Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Telemática

Estabilidade de Sistemas com Atraso: Análise de Incertezas e de Saturação Empregando Desigualdades Matriciais Lineares

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, modalidade Automação.

por
Giórgio Valmórbida
Engenheiro de Controle e Automação Industrial – UFSC, 2004

em 23 de março de 2006 perante a banca examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres - Orientador
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr. (UFRGS)
Dr. Vinícius Foletto Montagner

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Valmórbida, Giórgio
V245e	Estabilidade de sistemas com atraso: análise de incertezas e de saturação empregando desigualdades matriciais lineares / Giórgio Valmórbida. --Campinas, SP: [s.n.], 2006.
	Orientador: Pedro Luis Dias Peres Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
	1. Teoria do Controle. 2. Sistemas lineares invariantes no tempo. 3. Estabilidade 4. Liapunov, Funções de. 5. Otimização matemática. I. Peres, Pedro Luis Dias. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Stability of time-delay systems:uncertainty and saturation analysis via linear matrix inequalities
Palavras-chave em Inglês: Control Theory, Time-invariant systems, Stability, Lyapunov Functions, Matrix inequalities, mathematical optimization
Área de concentração: Automação
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca examinadora: João Manoel Gomes da Silva Jr. e Vinícius Foletto Montagner
Data da defesa: 23/03/2006

1. Modificações sugeridas pela Comissão Julgadoras que deverão ser incorporadas na versão final da tese:

Foram sugeridas pequenas modificações, cuja verificação fica a cargo do orientador. Outras correções de forma, de pequena monta, também serão incorporadas na versão final.

2. Prazo máximo para a entrega da versão final da tese na CPG: 60 (dias).

3. Comentários finais (se necessário):

O candidato demonstrou perfeito domínio sobre o tema de sua dissertação, no manuscrito, na apresentação e na argüição pela banca.

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres (Presidente): ______

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior: ______

Dr. Vinícius Foletto Montagner: ______

Resumo

Este trabalho apresenta resultados no contexto de estabilidade de sistemas com atraso. A estabilidade de sistemas incertos com atraso é estudada utilizando o Teorema do Pequeno Ganho Escalonado a partir de um sistema de comparação. Aplicando resultados do Lema de Finsler e empregando matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetro nas desigualdades matriciais lineares do Teorema do Pequeno Ganho, são obtidas condições independentes e condições dependentes do atraso para sistemas incertos.

Sistemas com atraso que apresentam entrada com saturação em posição são estudados visando obter condições para cômputo de ganhos de realimentação de estados e visando obter uma estimativa para a região de atração do sistema em malha fechada. É considerada uma lei de controle com realimentação do estado atual e do estado atrasado. Funcionais de Lyapunov-Krasovskii são utilizados na obtenção das condições de estabilizabilidade. A maximização das estimativas das regiões de atração é feita a partir da solução de problemas de otimização com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares.

Abstract

This work presents results in the context of time-delay system stability. Uncertain time-delay systems are studied by means of the Scaled Small-Gain Theorem. By applying results from Finsler's Lemma and using parameter-dependent Lyapunov matrices, delay-dependent and delay-independent conditions for uncertain systems are obtained in terms of linear matrix inequalities.

Time-delay system presenting amplitude-saturating inputs are analyzed aiming to establish conditions to compute state-feedback gains and to obtain an estimate of the bassin of attraction of the system. A control law composed by a current state-feedback and a delayed state-feedback is considered. Lyapunov-Krasovskii functionals are the starting point to obtain the stabilizability conditions. The maximization the estimates of the bassin of attraction is carried out by solving an optimization problem whose constraints are linear matrix inequalities.

"Defer no time; delays have dangerous ends."
William Shakespeare (Henry VI, Part I, Act 3)

Agradecimentos

Agradeço:

à FAPESP, o imprescindível apoio financeiro;

à UNICAMP e todos que nela trabalham ou que trabalharam para construí-la;

ao professor Pedro Luis Dias Peres a orientação, não apenas por suas dicas valiosas mas também por ter tornado este trabalho mais prazeroso;

às professoras Sophie Tarbouriech e Isabelle Queinnec;

aos professores Ivanil S. Bonatti, Paulo A. V. Ferreira, Fernando Von Zuben e José C. Geromel;

aos colegas e amigos, camaradas da fortuna (e de infortúnios), Valter Leite, Vinícius "Seu Fenício" Montagner, Ricardo "Pierre" Oliveira, Renato "Gaúcho" Borges e Taís Calliero;

aos demais colegas e amigos do laboratório por tornarem o DT um excelente local de trabalho;

aos "Jovens" lá de casa, o convívio e a amizade;

aos meus pais, o apoio incondicional;

a Josefina Isabel, a companhia;

a Ana Elisa, o afeto e a cumplicidade.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Acrônimos e Notação

LMI	Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)

$\star$	indica bloco simétrico nas LMIs
$v \preceq w$	v, $w \in \mathbb{R}^n$ indica que $v_{(i)} \leq w_{(i)}$ para $i = 1 \ldots n$
$L > 0$	indica que a matriz L é simétrica definida positiva
$L \geq 0$	indica que a matriz L é simétrica semi-definida positiva
A'	símbolo ($'$), posposto a um vetor ou matriz, indica a operação de transposição
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbf{I}$	matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbf{0}$	matriz de zeros de dimensão apropriada
$\mathrm{diag}\{A, B, \ldots, Z\}$	representa uma matriz bloco-diagonal
N	utilizada para denotar o número de vértices de um politopo
n	utilizada para representar a ordem uma matriz quadrada
Δ_N	simplex unitário de N variáveis
α	especialmente utilizada para representar as incertezas de um sistema
$\lambda_{\max}(A)$	autovalor máximo da matriz A
$\lambda_{\min}(A)$	autovalor mínimo da matriz A
$\bar{\sigma}(A)$	valor singular máximo da matriz A
x_t	denota o estado do sistema com atraso dado por $x(\theta) \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in [t - \tau, t]$
$\mathcal{C}_{n,\tau} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$	denota o espaço de Banach de funções vetoriais contínuas mapeando o intervalo $[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ com topologia de convergência uniforme
$\|\phi_x\|_c$	denota a norma do elemento $\phi_x \in \mathcal{C}_{n,\tau}$ definida como $\sup_{\theta \in [-\tau,0]} \|\phi(\theta)\|$
$\mathcal{C}^v_{n,\tau}$	denota o espaço de Banach de funções vetoriais contínuas $\mathcal{C}_{n,\tau}$ e com norma menor que v

Introdução

Uma característica presente em diversos sistemas dinâmicos é a influência de atraso nas equações que descrevem o sistema. Tais sistemas são chamados de sistemas com atraso, hereditários ou com retardo. Atrasos de medição e de atuação, atrasos de transporte e comunicação e até mesmo atrasos introduzidos intencionalmente no sistema com o propósito de melhora de desempenho são a causa da presença de variáveis deslocadas no tempo nesses sistemas. Para a análise de características do sistema e para projeto de controladores mais realistas e eficazes, atrasos devem ser considerados nos modelos. Como exemplo de sistemas é possível citar processos de reaproveitamento de reagentes em reatores químicos [Mah97], sistemas biológicos como dinâmica de populações e avanço de epidemias [Kua93], [Mac78], processos de fabricação [MK98], [DK94], comboios de veículos [HR98], motores de combustão interna [CP88] e amortecedores em que o atraso é induzido [OHH94].

Os primeiros registros de equações com atraso foram feitos no século XVIII e são creditados a Bernoulli e Euler. Uma análise mais elaborada foi feita na década de 1920 por Volterra [Vol28], [Vol31] em seus estudos sobre dinâmica populacional e avanço de epidemias. Mais contribuições foram feitas, depois, por Bellmann [BD54], Mishkis [Mis49] que formulou o problema de condição inicial pela primeira vez e Minorsky [Min42], que estudou o problema de estabilização de navios. O estudo de estabilidade de tais sistemas com a abordagem de Lyapunov só foi possível com as idéias de Krasovskii [Kra59] que propôs que o funcional de Lyapunov deveria ponderar os valores do estado entre o instante atual e o instante atrasado que influencia o sistema. Nos últimos vinte anos tem-se percebido um aumento de interesse por tais sistemas, principalmente devido ao fato de que sistemas que possuem atraso podem ser mais bem controlados por leis de controle projetadas para modelos não simplificados pela desconsideração do atraso. Uma cobertura da teoria de equações funcionais diferenciais, das quais fazem parte os sistemas com atraso, pode ser vista em [HVL93]. Resultados recentes sobre sistemas com atraso e sobre a influência dos atrasos na estabilidade podem ser vistos em [Ric03], [Nic01] e [GKC03].

A classe de sistemas a ser estudada nesta dissertação é dada pelas equações abaixo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) \tag{1}$$

$$x(t_0+\theta) = \phi(\theta),\ -\tau \leq \theta \leq 0 \tag{2}$$

Trata-se de um sistema de dimensão infinita representado por um estado de dimensão finita. Para resolver a equação é necessário o conhecimento do valor de $\phi(\theta)$ para $\theta \in [-\tau, 0]$, que é a condição inicial do sistema. O atraso aparece apenas nos estados, não havendo influência da derivada de estados atrasados na derivada do instante atual, o que caracterizaria um sistema neutral [HVL93].

Sistemas lineares com atraso podem ser classificados como possuindo atrasos concentrados, atrasos distribuídos ou ambos. Em um sistema com atrasos distribuídos, a derivada do estado atual é influenciada por todos os valores do estado $x(\theta)$ com $\theta \in [t-\tau, t]$. Por sua vez, um sistema com atrasos concentrados tem sua dinâmica influenciada por um número finito de valores atrasados do estado. Sistemas com atrasos concentrados podem ser classificados como sistemas com atrasos comensuráveis e sistemas com atrasos não-comensuráveis. O primeiro tipo considera que a razão entre quaisquer atrasos do sistema é um número racional e um sistema com atrasos não-comensuráveis é caracterizado por atrasos cuja razão não é um número racional. As equações (1)-(2) apresentam um sistema contínuo com atrasos concentrados. No decorrer deste trabalho são apresentadas condições com apenas um atraso, mas que podem ser generalizadas para diversos atrasos, comensuráveis ou não. A distinção acerca da comensurabilidade é feita principalmente na formulação de condições de estabilidade no domínio da freqüência [Nic01].

O interesse em analisar a estabilidade dos modelos é devido ao fato de que apenas com modelos estáveis é possível assegurar um funcionamento eficaz e seguro do sistema real que o modelo representa. Os primeiros estudos significativos para analisar a estabilidade de sistemas foram feitos no final dos anos 1950. Krasovskii e Razumikhin publicaram, separadamente, seus estudos empregando o método direto de Lyapunov em sistemas com atraso. A principal diferença entre as abordagens propostas é que, com a abordagem de Razumikhin, é necessário que a derivada da função de Lyapunov seja negativa apenas em pontos em que a norma do estado no instante t seja igual ao máximo da norma do intervalo $[t-\tau, t]$, enquanto que os funcionais de Lyapunov-Krasovskii devem possuir derivada negativa para todo instante t.

Atrasos possuem efeitos complexos na estabilidade de sistemas. Em alguns casos, desestabilizam sistemas e, em outros casos particulares, podem estabilizá-los. O comportamento do sistema influenciado por atrasos, assim como a definição exata de regiões no espaço dos atrasos nas quais o sistema é estável, ainda são problemas em aberto [Ric03], [Nic01].

A análise de estabilidade de sistemas incertos, ou estabilidade robusta em relação a incertezas paramétricas, é tarefa mais complexa. Uma maneira de diminuir o conservadorismo na análise de estabilidade de sistemas incertos com atraso é utilizar funcionais de Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro, similarmente ao que é feito para sistemas sem a presença de atrasos [LP03], [PA01].

Uma das vantagens do uso de funcionais de Lyapunov-Krasovskii para análise de estabilidade é que, com estes, podem ser obtidas condições de estabilidade de dimensão finita que podem ser escritas como LMIs (*Linear Matrix Inequalities*, em português Desigualdades Matriciais Lineares) [BEFB94]. A formulação de um problema na forma de LMIs é interessante, pois a resolução de LMIs é feita com algoritmos de tempo polinomial (em função do número de variáveis e de linhas de LMIs). Ou seja, formular o problema como uma LMI, em muitos casos, equivale a resolvê-lo.

Uma vez formulado como LMI, outra ferramenta que pode ser empregada para a redução de conservadorismo da análise é a inserção de variáveis extras ao problema [dOS01]. Os resultados do Lema de Finsler são utilizados para tal fim.

Uma característica de quase todos os problemas reais de controle é a presença de não-linearidades, sendo a saturação de atuadores uma das principais. Limitações físicas, tecnológicas ou de segurança podem ser fonte dessa não-linearidade que, assim como atrasos, pode levar o sistema a apresentar um comportamento instável.

A análise de estabilidade e estabilizabilidade local e global de sistemas com saturação tem sido amplamente estudada nos últimos anos [BM95], [TG97], [KG02]. Caso um sistema instável com atraso seja considerado com entrada saturada em amplitude, é de interesse obter, com ganhos de realimentação de estado, uma região na qual a estabilidade é garantida. Algumas condições de estabilizabilidade foram propostas considerando realimentação do estado atual [TG00], [CLH02], porém, se for considerada a realimentação de estados atrasados, é possível fazer uma análise mais realista, incorporando possíveis atrasos inerentes aos atuadores e sensores do sistema.

Resultados para análise de estabilidade de sistemas incertos com atraso e resultados para síntese de controladores para sistemas com atraso e saturação na entrada são apresentados nesta dissertação, que é dividida em quatro capítulos. O primeiro apresenta as ferramentas necessárias para desenvolvimento e compreensão do trabalho. O segundo capítulo apresenta resultados obtidos para análise de estabilidade dependente e independente do atraso, empregando funcionais de Lyapunov dependentes de parâmetro e variáveis extras utilizando um sistema de comparação e o Teorema do Pequeno Ganho. O terceiro capítulo considera sistemas com atraso e saturação e mostra um procedimento com o qual, a partir da busca de ganhos de realimentação de estados e de estados atrasados com a solução de um problema de otimização linear, obtêm-se estimativas para a região de atração do sistema. O capítulo final apresenta as conclusões e uma análise dos resultados obtidos. Exemplos numéricos são apresentados no final dos capítulos 2 e 3 para ilustrar os resultados e sua aplicabilidade.

A análise feita nesta dissertação considera apenas a representação do sistema no domínio do tempo e apresenta resultados para sistemas contínuos com atraso. Os resultados são apresentados para sistemas com apenas um atraso, porém podem facilmente ser estendidos para sistemas com mais de um atraso. A ferramenta empregada para programação e resolução das LMIs presentes nas condições de estabilidade é o *LMI Control Toolbox* [GNLC95] para Matlab.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Sistemas com Atrasos

A classe de sistemas considerados neste trabalho é a de sistemas lineares com atraso, descritos pela equação abaixo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) \tag{1.1}$$

$$x(t_0+\theta) = \phi(\theta), \; -\tau \leq \theta \leq 0 \tag{1.2}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, A, $A_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\tau \geq 0$. O conceito de estado inicial é substituído pelo de função inicial, pois, para solucionar a equação (1.1), é necessário conhecer os valores de $x(t)$ com $t \in [t_0-\tau, t_0]$. Tem-se, portanto, que em $t_0-\tau \leq t \leq t_0$, $x(t) = \phi(t) \in \mathcal{C}_{n,\tau}$. O espaço de funções iniciais admissíveis é um espaço de Banach com a norma de seus elementos definida por $\| \phi_x \|_c = \sup_{\theta\in[-\tau,0]} \| \phi(\theta) \|$ [HVL93].

Os sistemas estudados são invariantes no tempo e com atraso invariante no tempo.

1.2 Teoria de Estabilidade

A abordagem empregada para o estudo de estabilidade neste trabalho é o segundo método de Lyapunov ou método direto de Lyapunov. O estudo de estabilidade empregando essa técnica consiste na busca de um funcional definido positivo cuja derivada seja definida negativa para todas as trajetórias do sistema. No caso de sistemas lineares sem atraso, um funcional de Lyapunov amplamente utilizado é dado pela forma quadrática

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t) \tag{1.3}$$

com $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $P = P' > 0$, cuja derivada, considerando um sistema sem atraso e sem entrada de controle, é dada por:

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)'Px + x'P\dot{x}(t) = x'A'Px + x'PAx \tag{1.4}$$

Se a derivada for definida negativa o sistema é estável. Portanto, o teste de estabilidade do sistema linear precisamente conhecido reduz-se à verificação de factibilidade das seguintes LMIs:

$$P > 0 \tag{1.5}$$
$$A'P + PA < 0 \tag{1.6}$$

A vantagem da formulação com esta função de Lyapunov é que a verificação de estabilidade reduz-se a um teste de factibilidade de LMIs. A análise de estabilidade para sistemas com atraso feita neste trabalho utiliza funcionais de Lyapunov, o que permite que problemas relacionados à análise sejam resolvidos com testes de factibilidade de LMIs ou sejam transformados em problemas de otimização com restrições na forma de LMIs.

1.2.1 Estabilidade de Sistemas com Atraso

Para sistemas lineares com atraso é possível enunciar o seguinte lema [GKC03].

Lema 1.1 *Considerando o sistema (1.1)-(1.2), as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) O sistema é assintoticamente estável;

ii) As raízes da equação característica $P(s) = \det(s\mathbf{I} - A - e^{-\tau s}A_d) = 0$ *obedecem a* $\alpha_0 = \max_s \{Re(s) | \det(P(s)) = 0\} < 0$

Como é difícil identificar as raízes da equação característica do sistema [Hal77], busca-se obter condições de dimensão finita empregando a representação no tempo de sistemas com atraso. O teorema a seguir é a adaptação do Teorema de Lyapunov para a classe de sistemas tratada neste trabalho. Apresentado em [Kra59], o teorema está enunciado para equações funcionais diferenciais que possuem como caso particular sistemas lineares com atraso.

