



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações

**Algoritmos Recursivos de Mínimos Quadrados para
Processamento Espacial/Temporal com Restrições Lineares:**

Aplicação em Antenas Adaptativas

Autor

Leonardo Silva Resende

Orientador

João Marcos Travassos Romano

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por **LEONARDO SILVA RESENDE**
e aprovada pela Comissão
Julgadora em 20 / 12 / 1996
João Marcos Travassos Romano
Orientador

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Campinas, 20 de Dezembro de 1996.



84750 16

IDADE	BC
CHAMADA:	UNICAMP
	R311a
E.	
MBD BC/	30272
OC.	281193
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
ECO	R\$11,00
PA	21105193
CPD	

CM-00199472-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R311a Resende, Leonardo Silva
Algoritmos recursivos de mínimos quadrados para
processamento espacial/temporal com restrições lineares:
aplicação em antenas adaptativas / Leonardo Silva
Resende.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: João Marcos Travassos Romano.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Antenas ajustáveis. 2. Processamento de sinal
adaptativo. 3. Mínimos quadrados. I. Romano, João
Marcos Travassos. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. III. Título.

"O mundo será diferente depois de nós, porque vivemos nele ...";

Frase mencionada numa carta de meu Pai a mim enviada.

Para Solange

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão:

Aos meus pais pelas infinitas bênçãos de amor onipresente.

Ao Prof. João Marcos Travassos Romano pela amizade e confiança.

Ao Prof. Maurice G. Bellanger por sua orientação, seu incentivo e seus conselhos.

Aos meus amigos Carlos Aurélio Faria da Rocha e Elizena Stein pelo apoio e companheirismo.
Mais que tudo, devo-lhes uma grande amizade, de inestimável valor.

Aos inesquecíveis amigos franceses pelos bons momentos passados em Paris.

Aos ilustres membros da banca examinadora desta tese por suas sugestões proveitosas.

A todos cujos nomes, por imperdoável distração ou esquecimento, tenham sido omitidos desta página.

Abstract

The technique of incorporating linear constraints to adaptive FIR transversal filtering has increased its applicability in the field of signal spatial/temporal processing. The constraints are used to confer the filter a response characteristic conditioned to the signal which is to be enhanced or annihilated in the processing, supplying the necessary reference signal to Wiener theory. Typically, this technique has been employed in adaptive antennas to enhance a signal in a given range of direction and frequency, minimizing noise and interference with different spatial and temporal characteristics.

In this thesis we propose a recursive Least-Square (LS) algorithm for linearly-constrained spatial/temporal adaptive filtering. It is fast, because it uses the Fast Least-Square (FLS) technique in the calculation of the adaptation gain, keeping a computational complexity proportional to the number of adapted parameters in the structure, and it is robust with respect to finite numerical precision errors. In fact, the approach can be viewed as the LS version of the Frost technique, based on stochastic gradient. Thereby, the classical properties of better performance in terms of rate of convergence and accuracy of the LS criterion are preserved in the constrained minimization process.

This work also presents two other contributions regarding the application of the FLS algorithm with reduced computational cost:

- i)* Linear phase adaptive filtering; and
- ii)* Adaptive implementation of the minimum-variance spectral analysis method.

During the work, some directions involving the usage of constraints together with the proposed algorithm have been identified and incorporated in the research subject to be further explored.

Resumo

A técnica de incorporar restrições lineares tem proporcionado à filtragem transversal FIR adaptativa uma maior aplicabilidade na área de processamento temporal e espacial de sinais. As restrições são utilizadas para conferir ao filtro características de resposta condicionadas ao sinal que se quer realçar ou anular no processamento, suprindo o sinal de referência necessário à teoria de Wiener. Tipicamente, esta técnica vem sendo empregada em antenas adaptativas para privilegiar um sinal numa determinada região de direção e frequência, minimizando ruído e interferências com diferentes características espaciais e temporais.

Neste trabalho de tese propomos um algoritmo recursivo de mínimos quadrados para filtragem adaptativa espacial/temporal com restrições lineares. O algoritmo é rápido por empregar a técnica FLS (*Fast Least-Square*) no cálculo do ganho de adaptação, mantendo a complexidade computacional proporcional ao número de parâmetros adaptados na estrutura, e robusto a erros de precisão numérica finita. Na verdade, a abordagem pode ser vista como a contrapartida de mínimos quadrados da técnica do gradiente estocástico proposta por Frost. Com isso, as propriedades clássicas de melhor desempenho em termos de taxa de convergência e precisão do critério de mínimos quadrados são preservadas no processo de minimização restrita.

Este trabalho traz também outras duas contribuições relacionadas à aplicação do algoritmo FLS a um custo computacional reduzido:

- i) Filtragem adaptativa de fase linear; e
- ii) Implementação adaptativa do método de análise espectral por variância mínima.

No decorrer do trabalho, algumas diretrizes envolvendo o uso de restrições e do algoritmo proposto são identificadas, e fazem parte do plano de pesquisa ao qual pretendemos dar prosseguimento.

Sumário

LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	v
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação	1
1.2 Breve Histórico	3
1.3 Interpretação Geométrica	5
1.4 Organização da Tese	6
2 PROCESSAMENTO ESPACIAL/TEMPORAL COM RESTRIÇÕES LINEARES	7
2.1 Processamento de Sinais de Arranjo	8
2.1.1 Propagação de onda	8
2.1.2 Amostragem espacial	11
2.2 A Estrutura Direta do Arranjo/Conformador	14
2.2.1 O conformador LCMV	20
2.2.2 A filtragem LCID	25
2.3 O Cancelador de Lóbulo Lateral Generalizado	28
2.4 Restrições Lineares	32
2.4.1 Restrições pontuais	32
2.4.2 Restrições derivativas	37
2.4.3 Restrições autovetoriais	38
2.5 Comentários	41

3	ALGORITMOS ADAPTATIVOS	43
3.1	O Algoritmo de Frost	44
3.1.1	A técnica CLMS aplicada ao problema LCID	46
3.1.2	Interpretação geométrica	47
3.1.3	O algoritmo de projeção do gradiente	49
3.1.4	As restrições de Frost	52
3.2	O GSC Adaptativo	54
3.2.1	O algoritmo de Frost do ponto de vista do GSC adaptativo	56
3.2.2	O GSC parcialmente adaptativo	60
3.3	O Algoritmo Recursivo de Mínimos Quadrados com Restrições	63
3.3.1	O algoritmo robusto de mínimos quadrados	70
3.4	Comentários	82
4	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO, NOVAS APLICAÇÕES E PERSPECTIVAS	83
4.1	Verificação de Robustez	84
4.2	Aplicação em Conformadores de Banda Larga	87
4.3	Filtragem Adaptativa com Fase Linear	94
4.4	O Método de Análise Espectral por Variância Mínima	108
4.5	Comentários	116
5	CONCLUSÃO	118
	APÊNDICE A: O Algoritmo de Mínimos Quadrados Rápido Estável	120
	REFERÊNCIAS	122

Lista de Figuras

Fig. 1.1: Interpretação geométrica do problema LCMV.	5
Fig. 2.1: Amostragem de uma onda de banda estreita por um arranjo linear de sensores.	11
Fig. 2.2: A estrutura direta do arranjo/conformador para sinais de banda larga.	15
Fig. 2.3: Amostragem de uma onda de banda larga pela estrutura.	16
Fig. 2.4: A estrutura do arranjo/conformador para sinais de banda estreita.	18
Fig. 2.5: Filtro transversal.	19
Fig. 2.6: Espaço vetorial MN _dimensional dos coeficientes e de observação da fonte.	22
Fig. 2.7: A filtragem de identificação com restrições lineares.	26
Fig. 2.8: Diagrama de bloco do cancelador de lóbulo lateral generalizado.	30
Fig. 3.1: Interpretação geométrica do algoritmo CLMS determinístico [Eq. (3.6)].	48
Fig. 3.2: Operações do algoritmo de projeção do gradiente [Eq. (3.16)].	49
Fig. 3.3: Comparação do efeito do erro de precisão numérica finita nos algoritmos (a) de Frost e (b) de projeção do gradiente.	51
Fig. 3.4: O processador equivalente de Frost para o conformador de banda larga.	52
Fig. 3.5: O GSC adaptativo.	55
Fig. 3.6: O algoritmo de Frost representado pelo diagrama de bloco do GSC adaptativo.	57
Fig. 3.7: O GSC adaptativo utilizado por Cantoni em decorrência das restrições de Frost.	59
Fig. 3.8: O GSC parcialmente adaptativo.	61

Fig. 4.1: Evolução dos coeficientes.	85
Fig. 4.2: Magnitude da resposta em frequência dos filtros após 10^6 iterações.	86
Fig. 4.3: Evolução da potência do sinal de saída.	88
Fig. 4.4: Magnitudes das respostas em frequência para (a) $\theta=30^\circ$ e (b) $\theta=0^\circ$.	89
Fig. 4.5: Magnitudes das respostas em ângulo para (a) $f=0,2$ e (b) $f=0,4$.	91
Fig. 4.6: Padrões de diretividade dos arranjos/conformadores para (a) $f=0,2$ e (b) $f=0,4$.	92
Fig. 4.7: Magnitudes das respostas em frequência e ângulo: (a) ótimo, (b) CFLS e (c) CLMS.	94
Fig. 4.8: A representação GSC do problema LCID.	97
Fig. 4.9 O GSC para restrição de fase linear tendo \mathbf{P} como matriz de bloqueio de sinal.	97
Fig. 4.10: O GSC da Fig. 4.9 fazendo uso da Eq. (4.11).	99
Fig. 4.11: Estrutura proposta para o filtro de erro de predição <i>forward</i> e <i>backward</i> de fase linear.	101
Fig. 4.12: Evolução da potência do sinal de erro.	104
Fig. 4.13: Curva de convergência dos coeficientes $\mathbf{h}_{FL}(n)$.	105
Fig. 4.14: Magnitude da resposta em frequência de $\mathbf{h}_{EP}(n)$ para $n=500$.	105
Fig. 4.15: Posicionamento dos zeros no plano z .	106
Fig. 4.16: Resposta de fase do filtro de erro de predição.	107
Fig. 4.17: Curva de convergência dos coeficientes $\mathbf{h}_{FL}^{(CFLS)}(n)$.	107
Fig. 4.18: Filtro transversal FIR restrito com parâmetros complexos.	109
Fig. 4.19: O vetor $\boldsymbol{\gamma}(n,\omega)$ visto como um filtro transversal FIR adaptativo.	112
Fig. 4.20: Espectro de potência estimado pelo algoritmo da Tabela 4.4.	115
Fig. 4.21: Espectro de potência estimado, obtendo $\boldsymbol{\gamma}(n,\omega)$ apenas por (4.49).	115
Fig. 4.22: Banco de filtros adaptativos com restrições lineares.	116

Lista de Tabelas

Tabela 3.1: O algoritmo CFLS para conformadores LCID de banda larga.	74
Tabela 3.2: O algoritmo CFLS para conformadores LCMV de banda larga.	75
Tabela 3.3: O algoritmo CFLS para filtragem LCID temporal (unidimensional).	78
Tabela 3.4: O algoritmo CFLS para filtragem LCMV temporal (unidimensional).	79
Tabela 3.5: O algoritmo CFLS para conformadores LCID de banda estreita (filtragem espacial).	80
Tabela 3.6: O algoritmo CFLS para conformadores LCMV de banda estreita (filtragem espacial).	81
Tabela 4.1: Características das fontes.	87
Tabela 4.2: Ganhos de sinal, interferências e ruído (em dB).	90
Tabela 4.3: Algoritmo FLS para filtragem adaptativa de fase linear.	102
Tabela 4.4: Algoritmo FLS para implementação adaptativa do método de análise espectral MV.	113
Tabela A.1: Algoritmo FLS unidimensional estável para cálculo do ganho de adaptação.	121

1.1 MOTIVAÇÃO

O princípio básico de um filtro adaptativo é variar seus parâmetros ou coeficientes segundo algum algoritmo, de forma que converjam a uma solução que minimize uma dada função custo. O critério de minimização mais conveniente é, em geral, de tipo quadrático, seja determinístico ou estatístico. O problema de filtragem adaptativa com restrições lineares aparece quando, além do critério a ser minimizado, os coeficientes do filtro estão sujeitos a um conjunto de equações lineares.

A utilidade em se introduzir um conjunto de restrições ao filtro está, em termos gerais, na possibilidade de pré-estabelecer um determinado comportamento à sua resposta para suprir o sinal de referência necessário à teoria de Wiener. Por exemplo, podemos impor restrições sobre os coeficientes de modo que um determinado sinal de interesse não seja atenuado pelo filtro, enquanto que a potência total de saída é minimizada, a fim de se melhorar a relação sinal-ruído.

Historicamente, esse tipo de técnica vem sendo empregada em processamento espacial (*spatial processing* ou *array processing*); isto é, quando há um conjunto de sensores uniformemente espaçados, cujas saídas são combinadas de forma a produzir um dado sinal, constituindo um filtro espacial (multidimensional). Em particular, estuda-se o caso de um conjunto de antenas onde as restrições são impostas para dar ênfase ao sinal recebido numa determinada região de direção e frequência, minimizando o ruído e as interferências com diferentes características espaciais e temporais. No que diz respeito aos algoritmos adaptativos, a técnica de mínimos quadrados (LS *Least-Square*) só é aplicada quando aliada a uma estrutura indireta, na qual as restrições não

fazem parte do processo de adaptação. Tal estrutura não permite, entretanto, o uso de um algoritmo rápido (FLS_ *Fast Least-Square*) que reduziria o esforço computacional.

Na nossa tese de mestrado [1-5], o estudo de filtragem adaptativa com restrições lineares por mínimos quadrados ficou limitado ao contexto temporal. Além disto, o algoritmo proposto para a estrutura direta do filtro é sensível a erros de imprecisão aritmética e apresenta problemas de perda das restrições.

Neste trabalho apresentamos, então, um algoritmo LS robusto [6,7], estendendo-o ao problema mais geral de filtragem adaptativa espacial/temporal com restrições lineares [8-11]. O algoritmo é considerado rápido por fazer uso da técnica FLS na obtenção do ganho de adaptação, o que propicia uma complexidade computacional proporcional ao número de parâmetros adaptados na estrutura. A abordagem pode ser vista também como a versão LS da técnica do gradiente estocástico proposta por Frost no campo das antenas adaptativas - o consagrado algoritmo CLMS (*Constrained Least Mean-Square*). O resultado é que as propriedades clássicas do critério de mínimos quadrados, a saber: melhor taxa de convergência e precisão, são mantidas, mesmo quando as restrições são incorporadas à filtragem.

O estudo de filtragem adaptativa com restrições se torna motivante por envolver duas possíveis abordagens: a de designar as restrições e a de desenvolver os algoritmos, as quais, tratadas conjuntamente, permitem estabelecer novas soluções a diferentes problemas de processamento de sinais. Em decorrência disto, duas outras contribuições apresentadas em [12,13] são revistas aqui com melhorias:

i) Um procedimento via algoritmo FLS para filtragem adaptativa de fase linear, mantendo-se, agora, a carga computacional proporcional ao número de coeficientes do filtro; e

ii) O estabelecimento de forma adaptativa e também robusta do método de análise espectral por variância mínima pelo critério LS.

Também, no decorrer do trabalho, apontamos algumas perspectivas de desenvolvimento da própria técnica e abrimos possibilidades de novas aplicações.

1.2 BREVE HISTÓRICO

O cancelador de lóbulo lateral (*sidelobe canceller*), desenvolvido por Howells na década de 50, é considerado o mais simples e antigo conformador de feixes encontrado na literatura de antenas adaptativas. Uma antena auxiliar de baixo ganho é usada para estimar a interferência vazada através dos lóbulos laterais de uma antena principal com alto ganho na direção do sinal desejado. Esta estimativa é subtraída na saída da antena principal a fim de se cancelar a interferência.

Utilizando o mesmo princípio, Applebaum desenvolveu, em 1966, uma lei de controle para governar cada coeficiente de uma combinação ponderada de um conjunto de antenas auxiliares. O algoritmo derivado por ele foi baseado na maximização da relação sinal-ruído (*SNR_Signal-to-Noise Ratio*) na saída do arranjo de antenas (auxiliares e principal). O cancelador é conhecido como MSC (*Multiple Sidelobe Canceller*).

A teoria de Applebaum incluiu o cancelador de lóbulo lateral como um caso especial. Uma desvantagem inerente à estrutura Howells-Applebaum é o cancelamento de sinal desejado quando este também está presente nos canais auxiliares ou tem uma potência elevada em relação às interferências [14-16].

Um outro algoritmo para adaptação dos coeficientes em um arranjo de antenas foi apresentado em 1967 por Widrow. Sua teoria é baseada no algoritmo LMS (*Least-Mean Square*), desenvolvido por ele mesmo em parceria com Hoff (1960) [17].

O algoritmo LMS para antenas adaptativas e o algoritmo de máxima SNR, desenvolvido por Applebaum, são similares. Ambos adaptam os coeficientes com base na correlação entre os sinais nos elementos do arranjo. De fato, quando as entradas são estacionárias, eles convergem para a solução ótima de Wiener [18].

No mesmo ano de 1967, Widrow, Mantey, Griffiths e Goode propuseram um procedimento de otimização envolvendo o uso de um sinal de treinamento [19]. Isto permitiu eliminar do arranjo o

elemento que corresponde à antena principal na estrutura Howells-Applebaum. Este conformador de feixes com sinal piloto também é derivado da aplicação e extensão do trabalho original sobre filtros adaptativos feito por Widrow e Hoff.

Em 1969, Griffiths propôs um algoritmo LMS modificado, conhecido como algoritmo do vetor P, o qual não requer um sinal desejado [20]. Ao invés disto, o algoritmo utiliza a correlação cruzada entre o sinal desejado e os sinais na saída do arranjo de sensores para adaptar os coeficientes. Griffiths baseou-se no fato de que esta correlação é usualmente conhecida *a priori* ou pode ser estimada facilmente na aplicação de arranjos de antenas.

No entanto, foi também em 1969 que Capon introduziu um método diferente para solucionar o problema de conformação adaptativa de feixes (o processo de minimização restrita MVDR *Minimum-Variance Distortionless Response*), dando origem a uma nova classe de conformadores conhecidos como LCMV (*Linearly-Constrained Minimum Variance*) [21,22].

Com base no critério LCMV, dois tipos de conformadores foram desenvolvidos:

- i) o conformador direto que incorpora a restrição junto com o processo de adaptação; e
- ii) o conformador particionado, conhecido como GSC (*Generalized Sidelobe Canceller*), que converte a minimização restrita do conformador direto numa forma não restrita. Esta abordagem foi introduzida no contexto de conformação de feixes por Applebaum e Chapman e por Griffiths e Jim [23].

No que diz respeito ao conformador direto LCMV adaptativo, Frost propôs, em 1972, um algoritmo conhecido como CLMS (*Constrained Least-Mean Square*) [24]. Basicamente, ele é derivado da aplicação da técnica LMS ao problema LCMV, tendo a simplicidade e robustez como suas principais características.

Esses dois tipos de conformadores LCMV vêm sendo genericamente utilizados na atualidade e se constituem no objeto de estudo deste trabalho.

1.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Uma interpretação geométrica do processo de otimização restrita é facilmente visualizada se considerarmos o simples problema de minimizar a potência do sinal de saída de um filtro a dois coeficientes, sujeito a condição $h_0=1$.

Como mostrado na Fig. 1.1, a restrição $h_0=1$ define um plano cuja interseção com a função custo a ser minimizada $\mathcal{F}(h_0, h_1)$ delimita o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. Em sendo a potência do sinal de saída, em função dos coeficientes do filtro, um parabolóide elíptico centrado na origem, o lugar geométrico em questão é uma parábola com concavidade voltada para cima. Logo, o filtro ótimo procurado é aquele cujo coeficiente h_1 é igual ao valor da ordenada no ponto de mínimo da parábola (o vértice da parábola).

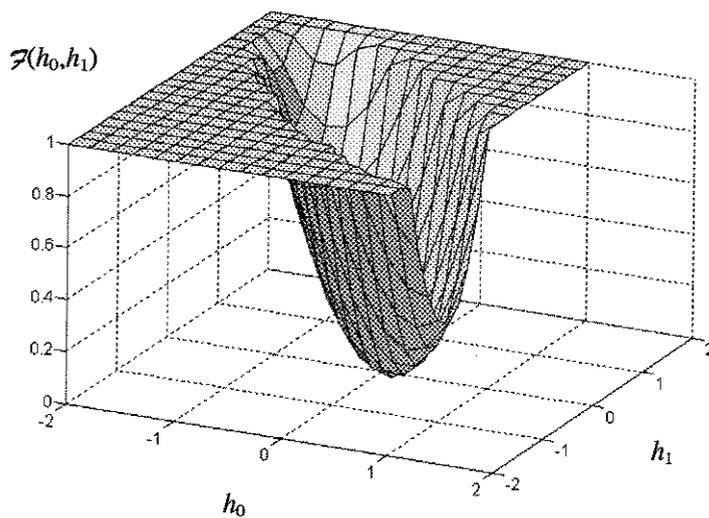


Fig. 1.1: Interpretação geométrica do problema LCMV.

A interpretação geométrica acima pode ser facilmente generalizada aos problemas com mais de duas dimensões ao observarmos, então, que as restrições definem, na função custo a ser minimizada, um lugar geométrico cujo ponto de mínimo é a solução ótima procurada. Neste caso, dizemos que o lugar geométrico é definido pela interseção do hiperplano de restrições com a função custo a ser minimizada.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

No Capítulo 2 deste trabalho, abordamos os principais conceitos de processamento espacial/temporal aplicados em antenas adaptativas, bem como o critério LCMV e as estruturas direta e indireta dos conformadores.

O contexto adaptativo é tratado no Capítulo 3, onde são revistas as técnicas empregadas recentemente na literatura e é apresentada a proposta de um algoritmo de mínimos quadrados rápido e robusto.

O Capítulo 4 é dedicado aos resultados de simulação do algoritmo proposto, comparado ao algoritmo de Frost. Este capítulo traz também, como contribuições, a proposta de um algoritmo rápido de mínimos quadrados para filtragem de fase linear e a implementação adaptativa do método de análise espectral por variância mínima.

Capítulo 2

Processamento Espacial/Temporal com Restrições Lineares

Neste capítulo revemos alguns conceitos básicos relacionados ao processamento espacial/temporal com restrições lineares de sinais captados por um arranjo de sensores. O objetivo é apresentar o processador LCMV (*Linearly-Constrained Minimum Variance*) e definir sua solução analítica ótima, a qual constitui-se na base teórica necessária para o desenvolvimento dos algoritmos adaptativos que iremos apresentar no próximo capítulo.

Iniciamos o capítulo considerando a amostragem espacial de uma onda plana incidindo sobre um arranjo linear de sensores. Em seguida, a estrutura do processador espacial/temporal na forma direta é apresentada. As particularizações desta estrutura às filtragens somente espacial e temporal, bem como suas analogias, serão também discutidas. O critério de mínima variância com restrições lineares (*LCMV_Linearly-Constrained Minimum Variance*) é, então, estabelecido para obtenção dos processadores ótimos LMS (*Least-Mean Square*). Também é analisada a estrutura do processador LCMV na forma indireta ou desmembrada. Entreposto aos dois últimos tópicos, abordamos a agregação das restrições à teoria de filtragem de Wiener. Por fim, descrevemos os tipos de restrições lineares que são utilizadas para preservarem o sinal de interesse incidindo sobre o arranjo.

2.1 PROCESSAMENTO DE SINAIS DE ARRANJO

Um *conformador de feixes* (*beamformer*) é um processador de sinais associado a um conjunto de sensores que estão espacialmente separados. O conjunto de sensores é referenciado como um *arranjo* (*array*). Sua finalidade é coletar amostras espaciais de uma onda incidente, para serem processadas pelo conformador. Estas amostras são necessárias para filtragem espacial da mesma maneira que amostras temporais de uma onda são necessárias para filtragem temporal.

A saída do conformador é uma combinação ponderada das saídas do conjunto de sensores. Em geral, o propósito da estrutura arranjo/conformador é permitir separação de sinais baseado na diversidade espacial, bem como no conteúdo de frequência. Os coeficientes de ponderação determinam as características de filtragem espacial e temporal da estrutura. Em um conformador adaptativo, os coeficientes são ajustados em função dos dados recebidos nos sensores, com o objetivo de otimizar a resposta em um ambiente com características variantes ou desconhecidas.

Processamento de sinais de arranjo encontra aplicações em radar, sonar, geofísica, rádio astronomia, engenharia biomédica, etc. [15,17,18,21,25-27]. Dependendo da aplicação de interesse, o arranjo de sensores (por exemplo, antenas, hidrofones ou geofones) pode assumir uma variedade de configuração geométrica. A configuração mais usada é a linear, onde os sensores são uniformemente espaçados ao longo de uma linha reta. Uma outra configuração comum é a planar, na qual os sensores formam uma grade retangular ou situam-se sobre círculos concêntricos. Neste trabalho consideraremos apenas o arranjo linear de sensores.

2.1.1 Propagação de Onda

Chamamos de onda a propagação de uma perturbação em um meio aberto provocada por uma força impulsora nele acoplada. As ondas têm como característica se propagarem para longe da fonte de perturbação. Elas também possuem a importante propriedade de transportarem energia sob uma forma que depende da natureza física da força impulsora.

Em uma distância bem afastada da fonte, as ondas tornam-se essencialmente planas. Na verdade, a onda plana é provavelmente a mais comum de todas as diferentes formas de propagação da onda, e, sendo assim, será a única que iremos considerar neste trabalho.

Suponhamos ter uma onda harmônica propagando através de um meio dispersivo homogêneo na direção do vetor unitário \hat{z} (ao longo do eixo z do sistema de coordenadas cartesianas). No plano definido por um valor fixo de z , a função da onda tem a seguinte dependência com o tempo:

$$\mathcal{F}(t, z) = A \cos[2\pi(ft - vz)], \quad (2.1)$$

onde A é a amplitude, f a frequência e t o tempo. O parâmetro v é chamado de *número de onda* e é definido por

$$v = 1/\lambda, \quad (2.2)$$

sendo λ o comprimento de onda. Seu significado físico é que em uma distância z , medida ao longo da direção de propagação \hat{z} , a fase se acumula por $2\pi v z$ radianos. Frequentemente, o número de onda é definido como

$$\kappa = 2\pi v, \quad (2.3)$$

tal que a fase acumulada na distância z é igual a κz radianos.

Denotemos por \mathbf{p} o vetor ligando um ponto no espaço à origem do sistema de coordenadas cartesianas, de modo a definir o plano z fixo como $z = \hat{z} \cdot \mathbf{p}$. Assim, podemos expressar a quantidade $-vz$ na Eq. (2.1) como

$$\begin{aligned} -vz &= -v(\hat{z} \cdot \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde

$$\mathbf{v} = -v\hat{z}. \quad (2.5)$$

Nos referimos a \mathbf{v} como o *vetor de número de onda*. Note que este vetor aponta na direção oposta à direção de propagação \hat{z} .

Usando a nova notação acima, podemos reescrever a equação da onda (2.1) na seguinte forma equivalente:

$$\varphi(t, \mathbf{p}) = A \cos[2\pi(ft + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p})], \quad (2.6)$$

onde o argumento da função senoidal

$$\begin{aligned} \varphi(t, z) &= 2\pi(ft - vz) \\ &= 2\pi(ft + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

é chamado de fase.

Calculemos o diferencial da fase. Da Eq. (2.7) temos que

$$\begin{aligned} d\varphi &= 2\pi(fdt + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}) \\ &= 2\pi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

para um tempo t fixo. Se \mathbf{v} é perpendicular a $d\mathbf{p}$ obtemos então que

$$d\varphi = 0. \quad (2.9)$$

Isto quer dizer que o incremento de fase é igual a zero movendo-se numa direção perpendicular a \mathbf{v} , o que significa estar sobre um plano. Dizendo de uma outra forma, para um instante t fixado, os pontos com fases φ 's iguais definem um plano. É por esta razão que a onda é referenciada como sendo plana. O plano para uma determinada fase é chamado de *frente de onda*.

Ao definirmos a equação da onda em (2.1) fixamos z e variamos t e, conseqüentemente, $\varphi(t, z)$. Isto significa, do ponto de vista físico, a possibilidade de descrevermos o comportamento de um ponto do meio, no decorrer do tempo. Também podemos adotar um outro procedimento na interpretação da Eq. (2.1): fixar t , fazendo variar z e, conseqüentemente, $\varphi(t, z)$. Isto significa fisicamente que, na direção de propagação da onda, podemos determinar a situação de cada ponto do meio, no instante fixado t . Veremos, a seguir, como o arranjo linear de sensores amostra a onda nos diferentes pontos.

2.1.2 Amostragem Espacial

Considere um arranjo linear de M sensores igualmente espaçados a uma distância d de um para o outro, como na Fig. 2.1. Assume-se que os sensores sejam isotrópicos, o que significa que os sinais são recebidos uniformemente em todas as direções com iguais amplitude e fase.

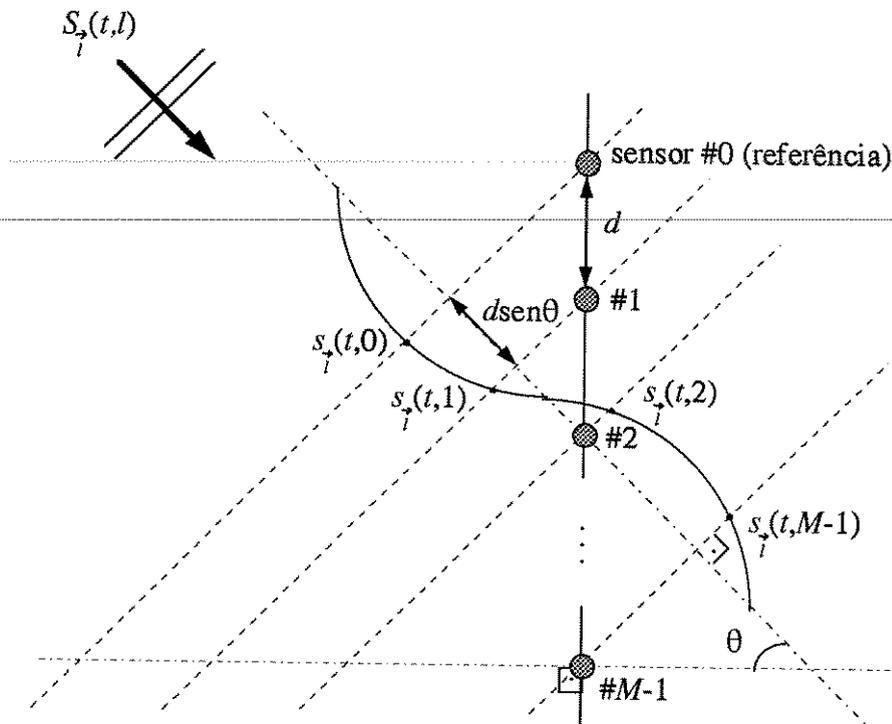


Fig. 2.1: Amostragem de uma onda de banda estreita por um arranjo linear de sensores.

Também é mostrado, na Fig. 2.1, uma onda plana incidente, proveniente de uma fonte numa localização afastada do arranjo. Localização é uma quantidade tridimensional. Somente consideraremos aqui a direção de chegada (DOA *Direction Of Arrival*) da onda no arranjo, correspondendo a um ângulo θ medido entre as perpendiculares aos planos das frentes de onda e à linha do arranjo de sensores (ângulo de elevação).

A onda incidindo sobre o arranjo é considerada de banda estreita, o que significa que pode ser adequadamente caracterizada por uma única frequência f_0 . Seu comprimento de onda correspondente é

$$\lambda = \frac{c}{f_0}, \quad (2.10)$$

onde c é a velocidade de propagação no meio.

Na Fig. 2.1 podemos observar que a distância entre as frentes de onda nos sensores #0 e #1 do arranjo é igual a $d \text{ sen}\theta$. Isto se aplica para qualquer par de sensores adjacentes no arranjo. Assim, para um dado instante de tempo t , temos que o arranjo amostra espacialmente a onda. Se denotarmos a onda incidindo sobre o arranjo por $S_{\vec{l}}(t, l)$, sendo \vec{l} a direção de propagação associada ao ângulo θ , as amostras podem ser descritas por

$$s_{\vec{l}}(t, m) = S_{\vec{l}}[t, m(d \text{ sen}\theta)], \quad (2.11)$$

para $m = 0, 1, \dots, M - 1$, onde $d \text{ sen}\theta$ é o período da amostragem espacial.

Com um comprimento de onda de λ , a fase acumulada entre dois sensores adjacentes é

$$\begin{aligned} \phi &= 2\pi(d/\lambda) \text{ sen}\theta \\ &= \kappa_{\theta} d \end{aligned} \quad (2.12)$$

radianos, onde

$$\begin{aligned} \kappa_{\theta} &= \frac{2\pi \text{ sen}\theta}{\lambda} \\ &= \kappa \text{ sen}\theta \end{aligned} \quad (2.13)$$

e κ é o número da onda [Eq. (2.3)]. Observe que κ_{θ} corresponde ao número da onda com relação a seu ângulo de chegada (DOA) no arranjo. Ele recebe o nome de número de onda projetado. Com o objetivo de determinar o DOA da onda, é comum o uso das técnicas de análise espectral de detecção de frequência para estimar κ_{θ} a partir das M amostras nos sensores [28,29].

A variável ϕ é chamada de *ângulo elétrico* da onda. Ela desempenha, em processamento espacial, o mesmo papel que a frequência em processamento temporal. Pela Eq. (2.10), ϕ pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\phi &= 2\pi f_0 (d/c) \operatorname{sen}\theta \\ &= \omega_0 (d/c) \operatorname{sen}\theta \\ &= \omega_0 \tau(\theta),\end{aligned}\tag{2.14}$$

onde

$$\tau(\theta) = \frac{d}{c} \operatorname{sen}\theta\tag{2.15}$$

é o tempo de atraso de propagação da onda entre dois sensores adjacentes.

Do mesmo modo que em processamento temporal, podemos definir os limites do intervalo de amostragem espacial de uma onda. O intervalo natural para o ângulo de incidência da onda é $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$ radianos. Por outro lado, os valores permissíveis do ângulo elétrico são $-\pi \leq \phi < \pi$ radianos. Assim, segundo a Eq. (2.12), para que haja uma correspondência de um-para-um, sem ambigüidade, entre θ e ϕ , o espaçamento entre os sensores deve ser tal que

$$d \leq \lambda/2.\tag{2.16}$$

Esta condição pode ser vista como a versão espacial do teorema de amostragem.

Fazendo $d = \lambda/2$ na Eq. (2.15) e utilizando a Eq. (2.10), temos que

$$\tau(\theta) = \frac{1}{2f_0} \operatorname{sen}\theta.\tag{2.17}$$

Desta forma, considerando o sensor #0 como a referência de fase zero, e um período de amostragem temporal $T = 1/2f_0$, o sinal discretizado no tempo e no espaço de uma onda real de banda estreita incidindo sobre o arranjo com DOA igual a θ pode ser descrito por

$$\begin{aligned}
s_{\theta}(n, m) &= A \cos \left[2\pi f_0 \left(n \frac{1}{2f_0} - m \frac{1}{2f_0} \sin \theta \right) \right] \\
&= A \cos [\pi (n - m \sin \theta)] \\
&= (-1)^n A \cos [\pi m \sin \theta].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

2.2 A ESTRUTURA DIRETA DO ARRANJO/CONFORMADOR

O princípio de um filtro transversal multicanal, comumente utilizado para processar sinais de banda larga em conformadores adaptativos, é mostrado na Fig. 2.2. Para cada instante de tempo de amostragem n , o vetor M _dimensional de dados observados nas saídas dos sensores é designado por

$$\boldsymbol{\chi}(n) = [x_0(n), x_1(n), \dots, x_{M-1}(n)]^t \tag{2.19}$$

e o vetor MN _dimensional de dados de entrada do conformador é formado como

$$\mathbf{x}(n) = [\boldsymbol{\chi}^t(n), \boldsymbol{\chi}^t(n-1), \dots, \boldsymbol{\chi}^t(n-N+1)]^t, \tag{2.20}$$

onde o superíndice t designa a operação de transposição de um vetor ou matriz. O sinal de saída do conformador é então dado por

$$y(n) = \mathbf{x}^t(n)\mathbf{h}(n), \tag{2.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
& \text{:} \longleftarrow M \longrightarrow \text{:} \longleftarrow M \longrightarrow \text{:} \dots \text{:} \longleftarrow M \longrightarrow \text{:} \\
\mathbf{h}(n) &= [h_{0,0}(n), \dots, h_{M-1,0}(n); h_{0,1}(n), \dots, h_{M-1,1}(n); \dots; h_{0,N-1}(n), \dots, h_{M-1,N-1}(n)]^t
\end{aligned} \tag{2.22}$$

é o vetor MN _dimensional de coeficientes.

