

Programação Não-Linear com Parâmetros Fuzzy: Teoria e Algoritmos

Luiza Amalia Pinto Cantão

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Doutor em Engenharia Elétrica**.

Orientação: Prof. Dr. Akebo Yamakami

Banca Examinadora: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Prof^a. Dr^a. Isamara Carvalho Alves
Prof. Dr. Carlos Magnus Carlsson Filho
Prof. Dr. Anésio dos Santos Junior
Prof. Dr. Raul Vinhas Ribeiro

FEEC — UNICAMP

Março de 2003

Resumo

Apresentamos aqui alguns métodos de minimização para problemas não-lineares com coeficientes fuzzy, visando sua aplicação em problemas com coeficientes incertos ou em problemas de difícil solução. Estabelecemos algumas propriedades básicas, como: definição de funções convexas, diferenciabilidade e mínimo em contexto fuzzy, culminando com as condições de otimalidade fuzzy. Algoritmos são propostos e suas funcionalidades e sua eficiência são comprovadas através da resolução de diversos problemas testes encontrados na literatura, fuzzificados.

Abstract

We present some minimization methods for nonlinear problems with fuzzy coefficients, seeking for applications in problems with uncertain coefficients or in hard to solve problems. With these purposes we establish some basic properties, such as: definition of convex functions, differentiability and minimum in the fuzzy framework, and finally the fuzzy optimality conditions. We propose algorithms to solve fuzzy nonlinear optimization problems and we applied these ones in many fuzzified bet test problems found in the literature, to validate their correctness and efficiency.

Agradecimentos

À Deus, sempre.

Ao Prof. Dr. Akebo Yamakami, por recordar-me do sentido da palavra “*orientador*”. A todos os professores da Faculdade de Engenharia Elétrica – FEEC que contribuíram para a minha formação. À Prof^a. Dr^a. Edméa Cássia Baptista – UNESP/Bauru, pela amizade e constante incentivo. Às secretárias Flávia e Noêmia pelo carinho, e a todos os funcionários da FEEC.

À minha amada Mãe, Nelcinda, por sempre acreditar em mim e pela força ao longo de todos estes anos em que estive ausente (creio que todo o agradecimento nunca seria suficiente para recompensá-la). Ao meu Pai, Miguel (*in memoriam*), sempre presente em minhas memórias. Ao meu Padrasto, Mauricio, pelo apoio, carinho e amizade. Ao meu irmão, Márcio, a minha cunhada, Mônica, e ao amado sobrinho, Luís Miguel, por tornarem a vida mais gostosa pelo carinho que dedicam. Ao meu primo-irmão, Luizinho, por acreditar em mim. Ao meu grande companheiro, amigo, namorado e marido, Renato, por tudo que fez por mim nestes anos, profissionalmente e moralmente. Sua presença em minha vida foi mais um presente de Deus. À Dona Thereza, Lia, Vera, Lucas e Daniel, por me adotarem em sua família. E ao meu fiel companheiro, Costelinha!

À amiga Márcia, que muito nos ensina com sua dedicação, ao amigo Sérgio, pelo carinho e pela ajuda na impressão deste trabalho, e na tentativa de não omitir nenhum nome: a todos os amigos da FEEC, e aos amigos de fora da FEEC (SP, Bauru e S. J. do Rio Preto), pelo apoio, compreensão e carinho. Aos “*meninos*” (amigos do Renato – e meus também), pela companhia, piadas e pela força.

E neste momento, em especial ao meu primo, Antonio de Jesus Santana, pela força dada a mim e a minha família em um momento tão difícil para nós. E pela “*mentira*” que me trouxe até aqui (esta foi a única mentira que eu conheço que deu certo!).

Finalmente, ao CNPq pelo apoio financeiro à realização deste trabalho (processo #147456/99 – 1).

*À minha Mãe,
Nelcinda
e ao meu marido,
Renato,
dedico.*

*If you think your problems
in Mathematics are big,
I can assure you mine are
still greater.*

A. Einstein

*O anjo disse:
“Não tenha medo, Maria,
porque você encontrou
graça diante de Deus”.*

Lucas, 1; 30

Sumário

1	Introdução	3
	Motivação	3
1.1	Preliminares	4
1.2	Organização da Tese	7
2	Números Fuzzy	8
	Introdução	8
2.1	Números Fuzzy	8
2.1.1	Representação $L - R$ de Números Fuzzy	8
2.1.2	Números Fuzzy como Intervalos de Confiança	10
2.1.3	Implementação Computacional dos Números Fuzzy como Intervalos de Confiança	10
2.2	Comparação de Números Fuzzy	18
2.2.1	Comparação CL	18
2.2.2	Índices de Ordenação de Yager	19
3	Convexidade Fuzzy	21
	Introdução	21
3.1	Conjunto Convexo Fuzzy	21
3.1.1	Conjunto Quasi-Convexo Fuzzy	23
3.1.2	Relações entre Convexidade de Conjuntos Fuzzy	24
3.1.3	Conjunto Fuzzy Limitado	25
3.1.4	Projeção de Conjuntos	27
3.1.5	Separação de Conjuntos Convexos Fuzzy	27
3.2	Funções Convexas com Parâmetros Fuzzy	27
3.2.1	Mínimos de Funções Convexas com Parâmetros Fuzzy	33
3.2.2	Generalizações de Função Convexa com Parâmetros Fuzzy	34
4	Programação Não-Linear Irrestrita com Parâmetros Fuzzy	36
	Introdução	36
4.1	Condições de Otimalidade	36
4.2	Métodos de Busca Unidimensional com Parâmetros Fuzzy	38
4.2.1	Métodos de Busca Sem Uso de Derivadas	38
4.2.2	Métodos de Busca com Uso de Derivadas	41
4.3	Métodos de Busca Multidimensional com Parâmetros Fuzzy	45
4.3.1	Métodos de Busca Sem Derivadas	46
4.3.2	Métodos de Busca com Uso de Derivadas	48

4.3.3	Método do Gradiente Conjugado	50
5	Programação Não-Linear Restrita com Parâmetros Fuzzy	52
	Introdução	52
5.1	Condições de Otimalidade	52
5.2	Métodos de Programação Não-Linear Restrita com Parâmetros Fuzzy	56
5.2.1	Método de Função Penalidade e Lagrangeano Aumentado	56
5.2.2	Métodos de Direções Viáveis	58
6	Resultados Computacionais	62
	Introdução	62
6.1	Problemas de Programação Não-Linear Irrestrita	62
6.1.1	Problemas Unidimensionais	62
6.1.2	Problemas Multidimensionais	66
6.2	Problemas de Programação Não-Linear Restrita	70
6.2.1	Restrições Não-Lineares	70
6.2.2	Restrições Lineares	71
	Comentários Finais	78
	Referências Bibliográficas	80

Capítulo 1

Introdução

Motivação

Para trabalhar matematicamente conceitos de natureza vaga e ambígua, L. A. Zadeh desenvolveu a Teoria Fuzzy, tendo como marco inicial a publicação do artigo *Fuzzy Sets* em 1965 (vide [71]). Tal trabalho gerou uma ampla área de pesquisa, desde sua fundamentação teórica até a análise de sua aplicabilidade em diversas áreas de conhecimento, como nas Engenharias e na Matemática, entre outros.

Em 1970, R. E. Bellman, juntamente com L. A. Zadeh, publicaram o artigo intitulado *Decision-Making in a Fuzzy Environment* (vide [4]), onde é introduzida a Teoria Fuzzy em problemas de Programação Matemática. A incerteza por eles introduzida foi tratada de maneira qualitativa; por exemplo, o custo do problema *pode ser em torno de x* , a i -ésima restrição *pode estar entre a e b* , etc. A formulação matemática deste tipo de problema é dada por:

$$\begin{aligned} & \widetilde{\min} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \lesssim \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$ (cada $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) é um vetor de funções, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ um vetor nulo, e o símbolo “ \sim ” indica a incerteza presente no problema.

Estas abordagens abriram um amplo campo de aplicações para problemas de Programação Matemática, principalmente em Programação Linear. Este fato deve-se à maior facilidade em trabalhar com a característica linear (vide as referências citadas por M. Inuiguchi e J. Ramík em [39]).

Na área de Programação Não-Linear, foram publicados trabalhos onde se aplicou diretamente a idéia de R. E. Bellman e L. A. Zadeh [4] em problemas clássicos ou reais (por exemplo [66]). Esta mesma proposta, juntamente com Redes Neurais, Regras Fuzzy, entre outras, geraram formas alternativas de tratar e resolver o problema (1.1) (vide por exemplo [45], [65] e [68]).

Por outro lado, a incerteza pode ser interpretada de forma quantitativa:

$$\begin{aligned} & \min \quad f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \lesssim \tilde{\mathbf{b}} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $\tilde{\mathbf{a}}$ e $\tilde{\mathbf{b}}$ são vetores com parâmetros (coeficientes) fuzzy, e $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, sendo $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ um conjunto fuzzy sobre \mathbb{R} . Os parâmetros fuzzy podem ocorrer somente na função objetivo, somente no conjunto de restrições ou em ambos os casos.

Neste sentido, a Programação Linear ganhou várias publicações, entre elas [6], [46] e [50], assim como problemas de Programação Linear Inteira: [33], [34], [36], entre outros.

Trabalhos na área de Programação Não-Linear que abordam o aspecto de parâmetros fuzzy são mais escassos, como menciona [50]. Trabalhos como de P. Ekel et al [22] e de B. Liu e K. Iwamura [46] nos mostram o quão delicada é esta situação. Por isso, a nossa proposta é a de tratar esta abordagem de maneira mais simples.

Portanto, tratamos do caso onde os parâmetros fuzzy ocorrem na função objetivo de problemas de Programação Não-Linear, buscando uma generalização dos resultados dos problemas clássicos e verificando a validade das propostas através de exemplos testes da literatura.

A seguir uma breve preliminar sobre os conceitos fundamentais da Teoria Fuzzy é apresentada, assim como a organização dos tópicos desta dissertação.

1.1 Preliminares

A Teoria Fuzzy nos permite trabalhar com conceitos subjetivos presentes no nosso dia-a-dia. Por exemplo, ao falar sobre a temperatura de um copo, há um consenso geral sobre temperatura extremamente quente e extremamente baixa, mas há um nível de temperatura que é suportável para uma pessoa enquanto que para outra, ainda é muito quente. Ou ainda, para uma pessoa a temperatura pode ser extremamente agradável e para outra, muito quente ou fria. Este conjunto de sensações de temperatura pode ser definido como um conjunto fuzzy.

Assim, um conjunto fuzzy, como definido em [4], é uma classe de objetos onde não há uma fronteira exata entre os objetos que pertencem à classe ou não. Matematicamente, considere a definição que segue.

Definição 1.1.1. [4] *Seja $X = \{x\}$ uma coleção de objetos (pontos) genericamente denotados por x . Assim, um conjunto fuzzy \tilde{A} em X é um conjunto de pares ordenados:*

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \text{ tal que } x \in X\},$$

onde $\mu_{\tilde{A}}(x)$ é conhecida como *função de pertinência* de x em \tilde{A} , $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ e $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Os valores no intervalo $[0, 1]$ representam o grau de compatibilidade de um determinado objeto em relação à classe estudada. Assim, os valores 0 e 1 expressam respectivamente, a completa exclusão e a compatibilidade total de determinado objeto. Este grau de compatibilidade é conhecido como *grau de pertinência*.

A função de pertinência pode ser definida, por exemplo, como:

1. Função Triangular

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \underline{a} \\ \frac{x - \underline{a}}{a - \underline{a}} & \text{se } x \in [\underline{a}, a] \\ \frac{\bar{a} - x}{\bar{a} - a} & \text{se } x \in [a, \bar{a}] \\ 0 & \text{se } x \geq \bar{a}, \end{cases}$$

onde a é o valor modal, ou seja, $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ se $x = a$, e \underline{a} e \bar{a} são os limites inferior e superior, respectivamente.

2. Γ -Função

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \underline{a} \\ \frac{k(x - \underline{a})^2}{1 + k(x - \underline{a})^2} & \text{se } x > \underline{a}, \end{cases}$$

onde $k > 0$.

3. S-Função

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \underline{a} \\ 2 \left(\frac{x - \underline{a}}{\bar{a} - \underline{a}} \right)^2 & \text{se } x \in [\underline{a}, a] \\ 1 - 2 \left(\frac{x - \bar{a}}{\bar{a} - \underline{a}} \right)^2 & \text{se } x \in [a, \bar{a}] \\ 1 & \text{se } x > \bar{a}. \end{cases}$$

4. Função Trapezoidal

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \underline{a} \\ \frac{x - \underline{a}}{a_1 - \underline{a}} & \text{se } x \in [\underline{a}, a_1] \\ 1 & \text{se } x \in [a_1, a_2] \\ \frac{\bar{a} - x}{\bar{a} - a_2} & \text{se } x \in [a_2, \bar{a}] \\ 0 & \text{se } x > \bar{a}. \end{cases}$$

5. Função Gaussiana: $\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-k(x-a)^2}$, onde $k > 1$.

6. Função tipo Exponencial

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + k(x - a)^2}, \quad \text{para } k > 1 \text{ ou}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{k(x - a)^2}{1 + k(x - a)^2} \quad \text{para } k > 0.$$

As figuras 1.1, 1.2 e 1.3 ilustram as funções acima.

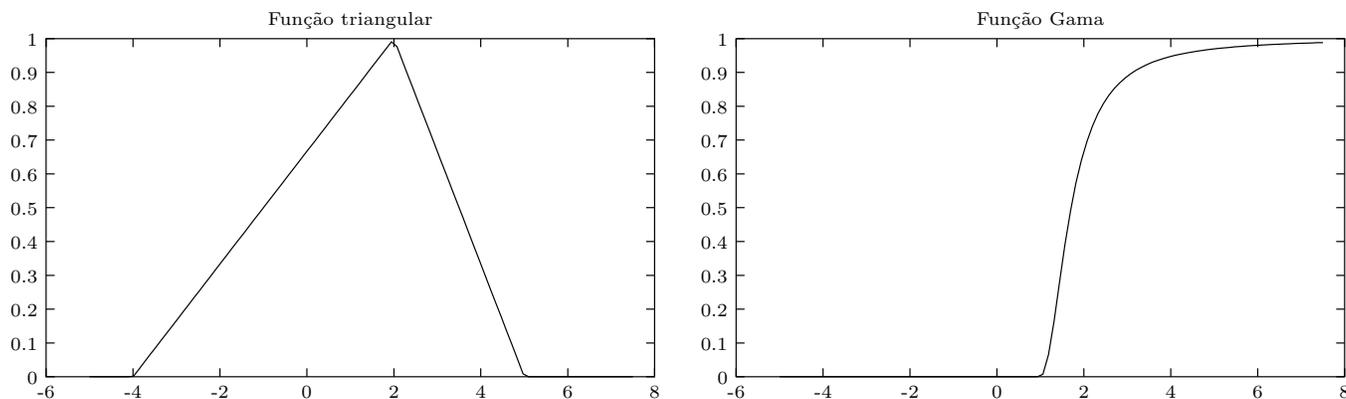


Figura 1.1: Função triangular ($\underline{a} = -4$, $\bar{a} = 5$ e $a = 2$) e Γ -função ($\underline{a} = 1$ e $k = 2$).

Algumas características podem ser atribuídas a um conjunto fuzzy, dentre elas:

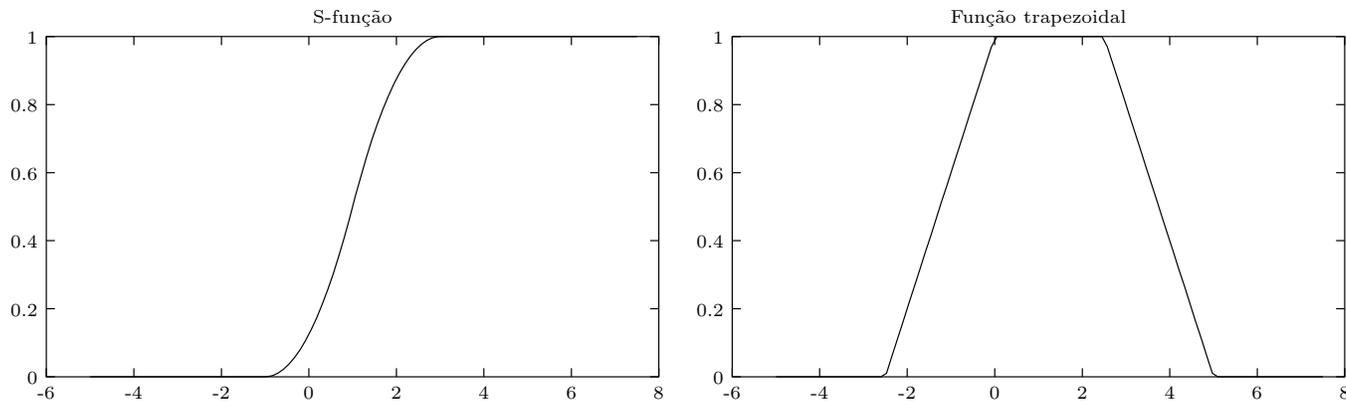


Figura 1.2: S-função ($\underline{a} = -1$, $\bar{a} = 3$ e $a = 1$) e função trapezoidal ($\underline{a} = -2.5$, $\bar{a} = 5$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 2.5$).

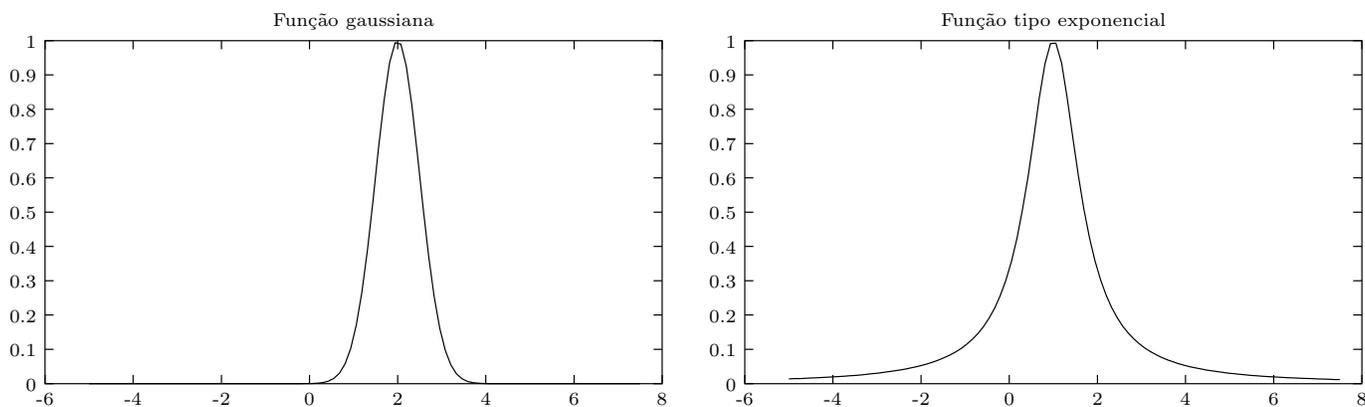


Figura 1.3: Gaussiana ($k = 2$ e $a = 2$) e função tipo exponencial ($k = 2$ e $a = 1$).

1. Um conjunto fuzzy \tilde{A} é **normal** se, e somente se, $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$. É **subnormal** se $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$. O valor supremo de um conjunto fuzzy \tilde{A} é conhecido como altura e é denotado por $hgt(\tilde{A})$.
2. O suporte de um conjunto fuzzy \tilde{A} é $supp(\mu_{\tilde{A}}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.
3. Um conjunto fuzzy \tilde{A} é **vazio** se, e somente se, $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \forall x \in X$.
4. Dois conjuntos fuzzy \tilde{A} e \tilde{B} são iguais se, e somente se, $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \forall x \in X$.
5. Um conjunto fuzzy \tilde{A} está **contido** em ou é um **subconjunto** do conjunto fuzzy \tilde{B} ($\tilde{A} \subset \tilde{B}$) se, e somente se $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \forall x \in X$.
6. O conjunto de α -cortes de um conjunto fuzzy \tilde{A} , denotado por \tilde{A}_α , é definido como:

$$\tilde{A}_\alpha(x) = \{x \in X \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

Outras características podem ser atribuídas a conjuntos fuzzy, como as apresentadas em [4] e [55].

1.2 Organização da Tese

No capítulo 2, os parâmetros fuzzy são tratados como números fuzzy e sua implementação é apresentada; também neste capítulo, alguns métodos de comparação são discutidos. No capítulo 3, apresentamos as definições para convexidade fuzzy do ponto de vista de conjunto fuzzy e funções fuzzy. Nos capítulos 4 e 5 são apresentadas as condições de otimalidade para problemas de Programação Não-Linear com Parâmetros Fuzzy e a proposta algorítmica para alguns métodos desta classe. Finalmente, no capítulo 6 alguns resultados computacionais são apresentados e discutidos; e posteriormente, algumas considerações finais são apresentadas.

Capítulo 2

Números Fuzzy

Introdução

Como o objetivo do nosso trabalho é o de usar parâmetros (coeficientes) fuzzy em Problemas de Programação Não-Linear, alguns aspectos são indispensáveis de serem estudados: operações e comparações de números fuzzy.

Para as operações de números fuzzy abordamos, de maneira breve, as propostas de D. Dubois e H. Prade, [18] (onde usa-se a representação $L - R$) e posteriormente, as operações dadas por A. Kaufmann e M. M. Gupta, [42], nas quais fizemos adaptações para facilitar sua implementação.

Para a comparação de números fuzzy, apresentamos os métodos propostos por F. Choobineh e H. Li, [13] e o Índice de Yager [5].

2.1 Números Fuzzy

Dois tipos de representação para números fuzzy são apresentadas: a primeira é a representação $L - R$, e a segunda, a representação como Intervalos de Confiança, escolhida para implementação devido à utilização de α -cortes.

2.1.1 Representação $L - R$ de Números Fuzzy

A representação de um número fuzzy do tipo $L - R$ é feita através da notação:

$$\tilde{a} = (a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R},$$

onde $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ é um número fuzzy, $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ é o conjunto fuzzy sobre \mathbb{R} , a é o valor modal (valor máximo da função de pertinência associada), \underline{a} é o espalhamento à esquerda do valor modal, \bar{a} o espalhamento à direita do valor modal e o termo $L - R$ indica a função representante dos espalhamentos à esquerda e à direita (left e right), respectivamente, do valor modal. A função de pertinência adotada para modelar o número fuzzy é a função triangular. A ilustração gráfica de um número $L - R$ fuzzy pode ser visto na Figura 2.1.

As funções do tipo $L - R$, como em [18] e [12], são denominadas por função shape ($f(\cdot)$) se:

1. f é uma função contínua não-crescente em $[0, \infty)$;
2. $f(0) = 1$;
3. f é estritamente decrescente na parte do domínio onde é positiva.

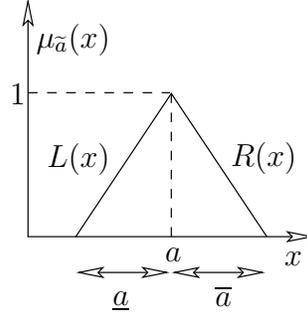


Figura 2.1: Representação gráfica de um número fuzzy do tipo $L - R$.

Em [12] há alguns exemplos de funções com as propriedades acima, como segue:

$$\begin{aligned}
 \text{Função Linear:} & \quad f(x) = \max\{0, 1 - x\}, & x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \\
 \text{Função Exponencial:} & \quad f(x) = e^{-x^p}, & p \geq 1, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \\
 \text{Função Potência:} & \quad f(x) = \max\{0, 1 - x^p\}, & p \geq 1, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \\
 \text{Função Racional:} & \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^p}, & p \geq 1, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.
 \end{aligned}$$

A função de pertinência associada ao número fuzzy na representação $L - R$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\underline{a}}\right) & \text{se } x \leq a \text{ e } \underline{a} > 0 \\ R\left(\frac{x-a}{\bar{a}}\right) & \text{se } x \geq a \text{ e } \bar{a} > 0 \end{cases}$$

Quando $\underline{a} = \bar{a} = 0$ então \tilde{a} é um número crisp; e quando $\underline{a} = -\infty$ e $\bar{a} = \infty$, então $\tilde{a} = \mathbb{R}$.

As operações com números na representação $L - R$, para o caso em que $L - R$ define um número triangular fuzzy, podem ser encontradas em [18], e seguem abaixo. O símbolo \cong representa uma aproximação das operações algébricas envolvidas a fim de manter a linearidade da função triangular.

Sejam $\tilde{a} = (a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R}$ e $\tilde{b} = (b, \underline{b}, \bar{b})_{L-R}$, números triangulares fuzzy.

- Adição: $(a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} \oplus (b, \underline{b}, \bar{b})_{L-R} = (a + b, \underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b})_{L-R}$;
- Simetria: $-(a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} = (-a, \bar{a}, \underline{a})_{R-L}$
- Subtração: $(a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} \ominus (b, \underline{b}, \bar{b})_{R-L} = (a - b, \underline{a} + \bar{b}, \bar{a} + \underline{b})_{L-R}$;
- Multiplicação:
 1. Se $a > 0$ e $b > 0$: $(a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} \odot (b, \underline{b}, \bar{b})_{L-R} \cong (ab, \underline{a}\underline{b} + \underline{b}\underline{a}, \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{a})_{L-R}$;
 2. Se $a > 0$ e $b < 0$: $(a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} \odot (b, \underline{b}, \bar{b})_{R-L} \cong (ab, \underline{a}\underline{b} - \bar{b}\bar{a}, \bar{a}\bar{b} - \underline{b}\underline{a})_{R-L}$;
 3. Se $a < 0$ e $b > 0$: $(a, \underline{a}, \bar{a})_{R-L} \odot (b, \underline{b}, \bar{b})_{L-R} \cong (ab, \underline{b}\underline{a} - \bar{a}\bar{b}, \bar{b}\bar{a} - \underline{a}\underline{b})_{R-L}$;
 4. Se $a < 0$ e $b < 0$: $(a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} \odot (b, \underline{b}, \bar{b})_{L-R} \cong (ab, -\bar{a}\bar{b} - \underline{a}\underline{b}, -\underline{b}\underline{a} - \bar{b}\bar{a})_{R-L}$;
- Multiplicação por escalar:

1. $\forall k > 0, k \in \mathbb{R}: k \odot (a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} = (ka, k\underline{a}, k\bar{a})_{L-R};$
 2. $\forall k < 0, k \in \mathbb{R}: k \odot (a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} = (ka, -k\bar{a}, -k\underline{a})_{R-L};$
- Inverso de um número triangular fuzzy ($a > 0$): $(a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R}^{-1} \cong (a^{-1}, \bar{a}a^{-2}, \underline{a}a^{-2})_{R-L};$
 - Divisão ($a > 0$ e $b > 0$):

$$(a, \underline{a}, \bar{a})_{L-R} \oslash (b, \underline{b}, \bar{b})_{R-L} \cong \left(\frac{a}{b}, \frac{\bar{b}a + \underline{a}b}{b^2}, \frac{\underline{b}a + \bar{a}b}{b^2} \right)_{L-R}.$$

2.1.2 Números Fuzzy como Intervalos de Confiança

Uma outra maneira de representar números fuzzy é usando Intervalos de Confiança, como apresentado em [42]. Seja $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ um número fuzzy qualquer, com uma função de pertinência triangular associada:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - (a - \underline{a})}{\underline{a}} & \text{se } x \in [(a - \underline{a}); a], \\ \frac{-x + (a + \bar{a})}{\bar{a}} & \text{se } x \in [a; (a + \bar{a})], \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Se escrevermos a função inversa de (2.1) na forma de intervalo e usando α -cortes, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\alpha &= [\underline{a}\alpha + (a - \underline{a}), -\bar{a}\alpha + (a + \bar{a})] \in \mathbb{F}(\mathbb{R}), \\ &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde a_1^α e a_2^α representam a parte crescente e decrescente de $\mu_{\tilde{a}}(\cdot)$, respectivamente, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Logo:

$$(\alpha_1 < \alpha_2) \implies ([a_1^{\alpha_2}, a_2^{\alpha_2}] \subset [a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_1}]).$$

Um número ordinário também pode ser escrito como um Intervalo de Confiança. Considere $k = (k, 0, 0) \in \mathbb{R}$, e seja $k_\alpha = [k, k], \forall \alpha \in [0, 1]$. Neste caso, a função de pertinência é substituída pela função característica, dada por [55], como segue:

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1.3 Implementação Computacional dos Números Fuzzy como Intervalos de Confiança

O uso de α -cortes nos permite operar com números fuzzy ponto-a-ponto, ou seja, discretizamos os números fuzzy em n α -cortes, e efetuamos as operações aritméticas em cada α -corte, usando as operações algébricas usuais. Desta forma verificamos ainda as condições impostas pela aritmética fuzzy, permitindo-nos uma implementação mais simples e sem distorções de suas características fuzzy, como aquelas que podem ocorrer usando as operações fuzzy dadas por [18]. Outro motivo para o uso desta representação é devido à facilidade em trabalhar, por exemplo, com números fuzzy trigonométricos e exponenciais.

A construção algorítmica de um número fuzzy como intervalo de confiança, supondo inicialmente que o número é triangular como em (2.2), é dada pelo Algoritmo 2.1.1.

As operações com números fuzzy, como em [42], e seus algoritmos computacionais seguem nas seções subsequentes.

Algoritmo 2.1.1 Construção do Número Fuzzy

Dados $\delta = \frac{1}{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$ (tamanho da discretização); $\alpha = 0$, e a , \underline{a} e \bar{a} constantes.

