**Universidade Estadual de Campinas**
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Sistemas e Controle de Energia

# Controle de sistemas lineares discretos com saltos markovianos sem informação completa dos estados da cadeia

Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

**Alim Pedro de Castro Gonçalves**
Engenheiro Eletricista – Unicamp (2000)

em 11 de maio de 2006 perante a banca examinadora:

| | |
|---|---|
| **Prof. Dr. José C. Geromel** | FEEC/UNICAMP (orientador) |
| **Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa** | EPUSP |
| **Prof. Dr. Akebo Yamakami** | FEEC/UNICAMP |
| **Prof. Dr. João Bosco R. do Val** | FEEC/UNICAMP |

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

| | |
|---|---|
| G589c | Gonçalves, Alim Pedro de Castro<br>Controle de sistemas lineares discretos com saltos markovianos sem informação completa dos estados da cadeia / Alim Pedro de Castro Gonçalves. --Campinas, SP: [s.n.], 2006.<br><br>Orientador: José Cláudio Geromel<br>Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.<br><br>1. Teoria do controle. 2. Sistemas lineares. 3. Sistemas estocásticos. 4. Markov, Processos de. I. Geromel, José Cláudio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título. |

Titulo em Inglês: Control of discrete-time jump linear systems with partial observation of the Markov state
Palavras-chave em Inglês: Control theory, Linear systems, Stochastic system, Markov processes
Área de concentração: Automação
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca examinadora: Oswaldo Luiz do Valle Costa, Akebo Yamakami e João Bosco Ribeiro do Val
Data da defesa: 11/05/2006

# Resumo

Este trabalho aborda alguns dos aspectos mais relevantes relacionados à estabilidade e norma $H_2$ de sistemas lineares discretos sujeitos a saltos markovianos, bem como as estratégias para a síntese de controle por realimentação de estado. A maior contribuição apresentada é um método para calcular os ganhos de realimentação de estado sem a necessidade de observar, em cada instante, todos os estados da cadeia de Markov.

# Abstract

This work discusses some of the most relevant aspects of stability and $H_2$ norm of discrete-time markov jump linear systems, as well as a method for state feedback control design. Our major contribution is on the definition of a procedure to determine the state feedback gains without the complete knowledge, at each instant of time, of the Markov chain state.

"(...)Olhai os lírios do campo, como crescem, e não trabalham nem fiam. No entanto, eu vos asseguro que nem Salomão, em toda a sua glória, se vestiu como um deles. Ora, se Deus veste assim a erva do campo, que hoje existe e amanhã será lançada ao forno, não fará Ele muito mais por vós, homens fracos na Fé?"

Mateus, 6, 28-30

# Agradecimentos

Há muitas pessoas que contribuíram para a confecção deste trabalho. Foram inúmeras correções e sugestões, críticas e elogios. Só a ajuda de tanta gente me permitiu completar esta dissertação. Os erros que eventualmente permaneceram são todos meus.

Em particular quero externar meus sinceros agradecimentos a algumas dessas pessoas. Arriscando omissões:

- Ao meu orientador, Prof. Geromel, cuja assombrosa capacidade intelectual (e pulmonar!) ainda me surpreende a cada dia;
- Aos meus amigos: Romis Attux, Eduardo Henrique e Rodrigo Maluf Barella. Sem o incentivo deles este trabalho dificilmente estaria pronto;
- Aos meus pais, Jacy e Nicolau, pelo presente da sólida formação intelectual e humana que me deram;
- Ao meu amor, Carolina, razão por trás do meu despertar diário, pela paciência e pelo carinho com que suportou meus momentos de ausência durante esta pesquisa.

Por uma feliz coincidência, este trabalho nasce no mesmo ano que meu primeiro filho, Inácio. Tudo o que se passou até aqui em minha vida foi mera preparação para este momento tão importante.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Introdução

Nos últimos anos, os sistemas lineares com parâmetros sujeitos a saltos markovianos têm sido fonte de muitos trabalhos e estudos, já que constituem uma classe importante de sistemas estocásticos. Estes sistemas servem ao modelamento de diversos problemas onde a estrutura física pode sofrer mudanças abruptas e aleatórias devido a, por exemplo, falhas e reparos, mudanças ambientais repentinas ou modificações do ponto de operação, no caso não-linear. Como a área de aplicação pode ser bem ampla, o interesse por este tipo de sistema é crescente dos pontos de vista da estabilidade, controle e otimização.

Para melhor entender como são os sistemas com saltos markovianos que tratamos ao longo deste trabalho, considere um sistema que pode apresentar mais de um modo de operação, cada um deles regido por um conjunto de equações a diferenças (particularmente, lineares e invariantes no tempo). O sistema muda de modo de operação de acordo com uma cadeia de Markov, isto é, a probabilidade dele passar a um outro modo de operação depende apenas do seu modo de operação atual. Considere ainda que sejam conhecidas todas as probabilidades de transição. A Figura 1.1 representa um sistema deste tipo, onde os círculos são os diferentes modos de operação e as setas são as probabilidades de transição.

Há diversos trabalhos tratando do controle com observação completa, isto é, observando todas as variáveis de estado bem como todos os estados da cadeia de Markov. Há, entretanto, uma séria limitação à aplicação de tais modelos na prática, pois o projeto culmina em uma lei de controle, em geral, diferente para cada modo de operação. A própria natureza aleatória das mudanças, sugerida pela existência de uma matriz de probabilidades, indica que tal informação seja muito difícil de se obter, *a priori*.

Uma forma de evitar tal dificuldade é adotar controle com realimentação que não dependa explicitamente dos estados da cadeia ou que dependa apenas de

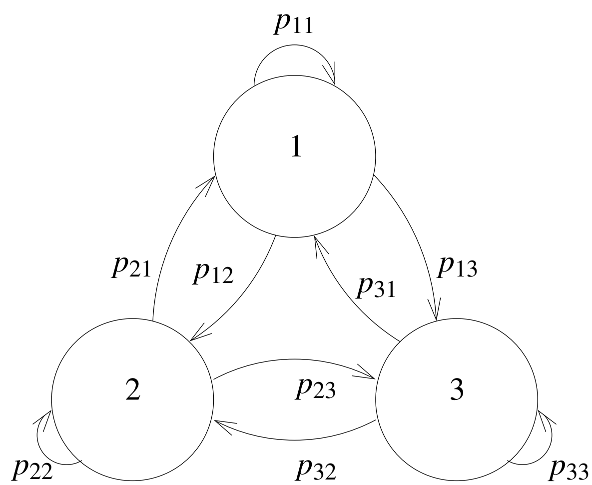


Figura 1.1: Cadeia de três estados

estimativas destes estados, a partir de informações disponíveis em todo instante de tempo. Podemos citar nestes casos (Caines & Zhang 1995), (Costa, do Val & Geromel 1997), (do Val & Basar 1999) e (Pan & Bar-Shalom 1996). Em (Caines & Zhang 1995) e (Pan & Bar-Shalom 1996), estuda-se a estabilidade do sistema em malha fechada para o problema sem observação dos estados da cadeia de Markov, mas as análises não produzem controles estabilizantes. Em (Costa et al. 1997), determina-se uma solução estável, mas ela não pode ser colocada na forma de LMI (do inglês: *"Linear Matrix Inequalities"*) e em (do Val & Basar 1999) o problema de controle com horizonte finito é estudado sem a observação do estado da cadeia de Markov ou com observação limitada a grupos (*clusters*) de estados, determinando-se a seqüência de controle ótimo-LQ mas, naturalmente, sem garantir a estabilidade em malha fechada.

A hipótese de conhecimento parcial dos estados da cadeia é tratada aqui como em (do Val, Geromel & Gonçalves 2002), com base em um resultado de (Oliveira, Bernussou & Geromel 1999), sempre com o uso de LMIs.

Neste trabalho são enfocados aspectos como estabilidade, norma $H_2$ e obtenção do controle estabilizante e, em alguns casos, ótimo $H_2$. Além disso, usamos um método alternativo para solucionar o problema de otimização $H_2$, via Equações de Riccati Acopladas. Ali são observadas algumas características gerais da solução, que não podem ser vistas na formulação LMI.

Passamos em seguida ao controle, tanto com fins a estabilidade quanto para minimização da norma $H_2$. São considerados três cenários possíveis com relação ao estado da cadeia de Markov: conhecimento total, parcial ou desconhecimento completo.

Utilizamos os mesmos exemplos numéricos ao longo do trabalho, para ilustrar uma comparação entre os diferentes métodos. Tais exemplos foram resolvidos com o *LMISolver*, uma ferramenta de programação convexa totalmente desenvolvida por este grupo de pesquisa (c.f. `http://www.dt.fee.unicamp.br/~geromel`). Finalmente, apresentamos duas possíveis aplicações práticas para os conceitos explorados nesta dissertação.

# Capítulo 2

# Conceitos Básicos

## 2.1 Notação

Ao longo deste trabalho, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ representam os conjuntos dos números reais e complexos, respectivamente, $\mathbb{C}^n$ o espaço Euclidiano $n$-dimensional e $\mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,...\}$. O espaço de matrizes $n \times m$ é representado por $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ se $n = m$ . O produto interno é representado por $< .;. >$ e a norma é $\| \, . \, \|$, tanto em $\mathbb{R}^n$ quanto em $\mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$. Seja $A$ uma matriz, $A'$ é a matriz transposta e $A^*$ é a transposta conjugada.

Representamos por $tr(L)$ o traço de $L \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ e usamos a notação $L \geq 0$ (e $L > 0$) para matrizes quadradas semi-definidas positivas (e definidas positivas). O raio espectral de $L$ é denotado como $r_\sigma(L)$.

Seja $\mathcal{H}^{m,n}$ o espaço linear formado por todas as seqüências de matrizes $V = (V_1, V_2, ..., V_N), V_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$. Para $V \in \mathcal{H}^{n,m}$ definimos a norma:

$$\| \, V \, \|_2 := \left( \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^* V_i) \right)^{1/2}$$

Pode-se verificar que o espaço assim equipado com a norma $\| \, . \, \|_2$ é um espaço de Hilbert complexo, com produto interno dado por:

$$< V; H >= \sum_{i=1}^{N} tr(V_i^* H_i).$$

Quando representando matrizes por blocos, caso sejam simétricas, omitimos alguns termos por simplicidade, ou seja:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \bullet & C \end{bmatrix} \text{ é equivalente a } \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

Um resultado muito importante, usado ao longo deste trabalho, é o complemento de Schur, enunciado no lema a seguir:

**Lema 2.1** (Complemento de Schur)**.** *Para* $X \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n), Y \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), Z \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^m)$*:*

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y' & Z \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} X > 0 \\ Z - Y'X^{-1}Y > 0 \end{cases} \\ ou \\ \begin{cases} Z > 0 \\ X - YZ^{-1}Y' > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Definimos $l_2^k(\mathcal{F}_k)$ como o espaço de Hilbert formado pela seqüência de variáveis aleatórias $z = (z(0), z(1), \ldots)$ com $z(k) \in \mathbb{R}^r$ tal que:

$$\| z \|_2^2 := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z(k)'z(k)\} < \infty$$

onde $\mathcal{E}\{\cdot\}$ denota o operador esperança matemática. Acabamos portanto de definir um espaço de seqüências aleatórias com normas limitadas.

## 2.2 Estabilidade

Seja o sistema linear

$$x(k+1) = A(\theta_k)x(k) \tag{2.1}$$

onde a matriz $A(\cdot) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ usada para definir sua representação de estado, depende de um conjunto de parâmetros $\theta_k$, cuja evolução temporal é descrita através de uma cadeia de Markov que assume valores em um conjunto com um número finito de elementos, a saber $A(\theta_k) \in \{A_1, \cdots, A_N\}$.

Na cadeia de Markov, a probabilidade dos parâmetros saltarem do estado $i$ para o estado $j$ é definida por $P(\theta_{k+1} = j|\theta_k = i) = p_{ij}$. Todas as combinações formam a matriz de probabilidade $\mathbb{P} = [p_{ij}]$. Note ainda que $p_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$.