A Fig. 2.3 ilustra como a estrutura amostra, no espaço e no tempo, uma onda plana real $S_0(t, l)$, de banda larga, propagando em uma direção θ . O período de amostragem temporal da onda é $T=1$. Isto corresponde a dizer que a máxima frequência normalizada das componentes da onda é $f_{\text{máx}}=1/2$ e que o comprimento de onda mínimo é $\lambda_{\text{mín}}=2c$. Assim, para $d=\lambda_{\text{mín}}/2$,

$$\tau(\theta) = \text{sen}\theta \quad (2.23)$$

e as amostras para cada componente de frequência f podem ser descritas por

$$s_{f,\theta}(n, m) = A \cos[2\pi f(n - m \text{sen}\theta)]. \quad (2.24)$$

A *abertura temporal*, isto é, a duração temporal total do sinal na estrutura arranjo/conformador, é definida como

$$T_s(\theta) = (N - 1) + M \text{sen}\theta. \quad (2.25)$$

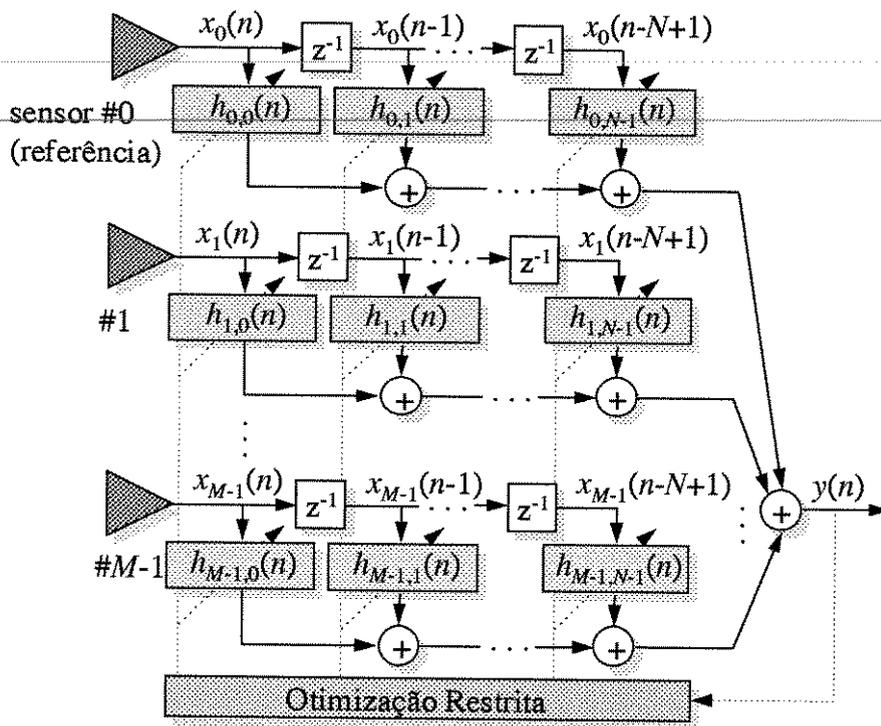


Fig. 2.2: A estrutura direta do arranjo/conformador para sinais de banda larga.

O propósito da estrutura é realizar uma filtragem espacial e temporal dos sinais incidindo sobre o arranjo, possibilitando assim a separação de sinais com diferentes conteúdos de frequência e originados de diferentes localizações no espaço. O conformador pode ser invariante (determinístico), com os coeficientes independentes dos dados no arranjo, ou adaptativo. Em um

conformador adaptativo, os coeficientes são ajustados em função dos dados recebidos no arranjo para otimizar a resposta da estrutura.

A resposta da estrutura arranjo/conformador é definida de forma análoga à resposta em frequência de um sistema linear temporal. Se na entrada de um sistema linear temos uma senóide complexa, obtemos também na saída uma senóide na mesma frequência. A resposta em frequência do sistema é a variação de amplitude e fase sofrida pela senóide em função de sua frequência. A resposta da estrutura arranjo/conformador é definida, então, como a variação de amplitude e fase imposta a uma onda plana complexa em função de sua localização e de sua frequência.

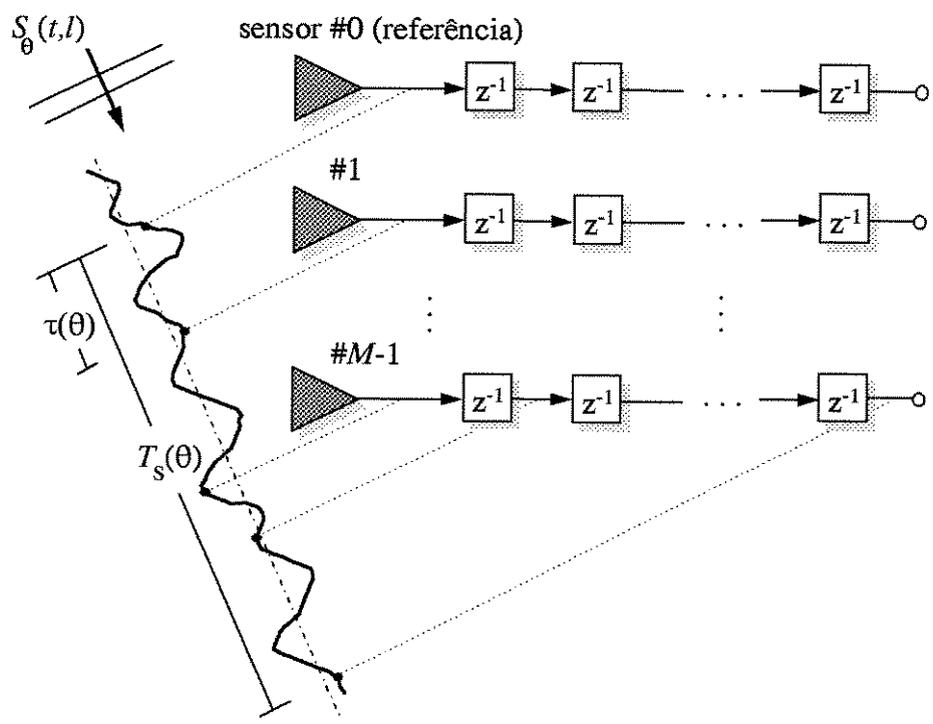


Fig. 2.3: Amostragem de uma onda de banda larga pela estrutura.

Seja $e^{j\omega n}$ o sinal no sensor #0 oriundo de uma onda complexa incidindo sobre o arranjo com uma direção de chegada θ . O sinal de saída do conformador é dado por

$$\begin{aligned}
y(n) &= e^{j\omega n} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} h_{m,i}(n) e^{-j\omega[m\tau(\theta)+i]} \\
&= e^{j\omega n} H(\theta, \omega, n),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde $\tau(\theta)$ é o atraso de propagação da onda entre os sensores [Eq. (2.23)].

Assim, no instante de tempo n , a resposta do arranjo/conformador é descrita por

$$\begin{aligned}
H(\theta, \omega, n) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} h_{m,i}(n) e^{-j\omega[m\tau(\theta)+i]} \\
&= \mathbf{h}^t(n) \mathbf{e}(\theta, \omega),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde

$$\mathbf{e}(\theta, \omega) = \left[1, e^{-j\omega\tau(\theta)}, \dots, e^{-j\omega(M-1)\tau(\theta)}, \dots, e^{-j\omega(N-1)}, e^{-j\omega[\tau(\theta)+N-1]}, \dots, e^{-j\omega[(M-1)\tau(\theta)+N-1]} \right]^t. \tag{2.28}$$

O vetor $\mathbf{e}(\theta, \omega)$ é chamado de vetor de resposta do arranjo. Ele é também conhecido como vetor de direção ou localização da fonte. A magnitude ao quadrado de $H(\theta, \omega, n)$ define o diagrama de feixe do arranjo (*beam pattern*).

Observe que a resposta foi definida em função do tempo n . Isto foi feito de propósito, para enfatizar a natureza adaptativa da estrutura. À medida que os dados vão sendo processados, os coeficientes são adaptados para conformar a resposta da estrutura às características do sinal incidindo sobre o arranjo.

Na estrutura direta do arranjo/conformador de banda larga [Fig. 2.2], um filtro transversal a N coeficientes é conectado na saída de cada um dos M sensores que compõem o arranjo. Uma das particularizações dessa estrutura corresponde ao filtro puramente espacial, estabelecido apenas pelo conjunto de sensores, como mostrado na Fig. 2.4. Neste caso, não se tem em cada canal um tratamento temporal do sinal. As saídas dos sensores são simplesmente ponderadas e somadas para se obter $y(n)$. Na Eq. (2.21) temos, então, $\mathbf{x}(n) = \boldsymbol{\chi}(n)$ e

$$\mathbf{h}(n) = [h_0(n), h_1(n), \dots, h_{M-1}(n)]^t, \quad (2.29)$$

todos vetores M -dimensionais. Esta estrutura somente amostra no espaço as ondas que se propagam, com o objetivo de distinguí-las com relação a seus ângulos de chegada (diversidade espacial). Ela é, tipicamente, usada para processar sinais de banda estreita. Presume-se que todas as ondas incidindo sobre o arranjo têm uma única frequência f_0 , não havendo necessidade de um processamento temporal do conteúdo de frequência do sinal.

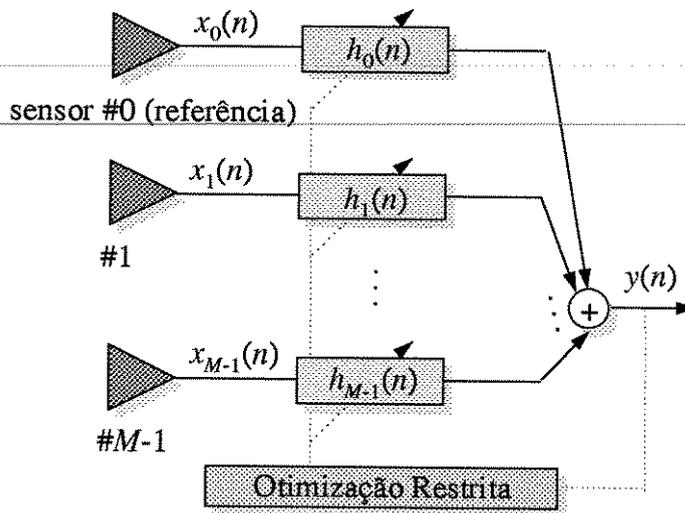


Fig. 2.4: A estrutura do arranjo/conformador para sinais de banda estreita.

Uma segunda particularização ocorre se considerarmos somente a filtragem temporal de um único canal na estrutura da Fig. 2.2. Isto corresponde ao filtro transversal da Fig. 2.5. Neste caso, os vetores N -dimensionais de entrada e de coeficientes do filtro são dados por

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^t \quad (2.30)$$

e

$$\mathbf{h}(n) = [h_0(n), h_1(n), \dots, h_{N-1}(n)]^t, \quad (2.31)$$

respectivamente. Aqui, ao contrário do conformador de banda estreita, estamos interessados somente na diversidade temporal do sinal, independente das direções de chegada das ondas incidindo sobre o único sensor.

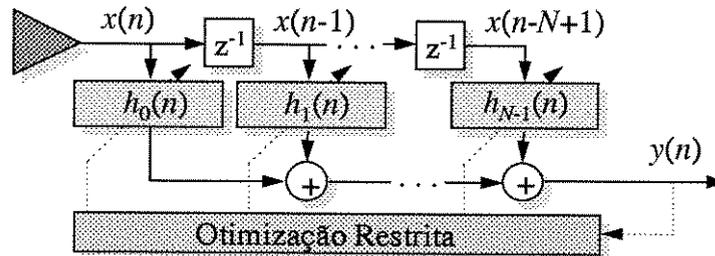


Fig. 2.5: Filtro transversal.

Comparando as Figs. 2.4 e 2.5, podemos observar uma analogia entre as estruturas de filtragem temporal FIR e filtragem espacial para sinais de banda estreita. Para obter $y(n)$, o conformador processa as amostras espaciais da onda da mesma forma que o filtro processa as amostras temporais do sinal. Uma correspondência entre a frequência temporal e o ângulo elétrico da onda também pode ser derivada.

Em processamento temporal, as amostras de uma senóide complexa nas derivações do filtro transversal têm a forma $\exp(j\omega n)$, para $0 \leq n \leq N - 1$. Nas saídas dos sensores, as amostras espaciais de uma onda plana monocromática de frequência ω_0 incidindo sobre o arranjo, de uma direção θ , são descritas por $\exp[j\omega_0 \tau(\theta) m]$, para $0 \leq m \leq M - 1$. Podemos, então, identificar a relação entre frequência temporal ω (filtro FIR) e o ângulo elétrico ϕ (arranjo/conformador) como $\omega = \omega_0 (d/c) \sin\theta = \phi$ [ver Eqs. (2.14) e (2.15)]. Assim, como já havíamos observado, o ângulo elétrico é a contrapartida em processamento espacial da frequência no processamento temporal.

2.2.1 O Conformador LCMV

O objetivo em projetar um conformador é encontrar um conjunto de coeficientes que forneça um sinal de saída $y(n)$ tendo melhores características de relação sinal-ruído (*SNR_Signal-to-Noise Ratio*) e sinal-interferência (*SIR_Signal-to-Interference Ratio*) do que as que seriam observadas na saída de um único sensor.

O critério LCMV (*Linearly-Constrained Minimum Variance*) consiste em minimizar a potência de saída do conformador, ao mesmo tempo em que os coeficientes são restritos a apresentar uma resposta desejada ao sinal de interesse. A minimização da potência atenua o ruído e a interferência, ao passo que as restrições preservam o sinal de interesse.

As restrições sobre o vetor de coeficientes \mathbf{h} são expressas por um sistema de equações definido pela relação matricial:

$$\mathbf{C}^t \mathbf{h} = \mathbf{f}, \quad (2.32)$$

onde \mathbf{C} , denominada a matriz de restrições, e \mathbf{f} , o vetor de resposta, têm elementos constantes. Se há K restrições sendo impostas a um conformador de MN coeficientes, \mathbf{C} é $MN \times K$ e \mathbf{f} é $K \times 1$. Cada coluna de \mathbf{C} e o correspondente elemento de \mathbf{f} representam uma única restrição.

Assumindo que $K < MN$ e que o posto (ou *rank*) da matriz \mathbf{C} é igual a K (cheio), as K equações de MN incógnitas são linearmente independentes e o sistema da Eq. (2.32) possui mais de uma solução em \mathbf{h} . A solução desejada é aquela que minimiza a potência de saída do conformador. O grau de liberdade desse problema de minimização restrita é $MN - K$. Um grau de liberdade é essencialmente uma dimensão no espaço vetorial \mathbf{R}^{MN} , definido pelo conjunto de coeficientes, ou uma porção do vetor \mathbf{h} que controla a resposta sobre aquela dimensão.

O critério LCMV pode ser formalmente definido como

$$\underset{\mathbf{h}}{\text{minimizar}} \quad \mathbf{h}^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} \quad (2.33a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{C}^t \mathbf{h} = \mathbf{f}. \quad (2.33b)$$

Observe que, nesta formulação, o sinal de entrada é modelado como um processo estocástico estacionário de média zero, sendo o vetor de coeficientes \mathbf{h} fixo e a potência ou variância do sinal de saída, $E\{y^2(n)\} = \mathbf{h}^t E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^t(n)\}\mathbf{h}$, expressa em termos da matriz de autocorrelação de $\mathbf{x}(n)$, \mathbf{R}_{xx} . Estamos interessados aqui no vetor de coeficientes ótimos da estrutura direta do conformador no sentido LMS (*Least-Mean Square*).

O vetor de coeficientes ótimos LMS é obtido pelo método dos multiplicadores de Lagrange [18,30]. Isto é feito adicionando à função custo (2.33a) a função de restrição (2.33b) por intermédio de um vetor λ K -dimensional de multiplicadores de Lagrange não determinados:

$$\mathcal{F}_{\text{LCMV}}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \mathbf{h}^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} + \lambda^t (\mathbf{C}^t \mathbf{h} - \mathbf{f}). \quad (2.34)$$

Calculando o gradiente desta nova função, com respeito a \mathbf{h} , temos que

$$\nabla_{\mathbf{h}} \mathcal{F}_{\text{LCMV}}(\mathbf{h}) = \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} + \mathbf{C} \lambda. \quad (2.35)$$

Na equação acima, o primeiro termo é um vetor que corresponde ao gradiente da função custo a ser minimizada. Já o segundo termo, como veremos, é um vetor normal a um hiperplano ($MN-K$)-dimensional definido por $\mathbf{C}^t \mathbf{h} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Para obtermos a solução ótima, estes vetores devem ser antiparalelos [30]. Isto significa igualar (2.35) a zero:

$$\nabla_{\mathbf{h}} \mathcal{F}_{\text{LCMV}}(\mathbf{h}) = \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} + \mathbf{C} \lambda = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Em termos dos multiplicadores de Lagrange, o vetor de coeficientes ótimos LMS é dado por

$$\mathbf{h}_{\text{LCMV}} = -\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \lambda. \quad (2.37)$$

Tendo em vista o fato de que \mathbf{h}_{LCMV} deve satisfazer as restrições, segue que

$$\mathbf{C}^t \mathbf{h}_{\text{LCMV}} = \mathbf{f} = -\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \lambda \quad (2.38)$$

e que os multiplicadores de Lagrange são determinados por

$$\lambda = -(\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}. \quad (2.39)$$

Finalmente, das Eqs. (2.37) e (2.39), obtemos, então, que

$$\mathbf{h}_{\text{LCMV}} = \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}. \quad (2.40)$$

O uso do conjunto de coeficientes \mathbf{h}_{LCMV} no arranjo/conformador da Fig. 2.2 dá origem ao processador LMS restrito, constituindo um filtro espacial/temporal invariante. Ele fornece, na média, um sinal de saída tendo melhores SNR e SIR para todas realizações do processo incidindo sobre o arranjo. A solução dada por (2.40) é única e requer o conhecimento *a priori* da matriz de autocorrelação estatística do vetor de dados de entrada.

A Fig. 2.6 retrata o vetor \mathbf{h}_{LCMV} no espaço vetorial MN _dimensional \mathbf{R}^{MN} dos vetores de coeficientes e de dados de entrada do conformador. Para melhor descrevermos as duas componentes ortogonais, nas quais \mathbf{h}_{LCMV} pode ser decomposto, as seguintes constatações algébricas são pertinentes:

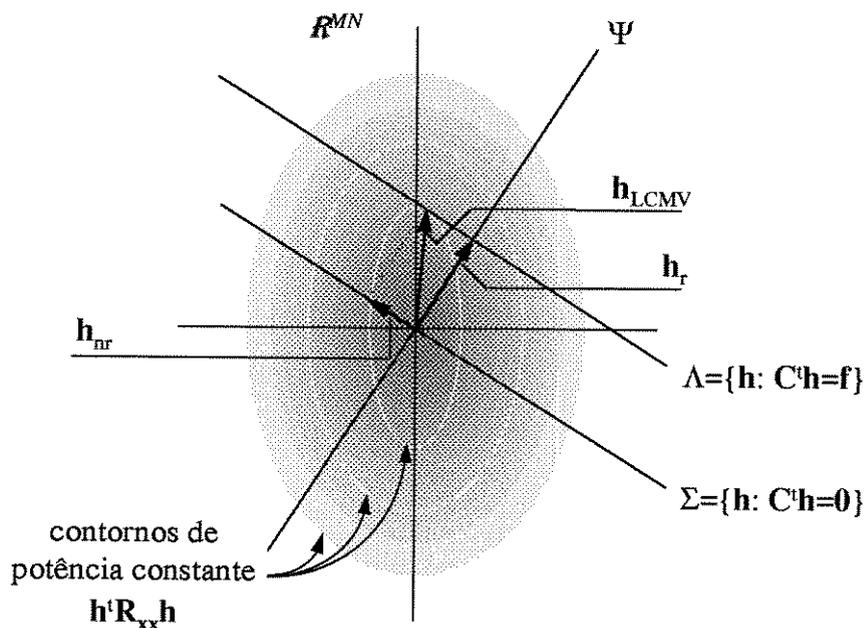


Fig. 2.6: Espaço vetorial MN _dimensional dos coeficientes e de observação da fonte.

Subespaço de restrição

Como já observamos, a matriz de restrição C $MN \times K$ é assumida ter posto cheio K ($MN > K$). Sendo assim, o conjunto de vetores coluna de C é linearmente independente e define um subespaço K _dimensional \mathbb{R}^K no espaço vetorial \mathbb{R}^{MN} . Este subespaço é chamado de subespaço de restrição Ψ e está representado, na Fig. 2.6, por uma reta, considerando o plano do papel como o espaço vetorial \mathbb{R}^{MN} .

Hiperplano de restrições

Baseado na constatação acima, a matriz C^t é um operador linear que transforma um vetor do espaço vetorial \mathbb{R}^{MN} (domínio) no subespaço de restrição \mathbb{R}^K (contradomínio). Logo, o sistema de equações lineares da Eq. (2.33b) impõe que a componente do vetor de coeficientes no subespaço de restrição seja igual ao vetor f , definido com relação à base ortonormal do conjunto de vetores coluna da matriz identidade I_K . Dito de uma outra forma, a Eq. (2.33b) tem, como solução, cada um dos vetores h no domínio \mathbb{R}^{MN} , cujo vetor correspondente da transformação linear C^t no contradomínio \mathbb{R}^K é f . Na verdade, a Eq. (2.33b) define no espaço vetorial \mathbb{R}^{MN} um hiperplano Λ , $(MN-K)$ _dimensional, descrito por

$$\Lambda = \{h: C^t h = f\}, \quad (2.41)$$

no sentido que qualquer vetor h que satisfaz (2.33b) termina neste hiperplano. O hiperplano Λ é conhecido como hiperplano de restrição e está indicado na Fig. 2.6.

Forma homogênea da equação de restrição e subespaço ortogonal de restrição

A forma homogênea da equação de restrição

$$C^t h = 0 \quad (2.42)$$

define, no espaço vetorial \mathbb{R}^{MN} , um segundo hiperplano, $(MN-K)$ _dimensional, que inclui o vetor zero e, portanto, passa pela origem. Ao contrário da Eq. (2.33b), os vetores h que satisfazem a Eq. (2.42) não possuem componentes no subespaço de restrição. Estes vetores são ortogonais ao subespaço Ψ e pertencem ao que chamamos de núcleo da transformação linear C^t , ou espaço nulo de C . Assim, eles definem, no espaço vetorial \mathbb{R}^{MN} , um subespaço Σ , $(MN-K)$ _dimensional,

ortogonal ao subespaço de restrição. Referenciaremos à Σ como subespaço ortogonal de restrição, cuja representação, na Fig. 2.6, também é uma linha reta. Observe que os subespaços Ψ e Σ definem, juntos, o espaço vetorial \mathbf{R}^{MN} .

A solução de norma mínima: componente restrita ou vetor quiescente

Como sabemos, a Eq. (2.33b) possui mais de uma solução no vetor \mathbf{h} . Uma das soluções é dada pela pseudoinversa ou inversa generalizada de \mathbf{C}^t , do teorema da decomposição em valores singulares (*SVD_Singular-Value Decomposition*) [18,31]. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_r &= (\mathbf{C}^t)^+ \mathbf{f} \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{C}^t\mathbf{C})^{-1} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Este vetor tem conotação especial: ele é o único vetor com o menor comprimento possível no sentido euclidiano que satisfaz a Eq. (2.33b). Por isto, a Eq. (2.43) recebe o nome de solução de norma mínima.

Vetores no espaço vetorial \mathbf{R}^{MN} , apontando em uma direção normal ao hiperplano de restrições Λ , são combinações lineares dos vetores coluna da matriz de restrição \mathbf{C} . Estes vetores têm a forma $\mathbf{C}\mathbf{a}$, onde \mathbf{a} é um vetor K -dimensional determinando a combinação linear. Assim, \mathbf{h}_r aponta em uma direção normal ao plano de restrições e, conseqüentemente, está situado no subespaço de restrição Ψ .

Dessas constatações decorre que \mathbf{h}_r é o menor vetor terminando no hiperplano de restrições, o que não poderia deixar de ser, uma vez que Λ é ortogonal a Ψ . Este vetor define a componente de \mathbf{h}_{LCMV} no subespaço de restrição (Fig. 2.6), a qual recebe o nome de componente restrita.

Numa situação especial, o próprio vetor \mathbf{h}_r é a solução ótima. Isto ocorre quando temos somente ruído branco na entrada do conformador. Neste caso, a matriz de autocorrelação de $\mathbf{x}(n)$ é dada por

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \sigma_b^2 \mathbf{I}_{MN}, \quad (2.44)$$

onde σ_b^2 é a potência do ruído. Assim, substituindo a Eq. (2.44) na Eq. (2.40), obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\text{LCMV}} &= \frac{1}{\sigma_b^2} \mathbf{C} \left[\frac{1}{\sigma_b^2} \mathbf{C}^t \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{C} (\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{h}_r. \end{aligned} \tag{2.45}$$

É por esse motivo que \mathbf{h}_r também é conhecido como vetor quiescente. Isto porque ele independe dos dados de entrada e corresponde à componente fixa da solução ótima. A partir do ponto em que um sinal correlacionado incide sobre o arranjo, uma segunda componente \mathbf{h}_{nr} , chamada de não restrita e situada no subespaço ortogonal de restrição, passa a existir. Esta componente, por sua vez, depende dos dados de entrada e determina o ponto de mínimo do lugar geométrico dado pela interseção do hiperplano de restrições com a função custo a ser minimizada (Fig. 2.6). Vale observar que, na hipótese de ruído branco como dados de entrada, o processo de otimização [Eq. (2.33a)] estabelece que a norma euclidiana ao quadrado de \mathbf{h} , $\|\mathbf{h}\|_2^2$, seja mínima.

Como veremos na próxima seção, a decomposição de \mathbf{h}_{LCMV} nas componentes \mathbf{h}_r e \mathbf{h}_{nr} é a base do desenvolvimento da estrutura arranjo/conformador na forma indireta ou desmembrada, conhecida como GSC (*Generalized Sidelobe Canceller*) [21-23]. O princípio do GSC é transladar o problema da minimização restrita numa minimização não restrita, de forma que as restrições não sejam introduzidas no processo de adaptação. Antes porém de abordarmos o GSC, é interessante considerarmos o problema mais geral de identificação com restrições lineares, o qual referenciaremos neste trabalho por LCID (*Linearly-Constrained IDentification*).

2.2.2 A Filtragem LCID

Como vimos anteriormente, no conformador LCMV não existe um sinal de referência propriamente dito. São as restrições que transcrevem para o filtro multicanal algumas das

características conhecidas *a priori* do sinal desejado na saída. No entanto, o uso de restrições também pode ser estendido à teoria de filtragem de Wiener, com aplicações em modelamento restrito (daí termos escolhido o nome de LCID), predição, estimação e controle, a fim de acrescentar ao filtro alguma característica peculiar [24]. No Capítulo 4, por exemplo, propomos um conjunto de restrições que, quando imposto ao filtro transversal unidimensional de identificação ou predição, mantém a condição de fase linear.

Na filtragem de identificação com restrições lineares, o erro de saída $e(n)$, a ser minimizado, é dado pela diferença entre o sinal desejado $d(n)$ e sua estimativa, como mostrado na Fig. 2.7. Novamente, ressaltamos que, apesar dos coeficientes serem representados na figura de forma adaptativa, estamos interessados, aqui, no filtro ótimo fixo, obtido pelo critério de mínima média quadrática (LMS).

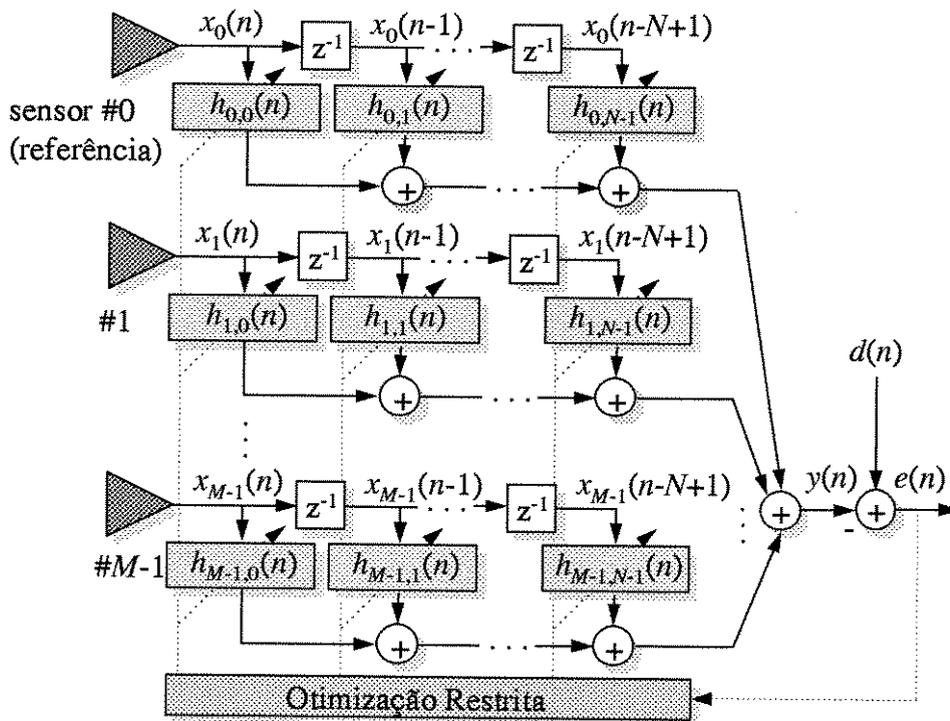


Fig. 2.7: A filtragem de identificação com restrições lineares.

A formulação do problema LCID é como segue:

$$\underset{\mathbf{h}}{\text{minimizar}} \quad E\{e^2(n)\} = E\left\{\left[d(n) - \mathbf{x}^t(n)\mathbf{h}\right]^2\right\} \quad (2.46a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{C}^t\mathbf{h} = \mathbf{f}. \quad (2.46b)$$

Para solucioná-lo, procedemos de maneira similar ao problema LCMV. Neste caso, a função custo, acrescida das restrições pelos multiplicadores de Lagrange, é dada por

$$\mathcal{J}_{\text{LCID}}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}\left(\sigma_d^2 - 2\mathbf{h}^t\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{h}^t\mathbf{R}_{xx}\mathbf{h}\right) + \lambda^t(\mathbf{C}^t\mathbf{h} - \mathbf{f}), \quad (2.47)$$

onde σ_d^2 é a variância do sinal desejado e \mathbf{p}_{xd} é o vetor de correlação cruzada entre $\mathbf{x}(n)$ e $d(n)$.

Seu gradiente com respeito a \mathbf{h} é

$$\nabla_{\mathbf{h}}\mathcal{J}_{\text{LCID}}(\mathbf{h}) = -\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{R}_{xx}\mathbf{h} + \mathbf{C}\lambda. \quad (2.48)$$

Igualando a zero, temos que

$$\mathbf{h}_{\text{LCID}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[\mathbf{p}_{xd} - \mathbf{C}\lambda]. \quad (2.49)$$

A substituição da Eq. (2.49) na Eq. (2.46b) nos leva a seguinte expressão para o vetor de multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda = -[\mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd}]. \quad (2.50)$$

Logo, das Eqs. (2.49) e (2.50), chegamos a

$$\mathbf{h}_{\text{LCID}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd}], \quad (2.51)$$

que representa o vetor de coeficientes ótimos da filtragem de Wiener com restrições lineares.

É interessante observar que \mathbf{h}_{LCID} é composto pela soma de dois termos. O primeiro corresponde à solução ótima LMS sem restrições, dada pela equação normal:

$$\mathbf{h}_{\text{sr}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd}. \quad (2.52)$$

O segundo termo corrige \mathbf{h}_{sr} a fim de que este passe a satisfazer as restrições [Eq. (2.46b)]. Este termo de correção por sua vez é composto pelo vetor K -dimensional

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}_{\text{sr}}, \quad (2.53)$$

representando o desvio das restrições, e pela matriz $N \times K$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} [\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}]^{-1}, \quad (2.54)$$

que trabalha como um operador linear, mapeando \mathbf{e}_r do espaço K -dimensional ao espaço MN -dimensional, de modo a corrigir \mathbf{h}_s .

Consideremos novamente o problema LCMV, formulado na Eq. (2.33). A solução ótima da Eq. (2.40) também pode ser derivada da Eq. (2.51). Para tal, basta observarmos que o problema LCMV corresponde ao problema LCID com o sinal desejado nulo. Assim, $\mathbf{p}_{xd} = \mathbf{0}$ na Eq. (2.51) e

$$\mathbf{h}_{\text{LCMV}} = \mathbf{h}_{\text{LCID}} \Big|_{\mathbf{p}_{xd}=\mathbf{0}} = \mathbf{Q} \mathbf{f}. \quad (2.55)$$

A matriz \mathbf{Q} é vista, aqui, como uma das matrizes inversa à direita, ou pseudoinversa, de \mathbf{C}^t . Entretanto, \mathbf{Q} não corresponde à pseudoinversa $(\mathbf{C}^t)^+$ da teoria SVD que proporciona a solução de norma mínima (2.43) ao sistema de equações subdeterminado (2.33b). Ela é única, no sentido de estabelecer um vetor de coeficientes ótimos com relação às características das ondas incidindo sobre o arranjo, sendo, assim, dependente da matriz de autocorrelação \mathbf{R}_{xx} do vetor de dados de entrada. Vale dizer que o vetor quiescente definido na Eq. (2.43), \mathbf{h}_r , implementa um conformador que minimiza a potência de saída de maneira uniforme sobre a região fora do domínio das restrições (ruído branco como dados de entrada).

A seguir, abordaremos a estrutura GSC. Isto nos ajudará a compreender melhor os conformadores LCMV, uma vez que podemos fazer uma analogia deste tipo de estrutura com a filtragem clássica de Wiener.

2.3 O CANCELADOR DE LÓBULO LATERAL GENERALIZADO

O GSC (*Generalized Sidelobe Canceller*) é uma estrutura de implementação alternativa, na forma indireta, do arranjo/conformador LCMV visto na seção anterior. Basicamente, o GSC é um

mecanismo para transformar um problema de minimização restrita na forma não restrita, usando uma base ortogonal para representar o espaço nulo da matriz de restrição (subespaço ortogonal de restrição) [21-23].

Seja C_{\perp} uma matriz $MN \times (MN-K)$, cujo conjunto de vetores coluna é linearmente independente e forma uma base para o subespaço ortogonal de restrição. Este conjunto de vetores coluna pode ser obtido a partir da matriz de restrição C usando qualquer um dos procedimentos de ortogonalização: Gram-Schmidt, decomposição QR ou decomposição em valor singular [31]; C_{\perp} é o complemento ortogonal de C no espaço \mathbb{R}^{MN} .