- 1: **Para** $i = 0$ **até** $i = n$, **faça**
- 2: $a_1[i] = \underline{a} \cdot \alpha + (a - \underline{a})$
- 3: $a_2[i] = -\bar{a} \cdot \alpha + (a + \bar{a})$
- 4: $\alpha = \alpha + \delta$
- 5: **Fim do laço**

Adição

Sejam $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{a} \oplus \tilde{b}}(z) &= \bigvee_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \text{ou,} \\ \tilde{a}_\alpha \oplus \tilde{b}_\alpha &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ &= [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]. \end{aligned}$$

As seguintes propriedades são válidas:

1. Comutativa: $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = \tilde{b} \oplus \tilde{a}$;
2. Associativa: $(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) \oplus \tilde{c} = \tilde{a} \oplus (\tilde{b} \oplus \tilde{c})$;
3. Se existe um elemento neutro à direita e à esquerda do número fuzzy, este elemento é o número ordinário 0:

$$\tilde{a} \oplus 0 = 0 \oplus \tilde{a} = \tilde{a};$$

4. A imagem é não simétrica:

$$\tilde{a} \oplus \tilde{a}^- = \tilde{a}^- \oplus \tilde{a} \neq 0,$$

onde $\tilde{a}_\alpha^- = [-a_2^\alpha, -a_1^\alpha]$.

O Algoritmo 2.1.2 executa a soma entre dois números fuzzy.

Algoritmo 2.1.2 Adição de Números Fuzzy

Dados $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construídos de acordo com o Algoritmo 2.1.1.

- 1: **Para** $i = 0$ **até** $i = n$, **faça**
- 2: $soma_1[i] = a_1[i] + b_1[i]$
- 3: $soma_2[i] = a_2[i] + b_2[i]$
- 4: **Fim do laço**

Um outro caso a considerar é a soma entre um número fuzzy e um número ordinário, apresentado no Algoritmo 2.1.3.

Algoritmo 2.1.3 Adição de Número Fuzzy com Número Ordinário

Dados $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construído de acordo com o Algoritmo 2.1.1, e $k \in \mathbb{R}$.

- 1: **Para** $i = 0$ **até** $i = n$, **faça**
- 2: $soma_1[i] = k + a_1[i]$
- 3: $soma_2[i] = k + a_2[i]$
- 4: **Fim do laço**

Subtração

Considere $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{a} \ominus \tilde{b}}(z) &= \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \text{ou,} \\ \tilde{a}_\alpha \ominus \tilde{b}_\alpha &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] - [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ &= [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha]. \end{aligned}$$

Ao contrário da adição, a subtração não é associativa nem comutativa. O Algoritmo 2.1.4 efetua tal operação.

Algoritmo 2.1.4 Subtração de Números Fuzzy

Dados $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construídos de acordo com o Algoritmo 2.1.1.

- 1: **Para** $i = 0$ **até** $i = n$, **faça**
- 2: $sub_1[i] = a_1[i] - b_2[i]$
- 3: $sub_2[i] = a_2[i] - b_1[i]$
- 4: **Fim do laço**

O Algoritmo 2.1.5 apresenta a subtração entre um número fuzzy e um número ordinário.

Algoritmo 2.1.5 Subtração de Número Fuzzy com Número Ordinário

Dados $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construído de acordo com o Algoritmo 2.1.1, e $k \in \mathbb{R}$.

- 1: **Para** $i = 0$ **até** $i = n$, **faça**
- 2: $sub_1[i] = k - a_2[i]$
- 3: $sub_2[i] = k - a_1[i]$
- 4: **Fim do laço**

Multiplicação

Sejam $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\mu_{\tilde{a} \odot \tilde{b}}(z) = \bigvee_{z=x \cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),$$

ou na forma de Intervalos de Confiança (Tabela 2.1), onde usaremos a seguinte notação: $\tilde{a} = \tilde{a}_\alpha$, conseqüentemente, $\tilde{a} = [a_1, a_2]$. A prova para cada um dos casos apresentados na Tabela 2.1 está em [42].

	\tilde{a}	\tilde{b}	$\tilde{a} \odot \tilde{b} = [a_1, a_2] \odot [b_1, b_2]$
1	$0 \leq a_1 \leq a_2$	$0 \leq b_1 \leq b_2$	$[a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$
2	$0 \leq a_1 \leq a_2$	$b_1 \leq 0 \leq b_2$	$[a_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$
3	$0 \leq a_1 \leq a_2$	$b_1 \leq b_2 \leq 0$	$[a_2 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2]$
4	$a_1 \leq 0 \leq a_2$	$0 \leq b_1 \leq b_2$	$[a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_2]$
5	$a_1 \leq 0 \leq a_2$	$b_1 \leq 0 \leq b_2$	$[\min(a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1), \max(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)]$
6	$a_1 \leq 0 \leq a_2$	$b_1 \leq b_2 \leq 0$	$[a_2 \cdot b_1, a_1 \cdot b_1]$
7	$a_1 \leq a_2 \leq 0$	$0 \leq b_1 \leq b_2$	$[a_1 \cdot b_2, a_2 \cdot b_1]$
8	$a_1 \leq a_2 \leq 0$	$b_1 \leq 0 \leq b_2$	$[a_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_1]$
9	$a_1 \leq a_2 \leq 0$	$b_1 \leq b_2 \leq 0$	$[a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_1]$

Tabela 2.1: Multiplicação de Intervalos de Confiança.

A Tabela 2.1 pode ser resumida no seguinte Intervalo de Confiança, como em [55]:

$$[a_1, a_2] \odot [b_1, b_2] = [\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2), \max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)]. \quad (2.4)$$

Para a multiplicação, as seguintes propriedades se verificam:

1. Comutativa: $\tilde{a} \odot \tilde{b} = \tilde{b} \odot \tilde{a}$;
2. Associativa: $(\tilde{a} \odot \tilde{b}) \odot \tilde{c} = \tilde{a} \odot (\tilde{b} \odot \tilde{c})$;
3. Se existe um elemento neutro à direita e à esquerda do número fuzzy, este elemento é o número ordinário 1:

$$\tilde{a} \odot 1 = 1 \odot \tilde{a} = \tilde{a};$$

4. Se representarmos o inverso de \tilde{a} por \tilde{a}^{-1} , ele será não-simétrico:

$$\tilde{a} \odot \tilde{a}^{-1} = \tilde{a}^{-1} \odot \tilde{a} \neq 1,$$

como podemos verificar através dos resultados apresentados na Tabela 2.2.

Casos	Intervalo
1 $0 < a_1 \leq a_2$	$[a_1, a_2]^{-1} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right]$
2 $0 = a_1 < a_2$	$[a_1, a_2]^{-1} = \left[\frac{1}{a_2}, \infty \right)$
3 $0 = a_1 = a_2$	um ponto que tende para ∞
4 $a_1 \leq a_2 < 0$	$[a_1, a_2]^{-1} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right]$
5 $a_1 < a_2 = 0$	$[a_1, a_2]^{-1} = \left(-\infty, \frac{1}{a_1} \right]$
6 $a_1 \leq 0 \leq a_2$	$[a_1, a_2]^{-1} = \left(-\infty, \frac{1}{a_1} \right] \cup \left[\frac{1}{a_2}, \infty \right)$

Tabela 2.2: Inverso de um número fuzzy \tilde{a} .

Algoritmo 2.1.6 Multiplicação de Números Fuzzy

Dados $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construídos de acordo com o Algoritmo 2.1.1.

- 1: **Para** $i = 0$ **até** $i = n$, **faça**
- 2: $d_{1,1}[i] = a_1[i] \cdot b_1[i]$
- 3: $d_{1,2}[i] = a_1[i] \cdot b_2[i]$
- 4: $d_{2,1}[i] = a_2[i] \cdot b_1[i]$
- 5: $d_{2,2}[i] = a_2[i] \cdot b_2[i]$
- 6: $mult_1[i] = \min(d_{1,1}, d_{1,2}, d_{2,1}, d_{2,2})$
- 7: $mult_2[i] = \max(d_{1,1}, d_{1,2}, d_{2,1}, d_{2,2})$
- 8: **Fim do laço**

Através da equação (2.4), elaboramos o Algoritmo 2.1.6, para a multiplicação entre números fuzzy.

Como nas demais operações, também pode ocorrer a multiplicação de um número fuzzy por um número ordinário qualquer. Assim, considere os seguinte casos:

1. $\forall k > 0, k \in \mathbb{R}: k \cdot [a_1, a_2] = [k \cdot a_1, k \cdot a_2];$
2. $\forall k < 0, k \in \mathbb{R}: k \cdot [a_1, a_2] = [k \cdot a_2, k \cdot a_1];$
3. Para $k = 0: k \cdot [a_1, a_2] = [0, 0].$

O Algoritmo 2.1.7 ilustra tal situação.

Algoritmo 2.1.7 Multiplicação de Número Fuzzy por Número Ordinário

Dados \tilde{a} , construído de acordo com o Algoritmo 2.1.1 e $k \in \mathbb{R}$.

- 1: **Para** $i = 0$ **até** $i = n$, **faça**
- 2: $d_1[i] = a_1[i] \cdot k$
- 3: $d_2[i] = a_2[i] \cdot k$
- 4: $mult_1[i] = \min(d_1, d_2)$
- 5: $mult_2[i] = \max(d_1, d_2)$
- 6: **Fim do laço**

Divisão

Sejam $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{a} \oslash \tilde{b}}(z) &= \bigvee_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad \text{ou,} \\ \tilde{a}_\alpha \oslash \tilde{b}_\alpha &= [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \oslash [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \\ &= \left[\frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Note que a divisão é a multiplicação pelo inverso, e estamos considerando apenas o caso 1 da Tabela 2.2. Uma outra maneira de escrever o Intervalo de Confiança é usando a abordagem encontrada em

[55]:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] \odot [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = \left[\min \left(\frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}, \frac{a_1^\alpha}{b_1^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_2^\alpha} \right), \max \left(\frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}, \frac{a_1^\alpha}{b_1^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_2^\alpha} \right) \right]. \quad (2.5)$$

Analogamente à subtração, a divisão não é associativa nem comutativa. Os Algoritmos 2.1.8, 2.1.9 e 2.1.10 apresentam a implementação da equação (2.5), a divisão entre números fuzzy e ordinários, e entre um número ordinário e um número fuzzy, respectivamente.

Algoritmo 2.1.8 Divisão de Números Fuzzy

Dados $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construídos de acordo com o Algoritmo 2.1.1.

- 1: **Para** $i = 0$ até $i = n$, **faça**
 - 2: **Se** $b_1[i] \neq 0$ e $b_2[i] \neq 0$, **então**
 - 3: $d_{1,1}[i] = \frac{a_1[i]}{b_1[i]}$
 - 4: $d_{1,2}[i] = \frac{a_1[i]}{b_2[i]}$
 - 5: $d_{2,1}[i] = \frac{a_2[i]}{b_1[i]}$
 - 6: $d_{2,2}[i] = \frac{a_2[i]}{b_2[i]}$
 - 7: $div_1[i] = \min(d_{1,1}, d_{1,2}, d_{2,1}, d_{2,2})$
 - 8: $div_2[i] = \max(d_{1,1}, d_{1,2}, d_{2,1}, d_{2,2})$
 - 9: **Caso contrário**
 - 10: Erro! Divisão por zero!
 - 11: **Fim do condicional**
 - 12: **Fim do laço**
-

Algoritmo 2.1.9 Divisão de Números Fuzzy por Números Ordinários

Dados $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construídos de acordo com o Algoritmo 2.1.1, e $k \in \mathbb{R}$.

- 1: **Para** $i = 0$ até $i = n$, **faça**
 - 2: **Se** $k \neq 0$, **então**
 - 3: $d_1[i] = \frac{a_1[i]}{k}$
 - 4: $d_2[i] = \frac{a_2[i]}{k}$
 - 5: $div_1[i] = \min(d_1, d_2)$
 - 6: $div_2[i] = \max(d_1, d_2)$
 - 7: **Caso contrário**
 - 8: Erro! Divisão por zero!
 - 9: **Fim do condicional**
 - 10: **Fim do laço**
-

Algoritmo 2.1.10 Divisão de Números Ordinários por Números Fuzzy

Dados $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construídos de acordo com o Algoritmo 2.1.1, e $k \in \mathbb{R}$.

- 1: **Para** $i = 0$ **até** $i = n$, **faça**
 - 2: **Se** $a_1[1] \neq 0$ e $a_2[i] \neq 0$, **então**
 - 3: $d_1[i] = \frac{k}{a_1[i]}$
 - 4: $d_2[i] = \frac{k}{a_2[i]}$
 - 5: $div_1[i] = \min(d_1, d_2)$
 - 6: $div_2[i] = \max(d_1, d_2)$
 - 7: **Caso contrário**
 - 8: Erro! Divisão por zero!
 - 9: **Fim do condicional**
 - 10: **Fim do laço**
-

Potências Inteiras de Números Fuzzy

Sejam $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ e $n \in \mathbb{N}$ ($n > 0$):

$$\tilde{a}_\alpha^n = \underbrace{\tilde{a}_\alpha \odot \tilde{a}_\alpha \odot \dots \odot \tilde{a}_\alpha}_{n \text{ vezes}}. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) pode ser simplificada se considerarmos os casos apresentados na Tabela 2.3, para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, os quais utilizamos na implementação do Algoritmo 2.1.11.

$\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$		n	$[a_1, a_2]^n$
$a_1 \leq a_2 \leq 0$		par	$[a_2^n, a_1^n]$
		ímpar	$[a_1^n, a_2^n]$
$a_1 \leq 0 \leq a_2$	$ a_1 \leq a_2 $		$[a_1 a_2^{n-1}, a_2^n]$
	$ a_1 \geq a_2 $	par	$[a_1^{n-1} a_2, a_1^n]$
		ímpar	$[a_1^n, a_1^{n-1} a_2]$
$0 \leq a_1 \leq a_2$			$[a_1^n, a_2^n]$

Tabela 2.3: Estudo dos casos para a potência de Números Fuzzy.

Raiz Quadrada de Números Fuzzy

Para efetuar a raiz quadrada de um número fuzzy $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, consideramos apenas o caso $a_1 \geq 0$ e $a_2 \geq 0$, onde:

$$\sqrt{\tilde{a}} = \sqrt{\tilde{a}^\alpha} = \left[\sqrt{a_1^\alpha}, \sqrt{a_2^\alpha} \right].$$

Embora sua implementação algorítmica seja imediata, nos algoritmos computacionais em que eventualmente este caso possa ocorrer, optamos pela defuzzificação deste número. O processo de defuzzificação segue na seção 2.2 deste capítulo, na comparação entre números fuzzy.

Algoritmo 2.1.11 Potências Inteiras de Números Fuzzy

Dados $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, construídos de acordo com o Algoritmo 2.1.1, e $n \in \mathbb{N}$ ($n > 0$).

- 1: **Para** $i = 0$ até $i = n$, **faça**
- 2: **Se** $(a_1[1] \leq a_2[i])$ e $(a_2[i] \leq 0)$, **então**
- 3: **Se** $(n \bmod 2) = 0$, **então**
- 4: $p_1[i] = a_2[i]^n$
- 5: $p_2[i] = a_1[i]^n$
- 6: **Caso contrário**
- 7: $p_1[i] = a_1[i]^n$
- 8: $p_2[i] = a_2[i]^n$
- 9: **Fim do condicional**
- 10: **Fim do condicional**
- 11: **Se** $(a_1[i] \leq 0)$ e $(a_2[i] \geq 0)$ **então**
- 12: **Se** $|a_1[i]| \leq |a_2[i]|$, **então**
- 13: $p_1[i] = a_1[i]a_2[i]^{n-1}$
- 14: $p_2[i] = a_2[i]^n$
- 15: **Caso contrário Se** $(n \bmod 2) = 0$, **então**
- 16: $p_1[i] = a_1[i]^{n-1}a_2[i]$
- 17: $p_2[i] = a_1[i]^n$
- 18: **Caso contrário**
- 19: $p_1[i] = a_1[i]^n$
- 20: $p_2[i] = a_1[i]^{n-1}a_2[i]$
- 21: **Fim do condicional**
- 22: **Fim do condicional**
- 23: **Se** $a_1[i] \geq 0$ e $a_1[i] \leq a_2[i]$, **então**
- 24: $p_1[i] = a_1[i]^n$
- 25: $p_2[i] = a_2[i]^n$
- 26: **Fim do condicional**
- 27: **Fim do laço**

Generalização de Funções com Números Fuzzy

Em problemas de Programação Não-Linear podemos encontrar situações envolvendo funções trigonométricas e exponenciais, tais como: $f(x) = \sin ax$, $f(x) = \cos ax$, $f(x) = \exp ax$, entre outras, para $a \in \mathbb{R}$. A abordagem aqui apresentada para números fuzzy nos permite calcular estas funções com coeficientes fuzzy ($\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$), por exemplo, para $f(\tilde{a}; x) = \sin \tilde{a}x$, $f(\tilde{a}; x) = \cos \tilde{a}x$ e $f(\tilde{a}; x) = \exp \tilde{a}x$.

A extensão algorítmica para estas funções é imediata, pois:

$$\begin{aligned} f(\tilde{a}; x) &= \text{sen } \tilde{a}x \\ f^\alpha(\tilde{a}; x) &= \text{sen } \tilde{a}^\alpha x \\ &= [\text{sen } a_1^\alpha x; \text{sen } a_2^\alpha x]. \end{aligned}$$

2.2 Comparação de Números Fuzzy

Os métodos para comparação de números fuzzy apresentados em F. Choobineh e H. Li. [13], denotado por Comparação CL e os índices de ordenação de Yager, apresentados em [5], são abordados.

Na comparação CL há uma adaptação exclusiva para números fuzzy triangulares, ou seja, números na forma $L - R$. Já os índices de ordenação de Yager podem ser usados nos dois casos aqui discutidos: números $L - R$ ou números na forma de intervalos de confiança. Assim, apresentamos inicialmente, a comparação CL e, posteriormente, os índices de ordenação de Yager.

2.2.1 Comparação CL

Seja $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ um número fuzzy, $\mu_{\tilde{a}}(x)$ sua função de pertinência, $h_{\tilde{a}} = \max \mu_{\tilde{a}}(x)$ a altura de \tilde{a} e $\tilde{a}_\alpha(x) = \{x \text{ tal que } x \in \mathbb{R}, \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$, o conjunto α -corte de $\mu_{\tilde{a}}(x)$.

Sejam $L_{\tilde{a}_\alpha}$ e $R_{\tilde{a}_\alpha}$ funções à esquerda e à direita de $\tilde{a}_\alpha(x)$, respectivamente, da seguinte forma:

$$L_{\tilde{a}_\alpha}(x) = \min\{x \text{ tal que } x \in \tilde{a}_\alpha(x)\}, \quad 0 \leq \alpha \leq h_{\tilde{a}},$$

e

$$R_{\tilde{a}_\alpha}(x) = \max\{x \text{ tal que } x \in \tilde{a}_\alpha(x)\}, \quad 0 \leq \alpha \leq h_{\tilde{a}}.$$

Definição 2.2.1. A função de pertinência de uma barreira maximizante crisp, $\mathbb{U}_{\tilde{a}}$, para o conjunto fuzzy \tilde{a} é definida como:

$$\mu_{\mathbb{U}_{\tilde{a}}}(x) = \frac{h_{\tilde{a}}}{u},$$

onde $\max_{\alpha}\{R_{\tilde{a}_\alpha}(x)\} = u^* \leq u < \infty$.

Definição 2.2.2. A função de pertinência de uma barreira minimizante crisp, $\mathbb{L}_{\tilde{a}}$, para o conjunto fuzzy \tilde{a} é definida como:

$$\mu_{\mathbb{L}_{\tilde{a}}}(x) = \frac{h_{\tilde{a}}}{l},$$

onde $l \leq l^* = \min_{\alpha}\{L_{\tilde{a}_\alpha}(x)\}$.

Assim, o índice de ordenação de conjuntos fuzzy (\tilde{a}), proposto por [13], é dado pela equação:

$$F(\tilde{a}) = \frac{1}{2} \left[h_{\tilde{a}} + \frac{D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{U}_{\tilde{a}}}) - D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{L}_{\tilde{a}}})}{u - l} \right].$$

O termo $D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{U}_{\tilde{a}}})$ representa a área entre $R_{\tilde{a}_\alpha}(x)$ e $\mathbb{U}_{\tilde{a}}(x)$, e o termo $D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{L}_{\tilde{a}}})$ a área entre $L_{\tilde{a}_\alpha}(x)$ e $\mathbb{L}_{\tilde{a}}(x)$. Ou seja:

$$D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{U}_{\tilde{a}}}) = \int_0^{h_{\tilde{a}}} [u - R_{\tilde{a}_\alpha}(x)] d\alpha,$$

e

$$D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{L}_{\tilde{a}}}) = \int_0^{h_{\tilde{a}}} [L_{\tilde{a}_\alpha}(x) - l] d\alpha.$$

Para o caso onde a função de pertinência é do tipo triangular (ou $L-R$), ou seja, $\mu_{\tilde{a}}(x) = (x; a, \underline{a}, \bar{a})$ sendo a o valor modal, \underline{a} e \bar{a} os espalhamentos à esquerda e à direita do valor modal, as equações $D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{U}_{\tilde{a}}})$ e $D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{L}_{\tilde{a}}})$ são dadas pelas equações (2.7a) e (2.7b), respectivamente. Um exemplo ilustrativo para esta comparação é dado pela Figura 2.2.

$$D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{U}_{\tilde{a}}}) = u - a - \frac{\bar{a}}{2}, \tag{2.7a}$$

e

$$D(\mu_{\tilde{a}}, \mu_{\mathbb{L}_{\tilde{a}}}) = a - l - \frac{a}{2}. \tag{2.7b}$$

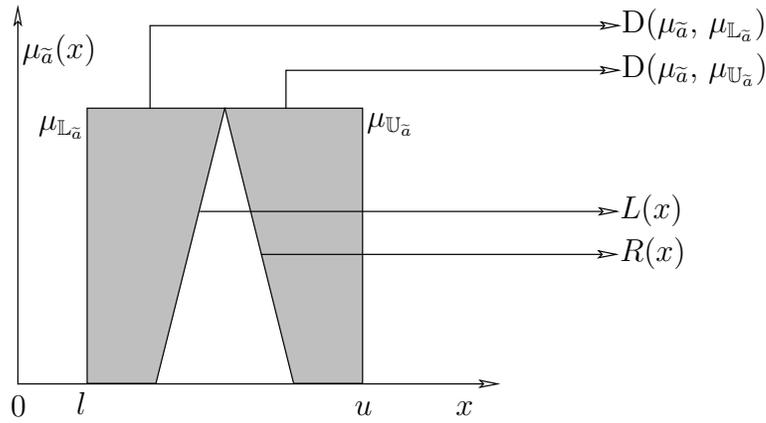


Figura 2.2: Comparação CL.

Assim, dizemos que $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, se $F(\tilde{a}) \leq F(\tilde{b})$.

2.2.2 Índices de Ordenação de Yager

Em [5], G. Bortolan e R. Degani apresentam uma revisão sobre os métodos de ordenação de conjuntos fuzzy. Destes métodos, escolhemos os índices de ordenação de Yager para utilizarmos em nossos algoritmos de programação não-linear com parâmetros fuzzy, na comparação entre números fuzzy.

Os índices que apresentamos a seguir condensam as informações de um número fuzzy em um número crisp, ou seja, dizemos que $\tilde{a} \lesssim \tilde{b}$ se $F(\tilde{a}) \leq F(\tilde{b})$.

O primeiro índice de Yager calcula o centro de gravidade do número fuzzy:

$$F_1(\tilde{a}) = \frac{\int_0^1 \alpha \tilde{a}_\alpha d\alpha}{\int_0^1 \tilde{a}_\alpha d\alpha}.$$

Usamos aqui a fórmula do trapézio repetido, como em [14], para o cálculo das integrais de F_1 .

O segundo índice de Yager é dado por:

$$F_2(\tilde{a}) = \max_{\alpha \in [0,1]} \min_{\alpha=x} \{\alpha, \mu_{\tilde{a}}(x)\}.$$

Pela Figura 2.3, vemos que o cálculo de F_2 corresponde ao x responsável pela intersecção de maior valor entre a reta $\alpha = x$ e $\mu_{\tilde{a}}(x)$.

O terceiro índice de Yager calcula o valor médio de \tilde{a}_α , dado por:

$$F_3(\tilde{a}) = \int_0^1 M(\tilde{a}_\alpha) d\alpha.$$

Como mostra a Figura 2.3, F_3 envolve o cálculo da área de um retângulo (área $_{\square}$ = base · altura), sendo a altura igual a 1 pois estamos considerando que os números fuzzy são normalizados, e a base como sendo a distância entre d ($d \leq \underline{a}$) e o valor modal do número fuzzy \tilde{a} . Por exemplo, na comparação entre dois números fuzzy, \tilde{a} e \tilde{b} , temos $d = \min\{\underline{a}, \underline{b}\}$.

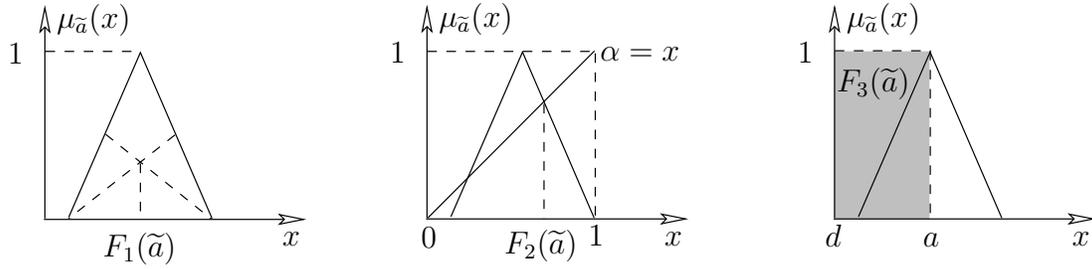


Figura 2.3: Índices de ordenação de Yager.

Na Figura 2.4 detalhamos a comparação entre dois números fuzzy para o segundo e terceiro índices de Yager.

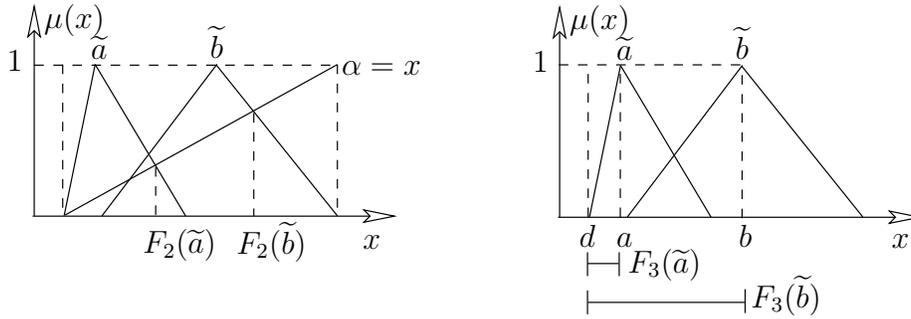


Figura 2.4: Segundo e Terceiro Índice de ordenação de Yager.

Capítulo 3

Convexidade Fuzzy

Introdução

A convexidade fuzzy pode ser aqui abordada de duas maneiras: (i) nos conjuntos de pertinência (funções de pertinência), e (ii) nas funções com parâmetros fuzzy.

Na seção 3.1 uma revisão sobre convexidade de conjuntos de pertinência é apresentada, baseando-se nos artigos de Zadeh [71], E. Ammar e J. Metz [2], R. Lowen [48] e Y.-M. Liu [47].

Na seção 3.2, alguns resultados apresentados em [18], [21] e [40], entre outros, são usados na extensão da teoria ordinária de funções convexas para funções convexas com parâmetros fuzzy.

3.1 Conjunto Convexo Fuzzy

Em [2], a caracterização de conjuntos convexas fuzzy diferencia-se daquela atribuída por muitos autores, entre eles [18, 47, 48, 55, 71], seguindo aquela aplicada na teoria ordinária para função quasi-côncava.

Considere inicialmente algumas definições apresentadas por [2], [47], [48] e [71]:

1. [47, 48] O envoltório convexo de um conjunto fuzzy \tilde{A} é dado por:

$$\begin{aligned} \text{conv}\mu_{\tilde{A}}(x) &= \inf\{v(x) \geq \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ tal que } v(x) \text{ é convexo fuzzy}\}, \\ &= \text{menor conjunto convexo fuzzy contendo } \mu_{\tilde{A}}(x). \end{aligned}$$

2. [71] A combinação convexa de conjuntos fuzzy \tilde{A} e \tilde{B} , expressa pelas suas respectivas funções de pertinência $\mu_{\tilde{A}}(\cdot)$, $\mu_{\tilde{B}}(\cdot)$, e $\lambda \in [0, 1]$, denotada por $(\tilde{A}, \tilde{B}; \lambda)$, define-se como:

$$\mu_{(\tilde{A}, \tilde{B}; \lambda)}(x) = \lambda\mu_{\tilde{A}}(x) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{B}}(x).$$

3. [2] Um conjunto fuzzy \tilde{A} é convexo se

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda\mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2),$$

onde $\forall x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}}) = \{x \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ e $\lambda \in [0, 1]$.

4. [2] O hipografo fuzzy de $\mu(\cdot)$, denotado por $\text{hip}(\mu)$, define-se como: $\text{hip}(\mu) = \{(x, t) \text{ tal que } x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, \mu(x))\}$.

5. [47, 48] Um conjunto convexo fuzzy \tilde{A} é um cone convexo fuzzy se, e somente se, (i) \tilde{A} é convexo e (ii) para cada $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}_+$, $\mu_{\tilde{A}}(ax) = \mu_{\tilde{A}}(x)$. Note que, se um conjunto fuzzy \tilde{A} satisfaz apenas a segunda condição, ele é chamado apenas de cone fuzzy.

