



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida por Evandro Eduardo Seron Ruiz e aprovada pela Comissão Julgadora em 05 de Maio de 1989

COMPARAÇÃO DE TÉCNICAS E MÉTODOS  
PARA VISÃO COMPUTACIONAL EM  
AMBIENTES INDUSTRIAIS

Evandro Eduardo Seron Ruiz  
orientador Prof. Dr. Clésio Luis Tozzi

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP — como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à vida presente

à vida conjunto

à vida harmonia

à vida com minha linda Maria Eugénia

às vidas Marlene-Lacerda e Selma Cléia

a esses que muito mais que poder de opção e incentivo, enchem-me de amor.

À orientação técnica e amiga do Prof.Dr. Clésio Luis Tozzi.

Ao apoio financeiro e técnico da UNICAMP, CNPq e SID Informática através do Projeto Estra.

## RESUMO

Este trabalho descreve as duas abordagens mais utilizadas para o reconhecimento de padrões que são: 1) o registro translacional de imagens ("matching") e, 2) o registro simbólico. Dentro desta última são descritas a abordagem decisão-teórica e a abordagem estrutural. Também são discutidas as diferentes etapas em que são envolvidas as abordagens para efetivação do reconhecimento. Como exemplo aplicativo são implementadas as abordagens decisão-teórica e estrutural à classes de figuras geométricas simples. É discutida a viabilidade e adequação das abordagens para o processamento paralelo e o uso em robótica.

## ABSTRACT

The two major approaches to pattern recognition are described: 1) the signal based (matching) and, the symbolic recognition. In the last one the decision-theoretic approach and the structural pattern recognition are described. There is a discussion concerning the auxiliary tasks required to achieve pattern recognition in those approaches. An application using geometric shapes is given using theoretic-decision and the structural approaches. There is also an insight relating to these two methods to parallel processing in robotics.

## PREFÁCIO

O crescente avanço e evolução dos conceitos teóricos e práticos envolvidos nos sistemas computacionais, juntamente com a popularização dos micro-computadores, trouxe consigo uma abertura ao panorama de aplicações práticas que poderiam envolvê-los. Essa forma "nova" de realização de tarefas pelos computadores digitais está comumente procurando alcançar alguns desses objetivos: a) aumentar a produtividade, b) reduzir riscos operacionais, c) reduzir custos, d) controlar a qualidade e, e) oferecer maior conforto. Na maioria dos casos esses objetivos são perseguidos para que ocorram simultaneamente com a realização das tarefas.

Toda essa gama de intenções leva a exigir um conhecimento quase que humano das máquinas, ou uma forma inteligente de atuação para lidar com tantos dados e objetivos concomitantemente, e nessa situação de gerenciamento e aquisição de um grande e significativo volume de dados é que chama a atenção a visão computacional. Como na visão humana, a visão computacional procura oferecer de modo mais eficiente possível uma vasta quantidade de informações ao sistema computacional para que este possa agir como o esperado.

O reconhecimento de padrões está engajado no campo da visão computacional com atuações e perspectivas importantíssimas para alcançar e realizar a "máquina inteligente".

A visão computacional, sob a forma de reconhecimento de padrões, está presente hoje nos mais diversos campos de atuação, manipulando simples ou complexas estruturas de dados, ou seja, simples ou complexos elementos de visão.

Para os reconhecimentos mais simples, ou seja, do tipo presença ou ausência de objetos, ou elementos de imagem simples que sofrem pouca variação na sua forma, os sensores podem atuar no papel de olheiros. Como exemplo podemos citar o reconhecimento/leitura dos códigos de barras impressos em vários produtos consumidos atualmente. Os sensores atuam também em regiões onde ainda é inapropriado o uso de câmeras de vídeo para realizar a tarefa de visão, como exemplo podemos citar os sensores que captam as radiações eletro-magnéticas (REM) nos satélites. Captando e filtrando essas radiações da terra em diversas faixas, que são traduzidas em cores, pode-se obter imagens aéreas, processo conhecido também como sensoriamento remoto. A análise das imagens de satélite é utilizada para o mapeamento de regiões, a verificação/estudo do solo e tipos de agricultura, análise atmosférica e também para inspeção e espionagem militar.

A visão computacional através do reconhecimento de padrões encontrou variadas formas de aplicações industriais, que vão desde a inspeção de peças até a montagem robotizada. Atualmente várias indústrias são dotadas de robos industriais com capacidade de visão que trabalham na montagem e verificação de circuitos eletrônicos, no transporte de peças com autonomia da navegação, no controle da qualidade de manufaturados, verificando pontos de solda, qualidade de pintura, retirando elementos defeituosos da linha de montagem, separando produtos e outras tarefas mais.

Certamente é na aplicação industrial o grande enfoque atual dos sistemas de visão computacionais, pelo poder econômico dos grandes empreendedores e pelo retorno notável que a visão

artificial pode trazer a esse segmento.

A visão artificial também está atuando no entretenimento e em áreas esportivas fazendo análise de posições e movimentos dos atletas e das outras entidades participantes do esporte em questão, como a bola, o dardo e outros.

No segmento médico há um grande interesse para que a visão computacional auxilie no diagnóstico de moléstias analisando imagens radiográficas e tomográficas. O reconhecimento de padrões atua também na contagem e identificação de cromossomos e como interpretador de curvas e sinais (contínuos ou digitais) vindos de equipamentos médicos, especialmente os aplicados a fisiologia.

A segurança também recebe auxílio da visão computacional, no reconhecimento de assinaturas, impressões digitais e no casamento dos traços do rosto para identificação de pessoas.

Como vimos a visão artificial está envolvida nas mais variadas formas de aplicação e sendo exigida cada vez mais a realizar tarefas tão eficientes quanto a visão humana.

## ÍNDICE

1. Introdução.	
1.1 Objetivos.	1-1
1.2 Organização do trabalho.	1-3
1.3 Elementos de um sistema de visão computacional.	1-5
1.4 Registro translacional de imagens.	
1.4.1 Introdução.	1-11
1.4. O método da correlação.	1-14
1.4.3 Técnicas Sequênciais de Decisão.	1-15
1.4.3.1 Algoritmo com limiar de erro constante.	1-16
1.4.3.2 Algoritmo com limiar de erro monotônico-crescente.	1-18
2. Técnicas de pré-processamento de imagens para reconhecimento de padrões.	
2.1 Introdução.	2-1
2.2 Detecção de bordas.	2-2
2.2.1 Operador de Robert.	2-10
2.2.2 Operdor de Sobel.	2-12
2.2.3 Método do Laplaciano.	2-14
2.2.4 Operador de Rosenfeld.	2-18
2.2.5 Comentários.	2-18
2.3 Estreitamento de bordas.	2-19
2.4 Codificação.	
2.4.1 Introdução.	2-24
2.2.2 Codificação pelo contorno.	2-25
2.4.2.1 O algoritmo T.	2-26
2.4.2.2 O algoritmo PI.	2-29
2.4.3 Código da cadeia.	2-30
3. Abordagem decisão-teórica.	
3.1 Introdução.	3-1
3.2 Abordagem decisao-teórica.	3-1
3.3 Atributos e sua extração.	3-5
3.3.1 Área.	3-6
3.3.2 Perímetro.	3-9

3.3.3 Área do retângulo envolvente.	3-10
3.3.4 Retangularidade.	3-11
3.3.5 Circularidade.	3-12
3.3.6 Momentos.	3-12
3.3.7 Número de Euler.	3-15
3.3.8 Fator G.	3-17
3.4 .1 Medidas classificatórias.	3-17
3.4.2 A heurística de Price & Reddy.	3-18
3.4.2 Método das mínimas distâncias.	3-20
4. Abordagem estrutural.	
4.1 Introdução.	4-1
4.2 Descritores Estruturais.	
4.2.1 Gramática de cadeia.	4-3
4.2.2 Gramática de árvore.	4-7
4.3 Facilidades com a aproximação poligonal.	
4.3.1 Introdução.	4-11
4.3.2 Método de Ramer.	4-16
4.3.3 "Split-and-merge".	4-20
4.3.4 Método de Hung & Kaswand.	4-23
4.3.5 Algoritmo de Rosenfeld & Jonhston	4-26
5. Aplicações.	
5.1 Introdução.	5-1
5.2 Metodologia.	5-2
5.3 Resultados.	
5.3.1 Abordagem Decisão-Teórica.	5-9
5.3.2 Abordagem Estrutural.	5-21
5.4 Conclusões.	5-35
Apêndice 1 — Nomenclatura.	
Apêndice 2 — Gramática.	
Apêndice 3 — Tabelas.	

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 OBJETIVOS

Dentro do universo da visão computacional restringiremos o objetivo de nosso trabalho às aplicações mais promissoras do reconhecimento de padrões aplicadas à robótica.

Nesse campo de atuação basicamente existem duas abordagens as quais podemos recorrer para implementação de um sistema de reconhecimento de padrões, e são elas: o registro translacional de imagens e o registro simbólico.

O registro translacional de imagens, do inglês "matching", é uma abordagem que procura reconhecer os padrões, lidos por um dispositivo de visão, como uma câmera por exemplo, comparando-os a um padrão referência. Essa comparação é feita ponto a ponto entre as duas imagens, procurando uma sobreposição perfeita entre elas através de movimentos de translação e rotação do padrão lido em relação ao padrão conhecido.

O registro simbólico de imagens diferencia-se do registro translacional por não procurar um casamento direto entre os pontos da imagem, mas por promover essa comparação entre elementos de mais alto nível, ou seja, por meio de atributos e características relevantes dessa imagem. É próprio do registro simbólico a busca por atributos nas figuras da imagem que sejam invariantes quanto ao tamanho, à sua posição e à sua orientação, o que o caracteriza

como um método mais flexível quanto a variedade de classes de figuras que a ele podem ser submetidas.

Ainda dentro do registro simbólico ocorre uma divisão em duas outras abordagens: a abordagem decisão-teórica e a abordagem estrutural, ou sintática.

A diferença entre as duas aparece logo nos tipos de atributos que são procurados na imagem, e nas figuras, para o reconhecimento. Enquanto que a abordagem decisão-teórica envolve-se com atributos essencialmente numéricos e globais das figuras como a sua área e a dispersão de seus pontos em relação ao seu centro de massa, somente exemplificando, a abordagem estrutural procura extrair elementos dessas figuras que expressam a sua estrutura — forma — como ângulos, curvas, arcos e outros.

Essa manipulação de diferentes atributos pelas duas abordagens traz consigo algoritmos classificatórios bastante distintos. Enquanto a abordagem decisão-teórica usa algoritmos matemáticos de classificação dos padrões a abordagem estrutural ocupa-se de algoritmos baseados na Teoria Formal das Linguagens.

Procurando um posicionamento bastante prático e alargando os horizontes da visão computacional aplicada a robótica, implementamos dois reconhecedores simbólicos de padrões, um baseado na abordagem decisão-teórica e outro baseado na abordagem estrutural, usando como alimentação aos reconhecedores figuras geométricas simples dentro de imagens reais lidas por uma câmera. O registro translacional de imagens não foi implementado pela motivação de vanguarda que a abordagem simbólica trouxe,

propiciando bases de estudos mais orientadas para evolução do conceito de reconhecimento de padrões que é a análise de cenas.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho encontra-se dividido em capítulos da seguinte forma:

No primeiro consideramos o registro translacional de imagens como o método mais básico de reconhecimento de padrões e procuramos introduzir a formalização matemática nele contida. Previamente, entretanto, procuramos descrever os caminhos iniciais percorridos por uma imagem até ser armazenada pelo computador.

No capítulo 2 descrevemos os principais métodos que fazem a preparação da imagem para entrar no processo de reconhecimento de padrões propriamente dito. São abordados os conceitos de detecção de bordas, além da codificação e do armazenamento de imagens.

O terceiro capítulo discorre sobre a abordagem decisão-teórica no reconhecimento de padrões. São vistos os principais atributos que podem ser extraídos das imagens nesta fase e os mecanismos de extração. Além disso são mostrados dois métodos de classificação de padrões voltados a essa abordagem.

No capítulo 4 enfocamos a abordagem estrutural com exemplos de duas das gramáticas mais utilizadas para reconhecer padrões no modo sintático. Também são vistos métodos de aproximação poligonal

que reduzem ainda mais o número de pontos das figuras, deixando-as expressas somente por seus pontos críticos, facilitando o trabalho dos reconhecedores estruturais.

O quinto capítulo foi reservado as aplicações de dois reconhecedores simbólicos, cada um pertencente a uma abordagem distinta, sobre essas classes de figuras geométricas simples. Neste capítulo são discutidos as três abordagens para diversas aplicações.

O texto conta ainda com três apêndices que procuram explicar melhor a nomenclatura utilizada, relembrar o leitor dos aspectos fundamentais da Teoria Formal das Linguagens e, completar o texto com mais figuras e tabelas que foram o motivo e o resultado, respectivamente, de todo este trabalho.

### 1.3 ELEMENTOS DE UM SISTEMA DE VISÃO COMPUTACIONAL

Os elementos físicos básicos de um sistema geral de visão computacional estão representados na figura abaixo:

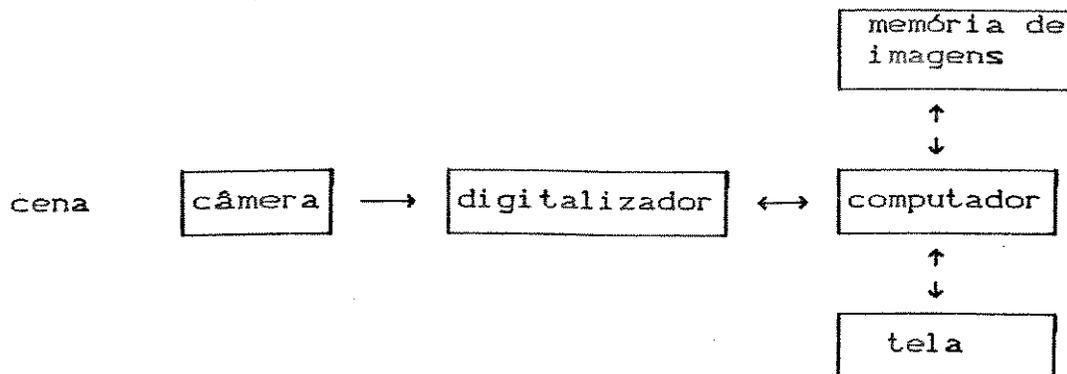
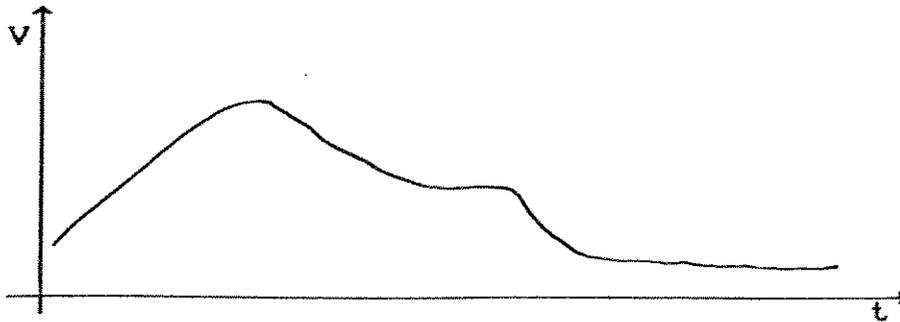


fig.1.1 Sistema básico de visão computacional.

Todo esse sistema físico é possuidor de vários recursos lógicos embutidos que tem como objetivo extrair e analisar informações de uma cena para reconhecê-las. Como primeira tarefa esse sistema lógico deve adequar o resultado dessa visão à linguagem do computador, o que é explicado a seguir.

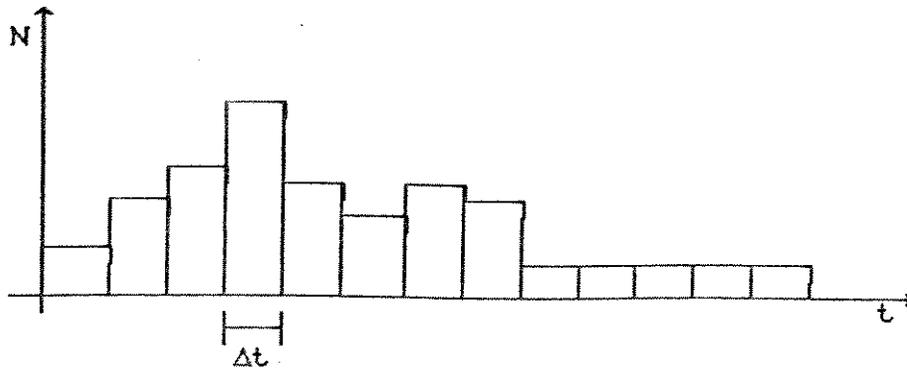
A câmera capta a cena real a ser analisada e gera um sinal para o digitalizador, chamado de sinal de vídeo, que é contínuo e pode ser exemplificado como na figura abaixo:



onde  $v$ : tensão proporcionada a cada linha gerada pela câmera, e  
 $t$ : corresponde ao tempo de exploração de todos os pontos dessa linha, ou de toda a cena.

fig.1.2 Sinal de vídeo.

Este sinal posteriormente é aplicado a um digitalizador de imagens que converte, a cada intervalo de tempo especificado, a tensão de saída em números binários equivalentes a intensidade luminosa dos pontos. Vide figura a seguir:



onde  $N$  : número equivalente a intensidade luminosa e,  
 $\Delta t$  : intervalo de tempo para a amostra, que equivalerá ao menor elemento da imagem — pixel.

fig.1.3 Sinal digitalizado.

O resultado dessa discretização, conversão do sinal contínuo (analógico) em pontos discretos, é dependente do número de bits que representará o nível de tensão, o que em última instância proporcionará o número total de níveis de cinza da imagem. Exemplificando, um conversor analógico/digital (A/D) de 8 bits suporta a representação de 256 níveis de cinza na mesma imagem.

O sinal digitalizado é então enviado para o computador que procura armazená-lo na memória. A representação mais usual para o resultado final dessa digitalização é na forma de uma matriz bi-dimensional

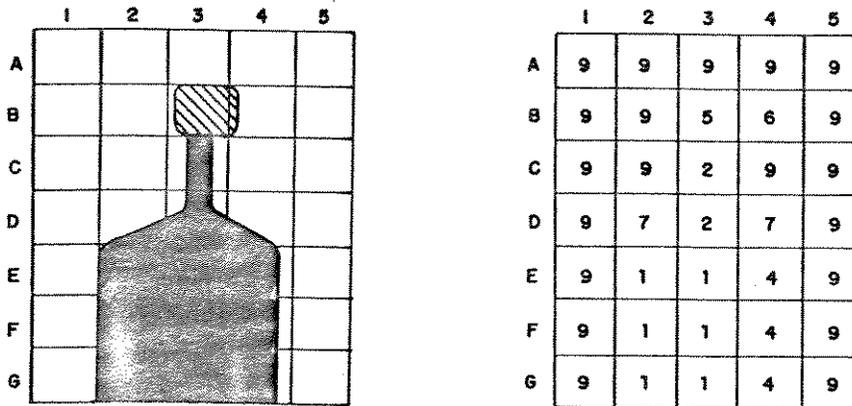


fig.1.4 digitalização de imagens.

com  $M \times N$  pontos, onde cada  $M$  representa uma linha da imagem e cada  $N$  uma coluna.

O processo de digitalização também pode ser formalizado como uma transformação de uma função contínua  $f_c(l,c)$ , representando uma cena real, pela função de discretização  $D$  aplicada a partição da imagem da  $f_c(l,c)$ , gerando a função  $f(l,c)$ , ou seja, a imagem.

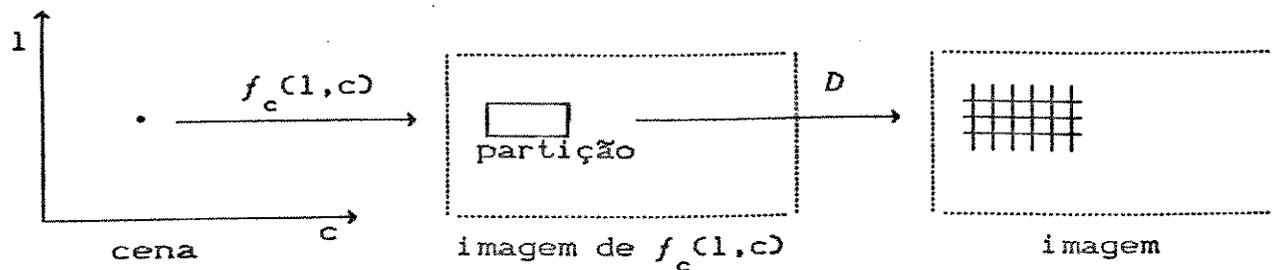


fig.1.5 Digitalização de imagens.

Melhor dizendo, cada pequena amostra da cena é transformada num pixel da imagem no computador que guarda consigo o nível de luminosidade traduzido da cena real à escala do digitalizador.

Continuando nesse raciocínio pode-se dizer que quanto menor a partição tomada pelo digitalizador para essa transformação e quanto maior o número de níveis de cinza que o digitalizador possui mais próximo da realidade a imagem fica da cena.

Vemos então que a resolução do digitalizador, ou seja, a quantidade de pontos em que ele pode amostrar a cena, tem um papel muito importante no aspecto da imagem, pois quanto menor for o pixel comparado ao tamanho da figura mais fiel será a imagem.

Como cada pixel corresponde a quantidade de luz refletida de uma partição da cena lida, a má iluminação da cena pode prejudicar a imagem, isto porque diferentes intensidades de iluminação em superfícies que tenham as mesmas características de cor e textura podem significar pixels de níveis de cinza diferentes. Uma

operação de limiarização nesta imagem pode assim mostrar uma imagem que não corresponde a cena. É o que usualmente é chamado pelo nome genérico de ruído de digitalização.

A figura abaixo mostra um contorno ideal de um quadro preenchido e o seu contorno com ruídos que podem ocorrer por uma iluminação não uniforme das bordas do quadrado.

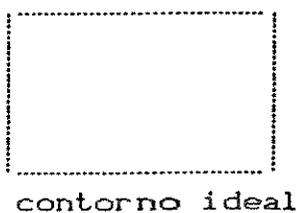


fig.1.6 Exemplo de ruídos

Além desse tipo de ruído outros podem ocorrer devido a distorções geométricas e cromáticas apresentadas pela lente da câmera, a movimentação da cena e até mesmo por problemas técnicos do próprio digitalizador.

## 1.4 REGISTRO TRANSLACIONAL DE IMAGENS

### 1.4.1 INTRODUÇÃO

A abordagem mais simples para o registro de imagens é chamada de registro translacional de imagens e, geralmente ocorre para a determinação de um padrão da imagem dentro dela mesma.

Suponhamos duas imagens: a primeira, representando um padrão  $p$  através da matriz  $P$  de dimensões  $k \times l$ , e a segunda, representando uma imagem  $f$ , através da matriz  $F$  de dimensões  $m \times n$  ( $m > k$  e  $n > l$ ), onde procuraremos pelo padrão  $p$ .

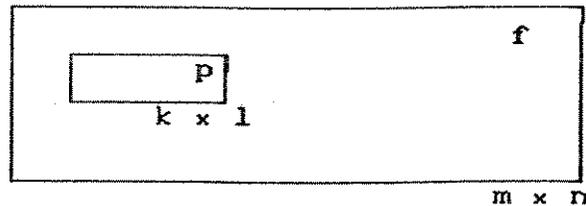


fig.1.7 Registro translacional de imagens

A procura pelo ponto de registro entre as duas imagens, ou seja, o ponto de casamento entre o padrão e a imagem, é feita posicionando-se a imagem  $P$  sobre a imagem  $F$  em todos os pontos possíveis. A sobreposição perfeita entre as duas imagens, ou seja, o momento em que todos os pontos do padrão  $p$  sobrepõe os pontos da imagem  $f$ , só pode ocorrer se o padrão não possuir diferenças entre a imagem, diferenças essas que podem ser transformações

geométricas, exemplificando: alterações de escala e rotações. ( Os problemas ocasionados por essas transformações não serão tratados aqui, entretanto existem métodos que podem ser aplicados que reduzem esse tipo de distorção para que o registro de imagens seja feito).

Dentre as várias maneiras de medida de correspondência entre duas imagens  $f$  e  $p$ , podem ser usadas, por exemplo as expressões a seguir

$$\max_{\mathcal{R}} |p - f| \quad \text{ou} \quad \sum_{(l,c) \in \mathcal{R}} |p - f| \quad \text{ou} \quad \sum_{(l,c) \in \mathcal{R}} (p - f)^2 \quad (1)$$

onde

- $p$  e  $f$  são funções que determinam valores nas matrizes  $P$  e  $F$ .
- $l$  e  $c$  são as coordenadas de linha e coluna dentro da região maior onde  $p$  e  $f$  se encontram, que é  $\mathcal{R}$ .

Na realidade as expressões em (1) exprimem uma medida de dessemelhança entre as imagens  $p$  e  $f$  numa região  $\mathcal{R}$ . Contudo, extendendo-se a última das expressões temos:

$$\sum_{\mathcal{R}} (p - f)^2 = \sum_{\mathcal{R}} p^2 + \sum_{\mathcal{R}} f^2 - 2 \times \sum_{\mathcal{R}} p \times f \quad (2)$$

onde os dois primeiros termos após o sinal de igualdade são medidas fixas, cabendo a medida de dessemelhança ao último termo.

Nota-se que se a medida de dessemelhança  $\sum_{\mathcal{R}} (p - f)^2$  tende a crescer, torna-se menor  $\sum_{\mathcal{R}} p \times f$ .

Convencionando  $P_{k \times l}$  e  $F_{m \times n}$ , respectivamente padrão e imagem, como os arranjos bi-dimensionais de elementos que podem assumir um dos  $G$  níveis de cinza possíveis, temos:

$$\begin{cases} 0 \leq P(i, j) \leq G-1; & 1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq j \leq k \\ 0 \leq F(i, j) \leq G-1; & 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

onde considera-se  $P$  menor que  $F$ .

O padrão  $P_{k \times l}$  pode precorrer a imagem  $F$  por todas as  $(m-k+1)$  linhas e  $(n-l+1)$  colunas, de onde podemos ter o conceito de sub-imagem de  $F$ , de dimensões  $k \times l$ , a cada deslocamento do padrão  $P$ , e denotá-la por:

$$F_P(u, v) \equiv F(i+u-1, j+v-1),$$

$$\text{onde } \begin{cases} 1 \leq u \leq l \\ 1 \leq v \leq k \\ 1 \leq i \leq n-k+1 \\ 1 \leq j \leq m-k+1 \end{cases}$$

onde o ponto  $(i, j)$  será conhecido como ponto de referência dessa sub-imagem dentro de toda imagem.

Essa procura de uma sub-imagem que mais se aproxime do padrão  $p$  é que é chamada de registro translacional de imagens. Consiste na busca de um ponto  $(i_R, j_R)$  — tomando como ponto de referência o canto superior esquerdo da imagem  $F$  — de maior semelhança com o padrão.

## 1.4.2 O MÉTODO DA CORRELAÇÃO

A medida de dessemelhança mais usada para o registro translacional de imagens é a medida de correlação básica normalizada, também chamada de medida de cross-correlação como:

$$R(i, j) = \frac{\sum_{v=1}^k \sum_{u=1}^l F_P(u, v) P(u, v)}{\sqrt{\sum_{v=1}^k \sum_{u=1}^l F_P^2(u, v)}}$$

a mesma medida é definida em /Bar 72/ e em /Pra 74/ como sendo:

$$R(i, j) = \frac{\sum_{v=1}^k \sum_{u=1}^l F_P(u, v) P(u, v)}{\sqrt{\sum_{v=1}^k \sum_{u=1}^l P^2(u, v)} \sqrt{\sum_{v=1}^k \sum_{u=1}^l F_P^2(u, v)}}$$

para  $\begin{cases} 1 \leq i \leq n-1+1 \\ 1 \leq j \leq m-k+1 \end{cases}$

onde observa-se que, para uma dada sub-imagem (janela) de F,

$$\sum_{v=1}^k \sum_{u=1}^l F_P^2(u, v) \text{ permanece constante e } -1 \leq R(i, j) \leq 1.$$

De modo geral a função de correlação básica normalizada deve ser medida para todos  $(n-1+1) \times (m-k+1)$  pontos da imagens possíveis,

onde o número de comparações entre o padrão e a janela será de  $k \times l \times (n-l+1) \times (m-k+1)$ , e essa quantidade é fixa, já que nenhuma decisão pode ser tomada antes de serem verificados todos os pontos para os valores de  $i$  e  $j$ .

O desempenho desse classificador encontra dois grandes problemas: 1) o enorme trabalho computacional que pode ser necessário devido as dimensões do padrão e da imagem. Supondo uma imagem de  $512 \times 512$  pontos, e um padrão de  $64 \times 64$  pontos, o total de comparações seria da ordem de 8,25 milhões. 2) o método é muito sensível a ruídos e esses ruídos podem ser suficientes para mascarar o pico de correlação, o que dificultaria o processo de seleção do ponto máximo de correlação.

#### 1.4.3 TÉCNICAS SEQUENCIAIS DE DECISÃO

Com o objetivo de reduzir o trabalho computacional do método de correlação básica foram propostas em /Bar 72/ algumas técnicas sequenciais de decisão, e que estão reunidas num conjunto chamado Algoritmos Sequenciais de Detecção de Similaridade (" Sequential Similarity Detection Algorithms - SSDA "). Basicamente, essa redução do tempo é feita acumulando-se o erro encontrado na comparação de pontos entre a imagem e o padrão, pontos esses escolhidos aleatoriamente, a medida que os pontos da janela são verificados. Caso se verifique que essas imagens não têm chances de se casarem adequadamente, a comparação é interrompida, e nesse momento escolhe-se outra sub-imagem para reiniciar o trabalho de

comparação.

#### 1.4.3.1 ALGORITMO COM LIMIAR DE ERRO CONSTANTE

A medida que os pontos escolhidos aleatoriamente dentro do padrão  $p$  são comparados com os pontos correspondentes dentro da sub-imagem  $F_p$ , uma medida de erro pode ser associada ao insucesso dessas comparações, que pode assumir duas formas, a medida do erro normalizado ou, a medida do erro não-normalizado.

O erro não-normalizado é definido como:

$$e'(i, j, u, v) \equiv |F_p(u, v) - P(u, v)|$$

e o acúmulo de suas ocorrências dentro de toda uma sub-imagem pode ser expresso como sendo:

$$\| E(i, j) \| = \sum_{i=1}^{n-l+1} \sum_{j=1}^{m-k+1} e'(i, j, u, v) \quad \text{onde} \quad \begin{cases} 1 \leq u \leq l \\ 1 \leq v \leq k \end{cases}$$

A implementação do algoritmo SSSA com limiar de erro constante esta baseada na comparação desse erro acumulado a cada janela com um limiar  $T$  pré-definido. Quando o erro acumulado excede o valor  $T$ , o procedimento comparativo dentro daquela janela de trabalho é interrompido e o erro registrado. A sub-imagem com menor erro acumulado oferece as melhores condições para o casamento ideal entre formas; o que se for realmente conseguido, é determinado no ponto de referência  $(i_R, j_R)$ , onde:

$$\| EC(i, j, R) \| = 0$$

e também  $\| EC(i, j, R) \| \leq \| EC(i, j) \|$  garantindo a existência de outro possível ponto de casamento pelo sinal de igualdade.

A procura do registro de um padrão numa imagem quando existe uma certeza de ocorrência do padrão no conjunto procurado é grandemente facilitada usando-se o erro não-normalizado pela garantia de termos ao menos um ponto de casamento onde o erro acumulado é igual a zero; caso essa ocorrência não possa ser garantida, a busca pode ser realizada usando-se o erro normalizado, definido como:

$$e(i, j, u, v) = | F_P(u, v) - \hat{F}_P(u, v) - P(u, v) + \hat{P}(u, v) |$$

onde

$$\hat{F}_P(u, v) = \frac{1}{k \times l} \sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^k F_P(u, v)$$

e

$$\hat{P}(u, v) = \frac{1}{k \times l} \sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^k P(u, v)$$

Nesse processo, uma escolha conveniente do limiar de erro  $T$  pode levar a que um número menor de pontos, do que os  $k \times l$  possíveis, sejam comparados entre o padrão e a sub-imagem, incrementando assim a velocidade do processo.

A figura a seguir mostra dois tipos fundamentais de curvas que o erro acumulado pode produzir

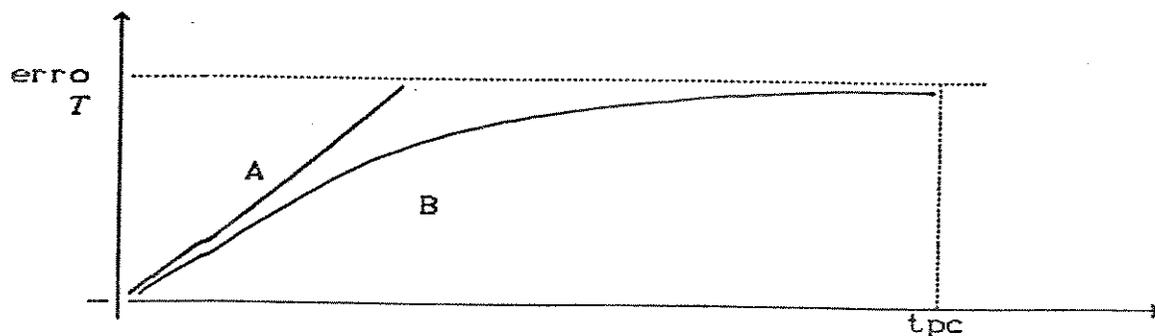


fig.1.8 Erro acumulado.

onde  $tpc \equiv$  total de pontos possíveis para comparação ( $1 \times k$ ).

A curva **A** descreve o comportamento de um processo comparativo de um padrão com uma sub-imagem que não se casam, e onde os pontos escolhidos para essa comparação logo levaram a essa conclusão. Já a curva **B** descreve uma tentativa de registro onde o erro é acumulado mais lentamente, indicando essa sub-imagem como uma das quais mais semelhanças têm com o padrão.

#### 1.4.3.2 ALGORITMO COM LIMAR DE ERRO MONOTÔNICO-CRESCENTE

O comportamento das curvas **A** e **B** se analisados leva-nos a crer que tão importante quanto a fixação e comparação de erro com um limiar constante  $T$  é saber qual a variação da inclinação dessas curvas de erro, ou seja, o comportamento de sua derivada de primeira ordem, para que possa ser estabelecida uma curva limite para o erro acumulado e não somente um ponto.

Exemplificando graficamente na figura a seguir ,

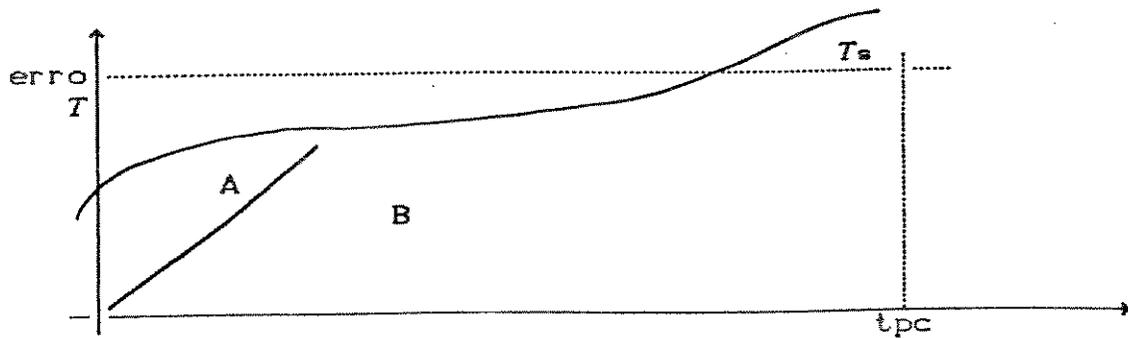


fig.1.9 Limiar de erro monotônico-crescente.

a curva  $T_s$  descreve uma curva de acúmulo de erro que deve ter aparência similar a curva obtida no melhor ponto de registro entre o padrão e a imagem, excluindo-se o caso ótimo, e também onde seus valores estejam um pouco acima desta curva de correspondência, para que algumas tentativas sejam conseguidas mesmo para um ponto de referência de uma sub-imagem que não consiga o casamento.