Uma vez que as colunas de C e C_{\perp} definem juntas o espaço inteiro \mathbb{R}^{MN} , podemos expressar um vetor de coeficientes arbitrários \mathbf{h} em termos deste conjunto de vetores bases como

$$\mathbf{h} = C\mathbf{h}_C - C_{\perp}\mathbf{h}_{\perp}. \quad (2.56)$$

Os vetores \mathbf{h}_C $K \times 1$ e $-\mathbf{h}_{\perp}$ $(MN-K) \times 1$ representam as coordenadas das componentes de \mathbf{h} nos subespaços definidos pelas colunas de C e C_{\perp} , respectivamente. Tendo C e C_{\perp} colunas ortogonais ($C^t C_{\perp} = \mathbf{0}_{K \times MN-K}$), ao aplicarmos as restrições a \mathbf{h} na Eq. (2.56) obtemos:

$$\begin{aligned} C^t \mathbf{h} &= C^t C \mathbf{h}_C - C^t C_{\perp} \mathbf{h}_{\perp} \\ &= C^t C \mathbf{h}_C \end{aligned} \quad (2.57)$$

e, a partir da Eq. (2.33b),

$$C^t C \mathbf{h}_C = \mathbf{f}. \quad (2.58)$$

A solução para \mathbf{h}_C é

$$\mathbf{h}_C = (C^t C)^{-1} \mathbf{f}, \quad (2.59)$$

de forma que a representação GSC de \mathbf{h} é

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_r - C_{\perp} \mathbf{h}_{\perp}, \quad (2.60)$$

onde

$$\mathbf{h}_r = C(C^t C)^{-1} \mathbf{f}. \quad (2.61)$$

O vetor \mathbf{h}_r , por si só, implementa o conformador quiescente da Eq. (2.44) que independe dos dados de entrada. Note também que a matriz de restrição não afeta \mathbf{h}_\perp ; \mathbf{h}_\perp incorpora os graus de liberdade disponíveis em \mathbf{h} . A Eq. (2.60) pode ser representada na forma de diagrama de bloco, tal como ilustra a Fig. 2.8.

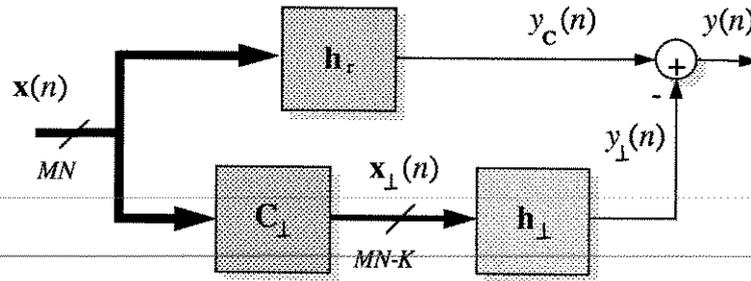


Fig. 2.8: Diagrama de bloco do cancelador de lóbulo lateral generalizado.

Observamos assim que o GSC é derivado da decomposição do vetor de coeficientes do conformador LCMV nas componentes restrita \mathbf{h}_r e não restrita \mathbf{h}_{nr} (Fig. 2.6):

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_r + \mathbf{h}_{nr}, \quad (2.62)$$

onde

$$\mathbf{h}_{nr} = -\mathbf{C}_\perp \mathbf{h}_\perp. \quad (2.63)$$

O sinal na saída do GSC pode ser descrito por

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{h}^t \mathbf{x}(n) \\ &= \left[(\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \right]^t \mathbf{C}^t \mathbf{x}(n) - \mathbf{h}_\perp^t \mathbf{C}_\perp^t \mathbf{x}(n) \\ &= \mathbf{h}_c^t \mathbf{x}_c(n) - \mathbf{h}_\perp^t \mathbf{x}_\perp(n) \\ &= y_c(n) - y_\perp(n). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Ou seja, o conformador GSC separa o vetor de dados de entrada $\mathbf{x}(n)$ em termos de componentes nos subespaços definidos pelos vetores coluna de \mathbf{C} (subespaço de sinal) e \mathbf{C}_\perp (subespaço de interferência):

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}_c(n) + \mathbf{C}_\perp\mathbf{x}_\perp(n). \quad (2.65)$$

Note que \mathbf{h}_r somente afeta a componente de $\mathbf{x}(n)$ no subespaço de sinal, enquanto que \mathbf{h}_\perp atua sobre a componente no subespaço de interferência. O filtro \mathbf{h}_\perp tem por objetivo cancelar as interferências vazadas através dos lóbulos laterais do conformador quiescente \mathbf{h}_r . Neste sentido, a matriz \mathbf{C}_\perp bloqueia a componente de $\mathbf{x}(n)$ situada no subespaço de sinal. Ela é chamada de *matriz de bloqueio de sinal* (*signal blocking matrix*).

O nome GSC está relacionado ao fato de que este tipo de abordagem e estrutura se assemelham bastante com aquelas do cancelador de lóbulo lateral múltiplo (*MSC_Sidelobe Canceller Multiple*) [21,22].

É interessante observar que o conformador GSC pode ser visto como uma abordagem clássica de filtragem de Wiener ao problema LCMV. Enquanto que, na estrutura direta do conformador LCMV, as restrições junto aos coeficientes procuram implicitamente compensar a ausência do sinal de referência, o GSC faz uso delas para gerá-lo.

O problema LCMV é expresso em termos do GSC como o seguinte problema de minimização não restrita:

$$\underset{\mathbf{h}_\perp}{\text{minimizar}} (\mathbf{h}_r - \mathbf{C}_\perp\mathbf{h}_\perp)^t \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{h}_r - \mathbf{C}_\perp\mathbf{h}_\perp), \quad (2.66)$$

e tem como solução ótima

$$\mathbf{h}_\perp = (\mathbf{C}_\perp^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{C}_\perp)^{-1} \mathbf{C}_\perp^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}_r. \quad (2.67)$$

A natureza não restrita de \mathbf{h}_\perp permite o emprego de algoritmos clássicos na implementação adaptativa da estrutura. Entretanto, técnicas rápidas de mínimos quadrados não podem ser empregadas, uma vez que $\mathbf{x}_\perp(n)$ não mantém a propriedade do deslocamento temporal dos

elementos ou bloco de elementos. Voltaremos a salientar este aspecto no próximo capítulo, quando considerarmos o GSC adaptativo.

A esta altura já somos capazes de perceber a importância da formulação das restrições no desempenho do conformador: a resposta para a componente de sinal de $x(n)$ é determinada pelas restrições. Com o objetivo de minimizar somente a componente de interferência de $x(n)$, é importante escolher um conjunto de restrições que represente eficientemente o subespaço de sinal. Este é o assunto da próxima seção.

2.4 RESTRIÇÕES LINEARES

A seleção das restrições pode ser tratada como um problema determinístico, onde a resposta é completamente controlada no subespaço de restrição. Este subespaço, por sua vez, é selecionado através da escolha de um conjunto de vetores de restrição que melhor o define. O propósito das restrições é pré-estabelecer algumas características na resposta do arranjo/conformador condizente com o sinal de interesse, a fim de preservá-lo no processo de minimização. A seguir, discorreremos sobre os principais tipos de restrições encontrados na literatura.

2.4.1 Restrições Pontuais

Suponhamos que desejamos impor a restrição de que a resposta de um arranjo/conformador a uma determinada frequência angular ω e direção θ seja igual a uma constante real A . Esta restrição é conhecida como pontual, uma vez que se restringe a resposta num único ponto de frequência e direção.

Considere uma senóide real, de magnitude unitária e frequência angular ω , incidindo sobre o arranjo com um ângulo de chegada igual a θ . Denotemos o vetor a MN elementos de amostras deste sinal por $x_{\theta,\omega}(n)$. Para o instante de tempo n , o vetor $x_{\theta,\omega}(n)$ é descrito como

$$\mathbf{x}_{\theta,\omega}(n) = \left\{ \cos[\omega n], \cos[\omega(n - \tau(\theta))], \dots, \cos[\omega(n - (M-1)\tau(\theta))] \right\}; \dots; \\ \cos[\omega(n - N + 1)], \cos[\omega(n - \tau(\theta) - N + 1)], \dots, \cos[\omega(n - (M-1)\tau(\theta) - N + 1)] \Big\}^t . \quad (2.68)$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b), \quad (2.69)$$

as componentes de tempo e de atrasos nos argumentos dos cossenos podem ser separadas e $\mathbf{x}_{\theta,\omega}(n)$ pode ser reescrito como

$$\mathbf{x}_{\theta,\omega}(n) = \cos(\omega n)\mathbf{c}(\theta, \omega) + \text{sen}(\omega n)\mathbf{s}(\theta, \omega), \quad (2.70a)$$

onde

$$\mathbf{c}(\theta, \omega) = \left\{ 1, \cos[\omega\tau(\theta)], \dots, \cos[\omega(M-1)\tau(\theta)] \right\}; \dots; \\ \cos[\omega(N-1)], \cos[\omega(\tau(\theta) + N - 1)], \dots, \cos[\omega((M-1)\tau(\theta) + N - 1)] \Big\}^t \quad (2.70b)$$

e

$$\mathbf{s}(\theta, \omega) = \left\{ 0, \text{sen}[\omega\tau(\theta)], \dots, \text{sen}[\omega(M-1)\tau(\theta)] \right\}; \dots; \\ \text{sen}[\omega(N-1)], \text{sen}[\omega(\tau(\theta) + N - 1)], \dots, \text{sen}[\omega((M-1)\tau(\theta) + N - 1)] \Big\}^t . \quad (2.70c)$$

Seja

$$\mathbf{x}_{\theta,\omega}^t(n)\mathbf{h} = A \cos(\omega n - \varphi), \quad (2.71a)$$

ou

$$\mathbf{x}_{\theta,\omega}^t(n)\mathbf{h} = A \cos(\varphi)\cos(\omega n) + A \text{sen}(\varphi)\text{sen}(\omega n), \quad (2.71b)$$

a resposta desejada para esse sinal.

A comparação das Eqs. (2.70) e (2.71) mostra que, para assegurar a resposta requerida para o ponto de frequência ω e direção θ , o vetor de coeficientes \mathbf{h} pode ser restrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^t(\theta, \omega) \\ \mathbf{s}^t(\theta, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} A \cos(\varphi) \\ A \text{sen}(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Uma outra maneira de chegarmos ao mesmo resultado parte da própria definição da resposta do arranjo/conformador:

$$\begin{aligned} H(\theta, \omega) &= \sum_{p=0}^{M-1N-1} \sum_{i=0} h_{p,i} e^{-j\omega[p\tau(\theta)+i]} \\ &= \sum_{p=0}^{M-1N-1} \sum_{i=0} h_{p,i} \left\{ \cos[\omega(p\tau(\theta)+i)] - j \operatorname{sen}[\omega(p\tau(\theta)+i)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Considerando que os coeficientes são reais, segue que

$$\begin{aligned} H(\theta, \omega) &= \sum_{p=0}^{M-1N-1} \sum_{i=0} h_{p,i} \cos[\omega(p\tau(\theta)+i)] - j \sum_{p=0}^{M-1N-1} \sum_{i=0} h_{p,i} \operatorname{sen}[\omega(p\tau(\theta)+i)] \\ &= \mathbf{c}^t(\theta, \omega) \mathbf{h} - j \mathbf{s}^t(\theta, \omega) \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

sendo $\mathbf{c}(\theta, \omega)$ e $\mathbf{s}(\theta, \omega)$ dados pelas Eqs. (2.70b) e (2.70c), respectivamente. Suponhamos que desejamos também impor uma resposta na direção θ e frequência ω igual a uma constante real A com um atraso φ :

$$\begin{aligned} H(\theta, \omega) &= A e^{-j\varphi} \\ &= A \cos(\varphi) - j A \operatorname{sen}(\varphi). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Assim, comparando as Eqs. (2.74) e (2.75), devemos restringir os coeficientes tal como na Eq. (2.72).

Em se tratando de coeficientes complexos, para impormos uma resposta na direção θ e frequência ω igual a uma constante complexa r , o vetor de coeficientes \mathbf{h} pode ser restrito como:

$$\mathbf{e}^t(\theta, \omega) \mathbf{h} = r, \quad (2.76)$$

onde $\mathbf{e}(\theta, \omega)$ é dado pela Eq. (2.28). Este resultado é diretamente obtido da própria definição da resposta do arranjo/conformador, descrita pela Eq. (2.27).

Para obtermos um conformador com ganho unitário na frequência e direção do sinal desejado fazemos $A=1$ na Eq. (2.72). Este é o conformador MVDR (*Minimum-Variance Distortionless Response*), inicialmente proposto por Capon para análise de número de onda de sinais sísmicos [18,21,28]. Ele é considerado um caso especial do conformador LCMV. Por outro lado, se temos

conhecimento da frequência e direção de um sinal interferente, podemos forçar a resposta do conformador a zero naquele ponto fazendo $A=0$. A combinação de restrições pontuais, cada qual a uma frequência e direção específica, é conhecida como restrições pontuais múltiplas.

Uma resposta de fase linear na frequência ω e direção θ pode ser obtida fazendo

$$\varphi = \omega \tau_0(\theta), \tag{2.77}$$

onde $\tau_0(\theta)$ é o atraso de grupo do arranjo/conformador para um sinal na direção θ . Para o arranjo/conformador da Fig. 2.2,

$$\begin{aligned} \tau_0(\theta) &= \frac{(N-1) + M \operatorname{sen} \theta}{2} \\ &= \frac{T(\theta)}{2}, \end{aligned} \tag{2.78}$$

sendo $T(\theta)$ a abertura temporal do sinal na estrutura.

Como já observamos, um sinal de banda estreita é considerado ter uma única componente numa determinada frequência. Sendo assim, este sinal é eficientemente caracterizado por uma única restrição pontual na frequência em específico. Por outro lado, sinais de banda larga requerem que o controle da resposta se dê sobre uma banda de frequência.

Além disso, em ambos os casos, incertezas quanto à direção de chegada do sinal de interesse podem também requerer o controle da resposta sobre uma região do espaço, ao invés de um único ponto de direção. Por exemplo, ao minimizarmos a potência de saída, se a direção de chegada não corresponder exatamente àquela da restrição pontual, o conformador sintetizará uma resposta zero na direção do sinal, tratando-o como uma interferência. Portanto, quando a direção é aproximadamente conhecida, faz-se necessário ter um controle da resposta em uma região do espaço para assegurar que não haverá distorção do sinal de interesse.

O uso de restrições pontuais múltiplas para cobrir uma banda de frequência pode ser feito dividindo-a em pequenos intervalos iguais e utilizando a frequência central de cada sub-banda originada como uma restrição pontual. Quanto menor o intervalo de frequência utilizado, mais

pontos são considerados e melhor representada estará a banda como um todo. O mesmo procedimento também pode ser usado para cobrir uma região do espaço. Neste caso, utilizamos o ângulo central de cada intervalo resultante da divisão da região como uma restrição pontual. No entanto, ao empregar restrições pontuais múltiplas para descrever uma região de frequência e/ou direção, alguns cuidados devem ser tomados.

Primeiramente, para um determinado número de coeficientes, quanto maior for o número de restrições menor será o grau de liberdade para cancelar as interferências. Isto porque os graus de liberdade usados pelas restrições não podem ser utilizados para cancelar as interferências. Uma solução imediata consiste em aumentar a ordem dos filtros e/ou o número de sensores. Para uma boa representação do sinal e minimização das interferências, a quantidade de restrições e de coeficientes pode ser tão elevada que inviabilize, em termos de complexidade computacional, a implementação do arranjo/conformador de forma adaptativa.

Uma segunda dificuldade diz respeito ao condicionamento da matriz de restrições C , em decorrência de sua representação, utilizando precisão numérica finita. Um número excessivo de restrições pode ocasionar uma matriz C mal condicionada, onde o conjunto de seus vetores coluna tende a perder a condição de independência linear. Isto é, a diferença entre dois vetores coluna de C , correspondendo a pontos bem próximos em frequência e direção, já não pode ser representada pela precisão numérica utilizada. Conseqüentemente, o sistema de equações lineares descrito por $C^T h = f$ torna-se redundante ou incompatível e a representação do sinal pelas restrições fica limitada à precisão numérica. Também o emprego direto de uma matriz de restrição mal condicionada nos cálculos gera resultados não confiáveis.

Nesse sentido, dizemos que as restrições pontuais são ineficientes, pois somente controlam a resposta em alguns pontos específicos de frequência e direção da região de interesse. Isto é, entre dois pontos adjacentes numa mesma faixa de frequência e região espacial a resposta não é controlada.

2.4.2 Restrições Derivativas

Uma maneira de aplanar a resposta em uma região próxima à restrição pontual é impor que as derivadas da resposta naquele ponto de frequência e direção sejam nulas. Isto evita mudanças rápidas da resposta na vizinhança da restrição pontual. Restrições deste tipo são conhecidas como derivativas e são empregadas em conjunção com as restrições pontuais. Por exemplo, para a restrição pontual da Eq. (2.72) temos como restrição derivativa de primeira ordem

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \omega} \mathbf{c}^t(\theta_p, \omega) \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \mathbf{s}^t(\theta_p, \omega) \end{array} \right|_{\omega=\omega_p} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{c}^t(\theta, \omega_p) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{s}^t(\theta, \omega_p) \end{array} \right|_{\theta=\theta_p} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

onde ω_p e θ_p determinam, respectivamente, a frequência e a direção da restrição pontual. Um aplanamento adicional é reforçado sobre a resposta na vizinhança de ω_p e θ_p restringindo, também, as derivadas de ordem superior. Observe que, uma vez que a resposta é uma função linear de \mathbf{h} , as restrições derivativas são também lineares.

O controle da resposta sobre uma região de direção e/ou frequência pelas restrições derivativas é também de forma indireta. Elas são impostas somente para pontos específicos da região a ser representada e, em conjunção com as restrições pontuais, também fazem uso ineficiente dos graus de liberdade. Além disto, para um especificado nível de controle da resposta, a ordem das derivadas em cada ponto não é evidente [21].

Não nos deteremos mais sobre este tipo de restrição, uma vez que, para abranger uma região de direção e/ou frequência do sinal de interesse, restrições autovetoriais são mais eficientes. Informações adicionais sobre restrições derivativas são encontradas em [32,33].

2.4.3 Restrições Autovetoriais

Restrições autovetoriais decorrem de uma representação ortonormal de posto inferior do espaço de sinal, baseada na expansão discreta de Karhunen-Loève [34]. Tal representação é obtida usando-se, como base, o conjunto dos autovetores correspondentes aos autovalores mais significativos da matriz de autocorrelação do sinal na região de interesse. Ela é a mais eficiente representação do espaço de sinal, no sentido estatístico de segunda ordem.

Também, pode ser demonstrado que as restrições autovetoriais são baseadas numa aproximação de mínimos quadráticos da resposta desejada sobre a região de interesse e são ótimas no sentido que o erro médio quadrático entre a resposta obtida e a desejada é minimizado para um dado número de restrições [21]. Com isto, elas proporcionam um controle mais direto sobre a resposta que as restrições pontuais e derivativas.

A razão de nomear as restrições como autovetoriais está relacionada à auto-análise da matriz de autocorrelação do sinal na região de interesse. Entretanto, na prática, usa-se a transformação genérica de similaridade unitária da decomposição em valores singulares (SVD), aplicada diretamente à matriz de restrições pontuais múltiplas que, neste caso, é utilizada para amostrar a região de interesse.

Para exemplificar como isso é feito, considere o problema de controlar a resposta de um conformador de banda larga para um sinal numa região de interesse $\{(\theta, \omega)\}$, $\forall \theta \in \Theta$ e $\omega \in \Omega$, onde Θ e Ω representam as extensões de direção e frequência, respectivamente. Usando restrições pontuais múltiplas, para cada par $(\theta, \omega)_l$ com ganho A_l e deslocamento de fase φ_l , um controle sobre a região de interesse pode ser especificado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^t(\theta, \omega)_l \\ \mathbf{s}^t(\theta, \omega)_l \end{bmatrix} \mathbf{h} = \begin{bmatrix} A_l \cos \varphi_l \\ A_l \sin \varphi_l \end{bmatrix}, \quad (2.81a)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(\theta, \omega)_l &= \mathbf{c}(\theta_i, \omega_j) \\
&= \{1, \cos[\omega_j \tau(\theta_i)], \dots, \cos[\omega_j (M-1)\tau(\theta_i)]\} \cdots; \\
&\quad \cos[\omega_j (N-1)], \cos[\omega_j (\tau(\theta_i) + N-1)], \dots, \cos[\omega_j ((M-1)\tau(\theta_i) + N-1)] \}^t \quad (2.81b)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(\theta, \omega)_l &= \mathbf{s}(\theta_i, \omega_j) \\
&= \{0, \sin[\omega_j \tau(\theta_i)], \dots, \sin[\omega_j (M-1)\tau(\theta_i)]\} \cdots; \\
&\quad \sin[\omega_j (N-1)], \sin[\omega_j (\tau(\theta_i) + N-1)], \dots, \sin[\omega_j ((M-1)\tau(\theta_i) + N-1)] \}^t, \quad (2.81c)
\end{aligned}$$

para $l = 1, 2, \dots, L$, $i = 1, 2, \dots, I$ e $j = 1, 2, \dots, J$, sendo $L = IJ$.

A Eq. (2.81) pode ser reescrita como

$$\mathbf{A}_{\Theta, \Omega}^t \mathbf{h} = \mathbf{r}_{\Theta, \Omega}, \quad (2.82a)$$

onde

$$\mathbf{A}_{\Theta, \Omega} = [\mathbf{c}(\theta, \omega)_1, \dots, \mathbf{c}(\theta, \omega)_L | \mathbf{s}(\theta, \omega)_1, \dots, \mathbf{s}(\theta, \omega)_L] \quad (2.82b)$$

e

$$\mathbf{r}_d = [A_1 \cos \varphi_1, \dots, A_L \cos \varphi_L | A_1 \sin \varphi_1, \dots, A_L \sin \varphi_L]^t. \quad (2.82c)$$

Os pontos de localização e frequência da Eq. (2.81) são escolhidos de forma a se ter uma amostragem densa ($L > MN$) e uniforme de Θ e Ω . Ou seja, não existe aqui qualquer preocupação quanto ao condicionamento da matriz $\mathbf{A}_{\Theta, \Omega}^t$. Em geral, $\mathbf{A}_{\Theta, \Omega}^t$ será mal condicionada, com posto $P=MN$, e o sistema de equações lineares, descrito pela Eq. (2.82), será sobredeterminado.

Uma representação mais simplificada de $\mathbf{A}_{\Theta, \Omega}^t$ é obtida pelo teorema SVD e é descrita por

$$\mathbf{A}_{\Theta, \Omega}^t = \mathbf{U}_{\Theta, \Omega} \begin{bmatrix} \Sigma_{P_{\Theta, \Omega}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}_{\Theta, \Omega}^t, \quad (2.83a)$$

onde

$$\mathbf{U}_{\Theta,\Omega} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{2L}] \quad (2.83b)$$

e

$$\mathbf{V}_{\Theta,\Omega} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{MN}] \quad (2.83c)$$

são as matrizes unitárias contendo, respectivamente, os vetores singulares esquerdos e direitos de $\mathbf{A}_{\Theta,\Omega}^t$ e

$$\Sigma_{P_{\Theta,\Omega}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_P) \quad (2.83d)$$

é a matriz diagonal formada pelos valores singulares de $\mathbf{A}_{\Theta,\Omega}^t$, assim ordenados: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_P > 0$. Para um requerido grau de precisão na representação da região de interesse, há, portanto, $D_{\Theta,\Omega} < P$ valores singulares mais significativos em $\Sigma_{P_{\Theta,\Omega}}$.

Seja então

$$\left(\mathbf{A}_{\Theta,\Omega}^t\right)_{D_{\Theta,\Omega}}^+ = \mathbf{V}_{D_{\Theta,\Omega}} \Sigma_{D_{\Theta,\Omega}}^{-1} \mathbf{U}_{D_{\Theta,\Omega}}^t, \quad (2.84a)$$

onde

$$\mathbf{V}_{D_{\Theta,\Omega}} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{D_{\Theta,\Omega}}], \quad (2.84b)$$

$$\mathbf{U}_{D_{\Theta,\Omega}} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{D_{\Theta,\Omega}}] \quad (2.84c)$$

e

$$\Sigma_{D_{\Theta,\Omega}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{D_{\Theta,\Omega}}), \quad (2.84d)$$

a pseudoinversa de posto $D_{\Theta,\Omega}$ (posto reduzido) de $\mathbf{A}_{\Theta,\Omega}^t$. Levando-se em conta esta redução de posto de $\mathbf{A}_{\Theta,\Omega}^t$ na Eq. (2.82), temos que a solução de norma mínima é dada por

$$\mathbf{h}_{D_{\Theta,\Omega}} = \mathbf{V}_{D_{\Theta,\Omega}} \Sigma_{D_{\Theta,\Omega}}^{-1} \mathbf{U}_{D_{\Theta,\Omega}}^t \mathbf{r}_{\Theta,\Omega}. \quad (2.85)$$

A Eq. (2.85) define um conformador determinístico no espaço que tem como base o conjunto de vetores coluna de $\mathbf{V}_{D_{\Theta,\Omega}}$. Ou seja, $\mathbf{h}_{D_{\Theta,\Omega}}$ é o conformador quiescente do subespaço de restrição $\mathbf{V}_{D_{\Theta,\Omega}}$. Este vetor pode ser reescrito como

$$\mathbf{h}_{D_{\Theta,\Omega}} = \mathbf{V}_{D_{\Theta,\Omega}} \mathbf{f}_{D_{\Theta,\Omega}}, \quad (2.86)$$

onde

$$\mathbf{f}_{D_{\Theta,\Omega}} = \Sigma_{D_{\Theta,\Omega}}^{-1} \mathbf{U}_{D_{\Theta,\Omega}}^t \mathbf{r}_{\Theta,\Omega} \quad (2.87)$$

denota as coordenadas de $\mathbf{h}_{D_{\Theta,\Omega}}$ com respeito à base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{D_{\Theta,\Omega}}\}$.

Da Eq. (2.86) obtemos então que

$$\mathbf{V}_{D_{\Theta,\Omega}}^t \mathbf{h} = \mathbf{f}_{D_{\Theta,\Omega}}, \quad (2.88)$$

a qual descreve, na forma da Eq. (2.33b), o conjunto de restrições autovetoriais, o que vale dizer, dos vetores singulares. Para implementá-los, basta fazermos $\mathbf{C} = \mathbf{V}_{D_{\Theta,\Omega}}$ e $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{D_{\Theta,\Omega}}$. Um número de $D_{\Theta,\Omega}$ restrições serão impostas ao conformador, que terá $MN - D_{\Theta,\Omega}$ graus de liberdade. Vale ressaltar que, se Θ corresponde a um único ponto de direção θ , o número $D_{\Theta,\Omega}$ de valores singulares mais significativos de $\Sigma_{P_{\Theta,\Omega}}$ pode ser estimado pelo produto entre a largura de banda e a abertura temporal do sinal na estrutura (TBWP_*Time BandWidth Product*) [21,22].

Para um estudo mais aprofundado das restrições autovetoriais, sugerimos a Referência [34].

2.5 COMENTÁRIOS

Neste capítulo recordamos alguns dos principais conceitos de processamento de sinais de arranjo, principalmente aqueles referentes ao conformador LCMV. Vimos que este conformador possui duas estruturas de implementação, levando a diferentes soluções analíticas.

Fundamentados nessas soluções estão os algoritmos para conformadores LCMV adaptativos. Eles têm como objetivo determinar o conformador ótimo em função dos dados recebidos, com uma boa taxa de convergência e precisão, a um custo computacional viável. Na realidade, os algoritmos encontrados na literatura apresentam uma relação de compromisso entre carga computacional e desempenho.

No que se refere à estrutura indireta, por exemplo, adiantamos que o algoritmo clássico de mínimos quadrados pode ser diretamente aplicado. Entretanto, com o propósito de reduzir a complexidade computacional, a técnica rápida não pode ser empregada. Por outro lado, o uso da técnica do gradiente propicia uma complexidade computacional reduzida em detrimento do desempenho.

Neste sentido é que estendemos, no próximo capítulo, o critério de mínimos quadrados à estrutura direta do conformador LCMV. Nosso objetivo é utilizar a técnica rápida de mínimos quadrados na obtenção dos coeficientes.

Neste capítulo estudamos os conformadores LCMV no contexto adaptativo propriamente dito. Inicialmente revemos as principais abordagens, partindo-se do clássico e consagrado algoritmo de Frost ao GSC parcialmente adaptativo, no sentido de melhorar o desempenho mantendo-se a complexidade computacional a um nível proporcional ao quadrado do número de parâmetros adaptados na estrutura.

Nossa intenção é comprovar que o critério de mínimos quadrados (*LS_Least-Square*) ainda não tem sido aplicado à estrutura direta do conformador, o que nos permitirá fazer uso da técnica rápida na obtenção do ganho de adaptação. Como resultado final, desenvolvemos um algoritmo que tem uma complexidade proporcional ao número de coeficientes. Aspectos de robustez à precisão numérica finita e derivação das restrições também são considerados. O algoritmo robusto de mínimos quadrados com restrições lineares, aqui proposto, constitui-se na principal contribuição desta tese.

3.1 O ALGORITMO DE FROST

A técnica CLMS (*Constrained Least-Mean Square*), introduzida por Frost, consiste em aplicar o método do gradiente ao problema da filtragem adaptativa de mínima variância com restrições lineares [24]. Isto é feito movendo-se, a cada iteração, o vetor de coeficientes do conformador na direção negativa do gradiente da função custo, acrescida da função de restrição pelos multiplicadores de Lagrange.

Consideremos, inicialmente, que a matriz de autocorrelação \mathbf{R}_{xx} do vetor de dados no conformador é conhecida. No instante de tempo n , a função restrita a ser minimizada é dada por

$$\mathcal{J}_{\text{LCMV}}[\mathbf{h}(n)] = \frac{1}{2} \mathbf{h}^t(n) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}(n) + \lambda^t(n) [\mathbf{C}^t \mathbf{h}(n) - \mathbf{f}], \quad (3.1)$$

cujo gradiente é

$$\nabla_{\mathbf{h}(n)} \mathcal{J}_{\text{LCMV}}[\mathbf{h}(n)] = \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}(n) + \mathbf{C} \lambda(n). \quad (3.2)$$

Assim, depois da $n^{\text{ésima}}$ iteração, o próximo vetor de coeficientes é atualizado como

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{h}(n) - \mu \nabla_{\mathbf{h}(n)} \mathcal{J}_{\text{LCMV}}[\mathbf{h}(n)] \\ &= \mathbf{h}(n) - \mu [\mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}(n) + \mathbf{C} \lambda(n)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde μ é uma constante de ponderação que determina o comprimento do passo de adaptação. Os multiplicadores de Lagrange são escolhidos de forma que $\mathbf{h}(n+1)$ satisfaça as restrições. Disto segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{C}^t \mathbf{h}(n+1) \\ &= \mathbf{C}^t \mathbf{h}(n) - \mu \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}(n) - \mu \mathbf{C}^t \mathbf{C} \lambda(n). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Solucionando para $\lambda(n)$ e substituindo o resultado na Eq. (3.3), obtemos:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mu \left[\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^t \right] \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}(n) + \mathbf{C}(\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} [\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{h}(n)]. \quad (3.5)$$

A equação de adaptação dos coeficientes (3.5) é escrita desta forma para enfatizar que o último fator $\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{h}(n)$ não é considerado nulo. De fato, $\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{h}(n) = \mathbf{0}$ somente se na $n^{\text{ésima}}$ iteração o vetor de coeficientes satisfizer precisamente as restrições, o que geralmente não é verdade devido

aos erros de precisão numérica finita, ocorridos nas operações aritméticas e na representação dos valores. Como veremos, é este termo que confere ao algoritmo CLMS a característica de robustez à imprecisão numérica, no sentido de corrigir, a cada iteração, pequenos desvios das restrições, evitando-se assim uma eventual acumulação e crescimento destes desvios no decorrer da adaptação.

A Eq. (3.5) pode ser reescrita como

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{P}[\mathbf{h}(n) - \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}(n)] + \mathbf{q}, \quad (3.6)$$

onde o vetor \mathbf{q} MN -dimensional é definido por

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (3.7)$$

e a matriz \mathbf{P} $MN \times MN$ por

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_{MN} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^t. \quad (3.8)$$

Esta equação representa a versão determinística do algoritmo CLMS. Isto porque o gradiente da função custo é deterministicamente calculado a partir do conhecimento da matriz de autocorrelação \mathbf{R}_{xx} do vetor de dados de entrada.

Em geral essa matriz não é conhecida *a priori*. Uma aproximação simples e disponível para \mathbf{R}_{xx} , no instante de tempo $n+1$, é o produto externo do vetor de dados de entrada por ele mesmo: $\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)$. Substituindo esta estimativa na Eq. (3.6), obtemos a chamada versão estocástica do algoritmo CLMS:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{P}[\mathbf{h}(n) - \mu y(n+1)\mathbf{x}(n+1)] + \mathbf{q}, \quad (3.9)$$

onde

$$y(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n) \quad (3.10)$$

é a estimativa *a priori* do sinal de saída do conformador.

Observe que o vetor \mathbf{q} corresponde à componente quiescente de \mathbf{h}_{LCMV} vista no capítulo anterior [Eq. (2.45)], a qual implementa um conformador que independe dos dados de entrada. Aproveitando deste fato, o algoritmo CLMS é inicializado fazendo $\mathbf{h}(0)=\mathbf{q}$, o que também

significa suposição de ruído branco como dados de entrada. Vale dizer que este tipo de suposição está em conformidade com a própria natureza estocástica por detrás da estimação de \mathbf{R}_{xx} .

O algoritmo CLMS estocástico é um dos mais populares algoritmos encontrados na literatura de antenas adaptativas para conformadores LCMV na forma direta, sendo, por vezes, denominado de algoritmo de Frost. Ele tem uma complexidade computacional igual a $(MN)^2 + 2MN + 1$ multiplicações, independente do número de restrições. Vejamos como a técnica CLMS também pode ser aplicada ao problema LCID.

3.1.1 A Técnica CLMS Aplicada ao Problema LCID

A aplicação da técnica de Frost pode ser estendida ao problema de identificação com restrições lineares (LCID). Neste caso, a função restrita a ser minimizada é dada por

$$\mathcal{J}_{\text{LCID}}[\mathbf{h}(n)] = \frac{1}{2} \left[\sigma_d^2 - 2\mathbf{h}^t(n)\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{h}^t(n)\mathbf{R}_{xx}\mathbf{h}(n) \right] + \lambda^t(n) \left[\mathbf{C}^t\mathbf{h}(n) - \mathbf{f} \right] \quad (3.11)$$

e tem como gradiente

$$\nabla_{\mathbf{h}(n)} \mathcal{J}_{\text{LCID}}[\mathbf{h}(n)] = -\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{R}_{xx}\mathbf{h}(n) + \mathbf{C}\lambda(n). \quad (3.12)$$

A versão determinística do algoritmo CLMS é obtida procedendo de maneira similar ao problema LCMV. A seguinte equação de iteração dos coeficientes é encontrada:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{P} \left\{ \mathbf{h}(n) + \mu \left[\mathbf{p}_{xd} - \mathbf{R}_{xx}\mathbf{h}(n) \right] \right\} + \mathbf{q}. \quad (3.13)$$

Substituindo, nesta equação, as estimativas de \mathbf{p}_{xd} e \mathbf{R}_{xx} , baseadas nos dados presentes no conformador no instante de tempo $n+1$: $\mathbf{x}(n+1)d(n+1)$ e $\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)$, respectivamente, temos a versão estocástica do algoritmo CLMS para o problema LCID:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{P} \left\{ \mathbf{h}(n) + \mu e(n+1)\mathbf{x}(n+1) \right\} + \mathbf{q}, \quad (3.14)$$

onde

$$e(n+1) = d(n+1) - y(n+1) \quad (3.15)$$

é a estimativa *a priori* do sinal de erro.