Teorema 3.1.1. [2] Um conjunto fuzzy \tilde{A} é um conjunto convexo fuzzy se, e somente se, $\text{hip}(\mu_{\tilde{A}})$ é convexo fuzzy.

Demonstração 1. [2] (\Rightarrow) Suponha que $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$ e $(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)) \in \text{hip}(\mu_{\tilde{A}})$. Devido a convexidade de $\text{hip}(\mu_{\tilde{A}})$, temos que:

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2)) \in \text{hip}(\mu_{\tilde{A}}),$$

para cada $\lambda \in [0, 1]$. Então:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2),$$

para cada $\lambda \in [0, 1]$.

(\Leftarrow) Seja $\mu_{\tilde{A}}(\cdot)$ um conjunto convexo fuzzy e $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \text{hip}(\mu_{\tilde{A}})$. Como $\mu_{\tilde{A}}(\cdot)$ é um conjunto convexo fuzzy, para cada $\lambda \in [0, 1]$ e $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$ temos:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2), \\ &\geq \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2, \end{aligned}$$

então:

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \in \text{hip}(\mu_{\tilde{A}}).$$

□

Lema 3.1.1. Seja \tilde{A} um conjunto convexo fuzzy, e seja $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função de pertinência convexa. Então o conjunto α -corte de \tilde{A} , $\tilde{A}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, onde $\alpha \in [0, 1]$, é um conjunto convexo.

Demonstração 2. Sejam $x_1, x_2 \in \tilde{A}_\alpha$. Assim, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $\mu_{\tilde{A}}(x_1) \geq \alpha$ e $\mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \alpha$. Considere agora $\lambda \in (0, 1)$ e $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Pela convexidade de \tilde{A} e de $\mu_{\tilde{A}}$, temos:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$$

Assim, $x \in \tilde{A}_\alpha$ e, portanto, \tilde{A}_α é convexo. □

Teorema 3.1.2. [71] Se \tilde{A} e \tilde{B} são conjuntos convexos fuzzy, então a sua intersecção também é um conjunto convexo fuzzy.

Demonstração 3. Sejam \tilde{A} e \tilde{B} conjuntos convexos fuzzy. Tomemos o seguinte conjunto \tilde{C} , tal que $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$, então, $\forall x_1, x_2 \in \tilde{C}$, isto implica que $x_1, x_2 \in \tilde{A}$ e $x_1, x_2 \in \tilde{B}$. Como \tilde{A} e \tilde{B} são convexos, temos:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \lambda \mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2), \\ \mu_{\tilde{B}}(x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \lambda \mu_{\tilde{B}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{B}}(x_2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Então $\mu_{\tilde{C}}(\cdot)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{C}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= \min [\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2), \mu_{\tilde{B}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)] \\ &\geq \min [\lambda \mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2), \lambda \mu_{\tilde{B}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{B}}(x_2)]. \end{aligned}$$

Lembrando que $\mu_{\tilde{C}}(x) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$, e portanto vale $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{C}}(x)$ e $\mu_{\tilde{B}}(x) \geq \mu_{\tilde{C}}(x)$, então qualquer que seja o resultado do mínimo acima teremos:

$$\begin{aligned} \min [\lambda \mu_{\tilde{A}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{A}}(x_2), \lambda \mu_{\tilde{B}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{B}}(x_2)] &\geq \\ &\geq \lambda \mu_{\tilde{C}}(x_1) + (1 - \lambda)\mu_{\tilde{C}}(x_2). \end{aligned}$$

Portanto, \tilde{C} é um conjunto convexo. □

3.1.1 Conjunto Quasi-Convexo Fuzzy

Nesta seção abordaremos conjuntos quasi-convexos fuzzy, seguindo a definição de E. Ammar e J. Metz em [2].

Um conjunto fuzzy \tilde{A} é quasi-convexo se:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)],$$

para cada $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Teorema 3.1.3. [2] Um conjunto \tilde{A} é quasi-convexo se, e somente se, os conjuntos \tilde{A}_α ($\tilde{A}_\alpha(x) = \{x \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$) são convexos para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração 4. [2] Seja \tilde{A} um conjunto quasi-convexo fuzzy. Se \tilde{A}_α é único ou vazio, então \tilde{A} é convexo fuzzy.

(\Rightarrow) Suponha que $x_1, x_2 \in \tilde{A}_\alpha$, ou seja, $\mu(x_1) \geq \alpha$ e $\mu(x_2) \geq \alpha$, para $\alpha \in [0, 1]$. Então $\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \alpha$. Como $\mu_{\tilde{A}}(\cdot)$ é um conjunto quasi-convexo fuzzy, vale a desigualdade:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \alpha,$$

$\forall \lambda \in [0, 1]$. Assim todos os pontos da forma $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ pertencem a \tilde{A}_α , então \tilde{A}_α é convexo fuzzy.

(\Leftarrow) Suponha que \tilde{A}_α é convexo fuzzy. Sejam, $\forall x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$ e $\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x_2)$, para $\alpha \in [0, 1]$. Então $x_1, x_2 \in \tilde{A}_\alpha$, e pela convexidade de \tilde{A}_α segue que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \tilde{A}_\alpha$, $\forall \lambda \in [0, 1]$. Logo:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \alpha = \mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x_2).$$

□

Teorema 3.1.4. [71] A intersecção de dois conjuntos quasi-convexos fuzzy \tilde{A} e \tilde{B} é um conjunto quasi-convexo fuzzy.

Demonstração 5. [71] Seja $C = \tilde{A} \cap \tilde{B}$. Então:

$$\mu_C(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \min[\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2), \mu_{\tilde{B}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)].$$

Como \tilde{A} e \tilde{B} são conjuntos quasi-convexos fuzzy:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)], \\ \mu_{\tilde{B}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \min[\mu_{\tilde{B}}(x_1), \mu_{\tilde{B}}(x_2)] \end{aligned}$$

e então:

$$\begin{aligned} \mu_C(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \min [[\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x_2)], [\mu_{\tilde{B}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_2)]] , \\ &\geq \min [[\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_1)], [\mu_{\tilde{A}}(x_2) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_2)]] , \end{aligned}$$

e assim:

$$\mu_C(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min[\mu_C(x_1), \mu_C(x_2)].$$

□

Outras definições baseadas em [71] referentes a conjuntos quasi-convexos fuzzy seguem:

1. Um conjunto fuzzy \tilde{A} é estritamente quasi-convexo se, e somente se:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)],$$

$$\forall x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}}), x_1 \neq x_2, \lambda \in (0, 1].$$

2. Um conjunto fuzzy \tilde{A} é fortemente quasi-convexo se, e somente se:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)],$$

$$\forall x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}}), x_1 \neq x_2, \lambda \in (0, 1).$$

3. Sejam \tilde{A} e \tilde{B} conjuntos fuzzy estritamente (fortemente) quasi-convexos, então a sua intersecção será um conjunto estritamente (fortemente) quasi-convexo.
4. Fortemente quasi-convexo **não** implica estritamente quasi-convexo, e vice-versa.

3.1.2 Relações entre Convexidade de Conjuntos Fuzzy

Nesta seção apresentamos um teorema, proposto por [2], para ilustrar a relação de conjuntos quasi-convexos e convexos fuzzy.

Dizemos que um conjunto fuzzy \tilde{A} é convexo, estritamente convexo, quasi-convexo ou fortemente quasi-convexo por transformação, se, e somente se existir uma função monótona estritamente crescente $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$ que satisfaça as seguintes condições:

- Para cada $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$ e $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \geq \lambda f(\mu_{\tilde{A}}(x_1)) + (1 - \lambda)f(\mu_{\tilde{A}}(x_2));$$

- Para cada $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$, $x_1 \neq x_2$ e $\lambda \in (0, 1)$,

$$f(\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) > \lambda f(\mu_{\tilde{A}}(x_1)) + (1 - \lambda)f(\mu_{\tilde{A}}(x_2));$$

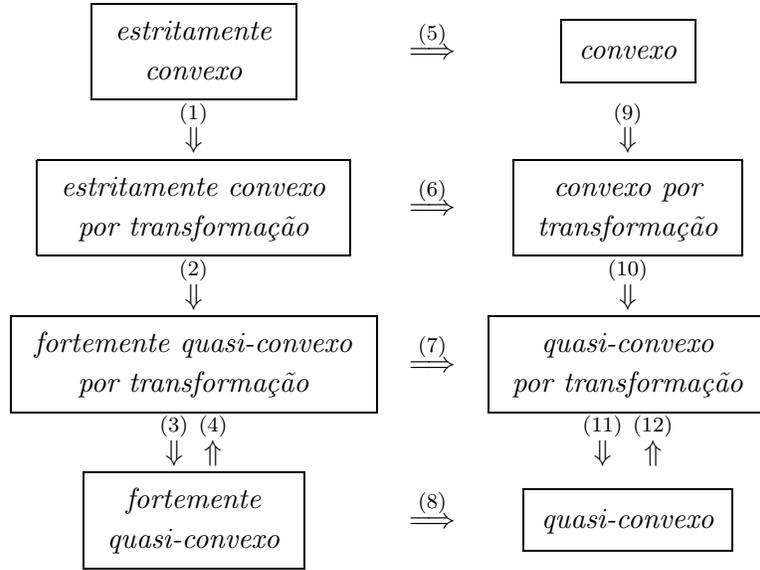
- Para cada $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$ e $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \geq \min[f(\mu_{\tilde{A}}(x_1)), f(\mu_{\tilde{A}}(x_2))];$$

- Para cada $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$, $x_1 \neq x_2$ e $\lambda \in (0, 1)$,

$$f(\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) > \min[f(\mu_{\tilde{A}}(x_1)), f(\mu_{\tilde{A}}(x_2))].$$

Teorema 3.1.5. [2] *No seguinte diagrama as flechas denotam as implicações entre os atributos dos conjuntos fuzzy:*



Demonstração 6. [2] As implicações (1), (4), (9) e (12) seguem da função f identidade. As implicações (5), (6), (7) e (8) obtêm-se diretamente das correspondentes definições. As demais implicações seguem abaixo:

- (2), (3): Como f é uma função monótona estritamente crescente, para cada $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$ com $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0, 1)$, temos:

$$f(\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) > \lambda f(\mu_{\tilde{A}}(x_1)) + (1 - \lambda)f(\mu_{\tilde{A}}(x_2)) \geq f(\mu_{\tilde{A}}(x_1)) \wedge f(\mu_{\tilde{A}}(x_2)),$$

e

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x_2).$$

- (10), (11): Analogamente, para cada $x_1, x_2 \in \text{supp}(\mu_{\tilde{A}})$ com $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in [0, 1]$, temos:

$$f(\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \geq \lambda f(\mu_{\tilde{A}}(x_1)) + (1 - \lambda)f(\mu_{\tilde{A}}(x_2)) \geq f(\mu_{\tilde{A}}(x_1)) \wedge f(\mu_{\tilde{A}}(x_2)),$$

e

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}}(x_2).$$

□

Nas seções seguintes resultados referentes a conjuntos fuzzy são apresentados.

3.1.3 Conjunto Fuzzy Limitado

Considere as seguintes definições dadas por Zadeh [71]:

1. Um conjunto fuzzy \tilde{A} se diz limitado se, e somente se, os conjuntos \tilde{A}_α são limitados, $\forall \alpha > 0$, isto é, para cada $\alpha > 0$ existe um raio $R(\alpha)$ finito, tal que $\|x\| \leq R(\alpha)$, $\forall x \in \tilde{A}_\alpha$;
2. Se \tilde{A} é um conjunto limitado, então para cada $\epsilon > 0$ existe um hiperplano¹ H tal que $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \epsilon$, para todo x no lado de H que não contém a origem.

¹Um hiperplano $H \in \mathbb{R}^n$ é um conjunto de pontos da forma: $H = \{x : c^T x = \kappa\}$, onde $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ e $\kappa \in \mathbb{R}$.

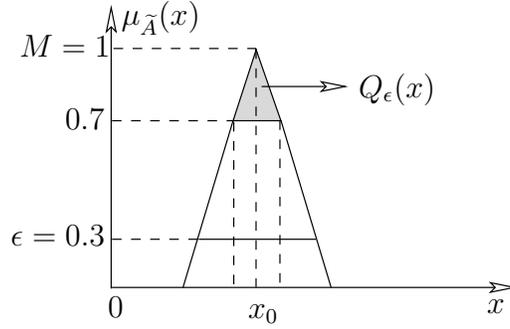


Figura 3.1: Interpretação gráfica de $Q_\epsilon(x)$.

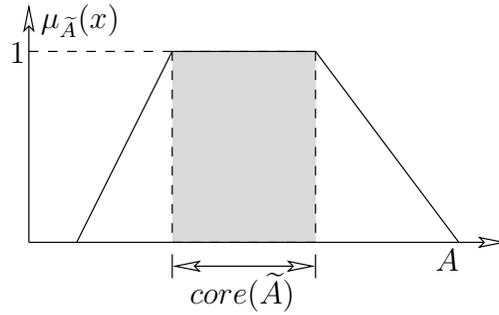


Figura 3.2: Núcleo (*core*) de um conjunto fuzzy.

Lema 3.1.2. [71] *Seja \tilde{A} um conjunto fuzzy limitado e seja $M = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$. Então, existe no mínimo um ponto x_0 que fornece o grau máximo para M tal que, para cada $\epsilon > 0$, toda vizinhança esférica de x_0 contém pontos no conjunto $Q_\epsilon(x) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq M - \epsilon\}$.*

Demonstração 7. Vide [71]. □

Para uma interpretação gráfica do Lema 3.1.2 vide a Figura 3.1, onde $\epsilon = 0.3$, $M = 1$ e $Q_\epsilon(x) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.7\}$.

Observações:

1. A união e a intersecção de conjuntos fuzzy limitados são conjuntos fuzzy limitados.
2. O núcleo de um conjunto fuzzy \tilde{A} – denotado por $core(\tilde{A})$ – é composto por todos os pontos que fornecem o valor máximo em M . Ou seja:

$$core(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

Para um exemplo ilustrativo vide a Figura 3.2.

Teorema 3.1.6. [71] *Se \tilde{A} é um conjunto convexo fuzzy, então o seu núcleo é um conjunto convexo.*

Demonstração 8. Vide [71]. □

3.1.4 Projeção de Conjuntos

Considere o seguinte conjunto fuzzy \tilde{A} em $\mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$, com função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e seja H um hiperplano coordenado, isto é, $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x_1 = 0\}$.

A projeção de \tilde{A} em H é definida como um conjunto fuzzy $S_H(\tilde{A})$ em $\mathbb{F}(\mathbb{R}^{n-1})$ com $\mu_{S_H(\tilde{A})}(\cdot)$ dado por:

$$\mu_{S_H(\tilde{A})} = \mu_{S_H(\tilde{A})}(x_2, x_3, \dots, x_n) = \sup_{x_1} \mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Temos a seguinte propriedade [71]:

1. Se \tilde{A} é um conjunto convexo fuzzy, então a sua projeção em qualquer hiperplano é também um conjunto convexo fuzzy.

3.1.5 Separação de Conjuntos Convexos Fuzzy

Para conjuntos crisp, isto é, conjuntos ordinários, o teorema da separação estabelece que, se existem dois conjuntos convexos disjuntos A e B , então existe um hiperplano H tal que A está de um lado de H e B do outro lado. Para o caso fuzzy, podemos aplicar este teorema sem exigir que os conjuntos fuzzy \tilde{A} e \tilde{B} sejam disjuntos.

Sejam \tilde{A} e \tilde{B} conjuntos fuzzy limitados e H uma hipersuperfície em \mathbb{R}^n definida pela equação $h(x) = 0$, tal que todos os pontos para os quais $h(x) \geq 0$ estão em um lado de H , e todos os pontos para os quais $h(x) \leq 0$ estão no outro lado. Seja K_H um número dependente de H tal que $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq K_H$ de um lado de H e $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq K_H$ do outro lado. Seja $M_H = \inf K_H$. O número $D_H = 1 - M_H$, é o grau de separação de \tilde{A} e \tilde{B} por H .

Uma extensão do grau da separação para conjuntos convexos fuzzy é dada abaixo.

Teorema 3.1.7. [71] *Sejam \tilde{A} e \tilde{B} conjuntos convexos fuzzy limitados em $\mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$, com graus máximos $M_{\tilde{A}}$ e $M_{\tilde{B}}$, respectivamente, onde $M_{\tilde{A}} = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$ e $M_{\tilde{B}} = \sup_x \mu_{\tilde{B}}(x)$. Seja M o grau máximo da intersecção $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, ou seja, $M = \sup_x \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$. Então $D = 1 - M$.*

Demonstração 9. *Vide [71].* □

Este teorema estabelece que o maior grau de separação de dois conjuntos convexos fuzzy \tilde{A} e \tilde{B} obtido com um hiperplano em $\mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$, é igual a um menos o grau máximo da intersecção $\tilde{A} \cap \tilde{B}$. A ilustração gráfica do Teorema 3.1.7 pode ser vista pela Figura 3.3, apresentando três situações distintas: M é a intersecção de dois conjuntos convexos fuzzy distintos \tilde{A} e \tilde{B} ; \tilde{A} e \tilde{B} são idênticos; e, \tilde{A} e \tilde{B} são dois conjuntos convexos fuzzy disjuntos, respectivamente.

Na próxima seção trataremos de funções com parâmetros fuzzy, onde a cada parâmetro está associada uma função de pertinência.

3.2 Funções Convexas com Parâmetros Fuzzy

Nesta seção, denominamos de função fuzzy aquela que possui parâmetros fuzzy caracterizados por números fuzzy. Esta caracterização pode ocorrer, como já definido por [19] e [42], da seguinte maneira:

1. Função com coeficientes fuzzy:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R}),$$

onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

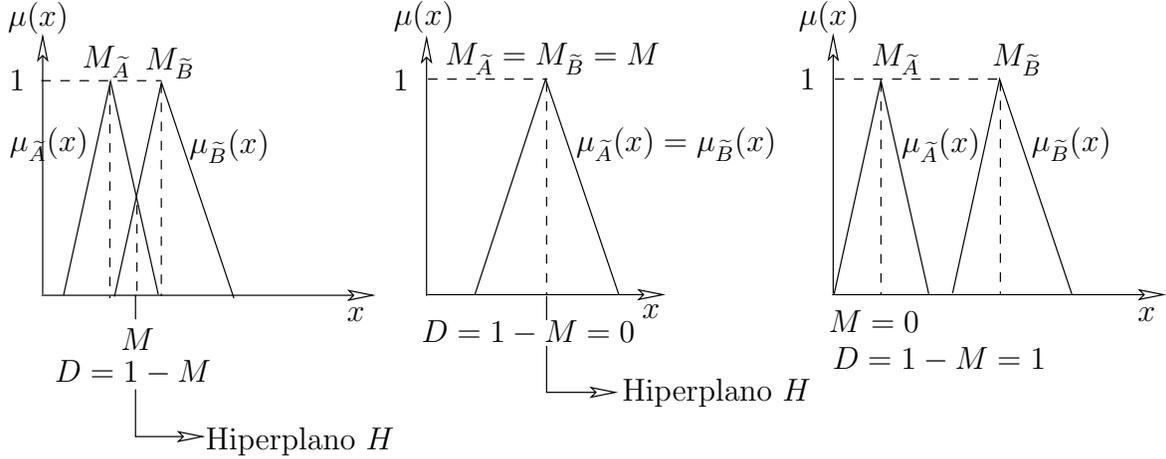


Figura 3.3: Teorema da Separação para conjuntos fuzzy em \mathbb{R} .

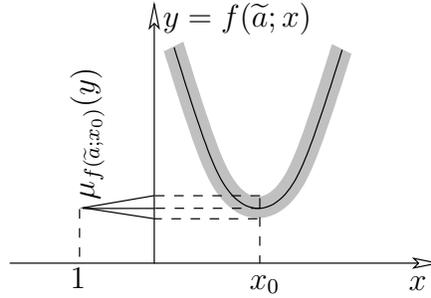


Figura 3.4: Função com parâmetros fuzzy.

2. Função com variáveis fuzzy:

$$f(\mathbf{a}; \tilde{\mathbf{x}}) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R}),$$

onde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$;

3. Função com coeficientes e variáveis fuzzy:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \tilde{\mathbf{x}}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R}),$$

onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$.

Generalizando, seja $\tilde{\mathbf{X}}$ o parâmetro fuzzy presente nas funções acima. Cada parâmetro fuzzy está associado a uma função de pertinência $\mu_{\tilde{\mathbf{X}}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, logo, a função $f(\tilde{\mathbf{X}})$ também está associada a uma função de pertinência $\mu_{f(\tilde{\mathbf{X}})} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Como utilizaremos a primeira função ($f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$), sua imagem $y = f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ será uma região fuzzy (um número fuzzy), e sua função de pertinência é definida como $\mu_{f(\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{x})}(y) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. A Figura 3.4 ilustra este caso.

Considere as seguintes definições:

1. Uma função $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é convexa se:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \lesssim \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2),$$

para cada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in [0, 1]$;

2. Uma função $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é côncava se:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \succeq \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2),$$

para cada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Teorema 3.2.1. *Se $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é convexa, então o conjunto*

$$f_\kappa(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \preceq \kappa\}$$

é convexo, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$.

Demonstração 10. *Análoga à demonstração do lema 3.1.1.* □

Teorema 3.2.2. *Uma combinação linear positiva de funções convexas é convexa.*

Demonstração 11. *Para todo $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, $\sum_{i=1}^n \kappa_i = 1$ e $\kappa \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in [0, 1]$, considere:*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \kappa_i f_i(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) = \\ & = \kappa_1 f_1(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) + \cdots + \kappa_n f_n(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \preceq \\ & \preceq \kappa_1 [\lambda f_1(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f_1(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)] + \cdots + \kappa_n [\lambda f_n(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f_n(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)] = \\ & = \lambda [\kappa_1 f_1(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + \cdots + \kappa_n f_n(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1)] + (1 - \lambda) [\kappa_1 f_1(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) + \cdots + \kappa_n f_n(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)] = \\ & = \lambda [(\kappa_1 f_1 + \cdots + \kappa_n f_n)(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1)] + (1 - \lambda) [(\kappa_1 f_1 + \cdots + \kappa_n f_n)(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)]. \end{aligned}$$

□

A definição de derivada de uma função fuzzy $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$ seguirá aquela dada por O. Kaleva em [40] e [41], como segue:

Definição 3.2.1. [40], [41] *Uma função fuzzy $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, é diferenciável em $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se existir uma função $f'(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ tal que os seus limites:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_0 + \lambda) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_0)}{\lambda} \quad e \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_0) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_0 - \lambda)}{\lambda}$$

existam e sejam iguais.

Entre os resultados apresentados por O. Kaleva, [40], destacamos aqui o seguinte:

Teorema 3.2.3. *Seja $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$ diferenciável, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Denote $f_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) = [f_1^\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}); f_2^\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})]$, $\alpha \in [0, 1]$. Então $f_1^\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ e $f_2^\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ são diferenciáveis e*

$$f'_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) = [(f_1^\alpha)'(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}); (f_2^\alpha)'(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})].$$

Demonstração 12. *Vide [40].* □

Derivada Direcional

Outro conceito importante é o de Derivada Direcional de uma Função Convexa Fuzzy, onde a variação de uma função é dada ao longo de uma direção específica.

Definição 3.2.2. *Seja $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sejam $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} \neq 0$, vetores tais que $\bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d} \in \mathbb{R}$, para $\lambda > 0$ e suficientemente pequeno. A derivada direcional de f em $\bar{\mathbf{x}}$ ao longo do vetor \mathbf{d} , $f'(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$, é definida quando os limites indicados existem e são iguais:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\lambda} \quad e \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} - \lambda \mathbf{d})}{\lambda}$$

Proposição 3.2.1. $f'(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) = \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d}$.

Demonstração 13. *Seja $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) := f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d})$, para $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, obtém-se:*

$$f'(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \right|_{\lambda=0},$$

e pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} f'(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) &= \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_1} d_1 + \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_2} d_2 + \cdots + \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}_n} d_n \\ &= \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.4. *Uma função $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, é convexa fuzzy se, e somente se, a função de uma variável $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) = f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})$ é convexa fuzzy $\forall \mathbf{x}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ fixos e $\mathbf{d} \neq 0$.*

Demonstração 14. *Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\kappa \in [0, 1]$.*

(\implies) *Seja $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, uma função convexa fuzzy, então para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e para qualquer $\kappa \in [0, 1]$ temos:*

$$\begin{aligned} \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \kappa \lambda_1 + (1 - \kappa) \lambda_2) &= f(\tilde{\mathbf{a}}; \kappa [\mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{d}] + (1 - \kappa) [\mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{d}]) \\ &\lesssim \kappa f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{d}) + (1 - \kappa) f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{d}) \\ &\simeq \kappa \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_1) + (1 - \kappa) \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_2). \end{aligned}$$

Portanto, $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, é convexa fuzzy.

(\impliedby) *Suponha que $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, é convexa fuzzy $\forall \mathbf{x}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{d} \neq 0$. Então, $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\kappa \in [0, 1]$ temos:*

$$\begin{aligned} \kappa f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + (1 - \kappa) f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) &= \kappa f[\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1 + 0(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] + (1 - \kappa) f[\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1 + 1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \\ &= \kappa \theta_{[\mathbf{x}_1; (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]}(\tilde{\mathbf{a}}; 0) + (1 - \kappa) \theta_{[\mathbf{x}_1; (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]}(\tilde{\mathbf{a}}; 1) \\ &\gtrsim \theta_{[\mathbf{x}_1; (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]}(\tilde{\mathbf{a}}; (1 - \kappa)) \\ &\simeq f[\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1 + (1 - \kappa)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] = f[\tilde{\mathbf{a}}; \kappa \mathbf{x}_1 + (1 - \kappa) \mathbf{x}_2]. \end{aligned}$$

Logo, $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$, para $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, é convexa fuzzy.

□

Derivação de Funções Convexas com Parâmetros Fuzzy

Abordamos aqui a definição de derivada de funções convexas fuzzy de primeira e segunda ordens como uma aproximação da expansão da série de Taylor. Inicialmente, apresentamos suas respectivas definições e posteriormente, um teorema agregando estes conceitos.

Definição 3.2.3. *Seja \mathbb{S} um conjunto não-vazio no \mathbb{R}^n , e seja $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

1. *f é diferenciável em $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ se existir um vetor $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, tal que:*

$$\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) = \left(\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \right)^T,$$

conhecido como vetor gradiente. Então a aproximação da série de Taylor de primeira-ordem de f é dada por:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \cong f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \quad (3.2)$$

para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$.

2. *f é duas vezes diferenciável em $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ se existir um vetor $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ e uma matriz $n \times n$ simétrica $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ com parâmetros fuzzy, tal que:*

$$\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

conhecida como matriz Hessiana fuzzy. Então a aproximação da série de Taylor de segunda ordem de f é dada por:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \cong f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \quad (3.3)$$

para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$.

Teorema 3.2.5. *Sejam \mathbb{S} um conjunto não-vazio convexo no \mathbb{R}^n , e $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$, com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é convexa $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$;*
2. *$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \succeq f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$;*
3. *A matriz Hessiana $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é semidefinida positiva fuzzy para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$.*

Demonstração 15. (1) \implies (2): Suponha que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é convexa para qualquer $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$, isto é, $\bar{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}$ e $\lambda \in [0, 1]$. Então:

$$\begin{aligned} f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) &\lesssim \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) \\ &= \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) - \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) + f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (3.4a)$$

Subtraindo $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)$ em ambos os lados,

$$\begin{aligned} f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) &= \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) - \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) + f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) \\ &= \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) - \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) + \tilde{0} \\ &\lesssim \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) - \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (3.4b)$$

Assim, para $\lambda \in (0, 1]$:

$$\frac{f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)}{\lambda} \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2).$$

Tomando o limite quando $\lambda \rightarrow 0$, obtemos:

$$\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)^T (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2).$$

Portanto, analogamente a (3.4), temos:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)^T (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

(2) \implies (1): Suponha que:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)^T (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$

$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}$ e $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$. Dados $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ e $\lambda \in [0, 1]$ fixos, porém arbitrários. Fazendo $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{t}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{t}_2$ e alternativamente, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{t}_1$ ou $\mathbf{x}_2 = \mathbf{t}_2$, temos:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{t}_1) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})^T (\mathbf{t}_1 - \mathbf{x}), \quad (3.5)$$

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{t}_2) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})^T (\mathbf{t}_2 - \mathbf{x}), \quad (3.6)$$

Somando (3.5) com (3.6) multiplicando por λ e $(1 - \lambda)$, respectivamente, temos:

$$\lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{t}_1) + (1 - \lambda) f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{t}_2) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})^T [\lambda \mathbf{t}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{t}_2 - \mathbf{x}].$$

Substituindo $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{t}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{t}_2$, obtemos:

$$\lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{t}_1) + (1 - \lambda) f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{t}_2) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{t}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{t}_2).$$

(2) \implies (3): Considere a seguinte desigualdade:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \quad (3.7)$$

$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$.

O que falta na desigualdade (3.7), do lado direito, para tornar-se uma expansão da série de Taylor de segunda ordem é $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, assim:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \cong f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}),$$

$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Como a desigualdade é válida $\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$, isto implica que:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \succeq \tilde{0}.$$

Portanto, $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ é uma matriz semi-definida positiva fuzzy.