Um dos métodos propostos para a obtenção dessa curva é baseado na abordagem estocástica que está melhor definida em /Bar 72/.

## 2. TÉCNICAS DE PRÉ-PROCESSAMENTO DE IMAGENS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Dispondo dos recursos físicos citados no capítulo anterior e esquematizados na figura 1.1 o processo de reconhecimento de padrões passa por diversas etapas lógicas, tarefas de processamento da imagem e dos dados dela extraídos. Neste texto chamamos essas etapas de processos e iniciaremos suas descrições pelo primeiro processo lógico envolvido, o responsável pela preparação inicial da imagem. Essa preparação inicial é feita após a aquisição da imagem pela câmera, fase que no contexto global do reconhecimento de padrões está situada como na figura a seguir:

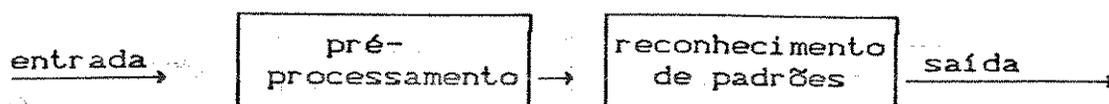


fig. 2.1 Etapas iniciais do reconhecimento de padrões.

Consideramos aqui os dados de entrada como as imagens já digitalizadas e os dados de saída como o resultado final da classificação da imagem ou das figuras nela contida.

O pré-processamento da imagem para entrada nos processos de reconhecimento de padrões consiste basicamente do processo de

segmentação da imagem, ou seja, como em /Bas 87/, o particionamento da imagem em regiões distintas, cada uma com uma determinada propriedade.

Essa decomposição pode tanto ocorrer a nível de toda imagem, extraíndo dela os objetos digitalizados que a formam, como também pode ocorrer sobre cada um desses objetos fazendo uma decomposição de suas partes mais significativas.

Tratando-se de visão computacional, ou mais especificamente do reconhecimento de padrões, a segmentação consiste basicamente do processo de detecção de bordas.

## 2.2 DETECÇÃO DE BORDAS

A segmentação de imagens pode ser vista tanto como um problema meramente pontual, ou seja, que explora somente o nível de luminosidade do ponto, ou um problema dependente da região vizinha ao ponto. A definição do emprego de uma das abordagens deve considerar uma grande variedade de fatores que vão desde o tipo da cena e das figuras que a compõe, até o tipo de processamento que se objetiva para a imagem, passando pelas considerações à iluminação ambiente e aos recursos físicos envolvidos.

Dentro desses fatores o que mais contribui para a escolha de uma das abordagens é o tipo de imagem em análise quanto ao número de níveis de cinza nela contidos. Neste sentido as imagens são divididas basicamente em dois tipos: 1) as imagens binárias e, 2)

as imagens com mais de dois níveis de cinza.

As imagens binárias são as representadas por somente duas intensidades — níveis — de cinza: o nível onde os pontos estão acesos, geralmente considerado como nível 1 e; o nível onde os pontos aparecem apagados (o fundo da cena), geralmente considerado como nível 0.

A detecção de bordas em imagens binárias é um processo simples e pode ser implementada usando-se o algoritmo abaixo descrito /Mad 86/:

FASE 1 — Processam-se as linhas de cima para baixo e da esquerda para direita, fazendo para cada pixel:

- a)  $f(l,c) = 1$  se  $f(l-1,c)$  e  $f(l,c)$  estão em níveis de intensidade opostos, ou seja, um pixel correspondente ao fundo e outro ao objeto; ou
- b)  $f(l,c) = 0$  se  $f(l-1,c)$  e  $f(l,c)$  estão em níveis de intensidade iguais.

FASE 2 — Processam-se as colunas de maneira similar as filas, fazendo-se para cada pixel:

- a)  $f(l,c) = 1$  se  $f(l,c-1)$  e  $f(l,c)$  estão em níveis de intensidade opostos; ou
- b)  $f(l,c) = 0$  se  $f(l,c-1)$  e  $f(l,c)$  estão em níveis de intensidade iguais.

Em imagens com mais de duas intensidades de cinza a forma como se dispõe estas alterações de intensidade ao longo de uma

borda é mais complexa do que em imagens binárias, e é chamada de perfil da borda. Haralick em /Har 84/ define dois tipos de borda que explicam essa diferença:

a) Borda ideal — ocorre quando, entre um par de pixels vizinhos, um pertence a uma região mais clara, ou mais escura, que o outro. Este é o tipo de borda que sempre ocorre em imagens binárias

b) Borda "roof" — ocorre quando, percorrendo os pixels da esquerda para a direita, ou vice-versa, numa mesma linha a mudança de tonalidade é gradual e crescente (decrecente) na intensidade de cinza, até certo ponto, e depois decresce (cresce) gradualmente na intensidade. Este é o tipo mais comum em imagens com vários níveis de cinza.

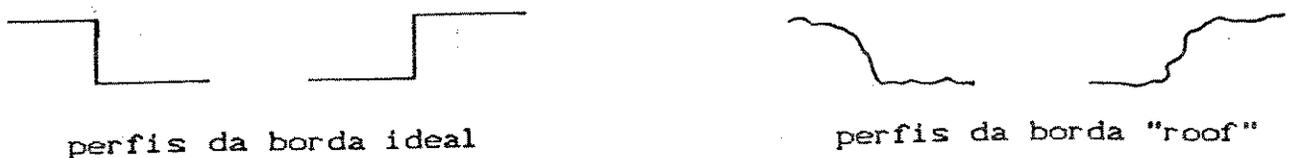


fig.2.2 Perfil de borda

A detecção de bordas nesse caso acompanha o nível de complexidade das bordas e pode ser feita por dois métodos distintos que são descritos a seguir, e que são: a) limiarização do nível de cinza; e b) a detecção de bordas dependente da região.

a) LIMITARIZAÇÃO DO NÍVEL DE CINZA.

Esta é a abordagem mais simples para se efetuar a detecção de bordas em imagens com vários níveis de cinza e é a mais utilizada em processos de visão computacional na indústria pelas seguintes razões principais /Gon 82/:

1) Facilidade de implementação em hardware e rapidez do processo.

2) Iluminação ambiente ser normalmente um fator controlável e adequável ao tipo de cena.

Essa abordagem busca inicialmente transformar a imagem lida numa imagem binária e depois aplicar o processo de detecção de bordas nessa imagem resultante.

Suponhamos que uma dada imagem  $f_1(l,c)$  produza o histograma abaixo correspondente aos diversos níveis de cinza obtidos pelos seus pontos

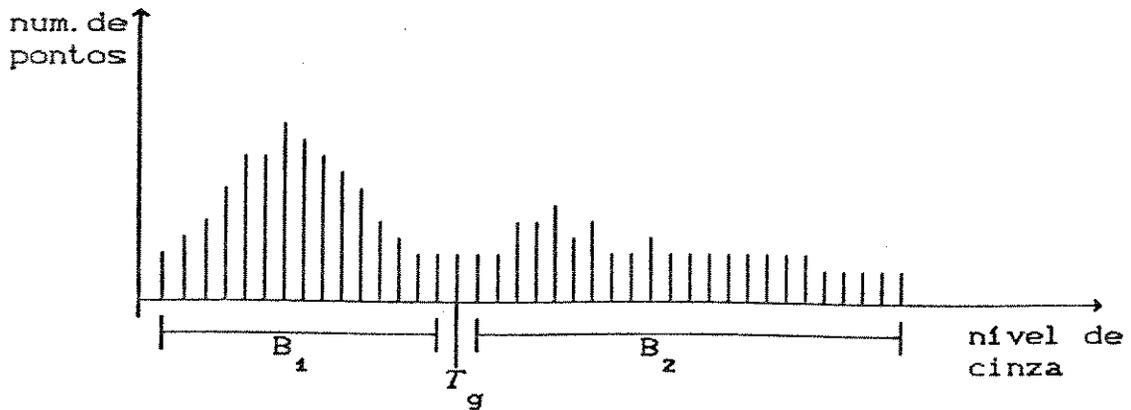


fig.2.3 Histograma dos níveis de cinza.

O objetivo é selecionar um ponto  $T_g$ ,  $1 \leq g \leq G$  tal que a banda  $B_1$  contenha os níveis de cinza associados aos pontos do fundo da imagem (nível 0), e a banda  $B_2$  contenha os níveis de cinza associados as figuras (nível 1).

Para delinear a borda entre os objetos da imagem e o fundo, pode ser aplicado um algoritmo de detecção de bordas em imagens binárias, como o visto anteriormente.

#### b) DETECÇÃO DE BORDAS DEPENDENTE DA REGIÃO

Os métodos de detecção de bordas neste segmento procuram considerar a intensidade de cinza nos pontos vizinhos ao ponto em análise para verificar se este ponto é ou não uma borda da figura.

Analisando a imagem como uma função  $f(l,c)$  nota-se que a ocorrência de bordas reflete alterações na função  $f$ , logo um dos

procedimentos mais imediatistas que pode ocorrer é a diferenciação da imagem. A abordagem mais usada para a diferenciação é o método do gradiente. Dada uma função  $f(l,c)$ , o seu gradiente é definido, como um vetor, pelas derivadas direcionais da seguinte forma:

$$G [f(l,c)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial l} \\ \frac{\partial f}{\partial c} \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde:

1) sua magnitude é dada por:

$$G [f(l,c)] = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial c} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

2) e sua orientação é dada por:

$$\theta(l,c) = \text{tg}^{-1} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial c} \right) / \left( \frac{\partial f}{\partial l} \right) \right] \quad (3)$$

Como principal propriedade, o vetor gradiente  $G [f(l,c)]$  aponta em direção a razão máxima de incremento da função  $f(l,c)$ ; e a expressão (2) por ter duas parcelas sempre positivas é positiva, e por isso tida na prática como o gradiente da função  $f$ . Daqui em diante a essas expressões será sempre associado o termo *gradiente* e dela sairão as bases para um grande número de relações para a diferenciação de imagens.

Para uma imagem discretizada, a expressão  $G [f(l,c)]$  pode ser aproximada para:

$$G[f(1,c)] \cong \left[ [f(1,c) - f(1,c+1)]^2 + [f(1,c) - f(1+1,c)]^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

sendo também que resultados similares /Gon 78/ podem ser obtidos pela expressão:

$$G[f(1,c)] \cong |f(1,c) - f(1,c+1)| + |f(1,c) - f(1+1,c)| \quad (5)$$

que é mais vantajosa para implementações que buscam maior velocidade de processamento.

Essas expressões de diferenciação são a base para as aplicações em detecção de bordas por semelhança de regiões. Também são usadas para aumentar o contraste na imagem e, podem ser substituídas pelas máscaras abaixo, referentes a expressão (5)

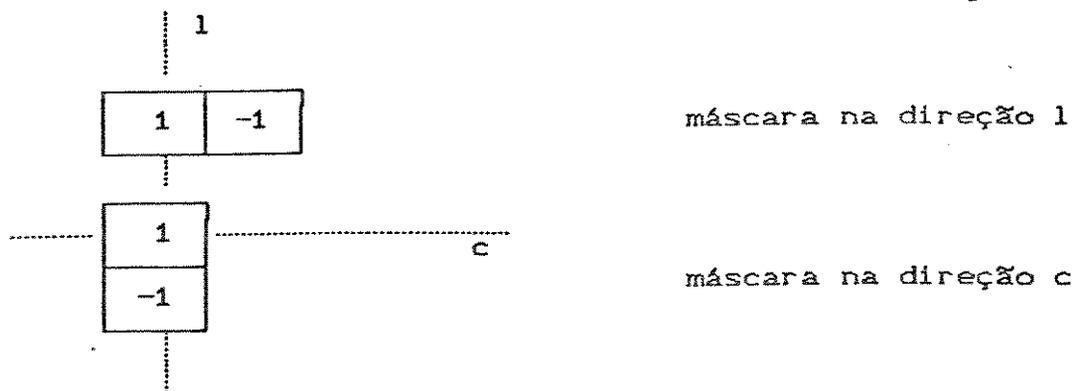


fig.2.4 Máscaras do operador de diferenciação.

Como exemplo aplicaremos o operador de diferenciação ao padrão (um triângulo) no quadro a seguir:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2			6							
3			10	7	1					
4			10	10	8	2				
5			10	10	10	9	2			
6			9	9	9	7	5	3		
7										
8										
9										

Fig.2.5 Triângulo discretizado.

Os pontos dentro da malha correspondem ao nível de cinza de cada pixel. Os quadros que não têm nenhum número marcado correspondem ao nível zero.

A aplicação do operador de diferenciação originou o quadro a seguir:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1		6								
2		6	10	7	1					
3		10	9	9	8	2				
4		10		2	8	9	2			
5		10	1	1	2	9	5	3		
6		9	9	9	11	9	7	6		
7										
8										
9										

Fig. 2.6 Resultado da aplicação da diferenciação.

### 2.2.1 OPERADOR DE ROBERT

Uma das formas mais simples de se obter o gradiente aproximado de uma função  $f(l,c)$  usa as diferenças cruzadas, como abaixo, e é referenciada como operador de Robert:

$$R(l,c) = \left[ [f(l,c) - f(l+1,c+1)]^2 + [f(l,c+1) - f(l+1,c)]^2 \right]^{1/2}$$

que também pode ser formulado como:

$$R(l,c) = |f(l,c) - f(l+1,c+1)| + |f(l,c+1) - f(l+1,c)|$$

quando o tempo de processamento for um fator crítico.

Esse operador, que também é conhecido como operador das diferenças centrais, pode ser implementado como uma operação de convolução com as máscaras /Ros 82/

$$(\Delta+f)_{(t,c)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\Delta-f)_{(t,c)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como os pontos de ruído são reconhecidos por esse operador como se fossem bordas da figura, ele realça mais esses pontos de ruído. Uma alternativa para amenizar esse problema seria obter uma média da intensidade dos pontos vizinhos. Para isto o operador mais indicado é o operador de Sobel.

Aplicando esse operador na fig.2.5 teremos:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1		6								
2		16	1	1						
3		20	7	2	1					
4		20	10	8	3					
5		19	11	11	12	6	1			
6		9	18	18	16	12	8	3		
7										
8										
9										

Fig.2.7 Resultado da aplicação do operador de Robert.

2.2.2 OPERADOR DE SOBEL

Dado a distribuição abaixo da vizinhança de pontos, o

A	B	C
D	x	E
F	G	H

gradiente no ponto x é definido como:

$$G_x = \left[ G_y^2 + G_z^2 \right]^{1/2}$$

onde:

$$G_y = (C + 2E + H) - (A + 2D + F)$$

$$G_z = (F + 2G + H) - (A + 2B + C)$$

Também pode ser definido um operador gradiente mais eficiente

computacionalmente como:

$$G_x = |G_y| + |G_z|$$

O operador de Sobel pode ser aplicado sob forma de máscaras de convolução, só que neste caso uma máscara é aplicada verticalmente sobre a imagem para gerar as bordas verticais, e outra é aplicada horizontalmente para as bordas horizontais. São as seguintes as máscaras:

a)

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

b)

1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

a) janela dos componentes da borda vertical

b) janela dos componentes da borda horizontal

fig. 2.8 Máscaras do operador de Sobel.

Como os pontos mais próximos do ponto central  $x$ , os pontos B, D, E, G, têm seus pesos dobrados, essa suavização impede que a imagem escureça e torna o operador menos sensível ao ruído.

Aplicando-se o operador de Sobel a fig. 2.5 teremos como resultado o quadro a seguir:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1		12	12	12						
2		32	34	46	16	2				
3		40	42	58	50	22	4			
4		40	40	28	54	54	26	4		
5		40	42	4	18	44	42	20	6	
6		38	58	40	44	46	30	14	6	
7		18	36	36	36	32	24	16	6	
8										
9										

Fig.2.9 Resultado da aplicação do operador de Sobel.

### 2.2.3 MÉTODO DO LAPLACIANO

Uma alternativa derivada do método do gradiente para a detecção de bordas está neste método, que possui como características principais uma boa sensibilidade na detecção de linhas, ângulos e pontos isolados /Sot' 84/.

O operador Laplaciano é definido por:

$$L[f(l,c)] = \frac{d^2 f}{dl^2} + \frac{d^2 f}{dc^2}$$

e para casos discretos são usadas formas baseadas na diferenças:

$$L[f(l, c)] = G_l^2 + G_c^2$$

como:  $G_c f(l, c) = f(l, c+1) - f(l, c)$

$$G_c^2 f(l, c) = [f(l, c+1) - f(l, c)] - [f(l, c) - f(l, c-1)]$$

$$= f(l, c+1) + f(l, c-1) - 2xf(l, c)$$

e,

$$G_l f(l, c) = f(l+1, c) - f(l, c)$$

$$G_l^2 f(l, c) = [f(l+1, c) - f(l, c)] - [f(l, c) - f(l-1, c)]$$

$$= f(l+1, c) + f(l-1, c) - 2xf(l, c)$$

logo,

$$L[f(l, c)] = [f(l, c+1) + f(l, c-1) + f(l+1, c) + f(l-1, c) - 4xf(l, c)]$$

expressão esta que pode ser representada pela máscara abaixo:

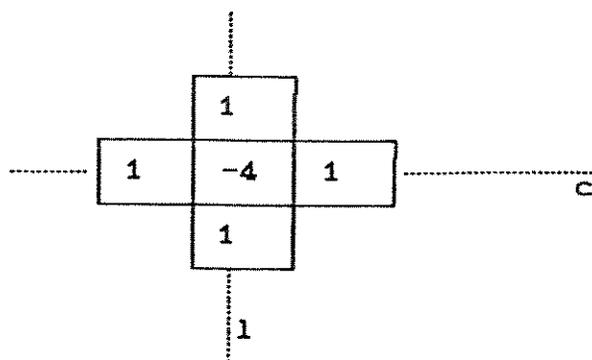


fig.2.10 Máscara do operador Laplaciano.

Aplicando-se o operador Laplaciano na fig.2.5 teremos como resultado o quadro abaixo:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1			6							
2		6	14	13	1					
3		10	17	7	11	3				
4		10	10	5	9	9	4			
5		10	11	1	4	15	6	5		
6		9	17	8	10	5	8	7	3	
7			9	9	9	7	5	3		
8										
9										

Fig.2.11 Resultado da aplicação do operador Laplaciano.

Existem outros operadores que são ampliações ou refinamento dos operadores de Sobel e Roberts, como o operador de Spider & Cross, o de Kirsch, de Prewitt, 3-nível e 5-nível; no entanto, todos possuem como semelhança o fato de possuírem uma vizinhança de pontos de tamanho fixo, dada pela janela, geralmente de dimensão 3x3. As máscaras correspondentes a alguns desses operadores são vistas na figura a seguir /Rob 77/:

Direção do gradiente	Kirsch	Prewitt	3-nível	5-nível
N	5 5 5	1 1 1	1 1 1	1 2 1
	3 0 -3	1 -2 1	0 0 0	0 0 0
	3 -3 -3	-1 -1 -1	-1 -1 -1	-1 -2 -1
NO	5 5 -3	1 1 1	1 1 0	2 1 0
	5 0 -3	1 -2 -1	1 0 -1	1 0 -1
	3 -3 -3	1 -1 -1	0 -1 -1	0 -1 -2
O	5 -3 -3	1 1 -1	1 0 -1	1 0 -1
	5 0 -3	1 -2 -1	1 0 -1	2 0 -2
	5 -3 -3	1 1 -1	1 0 -1	1 0 -1
SO	-3 -3 -3	1 -1 -1	0 -1 -1	0 -1 -2
	5 0 -3	1 -2 -1	1 0 -1	1 0 -1
	5 5 -3	1 1 1	1 1 0	2 1 0
S	-3 -3 -3	-1 -1 -1	-1 -1 -1	-2 -1 0
	-3 0 -3	1 -2 -1	0 0 0	0 0 0
	5 5 5	1 1 1	1 1 1	1 2 1
SE	-3 -3 -3	-1 -1 1	-1 -1 0	-2 -1 0
	-3 0 5	1 1 1	0 1 1	0 1 2
	-3 5 5	1 1 1	0 1 1	0 1 2
E	-3 -3 5	-1 1 1	-1 0 1	-1 0 1
	-3 0 5	-1 -2 1	-1 0 1	-2 0 2
	-3 -3 5	-1 1 1	-1 0 1	-1 0 1
NE	-3 5 5	1 1 1	0 1 1	0 1 2
	-3 0 5	-1 -2 1	-1 0 1	-1 0 1
	-3 -3 -3	-1 -1 1	-1 -1 0	2 -1 0

fig.2.12 Máscaras para detecção de bordas.

2.2.4 OPERADOR DE ROSENFELD

Dadas as situações citadas acima, foi desenvolvido um operador para tamanhos variáveis de janela expresso em /Pra 78/ como:

$$D_M [f(1, c)] = \frac{1}{M} \left[ f(1, c+M-1) + f(1, c+M-2) + \dots + f(1, c) \right. \\ \left. - f(1, c-1) - f(1, c-2) - \dots - f(1, c-M) \right]$$

$$M = 1, 2, \dots$$

sendo que o resultado final vem do produto das máscaras de ordem inferior a M por:

$$P_M(1, c) = D_1(1, c) * D_2(1, c) * \dots * D_M(1, c)$$

Segundo o autor, este método realça a localização das bordas e suprime o ruído, o que intuitivamente pode ser visto nos fatores do produto que são pequenos longe das bordas e maiores quando aplicados sobre ela.

2.2.5 COMENTÁRIOS

Na literatura pesquisada foram encontrados e estudados outros métodos de detecção de bordas como: a) o método "split-and-merge"

em /Hor 76/, o método de Haralick em /Har 84/ e, c) um método sintático em /Fu 82/.

Num sentido amplo pode-se dizer que todo processamento de imagens tem um dos dois objetivos mais comuns: a qualidade da imagem a ser obtida ou, a rapidez com que esse processamento é executado. Esse último caso é o mais interessante para o estudo da visão computacional aplicada a robótica e é onde são aplicados os operadores descritos anteriormente do item 2.2.1 até o item 2.2.4.

Os outros métodos pesquisados prendem seu interesse a outros pontos específicos que não os evidenciados atualmente para os ambientes industriais que exigem maior rapidez no processamento. O método "split-and-merge" procura detectar bordas fazendo economia de memória; o método de Haralick ocupa-se fundamentalmente com a qualidade — nitidez — da imagem obtida e os métodos sintáticos procuram por sua vez, enquanto detectam o tipo de borda em questão (ângulo, curvas, segmentos...), associá-la a um elemento de uma linguagem que descreve toda a figura.

A essas imagens binárias podem ser aplicados agora processos de afinamento de bordas que garantem que a silhueta da figura contenha somente um pixel.

### 2.3 ESTREITAMENTO DE BORDAS

Uma cena após ser digitalizada e ter seus contornos — bordas — extraídas nem sempre oferece elementos adequados ao

processamento e/ou reconhecimento da margem obtida, isto porque geralmente os processos de detecção de borda dão como resultado bordas com alguns pixels de largura. Logo, de fundamental importância ao processamento de imagens, é o processo de estreitamento de bordas, também conhecido como "thinning", esqueletização, afinamento e "symmetric axis transformation" (ou transformação simétrica de eixos).

Abaixo vemos dois exemplos de figuras antes do processo de afinamento e o resultado esperado após o afinamento de bordas:

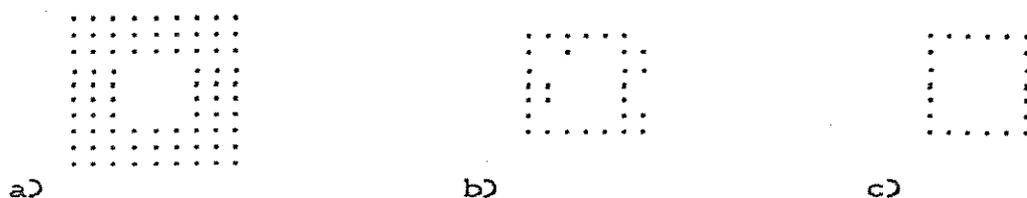


Fig.2.13 Imagem a) e b) antes do refinamento e c) depois do afinamento.

onde os pontos marcados com "." correspondem aos pixels de formação da figura após o processo de digitalização (a) ou após a detecção de bordas (b) com os ruídos encontrados. Considerando aqui os ruídos como o alargamento das linhas da figura.

Algumas das vantagens do afinamento de bordas são:

- 1) quanto maior for a redução no volume de dados que representa uma imagem, maior o desempenho e eficiência da maioria dos algoritmos de processamento de imagens /Smi 87/.

2) tanto o reconhecimento estrutural de padrões quanto o reconhecimento por extração de atributos recorre a imagens em forma de linhas — imagens linha — para sua efetivação.

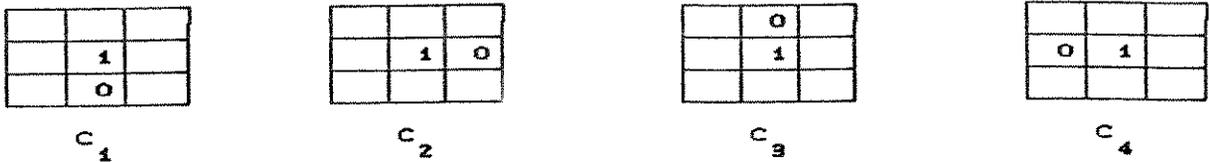
3) as figuras em forma de linha, ou seja, as silhuetas, podem guardar tantas informações necessárias para seu completo reconhecimento pelo ser humano e pela maioria dos métodos desenvolvidos até então.

O objetivo dos algoritmos de estreitamento é o de eliminar todos os pontos do corpo do objeto que constituem seu volume, e somente deixar o seu esqueleto. A sua aplicação após a detecção de bordas reduz a complexidade da idéia embutida.

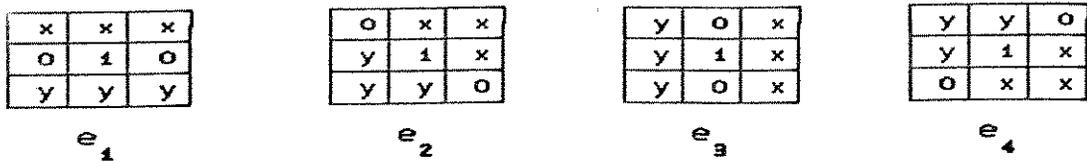
O algoritmo de Stefanelli & Rosenfeld /Ste 71/ apresentado aqui é uma modificação dos algoritmos de Hilditch /Hil 69/ com objetivo de melhorá-los. Consiste de uma técnica de erosão das bordas, apresentadas por um detector de bordas, usando diversas máscaras de dimensão 3x3 que percorrem toda imagem.

As figuras apresentadas a esse algoritmo, então, são compostas de 2 tipos de pixels: a) os pixels do esqueleto, ou os pixels resultantes do afinamento e, b) os pixels do contorno, que são os outros pixels que pertencem a figura e dão largura à linha.

As primeiras quatro máscaras —  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  — quando sobrepostas à imagem definem os pontos do contorno, enquanto as oito máscaras restantes —  $e_1$ ,  $e_2$ , ...,  $e_8$  — definem os pontos do esqueleto, ou o resultado final do afinamento.



a) máscaras de pontos de contorno



b) máscaras dos pontos do esqueleto

Fig. 2.14 Definição dos pontos de contorno e do esqueleto.

Os passos do algoritmo para o estreitamento de bordas são os seguintes /Sot 84/

passo 1: determine os pontos do contorno na imagem utilizando as máscaras  $c_1$  e  $c_2$ .

passo 2: verifique se os pontos encontrados no passo 1 são pontos do esqueleto, usando as máscaras  $e_1, \dots, e_8$ .

passo 3: elimine os pontos de contorno que não são do esqueleto.

passo 4: repita o passo 1 com as máscaras  $c_3$  e  $c_4$ .

passo 5: se algum pixel foi eliminado no passo 3, volte ao passo 1, se não os pontos restantes são os pontos do esqueleto.

Existe ainda um outro método muito eficiente de afinamento de bordas e que foi o escolhido para as aplicações do Capítulo 5 e que tem como algoritmo o seguinte:

Usaremos as seguintes abreviações para os pontos cardeais:  
 N -norte, S -sul, E -leste, O -oeste, NE -nordeste,  
 SE -sudeste, NO -noroeste e SO -sudoeste)

passo 0: realize a iteração até passo 3 até que nenhum ponto seja mais substituído.

passo 1: para cada ponto da imagem se este tiver ao menos um vizinho vá para o passo 2, senão vá para o passo 3.

passo 2: a) se não tiver o vizinho N substitua o ponto por:

$$(NE \wedge (\neg E)) \vee (NO \wedge (\neg O)) \vee ((\neg S) \wedge (E \vee SE) \wedge (SO \vee O))$$

b) se não tiver o vizinho S substitua o ponto por:

$$(SO \wedge (\neg O)) \vee (SE \wedge (\neg E)) \vee ((\neg N) \wedge (O \vee NO) \wedge (NE \vee E))$$

c) se não tiver o vizinho E substitua o ponto por:

$$(SE \wedge (\neg S)) \vee (NE \wedge (\neg N)) \vee ((\neg O) \wedge (S \vee SO) \wedge (NO \vee N))$$

d) se não tiver o vizinho O substitua o ponto por:

$$(NO \wedge (\neg N)) \vee (SO \wedge (\neg S)) \vee ((\neg E) \wedge (N \vee NE) \wedge (SE \vee S))$$

passo 3: avance para o próximo ponto e vá para o passo 1.

passo 4: fim.

## 2.4 CODIFICAÇÃO

A seguir entraremos num tópico de codificação e armazenamento de imagens. Essa tarefa de armazenamento de uma imagem codificada, ou compactada, não é objetivo dos sistemas de visão computacional, mas toma uma parte importante nos métodos estruturais de reconhecimento e por isso é abordada.

### 2.4.1 INTRODUÇÃO

A representação digital de imagens, que atualmente tem lugar em monitores de resolução de ordem de 1024x1024 pixels, para estações gráficas, e da ordem de 640x200 pixels para monitores compatíveis com IBM PC-XT, requer uma enorme quantidade de memória para armazenamento e manipulação. Se pensarmos ainda que estas imagens geralmente são manipuladas após a detecção e o estreitamento de bordas, acrescido do fato de serem imagens binárias, veremos que grande parte desses pixels, os pixels de fundo, não são objetos do processamento e somente ocupam mais espaço de memória que poderia ser ocupado com outras figuras.

A codificação, portanto, vem de encontro à solução desse problema e geralmente recai sobre três categorias /Gon 77/:

- 1) compressão de dados — que é motivada somente pela necessidade de redução da memória para armazenamento.
- 2) transmissão de dados — onde a redução de dados chega até

níveis de preservação de uma determinada fidelidade, geralmente para os padrões humanos de visão e audição.

3) extração de atributos — esta sim é uma aplicação usada fundamentalmente pelo reconhecimento de padrões, onde a redução dos dados deve preservar as informações que diferenciem elementos de interesse na imagem.

Como vimos, a codificação é altamente orientada ao problema que se pretende resolver, e neste texto trataremos do assunto voltado ao reconhecimento de padrões e/ou processamento de imagens.

#### 2.4.2 CODIFICAÇÃO PELO CONTORNO

O algoritmo apresentado aqui reduz uma imagem a contornos que são determinados unicamente por:

- a) nível de cinza;
- b) localização na imagem, ou coordenadas  $(l,c)$ , de um de seus pontos, aqui chamado de ponto inicial (PI);
- c) seqüência de direções que indicam a sua forma;
- d) um indicador, que será explicado adiante;

Este algoritmo consiste de dois outros sub-algoritmos: 1) o algoritmo T para percorrer e achar os pontos do contorno e, 2) o algoritmo PI usado para localizar o ponto inicial do contorno. Para tanto, considera-se que a imagem esteja disposta sob uma malha de pontos, na forma de um arranjo — matriz — bi-dimensional.



aplicação sucessiva da regra acima faz com que o contorno sempre termine no PI.

Este algoritmo também coloca um indicador em cada ponto para orientação do próximo algoritmo. A princípio todo ponto da matriz é indicado por um I, a medida que o algoritmo T avança achando os pontos do contorno ele substitui o I por um dos seguintes indicadores: D, A ou R. Essa substituição considera a orientação do trajeto do ponto anterior, ao ponto onde se está, e a orientação do trajeto do ponto atual para o próximo ponto do contorno seguindo a seguinte tabela:

orientação do percurso para próximo ponto	orientação do percurso anterior	
	↑ ou →	↓ ou ←
↑ ou →	A	R
↓ ou ←	R	D

Fig. 2.16 Tabela de substituição dos indicadores.

Apesar dessas considerações não é garantido que o algoritmo não passe duas vezes (o número máximo assegurado) por outro ponto, além do PI, para isso a tabela da figura abaixo indica um substituto para os dois indicadores fixados a cada passagem.

Cindicador na 1ª passagem, indicador na 2ª passagem)	CD, A)	CD, R)	CA, R)
	CA, D)	CR, D)	CR, A)
	CR, R)	CD, D)	CA, A)
indicador final	R	D	A

Fig.2.17 Substituição dos indicadores depois de duas passagens no ponto.

Tendo como exemplo a figura 2.15 teríamos:

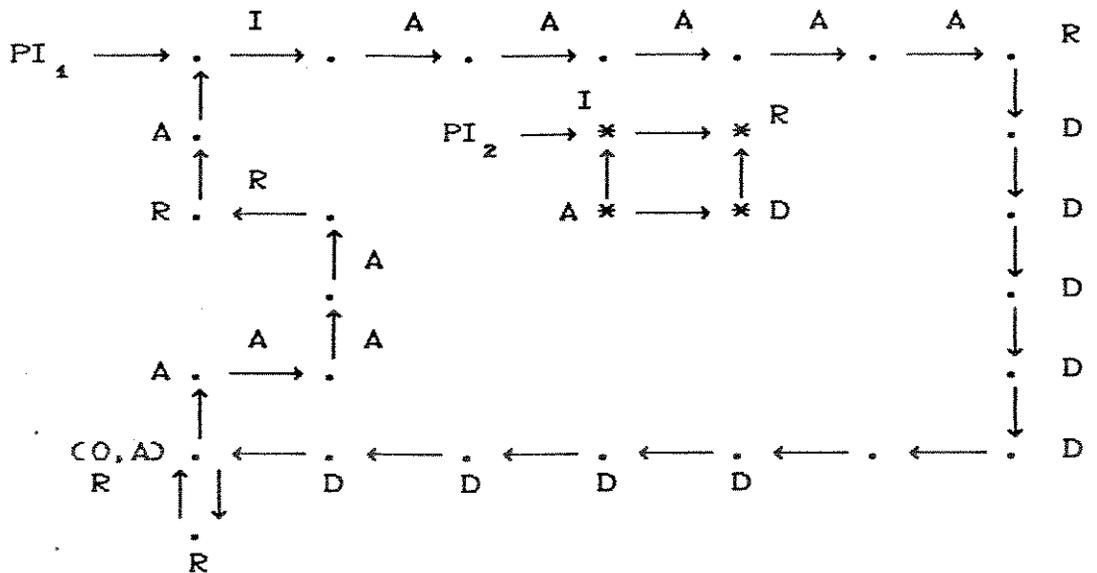


Fig.2.18 Aplicação dos indicadores aos pontos do contorno.

e os pontos que não foram percorridos continuam associados com o

indicador I.

#### 2.4.2.2 O ALGORITMO PI

O algoritmo PI faz uma busca por todos os pontos iniciais da matriz bi-dimensional da imagem, processando todas as linhas de cima para baixo, e da coluna a esquerda para a direita do seguinte modo:

"para cada linha, anule todo conteúdo de uma lista chamada LPC — lista de pontos de comparação — e para os seguintes indicadores dos pontos a serem pesquisados dessa linha, realize as seguintes operações:

indicador A: insira o valor do nível de cinza, da coluna em andamento, no final da lista;

indicador D: retire o último elemento a entrar na lista;

indicador I ou R: não modifique a lista. "

O ponto referente à coluna onde a verificação do indicador está sendo feita será um ponto PI se ocorrerem ambas as situações abaixo:

a) o seu indicador é I e,

b) o valor de sua intensidade de cinza é do valor do último ponto que deu entrada na lista.

