Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Alocação de Pólos e Estabilidade Robustas de Sistemas Intervalares com Tratamento de Multiincidências de Parâmetros

Autor: Fábio Pereira Benjovengo

Orientador: Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Engenharia Elétrica**.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira . . . . DT/FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val . . . . DT/FEEC/UNICAMP
Dr. Samuel Siqueira Bueno . . . . CENPRA
Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral . . . . DCA/FEEC/UNICAMP

Campinas, SP

16 de Março de 2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

	Benjovengo, Fábio Pereira
B438a	Alocação de pólos e estabilidade robustas de sistemas intervalares com tratamento de multiincidências de parâmetros / Fábio Pereira Benjovengo. – Campinas, SP: [s.n.], 2006.
	Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira. Tese (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
	1. Teoria de Controle. 2. Sistemas lineares. 3. Análise de intervalos (Matemática). I. Ferreira, Paulo Augusto Valente. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Titulo em Inglês:	Robust pole placement and stability analysis of interval systems with data dependencies
Palavras-chave em Inglês:	Control theory, Linear systems, Uncertain systems, Interval analysis (matehematics)
Área de concentração:	Engenharia Elétrica
Titulação:	Mestre em Engenharia Elétrica
Banca examinadora:	João Bosco Ribeiro do Val, Samuel Siqueira Bueno, Wagner Caradori do Amaral
Data da defesa:	16/03/2006

Resumo

Esta Dissertação tem como objetivos o projeto de sistemas de controle e a análise de estabilidade de plantas lineares e invariantes no tempo imprecisamente conhecidas (com incertezas do tipo intervalar). O problema de projeto de controladores é tratado através da técnica de alocação de pólos. A técnica de alocação robusta de pólos proposta nesta Dissertação é uma extensão da técnica de projeto clássica e utiliza resultados de Análise Intervalar. A extensão proposta resulta numa equação Diofantina intervalar. Busca-se, então, a redução do raio de sua solução através do tratamento de multiincidências de elementos intervalares. Outro tema tratado é o projeto de controladores que visem o rastreamento de sinais de referência e a rejeição de distúrbios, assintoticamente. Estuda-se ainda o problema da estabilidade de sistemas intervalares formulado como o problema de encontrar uma matriz intervalar simétrica definida positiva como solução de uma equação de Lyapunov intervalar.

Palavras-chave: Alocação de pólos, análise intervalar, equação Diofantina, equação de Sylvester, controle robusto.

Abstract

This Dissertation is focused on control system design and stability analysis of linear time-invariant uncertain plants, with uncertainties of interval nature. The control system design problem is treated in the context of the pole placement technique. An extension of the classical technique to robust pole placement based on Interval Analysis is proposed. The main objective of the work is to handle multiple incidences of plant parameters in order to reduce the radii of the solutions of the resulting interval Diophantine equations. Another subject treated is the design of robust controllers for interval plants which guarantee reference tracking and disturbance rejection asymptotically. The stability of linear interval systems as the problem of finding a symmetric positive definite interval solution of an interval Lyapunov equation is also considered.

Keywords: Pole placement, interval analysis, Diophantine equation, Sylvester equation, robust control.

Agradecimentos

Ao orientador, Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira, pelo apoio, incentivo e orientação em todo o tempo e pela amizade e confiança em mim depositadas.

Aos meus pais, irmã e avós pela ajuda e motivação durante toda esta jornada.

À Florencia Wisnivesky por todo o apoio, críticas, sugestões e por tudo o que fez por mim desde que nos conhecemos.

A todos os professores e companheiros do Departamento de Telemática da FEEC/UNICAMP pela amizade e por proporcionar um excelente ambiente de trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras

Notação

$\emptyset$	Conjunto vazio
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais de dimensão n
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\mathbb{IR}$	Conjunto dos intervalos reais fechados
$\mathbb{IR}^n$	Conjunto dos vetores intervalares de dimensão n
$\mathbb{IR}^{n\times m}$	Conjunto das matrizes intervalares de dimensão $n \times m$
a	Escalar
$[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$	Intervalo fechado
$\underline{a}$	Limitante inferior de $[a]$
$\overline{a}$	Limitante superior de $[a]$
a^w	Largura de $[a]$
a^c	Ponto central de $[a]$
δ	Raio de $[a]$
$\lvert[a]\rvert$	Valor absoluto de $[a]$
$\mathbf{a}$	Vetor
$\mathbf{a}^T$	Transposto de $\mathbf{a}$
$[\mathbf{a}] = [\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}]$	Vetor intervalar
$[a_i] = [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$	i-ésimo elemento de $[\mathbf{a}]$
$\underline{\mathbf{a}}$	Limitante inferior de $[\mathbf{a}]$
$\overline{\mathbf{a}}$	Limitante superior de $[\mathbf{a}]$
$\mathbf{a}^w$	Largura de $[\mathbf{a}]$
$\mathbf{a}^c$	Ponto central de $[\mathbf{a}]$
δ	Raio de $[\mathbf{a}]$
$\lvert[\mathbf{a}]\rvert$	Valor absoluto de $[\mathbf{a}]$

$\mathbf{A}$	Matriz
$\mathbf{A}^T$	Transposta de $\mathbf{A}$
$\mathbf{0_n}$	Matriz de zeros de dimensão $n \times n$
$\mathbf{I_n}$	Matriz identidade de dimensão $n \times n$
$[\mathbf{A}] = \left[\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}\right]$	Matriz intervalar
$[A_{ij}] = \left[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\right]$	ij-ésimo elemento de $[\mathbf{A}]$
$\underline{\mathbf{A}}$	Limitante inferior de $[\mathbf{A}]$
$\overline{\mathbf{A}}$	Limitante superior de $[\mathbf{A}]$
$\mathbf{A}^w$	Largura de $[\mathbf{A}]$
$\mathbf{A}^c$	Ponto central de $[\mathbf{A}]$
$\mathbf{\Delta}$	Raio de $[\mathbf{A}]$
$\lvert[\mathbf{A}]\rvert$	Valor absoluto de $[\mathbf{A}]$
$a(s) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i s^i$	Polinômio em s de grau n
$[a(s)] = \sum\limits_{i=0}^{n} [\alpha_i]\, s^i$	Polinômio em s de grau n com coeficientes intervalares
$\mathcal{S}\left([a(s)]\right)$	Espaço de raízes de um polinômio com coeficientes intervalares $[a(s)]$

Capítulo 1

Introdução Geral

O projeto de sistemas de controle para plantas lineares e invariantes no tempo precisamente conhecidas, através de *alocação de pólos* pode ser reduzido à solução de um sistema de equações lineares (dependente da ordem da planta e do controlador). Assume-se que os comportamentos transitório e de regime desejados para o sistema em malha fechada podem ser conseguidos posicionando-se adequadamente os pólos de malha fechada do sistema no semi-plano esquerdo do plano complexo através da realimentação dinâmica da saída.

A técnica descrita acima pode ser estendida para plantas imprecisamente conhecidas (com incertezas do tipo intervalar) utilizando-se resultados de *Análise Intervalar*. Sistemas de equações lineares intervalares são então obtidos. Plantas incertas intervalares podem ser representadas por funções de transferência próprias com coeficientes pertencentes a intervalos reais. Nesta Dissertação, o problema de alocação robusta de pólos é formulado como o problema de se alocar robustamente os pólos de malha fechada do sistema em uma região especificada através das raízes de um polinômio característico intervalar.

A base para a técnica de alocação robusta de pólos apresentada nesta Dissertação é a técnica de projeto clássica de alocação de pólos. Como descrito em (Chen, 1999), a solução do problema clássico de alocação de pólos pode ser reduzida, sob condições apropriadas, à solução da conhecida *equação Diofantina*, cuja versão matricial assume a forma de um sistema linear, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, no qual $\mathbf{A}$ é a *matriz de Sylvester* associada a uma dada planta de ordem n, $\mathbf{x}$ é o vetor com os coeficientes de um controlador de ordem r a ser projetado e $\mathbf{b}$ é o vetor com os coeficientes de um dado polinômio característico de grau $n + r$. Dadas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$, existe um controlador $\mathbf{x}$, tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se e somente se os dois polinômios que descrevem a planta forem coprimos e $r \geq n - 1$. Dois polinômios são coprimos se e somente se a *resultante de*

Sylvester associada é não-singular.

A partir da técnica de projeto clássica de alocação de pólos, uma técnica de alocação robusta de pólos é desenvolvida como uma extensão dos métodos clássicos por meio de resultados de Análise Intervalar. Considerando intervalares os coeficientes da planta e os coeficientes do polinômio característico de malha fechada, a solução do problema de alocação robusta de pólos reduz-se à solução de uma *equação Diofantina intervalar*. A versão matricial da equação Diofantina intervalar assume a forma de um sistema linear intervalar $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$, no qual $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{b}]$ são a matriz de Sylvester intervalar e o vetor intervalar associados a uma dada planta intervalar e a um dado polinômio característico intervalar, respectivamente.

O raio da solução de um sistema linear intervalar é sensível ao método de solução utilizado. A abordagem adotada nesta Dissertação para a solução da equação Diofantina intervalar é baseada no trabalho de (Rump, 1994). Através do tratamento de multiincidências de elementos intervalares na equação Diofantina intervalar, busca-se a redução do raio de sua solução. Contrariamente aos métodos clássicos, nos quais cada incidência de um mesmo elemento intervalar é considerada como um elemento diferente, nesta Dissertação explora-se a dependência linear existente entre elementos multiincidentes de forma a reduzir o conservadorismo da solução de equações Diofantinas intervalares. Outros dois métodos clássicos para a solução de sistemas lineares intervalares, o que se encontra implementado em um pacote para *Matlab*, o *Intlab*, e outro que calcula a *casca intervalar* de sistemas lineares intervalares, o *Sign-accord*, são comparados ao método descrito em (Rump, 1994).

Além de garantir um desempenho transitório satisfatório para o sistema em malha fechada, a técnica de alocação de pólos pode ser empregada no projeto de controladores que visem o rastreamento de sinais de referência e rejeição de distúrbios assintoticamente. É possível estender estes métodos para plantas, sinais de referência e distúrbios intervalares com base em Análise Intervalar. Neste trabalho é proposta uma técnica de alocação robusta de pólos que leva ao rastreamento robusto de sinais de referência e à rejeição robusta de distúrbios.

A segunda parte da Dissertação consiste no estudo da estabilidade robusta de sistemas lineares intervalares. Sistemas incertos são representados no espaço de estados por *matrizes intervalares*, ou seja, matrizes cujos elementos pertencem a intervalos reais. O estudo de estabilidade é formulado como o problema de encontrar uma matriz intervalar simétrica definida positiva como solução de uma *equação de Lyapunov intervalar*. Se toda matriz simétrica (contida na solução da equação de Lyapunov intervalar) for definida positiva, então qualquer matriz contida na matriz de estados intervalar do sistema apresentará autovalores com parte real negativa.

A *equação de Sylvester intervalar* é uma equação matricial da forma $[\mathbf{A}]\mathbf{X} + \mathbf{X}[\mathbf{B}] = [\mathbf{C}]$, sendo que $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{m\times m}$ e $[\mathbf{B}] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, enquanto que $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{X}] \in \mathbb{IR}^{m\times n}$. Esta equação pode ser reescrita como um sistema linear intervalar da forma $[\mathbf{G}]\mathbf{x} = [\mathbf{c}]$ a partir do *produto de Kronecker*. Neste caso, os métodos utilizados para a solução da equação Diofantina intervalar podem ser aplicados para a solução da equação de Sylvester intervalar.

A *equação de Lyapunov intervalar* apresenta a forma $[\mathbf{A}]\mathbf{X} + \mathbf{X}[\mathbf{A}] = [\mathbf{C}]$ e é um caso particular da equação de Sylvester intervalar. A estrutura da equação de Lyapunov intervalar motiva o tratamento de multiincidências de elementos intervalares presentes no sistema linear equivalente $[\mathbf{G}]\mathbf{x} = [\mathbf{c}]$.

A Dissertação está organizada como segue.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão de conceitos e definições sobre Análise Intervalar. Este capítulo fornece uma base para o entendimento dos métodos apresentados nos capítulos seguintes.

O Capítulo 3 apresenta inicialmente uma revisão da técnica de alocação de pólos para sistemas lineares e invariantes no tempo via realimentação dinâmica da saída, que resulta na chamada equação Diofantina. Em seguida é apresentada uma extensão deste método para sistemas intervalares que caracteriza a equação Diofantina intervalar. É apresentada uma técnica de resolução de sistemas lineares intervalares baseada no tratamento de multiincidência de elementos intervalares, com vistas à redução do raio da solução. Exemplos e comparações de resultados utilizando métodos diferentes na resolução da equação Diofantina intervalar são também apresentados.

No Capítulo 4 são discutidos os problemas de rastreamento e regulação robustas por meio de alocação de pólos. Uma extensão do princípio do modelo interno para o caso intervalar é proposta. A técnica de tratamento de multiincidências de elementos intervalares, apresentada no Capítulo 3, é aplicada ao problema de alocação robusta de pólos de um sistema visando o rastreamento e regulação robustos. Um exemplo ilustrativo e simulações ilustram os principais resultados deste capítulo.

O Capítulo 5 discute inicialmente a solução de *equações de Sylvester intervalares*. Transformando a equação de Sylvester intervalar em um sistema linear intervalar equivalente através do produto de Kronecker, é possível aplicar a técnica introduzida no Capítulo 3. O tratamento de multiincidências de elementos intervalares reduz o raio da solução do sistema linear intervalar equivalente. A solução da equação de Lyapunov intervalar é tratada como um caso particular da equação de Sylvester intervalar. A partir da solução da equação de Lyapunov intervalar estuda-se a estabilidade robusta de sistemas lineares intervalares. Um exemplo ilustrativo da aplicação da técnica no estudo de estabilidade de sistemas intervalares é apresentado no final do Capítulo.

A conclusão da Dissertação e perspectivas para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

Capítulo 2

Análise intervalar

2.1 Introdução

Este Capítulo 2 apresenta definições relacionadas a conjuntos intervalares fechados e a operações com *Álgebra Intervalar*. O objetivo é introduzir noções suficientes para o entendimento dos métodos apresentados nos capítulos seguintes. Detalhes adicionais são descritos em (Alefeld and Mayer, 2000), (Moore, 1979) e (Rohn, 1989).

2.2 Notação e definições

Intervalos podem ser entendidos como uma extensão da classe de números reais. Esta nova classe de números, representada por um par ordenado de números reais, os extremos inferior e superior, apresenta algumas particularidades que serão descritas no decorrer desta seção. Além da definição dos elementos que compõem esta nova classe, é necessário estender operações existentes para a classe de números reais de forma consistente.

Por um intervalo real entende-se um conjunto fechado de elementos pertencentes ao conjunto dos números reais. Intervalos são representados por letras minúsculas entre colchetes. Se $[a]$ é um intervalo, então

$$[a] = [\underline{a}, \overline{a}] = \{x : \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}\,, \tag{2.1}$$

no qual $\underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}$.

Assim como podem ser definidas operações com números complexos como uma extensão das operações realizadas com números reais, deve-se definir operações para elementos intervalares.

Um número real pode ser representado por meio de um intervalo *degenerado*, no qual seus limites inferior e superior coincidem. Neste trabalho não há distinção entre a representação de um número real x e o intervalo degenerado $[x]$.

Sejam os intervalos $[a]$ e $[b]$. As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de $[a]$ e $[b]$ são definidas genericamente como

$$[a] \circ [b] = \{a \circ b : a \in [a], b \in [b], \ \circ \in \{+, -, \cdot, /\}\}. \tag{2.2}$$

Fórmulas explícitas para estas operações podem ser caracterizadas em termos dos extremos de $[a]$ e $[b]$:

$$[a] + [b] = \left[\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\right], \tag{2.3}$$

$$[a] - [b] = \left[\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}\right], \tag{2.4}$$

$$[a] \cdot [b] = \left[\min\left(\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{ab}\right), \max\left(\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{ab}\right)\right]. \tag{2.5}$$

Pode-se definir a divisão de dois intervalos como a multiplicação do numerador pelo inverso do denominador. Se $[b]$ é um intervalo, então seu inverso é definido como

$$\frac{1}{[b]} = \left\{\frac{1}{b} : b \in [b]\right\} \text{ se } 0 \notin [b]. \tag{2.6}$$

A partir da definição de inverso de um elemento intervalar, define-se a divisão entre dois intervalos:

$$[a] \cdot \frac{1}{[b]} = \left[\min\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right), \max\left(\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right)\right]. \tag{2.7}$$

O valor absoluto (ou módulo) de um intervalo corresponde ao máximo, em módulo, de seus extremos. Assim como para números reais, o valor absoluto de um intervalo é uma grandeza não-negativa, valendo zero apenas para o intervalo $[0, 0]$:

$$|[a]| = \max\left(|\underline{a}|, |\overline{a}|\right). \tag{2.8}$$

Operações como intersecção e união de intervalos também podem ser definidas a partir dos extremos dos mesmos. A intersecção entre dois intervalos $[a]$ e $[b]$ resultará em um conjunto vazio ($\varnothing$) se $\underline{a} > \overline{b}$ ou $\underline{b} > \overline{a}$. Caso contrário,

$$[a] \cap [b] = \left[\max\left(\underline{a}, \underline{b}\right), \min\left(\overline{a}, \overline{b}\right)\right]. \tag{2.9}$$

Para dois intervalos cuja intersecção não resulta em um conjunto vazio, a união pode ser definida da seguinte maneira:

$$[a] \cup [b] = \left[\min\left(\underline{a}, \underline{b}\right), \max\left(\overline{a}, \overline{b}\right)\right]. \tag{2.10}$$

Do mesmo modo que para os números reais, é possível definir a seguinte relação de ordem entre dois intervalos:

$$[a] < [b] \Leftrightarrow \overline{a} < \underline{b}. \tag{2.11}$$

Como os intervalos são conjuntos (fechados) de números reais, as operações aplicáveis a conjuntos reais podem ser aplicadas a intervalos. Entre conjuntos reais, é possível definir a operação relacional de inclusão sem igualdade. A definição de tais operações entre intervalos é expressa por

$$[a] \subset [b] \ \text{ se e somente se } \underline{b} \leq \underline{a} \text{ e } \overline{a} \leq \overline{b}, \tag{2.12}$$

$$[a] \subsetneq [b] \ \text{ se e somente se } \underline{b} < \underline{a} \text{ e } \overline{a} < \overline{b} \tag{2.13}$$

A diferença entre as expressões (2.12) e (2.13) reside no fato de que na expressão (2.13), tem-se que $\underline{a} \neq \underline{b}$ e $\overline{a} \neq \overline{b}$.

Outras definições importantes em Análise Intervalar são as de centro (ou ponto médio), largura e raio de intervalos.

$$\text{Centro: } a^c = mid\left([a]\right) = \frac{\overline{a} + \underline{a}}{2}; \tag{2.14}$$

$$\text{Largura: } a^w = wid\left([a]\right) = \overline{a} - \underline{a}; \tag{2.15}$$

$$\text{Raio: } a^r = rad\left([a]\right) = \frac{\overline{a} - \underline{a}}{2}. \tag{2.16}$$

Neste trabalho as notações a^c e $mid\left([a]\right)$, a^w e $wid\left([a]\right)$ e a^r e $rad\left([a]\right)$ serão utilizadas indistintamente.

A partir das definições de valor central (expressão (2.14)) e raio intervalar (expressão (2.16)), é possível descrever qualquer intervalo como

$$[a] = [a^c - a^r, a^c + a^r]. \tag{2.17}$$

2.3 Propriedades algébricas

Assim como para os números reais, adição e a multiplicação intervalares são operações associativas e comutativas. Dados os intervalos $[a]$,$[b]$ e $[c]$,

$$[a] + [b] = [b] + [a]\,, \tag{2.18}$$

$$[a] \cdot [b] = [b] \cdot [a]\,, \tag{2.19}$$

$$[a] + ([b] + [c]) = ([a] + [b]) + [c]\,, \tag{2.20}$$

$$[a] \cdot ([b] \cdot [c]) = ([a] \cdot [b]) \cdot [c]\,. \tag{2.21}$$

Embora a adição e a multiplicação intervalares sejam associativas e comutativas, a propriedade distributiva nem sempre é verdadeira. Em geral,

$$[a] \cdot ([b] + [c]) \subseteqq [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c]. \tag{2.22}$$

Esta propriedade é chamada de *subdistributiva*. Alguns casos em que a propriedade distributiva é verificada para operações intervalares são:

$$x \cdot ([a] + [b]) = x \cdot [a] + x \cdot [b]\,, \tag{2.23}$$

$$[a] \cdot ([b] + [c]) = [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c] \;\text{ para }\; [b] \cdot [c] > 0, \tag{2.24}$$

sendo $x \in \mathbb{R}$, $[a]\,, [b]\,, [c] \in \mathbb{IR}$.