(3) \implies (2): Seja $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ uma matriz semi-definida positiva fuzzy. Pela aproximação da série de Taylor de segunda ordem:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) = f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Se $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \succeq \tilde{0}$, para qualquer $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$, então:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \succeq f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

□

3.2.1 Mínimos de Funções Convexas com Parâmetros Fuzzy

Nesta seção tratamos de mínimos de funções convexas com parâmetros fuzzy. Neste caso é possível fazer uma extensão de alguns dos resultados obtidos para o caso crisp, como veremos, por exemplo, no Teorema 3.2.6, pois o mesmo permite uma comparação fuzzy e nos fornecerá a condição necessária de otimalidade para problemas com função objetivo convexa com parâmetros fuzzy em um conjunto convexo $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 3.2.4. Seja $f(\tilde{\mathbf{a}}; x) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, uma função convexa com parâmetros fuzzy, \mathbb{S} um conjunto convexo do \mathbb{R}^n , e considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & \mathbf{x} \in \mathbb{S} \end{aligned} \tag{3.8}$$

O ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ é uma solução viável para o problema (3.8). Se $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ e $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \succeq f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$, então $\bar{\mathbf{x}}$ é uma solução ótima global. Se $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ e existe uma vizinhança esférica $Q_\epsilon(\bar{\mathbf{x}})$, onde $Q_\epsilon(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \text{ tal que } \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, tal que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \succeq f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S} \cap Q_\epsilon(\bar{\mathbf{x}})$, então $\bar{\mathbf{x}}$ é uma solução ótima local.

Teorema 3.2.6. Considere o problema (3.8) com $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$, uma função convexa com parâmetros fuzzy, e \mathbb{S} , um conjunto convexo do \mathbb{R}^n . Suponha que $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ é uma solução ótima local para o problema, então $\bar{\mathbf{x}}$ é uma solução ótima global.

Demonstração 16. Seja $\bar{\mathbf{x}}$ uma solução ótima local, então existe uma vizinhança esférica de $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S} \cap Q_\epsilon(\bar{\mathbf{x}})$, tal que:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \succeq f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}), \tag{3.9}$$

para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S} \cap Q_\epsilon(\mathbf{x})$. Por contradição, suponha que $\bar{\mathbf{x}}$ não é uma solução ótima global, tal que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \hat{\mathbf{x}}) \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, para algum $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$. Pela convexidade de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$, para cada $\lambda \in (0, 1)$, temos:

$$\begin{aligned}
f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \hat{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\bar{\mathbf{x}}) &\lesssim \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \hat{\mathbf{x}}) + (1 - \lambda)f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \\
&\lesssim \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + (1 - \lambda)f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \\
&= \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) - \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \\
&= \tilde{0} + f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \\
&\lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}});
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Porém, para $\lambda > 0$ e suficientemente pequeno,

$$\lambda \hat{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S} \cap Q_\epsilon(\mathbf{x}).$$

Então a desigualdade (3.10) contradiz (3.9). \square

3.2.2 Generalizações de Função Convexa com Parâmetros Fuzzy

Nesta seção apresentamos a definição para função quasi-convexa e pseudoconvexa com parâmetros fuzzy, e suas relações.

Definição 3.2.5. Seja $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$.

1. Seja \mathbb{S} um conjunto convexo não-vazio do \mathbb{R}^n . Então f é uma função quasi-convexa com parâmetros fuzzy se, para cada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}$, a seguinte desigualdade se verifica:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \lesssim \max \{f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1), f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)\},$$

para cada $\lambda \in (0, 1)$.

2. Sejam \mathbb{S} um conjunto aberto e não-vazio do \mathbb{R}^n , e f uma função diferenciável. Então f é uma função pseudoconvexa com parâmetros fuzzy se para cada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}$ com $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1)^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \gtrsim 0$ temos que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1)$.

Teorema 3.2.7. Seja $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ e \mathbb{S} é um conjunto convexo não-vazio do \mathbb{R}^n . A função $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é quasi-convexa se, e somente se, $\mathbb{S}_\kappa = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S} \text{ tal que } f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \lesssim \kappa\}$ é convexa para cada $\kappa \in \mathbb{R}$.

Demonstração 17. (\implies) Suponha que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$ é uma função quasi-convexa, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ e \mathbb{S} é um conjunto convexo não-vazio do \mathbb{R}^n , e sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}_\kappa$.

Logo, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}$ e $\max \{f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1), f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)\} \lesssim \kappa$.

Seja $\lambda \in (0, 1)$, e seja $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$. Pela convexidade de \mathbb{S} , $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$, e pela quasi-convexidade da função $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$, $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \lesssim \max \{f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1), f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)\} \lesssim \kappa$.

Portanto, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_\kappa$ e \mathbb{S}_κ é convexo.

(\impliedby) Suponha agora que \mathbb{S}_κ é um conjunto convexo para cada $\kappa \in \mathbb{R}$. Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}$, $\lambda \in (0, 1)$ e $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$.

Note que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}_\kappa$ para $\kappa = \max \{f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1), f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)\}$. Como \mathbb{S}_κ é convexo, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_\kappa$. E assim, $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \lesssim \kappa = \max \{f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1), f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2)\}$.

Portanto, $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é quasi-convexa. \square

A Definição 3.2.6 abaixo mostra a relação entre funções convexas, quasi-convexas e pseudoconvexas com parâmetros fuzzy.

Definição 3.2.6. *Seja $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não-vazio e $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$ uma função com parâmetros fuzzy. Considere as seguintes relações:*

Convexidade: Uma função fuzzy $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é convexa em $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ se:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}) \lesssim \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + (1 - \lambda)f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}).$$

Quasi-Convexidade: Uma função fuzzy $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é quasi-convexa em $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ se:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}) \lesssim \max \{f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}), f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})\}.$$

Pseudoconvexidade: Uma função fuzzy $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ é pseudoconvexa em $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}$ se $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \gtrsim \tilde{0}$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$, implica que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$.

Capítulo 4

Programação Não-Linear Irrestrita com Parâmetros Fuzzy

Introdução

Um problema de otimização irrestrita fuzzy pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & x \in \mathbb{S} \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, é uma função com coeficientes fuzzy e $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ é o conjunto de soluções viáveis.

Na seção 4.1, abordamos as condições de otimalidade para o problema (4.1) definido acima. Nas seções 4.2 e 4.3, apresentamos as seguintes classes de métodos de otimização irrestrita unidimensional e multidimensional, com características fuzzy nos coeficientes:

1. Métodos para funções unidimensionais:
 - (a) Métodos de busca sem uso de derivadas;
 - (b) Métodos de busca com derivadas.
2. Métodos para funções multidimensional:
 - (a) Métodos de busca sem uso de derivadas;
 - (b) Métodos de busca com uso de derivadas;
 - (c) Métodos de busca: Gradiente Conjugado.

4.1 Condições de Otimalidade

Nesta seção apresentamos a extensão das Condições Necessárias e Suficientes de Otimalidade, baseado em [3] e [49], para problemas com parâmetros (coeficientes) fuzzy na função a ser otimizada.

Neste capítulo e nos próximos, denotamos por vizinhança esférica $Q_\epsilon(\mathbf{x})$ o conjunto de pontos distando ϵ de $\bar{\mathbf{x}}$, ou seja, $Q_\epsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \text{ tal que } \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

A comparação em \mathbf{x} que adotaremos será *crisp*, pois \mathbf{x} será um número *crisp*, ao passo que as comparações baseadas nas funções objetivos serão *fuzzy*.

Condições Necessárias de Otimalidade

Dado um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pretendemos caracterizá-lo como um ponto de mínimo supondo que a função fuzzy associada seja diferenciável.

Teorema 4.1.1. *Suponha que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, seja diferenciável em $\bar{\mathbf{x}}$. Se existe um vetor \mathbf{d} tal que $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} \lesssim \tilde{0}$, então existe um $\delta > 0$ tal que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ para cada $\lambda \in (0, \delta)$, onde \mathbf{d} é uma direção de descida de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$.*

Demonstração 18. *Pela diferenciabilidade de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ em $\bar{\mathbf{x}}$, temos:*

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \cong f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \lambda \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d}, \quad (4.2)$$

Rearrmando os termos e dividindo por λ , para $\lambda > 0$, temos:

$$\frac{f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\lambda} \simeq \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d}.$$

Como $\lambda \rightarrow 0$ e $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} \lesssim \tilde{0}$ existe um $\delta > 0$ que minimiza o erro da aproximação da série de Taylor da equação (4.2) para todo $\lambda \in (0, \delta)$, então $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$. \square

Corolário 4.1.1. *Suponha que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, seja diferenciável em $\bar{\mathbf{x}}$. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um mínimo local, então, $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{0}$.*

Demonstração 19. *Suponha que $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ seja diferente de zero. Então, tomando $-\mathbf{d} = \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, temos $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} \simeq -\|\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})\|^2 \lesssim \tilde{0}$; pelo Teorema 4.1.1, existe um $\delta > 0$ tal que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, para cada $\lambda \in (0, \delta)$, contradizendo a suposição de que $\bar{\mathbf{x}}$ é um mínimo local. Então, $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{0}$. \square*

O Corolário 4.1.1 do Teorema 4.1.1 nos fornece as condições de primeira ordem, uma vez que as componentes de $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, são compostas pelas derivadas parciais de primeira ordem de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$. O Teorema 4.1.2 nos fornece as condições de segunda ordem.

Teorema 4.1.2. *Suponha que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, seja duas vezes diferenciável em $\bar{\mathbf{x}}$. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local, então $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{0}$ e $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ é uma matriz semi-definida positiva com parâmetros fuzzy.*

Demonstração 20. *Considere uma direção arbitrária \mathbf{d} . Então, da diferenciabilidade de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ em $\bar{\mathbf{x}}$, temos que:*

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \cong f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \lambda \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \lambda^2 \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d} \quad (4.3)$$

Como $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local, do Corolário 4.1.1, temos que $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{0}$. Rearrmando os termos em (4.3) e dividindo por λ^2 ($\lambda > 0$), temos:

$$\frac{f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})}{\lambda^2} \simeq \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d}. \quad (4.4)$$

Como $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local, $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, para λ suficientemente pequeno. Então $\lambda \rightarrow 0$, $\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d} \gtrsim \tilde{0}$; e assim, $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ é uma matriz semi-definida positiva com parâmetros fuzzy. \square

Condições Suficientes de Otimalidade

Teorema 4.1.3. *Seja $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função pseudoconvexa em $\bar{\mathbf{x}}$. Então, $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local se, e somente se, $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{\mathbf{0}}$.*

Demonstração 21. (\implies) *Pelo Corolário 4.1.1, se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo global, então $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{\mathbf{0}}$. (\impliedby) *Suponha que $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{\mathbf{0}}$, de modo que $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \simeq 0$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Pela pseudoconvexidade de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, temos então $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \succeq f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. \square**

4.2 Métodos de Busca Unidimensional com Parâmetros Fuzzy

Tratamos aqui de alguns métodos clássicos de minimização de funções unidimensionais, tais como os métodos de busca sem o uso de derivadas (busca dicotômica, secção áurea (Golden Section) e Fibonacci), e os métodos que usam derivadas (método da bissecção, Newton, Falsa Posição e Interpolação Cúbica). Estes métodos foram baseados em [3], [49] e [52], e adaptados para minimizar funções com coeficientes fuzzy.

Os métodos de busca unidimensional são usados em muitos algoritmos para funções multidimensionais, e procedem da seguinte maneira: dado um ponto \mathbf{x}_k , encontra-se uma direção \mathbf{d}_k e usando um passo λ_k de tamanho conveniente, encontra-se um novo ponto $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$. Repete-se o processo até satisfazer a um critério de parada estabelecido. Encontrar o melhor λ_k envolve a resolução do sub-problema: $\min f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ (m é o total de coeficientes fuzzy). A variável λ pode ser qualquer valor real não-negativo que minimize a função dada, ou λ tal que $\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k$ seja viável. Assim, para \mathbf{x}_k e \mathbf{d}_k fixos, a função objetivo pode ser reescrita como:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k) \equiv \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda).$$

Nesta seção abordamos os métodos que minimizam uma função unidimensional. Para os métodos que não usam derivadas, esta minimização é dada em um intervalo limitado e fechado, conhecido como intervalo de incerteza. O problema pode ser formulado como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) \\ \text{S. a} \quad & \lambda \in [l, u] \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, $\lambda, l, u \in \mathbb{R}$ tais que $l \leq \lambda \leq u$.

4.2.1 Métodos de Busca Sem Uso de Derivadas

Os métodos de busca sem o uso de derivadas resolvem o problema (4.5) diminuindo o intervalo de incerteza. Geralmente, $[l, u]$ é conhecido como intervalo de incerteza se um ponto de mínimo $\bar{\lambda}$ pertence ao intervalo, isto é, $\bar{\lambda} \in [l, u]$, embora o seu valor exato seja desconhecido.

Como estamos minimizando uma função com parâmetros fuzzy $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, a comparação desta função em diferentes valores de λ é uma comparação entre números fuzzy, e isto é feito usando o processo de defuzzificação: os Índices de Yager, como apresentados em [5]. Para efeito de simplificação, denotamos por $F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda))$ um processo genérico de defuzzificação.

Busca Dicotômica

Seja $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, uma função quasi-convexa fuzzy a ser minimizada no intervalo de incerteza $[l_1, u_1]$.

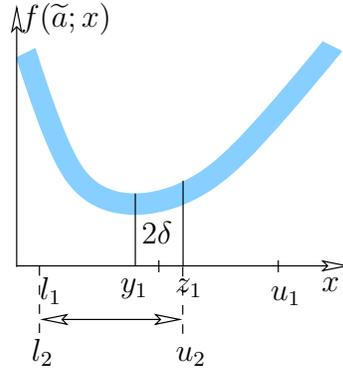


Figura 4.1: Busca dicotômica.

O método de busca dicotômica divide o intervalo de incerteza em duas partes iguais, e a cada uma destas duas partes atribui uma distância δ a partir do ponto médio do intervalo, gerando os pontos y_k e z_k . Se $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_k) \lesssim \theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_k)$, o novo intervalo de incerteza é $[l_{k+1}; z_{k+1}]$, caso contrário, temos o seguinte intervalo: $[y_{k+1}; u_{k+1}]$. A Figura 4.1, ilustra uma função onde se obtém o intervalo $[l_{k+1}; z_{k+1}]$.

O Algoritmo 4.2.1 resume o método de busca dicotômica.

Algoritmo 4.2.1 Algoritmo de Busca Dicotômica

Dados Sejam $2\delta > 0$ o tamanho do intervalo de incerteza final, $\epsilon > 0$ o critério de parada, $[l_1, u_1]$ o intervalo de incerteza inicial e $k = 1$ a iteração inicial.

- 1: **Enquanto** $(u_k - l_k > \epsilon)$ **faça**
 - 2: Calcule: $y_k = \frac{l_k + u_k}{2} - \delta$ e $z_k = \frac{l_k + u_k}{2} + \delta$.
 - 3: **Se** $F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_k)) \leq F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_k))$ **então**
 - 4: $l_{k+1} = l_k$ e $u_{k+1} = z_k$.
 - 5: **Caso contrário**
 - 6: $l_{k+1} = y_k$ e $u_{k+1} = u_k$.
 - 7: **Fim do condicional**
 - 8: $k = k + 1$.
 - 9: **Fim do enquanto**
 - 10: $\lambda = \frac{l_k + u_k}{2}$.
-

Método da Secção Áurea

Como no método da bissecção, o método da secção áurea – Golden Section – minimiza uma função quasi-convexa com parâmetros fuzzy ou crisp. Porém, este difere na maneira de reduzir o intervalo de incerteza.

Seja $[l_k, u_k]$ o intervalo de incerteza na k -ésima iteração. Duas situações distintas podem ocorrer:

- Se $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_k) \gtrsim \theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_k)$, onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, então o novo intervalo de incerteza $[l_{k+1}, u_{k+1}]$ é dado por $[y_k, u_k]$ (altera-se o extremo inferior);

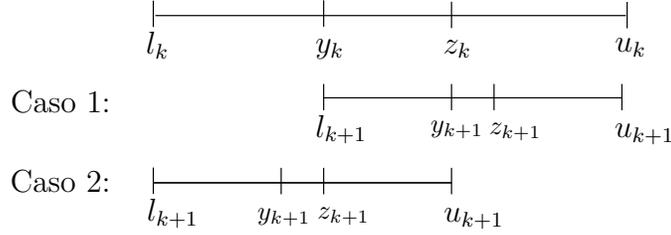


Figura 4.2: Método da Secção Áurea.

- Caso contrário, $[l_{k+1}, u_{k+1}]$ é dado por $[l_k, z_k]$ (altera-se o extremo superior).

Os pontos y_k e z_k são obtidos da seguinte maneira:

1. O tamanho do intervalo de incerteza $u_{k+1} - l_{k+1}$ não depende do resultado da k -ésima iteração, ou seja, $u_k - y_k = z_k - l_k$. Assim, se y_k é da forma:

$$y_k = l_k + (1 - \gamma)(u_k - l_k), \quad (4.6)$$

onde $\gamma \in (0, 1)$, então z_k é:

$$z_k = l_k + \gamma(u_k - l_k), \quad (4.7)$$

e o tamanho do novo intervalo de incerteza é:

$$u_{k+1} - l_{k+1} = \gamma(u_k - l_k).$$

2. No cálculo de y_{k+1} e z_{k+1} para uma nova iteração, ou y_{k+1} coincide com z_k , ou z_{k+1} coincide com y_k , como ilustra a Figura 4.2. Analisaremos cada caso.

Caso 1: $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_k) \gtrsim \theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_k)$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$:

Neste caso $l_{k+1} = y_k$ e $u_{k+1} = u_k$. Para satisfazer $y_{k+1} = z_k$, aplicando (4.6) com $k = k + 1$, temos:

$$\begin{aligned} z_k = y_{k+1} &= l_{k+1} + (1 - \gamma)(u_{k+1} - l_{k+1}) \\ &= y_k + (1 - \gamma)(u_k - y_k). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Substituindo as expressões (4.6) e (4.7) na expressão (4.8) acima, temos $\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$.

Caso 2: $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_k) \lesssim \theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_k)$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$:

Neste caso $l_{k+1} = l_k$ e $u_{k+1} = z_k$. Para satisfazer $z_{k+1} = y_k$, aplicando (4.7) com $k = k + 1$, temos:

$$\begin{aligned} y_k = z_{k+1} &= l_{k+1} + \gamma(u_{k+1} - l_{k+1}) \\ &= l_k + (1 - \gamma)(z_k - l_k). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Novamente, substituindo as expressões (4.6) e (4.7) na expressão (4.9) acima, temos $\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$.

Os dois casos discutidos acima resultaram na equação $\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$, que possui duas raízes reais distintas: $\gamma = 0.618$ e $\gamma = -1.618$. Como $\gamma \in (0, 1)$, então tomamos $\gamma = 0.618$.

Desta forma, na k -ésima iteração, y_k ou z_k são calculados de acordo com as equações (4.6) e (4.7), respectivamente, com $\gamma = 0.618$. O Algoritmo 4.2.2 resume este método.

Algoritmo 4.2.2 Algoritmo da Secção Áurea

Dados Sejam $\epsilon > 0$ o tamanho do intervalo de incerteza final, $\gamma = 0.618$, $[l_1, u_1]$ o intervalo de incerteza inicial e $k = 1$.

- 1: Calcule: $y_1 = l_1 + (1 - \gamma)(u_1 - l_1)$ e $z_1 = l_1 + \gamma(u_1 - l_1)$.
- 2: **Enquanto** $(u_k - l_k > \epsilon)$ **faça**
- 3: **Se** $F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_k)) > F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_k))$ **então**
- 4: $l_{k+1} = y_k$ e $u_{k+1} = u_k$.
- 5: $y_{k+1} = z_k$ e $z_{k+1} = l_{k+1} + \gamma(u_{k+1} - l_{k+1})$.
- 6: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_{k+1})$.
- 7: **Caso contrário**
- 8: $l_{k+1} = l_k$ e $u_{k+1} = z_k$.
- 9: $y_{k+1} = l_{k+1} + (1 - \gamma)(u_{k+1} - l_{k+1})$ e $z_{k+1} = y_k$.
- 10: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_{k+1})$.
- 11: **Fim do condicional**
- 12: $k = k + 1$.
- 13: **Fim do enquanto**
- 14: $\lambda = \frac{l_k + u_k}{2}$.

Método de Fibonacci

O método de busca de Fibonacci também minimiza uma função quasi-convexa (com parâmetros fuzzy ou crisp) em um intervalo fechado. Analogamente ao método de secção áurea, o método de Fibonacci calcula a função em dois pontos no passo principal do algoritmo, e nas demais iterações, calcula a função em apenas um ponto. Este destaca-se na técnica de redução do intervalo de incerteza pois baseia-se na seqüência de Fibonacci:

$$\begin{aligned} \mathcal{FS}_{v+1} &= \mathcal{FS}_v + \mathcal{FS}_{v-1}; \quad v = 1, 2, \dots \\ \mathcal{FS}_0 &= \mathcal{FS}_1 = 1, \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde a seqüência será: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Os valores de y_k e z_k na k -ésima iteração, são calculados como seguem:

$$\begin{aligned} y_k &= l_k + \frac{\mathcal{FS}_{n-k-2}}{\mathcal{FS}_{n-k}}(u_k - l_k), \\ z_k &= l_k + \frac{\mathcal{FS}_{n-k-1}}{\mathcal{FS}_{n-k}}(u_k - l_k), \end{aligned}$$

onde \mathcal{FS}_N é um elemento da seqüência de Fibonacci obtido através de (4.10), n é o número total de cálculos na função a ser minimizada dado no Algoritmo 4.2.3.

4.2.2 Métodos de Busca com Uso de Derivadas

Nesta seção abordamos os métodos de busca unidimensional que usam derivadas, tais como: o método da bissecção, o método de Newton, o método da Falsa Posição e Interpolação Cúbica. O método da bissecção utiliza derivadas de primeira ordem, o método de Newton usa derivadas de primeira e segunda ordens da função, e o método da Falsa Posição e Interpolação Cúbica usam derivadas de primeira ordem em diferentes pontos λ_k .

Algoritmo 4.2.3 Algoritmo de Busca de Fibonacci

Dados Sejam $\epsilon > 0$ o tamanho do intervalo de incerteza final e $\delta > 0$. Sejam $[l_1, u_1]$ o intervalo de incerteza inicial e n tal que: $\mathcal{FS}_n > \frac{u_1 - l_1}{\epsilon}$.

- 1: Calcule: $y_1 = l_1 + \frac{\mathcal{FS}_{n-2}}{\mathcal{FS}_n}(u_1 - l_1)$ e $z_1 = l_1 + \frac{\mathcal{FS}_{n-1}}{\mathcal{FS}_n}(u_1 - l_1)$.
- 2: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_1)$ e $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_1)$, e seja $k = 1$.
- 3: **Enquanto** ($k > n - 2$) **faça**
- 4: **Se** $F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_k)) > F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_k))$ **então**
- 5: $l_{k+1} = y_k, u_{k+1} = u_k, y_{k+1} = z_k$ e $z_{k+1} = l_{k+1} + \frac{\mathcal{FS}_{n-k-1}}{\mathcal{FS}_{n-k}}(u_{k+1} - l_{k+1})$.
- 6: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_{k+1})$.
- 7: **Caso contrário**
- 8: $l_{k+1} = l_k, u_{k+1} = z_k, z_{k+1} = y_k$ e $y_{k+1} = l_{k+1} + \frac{\mathcal{FS}_{n-k-2}}{\mathcal{FS}_{n-k}}(u_{k+1} - l_{k+1})$.
- 9: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_{k+1})$.
- 10: **Fim do condicional**
- 11: $k = k + 1$.
- 12: **Fim do enquanto**
- 13: $y_n = y_{n-1}$ e $z_n = z_{n-1}$.
- 14: **Se** $F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; y_n)) > F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; z_n))$ **então**
- 15: $l_n = y_n$ e $u_n = u_{n-1}$
- 16: **Caso contrário**
- 17: $l_n = l_{n-1}$ e $u_n = y_n$.
- 18: **Fim do condicional**
- 19: $\lambda = \frac{l_n + u_n}{2}$.

Método da Bisseção

Suponha agora que $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, $\lambda \in \mathbb{S}$ e \mathbb{S} um conjunto convexo, não-vazio e limitado do \mathbb{R}^n , e seja $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)$ uma função pseudoconvexa com parâmetros fuzzy.

O método da bissecção, em cada iteração k calcula o valor de $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; y_k)$, onde y_k é o ponto médio do intervalo de incerteza. Dependendo do valor da derivada da função em y_k , o algoritmo termina ou obtém um novo intervalo de incerteza, com metade do tamanho do intervalo anterior.

O método da bissecção finaliza quando o tamanho do intervalo de incerteza é suficientemente pequeno, como nos métodos de busca sem o uso de derivadas, ou quando $\theta'(\lambda) = 0$ (para o caso crisp). Neste último caso, temos então a seguinte comparação $F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)) \leq \epsilon$, para ϵ suficientemente pequeno. Este método será apresentado no Algoritmo 4.2.4.

Método de Newton

O método de Newton está baseado na exploração da aproximação quadrática (série de Taylor de segunda ordem) da função a ser minimizada, em um dado ponto $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Esta aproximação quadrática é dada por:

$$q(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) = \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k) + \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{1}{2}\theta''(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^2, \quad (4.11)$$

Algoritmo 4.2.4 Algoritmo da Bisseção

Dados Sejam $\epsilon_1 > 0$ o tamanho do intervalo de incerteza final, $\epsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno, $[l_1, u_1]$ o intervalo de incerteza inicial e $k = 1$. Calcule n e y_1 , respectivamente, como:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{\epsilon_1}{u_1 - l_1}, \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{1}{2}(l_1 + u_1)$$

- 1: **Enquanto** ($k > n$) e ($|F(\theta'_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; y_k))| > \epsilon_2$) **faça**
- 2: **Se** $k \neq 1$ **então**
- 3: Calcule $y_k = \frac{1}{2}(l_k + u_k)$.
- 4: **Fim do condicional**
- 5: **Se** $|F(\theta'_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; y_k))| \leq \epsilon_2$ **então**
- 6: Vá ao passo (18).
- 7: **Caso contrário Se** $F(\theta'_\alpha(\tilde{\mathbf{a}}; y_k)) > 0$ **então**
- 8: $l_{k+1} = l_k$ e $u_{k+1} = y_k$.
- 9: **Caso contrário**
- 10: $l_{k+1} = y_k$ e $u_{k+1} = u_k$.
- 11: **Fim do condicional**
- 12: **Se** $k = n$ **então**
- 13: Vá ao passo (19).
- 14: **Caso contrário**
- 15: $k = k + 1$.
- 16: **Fim do condicional**
- 17: **Fim do enquanto**
- 18: $\lambda = y_k$ é solução ótima, **PARE**.
- 19: $\lambda = \frac{l_k + u_k}{2}$, **PARE**.

onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, $\lambda \in \mathbb{S}$ e \mathbb{S} , um conjunto convexo, não-vazio de \mathbb{R} .

O ponto λ_{k+1} é calculado quando a derivada de q está próxima a zero, ou seja, $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k) + \theta''(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \simeq \tilde{0}$, assim:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)}{\theta''(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)}. \quad (4.12)$$

Da equação (4.12) temos que λ_{k+1} é um número fuzzy após cada iteração. Se continuarmos a calculá-lo como um número fuzzy, nas demais iterações este número aumenta sua incerteza devido as operações aritméticas envolvidas na sua atualização.

Note que um número fuzzy $\tilde{a} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$ pode ser representado através de um intervalo de confiança, usando α -cortes, ou seja, $\tilde{a}_\alpha = [\underline{a}\alpha + (a - \underline{a}), -\bar{a}\alpha + (a + \bar{a})]$, onde a é o seu valor modal ($\mu_{\tilde{a}}(\mathbf{x}) = 1$), \bar{a} e \underline{a} o seu espalhamento à direita e à esquerda, respectivamente.

Para evitar o excessivo espalhamento da incerteza, aplicamos a cada atualização de λ_k um método de busca unidimensional sem derivada, usando como intervalo de incerteza aqueles valores definidos pelo α -corte, através do intervalo de confiança do número fuzzy, com α pré-definido e fixo.

Devemos lembrar também que o método de Newton só pode ser aplicado às funções que tenham derivada de segunda ordem. Além disso, o algoritmo é bem comportado se $\theta''(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k) \neq \tilde{0}$, para cada

$\lambda_k \in \mathbb{S}$.

O Algoritmo 4.2.5 apresenta a proposta aqui discutida para o método de Newton.

Algoritmo 4.2.5 Algoritmo para o Método de Newton

Dados Sejam $\epsilon > 0$ e λ_1 um ponto inicial. Escolha $\alpha \in [0, 1)$ e seja $k = 1$.

1: **loop**

2: Calcule $\tilde{\lambda} = \lambda_k - \frac{\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)}{\theta''(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)}$.

3: Resolva $\lambda_{k+1} = \min \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)$ sujeito a $\lambda \in \tilde{\lambda}_\alpha$ usando um dos Algoritmos 4.2.1, 4.2.2 ou 4.2.3.

4: **Se** $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \epsilon$ **então**

5: **PARE**, λ_{k+1} é solução ótima.

6: **Caso contrário**

7: Faça $k = k + 1$ e volte ao passo (2).

8: **Fim do condicional**

9: **Fim do loop**

Método da Falsa Posição

O método da falsa posição usa uma aproximação da função quadrática (4.11) do método de Newton, ou seja,

$$\bar{q}(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) = \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k) + \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{k-1}) - \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)}{\lambda_{k-1} - \lambda_k} \cdot \frac{(\lambda - \lambda_k)^2}{2}, \quad (4.13)$$

onde a equação (4.13) fornece o valor aproximado da equação (4.11). Para a equação (4.13) três informações são necessárias: $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)$, $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)$ e $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{k-1})$, com $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$; observe que na terceira informação, usa-se a derivada da função no ponto anterior e na equação (4.11) (ou no método de Newton), usa-se a derivada de segunda ordem no ponto λ_k .

Assim, o novo ponto λ_{k+1} é obtido quando a derivada da função \bar{q} está próxima de zero, ou seja:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k) \left[\frac{\lambda_{k-1} - \lambda_k}{\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{k-1}) - \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)} \right].$$

Analogamente ao que acontece no método de Newton, o método da falsa posição gera um número fuzzy ao obter λ_{k+1} . Então o mesmo procedimento aplicado ao método de Newton é utilizado para encontrar o melhor valor λ_{k+1} **crisp**, como segue no Algoritmo 4.2.6.