Teorema 1.1 (Estabilidade de Lyapunov-Krasovskii) *Suponha* $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_{n,\tau} \to \mathbb{R}^n$ *que mapeia conjuntos limitados de* $\mathcal{C}_{n,\tau}$ *em conjuntos limitados em* $\mathbb{R}^n$, *e* u, v, w: $\bar{\mathbb{R}}_+ \to \bar{\mathbb{R}}_+$ *funções contínuas não-decrescentes com* $u(t)$ *e* $v(t)$ *tais que* $u(0) = v(0) = 0$ *e* $u(t) > 0$, $v(t) > 0$ *para* $t > 0$. *Se existir um funcional contínuo diferenciável* $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_{n,\tau} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$u(\| \phi(0) \|) \leq V(t, \phi) \leq v(\| \phi_x \|_c) \tag{1.7}$$

e

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\| \phi(0) \|), \tag{1.8}$$

então a solução do sistema (1.1)-(1.2) é uniformemente estável. Se $w(t) > 0$ *para* $t > 0$, *então o sistema é uniformemente assintoticamente estável. Se, além disso ,* $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$, *então o sistema é assintótica, global e uniformemente estável.*

Prova: Pode ser vista em [GKC03]. ∎

Para sistemas lineares com atraso (1.1)-(1.2), objeto de estudo desta dissertação, um sistema é estável se e somente se for assintótica, global e uniformemente estável.

1.2.2 Estabilidade Independente do Atraso

Uma das abordagens para o estudo de estabilidade de sistemas com atraso é a que define se um sistema é estável independentemente da magnitude do atraso. Esse tipo de estabilidade é chamada de estabilidade independente do atraso. Nessa abordagem, o valor do atraso não aparece explicitamente nas condições de teste de estabilidade. Para que um sistema seja estável independentemente da magnitude do atraso, as matrizes A e $A + A_d$ devem ser Hurwitz, isto é, devem possuir todos os autovalores com parte real negativa. Esses casos particulares correspondem respectivamente às possibilidades de o atraso ser ilimitado e de o atraso ser nulo.

1.2.3 Estabilidade Dependente do Atraso

As condições dependentes do atraso ocupam-se de verificar intervalos de valores dos atrasos de maneira que o sistema seja estável se os atrasos estiverem em tais intervalos. A caracterização exata de tais intervalos ainda é um problema sem solução [KNR99].

As condições obtidas nesse caso são dependentes dos valores dos atrasos para os quais se deseja testar a estabilidade. As condições dependentes do atraso aqui apresentadas são estabelecidas para sistemas com apenas um atraso e são formuladas para encontrar o primeiro intervalo de estabilidade que contenha o ponto $\tau = 0$, ou seja o intervalo $\nu = [0, \bar{\tau}]$ de forma que o sistema seja estável para qualquer valor $\tau \in \nu$. Para encontrar o limitante do atraso $\bar{\tau}$ é realizada uma busca linear. As condições apresentadas na dissertação consideram desigualdades matriciais, as quais, para valores conhecidos de τ, tornam-se LMIs.

1.3 Lema de Finsler

Formulações equivalentes para teste de LMIs, sujeitas a restrições de igualdade dadas pela definição da dinâmica dos sistemas, são obtidas com o Lema de Finsler. A principal diferença dessas formulações alternativas é que as restrições não são explicitamente substituídas nas LMIs, o que acarreta um problema de dimensão aumentada. Para sistemas precisamente conhecidos, a formulação de dimensão aumentada é equivalente à formulação original, porém, para problemas de teste de estabilidade de sistemas incertos, cujos resultados são apenas suficientes, a introdução de variáveis extras acrescenta graus de liberdade ao problema, o que pode reduzir o conservadorismo na análise de tais sistemas. O Lema de Finsler é enunciado abaixo.

Lema 1.2 *Sejam, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que posto$(\mathcal{B}) < n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $x'\mathcal{Q}x < 0$, $\forall \mathcal{B}x = 0$, $x \neq 0$

ii) $\mathcal{B}^{\perp\prime} Q \mathcal{B}^{\perp} < 0$, $\mathcal{B}^{\perp}$ *sendo uma base para o espaço nulo de* $\mathcal{B}$ $(\mathcal{B}\mathcal{B}^{\perp} = 0)$

iii) $\exists \mu \in \mathbb{R}$: $\mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$

iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $\mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0$

Prova: Uma prova pode ser vista em [dOS01]. ∎

1.4 Sistemas Incertos

Os modelos de sistemas que servem de base para estudo da estabilidade de sistemas reais estão sujeitos a incertezas. Dentre as fontes de incertezas é possível citar simplificações no modelo e incertezas nos parâmetros.

Frente a essas incertezas, o interesse é verificar se propriedades do sistema são mantidas com diferentes valores dos parâmetros incertos, ou seja, é de interesse verificar se determinadas propriedades são robustas em relação à incerteza. Este trabalho se preocupa em verificar a robustez da estabilidade de sistemas com atraso.

Existem diferentes representações para incertezas paramétricas, sendo possível citar o uso de incertezas intervalares [JKDW01], representações lineares fracionárias [Doy82] e incertezas politópicas [BEFB94]. Esta última será utilizada nas análises desenvolvidas neste trabalho.

Um politopo é um conjunto cujos elementos podem ser descritos como a soma convexa de um número finito de pontos, chamados vértices do politopo. Um politopo de matrizes $\mathcal{P}$, representando a incerteza de uma matriz, é dado por

$$\mathcal{P} = \left\{ A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0 \right\} \tag{1.9}$$

Uma interpretação gráfica é dada na Figura 1.1:

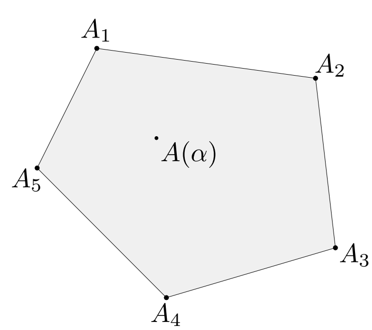

Figura 1.1: Conjunto politópico definido pelos vértices A_i, $i = 1, \ldots, 5$.

1.4.1 Aproximação de LMIs por Polinômios

Um problema que surge no estudo de estabilidade de sistemas incertos é a verificação de factibilidade de LMIs dependentes de parâmetros e que pertencem a politopos. Em [RP01b] e [RP02] é apresentada uma sistematização para a solução dessas LMIs. Uma condição suficiente para a solução desse problema é obtida a partir de outro problema de otimização que não é parametrizado em α, a variável que define um ponto no politopo.

Seja a LMI parametrizada em α com variável de otimização r

$$M(r,\alpha) < 0 \tag{1.10}$$

considerando respectivamente $M(r,\alpha)$ com produtos duplos e triplos de matrizes que dependem linearmente de α, ou seja, de grau dois e três em α, a matriz pode ser escrita como:

$$M(r,\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 M_i(r) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \alpha_i \alpha_j M_{ij}(r) \tag{1.11}$$

$$M(r,\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^3 M_i(r) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1;j\neq i}^{N} \alpha_i^2 \alpha_j M_{ij}(r) + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \alpha_k M_{ijk}(r) \tag{1.12}$$

Dessa forma, para garantir a factibilidade de (1.10), basta assegurar a negatividade de M_i, M_{ij} e M_{ijk} em (1.11) e (1.12) uma vez que os valores de α_i são sempre não-negativos.

1.5 Teorema do Pequeno Ganho Escalonado

1.5.1 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Para apresentar o Teorema do Pequeno Ganho é necessário definir a norma $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema linear. No espaço freqüencial tem-se [Fra87]

$$\| H(s) \|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}\left(H(j\omega)\right) \tag{1.13}$$

sendo que $\bar{\sigma}(\cdot)$ denota o valor singular máximo de $(\cdot)$. A norma $\mathcal{H}_\infty$ também pode ser obtida através do procedimento que considera uma matriz definida positiva associada à teoria de estabilidade de Lyapunov. Esse procedimento é definido no lema abaixo [ZDG96]:

Lema 1.3 *Dado um sistema linear sem atraso $H(s)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\| H(s) \|_\infty^2 < \gamma$

ii) $\bar{\sigma}(D) < \sqrt{\gamma}$ *e existe uma matriz* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P = P' > 0$ *de forma que*

$$A'P + PA + (PB + C'D)\left(\gamma \mathbf{I} + D'D\right)^{-1}\left(B'P + D'C\right) + C'C = 0 \tag{1.14}$$

iii) $\bar{\sigma}(D) < \sqrt{\gamma}$ *e existe uma matriz* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P = P' > 0$ *de forma que*

$$AP + PA' + (PC' + BD')\left(\gamma \mathbf{I} + DD'\right)^{-1}\left(CP + DB'\right) + BB' = 0 \tag{1.15}$$

iv) Existe uma matriz $P = P' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de forma que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ \star & -\gamma\mathbf{I} & D' \\ \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{1.16}$$

$$P > 0 \tag{1.17}$$

v) Existe uma matriz $P = P' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de forma que

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B & PC' \\ \star & -\gamma\mathbf{I} & D' \\ \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{1.18}$$

$$P > 0 \tag{1.19}$$

E o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculado resolvendo-se um dos seguintes problemas de otimização convexa:

$$\| H(s) \|_\infty^2 = \min \{\gamma : \mathit{(1.16), (1.17)}\} \tag{1.20}$$

$$\| H(s) \|_\infty^2 = \min \{\gamma : \mathit{(1.18), (1.19)}\} \tag{1.21}$$

1.5.2 Análise de Estabilidade com o Teorema do Pequeno Ganho

O estudo da estabilidade robusta de um sistema incerto, cuja estrutura é dada pela realimentação da saída de um sistema precisamente conhecido que multiplica uma incerteza estruturada, pode ser feito com o Teorema do Pequeno Ganho Escalonado. Tal sistema, representado na Figura 1.2, pode ser escrito como

$$\dot{x}(t) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}\Delta(\mathbf{I} - \Delta\mathcal{D})^{-1}\mathcal{C})x(t) \tag{1.22}$$

ou como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}w(t) \\ z(t) = \mathcal{C}x(t) + \mathcal{D}w(t) \\ w(t) = \Delta z(t) \end{cases} \tag{1.23}$$

em que $\Delta = \text{diag}\{\delta_1\mathbf{I}, \ldots, \delta_k\mathbf{I}, \Delta_1, \ldots, \Delta_\ell\}$, com δ_i e Δ_i sendo incertezas escalares e matriciais afetando o sistema.

A versão do Teorema do Pequeno Ganho que considera a estrutura da incerteza é chamada de Teorema do Pequeno Ganho Escalonado pois utiliza a matriz de escalonamento $Q = Q' > 0$ com a estrutura $Q = \text{diag}\{Q_1, \ldots, Q_k, q_1\mathbf{I}, \ldots, q_\ell\mathbf{I}\}$, que garante

$$Q^{\frac{1}{2}}\Delta Q^{-\frac{1}{2}} = \Delta \tag{1.24}$$

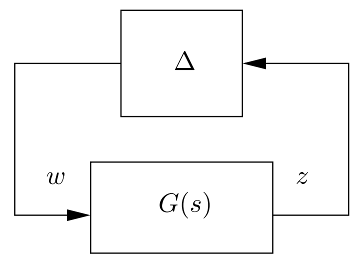

Figura 1.2: Sistema $G(s)$ afetado pela incerteza Δ.

Teorema 1.2 (Pequeno Ganho Escalonado) *Seja $G(s) \triangleq \mathcal{C}(s\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$, e Δ tal que $\| \Delta \|_\infty \leq 1$. Se existe $Q > 0$ tal que (1.24) e $\| Q^{\frac{1}{2}} G(S) Q^{-\frac{1}{2}} \|_\infty < 1$ são satisfeitas, ou seja, se existem $P = P' > 0$ e $Q = Q' > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} & P\mathcal{B} \\ \mathcal{B}'P & -Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}' \\ \mathcal{D}' \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} < 0$$

ou, equivalentemente, tais que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} & P\mathcal{B} & \mathcal{C}'Q \\ \star & -Q & \mathcal{D}'Q \\ \star & \star & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{1.25}$$

então o sistema incerto é estável.

Prova: Veja [SIG98]. ∎

1.6 Sistemas com Saturação

Devido a restrições físicas, tecnológicas ou de segurança, muitos sistemas possuem atuadores com limites em amplitude de posição e velocidade. Uma descrição com mais detalhes e diversos problemas relacionados a sistemas saturados podem ser vistos em [TG97] [HL01], [KG02].

Considerando que o sistema (1.1)-(1.2) possui uma entrada de controle que satura em posição, pode-se escrever

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B\text{sat}_{u_0}(u(t)) \tag{1.26}$$

É possível realizar a análise de sistemas saturados a partir de três diferentes representações para a saturação. Pode-se utilizar regiões de saturação, ou representação exata [BM95], representação politópica [HL01] e representação por não-linearidade do setor [TPG04]. Esta será empregada neste trabalho pois facilita a análise de estabilidade. Assim, define-se a não-linearidade

$$\psi(u(t)) = \text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t) \tag{1.27}$$

Na região linear do atuador tem-se $\psi(t) = 0$. Considerando uma lei de controle com realimentação

$$u(t) = Kx(t) \tag{1.28}$$

Em malha fechada o sistema torna-se:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau) + B\psi(t) \tag{1.29}$$

1.6.1 Estabilidade de Sistemas com Atraso e Entrada Saturada

O sistema (1.29) é globalmente assintoticamente estável se para toda condição inicial satisfazendo $\| \phi_x \|_c > v$, para todo v finito tal que $v > 0$, as trajetórias do sistema convergem assintoticamente para a origem. A definição de uma lei de controle globalmente estabilizante só é possível se o sistema em malha aberta for estável [TGG04], [Ouc96]. Caso essa hipótese não seja verificada, apenas a estabilidade local do sistema pode ser estudada. Ou seja, é possível definir uma região de atração em torno da origem $x = 0$, que corresponde à região em que qualquer condição inicial $\phi_x \in \mathcal{C}^v_{\tau,n}$ converge para a origem. É difícil definir exatamente a região de atração; dessa forma, são feitas aproximações na forma de bolas para definição das mesmas.

1.6.2 Condição do Setor

Seja o conjunto poliedral:

$$S(u_0) = \{v \in \mathbb{R}^m; w \in \mathbb{R}^m; -u_0 \preceq v - w \preceq u_0\} \tag{1.30}$$

Lema 1.4 *Se v e w pertencem a $S(u_0)$ então a não-linearidade genérica*

$$\psi(v) = sat_{u_0}(v) - v$$

satisfaz a inequação

$$\psi(v)' U^{-1}(\psi(v) + w) \leq 0 \tag{1.31}$$

para toda matriz diagonal definida positiva $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Prova: A prova pode ser vista em [TPG04]. ∎

Capítulo 2

Condições para Sistemas Incertos com Atraso

Aplicando a transformada de Laplace no sistema (1.1)-(1.2), considerando a condição inicial nula, tem-se

$$
\begin{aligned}
sX(s) &= AX(s) + e^{-\tau s}A_dX(s) \qquad (2.1)\\
&= AX(s) + e^{-\tau s}(I-M)A_dX(s) + e^{-\tau s}MA_dX(s)\\
&= (A+MA_d)X(s) + e^{-\tau s}(I-M)A_dX(s) + \left(\frac{e^{-\tau s}-1}{\bar{\tau}s}\right)\bar{\tau}MA_dsX(s)\\
&= (A+MA_d)X(s) + e^{-\tau s}(I-M)A_dX(s)\\
&\quad + \left(\frac{e^{-\tau s}-1}{\bar{\tau}s}\right)\bar{\tau}MA_d(AX(s)+e^{-\tau s}A_dX(s))\\
&= (A+MA_d)X(s) + e^{-\tau s}(I-M)A_dX(s) + \left(\frac{e^{-\tau s}-1}{\bar{\tau}s}\right)\bar{\tau}MA_dAX(s)\\
&\quad +e^{-\tau s}\left(\frac{e^{-\tau s}-1}{\bar{\tau}s}\right)\bar{\tau}MA_dA_dX(s) \qquad (2.2)\\
&= (A+MA_d)X(s) + \delta_1(I-M)A_dX(s) + \delta_2\bar{\tau}MA_dAX(s)\\
&\quad +\delta_1\delta_2\bar{\tau}MA_dA_dX(s) \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

O desenvolvimento das equações (2.1)-(2.3) é apresentado em [ZKT01]. As equações apresentam o sistema com atraso (2.1) sendo descrito por um sistema sem atraso realimentado dinamicamente por uma incerteza limitada em norma (2.3) tal como na equação (1.22), cuja representação gráfica é dada pela Figura 1.2. Esse sistema interconectado é chamado de sistema de comparação. A estabilidade desse sistema implica a estabilidade do sistema original [ZKT01], [GKC03].

O problema de teste de estabilidade do sistema com atraso é transformado em um problema de análise de estabilidade robusta por meio da análise da incerteza estruturada que multiplica um sistema com realização mínima $G(s)$. Tal análise é feita com o Teorema do Pequeno Ganho Escalonado (seção 1.5). Escolhas particulares para as matrizes do sistema

$G(s)$ recuperam (2.3) quando fechada a malha com a incerteza Δ. A análise com o Teorema do Pequeno Ganho é realizada levando em consideração que os blocos $\delta_1\mathbf{I}$, $\delta_2\mathbf{I}$ e $\delta_1\delta_2\mathbf{I}$, que formam Δ, satisfazem $\| \Delta \|_\infty \leq 1$.

O seguinte lema combina os resultados do Teorema do Pequeno Ganho Escalonado e do Lema de Finsler, introduzindo variáveis extras na condição do Teorema do Pequeno Ganho (1.25).