Os dois algoritmos ocorrem ciclicamente, um após o outro, até

não podermos encontrar mais nenhum PI. Iniciamos a busca de um ponto inicial, com o algoritmo PI, depois passamos a encontrar seu contorno correspondente e novamente procuramos outro PI, e assim consecutivamente.

Outra codificação, esta muito utilizada para imagens binárias, pode ser feita pelo código da cadeia definido por Freeman /Fre 61/ e apresento a seguir.

#### 2.4.3 CÓDIGO DA CADEIA

Dada uma imagem binária representada apenas pelo seu contorno, o código da cadeia, também conhecido como BCC ("boundary chain code"), permite, além de armazenar compactamente os dados, a extração de alguns atributos da figura por ele representada, diretamente a partir de seu código.

Antes de uma definição do código, menos detalhista que em /Fre 61/, algumas considerações e definições sobre vizinhanças de pontos devem ser feitas.

Dada uma malha de dimensões 3x3, como na figura abaixo,

$P_3$	$P_2$	$P_1$
$P_4$	$P$	$P_0$
$P_5$	$P_6$	$P_7$

Fig. 2.19 Vizinhos numa janela 3x3.

onde cada  $P_i$ ,  $0 \leq i \leq 7$ , represente um pixel de imagem, temos:

i)  $P_0, P_1, \dots, P_7$  são os 8-vizinhos de  $P$ .

$P_0, P_2, P_4, P_6$  são os 4-vizinhos de  $P$ .

ii) Dois pontos  $P_0$  e  $P_n$  são 8-ligados se existe entre eles um caminho passando por  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  t.q.  $P_{i+1}$  é 8-vizinho de  $P_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ .

Dois pontos  $P_0$  e  $P_n$  são 4-ligados se existe entre eles um caminho passando por  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  t.q.  $P_{i+1}$  é 4-vizinho de  $P_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ .

iii) Uma linha é dita como *linha perfeitamente 4-ligada* se nenhum de seus pontos pode ser retirado sem que os vizinhos à esquerda e à direita da linha no ponto deixem de ser 4-ligados.

Uma analogia pode ser feita a linha perfeitamente 8-ligada.

O código da cadeia é uma estrutura de dados para armazenar os contornos da imagem a partir de um ponto inicial, esta estrutura

de dados, mostrada abaixo, é colocada sucessivamente sobre os pontos

3	2	1
4	P	0
5	6	7

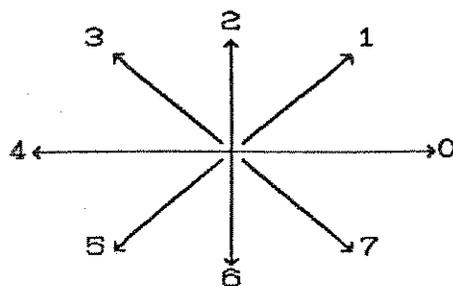


Fig.2.20 Código da cadeia em 8 direções.

ao longo do percurso, sobrepondo-o ao ponto P na Fig. 2.15 e registra-se então, a direção do próximo ponto da curva, como no exemplo abaixo.

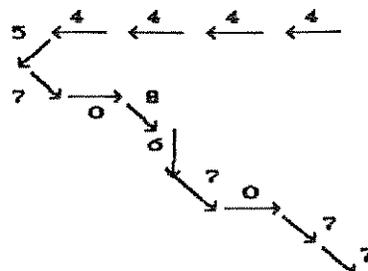
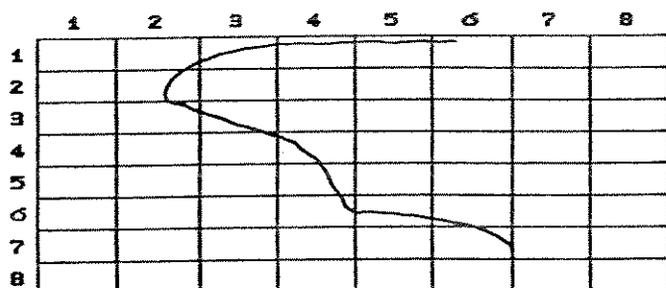


Fig.2.21 Aplicação do código da cadeia.

Uma cadeia originada por esse código pode ser representada como uma seqüência S da seguinte forma:

$$S = l_i c_i a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

onde:

$l_i, c_i$  são as coordenadas do ponto inicial para linha e  
coluna;

$a_i$  convenção do código da cadeia (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7)

Para o exemplo da Fig. 2.21, teríamos:

S = 1 6 4 4 4 4 5 7 0 7 6 7 0 7 7  
└───┘  
( $l_i, c_i$ )

onde a figura anteriormente representada por 64 palavras de memória, para armazenar a matriz 8x8, é representada por 15 palavras, armazenando o código da cadeia correspondente.

Finalizando toda a parte de pré-processamento de imagens, que significou somente uma preparação inicial para o reconhecimento de padrões de fato, entraremos agora nas abordagens que implementam esta tarefa.

### 3. ABORDAGEM DECISÃO-TEÓRICA

#### 3.1 INTRODUÇÃO

O processo de reconhecimento de padrões tem como objetivo principal a associação de padrões ( figuras inseridas a fim de serem reconhecidas ) à suas classes respectivas, automaticamente. Onde por classe de objetos, ou figuras, entende-se como um conjunto desses objetos que tenham propriedades, atributos, forma e outras características em comum. A decisão de qual desses fatores é comum a uma determinada classe passa pelos aspectos que mais a caracterizam e que, se não únicos, possuem medidas ou grandezas diferentes.

Por vezes a definição de uma classe não é vinculada a uma única propriedade ou característica dessa classe, mas sim a um conjunto delas. Essa união de propriedades e características pode definir com maior precisão, ou menor margem de erro, um padrão, e é isso que todo processo de classificação procura, certeza.

Toda classificação é baseada em informações obtidas do padrão que se pretende classificar, no caso da abordagem decisão-teórica essas informações provêm de medidas que descrevem o padrão e são esses valores que são usados pelo classificador.

#### 3.2. ABORDAGEM DECISÃO-TEÓRICA

Nesse ambiente de abordagem decisão-teórica os objetos da

imagem são caracterizados por medidas quantitativas de seus atributos e aspectos mais significativos, e que foram obtidos do processo de extração de atributos.

A representação de um objeto da imagem, também chamado de padrão, é geralmente feita através de um arranjo chamado de vetor padrão, expresso como:

$$\mathbb{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]$$

onde:  $n$  é o número de medidas, ou atributos, adquiridos, e os  $x_i$  são esses atributos medidos.

A abordagem decisão-teórica procura determinar, baseada nesse conjunto de atributos, as medidas que descrevem um padrão específico, com menor erro possível, dentro de uma determinada classe. Por classe de padrões entende-se um conjunto de padrões similares.

Essa classificação dos padrões é feita formulando-se regras, ou funções, de decisão aplicadas as grandezas dos atributos medidos que podem particionar o Espaço Euclidiano de dimensão  $n$  (número de atributos) em  $M$  possíveis classes de padrões  $W_1, W_2, \dots, W_M$ .

Relacionando-se cada  $x_i$  medido ( $1 \leq i \leq n$ ) com outro  $x_k$  ( $1 \leq k \leq i, i \neq k$ ), numa quantidade amostral de objetos expressiva, pode ocorrer o aparecimento de "clusters", ou nuvens de pontos, numa determinada área do espaço. Essas nuvens de pontos determinam as classes dos objetos, ou melhor, dão origem a determinados intervalos de medidas que caracterizam um padrão.

Exemplificando, com um padrão  $\mathcal{X}'$ , representado pelos atributos  $x'_1$  e  $x'_2$  podemos formular a equação abaixo:

$$d(\mathcal{X}') = w_1 x'_1 + w_2 x'_2 + w_3$$

que representa a linha de separação entre as classes de padrões  $W_1$  e  $W_2$ , como na figura abaixo:

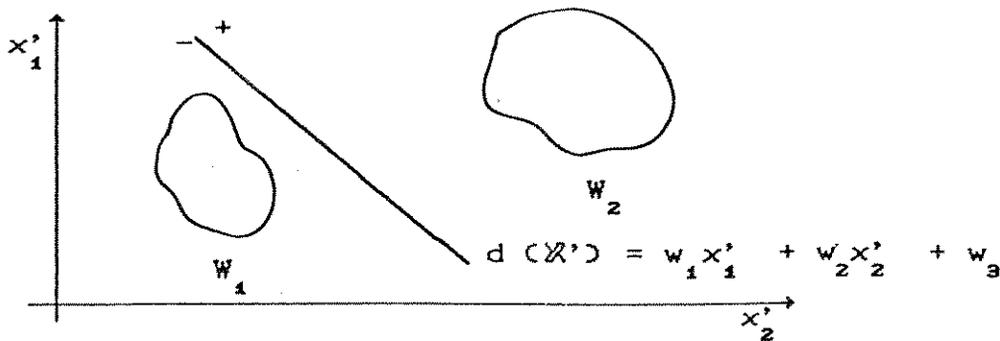
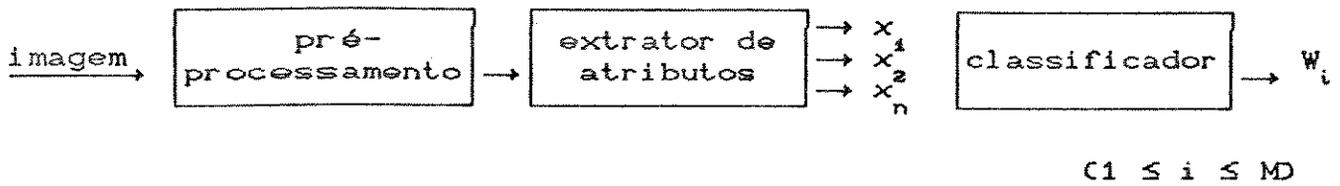


fig. 3.1 Distinção entre classes.

onde os  $w_i$  são os parâmetros a serem especificados para a melhor divisão entre as classes  $W_1$  e  $W_2$ .

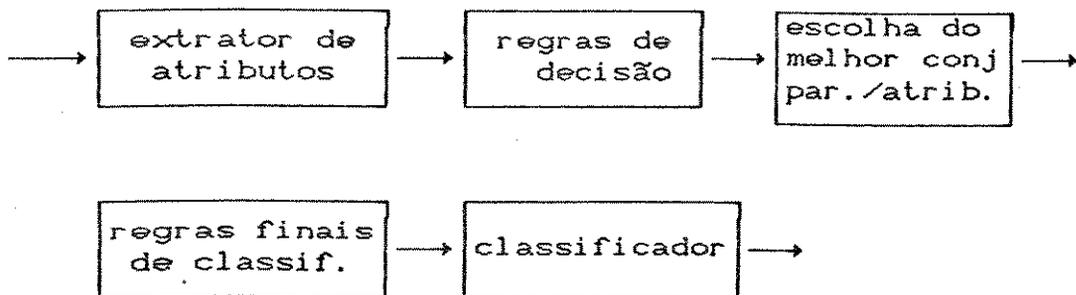
Pela figura nota-se que qualquer padrão  $\mathcal{X}'$  da classe  $W_1$  que submeter suas medidas a equação de separação  $d(\mathcal{X}')$  terá um resultado negativo.

Essas equações de separação das classes no Espaço Euclidiano dos atributos formam o processo de classificação, que é o componente final do processo lógico de reconhecimento de padrões. Esquemáticamente, temos:



Por sua vez, sendo o classificador formado por essas equações de separação, também chamadas de regras de decisão, deve-se procurar o melhor conjunto dessas regras, o que é feito por um processo de aprendizado, onde são testados em conjunto os atributos mais significativos com os parâmetros multiplicativos  $w_i$  que melhor determinam a reta.

Assim sendo, podemos esquematizar logicamente o processo de aprendizado para a montagem das regras finais de classificação como:



No seu conceito formal, a abordagem decisão-teórica procura, dentro dos seguintes dados:

a)  $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  o vetor padrão

b)  $W = \langle w_1, w_2, \dots, w_M \rangle$  as classes de padrões para aplicação do

problema; a geração de  $M$  funções de decisão  $d_1(X)$ ,  $d_2(X)$ , ...,  $d_M(X)$  que, para qualquer  $X \in W_i$  ( $i=1,2,\dots,M$ ), satisfaçam a equação:

$$d_i(X) \geq d_j(X) \quad i \neq j; j=1,2,\dots,M.$$

Contrariamente ao exemplo anterior, onde tínhamos somente dois atributos que diferenciavam duas classes de padrões, o acréscimo do número de atributos e do número de classes levados a aplicação prática tendem a aumentar o grau de dificuldade da abordagem decisão-teórica, isso devido ao maior número de parâmetros  $w_i$  que devem ser ajustados nas funções de decisão.

Ainda podemos resumir a abordagem decisão-teórica como um processo de estimação de parâmetros dos atributos mais significativos dos padrões de entrada, estimação essa que concretiza a idéia de aprendizado na determinação desses valores ótimos. Esse treinamento, aprendizado, também recebe o nome de algoritmo adaptativo.

Veremos agora alguns dos atributos usualmente empregados nessa abordagem.

### 3.3 ATRIBUTOS E SUA EXTRAÇÃO

Os atributos considerados nessa seção são as características nas quais são baseados os classificadores da abordagem decisão-teórica. A utilização desses atributos é mais recomendada a objetos binários, ou em vários níveis de cinza mas que já tenham sido submetidos a uma transformação binária. A imagem binária

facilita o emprego desses métodos evitando que eles detectem alterações no nível de cinza que indicam a mudança , ou a passagem da aplicação do algoritmo para outro objeto. Alguns deles, como o perímetro, podem ser aplicados somente ao contorno do objeto, logo, após a detecção e o afinamento de bordas.

Como não é aconselhável que o processo de classificação vincule-se somente a um atributo, o conjunto de medidas desses atributos deve conter informação suficiente e relevante para o reconhecedor, de modo que não dê margens a ambigüidades com outra classe de padrões. É desejável também que esse conjunto representativo tenha um número reduzido de elementos, facilitando e agilizando todo o processo de reconhecimento.

### 3.3.1 ÁREA

Este atributo é calculado para objetos binários que tem o seu contorno preenchido, ou seja, com pixels acesos, com excessão aos furos que possa ter.

Representando-se uma figura binária dentro de uma matriz bi-dimensional  $M$  de dimensões  $m \times n$  como abaixo:

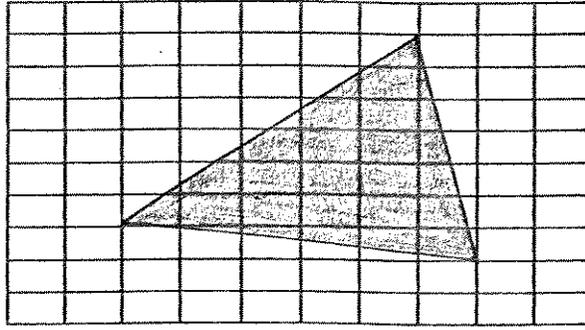


Fig. 3.2 Representação de uma figura usando um matriz bi-dimensional.

onde cada elemento da matriz que esteja parcialmente, ou totalmente preenchido equivale ao valor 1. Logo, a área da figura pode ser facilmente calculada somando todos os elementos da matriz com valor 1.

$$\text{Área} = \sum_{l=1}^m \sum_{c=1}^n M(l,c)$$

$$\text{onde } M(l,c) = \begin{cases} 1 & \text{quando elemento representar a figura} \\ 0 & \text{para representação de fundo da imagem} \end{cases}$$

Caso desejamos conhecer a área da figura ocupada no monitor de vídeo, devemos multiplicar os valores da matriz M pela área do pixel. Para pixels retangulares de lados de comprimento a e b teríamos:

$$\text{Área} = a \times b \sum_{l=1}^m \sum_{c=1}^n M(l,c)$$

Outro método muito importante, este usado para determinação da área de contornos figuras binárias bi-dimensionais está enunciado no teorema de Pick:

"A área de um polígono arbitrário com os pontos correspondentes a um sistema de varredura raster, é dado pela soma dos pontos varridos que são interiores ao polígono mais a metade dos pontos do contorno menos um."

Formalmente:

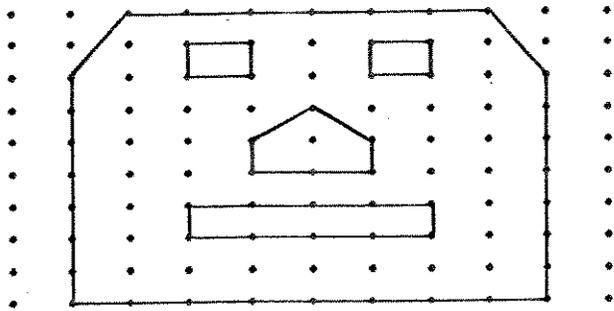
$$\text{Área}_p = i + 1/2c - 1$$

onde:  $i$ : número de pontos interiores ao polígono  
 $c$ : número de pontos do contorno

Para figuras com furos, a área final é obtida subtraindo-se da área da figura, sem considerar os furos, a soma das áreas destes.

$$\text{Área}_p = i + 1/2c_t + n - 1$$

onde:  $c_t$ : número de pontos do contorno do objeto mais  
número de pontos dos contornos dos furos  
 $n$ : número dos furos



$$\begin{aligned}
 i &= 31 \\
 c_t &= 32 + 4 + 4 + 6 + 10 = 56 \\
 n &= 4 \\
 \text{Área} &= 31 + 56/2 + 4 - 1 \\
 \text{Área} &= 62
 \end{aligned}$$

Fig. 3.3 Extração da área pelo teorema de Pick.

### 3.3.2 PERÍMETRO

Pode-se calcular o perímetro usando-se diretamente o código da cadeia da figura. O perímetro pode ser calculado por:

$$P = \sum_{i=1}^n p_i + q_i \sqrt{2}$$

onde:  $p_i$  e  $q_i$  são os valores do código da cadeia

$p_i = 1$  se o código da cadeia for 0, 2, 4 ou 6

$q = 1$  para os valores nas diagonais  
1, 3, 5 ou 7.

Como no caso da área, se desejarmos conhecer o perímetro da figura no monitor de vídeo devemos multiplica-lo pelas dimensões do pixel. No caso de um pixel retangular de comprimento  $b$  e altura  $a$ , os fatores serão:

$$c_p = a \text{ para código da cadeia igual a } 0 \text{ ou } 4.$$

$c_p = b$  para código da cadeia igual a 2 ou 6.

$c_p = (a^2 + b^2)^{1/2}$  para código da cadeia igual a 1, 3, 5 ou 7.

### 3.3.3 ÁREA DO RETÂNGULO ENVOLVENTE

Este, como os anteriores, é um atributo variante ao tamanho do objeto e de grande importância para um conjunto de medidas classificatórias. O nome do atributo já é bem explicativo, juntamente com a figura abaixo:

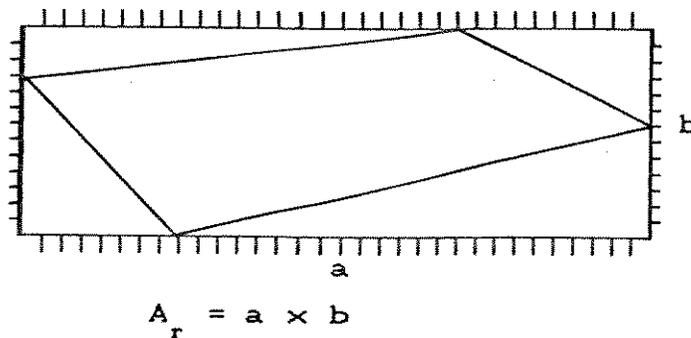


Fig. 3.4 Área do retângulo envolvente da figura.

Os atributos citados a seguir são conhecidos como descritores topológicos, pois conseguem descrever globalmente as figuras de uma imagem e só podem ser afetados pelas operações de união ou cisão dessas figuras, ou seja, são invariantes quanto a posição, orientação e tamanho da figura.

3.3.4 RETANGULARIDADE

A retangularidade de um objeto é definida como:

$$R = \frac{A_o}{A_R}$$

onde:  $A_o$  = área do objeto  
 $A_R$  = área do retângulo envolvente

Esse atributo recebe o valor máximo de 1.0 para objetos regulares e decresce a medida que os objetos tenham formas delgadas ou curvas. Atinge o valor de  $\pi/4$  para objetos circulares.

Outra relação:

$$F = \frac{\text{alt}}{\text{comp}}$$

onde alt: altura do retângulo envolvente,  
lado menor.  
comp: lado maior do retângulo envolvente.

permite auxiliar o atributo de retangularidade e o de circularidade abaixo, distinguindo objetos de forma fina e delgadas de objetos circulares ou de aparência circular aproximada.

### 3.3.5 CIRCULARIDADE

Outro atributo derivado da área do objeto, a circularidade de uma figura, é definido como:

$$C = \frac{P^2}{4\pi \times A}$$

onde P: perímetro  
A: área do objeto

e recebe o valor mínimo de  $4\pi$  para formas circulares, crescendo conforme aumenta a complexidade da borda, fazendo assim com que as figuras mais complexas recebam os valores mais altos.

### 3.3.6 MOMENTOS

Os momentos de diversas ordens aplicados a figuras bi-dimensionais são importantes descritores das figuras já que com eles conseguimos atributos que são invariantes a alterações de posição, orientação e tamanho das mesmas, as chamadas transformações ortogonais e que são provadas em [Hu 62].

Dada uma função  $f(x,y)$  parcialmente contínua e que tenha valores distintos de zero somente na parte finita do plano  $xy$ , os momentos de todas as ordens existem e podem ser definidos como momentos de ordem  $(p + q)$  através da integral de Riemann como:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l^p c^q f(l, c) d_l d_c, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots$$

e que é reforçado pelo Teorema da Unicidade que diz que a seqüência de momentos  $\{m_{pq}\}$  é unicamente determinada por  $f(l, c)$  e inversamente,  $f(l, c)$  é unicamente determinada por  $\{m_{pq}\}$ .

Definem-se também os momentos centrais de ordem  $(p + q)$  como:

$$m_{c_{pq}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (l - \bar{l})^p (c - \bar{c})^q f(l, c) d_l d_c$$

$$\text{com } \bar{l} = \frac{m_{10}}{m_{00}}, \quad \bar{c} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

Para imagens digitais a definição torna-se:

$$\mu_{pq} = \sum_l \sum_c (l - \bar{l})^p (c - \bar{c})^q f(l, c)$$

e segue-se que

$$\mu_{00} = m_{00},$$

$$\mu_{10} = \sum_l \sum_c (l - \bar{l})^1 (c - \bar{c})^0 f(l, c)$$

como  $(l - \bar{l})^1 = m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}}$

$$(c - \bar{c})^0 = m_{00}$$

$$\mu_{10} = m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}} (m_{00}) = 0$$

analogamente  $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$

e de /Gon 77/ tem-se:

$$\mu_{11} = m_{11} - \bar{y} m_{10}$$

$$\mu_{20} = m_{20} - \bar{x} m_{10}$$

$$\mu_{02} = m_{02} - \bar{y} m_{01}$$

$$\mu_{21} = m_{21} - 2\bar{x} m_{11} - \bar{y} m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01}$$

$$\mu_{12} = m_{12} - 2\bar{y} m_{11} - \bar{x} m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10}$$

$$\mu_{30} = m_{30} - 3\bar{x} m_{20} + 2m_{10}\bar{x}^2$$

$$\mu_{30} = m_{03} - 3\bar{y} m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01}$$

São definidos também os momentos centrais normalizados, como

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\alpha}} \quad \text{onde } \alpha = \frac{p+q}{2} \quad p, q = 2, 3, \dots$$

Dos segundos e terceiros momentos centrais podem ser derivados /Hu 62/ os seguintes momentos invariantes a rotação, translação e escala

$$M_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$

$$M_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$

$$M_3 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

$$M_4 = (\eta_{20} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2$$

$$M_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12}) [(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03}) [3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2]$$

Ainda utilizando-se dos momentos centrais, pode-se determinar a rotação dos eixos principais da figura, formando um ângulo  $\theta$ , e, relação aos eixos do sistema absoluto de coordenadas usando-se:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2 \times \mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}}$$

e com as restrições  $\mu_{20} > \mu_{02}$  e  $\mu_{30} > 0$  o ângulo  $\theta$  pode ser determinado unicamente.

### 3.3.7 NÚMERO DE EULER

O número de Euler é definido como um descritor topológico usando o número de furos da figura e o número de seus componentes conexos. Onde o componente conexo de um conjunto é um subconjunto de tamanho máximo em que quaisquer dois pontos nele contido podem ser unidos por uma curva conexa inteiramente pertencente a esse subconjunto.

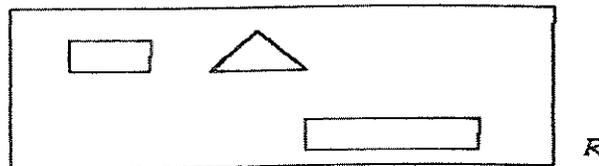


Fig. 3.5 Região R com três componentes conexas.

O número de Euler é definido como:

$$E = C - H$$

para C: número de componentes conexos.

H: número de furos.

Para as regiões representadas por segmentos de reta, regiões poligonais, uma fórmula importante, chamada fórmula de Euler, é relacionada com o número de Euler, esta é:

$$V - A + F = C - H = E$$

onde:

V: número de vértices da figura

A: número de arestas

F: número de faces

Tomando-se como exemplo a figura abaixo:

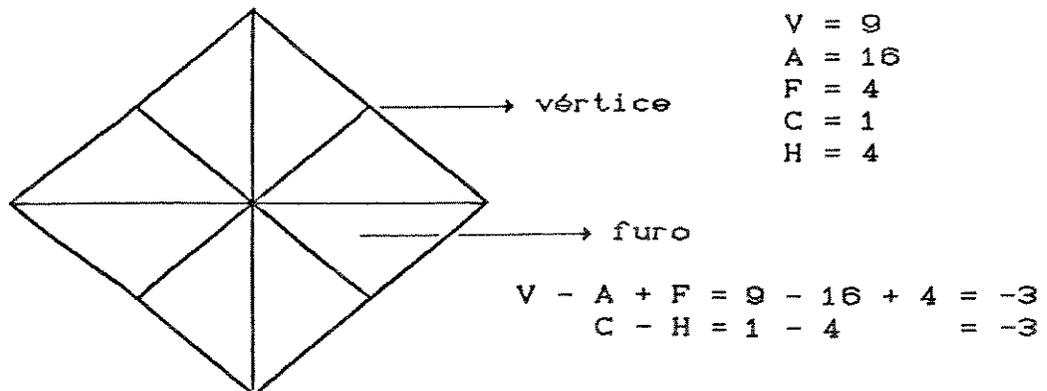


Fig.3.6 Exemplo de fórmula de Euler.

3.3.8 FATOR G

É um atributo muito usado no reconhecimento de padrões e é definido como:

$$\text{Fator } G = \frac{A}{\bar{d}^2}$$

onde  $\bar{d}$ : é média das distâncias mínimas dos pixels do objeto ao contorno deste. Logo, isso implica que o fator G é sempre calculado sobre as figuras "cheias" e não sobre seus contornos como a maioria dos descritores citados.

A média das distâncias mínimas é dada por

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i$$

para:

N: número total de pontos do objeto

d: distância

mínima do ponto i ao contorno.

3.4.1 MEDIDAS CLASSIFICATÓRIAS — INTRODUÇÃO

Tendo sido extraídos os atributos das figuras da imagem resta agora analisar essas grandezas para equacionarmos as funções de decisão que classificarão os padrões. A seguir são discutidos dois

métodos que implementam a classificação pela abordagem decisão-teórica que é o último passo no reconhecimento de padrões. Relembramos que a análise prévia dos fatores e dos atributos mais significativos, juntamente com uma aplicação de um método classificatório escolhido, é o que chamamos de aprendizado, que deve ser feito até adequar todo o processamento ao resultado esperado.

### 3.4.2 A HEURÍSTICA DE PRICE E REDDY

Dentro dos métodos determinísticos para classificação de padrões, a aplicação de Price e Reddy /Pri 79/ em cenas reais é bastante interessante pelo seu caráter prático.

Num sistema de classificação de padrões obtidos de cenas reais o objetivo é saber a proximidade que um padrão se encontra do padrão de referência, ou seja, aquela porção de imagem armazenada que mais deve apresentar semelhanças com a porção de imagem em análise.

Considerando novamente um padrão  $P$  lido como o seguinte vetor de atributos

$$P = [ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n ] \quad n = \begin{array}{l} \text{número de atributos} \\ \text{medidos} \end{array}$$

e seu padrão de referência  $Q$  como

$$Q = [ q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n ]$$

uma primeira aproximação para verificar quão próximos estão  $P$  e  $Q$  poderá ser feita através da diferença entre seus atributos, e essa

proximidade será

$$D = \sum |p_i - q_i|$$

Esta seria uma boa medida se todos os atributos estivessem no mesmo grau de grandeza ou com pequenas variações de um para outro. Se no entanto, pela escolha dos atributos para classificação, essas grandezas variarem muito entre si a aplicação de um fator multiplicativo a cada um desses atributos, aproximaria seus valores para intervalos iguais. Logo a diferença entre padrões poderia ser expressa como:

$$D = - \sum |p_i - q_i| m_i$$

onde  $m_i$  é o peso que cada atributo carrega e a multiplicação por -1 deixa a grandeza  $D$  negativa, representando assim a melhor aproximação entre  $P$  e  $Q$  quanto mais próximo  $D$  estiver de zero.

Como alguns atributos ainda podem ser mais significativos que outros para determinadas imagens, um outro fator multiplicativo poder ser incluído na fórmula para dar mais força a determinados atributos, e finalmente a distância ficaria

$$D = - \sum |p_i - q_i| m_i f_i$$

onde  $f_i$  seria esse fator força, que recebe valor máximo caso o casamento de seu atributo entre padrão e referência deva ser evidenciado e mínimo caso esses atributos não possam ser medidos para aquela figura ou não tenham significado tão marcante dentro daquela classe.

Quanto às medidas dos atributos  $P$ , as componentes  $p_i$ , podem ser escolhidas como médias de um conjunto de padrões de mesma classe que sirvam como modelo no processo de aprendizagem.

### 3.4.3 MÉTODO DAS MÍNIMAS DISTÂNCIAS

Este método está na mesma linha do método anterior, no entanto tem bases teóricas mais definidas para os fatores multiplicativos que são dados aos atributos para sua normalização. Ainda como no método anterior considera-se que existe um conjunto de  $M$  classes de padrões dado por

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_M\}$$

onde cada classe é representada por um vetor padrão de referência com  $n$  atributos representativos para cada classe. O vetor  $Q$ , padrão de referência para a  $i$ -ésima classe é dado por:

$$Q = [q_{i1} \quad q_{i2} \quad \dots \quad q_{in}] \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

onde, como no exemplo anterior cada elemento desse vetor pode ser

$$q_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^L q_{ijl} \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, n \\ l = 1, 2, \dots, L \\ i = 1, 2, \dots, M \end{array}$$

a média de diversas medidas  $q_{ijl}$  desses mesmos atributos efetuadas

entre  $L$  padrões considerados como modelos, ou amostras, na fase de apredizado.

A classificação de um padrão lido  $P$ ,

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$$

em relação as  $M$  classes executantes pelo classificador mínimo é dada por:

$$d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (q_{ij} - p_j)^2} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Para cada uma das  $M$  classes teremos uma distância  $d_i$  associada, resultado da aplicação do método dos mínimos-quadrados entre o padrão de entrada  $P$  e os padrões modelos  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ .

O classificador associa o padrão  $P$  a classe  $i$  se a distância  $d_i$  encontrada for a menor entre todas as distâncias obtidas, ou seja,

$$\begin{aligned} P \in W_i \quad \text{se} \quad d_j \geq d_i \\ \text{t. q.} \quad i \neq j. \\ j = 1, 2, \dots, n. \\ i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Ainda pode-se definir a distância  $d_i$  como

$$d_i = \sum_{j=1}^n |q_{ij} - p_j|$$

que demanda menor esforço de computação.

Como no problema anterior, aqui consideramos todos os atributos com o mesmo peso para a determinação da distância, o que pode não ser uma verdade pois alguns atributos podem ter mais importância que outros.

Uma das alternativas é normalizar esses atributos, tanto os do padrão  $P$  como os dos padrões de referência  $Q_i$ , e normalmente são consideradas três tipos de normalização.

#### a) NORMALIZAÇÃO PELOS MÁXIMOS E MÍNIMOS

Sendo que para a determinação de um vetor  $Q_i$  como representante de uma classe  $W_i$  são analisados  $L$  vetores padrões na fase de aprendizado, cada um com  $n$  atributos, esse método procura montar um vetor  $A$  de normalização como diferença entre os máximos e os mínimos valores dos  $n$  atributos para os  $L$  vetores pesquisados. Formalizando,

$$A_i = \max [ q'_{1l} \quad q'_{2l} \quad \dots \quad q'_{nl} ] - \min [ q'_{1l} \quad q'_{2l} \quad \dots \quad q'_{nl} ]$$

$$l = 1, 2, \dots, L$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

Assim a distância entre padrões poder ser escrita como

$$d_i = \sum \left| \frac{q_{ij} - p_j}{a_{ij}} \right| \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

onde  $a_{ij}$  é um elemento do vetor  $A_i$

#### b) NORMALIZAÇÃO PELA VARIANÇA

Neste método são considerados todos os  $n$  atributos para todos os  $L$  padrões amostras, e relembrando a fórmula temos, o vetor de normalização  $A$  formado por

$$a_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^L (q'_{ijl} - \bar{q}_{ij})}{n} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M. \\ j = 1, 2, \dots, n. \\ l = 1, 2, \dots, L. \end{array}$$

$$\text{onde } \bar{q}_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L q'_{ij}$$

onde a fórmula para a distância  $d_i$  seria igual a do método a) acima.

#### c) NORMALIZAÇÃO PELA MÉDIA

A distância  $d_i$  continuaria como

$$d_i = \sum \left| \frac{q_{ij} - p_j}{a_{ij}} \right|$$

só que neste caso cada elemento de  $A_i$  é dado por

$$a_{ij} = \frac{1}{L} \sum q'_{ij} = \bar{q}_{ij}$$

A escolha entre esses métodos de normalização, como qualquer outro método para reconhecimento de padrões é dependente da aplicação, portanto é aconselhável uma verificação prévia antes da escolha.

Como já dissemos, estes são apenas dois exemplos dos vários métodos possíveis de serem aplicados a classificação na abordagem decisão-teórica, como existem também os métodos baseados em conceitos estatísticos e alguns mais recentes baseados na teoria dos conjuntos nebulosos. Ainda para conjuntos de classes que tenham características físicas bem distintas e onde a diferença de medida entre os atributos escolhidos é significativa, a árvore de decisão, com os nós representando os atributos e os filhos os intervalos de medida, é outro método muito usado e com bons resultados /Pav 75/.

## 4. ABORDAGEM ESTRUTURAL

### 4.1 INTRODUÇÃO

Outra abordagem em que pode ser conseguido o reconhecimento de padrões, é a abordagem estrutural, ou abordagem sintática. Em seu conceito mais amplo essa abordagem faz parte dos métodos simbólicos de reconhecimento de padrões como o faz a abordagem decisão-teórica, mas conseguiu maiores avanços a partir do momento em que foi constatada a necessidade de se reconhecer os objetos através de sua forma, sua estrutura, usando estruturas de dados que assim a representassem, e não somente um conjunto de números expresso na forma de um vetor.

A abordagem decisão-teórica tem recursos talvez tão eficientes para o reconhecimento de padrões, dependendo da aplicação, como o tem agora a abordagem estrutural, mas faltava-lhe formalismo para certas representações que unissem a estrutura da figura e uma relação entre elas. Uma das aplicações em que mais se usa esse tipo de relacionamento é a análise de cenas, objetivo final do reconhecimento de padrões.

A abordagem estrutural nasceu no sentido de possibilitar ligação da forma, estrutura dos objetos, ao seu contexto maior que é a cena. Existindo essas possibilidades para o reconhecimento de padrões, surgem outras aplicações de manipulação das formas reconhecidas, que vão desde a descrição destas, até a descrição

geral da cena, passando pelo uso dessas formas para projetos ("design") como ocorre com as PDL ("Picture description language"), dando margem a um ambiente completo de geração, trabalho e reconhecimento estrutural.

O reconhecimento sintático busca o reconhecimento de objetos através de uma descrição recursiva de seus elementos mais complexos em termos de elementos mais simples, dada sua forma ou aspecto físico.