Interpolação Cúbica

Dados um intervalo de incerteza inicial $[l_0, u_0]$, $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \cdot)$ e $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \cdot)$ é possível interpolar uma função cúbica e obter o seu mínimo. Este processo pode ser usado para determinar o tamanho do passo λ_k iterativamente.

Uma outra ferramenta interessante a ser aplicada é a **condição de Wolfe**. A extensão da condição de Wolfe, como apresentada em [51] e [52], para funções com parâmetros fuzzy é dada por:

$$\begin{aligned} \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k) &\lesssim \theta(\tilde{\mathbf{a}}; 0) + c_1 \lambda_k \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0) \\ |\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)| &\lesssim c_2 |\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0)| \end{aligned}$$

Algoritmo 4.2.6 Algoritmo para o Método da Falsa Posição

Dados Sejam $\epsilon > 0$ e λ_1 um ponto inicial. Escolha $\alpha \in [0, 1)$ e seja $k = 1$.

1: **loop**

2: Calcule: $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k) \cdot \left[\frac{\lambda_{k-1} - \lambda_k}{\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{k-1}) - \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)} \right]$.

3: Resolva $\lambda_{k+1} = \min \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)$ sujeito a $\lambda \in \tilde{\lambda}_\alpha$ usando os Algoritmos 4.2.1, 4.2.2 ou 4.2.3.

4: **Se** $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \epsilon$ **então**

5: **PARE**, λ_{k+1} é solução ótima.

6: **Caso contrário**

7: Faça $k = k + 1$ e volte ao passo (2).

8: **Fim do condicional**

9: **Fim do loop**

onde $0 < c_1 < c_2 < 1$. Ou ainda, usando o processo de defuzzificação ($F(\cdot)$):

$$F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k)) \leq F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; 0)) + c_1 \lambda_k F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0)) \quad (4.14a)$$

$$|F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_k))| \leq c_2 |F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0))|. \quad (4.14b)$$

Note que $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) \equiv f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})$ e $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda) \equiv \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})^T \mathbf{d}$. A desigualdade (4.14a) representa a condição de diminuição suficiente da função otimizada, e a desigualdade (4.14b) a condição de curvatura. Em [51] estas condições são usadas no desenvolvimento algorítmico de um método de busca, e os autores não garantem o seu desempenho para os casos patológicos.

Assim, usando interpolação cúbica e a condição de Wolfe (4.14), desenvolvemos um algoritmo, como em [52], em duas fases:

1. **Busca Linear:** Dado um intervalo de incerteza $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, onde $\lambda_{\min} > 0$ é pequeno e λ_{\max} grande, a busca linear obtém um λ_k que satisfaça a condição de Wolfe (4.14), ou toma um intervalo de incerteza menor contendo λ_k e executa-se a segunda fase (Interpolação – Algoritmo 4.2.7);
2. **Interpolação:** Calculamos sucessivos λ reduzindo o intervalo de incerteza até que satisfaça (4.14) (Algoritmo 4.2.8).

4.3 Métodos de Busca Multidimensional com Parâmetros Fuzzy

Considere aqui o seguinte problema de otimização fuzzy multidimensional:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & x \in \mathbb{R}^n, \\ & \tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para a resolução desta classe de problemas podemos destacar os seguintes métodos: métodos que não usam derivadas (método de Rosenbrock), métodos que usam derivadas (método de máxima descida – Steepest Descent – e o método de Newton) e o método do gradiente conjugado.

Algoritmo 4.2.7 Algoritmo de Busca Linear – Fase I

Dados Seja $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ o intervalo de incerteza inicial. Denote $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_{\min} = 0.0001$, $i = 1$, $c_1 = 0.0001$ e $c_2 = 0.9$.

1: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; 0)$ e $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0)$.

2: **loop**

3: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_i)$.

4: **Se** $[F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_i)) > F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; 0)) + c_1 \lambda_i F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0))]$ **ou** $[F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_i)) \geq F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{i-1})) \text{ e } i > 1]$ **então**

5: Seja $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ o intervalo de incerteza para executar o Algoritmo 4.2.8. **PARE**, λ_k fornecido pelo algoritmo na fase II é a solução.

6: **Fim do condicional**

7: Calcule $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_i)$.

8: **Se** $|F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_i))| \leq -c_2 F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0))$ **então**

9: Seja $\lambda_i = \lambda_k$ a solução e **PARE**.

10: **Fim do condicional**

11: **Se** $F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_i)) \geq 0$ **então**

12: Seja $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ o intervalo de incerteza para executar o Algoritmo 4.2.8. **PARE**, λ_k fornecido pelo algoritmo na fase II é a solução.

13: **Fim do condicional**

14: $\lambda_{i-1} = \lambda_i$ e $\lambda_i = \frac{\lambda_{i-1} - \lambda_{\max}}{2}$.

15: Faça $i = i + 1$ e volte ao passo (3).

16: **Fim do loop**

4.3.1 Métodos de Busca Sem Derivadas

Considere o problema (4.15). Abordamos a seguir um método de busca sem o uso de derivadas da função cujo procedimento é dado por: dado um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, uma direção \mathbf{d} é encontrada, e então a função objetivo é minimizada em \mathbf{x} na direção \mathbf{d} : $\min f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})$, $\lambda \in \mathbb{S}$, \mathbb{S} um subconjunto do \mathbb{R}^n . O método abordado é o método de Rosenbrock, como em [3].

Método de Rosenbrock

O método de Rosenbrock toma passos discretos ao longo de uma direção \mathbf{d} . Em cada iteração, o método busca iterativamente n direções ortogonais; quando um novo ponto é obtido, um novo vetor de direções ortogonais é construído.

Sejam $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$ vetores linearmente independentes, onde cada vetor tem norma igual a 1. Suponha que estes vetores são ortogonais entre si, ou seja $\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_j = 0$, para $i \neq j$. Dado um vetor \mathbf{x}_k , a função objetivo com parâmetros fuzzy é minimizada ao longo de cada direção iterativamente, resultando em um novo vetor \mathbf{x}_{k+1} . Assim, $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{d}_j$, onde λ_j é o tamanho do passo na direção \mathbf{d}_j . O novo conjunto de vetores $\bar{\mathbf{d}}_1, \bar{\mathbf{d}}_2, \dots, \bar{\mathbf{d}}_n$ é obtido usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt,

Algoritmo 4.2.8 Algoritmo de Busca (Interpolação Cúbica) – Fase II

Dados Sejam $[\lambda_{i-1}, \lambda_i] = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, $c_1 = 0.0001$, $c_2 = 0.9$ e $\alpha \in [0, 1)$.

- 1: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; 0)$ e $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0)$.
- 2: **loop**
- 3: Calcule $l_{\min} = \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{\min})$ e $ll_{\min} = \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{\min})$, $l_{\max} = \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{\max})$ e $ll_{\max} = \theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{\max})$.
- 4: Cálculo da Interpolação Cúbica:

$$\begin{aligned} ic_1 &= ll_{\min} + ll_{\max} - 3 \frac{ll_{\min} - ll_{\max}}{\lambda_{\min} - \lambda_{\max}} \\ \tilde{ic}_2 &= ic_1^2 - ll_{\min} ll_{\max} \\ ic_2 &= \sqrt{F(\tilde{ic}_2)} \\ \tilde{\lambda} &= \lambda_{\max} - (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) \left[\frac{ll_{\max} + ic_2 - ic_1}{ll_{\max} - ll_{\min} + 2ic_2} \right] \end{aligned}$$

- 5: Resolva $\bar{\lambda} = \min \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)$ sujeito a $\lambda \in \tilde{\lambda}_\alpha$ usando os Algoritmos 4.2.1, 4.2.2 ou 4.2.3.
- 6: Calcule $\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\lambda})$.
- 7: **Se** $[F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\lambda})) > c_1 \bar{\lambda} F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0))]$ **ou** $[F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\lambda})) \geq F(\theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda_{\min}))]$ **então**
- 8: $\lambda_{\max} = \bar{\lambda}$.
- 9: **Caso contrário**
- 10: Calcule $\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\lambda})$.
- 11: **Se** $|F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\lambda}))| \leq -c_2 F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; 0))$ **então**
- 12: $\bar{\lambda}$ é solução. **PARE**.
- 13: **Fim do condicional**
- 14: **Se** $F(\theta'(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\lambda})) (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) \geq 0$ **então**
- 15: $\lambda_{\max} = \lambda_{\min}$.
- 16: **Fim do condicional**
- 17: $\lambda_{\min} = \bar{\lambda}$. Volte ao passo (3).
- 18: **Fim do condicional**
- 19: **Fim do loop**

como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j &= \begin{cases} \mathbf{d}_j & \text{se } \lambda_j = 0 \\ \sum_{i=j}^n \lambda_i \mathbf{d}_i & \text{se } \lambda_j \neq 0 \end{cases} \\ \mathbf{b}_j &= \begin{cases} \mathbf{a}_j & \text{se } j = 1 \\ \mathbf{a}_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\mathbf{a}_j^T \bar{\mathbf{d}}_i) \bar{\mathbf{d}}_i & \text{se } j \geq 2 \end{cases} \\ \bar{\mathbf{d}}_j &= \frac{\mathbf{b}_j}{\|\mathbf{b}_j\|} \end{aligned} \tag{4.16}$$

De (4.16), se $\lambda_j = 0$, a nova direção $\bar{\mathbf{d}}_j$ será igual a direção \mathbf{d}_j anterior. Assim, só calculamos a nova direção quando $\lambda_j \neq 0$.

Note que o parâmetro fuzzy $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ só é utilizado no passo 2 do Algoritmo 4.3.1, retornando λ

Algoritmo 4.3.1 Algoritmo de Rosenbrock

Dados Seja $\epsilon > 0$. Escolha $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$ ortogonais, \mathbf{x}_1 , faça $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$, $k = j = 1$, e vá ao passo (1).

- 1: **Para** $j = 1$ até $j = n$, **faça**
- 2: $\lambda_j = \widetilde{\min} f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_j + \lambda \mathbf{d}_j) \equiv \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)$, sujeito a $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3: $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \lambda_j \mathbf{d}_j$, e $j = j + 1$.
- 4: **Fim do laço**
- 5: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{y}_n$.
- 6: **Se** $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \epsilon$ **então**
- 7: **PARE**, \mathbf{x}_{k+1} é solução ótima.
- 8: **Caso contrário**
- 9: $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_{k+1}$, $k = k + 1$ e $j = 1$.
- 10: Forme um novo conjunto de direções ortogonais usando (4.16). Denote estas direções por $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n$ e volte ao passo (1).
- 11: **Fim do condicional**

crisp (λ é obtido executando um método de busca unidimensional sem derivadas, por exemplo, o método da Secção Áurea – Algoritmo 4.2.2).

4.3.2 Métodos de Busca com Uso de Derivadas

Nesta seção são abordados métodos que usam a derivada da função a ser minimizada para obter a direção de busca, tais como o método de máxima descida, o método de Newton e o Método do Gradiente Conjugado.

Nestes algoritmos, o processo de atualização é dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda \tilde{\mathbf{d}}_k,$$

onde λ minimiza $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k + \lambda \tilde{\mathbf{d}}_k)$, e $\tilde{\mathbf{d}}_k$ é uma direção de busca que pode ser obtida de diferentes maneiras; nos métodos que seguem, esta direção de busca $\tilde{\mathbf{d}}_k$ será um vetor com elementos fuzzy.

A complicação extra associada a uma direção fuzzy é que se a mantivermos fuzzy, \mathbf{x}_{k+1} será um vetor com elementos fuzzy e, conseqüentemente, teremos uma propagação da característica fuzzy. A fim de evitar esta propagação da característica fuzzy, propomos uma discretização de $\tilde{\mathbf{d}}_k$ antes do cálculo de \mathbf{x}_{k+1} , e tomamos o vetor $\tilde{\mathbf{d}}_k$ discretizado que mais se aproxime do valor ótimo da função objetivo.

Assim, discretizamos cada elemento da direção fuzzy \tilde{d}_k^α , $\alpha \in [0, 1]$, em I fatores, como ilustra a Figura 4.3. Denotaremos por d_1 e d_2 os extremos do número fuzzy \tilde{d}_k^α , para $\alpha = 0$, expresso por intervalos de confiança, ou seja, $\tilde{d}_k^\alpha = [d_1^\alpha, d_2^\alpha]$, onde $\alpha \in [0, 1]$. Assim, tomando $\alpha \in [0, 1]$, podemos discretizar $\tilde{\mathbf{d}}_k$ como no Algoritmo 4.3.2.

Método de Máxima Descida

O método de máxima descida (Steepest Descent) é um dos métodos mais conhecidos para minimização de funções multivariáveis, também conhecido como o método do gradiente [3].

Este método usa o vetor \mathbf{d} como uma direção de descida da função $f(\cdot)$ a ser otimizada. Aqui, esta função apresenta parâmetros fuzzy $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Consideramos que \mathbf{d} é uma direção de descida, se existe um $\delta > 0$ tal que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ para todo $\lambda \in (0, \delta)$.

Devemos destacar que $\tilde{\mathbf{d}}_k$ é um vetor de componentes fuzzy, pois $\tilde{\mathbf{d}}_k = -\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$, ou seja, $\tilde{\mathbf{d}}_k$ aponta

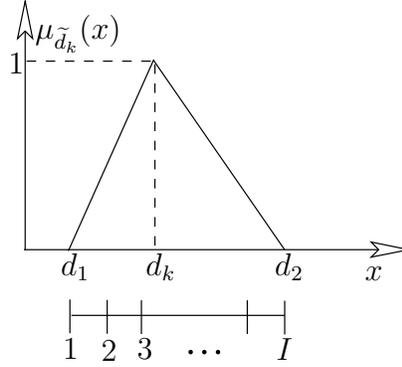


Figura 4.3: Discretização do número fuzzy \tilde{d}_k .

Algoritmo 4.3.2 Discretização da direção de busca

Dados $I \in \mathbb{N}$ maior que zero e $\alpha \in [0, 1)$ fixo, calcule $\delta = \frac{\mathbf{d}_2^\alpha - \mathbf{d}_1^\alpha}{I}$.

- 1: **Para** $i = 0$ até $i = I$, **faça**
 - 2: Para cada elemento de $\tilde{\mathbf{d}}_k$, calcule $\mathbf{d}_i^\alpha = \mathbf{d}_1^\alpha + (\delta \cdot i)$
 - 3: Minimize $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_i)$, sujeito a $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - 4: **Fim do laço**
 - 5: $\mathbf{x}_{k+1} = \{\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_i : \min_{i \in I} [f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_i)]\}$
-

na direção de maior decréscimo da função objetivo. Então, aplicamos o Algoritmo 4.3.2 para obter a direção crisp que mais se aproxime do valor ótimo da função objetivo.

Algoritmo 4.3.3 Algoritmo para o Método de Máxima Descida

Dados Sejam $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, \mathbf{x}_1 a solução inicial, $\Delta > \epsilon_2$ e $k = 1$.

- 1: **Enquanto** $(F_1(\|\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)\|) > \epsilon_1)$ e $(\Delta > \epsilon_2)$ **faça**
 - 2: Faça $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$, e execute o Algoritmo (4.3.2) para obter \mathbf{x}_{k+1} .
 - 3: Faça $\Delta = \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}_k\|}$, e $k = k + 1$.
 - 4: **Fim do enquanto**
-

O Método de Newton

De maneira análoga à otimização de funções unidimensionais, o método de Newton pode ser aplicado a funções multidimensionais, com a diferença de que a função com derivada de segunda ordem gera uma matriz de derivadas parciais de segunda ordem, a qual denominamos de **matriz Hessiana**.

Assim, o método de Newton usa a aproximação da série de Taylor de segunda-ordem no ponto \mathbf{x}_k :

$$q(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \cong f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) + \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k),$$

onde $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$ é a matriz Hessiana com parâmetros fuzzy de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$. A condição necessária para a minimização de q é que $q'(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \simeq \tilde{0}$ ou $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) + \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \simeq \tilde{0}$. Assumindo que a inversa

de $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$ exista, então \mathbf{x}_{k+1} é dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k),$$

onde $\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$ substitui a direção de máxima descida e o cálculo de λ_k . Como esta direção é fuzzy, utilizamos a idéia do Algoritmo 4.3.2.

Seja $\tilde{\mathbf{d}}_k = \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$, e supondo que a inversa da matriz Hessiana exista, temos:

$$\nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) \tilde{\mathbf{d}}_k = \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k). \quad (4.17)$$

Resolvendo o sistema fornecido por (4.17), obtemos $\tilde{\mathbf{d}}_k$, onde o discretizamos usando os passos 1 e 2 do Algoritmo 4.3.2, e escolhemos \mathbf{x}_{k+1} tal que $\mathbf{x}_{k+1} = \{\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_k - \mathbf{d}_i \text{ tal que } \widetilde{\min}_{i \in I} [f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_i)]\}$. O Algoritmo 4.3.4 esboça tais procedimentos.

Algoritmo 4.3.4 Algoritmo para o Método de Newton

Dados Sejam $\epsilon > 0$, \mathbf{x}_1 a solução inicial, $\Delta > \delta$ e $k = 1$.

- 1: **Enquanto** ($\Delta > \epsilon$) **faça**
 - 2: Resolva o sistema (4.17) e obtenha \mathbf{d}_k , execute o Algoritmo 4.3.2 até o passo (2).
 - 3: $\mathbf{x}_{k+1} = \{\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_k - \mathbf{d}_i : \widetilde{\min}_{i \in I} [f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_i)]\}$.
 - 4: Faça $\Delta = \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}_k\|}$, e $k = k + 1$.
 - 5: **Fim do enquanto**
-

Para a resolução do sistema (4.17) usamos o método de Eliminação de Gauss baseado em [14], utilizando a aritmética fuzzy, como apresentada no Capítulo 2.

4.3.3 Método do Gradiente Conjugado

Na abordagem tratada, o método do gradiente conjugado minimiza uma função fuzzy diferenciável $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$ gerando iterações \mathbf{y}_l como:

$$\mathbf{y}_{l+1} = \mathbf{y}_l + \lambda_l \mathbf{d}_l,$$

onde \mathbf{d}_l é a direção de busca e λ_l é o tamanho do passo que minimiza $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ na direção \mathbf{d}_l a partir do ponto \mathbf{y}_l , ou seja, $\lambda_l = \min f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_l + \lambda \mathbf{d}_l) \equiv \min \theta(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda)$.

Para $l = 1$, a direção inicial será $\mathbf{d}_1 = -\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_1)$, e para as demais iterações, dado \mathbf{y}_{l+1} com $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_{l+1}) \neq 0$, para cada $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $l \geq 1$, temos:

$$\mathbf{d}_{l+1} = -\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_{l+1}) + \mu_l \mathbf{d}_l,$$

onde μ_l é um parâmetro de deflação que caracteriza um método particular do gradiente conjugado. No algoritmo implementado, usamos o parâmetro dado por Fletcher e Reeves, como apresentado em [3]:

$$\mu_l = \frac{\|\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_{l+1})\|^2}{\|\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_l)\|^2}.$$

Novamente, note que \mathbf{d}_l é uma direção fuzzy (cada componente é um número fuzzy) e, portanto, usamos o Algoritmo 4.3.2.

Algoritmo 4.3.5 Algoritmo do Gradiente Conjugado

Dados Sejam $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, \mathbf{x}_1 a solução inicial, $\Delta_2 > \delta$, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ e $k = l = 1$.

- 1: $\Delta_1 = F_1(\|\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)\|)$.
 - 2: **Enquanto** ($\Delta_1 > \epsilon_1$) e ($\Delta_2 > \epsilon_2$) **faça**
 - 3: $\mathbf{d}_1 = -\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_1)$, e execute o Algoritmo 4.3.2.
 - 4: Verifique o critério de parada: Δ_1 e $\Delta_2 = \frac{\|\mathbf{y}_{l+1} - \mathbf{y}_l\|}{\|\mathbf{y}_l\|}$.
 - 5: **Para** $l = 1$ até $l = n$ **faça**
 - 6: $\mu_l = \frac{\|\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_{l+1})\|^2}{\|\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_l)\|^2}$,
 - 7: $\mathbf{d}_{l+1} = -\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{y}_l) + \eta_l \mathbf{d}_l$.
 - 8: Execute o Algoritmo 4.3.2.
 - 9: Verifique o critério de parada: Δ_1 e $\Delta_2 = \frac{\|\mathbf{y}_{l+1} - \mathbf{y}_l\|}{\|\mathbf{y}_l\|}$. Faça $l = l + 1$.
 - 10: **Fim do laço**
 - 11: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{y}_l$, $k = k + 1$, $l = 1$ e vá ao passo (3).
 - 12: **Fim do enquanto**
-

Capítulo 5

Programação Não-Linear Restrita com Parâmetros Fuzzy

Introdução

Para problemas com restrições, os parâmetros (ou coeficientes) fuzzy podem ocorrer na função objetivo, no conjunto de restrições, ou em ambos os casos. Tratamos do caso onde tais parâmetros fuzzy ocorrem apenas na função objetivo do problema. Assim, um problema de Programação Não-Linear Restrita com Parâmetros Fuzzy é estabelecido como:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, q \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$. As restrições dadas por $g_i(\mathbf{x})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, e $h_j(\mathbf{x})$, para $j = 1, 2, \dots, q$, podem ser lineares ou não-lineares. O conjunto \mathbb{S} é dado por:

$$\mathbb{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \},$$

onde $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_p]$ e $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_q]$.

Como no capítulo anterior, apresentamos inicialmente a extensão das condições de otimalidade para o problema (5.1), e na seção 5.2, os seguinte métodos:

1. Função Penalidade:
 - (a) Método de Função Penalidade;
 - (b) Método do Lagrangeano Aumentado.
2. Método de Direções Viáveis:
 - (a) Método do Gradiente Projetado de Rosen (para restrições lineares).

5.1 Condições de Otimalidade

Considere algumas definições.

Definição 5.1.1. [60]

1. Uma restrição de desigualdade $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, para $i = 1, 2, \dots, p$, se diz *ativa* em um ponto $\bar{\mathbf{x}}$ se $g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$; onde o conjunto de índices para as restrições ativas é dado por $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$;
2. Um ponto $\bar{\mathbf{x}}$ satisfazendo $g_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0$, para $i = 1, 2, \dots, p$, e $h_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, para $j = 1, 2, \dots, q$, se diz *regular* se os vetores gradientes $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$, para $i \in I$, e $\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})$, para $j = 1, 2, \dots, q$, são linearmente independentes;
3. A função Lagrangeana associada ao problema (5.1) é dada por:

$$L(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q v_j h_j(\mathbf{x}),$$

onde $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_p]^T$ e $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_q]^T$ são os multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente;

4. Uma restrição ativa se diz *não-degenerada* se os correspondentes multiplicadores de Lagrange são estritamente positivos; o conjunto de índices é definido por $I^+ = \{i \in I : u_i > 0\}$.

Definição 5.1.2. [24] Considere as seguintes definições de curva sobre superfície para uma família de pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ continuamente parametrizada por $l \leq t \leq u$:

1. Uma curva é diferenciável se $\dot{\mathbf{x}}(t) = d\mathbf{x}/dt$ existe, e duas vezes diferenciável se $\ddot{\mathbf{x}}$ existe;
2. Uma curva passa por $\bar{\mathbf{x}}$ se $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ para algum $l \leq \bar{t} \leq u$;
3. A derivada de uma curva em $\bar{\mathbf{x}}$ é $\dot{\mathbf{x}}(\bar{t})$.

As condições de otimalidade de KKT (Karush (1939) e Kuhn e Tucker (1951)), vide [3] e [49], podem ser extendidas para o problema (5.1) apresentado. Entre os resultados obtidos por KKT, apresentamos as condições necessárias de primeira e segunda ordens e a condição suficiente de segunda ordem.

Teorema 5.1.1. Condição Necessária de Primeira Ordem: Seja $\bar{\mathbf{x}}$ um ponto regular para o conjunto de restrições do problema (5.1) e suponha que as funções $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, para $i = 1, 2, \dots, p$ e $h_j(\mathbf{x})$, para $j = 1, 2, \dots, q$, sejam diferenciáveis. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local para o problema (5.1), então existem multiplicadores de Lagrange $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ e \mathbf{v} , tais que:

$$\nabla L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^q v_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{\mathbf{0}}, \quad (5.2a)$$

$$u_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5.2b)$$

Demonstração 22. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$, então $\bar{\mathbf{x}}$ é também um ponto de mínimo local de f sobre o conjunto de restrições:

$$\begin{aligned} g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, & i \in I \\ h_j(\bar{\mathbf{x}}) &= 0, & j = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

e a existência de multiplicadores de Lagrange satisfazendo (5.2) é garantida. Resta mostrar que $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.

Suponha que $u_k < 0$ para algum $k \in I$. Sejam S e M uma superfície e um plano tangente, respectivamente, definido por todas as restrições ativas em $\bar{\mathbf{x}}$ exceto a k -ésima restrição. Como $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto regular, existe um vetor $\mathbf{d} \in M$ tal que $\nabla g_k(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} < 0$. Seja $\mathbf{x}(t)$ uma curva em S passando por $\bar{\mathbf{x}}$ (em $t = 0$) com $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{d}$. Então, para $t \geq 0$ pequeno, $\mathbf{x}(t)$ é viável, e

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t))|_{t=0} = \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} \lesssim \tilde{0},$$

pela equação (5.2a), contradiz a otimalidade de $\bar{\mathbf{x}}$. \square

Teorema 5.1.2. Condição Necessária de Segunda Ordem: Suponha que a função $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$ e as funções $g_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \dots, p$ e $h_j(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $j = 1, 2, \dots, q$, sejam duas vezes diferenciáveis, e seja $\bar{\mathbf{x}}$ um ponto regular de $g_i(\mathbf{x})$, para $i = 1, 2, \dots, p$, e $h_j(\mathbf{x})$, para $j = 1, 2, \dots, q$. Se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local para o problema (5.1), então existem multiplicadores de Lagrange $\mathbf{u} \geq 0$ e \mathbf{v} , tais que as condições (5.2) se verificam e a matriz Hessiana com parâmetros fuzzy:

$$\nabla^2 L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^p u_i \nabla^2 g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^q v_j \nabla^2 h_j(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.3)$$

é semi-definida positiva fuzzy no subespaço tangente às restrições ativas em $\bar{\mathbf{x}}$. Logo, $\mathbf{d}^t \nabla^2 L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{d} \gtrsim \tilde{0}$, $\forall \mathbf{d} \in M' = \{\mathbf{d} \neq \mathbf{0} : \nabla g_i(\mathbf{x})^T \mathbf{d} \leq 0, \forall i \in I, \nabla h_j(\mathbf{x})^T \mathbf{d} = 0, j = 1, 2, \dots, q\}$.

Demonstração 23. Do Teorema 5.1.1, temos que $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local para o problema (5.1). Se $M' = \emptyset$, o resultado é trivial. Caso contrário, seja $\mathbf{d} \in M'$, e denote $I(\mathbf{d}) = \{i \in I : \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} = 0\}$. Para $\lambda \geq 0$, definimos $\vartheta(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, pela seguinte equação diferencial e condição de fronteira:

$$\frac{d\vartheta(\lambda)}{d\lambda} = \mathbf{P}(\lambda)\mathbf{d}, \quad \vartheta(0) = \bar{\mathbf{x}},$$

onde $\mathbf{P}(\lambda)$ é a matriz que projeta qualquer vetor no espaço nulo da matriz com linhas $\nabla g_i(\vartheta(\lambda))$, $i \in I$, e $\nabla h_j(\vartheta(\lambda))$, para $j = 1, 2, \dots, q$. De [3], temos que $\vartheta(\lambda)$ é viável para $0 \leq \lambda \leq \delta$, para algum $\delta > 0$.

