}$	$P_{9-10}$	$P_{9-14}$	$P_{6-13}$	$P_{12-13}$	$P_3$	$P_{10}$	$P_6$	$P_{2-5}$	$P_{6-12}$	$P_{12}$	$P_9$
1	-1	-2	0	2	-1	0	-2	0	2	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	1	0	-2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

No *tableau*, a coluna de  $P_{7-8}$  é nula, logo, esta é uma medida crítica. A remoção da medida  $P_6$  implica no surgimento das medidas críticas:  $P_{2-3}$ ,  $P_{6-11}$ ,  $P_3$  e  $P_{10}$ . Além disso, a remoção de  $P_9$  implica no aparecimento de mais duas medidas críticas,  $P_{4-7}$  e  $P_{9-14}$ . Portanto, conforme o **Passo 5** do algoritmo, dois conjuntos críticos do Tipo 1 são formados.

Executando o **Passo 6** do algoritmo um conjunto crítico do Tipo 2 é formado pelas medidas  $P_{1-5}$  e  $P_{1-2}$ .

A Tabela 4.4 mostra o resultado da análise do plano de medição.

Tabela 4.4: Análise do plano de medição - Figura 4.5.

	Medidas
Medidas Críticas	$P_{7-8}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_6, P_{2-3}, P_{6-11}, P_3, P_{10}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_9, P_{4-7}, P_{9-14}$
Conjunto Crítico Tipo 2	$P_{1-5}, P_{1-2}$

## Rede Não Observável

Considere agora a rede e o plano de medição mostrados na Figura 4.6. Esta rede é não observável.

As matrizes Jacobiana fatorada e  $L$  são mostradas a seguir:

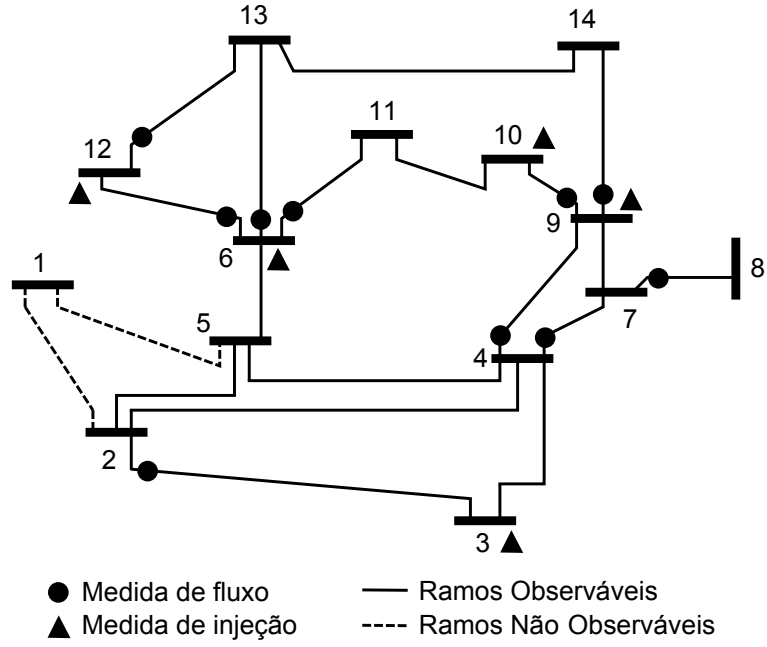


Figura 4.6: Rede de 14 barras do IEEE não observável

$$\tilde{H} = \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 P_{2-3} \\
 P_{4-7} \\
 P_{6-11} \\
 P_{7-8} \\
 P_{4-9} \\
 P_{9-10} \\
 P_{9-14} \\
 P_{6-12} \\
 P_{12-13} \\
 P_3 \\
 P_{10} \\
 P_6
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \theta_2 \quad \theta_4 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9 \quad \theta_{10} \quad \theta_{11} \quad \theta_{12} \quad \theta_3 \quad \theta_{13} \quad \theta_5 \quad \theta_1 \quad \theta_{14} \\
 \left( \begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 P_{6-13} \\
 P_{12} \\
 P_9
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccccccccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As linhas nulas de  $\tilde{H}$  indicam que as medidas  $P_{6-13}$ ,  $P_{12}$  e  $P_9$  são redundantes à base formada e com isso a matriz  $M$  é:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como há 12 medidas linearmente independentes confirma-se que a rede é de fato não observável. Duas pseudomedidas são então alocadas de forma que a matriz  $S$  possa ser calculada. Através de (4.17), tem-se que:

$$L_1 = \left( \begin{array}{cccccccccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Assim  $S$  pode ser calculado através de (4.14).

Eliminando de  $S$  as colunas das pseudomedidas alocadas, é obtido o *tableau* inicial mostrado abaixo.

$P_{2-3}$	$P_{4-7}$	$P_{6-11}$	$P_{7-8}$	$P_{4-9}$	$P_{9-10}$	$P_{9-14}$	$P_{6-12}$	$P_{12-13}$	$P_3$	$P_{10}$	$P_6$	$P_{6-13}$	$P_{12}$	$P_9$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0
0	1	0	0	-2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1

De acordo com o *tableau* as medidas  $P_{2-3}$ ,  $P_{6-11}$ ,  $P_{7-8}$ ,  $P_3$ ,  $P_{10}$ ,  $P_6$  são críticas. Eliminando a linha de  $P_9$  surgem 4 novas medidas críticas,  $P_{4-7}$ ,  $P_{4-9}$ ,  $P_{9-10}$  e  $P_{9-14}$ , formando-se um conjunto crítico do Tipo 1. Nenhum conjunto crítico Tipo 2 foi encontrado.

O resumo dos resultados obtidos é demonstrado na Tabela 4.6:

### 4.4.3 Rede de 118 barras do IEEE

Considere o plano de medição adotado para a rede de 118 barras do IEEE mostrada na Figura 4.7.

Tabela 4.5: Análise do plano de medição - Figura 4.6

	Medidas
Medidas Críticas	$P_{2-3}, P_{6-11}, P_{7-8}, P_3, P_{10}, P_6$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_9, P_{4-7}, P_{4-9}, P_{9-10}, P_{9-14}$
Conjunto Crítico Tipo 2	-