Agora, pretendemos verificar sob que condições o sistema acima definido é estável. Uma das definições de estabilidade para esta classe de sistemas dinâmicos que a literatura (Ji & Chizeck 1990) identifica é a seguinte:

**Definição 2.1** (Estabilidade Estocástica)**.** *O modelo (2.1) é estocasticamente estável, se para todo estado inicial* $(x_0, \theta_0)$*, existir um número* $M(x_0, \theta_0)$ *finito tal que:*

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{E}\left\{ \sum_{k=0}^{T} x(k)'x(k) \middle| x_0, \theta_0 \right\} < M(x_0, \theta_0) \tag{2.2}$$

Observe que o conceito acima define a estabilidade do sistema *como um todo*. Como veremos a seguir, a estabilidade de cada modo de operação não é condição necessária, nem suficiente, para a estabilidade estocástica.

É preciso estabelecer um teste para verificar se um dado sistema da classe sob consideração é ou não estável. O que se segue é baseado em (Ji & Chizeck 1990) e em (Costa & Fragoso 1993). Deve ser ressaltado que, embora a referência (Costa & Fragoso 1993) trabalhe com o conceito de estabilidade por média quadrática, é possível demonstrar que para a classe de sistemas cujos estados assumem valores em uma cadeia de Markov finita, ambos os conceitos são equivalentes (Ji, Chizeck, Feng & Loparo 1991).

**Teorema 2.1** (Testes para Estabilidade Estocástica)**.**
*As afirmações abaixo são equivalentes:*

*(i)O sistema (2.1) é estocasticamente estável.*

*(ii)Existe um conjunto de matrizes* $N_i = N_i' > 0,\ N_i \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ *com* $i = 1, 2, \cdots, N$ *que satisfaz as desigualdades abaixo:*

$$A_i'\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} N_j\right) A_i - N_i \ < \ 0; \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.3}$$

*(iii)Existe um conjunto de matrizes* $M_j = M_j' > 0,\ M_j \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ *com* $j = 1, 2, \cdots, N$ *que satisfaz as desigualdades abaixo:*

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij} A_i M_i A_i' - M_j \ < \ 0; \qquad\qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.4}$$

**Prova.** $(ii) \Rightarrow (i)$ Primeiramente, convertemos as desigualdades (2.3) em equações. Suponha que, dado $\{W_i = W_i' > 0; i = 1, 2, \cdots, N\}$ chega-se a um conjunto solução $\{N_i = N_i' > 0; i = 1, 2, \cdots, N\}$ conforme as equações:

$$A_i'\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} N_j\right) A_i - N_i \ = \ -W_i; \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.5}$$

Considere a função de Lyapunov estocástica:

$$V(\theta_k, x(k)) := x(k)' N(\theta_k) x(k) \tag{2.6}$$

a qual permite determinar

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{V(\theta_{k+1},x(k+1))|\theta_k,x(k)\}-V(\theta_k,x(k)) &= x(k)'A(\theta_k)\sum_{j=1}^{N}p_{\theta_k j}N_jA(\theta_k)x(k)- \\
&\quad -x(k)'N(\theta_k)x(k) \\
&= -x(k)'W(\theta_k)x(k) \\
&< 0
\end{aligned}$$

Assumindo sem perda de generalidade que $x(k)\neq 0$ pois, caso contrário, toda a seqüência $x(k+1)$ será também nula, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{E}\{V(\theta(k+1),x(k+1))|\theta_k,x(k)\}-V(\theta_k,x(k))}{V(\theta_k,x(k))} &= -\frac{x(k)'W(\theta_k)x(k)}{x(k)'N(\theta_k)x(k)} \\
&\leq -\min_{i=1,\cdots,N}\left\{\frac{\lambda_{min}(W_i)}{\lambda_{max}(N_i)}\right\} \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Definindo o escalar

$$\alpha := 1-\min_{i=1,\cdots,N}\left\{\frac{\lambda_{min}(W_i)}{\lambda_{max}(N_i)}\right\} \qquad (2.8)$$

verificamos, sem grandes dificuldades que, por um lado $\alpha<1$ pois $W_i$ e $N_i$ são matrizes definidas positivas e, por outro lado com (2.7)

$$\alpha \geq \frac{\mathcal{E}\{V(\theta_{k+1},x(k+1))|\theta_k,x(k)\}}{V(\theta_k,x(k))} > 0 \qquad (2.9)$$

o que permite concluir que

$$\mathcal{E}\{V(\theta_{k+1},x(k+1))|\theta_k,x(k)\} \leq \alpha V(\theta_k,x(k)) \qquad (2.10)$$

para algum $0<\alpha<1$. Levando-se em conta esta relação para $k=0$ e $k=1$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{V(\theta_1,x(1))|\theta_0,x(0)\} &\leq \alpha V(\theta_0,x(0)) \\
\mathcal{E}\{V(\theta_2,x(2))|\theta_1,x(1)\} &\leq \alpha V(\theta_1,x(1))
\end{aligned}$$

e aplicando-se o operador $\mathcal{E}\{.|\theta_0,x(0)\}$ na última delas vem

$$\mathcal{E}\{V(\theta_2,x(2))|\theta_0,x(0)\} \leq \alpha\mathcal{E}\{V(\theta_1,x(1))|\theta_0,x(0)\} \leq \alpha^2V(\theta_0,x(0)) \qquad (2.11)$$

Torna-se portanto aparente que a partir de (2.11), chegamos a

$$\mathcal{E}\{V(\theta_k,x(k))|\theta_0,x_0\} \leq \alpha^kV(\theta_0,x_0) \qquad (2.12)$$

válida para todo $k \geq 0$. Temos portanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{T} V(\theta_k, x(k)) \middle| \theta_0, x_0\right\} &\leq (1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^T)V(\theta_0,x_0)\\ &\leq \frac{(1-\alpha^{(T+1)})}{1-\alpha}V(\theta_0,x_0)\end{aligned}$$

que levando em conta o fato de que $0<\alpha<1$ permite calcular o limite

$$\lim_{T\to\infty}\left(\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{T} x(k)'N(\theta_k)x(k)\middle|\theta_0,x_0\right\}\right) \leq \frac{1}{1-\alpha}x_0'N(\theta_0)x_0 \tag{2.13}$$

e, finalmente

$$\lim_{T\to\infty}\mathcal{E}\left\{\sum_{k=0}^{T} x(k)'x(k)\middle|\theta_0,x_0\right\} \leq \frac{1}{\min\limits_{i=1,\cdots,N}\lambda_{min}(N_i)}\cdot\frac{1}{1-\alpha}x_0'N(\theta_0)x_0 := M(x_0,\theta_0)$$

que é o que desejávamos provar.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Definimos a seqüência $\{x(k)'N(T-k,\theta_k)x(k)\}$ através da igualdade

$$x(k)'N(T-k,\theta_k)x(k) := \mathcal{E}\left\{\sum_{t=k}^{T} x(t)'W(\theta_t)x(t)\middle|\theta_k,x(k)\right\} \tag{2.14}$$

Para $x(k)\neq 0$, se $T-k$ cresce, então $x(k)'N(T-k,\theta_k)x(k)>0$ cresce monotonicamente pois $W(\theta_t)>0$ e portanto um maior número de termos estritamente positivos são adicionados. Pela estabilidade estocástica do sistema, a quantidade (2.14) é limitada superiormente, fazendo com que os seguintes limites existam:

$$\begin{aligned}x(k)'N_ix(k) :&= \lim_{T-k\to\infty} x(k)'N(T-k,\theta_k=i)x(k)\\ &= \lim_{T-k\to\infty}\mathcal{E}\left\{\sum_{t=k}^{T} x(t)'W(\theta_t)x(t)\middle|\theta_k=i,x(k)\right\}\end{aligned}$$

Como este limite deve ser válido $\forall x(k)\neq 0$, obtemos

$$N_i := \lim_{T-k\to\infty} N(T-k,\theta_k=i)$$

Por outro lado, aplicando (2.14) para $k=0$ e $k=1$ respectivamente e subtraindo as quantidades obtidas, vem

$$x_0'N(T,\theta_0)x_0 - x(1)'N(T-1,\theta_1)x(1) = \mathcal{E}\{x_0'W(\theta_0)x_0|\theta_0=i,x_0\}$$

o que implica, após a aplicação do operador $\mathcal{E}\{.|\theta_0 = i, x(0)\}$, na igualdade

$$x_0' N(T, \theta_0 = i) x_0 - \sum_{j=1}^{N} p_{ij} x_0' A_i' N(T-1, \theta_1 = j) A_i x_0 = x_0' W_i x_0$$

Finalmente, como esta equação deve valer $\forall x_0$, temos

$$N(T, \theta_0 = i) - \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_i' N(T-1, \theta_1 = j) A_i = W_i$$

permitindo a conclusão de que ao fazermos $T \to \infty$, existe um conjunto de matrizes $N_i = N_i' > 0$ com $i = 1, 2, \cdots, N$ que satisfaz a igualdade

$$N_i - A_i' \left( \sum_{j=1}^{N} p_{ij} N_j \right) A_i = W_i; \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

isto conclui a prova ao levarmos em conta que $W_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, N$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Pode ser encontrada em (Costa & Fragoso 1993). □

O resultado deste teorema é importante pois coloca em evidência que a estabilidade estocástica do sistema com saltos Markovianos em estudo pode ser avaliada através de duas condições equivalentes. Estas condições são expressas por dois conjuntos de $N$ desigualdades matriciais lineares. Na próxima seção, nosso objetivo é estudar estas desigualdades para obter aquela que fornece resultados mais simples para as implementações numéricas a serem feitas nos próximos capítulos.

### 2.2.1 Restrição de Estabilidade via LMIs

Vamos inicialmente considerar as desigualdades expressas em (2.4). Neste caso, introduzindo as variáveis adicionais $R_i = R_i' > 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$ tais que

$$R_i \ > \ A_i M_i A_i'; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.15}$$

fica claro que, ao escrevermos

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij} R_i \ - \ M_j \ < \ 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.16}$$

também as desigualdades (2.4) se verificam. Aplicando complemento de Schur a (2.15) vem:

$$\begin{bmatrix} R_i & A_i M_i \\ \bullet & M_i \end{bmatrix} \ > \ 0; \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.17}$$

Em um ambiente de programação convexa, como o *LMISolver*, basta minimizar uma função objetivo qualquer sujeita às restrições (2.16) e (2.17) e, se o programa for factível, então o sistema é estocasticamente estável.

Naturalmente, há uma formulação alternativa para o teste de estabilidade, que é baseada nas desigualdades (2.3). Primeiramente fazemos a mudança de variável $N_i^{-1} = W_i$ e em seguida multiplicamos (2.3) a direita e a esquerda por $W_i$, obtendo

$$W_i A_i' \left( \sum_{j=1}^{N} p_{ij} W_j^{-1} \right) A_i W_i - W_i < 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.18}$$

Introduzindo as seguintes variáveis $R_i = R_i' > 0$ e restrições adicionais

$$R_i^{-1} > \left( \sum_{j=1}^{N} p_{ij} W_j^{-1} \right); \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.19}$$

podemos escrever a restrição

$$\begin{bmatrix} W_i & W_i A_i' \\ \bullet & R_i \end{bmatrix} > 0; \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.20}$$

em lugar de (2.18). Por outro lado, multiplicando (2.19) por $R_i$ à direita e à esquerda, temos

$$R_i > \sum_{j=1}^{N} \sqrt{p_{ij}} R_i W_j^{-1} \sqrt{p_{ij}} R_i; \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

sob as quais, aplicando o complemento de Schur, obtemos as desigualdades

$$\begin{bmatrix} R_i & \sqrt{p_{i1}} R_i & \ldots & \sqrt{p_{iN}} R_i \\ \bullet & W_1 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \ddots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & W_N \end{bmatrix} > 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.21}$$

É importante notar, através dos procedimentos que acabamos de realizar, que as LMIs (2.20) e (2.21) são equivalentes às desigualdades (2.3). Assim sendo, se factíveis, elas indicam a estabilidade do sistema em estudo.

Estas duas condições de estabilidade, devem ser comparadas sob o ponto de vista numérico. A primeira, caracterizada pelas desigualdades (2.16) e (2.17), tem $2N$ variáveis e $2N$ desigualdades matriciais lineares, com dimensões $n \times n$ e $2n \times 2n$, respectivamente. Já a segunda, caracterizada por (2.20) e (2.21), embora tenha o mesmo número de variáveis e de LMIs, apresenta dimensões $2n \times 2n$

e $(N+1)n \times (N+1)n$, respectivamente. Como $N \geq 1$, o segundo conjunto de LMIs será mais difícil de ser resolvido, muito embora as desigualdades lineares (2.21) apresentem estruturas bloco diagonais mas que, infelizmente, são acopladas pela primeira linha. Conclui-se, portanto, que o primeiro teste de estabilidade é preferível em comparação com o segundo, quando a eficiência numérica de solução é requerida.