Observe que os fatores entre chaves nas Eqs. (3.13) e (3.14) correspondem, respectivamente, aos algoritmos clássicos LMS determinístico e estocástico para filtros sem restrições. Desta forma, podemos constatar que a técnica de Frost, quando aplicada ao problema LCID, consiste em usar o método do gradiente para minimizar a potência do sinal de erro e em empregar, a cada iteração, as correções apropriadas para incorporar as restrições aos coeficientes. O mesmo pode ser dito com relação às Eqs. (3.6) e (3.9), quando aplicadas ao problema LCMV. Neste caso, o método do gradiente é diretamente utilizado para minimizar a própria potência do sinal de saída do conformador. Ou seja, não existe um sinal de referência propriamente dito. Como já observamos, são as restrições que transcrevem algumas das características conhecidas *a priori* do sinal desejado para o filtro. Fazendo $\mathbf{p}_{xd} = \mathbf{0}$ e $d(n+1)=0$ nas Eqs. (3.13) e (3.14), respectivamente, chega-se às Eqs. (3.6) e (3.9).

Uma interpretação geométrica do algoritmo CLMS é dada a seguir. Esta interpretação é útil não somente para ilustrar as operações do algoritmo como também para visualizar sua propriedade de correção de erro, que impede os coeficientes de desviarem das restrições.

3.1.2 Interpretação Geométrica

As operações do algoritmo CLMS, em particular aquelas referentes à Eq. (3.6), são ilustradas na Fig. 3.1. Também estão mostrados contornos de potência constante da função custo e o vetor de coeficientes ótimos \mathbf{h}_{LCMV} .

Cabem, também aqui, todas as constatações algébricas feitas no capítulo anterior no que diz respeito às restrições. Além disto, enfatizamos que a matriz \mathbf{P} no algoritmo CLMS é um operador de projeção [24,31]. A pré-multiplicação de qualquer vetor por \mathbf{P} aniquilará qualquer componente perpendicular ao hiperplano Σ , projetando o vetor no subespaço ortogonal de restrição (as seguintes relações com este operador são válidas e podem ser facilmente verificadas por substituição direta das equações: $\mathbf{P}\mathbf{P}=\mathbf{P}$; $\mathbf{P}\mathbf{C}=\mathbf{0}_{MN \times K}$; $\mathbf{C}^t\mathbf{P}=\mathbf{0}_{K \times MN}$ e $\mathbf{P}\mathbf{q}=\mathbf{0}_{MN}$).

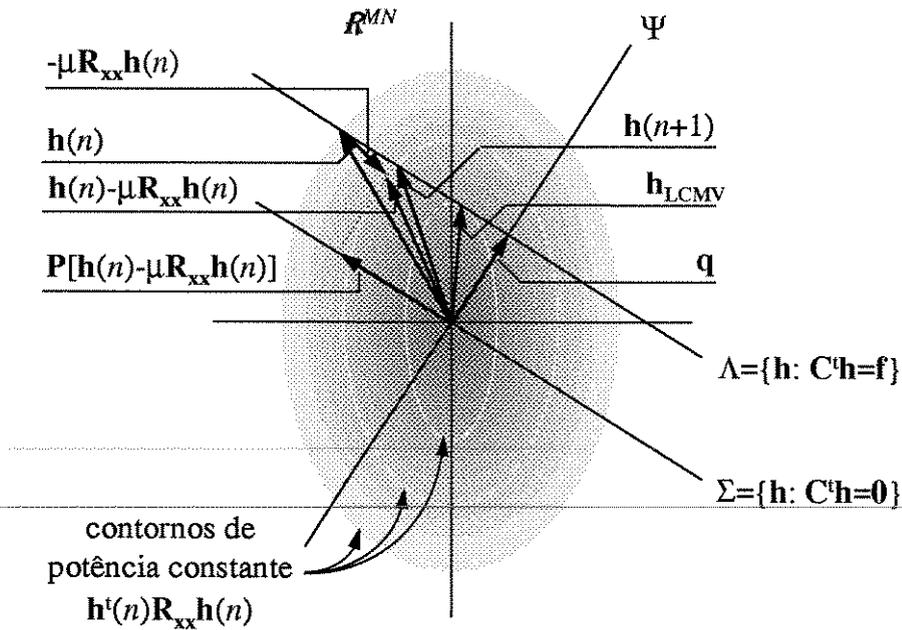


Fig. 3.1: Interpretação geométrica do algoritmo CLMS determinístico [Eq. (3.6)].

No instante de tempo $n+1$, o gradiente negativo da função custo é ponderado por μ e somado ao vetor de coeficientes anterior. Isto é feito de maneira a atualizar $\mathbf{h}(n)$ em uma direção que minimize a função custo, o que corresponde a descer na superfície de erro médio quadrático. Esta operação geralmente move o vetor de coeficientes resultante para fora do hiperplano de restrição Λ . O vetor resultante é, então, projetado no subespaço ortogonal de restrição Σ e retornado ao hiperplano de restrição adicionando-se \mathbf{q} . O novo vetor de coeficientes $\mathbf{h}(n+1)$ satisfaz as restrições dentro da precisão aritmética usada na implementação do algoritmo.

Essa característica de autocorreção de desvio das restrições do algoritmo CLMS pode ser melhor evidenciada ao compará-lo com o algoritmo de projeção do gradiente.

3.1.3 O Algoritmo de Projeção do Gradiente

Vamos considerar agora que, na Eq. (3.5), $\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{h}(n) = \mathbf{0}$. Isto corresponde a dizer que, para qualquer instante de tempo, $\mathbf{h}(n)$ satisfaz as restrições, o que somente é verdade numa implementação perfeita, em termos aritméticos, de (3.5) sem este fator.

A versão estocástica do algoritmo CLMS que resulta da consideração acima é

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mu \mathbf{P} y(n+1) \mathbf{x}(n+1), \quad (3.16)$$

para o conformador LCMV, e

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) - \mu \mathbf{P} e(n+1) \mathbf{x}(n+1) \quad (3.17)$$

no caso LCID. Este é o algoritmo de projeção do gradiente [24,30]. Ele é assim chamado porque a estimativa do gradiente da função custo $y(n+1)\mathbf{x}(n+1)$, ou $e(n+1)\mathbf{x}(n+1)$, é projetada no subespaço ortogonal de restrição e, então, adicionada ao vetor de coeficientes anterior. Estas operações estão ilustradas na Fig. 3.2 para o conformador LCMV [Eq. (3.16)].

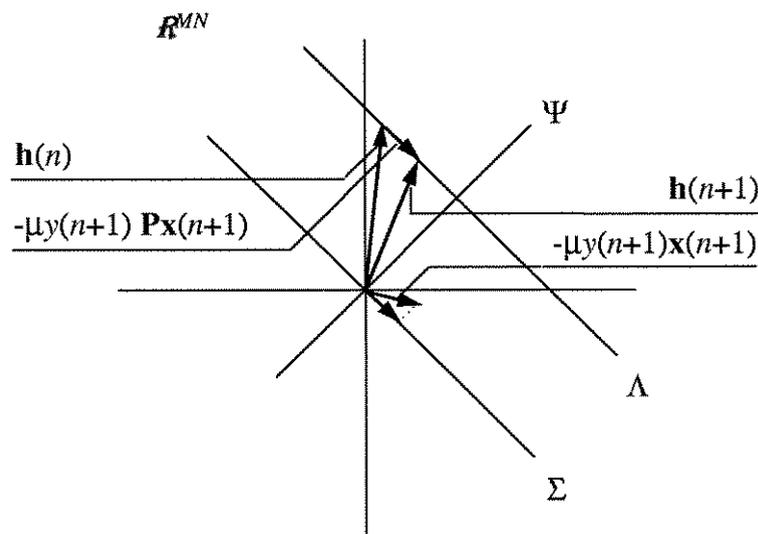


Fig. 3.2: Operações do algoritmo de projeção do gradiente [Eq. (3.16)].

A implementação em sistemas digitais (computadores e *hardware* dedicado) de qualquer algoritmo sempre está sujeita a erros de precisão numérica finita: truncamento, arredondamento ou quantização. A magnitude destes erros depende do número de *bits* utilizados na representação dos valores numéricos e da aritmética empregada nas operações de multiplicação: ponto decimal fixo ou flutuante [35].

No algoritmo de projeção do gradiente, os erros de precisão numérica finita não são corrigidos a cada iteração. Eles vão sendo acumulados no decorrer do processo de adaptação, fazendo com que o vetor de coeficientes desvie das restrições. Sem um procedimento adicional de correção destes erros, a aplicação do algoritmo fica limitada a problemas que requerem um número de iterações pequeno o bastante a ponto de que não ocorra um desvio significativo das restrições. Já o algoritmo CLMS possui como fundamental diferença um procedimento, dado pelo último termo da Eq. (3.5), que corrige os erros de precisão numérica finita continuamente, evitando assim que eles se acumulem.

Uma comparação entre os algoritmos de projeção do gradiente e de Frost, no que se refere ao efeito do erro de precisão finita, é mostrado na Fig. 3.3. O vetor de coeficientes é assumido estar fora do plano de restrições em decorrência de um erro de truncamento ocorrido na iteração anterior. O algoritmo de Frost realiza a etapa não restrita (minimização da potência de saída), projeta o vetor resultante no subespaço ortogonal de restrição, e, então, adiciona q para obter um novo vetor de coeficientes que satisfaça as restrições [Fig. 3.3(a)]. Já o algoritmo de projeção do gradiente projeta a estimativa do gradiente sobre o subespaço ortogonal de restrição e a adiciona ao vetor de coeficientes anterior, movendo-o numa direção paralela ao plano de restrição, fazendo com que o erro seja mantido [Fig. 3.3(b)].

Apesar da robustez, por ser o algoritmo de Frost uma adaptação do método do gradiente ao problema LCMV, ele herda as limitações clássicas desta técnica: se o sinal de entrada é altamente correlacionado, o desempenho em termos de taxa de convergência e precisão pode se deteriorar significativamente. Neste caso, uma técnica de mínimos quadrados (*LS_Least-Square*) tem o potencial de atingir um bom desempenho, independentemente do espalhamento dos autovalores da

matriz de autocorrelação do sinal de entrada [18,27]. Na tentativa, então, de aplicar a técnica clássica de mínimos quadrados, adotou-se a estrutura desmembrada do GSC, que exclui as restrições do processo de adaptação.

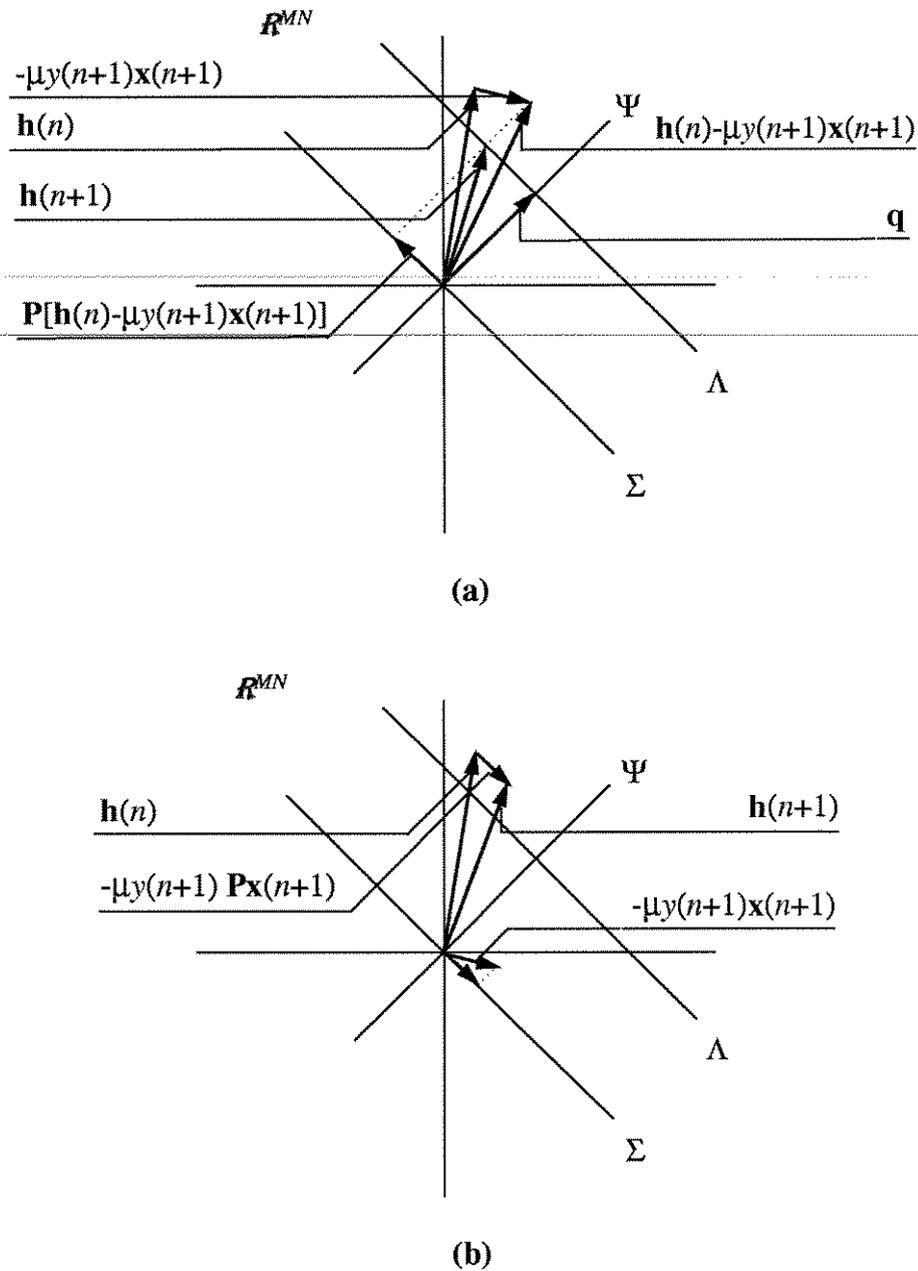


Fig. 3.3: Comparação do efeito do erro de precisão numérica finita nos algoritmos (a) de Frost e (b) de projeção do gradiente.

Antes, porém, de abordarmos o GSC adaptativo, descreveremos as restrições de Frost, propostas também em seu consagrado *paper* [24]. Estas restrições serão fundamentais ao caracterizarmos mais tarde o trabalho de Cantoni [36].

3.1.4 As Restrições de Frost

Em conjunto com o algoritmo CLMS, Frost também propôs um tipo de restrição para arranjos/conformadores de banda larga que permite impor uma característica desejada de resposta em frequência na direção do sinal de interesse (direção de visada).

A fim de descrevermos as restrições de Frost, consideremos o arranjo/conformador de banda larga da Fig. 3.4. Os tempos de atraso T_p , $p = 0, 1, \dots, M-1$, são usados para pré-direcionarem o arranjo, de forma que um sinal numa determinada direção apareça alinhado temporalmente na entrada do conformador, como se ele estivesse incidindo perpendicularmente ao arranjo.

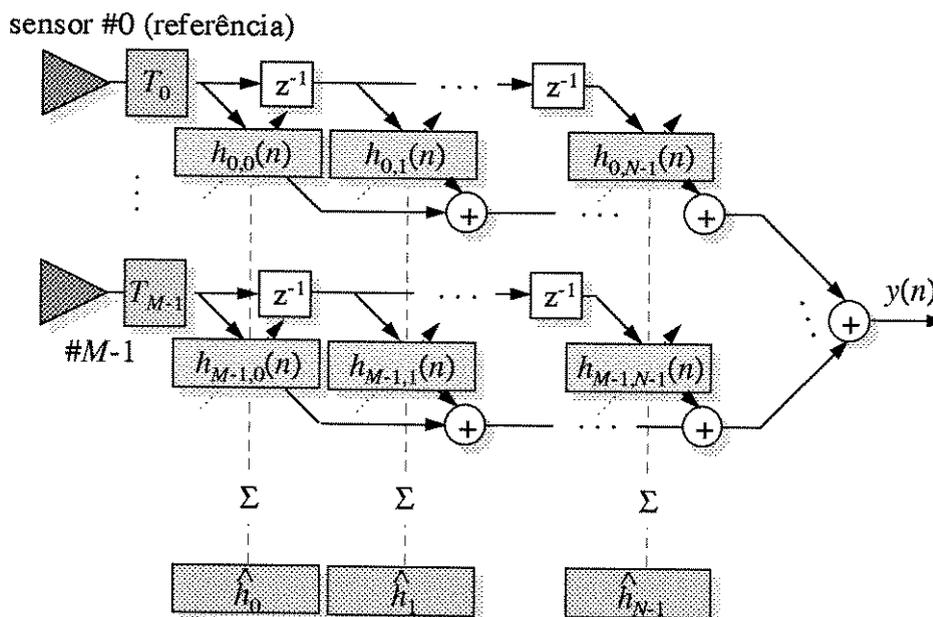


Fig. 3.4: O processador equivalente de Frost para o conformador de banda larga.

Supondo o sensor #0 do arranjo como sendo a referência de fase zero, a resposta da estrutura arranjo/conformador da Fig. 3.4 é dada por

$$H(\theta, \omega, n) = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} h_{p,i}(n) e^{-j\omega[p\tau(\theta)+i+T_p]}, \quad (3.18)$$

onde $\tau(\theta)$ é o atraso de propagação na direção θ entre dois sensores adjacentes [Eq. (2.23)].

A Eq. (3.18) pode ser reescrita como

$$H(\theta, \omega, n) = \mathbf{e}_M^t(\theta, \omega) \mathbf{T}(\omega) \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}_{M,i}(n) e^{-j\omega i}, \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{e}_M^t(\theta, \omega) = [1, e^{-j\omega\tau(\theta)}, \dots, e^{-j\omega(M-1)\tau(\theta)}]_{1 \times M}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{T}(\omega) = \text{diag}[e^{-j\omega T_0}, e^{-j\omega T_1}, \dots, e^{-j\omega T_{M-1}}]_{M \times M} \quad (3.21)$$

e

$$\mathbf{h}_{M,i}(n) = [h_{0,i}(n), h_{1,i}(n), \dots, h_{M-1,i}(n)]_{1 \times M}^t. \quad (3.22)$$

Para uma determinada direção θ_0 , os tempos de atraso $\{T_p\}$ podem ser ajustados tal que

$$\mathbf{e}_M^t(\theta_0, \omega) \mathbf{T}(\omega) = \delta(\omega) \mathbf{c}_M^t, \quad (3.23)$$

onde $\delta(\omega) = e^{-j\omega\hat{\tau}}$, para algum $\hat{\tau}$, por exemplo $\hat{\tau} = (M-1)\tau(\theta_0)$, e $\mathbf{c}_M^t = [1, 1, \dots, 1]_{1 \times M}$. Neste caso, a resposta em frequência da estrutura é dada por

$$H(\theta_0, \omega, n) = \delta(\omega) \sum_{i=0}^{N-1} \hat{h}_i e^{-j\omega i}, \quad (3.24)$$

onde $\hat{h}_i = \mathbf{c}_M^t \mathbf{h}_{M,i}(n)$, para $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Dessa forma, podemos observar que, com relação ao sinal na direção de visada, o conformador é equivalente a um único filtro transversal temporal, no qual cada coeficiente é igual à soma dos coeficientes na coluna vertical correspondente do conformador (Fig. 3.4). As restrições propostas por Frost consistem, então, em igualar cada uma destas somas aos coeficientes de um filtro

transversal, cuja característica em frequência corresponda àquela desejada na direção de visada. Estas $K=N$ restrições podem ser expressas pelo sistema de equações lineares $C^t \mathbf{h}(n) = \mathbf{f}$ fazendo:

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_M & \mathbf{0}_M & \cdots & \mathbf{0}_M \\ \mathbf{0}_M & \mathbf{c}_M & \cdots & \mathbf{0}_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_M & \mathbf{0}_M & \cdots & \mathbf{c}_M \end{bmatrix}_{MN \times N} \quad (3.25)$$

e

$$\mathbf{f} = [\hat{h}_0, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{N-1}]^t. \quad (3.26)$$

Como veremos na próxima seção, Cantoni lança mão dessas restrições para poder utilizar a técnica rápida de mínimos quadrados no GSC adaptativo.

3.2 O GSC ADAPTATIVO

Como mencionamos no capítulo anterior, o cancelador de lóbulo lateral generalizado (GSC) pode ser visto como a abordagem de Wiener aplicada ao problema LCMV. Neste sentido, uma implementação adaptativa do GSC segue, de maneira direta, àquela da teoria clássica de filtragem sem restrições [17,18,27,37].

A Fig. 3.5 ilustra, na forma de diagrama de bloco, o GSC adaptativo. Os coeficientes de \mathbf{h}_r implementam um conformador quiescente que tem, como saída, o sinal desejado caracterizado pelas restrições $y_c(n+1)$. Já os coeficientes não restritos de $\mathbf{h}_\perp(n)$, a cada iteração, são ajustados em função de $\mathbf{x}_\perp(n+1)$, na tentativa de cancelar as interferências vazadas através dos lóbulos laterais do conformador quiescente.

O GSC tem como característica adaptar um número de coeficientes que corresponde exatamente ao grau de liberdade de \mathbf{h} , ou seja, $MN-K$ coeficientes contra MN da estrutura direta do

conformador LCMV. Isto se dá, no entanto, às custas de alguns cálculos a mais, a cada iteração, para se obter o sinal de referência e o novo vetor de dados de entrada do processo de adaptação.

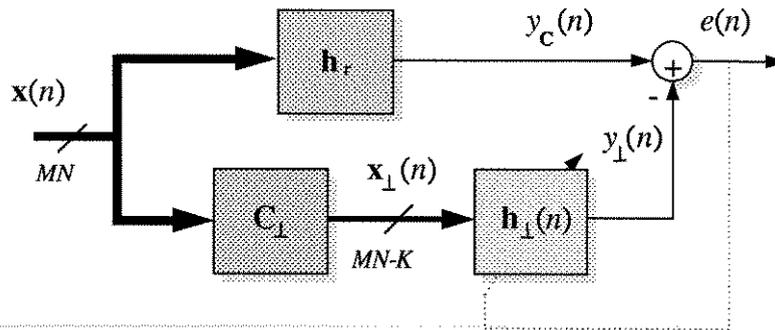


Fig. 3.5: O GSC adaptativo.

Uma outra característica do GSC é que técnicas adaptativas padrões da teoria de filtragem não restrita podem ser diretamente empregadas na atualização dos coeficientes. Assim, algoritmos do tipo LMS (*Least-Mean Square*), baseado no método do gradiente, e RLS (*Recursive Least-Square*), decorrente do critério de mínimos quadrados, podem ser diretamente aplicados. Entretanto, versões rápidas dos algoritmos de mínimos quadrados, fundamentadas na propriedade do deslocamento temporal do vetor de dados de entrada, não podem ser empregadas. Isto porque $\mathbf{x}_{\perp}(n+1) = \mathbf{C}_{\perp}^t \mathbf{x}(n+1)$, em geral, não pode mais ser obtido a partir de $\mathbf{x}_{\perp}(n)$ pelo simples deslocamento de seus elementos e das novas amostras de entrada. Logo, o algoritmo FLS (*Fast Least-Square*), seja na versão unidimensional ou multidimensional, não pode ser utilizado.

A cada iteração, o algoritmo RLS, aplicado ao GSC adaptativo, tem uma complexidade computacional igual a $4(MN-K)^2 + 4(MN-K)$ multiplicações e 1 divisão. Estes números foram obtidos sem considerar qualquer propriedade de simetria inerente à matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_{\perp}\mathbf{x}_{\perp}}$. No cálculo de $y_c(n+1)$ e $\mathbf{x}_{\perp}(n+1)$, mais $MN(MN-K) + MN$ multiplicações são requeridas.

Já o algoritmo LMS apresenta uma complexidade bem menor, igual a $2(MN-K)+1$ multiplicações, em detrimento da taxa de convergência e precisão. Complexidade esta que se mostra até mesmo inferior àquela do próprio algoritmo de Frost. Uma analogia entre as duas abordagens LMS é o assunto da próxima seção.

3.2.1 O Algoritmo de Frost do Ponto de Vista do GSC Adaptativo

O algoritmo de Frost pode ser relacionado a uma estrutura GSC utilizando o método do gradiente estocástico para adaptar os coeficientes não restritos. Para isto, vamos reescrever a Eq. (3.9) como:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{h}(n) - \mu \mathbf{h}^t(n) \mathbf{x}(n+1) \mathbf{P} \mathbf{x}(n+1). \quad (3.27)$$

Separando $\mathbf{h}(n)$ nas componentes restrita e não restrita, temos que

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}[\mathbf{h}_r + \mathbf{h}_{nr}(n)] - \mu[\mathbf{h}_r^t + \mathbf{h}_{nr}^t(n)] \mathbf{x}(n+1) \mathbf{P} \mathbf{x}(n+1). \quad (3.28)$$

Retomemos a decomposição do vetor de coeficientes ótimos LMS vista no capítulo anterior. Observe que o operador de projeção \mathbf{P} , quando aplicado a \mathbf{h}_{LCMV} , determina a componente no subespaço ortogonal de restrição que deve ser somada a \mathbf{q} para se obter \mathbf{h}_{LCMV} :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{h}_{LCMV} &= \mathbf{h}_{LCMV} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^t\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{f} \\ &= \mathbf{h}_{LCMV} - \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Vemos, então, que a própria matriz \mathbf{P} pode ser utilizada na definição do subespaço ortogonal de restrição ($\mathbf{P}\mathbf{C}=\mathbf{0}_{MN \times K}$ e $\mathbf{C}^t\mathbf{P}=\mathbf{0}_{K \times MN}$). Assim fazendo, a componente não restrita na Eq. (3.28) é descrita por

$$\mathbf{h}_{nr}(n) = -\mathbf{P}\mathbf{h}_\perp(n) \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{q} + \mathbf{P}[\mathbf{h}_r - \mathbf{P}\mathbf{h}_\perp(n)] - \mu[\mathbf{h}_r^t - \mathbf{h}_\perp^t(n)\mathbf{P}]\mathbf{x}(n+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(n+1) \\ &= \mathbf{q} - \mathbf{P}\mathbf{h}_\perp(n) - \mu[\mathbf{h}_r^t\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{h}_\perp^t(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n+1)]\mathbf{P}\mathbf{x}(n+1), \end{aligned} \quad (3.31)$$

já que $\mathbf{P}\mathbf{h}_r=\mathbf{0}_{MN}$.

Reconhecendo na equação acima que

$$\mathbf{P}\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{x}_{\perp}(n+1) \quad (3.32)$$

e fazendo uso do fato de que $\mathbf{P}\mathbf{P}=\mathbf{P}$, resulta em

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{q} - [\mathbf{P}\mathbf{h}_{\perp}(n) + \mu e(n+1)\mathbf{P}\mathbf{x}_{\perp}(n+1)], \quad (3.33)$$

onde

$$e(n+1) = y_c(n+1) - y_{\perp}(n+1). \quad (3.34)$$

Logo, colocando \mathbf{P} em evidência, chega-se a

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{q} - \mathbf{P}[\mathbf{h}_{\perp}(n) + \mu e(n+1)\mathbf{x}_{\perp}(n+1)] \\ &= \mathbf{q} - \mathbf{P}\mathbf{h}_{\perp}(n+1) \\ &= \mathbf{q} + \mathbf{h}_{nr}(n+1). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Escrita desta forma, a equação de adaptação dos coeficientes do algoritmo de Frost pode ser representada pelo diagrama de bloco do GSC adaptativo, como mostra a Fig. 3.6.

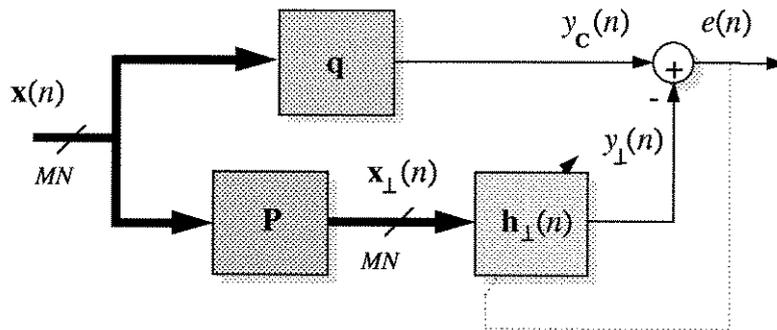


Fig. 3.6: O algoritmo de Frost representado pelo diagrama de bloco do GSC adaptativo.

Na Eq. (3.32), \mathbf{P} é a matriz de bloqueio de sinal que projeta o vetor de dados de entrada $\mathbf{x}(n+1)$ no subespaço ortogonal de restrição Σ , possibilitando a adaptação não restrita de $\mathbf{h}_{\perp}(n)$. Entretanto, a matriz \mathbf{P} $MN \times MN$ não representa de maneira eficiente Σ . Ela possui redundâncias, uma vez que somente $MN-K$ vetores colunas, linearmente independentes entre si, são necessários

para definir este subespaço. Com isto, K coeficientes a mais são adaptados com relação ao GSC que usa uma matriz de projeção C_{\perp} eficiente. Além disto, a pré-multiplicação de $\mathbf{x}(n+1)$ por \mathbf{P} tem uma carga computacional maior do que aquela por C_{\perp}^t , uma vez que KMN multiplicações a mais são realizadas. O algoritmo de Frost é dito ser restrito e aplicado à estrutura direta dos conformadores porque ele adapta todos os MN coeficientes sob restrição.

Na verdade, fizemos essa analogia tendo em mente um outro propósito: evidenciar a implicação da proposição do algoritmo de mínimos quadrados rápido por Cantoni, tanto para a estrutura direta do conformador LCMV como para o GSC. Para isto, consideremos as restrições de Frost.

Da Eq. (3.25) obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{MN} &= \mathbf{I}_{MN} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^t\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^t \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_M & \mathbf{0}_{M \times M} & \cdots & \mathbf{0}_{M \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{P}_M & \cdots & \mathbf{0}_{M \times M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times M} & \cdots & \mathbf{P}_M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde

$$\mathbf{P}_M = \mathbf{I}_M - \mathbf{c}_M \mathbf{c}_M^t / \mathbf{c}_M^t \mathbf{c}_M. \quad (3.37)$$

Logo:

$$\mathbf{P}_{MN}\mathbf{x}(n+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_M \boldsymbol{\chi}(n+1) \\ \mathbf{P}_M \boldsymbol{\chi}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_M \boldsymbol{\chi}(n-N+2) \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

o que nos permite constatar que, mesmo após a pré-multiplicação de $\mathbf{x}(n+1)$ por \mathbf{P}_{MN} , as restrições de Frost mantêm a propriedade de deslocamento temporal no vetor de dados do processo de adaptação.

Aproveitando-se então disso, Cantoni propôs o emprego direto do algoritmo de mínimos quadrados rápido à Eq. (3.35) [36]. Em termos do GSC propriamente dito, para evidenciar a manutenção da propriedade de deslocamento, ele representou a estrutura na forma ilustrada na

Fig. 3.7, observando que a matriz de bloqueio \mathbf{B} $(M-1) \times M$ deve ser tal que $\mathbf{B}\mathbf{c}_M = \mathbf{0}_{M-1}$. Neste caso:

$$\mathbf{x}_\perp(n+1) = [\chi_\perp(n+1), \chi_\perp(n), \dots, \chi_\perp(n-N-2)], \quad (3.39)$$

onde

$$\chi_\perp(n+1) = \mathbf{B}\chi(n+1). \quad (3.40)$$

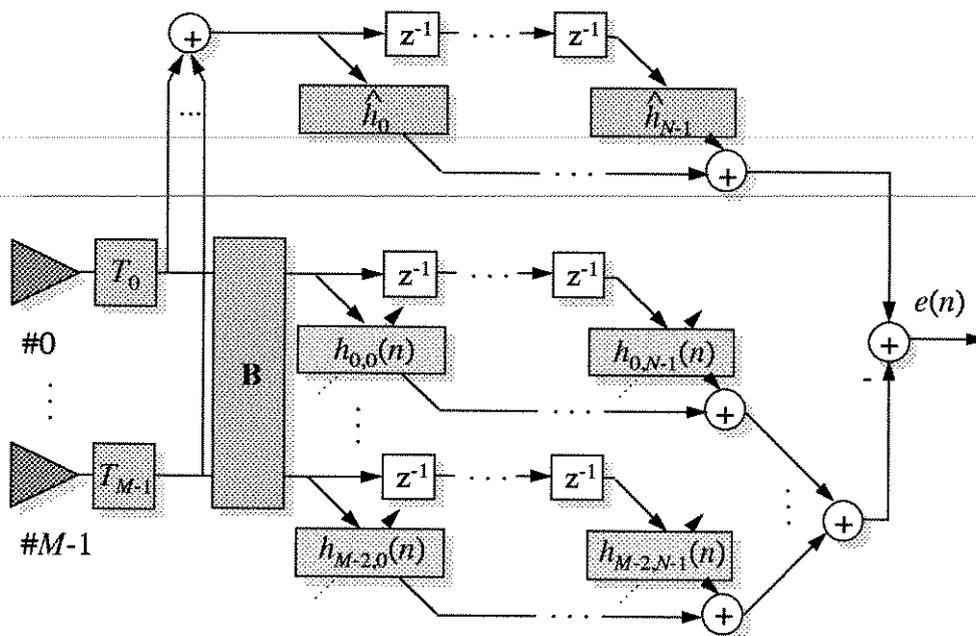


Fig. 3.7: O GSC adaptativo utilizado por Cantoni em decorrência das restrições de Frost.

Vale destacar que o uso do algoritmo de mínimos quadrados rápido, como sugerido por Cantoni, está condicionado às restrições de Frost. Ou seja, quando restrições pontuais, derivativas ou autovetoriais são impostas aos coeficientes do conformador, o vetor de dados do processo de adaptação $\mathbf{x}_\perp(n+1)$ não possui a propriedade de deslocamento.

É importante, também, salientar que as restrições de Frost não são utilizadas atualmente na prática por somente controlarem a resposta temporal do conformador numa única direção. Além disto, a menos que o sinal de interesse esteja incidindo perpendicularmente à linha do arranjo, tais restrições requerem que atrasadores sejam conectados na saída de cada sensor.

Na tentativa de diminuir a carga computacional do algoritmo RLS no GSC, lançou-se mão da flexibilidade em definir o subespaço ortogonal de restrição de maneira a reduzir o número de elementos adaptados na estrutura. Este tipo de abordagem é descrita abaixo.

3.2.2 O GSC Parcialmente Adaptativo

No GSC, a expressão *graus de liberdade* refere-se ao número de coeficientes não restritos na estrutura. Por exemplo, um conformador LCMV, com MN coeficientes e K restrições, tem $MN-K$ graus de liberdade; a estrutura GSC separa-os como um vetor de coeficientes não restritos \mathbf{h}_\perp . Dizemos que o GSC é completamente adaptativo quando ele usa todos os graus de liberdade disponíveis no processo de otimização. Quando um conjunto reduzido de graus de liberdade é utilizado, o GSC é conhecido como parcialmente adaptativo.

Uma vez que a redução de graus de liberdade está associada à redução do número de coeficientes não restritos adaptados na estrutura, o GSC parcialmente adaptativo tem como propósito diminuir a complexidade computacional dos algoritmos no processo de otimização. Vejamos como isto pode ser feito.