2.4 Vetores intervalares

Neste trabalho, qualquer vetor (intervalar ou não) é um vetor coluna, a não ser quando explicitado o contrário. Vetores intervalares são representados por letras minúsculas, em negrito e entre colchetes. Se $[\mathbf{a}] \in \mathbb{IR}^n$ é um vetor intervalar, então todos seus elementos $[a_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ são intervalares.

O centro de um vetor intervalar $[\mathbf{a}]$ é o vetor real definido pelos valores centrais de cada elemento do vetor intervalar. Por construção, $\mathbf{a^c} \in [\mathbf{a}]$ e

$$(\mathbf{a^c})_i = (mid\,([\mathbf{a}]))_i = mid\,([a_i])\;\,, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.25}$$

A largura de um vetor $[\mathbf{a}]$ é definida como a máxima largura entre todos os elementos $[a_i]$ de $[\mathbf{a}]$ e, por construção, é um escalar:

$$a^w = wid\left([\mathbf{a}]\right) = \max_i wid\left([a_i]\right). \tag{2.26}$$

O raio de um vetor $[\mathbf{a}] \in \mathbb{IR}^n$ é definido como o vetor formado pelos raios de seus elementos:

$$(\delta_{\mathbf{a}})_i := (\mathbf{a}^r)_i = rad([a_i])\,,\, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.27}$$

Por construção, se $[\mathbf{a}] \in \mathbb{IR}^n$, $\delta_{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$.

Dois vetores intervalares $[\mathbf{a}] = [\underline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}]$ e $[\mathbf{b}] = [\underline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}]$ são iguais, ou seja, $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$, se e somente se $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{b}}$ e $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}}$.

Para $[\mathbf{a}]$ e $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$ e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, diz-se que $[\mathbf{a}] \subset [\mathbf{b}]$ se e somente se $[a_i] \subset [b_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Do mesmo modo, $\mathbf{c} \in [\mathbf{b}]$ se e somente se $c_i \subset [b_i]$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se $[\mathbf{a}]$ e $[\mathbf{b}]$ são vetores intervalares de dimensões apropriadas e se $\circ$ é um operador binário, então

$$[\mathbf{a}] \circ [\mathbf{b}] = \{\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \text{ para todo } \mathbf{a} \in [\mathbf{a}] \text{ e } \mathbf{b} \in [\mathbf{b}]\}. \tag{2.28}$$

Seja $[\mathbf{a}]$ e $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$, $[\mathbf{c}] \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então, para $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
(\alpha\,[\mathbf{a}])_i &= \alpha\,[a_i]\,,\\
([\mathbf{a}] + [\mathbf{b}])_i &= [a_i] + [b_i]\,,\\
[\mathbf{a}]^T\,[\mathbf{b}] &= \sum_{i=1}^{n} [a_i]\,[b_i]\,,\\
[\mathbf{a}]^T\,\mathbf{c} &= \sum_{i=1}^{n} [a_i]\,c_i.
\end{aligned}$$

Dado um vetor intervalar $[\mathbf{a}] \in \mathbb{IR}^n$, sua norma pode ser definida por

$$||[\mathbf{a}]|| = \max\left(|\,[a_1]\,|, |\,[a_2]\,|, \ldots, |\,[a_n]\,|\right). \tag{2.29}$$

Caso um vetor real $\mathbf{b}$ esteja contido em um vetor intervalar $[\mathbf{a}]$, então $||\mathbf{b}|| \leq ||[\mathbf{a}]||$.

2.5 Matrizes intervalares

Matrizes intervalares são representadas por letras maiúsculas, em negrito e entre colchetes. Se $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ é uma matriz intervalar, então todos seus elementos $[a_{ij}]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ são intervalares.

O centro de uma matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ é a matriz real definida pelos valores centrais de cada elemento da matriz intervalar. Por construção, $\mathbf{A^c} \in [\mathbf{A}]$ e

$$(\mathbf{A^c})_{ij} = (mid\,([\mathbf{A}]))_{ij} = mid\,([\mathbf{A}_{ij}])\,. \tag{2.30}$$

A largura de uma matriz $[\mathbf{A}]$ é definida como a máxima largura entre todos os elementos $[a_{ij}]$ de $[\mathbf{A}]$ e, por construção, é um escalar. Especificamente,

$$a^w = wid\,([\mathbf{A}]) = \max_{i,j} wid\,([a_{ij}])\,. \tag{2.31}$$

O raio de uma matriz $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ é definido como a matriz formada pelos raios de seus elementos:

$$(\mathbf{\Delta_A})_{ij} = (\mathbf{A}^r)_{ij} = rad([a_{ij}])\;,\; i = 1, 2, \ldots, n \text{ e } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.32}$$

Por construção, se $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$, então $\mathbf{\Delta_A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Duas matrizes intervalares $[\mathbf{A}] = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]$ e $[\mathbf{B}] = [\underline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{B}}]$ são iguais, ou seja, $[\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]$, se e somente se $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{B}}$.

Para $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}] \in \mathbb{IR}^{n \times m}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, com $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$, diz-se que $[\mathbf{A}] \subset [\mathbf{B}]$ se e somente se $[a_{ij}] \subset [b_{ij}]$. Do mesmo modo, $\mathbf{C} \in [\mathbf{B}]$ se e somente se $c_{ij} \subset [b_{ij}]$ para todo i e todo j.

Se $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$ são matrizes intervalares de dimensões apropriadas e se $\circ$ é um operador binário, então

$$[\mathbf{A}] \circ [\mathbf{B}] = \{\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \text{ para toda } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \text{ e } \mathbf{B} \in [\mathbf{B}]\}\,. \tag{2.33}$$

Sejam $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $[\mathbf{c}] \in \mathbb{IR}^{n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
(\alpha[\mathbf{A}])_{ij} &= \alpha[a_{ij}],\\
([\mathbf{A}] + [\mathbf{B}])_{ij} &= [a_{ij}] + [b_{ij}],\\
([\mathbf{A}][\mathbf{B}])_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}[a_{ik}][b_{kj}],\\
([\mathbf{A}][\mathbf{c}])_{i} &= \sum_{j=1}^{n}[a_{ij}][c_{j}].
\end{aligned}$$

A norma de uma matriz intervalar pode ser definida como

$$||[\mathbf{A}]|| = \max_{i} \sum_{j} |[a_{ij}]| \,. \tag{2.34}$$

Caso uma matriz real $\mathbf{B}$ esteja contida em um matriz intervalar $[\mathbf{A}]$, então $||\mathbf{B}|| \leq ||[\mathbf{A}]||$.

2.6 Solução de sistemas de equações lineares intervalares

Considere um sistema linear descrito por $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Suponha que existam perturbações em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$, quer seja por imprecisão em dados, por se adotar representação finita para números reais, por incertezas no modelo da planta, ou mesmo por plantas variantes no tempo dentro dos limites estabelecidos. Se as incertezas nos dados puderem ser representadas por meio de intervalos, obtém-se um sistema linear intervalar

$$[\mathbf{A}]\,\mathbf{x} = [\mathbf{b}] \,. \tag{2.35}$$

O conjunto solução de $[\mathbf{A}]\,\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$ é definido como

$$\boldsymbol{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{para alguma } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \text{ e algum } \mathbf{b} \in [\mathbf{b}]\} \,. \tag{2.36}$$

O teorema a seguir apresenta uma caracterização de $\boldsymbol{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ em termos dos centros e raios de $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{b}]$, introduzida em (Oettli and Pragger, 1964) e (Oettli, 1965).

Teorema 2.6.1. *(Desigualdade de Oettli-Prager) O conjunto* $\boldsymbol{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ *pode ser descrito por*

$$\boldsymbol{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{A}^{\mathbf{c}}\mathbf{x} - \mathbf{b}^{\mathbf{c}}| \leq \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{A}}|\mathbf{x}| + \delta_{\mathbf{b}}\} \tag{2.37}$$

Prova. *Ver (Rohn, 1989).*

O conjunto solução $\boldsymbol{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ é, em geral, não-convexo, e sua determinação exata é um problema de complexidade não-polinomial. É possível, alternativamente, trabalhar com uma aproximação externa de $\boldsymbol{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$, sua casca intervalar, ou o vetor intervalar de menor raio que contém $\boldsymbol{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$.

A casca intervalar de $\mathbf{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ é o vetor intervalar com menor raio contendo $\mathbf{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$, definida como

$$\mathbf{\Sigma_c}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) = \{x : \min \mathbf{\Sigma} \leq x \leq \max \mathbf{\Sigma}\}, \tag{2.38}$$

no qual $\min$ e $\max$ denotam o mínimo e o máximo componente-a-componente sobre todos os vetores de $\mathbf{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$.

A casca intervalar de $\mathbf{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$ é um conjunto convexo e sua determinação é computacionalmente mais simples do que a determinação de $\mathbf{\Sigma}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$.

2.6.1 Não-singularidade robusta

Uma matriz intervalar quadrada $[\mathbf{A}]$ é *robustamente não-singular* (ou *regular*) se toda matriz $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ for não-singular. Uma condição suficiente para a não-singularidade robusta de $[\mathbf{A}]$ é descrita em (Lordelo et al., 2006): $[\mathbf{A}]$ é robustamente não-singular se

$$\rho\left(|(\mathbf{A^c})^{-1}|\mathbf{A^r}\right) < 1, \tag{2.39}$$

com $\rho(\bullet)$ denotando *raio espectral*. O raio espectral de uma matriz $\mathbf{A}$ é definido como $\rho(\mathbf{A}) = max\{|\lambda| : \mathbf{Ax} = \lambda\mathrm{x} \text{ para algum } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$.

O raio de não-singularidade robusta de uma matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ é definido como

$$\epsilon^* = \inf\left\{\epsilon \geq 0 : \mathbf{A}^c - \epsilon\mathbf{\Delta_A} \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^c + \epsilon\mathbf{\Delta_A}, \text{ para alguma } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] \text{ não-singular}\right\}.$$

O cálculo de ϵ^* é um problema NP-difícil. Uma aproximação para ϵ^* pode ser obtida através do procedimento descrito a seguir, proposto em (Jansson and Rohn, 1999).

Defina

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f} = -\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{2.40}$$

e

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y}| = \mathbf{e}\}. \tag{2.41}$$

É possível então verificar que $\mathcal{Y}$ apresenta 2^n vetores (combinações de elementos 1 e -1 em vetores $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$). Para $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, defina $\mathbf{T_z}$ como uma a matriz diagonal com o vetor $\mathbf{z}$ na diagonal.

$$\mathbf{T_z} = diag(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & z_n \end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Teorema 2.6.2. *A matriz intervalar* $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}^c - \mathbf{\Delta_A}, \mathbf{A}^c + \mathbf{\Delta_A}]$ *é robustamente não-singular se e somente se o problema de programação linear*

$$(P_y) \left| \begin{array}{ll} \textit{max}\ \mathbf{y}^T\mathbf{x} & \\ \textit{sujeito a} & (\mathbf{A}^c - \mathbf{\Delta_A})\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \\ & (\mathbf{A}^c + \mathbf{\Delta_A})\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & T_{\mathbf{y}}\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

é limitado para todo $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$.

Prova. *Ver (Jansson and Rohn, 1999).*

O raio de não-singularidade de $[\mathbf{A}]$ pode ser computado por meio do *Algoritmo da Bisseção* descrito a seguir. Por conveniência substitua $\mathbf{\Delta_A}$ por $\epsilon\mathbf{\Delta_A}$ em (P_y) e defina $flag(\epsilon) = 1$ se

(P_y) é limitado para todo $y \in \mathcal{Y}$, e $flag(\epsilon) = 0$, caso contrário.

Passo 0: Encontre $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, de maneira que $flag(\epsilon_1) = 1$ e $flag(\epsilon_2) = 0$, respectivamente;

Passo 1: Se $|\epsilon_2 - \epsilon_1| < \tau$, na qual, $\tau > 0$ é uma tolerância suficientemente pequena, então pare: um limitante inferior para ϵ^* é ϵ_1. Caso contrário, calcule

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2);$$

Passo 2: Defina $\epsilon_1 = \epsilon$ se $flag(\epsilon) = 1$ ou $\epsilon_2 = \epsilon$ se $flag(\epsilon) = 0$ e volte para o Passo 1.

2.6.2 Algoritmo *sign-accord*

Em (Rohn, 1989) é apresentado um algoritmo para a obtenção de cascas intervalares chamado de *sign-accord*. O nome do algoritmo deve-se ao fato deste utilizar o sinal de determinadas grandezas, ao invés de seus valores absolutos, como será explicitado no decorrer desta seção.

Considere a função real $sign : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$(sign(\mathbf{x}))_i = \begin{cases} 1, \text{ se } x_i \geq 0 \\ -1, \text{ se } x_i < 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

A partir das grandezas intervalares $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ e $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$, e $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z} \in \mathcal{Y}$, são também definidas as matrizes

$$\mathbf{A_{yz}} = \mathbf{A^c} - \mathbf{T_y A^r T_z}, \tag{2.44}$$

$$\mathbf{b_y} = \mathbf{b^c} + \mathbf{T_y b^r}. \tag{2.45}$$

O *algoritmo Sign-accord* resolve sistemas $\mathbf{A_{yz} x} = \mathbf{b_y}$ para diferentes valores de $\mathbf{z}$ até que a condição $\mathbf{T_z x} \geq \mathbf{0}$ seja satisfeita.

Algoritmo 1. *Algoritmo Sign-accord.*

Passo 0: *Selecionar* $z \in \mathcal{Y}$ *(recomendado:* $z = sign(\mathbf{b_y})$*);*
Passo 1: *Resolver o sistema* $\mathbf{A_{yz}x} = \mathbf{b_y}$*;*
Passo 2: *Se* $\mathbf{T_z x} \geq \mathbf{0}$*, fazer* $\mathbf{x_y} := \mathbf{x}$ *e sair do algoritmo;*
Passo 3: *Caso contrário, encontrar* $k = \min\{j : z_j x_j < 0\}$*;*
Passo 4: *Fazer* $\mathbf{z_k} := -\mathbf{z_k}$ *e voltar para o Passo 1.*

Então, a casca intervalar $\mathbf{x} = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}]$ *é dada por*

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} &= \min\{\mathbf{x_y} : \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}, \\ \overline{\mathbf{x}} &= \max\{\mathbf{x_y} : \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x_y}$ *é o resultado da aplicação do algoritmo para* $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ *e* min *(*max*) indica valores mínimos (máximos) de todos os vetores* $\mathbf{x_y}$.

É possível perceber a natureza combinatorial do Algoritmo 1. De fato, para um sistema linear intervalar de ordem n, o algoritmo acima requer a resolução de 2^n sistemas lineares.

2.6.3 Pacote *Intlab*

O *Intlab* é um pacote para *Matlab* que implementa algoritmos de análise intervalar. Este pacote está disponível em

`http://www.ti3.tu-harburg.de/~rump/intlab/index.html`

juntamente com informações sobre instalação e utilização. O *Intlab* fornece a função `verifylss` para a solução de sistemas lineares intervalares, fornecendo uma aproximação externa intervalar de excelente qualidade. Se $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{b}$ (de um sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) forem intervalares, o comando “\” é equivalente a chamar o comando `verifylss`.

Numa primeira etapa, a função `verifylss` implementa o *método de Krawczyk residual* (uma variação do método de Krawczyk apresentado em (Neumaier, 1990)). Caso o método baseado no operador de *Krawczyk* não forneça solução após 7 iterações, a função `verifylss` implementa o método de *Hansen-Bliek-Rohn-Ning-Kearfott-Neumaier* (Hargreaves, 2002).

Método de Krawczyk

A seguir é apresentado o principal método utilizado pelo *Intlab* para a resolução de sistemas lineares intervalares, o *método de Krawczyk*, baseado em (Hargreaves, 2002). Define-se um pré-condicionador $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como sendo a inversa da matriz central de $[\mathbf{A}]$ (ou seja, $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^{\mathbf{c}})^{-1}$).

Assumindo que existe $[\mathbf{x}]^{(i)}$ tal que $\mathbf{\Sigma_c}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq [\mathbf{x}]^{(i)}$, para toda iteração i, é válido

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{Cb} + (\mathbf{I} - \mathbf{CA})\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \in \mathbf{C}[\mathbf{b}] + (\mathbf{I} - \mathbf{C}[\mathbf{A}])\,[\mathbf{x}]^{(i)},$$

para qualquer $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$. Assim,

$$\mathbf{\Sigma_c}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq [\mathbf{x}]^{(i)} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_c}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq \left(\mathbf{C}[\mathbf{b}] + (\mathbf{I} - \mathbf{C}[\mathbf{A}])\,[\mathbf{x}]^{(i)}\right) \cap [\mathbf{x}]^{(i)}.$$

Esta expressão gera a *iteração de Krawczyk*

$$[\mathbf{x}]^{(i+1)} = \left(\mathbf{C}[\mathbf{b}] + (\mathbf{I} - \mathbf{C}[\mathbf{A}])\,[\mathbf{x}]^{(i)}\right) \cap [\mathbf{x}]^{(i)}.$$

Definindo $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ para alguma $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ e $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$, o vetor inicial $[\mathbf{x}]^{(0)}$ deve respeitar as condições $\tilde{\mathbf{x}} \in [\mathbf{x}]^{(0)}$ e $\mathbf{\Sigma_c}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}]) \subseteq [\mathbf{x}]^{(0)}$. Então, satisfeito o critério de parada do algoritmo (que pode ser definido como $(\mathbf{x}^r)^{(i)} - (\mathbf{x}^r)^{(i+1)} < \epsilon$, com ϵ definido a priori), a solução $[\mathbf{x}]$ é uma aproximação externa da casca intervalar $\mathbf{\Sigma_c}([\mathbf{A}], [\mathbf{b}])$.

A implementação do método de Krawczyk (função `verifylss`) é um pouco diferente da apresentada anteriormente, pois é aplicado o *método de Krawczyk residual*. A implementação do método de Krawczyk residual requer $2n^3$ operações para calcular a inversa de uma matriz e $4n^3$ operações para multiplicações matriciais intervalares, resultando em um termo dominante de $6n^3$ operações. As outras operações apresentam complexidade assintótica de ordem menor e foram omitidas desta análise.

2.7 Coprimo-robustez de polinômios intervalares

O projeto de controladores para plantas incertas do tipo intervalar está ligado a questões como determinar se dois polinômios intervalares dados são coprimos. A seguir é apresentada uma condição suficiente para a coprimo-robustez de dois polinômios intervalares.

Considere dois polinômios com coeficientes intervalares:

$$[c(s)] = \sum_{i=0}^{n} [c_i]\, s^i \quad \text{e} \quad [d(s)] = \sum_{i=0}^{n} [d_i]\, s^i, \tag{2.46}$$

com $[c_i] = \left[c_i^-, c_i^+\right] \in \mathbb{IR}$ e $[d_i] = \left[d_i^-, d_i^+\right] \in \mathbb{IR}$, para $i = 0, 1, \ldots, n$.

O *espaço de raízes* ou *espectro* de um polinômio com coeficientes intervalares $[c(s)]$, denotado por $\mathcal{S}\left([c(s)]\right)$, é definido como o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios contidos em $[c(s)]$. Dois polinômios $[c(s)]$ e $[d(s)]$, como descritos em (2.46), *são robustamente coprimos se* $\mathcal{S}\left([c(s)]\right) \bigcap \mathcal{S}\left([d(s)]\right) = \emptyset$.