Lema 2.1 *Existem matrizes $P = P' > 0$, $P \in \Re^{n\times n}$, e $Q = diag\{Q_1, \ldots, Q_r\} > 0$, $Q_i \in \Re^{n_i\times n_i}$, $i = 1, \ldots, r$ tais que a (1.25) é satisfeita se e somente se existirem $P = P' > 0$, $Q = diag\{Q_1, \ldots, Q_r\} > 0$, $Q_i \in \Re^{n_i\times n_i}$, $i = 1, \ldots, r$ e $\mathcal{X}$ de dimensão apropriada tais que*

$$\tilde{Q} + \mathcal{X}\tilde{B} + \tilde{B}'\mathcal{X}' < 0 \tag{2.4}$$

com

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & Q & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -Q \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathcal{A} & \mathbf{0} & -\mathcal{B} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{C} & \mathbf{I} & -\mathcal{D} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Prova: Usando o complemento de Schur, pode ser mostrado que (1.25) é equivalente a $\begin{bmatrix} x' & w' \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} x' & w' \end{bmatrix}' < 0$ com

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'P + P\mathcal{A} + \mathcal{C}'Q\mathcal{C} & P\mathcal{B} + \mathcal{C}'Q\mathcal{D} \\ \star & -Q + \mathcal{D}'Q\mathcal{D} \end{bmatrix} < 0$$

satisfazendo

$$(x'\mathcal{A}' + w'\mathcal{B}')Px + x'P(\mathcal{A}x + \mathcal{B}w) + (x'\mathcal{C}' + w'\mathcal{D}')Q(\mathcal{C}x + \mathcal{D}w) - w'Qw < 0$$

Seja a realização mínima para o sistema $G(s)$ dada por

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}w \\ z = \mathcal{C}x + \mathcal{D}w \end{cases} \tag{2.7}$$

definindo $\zeta = \begin{bmatrix} \dot{x}' & x' & z' & w' \end{bmatrix}'$, obtém-se $\tilde{B}\zeta = 0$ com $\tilde{B}$ dado por (2.6) e $\dot{x}'Px + x'P\dot{x} + z'Qz - w'Qw = \zeta\tilde{Q}\zeta$ com $\tilde{Q}$ dada por (2.5). Finalmente, usando resultados do Lema de Finsler (ver seção 1.3), existe $\tilde{Q}$ tal que $\zeta\tilde{Q}\zeta < 0$, $\forall\zeta : \tilde{B}\zeta = 0$ se e somente se existirem $\tilde{Q}$ e $\mathcal{X}$ tais que a equação (2.4) é satisfeita. ■

A condição apresentada no Lema 2.1 é equivalente à condição (1.25) quando $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, e $\mathcal{D}$ são matrizes precisamente conhecidas. Entretanto, as variáveis matriciais introduzidas proporcionam graus de liberdade úteis para a análise de sistemas incertos em domínios politópicos, como apresentado em [LP03], [RP01a], [RP02].

Nas próximas seções será mostrado como as escolhas particulares para $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ usadas em [ZKT01] também podem ser aplicadas nas condições do Lema 2.1. Além disso, serão apresentadas condições LMI dependentes de parâmetro assegurando a estabilidade robusta do sistema (1.1)-(1.2) com matrizes incertas (A, A_d) pertencendo a um domínio politópico.

2.1 Sistemas Precisamente Conhecidos

Três condições suficientes para análise de estabilidade do sistema (1.1)-(1.2) são obtidas com escolhas especiais de $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ aplicadas ao Lema 2.1.

Lema 2.2 *O sistema (1.1)-(1.2) é assintoticamente estável independentemente do valor do atraso se existirem* $P = P' > 0$*,* $Q = Q' > 0$*,* F_i*,* G_i*,* $i = 1, \ldots, 4$ *tais que*

$$\begin{bmatrix} F_1 + F_1' & -F_1 A - G_1 + F_2' + P & G_1 + F_3' & -F_1 A_d + F_4' \\ \star & -F_2 A - A' F_2' - G_2 - G_2' & G_2 - A' F_3' - G_3' & -F_2 A_d - A' F_4' - G_4' \\ \star & \star & Q + G_3 + G_3' & F_3 A_d + G_4' \\ \star & \star & \star & -Q + F_4 A_d + A_d' F_4' \end{bmatrix} < 0 \quad (2.8)$$

Prova: Em [ZKT01], mostra-se que a escolha

$$\mathcal{A} = A, \mathcal{B} = A_d, \mathcal{C} = \mathbf{I}, \mathcal{D} = \mathbf{0} \tag{2.9}$$

substituída em (1.25) resulta em condições suficientes para a estabilidade do sistema (1.1)-(1.2) independentemente do valor do atraso. A mesma escolha aplicada ao Lema 2.1 leva às LMIs do Lema 2.2, com $\tilde{Q}$ descrito por (2.5) e

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_1' & F_2' & F_3' & F_4' \\ G_1' & G_2' & G_3' & G_4' \end{bmatrix}' \tag{2.10}$$

■

Vale destacar que para a escolha $\mathcal{A} = A$, $\mathcal{B} = A_d$, $\mathcal{C} = \mathbf{I}$, $\mathcal{D} = \mathbf{0}$ tem-se $\Delta = \delta_1 \mathbf{I}$.

Lema 2.3 *O sistema (1.1)-(1.2) é assintoticamente estável para* $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ *se existirem* $P = P' > 0$*,* $V = V' > 0$*,* $U = U' > 0$*,* F_i*,* G_i*,* H_i*,* $i = 1, \ldots, 6$ *tais que*

$$\begin{bmatrix} F_1 + F_1' & \Psi_1 & G_1 + F_3' & H_1 + F_4' & -\bar{\tau} F_1 A_d + F_5' & -\bar{\tau} F_1 A_d + F_6' \\ \star & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_5 & \Psi_6 \\ \star & \star & G_3 + G_3' + V & H_3 + G_4' & -\bar{\tau} F_3 A_d + G_5' & -\bar{\tau} F_3 A_d + G_6' \\ \star & \star & \star & H_4 + H_4' + U & -\bar{\tau} F_4 A_d + H_5' & -\bar{\tau} F_4 A_d + H_6' \\ \star & \star & \star & \star & -\bar{\tau} F_5 A_d - \bar{\tau} A_d' F_5' - V & -\bar{\tau} F_5 A_d - \bar{\tau} A_d' F_6' \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\bar{\tau} F_6 A_d - \bar{\tau} A_d' F_6' - U \end{bmatrix} < 0 \quad (2.11)$$

com

$$\Psi_1 = -F_1(A + A_d) - G_1 A - H_1 A_d + F_2' + P$$
$$\Psi_2 = -F_2(A + A_d) - G_2 A - H_3 A_d - (A' + A_d')F_2' - A'G_2' - A_d' H_3'$$
$$\Psi_3 = G_2 - (A' + A_d')F_3' - A'G_3' - A_d' H_3'$$
$$\Psi_4 = H_3 - (A' + A_d')F_4' - A'G_4' - A_d' H_4'$$
$$\Psi_5 = -\bar{\tau} F_2 A_d - (A' + A_d')F_5' - A'G_5' - A_d' H_5'$$
$$\Psi_6 = -\bar{\tau} F_2 A_d - (A' + A_d')F_6' - A'G_6' - A_d' H_6'$$

Prova: Em [ZKT01], mostra-se que a escolha

$$\mathcal{A} = A + A_d, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \bar{\tau} A_d & \bar{\tau} A_d \end{bmatrix}, \mathcal{C} = \begin{bmatrix} A \\ A_d \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \mathbf{0} \tag{2.12}$$

substituída em (1.25) resulta em condições suficientes para a estabilidade do sistema (1.1)-(1.2) para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$. A mesma escolha aplicada ao Lema 2.1 leva às LMIs do Lema 2.3, com $\tilde{Q}$ descrito por (2.5) e

$$Q = \mathrm{diag}\{V, U\}$$
$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_1' & F_2' & F_3' & F_4' & F_5' & F_6' \\ G_1' & G_2' & G_3' & G_4' & G_5' & G_6' \\ H_1' & H_2' & H_3' & H_4' & H_5' & H_6' \end{bmatrix}' \tag{2.13}$$

■

Para a escolha de matrizes do sistema apresentada na prova do Lema 2.3 tem-se

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_1 \delta_2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

.

Lema 2.4 *O sistema (1.1)-(1.2) é assintoticamente estável para* $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ *se existirem* $P = P' > 0$, $V = V' > 0$, $U = U' > 0$, N_i, F_i, G_i, H_i, $i = 1, \ldots, 6$ *tais que*

$$\left[\begin{array}{cccccc} F_1 + F_1' & \Phi_1 & G_1 + F_3' & H_1 + F_4' & -\bar{\tau} F_1 - \bar{\tau} N_1 + F_5' & N_1 A_d - G_1 A_d A_d + F_6' \\ \star & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \Phi_5 & \Phi_6 \\ \star & \star & G_3 + G_3' + V & H_3 + G_4' & -\bar{\tau} F_3 - \bar{\tau} N_3 + G_5' & N_3 A_d - G_3 A_d A_d + G_6' \\ \star & \star & \star & H_4 + H_4' + U & -\bar{\tau} F_4 - \bar{\tau} N_4 + H_5' & N_4 A_d - G_4 A_d A_d + H_6' \\ \star & \star & \star & \star & -\bar{\tau} F_5 - \bar{\tau} N_5 - \bar{\tau} F_5' - \bar{\tau} N_5' - V & N_5 A_d - G_5 A_d A_d - \bar{\tau}(F_6' + N_6') \\ \star & \star & \star & \star & \star & \Phi_7 \end{array}\right] < 0 \tag{2.14}$$

com

$$\Phi_1 = -F_1A - (F_1 + N_1)A_d - G_1A_dA - H_1 + F_2' + P$$

$$\Phi_2 = -F_2A - A'F_2' - (F_2 + N_2)A_d - A_d'(F_2' + N_2') - G_2A_dA - A'A_d'G_2' - H_3 - H_3'$$

$$\Phi_3 = G_2 - A'F_3' - A_d'(N_3' + F_3') - A'A_d'G_3' - H_3'$$

$$\Phi_4 = H_3 - A'F_4' - A_d'(N_4' + G_4') - A'A_d'G_4' - H_4'$$

$$\Phi_5 = -\bar{\tau}F_2 - \bar{\tau}N_2 - A'F_5' - A_d'(N_5' + F_5') - A'A_d'G_5' - H_5'$$

$$\Phi_6 = -N_2A_d - G_2A_dA_d - A'F_6' - A_d'(N_6' + F_6') - A'A_d'G_6' - H_6'$$

$$\Phi_7 = -N_6A_d - G_6A_dA_d + A_d'N_6' - A_d'A_d'G_6' - U$$

Prova: Semelhantemente, em [ZKT01] mostra-se que a escolha

$$\begin{gathered}\mathcal{A} = A + MA_d,\ \mathcal{B} = \left[\begin{array}{cc} \bar{\tau}M & (\mathbf{I} - M)A_d \end{array}\right], \\ \mathcal{C} = \left[\begin{array}{c} A_dA \\ \mathbf{I} \end{array}\right], \mathcal{D} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & A_dA_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]\end{gathered} \tag{2.15}$$

substituída (1.25) resulta em condições suficientes para a estabilidade do sistema (1.1)-(1.2) para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ com M sendo considerada uma variável matricial livre. Como feito em [ZKT01], a introdução das variáveis N_i é possível pois M e N_i são variáveis livres, relacionadas entre si pela expressão $N_i = F_i(M - \mathbf{I})$, $i = 1, \ldots, 6$. ∎

Para a escolha de matrizes do sistema apresentada na prova do Lema 2.4 tem-se

$$\Delta = \left[\begin{array}{cc} \delta_2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_1\mathbf{I} \end{array}\right]$$

2.1.1 Condições sem Variáveis extras e Funcionais de Lyapunov Krasovskii

É importante destacar que as condições obtidas a partir do Teorema do Pequeno Ganho, com as escolhas (2.9), (2.12) e (2.15), apresentadas em [ZKT01], também podem ser obtidas a partir de funcionais de Lyapunov-Krasovskii.

A condição independente do atraso obtida com a escolha (2.9) é obtida em [VFK93] a partir do funcional de Lyapunov-Krasovskii dado por

$$V(x_t) = x(t)'Px(t) + \int_{-\tau}^{0} x(t+\theta)'Qx(t+\theta)d\theta$$

A condição dependente do atraso correspondente à escolha (2.12) foi proposta em [LdS96] e pode ser obtida com o funcional:

$$V(x_t) = x(t)'Px(t) + \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{t+\theta}^{t} x(\beta)'A'Q_1Ax(\beta)d\beta + \int_{t+\theta-\tau}^{t} x(\beta)'A_d'Q_2A_dx(\beta)d\beta\right] d\theta$$

Por sua vez, a condição dependente do atraso correspondente à escolha (2.15), proposta em [Par99], é obtida com o funcional:

$$V(x_t) = x(t)'Px(t) + \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(\beta)'A_d'Q_1A_d\dot{x}(\beta)d\beta d\theta + \int_{t-\tau}^{t} x(\theta)'Q_2x(\theta)d\theta$$

2.2 Análise de Sistemas Incertos

Considera-se que as matrizes A e A_d não são precisamente conhecidas, mas pertencem a um domínio politópico de incerteza $\mathcal{P}$ dado por

$$\mathcal{P} = \Big\{(A, A_d)(\alpha)\ :\ (A, A_d)(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_j(A, A_d)_i\ ; \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1\ \ ;\ \ \alpha_j \geq 0\Big\} \tag{2.16}$$

Nas LMIs seguintes, as matrizes A_j e A_{dj}, ainda que apareçam separadamente, correspondem ao vértice $(A, A_d)_j$ de $\mathcal{P}$, $j = 1, \ldots, N$.

Na literatura, as condições de estabilidade robusta para sistemas com atraso, descritos por (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$, geralmente empregam estabilidade quadrática (P e Q são consideradas matrizes constantes na LMI (1.25) e no Lema 2.1). A estabilidade quadrática pode ser verificada para todo $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ testando as condições (por exemplo (1.25)) nos vértices $(A, A_d)_j$, $j = 1, \ldots, N$ do politopo $\mathcal{P}$. Resultados menos conservadores, que contêm a estabilidade quadrática como um caso particular, podem ser obtidos considerando matrizes dependentes de parâmetro $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ e $Q(\alpha) = Q(\alpha)' > 0$ dadas por

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j P_j;\ \ Q(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j Q_j;\ \ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1;\ \ \alpha_j \geq 0 \tag{2.17}$$

em (1.25).

Empregando a escolha dada por (2.9) para $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, nos vértices de $\mathcal{P}$, a estabilidade robusta do sistema (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ é garantida pelos seguintes lemas:

Lema 2.5 *O sistema (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ dado por (2.16) é robustamente estável independentemente da magnitude do atraso se existirem $P_j = P_j' > 0$ e $Q_j = Q_j'$ tais que*

$$W_j = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j'P_j + P_j\mathcal{A}_j & P_j\mathcal{B}_j & \mathcal{C}_j'Q_j \\ \star & -Q_j & \mathcal{D}_j'Q_j \\ \star & \star & -Q_j \end{bmatrix} < 0; j = 1, \ldots, N \tag{2.18}$$

$$W_{jk} = \begin{bmatrix} \Gamma & P_k\mathcal{B}_j + P_j\mathcal{B}_k & \mathcal{C}_j'Q_k + \mathcal{C}_k'Q_j \\ \star & -Q_j - Q_k & \mathcal{D}_j'Q_k + \mathcal{D}_k'Q_j \\ \star & \star & -Q_j - Q_k \end{bmatrix} < 0;$$

$$j = 1, \ldots, N-1;\ \ k = j+1, \ldots, N \tag{2.19}$$

com $\Gamma = \mathcal{A}_j'P_k + P_k\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_k'P_j + P_j\mathcal{A}_k$ *e*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j = A_j,\ \mathcal{B}_j = A_{dj}, \\ \mathcal{C}_j = \mathbf{I},\ \mathcal{D}_j = \mathbf{0}\ ;\quad j = 1,\dots,N \end{aligned} \tag{2.20}$$

Prova: Com a escolha $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j$ dada por (2.20), $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ e $Q(\alpha) = Q(\alpha)' > 0$ dadas por (2.17), substituindo-se nas condições do Lema 2.5 tem-se

$$\begin{aligned} W(\alpha) = &\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)\mathcal{A}(\alpha) & P(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) & \mathcal{C}(\alpha)'Q(\alpha) \\ \star & -Q(\alpha) & \mathcal{D}(\alpha)'Q(\alpha) \\ \star & \star & -Q(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 W_j + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \alpha_j\alpha_k W_{jk} < 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

o que assegura que o sistema incerto (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ dado por (2.16) é robustamente estável independentemente do atraso. ∎

Usando os graus de liberdade extras proporcionados pelas matrizes $\mathcal{X}$ no Lema 2.1, o seguinte resultado é proposto.

Lema 2.6 *O sistema (1.1)-(1.2) com* $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ *dado por (2.16) é robustamente estável independentemente do atraso se existirem* $P_j = P_j' > 0$, $Q_j = Q_j' > 0$ *e* $\mathcal{X}_j$, $j = 1,\dots,N$ *com dimensões adequadas tais que*

$$\tilde{Q}_j + \mathcal{X}_j\tilde{B}_j + \tilde{B}_j'\mathcal{X}_j' < 0;\ j = 1,\dots,N \tag{2.22}$$

$$\tilde{Q}_j + \tilde{Q}_k + \mathcal{X}_j\tilde{B}_k + \mathcal{X}_k\tilde{B}_j + \tilde{B}_j'\mathcal{X}_k' + \tilde{B}_k'\mathcal{X}_j' < 0; j = 1,\dots,N-1;\ k = j+1,\dots,N \tag{2.23}$$

com $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_j$, $\mathcal{C}_j$, $\mathcal{D}_j$ *dadas em (2.20) e*

$$\tilde{Q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_j & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & Q_j & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -Q_j \end{bmatrix};\ j = 1,\dots,N \tag{2.24}$$

Prova: A prova é bastante semelhante à prova do Lema 2.5. As LMIs do Lema 2.6 asseguram que existem $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ e $Q(\alpha) = Q(\alpha)' > 0$ como em (2.17) e $\mathcal{X}(\alpha)$ dada por

$$\mathcal{X}(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\mathcal{X}_j,\ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geq 0 \tag{2.25}$$

tais que

$$\tilde{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\tilde{B}(\alpha) + \tilde{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' < 0 \tag{2.26}$$

que, de acordo com o Lema 2.1, garante que a LMI (2.21) também é satisfeita. ∎

Com a escolha dada por (2.12) para $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, nos vértices de $\mathcal{P}$, a estabilidade robusta do sistema (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ é garantida pelos lemas abaixo.

