

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

/

APLICAÇÕES DO FORMALISMO DAS
FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS NA
ANÁLISE DE ANTENAS DE MICROFITA

SÉRGIO BARROSO DE ASSIS FONSECA
ORIENTADOR - PROF.DR.ATTÍLIO JOSÉ GIAROLA

062/82

TESE DE DOUTORADO, APRESENTADA À
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVER-
SIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS.

- 1982 -

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

- Ao PROF.DR.ATTÍLIO JOSÉ GIAROLA, pela orientação, estímulo, e pela confiança em mim depositada.
- À UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA e ao CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO (CNPq) pelo apoio financeiro.
- Aos colegas e professores da UNICAMP pelas discussões e pelo interesse demonstrado nesse trabalho.
- Ao SR.WASHINGTON LUIZ DE PAULA PEREIRA, pelo trabalho datilográfico.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, irmãos,
esposa e filhos.

SUMÁRIO

Este trabalho trata do estudo da influência do substrato dielétrico em algumas propriedades elétricas das antenas de microfita, utilizando-se o formalismo das funções de Green di â dicas para meios dispostos em camadas planas e paralelas ou ci líndricas concêntricas. A utilização do modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas simplifica sobremaneira a obtenção dos diagramas de radiação e, em especial, permite que se efetue uma análise teórica mais detalhada do problema da excita ção de ondas superficiais na fronteira substrato-ar das antenas. Mostra-se, como resultado dos estudos efetuados em alguns tipos mais utilizados de antenas de microfita, que a presença do substrato sobre o qual são construídas as antenas em questão exerce uma influência acentuada nas suas propriedades elétricas que fo ram consideradas.

ÍNDICE

Página

Introdução

Capítulo I : Propriedades e aplicações das antenas de microfita.....	1
I.1. Introdução.....	2
I.2. Definição da antena de microfita.....	2
I.3. Aplicações, vantagens e desvantagens das antenas de microfita.....	2
I.4. Modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas.....	5
Capítulo II : Definições e propriedades das funções diádicas e das funções de Green diádicas para o espaço livre.....	7
II.1. Introdução.....	8
II.2. Definição e propriedades das funções diádicas.....	8
II.3. Função de Green diádica para o espaço livre associada ao campo magnético de uma fonte elementar de corrente magnética.....	11
Capítulo III : Expansões das funções de Green diádicas. Obtenção das funções de Green diádicas para meios de camadas planas paralelas e cilíndricas concêntricas. Determinação das expressões assintóticas pelo método do ponto de sela.....	16

	Página
III.1. Introdução.....	17
III.2. Expansão da função de Green <u>di</u> dica para o espaço livre utili- zável em meios de camadas pla- nas e paralelas.....	17
III.3. Expansão da função de Green <u>di</u> dica para o espaço livre utili- zável em meios de camadas cilín- dricas concêntricas.....	20
III.4. Obtenção da função de Green <u>di</u> dica para meios de três camadas planas e paralelas.....	21
III.5. Obtenção da função de Green <u>di</u> dica para meios com quatro cama- das planas e paralelas.....	28
III.6. Obtenção da função de Green <u>di</u> dica para meios com três cama- das cilíndricas concêntricas.....	37
III.7. Determinação da expressão assín- tótica da função de Green <u>di</u> <u>di</u> ca para meios de três camadas planas e paralelas.....	48
III.8. Determinação da expressão assín- tótica da função de Green <u>di</u> <u>di</u> ca para meios de quatro camadas planas e paralelas.....	53
III.9. Obtenção da expressão assintôti- ca da função de Green <u>di</u> <u>di</u> ca para meios de três camadas ci- líndricas concêntricas.....	53

Capítulo IV : Análise do efeito do substrato dielétrico nos diagramas de irradiação das antenas de microfita em forma de disco.....	56
IV.1. Introdução.....	57
IV.2. Obtenção da densidade de corrente magnética equivalente.....	57
IV.3. Determinação dos campos irradiados.....	60
IV.4. Conclusão do capítulo.....	73
Capítulo V : Estudo dos efeitos de uma cobertura dielétrica nas características de irradiação de uma antena de microfita em forma de anel.....	75
V.1. Introdução.....	76
V.2. Obtenção da densidade de corrente magnética equivalente.....	76
V.3. Determinação dos campos irradiados.....	80
V.4. Conclusão do capítulo.....	93
Capítulo VI : Análise da influência do substrato dielétrico nos diagramas de irradiação de uma antena de microfita do tipo envólucro.....	94
VI.1. Introdução.....	95
VI.2. Determinação da densidade de corrente magnética equivalente.....	95
VI.3. Determinação dos campos distantes excitados pelo elemento de corrente magnética em forma de anel.....	99

VI.4. Determinação dos campos distantes excitados pela antena do tipo envólucro.....	102
VI.5. Conclusão do capítulo.....	114

Capítulo VII: Estudo da influência da excitação de ondas superficiais na eficiência de irradiação de ondas espaciais e na diretividade de uma antena de microfita em forma de disco.....	115
VII.1. Introdução.....	116
VII.2. Representação integral dos campos.....	116
VII.3. Estudo da representação integral de H_{ϕ}	118
VII.4. Estudo da representação integral de H_r e H_z	143
VII.5. Estudo dos polos no plano β . Determinação dos resíduos.....	144
VII.6. Determinação da eficiência de irradiação de ondas espaciais e da diretividade da antena de microfita.....	148
VII.7. Conclusão do capítulo.....	154

Capítulo VIII: Conclusões.....	155
--------------------------------	-----

Referências Bibliográficas.....	158
---------------------------------	-----

INTRODUÇÃO

O grande avanço ocorrido na tecnologia de circuitos integrados em microondas nos últimos anos fez com que aumentasse rapidamente o desenvolvimento de elementos e conjuntos de antenas de microfita. O conceito básico da antena de microfita foi apresentado pela primeira vez na literatura especializada por Deschamps [1] há pouco mais de vinte anos. O assunto, no entanto, não teve grande repercussão no meio científico até o fim da década de 60 e começo da década de 70, quando Byron [2] publicou um trabalho descrevendo um novo tipo de antena que consistia de uma placa condutora elétrica separada de um plano de terra por uma camada de material dielétrico. Logo após, Munson [3] patenteou um elemento de antena de microfita e Howell [4] publicou alguns estudos a respeito dos elementos do tipo placa de geometrias retangular e circular. Desta época em diante foram numerosos os trabalhos científicos publicados sobre o assunto, descrevendo técnicas de implementação das antenas e análises teóricas sobre o comportamento elétrico das mesmas. Carver e Mink [5] e Mailloux, Mc Ilvenna e Kernweis [6] apresentaram recentemente um apanhado geral a respeito do estado da técnica no assunto.

Um exame das contribuições teóricas e práticas publicadas até a presente data revela a necessidade de se estudarem, com maior profundidade, as influências do substrato dielétrico em que são construídas as antenas sobre as propriedades elétricas destas últimas. No presente trabalho procura-se, assim, acrescentar algum conhecimento àquele já existente sobre o comportamento das antenas de microfita estudando-se, através do formalismo das funções de Green diádicas e do modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas, os efeitos da camada dielétrica nos campos distantes e na excitação de ondas superficiais nas antenas de microfita.

No primeiro capítulo são discutidas as principais propriedades e aplicações das antenas de microfita e apresen-

ta-se o modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas que é utilizado posteriormente na determinação dos campos irradiados pelas antenas.

No segundo capítulo apresentam-se as definições e propriedades básicas das funções diádicas e das funções de Green diádicas para o espaço livre, objetivando-se tornar mais fácil a compreensão dos desenvolvimentos matemáticos realizados nos capítulos seguintes.

No terceiro capítulo introduzem-se as expansões em autofunções da função de Green diádica para o espaço livre nos sistemas de coordenadas retangulares e cilíndricas circulares. Nesse capítulo são obtidas as expressões das funções de Green diádicas para meios de três camadas planas e paralelas, quatro camadas planas e paralelas e três camadas cilíndricas concêntricas que são utilizadas posteriormente. Ainda nesse segundo capítulo obtêm-se as expressões assintóticas dessas funções de Green diádicas utilizando-se o método de integração do ponto de sela ou do caminho de máxima declividade.

No quarto capítulo é iniciado o trabalho de se aplicar o formalismo matemático apresentado nos três primeiros capítulos na solução de problemas de antenas de microfita. Nesse capítulo são estudados os efeitos do substrato dielétrico nos diagramas de irradiação da antena de microfita plana em forma de disco para dois diferentes modos de excitação da cavidade que constitui a antena.

No quinto capítulo são analisadas as influências nos diagramas de irradiação causadas pela deposição de uma camada plana de material dielétrico sobre uma antena de microfita plana em forma de anel.

No sexto capítulo realiza-se o estudo dos efeitos causados pela presença do substrato dielétrico nas antenas de microfita adaptáveis a superfícies cilíndricas ou antenas de microfita do tipo envólucro.

No sétimo capítulo apresenta-se uma análise do problema da excitação de ondas superficiais na fronteira dielétrico-ar das antenas de microfita planas em forma de disco, com o

objetivo de se determinarem as influências do substrato dielétrico na diretividade e na eficiência de excitação de ondas espaciais da antena.

No oitavo capítulo, que encerra o presente trabalho, são apresentadas as conclusões relativas aos resultados das análises realizadas nos capítulos anteriores.

CAPÍTULO I

PROPRIEDADES E APLICAÇÕES
DAS ANTENAS DE MICROFITA

I.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada uma pequena discussão a respeito da definição e das propriedades básicas das antenas de microfita. Objetivando-se a sua aplicação nos capítulos subsequentes, é discutido também o modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas para esse tipo de antena.

I.2 - DEFINIÇÃO DA ANTENA DE MICROFITA

Uma antena de microfita, na sua configuração mais simples, consiste de uma placa condutora separada de um plano de terra por uma camada de material dielétrico, conforme mostra a figura 1.

A placa condutora pode ter as formas geométricas mais diversas, como retangular, circular, em anel, pentagonal, triangular etc. Existem também outros tipos de antenas de microfita, um dos quais será discutido no capítulo 6, próprios para serem adaptados a superfícies não planas. A alimentação dessas antenas pode ser feita com linhas de microfita em contato com o perímetro da placa ou por meio de cabo coaxial, cujo condutor central liga-se à placa passando através do plano de terra e do substrato dielétrico. Os materiais condutores utilizados são, normalmente, o cobre e o ouro e os diversos tipos de materiais usados como substrato dielétrico apresentam, em geral, a permissividade relativa entre 2 e 10. Nas referências [5] e [7] é discutida com detalhes a tecnologia das antenas de microfita. O mecanismo de irradiação é tratado em [7].

I.3 - APLICAÇÕES, VANTAGENS E DESVANTAGENS DAS ANTENAS DE MICROFITA.

Apesar de a tecnologia das antenas de microfita estar ainda em seu início de desenvolvimento, essas antenas encontram, atualmente, aplicações nos mais diversos campos, alguns dos

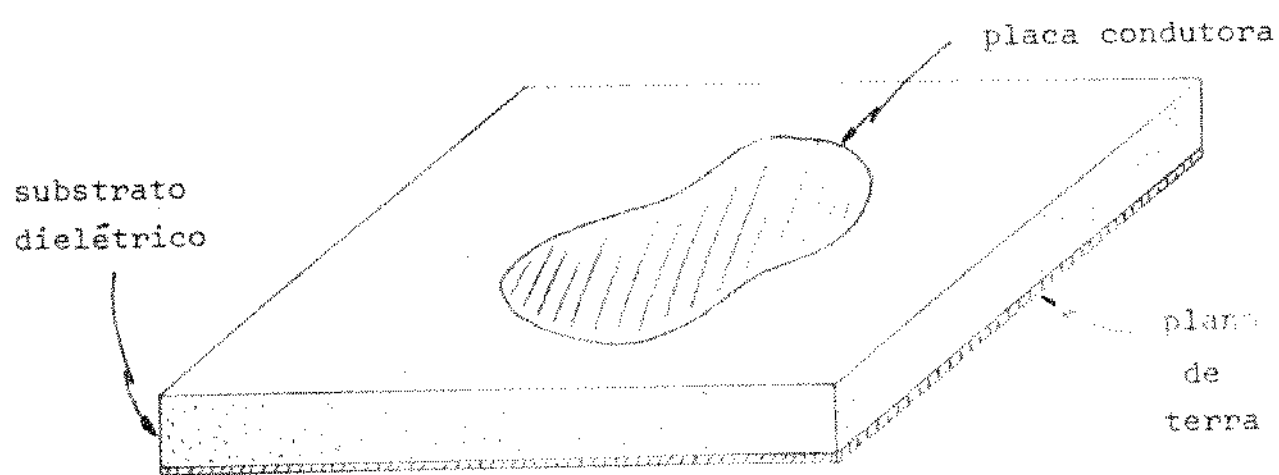


Fig. 1 - Configuração da antena de microfita do tipo placa.

quais estão relacionados a seguir [7, pág.4], [8] :

- Comunicações por satélites;
- Radares de efeito Doppler e outros;
- Radio-altímetros;
- Comando e controle;
- Veículos de alta velocidade: aeroplanos, mísseis, foguetes;
- Sensoreamento remoto;
- Alimentadores de refletores;
- Radiadores em biomedicina.

As principais vantagens e desvantagens das antenas de microfita , discutidas por diversos autores [7, pág.2-4], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17] e [18], são as seguintes:

a) Vantagens:

- Baixo peso e pequeno volume;
- Baixo perfil e possibilidade de se adaptar facilmente a superfícies de formas diversas;
- Baixo custo de fabricação;
- Possibilidades de obtenção de polarizações linear e circular com uma simples modificação da posição do ponto de alimentação;
- Facilidade de integração com outros dispositivos;
- As linhas de alimentação e os dispositivos de casamento de impedância podem ser fabricados simultaneamente com a estrutura da antena.

b) Desvantagens:

- Banda de passagem estreita;
- Ganho relativamente baixo;
- Irradiação apenas em um hemisfério;
- Baixa isolação entre os elementos alimentadores e os irradiadores;
- Possibilidades de excitação de ondas superficiais;
- Baixa capacidade de potência.

Os efeitos de algumas destas desvantagens podem ser diminuídos como projeto criterioso da antena. Por exemplo, a excitação de ondas de superfície, conforme será mostrado no capítulo 7, pode ser diminuída pela utilização de substratos de pouca espessura e de baixo valor de permissividade relativa.

I.4 - MODELO DA CAVIDADE COM PAREDES LATERAIS CONDUTORAS MAGNÉTICAS.

Na análise de certos tipos de antenas de microfita utiliza-se, entre outros, um modelo teórico baseado nas seguintes observações [19]:

- a) Tendo-se em vista que a espessura d da camada dielétrica é bem menor do que o comprimento de onda, para as aplicações usuais, pode-se supor que o campo elétrico na região entre a placa condutora e o plano de terra apresenta apenas a componente na direção normal ao plano da placa e o campo magnético as componentes paralelas a esse plano.
- b) Considerando-se ainda que para as frequências de interesse prático a condição $d \ll \lambda$ é satisfeita, onde λ é o comprimento de onda no dielétrico, é razoável admitir-se também que os

campos eletromagnéticos na região entre os dois condutores não variam segundo a direção normal ao plano da placa condutora.

- c) A corrente elétrica na placa condutora não apresenta componente normal às bordas dessa placa; isto permite dizer que, para que as condições de contorno sejam satisfeitas, a componente tangencial do campo magnético na região das bordas deve ser nula.

Com base nas observações anteriores pode-se então tratar a região compreendida entre a placa e o plano de terra como uma cavidade limitada por paredes laterais condutoras magnéticas e por planos inferior e superior condutores elétricos. Os campos na antena são então considerados como aqueles existentes no interior da cavidade. O conhecimento da componente do campo elétrico tangente à parede condutora magnética permite, utilizando-se o princípio de Huygens ou princípio da equivalência [20, pág. 106-110], que se defina uma densidade de corrente magnética equivalente sobre esta parede.

Pode-se perceber, então, que o problema da determinação dos campos irradiados por uma antena de microfita transforma-se em um problema de determinação dos campos irradiados por uma fonte de corrente magnética localizada em um meio estratificado.

O formalismo que tem sido utilizado até o momento na análise dos tipos de antenas que são considerados nos capítulos posteriores despreza a presença do substrato dielétrico que separa a placa condutora do plano de terra. O objetivo principal do presente trabalho consiste em estudarem-se as influências desse substrato em algumas propriedades das antenas, utilizando-se o modelo da cavidade, descrito anteriormente, e o formalismo das funções de Green diádicas para meios estratificados, que será apresentado em seguida. A presença da camada dielétrica torna possível a excitação de ondas superficiais na antena, problema este que é tratado no sétimo capítulo deste trabalho.

CAPÍTULO II

DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DIÁDICAS E
DAS FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS PARA O ESPAÇO LIVRE

II.1 - INTRODUÇÃO

O livro publicado pelo Professor Chen-To Tai [21] em 1971 a respeito das aplicações das funções de Green diádicas na solução de problemas de contorno em teoria eletromagnética tem importância marcante no desenvolvimento do assunto. Reunindo, naquela época, diversos trabalhos já existentes e acrescentando as contribuições do próprio autor o livro deu início a uma série de trabalhos publicados nas décadas passada e atual com ênfase especial nas áreas de antenas e propagação de ondas eletromagnéticas. A teoria apresentada nesse livro forma a base dos desenvolvimentos matemáticos apresentados nesse trabalho.

Neste capítulo faz-se uma introdução do material básico enumerando-se algumas definições e propriedades básicas das funções diádicas e das funções de Green diádicas para o espaço livre.

II.2 - DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DIÁDICAS

Uma função diádica $\vec{\vec{D}}$ é definida pela associação de duas funções vetoriais, da seguinte forma:

$$\vec{\vec{D}} = \vec{A} \vec{B} \quad (2.1)$$

As funções vetoriais $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são chamadas, respectivamente, elemento anterior e elemento posterior da função diádica $\vec{\vec{D}}$.

Se

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

e

$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$$

então,

$$\bar{\bar{D}} = \bar{A} \bar{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{\bar{D}} = & A_x B_x \hat{x}\hat{x} + A_x B_y \hat{x}\hat{y} + A_x B_z \hat{x}\hat{z} + A_y B_x \hat{y}\hat{x} + A_y B_y \hat{y}\hat{y} + \\ & + A_y B_z \hat{y}\hat{z} + A_z B_x \hat{z}\hat{x} + A_z B_y \hat{z}\hat{y} + A_z B_z \hat{z}\hat{z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Definindo-se:

$$\bar{D}^{(x)} = A_x B_x \hat{x} + A_y B_x \hat{y} + A_z B_x \hat{z} = B_x \bar{A} \quad (a)$$

$$\bar{D}^{(y)} = A_x B_y \hat{x} + A_y B_y \hat{y} + A_z B_y \hat{z} = B_y \bar{A} \quad (b) \quad (2.3)$$

$$\bar{D}^{(z)} = A_x B_z \hat{x} + A_y B_z \hat{y} + A_z B_z \hat{z} = B_z \bar{A} \quad (c)$$

pode-se então escrever

$$\bar{\bar{D}} = \bar{D}^{(x)} \hat{x} + \bar{D}^{(y)} \hat{y} + \bar{D}^{(z)} \hat{z} \quad (2.4)$$

O produto escalar anterior entre a função diádica $\bar{\bar{D}}$ e a função vetorial $\bar{C}$ é definido por

$$\bar{C} \cdot \bar{\bar{D}} = (\bar{C} \cdot \bar{A}) \bar{B} = \bar{B} (\bar{C} \cdot \bar{A}) = \bar{B} (\bar{A} \cdot \bar{C}) \quad (2.5)$$

Verifica-se, através de (2.5), que o produto escalar anterior dá como resultado um vetor na direção do elemento posterior $\bar{B}$ da função diádica.

Define-se também o produto escalar posterior da maneira seguinte:

$$\overline{\overline{D}} \cdot \overline{C} = \overline{A}(\overline{B} \cdot \overline{C}) = (\overline{B} \cdot \overline{C})\overline{A} = (\overline{C} \cdot \overline{B})\overline{A} \quad (2.6)$$

O produto escalar posterior resulta em um vetor na direção do elemento anterior $\overline{A}$ da função diádica.

A função diádica $\overline{\overline{D}}$, transposta de $\overline{\overline{D}}$, é definida por

$$\overline{\overline{\overline{D}}} = \overline{B} \overline{A} \quad (2.7)$$

de tal forma que

$$\overline{\overline{D}} \cdot \overline{C} = \overline{C} \cdot \overline{\overline{\overline{D}}} \quad (2.8)$$

Os produtos vetoriais anterior e posterior entre $\overline{C}$ e $\overline{\overline{D}}$ resultam em uma função diádica e definem-se através das relações seguintes:

$$\overline{C} \times \overline{\overline{D}} = (\overline{C} \times \overline{A})\overline{B} \quad (2.9)$$

$$\overline{\overline{D}} \times \overline{C} = \overline{A}(\overline{B} \times \overline{C}) \quad (2.10)$$

A aplicação dos operadores divergente e rotacional na função diádica $\overline{\overline{D}}$ tem como resultado, respectivamente, uma função vetorial e uma função diádica:

$$\nabla \cdot \overline{\overline{D}} = (\nabla \cdot \overline{D}^{(x)})\hat{x} + (\nabla \cdot \overline{D}^{(y)})\hat{y} + (\nabla \cdot \overline{D}^{(z)})\hat{z} \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \overline{\overline{D}} = (\nabla \times \overline{D}^{(x)})\hat{x} + (\nabla \times \overline{D}^{(y)})\hat{y} + (\nabla \times \overline{D}^{(z)})\hat{z} \quad (2.12)$$

A função diádica unitária $\overline{\overline{I}}$, definida por

$$\overline{\overline{I}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \quad (2.13)$$

tem as seguintes propriedades principais:

$$\bar{A} \cdot \bar{I} = \bar{I} \cdot \bar{A} = \bar{A} \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot (\bar{I} \psi) = \nabla \psi \quad (2.15)$$

onde $\bar{A}$ é uma função vetorial e ψ é uma função escalar da posição.

II.3 - FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA O ESPAÇO LIVRE ASSOCIADA AO CAMPO MAGNÉTICO DE UMA FONTE ELEMENTAR DE CORRENTE MAGNÉTICA.

No caso da existência apenas de fonte de corrente magnética $\bar{M}$, as equações vetoriais de onda para os campos elétrico e magnético em um meio dielétrico homogêneo, linear e isotrópico, caracterizado por ϵ_0 e μ_0 são as seguintes, considerando-se que a variação no tempo é da forma $\exp(-i\omega t)$, sendo ω a frequência angular da fonte:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} - k_1^2 \bar{H} = i\omega \epsilon_0 \bar{M} \quad (2.16)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} - k_1^2 \bar{E} = -\nabla \times \bar{M} \quad (2.17)$$

onde $k_1 = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$ é o número de onda para a região considerada. As soluções de (2.16) e (2.17) são as seguintes, em termos do potencial vetor elétrico $\bar{F}$:

$$\bar{E}(\bar{R}) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \bar{F}(\bar{R}) \quad (2.18)$$

$$\bar{H}(\bar{R}) = i\omega(1 + \frac{1}{k_1^2} \nabla \nabla \cdot) \bar{F}(\bar{R}) \quad (2.19)$$

onde

$$F(R) = \epsilon_0 \iiint G_0(\bar{R}/\bar{R}') \bar{M}(\bar{R}') dv' \quad (2.20)$$

sendo $G_0(\bar{R}/\bar{R}')$ a função de Green para o dielétrico em questão, dada por [21, pág. 49]:

$$G_0(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{e^{ik_1|\bar{R}-\bar{R}'|}}{4\pi|\bar{R}-\bar{R}'|} \quad (2.21)$$

As grandezas μ_0 e ϵ_0 são, respectivamente, a permeabilidade e a permissividade do espaço livre.

Considerando-se, conforme mostra a figura 2, uma fonte infinitesimal de corrente magnética de momento $1/i\omega\epsilon_0$ localizada em $\bar{R}'$ e na direção x , pode-se dizer que

$$\bar{M}(\bar{R}') = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \delta(\bar{R}-\bar{R}') \hat{x} \quad (2.22)$$

onde $\delta(\bar{R}-\bar{R}')$ é a função delta de Dirac.

Pela definição da função impulso ou delta de Dirac,

$$\iiint \bar{M}(\bar{R}') dv' = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \hat{x} \quad (2.23)$$

Substituindo-se (2.22) e (2.23) em (2.20) obtém-se:

$$\bar{F}(\bar{R}) = \frac{1}{i\omega} G_0(\bar{R}/\bar{R}') \hat{x} \quad (2.24)$$

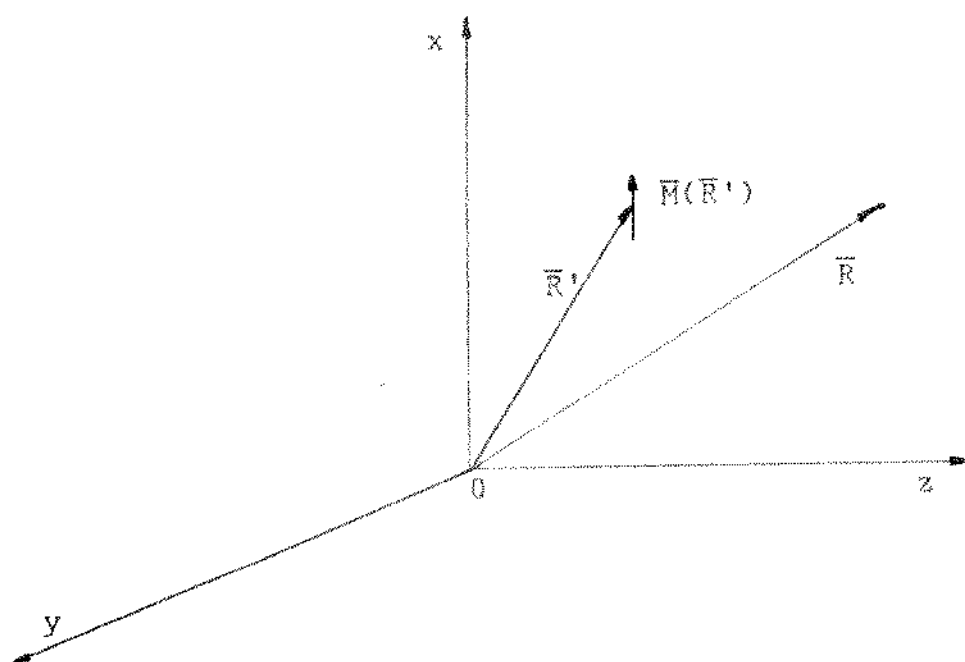


Fig. 2 - Fonte infinitesimal de corrente magnética no espaço livre.

Chamando-se de $\bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}')$ o campo magnético produzido pela fonte elementar, então

$$\bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}') = (1 + \frac{1}{k_1^2} \nabla \nabla \cdot) \bar{G}_0(\bar{R}/\bar{R}') \hat{x} \quad (2.25)$$

Substituindo-se (2.22) em (2.16) verifica-se que $\bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}')$ é solução da equação

$$\nabla_x \nabla_x \bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}') - k_1^2 \bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}') = \delta(\bar{R} - \bar{R}') \hat{x} \quad (2.26)$$

A função $\bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}')$ satisfaz a condição de radiação para $R \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\nabla_x \bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}') - i k_1 \bar{R}_x \bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}') \right] = 0 \quad (2.27)$$

Definindo-se, da mesma forma, fontes infinitesimais nas direções y e z chega-se à função de Green diádica para o espaço livre

$$\bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{G}_0^{(x)}(\bar{R}/\bar{R}') \hat{x} + \bar{G}_0^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}') \hat{y} + \bar{G}_0^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}') \hat{z} \quad (2.28)$$

que satisfaz a seguinte equação:

$$\nabla_x \nabla_x \bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}') - k_1^2 \bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\bar{I}} \delta(\bar{R} - \bar{R}') \quad (2.29)$$

onde $\bar{\bar{I}}$ é a função diádica unitária definida em (2.13).

Sabendo-se que as funções $\bar{G}_0^{(y)}(\bar{R}/\bar{R}')$ e $\bar{G}_0^{(z)}(\bar{R}/\bar{R}')$ satisfazem a equações semelhantes à equação (2.25) e, substituindo-se essas expressões em (2.28), vem:

$$\bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}') = (\bar{\bar{I}} + \frac{1}{k_1^2} \nabla \nabla) G_0(\bar{R}/\bar{R}') \quad (2.30)$$

Conhecendo-se a função de Green diádica para o espaço livre, $\bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}')$, pode-se determinar o campo magnético distante produzido por uma densidade de corrente magnética $\bar{M}$ qualquer através da relação seguinte, obtida a partir do teorema de Green vetorial com desenvolvimento semelhante ao apresentado por Tai [21, pág. 51-52]:

$$\bar{H}(\bar{R}) = i\omega\epsilon_0 \iiint_{V'} \bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}(\bar{R}') dV' \quad (2.31)$$

A integração, na expressão anterior, é efetuada no volume v' onde se localizam as fontes.

No caso em que $\bar{M}$ é uma densidade superficial de corrente magnética sobre uma superfície s' tem-se:

$$\bar{H}(\bar{R}) = i\omega\epsilon_0 \iint_{S'} \bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}(\bar{R}') ds' \quad (2.32)$$

CAPÍTULO III

EXPANSÕES DAS FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS. OBTENÇÃO DAS
FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS PARA MEIOS DE CAMADAS PLANAS
PARALELAS E CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS. DETERMINAÇÃO DAS
EXPRESSÕES ASSINTÓTICAS PELO MÉTODO DO PONTO DE SELA

III.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, inicialmente, são apresentadas as expansões em autofunções da função de Green diádica para o espaço livre, utilizando-se as funções de onda vetoriais $\bar{M}$ e $\bar{N}$ introduzidas por Hansen [22]. No caso dos meios constituídos de camadas planas e paralelas, tendo-se em vista o fato de que as condições de contorno são impostas em planos $z = \text{constante}$, é interessante que se utilize a expansão em n e λ , respectivamente, autovalores correspondentes às variáveis ϕ e r do sistema cilíndrico circular de coordenadas. Para o caso dos meios constituídos de camadas cilíndricas concêntricas de eixo z torna-se interessante utilizar a expansão em n e h , onde h é o autovalor correspondente à variável z do mesmo sistema de coordenadas. Com base nessas expansões e utilizando-se o método da superposição dos campos espalhados são então obtidas as diversas funções de Green diádicas que serão aplicadas, posteriormente, na solução dos problemas de antenas de microfita. Objetivando-se o conhecimento dos campos distantes, são então obtidas as expressões assintóticas das funções de Green diádicas através do método do ponto de sela.

III.2 - EXPANSÃO DA FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA O ESPAÇO LIVRE UTILIZÁVEL EM MEIOS DE CAMADAS PLANAS E PARALELAS.

As funções de onda vetoriais $\bar{M}$ e $\bar{N}$ são soluções da seguinte equação de onda vetorial homogênea [21, pág. 70]:

$$\nabla_x \nabla_x \bar{F} - K^2 \bar{F} = 0 \quad (3.1)$$

onde K , chamada constante de propagação, é arbitrária.

Entre as funções $\bar{M}$ e $\bar{N}$ existem as seguintes relações simétricas [21, pág. 71]:

$$\bar{N} = \frac{1}{K} \nabla_x \bar{M} \quad (3.2)$$

$$\bar{M} = \frac{1}{K} \nabla_x \bar{N} \quad (3.3)$$

Em coordenadas cilíndricas circulares as expressões de $\bar{M}$ e $\bar{N}$ são as seguintes [21, pág. 83]:

$$\bar{M}_{e_{n\lambda}}^{(h)} = \left[\mp \frac{n J_n(\lambda r)}{r} \frac{\sin n\phi \hat{r}}{\cos n\phi \hat{r}} - \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \frac{\cos n\phi \hat{\phi}}{\sin n\phi \hat{\phi}} \right] e^{ihz} \quad (3.4)$$

$$\bar{N}_{e_{n\lambda}}^{(h)} = \frac{1}{K_\lambda} \left[ih \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \frac{\cos n\phi \hat{r}}{\sin n\phi \hat{r}} \mp \frac{ihn}{r} J_n(\lambda r) \frac{\sin n\phi \hat{\phi}}{\cos n\phi \hat{\phi}} + \lambda^2 J_n(\lambda r) \frac{\cos n\phi \hat{z}}{\sin n\phi \hat{z}} \right] e^{ihz} \quad (3.5)$$

onde

$$K_\lambda^2 = \lambda^2 + h^2 \quad (3.6)$$

e $J_n(\lambda r)$ é a função de Bessel de primeira espécie, ordem n e argumento λr . Os índices "e", "o" das funções $\bar{M}$ e $\bar{N}$ abreviam, respectivamente, as palavras "even" e "odd" do inglês.

Usando-se o método de Ohm-Rayleigh [21, pág. 103], obtém-se uma expansão em autofunções para a função de Green diádica do espaço livre, válida para pontos de observação fora da região das fontes (ver também as discussões apresentadas nas referências [23], [24], [25] e [26]):

$$\bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_1} \begin{cases} \bar{M}_{e_{0n\lambda}}(h_1) \bar{M}'_{e_{0n\lambda}}(-h_1) + \bar{N}_{e_{0n\lambda}}(h_1) \bar{N}'_{e_{0n\lambda}}(-h_1), & z \geq z' \\ \bar{M}_{e_{0n\lambda}}(-h_1) \bar{M}'_{e_{0n\lambda}}(h_1) + \bar{N}_{e_{0n\lambda}}(-h_1) \bar{N}'_{e_{0n\lambda}}(h_1), & z \leq z' \end{cases} \quad (3.7)$$

onde se utiliza a seguinte notação simplificada:

$$\bar{F}_e \bar{F}'_e = \bar{F}_e \bar{F}'_e + \bar{F}_0 \bar{F}'_0 \quad (3.8)$$

Além disto,

$$\delta_0 \text{ (delta de Kronecker)} = \begin{cases} 1, & \text{se } n=0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}, \quad (3.9)$$

$$h_1 = (k_1^2 - \lambda^2)^{1/2}, \quad (3.10)$$

e

$$k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad (3.11)$$

É importante salientar que, para se obter uma expressão de $\bar{\bar{G}}_0$ válida inclusive na região das fontes, é necessário que se utilize também na expansão, além das funções $\bar{M}$ e $\bar{N}$, a função de onda vetorial irrotacional $\bar{L}$, que expressa a singularidade de $\bar{\bar{G}}_0$ na fonte.

A inclusão da função $\bar{L}$ resulta em um termo adicional na equação (3.7) [23], [24], [25], e [26].

As funções $\bar{M}'$ e $\bar{N}'$ são definidas com respeito às coordenadas r' , ϕ' e z' que correspondem ao vetor localização da fonte, $\bar{R}'$.

Observa-se que a expansão apresentada em (3.7) é fechada em h , autovalor correspondente à variável z do sistema cilíndrico circular de coordenadas.

III.3 - EXPANSÃO DA FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA O ESPAÇO LIVRE UTILIZÁVEL EM MEIOS DE CAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS.

No caso dos meios constituídos de camadas cilíndricas concêntricas cujo eixo comum localiza-se na direção de z , é interessante utilizar-se a seguinte expansão em n e h , válida apenas para pontos de observação fora da região das fontes [21 , pág. 96]:

$$\bar{G}_0(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{\alpha^2} \begin{cases} \bar{M}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) \bar{M}'_{e_{n\alpha}}(-h) + \bar{N}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) \bar{N}'_{e_{n\alpha}}(-h), & r > r' \\ \bar{M}_{e_{n\alpha}}(h) \bar{M}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(-h) + \bar{N}_{e_{n\alpha}}(h) \bar{N}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(-h), & r < r' \end{cases} \quad (3.12)$$

As funções $\bar{M}$ e $\bar{N}$, nesse caso, são dadas por (3.4) , (3.5) e (3.6) substituindo-se λ por α .

Na equação (3.12), $\bar{M}'$ e $\bar{N}'$ são definidas com relação às coordenadas da fonte e $\bar{M}^{(1)}$ e $\bar{N}^{(1)}$ com relação à função de Hankel de primeira espécie, isto é, substituindo-se, nas expressões de $\bar{M}$ e $\bar{N}$, $J_n(\alpha r)$ por $H_n^{(1)}(\alpha r)$

Além disto, no caso,

$$\alpha = (k_1^2 - h^2)^{1/2} \quad (3.13)$$

Nota-se que a expansão definida em (3.12) é fechada

em λ , autovalor correspondente à variável r do sistema cilíndrico circular de coordenadas.

III.4 - OBTENÇÃO DA FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA MEIOS DE TRÊS CAMADAS PLANAS E PARALELAS.

A figura 3 mostra a geometria utilizada na obtenção da função de Green diádica para o presente caso.

Utilizando-se o método da superposição dos campos espalhados, que se baseia na linearidade das equações de Maxwell, pode-se dizer o seguinte:

- Na região 3, como a condutividade é infinita, os campos são nulos.

- Na região 1 os campos são aqueles transmitidos da região 2 através da fronteira em $z = d$, isto é

$$\bar{\bar{G}}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\bar{G}}_T^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.14)$$

onde $\bar{\bar{G}}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}')$ é a função de Green diádica na região 1 devida a fontes localizadas no meio 2 e o índice T é usado para identificar a função de transmissão.

- Na região 2, tendo-se em vista as reflexões que ocorrem nas fronteiras em $z=0$ e $z=d$,

$$\bar{\bar{G}}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\bar{G}}_2^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}') + \bar{\bar{G}}_{R_0}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}') + \bar{\bar{G}}_{R_d}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.15)$$

onde $\bar{\bar{G}}_2^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}')$ tem a mesma expressão da função de Green diádica do espaço livre, $\bar{\bar{G}}_0(\bar{R}/\bar{R}')$, com as constantes ϵ_0, μ_0 do espaço livre substituídas pelas constantes ϵ, μ_0 da região 2 e com h_1 substituída por

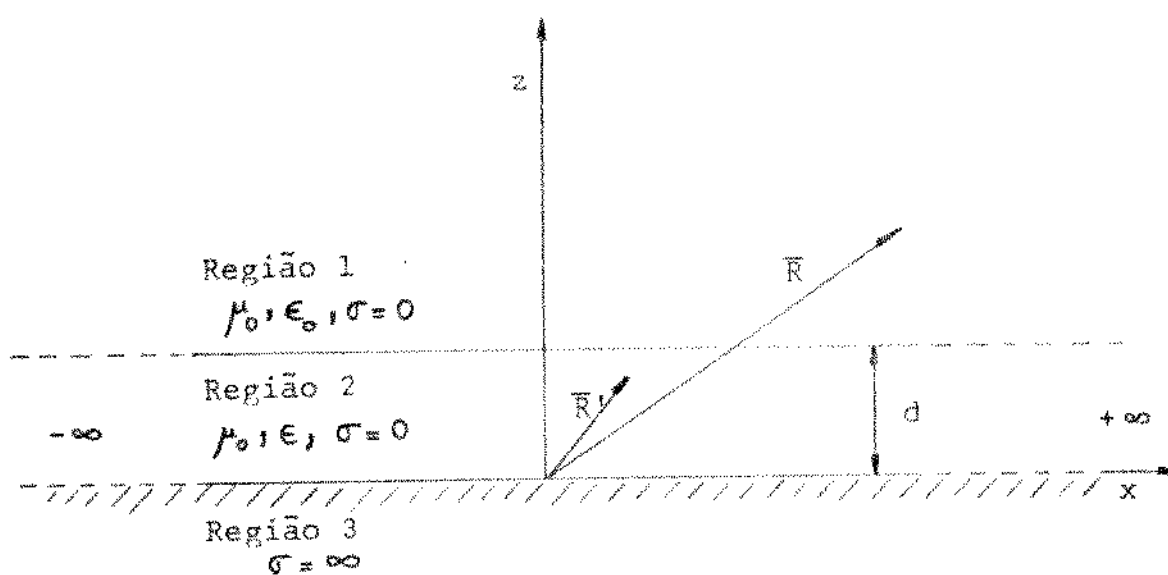


Fig. 3 - Geometria usada para se obter a função de Green diádica.

$$h_2 = (k_2^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (3.16)$$

$$\text{onde } k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon \quad (3.17)$$

Na expressão (3.15) os índices R_0 e R_d identificam, respectivamente, as reflexões que ocorrem em $Z=0$ e $Z=d$.