Teorema 2.7.1. *(Teorema das Arestas) O espaço de raízes $\mathcal{S}\left([c(s)]\right)$ de um polinômio intervalar $[c(s)]$ é limitado pelas raízes das arestas de* $[\underline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{c}}]$.

Prova. *Veja (Bhattacharyya et al., 1995).*

Assumindo que $0 \notin [c_n]$, o Teorema 2.7.1 estabelece que a fronteira $\mathcal{S}\left([c(s)]\right)$ está contida no espectro das arestas do politopo de polinômios $[c(s)]$ ((Bhattacharyya et al., 1995)).

Um procedimento empírico para a verificação da coprimo-robustez de polinômios intervalares, baseado em tentativa-e-erro, é descrito em (Bhattacharyya et al., 1995). O procedimento utiliza o Teorema das Arestas para o cálculo dos espectros dos polinômios intervalares e, por meio de uma análise visual, verifica-se se os espectros dos polinômios se interceptam.

Uma condição suficiente para a coprimo-robustez de dois polinômios intervalares proposta em (Lordelo et al., 2006), é apresentada a seguir.

Sejam dois polinômios com coeficientes intervalares

$$[a(s)] = \sum_{i=0}^{n} [\alpha_i] s^i \quad \text{e} \quad [b(s)] = \sum_{i=0}^{n} [\beta_i] s^i,$$

com $[\alpha_i] = [\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha_i}]$ e $[\beta_i] = [\underline{\beta_i}, \overline{\beta_i}] \in \mathbb{IR}$, para $i = 0, 1, \ldots, n$. Assume-se que $0 \notin [\alpha_n]$, mas outros coeficientes podem ser nulos, tanto em $[a(s)]$ quanto em $[b(s)]$.

A *resultante de Sylvester intervalar associada a* $[a(s)]$ *e* $[b(s)]$ é a matriz $m \times m$ definida por

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\beta_n] & & & [\alpha_n] & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ [\beta_{n-1}] & & [\beta_n] & [\alpha_{n-1}] & & [\alpha_n] \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ [\beta_0] & & [\beta_{n-1}] & [\alpha_0] & & [\alpha_{n-1}] \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & [\beta_0] & & & [\alpha_0] \end{bmatrix}$$

com $m = 2n$. Observa-se que a resultante de Sylvester intervalar $[\mathbf{A}] = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]$ contém matrizes que não são do tipo Sylvester, assim como matrizes simétricas intervalares podem conter matrizes não-simétricas.

A seguinte condição suficiente para a coprimo-robustez de dois polinômios intervalares utiliza a resultante de Sylvester intervalar.

Teorema 2.7.2. *Dois polinômios intervalares $[c(s)]$ e $[d(s)]$ são robustamente coprimos se a resultante de Sylvester intervalar $[\mathbf{A}]$ associada é robustamente não-singular.*

Prova. *Se $[\mathbf{A}]$ é robustamente não-singular, então todas as resultantes de Sylvester em $[\mathbf{A}]$ são não-singulares, implicando que $[c(s)]$ e $[d(s)]$ são polinômios robustamente coprimos.*

Diferentemente do caso determinístico, tratado em (Chen, 1999), a coprimo-robustez de $[c(s)]$ e $[d(s)]$ não implica na não-singularidade robusta de $[\mathbf{A}]$. Isto deve-se ao fato de que $[\mathbf{A}]$ contém também inúmeras matrizes que não são do tipo Sylvester, devido ao *problema da dependência* em Análise Intervalar: cada ocorrência de um coeficiente intervalar em $[\mathbf{A}]$ é tratada como se fosse um coeficiente intervalar diferente.

2.7.1 Exemplo numérico

Considere os seguintes polinômios intervalares em s:

$$\begin{aligned} [p_1(s)] &= s^2 + [3.5, 4.5]\, s + [5, 5.5] \\ [p_2(s)] &= s^3 + [6.2, 6.7]\, s^2 + [18.8, 19.2]\, s + [14.8, 15.3] \end{aligned}$$

A Figura 2.1 representa o espaço das raízes de $[p_1(s)]$ e $[p_2(s)]$, em pontos escuros e claros, respectivamente. A partir da Figura 2.1 pode-se concluir que $[p_1(s)]$ e $[p_2(s)]$ são robustamente coprimos, pois $\mathcal{S}([p_1(s)]) \bigcap \mathcal{S}([p_2(s)]) = \emptyset$.

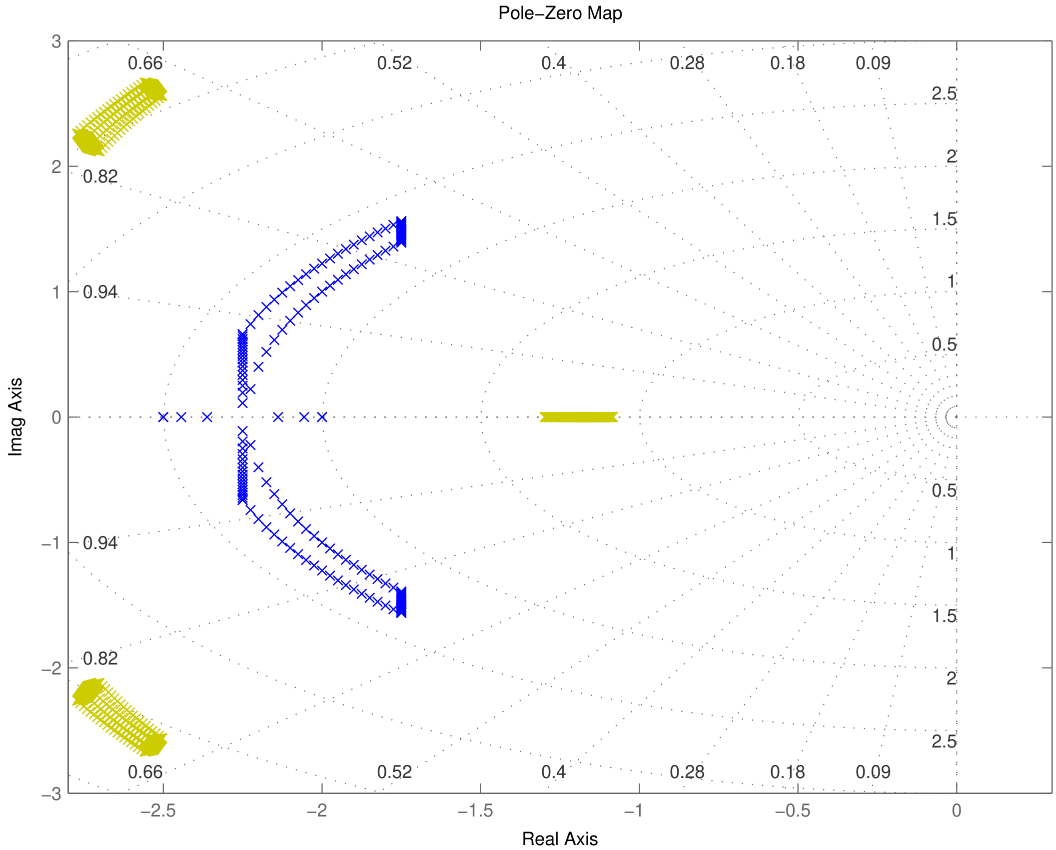

Fig. 2.1: Espaço de raízes de $[p_1(s)]$ (pontos escuros) e $[p_2(s)]$ (pontos claros).

A resultante de Sylvester intervalar de $[p_1(s)]$ e $[p_2(s)]$ é dada por:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & [6.2, 6.7] & 1 & 0 \\ [3.5, 4.5] & 1 & 0 & [18.8, 19.2] & [6.2, 6.7] & 1 \\ [5, 5.5] & [3.5, 4.5] & 1 & [14.8, 15.3] & [18.8, 19.2] & [6.2, 6.7] \\ 0 & [5, 5.5] & [3.5, 4.5] & 0 & [14.8, 15.3] & [18.8, 19.2] \\ 0 & 0 & [5, 5.5] & 0 & 0 & [14.8, 15.3] \end{bmatrix}.$$

Embora $\mathcal{S}\left([p_1(s)]\right)\bigcap\mathcal{S}\left([p_2(s)]\right) = \emptyset$, nem toda matriz $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ é não-singular. Um exemplo é a matriz $\mathbf{A_{sing}} \in [\mathbf{A}]$ dada por

$$\mathbf{A_{sing}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6.5 & 1 & 0 \\ 3.5 & 1 & 0 & 19 & 6.5 & 1 \\ 5.5 & 4.5 & 1 & 15 & 19 & 6.5 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 15 & 19 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Pode-se perceber, por exemplo, que a quinta coluna de $\mathbf{A_{sing}}$ é a soma da primeira coluna com a segunda coluna multiplicada por 3.

2.8 Conclusão

As definições apresentadas sobre conjuntos intervalares, álgebra intervalar e a caracterização e a solução de equações lineares intervalares introduzidas neste capítulo permitem um entendimento dos conceitos e metodologias apresentadas nos próximos capítulos e que compõem os principais resultados desta Dissertação.

Capítulo 3

Equação Diofantina intervalar

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma breve revisão sobre controle por alocação de pólos para sistemas lineares invariantes no tempo. Os sistemas tratados inicialmente são precisamente conhecidos, não envolvendo quaisquer tipos de incertezas. Será apresentada a técnica de alocação de pólos e a caracterização da *equação Diofantina* associada. Em seguida apresenta-se uma técnica de alocação robusta de pólos para sistemas lineares intervalares com a conseqüente caracterização de uma *equação Diofantina intervalar*. Um método de resolução de sistemas lineares baseado em resultados de Análise Intervalar que considera multiincidências de elementos intervalares é proposto. O método é então aplicado ao problema de alocação robusta de pólos.

O projeto de controladores robustos é obtido na forma de um controlador intervalar, ou seja, um controlador com coeficientes intervalares que contém todas as soluções possíveis do problema de alocação dos pólos. Através do Teorema das Arestas (Bhattacharyya et al., 1995), caracteriza-se então a região do plano complexo s atingível pelo controlador intervalar que, deste modo, fornece um desempenho garantido para o sistema em malha fechada.

Um exemplo numérico comparando o método que trata multiincidências na equação Diofantina intervalar com soluções obtidas por métodos clássicos de resolução de sistemas lineares intervalares (como descritos nas Seções 2.6.2 e 2.6.3) é apresentado.

3.2 Alocação de pólos: definição do problema

Considere o sistema de controle linear invariante no tempo representado na figura 3.1.

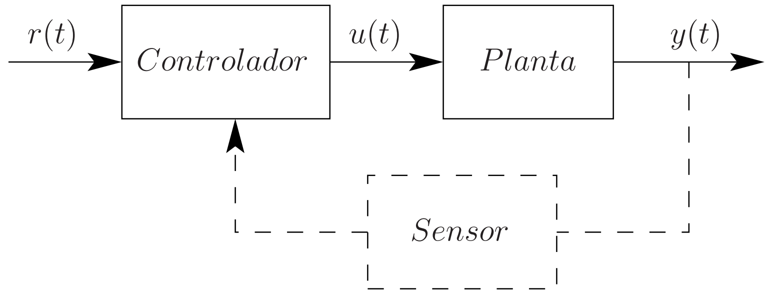

Fig. 3.1: Sistema de controle.

O sinal $u(t)$ representa a entrada (sinal de controle) da planta, $y(t)$ representa sua saída (sinal controlado) e $r(t)$ representa um sinal de referência. O sistema de controle representado na Figura 3.1 pode ser classificado de acordo com a dependência do sinal de controle em relação à saída da planta. Caso $u(t)$ dependa de $y(t)$, o sistema é chamado de sistema de controle em malha fechada. Caso $u(t)$ não dependa de $y(t)$, o sistema é chamado de sistema de controle em malha aberta. No segundo caso, não haverá a realimentação indicada pela linha tracejada da Figura 3.1.

Sistemas de controle em malha fechada são muito utilizados na prática por apresentarem menor sensibilidade a distúrbios. Porém, a implementação de sistemas de controle em malha fechada é mais cara do que a de sistemas em malha aberta, pelos primeiros incorporarem, por exemplo, sensores e comparadores. Discute-se nesta seção o projeto de sistemas de controle em malha fechada com vista a fazer a saída $y(t)$ seguir a referência $r(t)$.

Seja o sistema de controle linear invariante no tempo em malha fechada, com realimentação unitária, ilustrado na Figura 3.2. Supõe-se que o controlador e a planta são representados por funções de transferência precisamente conhecidas.

Dadas as funções de transferência da planta e do controlador, pode-se calcular a função de transferência e os pólos do sistema em malha fechada. O problema inverso, denominado de problema de alocação de pólos consiste em, dada a função de transferência da planta e os pólos desejados para o sistema de controle em malha fechada, obter a função de transferência do controlador que produzirá a alocação desejada.

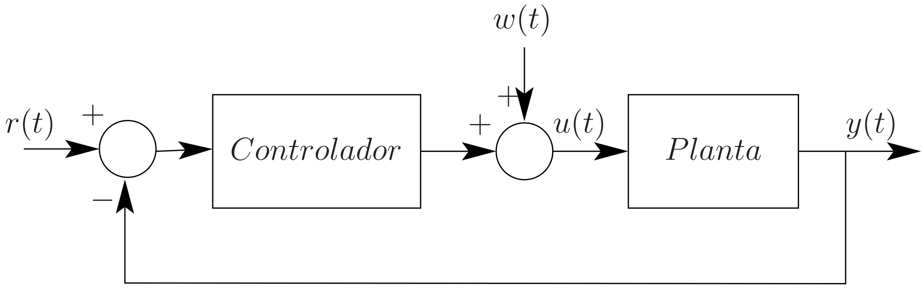

Fig. 3.2: Sistema de controle realimentado.

O primeiro passo para o projeto de controladores por alocação de pólos é decidir a localização dos pólos do sistema em malha fechada. Ao se selecionar pólos, deve-se considerar que, quanto mais afastados os pólos de malha fechada estiverem dos pólos de malha aberta, maior terá de ser o esforço de controle empregado. Além disso, quando um zero encontra-se próximo de um pólo de malha aberta, o sistema pode ser pouco controlável e mover este pólo poderá requerer maior esforço de controle. A técnica de alocação de pólos visa principalmente corrigir os aspectos indesejáveis da resposta do sistema em malha aberta e evitar grandes esforços de controle para mover pólos que estão próximos de zeros. Isso é conseguido alterando-se apenas os pólos em posições indesejadas. Outros pólos e zeros do sistema em malha aberta podem ser mantidos nas suas posições originais.

A partir do diagrama de blocos do sistema de controle representado na Figura 3.2, a função de transferência (de $r(t)$ para $y(t)$) do sistema em malha fechada é

$$F(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}, \tag{3.1}$$

com $C(s)$ e $P(s)$ representando as funções de transferência do controlador e da planta a ser controlada. Controlador e planta são funções racionais na freqüência complexa s e podem ser descritas por seus numeradores e denominadores:

$$C(s) = \frac{n_C(s)}{d_C(s)} \quad \text{e} \quad P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)}. \tag{3.2}$$

Substituindo (3.2) em (3.1), obtém-se a função de transferência do sistema em malha fechada em termos dos numeradores e denominadores do controlador e da planta:

$$F(s) = \frac{n_F(s)}{d_F(s)} = \frac{n_C(s)n_P(s)}{d_C(s)d_P(s) + n_C(s)n_P(s)}. \tag{3.3}$$

A equação (3.3) torna evidente que a realimentação desloca os pólos $d_C(s)$ e $d_P(s)$ para $d_F(s) = d_C(s)d_P(s) + n_C(s)n_P(s)$.

A escolha das raízes de $d_F(s)$ deve ser feita de modo a garantir que pólos complexos sempre apareçam em pares conjugados. Desta forma, todos os coeficientes de $d_F(s)$ serão reais. Para sistemas contínuos no tempo, como os tratados neste trabalho, pólos estáveis são aqueles cujas partes reais são negativas. Caso contrário, os pólos são denominados instáveis.

Escolhidos os pólos do sistema de controle em malha fechada (raízes de $d_F(s)$), o projeto do controlador resume-se à solução da equação

$$d_C(s)d_P(s) + n_C(s)n_P(s) = d_F(s), \tag{3.4}$$

chamada de *equação Diofantina*.

3.2.1 Equação Diofantina

Ao invés de resolver diretamente a equação (3.4), pode-se transformá-la em um sistema de equações lineares. Sejam m e n os graus dos polinômios $d_C(s)$, $d_P(s)$, respectivamente. Assume-se que as funções de transferência do controlador e da planta são próprias. O grau de $d_F(s)$ é $m + n$.

Os polinômios $d_C(s)$, $n_C(s)$, $d_P(s)$, $n_P(s)$ e $d_F(s)$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} d_C(s) =&\ d_{C0} + d_{C1}s + \ldots + d_{Cm}s^m, \\ n_C(s) =&\ n_{C0} + n_{C1}s + \ldots + n_{Cm}s^m, \\ d_P(s) =&\ d_{P0} + d_{P1}s + \ldots + d_{Pn}s^n, \\ n_P(s) =&\ n_{P0} + n_{P1}s + \ldots + n_{Pn}s^n, \\ d_F(s) =&\ d_{F0} + d_{F1}s + \ldots + d_{F(n+m)}s^{m+n}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

com $d_{Pn} \neq 0$; outros coeficientes podem ser nulos. Substituindo (3.5) em (3.4), pode-se igualar os coeficientes de mesma potência em s e obter

$$\begin{aligned} d_{C0}d_{P0} + n_{C0}n_{P0} &= d_{F0}, \\ d_{C0}d_{P1} + d_{C1}d_{P0} + n_{C1}n_{P0} + n_{C0}n_{P1} &= d_{F1}, \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ d_{Cm}d_{Pn} + n_{Cm}n_{Pn} &= d_{F(m+n)}. \end{aligned}$$

O sistema de equações lineares acima pode ser expresso matricialmente na forma

$$\begin{bmatrix} n_{Pn} & 0 & \dots & 0 & d_{Pn} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ n_{P1} & \dots & \vdots & \vdots & d_{P1} & \dots & \vdots & \vdots \\ n_{P0} & \dots & 0 & 0 & d_{P0} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & n_{Pn} & 0 & \dots & \vdots & d_{Pn} \\ \vdots & \dots & n_{P1} & \vdots & \vdots & \dots & d_{P1} & \vdots \\ 0 & \dots & n_{P0} & n_{P1} & 0 & \dots & d_{P0} & d_{P1} \\ 0 & \dots & 0 & n_{P0} & 0 & \dots & 0 & d_{P0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{Cm} \\ \vdots \\ n_{C1} \\ n_{C0} \\ d_{Cm} \\ \vdots \\ d_{C1} \\ d_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{F(n+m)} \\ \vdots \\ d_{F(n+2)} \\ d_{F(n+1)} \\ d_{Fn} \\ \vdots \\ d_{F1} \\ d_{F0} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

ou $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_{num}} \\ \dots \\ \mathbf{x_{den}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{Cn} \\ \vdots \\ n_{C0} \\ \dots \\ d_{Cn} \\ \vdots \\ d_{C0} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Para que o sistema linear (3.6) apresente uma única solução, o grau do controlador deve ser $m = n - 1$ e a matriz $\mathbf{A}$, a resultante de Sylvester dos polinômios n_P e d_P, não-singular. Em geral, a matriz $\mathbf{A}$ apresenta $2(m + 1)$ colunas e $m + n + 1$ linhas e é chamada de *matriz de Sylvester* do sistema.

A matriz $\mathbf{A}$ é obtida a partir da planta $P(s)$ da seguinte maneira: a primeira coluna de $\mathbf{A}$ é construída com os coeficientes de $n_P(s)$ em ordem decrescente de potências em s; a coluna seguinte é construída de forma idêntica à anterior, mas deslocada de uma posição para baixo (o procedimento é o mesmo para as primeiras $m + 1$ colunas de $\mathbf{A}$). A segunda metade das colunas de $\mathbf{A}$ segue o mesmo procedimento, porém utilizando os coeficientes de $d_P(s)$.