Considere a seqüência $\{\lambda\} \rightarrow 0^+$ e denote $\bar{\mathbf{x}} = \vartheta(\lambda_k)$ para todo k . Denotando $L(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv L(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$, considere a seguinte aproximação da expansão da série de Taylor para a função Lagrangeana com parâmetros fuzzy:

$$L(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) = L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) + \nabla L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla^2 L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}). \quad (5.4)$$

Como $g_i(\mathbf{x}_k) = 0$, $\forall i \in I$, e $h_j(\mathbf{x}_k) = 0$, para $j = 1, 2, \dots, q$, temos que $L(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) = f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$, e conseqüentemente, $L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) = f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$. De maneira análoga, se $\bar{\mathbf{x}}$ satisfaz a equação (5.2a), temos que, $\nabla L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \simeq \tilde{\mathbf{0}}$. E ainda, como $\mathbf{x}_k = \vartheta(\lambda)$ é viável, $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ quando $\lambda_k \rightarrow 0^+$ ou quando $k \rightarrow \infty$, e como $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local, temos que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})$ para k suficientemente grande. Conseqüentemente, da equação (5.4), temos:

$$\frac{f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)}{\lambda_k^2} = \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}})^T}{\lambda_k} \nabla^2 L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \frac{(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}})}{\lambda_k}, \quad (5.5a)$$

para k suficientemente grande. Mas note que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}})}{\lambda_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(\lambda_k) - \vartheta(0)}{\lambda_k} = \vartheta'(0) = \mathbf{P}(0)\mathbf{d} = \mathbf{d}, \quad (5.5b)$$

como $\mathbf{d} \in M'$ implica que \mathbf{d} já está no espaço nulo da matriz com linhas $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$ e $\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})$, para $i \in I(\mathbf{d})$ e $j = 1, 2, \dots, q$. Tomando o limite em (5.5a) quando $k \rightarrow \infty$ e usando a equação (5.5b), temos que $\mathbf{d}^T \nabla^2 L(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d} \gtrsim \tilde{0}$. \square

Teorema 5.1.3. Condição Suficiente de Segunda Ordem: *Seja $\bar{\mathbf{x}}$ um ponto regular para o problema (5.1). Suponha que existam multiplicadores de Lagrange $\mathbf{u} \geq 0$ e \mathbf{v} tais que as condições em (5.2) se verificam, e a matriz Hessiana com parâmetros fuzzy (5.3) seja semi-definida positiva fuzzy. Então $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local.*

Demonstração 24. *Suponha que $\bar{\mathbf{x}}$ não é um ponto de mínimo local. Então, existe uma seqüência $\{\mathbf{x}_k\}$ convergindo para $\bar{\mathbf{x}}$ tal que $\mathbf{x}_k \neq \bar{\mathbf{x}}$ e $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k) \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \forall k$. Definindo $\mathbf{d}_k = (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}) / \|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|$ e $\lambda_k = \|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\| \forall k$, temos $\mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}} + \lambda_k \mathbf{d}_k$, onde $\|\mathbf{d}_k\| = 1 \forall k$, e temos que $\{\lambda_k\} \rightarrow 0^+$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $\|\mathbf{d}_k\| = 1 \forall k$, uma seqüência convergente existe. Suponha, sem perda de generalidade, que a seqüência dada represente a subseqüência convergente. Então, $\{\mathbf{d}_k\} \rightarrow \mathbf{d}$, onde $\|\mathbf{d}_k\| = 1$. Além disso, temos que:*

$$\tilde{0} \gtrsim f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}} + \lambda_k \mathbf{d}_k) - f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) = \lambda_k \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \lambda_k^2 \mathbf{d}_k^T \nabla^2 f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d}_k \quad (5.6a)$$

$$0 \geq g_i(\bar{\mathbf{x}} + \lambda_k \mathbf{d}_k) - g_i(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda_k \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \lambda_k^2 \mathbf{d}_k^T \nabla^2 g_i(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d}_k, \quad i \in I \quad (5.6b)$$

$$0 \geq h_j(\bar{\mathbf{x}} + \lambda_k \mathbf{d}_k) - h_j(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda_k \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \lambda_k^2 \mathbf{d}_k^T \nabla^2 h_j(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{d}_k, \quad j = 1, \dots, q \quad (5.6c)$$

Dividindo cada expressão em (5.6) por $\lambda_k > 0$ e tomando $k \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} &\lesssim \tilde{0} \\ \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} &\leq 0, \quad i \in I \\ \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Como $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto regular, obtemos (5.2a). Tomando o seu produto interno com \mathbf{d} e usando (5.7), concluímos que

$$\begin{aligned} \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} &\simeq \tilde{0} \\ \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} &= 0, \quad i \in I^+ \\ \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} &\leq 0, \quad i \in I^0 \\ \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{d} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $I^+ = \{i \in I : u_i > 0\}$ e $I^0 = \{i \in I : u_i = 0\}$. Então, em particular, $\mathbf{d} \in M$. E ainda, multiplicando (5.6b) por u_i , para $i \in I$, e (5.6c) por v_j , para $j = 1, 2, \dots, q$, somando-os e usando (5.2a), temos:

$$\frac{\lambda_k^2}{2} \mathbf{d}_k^T \nabla^2 \tilde{L}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{d}_k \lesssim \tilde{0}. \quad (5.9)$$

Dividindo a desigualdade (5.9) por $\lambda_k^2 > 0$ e tomando $k \rightarrow \infty$, obtemos $\mathbf{d}^T \nabla^2 \tilde{L}(\tilde{\mathbf{a}}; \bar{\mathbf{x}}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{d} \lesssim \tilde{0}$, onde $\|\mathbf{d}\| = 1$ e $\mathbf{d} \in M$, o que é uma contradição. Portanto, $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de mínimo local para o problema (5.1). \square

As demonstrações dos Teoremas 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3 são adaptações daquelas apresentadas por M. S. Bazaraa et al [3] e por D. G. Luenberger [49], para problemas crisp.

5.2 Métodos de Programação Não-Linear Restrita com Parâmetros Fuzzy

Entre os diversos métodos de Programação Não-Linear Restrita, abordamos os métodos de Função Penalidade, Lagrangeano Aumentado e o método de direções viáveis de Rosen. Estes métodos são adaptados para resolver problemas que apresentam incerteza nos coeficientes da função objetivo, e tomamos como base os métodos/algoritmos apresentados em [3], [24], [49] e [52].

5.2.1 Método de Função Penalidade e Lagrangeano Aumentado

A característica mais importante dos métodos de Função Penalidade e Lagrangeano Aumentado é a transformação do problema restrito (5.1) em um problema irrestrito, ou em uma seqüência de problemas irrestritos.

Método de Função Penalidade

Considere o problema (5.1). O método de Função Penalidade transforma este problema em um problema irrestrito, cuja função objetivo é obtida combinando-se três ingredientes:

1. A função objetivo do problema restrito original;
2. um termo de penalização de violação para cada restrição;
3. um parâmetro de penalidade $\rho > 0$, para controlar o nível de penalização.

Quando $\rho \rightarrow \infty$, o problema restrito torna-se mais preciso, ou seja, caminha para a solução viável do problema original.

A função penalidade é dada por:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \phi [g_i(\mathbf{x})] + \sum_{j=1}^q \psi [h_j(\mathbf{x})], \quad (5.10)$$

onde $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ são funções contínuas satisfazendo:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= 0 \quad \text{se } y \leq 0 \quad \text{e} \quad \phi(y) > 0 \quad \text{se } y > 0 \\ \psi(y) &= 0 \quad \text{se } y = 0 \quad \text{e} \quad \psi(y) > 0 \quad \text{se } y \neq 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

As funções $\phi(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$ em geral são da forma:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= [\max \{0, y\}]^r \\ \psi(y) &= |y|^r \end{aligned}$$

onde r é um valor inteiro e positivo. Assim, a função penalidade P , dada por (5.10), é reformulada como:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p [\max \{0, g_i(\mathbf{x})\}]^r + \sum_{j=1}^q |h_j(\mathbf{x})|^r.$$

Tomando $r = 2$ obtemos $P(\mathbf{x})$ como uma função diferenciável. Assim, a função $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \rho P(\mathbf{x})$ é chamada de função auxiliar.

O Algoritmo 5.2.1 resolve o problema (5.1) usando a função penalidade, ou seja, resolve o problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \rho \left(\sum_{i=1}^p [\max\{0, g_i(\mathbf{x})\}]^2 + \sum_{j=1}^q |h_j(\mathbf{x})|^2 \right) \\ \text{S. a} \quad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Algoritmo 5.2.1 Algoritmo de Função Penalidade

Dados Sejam $\epsilon > 0$, \mathbf{x}_1 uma solução inicial, $\rho_1 > 0$, $\beta > 1$ e $k = 1$.

- 1: **loop**
 - 2: Resolva o problema (5.12) usando os Algoritmos 4.3.4 ou 4.3.5 para obter \mathbf{x}_{k+1} .
 - 3: **Se** $\rho_k P(\mathbf{x}_{k+1}) < \epsilon$ **então**
 - 4: **PARE**, \mathbf{x}_{k+1} é solução ótima do problema.
 - 5: **Caso contrário**
 - 6: Faça $\rho_{k+1} = \rho_k \cdot \beta$, $k = k + 1$.
 - 7: **Fim do condicional**
 - 8: **Fim do loop**
-

Método do Lagrangeano Aumentado

Como foi visto na seção anterior, no método de penalidade o problema (5.1) é modificado pela adição de uma função penalidade (auxiliar) quadrática, resultando em um novo problema (5.12). Neste caso, é preciso que $\rho \rightarrow \infty$ para obter uma solução ótima para o problema (5.1). Apresentamos o método do Lagrangeano Aumentado (ALAG), que está relacionado ao método de Função Penalidade, introduzindo os multiplicadores de Lagrange.

Considere, inicialmente, o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Se usarmos a função penalidade para minimizá-lo, teremos: $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \rho \sum_{j=1}^q h_j^2(\mathbf{x})$, e quando $\rho \rightarrow \infty$ obtemos uma solução ótima para (5.13).

Considere agora uma perturbação no termo penalidade original de $\mathbf{t} = (t_j, j = 1, 2, \dots, q)$ e considere a função Penalidade (ou auxiliar) $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \rho \sum_{j=1}^q [h_j(\mathbf{x}) - t_j]^2$. Então é possível obter uma solução ótima para o problema (5.13) sem precisar que $\rho \rightarrow \infty$. Expandindo esta última função, temos:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) - 2\rho \sum_{j=1}^q t_j h_j(\mathbf{x}) + \rho \sum_{j=1}^q h_j^2(\mathbf{x}) + \rho \sum_{j=1}^q t_j^2.$$

Denotando $v_j = -2\rho t_j$, para $j = 1, 2, \dots, q$ e eliminando o último termo constante desta função, podemos reescrevê-la como:

$$F_{alag}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q v_j h_j(\mathbf{x}) + \rho \sum_{j=1}^q h_j^2(\mathbf{x}). \quad (5.14)$$

Considere agora o problema (5.1). A extensão da função (5.14) para problemas com restrições de desigualdade ($\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$), é obtida transformando-se a restrição de desigualdade em restrição de

igualdade pela inclusão de variáveis de folga $\mathbf{s}^2 = [s_1^2, s_2^2, \dots, s_p^2]$, tal que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2 = \mathbf{0}$. Então F_{alag} pode ser dada por:

$$F_{alag}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p u_i [g_i(\mathbf{x}) + s_i^2] + \sum_{j=1}^q v_j h_j(\mathbf{x}) + \rho \left[\sum_{i=1}^p (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2)^2 + \sum_{j=1}^q h_j^2(\mathbf{x}) \right].$$

Note que esta representação pode ser simplificada tomando $\rho > 0$. Seja $t = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ como sua representação em (\mathbf{x}, \mathbf{s}) para o conjunto de multiplicadores de Lagrange (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Então:

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \rho \sum_{i=1}^p \left[g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 + \frac{u_i}{2\rho} \right] - \sum_{i=1}^p \frac{u_i^2}{4\rho} + \sum_{j=1}^q v_j h_j(\mathbf{x}) + \rho \sum_{j=1}^q h_j^2(\mathbf{x}). \quad (5.15)$$

Portanto, no cálculo de $t = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, minimizamos (5.15) sobre (\mathbf{x}, \mathbf{s}) , primeiramente, minimizando $[g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 + (u_i/2\rho)]^2$ sobre s_i em termos de \mathbf{x} para cada $i = 1, 2, \dots, p$, e depois a expressão resultante sobre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Para efetuar tal operação, tomamos $\mathbf{s}^2 = -[\mathbf{g}(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}/2\rho)]$ se este for não-negativo e zero caso contrário. Assim, obtemos:

$$t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \min_{\mathbf{x}} \left\{ f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) + \rho \sum_{i=1}^p \max \left[g_i(\mathbf{x}) + \frac{u_i}{2\rho}, 0 \right]^2 - \sum_{i=1}^p \frac{u_i^2}{4\rho} + \sum_{j=1}^q v_j h_j(\mathbf{x}) + \rho \sum_{j=1}^q h_j^2(\mathbf{x}) \right\} \quad (5.16)$$

$$= \min_{\mathbf{x}} \{ F_{alag}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \}.$$

A atualização dos multiplicadores de Lagrange (\mathbf{u}, \mathbf{v}) está mostrada no Algoritmo 5.2.2.

5.2.2 Métodos de Direções Viáveis

Discutimos a modificação no método do Gradiente Projetado de Rosen para restrições lineares, aplicado aos problemas com parâmetros fuzzy nos coeficientes da função objetivo.

Os métodos de direções viáveis geram uma seqüência de pontos exclusivamente dentro da região viável. Portanto, dados \mathbf{x}_k (um ponto viável) e uma direção de busca \mathbf{d}_k determina-se $\lambda > 0$, suficientemente pequeno, através de uma busca unidimensional, de maneira que:

1. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k$ seja viável;
2. $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_{k+1}) \lesssim f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$.

Repete-se o procedimento até satisfazer a um critério de parada estabelecido.

Método do Gradiente Projetado de Rosen

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{Ex} = \mathbf{e} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Algoritmo 5.2.2 Algoritmo para Lagrangeano Aumentado

Dados Sejam $\bar{\mathbf{u}}_1$ e $\bar{\mathbf{v}}_1$ os multiplicadores de Lagrange iniciais, ρ_1 o parâmetro penalidade inicial, \mathbf{x}_1 um vetor nulo, $\epsilon > 0$ e $k = 1$.

1: Calcule $viol(\mathbf{x}_k) = \max\{|g_i(\mathbf{x}_k)| : i = 1, 2, \dots, p, |h_j(\mathbf{x}_k)| : j = 1, 2, \dots, q\}$.

2: **Enquanto** $viol(\mathbf{x}_k) > \epsilon$ **faça**

3: Resolva o problema irrestrito $\min F_{alag}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$ sujeito a $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ usando a função penalidade (5.16), através dos Algoritmos 4.3.4 ou 4.3.5 para obter \mathbf{x}_{k+1} .

4: Calcule $viol(\mathbf{x}_{k+1}) = \max\{|g_i(\mathbf{x}_{k+1})| : i = 1, 2, \dots, p, |h_j(\mathbf{x}_{k+1})| : j = 1, 2, \dots, q\}$.

5: **Se** $viol(\mathbf{x}_{k+1}) < \epsilon$ **então**

6: **PARE**, \mathbf{x}_{k+1} é solução ótima.

7: **Fim do condicional**

8: **Se** $viol(\mathbf{x}_k) \leq \frac{1}{4}viol(\mathbf{x}_{k+1})$ **então**

9: Calcule:

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{u}}_{k+1})_i &= (\bar{\mathbf{u}}_k)_i + \max\{g_i(2\rho_k \mathbf{x}_{k+1}), -(\bar{\mathbf{u}}_k)_i\} & \text{for } i = 1, 2, \dots, p, \\ (\bar{\mathbf{v}}_{k+1})_j &= (\bar{\mathbf{v}}_k)_j + 2\rho_k h_j(\mathbf{x}_{k+1}) & \text{for } j = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

10: Faça $k = k + 1$ e volte ao passo (3).

11: **Caso contrário**

12: Faça $\rho_{k+1} = 10\rho_k$, $\bar{\mathbf{u}}_{k+1} = \bar{\mathbf{u}}_k$, $\bar{\mathbf{v}}_{k+1} = \bar{\mathbf{v}}_k$ e $k = k + 1$. Retorne ao passo (3).

13: **Fim do condicional**

14: **Fim do enquanto**

onde $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ são matrizes; $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^q$ os vetores associados.

O método do Gradiente Projetado de Rosen é baseado no método de Máxima Descida para problemas irrestritos. Se usarmos somente a direção de busca $-\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$ discretizada no problema (5.17), a viabilidade requerida pode ser perdida; logo, para mantê-la ao longo do processo de busca projeta-se $-\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$ no espaço nulo dos gradientes das restrições ativas.

Definição 5.2.1. [3] Uma matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é chamada de matriz de projeção se $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ e $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}$.

Lema 5.2.1. Considere a matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e as seguintes afirmações:

1. Se \mathbf{P} é uma matriz de projeção, então \mathbf{P} é semi-definida positiva;
2. \mathbf{P} é uma matriz de projeção se, e somente se, $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ é uma matriz de projeção.

Demonstração 25. Vide [3].

A matriz de projeção é dada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^T(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{M}, \quad (5.18)$$

onde $\mathbf{M} = (\mathbf{A}_1^T, \mathbf{E}^T)$ e \mathbf{A}_1 agrega as restrições ativas de \mathbf{A} , isto é, \mathbf{A} pode ser decomposta em $\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}_1^T, \mathbf{A}_2^T)$, tal que $\mathbf{A}_1^T = \mathbf{b}_1$ e $\mathbf{A}_2^T < \mathbf{b}_2$. A matriz (5.18) satisfaz a Definição 5.2.1 e $\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Neste último caso, temos que $\mathbf{A}_1\mathbf{P} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{E}\mathbf{P} = \mathbf{0}$ pois \mathbf{A}_1 e \mathbf{E} são matrizes compostas pelas restrições ativas. Conseqüentemente, para o caso crisp, $\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{x}_k)$ é a projeção de $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ no espaço nulo das restrições ativas. Para o caso onde o gradiente da função objetivo é dado por $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k)$, calculamos a projeção para $\mathbf{P}\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k)$ discretizado e $\alpha \in [0, 1)$, seguindo a idéia do Algoritmo 4.3.2.

Se $\mathbf{P}\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k) \neq \mathbf{0}$, então a direção de descida para o método do Gradiente Projetado de Rosen é dada por $\mathbf{d}_k = -\mathbf{P}\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k)$. Caso contrário,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \mathbf{P}\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k) &= [\mathbf{I} - \mathbf{M}^T(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{M}] \nabla f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k) \\ &= f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k) + \mathbf{M}^T \mathbf{w} \\ &= f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k) + \mathbf{A}_1^T \mathbf{u} + \mathbf{E}^T \mathbf{v} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{w} = -(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{M}\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k)$ e $\mathbf{w}^T = (\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T)$. Se $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$, então \mathbf{x}_k satisfaz as condições de otimalidade de KKT. Caso contrário, uma nova matriz de projeção $\hat{\mathbf{P}}$ é gerada pela eliminação da linha correspondente a $\bar{u} = \min\{\mathbf{u} < \mathbf{0}\}$.

No Algoritmo 5.2.3, estamos usando uma variação do método do Gradiente Projetado de Rosen, onde a direção \mathbf{d}_k é dada por:

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} \mathbf{d}_k^I & \text{se } \|\mathbf{d}_k^I\| > |\bar{u}| \cdot c \\ \mathbf{d}_k^{II} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\mathbf{d}_k^I = -\mathbf{P}\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k) \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{d}_k^{II} = -\hat{\mathbf{P}}\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}_\alpha; \mathbf{x}_k)$ e $c > 0$.

O Algoritmo 5.2.3 resume o procedimento discutido.

Algoritmo 5.2.3 Algoritmo para o Gradiente Projetado de Rosen

Dados Sejam \mathbf{x}_1 a solução inicial, $J \in \mathbb{N}$ maior que zero, $c > 0$ e $k = 1$.

- 1: **loop**
- 2: $\mathbf{M}^t = (\mathbf{A}_1^t, \mathbf{E}^t)$.
- 3: $\tilde{\mathbf{d}}_k = -\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$.
- 4: **Se** \mathbf{M} **é vazia** **então**
- 5: **Se** $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ **então**
- 6: **PARE**, \mathbf{x}_k **é solução**.
- 7: **Caso contrário**
- 8: Seja $\tilde{\mathbf{d}}_k$ a direção de descida fuzzy e execute o Algoritmo de discretização 4.3.2 para obter \mathbf{x}_{k+1} . Faça $k = k + 1$.
- 9: **Fim do condicional**
- 10: **Caso contrário**
- 11: Para cada elemento de $\tilde{\mathbf{d}}_k$, calcule: $\delta = \frac{\mathbf{d}_2^{\alpha_i} - \mathbf{d}_1^{\alpha_i}}{J}$.
- 12: **Para** $j = 0$ **até** $j = J$, **faça**
- 13: $\bar{\mathbf{d}}_j = \mathbf{d} + (\delta \cdot j)$.
- 14: Calcule $\mathbf{d}_k^I = \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{d}}_j$ e $(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}^t) = \mathbf{w} = -(\mathbf{M}\mathbf{M}^t)^{-1} \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{d}}_j$ (os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} correspondem aos multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente).
- 15: **Se** $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ **então**
- 16: **Se** $\mathbf{d}_k = \mathbf{0}$ **então**
- 17: **PARE**, \mathbf{x}_k **é um ponto de KKT**.
- 18: **Caso contrário**
- 19: $\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_k^I$ e vá ao passo (26).
- 20: **Fim do condicional**
- 21: **Caso contrário**
- 22: $\bar{u} = \min\{\mathbf{u}_1 < 0\}$. Atualize $\hat{\mathbf{M}} = (\hat{\mathbf{A}}_1^t, \mathbf{E}^t)$, onde $\hat{\mathbf{A}}_1^t$ é obtido de \mathbf{A}_1 eliminando a linha correspondente a \bar{u} , e construa $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{M}}^t(\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{M}}^t)^{-1}\hat{\mathbf{M}}$.
- 23: Calcule $\mathbf{d}_k^{II} = \hat{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{d}}_j$
- 24: Faça

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} \mathbf{d}_k^I & \text{se } \|\mathbf{d}_k^I\| > |\bar{u}| \cdot c \\ \mathbf{d}_k^{II} & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- 25: Vá ao passo (26).
- 26: **Fim do condicional**
- 27: Faça $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{x}_k$, $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{A}_2\mathbf{d}_k$ e calcule:

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \min\{\hat{b}_i/\hat{d}_i : \hat{d}_i > 0\} & \text{if } \hat{\mathbf{d}} \not\leq \mathbf{0} \\ \infty & \text{if } \hat{\mathbf{d}} \leq \mathbf{0} \end{cases}$$
- 28: Calcule $\lambda_j = \widetilde{\min} f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_k + \lambda\mathbf{d}_j)$, sujeito a $\lambda \in [0, \lambda_{\max}]$.
- 29: $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_k + \lambda_j\mathbf{d}_k$.
- 30: **Fim do laço**
- 31: Faça $\mathbf{x}_{k+1} = \widetilde{\min}_{j \in J} [f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_j)]$ e $k = k + 1$.
- 32: **Fim do condicional**
- 33: **Fim do loop**

Capítulo 6

Resultados Computacionais

Introdução

Apresentamos agora alguns resultados computacionais para os métodos de Programação Não-Linear com Parâmetros Fuzzy como implementados e discutidos nos Capítulos 4 e 5.

Nas tabelas contendo os problemas teste, os números fuzzy são indicados pelo símbolo \sim e a coluna denominada como “Variação Fuzzy” mostra a porcentagem de variação do número fuzzy; por exemplo, se um número fuzzy $\tilde{2}$ tem uma porcentagem de variação de 10%, então sua função de pertinência triangular pode ser dada por:

$$\mu_{\tilde{2}}(x) = \begin{cases} \frac{x - 1.8}{0.2}, & x \in [1.8, 2.0] \\ \frac{2.2 - x}{0.2}, & x \in [2.0, 2.2] \\ 0.0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este número fuzzy também pode ser denotado por $[2.0; 1.8, 2.2]$, onde o primeiro elemento corresponde ao seu valor modal, e os outros valores aos extremos à esquerda e à direita do valor modal. Utilizamos esta notação nas tabelas de resultados, mais precisamente, na coluna denotada por $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$. A coluna denotada por $F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}))$ representa o valor defuzzificado de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$ pelo Primeiro Índice de Yager.

Neste capítulo, a seção 6.1 apresenta os resultados obtidos para os métodos de busca Unidimensional e de busca Multidimensional. Já a seção 6.2 aborda os resultados de alguns problemas para os casos onde o conjunto de restrições são Não-Lineares e Lineares.

6.1 Problemas de Programação Não-Linear Irrestrita

Nesta seção, apresentamos separadamente os resultados para problemas de busca Unidimensional (seção 6.1.1) e Multidimensional (seção 6.1.2).

6.1.1 Problemas Unidimensionais

Apresentamos na Tabela 6.1 os problemas Unidimensionais, e nas Tabelas 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 seus respectivos resultados. Os problemas PU2, PU3 e PU4 foram obtidos de [25]. Note que o método de Interpolação Cúbica é omitido nas tabelas de resultados, pois este foi implementado e testado apenas para o cálculo de λ_k , e aplicado diretamente nos algoritmos de busca multidimensional.

A função teste PU2 tem como mínimos locais os pontos $x^* = 0$ e $x^* = 2$ para a função `crisp` no intervalo de incerteza sugerido pela literatura (vide [25]); assim, um desses pontos pode ser obtido

Prob.	$f(\tilde{\mathbf{a}}; x)$	Variação Fuzzy	Intervalo de Incerteza	Sol. crisp	
				x^*	$f(x^*)$
PU1	$\widetilde{0.75}x^2 - \widetilde{6}x + \widetilde{13}$	1%	$x \in [1, 9]$	4	1
PU2	$\widetilde{4}x^2 - \widetilde{4}x^3 + x^4$	10%	$x \in [-5, 5]$	0 2	0 0
PU3	$x^6 - \widetilde{2.08}x^5 + \widetilde{0.4875}x^4 + \widetilde{7.1}x^3 - \widetilde{3.95}x^2 - x + \widetilde{0.1}$	10%	$x \in [-2, 11]$	-1.1913	-7.4873
PU4	$x^4 - \widetilde{3}x^3 - \widetilde{1.5}x^2 + \widetilde{10}x$	10%	$x \in [-5, 5]$	-1.0	-7.5

Tabela 6.1: Funções teste para problemas Unidimensionais.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*)$			It.
	x^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*))$	
Dicotômico	3.9999	[1.0; 0.51, 1.49]	1.0	17
Seção Áurea	4.0000	[1.0; 0.51, 1.49]	1.0	25
Fibonacci	3.9999	[1.0; 0.51, 1.49]	1.0	24
Bisseccção	4.0	[1.0; 0.51, 1.49]	1.0	03
Newton	4.0	[1.0; 0.51, 1.49]	1.0	02
Falsa Pos.	3.9999	[1.0; 0.51, 1.49]	1.0	02

Tabela 6.2: Resultado para o Problema PU1.

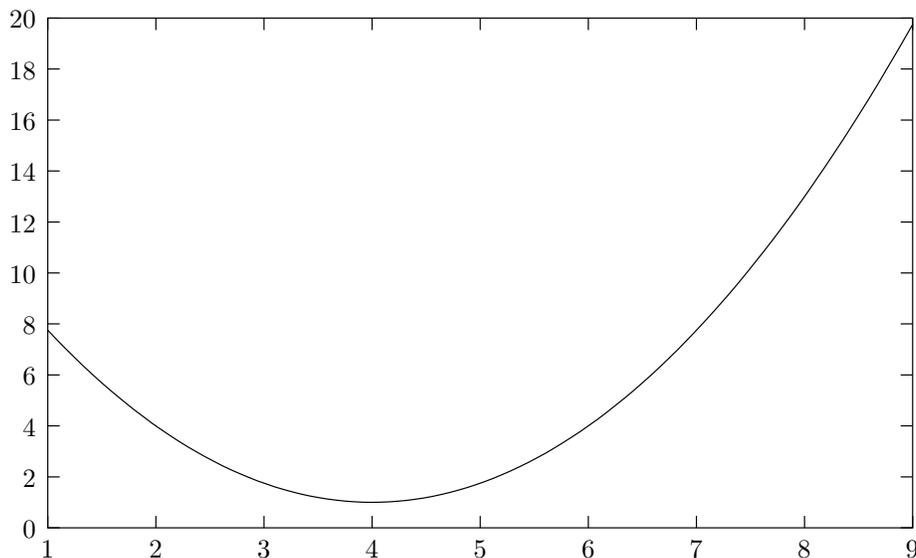


Figura 6.1: Representação Gráfica do Problema PU1.

pelos métodos de busca, como confirmam os dados da Tabela 6.3. Os demais problemas (PU1, PU3 e PU4) apresentam uma única solução ótima no intervalo de incerteza sugerido, distinguindo-se apenas na precisão em cada método, embora tenhamos usado o mesmo valor (ϵ) como critério de parada.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*)$			It.
	x^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*))$	
Dicotômico	2.0000	$[6.98 \times 10^{-9}; -4.8003, 4.8003]$	6.98×10^{-9}	17
Seção Áurea	-2.81×10^{-6}	$[(3.16; 2.84, 3.47) \times 10^{-11}]$	3.16×10^{-11}	26
Fibonacci	4.12×10^{-5}	$[(6.79; 6.11, 7.46) \times 10^{-9}]$	6.79×10^{-9}	24
Bissecção	0.0	$[0.0; 0.0, 0.0]$	0.0	01
Newton	1.05×10^{-7}	$[(4.44; 3.99, 4.89) \times 10^{-14}]$	4.44×10^{-14}	08
Falsa Pos.	-1.26×10^{-5}	$[(6.37; 5.74, 7.01) \times 10^{-10}]$	6.37×10^{-10}	04

Tabela 6.3: Resultado para o Problema PU2.

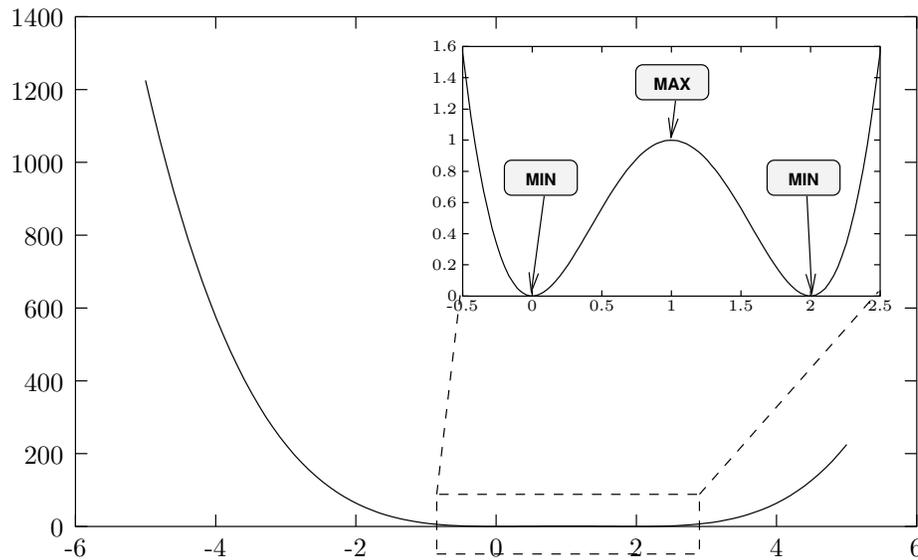


Figura 6.2: Representação Gráfica do Problema PU2.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*)$			It.
	x^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*))$	
Dicotômico	-1.1913	$[-7.4873; -9.8556, -5.119]$	-7.4873	18
Seção Áurea	-1.1913	$[-7.4873; -9.8555, -5.1191]$	-7.4873	26
Fibonacci	-1.1913	$[-7.4873; -9.8556, -5.119]$	-7.4873	25
Bissecção	-1.19137	$[-7.4873; -9.856, -5.1186]$	-7.4873	16
Newton	-1.19137	$[-7.4871; -9.8708, -5.1034]$	-7.4871	05
Falsa Pos.	-1.19369	$[-7.4871; -9.8706, -5.1036]$	-7.4871	06

Tabela 6.4: Resultado para o Problema PU3.

As Figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 ilustram as funções crisp relativas aos problemas PU1, PU2, PU3 e PU4, respectivamente, e mostram claramente que as soluções obtidas para o problema fuzzificado também são soluções dos problemas crisp associados.

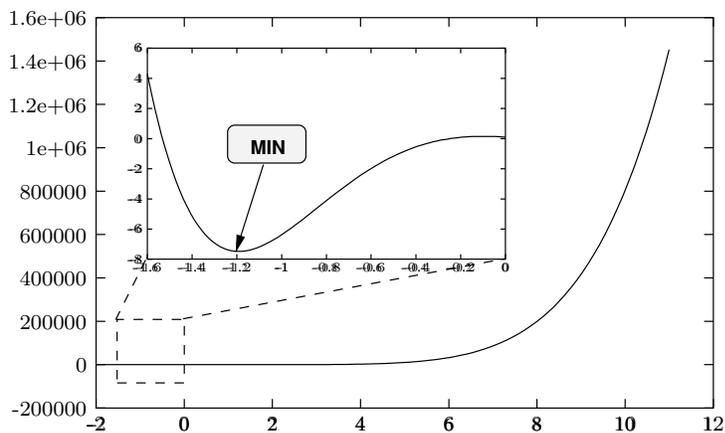


Figura 6.3: Representação Gráfica do Problema PU3.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*)$			It.
	x^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; x^*))$	
Dicotômico	-0.9999	$[-7.5; -8.95, -6.05]$	-7.5	17
Seção Áurea	-1.000	$[-7.5; -8.95, -6.05]$	-7.5	26
Fibonacci	-1.0000	$[-7.5; -8.95, -6.05]$	-7.5	24
Bissecção	-1.00098	$[-7.5; -8.9521, -6.0478]$	-7.5	11
Newton	-0.9976	$[-7.4999; -8.9445, -6.0553]$	-7.4999	05
Falsa Pos.	-0.9999	$[-7.5; -8.95, -6.05]$	-7.5	03

Tabela 6.5: Resultado para o Problema PU4.

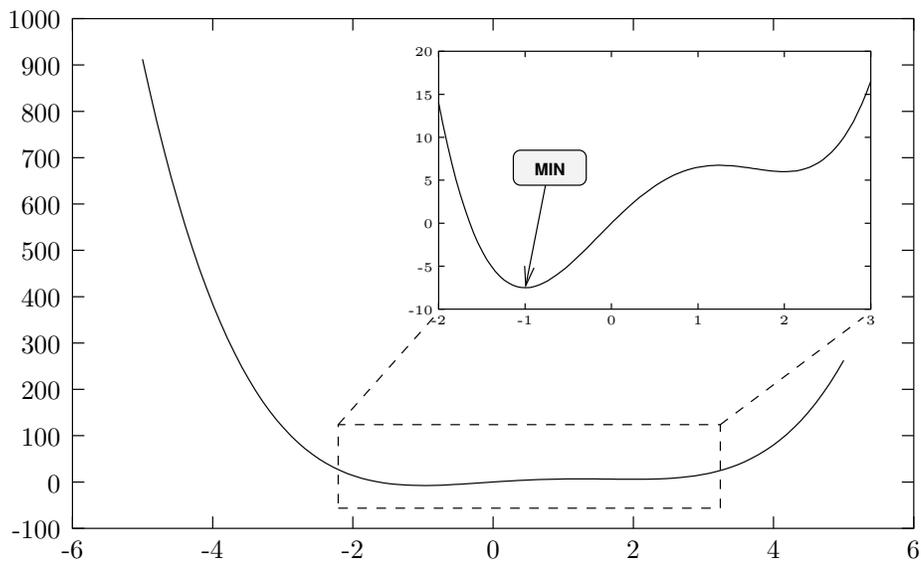


Figura 6.4: Representação Gráfica do Problema PU4.

6.1.2 Problemas Multidimensionais

A Tabela 6.6 apresenta os problemas aplicáveis a métodos de busca Multidimensional extraídos de [37]; as Tabelas 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12 e 6.13 apresentam seus respectivos resultados, e as Figuras 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9 a trajetória dos problemas PM3, PM4, PM5, PM6 e PM7, respectivamente.

Prob.	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$	Variação Fuzzy	$\mathbf{x}_{inicial}$	Solução crisp	
				$\bar{\mathbf{x}}$	$f(\bar{\mathbf{x}})$
PM1	$\widetilde{100}(x_2 - x_1)^2 + (1 - x_1)^2$ $+ \widetilde{90}(x_4 - x_3)^2 + (1 - x_3)^2$ $+ \widetilde{10.1}[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2]$ $+ \widetilde{19.8}(x_2 - 1)(x_4 - 1)$	3%	$[-3, -1, -3, -1]^T$	$[1, 1, 1, 1]^T$	0
PM2	$(x_1 + \widetilde{10}x_2) + \widetilde{5}(x_3 - x_4)^2$ $+(x_2 - \widetilde{2}x_3)^4 + \widetilde{10}(x_1 - x_4)^4$	10%	$[-3, -1, 0, 1]^T$	$[0, 0, 0, 0]^T$	0
PM3	$\widetilde{4}(x_1 - \widetilde{5})^2 + (x_2 - \widetilde{6})^2$	2%	$[8, 9]^T$	$[5, 6]^T$	0
PM4	$\widetilde{100}(x_2 - x_1^2)^2 + (\widetilde{1} - x_1)^2$	10%	$[-1.2, 1]^T$	$[1, 1]^T$	0
PM5	$(x_2 - x_1^2)^2 + \widetilde{100}(\widetilde{1} - x_1)^2$	10%	$[-1.2, 1]^T$	$[1, 1]^T$	0
PM6	$(x_1x_2)^2(\widetilde{1} - x_1)^2 [\widetilde{1} - x_1 - x_2(\widetilde{1} - x_1)^5]^2$	2%	$[-1.2, 1]^T$	$[1, \text{ilimitado}]^T$ $[0, \text{ilimitado}]^T$ $[\text{ilimitado}, 0]^T$	0
PM7	$(x_1 - \widetilde{2})^2 + (x_2 - \widetilde{1})^2 + \frac{\widetilde{0.04}}{g} + \frac{h^2}{\widetilde{0.2}}$ $g = -\frac{x_1^2}{4} - x_2^2 + \widetilde{1}$ e $h = x_1 - \widetilde{2}x_2 + \widetilde{1}$	1%	$[2, 2]^T$	$[1.7954, 1.3779]^T$	0.16904

Tabela 6.6: Funções teste para problemas Multidimensionais.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
	\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
Rosenbrock	$[0.9642, 0.9301, 1.016, 1.033]^T$	$[0.0163; 0.01306, 0.0194]$	0.0163	33
Máx. Desc.	$[0.9968, 0.9939, 1.0016, 1.0033]^T$	$[0.0001; 7.6 \times 10^{-5}, 0.00013]$	0.0001	31
Newton	$[0.9992, 0.9983, 1.0008, 1.0017]^T$	$[(2.65; -0.88, 6.17) \times 10^{-6}]$	2.65×10^{-6}	64
Grad. Conj.	$[0.9905, 0.9811, 1.00995, 1.020]^T$	$[0.0004; -0.0001, 0.00081]$	0.0004	04

Tabela 6.7: Resultado para o Problema PM1.

Em particular, o método de Rosenbrock obteve um desempenho muito bom para os problemas PM4 e PM5, pois este é específico para tais problemas. Para os demais casos, obteve-se um número de iterações e precisão semelhantes ao caso crisp, uma vez que a característica fuzzy do problema só influencia no cálculo do tamanho do passo. Neste caso, usamos o método da Secção Áurea que trabalha de maneira análoga quando o problema é crisp.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
	\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
Rosenbrock	$[0.0102, -0.00102, 0.0043, 0.0043]^T$	$[(2.19; 1.11, 3.43) \times 10^{-8}]^T$	2.24×10^{-8}	26
Máx. Desc.	$[-0.0942, 0.0094, -0.0452, -0.0458]^T$	$[0.000156; 0.00015, 0.00016]$	0.000156	45
Newton	$[0.0299, -0.0029, 0.0131, 0.0131]^T$	$[(1.52; 1.39, 1.66) \times 10^{-6}]$	1.53×10^{-6}	15
Grad. Conj.	$[-0.1065, 0.0106, -0.0536, -0.0543]^T$	$[0.000269; 0.00026, 0.00028]$	0.00027	10

Tabela 6.8: Resultado para o Problema PM2.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
	\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
Rosenbrock	$[5, 6]^T$	$[7.026 \times 10^{-12}; -0.0552, 0.0552]$	3.97×10^{-7}	02
Máx. Desc.	$[5, 6.00008]^T$	$[6.47 \times 10^{-9}; -0.0552, 0.0552]$	7.24×10^{-6}	03
Newton	$[5.00003, 6]^T$	$[2.76 \times 10^{-9}; -0.0552, 0.05522]$	7.96×10^{-6}	02
Grad. Conj.	$[5, 5.9993]^T$	$[5.11 \times 10^{-7}; -0.0552, 0.0554]$	6.47×10^{-5}	02

Tabela 6.9: Resultado para o Problema PM3.

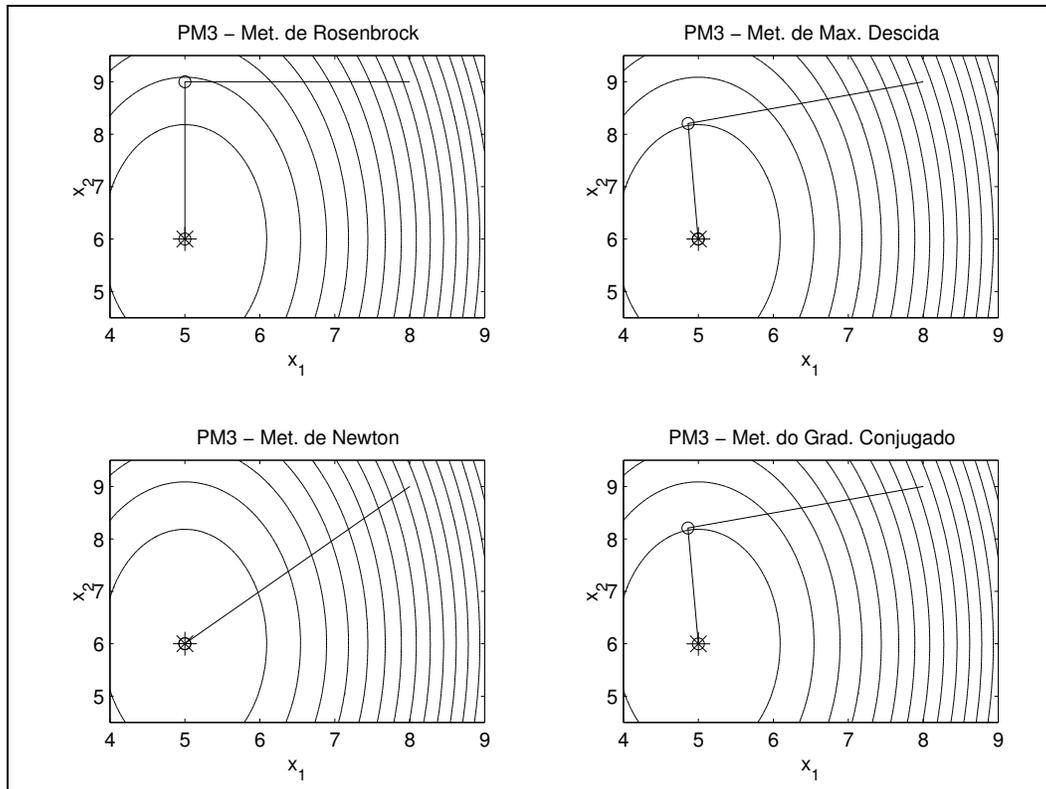


Figura 6.5: Trajetória para o problema PM3.

O método de Newton, embora tenha obtido a solução para todos os problemas aqui apresentados, em muitos casos, executa um número grande de iterações (vide a Figura 6.6), talvez maior do que a

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
	\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
Rosenbrock	$[1.0, 1.00001]^T$	$[1.0998 \times 10^{-8}; -0.01, 0.01]$	1.2818×10^{-8}	04
Máx. Desc.	$[1, 0.99998]^T$	$[-4.44 \times 10^{-8}; -0.001, 0.01]^T$	3.42×10^{-8}	26
Newton	$[0.9999, 0.9999]^T$	$[3.54 \times 10^{-9}; -0.01, 0.01]$	2.12×10^{-6}	161
Grad. Conj.	$[1.0, 1.0]^T$	$[6.27 \times 10^{-9}; -0.01, 0.01]$	3.71×10^{-8}	07

Tabela 6.10: Resultado para o Problema PM4.

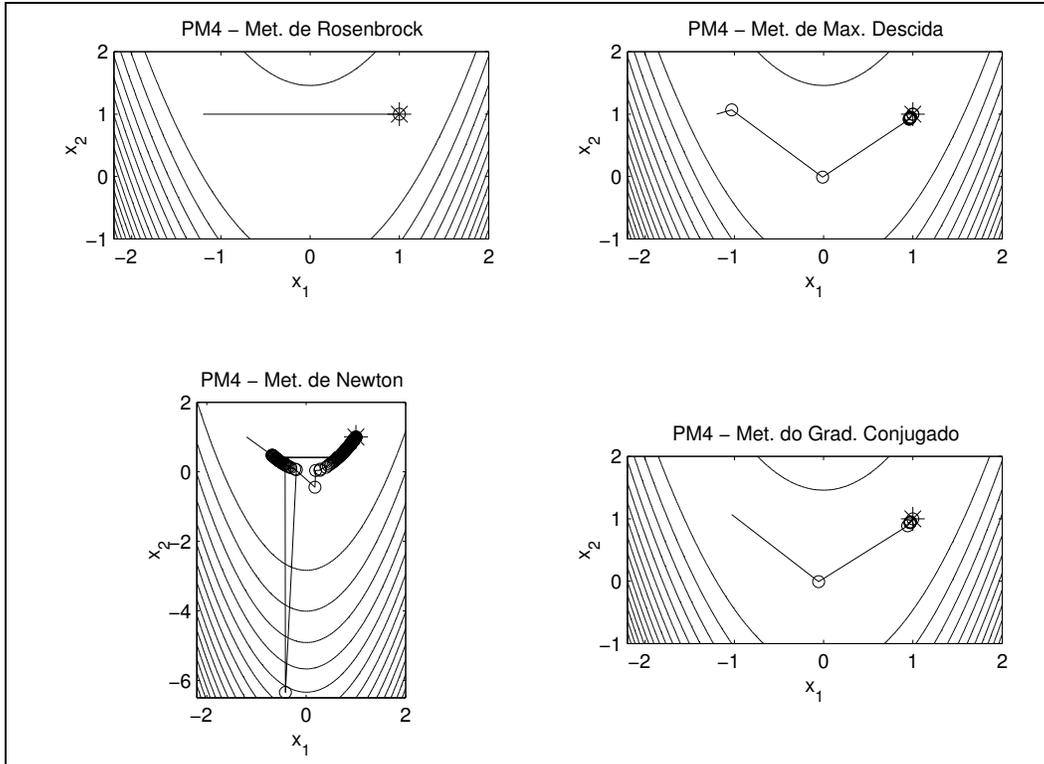


Figura 6.6: Trajetória para o problema PM4.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
	\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
Rosenbrock	$[1, 0.99999]^T$	$[1.5579 \times 10^{-10}; -1.1, 1.1]^T$	3.4798×10^{-6}	03
Máx. Desc.	$[0.9999, 1.0038]^T$	$[1.46 \times 10^{-5}; -1.1, 1.1001]^T$	3.88×10^{-5}	02
Newton	$[1.0, 1.0]^T$	$[1.98 \times 10^{-10}; -1.1, 1.1]$	1.14×10^{-5}	03
Grad. Conj.	$[0.9999, 1.0038]^T$	$[1.45 \times 10^{-5}; -1.1, 1.1]$	2.16×10^{-5}	01

Tabela 6.11: Resultado para o Problema PM5.

versão sem a característica fuzzy. Este fato é devido ao cálculo da direção de busca que se dá pela resolução do sistema (4.17) executando muitas operações com números fuzzy, e assim, a característica fuzzy aumenta mais que para os demais métodos implementados e testados.

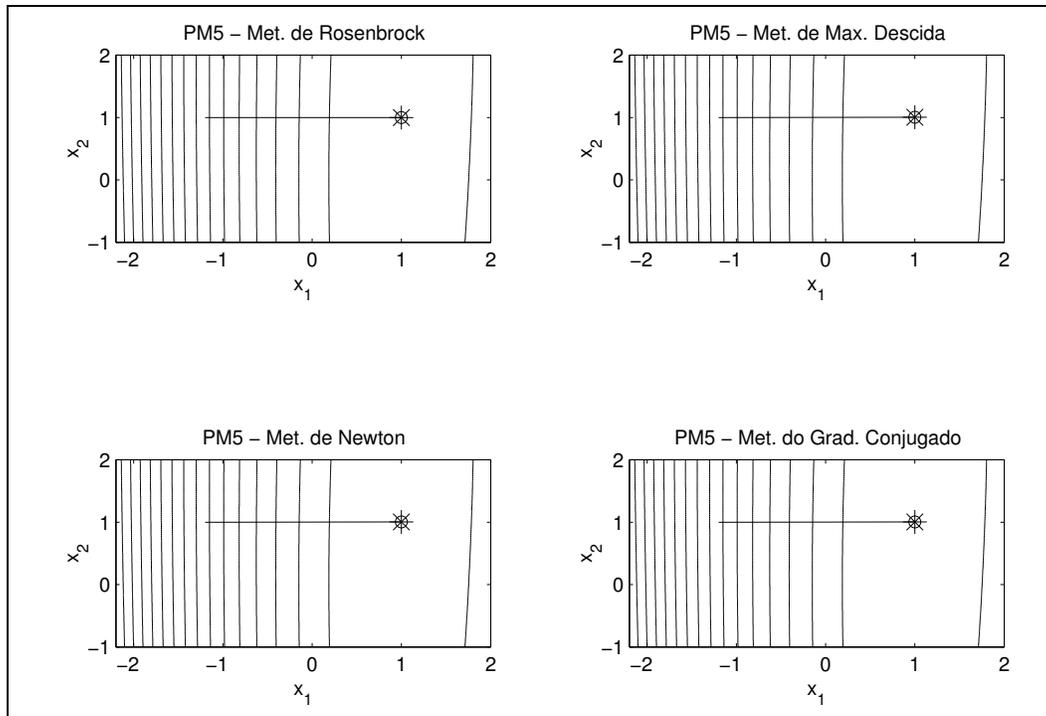


Figura 6.7: Trajetória para o problema PM5.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
	\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
Rosenbrock	$[1, 1.9 \times 10^{-6}]^T$	$[1.26 \times 10^{-46}; (-5.784, 5.784e) \times 10^{-19}]$	4.29×10^{-26}	04
Máx. Desc.	$[1.0053, -0.0695]^T$	$[(0.0039; -1.16, 2.006) \times 10^{-9}]$	2.67×10^{-10}	02
Newton	$[-0.0225, -1.8213 \times 10^{-5}]^T$	$[(1.83; 1.69, 1.97) \times 10^{-13}]$	1.83×10^{-13}	13
Grad. Conj.	$[0.9988, -0.1512]^T$	$[(0.000049; -4.09, 4.62) \times 10^{-9}]$	1.63×10^{-10}	01

Tabela 6.12: Resultado para o Problema PM6.

Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
	\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
Rosenbrock	$[1.7946, 1.3775]^T$	$[0.16904; 0.14545, 0.208]$	0.1729	05
Máx. Desc.	$[1.7956, 1.378]^T$	$[0.16904; 0.1455, 0.208]$	0.1729	03
Newton	$[1.7953, 1.3778]^T$	$[0.16904; 0.1455, 0.208]$	0.1729	03
Grad. Conj.	$[1.7949, 1.3776]^T$	$[0.16904; 0.14546, 0.208]$	0.17288	02

Tabela 6.13: Resultado para o Problema PM7.

O método de Máxima Descida executou um número bastante reduzido de iterações para os problemas testados, e encontrou a solução para todos os casos, o que é um ganho bastante significativo se resolvêssemos tais problemas sem a característica fuzzy, pois para os casos patológicos crisp este método dificilmente encontra a solução.

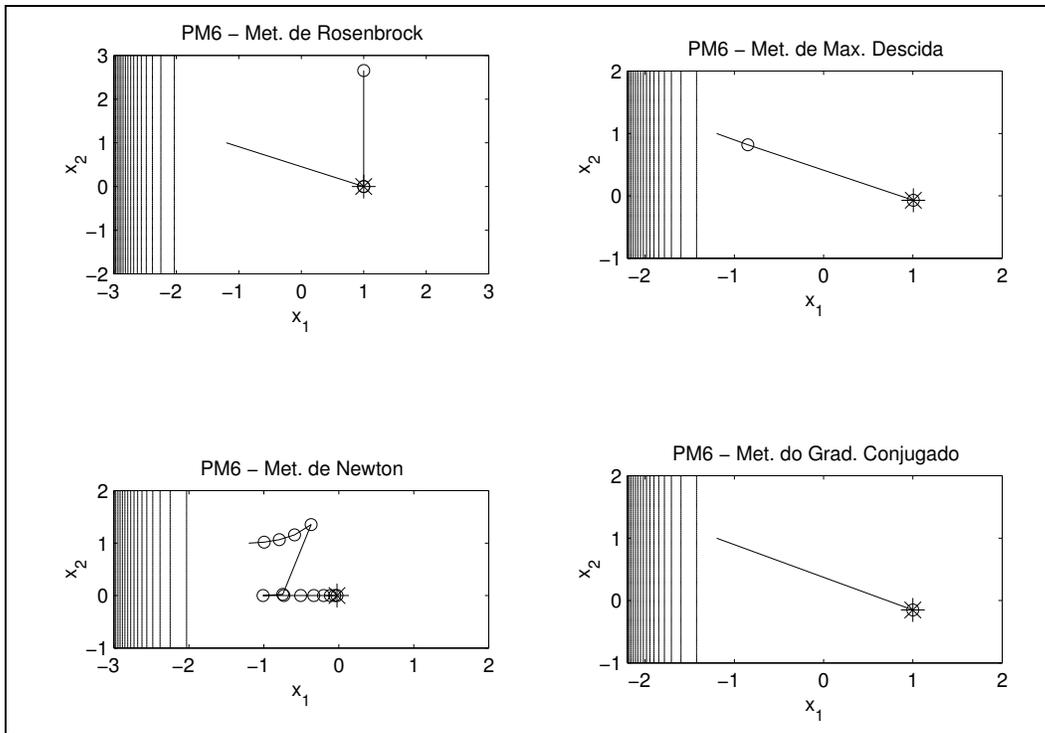


Figura 6.8: Trajetória para o problema PM6.

Finalmente, o método do Gradiente Conjugado resolveu todos os problemas teste com um número reduzido de iterações e uma boa precisão dos resultados (exceto para a função de Fletcher–Powell – PM2). Devido aos bons resultados, este método é usado para resolver os subproblemas gerados para métodos de Função Penalidade e Lagrangeano Aumentado.

Para o cálculo do tamanho do passo, nos métodos de Máxima Descida e Gradiente Conjugado, foram usados os métodos da Seção Áurea e Interpolação Cúbica, escolhendo aquele com melhor desempenho para o problema em questão.

6.2 Problemas de Programação Não-Linear Restrita

Os problemas de Programação Não-Linear Restrita podem apresentar conjuntos de restrições não-lineares e lineares, e cada um desses conjuntos pode conter restrições de igualdade, desigualdade ou ambas. Apresentamos os resultados para conjuntos de restrições não-lineares, usando os métodos de Função Penalidade e Função Lagrangeana, e para conjuntos de restrições lineares usando o método do Gradiente Projetado de Rosen.

6.2.1 Restrições Não-Lineares

Os problemas com restrições não-lineares podem ser divididos em problemas com restrições de igualdade ($\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$), desigualdade ($\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$) ou ambos. Os problemas com restrições de igualdade serão denotados por PH, como apresentados na Tabela 6.14 e os demais (aqueles com restrições de desigualdade e igualdade) por PG, Tabela 6.16. Os problemas PH1 ao PH11 e PG5 ao PG7 foram obtidos de [61] e os problemas PG1 ao PG4 de [37].

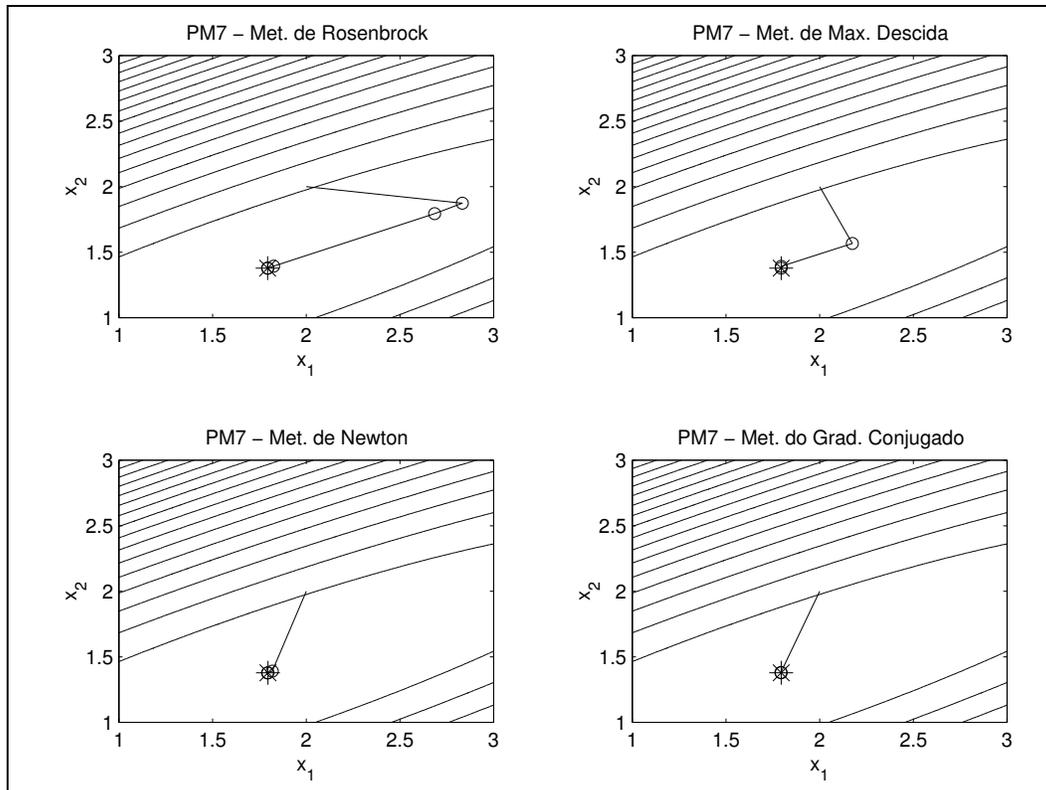


Figura 6.9: Trajetória para o problema PM7.

Os problemas PH1 ao PH11 (vide seus resultados na Tabela 6.15) foram resolvidos facilmente, ou seja, o ajuste dos parâmetros de penalidade para o método de Função Penalidade e Lagrangeano Aumentado foram facilmente obtidos, e seus resultados foram satisfatórios para todos os casos testados. Para problemas com restrição de desigualdade PG1 ao PG8 (vide seus resultados na Tabela 6.18), o método de Função Penalidade resolveu todos os casos testados, sem grandes dificuldades para o ajuste do parâmetro penalidade, ao contrário do método do Lagrangeano Aumentado, pois neste caso, o ajuste de parâmetros foi muito mais trabalhoso, embora este tenha executado um número menor de iterações para todos os casos em relação ao método de Função Penalidade.

6.2.2 Restrições Lineares

Considere os problemas apresentados na Tabela 6.19 e seus respectivos resultados na Tabela 6.23. O problema PP1 é um exemplo teste de [3], os problemas PP2, PP2 e PP4 foram extraídos de [37] e o PP5 de [61]. Estes problemas teste foram resolvidos usando o método do Gradiente Projetado de Rosen, embora eles também possam ser resolvidos pelo método de Função Penalidade e Lagrangeano Aumentado, nestes casos, ajustando adequadamente os seus respectivos parâmetros.

O método do Gradiente Projetado de Rosen resolveu os problemas testados de maneira satisfatória, executando um número razoável de iterações e com boa precisão. Enfim, este método, com a utilização de parâmetros fuzzy, mostrou-se bastante eficiente e confiável.