Nesse caso não são os atributos do objeto que determinam sua classificação, mas sim a estrutura de todo o padrão é que alimentará o processo classificatório. Dessa classificação do objeto através de sua estrutura surgiu o termo "Structural Pattern Recognition", introduzido por Pavlidis no ano de 1977. Antes desse termo era também usada a expressão "Linguistic Pattern Recognition", ou Reconhecimento Sintático de Padrões, visto que toda base teórica do método assentava-se nos conceitos da Teoria Formal das Linguagens de Noam Chomsky /Apêndice 2/.

Nessa teoria são aplicados modelos lingüísticos (sintáticos) à forma (estrutura) do objeto, procurando gerá-los formalmente e reconhecê-los usando o modelo obtido. Logo, o requisito principal do reconhecimento estrutural de padrões é a escolha, ou modelamento, de uma gramática capaz de gerar, por meio de um conjunto de regras de produção, uma dada classe de objetos. Essas gramáticas lidam com cadeias de símbolos como representação dos objetos e de seus elementos, assim como a linguagem portuguesa ou a linguagem matemática, e a essas cadeias são aplicadas regras de

produção que formam o conjunto da fase final do reconhecimento.

O problema então dos reconhecedores sintáticos está na análise dessa cadeia de símbolos para decidir a qual classe pertence o padrão em estudo.

Como na abordagem decisão-teórica, citada anteriormente, a abordagem sintática de reconhecimento de padrões também continua a fazer o casamento entre o padrão e o padrão referência usando somente as bordas dessas figuras, logo faz-se necessário aplicar aqui também toda a fase inicial de pré-processamento de imagens que inclui a detecção e o afinamento de bordas. Veremos mais adiante que essa fase de segmentação pode ser ampliada com um método de aproximação poligonal que facilite o trabalho de extratores de atributos.

## 4.2 DESCRITORES ESTRUTURAIS

### 4.2.1 Gramáticas de Cadeia

Tendo a cena já transformada numa imagem segmentada em regiões, ou figuras, passa a ser o objetivo de um reconhecedor estrutural descrever essas formas usando os conceitos gramaticais da teoria das linguagens. Suponhamos então que temos dentro de uma imagem um conjunto de formas poligonais abertas e fechadas como na figura a seguir:

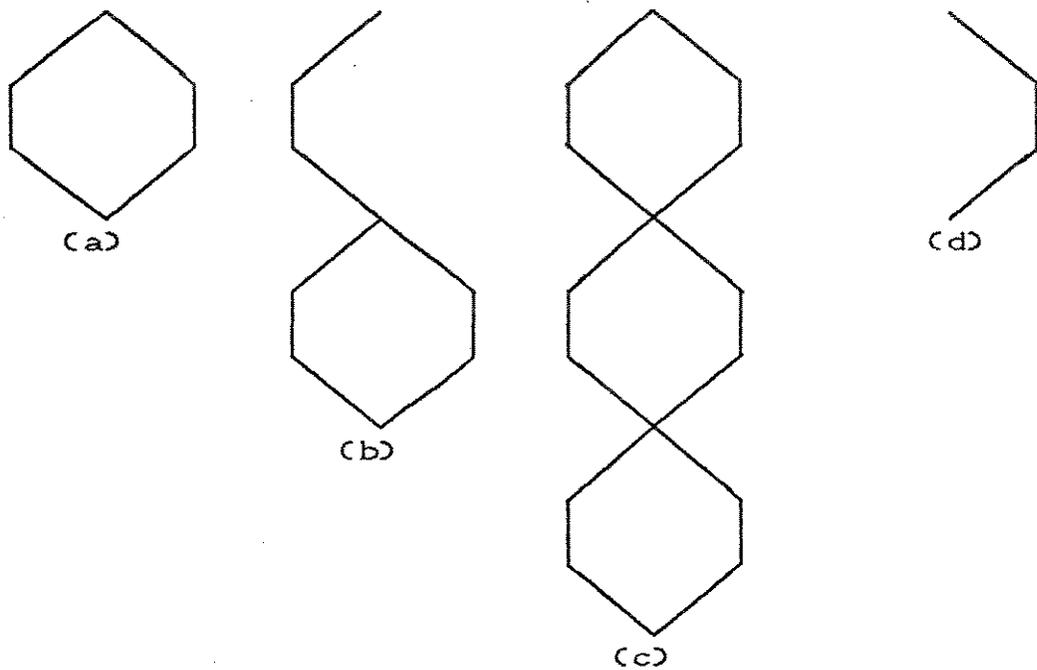


Fig. 4.1 Estrutura de formas poligonais.

Baseado na repetitividade de alguns elementos e de sua aparência independente na figura podemos definir dois elementos primitivos a e b e codificar a estrutura dessa forma, para



onde o segmento tem início marcado com "." e final marcado pela seta "→". A figura 4.1 poderia ser descrita como:

(a) ab

(b) aab

(c) aaabbb

(d) b

o que leva-nos a escrever uma gramática regular  $G$  capaz de definir esta estrutura como:

a gramática

$$G = \{ N, \Sigma, P, S \}$$

com os símbolos não terminais

$$N = \{ S \}$$

os símbolos terminais

$$\Sigma = \{ a, b \}$$

e as regras de produção

$$P = \{ S \rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow a, S \rightarrow b \}$$

que deram origem as formas mostradas do seguinte modo: as regras de produção devem ser interpretadas como

$\alpha \rightarrow \beta$  significando  $\alpha$  pode ser reescrito com  $\beta$ .

Sendo assim,

ab surge das aplicações das regras

$$\begin{array}{l} S \rightarrow aS \\ \quad \quad \quad \downarrow_{(4)} \rightarrow ab \end{array}$$

e

aab surge das aplicações das regras

$$\begin{array}{l} S \rightarrow aS \\ \quad \quad \quad \downarrow_{(1)} \rightarrow aaS \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow_{(4)} \rightarrow ab \end{array}$$

Esta estrutura é tida como uma gramática de cadeia e que pode

gerar tanto formas  $a^m b^n$  como formas do tipo  $a^m$  e  $b^n$ .

Nessa mesma idéia de descrição de formas usando estruturas formais simples, como contornos formados por segmentos de reta aliados a gramáticas de cadeia, surgiram as PDL ("Picture Description Languages") propostas por Shaw na década de 70 /Gon 78/.

Consideremos um exemplo simples de PDL descrita abaixo:

$$G = (N, \Sigma, P, S)$$

$$N = \{S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$$

$$\Sigma = \{a \nearrow, b \searrow, c \rightarrow, d \downarrow\}$$

$$P : S \rightarrow d + A_1$$

$$A_1 \rightarrow c + A_2$$

$$A_2 \rightarrow \neg d * A_3$$

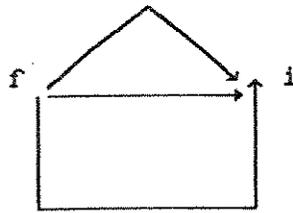
$$A_3 \rightarrow a + A_4$$

$$A_4 \rightarrow b * A_5$$

$$A_5 \rightarrow c$$

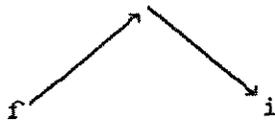
sendo que cada forma tem um final em  $f$  e um início como em  $i$  , o operador "+" indica que ao início da figura a esquerda desse sinal será conectado o final da figura a sua direita. O operador "¬" indica direção reversa da primitiva e "\*" indica que as figuras devam ser ligadas final com final e início com início.

A figura a seguir poderia ser descrita por essa PDL do seguinte modo:

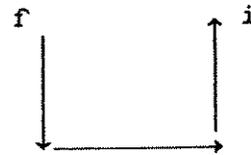


$$(d+(c+(-d))) * ((a+b)* c)$$

pela aplicação da regra de produção P citada anteriormente. Na realidade essa é uma composição maior das duas formas abaixo que são obtidas durante a aplicação da produção P.



$$a + b$$



$$d + (c + (-d))$$

Este tipo de gramática é ideal para expressar conectividade de elementos como nos exemplos acima ou em qualquer outro modo expresso por gramáticas de cadeias onde existe somente relação entre objetos expressa na seqüência em que se apresentam. As gramáticas de árvore procuram ampliar esse conceito de relacionamento entre os descritores relacionais.

#### 4.2.2 GRAMÁTICAS DE ÁRVORE

Dentre todas as gramáticas, talvez as gramáticas de árvore

sejam as mais convidativas as aplicações bi-dimensionais por terem embutidas em suas primitivas, as árvores, esse conceito e aparência bi-dimensional. A estrutura de árvore é importante como descritora de uma imagem por dois motivos: 1) os nós podem guardar a informação que identifica o tipo de estrutura que ele representa, ou seja, qual primitiva ele carrega, e 2) as informações que relacionam o nó com seus vizinhos pode estar embutidas nos ponteiros do nó a seus filhos. Exemplificando com a figura a seguir:

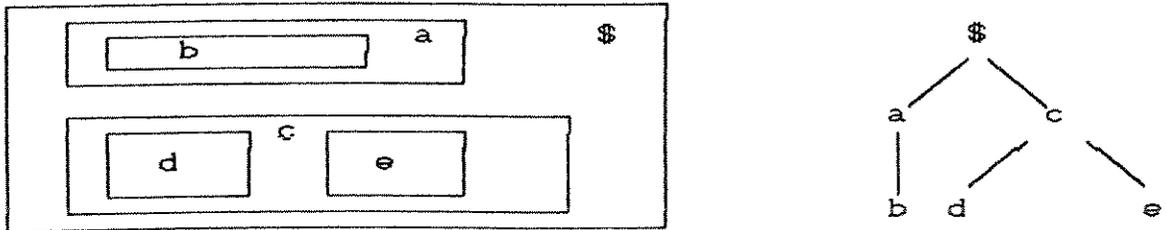


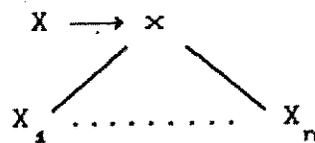
fig.4.2 Representação de uma imagem em árvore.

onde os nós da árvore representam as primitivas da figura, neste caso as estruturas retangulares e, as ligações aos nós representam a relação "dentro de". Logo, do símbolo \$ representando a raiz, e dos demais filhos, vemos que a árvore nos diz que e e d estão dentro de c, como b está dentro de a, e por sua vez a e c estão dentro de \$.

A gramática de árvore pode ser definida como a quádrupla  $G_t = (V, r, P, S)$  onde  $V = N \cup \Sigma$  é todo o alfabeto da gramática (união dos símbolos terminais e não-terminais), r é a função de

ranking e diz o número de filhos que um nó pode ter,  $P$  é o conjunto das produções da forma  $T_i \rightarrow T_j$  onde  $T_i$  e  $T_j$  são árvores,  $S$  é um conjunto finito de "árvores iniciais", o que na prática geralmente apresenta-se como um conjunto de árvores com um único filho ou ainda como um símbolo terminal solitário.

Contudo, o tipo de produção que mais tem sido encontrado nas gramáticas de árvore são os que dão a ela a forma chamada gramáticas expansivas de árvore, tendo as produções como



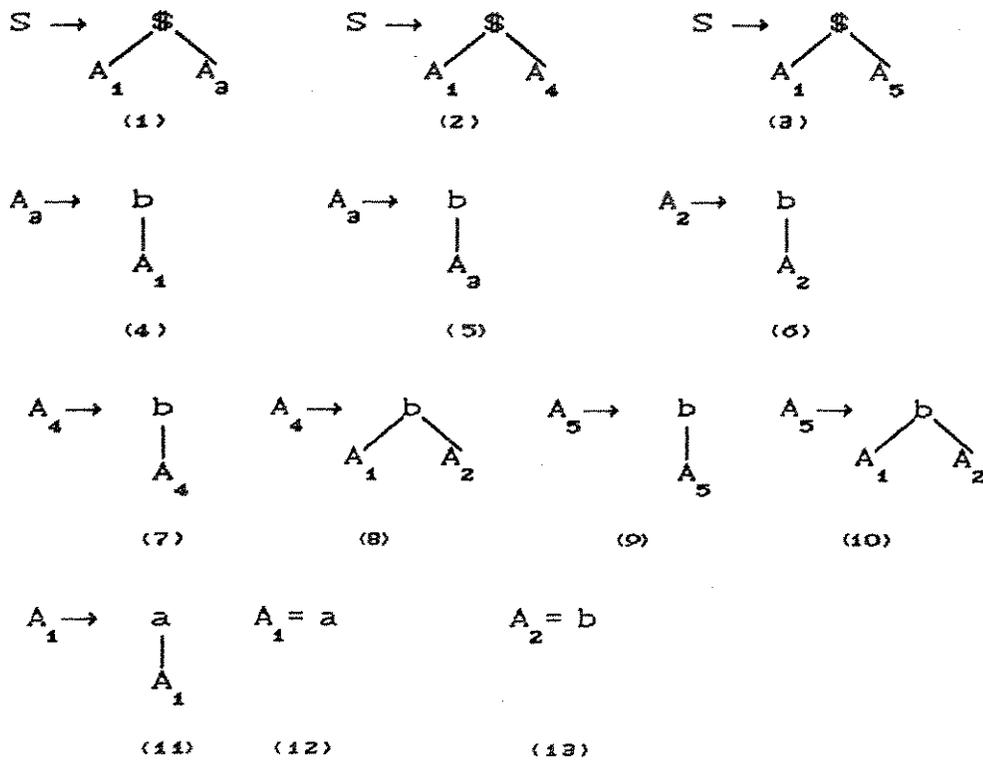
para  $X, X_1, X_2, \dots, X_n$  símbolos não-terminais e  $x$  como símbolo terminal.

Exemplo: A gramática de árvore é tida como uma gramática de alta-ordem pela descrição de primitivas complexas e da capacidade de interconexão das mesmas, além de embutir na própria estrutura uma ambientação com a descrição/geração de objetos bi-dimensionais. A gramática  $G$  a seguir é capaz de gerar as letras C, E, F

$G_t = (N, \Sigma, P, S)$  onde

$N = (S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$  e  $\Sigma = (\$, a, b)$

e as produções  $P$  são:



onde  $a : \rightarrow (\pm 45^\circ)$   
 $b : \downarrow$  (de  $225^\circ$  a  $315^\circ$ )

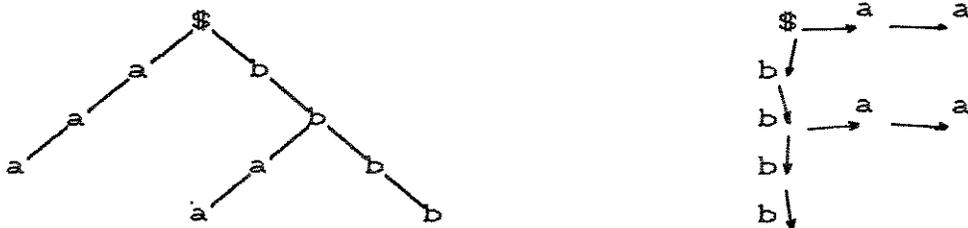


Fig.4.3 Geração da letra F.

Através da aplicação da regra de produção (3) montamos o nó inicial da árvore, depois sucessivamente pelo filho esquerdo foram

aplicadas as regras (11), (11) e (12). Pelo filho direito aplicamos a regra (9) e a regra (10) que originou mais uma árvore. Esta última foi finalizada aplicando-se as regras (11) e (12) ao filho esquerdo e as regras (6) e (13) ao filho direito.

Ao mesmo tempo que essas gramáticas de árvore, tanto na forma expansiva, como não, permitem a descrição de primitivas mais complexas e conseqüentemente a descrição de relacionamentos mais complexos entre elas, é de se esperar que o nível de complexidade dos algoritmos para implementações aumente, o que também ocorre com o grau de dificuldade para sua análise.

#### 4.3 FACILIDADES COM A APROXIMAÇÃO POLIGONAL

##### 4.3.1 INTRODUÇÃO

Como vimos, depois de todo pré-processamento de imagens, ressaltada na segmentação, a abordagem sintática exige uma definição dos elementos da gramática que formarão as figuras da imagem. Dentre esses elementos os de maior importância são os elementos formadores do alfabeto da linguagem, ou melhor, os elementos terminais, pois são essas as primitivas que compõem as classes de objetos que a gramática define.

A definição dessas primitivas em termos de figuras poligonais tem mostrado uma facilidade maior de formalização em relação a formas não poligonais devido a própria estrutura dessas figuras. Sua definição em termos de vértices e comprimento de segmentos

facilita o relacionamento formal entre dois polígonos expressando-os em termos da diferença entre ângulos e comprimentos dos segmentos.

Uma outra razão para se realizar esse processo de "vetorização" /Jim 82/ — aproximação de curvas por segmentos de retas — é a redução de dados, podendo obter assim compressões da ordem de 15:1 em relação as formas originais. Na prática, os contornos obtidos são aproximados por polígonos e somente os vértices dessas figuras precisam ser armazenados, logo o volume de dados a ser armazenado dependerá principalmente da complexidade da imagem, e do grau de aproximação do polígono à forma original.

O argumento básico para essa compactação de dados é o seguinte: dada uma região  $R$ , num dispositivo tipo varredura, com dimensão linear de  $D$  pixels, o número de posições de memória necessárias para armazenar a figura como uma matriz de pontos é proporcional a  $D^2$ , enquanto seu contorno pode ser armazenado num número proporcional ao seu perímetro, ou seja,  $D$  já conseguindo uma boa redução de armazenamento, que cresce substancialmente quanto maior for a região. A redução pode ganhar um fator multiplicativo caso o contorno dessa região  $R$  seja reduzido somente aos pontos de descontinuidade, ou aos nós-vértices de um polígono aproximado.

Formalmente, como em /Ram 72/, uma curva bi-dimensional fechada ou aberta pode ser representada discretamente como um conjunto  $C$  de  $N + 1$  pontos dispostos consecutivamente ao longo da curva, onde o primeiro e o último ponto coincidem para o contorno

fechado. Um subconjunto de  $C$ ,  $C'$ , pode conter um número menor de pontos que representam, através de um polígono, a forma original.

Teríamos assim:

$C = \langle p_i \rangle; \quad 1 \leq i \leq N + 1 \quad \equiv \quad$  forma poligonal ou polígono  $P$  de  $N$  lados onde os  $p_i$  são vértices de  $P$ .

$C' = \langle p'_k \rangle; \quad 1 \leq k \leq N + 1 \quad \equiv \quad$  representação poligonal ou polígono  $P'$  de  $N'$  lados onde  $p'_k$  são os vértices de  $P'$ .

$C' \subseteq C$

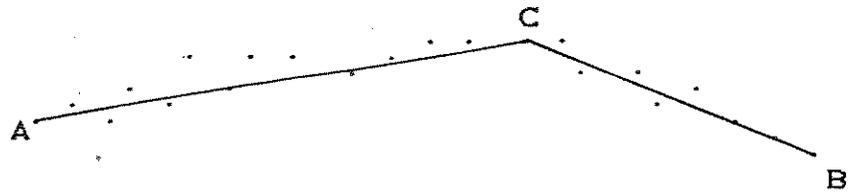
O conjunto  $C'$  divide o conjunto  $C$  em subconjuntos  $S_k$  da seguinte forma:

$S_k = \langle p_i, p_{i+1}, \dots, p_j \rangle;$

$p_i = p'_{k+1}$

$p_j = p'_k$

Exemplificando com a curva a seguir:



$C$  = conj. dos pontos do arco  $AB$ .

$C' = \langle A, B, C \rangle$ .

$S_{k1}$  = conj. dos pontos do arco  $AC$ .

$S_{k2}$  = conj. dos pontos do arco  $CB$ .

fig. 4.4 Aproximação por segmentos de reta.

Existem basicamente duas condições que são perseguidas para atingir a aproximação poligonal: 1) achar o polígono com o número mínimo de vértices, ou o polígono ótimo; 2) achar o polígono com segmentos de determinado tamanho mínimo ou máximo. Geralmente com em /Reg 72/ os critérios para a aproximação do polígono dividem-se pela procura do:

- a) desvio máximo absoluto dos pontos;
- b) desvio pelo método dos mínimos-quadrados;
- c) relação entre a área do polígono original e a área do polígono aproximado.

A modificação nos critérios para escolha dos pontos do polígono dá origem aos diversos métodos de aproximação poligonal que procuram sempre conservar a aparência estrutural da curva.

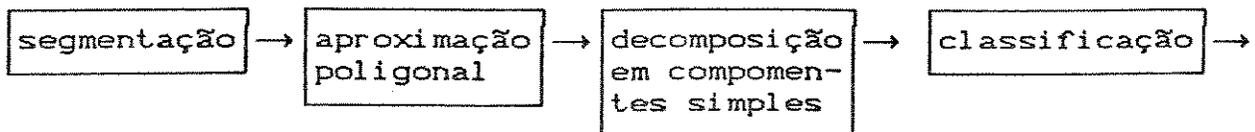
Alguns métodos de aproximação no entanto, não restringem  $C'$  a

um subconjunto de  $C$ , dando margem a encontrar polígonos com vértices que não pertencem a curva original; e além disso criam critérios diferentes dos citados acima para escolha desses vértices. Veremos alguns exemplos mais adiante.

Não só na abordagem de reconhecimento de padrões, como em quase todo tipo de processamento em imagens definidas por linhas ("lines images"), a aproximação do contorno por segmentos de reta é parte integrante do início dos processos. Smith define em /Smi 87/ a aproximação por segmentos lineares como a conversão de uma lista de coordenadas de pixels num conjunto de coordenadas que quando ligadas por segmentos de reta formam uma aproximação poligonal da linha original. Esse tipo de aproximação também tem respaldo em áreas biológicas que dependem de tal conversão, como afirmado em /Pav 79/:

"os humanos devem usar o contexto para a eliminação de ruídos, e a aproximação como um processo livre-do-contexto deve ser enfatizada mesmo com risco de que essas aproximações acrescentem ruídos."

Acrescentado essa nova fase, o diagrama lógico do reconhecimento de padrões passa a ser expandido para:



Existem, como citado em /Jim 82/, duas abordagens principais

que distinguem o modo pelo qual os vértices do polígono são encontrados: 1) a abordagem onde a posição dos vértices do polígono é otimizada globalmente por um processo iterativo e; 2) a abordagem onde esses vértices são computados seqüencialmente ao longo da curva. Geralmente os algoritmos seqüenciais são mais rápidos que os interativos, mas podem perder no poder de conversão para um polígono dado à abrangência local de pesquisa de pontos.

Alguns desses algoritmos são citados abaixo:

#### 4.3.2 MÉTODO DE RAMER

É um método de aproximação poligonal iterativo que não busca encontrar um polígono com o número mínimo de vértices e pode ser aplicado para qualquer curva bi-dimensional digitalizada. Para este método todos os vértices do polígono encontrado pertencem a curva original. Recordando a formalização anterior, o critério de seleção desses vértices faz-se do seguinte modo:

Dado o polígono, ou curva original P com um conjunto de vértices C, ache o subconjunto C' satisfazendo a condição:

$$\max(\text{distância}(p_i, \overline{p'_{k-1} p'_k})) \leq \alpha$$

$\alpha = \text{constante,}$

onde:  $p_i \in S_k$  = conjunto de pontos para escolha do vértice.

$\overline{P'_{k-1} P'_k}$  representa um segmento de reta dos vértices  $P'_{k-1}$  e  $P'_k$  do polígono a se formar.

O critério para distância máxima de um ponto à curva é baseado na distância Euclidiana de um ponto a uma reta.

Relembrando, se a curva descrita é uma reta de equação

$$\text{sen } \varphi c + \text{cos } \varphi l = d$$

temos a distância Euclidiana do ponto  $(l_i, c_i)$  à curva como

$$e_i = |\text{sen } \varphi c_i + \text{cos } \varphi l_i - d|$$

como ilustra a figura abaixo:

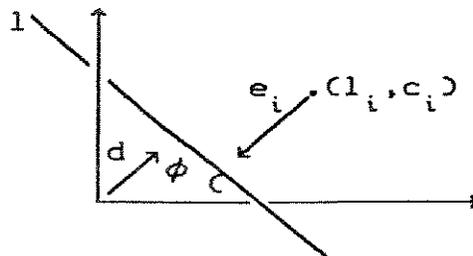


Fig. 4.5 Distância de um ponto a uma reta.

A importância do cálculo da distância dos pontos da curva original ao segmento de reta aproximado está na velocidade do algoritmo.

Logo, dados os pontos A e B da curva, procura-se encontrar o ponto D que é o ponto de maior distância do segmento de reta  $\overline{AB}$ .

Esse ponto pode ser encontrado na reta tangente ao segmento  $\overline{AB}$ , como mostra a figura a seguir:

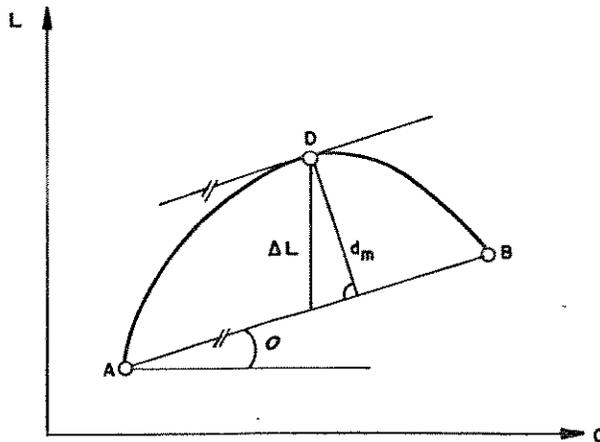


Fig. 4.6 Cálculo simplificado da distância

A diferença entre os pontos da curva e o segmento  $\overline{AB}$  na direção do eixo l é dada por:

$$\Delta l = d / \cos \theta ; \cos \theta \neq 0$$

onde:  $d$  = distância Euclidiana de  $\overline{AB}$  .

$\theta$  = ângulo entre  $\overline{AB}$  e o eixo das colunas,  $c$ .

A distância máxima Euclidiana então, é dada por:

$$d_m = \Delta l_{\max} \cdot \cos \theta$$

O método pode ser aplicado tanto a curvas planas fechadas ou abertas, para esse último tipo consideram-se previamente os pontos

final e inicial da curva como pontos pertencentes a aproximação  $P'$ .

O algoritmo abaixo, usado para a busca dos pontos de  $p'$  utiliza duas pilhas, a pilha OPEN para guardar os vértices cuja seqüência ainda não é conhecida, a pilha CLOSED que contém os vértices do polígono  $P'$  em seqüência.

0. INÍCIO

1. Se  $P$  for contorno fechado

OPEN  $\leftarrow$  ponto mais à direita e ponto mais à esquerda

CLOSED  $\leftarrow$  ponto mais à direita

Senão

OPEN  $\leftarrow$  primeiro ponto

CLOSED  $\leftarrow$  último ponto

2.  $d_m \leftarrow \max [\text{distância}(p_i, \langle p'_{k-1} p'_k \rangle)]$

considerando segmento do topo de CLOSED ao topo de OPEN

3. Se  $d_m > \alpha$

OPEN  $\leftarrow$  ponto com maior distância, que é um novo vértice  
vá para 2.

4. Senão

CLOSED  $\leftarrow$  topo de OPEN

Se OPEN não vazia vá para 2.

Senão CLOSED contém os vértices de  $p'$  e fim.

Esse algoritmo não é restrito a curvas planas, podendo ser modificado para o processamento de curvas arbitrárias no espaço

n-dimensional ajustando-se o critério de distância máxima de um ponto à curva. Nos experimentos em /Ram 72/ os resultados obtidos foram ótimos tanto para curvas de mapas de contorno como para figuras de células de glóbulos brancos e figuras abstratas.

#### 4.3.3. "SPLIT-AND-MERGE"

Este método considera a aproximação poligonal formalmente como:

Dado um conjunto de pontos  $S = \{(l_i, c_i) \mid i = 1, \dots, N\}$  determinar um número mínimo  $n$  tal que  $S$  possa ser dividido em  $n$  subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_n$  onde cada conjunto de pontos pode ser aproximado por uma poligonal de ordem  $m - 1$  com um erro menor que  $\epsilon$ .

e particulariza a ordem da curva poligonal que se deseja obter para um segmento linear.

Supondo que o método já esteja em andamento devemos considerar a existência de um erro entre os pontos da curva original e os pontos das retas que formam o polígono. A norma do erro de um ponto  $(l_i, c_i)$  a uma reta  $r$  pode ser definida nos termos da distância Euclidiana como:

$$e_i = | \text{sen } \varphi \cdot c_i + \text{cos } \varphi \cdot l_i - d |$$

de acordo com a figura 4.5 para  $\varphi$  como ângulo que a reta forma com o eixo  $c$  e,  $d$  a distância da reta à origem do sistema de

coordenadas.

No entanto, a norma de erro sob um determinado sub-conjunto  $S_k$  geralmente é definida de duas maneiras:

1) o erro máximo

$$E_{\infty} = \max (e_i) \text{ para } (l_i, c_i) \in S_k$$

2) a integral dos quadrados dos erros

$$E_2 = \sum e_i^2 \text{ para } (l_i, c_i) \in S_k$$

neste último caso o ajuste das retas a curva original oferece um aspecto visual melhor.

Dada a dificuldade computacional da resolução desse problema a norma de erro também pode ser expressa por:

$$E_2 = \frac{1}{2} \left\{ V_{cc} + V_{ll} - \left[ (V_{cc} - V_{ll})^2 + 4 V_{cl}^2 \right]^{1/2} \right\}$$

para

$$V_c = \frac{1}{N_k} \sum_{S_k} c_i \quad V_l = \frac{1}{N_k} \sum_{S_k} l_i$$

$$V_{cc} = \sum_{S_k} (c_i - V_c)^2 \quad V_{ll} = \sum_{S_k} (l_i - V_l)^2$$

$$V_{cc} = \sum (c_i - V_c)(l_i - V_l)$$

onde  $N_k$  é o número de pontos em  $S_k$ .

O algoritmo "Split-And-Merge" procura uma aproximação poligonal com o menor número de lados,  $n$ , de modo que cada lado não exceda o limiar de erro  $e$ , e ainda procura minimizar esse

erro.

São estes os passos do algoritmo:

passo 0: faça uma segmentação inicial da figura.

passo 1: na  $r$ -ésima iteração temos  $n_r$  segmentos que são os

$$S_1, S_2, \dots, S_r$$

Para  $i = 1, 2, \dots, r-1$  verifique se  $E^i$  excede  $E^{\max}$ .

Excedendo, divida o  $i$ -ésimo intervalo em dois e incremente  $n_r$ .

Calcule o erro para cada novo intervalo.

passo 2: Para  $i = 1, 2, \dots, r-1$  concatenar os segmentos  $S_i$  e  $S_{i+1}$  de forma que resulte um segmento tal que

$$E_i \leq E_{\max}$$

Decrementar o valor de  $n_r$ .

Calcular o erro para o novo intervalo.

passo 3: Ajustar os pontos finais dos segmentos para minimizar o erro de modo que não reverta as desigualdades  $E_i \leq E_{\max}$  ou  $E \leq E_{\max}$ .

passo 4: Se nenhuma mudança ocorreu nos passos anteriores, então FIM. Senão voltar ao passo 1.

É mostrado em /Pav 74/ que o algoritmo é linear em função dos  $N$  pontos até nos piores casos e os pontos finais dos segmentos encontrados podem não estar situados sob a curva anterior.

#### 4.3.4 MÉTODO DE HUNG & KASWAND

Com as mesmas justificativas já mencionadas anteriormente, Hung & Kaswand propõem um método seqüencial de transformação poligonal de figuras e/ou linhas afirmando em /Hun 83/ que:

"Podemos representar uma linha afinada e discretizada por uma seqüência de segmentos de retas sem maiores perdas de informação comparadas à perda na discretização da imagem."

Nesse método, a busca pela vetorização das figuras é feita minimizando a distância entre os segmentos aproximados e a linha original. O resultado obtido quase sempre mostra segmentos que não desviam mais de um pixel em relação a linha original.

A seleção desses pixels obedece a uma criteriosa análise de regras que a primeira vista parecem por demais heurísticas, mas que numa análise mais detalhada mostram poder realmente extrair esses pontos da linha original. Todo o método baseia-se na codificação das linhas já afinadas pelo código da cadeia obedecendo à vizinhança abaixo

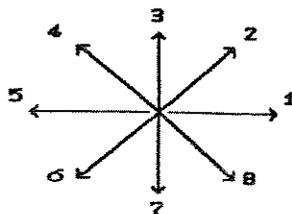


Fig. 4.5 Código da cadeia para o método de Hung & Kaswand.

e estabelece também três outras grandezas relativas a esse código que serão usadas na avaliação dessas regras. São essas as grandezas:

$C(i)$  = código diferença.

$P(i)$  = soma de pares.

$G(i)$  = soma do grupo.

que são definidas por:

considere  $S(i)$  o código da cadeia no pixel  $i$ , logo

$C(i) = S(i) - S(i-1)$ ,  $i = 2, \dots, n$  módulo 8. Logo o valor de

$C(i)$  deve ser igual a um dos valores:

0, 1, -1, 2, -2

e

$C(i) = 0$  ; sendo que qualquer cadeia de códigos diferentes de zero é chamada de "segmento diferente de zero" ou NZS.

$P(i) = C(i) + C(i+1)$  para  $C(i), C(i+1) \neq 0$

$i = 1, 2, \dots$  ;

e

$G(i) = \sum_k C(k)$  para  $k$  num NZS.

A grandeza  $G(i)$  pode ser interpretado como a "integral", ou soma, das curvaturas sobre um segmento; e a soma dos pares,  $P(i)$  como uma medida da mudança de curvatura numa determinada linha.

Examinando essas três grandezas, pelo uso das regras abaixo, pode-se determinar os locais onde ocorre uma mudança significativa

da orientação da linha. Esses são chamados pontos críticos.

Considerando  $H$  como o comprimento de um segmento diferente de zero, NZS, temos as regras sumarizadas abaixo:

regra 1:  $H = 1$

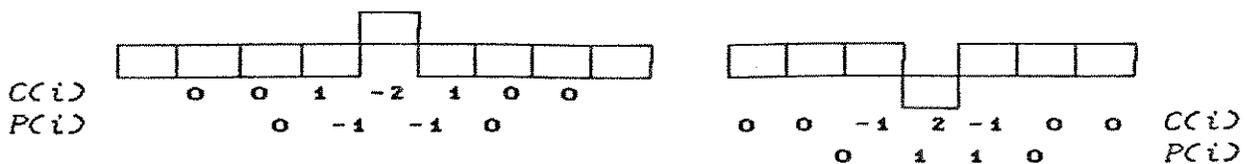
um código diferença diferente de zero isolado sempre indica uma mudança na curvatura da linha. É um ponto crítico.

regra 2:  $H = 2$

ambos os pontos podem ser críticos, pois na maioria dos casos indicam uma intersecção (ou concorrência) de linhas.

regra 3:  $H = 3$  e  $G = 0$

Dois casos isolados podem ocorrer:



que se não forem nenhum padrão podem ser considerados como ruídos ou defeitos do afinamento.

regra 4:  $H \geq 3$

verifique a soma dos pares e determine os pontos críticos de acordo com:

a) se o primeiro elemento da soma dos pares de um NZS for diferente de zero o pixel correspondente ao

NZS é considerado como crítico.

b) selecione como pontos críticos o primeiro e o último pixel correspondente ao NZS com um código diferença igual a 2 ou -2.

c) se ocorrer um caso isolado de soma de pares diferente de zero escolha o pixel correspondente NZS, com o maior valor absoluto do código diferença, como crítico.

d) Um pixel associado a duas somas de pares diferentes de zero e consecutivas é sempre crítico.

regra 5:  $H \geq 3$  e  $G = -1$  ou  $G = 1$

Se depois de efetuada a regra 5 nenhum ponto crítico foi encontrado, verifique os pontos finais do NZS.

Se eles estiverem próximos de um pixel com o código da cadeia ímpar, selecione-os como pontos críticos.

Este método também pode ser usado como um pré-processamento ou fase inicial de outro método de aproximação poligonal, e como vantagem sobre os outros métodos citados está o fato de não necessitar armazenar todos os pontos da figura na memória.

#### 4.3.5 ALGORITMO DE ROSENFELD & JOHNSTON

Este algoritmo procura encontrar pontos significativos de máxima curvatura, e também pontos de inflexão, numa curva discreta

usando um grau variado de suavização dessa curva.