Caso a matriz $\mathbf{A}$ tenha rank completo de linhas, ou seja, se $\mathbf{A}$ for não-singular, é possível alocar arbitrariamente os pólos do sistema. Caso contrário, a equação (3.6) pode ter solução para determinados vetores $\mathbf{b}$, porém não é mais possível garantir uma alocação arbitrária de pólos do sistema em malha fechada.

Um tratamento mais completo sobre alocação de pólos por meio da equação Diofantina pode ser encontrado em (Chen, 1999).

3.2.2 Exemplo numérico

Considere o Exemplo 9.2 de (Chen, 1999). Dada uma planta com função de transferência

$$P(s) = \frac{s-2}{s^2-1} \tag{3.8}$$

e tendo em vista o sistema da Figura 3.2, deseja-se encontrar um controlador $C(s)$ que aloque os pólos do sistema em $-2, -1 \pm j1$. O polinômio associado a estes pólos é

$$d_F(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4.$$

Assim, a equação (3.6) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{C1} \\ n_{C0} \\ d_{C1} \\ d_{C0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Esta equação resulta em

$$\begin{aligned} d_{C0} &= \frac{34}{3}, \qquad d_{C1} = 1, \\ n_{C0} &= \frac{-23}{3}, \qquad n_{C1} = \frac{-22}{3}. \end{aligned}$$

O controlador que aloca os pólos do sistema em malha fechada em $-2, -1 \pm j1$ é dado por

$$C(s) = \frac{-22s - 23}{3s + 34}. \tag{3.9}$$

3.3 Equação Diofantina intervalar

Plantas com parâmetros imprecisamente conhecidos originam matrizes de Sylvester com incertezas. Para incertezas do tipo intervalar, o problema de alocação de pólos se reduz à solução de uma *equação Diofantina intervalar*.

A obtenção da matriz de Sylvester a partir dos coeficientes intervalares da planta é similar à utilizada para plantas precisamente conhecidas. A equação Diofantina intervalar assume a forma

$$[\mathbf{A}]\,\mathbf{x} = [\mathbf{b}] \tag{3.10}$$

sendo que $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{r\times t}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^{r}$, $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^{t}$, para $r = 2(m+1)$ e $t = m+n+1$. A solução do sistema de equações intervalares (3.10) é definida por (2.36).

O vetor intervalar $[\mathbf{b}]$ descreve possíveis incertezas (devidas a aproximações, por exemplo) com respeito ao polinômio característico do sistema em malha fechada e define um espaço no plano complexo.

3.4 Tratamento de multiincidências

A solução do sistema (3.10) por meio de técnicas clássicas de Análise Intervalar produz resultados conservadores. Uma forma de redução do conservadorismo (ou, de forma equivalente, de redução do raio da solução $[\mathbf{x}]$) é o tratamento de multiincidências de elementos intervalares presentes na matriz de Sylvester.

A idéia básica é tratar múltiplas incidências de um mesmo intervalo em vários elementos da matriz, tornando-os dependentes. Para ilustrar o problema, suponha que $p \in [1, 4]$ é um coeficiente intervalar incidindo múltiplas vezes em $\mathbf{A}$. Embora o valor exato de p seja desconhecido no intervalo $[1, 4]$, seu valor será sempre o mesmo, independentemente de quantas vezes o elemento aparece em $\mathbf{A}$. Entretanto, técnicas clássicas de solução para (3.10) tratariam cada ocorrência de p como um valor possivelmente diferente.

Percebem-se múltiplas incidências de elementos intervalares na equação (3.10), derivados da construção da matriz de Sylvester. Explorar a estrutura da matriz de Sylvester em termos de multiincidências permite reduzir o conservadorismo da solução intervalar $[\mathbf{x}]$.

Um algoritmo baseado em Análise Intervalar para a solução de sistemas intervalares na forma $[\mathbf{A}]\,\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$, que considera multiincidências de elementos intervalares, é proposto em

(Rump, 1994). Este algoritmo pode ser adaptado ao problema de alocação de pólos como segue.

Seja $[\mathbf{p}]$ um vetor intervalar, de modo que qualquer grandeza (intervalar ou não) da planta (ou do polinômio característico intervalar descrito por $[\mathbf{b}]$) possa ser obtida a partir da multiplicação de um vetor real $\mathbf{w}(i,j)$ por $[\mathbf{p}]$:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}([\mathbf{p}])\}_{ij} &= \mathbf{w}(i,j)^T [\mathbf{p}]\,, \\ \{\mathbf{b}([\mathbf{p}])\}_{j} &= \mathbf{w}(0,j)^T [\mathbf{p}]\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Teorema 3.4.1. *Seja* $\mathbf{A}([\mathbf{p}])\mathbf{x} = \mathbf{b}([\mathbf{p}])$*, com* $\mathbf{A}([\mathbf{p}]) \in \mathbb{IR}^{n\times n}$*,* $\mathbf{b}([\mathbf{p}]) \in \mathbb{IR}^{n}$*,* $[\mathbf{p}] \in \mathbb{IR}^{k}$*, um sistema linear parametrizado como em (3.11). Seja* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $[\mathbf{y}] \in \mathbb{IR}^{n}$*,* $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n}$ *e defina* $[\mathbf{z}] \in \mathbb{IR}^{n}$*,* $[\mathbf{C}] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ *por*

$$[\mathbf{z}_i] = \left(\sum_{j=1}^{n} R_{ij}\left[\mathbf{w}(0,j) - \sum_{v=1}^{n}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{w}(j,v)\right]^T\right)[\mathbf{p}]\,, \tag{3.12}$$

$$[\mathbf{C}] = \mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{A}([\mathbf{p}]). \tag{3.13}$$

Obtenha $[\mathbf{v}] \in \mathbb{IR}^{n}$ *por meio de*

$$[\mathbf{v}_i] = \{[\mathbf{z}] + [\mathbf{C}]\,[\mathbf{u}]\}_i \quad 1 \le i \le n. \tag{3.14}$$

Seja $[\mathbf{u}]$ *definido por*

$$[\mathbf{u}] = ([\mathbf{v}_1]\,, \ldots, [\mathbf{v}_{i-1}]\,, [\mathbf{y}_i]\,, \ldots, [\mathbf{y}_n])^T\,. \tag{3.15}$$

Se $[\mathbf{v}] \subsetneq [\mathbf{y}]$*, então a solução* $[\mathbf{x}]$ *do sistema* $[\mathbf{A}]\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$ *satisfaz* $[\mathbf{x}] \in \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{v}]$*.*

Prova. *Ver (Rump, 1994).*

3.4.1 Exemplo ilustrativo

Para exemplificar a utilização do Teorema 3.4.1, considere o sistema abordado em (Rump, 1994):

$$\begin{bmatrix} 3 & [1,2] \\ [1,2] & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} [10,10.5] \\ [10,10.5] \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Primeiramente é necessário escolher um vetor intervalar $[\mathbf{p}]$ que seja capaz de representar todos os elementos do sistema (3.16). Uma possível escolha para $[\mathbf{p}]$ é

$$[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} 3 \\ [1,2] \\ [10,10.5] \end{bmatrix}.$$

Todos os elementos do sistema (3.16) podem ser representados pela multiplicação de um vetor real $\mathbf{w}$ pelo vetor intervalar $[\mathbf{p}]$. Considerando que o sistema (3.16) apresenta a forma $[\mathbf{A}]\,\mathbf{x} = [\mathbf{b}]$, existe $\mathbf{w}$ tal que $[\mathbf{A}_{ij}] = \mathbf{w}(i,j)^T\,[\mathbf{p}]$ e $[\mathbf{b}_j] = \mathbf{w}(0,j)^T\,[\mathbf{p}]$. A representação de $[\mathbf{b}]$ requer os seguintes vetores:

$$\mathbf{w}(0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}(0,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para a representação de $[\mathbf{A}]$, utilizam-se

$$\mathbf{w}(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(1,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}(2,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}(2,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Além das definições de $[\mathbf{p}]$ e $\mathbf{w}$, é necessário definir as grandezas $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $[\mathbf{y}] \in \mathbb{IR}^n$. Estas definições são usadas para centralizar a casca intervalar $[\mathbf{v}]$. Informações adicionais sobre as definições destes parâmetros são apresentadas em (Rump, 1994). Em particular, Rump (1994) sugere

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A^c})^{-1}\,\mathbf{b^c},\\ \mathbf{R} &= (\mathbf{A^c})^{-1}\end{aligned}$$

e $[\mathbf{y}]$ como solução do sistema linear intervalar

$$(\mathbf{I} - [\mathbf{C}])\,[\mathbf{y}] = [\mathbf{Z}]\,.$$

Para este exemplo, o vetor intervalar $[\mathbf{y}]$ foi obtido resolvendo-se o sistema linear intervalar acima usando o *Intlab*.

A partir de $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{b}]$ dados por (3.16), obtém-se então

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2.2778 \\ 2.2778 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.4444 & -0.2222 \\ -0.2222 & 0.4444 \end{bmatrix}.$$

Após encontrar $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{z}]$ como definidas no Teorema 3.4.1, obtém-se

$$[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} [-0.4661, 0.4661] \\ [-0.4661, 0.4661] \end{bmatrix}.$$

A partir de $[\mathbf{z}]$, $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{u}]$ obtém-se

$$[\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} [-0.4640, 0.4640] \\ [-0.4636, 0.4636] \end{bmatrix}.$$

Como $[\mathbf{v}] \subsetneqq [\mathbf{y}]$, a solução do sistema está contida em $\tilde{x} + [\mathbf{v}]$. Definidos $\tilde{\mathbf{x}}$, $\mathbf{R}$, $[\mathbf{y}]$, $[\mathbf{p}]$ e $\mathbf{w}$, pode-se aplicar o resultado do Teorema 3.4.1 para a obtenção da solução do sistema (3.16):

$$[\mathbf{x_{multi}}] = \begin{bmatrix} [1.8137, 2.7418] \\ [1.8142, 2.7414] \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Este resultado pode ser comparado ao obtido utilizando o *Intlab*, *toolbox* do *Matlab* para Análise Intervalar, que implementa um método para solução de sistemas lineares intervalares sem levar em conta multiincidências de coeficientes intervalares. A solução fornecida pelo Intlab é

$$[\mathbf{x_{intlab}}] = \begin{bmatrix} [0.8614, 3.6942] \\ [0.8614, 3.6942] \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

A comparação dos raios de $[\mathbf{x_{multi}}]$ e $[\mathbf{x_{intlab}}]$ torna mais evidente a redução no conservadorismo das soluções ao utilizar-se o tratamento de multiincidências na solução de sistemas lineares intervalares.

$$\delta_{\mathbf{multi}} = \begin{bmatrix} 0.4640 \\ 0.4635 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathbf{intlab}} = \begin{bmatrix} 1.4163 \\ 1.4163 \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

3.5 Aplicação em alocação de pólos

Considere a planta intervalar de (Lordelo et al., 2006):

$$[P(s)] = \frac{[p_1]\,[p_3]^2}{([p_2]\,s+1)(s^2+[p_3]\,s+[p_3]^2)} \tag{3.20}$$

com $[p_1], [p_2], [p_3] \in [0.99, 1.01]$. Deseja-se projetar um controlador de segunda ordem para alocar os pólos da função de transferência do sistema em malha fechada (representado pela Figura 3.3) em -4, $-2 \pm j2$ e $-1 \pm j$, que correspondem ao polinômio

$$b(s) = s^5 + 10s^4 + 42s^3 + 96s^2 + 112s + 64. \tag{3.21}$$

A equação Diofantina associada a este problema de alocação de pólos, como definida na seção 3.2.1, é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & [a_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a_3] & [a_2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a_4] & [a_3] & [a_2] \\ [a_1] & 0 & 0 & [a_5] & [a_4] & [a_3] \\ 0 & [a_1] & 0 & 0 & [a_5] & [a_4] \\ 0 & 0 & [a_1] & 0 & 0 & [a_5] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 42 \\ 96 \\ 112 \\ 64 \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

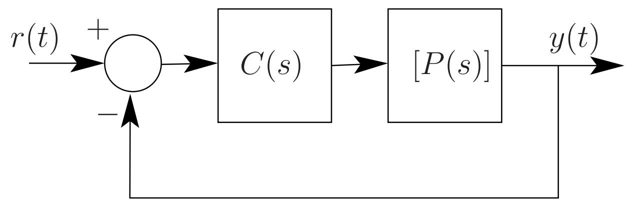

Fig. 3.3: Sistema de controle com realimentação unitária.

com $[a_1] = [p_1]\,[p_3]^2$, $[a_2] = [p_2]$, $[a_3] = [p_2]\,[p_3] + 1$, $[a_4] = [p_2]\,[p_3]^2 + [p_3]$ e $[a_5] = [p_3]^2$.

É possível encontrar a solução intervalar para a equação (3.22) se a matriz de Sylvester associada for regular. Um teste prático para a verificação da regularidade de uma matriz intervalar é o cálculo de seu raio espectral ($\rho(|(\mathbf{A^c})^{-1}|\mathbf{A^r})$), como discutido na Seção 2.6.1.

Para $[p_1]\,,[p_2]\,,[p_3] \in [0.99, 1.01]$, $\rho(|(\mathbf{A^c})^{-1}|\mathbf{A^r}) = 0.3000 < 1$. Neste caso, são obtidas as seguintes soluções para a equação (3.22):

$$[\mathbf{x_{multi}}] = \begin{bmatrix} [29.1946, 32.7810] \\ [52.6129, 59.3414] \\ [37.9775, 41.9955] \\ [0.9899, 1.0101] \\ [7.9187, 8.0811] \\ [23.7322, 24.2660] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathbf{multi}} = \begin{bmatrix} 1.7932 \\ 3.3643 \\ 2.0090 \\ 0.0101 \\ 0.0812 \\ 0.2669 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{x_{sign}}] = \begin{bmatrix} [28.2160, 33.8982] \\ [52.0654, 60.0680] \\ [37.9417, 42.1433] \\ [0.9901, 1.0101] \\ [7.8807, 8.1207] \\ [23.3418, 24.6620] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathbf{sign}} = \begin{bmatrix} 2.8411 \\ 4.0013 \\ 2.1008 \\ 0.0100 \\ 0.1200 \\ 0.6601 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{x_{intlab}}] = \begin{bmatrix} [28.0114, 33.9642] \\ [51.7897, 60.1645] \\ [37.7997, 42.1781] \\ [0.9899, 1.0101] \\ [7.8781, 8.1217] \\ [23.3255, 24.6727] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathbf{intlab}} = \begin{bmatrix} 2.9764 \\ 4.1874 \\ 2.1892 \\ 0.0101 \\ 0.1218 \\ 0.6736 \end{bmatrix}.$$

Sejam $[d_F(s)_{multi}]$ o denominador da função de transferência do sistema em malha fechada para o controlador $[\mathbf{x_{multi}}]$, $[d_F(s)_{sign}]$ o denominador da função de transferência do sistema em malha fechada para o controlador $[\mathbf{x_{sign}}]$ e $[d_F(s)_{intlab}]$ o denominador da função de transferência do sistema em malha fechada para o controlador $[\mathbf{x_{intlab}}]$. A Figura 3.4 apresenta, em pontos de tonalidade intermediária (mais externos), $\mathcal{S}([d_F(s)_{intlab}])$, em pontos claros, $\mathcal{S}([d_F(s)_{sign}])$ e em pontos escuros (mais internos), $\mathcal{S}([d_F(s)_{multi}])$.

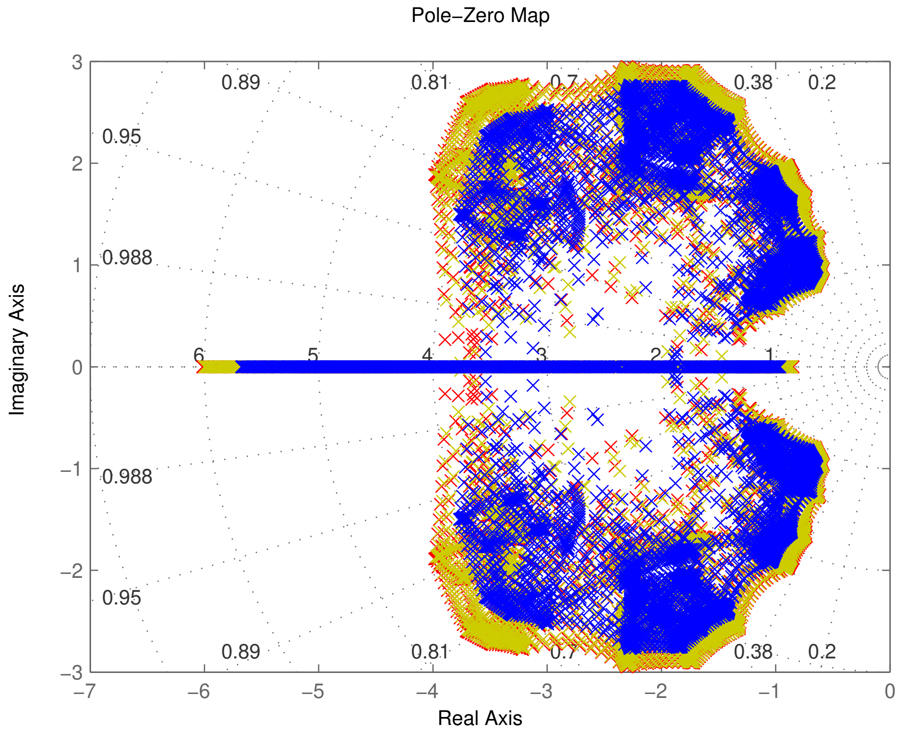

Fig. 3.4: Espaço de raízes de $[d_F(s)_{intlab}]$, $[d_F(s)_{sign}]$ e $[d_F(s)_{multi}]$.

A real solução do problema de alocação de pólos está contida em $[\mathbf{x_{intlab}}]$, $[\mathbf{x_{sign}}]$, ou $[\mathbf{x_{multi}}]$. Usando o controlador obtido a partir do tratamento de multiincidências de elementos intervalares na matriz de Sylvester foi possível reduzir a região no plano complexo na qual encontra-se $\mathcal{S}([d_F(s)])$. Isto significa que foi possível reduzir o conservadorismo no que diz respeito às especificações de desempenho do sistema em malha fechada.

O amortecimento e a freqüência natural dos pólos do sistema em malha fechada são limitadas inferiormente por $\xi = 0.494$ e $\omega_n = 0.996$ rad/s, respectivamente, quando é usado o controlador $[\mathbf{x_{multi}}]$. O amortecimento e a freqüência natural dos pólos do sistema em malha fechada são limitadas inferiormente por $\xi = 0.408$ e $\omega_n = 0.856$ rad/s quando é usado o controlador $[\mathbf{x_{sign}}]$ e por $\xi = 0.402$ e $\omega_n = 0.847$ rad/s quando é usado o controlador $[\mathbf{x_{intlab}}]$.

É importante que pequenas variações no controlador, devido a imprecisões (arredondamentos) durante a implementação, por exemplo, não afetem de maneira significativa o desempenho do sistema em malha fechada. Este problema, chamado de *problema de fragilidade*, é resolvido utilizando-se o controlador central $\mathbf{x^c} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}})$. O controlador central admite maior variação em seus coeficientes, relativamente aos controladores da família $[\mathbf{x}]$.