### 2.2.2 Exemplos Ilustrativos

De acordo com as definições deste capítulo, nada se pode afirmar a respeito da estabilidade estocástica de um sistema com saltos Markovianos levando-se em conta cada estado da cadeia individualmente. É simples imaginar que mesmo com dois estados de Markov instáveis o sistema todo pode ser estocasticamente estável, pois seu comportamento global é na verdade uma combinação dos dois estados, não necessariamente parecida com algum deles em particular. Tudo depende de como os estados e seus modos próprios estão interconectados pelas probabilidades de transição, teste que pode ser feito com os resultados do Teorema 2.1.

O exemplo abaixo, retirado de (Ji & Chizeck 1990), demonstra tal fato numericamente. Trata-se de um sistema que oscila entre dois estados diferentes, cada um deles com sua respectiva matriz dinâmica instável (ou seja, $r_\sigma[A_1] > 1$ e $r_\sigma[A_2] > 1$). Para o modelo (2.1), temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; , \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

sendo a matriz de probabilidade de transição dada por

$$\mathbb{P} \; = \; \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Para saber se o sistema global é ou não estocasticamente estável, programamos o *LMISolver* com as restrições definidas pelas desigualdades matriciais lineares (2.16) e (2.17). A factibilidade deste problema é condição necessária e suficiente para a estabilidade estocástica do sistema em estudo. A saída do *LMISolver* foi a seguinte:

```
Building... - Evaluating algebraic expressions.
  Evaluating LMIs. Ok.
  Evaluating LMEs. Ok.
  Evaluating objective. Ok.
```

```
- Variables. Ok. - LME basis.
  No LMEs defined by user.
  Processing structural LMEs. Ok.
  Processing LME basis. Ok.
- LMI basis.
  Gathering LMIs. Ok.
  Simplifying LMIs. Not implemented yet...
  No linear inequalities defined by user.
  Processing matrix inequalities basis. Ok.
  Processing block matrix inequalities basis. Ok.
- Objective basis.
  Processing objective. Ok.
- Last checks.
  Checking unreferenced variables. Ok.
  Checking symmetry. Ok.

Searching feasible point...
--------------------------
 Iteration    Feasibility
   counter    radius
--------------------------
         1    2.4668
         2    2.3990
--------------------------

Optimizing...
-------------------------------------
 Iteration    Objective     Relative
   counter    value         accuracy
-------------------------------------
         1    1.9408e-18    1.0000
         2    8.5083e-19    0.0000
-------------------------------------
```

Nota-se portanto que o sistema dado é estocasticamente estável. Isto confirma os resultados apresentados em (Ji & Chizeck 1990) onde as equações (2.5) são resolvidas com $W_1 = W_2 = I$. A única solução possível para aquelas equações é caracterizada pelas matrizes simétricas e definidas positivas

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 23 & -10 \\ -10 & 8 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

o que implica na estabilidade estocástica, segundo estabelecido no Teorema 2.1.

Da mesma maneira, como é possível um sistema com estados instáveis ser estocasticamente estável, também é possível que um determinado sistema tenha estados estáveis, mas que em conjunto com uma dada matriz de probabilidades de transição, resulte em um sistema estocasticamente instável. Isto é o que nos mostra o seguinte exemplo, também baseado em (Ji & Chizeck 1990)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \ , \ \ A_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

com matriz de probabilidades:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Como se observa, as matrizes $A_1$ e $A_2$ são estáveis, porém verificamos numericamente com o *LMISolver* que as desigualdades matriciais lineares (2.16) e (2.17) são infactíveis. Novamente este fato está em concordância com os resultados de (Ji & Chizeck 1990). Estes dois exemplos ilustram o fato de que a estabilidade de cada estado de Markov não é condição nem necessária nem suficiente para se determinar a estabilidade estocástica do sistema como um todo.

## 2.3 Norma $H_2$

Até o momento, tratamos do conceito de estabilidade estocástica. Normalmente, um projeto de controle busca, além da estabilidade, que um determinado critério de desempenho seja otimizado. Neste contexto, a definição de norma $H_2$ dada a seguir pretende criar um índice de desempenho a ser otimizado. Como no caso determinístico (Colaneri, Geromel & Locatelli 1997), é possível verificar que os problemas de controle da classe LQG (do inglês *"Linear Quadratic Gaussian"*) formam um subconjunto dos problemas relacionados com a norma $H_2$.

Considere o sistema com $x(0) = 0$, descrito na forma de estados:

$$\mathcal{G} = \begin{cases} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + J(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= C(\theta_k)x(k) + E(\theta_k)w(k) \end{cases} \tag{2.22}$$

onde $A(\cdot) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$, $J(\cdot) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $C(\cdot) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$ e $E(\cdot) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^m)$. Para o estado inicial da cadeia de Markov consideramos o vetor de probabilidades

$\mu \in \mathbb{R}^N$ onde $\mu_i = Prob(\theta_0 = i)$ para $i = 1, 2, \cdots, N$. Suponha adicionalmente que (2.22) seja estocasticamente estável. O desenvolvimento a seguir é semelhante àquele encontrado em (do Val et al. 2002).

**Definição 2.2** (Norma $H_2$). *Definimos a Norma $H_2$ do sistema $\mathcal{G}$ como:*

$$\| \mathcal{G} \|_2^2 := \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \mu_i \| z^{s,i} \|_2^2 \tag{2.23}$$

*onde $z^{s,i}$ representa a saída $(z(0), z(1), \ldots)$ de (2.22) quando $\theta_0 = i$ e sua entrada é $w(k) = e_s$, sendo $e_s$ um vetor com o impulso unitário na $s$-ésima posição e zeros fora dela.*

Se fizermos $\mu_i = 1/N$ e assumirmos que $\theta_1 = i$, a definição acima torna-se idêntica àquela em (Costa et al. 1997); para o caso determinístico ($N = 1$) ela se reduz à definição usual de norma $H_2$ para o caso discreto.

Como no caso determinístico (Colaneri et al. 1997), mostramos a seguir que a norma $H_2$ definida anteriormente pode ser calculada através da solução simétrica e definida positiva dos gramianos discretos de observabilidade e controlabilidade acoplados, que satisfazem as equações matriciais lineares (Costa et al. 1997):

$$N_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_i' N_j A_i \; + \; C_i' C_i; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.24}$$

$$M_j = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} [A_i M_i A_i' + \mu_i J_i J_i']; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.25}$$

Para a demonstração a seguir, definimos o conjunto que representa o histórico do sistema desde o instante inicial até o instante $k \in \mathbb{Z}^+$, isto é, $\mathcal{F}_k := \{x(0), \cdots, x(k), \theta_0, \cdots, \theta_k\}$.

**Teorema 2.2.** *A norma $H_2$ de $\mathcal{G}$ é dada por:*

$$\| \mathcal{G} \|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr \left( J_i' \sum_{j=1}^{N} p_{ij} N_j J_i + E_i' E_i \right) = \sum_{j=1}^{N} tr(C_j M_j C_j' + \mu_j E_j E_j') \tag{2.26}$$

*onde $N_j > 0$ e $M_j > 0$ são soluções das equações (2.24) e (2.25), respectivamente.*

**Prova.** Demonstramos inicialmente a primeira igualdade. Pela Definição 2.2

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{G} \|_2^2 &= \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \mu_i \mathcal{E}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z(k)' z(k) \middle| x_0, \theta_0 = i \right\} \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \mu_i \mathcal{E}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' C(\theta_k)' C(\theta_k) x(k) \middle| x_0, \theta_0 = i \right\} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \mu_i e_s' E_i' E_i e_s
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Como, por hipótese, a equação (2.24) é válida, temos

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{G} \|_2^2 = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \mu_i \mathcal{E}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' \left( N(\theta_k) - A(\theta_k)' \sum_{j=1}^{N} p_{\theta_k j} N_j A(\theta_k) \right) x(k) \middle| x_0, \theta_0 = i \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i' E_i)
\end{aligned}$$

a qual, notando que $\{x_0, \theta_0\} \subset \mathcal{F}_k$, permite calcular

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{G} \|_2^2 = \sum_{s=1}^{n} \mathcal{E}\left\{ \mathcal{E}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' N(\theta_k) x(k) - x(k+1)' (\sum_{j=1}^{N} p_{\theta_k j} N_j) x(k+1) \middle| \mathcal{F}_k \right\} \middle| x_0, \theta_0 = i \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i' E_i) \\
= \sum_{s=1}^{n} \mathcal{E}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' N(\theta_k) x(k) - x(k+1)' \mathcal{E}\left\{ \sum_{j=1}^{N} p_{\theta_k j} N_j \middle| \mathcal{F}_k \right\} x(k+1) \middle| x_0, \theta_0 = i \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i' E_i) \\
= \sum_{s=1}^{n} \mathcal{E}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' N(\theta_k) x(k) - x(k+1)' N(\theta_{k+1}) x(k+1) \middle| x_0, \theta_0 = i \right\} \\
+ \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i' E_i) \\
= \sum_{s=1}^{n} \mathcal{E}\{ x(1)' N(\theta_1) x(1) | x_0, \theta_0 = i \} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i' E_i) \\
= \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \mu_i \left( e_s' J_i' \left( \sum_{j=1}^{N} p_{ij} N_j \right) J_i e_s \right) + \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i' E_i) \\
= \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr \left( J_i' \sum_{j=1}^{N} p_{ij} N_j J_i + E_i' E_i \right)
\end{aligned}$$

completando a primeira parte da prova. Para a segunda parte utilizamos novamente a equação (2.24). As seguintes manipulações algébricas permitem determinar

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{G} \|_2^2 &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mu_i p_{ij} tr(J_i' N_j J_i) + \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i' E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left(\mu_i p_{ij} tr(J_i' N_j J_i)\right) + \sum_{j=1}^{N} tr\left(M_j\left(C_j' C_j + \sum_{i=1}^{N} p_{ji} A_j' N_i A_j - N_j\right)\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i' E_i) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\left[tr\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i p_{ij} J_i' J_i N_j\right) + tr\left(\sum_{i=1}^{N} p_{ji} A_j M_j A_j' N_i\right) - tr(M_j N_j) + tr(M_j C_j' C_j)\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(E_i E_i') \\
&= \sum_{j=1}^{N} tr\left[\left(\sum_{i=1}^{N} [\mu_i p_{ij} J_i J_i' + p_{ij} A_i M_i A_i'] - M_j\right) N_j\right] + \sum_{j=1}^{N} tr(C_j M_j C_j') \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} \mu_j tr(E_j E_j') \\
&= \sum_{j=1}^{N} tr(C_j M_j C_j' + \mu_j E_j E_j')
\end{aligned}$$

onde a última igualdade ocorre como conseqüência da existência de solução para a equação (2.25). Isto prova o teorema proposto. □

A determinação numérica da norma $H_2$ de um sistema com saltos Markovianos requer a solução de $N$ equações lineares (2.24) ou (2.25). Entretanto, sem perda de generalidade, podemos substituir estas condições por desigualdades matriciais lineares, permitindo resolvê-las com métodos especializados para manipular LMIs. A Seção 2.3.1 trata desta questão com maiores detalhes.

### 2.3.1 Norma $H_2$ via LMIs

Como dito anteriormente, as equações (2.24) ou (2.25) podem ser convertidas em desigualdades matriciais lineares para a solução numérica do problema $H_2$.