No contexto de nossa dissertação este algoritmo foi aplicado como auxiliar ao método anterior descrito, Método de Hung & Kaswand, e desempenhou de maneira excelente.

Basicamente o método se atém a definição Euclidiana de curvatura no caso contínuo que é a razão da mudança de inclinação de uma função como  $y = f(x)$  sendo portanto a curvatura expressa como:

$$\frac{d^2y/dx^2}{(1 + (dx/dy)^2)^{3/2}}$$

Para curvas discretas assume-se que:

$p_1, \dots, p_n$  são pontos de coordenadas inteiras de uma curva discreta, e que

$p_{i+1}$  é vizinho de  $p_i$  (módulo  $n$ ),  $1 \leq i \leq n$

logo se  $p_i = (x_i, y_i)$  temos

$$|x_i - x_{i+1}| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y_i - y_{i+1}| \leq 1, \quad \text{e}$$

$$|x_i - x_{i+1}| + |y_i - y_{i+1}| > 0$$

Definem-se também os  $k$ -vetores em  $p_i$  como:

$$a_{ik} = (x_i - x_{i+k}, y_i - y_{i+k})$$

$$b_{ik} = (x_i - x_{i-k}, y_i - y_{i-k})$$

e o  $k$ -cosseno em  $p_i$

$$c_{ik} = \frac{(a_{ik} \cdot b_{ik})}{|a_{ik}| |b_{ik}|} \quad , \quad -1 \leq c_{ik} \leq 1,$$

que é o ângulo entre  $a_{ik}$  e  $b_{ik}$ .

Desta definição vemos que  $c_{ik}$  é próximo de 1 quando  $a_{ik}$  e  $b_{ik}$  ficam num ângulo próximo de  $0^\circ$  e  $c_{ik}$  é próximo de -1 se os vetores fazem um ângulo aproximado de  $180^\circ$ ; logo,  $c_{ik}$  é maior quando a curva é mais fechada e menor quando a curva é mais suave, quase que um segmento de reta.

O ponto mais importante do método está na escolha desse fator  $k$ , o seu valor mais adequado ao tipo de curva e ao ponto  $p_i$ .

Os autores sugerem achar os

$$c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im} \text{ onde } m \text{ pode ser } \lfloor n/10 \rfloor$$

e certo  $h$  como

$$c_{im} < c_{i,m-1} < \dots < c_{ih} < c_{i,h-1}$$

tendo sempre  $c_{i0} = -1$  para assegurar sempre um  $h$  entre  $m$  e 1.

Diz-se que  $c_{ih}$  é o cosseno em  $p_i$  e denotamo-lo por  $c_i$ .

Finalmente diz-se que existe um ponto máximo de curvatura em  $p_i$  se

$$c_i \leq c_j \quad \text{t.q.} \quad |i-j| \leq h/2$$

Reafirmamos que este método obteve ótimos resultados em nossas aplicações, citadas no próximo capítulo, e também nas aplicações do autor com figuras de menor definição. Também é

aplicado com facilidade quando a figura esta codificada no código da cadeia.

## 5. APLICAÇÕES

### 5.1 INTRODUÇÃO

O objetivo da implementação dos reconhecedores de padrões descritos a seguir foi de uma aplicação totalmente direcionada ao reconhecimento de imagens reais. Para tal foram escolhidos quatro classes de figuras geométricas simples como objetivo de visão e reconhecimento, e são elas: os círculos, os quadrados, os retângulos e os triângulos.

Para efetivação de tal processo utilizamos os recursos gráficos abaixo descritos, e que eram disponíveis na ocasião no laboratório do DCA/FEE.

Os recursos físicos utilizados para implementação das aplicações foram:

- . uma câmera de vídeo com digitalizador binário (resolução 512 x 512 pontos) e ajuste de limiar de luminosidade.
- . um vídeo monocromático de média resolução.
- . um sistema gráfico baseado na CPU 8085 com memória de vídeo e saídas serial e paralela.
- . um microcomputador compatível com IBM PC/XT.

e os recursos lógicos:

- . a CPU dos sistema gráfico suporta algumas primitivas gráficas como: círculo, ponto, retas, preenchimento de regiões e outras.

- o sistema permite comunicação serial e paralela com o microcomputador, o que viabiliza tanto a geração como a aquisição de imagens reais.

## 5.2 METODOLOGIA

Dispondo os recursos físicos de acordo com a figura abaixo:



Fig.5.1 Sistema Gráfico utilizado.

o sistema gráfico baseado na CPU 8085 tem a capacidade de digitalizar a cena do objeto em questão, criando uma imagem binária.

A digitalização da imagem é feita respeitando um ajuste do limiar de luminosidade previamente escolhido pelo operador do sistema, resultando assim numa imagem binária onde os pontos acessos corresponderão aos níveis de luminosidade acima desse limiar e os pontos apagados abaixo desse limiar. Essa restrição da imagem a dois níveis de cinza ocorre concomitantemente ao processo de digitalização. A escolha desse nível de luminosidade na realidade é a primeira fase do processo de segmentação da imagem e

que tem como importância o oferecimento de um recurso adicional para adequar o sistema a iluminação ambiente.

Tendo sido ajustado esse limiar de luminosidade para uma determinada aplicação, espera-se que a iluminação ambiente não mude, tão pouco o tipo de cena a ser adquirida para que exista uma uniformidade no processo de extração de imagens e menos interferência do operador para eventuais correções ambientais ou no sistema.

Como o sistema gráfico não dispunha na época de recursos lógicos para todo o processamento que se pretendia realizar, as imagens foram levadas para o microcomputador pelo canal serial.

A partir dessa fase, o microcomputador estará encarregado de realizar todas as fases subseqüentes do reconhecimento.

Como a dimensão da tela gráfica do PC/XT compatível é de 640 x 200 e as dimensões da imagem adquirida são de 512 x 512 pontos, fez-se necessário a escrita de um procedimento por onde o operador pudesse escolher a parte da imagem mais conveniente para sua aplicação. De posse dessa parte da imagem real, e que daqui em diante vamos nos referir como imagem, foi aplicado o processo de detecção de bordas de imagens binárias visto em 2.2. e o processo de afinamento de bordas visto em 2.3.

Ainda como parte da metodologia empregada para o reconhecimento de padrões optamos por armazenar as imagens com as bordas extraídas e afinadas em disco magnético. Como são várias as etapas até atingirmos a classificação, são muitas as imagens e estamos lidando com um sistema experimental, o

armazenamento das imagens em disco após cada etapa de seu processamento proporcionou uma grande facilidade na aplicação do processo como um todo, permitindo correções, aplicações de outros métodos e verificações. Cabe acrescentar que para sistemas de visão aplicados a robótica esse tipo de armazenamento em disco ocorre muito raramente pois todo o processamento é feito diretamente na memória do computador.

Até o momento, para uma mesma imagem, temos dois arquivos distintos: o primeiro, da parte escolhida da imagem original e, o segundo, dessa imagem com as bordas extraídas e afinadas.

Segue-se agora um novo processamento que codifica as imagens usando um código da cadeia modificado, seguindo as direções como na figura a seguir:

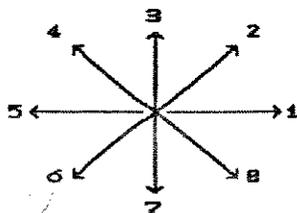


Fig.5.2 Código da cadeia utilizado

Nas figuras 5.3, 5.4 e 5.5 no final desta secção vemos, respectivamente, um exemplo de imagem inicial, uma imagem com as bordas extraídas e afinadas e, a mesma imagem codificada pelo código da cadeia mencionado.

Procurando dinamizar todas as fases do reconhecimento de padrões, dispusemos dentro de uma mesma imagem (tela) várias

figuras de uma mesma classe, obtendo assim imagens com várias figuras para a fase de aprendizado. O mesmo não foi feito para a classe de figuras referenciada como Mistas, pois elas conterão as figuras que serão submetidas ao reconhecimento, onde encontram-se misturados os quadrados, os círculos, os triângulos e os retângulos. Com isso cada imagem tornou-se um arquivo com um número variado de figuras devido à dimensão de cada uma. Tomou-se o cuidado também de escolher aleatoriamente as figuras que comporiam uma imagem, para que não houvesse acúmulo de figuras de uma mesma classe ou com dimensões aproximadas.

A distribuição das figuras por imagem ficou assim:

TABELA I  
DISTRIBUIÇÃO DAS FIGURAS

Classe	número do arquivo e quantidade de figuras				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Círculos	7	15	7	11	
Quadrados	6	9	7	9	9
Retângulos	8	8	11	10	8
Triângulos	7	7	9	8	
Mistas	10	7	8	7	6

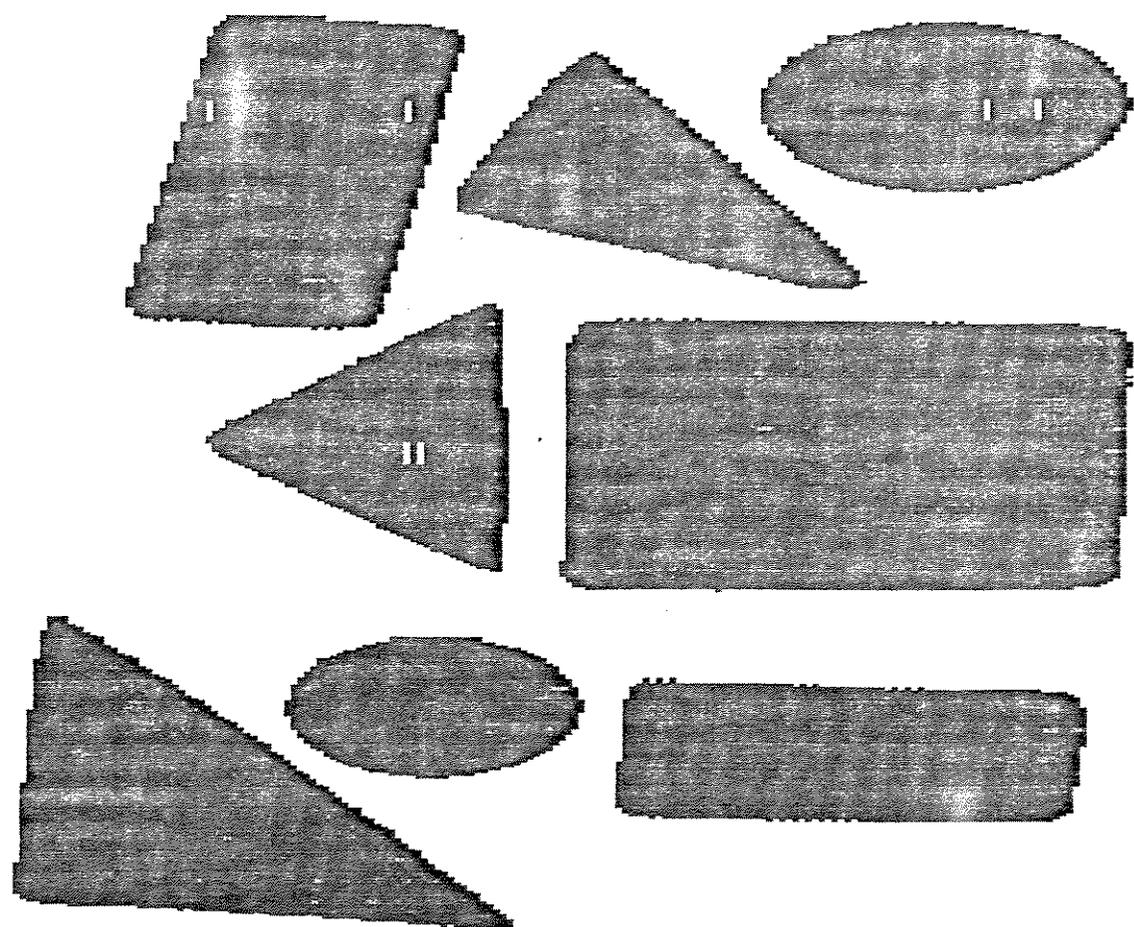


Fig. 5.3 Cena digitalizada — binária.

tecle ENTER para prosseguir e AGUARDE !

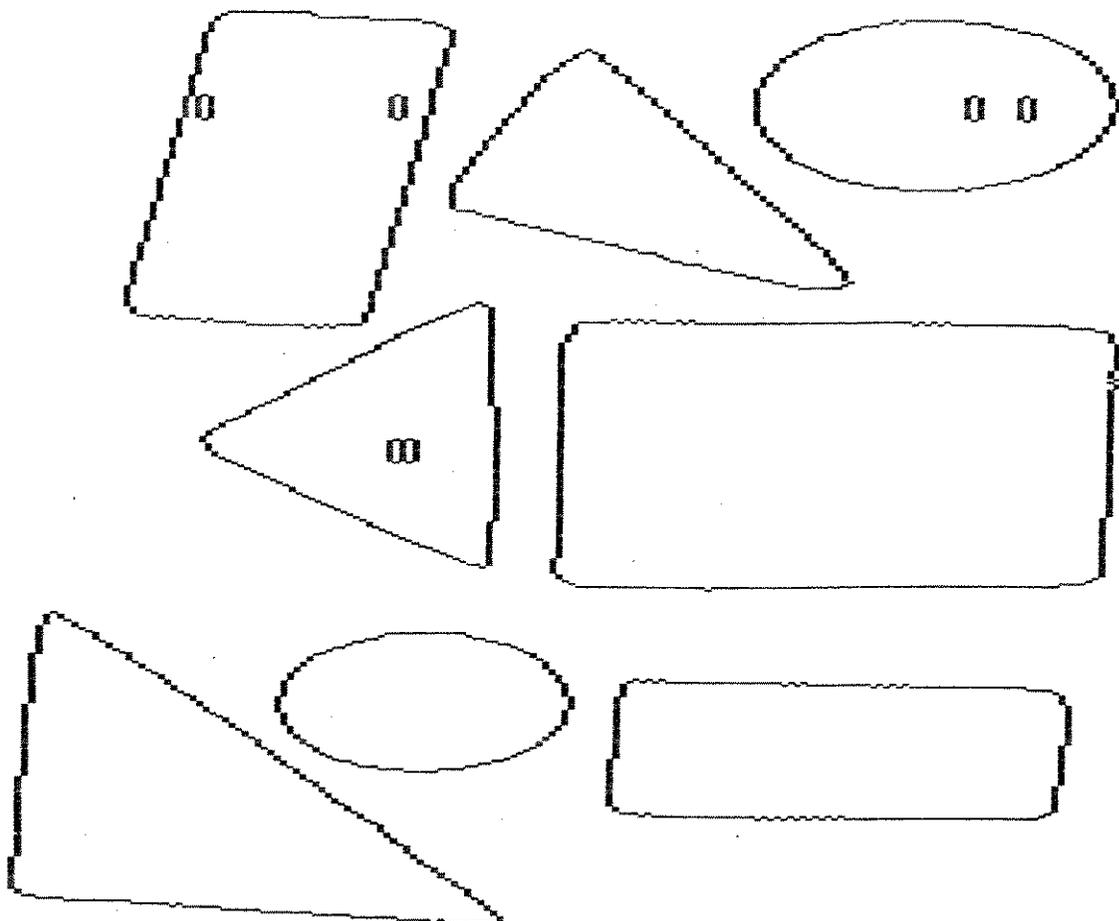


Fig.5.4 Imagem com bordas afinadas.



### 5.3 RESULTADOS

#### 5.3.1 ABORDAGEM DECISÃO-TEÓRICA

Para essa abordagem consideramos que a preparação das imagens até então feita foi suficiente. Devemos agora submeter essas classes de figuras a uma fase de aprendizado para que conheçamos melhor o comportamento dos atributos escolhido nessas classes e somente depois de realizada essa fase é que poderemos submeter outras figuras ao reconhecimento.

Para a fase de aprendizado, foram submetidas quatro classes de figuras (triângulos, círculos, quadrados e retângulos) para que fossem medidos, e ou extraídos, os seguintes atributos/características das figuras: área, perímetro, a razão altura/comprimento do retângulo envolvente, a retangularidade, a circularidade, a função de momento de primeira ordem e a de segunda ordem. Deixa-se mais uma vez ressaltado que todas essas figuras podiam, e estavam dispostas no campo de visão da câmera, em posições diversas quanto à translação e à rotação, e também possuíam diversos tamanhos. As tabelas II, III, IV e V a seguir procuram resumir o conjunto das figuras.

Obs.: 1) A unidade das medidas refere-se aos pontos do monitor de vídeo do microcomputador.

2) alt/comp = altura/comprimento; retang. = retangularidade; circ. = circularidade; fm1 = função de momento de

primeira ordem e,  $fm_2$  = função de momento de segunda ordem,  $rel$  = variância/média.

TABELA II  
CÍRCULOS - TOTAL DE 40 FIGURAS

	alt/comp	retang.	circ.	$fm_1$	$fm_2$
média	0.8622	0.7814	14.1028	4.5576	0.2154
variância	0.0278	0.0130	0.2360	1.5477	0.1462
rel.	0.0321	0.0166	0.0167	0.3396	0.6787

maior área dos círculo = 4456

menor área dos círculo = 401 ou 9% da área maior

TABELA III  
QUADRADOS -TOTAL DE 40 FIGURAS

	alt/comp.	retang.	circ.	$fm_1$	$fm_2$
média	0.8567	0.7328	16.3191	4.6943	0.2482
variância	0.1252	0.1341	0.8694	1.5480	0.2099
rel.	0.1462	0.1830	0.0533	0.3298	8.4558

maior área dos quadrados = 6420

menor área dos quadrados = 652 ou 8,7% da área maior

TABELA IV  
RETÂNGULOS - TOTAL DE 45 FIGURAS

	alt/comp.	retang.	circ.	fm1	fm2
média	0.8660	0.7853	19.9447	5.2307	9.9557
variância	0.5262	0.1670	6.5357	1.6912	17.5463
rel.	0.6077	0.2127	0.3277	0.3233	1.7624

maior área dos retângulos = 11140

menor área dos retângulos = 588 ou 5,3% da área maior

TABELA V  
TRIÂNGULOS - TOTAL DE 31 FIGURAS

	alt/comp.	retang.	circ.	fm1	fm2
média	0.9414	0.5107	23.0542	5.5767	8.7280
variância	0.3893	0.0463	2.3406	1.1449	6.2480
rel.	0.4134	0.0906	0.1015	0.2053	0.7158

maior área dos triângulos = 8100

menor área dos triângulos = 1483 ou 18,3% da área maior

A seguir estão as tabelas detalhadas das figuras submetidas a extração dos atributos.

TABELAS DE MEDIDAS DOS ATRIBUTOS DAS FIGURAS

NA FASE DE APRENDIZADO

(abordagem decisão-teórica)

coluna 1 — número da figura.

coluna 2 — área da figura (em pixel).

coluna 3 — perímetro da figura.

coluna 4 — altura/comprimento do retângulo envolvente.

coluna 5 — retangularidade.

coluna 6 — circularidade.

coluna 7 — função invariante de momento central normalizado de 1<sup>a</sup> ord

coluna 8 — função invariante de momento central normalizado de 2<sup>a</sup> ord

TRIÂNGULOS

1	2743	255.5636	0.6263	0.4469	23.8107	5.6150	10.9322
2	3285	276.6347	0.8211	0.4433	23.2958	6.1225	11.5363
3	5369	350.0906	1.3820	0.4905	22.8280	7.1822	9.5936
4	2576	236.7941	1.0441	0.5336	21.7669	5.2234	7.0230
5	4439	310.7352	1.2469	0.5426	21.7518	6.2009	2.6796
6	3214	264.5931	1.6000	0.5580	21.7827	5.6535	6.7196
7	3044	265.6641	0.5922	0.4845	23.1858	5.6851	9.0173
1	4327	312.1494	0.8515	0.4982	22.5184	6.5707	10.1653
2	2901	261.1372	0.5049	0.5416	23.5066	5.3600	9.1794
3	2721	247.0367	0.7241	0.4964	22.4282	5.4783	9.5124
4	8100	424.0734	1.0153	0.4649	22.2023	8.6611	4.2965
5	5051	343.7058	0.7845	0.4785	23.3882	7.5464	18.6071
6	3031	257.9656	0.7647	0.5486	21.9552	5.5328	7.0722
7	2638	254.3088	0.6404	0.5200	24.5159	5.1434	8.6558
1	1858	201.1372	1.4038	0.4895	21.7740	4.5061	6.3197
2	1483	169.3382	1.6154	0.6036	19.3361	3.8556	2.1783
3	3560	342.2916	0.4082	0.4036	32.9111	7.2361	34.5856
4	3989	316.0489	1.4935	0.4505	25.0406	6.3648	11.9687
5	2698	261.8945	0.5248	0.5040	25.4221	5.2191	10.1871
6	2660	242.8651	1.3333	0.5026	22.1742	5.0197	4.6184
7	1857	194.3382	1.1887	0.5562	20.3378	3.9828	0.9347
8	3626	300.5220	0.4390	0.5459	24.9072	6.2853	15.1770
9	1667	190.6813	0.6286	0.5412	21.8113	3.9260	2.8126
1	3225	269.2793	1.3284	0.5408	22.4841	5.4585	6.1880
2	4506	317.0783	1.1250	0.5172	22.3122	6.5326	7.4884
3	1575	182.1666	1.6500	0.5966	21.0696	3.8510	2.6396
4	2834	259.2205	0.7263	0.4323	23.7104	5.9285	13.0680
5	1597	193.3382	0.5467	0.5193	23.4062	3.9642	4.3993
6	3035	267.6225	0.4324	0.5696	23.5986	5.7309	12.3153
7	1986	200.4509	1.1754	0.5200	20.2319	4.4120	1.5900
8	1978	223.3382	0.5714	0.4906	25.2174	4.6310	9.0684

QUADRADOS

1	8217	375.0367	0.8839	0.7411	17.1173	7.9330	0.4368
2	3727	252.2083	0.8537	0.6493	17.0671	5.6248	0.4352
3	3680	244.9117	0.8382	0.9494	16.2994	5.2252	0.4064
4	6420	336.6935	0.8558	0.6936	17.6577	7.0639	0.6274
5	4057	255.3038	0.8901	0.5504	16.0661	6.8938	0.2815
6	4033	257.6397	0.9041	0.8371	16.4588	5.4918	0.1422
1	5674	315.6641	0.8529	0.6394	17.5615	6.8595	0.8737
2	1821	170.1250	0.8704	0.7175	15.8937	3.9386	0.1532
3	652	97.6396	0.9091	0.6586	14.6219	2.6509	0.0378
4	1859	177.3970	0.8542	0.9446	16.9283	3.7535	0.1152
5	774	109.5980	0.8824	0.7588	15.5190	2.5364	0.0553
6	798	107.4387	0.8947	0.6176	14.4650	3.1293	0.1416
7	798	109.0955	0.8974	0.5846	14.9146	3.1409	0.1297
8	4023	259.6053	0.8667	0.5731	16.7524	6.4074	0.5305
9	3887	258.0073	0.9157	0.6162	17.1257	5.8545	0.0743
1	3452	239.5392	0.9130	0.7941	16.6220	5.1444	0.1800
2	5614	314.5342	0.8476	0.6007	17.6223	7.0262	0.9020
3	1829	168.1838	0.8936	0.9265	15.4652	3.7494	0.0970
4	1874	177.3970	0.8542	0.9522	16.7928	3.7811	0.1437
5	3834	257.5808	0.9221	0.7013	17.3051	5.4652	0.1314
6	3801	254.4509	0.9250	0.6421	17.0337	5.6905	0.0752
7	3969	260.7352	0.8736	0.6003	17.1285	6.0333	0.4574
1	1747	164.4264	0.8958	0.8464	15.4757	3.6934	0.0986
2	2624	202.3920	0.8750	0.5785	15.6107	5.5149	0.2498
3	1845	173.2377	0.8475	0.6254	16.2663	4.1953	0.2970
4	1347	148.2254	0.8889	0.7483	16.3109	3.3344	0.0740
5	2819	216.5686	0.9464	0.9498	16.6378	4.5730	0.0574
6	1490	157.8823	0.8776	0.7072	16.7294	3.4972	0.0909
7	834	118.1838	0.7941	0.9085	16.7475	2.5318	0.1754
8	3067	227.6397	0.8636	0.8153	16.8959	4.8002	0.2782
9	865	114.5097	0.8780	0.5860	15.1589	3.1950	0.1007
1	2521	198.1838	0.8571	0.9379	15.5799	4.3662	0.2075
2	8229	381.3627	0.9076	0.6403	17.6738	8.2028	0.4238
3	1842	174.9950	0.8475	0.6244	16.6250	4.1139	0.3314
4	1364	150.4265	0.8333	0.9279	16.5895	3.1961	0.1175
5	1435	153.1544	0.8913	0.7609	16.3458	3.3809	0.0828
6	807	113.5980	0.8000	0.8235	15.9907	2.5543	0.1788
7	3087	221.8479	0.8750	0.5512	15.9431	6.0728	0.4392
8	2175	188.6691	0.9020	0.9271	16.3660	4.0328	0.1270
9	827	110.8529	0.8974	0.6059	14.8590	3.1233	0.1189

CÍRCULOS

1	3991	236.3798	0.8816	0.7838	14.0004	6.2817	0.3202
2	4019	240.0367	0.8462	0.7807	14.3363	6.2708	0.5069
3	2343	182.3382	0.8793	0.7921	14.1900	4.7935	0.1448
4	4361	250.3504	0.8875	0.7678	14.3718	6.5743	0.4000
5	1630	155.3382	0.9167	0.7718	14.8036	4.0306	0.0333
6	3358	217.9656	0.8986	0.7849	14.1480	5.7955	0.2145
7	4088	241.5220	0.9333	0.7787	14.2693	6.3869	0.0981
1	3915	233.9656	0.8800	0.7909	13.9821	6.2152	0.2507
2	3061	209.1372	0.8529	0.7761	14.2889	5.5247	0.2644
3	3013	206.8945	0.8382	0.7773	14.2069	5.4809	0.4085
4	1180	127.6397	0.9024	0.7779	13.8067	3.4226	0.0534
5	1837	159.7818	0.8654	0.7850	13.8978	4.2524	0.1468
6	4238	246.9362	0.8375	0.7907	14.3883	6.4858	0.5313
7	2657	197.8235	0.8571	0.7810	14.7287	5.0130	0.2326
8	805	105.9828	0.8571	0.7667	13.9532	2.8628	0.0663
9	399	75.0122	0.8400	0.7600	14.1023	1.9980	0.0472
10	401	74.7696	0.8750	0.7956	13.9414	1.9825	0.0614
11	429	76.7696	0.8077	0.7857	13.7379	2.0610	0.0857
12	3281	216.0661	0.8310	0.7832	14.2288	5.6311	0.3592
13	1841	160.6102	0.9020	0.7847	14.0118	4.2534	0.0749
14	1625	151.7818	0.8571	0.7896	14.1771	3.9944	0.1492
15	771	104.3259	0.8235	0.8099	14.1166	2.7437	0.1202
1	3067	205.8235	0.8939	0.7876	13.8126	5.5287	0.1643
2	3036	205.8235	0.8657	0.7813	13.9537	5.4888	0.3767
3	4100	239.3798	0.8701	0.7947	13.9763	6.3568	0.3372
4	4309	244.7941	0.8500	0.7921	13.9067	6.5308	0.5100
5	3238	215.3798	0.8429	0.7840	14.3263	5.6851	0.3175
6	2709	196.4092	0.8730	0.7818	14.2402	5.1458	0.1785
1	1546	145.8823	0.8723	0.8023	13.7656	3.8913	0.1387
2	4086	238.7941	0.8590	0.7819	13.9556	6.3765	0.4788
3	434	78.1838	0.8462	0.7587	14.0846	2.0454	0.0420
4	1903	162.6102	0.8679	0.7806	13.8949	4.3445	0.1729
5	1246	130.8112	0.8810	0.8018	13.7332	3.4935	0.1204
6	4456	251.2793	0.8642	0.7859	14.1700	6.6212	0.3986
7	434	78.4264	0.8462	0.7587	14.1721	2.0820	0.0753
8	790	106.3259	0.8286	0.7783	14.3104	2.7515	0.1268
9	1987	166.8529	0.8364	0.7854	14.0110	4.4521	0.2755
10	902	112.5686	0.8158	0.7657	14.0484	2.9790	0.1331
11	476	81.8406	0.8214	0.7391	14.0712	2.1866	0.0927

RETANGULOS

1	3499	245.9240	1.1538	0.7177	17.2845	5.3448	2.0091
2	5078	307.8724	0.8584	0.4633	18.6659	8.5929	22.9576
3	2869	216.2255	1.1091	0.8551	16.2961	4.7043	0.3946
4	2961	414.9680	0.8431	0.1500	58.1555	11.1788	116.7495
5	4552	292.7524	1.6250	0.8932	18.8278	5.9858	5.3180
6	3044	242.4975	0.4483	0.8971	19.3183	5.1200	8.3375
7	3929	273.0367	0.6771	0.6296	18.9740	5.8300	5.4669
8	1575	235.5980	0.2019	0.7212	35.2422	4.8664	19.2426
1	4785	303.4387	1.9423	0.9111	19.2424	6.2849	9.5989
2	3327	236.4265	0.5432	0.9335	16.8012	5.2214	5.0497
3	2639	225.5980	0.4000	0.9131	19.2855	4.8417	8.4280
4	5039	326.1249	0.4426	0.7649	21.1069	6.7592	18.2186
5	5737	350.5686	0.3835	0.8458	21.4221	7.3251	24.2807
6	3127	224.7696	1.1923	0.9699	16.1565	4.8012	0.3196
7	3799	266.2255	0.5412	0.9716	18.6565	5.4581	5.4708
8	4673	299.8823	0.5000	0.9346	19.2445	6.1848	9.6272
1	3291	239.1544	0.5926	0.8465	17.3792	5.1712	4.5979
2	4026	295.0122	0.3362	0.8899	21.6175	6.2643	19.5462
3	11140	449.3798	1.3700	0.8131	18.1277	9.1767	7.4800
4	1177	143.9411	0.5294	0.8548	17.6033	3.1585	2.3061
5	588	102.5269	0.4500	0.8167	17.8772	2.3396	1.6851
6	854	125.8407	1.6296	0.7189	18.5432	2.7654	2.0238
7	1408	167.7402	2.1786	0.8244	19.9835	3.5322	4.0269
8	6921	358.0661	1.4211	0.8432	18.5250	7.2687	5.5813
9	3761	253.3554	0.5663	0.9641	17.0670	5.4423	4.8818
10	1575	175.4975	2.1379	0.8760	19.5552	3.6831	4.0255
11	998	140.9411	0.4259	0.8035	19.9042	3.0249	3.4885
1	4236	305.2965	0.4237	0.7180	22.0033	6.4240	19.6901
2	3647	246.8112	1.3636	0.8841	16.7030	5.3178	2.0710
3	855	126.5686	1.5172	0.6701	18.7364	2.8359	2.1306
4	1377	166.1078	1.0182	0.4471	20.0376	4.4443	8.0867
5	695	109.8407	1.3704	0.6957	17.3597	2.4827	1.0505
6	1262	146.0417	0.5000	0.9334	16.9003	3.2647	2.4897
7	2214	205.5392	0.5946	0.6800	19.0815	4.4264	5.0007
8	1643	182.1078	0.7500	0.4738	20.1846	4.6107	8.3181
9	3960	264.2255	0.6322	0.8276	17.6301	5.5952	4.4859
10	1073	145.3554	0.4545	0.7804	19.6908	3.1392	3.6948
1	3449	247.2793	1.0972	0.6064	17.7289	5.5922	3.0730
2	4171	260.5686	1.2097	0.8970	16.2781	5.6023	0.8290
3	4114	305.1544	0.3729	0.7924	22.6347	6.3683	20.6932
4	2010	186.1494	0.9091	0.5076	17.2396	5.2518	6.1473
5	3761	259.8406	0.5402	0.9198	17.9519	5.4857	6.1683
6	2297	201.7402	1.5122	0.9036	17.7184	4.2214	2.0317
7	3739	249.9412	0.5926	0.9617	16.7078	5.4058	4.1281
8	6118	367.3970	0.3885	0.8151	22.0629	7.5857	26.8043

Pelos atributos medidos, nota-se que os círculos pertencem a classe de figuras mais bem comportadas matematicamente, no sentido de que três dos seus atributos apresentam pouca variação em torno da média. As funções de momento para atingirem menor grau de dispersão em torno da média e portanto, para poderem ser representativas e significativas como as demais, deveriam ser calculadas em graus maiores. Como podia-se esperar, nos círculos está concentrada a menor dispersão do atributo circularidade, além de ser o atributo mais bem comportado entre todos por todas as figuras.

Como os círculos, os quadrados também têm na circularidade uma forte medida classificatória, que situa-se na faixa entre 15 e 18 enquanto os círculos ficam entre 14 e 15.9. Nota-se que ocorre uma sobreposição desses atributos. Outras semelhanças ficam a cargo da função de momento de primeira ordem, retangularidade e circularidade, sendo que a função de momento de segunda ordem apresenta-se com resultados bem distintos.

Em contradição a um julgamento prévio, a retangularidade não é tão expressiva para os retângulos, inclusive com média próxima a média dos quadrados e dos círculos, assumindo também a maior variância de todas as classes. O entendimento dessa questão é fácil, pois a retangularidade expressa a razão entre a área do objeto pela área do retângulo mínimo envolvente, e assume essa variedade de valores devido aos diversos tamanhos de todas as classes de figuras. Essa medida somente consegue valores realmente

distintos para valores da circularidade acima de 16,0, onde pode atuar como discriminadora. Outras medidas também importantes nessa faixa são: a função de momento de segunda ordem e a razão altura/comprimento.

Como a circularidade mede a complexidade das bordas, para os triângulos, frente as outras classes mais simples, essa medida é bastante significativa e discriminatória, aliada a retangularidade que apresenta-se com os valores mais baixos de todas as classes em questão.