Para que sejam satisfeitas as condições de contorno a serem impostas em $Z=0$, $Z=d$ e $Z=Z'$ e a condição de radiação é necessário que os termos que constituem as relações (3.14) e (3.15) tenham as formas seguintes:

$$\begin{aligned} \bar{G}_T^{(12)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_2} \left\{ \bar{M}(h_1) \left[\bar{A}\bar{M}'(-h_2) + \bar{B}\bar{M}'(h_2) \right] + \right. \\ \left. \bar{N}(h_1) \left[\bar{C}\bar{N}'(-h_2) + \bar{D}\bar{N}'(h_2) \right] \right\}, \quad Z \geq d \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\bar{G}_2^{(22)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_2} \begin{cases} \bar{M}(h_2)\bar{M}'(-h_2) + \bar{N}(h_2)\bar{N}'(-h_2), & d \geq Z \geq Z' \\ \bar{M}(-h_2)\bar{M}'(h_2) + \bar{N}(-h_2)\bar{N}'(h_2), & 0 \leq Z \leq Z' \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{R_0}^{(22)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_2} \left\{ \bar{M}(h_2) \left[\bar{E}\bar{M}'(-h_2) + \bar{F}\bar{M}'(h_2) \right] + \right. \\ \left. \bar{N}(h_2) \left[\bar{G}\bar{N}'(-h_2) + \bar{H}\bar{N}'(h_2) \right] \right\}, \quad 0 \leq Z \leq d \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{R_d}^{(22)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_2} \left\{ \bar{M}(-h_2) \left[I\bar{M}'(-h_2) + J\bar{N}'(h_2) \right] + \right. \\ \left. \bar{N}(-h_2) \left[K\bar{N}'(-h_2) + L\bar{N}'(h_2) \right] \right\}, \quad 0 \leq z \leq d \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observa-se que, nas expressões anteriores, as notações do tipo $\bar{G}(\bar{R}/\bar{R}')$ e $\bar{M}_{e_{n\lambda}}^0$ foram substituídas, com o objetivo de simplificar a escrita, por $\bar{G}$ e $\bar{M}$.

As funções de Green diádicas para a 1a. e 2a. regiões são assim dadas, respectivamente, por (3.14) e (3.15), com (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21).

Para que sejam obtidos os coeficientes A, B, ..., L, é necessário imporem-se as condições de contorno em $Z=0$ e $Z=d$:

$$\hat{z} \times \left[\nabla \times \bar{G}^{(22)} \right] = 0 \quad \text{em } Z = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \hat{z} \times \left[\nabla \times \bar{G}^{(22)} \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{z} \times \left[\nabla \times \bar{G}^{(12)} \right] \quad \text{em } Z=d \quad (3.23)$$

$$\hat{z} \times \bar{G}^{(22)} = \hat{z} \times \bar{G}^{(12)} \quad \text{em } Z=d \quad (3.24)$$

A equação (3.22) expressa a continuidade da componente tangencial do campo elétrico em $Z=0$ e o fato de que a região 3 é constituída de um condutor perfeito. As equações (3.23) e (3.24) expressam, respectivamente, a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético em $Z=d$. Lembra-se que, nesse trabalho, as funções de Green diádicas são as sociadas ao campo magnético excitado pelas fontes.

Impondo-se, por exemplo, a condição de contorno (3.24) aos termos que correspondem às funções $\bar{M}$ vem:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_x \left\{ \bar{M}(h_2) \bar{M}'(-h_2) + \bar{M}(h_2) \left[\bar{E}M'(-h_2) + \bar{F}M'(h_2) \right] + \right. \\ \left. \bar{M}(-h_2) \left[\bar{I}M'(-h_2) + \bar{J}M'(h_2) \right] \right\}_{Z=d} = \hat{Z}_x \left\{ \bar{M}(h_1) \left[\bar{A}M'(-h_2) + \bar{B}M'(h_2) \right] \right\}_{Z=d} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Examinando-se a expressão (3.4) e utilizando-se a relação (3.2) pode-se escrever:

$$\hat{Z}_x \left\{ \bar{M}(h_2) \bar{M}'(-h_2) \right\}_{Z=d} = \bar{R} \bar{M}'(-h_2) \quad (3.26)$$

$$\hat{Z}_x \left\{ \bar{M}(h_2) \left[\bar{E}M'(-h_2) + \bar{F}M'(h_2) \right] \right\}_{Z=d} = \bar{E} \bar{R} \bar{M}'(-h_2) + \bar{F} \bar{R} \bar{M}'(h_2) \quad (3.27)$$

$$\hat{Z}_x \left\{ \bar{M}(-h_2) \left[\bar{I}M'(-h_2) + \bar{J}M'(h_2) \right] \right\}_{Z=d} = \bar{I} \bar{R} \bar{M}'(-h_2) e^{-i2h_2 d} + \bar{J} \bar{R} \bar{M}'(h_2) e^{i2h_2 d} \quad (3.28)$$

$$\hat{Z}_x \left\{ \bar{M}(h_1) \left[\bar{A}M'(-h_2) + \bar{B}M'(h_2) \right] \right\}_{Z=d} = \bar{A} \bar{R} \bar{M}'(-h_2) e^{i(h_1-h_2)d} + \bar{B} \bar{R} \bar{M}'(h_2) e^{i(h_1-h_2)d} \quad (3.29)$$

onde $\bar{R}$ é uma função vetorial cuja expressão não é necessário conhecer.

Substituindo-se (3.26)...(3.29) em (3.25) obtém-se

$$A e^{i(h_1-h_2)d} = 1 + E + I e^{-i2h_2 d} \quad (3.30)$$

$$F + J e^{-i2h_2 d} = B e^{i(h_1 - h_2)d} \quad (3.31)$$

Procedendo-se de maneira semelhante, a aplicação das condições de contorno (3.22) a (3.24) aos termos em $\bar{M}$ e $\bar{N}$ das equações (3.18) a (3.21) permite que se obtenha o seguinte sistema de equações:

$$-1 + F - J = 0 \quad (3.32)$$

$$E - I = 0 \quad (3.33)$$

$$1 + H + L = 0 \quad (3.34)$$

$$G + K = 0 \quad (3.35)$$

$$A e^{i(h_1 - h_2)d} = 1 + E + I e^{-i2h_2 d} \quad (3.36)$$

$$F + J e^{-i2h_2 d} = B e^{i(h_1 - h_2)d} \quad (3.37)$$

$$1 + G - K e^{-i2h_2 d} = C e^{i(h_1 - h_2)d} \frac{h_1 (\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}}{h_2 (\lambda^2 + h_1^2)^{1/2}} \quad (3.38)$$

$$H - L e^{-i2h_2 d} = D e^{i(h_1 - h_2)d} \frac{h_1 (\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}}{h_2 (\lambda^2 + h_1^2)^{1/2}} \quad (3.39)$$

$$1 + E - I e^{-i2h_2 d} = A \frac{\epsilon h_1}{\epsilon_0 h_2} e^{i(h_1 - h_2)d} \quad (3.40)$$

$$F - J e^{-i2h_2 d} = B \frac{\epsilon h_1}{\epsilon_0 h_2} e^{i(h_1 - h_2)d} \quad (3.41)$$

$$1 + G + K e^{-i2h_2 d} = C \frac{\epsilon(\lambda^2 + h_1^2)^{1/2}}{\epsilon_0(\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}} e^{i(h_1 - h_2)d} \quad (3.42)$$

$$H + L e^{-i2h_2 d} = D \frac{\epsilon(\lambda^2 + h_1^2)^{1/2}}{\epsilon_0(\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}} e^{i(h_1 - h_2)d} \quad (3.43)$$

Como a função de Green diádica de interesse é a $\bar{G}^{(12)}$, uma vez que desejam-se conhecer os campos apenas na região 1, resolve-se o sistema (3.32) a (3.43) para os coeficientes A, B, C e D obtendo-se:

$$A = \frac{2h_2 e^{-i(h_1 + h_2)d}}{\xi^2 h_1 (1 + e^{-i2h_2 d}) - h_2 (1 - e^{-i2h_2 d})} \quad (3.44)$$

$$B = A \quad (3.45)$$

$$C = \frac{2h_2 e^{-i(h_1 + h_2)d}}{\xi [h_2 (1 + e^{-i2h_2 d}) - h_1 (1 - e^{-i2h_2 d})]} \quad (3.46)$$

$$D = -C$$

$$\text{onde } \xi = (\epsilon/\epsilon_0)^{1/2} = \epsilon_r^{1/2} \quad (3.48)$$

O conhecimento dos coeficientes A, ..., D encerra então o problema da obtenção da função de Green diádica para o meio com três camadas planas e paralelas.

III.5 - OBTENÇÃO DA FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA MEIOS COM QUATRO CAMADAS PLANAS E PARALELAS.

A geometria utilizada na solução do problema está mostrada na figura 4.

Supõe-se, neste caso, que a fonte está localizada na região 3 e que os diversos meios são caracterizados pelas seguintes grandezas:

$$\text{Região 1: } \mu_0, \epsilon_0, \sigma = 0, k_1 = \omega(\mu_0\epsilon_0)^{1/2}$$

$$\text{Região 2: } \mu_0, \epsilon_2, \sigma_2, k_2 = \omega \left[\mu_0 \epsilon_2 \left(1 + \frac{i\sigma_2}{\omega\epsilon_2} \right) \right]^{1/2}$$

$$\text{Região 3: } \mu_0, \epsilon_3, \sigma_3, k_3 = \omega \left[\mu_0 \epsilon_3 \left(1 + \frac{i\sigma_3}{\omega\epsilon_3} \right) \right]^{1/2}$$

$$\text{Região 4: } \sigma = \infty$$

Sabendo-se que os campos eletromagnéticos na região 4 são nulos e considerando-se as reflexões que ocorrem nas fronteiras em $Z=0$, $Z=d_1$ e $Z=d_2$ pode-se, utilizando-se o método da superposição dos campos espalhados, dizer que as funções de Green diádicas em cada região são dadas por:

$$\bar{\bar{G}}^{(13)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{\bar{G}}_T^{(13)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.49)$$

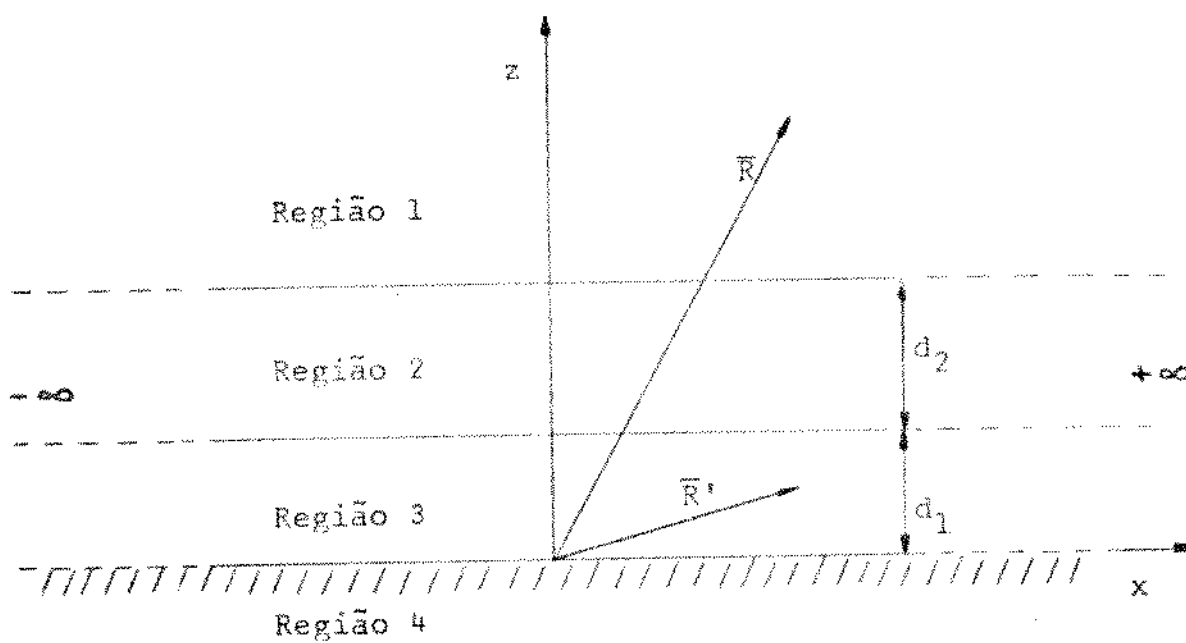


Fig. 4 - Geometria utilizada na obtenção da função de Green diádica.

$$\bar{G}^{(23)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{G}_R^{(23)}(\bar{R}/\bar{R}') + \bar{G}_T^{(23)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.50)$$

$$\bar{G}^{(33)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{G}_{R_1}^{(33)}(\bar{R}/\bar{R}') + \bar{G}_{R_2}^{(33)}(\bar{R}/\bar{R}') + \bar{G}_3^{(33)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.51)$$

Na equação (3.49), o índice T se refere à onda transmitida através da fronteira em $Z=d_1+d_2$. Na equação (3.50) os índices R e T se referem, respectivamente, às ondas refletida em $Z=d_1+d_2$ e transmitida através da fronteira em $Z=d_1$. Na equação (3.51) os índices R_1 , R_2 e 3 referem-se, respectivamente, às ondas refletidas em $Z=0$, $Z=d_1$ e à onda direta da fonte ao ponto de observação do campo.

Para que sejam satisfeitas as condições de contorno do problema e a condição de radiação é necessário que os termos de (3.49) a (3.51) sejam os seguintes, tendo-se em vista a expansão dada por (3.7):

$$\bar{G}_T^{(13)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_3} \left\{ \bar{M}(h_1) \left[\bar{A}M'(-h_3) + \bar{B}M'(h_3) \right] + \right. \\ \left. \bar{N}(h_1) \left[\bar{C}N'(-h_3) + \bar{D}N'(h_3) \right] \right\}, \quad Z \geq d_1 + d_2 \quad (3.52)$$

$$\bar{G}_R^{(23)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_3} \left\{ \bar{M}(-h_2) \left[\bar{E}M'(-h_3) + \bar{F}M'(h_3) \right] + \right. \\ \left. \bar{N}(-h_2) \left[\bar{G}N'(-h_3) + \bar{H}N'(h_3) \right] \right\}, \quad d_1 \leq Z \leq d_1 + d_2 \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_T^{(23)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_3} & \left\{ \bar{M}(h_2) \left[E' \bar{M}'(-h_3) + F' \bar{M}'(h_3) \right] + \right. \\ & \left. \bar{N}(h_2) \left[G' \bar{N}'(-h_3) + H' \bar{N}'(h_3) \right] \right\}, \quad d_1 \leq Z \leq d_1 + d_2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{R1}^{(33)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_3} & \left\{ \bar{M}(h_3) \left[I \bar{M}'(-h_3) + J \bar{M}'(h_3) \right] + \right. \\ & \left. \bar{N}(h_3) \left[K \bar{N}'(-h_3) + L \bar{N}'(h_3) \right] \right\}, \quad 0 \leq Z \leq d_1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{R2}^{(33)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_3} & \left\{ \bar{M}(-h_3) \left[I' \bar{M}'(-h_3) + J' \bar{M}'(h_3) \right] + \right. \\ & \left. \bar{N}(-h_3) \left[K' \bar{N}'(-h_3) + L' \bar{N}'(h_3) \right] \right\}, \quad 0 \leq Z \leq d_1 \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\bar{G}_3^{(33)} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_3} \begin{cases} \bar{M}(h_3) \bar{M}'(-h_3) + \bar{N}(h_3) \bar{N}'(-h_3), & Z' \leq Z \leq d_1 \\ \bar{M}(-h_3) \bar{M}'(h_3) + \bar{N}(-h_3) \bar{N}'(h_3), & 0 \leq Z \leq Z' \end{cases} \quad (3.57)$$

$$\text{onde} \quad h_1 = (k_1^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (3.58)$$

$$h_2 = (k_2^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (3.59)$$

$$h_3 = (k_3^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (3.60)$$

As condições de contorno que devem ser satisfeitas pelas funções diádicas para as diversas regiões são as seguintes:

$$\hat{z}_x [\nabla_x \bar{G}^{(33)}] = 0 \quad \text{em } Z = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{\epsilon_3} \hat{z}_x [\nabla_x \bar{G}^{(33)}] = \frac{1}{\epsilon_2} \hat{z}_x [\nabla_x \bar{G}^{(23)}] \quad \text{em } Z = d_1 \quad (3.62)$$

$$\hat{z}_x \bar{G}^{(33)} = \hat{z}_x \bar{G}^{(23)} \quad \text{em } Z = d_1 \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \hat{z}_x [\nabla_x \bar{G}^{(13)}] = \frac{1}{\epsilon_2} \hat{z}_x [\nabla_x \bar{G}^{(23)}] \quad \text{em } Z = d_1 + d_2 \quad (3.64)$$

$$\hat{z}_x \bar{G}^{(13)} = \hat{z}_x \bar{G}^{(23)} \quad \text{em } Z = d_1 + d_2 \quad (3.65)$$

As equações (3.61), (3.62) e (3.64) expressam a continuidade da componente tangencial do campo elétrico, respectivamente, em $Z=0$, $Z=d_1$ e $Z=d_1+d_2$. As equações (3.63) e (3.65) resultam da continuidade do campo magnético em $Z=d_1$ e $Z=d_1+d_2$, respectivamente.

Procedendo-se de maneira semelhante àquela exemplificada no ítem anterior deste capítulo e impondo-se as condições (3.61) a (3.65) aos termos em $\bar{M}$ e $\bar{N}$ de (3.52) a (3.57) obtêm-se o seguinte sistema de equações que permite que se determinem os coeficientes procurados:

$$1 - J + J' = 0 \quad (3.66)$$

$$-I + I' = 0 \quad (3.67)$$

$$1 + L + L' = 0 \quad (3.68)$$

$$K + K' = 0 \quad (3.69)$$

$$1+I-I'e^{-i2h_3d_1} = \left[-Ee^{-i(h_3+h_2)d_1} + E'e^{-i(h_3-h_2)d_1} \right] \frac{\epsilon_3 h_2}{\epsilon_2 h_3} \quad (3.70)$$

$$J-J'e^{-i2h_3d_1} = \left[-Fe^{-i(h_3+h_2)d_1} + F'e^{-i(h_3-h_2)d_1} \right] \frac{\epsilon_3 h_2}{\epsilon_2 h_3} \quad (3.71)$$

$$1+K+K'e^{-i2h_3d_1} = \left[Ge^{-i(h_3+h_2)d_1} + G'e^{-i(h_3-h_2)d_1} \right] \frac{\epsilon_3 (\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}}{\epsilon_2 (\lambda^2 + h_3^2)^{1/2}} \quad (3.72)$$

$$L+L'e^{-i2h_3d_1} = \left[He^{-i(h_3+h_2)d_1} + H'e^{-i(h_3-h_2)d_1} \right] \frac{\epsilon_3 (\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}}{\epsilon_2 (\lambda^2 + h_3^2)^{1/2}} \quad (3.73)$$

$$1+I+I'e^{-i2h_3d_1} = Ee^{-i(h_3+h_2)d_1} + E'e^{-i(h_3-h_2)d_1} \quad (3.74)$$

$$J+J'e^{-i2h_3d_1} = Fe^{-i(h_3+h_2)d_1} + F'e^{-i(h_3-h_2)d_1} \quad (3.75)$$

$$1+K-K'e^{-i2h_3d_1} = \left[-Ge^{-i(h_3+h_2)d_1} + G'e^{-i(h_3-h_2)d_1} \right] \frac{h_2 (\lambda^2 + h_3^2)^{1/2}}{h_3 (\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}} \quad (3.76)$$

$$L-L'e^{-i2h_3d_1}=\left[-He^{-i(h_3+h_2)d_1}+H'e^{-i(h_3-h_2)d_1}\right]\frac{h_2(\lambda^2+h_3^2)^{1/2}}{h_3(\lambda^2+h_2^2)^{1/2}} \quad (3.77)$$

$$A=\left[-Ee^{-i(h_1+h_2)(d_1+d_2)}+E'e^{-i(h_1-h_2)(d_1+d_2)}\right]\frac{\epsilon_0 h_2}{\epsilon_2 h_1} \quad (3.78)$$

$$B=\left[-Fe^{-i(h_1+h_2)(d_1+d_2)}+F'e^{-i(h_1-h_2)(d_1+d_2)}\right]\frac{\epsilon_0 h_2}{\epsilon_2 h_1} \quad (3.79)$$

$$C=\left[Ge^{-i(h_1+h_2)(d_1+d_2)}+G'e^{-i(h_1-h_2)(d_1+d_2)}\right]\frac{\epsilon_0(\lambda^2+h_2^2)^{1/2}}{\epsilon_2(\lambda^2+h_1^2)^{1/2}} \quad (3.80)$$

$$D=\left[He^{-i(h_1+h_2)(d_1+d_2)}+H'e^{-i(h_1-h_2)(d_1+d_2)}\right]\frac{\epsilon_0(\lambda^2+h_2^2)^{1/2}}{\epsilon_2(\lambda^2+h_1^2)^{1/2}} \quad (3.81)$$

$$A=Ee^{-i(h_1+h_2)(d_1+d_2)}+E'e^{-i(h_1-h_2)(d_1+d_2)} \quad (3.82)$$

$$B=Fe^{-i(h_1+h_2)(d_1+d_2)}+F'e^{-i(h_1-h_2)(d_1+d_2)} \quad (3.83)$$

$$C=\left[-Ge^{-i(h_1+h_2)(d_1+d_2)}+G'e^{-i(h_1-h_2)(d_1+d_2)}\right]\frac{h_2(\lambda^2+h_1^2)^{1/2}}{h_1(\lambda^2+h_2^2)^{1/2}} \quad (3.84)$$

$$D=\left[-He^{-i(h_1+h_2)(d_1+d_2)}+H'e^{-i(h_1-h_2)(d_1+d_2)}\right]\frac{h_2(\lambda^2+h_1^2)^{1/2}}{h_1(\lambda^2+h_2^2)^{1/2}} \quad (3.85)$$

A solução das equações (3.66) a (3.85) fornece os coeficientes A, B, C e D da função $\tilde{G}^{(13)}$ que será utilizada posteriormente neste trabalho:

$$A = \frac{e^{-i(h_1-h_2)d}(\alpha_3+1)}{\left[e^{i(h_2+h_3)d_1} + e^{i(h_2-h_3)d_1} \right] \left\{ \frac{1}{e^{i2h_3d_1+1}} (\alpha_3 e^{i2h_2d_2+1}) - \frac{1}{2} \cdot \left[\alpha_3 e^{i2h_2d_2} \left(1 + \frac{\epsilon_3 h_2}{\epsilon_2 h_3} \right) + \left(1 - \frac{\epsilon_3 h_2}{\epsilon_2 h_3} \right) \right] \right\}} \quad (3.86)$$

$$B = \frac{e^{-i(h_1-h_2)d}(\alpha_3+1)}{\left[e^{i(h_2+h_3)d_1} + e^{i(h_2-h_3)d_1} \right] \left\{ -\frac{1}{e^{-i2h_3d_1+1}} (\alpha_3 e^{i2h_2d_2+1}) + \frac{1}{2} \cdot \left[\alpha_3 e^{i2h_2d_2} \left(1 - \frac{\epsilon_3 h_2}{\epsilon_2 h_3} \right) + \left(1 + \frac{\epsilon_3 h_2}{\epsilon_2 h_3} \right) \right] \right\}} \quad (3.87)$$

$$C = \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \alpha_1 e^{-i(h_1-h_2)d}(\alpha_4+1)}{\left[e^{-i(h_2-h_3)d_1} - e^{i(h_2+h_3)d_1} \right] \left\{ \frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} \alpha_2 \frac{1}{1-e^{i2h_3d_1}} (\alpha_4 e^{i2h_2d_2+1}) - \frac{1}{2} \left[\alpha_4 e^{i2h_2d_2} \left(\frac{\epsilon_3 \alpha_2}{\epsilon_2} + \frac{h_2}{h_3 \alpha_2} \right) + \left(\frac{\epsilon_3 \alpha_2}{\epsilon_2} - \frac{h_2}{h_3 \alpha_2} \right) \right] \right\}} \quad (3.88)$$

$$D = \frac{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \alpha_1 e^{-i(h_1 - h_2)d} (\alpha_4 + 1)}{\left[e^{i(h_2 + h_3)d_1} - e^{i(h_2 - h_3)d_1} \right] \left\{ -\frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} \alpha_2 \frac{1}{1 - e^{-i2h_3d_1}} (\alpha_4 e^{i2h_2d_2} + 1) \right.}$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[\alpha_4 e^{i2h_2d_2} \left(\frac{\epsilon_3 \alpha_2}{\epsilon_2} - \frac{h_2}{h_3 \alpha_2} \right) + \left(\frac{\epsilon_3 \alpha_2}{\epsilon_2} + \frac{h_2}{h_3 \alpha_2} \right) \right] \right\}$$

(3.89)

$$\text{onde } \alpha_1 = \frac{(\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}}{(\lambda^2 + h_1^2)^{1/2}} \quad (3.90)$$

$$\alpha_2 = \frac{(\lambda^2 + h_2^2)^{1/2}}{(\lambda^2 + h_3^2)^{1/2}} \quad (3.91)$$

$$\alpha_3 = \frac{\epsilon_0 h_2 - \epsilon_2 h_1}{\epsilon_0 h_2 + \epsilon_2 h_1} \quad (3.92)$$

$$\alpha_4 = \frac{\frac{h_2}{h_1 \alpha_1} - \frac{\epsilon_0 \alpha_1}{\epsilon_2}}{\frac{h_2}{h_1 \alpha_1} + \frac{\epsilon_0 \alpha_1}{\epsilon_2}} \quad (3.93)$$

$$d = d_1 + d_2 \quad (3.94)$$

III.6 - OBTENÇÃO DA FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA MEIOS COM TRÊS CAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS

O desenvolvimento apresentado neste ítem baseia-se na geometria mostrada na figura 5.

Admite-se, agora, que os meios 1, 2 e 3 são caracteri-
zados pelos seguintes parâmetros:

Região 1: $\mu_0, \epsilon_0, \sigma = 0, k_1 = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$

Região 2: $\mu_0, \epsilon_2, \sigma = 0, k_2 = \omega(\mu_0 \epsilon_2)^{1/2}$

Região 3: $\sigma = \infty$

Supõe-se, também, que as fontes estão localizadas no meio 2 e que o cilindro condutor e a camada dielétrica apresentam dimensão infinita na direção Z.

Utilizando-se mais uma vez o método da superposição dos campos espalhados e com base na expansão da função de Green diádica do espaço livre dada por (3.12) pode-se dizer que:

$$\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{G}_T^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.95)$$

$$\bar{G}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{G}_2^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}') + \bar{G}_{R_1}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}') + \bar{G}_{R_2}^{(22)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.96)$$

Na equação (3.95) o índice T se refere à onda transmitida através da fronteira em $r=a$. Na equação (3.96), os índices 2, R_1 e R_2 estão associados, respectivamente, às ondas direta da fonte ao ponto de observação e refletidas em $r=b$ e $r=a$.

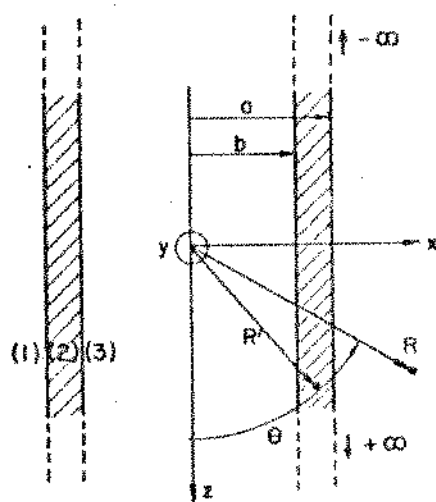
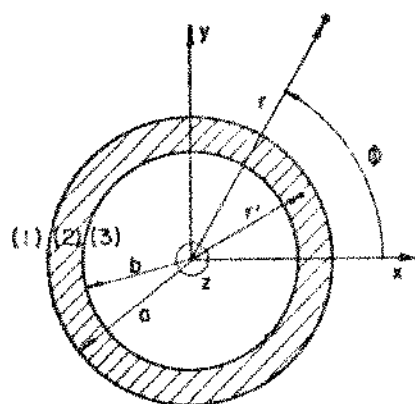


Fig. 5 - Geometria utilizada para se obter a função de Green diádica.

Para que sejam satisfeitas as condições de contorno e a condição de radiação os termos de (3.95) e (3.96) devem ter as formas seguintes:

$$\begin{aligned} \bar{G}_T^{(12)} = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{\gamma^2} & \left\{ \left[A_{e_n}^{(1)} \bar{M}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) + B_{e_n}^{(1)} \bar{N}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(-h) + \right. \\ & \left[A_{e_n}^{(1)} \bar{M}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) + B_{e_n}^{(1)} \bar{N}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(-h) + \\ & \left. \left[C_{e_n}^{(1)} \bar{N}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) + D_{e_n}^{(1)} \bar{M}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(-h) + \right. \\ & \left. \left[C_{e_n}^{(1)} \bar{N}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) + D_{e_n}^{(1)} \bar{M}_{e_{n\alpha}}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(-h) \right\}, \quad r \geq a \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\bar{G}_2^{(22)} = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{\gamma^2} \begin{cases} \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(-h) + \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(-h), & r' \leq r \leq a \\ \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(-h) + \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(-h), & b \leq r \leq r' \end{cases} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{R1}^{(22)} = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{\gamma^2} & \left\{ \left[E_{e_n} \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) + F_{0n} \bar{N}_{0n\gamma}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{\prime(1)}(-h) + \right. \\ & \left[E_{e_n} \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) + F_{0n} \bar{N}_{0n\gamma}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{\prime}(-h) + \left[G_{e_n} \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) + H_{0n} \bar{M}_{0n\gamma}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{\prime(1)}(-h) + \\ & \left. \left[G_{e_n} \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) + H_{0n} \bar{M}_{0n\gamma}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{\prime}(-h) \right\}, \quad b \leq r \leq a \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{R2}^{(22)} = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{\gamma^2} & \left\{ \left[I_{e_n} \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) + J_{0n} \bar{N}_{0n\gamma}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{\prime(1)}(-h) + \right. \\ & \left[I_{e_n} \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) + J_{0n} \bar{N}_{0n\gamma}^{(1)}(h) \right] \bar{M}_{e_{n\gamma}}^{\prime}(-h) + \left[K_{e_n} \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) + L_{0n} \bar{M}_{0n\gamma}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{\prime(1)}(-h) + \\ & \left. \left[K_{e_n} \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{(1)}(h) + L_{0n} \bar{M}_{0n\gamma}^{(1)}(h) \right] \bar{N}_{e_{n\gamma}}^{\prime}(-h) \right\}, \quad b \leq r \leq a \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \gamma^2 &= k_2^2 - h^2 \\ \alpha^2 &= k_1^2 - h^2 \end{aligned} \quad (3.101)$$

As condições de contorno para o problema são as relacionadas a seguir:

$$\hat{r}x \left[\nabla_x \bar{G}^{(22)} \right] = 0 \quad \text{em } r=b \quad (3.102)$$

$$\frac{1}{\epsilon_2} \hat{r}_x [\nabla_x \bar{G}^{(22)}] = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{r}_x [\nabla_x \bar{G}^{(12)}] \quad \text{em } r=a \quad (3.103)$$

$$\hat{r}_x \bar{G}^{(22)} = \hat{r}_x \bar{G}^{(12)} \quad \text{em } r=a \quad (3.104)$$

As equações (3.102) e (3.103) expressam a continuidade de do campo elétrico, respectivamente, em $r=b$ e $r=a$. A equação (3.104) resulta da continuidade do campo magnético em $r=a$.

A imposição destas condições de contorno fornece o seguinte sistema de equações que permite que se obtenham os coeficientes procurados:

$$1+I+E \frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{J_n(\gamma b)} = 0 \quad (3.105)$$

$$F+J \frac{J'_n(\gamma b)}{H_n^{(1)'}(\gamma b)} = 0 \quad (3.106)$$

$$E'+I' \frac{J_n(\gamma b)}{H_n^{(1)}(\gamma b)} = 0 \quad (3.107)$$

$$F'+J' \frac{J'_n(\gamma b)}{H_n^{(1)'}(\gamma b)} = 0 \quad (3.108)$$

$$1+K+G \frac{H_n^{(1)'}(\gamma b)}{J'_n(\gamma b)} = 0 \quad (3.109)$$

$$H+L \frac{J_n(\gamma b)}{H_n^{(1)}(\gamma b)} = 0 \quad (3.110)$$

$$G'+K' \frac{J'_n(\gamma b)}{H_n^{(1)'}(\gamma b)} = 0 \quad (3.111)$$

$$H'+L' \frac{J_n(\gamma b)}{H_n^{(1)}(\gamma b)} = 0 \quad (3.112)$$

$$-EH_n^{(1)'}(\gamma a) \pm F \frac{ihn}{k_2 a} H_n^{(1)}(\gamma a) - IJ'_n(\gamma a) \pm J \frac{ihn}{k_2 a} J_n(\gamma a) = -AH_n^{(1)'}(\alpha a) \pm$$

$$B \frac{ihn}{k_1 a} H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.113)$$

$$F \frac{\gamma^2}{k_2} H_n^{(1)}(\gamma a) + J \frac{\gamma^2}{k_2} J_n(\gamma a) = B \frac{\alpha^2}{k_1} H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.114)$$

$$-H_n^{(1)'}(\gamma a) - E'H_n^{(1)'}(\gamma a) \pm F' \frac{ihn}{k_2 a} H_n^{(1)}(\gamma a) - I'J'_n(\gamma a) \pm J' \frac{ihn}{k_2 a} J_n(\gamma a) =$$

$$-A'H_n^{(1)'}(\alpha a) \pm B' \frac{ihn}{k_0 a} H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.115)$$

$$F' \frac{\gamma^2}{k_2} H_n^{(1)}(\gamma a) + J' \frac{\gamma^2}{k_2} J_n(\gamma a) = B' \frac{\alpha^2}{k_1} H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.116)$$

$$\mp G \frac{ihn}{k_2 a} H_n^{(1)}(\gamma a) - H H_n^{(1)'}(\gamma a) \mp K \frac{ihn}{k_2 a} J_n(\gamma a) - L J_n'(\gamma a) =$$

$$\mp C \frac{ihn}{k_1 a} H_n^{(1)}(\alpha a) - D H_n^{(1)'}(\alpha a) \quad (3.117)$$

$$G \frac{\gamma^2}{k_2} H_n^{(1)}(\gamma a) + K \frac{\gamma^2}{k_2} J_n(\gamma a) = C \frac{\alpha^2}{k_1} H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.118)$$

$$\mp \frac{ihn}{k_2 a} H_n^{(1)}(\gamma a) \mp G \frac{ihn}{k_2 a} H_n^{(1)}(\gamma a) - H' H_n^{(1)'}(\gamma a) \mp K \frac{ihn}{k_2 a} J_n(\gamma a) - L' J_n'(\gamma a) =$$

$$\mp C' \frac{ihn}{k_1 a} H_n^{(1)}(\alpha a) - D' H_n^{(1)'}(\alpha a) \quad (3.119)$$

$$\frac{\gamma^2}{k_2} H_n^{(1)}(\gamma a) + G \frac{\gamma^2}{k_2} H_n^{(1)}(\gamma a) + K \frac{\gamma^2}{k_2} J_n(\gamma a) = C \frac{\alpha^2}{k_1} H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.120)$$

$$\mp E \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\gamma a) - F k_2 H_n^{(1)'}(\gamma a) \mp I \frac{ihn}{a} J_n(\gamma a) - J k_2 J_n'(\gamma a) =$$

$$\mp A \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\alpha a) - B \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} k_1 H_n^{(1)'}(\alpha a) \quad (3.121)$$

$$E \gamma^2 H_n^{(1)}(\gamma a) + I \gamma^2 J_n(\gamma a) = A \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \alpha^2 H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.122)$$

$$\mp \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\gamma a) \mp E \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\gamma a) - F k_2 H_n^{(1)'}(\gamma a) \mp I \frac{ihn}{a} J_n(\gamma a) -$$

$$J k_2 J_n'(\gamma a) = \mp A \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\alpha a) - B \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} k_1 H_n^{(1)'}(\alpha a) \quad (3.123)$$

$$\gamma^2 H_n^{(1)}(\gamma a) + E \gamma^2 H_n^{(1)}(\gamma a) + I \gamma^2 J_n(\gamma a) = A \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \alpha^2 H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (2.124)$$

$$-G k_2 H_n^{(1)'}(\gamma a) \pm H \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\gamma a) - K k_2 J_n'(\gamma a) \pm L \frac{ihn}{a} J_n(\gamma a) =$$

$$-C \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} k_1 H_n^{(1)'}(\alpha a) \pm D \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.125)$$

$$H\gamma^2 H_n^{(1)}(\gamma a) + L\gamma^2 J_n(\gamma a) = D \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \alpha^2 H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} -k_2 H_n^{(1)'}(\gamma a) - G' k_2 H_n^{(1)'}(\gamma a) \pm H' \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\gamma a) - K' k_2 J_n'(\gamma a) \pm L' \frac{ihn}{a} J_n(\gamma a) = \\ -C' \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} k_1 H_n^{(1)'}(\alpha a) \pm D' \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \frac{ihn}{a} H_n^{(1)}(\alpha a) \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$H'\gamma^2 H_n^{(1)}(\gamma a) + L'\gamma^2 J_n(\gamma a) = D' \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \alpha^2 H_n^{(1)}(\alpha a) \quad (3.128)$$

Nas expressões anteriores tem-se:

$$J_n'(\beta d) = \left. \frac{\partial J_n(\beta r)}{\partial r} \right|_{r=d} \quad (3.129)$$

$$H_n^{(1)'}(\beta d) = \left. \frac{\partial H_n^{(1)}(\beta r)}{\partial r} \right|_{r=d} \quad (3.130)$$

onde $\beta = \gamma, \alpha$ e $d = a, b$

Nota-se que nas equações (3.105) a (3.128) foram omitidas, para facilitar a escrita, os índices e_n ou o_n dos coeficientes A, B, C etc.