Na estrutura GSC, o vetor de coeficientes do conformador LCMV é descrito por

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}_r - \mathbf{C}_\perp \mathbf{h}_\perp(n), \quad (3.41)$$

onde \mathbf{C}_\perp é uma matriz $MN \times MN-K$, de posto cheio, cujas colunas são ortogonais às colunas da matriz de restrição \mathbf{C} . Por ser independente das restrições, o vetor de coeficientes $\mathbf{h}_\perp(n)$ ($MN-K$)-dimensional incorpora os graus de liberdade disponíveis. O número de coeficientes é reduzido,

forçando $\mathbf{h}_\perp(n)$ a adaptar-se num subespaço L _dimensional ($L < MN - K$) do subespaço $(MN - K)$ _dimensional definido pelas colunas de \mathbf{C}_\perp . Formalmente, restringimos $\mathbf{h}_\perp(n)$ a situar-se no subespaço L _dimensional definido pelas colunas de uma matriz \mathbf{T} $(MN - K) \times L$. Isto é, seja

$$\mathbf{h}_\perp(n) = \mathbf{T}\mathbf{h}_L(n), \quad (3.42)$$

onde $\mathbf{h}_L(n)$ é um vetor L _dimensional que representa os L graus de liberdade disponíveis. Sendo assim,

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}_r - \mathbf{C}_\perp \mathbf{T}\mathbf{h}_L(n) \quad (3.43)$$

ou, por simplicidade de notação,

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}_r - \mathbf{T}_L \mathbf{h}_L(n), \quad (3.44)$$

onde

$$\mathbf{T}_L = \mathbf{C}_\perp \mathbf{T} \quad (3.45)$$

é uma matriz $MN \times L$. Um diagrama de bloco ilustrando esta decomposição do conformador parcialmente adaptativo é mostrado na Fig. 3.8.

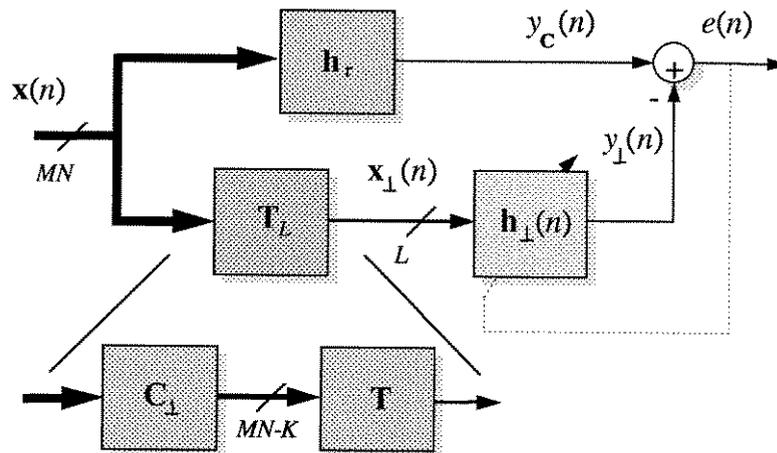


Fig. 3.8: O GSC parcialmente adaptativo.

Um problema de minimização não restrita análogo à Eq. (2.66) é solucionado para obter \mathbf{h}_L pelo critério LMS:

$$\underset{\mathbf{h}_L}{\text{minimizar}} (\mathbf{h}_r - \mathbf{T}_L \mathbf{h}_L)^t \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{h}_r - \mathbf{T}_L \mathbf{h}_L), \quad (3.46)$$

resultando em

$$\mathbf{h}_L = (\mathbf{T}_L^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{T}_L)^{-1} \mathbf{T}_L^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}_r. \quad (3.47)$$

Redução de graus de liberdade adaptativos também melhora a taxa de convergência dos algoritmos. Entretanto, existe uma perda de desempenho relacionada a esta redução. Um GSC parcialmente adaptativo não pode convergir para a mesma solução ótima que o GSC completamente adaptativo e, conseqüentemente, apresenta uma degradação na capacidade de cancelar interferências. Na verdade, reduzir o número de coeficientes adaptativos é equivalente a aumentar o número de restrições sobre $\mathbf{h}(n)$ [22]. Em [21], uma interessante cascata de módulos adaptativos, cada qual representando um ou mais graus de liberdade, é proposta para implementação do GSC.

Atingimos um ponto nesta dissertação, onde o seguinte comentário se faz necessário: ao descrevemos as abordagens LCMV existentes para antenas adaptativas, verificamos que o uso da técnica clássica de mínimos quadrados é limitada à estrutura indireta do conformador e que somente o emprego do algoritmo RLS é permitido, resultando numa complexidade computacional proporcional ao quadrado do número de parâmetros adaptados. É importante estar claro que, até então, o uso do critério LS não tem sido aplicado à estrutura direta do conformador.

A partir de agora, investigaremos a extensão propriamente dita da técnica LS ao problema de filtragem com restrições lineares na forma direta. Como veremos, isto nos possibilitará desenvolver um algoritmo de mínimos quadrados recursivo com obtenção rápida do ganho de adaptação, cuja demanda computacional é proporcional a MN . Nisto reside o principal objetivo e, conseqüentemente, a mais relevante contribuição deste trabalho de tese.

3.3 O ALGORITMO RECURSIVO DE MÍNIMOS QUADRADOS COM RESTRIÇÕES

Consideremos primeiramente o problema LCID da estrutura direta de um conformador para sinais de banda larga. Ele é formulado pelo critério de mínimos quadrados como

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{h}(n)}{\text{minimizar}} \quad & \sum_{i=1}^n W^{n-i} e^2(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} [d(i) - \mathbf{x}^t(i)\mathbf{h}(n)]^2 \end{aligned} \quad (3.48a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{C}^t \mathbf{h}(n) = \mathbf{f}, \quad (3.48b)$$

onde W ($0 < W < 1$) é o fator de esquecimento exponencial que permite seguir as não estacionaridades de um processo. De maneira análoga à Eq. (2.46), a solução ótima é obtida pelo método dos multiplicadores de Lagrange, mudando-se apenas o critério. O resultado é [6]

$$\mathbf{h}_{\text{LCID}}(n) = \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n) \mathbf{p}_{\mathbf{xd}}(n) + \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n) \mathbf{C} [\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n) \mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n) \mathbf{p}_{\mathbf{xd}}(n)]. \quad (3.49)$$

No lugar das grandezas estatísticas $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ e $\mathbf{p}_{\mathbf{xd}}$, estimativas temporais, dadas por

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^t(i) \quad (3.50)$$

e

$$\mathbf{p}_{\mathbf{xd}}(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} \mathbf{x}(i) d(i), \quad (3.51)$$

são empregadas e o vetor de coeficientes ótimos encontra-se agora em função do instante de tempo n .

Essa particularidade do critério de mínimos quadrados se enquadra perfeitamente ao contexto adaptativo. Um filtro ótimo é sempre obtido à medida que os dados vão se tornando disponíveis. Podemos dizer que a Eq. (3.49) é a contrapartida determinística da teoria de Wiener com restrições, apresentada no capítulo anterior. Todos os comentários feitos com relação a Eq. (2.51) aplicam-se à Eq. (3.49), observando-se apenas a dependência com o tempo. Assim,

$$\mathbf{h}_{\text{sr}}(n) = \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n) \mathbf{p}_{\mathbf{xd}}(n) \quad (3.52)$$

corresponde à solução ótima de mínimos quadrados sem restrições no instante n e o termo de correção é composto por

$$\mathbf{e}_f(n) = \mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{h}_{sr}(n) \quad (3.53)$$

e

$$\mathbf{Q}(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{C} [\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{C}]^{-1}. \quad (3.54)$$

A derivação de um algoritmo recursivo para $\mathbf{h}(n)$ é baseada no desenvolvimento matemático de $\mathbf{h}_{sr}(n)$ e $\mathbf{Q}(n)$.

Da teoria clássica de filtragem adaptativa, o vetor $\mathbf{h}_{sr}(n)$ pode ser atualizado por meio de um algoritmo de mínimos quadrados rápido (FLS_*Fast Least-Square* ou FTF_*Fast Transversal Filter*) multidimensional, com a ajuda do ganho de adaptação definido por

$$\mathbf{g}(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{x}(n), \quad (3.55)$$

através do conjunto de equações:

$$e_{sr}(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}_{sr}^t(n) \mathbf{x}(n+1) \quad (3.56)$$

e

$$\mathbf{h}_{sr}(n+1) = \mathbf{h}_{sr}(n) + \mathbf{g}(n+1) e_{sr}(n+1). \quad (3.57)$$

O ganho por si próprio é obtido através de um conjunto de equações baseado na predição linear, progressiva (*forward*) e regressiva (*backward*), e na propriedade de deslocamento em bloco do vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$. Isto evita a atualização da matriz inversa de autocorrelação no cálculo de $\mathbf{g}(n)$ e, conseqüentemente, reduz a complexidade computacional, tornando-a proporcional a M^2N [27]. Observe que o vetor de dados de entrada possui tal propriedade de deslocamento em bloco, uma vez que, na implementação direta de um conformador para sinais de banda larga, nenhuma transformação linear é aplicada sobre ele.

A matriz $\mathbf{Q}(n)$ pode ser reescrita como

$$\mathbf{Q}(n) = \mathbf{\Gamma}(n) [\mathbf{C}^t \mathbf{\Gamma}(n)]^{-1}, \quad (3.58)$$

onde a matriz $\mathbf{\Gamma}(n)$ $MN \times K$ é definida por

$$\mathbf{\Gamma}(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{C}. \quad (3.59)$$

Do algoritmo clássico de mínimos quadrados recursivo (RLS_*Recursive Least-Square*), a matriz inversa de autocorrelação pode ser atualizada por [18,27,37]

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) = \frac{1}{W} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \mathbf{g}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \right], \quad (3.60)$$

e o ganho de adaptação $\mathbf{g}(n+1)$ é dado por

$$\mathbf{g}(n+1) = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{x}(n+1)}{W + \mathbf{x}^t(n+1) \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{x}(n+1)}. \quad (3.61)$$

Assim, multiplicando à direita ambos os lados da Eq. (3.60) pela matriz de restrição \mathbf{C} , obtemos a seguinte equação recursiva para $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n+1) = \frac{1}{W} \left[\Gamma(n) - \mathbf{g}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \right]. \quad (3.62)$$

No que diz respeito a matriz $[\mathbf{C}^t \Gamma(n)]^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x} \mathbf{K}$, o lema de inversão de matrizes [28,31] pode ser empregado. Considerando a seguinte equação derivada da pré-multiplicação de (3.62) por \mathbf{C}^t :

$$\mathbf{C}^t \Gamma(n+1) = \frac{1}{W} \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) - \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \right], \quad (3.63)$$

e identificando-a com a equação

$$\mathbf{Z}(n+1) = \frac{1}{W} \left[\mathbf{Z}(n) - \mathbf{v}(n+1) \mathbf{v}^t(n+1) \right], \quad (3.64)$$

fazendo $\mathbf{Z}(n) = \mathbf{C}^t \Gamma(n)$, $\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)$ e $\mathbf{v}^t(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n)$, chega-se à matriz inversa, obtida por:

$$\mathbf{Z}^{-1}(n+1) = W \left[\mathbf{Z}^{-1}(n) + \frac{\mathbf{Z}^{-1}(n) \mathbf{v}(n+1) \mathbf{v}^t(n+1) \mathbf{Z}^{-1}(n)}{1 - \mathbf{v}^t(n+1) \mathbf{Z}^{-1}(n) \mathbf{v}(n+1)} \right], \quad (3.65)$$

o que corresponde a

$$[\mathbf{C}^t \Gamma(n+1)]^{-1} = W \left\{ [\mathbf{C}^t \Gamma(n)]^{-1} + \mathbf{l}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) [\mathbf{C}^t \Gamma(n)]^{-1} \right\}, \quad (3.66)$$

onde o vetor $\mathbf{l}(n+1)$ a K elementos é definido por

$$\mathbf{l}(n+1) = \frac{[\mathbf{C}^t \Gamma(n)]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)}{1 - \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) [\mathbf{C}^t \Gamma(n)]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)}, \quad (3.67a)$$

ou, substituindo (3.66) em (3.67a),

$$\mathbf{l}(n+1) = \frac{1}{W} [\mathbf{C}^t \Gamma(n+1)]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1). \quad (3.67b)$$

Da combinação das Eqs. (3.58), (3.62) e (3.66), temos que

$$\mathbf{Q}(n+1) = \left[\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n) \right] \left\{ \mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)}{1 - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)} \right\}. \quad (3.68)$$

Definindo na equação acima

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1) \quad (3.69)$$

e

$$\mathbf{v}^t(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n), \quad (3.70)$$

a seguinte recursão é obtida para $\mathbf{Q}(n)$:

$$\mathbf{Q}(n+1) = \left[\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1) \right] \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{u}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)}{1 - \mathbf{v}^t(n+1)\mathbf{u}(n+1)} \right]. \quad (3.71)$$

Por si próprios, a obtenção do ganho de adaptação $\mathbf{g}(n)$ por um algoritmo FLS e o conjunto de Eqs. (3.56), (3.57), (3.69), (3.70) e (3.71) constituem um algoritmo para calcular recursivamente o vetor de coeficientes:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}_{sr}(n+1) + \mathbf{Q}(n+1) \left[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{h}_{sr}(n+1) \right]. \quad (3.72)$$

Entretanto, uma recursão sobre os próprios coeficientes $\mathbf{h}(n)$ pode ser obtida, evitando-se, assim, o uso dos parâmetros não restritos $\mathbf{h}_{sr}(n)$ e $e_{sr}(n)$.

Substituindo as Eqs. (3.56) e (3.57) na Eq. (3.72), obtemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) = & \mathbf{h}_{sr}(n) + \mathbf{g}(n+1)d(n+1) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{h}_{sr}^t(n)\mathbf{x}(n+1) + \\ & -\mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)d(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)\mathbf{h}_{sr}^t(n)\mathbf{x}(n+1) + \\ & +\mathbf{Q}(n+1) \left[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{h}_{sr}(n) \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Podemos demonstrar que a seguinte igualdade é válida:

$$\mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n) + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n). \quad (3.74)$$

Isto é feito levando em conta, na Eq. (3.68), o fato de que

$$\frac{1}{1 - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)} = 1 + \frac{\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)}{1 - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(n+1) &= [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)] \\
&\quad \left\{ \mathbf{I}_K + \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1) \left[1 + \frac{\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)}{1 - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)} \right] \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n) \right\} \\
&= [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)] \\
&\quad \left\{ \mathbf{I}_K + \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)}{1 - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)} \right] \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n) \right\} \\
&= \mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n) + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n) . \text{ c.q.d.}
\end{aligned}$$

Substituindo, então, a Eq. (3.74) no último termo da Eq. (3.73), temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{h}_{sr}(n) + \mathbf{g}(n+1)d(n+1) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{h}_{sr}^t(n)\mathbf{x}(n+1) + \\
&\quad -\mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)d(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{h}_{sr}^t(n)\mathbf{x}(n+1) + \\
&\quad +\mathbf{Q}(n)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}_{sr}(n)] - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}_{sr}(n)] + \\
&\quad +\mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}_{sr}(n)]. \tag{3.75}
\end{aligned}$$

Observando que $\mathbf{h}_{sr}^t(n)\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}_{sr}(n)$ e reagrupando alguns termos, chega-se a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{h}_{sr}(n) + \mathbf{Q}(n)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}_{sr}(n)] + \mathbf{g}(n+1)d(n+1) - \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)d(n+1) + \\
&\quad -\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\{\mathbf{h}_{sr}(n) + \mathbf{Q}(n)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}_{sr}(n)]\} + \\
&\quad +\mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\{\mathbf{h}_{sr}(n) + \mathbf{Q}(n)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}_{sr}(n)]\}. \tag{3.76}
\end{aligned}$$

Reconhecendo $\mathbf{h}(n)$ na equação acima, podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)[d(n+1) - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n)] + \\
&\quad -\mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)[d(n+1) - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n)] \\
&= \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)e(n+1), \tag{3.77}
\end{aligned}$$

sendo

$$e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n). \tag{3.78}$$

Finalmente, da Eq. (3.77), obtemos que

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{P}(n+1)\mathbf{g}(n+1)e(n+1), \quad (3.79)$$

onde

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{I}_{MN} - \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t. \quad (3.80)$$

Comparando as Eqs. (3.79) e (3.17), observamos que o algoritmo até então desenvolvido corresponde à contrapartida de mínimos quadrados do algoritmo de projeção do gradiente. A matriz de autocorrelação do sinal de entrada, estimada pelo critério LS, está agora introduzida no cálculo de $\mathbf{P}(n+1)$, sendo, assim, levada em consideração na operação de projeção sobre o subespaço ortogonal de restrição. Ela representa, em conjunto com as restrições, o lugar geométrico, dado pela interseção do hiperplano de restrições com a função custo, cujo ponto de mínimo é a solução ótima. À medida que os dados vão sendo processados, sua estimativa é atualizada, permitindo uma melhor definição do lugar geométrico em questão e, também, um acompanhamento determinístico das não estacionaridades. Já na técnica CLMS, a informação de correlação do sinal de entrada em \mathbf{P} é representada por uma matriz identidade multiplicada por uma constante (ruído branco), o que define um outro hiperplano fixo no espaço vetorial \mathbb{R}^{MN} . Ou seja, \mathbf{P} sempre considera ruído branco como sinal de entrada ao projetar o vetor de coeficientes no subespaço ortogonal de restrição.

Da mesma forma, o ganho de adaptação $g(n)$ é usado em (3.79) no lugar do passo fixo μ em (3.17). Novamente, a matriz de autocorrelação do sinal de entrada é o fator de diferenciação. Na verdade, esta é a fundamental diferença entre as abordagens clássicas LS e LMS. Vemos que esta diferença é mantida mesmo quando restrições lineares são incorporadas no processo de minimização, conferindo assim aos algoritmos baseados em mínimos quadrados um melhor desempenho em termos de taxa de convergência e precisão.

Entretanto, se observamos atentamente a dedução da Eq. (3.79), constatamos que nenhum cuidado foi tomado com relação aos erros de precisão numérica finita. Para qualquer instante de tempo $(n+1)$, assumimos que o vetor de coeficientes do instante anterior $\mathbf{h}(n)$ satisfaz as

restrições. Ou seja, na recursão da Eq. (3.79) o vetor \mathbf{f} não atua sobre $\mathbf{h}(n)$, exceto na inicialização: $\mathbf{h}(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{f}$. Portanto, da mesma forma que o algoritmo de projeção do gradiente, o algoritmo representado por (3.79) é passível de acumulação de erros de precisão numérica e, conseqüentemente, ao desvio das restrições.

Além disso, esse algoritmo apresenta um segundo problema, ainda mais grave, de perda das restrições. Na recursão de $\Gamma(n)$ [Eq. (3.62)], a partir da qual as outras recursões se originam, a matriz de restrição \mathbf{C} só é introduzida na fase de inicialização: $\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C}$. Isto faz com que, na atualização de $\mathbf{Q}(n)$, as restrições sejam gradativamente esquecidas, até serem perdidas por completo. Assim, tal algoritmo não apresenta qualquer robustez em operações contínuas, com longas seqüências de dados.

Já o problema LCMV é formulado pelo critério de mínimos quadrados como

$$\underset{\mathbf{h}(n)}{\text{minimizar}} \quad \sum_{i=1}^n W^{n-i} y^2(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} [\mathbf{x}^t(i)\mathbf{h}(n)]^2 \quad (3.81a)$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{C}^t\mathbf{h}(n) = \mathbf{f} \quad (3.81b)$$

e tem como solução ótima, no instante de tempo $(n+1)$, a seguinte contrapartida determinística da Eq. (2.40):

$$\mathbf{h}_{\text{LCMV}}(n+1) = \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f}. \quad (3.82)$$

Da mesma forma que no LCID, podemos obter uma recursão sobre o próprio vetor de coeficientes $\mathbf{h}_{\text{LCMV}}(n)$ que, também, corresponderá à contrapartida LS do algoritmo de projeção do gradiente [Eq. (3.16)]. Para certificarmos disto, basta substituímos a Eq. (3.74) na Eq. (3.82):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{Q}(n)\mathbf{f} - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{f} + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n)\mathbf{f} \\ &= \mathbf{h}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n) + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n) \\ &= \mathbf{h}(n) - [\mathbf{I}_{MN} - \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t]\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n) \\ &= \mathbf{h}(n) - \mathbf{P}(n+1)\mathbf{g}(n+1)y(n+1), \end{aligned} \quad (3.83)$$

onde

$$y(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n). \quad (3.84)$$

No entanto, tal recursão não faz sentido: além de possuir uma complexidade computacional maior, estaríamos abrindo mão da oportunidade de usarmos diretamente a própria solução ótima LS na adaptação dos coeficientes, eliminando-se, assim, o problema de acumulação de erros de imprecisão numérica; na Eq. (3.82) não há uma recursão sobre $\mathbf{h}(n)$ e o vetor \mathbf{f} é imposto a cada iteração.

Um algoritmo para o conformador LCMV consiste, então, em obter o ganho de adaptação pelo algoritmo FLS, atualizar $\mathbf{Q}(n)$ [Eqs. (3.69), (3.70) e (3.71)] e adaptar os coeficientes segundo a Eq. (3.82). Entretanto, também teremos aqui o mesmo problema apontado anteriormente de perda das restrições na recursão de $\mathbf{Q}(n)$.

Vejamos como uma versão robusta dos algoritmos LS com restrições pode ser obtida.

3.3.1 O Algoritmo Robusto de Mínimos Quadrados

Primeiramente, trataremos do problema de desvio das restrições no caso LCID, causado pela acumulação dos erros de precisão numérica finita. Como observamos, a acumulação desses erros está relacionada à suposição de que, na recursão, o conjunto de coeficientes, no instante anterior, satisfaz às restrições, o que, geralmente, não é verdade. Sendo assim, com base na Eq. (3.72), o mesmo procedimento aplicado sobre $\mathbf{h}_r(n)$ pode ser usado sobre $\mathbf{h}(n)$.

Adicionando um termo de correção similar ao da Eq.(3.72) na Eq. (3.79), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \mathbf{h}(n) + \mathbf{P}(n+1)\mathbf{g}(n+1)e(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}(n)] \\ &= \mathbf{h}(n) - \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t\mathbf{h}(n) + \mathbf{P}(n+1)\mathbf{g}(n+1)e(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f} \\ &= [\mathbf{I}_{MN} - \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t]\mathbf{h}(n) + \mathbf{P}(n+1)\mathbf{g}(n+1)e(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f} \\ &= \mathbf{P}(n+1)[\mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1)] + \mathbf{q}(n+1), \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde

$$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f}. \quad (3.86)$$

Comparando, então, as Eqs. (3.85) e (3.14), temos agora a versão de mínimos quadrados do algoritmo de Frost. Observe que, da mesma forma que $\mathbf{P}(n+1)$, $\mathbf{q}(n+1)$ depende da matriz de autocorrelação \mathbf{e} , sendo assim, não mais corresponde à componente quiescente, ou de norma mínima, \mathbf{q} .

É importante constatar que a decomposição do vetor de coeficientes ótimos LS numa componente restrita e não restrita se dá através de $\mathbf{P}(n+1)$ e $\mathbf{q}(n+1)$, diferentemente daquela por \mathbf{P} e \mathbf{q} do algoritmo de Frost (Seção 3.2.1). Enquanto \mathbf{P} é o operador de projeção relacionado à \mathbf{q} , $\mathbf{P}(n+1)$ determina a componente no subespaço ortogonal de restrição, que, somada a $\mathbf{q}(n+1)$, dá o vetor de coeficientes ótimos LS $\mathbf{h}_{\text{LCID}}(n+1)$ [Eq. (3.49)]:

$$\mathbf{P}(n+1)\mathbf{h}_{\text{LCID}}(n+1) = \mathbf{h}_{\text{LCID}}(n+1) - \mathbf{q}(n+1). \quad (3.87)$$

A operação de projeção de $\mathbf{P}(n+1)$ também pode ser caracterizada pelas seguintes relações: $\mathbf{P}(n+1)\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{0}_{MN}$; $\mathbf{C}^t\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{0}_{K \times MN}$; $\mathbf{P}^t(n+1)\mathbf{C} = \mathbf{0}_{MN \times K}$; $\mathbf{P}(n+1)\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n+1)$; $\mathbf{P}(n+1)\mathbf{P} = \mathbf{P}$ e $\mathbf{P}(n+1)\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}(n+1)$.

Em termos de complexidade de cálculo, a recursão da Eq. (3.85) não é a forma mais simples de se adaptar os coeficientes do conformador LCID. A atualização de $\mathbf{P}(n)$ e a pós-multiplicação por $\mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)\mathbf{e}(n+1)$ possui uma demanda computacional igual a $(K+1)(MN)^2$ multiplicações. Uma forma computacionalmente mais econômica pode ser obtida reescrevendo a Eq. (3.85) como

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= [\mathbf{I}_{MN} - \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{C}^t] [\mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)\mathbf{e}(n+1)] + \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f} \\ &= \mathbf{h}'(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}'(n+1)], \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde

$$\mathbf{h}'(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)\mathbf{e}(n+1). \quad (3.89)$$

Neste caso, a carga computacional para atualizar $\mathbf{h}(n+1)$ é de $2MNK$ multiplicações.

Observe a identidade da equação acima com a Eq. (3.72). Recaímos na própria solução ótima LS como a melhor maneira de se adaptar os coeficientes do conformador LCID. A única diferença é

que, agora, a recursão sobre o vetor de coeficientes é realizada com relação aos parâmetros restritos $\mathbf{h}(n)$ e $e(n+1)$. Da mesma forma que no conformador LCMV [Eq. (3.82)], o vetor \mathbf{f} atua explicitamente no sentido de corrigir os desvios das restrições na atualização dos coeficientes e evitar a acumulação dos erros de imprecisão numérica.

Nos resta agora, para ambos conformadores LCID e LCMV, tratar do problema de perda gradativa das restrições na recursão de $\mathbf{Q}(n)$. De acordo com a definição de $\mathbf{Q}(n)$ [Eq. (3.54)], a seguinte igualdade é válida:

$$\mathbf{C}^t \mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{I}_K. \quad (3.90)$$

Logo, se $\mathbf{Q}'(n+1)$ denota uma matriz que não satisfaz a igualdade acima, esta pode ser corrigida por

$$\mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{Q}'(n+1) + \mathbf{C}[\mathbf{C}^t \mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t \mathbf{Q}'(n+1)]. \quad (3.91)$$

Observe que o operador linear $(\mathbf{C}^t)^+ = \mathbf{C}[\mathbf{C}^t \mathbf{C}]^{-1}$, usado na Eq. (3.91), não depende da matriz de autocorrelação. Isto não se faz necessário, uma vez que toda informação da correlação do sinal de entrada é inerente à recursão em (3.71), para atualizar $\mathbf{Q}(n)$. A Eq. (3.91) tem apenas o propósito de corrigir pequenas distorções das restrições ocorridas na atualização de $\mathbf{Q}(n)$.

Na verdade, $(\mathbf{C}^t)^+$ corresponde à pseudoinversa de \mathbf{C}^t da teoria de decomposição em valores singulares. No caso da Eq. (3.91), isto quer dizer que a matriz de correção

$$\mathbf{Q}_{\text{cor}}(n+1) = \mathbf{C}[\mathbf{C}^t \mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t \mathbf{Q}'(n+1)] \quad (3.92)$$

tem a menor norma possível, no sentido euclidiano, do problema subdeterminado:

$$\mathbf{C}^t \mathbf{Q}_{\text{cor}}(n+1) = [\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t \mathbf{Q}'(n+1)]. \quad (3.93)$$

Uma outra alternativa é usar, no lugar de $(C^t)^+$, a própria matriz do instante anterior $Q(n)$. Aparentemente, nenhuma diferença tem sido notada nas simulações com relação ao uso de $(C^t)^+$ ou de $Q(n)$ na Eq. (3.91).

É oportuno dizer, agora, que existe um outro ponto passível de instabilidade ainda não mencionado: o emprego de um algoritmo de mínimos quadrados rápido no cálculo do ganho de adaptação $g(n+1)$. Como é sabido, na forma original em que foi concebido, o algoritmo FLS apresenta sérios problemas de instabilidade numérica que, dependendo da precisão, da ordem do filtro transversal, do fator de esquecimento e da característica do sinal de entrada, limitam sua aplicação a pequenas seqüências de dados. No entanto, várias técnicas de estabilização têm sido recentemente propostas na literatura, as quais possibilitam controlar, mesmo em condições adversas, o comportamento do algoritmo nas operações contínuas. Em particular, adotamos o método de estabilização apresentado em [38] por Slock e Kailath. Um estudo detalhado sobre os algoritmos LS rápidos e as técnicas de estabilização existentes é encontrado em [39].

Finalmente, os algoritmos robustos de mínimos quadrados para os conformadores LCID e LCMV são apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2, respectivamente. Cabe ainda dizer que o fato das Eqs. (3.82) e (3.88) dependerem diretamente de f torna a aplicação destes algoritmos muito interessante em situações cujo vetor de resposta às restrições varia com o tempo (restrições lineares ajustáveis). As variações de $f(n)$ são prontamente sentidas na adaptação dos coeficientes pelas Eqs. (3.82) e (3.88).

Tabela 3.1: O algoritmo CFLS para conformadores LCID de banda larga.

➤ Inicialização:

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{Q}(0)\mathbf{f} \text{ e } \mathbf{Q}(0) = \Gamma(0)[\mathbf{C}^t\Gamma(0)]^{-1}$$

onde

$$\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C} \text{ e } \mathbf{R}_{xx}(0) = E_0 \text{diag}_{MN}[\mathbf{I}_M, \text{diag}_M(W^{-1}), \dots, \text{diag}_M(W^{-N+1})].$$

➤ Adaptação:

(1) Novos dados no instante de tempo $n+1$:

$$\chi(n+1) \text{ e } d(n+1).$$

(2) Ganho de adaptação:

$$\mathbf{g}(n+1) \text{ (algoritmo FLS multidimensional estável; [38]).}$$

(3) Atualização de $\mathbf{Q}(n+1)$:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1) \text{ e } \mathbf{v}^t(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n);$$

$$\mathbf{Q}'(n+1) = [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)] \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{u}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)}{1 - \mathbf{v}^t(n+1)\mathbf{u}(n+1)} \right];$$

$$\mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{Q}'(n+1) + \mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t\mathbf{Q}'(n+1)].$$

(4) Sinal de erro *a priori*:

$$e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}^t(n)\mathbf{x}(n+1).$$

(5) Atualização dos coeficientes:

$$\mathbf{h}'(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1);$$

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}'(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}'(n+1)].$$

Tabela 3.2: O algoritmo CFLS para conformadores LCMV de banda larga.

➤ Inicialização:

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{Q}(0)\mathbf{f} \text{ e } \mathbf{Q}(0) = \Gamma(0)[\mathbf{C}^t\Gamma(0)]^{-1}$$

onde

$$\Gamma(0) = \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(0)\mathbf{C} \text{ e } \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(0) = E_0 \text{diag}_{MN}[\mathbf{I}_M, \text{diag}_M(W^{-1}), \dots, \text{diag}_M(W^{-N+1})].$$

➤ Adaptação:

(1) Novos dados no instante de tempo $n+1$:

$$\chi(n+1).$$

(2) Ganho de adaptação:

$$\mathbf{g}(n+1) \text{ (algoritmo FLS multidimensional estável; [38]).}$$

(3) Atualização de $\mathbf{Q}(n+1)$:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1) \text{ e } \mathbf{v}^t(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n);$$

$$\mathbf{Q}'(n+1) = [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)] \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{u}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)}{1 - \mathbf{v}^t(n+1)\mathbf{u}(n+1)} \right];$$

$$\mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{Q}'(n+1) + \mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t\mathbf{Q}'(n+1)].$$

(4) Sinal de saída *a priori*:

$$y(n+1) = \mathbf{h}^t(n)\mathbf{x}(n+1).$$

(5) Atualização dos coeficientes:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f}.$$

Os algoritmos devem ser inicializados segundo o critério LS. No que diz respeito ao algoritmo FLS, para calcular o ganho de adaptação $g(n+1)$, uma inicialização clássica consiste em fazer igual a zero todas as variáveis, exceto a energia do erro de predição progressiva, à qual é atribuída um valor positivo E_0 [18,27]. O correspondente valor para a matriz de autocorrelação do vetor de sinal de entrada é

$$\mathbf{R}_{xx}(0) = E_0 \text{diag}_{MN} \left[\mathbf{I}_M, \text{diag}_M(W^{-1}), \dots, \text{diag}_M(W^{-N+1}) \right]. \quad (3.94)$$

Logo, os algoritmos podem ser inicializados como segue:

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{Q}(0)\mathbf{f} \quad (3.95)$$

e

$$\mathbf{Q}(0) = \Gamma(0) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(0) \right]^{-1}, \quad (3.96)$$

onde

$$\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C}. \quad (3.97)$$

Passemos a analisar o esforço computacional, por iteração, dos algoritmos nas Tabelas 3.1 e 3.2. Para ambos, cerca de $6M^2N+8M^2+2MN+15M+4$ multiplicações e 3 divisões são necessárias no cálculo do ganho de adaptação. Na atualização de $\mathbf{Q}(n+1)$, mais $3MNK^2+3MNK+K^2+2K$ multiplicações e uma divisão são realizadas. Também, o mesmo número de MN multiplicações é gasto na obtenção de $e(n+1)$ ou de $y(n+1)$. Diferentemente, para adaptar os coeficientes, o conformador LCID requer $2MNK+MN$ multiplicações contra MNK do conformador LCMV. Observe que no conformador LCID, pelo fato de termos uma recursão sobre $\mathbf{h}(n)$, o sinal de erro $e(n+1)$ é inerente à adaptação. Já no conformador LCMV, para obter o sinal de saída $y(n+1)$, é necessário calculá-lo separadamente.

Os algoritmos podem ser diretamente acomodados à filtragem adaptativa unidimensional, ou puramente temporal, com restrições lineares. Isto porque, como nos arranjos/conformadores para sinais de banda larga, o vetor de dados de entrada também possui a propriedade de deslocamento temporal, o que permite calcular o ganho de adaptação por intermédio de um algoritmo FLS.

As Tabelas 3.3 e 3.4 descrevem as versões unidimensionais dos algoritmos LCID e LCMV, respectivamente, cujos cálculos de complexidade computacional seguem aqueles do caso multidimensional, substituindo MN por N e considerando que agora o algoritmo FLS calcula $g(n+1)$ com $8N+22$ multiplicações e 3 divisões.

Com relação à filtragem adaptativa puramente espacial (arranjos/conformadores para sinais de banda estreita), a adequação dos algoritmos não é direta. Mesmo havendo uma perfeita analogia entre um arranjo linear de sensores eqüidistantes e um filtro FIR de um único canal, os sucessivos vetores $\chi(n)$ não satisfazem a propriedade do deslocamento temporal, devido à própria natureza da propagação e amostragem espacial da onda. Portanto, o ganho de adaptação $g(n+1)$ não pode ser obtido de maneira rápida. Neste caso em específico, fazemos uso, então, do procedimento RLS clássico:

$$g(n+1) = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\chi(n+1)}{W + \chi^T(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\chi(n+1)} \quad (3.98)$$

e

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) = \frac{1}{W} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - g(n+1)\chi^T(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \right], \quad (3.99)$$

ao custo computacional de $4M^2+2M$ multiplicações e uma divisão, desconsiderando qualquer propriedade de simetria de $\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)$.

Os algoritmos completos LCID e LCMV para arranjos/conformadores de banda estreita são mostrados nas Tabelas 3.5 e 3.6, respectivamente. Novamente aqui, o número de multiplicações e divisões nas etapas de 3 a 5 pode ser obtido reportando ao cálculo dos algoritmos para sinais de banda larga com $N=1$.

Tabela 3.3: O algoritmo CFLS para filtragem LCID temporal (unidimensional).

➤ **Inicialização:**

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{Q}(0)\mathbf{f} \text{ e } \mathbf{Q}(0) = \Gamma(0)[\mathbf{C}^t\Gamma(0)]^{-1}$$

onde

$$\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C} \text{ e } \mathbf{R}_{xx}(0) = E_0 \text{diag}_N[1, W^{-1}, \dots, W^{-N+1}].$$

➤ **Adaptação:**

(1) Novos dados no instante de tempo $n+1$:

$$x(n+1) \text{ e } d(n+1).$$

(2) Ganho de adaptação:

$$\mathbf{g}(n+1) \text{ (algoritmo FLS unidimensional estável; Apêndice A).}$$

(3) Atualização de $\mathbf{Q}(n+1)$:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1) \text{ e } \mathbf{v}^t(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n);$$

$$\mathbf{Q}'(n+1) = [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)] \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{u}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)}{1 - \mathbf{v}^t(n+1)\mathbf{u}(n+1)} \right];$$

$$\mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{Q}'(n+1) + \mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t\mathbf{Q}'(n+1)].$$

(4) Sinal de erro *a priori*:

$$e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}^t(n)\mathbf{x}(n+1).$$

(5) Atualização dos coeficientes:

$$\mathbf{h}'(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1);$$

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}'(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}'(n+1)].$$

Tabela 3.4: O algoritmo CFLS para filtragem LCMV temporal (unidimensional).