Consideramos a seguinte equação

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}[A_i\bar{M}_iA_i' + \mu_iJ_iJ_i'] - \bar{M}_j = -Q_j; \tag{2.28}$$

onde $Q_j = Q_j' > 0$ para $j = 1,2,\cdots,N$. Subtraindo (2.25) de (2.28) vem

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}A_i(\bar{M}_i - M_i)A_i' - (\bar{M}_j - M_j) = -Q_j; \qquad j = 1,2,\cdots,N \tag{2.29}$$

Como vale a hipótese de estabilidade estocástica, o Teorema 2.1 garante que a equação (2.29) para $\Delta M_j := \bar{M}_j - M_j$ apresenta solução definida positiva, o que implica em

$$\Delta M_j > 0 \Longrightarrow \bar{M}_j > M_j \ ; \qquad j = 1,2,\cdots,N \tag{2.30}$$

Concluímos por (2.30) que, se quisermos usar a restrição (2.28) no lugar da restrição (2.25), estaremos calculando um limitante superior para a norma $H_2$, ou seja, podemos reescrever (2.26) como

$$\| \mathcal{G} \|_2^2 < \sum_{j=1}^{N} tr(C_j\bar{M}_jC_j' + \mu_jE_jE_j') \tag{2.31}$$

Como estas conclusões valem para qualquer $Q_j = Q_j' > 0$, é possível expressar o cálculo da norma $H_2$ na forma do seguinte problema de minimização[1]

$$\begin{cases} \| \mathcal{G} \|_2^2 = \min \sum_{j=1}^{N} tr(C_jM_jC_j' + \mu_jE_jE_j') \\ \text{sujeito a:} \\ \sum_{i=1}^{N} p_{ij}[A_iM_iA_i' + \mu_iJ_iJ_i'] - M_j < 0; \qquad j = 1,2,\cdots,N \end{cases} \tag{2.32}$$

Introduzindo as variáveis adicionais $R_i = R_i' > 0$ e $W_j = W_j' > 0$ , juntamente com as seguinte restrições

$$R_i > A_iM_iA_i' + \mu_iJ_iJ_i'; \qquad i = 1,2,\cdots,N \tag{2.33}$$

$$W_j > C_jM_jC_j' + \mu_jE_jE_j'; \qquad j = 1,2,\cdots,N \tag{2.34}$$

[1] Os problemas de otimização envolvendo LMIs devem ser definidos com $inf$ no lugar de $min$. Para considerar $min$ os seus conjuntos factíveis devem ser entendidos como sendo fechados pelo interior, com uma precisão definida pelo usuário.

notamos que a restrição de (2.32) é satisfeita desde que as desigualdades

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij} R_i - M_j < 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.35}$$

se verifiquem. Na verdade, as restrições (2.35) e (2.32) são equivalentes pois $R_i$ pode ser escolhida arbitrariamente próxima da matriz que consta no lado direito de (2.33). Aplicando complemento de Schur a (2.33) vem

$$\begin{bmatrix} R_i - \mu_i J_i J_i' & A_i M_i \\ \bullet & M_i \end{bmatrix} > 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.36}$$

Também podemos escrever a desigualdade (2.34) na forma de matriz de blocos

$$\begin{bmatrix} W_j - \mu_j E_j E_j' & C_j M_j \\ \bullet & M_j \end{bmatrix} > 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{2.37}$$

Com as novas variáveis e suas relações, o problema do cálculo da norma $H_2$ pode ser escrito como

$$\begin{cases} \| \mathcal{G} \|_2^2 = \min \sum_{j=1}^{N} tr\left(W_j\right) \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} W_j - \mu_j E_j E_j' & C_j M_j \\ \bullet & M_j \end{bmatrix} > 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \\ \begin{bmatrix} R_j - \mu_j J_j J_j' & A_j M_j \\ \bullet & M_j \end{bmatrix} > 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \\ \sum_{i=1}^{N} p_{ij} R_i - M_j < 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{2.38}$$

De forma análoga, também é possível calcular a norma $H_2$ convertendo (2.24) em uma desigualdade. Seguindo o mesmo procedimento do início desta seção, tal cálculo seria dado por

$$\begin{cases} \| \mathcal{G} \|_2^2 = \min \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr\left(J_i' \sum_{j=1}^{N} p_{ij} N_j J_i + E_i' E_i\right) \\ \text{sujeito a:} \\ \sum_{j=1}^{N} p_{ij} A_i' N_j A_i - N_i + C_i' C_i < 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{2.39}$$

Fazendo a mudança de variável $N_i = W_i^{-1} > 0$ e multiplicando a restrição de (2.39) por $W_i$ a direita e a esquerda, chegamos à desigualdade

$$W_i A_i' \left( \sum_{j=1}^{N} p_{ij} W_j^{-1} \right) A_i W_i - W_i + W_i C_i' C_i W_i < 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.40}$$

Por outro lado, considerando as novas variáveis $R_i = R_i' > 0$, definidas pelas restrições

$$R_i^{-1} > \left( \sum_{j=1}^{N} p_{ij} W_j^{-1} \right); \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.41}$$

verificamos que aplicando complemento de Schur em

$$\begin{bmatrix} W_i & W_i A_i' & W_i C_i' \\ \bullet & R_i & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.42}$$

obtemos (2.40). Multiplicando a restrição (2.41) por $R_i$ à esquerda e à direita, e aplicando complemento de Schur, obtemos novamente a desigualdade

$$\begin{bmatrix} R_i & \sqrt{p_{i1}} R_i & \dots & \sqrt{p_{iN}} R_i \\ \bullet & W_1 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \ddots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & W_N \end{bmatrix} > 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.43}$$

Por fim, definindo as variáveis adicionais

$$Q_i > J_i' R_i^{-1} J_i + E_i' E_i; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.44}$$

e aplicando complemento de Schur temos

$$\begin{bmatrix} Q_i - E_i' E_i & J_i' \\ \bullet & R_i \end{bmatrix} > 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2.45}$$

o que permite reescrever o problema de determinação da norma $H_2$ na forma final:

$$\begin{cases} \| \mathcal{G} \|_2^2 = \min \sum_{i=1}^{N} \mu_i tr(Q_i) \\ \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} Q_i - E_i' E_i & J_i' \\ \bullet & R_i \end{bmatrix} > 0; & i = 1, 2, \cdots, N \\ \\ \begin{bmatrix} W_i & W_i A_i' & W_i C_i' \\ \bullet & R_i & 0 \\ \bullet & \bullet & I \end{bmatrix} > 0; & i = 1, 2, \cdots, N \\ \\ \begin{bmatrix} R_i & \sqrt{p_{i1}} R_i & \dots & \sqrt{p_{iN}} R_i \\ \bullet & W_1 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \ddots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & W_N \end{bmatrix} > 0; & i = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{2.46}$$

Cabe agora comparar os problemas equivalentes (2.38) e (2.46) do ponto de vista da complexidade para uma solução numérica. O problema (2.38) tem $3N$ variáveis e $3N$ restrições de ordem $(n+r) \times (n+r)$, $2n \times 2n$ e $n \times n$, respectivamente. O problema (2.46) tem $3N$ variáveis e $3N$ restrições de ordem $(n+m) \times (n+m)$, $(2n+r) \times (2n+r)$ e $(N+1)n \times (N+1)n$. Desta maneira, como já salientado anteriormente, ainda que os dois problemas forneçam o resultado desejado, notamos que (2.38) é mais vantajoso do ponto de vista da eficiência numérica da solução.

# Capítulo 3

# Realimentação de estado

Supondo ser possível observar completamente o estado $x(k)$ do sistema em cada instante $k \in \mathbb{Z}^+$, o próximo passo é o projeto de controladores com realimentação de estado. No desenvolvimento que se segue, essas leis de controle são sintetizadas para impor a estabilidade estocástica ao sistema em malha fechada, bem como para minimizar um critério de desempenho expresso pela norma $H_2$. Serão consideradas as hipóteses de observação completa do estado da cadeia de Markov $\theta_k$ a cada instante $k \in \mathbb{Z}^+$, observação parcial, ou seja, observação por grupos de estados e ainda o caso mais radical, sem observação de nenhum estado da cadeia.

## 3.1 Controle Estabilizante

Considere o seguinte sistema com entrada $u(k)$:

$$x(k+1) = A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) \tag{3.1}$$

onde a matriz $B(\cdot) \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, que define o peso com que a entrada $u(k) \in \mathbb{R}^p$ altera cada variável de estado, depende de um conjunto de parâmetros $\theta_k$ cuja evolução temporal é descrita através de uma cadeia de Markov que assume valores em um conjunto com um número finito de elementos, a saber $B(\theta_k) \in \{B_1, \cdots, B_N\}$.

A idéia do controle estabilizante por realimentação de estado consiste em fazer $u(k) = L(\theta_k)x(k)$, onde $L_i$ contém os ganhos de realimentação para cada estado $i$ da cadeia de Markov associada, e assim obter um novo sistema em malha fechada que seja estocasticamente estável. No teorema a seguir, definimos um teste para saber se é possível resolver este problema, isto é, estabilizar o sistema usando tal lei de controle linear. O teste é baseado em (Ji & Chizeck 1990), mas ele foi ligeiramente modificado para usarmos uma das condições de estabilidade demonstradas por (Costa & Fragoso 1993), pois ela apresenta vantagens para o modelamento por LMIs, como explorado na Seção 2.2.1.

**Teorema 3.1** (Estabilizabilidade).
*O sistema (3.1) é estabilizável se existir um conjunto de matrizes* $L_i \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ *com* $i = 1, 2, \cdots, N$ *e um conjunto de matrizes* $M_j = M_j' > 0$, $M_j \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$ *com* $j = 1, 2, \cdots, N$ *que satisfaçam:*

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(A_i + B_i L_i) M_i (A_i + B_i L_i)' \ - \ M_j \ < \ 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{3.2}$$

**Prova.** Basta seguir os mesmos passos da prova do Teorema 2.1, agora utilizando o sistema em malha fechada. □

É possível reescrever a restrição (3.2), da mesma maneira que fizemos com o teste de estabilidade estocástica na Seção 2.2.1. Primeiramente, lembramos que $M_i = M_i M_i^{-1} M_i$ e substituímos em (3.2)

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij}(A_i M_i + B_i L_i M_i) M_i^{-1} (A_i M_i + B_i L_i M_i)' \ - \ M_j \ < \ 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{3.3}$$

Introduzindo as variáveis adicionais $Y_i = L_i M_i$ e $R_i$ satisfazendo

$$R_i > (A_i M_i + B_i Y_i) M_i^{-1} (A_i M_i + B_i Y_i)'; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{3.4}$$

temos que as desigualdades

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij} R_i \ - \ M_j \ < \ 0; \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.5}$$

em conjunto com

$$\begin{bmatrix} R_i & A_i M_i + B_i Y_i \\ \bullet & M_i \end{bmatrix} \ > \ 0; \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{3.6}$$

obtidas pelo complemento de Schur de (3.4), se factíveis, permitem o cálculo da lei de controle estabilizante $L_i = Y_i M_i^{-1}$ para $i = 1, 2, \cdots, N$.

Da mesma maneira como fizemos ao longo do Capítulo 2, seria possível definir a lei de controle através de uma formulação alternativa, substituindo as matrizes de malha fechada no teste de estabilidade (2.3). Contudo, entendemos que o controle formulado a partir das LMIs (3.5) e (3.6) é bem mais simples do ponto de vista numérico, como já demonstrado nas Seções 2.2.1 e 2.3.1. Por este motivo, ao longo deste capítulo, todos os desenvolvimentos são baseados nestes resultados.

Como já foi enfatizado anteriormente, para a estabilidade estocástica pouco importa a estabilidade de cada um dos sistemas definidos para cada estado da cadeia de Markov. O importante é como eles interagem entre si comandados pela matriz de probabilidades de transição. Da mesma forma, para o projeto do controlador, também não se deve levar em conta características isoladas de cada estado da cadeia de Markov. Para ilustrar tais resultados, consideramos o seguinte exemplo proposto em (Ji & Chizeck 1990). Seja o sistema descrito por (3.1) com os parâmetros

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e probabilidades de transição

$$\mathbb{P} \; = \; \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Os pares $(A_1, B_1)$ e $(A_2, B_2)$ são ambos não-estabilizáveis. O sistema, porém, possui controle estabilizante, obtido via LMIs. De fato, se programarmos a minimização da função objetivo $tr(M_1 + M_2)$, sujeita às restrições (3.5) e (3.6), chegamos aos seguintes valores:

$$L_1 = \begin{bmatrix} -2,006 & -9,9940 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L_2 = \begin{bmatrix} -9,9977 & -2,0004 \end{bmatrix}$$

Note que a função objetivo poderia ter sido qualquer função escalar. Para definir um ganho de estabilidade para (3.1), basta que as restrições sejam factíveis. Estes resultados obtidos aproximam-se muito daqueles em (Ji & Chizeck 1990), embora diferentes no método de obtenção, aqui mais simples.

### 3.1.1 Observação parcial

Seja o sistema linear discreto (3.1). Na Seção 3.1 propomos um método para determinar a lei de controle linear estabilizante $u(k) = L(\theta_k)x(k)$, a partir de uma solução factível para as restrições (3.5) e (3.6). Neste caso, as leis de controle para cada estado da cadeia de Markov são dadas por $L_i = Y_i M_i^{-1}$ para $i = 1, 2, \cdots, N$.

