

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

ESTUDO DE ROBUSTEZ EM SISTEMAS LINEARES POR MEIO DE  
RELAXAÇÕES EM TERMOS DE DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES



Campinas  
2006

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

ESTUDO DE ROBUSTEZ EM SISTEMAS LINEARES POR MEIO DE  
RELAXAÇÕES EM TERMOS DE DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.  
Área de concentração: Automação.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres



Campinas  
2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

OL4e Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de  
Estudo de robustez em sistemas lineares por meio de  
relaxações em termos de desigualdades matriciais lineares /  
Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira. --Campinas,  
SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares invariantes no tempo. 2. Teoria do  
controle. 3. Estabilidade. 4. Liapunov, Funções de. 5.  
Otimização matemática. I. Peres, Pedro Luis Dias. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Robustness of linear systems by means of linear matrix inequalities  
relaxations

Palavras-chave em Inglês: Uncertain linear systems, Robust analysis, Homogeneous  
polynomial Lyapunov functions, Linear matrix inequalities,  
LMI relaxations, H-2 and H-Infinity norms

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Paulo Augusto Valente Ferreira, Vinícius Foletto Montagner,  
Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi e João Manoel Gomes da  
Silva Junior

Data da defesa: 24/03/2006

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira

Engenheiro de Computação – PUC-PR  
Mestre em Engenharia Elétrica – UNICAMP

ESTUDO DE ROBUSTEZ EM SISTEMAS LINEARES POR MEIO DE  
RELAXAÇÕES EM TERMOS DE DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação. Aprovada pela banca examinadora no dia 24 de Março de 2006.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres  
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira  
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Vinícius Foletto Montagner  
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi  
MAT/UFMG

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior  
DELET/UFRGS

Campinas  
2006

1. Modificações sugeridas pela Comissão Julgadoras que deverão ser incorporadas na versão final da tese:

Sugestões encaminhadas pelas membros da banca deverão ser incorporadas na versão final do manuscrito, ficando a cargo do orientador a verificação.

2. Prazo máximo para a entrega da versão final da tese na CPG: 60 (dias).

3. Comentários finais (se necessário):

O candidato demonstrou perfeito domínio do tema de pesquisa, tanto na apresentação quanto na arguição oral. A banca destaca a qualidade dos resultados e do manuscrito.

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres (Presidente): Pedro L. Dias Peres

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior: João M. Gomes da Silva Junior

Prof. Dr. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi: Ricardo H. Caldeira Takahashi

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira: Paulo Augusto Valente Ferreira

Dr. Vinícius Foletto Montagner: Vinícius F. Montagner

DEDICADA, COM INFINITO AMOR,  
AOS RESPONSÁVEIS PELA ELEVA-  
ÇÃO DAS CONSCIÊNCIAS.

# Agradecimentos

Agradeço,

ao Prof. Pedro os cinco anos de valorosa orientação e a oportunidade de chegar até Campinas, onde finalmente pude encontrar o meu verdadeiro caminho.

aos colegas de trabalho mais próximos: Giórgio, Renato, Vinícius e Valter a convivência descontraída e as trocas de experiências.

aos demais colegas do Departamento de Telemática a ótima convivência.

aos professores da FEEC: Ivanil, Paulo Valente, Von Zuben, Ivan Ricarte e Geromel, os ótimos cursos oferecidos.

aos professores Maurício C. de Oliveira (UCSD-EUA) e Pierre-Alexandre Bliman (INRIA-França) pelas parcerias e discussões frutíferas.

aos membros da banca examinadora os comentários, sugestões e contribuições, que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do manuscrito.

à agência FAPESP o apoio financeiro concedido durante todo o período de doutoramento.

à FEEC/UNICAMP a ótima estrutura que oferece aos estudantes e pesquisadores.

à CAPES o portal de periódicos eletrônicos, que permite o acesso rápido e eficiente ao conhecimento científico.

ao Google o complemento que faz ao item anterior.

a todos que de alguma forma contribuíram com o meu progresso como aluno e como Ser.

A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isto fica sendo a minha última e mais elevada descoberta.

Isaac Newton

# Resumo

A principal contribuição desta tese é a proposta de uma metodologia para solução de desigualdades matriciais lineares dependentes de parâmetros que freqüentemente aparecem em problemas de análise e controle robusto de sistema lineares com incertezas na forma politópica. O método consiste na parametrização das soluções em termos de polinômios homogêneos com coeficientes matriciais de grau arbitrário. Para a construção dessas soluções, um procedimento baseado em resoluções de problemas de otimização na forma de um número finito de desigualdades matriciais lineares é proposto, resultando em seqüências de relaxações que convergem para uma solução polinomial homogênea sempre que uma solução existe. Problemas de análise robusta e custo garantido são analisados em detalhes tanto para sistemas a tempo contínuo quanto para sistemas discretos no tempo. Vários exemplos numéricos são apresentados ilustrando a eficiência dos métodos propostos em termos da acurácia dos resultados e do esforço computacional quando comparados com outros métodos da literatura.

Palavras-chave: Sistemas lineares incertos. Domínio politópico. Estabilidade robusta. Normas  $H_2$  e  $H_\infty$ . Funções de Lyapunov polinomiais homogêneas. Desigualdades matriciais lineares. Lema de Finsler. Teorema de Pólya. Relaxações convergentes.

# Abstract

This thesis proposes, as main contribution, a new methodology to solve parameter-dependent linear matrix inequalities which frequently appear in robust analysis and control problems of linear system with polytopic uncertainties. The proposed method relies on the parametrization of the solutions in terms of homogeneous polynomials of arbitrary degree with matrix valued coefficients. For constructing such solutions, a procedure based on optimization problems formulated in terms of a finite number of linear matrix inequalities is proposed, yielding sequences of relaxations which converge to a homogeneous polynomial solution whenever a solution exists. Problems of robust analysis and guaranteed costs are analyzed in details for continuous and discrete-time uncertain systems. Several numerical examples are presented illustrating the efficiency of the proposed methods in terms of accuracy and computational burden when compared to other methods from the literature.

Key-words: Uncertain linear systems. Polytopic domains. Robust stability. H-2 and H-infinity norms. Homogeneous polynomial Lyapunov functions. Linear matrix inequalities. Finsler's Lemma. Pólya's Theorem. Convergent relaxations.

# Lista de Figuras

1.1	Politopo de matrizes com cinco vértices. A matriz genérica $\sum_{i=1}^5 \alpha_i A_i$ é gerada a partir de uma combinação convexa dos vértices do politopo $\mathcal{A}$ . . . . .	8
2.1	Maior valor de $\lambda_{max}(T_\ell^S)$ dado por (2.7), $\ell = 1, \dots, J(d+3)$ em função de $d = 0, \dots, 6$ para a análise de estabilidade do sistema politópico descrito pelos vértices (2.14) (caso Schur). . . . .	31
2.2	Maior valor de $\lambda_{max}(T_\ell^H)$ , dado por (2.4), $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ , em função de $d = 0, \dots, 4$ para a análise de estabilidade do sistema politópico descrito pelos vértices (2.15)-(2.16) (caso Hurwitz). . . . .	32
3.1	Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema 3.1 para afirmar a estabilidade de 50 politopos estáveis variando $g$ de um até cinco para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ . As cinco barras horizontais agrupadas significam a variação de $g = \{1, \dots, 5\}$ . . .	47
3.2	Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema 3.2 para afirmar a estabilidade de 50 politopos estáveis variando $g$ de um até cinco para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ . As cinco barras horizontais agrupadas significam a variação de $g = \{1, \dots, 5\}$ . . .	47
3.3	Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema 3.3 para afirmar a estabilidade de 50 politopos estáveis variando $g$ de um até cinco para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ . As cinco barras horizontais agrupadas significam a variação de $g = \{1, \dots, 5\}$ . . .	48
3.4	Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema 3.4 para afirmar a estabilidade de 50 politopos estáveis variando $g$ de um até cinco para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ . As cinco barras horizontais agrupadas significam a variação de $g = \{1, \dots, 5\}$ . . .	48
4.1	Sistema massa-mola apresentado em [Iwa96]. . . . .	64
4.2	Tempo médio em segundos requerido pelo par (T4.4,T4.6) para fornecer custos garantidos $\mathcal{H}_2$ de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis variando $g$ de um até três para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ . As três barras verticais agrupadas significam a variação de $g = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	65

4.3	Tempo médio em segundos requerido pelo par (T4.5,T4.8) para fornecer custos garantidos $\mathcal{H}_2$ de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis variando $g$ de um até três para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ . As três barras verticais agrupadas significam a variação de $g = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	66
4.4	Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema T4.1 para fornecer custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis variando $g$ de um até três para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ . As três barras verticais agrupadas significam a variação de $g = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	66
4.5	Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema T4.3 para fornecer custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis variando $g$ de um até três para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ . As três barras verticais agrupadas significam a variação de $g = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	66
5.1	Complexidade numérica associada às condições do Teorema 5.2 usando $\log_{10}(K^3L)$ para $d \in [0, 20]$ , $g \in [1, 15]$ e considerando um sistema politópico a tempo contínuo com $n = 3$ , $N = 3$ . . . . .	79
5.2	Maior valor de $\lambda_{max}(T_\ell)$ , dado por (5.2), $\ell = 1, \dots, J(d+g+1)$ , $g = 2$ , em função de $d = 0, \dots, 9$ para a análise de estabilidade do sistema politópico do Exemplo 1. . . . .	81

# Lista de Tabelas

2.1	Número de politopos identificados como estáveis pelo Teorema 2.3 (T2.3) e pelo Teorema 2.5 (T2.5), para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ (mil politopos estáveis foram gerados para cada par $n, N$ ) como uma função de $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (caso Hurwitz).	29
2.2	Número de politopos identificados como estáveis pelo Teorema 2.4 (T2.4) e pelo Teorema 2.5 (T2.5), para $n = 2, 3, 4$ e $N = 2, 3, 4$ (mil politopos estáveis foram gerados para cada par $n, N$ ) como uma função de $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (caso Schur).	29
2.3	Evolução do maior autovalor de $T_\ell^S$ em (2.7), $\ell = 1, \dots, J(d+3)$ , para $d = 0, \dots, 6$ na análise de estabilidade do sistema politópico descrito pelos vértices (2.14) (caso Schur).	30
3.1	Número de variáveis escalares $K$ e número de linhas de LMIs $L$ associadas aos Teoremas 3.1 (T3.1), 3.2 (T3.2), 3.3 (T3.3), 3.4 (T3.4).	38
3.2	Comparação dos resultados dos Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) com os resultados apresentados em [CGTV05b], as condições LMIs de [Bli04a] e com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o segundo exemplo em [CGTV05b] ( $n = 3$ e $N = 2$ ). Uma busca exaustiva no espaço de parâmetros foi usada para computar o maior valor possível de $\hat{\rho} = 3.551$ .	42
3.3	Comparação dos resultados dos Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) com os resultados apresentados em [CGTV05b], as condições LMIs de [Bli04a] e com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o segundo exemplo em [CGTV05b] ( $n = 3$ , $N = 2$ e $\hat{\rho} = 3.551$ ) em termos de esforço computacional. $K$ é o número de variáveis escalares, $L$ é o número de linhas de LMIs. O método em [HAPL04] foi implementado por meio do <i>GloptiPoly</i> , que usa o SeDuMi internamente. O símbolo – indica que o método de [HAPL04] não pode ser resolvido por [GNLC95].	42

3.4	<p>Comparação dos resultados dos Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) com os resultados apresentados em [CGTV05b], com as condições LMIs de [Bli04a] e a abordagem polinomial de [HAPL04] para o terceiro exemplo em [CGTV05b] (<math>n = 4</math> e <math>N = 3</math>). Uma malha fina foi usada para calcular o maior valor possível de <math>\hat{\rho} = 2.2237</math>. . . . .</p>	43
3.5	<p>Comparação dos resultados dos Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) com os resultados apresentados em [CGTV05b], as condições LMIs de [Bli04a] e com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o terceiro exemplo de [CGTV05b] (<math>n = 4</math>, <math>N = 3</math> e <math>\hat{\rho} = 2.2237</math>) em termos de esforço computacional. <math>K</math> é o número de variáveis escalares, <math>L</math> é o número de linhas de LMIs. O método em [HAPL04] foi implementado por meio do <i>GloptiPoly</i>, que usa o SeDuMi internamente. . . . .</p>	43
3.6	<p>Comparação dos resultados dos Teoremas 3.3 (T3.3) e 3.4 (T3.4) com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o quarto exemplo em [HAPL04] com <math>n = 3</math> e <math>N = 4</math> (forma politópica) ou <math>N = 2</math> (forma afim). Um procedimento de busca exaustiva foi usado para calcular o maior valor possível de <math>\hat{\rho} = 0.38409</math>. . . . .</p>	44
3.7	<p>Comparação dos resultados dos Teoremas 3.3 (T3.3) e 3.4 (T3.4) com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o quarto exemplo de [HAPL04] com <math>n = 3</math> e <math>N = 4</math> (forma politópica) ou <math>N = 2</math> (forma afim) e <math>\hat{\rho} = 0.38409</math> em termos de esforço computacional. . . . .</p>	44
3.8	<p>Comparação dos resultados dos Teoremas 3.3 (T3.3) e 3.4 (T3.4) com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o exemplo 5 com dimensão <math>n = 3</math> e <math>N = 3</math> em termos de esforço computacional. <math>K</math> é o número de variáveis escalares, <math>L</math> é número de linhas de LMI. . . . .</p>	45
3.9	<p>Número de politopos identificados como Hurwitz estáveis para (número de estados) <math>n = 2, 3, 4</math> e (número de vértices) <math>N = 2, 3, 4</math> usando os Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) para <math>g = 1, 2, 3, 4, 5</math>. . . . .</p>	46
3.10	<p>Número de politopos identificados como Schur estáveis para (número de estados) <math>n = 2, 3, 4</math> e (número de vértices) <math>N = 2, 3, 4</math> usando os Teoremas 3.3 (T3.3) e 3.4 (T3.4) para <math>g = 1, 2, 3, 4, 5</math>. . . . .</p>	46
3.11	<p>Para o Teorema 3.1 (T3.1), a tabela mostra o número de politopos identificados como estáveis para cada grau <math>g</math>, <math>g = \{1, 2, 3, 4, 5\}</math> de um conjunto de mil politopos estáveis para para <math>n = 3</math>, <math>N = 3</math> (caso contínuo). O tempo computacional (em segundos) usando [GNLC95] e [Stu99] para cada grau é apresentado assim como o tempo total. O mesmo procedimento é aplicado para os outros métodos, incluindo a análise de um conjunto de mil politopos Schur estáveis com dimensão <math>n = 2</math>, <math>N = 3</math>. Somente o tempo requerido para resolver as LMIs foi considerado. . . . .</p>	49

4.1	Valores de $K$ (número de variáveis escalares) e $L$ (número de linhas de LMIs) em função de $n$ (estados), $m$ (entradas), $p$ (saídas), $N$ (número de vértices) e $J(g)$ para os Teoremas 4.1 (T4.1), 4.2 (T4.2), 4.3 (T4.3), 4.4 (T4.4), 4.5 (T4.5), 4.6 (T4.6), 4.7 (T4.7) e 4.8 (T4.8). $J(g)$ é dado por $(N + g - 1)!/(g!(N - 1)!)$ . . . . .	60
4.2	Custos garantidos para o sistema incerto a tempo discreto do Exemplo 1, computados usando-se T4.2 e T4.3 (caso $\mathcal{H}_\infty$ ) e (T4.4,T4.7) e (T4.5,T4.8) (caso $\mathcal{H}_2$ ) para $(A_i, B_i, C_i)$ (sistema original - O) e $(A'_i, C'_i, B'_i)$ (sistema dual - D). A norma $\mathcal{H}_\infty$ de pior caso é $\ H\ _{\infty p.c.} = 86.77$ e a norma $\mathcal{H}_2$ de pior caso é $\ H\ _{2p.c.} = 7.79$ . O símbolo ‘-’ significa que nenhuma solução factível foi encontrada. . . . .	61
4.3	Tempos de execução (em segundos) fornecidos pelos Teoremas propostos para o Exemplo 1. (O) denota o sistema original e (D) o sistema dual. . . . .	61
4.4	Custos garantidos para o sistema incerto a tempo contínuo do Exemplo 2, computados usando T4.1 e T4.3 (caso $\mathcal{H}_\infty$ ) e (T4.4,T4.6) e (T4.5,T4.8) (caso $\mathcal{H}_2$ ) para $(A_i, B_i, C_i)$ (sistema original - O) e $(A'_i, C'_i, B'_i)$ (sistema dual - D). A norma $\mathcal{H}_\infty$ de pior caso é $\ H\ _{\infty p.c.} = 0.4391$ e norma $\mathcal{H}_2$ de pior caso é $\ H\ _{2p.c.} = 1.6585$ . . . . .	62
4.5	Custos garantidos $\mathcal{H}_2$ e os tempos de execução correspondentes para o sistema incerto a tempo contínuo do Exemplo 3 usando os pares (T4.4,T4.6) e (T4.5,T4.8) para $(A_i, B_i, C_i)$ (sistema original - O) e $(A'_i, C'_i, B'_i)$ (sistema dual - D). A norma $\mathcal{H}_2$ de pior caso é $\ H\ _{2p.c.} = 2.4482$ . . . . .	63
4.6	Custos garantidos para o sistema a tempo contínuo do Exemplo 4, calculados pelos métodos em (dO $\mathcal{H}_\infty$ ), T4.1 e T4.3 (caso $\mathcal{H}_\infty$ ) e pelos métodos em (dO $\mathcal{H}_2$ ), (T4.4,T4.6) e (T4.5,T4.8) (caso $\mathcal{H}_2$ ) para $(A_i, B_i, C_i)$ (sistema original - O) e $(A'_i, C'_i, B'_i)$ (sistema dual - D). A norma $\mathcal{H}_\infty$ de pior caso é $\ H\ _{\infty p.c.} = 1.000$ e a norma $\mathcal{H}_2$ de pior caso é $\ H\ _{2p.c.} = 0.488$ . . . . .	64
4.7	Tempos de execução (em segundos) exigidos pelos teoremas propostos neste capítulo e pelos métodos de dO $\mathcal{H}_2$ e dO $\mathcal{H}_\infty$ para o Exemplo 4. (O) denota o sistema original e (D) o sistema dual. . . . .	65
5.1	Número de variáveis escalares $K$ e número de linhas de LMIs $L$ nos Teoremas 5.2 (T5.2), 5.3 (T5.3), 5.4 (T5.4) e 5.5 (T5.5). . . . .	78
5.2	Evolução dos máximos autovalores das LMIs dadas em (5.2), $\ell = 1, \dots, J(d + g + 1)$ , para $g = 2$ e $d = \{0, \dots, 9\}$ na análise de estabilidade do Exemplo 1. . . . .	80
5.3	Comparação dos resultados dos Teoremas 5.2 e 5.4 com [CGTV05b] e [HAPL04] para o segundo exemplo em [CGTV05b] ( $n = 3$ , $N = 2$ e $\hat{\rho} = 3.551$ ) em termos de esforço computacional. . . . .	81
5.4	Comparação dos resultados dos Teoremas 5.3 e 5.4 com os métodos apresentados em [CGTV05b] e [HAPL04] para o Exemplo 3 ( $n = 2$ , $N = 4$ ) em termos de esforço computacional. $K$ é o número de variáveis escalares, $L$ é o número de linhas de LMIs. . . . .	82

5.5	Comparação dos resultados dos Teoremas 5.2 e 5.4 com [CGTV05b] e [HAPL04] para o Exemplo 4 ( $n = 3$ , $N = 4$ ) em termos de esforço computacional. $K$ é o número de variáveis escalares, $L$ é o número de linhas de LMIs. . . . .	83
5.6	Comparação dos resultados do Teorema 5.5 com o método de [CGTV05a] para os exemplos [CGTV05a, Exemplo 1] ( $\kappa = 3.5$ ) e [CGTV05a, Exemplo 2] em termos de esforço computacional. $K$ é o número de variáveis escalares, $L$ é o número de linhas de LMIs. As normas $\mathcal{H}_\infty$ de pior caso para [CGTV05a, Exemplo 1] e [CGTV05a, Exemplo 2] são $\gamma_1^* = 6.201$ e $\gamma_2^* = 1.215$ , respectivamente. O método proposto em [CGTV05a] não foi implementado. . . . .	83

# Lista de Acrônimos e Notação

LMI	Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)
LFT	Linear Fractional Transformation (transformação linear fracionária)
LPV	Linear Parameter-Varying (linear com parâmetros variantes)
IQC	Integral Quadratic Constraint (restrição de integral quadrática)
*	indica bloco simétrico nas LMIs
$L > 0$	indica que a matriz $L$ é simétrica definida positiva
$L \geq 0$	indica que a matriz $L$ é simétrica semi-definida positiva
$A$	notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)
$A'$	( $'$ ), pós-posto a um vetor ou matriz, indica a operação de transposição
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_+$	conjunto dos números inteiros não negativos
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais (incluindo o zero)
$\mathbf{I}$	matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbf{0}$	matriz de zeros de dimensão apropriada
$g!$	símbolo ( $!$ ), denota fatorial, isto é, $g! = g(g-1) \cdots (2)(1)$ para $g \in \mathbb{N}$
$N$	especialmente utilizada para denotar o número de vértices de um polítopo
$n$	especialmente utilizada para representar a ordem uma matriz quadrada
$\Delta_N$	simplex unitário de $N$ variáveis
$\alpha$	especialmente utilizada para representar as incertezas de um sistema

# Sumário

<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos Preliminares e Definições</b>	<b>5</b>
1.1 Fundamentos e resultados preliminares . . . . .	5
1.1.1 Estabilidade . . . . .	6
1.1.2 Norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .	7
1.1.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	9
1.1.4 Lema de Finsler . . . . .	10
1.1.5 Sistemas precisamente conhecidos e LMIs . . . . .	13
1.1.6 LMIs dependentes de parâmetros . . . . .	14
1.2 Notações e Definições . . . . .	15
<b>2 Funções de Lyapunov Afins nos Parâmetros</b>	<b>19</b>
2.1 Introdução . . . . .	19
2.2 Preliminares . . . . .	21
2.3 Resultados Principais . . . . .	23
2.3.1 Caso Hurwitz . . . . .	23
2.3.2 Caso Schur . . . . .	25
2.3.3 Estudo de caso: $N = 2$ . . . . .	26
2.3.4 Condições Estendidas . . . . .	27
2.4 Experimentos Numéricos . . . . .	28
2.5 Conclusão . . . . .	31
<b>3 Funções de Lyapunov Polinomiais Homogêneas</b>	<b>33</b>
3.1 Introdução . . . . .	33
3.2 Preliminares . . . . .	35
3.3 Resultados Principais . . . . .	35
3.4 Complexidade Numérica . . . . .	38
3.5 Métodos da Literatura . . . . .	39

3.6	Exemplos Numéricos . . . . .	40
3.7	Conclusão . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Aplicações em Cômputo de Normas <math>\mathcal{H}_2</math> e <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>51</b>
4.1	Introdução . . . . .	51
4.2	Preliminares . . . . .	52
4.2.1	Norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .	53
4.2.2	Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	54
4.3	Resultados Principais . . . . .	54
4.3.1	Condições para custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	54
4.3.2	Condições para custos garantidos $\mathcal{H}_2$ . . . . .	56
4.4	Complexidade . . . . .	59
4.5	Experimentos Numéricos . . . . .	60
4.6	Conclusão . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Relaxações LMIs Exatas</b>	<b>69</b>
5.1	Introdução . . . . .	69
5.2	Preliminares . . . . .	70
5.3	Resultados Principais . . . . .	71
5.3.1	Estabilidade Robusta . . . . .	71
5.3.2	Estudo de Caso: $N = 2, g = 2$ . . . . .	76
5.4	Restrições Integrais Quadráticas . . . . .	77
5.5	Complexidade Numérica . . . . .	78
5.6	Experimentos Numéricos . . . . .	79
5.7	Observações Finais . . . . .	84
5.8	Conclusão . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>89</b>

# Introdução Geral

Robustez é um assunto que se faz presente em diversas áreas do conhecimento como ciências sociais, ciências físicas e engenharia, e há tempos é considerada um requisito indispensável em qualquer projeto, como por exemplo no estudo de modelos econômicos [EA56, AM58, AF74], projeto de controladores para sistemas dinâmicos [DFT92, SIG98], roteamento e controle de congestionamento em redes de alta velocidade [GAN91, KMT98], etc. Todo projeto é baseado em um modelo adotado pelo projetista, e os modelos fornecem, por natureza, somente uma descrição aproximada dos fenômenos que representam. Assim, uma questão relevante que surge é qual a qualidade de um determinado projeto se o modelo no qual está baseado não é acurado. Em outras palavras: até que ponto um projeto pode ter sucesso frente às imprecisões inerentes ao modelo adotado. Projetos que obtêm sucesso nessas questões dentro de certas especificações são chamados robustos. Em termos gerais, um projeto é robusto se suas características nominais (isto é, as características fornecidas para um modelo nominal), tais como estabilidade e desempenho, são preservadas mediante a presença de incertezas não modeladas ou modeladas parcialmente.

Por um lado, nota-se a escassez de ferramentas numéricas para tratar modelos matemáticos não-lineares, capazes de representar fenômenos reais de forma mais precisa. Por outro lado, percebem-se os intensos progressos da modelagem linear, que incorpora cada vez mais informações sobre a dinâmica que não pode ser modelada, como não-linearidades, presença de ruídos, retardos, etc. Essas informações são na maioria das vezes consideradas na forma de incertezas, que podem ser modeladas de diversas maneiras, como transformação linear fracionária (do inglês, *Linear Fractional Transformation* — *LFT*), representações nas formas afim, politópica, limitada por norma, etc.

A análise robusta e a síntese de controladores para sistemas lineares que dependem de parâmetros incertos são problemas importantes em teoria de controle e têm atraído grande atenção por parte dos pesquisadores da área. Dentre as técnicas propostas para abordar tais problemas, vale destacar a análise  $\mu$  [PD93], [PDB93], abordagens baseadas no Teorema de Kharitonov [Kha78], [BCK95], método frequenciais [NT73] e métodos baseados na teoria de Lyapunov. Esses últimos tiveram um grande desenvolvimento nos anos recentes, em correspondência direta com o desenvolvimento dos métodos de otimização baseados em desigualdades matriciais

lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs).

Na última década, as LMIs emergiram como uma ferramenta simples e eficiente para abordar problemas de controle que parecem difíceis, senão impossíveis, de resolver analiticamente. Embora a história das LMIs remonte aos anos quarenta, com uma ênfase maior em controle nos anos sessenta (Kalman, Yakubovich e Popov) do século XX, somente recentemente métodos numéricos foram desenvolvidos para resolver as LMIs de maneira eficiente [NN94]. Atualmente, vários resolvidores de LMIs (SeDuMi [Stu99], SDPT3 [TTT99], CSDP [Bor99], DSDP [BY01], KYPD [Wal03], LMIRank [OHM04], MAXDET [VBW98], PENNON [KS03], SDPA [YFK03], SDPLR [BM03], SDPLab [FKG06], etc.) e interfaces de programação (LMILab [GNLC95], SeDuMi Interface [LPH02], YALMIP [Löf04], etc.) estão disponíveis, permitindo uma programação simples e consistente de problemas gerais envolvendo LMIs.

Impulsionada pela grande disponibilidade de resolvidores e interfaces de programação, a pesquisa em controle robusto tem experienciado uma mudança de paradigma — ao invés de buscar a solução analítica, o objetivo é reformular um dado problema na forma de existência de solução de uma LMI, ou otimizar um funcional sob restrições LMIs. A importância e impacto dessa abordagem podem ser comprovados observando-se nas edições dos últimos dez anos de congressos da área de controle, como o *IEEE Conference on Decision and Control* ou o *American Control Conference*, o grande número de artigos que usam LMIs.

Os métodos de Lyapunov baseados no conceito de estabilidade quadrática [Bar85] são os precursores da abordagem LMI no contexto de análise e projeto de controladores de sistemas lineares com incertezas politópicas. A essência desses métodos é a formulação de problemas em termos da existência de uma função de Lyapunov quadrática que independe da incerteza, gerando um conjunto de LMIs que devem ser verificadas somente nos vértices do politopo. Em função do conservadorismo dos métodos baseados na estabilidade quadrática, métodos baseados em funções de Lyapunov que dependem explicitamente da incerteza apareceram na seqüência. A evolução dos métodos após a estabilidade quadrática é revisada em detalhes na introdução dos próximos capítulos.

Esta tese aborda o problema de solução de LMIs dependentes de parâmetros, isto é, LMIs cujas matrizes solução dependem de parâmetros. São tratadas em particular LMIs cujos parâmetros pertencem ao simplex unitário (isto é, parâmetros reais maiores ou iguais a zero cuja soma é igual à unidade), que surgem naturalmente em problemas de análise de robustez de sistemas lineares incertos com descrição politópica. Mais especificamente, é proposta uma metodologia para a solução do problema de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos na forma politópica e algumas extensões também são apresentadas para o cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . A apresentação obedece a seguinte organização:

## Estrutura da Tese

- **Capítulo 1:** Neste capítulo é apresentada uma breve revisão de conceitos de estabilidade

e cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares incertos na forma politópica pela teoria de Lyapunov. Também é apresentada uma metodologia para estender as condições clássicas pela utilização do Lema de Finsler. Finalmente, é apresentada a notação necessária para parametrizar a metodologia proposta de maneira que a programação seja sistemática.

- **Capítulo 2:** Neste capítulo é estudada a solução de uma LMI dependente de parâmetros resultante da análise de estabilidade robusta de um sistema politópico por meio de uma função de Lyapunov que possui uma dependência afim nos parâmetros. O principal resultado apresentado neste capítulo fundamenta-se no Teorema de Pólya, que sustenta a prova de convergência dos métodos apresentados nos capítulos posteriores. Sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto são abordados.
- **Capítulo 3:** O objetivo deste capítulo é apresentar condições de estabilidade robusta baseadas em uma nova parametrização de funções de Lyapunov quadráticas no estado e que apresentam uma dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros. É mostrado que essa classe de funções apresenta resultados cada vez menos conservadores à medida que o grau da função de Lyapunov aumenta. São apresentadas simulações numéricas exaustivas e diversas comparações com outros métodos da literatura.
- **Capítulo 4:** As condições do Capítulo 3 são estendidas para tratar o problema de cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares incertos na forma politópica. As funções de Lyapunov polinomiais homogêneas são empregadas de forma sistemática, fornecendo custos garantidos cada vez menos conservadores à medida que o grau aumenta. Vários exemplos da literatura são apresentados na seção de exemplos numéricos, ilustrando a eficácia das condições propostas quando comparadas com outros métodos.
- **Capítulo 5:** Este capítulo tem como principal contribuição um resultado que mostra que qualquer LMI dependente de parâmetros que pertencem ao simplex unitário pode ser completamente caracterizada por soluções polinomiais homogêneas de grau arbitrário. Esse resultado é usado para generalizar as condições apresentadas nos capítulos anteriores e garantir a caracterização completa dos problemas de estabilidade robusta por meio de uma seqüência de relaxações LMIs. A generalidade e abrangência dos resultados são comprovadas através da aplicação das condições em restrições integrais quadráticas (em inglês, *Integral Quadratic Constraints* — IQCs). Experimentos numéricos também são apresentados.
- **Capítulo 6:** Apresenta as conclusões finais da tese e algumas perspectivas de trabalhos futuros.

# Conceitos Preliminares e Definições

A principal função deste capítulo é introduzir os problemas que são estudados ao longo da tese, isto é, análise de estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos bem como índices de desempenho dados pelas normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Basicamente, são apresentadas as condições que permitem caracterizar esses problemas de forma exata por meio da teoria de Lyapunov, muito embora as condições sejam de dimensão infinita. A essência dos resultados desta tese é justamente apresentar uma metodologia que permite a solução desses problemas, transformando as condições de dimensão infinita em uma seqüência de condições suficientes de dimensão finita, que tendem às condições necessárias e suficientes à medida que o número de LMIs e de variáveis envolvidas aumenta. Também é feita uma revisão da técnica que permite estender as condições clássicas por meio do Lema de Finsler. A utilidade dessas condições estendidas é discutida nos capítulos posteriores. A notação necessária para construir a metodologia proposta é apresentada no final do capítulo, com detalhes e exemplos para que a leitura dos capítulos posteriores seja facilitada.

## 1.1 Fundamentos e resultados preliminares

Considere o sistema linear incerto invariante no tempo descrito pelas equações de estado

$$\begin{cases} \delta[x(t)] &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)w(t), & x(0) = x_0 = 0 \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)w(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

nas quais  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $w \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de distúrbios e  $y \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas. Para simplificar a notação, a dependência do tempo das variáveis  $x$ ,  $w$  e  $y$  será omitida em geral, sendo usada somente quando for conveniente. As matrizes do sistema  $(A, B, C, D)(\alpha)$  não são precisamente conhecidas mas pertencem a um domínio politópico  $\mathcal{S}$  dado por

$$\mathcal{S} \triangleq \left\{ (A, B, C, D)(\alpha) : (A, B, C, D)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_i, C_i, D_i), \quad \alpha \in \Delta_N \right\} \quad (1.2)$$

$$\Delta_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\} \quad (1.3)$$

Note que  $\Delta_N$  (usualmente chamado de simplex unitário) é um conjunto compacto e que qualquer quádrupla incerta  $(A, B, C, D)(\alpha)$  pode ser escrita como a combinação convexa dos vértices  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . O valor do parâmetro  $\alpha$  é desconhecido e não varia no tempo. As matrizes dos vértices do sistema são reais e com dimensões  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . O símbolo  $\delta[\cdot]$  representa a derivada em relação ao tempo para sistemas contínuos e o operador avanço para sistemas discretos no tempo. Para um  $\alpha$  fixo, a função de transferência da entrada  $w$  para a saída  $y$  é dada por

$$H_{wy}(s) = C(\alpha)(s\mathbf{I} - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) + D(\alpha) \quad (1.4)$$

com a variável frequência  $s$  substituída pelo operador deslocamento  $z$  no caso discreto. Para fins de cômputo de norma  $\mathcal{H}_2$  considera-se o politopo  $\mathcal{S}$  com  $D_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , denotado por  $\mathcal{S}^+$ . Quando o problema em estudo apenas considerar a estabilidade do sistema autônomo, utiliza-se o seguinte sistema

$$\delta[x] = A(\alpha)x, \quad x(0) = x_0; \quad A(\alpha) \in \mathcal{A} \quad (1.5)$$

com

$$\mathcal{A} \triangleq \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad \alpha \in \Delta_N \right\} \quad (1.6)$$

### 1.1.1 Estabilidade

Considere o sistema linear incerto a tempo contínuo representado pela equação diferencial dada em (1.5) (no caso,  $\dot{x} = A(\alpha)x$ ). Defina a forma quadrática  $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$v(x, \alpha) \triangleq x'P(\alpha)x \quad (1.7)$$

com  $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Claramente, se  $v(x, \alpha) > 0$ ,  $\forall \alpha \in \Delta_N, \forall x \neq 0$ , então a matriz  $P(\alpha)$  é definida positiva. O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1.5) é (globalmente) assintoticamente estável se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \forall x(0) = x_0 \quad (1.8)$$

sendo  $x(t)$  a solução da equação diferencial (1.5). Se (1.8) é verificada, então o sistema (1.5) é considerado assintoticamente estável. Uma condição necessária e suficiente para que o sistema (1.5) seja assintoticamente estável é que a matriz  $A(\alpha)$  seja Hurwitz, isto é, que todos os

autovalores da matriz  $A(\alpha) \in \mathcal{A}$  possuam parte real estritamente negativa. De acordo com a teoria de estabilidade de Lyapunov, o sistema (1.5) é assintoticamente estável se existir  $v(x, \alpha) > 0$ ,  $\forall \alpha \in \Delta_N, \forall x \neq 0$  tal que

$$\dot{v}(x, \alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_N, \forall \dot{x} = A(\alpha)x, \quad x \neq 0 \quad (1.9)$$

Isto é, se existir  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  tal que a derivada da forma quadrática (1.7) seja negativa ao longo de todas as trajetórias do sistema (1.5). Reciprocamente, se o sistema linear (1.5) é assintoticamente estável então sempre existe uma matriz  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  que torna (1.9) factível. Substituindo a restrição dinâmica (1.5) em (1.9), tem-se a seguinte condição equivalente

$$\dot{v}(x, \alpha) = x'(A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha))x < 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_N, \forall x \neq 0 \quad (1.10)$$

Assim, a estabilidade assintótica de (1.5) pode ser verificada pelo seguinte lema.