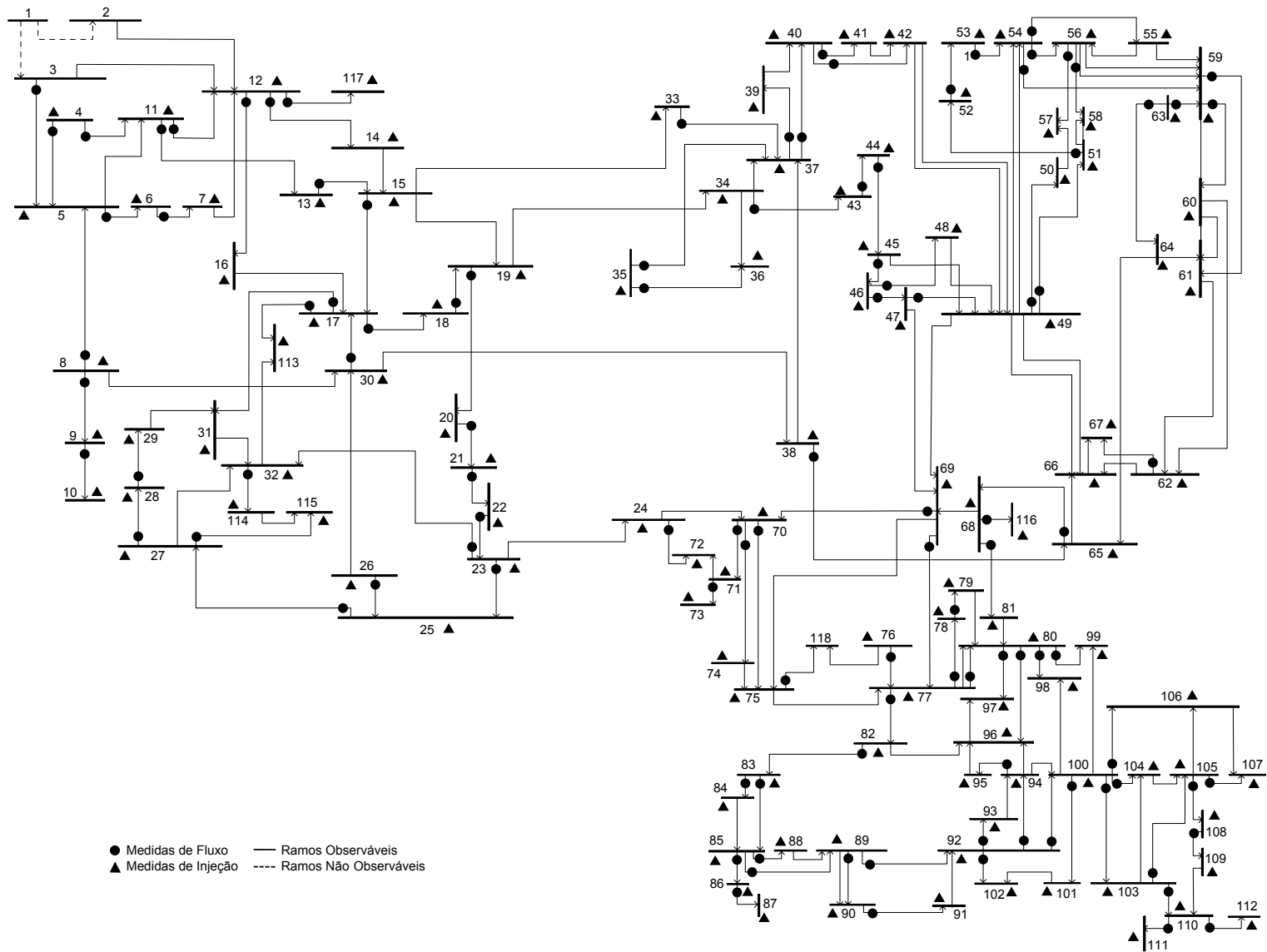


Figura 4.7: Rede de 118 barras do IEEE não observável

A análise do plano de medição identificou 116 medidas linearmente independentes e, portanto, a rede é não observável. Para obter a matriz de Sensibilidades,  $S$ , é necessário, portanto, incluir duas pseudomedidas de ângulo nas barras 1 e 118. Uma destas pseudomedidas é a referência angular da rede.

De acordo com o *tableau*, a medida  $P_{12}$  é crítica e dois conjuntos críticos do Tipo 1,  $(P_5, P_{3-5})$  e  $(P_{117}, P_{12-117})$  são encontrados.

O resumo dos resultados obtidos é mostrado na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Análise do plano de medição - Figura 4.7

	Medidas
Medidas Críticas	$P_{12}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_5, P_{3-5}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{117}, P_{12-117}$
Conjunto Crítico Tipo 2	-

#### 4.4.4 Testes adicionais

Além dos exemplos apresentados, foram realizados testes com as redes mostradas para diferentes planos de medições e para variações topológicas obtidas pela inclusão e remoção de ramos. Foram ainda realizadas simulações com uma rede de 300 barras.

Em todos os casos o algoritmo funcionou de maneira correta, sendo que o tempo de processamento médio para cada rede foi de aproximadamente 0.08, 0.09, 0.55 e 8.11 segundos para as redes de 4, 14, 118 e 300 barras, respectivamente. Estes tempos foram obtidos com uma implementação altamente simplificada e, portanto, servem apenas como indicativo do efeito provocado pelo aumento de tamanho da rede e do número de medições no tempo de processamento.

## 4.5 Conclusões

Neste capítulo foi apresentado um método de identificação de medidas e conjuntos críticos baseado na fatoração LU da matriz Jacobiana com uso de pivoteamento completo. Ao



término da fatoração as medidas são particionadas em um conjunto de medidas linearmente independentes, formando uma base, e um conjunto de medidas redundantes. Se  $n - 1$  medidas forem linearmente independentes a rede é observável. Em seguida, com o auxílio da matriz de Sensibilidades, são determinadas as relações de redundância entre as medidas e, assim, as medidas e conjuntos críticos são identificados.

Testes demonstraram que o método é eficaz e robusto. Entretanto, devido a necessidade de pivoteamento de linhas e colunas, nas implementações realizadas o método apresentou um pior desempenho computacional quando comparado ao método descrito no Capítulo 3. A diferença no desempenho computacional dos métodos apresentados foi mais significativa nas redes de maior porte testadas.



# Estratégias de Fatoração com Números Inteiros Aplicada a Matriz de Gram

O uso da Eliminação de Gauss está relacionado a uma ampla faixa de aplicações, indo desde a resolução de sistemas lineares até o controle de robôs. Em sua forma padrão, as divisões das linhas da matriz por seus respectivos pivôs, podem resultar no acúmulo de erros devido aos truncamentos e aos arredondamentos realizados durante a fatoração. Além disso, devem ser estabelecidos limites que indicam se um valor muito pequeno deve ou não ser considerado nulo e, assim, uma definição inadequada de um limiar pode levar à identificação errada de um pivô nulo. Visando contornar este tipo de problema, em 1968 Bareiss (BAREISS, 1968) propôs a Eliminação de Gauss com Aritmética Inteira.

Nas metodologias descritas nos Capítulos 3 e 4, dependendo do plano de medição adotado, os erros acumulados na fatoração das matrizes podem comprometer a identificação dos pivôs nulos e, conseqüentemente, a análise do plano de medição. Nesse contexto, este capítulo apresenta técnicas de Eliminação de Gauss com Aritmética Inteira com as quais são evitados erros de arredondamento e de identificação de pivôs nulos. Para ilustrar seus efeitos, estas técnicas serão aplicadas ao processo de fatoração da matriz de Gram.

## 5.1 Eliminação de Gauss com Aritmética Inteira

A Eliminação de Gauss é uma das ferramentas matemáticas mais utilizadas na computação científica, sendo aplicada a uma ampla gama de problemas, incluindo soluções de

equações diferenciais parciais, aproximações com mínimos quadrados, regressão linear, resolução de sistemas de equações, entre outros (TURNER, 1995).

Na análise de observabilidade de Sistemas de Energia Elétrica geralmente é utilizada a Eliminação de Gauss Padrão (Algoritmo 5.1.1) para fatoração das matrizes. Entretanto, devido a aritmética de precisão finita dos computadores, estas técnicas são propensas a erros de arredondamento e truncamento. Como neste tipo de algoritmo a identificação de zeros é realizada comparando elementos das matrizes a limiares pré-estabelecidos, o acúmulo de erros e o estabelecimento inadequado de limiares pode levar à detecção incorreta de pivôs nulos (KORRES, 2012). Para contornar esses problemas é, então, introduzido o conceito de Eliminação de Gauss com Aritmética Inteira, onde a partir de uma matriz inteira, toda a fatoração envolve apenas elementos inteiros.

---

**Algoritmo 5.1.1:** Eliminação de Gauss Padrão

---

**Entrada:** Matriz  $\Lambda_{n \times n}$

*Calcule;*

**para**  $i = 1 : n - 1$  **faça**

**para**  $j = i + 1 : n$  **faça**

$\mu = \frac{\lambda_{j,i}}{\lambda_{i,i}};$

$\lambda_{j,i} = 0;$

**para**  $k = i + 1 : n$  **faça**

$\lambda_{j,k} = \lambda_{j,k} - \mu\lambda_{i,k}$

**fim**

**fim**

**fim**

**Saída:** Matriz  $\Lambda$  fatorada ( $\tilde{\Lambda}$ )

---

No Algoritmo 5.1.1, se o pivô  $\lambda_{i,i}$  for nulo, a linha e a coluna do pivô não devem ser fatoradas. Nesse caso, como os elementos da matriz são reais e, portanto, não há zeros absolutos, deve ser estabelecido um limiar abaixo do qual os valores são considerados nulos.