Lema 2.7 *O sistema (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ dado por (2.16) é robustamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ se existirem $P_j = P_j' > 0$ e*

$$Q_j = Q_j' = diag\{V_j, U_j\} > 0 \tag{2.27}$$

tais que

$$W_j = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j' P_j + P_j \mathcal{A}_j & P_j \mathcal{B}_j & \mathcal{C}_j' Q_j \\ \star & -Q_j & \mathcal{D}_j' Q_j \\ \star & \star & -Q_j \end{bmatrix} < 0; j = 1, \ldots, N \tag{2.28}$$

$$W_{jk} = \begin{bmatrix} \Omega & P_k \mathcal{B}_j + P_j \mathcal{B}_k & \mathcal{C}_j' Q_k + \mathcal{C}_k' Q_j \\ \star & -Q_j - Q_k & \mathcal{D}_j' Q_k + \mathcal{D}_k' Q_j \\ \star & \star & -Q_j - Q_k \end{bmatrix} < 0; j = 1, \ldots, N-1;\ k = j+1, \ldots, N \tag{2.29}$$

com $\Omega = \mathcal{A}_j' P_k + P_k \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_k' P_j + P_j \mathcal{A}_k$ e

$$\mathcal{A}_j = A_j + A_{dj},\ \mathcal{B}_j = \begin{bmatrix} \bar{\tau} A_{dj} & \bar{\tau} A_{dj} \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{C}_j = \begin{bmatrix} A_j \\ A_{dj} \end{bmatrix},\ \mathcal{D}_j = \mathbf{0}\ ;\quad j = 1, \ldots, N \tag{2.30}$$

Prova: Com a escolha $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}_j$ dada por (2.30), $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ e $Q(\alpha) = Q(\alpha)' > 0$ dadas por (2.17), substituindo-se nas condições do Lema 2.7 tem-se (2.21), o que assegura que o sistema incerto (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ dado por (2.16) é robustamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$. ∎

Resultados menos conservadores são obtidos usando as variáveis matriciais extras introduzidas pelo Lema 2.1.

Lema 2.8 *O sistema (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ dado por (2.16) é robustamente estável para $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ se existirem $P_j = P_j' > 0$, $Q_j = Q_j' > 0$ dadas por (2.27) e $\mathcal{X}_j$, $j = 1, \ldots, N$ com dimensões adequadas tais que*

$$\tilde{Q}_j + \mathcal{X}_j \tilde{B}_j + \tilde{B}_j' \mathcal{X}_j' < 0;\ j = 1, \ldots, N \tag{2.31}$$

$$\tilde{Q}_j + \tilde{Q}_k + \mathcal{X}_j \tilde{B}_k + \mathcal{X}_k \tilde{B}_j + \tilde{B}_j' \mathcal{X}_k' + \tilde{B}_k' \mathcal{X}_j' < 0\ ;\ j = 1, \ldots, N-1;\ k = j+1, \ldots, N \tag{2.32}$$

com $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_j$, $\mathcal{C}_j$, $\mathcal{D}_j$ dadas em (2.30) e

$$\tilde{Q}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_j & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & Q_j & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -Q_j \end{bmatrix};\ j = 1, \ldots, N \tag{2.33}$$

Prova: A prova é bastante semelhante à prova do Lema 2.7. As LMIs do Lema 2.8 asseguram que existem $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ e $Q(\alpha) = Q(\alpha)' > 0$ como em (2.17) e $\mathcal{X}(\alpha)$ dada por (2.25) tais que (2.26) é válida, o que, de acordo com o Lema 2.1, garante que (2.21) também é verificada. ∎

É importante enfatizar que, embora as LMIs dependentes de parâmetro (2.21) e (2.26) sejam equivalentes, as variáveis matriciais extras $\mathcal{X}_j$ fazem com que as condições suficientes do Lema 2.8 assegurando (2.26) sejam menos conservadoras que as condições suficientes do Lema 2.7, que asseguram que (2.21) é satisfeita.

Como feito para sistemas precisamente conhecidos, a escolha de $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D})$ dada por (2.15) nos vértices do politopo $\mathcal{P}$ resulta em condições de estabilidade robusta dependentes do atraso para o sistema (1.1)-(1.2). Como existem produtos de matrizes tais como VA_dA e VA_dA_d, as LMIs devem considerar três índices: j, k e ℓ.

Lema 2.9 *O sistema (1.1)-(1.2) com $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ dado por (2.16) é robustamente estável $0 \le \tau \le \bar{\tau}$ se existirem $P_j = P_j' > 0$, $V_j = V_j' > 0$, $U_j = U_j' > 0$ e $\mathcal{N}_j$, $j = 1, \ldots, N$ com dimensões adequadas tais que*

$$\begin{bmatrix} A_j'P_j + A_{dj}'(\mathcal{N}_j + P_j) + P_jA_j + (\mathcal{N}_j + P_j)A_{dj} & \bar{\tau}(\mathcal{N}_j + P_j) & -\mathcal{N}_jA_{dj} & A_j'A_{dj}'V_j & U_j \\ \star & -V_j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -U_j & A_{dj}'A_{dj}'V_j & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -V_j & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -U_j \end{bmatrix} < 0;\ j = 1, \ldots, N \quad (2.34)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & 2\bar{\tau}(\mathcal{N}_j + P_j) + \bar{\tau}(\mathcal{N}_k + P_k) & \Gamma_2 & A_k'A_{dj}'V_j + A_j'A_{dk}'V_j + A_j'A_{dj}'V_k & 2U_j + U_k \\ \star & -2V_j - V_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -2U_j - U_k & A_{dk}'A_{dj}'V_j + A_{dj}'A_{dk}'V_j + A_{dj}'A_{dj}'V_k & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2V_j - V_k & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -2U_j - U_k \end{bmatrix} < 0;$$

$$j = 1, \ldots, N;\ k = 1, \ldots, N; k \neq j \quad (2.35)$$

com

$$\Gamma_1 = A_j'P_j + A_{dj}'(\mathcal{N}_j + P_j) + P_jA_j + (\mathcal{N}_j' + P_j)A_{dj} + A_j'P_k + A_{dj}'(\mathcal{N}_k + P_k)$$
$$+P_jA_k + (\mathcal{N}_j' + P_j)A_{dk} + A_k'P_j + A_{dk}'(\mathcal{N}_j + P_j) + P_kA_j + (\mathcal{N}_j' + P_j)A_{dj}$$
$$\Gamma_2 = -\mathcal{N}_jA_{dj} - \mathcal{N}_kA_{dj} - \mathcal{N}_jA_{dk}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & 2(\bar{\tau}(\mathcal{N}_j+P_j)+\bar{\tau}(\mathcal{N}_k+P_k)+\bar{\tau}(\mathcal{N}_\ell+P_\ell)) & \Xi_2 & \Xi_3 & 2(U_j+U_k+U_\ell) \\ \star & -2(V_j+V_k+V_\ell) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -2(U_j+U_k+U_\ell) & \Xi_4 & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2(V_j+V_k+V_\ell) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -2(U_j+U_k+U_\ell) \end{bmatrix} < 0;$$

$$j=1,\ldots,N-2;\ k=1,\ldots,N-1;\ \ell=1,\ldots,N \quad (2.36)$$

com

$$\Xi_1 = A_j'P_k + A_k'P_j + A_j'P_\ell + A_\ell'P_j + A_k'P_\ell + A_\ell'P_k + A_{dj}'(\mathcal{N}_k+P_k) + A_{dk}'(\mathcal{N}_j+P_j)$$
$$+A_{dj}'(\mathcal{N}_\ell+P_\ell) + A_{d\ell}'(\mathcal{N}_j+P_j) + A_{dk}'(\mathcal{N}_\ell+P_\ell) + A_{d\ell}'(\mathcal{N}_k+P_k) + P_jA_k + P_kA_j + P_jA_\ell$$
$$+P_\ell A_j + P_kA_\ell + P_\ell A_k + (\mathcal{N}_j'+P_j)A_{dk} + (\mathcal{N}_k'+P_k)A_{dj} + (\mathcal{N}_j'+P_j)A_{d\ell} + (\mathcal{N}_\ell'+P_\ell)A_{dj}$$
$$+(\mathcal{N}_k'+P_k)A_{d\ell} + (\mathcal{N}_\ell'+P_\ell)A_{dk}$$
$$\Xi_2 = -\mathcal{N}_jA_{dk} - \mathcal{N}_kA_{dj} - \mathcal{N}_jA_{d\ell} - \mathcal{N}_\ell A_{dj} - \mathcal{N}_kA_{d\ell} - \mathcal{N}_\ell A_{dk}$$
$$\Xi_3 = A_k'A_{dj}'V_\ell + A_k'A_{d\ell}'V_j + A_j'A_{dk}'V_\ell + A_\ell'A_{dk}'V_j + A_j'A_{d\ell}'V_k + A_\ell'A_{dj}'V_k$$
$$\Xi_4 = A_{dk}'A_{dj}'V_\ell + A_{dk}'A_{d\ell}'V_j + A_{dj}'A_{dk}'V_\ell + A_{d\ell}'A_{dk}'V_j + A_{dj}'A_{d\ell}'V_k + A_{d\ell}'A_{dj}'V_k$$

Prova: A prova é semelhante às provas dos lemas 2.7 e 2.8. As LMIs (2.34), (2.35) e (2.36) são suficientes para garantir que $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$, $Q(\alpha) = Q(\alpha)' > 0$ dadas por (2.17) com Q_j definida em (2.27) verifiquem as condições do Teorema do Pequeno Ganho para todo $(A, A_d) \in \mathcal{P}$. ■

Lema 2.10 *O sistema (1.1)-(1.2) com* $(A, A_d) \in \mathcal{P}$ *dado por (2.16) é robustamente estável para* $0 \le \tau \le \bar{\tau}$ *se existirem* $P_j = P_j' > 0$, $V_j = V_j' > 0$, $U_j = U_j' > 0$ *e* $\mathcal{N}_{1j}$, G_{1j}, H_{1j}, $\ldots$, $\mathcal{N}_{6j}$, G_{6j}, H_{6j}, $j = 1, \ldots, N$ *de dimensões adequadas tais que*

$$\left[\begin{array}{cccccc} F_{1j}+F'_{1j} & \Lambda_{12j} & G_{1j}+F'_{3j} & H_{1j}+F'_{4j} & -\bar{\tau}F_{1j}-\bar{\tau}N_{1j}+F'_{5j} & N_{1j}A_{dj}-G_{1j}A_{dj}A_{dj}+F'_{6j} \\ \star & \Lambda_{22j} & \Lambda_{23j} & \Lambda_{24j} & \Lambda_{25j} & \Lambda_{26j} \\ \star & \star & G_{3j}+G'_{3j}+V_j & H_{3j}+G'_{4j} & -\bar{\tau}F_{3j}-\bar{\tau}N_{3j}+G'_{5j} & N_{3j}A_{dj}-G_{3j}A_{dj}A_{dj}+G'_{6j} \\ \star & \star & \star & \Lambda_{44j} & -\bar{\tau}F_{4j}-\bar{\tau}N_{4j}+H'_{5j} & N_{4j}A_{dj}-G_{4j}A_{dj}A_{dj}+H'_{6j} \\ \star & \star & \star & \star & \Lambda_{55j} & \Lambda_{56j} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \Lambda_{66j} \end{array}\right] < 0;$$

$$j = 1, \ldots, N \quad (2.37)$$

com

$$\Lambda_{12j} = -F_{1j}A_j - (F_{1j}+N_{1j})A_{dj} - G_{1j}A_{dj}A_j - H_{1j} + F'_{2j}$$

$$\Lambda_{22j} = -F_{2j}A_j - A'_jF'_{2j} - (F_{2j}+N_{2j})A_{dj} - A'_{dj}(F'_{2j}+N'_{2j}) - G_{2j}A_{dj}A_j - A'_jA'_{dj}G'_{2j} - H_{3j} - H'_{3j}$$

$$\Lambda_{23j} = G_{2j} - A'_jF'_{3j} - A'_{dj}(N'_{3j}+F'_{3j}) - A'_jA'_{dj}G'_{3j} - H'_{3j}$$

$$\Lambda_{24j} = H_{3j} - A'_jF'_{4j} - A'_{dj}(N'_{4j}+G'_{4j}) - A'_jA'_{dj}G'_{4j} - H'_{4j}$$

$$\Lambda_{25j} = -\bar{\tau}F_{2j} - \bar{\tau}N_{2j} - A'_jF'_{5j} - A'_{dj}(N'_{5j}+F'_{5j}) - A'_jA'_{dj}G'_{5j} - H'_{5j}$$

$$\Lambda_{26j} = -N_{2j}A_{dj} - G_{2j}A_{dj}A_{dj} - A'_jF'_{6j} - A'_{dj}(N'_{6j}+F'_{6j}) - A'_jA'_{dj}G'_{6j} - H'_{6j}$$

$$\Lambda_{44j} = H_{4j} + H'_{4j} + U_j$$

$$\Lambda_{55j} = -\bar{\tau}F_{5j} - \bar{\tau}N_{5j} - \bar{\tau}F'_{5j} - \bar{\tau}N'_{5j} - V_j$$

$$\Lambda_{56j} = N_{5j}A_{dj} - G_{5j}A_{dj}A_{dj} - \bar{\tau}(F'_{6j}+N'_{6j})$$

$$\Lambda_{66j} = -N_{6j}A_{dj} - G_{6j}A_{dj}A_{dj} + A'_{dj}N'_{6j} - A'_{dj}A'_{dj}G'_{6j} - U_j$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11jk} & \cdots & \Lambda_{16jk} \\ & \ddots & \\ \star & & \Lambda_{66jk} \end{bmatrix} < 0 \; ; \quad j = 1, \ldots, N, \;\; k = 1, \ldots, N, \;\; j \neq k \qquad (2.38)$$

com

$$\Lambda_{11jk} = 2(F_{1j}+F'_{1j}) + F_{1k} + F'_{1k}$$

$$\Lambda_{12jk} = -F_{1j}A_j - F_{1j}A_k - F_{1k}A_j - (F_{1j}+N_{1j})A_{dj} - (F_{1j}+N_{1j})A_{dk} - (F_{1k}+N_{1k})A_{dj}$$
$$-G_{1j}A_{dj}A_k - G_{1j}A_{dk}A_j - G_{1k}A_{dj}A_j - 2H_{1j} - H_{1k} + 2F_{2j} + F'_{2k} + 2P_j + P_k$$

$$\Lambda_{13jk} = 2(G_{1j}+F'_{3j}) + G_{1k} + F'_{3k} \; ; \quad \Lambda_{14jk} = 2(H_{1j}+F'_{4j}) + H_{1k} + F'_{4k}$$

$$\Lambda_{15jk} = 2(-\bar{\tau}F_{1j} - \bar{\tau}N_{1j} + F'_{5j}) - \bar{\tau}F_{1k} - \bar{\tau}N_{1k} + F'_{5k}$$

$$\Lambda_{16jk} = N_{1j}A_{dj} + N_{1j}A_{dk} + N_{1k}A_{dj} - G_{1j}A_{dj}A_{dk} - G_{1j}A_{dk}A_{dj} - G_{1k}A_{dj}A_{dj} + 2F'_{6j} + F'_{6k}$$

$$\Lambda_{22jk} = -F_{2j}A_j - F_{2j}A_k - F_{2k}A_j - A'_jF'_{2j} - A'_jF'_{2k} - A'_kF'_{2j} - (F_{2j} + N_{2j})A_{dj}$$

$$-(F_{2j} + N_{2j})A_{dk} - (F_{2k} + N_{2k})A_{dj} - A'_{dj}(F'_{2j} + N'_{2j}) - A'_{dj}(F'_{2k} + N'_{2k})$$

$$-A'_{dk}(F'_{2j} + N'_{2j}) - G_{2j}A_{dj}A_k - G_{2j}A_{dk}A_j - G_{2k}A_{dk}A_j - A'_jA'_{dj}G'_{2k} - A'_jA'_{dk}G'_{2j}$$

$$-A'_kA'_{dj}G'_{2j} - 2H_{3j} - H_{3k} - 2H'_{3j} - H'_{3k}$$

$$\Lambda_{23jk} = 2G_{2j} + G_{2k} - A'_jF'_{3j} - A'_jF'_{3k} - A'_kF'_{3j} - A'_{dj}(N'_{3j} + F'_{3j}) - A'_{dj}(N'_{3k} + F'_{3k})$$

$$-A'_{dk}(N'_{3j} + F'_{3j}) - A'_jA'_{dj}G'_{3k} - A'_jA'_{dk}G'_{3j} - A'_kA'_{dj}G'_{3j} - 2H'_{3j} - H'_{3k}$$

$$\Lambda_{24jk} = 2H_{3j} + H_{3k} - A'_jF'_{4j} - A'_jF'_{4k} - A'_kF'_{4j} - A'_{dj}(N'_{4j} + G'_{4j}) - A'_{dj}(N'_{4k} + G'_{4k})$$

$$-A'_{dk}(N'_{4j} + G'_{4j}) - A'_jA'_{dj}G'_{4k} - A'_jA'_{dk}G'_{4j} - A'_kA'_{dj}G'_{4j} - 2H'_{4j} - H'_{4k}$$

$$\Lambda_{25jk} = -2\bar{\tau}F_{2j} - \bar{\tau}F_{2k} - 2\bar{\tau}N_{2j} - \bar{\tau}N_{2k} - A'_jF'_{5j} - A'_jF'_{5k} - A'_kF'_{5j} - A'_{dj}(N'_{5j} + F'_{5j})$$

$$-A'_{dj}(N'_{5k} + F'_{5k})x - A'_{dk}(N'_{5j} + F'_{5j}) - A'_jA'_{dj}G'_{5k} - A'_jA'_{dk}G'_{5j} - A'_kA'_{dj}G'_{5j} - 2H'_{5j} - H'_{5j}$$

$$\Lambda_{26jk} = -N_{2j}A_{dj} - N_{2j}A_{dk} - N_{2k}A_{dj} - G_{2j}A_{dj}A_{dk} - G_{2j}A_{dk}A_{dj} - G_{2k}A_{dj}A_{dj}$$

$$-A'_jF'_{6j} - A'_jF'_{6k} - A'_kF'_{6j} - A'_{dj}(N'_{6j} + F'_{6j}) - A'_{dj}(N'_{6k} + F'_{6k}) - A'_{dk}(N'_{6j} + F'_{6j})$$

$$-A'_jA'_{dj}G'_{6k} - A'_jA'_{dk}G'_{6j} - A'_kA'_{dj}G'_{6j} - 2H'_{6j} - H'_{6j}$$

$$\Lambda_{33jk} = 2G_{3j} + G_{3k} + 2G'_{3j} + G'_{3k} + 2V_j + V_k$$

$$\Lambda_{34jk} = 2H_{3j} + H_{3k} + 2G'_{4j} + G'_{4k}$$

$$\Lambda_{35jk} = -2\bar{\tau}F_{3j} - \bar{\tau}F_{3k} - 2\bar{\tau}N_{3j} - \bar{\tau}N_{3k} + 2G'_{5j} + G'_{5k}$$