**Lema 1.1 (Lyapunov)** *O sistema (1.5) é Hurwitz assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que*

$$P(\alpha) > 0, \quad A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_N \quad (1.11)$$

As condições de estabilidade para sistemas a tempo discreto, isto é, todos os autovalores da matriz  $A(\alpha) \in \mathcal{A}$  com valor absoluto estritamente menor do que um, podem ser obtidas de maneira análoga e são apresentadas no próximo lema.

**Lema 1.2** *O sistema (1.5) é Schur assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que*

$$P(\alpha) > 0, \quad A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_N \quad (1.12)$$

O aspecto mais relevante nos Lemas 1.1 e 1.2 é que as desigualdades matriciais apresentadas devem ser verificadas em todos os infinitos pontos do domínio  $\Delta_N$  por uma matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$  que, a princípio, não possui uma estrutura particular em termos do vetor de parâmetros  $\alpha \in \Delta_N$ .

Considere o politopo de matrizes com cinco vértices ilustrado na Figura 1.1. A matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha)$  deve ser tal que para qualquer matriz genérica dentro do domínio, dada por  $\sum_{i=1}^5 \alpha_i A_i$ , as desigualdades dos Lemas 1.1 e 1.2 sejam verificadas. Ou seja, as desigualdades precisam ser verificadas nos infinitos pontos do domínio  $\Delta_N$ .

### 1.1.2 Norma $\mathcal{H}_2$

A norma  $\mathcal{H}_2$  (para um  $\alpha$  fixo) da função de transferência  $H_{wy}$  é definida como:

$$\| H_{wy} \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(H_{wy}(j\omega)^* H_{wy}(j\omega)) d\omega \quad (1.13)$$

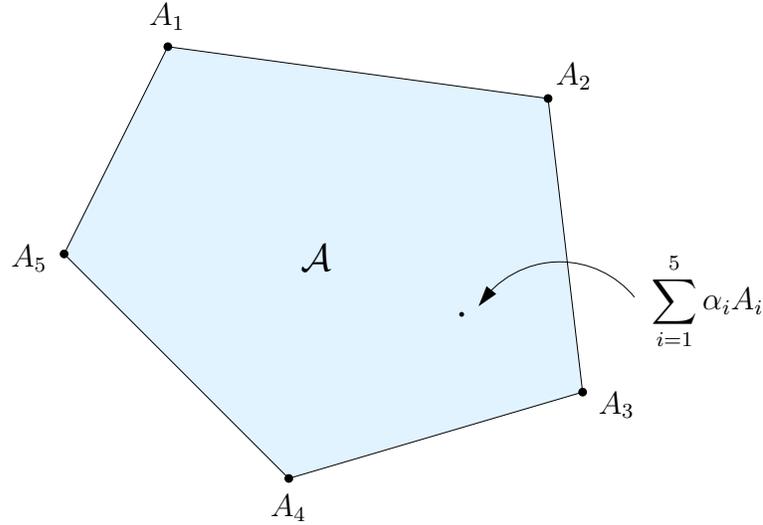


Figura 1.1: Polítipo de matrizes com cinco vértices. A matriz genérica  $\sum_{i=1}^5 \alpha_i A_i$  é gerada a partir de uma combinação convexa dos vértices do polítipo  $\mathcal{A}$ .

para sistemas a tempo contínuo e

$$\|H_{wy}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}(H_{wy}(e^{j\omega})^* H_{wy}(e^{j\omega})) d\omega \quad (1.14)$$

para sistemas a tempo discreto [DGKF89]. A norma  $\mathcal{H}_2$  também pode ser calculada no domínio do tempo usando o Teorema de Parseval, ou por meio dos gramianos de controlabilidade e observabilidade. Assumindo que a matriz  $A(\alpha)$  é estável  $\forall \alpha \in \Delta_N$ , para um  $\alpha$  fixo tem-se

$$\|H_{wy}\|_2^2 = \text{Tr}(C(\alpha)L_c(\alpha)C(\alpha)') = \text{Tr}(B(\alpha)'L_o(\alpha)B(\alpha)) \quad (1.15)$$

em que  $L_c(\alpha)$  e  $L_o(\alpha)$  são os gramianos de controlabilidade e observabilidade, respectivamente, que podem ser obtidos a partir das soluções das seguintes equações matriciais

$$A(\alpha)L_c(\alpha) + L_c(\alpha)A(\alpha)' + B(\alpha)B(\alpha)' = 0 \quad (1.16)$$

$$A(\alpha)'L_o(\alpha) + L_o(\alpha)A(\alpha) + C(\alpha)'C(\alpha) = 0 \quad (1.17)$$

para o caso contínuo ou

$$A(\alpha)L_c(\alpha)A(\alpha)' - L_c(\alpha) + B(\alpha)B(\alpha)' = 0 \quad (1.18)$$

$$A(\alpha)'L_o(\alpha)A(\alpha) - L_o(\alpha) + C(\alpha)'C(\alpha) = 0 \quad (1.19)$$

para o caso discreto.

No caso de sistemas incertos, o objetivo é determinar um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$  para qualquer  $\alpha$  pertencente ao domínio  $\Delta_N$ , isto é, um custo garantido  $\gamma$  tal que

$$\gamma \geq \|H_{wy}\|_2, \quad \forall (A, B, C)(\alpha) \in \mathcal{S}^+ \quad (1.20)$$

com o custo garantido ótimo  $\mathcal{H}_2$  dado por

$$\gamma^* = \min \gamma \quad (1.21)$$

tal que (1.20) é verificada. Usando este procedimento, pode-se enunciar o seguinte problema de otimização para determinar o custo garantido ótimo  $\mathcal{H}_2$  para o sistema dado em (1.1) (resolvido para todo  $\alpha$ )

$$\gamma^{*2} = \min \text{Tr}(T), \quad (1.22)$$

tal que

$$T > C(\alpha)P(\alpha)C(\alpha)' \quad (1.23)$$

com

$$A(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha)' + B(\alpha)B(\alpha)' < 0 \quad (1.24)$$

para o caso contínuo ou

$$A(\alpha)P(\alpha)A(\alpha)' - P(\alpha) + B(\alpha)B(\alpha)' < 0 \quad (1.25)$$

para o caso discreto, sendo que  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  é uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros tal que  $P(\alpha) \geq L_c(\alpha)$  ( $A(\alpha)$  é estável para todo  $\alpha \in \Delta_N$ ) com  $L_c(\alpha)$  solução de (1.16) ou (1.18). A desigualdade (1.23) garante que  $\text{Tr}(T) \geq \text{Tr}(C(\alpha)P(\alpha)C(\alpha)')$  e assim  $\gamma^*$  assume o valor do custo garantido ótimo  $\mathcal{H}_2$  dado por (1.21). Um problema de otimização equivalente poderia ser obtido substituindo  $(A, B, C)(\alpha)$  (sistema original) por  $(A', C', B')(\alpha)$  (sistema dual<sup>1</sup>), fornecendo o mesmo custo garantido ótimo  $\gamma^*$  em função do gramiano de observabilidade  $L_o(\alpha)$ . Note que essa equivalência é válida somente se todas as desigualdades do problema de otimização puderem ser resolvidas de forma exata, isto é, sem introduzir conservadorismo. Por exemplo, se for arbitrada uma estrutura para a matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$ , os resultados com o sistema dual podem ser melhores do que os com o sistema original, ou vice-versa.

### 1.1.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Assumindo que  $A(\alpha)$  é assintoticamente estável para todo  $\alpha \in \Delta_N$ , a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência  $H_{wy}$  pode ser computada por meio do *bounded-real lemma* [BEFB94]:

**Lema 1.3** *||  $H_{wy}$  ||<sub>∞</sub> <  $\zeta$  se e somente se existir uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  tal que*

$$\left[ \begin{array}{cc} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + \zeta^{-2}C(\alpha)'C(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) + \zeta^{-2}C(\alpha)'D(\alpha) \\ \star & \zeta^{-2}D(\alpha)'D(\alpha) - \mathbf{I} \end{array} \right] < 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_N \quad (1.26)$$

---

<sup>1</sup>O termo “dual” não tem correlação nenhuma com a formulação dual de um problema de otimização, sendo usado aqui para denotar a função de transferência transposta do sistema.

para o caso contínuo ou

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) + \zeta^{-2}C(\alpha)'C(\alpha) & A(\alpha)'P(\alpha)B(\alpha) + \zeta^{-2}C(\alpha)'D(\alpha) \\ \star & \zeta^{-2}D(\alpha)'D(\alpha) + B(\alpha)'P(\alpha)B(\alpha) - \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_N \quad (1.27)$$

para o caso discreto.

Assim como no caso da norma  $\mathcal{H}_2$ , na análise de desempenho de um sistema incerto o objetivo é determinar um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  válido para qualquer  $\alpha$  pertencente ao domínio  $\Delta_N$ , isto é, um custo garantido  $\zeta$  tal que

$$\zeta \geq \|H_{wy}\|_\infty, \quad \forall (A, B, C, D)(\alpha) \in \mathcal{S} \quad (1.28)$$

com o custo garantido ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  dado por

$$\zeta^* = \min \zeta \quad (1.29)$$

tal que (1.28) é verificada. Assim, pode-se enunciar o seguinte problema de otimização usado para determinar o custo garantido ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema dado em (1.1) com  $(A, B, C, D)(\alpha) \in \mathcal{S}$  (resolvido para todo  $\alpha$ )

$$\zeta^{*2} = \min \mu \quad (1.30)$$

tal que

$$M_c(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) & C(\alpha)' \\ \star & -\mathbf{I} & D(\alpha)' \\ \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.31)$$

para o caso contínuo ou

$$M_d(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} -P(\alpha) & A(\alpha)'P(\alpha) & 0 & C(\alpha)' \\ \star & -P(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) & 0 \\ \star & \star & -\mathbf{I} & D(\alpha)' \\ \star & \star & \star & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.32)$$

para o caso discreto, sendo  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros a ser determinada. Novamente, problemas de otimização equivalentes podem ser obtidos substituindo-se  $(A, B, C, D)(\alpha)$  (sistema original) por  $(A', C', B', D')(\alpha)$  (sistema dual), uma vez que  $\|H_{wy}\|_\infty = \|H'_{wy}\|_\infty$  para um  $\alpha$  fixo. Note que as desigualdades (1.31) e (1.32) exploram o complemento de Schur nas desigualdades (1.26) e (1.27), respectivamente.

### 1.1.4 Lema de Finsler

O seguinte lema<sup>2</sup> é originalmente atribuído a Paul Finsler (1894–1970), nascido na Alemanha (veja também [Uhl79]).

---

<sup>2</sup>Na versão original as matrizes não dependem de  $\alpha$ . Aqui esta consideração é acrescentada para melhor caracterizar os resultados da tese, sem comprometer a essência do resultado do lema.

**Lema 1.4 (Finsler)** *Considere  $\xi \in \mathbb{R}^r$ ,  $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{t \times r}$  :  $\text{rank}(\mathcal{B}(\alpha)) < r$ ,  $\forall \alpha \in \Delta_N$ . As seguintes condições são equivalentes:*

$$(a) \xi' Q(\alpha) \xi < 0, \quad \forall \xi \neq 0 : \mathcal{B}(\alpha) \xi = 0;$$

$$(b) \mathcal{B}(\alpha)^{\perp'} Q(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^{\perp} < 0, \quad \text{sendo que } \mathcal{B}(\alpha)^{\perp} \text{ é tal que } \mathcal{B}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^{\perp} = 0 \text{ e } \mathcal{B}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' + \mathcal{B}(\alpha)^{\perp'} \mathcal{B}(\alpha)^{\perp} > 0;$$

$$(c) \exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R} : Q(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{B}(\alpha) < 0;$$

$$(d) \exists X(\alpha) \in \mathbb{R}^{r \times t} : Q(\alpha) + X(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)' X(\alpha)' < 0;$$

A prova do Lema 1.4 pode ser encontrada, por exemplo, em [dOS01]. A condição (a) no Lema 1.4 é uma forma quadrática com restrições, sendo que o vetor  $\xi \in \mathbb{R}^r$  pertence ao espaço nulo de  $\mathcal{B}(\alpha)$ . Ou seja, o vetor  $\xi$  pode ser parametrizado como  $\xi = \mathcal{B}(\alpha)^{\perp} y$ ,  $y \in \mathbb{R}^s$ ,  $s \triangleq \text{rank}(\mathcal{B}(\alpha)) < r$ . Substituindo essa informação explicitamente na condição (a), tem-se a condição (b), que é uma forma quadrática irrestrita no  $\mathbb{R}^s$ . As condições (c) e (d) fornecem formas quadráticas irrestritas no espaço original  $\mathbb{R}^r$ , sendo que as restrições são consideradas por meio da inserção de multiplicadores. Em (c) o multiplicador é um escalar enquanto que em (d) o multiplicador é uma matriz. A referência [Ham99] identifica explicitamente  $\mu(\alpha)$  como um multiplicador de Lagrange. Na seqüência mostra-se como o Lema 1.4 pode ser utilizado para estender as condições clássicas de estabilidade apresentadas anteriormente.

Considere novamente o conjunto de desigualdades com restrições dinâmicas (1.9) obtidas da teoria de estabilidade de Lyapunov para o sistema (1.5). Defina a forma quadrática  $\dot{v} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\dot{v}(x, \dot{x}, \alpha) \triangleq x' P(\alpha) \dot{x} + \dot{x}' P(\alpha) x \quad (1.33)$$

que é a derivada no tempo da forma quadrática (1.7) expressa como função de  $x$  e  $\dot{x}$ . Neste caso,  $\dot{x}$  não é substituída explicitamente em (1.33) e o seguinte conjunto é construído

$$\dot{v}(x, \dot{x}, \alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_N, \forall \dot{x} = A(\alpha)x, \quad (x, \dot{x}) \neq 0 \quad (1.34)$$

Por meio do Lema 1.4, pode-se caracterizar a estabilidade de  $A(\alpha)$  em função de (1.34) ao invés de (1.9). Esta substituição é possível mesmo que (1.9) exija somente  $x \neq 0$  enquanto (1.34) exige  $(x, \dot{x}) \neq 0$ . Uma discussão sobre este aspecto pode ser encontrada em [BEFB94, pp. 62–63].

Como a condição  $v(x, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta_N, \forall x \neq 0$  pode ser estabelecida por meio da restrição  $P(\alpha) > 0$ , reescrevendo (1.34) na forma

$$\begin{pmatrix} x' & \dot{x}' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} < 0, \quad \forall [A(\alpha) \quad -\mathbf{I}] \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (1.35)$$

percebe-se que o Lema 1.4 pode ser aplicado em (1.34).

**Lema 1.5** *As seguintes condições são equivalentes,  $\forall \alpha \in \Delta_N$ :*

(a) *O sistema linear dado em (1.5) é Hurwitz assintoticamente estável.*

(b)  $\exists P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P(\alpha) > 0$  e  $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$

(c)  $\exists P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}$  tais que  $P(\alpha) > 0$  e

$$\begin{bmatrix} -\mu(\alpha)A(\alpha)'A(\alpha) & \mu(\alpha)A(\alpha)' + P(\alpha) \\ \star & -\mu(\alpha)\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.36)$$

(d)  $\exists P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_1(\alpha), X_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que  $P(\alpha) > 0$  e

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)'X_1(\alpha)' + X_1(\alpha)A(\alpha) & A(\alpha)'X_2(\alpha) - X_1(\alpha) + P(\alpha) \\ \star & -X_2(\alpha) - X_2(\alpha)' \end{bmatrix} < 0 \quad (1.37)$$

**Prova:** O item (a) pode ser estabelecido como  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$  e (1.34). O Lema 1.4 pode ser usado com

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(\alpha) = [A(\alpha) \quad -\mathbf{I}], \quad (1.38)$$

$$X(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

e (1.34) para gerar os itens (b), (c) e (d). ■

Note que a condição (b) do Lema 1.5 é exatamente a condição de estabilidade fornecida pelo Lema 1.1. De maneira análoga, obtêm-se novas condições baseadas no Lema de Finsler para o caso discreto (estabilidade Schur).

**Lema 1.6** *As seguintes condições são equivalentes,  $\forall \alpha \in \Delta_N$*

(a) *O sistema linear dado em (1.5) é Schur assintoticamente estável.*

(b)  $\exists P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P(\alpha) > 0$  e  $A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0$

(c)  $\exists P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}$  tais que  $P(\alpha) > 0$  e

$$\begin{bmatrix} -\mu(\alpha)A(\alpha)'A(\alpha) - P(\alpha) & \mu(\alpha)A(\alpha)' \\ \star & P(\alpha) - \mu(\alpha)\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.40)$$

(d)  $\exists P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_1(\alpha), X_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que  $P(\alpha) > 0$  e

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)'X_1(\alpha)' + X_1(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) & A(\alpha)'X_2(\alpha) - X_1(\alpha) \\ \star & P(\alpha) - X_2(\alpha) - X_2(\alpha)' \end{bmatrix} < 0 \quad (1.41)$$

Observam-se aplicações do Lema de Finsler em diversos contextos da literatura de controle. Uma de suas aplicações é a eliminação de variáveis de projeto em desigualdades matriciais. Nesse contexto, o Lema de Finsler é conhecido como o Lema da Eliminação. A maioria das aplicações parte da condição (d) para a condição (b), eliminando a variável (multiplicador)  $X(\alpha)$ . Outro contexto importante em que o Lema de Finsler mostrou grande utilidade é na síntese de controladores robustos por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Nesse caso, o controlador é sintetizado em função dos multiplicadores e não em termos da função de Lyapunov [dOBG99]. Um caso especial da condição (d) do Lema de Finsler serve de base para o livro [SIG98], que mostra como diversos problemas de controle podem ser resolvidos por meio do Lema de Finsler.

Finalmente, note que a equivalência entre as condições do Lema de Finsler só pode ser garantida se as desigualdades apresentadas forem verificadas para todo  $\alpha \in \Delta_N$ , isto é, a verificação deve ser feita por meio de condições necessárias e suficientes. Caso a verificação seja feita por meio de condições suficientes, impondo-se estruturas particulares para as matrizes  $P(\alpha)$ ,  $\mathcal{X}(\alpha)$  e  $\mu(\alpha)$ , as condições (c) e (d) podem oferecer testes menos conservadores em função das variáveis extras  $\mu(\alpha)$  e  $X(\alpha)$ . As condições estendidas pelo Lema de Finsler para o cômputo das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  são apresentadas no Capítulo 4.

### 1.1.5 Sistemas precisamente conhecidos e LMIs

Apesar das desigualdades matriciais apresentadas anteriormente serem convexas em termos das variáveis dos problemas e fornecerem condições necessárias e suficientes para a análise de estabilidade bem como para o cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares incertos na forma politópica, as condições são de dimensão infinita, pois precisam ser testadas em todos os pontos do domínio, ou seja, não são tratáveis numericamente. Assumindo que o sistema em estudo seja precisamente conhecido ( $N = 1$ ), isto é,  $\mathcal{S} = (A, B, C, D)$ , a matriz de Lyapunov torna-se independente dos parâmetros nas condições apresentadas, isto é,  $P(\alpha) = P = P'$  e as condições resultantes são finitas e podem ser colocadas na forma do seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^r} c'x \\ \text{tal que } & F(x) \triangleq F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_r F_r > 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

sendo que  $c \in \mathbb{R}^r$ ,  $F_i = F'_i \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $i = 1, \dots, r$  e  $x \in \mathbb{R}^r$  são as variáveis de decisão do problema. Este tipo de problema de otimização é conhecido como programação semidefinida (do inglês, *Semidefinite Programming* — *SDP*) e tem a convexidade como principal aspecto, permitindo uma solução numérica eficiente por meio de pacotes computacionais especializados. Frequentemente, a programação semidefinida é usada para resolver o seguinte problema de factibilidade: encontre  $x \in \mathbb{R}^r$  tal que  $F(x) > 0$ . A desigualdade  $F(x) > 0$  é linear ou, mais especificamente, é afim nas variáveis de decisão  $x$ , e assim esse problema de factibilidade

é usualmente chamado na literatura de desigualdade matricial linear (LMI). Para o caso de sistemas precisamente conhecidos, as condições apresentadas nas seções anteriores são bem conhecidas e amplamente difundidas na literatura e, dentre as ferramentas numéricas existentes para a resolução de uma LMI, destacam-se o algoritmo de pontos interiores [GN97] implementado no *LMI Control Toolbox* [GNLC95] e a técnica de otimização sobre cones homogêneos duais implementada no pacote de domínio público SeDuMi [Stu99], que é utilizado dentro da plataforma MATLAB. Outros aspectos teóricos importantes da programação semidefinida podem ser encontrados no tutorial [VB96].

### 1.1.6 LMIs dependentes de parâmetros

Para sistemas lineares incertos, as desigualdades matriciais apresentadas nas seções anteriores podem ser colocadas em uma representação mais geral dada por:  $\forall \alpha \in \Omega_N, \exists p \in \mathbb{R}^M$  tal que

$$G(p, \alpha) \triangleq G_0(\alpha) + p_1 G_1(\alpha) + \cdots + p_M G_M(\alpha) > 0 \quad (1.43)$$

sendo  $\Omega_N$  um subconjunto compacto do  $\mathbb{R}^N$ . As matrizes  $G_0(\cdot), G_1(\cdot), \dots, G_M(\cdot)$  são funções definidas em  $\Omega_N$  e assumem valores no conjunto das matrizes simétricas de dimensão  $\mathbb{R}^{n \times n}$  (para as desigualdades de análise de estabilidade). De fato, (1.43) representa uma forma geral de um problema de factibilidade para uma LMI dependente de parâmetros, no caso, dependente do vetor de parâmetros incertos  $\alpha \in \Omega_N$ . As variáveis  $p_i, i = 1, \dots, M$  (a serem determinadas) surgem a partir de uma escolha particular para a estrutura da matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha) = P(\alpha)'$ , sendo esta a primeira fonte possível de suficiência introduzida na avaliação da factibilidade das desigualdades matriciais. Por outro lado, a escolha particular de uma estrutura para a matriz de Lyapunov permite que a LMI dependente de parâmetros possa ser resolvida por meio de um conjunto finito de LMIs que independem dos parâmetros. A escolha mais simples e usual é  $P(\alpha) = P$ , gerando os resultados baseados na estabilidade quadrática, que permitiram uma caracterização convexa para vários problemas de análise, síntese e filtragem robusta. Em função do alto grau de conservadorismo dos resultados baseados na estabilidade quadrática, principalmente no caso de parâmetros incertos invariantes no tempo, a próxima estrutura investigada na literatura foi a afim nos parâmetros, isto é,  $P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$ . Uma discussão mais completa desta estrutura é feita no Capítulo 2. A principal contribuição desta tese é caracterizar as soluções de (1.43) de forma exata quando  $\Omega_N = \Delta_N$ , isto é, por meio de uma estrutura para a função de Lyapunov sem que haja perda de generalidade quando  $\Omega_N = \Delta_N$ . No Capítulo 5 é mostrado que (1.43) pode ser completamente caracterizada por meio da estrutura polinomial homogênea para a função de Lyapunov  $P(\alpha)$ . A próxima seção apresenta notações e definições para a que parametrização dos testes de estabilidade e o cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por meio de matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas possa ser feita de forma sistemática.

## 1.2 Notações e Definições

Considere que a função de Lyapunov  $P(\alpha)$  possua uma dependência afim nos parâmetros incertos  $\alpha \in \Delta_N$  e é representada por

$$P(\alpha) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_N P_N \quad (1.44)$$

sendo que  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  são matrizes simétricas com  $n(n+1)/2$  variáveis escalares a serem determinadas. Note que as matrizes de Lyapunov  $P$  podem ser denotadas de maneira simples por meio do acréscimo do subíndice  $i$ . Para o caso de uma dependência polinomial de grau maior que um, essa notação não é adequada. Por exemplo, considere que  $P(\alpha)$  possui uma dependência polinomial homogênea de grau dois para um sistema com dois parâmetros incertos ( $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]'$ ). Em princípio, a escolha usual seria

$$P(\alpha) = \alpha_1^2 P_1 + \alpha_1 \alpha_2 P_2 + \alpha_2^2 P_3 \quad (1.45)$$

Entretanto, essa notação não permite a generalização necessária para os métodos propostos na tese. Por outro lado, a notação

$$P_2(\alpha) = \alpha_1^2 P_{20} + \alpha_1 \alpha_2 P_{11} + \alpha_2^2 P_{02} \quad (1.46)$$

para esse mesmo exemplo, pode ser expressa de forma sistemática, ou seja, fazendo que os índices das matrizes  $P$ 's acompanhem os índices de seus respectivos monômios. Observe também que o grau da função é colocado de forma explícita como subíndice de  $P(\alpha)$ .

### Exemplos:

(a)  $N = 2, g = 3$ :  $P_3(\alpha) = \alpha_2^3 P_{03} + \alpha_1 \alpha_2^2 P_{12} + \alpha_1^2 \alpha_2 P_{21} + \alpha_1^3 P_{30}$ .

(b)  $N = 3, g = 1$ :  $P_1(\alpha) = \alpha_3 P_{001} + \alpha_2 P_{010} + \alpha_1 P_{100}$ .

(c)  $N = 3, g = 2$ :  $P_2(\alpha) = \alpha_3^2 P_{002} + \alpha_2 \alpha_3 P_{011} + \alpha_2^2 P_{020} + \alpha_1 \alpha_3 P_{101} + \alpha_1 \alpha_2 P_{110} + \alpha_1^2 P_{200}$ .

Note, por exemplo, que no item (c) os subíndices ( $N$ -uplas) das  $P$ 's podem ser agrupados em um conjunto dado por  $\{002, 011, 020, 101, 110, 200\}$ . Doravante esse conjunto será denotado por  $\mathcal{K}(g)$ , que é definido formalmente como o conjunto das  $N$ -uplas obtidas como todas as possíveis combinações de  $k_1 k_2 \dots k_N$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $i = 1, \dots, N$  tal que  $k_1 + k_2 + \dots + k_N = g$ . O número de  $N$ -uplas em  $\mathcal{K}(g)$  é dado por

$$J(g) = \frac{(N+g-1)!}{g!(N-1)!} \quad (1.47)$$

O elemento  $\mathcal{K}_\ell(g)$  é a  $\ell$ -ésima  $N$ -upla de  $\mathcal{K}(g)$ , que, por questões de padrão, são ordenadas lexicamente,  $\ell = 1, \dots, J(g)$ . Exemplos:

(a)  $N = 2$  e  $g = 5$ :  $J(5) = 6$  e  $\mathcal{K}(5) = \{05, 14, 23, 32, 41, 50\}$ , com  $\mathcal{K}_1(5) = 05$ ,  $\mathcal{K}_2(5) = 14$ , etc.

(b)  $N = 3$  e  $g = 2$ :  $J(2) = 6$  e  $\mathcal{K}(2) = \{002, 011, 020, 101, 110, 200\}$ , com  $\mathcal{K}_3(2) = 020$ ,  $\mathcal{K}_6(2) = 200$ , etc.

(c)  $N = 4$  e  $g = 1$ :  $J(1) = 4$  e  $\mathcal{K}(2) = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$ , com  $\mathcal{K}_1(1) = 0001$ ,  $\mathcal{K}_2(1) = 0010$ , etc.

Com o conjunto  $\mathcal{K}(g)$ , pode-se definir de maneira genérica a matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$  com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário  $g$  nos parâmetros incertos  $\alpha \in \Delta_N$  como

$$P_g(\alpha) \triangleq \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} P_{\mathcal{K}_j(g)} \quad ; \quad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_j(g) \quad (1.48)$$

Freqüentemente, também será necessário tratar o produto de polinômios homogêneos, por exemplo:

$$P_g(\alpha)A(\alpha), \quad A(\alpha) \in \mathcal{A} \quad (1.49)$$

Esse produto resulta em um polinômio homogêneo com grau  $g + 1$ , pois  $A(\alpha) \in \mathcal{A}$  é afim nos parâmetros. A parametrização para esse produto necessita de mais definições.

A soma e a subtração entre duas  $N$ -uplas  $\mathcal{K}_i(g)$  e  $\mathcal{K}_j(g)$  são feitas elemento a elemento:

$$\mathcal{K}_4(5) + \mathcal{K}_3(5) = 32 + 23 = 55$$

Cada elemento  $\mathcal{K}_\ell(g)$  define um conjunto  $\mathcal{G}$  obtido a partir da seguinte operação: para um dado  $d \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{K}_\ell(g) - \mathcal{K}_r(d)$ ,  $r = 1, \dots, J(d)$ . Claramente, quando  $d = 0$ ,  $\mathcal{G} = \{\mathcal{K}_\ell(g)\}$ . As  $N$ -uplas  $\mathcal{G}_r$ ,  $r = 1, \dots, J(d)$  com  $k_i$ 's não negativos são usadas para construir o procedimento sistemático para geração de LMIs. As  $N$ -uplas com  $k_i$ 's negativos são descartadas. Associado a cada  $N$ -upla  $\mathcal{G}_r$ , define-se:

- (1) o conjunto  $\mathcal{I}_r$  com elementos dados por subconjuntos de  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , com  $k_i$ 's diferentes de zero.
- (2)  $\mathcal{G}_r^i$  como sendo igual a  $\mathcal{G}_r$  mas com  $k_i > 0$  substituído por  $k_i - 1$ . Note que  $\mathcal{G}_r^i$  calculado a partir de  $\mathcal{G} = \mathcal{K}_\ell(g + d + 1) - \mathcal{K}_r(d)$ ,  $r = 1, \dots, J(d)$  produz  $N$ -uplas pertencentes a  $\mathcal{K}(g)$ . Em particular, a função de  $\mathcal{G}_r^i$  é indexar produtos do tipo (1.49).
- (3) o coeficiente  $\mathcal{C}_r$  dado por  $d! / (k_1! k_2! \cdots k_N!)$  com  $k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_r(d)$ .

### Exemplos:

- (a)  $N = 2$ ,  $g = 5$  e  $d = 2$ :  $J(5) = 6$ ,  $\mathcal{K}(5) = \{05, 14, 23, 32, 41, 50\}$ ,  $J(2) = 3$ ,  $\mathcal{K}(2) = \{02, 11, 20\}$ . Para  $\ell = 1$  (a primeira  $N$ -upla de  $\mathcal{K}(5)$ ), tem-se  $\mathcal{K}_1(5) - \mathcal{K}_r(2)$ ,  $r = 1, \dots, 3$ , que fornece  $\mathcal{G} = \{05\} - \{02, 11, 20\} = \{03, \diamond 4, \diamond 5\}$ , sendo que  $\diamond$  indica um inteiro negativo. As  $N$ -uplas com  $\diamond$  ( $r = 2, 3$ ) são ignoradas na geração das LMIs. O conjunto  $\mathcal{I}_1$  é dado por  $\{2\}$ ,  $\mathcal{G}_1^2 = \{02\}$  e  $\mathcal{C}_1 = 2! / (0! 2!) = 1$ . Para  $\ell = 4$  (quarta  $N$ -upla),  $\mathcal{K}_4(5) - \mathcal{K}_r(2)$ ,  $r =$

$1, \dots, 3$  que fornece  $\mathcal{G} = \{32\} - \{02, 11, 20\} = \{30, 21, 12\}$ . Os conjuntos associados são  $\mathcal{I}_1 = \{1\}$ ,  $\mathcal{I}_2 = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{I}_3 = \{1, 2\}$ , os elementos de  $\mathcal{G}$  são  $\mathcal{G}_1^1 = \{20\}$ ,  $\mathcal{G}_2^1 = \{11\}$ ,  $\mathcal{G}_2^2 = \{20\}$ ,  $\mathcal{G}_3^1 = \{02\}$ ,  $\mathcal{G}_3^2 = \{11\}$ , e  $\mathcal{C}_1 = 2!/(0!2!) = 1$ ,  $\mathcal{C}_2 = 2!/(1!1!) = 2$ ,  $\mathcal{C}_3 = 2!/(2!0!) = 1$ . As outras  $N$ -uplas  $\mathcal{K}_\ell(g)$  são geradas de maneira análoga.

(b)  $N = 3$ ,  $g = 3$  e  $d = 1$ :  $J(3) = 10$ ,  $\mathcal{K}(3) = \{003, 012, 021, 030, 102, 111, 120, 201, 210, 300\}$ ,  $J(1) = 3$ ,  $\mathcal{K}(2) = \{001, 010, 100\}$ . Para  $\ell = 3$  (a terceira  $N$ -upla de  $\mathcal{K}(3)$ ), tem-se  $\mathcal{K}_3(3) - \mathcal{K}_r(1)$ ,  $r = 1, \dots, 3$ , que fornece  $\mathcal{G} = \{021\} - \{001, 010, 100\} = \{020, 011, \diamond 21\}$ . Os conjuntos associados são  $\mathcal{I}_1 = \{2\}$ ,  $\mathcal{I}_2 = \{2, 3\}$ , os elementos de  $\mathcal{G}$  são  $\mathcal{G}_1^2 = \{010\}$ ,  $\mathcal{G}_2^2 = \{001\}$ ,  $\mathcal{G}_2^3 = \{010\}$ , e  $\mathcal{C}_1 = 1!/(0!0!1!) = 1$ ,  $\mathcal{C}_2 = 1!/(0!1!0!) = 1$ ,

A razão para a geração do conjunto  $\mathcal{G}$  em função dos conjuntos  $\mathcal{K}_\ell(g)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g)$  e  $\mathcal{K}_r(d)$ ,  $r = 1, \dots, J(d)$  é para parametrização de, por exemplo:

$$(\alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_N)^d P_g(\alpha) A(\alpha), \quad A(\alpha) \in \mathcal{A} \quad (1.50)$$

nesse caso, o número de monômios é parametrizado como função de  $g$  e  $d$ . Note que no caso  $d = 0$ , o conjunto  $\mathcal{G}$  é a própria  $N$ -upla  $\mathcal{K}_\ell(g)$  e os itens 1, 2 e 3 definidos para o conjunto  $\mathcal{G}$  aplicam-se diretamente sobre a  $N$ -upla  $\mathcal{K}_\ell(g)$ . Esse caso em particular é usado nos Capítulos 3 e 4, que também necessitam da definição de um coeficiente escalar  $\beta_\ell^i(g+1)$  dado por

$$\beta_\ell^i(g+1) = g!/(k_1!k_2! \dots k_N!), \text{ com } k_1k_2 \dots k_N = \mathcal{K}_\ell^i(g+1)$$

Especialmente para o Capítulo 2, no qual são consideradas apenas funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros ( $g = 1$ ), é necessário definir três coeficientes, dados por

$$\mathcal{C}_i^\ell(d, a) = \begin{cases} \frac{d!}{k_1! \dots (k_i - a)! \dots k_N!} & , \text{ se } k_i - a \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_{ij}^\ell(d, a, b) = \begin{cases} \frac{d!}{k_1! \dots (k_i - a)! \dots (k_j - b)! \dots k_N!} & , \text{ se } \begin{cases} k_i - a \in \mathbb{Z}_+ \\ k_j - b \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij\ell}^\ell(d, a, b, c) = \\ = \begin{cases} \frac{d!}{k_1! \dots (k_i - a)! \dots (k_j - b)! \dots (k_\ell - c)! \dots k_N!} & , \text{ se } \begin{cases} k_i - a \in \mathbb{Z}_+ \\ k_j - b \in \mathbb{Z}_+ \\ k_\ell - c \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

com todos dependendo de  $k_1k_2 \dots k_n = \mathcal{K}_\ell(d)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(d)$ .