### 5.1.1 Eliminação de Gauss Livre de Divisão

A Eliminação de Gauss Livre de Divisão é o método mais simples para garantir apenas elementos inteiros durante o processo de fatoração (TURNER, 1995).

Considerando  $\Lambda$  uma matriz  $n \times n$ , o algoritmo para a Eliminação de Gauss Livre de Divisão (EGLD) é dado por:

---

**Algoritmo 5.1.2:** Eliminação de Gauss Livre de Divisão

---

**Entrada:** Matriz inteira  $\Lambda_{n \times n}$

Calcule;

**para**  $i = 1 : n - 1$  **faça**

**para**  $j = i + 1 : n$  **faça**

**para**  $k = i + 1 : n$  **faça**

$\lambda_{j,k} = \lambda_{i,i}\lambda_{j,k} - \lambda_{j,i}\lambda_{i,k}$

**fim**

$\lambda_{j,i} = 0$

**fim**

**fim**

**Saída:** Matriz inteira  $\Lambda$  fatorada ( $\tilde{\Lambda}$ )

---

A análise do Algoritmo 5.1.2 mostra que os elementos da matriz tendem a crescer rapidamente durante o processo de eliminação. O maior elemento da matriz em cada estágio da fatoração pode ser até duas vezes o quadrado do maior elemento do estágio anterior (KIRSCH; TURNER, 1993). Como a capacidade de representação numérica de calculadores e computadores é limitada, é comum, principalmente para matrizes de ordem elevada, a ocorrência de *overflow* (TURNER; KIRSCH, 1994). O exemplo a seguir ilustra este comportamento.

**Exemplo 5.1.1.** Considere a matriz  $\Lambda$  onde será aplicado o processo de Eliminação de Gauss Livre de Divisão.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 3 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & -35 & -37 & 32 \\ 0 & -49 & -46 & 15 \\ 0 & 21 & -9 & 67 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & -35 & -37 & 32 \\ 0 & 0 & -203 & 1043 \\ 0 & 0 & 1092 & -3017 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & -35 & -37 & 32 \\ 0 & 0 & -203 & 1043 \\ 0 & 0 & 0 & -526505 \end{pmatrix}$$

Note que mesmo em uma matriz de dimensão pequena, o crescimento dos módulos dos elementos da matriz já pode ser notado. É evidente que torna-se necessário encontrar formas de restringir este crescimento. Nesse contexto, apresenta-se a seguir a aplicação do Máximo Divisor Comum (MDC) na Eliminação de Gauss Livre de Divisão.

### 5.1.2 Eliminação de Gauss Livre de Divisão com MDC

A ideia desse mecanismo pode ser melhor compreendida analisando a matriz abaixo:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Suponha que  $a$  e  $c$  tenham um fator comum  $p$ , de maneira que existam inteiros  $\alpha$  e  $\gamma$  tal que  $a = p\alpha$  e  $c = p\gamma$ . Através da Eliminação de Gauss Livre de Divisão, tem-se que:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \alpha pd - \gamma pb \end{pmatrix}$$

Se  $p = MDC(a, c)$ , então, a segunda linha da matriz acima pode ser dividida pelo fator comum  $p$ , logo, a Eliminação de Gauss Livre de Divisão com MDC, fornece:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \alpha d - \gamma b \end{pmatrix}$$

Este princípio pode ser aplicado a cada etapa do processo de fatoração. Além disso, durante a eliminação de Gauss, pode-se encontrar o MDC de todos os elementos de uma linha e dividir essa linha pelo MDC encontrado. Com isso, os valores absolutos dos elementos nos estágios seguintes também são reduzidos.

Em (TURNER, 1995), o seguinte algoritmo é proposto para encontrar o MDC entre dois números.

---

**Algoritmo 5.1.3:** Determinação do Máximo Divisor Comum

---

**Entrada:** Dois inteiros positivos de forma que  $c < a$

Inicialize  $q = c$  e  $tmpc = a$ ;

**enquanto**  $q \neq 0$  **faça**

$tmpa = tmpc$ ;

$tmpc = q$ ;

$q = tmpa \bmod tmpc$

**fim**

**Saída:**  $MDC(a, c) = tmpc$

---

O custo computacional requerido para se encontrar o máximo divisor pode ser inadequado mesmo para redes de pequeno porte e, portanto, a Eliminação de Gauss Livre de Divisão com MDC não é promissora. Nesse contexto, a técnica de Eliminação de Gauss Livre de Fração (EGLF), apresentada a seguir, torna-se uma boa alternativa.

### 5.1.3 Eliminação de Gauss Livre de Fração

Este mecanismo foi desenvolvido a partir de conceitos usados nos Algoritmos 5.1.1 e 5.1.2.

A seguir os termos do tipo  $a_{i,j}$  são elementos da matriz original. Os termos da forma  $a_{j,k}^{(i)}$  resultam da aplicação da  $i$ -ésima etapa do Algoritmo 5.1.1 e os termos da forma  $b_{j,k}^{(i)}$ , com  $(j, k > i)$ , resultam da aplicação da  $i$ -ésima etapa do Algoritmo 5.1.2.

Nesse contexto, considere a seguinte matriz:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Realizando a primeira etapa da Eliminação de Gauss Livre de Divisão e da Eliminação de Gauss Padrão, são encontradas as matrizes  $\Lambda_b$  e  $\Lambda_a$ , respectivamente.

$$\Lambda_b = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b_{2,2}^{(1)} & b_{2,3}^{(1)} \\ b_{3,2}^{(1)} & b_{3,3}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$\Lambda_a = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} \\ a_{3,2}^{(1)} & a_{3,3}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

onde:

$$\begin{cases} b_{2,2}^{(1)} = ae - db \\ b_{2,3}^{(1)} = af - dc \\ b_{3,2}^{(1)} = ah - gb \\ b_{3,3}^{(1)} = ai - gc \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} a_{2,2}^{(1)} = e - \frac{db}{a} \\ a_{2,3}^{(1)} = f - \frac{dc}{a} \\ a_{3,2}^{(1)} = h - \frac{gb}{a} \\ a_{3,3}^{(1)} = i - \frac{gc}{a} \end{cases} \quad (5.5)$$

logo,

$$\begin{cases} b_{2,2}^{(1)} = a \left( e - \frac{db}{a} \right) = a_{1,1} a_{2,2}^{(1)} \\ b_{2,3}^{(1)} = a \left( f - \frac{dc}{a} \right) = a_{1,1} a_{2,3}^{(1)} \\ b_{3,2}^{(1)} = a \left( h - \frac{gb}{a} \right) = a_{1,1} a_{3,2}^{(1)} \\ b_{3,3}^{(1)} = a \left( i - \frac{gc}{a} \right) = a_{1,1} a_{3,3}^{(1)} \end{cases} \quad (5.6)$$



Nota-se que  $b_{j,k}^{(1)}$  pode então ser dado por:

$$b_{j,k}^{(1)} = a_{1,1}a_{j,k}^{(1)} \quad (2 \leq j, k \leq n) \quad (5.7)$$

Resolvendo mais uma etapa do processo de eliminação, tem-se:

$$\Lambda_b = \begin{pmatrix} a & b & c \\ & b_{2,2}^{(1)} & b_{2,3}^{(1)} \\ & & b_{3,3}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\Lambda_a = \begin{pmatrix} a & b & c \\ & a_{2,2}^{(1)} & a_{2,3}^{(1)} \\ & & a_{3,3}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

De forma que:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{3,3}^{(2)} = b_{2,2}^{(1)}b_{3,3}^{(1)} - b_{3,2}^{(1)}b_{2,3}^{(1)} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{3,3}^{(2)} = a_{3,3}^{(1)} - \frac{a_{3,2}^{(1)}a_{2,3}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Substituindo (5.11) e (5.6) em (5.10), chega-se a:

$$\begin{aligned} b_{3,3}^{(2)} &= a_{1,1}a_{2,2}^{(1)}a_{1,1}a_{3,3}^{(1)} - a_{1,1}a_{3,2}^{(1)}a_{1,1}a_{2,3}^{(1)} \\ &= a_{1,1}a_{1,1}a_{2,2}^{(1)} \left( a_{3,3}^{(1)} - \frac{a_{3,2}^{(1)}a_{2,3}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} \right) \\ &= a_{1,1} \left( a_{1,1}a_{2,2}^{(1)}a_{3,3}^{(2)} \right) \\ &= a_{1,1}d_3 \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde  $d_3 = a_{1,1}a_{2,2}^{(1)}a_{3,3}^{(2)}$  é o determinante da matriz inicial (BAREISS, 1968)(KIRSCH; TURNER, 1994). Observa-se ainda que  $d_3$  é um número inteiro.