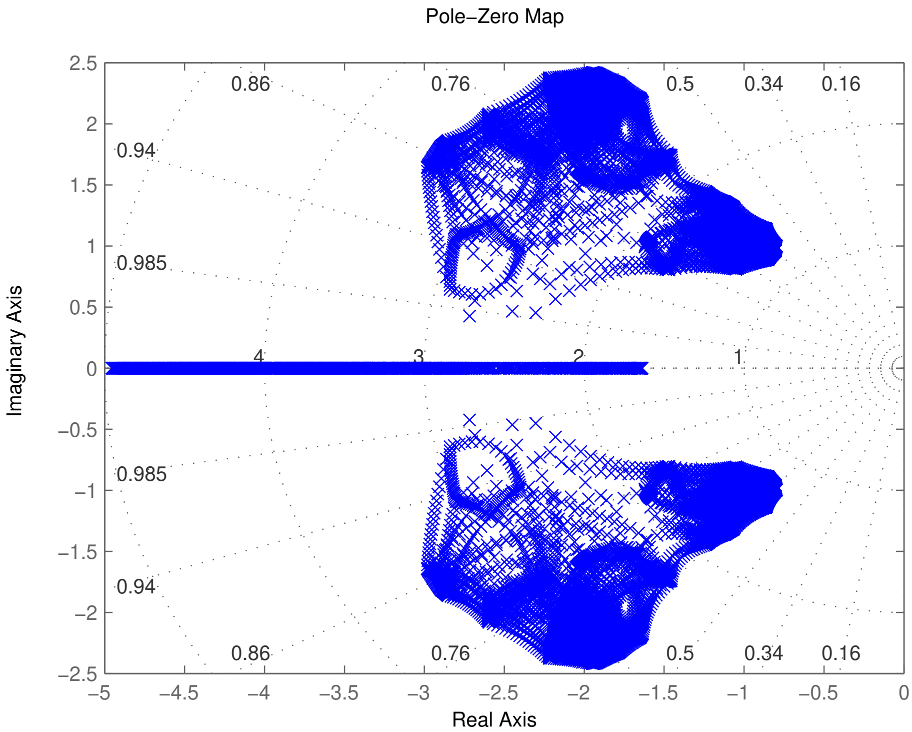

Fig. 3.5: Espaço de raízes de $[d_F(s)_{multi}]$ para o controlador central $\mathbf{x^c_{multi}}$.

A Figura 3.5 apresenta o conjunto espectral do sistema em malha fechada usando o controlador central $\mathbf{x^c_{multi}}$. Neste caso, o amortecimento e a freqüência natural dos pólos do sistema em malha fechada são limitadas inferiormente por $\xi = 0.604$ e $\omega_n = 1.250$ rad/s respectivamente. Os três métodos de solução da equação Diofantina intervalar forneceram controladores centrais semelhantes. Deste modo não existem diferenças significativas entre os conjuntos espectrais dos sistemas em malha fechada que utilizam-se $\mathbf{x^c_{intlab}}$, $\mathbf{x^c_{sign}}$, ou $\mathbf{x^c_{multi}}$.

Para tornar ainda mais evidente a diferença entre os dois métodos de resolução da equação Diofantina, aumentou-se os raios intervalares de $[p_1]$, $[p_2]$ e $[p_3]$ para $[p_1]\,,[p_2]\,,[p_3] \in [0.95, 1.05]$. Como $\rho(|(\mathbf{A}^{\mathbf{c}})^{-1}|\mathbf{A}^{\mathbf{r}}) = 0.1490 < 1$, a não-singularidade robusta da matriz $\mathbf{A}$ é preservada. Para os novos valores de $[p_1]$, $[p_2]$ e $[p_3]$, obtém-se as seguintes soluções:

$$[\mathbf{x}_{\mathbf{multi}}] = \begin{bmatrix} [20.0694, 41.3252] \\ [35.8206, 75.0433] \\ [28.0790, 51.2512] \\ [0.9474, 1.0526] \\ [7.5656, 8.4294] \\ [22.4925, 25.4625] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathbf{multi}} = \begin{bmatrix} 10.6279 \\ 19.6113 \\ 11.5861 \\ 0.0526 \\ 0.4319 \\ 1.4850 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{x}_{\mathbf{sign}}] = \begin{bmatrix} [18.0983, 46.7784] \\ [37.5176, 77.8401] \\ [30.4726, 51.6669] \\ [0.9524, 1.0526] \\ [7.4160, 8.6190] \\ [20.7390, 27.3563] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathbf{sign}} = \begin{bmatrix} 14.3401 \\ 20.1612 \\ 10.5972 \\ 0.0501 \\ 0.6015 \\ 3.3086 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{x}_{\mathbf{intlab}}] = \begin{bmatrix} [12.6515, 48.7431] \\ [30.1515, 80.7124] \\ [26.7443, 52.7048] \\ [0.9471, 1.0529] \\ [7.3507, 8.6443] \\ [20.3093, 27.6457] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathbf{intlab}} = \begin{bmatrix} 18.0458 \\ 25.2805 \\ 12.9802 \\ 0.0529 \\ 0.6468 \\ 3.6682 \end{bmatrix}.$$

Ao se aumentar o raio de incerteza dos elementos intervalares da planta, percebe-se um aumento da diferença entre os espaços das raízes do polinômio intervalar $[d_F(s)]$ quando os controladores descritos por $[\mathbf{x}_{\mathbf{multi}}]$, $[\mathbf{x}_{\mathbf{sign}}]$ e $[\mathbf{x}_{\mathbf{intlab}}]$ são utilizados, como ilustra a Figura 3.6. A Figura 3.6 apresenta, em pontos de tonalidade intermediária (mais externos), $\mathcal{S}([d_F(s)_{intlab}])$, em pontos claros, $\mathcal{S}([d_F(s)_{sign}])$ e em pontos escuros (mais internos), $\mathcal{S}([d_F(s)_{multi}])$.

Usando o controlador obtido a partir do tratamento de multiincidências foi possível reduzir a região no plano complexo na qual encontra-se $\mathcal{S}([d_F(s)])$. Isto significa que foi possível reduzir o conservadorismo no que diz respeito às especificações de desempenho do sistema em malha fechada.

A partir da Figura 3.7 é possível perceber que o sistema de controle permanece estável para

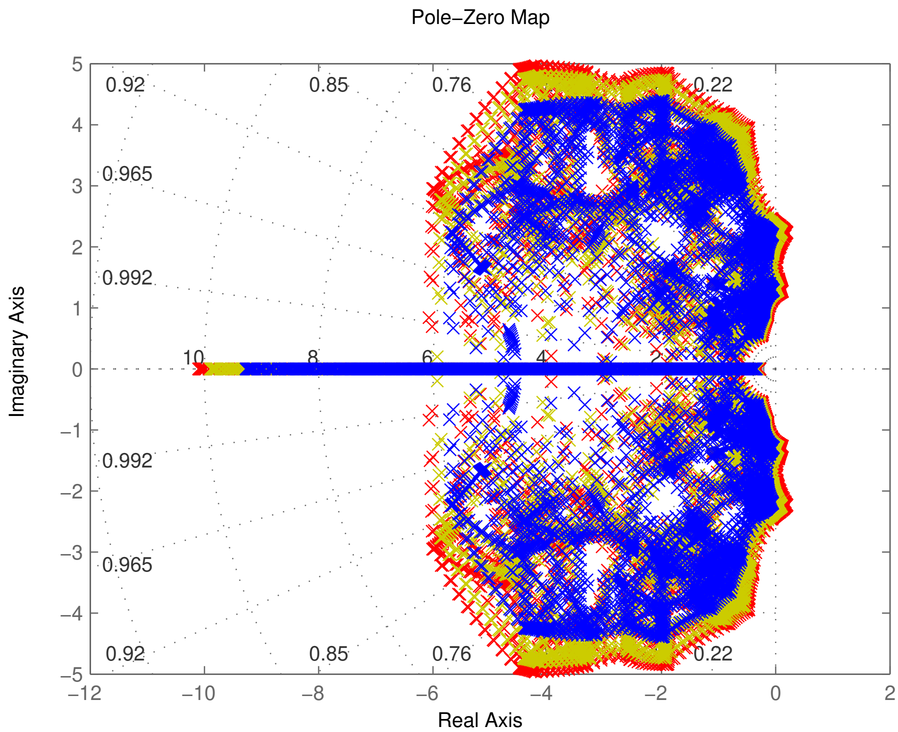

Fig. 3.6: Espaço de raízes de $[d_F(s)_{intlab}]$, $[d_F(s)_{sign}]$ e $[d_F(s)_{multi}]$.

qualquer controlador $\mathbf{x_{multi}} \in [\mathbf{x_{multi}}]$. Porém existe $\mathbf{x_{intlab}} \in [\mathbf{x_{intlab}}]$ tal que a parte real dos pólos deste sistema em malha fechada é não-negativa.

A Figura 3.8 apresenta o conjunto espectral do sistema em malha fechada usando o controlador central $\mathbf{x^c_{multi}}$. O amortecimento e a freqüência natural dos pólos do sistema em malha fechada são limitadas inferiormente por $\xi = 0.307$ e $\omega_n = 0.652$ rad/s, respectivamente.

3.6 Conclusão

Neste capítulo apresentou-se uma extensão da técnica de projeto por alocação de pólos baseada em resultados de Análise Intervalar. O objetivo foi encontrar soluções menos conservadoras para o problema de alocação de pólos quando os coeficientes da planta são representados por intervalos.

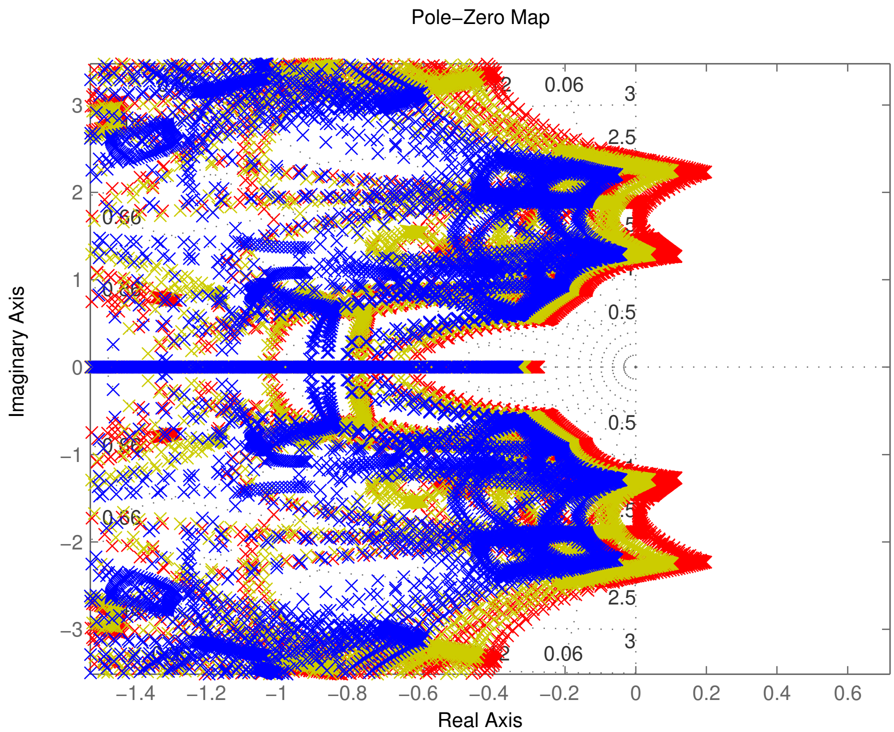

Fig. 3.7: Zoom no espaço de raízes de $[d_F(s)_{intlab}]$, $[d_F(s)_{sign}]$ e $[d_F(s)_{multi}]$.

O método de tratamento de multiincidências proposto mostrou-se bastante adequado à solução da equação Diofantina intervalar, reduzindo o conservadorismo da solução sem aumentar significativamente o esforço computacional relativamente aos métodos clássicos.

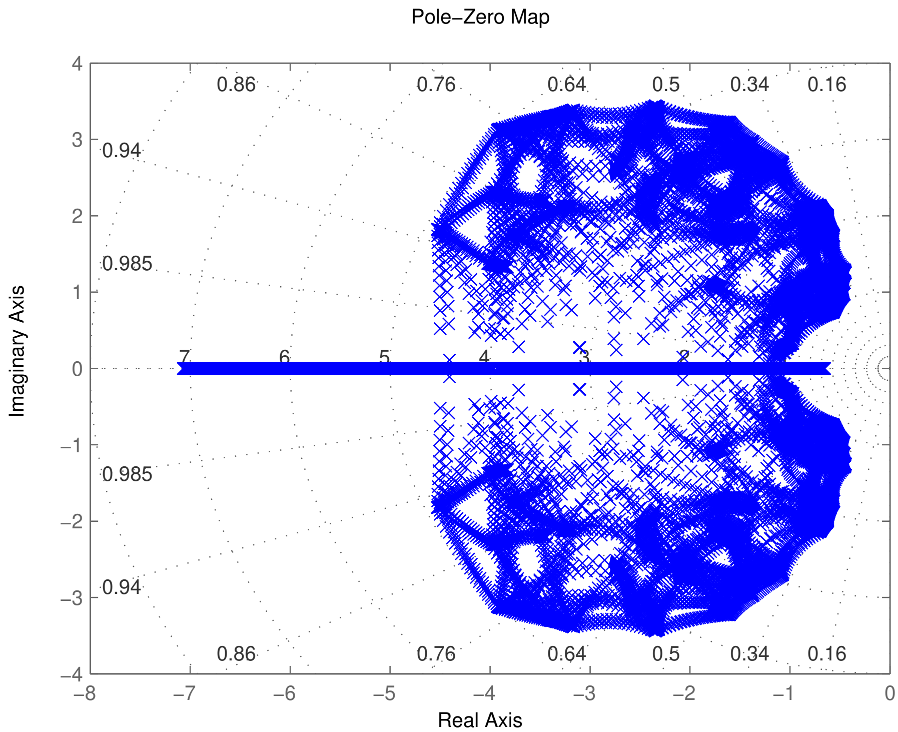

Fig. 3.8: Espaço de raízes de $[d_F(s)_{multi}]$ para o controlador central $\mathbf{x}^{\mathbf{c}}_{\mathbf{multi}}$.

Capítulo 4

Rastreamento e regulação robustos

4.1 Introdução

Este capítulo discute o problema de rastreamento e regulação robustos por meio de alocação de pólos. Uma extensão do *princípio do modelo interno* para o caso intervalar é proposta afim de modelar e cancelar os pólos instáveis do sinal de referência e de possíveis distúrbios. A técnica de tratamento de multincidências de elementos intervalares apresentada no Capítulo 3 é aplicada ao problema de alocação robusta de pólos de um sistema para garantir rastreamento e regulação robustos. Simulações demonstram que rastreamento e regulação robustos para diferentes sinais de referência e distúrbios são obtidos ao se utilizar a técnica proposta.

4.2 Definição do problema

A técnica de alocação de pólos pode ser estendida ao chamado *problema de regulação*. Neste caso, assumindo-se a configuração de sistema de controle com realimentação unitária, representado na Figura 3.1, referência $r(t) \equiv 0$, deseja-se que qualquer resposta do sistema a estados iniciais não-nulos seja eliminada assintoticamente.

Para tanto, é necessário que todos os pólos do sistema em malha fechada estejam localizados no semiplano esquerdo do plano complexo, ou seja, que suas partes reais devem ser negativas. A localização dos pólos determinará o tempo necessário para eliminar, na prática, quaisquer respostas a estados iniciais não-nulos.

O problema de obter o rastreamento assintótico de um dado sinal de referência é mais complexo que o problema de regulação. A técnica de alocação de pólos também pode ser estendida para assegurar o rastreamento assintótico de uma referência dada.

Sistemas de controle em malha fechada são muito utilizados por serem menos sensíveis a perturbações. Considere a configuração de sistema de controle com realimentação unitária ilustrada na Figura 4.1.

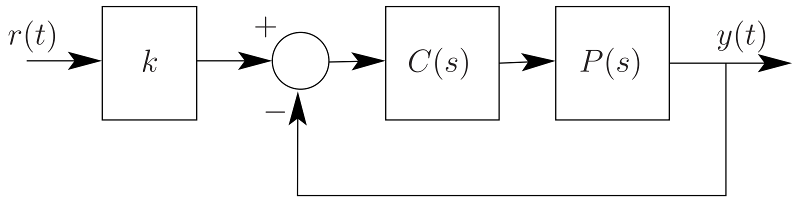

Fig. 4.1: Sistema de controle com realimentação unitária.

Na Figura 4.1, $C(s)$ e $P(s)$ são funções racionais próprias na freqüência complexa s. Assim, $C(s)$ e $P(s)$ podem ser escritas como

$$C(s) = \frac{n_C(s)}{d_C(s)} \quad \text{e} \quad P(s) = \frac{n_P(s)}{d_P(s)},$$

com

$$\begin{aligned} d_C(s) =& \; d_{C0} + d_{C1}s + \ldots + d_{Cm}s^m, \\ n_C(s) =& \; n_{C0} + n_{C1}s + \ldots + n_{Cm}s^m, \\ d_P(s) =& \; d_{P0} + d_{P1}s + \ldots + d_{Pn}s^n, \\ n_P(s) =& \; n_{P0} + n_{P1}s + \ldots + n_{Pn}s^n. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para $P(s)$ de ordem n, é necessário que $d_{Pn} \neq 0$, embora outros coeficientes de $d_P(s)$ e $n_P(s)$ possam ser nulos. Analogamente, para $C(s)$ de ordem m, é necessário que $d_{Cm} \neq 0$; outros coeficientes de $d_C(s)$ e $n_C(s)$ podem ser nulos.

A função de transferência de $r(t)$ para $y(t)$ é

$$T(s) = \frac{kn_C(s)n_P(s)}{d_C(s)d_P(s) + n_C(s)n_P(s)} = \frac{kn_C(s)n_P(s)}{d_F(s)}, \tag{4.2}$$

sendo que $d_F(s) = d_C(s)d_P(s) + n_C(s)n_P(s)$ é o polinômio característico desejado, podendo ser obtido por meio de alocação de pólos. O problema de regulação é solucionado escolhendose os pólos de $d_F(s)$ de maneira que todos apresentem parte real negativa. Para o tratamento do problema de rastreamento assintótico, assuma inicialmente que a referência é um sinal do tipo degrau de amplitude a. A transformada de Laplace de $r(t)$ é dada por

$$R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{a}{s}. \tag{4.3}$$

A transformada de Laplace do sinal controlado pode ser expressa como

$$Y(s) = T(s)R(s) = T(s)\frac{a}{s}. \tag{4.4}$$

Se $T(s)$ for estável no sentido entrada-saída, $y(t)$ tenderá assintoticamente à constante $T(0)a$. Para que haja o rastreamento assintótico de qualquer referência do tipo degrau, $T(s)$ deve ser estável no sentido entrada-saída e $T(0) = 1$. Com $T(s)$ dado por (4.2), para garantir a condição $T(0) = 1$, o ganho de malha direta k deve ser

$$k = \frac{d_{F0}}{n_{P0}n_{C0}}. \tag{4.5}$$

A partir da equação (4.5), observa-se que o rastreamento assintótico de uma referência do tipo degrau é possível apenas se $n_{P0} \neq 0$ e $n_{C0} \neq 0$. O coeficiente n_{C0} do controlador pode ser feito diferente de zero; n_{P0} é um coeficiente da planta.

4.3 Rastreamento robusto e rejeição a distúrbios

Considere o sistema de controle com realimentação unitária e planta intervalar representado pela Figura 4.2. A saída do sistema (sinal controlado) deve seguir assintoticamente a referência $r(t)$. O sinal $w(t)$ representa eventuais distúrbios e deve ser rejeitado para que o sinal controlado siga assintoticamente a referência.

Caso os sinais $r(t)$ e $w(t)$ tendam a zero quando $t \to \infty$, o sinal controlado tenderá a zero quando $t \to \infty$, se o sistema realimentado for estável no sentido entrada-saída. Portanto, mesmo que haja variação na planta $P(s)$, o sinal controlado tenderá a zero desde que a condição de estabilidade no sentido entrada-saída do sistema realimentado não seja violada.