A notação apresentada é necessária para parametrizar testes de estabilidade robusta e cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  baseados em funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau arbitrário e em relaxações baseadas no Teorema de Pólya, apresentadas no Capítulo 2. Com

a parametrização, a metodologia proposta é baseada em condições LMIs, geradas da maneira sistemática a partir de parâmetros arbitrados pelo usuário. O ponto principal da notação é a geração do conjunto  $\mathcal{K}(g)$ , ou seja, a geração do conjunto solução da igualdade

$$k_1 + k_2 + \dots + k_N = g, \quad g \in \mathbb{Z}_+, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.51)$$

Este problema pode ser resolvido a partir de um algoritmo recursivo, que pode ser encontrado no livro [NW78]. Para aumentar a eficiência computacional, os conjuntos soluções para valores de  $N$  e  $g$  podem ser calculados previamente e armazenados em arquivo.

## Plataforma Computacional

Todos os experimentos numéricos apresentados nos próximos capítulos foram realizados em um computador pessoal com as seguintes características:

Processador:	Pentium IV 2.6 GHz
Memória RAM:	512 MB
Sistema Operacional:	Windows 2000
MATLAB:	Versão 7.0.1

## Funções de Lyapunov Afins nos Parâmetros

A proposta deste capítulo é fornecer uma caracterização para LMIs dependentes de parâmetros ligadas à estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos por meio de funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros. Como é mostrado nos capítulos posteriores, as funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros não são capazes de caracterizar completamente as soluções de uma LMI dependente de parâmetros. Entretanto, caracterizar de forma completa os resultados baseados nessas funções é um resultado importante pois essa classe de funções ainda continua sendo usada na literatura recente em diversos contextos da teoria de controle. A primeira seção deste capítulo faz uma revisão dos resultados mais importantes baseados em funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros no contexto de estabilidade e síntese de controladores para sistemas lineares incertos.

### 2.1 Introdução

Testes de estabilidade robusta para sistemas lineares incertos baseados na estabilidade quadrática, isto é, por meio do uso da função quadrática  $v(x) = x'Px$  sendo  $P$  uma matriz simétrica definida positiva que independe dos parâmetros incertos, são formulados em termos de um conjunto de LMIs definidas somente nos vértices do politopo. A existência de uma solução factível garante a estabilidade de todo o domínio de incertezas. Em contraste com a simplicidade na programação dos testes ([GNLC95], [Stu99]), o grau de conservadorismo dos resultados aumenta drasticamente à medida que a ordem do sistema e o número de vértices aumentam (veja a análise numérica feita em [LMRP02], [dOOL<sup>+</sup>02a]), principalmente no contexto de sistemas invariantes no tempo. O fato de a matriz de Lyapunov independe dos parâmetros torna os resultados da estabilidade quadrática mais adequados para tratar sistemas variantes no tempo sujeitos a taxas de variações paramétricas arbitrárias.

Abordagens baseadas em funções de Lyapunov que dependem linearmente dos parâmetros incertos  $v(x) = x'P(\alpha)x$ , sendo que  $P(\alpha)$  depende de forma afim de  $\alpha$ , surgiram com o objetivo de fornecer resultados menos conservadores do que a estabilidade quadrática. O principal desafio

era, assim como no caso da estabilidade quadrática, obter testes convexos baseados em um número finito de LMIs definidas apenas nos vértices do domínio de incertezas. De modo geral, a dificuldade encontrada foi como tratar de maneira convexa produtos entre as matrizes do sistema e a matriz de Lyapunov, sendo que ambas dependem de forma afim nos parâmetros incertos. Essa dificuldade foi pela primeira vez solucionada em [GAC96], [FAG96], por meio de restrições adicionais sobre a matriz de Lyapunov (multiconvexidade). Essa abordagem também permite tratar incertezas variantes no tempo bem como computar custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$ .

Uma importante contribuição para a estabilidade robusta de sistemas politópicos surgiu em [GdOH98]. Pela primeira vez, a construção da função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros usada para garantir a estabilidade robusta pôde ser feita de maneira sistemática, a partir de um teste de factibilidade de LMIs definidas nos vértices do domínio incerto. Desse teste obtém-se um conjunto de matrizes de Lyapunov cuja combinação convexa constitui a função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros. A essência desse resultado é o desacoplamento entre a matriz dinâmica do sistema e a matriz de Lyapunov por meio da inserção de variáveis adicionais. Apesar desse resultado ter sido obtido no contexto de positividade real de sistemas, uma caracterização similar pode ser obtida por meio do Lema de Finsler [dOS01]. Resultados equivalentes para o caso discreto foram apresentados em [dOGH99], sendo que esses permitem a extensão imediata das condições de análise para a síntese de controladores [dOBG99] e filtros robustos [dOGB02]. Em [PABB00], os resultados de [GdOH98] e [dOGH99] foram generalizados para tratarem qualquer região convexa ( $\mathcal{D}$ -estabilidade) no plano complexo.

Explorando a estrutura algébrica da condição de Lyapunov aplicada a uma matriz genérica dentro do politopo, condições suficientes para a existência de uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros que garante a estabilidade do politopo são apresentadas em [RP01] (caso Schur) e [RP02] (caso Hurwitz). As condições em [RP01], [RP02] são, em geral, menos conservadoras que as condições apresentadas em [dOGH99], [GdOH98], [PABB00], e todas contêm a estabilidade quadrática como caso particular. Uma comparação numérica entre essas condições pode ser encontrada em [dOOL<sup>+</sup>02b] e um resultado mais geral pode ser encontrado em [LP03], que apresenta resultados menos conservadores introduzindo variáveis extras que também dependem linearmente dos parâmetros.

O objetivo deste capítulo é investigar a estabilidade Hurwitz (Schur) de um sistema linear politópico por meio da existência de uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros. Usando o resultado de [RP02] como ponto de partida, é definida uma família de LMIs de precisão crescente que fornece resultados cada vez menos conservadores. O número de variáveis de decisão permanece constante, sendo determinado pelo número de vértices do politopo e pela ordem das matrizes, e o número de LMIs aumenta a cada passo. Sempre que uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros existe, a necessidade é atingida através do procedimento de relaxação convergente. As condições propostas podem ser vistas como uma extensão do Teorema de Pólya aplicado a funções polinomiais com coeficientes matriciais [HLP52]. Essa estratégia foi usada em [Sch05] para análise de estabilidade de sistemas na forma LFT e

em outros contextos envolvendo programação copositiva [dKP02].

## 2.2 Preliminares

Considere o sistema linear politópico dado em (1.5). O objetivo é obter condições necessárias e suficientes computacionalmente verificáveis de forma que uma matriz de Lyapunov simétrica definida positiva com dependência afim nos parâmetros

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \quad \alpha \in \Delta_N \quad (2.1)$$

com  $P_i = P_i' > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  a determinar, garanta a estabilidade Hurwitz (Schur) de  $\mathcal{A}$  por meio do uso da função de Lyapunov  $v(x) = x'P(\alpha)x$ .

Assim como nos Lemas 1.1 e 1.2, os próximos lemas fornecem condições necessárias e suficientes para estabilidade Hurwitz (Schur) de  $\mathcal{A}$  em termos de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros genérica  $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ , resultando também em problemas de otimização de dimensão infinita.

**Lema 2.1** *O sistema (1.5) é Hurwitz estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que uma das seguintes condições equivalentes seja verificada  $\forall \alpha \in \Delta_N$ :*

- (a)  $\Gamma(\alpha) \triangleq A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$
- (b)  $\Gamma_d(\alpha) \triangleq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d (A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha)) < 0, \quad \forall d \in \mathbb{Z}_+$

A condição (a) é equivalente ao Lema 1.1. Para qualquer  $\alpha \in \Delta_N$  fixo e para todos  $d \in \mathbb{Z}_+$ , a equivalência entre (a) e (b) é imediata uma vez que  $\alpha \in \Delta_N$  implica  $(\sum_{i=1}^N \alpha_i)^d = 1$  para todo  $d \in \mathbb{Z}_+$ . Note que  $P(\alpha)$  no Lema 2.1 não possui uma estrutura particular. O objetivo é investigar condições necessárias e suficientes para a existência de  $P(\alpha)$  dado por (2.1), uma classe de funções que pode fornecer resultados menos conservadores para a análise da estabilidade robusta de  $\mathcal{A}$  do que a estabilidade quadrática. As propriedades algébricas da condição (b) do Lema 2.1, que define uma família de polinômios cujo número de monômios é parametrizado por  $d$ , são usadas para fornecer uma caracterização completa da existência de  $P(\alpha)$  dada por (2.1) garantindo a estabilidade Hurwitz de  $\mathcal{A}$  em termos de um número finito de LMIs formuladas somente nos vértices de  $\mathcal{A}$ .

Um lema similar pode ser apresentado para a estabilidade Schur de  $\mathcal{A}$ .

**Lema 2.2** *O sistema (1.5) é Schur estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que uma das seguintes condições equivalentes seja verificada  $\forall \alpha \in \Delta_N$ :*

- (a)  $A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0$
- (b)  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d (A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha)) < 0, \quad \forall d \in \mathbb{Z}_+$

Os mesmos comentários do Lema 2.1 também se aplicam ao Lema 2.2.

Diversos resultados surgiram na literatura fornecendo condições suficientes para a existência de  $P(\alpha)$  dada por (2.1) satisfazendo as condições (a) dos Lemas 2.1 (caso Hurwitz) e 2.2 (caso Schur) [GdOH98, dOGH99, PABB00, RP01, RP02]. Na maioria dos casos, as condições são simples de serem testadas, sendo formuladas em termos de LMIs definidas nos vértices de  $\mathcal{A}$  mas nada é dito a respeito da necessidade das condições. Este capítulo é dedicado a resolver esse problema, explorando as propriedades algébricas da condição (b) dos Lemas 2.1 e 2.2 para construir uma família de condições LMIs que convergem para a necessidade à medida que  $d$  aumenta. O próximo teorema é instrumental para a obtenção dos resultados propostos e é conhecido na literatura como Teorema de Pólya [HLP52].

**Teorema 2.1** *Seja  $F(\alpha) \triangleq F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  um polinômio homogêneo real que é positivo  $\forall \alpha \in \Delta_N$ . Então para um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande, o produto*

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d F(\alpha)$$

*tem todos os seus coeficientes estritamente positivos.*

Atualmente, a maneira mais precisa para se determinar um limitante para o valor de  $d$  pode ser encontrada em [PR01], reproduzida no contexto desta tese no próximo teorema.

**Teorema 2.2** *Seja*

$$F(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{J(g)} \mathcal{C}^\ell(g) \beta_\ell \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_N^{k_N}$$

*com*

$$\mathcal{C}^\ell(g) = g! / (k_1! \dots k_N!); \quad k_1 k_2 \dots k_N = \mathcal{K}_\ell(g)$$

*uma função polinomial homogênea de grau  $g$  que é positiva no domínio  $\Delta_N$ . O polinômio*

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d F(\alpha)$$

*tem todos os seus coeficientes estritamente positivos se*

$$d > \frac{g(g-1)L}{2\kappa} - g$$

*sendo*

$$L = \max\{|\beta_\ell|, \ell = 1, \dots, J(g)\}, \quad \kappa = \min_{\alpha \in \Delta_N} F(\alpha)$$

Na próxima seção são apresentadas, como principais contribuições deste capítulo, condições de estabilidade robusta que são suficientes e, para um  $d$  suficientemente grande, necessárias. A prova da necessidade é baseada na generalização do Teorema 2.1 para o caso de polinômios com coeficientes matriciais.

## 2.3 Resultados Principais

Nesta seção, é mostrado como construir uma seqüência de condições LMIs de precisão crescente de tal forma que uma função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros  $P(\alpha)$  dada por (2.1) garanta a estabilidade Hurwitz (Schur) de  $\mathcal{A}$ .

### 2.3.1 Caso Hurwitz

Note que, quando  $P(\alpha)$  é dada por (2.1), o lado esquerdo da condição (a) no Lema 2.1 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) = A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \underbrace{(A_i'P_i + P_iA_i)}_{T_{H_i}} \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \underbrace{(A_i'P_j + P_jA_i + A_j'P_i + P_iA_j)}_{T_{H_{ij}}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Uma condição simples que garante a estabilidade Hurwitz de  $\mathcal{A}$  é obtida impondo que  $P_i = P_i' > 0$  deve ser tal que  $T_{H_i} < 0$  e  $T_{H_{ij}} < 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = i + 1, \dots, N$ . Claramente, essa é uma condição suficiente para garantir que  $P(\alpha)$  dada por (2.1) é uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros que satisfaz as condições do Lema 2.1 (a). Esta idéia, primeiramente explorada em [RP02], introduz algum conservadorismo, uma vez que, embora a existência de  $P_i = P_i' > 0$  tal que  $T_{H_i} < 0$  seja uma condição necessária para a estabilidade de  $\mathcal{A}$  (os vértices devem ser estáveis),  $T_{H_{ij}}$  não necessariamente precisa ser definida negativa para garantir que a soma geral seja definida negativa.

Observe que o lado direito de (2.2) é um polinômio homogêneo com coeficientes matriciais de grau dois no parâmetro  $\alpha$ . Usando o lado esquerdo da condição (b) do Lema 2.1, polinômios de graus maiores podem ser obtidos, fornecendo para um  $d \in \mathbb{Z}_+$  genérico

$$\begin{aligned} \Gamma_d(\alpha) &= \sum_{\ell=1}^{J(d+2)} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i^\ell(d, 2) T_{H_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 1, 1) T_{H_{ij}} \right)}_{T_\ell^H} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N}; \\ & \qquad \qquad \qquad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(d + 2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

que é um polinômio homogêneo de grau  $d + 2$ . O principal resultado deste capítulo, em relação à estabilidade Hurwitz, é apresentado na seqüência.

**Teorema 2.3** *Uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros  $P(\alpha)$  dada por (2.1) garante a estabilidade Hurwitz de  $\mathcal{A}$  se e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  e um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que, para  $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ ,*

as seguintes LMIs são verificadas

$$T_\ell^H = \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i^\ell(d, 2)T_{H_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 1, 1)T_{H_{ij}} < 0; \quad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(d+2) \quad (2.4)$$

**Prova:** Suficiência: É imediato mostrar que, se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  e  $d \in \mathbb{Z}_+$  tais que (2.4) seja verificada para  $\ell = 1, \dots, J(d+2)$  então, da expressão (2.3), pode-se concluir que as condições do Lema 2.1 (b) são verificadas.

Necessidade: Definindo

$$L \triangleq \max_{\ell=1, \dots, J(2)} \lambda_{\max}(-T_\ell^H); \quad \kappa \triangleq \min_{\alpha \in \Delta_N} \lambda_{\min}(-\Gamma(\alpha))$$

é claro que para qualquer vetor  $w$  tal que  $w'w = 1$  tem-se

$$L \geq \max_{\ell=1, \dots, J(2)} w'(-T_\ell^H)w; \quad \min_{\alpha \in \Delta_N} w'(-\Gamma(\alpha))w \geq \kappa$$

Escolhendo  $d \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $d \geq L/\kappa - 2$ , o Teorema 2.2 garante que todos os coeficientes  $w'(-T_\ell^H)w$ ,  $\ell = 1, \dots, J(d+2)$  do polinômio  $w'(-\Gamma_d(\alpha))w$  são positivos. Uma vez que a escolha de  $w$  é arbitrária, a conclusão é que todas as LMIs  $T_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, J(d+2)$  são definidas negativas. ■

A principal idéia do Teorema 2.3 é simplesmente explorar a positividade dos parâmetros  $\alpha \in \Delta_N$ , impondo que cada termo em (2.4) seja definido negativo para garantir  $\Gamma_d(\alpha) < 0$ . À medida que  $d$  aumenta, um conjunto maior de LMIs que são progressivamente menos restritivas precisa ser verificado. Uma solução factível  $P_i = P'_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  para qualquer  $d$  fixo é suficiente para garantir  $\Gamma_d(\alpha) < 0$  e é também factível para valores maiores de  $d$ . O número de linhas de LMIs no Teorema 2.3 é dado por  $nJ(d+2)$ . Por outro lado, note que o número de variáveis escalares é dado por  $N(n+1)n/2$  (elementos das matrizes simétricas  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) e não depende de  $d$ . Sempre que existir uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros dada por (2.1), tal que  $\Gamma(\alpha) < 0$ , o procedimento de relaxação converge para a necessidade à medida que  $d$  aumenta. Este resultado pode ser visto como a generalização do Teorema de Pólya para o caso de funções com coeficientes matriciais. O cômputo de um limitante exato para  $d$ , entretanto, não pode ser obtido a partir do Teorema 2.2, pois os coeficientes do polinômio original (considerando-se  $d = 0$ ) são expressões matriciais a serem determinadas, impossibilitando o cálculo de  $L$  e  $\kappa$ .

Vale a pena mencionar que o caso  $d = 0$  fornece uma condição suficiente que é equivalente à condição apresentada em [RP02]. Note também que, como discutido no Capítulo 5, a caracterização completa da estabilidade Hurwitz (ou Schur) do politopo  $\mathcal{A}$  pode necessitar, no caso geral, de funções de Lyapunov com dependência não-linear (polinomial) em  $\alpha$ .

### 2.3.2 Caso Schur

Um desenvolvimento similar pode ser aplicado ao caso Schur. O lado esquerdo da condição (a) no Lema 2.2 pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) &= A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^2 P(\alpha) = \\
&\sum_{i=1}^N \alpha_i^3 (A_i' P_i A_i - P_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j (A_i' P_i A_j + A_j' P_i A_i + A_i' P_j A_i - 2P_i - P_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k (A_j' P_i A_k + A_k' P_i A_j \\
&\quad + A_i' P_j A_k + A_k' P_j A_i + A_i' P_k A_j + A_j' P_k A_i - 2(P_i + P_j + P_k)) \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Em [RP01], uma condição suficiente para a existência de  $P(\alpha)$  dada por (2.1) que garante a estabilidade Schur de  $\mathcal{A}$  foi apresentada em termos dos coeficientes matriciais do polinômio homogêneo de grau três dado em (2.5). Novamente, polinômios de graus maiores podem ser obtidos a partir do lado esquerdo da condição (b) do Lema 2.2, fornecendo para um  $d \in \mathbb{Z}_+$  genérico

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{J(d+3)} \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i^\ell(d, 3) T_{S_i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 2, 1) T_{S_{ij}} \right. \\
\left. + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1) T_{S_{ijk}} \right) \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N}; \\
k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(d+3) \quad (2.6)
\end{aligned}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
T_{S_i} &\triangleq A_i' P_i A_i - P_i; & T_{S_{ij}} &\triangleq A_i' P_i A_j + A_j' P_i A_i + A_i' P_j A_i - 2P_i - P_j; \\
T_{S_{ijk}} &\triangleq A_j' P_i A_k + A_k' P_i A_j + A_i' P_j A_k + A_k' P_j A_i + A_i' P_k A_j + A_j' P_k A_i - 2(P_i + P_j + P_k)
\end{aligned}$$

**Teorema 2.4** *Uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros  $P(\alpha)$  dada por (2.1) garante a estabilidade Schur de  $\mathcal{A}$  se e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  e um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que, para  $\ell = 1, \dots, J(d+3)$ , as seguintes LMIs são verificadas*

$$\begin{aligned}
T_\ell^S &= \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i^\ell(d, 3) T_{S_i} + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i; j=1}^N \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 2, 1) T_{S_{ij}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \mathcal{C}_{ijk}^\ell(d, 1, 1, 1) T_{S_{ijk}} < 0; \\
k_1 k_2 \cdots k_N &= \mathcal{K}_\ell(d+3) \quad (2.7)
\end{aligned}$$

**Prova:** Similar à prova do Teorema 2.3. ■

### 2.3.3 Estudo de caso: $N = 2$

Considere que as condições do Teorema 2.3 são aplicadas a um politopo  $\mathcal{A}$  com  $N = 2$  vértices. Nesse caso,

$$T_{H_1} = A'_1 P_1 + P_1 A_1, \quad T_{H_2} = A'_2 P_2 + P_2 A_2,$$

$$T_{H_{12}} = A'_1 P_2 + P_2 A_1 + A'_2 P_1 + P_1 A_2$$

Então, para  $d = 0$ , o número de LMIs é  $J(2) = 3$ ,  $\mathcal{K}(2) = \{02, 11, 20\}$  e as LMIs são

$$T_{H_1} < 0, \quad T_{H_2} < 0 \tag{2.8}$$

que são condições necessárias e

$$T_{H_{12}} < 0 \tag{2.9}$$

Para  $d = 1$ , o número de LMIs é  $J(3) = 4$ ,  $\mathcal{K}(3) = \{03, 12, 21, 30\}$  e as LMIs são (2.8) e

$$T_{H_1} + T_{H_{12}} < 0, \quad T_{H_2} + T_{H_{12}} < 0 \tag{2.10}$$

Note que uma solução factível para (2.8)-(2.9) também é factível para (2.8)-(2.10), mas a recíproca não é necessariamente verdade, uma vez que a condição (2.9) é mais restritiva do que (2.10). Para  $d = 2$ , o número de LMIs é  $J(4) = 5$ ,  $\mathcal{K}(4) = \{04, 13, 22, 31, 40\}$  e as LMIs são (2.8) e

$$2T_{H_1} + T_{H_{12}} < 0, \quad T_{H_1} + T_{H_2} + 2T_{H_{12}} < 0, \quad 2T_{H_2} + T_{H_{12}} < 0$$

Para  $d = 3$ , o número de LMIs é  $J(5) = 6$ ,  $\mathcal{K}(5) = \{05, 14, 23, 32, 41, 50\}$  e as LMIs são (2.8) e

$$3T_{H_1} + T_{H_{12}} < 0, \quad 3T_{H_2} + T_{H_{12}} < 0$$

$$3T_{H_1} + T_{H_2} + 3T_{H_{12}} < 0, \quad 3T_{H_2} + T_{H_1} + 3T_{H_{12}} < 0$$

e assim por diante. É importante enfatizar que a existência de  $P_1 = P'_1 > 0$  e  $P_2 = P'_2 > 0$  satisfazendo as LMIs (2.8) é uma condição necessária para a estabilidade e que as novas LMIs são obtidas como combinações lineares positivas de  $T_{H_1}$ ,  $T_{H_2}$  e  $T_{H_{12}}$ . Isso também é verificado para valores maiores de  $N$ , isto é, a existência de  $P_i = P'_i > 0$  tal que  $T_{H_i} < 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  é uma condição necessária para estabilidade Hurwitz de  $\mathcal{A}$  (estabilidade dos vértices) e as novas LMIs são escritas como combinações lineares positivas de  $T_{H_i}$  e  $T_{H_{ij}}$ . À medida que  $d$  aumenta, as novas LMIs tornam-se mais fáceis de serem verificadas e, se uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros existe, a necessidade é atingida para um  $d$  suficientemente grande.

### 2.3.4 Condições Estendidas

Assim como nos Lemas 2.1 e 2.2, o próximo lema fornece a condição extra para explorar o Teorema de Pólya nas condições estendidas por meio do Lema de Finsler nos Lemas 1.5 e 1.6.

**Lema 2.3** *O sistema (1.5) é Hurwitz (Schur) estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz dependente de parâmetros  $\mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times n}$  tais que uma das seguintes condições equivalentes seja verificada  $\forall \alpha \in \Delta_N$ :*

$$(a) \Theta(\alpha) \triangleq Q(\alpha) + X(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'X(\alpha)' < 0$$

$$(b) \Theta_d(\alpha) \triangleq (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d (Q(\alpha) + X(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'X(\alpha)') < 0; \quad \forall d \in \mathbb{Z}_+$$

com

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

e  $Q(\alpha)$  dada por

$$Q_H(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) \\ P(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad Q_S(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P(\alpha) \end{bmatrix}$$

para os casos Hurwitz e Schur, respectivamente.

Assim como nos Lemas 2.1 e 2.2,  $\alpha \in \Delta_N$  e a equivalência entre (a) e (b) é imediata. Para um  $\alpha$  fixo, a equivalência entre o Lema 2.3 e os Lemas 2.1 (a) e 2.2 (a) pode ser provada pelo Lema de Finsler.

Se uma estrutura especial para  $P(\alpha)$  é considerada, como por exemplo (2.1), do Lema 2.3 (a) podem ser obtidas condições LMIs menos conservadoras para avaliar a estabilidade Hurwitz (Schur) de  $\mathcal{A}$  seguindo as linhas apresentadas em [LP03]. Graças à variável extra  $X(\alpha)$ , cuja estrutura também é considerada como dependente de forma afim nos parâmetros, os resultados obtidos em [LP03] são menos conservadores do que os resultados de [RP01] (caso Schur) e [RP02] (caso Hurwitz). O método de relaxação proposto neste capítulo também pode ser aplicado à condição (b) no Lema 2.3, como enuncia o próximo teorema.

**Teorema 2.5** *Uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros  $P(\alpha)$  dada por (2.1) garante a estabilidade de  $\mathcal{A}$  se e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , matrizes  $X_i \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que, para  $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ , as seguintes LMIs são verificadas*

$$T_\ell^F = \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i^\ell(d, 2) T_{F_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 1, 1) T_{F_{ij}} < 0; \quad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(d+2) \quad (2.11)$$

sendo que

$$T_{F_i} = Q_i + X_i \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i' X_i', \quad T_{F_{ij}} = Q_i + Q_j + X_j \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i' X_j' + X_i \mathcal{B}_j + \mathcal{B}_j' X_i' \quad (2.12)$$

$\mathcal{B}_i = [A_i \quad -\mathbf{I}]$  e  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  são dadas respectivamente, para os casos Hurwitz e Schur, por

$$Q_{H_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_i \\ P_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad Q_{S_i} = \begin{bmatrix} -P_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_i \end{bmatrix}$$

**Prova:** A prova é similar à do Teorema 2.3, sendo baseada no fato de que a parte (b) do Lema 2.3 pode ser escrita como um polinômio homogêneo de grau  $d + 2$  dado por

$$\sum_{\ell=1}^{J(d+2)} \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{C}_i^\ell(d, 2) T_{F_i} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{C}_{ij}^\ell(d, 1, 1) T_{F_{ij}} \right) \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N};$$

$$k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(d + 2) \quad (2.13)$$

com  $P(\alpha)$  dada por (2.1),  $X(\alpha)$  por

$$X(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i, \quad \alpha \in \Delta_N$$

e

$$Q_H(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_{H_i}, \quad Q_S(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Q_{S_i}, \quad \alpha \in \Delta_N$$

As LMIs do Teorema 2.5 garantem  $\Theta_d(\alpha) < 0$  para todo  $\alpha \in \Delta_N$ ,  $\forall d \in \mathbb{Z}_+$ . ■

Em função das variáveis extras  $X_i \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , os resultados obtidos por meio do Teorema 2.5 são menos conservadores e contêm os resultados fornecidos pelos Teoremas 2.3 e 2.4 para um dado  $d$ . Veja [LP03] para uma discussão sobre este aspecto quando  $d = 0$ . Além disso, essas matrizes extras permitem uma convergência mais rápida para a necessidade à medida que  $d$  cresce, como será ilustrado por meio de exemplos numéricos na próxima seção.

Finalmente, note que é imediato estender o Teorema 2.5 para tratar análise de estabilidade robusta em relação a uma região convexa no plano complexo ( $\mathcal{D}$ -estabilidade) com uma escolha apropriada de  $Q(\alpha)$ , seguindo as linhas de [PABB00], [LP03].

## 2.4 Experimentos Numéricos

Primeiramente, séries de mil politopos de matrizes estáveis foram geradas seguindo a metodologia descrita em [LP03] para  $n = 2, 3, 4$ ,  $N = 2, 3, 4$ . É importante enfatizar que esses mil politopos não são necessariamente identificáveis como estáveis por meio de funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros.

Estes politopos estáveis foram testados por meio das condições do Teorema 2.3 e do Teorema 2.5 (caso Hurwitz, mostrado na Tabela 2.1) e Teorema 2.4 e Teorema 2.5 (caso Schur, mostrado na Tabela 2.2) para  $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ . Note que os resultados obtidos pelas condições do Teorema 2.5 são sempre menos conservadores do que (ou igual, pelo menos) os resultados dos Teoremas 2.3 (estabilidade Hurwitz) e 2.4 (estabilidade Schur). Note também que o número máximo de avaliações positivas usando o Teorema 2.5 ocorre para valores de  $d$  que são sempre menores do que os valores correspondentes de  $d$  quando os Teoremas 2.3 e 2.4 são usados. De fato, o número de politopos estáveis identificados pelo Teorema 2.3 e pelo Teorema 2.4 está (em geral) ainda aumentando com  $d$  e valores maiores de  $d$  seriam necessários para atingir os

$n$	$d$	0		1		2		3		4		5		6		7	
		T2.3	T2.5														
2	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	4	999	1000	999	1000	999	1000	999	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
3	2	954	977	955	977	957	977	958	977	958	977	958	977	958	977	958	977
	3	905	962	910	963	918	963	924	963	932	963	934	963	935	963	936	963
	4	916	965	921	965	930	965	934	965	940	966	941	966	942	966	946	966
4	2	940	978	943	978	946	978	947	978	949	978	950	978	951	978	952	978
	3	876	952	891	952	899	953	910	953	915	953	916	953	916	953	917	953
	4	884	951	892	951	905	951	911	952	918	952	922	952	924	952	928	952

Tabela 2.1: Número de politopos identificados como estáveis pelo Teorema 2.3 (T2.3) e pelo Teorema 2.5 (T2.5), para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$  (mil politopos estáveis foram gerados para cada par  $n, N$ ) como uma função de  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  (caso Hurwitz).

mesmos números fornecidos pelo Teorema 2.5. As tabelas também indicam que o número máximo de politopos estáveis que admitem uma função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros dada por (2.1) provavelmente já foi alcançado pelas condições do Teorema 2.5 para  $d \leq 4$  em todos os casos analisados. Como discutido no Capítulo 5, funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros são necessárias para afirmar a estabilidade robusta de todos os politopos.

Para ilustrar como o procedimento de relaxação evolui à medida que  $d$  cresce, dois exemplos são considerados. O primeiro avalia a estabilidade Schur de um sistema politópico de  $N = 2$

$n$	$d$	0		1		2		3		4		5		6		7	
		T2.4	T2.5														
2	2	898	995	915	995	920	995	927	995	938	995	942	995	946	995	948	995
	3	722	988	778	989	818	989	837	990	849	991	6868	991	882	991	893	991
	4	592	984	685	988	733	988	774	988	796	988	817	988	830	988	841	988
3	2	871	969	898	969	907	969	916	969	919	969	924	969	927	969	934	969
	3	700	915	764	920	797	921	822	921	836	921	849	921	857	921	866	921
	4	568	887	677	895	720	896	739	897	760	898	782	898	798	898	811	898
4	2	877	960	891	960	905	960	912	960	919	960	922	960	926	960	931	960
	3	686	905	741	907	786	909	807	909	822	909	830	910	841	910	848	910
	4	548	848	633	858	685	859	714	861	737	861	755	861	766	861	773	861

Tabela 2.2: Número de politopos identificados como estáveis pelo Teorema 2.4 (T2.4) e pelo Teorema 2.5 (T2.5), para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$  (mil politopos estáveis foram gerados para cada par  $n, N$ ) como uma função de  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  (caso Schur).

$d$	$\lambda_{max}(T_\ell^S)$									
0	-0.024	3.175	0.718	-0.006						
1	-0.024	1.464	0.605	0.378	-0.006					
2	-0.024	-0.195	1.519	0.191	0.164	-0.006				
3	-0.024	-1.737	1.250	0.643	0.222	0.020	-0.006			
4	-0.024	-3.008	-0.491	1.252	0.111	0.228	-0.083	-0.006		
5	-0.024	-3.814	-3.692	0.479	0.277	-0.066	0.144	-0.161	-0.006	
6	-0.024	-4.219	-8.241	-3.281	-0.242	-0.910	-0.114	-0.029	-0.223	-0.006

Tabela 2.3: Evolução do maior autovalor de  $T_\ell^S$  em (2.7),  $\ell = 1, \dots, J(d+3)$ , para  $d = 0, \dots, 6$  na análise de estabilidade do sistema politópico descrito pelos vértices (2.14) (caso Schur).

vértices descrito pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.4041 & 1.4504 \\ 0.0368 & 0.4325 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1177 & -0.2375 \\ 1.7534 & -0.0484 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Usando o procedimento de relaxação proposto no Teorema 2.4, a função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros  $v(x) = x'(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2)x$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , com vértices

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7523 & -0.7189 \\ -0.7189 & 2.9316 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2.4793 & -0.1631 \\ -0.1631 & 0.2065 \end{bmatrix}$$

foi obtida para  $d = 6$ . A Tabela 2.3 mostra os maiores autovalores das LMIs dadas por (2.7),  $\ell = 1, \dots, J(d+3)$ , para  $d = 0, \dots, 6$ . Note que os valores nos vértices, dados respectivamente pelo maior autovalor de  $A_1' P_1 A_1 - P_1$  e  $A_2' P_2 A_2 - P_2$ , são mantidos enquanto que os outros evoluem até todos tornarem-se negativos. Veja também a Figura 2.1, na qual o maior valor de cada linha da Tabela 2.3 é mostrado em função de  $d$ , ilustrando como todos os coeficientes matriciais tornam-se definidos negativos.