Resolvendo-se o sistema de equações obtêm-se os coeficientes da função de Green diádica da região 1:

$$A_{e_n} = \mp B_{0n} \frac{1}{\epsilon_r X} \left[\frac{k_2^2 \alpha^2}{k_1 \gamma^2} \frac{S}{T} + \epsilon_r k_1 \frac{H_n^{(1)'}(\alpha a)}{H_n^{(1)}(\alpha a)} \right] \quad (3.131)$$

$$B_{e_n} = \mp \frac{i 2 J_n(\gamma b)}{\pi \gamma a Q \left\{ \frac{X}{k_1} H_n^{(1)}(\alpha a) + \frac{1}{\epsilon_r X} \left[\frac{k_2^2 \alpha^2 S}{k_1 \gamma^2 T} + \epsilon_r k_1 \frac{H_n^{(1)'}(\alpha a)}{H_n^{(1)}(\alpha a)} \right] \right\} \cdot \left[H_n^{(1)'}(\alpha a) + \epsilon_r \frac{\alpha^2}{\gamma^2} H_n^{(1)}(\alpha a) \frac{P}{Q} \right] } \quad (3.132)$$

$$A'_{e_n} = \frac{i 2 H_n^{(1)}(\gamma b)}{\pi \gamma a Q \left\{ \frac{\epsilon_r X^2 [H_n^{(1)}(\alpha a)]^2}{\frac{S}{T} \frac{k_2^2 \alpha^2}{\gamma^2} H_n^{(1)}(\alpha a) + \epsilon_r k_1^2 H_n^{(1)'}(\alpha a)} - H_n^{(1)'}(\alpha a) - \frac{P}{Q} \epsilon_r \frac{\alpha^2}{\gamma^2} H_n^{(1)}(\alpha a) \right\}} \quad (3.133)$$

$$B'_{e_n} = \mp A'_{e_n} \frac{\epsilon_r X H_n^{(1)}(\alpha a)}{\frac{S}{T} \frac{k_2^2 \alpha^2}{k_1 \gamma^2} H_n^{(1)}(\alpha a) + \epsilon_r k_1 H_n^{(1)'}(\alpha a)} \quad (3.134)$$

$$C_{0n}^{e_n} = \frac{-i2k_2 J_n'(\gamma b)}{\pi \gamma a T \left\{ \epsilon_r k_1 H_n^{(1)'}(\alpha a) + \frac{k_2^2 \alpha^2}{k_1 \gamma^2} \frac{S}{T} H_n^{(1)}(\alpha a) + \frac{\epsilon_r X^2 [H_n^{(1)}(\alpha a)]^2}{k_1 \left[\epsilon_r \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \frac{P}{Q} H_n^{(1)}(\alpha a) + H_n^{(1)'}(\alpha a) \right]} \right\}}$$

(3.135)

$$D_{0n}^{e_n} = \bar{\gamma} C_{0n}^{e_n} \frac{X H_n^{(1)}(\alpha a)}{k_1 \left[\epsilon_r \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \frac{P}{Q} H_n^{(1)}(\alpha a) + H_n^{(1)'}(\alpha a) \right]}$$

(3.136)

$$C_{0n}^{e_n'} = C_{0n}^{e_n} \frac{H_n^{(1)'}(\gamma b)}{J_n'(\gamma b)}$$

(3.137)

$$D_{0n}^{e_n'} = D_{0n}^{e_n} \frac{H_n^{(1)'}(\gamma b)}{J_n'(\gamma b)}$$

(3.138)

onde $\epsilon_r = \epsilon_2 / \epsilon_0$

(3.139)

$$X = \frac{i h n}{a} \left[1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \right]$$

(3.140)

$$P = H_n^{(1)}(\gamma b) J_n'(\gamma a) - H_n^{(1)'}(\gamma a) J_n(\gamma b) \quad (3.141)$$

$$Q = H_n^{(1)}(\gamma a) J_n(\gamma b) - H_n^{(1)}(\gamma b) J_n(\gamma a) \quad (3.142)$$

$$S = H_n^{(1)'}(\gamma a) J_n'(\gamma b) - H_n^{(1)'}(\gamma b) J_n'(\gamma a) \quad (3.143)$$

$$T = J_n(\gamma a) H_n^{(1)'}(\gamma b) - J_n'(\gamma b) H_n^{(1)}(\gamma a) \quad (3.144)$$

III.7 - DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO ASSINTÔTICA DA FUNÇÃO DE GREEN DIÂDICA PARA MEIOS DE TRÊS CAMADAS PLANAS E PARALELAS.

Para que se determinem, posteriormente, os campos distantes das antenas de microfita, é interessante obter-se, inicialmente, uma expressão assintótica da função de Green diádica que será utilizada. A utilização do método do ponto de sela, que é discutido, por exemplo, nas referências [21, pág.11-14], [27, pág.495-506], [28, pág.245-250, 264-270] e [29, capítulo 4], permite que se obtenha uma solução de primeira ordem que representa a contribuição apenas da onda espacial.

De acordo com o método, uma integral complexa do tipo

$$F(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} f(h) e^{i\rho\phi(h)} dh \quad (3.145)$$

tem como expressão assintótica [21, pág. 13]

$$F(\rho) = \left(\frac{2\pi}{\rho |\varphi''(h_0)|} \right)^{1/2} f(h_0) e^{i \left[\rho \varphi(h_0) - \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right]} \quad (3.146)$$

$$\text{onde } \beta = \text{Arg } [\varphi''(h_0)] , \quad (3.147)$$

h_0 é o valor de h no ponto de sela e $\varphi'(h_0)$ e $\varphi''(h_0)$ são os valores das derivadas primeira e segunda de $\varphi(h)$ com relação a h , no ponto $h = h_0$, desde que sejam satisfeitas as seguintes condições:

- a) ρ deve ter um valor bem maior do que a unidade,
- b) $\varphi(h)$ deve ter a magnitude da ordem da unidade e apresentar um valor extremo em h_0 , de tal modo que $\varphi'(h_0) = 0$,
- c) a função $f(h)$ deve variar lentamente nas vizinhanças de h_0 .

Considere-se um dos termos de $\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}')$ dados em (3.18), por exemplo,

$$\bar{G}_1^{(12)}(R/R') = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_2} A \bar{M}_{\text{en}\lambda}(h_1) \bar{M}'_{\text{en}\lambda}(-h_2) d\lambda \quad (3.148)$$

Esta última integral pode ser transformada numa integral com limites de integração $-\infty$ e $+\infty$ utilizando-se o método operacional apresentado por Tai [21, pág.109-110]. O resultado é o seguinte:

$$\bar{G}_1^{(12)}(R/R') = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_2} A \bar{M}_{\text{en}\lambda}^{(1)}(h_1) \bar{M}'_{\text{en}\lambda}(-h_2) d\lambda \quad (3.149)$$

onde $\bar{M}^{(1)}$ é definida com relação à função de Hankel de primeira espécie [i.é., $\bar{M}^{(1)}$ é dada por (3.4) substituindo-se $J_n(\lambda r)$ por $H_n^{(1)}(\lambda r)$].

Utilizando-se o mesmo processo para os outros termos de $\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}')$ chega-se a:

$$\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda h_2} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) \left\{ \bar{M}_{0n\lambda}^{(1)}(h_1) \left[\bar{A}\bar{M}'_{0n\lambda}(-h_2) + \bar{B}\bar{M}'_{0n\lambda}(h_2) \right] + \right. \\ \left. \bar{N}_{0n\lambda}^{(1)}(h_1) \left[\bar{C}\bar{N}'_{0n\lambda}(-h_2) + \bar{D}\bar{N}'_{0n\lambda}(h_2) \right] \right\} \quad (3.150)$$

Supondo-se que λr seja grande em comparação com a unidade, pode-se aproximar a função de Hankel de primeira espécie pela sua expressão assintótica [21, pág.100].

$$H_n^{(1)}(\lambda r) = \left(\frac{2}{\pi \lambda r} \right)^{1/2} (-i)^{n+1/2} e^{i\lambda r} \quad (3.151)$$

As funções $\bar{M}^{(1)}$ e $\bar{N}^{(1)}$ são assim escritas da seguinte maneira, desprezando-se os termos de ordem igual ou superior a $(\lambda r)^{-3/2}$:

$$\bar{M}_{0n\lambda}^{(1)}(h_1) = (-i)^{n+3/2} \lambda \left(\frac{2}{\pi \lambda r} \right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 Z)} \frac{\cos_{n\phi} \hat{\phi}}{\sin_{n\phi} \hat{\phi}} \quad (3.152)$$

$$\bar{N}_{0n\lambda}^{(1)}(h_1) = (-i)^{n+1/2} \frac{\lambda}{k_1} \left(\frac{2}{\pi \lambda r} \right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 Z)} \frac{\cos_{n\phi}(-h_1 \hat{r} + \lambda \hat{Z})}{\sin_{n\phi}} \quad (3.153)$$

Substituindo-se (3.152) e (3.153) em (3.150):

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{h_2} (-i)^{n+1/2} \left(\frac{2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 z)} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \\ &\left\{ -i\phi \left[\bar{A}M'_{0n\lambda}(-h_2) + \bar{B}M'_{0n\lambda}(h_2) \right] + \frac{1}{k_1} (-h_1 \hat{r} + \lambda \hat{z}) \left[\bar{C}N'_{0n\lambda}(-h_2) + \bar{D}N'_{0n\lambda}(h_2) \right] \right\} \quad (3.154) \end{aligned}$$

Observa-se que esta última equação pode ser colocada sob a forma seguinte:

$$\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda) e^{i\rho\phi(\lambda)} d\lambda \quad (3.155)$$

$$\text{onde} \quad \rho\phi(\lambda) = \lambda r + h_1 z \quad (3.156)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda) &= \frac{i}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{h_2} (-i)^{n+1/2} \left(\frac{2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} \left\{ -i\phi \left[\bar{A}M'_{0n\lambda}(-h_2) + \bar{B}M'_{0n\lambda}(h_2) \right] + \right. \\ &\left. \frac{1}{k_1} (-h_1 \hat{r} + \lambda \hat{z}) \left[\bar{C}N'_{0n\lambda}(-h_2) + \bar{D}N'_{0n\lambda}(h_2) \right] \right\} \quad (3.157) \end{aligned}$$

Para que seja utilizada a equação (3.146) que dá a expressão assintótica de (3.155), observe-se o seguinte:

$$h_1 = (k_1^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (3.158)$$

$$h_2 = (k_2^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (3.159)$$

$$\rho\phi(\lambda) = \lambda r + (k_1^2 - \lambda^2)^{1/2} z \quad (3.160)$$

$$\rho\phi'(\lambda_0) = 0 \rightarrow r^2 k_1^2 = \lambda_0^2 (r^2 + z^2) \quad (3.161)$$

ou

$$\lambda_0 = \frac{k_1 r}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = k_1 \sin \theta \quad (3.162)$$

$$\rho\phi(\lambda_0) = k_1 R \quad (3.163)$$

$$\rho |\phi''(\lambda_0)| = \frac{R}{k_1 \cos^2 \theta} \quad (3.164)$$

$$\beta = \pi \quad (3.165)$$

Assim, o valor de $f(\lambda)$ em $\lambda = \lambda_0$ é o seguinte:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda_0) = & \frac{i}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{t} (-i)^{n+1/2} \frac{1}{\sin \theta (\frac{2}{\pi k_1 R})^{1/2}} \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} \left\{ i \frac{1}{2} \left[A(\theta) \bar{M}'_{0ns}(-t) + \right. \right. \\ & \left. \left. B(\theta) \bar{M}'_{0ns}(t) \right] + (-\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{z}) \left[C(\theta) \bar{N}'_{0ns}(-t) + D(\theta) \bar{N}'_{0ns}(t) \right] \right\} \quad (3.166) \end{aligned}$$

onde $t = h_2 \Big|_{\lambda_0} = k_1 (\xi^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (3.167)$

$$s = \lambda_0 = k_1 \sin \theta \quad (3.168)$$

Utilizando-se a equação (3.146) chega-se então à expressão assintótica da função de Green diádica $\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}')$:

$$\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{e^{ik_1 R}}{2\pi t R t g \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) (-i)^{n+1} \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} \left\{ \hat{\phi} \left[A(\theta) \bar{M}'_{e_{0ns}}(-t) + B(\theta) \bar{M}'_{e_{0ns}}(t) \right] - i \hat{\theta} \left[C(\theta) \bar{N}'_{e_{0ns}}(-t) + D(\theta) \bar{N}'_{e_{0ns}}(t) \right] \right\} \quad (3.169)$$

III.8 - DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO ASSINTÓTICA DA FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA MEIOS DE QUATRO CAMADAS PLANAS E PARALELAS

Procedendo-se de maneira idêntica à apresentada no item anterior obtém-se uma expressão assintótica para $\bar{G}^{(13)}(\bar{R}/\bar{R}')$, dada por (3.49) e (3.52), que é igual à equação (3.169) a menos dos coeficientes $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ e $D(\theta)$, que agora são dados por (3.86) a (3.89).

III.9 - OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO ASSINTÓTICA DA FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA MEIOS DE TRÊS CAMADAS CILÍNDRICAS CONCÊNTRICAS

Utilizando-se o método do ponto de sela com a mesma sistemática apresentada no item III.8 obtém-se:

$$\bar{f}(h_0) = \frac{i}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{2} (-i)^{n+1/2} \left(\frac{2k_1}{\pi R} \right)^{1/2} \left\{ A_{e_n}(\theta) \frac{\cos n\phi \hat{\phi}}{\sin n\phi} - i B_{e_n}(\theta) \frac{\sin n\phi \hat{\theta}}{\cos n\phi} \right\}.$$

$$M'_{e_{0n}}(1)(-i) + \left[A'_{e_{0n}}(\theta) \cos n\phi\hat{\phi} - iB'_{e_{0n}}(\theta) \sin n\phi\hat{\theta} \right] \bar{M}'_{e_{0n}}(-h_0) + \left[-iC'_{e_{0n}}(\theta) \cos n\phi\hat{\theta} + D'_{e_{0n}}(\theta) \sin n\phi\hat{\phi} \right] \bar{N}'_{e_{0n}}(-h_0) + \left[-iC'_{e_{0n}}(\theta) \cos n\phi\hat{\theta} + D'_{e_{0n}}(\theta) \sin n\phi\hat{\phi} \right] \bar{N}'_{e_{0n}}(-h_0) \quad (3.170)$$

$$\text{onde } u = \gamma \Big|_{h_0} = (k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (3.171)$$

A expressão assintótica de $\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}')$ é a seguinte:

$$\bar{G}^{(12)}(R/R') = \frac{k_1 \sin \theta}{4\pi R} e^{ik_1 R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{u^2} (-i)^{n+1} \left\{ \left[A'_{e_{0n}}(\theta) \cos n\phi\hat{\phi} - iB'_{e_{0n}}(\theta) \sin n\phi\hat{\theta} \right] \bar{M}'_{e_{0n}}(-h_0) + \left[A'_{e_{0n}}(\theta) \cos n\phi\hat{\phi} - iB'_{e_{0n}}(\theta) \sin n\phi\hat{\theta} \right] \bar{M}'_{e_{0n}}(-h_0) + \left[-iC'_{e_{0n}}(\theta) \cos n\phi\hat{\theta} + D'_{e_{0n}}(\theta) \sin n\phi\hat{\phi} \right] \bar{N}'_{e_{0n}}(-h_0) + \left[-iC'_{e_{0n}}(\theta) \cos n\phi\hat{\theta} + D'_{e_{0n}}(\theta) \sin n\phi\hat{\phi} \right] \bar{N}'_{e_{0n}}(-h_0) \right\} \quad (3.172)$$

onde $A_{e_n}(\theta), \dots, D_{e_n}'(\theta)$ são os coeficientes dados por (3.131) a (3.138), com

$$\alpha \Big|_{h=h_0} = v = k_1 \sin \theta \quad (3.173)$$

$$\gamma \Big|_{h=h_0} = u = (k_1^2 - k_1^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (3.174)$$

As expressões assintóticas das funções de Green diálicas desenvolvidas neste capítulo serão utilizadas, a partir do capítulo 4, na determinação do campo distante de alguns tipos mais comuns de antenas de microfita.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DO EFEITO DO SUBSTRATO DIELE-
TRICO NOS DIAGRAMAS DE IRRADIAÇÃO DAS
ANTENAS DE MICROFITA EM FORMA DE DISCO

IV.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo utilizam-se o formalismo das funções de Green diádicas em meios de camadas planas e paralelas e o modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas para se estudarem os efeitos causados pela presença do substrato dielétrico nos diagramas de irradiação de uma antena de microfita em forma de disco. Como resultados do estudo, apresentam-se os diagramas de irradiação desta antena para diferentes valores da constante dielétrica e da espessura do substrato, verificando-se que a influência do dielétrico é bastante pronunciada, em especial para baixos ângulos de irradiação e maiores valores da espessura do substrato. Verifica-se também que os resultados obtidos com esse método convergem para aqueles obtidos através do método convencional que despreza a presença do dielétrico, quando a espessura desse dielétrico tende para zero. As curvas da largura de feixe de 3dB obtidas em função da relação entre a espessura do dielétrico e o raio do disco concordam com resultados que foram publicados recentemente.

IV.2 - OBTENÇÃO DA DENSIDADE DE CORRENTE MAGNÉTICA EQUIVALENTE

A figura 6 mostra uma antena de microfita em forma de disco, de raio a , construída sobre uma camada de dielétrico de espessura d e permissividade ϵ .

Utilizando-se o modelo da cavidade cilíndrica com paredes laterais condutoras magnéticas e supondo-se que os modos excitados na mesma são os TM_{pq} com relação a Z (omite-se o autovalor relativo a Z pelo fato de se estar admitindo que os campos não variam com Z no interior da cavidade), sabe-se que o campo elétrico no interior da cavidade é o seguinte [30]:

$$\vec{E} = E_0 J_p(k_2 r') \cos p\phi' \hat{z} \quad (4.1)$$

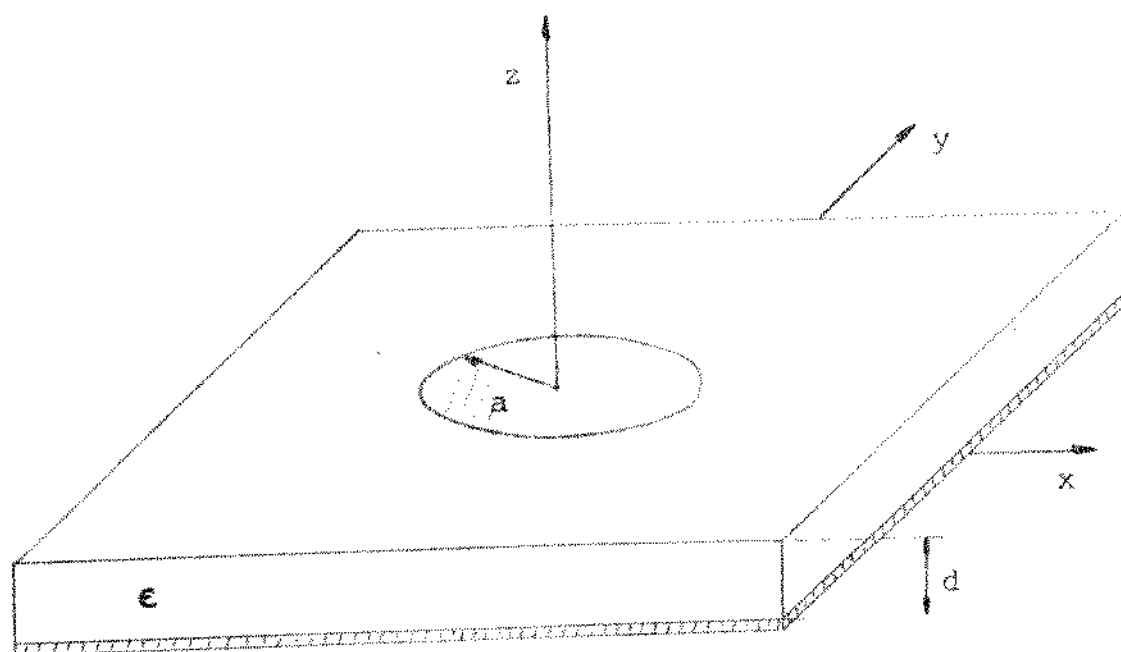


Fig. 6 - Antena de microfita em forma de disco.

Impondo-se a condição de que a componente tangencial de $\vec{H}$ se anula sobre a parede condutora magnética, obtém-se a relação

$$J'_p(k_2 a) = 0 \quad (4.2)$$

onde $J'_p(k_2 a)$ é a derivada de $J_p(k_2 r')$ calculada em $r'=a$.

A relação (4.2) define, para cada modo no interior da cavidade, o raio do disco, a . A tabela I seguinte dá os valores de $k_2 a$ para alguns dos modos TM_{pq} :

TABELA I - ALGUMAS RAIZES DA EQUAÇÃO (4.2)

TM_{11}	: $k_2 a = 1,841$
TM_{21}	: $k_2 a = 3,054$
TM_{02}	: $k_2 a = 3,832$
TM_{31}	: $k_2 a = 4,201$

Da equação (4.1) obtém-se o valor do campo elétrico em $r=a$:

$$\vec{E}_{pq}(r'=a) = E_{pq} \cos p\phi' \hat{z} \quad (4.3)$$

onde $E_{pq} = E_0 J_p(k_2 a) \quad (4.4)$

Considera-se em seguida, utilizando-se o princípio da equivalência [20, pág. 106-110], que os campos eletromagnéticos produzidos pela antena são os mesmos que são excitados pela corrente magnética dada por

$$\vec{M}_{pq} = \vec{E}_{pq} \times \vec{r} \text{ em } r'=a, 0 \leq Z' \leq d \quad (4.5)$$

ou
$$\vec{M}_{pq} = E_{pq} \cos p\phi' \hat{\phi} \text{ em } r'=a, 0 \leq Z' \leq d \quad (4.6)$$

IV.3 - DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS IRRADIADOS

Para que sejam determinados os campos eletromagnéticos distantes irradiados pela antena excitada nos modos TM_{pq} efetua-se a integração indicada em (2.32), com $\vec{G}_0(\vec{R}/\vec{R}')$ substituída por $\vec{G}^{(12)}(R/R')$, que é definida em (3.169) e com $\vec{M}_{pq}$ dada por (4.6). No presente caso, a área S' é a área da parede lateral da cavidade, definida em $r'=a$ e $0 \leq Z' \leq d$.

Tem-se, então,

$$\vec{H}_{pq}(\vec{R}) = \left[i\omega\epsilon_0 \int \int_{S'} \vec{G}^{(12)}(\vec{R}/\vec{R}') \cdot \vec{M}_{pq}(\vec{R}') dS' \right]_{r'=a, 0 \leq Z' \leq d} \quad (4.7)$$

ou

$$\vec{H}_{pq}(\vec{R}) = \left[\frac{i\omega\epsilon_0 e^{ik_1 R}}{2\pi t R \tan \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) (-i)^{n+1} \frac{\cos(n\phi)}{\sin(n\phi)} E_{pq} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^d r' dz' \right] - A(\theta) \hat{\phi}.$$

$$\frac{\partial J_n(sr')}{\partial r'} \frac{\cos(n\phi')}{\sin(n\phi')} e^{-itZ'} - B(\theta) \hat{\phi} \frac{\partial J_n(sr')}{\partial r'} \frac{\cos(n\phi')}{\sin(n\phi')} e^{itZ'} +$$

$$\left. \begin{aligned} & iC(\theta) \hat{\theta} \frac{itn}{k_2 r'} J_n(sr') \frac{\sin(n\phi')}{\cos(n\phi')} e^{-itZ'} + iD(\theta) \hat{\theta} \frac{itn}{k_2 r'} J_n(sr') \frac{\sin(n\phi')}{\cos(n\phi')} e^{itZ'} \end{aligned} \right\}.$$

$$\left. \begin{aligned} & \cos p\phi' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & r' = a \\ & 0 \leq Z' \leq d \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sabendo-se que

$$\frac{\partial J_n(sr')}{\partial r'} = s J_{n-1}(sr') - \frac{n}{r'} J_n(sr') \quad (4.9)$$

e utilizando-se as propriedades de ortogonalidade das funções trigonométricas chega-se a:

$$\begin{aligned} H_{\theta pq}(\bar{R}) = & \frac{E_{pq} \omega \epsilon_0 p \cos \theta}{t k_2 R \sin \theta} e^{ik_1 R} (-i)^{p+1} J_p(sa) \sin p\phi \left[-D(\theta) (e^{itd} - 1) - \right. \\ & \left. C(\theta) (e^{-itd} - 1) \right], \quad p > 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$H_{\phi pq}(\bar{R}) = \frac{E_{pq} \omega \epsilon_0 a \cos \theta}{t^2 R \sin \theta} e^{ik_1 R} (-i)^{p+1} \left[s J_{p-1}(sa) - \frac{p}{a} J_p(sa) \right] \cos p\phi.$$

$$\left[A(\theta) (e^{-itd} - 1) - B(\theta) (e^{itd} - 1) \right], \quad p > 0 \quad (4.11)$$

É importante observar-se que a aparente singularidade que ocorre nas expressões (4.10) e (4.11) para $\theta=0$ desaparece se forem utilizadas as formas assintóticas da função de

Bessel para pequenos valores do argumento, isto é, [31, pág. 360]:

$$J_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (4.12)$$

Usando-se agora as relações (3.44) a (3.47), isto é, fazendo-se $A(\theta)=B(\theta)$ e $C(\theta)=-D(\theta)$, as equações (4.10) e (4.11) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$H_{\theta_{pq}}(\bar{R}) = - \frac{2E_{pq} \omega \epsilon_0 p \cos \theta}{t k_2 R \sin \theta} e^{i k_1 R} (-i)^p J_p(sa) C(\theta) \sin(td) \sin(p\phi), \quad p > 0 \quad (4.13)$$

$$H_{\phi_{pq}}(\bar{R}) = \frac{2E_{pq} \omega \epsilon_0 a \cos \theta}{t^2 R \sin \theta} e^{i k_1 R} (-i)^p \left[s J_{p-1}(sa) - \right.$$

$$\left. \frac{p}{a} J_p(sa) \right] A(\theta) \sin(td) \cos(p\phi), \quad p > 0 \quad (4.14)$$

As componentes do campo elétrico são dadas, em região de campo distante, por [20, pág. 133]:

$$E_{\theta_{pq}} = \eta_1 H_{\phi_{pq}} \quad (4.15)$$

$$E_{\phi_{pq}} = -\eta_1 H_{\theta_{pq}} \quad (4.16)$$

onde n_1 é a impedância intrínseca do meio 1, dada por

$$n_1 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 120\pi = 377\Omega \quad (4.17)$$

Utilizando-se o método convencional, isto é, desprezando-se a presença da camada dielétrica, os campos da antena, em região de campo distante, são os seguintes [30]:

$$E_{\theta_{pq}} = -j^p k_1 \frac{e^{-jk_1 R}}{R} \frac{V_0 a}{2} B_n(k_1 a \sin \theta) \cos p\phi \quad (4.18)$$

$$E_{\phi_{pq}} = j^p k_1 \frac{e^{-jk_1 R}}{R} \frac{V_0 a}{2} B_p(k_1 a \sin \theta) \cos \theta \sin p\phi \quad (4.19)$$

com

$$V_0 = E_0 d J_p(k_2 a) \quad (4.20)$$

$$B_n(x) = J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) \quad (4.21)$$

$$B_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) \quad (4.22)$$

Observa-se que, nesse caso, a variação no tempo é dada por $\exp(j\omega t)$, em vez de $\exp(-i\omega t)$.

Utilizando-se as equações (4.15) e (4.16) com (4.13) e (4.14) e as equações (4.18) e (4.19) foram obtidos os diagramas de irradiação mostrados nas figuras 7 a 14, para os modos TM_{11} e TM_{21} . Os valores das funções de Bessel foram obtidos através de computador digital, utilizando-se uma subrotina apropriada.

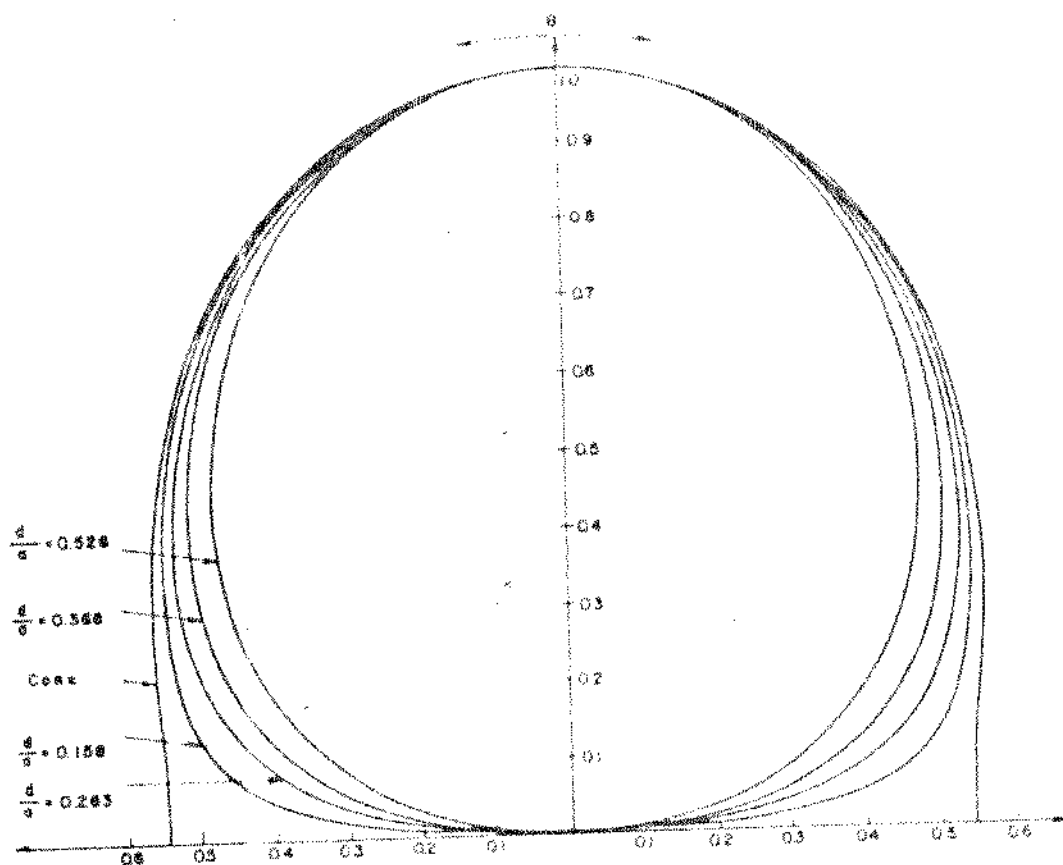


Fig. 7 - Diagrama de irradiação da antena de microfita do tipo disco. E_0 , plano E, modo TM_{11} , $\epsilon_r = 2,55$, $\phi = 0^\circ$.

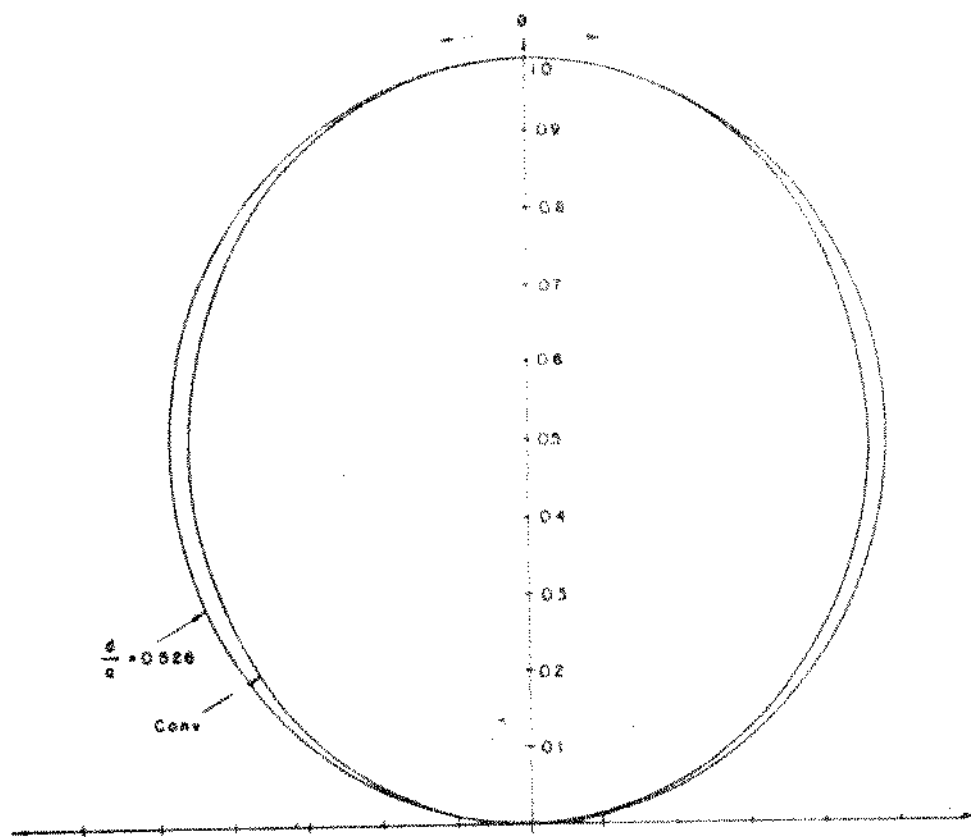


Fig. 8 - Diagrama de irradiação da antena de microfita do tipo disco. E_{ϕ} , plano H, modo TM_{11} , $\epsilon_r = 2,55$, $\phi = 90^\circ$.

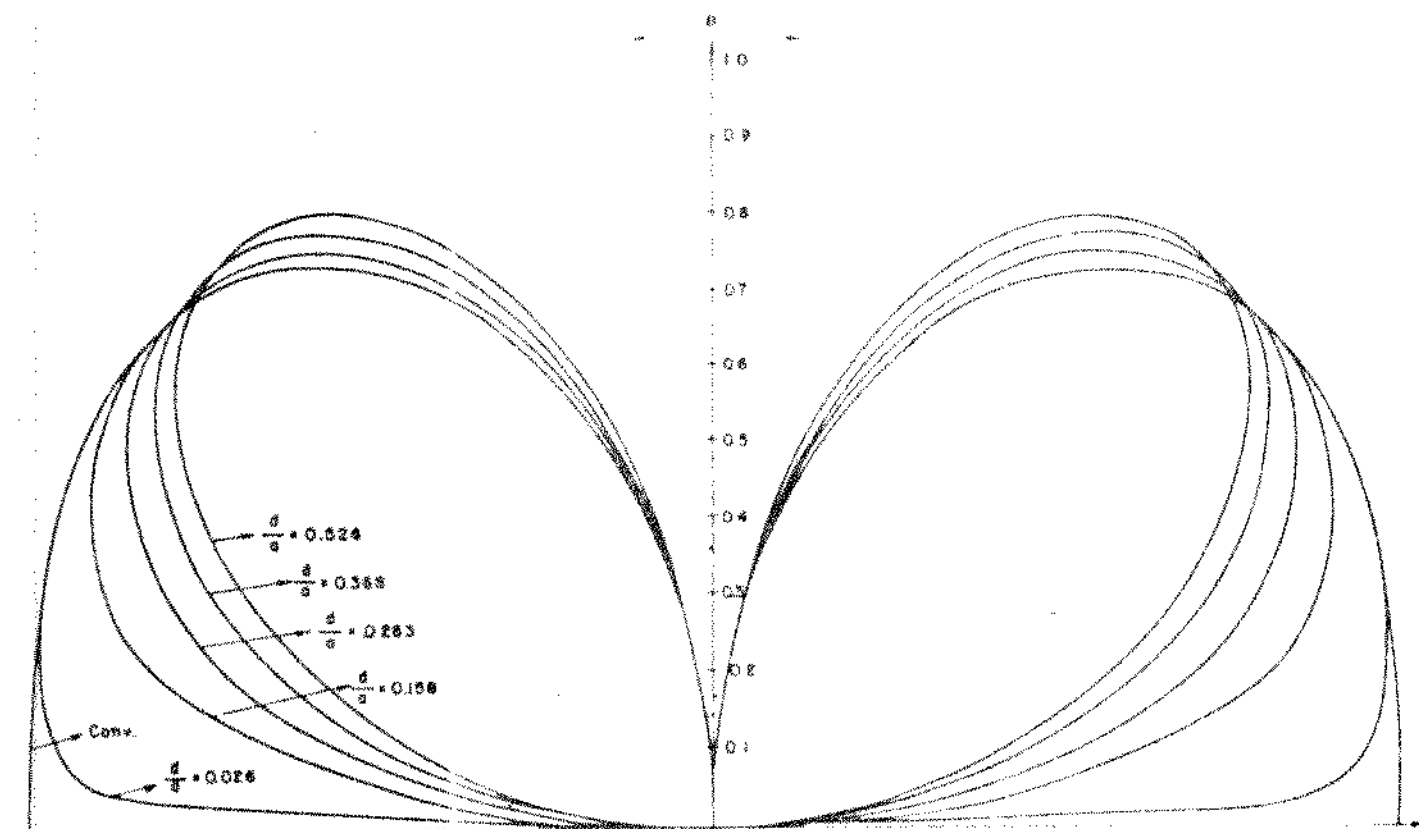


Fig. 9 - Diagrama de irradiação da antena de microfita do tipo disco. E_θ , plano E, modo TM_{21} , $\epsilon_r = 2,55$, $\phi = 0^\circ$.

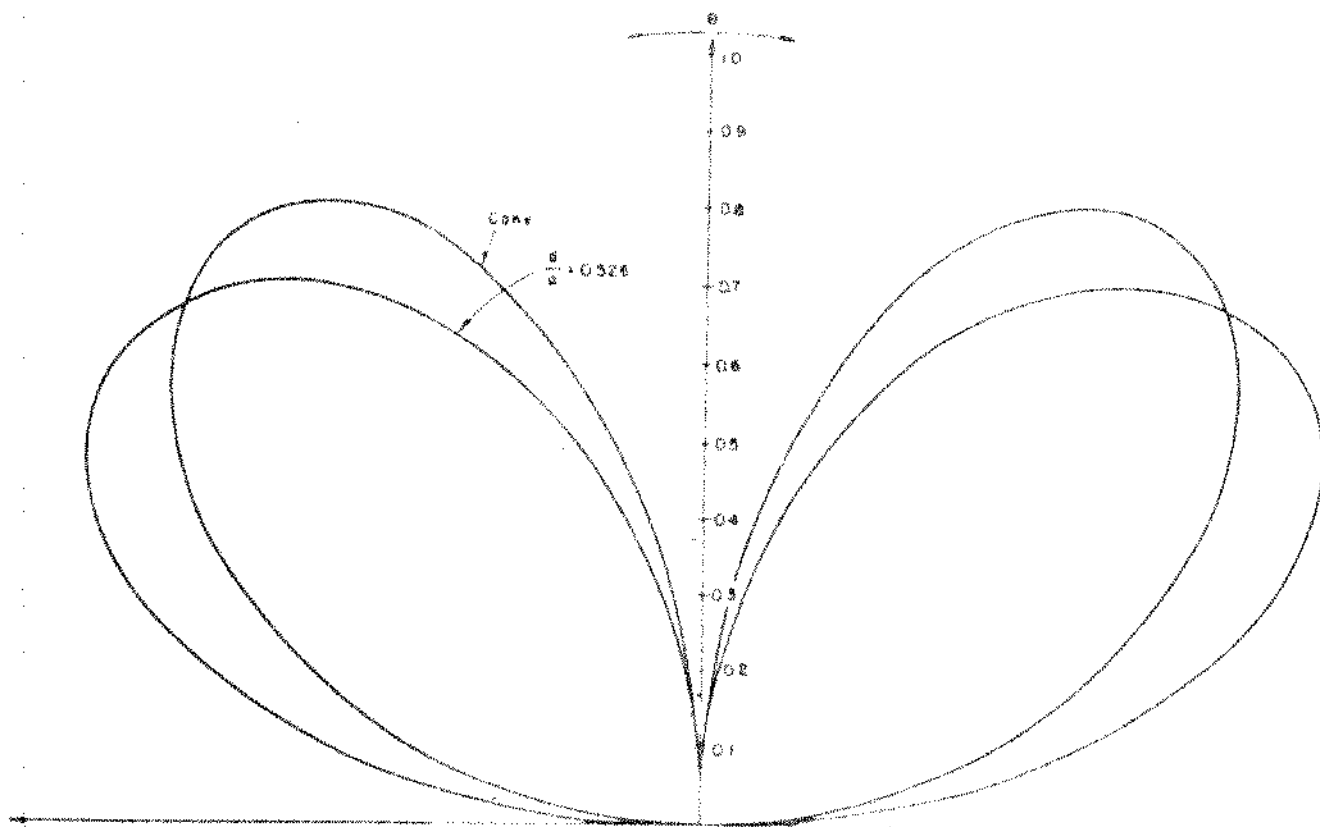


Fig. 10 - Diagrama de irradiação da antena de microfita do tipo disco. E_ϕ , plano H, modo TM_{21} , $\epsilon_r = 2,55$
 $\phi = 90^\circ$.