Não é possível assegurar o rastreamento nem a rejeição a distúrbios caso não se tenha conhecimento sobre $r(t)$ e $w(t)$ quando estes sinais não se aproximam de zero quando $t \to \infty$. Então, sejam as transformadas de Laplace de $r(t)$ e $w(t)$ abaixo:

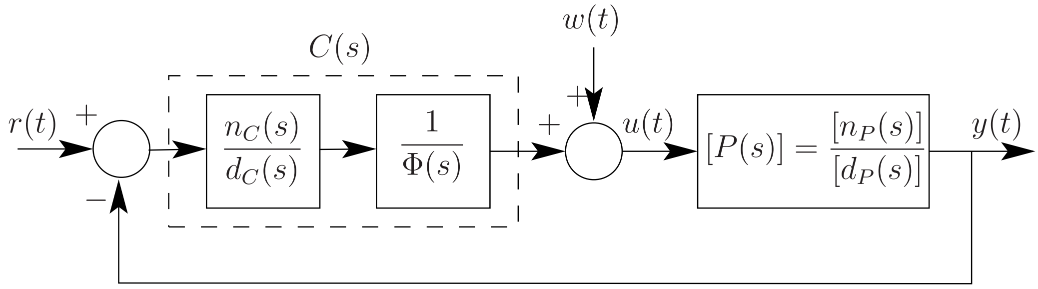

Fig. 4.2: Sistema de controle com realimentação unitária.

$$\begin{aligned} R(s) &= \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{n_R(s)}{d_R(s)}, && (4.6) \\ W(s) &= \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{n_W(s)}{d_W(s)}, && (4.7) \end{aligned}$$

sendo que $d_R(s)$, $d_W(s)$, $n_R(s)$ e $n_W(s)$ são polinômios em s. Com a finalidade de garantir o rastreamento assintótico e a rejeição a distúrbios, é necessário que tanto $d_R(s)$ quanto $d_W(s)$ sejam precisamente conhecidos. Os numeradores $n_R(s)$ e $n_W(s)$ de (4.6) e (4.7), respectivamente, podem não ser conhecidos, o que, juntamente com a natureza intervalar da planta $P(s) \in [P(s)]$, conferirá a qualidade de robustez ao projeto.

4.3.1 Modelo interno

De acordo com o princípio do modelo interno, assume-se que os sinais $r(t)$ e $w(t)$ são dados. Define-se então a função $\Phi(s)$ como sendo o menor denominador comum dos pólos instáveis de $R(s)$ e $W(s)$. Os pólos estáveis de $R(s)$ e $W(s)$ não afetam o sinal controlado quando $t \rightarrow \infty$. A partir da definição de $\Phi(s)$ tem-se que todas as raízes de $\Phi(s) = 0$ apresentam partes reais não-negativas.

A seguir é apresentada uma extensão do Teorema 9.3 de (Chen, 1999).

Teorema 4.3.1. *Considere o sistema realimentado representado na Figura 4.2. Assuma que a planta intervalar $[P(s)]$ é estritamente própria e que $[d_P(s)]$ e $[n_P(s)]$ são polinômios robustamente coprimos. (Um método para a verificação da coprimo-robustez de dois polinômios* *intervalares é apresentado na seção (2.7).) Assuma também que os sinais de referência e distúrbio são modelados por*

$$[R(s)] = \frac{[n_R(s)]}{d_R(s)} \quad e \quad [W(s)] = \frac{[n_W(s)]}{d_W(s)}.$$

Defina $\Phi(s)$ como o menor denominador comum dos pólos instáveis de $[R(s)]$ e $[W(s)]$. Suponha que nenhuma raiz de $[d_P(s)]\Phi(s)$ é zero de $[P(s)]$, ou seja, $\mathcal{S}([d_P(s)]\Phi(s)) \bigcap \mathcal{S}([n_P(s)]) = \emptyset$, e que as raízes da equação Diofantina intervalar

$$[d_C(s)]\,[d_P(s)]\,\Phi(s) + [n_C(s)]\,[n_P(s)] = [d_F(s)]$$

situam-se no semiplano esquerdo aberto do plano complexo s.

Então qualquer controlador na família

$$[C(s)] = \frac{[n_C(s)]}{[d_C(s)]\,\Phi(s)}$$

estabiliza o sistema em malha fechada e rejeita assintoticamente o distúrbio $w(t)$, quaisquer que sejam $P(s) \in [P(s)]$, $R(s) \in [R(s)]$ e $W(s) \in [W(s)]$.

Prova. *Se nenhuma raiz de $[d_P(s)]\Phi(s)$ pertence ao espectro de $[n_P(s)]$, então $[d_P(s)]\Phi(s)$ e $[n_P(s)]$ são robustamente coprimos, ou seja, $\mathcal{S}([d_P(s)]\Phi(s)) \bigcap \mathcal{S}([n_P(s)]) = \emptyset$. Desta forma é possível encontrar a solução para a equação Diofantina intervalar*

$$[d_C(s)][d_P(s)]\Phi(s) + [n_C(s)][n_P(s)] = [d_F(s)], \tag{4.8}$$

qualquer que seja $[d_F(s)]$ desejado. Assuma que todas as raízes de $[d_C(s)][d_P(s)]\Phi(s) + [n_C(s)][n_P(s)] = [d_F(s)]$ estão situadas no semiplano esquerdo aberto do plano complexo s. Uma verificação disto pode ser feita a partir do Teorema 2.7.1 (Teorema das Arestas).

Considere o seguinte controlador:

$$C(s) = \frac{n_C(s)}{d_C(s)\Phi(s)}, \tag{4.9}$$

com $C(s) \in [C(s)]$. A partir da Figura 4.2, a função de transferência de $w(t)$ para $y(t)$ é

$$[T_{wy}(s)] = \frac{[n_P(s)]d_C(s)\Phi(s)}{d_C(s)[d_P(s)]\Phi(s) + n_C(s)[n_P(s)]}. \tag{4.10}$$

O sinal controlado, excitado por $w(t)$, é $[Y_w(s)] = [T_{wy}(s)][W(s)]$, ou

$$Y_w(s) = \frac{n_P(s)d_C(s)\Phi(s)}{d_C(s)d_P(s)\Phi(s) + n_C(s)n_P(s)} \frac{n_W(s)}{d_W(s)}, \tag{4.11}$$

para quaisquer $P(s) \in [P(s)]$ e $W(s) \in [W(s)]$. Como todos os pólos instáveis de $[W(s)]$ são cancelados por $\Phi(s)$ e todas as raízes de $d_C(s)d_P(s)\Phi(s)+n_C(s)n_P(s)$ estão localizadas no semiplano esquerdo aberto do plano complexo s, todos os pólos de $Y_w(s)$ apresentam parte real negativa. Portanto $y_w(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, isto é, a resposta do sistema ao distúrbio é rejeitada assintoticamente.

A partir da Figura 4.2, a função de transferência de $r(t)$ para $y(t)$ é

$$[T_{ry}(s)] = \frac{n_C(s)[n_P(s)]}{d_C(s)[d_P(s)]\Phi(s) + n_C(s)[n_P(s)]}. \tag{4.12}$$

O sinal controlado, excitado por $r(t)$, é $[Y_r(s)] = [T_{ry}(s)][R(s)]$, ou

$$Y_r(s) = \frac{n_C(s)n_P(s)}{d_C(s)d_P(s)\Phi(s) + n_C(s)n_P(s)} \frac{n_R(s)}{d_R(s)}, \tag{4.13}$$

para quaisquer $P(s) \in [P(s)]$ e $R(s) \in [R(s)]$. O sinal de erro, $e_r(t)$, relativo ao sinal de referência, pode ser obtido por meio da equação (4.13) como

$$E_r(s) = R(s) - Y_r(s) = (1 - T_{ry}(s))\, R(s).$$

A expressão para o erro $[E_r(s)]$ assume a forma

$$E_r(s) = \frac{d_C(s)d_P(s)\Phi(s)}{d_C(s)d_P(s)\Phi(s) + n_C(s)n_P(s)} \frac{n_R(s)}{d_R(s)}, \tag{4.14}$$

para quaisquer $P(s) \in [P(s)]$ *e* $R(s) \in [R(s)]$. *Todos os pólos instáveis de* $R(s)$ *são cancelados por* $\Phi(s)$. *Como todas as raízes de* $d_C(s)d_P(s)\Phi(s) + n_C(s)n_P(s)$ *estão localizadas no semiplano esquerdo aberto do plano complexo* s, *pode-se então concluir que* $e(t) = r(t) - y_r(t) \to 0$ *quando* $t \to \infty$. *Por tratar-se de um sistema linear, o Teorema da Superposição permite afirmar que* $r(t) - y(t) = r(t) - (y_r(t) + y_w(t)) \to 0$ *quando* $t \to \infty$, *o que demonstra o rastreamento da referência e a rejeição do distúrbio, assintoticamente.*

4.4 Exemplo numérico

Considere a variante do Exemplo 9.3 de (Chen, 1999), representado na Figura 4.3, cuja planta, agora intervalar, apresenta a seguinte função de transferência:

$$[P(s)] = \frac{[n_P(s)]}{[d_P(s)]} = \frac{s - [1.9, 2.1]}{s^2 - [0.9, 1.1]}. \tag{4.15}$$

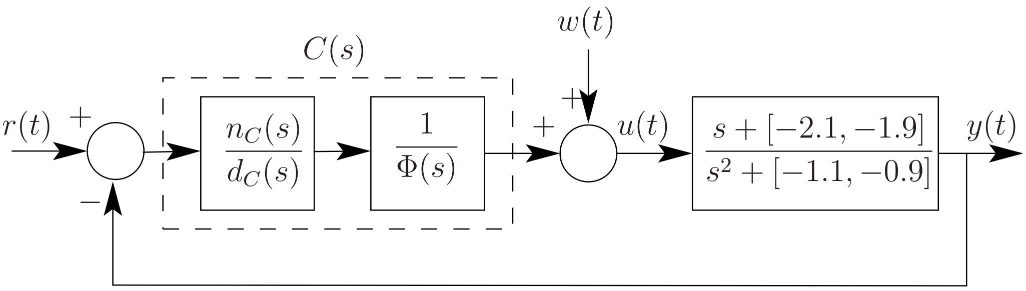

Fig. 4.3: Exemplo 9.3 de (Chen, 1999) modificado.

Deseja-se determinar um controlador de forma que os pólos do sistema em malha fechada sejam $-4, -3 \pm 2i, -2 \pm 1.5i, -1 \pm 3i, -2.5 \pm i$.

A partir de $[P(s)]$ e sabendo-se que $\Phi(s) = s(s^2 + \omega^2)$ (significando que a referência e o distúrbio podem ser sinais do tipo degrau ou senoidal), para $\omega = 2$rad/s, tem-se que

$$\begin{aligned} \Phi(s)[d_P(s)] &= (s^2 - [0.9, 1.1])(s^3 + \omega^2 s) \\ &= s^5 + [2.9, 3.1]s^3 + [-4.4, -3.6]s. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Usando o tratamento de multiincidências, a solução da equação Diofantina intervalar resultante, para um controlador de ordem 4, é

$$[\mathbf{x_{multi}}] = \begin{bmatrix} [-20020.8782, -13847.0280] \\ [-24783.4281, -16278.8844] \\ [-80913.2926, -56198.0511] \\ [-92100.5892, -59857.8483] \\ [-12401.3233, -11161.1767] \\ [1.0000, 1.0000] \\ [21.0000, 21.0000] \\ [205.4000, 205.6000] \\ [1226.1500, 1230.3500] \\ [18735.2031, 24949.3281] \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

O controlador central é dado por

$$\mathbf{x^c} = \begin{bmatrix} -16933.9531 \\ -20531.1562 \\ -68555.6719 \\ -75979.2187 \\ -11781.2500 \\ 1.0000 \\ 21.0000 \\ 205.5000 \\ 1228.2500 \\ 21842.2656 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Usando o controlador central, foram realizadas simulações para alguns valores de $n_P(s) \in [n_P(s)]$ e $d_P(s) \in [d_P(s)]$. Nas figuras a seguir, em linhas mais claras são apresentadas as respostas para valores selecionados de $P(s) \in [P(s)]$ e referências e distúrbios dos tipos onda quadrada ou senoidal. A linha mais escura representa o sinal de referência (onda quadrada ou senoidal).

Para a primeira simulação, apresentada na Figura 4.4, foi utilizada como referência uma onda quadrada com período de 160 segundos e amplitude 1. Em $t = 30$ segundos foi adicionada uma perturbação do tipo degrau de magnitude 5. Outra perturbação do tipo degrau, de magnitude 3, foi adicionada em $t = 130$ segundos.

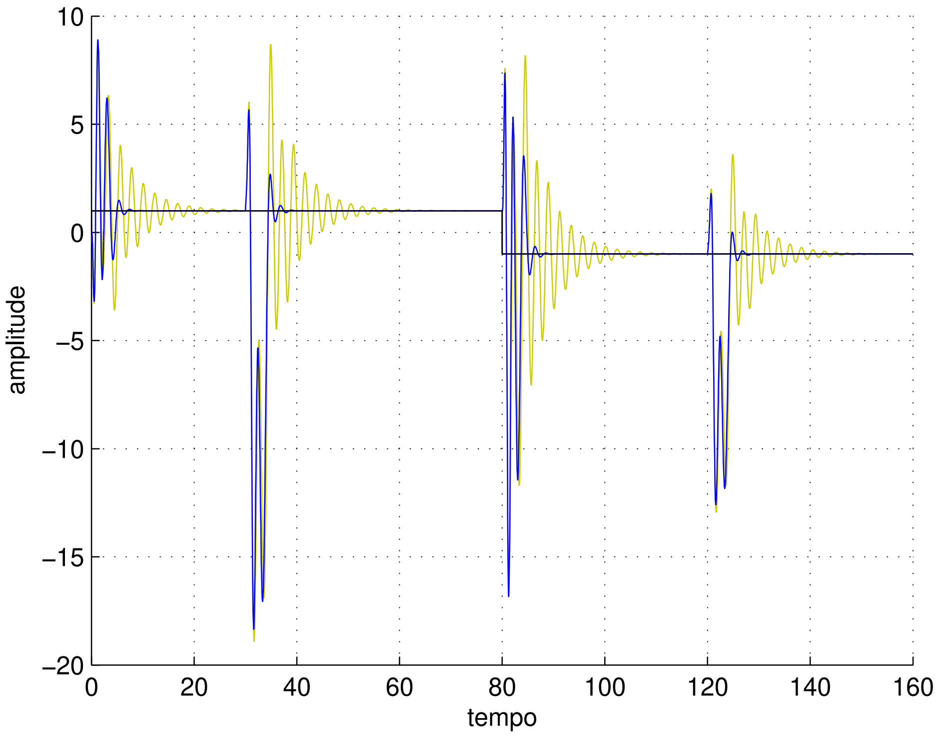

Fig. 4.4: Simulação para referência do tipo onda quadrada e distúrbios do tipo degrau.

A simulação apresentada na Figura 4.5 é idêntica à anterior, exceto que em $t = 30$ segundos foi adicionada uma perturbação do tipo senoidal de amplitude 3 e fase 0 rad. Outra perturbação senoidal de freqüência 2 rad/s foi adicionada em $t = 130$ segundos, esta de amplitude 3 e fase 1 rad.

A simulação apresentada na Figura 4.6 utiliza como sinal de referência uma onda senoidal de freqüência 2 rad/s e amplitude 1. Em $t = 25$ segundos foi adicionada uma perturbação do tipo degrau de amplitude 5. Outra perturbação do tipo degrau foi adicionada em $t = 55$ segundos, esta de amplitude 3.

A simulação apresentada na Figura 4.7 é idêntica à da Figura 4.6, exceto que em $t = 25$ segundos foi adicionada uma perturbação do tipo senoidal de amplitude 3 e fase 0 rad. Outra perturbação senoidal de freqüência 2 rad/s foi adicionada em $t = 55$ segundos, esta com amplitude 3 e fase 1 rad.

Em todos os casos é possível verificar tanto o rastreamento do sinal de referência quanto a

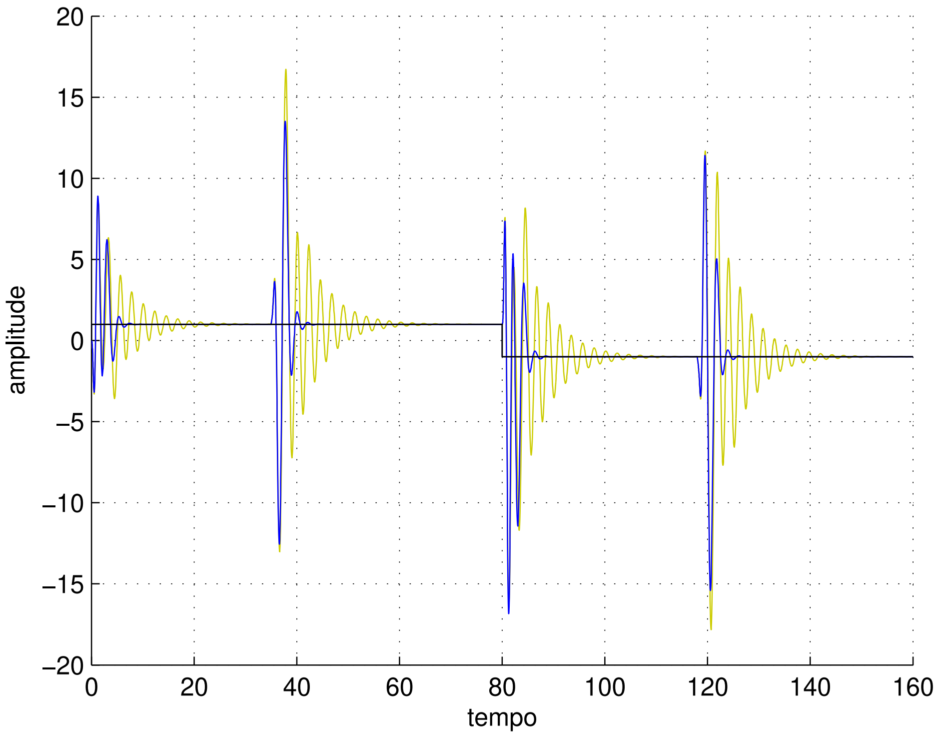

Fig. 4.5: Simulação para referência do tipo do tipo onda quadrada e distúrbios senoidais.

rejeição aos distúrbios para todas as funções de transferência $P(s) \in [P(s)]$ consideradas.

4.5 Conclusão

A conclusão mais importante deste Capítulo 4 é que os problemas de rastreamento e regulação robustos por alocação de pólos podem ser abordados através de Análise Intervalar. Uma extensão do princípio do modelo interno para o caso intervalar foi proposta afim de modelar e cancelar os pólos instáveis do sinal de referência e de possíveis distúrbios.

Simulações demonstraram o rastreamento e regulação robustos para diferentes sinais de referência e distúrbios.

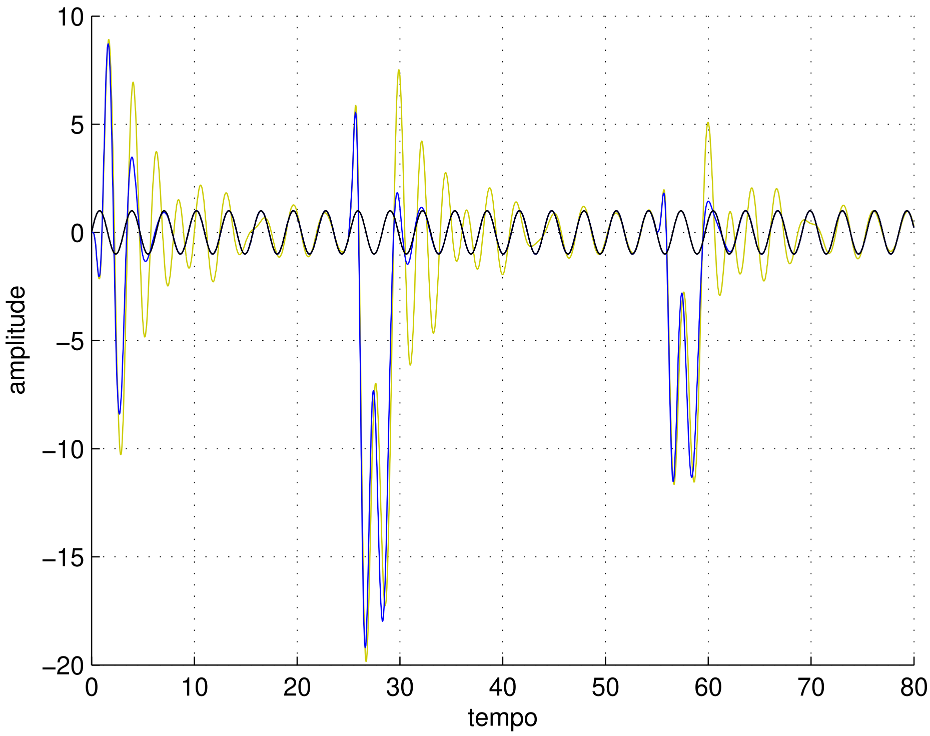

Fig. 4.6: Simulação para referência senoidal e distúrbios do tipo degrau.