O segundo exemplo ilustra a evolução das LMIs do Teorema 2.3 (caso Hurwitz) em função de  $d$ . O sistema politópico é definido por  $N = 3$  vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0996 & 0.9846 & -0.4496 \\ -0.9045 & -0.0387 & 0.9657 \\ 0.6933 & -0.7612 & -0.4179 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.4061 & 0.9017 & -0.3194 \\ -0.3740 & -0.1498 & 0.5358 \\ -0.4592 & -0.5424 & -0.3608 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.6327 & -0.3142 & 0.8716 \\ 0.6263 & -0.6932 & 0.9598 \\ -0.0090 & -0.9367 & 0.3422 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Todos os coeficientes matriciais tornam-se definidos negativos para  $d = 4$ , fornecendo a função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros

$$v(x) = x'(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3)x, \quad \alpha \in \Delta_N$$

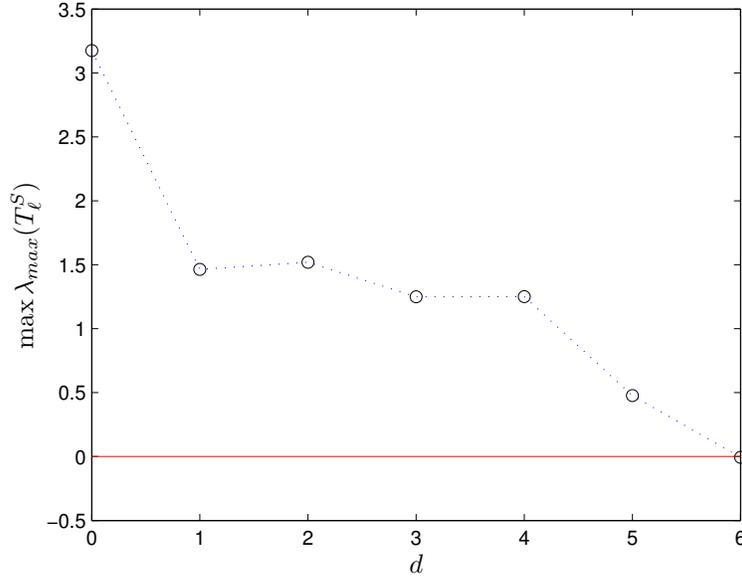


Figura 2.1: Maior valor de  $\lambda_{max}(T_\ell^S)$  dado por (2.7),  $\ell = 1, \dots, J(d+3)$  em função de  $d = 0, \dots, 6$  para a análise de estabilidade do sistema politópico descrito pelos vértices (2.14) (caso Schur).

descrita pelos vértices

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2125 & -0.0922 & -0.1425 \\ -0.0922 & 0.2555 & -0.0179 \\ -0.1425 & -0.0179 & 0.2127 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.3590 & 0.0932 & 0.0335 \\ 0.0932 & 0.6263 & 0.0476 \\ 0.0335 & 0.0476 & 0.5642 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.2062 & 0.0694 & -0.0249 \\ 0.0694 & 0.5477 & -0.2869 \\ -0.0249 & -0.2869 & 0.8296 \end{bmatrix}$$

A Figura 2.2 mostra o maior valor de  $\lambda_{max}$  de  $T_\ell^H$  dado por (2.4),  $\ell = 1, \dots, J(d+2)$  em função de  $d = 0, \dots, 4$ . Note que, sempre que uma função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros existe, a convergência é garantida pelo Teorema 2.2. Infelizmente, nada pode ser dito sobre a evolução do maior valor de  $\lambda_{max}$  de  $T_\ell^H$ , dado por (2.4),  $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ . Por exemplo, não existe garantia de um decréscimo monotônico.

Como observação final, é interessante perceber que as variáveis de decisão extras no Teorema 2.5 permitem que uma solução factível seja obtida com  $d = 0$  em ambos os exemplos considerados.

## 2.5 Conclusão

Este capítulo apresentou um procedimento de relaxação usado para construir uma seqüência de condições LMIs que garantem a existência de uma função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros para a estabilidade Hurwitz (ou Schur) de um sistema linear na forma

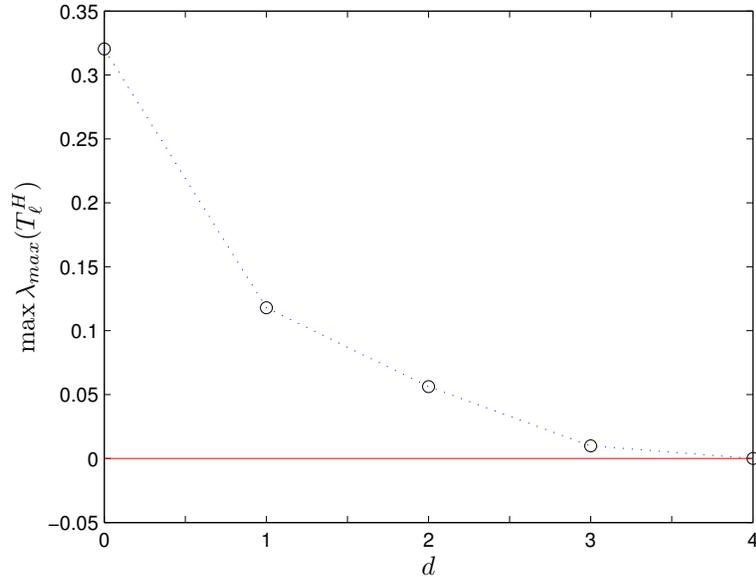


Figura 2.2: Maior valor de  $\lambda_{\max}(T_{\ell}^H)$ , dado por (2.4),  $\ell = 1, \dots, J(d+2)$ , em função de  $d = 0, \dots, 4$  para a análise de estabilidade do sistema politópico descrito pelos vértices (2.15)-(2.16) (caso Hurwitz).

politópica. À medida que o número de LMIs aumenta as condições suficientes tornam-se também necessárias para a existência de tal função. Os resultados podem ser facilmente estendidos para tratar outros requisitos baseados em funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros no contexto de sistemas de controle. Vale a pena ressaltar novamente que, no caso geral, a estabilidade de sistemas politópicos pode requerer funções de Lyapunov com dependência não linear (polinomial) nos parâmetros, como discutido em detalhes no Capítulo 5.

## Funções de Lyapunov Polinomiais Homogêneas

As condições de estabilidade robusta apresentadas no Capítulo 2 exploram a positividade de polinômios homogêneos definidos no simplex unitário. As relaxações propostas baseiam-se no Teorema de Pólya e convergem à medida que o grau do polinômio em estudo cresce, sendo que o número de variáveis de decisão permanece constante. O objetivo deste capítulo é também analisar a estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos por meio da positividade de polinômios. Entretanto, as relaxações propostas baseiam-se no aumento do grau da função de Lyapunov e conseqüentemente, aumentam o número de variáveis de decisão e também o número de LMIs envolvidas à medida que o grau da função cresce. A próxima seção revisa alguns resultados importantes baseados em funções de Lyapunov polinomiais aplicadas na análise de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos.

### 3.1 Introdução

Em função do conservadorismo dos resultados baseados em funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros, funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros apareceram naturalmente como o próximo passo na direção de caracterizar de forma menos conservadora a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos.

Em [Bli04a], condições na forma de LMIs baseadas em funções de Lyapunov quadráticas cuja matriz de Lyapunov possui dependência polinomial nos parâmetros usadas na análise de estabilidade robusta de sistemas lineares com incertezas descritas na forma afim foram apresentadas. As condições são necessárias e suficientes no sentido de que à medida que o grau da função de Lyapunov cresce, a caracterização da estabilidade robusta torna-se cada vez mais precisa e, se o sistema é robustamente estável, as LMIs fornecerão uma solução factível para um grau finito. A principal desvantagem das condições propostas é o esforço computacional demandando à medida que a complexidade (que depende do número de estados, parâmetros incertos e grau do polinômio) aumenta.

Outra abordagem baseada em função de Lyapunov com dependência polinomial homogênea

de grau arbitrário nos parâmetros foi apresentada em [CGTV05b]. Nesse trabalho as condições de estabilidade robusta foram expressas por meio de uma representação completa de matriz quadrada (do inglês, *complete square matrix representation* — *CSMR*) de polinômios homogêneos com coeficientes matriciais, fornecendo famílias de condições LMIs suficientes de precisão crescente à medida que o grau da função de Lyapunov aumenta. A idéia de CSMR de polinômios homogêneos é interessante, e tem sido aplicada em diversos contextos como sistemas variantes no tempo [CGTV03a], [CGTV04a], sistemas com incertezas LFT [CGTV04b], problemas de distância [CGTV03b], etc.

Em relação a condições de estabilidade robusta que não são baseadas na abordagem de Lyapunov, vale a pena mencionar alguns resultados recentes baseados na otimização de polinômios positivos sobre conjuntos compactos [Las01]. Condições necessárias e suficientes para estabilidade de sistemas lineares com incertezas na forma afim são dadas em [Che03], no qual uma família de condições LMIs de precisão crescente foi apresentada, porém a convergência global não é garantida. Uma abordagem similar surgiu em [HAPL04], transformando o teste de estabilidade robusta na minimização de um polinômio multivariável sobre um conjunto compacto por meio de uma matriz de Hermite associada. No caso, essa matriz de Hermite pode ser vista com uma função de Lyapunov dependente de parâmetros. As condições são dadas em termos de uma seqüência de relaxações LMIs com convergência garantida (diferentemente de [Che03]). Os dois métodos mencionados acima foram formulados para tratar de sistemas com incertezas na forma afim (sistema nominal afetado linearmente por parâmetros incertos) e podem tratar de sistemas a tempo contínuo e a tempo discreto.

Sistemas lineares com incertezas que admitem uma representação LFT foram investigados por meio de funções de Lyapunov que apresentam uma dependência racional nos parâmetros incertos [PA01, DS00, Sch01, IS01, EH05]. Essas abordagens exploram a representação LFT e podem também tratar incertezas na forma afim como um caso particular. Nesse caso a matriz de Lyapunov é restrita a possuir uma dependência similar nos parâmetros (isto é, afim), o que pode levar a avaliações conservadoras. Relaxações assintoticamente exatas baseadas na extensão do Teorema de Pólya para o caso de funções com coeficientes matriciais foram apresentadas para sistemas na forma LFT em [Sch05]. Mais recentemente, esses resultados foram estendidos para tratar de uma classe maior de incertezas por meio da decomposição de soma de quadrados [SH06, Sch06, Par03].

Neste capítulo é apresentada uma metodologia para analisar a estabilidade robusta (Hurwitz e Schur) de sistemas lineares politópicos por meio da existência de funções de Lyapunov com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros. Os testes são formulados em termos de condições LMIs suficientes que tornam-se cada vez menos conservadoras à medida que o grau da função de Lyapunov aumenta. A metodologia também é aplicada nas condições de estabilidade estendidas por meio de Lema de Finsler, fornecendo testes de estabilidade alternativos, de diferentes complexidades. Comparações com outros métodos da literatura são feitas na seção de exemplos numéricos, mostrando a eficiência da metodologia proposta.

## 3.2 Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar novas caracterizações para as LMIs dependentes de parâmetros ligadas à estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos dadas nos Lemas 1.1 (Hurwitz) e 1.2 (Schur) bem como para as LMIs dependentes de parâmetros estendidas por meio do Lema de Finsler, dadas nos Lemas 1.5 (d) (Hurwitz) e 1.6 (d) (Schur). As condições de estabilidade derivadas baseiam-se na particularização da estrutura da função de Lyapunov em (1.7), restringindo a matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$  a matrizes polinomiais homogêneas de grau arbitrário nos parâmetros, dadas por

$$P_g(\alpha) \triangleq \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} P_{\mathcal{K}_j(g)} \quad ; \quad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_j(g) \quad (3.1)$$

sendo que  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$  são matrizes simétricas ( $n(n+1)/2$  variáveis escalares) a serem determinadas. Note que, para  $g = 0$ ,  $P_0(\alpha) = P_0$  é a matriz de Lyapunov quadrática convencional. Similarmente,  $g = 1$  gera a matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros, considerada no Capítulo 2. Uma condição suficiente para garantir que  $P_g(\alpha) > 0 \forall \alpha \in \Delta_N$  é a imposição  $P_{\mathcal{K}_j(g)} > 0$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ .

Para abordar a estabilidade Schur, um lema equivalente ao Lema 1.2 se faz necessário.

**Lema 3.1** *O sistema (1.5) é Schur assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que*

$$P(\alpha) > 0, \quad \begin{bmatrix} -P(\alpha) & P(\alpha)A(\alpha) \\ \star & -P(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_N \quad (3.2)$$

A segunda desigualdade em (3.2) explora o complemento de Schur da condição original de estabilidade apresentada no Lema 1.2, dada por  $A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0$ . A razão para trabalhar-se com o Lema 3.1 é a não existência de produtos triplos (como  $A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha)$ ), que demandaria mais notações e definições.

## 3.3 Resultados Principais

Na seqüência são apresentadas condições suficientes para a existência de  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) tal que as condições dos Lemas 1.1 e 1.5 (d) (caso Hurwitz) e Lemas 3.1 e 1.6 (d) (caso Schur) são satisfeitas, garantido a estabilidade robusta de (1.5). O desenvolvimento é apresentado em detalhes somente para a condição do Lema 1.1, pois os outros casos são similares.

**Teorema 3.1** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são verificadas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \left( A_i' P_{\mathcal{K}_\ell(g+1)} + P_{\mathcal{K}_\ell(g+1)} A_i \right) < 0 \quad (3.3)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada por (3.1) garante a estabilidade Hurwitz de  $\mathcal{A}$ . Além disso, se as LMIs de (3.3) são verificadas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são verificadas.

**Prova:** Uma vez que  $P_{\mathcal{K}_j(g)} = P'_{\mathcal{K}_j(g)} > 0$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , então  $P_g(\alpha) > 0$  para todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Por outro lado, note que a expressão  $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha)$  com  $A(\alpha) \in \mathcal{A}$  e  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) é uma matriz polinomial homogênea de grau  $g + 1$  que pode ser escrita como

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{J(g+1)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \left( A_i' P_{\mathcal{K}_i^\ell(g+1)} + P_{\mathcal{K}_i^\ell(g+1)} A_i \right) \right);$$

$$k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(g+1) \quad (3.4)$$

A condição (3.3) imposta para todo  $\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$  garante  $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$  para todo  $\alpha \in \Delta_N$ .

Suponha que as LMIs de (3.3) são verificadas para um certo  $\hat{g}$ , isto é, existem  $J(\hat{g})$  matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(\hat{g})}$ ,  $j = 1, \dots, J(\hat{g})$  tais que  $P_{\hat{g}}(\alpha)$  é uma matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros garantindo a estabilidade robusta do sistema. Então, os termos da matriz polinomial  $P_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)P_{\hat{g}}(\alpha)$  satisfazem as LMIs do Teorema 3.1 correspondentes ao grau  $\hat{g} + 1$ , que podem ser obtidas nesse caso por uma combinação linear positiva das LMIs do Teorema 3.1 para  $\hat{g}$ . ■

Algumas observações são necessárias neste momento. A principal idéia do Teorema 3.1 é simplesmente explorar a positividade de  $\alpha \in \Delta_N$ , impondo que cada termo em (3.4) seja definido negativo para garantir  $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$  para todo  $\alpha \in \Delta_N$ . As matrizes que compõem a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea  $P_g(\alpha)$  bem como as LMIs de (3.3) podem ser geradas a partir dos conjuntos  $\mathcal{K}(g)$  e  $\mathcal{I}(g)$ . À medida que o grau  $g$  cresce, as condições tornam-se menos conservadoras uma vez que novas variáveis são introduzidas nas LMIs. Embora o número de LMIs também cresça, cada LMI torna-se mais fácil de ser verificada em função dos graus de liberdade fornecidos pelas novas variáveis. Para qualquer grau  $g$ , as condições de (3.3) sempre contêm as LMIs dadas por

$$A_i' P_{0 \dots \underset{i}{g} \dots 0} + P_{0 \dots \underset{i}{g} \dots 0} A_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

que são, de fato, condições necessárias para a estabilidade robusta de  $\mathcal{A}$  (estabilidade dos vértices). Note que  $A(\alpha)'P_g(\alpha) + P_g(\alpha)A(\alpha) < 0$  com  $\alpha_i = 1$  e  $\alpha_k = 0$ ,  $k \neq i$ , corresponde à condição necessária e suficiente para a estabilidade do vértice  $A_i$ . Finalmente, vale a pena mencionar que, para  $g = 0$ , as LMIs (3.3) reduzem-se ao bem conhecido teste de estabilidade quadrática, isto é,  $P_0 > 0$ ,  $A_i' P_0 + P_0 A_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  e para uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros (isto é,  $g = 1$ ) dada por

$$P_1(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_{0 \dots \underset{i}{1} \dots 0}$$

têm-se as condições de estabilidade apresentadas no Capítulo 2 pelo Teorema 2.3 para  $d = 0$ .

Na seqüência são apresentadas condições suficientes para o Lema 1.5 (d) (Hurwitz) e para os Lemas 3.1 e 1.6 (d) (Schur). Note que os Lemas 1.1 e 1.5 (d) são equivalentes para  $\alpha \in \Delta_N$  fixo. Entretanto, graças às matrizes extras  $G(\alpha) = G_g(\alpha)$ ,  $H(\alpha) = H_g(\alpha)$ , as condições suficientes obtidas para o Lema 1.5 (d) são menos conservadoras do que (e também contêm) as condições correspondentes obtidas para o Lema 1.1, ao preço de trabalharem com mais variáveis para o mesmo grau  $g$ . O mesmo comentário vale para os Lemas 3.1 e 1.6 (d) (caso Schur).

**Teorema 3.2** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $G_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} A_i' G_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}' + G_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} A_i & P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} - G_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} + A_i' H_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \\ \star & -H_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} - H_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.6)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada por (3.1), com  $G_g(\alpha)$  e  $H_g(\alpha)$  dadas por

$$G_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} G_{\mathcal{K}_j(g)}, \quad H_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} H_{\mathcal{K}_j(g)}; \quad (3.7)$$

$$k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_j(g)$$

são tais que as desigualdades do Lema 1.5 (d) são satisfeitas, garantindo a estabilidade Hurwitz de  $\mathcal{A}$ . Além disso, se as LMIs de (3.6) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Prova:** A prova é similar à prova do Teorema 3.1. Com  $P_g(\alpha) > 0$  dado por (3.1),  $G_g(\alpha)$ ,  $H_g(\alpha)$  dadas por (3.7) e  $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ , o lado esquerdo de (1.37) pode ser escrito como uma matriz polinomial homogênea com coeficientes matriciais envolvendo o lado esquerdo das LMIs de (3.6). Ao impor que cada LMI seja definida negativa, uma condição suficiente para que (1.37) seja satisfeita é obtida. Novamente, se as condições de (3.6) são satisfeitas para um dado  $\hat{g}$ , então  $P_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\sum_{i=1}^N \alpha_i) P_{\hat{g}}(\alpha)$ ,  $G_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\sum_{i=1}^N \alpha_i) G_{\hat{g}}(\alpha)$ ,  $H_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\sum_{i=1}^N \alpha_i) H_{\hat{g}}(\alpha)$  são uma solução factível para as LMIs de (3.6) para  $g = \hat{g} + 1$ . ■

Para o mesmo grau  $g$ , as condições do Teorema 3.2 contêm as condições do Teorema 3.1, sendo em geral menos conservadoras. Outra observação interessante é que os graus dos polinômios não necessariamente precisam ser os mesmos em  $P_g(\alpha)$  e em  $G_g(\alpha)$  e  $H_g(\alpha)$ , gerando famílias de condições suficientes de diferentes complexidades.

**Teorema 3.3** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} A_i \\ \star & -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada por (3.1) garante a estabilidade Schur de  $\mathcal{A}$ . Além disso, se as LMIs de (3.8) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Prova:** Similar à prova do Teorema 3.1, sendo portanto omitida. ■

**Teorema 3.4** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $G_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} A'_i G'_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} + G_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} A_i - P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & -G_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} + A'_i H_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \\ \star & P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} - H_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} - H'_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada por (3.1), com  $G_g(\alpha)$  e  $H_g(\alpha)$  dadas por (3.7) são tais que as condições do Lema 1.6 (d) são satisfeitas, garantido a estabilidade Schur de  $\mathcal{A}$ . Além disso, se as LMIs de (3.9) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Prova:** Similar à prova do Teorema 3.2, sendo portanto omitida. ■

Equivalentemente ao caso Hurwitz, o Teorema 3.4 fornece condições mais gerais do que o Teorema 3.3 para o mesmo grau  $g$ . Do mesmo modo, outras condições suficientes poderiam ser obtidas ao considerarem-se diferentes graus para os polinômios  $P_g(\alpha)$ ,  $G_g(\alpha)$  e  $H_g(\alpha)$ .

### 3.4 Complexidade Numérica

A complexidade numérica associada às condições suficientes para a estabilidade robusta apresentadas neste capítulo pode ser estimada a partir do número  $K$  de variáveis escalares e o número  $L$  de linhas de LMIs, que podem ser obtidos a partir do número de estados  $n$ , número de vértices  $N$  do politopo  $\mathcal{A}$  e o grau  $g$  da matriz de Lyapunov  $P_g(\alpha)$  e das matrizes extras  $G_g(\alpha)$  e  $H_g(\alpha)$  (supondo que todas as matrizes têm o mesmo grau  $g$ ). A Tabela 3.1 mostra os valores de  $K$  e  $L$  para os Teoremas 3.1 (T3.1), 3.2 (T3.2), 3.3 (T3.3), 3.4 (T3.4).

Se um resolvidor de LMIs baseado no método de pontos interiores é usado, por exemplo o *LMI Control Toolbox* [GNLC95], a complexidade pode ser estimada como sendo proporcional

	$K$	$L$
T3.1	$(n(n+1)/2)J(g)$	$n((N+g)/(g+1)+1)J(g)$
T3.2	$(n(5n+1)/2)J(g)$	$n(2(N+g)/(g+1)+1)J(g)$
T3.3	$(n(n+1)/2)J(g)$	$n(2(N+g)/(g+1)+1)J(g)$
T3.4	$(n(5n+1)/2)J(g)$	$n(2(N+g)/(g+1)+1)J(g)$

Tabela 3.1: Número de variáveis escalares  $K$  e número de linhas de LMIs  $L$  associadas aos Teoremas 3.1 (T3.1), 3.2 (T3.2), 3.3 (T3.3), 3.4 (T3.4).

a  $K^3L$  enquanto que para o resolvidor SeDuMi [Stu99] estima-se uma complexidade numérica proporcional a  $K^2L^{2.5} + L^{3.5}$ .

### 3.5 Métodos da Literatura

O objetivo desta seção é fazer um breve resumo dos métodos da literatura que são usados na comparações numéricas feitas na próxima seção.

#### [Bli04a]

O método de [Bli04a] foi especialmente criado para analisar a estabilidade robusta de um sistema linear com incertezas na forma afim. Mais precisamente, a matriz dinâmica do sistema é dada por

$$A(r) = A_0 + r_1A_1 + r_2A_2 + \cdots + A_s r_s, \quad r_i \in [-1, 1], \quad i = 1, \dots, s$$

O teste de estabilidade robusta é formulado em termos de uma seqüência de condições LMIs suficientes cuja factibilidade fornece uma função de Lyapunov polinomial de grau  $k$  que garante a estabilidade Hurwitz de  $A(r)$ . As LMIs são obtidas pela aplicação sucessiva do Lema de Kalman-Yakubovich-Popov [Yak62, Ran96]. É mostrado que sempre que  $A(r)$  for Hurwitz, existe um inteiro  $k > 0$  finito tal que as LMIs correspondentes são factíveis. Vale a pena mencionar que essa metodologia, baseada em condições suficientes e necessárias para um número suficientemente elevado de LMIs, foi a primeira condição necessária e suficiente a aparecer na literatura. O autor também apresenta uma estratégia para tratar sistemas politópicos. Nesse caso, é necessário investigar a estabilidade de  $N$  sistemas na forma afim, com  $N - 1$  parâmetros incertos no intervalo  $[-1, 1]$ . A principal desvantagem do método é a complexidade das LMIs, que cresce rapidamente com  $k$ .

#### [HAPL04]

Um maneira de alternativa de determinar a estabilidade robusta de  $A(\alpha)$  é por meio da análise da positividade da matriz de Hermite, que pode ser obtida a partir dos coeficientes do polinômio característico da expressão  $\det(s\mathbf{I} - A(\alpha))$ . A análise da positividade da matriz de Hermite pode ser expressa por meio de uma problema de otimização com função objetivo polinomial sujeito a restrições polinomiais. Em [HAPL04], esse problema de otimização é resolvido por meio de uma hierarquia de relaxações LMIs convergentes. Essa hierarquia de relaxações está implementada no *toolbox* de domínio público *GloptiPoly* [HL03] (que necessita do SeDuMi internamente). Assim como em [Bli04a], as condições apresentadas em [HAPL04] são para sistemas na forma afim. Nas comparações feitas nesta tese, a restrição  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$  foi adicionada ao problema de otimização (uma vez que o *GloptiPoly* consegue tratar restrições de igualdade) para a análise de estabilidade de politopos, considerando o sistema nominal como  $A_0 = \mathbf{0}$  e

$N$  parâmetros incertos  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, N$ . A seqüência de relaxações LMIs usadas pelo *GloptiPoly* é parametrizada por um inteiro  $k$  (que não é relacionado com o  $k$  usado em [Bli04a]), e não se conhece um limite superior para o número de relaxações.

### [CGTV05b]

A abordagem de [CGTV05b] é, assim como os métodos apresentados neste capítulo, especialmente adequada para tratar de estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos. As condições também garantem a estabilidade robusta por meio da existência de uma função de Lyapunov polinomial homogênea de grau arbitrário. As LMIs são derivadas a partir da análise da positividade de uma matriz de Gram, também conhecida como representação completa de matriz quadrada (CSMR). De maneira genérica, a construção da matriz de Gram não é imediata, necessitando de um algoritmo somente para a sua montagem. Embora a partir de uma solução factível seja possível obter  $P_g(\alpha)$  (como nesta tese), a parametrização proposta em [CGTV05b] usa um número bem maior de variáveis auxiliares. À medida que o grau  $m$  da matriz de Lyapunov cresce, as condições tornam-se cada vez menos conservadoras. Uma solução factível para  $m = 0$  é equivalente à existência de uma função quadrática (matriz fixa) de Lyapunov.

## 3.6 Exemplos Numéricos

O número de variáveis escalares e o número de linhas de LMIs demandadas por cada método são fornecidos em todos os exemplos para o propósito de comparações, assim como também os tempos computacionais usando-se o *LMI Control Toolbox* [GNLC95] e o SeDuMi [Stu99].

Antes de apresentar os exemplos, note que os métodos [CGTV05b], [HAPL04] e os métodos propostos neste capítulo necessitam de uma quantidade prévia de cálculos para construir as LMIs, que podem consumir tempo e memória para sistemas grandes. Entretanto, os conjuntos  $\mathcal{K}(g)$  e  $\mathcal{I}(g)$  usados aqui, assim como também algumas matrizes usadas em [CGTV05b], podem ser construídos previamente e armazenados, uma vez que não dependem de  $A(\alpha)$ . Vale a pena mencionar que a preparação prévia poderia ser otimizada com a ajuda de algebra linear simbólica, mas o foco das comparações feitas na seqüência é o tempo computacional necessário para resolver as LMIs.

Primeiramente, os exemplos apresentados em [CGTV05b] (exemplos 1, 2 e 3) são investigados com os Teoremas 3.1 e 3.2 e os métodos da literatura [Bli04a, HAPL04, CGTV05b]. Para esses exemplos, os politopos a serem investigados são gerados da seguinte maneira: para uma matriz estável  $\bar{A}_0$  e um dado conjunto de  $N$  matrizes  $\bar{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , o problema é encontrar o maior valor positivo do número real  $\rho$  para que o politopo gerado pelos vértices

$$A_i = \bar{A}_0 + \rho \bar{A}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

seja Hurwitz estável. Os valores de  $\rho$  foram computados como em [CGTV05b] e o valor do maior  $\rho$  possível foi obtido por meio de busca exaustiva no espaço de parâmetros  $\alpha$ . Para o maior  $\rho$

possível, os métodos também são comparados em termos do tempo computacional. Nesse caso, os tempos apresentados são aqueles necessários para avaliar a estabilidade robusta somente para o grau (ou nível de relaxação) indicado. Os tempos das relaxações anteriores (que falharam) não são considerados.

## Exemplo 1

Considere o primeiro exemplo em [CGTV05b], com  $n = 2$  e  $N = 2$ .

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Usando os resultados de [CGTV05b], tem-se  $\hat{\rho}_{\{m=0\}} = 0.321$  (número de variáveis escalares  $K = 4$ , número de linhas de LMIs  $L = 6$ ) e  $\hat{\rho}_{\{m=1\}} = 0.463$  ( $K = 13$ ,  $L = 10$ ), que é igual à margem de estabilidade robusta máxima. Usando os resultados de [Bli04a], tem-se  $[\text{Bli04a}]_{k=1} = 0.399$  ( $K = 6$ ,  $L = 6$ ) e  $[\text{Bli04a}]_{k=2} = 0.463$  ( $K = 20$ ,  $L = 10$ ). Note que neste caso  $N = 2$  sistemas afins com um parâmetro incerto foram testados. A abordagem polinomial de [HAPL04] fornece  $[\text{HAPL04}]_{k=2} = 0.463$  ( $K = 14$ ,  $L = 21$ ). O Teorema 3.1 fornece  $\hat{\rho}_{\{g=0\}} = 0.320$  ( $K = 3$ ,  $L = 6$ ) e  $\hat{\rho}_{\{g=1\}} = 0.463$  ( $K = 6$ ,  $L = 10$ ) enquanto que o Teorema 3.2 fornece  $\hat{\rho}_{\{g=0\}} = 0.320$  ( $K = 11$ ,  $L = 10$ ) e  $\hat{\rho}_{\{g=1\}} = 0.463$  ( $K = 22$ ,  $L = 16$ ). Para esse exemplo simples, todos os métodos implementados demandaram baixos esforços computacionais para chegar até o valor ótimo de  $\hat{\rho}$ . O melhor desempenho é obtido com o Teorema 3.1,  $g = 1$ , que fornece o valor ótimo  $\hat{\rho} = 0.463$  com o menor número de variáveis escalares e linhas de LMIs. À medida que  $n$  e  $N$  crescem, as complexidades numéricas dos métodos tornam-se bem diferentes, como pode ser verificado a seguir.

## Exemplo 2

A Tabela 3.2 mostra uma comparação para o segundo exemplo em [CGTV05b] ( $n = 3$  e  $N = 2$ ) em termos de  $\rho$  enquanto que a Tabela 3.3 mostra o número  $K$  de variáveis escalares e o número  $L$  de linhas de LMIs necessárias para obter o valor ótimo de  $\hat{\rho} = 3.551$ , assim como o tempo computacional exigido pelo *LMI Control Toolbox* [GNLC95] e SeDuMi [Stu99]. As matrizes do sistema são dadas por

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2.5 & -3 & 0.5 \\ -1 & 1 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.5 & -2 \\ -0.8 & 0 & 0 \\ 1.5 & 2 & 2.4 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 2 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ -1.5 & -2 & -2.4 \end{bmatrix}$$

Como pode ser visto, o Teorema 3.1 com  $g = 4$  alcança o valor de  $\hat{\rho}$  de pior caso com os menores tempos, em ambos os resolvedores [GNLC95] e [Stu99].

Método	$\rho$
[CGTV05b] $_{m=0, 1, 2}$	1.676, 3.208, 3.551
[Bli04a] $_{k=1, 2}$	1.702, 3.551
[HAPL04] $_{k=4}$	3.551
T3.1 $_{g=0, 1, 2, 3, 4}$	1.676, 2.279, 3.146, 3.524, 3.551
T3.2 $_{g=0, 1, 2}$	1.676, 3.207, 3.551

Tabela 3.2: Comparação dos resultados dos Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) com os resultados apresentados em [CGTV05b], as condições LMIs de [Bli04a] e com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o segundo exemplo em [CGTV05b] ( $n = 3$  e  $N = 2$ ). Uma busca exaustiva no espaço de parâmetros foi usada para computar o maior valor possível de  $\hat{\rho} = 3.551$ .

Método	$K$	$L$	Tempo [GNLC95]	Tempo [Stu99]
[CGTV05b] $_{m=2}$	69	21	4.5s	0.23s
[Bli04a] $_{k=2}$	42	15	0.11s	0.26s
[HAPL04] $_{k=4}$	44	65	–	0.71s
T3.1 $_{g=4}$	30	33	0.04s	0.16s
T3.2 $_{g=2}$	72	33	0.11s	0.59s

Tabela 3.3: Comparação dos resultados dos Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) com os resultados apresentados em [CGTV05b], as condições LMIs de [Bli04a] e com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o segundo exemplo em [CGTV05b] ( $n = 3$ ,  $N = 2$  e  $\hat{\rho} = 3.551$ ) em termos de esforço computacional.  $K$  é o número de variáveis escalares,  $L$  é o número de linhas de LMIs. O método em [HAPL04] foi implementado por meio do *GloptiPoly*, que usa o SeDuMi internamente. O símbolo – indica que o método de [HAPL04] não pode ser resolvido por [GNLC95].

### Exemplo 3

Quando a dimensão do problema cresce, a menor complexidade numérica demandada pelos Teoremas 3.1 e 3.2 fica evidente, como é mostrado na Tabela 3.4 para o terceiro exemplo de [CGTV05b] ( $n = 4$  e  $N = 3$ ). O tempo computacional exigido por cada método para alcançar  $\hat{\rho} = 2.2237$  é dado na Tabela 3.5. As matrizes do sistema são dadas por

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} -2.4 & -0.6 & -1.7 & 3.1 \\ 0.7 & -2.1 & -2.6 & -3.6 \\ 0.5 & 2.4 & -5.0 & -1.6 \\ -0.6 & 2.9 & -2.0 & -0.6 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 & -0.3 & -0.1 \\ -0.8 & 0.2 & -1.1 & 2.8 \\ -1.9 & 0.8 & -1.1 & 2.0 \\ -2.4 & -3.1 & -3.7 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 3.4 & 1.7 & 1.5 \\ -3.4 & -1.4 & 1.3 & 1.4 \\ 1.1 & 2.0 & -1.5 & -3.4 \\ -0.4 & 0.5 & 2.3 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.4 & -0.7 & -0.7 \\ 2.1 & 0.6 & -0.1 & -2.1 \\ 0.4 & -1.4 & 1.3 & 0.7 \\ 1.5 & 0.9 & 0.4 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Método	$\rho$
[CGTV05b] $_{m=0, 1, 2}$	1.019, 1.968, 2.2237
[Bli04a] $_{k=1, 2}$	1.122, 2.2237
[HAPL04] $_{k=6}$	2.2237
T3.1 $_{g=0, 1, 2, 3}$	1.019, 1.471, 1.983, 2.2237
T3.2 $_{g=0, 1, 2}$	1.019, 1.863, 2.2237

Tabela 3.4: Comparação dos resultados dos Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) com os resultados apresentados em [CGTV05b], com as condições LMIs de [Bli04a] e a abordagem polinomial de [HAPL04] para o terceiro exemplo em [CGTV05b] ( $n = 4$  e  $N = 3$ ). Uma malha fina foi usada para calcular o maior valor possível de  $\hat{\rho} = 2.2237$ .

Método	$K$	$L$	Tempo [GNLC95]	Tempo [Stu99]
[CGTV05b] $_{m=2}$	750	64	12400s	10.97s
[Bli04a] $_{k=2}$	572	52	61s	8.66s
[HAPL04] $_{k=6}$	454	476	–	29.27s
T3.1 $_{g=3}$	100	100	0.41s	0.31s
T3.2 $_{g=2}$	252	104	7.1s	2.65s

Tabela 3.5: Comparação dos resultados dos Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) com os resultados apresentados em [CGTV05b], as condições LMIs de [Bli04a] e com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o terceiro exemplo de [CGTV05b] ( $n = 4$ ,  $N = 3$  e  $\hat{\rho} = 2.2237$ ) em termos de esforço computacional.  $K$  é o número de variáveis escalares,  $L$  é o número de linhas de LMIs. O método em [HAPL04] foi implementado por meio do *GloptiPoly*, que usa o SeDuMi internamente.

Note que as condições de [CGTV05b] usam uma estrutura especial para as variáveis nas LMIs que, neste caso, demandam muito mais tempo quando usa-se o *LMI Control Toolbox*. Os

métodos propostos nos Teoremas 3.1 e 3.2 claramente fornecem os melhores resultados (menor complexidade para atingir o valor ótimo de  $\hat{\rho}$ ).

## Exemplo 4

O exemplo 4 de [HAPL04], que considera um sistema incerto a tempo discreto na forma afim é investigado por meio dos Teoremas 3.3 e 3.4, como mostrado na Tabela 3.6. O sistema original com dimensão  $n = 3$  e dois parâmetros incertos na forma afim foi convertido em um politopo com  $N = 4$  vértices (tomando-se todas as combinações de valores máximos e mínimos de cada parâmetro incerto).