Através de (5.6) e seguindo o raciocínio de (5.12) é possível escrever:

$$b_{j,k}^{(2)} = a_{1,1} b_{2,2}^{(1)} a_{j,k}^2 \quad (3 \leq j, k \leq n) \quad (5.13)$$

ou generalizando, tem-se:

$$b_{j,k}^{(i)} = a_{1,1} b_{2,2}^{(1)} \cdots b_{i,i}^{(i-1)} a_{j,k}^{(i)} \quad (i < j, k \leq n) \quad (5.14)$$

Através de (5.13), vê-se que  $b_{j,k}^{(2)}$  tem o fator comum  $a_{1,1}$  para todo  $j, k \geq 3$ . Como é conhecido, este fator pode, então, ser removido. Para uma matriz  $n \times n$ , em (TURNER, 1995) é proposto o algoritmo a seguir, onde esses fatores comuns são removidos e a ordem de grandeza dos elementos da matriz é reduzida durante a fatoração.

---

**Algoritmo 5.1.4:** Eliminação de Gauss Livre de Fração

---

**Entrada:** Matriz Inteira  $\Lambda_{n \times n}$

Calcule;

**para**  $i = 1 : n - 1$  **faça**

**para**  $j = i + 1 : n$  **faça**

**para**  $k = i + 1 : n$  **faça**

$a_{j,k} = a_{i,i} a_{j,k} - a_{j-i} a_{i,k}$ ;

**se**  $i \geq 2$  **então**

$a_{j,k} = a_{j,k} / a_{i-1,i-1}$

**fim**

**fim**

$a_{j,i} = 0$

**fim**

**fim**

**Saída:** Matriz inteira  $\Lambda$  fatorada ( $\tilde{\Lambda}$ )

---

A remoção dos fatores comuns realizado no Algoritmo 5.1.4 necessariamente reduz a dinâmica de crescimento das magnitudes dos elementos durante a eliminação, quando comparada ao Algoritmo 5.1.2. Além disso, como apenas valores inteiros estarão presentes, não haverá dificuldades para a identificação de pivôs nulos, uma vez que limiares não são requeri-

dos (TURNER, 1997). O exemplo a seguir ilustra as vantagens desse mecanismo de fatoração. A discussão mais detalhada desses aspectos pode ser encontrada em (KIRSCH; TURNER, 1993)(TURNER, 1995)(NAKOS; TURNER; WILLIAMS, 1997).

**Exemplo 5.1.2.** *A EGLF é aplicada à matriz inicial do Exemplo 5.1.1, mostrada abaixo.*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 3 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

*Os resultados dos estágios de eliminação são:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & -35 & -37 & 32 \\ 0 & -49 & -46 & 15 \\ 0 & 21 & -9 & 67 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & -35 & -37 & 32 \\ 0 & 0 & -29 & 149 \\ 0 & 0 & 156 & -431 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & -35 & -37 & 32 \\ 0 & 0 & -29 & 149 \\ 0 & 0 & 0 & 307 \end{pmatrix}$$

*Apesar de ter havido um crescimento na magnitude dos elementos da matriz, em comparação com o exemplo anterior observa-se uma redução significativa nas magnitudes dos valores encontrados. Para ilustrar, tem-se aqui que  $\Lambda_{n,n} = 307$ , enquanto que aplicando o algoritmo sem divisão (Algoritmo 5.1.2) encontrou-se um valor absoluto de 526505, como visto no Exemplo 5.1.1.*

Embora o Algoritmo 5.1.4 não apresente necessariamente um desempenho, quanto a redução dos elementos da matriz fatorada, superior à Eliminação de Gauss com MDC, na EGLF os fatores removidos são conhecidos, ao contrário no MDC onde esses fatores devem ser calculados, sendo que este cálculo pode apresentar um grande esforço computacional. Por isso, a EGLF é geralmente recomendável.

A presença de pivôs nulos durante a fatoração com o Algoritmo EGLF pode ser tratada de forma simples conforme é proposto em (KORRES, 2012). Nesta abordagem um pivô nulo é substituído pelo pivô anterior, como segue. Note a ausência de limiares para se identificar os pivôs nulos. O próximo exemplo ilustra a aplicação do algoritmo abaixo.

---

**Algoritmo 5.1.5:** Eliminação de Gauss Livre de Fração Modificado

---

**Entrada:** Matriz de Gram ( $A_{m \times m}$ )

Calcule;

se  $a_{1,1} = 0$  então

|  $a_{1,1} = 1$

fim

para  $i = 1 : m$  faça

| se  $i > 1$  então

| | se  $a_{i,i} = 0$  então

| | |  $a_{i,i} = a_{i-1,i-1}$

| | fim

| fim

| para  $j = i + 1 : m$  faça

| | para  $k = i + 1 : m$  faça

| | |  $a_{j,k} = a_{i,i}a_{j,k} - a_{j,i}a_{i,k};$

| | | se  $i > 1$  então

| | | |  $a_{j,k} = \frac{a_{j,k}}{a_{i-1,i-1}}$

| | | fim

| | fim

| |  $a_{j,i} = 0$

| fim

fim

**Saída:** Matriz inteira  $\tilde{A}$

---

**Exemplo 5.1.3.** O Algoritmo 5.1.5 é usado para fatorar a matriz de Gram obtida a partir do plano de medição da Figura 5.1.

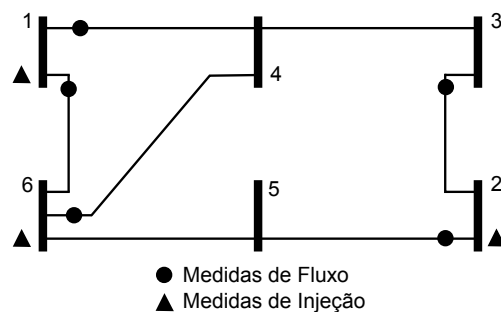


Figura 5.1: Rede de 6 barras com medidas (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2009)

A matriz de Gram inicial do problema é dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Seguindo o algoritmo, para  $i = 5$ , encontra-se a seguinte situação:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 6 & 12 & -12 & 24 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 330 & -12 & 12 & -24 & -168 & 162 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & -21 & 42 & -36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1980 & 1980 \end{pmatrix}$$

Nessa etapa do algoritmo o pivô  $\tilde{A}_{5,5} = 0$  e, assim, o pivô  $\tilde{A}_{5,5}$  é feito igual ao pivô  $\tilde{A}_{4,4} = 21$ , levando ao seguinte resultado:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 6 & 12 & -12 & 24 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 330 & -12 & 12 & -24 & -168 & 162 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & -21 & 42 & -36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1980 & 1980 \end{pmatrix}$$

O mesmo procedimento é observado para os pivôs  $\tilde{A}_{6,6}$  e  $\tilde{A}_{8,8}$ . Assim, a matriz de Gram

fatorada é dada por:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 6 & 12 & -12 & 24 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 330 & -12 & 12 & -24 & -168 & 162 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & -21 & 42 & -36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \end{pmatrix}$$

Portanto, foram encontrados 3 pivôs, o que indica que há 3 medidas redundantes no plano de medição.