Note que esta lei de controle é, normalmente, diferente para cada estado da cadeia de Markov representando os parâmetros $(A_i, B_i)$. Portanto, sua implementação exige que todos os estados da cadeia sejam conhecidos em todo instante de tempo. Tal hipótese de observação completa do estado da cadeia pode ser restritiva para aplicações práticas.

Uma maneira de se obter uma lei de controle independente da observação do estado da cadeia de Markov seria impor ao problema as seguintes restrições adicionais:

$$M_1 = M_2 = \cdots = M_N \tag{3.7}$$

$$Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_N \tag{3.8}$$

Note que estas condições são extremamente conservadoras, não sendo nem mesmo garantida a existência de uma solução factível. O conservadorismo se deve, sobretudo, à introdução da restrição adicional (3.7), pois as matrizes $M_i$ dependem fortemente dos parâmetros de cada estado da cadeia Markov. O resultado a seguir (Oliveira et al. 1999) permite acrescentar um grau de liberdade a este problema.

**Teorema 3.2.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*
*(i) Existe uma matriz $M = M' > 0$ tal que:*

$$AMA' - M < 0 \tag{3.9}$$

*(ii) Existe uma matriz $M = M' > 0$ e uma matriz $G$ tais que:*

$$\begin{bmatrix} M & AG \\ \bullet & G + G' - M \end{bmatrix} > 0 \tag{3.10}$$

**Prova.** (i) $\Rightarrow$ (ii): Como $M > 0$, com o complemento de Schur temos

$$AMA' - M < 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} M & AM \\ \bullet & M \end{bmatrix} > 0$$

que pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} M & AG \\ \bullet & G + G' - M \end{bmatrix} > 0$$

para $G = M$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Como, por (3.10), $M > 0$ e $G$ é uma matriz não singular, a desigualdade $(G - M)'M^{-1}(G - M) \geq 0$ fornece

$$G'M^{-1}G \geq G + G' - M \tag{3.11}$$

levando à conclusão que

$$\begin{bmatrix} M & AG \\ \bullet & G'M^{-1}G \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} M & AG \\ \bullet & G + G' - M \end{bmatrix} > 0 \tag{3.12}$$

e, finalmente, com o complemento de Schur verifica-se que a desigualdade

$$M > AG(G'M^{-1}G)^{-1}G'A' \Rightarrow M > AGG^{-1}M(G')^{-1}G'A'$$
$$\Rightarrow AMA' - M < 0$$

é satisfeita. Isto prova o teorema proposto. □

Observe que, com a adição da matriz $G$, obtemos uma LMI na qual a matriz de Lyapunov $M$ não está envolvida em nenhum produto com a matriz dinâmica $A$, que em malha fechada contém informações sobre a lei de controle. Note ainda que a matriz $G$ não é sequer assumida simétrica ou definida positiva. Podemos estabelecer, a partir da equivalência explorada, uma nova condição de estabilidade.

**Teorema 3.3.** *O sistema (3.1) é estável, se houver matrizes* $R_i = R_i' > 0$, $M_i = M_i' > 0$ *e* $G_i$ *que satisfaçam as seguintes restrições:*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R_i & A_iG_i \\ \bullet & G_i + G_i' - M_i \end{bmatrix} > 0; & i = 1, 2, \cdots, N \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_{ij}R_i \; - \; M_j \; < \; 0; & j = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{3.13}$$

**Prova.** Aplica-se o resultado do Teorema 3.2 nas condições de estabilidade (2.16) e (2.17). □

A grande utilidade deste resultado não é o teste de estabilidade em si, já que o teste anterior e este são equivalentes e têm o mesmo número de restrições. A grande vantagem é que as variáveis $G_i$ permitem adicionar ao problema original novos graus de liberdades para acomodar hipóteses de observação parcial do estado de Markov, como discutiremos a seguir.

**Teorema 3.4.** *As leis de controle* $L_i = Y_iG_i^{-1}$ *estabilizam o sistema (3.1) se houver matrizes* $M_i = M_i' > 0$, $R_i = R_i' > 0$, $Y_i$ *e* $G_i$ *que satisfaçam:*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R_i & A_iG_i + B_iY_i \\ \bullet & G_i + G_i' - M_i \end{bmatrix} > 0; & i = 1, 2, \cdots, N \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_{ij}R_i \; - \; M_j \; < \; 0; & j = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{3.14}$$

**Prova.** Análoga à prova do Teorema 3.3. □

Observe que agora seria possível estabelecer restrições sobre as matrizes $G_i$ e $Y_i$ de forma a modelar uma possível observação parcial do estado de Markov. Considere que seja possível saber quando os parâmetros se encontram em um sub-conjunto, ou grupo, dos $N$ estados. Cada grupo teria uma lei de controle *única*, independente do conhecimento *exato* do estado do cadeia dentro dele. Por exemplo, se for sempre possível saber quando o sistema está em algum dos estados $(1,2)$ ou $(3)$, pode-se fazer as matrizes $G_1 = G_2$ e $Y_1 = Y_2$, gerando uma lei de controle da forma $L_{12}$ e $L_3$, para estes três estados, divididos em dois grupos.

Mais ainda, podemos considerar que nenhum estado é observável, o que nos levaria a uma *única* lei de controle $L$ para o sistema como um todo. Para isto, usamos a restrição adicional (3.8) combinada com

$$G_1 = G_2 = \cdots = G_N \tag{3.15}$$

Resumindo, o modelamento usando a matriz $G_i$ pode se reduzir ao caso convencional (se fizermos $N$ matrizes diferentes), pode permitir leis de controle constantes para variações no estado de Markov dentro de grupos (*clusters*) ou ainda permitir uma única lei de controle que estabiliza o sistema independente da observação dos estados de Markov. Além disso, tratar as hipóteses de observação incompleta usando as restrições sobre as novas variáveis $G_i$ é menos conservador que fazê-lo com restrições sobre as matrizes $M_i$.

## 3.2 Controle $H_2$

Considere agora o sistema, com condição inicial $x(0)$ nula:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{array}{rcl} x(k+1) & = & A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + J(\theta_k)w(k) \\ z(k) & = & C(\theta_k)x(k) + D(\theta_k)u(k) + E(\theta_k)w(k) \end{array} \right. \tag{3.16}$$

onde $A_i \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n)$, $B_i \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $J_i \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $C_i \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$, $D_i \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ e $E_i \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^m)$ $\forall i \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Para $L = (L_1, L_2, ..., L_N) \in \mathbb{L}$ seja $\mathcal{G}_L$ o sistema (3.16) com $u(k) = L(\theta_k)x(k)$.

O problema de controle ótimo $H_2$ é definido como:

$$\min\{\| \mathcal{G}_L \|_2^2 \; ; \; L \in \mathbb{L}\}$$

Substituindo as matrizes de malha fechada em (2.32) chegamos ao seguinte problema de otimização para o cálculo da norma $H_2$ mínima

$$\begin{cases} \| \mathcal{G}_L \|_2^2 = \min \sum_{j=1}^{N} tr[(C_j + D_j L_j) M_j (C_j + D_j L_j)' + \mu_j E_j E_j'] \\ \\ \text{sujeito a} \\ \sum_{i=1}^{N} p_{ij} [(A_i + B_i L_i) M_i (A_i + B_i L_i)' + \mu_i J_i J_i'] \; - \; M_j \; < \; 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{3.17}$$

Introduzindo, de maneira bastante similar àquela adotada anteriormente, as seguintes variáveis adicionais $Y_j = L_j M_j$, $W_j = W_j' > 0$ e $R_j = R_j' > 0$ satisfazendo para todo $j = 1, 2, \cdots, N$, as restrições

$$W_j > (C_j M_j + D_j Y_j) M_j^{-1} (C_j M_j + D_j Y_j)' + \mu_j E_j E_j' \tag{3.18}$$

$$R_j > (A_j M_j + B_j Y_j) M_j^{-1} (A_j M_j + B_j Y_j)' + \mu_j J_j J_j' \tag{3.19}$$

e aplicando complemento de Schur às desigualdades (3.18) e (3.19), temos

$$\begin{cases} \| \mathcal{G}_L \|_2^2 = \min \sum_{j=1}^{N} tr(W_j) \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} W_j - \mu_j E_j E_j' & C_j M_j + D_j Y_j \\ \bullet & M_j \end{bmatrix} > 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \\ \begin{bmatrix} R_j - \mu_j J_j J_j' & A_j M_j + B_j Y_j \\ \bullet & M_j \end{bmatrix} > 0; \qquad j = 1, 2, \cdots, N \\ \sum_{i=1}^{N} p_{ij} R_i \; - \; M_j \; < \; 0; \qquad j = 1, 2 \cdots, N \end{cases} \tag{3.20}$$

Assim, após resolver o problema de otimização (3.20), chegamos ao valor do controle que minimiza a norma $H_2$ para (3.16), isto é

$$L_i \; = \; Y_i M_i^{-1}; \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{3.21}$$

Vale ressaltar novamente que a lei de controle sintetizada por este método requer a observação completa do estado da cadeia de Markov pelo controlador, pois prevê ganhos de realimentação diferentes dependendo de cada estado. Tal hipótese não é muito razoável na prática, já que esta informação geralmente não é disponível em cada instante de tempo $k \in \mathbb{Z}^+$.

**Exemplo Ilustrativo**

Para ilustrar os conceitos dessa seção, consideramos a definição de uma lei de controle que garanta não só a estabilidade do sistema, como também a minimização de uma função custo, expressa pela norma $H_2$ de uma saída $z(k)$ especialmente construída para tal fim. Os dados para este problema foram retirados de (Ji & Chizeck 1990) sendo que os ruídos lá considerados foram interpretados, no presente contexto, como entradas impulsivas ajustando-se adequadamente as matrizes $J_i$ para todo $i = 1, \cdots, N$.

Seja um sistema como (3.16) com dois estados de Markov e matrizes dinâmicas dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad J_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Neste sistema, o estado $i = 1$ representa sua operação normal enquanto o estado $i = 2$ representa a operação com falhas nos sensores ou atuadores. As probabilidades de transição entre os estados de Markov se encontram na matriz abaixo, bem como a distribuição inicial de probabilidade $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}$ que considera a certeza do sistema ter iniciado com falha ($\mu_2 = 1$):

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}, \qquad \mu_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes $C_i$, $D_i$ e $E_i$ são determinadas de forma a estabelecer a função custo desejada através da norma $H_2$ da variável $z(k)$. A escolha de tais matrizes é uma decisão de projeto. É importante também frisar que a norma $H_2$ pode refletir o critério quadrático adotado, por exemplo em (Ji & Chizeck 1990). De fato, a igualdade

$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} z(k)'z(k)\right\} = E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \left(x(k)'Q(\theta_k)x(k) \;+\; u(k)'R(\theta_k)u(k)\right)\right\}$$

se verifica, desde que sejam adotadas as equivalências $Q_i = C_i'C_i$, $R_i = D_i'D_i$, $C_i'D_i = 0$ e $E_i = 0$. Na formulação com minimização de custo quadrático, deve-se escolher as matrizes de ponderação $Q_i$ e $R_i$ que representam no custo as trajetórias desejadas para o espaço de estados e o esforço de controle, respectivamente.

Abaixo seguem as matrizes $C_i$ e $D_i$ escolhidas de modo a representar as escolhas de $Q_i$ e $R_i$ da referência (Ji & Chizeck 1990):

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que as dimensões das matrizes $C_i$ e $D_i$, com linhas nulas em locais convenientes, garantem a condição de ortogonalidade.

O problema de otimização (3.21) fornece a norma mínima $\|\mathcal{G}_L\|_2^2 = 16{,}6303$, correspondente aos ganhos ótimos

$$L_1 = \begin{bmatrix} -1{,}1617 & -0{,}9848 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tais valores são muito próximos daqueles obtidos para o controle em (Ji & Chizeck 1990) e a diferença observada se deve à precisão adotada no procedimento numérico.

### 3.2.1 Controle $H_2$ via equações de Riccati

Na Seção 3.2, apresentamos o problema de cálculo do controle ótimo $H_2$, que acrescenta ao controle a tarefa de minimizar uma função custo, resultando em um melhor desempenho do sistema. Em seguida, desenvolvemos uma forma de resolver o problema, através de LMIs. Este não é, entretanto, o único método para se obter o controle ótimo $H_2$.