➤ **Inicialização:**

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{Q}(0)\mathbf{f} \text{ e } \mathbf{Q}(0) = \Gamma(0)[\mathbf{C}^t\Gamma(0)]^{-1}$$

onde

$$\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C} \text{ e } \mathbf{R}_{xx}(0) = E_0 \text{diag}_N[1, W^{-1}, \dots, W^{-N+1}].$$

➤ **Adaptação:**

(1) Novo dado no instante de tempo $n+1$:

$$x(n+1).$$

(2) Ganho de adaptação:

$$\mathbf{g}(n+1) \text{ (algoritmo FLS unidimensional estável; Apêndice A).}$$

(3) Atualização de $\mathbf{Q}(n+1)$:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1) \text{ e } \mathbf{v}^t(n+1) = \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{Q}(n);$$

$$\mathbf{Q}'(n+1) = [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)] \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{u}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)}{1 - \mathbf{v}^t(n+1)\mathbf{u}(n+1)} \right];$$

$$\mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{Q}'(n+1) + \mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t\mathbf{Q}'(n+1)].$$

(4) Sinal de saída *a priori*:

$$y(n+1) = \mathbf{h}^t(n)\mathbf{x}(n+1).$$

(5) Atualização dos coeficientes:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f}.$$

Tabela 3.5: O algoritmo CFLS para conformadores LCID de banda estreita (filtragem espacial).

➤ **Inicialização:**

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{Q}(0)\mathbf{f} \text{ e } \mathbf{Q}(0) = \Gamma(0)[\mathbf{C}^t\Gamma(0)]^{-1}$$

onde

$$\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C} \text{ e } \mathbf{R}_{xx}(0) = E_0 \mathbf{I}_M .$$

➤ **Adaptação:**

(1) Novos dados no instante de tempo $n+1$:

$$\boldsymbol{\chi}(n+1) \text{ e } d(n+1).$$

(2) Ganho de adaptação:

$$\mathbf{g}(n+1) = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\boldsymbol{\chi}(n+1)}{W + \boldsymbol{\chi}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\boldsymbol{\chi}(n+1)};$$

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) = \frac{1}{W} [\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \mathbf{g}(n+1)\boldsymbol{\chi}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)].$$

(3) Atualização de $\mathbf{Q}(n+1)$:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1) \text{ e } \mathbf{v}^t(n+1) = \boldsymbol{\chi}^t(n+1)\mathbf{Q}(n);$$

$$\mathbf{Q}'(n+1) = [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)] \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{u}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)}{1 - \mathbf{v}^t(n+1)\mathbf{u}(n+1)} \right];$$

$$\mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{Q}'(n+1) + \mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t\mathbf{Q}'(n+1)].$$

(4) Sinal de erro *a priori*:

$$e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}^t(n)\boldsymbol{\chi}(n+1).$$

(5) Atualização dos coeficientes:

$$\mathbf{h}'(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1);$$

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}'(n+1) + \mathbf{Q}(n+1)[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{h}'(n+1)].$$

Tabela 3.6: O algoritmo CFLS para conformadores LCMV de banda estreita (filtragem espacial).

➤ Inicialização:

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{Q}(0)\mathbf{f} \text{ e } \mathbf{Q}(0) = \Gamma(0)[\mathbf{C}^t\Gamma(0)]^{-1}$$

onde

$$\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C} \text{ e } \mathbf{R}_{xx}(0) = E_0 \mathbf{I}_M .$$

➤ Adaptação:

(1) Novos dados no instante de tempo $n+1$:

$$\boldsymbol{\chi}(n+1).$$

(2) Ganho de adaptação:

$$\mathbf{g}(n+1) = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\boldsymbol{\chi}(n+1)}{W + \boldsymbol{\chi}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\boldsymbol{\chi}(n+1)};$$

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) = \frac{1}{W} [\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \mathbf{g}(n+1)\boldsymbol{\chi}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)].$$

(3) Atualização de $\mathbf{Q}(n+1)$:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1) \text{ e } \mathbf{v}^t(n+1) = \boldsymbol{\chi}^t(n+1)\mathbf{Q}(n);$$

$$\mathbf{Q}'(n+1) = [\mathbf{Q}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)] \left[\mathbf{I}_K + \frac{\mathbf{u}(n+1)\mathbf{v}^t(n+1)}{1 - \mathbf{v}^t(n+1)\mathbf{u}(n+1)} \right];$$

$$\mathbf{Q}(n+1) = \mathbf{Q}'(n+1) + \mathbf{C}[\mathbf{C}^t\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{I}_K - \mathbf{C}^t\mathbf{Q}'(n+1)].$$

(4) Sinal de saída *a priori*:

$$y(n+1) = \mathbf{h}^t(n)\boldsymbol{\chi}(n+1).$$

(5) Atualização dos coeficientes:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{Q}(n+1)\mathbf{f} .$$

3.4 COMENTÁRIOS

Neste capítulo propusemos um novo algoritmo LS para processamento espacial/temporal adaptativo com restrições lineares. O algoritmo é exato e preserva - frente aos algoritmos baseados no método do gradiente - as vantagens próprias da técnica de mínimos quadrados, no que diz respeito à taxa de convergência, precisão e independência das características dos sinais processados. Uma complexidade computacional proporcional ao número de coeficientes adaptados na estrutura é obtida, enquanto que no GSC_RLS ela é proporcional ao quadrado do número de parâmetros atualizados.

No próximo capítulo avaliamos o desempenho do algoritmo por simulações. Além disso, especulamos a aplicação da técnica proposta, aliando o uso de restrição ao método LS, em outros problemas de processamento de sinais, a fim de lhes proporcionar uma abordagem original e eficiente.

Capítulo 4

Resultados de Simulação, Novas Aplicações e Perspectivas

Primeiramente, neste capítulo, verificamos o desempenho do algoritmo CFLS através de resultados obtidos por simulação. Para tal, aplicamos a técnica proposta ao problema de filtragem temporal com restrições lineares e às antenas adaptativas.

Em seguida, mostramos que a condição de simetria, ou anti-simetria, dos coeficientes de um filtro FIR pode ser imposta pelas restrições. Em decorrência disto, propomos o uso do algoritmo FLS para filtros adaptativos com fase linear, mantendo-se a complexidade computacional ainda proporcional ao número de coeficientes.

Por fim, em sendo as restrições o princípio básico do método de análise espectral por variância mínima, estudamos sua implementação de forma adaptativa.

No transcorrer do capítulo, algumas perspectivas são levantadas com relação ao uso de restrições lineares na solução de problemas de processamento digital de sinais.

4.1 VERIFICAÇÃO DE ROBUSTEZ

Nesta seção avaliamos não só o desempenho do algoritmo proposto, comparado ao do algoritmo de Frost, como também sua robustez a erros de precisão numérica finita e perda das restrições. Para tal, utilizamos ambos os algoritmos - CFLS e CLMS - na adaptação dos coeficientes de um filtro LCMV temporal com uma seqüência de entrada contendo um milhão de amostras.

A seqüência é constituída de amostras de um sinal, composto pela soma de três senóides com fases aleatórias e frequências normalizadas: 0,15; 0,1625 e 0,35. Um ruído branco é também adicionado a uma relação sinal-ruído (SNR *Signal-to-Noise Ratio*) de 20 dB.

O filtro transversal unidimensional em questão é assumido ter onze coeficientes ($N=11$), sujeito à restrição que a magnitude de sua resposta em frequência seja um (0 dB) nas frequências normalizadas 0,1 e 0,25. Estas restrições são impostas através de quatro ($K=4$) restrições pontuais como segue:

$$C^t = \begin{Bmatrix} 1 & \cos(0,2\pi) & \dots & \cos[(N-1)0,2\pi] \\ 1 & \cos(0,5\pi) & \dots & \cos[(N-1)0,5\pi] \\ 0 & \text{sen}(0,2\pi) & \dots & \text{sen}[(N-1)0,2\pi] \\ 0 & \text{sen}(0,5\pi) & \dots & \text{sen}[(N-1)0,5\pi] \end{Bmatrix}_{4 \times 11} \quad (4.1)$$

e

$$f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

No que diz respeito aos algoritmos, o passo de adaptação do algoritmo CLMS é fixado em $\mu=0,1$ na tentativa de atingir uma rápida convergência inicial. No algoritmo CFLS, adotamos como fator de esquecimento exponencial $W=0,99$ e, como energia inicial do erro de predição, $E_0=0,1$.

A evolução da norma do vetor diferença entre os coeficientes adaptativos e a solução ótima LCMV [Eq. (2.40)] é mostrada na Fig. 4.1 para ambos algoritmos. Tais curvas foram obtidas pela média aritmética de 100 ensaios, cada um usando uma seqüência de entrada aleatória, decorrente de diferentes realizações do processo de entrada, através da utilização, ao acaso, de uma seqüência de ruído branco e de valores de fase nas senóides.

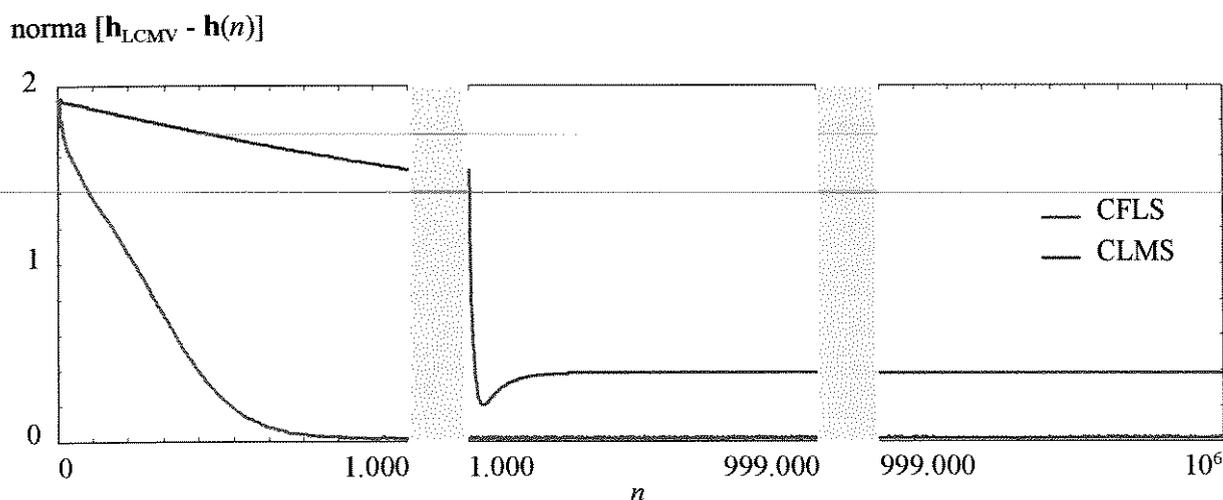


Fig. 4.1: Evolução dos coeficientes.

Observe que, antes de 1.000 iterações, a derivação dos coeficientes ótimos pela técnica CFLS atinge um valor bem menor (praticamente zero) do que aquele alcançado pela abordagem CLMS. Cabe ressaltar que uma escala não-uniforme foi usada sobre a reta horizontal representando, no gráfico, a evolução do tempo (eixo das abscissas); entre o intervalo [1.000_999.000] cada ponto considerado corresponde a 1.000 iterações. Podemos verificar, então, que a convergência do algoritmo de Frost para um valor um pouco aquém do ótimo ocorre somente após 165.000 iterações, confirmando, assim, o melhor desempenho do algoritmo proposto em termos de taxa de convergência e precisão.

O aspecto de precisão também pode ser observado na Fig. 4.2, onde as magnitudes das respostas em frequência dos dois filtros obtidos, depois de um milhão de iterações, são traçadas. Notamos, aqui, que o algoritmo CFLS consegue atenuar com maior eficiência que o algoritmo de Frost as senóides nas frequências 0,15 e 0,1625.

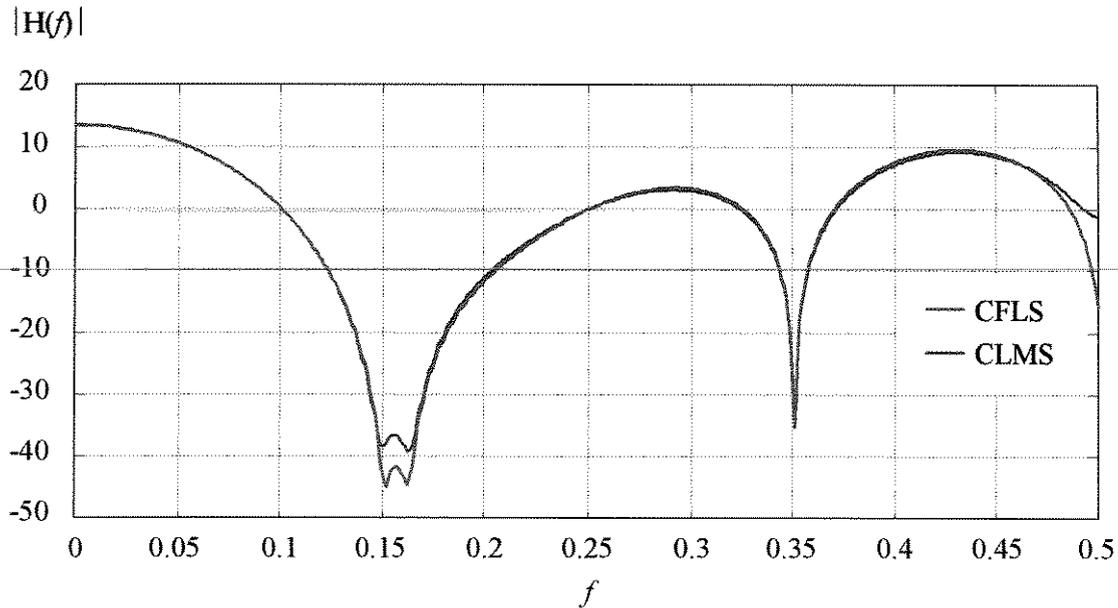


Fig. 4.2: Magnitude da resposta em frequência dos filtros após 10^6 iterações.

Por fim, também é importante constatar que as restrições são bem satisfeitas por ambos algoritmos, o que comprova robustez aos erros de imprecisão aritmética e desvio das restrições.

Vejamos, em seguida, como o algoritmo se comporta quando aplicado às antenas adaptativas.

4.2 APLICAÇÃO EM CONFORMADORES DE BANDA LARGA

Para ilustrar o desempenho do algoritmo CFLS numa aplicação típica de antenas adaptativas, um arranjo/conformador LCMV para sinais de banda larga é considerado. O arranjo linear é formado por quatro sensores ($M=4$) isotrópicos e cada filtro transversal do conformador possui seis coeficientes ($N=6$).

As ondas incidindo sobre o arranjo são provenientes de duas fontes de interferência e uma fonte desejada, cujas características estão apresentadas na Tabela 4.1. Tais características foram sintetizadas por soma de senóides [Eq. (2.24)]. Um ruído branco com distribuição uniforme é também adicionado ao sinal na saída de cada sensor, com SNR=30 dB.

Tabela 4.1: Características das fontes.

Fontes	Potência (dB)	Direção	Banda
Desejada	0	30°	$0,175 \leq f \leq 0,225$
Interferência I	-3	30°	$0,375 \leq f \leq 0,425$
Interferência II	-3	0°	$0,175 \leq f \leq 0,225$

Sete restrições autovetoriais ($K=7$) são impostas aos coeficientes para assegurar uma resposta espacial e temporal coerente com as características do sinal desejado. Na determinação dessas restrições, onze pontos de frequência, igualmente espaçados, foram utilizados para descrever a banda do sinal numa região do espaço correspondendo a um ângulo de visada de 2°, centrado na direção de chegada. Esta região espacial, por sua vez, foi amostrada nos ângulos 29°, 30° e 31°. Ao todo, trinta e três restrições pontuais, da forma como descrita pela Eq. (2.72), foram usadas na geração das restrições autovetoriais. Para cada ponto de frequência e direção, a condição de resposta de fase linear [Eq. (2.77)] também foi assumida.

Novamente, realizamos uma comparação entre os algoritmos CFLS e CLMS, tendo como referência a solução ótima LCMV obtida pelo critério de mínima média quadrática [Eq. (2.40)]. A Fig. 4.3 mostra a evolução da potência do sinal de saída, subtraída pelo seu valor ótimo. Mais uma vez, podemos constatar o melhor desempenho em termos de taxa de convergência da técnica CFLS.

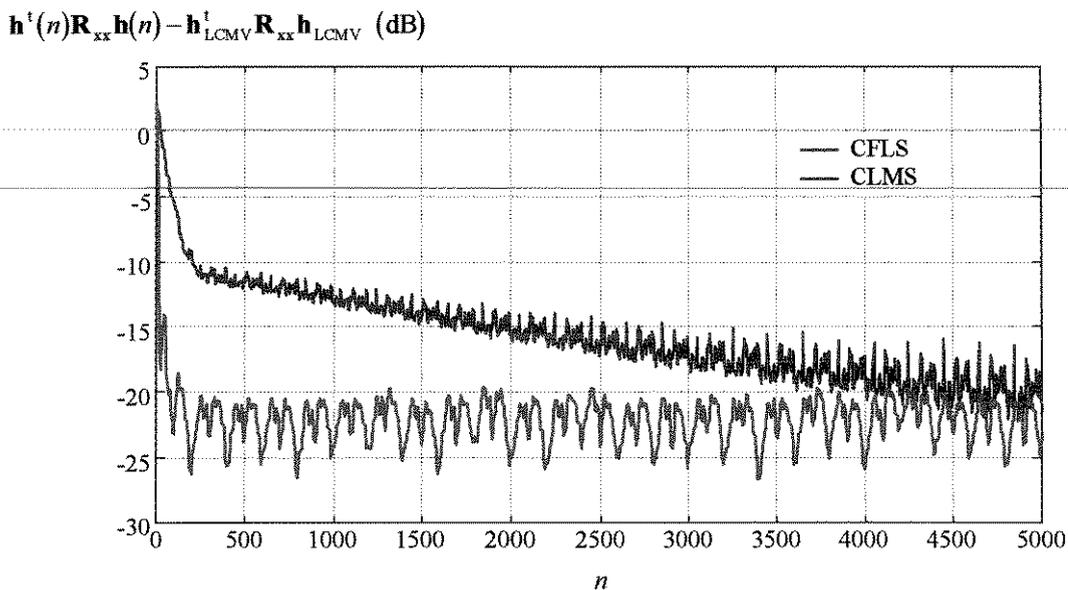


Fig. 4.3: Evolução da potência do sinal de saída.

Ao final de 5.000 iterações, as magnitudes das respostas em frequência dos filtros obtidos pelos algoritmos CFLS e CLMS são apresentadas nas Figs. 4.4(a) e 4.4(b) para $\theta=30^\circ$ e $\theta=0^\circ$, respectivamente. Observa-se uma melhor estimação do filtro ótimo pelo algoritmo CFLS quando a resposta é avaliada na direção do sinal de interesse. Já para $\theta=0^\circ$ podemos dizer que os algoritmos tiveram um desempenho semelhante. Para uma melhor apreciação, os ganhos obtidos, respectivamente, para o sinal, as interferências e o ruído estão relacionados na Tabela 4.2.

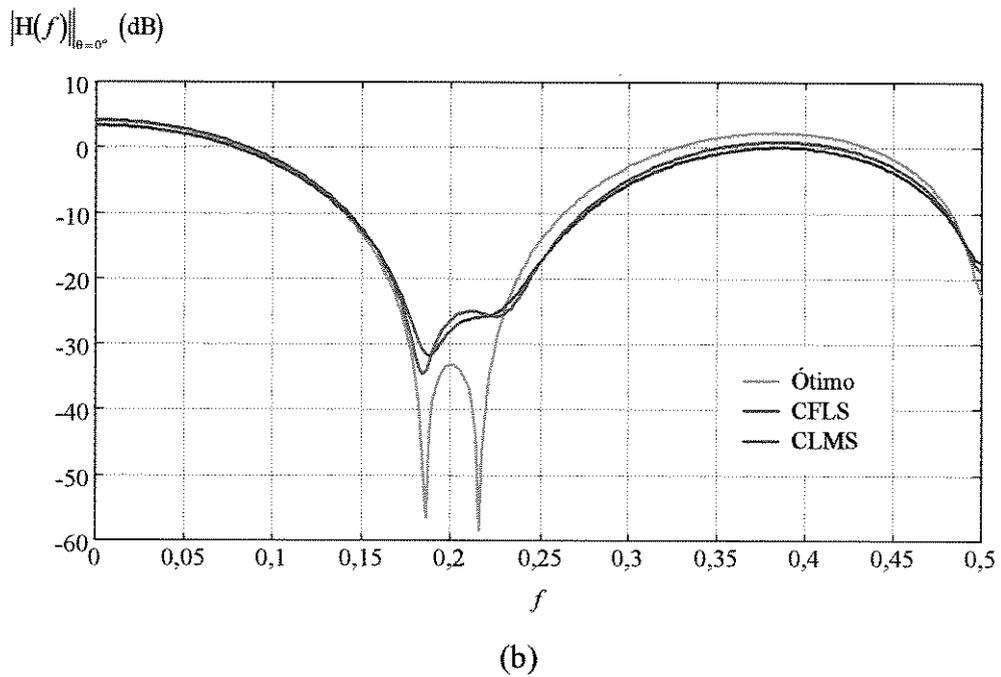
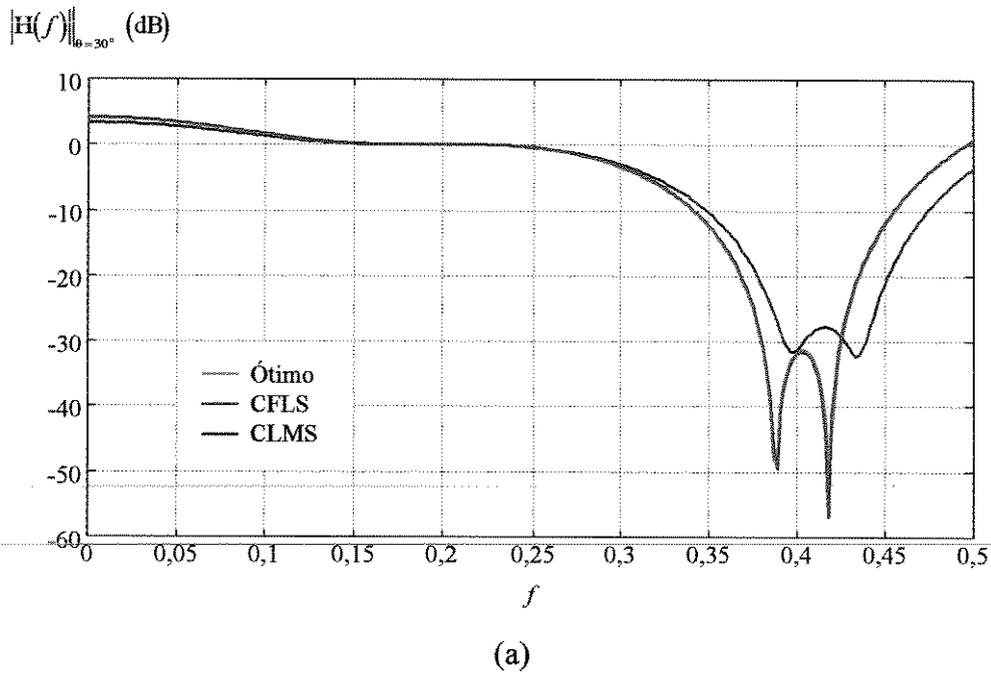


Fig. 4.4: Magnitudes das respostas em frequência para (a) $\theta=30^\circ$ e (b) $\theta=0^\circ$.

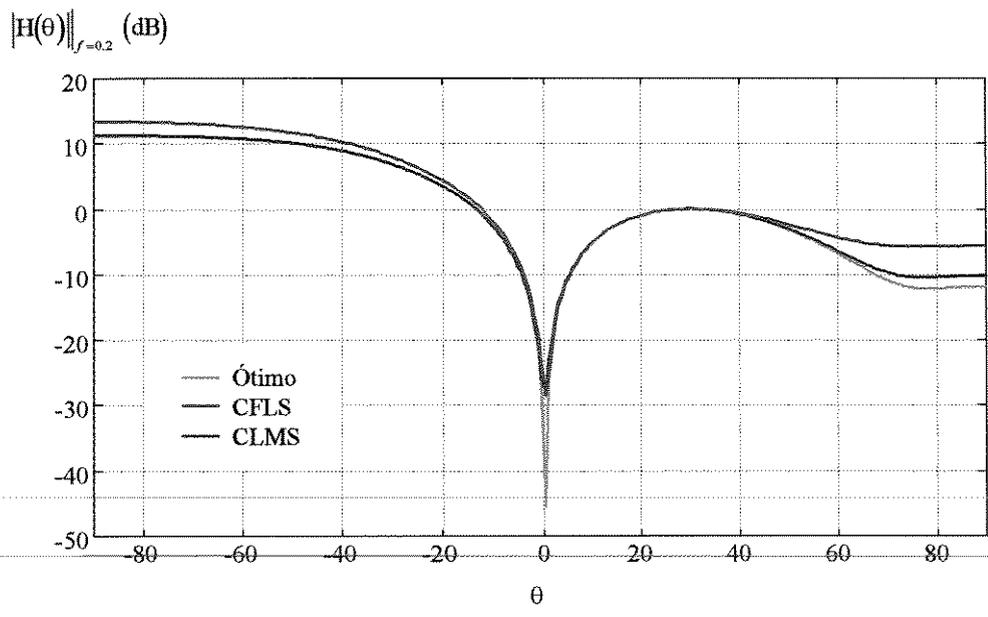
Tabela 4.2: Ganhos de sinal, interferências e ruído (em dB).

Conformador	Sinal	Interferência		Ruído
		$\theta=30^\circ$	$\theta=0^\circ$	
Ótimo	0,0055	-31,5360	-33,3870	5,1679
CFLS	0,0013	-31,4975	-26,8414	6,8302
CLMS	0,0017	-25,1273	-26,9587	4,3908

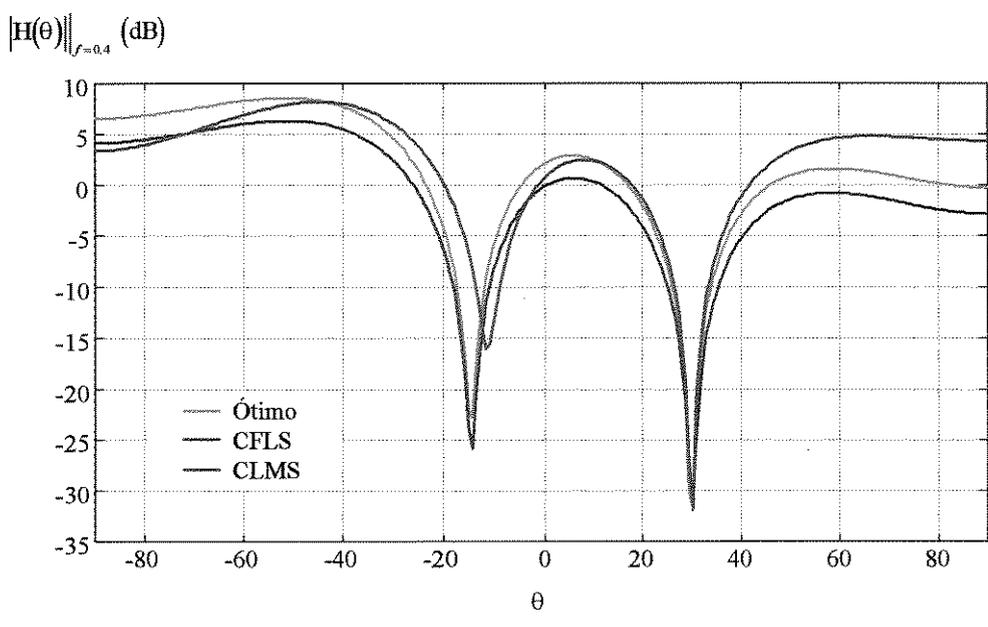
Nas Figs. 4.5(a) e 4.5(b) são apresentadas as magnitudes das respostas em ângulo para $f=0,2$ e $f=0,4$, respectivamente. As Figs. 4.6(a) e 4.6(b) mostram os mesmos resultados em forma de padrão de diretividade dos arranjos/conformadores. Pode-se dizer que, na anulação das interferências a 0° e 30° , o desempenho dos algoritmos CFLS e de Frost foi equivalente.

Por fim, a título de comparação, as magnitudes das respostas dos filtros ótimo, CFLS e CLMS, em toda extensão de frequência e ângulo, estão ilustradas nas Figs. 4.7(a), 4.7(b) e 4.7(c), respectivamente.

O conjunto de figuras apresentado também nos permite observar a robustez de ambos algoritmos na manutenção fiel das restrições temporais e espaciais. Cabe ainda dizer que os resultados foram obtidos levando-se em consideração a média aritmética de 50 ensaios e os seguintes valores foram atribuídos aos parâmetros dos algoritmos: $\mu=0,01$; $W=0,99$ e $E_0=0,1$.

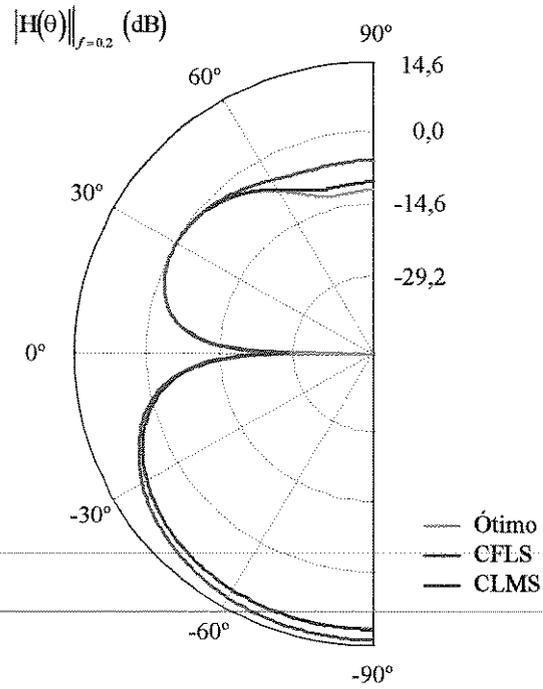


(a)

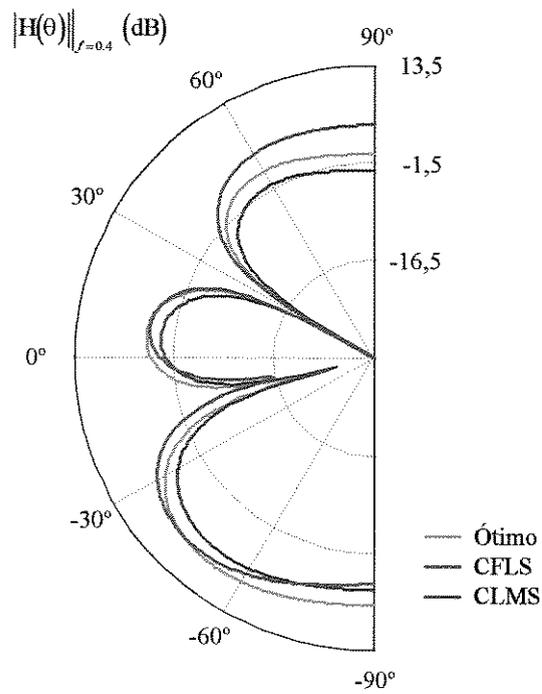


(b)

Fig. 4.5: Magnitudes das respostas em ângulo para (a) $f=0,2$ e (b) $f=0,4$.



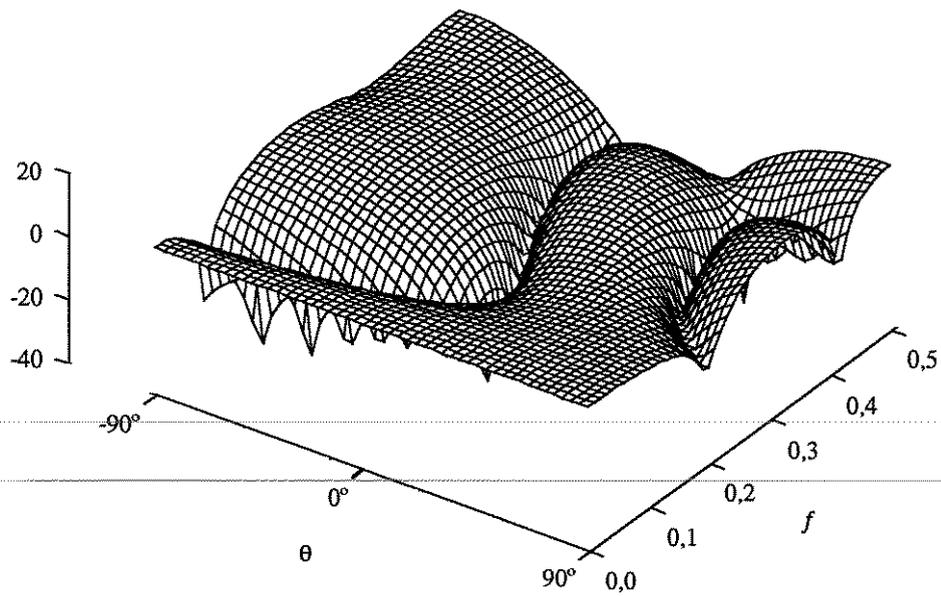
(a)



(b)

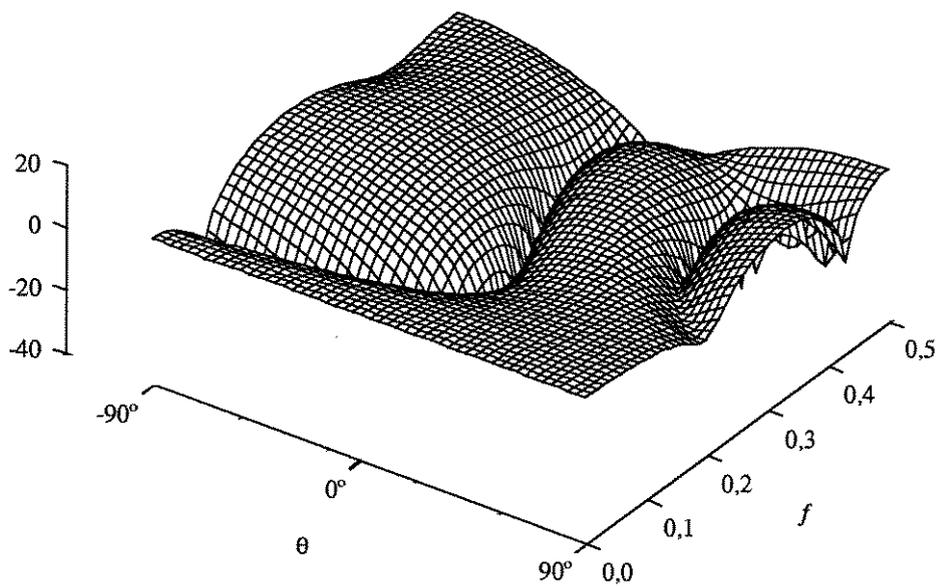
Fig. 4.6: Padrões de diretividade dos arranjos/conformadores para (a) $f=0,2$ e (b) $f=0,4$.