Partindo dessas premissas foi montado o seguinte reconhecedor, em formato de árvore

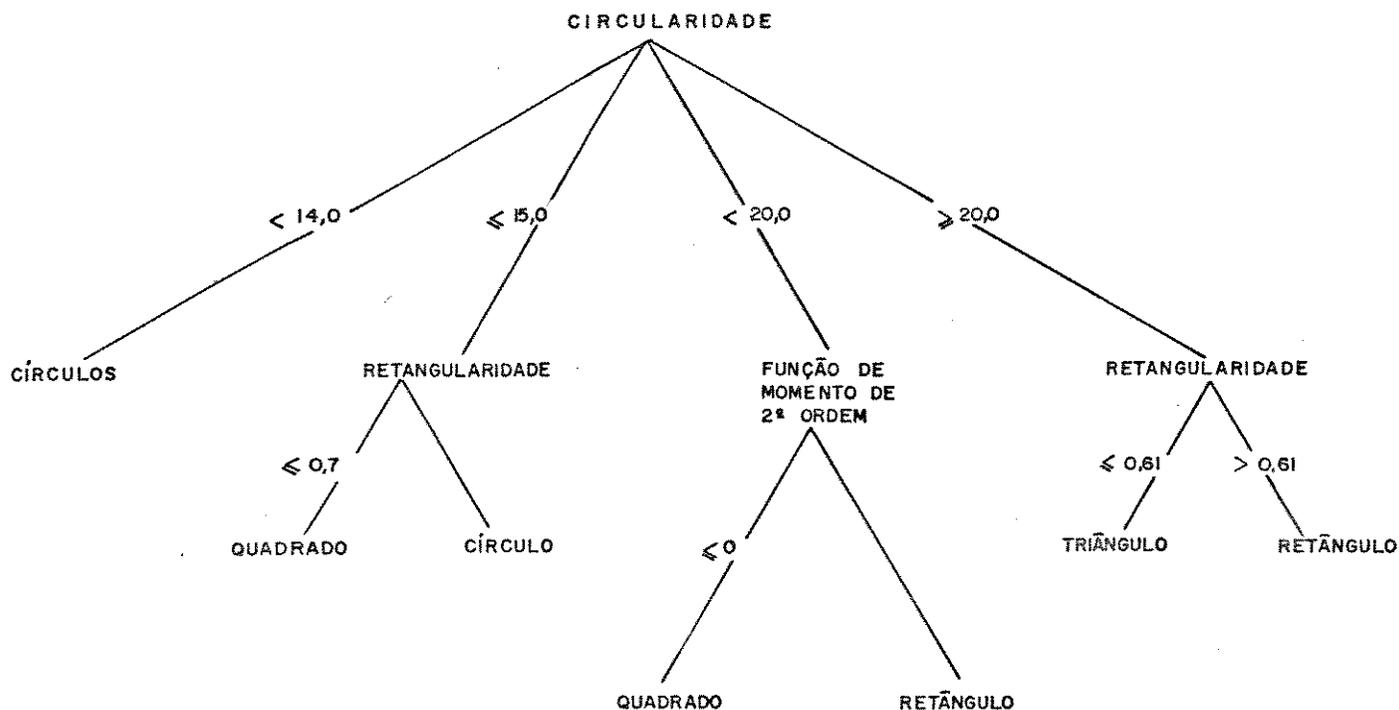


Fig. 5.6 Reconhecedor 1.

e que obteve o seguinte desempenho:

TABELA VI  
TEMPO DE RECONHECIMENTO

Classe de figuras	Tempo	Tempo médio p/ figura
Círculos (40)	2min 25 seg	3,62 seg
Quadrados (40)	3min 10 seg	4,75 seg
Retângulos (45)	3min 53 seg	5,18 seg
Triângulos (31)	3min 32 seg	6,84 seg
Mistas (38)	3min 10 seg	5,00 seg

Utilizando-se esse reconhecedor constatamos que grande parte do tempo de extração de medidas era absorvida na extração das funções de momento de primeira e segunda ordem. A partir dessa constatação rearranjamos o nosso reconhecedor para excluirmos essas funções da árvore de decisão, e obtivemos o seguinte reconhecedor em formato de árvore

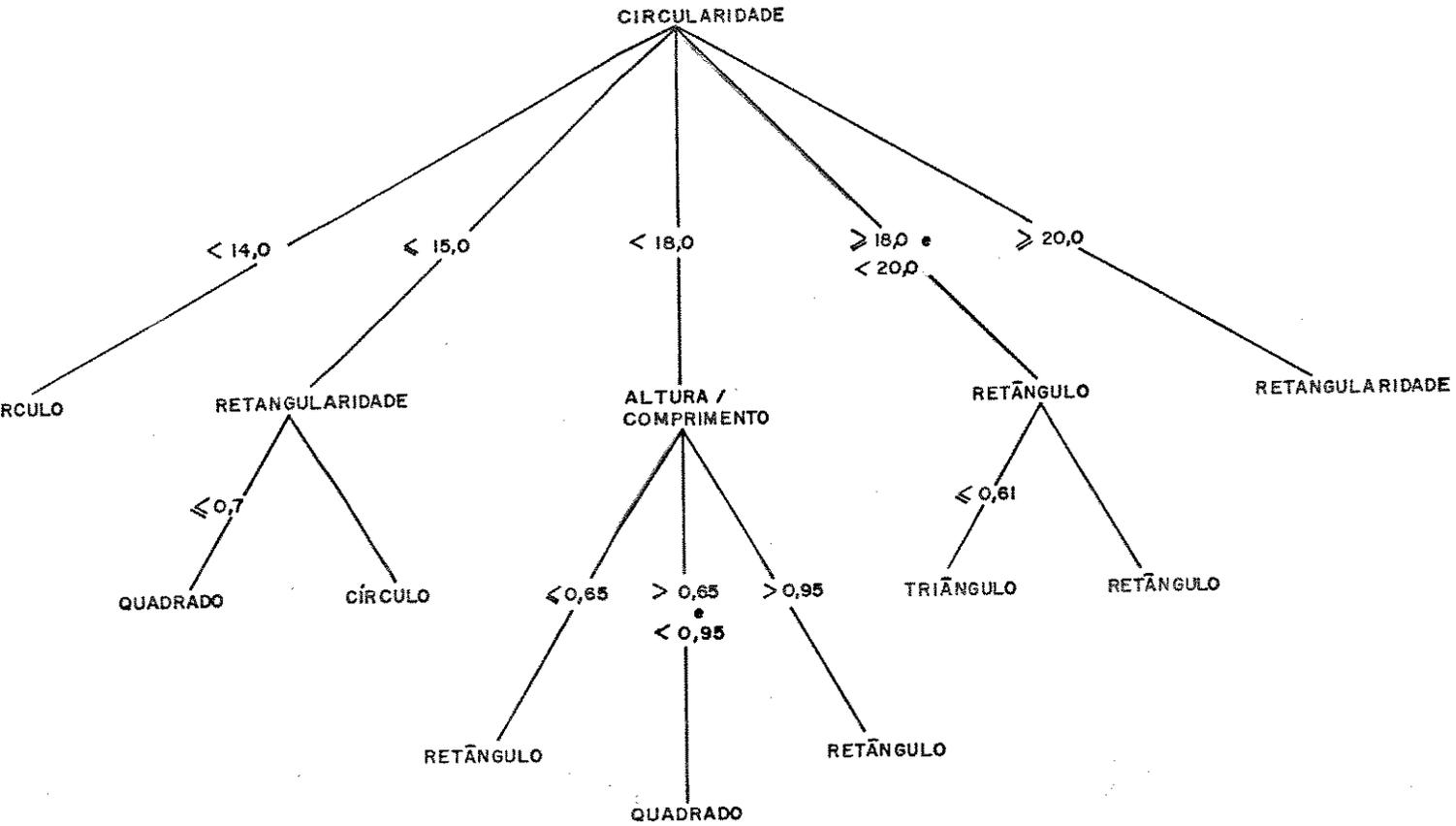


Fig. 5.7 Reconhecedor 2.

e que obteve o seguinte desempenho:

TABELA VII

## TEMPO DE RECONHECIMENTO

Classe de figuras	Tempo	Tempo médio p/ figura
Círculos (40)	41 seg	1,025 seg
Quadrados (40)	50 seg	1,25 seg
Retângulos (45)	1 min 05 seg	1,33 seg
Triângulos (31)	50 seg	1,61 seg
Mistas (38)	50 seg	1,32 seg

Reduzindo sensivelmente o tempo gasto para o reconhecimento sem prejudicar o resultado final.

5.3.2 ABORDAGEM ESTRUTURALANÁLISE SINTÁTICA DE REGIÕES DE BORDAS E OUTRAS CURVAS

O objetivo final da maioria dos sistemas reconhecedores de padrão é atuar sobre os dados de entrada como são apresentados, logo depois de sua quantificação, ou digitalização. No nosso caso prático uma fase de segmentação foi precedida objetivando separar as diversas figuras da imagem a serem reconhecidas, simplificá-las considerando somente seu contorno e posteriormente armazená-las sob forma de um código da cadeia modificado.

Notou-se também que a fase de quantificação apresentou ruídos aleatórios na imagem devido ao dispositivo de aquisição utilizado, a câmera de vídeo, e a iluminação ambiente. Esses ruídos, que puderam ser controlados parcialmente pela iluminação e no ajuste do limiar de luminosidade, propagaram-se pelas fases subsequentes



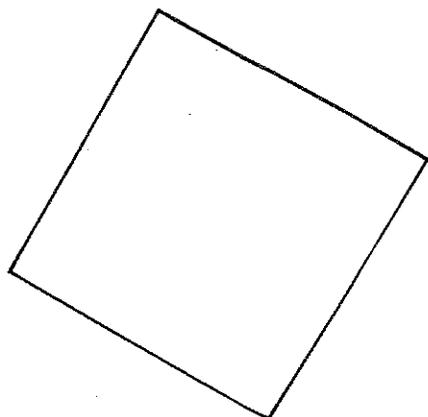


Fig.5.8 Quadrado inclinado  $-60^\circ$ .

a expressão gerada seria:

$$(6^k (56)^J 6) (8^k (78)^J 8) (2^k (12)^J 2) (4^k (34)^J 4) \quad (2)$$

caso fosse aplicado o código da cadeia modificado visto acima.

Entretanto o resultado prático da digitalização de quadrados pode ser mostrado em exemplos nas figuras abaixo, de onde somente tomamos a parte dos vértices dos quadrados para exemplificarmos o ruído apresentado na aplicação.

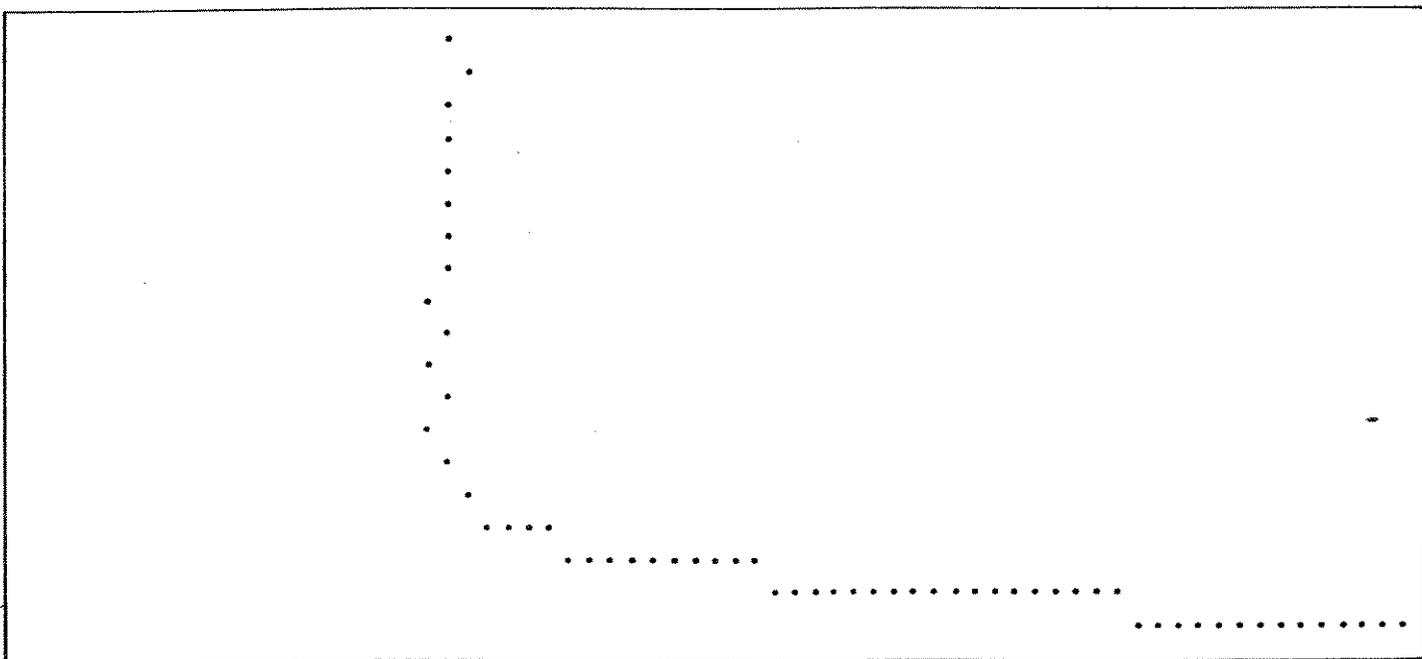


fig.5.9 Digitalização do vértice de um quadrado.

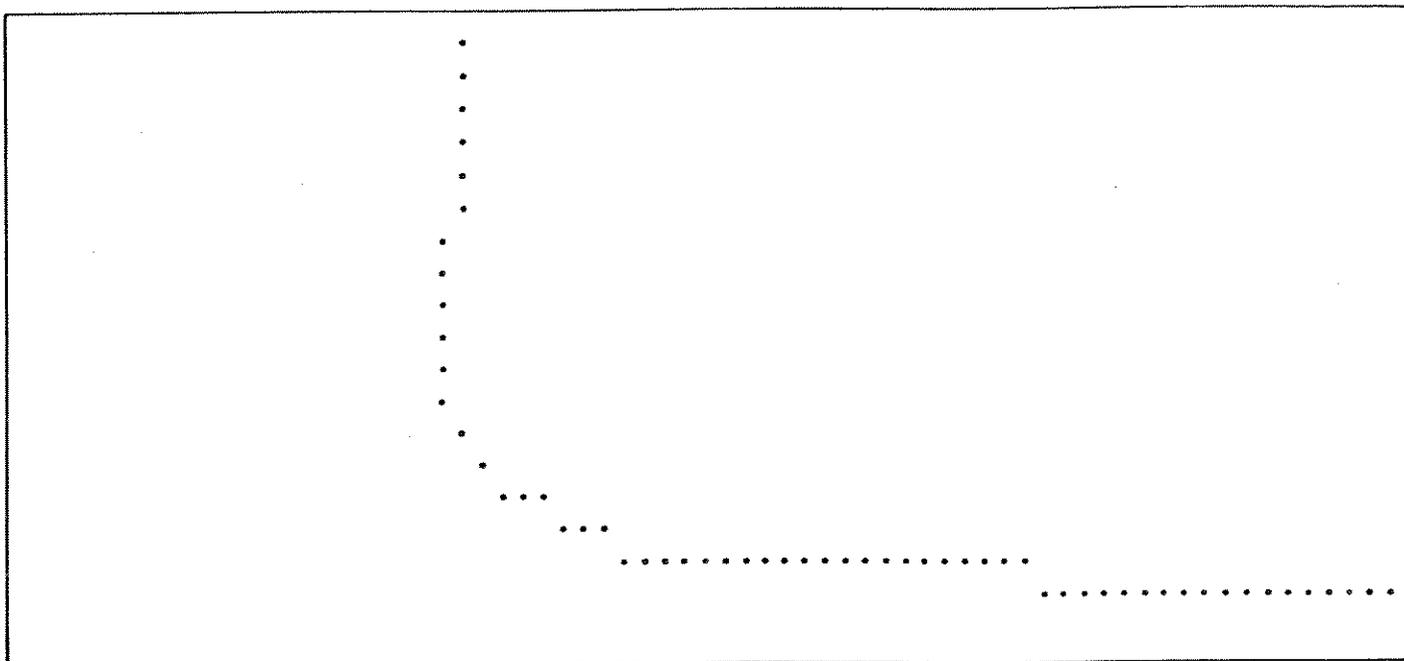


fig. 5.10 Digitalização do vértice de um quadrado.

as seguintes expressões representam os vértices dos quadrados das figuras:

$$\frac{8 \ 6 \ 7^5}{rv} \mid \frac{6 \ 8 \ 6 \ 8 \ 6 \ 8^3 \ 1^3 \ 8 \ 1^0}{v} \mid \frac{8 \ 1^{17} \ 8 \ 1^{12}}{rh} \quad (3)$$

$$\frac{7^5 \ 6}{rv} \mid \frac{7^5 \ 8^3 \ 1^2 \ 8 \ 1^2 \ 8 \ 1^{20}}{v} \mid \frac{8 \ 1^{16}}{rh} \quad (4)$$

onde podemos ver que *rv* corresponde ao segmento de reta vertical, *v* ao vértice e *rh* ao segmento de reta horizontal.

Como essas expressões (3) e (4), várias outras foram constatadas, sem que pudéssemos generalizá-las como a expressão (2), onde não existe ruído.

Dada essa enorme variedade observada de expressões que formalizam os vértices de uma única classe de figuras, a aplicação de uma gramática diretamente sobre esses pontos baseada na teoria formal das linguagens /Apêndice 2/, acarretaria um número de regras necessárias muito grande para todas essas variações. Ainda se o ruído não estivesse presente, como na expressão (2), para reconhecermos um quadrado de lado *l*, independente de sua posição, rotação em torno de um eixo e tamanho, poderíamos aplicar uma gramática livre-do-contexto /Pav 79/, mas novamente o número de regras necessárias seria muito grande, por todas essas variações.

Lembramos que a busca por um enquadramento dos códigos da cadeia a uma gramática regular ou livre-do-contexto deve-se à facilidade relativa de resolução — reconhecimento — computacional da gramática, o que não ocorre com as gramáticas sensíveis ao contexto.

Sumarizando até esse ponto, a aplicação da metodologia

sintática para esse tipo de regiões de bordas, encontra dois entraves que devem ser ultrapassados:

- 1) os efeitos do ruído que geram cadeias, codificadas pelo código da cadeia, muito complexas.
- 2) mesmo com a eliminação do ruído, pode ser necessária a aplicação de gramáticas sensitivas ao contexto caso desejamos trabalhar com todo o objeto codificado.

A essas duas dificuldades soma-se a grande quantidade de informação a ser manipulada pela abordagem sintática, e é neste ponto que podemos amenizar essas dificuldades reduzindo o volume de informação com a preservação da forma da figura.

Essa redução pode ser conseguida usando-se um dos métodos de aproximação poligonal vistos anteriormente em 4.3. Segundo Lam em /Lam 88/ algumas vantagens práticas do uso de polígonos são: 1) redução das exigências de memória e, 2) uma classificação mais rápida.

Um argumento a parte desse seria que a codificação pelo código da cadeia já teria aproximado as figuras por um polígono, de modo econômico e natural, mas como em /Ram 72/ nessa aproximação os polígonos contam com um grande número de arestas, não estando em sua forma mais compacta, e também o tamanho dessas arestas é comparável ao tamanho do ruído introduzido pela discretização.

Para efetivação de um reconhecedor estrutural necessitamos realizar mais uma etapa no pré-processamento que consistiu da redução das figuras a uma forma poligonal. Para tanto utilizamos o

método de Hung & Kaswand /Hu 83/ para detecção dos pontos críticos.

Inesperadamente, esse método de aproximação poligonal mostrou-se muito sensível as nossas classes de figuras, como mostra a Fig.5.11, já que o nosso objetivo era somente encontrar os pontos dos vértices dessas figuras. Muitos ruídos de imagem foram marcados como pontos críticos mesmo não sendo pontos de vértices de figuras.

Para solucionar o problema aplicamos o método de Rosenfeld & Johnston /Ros 73/ para calcular os cossenos dos ângulos formados pela figura nesses pontos. Medimos o cosseno entre o ponto marcado como crítico e seus vizinhos a esquerda e a direita. Tomamos uma distância variável entre 5 e 10 pontos verificada como ideal experimentalmente para nossas classes de figuras e procuramos o menor cosseno nesta vizinhança de modo que exprimisse o maior ângulo formado. Esse procedimento evitou, por exemplo, que encontrássemos pontos críticos nos círculos. A figura 5.12 mostra como ficaram os pontos críticos depois de aplicado esse método.

Temos agora um conjunto de vértices  $V$  das figuras, pelas quais podemos traçar segmentos de retas e obter uma nova figura que pouco diferencia da figura original, e é através desse conjunto de vértices que originam esses segmentos de reta que pretendemos reconhecê-las. As tabelas detalhadas dos segmentos das figuras estão no Apêndice 3.

Notamos entretanto casos em que dois ou mais segmentos formam um lado da figura e que o vértice que os separa não consegue ser

removido pelo método de Rosenfeld & Johnston. Fez-se então necessária a união desses segmentos para que as figuras fossem reduzidas ao menor número de segmentos possíveis. Para isso, a cada dois segmentos consecutivos e colineares aplicamos uma rotina de união e reduzimos assim os quadrados e os retângulos a somente quatro segmentos e os triângulos a três e os círculos a nenhum. Obtivemos então uma estrutura codificada da imagem a qual vamos reconhecer.

Para efeitos de praticidade não consideramos os segmentos com menos de 10 pixels, já que nota-se que nos vértices das figuras não existe somente um ponto crítico, mas as vezes três ou quatro.

Depois disso normalizamos os segmentos em relação ao perímetro da figura e calculamos sua inclinação.

A partir desse segmentos pudemos reconhecer suas formas partindo das seguintes constatações:

círculos → não apresentam redução poligonal a nenhum segmento.

quadrados → são formados por quatro segmentos de tamanhos iguais, podendo variar em até 7 % do perímetro da figura, paralelos dois a dois.

retângulos → formados por quatro segmentos de tamanhos iguais dois a dois (7% de variação) e paralelos, mas não iguais um a um.

triângulos → como somente consideramos figuras fechadas, são as únicas formadas por somente três segmentos.

O reconhecimento estrutural praticamente igualou-se no tempo de nosso primeiro reconhecedor da abordagem decisão-teórica que

fez uso dos momentos invariantes de primeira e segunda ordem, mas mostrou-se muito mais lento que o segundo reconhecedor montado. Vejamos a tabela:

TABELA IIX  
TEMPO DE RECONHECIMENTO

Classes de figuras	Tempo	Tempo médio por figura
Círculos (40)	1 min 58 seg	2,95 seg
Quadrados (40)	2 min 54 seg	4,35 seg
Retângulos (45)	3 min 11 seg	4,24 seg
Triângulos (31)	2 min 43 seg	5,26 seg
Mistas (38)	2 min 10 seg	3,42 seg

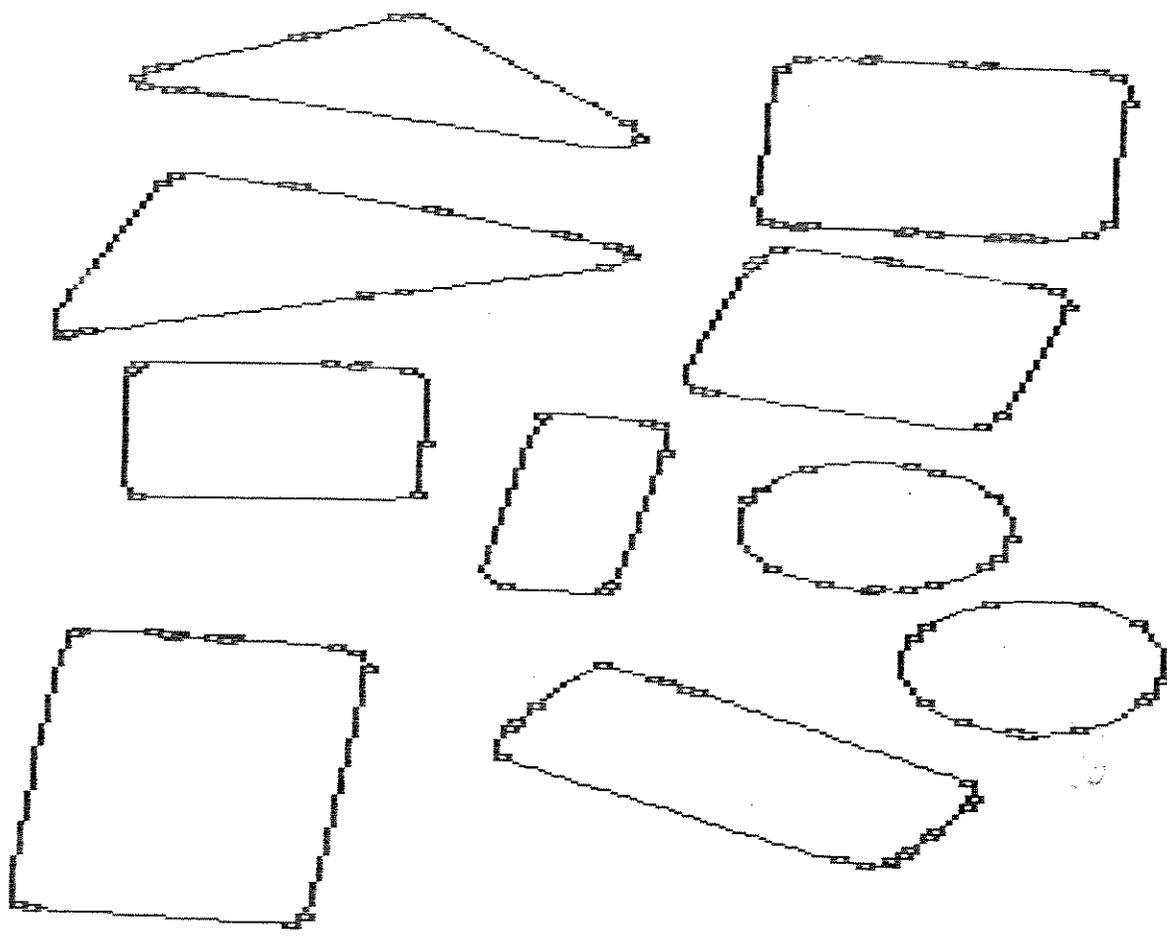


Fig. 5.11 Aplicação do método de Hung & Kaswand.

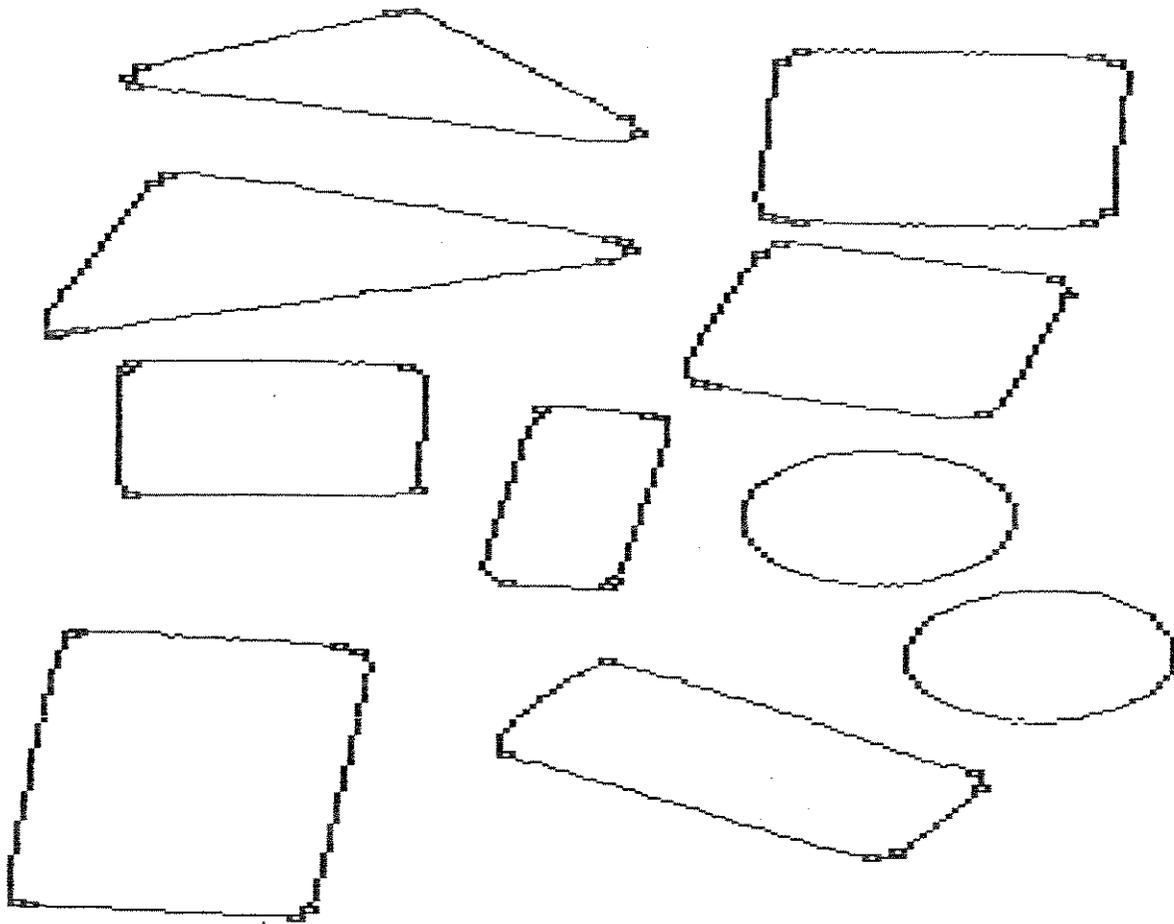


Fig. 5.12 Aplicação do detector de ângulos.

COMENTÁRIOS

A abordagem estrutural para essa aplicação também contou com uma fase de aprendizado, como na abordagem decisão-teórica, só que de uma maneira diferenciada e bem mais exaustiva.

A fase de aprendizado da abordagem decisão-teórica preocupou-se com a escolha dos atributos e medidas mais representativas para cada classe de figuras, enquanto na abordagem estrutural o que mais tempo tomou foi a eliminação dos problemas causados pela digitalização da imagem. Esse problema afeta muito essa última abordagem pois deforma a figura e é com essa forma distorcida que todo o processamento é feito e por onde essa distorção vai propagando.

A primeira constatação que se faz é quanto a resolução e à fidelidade da representação das figuras filmadas na tela do computador. O pixel que representa um elemento de imagem não possui uma forma quadrada ou esférica (ou próximo disto) para que pudéssemos visualizar em escala igual, tanto na vertical como na horizontal, a imagem. O pixel do terminal do microcomputador utilizado tem dimensões de 16 x 5 unidades (horizontal x vertical) numa tela de 640 x 200 pixels, o que provoca uma verticalização das figuras, ou seja, um círculo nessa tela tem forma de elipse na vertical.

Isso torna-se um problema sério quando desejamos reconhecer, ou distinguir visualmente, quadrados e retângulos, pois ambos

podem ser confundidos. Se tomarmos um retângulo com lado maior na horizontal este se parece com um quadrado, e um quadrado sempre se parece com um retângulo.

Além desse problema de não podermos constatar visualmente o resultado do reconhecedor estrutural existe também o problema da dimensão da figura sujeita ao reconhecedor. Para figuras de no máximo quatro lados ou vértices, nesse terminal gráfico, é desejável que elas estejam representadas por um contorno formado por mais de 200 pixels. Figuras menores causaram dois tipos de problemas que comprometeram o reconhecedor estrutural: 1) tiveram um de seus lados definidos por um segmento muito pequeno, as vezes menor do que 10% do comprimento do perímetro, o que causariam um elevação da complexidade do algoritmo de reconhecimento para considerá-los tão grande que poderia até inviabilizar o reconhecimento, pois aumentaria muito o número de regras e considerações a serem feitas, e 2) os seus vértices tornariam-se tão grandes em relação aos lados que não permitiriam definir o tipo de figura a ser reconhecida nem visualmente.

Esses dois problemas de dimensionamento encontraram dois agravantes consideráveis em nossa aplicação que foram: a baixa qualidade da câmera de vídeo, e os ruídos apresentados pelo digitalizador, na forma de pequenos traços ou polígonos de 18 pixels de perímetro, como mostram as imagens na página 5-7.

Esse conjunto de problemas quando encontra uma figura formada por poucos pixels de contorno (exemplificando em 100-150) pode mascarar totalmente um lado ou um vértice da figura e por isso que

evitamos considerar pequenos segmentos na imagem.

A dificuldades citadas acima, e que podem ocorrer em muitos sistemas de visão computacional, são originados unicamente pelo realismo das figuras, e provocaram várias modificações nos algoritmos previstos e já utilizados na literatura que quase na totalidade manipulam imagens ideais ou montadas.

Essas modificações e adaptações quase nunca se mostram óbvias e devem ser baseadas firmemente na aplicação objetivada e nas condições apresentadas tornando-se assim muito dependentes da aplicação e inovadoras. Assim sendo são fruto de várias tentativas e experimentos, tornando-se o processo criativo e ao mesmo tempo desgastante.

#### 5.4 CONCLUSÕES

Diante das duas principais abordagens para reconhecimento de padrões optamos por implementar dois modos de atuação dentro da abordagem simbólica, as chamadas abordagem decisão-teórica e a abordagem estrutural. Essa escolha foi feita devido a constatação na literatura pesquisada de uma maior predominância da abordagem simbólica nos meios industriais que envolvem a robótica, mostrando um profundo entrosamento com os aspectos mais recentes da engenharia.

Essa implementação possibilitou-nos, além das conclusões nas quais adentraremos, uma segura e prática visão da vasta e

aplicativa área que é a visão computacional.

#### §. meios de estudo

Situando-nos em nossos experimentos que alcançaram o objetivo inicial do reconhecimento de figuras de imagens reais usando primeiramente a abordagem decisão-teórica e depois a abordagem estrutural, podemos dizer que, quanto aos meios de estudo e comparativamente uma a outra, a abordagem decisão-teórica possui uma literatura de alcance mais prático e imediato, refletindo assim o seu atual estado de consolidação na tecnologia e em aplicações industriais, onde é a preferida; no entanto, como ultimamente existe uma tendência pelo estudo dos métodos sintáticos/estruturais, também há uma contribuição muito grande por parte de vários artigos e livros, porém estes exigem uma amplitude maior de conhecimento e conceitos necessários para estudá-la.

#### §. resultados

Esse aspecto inicial propaga-se nas aplicações fazendo com que na abordagem decisão-teórica encontremos com facilidade situações já abordadas e resolvidas e que podem servir de auxílio ao caminho que seguiremos, enquanto que na abordagem estrutural encontramos uma grande coleção de conceitos e indicações para aplicações espalhadas e que devemos reuni-las e aplicá-las,

montando assim uma aplicação particular em totalidade.

A diferença entre esses caminhos a serem seguidos para atingirem uma ou outra abordagem fez com que o tempo de estudo, de desenvolvimento do assunto e de implementação fosse muito superior para a abordagem estrutural relativamente à abordagem decisão-teórica.

Essas diferenças, inerentes as duas abordagens, surgiram logo na fase de preparação das imagens. Enquanto a abordagem decisão-teórica satisfez-se com a detecção de bordas e o afinamento, a abordagem estrutural foi mais longe, exigindo um custoso e especial processo de aproximação poligonal. Devemos esclarecer que no caso da abordagem decisão-teórica o afinamento não é uma operação fundamental e sim facilitadora dos processos subsequentes, tendo pouca influência no resultado final, enquanto que na abordagem estrutural sua aplicação é essencial. Essa exigência acarreta um maior gasto de tempo.

Para as fases seguintes a comparação entre as duas abordagens é mais sutil por depender exclusivamente das classes de figuras em atuação. Restringindo-nos a aplicações sobre as quatro figuras geométricas simples a abordagem decisão-teórica mostrou-se muito menos susceptível a erros e muito mais rápida, principalmente em seu segundo reconhecedor, visto a boa escolha dos atributos medidos. Outro aspecto interessante que foi observado foi que a abordagem estrutural não se apresentou tão invariante as transformações geométricas sofridas pelas figuras, especialmente à escala e a rotação, quanto a abordagem decisão-teórica. Fato esse

que foi agravado pela resolução gráfica do microcomputador em relação ao tamanho das figuras.

Dentro de nossa aplicação tornou-se evidente que a abordagem decisão-teórica foi muito mais rápida tanto no desenvolvimento quanto na aplicação em si, entretanto a abordagem estrutural ofereceu-nos conceitos e bases mais profundas e úteis para ampliação do sistema, tanto para classes de figuras como para imagens em geral (entendimento de cena) e para o espaço visual (visão tri-dimensional).

#### §. aplicações diversas

Nessa mesma linha de raciocínio fundamenta-se a explicação da preferência a abordagem decisão-teórica, no meio aplicativo industrial, à abordagem estrutural. Tal escolha geralmente ocorre nas tarefas envolvidas com robótica em linhas de produção, o que é reforçado por duas características muito comuns nesses ambientes: 1) a pouca diversidade de elementos a serem manipulados, ou seja, as classes de figuras são restritas aos produtos da linha de produção e são classes esperadas, não apresentando elementos novos. Essas características podem indicar a construção de um reconhecedor dirigido somente as essas classes de figuras, com pouco numero de atributos extraídos e atributos simples. 2) A resposta de atuação dos mecanismos envolvidos em ambientes industriais deve ocorrer num curto intervalo de tempo o que leva também a escolha da abordagem decisão-teórica pelo seu poder de

simplificação das tarefas de reconhecimento.

Apesar da preferência pela abordagem decisão-teórica, a grande variedade de situações onde a aplicação do reconhecimento de padrões é possível também deixa atuar a abordagem estrutural, principalmente no reconhecimento de caracteres — leitura de documentos — e nos mais atuais sistemas de visão tri-dimensional. Nessa enorme gama de atuações o registro translacional é indicado e muito utilizado em controle de qualidade, exemplificando, na verificação de furos de placas de circuito impresso, onde o casamento da placa com uma placa padrão é suficiente para verificá-la. O registro Translacional também é muito utilizado no sensoriamento remoto casando mapas de rodovias, rios, cidades e outras figuras com fotos aéreas. Enfim, guardando as características mais marcantes de cada abordagem, rapidez (tanto na aplicação como no desenvolvimento) para a abordagem decisão-teórica, expansibilidade para a abordagem estrutural e de comparação com o registro translacional, é possível uma maior identificação de uma delas com alguma aplicação específica.