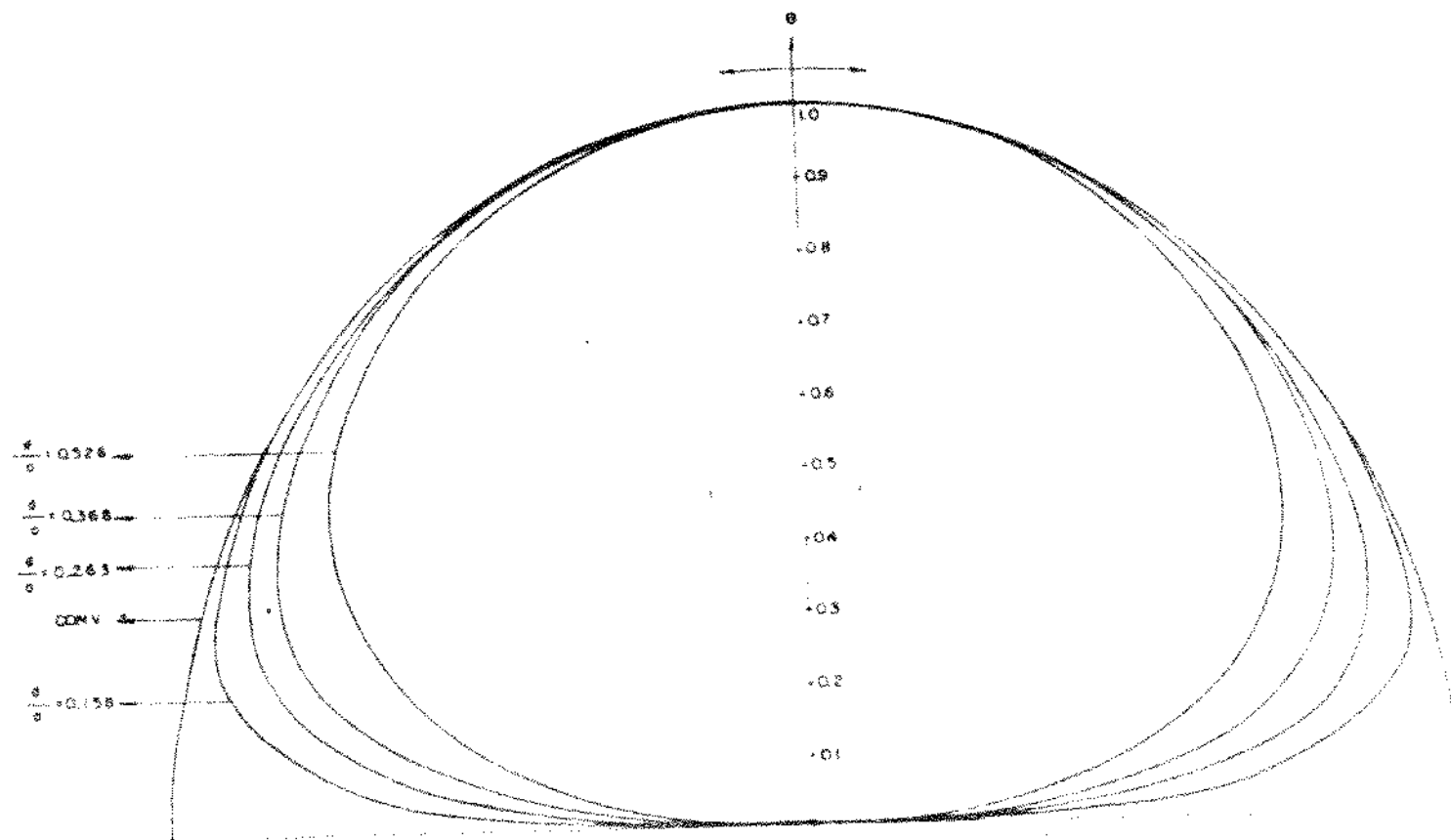


Fig. 11 - Diagrama de irradiação da antena de microfita do tipo disco. E_{θ} , plano E, modo TM_{11} , $\epsilon_r = 9,60$
 $\phi = 0^{\circ}$.

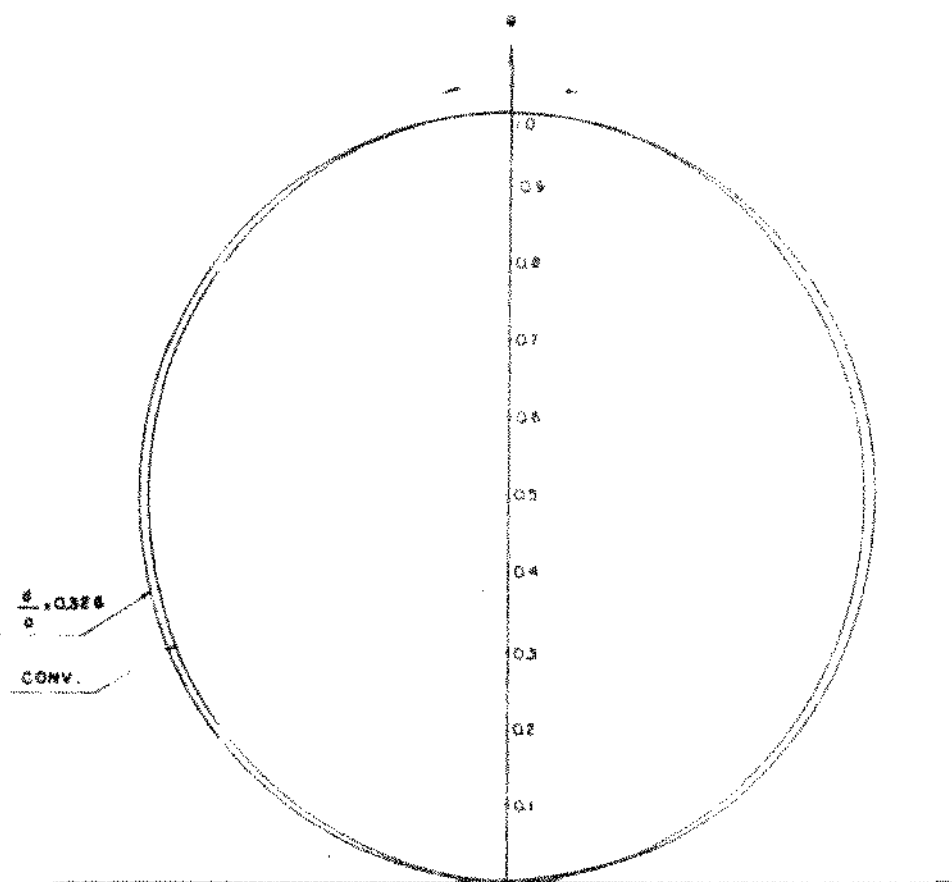


Fig. 12 - Diagrama de irradiação da antena de microfita do tipo disco. E_ϕ , plano H, modo TM_{11} , $\epsilon_r = 9,60$
 $\phi = 90^\circ$.

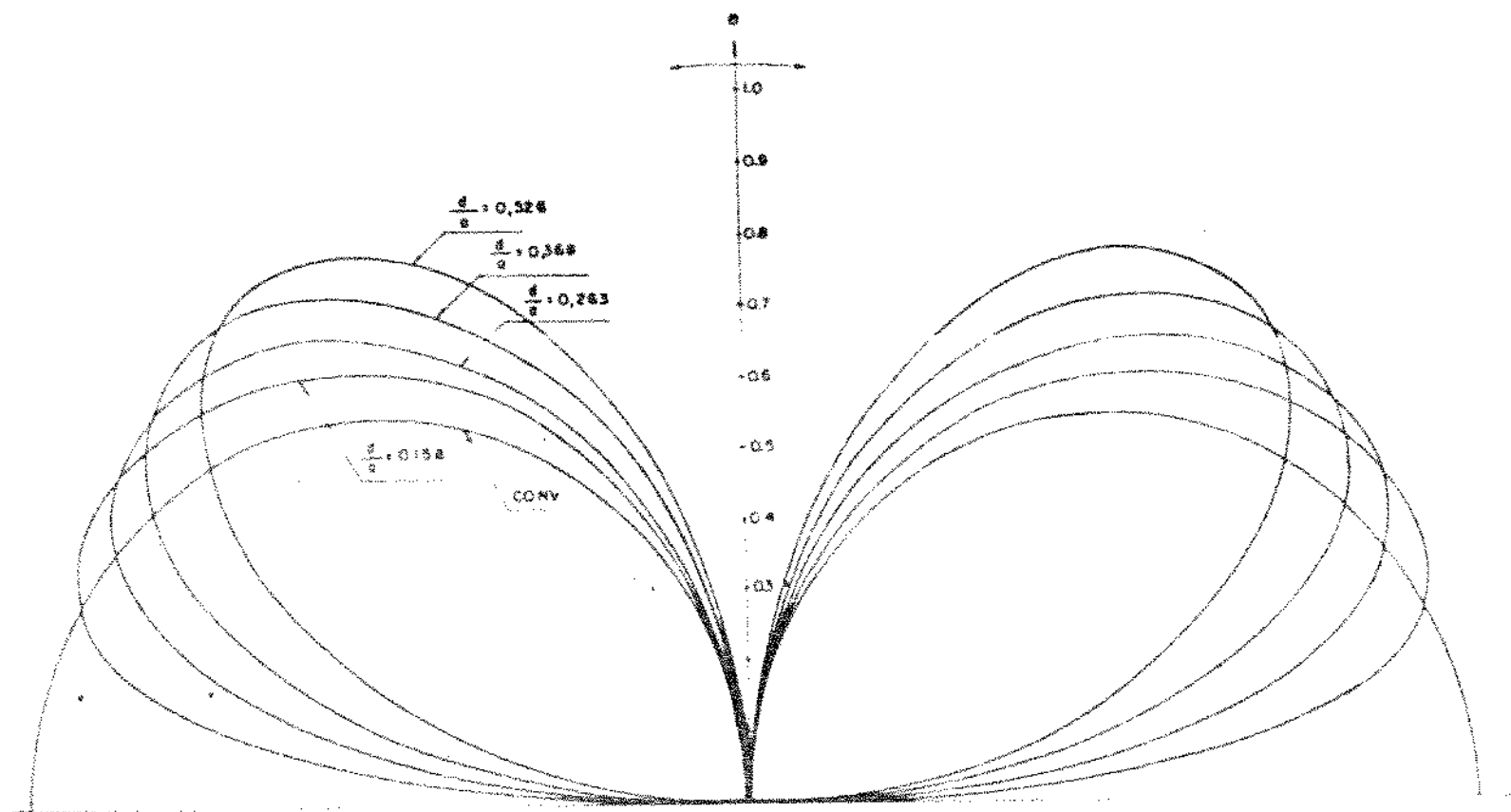


Fig. 13 - Diagrama de irradiação da antena de microfita do tipo disco. E_θ , plano E, modo TM_{21} , $\epsilon_r = 9,60$, $\phi = 0^\circ$.

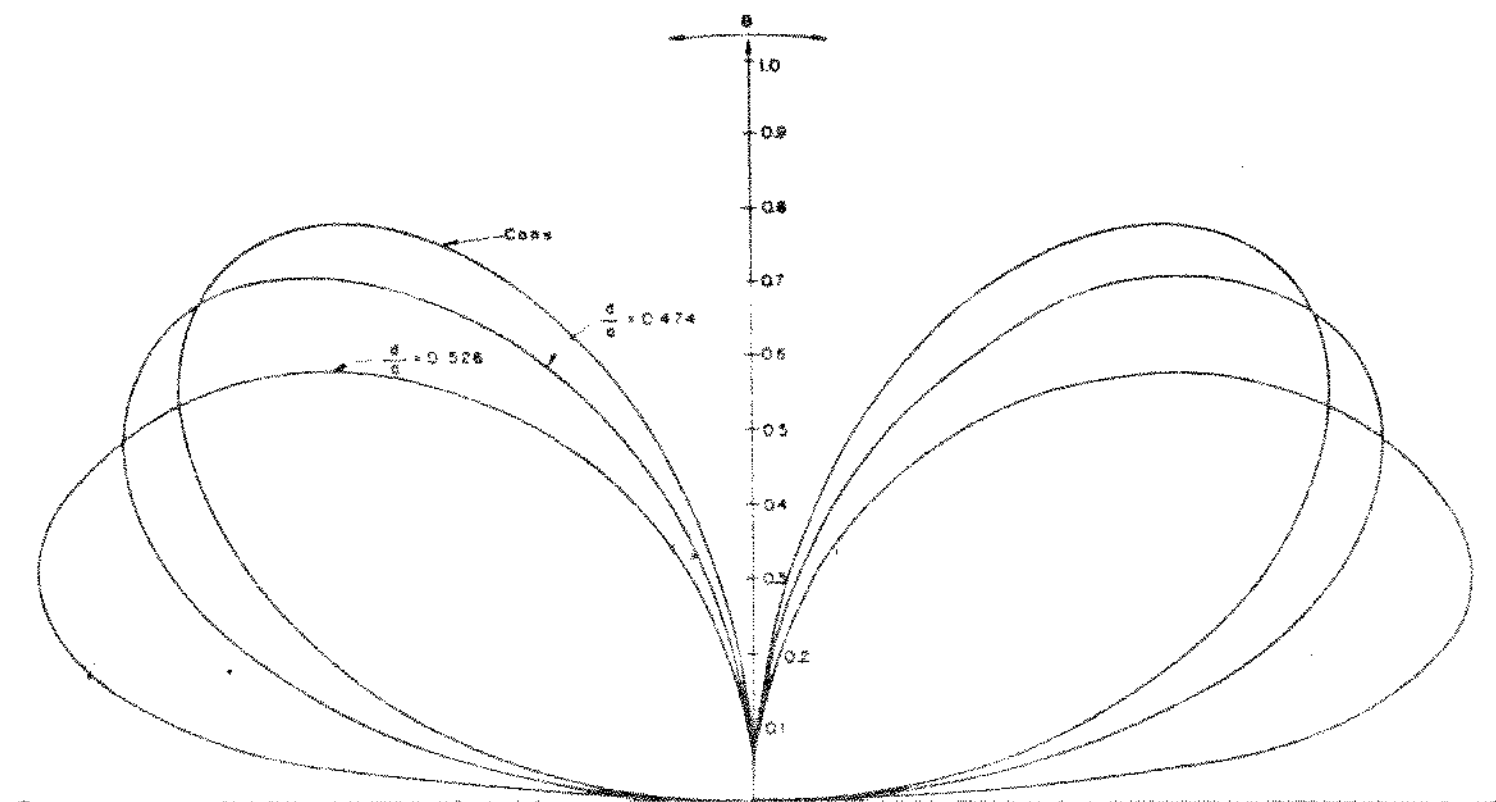


Fig. 14 - Diagrama de irradiação da antena de microfita do tipo disco. E_{ϕ} , plano H, modo TM_{21} , $\epsilon_r = 9,60$
 $\phi = 90^\circ$.

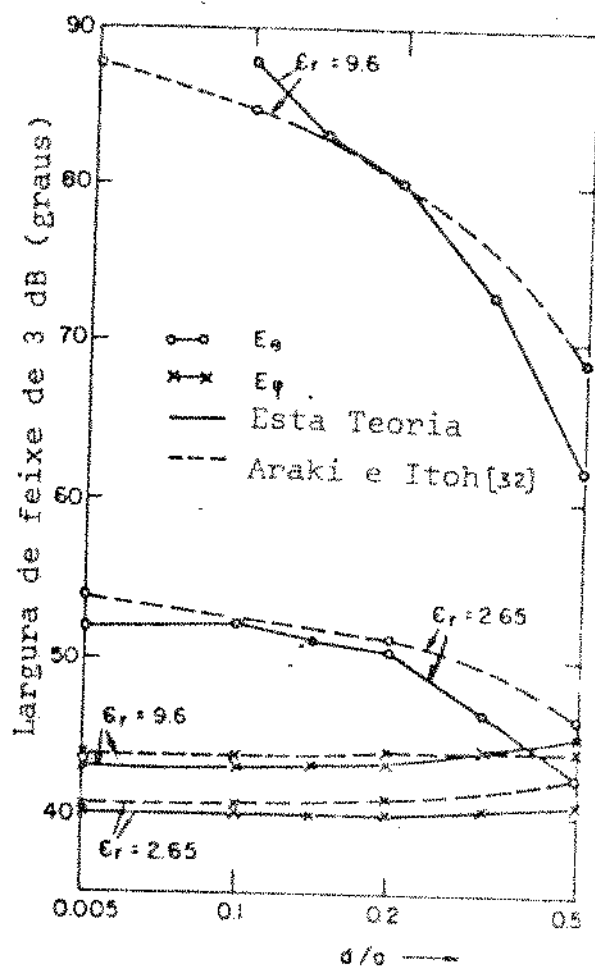


Fig. 15 - Largura de feixe de 3 dB em função da relação d/a , para E_θ e E_ϕ .

Examinando-se os diagramas de irradiação obtidos po-
dem-se fazer as observações seguintes:

a) O efeito da camada de dielétrico se manifesta mais pronunciadamente para baixos ângulos de irradiação, isto é, $\theta \longrightarrow 90^\circ$.

b) O efeito da camada de dielétrico é mais pronunciado para a componente θ do campo elétrico do que para a componente ϕ . Em especial no caso do modo dominante ($p=q=1$), o efeito sobre a componente ϕ é desprezível.

c) Verifica-se, para os valores de ϵ_r utilizados (2,55 e 9,6), que a largura de feixe de 3dB do diagrama da componente E_ϕ aumenta com o aumento da relação d/a , fato este que já foi notado por Araki e Itoh [32].

d) Pode-se notar que os resultados obtidos com o presente método tendem para aqueles obtidos através do método convencional quando a relação d/a tende para zero.

e) As curvas mostradas na figura 15 para a largura de feixe correspondem com razoável precisão àquelas reportadas por Araki e Itoh [32].

f) É bem interessante salientar que, contrariando o que é de costume admitir-se através da análise da antena em forma de disco pelo método convencional (ver, p.ex., a referência [7]), o diagrama de irradiação no plano E não é quase constante para altos valores da permissividade relativa ϵ_r do dielétrico se a relação d/a assumir valores razoavelmente grandes.

IV.4 - CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Neste capítulo apresentou-se um método mais rigoroso

do que o convencional para a obtenção dos diagramas de irradiação das antenas de microfita em forma de disco, baseado na teoria apresentada por Tai [21] das funções de Green diádicas para meios estratificados. Uma grande vantagem do método é que a expressão assintótica da função de Green diádica que foi apresentada pode ser aplicada a estruturas com formas geométricas diferentes, como a retangular, triangular, em anel etc, desde que se conheçam as expressões da corrente magnética equivalente sobre as paredes magnéticas da cavidade constituída pela placa condutora, o dielétrico e o plano de terra. A falta de um maior número de dados experimentais não permitiu que se fizessem comparações com os resultados obtidos nesse trabalho para a antena em forma de disco. As curvas obtidas da largura de feixe de 3dB em função da relação d/a aproximam razoavelmente aquelas apresentadas por Araki e Itoh [32] que utilizaram em sua análise o método espectral da transformada de Hankel em conjunto com o método dos momentos. As discrepâncias verificadas nos diagramas de irradiação, para baixos ângulos de irradiação, em comparação com os diagramas obtidos através do método convencional verificam-se também nos resultados apresentados por Chew e Kong [33] que utilizaram método de análise rigoroso baseado nas transformadas de Hankel vetoriais e no método dos momentos.

CAPÍTULO V

ESTUDO DOS EFEITOS DE UMA COBERTURA DIELE-
TRICA NAS CARACTERÍSTICAS DE IRRADIAÇÃO DE
UMA ANTENA DE MICROFITA EM FORMA DE ANEL

V.1 - INTRODUÇÃO

Em diversas situações que se podem apresentar, as antenas de microfita podem ser cobertas por uma camada de neve ou, para a sua proteção, por uma camada dielétrica qualquer. Quando uma dessas antenas é coberta por uma camada de um material qualquer, sabe-se que as suas propriedades, como a frequência de ressonância e o fator de mérito Q , variam [7, pág. 76]. O efeito de uma cobertura dielétrica nas citadas propriedades já foi estudado, para o caso da antena de microfita em anel, utilizando-se uma técnica variacional [13]. Neste capítulo analisa-se o efeito de uma cobertura dielétrica nos campos distantes de uma antena de microfita em anel, utilizando-se o modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas e o formalismo das funções de Green diádicas para meios estratificados já tratados anteriormente.

V.2 - OBTENÇÃO DA DENSIDADE DE CORRENTE MAGNÉTICA EQUIVALENTE

A figura 16 mostra uma antena de microfita em anel coberta por uma camada dielétrica e o sistema de coordenadas utilizado.

Observa-se que o anel condutor tem raio interno a e raio externo b .

O campo elétrico na região entre o anel condutor e o plano de terra, na ressonância, para modos TM com relação a Z , é o seguinte [13]:

$$\vec{E} = E_0 \left[J_p(kr') N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(kr') \right] \cos p\phi' \hat{z} \quad (5.1)$$

onde E_0 é o valor do campo elétrico entre a borda exterior do anel ($r'=b$) e o plano de terra em $\phi=0$, p é um inteiro que identifica o modo de ressonância, TM_{p10} e

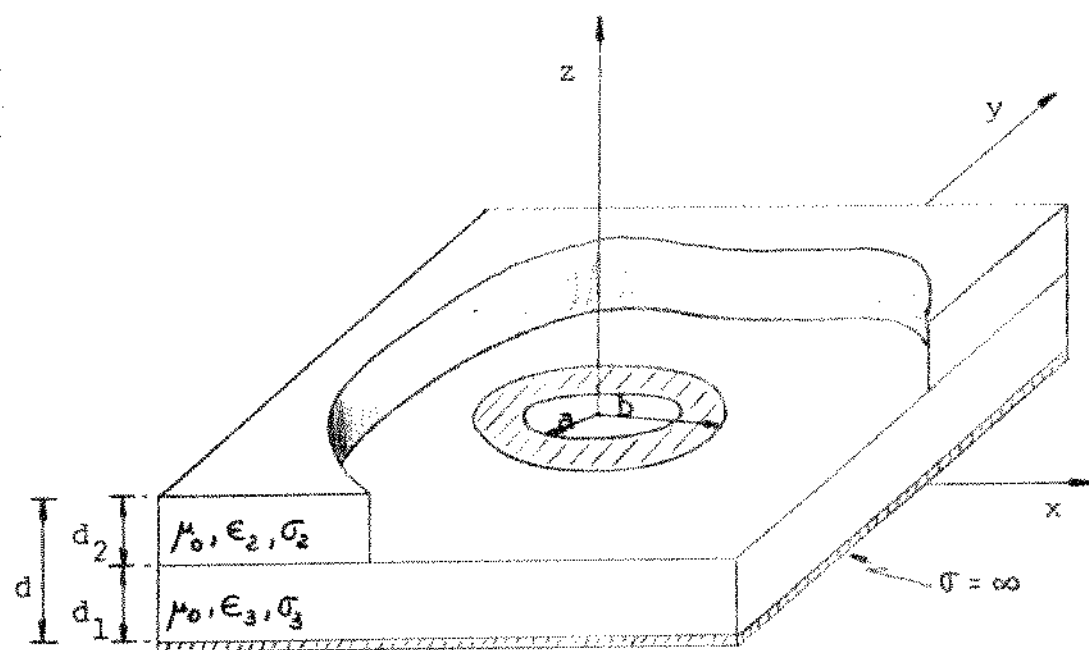


Fig. 16 - Antena de microfita em anel com uma cobertura dielétrica.

$$k = \frac{2\pi(\epsilon_e)^{1/2}}{\lambda_0} \quad (5.2)$$

A grandeza ϵ_e é a constante dielétrica efetiva da estrutura e λ_0 é o comprimento de onda no espaço livre. J_p e N_p são as funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente. J'_p e N'_p são as derivadas destas funções.

Impondo-se a condição de que a componente radial da corrente é nula nas bordas do anel obtêm-se a seguinte relação

$$J'_p(kb)N'_p(ka) - J'_p(ka)N'_p(kb) = 0 \quad (5.3)$$

que permite a determinação de k para os diversos modos, dadas as dimensões a e b do anel.

Ainda de acordo com a referência [13], para os modos TM_{p10} , $p \leq 5$ e

$$\frac{b - a}{b + a} \leq 0,35 \quad (5.4)$$

pode-se calcular um valor aproximado para k através da relação

$$k = \frac{2p}{a + b} \quad (5.5)$$

sendo a frequência de ressonância dada por

$$f_0 = \frac{Ck}{2\pi(\epsilon_e)^{1/2}} \quad (5.6)$$

onde C é a velocidade da luz no vácuo.

Utilizando-se a teoria apresentada por Bahl et al. [13], [34] para a obtenção de ϵ_e , verificou-se que o efeito da cobertura dielétrica sobre a frequência de ressonância do anel, para os valores de permissividade relativa e tangente de perdas utilizadas neste trabalho, é pequeno o bastante para que se possa fazer, na determinação dos diagramas de irradiação.

$$f_0 = \frac{ck}{2\pi(\epsilon_{r_3})^{1/2}} \quad (5.7)$$

onde $\epsilon_{r_3} = \epsilon_3/\epsilon_0$ é a permissividade relativa do meio 3.

Considerando-se a equação (5.1), o campo elétrico nas bordas interna e externa do anel é o seguinte.

$$E_z = E_0 \left[J_p(ka) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(ka) \right] \cos p\phi, \quad r'=a \quad (5.8)$$

$$E_z = E_0 \left[J_p(kb) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(kb) \right] \cos p\phi, \quad r'=b \quad (5.9)$$

De acordo com o princípio da equivalência, os campos irradiados pela antena podem ser obtidos utilizando-se as correntes magnéticas equivalentes nas paredes laterais magnéticas do anel, dadas por:

$$\vec{M}(r'=a) = -\hat{r} \times E_z(r'=a) \hat{z} = E_0 \left[J_p(ka) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(ka) \right] \cos p\phi' \hat{\phi}, \quad r'=a \quad (5.10)$$

$$\vec{M}(r'=b) = \hat{r} \times E_z(r'=b) \hat{z} = -E_0 \left[J_p(kb) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(kb) \right] \cos p\phi' \hat{\phi}, \quad r'=b \quad (5.11)$$

V.3 - DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS IRRADIADOS

O campo irradiado pela antena no meio 1, isto é, no espaço livre, é obtido através da função de Green diádica $\bar{\bar{G}}^{(13)}(\bar{R}/\bar{R}')$ e da densidade de corrente magnética equivalente da das, respectivamente, por (3.169), (5.10) e (5.11). Os coeficientes da função diádica são obtidos de (3.86) a (3.89).

A integração definida em (2.32) resulta, então, no seguinte:

$$\bar{H}(\bar{R}) = i\omega\epsilon_0 \iint_{S'_1} \bar{\bar{G}}^{(13)}_{r'=a}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}(r'=a) dS' + i\omega\epsilon_0 \iint_{S'_2} \bar{\bar{G}}^{(13)}_{r'=b}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}(r'=b) dS' \quad (5.12)$$

onde S'_1 é a área da abertura interna, em $r'=a$, $0 \leq z' \leq d_1$ e S'_2 é a área da abertura externa, em $r'=b$, $0 \leq z' \leq d_1$.

Com a substituição de $\bar{\bar{G}}^{(13)}(\bar{R}/\bar{R}')$ e $\bar{M}$ em (5.13) po de-se, então, escrever:

$$H_\phi(\bar{R}) = i\omega\epsilon_0 \frac{e^{ik_1 R}}{2\pi t R \tan \theta} \frac{E_0}{\sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) (-i)^{n+1} \cos(n\phi)} \left\{ a \left[J_p(ka) N'_p(ka) - \right. \right.$$

$$\left. J'_p(ka) N_p(ka) \right] \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{d_1} dz' (-1) \frac{\partial J_n(sa)}{\partial a} \frac{\sin(n\phi') \cos(p\phi')}{\sin(n\phi')} \cdot$$

$$\left[A(\theta) e^{-itZ'} + B(\theta) e^{itZ'} \right] - b \left[J_p(kb) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(kb) \right] \cdot$$

$$\left. \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{d_1} dz' (-1) \frac{\partial J_n(sb)}{\partial b} \frac{\cos(n\phi') \cos(p\phi')}{\sin(n\phi')} \left[A(\theta) e^{-itZ'} + B(\theta) e^{itZ'} \right] \right\}$$

(5.13)

$$\begin{aligned}
 H_{\theta}(\bar{R}) = i\omega\epsilon_0 \frac{e^{ik_1 R} E_0}{2\pi t R \operatorname{tg} \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (2-\delta_0) (-i)^{n+1} \frac{\cos}{\operatorname{sen}}(n\phi) \left\{ a \left[J_p(ka) N'_p(ka) - \right. \right. \\
 \left. J'_p(ka) N_p(ka) \right] \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{d_1} dz' \frac{\operatorname{tg} n}{k_3 a} J_n(sa) \frac{\operatorname{sen}}{\cos}(n\phi') \cos(p\phi') \left[\pm C(\theta) e^{-itZ'} \mp \right. \\
 \left. D(\theta) e^{itZ'} \right] - b \left[J_p(kb) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(kb) \right] \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{d_1} dz' \frac{\operatorname{tg} n}{k_3 b} \\
 \left. J_n(sb) \frac{\operatorname{sen}}{\cos}(n\phi') \cos(p\phi') \cdot \left[\pm C(\theta) e^{-itZ'} \mp D(\theta) e^{itZ'} \right] \right\} \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Utilizando-se as propriedades de ortogonalidade das funções trigonométricas e efetuando-se as integrações indicadas tem-se, então, para $p > 0$:

$$H = i\omega\epsilon_0 \frac{e^{ik_1 R} E_0}{2\pi t R \operatorname{tg} \theta} 2(-i)^{p+1} \cos(p\phi) \pi \left[A(\theta) \frac{i}{t} (e^{-itd_1} - 1) - B(\theta) \frac{i}{t} (e^{itd_1} - 1) \right].$$

$$\left\{ b \left[J_p(kb) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(kb) \right] \left[s J_{p-1}(sb) - \frac{p}{b} J_p(sb) \right] - a \left[J_p(ka) N'_p(ka) - \right. \right. \\
 \left. J'_p(ka) N_p(ka) \right] \left[s J_{p-1}(sa) - \frac{p}{a} J_p(sa) \right] \left. \right\} \quad (5.15)$$

$$H_{\theta} = i\omega\epsilon_0 \frac{e^{ik_1 R}}{2\pi t R \tan \theta} 2(-i)^{p+1} \sin(p\phi) \pi \left[C(\theta) \frac{i}{t} (e^{-itd_1} - 1) - D(\theta) \frac{i}{t} (e^{itd_1} - 1) \right].$$

$$\left\{ b \left[J_p(kb) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(kb) \right] \frac{tp}{k_3 b} J_p(sb) - a \left[J_p(ka) N'_p(ka) - J'_p(ka) N_p(ka) \right] \frac{tp}{k_3 a} J_p(sa) \right\} \quad (5.16)$$

As componentes do campo elétrico distante são obtidas através de H_{ϕ} e H_{θ} utilizando-se as relações (4.15) e (4.16). Como o modo de maior interesse é o TM_{110} , que produz um máximo no diagrama de irradiação na direção perpendicular ao plano do anel [7, pág. 116], faz-se $p=1$ em (5.15) e (5.16) obtendo-se, com (4.15) e (4.16):

$$E_{\theta} = \frac{\eta_1 \omega \epsilon_0 E_0}{t^2 R \tan \theta} e^{ik_1 R} \cos \phi \left[A(\theta) (e^{-itd_1} - 1) - B(\theta) (e^{itd_1} - 1) \right] \left\{ b \left[J_1(kb) N'_1(ka) - J'_1(ka) N_1(kb) \right] \left[sJ_0(sb) - \frac{1}{b} J_1(sb) \right] - a \left[J_1(ka) N'_1(ka) - J'_1(ka) N_1(ka) \right] \left[sJ_0(sa) - \frac{1}{a} J_1(sa) \right] \right\} \quad (5.17)$$

$$E_{\phi} = \frac{\eta_1 \omega \epsilon_0 E_0}{t R k_3 \tan \theta} e^{ik_1 R} \sin \phi \left[C(\theta) (e^{-itd_1} - 1) - D(\theta) (e^{itd_1} - 1) \right].$$

$$\left\{ \left[J_1(ka)N_1'(ka) - J_1'(ka)N_1(ka) \right] J_1(sa) - \left[J_1(kb)N_1'(ka) - J_1'(ka)N_1(kb) \right] \cdot J_1(sb) \right\} \quad (5.18)$$

onde

$$J_1'(ka) = kJ_0(ka) - \frac{1}{a} J_1(ka) \quad (5.19)$$

$$N_1'(ka) = kN_0(ka) - \frac{1}{a} N_1(ka) \quad (5.20)$$

Com as equações (5.17) e (5.18) e o auxílio de computador digital foram obtidos os diagramas de irradiação das componentes E_θ e E_ϕ do campo elétrico, para diversos valores dos parâmetros dos meios 2 e 3. Para o meio 3, substrato em que é construída a antena, foram utilizados os valores de permissividade relativa e tangente de perdas correspondentes a dois tipos de materiais comumente utilizados na prática: R.T Duroid 5870 ($\epsilon_{r3} = 2,32$ e $\text{tg}\delta_3 = 0,0012$) e alumina ($\epsilon_{r3} = 9,8$ e $\text{tg}\delta_3 = 0,004$).

Com base nos resultados obtidos e mostrados nas figuras 17 a 24 podem-se fazer as observações seguintes:

a) Os diagramas de irradiação são praticamente insensíveis a variações da tangente de perdas da cobertura dielétrica ($\text{tg}\delta_2$) dentro da faixa observada ($0,001 \leq \text{tg}\delta_2 \leq 0,01$), razão pela qual foi fixado, na apresentação dos resultados, o valor $\text{tg}\delta_2 = 0,001$.

b) A influência das permissividades relativas dos meios 2 e 3 é mais pronunciada para baixos ângulos de irradiação isto é, $\theta \rightarrow 90^\circ$.

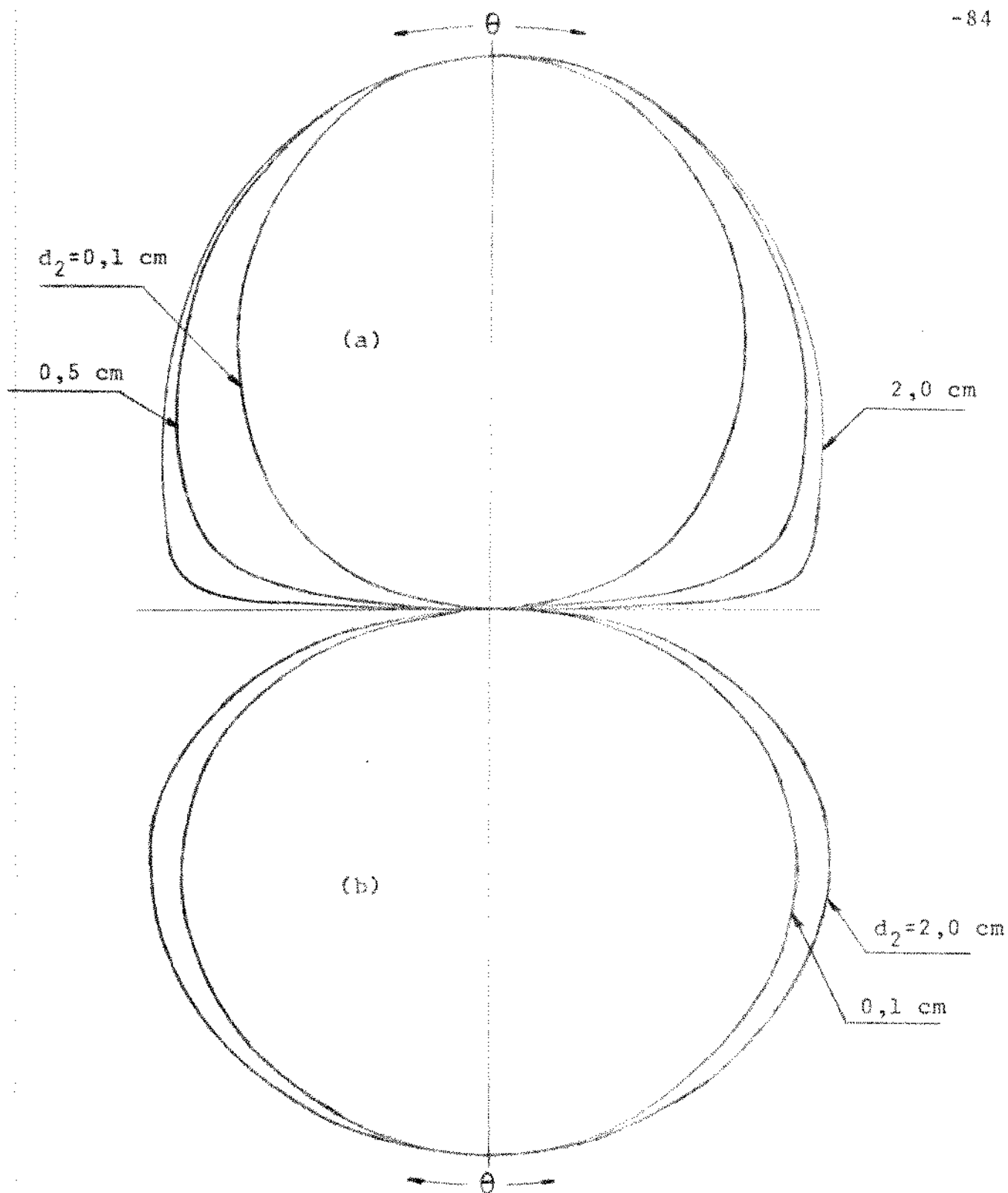


Fig. 17 - Diagrama de irradiação de: (a) $|E_\theta|$ em $\phi = 0^\circ$; (b) $|E_\phi|$ em $\phi = 90^\circ$. Parâmetros usados: $\epsilon_{r3} = 2,32$, $\text{tg} \delta_3 = 0,0012$, $d_1 = 1/32''$, freq. = 2,09 GHz, $\epsilon_{r2} = 2,0$, $\text{tg} \delta_2 = 0,001$.

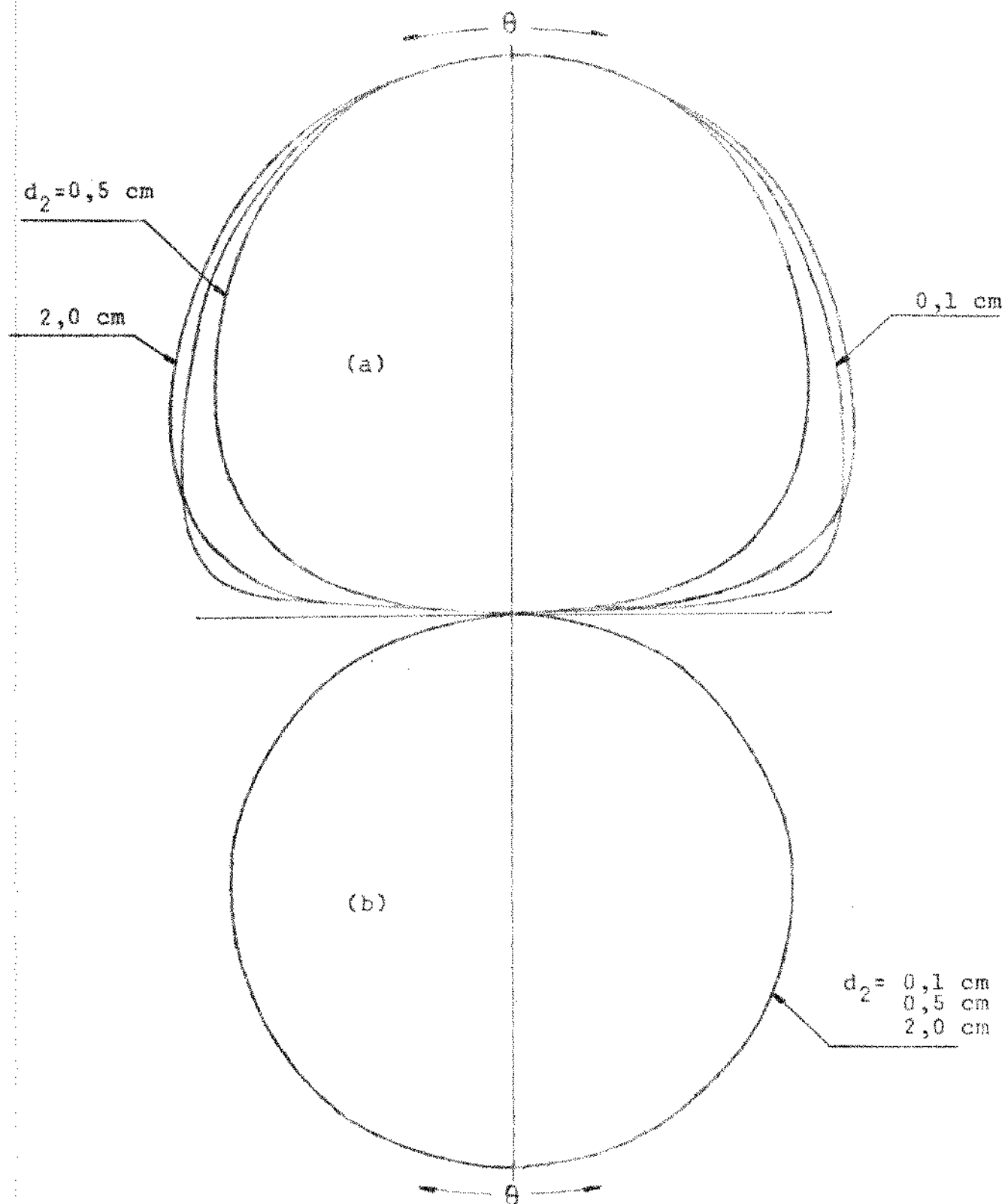


Fig. 18 - Diagrama de irradiação de: (a) $|E_\theta|$ em $\phi = 0^\circ$; (b) $|E_\phi|$ em $\phi = 90^\circ$. Parâmetros usados: $\epsilon_r = 2,32$, $\text{tg} \delta_3 = 0,0012$, $d_1 = 1/32''$, $\text{freq.} = 2,09 \text{ GHz}$, $\epsilon_r^3 = 10,0$, $\text{tg} \delta_2 = 0,001$.