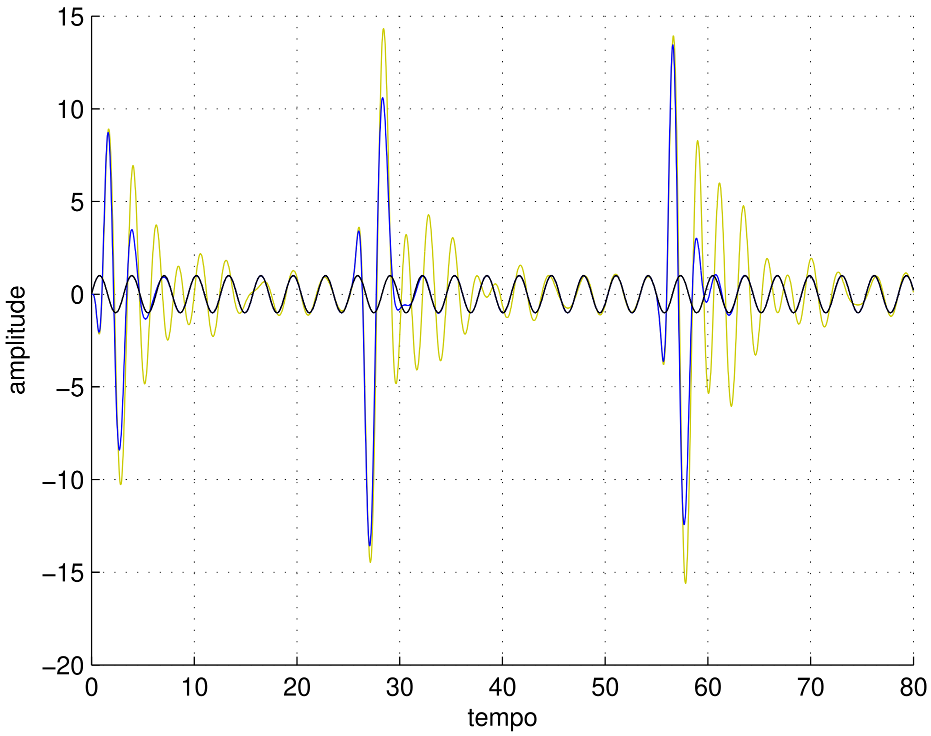

Fig. 4.7: Simulação para referência e distúrbios senoidais.

Capítulo 5

Equação de Sylvester intervalar

5.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma metodologia baseada em Análise Intervalar para a análise de estabilidade assintótica de sistemas intervalares autônomos na forma $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$. A metodologia é baseada em uma extensão do *Teorema de Lyapunov* para sistemas intervalares.

Equações de Lyapunov intervalares são tratadas como casos particulares de *equações de Sylvester intervalares*, que por sua vez podem ser reescritas como sistemas lineares intervalares na forma $[\mathbf{G}]\mathbf{x} = [\mathbf{c}]$. Assim sendo, equações de Sylvester (Lyapunov) intervalares são passíveis de resolução através dos métodos descritos nos capítulos anteriores desta Dissertação. Comparações entre diferentes métodos de resolução de equações de Lyapunov intervalares são realizadas. Exemplos numéricos ilustram os principais resultados apresentados.

5.2 Equação de Sylvester intervalar

A *equação de Sylvester intervalar* é uma equação matricial da forma

$$[\mathbf{A}]\,\mathbf{X} + \mathbf{X}\,[\mathbf{B}] = [\mathbf{C}]\,, \tag{5.1}$$

sendo que $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{m \times m}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, enquanto que $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{X}] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$. O conjunto solução de (5.1) pode ser caracterizado como

$$\begin{aligned} \Sigma_{sylv} = \; & \{ \mathbf{X} \in \mathbb{IR}^{m \times n} | \mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}, \text{ para alguma } \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \\ & \text{alguma } \mathbf{B} \in [\mathbf{B}], \text{ alguma } \mathbf{C} \in [\mathbf{C}] \}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Teorema 5.2.1. *Uma condição necessária e suficiente para que a equação de Sylvester intervalar (5.1) tenha solução para todo* $\mathbf{C} \in [\mathbf{C}]$ *é que* $0 \notin [\lambda_i] + [\mu_j]$*, quaisquer que sejam* $i \leq m$ *e* $j \leq n$*, com* $[\lambda_i] = \{\lambda | \mathbf{A}\mathbf{y_A} = \lambda \mathbf{y_A}, \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \mathbf{y_A} \neq 0\}$ *e* $[\mu_j] = \{\mu | \mathbf{B}\mathbf{y_B} = \mu \mathbf{y_B}, \mathbf{B} \in [\mathbf{B}], \mathbf{y_B} \neq 0\}$ *denotando os espectros de* $[\mathbf{A}]$ *e* $[\mathbf{B}]$*, respectivamente.*

Prova. *Ver (Seif et al., 1994).*

Como proposto em (Seif et al., 1994), a equação intervalar $[\mathbf{A}]\mathbf{X} + \mathbf{X}[\mathbf{B}] = [\mathbf{C}]$ pode ser escrita na forma equivalente

$$[\mathbf{G}]\, \mathbf{x} = [\mathbf{c}], \tag{5.3}$$

com

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}] &= ([\mathbf{A}] \otimes \mathbf{I_m}) + \left(\mathbf{I_n} \otimes [\mathbf{B}]^T \right), \\ \mathbf{x} &= \text{vec}\,(\mathbf{X}) = (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}, \ldots, X_{m1}, X_{m2}, \ldots, X_{mn})^T, \\ [\mathbf{c}] &= \text{vec}\,([\mathbf{C}]) = ([C_{11}], [C_{12}], \ldots, [C_{1n}], \ldots, [C_{m1}], [C_{m2}], \ldots, [C_{mn}])^T. \end{aligned}$$

O *produto de Kronecker* $[\mathbf{W}] \otimes [\mathbf{Z}]$ entre duas matrizes intervalares, resulta em uma matriz intervalar cujo bloco (i, j) é dado por $[w_{ij}][\mathbf{Z}]$, com $[w_{ij}]$ representando o elemento i, j da matriz $[\mathbf{W}]$. A solução da equação de Sylvester intervalar (5.1) pode ser obtida através da solução de um sistema linear intervalar da forma

$$\left(([\mathbf{A}] \otimes \mathbf{I_m}) + \left(\mathbf{I_n} \otimes [\mathbf{B}]^T \right) \right) \mathbf{x} = [\mathbf{c}]. \tag{5.4}$$

Caso as condições do Teorema 5.2.1 sejam satisfeitas, o tratamento de multiincidências apresentado no Capítulo 4 pode ser aplicado à equação (5.4), proporcionando raios menores para a solução $[\mathbf{X}]$ da equação (5.1).

5.3 Equação de Lyapunov intervalar

A *equação de Lyapunov intervalar* é um importante caso particular da equação de Sylvester intervalar, relacionada a problemas de controle e estabilidade de sistemas lineares dinâmicos com incertezas.

A equação de Lyapunov intervalar é uma equação matricial da seguinte forma:

$$[\mathbf{A}]\,\mathbf{X} + \mathbf{X}\,[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{C}]\,. \tag{5.5}$$

O método de solução da equação de Sylvester intervalar via produto de Kronecker pode ser aplicado à solução da equação de Lyapunov intervalar (5.5). Neste caso, obtém-se o seguinte sistema linear equivalente:

$$[\mathbf{G}]\,\mathbf{x} = [\mathbf{c}]\,, \tag{5.6}$$

com

$$\begin{aligned}
[\mathbf{G}] &= ([\mathbf{A}] \otimes \mathbf{I_m}) + (\mathbf{I_m} \otimes [\mathbf{A}])\,,\\
\mathbf{x} &= \text{vec}\,(\mathbf{X}) = (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}, \ldots, X_{m1}, X_{m2}, \ldots, X_{mm})^T\,,\\
[\mathbf{c}] &= \text{vec}\,([\mathbf{C}]) = ([C_{11}]\,, [C_{12}]\,, \ldots, [C_{1n}]\,, \ldots, [C_{m1}]\,, [C_{m2}]\,, \ldots, [C_{mm}])^T\,.
\end{aligned}$$

A equação de Lyapunov intervalar (5.5) é resolvida ao se solucionar o seguinte sistema linear intervalar equivalente:

$$(([\mathbf{A}] \otimes \mathbf{I_m}) + (\mathbf{I_m} \otimes [\mathbf{A}]))\,\mathbf{x} = [\mathbf{c}]\,. \tag{5.7}$$

5.3.1 Exemplo numérico

Considere a equação de Lyapunov intervalar discutida em (Seif et al., 1994):

$$[\mathbf{A}]\,\mathbf{X} + \mathbf{X}\,[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{C}]\,, \tag{5.8}$$

com

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [-1.25, -0.75] & [0.75, 1.25] \\ [-2.50, -1.50] & [-5.00, -3.00] \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} [-1.25, -0.75] & [-0.25, 0.25] \\ [-0.25, 0.25] & [-1.25, -0.75] \end{bmatrix}.$$

A partir da utilização do produto de Kronecker, obtém-se

$$[\mathbf{G}]\,\mathbf{x} = [\mathbf{c}]\,, \tag{5.9}$$

com

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} [-2.50, -1.50] & [0.75, 1.25] & [0.75, 1.25] & [0.00, 0.00] \\ [-2.50, -1.50] & [-6.25, -3.75] & [0.00, 0.00] & [0.75, 1.25] \\ [-2.50, -1.50] & [0.00, 0.00] & [-6.25, -3.75] & [0.75, 1.25] \\ [0.00, 0.00] & [-2.50, -1.50] & [-2.50, -1.50] & [-10.00, -6.00] \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} [-1.25, -0.75] \\ [-0.25, 0.25] \\ [-0.25, 0.25] \\ [-1.25, -0.75] \end{bmatrix}.$$

Além de possíveis multiincidências de parâmetros em $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{C}]$, o emprego do produto de Kronecker leva a novas multiincidências, tornando a solução da equação intervalar resultante conservadora quando métodos clássicos de Análise Intervalar são utilizados. O tratamento de multiincidências proposto elimina o conservadorismo excessivo da solução.

Conforme visto no Capítulo 3 deste trabalho, os elementos do sistema (5.9) podem ser representados como a multiplicação de um vetor real $\mathbf{w}$ por um vetor intervalar $[\mathbf{p}]$. Uma possível escolha para $[\mathbf{p}]$ é

$$[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} [-1.2500, -0.7500] \\ [1, 1] \end{bmatrix}.$$

Para a explorar as multincidências do sistema (5.9), a representação de $[\mathbf{c}]$ requer os seguintes vetores:

$$\mathbf{w}(0,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(0,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}(0,3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(0,4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o elemento i de $[\mathbf{c}]$ é representado por $\mathbf{w}(0,i)^T[\mathbf{p}]$. A mesma técnica é então aplicada à representação de $[\mathbf{G}]$. Desta forma, para a representação de $[\mathbf{G}]$, utilizam-se

$$\mathbf{w}(1,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(1,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(1,3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(1,4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}(2,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(2,2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(2,3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(2,4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}(3,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(3,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(3,3) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(3,4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}(4,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(4,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(4,3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(4,4) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução para a equação intervalar (5.9) foi obtida através de três métodos: *Sign-accord* (apresentado na Seção 2.6.2), *Intlab* e tratamento das multiincidências.

Foram obtidos os seguintes resultados:

$$[\mathbf{X_{sign}}] = \begin{bmatrix} [0.1542, 0.7492] & [-0.4266, 0.0612] \\ [-0.4266, 0.0612] & [0.0789, 0.4722] \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Delta_{sign}} = \begin{bmatrix} 0.2975 & 0.2439 \\ 0.2439 & 0.1966 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{X_{intlab}}] = \begin{bmatrix} [-0.3070, 1.0736] & [-0.6629, 0.4296] \\ [-0.6629, 0.4296] & [-0.2689, 0.6355] \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Delta_{intlab}} = \begin{bmatrix} 0.6903 & 0.5463 \\ 0.5463 & 0.4522 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{X_{multi}}] = \begin{bmatrix} [0.2764, 0.4902] & [-0.1553, -0.0780] \\ [-0.1553, -0.0780] & [0.1579, 0.2087] \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{\Delta_{multi}} = \begin{bmatrix} 0.1069 & 0.0386 \\ 0.0386 & 0.0254 \end{bmatrix}.$$

Como o tratamento das multiincidências considera apenas equações de Lyapunov dentro da família de equações (5.9), o raio da sua solução é substancialmente menor se comparado aos raios apresentados pelas soluções via *Sign-accord* e *Intlab*. (O tratamento de multiincidências encontra-se implementado em *Intlab*, mas este não considera sistemas de equações com coeficientes multiincidentes.)

A natureza do algoritmo *Sign-accord* é diferente das demais utilizadas neste exemplo. Enquanto o método de tratamento de multiincidências e o método implementado pelo *Intlab* encontram a solução de um sistema linear intervalar por meio de uma extensão do método de Newton para sistemas intervalares, o *Sign-accord* utiliza um método combinatorial que envolve a resolução de 2^{m^2} sistemas de equações, sendo m a ordem da matriz $[\mathbf{A}]$.

5.4 Análise de estabilidade

A equação de Lyapunov intervalar surge no estudo da estabilidade assintótica de sistemas da forma $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$. O sistema $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$ é *robusta e assintoticamente estável* se todos os autovalores de cada matriz $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ possuem partes reais negativas. A seguir é apresentada uma extensão para o *teorema de Lyapunov* (Chen, 1999).

Teorema 5.4.1. *O sistema* $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$ *é robusta e assintoticamente estável se para qualquer matriz intervalar simétrica definida positiva* $[\mathbf{C}]$*, a equação de Lyapunov intervalar*

$$[\mathbf{A}]\,\mathbf{X} + \mathbf{X}\,[\mathbf{A}]^T = -\,[\mathbf{C}] \tag{5.10}$$

apresentar solução $[\mathbf{X}]$ *simétrica definida positiva.*

Uma matriz intervalar quadrada $[\mathbf{X}]$ é simétrica se os elementos intervalares $[x_{ij}]$ e $[x_{ji}]$ são iguais para todo i e todo j. Uma matriz intervalar simétrica $[\mathbf{X}]$ é definida positiva se todos os autovalores de cada matriz simétrica extraída de $[\mathbf{X}]$ são positivos. Uma forma de se visualizar os autovalores de uma matriz intervalar $[\mathbf{X}]$ é encontrar seu *polinômio característico intervalar* e representar seu espaço de raízes.

5.4.1 Exemplo numérico

Considere o sistema massa-mola-atrito representado pela Figura 5.1.

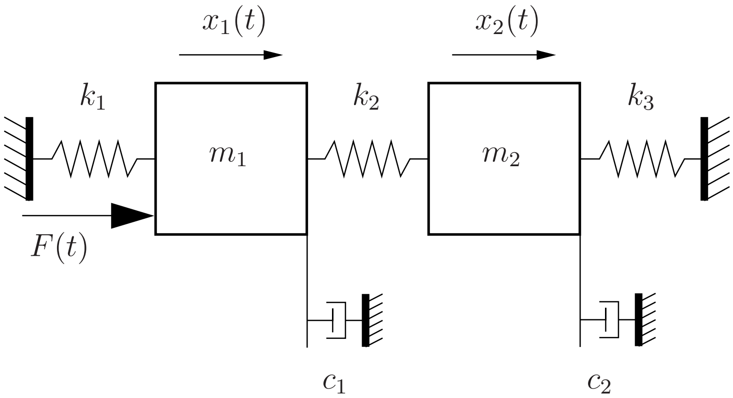

Fig. 5.1: Sistema massa-mola-atrito.

As dinâmicas relativas às massas m_1 e m_2 são descritas, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F(t), \tag{5.11}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = 0. \tag{5.12}$$

Uma realização no espaço de estados para estas equações é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \dfrac{-c_1}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & \dfrac{-(k_2+k_3)}{m_2} & \dfrac{-c_2}{m_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(t), \qquad (5.13)$$

Os seguintes valores numéricos foram adotados para os parâmetros da planta:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2.77kg, & c_1 &= 1.2N/m/s, & [k_1] &= [198, 202]N/m, \\ m_2 &= 2.59kg, & c_2 &= 10.2N/m/s, & [k_2] &= [386.1, 393.9]N/m, \\ & & & & [k_3] &= [386.1, 393.9]N/m. \end{aligned}$$

Poderiam ser tomados como intervalares quaisquer parâmetros do sistema da Figura figure:Rectilinear.

A estabilidade assintótica do sistema representado por (5.13) será analisada através do Teorema 5.4.1. A matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ da equação (5.13) apresentará todos os autovalores com partes reais negativas se a solução da seguinte equação de Lyapunov intervalar

$$[\mathbf{A}]\mathbf{X} + \mathbf{X}[\mathbf{A}]^T = -[\mathbf{C}], \qquad (5.14)$$

com

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [-215.1264, -210.8664] & [-0.4332, -0.4332] & [139.3863, 142.2022] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] \\ [149.0734, 152.0849] & [0.0000, 0.0000] & [-304.1699, -298.1467] & [-3.9382, -3.9382] \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} [1.0000, 1.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] \end{bmatrix},$$

for uma matriz intervalar simétrica definida positiva.

Três métodos foram utilizados para resolver a equação de Lyapunov intervalar (5.14): *Sign-accord* (apresentado na Seção 2.6.2), *Intlab* e tratamento de multiincidências, introduzido no Capítulo 3. Foram obtidas as seguintes soluções para (5.14):

$$[\mathbf{X_{intlab}}] = \begin{bmatrix} [0.2317, 0.3269] & [-1.1654, 0.1654] & [0.0269, 0.0962] & [0.1535, 1.0550] \\ [-1.1654, 0.1654] & [43.8873, 57.3288] & [-1.0550, -0.1535] & [-25.5293, -16.7521] \\ [0.0269, 0.0962] & [-1.0550, -0.1535] & [0.2170, 0.2658] & [-0.9368, -0.0632] \\ [0.1535, 1.0550] & [-25.5293, -16.7521] & [-0.9368, -0.0632] & [58.9405, 63.9910] \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{X_{sign}}] = \begin{bmatrix} [0.2516, 0.3102] & [-1.0590, 0.0590] & [0.0414, 0.0838] & [0.2457, 0.9734] \\ [-1.0590, 0.0590] & [46.4803, 55.3558] & [-0.9734, -0.2457] & [-23.8690, -18.2459] \\ [0.0414, 0.0838] & [-0.9734, -0.2457] & [0.2275, 0.2566] & [-0.8844, -0.1156] \\ [0.2457, 0.9734] & [-23.8690, -18.2459] & [-0.8844, -0.1156] & [60.0780, 62.8599] \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{X_{multi}}] = \begin{bmatrix} [0.2741, 0.2852] & [-0.6518, -0.3482] & [0.0543, 0.0703] & [0.5394, 0.6777] \\ [-0.6518, -0.3482] & [48.8713, 51.8284] & [-0.6777, -0.5394] & [-22.4301, -19.5927] \\ [0.0543, 0.0703] & [-0.6777, -0.5394] & [0.2374, 0.2459] & [-0.6036, -0.3964] \\ [0.5394, 0.6777] & [-22.4301, -19.5927] & [-0.6036, -0.3964] & [60.4610, 62.5311] \end{bmatrix}.$$

O tratamento de multiincidências resultou na solução intervalar de menor raio. Embora o algoritmo *Sign-accord* tenha obtido uma solução com menor raio do que a solução obtida pelo *Intlab*, seu tempo de execução é muito maior. Para a equação (5.14), em um *Pentium 4 com 1GB de memória RAM*, os tempos de execução de cada algoritmo são apresentados na tabela abaixo.