$|H_{LCMV}(\theta, f)|$ (dB)



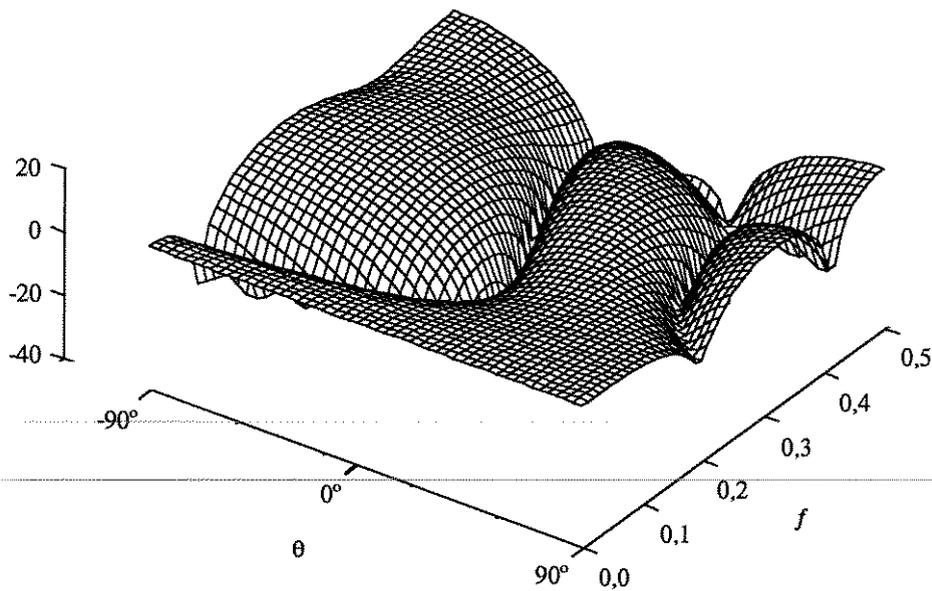
(a)

$|H_{CHLS}(\theta, f)|$ (dB)



(b)

$$|H_{\text{CLMS}}(\theta, f)| \text{ (dB)}$$



(c)

Fig. 4.7: Magnitudes das respostas em frequência e ângulo: (a) ótimo, (b) CFLS e (c) CLMS.

A seguir, passaremos a investigar algumas vertentes alternativas de pesquisa, que decorrem da aplicação apropriada de um determinado conjunto de restrições e do algoritmo proposto.

4.3 FILTRAGEM ADAPTATIVA COM FASE LINEAR

Em várias aplicações de filtragem digital unidimensional, é interessante preservar uma resposta de fase linear em filtros FIR. Tal característica evita distorção de fase do sinal na banda passante e tem como condição suficiente que a função de transferência Z do filtro seja um polinômio simétrico ou anti-simétrico [35].

Equalização de canal, identificação de sistemas e recuperação de raias espectrais são exemplos típicos onde a propriedade de fase linear pode ser de grande interesse. Em muitos casos, faz-se necessário, também, que os parâmetros do filtro sejam obtidos por um procedimento adaptativo, a fim de fornecer um método útil para operação em tempo real e em ambientes não-estacionários.

Diferentes abordagens apresentadas na literatura levam a diferentes algoritmos LS tendo, como principal fator de comparação entre eles, a complexidade computacional [40-42]. Nesta seção, partindo de uma abordagem original, vamos mostrar que o filtro de Fase Linear (FL) pode ser determinado, a cada iteração, pela seguinte equação:

$$\mathbf{h}_{\text{FL}}(n+1) = \frac{1}{2}[\mathbf{h}(n+1) \pm \mathbf{J}\mathbf{h}(n+1)], \quad (4.3)$$

onde

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1) \quad (4.4)$$

é o vetor de coeficientes não restritos obtido pelo algoritmo FLS e

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

é a matriz reflexão. A pré-multiplicação de uma matriz por \mathbf{J} inverte a ordem de suas linhas, enquanto que a pós-multiplicação atua sobre as colunas; quanto a vetores, inverte-se a ordem de seus elementos pré-multiplicando um vetor coluna ou pós-multiplicando um vetor linha por \mathbf{J} . Assim, observando as Eqs. (4.3) e (4.4), vemos que uma complexidade computacional proporcional ao número de coeficientes do filtro pode ser conseguida na adaptação de um filtro de fase linear.

A condição de simetria (+) ou anti-simetria (-) da resposta ao impulso de um filtro digital FIR a N coeficientes é descrita por

$$h_i = \pm h_{N-i-1}, \quad (4.6)$$

para $i = 0, 1, \dots, N/2 - 1$, quando N for par, ou $i = 0, 1, \dots, (N - 3)/2$ sendo N ímpar. Esta condição sobre os coeficientes de um filtro adaptativo pode ser facilmente reproduzida pelas restrições fazendo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & \mp 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mp 1 & \dots & 0 \\ \mp 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{N \times (N-1)/2} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(N-1)/2} \\ \mathbf{0}^t \\ \mp \mathbf{J}_{(N-1)/2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

para N ímpar, ou

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} \\ \mp \mathbf{J}_{N/2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

quando N for par, e

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

em ambos os casos. Logo, ao impormos que $\mathbf{C}^t \mathbf{h}(n) = \mathbf{f}$, a Eq. (4.6) é satisfeita para qualquer instante de tempo e o problema é reduzido ao caso particular de filtragem adaptativa LCID unidimensional. Observe que agora, nas expressões (4.7) e (4.8), o sinal menos (-) corresponde à condição de simetria, enquanto que a condição de anti-simetria é dada pelo sinal mais (+).

Vale dizer também que essa imposição de fase linear, diferentemente daquela descrita pela Eq. (2.77), não está atrelada a uma restrição de magnitude da resposta em frequência. No entanto, a imposição da propriedade de fase linear pela simetria da resposta ao impulso em arranjos/conformadores para sinais de banda larga fica geralmente impossibilitada, devido à não uniformidade dos atrasos nesta estrutura.

A aplicação do algoritmo CFLS da Tabela 3.3 ao problema em questão tem uma complexidade computacional ainda elevada, proporcional a N^2 , uma vez que o número de restrições K é igual a $N/2$ (N par) ou $(N - 1)/2$ (N ímpar). A fim de reduzi-la, passemos a explorar a simplicidade das restrições, aliada a uma implementação indireta do filtro.

Como vimos nos Capítulos 2 e 3, o problema em questão pode ser representado pela estrutura GSC da Fig. 4.8. Observando que $\mathbf{q} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^t\mathbf{C})^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{0}$, uma vez que $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, e fazendo uso da matriz \mathbf{P} do algoritmo de Frost como a matriz de bloqueio das restrições, o esquema de filtragem não restrita é simplificado, na forma mostrada na Fig. 4.9.

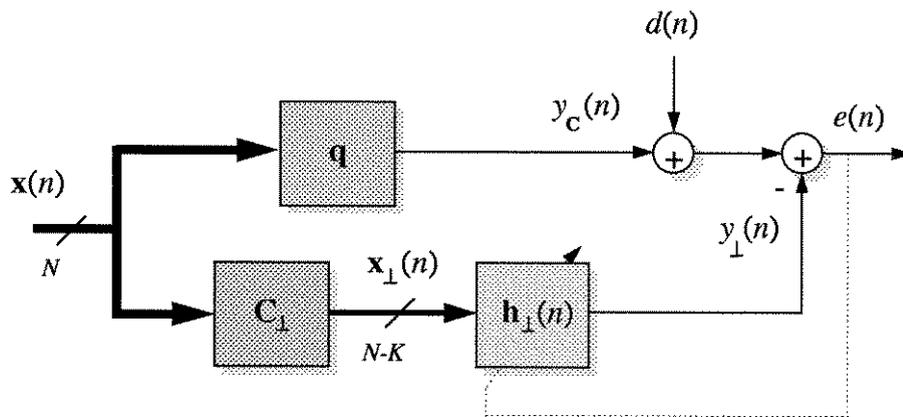


Fig. 4.8: A representação GSC do problema LCID.

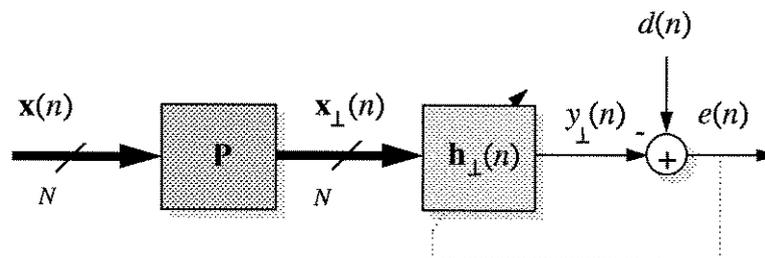


Fig. 4.9 O GSC para restrição de fase linear tendo \mathbf{P} como matriz de bloqueio de sinal.

Mesmo assim, vale observar que o algoritmo FLS não pode ser diretamente aplicado para adaptar o vetor de coeficientes $\mathbf{h}_\perp(n)$ na Fig. 4.9, uma vez que

$$\mathbf{x}_\perp(n+1) = \mathbf{P}\mathbf{x}(n+1) \quad (4.10)$$

não possui a propriedade de deslocamento temporal.

Entretanto, por substituição direta da matriz de restrição \mathbf{C} , temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{I}_N - \mathbf{C}(\mathbf{C}^t\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^t \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}_N \pm \mathbf{J}_N), \end{aligned} \quad (4.11)$$

exceto na condição de anti-simetria para N ímpar. Neste caso:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_N - \mathbf{J}_N + 2\mathbf{u}\mathbf{u}^t), \quad (4.12)$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-1)/2} \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ \mathbf{0}_{(N-1)/2} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Na Eq. (4.11), novamente há inversão de sinal na representação da condição imposta sobre os coeficientes: o sinal positivo (+) significa simetria, enquanto o negativo (-) indica anti-simetria.

Portanto, levando-se em consideração a Eq. (4.11), o esquema da Fig. 4.9 pode ser representado pela forma ilustrada na Fig. 4.10. Claramente, a propriedade de deslocamento temporal é satisfeita pelo vetor de dados de entrada do processo de adaptação e o algoritmo FLS pode, agora, ser diretamente empregado.

Para confirmarmos matematicamente esse resultado, vamos calcular o filtro ótimo pelo critério de mínima média quadrática (LMS). O sinal de erro é dado por

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \mathbf{h}_\perp^t \mathbf{P}\mathbf{x}(n) \\ &= d(n) - \frac{1}{2} \mathbf{h}_\perp^t \mathbf{x}(n) \mp \frac{1}{2} \mathbf{h}_\perp^t \mathbf{J}\mathbf{x}(n) \\ &= d(n) - \mathbf{h}_{FL}^t \mathbf{x}(n), \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{FL} &= \frac{1}{2}[\mathbf{I} \pm \mathbf{J}] \mathbf{h}_{\perp} \\ &= \mathbf{P} \mathbf{h}_{\perp}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

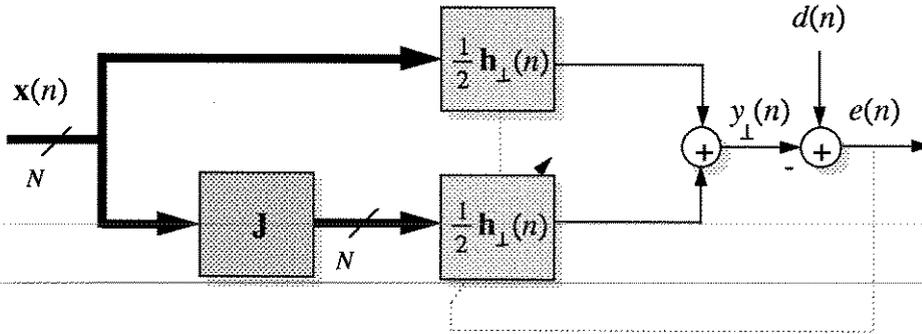


Fig. 4.10: O GSC da Fig. 4.9 fazendo uso da Eq. (4.11).

Então, pelo critério LMS, a função custo a ser minimizada pode ser descrita por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\mathbf{h}_{\perp}] &= E\{e^2(n)\} \\ &= \sigma_d^2 - \frac{1}{2} \mathbf{p}_{xd}^t \mathbf{h}_{\perp} \mp \frac{1}{2} \mathbf{p}_{xd}^t \mathbf{J} \mathbf{h}_{\perp} - \frac{1}{2} \mathbf{h}_{\perp}^t \mathbf{p}_{xd} \mp \frac{1}{2} \mathbf{h}_{\perp}^t \mathbf{J} \mathbf{p}_{xd} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathbf{h}_{\perp}^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}_{\perp} \pm \frac{1}{4} \mathbf{h}_{\perp}^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{J} \mathbf{h}_{\perp} \pm \frac{1}{4} \mathbf{h}_{\perp}^t \mathbf{J} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}_{\perp} + \frac{1}{4} \mathbf{h}_{\perp}^t \mathbf{J} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{J} \mathbf{h}_{\perp}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \mathcal{J}[\mathbf{h}_{\perp}]}{\partial \mathbf{h}_{\perp}} = -\mathbf{p}_{xd} \mp \mathbf{J} \mathbf{p}_{xd} + \frac{1}{2} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}_{\perp} \pm \frac{1}{2} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{J} \mathbf{h}_{\perp} \pm \frac{1}{2} \mathbf{J} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}_{\perp} + \frac{1}{2} \mathbf{J} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{J} \mathbf{h}_{\perp}. \quad (4.17)$$

Igualando a zero a Eq. (4.17), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}_{\perp} \pm \frac{1}{2} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{J} \mathbf{h}_{\perp} \pm \frac{1}{2} \mathbf{J} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h}_{\perp} + \frac{1}{2} \mathbf{J} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{J} \mathbf{h}_{\perp} = \mathbf{p}_{xd} \pm \mathbf{J} \mathbf{p}_{xd}. \quad (4.18)$$

Fazendo uso do fato de que $\mathbf{J}\mathbf{J}=\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{J}=\mathbf{R}_{xx}$ (\mathbf{R}_{xx} é simétrica e persimétrica ao mesmo tempo) nos dois últimos termos do lado esquerdo da equação acima, temos que

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{h}_{\perp} \pm \mathbf{R}_{xx}\mathbf{J}\mathbf{h}_{\perp} = \mathbf{p}_{xd} \pm \mathbf{J}\mathbf{p}_{xd} . \quad (4.19)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\perp} \pm \mathbf{J}\mathbf{h}_{\perp} &= \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd} \pm \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{p}_{xd} \\ &= \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd} \pm \mathbf{J}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd} , \end{aligned} \quad (4.20)$$

uma vez que $\mathbf{J}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{J} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}$ (o operador inverso conserva as propriedades de simetria e persimetria de uma matriz).

Observe que o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.20) corresponde à equação normal da solução ótima LMS quando nenhuma restrição é imposta aos coeficientes do filtro:

$$\mathbf{h}_{sr} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{p}_{xd} . \quad (4.21)$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{FL} &= \frac{1}{2}[\mathbf{I} \pm \mathbf{J}]\mathbf{h}_{\perp} \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{h}_{sr} \pm \mathbf{J}\mathbf{h}_{sr}] . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Portanto, no contexto adaptativo, podemos utilizar o algoritmo FLS para calcular o vetor de coeficientes irrestritos e a Eq. (4.22) para obtermos o filtro de fase linear. Assim, chegamos ao resultado procurado:

$$\mathbf{h}_{FL}(n+1) = \frac{1}{2}[\mathbf{h}(n+1) \pm \mathbf{J}\mathbf{h}(n+1)] , \quad (4.23)$$

onde

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1) \quad (4.24)$$

e

$$e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}^t(n)\mathbf{x}(n+1) . \quad (4.25)$$

Logicamente, somente os primeiros $N/2$ (N par), ou $(N-1)/2$ (N ímpar), coeficientes de $h_{FL}(n+1)$ precisam ser calculados na Eq. (4.23), sendo que, para N ímpar,

$$h_{FL;(N-1)/2}(n+1) = h_{(N-1)/2}(n+1). \quad (4.26)$$

Tendo este resultado em mente, fica fácil ver, também, que para N ímpar e condição de anti-simetria o mesmo se aplica, uma vez que a matriz \mathbf{P} é dada pela Eq. (4.12).

Um resumo do procedimento para adaptar os coeficientes de um filtro de fase linear pelo algoritmo FLS é apresentado na Tabela 4.3. A carga computacional, por iteração, é a mesma do algoritmo FLS ($9N+23$ multiplicações e 3 divisões, no caso do algoritmo estável de Slock e Kailath [38]), acrescida de mais $N/2$ (N par), ou $(N-1)/2$ (N ímpar), multiplicações.

Em se tratando de predição com fase linear, propomos a utilização da estrutura da Fig. 4.11, onde estão representados ambos filtros de erro de predição: *forward* e *backward*. No caso *forward*, o sinal de $x(n)$ no somatório é positivo, enquanto que o sinal de $x(n-N+1)$ depende se a condição for de simetria (-) ou anti-simetria (+). A combinação oposta [$\mp x(n)$ e $+x(n-N+1)$] corresponde à predição *backward*.

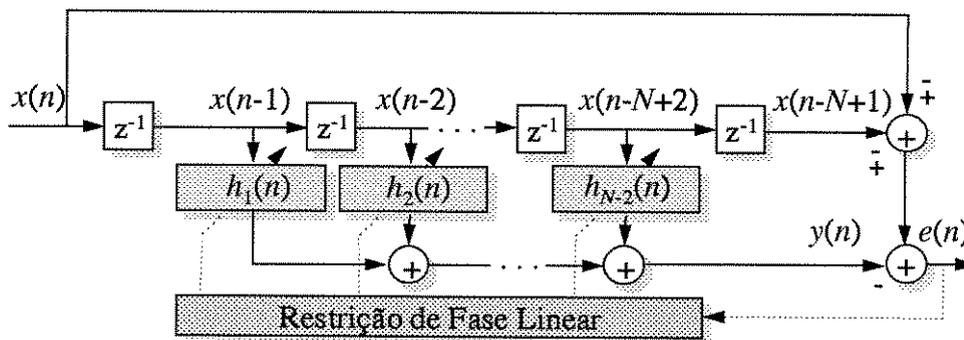


Fig. 4.11: Estrutura proposta para o filtro de erro de predição *forward* e *backward* de fase linear.

Tabela 4.3: Algoritmo FLS para filtragem adaptativa de fase linear.

➤ Inicialização:

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}.$$

➤ Adaptação:

(1) Novos dados no instante de tempo $n+1$:

$$x(n+1) \text{ e } d(n+1).$$

(2) Ganho de adaptação:

$$\mathbf{g}(n+1) \text{ (algoritmo FLS unidimensional estável; Apêndice A).}$$

(3) Sinal de erro *a priori*:

$$e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}^t(n)\mathbf{x}(n+1).$$

(4) Atualização de $\mathbf{h}(n+1)$:

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1).$$

(5) Atualização dos coeficientes $\mathbf{h}_{\text{FL}}(n+1)$:

i) Condição de simetria:

$$h_i^{(\text{FL})}(n+1) = h_{N-i-1}^{(\text{FL})}(n+1) = \frac{[h_i(n+1) + h_{N-i-1}(n+1)]}{2},$$

ii) Condição de anti-simetria:

$$h_i^{(\text{FL})}(n+1) = \frac{[h_i(n+1) - h_{N-i-1}(n+1)]}{2} \text{ e } h_{N-i-1}^{(\text{FL})}(n+1) = -h_i^{(\text{FL})}(n+1).$$

Se N é par:

$$i = 0, 1, \dots, N/2 - 1;$$

Do contrário:

$$i = 0, 1, \dots, (N-3)/2 \text{ e } h_{\text{FL};(N-1)/2}(n+1) = h_{(N-1)/2}(n+1).$$

Uma vez, então, que o problema é tratado de forma equivalente ao da filtragem de identificação com fase linear, o procedimento descrito na Tabela 4.3 pode ser diretamente aplicado. Cabe observar que, agora, o sinal desejado é composto pelas amostras $x(n)$ e $x(n-N+1)$, e que, para um filtro de erro de predição de ordem $N-1$, o número de coeficientes adaptados sob restrição é igual a $N-2$. Logo, a matriz C de restrição de fase linear, para N ímpar, corresponde àquela da Eq. (4.7), substituindo N por $N-2$; para N par, C é dada por (4.8).

Por fim, vale dizer que o vetor de coeficientes do filtro de Erro de Predição *forward* ou *backward* é definido por

$$\mathbf{h}_{EP}(n+1) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ -\mathbf{h}_{FL}(n+1) \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Além disto, na condição de simetria

$$\mathbf{h}_{FL}^{(F)}(n+1) = \mathbf{h}_{FL}^{(B)}(n+1) \quad (4.28)$$

enquanto que na condição de anti-simetria

$$\mathbf{h}_{FL}^{(F)}(n+1) = -\mathbf{h}_{FL}^{(B)}(n+1), \quad (4.29)$$

onde (F) refere-se ao vetor \mathbf{h}_{FL} da predição *Forward* e (B) da predição *Backward*.

É oportuno salientar que o resultado descrito pela Eq. (4.23) é recente e que, inevitavelmente, traz outras implicações no desenvolvimento de algoritmos rápidos para predição linear. Tais implicações fazem parte dos tópicos de pesquisa que pretendemos dar continuidade.

Com o propósito de verificarmos a veracidade do procedimento proposto, vamos aplicá-lo na obtenção adaptativa de um filtro de erro de predição *forward* de fase linear. A ordem do filtro em questão é assumida ser seis ($N=7$), com imposição de fase linear pela simetria de seus coeficientes.

Já o sinal de entrada é composto pela soma de três senóides reais contaminadas por ruído branco. As frequências normalizadas das senóides são 0,1; 0,15 e 0,4, e a relação senóide-ruído é de 10 dB. Quanto ao algoritmo FLS: $W=0,99$ e $E_0=0,1$.

A evolução da potência do sinal de erro é apresentada na Fig. 4.12, onde, mais uma vez, podemos constatar a característica de alta taxa de convergência dos algoritmos LS. A Fig. 4.13 mostra a curva de convergência dos coeficientes $\mathbf{h}_{FL}(n)$, a fim de observarmos que a condição de simetria é satisfeita durante toda a adaptação, como não poderia deixar de ser.

A magnitude da resposta em frequência do filtro de erro de predição [Eq. (4.27)], após convergência ($n=500$), é apresentada na Fig. 4.14. Três vales são observados, próximos às frequências das senóides, já que a condição de simetria $h_0 = h_6 = 1$ impõe que os zeros do filtro de erro de predição estejam sobre a circunferência de raio unitário. Para melhor visualizarmos isto, mostramos, na Fig. 4.15, o posicionamento dos zeros ao longo de toda a adaptação. Observe que uma polarização, com respeito à determinação das frequências de entrada, ocorre devido à presença do ruído.

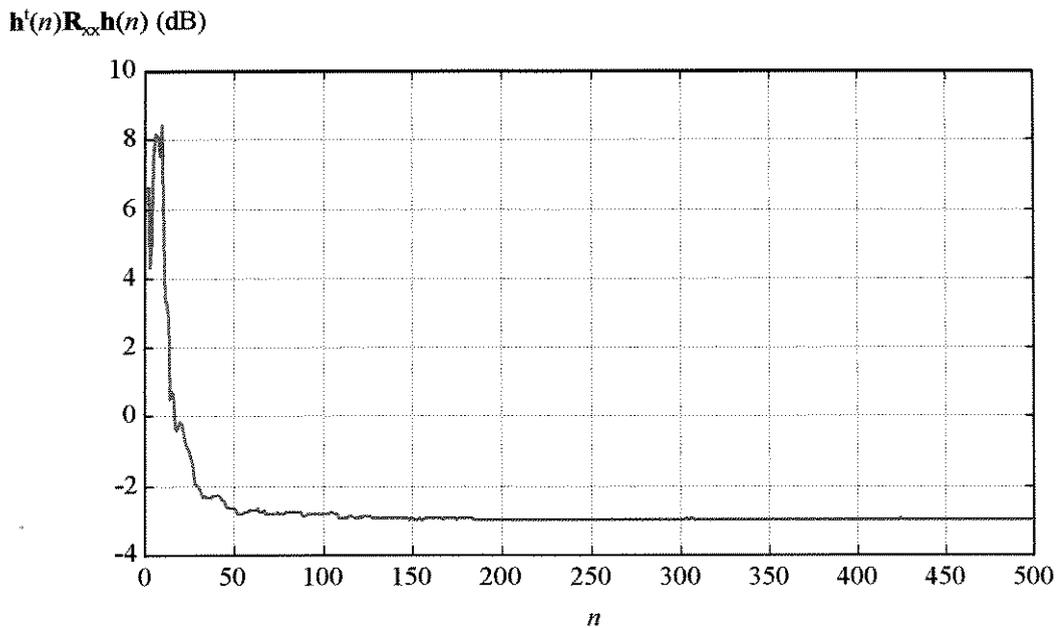


Fig. 4.12: Evolução da potência do sinal de erro.

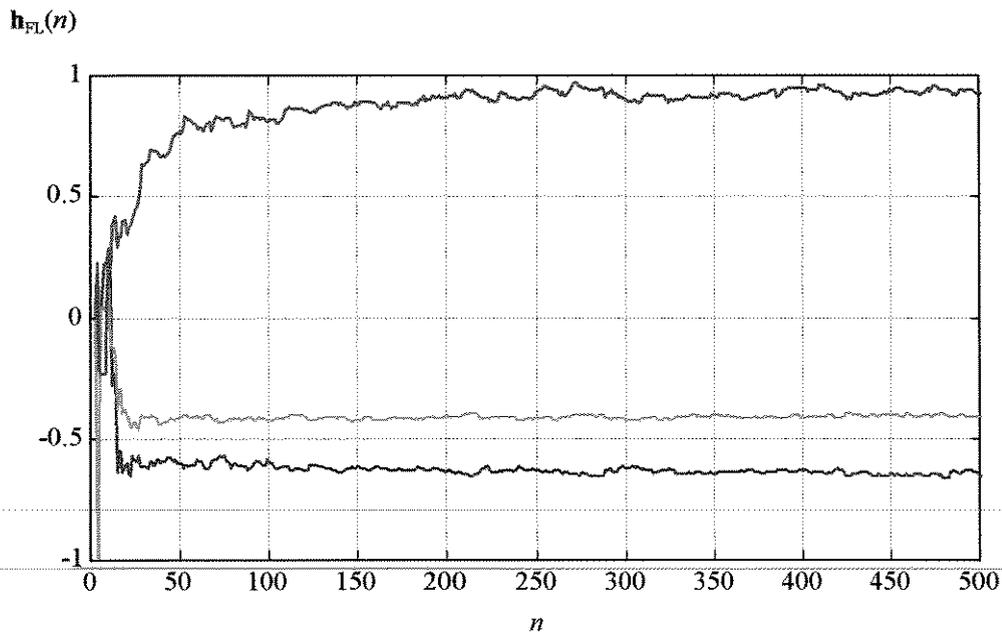


Fig. 4.13: Curva de convergência dos coeficientes $h_{FL}(n)$.

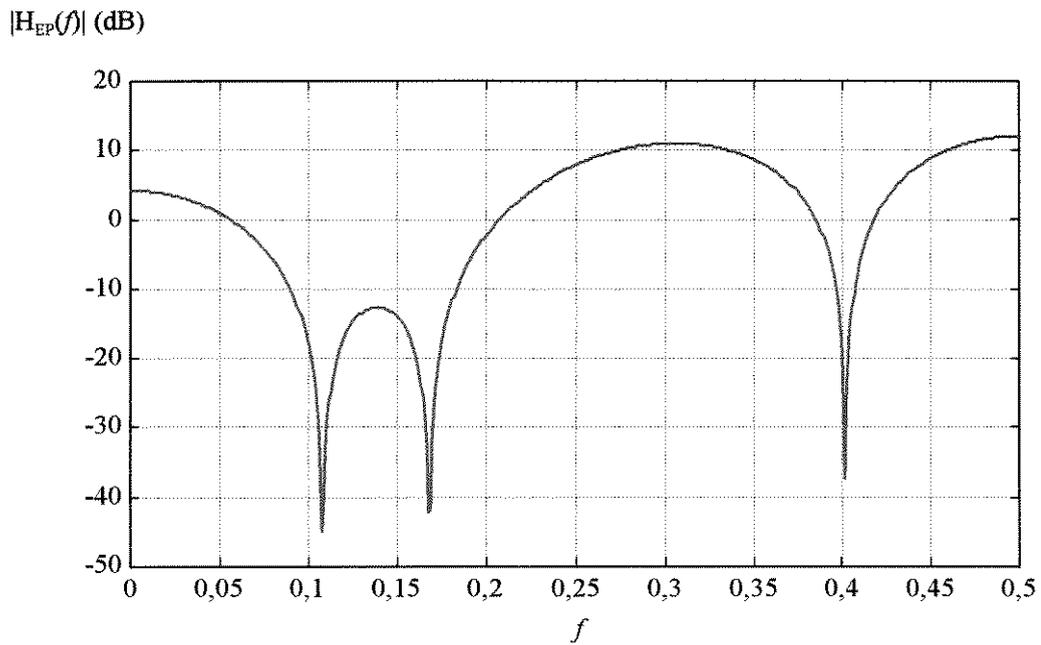


Fig. 4.14: Magnitude da resposta em frequência de $h_{EP}(n)$ para $n=500$.

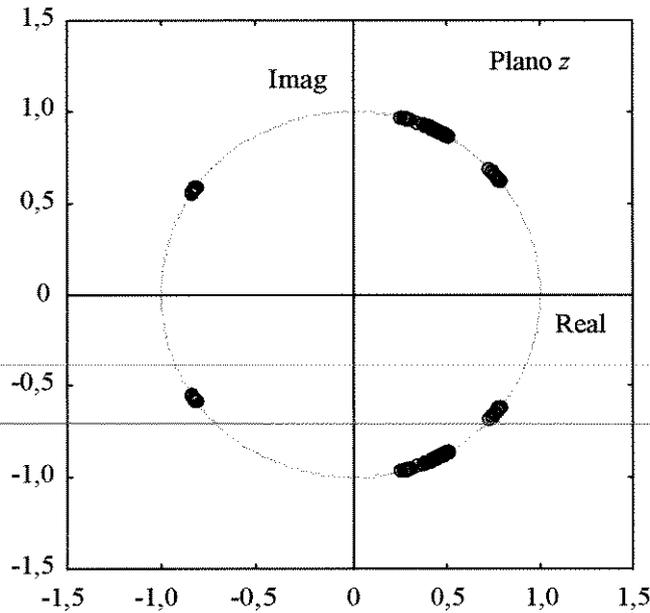


Fig. 4.15: Posicionamento dos zeros no plano z .

Finalmente, a resposta de fase do filtro de erro de predição é apresentada na Fig. 4.16, onde constatamos sua característica linear. Também, apenas para confirmarmos que o procedimento proposto equivale à solução LS ótima, damos, na Fig. 4.17, a curva de convergência dos coeficientes $\mathbf{h}_{\text{FL}}(n)$, utilizando o algoritmo CFLS. Para $n=500$, os valores obtidos são

$$\mathbf{h}_{\text{FL}}^{(\text{CFLS})}(n) \Big|_{n=500} = [0,9271 \quad -0,4079 \quad -0,6522 \quad -0,4079 \quad 0,9271], \quad (4.30)$$

enquanto que, pelo procedimento proposto na Tabela 4.3:

$$\mathbf{h}_{\text{FL}}(n) \Big|_{n=500} = [0,9270 \quad -0,4079 \quad -0,6522 \quad -0,4079 \quad 0,9270]. \quad (4.31)$$

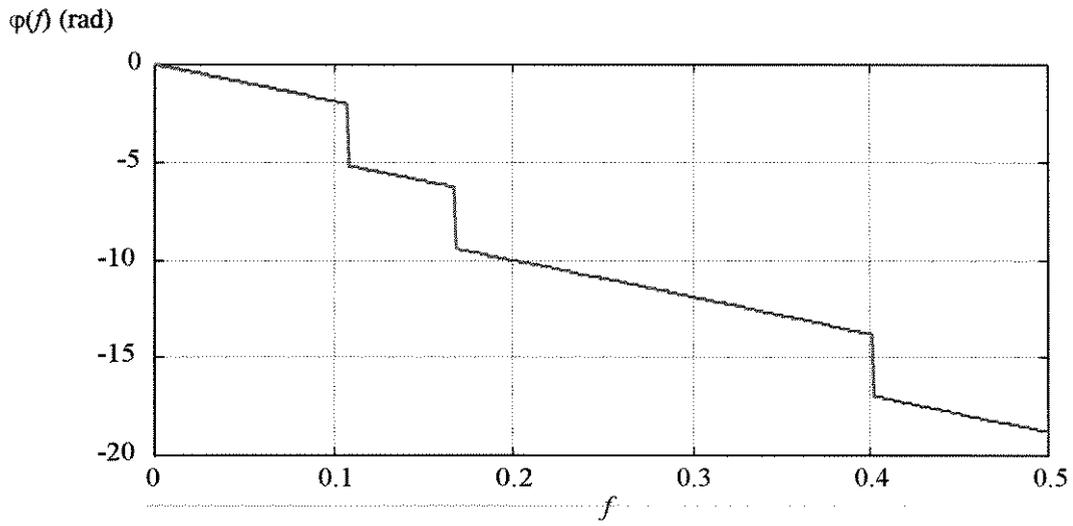


Fig. 4.16: Resposta de fase do filtro de erro de predição.

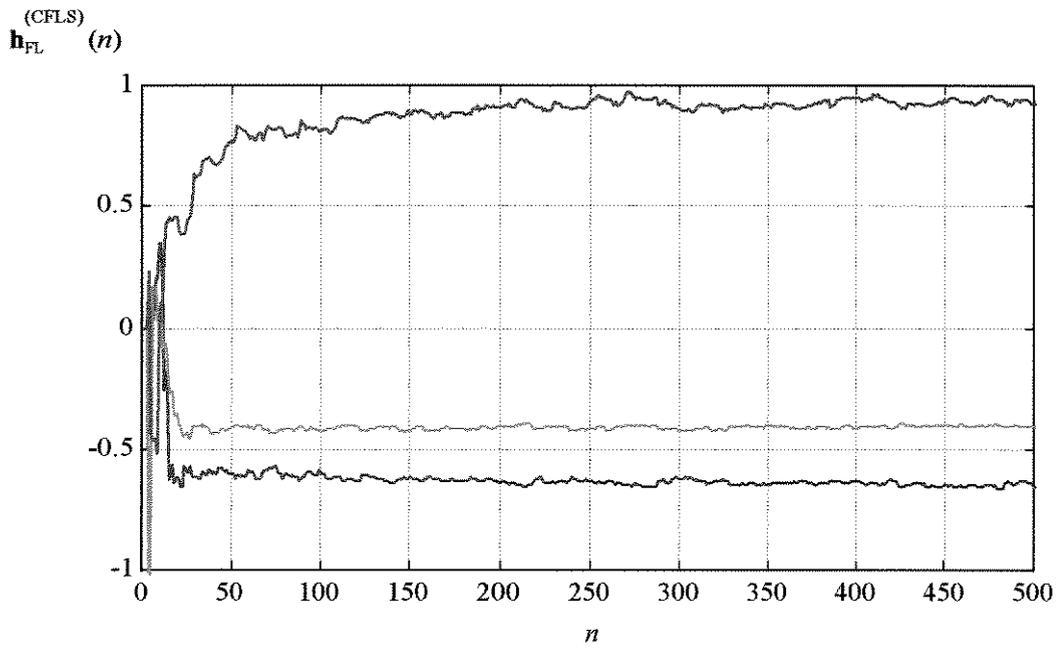


Fig. 4.17: Curva de convergência dos coeficientes $\mathbf{h}_{FL}^{(CFLS)}(n)$.