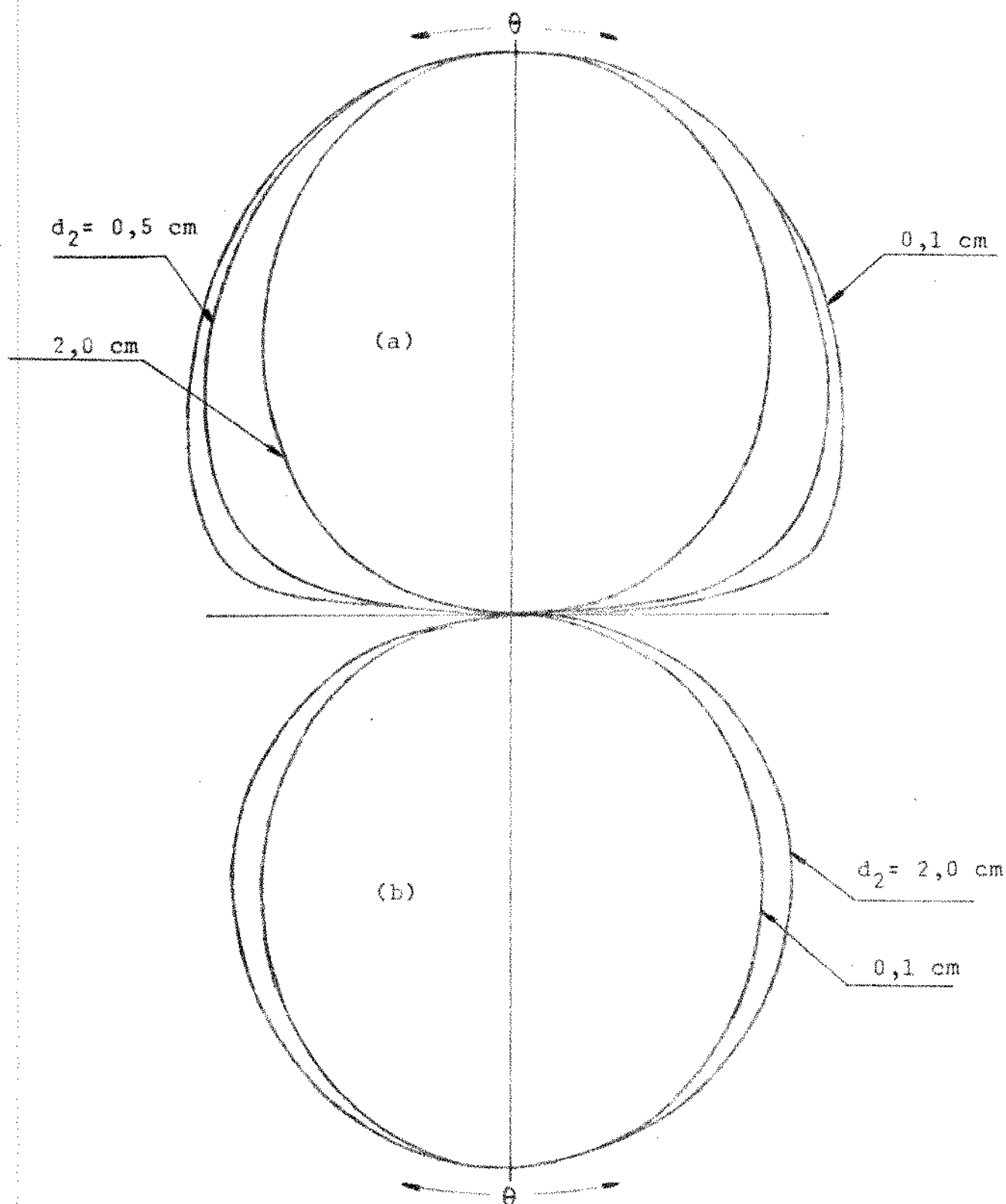


Fig. 19 - Diagrama de irradiação de: (a) $|E_\theta|$ em $\phi = 0^\circ$; (b) $|E_\theta|$ em $\phi = 90^\circ$. Parâmetros usados: $\epsilon_{r3} = 2,32$, $\text{tg} \delta_3 = 0,0012$, $d_1 = 1/8''$, freq. = $2,09 \text{ GHz}$, $\epsilon_{r2} = 2,0$, $\text{tg} \delta_2 = 0,001$.

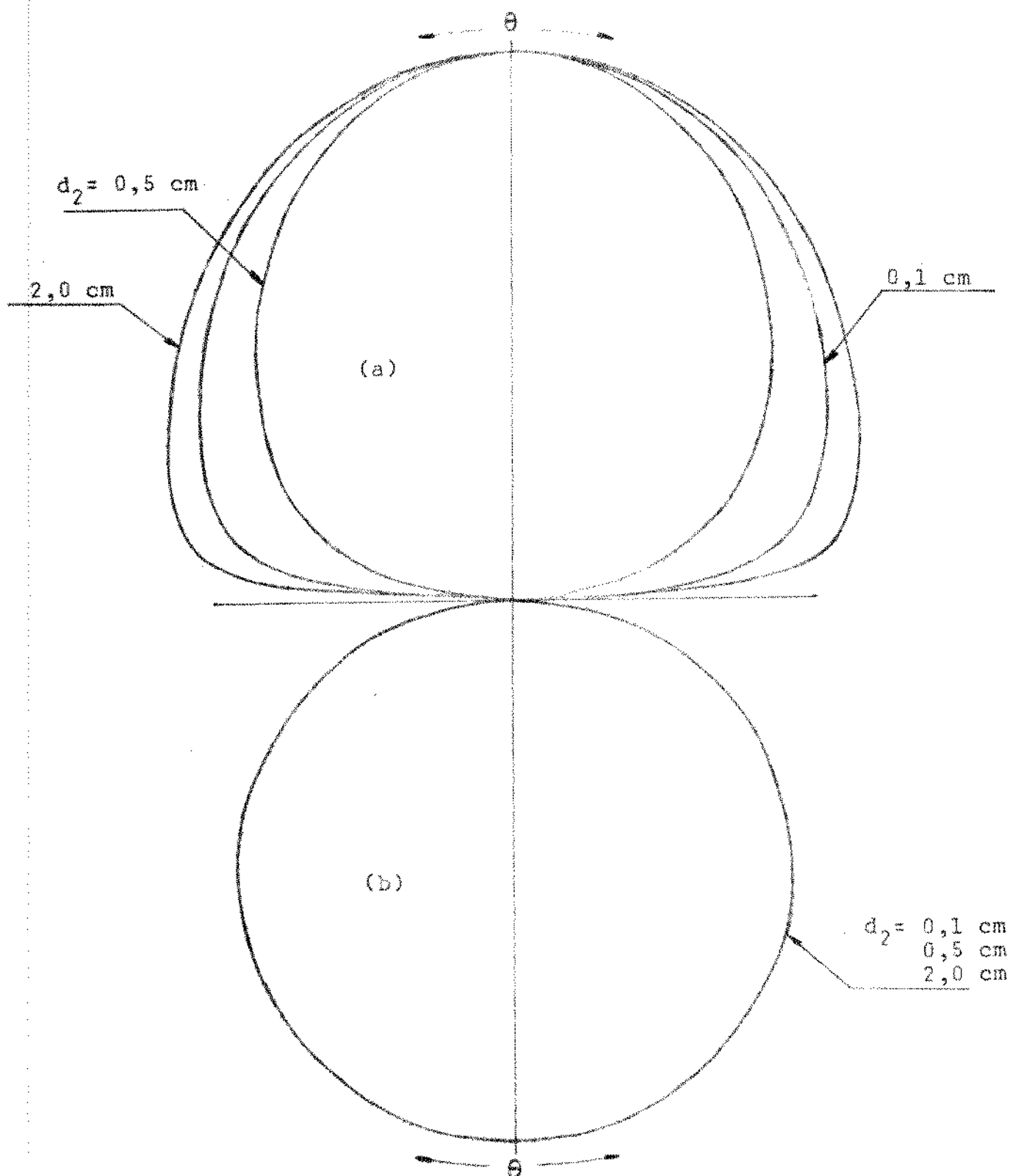


Fig. 20 - Diagrama de irradiação de: (a) $|E_\theta|$ em $\phi = 0^\circ$; (b) $|E_\phi|$ em $\phi = 90^\circ$. Parâmetros usados: $\epsilon_{r3} = 2,32$, $\text{tg} \delta_3 = 0,0012$, $d_1 = 1/8''$, freq. = 2,09 GHz, $\epsilon_{r2} = 10,0$, $\text{tg} \delta_2 = 0,001$.

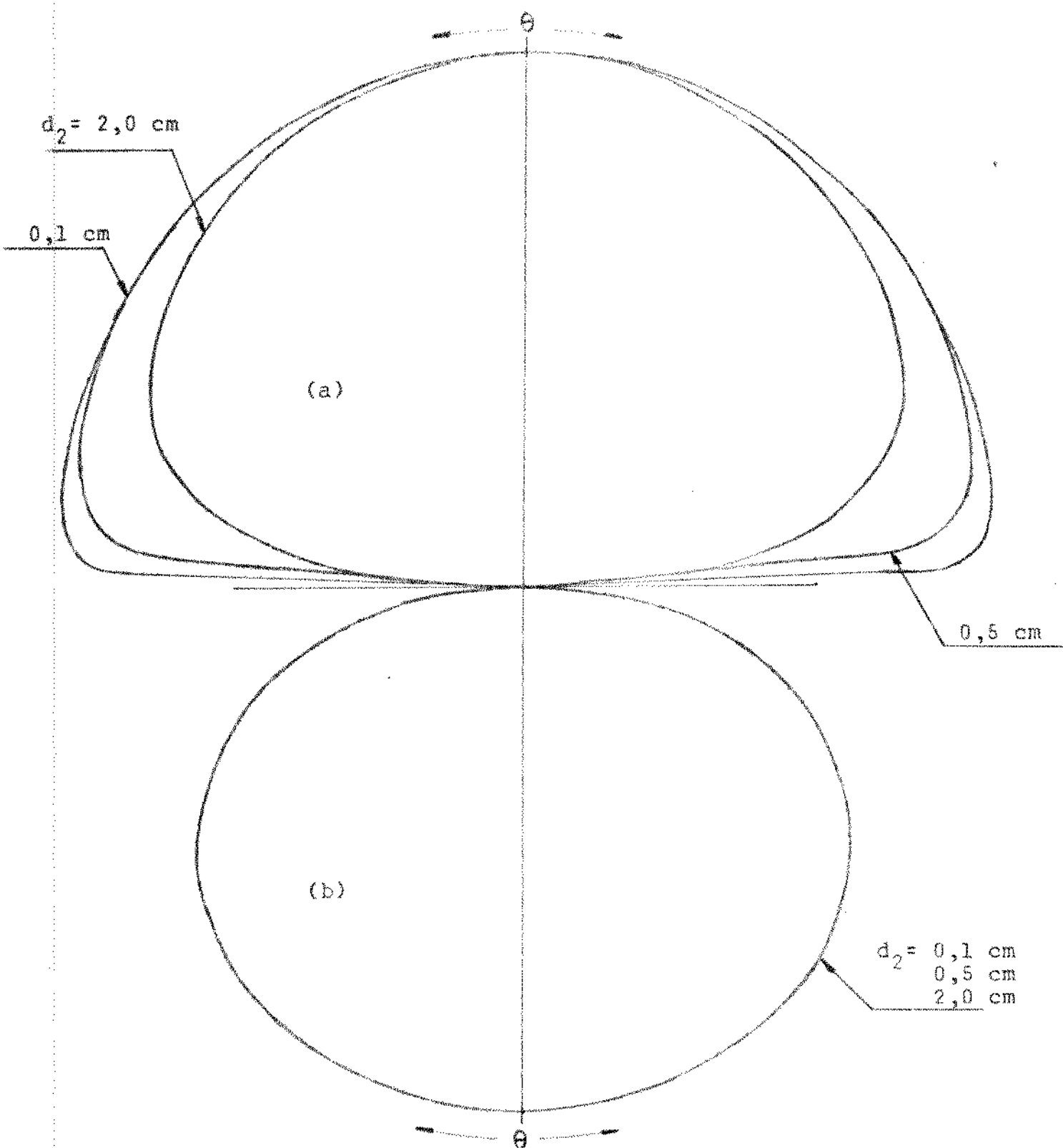


Fig. 21 - Diagrama de irradiação de: (a) $|E_\theta|$ em $\phi = 0^\circ$; (b) $|E_\phi|$ em $\phi = 90^\circ$. Parâmetros usados: $\epsilon_{r_3} = 9,8$, $\text{tg} \delta_3 = 0,0004$, $d_1 = 1/32''$, freq. = 1,02 GHz, $\epsilon_{r_2} = 2,0$, $\text{tg} \delta_2 = 0,001$.

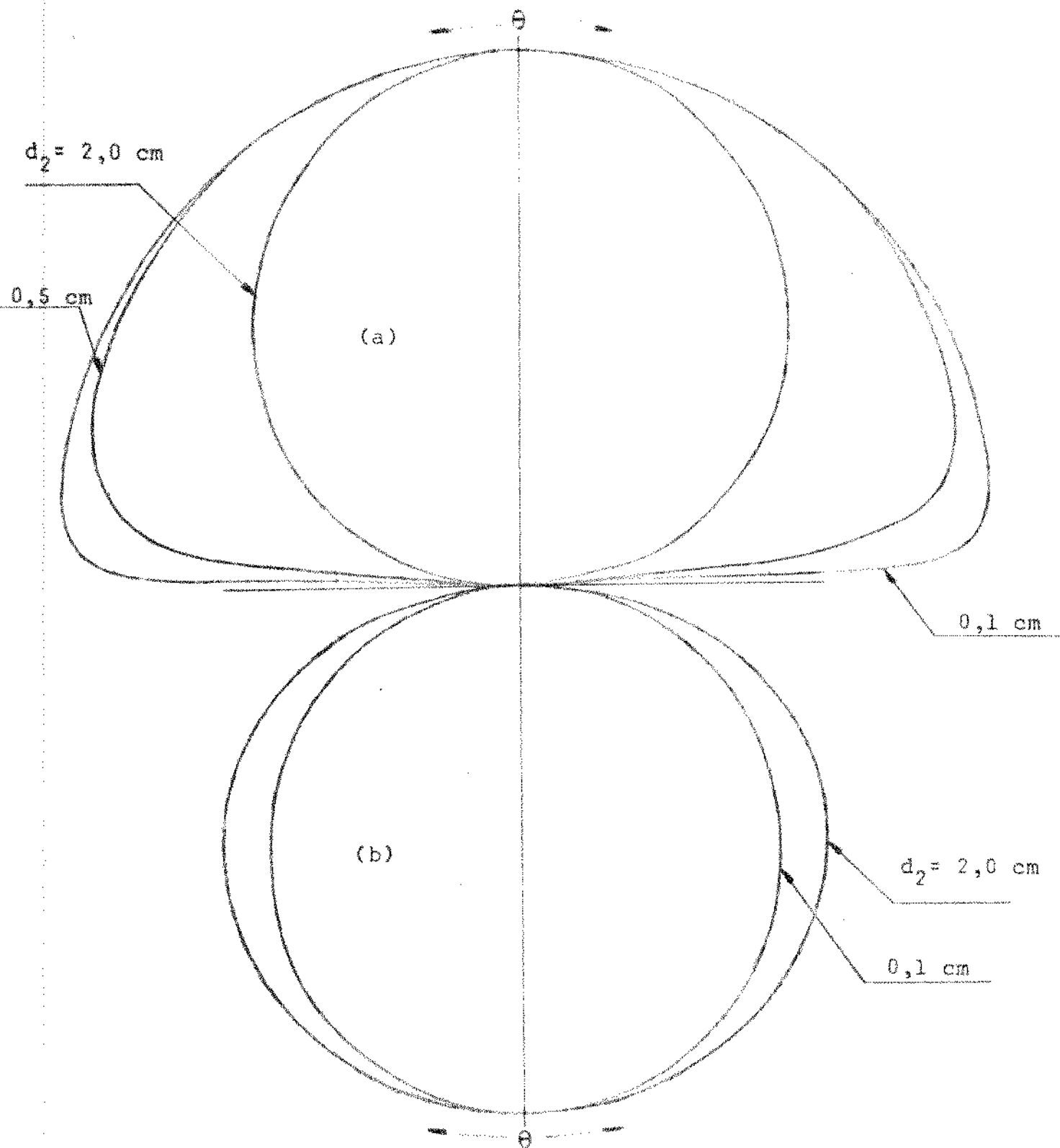


Fig. 22 - Diagrama de irradiação de: (a) $|E_\theta|$ em $\phi = 0^\circ$; (b) $|E_\phi|$ em $\phi = 90^\circ$. Parâmetros usados: $\epsilon_{r_3} = 9.8$, $\text{tg} \delta_3 = 0.0004$, $d_1 = 1/32''$, $\text{freq.} = 1.02 \text{ GHz}$, $\epsilon_{r_2} = 10.0$, $\text{tg} \delta_2 = 0.001$.

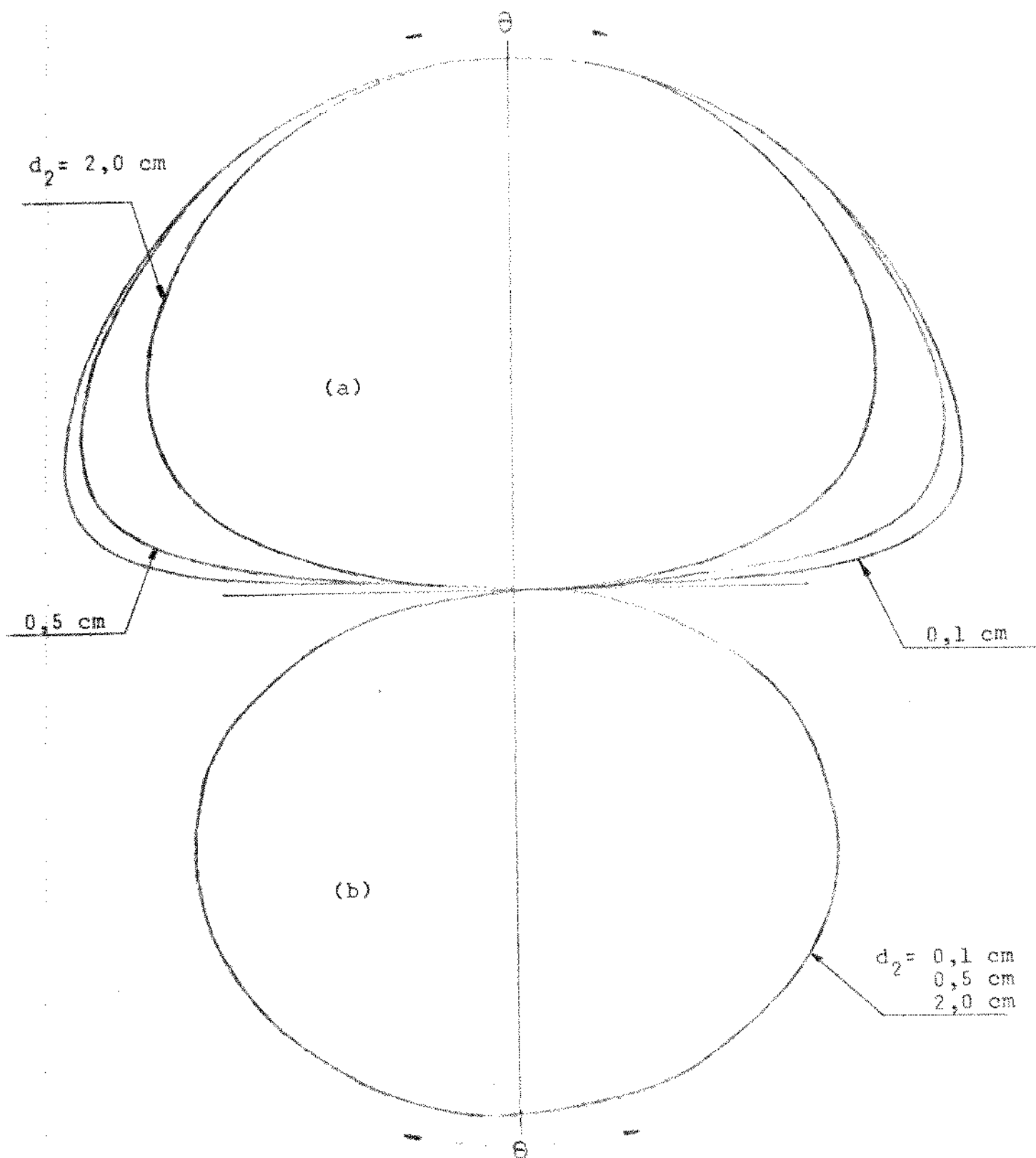


Fig. 23 - Diagrama de irradiação de: (a) $|E_{\theta}|$ em $\phi = 0^{\circ}$; (b) $|E_{\phi}|$ em $\phi = 90^{\circ}$. Parâmetros usados: $\epsilon_{r3} = 9,8$, $\text{tg} \delta_3 = 0,0004$, $d_1 = 1/8''$, freq. = 1,02 GHz, $\epsilon_{r2} = 2,0$, $\text{tg} \delta_2 = 0,001$.

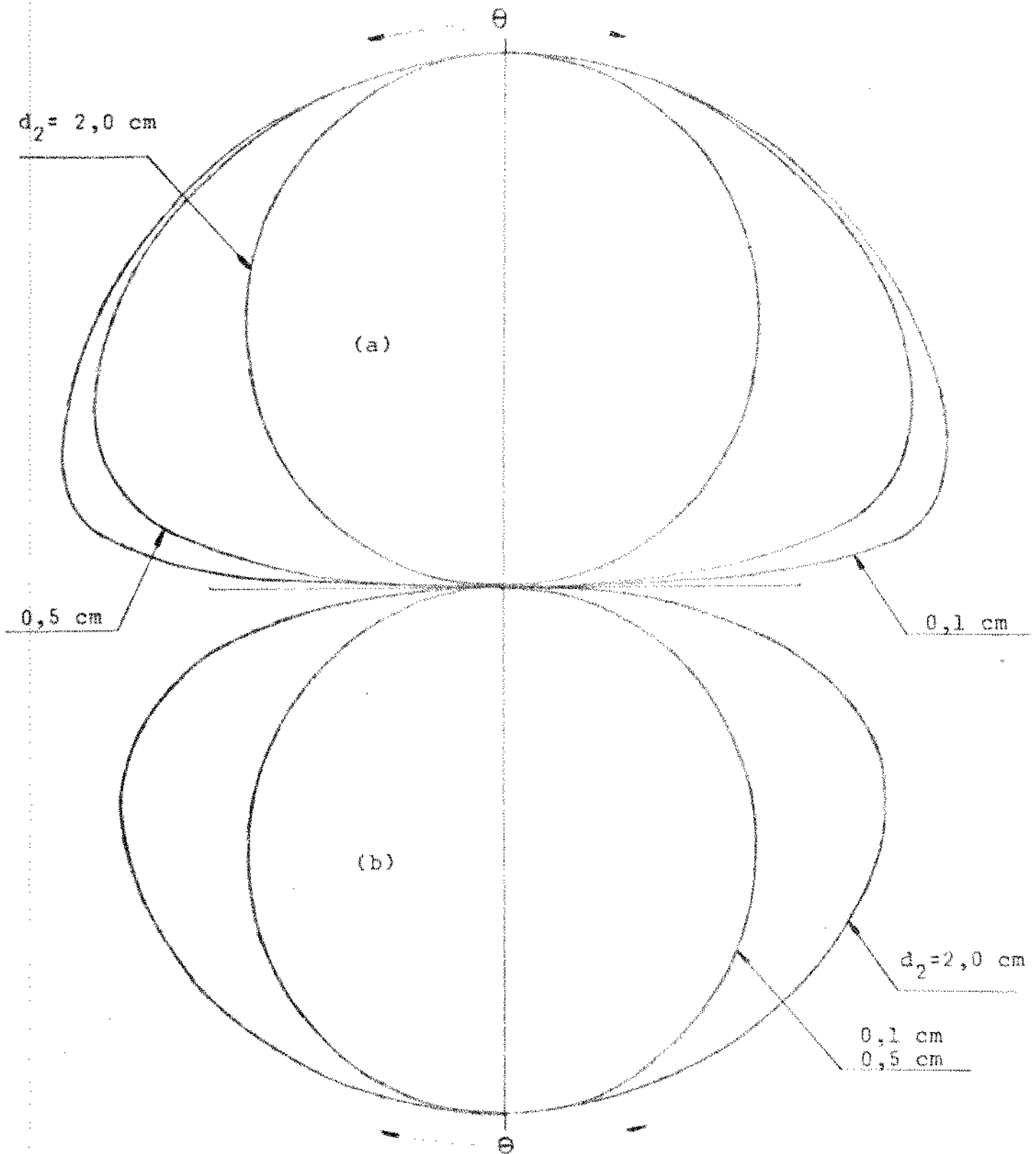


Fig. 24 - Diagrama de irradiação de: (a) $|E_\theta|$ em $\phi = 0^\circ$; (b) $|E_\phi|$ em $\phi = 90^\circ$. Parâmetros usados: $\epsilon_{r_3} = 9,8$, $\text{tg} \delta_3 = 0,0004$, $d_1 = 1/8''$, freq. = 1,02 GHz, $\epsilon_{r_2} = 10,0$, $\text{tg} \delta_2 = 0,001$.

c) Nota-se que, para a maioria dos casos apresentados, a componente θ do campo elétrico é bem mais sensível às variações das espessuras e das permissividades relativas dos dielétricos do que a componente ϕ . A maior variação ocorrida em E_ϕ , para diferentes valores de d_2 , ocorre quando se utilizam valores elevados da permissividade relativa para ambos os dielétricos ($\epsilon_{r_3} = 9,8$, $\epsilon_{r_2} = 10,0$).

d) Para os casos em que o valor de ϵ_{r_3} é baixo e o valor de ϵ_{r_2} é elevado, e vice-versa, E_ϕ é praticamente insensível às variações de d_2 dentro da faixa considerada ($0,1 \text{ cm} \leq d_2 \leq 2,0 \text{ cm}$).

e) Nota-se também que, para baixos valores de d_2 , o aumento de ϵ_{r_3} provoca um aumento bastante sensível na largura de feixe de 3dB, BW_{3dB} .

f) É importante salientar o interessante comportamento da largura de feixe de 3dB para os diversos valores de parâmetros considerados. Em alguns casos, o aumento da espessura da cobertura dielétrica d_2 dentro da faixa considerada provoca a diminuição contínua de BW_{3dB} , enquanto que em outros casos ocorre o aumento de BW_{3dB} com o aumento de d_2 . Para a componente E_θ , o aumento de BW_{3dB} com o aumento de d_2 se dá quando o valor de ϵ_{r_2} é bem superior ao de ϵ_{r_3} ($\epsilon_{r_2} = 10,0$ e $\epsilon_{r_3} = 2,32$), enquanto que para a componente E_ϕ tal fato ocorre quando os valores de ϵ_{r_2} e ϵ_{r_3} se aproximam ($\epsilon_{r_2} = 2,0$, $\epsilon_{r_3} = 2,32$ e $\epsilon_{r_2} = 10,0$, $\epsilon_{r_3} = 9,8$). Apesar desse fato não ter sido ainda investigado com maior profundidade, é razoável conjecturar que ele é devido às ondas de superfície que são excitadas nas fronteiras entre os dielétricos.

V.4 - CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi estudada a influência de uma cobertura dielétrica nos diagramas de irradiação de uma antena de micro fita em anel, utilizando-se o formalismo das funções de Green diádicas para meios em camadas planas e paralelas e o modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas. A não disponibilidade de resultados práticos ou teóricos sobre o assunto na bibliografia especializada impediu que se fizessem comparações com os resultados obtidos através do presente método. Salienta-se que a expressão assintótica da função de Green diádica $\bar{G}^{(13)}(\bar{R}/\bar{R}')$ é geral e pode ser utilizada na realização de estudos semelhantes em antenas de outras formas geométricas, como a retangular, disco etc.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO SUBSTRATO DIELÉ-
TRICO NOS DIAGRAMAS DE IRRADIAÇÃO DE
UMA ANTENA DE MICROFITA DO TIPO ENVÓLUCRO

VI.1 - INTRODUÇÃO

Conforme se sabe, veículos que desenvolvem altas velocidades e que, portanto, estão sujeitos a problemas sérios de aerodinâmica, como aeronaves, foguetes, mísseis etc., requerem antenas que se ajustem perfeitamente à superfície dos mesmos e que apresentem baixo perfil ou pequena altura com relação a essa superfície. É nesses casos que as antenas de microfita encontram uma de suas vantajosas aplicações pelo fato de apresentarem um perfil incomparavelmente baixo e se ajustarem sem maiores problemas às superfícies dos veículos, sejam elas curvas ou planas [15]. Neste capítulo, procedendo-se de maneira semelhante à apresentada nos capítulos IV e V, analisam-se os efeitos do substrato dielétrico da antena do tipo envólucro (Wraparound) nos seus diagramas de irradiação e na cobertura percentual de diagrama.

VI.2 - DETERMINAÇÃO DA DENSIDADE DE CORRENTE MAGNÉTICA EQUIVALENTE

Um dos tipos de antenas de microfita utilizadas em especial na fuselagem de mísseis e foguetes é a antena do tipo envólucro (wraparound) descrita por Munson [15] e mostrada na figura 25.

A antena consiste, basicamente, além da estrutura de alimentação, de um trecho de linha de microfita de impedância característica bem baixa (L grande e comprimento W aproximadamente igual a meio comprimento de onda no dielétrico). Esse trecho de linha pode então assumir a forma de anel, mostrada na figura 2 podendo ser assim ajustado, por exemplo, à fuselagem de um míssil. A antena irradia através das duas aberturas de largura L' separadas de $W = \lambda_d/3$, onde λ_d é o comprimento de onda no dielétrico. A fim de que o diagrama de irradiação seja omnidirecional

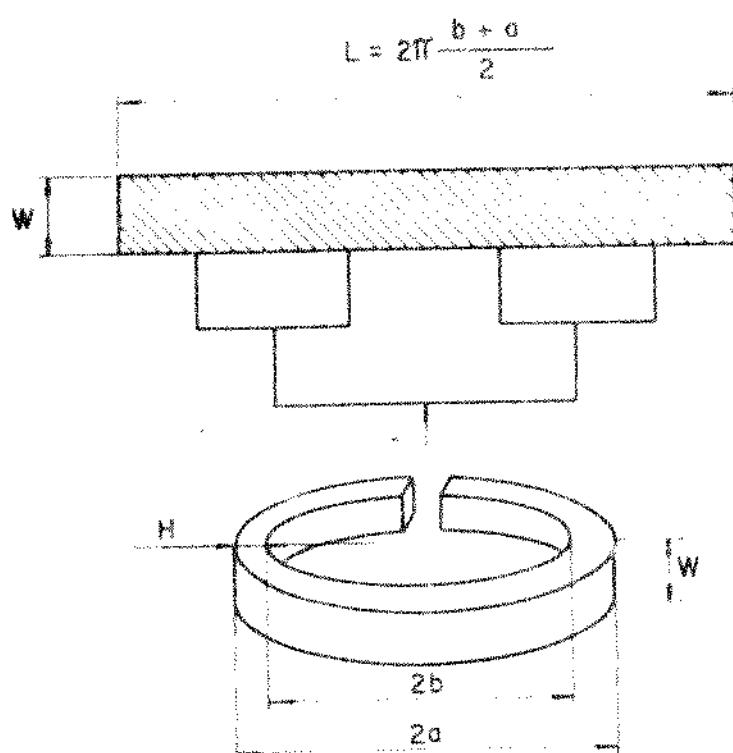


Fig. 25 - Antena de microfita do tipo envólucro.

em um plano normal ao eixo do míssil, o número de pontos de alimentação deve ser maior do que o número de comprimentos de onda no dielétrico na direção da dimensão L [15]. Admitindo-se então esta hipótese e supondo-se que os campos na região entre a fita condutora e o plano de terra não variam com r' , para uma espessura $a-b$ do dielétrico pequena com relação a λ_d , pode-se então dizer que os campos irradiados pela antena são os mesmos produzidos pelas duas aberturas localizadas em $Z' = -\frac{\lambda_d}{4}$ e $Z' = \frac{\lambda_d}{4}$, conforme mostra a figura 26, uniformemente iluminadas e que o campo elétrico na região entre a fita condutora e o plano de terra apresenta apenas a componente na direção r' .

De acordo com o modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas, a componente tangencial do campo magnético na região das duas aberturas é desprezível, o que permite então afirmar-se, utilizando-se o princípio da equivalência, que os campos irradiados pela antena são os mesmos excitados pelas correntes magnéticas que se distribuem uniformemente nas duas aberturas localizadas em $Z = -\lambda_d/4$ e $Z = \lambda_d/4$ cujas densidades são dadas por

$$\bar{M}_1 = \hat{Z} \times E_0 \hat{r} = E_0 \hat{\phi} \text{ em } Z' = \lambda_d/4 \quad (6.1)$$

$$\bar{M}_2 = -\hat{Z} \times (-E_0 \hat{r}) = E_0 \hat{\phi} \text{ em } Z' = -\lambda_d/4 \quad (6.2)$$

onde E_0 é o valor do campo elétrico uniforme nas aberturas.

Observa-se que, considerando-se que $W = \lambda_d/2$, os campos elétricos em $Z' = \lambda_d/4$ e $Z' = -\lambda_d/4$ estão defasados entre si de 180° .

Com o objetivo de se aplicar o princípio da multiplicação dos diagramas para determinarem-se os campos irradiados pela antena, determinam-se em primeiro lugar os campos $\bar{E}_{e1}$ e $\bar{H}_{e1}$

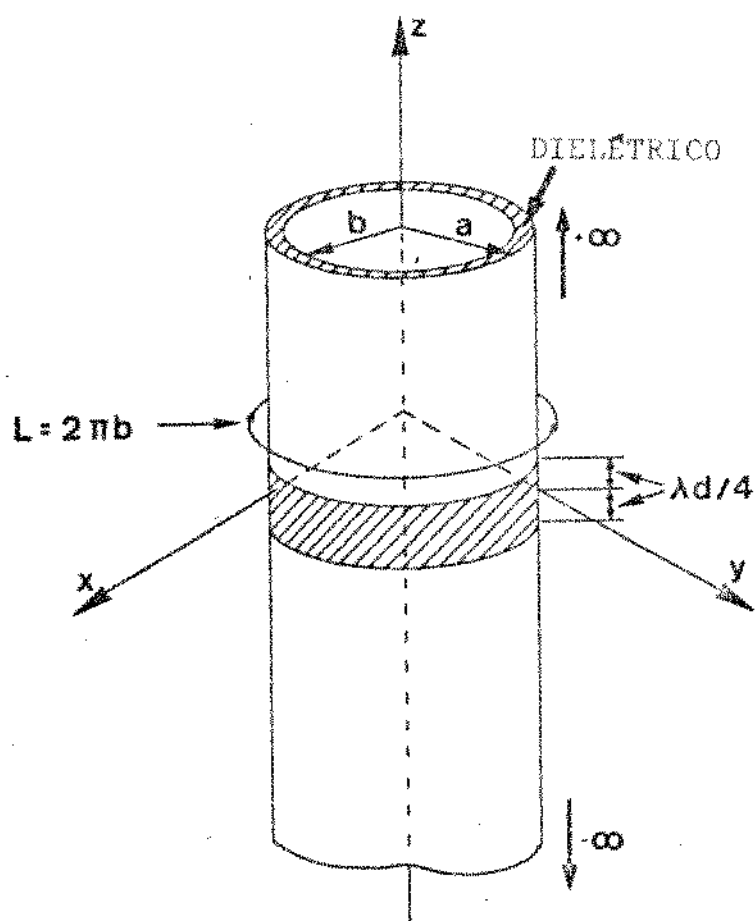


Fig. 26 - Modelo utilizado na análise da antena do tipo envólucro.

produzidos pela densidade de corrente magnética $\vec{M} = E_0 \hat{\phi}$ localizada em $z' = 0$ e definida na região anular $b \leq r' \leq a$, o que é feito no item seguinte.

VI.3 - DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS DISTANTES EXCITADOS PELO ELEMENTO DE CORRENTE MAGNÉTICA EM FORMA DE ANEL.

Utilizando-se a relação (2.32) com $\vec{M}$ dada por $\vec{M} = E_0 \hat{\phi}$ em $z' = 0$ e $\vec{G}^{(12)}(\vec{R}/\vec{R}')$ dada por (3.172), obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{H}_{el}(\vec{R}) = & \frac{i\omega\epsilon_0 E_0 k_1 \sin\theta}{4\pi R} e^{-ik_1 R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{u^2} (-i)^{n+1} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_b^a r' dr' \left\{ \left[A_{en}(\theta) \cos n\phi \hat{\phi} - \right. \right. \\ & iB_{en}(\theta) \frac{\sin n\phi \hat{\theta}}{\cos n\phi \hat{\theta}} \left. \right] \left[-\frac{\partial H_n^{(1)}(ur')}{\partial r'} \frac{\cos n\phi'}{\sin n\phi'} \right] + \left[A'_{en}(\theta) \cos n\phi \hat{\phi} - iB'_{en}(\theta) \frac{\sin n\phi}{\cos n\phi} \hat{\theta} \right] \\ & \left[-\frac{\partial J_n(ur')}{\partial r'} \frac{\cos n\phi'}{\sin n\phi'} \right] + \left[-iC'_{en}(\theta) \cos n\phi \hat{\theta} + D'_{en}(\theta) \frac{\sin n\phi \hat{\phi}}{\cos n\phi \hat{\phi}} \right] \left[\pm \frac{ih_0^n}{r'} H_n^{(1)}(ur') \frac{\sin n\phi'}{\cos n\phi'} \right] \\ & \left. \left[-iC'_{en}(\theta) \cos n\phi \hat{\theta} + D'_{en}(\theta) \frac{\sin n\phi \hat{\phi}}{\cos n\phi \hat{\phi}} \right] \left[\pm \frac{ih_0^n}{r'} J_n(ur') \frac{\sin n\phi'}{\cos n\phi'} \right] \right\} \quad (6.3) \end{aligned}$$

Como a integral em um período completo de $\sin n\phi'$ é sempre nula qualquer que seja o valor de n no somatório da equação (6.3) e como a integral em um período completo de $\cos n\phi'$ só é diferente de zero para $n=0$, a expressão (6.3) é bastante simplificada:

$$\bar{H}_{e1}(\bar{R}) = \frac{\omega \epsilon_0 E_0 k_1 \sin \theta}{2Ru^2} e^{ik_1 R} \left\{ -A(\theta) \hat{\phi} \int_b^a dr' r' \frac{\partial H_0^{(1)}(ur')}{\partial r'} - \right. \\ \left. A'(\theta) \hat{\phi} \int_b^a dr' r' \frac{\partial J_0(ur')}{\partial r'} \right\} \quad (6.4)$$

onde se vê que o campo magnético distante apresenta apenas a componente na direção ϕ .