De fato, o simples desenvolvimento do problema (3.17) por multiplicadores de Lagrange, cujo conceito foi aqui estendido para as funções matriciais, permite obter um sistema de equações algébricas conhecidas como *Equações de Riccati Acopladas*. Tais equações permitem algumas considerações a respeito da solução ótima do problema antes mesmo dela ser calculada.

No desenvolvimento que se segue, sempre que as equações trouxerem algum índice $i$ ou $j$, fica implícito o fato de serem na verdade um conjunto de equações válidas para $\{1,2,\cdots,N\}$. Ademais, para simplificar os cálculos assumimos a hipótese de ortogonalidade $C_i'D_i = 0$.

O *Lagrangeano* do problema de otimização (3.17) é definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;:=& \sum_{i=1}^{N} tr[(C_i + D_i L_i) M_i (C_i + D_i L_i)' + \mu_i E_i E_i'] \\ &+ tr\left\{ \sum_{j=1}^{N} P_j \left[ \sum_{i=1}^{N} p_{ij} [(A_i + B_i L_i) M_i (A_i + B_i L_i)' + \mu_i J_i J_i'] \;-\; M_j \right] \right\} \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde $P_j \;=\; P_j' > 0$ é a matriz dos multiplicadores de Lagrange. As condições de otimalidade são expressas na forma:

$$\nabla_{L_i} \mathcal{L} \;=\; 0 \tag{3.23}$$

$$\nabla_{P_j} \mathcal{L} \;=\; 0 \tag{3.24}$$

$$\nabla_{M_i} \mathcal{L} \;=\; 0 \tag{3.25}$$

Aplicando a condição (3.23) a (3.22) temos

$$D_i'(C_i + D_i L_i) M_i \;+\; \sum_{j=1}^{N} p_{ij} B_i' P_j (A_i + B_i L_i) M_i \;=\; 0 \tag{3.26}$$

Pelas restrições (3.24) e (3.25) obtemos, respectivamente:

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij} [(A_i + B_i L_i) M_i (A_i + B_i L_i)' + \mu_i J_i J_i'] \;-\; M_j \;=\; 0 \tag{3.27}$$

$$(C_i + D_i L_i)'(C_i + D_i L_i) \;+\; \sum_{j=1}^{N} p_{ij} (A_i + B_i L_i)' P_j (A_i + B_i L_i) \;-P_i \;=\; 0 \tag{3.28}$$

Em seguida, colocando $M_i$ em evidência na equação (3.26) e levando em conta que $D_i' C_i \;=\; 0$ chega-se a

$$L_i \;=\; -\left( D_i' D_i \;+\; \sum_{j=1}^{N} p_{ij} B_i' P_j B_i \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} B_i' P_j A_i \tag{3.29}$$

Definindo-se agora uma nova variável $\hat{S}_i$ e substituindo-se em (3.29)

$$\hat{S}_i \;:=\; \sum_{j=1}^{N} p_{ij} P_j; \tag{3.30}$$

$$L_i \;=\; -(D_i' D_i \;+\; B_i' \hat{S}_i B_i)^{-1} B_i' \hat{S}_i A_i; \tag{3.31}$$

onde é imperativo observar que chegamos a $L_i$ em função de $\hat{S}_i$. Resta portanto encontrar uma equação que forneça $\hat{S}_i$. Por (3.28), vem

$$(A_i+B_iL_i)'\hat{S}_i(A_i+B_iL_i) \ + \ (C_i+D_iL_i)'(C_i+D_iL_i) \ - \ P_i \ = \ 0$$

Em seguida, isolando $P_i$ e aplicando novamente a definição (3.30) temos

$$\hat{S}_i \ = \ \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[(A_j+B_jL_j)'\hat{S}_j(A_j+B_jL_j)+(C_j+D_jL_j)'(C_j+D_jL_j)] \tag{3.32}$$

Finalmente, chamando por $\phi_j$ a quantidade entre os colchetes de (3.32), temos

$$\begin{aligned} \phi_j := & (A_j+B_jL_j)'\hat{S}_j(A_j+B_jL_j) \ + \ C_j'C_j \ + L_j'D_j'D_jL_j \\ = & A_j'\hat{S}_jA_j \ + \ C_j'C_j \ + \ A_j'\hat{S}_jB_jL_j \ + \ L_j'B_j'\hat{S}_jA_j \\ & + \ L_j'(D_j'D_j+B_j'\hat{S}_jB_j)L_j \end{aligned} \tag{3.33}$$

na qual substituindo (3.29) chega-se a:

$$\phi_j \ = \ A_j'\hat{S}_jA_j \ + \ C_j'C_j \ - \ A_j'\hat{S}_jB_j(D_j'D_j+B_j'\hat{S}_jB_j)^{-1}B_j'\hat{S}_jA_j \tag{3.34}$$

e, então, a equação (3.32) toma a forma

$$\hat{S}_i \ = \ \sum_{j=1}^{N} p_{ij}[A_j'\hat{S}_jA_j-A_j'\hat{S}_jB_j(D_j'D_j+B_j'\hat{S}_jB_j)^{-1}B_j'\hat{S}_jA_j+C_j'C_j]; \tag{3.35}$$

A relação (3.35) é composta de $N$ equações, conhecidas como *Equações de Riccati Acopladas* para o caso de sistemas sujeitos a saltos Markovianos. Não será demonstrado aqui, c.f. (Costa 1995), mas uma condição de existência de solução para a equação (3.35) é que o sistema seja controlável e observável. Note que esta é a mesma hipótese que consideramos para o cálculo da norma $H_2$ através das equações (2.24) e (2.25).

Se observarmos a equação (3.28), podemos concluir que as matrizes $\hat{S}_j$ solucionam o problema definido por (2.26), ou seja:

$$\begin{aligned} \| \mathcal{G} \|_2^2 \ & = \ \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_i p_{ij} tr(J_i'P_jJ_i)+\sum_{i=1}^{N}\mu_i tr(E_i'E_i) \\ & = \ \sum_{i=1}^{N}\mu_i tr(J_i'\hat{S}_iJ_i+E_i'E_i) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Resumindo, através das equações (3.35) são definidas as matrizes $\hat{S}_i$, que por sua vez permitem calcular tanto os ganhos de realimentação $L_i$, via (3.31), quanto o valor mínimo da norma $H_2$, através de (3.36).

Também vale ressaltar alguns aspectos que não podem ser observados na formulação LMI. Observa-se, por exemplo, que o controle ótimo para o sistema independe das matrizes de entrada de ruído $J_i$ e $E_i$, ou da distribuição de probabilidade inicial $\mu$, embora o valor da norma mínima atingida varie. Tal fato será explorado numericamente a seguir.

Para o problema ótimo $H_2$ com realimentação de estado e observação completa do estado da cadeia de Markov, tanto a formulação por LMIs quanto as equações de Riccati fornecerão os mesmos controladores. Entretanto, com as equações de Riccati somente o controlador ótimo $H_2$ está representado, enquanto as LMIs parametrizam todos os controladores tais que o sistema em malha fechada tenha norma $H_2$ limitada. Tal fato será muito importante para o caso de observação parcial do estado da cadeia de Markov, no qual novas restrições são adicionadas para diminuir o conjunto de controladores possíveis. O problema deixa de ser ótimo $H_2$, não sendo mais possível usar as equações de Riccati para obter a sua solução. Por este motivo, ela passa a depender das matrizes $J_i$, $E_i$ e da distribuição de probabilidade inicial $\mu$.

**Exemplo Ilustrativo**

Seja o sistema já utilizado no exemplo ilustrativo da Seção 3.2 e considere agora uma variação nas matrizes de entrada de ruído $J_i$. Conforme as equações (3.35) e (3.31), espera-se que não haja qualquer variação na lei de controle obtida anteriormente, mas a equação (3.36) mostra que deve haver uma variação na norma mínima do sistema.

De fato, se fizermos a matriz $J_2$ dez vezes maior que a original, temos

$$\| \mathcal{G}_L \|_2^2 = 1663,01 \ , \quad L_1 = \begin{bmatrix} -1,1615 & -0,9849 \end{bmatrix} \ , \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Embora o valor mínimo de $\| \mathcal{G}_L \|_2^2$ tenha aumentado bastante, seu valor foi multiplicado por 100, não se nota nenhuma mudança significativa na lei de controle. Note que a variação da norma como ocorrida é conseqüência do fato de que $\mu_1 = 0$.

Agora, fazemos uma alteração na distribuição inicial de probabilidade, supondo que não houvesse qualquer informação a respeito da condição inicial do sistema, ou seja, $\mu = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$. As equações de Riccati indicam que deve ocorrer o mesmo que no caso acima, isto é, nenhuma alteração nos ganhos do controlador, porém com mudança no valor mínimo da norma $H_2$. Os valores obtidos são:

$$\| \mathcal{G}_L \|_2^2 = 10,3312 \ , \quad L_1 = \begin{bmatrix} -1,1613 & -0,9848 \end{bmatrix} \ , \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Isto ilustra a propriedade, válida no caso geral, de que os ganhos do controle ótimo não dependem nem das matrizes de entrada de ruído $J_i$, $i = 1,2,\cdots,N$ e nem da distribuição inicial de probabilidade $\mu$.

### 3.2.2 Observação parcial do estado de Markov

Considere novamente o sistema (3.16). De acordo com desenvolvimento anterior, o controle que minimiza sua norma $H_2$ é obtido a partir do problema de otimização (3.20). Uma vez resolvido aquele problema, os ganhos de realimentação que definem lei de controle são:

$$L_i \ = \ Y_i M_i^{-1}; \qquad i = 1,2,\cdots,N \tag{3.37}$$

Observe que o controle acima prevê ações, em geral diferentes, dependendo do estado da cadeia de Markov em que se encontram os parâmetros do sistema, isto é $u(k) = L(\theta_k)x(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Uma primeira opção possível para se corrigir tal limitação seria acrescentar ao problema (3.20) as restrições (3.7) e (3.8). Pelos mesmos motivos expostos anteriormente, esta restrição é muito conservadora, implicando por vezes na não-factibilidade do problema ou no alto custo do critério associado. Observe que, se adotadas as restrições adicionais, o valor da função objetivo deixa de ser a norma mínima $H_2$, para se tornar apenas um limitante superior, denominado custo garantido.

Tendo em vista os resultados de (Oliveira et al. 1999), podemos obter o controle com LMIs diferentes, vantajosas com relação ao limitante superior obtido. A seguir mostramos (do Val et al. 2002) como seria tal síntese:

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{j=1}^{N} tr(W_j) \\ \text{sujeito a:} \\ \begin{bmatrix} W_j - \mu_j E_j E_j' & C_j G_j + D_j Y_j \\ \bullet & G_j + G_j' - M_j \end{bmatrix} \ > \ 0; \qquad j = 1,2,...,N \\ \begin{bmatrix} R_j - \mu_j J_j J_j' & A_j G_j + B_j Y_j \\ \bullet & G_j + G_j' - M_j \end{bmatrix} \ > \ 0; \qquad j = 1,2,...,N \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_{ij} R_i \ - \ M_j \ < \ 0; \qquad j = 1,2,...,N \end{cases} \tag{3.38}$$

sendo que a lei de controle, para este caso, é dada por:

$$L_j = Y_j G_j^{-1} \qquad j = 1,2,\cdots,N \tag{3.39}$$

Caso haja restrição na observação dos estados de Markov por parte do controlador, não é mais necessário envolver as matrizes de Lyapunov $M_i$ em nenhuma restrição adicional pois elas não são utilizadas para o cálculo dos ganhos de realimentação. É possível definir leis de controle para grupos de estados, supondo que eles só podem ser observados em conjunto, não sendo possível definir cada estado em particular. Mais ainda, pode-se obter uma única lei de controle independente do estado da cadeia de Markov em cada instante de tempo $k \in \mathbb{Z}^+$. Desta forma os seguintes casos são pertinentes:

a) Sem nenhuma restrição adicional, o problema (3.38) fornece a solução ótima corresponde ao mínimo valor de $\|\mathcal{G}_L\|_2^2$, caracterizada por $G_j = M_j$ para todo $j = 1, 2, \cdots, N$.

b) Sob a hipótese de informação parcial, considere que $\{1, 2, \cdots, N\} \equiv \bigcup_{v=1}^{V} U_v$ com $\bigcap_{v=1}^{V} U_v \equiv \phi$. Ou seja, o conjunto de todos os estados da cadeia de Markov é decomposto em um determinado número de grupos disjuntos. Neste caso, devemos impor que $L_j = L_v$ para todo $j \in U_v$. Estas restrições são implementadas no problema (3.38) através de

$$Y_j = Y_v \ , \ G_j = G_v \quad , \quad \forall \ j \in U_v$$

para $v = 1, 2, \cdots, V$. O controle final se escreve na forma $u(k) = L_v x(k)$ com $\theta_k \in U_v$ e $L_v = Y_v G_v^{-1}$.

c) Esta formulação permite considerar inclusive o caso extremo no qual nenhuma informação a respeito do estado da cadeia de Markov é disponível ao controlador. Este caso corresponde a introduzirmos em (3.38) as restrições

$$Y_j = Y \ , \ G_j = G \quad , \quad \forall \ j \in \{1, 2, \cdots, N\}$$

sendo o controle dado por $u(k) = Lx(k)$ com $L = YG^{-1}$ para qualquer $\theta_k$.