Destaca-se que para realizar a fatoração da matriz de Gram com o Algoritmo 5.1.5 não foi necessário utilizar estratégias de pivoteamento. Entretanto, o pivoteamento completo de linhas e colunas pode ser adotado como mecanismo de redução do crescimento dos elementos da matriz durante a fatoração. Para tal, os pivôs serão os elementos não nulos de menores módulos (TURNER, 1995). O exemplo a seguir ilustra a aplicação do pivoteamento.

**Exemplo 5.1.4.** Aplicando a EGLF com pivoteamento completo na matriz de Gram do Exemplo 5.1.3, temos:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 12 & 3 & -12 & -1 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 24 & -3 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Comparando as matrizes fatoradas dos Exemplos 5.1.3 e 5.1.4 observa-se que o uso do pivoteamento completo contribuiu para a redução das magnitudes dos elementos da matriz fatorada. No Exemplo 5.1.3 o maior valor absoluto obtido ao final da fatoração é 330, enquanto que neste exemplo o maior valor da matriz fatorada é 24.

*O uso de estratégias de pivoteamento implicará em um aumento do custo computacional da EGLF, entretanto, a redução na magnitude dos elementos das matrizes fatoradas será de grande importância no caso de matrizes de grande porte. Assim, nos exemplos a seguir o pivoteamento será adotado.*

Note que as técnicas de fatoração com números inteiros apresentadas neste capítulo, também podem ser estendidas, com algumas modificações, à fatoração da matriz Jacobiana.

## 5.2 Resultados

Nesta seção são apresentados testes realizados com redes de 4, 14 e 118 barras. A EGLF com pivoteamento completo é aplicada à matriz de Gram e a identificação das medidas e conjuntos críticos será realizada a partir da metodologia descrita no Capítulo 3.

### 5.2.1 Rede de 4 barras Observável

Para o plano de medição descrito na Figura 5.2 a seguinte matriz de Gram é encontrada:

$$A = \begin{matrix} & P_{1-2} & P_{1-3} & P_{3-2} & P_{3-4} & P_2 \\ \begin{matrix} P_{1-2} \\ P_{1-3} \\ P_{3-2} \\ P_{3-4} \\ P_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Dessa maneira é possível montar a matriz aumentada dada por  $[A|I]$ . Após sua fatoração com a EGLF com pivoteamento completo, chega-se a:

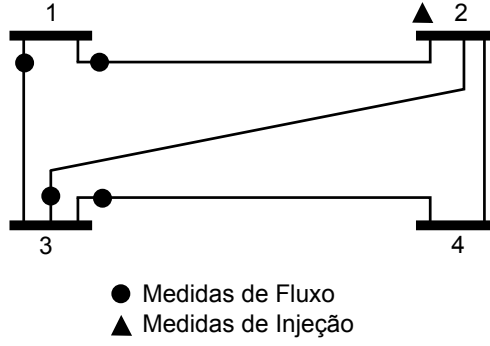


Figura 5.2: Rede de 4 barras observável  
(FILHO et al., 2001)

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} P_{1-3} \\ P_{3-4} \\ P_{3-2} \\ \hline P_{1-2} \\ P_2 \end{array} \begin{array}{c} P_{1-2} \quad P_{1-3} \quad P_{3-4} \quad P_{3-2} \quad P_2 \\ \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 4 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 4 & -4 & 12 & 4 \end{array} \right) \end{array}$$

Como as linhas das medidas  $P_{1-2}$  e  $P_2$  são nulas, essas medidas são redundantes a pelo menos uma das medidas já fatoradas. Para formar uma matriz de Gram contendo apenas medidas não redundantes, as linhas e colunas referentes às medidas  $P_{1-2}$  e  $P_2$  devem ser removidas. Assim, chega-se a matriz abaixo:

$$\tilde{A}_b = \begin{array}{c} P_{1-3} \\ P_{3-4} \\ P_{3-2} \end{array} \begin{array}{c} P_{1-3} \quad P_{3-4} \quad P_{3-2} \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

As medidas da matriz  $\tilde{A}_b$  formam uma base para o plano de medição. Para conhecer as relações de redundância entre as medidas, a matriz  $\tilde{A}_b$  deverá ser totalmente invertida ou a fatoração ser completada. Neste caso, a fatoração pode ser completada com o auxílio da Eliminação de Gauss Padrão. Assim, através de (3.6) a relação de redundância entre as medidas é encontrada e o seguinte *tableau* inicial é formado:



$P_{1-3}$	$P_{3-4}$	$P_{3-2}$	$P_{1-2}$	$P_2$
1	0	1	-1	0
-1	1	-3	0	-1

De acordo com o **Passo 3** do algoritmo da seção 3.2.1, nenhuma medida crítica é encontrada, uma vez que nenhuma coluna do *tableau* inicial é nula. Passando ao **Passo 4**, a remoção da medida  $P_2$  implica no aparecimento de uma medida crítica,  $P_{3-4}$ , logo um conjunto crítico Tipo 1 é formado por essas duas medidas. Realizando-se o **Passo 6**, nenhum conjunto crítico Tipo 2 é encontrado. As medidas que não são consideradas críticas e que não pertencem a nenhum conjunto crítico são determinadas como redundantes. O resumo dos resultados obtidos é demonstrado na tabela abaixo:

Tabela 5.1: Análise do plano de medição - Figura 5.2.

	Medidas
Medidas Críticas	-
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_2, P_{3-4}$
Conjunto Crítico Tipo 2	-
Medidas Redundantes	$P_{1-3}, P_{3-2}, P_{1-2}$

## 5.2.2 Rede de 14 barras do IEEE

Para o plano de medição da Figura 5.3, fatorando-se a matriz de Gram com a Eliminação de Gauss Padrão surge um pivô de valor 0.0004105. Note que dependendo do limiar de identificação de zero, este pivô pode ou não ser identificado como um pivô nulo. Para evitar tais situações, a EGLF com pivoteamento completo pode ser aplicada, o que leva ao seguinte resultado.

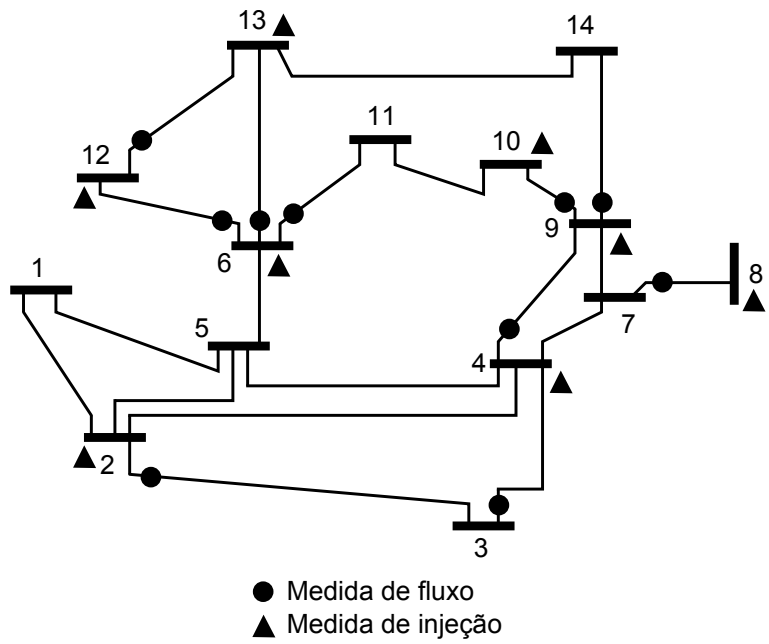


Figura 5.3: Rede de 14 barras do IEEE observável



Na matriz acima foram encontrados pivôs nulos para as medidas  $P_8$ ,  $P_{12-13}$ ,  $P_{10}$ ,  $P_{12}$  e  $P_{6-11}$ . Note que não há dúvidas na identificação dos pivôs já que os zeros são números inteiros. As medidas referentes aos pivôs nulos são redundantes a pelo menos uma das medidas da base (medidas associadas a pivôs não nulos). Como a rede é composta por 18 medidas e há 13 medidas na base, a rede é observável.