#### §. visão tri-dimensional

O estudo das técnicas estruturais/sintáticas no reconhecimento de padrões tem obtido estímulos no principal objetivo da visão computacional que é a interpretação de cenas tri-dimensionais, ou seja, uma análise entre as entidades de uma cena que procura entender o modo como estão relacionadas esta

entidades. O primeiro passo para se chegar ao entendimento/interpretação global de cenas é o reconhecimento de objetos tri-dimensionais, tarefa que também é parte integrante da abordagem estrutural. Obtendo um modelamento da câmera em uso e dotando o sistema de visão estereoscópica, ou seja, o uso de duas câmeras, conseguimos embutir mais uma coordenada no sistema tornando-o tri-dimensional. A fase seguinte de determinação das faces, arestas e vértices é muito próxima ao processamento que é feito para visão bi-dimensinal, só deve ser mudado radicalmente o formalismo que expressa o relacionamento dessas entidades — elementos — do objeto, que é voltado para as relações espaciais.

Os problemas envolvidos são muito maiores que na visão bi-dimensional, tanto em número quanto em complexidade, mas as necessidades são maiores e já começam a aparecer aplicações como, por exemplo, os primeiros veículos com autonomia de direção.

#### §. implementação em arquiteturas paralelas

A busca por soluções em arquiteturas paralelas, de visão computacional, faz-se principalmente por duas constatações: 1) a grande quantidade de operações envolvidas nesse tipo de processamento, aliada ao tempo envolvido e, 2) a noção de paralelismo envolvida em várias etapas do reconhecimento de padrões, como por exemplo, a medida de atributos iguais para uma série de figuras numa mesma imagem, onde os mesmos cálculos poderiam ser feitos paralelamente para figuras diferentes em

diferentes processadores.

Em nossa aplicação notou-se que a maior parte de tempo de processamento deveram-se aos processos envolvidos na fase de pré-processamento e segmentação de imagens, onde estão as rotinas de detecção de bordas e afinamento, as duas maiores consumidoras de tempo em todo processo.

Essas considerações de tempo têm maior importância em aplicações comerciais e industriais principalmente, e nessas situações julgamos que o ajuste do limiar de luminosidade não ocorre a cada leitura, e sim uma única vez na fase de implementação do sistema ou em caso de mudanças do ambiente e dos objetos a serem reconhecidos, pois consideramos que a iluminação e o tipo de objeto a ser reconhecido sejam constantes.

As etapas de detecção de bordas e afinamento quando efetuadas usando-se o recurso de operadores de janelas sobre a imagem podem ter uma aplicação imediata em arquiteturas paralelas se pensarmos que podemos processar toda a vizinhança da janela (geralmente 3 x 3) de uma única vez, como na figura abaixo:

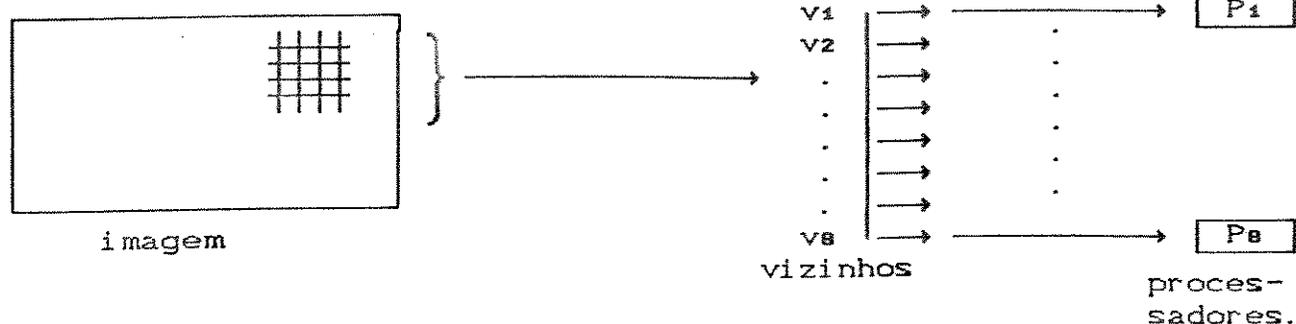


Fig.5.13 Conexão das células vizinhas de um ponto com unidades de processamento.

Quando aplicamos esses processos em microprocessadores de uso geral, manipulamos na realidade um pixel a cada vez, sendo que poderíamos processar toda sua vizinhança. Por esse motivo é que os microprocessadores de uso geral não são os mais adequados à visão industrial, pois teriam que ter uma taxa de transferência de informações elevada, além de memórias compatíveis com essas taxas para leitura e escrita de dados.

As arquiteturas paralelas, principalmente as com grande número de módulos de equipamentos físicos, são uma solução eficiente ao processamento de imagens tendo em vista que algumas funções específicas podem ser implementadas por esses módulos.

Além das operações de detecção de bordas usando máscaras (Sobel, Robert, 5-níveis e outras) e a de afinamento por método semelhante, que baseiam-se na vizinhança de pontos, também podem ser aplicadas as operações de extração do contorno e cálculo do perímetro de modo semelhante. Na extração do contorno, a partir do

primeiro ponto pertencente a este (P), analisamos os seus vizinhos para encontrarmos o próximo ponto da seqüência P e assim sucessivamente. Se a cada ponto P que encontrarmos, somarmos uma unidade a um contador, teremos o perímetro da figura.

Para a fase de extração de atributos não podemos definir ou sugerir uma atitude única para sua efetivação em arquiteturas paralelas já que a variedade dos atributos a serem medidos é muito grande dentro das abordagens sintática e decisão-teórica.

Geralmente os atributos da decisão-teórica têm uma série de cálculos a serem resolvidos que poderiam ser distribuídos em módulos específicos, ou cada módulo cuidar da extração de um tipo de atributo. Como exemplo podemos citar a extração de momentos invariantes das figuras, que são fortes atributos no processo de reconhecimento, e são formulados totalmente em função dos momentos centrais normalizados, por sua vez vindos dos momentos centrais pela fórmula:

$$\mu_{pq} = \sum \sum (c - \bar{c})^p (1 - \bar{1})^q f(1, c)$$

Usando-se arquiteturas paralelas, poderíamos calcular vários desses momentos simultaneamente aplicando a cada módulo físico um valor pq.

Mesmo os métodos de classificação envolvidos na abordagem decisão-teórica podem valer-se dos recursos do paralelismo. Como esses métodos baseiam-se na semelhança entre o vetor padrão e o vetor do padrão de referência, seus elementos podem ser comparados em módulos físicos distintos.

O recurso de vizinhança pode ser muito explorado no processamento paralelo, mesmo nos métodos de aproximação poligonal, como o método de Hung & Kaswand, em que não há necessidade de toda linha da imagem ficar residente na memória, somente alguns trechos dela. Todas as suas regras são baseadas na análise dos pixels vizinhos nesses trechos, o que se ajusta muito bem aos recursos do paralelismo.

As aplicações de arquiteturas *pipeline* para efetuação de processos paralelos também vem ganhando muito espaço entre os equipamentos industriais de processamento/reconhecimento de imagens nos últimos anos. Uma aplicação eficiente dessa arquitetura é o *Cytocomputer* desenvolvido em 1982 pelo *Environment Research Institute of Michigan* com a estrutura abaixo

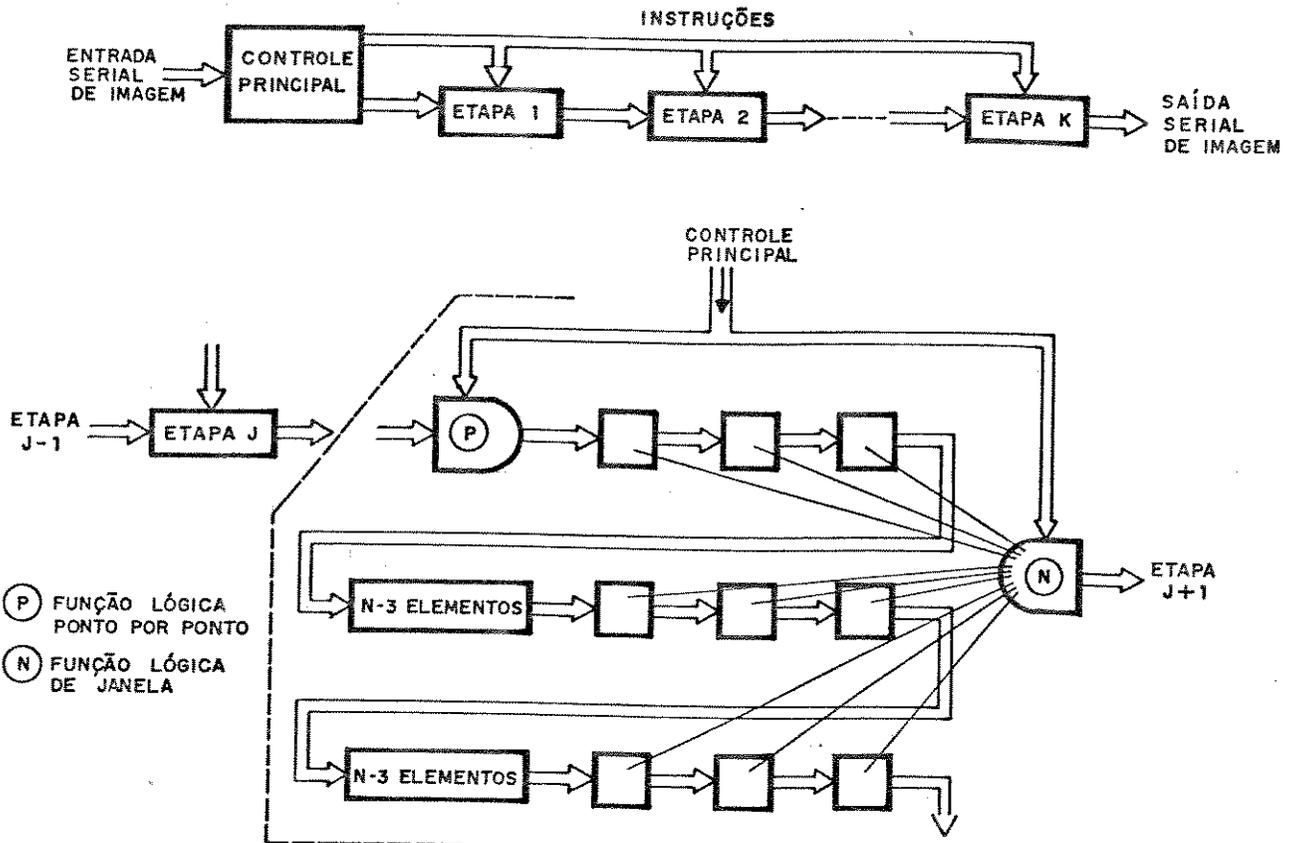


fig.5.14 Arqutetura do Cytocomputer.

onde as etapas  $i$  podem ser entendidas como fases do processo de reconhecimento, como detecção de bordas, afinamento e outras, ou várias funções lógicas para os mesmos pontos; e as funções de vizinhanças como os pesos das máscaras de elementos vizinhos ao ponto.

O desempenho das arquiteturas seqüenciais frente às máquinas

paralelas ou *pipeline* costuma ser avaliado sobre três valores:

- 1) tempo total de processamento
- 2) tempo de processamento em relação ao tamanho do algoritmo
- 3) complexidade do sistema em relação ao tamanho da imagem

onde costumam ser vantajosas as arquiteturas paralelas e por isso são vistas atualmente como uma tendência tanto nos processos industriais como nas aplicações acadêmicas e científicas.

#### §. sugestões

Buscando uma maior proximidade a esses avanços que certamente contribuem para o engrandecimento de nosso desenvolvimento tecnológico, teórico e especialmente científico, propomos abaixo alguns trabalhos que vão de encontro a esses interesses e permitem prosseguir o atual, são esses:

- a implementação desse sistema já desenvolvido num ambiente físico mais arrojado e mais atualizado, procurando incrementá-lo.
- um estudo e a implementação física (em "hardware") dos processos de segmentação e extração de atributos.
- uma implementação desses recursos em máquinas de arquitetura paralela.
- pesquisar o reconhecimento tri-dimensional, suas técnicas e apoios na visão estereoscópica.
- o estudo e implementação do reconhecimento de imagens bi-dimensionais coloridas ou com vários níveis de cinza.

Dentro desses objetivos informamos que todo código produzido para essas aplicações foi escrito na linguagem C, portanto disponível em vários equipamentos, e colocamo-nos a disposição para fornecê-los gratuitamente, como toda documentação auxiliar necessária.

---

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- /Bar 72/ Barnea, D.I & Silverman, H.F. A class of algorithms for fast digital image registration *IEEE Trans. on Comp.*, vol.C-21, no.2: pp.179-186, fev., 1972.
- /Bas 87/ Basu, S. & Fu, K.S. Image segmentation by syntactic methods *Pattern Recognition*, vol.20, no.1: pp.33-34, 1987.
- /Fre 61/ Freeman, H. On the encoding of arbitrary geometric configurations *IEEE Trans. Elec. Computers*, vol.EC-10, pp.260-268, 1961.
- /Fu 82/ Fu, K.S *Syntactic pattern recognition and applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- /Gon 77/ Gonzalez, R. & Wintz, P. *Digital image processing*. Addison-Wesley, 1977.
- /Gon 82/ Gonzalez, R.C. & Safabakhsh, R. Computer vision techniques for industrial applications. *Computer*, 15, 12: pp.17-32, Los Angeles, dec., 1982.
- /Har 84/ Haralick, R.M. Digital step edges from zero crossing of second directional derivatives *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intelligence*, vol.PAMI-6, no.1 :pp.58-68, jan., 1984.
- /Hil 69/ Hilditch, C.J. Linear skeletons from square cupboards *Machine Intelligence*, 4, pp.403-420, 1969.
- /Hor 76/ Horowitz, S.L. & Rosenfeld, R. Some parallel thinning algorithms for digital pictures *J.ACM* 23, pp.255-264, 1971.
- /Hun 83/ Hung, S.H. & Kasvand, T. Critical points on a perfectly 8-or-6 connected thin binary line *Pattern Recognition*,

vol.16, no.3: pp.297-306, 1983.

- /Jim 82/ Jimenez,J. & Navalon,J.L. Some experiments in image vectorization *IBM J. Res. Develop.*, vol.6: pp.724-734, nov., 1982.
- /Lam 88/ Lam,L. & Suen,C.Y. Structural classification and relaxation matching of totally unconstrained handwritten zip-code numbers *Pattern Recognition*, vol.21, no.1: pp.19-31, 1988.
- /Mad 86/ Madrigal,R.I. & Uastegui,J.M.A. *Vision artificial por computador*, Paraninfo, Madrid, 1986.
- /Pav 75/ Pavlidis,T. & Ali,F. Computer recognition of handwritten numerals by polygonal approximations *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol.SMC-5, no.6: pp.610-614, nov., 1975.
- /Pav 79/ Pavlidis,T. & Ali,F. A hierarchical syntatic shape analyser. *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intel.*, vol.PAMI-1, no.1, jan., 1979.
- /Pra 74/ Pratt,W.K. Correlation techniques of image registration *IEEE Trans. on Aerospace and Elet. Systems*, vol.AES-10, no.3:pp.353-358, may, 1974.
- /Ram 72/ Ramer,U. An iterative procedure for the polygonal approximation of plane curves *Comp. Grafics and Image Procesing*, no.1: pp.244-256, 1972.
- /Reg 72/ Reggiori,G. *Digital transformations for irregular line drawings* Tese de doutoramento apresentada no Dept. of Elect. Engrg. and Computer Science, New York University, Bronx, N.Y., 1972.

- /Rob 77/ Robinson, G.P. Edge detection by compass gradient mask  
*Comp. Graphics and Image Processing*, no.6: pp.492-501,  
1977.
- /Ros 73/ Rosenfeld, A. & Jonhston, E. Angle detection on digital  
curves *IEEE Trans. on Comp.*, pp.875-878, sept., 1973.
- /Ros 82/ Rosenfeld, A. & Kak, A.C. *Digital picture processing*,  
2<sup>nd</sup>. edition, Academic Press, N.Y., 1982.
- /Smi 87/ Smith, R.W. Computer processing of line images: a survey  
*Pattern Recognition*, vol.20, no.1: pp.7-15, 1987.
- /Sot 84/ Sotomayor, B.O.A.B. *Reconhecimento de padrões para  
aplicações em CAD/CAM* Tese de mestrado apresentada na  
Fac. de Engenharia de Campinas — UNICAMP, dez., 1984.

## APENDICE 1

### Nomenclatura utilizada

Pela pouca difusão dos termos técnicos portugueses usados em reconhecimento de padrões, torna-se difícil o emprego de expressões traduzidas pela susceptibilidade de mal entendimento pelo leitor. Para tentar desfazer esse potencial desentendimento procuramos explicar o sentido dos termos abaixo relacionados que são usados no texto.

cena -> Objeto visual do observador ou de um equipamento que procura registra-la. Parte do mundo real.

imagem -> Cena digitalizada. Referenciada como uma matriz  $M \times N$  de valores correspondentes ao nível de luminosidade e/ou cor da cena.

objeto ou figura -> Parte de uma cena que pode corresponder ou não com uma classe de padrão. Uma entidade individual da cena.

elemento -> Parte de um objeto que não pode corresponder a um padrão, ou a um objeto.

Nos dois últimos pode haver alguma interpretação diferente do que seria a dirigida para o texto, o que pode ser melhor compreendido pelo exemplo abaixo:

exemplo:

Dada uma imagem de uma casa gostaríamos de identificar, reconhecer, uma porta e os portais (batentes).

objeto -> porta e batentes.

elementos -> os elementos do batente podem ser os travessões laterais e o superior. Se a porta tiver uma fechadura, também será considerada um elemento. Esses últimos não são considerados objetos pois não foram definidas operações para medir seus atributos e verificar seus aspectos para uma posterior classificação.

## APÊNDICE 2

Uma gramática  $G$ , pode ser definida como em /Gon 78/ como uma quádrupla  $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$  onde:

$N$  é um conjunto de símbolos não terminais ou variáveis.

$\Sigma$  é um conjunto finito de símbolos terminais ou constantes.

$P$  é um conjunto finito de regras de produção.

$S$  em  $N$  é o símbolo inicial.

com as seguintes observações:

$N \cap \Sigma = \emptyset$ , ou conjunto nulo.

$N \cup \Sigma = V$ , ou o alfabeto da gramática.

$\lambda$  significa uma cadeia vazia, uma sentença sem nenhum símbolo

$V^*$  alfabeto com inclusão de  $\lambda$

$$V^+ = V^* - \{\lambda\}$$

$P$  é um conjunto de produções do tipo  $\alpha \rightarrow \beta$ , ou seja, a cadeia  $\alpha$  pode ser reescrita como a cadeia  $\beta$ , com  $\alpha$  em  $V^*$ ,  $NV^*$  e  $\beta$  em  $V^*$ .

Os símbolos não-terminais são escritos com as letras maiúsculas  $A, B, \dots, S, \dots$

Os símbolos terminais são escritos como as letras minúsculas do começo do alfabeto  $a, b, c, \dots$

Cadeias de terminais com letras minúsculas do final do alfabeto  $v, w, x, y, \dots$

Cadeias misturadas de terminais e não terminais com as letras gregas  $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \phi, \dots$

Define-se uma linguagem como um conjunto de sentenças sobre um alfabeto.

Uma gramática sem restrições quanto à forma se suas regras de

produção é tida como *irrestrita*. As gramáticas que recebem algum tipo de restrição na formação de suas regras são classificadas pela chamada *hierarquia de chomsky* definida abaixo:

1) As gramáticas sensitivas ao contexto têm produções da forma

$$\begin{aligned} \theta A \delta &\rightarrow \theta \rho \delta && \text{para } \theta, \delta \text{ em } V^* \\ & && \rho \text{ em } V^+ \\ & && A \text{ em } N \end{aligned}$$

ou seja, o símbolo não-terminal  $A$  pode ser reescrito como  $\rho$  somente se aparece no contexto das sub-cadeias  $\theta$  e  $\delta$ .

2) As gramáticas livres-do contexto têm produções da forma,

$$A. \rightarrow \alpha \quad \text{para } A. \text{ em } N$$

$$\alpha \text{ em } V^+$$

onde o símbolo não-terminal  $A$  pode ser escrito como a cadeia  $\alpha$  sem considerar o contexto em que  $A$  aparece.

3) As gramáticas regulares têm produções da forma

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aB && \text{para } A, B \text{ em } N \\ A &\rightarrow a && a \text{ em } \Sigma \end{aligned}$$

É importante notar que toda gramática regular é livre-do-contexto, e toda gramática livre-do-contexto é sensitiva ao contexto e que por sua vez é irrestrita.

Existe uma correspondência unívoca entre os quatro tipos de gramáticas e quatro tipos de autômatos que podem ser usados como reconhecedores das gramáticas:

gramática irrestrita ou

Tipo 0  $\longrightarrow$  Máquina Turing

Tipo 1  $\longrightarrow$  Autômato "linear-bounded"

Tipo 2  $\longrightarrow$  Autômato de pilha

Tipo 3  $\longrightarrow$  Autômato finito

De fato essa hierarquia das linguagens é preservada com respeito às capacidades computacionais desses autômatos, visto que a Máquina de Turing é equivalente ao dispositivo computacional mais poderoso computacionalmente já concebido, e o autômato finito o menos poderoso dos quatro /Gon 78/.

### APÊNDICE 3

#### TABELAS DOS SEGMENTOS

Abaixo estão relacionados todos os segmentos obtidos da aproximação poligonal das figuras utilizadas tanto como referências tanto como objetivo de reconhecimento (as imagens m1.cad, m2.cad, m3.cad e m4.cad).

li = linha inicial,

ci = coluna final,

lf = linha final,

cf = coluna final,

tam = tamanho normalizado do segmento, e

incl = inclinação do segmento.

QUADRADOS

q1.cad

figura 0

li= 9 ci= 72 lf= 85 cf= 53 tam= 0.22 incl= -4.000  
 li= 88 ci= 57 lf= 103 cf= 145 tam= 0.26 incl= +0.170  
 li= 101 ci= 146 lf= 21 cf= 160 tam= 0.24 incl= -5.714  
 li= 21 ci= 160 lf= 6 cf= 74 tam= 0.25 incl= +0.174

figura 1

li= 22 ci= 199 lf= 69 cf= 178 tam= 0.21 incl= -2.238  
 li= 71 ci= 181 lf= 88 cf= 238 tam= 0.26 incl= +0.298  
 li= 88 ci= 238 lf= 37 cf= 258 tam= 0.23 incl= -2.550  
 li= 36 ci= 256 lf= 21 cf= 199 tam= 0.25 incl= +0.263

figura 2

li= 28 ci= 294 lf= 73 cf= 295 tam= 0.19 incl= +45.000  
 li= 77 ci= 298 lf= 76 cf= 360 tam= 0.26 incl= -0.016  
 li= 73 ci= 362 lf= 23 cf= 358 tam= 0.20 incl= +12.500  
 li= 23 ci= 357 lf= 24 cf= 296 tam= 0.26 incl= -0.016

figura 5

li= 94 ci= 288 lf= 159 cf= 269 tam= 0.21 incl= -3.421  
 li= 161 ci= 273 lf= 177 cf= 352 tam= 0.26 incl= +0.203  
 li= 175 ci= 352 lf= 110 cf= 372 tam= 0.21 incl= -3.250  
 li= 107 ci= 368 lf= 91 cf= 290 tam= 0.25 incl= +0.205

figura 6

li= 98 ci= 191 lf= 140 cf= 154 tam= 0.21 incl= -1.135  
 li= 142 ci= 155 lf= 177 cf= 201 tam= 0.23 incl= +0.761  
 li= 178 ci= 203 lf= 133 cf= 244 tam= 0.25 incl= -1.098  
 li= 131 ci= 243 lf= 98 cf= 198 tam= 0.23 incl= +0.733

figura 7

li= 110 ci= 113 lf= 117 cf= 54 tam= 0.24 incl= -0.119  
 li= 119 ci= 53 lf= 174 cf= 60 tam= 0.22 incl= +7.857  
 li= 175 ci= 62 lf= 169 cf= 123 tam= 0.25 incl= -0.098  
 li= 164 ci= 125 lf= 112 cf= 116 tam= 0.21 incl= +5.778

q2.cad

figura 0

li= 27 ci= 301 lf= 87 cf= 274 tam= 0.22 incl= -2.222  
 li= 88 ci= 275 lf= 112 cf= 350 tam= 0.27 incl= +0.320  
 li= 109 ci= 352 lf= 48 cf= 375 tam= 0.22 incl= -2.652  
 li= 48 ci= 374 lf= 26 cf= 306 tam= 0.24 incl= +0.324

figura 1

li= 31 ci= 101 lf= 41 cf= 63 tam= 0.25 incl= -0.263  
 li= 41 ci= 63 lf= 75 cf= 73 tam= 0.22 incl= +3.400  
 li= 78 ci= 77 lf= 67 cf= 114 tam= 0.24 incl= -0.297  
 li= 63 ci= 116 lf= 34 cf= 105 tam= 0.19 incl= +2.636

figura 2

li= 36 ci= 156 lf= 47 cf= 141 tam= 0.19 incl= -0.733  
li= 47 ci= 141 lf= 63 cf= 151 tam= 0.19 incl= +1.600  
li= 65 ci= 155 lf= 55 cf= 172 tam= 0.21 incl= -0.588  
li= 48 ci= 173 lf= 37 cf= 163 tam= 0.14 incl= +1.100

figura 3

li= 39 ci= 227 lf= 43 cf= 187 tam= 0.25 incl= -0.100  
li= 45 ci= 186 lf= 78 cf= 188 tam= 0.20 incl= +16.500  
li= 79 ci= 190 lf= 78 cf= 232 tam= 0.25 incl= -0.024  
li= 74 ci= 234 lf= 40 cf= 230 tam= 0.20 incl= +8.500

figura 5

li= 76 ci= 166 lf= 81 cf= 143 tam= 0.22 incl= -0.217  
li= 85 ci= 143 lf= 105 cf= 149 tam= 0.19 incl= +3.333  
li= 106 ci= 151 lf= 99 cf= 176 tam= 0.25 incl= -0.280  
li= 99 ci= 176 lf= 77 cf= 168 tam= 0.21 incl= +2.750

figura 6

li= 94 ci= 76 lf= 110 cf= 60 tam= 0.19 incl= -1.000  
li= 116 ci= 63 lf= 127 cf= 76 tam= 0.15 incl= +0.846  
li= 126 ci= 81 lf= 110 cf= 97 tam= 0.19 incl= -1.000  
li= 106 ci= 97 lf= 94 cf= 84 tam= 0.14 incl= +0.923

figura 7

li= 103 ci= 199 lf= 120 cf= 183 tam= 0.19 incl= -1.062  
li= 122 ci= 184 lf= 136 cf= 201 tam= 0.19 incl= +0.824  
li= 134 ci= 207 lf= 119 cf= 220 tam= 0.17 incl= -1.154  
li= 113 ci= 220 lf= 102 cf= 205 tam= 0.17 incl= +0.733

figura 8

li= 109 ci= 276 lf= 136 cf= 225 tam= 0.24 incl= -0.529  
li= 140 ci= 222 lf= 187 cf= 256 tam= 0.23 incl= +1.382  
li= 187 ci= 256 lf= 155 cf= 311 tam= 0.27 incl= -0.582  
li= 151 ci= 309 lf= 109 cf= 276 tam= 0.20 incl= +1.273

figura 9

li= 111 ci= 122 lf= 157 cf= 98 tam= 0.21 incl= -1.917  
li= 162 ci= 97 lf= 185 cf= 156 tam= 0.27 incl= +0.390  
li= 185 ci= 156 lf= 133 cf= 178 tam= 0.23 incl= -2.364  
li= 132 ci= 176 lf= 110 cf= 128 tam= 0.21 incl= +0.458

q4.cad

figura 0

li= 12 ci= 52 lf= 46 cf= 48 tam= 0.22 incl= -8.500  
li= 48 ci= 51 lf= 52 cf= 85 tam= 0.22 incl= +0.118  
li= 47 ci= 92 lf= 17 cf= 94 tam= 0.19 incl= -15.000  
li= 12 ci= 88 lf= 12 cf= 52 tam= 0.23 incl= -0.000

figura 1

li= 21 ci= 140 lf= 55 cf= 105 tam= 0.24 incl= -0.971  
li= 55 ci= 105 lf= 83 cf= 141 tam= 0.23 incl= +0.778  
li= 83 ci= 149 lf= 49 cf= 176 tam= 0.21 incl= -1.259  
li= 45 ci= 175 lf= 21 cf= 140 tam= 0.21 incl= +0.686

figura 2

li= 30 ci= 295 lf= 56 cf= 279 tam= 0.17 incl= -1.625  
li= 61 ci= 279 lf= 78 cf= 319 tam= 0.27 incl= +0.425  
li= 78 ci= 319 lf= 49 cf= 337 tam= 0.19 incl= -1.611  
li= 46 ci= 336 lf= 29 cf= 300 tam= 0.24 incl= +0.472

figura 5

li= 72 ci= 192 lf= 79 cf= 228 tam= 0.27 incl= +0.194  
li= 77 ci= 229 lf= 54 cf= 236 tam= 0.17 incl= -3.286  
li= 47 ci= 232 lf= 71 cf= 191 tam= 0.45 incl= -0.585

figura 6

li= 71 ci= 93 lf= 73 cf= 45 tam= 0.23 incl= -0.042  
li= 74 ci= 45 lf= 121 cf= 45 tam= 0.23 incl= +47000000.000  
li= 122 ci= 46 lf= 119 cf= 100 tam= 0.27 incl= -0.056  
li= 119 ci= 100 lf= 76 cf= 98 tam= 0.21 incl= +21.500

figura 7

li= 93 ci= 241 lf= 102 cf= 207 tam= 0.24 incl= -0.265  
li= 106 ci= 207 lf= 136 cf= 218 tam= 0.22 incl= +2.727  
li= 136 ci= 218 lf= 127 cf= 253 tam= 0.24 incl= -0.257  
li= 123 ci= 254 lf= 95 cf= 244 tam= 0.19 incl= +2.800

figura 8

li= 96 ci= 171 lf= 98 cf= 145 tam= 0.23 incl= -0.077  
li= 100 ci= 143 lf= 119 cf= 143 tam= 0.17 incl= +19000000.000  
li= 122 ci= 145 lf= 120 cf= 176 tam= 0.28 incl= -0.065  
li= 120 ci= 176 lf= 98 cf= 174 tam= 0.19 incl= +11.000

figura 9

li= 114 ci= 284 lf= 157 cf= 275 tam= 0.20 incl= -4.778  
li= 161 ci= 277 lf= 165 cf= 334 tam= 0.27 incl= +0.070  
li= 165 ci= 334 lf= 118 cf= 340 tam= 0.22 incl= -7.833  
li= 118 ci= 339 lf= 112 cf= 285 tam= 0.25 incl= +0.111

figura 14

li= 142 ci= 172 lf= 158 cf= 149 tam= 0.26 incl= -0.696  
li= 162 ci= 150 lf= 178 cf= 165 tam= 0.18 incl= +1.067  
li= 178 ci= 165 lf= 159 cf= 189 tam= 0.27 incl= -0.792  
li= 159 ci= 189 lf= 142 cf= 172 tam= 0.19 incl= +1.000

q5.cad

figura 0

li= 6 ci= 216 lf= 8 cf= 169 tam= 0.24 incl= -0.043  
li= 10 ci= 168 lf= 51 cf= 169 tam= 0.21 incl= +41.000  
li= 53 ci= 172 lf= 51 cf= 221 tam= 0.26 incl= -0.041  
li= 46 ci= 223 lf= 8 cf= 219 tam= 0.20 incl= +9.500

figura 1

li= 7 ci= 119 lf= 35 cf= 36 tam= 0.25 incl= -0.337  
li= 38 ci= 37 lf= 113 cf= 65 tam= 0.22 incl= +2.679  
li= 115 ci= 69 lf= 87 cf= 153 tam= 0.25 incl= -0.333  
li= 83 ci= 155 lf= 10 cf= 123 tam= 0.22 incl= +2.281

figura 2

li= 26 ci= 288 lf= 53 cf= 272 tam= 0.18 incl= -1.688  
li= 60 ci= 275 lf= 75 cf= 311 tam= 0.24 incl= +0.417  
li= 73 ci= 314 lf= 43 cf= 330 tam= 0.20 incl= -1.875

li= 40 ci= 327 lf= 25 cf= 293 tam= 0.22 incl= +0.441

figura 5

li= 60 ci= 372 lf= 62 cf= 337 tam= 0.24 incl= -0.057  
li= 67 ci= 335 lf= 93 cf= 336 tam= 0.18 incl= +26.000  
li= 94 ci= 337 lf= 93 cf= 375 tam= 0.27 incl= -0.026  
li= 89 ci= 376 lf= 60 cf= 372 tam= 0.20 incl= +7.250

figura 6

li= 63 ci= 252 lf= 72 cf= 219 tam= 0.24 incl= -0.273  
li= 72 ci= 219 lf= 103 cf= 225 tam= 0.22 incl= +5.167  
li= 104 ci= 227 lf= 97 cf= 263 tam= 0.25 incl= -0.194  
li= 92 ci= 264 lf= 65 cf= 255 tam= 0.19 incl= +3.000

figura 7

li= 70 ci= 196 lf= 74 cf= 170 tam= 0.24 incl= -0.154  
li= 77 ci= 168 lf= 93 cf= 171 tam= 0.15 incl= +5.333  
li= 98 ci= 176 lf= 92 cf= 203 tam= 0.26 incl= -0.222  
li= 92 ci= 203 lf= 71 cf= 198 tam= 0.19 incl= +4.200

figura 10

li= 101 ci= 303 lf= 138 cf= 269 tam= 0.21 incl= -1.088  
li= 141 ci= 271 lf= 169 cf= 310 tam= 0.22 incl= +0.718  
li= 168 ci= 317 lf= 132 cf= 349 tam= 0.21 incl= -1.125  
li= 130 ci= 348 lf= 102 cf= 311 tam= 0.21 incl= +0.757

figura 11

li= 121 ci= 208 lf= 157 cf= 208 tam= 0.20 incl= +36000000.000  
li= 157 ci= 208 lf= 157 cf= 256 tam= 0.27 incl= +0.000  
li= 157 ci= 256 lf= 117 cf= 257 tam= 0.22 incl= -40.000  
li= 117 ci= 256 lf= 115 cf= 212 tam= 0.24 incl= +0.045

figura 12

li= 121 ci= 174 lf= 138 cf= 151 tam= 0.26 incl= -0.739  
li= 142 ci= 153 lf= 155 cf= 167 tam= 0.16 incl= +0.929  
li= 154 ci= 174 lf= 139 cf= 189 tam= 0.17 incl= -1.000  
li= 135 ci= 189 lf= 121 cf= 174 tam= 0.17 incl= +0.933