$$\Lambda_{36jk} = N_{3j}A_{dj} + N_{3j}A_{dk} + N_{3k}A_{dj} - G_{3j}A_{dj}A_{dk} - G_{3j}A_{dk}A_{dj} - G_{3k}A_{dj}A_{dj} + 2G'_{6j} + G'_{6k}$$

$$\Lambda_{44jk} = 2H_{4j} + H_{4k} + 2H'_{4j} + H'_{4k} + 2U_j + U_k$$

$$\Lambda_{45j} = -2\bar{\tau}F_{4j} - \bar{\tau}F_{4k} - 2\bar{\tau}N_{4j} - \bar{\tau}N_{4k} + 2H'_{5j} + H'_{5k}$$

$$\Lambda_{46jk} = N_{3j}A_{dj} + N_{3j}A_{dk} + N_{3k}A_{dj} - G_{3j}A_{dj}A_{dk} - G_{3j}A_{dk}A_{dj} - G_{3k}A_{dj}A_{dj} + 2G'_{6j} + G'_{6k}$$

$$\Lambda_{55j} = -2\bar{\tau}F_{5j} - \bar{\tau}F_{5k} - 2\bar{\tau}N_{5j} - \bar{\tau}N_{5k} - 2\bar{\tau}F'_{5j} - \bar{\tau}F'_{5k} - 2\bar{\tau}N'_{5j} - \bar{\tau}N'_{5k} - 2V_k - V_j$$

$$\Lambda_{56j} = N_{5j}A_{dj} + N_{5j}A_{dk} + N_{5k}A_{dj} - G_{5j}A_{dj}A_{dk} - G_{5j}A_{dk}A_{dj} - G_{5k}A_{dj}A_{dj}$$

$$-2\bar{\tau}(F'_{6j} + N'_{6j}) - \bar{\tau}(F'_{6k} + N'_{6k})$$

$$\Lambda_{66j} = -N_{6j}A_{dj} - N_{6j}A_{dk} - N_{6k}A_{dj} - G_{6j}A_{dj}A_{dk} - G_{6j}A_{dk}A_{dj} - G_{6k}A_{dj}A_{dj} + A'_{dj}N'_{6j}$$

$$+A'_{dj}N'_{6k} + A'_{dk}N'_{6j} - A'_{dk}A'_{dj}G'_{6j} - A'_{dj}A'_{dk}G'_{6j} - A'_{dk}A'_{dj}G'_{6j} - 2U_j - U_k$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11jk\ell} & \cdots & \Lambda_{16jk\ell} \\ & \ddots & \\ \star & & \Lambda_{66jk\ell} \end{bmatrix} < 0 \ ; \quad j = 1, \ldots, N-2, \ k = 1, \ldots, N-1, \ \ell = 1, \ldots, N \tag{2.39}$$

com

$$\Lambda_{11jk\ell} = 2(F_{1j} + F_{1k} + F_{1\ell}) + 2(F'_{1j} + F'_{1k} + F'_{1\ell});$$

$$\Lambda_{12jk\ell} = -F_{1j}A_k - F_{1j}A_\ell - F_{1k}A_j - F_{1k}A_\ell - F_{1\ell}A_j - F_{1\ell}A_k - (F_{1j} + N_{1j})A_{dk}$$
$$-(F_{1j} + N_{1j})A_{d\ell} - (F_{1k} + N_{1k})A_{dj} - (F_{1k} + N_{1k})A_{d\ell} - (F_{1\ell} + N_{1\ell})A_{dj} - (F_{1\ell} + N_{1\ell})A_{dk}$$
$$-G_{1j}A_{dk}A_\ell - G_{1j}A_{d\ell}A_k - G_{1k}A_{dj}A_\ell - G_{1k}A_{d\ell}A_j - G_{1\ell}A_{dj}A_k - G_{1\ell}A_{dk}A_j$$
$$-2H_{1j} - 2H_{1k} - 2H_{1\ell} + 2F'_{2j} + 2F'_{2j} + 2F'_{2\ell} + 2P_j + 2P_k + 2P_\ell$$

$$\Lambda_{13jk\ell} = 2G_{1j} + 2G_{1k} + 2G_{1\ell} + 2F'_{3j} + 2F'_{3k} + 2F'_{3\ell}$$

$$\Lambda_{14jk\ell} = 2H_{1j} + 2F'_{4j} + 2H_{1k} + 2F'_{4k} + 2H_{1\ell} + 2F'_{4\ell}$$

$$\Lambda_{15jk\ell} = -2\bar{\tau}F_{1j} - 2\bar{\tau}N_{1j} + 2F'_{5j} - 2\bar{\tau}F_{1k} - 2\bar{\tau}N_{1k} + 2F'_{5k} - 2\bar{\tau}F_{1\ell} - 2\bar{\tau}N_{1\ell} + 2F'_{5\ell}$$

$$\Lambda_{16jk\ell} = N_{1j}A_{dk} + N_{1j}A_{d\ell} + N_{1k}A_{dj} + N_{1k}A_{d\ell} + N_{1\ell}A_{dj} + N_{1\ell}A_{dk} - G_{1j}A_{dk}A_{d\ell}$$
$$-G_{1j}A_{d\ell}A_{dk} - G_{1k}A_{dj}A_{d\ell} - G_{1k}A_{d\ell}A_{dj} - G_{1\ell}A_{dj}A_{dk} - G_{1\ell}A_{dk}A_{dj} + 2F'_{6j} + 2F'_{6k} + 2F'_{6\ell}$$

$$\Lambda_{22jk\ell} = -F_{2j}A_k - F_{2j}A_\ell - F_{2k}A_j - F_{2k}A_\ell - F_{2\ell}A_j - F_{2\ell}A_k - A'_jF'_{2k} - A'_jF'_{2\ell} - A'_kF'_{2j}$$
$$-A'_kF'_{2\ell} - A'_\ell F'_{2j} - A'_\ell F'_{2k} - (F_{2j} + N_{2j})A_{dk} - (F_{2k} + N_{2k})A_{dj} - (F_{2j} + N_{2j})A_{d\ell}$$
$$-(F_{2\ell} + N_{2\ell})A_{dj} - (F_{2k} + N_{2k})A_{d\ell} - (F_{2\ell} + N_{2\ell})A_{dk} - A'_{dj}(F'_{2k} + N'_{2k}) - A'_{dj}(F'_{2\ell} + N'_{2\ell})$$
$$-A'_{dk}(F'_{2j} + N'_{2j}) - A'_{dj}(F'_{2\ell} + N'_{2\ell}) - A'_{dk}(F'_{2\ell} + N'_{2\ell}) - A'_{d\ell}(F'_{2k} + N'_{2k}) - G_{2j}A_{dk}A_\ell$$
$$-G_{2j}A_{d\ell}A_k - G_{2k}A_{dj}A_\ell - G_{2k}A_{d\ell}A_j - G_{2\ell}A_{dj}A_k - G_{2\ell}A_{dj}A_k - A'_jA'_{dk}G'_{2\ell} - A'_jA'_{d\ell}G'_{2k}$$
$$-A'_kA'_{dj}G'_{2\ell} - A'_kA'_{d\ell}G'_{2j} - A'_\ell A'_{dj}G'_{2k} - A'_\ell A'_{dk}G'_{2j} - 2H_{3j} - 2H_{3k} - 2H_{3\ell} - 2H'_{3j} - 2H'_{3k} - 2H'_{3\ell}$$

$$\Lambda_{23jk\ell} = 2G_{2j} + 2G_{2k} + 2G_{2\ell} - A'_jF'_{3k} - A'_kF'_{3j} - A'_jF'_{3\ell} - A'_\ell F'_{3j} - A'_kF'_{3\ell} - A'_\ell F'_{3k}$$
$$-A'_{dj}(N'_{3j} + F'_{3j}) - A'_{dj}(N'_{3k} + F'_{3k}) - A'_{dk}(N'_{3j} + F'_{3j}) - A'_{dj}(N'_{3\ell} + F'_{3\ell})$$
$$-A'_{d\ell}(N'_{3j} + F'_{3j}) - A'_{dk}(N'_{3\ell} + F'_{3\ell}) - A'_{d\ell}(N'_{3k} + F'_{3k}) - A'_jA'_{dk}G'_{3\ell}$$
$$-A'_jA'_{d\ell}G'_{3k} - A'_kA'_{dj}G'_{3\ell} - A'_kA'_{d\ell}G'_{3j} - A'_\ell A'_{dj}G'_{3k} - A'_\ell A'_{dk}G'_{3j} - 2H'_{3j} - 2H'_{3k} - 2H'_{3\ell}$$

$$\Lambda_{24jk\ell} = H_{3j} - A'_jF'_{4j} - A'_{dj}(N'_{4j} + G'_{4j}) - A'_jA'_{dj}G'_{4j} - H'_{4j} + H_{3k} - A'_kF'_{4k}$$
$$-A'_{dk}(N'_{4k} + G'_{4k}) - A'_kA'_{dk}G'_{4k} - H'_{4k} + H_{3\ell} - A'_\ell F'_{4\ell} - A'_{d\ell}(N'_{4\ell} + G'_{4\ell}) - A'_\ell A'_{d\ell}G'_{4\ell} - H'_{4\ell}$$

$$\Lambda_{25jk\ell} = -2\bar{\tau}F_{2j} - 2\bar{\tau}F_{2k} - 2\bar{\tau}F_{2\ell} - 2\bar{\tau}N_{2j} - 2\bar{\tau}N_{2k} - 2\bar{\tau}N_{2\ell} - A'_jF'_{5k} - A'_kF'_{5j} - A'_jF'_{5\ell}$$
$$-A'_\ell F'_{5j} - A'_kF'_{5\ell} - A'_\ell F'_{5k} - A'_{dj}(N'_{5k} + F'_{5k}) - A'_{dk}(N'_{5j} + F'_{5j}) - A'_{dj}(N'_{5\ell} + F'_{5\ell})$$
$$-A'_{d\ell}(N'_{5j} + F'_{5j}) - A'_{dk}(N'_{5\ell} + F'_{5\ell}) - A'_{d\ell}(N'_{5k} + F'_{5kj}) - A'_jA'_{dk}G'_{5\ell} - A'_jA'_{d\ell}G'_{5k}$$

$$-A'_k A'_{dj} G'_{5\ell} - A'_k A'_{d\ell} G'_{5j} - A'_\ell A'_{dj} G'_{5k} - A'_\ell A'_{dk} G'_{5j} - 2H'_{5j} - 2H'_{5k} - 2H'_{5\ell}$$

$$\Lambda_{26jk\ell} = -N_{2j}A_{dk} - N_{2k}A_{dj} - N_{2j}A_{d\ell} - N_{2\ell}A_{dj} - N_{2k}A_{d\ell} - N_{2\ell}A_{dk} - G_{2j}A_{dk}A_{d\ell}$$

$$-G_{2j}A_{d\ell}A_{dk} - G_{2k}A_{dj}A_{d\ell} - G_{2k}A_{d\ell}A_{dj} - G_{2\ell}A_{dj}A_{dk} - G_{2\ell}A_{dk}A_{dj} - A'_j F'_{6k}$$

$$-A'_k F'_{6j} - A'_j F'_{6\ell} - A'_\ell F'_{6j} - A'_k F'_{6\ell} - A'_\ell F'_{6k} - A'_{dj}(N'_{6k} + F'_{6k}) - A'_{dk}(N'_{6j} + F'_{6j})$$

$$-A'_{dj}(N'_{6\ell} + F'_{6\ell}) - A'_{d\ell}(N'_{6j} + F'_{6j}) - A'_{dk}(N'_{6\ell} + F'_{6\ell}) - A'_{d\ell}(N'_{6k} + F'_{6k}) - A'_j A'_{dk} G'_{6\ell}$$

$$-A'_j A'_{d\ell} G'_{6k} - A'_k A'_{dj} G'_{6\ell} - A'_k A'_{d\ell} G'_{6j} - A'_\ell A'_{dj} G'_{6k} - A'_\ell A'_{dk} G'_{6j} - 2H'_{6j} - 2H'_{6k} - 2H'_{6\ell}$$

$$\Lambda_{33jk\ell} = 2G_{3j} + 2G_{3k} + 2G_{3\ell} + 2G'_{3j} + 2G'_{3k} + 2G'_{3\ell} + 2V_j + 2V_k + 2V_\ell$$

$$\Lambda_{34jk\ell} = 2H_{3j} + 2H_{3k} + 2H_{3\ell} + 2G'_{4j} + 2G'_{4k} + 2G'_{4\ell}$$

$$\Lambda_{35jk\ell} = -2\bar{\tau}F_{3j} - 2\bar{\tau}F_{3k} - 2\bar{\tau}F_{3\ell} - \bar{\tau}N_{3j} - \bar{\tau}N_{3k} - \bar{\tau}N_{3\ell} + 2G'_{5j} + 2G'_{5k} + 2G'_{5\ell}$$

$$\Lambda_{36jk\ell} = N_{3j}A_{dk} + N_{3k}A_{dj} + N_{3j}A_{d\ell} + N_{3\ell}A_{dj} + N_{3k}A_{d\ell} + N_{3\ell}A_{dk} - G_{3j}A_{dk}A_{d\ell}$$

$$-G_{3j}A_{d\ell}A_{dk} - G_{3k}A_{dj}A_{d\ell} - G_{3k}A_{d\ell}A_{dj} - G_{3\ell}A_{dj}A_{dk}$$

$$-G_{3\ell}A_{dk}A_{dj} + 2G'_{6j} + 2G'_{6k} + 2G'_{6\ell}$$

$$\Lambda_{44jk\ell} = 2H_{4j} + 2H_{4k} + 2H_{4\ell} + 2H'_{4j} + 2H'_{4k} + 2H'_{4\ell} + 2U_j + 2U_k + 2U_\ell$$

$$\Lambda_{45jk\ell} = -2\bar{\tau}F_{4j} - 2\bar{\tau}F_{4k} - 2\bar{\tau}F_{4\ell} - 2\bar{\tau}N_{4j} - 2\bar{\tau}N_{4k} - 2\bar{\tau}N_{4\ell} + 2H'_{5j} + 2H'_{5k} + 2H'_{5\ell}$$

$$\Lambda_{46jk\ell} = N_{4j}A_{dk} + N_{4k}A_{dj} + N_{4j}A_{d\ell} + N_{4\ell}A_{dj} + N_{4k}A_{d\ell} + N_{4\ell}A_{dk} - G_{4j}A_{dk}A_{d\ell}$$

$$-G_{4j}A_{d\ell}A_{dk} - G_{4k}A_{dj}A_{d\ell} - G_{4k}A_{d\ell}A_{dj} - G_{4\ell}A_{dj}A_{dk} - G_{4\ell}A_{dk}A_{dj} + 2H'_{6j} + 2H'_{6k} + 2H'_{6\ell}$$

$$\Lambda_{55jk\ell} = -2\bar{\tau}F_{5j} - 2\bar{\tau}F_{5k} - 2\bar{\tau}F_{5\ell} - 2\bar{\tau}N_{5j} - 2\bar{\tau}N_{5k} - 2\bar{\tau}N_{5\ell} - 2\bar{\tau}F'_{5j} - 2\bar{\tau}F'_{5k} - 2\bar{\tau}F'_{5\ell}$$

$$-2\bar{\tau}N'_{5j} - 2\bar{\tau}N'_{5k} - 2\bar{\tau}N'_{5\ell} - 2V_j - 2V_k - 2V_\ell$$

$$\Lambda_{56jk\ell} = N_{5j}A_{dk} + N_{5k}A_{dj} + N_{5j}A_{d\ell} + N_{5\ell}A_{dj} + N_{5k}A_{d\ell} + N_{5\ell}A_{dk} - G_{5j}A_{dk}A_{d\ell}$$

$$-G_{5j}A_{d\ell}A_{dk} - G_{5k}A_{dj}A_{d\ell} - G_{5k}A_{d\ell}A_{dj} - G_{5\ell}A_{dj}A_{dk} - G_{5\ell}A_{dk}A_{dj}$$

$$-2\bar{\tau}(F'_{6j} + N'_{6j}) - 2\bar{\tau}(F'_{6k} + N'_{6k}) - 2\bar{\tau}(F'_{6\ell} + N'_{6\ell})$$

$$\Lambda_{66jk\ell} = -N_{6j}A_{dk} - N_{6k}A_{dj} - N_{6j}A_{d\ell} - N_{6\ell}A_{dj} - N_{6k}A_{d\ell} - N_{6\ell}A_{dk} - G_{6j}A_{dk}A_{d\ell}$$

$$-G_{6j}A_{d\ell}A_{dk} - G_{6k}A_{dj}A_{d\ell} - G_{6k}A_{d\ell}A_{dj} - G_{6\ell}A_{dj}A_{dk} - G_{6\ell}A_{dk}A_{dj} + A'_{dj}N'_{6k}$$

$$+A'_{dk}N'_{6j} + A'_{dj}N'_{6\ell} + A'_{d\ell}N'_{6j} + A'_{dk}N'_{6\ell} + A'_{d\ell}N'_{6k} - A'_{dj}A'_{dk}G'_{6\ell} - A'_{dj}A'_{d\ell}G'_{6k}$$

$$-A'_{dk}A'_{dj}G'_{6\ell} - A'_{dk}A'_{d\ell}G'_{6j} - A'_{d\ell}A'_{dj}G'_{6k} - A'_{\tau\ell}A'_{dk}G'_{6j} - 2U_j - 2U_k - 2U_\ell$$

Prova: Semelhante à prova do Lema 2.9. As LMIs (2.37), (2.38) e (2.39) são suficientes para garantir que $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$, $Q(\alpha) = Q(\alpha)' > 0$ dadas por (2.17) com Q_j definida em (2.27) e $\mathcal{X}(\alpha)$ dada por (2.25) com $\mathcal{X}_j$ particionada como em (2.13) verificam as condições do Lema 2.4 para todo $(A, A_d) \in \mathcal{P}$. ■

Vale destacar que os lemas 2.8 e 2.10 podem ser usados com a matriz $\mathcal{X}$ fixa, resultando em uma condição mais simples porém mais conservadora.