Embora tanto as restrições que envolvem as matrizes de Lyapunov $M_i$ quanto as que envolvem as matrizes $G_i$ resultem em sub-ótimos da minimização da norma $H_2$, pretendemos ilustrar que a segunda formulação é menos conservadora.

### Exemplo Ilustrativo

Considere o sistema com dois estados de Markov exemplificado na Seção 3.2. Pretendemos mostrar as possíveis formulações para a lei de controle segundo as hipóteses de observação completa, sem observação com o problema (3.38) e sem observação com restrições sobre as matrizes $M_i$ no problema (3.20).

A solução do primeiro caso foi obtida através do problema (3.38), sem restrições adicionais. Assim procedendo encontramos o mesmo resultado já fornecido na Seção 3.2.

Para o caso em que o controlador não pode observar os estados da cadeia de Markov, exploramos duas possibilidades. A primeira através da solução de (3.38) com as restrições adicionais (3.8) e (3.15) enquanto que a segunda explora a solução de (3.20) com as restrições (3.7) e (3.8). É importante novamente frisar que nos casos sem observação completa dos estados da cadeia de Markov, as soluções não correspondem mais à norma $H_2$ do sistema, mas sim apenas a um limitante superior. Por isso, uma vez determinados os controladores, calculamos as matrizes de malha fechada e só então obtivemos o valor *real* da norma $H_2$ correspondente. Os resultados obtidos estão na Tabela 3.1.

| | **Observação Completa** | **Sem Observação (3.38)** | **Sem Observação (3.20)** |
|---|---|---|---|
| **Custo do critério** | 16.63 | 37.39 | 493.3 |
| $\|\mathcal{G}_L\|_2^2$ | 16.63 | 17.52 | 17.81 |
| **Lei de Controle** | $L_1 =$ [-1.162 -0.9849]<br>$L_2 =$ [0 0] | $L_1 = L_2 =$<br>[-1.154 -0.9917] | $L_1 = L_2 =$<br>[-1.109 -0.9992] |

Tabela 3.1: Quadro Comparativo

O valor da função objetivo após a solução de (3.38), no caso de observação completa, é igual ao valor da norma mínima, conforme esperado. Note como a solução de (3.38), correspondente ao caso sem observação dos estados da cadeia, na segunda coluna da tabela, oferece um limitante superior bem menor que aquele da solução de (3.20). Entretanto, neste exemplo, os valores exatos das normas impostas pelos respectivos controladores são bastante próximos. No próximo capítulo, consideramos a síntese de controladores como aqui proposta, na solução de dois exemplos da literatura, baseados em processos reais.

# Capítulo 4

# Aplicações

## 4.1 Controle de Vôo

Uma aplicação direta dos resultados aqui obtidos é para sistemas com diferentes pontos de operação, cada um representado por uma dinâmica diferente.

Consideramos o problema apresentado por (Petersen 1987) e modelado em tempo contínuo. Trata-se de um modelo de terceira ordem para um avião caça F4E, cujas variáveis de estado são $x_1$ representando a aceleração normal, $x_2$ representando a taxa de elevação e $x_3$ o ângulo de elevação. Este modelo apresenta 4 pontos de operação, dependendo da velocidade e altitude, conforme Tabela 4.1.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Número de Mach | 0,5 | 0,9 | 0,85 | 1,5 |
| Altitude (ft) | 5.000 | 35.000 | 5.000 | 35.000 |

Tabela 4.1: Pontos de operação

O modelo discretizado pode ser obtido utilizando-se um intervalo de discretização de $\Delta t = 0,05s$, como em (Geromel, Peres & Souza 1993). As matrizes correspondentes ao modelo discretizado em cada ponto de operação são as seguintes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9572 & 0,8329 & 2,2670 \\ 0,0127 & 0,9638 & -0,2682 \\ 0 & 0 & 0,2231 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 2,5873 \\ 0,2909 \\ -0,7769 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,9693 & 0,8767 & 1,9881 \\ 0,0040 & 0,9694 & -0,2691 \\ 0 & 0 & 0,2231 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 11,4728 \\ 0,2818 \\ -0,7769 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0,9313 & 2,3567 & 5,2814 \\ 0,0102 & 0,9445 & -0,7538 \\ 0 & 0 & 0,2231 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -1,3790 \\ 0,7506 \\ -0,7769 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0,9498 & 1,4220 & 3,8014 \\ -0,0327 & 0,9161 & -0,8440 \\ 0 & 0 & 0,2231 \end{bmatrix}, \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 4,7405 \\ 0,6196 \\ -0,7769 \end{bmatrix}$$

As matrizes $C_i, D_i, J_i$ são constantes para todo $i \in \{1,2,3,4\}$:

$$C = \begin{bmatrix} I_{3\times 3} \\ 0_{3x3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0_{3\times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = I_{3\times 3}$$

Para completar a definição do sistema com saltos, é necessário definirmos a distribuição de probabilidade inicial, bem como a matriz de probabilidades de transição. Consideramos a certeza do sistema partir do ponto de operação $i = 1$, ou seja, $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Já a matriz de probabilidade é a seguinte:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,15 & 0,50 & 0,05 \\ 0,05 & 0,40 & 0,10 & 0,45 \\ 0,25 & 0,40 & 0,30 & 0,05 \\ 0,05 & 0,30 & 0,10 & 0,55 \end{bmatrix}$$

Note que consideramos sempre mais provável que o avião ganhe altura e velocidade, embora tenhamos considerado com razoável probabilidade que ele permaneça no mesmo ponto de operação ou que reduza a velocidade na mesma altitude. A menor probabilidade de todas é para um salto muito brusco entre pontos de operação. A matriz de probabilidades escolhida pode ser entendida como própria para o avião em procedimento de subida, embora sujeito a alguns contratempos no caminho.

Simulamos os seguintes casos para o sistema em consideração:

(a) Observação completa do estado da cadeia de Markov a cada instante;

(b) Observação parcial, supondo só ser possível saber a altitude do caça. Temos assim dois grupos $(1,3)$ e $(2,4)$;

(c) Sem observação, com o controle independente do estado da cadeia de Markov sendo obtido por (3.38), fazendo valer as restrições (3.8) e (3.15);

(d) Sem observação, com o controle único obtido a partir da programação (3.20) com as restrições (3.7) e (3.8).

Para cada caso, foram encontrados os ganhos do controlador de realimentação de estado, os valores para o custo do critério de otimização e da norma $H_2$. Estes valores encontram-se na Tabela 4.2. Como era esperado, para o caso de

| | Controlador | Critério | $\|\mathcal{G}_L\|_2^2$ |
|---|---|---|---|
| **Caso (a)** | $L_1 = [-0,2581 \quad -0,9837 \quad -0,3665]$<br>$L_2 = [-0,0903 \quad -0,1447 \quad -0,1931]$<br>$L_3 = [+0,1160 \quad -0,1823 \quad +1,1876]$<br>$L_4 = [-0,1359 \quad -0,5172 \quad -0,3007]$ | 46,1572 | 46,1598 |
| **Caso (b)** | $L_{13} = [-0,0140 \quad -0,6190 \quad +0,7169]$<br>$L_{24} = [-0,0908 \quad -0,3367 \quad -0,1253]$ | 127,6158 | 97,1754 |
| **Caso (c)** | $L = [-0,0721 \quad -0,3787 \quad 0,2633]$ | 227,2384 | 147,4512 |
| **Caso (d)** | $L = [-0,0683 \quad -0,5413 \quad 0,1704]$ | 705,5098 | 172,6068 |

Tabela 4.2: Quadro comparativo

observação completa o valor do critério coincide com o quadrado da norma $H_2$. Todas as outras soluções são limitantes superiores da norma, ficando claro que o caso (d) é mesmo o mais conservador.

Modelar o sistema com parâmetros sujeitos a saltos Markovianos apresenta algumas vantagens. Neste exemplo, propomos uma descrição mais refinada do comportamento do sistema em tela se comparada com o modelo oferecido em (Geromel et al. 1993), pois além de conhecer a dinâmica em cada modo de operação, também levamos em conta como eles variam, o que pode tornar as condições para estabilidade menos restritivas.

## 4.2 Controle de Nível e Concentração

Esta seção foi criada a partir do modelo linearizado de um tanque misturador que aparece no Capítulo 6, Exemplo 6.3 de (Kwakernaak & Sivan 1972).

Seja o tanque representado pela Figura 4.1. Ele é alimentado pelas válvulas 1 e 2, para as quais são ajustadas as vazões $F_1(t)$ e $F_2(t)$. A vazão efetiva que sai de cada válvula depende de sua regulação $\beta_1$ e $\beta_2$, respectivamente. Uma válvula bem regulada é aquela em que $\beta = 1$, ou seja, a vazão real da válvula é igual àquela para a qual ela foi ajustada. Os materiais que se misturam no tanque têm concentrações constantes $c_1$ e $c_2$. O fluxo de saída tem vazão $F(t)$ e assumimos que o tanque é mexido de forma a igualar a concentração da saída $c(t)$ com aquela dentro dele.

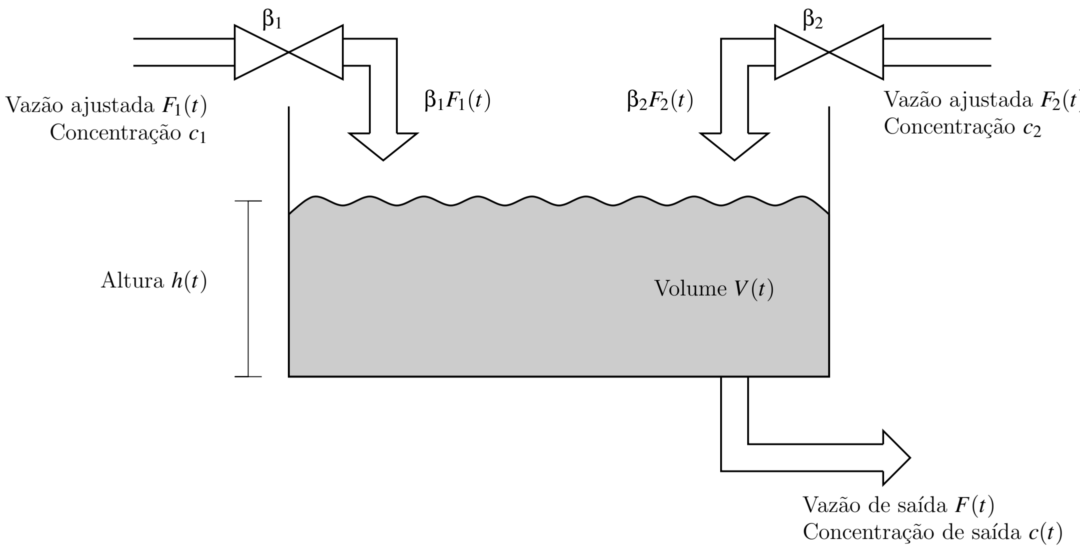


Figura 4.1: Diagrama do tanque misturador

As equações de balanço são:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \beta_1 F_1(t) + \beta_2 F_2(t) - F(t) \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dt}[c(t)V(t)] = c_1 \beta_1 F_1(t) + c_2 \beta_2 F_2(t) - c(t)F(t) \tag{4.2}$$

onde $V(t)$ é o volume do fluido no tanque. A vazão de saída relaciona-se com a altura $h(t)$ e uma constante experimental $k$ por

$$F(t) = k\sqrt{h(t)}$$

Como a seção transversal $S$ do tanque é constante, vem

$$F(t) = k\sqrt{\frac{V(t)}{S}} \tag{4.3}$$

Vamos agora linearizar o sistema composto por (4.1),(4.2) e (4.3). Para isso, devemos assumir o ponto de equilíbrio em torno do qual o sistema é linearizado. Este ponto é definido pelo valores em estado estacionário: $F_{10}$, $F_{20}$ e $F_0$ para as vazões, $V_0$ para o volume de fluido no tanque e $c_0$ para a concentração no tanque. Obtemos o seguinte sistema linear