As integrais da equação (6.4) podem ser colocadas na forma seguinte, através de uma integração por partes:

$$\int_b^a r' \frac{\partial H_0^{(1)}(ur')}{\partial r'} dr' = \left[r' H_0^{(1)}(ur') \right]_b^a - \frac{1}{u} \int_{ub}^{ua} H_0^{(1)}(ur') d(ur') \quad (6.5)$$

$$\int_b^a r' \frac{\partial J_0(ur')}{\partial r'} dr' = \left[r' J_0(ur') \right]_b^a - \frac{1}{u} \int_{ub}^{ua} J_0(ur') d(ur') \quad (6.6)$$

Substituindo-se (6.5) e (6.6) em (6.4) e utilizando-se a relação

$$H_0^{(1)}(ur') = J_0(ur') + iN_0(ur') \quad (6.7)$$

chega-se a:

$$H_{el}(\vec{R}) = \frac{\omega \epsilon_0 E_0 k_1 \sin \theta}{2Ru^2} e^{ik_1 R} \left\{ -A(\theta) \left[aJ_0(ua) - bJ_0(ub) - \frac{1}{u} \int_{ub}^{ua} J_0(ur') d(ur') \right] - \right.$$

$$A'(\theta) \left[aJ_0(ua) - bJ_0(ub) - \frac{1}{u} \int_{ub}^{ua} J_0(ur') d(ur') \right] - iA(\theta) \left[aN_0(ua) - bN_0(ub) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{u} \int_{ub}^{ua} N_0(ur') d(ur') \right\} \quad (6.8)$$

ou

$$H_{\phi_{el}} = \frac{-\omega \epsilon_0 E_0 k_1 \sin \theta}{2Ru^2} e^{ik_1 R} \left\{ Z_1 \left[A(\theta) + A'(\theta) \right] + iZ_2 A(\theta) \right\} \quad (6.9)$$

onde

$$Z_1 = aJ_0(ua) - bJ_0(ub) - \frac{1}{u} \int_{ub}^{ua} J_0(ur') d(ur') \quad (6.10)$$

$$Z_2 = aN_0(ua) - bN_0(ub) - \frac{1}{u} \int_{ub}^{ua} N_0(ur') d(ur') \quad (6.11)$$

O campo elétrico distante excitado pelo anel de corrente magnética é obtido substituindo-se (6.9) na relação $E_{\theta_{el}} = \eta_1 H_{\phi_{el}}$, onde $\eta_1 = 377\Omega$.

VI.4 - DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS DISTANTES EXCITADOS PELA ANTENA DO TIPO ENVÓLUCRO

Sabendo-se que o fator de conjunto, para o caso, é dado por [35, pág. 361] $\cos\left(\frac{\pi\lambda_d \cos\theta}{2\lambda_0}\right)$, onde λ_0 é o comprimento de onda no espaço livre, pode-se obter o diagrama de irradiação da antena do tipo envólucro pelo princípio da multiplicação dos diagramas.

$$|E_\theta| \propto \cos\left(\frac{\pi \cos\theta}{2(\epsilon_r)^{1/2}}\right) \frac{\sin\theta}{u^2} \left| Z_1 \left[A(\theta)_{en=0} + A'(\theta)_{en=0} \right] + i Z_2 A(\theta)_{en=0} \right| \quad (6.12)$$

Verifica-se que, no presente caso, as expressões dos coeficientes $A(\theta)_{en=0}$ e $A'(\theta)_{en=0}$, dadas por (3.131) e (3.133) ficam bastante simplificadas:

$$X \Big|_{n=0} = \frac{i h_0 n}{a} \left[1 - \frac{v^2}{u^2} \right] \Big|_{n=0} = 0 \quad (6.13)$$

$$A(\theta)_{en=0} = \frac{i 2 J_0(ub)}{\pi u a \left[QH_0^{(1)'}(va) + \epsilon_r \frac{v^2}{u^2} PH_0^{(1)}(va) \right]} \quad (6.14)$$

$$A'(\theta)_{en=0} = \frac{-i 2 H_0^{(1)}(ub)}{\pi u a \left[QH_0^{(1)'}(va) + \epsilon_r \frac{v^2}{u^2} PH_0^{(1)}(va) \right]} \quad (6.15)$$

Vê-se, também, que:

$$\frac{A(\theta) + A'(\theta)}{en=0 \quad en=0} = \frac{2N_0(ub)}{\pi u a \left[QH_0^{(1)'}(va) + \epsilon_r \frac{v^2}{u^2} PH_0^{(1)}(va) \right]} \quad (6.16)$$

A fração da área do diagrama com sinal inferior a -8dB, com relação ao máximo normalizado de 0 dB, é a seguinte [15]:

$$F_N = \left(\int_0^{360^\circ} \int_0^{\beta^\circ} \sin\theta d\theta d\phi + \int_0^{360^\circ} \int_{180^\circ - \beta^\circ}^{180^\circ} \sin\theta d\theta d\phi \right) / \int_0^{360^\circ} \int_0^{180^\circ} \sin\theta d\theta d\phi \quad (6.17)$$

onde β° é o ângulo para o qual o ganho está 8 dB abaixo do valor máximo de 0 dB.

A cobertura percentual de diagrama é então dada por [15]

$$C_p = 100 - F_N \quad (6.18)$$

As figuras 27 a 34 mostram os diagramas de irradiação, obtidos no plano E, para um valor qualquer de ϕ , da antena do tipo envólucro e do anel de corrente magnética. A figura 35 apresenta algumas curvas da cobertura percentual de diagrama em função da espessura da camada dielétrica, do raio b e da permissividade relativa do dielétrico, para a frequência de 2,0 GHz. Examinando-se as citadas figuras pode-se observar o seguinte:

a) Nota-se uma acentuada influência da permissividade relativa ϵ_r nos diagramas de irradiação para ambos os casos

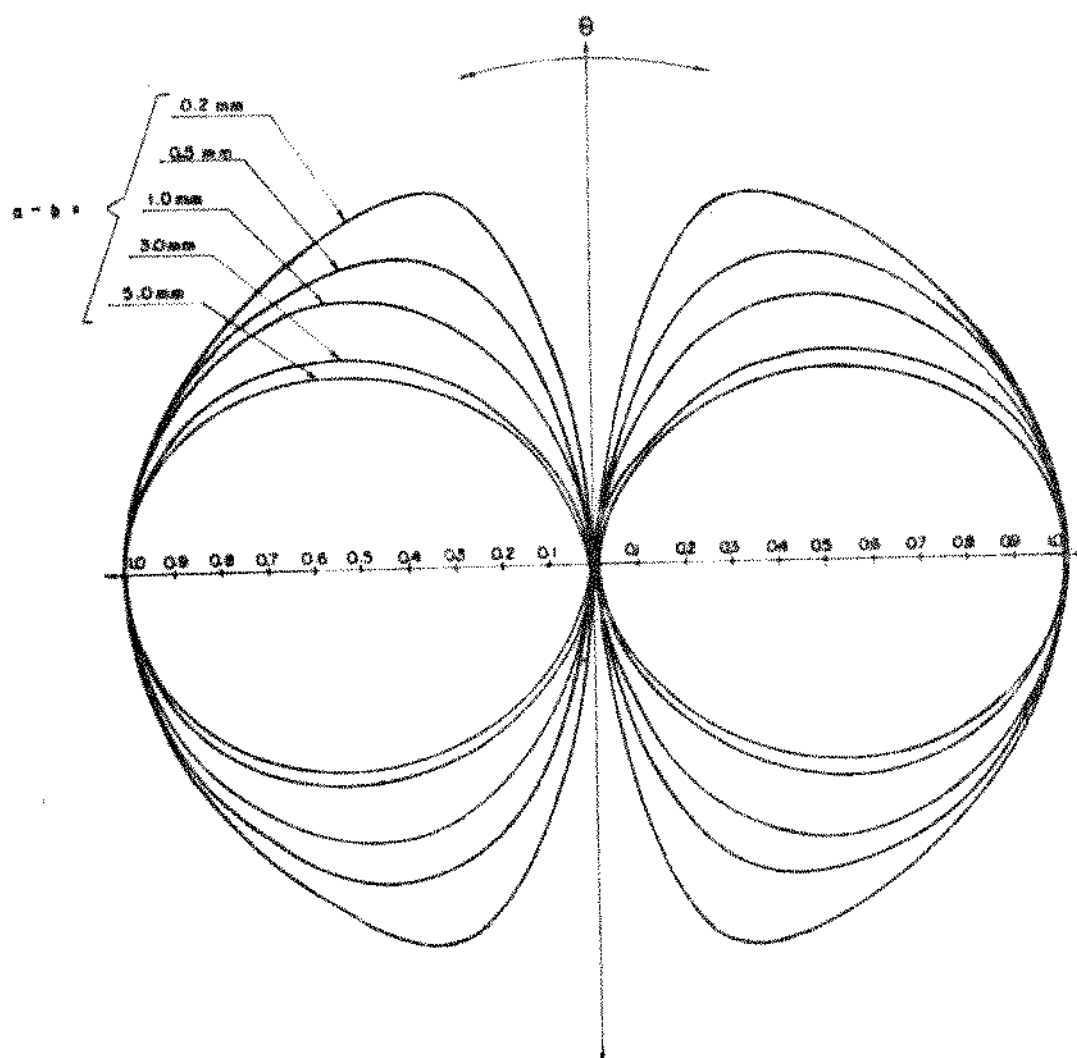


Fig. 27 - Diagrama de irradiação da antena do tipo envólucro.

$|E_{\theta}|$; plano E, freq. = 2,0 GHz, $\epsilon_r = 2,55$, $b = 1,5''$.

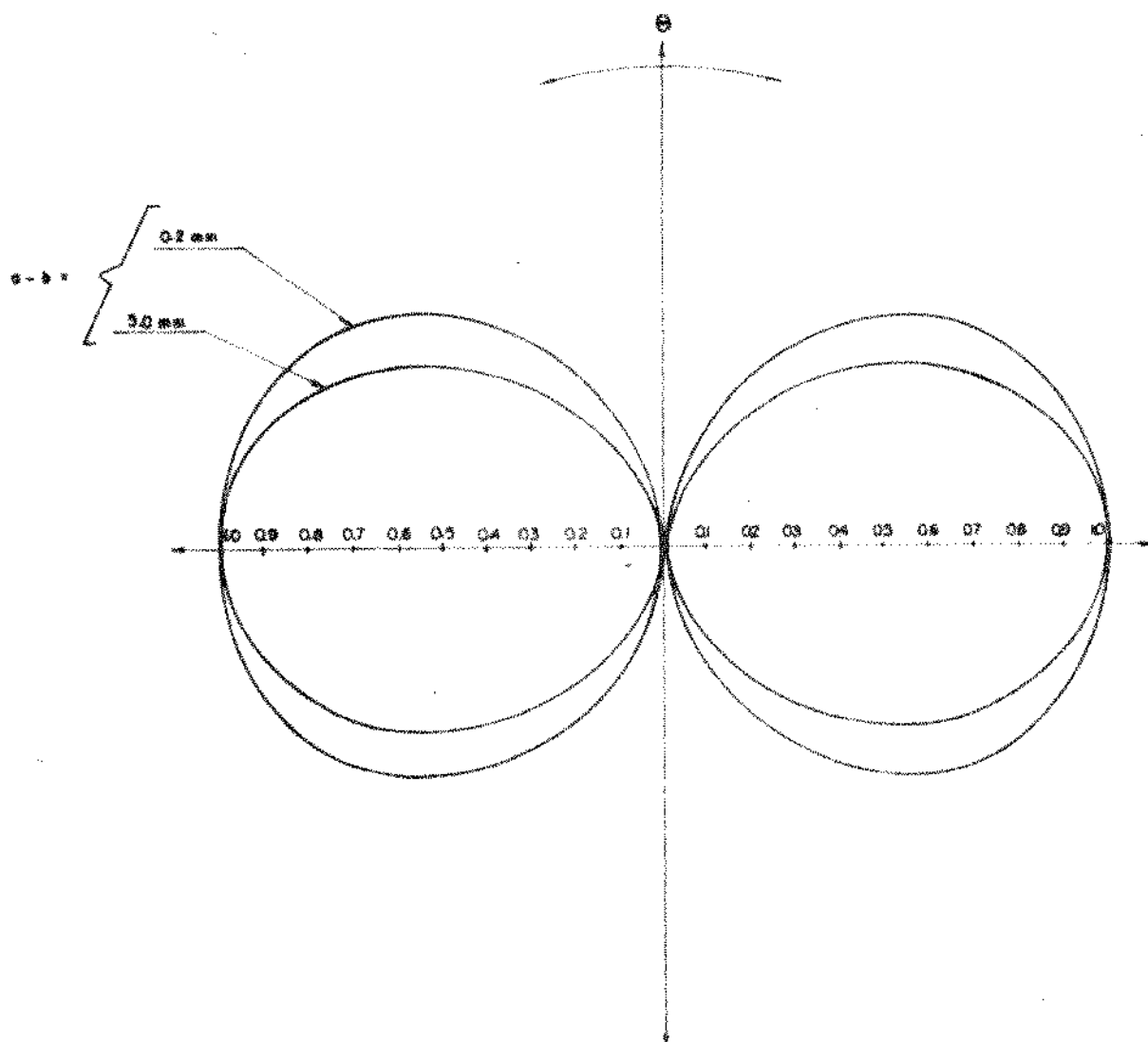


Fig. 28 - Diagrama de irradiação da antena do tipo envólucro.

$|E_{\theta}|$, plano E, freq. = 2,0 GHz, $\epsilon_r = 9,60$, $b = 1,5''$.

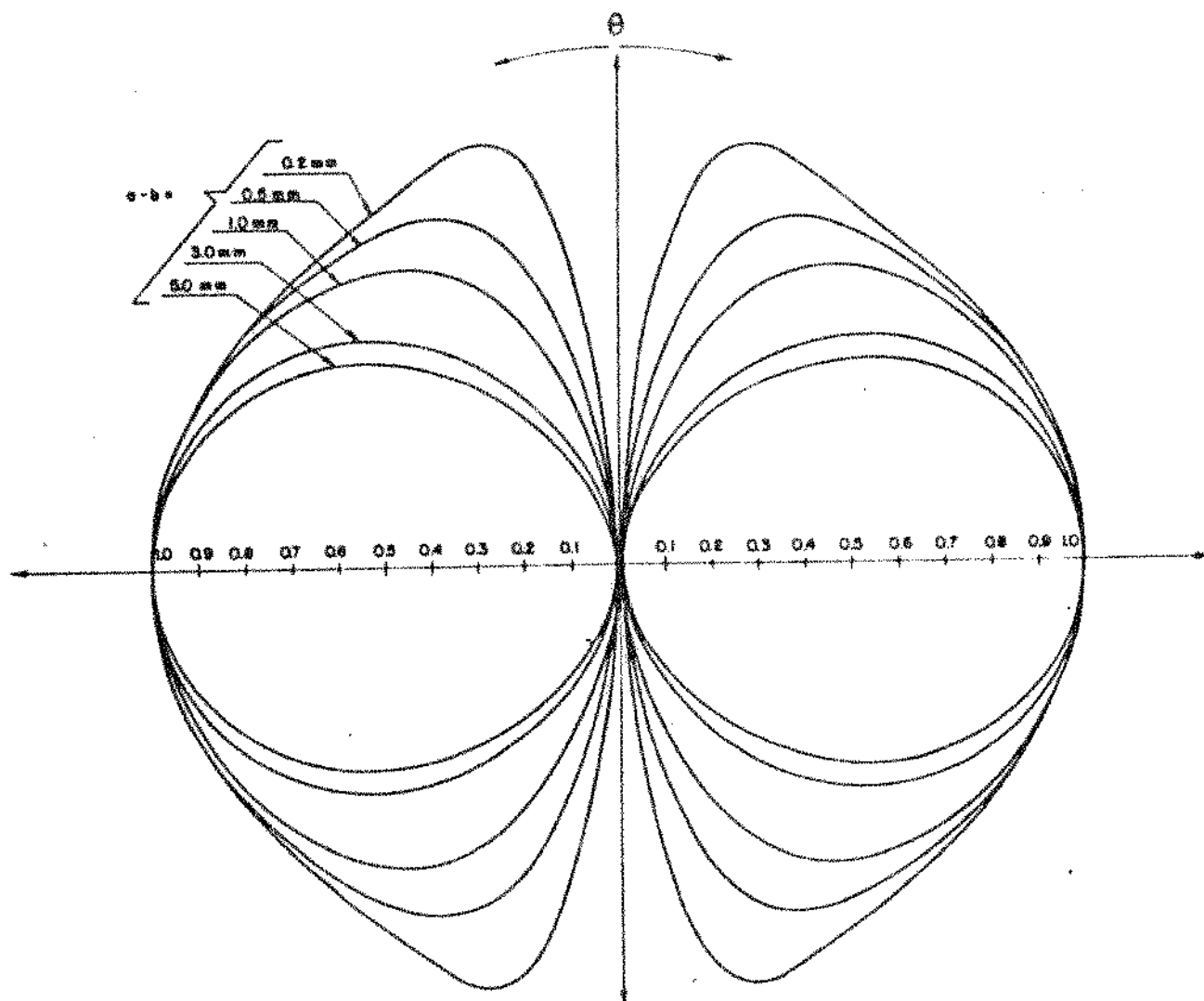


Fig. 29 - Diagrama de irradiação da antena do tipo envólucro.

$|E_{\theta}|$, plano E, freq. = 2,0 GHz, $\epsilon_r = 2,55$, $b = 10''$.

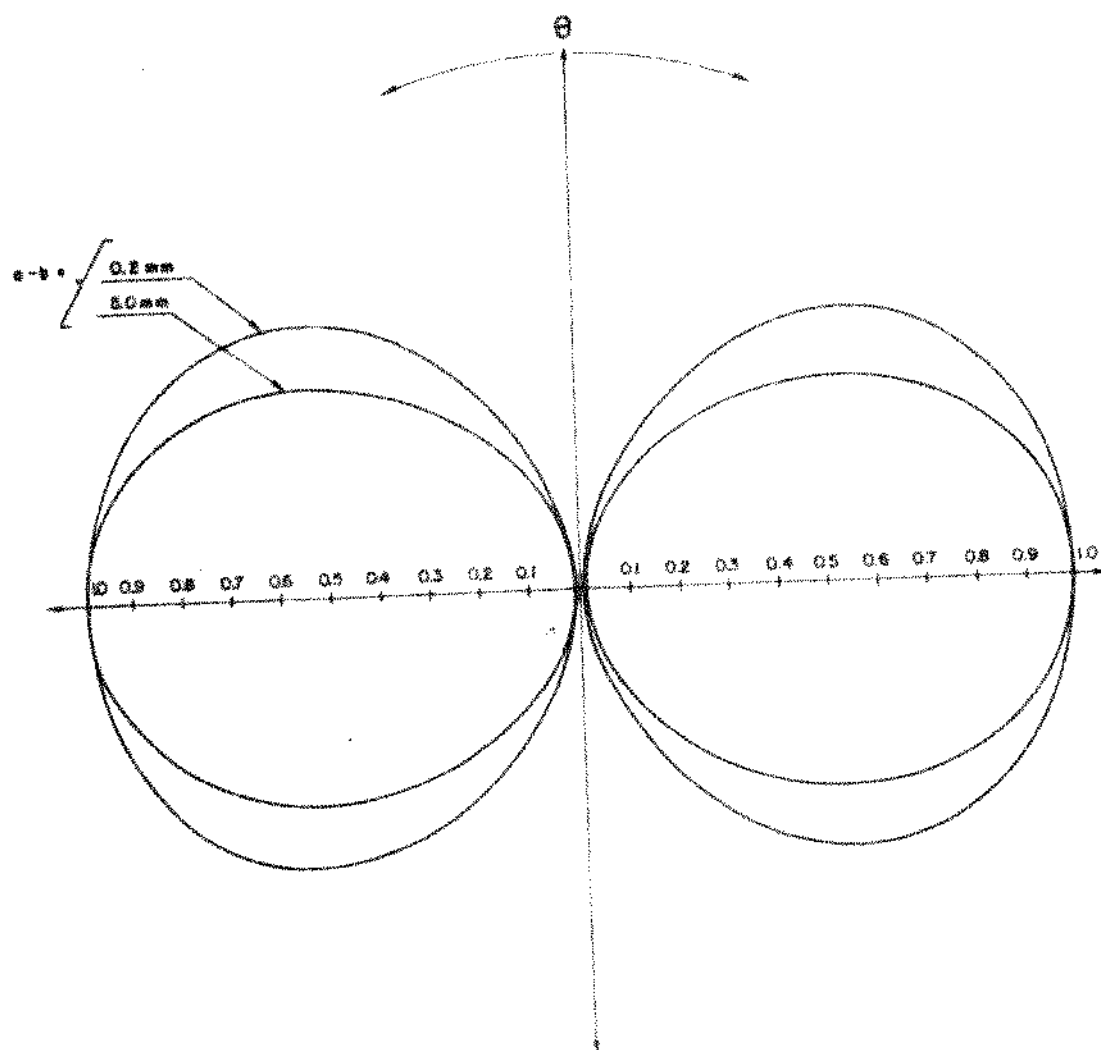


Fig. 30 - Diagrama de irradiação da antena do tipo envólucro.

$|E_{\theta}|$, plano E, freq. = 2,0 GHz, $\epsilon_r = 9,60$, $b = 10''$.

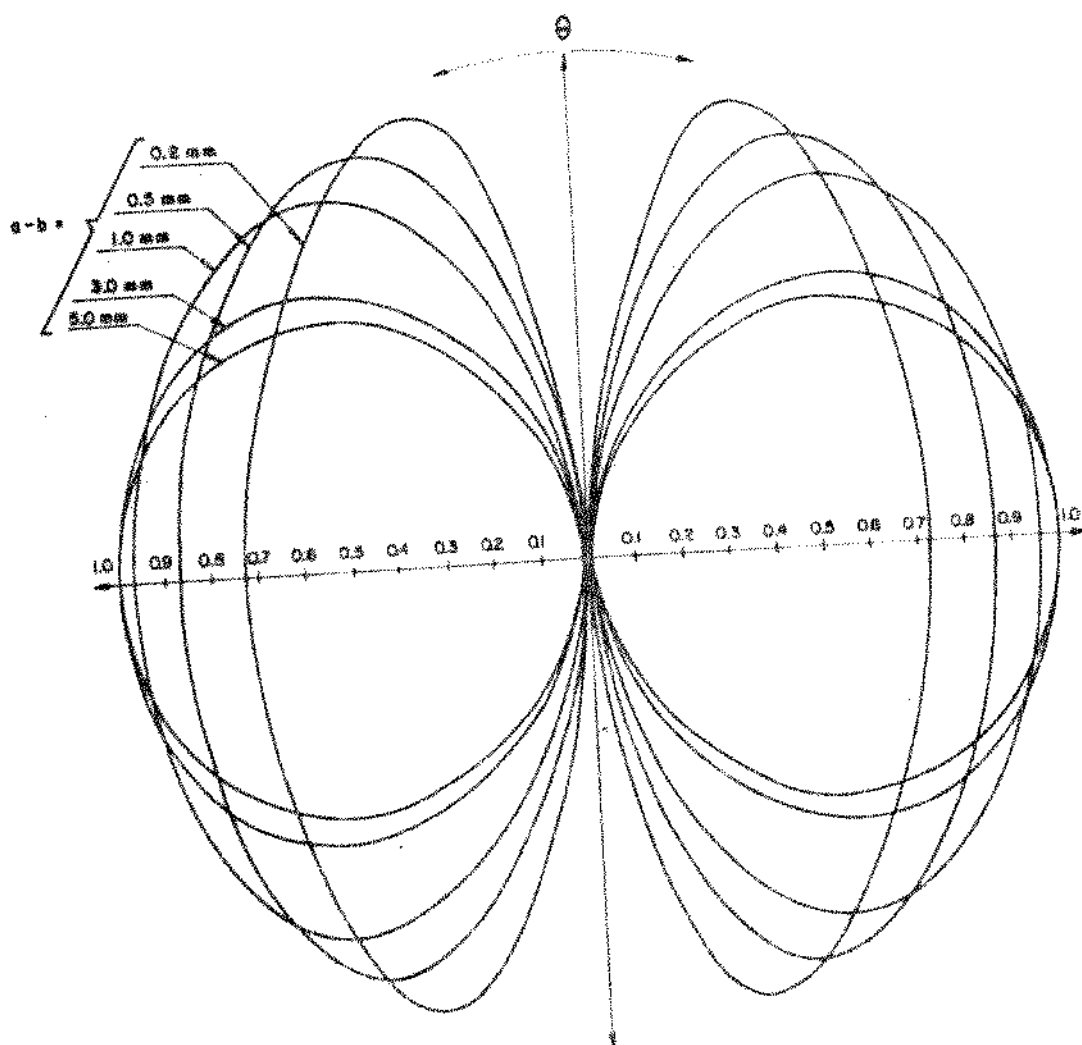


Fig. 31 - Diagrama de irradiação do anel de corrente magnética.
 $|E_{\theta}|$, plano E, freq. = 2,0 GHz, $\epsilon_r = 2,55$, $b = 1,5''$.

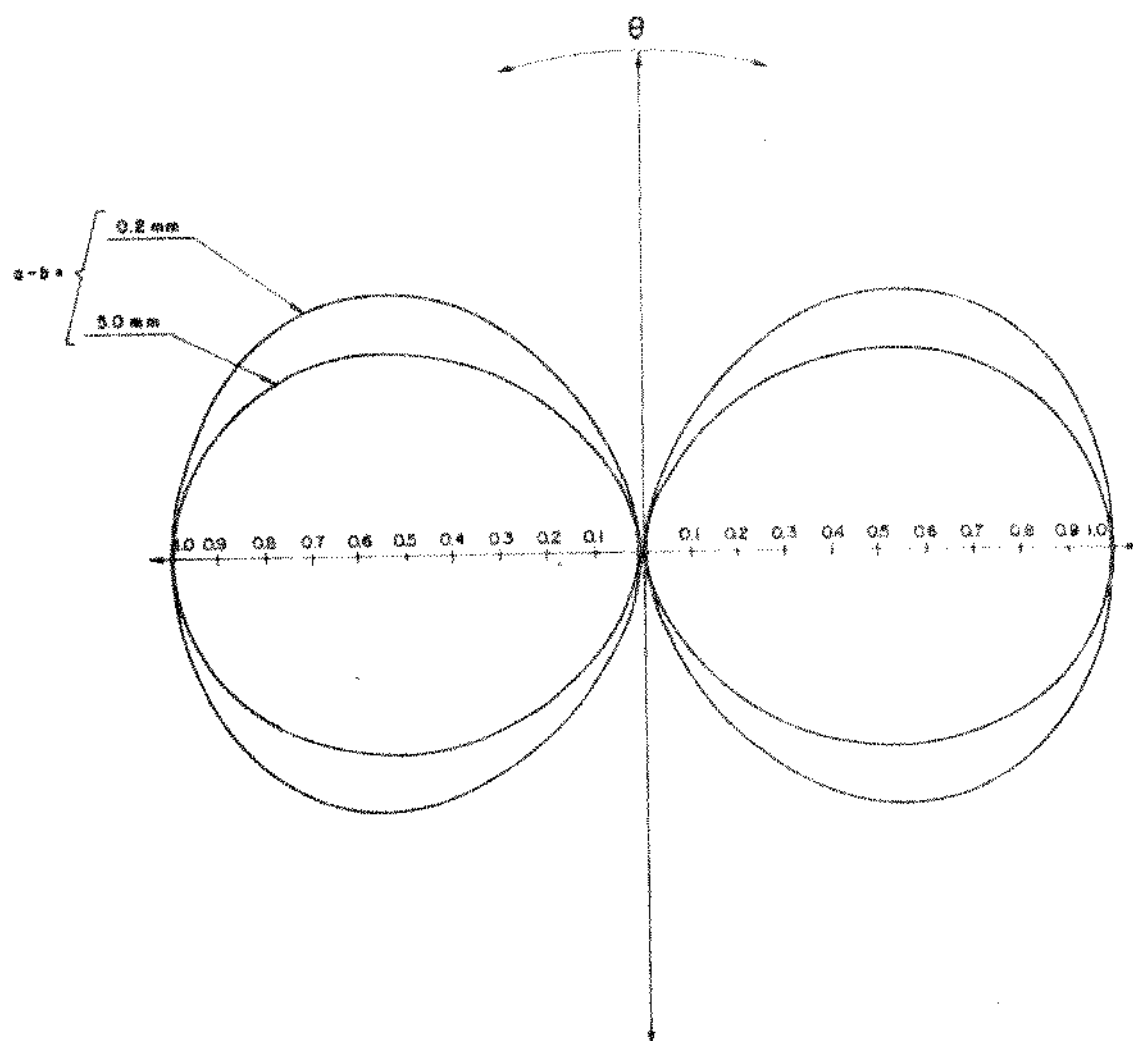


Fig. 32 - Diagrama de irradiação do anel de corrente magnética.

$|E_{\theta}|$, plano E, freq. = 2,0 GHz, $\epsilon_r = 9,60$, $b = 1,5''$.

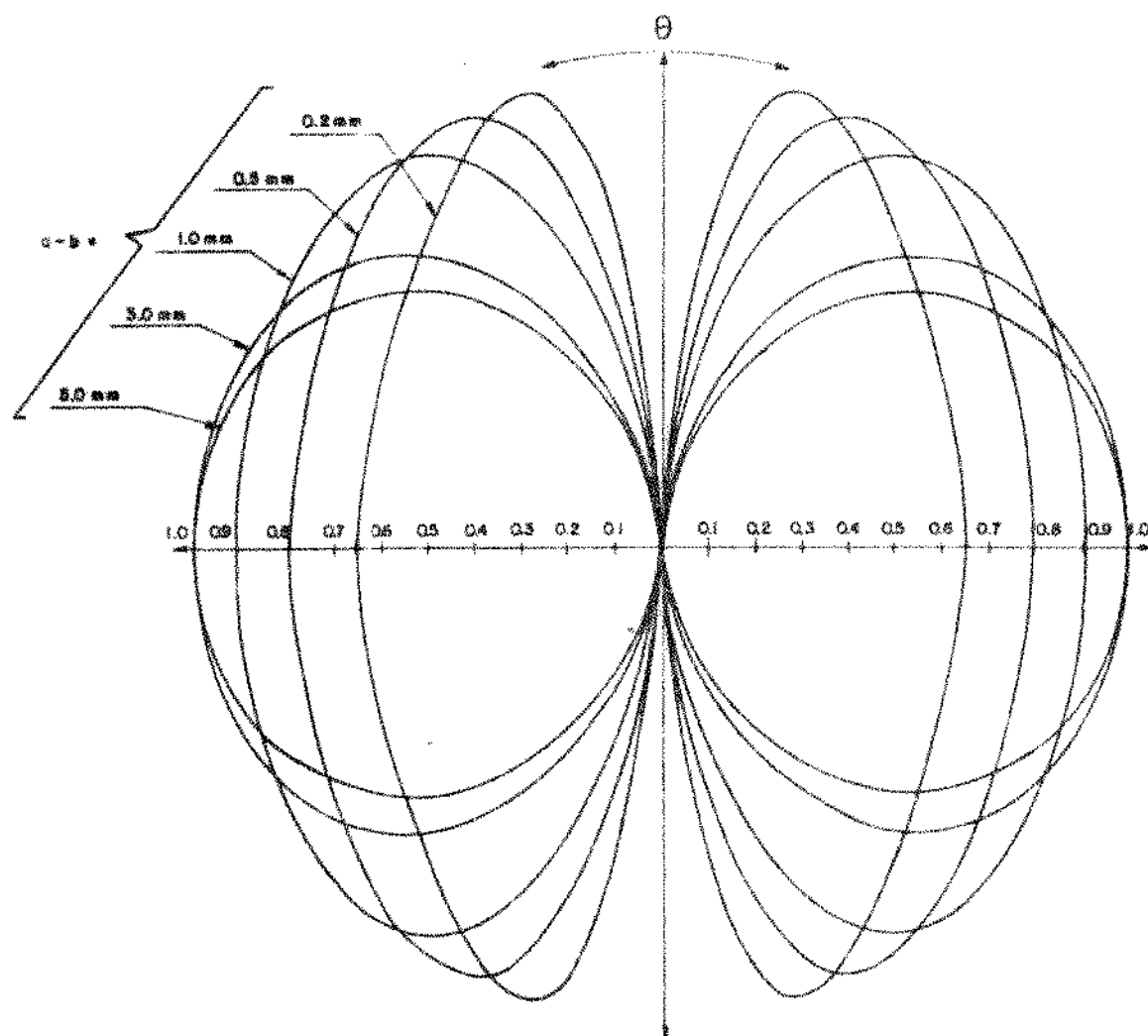


Fig. 33 - Diagrama de irradiação do anel de corrente magnética.

$|E_{\theta}|$, plano E, freq. = 2,0 GHz, $\epsilon_r = 2,55$, $b = 10''$.

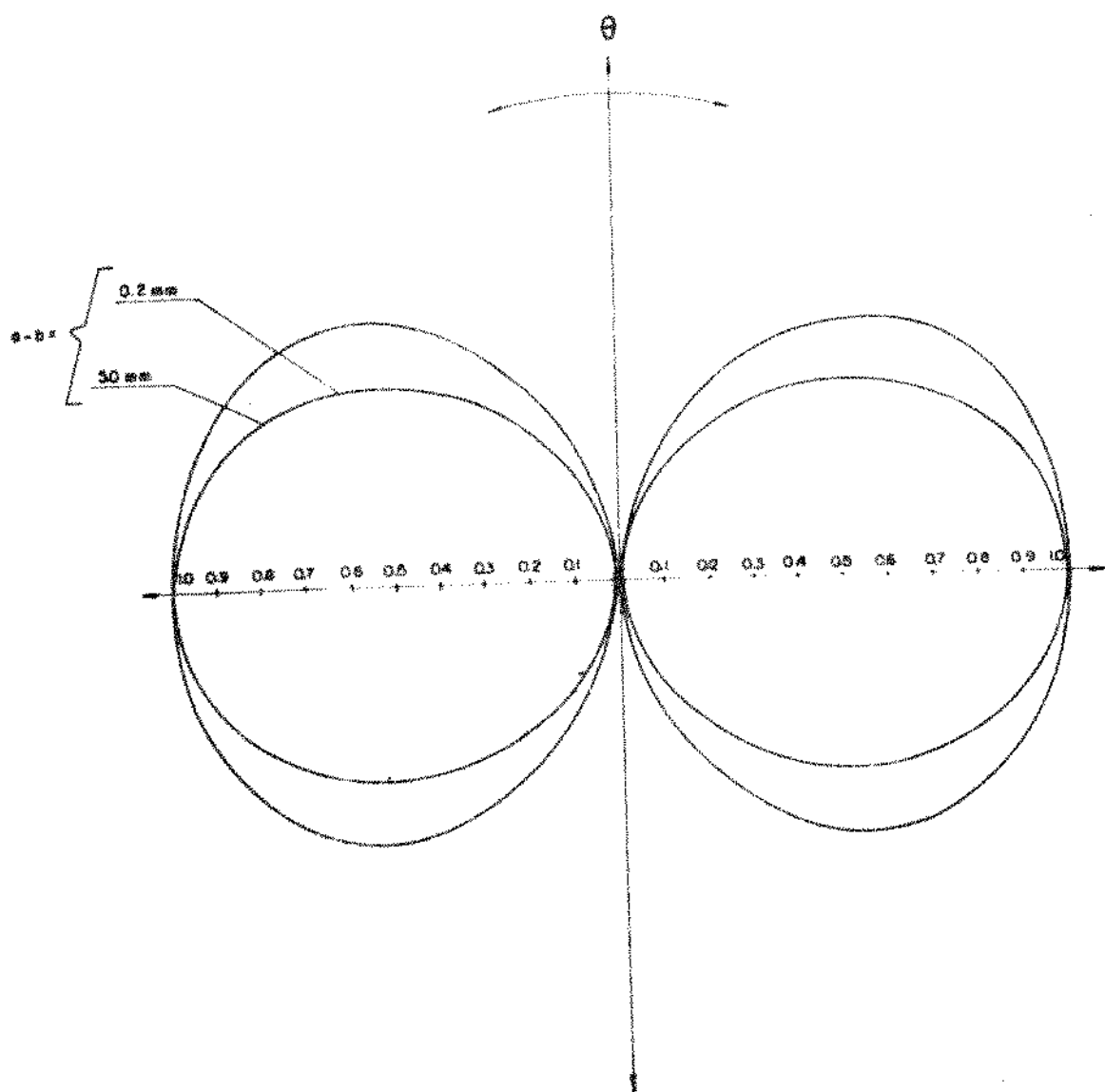


Fig. 34 - Diagrama de irradiação do anel de corrente magnética.
 $|E_{\theta}|$, plano E, freq. = 2,0 GHz, $\epsilon_r = 9,60$, $b = 10''$.

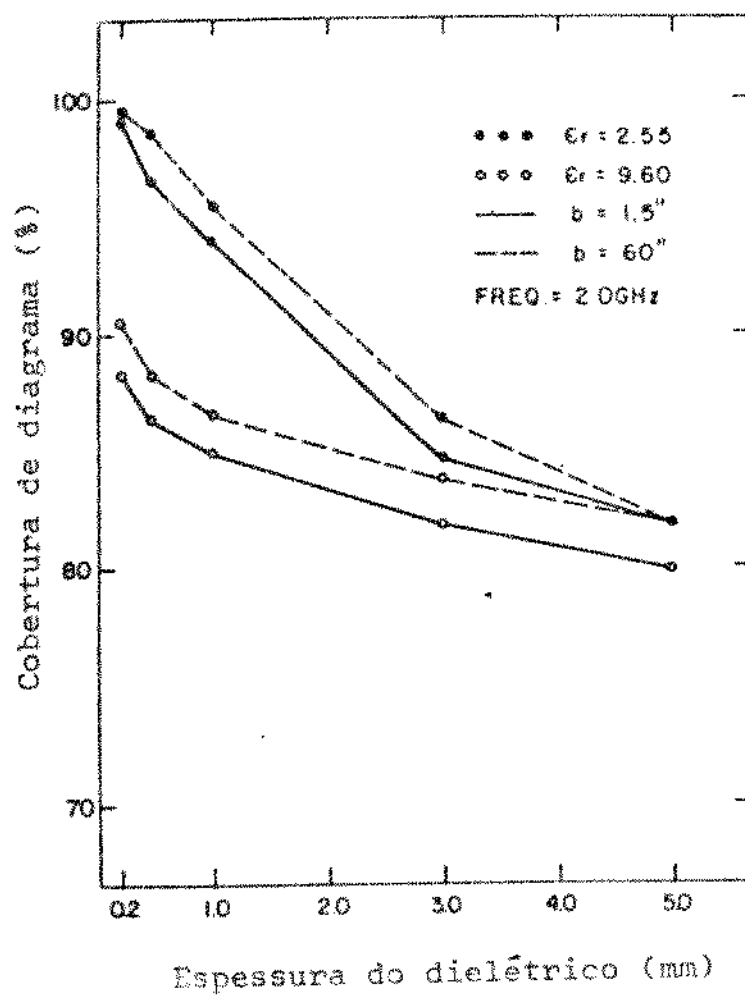


Fig. 35 - Cobertura de diagrama em função da espessura do dielétrico para $\epsilon_r = 2,55$ e $9,60$ e para $b = 1,5''$ e $60''$, na frequência de $2,0$ GHz.