Os lemas 2.9 e 2.10 mantêm o grau de liberdade representado pela matriz M, como em [ZKT01], sendo que os melhores resultados para estabilidade dependente do atraso foram obtidos quando M é considerada uma variável matricial livre independente do parâmetro α. Através de manipulações semelhantes às feitas nesta dissertação, os resultados para estabilidade robusta de sistemas incertos poderiam ser melhorados se M fosse considerada uma matriz afim dependente de parâmetro $M(\alpha)$.

2.3 Exemplos Numéricos

Os exemplos abaixo apresentam resultados numéricos das condições obtidas para a análise de estabilidade de sistemas incertos. As condições obtidas nos lemas 2.5, 2.6 (condições independentes do atraso), 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10 (condições dependentes do atraso) são referenciadas respectivamente por CI, CIX, CD1, CDX1, CD2 e CDX2.

Exemplo 1

Considere o sistema incerto apresentado em [PTGL03] com vértices dados por

$$(A, A_\tau)_1 = (\begin{bmatrix} -1.3451 & 0.6510 \\ 0.6135 & -0.3007 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0025 & -0.7350 \\ 0.0859 & -0.0086 \end{bmatrix})$$

$$(A, A_\tau)_2 = (\begin{bmatrix} -0.1849 & 0.1202 \\ -0.9822 & 0.1787 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.3219 & 0.1123 \\ 0.4372 & -0.1571 \end{bmatrix})$$

O atraso máximo $\bar{\tau}$ para o qual a estabilidade robusta é assegurada foi calculado testando as condições CD1, CDX1, CD2 e CDX2, resultando nos valores da Tabela 2.3.

Condição	$\bar{\tau}$
CD1	0.448
CDX1	0.712
CD2	1.288
CDX2	2.191

Tabela 2.1: Máximo valor do atraso $\bar{\tau}$ para o sistema do Exemplo 1.

O vértice 2 foi utilizado para simular o sistema com o objetivo de verificar o comportamento das variáveis de estado para diferentes valores do atraso e identificar o limitante do primeiro intervalo do atraso para o qual o sistema é estável. A Figura 2.1 mostra a evolução no tempo da variável x_2 considerando que o sistema nominal é o vértice 2, situação de pior caso para a estabilidade.Observa-se que uma boa aproximação para o máximo $\bar{\tau}$ é obtida pela condição CDX2, pois a partir de valores $\tau \geq 2.45$ o sistema apresenta um comportamento instável.

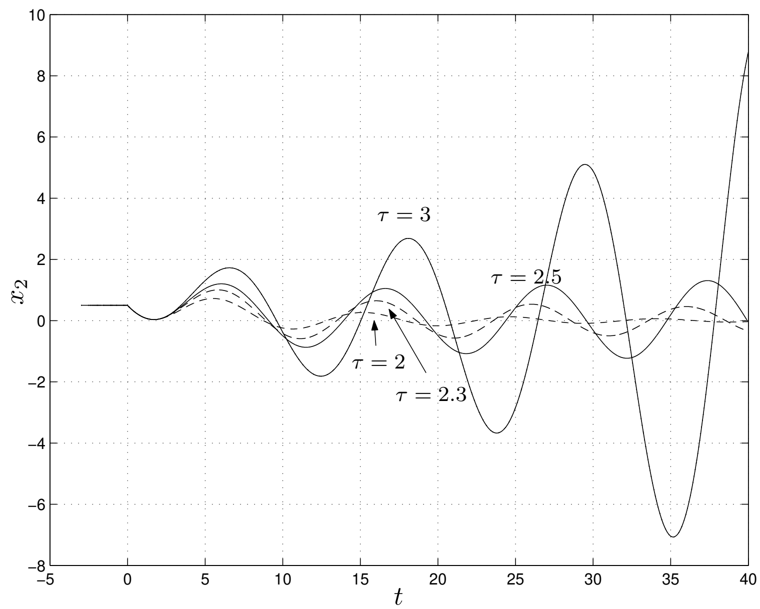

Figura 2.1: Evolução da variável x_2 considerando que o sistema nominal é dado por $(A, A_\tau)_2$ (Exemplo 1).

Em [PTGL03] o melhor resultado obtido foi $\bar{\tau} = 1.480$, aqui superado pela avaliação obtida com CDX2.

Exemplo 2

Considere o seguinte modelo para a dinâmica de um processo de fresagem, no qual algumas incertezas foram inseridas [ZTK02]:

$$\dot{x}(t) = A(k,\rho)x(t) + A_\tau(k)x(t-\tau) \tag{2.40}$$

com

$$A(k,\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31}(k,\rho) & 9.5+\rho & 0 & 0 \\ 4.75+\frac{\rho}{2} & -15.5+\rho & 0 & -0.25 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$A_\tau(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

O elemento a_{31} na matriz dinâmica A é dado por $a_{31}(k,\rho) = -(9.5+\rho+k)$, sendo que k representa a rigidez de corte, e $0 \leq \rho \leq 1$. O sistema precisamente conhecido apresentado em [ZKT01] é obtido com o valor $\rho = 0.5$. Primeiramente, considere $k = 0.1$, definindo assim um politopo com dois vértices ($(A, A_d)_1$ para $\rho = 0$ e $(A, A_d)_2$ para $\rho = 1$). Para este caso, as condições CD2 e CDX1 asseguram a estabilidade robusta dependente do atraso para o sistema incerto até o valor $\bar{\tau} = 1 \times 10^7$, o que pode ser um indicativo de que o sistema é estável independentemente do atraso. As condições CI e CIX confirmam que o sistema é estável para qualquer valor do atraso. Porém, as condições CD1 e CDX1 garantem a estabilidade robusta dependente do atraso para $\bar{\tau} = 1.0484$ e $\bar{\tau} = 1.0498$ respectivamente, mostrando que são condições apenas suficientes para teste de estabilidade.

Considerando o caso em que $k = 0.4$, tem-se outro politopo com dois vértices. As condições CD1, CDX1, CD2 e CDX2 asseguram a estabilidade robusta dependente do atraso para os valores máximos de atraso apresentados na Tabela 2.3.

Condição	$\bar{\tau}$
CD1	0.298
CDX1	0.298
CD2	0.188
CDX2	0.320

Tabela 2.2: Limites para o valor máximo do atraso para o sistema do Exemplo 2.

Exemplo 3

As condições propostas para análise de estabilidade independente do atraso de sistemas incertos CI e CIX foram testadas para o seguinte sistema incerto de ordem três e com dois vértices randomicamente gerados

$$(A, A_\tau)_1 = (\begin{bmatrix} -30.761 & -308.96 & -449.269 \\ 1 & 1.749 & 0 \\ 0 & 1 & 0.749 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.749 \end{bmatrix})$$

$$(A, A_\tau)_2 = (\begin{bmatrix} -41.259 & -585.225 & -2347.695 \\ 1 & 1.749 & 0 \\ 0 & 1 & 0.749 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 10 & 130 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.749 \end{bmatrix})$$

Novamente, a condição com matrizes extras CIX identificou o sistema incerto como estável independentemente da magnitude do atraso, enquanto que as LMIs da condição sem variáveis extras CI são infactíveis para este sistema.

Capítulo 3

Sistemas com Atraso e Saturação na Entrada

3.1 Condições de Estabilidade

Considere o sistema com atraso e entrada limitada em amplitude dado por (1.26). Levando em consideração que o atraso do sistema τ pode ser conhecido ou não, é de interesse formular uma lei de controle da forma

$$u(t) = Kx(t) + K_d x(t - \tau_c), \ \tau_c > 0 \tag{3.1}$$

que possui uma realimentação do estado atual ponderada pelo ganho K e uma realimentação de estado atrasada de τ_c ponderada pelo ganho K_d. Com essa lei de controle o sistema em malha fechada é descrito por

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau) + BK_d x(t - \tau_c) + B\psi(t) \tag{3.2}$$

A lei de controle (3.1) será empregada para obtenção de condições de estabilizabilidade que têm como objetivo definir estimativas de regiões de atração, isto é, regiões em torno da origem para as quais as condições iniciais, caso contidas nessas regiões, garantem que o sistema é estável.

Este capítulo apresenta condições dependentes e independentes do atraso para síntese de controladores, obtidas a partir de funcionais de Lyapunov-Krasovskii e de uma condição de setor generalizada (1.31) que, associadas a problemas de otimização, buscam maximizar estimativas de regiões de atração.

3.1.1 Condição Independente do Atraso

Esta seção apresenta uma condição de síntese de controladores com a estrutura de (3.1), independente do valor do atraso do sistema, para sistemas com atraso e saturação. A condição é obtida a partir de um funcional de Lyapunov-Krasovskii e uma condição do setor generalizada [TPG04]. A deteminação da região de atração em torno da origem é feita, de maneira aproximada, por uma bola fechada que depende das matrizes do funcional de Lyapunov.

Teorema 3.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas W, R_1 e R_2, matrizes Y_1, Y_2 e Z e uma matriz diagonal definida positiva U satisfazendo as LMIs abaixo:*

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Y_1'B' + BY_1 + R_1 + R_2 & A_dW & BY_2 & BU - Z' \\ \star & -R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -R_2 & Y_2' \\ \star & \star & \star & -2U \end{bmatrix} < 0 \tag{3.3}$$

$$\begin{bmatrix} W & Y_{1(i)}' - Z_{(i)}' \\ \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \ i = 1, \cdots, m \tag{3.4}$$

então a realimentação de estado $Kx(t) + K_dx(t-\tau_c)$, com $K = Y_1W^{-1}$ e $K_d = Y_2W^{-1}$ garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada, independentemente do valor do atraso para todas as condições iniciais $\phi(\theta) \in \mathcal{B}(\phi_x, \xi), \forall \theta \in [-\tau, 0]$, $\mathcal{B}(\phi_x, \xi) = \left\{\phi_x \in C_{\tau,n}^{v_x} \ ; \ \|\phi_x\|_c^2 \leq \xi\right\}$ com ξ dado por

$$\xi = \frac{1}{\lambda_{\max}(W^{-1}) + \tau\lambda_{\max}(W^{-1}R_1W^{-1}) + \tau_c\lambda_{\max}(W^{-1}R_2W^{-1})} \tag{3.5}$$

Prova: Seja o funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(x_t) = x(t)'Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x(\theta)'P_1x(\theta)d\theta + \int_{t-\tau_c}^{t} x(\theta)'P_2x(\theta)d\theta \tag{3.6}$$

cuja derivada é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = {} & \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + x(t)'P_1x(t) \\ & - x(t-\tau)'P_1x(t-\tau) + x(t)'P_2x(t) - x(t-\tau_c)'P_2x(t-\tau_c) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Utilizando a condição do setor (1.31) com $w = Gx(t) + K_dx(t-\tau_c)$, é possível garantir que $\dot{V}(x_t) < 0$ para todo $x \in S(u_0)$ se

$$\dot{V}(x_t) - 2\psi(t)'U^{-1}(\psi(t) + Gx(t) + K_dx(t-\tau_c)) < 0 \tag{3.8}$$

equivalentemente, na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} x(t)' & x(t-\tau)' & x(t-\tau_c)' & \psi(t)' \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ x(t-\tau_c) \\ \psi(t) \end{bmatrix} < 0$$

com $\mathcal{M}$ dada por

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \Lambda & PA_d & PBK_d & PB - G'T \\ \star & -P_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -P_2 & -K_d'T \\ \star & \star & \star & -2T \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

e $\Lambda = (A + BK)'P + P(A + BK) + P_1 + P_2$ e $T = U^{-1}$. Aplicando em $\mathcal{M}$ a transformação de congruência definida pela matriz diag$\{W, W, W, U\}$, com $W = P^{-1}$, chega-se à seguinte condição equivalente:

$$\begin{bmatrix} \Gamma & A_dW & BK_dW & BU - WG' \\ \star & -WP_1W & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -WP_2W & -WK_d' \\ \star & \star & \star & -2U \end{bmatrix} < 0$$

com $\Gamma = WA' + WK'B' + AW + BKW + WP_1W + WP_2W$. Definindo $GW = Z$, $WP_1W = R_1$, $WP_2W = R_2$, $KW = Y_1$ e $K_dW = Y_2$, recupera-se a condição (3.3).

Dessa forma, aplicando o Teorema de Lyapunov-Krasovskii (seção 1.2.1), considerando que $x(t) \in S(u_0)$, se a inequação (3.3) for satisfeita, tem-se que

(i) $\dot{V}(x_t) \leq \pi_2 \|x(t)\|^2 < 0$

(ii) $\pi_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq \pi_3 \|x_t\|_c^2$

Para o cálculo de π_1 e π_3, tem-se que se $\dot{V} < 0$, então:

$$x(t)'W^{-1}x(t) \leq V(x_t) \leq V(x_{t_0}) \leq \\ (\lambda_{\max}(W^{-1}) + \tau\lambda_{\max}(W^{-1}R_1W^{-1}) + \tau_c\lambda_{\max}(W^{-1}R_2W^{-1}))\|\phi_x\|_c^2$$

Assim pode-se definir

$$\pi_1 = \lambda_{\min}(W^{-1})$$

e

$$\pi_3 = \lambda_{\max}(W^{-1}) + \tau\lambda_{\max}(W^{-1}R_1W^{-1}) + \tau_c\lambda_{\max}(W^{-1}R_2W^{-1})$$

Substituindo as expressões obtidas da forma quadrática

$$\left[x(t-\tau) - P_1^{-1}A_d'Px(t)\right]' P_1 \left[x(t-\tau) - P_1^{-1}A_d'Px(t)\right] \geq 0$$

ou seja,

$$-x(t-\tau)'P_1x(t-\tau) + 2x(t)'PA_dx(t-\tau) \leq x(t)'PA_dP_1^{-1}A_d'Px(t)$$

e

$$-x(t-\tau)'P_2x(t-\tau) + 2x(t)'PBK_dx(t-\tau) \leq x(t)'PBK_dP_2^{-1}K_d'B'Px(t)$$

na equação (3.7), tem-se

$$\dot{V} \leq x(t)' \left[(A+BK)'P + P(A+BK) + P_1 \right.$$
$$\left. +P_2 + PA_dP_1^{-1}A_d'P + PBK_dP_2^{-1}K_d'B'P\right] x(t) \quad (3.10)$$

Como a verificação de (3.9) garante que o lado direito de (3.10) é negativo, tem-se que um valor possível para π_2 é dado por:

$$\pi_2 = \lambda_{\max}((A+BK)'P + P(A+BK)) + \lambda_{\max}(P_1) + \lambda_{\max}(P_2)$$
$$+ \lambda_{\max}(PA_dP_1^{-1}A_d'P) + \lambda_{\max}(PBK_dP_2^{-1}K_d'B'P)$$

Dessa forma, se $\phi_x \in \mathcal{B}(\xi)$, com ξ dado por (3.5), tem-se

$$x(t) \in \mathcal{E}(W^{-1}) = \left\{x \in \Re^n \ ; \ x(t)'W^{-1}x(t) \leq 1\right\}.$$

A satisfação da inequação (3.4) garante a inclusão do elipsóide $\mathcal{E}(W^{-1})$ no conjunto poliedral $S(u_0) = \{x \in \Re^n \ ; \ |Kx(t) \ \ +K_dx(t-\tau_c) - w(t)| \preceq u_0\}$ com $w(t) = ZW^{-1}x(t) + K_dx(t-\tau_c)$. Dessa maneira, para qualquer $\phi_x \in \mathcal{B}(\xi)$, garante-se que $x(t) \in S(u_0)$. Assim é possível concluir que a factibilidade de (3.3) e (3.4) permite garantir a estabilidade do sistema em malha fechada (3.2) para toda condição inicial $\phi_x \in \mathcal{B}(\xi)$.

■

No caso de τ ser conhecido, é possível utilizar seu valor na realimentação fazendo $\tau_c = \tau$. Nesse caso as condições são diretamente obtidas utilizando o funcional

$$V(x_t) = x(t)'Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x(\theta)'P_1x(\theta)d\theta$$

Se o sistema em malha aberta for estável, é possível considerar a estabilidade global do sistema em malha fechada [Ouc96], [TGG04], como descrito no próximo corolário

Corolário 3.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas W, R_1 e R_2, matrizes Y_1 e Y_2 e U diagonal definida positiva tais que a inequação abaixo seja satisfeita*

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Y_1'B' + BY_1 + R_1 + R_2 & A_dW & BY_2 & BU - Y_1' \\ \star & -R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -R_2 & -Y_2' \\ \star & \star & \star & -2U \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.11)$$

então a realimentação de estado $Kx(t) + K_dx(t-\tau)$, com $K = Y_1W^{-1}$, $K_d = Y_2W^{-1}$ garante a estabilidade global do sistema (3.2).

Prova: Basta considerar $G = K = Y_1W^{-1}$. Nesse caso, a inequação (1.31) do Lema 1.4 é satisfeita globalmente (ou seja, $\forall x \in \mathbb{R}$). A factibilidade de (3.11) garante dessa forma a estabilidade assintótica global do sistema (3.2), ou seja, $\forall \phi_x \in \mathcal{C}^v_{\tau,n}$. ■

3.1.2 Condição Dependente do Atraso

A partir da mesma condição do setor empregada no Teorema 3.1 e de um funcional de Lyapunov-Krasovskii, é obtida uma condição dependente da magnitude do atraso para síntese de controladores para sistemas com saturação na entrada e com atraso. O Teorema 3.2 apresenta a condição que define os ganhos de realimentação e uma estimativa da região de atração do sistema, que depende da magnitude do estado inicial e de sua derivada.