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1 \frac{c_1 - c_0}{V_0} & \beta_2 \frac{c_2 - c_0}{V_0} \end{bmatrix} u(t) \tag{4.4}$$

onde $\tau := V_0/F_0 > 0$. As variáveis de estado são os desvios do volume e da concentração em torno dos valores de equilíbrio, respectivamente. As entradas são os desvios em relação às vazões impostas às válvulas. A saída que se pretende controlar é dada por

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \tag{4.5}$$

Note que o modelo linearizado é contínuo no tempo. Vamos supor que o sistema seja controlado por um computador, de tal forma que tanto a ação sobre as válvulas quanto as medições ocorrem apenas em instantes discretos, e os valores são mantidos constantes entre estes instantes. Consideramos que o intervalo de amostragem é fixo e vale $T$. As seguintes equações são usadas para chegar ao modelo discretizado

$$A_d = e^{AT}; \quad B_d = \left( \int_0^T e^{A\xi} d\xi \right) B; \quad C_d = C; \quad D_d = 0 \tag{4.6}$$

Aplicando as relações (4.6) ao modelo (4.4) chegamos ao seguinte modelo discretizado para o sistema em estudo

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} e^{\frac{-T}{2\tau}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-T}{\tau}} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2\tau(1 - e^{\frac{-T}{2\tau}})\beta_1 & 2\tau(1 - e^{\frac{-T}{2\tau}})\beta_2 \\ \frac{\tau(c_1 - c_0)}{V_0}(1 - e^{\frac{-T}{\tau}})\beta_1 & \frac{\tau(c_2 - c_0)}{V_0}(1 - e^{\frac{-T}{\tau}})\beta_2 \end{bmatrix} u(k) \\ \\ y(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases} \tag{4.7}$$

Os valores numéricos considerados são os seguintes:

$$\begin{aligned} F_{10} &= 0,015\ m^3/s, \\ F_{20} &= 0,005\ m^3/s, \\ c_1 &= 1\ kmol/m^3, \\ c_2 &= 2\ kmol/m^3, \\ \frac{k}{\sqrt{S}} &= 0,02\ m^{3/2}/s, \\ T &= 5s \end{aligned}$$

Estes dados permitem calcular os valores de $F_0$, $c_0$ e $V_0$, a partir das equações de balanço no caso particular de estado estacionário. Note que, de acordo com os valores possíveis para as regulações $\beta_1$ e $\beta_2$, pode-se chegar a vários sistemas lineares diferentes a partir de (4.7). De fato, não só os valores de $\beta_1$ e $\beta_2$ estão presentes no modelo (4.7), como também a grandeza $\tau$ varia em função deles.

Vamos considerar que as válvulas não se comportam da maneira desejada, isto é, com ajuste $\beta = 1$. Cada válvula pode apresentar uma falha, durante a qual produz uma vazão 10% maior que o fluxo requisitado, ou seja, $\beta = 1,10$. Consideramos que a regulação de cada válvula varia entre o valor correto e o valor com falha segundo uma cadeia de Markov, com probabilidade de transição entre estados dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Assumimos ainda que cada válvula pode apresentar a configuração acima independente da outra. Como o tanque misturador é acoplado às duas válvulas, temos portanto 4 estados possíveis para o modelo no que diz respeito a regulação das válvulas. A matriz de probabilidade total é dada por

$$\mathbb{P}_t = \mathbb{P} \otimes \mathbb{P} \tag{4.9}$$

onde $\otimes$ representa o produto de Kroenecker. Adicionalmente, supomos que o tanque começa sua operação com as duas válvulas operando corretamente, ou seja, $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Para cada uma das quatro possibilidades de regulação do par de válvulas, calculamos as matrizes $A_i$ e $B_i$ do modelo (4.7). Já as matrizes que definem a variável de saída controlada $z(k)$, denotadas $C_i$ e $D_i$, são determinadas de acordo com o procedimento empregado por (Kwakernaak & Sivan 1972). Para chegarmos à matriz de custo $C_i$, consideramos que uma variação percentual na concentração de saída deve adicionar o mesmo custo ao critério que a mesma variação percentual na vazão de saída. De forma análoga para as duas variáveis de entrada determina-se as matrizes $D_1, \cdots, D_4$.

Note que tal critério pode ser modificado para atingir outros objetivos, por exemplo, talvez a mudança na concentração não seja tão crítica quanto a mudança na vazão de saída e as participações de cada uma delas no custo do critério seriam diferentes.

Estudamos o problema considerando quatro cenários diferentes:

(a) Sabemos precisamente o estado de regulação de cada válvula em cada instante $k \in \mathbb{Z}^+$. Logo, o problema (3.38) é resolvido sem qualquer restrição adicional quanto à observação do estado da cadeia de Markov;

(b) Sabemos apenas a regulação da válvula 1 em cada instante. O sistema é dividido em dois grupos de estados da cadeia de Markov, um para os estados onde $\beta_1 = 1$ e outro para aqueles em que $\beta_1 = 1,10$. Note que, não é possível determinar o estado da cadeia de Markov em cada instante apenas com esta informação, pois para isso seria necessário conhecer também $\beta_2$. Resolvemos o problema (3.38) com restrições adicionais sobre $G_i$ e $Y_i$ que possibilitam determinar um conjunto de ganhos de realimentação para cada um dos grupos de estados;

(c) Sem observação da regulação das válvulas em cada instante. Neste cenário, resolvemos o problema (3.38) considerando as restrições adicionais (3.8) e (3.15);

(d) Sem observação da regulação das válvulas em cada instante. Neste cenário, o problema (3.20) é resolvido com as restrições adicionais (3.7) e (3.8).

Observe que, com exceção do cenário (a), os problemas de otimização resolvidos não fornecem o valor da norma $H_2$ e sim um limitante superior. Desta forma, para sabermos o valor da norma $H_2$ nestes casos, é preciso utilizar os ganhos de realimentação obtidos com a solução do problema, calcular as matrizes de malha fechada e então resolver com elas o problema descrito por (2.38). Os valores obtidos encontram-se na Tabela 4.3 Como era esperado, o valor da otimização para o

| | **Caso (a)** | **Caso (b)** | **Caso (c)** | **Caso (d)** |
|---|---|---|---|---|
| $100\times$ **Critério** | $4,7608$ | $9,2557$ | $18,52$ | $45,79$ |
| $100\times \parallel \mathcal{G}_L \parallel_2^2$ | $4,7608$ | $5,3437$ | $7,0903$ | $10,65$ |

Tabela 4.3: Quadro Comparativo.

caso (a) também fornece o quadrado da norma $H_2$ do sistema em malha fechada. A comparação dos outros casos, especialmente de (c) e (d), ilustra o quanto a restrição proposta neste trabalho para os casos de observação incompleta do estado da cadeia de Markov é menos conservadora que trabalhar apenas com as matrizes $M_i$. Além de um limitante superior menor, o controlador obtido para o caso (c) também apresenta melhor desempenho, representado pelo valor da norma $H_2$.

# Capítulo 5

# Conclusões

Maior importância têm sido dada a modelos de sistemas que englobem conceitos estocásticos em seu conteúdo. Estes sistemas são importantes na prática, por várias razões, entre elas: a dificuldade de modelar todos os detalhes de um sistema físico usando as ferramentas determinísticas (a complexidade seria muito elevada) e a própria natureza estocástica de muitos fenômenos naturais (falhas, ruídos, imprecisões paramétricas).

Em tal contexto, esta classe de sistemas lineares, em particular aqueles sistemas com parâmetros sujeitos a saltos Markovianos, tem uma grande importância. Os modelos e métodos apresentados aqui para a estabilidade e a norma $H_2$ são interessantes pois permitem desconsiderar a hipótese de conhecimento do estado da cadeia de Markov em cada instante de tempo. Além disso, a formulação é simples e de fácil manipulação e tratamento numérico, permitindo com que os problemas, mesmo aqueles com limitações quanto à observação dos estados da cadeia de Markov, sejam expressos em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs). O resultado principal apresentado nesta dissertação consta da publicação (do Val et al. 2002) ocorrida na revista *Automatica*.

Seguindo pelo mesmo caminho trilhado aqui, é possível obter também resultados com relação a norma $H_\infty$, usando LMIs ((Costa & do Val 1996),(Costa & Marques 1998)) e seu controle com observação incompleta do estado da cadeia de Markov (de Souza 2005).

Outro caminho importante é o da filtragem e do controle por realimentação de saída. Como já feito para a mesma classe de problemas em tempo contínuo (de Farias, Geromel, do Val & Costa 2000), acreditamos que tal modelo pode perfeitamente ser construído utilizando LMIs também no caso de tempo discreto. Trata-se de problemas não ainda completamente resolvidos via LMI mesmo no caso de informação completa. A partir dos resultados aqui apresentados, acreditamos que aqueles problemas podem ser resolvidos até mesmo com a hipótese de observação parcial dos estados da cadeia de Markov.

E para os mais ambiciosos, há um importante problema ainda em aberto na literatura. Sistemas contínuos, com matrizes paramétricas variando de acordo com o exposto neste trabalho, não contam ainda com uma forma equivalente de se obter o controle independente da observação do estado da cadeia de Markov em cada instante. Estes pontos serão avaliados em trabalhos futuros.

# Bibliografia


Caines, P. E. & Zhang, J. (1995). On the adaptative control of jump parameter systems via nonlinear filtering, *SIAM Journal of Control and Optimization* **33**: 1758–1777.

Colaneri, P., Geromel, J. C. & Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design: An $\mathbf{RH}_2$ - $\mathbf{RH}_\infty$ Viewpoint*, Academic Press.

Costa, O. L. V. (1995). Discrete-time coupled Riccati equations for systems with Markov switching parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **194**: 197–216.

Costa, O. L. V. & do Val, J. B. R. (1996). Full information $\mathbf{H}_\infty$ control for discrete-time infinite Markov jump parameter systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **202**: 578–603.

Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. & Geromel, J. C. (1997). A convex programming aproach to $\mathbf{H}_2$ control of discrete-time Markovian linear systems, *International Journal of Control* **66**(4): 557–579.

Costa, O. L. V. & Fragoso, M. D. (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jump parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**: 154–178.

Costa, O. L. V. & Marques, R. P. (1998). Mixed $\mathbf{H}_2/\mathbf{H}_\infty$-control of discrete-time Markovian jump linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**: 95–100.

de Farias, D. P., Geromel, J. C., do Val, J. B. R. & Costa, O. L. V. (2000). Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(5): 944–949.

de Souza, C. E. (2005). Mode-independent H-infinity control of discrete-time Markovian jump linear systems, *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*.

do Val, J. B. R. & Basar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *Journal of Economic Dynamics and Control* **23**: 1099–1131.

do Val, J. B. R., Geromel, J. & Gonçalves, A. P. C. (2002). The $\boldsymbol{H}_2$-control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state, *Automatica* **38**: 343–349.

Geromel, J. C., Peres, P. L. D. & Souza, S. R. (1993). $\boldsymbol{H}_2$ guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems, *Int. J. Control* **57**(4): 853–864.

Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1990). Jump linear quadratic control: Steady state solution and testable conditions, *Control Theory and Advanced Technology* **5**: 289–319.

Ji, Y., Chizeck, H. J., Feng, X. & Loparo, K. A. (1991). Stability and control of discrete-time jump linear systems, *Control Theory and Advanced Technology* **7**: 247–270.

Kwakernaak, H. & Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, New York.

Oliveira, M. C., Bernussou, J. & Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* **37**: 261–295.

Pan, G. & Bar-Shalom, Y. (1996). Stabilization of jump linear gaussian systems without mode observations, *International Journal of Control* **64**: 631–661.

Petersen, I. R. (1987). A procedure for simultaneously stabilizing a collection of single input linear systems using non-linear feedback control, *Automatica* **23**: 33–40.