Montando o *tableau* inicial e realizando o processo classificação das medidas, chega-se ao resultado apresentado na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Análise do plano de medição - Figura 5.3.

	Medidas
Medidas Críticas	$P_2$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_8, P_{7-8}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{10}, P_{9-14}$
Conjunto Crítico Tipo 2	$P_{3-4}, P_{4-9}, P_4, P_6, P_9, P_{2-3}$

As medidas não mostradas na tabela são redundantes.

### 5.2.3 Rede de 118 barras do IEEE

Considere o plano de medição mostrado na Figura 5.4 para a rede de 118 barra do IEEE. Este plano é composto por 151 medidas.

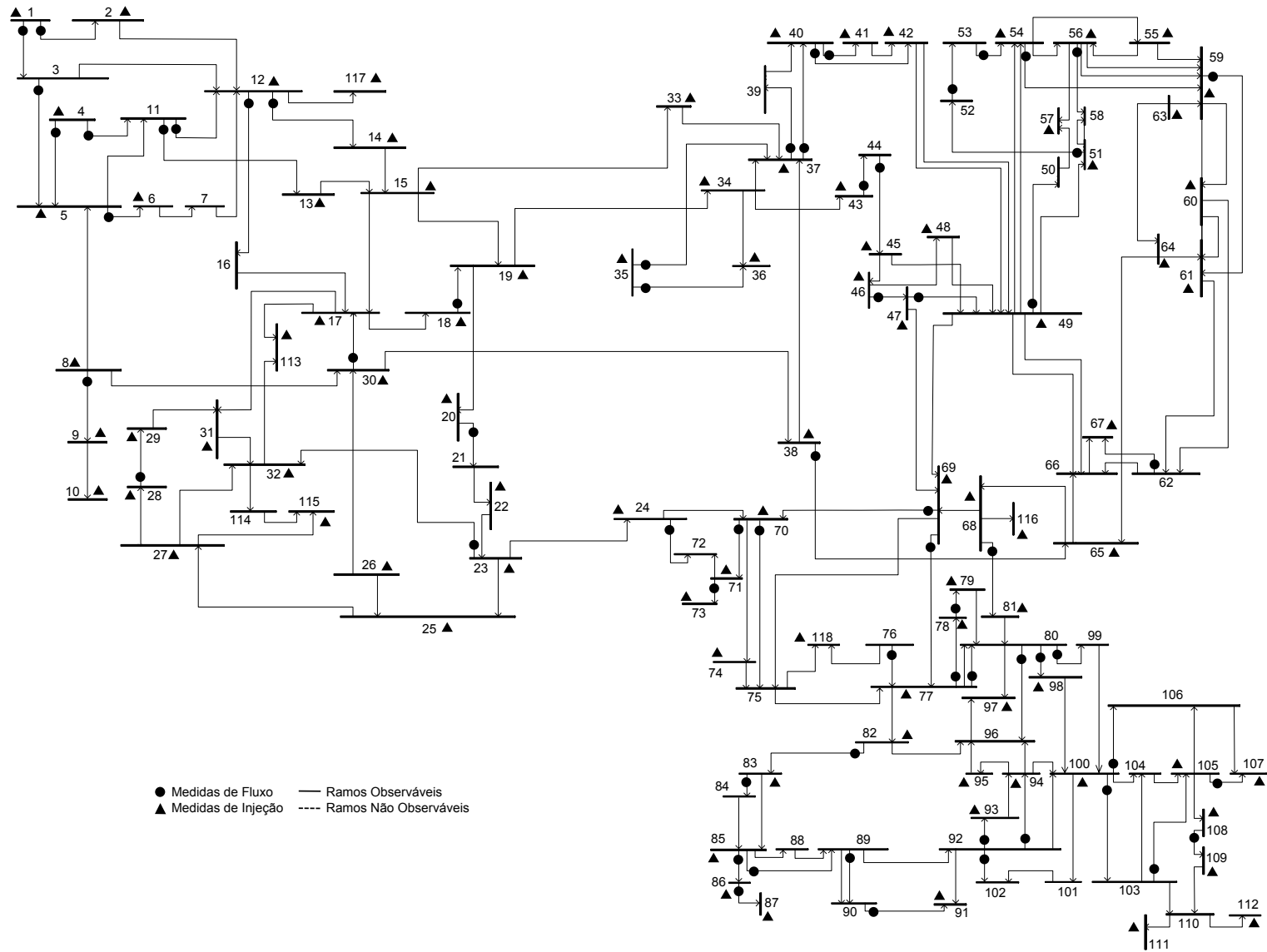


Figura 5.4: Rede de 118 barras do IEEE observável

A fatoração da matriz de Gram das medidas com a Eliminação de Gauss Padrão gera uma conjunto de pivôs que podem ou não ser tratados como pivôs nulos dependendo do limiar adotado. Alguns destes pivôs são mostrados na Tabela 5.3. Note que a definição errada sobre um pivô nulo pode levar a uma avaliação incorreta do plano de medição. Para ilustrar este efeito, os erros acumulados durante a Eliminação de Gauss Padrão com um limiar para detecção de zero igual a  $10^{-4}$ , resulta na avaliação errada do plano de medição.

Tabela 5.3: Exemplo de pivôs duvidosos

Valores dos pivôs
0.000168050072911
0.000168824993043
0.000004615313509
-0.000000501475381

Utilizando a EGLF com pivoteamento completo foram detectados 34 pivôs nulos, logo há 117 medidas associadas a pivôs não nulos que formaram a base para o sistema e, assim, a rede é observável. A magnitude do maior pivô encontrado foi de 231997440. O resultado da análise do plano de medição é mostrado na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Análise do plano de medição - Figura 5.4.

	Medidas
Medidas Críticas	$P_{92-102}, P_{80-99}, P_{105}, P_{85}, P_{108-109}, P_{108}, P_{100}, P_{109}, P_{111}, P_{112}, P_{97}, P_{118}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{74}, P_{70}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{86}, P_{85-86}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{95}, P_{83-84}, P_{83}, P_{80-98}, P_{91}, P_{94}, P_{85-89}, P_{98}, P_{90-91}, P_{89-90}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{57}, P_{56}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_9, P_{10}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{100-106}, P_{103-105}, P_{105-107}, P_{100-103}, P_{107}$
Conjunto Crítico Tipo 1	$P_{117}, P_6, P_{12}$
Conjunto Crítico Tipo 2	$P_{27}, P_{32}, P_{115}$
Conjunto Crítico Tipo 2	$P_{22}, P_{23}$
Conjunto Crítico Tipo 2	$P_{62-67}, P_{67},$
Conjunto Crítico Tipo 2	$P_{76-77}, P_{77},$

Portanto, usando a EGLF com pivoteamento completo, mesmo para um sistema de 118 barras e com uma quantidade grande de medidas, a avaliação do plano de medição se deu de maneira correta.

## 5.2.4 Testes adicionais

Diversas outras simulações foram realizadas para redes de 4, 6, 14, 118 e 300 barras. Na maioria dos casos o algoritmo usando a EGLF com pivoteamento se portou de maneira adequada, e os planos de medição foram avaliados corretamente. Entretanto, testes realizados na rede de 300 barras, demonstraram que para alguns planos de medição, sendo estes geralmente contendo poucas medidas de fluxo e grande quantidades de medidas de injeção, podem resultar em um crescimento excessivo das magnitudes de alguns elementos da matriz fatorada, comprometendo assim a análise desses planos. Destaca-se que durante a fatoração não foi usada uma ordenação ótima das medidas.