Teorema 3.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas W, X_1, X_2, R_1 e R_2 de dimensão compatível, matrizes Y_1, Y_2 e Z, uma matriz diagonal definida positiva U, um valor máximo para o atraso do sistema $\bar{\tau}$ e um valor para o atraso na realimentação τ_c satisfazendo as inequações abaixo:*

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} W(A+A_d)' + (A+A_d)W + BY_1 + Y_1'B' \\ +BY_2 + Y_2'B' + R_1 + R_2 + \bar{\tau}A_dX_1A_d' \end{array} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & BU - Z' & \bar{\tau}(WA' + Y_1'B') & \mathbf{0} & \tau_c BY_2 \\ \star & -R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\tau}WA_d' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -R_2 & -Y_2' & \bar{\tau}Y_2'B' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -2U & \bar{\tau}UB' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\bar{\tau}X_1 & \bar{\tau}\tau_c X_1' & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\bar{\tau}\tau_c^2X_1 - \bar{\tau}^2\tau_c X_2 & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & -\tau_c W \end{array}\right] < 0 \quad (3.12)$$

$$\left[\begin{array}{cc} W & Y_{1(i)}' - Z_{(i)}' \\ \star & u_{0(i)}^2 \end{array}\right] \geq 0, \; i = 1, \cdots, m \quad (3.13)$$

então a realimentação de estado $Kx(t) + K_dx(t-\tau_c)$ com $K = Y_1W^{-1}$, $K_d = Y_2W^{-1}$ e a bola de condições iniciais $\mathcal{B}(\phi_x, \dot{\phi}_x)$:

$$\mathcal{B}(\phi_x, \dot{\phi}_x) = \{\phi_x \in \mathcal{C}_{n,\tau}; \left[\begin{array}{cc} \| \phi_x \| & \| \dot{\phi}_x \| \end{array}\right] \Xi \left[\begin{array}{c} \| \phi_x \| \\ \| \dot{\phi}_x \| \end{array}\right] \leq 1\} \quad (3.14)$$

com

$$\Xi = \left[\begin{array}{cc} \begin{array}{c} (\lambda_{max}(W^{-1}) \\ +\tau\lambda_{max}(W^{-1}R_1W^{-1}) \\ +\tau_c\lambda_{max}(W^{-1}R_2W^{-1})) \end{array} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{array}{c} \left(\frac{\tau^2}{2}\lambda_{max}(X_1^{-1}) \right.\\ \left. +\frac{\tau_c^2}{2}\lambda_{max}(X_2^{-1})\right) \end{array} \end{array}\right] \quad (3.15)$$

garantem a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada para todas as condições iniciais $\phi_x(\omega) \in \mathcal{B}(\phi_x, \dot{\phi}_x), \forall \omega \in [-\tau, 0]$*,* $0 < \tau < \bar{\tau}$*.*

Prova: Como $x(t)$ é continuamente diferenciável para $t \geq t_o - \tau$ é possível representar $x(t-\tau)$ utilizando a fórmula de Leibnitz-Newton:

$$x(t-\tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^{t} \dot{x}(\theta) d\theta$$

Então, é possível reescrever o sistema (3.2) da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = (A + BK + A_d + BK_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^{t} \dot{x}(\theta) d\theta - BK_d \int_{t-\tau_c}^{t} \dot{x}(\theta) d\theta + B\psi \tag{3.16}$$

considerando o funcional de Lyapunov-Krasovskii definido como

$$V(x_t) = x(t)'Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x(\theta)'Q_1 x(\theta) d\theta + \int_{t-\tau_c}^{t} x(\theta)'Q_2 x(\theta) d\theta + Q_3(x) \tag{3.17}$$

com $Q_3(x)$ sendo uma forma quadrática definida positiva e $0 \leq \tau_c \leq \tau$.

A derivada temporal de $V(x_t)$, considerando o sistema na forma (3.16) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = {} & x(t)'(Q_1 + Q_2 + (A + BK + A_d + BK_d)'P + P(A + BK + A_d + BK_d))x(t) \\ & + 2x(t)'PB\psi(t) - x(t-\tau)'Q_1 x(t-\tau) - x(t-\tau_c)'Q_2 x(t-\tau_c) \\ & - 2x(t)'PA_d \int_{t-\tau}^{t} \dot{x}(\theta) d\theta - 2x(t)'PBK_d \int_{t-\tau_c}^{t} \dot{x}(\theta) d\theta + \dot{Q}_3(x) \end{aligned}$$

Considerando que

$$-2x(t)'PA_d \int_{t-\tau}^{t} \dot{x}(\theta) d\theta \leq \tau x(t)'PA_d X_1 A_d' P x(t) + \int_{t-\tau}^{t} \dot{x}(\theta) X_1^{-1} \dot{x}(\theta) d\theta \tag{3.18}$$

e que

$$-2x(t)'PBK_d \int_{t-\tau_c}^{t} \dot{x}(\theta) d\theta \leq \tau_c x(t)'PBK_d X_2 K_d' B' P x(t) + \int_{t-\tau_c}^{t} \dot{x}(\theta) X_2^{-1} \dot{x}(\theta) d\theta \tag{3.19}$$

definindo

$$Q_3(x_t) = \int_{-\tau}^{0} \int_{t-\beta}^{t} \dot{x}(\theta) X_1^{-1} \dot{x}(\theta) d\theta d\beta + \int_{-\tau_c}^{0} \int_{t-\beta}^{t} \dot{x}(\theta) X_2^{-1} \dot{x}(\theta) d\theta d\beta$$

e considerando a condição do setor (1.31) com $w = Gx(t) + K_d x(t-\tau_c)$ para todo $x(t) \in S(u_0)$, a derivada temporal $\dot{V}(x(t))$ pode ser majorada da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) \leq\ & x(t)'(Q_1 + Q_2 + (A + BK + A_d + BK_d)'P + P(A + BK + A_d + BK_d))x(t) \\
& - x(t-\tau)'Q_1x(t-\tau) - x(t-\tau_c)'Q_2x(t-\tau_c) + 2x(t)'(PB - G'U^{-1})\psi(t) \\
& - 2x(t-\tau_c)'K_d'U^{-1}\psi(t) - 2\psi(t)'U^{-1}\psi(t) + \tau x(t)'PA_dX_1A_d'Px(t) \\
& + \tau_c x(t)'PBK_dX_2K_d'B'Px(t) + \tau\dot{x}(t)'X_1^{-1}\dot{x}(t) + \tau_c\dot{x}(t)'X_2^{-1}\dot{x}(t) \quad (3.20)
\end{aligned}
$$

Substituindo $\dot{x}(t)$ por (3.2) e exprimindo as condições na forma matricial com $\eta = \begin{bmatrix} x(t)' & x(t-\tau)' & x(t-\tau_c)' & \psi(t)' \end{bmatrix}'$, tem-se o lado direito de (3.20) igual a

$$
\mathcal{N} = \eta' \begin{bmatrix} \begin{array}{c} A_0'P + PA_0 + Q_1 + Q_2 \\ +\tau PA_dX_1A_d'P \\ +\tau_c PBK_dX_2K_d'B'P \end{array} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & PB - G'U^{-1} \\ \star & -Q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q_2 & -K_d'U^{-1} \\ \star & \star & \star & -2U^{-1} \end{bmatrix} \eta
$$
$$
+ \eta' \begin{bmatrix} (A+BK)' \\ A_d' \\ K_d'B' \\ B' \end{bmatrix} (\tau X_1^{-1} + \tau_c X_2^{-1}) \begin{bmatrix} (A+BK) & A_d & BK_d & B \end{bmatrix} \eta \quad (3.21)
$$

com $A_0 = A + BK + A_d + BK_d$. Se $\mathcal{N} < 0$ tem-se $\dot{V}(x_t) < 0$. Aplicando o complemento de Schur em (3.21) tem-se que $\dot{V}(x_t) < 0$ se for satisfeita a desigualdade

$$
\begin{bmatrix} \begin{array}{c} A_0'P + PA_0 + Q_1 + Q_2 \\ +\tau PA_dX_1A_d'P \\ +\tau_c PBK_dX_2K_d'B'P \end{array} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & PB - G'U^{-1} & A' + K'B' \\ \star & -Q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_d' \\ \star & \star & -Q_2 & -K_d'U^{-1} & K_d'B' \\ \star & \star & \star & -2U^{-1} & B \\ \star & \star & \star & \star & -(\tau X_1^{-1} + \tau_c X_2^{-1})^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)
$$

Pré- e pós-multiplicando (3.22) pela matriz diag$\{W, W, W, U, \mathbf{I}\}$, definindo $GW = Z$, $WQ_1W = R_1$, $WQ_2W = R_2$, $KW = Y_1$, $K_dW = Y_2$ e $X_2 = W$ e aplicando o lema da inversão matricial no termo $-(\tau X_1^{-1} + \tau_c X_2^{-1})^{-1}$, ou seja,

$$
-(\tau X_1^{-1} + \tau_c X_2^{-1})^{-1} = -\tau^{-1}X_1 + \tau^{-1}X_1(\tau_c^{-1}X_2 + \tau^{-1}X_1)^{-1}\tau^{-1}X_1
$$

tem-se que, caso a LMI (3.22) seja satisfeita, então o sistema é estável pois a inequação $\dot{V}(x(t)) < 0$ será verificada. Aplicando complemento de Schur no termo $\tau_c BK_dX_2K_d'B' = \tau_c BY_2W^{-1}X_2W^{-1}Y_2'B'$ e ao termo $\tau^{-1}X_1(\tau_c^{-1}X_2 + \tau^{-1}X_1)^{-1}\tau^{-1}X_1$ da inequação $\mathcal{N} < \mathbf{0}$, obtém-se a seguinte inequação:

$$
\begin{bmatrix}
\begin{array}{c} W(A+A_d)'+(A+A_d)W+BY_1+Y_1'B' \\ +BY_2+Y_2'B'+R_1+R_2+\tau A_d X_1 A_d' \end{array} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & BU-Z' & WA'+Y_1'B' & \mathbf{0} & \tau_c BY_2 \\
\star & -R_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & WA_d' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\star & \star & -R_2 & -Y_2' & Y_2'B' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & -2U & UB' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & -\tau^{-1}X_1 & \tau^{-1}X_1' & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & \star & -\tau^{-1}X_1-\tau_c^{-1}X_2 & \mathbf{0} \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & -\tau_c W
\end{bmatrix} < 0
$$

Finalmente, pré- e pós-multiplicando a inequação acima por diag $\{\mathbf{I},\mathbf{I},\mathbf{I},\mathbf{I},\tau\mathbf{I},\tau\tau_c\mathbf{I},\mathbf{I}\}$, obtém-se a inequação (3.12). Dessa forma, com $x(t) \in S(u_0)$, se (3.12) for factível, então

(i) $\dot{V}(x_t) \leq \pi_2 \|x(t)\|^2 < 0$

(ii) $\pi_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq \pi_3 \|x_t\|_c^2$

Os limitantes do funcional e de sua derivada, π_1, π_2 e π_3 são obtidos de maneira similar à do Teorema 3.1. O conjunto de condições iniciais admissíveis é dado por $\mathcal{B}(\phi_x, \dot{\phi}_x)$ tais que (3.14) é satisfeita. A condição de inclusão de $\mathcal{E}(W^{-1})$ em $S(u_0)$ não se altera em relação ao Teorema 3.1, portanto é possível garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada para toda a condição inicial ϕ_x, $\dot{\phi}_x$ que satisfaça (3.14). ∎

Para o caso de τ não ser conhecido, pode-se utilizar $\bar{\tau}$ na inequação (3.12) e na expressão de Ξ. Se τ for conhecido, seu valor pode ser utilizado diretamente na lei de controle considerando $\tau_c = \tau$. Nesse caso, as condições são obtidas utilizando o funcional

$$V(x_t) = x(t)'Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x(\theta)'Q_1 x(\theta) d\theta$$

e considerando o sistema

$$\dot{x}(t) = (A + BK + A_d + BK_d)x(t) - (A_d - BK_d)\int_{t-\tau}^{t} \dot{x}(\theta) d\theta + B\psi$$

Para definir o conjunto de condições iniciais estabelecido no Teorema 3.2 é necessário conhecer um limitante da derivada de ϕ_x, o que pode ser restritivo em alguns casos. Para contornar esse problema, pode-se substituir $\dot{x}(t)$ por seu valor, dado por (3.2) em cada termo integral e, assim, pode-se limitar a soma dos termos obtidos. A única dificuldade restante é limitar a norma de $\psi(t)$, e para isso pode-se recorrer à proposta apresentada em [TGG04].

Caso o sistema em malha aberta seja estável, a estabilidade assintótica global dependente do atraso pode ser considerada, utilizando o mesmo procedimento da seção anterior.

3.2 Estratégias de Otimização

Para assegurar uma maior faixa de operação segura de um sistema com atraso e entrada saturada, é de interesse maximizar os conjuntos de condições iniciais de maneira que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável para qualquer condição dentro desses conjuntos [TG00], [TGG04]. A maximização desses conjuntos é obtida com a maximização de ξ e a minimização do máximo autovalor de Ξ.

Se os valores de $\bar{\tau}$ e τ_c forem fixados, a inequação do Teorema 3.2 torna-se uma LMI.

Para que o problema de otimização torne-se linear, além de $\bar{\tau}$ e τ_c serem fixados, é necessário definir uma formulação linear que corresponda à minimização dos autovalores máximos de $W^{-1}R_1W^{-1}$ e de $W^{-1}R_2W^{-1}$, garantindo a maximização de ξ e a minimização do máximo autovalor de Ξ. Essa tarefa é realizada com uma estratégia da forma

$$\min \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \sigma_3\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & W \end{bmatrix} \geq 0 \; ; \quad \sigma_1\mathbf{I} - R_1 \geq 0 \; ; \quad \sigma_2\mathbf{I} - R_2 \geq 0 \tag{3.23}$$

pois, considerando $\sigma_1\mathbf{I} - R_1 \geq 0$, tem-se que $\sigma_1 W^{-1}W^{-1} - W^{-1}R_1W^{-1} \geq 0$ e utilizando $\sigma_3\mathbf{I} - W^{-1} \geq \mathbf{0}$ é possível deduzir que $\sigma_1\sigma_3^2\mathbf{I} - W^{-1}R_1W^{-1} \geq 0$.

Para limitar a magnitude dos ganhos K e K_d, são consideradas as restrições $KWK' = Y_1PY_1' \leq \sigma_4\mathbf{I}$ e $KWK' = Y_1PY_1' \leq \sigma_5\mathbf{I}$ e minimizam-se σ_4 e σ_5. A matriz W também é limitada pela relação $\sigma_6 \leq W \leq \sigma_6 n_c\mathbf{I}$, com n_c sendo um limitante escolhido convenientemente.

O problema de otimização para o caso independente do atraso pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\min \;\; \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3 + \eta_4\sigma_4 + \eta_5\sigma_5 + \eta_6\sigma_6 \\ &\text{sujeito a (3.3), (3.4), (3.23)} \\ &\text{e} \begin{bmatrix} \sigma_4\mathbf{I} & Y_1 \\ Y_1' & W \end{bmatrix} \geq 0 \; ; \; \begin{bmatrix} \sigma_5\mathbf{I} & Y_2 \\ Y_2' & W \end{bmatrix} \; ; \;\; \sigma_6\mathbf{I} \leq W \leq \sigma_6 n_c\mathbf{I} \end{aligned} \tag{3.24}$$

com η_i representando ponderações nos termos da otimização.

Da mesma forma, o problema de otimização associado ao caso dependente do atraso é definido da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{l}
\min\ \eta_1\sigma_1 + \eta_2\sigma_2 + \eta_3\sigma_3 + \eta_4\sigma_4 + \eta_5\sigma_5 + \eta_6\sigma_6 + \eta_7\sigma_7 \\
\text{sujeito a (3.12), (3.13)} \\
\text{e} \quad \begin{bmatrix} \sigma_3\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} \sigma_4\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & X_1 \end{bmatrix} \geq 0 \\
\quad \sigma_1\mathbf{I} - R_1 \geq 0 \qquad ; \quad \sigma_2\mathbf{I} - R_2 \geq 0 \\
\begin{bmatrix} \sigma_5\mathbf{I} & Y_1 \\ Y_1' & W \end{bmatrix} \geq 0 \ ; \quad \begin{bmatrix} \sigma_6\mathbf{I} & Y_2 \\ Y_2' & W \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_7\mathbf{I} \leq W \leq \sigma_7 n_c \mathbf{I}
\end{array}
\tag{3.25}
$$

Outro problema de interesse é a maximização do limite $\bar{\tau}$ ou seja, a resolução do problema de otimização abaixo:

$$
\begin{array}{l}
\tau_{\max} = \max \bar{\tau} \\
\text{sujeito a (3.12), (3.13)}
\end{array}
\tag{3.26}
$$

Como $\bar{\tau}$ é um escalar que multiplica algumas variáveis de decisão, é possível realizar uma busca linear nessa variável, testando a factibilidade das LMIs (3.12) e (3.13) a cada passo da busca.

3.3 Exemplos Numéricos

3.3.1 Estabilidade Independente do Atraso

Exemplo 1

Considere o sistema (1.26) definido pelas matrizes:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix} ; A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}
\tag{3.27}
$$

e $u_0 = 10$. Com atraso nulo, o sistema é instável (pólos em 0.3574 e -3.3574). O problema de otimização (3.24) é resolvido considerando que o valor do atraso τ é conhecido, portanto o valor $\tau_c = \tau$ pode ser empregado. Aplicando as condições (3.3) e (3.4) verifica-se que o sistema é estável independentemente do atraso. Os ganhos K e K_d são dados por:

$$
K = \begin{bmatrix} -0.1498 & -0.02294 \end{bmatrix} ;
\tag{3.28}
$$

$$
K_d = \begin{bmatrix} 0.09113 & 0.01511 \end{bmatrix}
\tag{3.29}
$$

O valor de ξ que define a bola de condições iniciais depende do valor de τ de acordo com a equação (3.5). A Tabela 3.1 apresenta alguns valores para τ e os valores correspondentes de ξ.

A Figura 3.1 mostra as regiões $\mathcal{E}(W^{-1})$ (linha cheia) e $\mathcal{B}(\phi_x)$ (linha tracejada) para $\tau = \tau_c = 1$.

Como as condições de estabilidade são formuladas em termos de LMIs, é possível obter ganhos que definem um controlador descentralizado com a definição de estruturas particulares

τ	ξ
0	199.08
1	157.10
10	54.21
100	7.18

Tabela 3.1: Valores para τ e valores correspondentes de ξ para o Exemplo 1.