Método	$\rho$
[HAPL04] <sub>k=10</sub>	0.38409
T3.3 <sub>g=0, 1, 2, 3</sub>	0.181, 0.260, 0.378, 0.38409
T3.4 <sub>g=0, 1, 2</sub>	0.181, 0.339, 0.38409

Tabela 3.6: Comparação dos resultados dos Teoremas 3.3 (T3.3) e 3.4 (T3.4) com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o quarto exemplo em [HAPL04] com  $n = 3$  e  $N = 4$  (forma politópica) ou  $N = 2$  (forma afim). Um procedimento de busca exaustiva foi usado para calcular o maior valor possível de  $\hat{\rho} = 0.38409$ .

O número de variáveis escalares  $K$ , linhas de LMIs  $L$  e o tempo demandado para atingir o valor ótimo  $\hat{\rho} = 0.38409$  são mostrados na Tabela 3.7. Como pode ser notado, as condições dos Teoremas 3.3 e 3.4 fornecem os melhores resultados mesmo nesse caso, no qual um sistema afim com dois parâmetros foi transformado em um politopo com  $N = 4$  vértices (quatro parâmetros incertos).

Método	$K$	$L$	Tempo [GNLC95]	Tempo [Stu99]
[HAPL04] <sub>k=10</sub>	230	286	–	4.96s
T3.3 <sub>g=3</sub>	120	270	1.48s	0.45s
T3.4 <sub>g=2</sub>	240	150	3.01s	0.51s

Tabela 3.7: Comparação dos resultados dos Teoremas 3.3 (T3.3) e 3.4 (T3.4) com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o quarto exemplo de [HAPL04] com  $n = 3$  e  $N = 4$  (forma politópica) ou  $N = 2$  (forma afim) e  $\hat{\rho} = 0.38409$  em termos de esforço computacional.

## Exemplo 5

Outro sistema incerto a tempo discreto com dimensão  $n = 3$  foi investigado, descrito por um politopo com  $N = 3$  vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 & 0.4 \\ 0.0 & -0.5 & -0.2 \\ 0.3 & 0.0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.9 & -1.3 \\ -0.8 & 0.4 & 1.2 \\ 1.2 & 0.3 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ -0.3 & -0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Para usar a abordagem polinomial de [HAPL04], a restrição de igualdade  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$  foi incluída no problema de otimização, resolvido pelo *GloptiPoly*, considerando como sistema nominal  $A_0 = \mathbf{0}$  e três parâmetros incertos  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  pertencentes ao intervalo  $[0, 1]$ . A Tabela 3.8 mostra o tempo computacional demandado por cada método para fornecer uma solução factível garantindo a estabilidade robusta do politopo, assim como os números  $K$  e  $L$ .

Método	$K$	$L$	Tempo [GNLC95]	Tempo [Stu99]
[HAPL04] $_{k=10}$	1770	1826	–	603s
T3.3 $_{g=2}$	36	78	0.09 s	0.13 s
T3.4 $_{g=1}$	72	45	0.13s	0.16s

Tabela 3.8: Comparação dos resultados dos Teoremas 3.3 (T3.3) e 3.4 (T3.4) com a abordagem polinomial de [HAPL04] para o exemplo 5 com dimensão  $n = 3$  e  $N = 3$  em termos de esforço computacional.  $K$  é o número de variáveis escalares,  $L$  é número de linhas de LMI.

A superioridade das condições dos Teoremas 3.3 e 3.4 é clara. O pacote computacional *GloptiPoly* demandou 1059 s somente para construir o sistema de LMIs, que foi resolvido pelo SeDuMi em 603 s (tempo total maior que 27 minutos), enquanto que neste caso os Teoremas 3.3 e 3.4 demandaram menos do que 1 segundo para construir o conjunto de LMIs. Como conclusão, a abordagem polinomial de [HAPL04] é mais adequada para tratar de sistemas lineares incertos na forma afim com pequenas dimensões e poucos parâmetros incertos, principalmente no contexto de sistemas a tempo contínuo (nos quais a matriz de Hermite pode ser simplificada). Mesmo nesses casos, os resultados propostos neste capítulo demandam menos esforço computacional. Além disso, a abordagem polinomial torna-se rapidamente muito onerosa com o aumento do número de parâmetros incertos, enquanto que as condições propostas neste capítulo são capazes de fornecer avaliações de estabilidade robusta em tempo razoáveis, mesmo para sistemas de dimensões maiores.

## Exemplo 6: Avaliação de politopos estáveis

Finalmente, famílias de mil politopos estáveis para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$  foram geradas seguindo as linhas de [LP03]. O número de politopos estáveis identificados por cada teorema para  $g = 1, \dots, 5$  é dado na Tabela 3.9 (estabilidade Hurwitz) e na Tabela 3.10 (estabilidade

Schur), ilustrando a eficácia dos métodos propostos. De fato, dos resultados numéricos é possível inferir que à medida que  $g$  aumenta o número de avaliações positivas de politopos estáveis atinge a totalidade de casos. Em relação aos testes referentes à estabilidade Hurwitz, o Teorema 3.1 (T3.1) precisa de  $g = 5$  para identificar a totalidade de politopos estáveis enquanto que o Teorema 3.2 (T3.2) atinge quase o mesmo desempenho (exceto por um caso) com  $g = 3$ . Por outro lado, a Tabela 3.10 mostra que o Teorema 3.4 (T3.4) identifica todos os politopos como Schur estáveis com  $g = 3$  enquanto que o Teorema 3.3 (T3.3) necessita de valores maiores de  $g$  para produzir os mesmos resultados.

$n$	$g$	<b>1</b>		<b>2</b>		<b>3</b>		<b>4</b>		<b>5</b>	
		T3.1	T3.2								
<b>2</b>	2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	3	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	4	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
<b>3</b>	2	950	977	987	997	994	1000	995	1000	1000	1000
	3	905	962	981	997	993	999	998	1000	1000	1000
	4	906	965	986	998	994	1000	999	1000	1000	1000
<b>4</b>	2	941	978	986	998	999	1000	1000	1000	1000	1000
	3	878	952	978	996	991	1000	997	1000	1000	1000
	4	877	951	976	997	993	1000	998	1000	1000	1000

Tabela 3.9: Número de politopos identificados como Hurwitz estáveis para (número de estados)  $n = 2, 3, 4$  e (número de vértices)  $N = 2, 3, 4$  usando os Teoremas 3.1 (T3.1) e 3.2 (T3.2) para  $g = 1, 2, 3, 4, 5$ .

$n$	$g$	<b>1</b>		<b>2</b>		<b>3</b>		<b>4</b>		<b>5</b>	
		T3.3	T3.4								
<b>2</b>	2	717	995	790	1000	841	1000	862	1000	888	1000
	3	456	988	568	1000	655	1000	717	1000	774	1000
	4	265	984	400	1000	499	1000	589	1000	671	1000
<b>3</b>	2	701	969	824	999	876	1000	905	1000	929	1000
	3	394	915	623	998	717	1000	788	1000	853	1000
	4	208	887	435	999	557	1000	666	1000	750	1000
<b>4</b>	2	668	960	850	1000	901	1000	929	1000	950	1000
	3	371	905	642	999	776	1000	844	1000	899	1000
	4	199	848	474	1000	628	1000	740	1000	806	1000

Tabela 3.10: Número de politopos identificados como Schur estáveis para (número de estados)  $n = 2, 3, 4$  e (número de vértices)  $N = 2, 3, 4$  usando os Teoremas 3.3 (T3.3) e 3.4 (T3.4) para  $g = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Com o objetivo de analisar o comportamento dos métodos propostos em termos do tempos computacionais demandados com o aumento de  $g$ , o seguinte experimento é realizado: Para

cada caso  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ , o tempo médio para cada método afirmar a estabilidade de 50 polítopos estáveis é calculado para  $g$  variando de um até cinco. As Figuras 3.1 e 3.2 mostram os tempos obtidos pelos Teoremas 3.1 e 3.2, respectivamente. Somente o resolvidor SeDuMi foi utilizado. As Figuras 3.3 e 3.4 mostram os tempos obtidos pelos Teoremas 3.3 e 3.4, respectivamente.

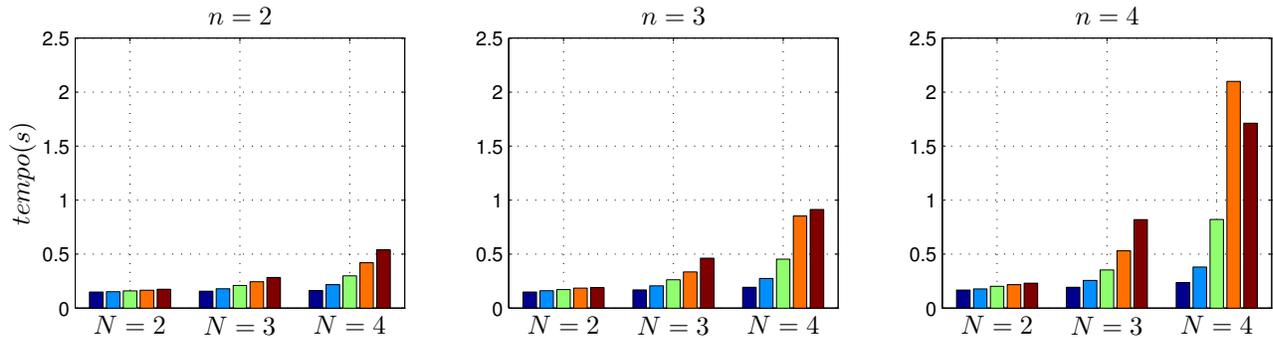


Figura 3.1: Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema 3.1 para afirmar a estabilidade de 50 polítopos estáveis variando  $g$  de um até cinco para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ . As cinco barras horizontais agrupadas significam a variação de  $g = \{1, \dots, 5\}$ .

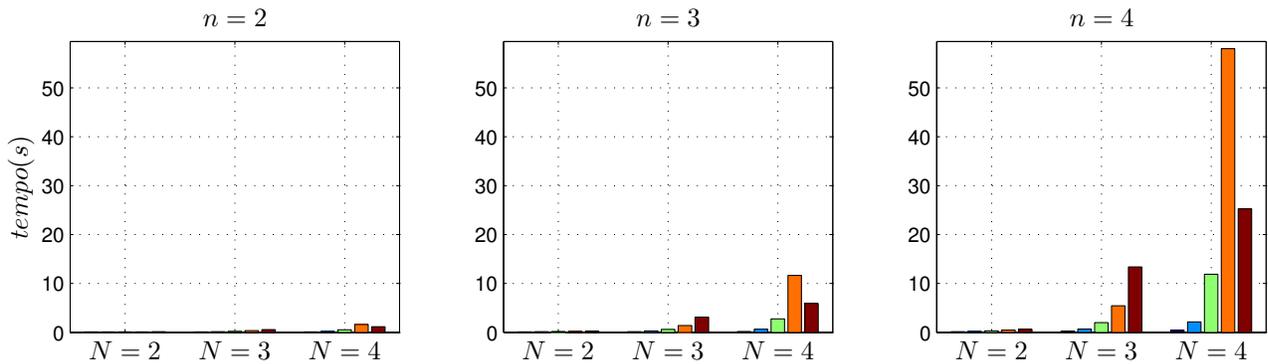


Figura 3.2: Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema 3.2 para afirmar a estabilidade de 50 polítopos estáveis variando  $g$  de um até cinco para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ . As cinco barras horizontais agrupadas significam a variação de  $g = \{1, \dots, 5\}$ .

Como se observa das figuras, os melhores desempenhos são dos Teoremas 3.1 e 3.3 (que não usam variáveis extras do Lema de Finsler). Por outro lado, o maior esforço demandado pelos Teoremas 3.3 e 3.4 é compensado com a necessidade de graus menores para atingir convergência. Para esse experimento, o aumento de  $g$  revela um aspecto surpreendente, como pode ser notado nas Figuras 3.1–3.4. Note que à medida que  $n$  cresce, o grau quatro sempre apresenta uma complexidade maior que o grau cinco, em todas as condições propostas. Esse comportamento não é esperado, uma vez que as condições para o grau cinco têm mais linhas de LMIs e mais variáveis que as condições para o grau quatro. Um estudo sobre essa característica é deixado para trabalho futuro.

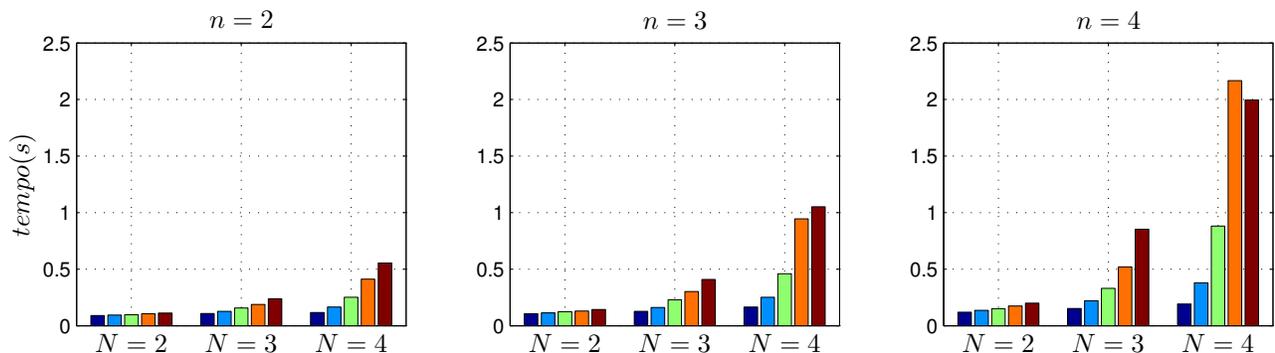


Figura 3.3: Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema 3.3 para afirmar a estabilidade de 50 polítopos estáveis variando  $g$  de um até cinco para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ . As cinco barras horizontais agrupadas significam a variação de  $g = \{1, \dots, 5\}$ .

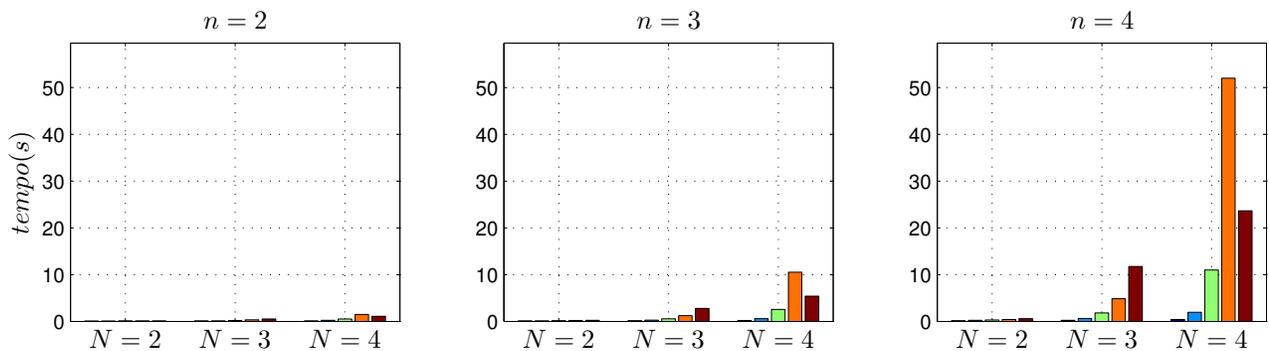


Figura 3.4: Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema 3.4 para afirmar a estabilidade de 50 polítopos estáveis variando  $g$  de um até cinco para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ . As cinco barras horizontais agrupadas significam a variação de  $g = \{1, \dots, 5\}$ .

Para proporcionar mais informações sobre o comportamento das diferentes abordagens, a Tabela 3.11 mostra a quantidade de tempo e os níveis de relaxação requeridos por cada método para decidir positivamente sobre a estabilidade robusta do número total de um conjunto de mil politopos estáveis para  $n = 3$ ,  $N = 3$  (caso contínuo, topo da tabela), incluindo quantos politopos estáveis foram identificados para cada nível de relaxação. Essa situação (complexidade média) ilustra o comportamento geral de cada método para decidir sobre a estabilidade de todo o conjunto de politopos. A superioridade das condições dos Teoremas 3.1 e 3.2 implementadas com o *LMI Control Toolbox*, é evidente. Similarmente, uma comparação entre os resultados obtidos pelos Teoremas 3.4 e a abordagem polinomial de [HAPL04] também é mostrada na parte de baixo da Tabela 3.11 para  $n = 2$ ,  $N = 3$  (caso discreto). Para valores maiores de  $n$  e  $N$ , o tempo demandado pela abordagem polinomial de [HAPL04] para reconhecer positivamente a Schur estabilidade dos politopos torna-se muito grande quando comparado com os tempos exigidos pelos métodos propostos neste capítulo. Em todos os casos, o tempo demandado por cada método para construir o conjunto de LMIs não foi incluído.

Método	Tempos (s)						Tempo Total (s)
$n = 3, N = 3$ (caso contínuo)							
T3.1	casos ( $g$ )	905 (1)	76 (2)	12 (3)	5 (4)	2 (5)	33.12
	[GNLC95]	24.05	4.75	1.59	1.25	1.48	
	[Stu99]	93.73	11.17	2.23	1.51	1.22	
T3.2	casos ( $g$ )	962 (1)	35 (2)	2 (3)	1 (4)		174.86
	[GNLC95]	123.39	25.18	13.56	12.73		
	[Stu99]	135.48	10.26	1.77	1.94		
[CGTV05b]	casos ( $m$ )	963 (1)	37 (2)				248.33
	[Stu99]	190.89	57.44				
[Bli04a]	casos ( $k$ )	505 (1)	488 (2)	7 (3)			1714.55
	[Stu99]	138.79	882.26	693.50			
[HAPL04]	casos ( $k$ )	1000 (4)					2342.38
	[Stu99]	2342.38					
$n = 2, N = 3$ (caso discreto)							
T3.4	casos ( $g$ )	988 (1)	12 (2)				45.26
	[GNLC95]	43.74	1.52				
	[Stu99]	91.24	1.51				
[HAPL04]	casos ( $k$ )	981 (4)	19 (5)				2366.94
	[Stu99]	2299.16	67.78				

Tabela 3.11: Para o Teorema 3.1 (T3.1), a tabela mostra o número de politopos identificados como estáveis para cada grau  $g$ ,  $g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  de um conjunto de mil politopos estáveis para  $n = 3$ ,  $N = 3$  (caso contínuo). O tempo computacional (em segundos) usando [GNLC95] e [Stu99] para cada grau é apresentado assim como o tempo total. O mesmo procedimento é aplicado para os outros métodos, incluindo a análise de um conjunto de mil politopos Schur estáveis com dimensão  $n = 2$ ,  $N = 3$ . Somente o tempo requerido para resolver as LMIs foi considerado.

## 3.7 Conclusão

Um procedimento sistemático para construir funções de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros, de grau crescente, usadas para avaliar a estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos foi apresentado. A estabilidade robusta (Hurwitz e Schur) é garantida (condições suficientes) por meio da factibilidade de um conjunto de LMIs descritas em termos dos vértices do politopo. Os resultados podem ser estendidos de forma imediata para tratar da estabilidade robusta de sistemas lineares em relação a regiões convexas no plano complexo ( $\mathcal{D}$ -estabilidade). À medida que o grau da função de Lyapunov aumenta, as condições obtidas tornam-se progressivamente menos conservadoras, fornecendo um teste simples e eficiente para avaliar a estabilidade robusta de sistemas politópicos, que requer menos esforço computacional que outros métodos similares da literatura. No Capítulo 5 é mostrado que as condições propostas também tornam-se necessárias à medida que o grau da função de Lyapunov aumenta.

## Aplicações em Cômputo de Normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

A principal vantagem da metodologia proposta no Capítulo 3 é a sua imediata extensão para tratar outros problemas de análise e síntese robusta descritos em termos de LMIs dependentes de parâmetros. Este capítulo estende essa metodologia para abordar cômputos de custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares politópicos. A próxima seção introduz alguns resultados importantes referentes a cômputos de custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares incertos.

### 4.1 Introdução

É incontestável que a busca por atender certas especificações de desempenho é um dos propósitos mais importantes em sistemas de controle e as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  surgem naturalmente como medidas de desempenho para muitas classes de sistemas [ZGD96]. A teoria de controle ótimo  $\mathcal{H}_2$  foi extensivamente estudada nos anos sessenta (século XX) como o problema ótimo linear quadrático, e a norma  $\mathcal{H}_2$  é amplamente reconhecida como o custo mais representativo na síntese de leis de controle. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  alcançou um grande nível de importância dentro da teoria de controle robusto principalmente em função do sucesso de sua aplicabilidade como um índice de desempenho na presença de incertezas para a análise e síntese de controle de sistemas lineares invariantes no tempo [DGKF89].

Muitas técnicas de projeto foram desenvolvidas para fornecer filtros e controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares a tempo contínuo e discreto, incluindo parâmetros incertos em domínios convexos ou limitados por norma. Embora um grande número de trabalhos baseados na abordagem pela equação de Riccati [MP96b], [MP96a], [Pet95] tenha aparecido como a primeira ferramenta para tratar esse tipo de problema, um passo importante para estabelecer procedimentos convexos de otimização para projetar controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  robustos foi dado pelos resultados da estabilização quadrática [Bar85], [GPB91], [BEFB94]. A estabilidade quadrática aplicada a sistemas com incertezas politópicas forneceu uma família de métodos de análise e projeto que são formulados diretamente em termos de LMIs [Bar94], [GZL90], [PGB93]. Em [PTP97], cômputos de custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  baseados na estabilidade quadrática para

sistemas contínuos e discretos foram apresentados em termos de LMIs. Veja também [GPdS92], [GPS93], [KKR93] e [KR91] para síntese de controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas politópicos a tempo contínuo e discreto. Entretanto, os resultados da estabilidade quadrática são conservadores para analisar estabilidade e índices de desempenhos para sistemas invariantes no tempo.

Assim como no caso de estabilidade robusta, métodos para computar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  baseados em funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros apareceram como alternativa para fornecer resultados menos conservadores do que os baseados na estabilidade quadrática. Em [FAG96], condições LMIs suficientes para computar custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares incertos na forma afim foram apresentadas. Extensões de [PABB00] para computar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares politópicos podem ser encontradas em [ABP02] e, para o caso discreto, condições LMIs para síntese de controladores podem ser encontradas em [dOGB02]. As extensões de [RP01], [RP02] e [LP03] para computar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  são encontradas em [dOOL<sup>+</sup>04a] e [dOOL<sup>+</sup>04b]. Embora boas estimativas das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso possam ser obtidas por meio de funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros, em alguns casos essa classe de funções não é capaz de garantir a estabilidade robusta do sistema e, conseqüentemente, não pode ser usada para calcular custos garantidos, fazendo-se necessário o uso de funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros. A extensão da abordagem polinomial de [Bli04a] para tratar do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares na forma afim com retardo nos estados pode ser encontrada em [KMLM05]. Para calcular normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso dentro de uma precisão pré-estabelecida, vale a pena mencionar o algoritmo *branch-and-bound* proposto em [GPT05, Section 3.2] que divide recursivamente o espaço de parâmetros usando a triangulação de Delaunay [dBvKOS97].

Neste capítulo, funções de Lyapunov com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros são usadas para obter um procedimento sistemático para gerar condições LMIs de precisão crescente para computar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares politópicos. Assim como no caso de estabilidade robusta, as condições são construídas de forma que: à medida que o grau da função aumenta, o número de LMIs e de variáveis livres aumenta e os testes tornam-se menos conservadores; se uma solução existe para um certo grau, as condições também são verificadas para graus maiores. Para o grau zero, custos garantidos baseados na estabilidade quadrática [PTP97], assim como, para grau um, custos garantidos baseados em funções de Lyapunov com dependência afim [dOOL<sup>+</sup>04a], [dOOL<sup>+</sup>04b] são recuperados como casos particulares. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar os resultados.

## 4.2 Preliminares

Neste capítulo considera-se o sistema linear politópico dado em (1.1). Antes de apresentar os resultados principais, duas tarefas preliminares são necessárias: assim como no caso da estabilidade robusta, as condições para o cômputo da norma  $\mathcal{H}_2$  apresentadas no Capítulo 1 precisam ser redefinidas de modo que haja no máximo produtos duplos nas desigualdades; e

pode-se também estender as condições de cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por meio do Lema de Finsler, introduzindo novas variáveis nos problemas de otimização.

### 4.2.1 Norma $\mathcal{H}_2$

**Lema 4.1** *A desigualdade  $\|H_{wy}(\alpha)\|_2^2 < \gamma$  é verificada se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz simétrica semidefinida positiva  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que*

$$\begin{aligned} & \text{tr}(T) < \gamma, \\ & \begin{bmatrix} -T & B(\alpha)'P(\alpha) \\ \star & -P(\alpha) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

e

$$\Upsilon_c(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) & C(\alpha)' \\ \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2)$$

são verificadas para todo  $\alpha \in \Delta_N$  (caso contínuo) ou (4.1) e

$$\Upsilon_d(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} -P(\alpha) & A(\alpha)'P(\alpha) & C(\alpha)' \\ \star & -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.3)$$

são verificadas para todo  $\alpha \in \Delta_N$  (caso discreto).

Usando-se o Lema de Finsler, novas condições com variáveis extras podem ser obtidas.

**Lema 4.2** *A desigualdade  $\|H_{wy}(\alpha)\|_2^2 < \gamma$  é verificada se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $H(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $L(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz simétrica semidefinida positiva  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que*

$$\text{tr}(T) < \gamma,$$

$$\begin{bmatrix} H(\alpha)B(\alpha) + B(\alpha)'H(\alpha)' - T & B(\alpha)'L(\alpha) - H(\alpha) \\ \star & P(\alpha) - L(\alpha) - L(\alpha)' \end{bmatrix} < 0, \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} F(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)'F(\alpha)' & A(\alpha)'G(\alpha) - F(\alpha) & C(\alpha)' \\ \star & -G(\alpha) - G(\alpha)' & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \Theta(\alpha) < 0 \quad (4.5)$$

são verificadas para todo  $\alpha \in \Delta_N$ , com  $\Theta(\alpha)$  dado por

$$\Theta_c(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Theta_d(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

para os casos contínuo e discreto, respectivamente.

As variáveis adicionais  $F(\alpha)$ ,  $G(\alpha)$ ,  $H(\alpha)$  e  $L(\alpha)$  do Lema 4.2 fornecem graus de liberdade extras que podem ser úteis quando uma estrutura particular for imposta para a dependência dos parâmetros. A hipótese de que  $F(\alpha)$ ,  $G(\alpha)$ ,  $H(\alpha)$  e  $L(\alpha)$  dependem de forma afim no parâmetro  $\alpha$  foi explorada em [ABP02], [dOOL<sup>+</sup>04b] e [dOOL<sup>+</sup>04a].

## 4.2.2 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Condições equivalentes para o cômputo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  podem ser obtidas por meio do Lema de Finsler, resultando no seguinte problema de otimização.

**Lema 4.3** *A desigualdade  $\|H_{wy}(\alpha)\|_\infty^2 < \mu$  é satisfeita se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{(2n+m+p) \times (n+p)}$  tais que*

$$\Theta(\alpha) \triangleq Q(\alpha) + X(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'X(\alpha)' < 0 \quad (4.6)$$

são verificadas para todo  $\alpha \in \Delta_N$ , com

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A(\alpha) & \mathbf{0} & -B(\alpha) \\ \mathbf{0} & -C(\alpha) & \mathbf{I} & -D(\alpha) \end{bmatrix}$$

e  $Q(\alpha)$  dadas por

$$Q_c(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mu_c \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad Q_d(\alpha) = \begin{bmatrix} P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & -P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\mu_d \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

para os casos contínuo e discreto, respectivamente.

A matriz dependente de parâmetros  $X(\alpha)$  pode ser usada para fornecer condições LMIs menos conservadoras para o cômputo de custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  quando estruturas particulares para  $P(\alpha)$  e  $X(\alpha)$  forem consideradas, como foi feito em [ABP02] impondo  $X(\alpha) = X$  e em [dOOL<sup>+</sup>04b], em que as matrizes  $X(\alpha)$  e  $P(\alpha)$  são consideradas com dependência afim nos parâmetros  $\alpha \in \Delta_N$ .

Na seqüência, matrizes de Lyapunov com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros dadas em (3.1) são usadas para derivar condições LMIs suficientes que são progressivamente menos conservadoras para computar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Impondo estruturas similares nas variáveis extras, resultados mais precisos (para um grau dado) são obtidos.

## 4.3 Resultados Principais

### 4.3.1 Condições para custos garantidos $\mathcal{H}_\infty$

**Teorema 4.1** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$H_\ell = \sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} A'_i P_{\mathcal{K}_i^i(g+1)} + P_{\mathcal{K}_i^i(g+1)} A_i & P_{\mathcal{K}_i^i(g+1)} B_i & \beta_\ell^i(g+1) C'_i \\ \star & -\beta_\ell^i(g+1) \mathbf{I} & \beta_\ell^i(g+1) D'_i \\ \star & \star & -\beta_\ell^i(g+1) \mu_c \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.7)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada em (3.1) garante que  $M_c(\alpha)$  dada em (1.31) é definida negativa todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Além disso, se as LMIs de (4.7) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Prova:** Como  $P_{\mathcal{K}_j(g)} = P'_{\mathcal{K}_j(g)} > 0$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , então  $P_g(\alpha) > 0$  para todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Por outro lado, note que  $M_c(\alpha)$  em (1.31) para  $(A, B, C, D)(\alpha) \in \mathcal{S}$  e  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) é uma matriz polinomial homogênea de grau  $g + 1$  que pode ser escrita como

$$M_c(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{J(g+1)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} (H_\ell); \quad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(g+1) \quad (4.8)$$

A condição  $H_\ell < 0$  imposta para todo  $\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$  garante  $M_c(\alpha) < 0$  para todo  $\alpha \in \Delta_N$ .

Suponha que as LMIs de (4.7) são verificadas para um certo grau  $\hat{g}$ , isto é, existem  $J(\hat{g})$  matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(\hat{g})}$ ,  $j = 1, \dots, J(\hat{g})$  tais que  $P_{\hat{g}}(\alpha)$  é uma matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros que garante  $M_c(\alpha) < 0$ . Então, os termos da matriz polinomial  $P_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)P_{\hat{g}}(\alpha)$  satisfazem as LMIs do Teorema 4.1 correspondentes ao grau  $\hat{g} + 1$ , que podem ser obtidas nesse caso por combinações lineares positivas das LMIs do Teorema 4.1 para  $\hat{g}$ . ■

À medida que o grau  $g$  da matriz de Lyapunov aumenta, as condições tornam-se menos conservadoras uma vez que novas variáveis são adicionadas nas LMIs. Embora o número de LMIs também esteja aumentando, cada LMI torna-se mais fácil de ser verificada em função dos graus de liberdade extras fornecidos pelas novas variáveis. As mesmas observações aplicam-se ao caso discreto, apresentado no próximo teorema.

**Teorema 4.2** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & A'_i P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \mathbf{0} & \beta_\ell^i(g+1) C'_i \\ \star & -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} B_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\beta_\ell^i(g+1) \mathbf{I} & \beta_\ell^i(g+1) D'_i \\ \star & \star & \star & -\beta_\ell^i(g+1) \mu_d \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.9)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada em (3.1) garante que  $M_d(\alpha)$  dada em (1.32) é definida negativa todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Além disso, se as LMIs de (4.9) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Prova:** Similar à prova do Teorema 4.1. ■

Impondo-se a estrutura polinomial homogênea na variável  $X(\alpha)$  do Lema 4.3, custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  menos conservadores podem ser obtidos para o mesmo grau  $g$ .

**Teorema 4.3** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes  $X_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{(2n+q+p) \times (n+p)}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$  tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \left( Q_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} + X_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i' X_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}' \right) < 0 \quad (4.10)$$

com

$$\mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A_i & \mathbf{0} & -B_i \\ \mathbf{0} & -C_i & \mathbf{I} & -D_i \end{bmatrix}, \quad X_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} X_{\mathcal{K}_j(g)}; \quad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_j(g) \quad (4.11)$$

e  $Q_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}$  dada por

$$Q_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \beta_\ell^i(g+1)\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\beta_\ell^i(g+1)\mu\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$Q_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}^d = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \beta_\ell^i(g+1)\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\beta_\ell^i(g+1)\mu\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

para os casos contínuo e discreto, respectivamente, então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada em (3.1) garante que  $\Theta(\alpha)$  dada em (4.6) é definida negativa todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Além disso, se as LMIs de (4.10) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Prova:** Similar à prova do Teorema 4.1. Com  $P_g(\alpha) > 0$  dada em (3.1),  $X_g(\alpha)$  em (4.11) e  $(A, B, C, D)(\alpha) \in \mathcal{S}$ ,  $\Theta(\alpha)$  em (4.6) pode ser escrita como uma combinação positiva dos  $\alpha_i$ 's envolvendo o lado esquerdo das LMIs (4.10). Impondo que cada LMI seja definida negativa, uma condição suficiente para  $\Theta(\alpha) < 0$  é obtida. Novamente, se as condições (4.6) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então  $P_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\sum_{i=1}^N \alpha_i) P_{\hat{g}}(\alpha)$  e  $X_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\sum_{i=1}^N \alpha_i) X_{\hat{g}}(\alpha)$  são uma solução factível para as LMIs (4.10) para  $g = \hat{g} + 1$ . ■

Minimizando o valor de  $\mu$  tal que as condições dos Teoremas 4.1, 4.1 e 4.3 são verificadas, custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  podem ser computados por meio de procedimentos convexos de otimização. Para  $g$  dado, os resultados do Teorema 4.3 são menos conservadores (e contêm os resultados dos Teoremas 4.1 e 4.2) em função da variável matricial adicional  $X_g(\alpha)$ .

### 4.3.2 Condições para custos garantidos $\mathcal{H}_2$

Os próximos dois teoremas fornecem condições suficientes para que as condições que envolvem  $T$  (condições do traço) (4.1) e (4.4) sejam satisfeitas.

**Teorema 4.4** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , e uma matriz simétrica semidefinida positiva  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} -\beta_\ell^i(g+1)T & B_i' P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \\ \star & -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.12)$$

então (4.1) é verificada para todo  $\alpha \in \Delta_N$  com a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada por (3.1). Além disso, se as LMIs de (4.12) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Prova:** Similar à prova do Teorema 4.1. Com  $P_g(\alpha) > 0$  dada por (3.1), (4.1) é uma matriz polinomial homogênea de grau  $g+1$  que pode ser escrita como

$$\sum_{\ell=1}^{J(g+1)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} -\beta_\ell^i(g+1)T & B_i' P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \\ \star & -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} \end{bmatrix} \right); \quad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(g+1) \quad (4.13)$$

A condição (4.12) imposta para todo  $\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$  garante que (4.1) é verificada para todo  $\alpha \in \Delta_N$ .  $\blacksquare$

Note que coeficientes  $\beta_\ell^i(g+1)$  são necessários em (4.12) com o objetivo de reescrever (4.1) como uma matriz polinomial homogênea, o que é feito simplesmente multiplicando  $T$  por  $(\sum_{i=1}^N \alpha_i)^{g+1}$ .