Este tipo de problema pode ocorrer já que geralmente as linhas da matriz de Gram relacionadas as medidas de injeção apresentam valores absolutos maiores que os valores absolutos das linhas relacionadas as medidas de fluxos. Além disso, cada linha da matriz referente a uma medida de injeção apresenta mais elementos não nulos que uma linha relacionada a alguma medida de fluxo. Portanto, quando durante o processo de fatoração um pivô é referente a algum elemento relacionado a uma medida de injeção, geralmente este pivô apresenta valores maiores quando comparado com os pivôs relacionados as medidas de fluxo já utilizados e com isso gera um crescimento mais intensificado da porção ainda a ser fatorada da matriz, podendo então em alguns casos gerar uma explosão numérica. Nota-se que, quando há várias medidas de fluxo, o problema de *overflow* geralmente não ocorre uma vez que na maioria dos casos consegue-se encontrar uma base para o sistema sem a necessidade de se fatorar as medidas de injeção.

Testes nas rede de 6, 14 e 118 barras também foram realizados para se ter uma avaliação quanto a diferença de tempo de processamento entre o processo de identificação de medidas e conjuntos críticos utilizando a Eliminação de Gauss padrão e com a EGLF com pivoteamento completo. A seguinte tabela demonstra esse resultados:

Tabela 5.5: Tempo de processamento.

rede	Tempo de processamento (s)	
	Eliminação de Gauss padrão	EGLF com pivoteamento completo
6 barras - Figura 5.1	0.076	0.104
14 barras - Figura 5.3	0.078	0.108
118 barras - Figura 5.4	0.213	0.997

Note que o EGLF com pivoteamento completo apresentou um maior tempo compu-

tacional de processamento que o uso da Eliminação de Gauss padrão. Essa diferença de processamento se deve em grande parte ao processo de pivoteamento e busca do menor elemento em módulo realizada pela EGLF com pivoteamento.

## 5.3 Conclusão

A identificação dos pivôs nulos é parte essencial no processo de identificação de medidas e conjuntos críticos baseado na matriz de Gram e, portanto, a identificação equivocada de um pivô nulo pode comprometer a análise do plano de medição. Nesse contexto, a Aritmética de inteiros foi usada para fatorar a matriz de Gram, evitando erros na identificação de pivôs nulos.

Com o uso da Eliminação de Gauss Livre de Divisão é possível evitar erros na detecção de zeros, entretanto, foi observado que os elementos da matriz fatorada crescem rapidamente, podendo ocorrer um estouro ou *overflow* em poucas passagens.

Visando contornar o problema do rápido crescimento dos elementos durante a EGLD, foi introduzida a Eliminação de Gauss Livre de Divisão com MDC. Apesar deste mecanismo diminuir consideravelmente a magnitude dos elementos da matriz fatorada, o cálculo do MDC demanda um grande esforço computacional, mesmo para redes de pequeno porte. Assim, foi apresentada a Eliminação de Gauss Livre de Fração.

Com a EGLF foi possível reduzir significativamente os módulos dos elementos da matriz fatorada a um custo computacional bem inferior ao da Eliminação de Gauss com MDC. Entretanto, ao aplicar a EGLF para redes de médio porte, principalmente aquelas contendo planos de medição com grandes quantidades de medidas de injeção de potência, os pivôs da matriz fatorada podem apresentar magnitudes elevadas. Nesse contexto, foi proposta a EGLF com pivoteamento completo, com a qual foi possível reduzir a magnitude dos elementos das matrizes fatoradas a um custo computacional adequado.

Simulações foram então realizadas em redes de 4, 6, 14, 118 e 300 barras usando a EGLF com pivoteamento completo. Na maioria das redes os pivôs nulos e, conseqüentemente, os planos de medição foram analisados corretamente. Entretanto, para a rede de 300 barras com planos de medição compostos por grande quantidades de medidas de injeção e poucas medidas de fluxo, foi observado o estouro de valores na matriz fatorada, o que comprometeu a avaliação dos planos de medição.



Devido ao processo de busca em linhas e colunas para escolha dos pivôs, a EGLF com pivoteamento completo apresentou tempos computacionais maiores que a Eliminação de Gauss Padrão. Entretanto, destaca-se que não foram adotadas técnicas de armazenamento esparsos ou técnicas de ordenação ótima das medidas.



## Conclusões Gerais

O estimador de estado (EE) é uma ferramenta fundamental nos modernos centros de controle de energia elétrica. O EE provê informações precisas e confiáveis sobre as condições de operação da rede. Entretanto, para que o EE seja confiável, é necessário que a rede tenha um plano de medição satisfatório, isto quer dizer, uma rede com medidas redundantes e adequadamente distribuídas. Nesse contexto, esta dissertação apresentou algoritmos que permitem uma análise completa de planos de medição para estimação de estado.

Como uma das contribuições deste trabalho foi proposto um novo método para análise de observabilidade. Este método se baseia no estimador CC ponderado regularizado. Ao contrário da proposta apresentada em (ALMEIDA; GARCIA; ASADA, 2012), a regularização adotada nesta dissertação requer a inclusão de um número menor de pseudomedidas de ângulo, as quais são selecionadas através da análise simples e direta das medidas de fluxo disponíveis. Uma grande vantagem da metodologia proposta é o fato de ela ser direta, ao contrário das principais metodologias vistas na literatura que são iterativas.

Foram apresentadas e discutidas ainda duas metodologias capazes de classificar medidas e, portanto, identificar medidas e conjuntos críticos em planos de medição. A presença de medidas e conjuntos críticos impede a filtragem de erros e, portanto, piora a estimação de estado. A primeira metodologia utiliza as propriedades da matriz de Gram e a segunda se baseia na propriedades da matriz Jacobiana. Como as duas metodologias requerem a fatoração de suas matrizes, foram estudadas técnicas de fatoração com aritmética inteira, as quais evitam erros de truncamento, erros de arredondamento e erros na identificação de pivôs nulos, tornando assim as metodologias mais robustas.

Entre as técnicas fatoração estudadas, a que apresentou melhor relação custo/benefício foi a Eliminação de Gauss Livre de Fração com pivoteamento completo. A Eliminação de Gauss Livre de Divisão apresentou um crescimento muito rápido das magnitudes dos elementos da matriz durante a fatoração e a Eliminação de Gauss com MDC, apesar dos bons resultados, requer um elevado tempo computacional.

Testes foram realizados em redes de 4 à 300 barras. Na maioria dos casos o processo de fatoração levou à identificação correta dos pivôs nulos e, conseqüentemente, à classificação correta das medidas. Entretanto, em casos de planos de medição compostos por grandes quantidades medidas de injeção e poucas medidas de fluxo, foram observados estouros ou *overflow* nos elementos das matrizes fatoradas, comprometendo a identificação das medidas e conjuntos críticos.

# Referências Bibliográficas

- ABUR, A.; EXPÓSITO, A. G. *Power System State Estimation*. [S.l.]: Marcel Dekker, 2004.
- ALMEIDA, M. C. de. *Estimação de Estado Generalizada Trifásica*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, julho 2007.
- ALMEIDA, M. de; ASADA, E.; GARCIA, A. A numerical method for finding spanning trees in power system state estimation. In: *Power System Technology, 2006. PowerCon 2006. International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1–6.
- ALMEIDA, M. de; ASADA, E.; GARCIA, A. On the use of gram matrix in observability analysis. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 23, n. 1, p. 249–251, feb. 2008. ISSN 0885-8950.
- ALMEIDA, M. de; ASADA, E.; GARCIA, A. Power system observability analysis based on gram matrix and minimum norm solution. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 23, n. 4, p. 1611–1618, 2008.
- ALMEIDA, M. de; ASADA, E.; GARCIA, A. Identifying critical sets in state estimation using gram matrix. In: *PowerTech, 2009 IEEE Bucharest*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1–5.
- ALMEIDA, M. de; GARCIA, A.; ASADA, E. Regularized least squares power system state estimation. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 27, n. 1, p. 290–297, feb. 2012. ISSN 0885-8950.
- BAREISS, E. H. Sylvester’s identity and multistep integer-preserving gaussian elimination. *Mathematics of Computation*, v. 103, n. 22, p. 565–578, 1968.
- BURDEN, R. L. *Numerical Analysis*. Oitava. [S.l.]: Thomson Brooks/ Cole, 2005.
- CLEMENTS, K.; KRUMPHOLZ, G.; DAVIS, P. An algorithm for observability determination in power system estimation. *paper A75 447-3, IEEE/PES Summer Meeting*, july 1975.
- CLEMENTS, K.; KRUMPHOLZ, G.; DAVIS, P. Power system state estimation residual analysis: An algorithm using network topology. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, v. 100, p. 1779–1787, april 1981.