Prob.	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$	Variação Fuzzy	$\mathbf{x}_{inicial}$	Restrições	Solução crisp	
					$\bar{\mathbf{x}}^T$	$f(\bar{\mathbf{x}})$
PH1	$\widetilde{100}(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - \widetilde{1})^2$	1%	$[-1.2, 1]^T$	$x_1(x_1 - 4) - 2x_2 + 12 = 0$	$[2, 4]^T$	1
PH2	$\widetilde{0.01}(x_1 - \widetilde{1})^2 + (x_2 - x_1^2)^2$	10%	$[-2, 3, 1]^T$	$x_1 + x_3^2 + 1 = 0$	$[-1, 1, 0]^T$	0.04
PH3	$(x_1 - \widetilde{20})^2 + (x_2 + \widetilde{20})^2$	10%	$[0, 0]^T$	$x_1^2/100 + x_2^2/100 - 1 = 0$	$[7.071, 7.071]^T$	334.315
PH4	$(x_1 - \widetilde{20})^2 + (x_2 + \widetilde{20})^2$	10%	$[0, 0]^T$	$x_1^2/100 + x_2^2/64 - 1 = 0$	$[7.352, -5.423]^T$	372.467
PH5	$(x_1 - \widetilde{20})^2 + (x_2 + \widetilde{20})^2$	10%	$[0, 0]^T$	$x_1^2/100 + x_2^2/36 - 1 = 0$	$[7.809, -3.746]^T$	412.75
PH6	$(x_1 - \widetilde{20})^2 + (x_2 + \widetilde{20})^2$	10%	$[0, 0]^T$	$x_1^2/100 + x_2^2/16 - 1 = 0$	$[8.492, -2.112]^T$	452.404
PH7	$(x_1 - \widetilde{20})^2 + (x_2 + \widetilde{20})^2$	10%	$[0, 0]^T$	$x_1^2/100 + x_2^2/4 - 1 = 0$	$[9.395, -0.6846]^T$	485.531
PH8	$(x_1 - \widetilde{20})^2 + (x_2 + \widetilde{20})^2$	10%	$[0, 0]^T$	$x_1^2/100 + x_2^2/1 - 1 = 0$	$[9.816, -0.1909]^T$	496.112
PH9	$(x_1 - \widetilde{20})^2 + (x_2 + \widetilde{20})^2$	10%	$[0, 0]^T$	$x_1^2/100 + x_2^2/0.01 - 1 = 0$	$[9.998, 0.0019]^T$	499.96
PH10	$-(\widetilde{0.001}x_1 + x_2)$	10%	$[1, 1, 1]^T$	$1000x_1^2 + 100x_2^2 - x_3 = 0$ $100x_1^2 + 400x_2^2 + x_3 - 0.01 = 0$	$[0.000002,$ $0.0045, 0.002]^T$	-0.00447
PH11	$\widetilde{7}x_1 - \widetilde{6}x_2 + \widetilde{4}x_3$	10%	$[0, 0, 0]^T$	$5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 6 = 0$ $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 1 = 0$	$[0.5346,$ $0.534, -0.2191]^T$	-0.3379

Tabela 6.14: Problemas teste com restrições de igualdade não-lineares.

Prob.	Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
		\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
PH1	Penalidade	$[1.9993, 3.9999]^T$	$[0.9993; 0.9794, 1.0194]$	0.9994	05
	Lagrange	$[1.9994, 4]^T$	$[0.9994; 0.9795, 1.0195]$	0.9994	06
PH2	Penalidade	$[-0.9981, 0.9962, -0.0003]^T$	$[0.0399; 0.0324, 0.0484]$	0.0484	05
	Lagrange	$[-1.0005, 1.0009, -0.0229]^T$	$[0.04002; 0.0325, 0.0485]$	0.0427	04
PH3	Penalidade	$[7.074, -7.0741]^T$	$[334.16; 238.75, 445.57]$	338.14	54
	Lagrange	$[7.07107, -7.07107]^T$	$[334.31; 238.88, 445.75]$	338.3	09
PH4	Penalidade	$[7.3551, -5.4252]^T$	$[372.31; 271.43, 489.19]$	376.29	35
	Lagrange	$[7.3519, -5.4229]^T$	$[372.47; 271.57, 489.37]$	376.45	10
PH5	Penalidade	$[7.8119, -3.7496]^T$	$[412.62; 306.87, 534.38]$	416.61	35
	Lagrange	$[7.8092, -3.7478]^T$	$[412.75; 306.98, 534.52]$	416.73	10
PH6	Penalidade	$[8.4961, -2.1133]^T$	$[452.27; 342.71, 577.83]$	456.25	41
	Lagrange	$[8.49229, -2.1121]^T$	$[452.4; 342.82, 577.99]$	456.39	10
PH7	Penalidade	$[9.4007, -0.6845]^T$	$[485.43; 373.77, 613.09]$	489.41	34
	Lagrange	$[9.3961, -0.6845]^T$	$[485.53; 373.85, 613.21]$	489.51	12
PH8	Penalidade	$[9.8199, -0.1911]^T$	$[496.03; 384.07, 623.98]$	500.01	34
	Lagrange	$[9.8160, -0.1909]^T$	$[496.11; 384.14, 624.08]$	500.09	12
PH9	Penalidade	$[10.003, -0.002]^T$	$[499.86; 387.88, 627.84]$	503.84	31
	Lagrange	$[9.998, -0.00199]^T$	$[499.96; 387.96, 627.96]$	503.94	12
PH10	Penalidade	$[0.0032, 0.0036, 0.0065]^T$	$[(-6.77; -7.45, -6.09) \times 10^{-6}]$	-6.77×10^{-6}	41
	Lagrange	$[0.0002, 0.0045, 0.002]^T$	$[(-4.62; -5.08, -4.15) \times 10^{-6}]$	-4.62×10^{-6}	08
PH11	Penalidade	$[0.5348, 0.5365, -0.2146]^T$	$[-0.3341; -1.1161, 0.448]$	-0.3341	29
	Lagrange	$[0.5346, 0.5348, -0.2179]^T$	$[-0.3381; -1.12, 0.4441]$	-0.3381	10

Tabela 6.15: Resultados dos Problemas PH1 ao PH11.

Prob.	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$	Variação Fuzzy	$\mathbf{x}_{inicial}$	Restrições	Solução crisp	
					$\bar{\mathbf{x}}^T$	$f(\bar{\mathbf{x}})$
PG1	$(x_1 - \tilde{2})^2 + (x_2 - \tilde{1})^2$	10%	$[2, 2]^T$	$x_1 - 2x_2 + 1 = 0$ $x_1^2/4 + x_2^2 - 1 \leq 0$	$[0.823, 0.911]^T$	1.393
PG2	$\widetilde{1000} - x_1^2 - \widetilde{2}x_2^2 - x_3^2$ $-x_1x_2 - x_1x_3$	1%	$[2, 2, 2]^T$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0$ $8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0$ $x_i \geq 0, i \in [1, 3]$	$[3.512, 0.217,$ $3.552]^T$	961.715
PG3	$\widetilde{100}(x_2 - x_1^2)^2 + (\tilde{1} - x_1)^2$ $+ \widetilde{90}(x_4 - x_3^2)^2 + (\tilde{1} - x_3)^2$ $+ \widetilde{10.1}[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - \tilde{1})^2]$ $+ \widetilde{19.8}(x_2 - \tilde{1})(x_4 - \tilde{1})$	3%	$[-3, -1, -3, -1]^T$	$-x_i \leq 10$ $x_i \leq 10$ $i \in [1, 4]$	$[1, 1, 1, 1]^T$	0
PG4	$5.3578547x_3^2 + 0.8356891x_1x_5$ $+ 37.293239x_1 - 40792.141$	0.01%	$[78, 33, 27, 27, 27]^T$	Vide Tabela 6.17.	$[78, 33, 29.995,$ $45, 36.776]^T$	-30665.5
PG5	$(x_1 - \tilde{2})^2 + (x_2 - \tilde{1})^2$	5%	$[0.5, 0.5]^T$	$x_1^2 - x_2 \leq 0$ $-x_1 + x_2^2 \leq 0$	$[1, 1]^T$	1
PG6	$\widetilde{100}(x_2 - x_1^2)^2 + (\tilde{1} - x_1)^2$	1%	$[-1.2, 1]^T$	$-1/3x_1 - x_2 - 0.1 \leq 0$ $1/3x_1 - x_2 - 0.1 \leq 0$	$[1, 1]^T$	0
PG7	$\widetilde{100}(x_2 - x_1^2)^2 + (\tilde{1} - x_1)^2$	1%	$[-1.2, 1]^T$	$-x_1^2 - x_2^2 + 0.25 \leq 0$	$[1, 1]^T$	0
PG8	$-\widetilde{9} - (x_1 - \tilde{3})^2](x_2^3/\widetilde{27}\sqrt{3})$	5%	$[2, 0.5]^T$	$-x_1/\sqrt{3} + x_2 \leq 0$ $-x_1 + \sqrt{3}x_2 \leq 0$ $-6 + x_1 + \sqrt{3}x_2 \leq 0$	$[3, 1.732]^T$	-1

Tabela 6.16: Problemas teste com restrições de igualdade e desigualdade não-lineares.

$$\begin{aligned}
0 &\leq 85.334407 + 0.0056858x_2x_5 + 0.0006262x_1x_4 - 0.002053x_3x_5 \leq 92 \\
90 &\leq 80.51249 + 0.0071317x_2x_5 + 0.0029955x_1x_2 + 0.0021813x_3^2 \leq 110 \\
20 &\leq 9.300961 + 0.0047026x_3x_5 + 0.0012547x_1x_3 + 0.0019085x_3x_4 \leq 25 \\
78 &\leq x_1 \leq 102 \\
33 &\leq x_2 \leq 45 \\
27 &\leq x_3 \leq 45 \\
27 &\leq x_4 \leq 45 \\
27 &\leq x_5 \leq 45
\end{aligned}$$

Tabela 6.17: Restrições do problema PG4.

Prob.	Método	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
		\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
PG1	Penalidade	$[0.8238, 0.9116]^T$	$[1.3912; 0.9508, 1.9294]$	1.416	15
	Lagrange	$[0.8228, 0.9114]^T$	$[1.3936; 0.9527, 1.9321]$	1.4183	10
PG2	Penalidade	$[3.6735, 0.2074, 3.3868]^T$	$[961.75; 951.75, 971.75]$	961.75	11
	Lagrange	$[3.5057; 0.2174, 3.5586]^T$	$[961.71; 951.71, 971.72]$	961.71	08
PG3	Penalidade	$[1.0004, 1.0009, 0.9996, 0.9992]^T$	$[(6.49; -2.12, 15.12) \times 10^{-7}]$	6.49×10^{-7}	01
	Lagrange	$[0.9999, 0.9999, 0.9999, 0.9999]^T$	$[(9.85; 9.56, 10.14) \times 10^{-8}]$	9.85×10^{-8}	01
PG4	Penalidade	$[78.005, 33.001, 29.996, 44.986, 36.779]^T$	$[-30665; -30670, -30659]$	-30665	23
	Lagrange	$[78, 33, 29.9949, 45, 36.7762]^T$	$[-30666; -30671, -30661]$	-30666	07
PG5	Penalidade	$[1.0005, 1.0004]^T$	$[0.999; 0.8066, 1.2115]$	1.004	13
	Lagrange	$[1, 1]^T$	$[1; 0.8075, 1.2125]$	1.005	09
PG6	Penalidade	$[1, 1]^T$	$[2.76 \times 10^{-12}; -0.0001, 0.0001]$	3.49×10^{11}	01
	Lagrange	$[1, 1]^T$	$[9.67 \times 10^{-10}; -0.00009, 0.0001]$	1.01×10^{-9}	01
PG7	Penalidade	$[1, 1]^T$	$[6.63 \times 10^{-10}; -0.00009, 0.0001]$	6.76×10^{10}	01
	Lagrange	$[1, 1]^T$	$[1.39 \times 10^{-11}; -0.0001, 0.0001]$	2.83×10^{-11}	01
PG8	Penalidade	$[2.9984, 1.7323]^T$	$[-1.0005; -1.1084, -0.9027]$	-1.003	03
	Lagrange	$[2.9999, 1.7321]^T$	$[-1; -1.1079, -0.9024]$	-1.0026	06

Tabela 6.18: Resultados dos Problemas PG1 ao PG7.

Prob.	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x})$	Variação Fuzzy	$\mathbf{x}_{inicial}$	Restrições	Sol. crisp	
					$\bar{\mathbf{x}}$	$f(\bar{\mathbf{x}})$
PP1	$\tilde{2}x_1^2 + \tilde{2}x_2^2 - \tilde{2}x_1x_2^2 - \tilde{4}x_1 - \tilde{6}x_2$	1%	$[0, 0]^T$	$x_1 + x_2 \leq 2$ $x_1 + 5x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	$[1.129, 0.7742]^T$	-7.16
PP2	$\sum_{i=1}^{10} x_i \left(\tilde{c}_i + \ln \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{10} x_j} \right)$ \tilde{c}_i : vide Tabela 6.20	3%	$x_i = 0.1$ $i \in [1, 10]$	$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 + x_{10} - 2 = 0$ $x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 - 1 = 0$ $x_3 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} - 1 = 0$ $x_i \geq 0, i \in [1, 10]$	vide [37].	
PP3	$\tilde{100}(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ $+\tilde{90}(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2$ $+\tilde{10.1}[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2]$ $+\tilde{19.8}(x_2 - 1)(x_4 - 1)$	3%	$[-3, -1, -3, -1]^T$	$-x_i \leq 10$ $x_i \leq 10$ $i \in [1, 4]$	$[1, 1, 1, 1]^T$	0
PP4	$\sum_{j=1}^5 \tilde{e}_j x_j + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \tilde{c}_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^5 \tilde{d}_j x_j^3$ $\tilde{e}_j, \tilde{c}_{ij}$ e \tilde{d}_j : vide Tabela 6.21	2%	$[0, 0, 0, 0, 1]^T$	$\sum_{j=1}^5 -a_{ij} + b_i \leq 0, i \in [1, 10]$ $-x_j \leq 0, j \in [1, 4]$ a_{ij} e b_i : vide Tabela 6.22.	$[0.3, 0.3335, 0.4, 0.4285, 0.224]^T$	-32.349
PP5	$(x_1 + \tilde{10}x_2)^2 + \tilde{5}(x_3 - x_4)^2$ $+(x_2 - \tilde{2}x_3)^4 + \tilde{10}(x_1 - x_4)^4$	1%	$[20, 20, 20, 20]^T$	$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 1 \leq 0$ $x_i \leq 20, i \in [1, 4]$	$0.5034, -0.0456, 0.2358, 0.3064]^T$	0.1138

Tabela 6.19: Problemas teste com restrições lineares.

$\tilde{c}_1 = -6.089$	$\tilde{c}_2 = -17.164$	$\tilde{c}_3 = -34.054$	$\tilde{c}_4 = -5.914$
$\tilde{c}_5 = -24.721$	$\tilde{c}_6 = -14.986$	$\tilde{c}_7 = -21.100$	$\tilde{c}_8 = -10.708$
$\tilde{c}_9 = -26.662$	$\tilde{c}_{10} = -10.708$		

Tabela 6.20: Coeficientes Fuzzy do Problema PP2.

j	1	2	3	4	5
\tilde{e}_j	$-\tilde{15}$	$-\tilde{27}$	$-\tilde{36}$	$-\tilde{18}$	$-\tilde{12}$
\tilde{c}_{1j}	$\tilde{30}$	$-\tilde{20}$	$-\tilde{10}$	$\tilde{32}$	$-\tilde{10}$
\tilde{c}_{2j}	$-\tilde{20}$	$\tilde{39}$	$-\tilde{6}$	$-\tilde{31}$	$\tilde{32}$
\tilde{c}_{3j}	$-\tilde{10}$	$-\tilde{6}$	$\tilde{10}$	$-\tilde{6}$	$-\tilde{10}$
\tilde{c}_{4j}	$\tilde{32}$	$-\tilde{31}$	$-\tilde{6}$	$\tilde{39}$	$-\tilde{20}$
\tilde{c}_{5j}	$-\tilde{10}$	$-\tilde{32}$	$-\tilde{10}$	$-\tilde{20}$	$\tilde{30}$
\tilde{d}_j	$\tilde{4}$	$\tilde{8}$	$\tilde{10}$	$\tilde{6}$	$\tilde{2}$

Tabela 6.21: Coeficientes da Função Objetivo do Problema PP4.

j	1	2	3	4	5	b	
a_{1j}	-16	2	0	1	0	b_1	-40
a_{2j}	0	-2	0	0.4	2	b_2	-2
a_{3j}	-3.5	0	2	0	0	b_3	-0.25
a_{4j}	0	-2	0	-4	-1	b_4	-4
a_{5j}	0	-9	-2	1	-2.8	b_5	-4
a_{6j}	2	0	-4	0	0	b_6	-1
a_{7j}	-1	-1	-1	-1	-1	b_7	-40
a_{8j}	-1	-2	-3	-2	-1	b_8	-60
a_{9j}	1	2	3	4	5	b_9	5
a_{10j}	1	1	1	1	1	b_{10}	1

Tabela 6.22: Coeficientes das Restrições do Problema PP4.

Prob.	Mínimo de $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$			It.
	\mathbf{x}^*	$f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*)$	$F(f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}^*))$	
PP1	$[1.1277, 0.7722]^T$	$[-7.1498; -7.296, -7.0036]$	-7.1498	03
PP2	$[0.042, 0.1564, 0.7741, 0.0014, 0.4845, 0.0007, 0.0243, 0.0368, 0.0315, 0.09095]^T$	$[-47.476; -48.83, -46.122]$	-47.476	13
PP3	$[0.9991, 0.9979, 1.0035, 1.0069]^T$	$[0.00026; 0.00024, 0.00028]$	0.00026	37
PP4	$[0.2965, 0.3329, 0.3961, 0.4312, 0.2254]^T$	$[-32.189; -34.105, -30.272]$	-32.189	15
PP5	$[0.5094, -0.0469, 0.2339, 0.3038]^T$	$[0.11409; 0.1108, 0.1175]$	0.11412	23

Tabela 6.23: Resultados para os Problemas usando o mét. do Grad. Projetado de Rosen.

Comentários Finais

Uma das principais propostas deste trabalho foi a de fundamentar a base teórica de Programação Não-Linear com Parâmetros Fuzzy, e este objetivo foi alcançado. Muitos resultados podem ser estendidos da teoria *crisp* para o caso aqui abordado, relaxando as relações de desigualdades e igualdades, permitindo um certo grau de violação das restrições, ou mesmo permitindo imprecisões nos parâmetros do problema. Vale ressaltar que:

1. Geralmente, em problemas reais, desconhecemos os valores exatos de alguns (ou de todos) coeficientes da função objetivo;
2. Em problemas de difícil resolução, o processo de fuzzificação dos coeficientes da função objetivo nos fornece um problema relaxado, o que pode facilitar a obtenção da solução.

Outro aspecto importante foi o desenvolvimento de algoritmos computacionais para a resolução de problemas. Neste caso, a proposta apresentada mostrou-se bastante satisfatória, pois:

1. Para alguns problemas fuzzificados encontramos soluções melhores, quando comparadas à solução do problema *crisp*;
2. Os algoritmos, embora simples, mostraram-se eficientes.

Um exemplo para as afirmações acima é a minimização da função de Rosenbrock (problema PM4), onde esta foi resolvida por todos os métodos propostos, sendo que a sua função original (sem a fuzzificação de seus coeficientes) não foi resolvida pelo Método de Máxima Descida, e para os demais métodos (exceto o método de Newton) executou um número de iterações muito elevado se comparado àqueles apresentados na Tabela 6.10.

Para todos os exemplos testados, podemos afirmar que os tempos de execução dos métodos foram satisfatórios, embora não se tenham efetuado medidas acuradas. Todos os algoritmos elaborados mostraram-se eficientes, apesar das dificuldades inerentes dos mesmos (por exemplo, o ajuste do parâmetro de Penalidade).

Apresentamos algumas propostas de trabalhos futuros:

1. Explorar, teoricamente e algoritmicamente, a dualidade em Programação Não-Linear com Parâmetros Fuzzy;
2. Extensão dos resultados teóricos para problemas do tipo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \\ \text{S. a} \quad & \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \lesssim \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \simeq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.1}$$

3. Propostas algorítmicas para a resolução do problema (6.1), utilizando, por exemplo, a proposta de R. E. Belmman e L. A. Zadeh [4] como aquelas apresentadas por J.-F. C. Trappey et al [66], T. Takahama e S. Sakai [65], entre outros;

4. Utilizar a teoria fuzzy em problemas de Programação Não-Linear não-convexos para relaxar o espaço de soluções;
5. Aplicação das propostas aqui apresentadas em problemas reais.

Referências Bibliográficas

- [1] F. M. Ali. A differential equation approach to fuzzy non-linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 93:57–61, 1998.
- [2] E. Ammar and J. Metz. On fuzzy convexity and parametric fuzzy optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, 49:135–141, 1992.
- [3] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., second edition, 1993. 638 pp.
- [4] R. E. Bellman and L. A. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17(4):B141–B164, 1970.
- [5] G. Bortolan and R. Degani. A review of some methods for ranking fuzzy subsets. *Fuzzy Sets and Systems*, 15:1–19, 1985.
- [6] J. M. Cadenas and J. L. Verdegay. Using fuzzy numbers in linear programming. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B: Cybernetics*, 27(6):1016–1022, 1997.
- [7] L. Campos and J. L. Verdegay. Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 32(1):1–11, 1989.
- [8] L. A. P. Cantão and A. Yamakami. Programação não-linear com parâmetros fuzzy. In *XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional – SBPO*, IME – Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro – RJ, 2002.
- [9] L. A. P. Cantão and A. Yamakami. Programação não-linear irrestrita fuzzy. In *Congresso Brasileiro de Automática – CBA*, pages 1311–1316, Natal – RN, 2002.
- [10] L. A. P. Cantão and A. Yamakami. Nonlinear programming with fuzzy parameters: Theory and applications. In *International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation – CIMCA 2003*, 2003. Trabalho aceito para apresentação e publicação.
- [11] S. Chanas, W. Kolodziejczyk, and A. Machaj. A fuzzy approach to the transportation problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 13:211–221, 1984.
- [12] S. Chanas and D. Kuchta. Fuzzy integer transportation problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 98:291–298, 1998.
- [13] F. Choobineh and H. Li. An index for ordering fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 54:287–294, 1993.
- [14] M. C. C. Cunha. *Métodos Numéricos*. Editora da Unicamp, second edition, 2000. 280 pp.

- [15] M. Delgado, J. L. Verdegay, and M. A. Vila. A general model for fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 29(1):21–29, 1989.
- [16] M. Delgado, J. L. Verdegay, and M. A. Vila. Relating different approaches to solve linear programming problems with imprecise costs. *Fuzzy Sets and Systems*, 37(1):33–42, 1990.
- [17] M. Delgado, M. A. Vila, and W. Voxman. A fuzziness measure for fuzzy numbers: Applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 94:205–216, 1998.
- [18] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, 1980.
- [19] D. Dubois and H. Prade. Toward fuzzy differential calculus part 1: Integration of fuzzy mappings. *Fuzzy Sets and Systems*, 8(1):1–17, 1982.
- [20] D. Dubois and H. Prade. Toward fuzzy differential calculus part 2: Integration on fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 8(2):105–116, 1982.
- [21] D. Dubois and H. Prade. Toward fuzzy differential calculus part 3: Differentiation. *Fuzzy Sets and Systems*, 8(3):225–233, 1982.
- [22] P. Ekel, W. Pedrycz, and R. Schinzinger. A general approach to solving a wide class of fuzzy optimization problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 97:49–66, 1998.
- [23] C. Fabian and M. Stoica. Fuzzy integer programming. *Studies in the Management Science*, 20:123–131, 1984.
- [24] P. A. V. Ferreira. Otimização não-linear. <http://www.dt.fee.unicamp.br:80/~valente/ia543.html>.
- [25] C. A. Floudas, P. M. Pardalos, C. S. Adjiman, Z. H. Gümüs W. R. Esposito, S. T. Harding, J. L. Klepeis, C. A. Meyer, and C. A. Schweiger. *Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [26] R. Fullér and H. J. Zimmermann. Fuzzy reasoning for solving fuzzy mathematical programming problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 60:121–133, 1993.
- [27] O. He and w. Yi. On fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 32:321–325, 1989.
- [28] F. Herrera. *Fuzzy Optimization – Recent Advances*, chapter 5 – Models and Methods in Fuzzy Discrete Programming, pages 255–271. Physica–Verlag, 1994.
- [29] F. Herrera, M. Kovács, and J. L. Verdegay. Optimality for fuzzified mathematical programming problems: A parametric approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 54:279–285, 1993.
- [30] F. Herrera and J. L. Verdegay. Approaching fuzzy integer linear programming problems. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 368:78–91, 1991.
- [31] F. Herrera and J. L. Verdegay. Fuzzy almost integer variables in integer programming problems. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 2(2):259–270, 1994.
- [32] F. Herrera and J. L. Verdegay. Fuzzy sets and operations research – perspectives. Technical Report #DECSAI-95137, Depto. of Computer Science and Artificial Intelligence, October 1995.

- [33] F. Herrera and J. L. Verdegay. Three models of fuzzy integer linear programming. *European Journal of Operational Research*, 83:581–593, 1995.
- [34] F. Herrera and J. L. Verdegay. *Fuzzy Logic Foundations and Industrial Applications*, chapter 8 – Making Decisions on Fuzzy Integer Linear Programming Problems, pages 147–164. International Series in Intelligent Technologies. Kluwer Academic, 1996.
- [35] F. Herrera and J. L. Verdegay. Fuzzy sets and operations research: Perspectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:207–218, 1997.
- [36] F. Herrera, J. L. Verdegay, and H. J. Zimmermann. Boolean programming problems with fuzzy constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, 55:285–293, 1993.
- [37] D. M. Himmelblau. *Applied Nonlinear Programming*. McGraw–Hill Book Company, 1972.
- [38] J. Ramík. Extension principle in fuzzy optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, 19:29–35, 1986.
- [39] M. Inuiguchi and J. Ramík. Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 111:3–28, 2000.
- [40] O. Kaleva. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:301–317, 1987.
- [41] O. Kaleva. The calculus of fuzzy valued functions. *Applied Mathematical Letters*, 3(2):55–59, 1990.
- [42] A. Kaufmann and M. M. Gupta. *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*. Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [43] G. J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [44] L. S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. Macmillan Series in Operational Research, 1970.
- [45] Y. H. Lee, B. H. Yang, and K. S. Moon. An economic machining process model using fuzzy non-linear programming and neural network. *Int. J. Prod. Res.*, 37(4):835–847, 1999.
- [46] B. Liu and K. Iwamura. Chance constrained programming with fuzzy parameters. *Fuzzy Sets and Systems*, 94:227–237, 1998.
- [47] Y. M. Liu. Some properties of convex fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 111:119–129, 1985.
- [48] R. Lowen. Convex fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 3:291–310, 1980.
- [49] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, second edition, 1989. 491 pp.
- [50] M. K. Luhandjula. Fuzzy optimization: An appraisal. *Fuzzy Sets and Systems*, 30:257–282, 1989.
- [51] J. L. Moré and D. J. Thuente. Line search algorithm with guaranteed sufficient decrease. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(3):286–307, 1994.

- [52] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Spring Series in Operations Research. Springer-Verlag New York, Inc., 1999.
- [53] M. S. Osman, O. M. Saad, and A. G. Hasan. Solving a special class of large-scale fuzzy multiobjective integer linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 107:289–297, 1999.
- [54] W. Pedrycz and J. V. de Oliveira. Optimization of fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B: Cybernetics*, 26(4):627–636, 1996.
- [55] W. Pedrycz and F. Gomide. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. A Bradford Book, 1998.
- [56] M. Puri and M. L. Ralescu. Differential of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91(552–558), 1983.
- [57] D. Ralescu and G. Adams. The fuzzy integral. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 75:562–570, 1980.
- [58] J. Ramík and H. Rommelfanger. Fuzzy mathematical programming based on some new inequality relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 81(1):77–87, 1996.
- [59] H. Rommelfanger. Fuzzy linear programming and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 92:512–527, 1996.
- [60] M. Sakawa. *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*. Applied Information Technology. Plenum Press, 1993.
- [61] K. Schittkowski. *More Test Examples for Nonlinear Programming Codes*. Number 282 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, 1987.
- [62] S. Seikkala. On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:319–330, 1987.
- [63] M. Sugeno. *Theory of Fuzzy Integrals and Applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [64] M. Tada and H. Ishii. An integer fuzzy transportation problem. *Computers Math. Applic.*, 31(9):71–87, 1996.
- [65] T. Takahama and S. Sakai. Tuning fuzzy control rules by the α constrained method which solves constrained nonlinear optimization problems. *Electronics and Communications in Japan, Part 3*, 83(9):1–12, 2000.
- [66] J.-F. C. Trappey, C. R. Liu, and T.-C. Chang. Fuzzy non-linear programming: Theory and application in manufacturing. *Int. J. Prod. Res.*, 26(5):975–985, 1988.
- [67] J. L. Verdegay. A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 14:131–141, 1984.
- [68] C. Xu. Fuzzy optimization of structures by the two-phase method. *Computers and Structures*, 31(4):575–580, 1989.

- [69] A. Yamakami and L. A. P. Cantão. Fuzzy integer multicommodity transportation problem – fimtp. In *MS'2000 International Conference on Modeling and Simulation*, pages 563–570, University of Las Palmas de Gran Canaria – Spain, 2000.
- [70] A. Yamakami and L. A. P. Cantão. Problema de transporte multiproduto inteiro fuzzy. In *XXXII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional – SBPO*, pages 397–412, Universidade Federal de Viçosa – Campus de Viçosa – MG, 2000.
- [71] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [72] H. J. Zimmermann. Fuzzy mathematical programming. *Comput. and Ops. Res.*, 10(4):291–298, 1983.
- [73] H. J. Zimmermann and M. A. Pollatschek. Fuzzy 0-1 linear programs. *Studies in the Management Science*, 20:133–145, 1984.