Algoritmo	Tempo (segundos)
Intlab	0.013
Sign-accord	1647.8200
Multiincidências	0.042

Uma forma de se visualizar os autovalores de $[\mathbf{X_{intlab}}]$, $[\mathbf{X_{sign}}]$ e $[\mathbf{X_{multi}}]$ é encontrar o *polinômio característico intervalar* associado a cada uma destas soluções. Os polinômios característicos intervalares associados a $[\mathbf{X_{intlab}}]$, $[\mathbf{X_{sign}}]$ e $[\mathbf{X_{multi}}]$ são dados respectivamente por:

$$
\begin{aligned}
p_{intlab}(s) &= \det\left(s\mathbf{I} - [\mathbf{X_{intlab}}]\right), \\
p_{sign}(s) &= \det\left(s\mathbf{I} - [\mathbf{X_{sign}}]\right), \\
p_{multi}(s) &= \det\left(s\mathbf{I} - [\mathbf{X_{multi}}]\right).
\end{aligned}
$$

A partir do Teorema 2.7.1 (Teorema das Arestas) e dos polinômios característicos intervalares, é possível determinar a região em que se encontram os autovalores de $[\mathbf{X_{intlab}}]$, $[\mathbf{X_{sign}}]$ e $[\mathbf{X_{multi}}]$. Uma matriz intervalar será definida positiva se o espectro de seu polinômio característico estiver localizado no semiplano direito do plano complexo s.

Matrizes simétricas intervalares contêm inúmeras matrizes não-simétricas. Como apenas soluções simétricas $\mathbf{X_{sim}} \in [\mathbf{X}]$ são consideradas no estudo de estabilidade, é suficiente para a estabilidade assintótica do sistema que apenas os autovalores com parte imaginária nula estejam localizados no semiplano direito do plano complexo s.

As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam em linhas de tonalidade intermediária (mais externas) $\mathcal{S}\left([p_{intlab}(s)]\right)$, linhas claras $\mathcal{S}\left([p_{sign}(s)]\right)$ e em linhas escuras (mais internas) $\mathcal{S}\left([p_{multi}(s)]\right)$. A Figura 5.3 detalha a região da Figura 5.2 mais próxima da origem.

As Figuras 5.2 e 5.3 permitem concluir que as soluções $[\mathbf{X_{intlab}}]$, $[\mathbf{X_{sign}}]$ e $[\mathbf{X_{multi}}]$ são definidas positivas. Desta forma, é possível afirmar que os todos os autovalores de cada matriz $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ apresentam partes reais negativas, o que garante a estabilidade assintótica do sistema representado por (5.13) para os dados numéricos adotados inicialmente.

Utilizando o mesmo sistema massa-mola-atrito, aumentou-se os raios de incertezas para as constantes de mola. Os novos parâmetros da planta são

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 2.77kg, & c_1 &= 1.2N/m/s, & [k_1] &= [196, 204]N/m, \\
m_2 &= 2.59kg, & c_2 &= 10.2N/m/s, & [k_2] &= [382.2, 397.8]N/m, \\
& & & & [k_3] &= [382.2, 397.8]N/m.
\end{aligned}
$$

A matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ da equação (5.13) apresentará todos os autovalores com partes reais negativas se a solução da seguinte equação de Lyapunov intervalar

$$
[\mathbf{A}]\mathbf{X} + \mathbf{X}[\mathbf{A}]^T = -[\mathbf{C}], \tag{5.15}
$$

com

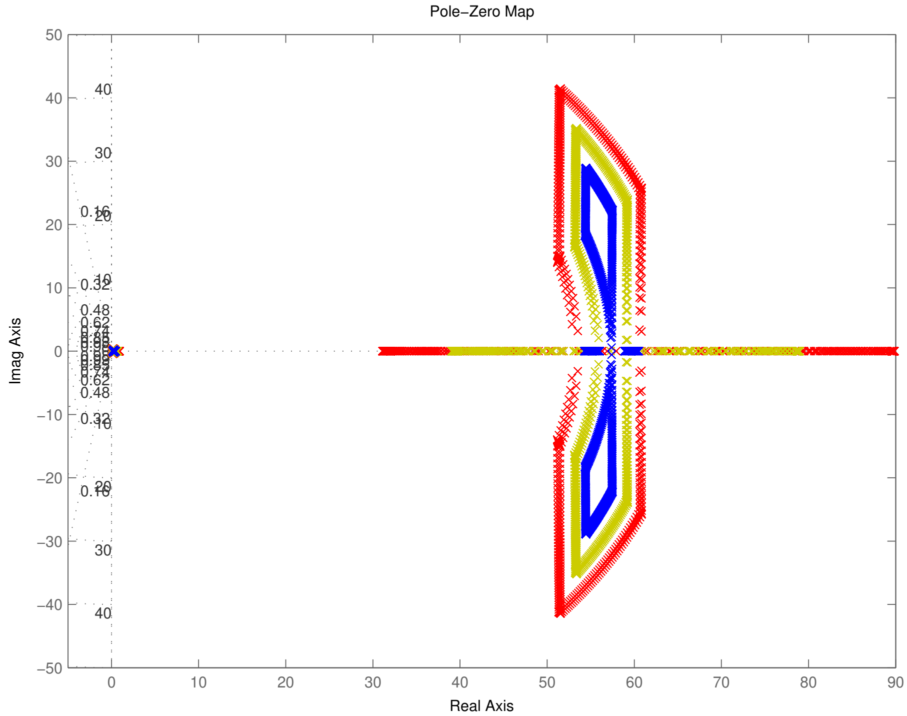

Fig. 5.2: Espectro de $p_{intlab}(s)$, $p_{sign}(s)$ e $p_{multi}(s)$.

$$
[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [-217.2563, -208.7365] & [-0.4332, -0.4332] & [137.9783, 143.6101] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] \\ [147.5676, 153.5907] & [0.0000, 0.0000] & [-307.1815, -295.1351] & [-3.9382, -3.9382] \end{bmatrix},
$$

$$
[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} [1.0000, 1.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] & [0.0000, 0.0000] \\ [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [0.0000, 0.0000] & [1.0000, 1.0000] \end{bmatrix},
$$

for uma matriz intervalar definida positiva.

Foram obtidas as seguintes soluções para (5.15):

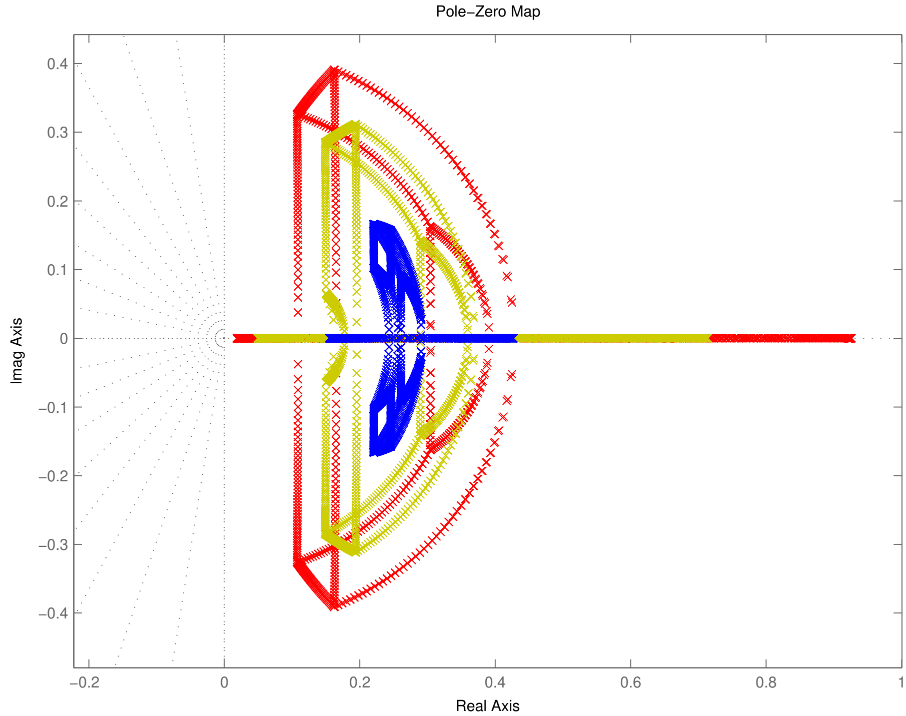

Fig. 5.3: Detalhe da Figura 5.2.

$$[\mathbf{X_{intlab}}] = \begin{bmatrix} [0.1122, 0.4464] & [-2.4515, 1.4515] & [-0.0604, 0.1835] & [-0.7749, 1.9833] \\ [-2.4515, 1.4515] & [27.9192, 73.2970] & [-1.9833, 0.7749] & [-36.2361, -6.0454] \\ [-0.0604, 0.1835] & [-1.9833, 0.7749] & [0.1545, 0.3283] & [-1.7235, 0.7235] \\ [-0.7749, 1.9833] & [-36.2361, -6.0454] & [-1.7235, 0.7235] & [52.1490, 70.7824] \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{X_{sign}}] = \begin{bmatrix} [0.2268, 0.3448] & [-1.7937, 0.7937] & [0.0232, 0.1115] & [-0.2012, 1.4586] \\ [-1.7937, 0.7937] & [42.9281, 60.7657] & [-1.4586, 0.2012] & [-26.4325, -14.7783] \\ [0.0232, 0.1115] & [-1.4586, 0.2012] & [0.2146, 0.2748] & [-1.3547, 0.3547] \\ [-0.2012, 1.4586] & [-26.4325, -14.7783] & [-1.3547, 0.3547] & [58.3955, 64.7358] \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{X_{multi}}] = \begin{bmatrix} [0.2612, 0.2980] & [-0.7777, -0.2223] & [0.0434, 0.0823] & [0.4535, 0.7706] \\ [-0.7777, -0.2223] & [46.4206, 54.2791] & [-0.7706, -0.4535] & [-23.9757, -17.8217] \\ [0.0434, 0.0823] & [-0.7706, -0.4535] & [0.2294, 0.2539] & [-0.6796, -0.3204] \\ [0.4535, 0.7706] & [-23.9757, -17.8217] & [-0.6796, -0.3204] & [59.0085, 63.9837] \end{bmatrix}.$$

O tratamento de multiincidências resultou na solução intervalar de menor raio.

As Figuras 5.4 e 5.5 apresentam em linhas de tonalidade intermediária $\mathcal{S}\left([p_{intlab}(s)]\right)$, em linhas claras $\mathcal{S}\left([p_{sign}(s)]\right)$ e em linhas escuras $\mathcal{S}\left([p_{multi}(s)]\right)$.

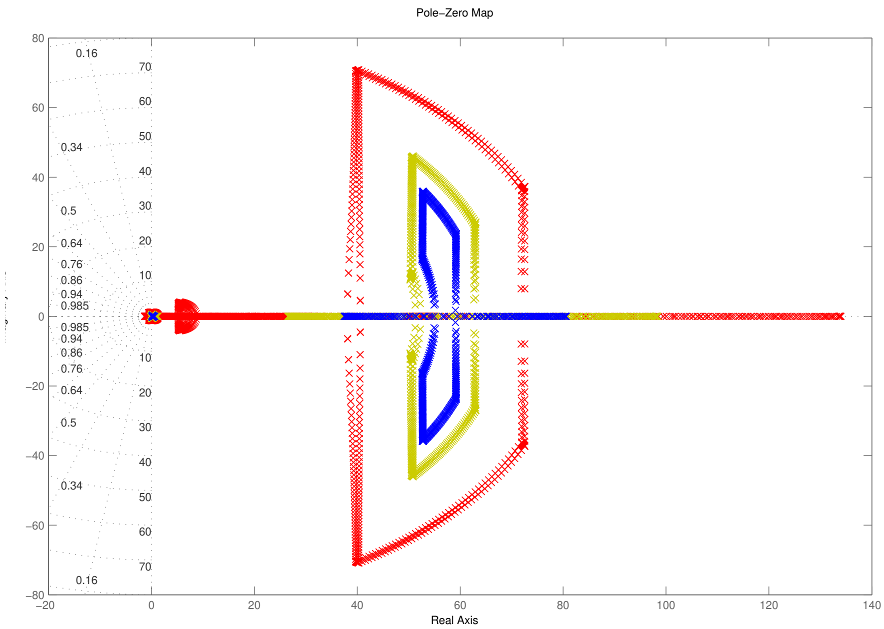

Fig. 5.4: Espectro de $p_{intlab}(s)$, $p_{sign}(s)$ e $p_{multi}(s)$.

As Figuras 5.4 e 5.5 permitem concluir que apenas $[\mathbf{X_{multi}}]$ é definida positiva. Desta forma, $[\mathbf{X_{multi}}]$ é a única solução que permite afirmar que os todos os autovalores de qualquer matriz $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ apresentam parte real negativa, o que garante a estabilidade assintótica do sistema representado por (5.13) para os valores numéricos adotados. As soluções $[\mathbf{X_{intlab}}]$ e $[\mathbf{X_{sign}}]$ não são definidas positivas e não permitem afirmar que $[\mathbf{A}]$ é robusta e assintoticamente estável.

5.5 Conclusão

Neste capítulo demonstrou-se que a resolução da equação de Lyapunov intervalar permite conclusões importantes a respeito da estabilidade de sistemas lineares intervalares.

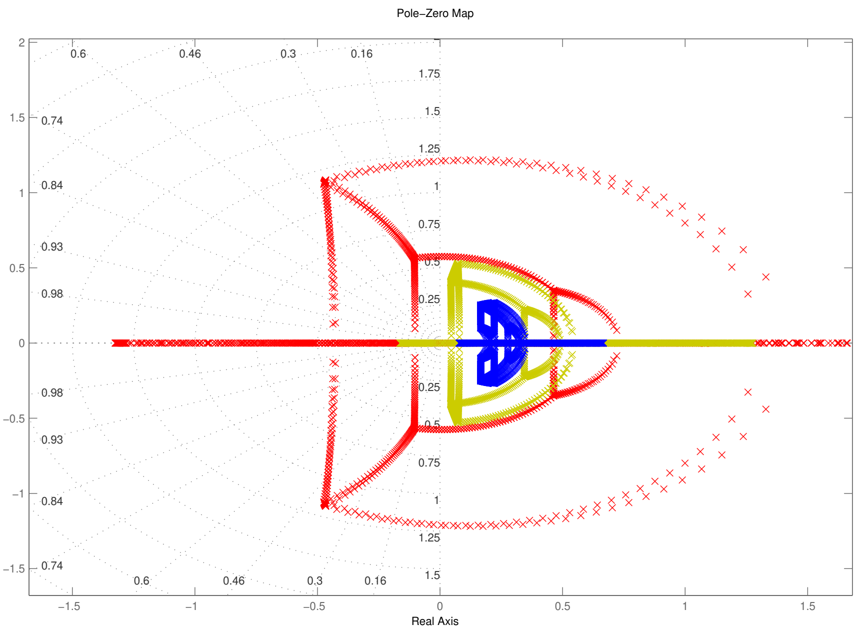

Fig. 5.5: Detalhe da Figura 5.4.

Soluções para a equação de Lyapunov intervalar foram obtidas a partir da aplicação de três métodos: *algoritmo Sign-accord*, *Intlab* (*toolbox* para *Matlab*) e *tratamento de multiincidências*. Como a equação de Lyapunov intervalar apresenta múltiplas incidências de elementos intervalares, o tratamento de multiincidências é o método menos conservador.

Capítulo 6

Conclusão Geral

Esta Dissertação abordou o tratamento de multiincidências de elementos intervalares presentes em sistemas lineares relacionados ao projeto de controladores e à análise de estabilidade de sistemas incertos de natureza intervalar.

Demonstrou-se que o projeto de controladores para sistemas lineares intervalares e invariantes no tempo pode ser sistematizado através de resultados de Análise Intervalar. Esta sistematização conduziu à obtenção de uma equação Diofantina intervalar, cuja solução é sensível ao método de resolução empregado. Nesta Dissertação investigou-se a utilização do método proposto em (Rump, 1994), o qual leva em conta multiincidências de elementos intervalares de forma a reduzir o conservadorismo da solução de sistemas lineares intervalares. Comparações entre métodos clássicos de resolução de sistemas lineares intervalares com o proposto em (Rump, 1994) tendo como base as equações Diofantina e de Lyapunov foram realizadas.

Quanto maior o raio dos elementos da planta, maior será a diferença entre os raios das soluções obtidas por meio dos métodos clássicos e o da solução obtida a partir do tratamento de multiincidências. Não havendo qualquer multiincidência de elementos intervalares, o método proposto em (Rump, 1994) não apresenta solução pior do que a solução obtida através do *Intlab*. Embora a aplicação do algoritmo *Sign-accord* resulte em soluções menos conservadoras se comparado a aplicação do *Intlab*, este algoritmo apresenta natureza *combinatorial*: um sistema de ordem n exige a resolução de 2^n sistemas de equações e, conseqüentemente, esforço computacional maior do que os outros métodos descritos.

Além da sua aplicação em alocação regional de pólos, a equação Diofantina intervalar foi também utilizada no projeto de controladores visando o rastreamento robusto de um sinal de referência e a rejeição robusta a distúrbios para plantas intervalares. Uma extensão do princípio do modelo interno para o caso intervalar foi proposta afim de cancelar os pólos instáveis do sinal de referência e de possíveis distúrbios. O método de resolução de sistemas lineares intervalares que considera multiincidências apresentado no Capítulo 3, garantiu mais uma vez a redução do raio da solução da equação Diofantina intervalar.

A última parte da Dissertação abordou a análise de estabilidade assintótica de um sistema linear intervalar autônomo da forma $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$. A partir de uma extensão do *Teorema de Lyapunov* a sistemas intervalares, foi possível analisar a estabilidade assintótica de $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x}$ através de soluções simétricas de uma *equação de Lyapunov intervalar*. O *Teorema das Arestas* ((Bhattacharyya et al., 1995)) permitiu uma análise das possíveis soluções da equação de Lyapunov intervalar através dos *polinômios característicos* associados a estas soluções Demonstrou-se que o método que emprega o tratamento de multiincidências garante a estabilidade assintótica de sistemas intervalares quando métodos clássicos de resolução falham em assegurar estabilidade assintótica.

Como principal sugestão para trabalhos futuros, propõe-se a extensão da técnica empregada nesta Dissertação a equações do tipo Riccati intervalares, o que permitiria tratar problemas de Controle Ótimo de sistemas intervalares. Trabalhos nesta linha já foram iniciados pelo Autor, mas estudos aprofundados ainda são necessários.

Referências Bibliográficas

G. Alefeld and G. Mayer. Interval analysis: theory and applications. *Journal of computational and applied mathematics*, 121:421–464, 2000.

S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel. *Robust control: the parametric approach*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995. ISBN 0-13-781576-X.

C. T. Chen. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, 3rd. edition, 1999. ISBN 0-19-511777-8.

G. I. Hargreaves. Interval analysis in matlab. Technical Report No. 416, Manchester Centre for Computational Mathematics, dezembro 2002. URL `http://www.maths.man.ac.uk/~nareports/narep416.pdf`.

C. Jansson and J. Rohn. An algorithm for checking regularity of interval matrices. *SIAM Journal on Mathematical Analysis and Applications*, (20):756–76, 1999.

A. D. S. Lordelo, E. A. Juzzo, and P. A. V. Ferreira. Analysis and design of robust controllers using interval diophantine equation. *Reliable Computing (to appear)*, 2006.

Ramon E. Moore. *Methods and applications of interval analysis*. SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1979. URL `http://www.ec-securehost.com/SIAM/AM02.html`.

A. Neumaier. *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. URL `http://titles.cambridge.org/catalogue.asp?isbn=052133196X`.

W. Oettli. On the numerical solution of a linear system with inaccurate coefficients. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 2:115–118, 1965.

W. Oettli and W. Pragger. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides. *Numer. Math.*, 6:405–409, 1964.

J. Rohn. Systems of linear interval equations. *Linear algebra and its applications*, (126): 39–78, 1989.

S. M. Rump. Verification methods for dense and sparse systems of equations. *Topics in validated computations*, pages 63–135, 1994.

N. P. Seif, S. A. Hussein, and A. S. Deif. The interval sylvester equation. *Computing*, 52: 223–244, 1994.