As restrições propostas aqui, para filtros de fase linear, são uma pequena amostra do potencial que acreditamos que elas podem exercer na solução de importantes problemas de processamento de sinais. Um outro exemplo provém da teoria apresentada no Capítulo 2. As especificações de resposta em frequência de um filtro digital FIR unidimensional, que se deseja projetar, podem ser transcritas pelas restrições e a solução quiescente da Eq. (2.45) diretamente empregada para determinar sua resposta impulsiva. É de nosso interesse verificar não só isto, mas também o aproveitamento dessa teoria em projetos de filtros FIR de duas dimensões (2-D) para processamento de imagens. Este tipo de especulação é motivada por recentes publicações [43,44].

A seguir, veremos uma extensão de aplicação da técnica LS desenvolvida no Capítulo 3, que nos permitirá fazer mais considerações envolvendo o uso de restrições.

4.4 O MÉTODO DE ANÁLISE ESPECTRAL POR VARIÂNCIA MÍNIMA

O método de variância mínima (*MV_Minimum Variance*) é considerado como uma das importantes técnicas paramétricas de análise espectral, ditas de alta resolução, por atingirem um melhor desempenho na estimação de uma frequência, ou de um número de onda, do que as técnicas baseadas no método clássico de Fourier. Na verdade, seu nível de resolução situa-se entre aquele do estimador espectral auto-regressivo (*AR_AutoRegressive*) e dos estimadores clássicos [28,29].

Essencialmente, o estimador espectral MV decorre da aplicação do princípio de filtragem MVDR (*Minimum-Variance Distortionless Response*) de Capon a um filtro transversal FIR unidimensional, com o propósito de analisar o conteúdo de frequência de uma série temporal. Para melhor descrevê-lo, considere o filtro com parâmetros complexos da Fig. 4.18.

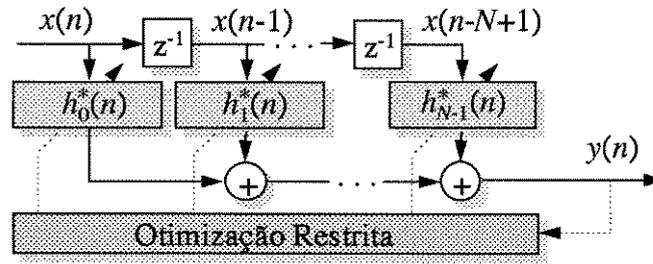


Fig. 4.18: Filtro transversal FIR restrito com parâmetros complexos.

Como vimos no Capítulo 2, os coeficientes do filtro MVDR são determinados pelo seguinte problema de minimização restrita:

$$\text{minimizar} \quad \sigma_y^2 = E\{|y(n)|^2\} = \mathbf{h}^H E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} \mathbf{h} = \mathbf{h}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} \quad (4.32a)$$

\mathbf{h}

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{h} = 1, \quad (4.32b)$$

onde

$$\mathbf{e}^H(\omega_0) = [1 \quad e^{-j\omega_0} \quad \dots \quad e^{-j(N-1)\omega_0}] \quad (4.33)$$

e o superíndice H denota a dupla operação de transposição e conjugação de um vetor ou matriz.

Neste caso, o vetor de coeficientes ótimos é dado por [Eq. (2.40)]

$$\mathbf{h}_{\text{MVDR}} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)}{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)}. \quad (4.34)$$

A restrição em (4.32b) tem o papel de garantir que, na minimização da variância do sinal de saída, a magnitude da resposta do filtro é igual a um (0 dB) na frequência angular ω_0 . Isso faz com que o filtro se ajuste ao conteúdo espectral do processo de entrada na frequência ω_0 , cancelando as componentes em outras frequências. Somente a componente na frequência ω_0 atinge a saída do filtro sem ser distorcida. Isto significa que a variância do sinal na saída do filtro MVDR é uma boa indicação da potência da componente do sinal de entrada em torno da frequência de ganho unitário.

Pela simples substituição de (4.34) em (4.32b), temos que

$$\sigma_{y_{\text{MVDR}}}^2(\omega_0) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega_0) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{e}(\omega_0)}, \quad (4.35)$$

sendo obtida uma diferente variância ótima para cada ω_0 selecionado. A partir de (4.35), observamos, então, que o estimador espectral MV é definido como

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{e}(\omega)} \quad (4.36)$$

para $-\pi < \omega \leq \pi$. Levando em conta os diferentes valores de ω na equação acima, podemos levantar a curva de densidade espectral de potência do processo $\mathbf{x}(n)$, suposto estacionário e ergódico. Na prática, uma vez não conhecida a matriz de autocorrelação \mathbf{R}_{xx} , ela é estimada a partir dos dados observados das realizações do processo sob análise. Também, cabe dizer que a resolução espectral é função da quantidade de pontos de frequência considerada na análise e da ordem de \mathbf{R}_{xx} .

O método de análise espectral MV pode ser implementado adaptativamente, por intermédio do algoritmo FLS, a fim de possibilitar o acompanhamento das variações do espectro de processos não-estacionários, bem como aplicações em tempo real. Para isto, consideremos a estimativa LS da variância do sinal de saída, dada por

$$\sigma_y^2(n) = \frac{\sum_{i=1}^n W^{n-i} y^2(i)}{\sum_{i=1}^n W^{n-i}}. \quad (4.37)$$

Desenvolvendo a expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(n) &= \frac{\sum_{i=1}^n W^{n-i} [\mathbf{h}^t(n) \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^t(i) \mathbf{h}(n)]}{\sum_{i=1}^n W^{n-i}} \\ &= \frac{\mathbf{h}^t(n) \mathbf{R}_{xx}(n) \mathbf{h}(n)}{q(n)}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} [\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^T(i)] \quad (4.39)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(n) &= \sum_{i=1}^n W^{n-i} \\ &= W \mathbf{q}(n-1) + 1. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substituindo, então, o vetor de coeficientes ótimos LS [Eq. (3.82)]:

$$\mathbf{h}_{\text{MVDR}}(n) = \frac{\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n)\mathbf{e}(\omega_0)}{\mathbf{e}^H(\omega_0)\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n)\mathbf{e}(\omega_0)} \quad (4.41)$$

na Eq. (4.38), obtemos que

$$\sigma_y^2(n) = \frac{1}{\mathbf{q}(n)\mathbf{e}^H(\omega_0)\boldsymbol{\gamma}(n,\omega_0)}, \quad (4.42)$$

onde

$$\boldsymbol{\gamma}(n,\omega_0) = \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}(n)\mathbf{e}(\omega_0). \quad (4.43)$$

Logo, um estimador LS de densidade espectral de potência, para n amostras disponíveis, é dado por

$$\mathcal{P}_{\text{LS}}(n,\omega) = \frac{1}{\mathbf{q}(n)\mathbf{e}^H(\omega)\boldsymbol{\gamma}(n,\omega)}. \quad (4.44)$$

A implementação adaptativa do método MV consiste, então, em obter, a todo instante de tempo n e para cada uma das frequências consideradas no espectro, o vetor $\boldsymbol{\gamma}(n,\omega)$ e utilizar a Eq. (4.44) para estimar o espectro de potência. Da Eq. (3.62), observe que $\boldsymbol{\gamma}(n,\omega)$ pode ser calculado recursivamente pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\gamma}(n+1,\omega) = \frac{1}{W} [\boldsymbol{\gamma}(n,\omega) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^H(n+1)\boldsymbol{\gamma}(n,\omega)]. \quad (4.45)$$

Já o ganho de adaptação $\mathbf{g}(n+1)$ é o mesmo para todos os valores de ω , sendo obtido pelo algoritmo FLS.

Passemos a tratar, agora, do problema de robustez a erros de imprecisão numérica e esquecimento das restrições nas recursões de $\gamma(n, \omega)$. A partir da Eq. (4.43), temos que

$$\mathbf{x}^H(n)\boldsymbol{\gamma}(n, \omega) = \mathbf{g}^H(n)\mathbf{e}(\omega). \quad (4.46)$$

Vemos, assim, que $\boldsymbol{\gamma}(n, \omega)$ pode ser interpretado como o vetor de coeficientes de um filtro transversal FIR adaptativo, cuja entrada é $\mathbf{x}(n)$ e o sinal desejado na saída é $\mathbf{g}^H(n)\mathbf{e}(\omega)$ (Fig. 4.19). Logo, uma correção para $\boldsymbol{\gamma}(n, \omega)$, baseada na teoria clássica de filtragem adaptativa LS, pode ser obtida como

$$\boldsymbol{\gamma}(n+1, \omega) = \boldsymbol{\gamma}'(n+1, \omega) + \mathbf{g}(n+1)e_\gamma(n+1, \omega), \quad (4.47)$$

onde

$$e_\gamma(n+1, \omega) = \mathbf{g}^H(n+1)\mathbf{e}(\omega) - \mathbf{x}^H(n+1)\boldsymbol{\gamma}'(n+1, \omega) \quad (4.48)$$

e $\boldsymbol{\gamma}'(n+1, \omega)$ denota o vetor $\boldsymbol{\gamma}(n+1, \omega)$ calculado em (4.45).

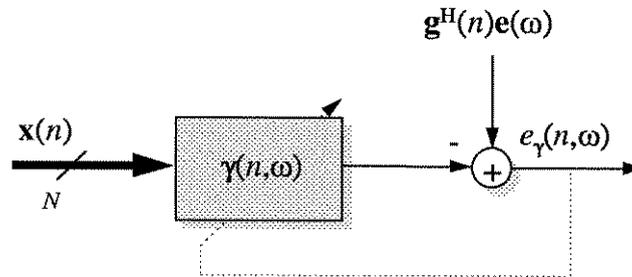


Fig. 4.19: O vetor $\boldsymbol{\gamma}(n, \omega)$ visto como um filtro transversal FIR adaptativo.

Finalmente, o algoritmo proposto para implementação de forma adaptativa do método de análise espectral por variância mínima é apresentado na Tabela 4.4. Quanto a seu custo computacional por iteração, cerca de $8N+22$ multiplicações complexas e 3 divisões são despendidas no cálculo do ganho de adaptação pelo algoritmo FLS estável [38]. Daí, para estimar a potência em K pontos de frequência do espectro, mais $K(7N+1)+1$ multiplicações e K divisões são gastas.

Tabela 4.4: Algoritmo FLS para implementação adaptativa do método de análise espectral MV.

➤ **Inicialização:**

$$\boldsymbol{\gamma}(0, \omega) = \frac{1}{E_0} \text{diag}_N [1, W, \dots, W^{N-1}] \mathbf{e}(\omega) \quad \forall \omega \text{ considerado.}$$

➤ **Adaptação:**

(1) Novo dado no instante de tempo $n+1$:

$$x(n+1).$$

(2) Ganho de adaptação:

$$\mathbf{g}(n+1) \text{ (algoritmo FLS unidimensional, complexo e estável [38]).}$$

(3) Atualização de $\mathbf{q}(n)$:

$$\mathbf{q}(n+1) = W\mathbf{q}(n) + 1.$$

(4) Estimação do espectro de potência ($\forall \omega$ considerado):

$$i) \quad \boldsymbol{\gamma}'(n+1, \omega) = \frac{1}{W} [\boldsymbol{\gamma}(n, \omega) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^H(n+1)\boldsymbol{\gamma}(n, \omega)];$$

$$ii) \quad e_\gamma(n+1, \omega) = \mathbf{g}^H(n+1)\mathbf{e}(\omega) - \mathbf{x}^H(n+1)\boldsymbol{\gamma}'(n+1, \omega);$$

$$iii) \quad \boldsymbol{\gamma}(n+1, \omega) = \boldsymbol{\gamma}'(n+1, \omega) + \mathbf{g}(n+1)e_\gamma(n+1, \omega);$$

$$iv) \quad \mathcal{P}_{LS}(n+1, \omega) = \frac{1}{\mathbf{q}(n+1)\mathbf{e}^H(\omega)\boldsymbol{\gamma}(n+1, \omega)}.$$

É bem verdade que o vetor $\boldsymbol{\gamma}(n, \omega)$ pode ser obtido somente a partir de (4.47):

$$\boldsymbol{\gamma}(n+1, \omega) = \boldsymbol{\gamma}(n, \omega) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1, \omega), \quad (4.49a)$$

onde

$$e(n+1, \omega) = \mathbf{g}^H(n+1)\mathbf{e}(\omega) - \mathbf{x}^H(n+1)\boldsymbol{\gamma}(n, \omega). \quad (4.49b)$$

Com isto, uma economia de $3KN$ multiplicações é conseguida. No entanto, esta vantagem é ganha ao preço de uma redução na taxa de convergência, como tem sido constatado nos resultados de

simulação. Isto por que o vetor $\gamma(n, \omega)$, definido na Eq. (4.43), é obtido em (4.49) por uma aproximação LS.

Como ilustração da implementação adaptativa do método de análise espectral MV, consideremos mil amostras de uma senóide complexa, contaminada por ruído branco, cuja frequência normalizada é alterada de -0,25 para 0,25 na quingentésima amostra. A relação sinal-ruído é de 10 dB e a estimação do espectro de potência é realizada para $N=5$, $K=40$ (frequências igualmente espaçadas dentro do intervalo $]-0,5;0,5]$), $W=0,99$ e $E_0=0,1$.

A Fig. 4.20 mostra o espectro de potência estimado pelo algoritmo da Tabela 4.4, em função do número de iterações e da frequência. Observe que a convergência é rápida, tanto na fase inicial como a partir do instante de comutação da frequência da senóide. Assim, verificamos um adequado rastreamento da técnica LS na análise espectral de processos não-estacionários.

A título de comparação, apresentamos, na Fig. 4.21, o espectro de potência estimado quando apenas (4.49) é utilizada na obtenção de $\gamma(n, \omega)$. Nesta figura comprovamos, então, que, apesar da estimativa ser eficiente, a taxa de convergência é significativamente menor do que aquela do algoritmo da Tabela 4.2. Também tem sido observado, por simulação, que ela depende da relação sinal-ruído, sendo bastante deteriorada para valores muito alto de SNR.

Vale dizer que o algoritmo pode ser igualmente empregado no contexto somente espacial, para estimação do espectro de potência em função do ângulo de chegada, ou temporal/espacial. Este último diz respeito a processos de banda larga incidindo sobre um arranjo de antenas, sendo a estimação espectral também função da frequência.

A implementação LS do método de análise espectral MV pode ser visualizada através de um banco de filtros adaptativos com restrições lineares, esquematizado na Fig. 4.22. De fato, não é necessário realizar a filtragem do sinal para obter a estimação em (4.44); porém, o esquema da Fig. 4.22 ilustra como um mesmo vetor de ganho de adaptação é usado no cálculo de $\gamma(n, \omega)$, para todos valores de ω .

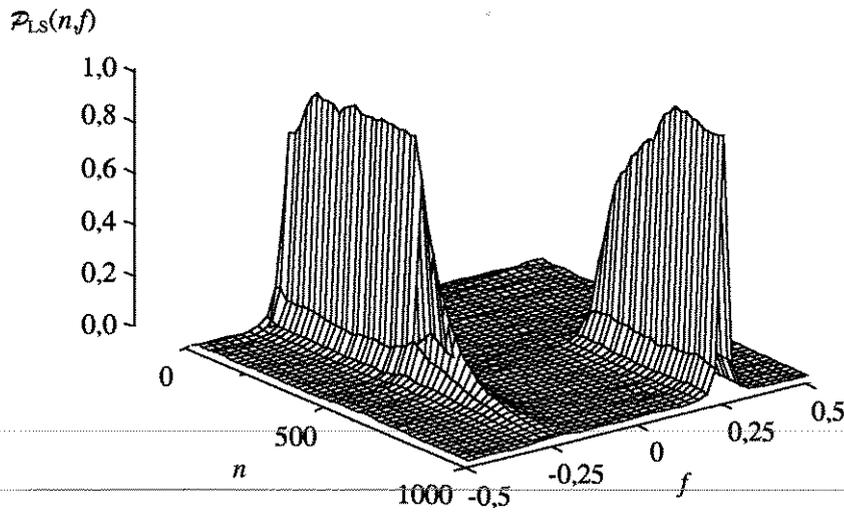


Fig. 4.20: Espectro de potência estimado pelo algoritmo da Tabela 4.4.

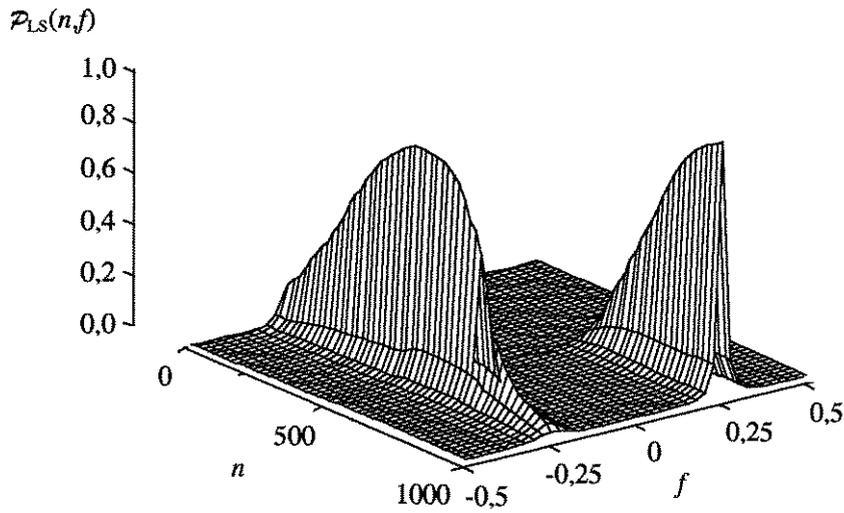


Fig. 4.21: Espectro de potência estimado, obtendo $\gamma(n, \omega)$ apenas por (4.49).

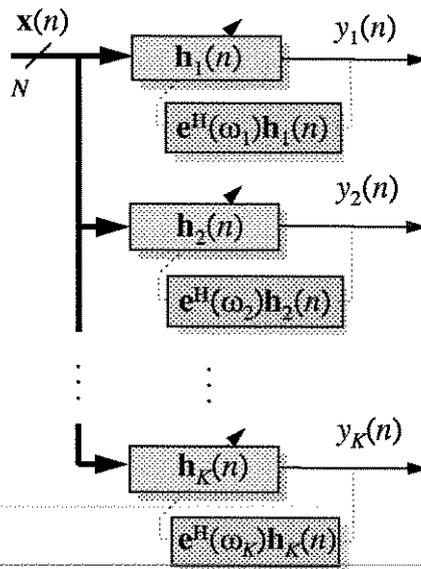


Fig. 4.22: Banco de filtros adaptativos com restrições lineares.

Isso também abre uma interessante perspectiva: o uso efetivo de um banco de filtros adaptativos para decomposição em sub-bandas de um sinal, no sentido de anular, com maior eficiência, as componentes fora da banda de frequência de cada filtro em particular, bem como o acompanhamento das não-estacionaridades e conseqüente aplicação em tempo real. Esta é uma outra sugestão dentro do plano de pesquisa que pretendemos avançar.

4.5 COMENTÁRIOS

Os resultados de simulação apresentados neste capítulo permitem verificar o bom desempenho do algoritmo CFLS. Além de preservar as já citadas qualidades inerentes à técnica LS, o algoritmo proposto é robusto à acumulação de erros de imprecisão numérica e ao desvio (esquecimento) das restrições.

Uma atenção especial deve, também, ser dada às extensões propostas aqui. Primeiramente, através das restrições, apresentamos uma maneira simples de realizar filtros adaptativos com fase linear pelo algoritmo FLS. O procedimento é eficiente e mantém, ainda, a complexidade computacional proporcional a N (número de coeficientes do filtro), o que o torna competitivo com as outras técnicas propostas na literatura [40-41].

Em seguida, implementamos adaptativamente a técnica de análise espectral por variância mínima pelo critério LS. Para isso, usamos novamente o algoritmo FLS, a fim de reduzir a complexidade computacional. Dadas as próprias limitações do método MV, o desempenho obtido foi conforme o esperado, mesmo quando aplicamos a abordagem proposta ao caso não-estacionário.

Resta dizer que, ao longo do desenvolvimento do capítulo, alguns pontos de pesquisa envolvendo o uso de restrições foram lançados, aos quais pretendemos dar prosseguimento. Estudos futuros visam, também, investigar o uso da decomposição QR à filtragem adaptativa com restrições lineares, com restrições não-lineares e com uma matriz de restrição variável no tempo.

O uso de restrições lineares proporciona novas possibilidades aos filtros adaptativos na solução de importantes problemas de processamento de sinais, nem sempre tratáveis pela teoria clássica de Wiener. As restrições aparecem como um meio de compensar a ausência do sinal de referência, imprescindível no critério de otimização.

Essa técnica vem sendo substancialmente empregada no campo das antenas adaptativas, do qual as principais contribuições para o seu desenvolvimento se originam. Seu estudo divide-se em dois importantes enfoques: o de estabelecer as restrições e o de selecionar a estrutura/algoritmo de implementação. Ambos estão abordados nesta tese.

A aplicação do método clássico de mínimos quadrados à filtragem adaptativa com restrições lineares ocorre pela desvinculação das restrições do processo de adaptação. Entretanto, somente o emprego do algoritmo de mínimos quadrados recursivo é permitido, o que determina, na expressão de avaliação do esforço computacional, um termo mais significativo, proporcional ao quadrado do número de parâmetros adaptados na estrutura.

As contribuições acrescentadas pelo trabalho ora desenvolvido se resumem na seguinte afirmação conclusiva: É possível fazer uso do algoritmo de mínimos quadrados rápido na atualização dos coeficientes de um filtro espacial/temporal com restrições lineares, bem como em filtragem unidimensional de fase linear e na implementação adaptativa do método de análise espectral por variância mínima, com uma complexidade computacional proporcional ao número de parâmetros ajustados.

Para se chegar a este resultado, foi necessário uma profunda investigação na área de filtragem adaptativa por mínimos quadrados, até estabelecer toda uma teoria que lhe é complementar, através de incorporação de restrições lineares ao problema.

Os algoritmos aqui propostos são exatos e robustos aos erros de precisão numérica finita, preservando as vantagens de alta taxa de convergência e precisão de estimação, próprias do critério de mínimos quadrados. Além disto, o algoritmo CFLS é altamente recomendado em situações envolvendo um vetor de resposta às restrições variável no tempo.

O trabalho abre, também, novas perspectivas de aplicação e desenvolvimento da técnica que ainda podem ser mais exploradas. Entre elas podemos citar a extensão dos resultados a outras estruturas, como, por exemplo, em treliça, e a incorporação de restrições não-lineares, restrições de desigualdade ou mesmo variantes no tempo. Um trabalho de continuidade também poderia se voltar para as aplicações dos algoritmos aqui desenvolvidos; neste caso, as áreas de sonar, radar ou mesmo de comunicações móveis aparecem como as de interesse mais imediato.

Finalmente, partindo da idéia das restrições lineares, chegamos a uma simples e elegante maneira de preservar a propriedade de fase linear, pela imposição da simetria ou anti-simetria dos coeficientes do filtro durante o processo de adaptação. Este resultado parece merecer uma atenção muito especial, em função da possibilidade de sua aplicação na estabilização dos algoritmos de mínimos quadrados rápidos transversais, o que resgataria a sua popularidade, perdida para as técnicas de decomposição QR.

Apêndice A

O Algoritmo de Mínimos Quadrados Rápido Estável

Vamos aqui apresentar o algoritmo de mínimos quadrados rápido estável para cálculo do ganho de adaptação no caso unidimensional de filtragem temporal com restrições lineares.

Sejam as seguintes definições dos vetores a $(N+1)$ -elementos de coeficientes dos filtros de erro de predição *forward* e *backward* respectivamente:

$$\mathbf{a}_{N+1}(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\xi(n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\mathbf{b}_{N+1}(n) = \begin{bmatrix} -\zeta(n) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\xi(n)$ e $\zeta(n)$ são os correspondentes conjuntos de coeficientes dos preditores lineares. Seja também

$$\mathbf{x}_{N+1}(n+1) = \begin{bmatrix} x(n+1) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

o vetor de dados de entrada e

$$\tilde{\mathbf{g}}_{N+1}(n) = \frac{1}{\alpha(n)} \mathbf{R}_{N+1}^{-1}(n) \mathbf{x}_{N+1}(n) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \tilde{g}_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

o vetor de ganho de adaptação normalizado. O escalar $\alpha(n)$ é o erro de estimação definido por

$$\alpha(n) = 1 - \mathbf{g}^1(n) \mathbf{x}(n). \quad (\text{A.5})$$

Na Tabela A.1 apresentamos a seqüência de passos para calcular o ganho de adaptação $\mathbf{g}(n+1)$ utilizado nos algoritmos das Tabelas 3.3, 3.4 e 4.3.

Tabela A.1: Algoritmo FLS unidimensional estável para cálculo do ganho de adaptação.

$$e_a(n+1) = \mathbf{a}_{N+1}^t(n) \mathbf{x}_{N+1}(n+1)$$

$$\varepsilon_a(n+1) = \alpha(n) e_a(n+1)$$

$$E_a(n+1) = W E_a(n) + e_a(n+1) \varepsilon_a(n+1)$$

$$\alpha_{N+1}(n+1) = W \frac{E_a(n)}{E_a(n+1)} \alpha(n)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{N+1}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{g}}(n) \end{bmatrix} + W^{-1} \frac{e_a(n+1)}{E_a(n)} \mathbf{a}_{N+1}(n)$$

$$\mathbf{a}_{N+1}(n+1) = \mathbf{a}_{N+1}(n) - \varepsilon_a(n+1) \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{g}}(n) \end{bmatrix}$$

$$e_b(n+1) = W E_b(n) \tilde{\mathbf{g}}_{N+1, N+1}(n+1)$$

$$e'_b(n+1) = \mathbf{b}_{N+1}^t(n) \mathbf{x}_{N+1}(n+1)$$

$$\alpha(n+1) = \left[1 - e'_b(n+1) \alpha_{N+1}(n+1) \tilde{\mathbf{g}}_{N+1, N+1}(n+1) \right]^{-1} \alpha_{N+1}(n+1)$$

$$E_b(n+1) = W E_b(n) + \alpha(n+1) \left[\frac{5}{2} e'_b(n+1) - \frac{3}{2} e_b(n+1) \right]^2$$

$$\varepsilon_b(n+1) = \alpha(n+1) \left[\frac{3}{2} e'_b(n+1) - \frac{1}{2} e_b(n+1) \right]$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}(n+1) \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{g}}_{N+1}(n+1) - \tilde{\mathbf{g}}_{N+1, N+1}(n+1) \mathbf{b}_{N+1}(n)$$

$$\mathbf{b}_{N+1}(n+1) = \mathbf{b}_{N+1}(n) - \varepsilon_b(n+1) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{g}}(n+1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(n+1) = W^N E_b(n+1) / E_a(n+1)$$

$$\mathbf{g}(n+1) = \alpha(n+1) \tilde{\mathbf{g}}(n+1)$$

Referências

- [1] **L. S. Resende**; “*Filtragem Adaptativa com Restrições Lineares por Mínimos Quadrados*”. Tese de Mestrado; FEEC/UNICAMP, Set. 1991.
- [2] **L. S. Resende, J. M. T. Romano e M. G. Bellanger**; “*Um Algoritmo dos Mínimos Quadrados para Filtragem Adaptativa com Restrições Lineares*”. **Proc. 9º SBT**, São Paulo, BRASIL; pp. 16.3.1-16.3.5; Set. 1991.
- [3] **L. S. Resende, J. M. T. Romano et M. G. Bellanger**; “*Un Algorithme de Moindres Carrés Rapide pour Filtrage Adaptatif avec Contraintes*”. **Proc. 13^{ème} Colloque GRETSI**; Juan les Pins, FRANCE; pp. 537-540; Sep. 1991.
- [4] **L. S. Resende, J. M. T. Romano and M. G. Bellanger**; “*A Fast Least Squares Algorithm for Constrained Adaptive Filtering*”. **Proc. ICASSP’92**; vol. IV; pp. 21-24 San Francisco, USA; Mar. 1992.
- [5] **J. M. T. Romano, M. G. Bellanger and L. S. Resende**; “*Constrained Adaptive Filtering for Temporal and Spatial Processing*”. **ITW’92**; Salvador, BRASIL; pp.112-115; Jun.1992 (artigo convidado).
- [6] **L. S. Resende, J. M. T. Romano and M. G. Bellanger**; “*A Fast Least-Squares Algorithm for Linearly-Constrained Adaptive Filtering*”. **IEEE Trans. on Signal Processing**; vol. 44; pp. 1168-1174; May 1996.
- [7] **L. S. Resende, J. M. T. Romano and M. G. Bellanger**; “*A Robust FLS Algorithm for Linearly-Constrained Adaptive Filtering*”. **Proc. ICASSP’94**; Adelaide, AUSTRALIA; vol. III; pp. 381-384; Apr. 1994.
- [8] **L. S. Resende, J. M. T. Romano and M. G. Bellanger**; “*The Robust FLS Linearly-Constrained Algorithm: An Improved Approach to Adaptive Spatial Filtering*”. **Proc. ITS’94**, Rio de Janeiro, BRASIL; pp. 15-19; Aug. 1994.
- [9] **L. S. Resende, J. M. T. Romano et M. G. Bellanger**; “*Un Algorithme de Moindres Carrés Rapide Robuste pour Traitement Adaptatif d’Antenne avec Contraintes*”. **Proc. 15^{ème} Colloque GRETSI**, Juan-les-Pins, FRANCE; pp. 395-398; Sep. 1995.
- [10] **L. S. Resende, J. M. T. Romano and M. G. Bellanger**; “*A Robust FLS Algorithm for LCMV Adaptive Broad-band Beamformer*”. **Proc. ICASSP’96**, Atlanta, USA; vol. III; pp. 1827-1830; May 1996.
- [11] **L. S. Resende, J. M. T. Romano e M. G. Bellanger**; “*Antenas Adaptativas: de Frost ao Algoritmo CFLS*”. **Proc. TELEMO’96 (14º SBT e 7º SBMO)**, Curitiba, BRASIL; vol. 1, pp. 93-98; Jul. 1996.

- [12] L. S. Resende, J. M. T. Romano and M. G. Bellanger; "Fast Linear Phase Adaptive Filtering using Constrained Least Squares Algorithm". *Proc. EUSIPCO'92*; Brussels, BELGIUM; pp. 1105-1108; Aug. 1992.
- [13] L. S. Resende, J. M. T. Romano et M. G. Bellanger; "Un Algorithme Adaptatif Rapide pour l'Analyse Spectrale par Minimum de Variance". *Proc. 14^{ème} Colloque GRETSI*; Juan-les-Pins, FRANCE; pp. 49-52; Sep. 1993.
- [14] W. F. Gabriel; "Adaptive Arrays - An Introduction". *Proc. IEEE*; vol. 64; pp. 239-272; Aug. 1976.
- [15] S. Haykin, ed.; "Array Signal Processing". **Prentice-Hall**; New Jersey; 1985.
- [16] R. T. Compton Jr.; "Adaptive Antennas: Concepts and Performance". **Prentice-Hall**; New Jersey; 1988.
- [17] B. Widrow and S. D. Stearns; "Adaptive Signal Processing". **Prentice-Hall**; New Jersey; 1985.
- [18] S. Haykin; "Adaptive Filter Theory". 2nd edition; **Prentice-Hall**; New Jersey; 1991.
- [19] B. Widrow, P. E. Mantey, L. J. Griffiths and B. B. Goode; "Adaptive Antenna Systems". *Proc. IEEE*; vol. 55; pp. 2143-2158; Dec. 1967.
- [20] L. J. Griffiths; "A Simple Adaptive Algorithm for Real-Time Processing in Antenna Arrays". *Proc. IEEE*; vol. 57; pp. 1696-1704; Oct. 1969.
- [21] S. Haykin and A. Steinhardt, ed.; "Adaptive Radar Detection and Estimation". **John Wiley & Sons, Inc.**; New York; 1992.
- [22] B. D. Van Veen and K. M. Buckley; "Beamforming: A Versatile Approach to Spatial Filtering". *IEEE ASSP Magazine*; vol. 5; pp. 4-24; Apr. 1988.
- [23] L. J. Griffiths and C. W. Jim; "An Alternative Approach to Linearly Constrained Adaptive Beamforming". *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*; vol. AP-30; pp. 27-34; Jan. 1982.
- [24] O. L. Frost III; "An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing". *Proc. of the IEEE*; vol. 60; no. 8; pp. 926-935; Aug. 1972.
- [25] M. Bouvet; "Traitements de Signaux pour les Systèmes Sonar". **Masson**; Paris; 1991.
- [26] D. E. Dudgeon and R. M. Mersereau; "Multidimensional Digital Signal Processing". **Prentice-Hall**; New Jersey; 1984.
- [27] M. G. Bellanger; "Adaptive Digital Filters and Signal Analysis". **Marcel Dekker, Inc.**; New York and Basel; 1987.
- [28] S. L. Marple Jr.; "Digital Spectral Analysis with Applications". **Prentice-Hall**; New Jersey; 1988.
- [29] S. M. Kay; "Modern Spectral Estimation: Theory and Application". **Prentice-Hall**; New Jersey; 1988.
- [30] D. G. Luenberger; "Optimization by Vector Space Methods". **John Wiley & Sons, Inc.**; New York; 1969.

- [31] **B. Noble and J. W. Daniel**; "*Applied Linear Algebra*". **Prentice-Hall**; New Jersey; 1988.
- [32] **M. H. Er and A. Cantoni**; "*Derivative Constraints for Broad-Band Element Space Antenna Array Processors*". **IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing**; vol. ASSP-31; no. 6; pp. 1378-1393; Dec. 1983.
- [33] **K. M. Buckley and L. J. Griffiths**; "*An Adaptive Generalized Sidelobe Canceller with Derivative Constraints*". **IEEE Trans. on Antennas and Propagation**; vol. AP-34; no. 3; pp. 311-319; Mar. 1986.
- [34] **K. M. Buckley**; "*Spatial/Spectral Filtering with Linearly Constrained Minimum Variance Beamformers*". **IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing**; vol. ASSP-35; pp. 249-266; Mar. 1987.
- [35] **A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer**; "*Discrete-Time Signal Processing*". **Prentice-Hall**; New Jersey; 1989.
- [36] **A. Cantoni and L. C. Godara**; "*Fast Algorithms for Time Domain Broadband Adaptive Array Processing*". **IEEE Trans. on Aerospace and Electric Systems**; vol. AES-18; pp. 682-699; Sep. 1982.
- [37] **S. Haykin**; "*Modern Filters*". **Macmillan**; New York; 1989.
- [38] **D. T. M. Slock and T. Kailath**; "*Numerically Stable Fast Transversal Filters for Recursive Least-Squares Adaptive Filtering*". **IEEE Trans. on Signal Processing**; vol. 39; pp. 92-144; Jan. 1991.
- [39] **J. R. B. Gimenez**; "*Sobre a Estabilidade Numérica dos Algoritmos de Mínimos Quadrados Rápidos*". Tese de Doutorado; FEEC/UNICAMP, Jan. 1995.
- [40] **B. Friedlander and M. Morf**; "*Least Squares Algorithms for Adaptive Linear-Phase Filtering*". **IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing**; vol. ASSP-30; pp. 381-390; Jun. 1982.
- [41] **S. L. Marple Jr.**; "*Fast Algorithms for Linear Prediction and System Identification Filters with Linear Phase*". **IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing**; vol. ASSP-30; pp. 942-953; Dec. 1982.
- [42] **N. Kalouptsidis and S. Theodoridis**; "*Fast Sequential Algorithms for Least Squares FIR Filters with Linear Phase*". **IEEE Trans. on Circuits and Systems**; vol. CAS-29; pp. 425-432; Apr. 1988.
- [43] **M. Lang, I. W. Selesnick and C. S. Burrus**; "*Constrained Least Squares Design of 2D FIR Filters*". **IEEE Trans. on Signal Processing**; vol. 44; pp. 1234-1241; May 1996.
- [44] **I. W. Selesnick, M. Lang and C. S. Burrus**; "*Constrained Least Square Design of FIR Filters without Specified Transition Bands*". **IEEE Trans. on Signal Processing**; vol. 44; pp. 1879-1892; Aug. 1996.