**Teorema 4.5** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $H_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $L_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , e uma matriz simétrica semidefinida positiva  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} H_{\mathcal{K}_j(g+1)} B_i + B_i' H_{\mathcal{K}_j(g+1)}' - \beta_\ell^i(g+1)T & B_i' L_{\mathcal{K}_j(g+1)} - H_{\mathcal{K}_j(g+1)} \\ \star & P_{\mathcal{K}_j(g+1)} - L_{\mathcal{K}_j(g+1)} - L_{\mathcal{K}_j(g+1)}' \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada em (3.1) garante que (4.4) é verificada para todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Além disso, se as LMIs de (4.14) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Prova:** Similar à prova do Teorema 4.1. Note que as variáveis extras  $H(\alpha)$  e  $L(\alpha)$  também são consideradas como matrizes polinomiais homogêneas, isto é,

$$H_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} H_{\mathcal{K}_j(g)}, \quad L_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} L_{\mathcal{K}_j(g)} ;$$

$$k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_j(g)$$

Os próximos três teoremas fornecem condições suficientes para garantir que as condições dos gramianos (4.2), (4.3) e (4.5) sejam satisfeitas. As provas são similares às dos teoremas anteriores, sendo portanto omitidas. ■

**Teorema 4.6** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} A_i' P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} + P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} A_i & \beta_\ell^i(g+1) C_i' \\ \star & -\beta_\ell^i(g+1) \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.15)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada em (3.1) garante que  $\Upsilon_c(\alpha)$  dada em (4.2) é definida negativa para todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Além disso, se as LMIs de (4.15) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Teorema 4.7** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & A_i' P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \beta_\ell^i(g+1) C_i' \\ \star & -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\beta_\ell^i(g+1) \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada em (3.1) garante que  $\Upsilon_d(\alpha)$  dada em (4.3) é definida negativa para todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Além disso, se as LMIs de (4.16) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

**Teorema 4.8** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $F_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas para todo  $\mathcal{K}_\ell(g+1) \in \mathcal{K}(g+1)$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g+1)$*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_\ell(g+1)} \begin{bmatrix} F_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} A_i + A_i' F_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & A_i' G_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} - F_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & C_i' \beta_\ell^i(g+1) \\ \star & -G_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} - G_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}' & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\beta_\ell^i(g+1) \mathbf{I} \end{bmatrix} + \Theta_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} < 0 \quad (4.17)$$

com

$$F_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} F_{\mathcal{K}_j(g)}, \quad G_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} G_{\mathcal{K}_j(g)} ;$$

$$k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_j(g)$$

e  $\Theta_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}$  dada por

$$\Theta_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)}^d = \begin{bmatrix} -P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & P_{\mathcal{K}_\ell^i(g+1)} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

para os casos contínuo e discreto, respectivamente, então a matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros dada em (3.1) garante que (4.5) é satisfeita para todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Além disso, se as LMIs de (4.17) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.

Com os Teoremas 4.4 (T4.4) e 4.5 (T4.5), e os Teoremas 4.6 (T4.6), 4.7 (T4.7) e 4.8 (T4.8), pode-se formular quatro problemas de otimização diferentes para avaliar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  para o caso contínuo, dados por:

$$\begin{aligned} \gamma_c^2 &= \min \operatorname{tr}(T) \\ \text{tal que os Teoremas } (i, j) &\text{ são satisfeitos;} \\ (i, j) &\in \{(4.4, 4.6), (4.4, 4.8), (4.5, 4.6), (4.5, 4.8)\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Como T4.4 e T4.5 são condições suficientes para (4.1) e (4.4) e T4.6 e T4.8 são condições suficientes para (4.2) e (4.5), a minimização do  $\operatorname{tr}(T)$  garante que  $\gamma_c$  estará o mais perto possível da norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso. Similarmente, os problemas de otimização para o caso discreto são:

$$\begin{aligned} \gamma_d^2 &= \min \operatorname{tr}(T) \\ \text{tal que os Teoremas } (i, j) &\text{ são satisfeitos;} \\ (i, j) &\in \{(4.4, 4.7), (4.4, 4.8), (4.5, 4.7), (4.5, 4.8)\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para propósitos de comparações numéricas, somente os pares (T4.4,T4.6) e (T4.5,T4.8) são considerados no caso contínuo. O último par usa variáveis extras nas condições do traço e do gramiano, fornecendo avaliações menos conservadoras para o mesmo grau  $g$ , ao preço de um esforço computacional maior. Similarmente, somente os pares (T4.4,T4.7) e (T4.5,T4.8) são considerados no caso discreto.

## 4.4 Complexidade

A complexidade numérica associada às condições LMIs apresentadas pode ser estimada a partir do número  $K$  de variáveis escalares e o número  $L$  de linhas de LMIs nos problemas de otimização. A Tabela 4.1 mostra os valores de  $K$  e  $L$  em função de  $n$  (estados),  $m$  (entradas),  $p$  (saídas),  $N$  (número de vértices) e  $J(g)$  para os Teoremas 4.1 (T4.1), 4.2 (T4.2), 4.3 (T4.3), 4.4 (T4.4), 4.5 (T4.5), 4.6 (T4.6), 4.7 (T4.7) e 4.8 (T4.8).  $J(g)$  é dado por  $(N + g - 1)! / (g!(N - 1)!)$ .

$K$	
T4.1 e T4.2	$1 + n(n+1)J(g)/2$
T4.3	$1 + (n(n+1)/2 + (2n+m+p)(n+p))J(g)$
T4.4	$n(n+1)J(g)/2 + m(m+1)/2$
T4.5	$n(n+1)J(g)/2 + m(m+1)/2 + n(m+n)J(g)$
T4.6 e T4.7	$n(n+1)J(g)/2$
T4.8	$n(n+1)J(g)/2 + 2n^2J(g)$
$L$	
T4.1	$(n+m+p)J(g+1) + nJ(g)$
T4.2 e T4.3	$(2n+m+p)J(g+1) + nJ(g)$
T4.4 e T4.5	$(n+m)J(g+1) + nJ(g)$
T4.6	$(n+p)J(g+1) + nJ(g)$
T4.7 e T4.8	$(2n+p)J(g+1) + nJ(g)$

Tabela 4.1: Valores de  $K$  (número de variáveis escalares) e  $L$  (número de linhas de LMIs) em função de  $n$  (estados),  $m$  (entradas),  $p$  (saídas),  $N$  (número de vértices) e  $J(g)$  para os Teoremas 4.1 (T4.1), 4.2 (T4.2), 4.3 (T4.3), 4.4 (T4.4), 4.5 (T4.5), 4.6 (T4.6), 4.7 (T4.7) e 4.8 (T4.8).  $J(g)$  é dado por  $(N+g-1)!/(g!(N-1)!)$ .

Note que condições alternativas podem ser obtidas simplesmente substituindo  $(A_i, B_i, C_i, D_i)$  (sistema original) por  $(A'_i, C'_i, B'_i, D'_i)$  (sistema dual) nos teoremas com as respectivas mudanças nas dimensões das variáveis (que dependem de  $m$  e  $p$ ), provavelmente fornecendo diferentes complexidades e avaliações distintas de custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

## 4.5 Experimentos Numéricos

Alguns exemplos numéricos, apresentados na seqüência, ilustram como as condições propostas neste capítulo podem fornecer estimativas cada vez mais acuradas de custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  à medida que  $g$  cresce (em todos os casos apresentados, os custos garantidos chegam muito próximos das normas de pior caso com valores relativamente pequenos de  $g$  e podem ser computados em poucos segundos). As normas de pior caso  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  foram computadas por meio de uma busca exaustiva no espaço de parâmetros. O SeDuMi [Stu99] foi usado como resolvidor de LMIs.

### Exemplo 1

Considere uma sistema discreto com uma entrada e uma saída com  $n = 2$  estados e  $N = 2$  vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.97 \\ -1.00 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.68 & -1.44 \\ 0.94 & 0.22 \end{bmatrix},$$

$$B_i = [1 \ 0]', \quad C_i = [0 \ 1], \quad D_i = 0; \quad i = 1, 2$$

As condições de [dOOL<sup>+</sup>04a] e [ABP02] não são capazes de encontrar uma solução factível, enquanto que as condições de T4.2 e T4.3, e os pares (T4.4,T4.7) e (T4.5,T4.8) são capazes de computar custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente. A Tabela 4.2 mostra os custos garantidos computados e as normas  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$  de pior caso para este exemplo.

$\mathcal{H}_\infty$			$\mathcal{H}_2$		
Método	(O)	(D)	Método	(O)	(D)
T4.2 <sub>g&lt;7</sub>	–	–	(T4.4,T4.7) <sub>g&lt;7</sub>	–	–
T4.2 <sub>g=7</sub>	134.36	302.35	(T4.4,T4.7) <sub>g=7</sub>	24.78	73.40
T4.2 <sub>g=8</sub>	86.79	103.59	(T4.4,T4.7) <sub>g=8</sub>	8.96	29.33
T4.2 <sub>g=9</sub>	86.77	86.77	(T4.4,T4.7) <sub>g=9</sub>	7.79	17.15
T4.3 <sub>g=1</sub>	–	–	(T4.5,T4.8) <sub>g=1</sub>	–	–
T4.3 <sub>g=2</sub>	86.77	86.77	(T4.5,T4.8) <sub>g=2</sub>	7.79	7.79

Tabela 4.2: Custos garantidos para o sistema incerto a tempo discreto do Exemplo 1, computados usando-se T4.2 e T4.3 (caso  $\mathcal{H}_\infty$ ) e (T4.4,T4.7) e (T4.5,T4.8) (caso  $\mathcal{H}_2$ ) para  $(A_i, B_i, C_i)$  (sistema original - O) e  $(A'_i, C'_i, B'_i)$  (sistema dual - D). A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso é  $\|H\|_{\infty p.c.} = 86.77$  e a norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso é  $\|H\|_{2p.c.} = 7.79$ . O símbolo ‘–’ significa que nenhuma solução factível foi encontrada.

Esse exemplo ilustra o fato de que algumas vezes funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros não podem computar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ , mas funções de Lyapunov com dependência polinomial nos parâmetros são capazes de fornecer resultados precisos. O Teorema 4.3 atinge a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso para  $g = 2$  enquanto que o Teorema 4.2 precisa de  $g = 9$ . O mesmo ocorre com os pares (T4.4,T4.7) e (T4.5,T4.8) para o caso  $\mathcal{H}_2$ . O melhor desempenho do Teorema 4.3 e do par (T4.5,T4.8) é devido às variáveis extras. Os tempos computacionais correspondentes para os métodos propostos neste capítulo são mostrados na Tabela 4.3. O Teorema 4.3 e o par (T4.5,T4.8) fornecem os melhores resultados em termos esforço computacional e resultados precisos.

$\mathcal{H}_\infty$			$\mathcal{H}_2$		
Método	(O)	(D)	Método	(O)	(D)
T4.2 <sub>g=7</sub>	1.02	0.87	(T4.4,T4.7) <sub>g=7</sub>	0.52	0.72
T4.2 <sub>g=8</sub>	1.04	0.97	(T4.4,T4.7) <sub>g=8</sub>	0.47	0.52
T4.2 <sub>g=9</sub>	1.07	1.32	(T4.4,T4.7) <sub>g=9</sub>	0.36	0.49
T4.3 <sub>g=2</sub>	0.44	0.52	(T4.5,T4.8) <sub>g=2</sub>	0.30	0.26

Tabela 4.3: Tempos de execução (em segundos) fornecidos pelos Teoremas propostos para o Exemplo 1. (O) denota o sistema original e (D) o sistema dual.

## Exemplo 2

Este exemplo considera os índices de desempenhos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de um controlador de realimentação de estados robusto dado em [GPT04, Exemplo 1]. O modelo representa um satélite que possui dois corpos rígidos conectados por uma ligação elástica que é modelada como uma mola com torque constante  $k$  e um amortecimento viscoso  $\rho$  que possuem incertezas nas faixas  $0.07 \leq k \leq 0.49$  e  $0.0038 \leq \rho \leq 0.05$ . As matrizes do sistema são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{J_1} & \frac{k}{J_1} & -\frac{f}{J_1} & \frac{f}{J_1} \\ \frac{k}{J_2} & -\frac{k}{J_2} & \frac{f}{J_2} & -\frac{f}{J_2} \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{z_\infty} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad C_{z_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considerando  $J_1 = 1$  e  $J_2 = 1$ , o objetivo é avaliar o custo  $\mathcal{H}_2$  de  $T_2(s) = (C_{z_2} + D_{zu2}K)[s\mathbf{I} - (A + B_uK)]^{-1}B_w$  e o custo  $\mathcal{H}_\infty$  de  $T_\infty(s) = C_{z_\infty}[s\mathbf{I} - (A + B_uK)]^{-1}B_w$  usando o ganho fornecido em [GPT04]

$$K = [ -5.3 \quad 2.4 \quad -3.5 \quad -10.7 ]$$

A Tabela 4.4 mostra os resultados fornecidos pelos teoremas apresentados neste capítulo para os custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$ .

$\mathcal{H}_\infty$			$\mathcal{H}_2$		
Método	(O)	(D)	Método	(O)	(D)
T4.1 <sub>g=1</sub>	0.5509	0.4391	(T4.4,T4.6) <sub>g=1</sub>	1.6961	1.6620
			(T4.4,T4.6) <sub>g=2</sub>	1.6585	1.6611
T4.3 <sub>g=1</sub>	0.4744	0.4391	(T4.5,T4.8) <sub>g=1</sub>	1.6709	1.6616
			(T4.5,T4.8) <sub>g=2</sub>	1.6585	1.6611

Tabela 4.4: Custos garantidos para o sistema incerto a tempo contínuo do Exemplo 2, computados usando T4.1 e T4.3 (caso  $\mathcal{H}_\infty$ ) e (T4.4,T4.6) e (T4.5,T4.8) (caso  $\mathcal{H}_2$ ) para  $(A_i, B_i, C_i)$  (sistema original - O) e  $(A'_i, C'_i, B'_i)$  (sistema dual - D). A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso é  $\|H\|_{\infty p.c.} = 0.4391$  e norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso é  $\|H\|_{2p.c.} = 1.6585$ .

## Exemplo 3

Considere o problema de controle robusto por realimentação de estados baseado em [VMP92]. As matrizes do sistema nominal são:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Três diferentes esquemas são considerados:

- (a)  $\alpha = 1, \beta = 1$  (planta nominal)
- (b)  $\alpha = 0, \beta = 1$  (falha do primeiro atuador)
- (c)  $\alpha = 1, \beta = 0$  (falha do segundo atuador)

gerando um politopo de  $N = 3$  vértices. O objetivo é avaliar as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de  $G(s) = (C_z + D_{zu}K)[s\mathbf{I} - (A + B_uK)]^{-1}B_w + D_w$  para todo o domínio de incertezas com

$$K = \begin{bmatrix} -0.1054 & -0.8668 & 0.1745 & -0.3445 \\ -0.8626 & -0.0352 & -0.5810 & 0.1525 \end{bmatrix}$$

Em relação ao caso  $\mathcal{H}_\infty$ , T4.1 e T4.3 forneceram a norma de pior caso  $\|H\|_{\infty p.c.} = 10.4237$  para  $g = 1$ , garantindo que neste caso, uma matriz de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros é suficiente para avaliar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso. O caso  $\mathcal{H}_2$  apresenta um cenário diferente, necessitando de matrizes de Lyapunov de graus maiores. Note que o par (T4.5,T4.8) alcançou o pior caso com  $g = 3$ , enquanto que o par (T4.4,T4.6) precisaria de graus ainda maiores. Os resultados para o cômputo dos custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  são mostrados na Tabela 4.5.

Método	(O)	Tempo (s)	(D)	Tempo (s)
(T4.4,T4.6) <sub>g=1</sub>	2.4991	0.57	3.2156	0.59
(T4.4,T4.6) <sub>g=2</sub>	2.4929	0.72	2.9887	0.66
(T4.4,T4.6) <sub>g=5</sub>	2.4850	1.86	2.7244	1.91
(T4.4,T4.6) <sub>g=10</sub>	2.4766	4.87	2.6297	5.27
(T4.5,T4.8) <sub>g=1</sub>	2.4527	1.34	2.9172	1.32
(T4.5,T4.8) <sub>g=2</sub>	2.4484	2.79	2.7385	3.20
(T4.5,T4.8) <sub>g=3</sub>	2.4482	6.80	2.7038	11.37

Tabela 4.5: Custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e os tempos de execução correspondentes para o sistema incerto a tempo contínuo do Exemplo 3 usando os pares (T4.4,T4.6) e (T4.5,T4.8) para  $(A_i, B_i, C_i)$  (sistema original - O) e  $(A'_i, C'_i, B'_i)$  (sistema dual - D). A norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso é  $\|H\|_{2p.c.} = 2.4482$ .

## Exemplo 4

Como último exemplo, considere o sistema massa-mola de quarta ordem apresentado em [Iwa96], reproduzido na Figura 4.1.

A função de transferência considerada é da força de entrada  $d$  aplicada à massa  $m_1$  para o sinal de erro  $e = x_2$  (posição da massa  $m_2$ ). Os parâmetros nominais são: massas  $m_1 = 1$  e

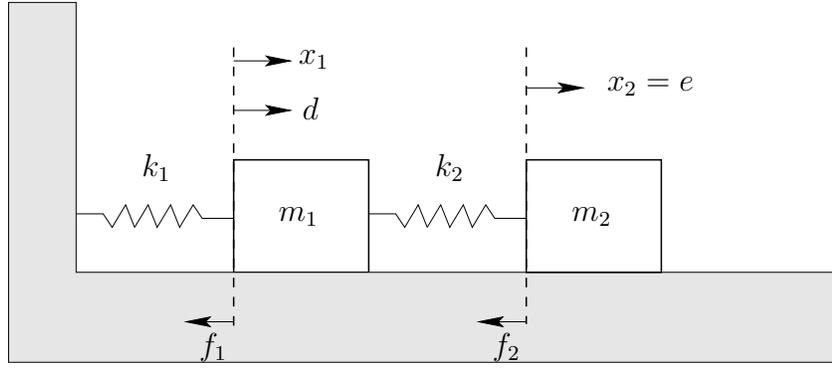


Figura 4.1: Sistema massa-mola apresentado em [Iwa96].

$\mathcal{H}_\infty$			$\mathcal{H}_2$		
Método	(O)	(D)	Método	(O)	(D)
dO $\mathcal{H}_\infty$	1.021	1.080	dO $\mathcal{H}_2$	0.501	0.588
T4.1 $_{g=1}$	1.056	1.169	(T4.4,T4.6) $_{g=1}$	0.588	0.522
T4.1 $_{g=2}$	1.011	1.084	(T4.4,T4.6) $_{g=2}$	0.495	0.496
T4.1 $_{g=3}$	1.002	1.064	(T4.4,T4.6) $_{g=3}$	0.488	0.488
T4.3 $_{g=1}$	1.019	1.084	(T4.5,T4.8) $_{g=1}$	0.509	0.500
T4.3 $_{g=2}$	1.002	1.021	(T4.5,T4.8) $_{g=2}$	0.488	0.488

Tabela 4.6: Custos garantidos para o sistema a tempo contínuo do Exemplo 4, calculados pelos métodos em (dO $\mathcal{H}_\infty$ ), T4.1 e T4.3 (caso  $\mathcal{H}_\infty$ ) e pelos métodos em (dO $\mathcal{H}_2$ ), (T4.4,T4.6) e (T4.5,T4.8) (caso  $\mathcal{H}_2$ ) para  $(A_i, B_i, C_i)$  (sistema original - O) e  $(A'_i, C'_i, B'_i)$  (sistema dual - D). A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso é  $\|H\|_{\infty p.c.} = 1.000$  e a norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso é  $\|H\|_{2p.c.} = 0.488$ .

$m_2 = 0.5$ ; rigidez das molas  $k_1 = k_2 = 1$  e coeficiente de atrito viscoso  $c_0 = 2$ . Assume-se que as incertezas afetam o sistema da seguinte maneira:  $m_1 + \delta_{m_1}$ ,  $m_2 + \delta_{m_2}$  e  $c_0 + \delta_{c_0}$ , com  $|\delta_{m_1}| \leq 0.5$ ,  $|\delta_{m_2}| \leq 0.25$  e  $|\delta_{c_0}| \leq 1.0$ , resultando em um politopo de  $N = 8$  vértices. A Tabela 4.6 mostra os resultados fornecidos pelos teoremas propostos e as melhores avaliações dos métodos em [dOOL<sup>+</sup>04b] (dO $\mathcal{H}_2$ ) e [dOOL<sup>+</sup>04a] (dO $\mathcal{H}_\infty$ ). Os tempos de execução correspondentes para os métodos propostos neste capítulo são mostrados na Tabela 4.7.

## Tempos Computacionais

Para avaliar o comportamento geral dos métodos propostos em termos do tempo computacional necessário para fornecer estimativas de custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , o seguinte experimento foi realizado: Para cada caso  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ , o tempo médio para cada método fornecer uma estimativa da norma  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis é calculado para  $g$  variando de um até três. As matrizes dinâmicas dos sistemas  $(A(\alpha))$  a serem testados foram retiradas da base de dados usada para gerar a Tabela 3.9 do Capítulo 3. As matrizes  $B(\alpha)$ ,

$\mathcal{H}_\infty$			$\mathcal{H}_2$		
Método	(O)	(D)	Método	(O)	(D)
dO $\mathcal{H}_\infty$	4.6	2.85	dO $\mathcal{H}_2$	8.62	4.10
T4.1 $_{g=1}$	0.89	0.97	(T4.4,T4.6) $_{g=1}$	1.33	1.23
T4.1 $_{g=2}$	2.91	3.95	(T4.4,T4.6) $_{g=2}$	4.20	4.30
T4.1 $_{g=3}$	33.92	38.09	(T4.4,T4.6) $_{g=3}$	23.31	24.96
T4.3 $_{g=1}$	8.39	7.25	(T4.5,T4.8) $_{g=1}$	10.30	8.22
T4.3 $_{g=2}$	158.00	142.28	(T4.5,T4.8) $_{g=2}$	69.65	78.23

Tabela 4.7: Tempos de execução (em segundos) exigidos pelos teoremas propostos neste capítulo e pelos métodos de dO $\mathcal{H}_2$  e dO $\mathcal{H}_\infty$  para o Exemplo 4. (O) denota o sistema original e (D) o sistema dual.

$C(\alpha)$  e  $D(\alpha)$  foram consideradas precisamente conhecidas com vértices dados por

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_i = [0 \ \cdots \ 0 \ 1], \quad D_i = 0; \quad i = 1, \dots, N$$

As Figuras 4.2 e 4.3 mostram os tempos obtidos pelos pares (T4.4,T4.6) e (T4.5,T4.8), respectivamente, para obter estimativas da norma  $\mathcal{H}_2$ . As Figuras 4.4 e 4.5 mostram os tempos obtidos pelos Teoremas 4.1 e 4.3, respectivamente, para obter estimativas da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Somente o resolvidor SeDuMi foi utilizado.

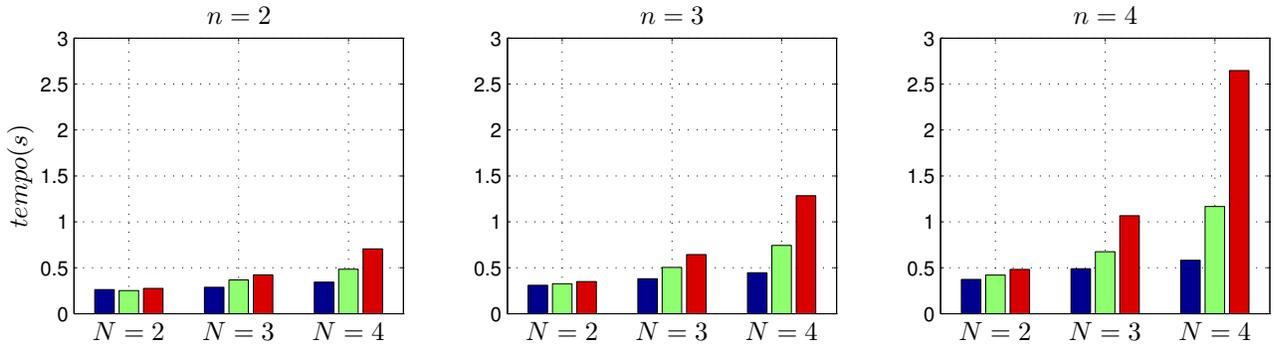


Figura 4.2: Tempo médio em segundos requerido pelo par (T4.4,T4.6) para fornecer custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis variando  $g$  de um até três para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ . As três barras verticais agrupadas significam a variação de  $g = \{1, 2, 3\}$ .

Como se observa das figuras, o par (T4.4,T4.6) e o Teorema 3.1 (que não usam variáveis extras do Lema de Finsler) exigem os menores tempos computacionais. Por outro lado, o maior esforço demandado pelo Teorema 3.3 e pelo par (T4.5,T4.8) é compensado com a necessidade de graus menores para fornecer as mesmas estimativas das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

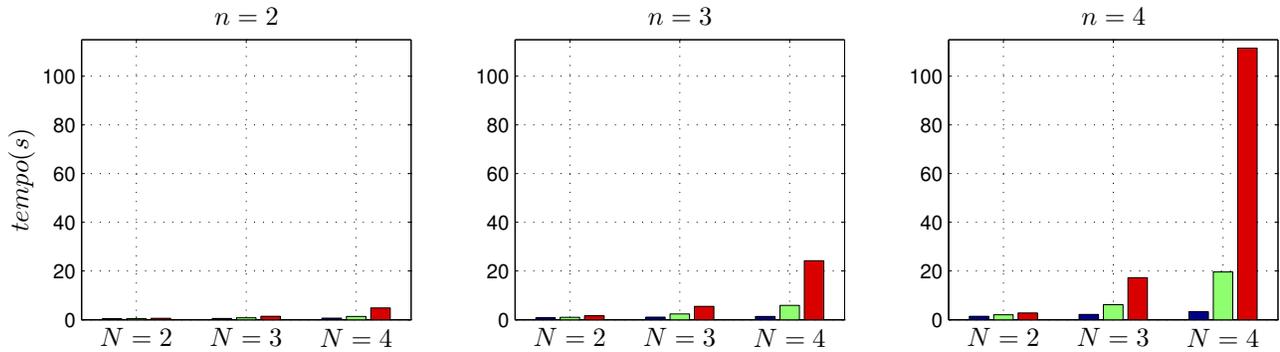


Figura 4.3: Tempo médio em segundos requerido pelo par (T4.5,T4.8) para fornecer custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis variando  $g$  de um até três para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ . As três barras verticais agrupadas significam a variação de  $g = \{1, 2, 3\}$ .

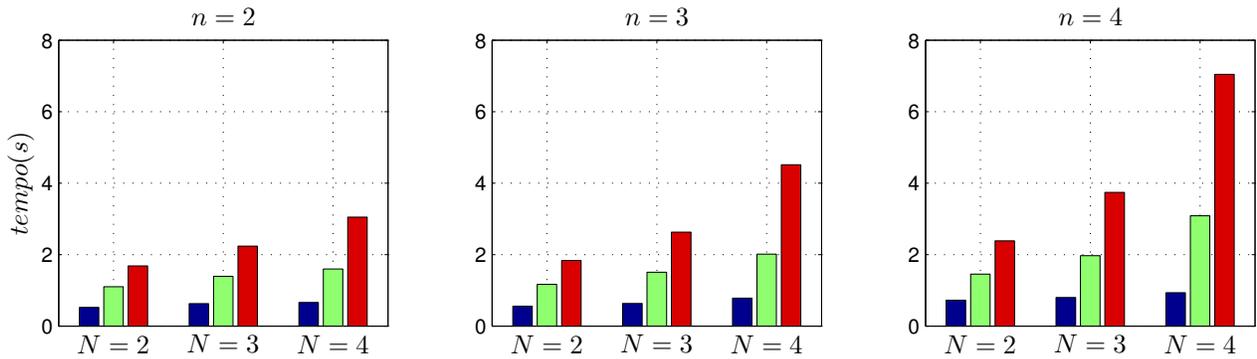


Figura 4.4: Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema T4.1 para fornecer custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis variando  $g$  de um até três para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ . As três barras verticais agrupadas significam a variação de  $g = \{1, 2, 3\}$ .

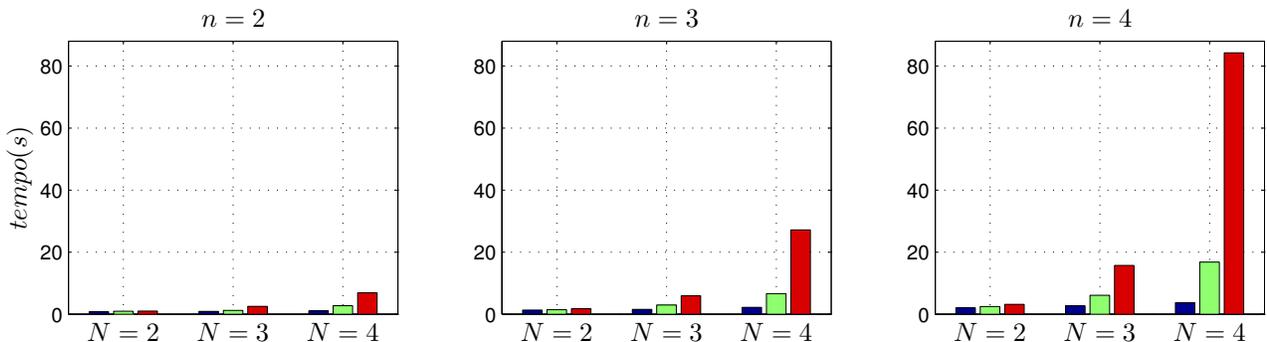


Figura 4.5: Tempo médio em segundos requerido pelo Teorema T4.3 para fornecer custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  de 25 sistemas a tempo contínuo estáveis variando  $g$  de um até três para  $n = 2, 3, 4$  e  $N = 2, 3, 4$ . As três barras verticais agrupadas significam a variação de  $g = \{1, 2, 3\}$ .

## 4.6 Conclusão

Um procedimento sistemático para construir funções de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros usadas para computar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares politópicos foi apresentado neste capítulo. À medida que o grau da função aumenta, as condições tornam-se progressivamente menos conservadoras, fornecendo testes simples e eficientes para avaliar custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_2$  de sistemas lineares politópicos.

## Relaxações LMIs Exatas

O objetivo deste capítulo é caracterizar a existência de uma matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros que seja solução de uma LMI dependente de parâmetros. Em particular, LMIs dependentes de parâmetros ligadas à estabilidade robusta e a IQCs serão estudadas em detalhes. A metodologia baseia-se no uso do Teorema de Pólya aplicado a polinômios homogêneos de grau arbitrário, fornecendo uma seqüência de condições LMIs suficientes que são progressivamente necessárias. A principal vantagem dessa metodologia é a generalidade de suas aplicações, permitindo que qualquer LMI dependente de parâmetros pertencentes ao simplex unitário ligada a problemas de análise e controle robusto possa ser resolvida de forma sistemática. A introdução deste capítulo revisa alguns resultados importantes ligados a LMIs dependentes de parâmetros dentro da Teoria de Controle.

### 5.1 Introdução

Análise e síntese robusta de sistemas lineares que dependem de parâmetros incertos são problemas clássicos dentro da teoria de controle robusto e têm atraído grandes esforços de pesquisa nas últimas décadas. Frequentemente, problemas como esses podem ser expressos na forma de LMIs dependentes de parâmetros [AT00]. Em geral, a factibilidade de uma LMI dependente de parâmetros associada a um problema de análise deve ser verificada em todo o espaço de parâmetros, sendo portanto um problema de dimensão infinita. Os problemas de estabilidade robusta e cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  apresentados nos Lemas 1.1–1.6 ilustram bem esse cenário. É bastante comum que problemas de robustez em sistemas lineares investigados por meio da teoria de Lyapunov se expressem naturalmente por LMIs dependentes de parâmetros.

Dentro do contexto de sistemas politópicos, LMIs dependentes de parâmetros, envolvidas em problemas de análise e síntese robusta, têm sido extensivamente abordadas na literatura por funções de Lyapunov quadráticas e por funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros. Apesar das parametrizações convexas e dos bons resultados, o conservadorismo é inerente aos métodos em função da estrutura particular da matriz de Lyapunov. Recentemente,

um resultado importante para LMIs dependentes de parâmetros, apresentado em [Bli04b], mostra que qualquer LMI dependente de parâmetros escalares definidos em um conjunto compacto pode ser caracterizada por uma solução polinomial de grau arbitrário nos parâmetros, sem perda de generalidade.

No caso dos sistemas politópicos estudados nesta tese, os parâmetros incertos estão restritos ao simplex unitário, que é um conjunto compacto. Assim, a solução polinomial (garantida por [Bli04b]) pode ser restrita a polinômios homogêneos de grau arbitrário, conforme será provado no decorrer do capítulo. Com esse resultado, é possível afirmar que os problemas estudados nesta tese sempre podem ser resolvidos por meio de uma função de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros, sem perda de generalidade, sendo esta a primeira contribuição deste capítulo. Em princípio, os resultados dos Capítulos 3 e 4 não são capazes de garantir que sempre que uma solução polinomial homogênea existe, as relaxações propostas apresentarão convergência. Note que a essência das relaxações propostas é garantir que um polinômio homogêneo seja definido negativo (ou positivo) impondo que o coeficiente de cada monômio seja definido negativo (ou positivo), sendo esta apenas uma condição suficiente. A segunda contribuição deste capítulo é fornecer uma relaxação convergente para garantir a existência de uma função de Lyapunov de um dado grau. Essa relaxação, assim como no Capítulo 2, é baseada no Teorema de Pólya aplicado a polinômios com coeficientes matriciais. Surpreendentemente, com simples argumentos baseados no Teorema de Pólya, é possível provar que as relaxações dos Capítulos 3 e 4 também tornam-se necessárias para grau  $g$  suficientemente elevado.

As LMIs dependentes de parâmetros ligadas aos problemas de estabilidade robusta de sistemas politópicos e IQCs são investigadas em detalhes neste capítulo. Exemplos numéricos comparando a metodologia proposta com outros métodos da literatura finalizam as contribuições.

## 5.2 Preliminares

Considere, por exemplo, as LMIs dependentes de parâmetros ligadas à estabilidade robusta apresentadas nos Lemas 2.1 (caso Hurwitz) e 2.2 (caso Schur). Essas LMIs dependentes de parâmetros podem ser reescritas na seguinte forma:  $\forall \alpha \in \Omega_N, \exists p \in \mathbb{R}^M$  tal que

$$G(p, \alpha) \triangleq G_0(\alpha) + p_1 G_1(\alpha) + \cdots + p_M G_M(\alpha) > 0 \quad (5.1)$$

sendo que  $\Omega_N$  é um subconjunto compacto do  $\mathbb{R}^N$ . As matrizes  $G_0(\cdot), G_1(\cdot), \dots, G_M(\cdot)$  são funções definidas em  $\Omega_N$ , assumindo valores no conjunto das matrizes simétricas de dimensão  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . De fato, (5.1) representa uma forma geral de um problema de factibilidade para uma LMI dependente dos parâmetros  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_N]^\top \in \Omega_N$  e com  $p \in \mathbb{R}^M$  desconhecido. Recentemente, foi provado (sob a hipótese de que  $G_0(\cdot), G_1(\cdot), \dots, G_M(\cdot)$  são funções contínuas) que as soluções para (5.1) podem ser restritas, sem perda de generalidade, à classe de soluções

polinomiais [Bli04b]. Levando em conta que o espaço de parâmetros considerado é o simplex unitário, isto é,  $\Omega_N = \Delta_N$ , o seguinte resultado pode ser estabelecido.