RETANGULOS

r1.cad

figura 0

li= 2 ci= 182 lf= 60 cf= 164 tam= 0.26 incl= -3.222  
li= 65 ci= 164 lf= 74 cf= 211 tam= 0.21 incl= +0.191  
li= 72 ci= 212 lf= 8 cf= 226 tam= 0.29 incl= -4.571  
li= 8 ci= 225 lf= 2 cf= 182 tam= 0.19 incl= +0.140

figura 1

li= 10 ci= 292 lf= 78 cf= 218 tam= 0.33 incl= -0.919  
li= 78 ci= 218 lf= 106 cf= 251 tam= 0.14 incl= +0.848  
li= 106 ci= 251 lf= 37 cf= 329 tam= 0.34 incl= -0.885  
li= 33 ci= 329 lf= 9 cf= 298 tam= 0.13 incl= +0.774

figura 2

li= 16 ci= 142 lf= 20 cf= 101 tam= 0.20 incl= -0.098  
li= 23 ci= 99 lf= 74 cf= 105 tam= 0.25 incl= +8.500  
li= 75 ci= 107 lf= 71 cf= 153 tam= 0.23 incl= -0.087  
li= 69 ci= 154 lf= 19 cf= 146 tam= 0.25 incl= +6.250

figura 3

li= 26 ci= 365 lf= 146 cf= 224 tam= 0.46 incl= -0.851  
li= 154 ci= 233 lf= 35 cf= 375 tam= 0.46 incl= -0.838

figura 4

li= 56 ci= 38 lf= 139 cf= 33 tam= 0.30 incl= -16.600  
li= 140 ci= 35 lf= 143 cf= 81 tam= 0.17 incl= +0.065  
li= 131 ci= 83 lf= 57 cf= 85 tam= 0.27 incl= -37.000  
li= 55 ci= 81 lf= 54 cf= 39 tam= 0.15 incl= +0.024

figura 15

li= 97 ci= 212 lf= 124 cf= 211 tam= 0.11 incl= -27.000  
li= 128 ci= 208 lf= 123 cf= 127 tam= 0.35 incl= +0.062  
li= 121 ci= 126 lf= 95 cf= 127 tam= 0.11 incl= -26.000  
li= 91 ci= 129 lf= 95 cf= 211 tam= 0.35 incl= +0.049

figura 21

li= 118 ci= 351 lf= 140 cf= 277 tam= 0.31 incl= -0.297  
li= 147 ci= 275 lf= 182 cf= 289 tam= 0.14 incl= +2.500  
li= 183 ci= 291 lf= 160 cf= 368 tam= 0.32 incl= -0.299  
li= 154 ci= 368 lf= 119 cf= 353 tam= 0.14 incl= +2.333

figura 22

li= 152 ci= 97 lf= 158 cf= 199 tam= 0.45 incl= +0.059  
li= 146 ci= 196 lf= 140 cf= 98 tam= 0.43 incl= +0.061

r2.cad

figura 0

li= 13 ci= 45 lf= 106 cf= 40 tam= 0.32 incl= -18.600  
li= 109 ci= 45 lf= 108 cf= 87 tam= 0.15 incl= -0.024  
li= 106 ci= 88 lf= 13 cf= 89 tam= 0.33 incl= -93.000  
li= 11 ci= 86 lf= 11 cf= 46 tam= 0.14 incl= -0.000

figura 1

li= 17 ci= 113 lf= 49 cf= 113 tam= 0.14 incl= +32000000.000  
li= 53 ci= 118 lf= 51 cf= 190 tam= 0.32 incl= -0.028  
li= 47 ci= 192 lf= 14 cf= 190 tam= 0.14 incl= +16.500  
li= 11 ci= 186 lf= 13 cf= 115 tam= 0.31 incl= -0.028

figura 2

li= 16 ci= 291 lf= 20 cf= 215 tam= 0.35 incl= -0.053  
li= 24 ci= 213 lf= 48 cf= 215 tam= 0.11 incl= +12.000  
li= 49 ci= 217 lf= 47 cf= 294 tam= 0.34 incl= -0.026  
li= 43 ci= 296 lf= 17 cf= 293 tam= 0.12 incl= +8.667

figura 5

li= 47 ci= 373 lf= 59 cf= 263 tam= 0.36 incl= -0.109  
li= 60 ci= 263 lf= 100 cf= 269 tam= 0.13 incl= +6.667  
li= 101 ci= 271 lf= 87 cf= 383 tam= 0.36 incl= -0.125  
li= 85 ci= 384 lf= 48 cf= 375 tam= 0.12 incl= +4.111

figura 7

li= 57 ci= 237 lf= 67 cf= 112 tam= 0.37 incl= -0.080  
li= 67 ci= 112 lf= 106 cf= 116 tam= 0.11 incl= +9.750  
li= 107 ci= 118 lf= 98 cf= 244 tam= 0.37 incl= -0.071  
li= 96 ci= 245 lf= 59 cf= 240 tam= 0.11 incl= +7.400

figura 9

li= 112 ci= 229 lf= 168 cf= 228 tam= 0.26 incl= -56.000  
li= 169 ci= 229 lf= 167 cf= 280 tam= 0.23 incl= -0.039  
li= 167 ci= 280 lf= 114 cf= 279 tam= 0.24 incl= +53.000  
li= 110 ci= 276 lf= 112 cf= 229 tam= 0.21 incl= -0.043

figura 10

li= 122 ci= 374 lf= 123 cf= 295 tam= 0.31 incl= -0.013  
li= 126 ci= 293 lf= 165 cf= 294 tam= 0.15 incl= +39.000  
li= 167 ci= 295 lf= 165 cf= 377 tam= 0.33 incl= -0.024  
li= 161 ci= 378 lf= 126 cf= 376 tam= 0.14 incl= +17.500

figura 11

li= 130 ci= 85 lf= 166 cf= 85 tam= 0.12 incl= +36000000.000  
li= 172 ci= 88 lf= 168 cf= 185 tam= 0.34 incl= -0.041  
li= 168 ci= 185 lf= 125 cf= 182 tam= 0.15 incl= +14.333  
li= 124 ci= 180 lf= 128 cf= 86 tam= 0.33 incl= -0.043

r3.cad

figura 0

li= 1 ci= 122 lf= 8 cf= 52 tam= 0.31 incl= -0.100  
li= 10 ci= 51 lf= 46 cf= 54 tam= 0.15 incl= +12.000  
li= 49 ci= 58 lf= 39 cf= 130 tam= 0.32 incl= -0.139  
li= 36 ci= 131 lf= 4 cf= 126 tam= 0.14 incl= +6.400

figura 1

li= 7 ci= 253 lf= 14 cf= 146 tam= 0.38 incl= -0.065  
li= 16 ci= 145 lf= 44 cf= 148 tam= 0.10 incl= +9.333  
li= 46 ci= 152 lf= 41 cf= 258 tam= 0.37 incl= -0.047  
li= 38 ci= 260 lf= 9 cf= 257 tam= 0.10 incl= +9.667

figura 2

li= 24 ci= 303 lf= 145 cf= 285 tam= 0.29 incl= -6.722  
li= 149 ci= 288 lf= 157 cf= 370 tam= 0.19 incl= +0.098  
li= 155 ci= 371 lf= 36 cf= 385 tam= 0.28 incl= -8.500  
li= 30 ci= 383 lf= 24 cf= 303 tam= 0.19 incl= +0.075

figura 4

li= 49 ci= 230 lf= 54 cf= 186 tam= 0.32 incl= -0.114  
li= 58 ci= 184 lf= 71 cf= 185 tam= 0.09 incl= +13.000  
li= 75 ci= 187 lf= 72 cf= 233 tam= 0.33 incl= -0.065  
li= 69 ci= 235 lf= 51 cf= 232 tam= 0.13 incl= +6.000

figura 5

li= 51 ci= 125 lf= 55 cf= 93 tam= 0.33 incl= -0.125  
li= 69 ci= 97 lf= 64 cf= 130 tam= 0.34 incl= -0.152

figura 8

li= 69 ci= 269 lf= 107 cf= 262 tam= 0.32 incl= -5.429  
li= 107 ci= 262 lf= 108 cf= 279 tam= 0.14 incl= +0.059

li= 105 ci= 281 lf= 72 cf= 288 tam= 0.28 incl= -4.714

figura 11

li= 72 ci= 27 lf= 124 cf= 23 tam= 0.33 incl= -13.000

li= 125 ci= 25 lf= 126 cf= 46 tam= 0.13 incl= +0.048

li= 126 ci= 46 lf= 71 cf= 48 tam= 0.35 incl= -27.500

figura 13

li= 77 ci= 65 lf= 174 cf= 57 tam= 0.29 incl= -12.125

li= 174 ci= 57 lf= 179 cf= 120 tam= 0.19 incl= +0.079

li= 166 ci= 123 lf= 82 cf= 129 tam= 0.22 incl= -14.000

li= 77 ci= 126 lf= 73 cf= 67 tam= 0.17 incl= +0.068

figura 15

li= 89 ci= 246 lf= 91 cf= 172 tam= 0.30 incl= -0.027

li= 94 ci= 170 lf= 131 cf= 171 tam= 0.15 incl= +37.000

li= 134 ci= 172 lf= 133 cf= 252 tam= 0.32 incl= -0.013

li= 131 ci= 253 lf= 90 cf= 250 tam= 0.16 incl= +13.667

figura 17

li= 101 ci= 139 lf= 157 cf= 135 tam= 0.26 incl= -14.000

li= 157 ci= 135 lf= 158 cf= 160 tam= 0.15 incl= +0.040

li= 157 ci= 160 lf= 101 cf= 162 tam= 0.34 incl= -28.000

li= 99 ci= 159 lf= 101 cf= 139 tam= 0.12 incl= -0.100

figura 21

li= 152 ci= 266 lf= 164 cf= 264 tam= 0.08 incl= -6.000

li= 166 ci= 261 lf= 160 cf= 212 tam= 0.36 incl= +0.122

li= 143 ci= 218 lf= 148 cf= 264 tam= 0.33 incl= +0.109

r4.cad

figura 0

li= 14 ci= 124 lf= 41 cf= 120 tam= 0.09 incl= -6.750

li= 45 ci= 124 lf= 60 cf= 227 tam= 0.36 incl= +0.146

li= 55 ci= 234 lf= 25 cf= 236 tam= 0.10 incl= -15.000

li= 23 ci= 232 lf= 11 cf= 126 tam= 0.36 incl= +0.113

figura 1

li= 33 ci= 53 lf= 98 cf= 48 tam= 0.28 incl= -13.000

li= 99 ci= 50 lf= 101 cf= 96 tam= 0.20 incl= +0.043

li= 67 ci= 99 lf= 32 cf= 99 tam= 0.14 incl= -35000000.000

li= 31 ci= 97 lf= 29 cf= 55 tam= 0.17 incl= +0.048

figura 2

li= 38 ci= 285 lf= 69 cf= 275 tam= 0.27 incl= -3.100

li= 76 ci= 280 lf= 77 cf= 292 tam= 0.10 incl= +0.083

li= 77 ci= 292 lf= 41 cf= 304 tam= 0.32 incl= -3.000

figura 3

li= 56 ci= 349 lf= 98 cf= 314 tam= 0.33 incl= -1.200

li= 100 ci= 315 lf= 109 cf= 331 tam= 0.12 incl= +0.562

li= 107 ci= 336 lf= 67 cf= 368 tam= 0.30 incl= -1.250

li= 63 ci= 368 lf= 55 cf= 355 tam= 0.09 incl= +0.615

figura 5

li= 77 ci= 136 lf= 101 cf= 129 tam= 0.23 incl= -3.429

li= 107 ci= 131 lf= 107 cf= 148 tam= 0.17 incl= +0.000

li= 107 ci= 148 lf= 81 cf= 155 tam= 0.26 incl= -3.714

figura 6

li= 77 ci= 223 lf= 81 cf= 176 tam= 0.34 incl= -0.085  
li= 81 ci= 176 lf= 100 cf= 176 tam= 0.13 incl= +19000000.000  
li= 101 ci= 178 lf= 100 cf= 225 tam= 0.33 incl= -0.021  
li= 97 ci= 227 lf= 79 cf= 225 tam= 0.12 incl= +9.000

figura 8

li= 105 ci= 240 lf= 130 cf= 235 tam= 0.13 incl= -5.000  
li= 130 ci= 235 lf= 141 cf= 301 tam= 0.36 incl= +0.167  
li= 141 ci= 301 lf= 118 cf= 308 tam= 0.12 incl= -3.286  
li= 114 ci= 304 lf= 102 cf= 242 tam= 0.32 incl= +0.194

figura 9

li= 111 ci= 209 lf= 146 cf= 155 tam= 0.38 incl= -0.648  
li= 147 ci= 155 lf= 161 cf= 166 tam= 0.10 incl= +1.273  
li= 162 ci= 168 lf= 126 cf= 222 tam= 0.37 incl= -0.667

figura 10

li= 126 ci= 63 lf= 163 cf= 57 tam= 0.15 incl= -6.167  
li= 169 ci= 60 lf= 177 cf= 139 tam= 0.32 incl= +0.101  
li= 175 ci= 140 lf= 133 cf= 142 tam= 0.16 incl= -21.000  
li= 131 ci= 138 lf= 125 cf= 63 tam= 0.30 incl= +0.080

figura 11

li= 168 ci= 225 lf= 171 cf= 277 tam= 0.38 incl= +0.058  
li= 154 ci= 278 lf= 151 cf= 228 tam= 0.35 incl= +0.060

r5.cad

figura 0

li= 19 ci= 64 lf= 75 cf= 37 tam= 0.26 incl= -2.074  
li= 78 ci= 37 lf= 93 cf= 82 tam= 0.21 incl= +0.333  
li= 93 ci= 82 lf= 35 cf= 108 tam= 0.27 incl= -2.231  
li= 28 ci= 104 lf= 15 cf= 70 tam= 0.15 incl= +0.382

figura 1

li= 24 ci= 128 lf= 88 cf= 124 tam= 0.25 incl= -16.000  
li= 90 ci= 128 lf= 91 cf= 181 tam= 0.21 incl= +0.019  
li= 89 ci= 182 lf= 22 cf= 181 tam= 0.27 incl= +67.000  
li= 22 ci= 181 lf= 18 cf= 136 tam= 0.18 incl= +0.089

figura 2

li= 23 ci= 208 lf= 41 cf= 205 tam= 0.06 incl= -6.000  
li= 54 ci= 209 lf= 62 cf= 319 tam= 0.38 incl= +0.073  
li= 59 ci= 321 lf= 29 cf= 322 tam= 0.09 incl= -30.000  
li= 29 ci= 322 lf= 23 cf= 208 tam= 0.39 incl= +0.053

figura 4

li= 64 ci= 351 lf= 105 cf= 312 tam= 0.30 incl= -1.051  
li= 107 ci= 313 lf= 123 cf= 335 tam= 0.15 incl= +0.727  
li= 123 ci= 335 lf= 81 cf= 378 tam= 0.32 incl= -0.977  
li= 78 ci= 377 lf= 63 cf= 355 tam= 0.14 incl= +0.682

figura 7

li= 73 ci= 216 lf= 112 cf= 215 tam= 0.15 incl= -39.000  
li= 113 ci= 217 lf= 113 cf= 299 tam= 0.33 incl= +0.000

li= 113 ci= 299 lf= 72 cf= 296 tam= 0.17 incl= +13.667  
li= 72 ci= 296 lf= 73 cf= 216 tam= 0.32 incl= -0.013

figura 8

li= 107 ci= 156 lf= 162 cf= 152 tam= 0.28 incl= -13.750  
li= 163 ci= 153 lf= 163 cf= 190 tam= 0.20 incl= +0.000  
li= 163 ci= 190 lf= 108 cf= 192 tam= 0.27 incl= -27.500  
li= 106 ci= 190 lf= 105 cf= 157 tam= 0.17 incl= +0.030

figura 9

li= 121 ci= 29 lf= 161 cf= 28 tam= 0.16 incl= -40.000  
li= 162 ci= 29 lf= 164 cf= 107 tam= 0.32 incl= +0.026  
li= 162 ci= 108 lf= 121 cf= 107 tam= 0.17 incl= +41.000  
li= 119 ci= 103 lf= 119 cf= 30 tam= 0.29 incl= -0.000

figura 10

li= 129 ci= 205 lf= 164 cf= 201 tam= 0.10 incl= -8.750  
li= 169 ci= 205 lf= 176 cf= 337 tam= 0.38 incl= +0.053  
li= 176 ci= 337 lf= 135 cf= 338 tam= 0.11 incl= -41.000  
li= 135 ci= 338 lf= 126 cf= 206 tam= 0.37 incl= +0.068

TRIANGULOS

t1.cad

figura 0

li= 8 ci= 208 lf= 35 cf= 161 tam= 0.22 incl= -0.574  
li= 37 ci= 161 lf= 69 cf= 255 tam= 0.44 incl= +0.340  
li= 63 ci= 258 lf= 9 cf= 213 tam= 0.26 incl= +1.200

figura 1

li= 13 ci= 293 lf= 87 cf= 365 tam= 0.33 incl= +1.028  
li= 82 ci= 370 lf= 31 cf= 387 tam= 0.22 incl= -3.000  
li= 31 ci= 387 lf= 10 cf= 294 tam= 0.40 incl= +0.226

figura 2

li= 12 ci= 125 lf= 56 cf= 39 tam= 0.29 incl= -0.512  
li= 56 ci= 39 lf= 135 cf= 84 tam= 0.27 incl= +1.756  
li= 134 ci= 90 lf= 12 cf= 125 tam= 0.41 incl= -3.486

figura 3

li= 24 ci= 278 lf= 83 cf= 280 tam= 0.29 incl= +29.500  
li= 86 ci= 283 lf= 87 cf= 344 tam= 0.30 incl= +0.016  
li= 85 ci= 345 lf= 19 cf= 283 tam= 0.33 incl= +1.065

figura 4

li= 62 ci= 158 lf= 143 cf= 104 tam= 0.30 incl= -1.500  
li= 147 ci= 104 lf= 161 cf= 183 tam= 0.29 incl= +0.177  
li= 159 ci= 184 lf= 63 cf= 162 tam= 0.36 incl= +4.364

figura 6

li= 77 ci= 216 lf= 169 cf= 221 tam= 0.40 incl= +18.400  
li= 169 ci= 221 lf= 144 cf= 276 tam= 0.24 incl= -0.455

li= 142 ci= 275 lf= 74 cf= 222 tam= 0.30 incl= +1.283

figura 7

li= 95 ci= 268 lf= 155 cf= 311 tam= 0.27 incl= +1.395

li= 155 ci= 311 lf= 117 cf= 370 tam= 0.27 incl= -0.644

li= 116 ci= 368 lf= 95 cf= 268 tam= 0.44 incl= +0.210

t2.cad

figura 0

li= 7 ci= 68 lf= 91 cf= 49 tam= 0.31 incl= -4.421

li= 92 ci= 51 lf= 26 cf= 148 tam= 0.36 incl= -0.680

li= 20 ci= 144 lf= 6 cf= 73 tam= 0.26 incl= +0.197

figura 1

li= 9 ci= 306 lf= 25 cf= 207 tam= 0.43 incl= -0.162

li= 32 ci= 210 lf= 59 cf= 281 tam= 0.31 incl= +0.380

li= 59 ci= 281 lf= 16 cf= 306 tam= 0.18 incl= -1.720

figura 2

li= 27 ci= 165 lf= 71 cf= 156 tam= 0.20 incl= -4.889

li= 75 ci= 160 lf= 84 cf= 243 tam= 0.39 incl= +0.108

li= 84 ci= 243 lf= 24 cf= 173 tam= 0.33 incl= +0.857

figura 3

li= 40 ci= 380 lf= 84 cf= 253 tam= 0.36 incl= -0.346

li= 88 ci= 252 lf= 173 cf= 324 tam= 0.24 incl= +1.181

li= 168 ci= 330 lf= 40 cf= 380 tam= 0.36 incl= -2.560

figura 10

li= 86 ci= 85 lf= 173 cf= 182 tam= 0.33 incl= +0.897

li= 170 ci= 190 lf= 99 cf= 198 tam= 0.24 incl= -8.875

li= 97 ci= 195 lf= 82 cf= 89 tam= 0.35 incl= +0.142

figura 11

li= 111 ci= 214 lf= 167 cf= 212 tam= 0.24 incl= -28.000

li= 167 ci= 212 lf= 167 cf= 296 tam= 0.37 incl= +0.000

li= 167 ci= 296 lf= 106 cf= 223 tam= 0.32 incl= +0.836

figura 12

li= 111 ci= 32 lf= 162 cf= 40 tam= 0.22 incl= +6.375

li= 163 ci= 41 lf= 156 cf= 121 tam= 0.36 incl= -0.087

li= 156 ci= 121 lf= 108 cf= 37 tam= 0.37 incl= +0.571

t3.cad

figura 0

li= 11 ci= 67 lf= 81 cf= 39 tam= 0.41 incl= -2.500

li= 82 ci= 41 lf= 51 cf= 89 tam= 0.28 incl= -0.646

li= 49 ci= 90 lf= 9 cf= 72 tam= 0.23 incl= +2.222

figura 1

li= 12 ci= 132 lf= 67 cf= 130 tam= 0.38 incl= -27.500

li= 71 ci= 139 lf= 42 cf= 167 tam= 0.21 incl= -1.063

li= 39 ci= 167 lf= 11 cf= 140 tam= 0.22 incl= +1.037

figura 2

li= 41 ci= 298 lf= 45 cf= 298 tam= 0.97 incl= +4000000.000

figura 3

li= 23 ci= 334 lf= 98 cf= 307 tam= 0.28 incl= -2.778  
li= 99 ci= 308 lf= 134 cf= 382 tam= 0.27 incl= +0.473  
li= 130 ci= 383 lf= 20 cf= 337 tam= 0.41 incl= +2.391

figura 7

li= 73 ci= 271 lf= 121 cf= 251 tam= 0.20 incl= -2.400  
li= 124 ci= 246 lf= 104 cf= 175 tam= 0.30 incl= +0.282  
li= 99 ci= 173 lf= 71 cf= 268 tam= 0.41 incl= -0.295

figura 8

li= 81 ci= 86 lf= 108 cf= 141 tam= 0.26 incl= +0.491  
li= 114 ci= 142 lf= 163 cf= 117 tam= 0.23 incl= -1.960  
li= 163 ci= 108 lf= 88 cf= 80 tam= 0.36 incl= +2.679

figura 9

li= 109 ci= 61 lf= 151 cf= 80 tam= 0.24 incl= +2.211  
li= 159 ci= 77 lf= 164 cf= 30 tam= 0.27 incl= -0.106  
li= 162 ci= 29 lf= 103 cf= 55 tam= 0.35 incl= -2.269

figura 10

li= 122 ci= 295 lf= 171 cf= 329 tam= 0.18 incl= +1.441  
li= 173 ci= 328 lf= 173 cf= 207 tam= 0.45 incl= -0.000  
li= 172 ci= 206 lf= 121 cf= 289 tam= 0.32 incl= -0.614

figura 11

li= 141 ci= 203 lf= 182 cf= 186 tam= 0.24 incl= -2.412  
li= 182 ci= 186 lf= 158 cf= 133 tam= 0.31 incl= +0.453  
li= 157 ci= 133 lf= 140 cf= 203 tam= 0.41 incl= -0.243

t4.cad

figura 1

figura 1

li= 9 ci= 275 lf= 20 cf= 191 tam= 0.30 incl= -0.131  
li= 25 ci= 189 lf= 107 cf= 206 tam= 0.29 incl= +4.824  
li= 105 ci= 213 lf= 16 cf= 275 tam= 0.32 incl= -1.435

figura 2

li= 13 ci= 124 lf= 64 cf= 128 tam= 0.32 incl= +12.750  
li= 75 ci= 135 lf= 29 cf= 162 tam= 0.30 incl= -1.704  
li= 27 ci= 161 lf= 11 cf= 131 tam= 0.19 incl= +0.533

figura 3

li= 12 ci= 298 lf= 55 cf= 276 tam= 0.20 incl= -1.955  
li= 58 ci= 281 lf= 79 cf= 371 tam= 0.42 incl= +0.233  
li= 75 ci= 369 lf= 12 cf= 302 tam= 0.31 incl= +0.940

figura 12

li= 93 ci= 156 lf= 110 cf= 84 tam= 0.43 incl= -0.236  
li= 112 ci= 84 lf= 128 cf= 135 tam= 0.32 incl= +0.314  
li= 128 ci= 135 lf= 99 cf= 156 tam= 0.18 incl= -1.381

figura 13

li= 107 ci= 250 lf= 151 cf= 215 tam= 0.18 incl= -1.257  
li= 153 ci= 216 lf= 151 cf= 326 tam= 0.46 incl= -0.018

li= 150 ci= 326 lf= 106 cf= 257 tam= 0.29 incl= +0.638

figura 14

li= 112 ci= 190 lf= 141 cf= 148 tam= 0.25 incl= -0.690

li= 141 ci= 148 lf= 178 cf= 196 tam= 0.28 incl= +0.771

li= 175 ci= 204 lf= 114 cf= 193 tam= 0.36 incl= +5.545

figura 15

li= 125 ci= 33 lf= 164 cf= 47 tam= 0.19 incl= +2.786

li= 165 ci= 48 lf= 161 cf= 113 tam= 0.32 incl= -0.062

li= 157 ci= 113 lf= 119 cf= 36 tam= 0.38 incl= +0.494

## CIRCULOS

c1.cad

figura 1

figura 2

figura 3

figura 5

li= 65 ci= 336 lf= 65 cf= 336 tam= 0.99 incl= +1.000

figura 13

figura 15

figura 16

c2.cad

figura 0

figura 1

figura 2

figura 5

figura 6

figura 7

figura 8

li= 128 ci= 208 lf= 128 cf= 208 tam= 0.99 incl= +1.000

figura 9

li= 103 ci= 262 lf= 85 cf= 285 tam= 0.63 incl= -0.783

li= 85 ci= 285 lf= 96 cf= 262 tam= 0.26 incl= -0.478

figura 10

li= 116 ci= 93 lf= 115 cf= 108 tam= 0.22 incl= -0.067

figura 11

li= 122 ci= 40 lf= 126 cf= 58 tam= 0.26 incl= +0.222

figura 12

li= 116 ci= 171 lf= 118 cf= 159 tam= 0.16 incl= -0.167

li= 135 ci= 161 lf= 135 cf= 175 tam= 0.19 incl= +0.000

figura 13

li= 131 ci= 270 lf= 128 cf= 272 tam= 0.97 incl= -1.500

figura 16

figura 17

figura 18

li= 163 ci= 190 lf= 173 cf= 219 tam= 0.36 incl= +0.345

li= 157 ci= 223 lf= 155 cf= 192 tam= 0.34 incl= +0.065

c3.cad

figura 0

figura 1

figura 2

figura 8

figura 9

figura 10

figura 11

c4.cad

figura 0

li= 3 ci= 107 lf= 3 cf= 107 tam= 0.98 incl= +1.000

figura 1

figura 2

li= 33 ci= 189 lf= 38 cf= 176 tam= 0.19 incl= -0.385

li= 38 ci= 176 lf= 50 cf= 177 tam= 0.16 incl= +12.000

li= 55 ci= 185 lf= 49 cf= 198 tam= 0.19 incl= -0.462

figura 3

figura 4

figura 10

figura 11

li= 102 ci= 297 lf= 106 cf= 285 tam= 0.16 incl= -0.333

figura 12

li= 134 ci= 110 lf= 135 cf= 136 tam= 0.27 incl= +0.038  
li= 132 ci= 138 lf= 117 cf= 137 tam= 0.15 incl= +15.000  
li= 117 ci= 137 lf= 134 cf= 110 tam= 0.50 incl= -0.630

figura 15

figura 16

li= 166 ci= 142 lf= 163 cf= 174 tam= 0.33 incl= -0.094  
li= 158 ci= 176 lf= 150 cf= 140 tam= 0.42 incl= +0.222

figura 17

li= 161 ci= 81 lf= 167 cf= 104 tam= 0.33 incl= +0.261  
li= 153 ci= 106 lf= 150 cf= 85 tam= 0.27 incl= +0.143

# MISTAS

ml.cad

figura 0

figura 1

li= 18 ci= 48 lf= 64 cf= 46 tam= 0.21 incl= -23.000  
li= 67 ci= 50 lf= 69 cf= 107 tam= 0.26 incl= +0.035  
li= 64 ci= 109 lf= 19 cf= 109 tam= 0.20 incl= -45000000.000  
li= 16 ci= 105 lf= 15 cf= 50 tam= 0.24 incl= +0.018

figura 2

li= 24 ci= 130 lf= 67 cf= 117 tam= 0.22 incl= -3.308  
li= 70 ci= 121 lf= 79 cf= 170 tam= 0.25 incl= +0.184  
li= 77 ci= 171 lf= 35 cf= 181 tam= 0.21 incl= -4.200  
li= 35 ci= 181 lf= 22 cf= 136 tam= 0.23 incl= +0.289

figura 3

figura 5

li= 36 ci= 315 lf= 93 cf= 274 tam= 0.31 incl= -1.390  
li= 93 ci= 274 lf= 108 cf= 308 tam= 0.18 incl= +0.441  
li= 108 ci= 308 lf= 52 cf= 347 tam= 0.30 incl= -1.436  
li= 48 ci= 345 lf= 35 cf= 321 tam= 0.12 incl= +0.542

figura 7

li= 87 ci= 182 lf= 103 cf= 180 tam= 0.09 incl= -8.000  
li= 103 ci= 180 lf= 108 cf= 245 tam= 0.40 incl= +0.077  
li= 108 ci= 245 lf= 93 cf= 246 tam= 0.09 incl= -15.000  
li= 92 ci= 244 lf= 85 cf= 183 tam= 0.36 incl= +0.115

figura 8

li= 91 ci= 71 lf= 124 cf= 32 tam= 0.23 incl= -0.846  
li= 127 ci= 33 lf= 163 cf= 53 tam= 0.21 incl= +1.800  
li= 164 ci= 60 lf= 89 cf= 77 tam= 0.44 incl= -4.412

figura 9

li= 93 ci= 116 lf= 159 cf= 93 tam= 0.30 incl= -2.870  
li= 161 ci= 96 lf= 176 cf= 153 tam= 0.26 incl= +0.263  
li= 172 ci= 151 lf= 94 cf= 124 tam= 0.36 incl= +2.889

figura 10

li= 124 ci= 164 lf= 164 cf= 163 tam= 0.22 incl= -40.000  
li= 165 ci= 165 lf= 164 cf= 213 tam= 0.26 incl= -0.021  
li= 164 ci= 213 lf= 122 cf= 211 tam= 0.23 incl= +21.000  
li= 122 ci= 211 lf= 124 cf= 164 tam= 0.26 incl= -0.043

figura 12

li= 134 ci= 269 lf= 172 cf= 264 tam= 0.13 incl= -7.600  
li= 173 ci= 265 lf= 181 cf= 366 tam= 0.35 incl= +0.079  
li= 179 ci= 367 lf= 140 cf= 372 tam= 0.13 incl= -7.800  
li= 138 ci= 369 lf= 131 cf= 271 tam= 0.34 incl= +0.071

m2. cad

figura 0

figura 1

li= 22 ci= 158 lf= 99 cf= 155 tam= 0.22 incl= -25.667  
li= 103 ci= 156 lf= 104 cf= 252 tam= 0.27 incl= +0.010  
li= 101 ci= 254 lf= 23 cf= 252 tam= 0.22 incl= +39.000  
li= 21 ci= 249 lf= 21 cf= 158 tam= 0.25 incl= -0.000

figura 2

li= 30 ci= 293 lf= 89 cf= 289 tam= 0.26 incl= -14.750  
li= 95 ci= 292 lf= 94 cf= 339 tam= 0.21 incl= -0.021  
li= 92 ci= 340 lf= 30 cf= 340 tam= 0.27 incl= -62000000.000  
li= 28 ci= 337 lf= 28 cf= 294 tam= 0.18 incl= -0.000

figura 5

li= 61 ci= 138 lf= 98 cf= 59 tam= 0.38 incl= -0.468  
li= 102 ci= 55 lf= 121 cf= 114 tam= 0.28 incl= +0.322  
li= 121 ci= 114 lf= 67 cf= 142 tam= 0.26 incl= -1.929

figura 9

figura 10

li= 116 ci= 380 lf= 186 cf= 370 tam= 0.24 incl= -7.000  
li= 186 ci= 370 lf= 183 cf= 265 tam= 0.35 incl= +0.029  
li= 180 ci= 267 lf= 115 cf= 380 tam= 0.38 incl= -0.575

figura 11

li= 119 ci= 149 lf= 159 cf= 197 tam= 0.24 incl= +0.833  
li= 160 ci= 199 lf= 118 cf= 246 tam= 0.24 incl= -0.894  
li= 116 ci= 245 lf= 117 cf= 149 tam= 0.47 incl= -0.010

m3. cad

figura 0

li= 19 ci= 197 lf= 39 cf= 157 tam= 0.22 incl= -0.500  
li= 46 ci= 161 lf= 52 cf= 242 tam= 0.46 incl= +0.074  
li= 52 ci= 242 lf= 20 cf= 199 tam= 0.24 incl= +0.744

figura 1

li= 44 ci= 58 lf= 79 cf= 54 tam= 0.15 incl= -8.750  
li= 83 ci= 58 lf= 87 cf= 118 tam= 0.26 incl= +0.067  
li= 87 ci= 118 lf= 37 cf= 121 tam= 0.22 incl= -16.667  
li= 34 ci= 118 lf= 30 cf= 62 tam= 0.24 incl= +0.071

figura 2

figura 13

figura 14

li= 84 ci= 232 lf= 168 cf= 224 tam= 0.30 incl= -10.500  
li= 168 ci= 224 lf= 171 cf= 274 tam= 0.18 incl= +0.060

li= 169 ci= 275 lf= 91 cf= 282 tam= 0.28 incl= -11.143  
li= 85 ci= 278 lf= 84 cf= 232 tam= 0.17 incl= +0.022

figura 19

li= 107 ci= 112 lf= 161 cf= 112 tam= 0.34 incl= +54000000.000  
li= 161 ci= 112 lf= 161 cf= 134 tam= 0.14 incl= +0.000  
li= 158 ci= 135 lf= 110 cf= 136 tam= 0.31 incl= -48.000  
li= 105 ci= 132 lf= 107 cf= 112 tam= 0.12 incl= -0.100

figura 20

figura 22

li= 115 ci= 372 lf= 120 cf= 317 tam= 0.25 incl= -0.091  
li= 122 ci= 316 lf= 169 cf= 321 tam= 0.22 incl= +9.400  
li= 170 ci= 323 lf= 165 cf= 379 tam= 0.26 incl= -0.089  
li= 163 ci= 380 lf= 115 cf= 372 tam= 0.22 incl= +6.000

m4.cad

figura 0

li= 15 ci= 215 lf= 54 cf= 135 tam= 0.31 incl= -0.488  
li= 54 ci= 135 lf= 119 cf= 164 tam= 0.25 incl= +2.241  
li= 117 ci= 172 lf= 16 cf= 217 tam= 0.39 incl= -2.244

figura 1

figura 2

li= 20 ci= 117 lf= 65 cf= 93 tam= 0.33 incl= -1.875  
li= 65 ci= 93 lf= 73 cf= 115 tam= 0.16 incl= +0.364  
li= 73 ci= 115 lf= 23 cf= 133 tam= 0.37 incl= -2.778

figura 3

li= 20 ci= 75 lf= 56 cf= 32 tam= 0.24 incl= -0.837  
li= 56 ci= 32 lf= 99 cf= 73 tam= 0.25 incl= +1.049  
li= 97 ci= 78 lf= 19 cf= 81 tam= 0.34 incl= -26.000

figura 16

li= 76 ci= 292 lf= 90 cf= 239 tam= 0.26 incl= -0.264  
li= 95 ci= 239 lf= 136 cf= 253 tam= 0.20 incl= +2.929  
li= 137 ci= 255 lf= 121 cf= 310 tam= 0.27 incl= -0.291  
li= 121 ci= 310 lf= 78 cf= 295 tam= 0.21 incl= +2.867

figura 20

figura 21

li= 133 ci= 32 lf= 164 cf= 33 tam= 0.10 incl= +31.000  
li= 165 ci= 35 lf= 166 cf= 145 tam= 0.37 incl= +0.009  
li= 163 ci= 147 lf= 131 cf= 145 tam= 0.11 incl= +16.000  
li= 130 ci= 143 lf= 130 cf= 34 tam= 0.37 incl= -0.000

m5.cad

figura 0

li= 10 ci= 87 lf= 140 cf= 99 tam= 0.44 incl= +10.833  
li= 137 ci= 114 lf= 8 cf= 97 tam= 0.45 incl= +7.588

figura 1

li= 24 ci= 243 lf= 59 cf= 229 tam= 0.30 incl= -2.500

li= 59 ci= 229 lf= 63 cf= 252 tam= 0.20 incl= +0.174  
li= 63 ci= 252 lf= 29 cf= 264 tam= 0.29 incl= -2.833

figura 2

li= 39 ci= 48 lf= 159 cf= 32 tam= 0.45 incl= -7.500  
li= 157 ci= 39 lf= 118 cf= 82 tam= 0.17 incl= -0.907  
li= 117 ci= 81 lf= 33 cf= 53 tam= 0.31 incl= +3.000

figura 5

li= 36 ci= 300 lf= 75 cf= 375 tam= 0.27 incl= +0.520  
li= 77 ci= 376 lf= 150 cf= 325 tam= 0.27 incl= -1.431  
li= 148 ci= 323 lf= 39 cf= 293 tam= 0.40 incl= +3.633

figura 15

li= 81 ci= 290 lf= 87 cf= 237 tam= 0.21 incl= -0.113  
li= 90 ci= 235 lf= 158 cf= 247 tam= 0.26 incl= +5.667  
li= 158 ci= 247 lf= 150 cf= 305 tam= 0.23 incl= -0.138  
li= 146 ci= 305 lf= 81 cf= 290 tam= 0.25 incl= +4.333

figura 19