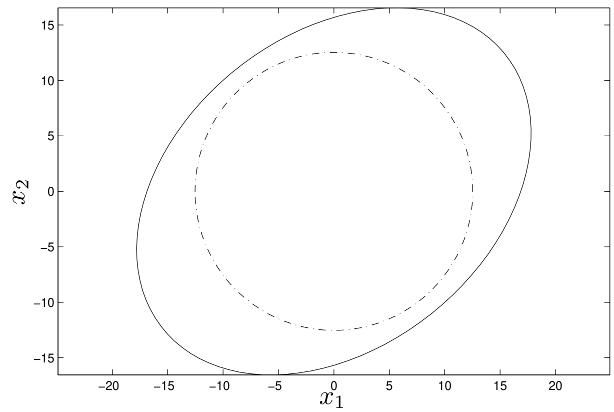

Figura 3.1: Elipse $x'Px \leq 1$ e bola $\mathcal{B}(\phi_x)$ relativos ao sistema definido pelas matrizes (3.27) (Exemplo 1).

para as matrizes usadas para computar K e K_d, ou seja, caso W e Y_1 forem bloco-diagonais com blocos de dimensões compatíveis, tem-se que $K = Y_1 W^{-1}$ também terá estrutura bloco-diagonal. O exemplo abaixo é análogo ao anterior, porém considera a obtenção de um ganho descentralizado.

Exemplo 2

Considere o sistema (1.26), definido pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & -1 \\ 0.3 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}; A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0.3 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

e $u_0 = [10\ 10]'$. Para atraso nulo, tem-se que o sistema é instável (pólos em -3.572, -1.257 e 0.3295). Considerando que o atraso τ é conhecido, pode-se empregar $\tau_c = \tau$ na solução do problema (3.24) com as matrizes Y_1 e W com estrutura bloco diagonal, sendo $W = \text{diag}\{W_1, W_2\}$, sendo W_1 de ordem 2 e W_2 de ordem 1. Os ganhos obtidos, que verificam que o sistema é estabilizável independentemente do atraso, são dados por:

$$K = \begin{bmatrix} -0.2022 & -0.009808 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2212 \end{bmatrix};$$
$$K_d = \begin{bmatrix} 0.09727 & 0.01417 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2034 \end{bmatrix}$$

A Tabela 3.2 apresenta os valores de ξ que definiem a bola de condições iniciais correspondentes a diferentes valores para o atraso do sistema.

τ	ξ
0	76.23
1	60.12
10	20.71
100	2.742

Tabela 3.2: Relação entre τ e ξ para o Exemplo 2.

A Figura 3.2 apresenta as regiões $\mathcal{E}(W^{-1})$ em cinza e $\mathcal{B}(\phi_x)$ em preto para $\tau = \tau_c = 10$.

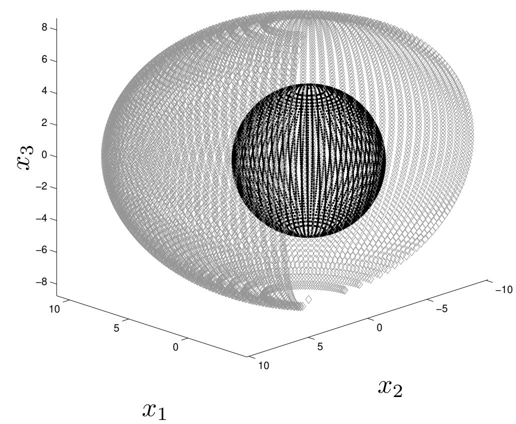

Figura 3.2: Elipsóide $\mathcal{E}(W^{-1})$ e a bola de condições iniciais $\mathcal{B}(\phi_x)$ para o sistema formado por (3.30) (Exemplo 2).

3.3.2 Estabilidade Dependente do Atraso

Exemplo 3

Considere o sistema (1.26) definido pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}; A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e $u_0 = 5$. Com atraso nulo, o sistema é instável (pólos em 4.1 e -3). Utilizando as condições (3.3) e (3.4) verifica-se que o sistema não é estabilizável independentemente do valor do atraso. O problema de otimização (3.25) é resolvido considerando que o valor do atraso τ é desconhecido, portanto o valor τ_c será considerado diferente de τ. Busca-se um valor do limitante $\bar{\tau}$ para o atraso de maneira a ter os autovalores de Ξ limitados superiormente. A

$\bar{\tau}$	τ	τ_c	Ξ_{11}	Ξ_{22}
1	1	0.5	21.39	3.341×10^{-4}
1	1	0.1	22.82	1.195×10^{-4}
0.5	0.5	0.3	7.045	7.508×10^{-4}
0.5	0.5	0.1	7.018	4.838×10^{-4}

Tabela 3.3: Diferentes combinações de $\bar{\tau}$, τ_c e τ e valores de Ξ_{11}, Ξ_{22} correspondentes para o Exemplo 3.

Tabela 3.3 apresenta resultados para diferentes combinações dos valores de $\bar{\tau}$, τ_c e τ e os valores dos elementos de Ξ correspondentes.

Efetuando uma busca linear para encontrar τ_{max}, o valor obtido é 159.7. Porém, o máximo autovalor da matriz Ξ correspondente é da ordem de 10^{13}, resultando em uma estimativa da região de atração desprezível.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

O trabalho apresenta um resultado que utiliza o Teorema do Pequeno Ganho Escalonado para testar a estabilidade de um sistema de comparação obtido a partir de um sistema autônomo com atraso nos estados. As condições de estabilidade são apresentadas na forma de LMIs que, caso verificadas, asseguram que o sistema original é estável. Diferentes escolhas para as matrizes do sistema do Teorema do Pequeno Ganho recuperam o sistema de comparação. Essas escolhas levam a condições de estabilidade dependentes e independentes do atraso do sistema original.

O Lema de Finsler foi empregado para inserir variáveis extras na condição do Teorema do Pequeno Ganho, levando a novas condições de estabilidade que podem ser empregadas para sistemas precisamente conhecidos e para sistemas incertos. Para o caso incerto, o teorema é empregado utilizando matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetro para diferentes escolhas das matrizes do sistema (lemas 2.5, 2.7 e 2.9).

A condição obtida com a inserção de variáveis extras por meio do Lema de Finsler leva a três condições de estabilidade de sistemas incertos com atraso, sendo uma independente do atraso (Lema 2.6) e duas dependentes do atraso (Lemas 2.8 e 2.10), todas empregando matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetro. Uma comparação com os resultados dos Lemas 2.5, 2.7 e 2.9 mostra uma melhora na análise de estabilidade de sistemas incertos. A verificação de factibilidade das LMIs apresentadas nos lemas são condições suficientes para a estabilidade.

Dessa maneira, pode-se concluir que os graus de liberdade produzidos devido às variáveis extras introduzidas pelo Lema de Finsler e o emprego de variáveis dependentes de parâmetro reduzem o conservadorismo da análise de estabilidade de sistemas incertos com atraso. Essa redução no conservadorismo da análise implica condições com complexidade computacional maior em relação a condições que não empregam variáveis extras tampouco matrizes dependentes de parâmetros nas LMIs.

Um método para obtenção de uma lei de controle saturante, dependente do estado atual e de um estado atrasado, foi apresentado no capítulo 3.

Condições dependentes e independentes do atraso foram propostas para síntese de controladores que garantem estabilidade local ou, se possível, global do sistema. Funcionais de Lyapunov-Krasovskii e uma condição de setor generalizada foram utilizados para obter as condições.

Para o caso da estabilidade local, são definidos critérios para determinar a região de condições iniciais para as quais a estabilidade do sistema é assegurada. Também foi definido o conjunto que contém as trajetórias estáveis do sistema.

Problemas de otimização foram formulados com o objetivo de maximizar a região de estabilidade e, para condições dependentes do atraso, também é considerado o problema de maximização de um limitante do valor do atraso para o qual o sistema permanece estável.

Os exemplos numéricos mostram que, para ambos os casos, independente e dependente do atraso, a região de atração depende da magnitude do atraso do sistema. Para o caso dependente do atraso devem ser ponderados interesses conflitantes, ou seja, deve-se definir se a otimização deve privilegiar a maximização do intervalo de estabilidade ou a maximização da região de atração.

Alguns trabalhos em perspectiva, relacionados a sistemas com atraso são:

- Obter condições de estabilidade de sistemas com atraso usando Lema de Finsler empregando derivadas sucessivas do estado e do estado atrasado.
- Usar funções de Lyapunov-Krasovskii com dependência não-linear nos parâmetros (polinomiais homogêneas) para estudar estabilidade de sistemas com atraso.
- Estender as condições obtidas no capítulo 3 para sistemas que possuam incertezas politópicas empregando funcionais de Lyapunov dependentes de parâmetro.
- Obter condições de estabilidade para sistemas com atraso na presença de outras não-linearidades, tais como histereses, folgas e quantização.
- Empregar a matriz M dependente de parâmetro nos resultados do capítulo 2 e estender o resultados para síntese de controladores.

Os resultados deste trabalho foram apresentados nas publicações [VP05a], [VLP06] e [VQPT06].

Outras publicações, que tratam de assuntos correlatos aos descritos na dissertação, são apresentadas abaixo, juntamente com seus resumos:

[MVP06] "*$\mathcal{H}_\infty$ Guaranteed Cost of Linear Systems with Arbitrarily Time-Varying Uncertain Parameters trough Piecewise Lyapunov Functions*" O objetivo do artigo é o cômputo do custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares contínuos com parâmetros variantes no tempo de variação arbitrária dentro de um politopo. As condições propostas baseiam-se na solução de um problema de otimização para o qual as restrições são dadas na forma de desigualdades matriciais lineares, cujos parâmetros pertencem a espaços não-limitados. Um algoritmo genético é empregado para realizar a busca por conjunto de parâmetros que permitem calcular o índice de desempenho através de um problema de otimização convexa. Também é mostrado que, para o caso particular de politopos de dois vértices, é possível realizar a busca dos conjuntos de parâmetros em um espaço limitado por meio de procedimentos de busca exaustiva. Exemplos numéricos demonstram que as condições propostas são menos conservadoras que outras existentes na literatura.

[VP05b] "Estabilização robusta de saída para sistemas com atraso: uma abordagem por LMIs e algoritmos genéticos" O artigo trata do problema de estabilização robusta de sistemas lineares contínuos invariantes no tempo com presença de atrasos através de realimentação estática de saída. As matrizes que descrevem o sistema são consideradas incertas e pertencentes a um politopo com vértices conhecidos. São propostas condições suficientes na forma de desigualdades matriciais lineares, independentes do atraso, assegurando a estabilidade robusta do sistema em malha fechada por meio de um funcional de Lyapunov-Krasovskii com matrizes dependentes de parâmetros. A partir dessas condições convexas de análise robusta, um procedimento baseado em algoritmo genético é proposto para a determinação de um ganho robusto estabilizante de realimentação de saída.

Bibliografia

[BD54] Bellmann, R. and Danskin, J. M., 1954. A survey of the mathematical theory of time lag, retarded control and hereditary processes. Technical report, The Rand Corporation.

[BEFB94] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA).

[BM95] Bernstein, D. S. and Michel, A. N., 1995. Special Issue: Saturating Actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5(5).

[CLH02] Cao, Y. Y., Lin, Z. L., and Hu, T. S., 2002. Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, 49(2):233–240.

[CP88] Cooke, J. A. and Powell, B. K., 1988. Modelling of an internal combustion engine for control analysis. *IEEE Control Systems Magazine*, 8(4):20–25.

[DK94] Dorf, R. C. and Kusiak, A., 1994. *Handbook of Manufacturing and Automation* (Wiley).

[dOS01] de Oliveira, M. C. and Skelton, R. E., 2001. Stability tests for constrained linear systems. In: S. O. Reza Moheimani (Editor), *Perspectives in Robust Control* (Springer-Verlag, New York, NY), volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. 241–257.

[Doy82] Doyle, J. C., 1982. Analysis of feedback systems with structured uncertainty. *IEE Proceedings*, 129(6):242–250.

[Fra87] Francis, B. A., 1987. *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*, volume 88 of *Lectures Notes in Control and Information Sciences* (Springer-Verlag, New York).

[GKC03] Gu, K., Kharitonov, V. L., and Chen, J., 2003. *Stability of Time-delay Systems*. Control Engineering (Birkhäuser, Boston, MA).

[GNLC95] Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J., and Chilali, M., 1995. *LMI Control Toolbox User's Guide* (The Math Works Inc., Natick, MA).

[Hal77] Hale, J., 1977. *Theory of Functional Differential Equations* (Springer-Verlag, New York).

[HL01] Hu, T. and Lin, Z., 2001. *Control Systems With Actuator Saturation: Analysis and Design* (Birkhäuser, Boston, MA).

[HR98] Huang, S. and Ren, W., 1998. Longitudinal control with time-delay in platooning. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 35:211–217.

[HVL93] Hale, J. K. and Verduyn-Lunel, S. M., 1993. *Introduction to Functional Differential Equations* (Springer-Verlag, New York).

[JKDW01] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., and Walter, E., 2001. *Applied Interval Analysis* (Springer-Verlag, London).

[KG02] Kapila, V. and Grigoriadis, K. M. (Editors), 2002. *Actuator Saturation Control* (Marcel Dekker, Inc., New York, NY). Control Engineering Series.

[KNR99] Kolmanovskii, V. B., Niculescu, S. I., and Richard, J. P., 1999. On the Liapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems. *International Journal of Control*, 72(4):374–384.

[Kra59] Krasovskii, N., 1959. *Stability of Motion* (Gosudartv Izdat. Fiz. Math. Lit., Moscow). In russian, English translation, Stanford University Press, 1963.

[Kua93] Kuang, Y., 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics* (Academic Press, Boston, MA).

[LdS96] Li, X. and de Souza, C. E., 1996. Robust stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ of uncertain linear time-delay systems. In: *Proceedings of the 13th IFAC World Congress* (San Francisco, CA), volume H, 113–118.

[LP03] Leite, V. J. S. and Peres, P. L. D., 2003. An improved LMI condition for robust $\mathcal{D}$-stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3):500–504.

[Mac78] MacDonald, N., 1978. *Time-Lags in Biological Models* (Springer Verlag).

[Mah97] Mahmoud, M. S., 1997. Robust stability and stabilization of a class of uncertain nonlinear systems with delays. *Journal of Mathematical Problems in Engineering*, 3:1–22.

[Min42] Minorsky, N., 1942. Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions. *Journal of Applied Mechanics*, 9:65–71.

[Mis49] Mishkis, A. D., 1949. General theory of differential equations with a retarded argument. *American Mathematical Society Translation*, 55.

[MK98] Moon, F. C. and Kusiak, M. A., 1998. *Dynamics and Chaos in Manufacturing Process* (Wiley, New York, NY).

[MVP06] Montagner, V. F., Valmórbida, G., and Peres, P. L. D., 2006. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost of linear systems with arbitrarily time-varying uncertain parameters trough piecewise lyapunov functions. In: *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation* (Paris). Aceito.

[Nic01] Niculescu, S.-I., 2001. *Delay effects on Stability. A Robust Control Approach* (Springer-Verlag, Heidelberg).

[OHH94] Olgac, N. and Holm-Hansen, T., 1994. A novel active vibration absorption technique: delayed resonator. *Journal of Sound and Vibration*, 176:93–104.

[Ouc96] Oucheriah, S., 1996. Global stabilization of a class of linear continuous time-delay systems with saturating controls. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Fundamental Theory and Applications*, 43(12):1012–1015.

[PA01] Peaucelle, D. and Arzelier, D., 2001. Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4):624–630.

[Par99] Park, P., 1999. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3):876–487.

[PTGL03] Peres, P. L. D., Tarbouriech, S., Garcia, G., and Leite, V. J. S., 2003. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In: *Proceedings of the 2003 European Control Conference* (Cambridge, UK). In CD-rom.

[Ric03] Richard, J.-P., 2003. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694.

[RP01a] Ramos, D. C. W. and Peres, P. L. D., 2001. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378.

[RP01b] Ramos, D. C. W. and Peres, P. L. D., 2001. An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems. In: *Proceedings of the 2001 American Control Conference* (Arlington, VA), volume 1, 4073–4078.

[RP02] Ramos, D. C. W. and Peres, P. L. D., 2002. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678.

[SIG98] Skelton, R. E., Iwasaki, T., and Grigoriadis, K., 1998. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design* (Taylor & Francis, Bristol, PA).

[TG97] Tarbouriech, S. and Garcia, G., 1997. *Control of Uncertain Systems with Bounded Inputs*, volume 227 (Springer-Verlag, London).

[TG00] Tarbouriech, S. and Gomes da Silva Jr., J. M., 2000. Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMIs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(1):105–111.

[TGG04] Tarbouriech, S., Gomes da Silva Jr., J., and Garcia, G., 2004. Delay-dependent anti-windup strategy for linear systems with saturating inputs and delayed outputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14:665–682.

[TPG04] Tarbouriech, S., Prieur, C., and Gomes da Silva Jr., J., 2004. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC'04)* (Paradise Island, Bahamas), volume 5, 5493–5498.

[VFK93] Verriest, E. I., Fan, M. K. H., and Kullstam, J., 1993. Frequency domain robust stability criteria for linear delay systems. In: *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. 3473–3478.

[VLP06] Valmórbida, G., Leite, V. J. S., and Peres, P. L. D., 2006. Condições LMI do teorema do pequeno ganho escalonado para análise de estabilidade de sistemas com atraso. *SBA Controle & Automação*. Submetido à publicação.

[Vol28] Volterra, V., 1928. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires. *Journal des Mathematiques Pures et Appliquées*, 7:249–298.

[Vol31] Volterra, V., 1931. *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie* (Gauthier-Villars, Paris).

[VP05a] Valmórbida, G. and Peres, P. L. D., 2005. Condições LMI do teorema do pequeno ganho escalonado para análise de estabilidade de sistemas com atraso.

In: *XXVIII CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. In CD-rom.

[VP05b] Valmórbida, G. and Peres, P. L. D., 2005. Estabilização robusta de saída para sistemas com atraso: uma abordagem por LMIs e algoritmos genéticos. In: *VII SBAI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. In CD-rom.

[VQPT06] Valmórbida, G., Queinnec, I., Peres, P. L. D., and Tarbouriech, S., 2006. Synthèse de contrôleurs pour des systèmes avec retard et entrée saturé. In: *Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA 2006* (Bordeaux). Aceito.

[ZDG96] Zhou, K., Doyle, J. C., and Glover, K., 1996. *Robust and Optimal Control* (Prentice-Hall, New York, NY).

[ZKT01] Zhang, J., Knopse, K. R., and Tsiotras, P., 2001. Stability of time-delay systems: equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3):482–486.

[ZTK02] Zhang, X., Tsiotras, P., and Knospe, C., 2002. Stability analysis of LPV time-delayed systems. *International Journal of Control*, 75(7):538–558.