**Teorema 5.1** *Assuma que  $G_0(\cdot), G_1(\cdot), \dots, G_M(\cdot)$  são contínuas. Se para todo  $\alpha \in \Delta_N$  existe  $p(\alpha) \in \mathbb{R}^M$  tal que  $G(p(\alpha), \alpha) > 0$ , então existe uma função polinomial homogênea  $p_h^* : \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^M$  tal que, para todo  $\alpha \in \Delta_N$ ,  $G(p_h^*(\alpha), \alpha) > 0$ .*

**Prova:** Em [Bli04b], foi mostrado que, com a hipótese de continuidade em  $G_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, M$ , se existir uma solução  $p(\alpha) \in \mathbb{R}^M$  então existe, sem perda de generalidade, uma solução polinomial  $p^*(\alpha)$  tal que, para todo  $\alpha \in \Delta_N$ ,  $G(p^*(\alpha), \alpha) > 0$ . Denotando por  $g$  o maior grau possível dentre os monômios de  $p^*(\alpha)$ , pode-se escrever

$$p^*(\alpha) = \sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_N \leq g; k_i \geq 0} c_{k_1 \dots k_N} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_N^{k_N}$$

Considere agora o seguinte polinômio homogêneo de grau  $g$  denotado por  $p_h^*(\alpha)$ , dado por

$$p_h^*(\alpha) = \sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_N \leq g; k_i \geq 0} c_{k_1 \dots k_N} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_N^{k_N} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{g - \sum_i k_i}$$

Claramente,  $p^*(\alpha)$  coincide com  $p_h^*(\alpha)$  em  $\Delta_N$ . Como conclusão, o polinômio homogêneo  $p_h^*(\alpha)$  é portanto uma solução para a LMI dependente de parâmetros (5.1) para qualquer valor de  $\alpha \in \Delta_N$ . ■

Com o resultado do Teorema 5.1, as soluções para LMIs dependentes de parâmetros que estão no simplex unitário podem ser caracterizadas por meio de soluções polinomiais homogêneas, sem perda de generalidade. Assim como nos Capítulos 3 e 4, condições suficientes podem ser obtidas para a existência de uma função de Lyapunov polinomial homogênea de um dado grau simplesmente impondo-se que os coeficientes dos polinômios resultantes sejam definidos negativos (ou positivos). Para que as condições tornem-se necessárias, condições como nos itens (b) dos Lemas 1.1, 1.2 e 1.5 precisam ser exploradas, de modo a fornecer relaxações exatas baseadas no Teorema de Pólya.

Como principal contribuição, este capítulo apresenta relaxações LMIs parametrizadas em  $d$  e no grau da função de Lyapunov  $g$ , fornecendo famílias de testes de diferentes complexidades. O caso de estabilidade robusta é analisado em detalhes na próxima seção. Graças à generalidade da abordagem proposta, a extensão para tratar outras LMIs dependentes de parâmetros é imediata.

## 5.3 Resultados Principais

### 5.3.1 Estabilidade Robusta

**Teorema 5.2** *Uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau arbitrário  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) garante a estabilidade Hurwitz de  $\mathcal{A}$  se e somente se existirem matrizes simétricas*

$P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , e um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que as seguintes LMIs são verificadas

$$T_\ell = \sum_{r=1}^{J(d)} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_r} \mathcal{C}_r (A'_i P_{\mathcal{G}_r^i} + P_{\mathcal{G}_r^i} A_i) \right) < 0; \quad \mathcal{G} = \mathcal{K}_\ell(g + d + 1) - \mathcal{K}_r(d), \quad r = 1, \dots, J(d),$$

$$\ell = 1, \dots, J(g + d + 1) \quad (5.2)$$

$$R_v = \sum_{r=1}^{J(d)} \left( \mathcal{C}_r P_{\mathcal{G}_r} \right) > 0; \quad \mathcal{G} = \mathcal{K}_v(g + d) - \mathcal{K}_r(d), \quad r = 1, \dots, J(d),$$

$$v = 1, \dots, J(g + d) \quad (5.3)$$

Além disso, para um  $d$  fixo, se as LMIs (5.2)-(5.3) são verificadas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são verificadas. Similarmente, para um dado grau  $g$ , se as LMIs (5.2)-(5.3) fornecem uma solução factível para  $\hat{d}$ , então as LMIs para  $d > \hat{d}$  também possuem soluções factíveis.

**Prova:** Suficiência: Uma vez que  $\Gamma_d(\alpha)$  no Lema 2.1 (b) com  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) pode ser escrita como

$$\Gamma_d(\alpha) = \left( \sum_{r=1}^{J(d)} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_r} \mathcal{C}_r (A'_i P_{\mathcal{G}_r^i} + P_{\mathcal{G}_r^i} A_i) \right) \right) \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_N^{k_N};$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{K}_\ell(g + d + 1) - \mathcal{K}_r(d), \quad r = 1, \dots, J(d),$$

$$\ell = 1, \dots, J(g + d + 1), \quad k_1 \cdots k_N = \mathcal{K}_\ell(g + d + 1) \quad (5.4)$$

é imediato concluir que, se existirem matrizes simétricas  $P_{\mathcal{K}_j(g)}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$  e  $d \in \mathbb{Z}_+$  tais que (5.2) é satisfeita para  $\ell = 1, \dots, J(g + d + 1)$  e (5.3) é satisfeita para  $v = 1, \dots, J(g + d)$  então, de (5.4), as condições do Lema 2.1 (b) são verificadas para todo  $\alpha \in \Delta_N$ .

Necessidade: Definindo

$$L \triangleq \max_{\ell=1, \dots, J(g+d+1)} \lambda_{\max}(-T_\ell); \quad \kappa \triangleq \min_{\alpha \in \Delta_N} \lambda_{\min}(-\Gamma(\alpha))$$

é claro que para qualquer vetor  $w$  tal que  $w'w = 1$  tem-se

$$L \geq \max_{\ell=1, \dots, J(g+d+1)} w'(-T_\ell)w; \quad \min_{\alpha \in \Delta_N} w'(-\Gamma(\alpha))w \geq \kappa$$

Com a escolha de  $d \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $d \geq g(g + 1)L/(2\kappa) - g$ , o Teorema 2.2 garante que todos os coeficientes  $w'(-T_\ell)w$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g + d + 1)$  do polinômio  $w'(-\Gamma_d(\alpha))w$  são positivos. Uma vez que  $w$  é arbitrário, a conclusão é que todas as LMIs  $T_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, J(g + d + 1)$  são definidas negativas. Uma análise similar pode ser aplicada para a restrição  $R_p > 0$ .

Suponha que as LMIs de (5.2)-(5.3) são verificadas para um  $d$  fixo e um certo  $\hat{g}$ , isto é, existem  $J(\hat{g})$  matrizes simétricas  $P_{\mathcal{K}_j(\hat{g})}$ ,  $j = 1, \dots, J(\hat{g})$  tais que (5.2)-(5.3) são verificadas, ou seja,  $P_{\hat{g}}(\alpha)$  é uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea definida positiva que garante a estabilidade robusta do sistema. Então, os termos da matriz polinomial  $P_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_N)P_{\hat{g}}(\alpha)$  satisfazem as LMIs do Teorema 5.2 correspondentes ao grau  $\hat{g} + 1$ , que podem ser obtidas nesse caso por combinações lineares positivas das LMIs do Teorema 5.2 para  $\hat{g}$ . Como as LMIs de (5.2)-(5.3) para um dado  $\hat{d} > 0$  são combinações lineares das LMIs de (5.2)-(5.3) para  $\hat{d} - 1$  ( $g$  fixo) é imediato mostrar que se as LMIs de (5.2)-(5.3) são factíveis para um dado  $\hat{d}$ , então as LMIs para  $d > \hat{d}$  também são factíveis (combinação positiva de termos de mesmo sinal). ■

As LMIs (5.3) no Teorema 5.2 garantem que  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) é definida positiva para todo  $\alpha \in \Delta_N$ . Note que para  $g = 0$  ( $P_g(\alpha) = P$ , isto é, estabilidade quadrática) e para  $g = 1$  ( $P_g(\alpha)$  afim em  $\alpha$ ), a condição (5.3) também é necessária para garantir  $P_g(\alpha) > 0$  e não há a necessidade de usar  $d > 0$  em (5.3). Para  $g > 1$ , as relaxações devem ser aplicadas tanto em (5.2) quanto em (5.3) para produzir condições necessárias.

A idéia central na parte da necessidade do Teorema 5.2 é que polinômios homogêneos definidos positivos no simplex unitário podem ser representados por polinômios de graus maiores com todos os coeficientes definidos positivos. Para um dado grau  $g$ , a relaxação em  $d$  proposta no Teorema 5.2 explora essa propriedade nos dois polinômios homogêneos  $P_g(\alpha)$  e  $A(\alpha)'P_g(\alpha) + P_g(\alpha)A(\alpha)$ . Esta propriedade interessante pode ser um pouco mais explorada para fornecer relaxações exatas em termos do grau  $g$  da função de Lyapunov polinomial homogênea, como apresenta o próximo corolário.

**Corolário 5.1** *O conjunto  $\mathcal{A}$  é Hurwitz se e somente se existir um  $g \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande e matrizes simétricas definidas positivas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_r} (A_i' P_{\mathcal{G}_r^i} + P_{\mathcal{G}_r^i} A_i) < 0 ; \quad \mathcal{G} = \mathcal{K}_\ell(g+1), \quad \ell = 1, \dots, J(g+1) \quad (5.5)$$

*Além disso, se as LMIs de (5.5) são satisfeitas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são satisfeitas.*

**Prova:** A suficiência é imediata, uma vez que a factibilidade de (5.5) garante a existência de uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea definida positiva  $P_g(\alpha)$  tal que o Lema 2.1 é verificado.

Para a necessidade, considere que a estabilidade Hurwitz de  $\mathcal{A}$  pode ser caracterizada exatamente por uma matriz de Lyapunov de grau  $\bar{g}$ , isto é, existe  $P_{\bar{g}}(\alpha) > 0$  dada por (3.1) tal que  $A(\alpha)'P_{\bar{g}}(\alpha) + P_{\bar{g}}(\alpha)A(\alpha) < 0$  é satisfeita  $\forall \alpha \in \Delta_N$ . Suponha também que para  $g = \bar{g}$ , as LMIs do Corolário 5.1 não conseguem encontrar uma solução factível  $P_g(\alpha)$ . De fato, para um dado grau  $g$  as LMIs (5.5) são somente suficientes para a existência da matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau  $g$ . Entretanto, uma vez que  $P_{\bar{g}}(\alpha) > 0$  para  $\forall \alpha \in \Delta_N$ , do Teorema 5.2

tem-se que para um  $f \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande todos os coeficientes matriciais de

$$P_g(\alpha) = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^f P_{\bar{g}}(\alpha) > 0 \quad (5.6)$$

são definidos positivos. Similarmente, uma vez que  $A(\alpha)'P_{\bar{g}}(\alpha) + P_{\bar{g}}(\alpha)A(\alpha) < 0$ , para um  $d \in \mathbb{Z}_+$  grande o suficiente e  $P_g(\alpha)$  dada por (5.6) todos os coeficientes matriciais de

$$A(\alpha)'P_g(\alpha) + P_g(\alpha)A(\alpha) = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^d \left( A(\alpha)'P_{\bar{g}}(\alpha) + P_{\bar{g}}(\alpha)A(\alpha) \right) < 0$$

são definidos negativos. Para concluir a prova, note que esses coeficientes matriciais são gerados pelas LMIs do Corolário 5.1 em termos de  $g = \bar{g} + d + f$ . ■

As condições do Corolário 5.1 podem ser derivadas do Teorema 5.2 simplesmente considerando  $d = 0$ . Nesse caso, as condições do Corolário 5.1 são as mesmas do Teorema 3.1, apresentado no Capítulo 3. A contribuição do Corolário 5.1 é garantir que todas as relaxações propostas nos Capítulos 3 e 4 tornam-se necessárias à medida que o grau da matriz de Lyapunov polinomial homogênea cresce. Este tipo de relaxação é mais adequado para os casos em que nada se sabe sobre o grau máximo necessário para caracterizar uma dada LMI dependente de parâmetros. À medida que  $g$  cresce, mais variáveis são introduzidas e uma representação mais precisa da matriz de Lyapunov é obtida. Além disso, as LMIs obtidas com o aumento de  $g$  podem ser vistas como relaxações implícitas em termos de  $g$  e  $d$ , com garantia de convergência sempre que uma solução factível existe.

**Teorema 5.3** *Uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau arbitrário  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) garante a estabilidade Schur de  $\mathcal{A}$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , e um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que as LMIs (5.3) e as seguintes LMIs são verificadas*

$$\sum_{r=1}^{J(d)} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_r} \mathcal{C}_r \begin{bmatrix} -P_{\mathcal{G}_r^i} & P_{\mathcal{G}_r^i} A_i \\ \star & -P_{\mathcal{G}_r^i} \end{bmatrix} \right) < 0; \quad \mathcal{G} = \mathcal{K}_\ell(g + d + 1) - \mathcal{K}_r(d), \quad r = 1, \dots, J(d),$$

$$\ell = 1, \dots, J(g + d + 1) \quad (5.7)$$

Além disso, para um  $d$  fixo, se as LMIs (5.3) e (5.7) são verificadas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são verificadas. Similarmente, para um dado grau  $g$ , se as LMIs (5.3) e (5.7) fornecem uma solução factível para  $\hat{d}$ , então as LMIs para  $d > \hat{d}$  também possuem soluções factíveis.

**Prova:** Similar à prova do Teorema 5.2. ■

Assim como nas condições de estabilidade Schur apresentadas no Capítulo 3, o Teorema 5.3 explora o Lema 3.1, que usa o complemento de Schur das desigualdades originais (Lema 1.2).

Novamente, isso se deve ao fato de trabalhar-se somente com produtos duplos, evitando a definição de mais notações.

As condições de estabilidade (Hurwitz e Schur) estendidas (Lema 2.3) pelo Lema de Finsler são exploradas no próximo teorema.

**Teorema 5.4** *Uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau arbitrário  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) garante a estabilidade Hurwitz (Schur) de  $\mathcal{A}$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , matrizes  $X_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , e um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que as LMIs (5.3) e as seguintes LMIs são satisfeitas*

$$\sum_{r=1}^{J(d)} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_r} \mathcal{C}_r \left( Q_{\mathcal{G}_r^i} + X_{\mathcal{G}_r^i} B_i + B_i' X_{\mathcal{G}_r^i}' \right) \right) < 0 ;$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{K}_\ell(g + d + 1) - \mathcal{K}_r(d), \quad r = 1, \dots, J(d),$$

$$\ell = 1, \dots, J(g + d + 1) \quad (5.8)$$

sendo que  $Q_{\mathcal{G}_r^i}$  são dadas respectivamente para os casos Hurwitz e Schur por

$$Q_{\mathcal{G}_r^i}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_{\mathcal{G}_r^i} \\ P_{\mathcal{G}_r^i} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad Q_{\mathcal{G}_r^i}^S = \begin{bmatrix} -P_{\mathcal{G}_r^i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{\mathcal{G}_r^i} \end{bmatrix}$$

e  $B_i = [A_i \quad -\mathbf{I}]$ . Além disso, para um  $d$  fixo, se as LMIs (5.3) e (5.8) são verificadas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são verificadas. Similarmemente, para um dado grau  $g$ , se as LMIs (5.3) e (5.8) fornecem uma solução factível para  $\hat{d}$ , então as LMIs para  $d > \hat{d}$  também possuem soluções factíveis.

**Prova:** A prova é similar à prova do Teorema 5.2. Com  $P_g(\alpha) > 0$  dada por (3.1),  $X_g(\alpha)$  dada por

$$X_g(\alpha) = \sum_{j=1}^{J(g)} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_N^{k_N} X_{\mathcal{K}_j(g)}; \quad k_1 k_2 \cdots k_N = \mathcal{K}_j(g)$$

e  $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ ,  $\Theta_d(\alpha)$  dada no Lema 2.3 (b) pode ser escrita como um polinômio homogêneo de um dado grau  $g + d + 1$  com coeficientes matriciais dados por (5.8). Novamente, para um  $d$  fixo, se as condições (5.3) e (5.8) são satisfeitas para um dado  $\hat{g}$ , então  $P_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\sum_{i=1}^N \alpha_i) P_{\hat{g}}(\alpha)$ ,  $X_{\hat{g}+1}(\alpha) = (\sum_{i=1}^N \alpha_i) X_{\hat{g}}(\alpha)$  são soluções factíveis para as LMIs (5.3) e (5.8) para  $g = \hat{g} + 1$ . Se uma solução factível existe para  $\hat{d}$  então existem soluções factíveis para  $d > \hat{d}$ . ■

As variáveis extras  $X_{\mathcal{K}_j(g)}$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$  no Teorema 5.4 fornecem avaliações menos conservadoras do que as avaliações dos Teoremas 5.2 e 5.3 para valores fixos de  $d$  e  $g$ . Além disso, essas variáveis extras permitem uma convergência mais rápida (à medida que  $d$  cresce) em direção à condição necessária para a existência de uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau  $g$ , como é ilustrado pelos exemplos numéricos.

Note que as condições do Teorema 5.4 podem ser facilmente estendidas para tratar de qualquer região convexa no plano complexo seguindo as linhas de [PABB00, LP03]. Finalmente, note que o número de variáveis nas LMIs do Teorema 5.4 pode ser reduzido impondo-se a  $X_g(\alpha)$  graus menores do que o grau da matriz de Lyapunov  $P_g(\alpha)$ , provavelmente gerando resultados diferentes.

### 5.3.2 Estudo de Caso: $N = 2, g = 2$

Considere as condições do Teorema 5.2 com  $g = 2$  aplicadas a um politopo  $\mathcal{A}$  com  $N = 2$  vértices. Nesse caso,  $R_1 = P_{20}, R_2 = P_{11}, R_3 = P_{02}$ ,

$$\begin{aligned} T_1 &= A_1' P_{20} + P_{20} A_1, & T_2 &= A_2' P_{02} + P_{02} A_2, \\ T_3 &= A_1' P_{02} + P_{02} A_1 + A_2' P_{11} + P_{11} A_2, \\ T_4 &= A_2' P_{20} + P_{20} A_2 + A_1' P_{11} + P_{11} A_1 \end{aligned}$$

Então, para  $d = 0$ , o número de LMIs é  $J(3) + J(2) = 7$ ,  $\mathcal{K}(3) = \{03, 12, 21, 30\}$ , e as LMIs são

$$T_1 < 0, \quad T_2 < 0, \quad R_1 > 0, \quad R_3 > 0 \quad (5.9)$$

que são condições necessárias (estabilidade dos vértices) e

$$T_3 < 0, \quad T_4 < 0, \quad R_2 > 0 \quad (5.10)$$

Para  $d = 1$ , são  $J(4) + J(3) = 9$  LMIs,  $\mathcal{K}(4) = \{04, 13, 22, 31, 40\}$ ,  $\mathcal{K}(1) = \{01, 10\}$ . As LMIs são (5.9) e

$$\begin{aligned} T_1 + T_4 < 0, \quad T_3 + T_4 < 0, \quad T_2 + T_3 < 0, \\ R_1 + R_2 > 0, \quad R_2 + R_3 > 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Note que uma solução factível para (5.9)-(5.10) também é factível para (5.9)-(5.11), mas a recíproca não é verdadeira, uma vez que (5.10) é mais restritiva do que (5.11). Note também que, diferentemente de (5.10), as LMIs (5.11) não impõem  $R_2 = P_{11} > 0$ . Para  $d = 2$ , o número de LMIs é  $J(5) + J(4) = 11$ ,  $\mathcal{K}(5) = \{05, 14, 23, 32, 41, 50\}$ ,  $\mathcal{K}(2) = \{02, 11, 20\}$  e as LMIs são (5.9) e

$$\begin{aligned} 2T_1 + T_4 < 0, \quad T_1 + T_3 + 2T_4 < 0, \quad T_2 + 2T_3 + T_4 < 0, \\ 2T_2 + T_3 < 0, \quad 2R_1 + R_2 > 0, \quad R_1 + 2R_2 + R_3 > 0, \\ R_2 + 2R_3 > 0 \end{aligned}$$

À medida que  $d$  cresce, as novas LMIs tornam-se mais fáceis de serem verificadas e, se uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea que garante a estabilidade Hurwitz existe, a necessidade é atingida com um  $d$  suficientemente grande.

## 5.4 Restrições Integrais Quadráticas

Diversas especificações de desempenho de sistemas lineares podem ser colocadas na forma de IQCs [MR97]. Considerando o sistema linear politópico definido em (1.1), a seguinte IQC associada à função de Lyapunov  $v(x) = x'P(\alpha)x > 0$  pode ser imposta

$$\delta[v(x, \delta[x])] < - \begin{pmatrix} y' & w' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ T' & S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

$\forall(x, \delta[x], w, y) \neq 0$  satisfazendo (1.1).

Usando o Lema de Finsler, a IQC dada por (5.12) pode ser garantida pelas condições expressas no próximo lema.

**Lema 5.1** *As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *Existe uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros definida positiva  $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que (5.12) é verificada;*
- (b) *Existe uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros definida positiva  $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz dependente de parâmetros  $X(\alpha) \in \mathbb{R}^{(2n+m+p) \times (n+p)}$  tais que,  $\forall d \in \mathbb{Z}_+$*

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)^d \left( Q(\alpha) + X(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'X(\alpha)' \right) < 0$$

com

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A(\alpha) & \mathbf{0} & -B(\alpha) \\ \mathbf{0} & -C(\alpha) & \mathbf{I} & -D(\alpha) \end{bmatrix}$$

e  $Q(\alpha)$  dada por

$$Q_c(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & R & T \\ \star & \star & \star & S \end{bmatrix}, \quad Q_d(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & P(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & R & T \\ \star & \star & \star & S \end{bmatrix}$$

para os casos contínuo e discreto, respectivamente.

As escolhas  $R = \mathbf{I}$ ,  $S = -\gamma^2\mathbf{I}$ ,  $T = \mathbf{0}$  e  $R = \mathbf{0}$ ,  $S = \mathbf{0}$ ,  $T = -\mathbf{I}$  em (b) fornecem a versão estendida do *bounded-real lemma* dependente de parâmetros e do *positive-real lemma* dependente de parâmetros, respectivamente (veja [dOS01] para detalhes). No caso da primeira escolha, o Lema 5.1 torna-se equivalente ao Lema 4.3 para  $d = 0$ . Impondo-se a estrutura polinomial homogênea de grau arbitrário em  $P(\alpha)$  e  $X(\alpha)$  tem-se o seguinte teorema.

**Teorema 5.5** *Uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau arbitrário  $P_g(\alpha)$  dada por (3.1) garante que a condição dada no Lema 5.1 (b) é satisfeita se e somente se existirem matrizes simétricas  $P_{\mathcal{K}_j(g)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , matrizes  $X_{\mathcal{K}_j(g)} \in$*

Teoremas	$K$	$L$
T5.2	$n(n+1)J(g)/2$	$n(J(g+d) + J(g+d+1))$
T5.3	$n(n+1)J(g)/2$	$nJ(g+d) + 2nJ(g+d+1)$
T5.4	$n(5n+1)J(g)/2$	$nJ(g+d) + 2nJ(g+d+1)$
T5.5	$1 + (n(n+1)/2 + (2n+m+p)(n+p))J(g)$	$nJ(g+d) + (2n+m+p)J(g+d+1)$

Tabela 5.1: Número de variáveis escalares  $K$  e número de linhas de LMIs  $L$  nos Teoremas 5.2 (T5.2), 5.3 (T5.3), 5.4 (T5.4) e 5.5 (T5.5).

$\mathbb{R}^{(2n+m+p) \times (n+p)}$ ,  $\mathcal{K}_j(g) \in \mathcal{K}(g)$ ,  $j = 1, \dots, J(g)$ , e um  $d \in \mathbb{Z}_+$  suficientemente grande tais que as LMIs (5.3) e as seguintes LMIs são satisfeitas

$$\sum_{r=1}^{J(d)} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_r} \mathcal{C}_r \left( Q_{\mathcal{G}_r^i} + X_{\mathcal{G}_r^i} \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_i' X_{\mathcal{G}_r^i}' \right) \right) < 0; \mathcal{G} = \mathcal{K}_\ell(g+d+1) - \mathcal{K}_r(d), \quad r = 1, \dots, J(d),$$

$$\ell = 1, \dots, J(g+d+1) \quad (5.13)$$

sendo que  $Q_{\mathcal{G}_r^i}$  é dada para os casos contínuo e discreto respectivamente por

$$Q_{\mathcal{G}_r^i}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_{\mathcal{G}_r^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & R & T \\ \star & \star & \star & S \end{bmatrix}, \quad Q_{\mathcal{G}_r^i}^d = \begin{bmatrix} -P_{\mathcal{G}_r^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & P_{\mathcal{G}_r^i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & R & T \\ \star & \star & \star & S \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A_i & \mathbf{0} & -B_i \\ \mathbf{0} & -C_i & \mathbf{I} & -D_i \end{bmatrix}$$

Além disso, para um  $d$  fixo, se as LMIs (5.3) e (5.13) são verificadas para um dado grau  $\hat{g}$ , então as LMIs correspondentes a qualquer grau  $g > \hat{g}$  também são verificadas. Similarmente, para um dado grau  $g$ , se as LMIs (5.3) e (5.13) fornecem uma solução factível para  $\hat{d}$ , então as LMIs para  $d > \hat{d}$  também possuem soluções factíveis.

**Prova:** Similar à prova do Teorema 5.4. ■

O Teorema 5.5 fornece avaliações robustas de IQCs por meio de relaxações exatas para sistemas lineares politópicos. Um exemplo numérico que trata o cômputo de custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  (com  $R = \mathbf{I}$ ,  $S = -\gamma^2$  e  $T = \mathbf{0}$ ) mostra a eficiência da metodologia proposta quando comparada com outros métodos da literatura.

## 5.5 Complexidade Numérica

A Tabela 5.1 mostra as complexidades associadas aos Teoremas 5.2 (T5.2), 5.3 (T5.3), 5.4 (T5.4) e 5.5 (T5.5).

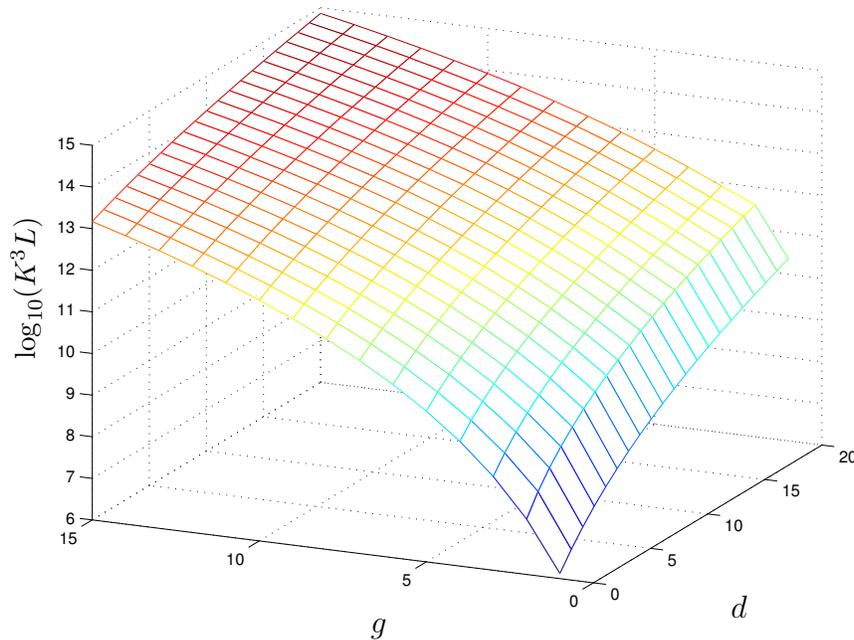


Figura 5.1: Complexidade numérica associada às condições do Teorema 5.2 usando  $\log_{10}(K^3L)$  para  $d \in [0, 20]$ ,  $g \in [1, 15]$  e considerando um sistema politópico a tempo contínuo com  $n = 3$ ,  $N = 3$ .

Como pode ser visto,  $K$  e  $L$  crescem polinomialmente com  $d$  e  $g$  em todos os teoremas. Note também que o número de variáveis escalares não depende de  $d$ , implicando que a seqüência de relaxações é menos custosa com o aumento de  $d$ . A superfície mostrada na Figura 5.1 ilustra a complexidade associada às condições do Teorema 5.2 usando  $\log_{10}(K^3L)$  para  $d \in [0, 20]$ ,  $g \in [1, 15]$  e considerando um sistema politópico a tempo contínuo com  $n = 3$ ,  $N = 3$ .

Como esperado, aumentar  $g$  demanda mais esforço computacional do que aumentar  $d$ . As melhores escolhas de  $g$  e  $d$  para obter resultados precisos com o menor esforço computacional são estudadas na próxima seção por meio de exemplos numéricos.

## 5.6 Experimentos Numéricos

### Exemplo 1

Este exemplo ilustra como o processo de relaxação evolui à medida que  $d$  cresce. Considere um sistema linear politópico a tempo contínuo com  $n = 3$  e  $N = 2$ , e vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.29 & -0.94 & 0.64 \\ 0.74 & -0.03 & 0.23 \\ 0.12 & -0.77 & -0.81 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.94 & 0.75 & -0.54 \\ -0.93 & 0.27 & 0.89 \\ 0.88 & -0.90 & 0.35 \end{bmatrix}$$

Escolhendo  $g = 1$ , isto é, uma função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros, os Teoremas 5.2 e 5.4 não foram capazes de encontrar uma solução factível para  $d = 0, \dots, 30$ , levando à conclusão de que uma função com dependência afim nos parâmetros não é capaz

$\ell$	$\lambda_{max}(T_\ell)$									
	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$	$d = 8$	$d = 9$
1	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03
2	13.84	7.22	3.13	0.52	-0.08	-0.11	-0.13	-0.16	-0.19	-0.21
3	22.22	1.62	3.78	6.75	7.15	5.33	1.84	-0.23	-0.39	-0.58
4	-0.33	15.99	9.23	0.39	0.19	4.39	9.40	11.23	8.03	-0.53
5		-0.33	9.79	16.36	3.87	-0.99	-1.11	-1.08	-1.11	-1.35
6			-0.33	3.64	18.53	13.70	-4.02	-6.53	-8.01	-9.37
7				-0.33	-2.30	14.94	22.47	-7.31	-20.80	-30.08
8					-0.33	-2.91	5.41	23.01	-7.95	-50.91
9						-0.33	-3.49	-9.90	8.74	-18.31
10							-0.33	-4.06	-16.02	-26.13
11								-0.33	-4.64	-20.72
12									-0.33	-5.20
13										-0.33

Tabela 5.2: Evolução dos máximos autovalores das LMIs dadas em (5.2),  $\ell = 1, \dots, J(d+g+1)$ , para  $g = 2$  e  $d = \{0, \dots, 9\}$  na análise de estabilidade do Exemplo 1.

de afirmar sobre a estabilidade do sistema (o método proposto em [CGTV05b] também não encontrou uma solução para  $m = 1$ ). Entretanto, para  $g = 2$ , o Teorema 5.2 encontrou uma solução factível com  $d = 9$ . A seqüência de relaxações para  $d = 0, \dots, 9$  é mostrada na Tabela 5.2 ( $K = 18$  variáveis escalares e  $L = 75$  linhas de LMIs foram usadas no Teorema 5.2 para  $d = 9$ ).

A Figura 5.2 mostra o maior valor  $\lambda_{max}(T_\ell)$  para  $\ell = 1, \dots, J(d+2+1)$  para  $d = 0, \dots, 9$ . Esse exemplo deixa evidente que não existe garantia de decrescimento monotônico de  $\max(\lambda_{max}(T_\ell))$  à medida que  $d$  cresce.

## Exemplo 2

Considere o sistema linear politópico a tempo contínuo dado em [CGTV05b, Exemplo 2]. A Tabela 5.3 mostra o número de variáveis escalares e linhas de LMIs necessárias para atingir o valor ótimo de  $\hat{\rho}$ , como também o tempo de execução requerido pelo *LMI Control Toolbox* [GNLC95] e pelo SeDuMi [Stu99], para os Teoremas 5.2, 5.4 e para os métodos propostos em [CGTV05b] e [HAPL04]. Como pode ser visto, para esse exemplo de dimensão pequena ( $n = 3$ ,  $N = 2$ ) todos os métodos analisados apresentam um comportamento similar.

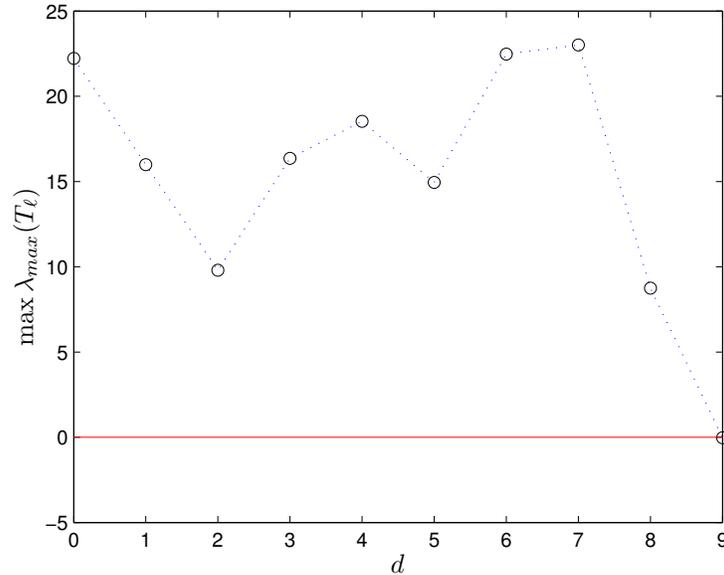


Figura 5.2: Maior valor de  $\lambda_{max}(T_\ell)$ , dado por (5.2),  $\ell = 1, \dots, J(d + g + 1)$ ,  $g = 2$ , em função de  $d = 0, \dots, 9$  para a análise de estabilidade do sistema politópico do Exemplo 1.

Método	$K$	$L$	Tempo [GNLC95]	Tempo [Stu99]
[CGTV05b] <sub>m=2</sub>	69	21	4.6 s	0.24 s
[HAPL04] <sub>k=4</sub>	44	65	–	0.71 s
T5.2 <sub>g=2,d=12</sub>	18	93	0.64 s	0.47 s
T5.2 <sub>g=3,d=1</sub>	24	33	0.06 s	0.19 s
T5.2 <sub>g=4,d=0</sub>	30	33	0.04 s	0.16 s
T5.4 <sub>g=2,d=0</sub>	72	33	0.13 s	0.60 s
T5.4 <sub>g=2,d=1</sub>	72	42	0.21 s	0.45 s
T5.4 <sub>g=2,d=2</sub>	72	51	0.30 s	0.39 s
T5.4 <sub>g=2,d=3</sub>	72	60	0.38 s	0.25 s

Tabela 5.3: Comparação dos resultados dos Teoremas 5.2 e 5.4 com [CGTV05b] e [HAPL04] para o segundo exemplo em [CGTV05b] ( $n = 3$ ,  $N = 2$  e  $\hat{\rho} = 3.551$ ) em termos de esforço computacional.