($\epsilon_r = 9,6$ e $\epsilon_r = 2,55$). Para valores de ϵ_r mais elevados os diagramas são bem mais insensíveis a variações da espessura do dielétrico dentro da faixa considerada (0,2 mm a 5,0 mm).

b) Para uma mesma espessura do dielétrico, o aumento de ϵ_r produz uma redução sensível da cobertura percentual de diagrama.

c) Para baixos valores de ϵ_r , como 2,55, a cobertura percentual de diagrama diminui à medida em que se aumenta a espessura da camada dielétrica, contrariando a afirmativa de Munson [15] de que a cobertura percentual de diagrama é função apenas do diâmetro do cilindro (míssil) sendo independente da espessura da antena.

d) Nota-se ainda que, para os dois valores de ϵ_r considerados, uma variação no diâmetro do cilindro de 3" para 60" não produz uma variação muito grande na cobertura percentual de diagrama para a frequência de 2,0 GHz considerada.

e) Comparando-se os diagramas de irradiação do anel de corrente e da antena do tipo envólucro, observa-se que o efeito de interferência das duas aberturas é bem mais pronunciado, no caso da antena do tipo envólucro, para baixos valores de ϵ_r , o que era de se esperar uma vez que a separação entre as duas aberturas é sempre igual a meio comprimento de onda medido no dielétrico, o que faz com que a distância física entre as aberturas diminua com o aumento de ϵ_r , para uma mesma frequência.

f) É muito interessante salientar também que, na frequência de 2,0 GHz considerada, a forma dos diagramas de irradiação varia muito pouco com o aumento do diâmetro do cilindro a partir de 3".

VI.5 - CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram obtidos os diagramas de irradiação de um anel de corrente magnética e da antena do tipo envólucro, com o objetivo de se verificarem os efeitos, sobre os mesmos, da espessura e da permissividade da camada dielétrica que separa os elementos do plano de terra. A não disponibilidade de resultados teóricos e práticos na literatura não permitiu que se comparassem com outros, os resultados obtidos pelo presente método. Verifica-se no entanto que, contrariando o que havia previsto Munson em seu conhecido trabalho [15], a presença da camada dielétrica exerce grande influência nos diagramas para ângulos de irradiação próximos da vertical, o que se verifica facilmente examinando-se as curvas de cobertura percentual de diagrama apresentadas.

Uma das vantagens do método, conforme já foi mencionado anteriormente, é que a expressão assintótica da função de Green diádica utilizada é válida também para a análise de outros tipos de antena que possam ser adaptadas à superfície cilíndrica.

Observa-se, também, que na determinação dos campos pela solução de (6.12) foi utilizada uma subrotina para integração por processo numérico em computador digital.

CAPÍTULO VII

ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA EXCITAÇÃO DE ONDAS
SUPERFICIAIS NA EFICIÊNCIA DE IRRADIAÇÃO
DE ONDAS ESPACIAIS E NA DIRETIVIDADE DE UMA
ANTENA DE MICROFITA EM FORMA DE DISCO

VII.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um estudo a respeito da excitação de ondas superficiais na fronteira dielétrico-ar de uma antena de microfita em forma de disco. A adoção do modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas justifica-se ainda, neste caso, pela razoável precisão dos resultados com ele obtidos [5] e pela facilidade com que podem ser obtidas, separadamente, as potências contidas nas ondas espacial e de superfície excitadas pela antena.

De acordo com o modelo adotado pode-se substituir a placa condutora, para efeito de determinação dos campos eletromagnéticos irradiados, pela densidade de corrente magnética equivalente na abertura da antena. Desta forma o problema se resume na determinação dos campos, no espaço livre, excitados por uma fonte de corrente magnética imersa em um dielétrico mais denso do que o ar sobre um plano condutor elétrico perfeito. É de se esperar, então, além do campo refratado na superfície dielétrico-ar, da ótica geométrica, a excitação dos campos de difração na forma de ondas superficiais nesta fronteira. O objetivo principal da análise feita a seguir é determinar a influência dessas ondas superficiais na diretividade e na eficiência de excitação de ondas espaciais da antena em forma de disco.

VII.2 - REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DOS CAMPOS

Neste capítulo, como existe interesse não só nos campos eletromagnéticos irradiados na forma de ondas espaciais como também naqueles excitados como ondas superficiais não se utiliza, na obtenção da representação integral dos campos, a expressão assintótica da função de Green diádica, como foi feito no capítulo 4.

Reescrevendo-se, para facilitar a análise, a expressão da função de Green diádica para meios de três camadas planas e paralelas, dada por (3.154):

$$\bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{h_2} (-i)^{n+1/2} \left(\frac{2}{\pi\lambda r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 z)}$$

$$\frac{\cos}{\sin}(n\phi) \left\{ -i\hat{\phi} \left[\bar{A} \bar{M}'_{e_{n\lambda}}(-h_2) + \bar{B} \bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_2) \right] + \frac{1}{k_1} (-h_1 \hat{r} + \lambda \hat{z}) \left[\bar{C} \bar{N}'_{e_{n\lambda}}(-h_2) + \right. \right.$$

$$\left. \left. \bar{D} \bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_2) \right] \right\} \quad (7.1)$$

$$\text{onde} \quad h_1 = (k_1^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (7.2)$$

$$h_2 = (k_2^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (7.3)$$

Conforme foi visto no capítulo 4, para o modo que produz o máximo do diagrama de irradiação na direção normal ao plano do disco (ver figura 6), a corrente magnética equivalente é dada por:

$$\bar{M}(\bar{R}') = E_0 J_1(k_2 a) \cos \phi' \hat{\phi} \quad (7.4)$$

De acordo com (2.32), o campo magnético irradiado é obtido através da seguinte expressão:

$$\bar{H}(\bar{R}) = i\omega\epsilon_0 \int_{S'} \int \bar{G}^{(12)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{M}(\bar{R}') ds' \quad (7.5)$$

Usando-se as expressões assintóticas das funções de Hankel, considerando-se que $A=B$ e $C=-D$ e substituindo-se (7.1) e (7.4) em (7.5) chega-se a:

$$\bar{H}(\bar{R}) = \omega\epsilon_0 E_0 J_1(k_2 a) a (-i)^{5/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left\{ \frac{A \sin(h_2 d)}{h_2^2} \frac{\partial J_1(\lambda a)}{\partial a} \left(\frac{a}{\pi \lambda r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 Z)} \cdot \right. \\ \left. \cos\phi \hat{\phi} - \frac{C \sin(h_2 d)}{k_1 k_2 h_2 a} J_1(\lambda a) \left(\frac{2}{\pi \lambda r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 Z)} \sin\phi (-h_1 \hat{r} + \lambda \hat{z}) \right\} \quad (7.6)$$

Nota-se, na equação (7.6), a dependência da componente H_ϕ do campo magnético com $\cos\phi$ e das componentes H_r e H_z com $\sin\phi$. Utilizando-se as equações de Maxwell verifica-se facilmente que, nas direções $\phi=0^\circ$ e $\phi=180^\circ$, o campo excitado pela antena é do tipo transverso magnético com relação a Z (TM_z), enquanto que nas direções $\phi=\pm 90^\circ$ o campo é do tipo transverso elétrico com relação a Z (TE_z), isto é,

$$a) \text{ Para } \phi=0^\circ \text{ e } \phi=180^\circ, \bar{E}=E_r \hat{r} + E_z \hat{z}, \bar{H}=H_\phi \hat{\phi} \quad (7.7)$$

$$b) \text{ Para } \phi=\pm 90^\circ, \bar{E}=E_\phi \hat{\phi}, \bar{H}=H_r \hat{r} + H_z \hat{z} \quad (7.8)$$

As representações integrais de H_ϕ , H_r e H_z são estudadas separadamente.

VII.3 - ESTUDO DA REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE H_ϕ

Da equação (7.6) pode-se escrever, utilizando-se a expressão do coeficiente A dada por (3.44):

$$H_{\phi} = K \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{e^{-ih_1 d} \sin(h_2 d)}{\xi^2 h_1 h_2 \cos(h_2 d) - i h_2^2 \sin(h_2 d)} \frac{\partial J_1(\lambda a)}{\partial a} \left(\frac{2}{\pi \lambda r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 z)} \quad (7.9)$$

onde

$$K = \omega a \epsilon_0 E_0 J_1(k_2 a) (-i)^{5/2} \cos \phi \quad (7.10)$$

Observa-se, na equação (7.9), que o integrando é uma função par da variável h_2 , o que elimina os cortes de ramificação devidos a h_2 . A função $h_1 = (k_1^2 - \lambda^2)^{1/2}$ apresenta pontos de ramificação em $\lambda = \pm k_1$.

Seja

$$\lambda = u + iv \quad (7.11)$$

Para que se determinem os cortes relativos a $\lambda = \pm k_1$, procede-se da seguinte maneira:

$$h_1^2 = k_1^2 - (u + iv)^2 = k_1^2 - u^2 - i2uv + v^2 \quad (7.12)$$

Supondo-se que o meio 1 apresenta pequenas perdas faz-se

$$k_1 = k_{11} + ik_{12}, \quad k_{11} \gg k_{12} \quad (7.13)$$

Então,

$$h_1^2 = k_{11}^2 + i2k_{11}k_{12} - k_{12}^2 - u^2 - i2uv + v^2$$

ou

$$h_1^2 = \left[(v^2 - u^2) - (k_{12}^2 - k_{11}^2) \right] + i 2(k_{11}k_{12} - uv) \quad (7.14)$$

As curvas $\text{Re}(h_1^2)=0$ e $\text{Im}(h_1^2)=0$, onde Re e Im são operadores que extraem, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de uma grandeza complexa, são dadas, no plano complexo λ , por:

$$\text{Curva } \text{Re}(h_1^2)=0 : v^2 - u^2 = k_{12}^2 - k_{11}^2 \quad (7.15)$$

$$\text{Curva } \text{Im}(h_1^2)=0 : uv = k_{11}k_{12} \quad (7.16)$$

A figura 36 mostra essas duas curvas no plano complexo λ .

Para que a equação (7.9) represente uma onda que se propaga para fora da fonte e que se atenua com a distância, é necessário que as duas condições seguintes sejam satisfeitas:

$$\text{Re}(h_1) > 0 \quad (7.17)$$

$$\text{Im}(h_1) > 0 \quad (7.18)$$

Examinando-se as equações (7.15) e (7.16) e tendo-se em vista a condição imposta de que $k_{11} \gg k_{12}$ podem-se obter, no plano λ , as regiões em que $\text{Re}(h_1^2)$ e $\text{Im}(h_1^2)$ são maiores e menores do que zero, o que é também mostrado na figura 36.

Considera-se, a seguir, que o integrando de (7.9) é definido em uma superfície de Riemann com duas lâminas. Na lâmina superior, chamada de "lâmina própria", impõe-se a condição

$$\text{Im}(h_1) > 0 \quad (7.19)$$

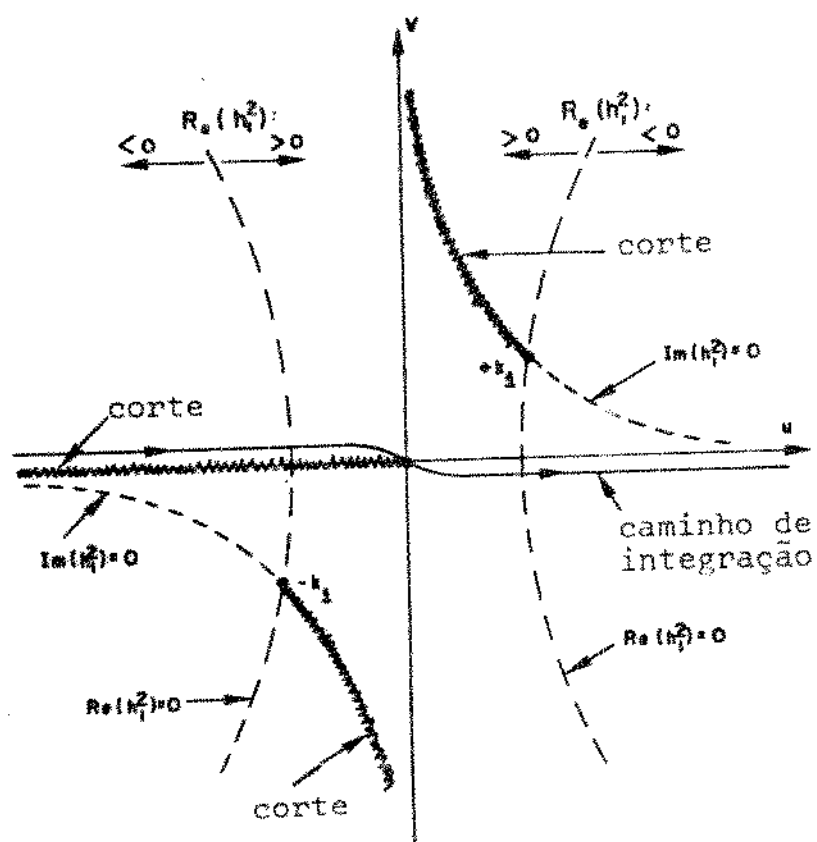


Fig. 36 - Curvas $\text{Re}(h_1^2) = 0$ e $\text{Im}(h_1^2) = 0$ no plano $\lambda = u + iv$.

Na lâmina inferior, ou "lâmina imprópria", tem-se

$$\text{Im}(h_1) < 0 \quad (7.20)$$

Para que se possa garantir que $\text{Im}(h_1) > 0$ em toda a lâmina superior é necessário que, nessa lâmina,

$$\text{Arg}(h_1^2) > 0 \quad (7.21)$$

onde o operador Arg extrai o argumento de uma grandeza complexa.

Desta forma, define-se o corte de ramificação:

$$\text{Arg}(h_1^2) = 0 \quad (7.22)$$

A condição (7.22) implica nas duas relações seguintes, que definem o corte relativo a h_1 no plano λ :

$$\text{Re}(h_1^2) > 0 \quad (7.23)$$

$$\text{Im}(h_1^2) = 0 \quad (7.24)$$

Examinando-se a figura 36 e tendo-se em vista as relações (7.23) e (7.24) pode-se concluir que o corte de ramificação é o mostrado na figura 37. Nesta figura é mostrado também o corte de ramificação relativo ao ponto de ramificação $\lambda=0$ introduzido pela função de Hankel.

Fazendo-se as perdas no meio 1 tenderem para zero, isto é, impondo-se a condição

$$k_{12} \rightarrow 0^+ \quad (7.25)$$

as hipérboles mostradas na figura 37 se degeneram, conforme mostra a figura 38, que representa a lâmina superior da superfície de Riemann.

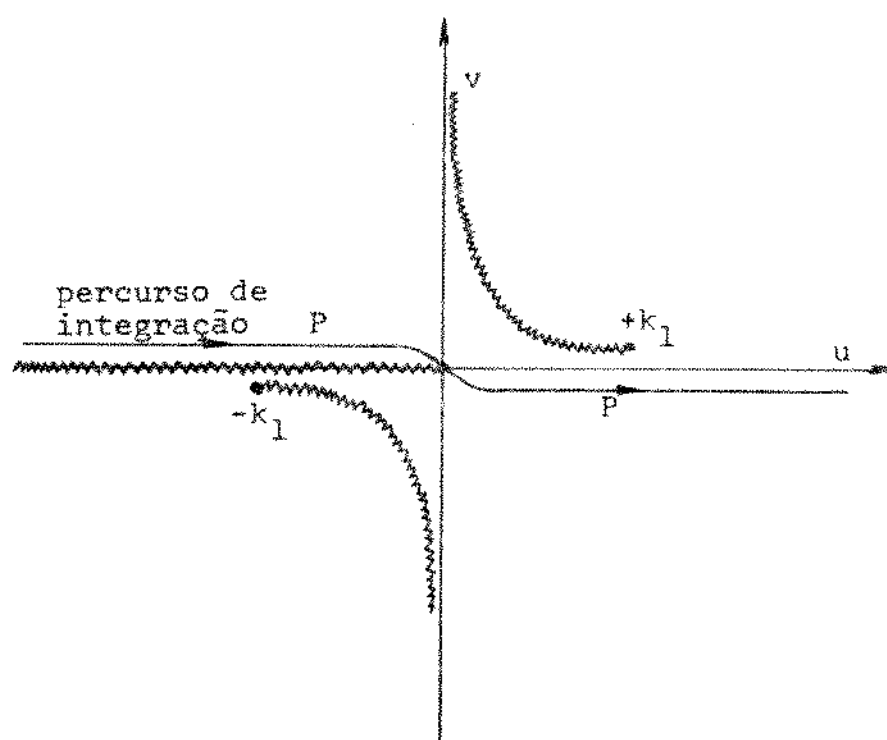


Fig. 37 - Cortes de ramificação no plano complexo λ .

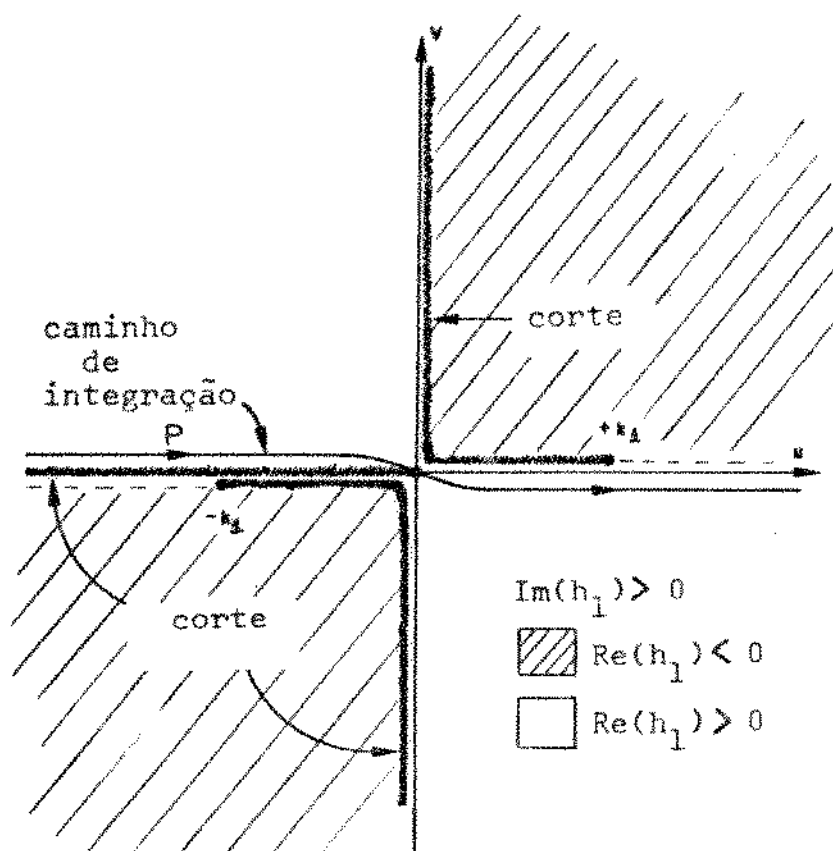


Fig. 38 - Lâmina superior da superfície de Riemann quando $k_{12} \rightarrow 0^+$.

Nesta figura são indicadas as regiões em que $\text{Re}(h_1) > 0$ e $\text{Re}(h_1) < 0$. Tendo-se em vista as condições de convergência da integral (7.9) dadas por (7.17) e (7.18) e se o percurso de integração de $\lambda = -\infty$ a $\lambda = +\infty$ for interpretado como o percurso P mostrado, na lâmina superior do plano λ , pode-se concluir que a condição de irradiação é satisfeita para cada valor de λ nesse percurso e que, assim, a representação integral de H_ϕ está completamente especificada.

Definindo-se, em seguida, a variável complexa

$$\beta = \sigma + i\tau, \quad (7.26)$$

efetua-se a seguinte mudança de variáveis:

$$\lambda = k_1 \text{ sen } \beta \quad (7.27)$$

$$r = R \text{ sen } \theta \quad (7.28)$$

$$z = R \text{ cos } \theta \quad (7.29)$$

onde R e θ são variáveis do sistema de coordenadas esféricas. Tem-se, então

$$h_1 = (k_1^2 - k_1^2 \text{ sen}^2 \beta)^{1/2} = k_1 \text{ cos } \beta \quad (7.30)$$

$$h_2 = (k_2^2 - k_1^2 \text{ sen}^2 \beta)^{1/2} \quad (7.31)$$

$$d\lambda = k_1 \text{ cos } \beta \, d\beta \quad (7.32)$$

$$\lambda r + h_1 z = k_1 R \text{ cos}(\theta - \beta) \quad (7.33)$$

O sinal da raiz em (7.30) foi escolhido de tal forma que, para $\lambda \rightarrow 0$, $h_1 \rightarrow k_1$. Um estudo rigoroso a respeito des

se sinal é apresentado posteriormente, neste capítulo. Observa-se que a transformação definida por (7.27) elimina os pontos de ramificação de h_1 .

O mapeamento do plano λ no plano β é efetuado através das relações seguintes, obtidas substituindo-se (7.26) em (7.27) e (7.30), supondo-se que k_1 é uma grandeza real:

$$\operatorname{Re}(\lambda) = k_1 \operatorname{sen} \sigma \cosh \tau \quad (7.34)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda) = k_1 \cos \sigma \sinh \tau \quad (7.35)$$

$$\operatorname{Re}(h_1) = k_1 \cos \sigma \cosh \tau \quad (7.36)$$

$$\operatorname{Im}(h_1) = -k_1 \operatorname{sen} \sigma \sinh \tau \quad (7.37)$$

O mapeamento do 1º e do 3º quadrantes da lâmina superior do plano λ , por exemplo, é efetuado considerando-se que, nesses quadrantes, para k_1 real, $\operatorname{Im}(h_1) > 0$ e $\operatorname{Re}(h_1) < 0$. Assim, as equações (7.36) e (7.37) fornecem as seguintes relações, que transformam esses quadrantes para o plano β :

$$\operatorname{sen} \sigma \sinh \tau < 0 \quad (7.38)$$

$$\cos \sigma \cosh \tau < 0 \quad (7.39)$$

A solução de (7.38), para $-\pi \leq \sigma \leq \pi$ é a seguinte:

$$-\pi < \sigma < 0, \tau > 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \sigma < \pi, \tau < 0 \quad (7.40)$$

A solução de (7.39), para $-\pi \leq \sigma \leq \pi$, é a seguinte:

$$\pi/2 < \sigma < \pi \quad \text{ou} \quad -\pi < \sigma < -\pi/2, \quad \tau \text{ qualquer} \quad (7.41)$$

A solução que satisfaz simultaneamente (7.40) e (7.41) é:

$$-\pi < \sigma < -\pi/2, \quad \tau > 0 \quad (7.42)$$

$$\pi/2 < \sigma < \pi, \quad \tau < 0 \quad (7.43)$$

Para que se identifiquem, no plano β , o 1º e 3º quadrantes é necessário que se examinem as equações (7.34) e (7.35). Para o 1º quadrante, $\text{Re}(\lambda) > 0$ e $\text{Im}(\lambda) > 0$. Então, de (7.34) e (7.35),

$$\text{sen } \sigma \cosh \tau > 0 \quad (7.44)$$

$$\cos \sigma \sinh \tau > 0 \quad (7.45)$$

As soluções são as seguintes, para $-\pi \leq \sigma \leq \pi$:

a) Para (7.44):

$$0 < \sigma < \pi, \quad \tau \text{ qualquer} \quad (7.46)$$

b) Para (7.45):

$$-\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}, \quad \tau > 0$$

$$\text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} < \sigma < \pi \\ \text{ou} \\ -\pi < \sigma < -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\}, \quad \tau < 0 \quad (7.47)$$

Para que (7.46) e (7.47) sejam satisfeitas simultaneamente é necessário que

$$0 < \sigma < \frac{\pi}{2}, \quad \tau > 0 \quad (7.48)$$

ou

$$\frac{\pi}{2} < \sigma < \pi, \quad \tau < 0 \quad (7.49)$$

Um exame de (7.42), (7.43), (7.48) e (7.49) indica que o 1º quadrante da lâmina superior do plano λ é transformado, no intervalo $-\pi \leq \sigma \leq \pi$, na região dada por $\pi/2 < \sigma < \pi$, $\tau < 0$, no plano β .

A figura 39 mostra parte do mapeamento do plano λ no plano β . Os cortes de ramificação que não mais existem no plano β não são indicados na figura. O percurso de integração original P, no plano λ , é transformado no percurso P', no plano β .

Na figura 39, as letras S e I indicam as regiões onde foram mapeadas, respectivamente, as lâminas superior e inferior do plano λ . Os índices numéricos indicam os respectivos quadrantes. Assim, S₂, por exemplo, localiza o 2º quadrante da lâmina superior da superfície de Riemann.

Considerando-se a transformação efetuada pode-se, agora, escrever a representação integral de H_ϕ da seguinte maneira:

$$H_\phi = K \int_{P'} dB f(\beta) \frac{1}{(R \sin \theta)^{1/2}} e^{ik_1 R \cos(\theta - \beta)} \quad (7.50)$$

onde

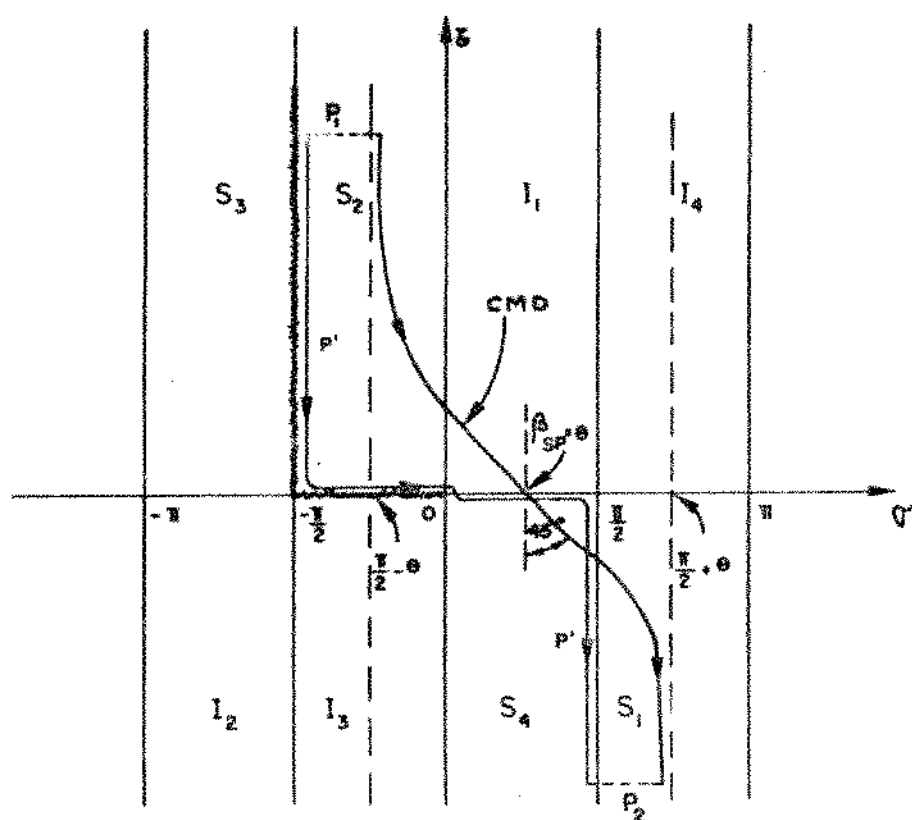


Fig. 39 - Plano complexo $\beta = \sigma + i\delta$.

$$f(\beta) = \frac{e^{-ih_1(\beta)d} \operatorname{sen}[h_2(\beta)d] k_1 \cos \beta [k_1 \operatorname{sen} \beta J_0(k_1 a \operatorname{sen} \beta)]}{\xi^2 h_1(\beta) h_2(\beta) \cos[h_2(\beta)d]}$$

$$\frac{-\frac{1}{a} J_1(k_1 a \operatorname{sen} \beta) (2/\pi k_1 \operatorname{sen} \beta)^{1/2}}{-ih_2^2(\beta) \operatorname{sen}[h_2(\beta)d]} \quad (7.51)$$

Para se efetuar a integração indicada em (7.50) e obter-se uma expressão assintótica de H_ϕ é interessante que se utilize o método do ponto de sela; para isto, deforma-se o percurso de integração P' no percurso chamado "caminho de máxima declividade" que passa pelo ponto de sela. A principal contribuição para a integral origina-se de um pequeno trecho nas vizinhanças do ponto de sela.

Examinando-se a equação (7.50) pode-se obter o ponto de sela da seguinte maneira:

$$\frac{d}{d\beta} [\operatorname{icos}(\theta - \beta)] = 0 \rightarrow \beta_{PS} = \theta - n\pi$$

Como o caso de interesse é aquele em que $n = 0$, vem:

$$\beta_{PS} = \theta \quad (7.52)$$

O caminho de máxima declividade é aquele percurso que passa pelo ponto de sela ao longo do qual a seguinte relação é satisfeita:

$$\operatorname{Im}[F(\beta)] = \operatorname{Im}[F(\beta_{PS})] \quad (7.53)$$

onde

$$F(\beta) = \operatorname{icos}(\theta - \beta) \quad (7.54)$$

Como $F(\beta_{PS}) = 0 + i$, o caminho de máxima declividade é dado por:

$$\operatorname{Im}[F(\beta)] = \cos(\theta - \sigma) \cosh \tau = 1 \quad (7.55)$$

Salienta-se que a equação (7.55) fornece também o "caminho de máximo aclave". Para identificar o "caminho de máxima declividade" pode-se proceder, por exemplo, da forma apresentada por Collin [27, pág. 497-500].

A figura 39 mostra o ponto de sela $\beta_{PS} = \theta$ e o caminho de máxima declividade (CMD) para um valor particular de θ . Observa-se que, no presente trabalho, o valor de θ está restrito à faixa de variação dada por

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (7.56)$$

A deformação do percurso de integração P' para o percurso CMD é efetuada utilizando-se o teorema de Cauchy. Ao se fechar o percurso através dos trechos P_1 e P_2 mostrados na figura 39, verifica-se que as contribuições para a integral devidas a esses trechos são nulas, uma vez que eles se localizam na lâmina superior da superfície de Riemann [27, pág. 491-492]. Assim, a integral no percurso P' será igual à integral ao longo do caminho de máxima declividade somada às contribuições devidas aos polos do integrando que porventura sejam enlaçadas pelo percurso quando da aplicação do teorema de Cauchy.

As contribuições devidas aos polos é que constituem a onda difratada que se propaga na fronteira dielétrico-ar; o estudo destas contribuições é o objetivo principal no presente capítulo. A contribuição para a integral devida ao caminho de máxima declividade constitui a componente da ótica geométrica chamada "onda espacial", refratada através da fronteira.

É interessante observar que uma adequada expansão em série do denominador da função $f(\beta)$ dada por (7.51) elimina os polos no plano complexo β introduzindo pontos de ramificação. Nesse caso, a onda difratada na superfície dielétrico-ar é dada por uma soma de contribuições devidas às chamadas "ondas laterais" obtidas por meio de integrações nos diversos cortes de ramificação introduzidos [36].

Considerando-se o que foi discutido anteriormente é possível, então, afirmar-se que

$$\int_{P'} = \int_{CMD} + 2\pi i \sum \text{resíduos} \quad (7.57)$$

A contribuição relativa à onda espacial, resultante da integração no percurso CMD, foi obtida no capítulo 4 e é aqui reescrita:

$$H_{\phi}^{0E} = \frac{-i2E_0\omega\epsilon_0 a \cos\theta \sin[k_1(\xi^2 - \sin^2\theta)^{1/2}d]}{k_1^2(\xi^2 - \sin^2\theta)R \sin\theta} \cos\phi A(\theta) \left[k_1 \sin\theta J_0(k_1 a \sin\theta) - \frac{1}{a} J_1(k_1 a \sin\theta) \right] e^{ik_1 R} \quad (7.58)$$

$$H_{\theta}^{0E} = \frac{i2E_0\omega\epsilon_0 \cos\theta \sin[k_1(\xi^2 - \sin^2\theta)^{1/2}d]}{\xi k_1^2(\xi^2 - \sin^2\theta)^{1/2}R \sin\theta} \sin\phi C(\theta) J_1(k_1 a \sin\theta) e^{ik_1 R} \quad (7.59)$$

onde $A(\theta)$ e $C(\theta)$ são os coeficientes dados por (3.44) e (3.46), considerando-se que, no presente caso, $h_1 = k_1 \cos \theta$ e $h_2 = k_1(\xi^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}$.

Para que se obtenha a expressão da onda difratada é necessário que se faça um estudo dos polos do integrando da representação integral de Π_ϕ . Esse estudo é mais facilmente realizado no plano complexo $\lambda = u + iv$. Posteriormente, após a sua localização e caracterização, esses polos são mapeados para o plano β . É necessário, entretanto, que se realize um estudo preliminar sobre o sinal da raiz na expressão $h_1 = (k_1^2 - \lambda^2)^{1/2}$, tendo-se em vista a convergência da integral. Esse estudo baseia-se na figura 40.

Supondo-se que $\lambda = u$ varia de $-\infty$ a $+\infty$ e examinando-se a figura 40, podem-se fazer as afirmações seguintes:

$$a) (k_1 - \lambda)^{1/2} (k_1 + \lambda)^{1/2} = (k_1 - \lambda)^{1/2} [k_1 - (-\lambda)]^{1/2} \quad (7.60)$$

b) O argumento de $(k_1 - \lambda)$ varia dentro da seguinte faixa:

$$\pi > \text{Arg}(k_1 - \lambda) > 0 \quad (7.61)$$

c) O argumento de $(k_1 + \lambda)$ varia dentro da seguinte faixa:

$$0 < \text{Arg}(k_1 + \lambda) < \pi \quad (7.62)$$

Então,

$$\frac{\pi}{2} > \text{Arg}(k_1 - \lambda)^{1/2} > 0 \quad (7.63)$$

$$0 < \text{Arg}(k_1 + \lambda)^{1/2} < \frac{\pi}{2} \quad (7.64)$$

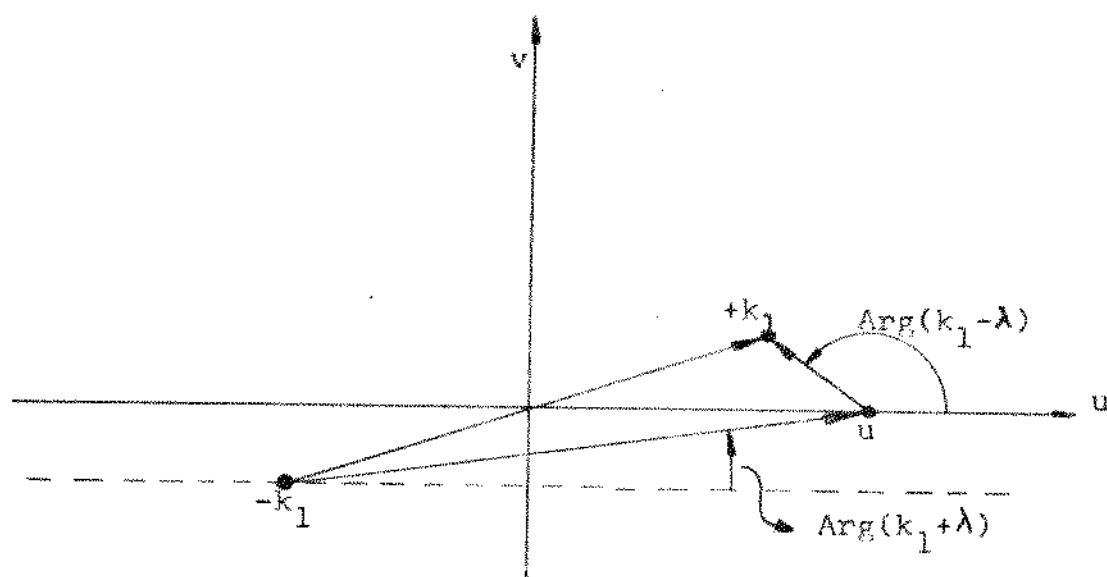


Fig. 40 - Geometria que permite obter o sinal de $(k_1^2 - \lambda^2)^{1/2}$.

Verifica-se, também, o seguinte:

$$\pi > \text{Arg}(k_1 - \lambda) + \text{Arg}(k_1 + \lambda) > 0 \quad (7.65)$$

Desta forma, pode-se concluir que

$$\frac{\pi}{2} > \text{Arg} \left[+(k_1^2 - \lambda^2)^{1/2} \right] > 0 \quad (7.66)$$

Como, para a convergência da integral, $\text{Re}(h_1) > 0$ e $\text{Im}(h_1) > 0$, conclui-se que o sinal a ser adotado para $(k_1^2 - \lambda^2)^{1/2}$ é o positivo. Isto será feito em todo o desenvolvimento mostrando a seguir. Justifica-se, assim, o sinal positivo adotado para a raiz quadrada na equação (7.30).

Da equação (7.9) pode-se dizer que os polos do integrando são soluções da equação seguinte:

$$\xi^2 h_1 \cos(h_2 d) = i h_2 \sin(h_2 d) \quad (7.67)$$

ou

$$h_2 d \, \text{tg}(h_2 d) = -i \epsilon_r h_1 d \quad (7.68)$$

onde

$$\epsilon_r = \xi^2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (7.69)$$

As "ondas de superfície" que podem ser excitadas na estrutura em questão, caracterizam-se pelo fato de se propagarem na direção radial r e se atenuarem na direção Z . Desta forma, um exame da equação (7.9) permite que se afirme que os polos correspondentes às ondas de superfície são obtidos impondo-se as seguintes condições:

$$\lambda = u \quad (7.70)$$

$$k_1 < |u| \quad (7.71)$$

Assim,

$$h_1 = (k_1^2 - u^2)^{1/2} = i(u^2 - k_1^2)^{1/2} = i\alpha \quad (7.72)$$

$$h_2^2 = k_2^2 - u^2 \quad (7.73)$$

onde α é uma grandeza real positiva.

Das equações (7.68), (7.72) e (7.73) pode-se, então, escrever:

$$h_2 d \operatorname{tg}(h_2 d) = \epsilon_r \alpha d \quad (7.74)$$

$$(\alpha d)^2 + (h_2 d)^2 = (\epsilon_r - 1)(k_1 d)^2 = \delta^2 \quad (7.75)$$

É importante observar que, como não poderiam deixar de ser, (7.74) e (7.75) são as mesmas equações para o caso de modos TM simétricos (pares) em pastilhas de dielétricos [27, pág. 471].

A solução das equações (7.74) e (7.75) pode ser obtida graficamente, conforme mostra a figura 41 seguinte, onde se supõe que k_1 e k_2 são reais e que, como exemplo, $\epsilon_r = 2,55$.

Verifica-se que o primeiro modo excitado, correspondente à faixa de variação $0 \leq \delta \leq \pi/2$, não apresenta frequência de corte. Na faixa $\pi/2 \leq \delta \leq \pi$ as soluções encontradas, para valores negativos de α , não correspondem a ondas de superfície.

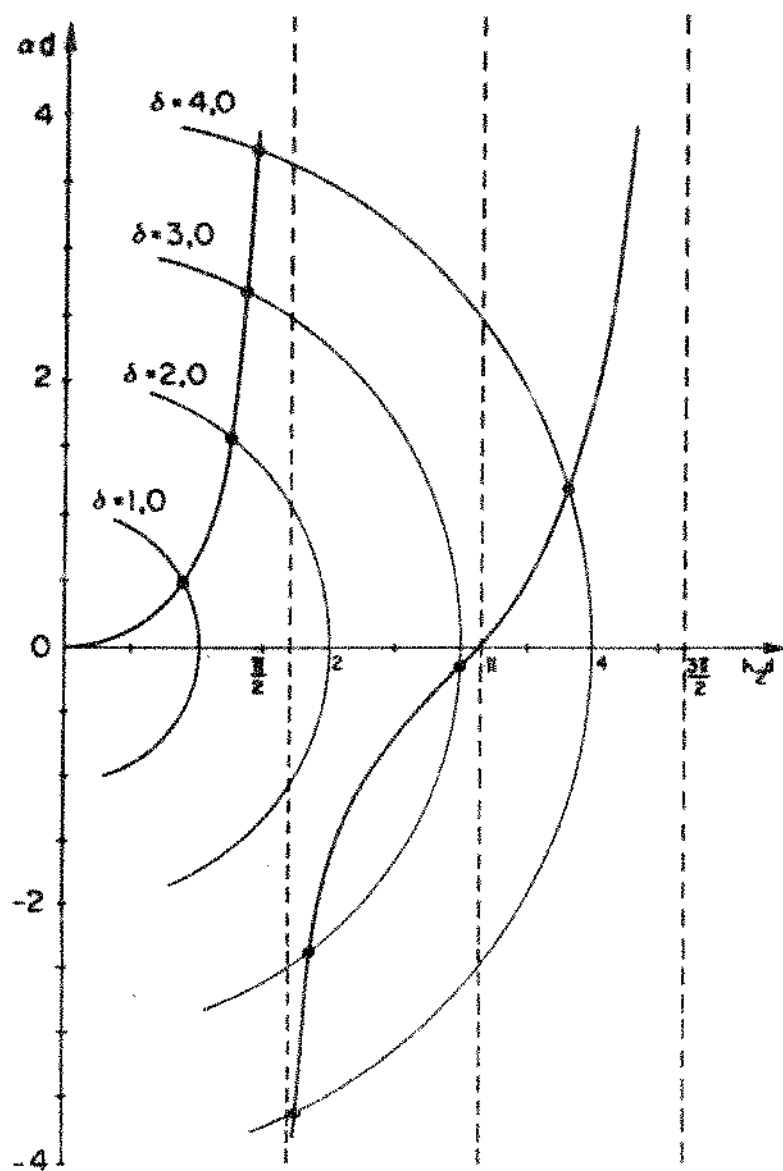


Fig. 41 - Exemplo da solução gráfica de (7.74) e (7.75).

A faixa de variação $0 \leq \delta \leq \pi/2$ corresponde à seguinte faixa de variação da relação d/a , onde d é a espessura do dielétrico e a é o raio do disco, supondo-se $\epsilon_r = 9,6$:

$$0 \leq \frac{d}{a} \leq 0,517 \quad (7.76)$$

Para o caso em que $\epsilon_r = 2,55$ tem-se:

$$0 \leq \frac{d}{a} \leq 0,873 \quad (7.77)$$

Considerando-se os valores práticos da relação d/a comumente utilizados na construção das antenas de microfita pode-se concluir que, para modos TM_2 , haverá nessas estruturas apenas a propagação do primeiro modo correspondente à solução obtida na faixa $0 \leq \delta \leq \pi/2$.

A tabela II mostra os valores de αd e $h_2 d$ obtidos para diversos valores da relação d/a :

TABELA II - Soluções das equações (7.74) e (7.75) para diversos valores de d/a .

d/a	$\epsilon_r = 2,55$		$\epsilon_r = 9,60$	
	$h_2 d$	αd	$h_2 d$	αd
0,050	0,072	0,002	0,087	0,00079
0,158	0,226	0,021	0,275	0,008
0,263	0,373	0,057	0,457	0,023
0,368	0,587	0,153	0,639	0,049
0,526	0,715	0,243	0,906	0,122

A relação entre δ e d/a , necessária para a obtenção da tabela II, é encontrada, facilmente, da seguinte forma:

$$\delta^2 = (\epsilon_r - 1) (k_1 d)^2 = (\epsilon_r - 1) (k_2 a \frac{k_1}{k_2} \frac{d}{a})^2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} (k_2 a \frac{d}{a})^2$$

Como na ressonância, para o modo TM_{11} , $k_2 a = 1,841$ tem-se:

$$\delta = 1,841 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)^{1/2} \frac{d}{a} \quad (7.78)$$

Além das soluções correspondentes às ondas de superfície, para as quais α é uma grandeza real positiva, as equações (7.74) e (7.75) podem apresentar também soluções que são grandezas complexas. À estas soluções correspondem modos que se caracterizam pela existência de fluxo de potência na direção z , normal à fronteira dielétrico-ar; tais modos são comumente chamados "leaky modes" ou modos fracamente acoplados. No plano complexo λ é sabido que esses modos não satisfazem a condição de radiação. No entanto, no plano β , após a transformação definida em (7.27), a deformação do percurso de integração para que se utilize o método do ponto de sela pode fazer com que alguns desses polos complexos, que se localizam na lâmina imprópria da superfície de Riemann, sejam enlaçadas pelo percurso de integração fechado resultante. Nesse caso, devem ser consideradas as contribuições devidas a esses polos [27, pág. 477-501].

É necessário, então, estudarem-se as soluções complexas de (7.74) e (7.75), o que pode ser feito utilizando-se o método apresentado por Collin [27, pág. 493-495].

Definindo-se

$$\alpha d = T + i U \quad (7.79)$$

$$h_2 d = x + i y \quad (7.80)$$

escreve-se a equação (7.74) da seguinte forma:

$$(x+iy) \operatorname{tg} (x+iy) = \epsilon_r (T+iU) \quad (7.81)$$

Desenvolvendo-se a expressão anterior obtém-se:

$$T = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{x \operatorname{sen} 2x - y \operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y} \quad (7.82)$$

$$U = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{x \operatorname{senh} 2y + y \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} \quad (7.83)$$

Eliminando-se em seguida a variável d em (7.74) e (7.75) chega-se

$$x + iy = \pm \frac{\epsilon_r \delta}{\left[\epsilon_r^2 + \operatorname{tg}^2 (x+iy) \right]^{1/2}} \quad (7.84)$$

Desenvolvendo-se (7.84):

$$x = \pm \frac{\epsilon_r \delta (\cos 2x + \cosh 2y)}{\left\{ \left[\epsilon_r^2 (\cos 2x + \cosh 2y)^2 + \operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{senh}^2 2y \right]^2 + \left[2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{senh} 2y \right]^2 \right\}^{1/4}}$$

$$\cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{senh} 2y}{\epsilon_r^2 (\cos 2x + \cosh 2y)^2 + \operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{senh}^2 2y} \right] \quad (7.85)$$

$$y = \pm \frac{\epsilon_r \delta (\cos 2x + \cosh 2y)}{\left\{ \left[\epsilon_r^2 (\cos 2x + \cosh 2y)^2 + \sin^2 2x - \sinh^2 2y \right]^2 + \left[2 \sin 2x \sinh 2y \right]^2 \right\}^{1/4}}$$

$$\sin \left[\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2 \sin 2x \sinh 2y}{\epsilon_r^2 (\cos 2x + \cosh 2y)^2 + \sin^2 2x - \sinh^2 2y} \right] \quad (7.86)$$

Um exame das equações (7.85) e (7.86) mostra que se o par (x_1, y_1) é solução, então os pares $(x_1, -y_1)$, $(-x_1, y_1)$ e $(-x_1, -y_1)$ serão também soluções. Assim sendo, na solução destas equações, necessitam-se considerar, apenas, valores positivos de x e y .

Utilizando-se uma subrotina de computador digital (Subroutine RTMI, IBM Application Program) que fornece as raízes de uma equação do tipo $F(x)=0$ por processo iterativo, foram construídos gráficos das equações (7.85) e (7.86), para diversos valores do parâmetro δ . Verifica-se que, para os valores de ϵ_r e δ adotados, o sistema de equações (7.85) e (7.86) não admite raízes complexas. As únicas raízes encontradas são aquelas que correspondem a valores de α reais e positivos (casos particulares das raízes complexas), valores esses já relacionados na tabela II. Desta forma, pode-se concluir que os "leaky modes" ou "leaky waves" não contribuem para a representação dos campos, no presente caso. A figura 42 mostra, sem muitos detalhes, os gráficos das equações (7.85) e (7.86) para o caso em que $\epsilon_r = 2,55$. As curvas para $\epsilon_r = 9,60$ são semelhantes.

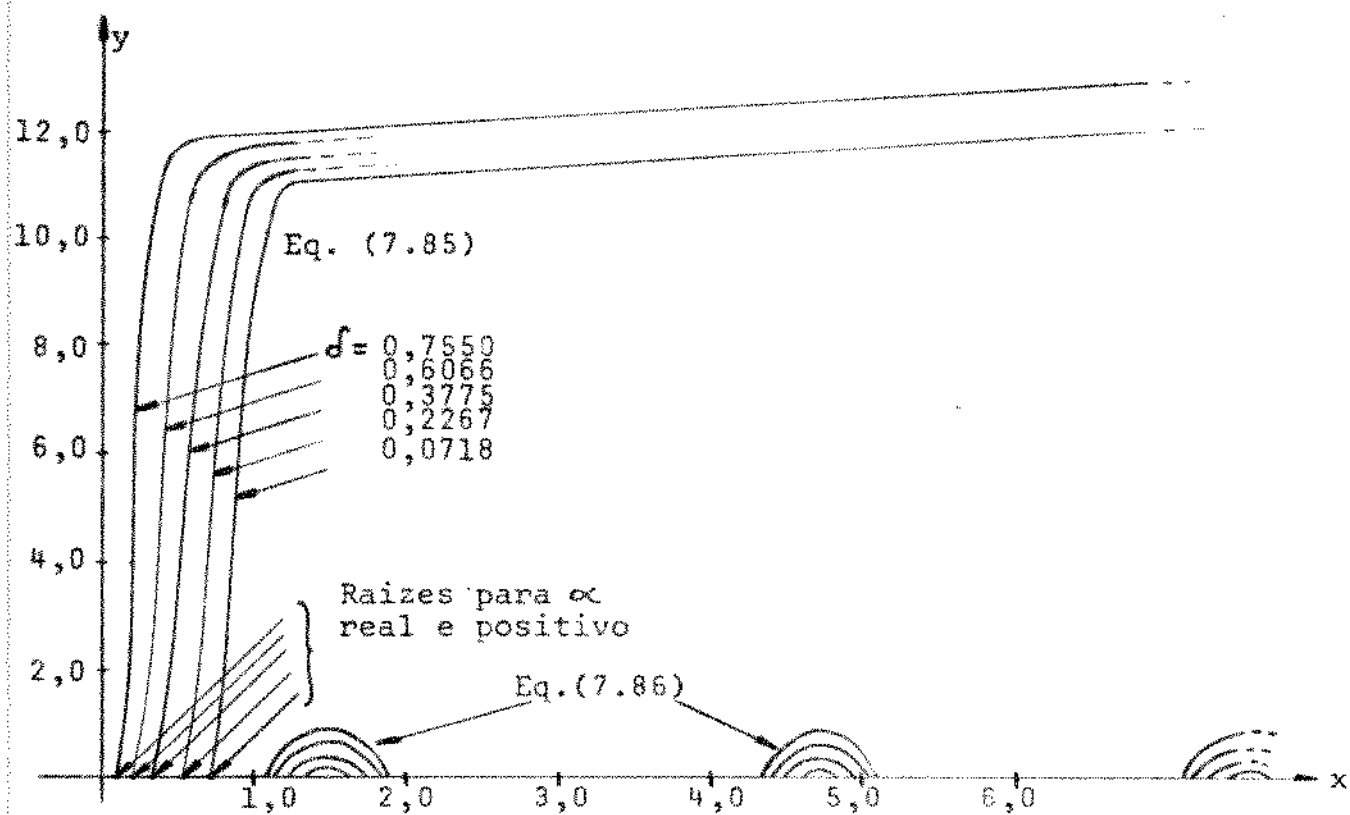


Fig. 42 - Gráficos das equações (7.85) e (7.86) para $\epsilon_r = 2,55$.

VII.4 - ESTUDO DA REPRESENTAÇÃO INTEGRAL DE H_r e H_z

É fácil verificar-se, com um exame dos polos do integrando da equação (7.6) relativos às componentes H_r e H_z do campo magnético, que os modos TE_z de ondas superficiais não são excitados na fronteira dielétrico-ar para valores práticos da relação d/a das antenas em forma de disco.

Considerando-se a expressão do coeficiente C dada por (3.46), obtêm-se os polos através da equação seguinte:

$$\xi h_2 \cos(h_2 d) - i \xi h_1 \sin(h_2 d) = 0 \quad (7.87)$$

ou

$$h_2 d \cotg(h_2 d) = i h_1 d \quad (7.88)$$

Tendo-se em vista que $h_1 = i\alpha$ pode-se escrever:

$$h_2 d \cotg(h_2 d) = -\alpha d \quad (7.89)$$

A equação (7.89), como não poderia deixar de ser, é a mesma para o caso de modos TE ímpares em pastilhas de dielétricos [27, pág. 474]. Para o primeiro modo TE , de acordo com a última referência, a frequência de corte é obtida pela seguinte relação:

$$\frac{d}{\lambda_0} \Big|_{\text{corte}} = \frac{1}{2(\epsilon_r - 1)^{1/2}} \quad (7.90)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda no espaço livre. Considerando-se os valores usuais da relação d/λ_0 e da permissividade relativa ϵ_r do substrato dielétrico, é fácil concluir que os modos

TE_z não são excitados, para a faixa de frequências de interesse.

Assim sendo, pode-se dizer que, em termos práticos, os únicos modos a se propagarem são os TM_z , já discutidos anteriormente.

VII.5 - ESTUDO DOS POLOS NO PLANO β . DETERMINAÇÃO DOS RESÍDUOS

Adotando-se um valor para a frequência, por exemplo $f = 3,0$ GHz, que corresponde a um comprimento de onda λ_0 no espaço livre de 10 cm, podem ser determinados os valores dos polos λ_p . Pode-se utilizar, para isto, a expressão (7.72) que é repetida a seguir:

$$h_1 = (k_1^2 - \lambda^2) = i\alpha \quad (7.91)$$

A tabela III mostra os valores de λ_p calculados utilizando-se os dados da tabela II. Os valores apresentados são apenas aqueles cuja localização no plano β é tal que eles podem ser envolvidos pelo percurso fechado de integração, contribuindo para a determinação dos campos. O mapeamento dos valores de λ_p , para o plano β , obtendo-se os correspondentes valores de β_p , é efetuado utilizando-se as equações (7.34) e (7.35).

TABELA III - Valores de λ_p e β_p obtidos com os dados da tabela II.

d/a	POLOS RELATIVOS AS ONDAS DE SUPERFÍCIE			
	$\epsilon_r = 2,55$		$\epsilon_r = 9,60$	
	λ_p	β_p	λ_p	β_p
0,050	62,87	$\pi/2 - i0,036$	62,85	$\pi/2 - i0,025$
0,158	63,25	$\pi/2 - i0,116$	63,06	$\pi/2 - i0,086$
0,263	63,93	$\pi/2 - i0,187$	63,51	$\pi/2 - i0,147$
0,368	66,79	$\pi/2 - i0,353$	64,39	$\pi/2 - i0,222$
0,526	67,69	$\pi/2 - i0,391$	67,46	$\pi/2 - i0,382$

A figura 43 mostra a localização, no plano β , dos polos correspondentes às ondas de superfície para os dois valores de ϵ_r utilizados nesse trabalho.

Com os dados obtidos, é possível determinarem-se os valores críticos do ângulo θ , θ_C , que caracterizam as regiões de contribuição de cada polo. Para isto, utiliza-se a equação (7.55), que define o caminho de máxima declividade e os valores de β_p da tabela III. Os resultados são mostrados na tabela IV.

TABELA IV - Valores do ângulo crítico θ_C em função de ϵ_r e d/a .

$\epsilon_r = 2,55$		$\epsilon_r = 9,60$	
d/a	θ_C (graus)	d/a	θ_C (graus)
0,050	87,9	0,050	88,6
0,158	83,4	0,158	85,1
0,263	79,4	0,263	81,6
0,368	70,2	0,368	77,4
0,526	68,2	0,526	68,6

As regiões de contribuição das ondas de superfície correspondentes a cada polo são definidas, então, da seguinte maneira:

$$\theta_C < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (7.92)$$

Observa-se, de acordo com Felsen e Marcuvitz [29 , pág. 543], que a ausência da contribuição devida às ondas de superfície, quando $\theta < \theta_C$, não implica na não existência destas ondas mas, simplesmente, que a sua amplitude é tão pequena que

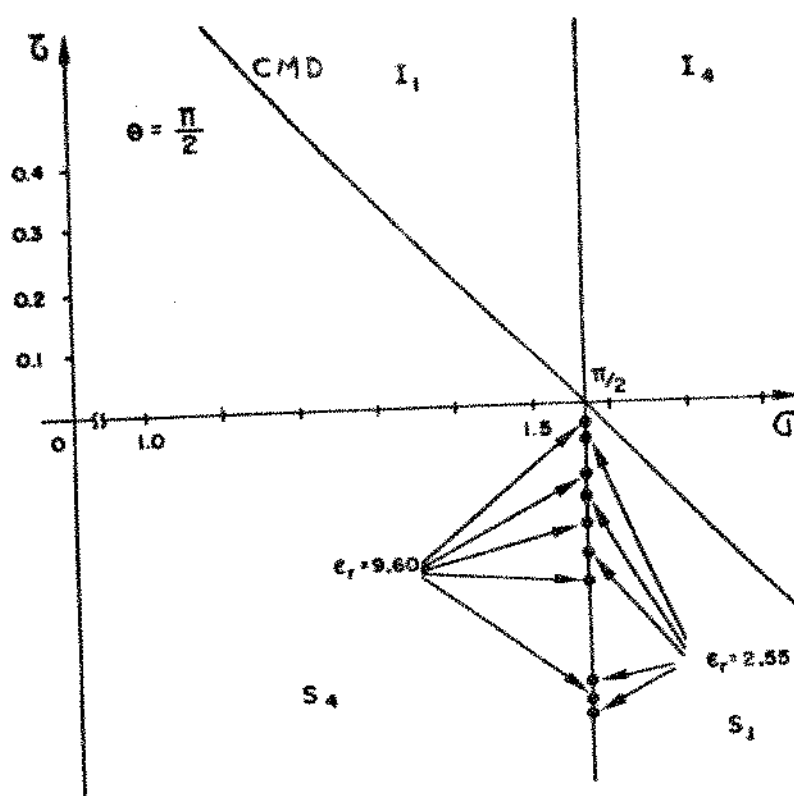


Fig. 43 - Localização dos polos no plano complexo β .

estã abaixo do erro cometido no processo de aproximação assintótica utilizado.

Para um dado valor de λ_p e β_p , o resíduo correspondente pode ser facilmente obtido. Reescrevendo-se a expressão da representação integral de H_ϕ no plano :

$$H_\phi = K \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{e^{-ih_1 d} \text{sen}(h_2 d)}{\xi^2 h_1 h_2 \cos(h_2 d) - ih_2^2 \text{sen}(h_2 d)} \frac{\partial J_1(\lambda a)}{\partial a} \left(\frac{2}{\pi \lambda r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 Z)} \quad (7.93)$$

Pode-se, então, dizer que o integrando de (7.93) é dado pela relação entre duas funções de λ , da seguinte maneira:

$$H_\phi = K \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} \quad (7.94)$$

onde

$$f(\lambda) = e^{-ih_1 d} \text{sen}(h_2 d) \frac{\partial J_1(\lambda a)}{\partial a} \left(\frac{2}{\pi \lambda r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda r + h_1 Z)} \quad (7.95)$$

$$g(\lambda) = \xi^2 h_1 h_2 \cos(h_2 d) - ih_2^2 \text{sen}(h_2 d) \quad (7.96)$$

Se λ_p representa os zeros de $g(\lambda)$ e h_{1p} , h_{2p} os valores correspondentes de h_1 e h_2 , então o resíduo é dado por

$$\text{Resíduo} = K \frac{f(\lambda_p)}{g'(\lambda_p)} \quad (7.97)$$

onde $g'(\lambda_p)$ é o valor da derivada de $g(\lambda)$ com relação a λ , no ponto $\lambda = \lambda_p$.

Após efetuadas as operações indicadas em (7.97) po-
de-se escrever a expressão do campo magnético H_{ϕ}^{0S} da onda de su-
perfície, correspondente a cada valor de λ_p :

$$H_{\phi}^{0S} = \frac{i2\pi K e^{-h_{1p}d} \sin(h_{2p}d) \frac{\partial J_1(\lambda_p a)}{\partial a} \left(\frac{2}{\pi \lambda_p r}\right)^{1/2} e^{i(\lambda_p r + h_{1p}z)}}{\xi^2 \left[\lambda_p h_{1p} d \sin(h_{2p}d) - \lambda_p h_{1p} h_{2p}^{-1} \cos(h_{2p}d) - \lambda_p h_{2p} h_{1p}^{-1} \cos(h_{2p}d) \right]} + i \left[\lambda_p h_{2p} d \cos(h_{2p}d) + 2\lambda_p \sin(h_{2p}d) \right] \quad (7.98)$$

Comparando-se as equações (7.58) e (7.98) verifica-
-se que a onda espacial varia com a distância segundo R^{-1} e a
onda de superfície segundo $r^{-1/2}$. As superfícies de fase cons-
tante são, respectivamente, uma esfera e um cilindro, caracteri-
zando a onda espacial como uma onda esférica e a onda de super-
fície como uma onda cilíndrica.

VII.6 - DETERMINAÇÃO DA EFICIÊNCIA DE IRRADIAÇÃO DE ONDAS ESPA- CIAIS E DA DIRETIVIDADE DA ANTENA DE MICROFITA.

Da mesma forma como se define a eficiência de uma
antena de onda de superfície [37, pág. 308], cujo objetivo é,
em geral, excitar uma onda de superfície com a maior eficiência
possível, pode-se definir a eficiência da antena de microfita.
Nesse caso, admite-se que o interesse principal é a maior exci-
tação possível da onda espacial.

Como no caso da não existência de perdas, o acoplamento cruzado entre a potência contida na onda de superfície, P_{0S} , e a potência contida na onda espacial, P_{0E} , é nulo [37, pág.307], pode-se calcular a potência total irradiada determinando-se separadamente P_{0S} e P_{0E} .

Define-se, então, a eficiência da antena de microfita como irradiadora de onda espacial:

$$\eta = \frac{P_{0E}}{P_{0E} + P_{0S}} \quad (7.99)$$

A potência contida na onda de superfície pode ser determinada pela integração do vetor de Poynting em uma superficie cilíndrica de raio bem grande e altura infinita. Para isto é necessário que se obtenha a componente E_Z do campo elétrico, o que pode ser feito utilizando-se as equações de Maxwell.

Através da equação $\nabla \times \vec{H} = -i\omega\epsilon_0\vec{E}$ e desprezando-se os termos que variam com $r^{-3/2}$, pode-se mostrar que

$$E_Z^{0S} = \frac{-\lambda}{\omega\epsilon_0} H_\phi^{0S} \quad (7.100)$$

A impedância de onda na direção radial r é então dada por

$$Z^{TM} = - \frac{E_Z}{H_\phi} = \frac{\lambda_p}{\omega\epsilon_0} \quad (7.101)$$

Esta expressão da impedância para o modo TM pode ser comparada com a equação (21.6b) da referência [37, pág.300].

Utilizando-se, então, o teorema de Poynting,

$$P_{0S} = \frac{1}{2} \frac{\lambda P}{\omega \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty r dz \left| H_\phi^{0S} \right|^2 \quad (7.102)$$

Substituindo-se em (7.102) a expressão de H_ϕ^{0S} dada em (7.98) e efetuando-se as integrações obtêm-se:

$$P_{0S} = \frac{2\pi^2 \omega \epsilon_0 a^2 E_0^2 J_1^2(k_1 \xi a) e^{2\alpha_p d} \sin^2(h_{2p} d) \left[\lambda_p J_0(\lambda_p a) - \frac{1}{a} J_1(\lambda_p a) \right]^2}{\alpha_p \left[(\xi^2 \alpha_p^{d+2}) \lambda_p \sin(h_{2p} d) + (\xi^2 \alpha_p^{-1} h_{2p} - \xi^2 \alpha_p h_{2p}^{-1} + h_{2p} d) \lambda_p \cos(h_{2p} d) \right]^2} \quad (7.103)$$

A potência relativa à onda espacial é obtida pela integração do vetor de Poynting em uma superfície hemisférica de raio R grande o bastante para que se utilizem, na integração, os campos distantes da antena.

Tem-se, neste caso,

$$P_{0E} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta R^2 \sin\theta \left[E_\theta^{0E} H_\phi^{*0E} - E_\phi^{0E} H_\theta^{*0E} \right] \quad (7.104)$$

Como, para campos distantes,

$$E_\theta^{0E} = \eta_1 H_\phi^{0E} \quad \text{e} \quad E_\phi^{0E} = -\eta_1 H_\theta^{0E} \quad (7.105)$$

pode-se escrever a equação (7.104) da forma seguinte:

$$P_{0E} = \frac{1}{2} \eta_1 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta R^2 \sin\theta \left[|H_\phi^{0E}|^2 + |H_\theta^{0E}|^2 \right] \quad (7.106)$$

Substituindo-se em (7.106) os valores de H_{ϕ}^{0E} e H_{θ}^{0E} dados por (7.58) e (7.59) e efetuando-se a integração em ϕ , que é imediata, pode-se então escrever:

$$P_{0E} = \frac{2\pi\eta_1 E_0^2 \omega^2 \epsilon_0^2 a^2}{k_1^4} \int_0^{\pi/2} d\theta \left\{ \frac{\cos^2 \theta \sin^2 [k_1 d (\xi^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}]}{(\xi^2 - \sin^2 \theta) [\xi^4 \cos^2 \theta \cos^2 [k_1 d (\xi^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}] + \right. \\ \left. \frac{[k_1^2 \sin \theta J_0^2(k_1 a \sin \theta) + \frac{1}{a^2 \sin \theta} J_1^2(k_1 a \sin \theta) - \frac{2k_1}{a} J_0(k_1 a \sin \theta) J_1(k_1 a \sin \theta)]}{-\sin^2 \theta)^{1/2}} + (\xi^2 - \sin^2 \theta) \sin^2 [k_1 d (\xi^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}] \right\} + \\ \left. \frac{\cos^2 \theta \sin^2 [k_1 d (\xi^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}] J_1^2(k_1 a \sin \theta)}{\xi^4 a^2 \sin \theta [(\xi^2 - \sin^2 \theta) \cos^2 [k_1 d (\xi^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}] + \cos^2 \theta \sin^2 [k_1 d (\xi^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}]} \right\} \quad (7.107)$$

Observa-se que a aparente singularidade no integrando de (7.107) para $\theta=0^\circ$ desaparece se for substituída a função $J_1(k_1 a \sin \theta)$ pela sua expressão assintótica para pequenos argumentos, isto é [31, pág. 360] ,

$$J_1(k_1 a \sin \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^\circ} \frac{1}{2} k_1 a \sin \theta \quad (7.108)$$

A diretividade da antena, considerando-se que a potência total irradiada é igual à soma da potência contida na onda espacial com a potência contida na onda de superfície, é dada

por

$$Dir = \frac{4\pi R^2 S(\theta=0^\circ)}{P_{0E} + P_{0S}} \quad (7.109)$$

onde $S(\theta=0^\circ)$ é o valor da densidade de potência na direção $\theta=0^\circ$, isto é, o valor do integrando de (7.104) calculado em $\theta=0^\circ$.

A integral em (7.107) foi calculada por processo numérico em computador digital, sendo os valores da eficiência e da diretividade da antena para $\epsilon_r=2,55$ e $\epsilon_r=9,60$ e para diversos valores da relação d/a mostrados na figura 44. Um exame dessa figura permite que se façam as seguintes observações:

a) A diretividade varia muito pouco com a relação d/a, para ambos os valores de ϵ_r .

b) As potências P_{0E} e P_{0S} crescem com o aumento da relação d/a; para alguns valores de ϵ_r e d/a o aumento de P_{0S} é tal que faz com que a diretividade diminua com o aumento da relação d/a. Um aumento da largura de feixe com o aumento da espessura do dielétrico foi reportado por Araki e Itoh [32], tendo sido levantada a hipótese, pelos autores, de que tal fato era devido à excitação de ondas de superfície na fronteira dielétrico-ar.

c) É interessante notar que, para pequenos valores da relação d/a, os valores da diretividade coincidem com os apresentados por Derneryd [30] para ambos os valores de ϵ_r considerados.

d) Pode-se notar também que a eficiência da antena como excitadora de onda espacial decresce rapidamente com o aumento da relação d/a para valores elevados de ϵ_r , chegando a atingir o valor de 69% dentro da faixa de variação de d/a considerada, quando $\epsilon_r=9,6$. Para baixos valores de ϵ_r a eficiência

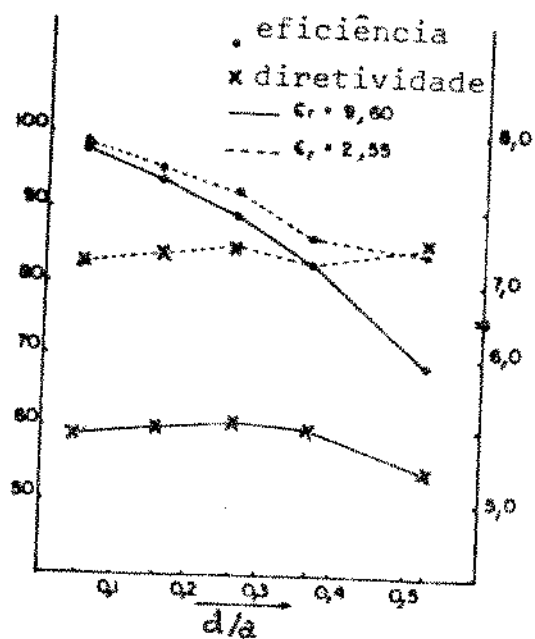


Fig. 44 - Eficiência de excitação de ondas espaciais e diretividade em função da relação d/a , para $\epsilon_r = 2,55$ e $9,60$.

decrece mais lentamente atingindo um mínimo de aproximadamente 85% dentro da faixa considerada, para $\epsilon_T = 2,55$.

VII.7 - CONCLUSÃO DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi analisado o problema da excitação de ondas de superfície sobre o substrato de uma antena de microfita em forma de disco. Acredita-se que os resultados mostrados são importantes para o projeto de antenas de microfita e devem, em especial, ser levados em consideração quando da escolha do substrato em que se deverá construir a antena. É importante salientar que a eficiência da antena no que diz respeito às perdas ôhmicas na estrutura (cobre e dielétrico) comporta-se de maneira contrária, isto é, aumenta com o aumento da relação d/a . É importante notar-se, também, que o fato de se poder afirmar que na prática não se propagam na superfície do dielétrico os modos TE permite que se conclua que o acoplamento entre dois elementos de um conjunto, no caso em que as perpendiculares ao centro de cada disco situem-se no plano $\phi = 90^\circ$, deve ser menor do que o acoplamento existente quando as perpendiculares estão no plano $\phi = 0^\circ$. Esse fato pode ser observado nos resultados experimentais apresentados por Jedlicka et al [38] para valores do espaçamento entre os elementos razoavelmente grandes.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES

Os resultados das análises desenvolvidas neste trabalho mostram que o substrato dielétrico sobre o qual são construídas as antenas de microfita exerce acentuada influência nas propriedades elétricas dessas antenas. Considerando-se certas aplicações das antenas de microfita, particularmente em mísseis e foguetes, é sem dúvida alguma muito importante que se saiba estimar o diagrama de irradiação das mesmas em função da permissividade relativa e da espessura da camada dielétrica. As figuras 27 a 35, que mostram os diagramas de irradiação e as curvas da cobertura percentual de diagrama das antenas do tipo envólucro, permitem que se conclua, por exemplo, que na construção dessas antenas deve-se usar um material com o menor valor possível de permissividade relativa a fim de que se obtenha uma maior cobertura do diagrama de irradiação. Também sob o aspecto da excitação de ondas de superfície sobre o dielétrico é interessante que se utilize material de baixo valor de ϵ_r com a menor espessura possível, não se esquecendo de considerar, também, a eficiência relativa às perdas ôhmicas, o que pode ser feito utilizando-se algumas expressões matemáticas apresentadas na referência [30], para a antena em forma de disco.

É importante salientar-se, acrescentando-se alguma coisa ao que já foi dito na introdução deste trabalho, que o fato de as antenas de microfita constituírem um assunto relativamente recente no campo das antenas tornou muito difícil, em virtude da não disponibilidade de dados na bibliografia especializada, a comparação dos resultados teóricos aqui apresentados com resultados obtidos na prática. O número razoavelmente reduzido de trabalhos de caráter prático publicados até hoje deve-se, principalmente, ao fato de que as antenas em questão têm grande aplicação na área militar, o que torna difícil o acesso às informações a respeito do assunto.

Para concluir o trabalho aqui apresentado, é interessante que sejam feitas algumas observações a respeito do modelo adotado para as antenas de microfita, nas análises desenvolvidas nos capítulos anteriores. O modelo da cavidade com paredes laterais condutoras magnéticas, apesar das limitações que

apresenta, discutidas no capítulo 1, fornece resultados bastante precisos, em especial no que diz respeito à obtenção dos campos distantes [5]. A grande vantagem desse modelo é que ele permite que se obtenha, com certa facilidade, uma expressão analítica para o campo irradiado. Os outros métodos analíticos conhecidos, como os apresentados nas referências [32], [33] e [39], utilizam o método dos momentos para se obter, com maior precisão, a distribuição de correntes na antena. Esses métodos, no entanto, pelo fato de não fornecerem uma expressão analítica para os campos procurados, não permitem que se estude, com maiores detalhes, a dependência desses campos com os diversos parâmetros da antena. Um estudo mais profundo a respeito das ondas de superfície que são excitadas no substrato, como o apresentado no capítulo 7, não poderia ser efetuado facilmente se fosse adotado um modelo mais complicado para a antena que foi analisada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] G.A.Deschamps, "Microstrip microwave antennas", 3rd USAF Symp. on Antennas, 1953.
- [2] E.V.Byron, "A new flush-mounted antenna element for phased array application", Proc. Phased - Array Antenna Symp. , pp. 187-192, 1970.
- [3] R.E.Munson, "Single Slot Cavity Antennas Assembly", U. S. Patent No. 3713162, Jan. 23, 1973.
- [4] J.Q.Howell, "Microstrip antennas", Dig. Int. Symp. Antennas Propagat. Soc., Williamsburg, VA, pp. 177-180, Dez. 1972.
- [5] K.R.Carver e J.W.Mink, "Microstrip antenna technology" , IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol.AP-29, Nº 1, pp. 2-24, Jan. 1981.
- [6] R.J.Mailloux, J.F.Mc Ilvenna e N.P.Kernweis, "Microstrip array technology", IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. AP-29, Nº 1, pp. 25-37, Jan. 1981.
- [7] I.J.Bahl e P.Bhartia, "Microstrip Antennas", Artech House, 1980.
- [8] R.E. Munson, "Microstrip antenna technology at Ball Aerospace Systems", Newsletter of the IEEE Ant. and Propag. Soc., Vol.21, Nº 3, Junho 1979.
- [9] J.Q.Howell, "Microstrip antennas", IEEE Trans. Antennas and Propag., Vol. AP-23, pp. 90-93, Jan. 1975.

- [10] A.G.Derneryd, "Linearly polarized microstrip antennas" ,
IEEE Trans. Antennas and Propag., Vol. AP-24, nº 6, pp.
846-851, Nov. 1976.
- [11] P.K.Agrawal e M.C.Bailey, "An analysis technique for
microstrip antennas", IEEE Trans. Antennas and Propag., Vol.
AP-25, Nº 6, pp. 756-759, Nov. 1977.
- [12] C.Wood, "Improved bandwidth of microstrip antennas using
parasitic elements", IEE Proc., Vol. 127, pt. H, Nº 4 ,
pp. 231-234, Agosto 1980.
- [13] I.J.Bahl, S.S.Stuchly e M.A.Stuchly, "A new microstrip
radiator for medical applications", IEEE Trans. MTT, Vol.
MTT-28, Nº 12, pp. 1464-1468, Dez. 1980.
- [14] C.W.Garvin, R.E.Munson, L.T.Ostwald e K.G.Schroeder,
"Missile base mounted microstrip antennas", IEEE Trans.
Antennas Propag., Vol. AP-25, Nº 5, pp. 604-610, Setembro
1977.
- [15] R.E.Munson, "Conformal microstrip antennas and microstrip
phased arrays", IEEE Trans. Antennas and Propag., Vol.
AP-22, pp. 74-78, Janeiro 1974.
- [16] M.Collier, "Microstrip antenna array for 12 GHz TV",
Microwave Journal, Vol. 20, nº 9, pp. 67-71, Setembro
1977.
- [17] A.G.Derneryd, "Microstrip disc antenna covers multiple
frequencies", Microwave Journal, Vol. 21, Nº 5, pp.77-79 ,
Maio 1978.
- [18] I.J.Bahl, "Build microstrip antennas with paper-thin
dimensions", Microwaves, Vol. 18, nº 10, pp. 50-63, Outu-
bro 1979.

- [19] Y.T.Lo, D.Solomon e W.F.Richards, "Theory and experiment on microstrip antennas", IEEE Trans. Antennas and Propag., Vol. AP-27, Nº 2, pp. 137-145, Março 1979.
- [20] R.F.Harrington, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields", Mc Graw-Hill Book Company, 1961.
- [21] C.T.Tai, "Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory", Intext Educational Publishers, 1971.
- [22] W.W.Hansen, "A new type of expansion in radiation problems", Phys. Rev., 47, pp. 139-143, 1935.
- [23] C.T.Tai, "On the eigenfunction expansion of dyadic Green's functions", Proc. IEEE, Vol. 61, pp. 480-481, Abril 1973.
- [24] C.T.Tai, "Singular terms in the eigenfunction expansion of dyadic Green's function of the electric type", Math. note 65, The University of Michigan Radiation Laboratory, Ann Arbor, Mich., 1980.
- [25] Y.Rahmat-Samii, "On the question of computation of the dyadic Green's function at the source region in waveguides and cavities", IEEE Trans. MTT, Vol. MTT-23, pp. 762-765, Setembro 1975.
- [26] W.A.Johnson, A.Q.Howard e D.G.Dudley, "On the irrotational component of the electric Green's dyadic", Radio Science, Vol. 14, Nº 6, pp. 961-967, Novembro/Dezembro 1979.
- [27] R.E.Collin, "Field Theory of Guided Waves", Mc Graw-Hill, 1960.
- [28] L.M.Brekhovskikh, "Waves in Layered Media", Academic Press, 1960.

- [29] L.B.Felsen e N.Marcuvitz, "Radiation and Scattering of Waves", Prentice-Hall, 1973.
- [30] A.G.Derneryd, "Analysis of the microstrip disk antenna element" IEEE Trans. Antennas and Propag., Vol. AP-27, N° 5, pp. 660-664, Setembro 1979.
- [31] M.Abramowitz e I.A.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, Inc., 1965.
- [32] K.Araki e T.Itoh, "Hankel transform domain analysis of open circular microstrip radiating structures", IEEE Trans. Ant. Propag., Vol. AP-29, N° 1, pp. 84-89, Janeiro 1981.
- [33] W.C.Ckew e J.A.Kong, "Analysis of a circular microstrip disk antenna with a thick dielectric substrate", IEEE Trans. Ant. Propag., Vol. AP-29, N° 1, pp. 68-76, Janeiro 1981.
- [34] I.J.Bahl e S.S.Stuchly, "Analysis of a microstrip covered with a lossy dielectric", IEEE Trans. MTT, Vol. MTT-28, N° 2, pp. 104-109, Fevereiro 1980.
- [35] E.C.Jordan e K.G.Balmain, "Electromagnetic Waves and Radiating Systems", Prentice-Hall International Editions, 2nd edition, 1968.
- [36] T.Tamir e L.B.Felsen, "On lateral waves in slab configurations and their relation to other wave types", IEEE Trans. Ant. Propag., Vol. AP-13(3), pp. 410-422, 1965.
- [37] R.E.Collin e F.J.Zucker, "Antenna Theory", parte 2, McGraw-Hill, 1969.

- [38] R.P.Jedlicka, M.T.Poe e K.R.Carver, "Measured mutual coupling between microstrip antennas", IEEE Trans Ant. Propag., Vol. AP-29, N° 1, pp. 147-149, Janeiro 1981.

- [39] E.H.Newman e P.Tulyathan, "Analysis of microstrip antennas using moment methods", IEEE Trans. Ant. Propag., Vol.AP-29, N° 1, pp. 47-53, Janeiro 1981.