CLEMENTS, K.; KRUMPHOLZ, G.; DAVIS, P. Power system state estimation with measurement deficiency: An observability/measurement placement algorithm. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, v. 101, n. 9, p. 3044–3052, sept. 1982.

CLEMENTS, K.; KRUMPHOLZ, G.; DAVIS, P. Power systems state estimation with measurement deficiency: An algorithm that determines the maximal observable network. *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, v. 7, n. 7, p. 2012–2020, aug. 1983.

CONTAXIS, G.; KORRES, G. A reduced model for power system observability analysis and restoration. *IEEE Trans. in Power Systems*, v. 3, n. 4, p. 1411–1417, Nov 1988.

COSTA, A. S.; PIAZZA, T.; MANDEL, A. Qualitative methods to solve qualitative problems in power system state estimation. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 5, n. 3, p. 941–949, aug 1990. ISSN 0885-8950.

COSTA, A. S.; SALGADO, R. Estimação de estado em sistemas elétricos de potência. *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, 2 a 5 de setembro 2002.

EXPÓSITO, A. G.; ABUR, A. Generalized observability analysis and measurement classification. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 3, August 1998.

FILHO, M. D. C. et al. Identifying critical measurements and sets for power system state estimation. In: *Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto*. [S.l.: s.n.], 2001. v. 3, p. 6 pp. vol.3.

GAMBILL, T. Lecture 7 - gaussian elimination with pivoting. 2011.

GU, J. W.; CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W. The solution of ill-conditioned power system state estimation problems via the method of peters and wilkinson. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1983.

JAIN, V.; GUPTA, R. Identification of linear systems through a grammian technique. *Int. J. Control*, v. 12, n. 3, p. 421–431, 1970.

KIRSCH, B. J.; TURNER, P. R. *Adaptive Beamforming Using RNS Arithmetic*. [S.l.], 1993.

KIRSCH, B. J.; TURNER, P. R. *Modified Gaussian Elimination for Adaptive Beam Forming Using RNS Arithmetic*. [S.l.], 1994.

KORRES, G. N. Observability and criticality analysis in state estimation using integer-preserving gaussian elimination. *International Transactions on Electrical Energy Systems*, 2012.

KRUMPHOLZ, G. R.; CLEMENTS, K.; DAVIS, P. Power system observability: A practical algorithm using network topology. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-99, n. 4, p. 1534–1542, 1980. ISSN 0018-9510.

MONTICELLI, A. *State Estimation in Electric Power Systems: A Generalized Approach*. [S.l.]: Kluwer Academic Publisher, 1999.

- MONTICELLI, A.; WU, F. Network observability: Identification of observable islands and measurement placement. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-104, n. 5, p. 1035–1041, 1985. ISSN 0018-9510.
- MONTICELLI, A.; WU, F. Network observability: theory. *IEEE Trans. PAS*, v. 104, n. 5, p. 1035–1041, May 1985.
- MONTICELLI, A.; WU, F. Observability analysis for orthogonal transformation based state estimation. *IEEE Trans. on Power Systems*, v. 1, n. 1, p. 201–206, Feb. 1986.
- NAKOS, G. C.; TURNER, P. R.; WILLIAMS, R. M. *Fraction-free algorithms for linear and polynomial equations*. [S.l.], 1997.
- NUCERA, R.; BRANDWAJN, V.; GILLES, M. Observability analysis and bad data - analysis using augmented blocked matrices. *IEEE Trans. Power Systems*, v. 3, n. 2, p. 426–433, May 1993.
- OLIVEIRA, W. A. de. *Análise de Observabilidade Baseada em Variância das Medidas Estimadas*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, 2012.
- PURSELL, L.; TRIMBLE, S. Gram-schmidt orthogonalization by gauss elimination. *American Mathematical Monthly*, v. 98, n. 6, p. 544–549, 1991.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. Segunda. [S.l.]: Pearson, 2000.
- TIKHONOV, A.; V.Y., A. *Solutions of Ill-Posed Problems*. [S.l.]: V. H. Winston and Sons, 1977.
- TURNER, P. R. *A simplified Fraction-Free Integer Gauss Elimination Algorithm*. [S.l.], 1995.
- TURNER, P. R. *Fraction-free RNS Algorithms for Solving Linear Systems*. [S.l.], 1997.
- TURNER, P. R.; KIRSCH, B. J. *Operation Complexity for Integer or RNS Gaussian Elimination*. [S.l.], 1994.
- WU, F.; LIU, E.; LUN, S. Observability analysis and bad data - processing for state estimation with equality constraints. *IEEE Trans. Power Systems*, v. 3, n. 2, p. 541–578, May 1988.
- WU, F. F. Power system state estimation: a survey. *Electrical Power and Energy Systems*, v. 12, p. 80–87, April 1990.





## Seleção das Medidas Não Redundantes

Se a rede é globalmente observável o *rank* da matriz Jacobiana e, conseqüentemente, o *rank* da matriz de Gram é igual a  $n - 1$  (se a referência de ângulo é inserida, o *rank* das duas matrizes são iguais a  $n$ ) (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2006). Um algoritmo rápido, simples e direto para identificar as medidas não redundantes é mostrado a seguir.

### A.1 Algoritmo para Seleção de Medidas Não Redundantes

Dado  $k$  medidas linearmente independentes com sua respectiva matriz jacobiana  $H_k$ , a matriz de Gram ( $A_k$ ) associada tem dimensão  $k$  e todos os pivôs da matriz de Gram fatorada ( $\tilde{A}_k$ ) são não nulos. A fim de verificar se a nova medida representada por  $(h'_{k+1})$  (a nova linha a ser adicionada na matriz  $H_k$ ) é redundante com as  $k$  medidas já existentes, (ALMEIDA; ASADA; GARCIA, 2008b) propôs o seguinte algoritmo.

---

**Algoritmo A.1.1:** Seleção de Medidas Não Redundantes

---

**Passo 1:** Monte o vetor  $c_{k+1} = H_k h_{k+1}$ ;

**Passo 2:** Obtenha  $\tilde{c}_{k+1} = L_k \dots L_1 c_{k+1}$ , onde  $L_1 \dots L_k$  representam as operações elementares requeridas para a fatoração triangular de  $A_k$ ;

**Passo 3:** Calcule o elemento  $d_{k+1}$ , dado por:  $d_{k+1} = (h'_{k+1} h_{k+1})$ ;

**Passo 4:** Se  $\tilde{d}_{k+1}$ , dado por:

$$\tilde{d}_{k+1} = d_{k+1} - \tilde{c}'_{k+1} \text{diag}(\tilde{A}_k)^{-1} \tilde{c}_{k+1}$$

for igual a zero, a medida  $k + 1$  é redundante com o conjunto de  $k$  medidas previamente processadas e então é descartada. Caso contrário, a medida é mantida e o fatores triangulares são atualizados. A nova matriz de Gram fatorada com a inclusão da nova medida é dada por:

$$\tilde{A}_{k+1} = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{A}_k & \tilde{c}_{k+1} \\ \hline 0 & \tilde{d}_{k+1} \end{array} \right)$$

e o novo fator triangular é atualizado de modo que:

$$L_{k+1} = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -\tilde{c}'_{k+1} \text{diag}(\tilde{A}_k)^{-1} & 1 \end{array} \right)$$

onde  $I$  é uma matriz identidade.

---