### Exemplo 3

Considere o sistema politópico a tempo discreto ( $n = 2$ ,  $N = 4$ ) dado por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.468 & 0.845 \\ 0.272 & -0.423 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.825 & 0.427 \\ 0.299 & -0.346 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.744 & 0.214 \\ 1.242 & 0.545 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.330 & -1.140 \\ -0.322 & 0.309 \end{bmatrix}$$

A Tabela 5.4 mostra uma comparação numérica com o método de [CGTV05b], a abordagem polinomial de [HAPL04] e os resultados apresentados neste capítulo. O melhor resultado (isto

é, o método que demanda menor esforço computacional) é fornecido pelo Teorema 5.4 com  $g = 1$ ,  $d = 0$ , garantindo que uma função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros é suficiente para caracterizar a estabilidade robusta.

Método	$K$	$L$	Tempo [GNLC95]	Tempo [Stu99]
[HAPL04] $_{k=4}$	494	385	–	9.76 s
[CGTV05b] $_{m=1}$	586	48	> 60 s	4.11 s
T5.3 $_{g=1,d=3}$	12	232	2.73 s	0.25 s
T5.3 $_{g=2,d=2}$	30	294	5.20 s	0.32 s
T5.3 $_{g=3,d=0}$	60	180	0.31 s	0.21 s
T5.4 $_{g=1,d=0}$	44	48	0.09 s	0.10 s

Tabela 5.4: Comparação dos resultados dos Teoremas 5.3 e 5.4 com os métodos apresentados em [CGTV05b] e [HAPL04] para o Exemplo 3 ( $n = 2$ ,  $N = 4$ ) em termos de esforço computacional.  $K$  é o número de variáveis escalares,  $L$  é o número de linhas de LMIs.

## Exemplo 4

Considere um sistema politópico a tempo contínuo de dimensão  $n = 3$  com  $N = 4$  vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.789 & -0.533 & 0.353 \\ -0.469 & -0.390 & 0.676 \\ -0.970 & -0.914 & 0.053 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.091 & -0.349 & 0.498 \\ 0.498 & -0.772 & 0.223 \\ -0.113 & 0.640 & -0.493 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.419 & 0.896 & -0.854 \\ -0.198 & -0.417 & 0.592 \\ 0.574 & 0.113 & -0.970 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -0.646 & -0.875 & -0.997 \\ -0.732 & -0.993 & -0.126 \\ 0.707 & 0.289 & 0.019 \end{bmatrix}$$

A Tabela 5.5 mostra uma comparação numérica dos resultados dos Teoremas 5.2 e 5.4 com os métodos apresentados em [CGTV05b] e com abordagem polinomial de [HAPL04]. Todos os métodos identificaram o politopo como estável mas, claramente, os Teoremas 5.2 e 5.4 apresentam os melhores resultados (medidos pelo esforço computacional significativamente menor).

## Exemplo 5

Considere os exemplos de cômputo de custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  do artigo [CGTV05a]. A Tabela 5.6 mostra uma comparação numérica entre os resultados do Teorema 5.5 e os resultados de [CGTV05a] em termos de esforço computacional. Embora para [CGTV05a, Exemplo 1], o método proposto em [CGTV05a] forneça uma caracterização exata com um pouco menos de variáveis e linhas de LMIs, no [CGTV05a, Exemplo 2], o Teorema 5.5 alcançou a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso com muito menos esforço computacional (em termos de  $K^3L$ ). Note que a relaxação no grau da função de Lyapunov ( $g = 3$ ,  $d = 0$ ) forneceu um resultado um pouco melhor do que as relaxações em  $d$  para  $g = 2$ .

Método	$K$	$L$	Tempo [GNLC95]	Tempo [Stu99]
[CGTV05b] <sub><math>m=2</math></sub>	414	48	> 600 $s$	78.9 $s$
[HAPL04] <sub><math>k=4</math></sub>	494	385	–	19.07 $s$
T5.2 <sub><math>g=2,d=3</math></sub>	60	420	5.82 $s$	0.99 $s$
T5.2 <sub><math>g=3,d=1</math></sub>	120	273	2.01 $s$	0.50 $s$
T5.2 <sub><math>g=4,d=0</math></sub>	210	273	1.35 $s$	0.65 $s$
T5.4 <sub><math>g=2,d=0</math></sub>	240	150	3.99 $s$	0.61 $s$

Tabela 5.5: Comparação dos resultados dos Teoremas 5.2 e 5.4 com [CGTV05b] e [HAPL04] para o Exemplo 4 ( $n = 3$ ,  $N = 4$ ) em termos de esforço computacional.  $K$  é o número de variáveis escalares,  $L$  é o número de linhas de LMIs.

Exemplo	Método	$K$	$L$	$\gamma^*$	Tempo [Stu99]
[CGTV05a, Exemplo 1]	[CGTV05a] <sub><math>m=2</math></sub>	100	25	6.201	–
	T5.5 <sub><math>g=2,d=0</math></sub>	115	41	6.201	0.66 $s$
[CGTV05a, Exemplo 2]	[CGTV05a] <sub><math>m=2</math></sub>	1066	74	1.215	–
	T5.5 <sub><math>g=2,d=0</math></sub>	361	124	1.405	2.28 $s$
	T5.5 <sub><math>g=2,d=1</math></sub>	361	190	1.271	3.30 $s$
	T5.5 <sub><math>g=2,d=2</math></sub>	361	270	1.246	4.72 $s$
	T5.5 <sub><math>g=2,d=3</math></sub>	361	364	1.231	7.04 $s$
	T5.5 <sub><math>g=2,d=4</math></sub>	361	472	1.221	9.96 $s$
	T5.5 <sub><math>g=2,d=5</math></sub>	361	594	1.215	11.38 $s$
	T5.5 <sub><math>g=3,d=0</math></sub>	601	190	1.215	9.79 $s$

Tabela 5.6: Comparação dos resultados do Teorema 5.5 com o método de [CGTV05a] para os exemplos [CGTV05a, Exemplo 1] ( $\kappa = 3.5$ ) e [CGTV05a, Exemplo 2] em termos de esforço computacional.  $K$  é o número de variáveis escalares,  $L$  é o número de linhas de LMIs. As normas  $\mathcal{H}_\infty$  de pior caso para [CGTV05a, Exemplo 1] e [CGTV05a, Exemplo 2] são  $\gamma_1^* = 6.201$  e  $\gamma_2^* = 1.215$ , respectivamente. O método proposto em [CGTV05a] não foi implementado.

## 5.7 Observações Finais

Deve ser enfatizado que, diferentemente das outras abordagens para resolver LMIs dependentes de parâmetros na literatura, como relaxações SOS (do inglês, *Sum of Squares*) [SH06, Par03], matrizes de Gram [CGTV05b] e representações pela matriz de Hermite [HAPL04], os métodos propostos neste capítulo (e de modo geral, nesta tese) exploram a estrutura das LMIs dependentes de parâmetros e trabalham diretamente com as matrizes coeficientes da matriz de Lyapunov polinomial homogênea candidata. As principais vantagens desta abordagem são a extensão imediata para resolver outras LMIs dependentes de parâmetros, como as obtidas com especificações IQCs e, mais importante, a habilidade de escrever as LMIs a serem programadas diretamente em termos dos vértices do politopo em análise e dos elementos do conjunto  $\mathcal{K}(g)$ . Uma comparação entre o método baseado em relaxações SOS proposto em [SH06] para testar a positividade de matrizes polinomiais (que, em princípio, pode ser aplicado às condições dos Lemas 1.1, 1.2, 1.5 e 1.6) e o método proposto neste capítulo é deixada para investigação futura.

### Limitantes para $g$

Em [CGTV05b] é mostrado que o grau da função de Lyapunov polinomial homogênea não precisa ser maior que  $n(n+1)/2 - 1$  para caracterizar a estabilidade Hurwitz de um sistema politópico a tempo contínuo ( $A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) = -Q(\alpha) < 0$ ). Em [HAPL04], o grau da função de Lyapunov é limitado por  $2nN$  para esse mesmo problema. A partir dos exemplos numéricos apresentados, nota-se que esses limitantes estão longe de serem acurados. Esse tópico de pesquisa é um problema em aberto, principalmente no caso de LMIs dependentes de parâmetros com estruturas mais complexas, como as que caracterizam IQCs, cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , etc.

### Limitantes para $d$

Limitantes para  $d$  podem ser encontrados na literatura para o caso de polinômios escalares com coeficientes conhecidos [dLS96], [PR01]. Mesmo nesses casos, os resultados são muito conservadores quando consideram-se polinômios com grau maior do que dois. Como pode ser notado no Teorema 2.2, a estimativa do limitante para  $d$  (fornecida em [PR01]) depende dos coeficientes do polinômio. No caso das condições propostas nesta tese, os coeficientes dos polinômios são matrizes a determinar, proibindo completamente o uso dessa estimativa. Este é outro problema em aberto.

## 5.8 Conclusão

Este capítulo apresentou procedimentos de relaxações LMIs para a análise de estabilidade robusta de sistemas politópicos invariantes no tempo. A metodologia proposta é baseada na

---

existência de uma função de Lyapunov com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário, que pode caracterizar completamente LMIs dependentes de parâmetros, com parâmetros que pertencem ao simplex unitário. As relaxações propostas tendem, com o aumento de  $g$  e do nível de relaxação  $d$ , às condições necessárias para a existência de uma solução dependente de parâmetros e podem ser usadas para procurar tanto uma função de Lyapunov polinomial homogênea de grau dado quanto uma função de Lyapunov polinomial de grau arbitrário, fornecendo duas estratégias diferentes para lidar com a relação custo-benefício entre esforço computacional e resultados precisos. A metodologia pode ser aplicada para obter soluções dependentes de parâmetros de grau arbitrário para qualquer problema de análise robusta descrito em termos de uma LMI dependente de parâmetros definida no simplex unitário, como por exemplo, especificações na forma de IQCs. Vários exemplos ilustram que a metodologia proposta fornece os melhores resultados (em termos de um menor esforço computacional para atingir o mesmo nível de precisão) do que outros métodos da literatura.

## Conclusões e Perspectivas

A principal contribuição desta tese é propor uma metodologia sistemática para solucionar LMIs dependentes de parâmetros que pertencem ao simplex unitário. Esta metodologia é sustentada por dois resultados importantes: (a) LMIs dependentes de parâmetros que pertencem ao simplex unitário podem ser completamente caracterizadas por soluções polinomiais homogêneas de grau arbitrário; (b) polinômios homogêneos que são definidos positivos no simplex unitário podem ser representados por polinômios homogêneos de graus maiores cujos coeficientes são todos definidos positivos, sendo esta propriedade derivada diretamente do Teorema de Pólya. Essas duas propriedades permitem que as LMIs dependentes de parâmetros possam ser solucionadas em termos da existência de uma matriz de Lyapunov com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros, obtida por meio de relaxações LMIs que são suficientes e progressivamente tornam-se necessárias.

A primeira relaxação proposta consiste na busca de uma solução parametrizada em termos de uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau fixo. Essa relaxação explora o resultado em (b) aumentando o grau do polinômio, resultante da LMI dependente de parâmetros, de maneira sistemática. Sempre que uma solução existe, a relaxação encontra uma solução factível. A segunda relaxação proposta aumenta o grau da função de Lyapunov e também apresenta factibilidade sempre que uma solução existe. No Capítulo 5 essas duas relaxações são colocadas em uma única abordagem, fornecendo um método de solução para LMIs dependentes de parâmetros com dois graus de liberdade que permite ao usuário balancear o compromisso entre a necessidade de resultados precisos e o esforço computacional demandado pelos métodos.

A parametrização das relaxações torna a metodologia proposta uma ferramenta eficiente e genérica para buscar soluções polinomiais homogêneas para qualquer LMI dependente de parâmetros no simplex unitário. Para as LMIs dependentes de parâmetros resultantes da análise de estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos invariantes no tempo, as relaxações propostas surgem como alternativa interessante frente a outras relaxações existentes que tratam esse mesmo problema de maneiras diferentes [CGTV05b] (matrizes de Gram), [HAPL04] (matriz de Hermite) e [Bli04a] (matrizes de Lyapunov polinomiais gerais). Os experimentos numéricos mos-

tram que as relaxações propostas fornecem o melhor compromisso entre esforço computacional e resultados precisos. Além dos bons resultados numéricos, a metodologia proposta apresenta maior flexibilidade em relação aos métodos da literatura, pois permite extensão imediata para abordar outros problemas como cômputo de custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  e o tratamento de IQCs.

## Perspectivas

- (a) Um ponto importante para ser investigado relaciona-se com as variáveis dependentes de parâmetros  $X(\alpha)$  que aparecem nas condições estendidas por meio do Lema de Finsler. Embora as condições estendidas sejam completamente equivalentes às condições originais (formuladas apenas em termos da matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$ ), quando uma estrutura é imposta para  $P(\alpha)$  e  $X(\alpha)$  as condições estendidas resultantes (suficientes) fornecem avaliações menos conservadoras para  $g$  e  $d$  dados. Além disso, as condições estendidas resultantes tendem para a necessidade mais rápido do que as condições formuladas somente em termos de  $P(\alpha)$ . Entretanto, as variáveis  $X(\alpha)$  surgem a partir do Lema de Finsler e poderiam ter uma estrutura especial, por exemplo,  $X(\alpha) = X(g = 0)$  ou  $X(\alpha) = \sum_i^N \alpha_i X_i(g = 1)$ , reduzindo drasticamente o número de variáveis de decisão nos problemas. O impacto destas escolhas na avaliação dos resultados não é conhecido e merece investigação. Um estudo interessante foi feito para a síntese de controladores para sistemas politópicos discretos em [dOG05], no qual foi mostrado que  $X(\alpha)$  deve ser independente dos parâmetros ( $g = 0$ ) para fornecer condições convexas para existência de um controlador robusto. Nesse caso, a matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$  pode ser restrita a  $g = 1$  sem perda de generalidade. Como outras escolhas de  $X(\alpha)$  afetam a existência de uma solução dependente de parâmetros no caso geral e como o projeto de controladores robustos pode ser investigado dentro da abordagem proposta nesta tese são questões em aberto.
- (b) Outras extensões possíveis seriam considerar parâmetros variantes no tempo, levando em consideração essa variação no cômputo da derivada da função de Lyapunov e impor limitantes para  $\dot{\alpha}$ . Seguindo essas condições de análise para parâmetros variantes no tempo que pertencem a um politopo, o próximo passo seria derivar condições LMIs para computar controladores de ganho escalonado (em inglês, *gain-scheduling*) baseados em funções de Lyapunov com dependência polinomial homogênea nos parâmetros.
- (c) Uma frente de trabalho promissora é considerar novas estruturas para a função de Lyapunov  $v(x, \alpha)$ . Uma estratégia interessante é trabalhar não somente com  $x$  e  $\dot{x}$ , mas também com as derivadas sucessivas  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\ddot{x}}$ , etc. Por meio do Lema de Finsler, é possível gerar novas LMIs dependentes de parâmetros que podem caracterizar de forma equivalente a estabilidade do sistema, cômputo de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , etc. Um resultado preliminar pode ser encontrado em [OLdOP05].

## Publicações

Relacionadas diretamente com a tese: [OP05e], [OP06b], [OP05c], [OP05a], [OP05b], [OLdOP05], [OP06c], [MOP06].

Relacionadas indiretamente com a tese: [LOdOP04] e também [MOLP05b], [OLdO<sup>+</sup>04], [MLOP06], [MOLP05a], cujos resumos são dados a seguir:

- (a) **LOdOP04**: “ $\mathcal{D}$ -stability of polytopes of polynomial matrices: characterization through LMIs” — Condições LMIs aprimoradas para testar se os zeros de uma matriz polinomial politópica pertencem a uma região convexa  $\mathcal{D}$  no plano complexo são apresentadas. As condições são baseadas em funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros e fornecem resultados menos conservadores do que outros métodos da literatura.
- (b) **MOLP05b**: “Gain scheduled state feedback control of discrete systems with time-varying uncertainties: an LMI approach” — Este trabalho aborda o problema de estabilização e controle  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares politópicos variantes no tempo a tempo discreto por meio de ganhos dependentes de parâmetros.
- (c) **MOLP05a**: “LMI approach for  $\mathcal{H}_\infty$  linear parameter-varying state feedback control” — Condições LMIs para a existência de ganhos dependentes de parâmetros estabilizantes para sistemas lineares politópicos variantes no tempo a tempo contínuo são apresentadas. As condições são adequadas para tratar sistemas com taxas de variação ilimitadas, como sistemas chaveados.
- (d) **MLOP06**: “State feedback control of switched linear systems: An LMI approach” — Este artigo aborda o problema de controle por realimentação de estados de sistemas chaveados contínuos no tempo com regras de chaveamento arbitrárias. As condições de projeto propostas são formuladas em termos de LMIs e fornecem resultados menos conservadores do que as estratégias baseadas na estabilidade quadrática que usam ganho fixo.
- (e) **OLdO<sup>+</sup>04**: “Cômputo de custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros” — Condições LMIs para o cômputo de custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  por meio de funções de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros são apresentadas neste trabalho.

## Submissões

Relacionadas diretamente com a tese: [OP05d], [OP06a].

# Bibliografia

- [ABP02] ARZELIER, D., BERNUSSOU, J., and PEAUCELLE, D., 2002. Fonctions de Lyapunov dépendent des paramètres pour l'analyse et la synthèse robustes. In: J. Bernussou and A. Oustaloup (Editors), *Conception de Commandes Robustes* (Hermes, Paris), chapter 6. 189–227.
- [AF74] ARROW, K. J. and FISHER, A. C., 1974. Environmental preservation, uncertainty, and irreversibility. *Quarterly Journal of Economics*, 88(2):312–319.
- [AM58] ARROW, K. J. and MCMANUS, M., 1958. A note on dynamic stability. *Econometrica*, 26:448–454.
- [AT00] APKARIAN, P. and TUAN, H. D., 2000. Parametrized LMIs in control theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4):1241–1264.
- [Bar85] BARMISH, B. R., 1985. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4):399–408.
- [Bar94] BARMISH, B. R., 1994. *New Tools for Robustness of Linear Systems* (Macmillan Publishing Company, New York, NY, USA).
- [BCK95] BHATTACHARYYA, S. P., CHAPPELLAT, H., and KEEL, L. H., 1995. *Robust Control: The Parametric Approach* (Prentice-Hall Publishing Co., Upper Saddle River, NJ, USA).
- [BEFB94] BOYD, S., EL GHAOU, L., FERON, E., and BALAKRISHNAN, V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA).
- [Bli04a] BLIMAN, P.-A., 2004. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(6):2016–2042.

- [Bli04b] BLIMAN, P. A., 2004. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, 51(3-4):165–169.
- [BM03] BURER, S. and MONTEIRO, R. D. C., 2003. A nonlinear programming algorithm for solving semidefinite programs via low-rank factorization. *Mathematical Programming (series B)*, 95(2):329–357.
- [Bor99] BORCHERS, B., 1999. CSDP, A C library for demidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11:613–623.
- [BY01] BENSON, S. and YE, Y., 2001. DSDP: Dual-scaling algorithm for semidefinite programming. Technical Report ANL/MCS-P851-1000, Argonne National Laboratory.
- [CGTV03a] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A., and VICINO, A., 2003. Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties. *Automatica*, 39(6):1027–1035.
- [CGTV03b] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A., and VICINO, A., 2003. Solving quadratic distance problems: An LMI-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2):200–212.
- [CGTV04a] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A., and VICINO, A., 2004. Parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control* (Atlantis, Paradise Island, Bahamas), 4095–4100.
- [CGTV04b] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A., and VICINO, A., 2004. Robust analysis of LFR systems through homogeneous polynomial Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(7):1211–1216.
- [CGTV05a] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A., and VICINO, A., 2005. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust  $\mathcal{H}_\infty$  performance analysis. In: *Proceedings of the 16th IFAC World Congress* (Prague, Czech Republic). In CD-rom.
- [CGTV05b] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A., and VICINO, A., 2005. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3):365–370.
- [Che03] CHESI, G., 2003. Robust analysis of linear systems affected by time-invariant parametric uncertainty. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control* (Maui, HI, USA), 5019–5024.

- [dBvKOS97] DE BERG, M., VAN KREVELD, M., OVERMARS, M., and SCHWARZKOPF, O., 1997. *Computational Geometry, Algorithms and Applications* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg), 2nd edition.
- [DFT92] DOYLE, J. C., FRANCIS, B. A., and TANNENBAUM, A. R., 1992. *Feedback Control Theory* (Macmillan Publishing Company, New York, NY).
- [DGKF89] DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P., and FRANCIS, B., 1989. State space solutions to the standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847.
- [dKP02] DE KLERK, E. and PASECHNIK, D. V., 2002. Approximation of the stability number of a graph via copositive programming. *SIAM Journal on Optimization*, 12(4):875–892.
- [dLS96] DE LOERA, J. A. and SANTOS, F., 1996. An effective version of Pólya’s Theorem on positive definite forms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 108:231–240.
- [dOBG99] DE OLIVEIRA, M. C., BERNUSSOU, J., and GEROMEL, J. C., 1999. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265.
- [dOG05] DE OLIVEIRA, M. C. and GEROMEL, J. C., 2005. A class of robust stability conditions where linear parameter dependence of the Lyapunov function is a necessary condition for arbitrary parameter dependence. *Systems & Control Letters*, 54:1131–1134.
- [dOGB02] DE OLIVEIRA, M. C., GEROMEL, J. C., and BERNUSSOU, J., 2002. Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666–679.
- [dOGH99] DE OLIVEIRA, M. C., GEROMEL, J. C., and HSU, L., 1999. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1–3):27–38.
- [dOOL<sup>+</sup>02a] DE OLIVEIRA, P. J., OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., MONTAGNER, V. F., and PERES, P. L. D., 2002. Estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In: *XIV Congresso Brasileiro de Automática* (Natal, RN), 2884–2889.
- [dOOL<sup>+</sup>02b] DE OLIVEIRA, P. J., OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., MONTAGNER, V. F., and PERES, P. L. D., 2002. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: a numerical comparison. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control* (Las Vegas), 644–649.

- [dOOL<sup>+</sup>04a] DE OLIVEIRA, P. J., OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., MONTAGNER, V. F., and PERES, P. L. D., 2004.  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5):305–315.
- [dOOL<sup>+</sup>04b] DE OLIVEIRA, P. J., OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., MONTAGNER, V. F., and PERES, P. L. D., 2004.  $\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(6):1053–1061.
- [dOS01] DE OLIVEIRA, M. C. and SKELTON, R. E., 2001. Stability tests for constrained linear systems. In: S. O. Reza Moheimani (Editor), *Perspectives in Robust Control* (Springer-Verlag, New York), volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. 241–257.
- [DS00] DETTORI, M. and SCHERER, C. W., 2000. New robust stability and performance conditions based on parameter dependent multipliers. In: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control* (Sydney, Australia), 4187–4192.
- [EA56] ENTHOVEN, A. C. and ARROW, K. J., 1956. A theorem on expectations and the stability of equilibrium. *Econometrica*, 24:288–293.
- [EH05] EBIHARA, Y. and HAGIWARA, T., 2005. A dilated LMI approach to robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems. *Automatica*, 41(11):1933–1941.
- [FAG96] FERON, E., APKARIAN, P., and GAHINET, P., 1996. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041–1046.
- [FKG06] FIORAVANTI, A. R., KOROGUI, R. H., and GEROMEL, J. C., 2006. *SDPLab 1.0 Tutorial*. DSCE/FEEC/UNICAMP, Campinas, SP. <http://www.dsce.fee.unicamp.br/~fioravan/software/software.htm>.
- [GAC96] GAHINET, P., APKARIAN, P., and CHILALI, M., 1996. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442.
- [GAN91] GUERIN, R., AHMADI, H., and NAGHSHINEH, M., 1991. Equivalent capacity and its application to bandwidth allocation in high-speed networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 9(7):968–981.
- [GdOH98] GEROMEL, J. C., DE OLIVEIRA, M. C., and HSU, L., 1998. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80.

- [GN97] GAHINET, P. and NEMIROVSKII, A., 1997. The projective method for solving linear matrix inequalities. *Mathematical Programming*, 77(2):163–190.
- [GNLC95] GAHINET, P., NEMIROVSKII, A., LAUB, A. J., and CHILALI, M., 1995. *LMI Control Toolbox User's Guide* (The Math Works Inc., Natick, MA).
- [GPB91] GEROMEL, J. C., PERES, P. L. D., and BERNUSSOU, J., 1991. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(2):381–402.
- [GPdS92] GEROMEL, J. C., PERES, P. L. D., and DE SOUZA, S. R., 1992.  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 19:23–27.
- [GPS93] GEROMEL, J. C., PERES, P. L. D., and SOUZA, S. R., 1993.  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 57(4):853–864.
- [GPT04] GONÇALVES, E. N., PALHARES, R. M., and TAKAHASHI, R. H. C., 2004. Multi-objective optimization applied to robust  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  state-feedback control synthesis. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference* (Boston, MA), 4619–4624.
- [GPT05] GONÇALVES, E. N., PALHARES, R. M., and TAKAHASHI, R. H. C., 2005. Robust  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  output-feedback control synthesis for systems with polytope-bounded uncertainty. In: *Proceedings of the 16th IFAC World Congress* (Prague, Czech Republic). In CD-rom.
- [GZL90] GU, K., ZOHDY, M. A., and LOH, N. K., 1990. Necessary and sufficient conditions of quadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(5):601–604.
- [Ham99] HAMBURGER, C., 1999. Two extensions to Finsler's recurring theorem. *Applied Mathematics & Optimization*, 40(2):183–190.
- [HAPL04] HENRION, D., ARZELIER, D., PEAUCELLE, D., and LASSERRE, J. B., 2004. On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control* (Paradise Island, Bahamas), 887–892.
- [HL03] HENRION, D. and LASSERRE, J. B., 2003. Solving global optimization problems over polynomials with GloptiPoly 2.1. In: C. Blik, C. Jermann, and A. Neumaier (Editors), *Global Optimization and Constraint Satisfaction* (Springer-Verlag, New York), volume 2861 of *Lecture Notes in Computer Science*. 43–58.

- [HLP52] HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E., and PÓLYA, G., 1952. *Inequalities* (Cambridge University Press, Cambridge, UK), 2nd edition.
- [IS01] IWASAKI, T. and SHIBATA, G., 2001. LPV system analysis with quadratic separator for uncertain implicit systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1195–1208.
- [Iwa96] IWASAKI, T., 1996. Robust performance analysis for systems with structured uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:85–99.
- [Kha78] KHARITONOV, V. L., 1978. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14:2086–2088.
- [KKR93] KAMINER, I., KHARGONEKAR, P. P., and ROTEA, M. A., 1993. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control for discrete-time systems via convex optimization. *Automatica*, 29(1):57–70.
- [KMLM05] KARIMI, H. R., MARALANI, P. J., LOHMANN, B., and MOSHIRI, B., 2005.  $\mathcal{H}_\infty$  control of parameter-dependent state-delayed systems using polynomial parameter-dependent quadratic functions. *International Journal of Control*, 78(4):254–263.
- [KMT98] KELLY, F. P., MAULLOO, A. K., and TAN, D. K. H., 1998. Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability. *Journal of the Operational Research Society*, 49(3):237–252.
- [KR91] KHARGONEKAR, P. P. and ROTEA, M. A., 1991. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7):824–837.
- [KS03] KOČVARA, M. and STINGL, M., 2003. PENNON: a code for convex nonlinear and semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 18(3):317–333.
- [Las01] LASSERRE, J. B., 2001. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 11(3):796–817.
- [LMRP02] LEITE, V. J. S., MONTAGNER, V. F., RAMOS, D. C. W., and PERES, P. L. D., 2002. Estabilidade robusta de sistemas contínuos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In: *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática* (Natal, RN), 2878–2883.
- [LOdOP04] LEITE, V. J. S., OLIVEIRA, R. C. L. F., DE OLIVEIRA, P. J., and PERES, P. L. D., 2004.  $\mathcal{D}$ -stability of polytopes of polynomial matrices: characterization

- through LMIs. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control* (Paradise Island, Bahamas), 863–868.
- [Löf04] LÖFBERG, J., 2004. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the IEEE CCA/ISIC/CACSD Multiconference* (Taipei, Taiwan). Available from <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [LP03] LEITE, V. J. S. and PERES, P. L. D., 2003. An improved LMI condition for robust  $\mathcal{D}$ -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):500–504.
- [LPH02] LABIT, Y., PEAUCELLE, D., and HENRION, D., 2002. SEDUMI INTERFACE 1.02 : a tool for solving LMI problems with SEDUMI. In: *Proceedings of the 12th IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design* (Glasgow, Scotland, UK), 272–277.
- [MLOP06] MONTAGNER, V. F., LEITE, V. J. S., OLIVEIRA, R. C. L. F., and PERES, P. L. D., 2006. State feedback control of switched linear systems: An LMI approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. In Press.
- [MOLP05a] MONTAGNER, V. F., OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., and PERES, P. L. D., 2005. Gain scheduled state feedback control of discrete systems with time-varying uncertainties: an LMI approach. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005* (Seville, Spain), 4305–4310.
- [MOLP05b] MONTAGNER, V. F., OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., and PERES, P. L. D., 2005. LMI approach for  $\mathcal{H}_\infty$  linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 152(2):195–201.
- [MOP06] MONTAGNER, V. F., OLIVEIRA, R. C. L. F., and PERES, P. L. D., 2006. Robust stability of linear time-varying polytopic systems through polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design – ROCOND 2006* (Toulouse, France).
- [MP96a] MOHEIMANI, S. O. R. and PETERSEN, I. R., 1996. Optimal guaranteed cost control of uncertain systems via static and dynamic output feedback. *Automatica*, 32(4):575–579.
- [MP96b] MOHEIMANI, S. O. R. and PETERSEN, I. R., 1996. Quadratic guaranteed cost control with robust pole placement in a disk. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 143(1):37–43.

- [MR97] MEGRETSKI, A. and RANTZER, A., 1997. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6):819–830.
- [NN94] NESTEROV, Y. and NEMIROVSKII, A., 1994. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming* (SIAM, Philadelphia).
- [NT73] NARENDRA, K. S. and TRIPATHI, S. S., 1973. Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 10.
- [NW78] NIJENHUIS, A. and WILF, H. S., 1978. *Combinatorial Algorithms* (Academic Press, New York).
- [OHM04] ORSI, R., HELMKE, U., and MOORE, J. B., 2004. A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control* (Paradise Island, Bahamas), 3138–3144.
- [OLD<sup>+</sup>04] OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., DE OLIVEIRA, P. J., MONTAGNER, V. F., and PERES, P. L. D., 2004. Cômputo de custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  por meio de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. In: *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática* (Gramado, RS).
- [OLDOP05] OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., DE OLIVEIRA, M. C., and PERES, P. L. D., 2005. An LMI characterization of polynomial parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005* (Seville, Spain), 5024–5029.
- [OP05a] OLIVEIRA, R. C. L. F. and PERES, P. L. D., 2005. Condições para a existência de uma função de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros para estabilidade de sistemas lineares incertos. In: *Anais do XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional* (São Paulo, SP).
- [OP05b] OLIVEIRA, R. C. L. F. and PERES, P. L. D., 2005. LMI conditions for the existence of polynomially parameter-dependent Lyapunov functions assuring robust stability. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control — European Control Conference ECC 2005* (Seville, Spain), 1660–1665.
- [OP05c] OLIVEIRA, R. C. L. F. and PERES, P. L. D., 2005.  $\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost computation via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 16th IFAC World Congress* (Prague, Czech Republic). In CD-rom.

- [OP05d] OLIVEIRA, R. C. L. F. and PERES, P. L. D., 2005. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Submitted.
- [OP05e] OLIVEIRA, R. C. L. F. and PERES, P. L. D., 2005. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, 405:209–228.
- [OP06a] OLIVEIRA, R. C. L. F. and PERES, P. L. D., 2006. Characterization of polynomially parameter-dependent Lyapunov solutions to robust linear matrix inequalities for  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  norm evaluations. *Linear Algebra and Its Applications*. Submitted.
- [OP06b] OLIVEIRA, R. C. L. F. and PERES, P. L. D., 2006. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 55(1):52–61.
- [OP06c] OLIVEIRA, R. C. L. F. and PERES, P. L. D., 2006. LMI relaxations for homogeneous polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. In: *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design – ROCOND 2006* (Toulouse, France).
- [PA01] PEAUCELLE, D. and ARZELIER, D., 2001. Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4):624–630.
- [PABB00] PEAUCELLE, D., ARZELIER, D., BACHELIER, O., and BERNUSSOU, J., 2000. A new robust  $\mathcal{D}$ -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30.
- [Par03] PARRILO, P. A., 2003. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. *Mathematical Programming Ser. B*, 96(2):293–320.
- [PD93] PACKARD, A. and DOYLE, J., 1993. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1):71–109.
- [PDB93] PACKARD, A., DOYLE, J., and BALAS, G., 1993. Linear multivariable robust control with a  $\mu$  perspective. *Journal of Dynamic Systems - Transactions of ASME*, 115(2B):426–438.
- [Pet95] PETERSEN, I. R., 1995. Guaranteed cost LQG control of uncertain linear-systems. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 142(2):95–102.

- [PGB93] PERES, P. L. D., GEROMEL, J. C., and BERNUSSOU, J., 1993. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded domains. *Automatica*, 29(2):491–493.
- [PR01] POWERS, V. and REZNICK, B., 2001. A new bound for Pólya’s Theorem with applications to polynomials positive on polyhedra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 164:221–229.
- [PTP97] PALHARES, R. M., TAKAHASHI, R. H. C., and PERES, P. L. D., 1997.  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mathcal{H}_2$  guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188.
- [Ran96] RANTZER, A., 1996. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, 28(1):7–10.
- [RP01] RAMOS, D. C. W. and PERES, P. L. D., 2001. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378.
- [RP02] RAMOS, D. C. W. and PERES, P. L. D., 2002. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678.
- [Sch01] SCHERER, C. W., 2001. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37(3):361–375.
- [Sch05] SCHERER, C. W., 2005. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(2):365–395.
- [Sch06] SCHERER, C. W., 2006. LMI relaxations in robust control. *European Journal of Control*. In Press.
- [SH06] SCHERER, C. W. and HOL, C. W. J., 2006. Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs. *Mathematical Programming Series B*. In Press.
- [SIG98] SKELTON, R. E., IWASAKI, T., and GRIGORIADIS, K., 1998. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design* (Taylor & Francis, Bristol, PA).
- [Stu99] STURM, J. F., 1999. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12:625–653. URL: <http://sedumi.mcmaster.ca/>.

- [TTT99] TOH, K. C., TODD, M. J., and TUTUNCU, R., 1999. SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11:545–581.
- [Uhl79] UHLIG, F., 1979. A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: A survey. *Linear Algebra and Its Applications*, 25(1):219–237.
- [VB96] VANDENBERGHE, L. and BOYD, S., 1996. Semidefinite programming. *SIAM Review*, 38(1):49–95.
- [VBW98] VANDENBERGHE, L., BOYD, S. P., and WU, S., 1998. Determinant maximization with linear matrix inequality constraints. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19(2):499–533.
- [VMP92] VEILLETTE, R. J., MEDANIĆ, J. V., and PERKINS, W. R., 1992. Design of reliable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3):280–304.
- [Wal03] WALLIN, R., 2003. User’s guide to kypd solver. Technical Report LiTH-ISY-R-2517, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping, Sweden.
- [Yak62] YAKUBOVICH, V. A., 1962. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. *Soviet Mathematics Doklady*, 3:620–623.
- [YFK03] YAMASHITA, M., FUJISAWA, K., and KOJIMA, M., 2003. Implementation and evaluation of SDPA 6.0 (Semidefinite Programming Algorithm 6.0). *Optimization Methods and Software*, 18(4):491–505.
- [ZGD96] ZHOU, K., GLOVER, K., and DOYLE, J. C., 1996. *Robust and Optimal Control* (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA).