Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Estatísticas de Ordem Superior para Canais de Desvanecimento Weibull e Nakagami-*m*

Autor: Daniel Benevides da Costa
Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Engenharia Elétrica**.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub, ... DECOM/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. Sandro Adriano Fasolo, ... Inatel
Prof. Dr. Paulo Cardieri, ... DECOM/FEEC/Unicamp
Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes, ... DECOM/FEEC/Unicamp

Campinas, SP

Abril/2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C153m

Costa, Daniel Benevides da
Estatísticas de ordem superior para canais de desvanecimento Weibull e Nakagami-*m* / Daniel Benevides da Costa. –Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Michel Daoud Yacoub.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.
1. Sistemas de comunicação sem fio. 2. Rádio - Transmissores e transmissão - desvanecimento. 3. Correlação (Estatística). 4. Comunicações digitais. 5. Variáveis aleatórias. I. Yacoub, Michel Daoud. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Higher order statistics for Nakagami-*m* and Weibull fading channels
Palavras-chave em Inglês: Wireless communication systems, Correlated channels Nakagami-*m*, Weibull fading, Diversity, Average fade duration Random FM noise, Level crossing rate, Phase crossing rate.
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica.
Banca examinadora: Sandro Adriano Fasolo, Paulo Cardieri, Renato da Rocha Lopes.
Data da defesa: 28/04/2006

Resumo

Esta dissertação provê uma análise das estatísticas de ordem superior para canais de desvanecimento Weibull e Nakagami-*m*. Considerando canais de desvanecimento Weibull, devido à ausência de um modelo físico para tais canais, estatísticas conjuntas de duas variáveis Weibull correlacionadas foram obtidas em forma fechada e em função de parâmetros físicos bem conhecidos. Outra estatística encontrada foi a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento usando diversidade com dois ramos para canais Weibull correlacionados, desbalanceados e não-idênticos. Além disso, uma caracterização do comportamento do processo de fase e de sua derivada temporal para sinais Weibull foi realizada. Analisando canais de desvanecimento Nakagami-*m*, uma expressão simples e em forma fechada para a taxa de cruzamento de fase generalizada foi obtida. Resultados de simulação completamente validaram a formulação proposta. Além disso, novas estatísticas em forma fechada para a envoltória, para as componentes em fase e em quadratura, para a fase e para suas respectivas derivadas temporais foram obtidas.

Palavras-chave: Canais correlacionados; desvanecimento Nakagami-*m*; desvanecimento Weibull; diversidade; duração média de desvanecimento; ruído FM aleatório; taxa de cruzamento de nível; taxa de cruzamento de fase.

Abstract

This dissertation provides an analysis of the higher order statistics for Weibull and Nakagami-*m* fading channels. Concerning Weibull fading channels, due to the absence of a fading model related of such channels, joint statistics for two correlated Weibull variates were obtained in closed-form and in terms of well-known physical parameters. Other statistics found were the level crossing rate and the average fade duration for unbalanced, non-identical, correlated Weibull channels operating over two branches of diversity. Furthermore, a characterization of the behaviour of the phase process and its time derivative for Weibull signals was accomplish. Concerning Nakagami-*m* fading channels, a simple and closed-form expression for the generalized phase crossing rate was obtained. Results of simulation thoroughly validated the formulation proposed. Moreover, new closed-form statistics for the envelope, for the in-phase and quadrature components, for the phase and its respective time derivative were derived.

Keywords: Correlated channel; Nakagami-*m* fading; Weibull fading; diversity; average fade duration; random FM noise; level crossing rate; phase crossing rate .

A meus pais, avós, tios e namorada

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter permitido que eu chegasse até aqui.

Ao meu orientador Prof. Michel Daoud Yacoub por sua paciência e dedicação no meu aprendizado durante o mestrado.

A minha família pelo apoio durante esta jornada, em especial a minha namorada, a meu pai, a minha querida mãe e a minha querida avó.

Aos meus colegas do laboratório WissTek, em especial a Gustavo, Ugo, José Ricardo, Cândido, Álvaro e Yusef, pelas críticas e ajuda na elaboração desta dissertação.

Aos meus colegas do laboratório Optinet pela amizade e apoio durante esses anos. Em especial, agradeço a Divanilson, Raul, Darli, Gustavo Pavani, Iguatemi, Márcio e Renato.

Aos meus colegas da Unicamp, que de uma maneira ou de outra, contribuíram para a elaboração desta dissertação.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

"Sê escravo do saber se queres ser verdadeiramente livre."

Sêneca

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

M	-	Número de ramos de diversidade
$F_A(\cdot)$	-	CDF de uma variável aleatória A
$f_A(\cdot)$	-	PDF de uma variável aleatória A
$f_{A_1,A_2,\ldots,A_n}(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$	-	PDF conjunta das variáveis aleatórias A_1, A_2,..., A_n
$f_{A\|A_1,\ldots,A_n}(\cdot\|\cdot,\ldots,\cdot)$	-	PDF condicional de A dado A_1, A_2,..., A_n
$Pr(\cdot)$	-	Probabilidade de um evento
m	-	Parâmetro de desvanecimento de Nakagami-*m*
α	-	Parâmetro de desvanecimento de Weibull
α_i	-	Parâmetro de desvanecimento de Weibull do i-ésimo ramo
b	-	Parâmetro de desvanecimento de Hoyt
k	-	Parâmetro de desvanecimento de Rice
X	-	Componente em fase do sinal
Y	-	Componente em quadratura do sinal
$\dot{A}$	-	Derivada temporal de uma variável aleatória A
X_i	-	Componente em fase do sinal no i-ésimo ramo
Y_i	-	Componente em quadratura do sinal no i-ésimo ramo
σ^2	-	Variância de X e Y
$\dot{\sigma}^2$	-	Variância de $\dot{X}$ e $\dot{Y}$
σ_i^2	-	Variância de X_i e Y_i
$\sigma_{\dot{\Theta}}^2$	-	Variância de $\dot{\Theta}$
$E(\cdot)$	-	Média de uma variável aleatória
$Var(\cdot)$	-	Variância de uma variável aleatória
$Cov(\cdot)$	-	Operador covariância
R	-	Envoltória de Weibull
R_i	-	Envoltória de Weibull do i-ésimo ramo
R_R	-	Envoltória de Rayleigh
R_{Ri}	-	Envoltória de Rayleigh do i-ésimo ramo
R_m	-	Envoltória de Nakagami-*m*
Θ	-	Fase de Weibull
Θ_i	-	Fase de Weibull do i-ésimo ramo
Θ_R	-	Fase de Rayleigh
Θ_{Ri}	-	Fase de Rayleigh do i-ésimo ramo
Θ_m	-	Fase de Nakagami-*m*
$\hat{r}$	-	Raiz α-ésima de R^α
$\hat{r}_i$	-	Raiz α_i-ésima de $R_i^{\alpha_i}$

P	-	Envoltória normalizada do sinal Weibull com relação a $\hat{r}$
$\mathrm{P_i}$	-	Envoltória normalizada do sinal Weibull com relação a $\hat{r}_i$
Ω	-	Valor médio de R^α ou de R_R^2
Ω_i	-	Valor médio de $R_i^{\alpha_i}$
ρ_i	-	Envoltória normalizada com relação ao valor *rms*
P_i	-	Potência média do sinal Weibull no i-ésimo ramo
δ	-	Parâmetro de correlação
ϱ	-	Parâmetro de dependência
$\delta_{p,q}$	-	Coeficiente de correlação generalizado das envoltórias de Weibull
$\delta_{p,q}^R$	-	Coeficiente de correlação generalizado das envoltórias de Rayleigh
$\lvert \cdot \rvert$	-	Operador determinante
J	-	Jacobiano de uma transformação de variáveis
G_i	-	Processo gaussiano do i-ésimo sinal
$D(\phi)$	-	Diretividade horizontal
ϕ	-	Ângulo da potência incidente
ω	-	Desvio Doppler máximo em rad/s
f_m	-	Desvio Doppler máximo em Hz
τ	-	Diferença de tempo entre dois sinais desvanecidos
$\Delta\omega$	-	Diferença de freqüência entre dois sinais
T	-	Atraso no tempo
t	-	Espalhamento do atraso
$\mathbf{\Lambda}$	-	Matriz de covariância entre as componentes gaussianas de dois sinais
μ_1	-	Coeficiente de correlação entre X_1 e X_2 ou entre Y_1 e Y_2
μ_2	-	Coeficiente de correlação entre X_1 e Y_2 ou entre X_2 e Y_1
ξ	-	Raiz quadrada da soma quadrática de μ_1 e μ_2
$N_R(\cdot)$	-	Taxa de cruzamento de nível
$T_R(\cdot)$	-	Duração média de desvanecimento
$\mathrm{Arg}[\cdot]$	-	Argumento de um número complexo
ψ	-	Argumento da soma complexa entre os momentos conjuntos das componentes gaussianas de dois sinais
Z	-	Sinal Weibull complexo
Z_R	-	Sinal Rayleigh complexo
Z_i	-	Sinal Weibull complexo recebido no i-ésimo ramo
Z_{Ri}	-	Sinal Rayleigh complexo recebido no i-ésimo ramo
$\mathbf{Z}$	-	Matriz coluna de Z_i
Φ	-	Matriz de covariância complexa entre $\mathbf{Z}$ e $\dot{\mathbf{Z}}$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	-	Sub-matrizes da matriz Φ
$\mathbf{M}$	-	Matriz média da PDF condicional de $\dot{\mathbf{Z}}$ dado $\mathbf{Z}$
$\mathbf{\Delta}$	-	Matriz de covariância da PDF condicional de $\dot{\mathbf{Z}}$ dado $\mathbf{Z}$
$\rho_{il}(\tau)$	-	Coeficiente de correlação cruzado complexo entre o i-ésimo e o l-ésimo ramos
ρ_{il}	-	Valor de $\rho_{il}(\tau)$ para $\tau = 0$
$\dot{\rho}_{il}$	-	Derivada temporal de $\rho_{il}(\tau)$ em $\tau = 0$
$\ddot{\rho}_{il}$	-	Derivada temporal segunda de $\rho_{il}(\tau)$ em $\tau = 0$

$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$	-	Média da PDF condicional de $\dot{R}$ dado R_1, R_2, Θ_1 e Θ_2
$\sigma^2_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$	-	Variância da PDF condicional de $\dot{R}$ dado R_1, R_2, Θ_1 e Θ_2
$m_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$	-	Média da PDF condicional de $\dot{R}_i$ dado R_1, R_2, Θ_1 e Θ_2
$\sigma^2_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$	-	Variância da PDF condicional de $\dot{R}_i$ dado R_1, R_2, Θ_1 e Θ_2
$\sigma_{\dot{R}_i, \dot{R}_l}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$	-	Covariância entre $\dot{R}_i$ e $\dot{R}_l$ dado R_1, R_2, Θ_1 e Θ_2
$(\cdot)^*$	-	Operador conjugado
$(\cdot)^T$	-	Matriz transposta
$(\cdot)^H$	-	Matriz hermitiana
θ_0^+	-	Nível de cruzamento ascendente da fase
λ	-	Comprimento de onda da portadora
d	-	Espaçamento entre as antenas
β	-	Ângulo entre o eixo da antena e a direção de movimento do veículo em radiano
Re$[\cdot]$	-	Parte real de um número complexo
$N_\Theta(\cdot)$	-	Taxa de cruzamento de fase usual de sinais Weibull
$N_{\Theta_R}(\cdot)$	-	Taxa de cruzamento de fase usual de sinais Rayleigh
$N_{\Theta_m}(\cdot)$	-	Taxa de cruzamento de fase usual de sinais Nakagami-*m*
$N_{\Theta\|R}(\theta; r_1, r_2)$	-	Taxa de cruzamento de fase generalizada de sinais Weibull
$N_{\Theta_R\|R_R}(\theta; r_1, r_2)$	-	Taxa de cruzamento de fase generalizada de sinais Rayleigh
$N_{\Theta_m\|R_m}(\theta; r_1, r_2)$	-	Taxa de cruzamento de fase generalizada de sinais Nakagami-*m*
$sgn(\cdot)$	-	Sinal de uma variável
N	-	Variável Nakagami-*m*
W	-	Representa tanto a variável aleatória X quanto a variável aleatória Y

Lista de Siglas

PDF	-	Função densidade de probabilidade
CDF	-	Função de distribuição cumulativa
SC	-	Combinação por seleção
EGC	-	Combinação por ganho igual
MRC	-	Combinação por razão máxima
ND	-	Sem diversidade
JEPWD	-	Densidade conjunta da envoltória e fase de Weibull
LCR	-	Taxa de cruzamento de nível
AFD	-	Duração média de desvanecimento
PRC	-	Taxa de cruzamento de fase
GPCR	-	Taxa de cruzamento de fase generalizada
DC	-	Corrente contínua
AC	-	Corrente alternada
FM	-	Modulação em freqüência

Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. M. D. Yacoub, D. B. da Costa, U. S. Dias e G. Fraidenraich "Joint Statistics for Two Correlated Weibull Variates". *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 4, pgs. 129-132, 2005.

2. D. B. da Costa, M. D. Yacoub, J. C. S. S. Filho, G. Fraidenraich e J. R. Mendes. "Generalized Nakagami-m Phase Crossing Rate". *IEEE Communications Letters*, vol. 10, n° 1, pg. 13-15, Janeiro, 2006.

3. J. R. Mendes, M. D. Yacoub e D. B. da Costa "Closed-form Generalized Power Correlation Coefficient of Ricean Channels". *aceito para publicação na European Transactions on Telecommunications*, Janeiro, 2006.

4. D. B. da Costa, M. D. Yacoub e G. Fraidenraich. "Generalized Phase Crossing Rate and Random FM Noise for Weibull Fading Channels". *International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)*, Brasília, Brasil, 25-28 Julho, 2005.

5. D. B. da Costa, M. D. Yacoub e G. Fraidenraich. "Second-Order Statistics for Diversity-Combining of Non-Identical, Unbalanced, Correlated Weibull Signals". *International Microwave and Optoelectronicss Conference (IMOC)*, Brasília, Brasil, 25-28 Julho, 2005.

6. D. B. da Costa, M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, J. R. Mendes e J. C. S. S. Filho. "Generalized Nakagami-m Phase Crossing Rate". *XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*. Campinas, SP, Brasil, 04-08 Setembro, 2005.

7. U. S. Dias, M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, J. C. S. S. Filho e D. B. da Costa. "On the Weibull Autocorrelation Function: Field Trials and Validation". *XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*. Campinas, SP, Brasil, 04-08 Setembro, 2005.

Capítulo 1

Introdução

Em comunicações sem fio, um grande número de fatores afeta diretamente a qualidade do sinal recebido. A intensidade do sinal sofre freqüentes flutuações, ora proporcionando um sinal de boa qualidade, ora degradando o sinal. Torna-se, portanto, necessária uma caracterização mais precisa do mesmo, de forma que se possa ter uma melhor previsão de como será o comportamento do sinal quando sujeito a determinadas condições de propagação. Baseado nisso, o sinal rádio-móvel costuma ser tratado de forma estatística.

1.1 O Sinal em Comunicações sem Fio

A intensidade do sinal em comunicações sem fio é caracterizada por três fenômenos: perda de percurso, desvanecimento de longo prazo ou lento e desvanecimento de curto prazo ou rápido. A perda de percurso diz respeito à atenuação sofrida pelo sinal ao longo do percurso entre transmissor e receptor. Ela depende de um grande número de fatores que incluem altura da antena, freqüência de operação, ambiente de propagação, distância entre transmissor e receptor, entre outros. O desvanecimento lento é caracterizado pelo efeito do sombreamento provocado por obstruções topográficas ou morfológicas de larga escala. Tal desvanecimento determina a variação da média global do sinal recebido e ocorre ao longo de dezenas de comprimento de onda. O desvanecimento rápido decorre da propagação por múltiplos percursos, ou seja, da ação conjunta de múltiplas reflexões, espalhamento e difrações do sinal rádio-móvel ao longo do seu percurso. Esse tipo de desvanecimento afeta a média local do sinal e ocorre em intervalos de aproximadamente frações de comprimento de onda. Dentre os modelos utilizados para a caracterização das flutuações lentas do sinal, o mais utilizado está relacionado à distribuição Lognormal e, para as flutuações rápidas, os mais utilizados estão relacionados às distribuições Rayleigh, Hoyt, Rice e Nakagami-*m*. Entretanto, um outro modelo que recentemente tem despertado interesse é o relativo à distribuição Weibull. Nesta dissertação apresentaremos algumas estatísticas de ordem superior importantes relacionadas a ambientes de desvanecimento Weibull e Nakagami-*m* (desvanecimento rápido), dando uma ênfase maior ao primeiro.

Os fenômenos que influenciam a propagação por multipercurso são muitos e uma caracterização precisa destes é muito complexa. Devido a isso, uma análise determinística do sinal recebido torna-se extremamente difícil [1,2]. Costuma-se então caracterizar a propagação por multipercurso de forma estatística, ou seja, o sinal recebido é tratado como um processo estocástico.

Como conseqüência do Teorema Central do Limite, para um número de ondas do sinal de multipercurso suficientemente grande, o sinal recebido pode ser considerado um processo estocástico gaussiano complexo. O módulo desse processo corresponde à envoltória do sinal. As componentes em fase e em quadratura do sinal em banda base, quando analisados no mesmo instante e na mesma freqüência, são descorrelacionadas e, conseqüentemente, independentes. Além disso, quando a variância da componente em fase é igual à variância da componente em quadratura, a densidade de probabilidade (estatística de primeira ordem do processo estacionário) da envoltória do processo segue a distribuição Rayleigh [1,3,4]. Uma maneira de estender a distribuição Rayleigh é considerar que as componentes em fase e em quadratura do sinal possuem variâncias distintas. Neste caso, a função densidade de probabilidade segue a distribuição Hoyt [5]. Outra generalização da distribuição Rayleigh é a Nakagami-*m* [6], no qual o sinal que chega ao receptor pode ser modelado como um conjunto de *clusters* de ondas de multipercurso, onde o número de *clusters*, não necessariamente inteiro, é um parâmetro da distribuição (parâmetro *m*). As componentes em fase e em quadratura de cada um dos *clusters* são variáveis gaussianas de média nula e variâncias idênticas. A distribuição Weibull constitui outro caso de generalização de Rayleigh, mas a interpretação do fenômeno físico representado por tal ainda é objeto de investigação. Há outras distribuições generalizadas que caracterizam o fenômeno de multipercurso, tais como distribuição $\eta - \mu$ [7,8], distribuição $\kappa - \mu$ [8,9] e distribuição $\alpha - \mu$ [10,11]. A distribuição $\eta - \mu$ engloba as distribuições Nakagami-*m* e Hoyt; a distribuição $\kappa - \mu$ compreende as distribuições Nakagami-*m* e Rice; e a distribuição $\alpha - \mu$ tem como casos particulares as distribuições Nakagami-*m* e Weibull.

1.2 Diversidade

Contornar os efeitos prejudiciais da propagação por multipercurso é uma das difíceis tarefas no projeto de sistemas de comunicação sem fio. Há muitas técnicas de combate a esses efeitos. Técnicas de diversidade por combinação, codificação e equalização adaptativa são exemplos representativos. A combinação por diversidade, presente em sistemas de comunicação desde os anos 20, é uma técnica interessante por sua eficiência e relativa simplicidade de implementação.

O princípio de diversidade estabelece que desvanecimentos em canais independentes são eventos independentes. Assim, se determinada informação é disponibilizada com redundância em um certo número M de canais (ramos de diversidade), a probabilidade de que seja afetada por um desvanecimento profundo, simultaneamente em todos os canais, é menor que a probabilidade de ocorrência em qualquer um dos M canais. Por fim, combinando os sinais de informação dos diversos ramos com um algoritmo adequado (método de combinação), obtém-se um sinal resultante menos deteriorado pelo desvanecimento do que os sinais de cada ramo individualmente. Usualmente, existem dois tipos de esquemas de diversidade. Um deles é chamado diversidade macroscópica e o outro é denominado diversidade microscópica. A diversidade macroscópica é usada para combinar dois ou mais sinais sujeitos a desvanecimento lento (sinais Lognormal), por exemplo, sinais recebidos por caminhos independentes oriundos de duas ou mais antenas distintas de estações bases distintas. Por outro lado, a diversidade microscópica é usada para combinar dois ou mais sinais sujeitos a desvanecimento rápido (sinais Rayleigh, Hoyt, Rice, Weibull, dentre outros) e obtidos por caminhos independentes através de duas ou mais antenas distintas da mesma estação transmissora. Nesta dissertação, em especial no Capítulo 4, será analisada a diversidade microscópica para sinais Weibull.

1.2.1 Métodos de Combinação

A literatura costuma mencionar seis métodos de combinação, classificados em três grupos segundo o princípio de operação: combinação por seleção, combinação por adição e métodos híbridos. A combinação por seleção escolhe como saída um dos M sinais de diversidade, conforme algum critério. Na combinação por adição, o sinal resultante é uma combinação linear dos M sinais de diversidade. Uma mescla ocorre nos métodos híbridos: $1 \leq l \leq M$ sinais são selecionados e combinados adequadamente.

A seguir, apresentaremos uma breve descrição dos três métodos de combinação analisados no Capítulo 4 desta dissertação.

Combinação por Seleção Pura

Na combinação por seleção pura (SC, do inglês *selection combining*) os sinais de diversidade são monitorados continuamente e o melhor sinal é selecionado. O critério de seleção é a maior relação sinal-ruído. Na prática, entretanto, a presença de ruído dificulta a estimativa da potência do sinal puro, e o ramo com maior potência de “sinal+ruído” é selecionado. A necessidade de um receptor para cada ramo de diversidade e de monitoramento dos sinais a uma taxa superior à da ocorrência de desvanecimento são limitações desta técnica.

Combinação por Ganho Igual

O sinal resultante da combinação por ganho igual (EGC, do inglês *equal-gain combining*) corresponde à soma coerente dos M sinais de diversidade. Faz-se necessária, portanto, circuitaria para alinhar em fase os sinais dos ramos. Tal necessidade inexiste no método de seleção. Apesar disto, a simplicidade de implementação e a eficiência são características da EGC. Seu desempenho se aproxima do desempenho da combinação ótima (descrita a seguir), mesmo sendo substancialmente menos complexa.

Combinação por Razão Máxima

A combinação por razão máxima (MRC, do inglês *maximal ratio combining*) realiza uma soma ponderada dos sinais de diversidade, onde o coeficiente de ponderação de cada ramo é proporcional à razão entre o valor do seu sinal e a potência média do ruído correspondente. Este método resulta na combinação ótima, atingindo o limite máximo teórico de ganho com uso de diversidade com sinais para ramos identicamente distribuídos. O desempenho ideal não é atingido na prática devido a erros na estimativa dos ganhos de cada ramo. Recentes avanços na área de processamento digital de sinais, no entanto, impulsionaram o uso da MRC em sistemas atuais envolvendo receptores RAKE e *arrays* de antenas.

1.3 Estatísticas do Sinal Rádio-Móvel

Ao longo de toda esta dissertação, o sinal rádio-móvel será tratado estatisticamente. Dessa forma, torna-se importante um breve entendimento das principais estatísticas analisadas aqui.

Dentre as estatísticas de primeira ordem, o valor médio, a variância, a função densidade de probabilidade (PDF, do inglês *probability density function*) e a função de distribuição cumulativa (CDF, do inglês *cumulative distribution function*) podem ser citados como exemplos. Uma descrição completa de tais estatísticas e de suas respectivas propriedades podem ser encontradas em [12].

Dentre as estatísticas de segunda ordem, temos aquelas relacionadas a derivadas temporais, a autocorrelação e a autocovariância. As funções de autocorrelação e de autocovariância fornecem, respectivamente, a correlação e a covariância entre duas variáveis aleatórias do sinal, uma tomada no instante t_1 e na freqüência ω_1 e outra no instante t_2 e na freqüência ω_2. Para processos estocásticos estacionários (no sentido estrito ou mesmo no sentido amplo), estas funções não dependem dos instantes específicos t_1 e t_2 ou das freqüências específicas ω_1 e ω_2, mas apenas das diferenças $\tau = t_2 - t_1$ e $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ [12]. Nestes processos, a razão entre a covariância e a variância do processo é definida como coeficiente de correlação. Interpretando fisicamente, o coeficiente de correlação de um processo representa um meio de descrever a interdependência entre duas variáveis aleatórias deste processo, observando tal processo em instantes separados por τ segundos. Deste modo, processos que variam mais rapidamente com o tempo terão um coeficiente de correlação que decresce rapidamente com o aumento de τ [13]. O mesmo ocorre no domínio da freqüência.

Outras estatísticas de segunda ordem utilizadas na caracterização do sinal rádio-móvel estão relacionadas às distribuições conjuntas do sinal e de suas respectivas derivadas temporais. Para o caso da envoltória do sinal temos a taxa de cruzamento de nível (LCR, do inglês *level crossing rate*) e a duração média de desvanecimento (AFD, do inglês *average fade duration*). A LCR é uma estatística que mostra quantas vezes em média, por unidade de tempo, a envoltória do sinal em desvanecimento cruza no sentido positivo (ou negativo) um determinado limiar estabelecido. Tal estatística é bastante utilizada em códigos corretores de erros e algoritmos de *handoff*. A AFD representa o tempo médio total que a envoltória do sinal permanece abaixo de um determinado valor uma vez que ela o cruza no sentido decrescente. Uma de suas aplicações é na estimativa do tamanho de quadros e no entrelaçamento de bits. Relacionado à fase do sinal, temos a taxa de cruzamento de fase (PCR, do inglês *phase crossing rate*) cujo conceito é similar a LCR mas com um enfoque para a fase. Poucos trabalhos na literatura abordam este tipo de estatística (PCR), embora o estudo do processo de fase, assim como de sua derivada no tempo, seja de importância no projeto de sistemas de comunicação [14–17].

1.4 Objetivos

O objetivo desta dissertação é apresentar algumas estatísticas de primeira e segunda ordem para canais de desvanecimento Weibull e Nakagami-*m*. De forma resumida, tais estatísticas podem ser listadas abaixo para cada um dos modelos de desvanecimento analisados:

Modelo de Weibull: PDF conjunta de duas envoltórias correlacionadas, momentos conjuntos e coeficiente de correlação das envoltórias generalizado; LCR e AFD para as técnicas de diversidade SC, EGC e MRC com dois ramos e operando em canais correlacionados, desbalanceados e não-idênticos; taxa de cruzamento de fase generalizada (obviamente a PCR, isto é, a taxa de cruzamento de fase usual, é obtida como um caso particular), PDF e CDF do ruído FM aleatório, PDFs da envoltória e do ruído FM aleatório condicionada a eventos de cruzamento ascendentes da fase.

Modelo de Nakagami-*m*: PDF conjunta da envoltória, da fase e de suas respectivas derivadas no tempo, CDF da derivada da fase; taxa de cruzamento de fase generalizada (GPCR, do inglês *generalized phase crossing rate*).

Ressalta-se que os resultados a serem mostrados nesta dissertação são totalmente originais e constituem parte dos fundamentos para as comunicações sem fio.

1.5 Descrição dos Capítulos

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

- Capítulo 2: Neste Capítulo, alguns trabalhos anteriores relacionados ao tema desta dissertação são mencionados. Apresentamos também as contribuições deste trabalho.

- Capítulo 3: Este Capítulo tem como objetivo apresentar algumas estatísticas conjuntas de duas variáveis Weibull correlacionadas em função de parâmetros físicos de desvanecimento bem conhecidos. Em particular, a PDF conjunta, os momentos conjuntos generalizados e o coeficiente de correlação generalizado das envoltórias serão obtidos.

- Capítulo 4: Neste Capítulo, são apresentadas estatísticas de segunda ordem (LCR e AFD) para sinais Weibull correlacionados, desbalanceados e não-idênticos usando as técnicas de diversidade SC, EGC e MRC com dois ramos ($M = 2$). Diferentemente da abordagem feita em muitas trabalhos já publicados, nesta dissertação usamos aquela feita em [18, 19] para ambientes de desvanecimento Rayleigh que, de fato, é a mais correta.

- Capítulo 5: Neste Capítulo, uma caracterização do comportamento da fase e de sua derivada no tempo (ruído FM aleatório) para canais de desvanecimento Weibull é realizada. Uma expressão em forma fechada para a PCR condicionada ao fato que a envoltória desvanecida está dentro de um intervalo arbitrário (GPCR) é apresentada assim como são obtidas algumas estatísticas relacionadas ao ruído FM aleatório. Além disso, as PDFs da envoltória do sinal e do ruído FM aleatório condicionada a cruzamentos ascendentes da fase em um nível fixo são obtidas.

- Capítulo 6: Este Capítulo provê uma expressão simples, exata, nova e em forma fechada para a GPCR de canais sujeitos a desvanecimento Nakagami-m. Além disso, novas estatísticas em forma fechada da envoltória, de suas componentes em fase e em quadratura, da fase, e de suas respectivas derivadas temporais são obtidas. Nossa formulação baseia-se num modelo de desvanecimento recentemente proposto em [20], no qual uma PDF conjunta da envoltória e da fase para desvanecimento Nakagami-m foi apresentada.

- Capítulo 7: Neste Capítulo, considerações finais e perspectivas de investigações futuras são apresentadas.

- Apêndice A: Neste Apêndice, uma derivação da PDF marginal de um processo Weibull é realizada.
- Apêndice B: Neste Apêndice é apresentada uma formulação da matriz de covariância complexa de uma variável aleatória gaussiana e suas derivadas.
- Apêndice C: Neste Apêndice é feita uma demonstração das estatísticas condicionais (média, variância e covariância) da derivada da envoltória na entrada do combinador.

Capítulo 2

Trabalhos Anteriores e Contribuições

A caracterização estatística do sinal rádio-móvel é um tópico da área de comunicações sem fio que tem sido extensivamente estudado na literatura para modelos estatísticos de desvanecimento bem conhecidos, tais como Rayleigh, Rice, Nakagami-*m* e Hoyt. O modelo de Weibull passou a despertar interesse apenas recentemente, mas devido ao não conhecimento do fenômeno físico envolvido com a obtenção de tal distribuição, ainda são escassos estudos no ramo da pesquisa usando este modelo em ambientes de desvanecimento. Além disso, quando a distribuição Nakagami-*m* foi proposta [6], nenhuma informação relacionada à fase do sinal foi fornecida. Sendo assim, era comum supor-se que a fase do sinal Nakagami-*m* seguia uma PDF uniforme, independente do parâmetro de desvanecimento m. Um modelo físico para a fase foi recentemente apresentada em [20]. Neste Capítulo apresentaremos alguns trabalhos anteriores relacionados a esta dissertação, ressaltando as contribuições.

Usando um resultado obtido em [21], Sagias *et al.* em [22] propôs uma PDF conjunta para o sinal Weibull com o intuito de investigar o desempenho da diversidade por seleção com dois ramos em canais de desvanecimento correlacionados. Tal PDF conjunta é obtida em [21] como uma combinação de duas PDFs marginais de Weibull, sendo esta apresentada em termos de um "parâmetro de dependência" ϱ, que não é o coeficiente de correlação δ de duas variáveis Weibull correlacionadas. A definição matemática $\delta = f(\varrho)$ foi encontrada usando a definição estatística de coeficiente de correlação. A equação resultante era tal que o parâmetro de dependência não poderia ser expresso diretamente em termos do coeficiente de correlação, isto é, $\varrho = f^{-1}(\delta)$ não poderia ser encontrado explicitamente. Portanto, a distribuição conjunta, que é escrita em termos do parâmetro de dependência ϱ, aparece somente indiretamente em termos do coeficiente de correlação δ de suas variáveis. Ambos ϱ e δ são basicamente variáveis adimensionais variando de zero a 1, e não possuem nenhuma relação com os parâmetros físicos que afetam o fenômeno do desvanecimento. Uma evidência mostrada pelos autores em [22] foi que, apesar do fato da PDF marginal Weibull incluir a PDF marginal Rayleigh como caso especial, a PDF conjunta Weibull resultante em [22] não compreendia a PDF conjunta

Rayleigh como caso especial. Uma das contribuições desta dissertação, apresentada no Capítulo 3, é a obtenção da PDF conjunta Weibull, no qual o coeficiente de correlação aparece explicitamente na equação resultante. Tal coeficiente de correlação é obtido em termos de parâmetros físicos de desvanecimento bem conhecidos. Portanto, todas as estatísticas conjuntas podem ser escritas como funções desses parâmetros de desvanecimento. Além disso, a PDF conjunta Rayleigh constitui um caso especial da distribuição proposta. É importante mencionar que ambas as PDFs, aquela de [22] e a apresentada no Capítulo 3, são PDFs conjuntas Weibull, em que a validade em comunicações sem fio pode somente ser mostrada com experimentos em campo. Existem, contudo, algumas vantagens importantes referente à PDF conjunta Weibull proposta nesta dissertação, dentre elas: é simples; é completamente caracterizada em termos de parâmetros físicos de desvanecimento; é consistente com outras PDFs conjuntas mais gerais usadas em comunicações sem fio, tais como Rice [23, 24] e Nakagami-*m* [6], desde que ela compreende a PDF conjunta de Rayleigh como caso particular.

Embora, em sistemas práticos, os sinais dos ramos na entrada do combinador possam ser correlacionados e não-identicamente distribuídos [18, 19, 25–27], ainda são escassos na literatura trabalhos relacionados a LCR e AFD usando técnicas de diversidade com ramos correlacionados e não-idênticos. Um trabalho pioneiro nesse assunto foi feito por Adachi *et al.* [18] para sistemas SC, EGC e MRC sobre canais de desvanecimento Rayleigh correlacionados e balanceados. Uma extensão do trabalho realizado em [18] foi feito em [19] para canais desbalanceados. O caso de canais de desvanecimento Rayleigh correlacionados e desbalanceados foi analisado em [26] para dois, três e quatro ramos MRC. Mais recentemente, [25] apresentou um tratamento unificado para a LCR e a AFD para SC com M ramos sobre canais Rayleigh, Rice, e Nakagami-*m* correlacionados e desbalanceados. Em [27], a LCR e a AFD para MRC foi calculada para um ambiente de desvanecimento Nakagami-*m* desbalanceado e correlacionado. Mas, diferentemente de [18, 19], uma restrição foi feita em [25–27], em que os processos descritos pelas derivadas no tempo das envoltórias dos ramos foram assumidos ser independentes entre si e com as envoltórias dos demais ramos. Em geral, isso não é verdadeiro para desvanecimento Rayleigh, Rice e Nakagami-*m* correlacionados; embora a envoltória do i-ésimo ramo seja de fato independente de sua derivada, esta última é geralmente correlacionada com a envoltória e a derivada no tempo da envoltória do l-ésimo ramo, $i \neq l$, como corretamente demonstrado em [18] e posteriormente em [19]. Outra contribuição dessa dissertação, apresentada no Capítulo 4, é então a obtenção da LCR e AFD para sistemas SC, EGC e MRC com dois ramos operando em canais de desvanecimento Weibull correlacionados, desbalanceados e não-idênticos usando a abordagem feita em [18, 19].

Apesar do conhecimento da variação da fase do sinal desvanecido ter um papel importante no projeto de qualquer técnica de comunicação, pouca atenção tem sido dada para o estudo do processo de fase e de sua derivada no tempo, conhecida como ruído FM aleatório. Em [17], estatísticas de cruzamento dos processos de fase e do ruído FM aleatório são apresentadas para canais de desvanecimento Hoyt. A taxa de cruzamento de fase é obtida para qualquer nível de cruzamento da fase. Além disso, as PDFs condicionais da envoltória e do ruído FM aleatório, condicionada a um nível de cruzamento ascendente da fase, são introduzidas. Nesta dissertação (em especial nos Capítulos 5 e 6), é feita uma generalização do conceito da taxa de cruzamento de fase, no qual esta fica então condicionada a envoltória do sinal estar dentro de um certo intervalo arbitrário. No Capítulo 5 uma análise semelhante à feita em [17] é realizada para canais de desvanecimento Weibull, no qual a fase é considerada uniformemente distribuída de $-2\pi/\alpha$ a $2\pi/\alpha$, onde α representa o parâmetro de desvanecimento de Weibull. A grande contribuição deste Capítulo é então a de que não existem estudos na literatura reportando as estatísticas do processo de fase e do ruído FM aleatório em canais Weibull, além de extender o conceito de taxa de cruzamento de fase (que também é feita no Capítulo 6).

Um trabalho pioneiro relacionado à taxa de cruzamento de fase foi realizado por Rice no seu artigo clássico [14], no qual o objetivo era avaliar o comportamento do ruído *click* em sistemas FM, assumindo o espectro do ruído ser simétrico sobre a freqüência da onda. Desse modo, Rice obteve a taxa de cruzamento de fase para níveis de fase particulares $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ com a envoltória pertencendo a um intervalo arbitrário. Em [16], o trabalho de Rice foi estendido considerando-se espectro do ruído assimétrico assim como níveis de fase arbitrários. A caracterização do processo de fase para canais de desvanecimento Nakagami-*m* ainda não existe na literatura. Sendo assim, o Capítulo 6 desta dissertação propõe uma expressão simples e em forma fechada para a GPCR de canais de desvanecimento Nakagami-*m*, baseado numa formulação recentemente publicada em [20]. Diferentemente do que já foi apresentado em muitos trabalhos, é mostrado que, exceto para o caso $m = 1$, a distribuição da fase não é uniforme. Novas estatísticas referentes a densidade conjunta da envoltória, de suas componentes em fase e em quadratura, da fase e de suas respectivas derivadas no tempo também são apresentadas. Resultados numéricos obtidos por simulação completamente validam tal formulação proposta neste Capítulo.

Capítulo 3

Estatísticas Conjuntas de Duas Variáveis Weibull Correlacionadas

A distribuição de Weibull é uma distribuição empírica que foi originalmente utilizada como um modelo estatístico para análise de confiabilidade. Devido à sua simplicidade, flexibilidade e ao excelente ajuste que se tem conseguido com medidas de campo em ambientes *indoor* [2, 28] e *outdoor* [29, 30], sua aplicação foi logo estendida a sistemas de comunicação sem fio [29–34]. É claro que, por ter sido utilizada primeiramente em estudos de confiabilidade, nenhum modelo físico tem sido associado a tal distribuição. Em [10, 11], um modelo físico para uma distribuição de desvanecimento generalizada foi proposta, no qual Weibull aparece como um caso especial. Na realidade, como proposto em [10, 11], o modelo de desvanecimento para a distribuição Weibull considera um sinal composto por um *cluster* de ondas de multipercurso propagando em um ambiente não-homogêneo. Dentro do *cluster*, as fases das ondas espalhadas são aleatórias. A envoltória resultante é então obtida como uma função não-linear do módulo da soma das componentes de multipercurso. Tal não-linearidade é manifestada em termos de um parâmetro de potência, de forma que a intensidade do sinal resultante é obtido não apenas como o módulo da soma das componentes de multipercurso, mas como esse módulo elevado a um certo expoente. O autor em [10, 11] não tenta explicar o porquê ou como tal não-linearidade acontece ou se até mesmo ela ocorre. O que o autor conjectura é que o efeito resultante do sinal propagado em um certo meio é manifestado em termos de uma não-linearidade. Além do fenômeno relacionado ao meio de propagação, tal não-linearidade pode advir das limitações práticas do processo de detecção no receptor.

Este Capítulo tem como objetivo apresentar expressões simples e em forma fechada para as estatísticas conjuntas de duas variáveis Weibull correlacionadas. Em particular, a PDF conjunta, os momentos conjuntos generalizados e o coeficiente de correlacão generalizado das envoltórias serão obtidos em termos de parâmetros físicos de desvanecimento bem conhecidos, tais como: ângulo da potência incidente, velocidade do receptor, freqüência de operação, diretividade de recepção, desvio Doppler máximo, dentre outros. Alguns aspectos referentes ao coeficiente de correlação generalizado serão também apresentados e discutidos, onde se obter-se-ão conclusões interessantes.

3.1 Modelo de Weibull - Estatísticas Marginais da Envoltória

Antes de obtermos as estatísticas conjuntas de duas variáveis Weibull correlacionadas, torna-se necessária uma breve apresentação de algumas estatísticas marginais da envoltória de um sinal Weibull. De acordo com o modelo descrito em [10,11], a envoltória do sinal resultante de um processo Weibull é um processo não-linear obtido não apenas como o módulo da soma das componentes de multipercurso, mas como esse módulo elevado a um certo expoente. Supondo que tal não-linearidade é na forma de um parâmetro de potência α, a envoltória resultante R pode ser expressa como

$$R^\alpha = X^2 + Y^2 \tag{3.1}$$

onde X e Y são processos gaussianos mutuamente independentes com médias nula, ou seja, $E(X) = E(Y) = 0$, e variâncias idênticas $\sigma^2 = \hat{r}^\alpha/2$ tal que $E(X^2) = E(Y^2) = \hat{r}^\alpha/2$, onde $E(\cdot)$ denota média estatística. A partir de (3.1), pode ser mostrado que a PDF $f_R(\cdot)$ de R é dada por (ver Apêndice A)

$$f_R(r) = \frac{\alpha r^{\alpha-1}}{\hat{r}^\alpha} \exp\left(-\frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right) \tag{3.2}$$

O parâmetro $\hat{r}$ definido aqui representa o valor médio da raiz α-ésima de R^α, isto é, $\sqrt[\alpha]{E(R^\alpha)}$. Para uma envoltória normalizada $\mathrm{P} = R/\hat{r}$, a PDF $f_\mathrm{P}(\cdot)$ de P pode ser escrita como

$$f_\mathrm{P}(\rho)d\rho = f_R(r)dr \therefore f_\mathrm{P}(\rho) = f_R(r)\frac{dr}{d\rho} = \hat{r} f_R(r)$$
$$f_\mathrm{P}(\rho) = \alpha\rho^{\alpha-1}\exp(-\rho^\alpha) \tag{3.3}$$

Figura 3.1 esboça a PDF da envoltória normalizada de Weibull, dada em (3.3), para diversos valores do parâmetro de potência α. É bom salientar que para $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ tal PDF reduz a uma Exponencial Negativa e a Rayleigh, respectivamente. A CDF $F_R(\cdot)$ da envoltória R pode ser obtida a partir de sua PDF por meio da expressão $F_R(r) = \int_{-\infty}^{r} f_U(u)du$. Logo, a CDF de R é dada por

$$F_R(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right) \tag{3.4}$$

Equivalentemente,

$$F_{\mathrm{P}}(\rho) = 1 - \exp(-\rho^{\alpha}) \tag{3.5}$$

Aplicando os conceitos de teoria da probabilidade, temos que o k-ésimo momento da envoltória normalizada P é obtido como

$$E(\mathrm{P}^k) = \int_0^{\infty} \rho^k f_{\mathrm{P}}(\rho) d\rho = \Gamma(1 + k/\alpha) \tag{3.6}$$

onde $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt$ é a função Gamma. Obviamente, $E(R^k) = \hat{r}^k E(\mathrm{P}^k)$. De (3.1) segue a seguinte relação

$$R^{\alpha} = R_R^2 \tag{3.7}$$

onde R_R é a envoltória do sinal Rayleigh. Devido à relação existente entre as envoltórias dos modelos de Weibull e Rayleigh dada em (3.7), as estatísticas conjuntas das envoltórias de Weibull podem ser obtidas capitalizando alguns resultados já disponíveis na literatura para a distribuição de Rayleigh. Para as próximas Seções adotar-se-ão R_{R1} e R_{R2} como sendo duas variáveis Rayleigh cujas estatísticas marginais serão, respectivamente, descritas pelos parâmetros $E(R_{R1}^2) = \Omega_1$ e $E(R_{R2}^2) = \Omega_2$; R_1 e R_2 duas variáveis Weibull cujas estatísticas marginais serão, respectivamente, descritas pelos parâmetros α_1, $\hat{r_1}$, α_2 e $\hat{r_2}$; e $0 \leq \delta \leq 1$ denotará um parâmetro de correlação (na Seção 3.4 uma análise mais detalhada é feita acerca deste parâmetro).

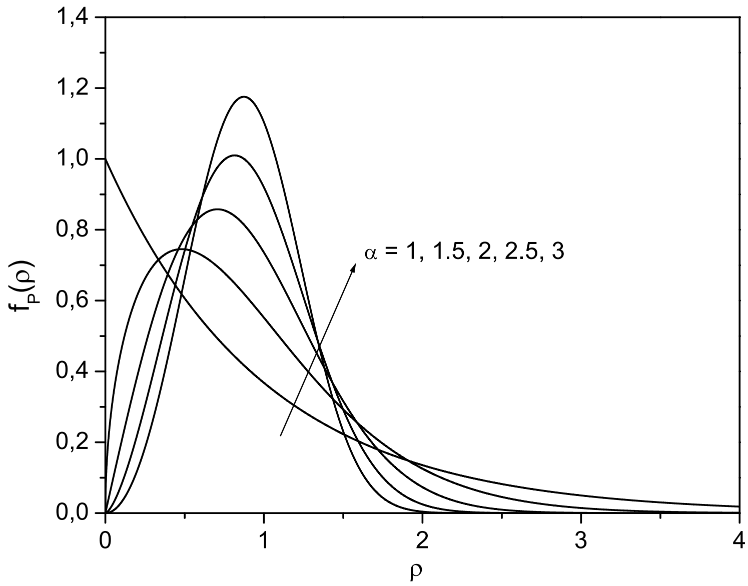

Fig. 3.1: PDF da envoltória normalizada de Weibull.

3.2 PDF Conjunta das Envoltórias

A PDF conjunta $f_{R_{R1},R_{R2}}(\cdot,\cdot)$ de duas variáveis Rayleigh correlacionadas com estatísticas marginais conforme descritas anteriormente é dada por [6, Eq. 122] (ou, equivalentemente, por [24, Eq. 3.7-13]). De (3.7), temos as seguintes relações $R_1^{\alpha_1} = R_{R1}^2$ e $R_2^{\alpha_2} = R_{R2}^2$, o que implica que $\hat{r_1}^{\alpha_1} = \Omega_1$ e $\hat{r_2}^{\alpha_2} = \Omega_2$. A partir de [6, Eq. 122] e das relações dadas, a PDF conjunta de duas variáveis Weibull correlacionadas é encontrada como [12, Eq. 6-115]

$$f_{R_1,R_2}(r_1,r_2) = |J| f_{R_{R1},R_{R2}}(r_1,r_2) \tag{3.8}$$

no qual

$$f_{R_{R1},R_{R2}}(r_1,r_2) = \frac{4r_1r_2}{\Omega_1\Omega_2(1-\delta)} \exp\left(-\frac{(r_1^2/\Omega_1)+(r_2^2/\Omega_2)}{1-\delta}\right) I_0\left(\frac{2r_1r_2}{1-\delta}\sqrt{\frac{\delta}{\Omega_1\Omega_2}}\right) \tag{3.9}$$

e J é o jacobiano da transformação tal que $|J| = (\alpha_1\alpha_2/4)\, r_1^{\alpha_1/2-1} r_2^{\alpha_2/2-1}$, onde $|\cdot|$ representa o operador determinante. Fazendo as substituições apropriadas temos

$$f_{R_1,R_2}(r_1,r_2) = \frac{\alpha_1\,\alpha_2\, r_1^{\alpha_1-1} r_2^{\alpha_2-1}}{\hat{r_1}^{\alpha_1}\hat{r_2}^{\alpha_2}(1-\delta)} \exp\left(-\frac{(r_1/\hat{r_1})^{\alpha_1}+(r_2/\hat{r_2})^{\alpha_2}}{1-\delta}\right) I_0\left(\frac{2}{1-\delta}\sqrt{\frac{\delta r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2}}{\hat{r_1}^{\alpha_1}\hat{r_2}^{\alpha_2}}}\right) \tag{3.10}$$

onde $I_\nu(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem ν ([35, eq. 9.6.18]). Para $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, (3.10) reduz a [6, Eq. 122], ou seja, para essa condição, (3.10) resulta na distribuição conjunta de duas envoltórias Rayleigh correlacionadas, como esperado. É bom enfatizar que (3.10) está expresso em função de parâmetros físicos bem conhecidos pois está explicitamente escrita em função do parâmetro de correlação δ (ver Seção 3.4), ao contrário de [22]. Nesta dissertação, em particular na Seção 3.4, utilizaremos o modelo de Jakes [36] para expressar δ.

Seguindo o procedimento estatístico padrão de transformação de variáveis e após algumas manipulações algébricas, a PDF conjunta $f_{\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2}(\cdot,\cdot)$ das variáveis Weibull normalizadas $\mathrm{P}_1 = R_1/\hat{r_1}$ e $\mathrm{P}_2 = R_2/\hat{r_2}$ é dada por

$$f_{\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2}(\rho_1,\rho_2) = \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,\rho_1^{\alpha_1-1}\rho_2^{\alpha_2-1}}{1-\delta} \exp\left(-\frac{\rho_1^{\alpha_1}+\rho_2^{\alpha_2}}{1-\delta}\right) I_0\left(\frac{2\sqrt{\delta\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}}}{1-\delta}\right) \tag{3.11}$$

3.3 Momentos Conjuntos Generalizados

Os momentos conjuntos generalizados $E(\mathrm{P}_1^{\mathrm{p}}\mathrm{P}_2^{\mathrm{q}})$ de duas variáveis Weibull normalizadas podem ser encontrados a partir de (3.11) usando o procedimento padrão de teoria da probabilidade, ou seja, $E(\mathrm{P}_1^{\mathrm{p}}\mathrm{P}_2^{\mathrm{q}}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_1^p \rho_2^q f_{\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2}(\rho_1, \rho_2) d\rho_1 d\rho_2$. Portanto, após manipulações algébricas, temos

$$E(\mathrm{P}_1^{\mathrm{p}}\mathrm{P}_2^{\mathrm{q}}) = \Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(1 + \frac{q}{\alpha_2}\right) {}_2F_1\left(-\frac{p}{\alpha_1}, -\frac{q}{\alpha_2}; 1; \delta\right) \tag{3.12}$$

onde ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ é a função hipergeométrica [35, Eq. 15.1.1]. Obviamente, $E(R_1^p R_2^q)$ pode ser obtido a partir de (3.12) pois $E(R_1^p R_2^q) = \hat{r_1}^p \hat{r_2}^q E(\mathrm{P}_1^{\mathrm{p}}\mathrm{P}_2^{\mathrm{q}})$. Logo,

$$E(R_1^p R_2^q) = \hat{r_1}^p \hat{r_2}^q \,\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(1 + \frac{q}{\alpha_2}\right) {}_2F_1\left(-\frac{p}{\alpha_1}, -\frac{q}{\alpha_2}; 1; \delta\right) \tag{3.13}$$

Para $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, (3.13) reduz a [6, Eq. 137] com $m = 1$, ou seja, para esta condição, (3.13) resulta nos momentos conjuntos generalizados de duas envoltórias Rayleigh. Assim como na Seção anterior, pode-se perceber que as equações aqui obtidas são simples e expressas diretamente em termos de parâmetros físicos (ou seja, de δ).

3.4 Coeficiente de Correlação Generalizado

O coeficiente de correlação generalizado $\delta_{p,q}$ de duas variáveis Weibull é definido como

$$\delta_{p,q} = \frac{Cov(R_1^p, R_2^q)}{\sqrt{Var(R_1^p)Var(R_2^q)}} = \frac{Cov(\mathrm{P}_1^{\mathrm{p}}, \mathrm{P}_2^{\mathrm{q}})}{\sqrt{Var(\mathrm{P}_1^{\mathrm{p}})Var(\mathrm{P}_2^{\mathrm{q}})}} \tag{3.14}$$

onde $Var(\cdot)$ e $Cov(\cdot)$ são os operadores variância [12, Eq. 5-61] e covariância [12, Eq. 6-164], respectivamente. Substituindo (3.6) e (3.12) em (3.14), e após manipulações algébricas, a expressão final para o coeficiente de correlação generalizado é

$$\delta_{p,q} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha_1}\right)\Gamma\left(1 + \frac{q}{\alpha_2}\right)\left({}_2F_1\left(-\frac{p}{\alpha_1}, -\frac{q}{\alpha_2}; 1; \delta\right) - 1\right)}{\sqrt{\left(\Gamma\left(1 + \frac{2p}{\alpha_1}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{p}{\alpha_1}\right)\right)\left(\Gamma\left(1 + \frac{2q}{\alpha_2}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{q}{\alpha_2}\right)\right)}} \tag{3.15}$$

Para $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, (3.15) resulta no coeficiente de correlação generalizado de duas envoltórias Rayleigh. Para $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ e $p = q$, (3.15) reduz a [6, Eq. 139] com $m = 1$. Em seguida, algumas particularidades de (3.15) serão apresentadas e discutidas.

3.4.1 Alguns aspectos relacionados ao coeficiente de correlação

Seja $\delta_{p,q}^{R}$ o coeficiente de correlação generalizado de Rayleigh tal que

$$\delta_{p,q}^{R} = \frac{Cov(R_{R1}^{p}, R_{R2}^{q})}{\sqrt{Var(R_{R1}^{p})Var(R_{R2}^{q})}} \tag{3.16}$$

Aplicando a relação (3.7) em (3.14) e (3.16), obtemos a seguinte igualdade $\delta_{\alpha_1,\alpha_2} = \delta_{2,2}^{R}$. Além disso, fazendo $p = \alpha_1$ e $q = \alpha_2$ em (3.15), obtemos também que $\delta_{\alpha_1,\alpha_2} = \delta$. Isso é um resultado importante, pois mostra que o coeficiente de correlação δ iguala tanto ao coeficiente de correlação da distribuição de Weibull para $p = \alpha_1$ e $q = \alpha_2$ quanto ao coeficiente de correlação de duas envoltórias quadráticas de Rayleigh (coeficiente de correlação de potência). Portanto

$$\delta = \delta_{\alpha_1,\alpha_2} = \delta_{2,2}^{R} \tag{3.17}$$

Dessa forma, o coeficiente de correlação generalizado de Weibull $\delta_{p,q}$ pode agora ser expresso em termos do coeficiente de correlação de potência de Rayleigh $\delta_{2,2}^{R}$. Escrevendo então os processos Rayleigh em função dos processos gaussianos em fase e em quadratura, temos que $R_{Ri}^2 = X_i^2 + Y_i^2$, $i = 1, 2$. As componentes gaussianas X_i e Y_i possuem médias nulas e variâncias idênticas. Para o processo Rayleigh valem as relações $E(X_iX_j) = E(Y_iY_j)$, $\forall i, j$, $E(X_iY_j) = -E(X_jY_i)$, $i \neq j$. Temos também que, para dois processos gaussianos G_i quaisquer para o qual $E(G_i) = 0$, são válidas as relações $E(G_i^4) = 3E(G_i^2)$ e $E(G_1^2G_2^2) = E(G_1^2)E(G_2^2) + 2E^2(G_1G_2)$. Usando isso em (3.17) e após manipulações algébricas, obtemos

$$\delta = \frac{E^2(X_1X_2) + E^2(X_1Y_2)}{E(X_1^2)E(X_2^2)} \tag{3.18}$$

As estatísticas acima, presentes em (3.18), podem ser aplicadas a qualquer modelo de desvanecimento de maneira a obter $\delta = \delta_{2,2}^{R}$. Portanto, o coeficiente de correlação de Weibull $\delta_{p,q}$ pode ser expresso em função das estatísticas conjuntas das componentes em fase e em quadratura do processo Rayleigh. Em particular, para o modelo de Jakes [36], usando (1.5-11), (1.5-14) e (1.5-15) de [36], temos que

$$\delta = \frac{E^2(D(\phi)\cos(\omega\tau\cos\phi - \Delta\omega T)) + E^2(D(\phi)\sin(\omega\tau\cos\phi - \Delta\omega T))}{E^2(D(\phi))} \tag{3.19}$$

onde: $D(\phi)$ é a diretividade horizontal da antena receptora; ϕ representa o ângulo da potência incidente; ω é o desvio Doppler máximo em rad/s; τ é a diferença de tempo entre os dois sinais desvanecidos; $\Delta\omega$ é a diferença de freqüência entre esses sinais, e T representa o atraso no tempo. Para um espalhamento isotrópico, ou seja, distribuição angular uniforme da potência incidente, antenas receptoras omnidirecionais ($D(\phi) = 1$), e o atraso no tempo T distribuído exponencialmente, (3.19) reduz a

$$\delta = \frac{J_0^2(\omega\tau)}{1 + (\Delta\omega t)^2} \tag{3.20}$$

no qual t é o espalhamento do atraso e $J_0(\cdot)$ é a função de Bessel de ordem zero. Com os resultados obtidos nessa Seção para o parâmetro de correlação δ, fica agora claro que tanto os momentos conjuntos generalizados quanto a PDF conjunta das envoltória de Weibull podem ser expressos explicitamente em função de parâmetros físicos.

3.5 Resultados Numéricos

Esta Seção ilustra como o coeficiente de correlação das envoltórias de Weibull varia na condição isotrópica. Dessa forma, δ, dado em (3.20), é substituído em (3.15) com $p = q = 1$. Figura 3.2 descreve $\delta_{1,1}$ em função de $\omega\tau$ para diferentes valores do parâmetro de Weibull nas condições $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\Delta\omega = 0$. Figura 3.3 mostra $\delta_{1,1}$ em função de $\Delta\omega t$ para diferentes valores do parâmetro de Weibull com $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\omega\tau = 0$. Note que em ambas as Figuras, para $\alpha_1 = \alpha_2 > 1$, uma grande variação do parâmetro de Weibull, indo de $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 100$, implica numa pequena variação das curvas. De fato, foi observado que a curva, para o qual $\alpha_1 = \alpha_2 = 100$, é praticamente coincidente com aquela para o qual $\alpha_1 = \alpha_2 \to \infty$. Portanto, conclui-se que o coeficiente de correlação não varia muito para $\alpha_1 = \alpha_2 > 1$. O mesmo não pode ser dito para $\alpha_1 = \alpha_2 < 1$. De fato, para $\alpha_1 = \alpha_2 \to 0$ o coeficiente de correlação tende ao impulso na origem.

Sabendo que a condição $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ corresponde ao caso Rayleigh, as propriedades de correlação para o ambiente de desvanecimento Weibull são aproximadas aquelas para o ambiente de desvanecimento Rayleigh quando o parâmetro de Weibull é maior que 1. De forma contrária, as propriedades de correlação diferem substancialmente entre os ambientes Rayleigh e Weibull quando o parâmetro de Weibull é menor que 1.

Figuras 3.4 e 3.5 descrevem $\delta_{1,1}$ em função de $\omega\tau$ (para $\Delta\omega t = 0$) e em função de $\Delta\omega t$ (para $\omega\tau = 0$), respectivamente. Em ambas as Figuras, variou-se α_2 e manteve-se $\alpha_1 = 0.5$. Perceba que, à medida que α_2 diminui, de forma a se aproximar do valor de α_1 (envoltórias assumindo parâmetros de desvanecimento próximos), o coeficiente de correlação se aproxima da unidade na origem.

3.6 Conclusões

Neste Capítulo apresentamos expressões simples e em forma fechada para as estatísticas conjuntas de duas variáveis Weibull correlacionadas. Estas estatísticas foram escritas em termos de parâmetros físicos de desvanecimento bem conhecidos. Além disso observou-se que, na condição isotrópica, as propriedades de correlação para o ambiente de desvanecimento Weibull são aproximadamente as mesmas que as do ambiente Rayleigh para o caso em que o parâmetro de Weibull foi maior que 1. Por outro lado, elas diferiram substancialmente umas das outras quando o parâmetro de Weibull era menor que 1.

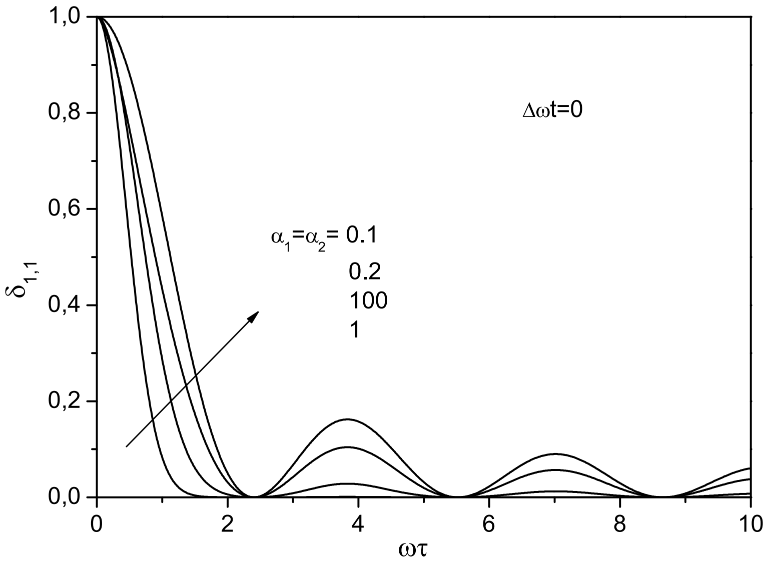

Fig. 3.2: Coeficiente de correlação das envoltórias de Weibull em função de $\omega\tau$.

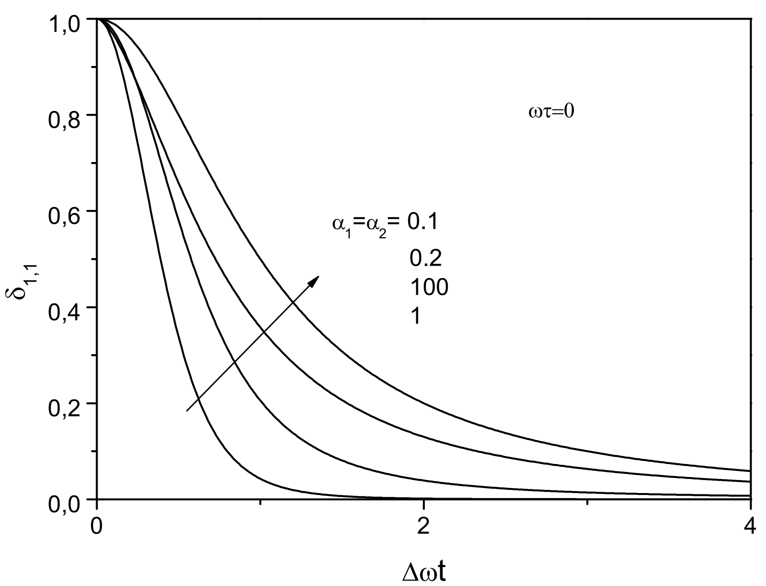

Fig. 3.3: Coeficiente de correlação das envoltórias de Weibull em função de $\Delta\omega t$.

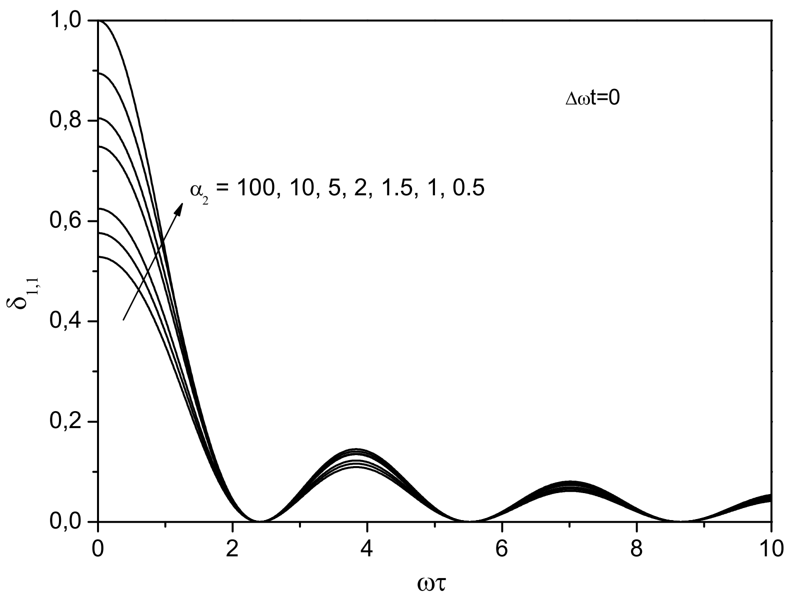

Fig. 3.4: Coeficiente de correlação das envoltórias de Weibull em função de $\omega\tau$ para $\alpha_1 = 0.5$.

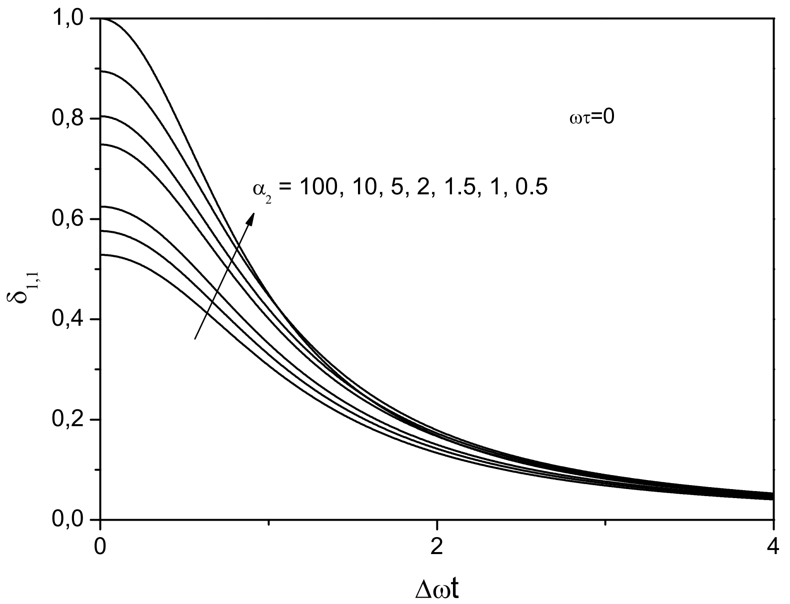

Fig. 3.5: Coeficiente de correlação das envoltórias de Weibull em função de $\Delta\omega t$ para $\alpha_1 = 0.5$.

Capítulo 4

Estatísticas de Segunda Ordem para Sinais Weibull Correlacionados, Desbalanceados e Não-Idênticos

Diversidade constitui uma técnica eficaz no combate ao efeito prejudicial do desvanecimento causado por multipercurso, que afeta o desempenho de sistemas de comunicação sem fio. Esse desempenho pode ser avaliado por algumas métricas importantes, dentre as quais podemos destacar a LCR e a AFD.

Este Capítulo obtém expressões exatas para a LCR e a AFD das técnicas SC, EGC e MRC com dois ramos operando em ambiente de desvanecimento Weibull. As expressões aplicam-se a canais de desvanecimento correlacionados, desbalanceados e não-idênticos. Usando diversidade de espaço com antenas espaçadas horizontalmente na estação móvel, alguns resultados numéricos serão apresentados e discutidos. É verificado que quando o espaçamento entre as antenas aumenta, a LCR diminui, tornando-se oscilatória e convergente. Além disso, quando a direção do móvel é perpendicular ao eixo da antena, a AFD pouco é influenciada pelo espaçamento entre as antenas. Como em ambientes correlacionados o uso da não-diversidade (ND, do inglês *no diversity*) em alguns casos é preferível, devido este apresentar uma maior eficiência [18], uma análise detalhada por meio de tabelas é realizada com o objetivo de estabelecer as condições para as quais a diversidade torna-se vantajosa ou não. Investigando o desbalanceamento de potência entre os ramos de entrada dos combinadores, será visto que, quando se opera com canais correlacionados, tal desbalanceamento pode tanto melhorar quanto prejudicar o desempenho de sistemas.

4.1 Preliminares

No modelo de desvanecimento de Weibull, o sinal recebido Z_i no i-ésimo ramo ($i = 1, 2$) pode ser representado na forma complexa como

$$Z_i = R_i^{\frac{\alpha_i}{2}} \exp(j\Theta_i) = X_i + jY_i \tag{4.1}$$

onde $\sqrt{j} = -1$; R_i e Θ_i são, respectivamente, a envoltória e a fase do sinal Weibull, sendo esta última uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi)$; X_i e Y_i são processos gaussianos mutuamente independentes de médias nula e variâncias idênticas σ_i^2; e $\alpha_i > 0$ representa o parâmetro de desvanecimento de Weibull. À medida que α_i aumenta, a severidade do desvanecimento diminui, enquanto que para os casos especiais de $\alpha_i = 1$ e $\alpha_i = 2$, (4.1) reduz ao sinal complexo de uma Exponencial Negativa e Rayleigh, respectivamente. A PDF $f_{R_i}(\cdot)$ da envoltória R_i é dada por

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{\alpha_i \, r_i^{\alpha_i - 1}}{\Omega_i} \exp\left(-\frac{r_i^{\alpha_i}}{\Omega_i}\right) \tag{4.2}$$

onde $\Omega_i = E(R_i^{\alpha_i})$. A CDF $F_{R_i}(\cdot)$ de R_i correspondente é dada por

$$F_{R_i}(r_i) = 1 - \exp\left(-\frac{r_i^{\alpha_i}}{\Omega_i}\right) \tag{4.3}$$

O k-ésimo momento de R_i é expresso da forma

$$E(R_i^k) = \Omega_i^{\frac{k}{\alpha_i}} \, \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha_i}\right) \tag{4.4}$$

A partir de (4.4), a potência média $P_i = E(R_i^2)$ do sinal Weibull é dada por

$$P_i = \Omega_i^{\frac{2}{\alpha_i}} \, \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha_i}\right) \tag{4.5}$$

Para canais idênticos (mesmo grau de desvanecimento), temos que $\alpha_1 = \alpha_2$, enquanto que para canais balanceados (mesma potência), $P_1 = P_2$. Em seguida, a PDF conjunta da envoltória e da fase para dois ramos correlacionados, desbalanceados ($P_1 \neq P_2$), não-idênticos ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) e sujeitos a desvanecimento Weibull será obtida de forma simples e consistente com os casos particulares para os quais ela reduz.

Como visto no Capítulo 3, existe uma relação entre os modelos de Weibull e Rayleigh expressa por um parâmetro de potência (que é o parâmetro α_i). Dessa forma, a densidade conjunta da envoltória e fase de Weibull (JEPWD, do inglês *joint envelope phase Weibull density*) para dois ramos de desvanecimento pode ser obtida capitalizando alguns resultados já disponíveis na literatura para a distribuição de Rayleigh, usando um procedimento similar ao realizado na Seção 3.2. A densidade conjunta da envoltória e fase de Rayleigh para dois ramos $f_{R_{R1},R_{R2},\Theta_1,\Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ é dada em [3, Eq. 7.51]. Exprimindo esta última em função da JEPWD por meio de uma transformação estatística, segue que $f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = |J|\, f_{R_{R1},R_{R2},\Theta_1,\Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$. Portanto, a JEPWD pode ser formulada como

$$
\begin{aligned}
f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = |J| \frac{r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}}{4\pi^2 |\mathbf{\Lambda}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2|\mathbf{\Lambda}|^{\frac{1}{2}}}\left(r_1^{\alpha_1}\frac{\Omega_2}{2} + r_2^{\alpha_2}\frac{\Omega_1}{2}\right)\right] \\
\times \exp\left[-\frac{1}{2|\mathbf{\Lambda}|^{\frac{1}{2}}}\left(-\mu_1 r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\sqrt{\Omega_1\Omega_2}\cos\theta_{12} + \mu_2 r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\sqrt{\Omega_1\Omega_2}\sin\theta_{12}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

onde J é o jacobiano da transformação tal que $|J| = (\alpha_1\alpha_2/4)\, r_1^{\alpha_1/2-1} r_2^{\alpha_2/2-1}$, θ_{12} é definido como $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$ e $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz de covariância dada por

$$
\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}
\Omega_1 & 0 & \mu_1\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & -\mu_2\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\
0 & \Omega_1 & \mu_2\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & \mu_1\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\
\mu_1\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & \mu_2\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & \Omega_2 & 0 \\
-\mu_2\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & \mu_1\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & 0 & \Omega_2
\end{bmatrix}
\tag{4.7}
$$

Os coeficientes de correlação μ_1 e μ_2 são definidos como $\mu_1 = \frac{E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{E(Y_1Y_2)-E(Y_1)E(Y_2)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(Y_2)}}$ e $\mu_2 = -\frac{E(X_1Y_2)-E(X_1)E(Y_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(Y_2)}} = \frac{E(Y_1X_2)-E(Y_1)E(X_2)}{\sqrt{Var(Y_1)Var(X_2)}}$. Os elementos nulos em $\mathbf{\Lambda}$ aparecem devido a ortogonalidade entre as componentes em fase e em quadratura. Substituindo (4.7) em (4.6) e após algumas manipulações algébricas, a JEPWD pode ser encontrada como

$$
\begin{aligned}
f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{\alpha_1\,\alpha_2\, r_1^{\alpha_1-1}\, r_2^{\alpha_2-1}}{4\pi^2\,\Omega_1\Omega_2\,(1-\xi^2)} \\
\times \exp\left(-\frac{r_1^{\alpha_1}\,\Omega_2 + r_2^{\alpha_2}\,\Omega_1 - 2r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\sqrt{\Omega_1\Omega_2}\,(\mu_1\cos\theta_{12} - \mu_2\sin\theta_{12})}{(1-\xi^2)\,\Omega_1\Omega_2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

no qual $\xi^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$. Uma forma alternativa e mais compacta de representar (4.8) é apresentada abaixo

$$
\begin{aligned}
f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2) = {} & \frac{\alpha_1\,\alpha_2\,r_1^{\alpha_1-1}r_2^{\alpha_2-1}}{4\pi^2\,\Omega_1\Omega_2\,(1-\xi^2)} \\
& \times \exp\left(-\frac{r_1^{\alpha_1}\,\Omega_2 + r_2^{\alpha_2}\,\Omega_1 - 2r_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\,r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\sqrt{\Omega_1\Omega_2}\,\xi\,\cos\left(\psi+\theta_{12}\right)}{(1-\xi^2)\,\Omega_1\Omega_2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

onde $\xi^2 = \frac{E^2(X_1X_2)+E^2(X_1Y_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ e $\psi = \text{Arg}\left[E(X_1X_2)+jE(X_2Y_1)\right]$.

4.2 LCR e AFD

Como descrito no Capítulo 1, a LCR é definida como o número médio de vezes por unidade de tempo que a envoltória de um sinal em desvanecimento cruza um dado valor na direção negativa (ou positiva) e pode ser formulada como

$$
N_R(r) \;=\; \int_0^\infty \dot{r} f_{R,\dot{R}}(r,\dot{r})d\dot{r} \tag{4.10}
$$

onde $f_{R,\dot{R}}(\cdot,\cdot)$ é a PDF conjunta da envoltória R e sua respectiva derivada no tempo $\dot{R}$. A AFD corresponde ao intervalo médio de tempo que a envoltória permanece abaixo de um certo valor uma vez que ela o cruza na direção negativa

$$
T_R(r) \;=\; \frac{F_R(r)}{N_R(r)} \tag{4.11}
$$

Nas próximas Seções, (4.10) and (4.11) serão calculados para um ambiente de desvanecimento Weibull com dois ramos correlacionados, desbalanceados e não-idênticos usando as técnicas de diversidade SC, EGC e MRC.

4.2.1 Sistemas de Diversidade

No Capítulo introdutório, foi realizada uma descrição relativa aos três métodos de combinação abordados nesta dissertação. Foi visto que as técnicas de diversidade, presentes em sistemas de comunicação desde os anos 20, são técnicas interessantes por sua eficiência e relativa simplicidade de implementação. Uma das formas de medida da eficiência de tais técnicas é a LCR e a AFD, que são estatísticas de segunda ordem que proveêm uma caracterização dinâmica do canal de comunicação e possuem inúmeras aplicações em sistemas de comunicação sem fio. Nesta Seção, expressões para a LCR e a AFD serão obtidas para os métodos de combinação SC, EGC e MRC.

Sabe-se que a envoltória da saída do combinador e sua derivada no tempo para os sistemas SC, EGC e MRC podem ser escritas em função das envoltórias de cada ramo da entrada e de suas respectivas derivadas temporais como

$$R = \begin{cases} \max\{R_1, R_2\} & \text{SC} \\ \frac{R_1+R_2}{\sqrt{2}} & \text{EGC} \\ \sqrt{R_1^2+R_2^2} & \text{MRC} \end{cases} \quad \dot{R} = \begin{cases} \begin{array}{ll} \dot{R}_1 & R_1 \geq R_2 \\ \dot{R}_2 & R_1 < R_2 \end{array} & \text{SC} \\ \frac{\dot{R}_1+\dot{R}_2}{\sqrt{2}} & \text{EGC} \\ \frac{R_1\dot{R}_1+R_2\dot{R}_2}{\sqrt{R_1^2+R_2^2}} & \text{MRC} \end{cases} \tag{4.12}$$

Em [37], foi mostrado que $\dot{R}_i$ dado R_i e Θ_i é uma variável gaussiana de média nula. De (4.12), para todos os cenários de combinação, temos que a PDF de $\dot{R}$ dado R_i's e Θ_i's, expressa como $f_{\dot{R}|R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(\dot{r}|r_1,r_2,\theta_1,\theta_2)$, é também gaussiana. Porém, devido à correlação existente entre os ramos, a média de tal distribuição condicional não é nula, embora a PDF condicional de $\dot{R}_i$ dado R_i e Θ_i seja uma gaussiana de média nula. Tal análise foi pioneiramente demonstrada em [18], para o caso Rayleigh balanceado, e posteriormente em [19], para o caso Rayleigh desbalanceado. Seja $m_{\dot{R}}(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2)$ e $\sigma^2_{\dot{R}}(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2)$ a média e variância, respectivamente, da densidade condicional $f_{\dot{R}|R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(\dot{r}|r_1,r_2,\theta_1,\theta_2)$. Estas estatísticas dependem do tipo de combinação utilizado e serão determinadas nas próximas Seções. Agora, usando as propriedades de probabilidade condicional, podemos escrever

$$f_{\dot{R},R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(\dot{r},r_1,r_2,\theta_1,\theta_2) = f_{\dot{R}|R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(\dot{r}|r_1,r_2,\theta_1,\theta_2) f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2) \tag{4.13}$$

onde $f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2)$ já foi obtida em (4.8) ou, numa versão mais compacta, em (4.9). Assim, o problema se resume em determinar a média $m_{\dot{R}}(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2)$ e a variância $\sigma^2_{\dot{R}}(r_1,r_2,\theta_1,\theta_2)$ para cada cenário de combinação. No momento assumimos que essas estatísticas são conhecidas. Por meio de [18, Eq. 8] para SC e de [38, Eqs. 12 e 13] para EGC e MRC, respectivamente, temos que a LCR pode ser expressa como

$$N_R(r) = \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \vartheta(r_1,r) f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r_1,r,\theta_1,\theta_2)\, dr_1 d\theta_1 d\theta_2 \\ + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \vartheta(r,r_2) f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r,r_2,\theta_1,\theta_2)\, dr_2 d\theta_1 d\theta_2 \\ \hfill \text{SC} \\ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}r} \sqrt{2}\,\vartheta(r_1,\sqrt{2}r-r_1) f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}\left(r_1,\sqrt{2}r-r_1,\theta_1,\theta_2\right) dr_1 d\theta_1 d\theta_2 \\ \hfill \text{EGC} \\ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-r_1^2}}\,\vartheta(r_1,\sqrt{r^2-r_1^2}) f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}\left(r_1,\sqrt{r^2-r_1^2},\theta_1,\theta_2\right) dr_1 d\theta_1 d\theta_2 \\ \hfill \text{MRC} \end{cases} \tag{4.14}$$

em que

$$\vartheta(r_1, r_2) \triangleq \int_0^\infty \dot{r}\, f_{\dot{R}|R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(\dot{r}|r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)\, d\dot{r} \tag{4.15}$$

Uma expressão exata para (4.15) é obtida como

$$\vartheta(r_1, r_2) = \frac{\sigma_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m^2_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{2\sigma^2_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}\right) + \frac{m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{2}\sigma_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}\right)\right) \tag{4.16}$$

onde erf$(\cdot)$ é a função erro. A CDF $F_R(\cdot)$ de R pode ser expressa como [39]

$$F_R(r) = \int_0^{\gamma_1}\int_0^{\gamma_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_{R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 dr_2 dr_1 \tag{4.17}$$

onde

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2 = r \quad \text{para} \quad \text{SC} \\ \gamma_1 = \sqrt{2}\, r, \gamma_2 = \sqrt{2}\, r - r_1 \quad \text{para} \quad \text{EGC} \\ \gamma_1 = r\,,\ \gamma_2 = \sqrt{r^2 - r_1^2} \quad \text{para} \quad \text{MRC} \end{cases} \tag{4.18}$$

Substituindo (4.14) e (4.17) em (4.11), a AFD é obtida.

A partir de (4.12), para cada cenário de combinação, é possível expressar a média $m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ e a variância $\sigma^2_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ da densidade gaussiana condicional de $\dot{R}$ em função das médias e variâncias $m_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ e $\sigma^2_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$, respectivamente, das densidades gaussianas condicionais dos $\dot{R}_i$'s, fato este baseado na linearidade do operador média (ou esperança) [12, Eq. 6-162] e usando a propriedade dada em [12, Eq. 6-167]. Então, para cada um dos métodos de combinação aqui analisados, a partir de (4.12) segue que

Combinação por Seleção Pura (SC)

- Se $R_1 \geq R_2$

$$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = m_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \tag{4.19}$$

$$\sigma^2_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \sigma^2_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \tag{4.20}$$

- Se $R_1 < R_2$

$$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = m_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \tag{4.21}$$

$$\sigma^2_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \sigma^2_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \tag{4.22}$$

Combinação por Ganho Igual (EGC)

$$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{m_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + m_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{2}} \tag{4.23}$$

$$\sigma^2_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{\sigma^2_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + \sigma^2_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + 2\sigma_{\dot{R}_1,\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{2} \tag{4.24}$$

onde $\sigma_{\dot{R}_1,\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ representa a covariância entre $\dot{R}_1$ and $\dot{R}_2$ dado $R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2$.

Combinação por Razão Máxima (MRC)

$$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{r_1\, m_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + r_2\, m_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \tag{4.25}$$

$$\sigma^2_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{r_1^2\, \sigma^2_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + r_2^2\, \sigma^2_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + 2\, r_1\, r_2\, \sigma_{\dot{R}_1,\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{r_1^2 + r_2^2} \tag{4.26}$$

4.3 Estatísticas Condicionais de $\dot{Z}_i$

O objetivo desta Seção e da próxima Seção é encontrar a média $m_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$, a variância $\sigma^2_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ e a covariância $\sigma_{\dot{R}_i,\dot{R}_l}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$, $(i, l = 1, 2)$, como requerido nas formulações anteriores. De (4.1) é possível demonstrar que as estatísticas condicionais dos $\dot{R}_i$'s podem ser escritas em função das estatísticas condicionais dos $\dot{Z}_i$'s, em que $\dot{Z}_i$ representa a derivada temporal de Z_i. As estatísticas de $\dot{Z}_i$ são apresentadas no Apêndice B enquanto que as estatísticas condicionais de $\dot{R}_i$ em função das de $\dot{Z}_i$ estão no Apêndice C. Dessa forma, esta Seção constitui um passo importante para a obtenção de $m_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$, $\sigma^2_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ e $\sigma_{\dot{R}_i,\dot{R}_l}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$.

Seja $\dot{\mathbf{Z}} = [\dot{Z}_1 \dot{Z}_2]$ e $\mathbf{Z} = [Z_1 Z_2]$ matrizes colunas de $\dot{Z}_i = \dot{Z}_i(t)$ e $Z_i = Z_i(t)$, respectivamente. Vale ressaltar que $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$, Z_1, e Z_2 são variáveis gaussianas complexas de média nula e mutuamente correlacionadas. A matriz complexa de covariância, $\Phi(4 \times 4)$, entre elas é definida como [18]

$$\Phi = \frac{1}{2} E \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}^T \right] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H & \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

onde $(\cdot)^*$ denota o operador conjugado, $(\cdot)^T$ a matriz transposta e $(\cdot)^H$ a matriz hermitiana. Definindo

$\rho_{il}(\tau)$ como a função de correlação cruzada complexa entre o i-ésimo e l-ésimo ramos, temos

$$\rho_{il}(\tau) = \frac{Cov(Z_i(t), Z_l(t+\tau))}{\sqrt{Var(Z_i(t))Var(Z_l(t+\tau))}} = \frac{E(Z_i^*(t)Z_l(t+\tau))}{\sqrt{\Omega_i\,\Omega_l}} \tag{4.28}$$

As matrizes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ podem ser expressas como

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\ddot{\rho}_{11}\Omega_1 & -\ddot{\rho}_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\ -\ddot{\rho}_{12}^*\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & -\ddot{\rho}_{11}\Omega_2 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Omega_1 & \rho_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\ \rho_{12}^*\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & \Omega_2 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\rho}_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\ \dot{\rho}_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

onde $\dot{\rho}_{il} = \left.\frac{d\rho_{il}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$, $\ddot{\rho}_{il} = \left.\frac{d^2\rho_{il}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}$, $\rho_{il} \triangleq \rho_{il}(0)$. No Apêndice B, há uma explicação mais detalhada sobre a obtenção dessas matrizes. Perceba que os elementos da diagonal da matriz $\mathbf{c}$ são nulos. Isso é porque para um processo estacionário a correlação entre o processo e sua derivada no tempo é sempre nulo em $\tau = 0$ ($\dot{\rho}_{11} = \dot{\rho}_{22} = 0$) [12]. A matriz $\mathbf{c}^H$ corresponde ao transposto conjugado da matriz $\mathbf{c}$, sendo dessa forma obtida por meio desta.

Aplicando a teoria de matriz descrita em [40, pp. 495-496], a densidade condicional de $\dot{\mathbf{Z}}$ dado $\mathbf{Z}$ é gaussiana com matriz média $\mathbf{M}$ e matriz de covariância $\boldsymbol{\Delta}$ dadas por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} E(\dot{Z}_1|\mathbf{Z}) \\ E(\dot{Z}_2|\mathbf{Z}) \end{bmatrix} = (\mathbf{c}\mathbf{b}^{-1})^*\,\mathbf{Z} \tag{4.32}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Var(\dot{Z}_1|\mathbf{Z}) & Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2|\mathbf{Z}) \\ Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2|\mathbf{Z})^* & Var(\dot{Z}_2|\mathbf{Z}) \end{bmatrix} = \mathbf{a} - \mathbf{c}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^H \tag{4.33}$$

Substituindo (4.29), (4.30), (4.31) em (4.32) e (4.33), obtemos

$$\mathbf{M} = \frac{1}{1-|\rho_{12}|^2}\begin{bmatrix} \rho_{12}\,\dot{\rho}_{12}^* Z_1 - \dot{\rho}_{12}^*\sqrt{\frac{\Omega_1}{\Omega_2}}Z_2 \\ \sqrt{\frac{\Omega_2}{\Omega_1}}\dot{\rho}_{12}^* Z_1 - \rho_{12}^*\,\dot{\rho}_{12}^* Z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-|\rho_{12}|^2}\begin{bmatrix} \rho_{12}\,\dot{\rho}_{12}^* R_1^{\alpha_1/2}e^{j\Theta_1} - \dot{\rho}_{12}^*\sqrt{\frac{\Omega_1}{\Omega_2}}R_2^{\alpha_2/2}e^{j\Theta_2} \\ \sqrt{\frac{\Omega_2}{\Omega_1}}\dot{\rho}_{12}^* R_1^{\alpha_1/2}e^{j\Theta_1} - \rho_{12}^*\,\dot{\rho}_{12}^* R_2^{\alpha_2/2}e^{j\Theta_2} \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\Omega_1\left(\ddot{\rho}_{11} + \frac{|\dot{\rho}_{12}|^2}{1-|\rho_{12}|^2}\right) & -\sqrt{\Omega_1\Omega_2}\left(\ddot{\rho}_{12} + \frac{\rho_{12}^*|\dot{\rho}_{12}|^2}{1-|\rho_{12}|^2}\right) \\ -\sqrt{\Omega_1\Omega_2}\left(\ddot{\rho}_{12}^* + \frac{\rho_{12}|\dot{\rho}_{12}^*|^2}{1-|\rho_{12}|^2}\right) & -\Omega_2\left(\ddot{\rho}_{11} + \frac{|\dot{\rho}_{12}|^2}{1-|\rho_{12}|^2}\right) \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

4.4 Estatísticas Condicionais de $\dot{R}_i$

Esta Seção relaciona as estatísticas condicionais das variáveis reais $\dot{R}_i$'s com as das variáveis complexas $\dot{Z}_i$'s, sendo estas sido obtidas na Seção anterior. De (4.1), temos que $Z_i = R_i^{\frac{\alpha_i}{2}} \exp(j\Theta_i)$. Derivando com relação ao tempo tal equação obtemos que $\dot{R}_i = \frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\frac{\alpha_i}{2}} \,\mathrm{Re}[\dot{Z}_i \exp(-j\Theta_i)]$, onde $\mathrm{Re}[\cdot]$ denota a parte real de um número complexo. Assim, pode ser mostrado (ver Apêndice C) que

$$m_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \triangleq E(\dot{R}_i|\mathbf{Z}) = \frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\frac{\alpha_i}{2}} \,\mathrm{Re}[E(\dot{Z}_i|\mathbf{Z})e^{-j\Theta_i}] \tag{4.36}$$

$$\sigma^2_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \triangleq Var(\dot{R}_i|\mathbf{Z}) = \frac{2R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2} Var(\dot{Z}_i|\mathbf{Z}) \tag{4.37}$$

$$\sigma_{\dot{R}_i,\dot{R}_l}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \triangleq Cov(\dot{R}_i, \dot{R}_l|\mathbf{Z}) = \frac{2}{\alpha_i\,\alpha_l} R_i^{1-\frac{\alpha_i}{2}}\, R_l^{1-\frac{\alpha_l}{2}} \,\mathrm{Re}[e^{j\Theta_{il}} Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_l|\mathbf{Z})^*] \tag{4.38}$$

Usando os resultados encontrados em (4.34) e (4.35), as estatísticas condicionais das variáveis reais $\dot{R}_i$'s são obtidas

$$m_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\alpha_1}\frac{1}{1-|\rho_{12}|^2}\left[r_1 \,\mathrm{Re}[\rho_{12}\dot{\rho}_{12}^*] - r_1^{1-\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \sqrt{\frac{\Omega_1}{\Omega_2}} \,\mathrm{Re}[\dot{\rho}_{12}^* e^{j\theta_{12}}]\right] \tag{4.39}$$

$$m_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{2}{\alpha_2}\frac{1}{1-|\rho_{12}|^2}\left[r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{1-\frac{\alpha_2}{2}} \sqrt{\frac{\Omega_2}{\Omega_1}} \,\mathrm{Re}[\dot{\rho}_{12}^* e^{j\theta_{12}}] - r_2 \,\mathrm{Re}[\rho_{12}\dot{\rho}_{12}^*]\right] \tag{4.40}$$

$$\sigma^2_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = -\frac{2\,\Omega_i\, r_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2}\left[\ddot{\rho}_{11} + \frac{|\dot{\rho}_{12}|^2}{1-|\rho_{12}|^2}\right],\ i = 1, 2 \tag{4.41}$$

$$\sigma_{\dot{R}_1,\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = -\frac{2\sqrt{\Omega_1\Omega_2}}{\alpha_1\alpha_2}\, r_1^{1-\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{1-\frac{\alpha_2}{2}} \,\mathrm{Re}\left[\left(\ddot{\rho}_{12}^* + \frac{|\dot{\rho}_{12}|^2 \rho_{12}}{1-|\rho_{12}|^2}\right) e^{j\theta_{12}}\right] \tag{4.42}$$

Substituindo (4.39) a (4.42) em (4.19) a (4.26), podemos expressar $f_{\dot{R}|R_1,R_2,\Theta_1,\Theta_2}(\dot{r}|r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ para cada uma das técnicas de diversidade, e conseqüentemente, suas respectivas LCR (equação 4.14) e AFD (equação 4.11) são obtidas para cada cenário de combinação.

4.4.1 Casos Especiais

Observe que para o caso Rayleigh, $\alpha_i = 2$ $(i = 1, 2)$, e canais balanceados $\Omega_1 = \Omega_2 = 2\sigma^2$, as equações de (4.19) a (4.26) reduzem de maneira exata a aquelas de [18, Eqs. 26 e 27]. Em particular, para $\alpha_i = 2$ e canais desbalanceados, essas expressões reduzem às apresentadas em [19, Eqs. 7 e 8].

No caso de independência entre os ramos da entrada do combinador, ou seja, havendo uma grande separação entre as antenas, as médias e as variâncias não são mais função de R_1, R_2, Θ_1 e Θ_2 porque $\rho_{12} = \dot{\rho}_{12} = \ddot{\rho}_{12} = 0$. Nesse caso, os resultados coincidem com os de [41] para EGC and MRC.

4.5 Resultados Numéricos

As expressões aqui obtidas para a LCR e a AFD são gerais, exatas e podem ser aplicadas para qualquer tipo de diversidade (espaço, freqüência ou tempo). Nesta Seção, alguns resultados numéricos serão discutidos assumindo um sistema com diversidade no espaço ($\Delta\omega = 0$) e usando antenas omnidirecionais espaçadas horizontalmente na estação móvel. Para ondas de multipercurso incidentes tendo a mesma amplitude e fases independentes, as funções de correlação cruzada são dadas por [18]

$$\rho_{11}(\tau) = J_0(2\pi f_m \tau) \tag{4.43}$$

$$\rho_{12}(\tau) = J_0\left(2\pi\sqrt{(f_m\tau)^2 + (d/\lambda)^2 - 2(f_m\tau)(d/\lambda\ \cos(\beta))}\right) \tag{4.44}$$

onde λ é o comprimento de onda da portadora, f_m é o desvio Doppler máximo em Hz [36], d é o espaçamento entre as antenas e $\beta \in [0, 2\pi]$ é o ângulo entre o eixo da antena e a direção de movimento do veículo em radianos. Os coeficientes de correlação correspondentes podem ser calculados como

$$\rho_{11} = 1 \tag{4.45}$$

$$\rho_{12} = J_0(2\pi d/\lambda) \tag{4.46}$$

$$\dot{\rho}_{12} = 2\pi f_m \cos(\beta)\, J_1(2\pi d/\lambda) \tag{4.47}$$

$$\ddot{\rho}_{12} = (2\pi f_m)^2 \left\{\frac{J_1(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda}\cos(2\beta) \quad - \cos^2(\beta)\, J_0(2\pi d/\lambda)\right\} \tag{4.48}$$

$$\ddot{\rho}_{11} = -2(\pi f_m)^2 \tag{4.49}$$

onde $J_1(\cdot)$ é a função de Bessel de primeira ordem. O coeficiente de correlação μ_1 definido na seção 4.1 corresponde agora a ρ_{12} pois quando utiliza-se diversidade no espaço as esperanças $E(X_1Y_2)$ e $E(X_2Y_1)$ são nulas. Já o coeficiente de correlação μ_2 é zero porque considera-se separação angular de frequência nula [1].

Figuras 4.1 e 4.2, para o caso balanceado ($P_i = 0.5$), e Figuras 4.5 e 4.6, para o caso desbalanceado ($P_1 = 0.1$ e $P_2 = 0.9$), esboçam a LCR (eixo da esquerda), $N_R(r)/f_m$, e a AFD (eixo da direita), $T_R(r)f_m$, em função da envoltória normalizada $r/\sqrt[\alpha]{P_1 + P_2}$ para SC, EGC e MRC. Os seguintes parâmetros arbitrários foram usados: $d/\lambda = 0.2$, $\beta = 0$, $\beta = \pi/2$, $\alpha_i = 3$ (Figuras 4.1 e 4.5) e $\alpha_i = 1.5$ (Figuras 4.2 e 4.6). Em todas elas, o caso ND foi incluído. Em geral, pode ser dito que quando o parâmetro de desvanecimento aumenta (melhores condições de desvanecimento) o desempenho melhora. Além disso, para desvanecimentos profundos, o uso de diversidade na recepção reduz consideravelmente a LCR.

Figuras 4.3 e 4.4, para o caso balanceado, e Figuras 4.7 e 4.8, para o caso desbalanceado, mostram a LCR e a AFD em função do parâmetro d/λ para SC, EGC e MRC, dado um nível de envoltória normalizado $r/\sqrt[\alpha]{P_1 + P_2} = -20$dB. Os demais parâmetros foram mantidos os mesmos que os anteriores. As curvas para o caso ND foram novamente incluídas. A partir das Figuras 4.3 e 4.7, percebe-se que quando o espaçamento entre as antenas aumenta, a LCR diminui, tornando oscilatória e convergente. Além disso, das Figuras 4.4 e 4.8, pode ser visto que o formato das curvas para SC, EGC e MRC pouco depende do espaçamento entre as antenas quando $\beta = \pi/2$, sendo aproximadamente uniforme. Mais uma vez, é evidente que uma melhoria nas condições de desvanecimento (aumento de α) implica num aumento do desempenho.

Dada a complexidade do modelo investigado, em que se consideram canais desbalanceados, correlacionados e não-idênticos, um grande número de parâmetros podem influenciar o desempenho de tal. Portanto, torna-se difícil estabelecer-se qual técnica é melhor do que outra ou quando é vantajoso se utilizar diversidade. Além disso, em sistemas correlacionados, o desbalanceamento de potência pode tanto ser favorável ou danoso ao sistema dependendo da situação e da métrica a ser analisada. Por essa razão, um conjunto de Tabelas (Tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5) é apresentado no final deste Capítulo com todas as situações possíveis a serem analisadas. As seguintes convenções foram adotadas: "A $>$ B" significa "A possui melhor desempenho que B"; "A $<$ B" significa "B possui melhor desempenho que A"; "A $\approx$ B" significa "A tem desempenho similar a B". Baseando-se na métrica LCR, melhor desempenho significa menos cruzamentos em baixos níveis ou mais cruzamentos em altos níveis. Já considerando a métrica AFD, melhor desempenho significa menos tempo abaixo de qualquer nível.

4.6 Conclusões

Fórmulas *exatas* para a LCR e a AFD de sistemas SC, EGC e MRC com dois ramos e operando em canais de desvanecimento Weibull correlacionados, desbalanceados e não-idênticos foram apresentadas. Durante o processo de obtenção de tais expressões houve uma notação matemática um pouco complicada de se entender, mas com a ajuda dos apêndices B e C pôde se ter um melhor entendimento de como se chegou a elas. As expressões aqui obtidas foram gerais e podem ser aplicadas a qualquer tipo de diversidade (espaço, freqüência, tempo). Além disso, alguns resultados numéricos foram discutidos assumindo um sistema com diversidade no espaço ($\Delta\omega = 0$) e usando antenas omnidirecionais espaçadas horizontalmente na estação móvel. Devido ao grande número de parâmetros que influenciaram o sistema, uma conclusão simples e geral para tais resultados não foi possível ser traçada. Por essa razão, um conjunto de Tabelas foram apresentadas com o intuito de elucidar as possíveis situações de desvanecimento. Curiosamente, situações foram encontradas nas quais o uso de diversidade foi considerado prejudicial. Porém, para desvanecimentos profundos, em todos os casos analisados o uso de diversidade reduziu consideravelmente a LCR.

Tab. 4.1: Análise comparativa do desempenho das técnicas SC, EGC e MRC para canais Weibull balanceados

LCR	$\alpha = 3, \beta = 0$	baixos níveis	MRC $>$ EGC $>$ SC $>$ ND
		altos níveis	ND $>$ MRC $\approx$ EGC $>$ SC
	$\alpha = 3, \beta = \pi/2$	baixos níveis	MRC $>$ EGC $>$ SC $>$ ND
		altos níveis	ND $>$ MRC $\approx$ EGC $>$ SC
	$\alpha = 1.5, \beta = 0$	baixos níveis	MRC $>$ EGC $>$ SC $>$ ND
		altos níveis	ND $>$ MRC $\approx$ EGC $>$ SC
	$\alpha = 1.5, \beta = \pi/2$	baixos níveis	MRC $>$ EGC $>$ SC $>$ ND
		altos níveis	ND $>$ MRC $\approx$ EGC $>$ SC
AFD	$\alpha = 3, \beta = 0$	baixos níveis	ND $>$ EGC $>$ MRC $\approx$ SC
		altos níveis	ND $>$ MRC $\approx$ EGC $>$ SC
	$\alpha = 3, \beta = \pi/2$	baixos níveis	EGC $>$ MRC $>$ SC $>$ ND
		altos níveis	ND $>$ MRC $\approx$ EGC $>$ SC
	$\alpha = 1.5, \beta = 0$	baixos níveis	ND $>$ SC $>$ MRC $\approx$ EGC
		altos níveis	ND $>$ MRC $\approx$ EGC $>$ SC
	$\alpha = 1.5, \beta = \pi/2$	baixos níveis	SC $>$ MRC $>$ EGC $>$ ND
		altos níveis	ND $>$ MRC $\approx$ EGC $>$ SC

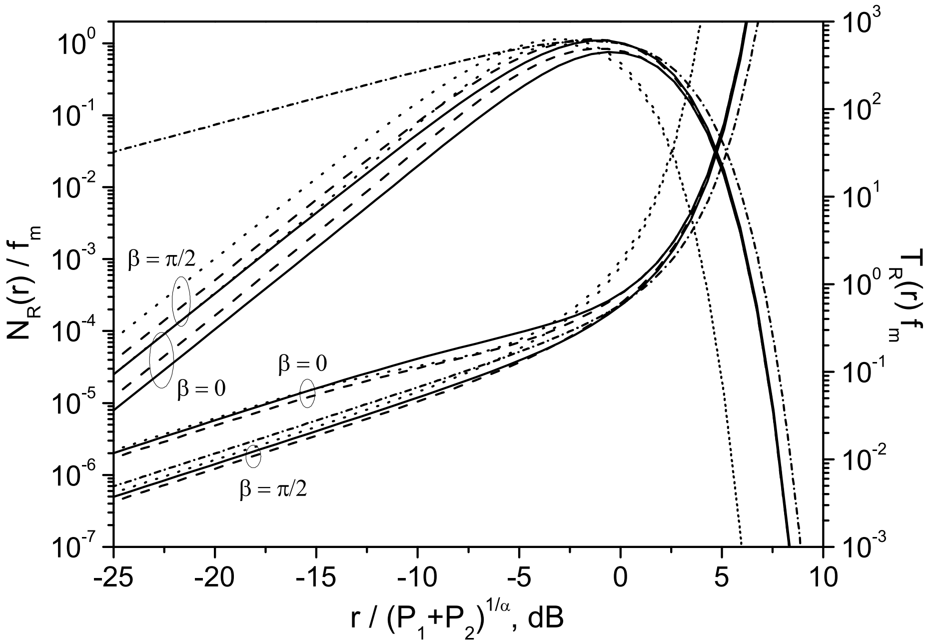

Fig. 4.1: LCR e AFD para os casos SC (linhas dot), EGC (linhas dash), MRC (linhas sólidas) e ND (linhas dash dot). Parâmetros empregados: $d/\lambda = 0.2$, $\alpha_i = 3$ e canais balanceados ($P_i = 0.5$).

Tab. 4.2: Análise comparativa do desempenho das técnicas SC, EGC e MRC para canais Weibull desbalanceados

LCR	$\alpha = 3, \beta = 0$	baixos níveis	MRC > EGC > SC > ND
		altos níveis	ND > MRC > SC > EGC
	$\alpha = 3, \beta = \pi/2$	baixos níveis	MRC > EGC > SC > ND
		altos níveis	ND > MRC > SC > EGC
	$\alpha = 1.5, \beta = 0$	baixos níveis	MRC > EGC > SC > ND
		altos níveis	ND > MRC > SC > EGC
	$\alpha = 1.5, \beta = \pi/2$	baixos níveis	MRC > EGC > SC > ND
		altos níveis	ND > MRC > SC > EGC
AFD	$\alpha = 3, \beta = 0$	baixos níveis	ND > EGC > MRC > SC
		altos níveis	ND > MRC > SC > EGC
	$\alpha = 3, \beta = \pi/2$	baixos níveis	EGC > MRC > SC > ND
		altos níveis	ND > MRC > SC > EGC
	$\alpha = 1.5, \beta = 0$	baixos níveis	ND > SC > MRC ≈ EGC
		altos níveis	ND > MRC > SC > EGC
	$\alpha = 1.5, \beta = \pi/2$	baixos níveis	SC ≈ MRC ≈ EGC > ND
		altos níveis	ND > MRC > SC > EGC

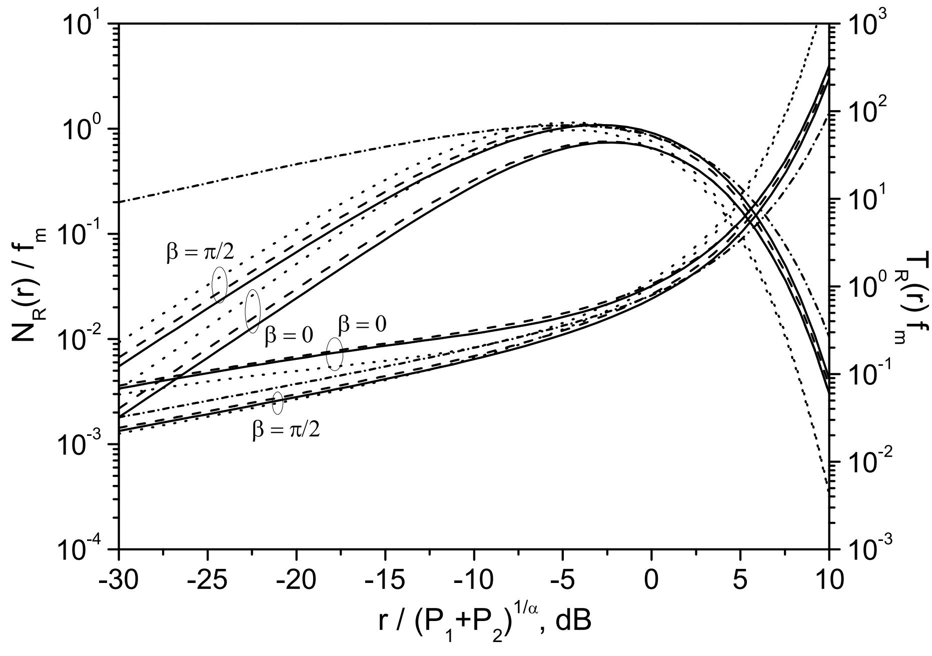

Fig. 4.2: LCR e AFD para os casos SC (linhas dot), EGC (linhas dash), MRC (linhas sólidas) e ND (linhas dash dot). Parâmetros empregados: $d/\lambda = 0.2$, $\alpha_i = 1.5$ e canais balanceados ($P_i = 0.5$).

Tab. 4.3: Análise comparativa do desempenho considerando canais Weibull balanceados e desbalanceados e usando a técnica SC

LCR	$\alpha = 3, \beta = 0$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 3, \beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 1.5, \beta = 0$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 1.5, \beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
AFD	$\alpha = 3, \beta = 0$	baixos níveis	balanc $\approx$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 3, \beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $\approx$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 1.5, \beta = 0$	baixos níveis	balanc $\approx$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 1.5, \beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc

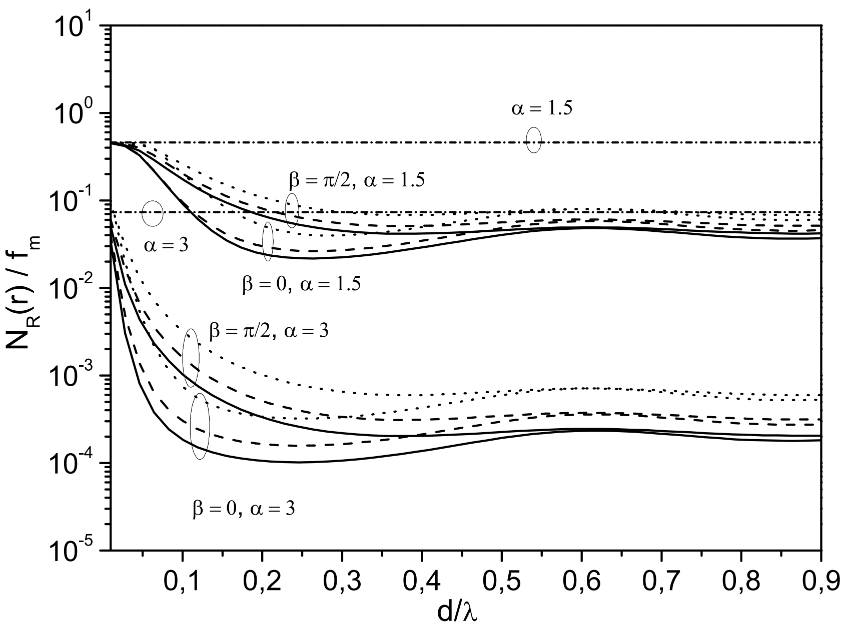

Fig. 4.3: LCR para os casos SC (linhas dot), EGC (linhas dash), MRC (linhas sólidas) e ND (linhas dash dot). Parâmetros empregados: envoltória normalizada $r/\sqrt[\alpha]{P_1 + P_2} = -20$dB, $\alpha_i = 1.5, 3$ e canais balanceados ($P_i = 0.5$).

Tab. 4.4: Análise comparativa do desempenho considerando canais Weibull balanceados e desbalanceados e usando a técnica EGC

LCR	$\alpha = 3, \beta = 0$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $>$ desbalanc
	$\alpha = 3, \beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $>$ desbalanc
	$\alpha = 1.5, \beta = 0$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $>$ desbalanc
	$\alpha = 1.5, \beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $>$ desbalanc
AFD	$\alpha = 3, \beta = 0$	baixos níveis	balanc $<$ desbalanc
		altos níveis	balanc $>$ desbalanc
	$\alpha = 3, \beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $<$ desbalanc
		altos níveis	balanc $>$ desbalanc
	$\alpha = 1.5, \beta = 0$	baixos níveis	balanc $<$ desbalanc
		altos níveis	balanc $>$ desbalanc
	$\alpha = 1.5, \beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $\approx$ desbalanc
		altos níveis	balanc $>$ desbalanc

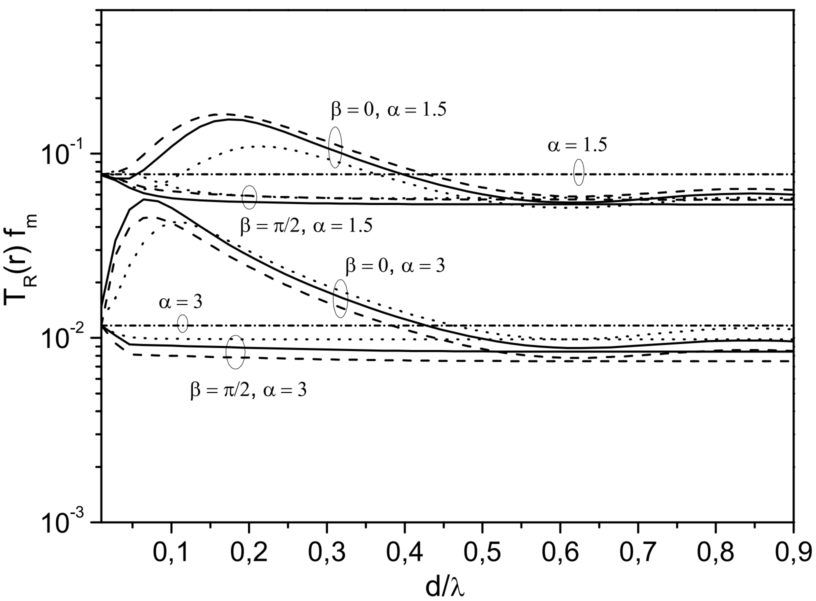

Fig. 4.4: AFD para os casos SC (linhas dot), EGC (linhas dash), MRC (linhas sólidas) e ND (linhas dash dot). Parâmetros empregados: envoltória normalizada $r/\sqrt[\alpha]{P_1 + P_2} = -20\text{dB}$, $\alpha_i = 1.5, 3$ e canais balanceados ($P_i = 0.5$).

Tab. 4.5: Análise comparativa do desempenho considerando canais Weibull balanceados e desbalanceados e usando a técnica MRC

LCR	$\alpha = 3$, $\beta = 0$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $\approx$ desbalanc
	$\alpha = 3$, $\beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $\approx$ desbalanc
	$\alpha = 1.5$, $\beta = 0$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 1.5$, $\beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $>$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
AFD	$\alpha = 3$, $\beta = 0$	baixos níveis	balanc $<$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 3$, $\beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $<$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 1.5$, $\beta = 0$	baixos níveis	balanc $<$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc
	$\alpha = 1.5$, $\beta = \pi/2$	baixos níveis	balanc $\approx$ desbalanc
		altos níveis	balanc $<$ desbalanc

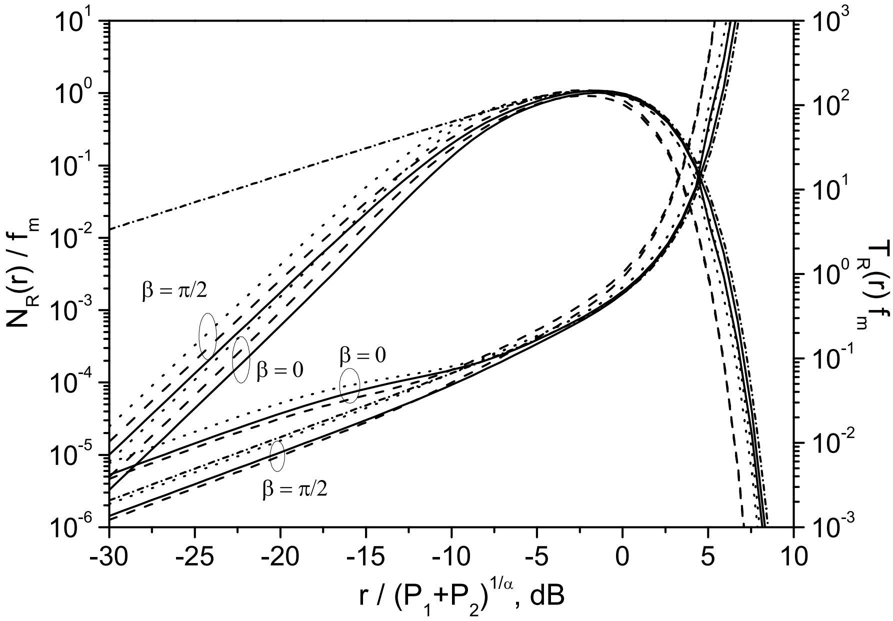

Fig. 4.5: LCR e AFD para os casos SC (linhas dot), EGC (linhas dash), MRC (linhas sólidas) e ND (linhas dash dot). Parâmetros empregados: $d/\lambda = 0.2$, $\alpha_i = 3$ e canais desbalanceados ($P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.9$).

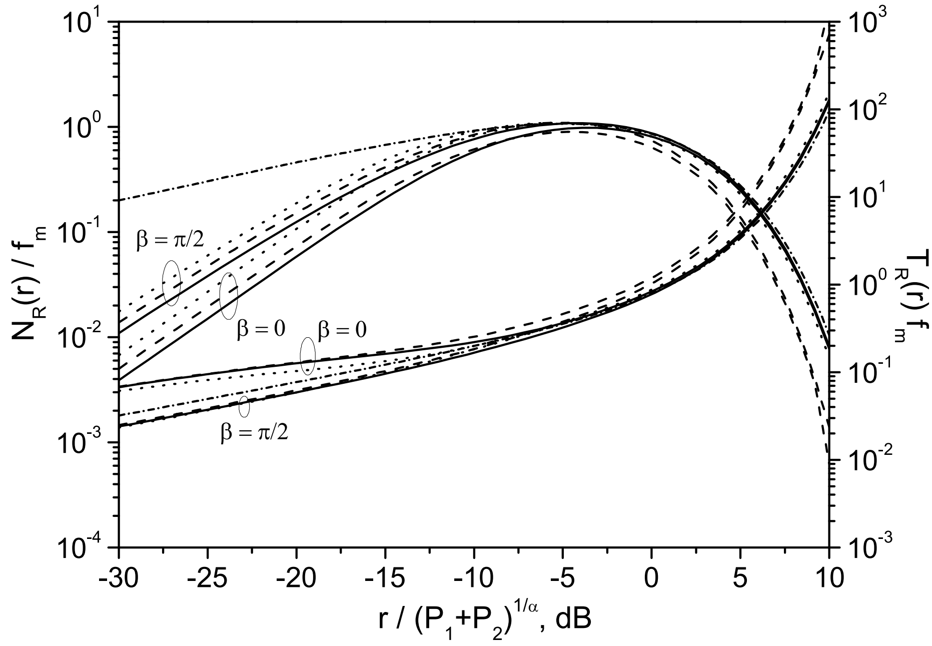

Fig. 4.6: LCR e AFD para os casos SC (linhas dot), EGC (linhas dash), MRC (linhas sólidas) e ND (linhas dash dot). Parâmetros empregados: $d/\lambda = 0.2$, $\alpha_i = 1.5$ e canais desbalanceados ($P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.9$).

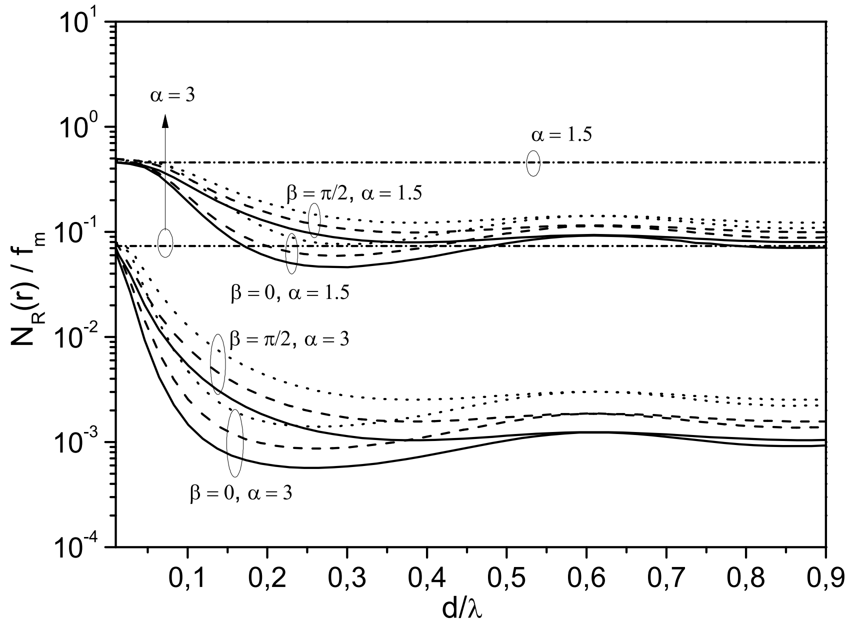

Fig. 4.7: LCR para os casos SC (linhas dot), EGC (linhas dash), MRC (linhas sólidas) e ND (linhas dash dot). Parâmetros empregados: envoltória normalizada $r/\sqrt[\alpha]{P_1+P_2} = -20$dB, $\alpha_i = 1.5, 3$ e canais desbalanceados ($P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.9$).

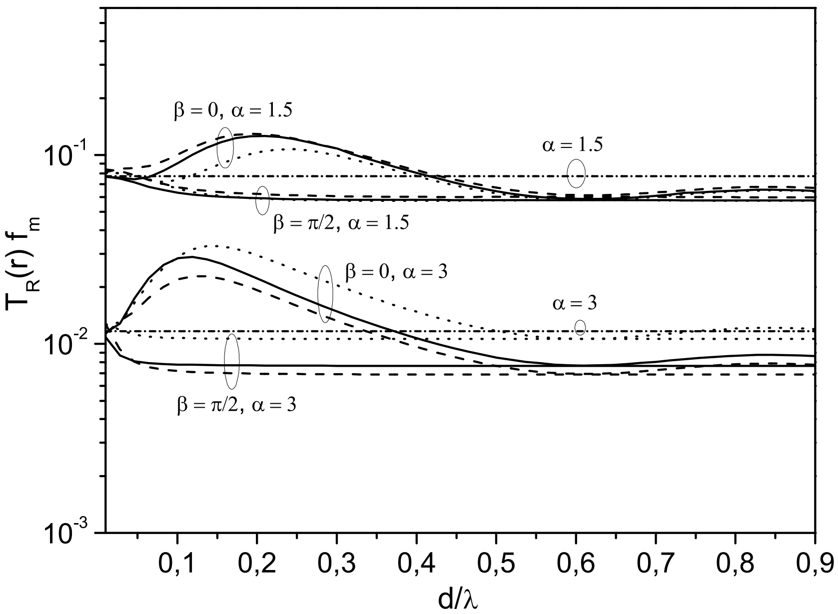

Fig. 4.8: AFD para os casos SC (linhas dot), EGC (linhas dash), MRC (linhas sólidas) e ND (linhas dash dot). Parâmetros empregados: envoltória normalizada $r/\sqrt[\alpha]{P_1+P_2} = -20$dB, $\alpha_i = 1.5, 3$ e canais desbalanceados ($P_1 = 0.1$, $P_2 = 0.9$).

Capítulo 5

Taxa de Cruzamento de Fase Generalizada e Ruído FM Aleatório para Canais de Desvanecimento Weibull

Em sistemas de comunicação sem fio, a envoltória e a fase do sinal recebido variam de forma aleatória devido ao desvanecimento causado pelo multipercurso. Dessa maneira, além de uma caracterização probabilística estática do sinal (estatística de primeira ordem), uma descrição dinâmica do mesmo (estatística de segunda ordem) é de crucial interesse na análise do desempenho de sistemas. Aliado ao estudo do comportamento da envoltória do sinal, está o estudo da fase e de sua derivada temporal, no qual este encontra inúmeras aplicações na modelagem e projeto de sistemas práticos, tais como o estudo das estatísticas de ruídos impulsivos ocorrendo em receptores FM. Estes ruídos, gerados por saltos da fase, prejudicam o desempenho do sistema aumentando principalmente a taxa de erro. Outra aplicação é investigar o fenômeno *cycle slipping* (número médio de giros $360°$ do vetor em torno de um ponto) em sistemas PLL (do inglês, *phase locked loop*) quando considera-se a transmissão sobre canais de desvanecimento Weibull.

Este Capítulo provê uma expressão simples e em forma fechada para a taxa de cruzamento de fase do sinal, operando em canais de desvanecimento Weibull, condicionada ao fato que a envoltória do mesmo está dentro de um intervalo arbitrário. Além disso, uma análise das estatísticas do ruído FM aleatório é realizada, onde as PDFs da envoltória e do ruído FM aleatório condicionada a cruzamentos ascendentes da fase em um nível fixo são obtidas.

5.1 Preliminares e Modelo de Desvanecimento Weibull

Esta Seção relaciona a envoltória e a fase dos sinais Weibull e Rayleigh com o intuito de, posteriormente, obter a PDF conjunta da envoltória, da fase e de suas derivadas temporais. Tal PDF será de extrema importância na obtenção da GPCR e na análise do ruído FM aleatório. É bom ressaltar que no Capítulo 3 já foi apresentada a relação entre as envoltórias dos sinais Weibull e Rayleigh. Por conveniência, ela será novamente apresentada aqui.

Em um ambiente de desvanecimento Rayleigh, a envoltória R_R e a fase Θ_R do sinal são descritas como

$$R_R = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{5.1a}$$

$$\Theta_R = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \tag{5.1b}$$

onde X e Y são processos gaussianos mutuamente independentes de média nula e variâncias idênticas σ^2. A derivada no tempo de X e Y são denotadas, respectivamente, por $\dot{X}$ e $\dot{Y}$, e possuem variâncias idênticas dadas por $\dot{\sigma}^2 = 2\pi^2 f_m^2 \sigma^2$. Exprimindo o sinal Rayleigh na forma complexa a partir de (5.1), temos que $Z_R = R_R \exp(j\Theta_R)$. Dessa forma, o sinal Weibull complexo Z pode ser escrito como

$$Z = Z_R^{2/\alpha} = R_R^{2/\alpha} \exp(j2\Theta_R/\alpha) = R \exp(j\Theta) \tag{5.2}$$

onde R e Θ são variáveis aleatórias representando, respectivamente, a envoltória e a fase do sinal Weibull. Para o caso especial de $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$, (5.2) reduz ao sinal complexo de Rayleigh e de uma Exponencial Negativa, respectivamente. A PDF e a CDF da envoltória R são dadas em (3.2) e (3.4), respectivamente. Neste Capítulo, a fase Θ é considerada ser uniformemente distribuída de $-2\pi/\alpha$ a $2\pi/\alpha$, diferentemente dos Capítulos anteriores e do que é comumente apresentado na literatura, no qual é considerada ser uniformemente distribuída de $-\pi$ a π. Dessa forma, a distribuição da fase depende do parâmetro α, embora ainda permaneça sendo uniformemente distribuída. A partir de (5.2), a seguinte relação entre a envoltória e a fase dos sinais Rayleigh e Weibull é obtida

$$R = R_R^{2/\alpha} \tag{5.3a}$$

$$\Theta = \frac{2\Theta_R}{\alpha} \tag{5.3b}$$

Mais uma vez vale ressaltar que, na abordagem feita nesse Capítulo, a não-linearidade afeta tanto a fase quanto a envoltória. Tal abordagem foi feita de maneira proposital para verificarmos se α, afetando a distribuição da fase, as estatísticas de segunda ordem do processo de fase, em especial a GPCR, também serão afetadas.

A seguir, estatísticas conjuntas da envoltória, da fase e de suas respectivas derivadas temporais para sinais Weibull serão apresentadas.

5.2 Estatísticas do Ruído FM Aleatório

A natureza aleatória da fase variante no tempo do sinal sujeito a desvanecimento, representado como $\dot{\Theta}$ (derivada temporal de Θ), causa um fenômeno conhecido como ruído FM aleatório [36]. Conforme mencionado na Seção 5.1, com o intuito de obter as estatísticas do ruído FM aleatório e sua conseqüente análise, a PDF conjunta $f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ das variáveis R, $\dot{R}$, Θ e $\dot{\Theta}$ é requerida. Sabe-se que $f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta})$ pode ser obtida a partir da PDF conjunta de Rayleigh $f_{R_R,\dot{R}_R,\Theta_R,\dot{\Theta}_R}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta})$, que é dada em [36]. Usando [36, Eq. 1.3-33] e as relações existentes entre as envoltórias e as fases dos processos Weibull e Rayleigh expressas em (5.3), e seguindo o procedimento estatístico padrão de transformação de variáveis, a PDF conjunta de Weibull pode ser formulada da seguinte maneira

$$f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = \frac{r^{\alpha}}{4\pi^2\sigma^2\dot{\sigma}^2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r^{\alpha}}{\sigma^2}+\frac{\alpha^2 r^{\alpha-2}\dot{r}^2}{4\dot{\sigma}^2}+\frac{r^{\alpha}\alpha^2\dot{\theta}^2}{4\dot{\sigma}^2}\right)\right]\times|J| \tag{5.4}$$

onde J é o jacobiano da transformação tal que $|J| = \alpha^4/(16r^{2-\alpha})$. Substituindo $|J|$ em (5.4), a PDF conjunta da envoltória R, da fase Θ e de suas respectivas derivadas no tempo, pode ser expressa como

$$f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = \frac{\alpha^4 r^{2\alpha-2}}{64\pi^2\sigma^2\dot{\sigma}^2}\exp\left[-\frac{r^{\alpha-2}\left(\alpha^2\sigma^2\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+4r^2\dot{\sigma}^2\right)}{8\sigma^2\dot{\sigma}^2}\right] \tag{5.5}$$

onde $r \geq 0$, $-\infty < \dot{r} < -\infty$, $-2\pi/\alpha \leq \theta \leq 2\pi/\alpha$ e $-\infty < \dot{\theta} < \infty$. Para $\alpha = 2$, (5.5) reduz ao caso de desvanecimento Rayleigh dado em [36, Eq. 1.3-33], como esperado. Observe também que (5.5) não depende da fase Θ, sendo função apenas das demais variáveis aleatórias R, $\dot{R}$ e $\dot{\Theta}$.

Realizando a integração apropriada em (5.5) com relação a $\dot{r}$, a PDF conjunta $f_{R,\Theta,\dot{\Theta}}(r,\theta,\dot{\theta})$ pode ser diretamente obtida

$$f_{R,\Theta,\dot{\Theta}}(r,\theta,\dot{\theta}) = \frac{\alpha^3 r^{3\alpha/2-1}}{16\sqrt{2}\pi^{3/2}\sigma^2\dot{\sigma}}\exp\left[-\frac{1}{8}r^{\alpha}\left(\frac{4}{\sigma^2}+\frac{\alpha^2\dot{\theta}^2}{\dot{\sigma}^2}\right)\right] \tag{5.6}$$

De forma similar encontram-se outras importantes estatísticas

$$f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta,\dot{\theta}) = \frac{\alpha^2}{2\pi\sigma^2\dot{\sigma}}\left(\frac{4}{\sigma^2}+\frac{\alpha^2\dot{\theta}^2}{\dot{\sigma}^2}\right)^{-3/2} \tag{5.7}$$

$$f_{\dot{\Theta}}(\dot{\theta}) = \frac{2\alpha}{\sigma^2 \dot{\sigma}} \left(\frac{4}{\sigma^2} + \frac{\alpha^2 \dot{\theta}^2}{\dot{\sigma}^2} \right)^{-3/2} \tag{5.8}$$

Como a derivada no tempo da fase do sinal em desvanecimento caracteriza o ruído FM aleatório, temos que (5.8) representa a PDF do ruído FM aleatório. Para $\alpha = 2$, (5.8) reduz ao caso de desvanecimento Rayleigh dado em [36, Eq. 1.4-1], como esperado. De (5.8) segue que a CDF de $\dot{\Theta}$ (ou do ruído FM aleatório) é obtida de uma maneira exata como

$$F_{\dot{\Theta}}(\dot{\theta}_0) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\alpha \dot{\theta}_0}{\dot{\sigma}} \left(\frac{4}{\sigma^2} + \frac{\alpha^2 \dot{\theta}_0{}^2}{\dot{\sigma}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{5.9}$$

Novamente, para $\alpha = 2$, (5.9) simplifica a [36, Eq. 1.4-4]. Uma característica interessante da PDF do ruído FM aleatório é que, pelo fato de $f_{\dot{\Theta}}(\dot{\theta})$ ser uma função par em $\dot{\theta}$, isto leva a $E(\dot{\Theta}) = 0$. Além disso, pode ser verificado que o segundo momento de $\dot{\Theta}$ iguala a

$$E(\dot{\Theta}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\theta}^2 f_{\dot{\Theta}}(\dot{\theta}) d\dot{\theta} = \infty \tag{5.10}$$

Portanto, a variância de $\dot{\Theta}$, definida como $\sigma^2_{\dot{\Theta}} = E(\dot{\Theta}^2) - E(\dot{\Theta})^2$, tende ao infinito.

Com fins ilustrativos, Figuras 5.1 e 5.2 esboçam $f_{\dot{\Theta}}(\dot{\theta})$ e $F_{\dot{\Theta}}(\dot{\theta})$ para alguns valores de α/f_m. Na Figura 5.1, perceba que $\dot{\Theta}$ torna-se determinístico quando α/f_m tende ao infinito. Em outras palavras, a PDF $f_{\dot{\Theta}}(\dot{\theta})$ tende ao impulso. Na Figura 5.2, à medida que α/f_m aumenta, mais rapidamente a CDF converge para o valor unitário.

5.3 Taxa de Cruzamento de Fase Generalizada

Após a obtenção e análise das estatísticas de primeira ordem para a fase do sinal Weibull e sua derivada temporal (ruído FM aleatório), torna-se agora necessário uma descrição das estatísticas de segunda ordem do mesmo. Nesta Seção apresentaremos uma formulação para a GPCR operando em canais de desvanecimento Weibull. Baseado nas estatísticas obtidas na Seção 5.2 e sabendo a CDF da envoltória do sinal (equação 3.4), uma expressão simples e em forma fechada para a GPCR será derivada.

A PCR usual, denotada aqui por $N_{\Theta}(\theta)$, é definida como o número médio de cruzamentos ascendentes (ou descendentes) por segundo do sinal num nível de fase específico θ. Essa definição pode ser extendida para um caso geral, no qual a PCR está condicionada a um intervalo arbitrário r_1 e r_2

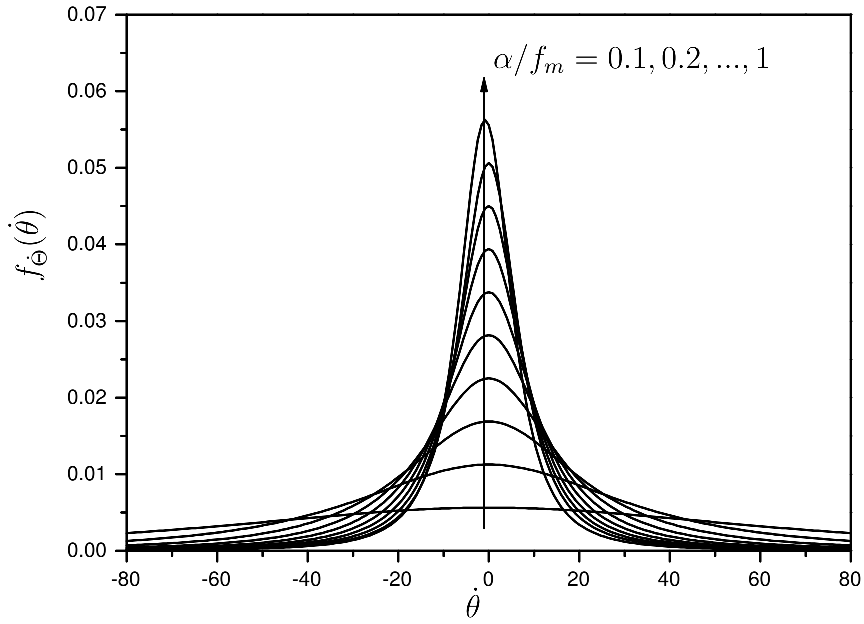

Fig. 5.1: PDF de $\dot{\Theta}$ para diferentes valores de α/f_m

da envoltória em desvanecimento. Portanto, uma expressão geral para a GPCR pode ser formulada como

$$\begin{aligned} N_{\Theta|R}(\theta; r_1, r_2) &= \int_0^\infty \dot{\theta} f_{\Theta,\dot{\Theta};R}(\theta, \dot{\theta}|r_1 \leq R \leq r_2) d\dot{\theta} \\ &= \frac{\int_{r_1}^{r_2} \int_0^\infty \dot{\theta} f_{R,\Theta,\dot{\Theta}}(r, \theta, \dot{\theta}) d\dot{\theta} dr}{F_R(r_2) - F_R(r_1)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Substituindo (5.6) e (3.4) em (5.11), e realizando algumas manipulações algébricas, encontramos uma expressão exata e em forma fechada para a GPCR em canais de desvanecimento Weibull

$$N_{\Theta|R}(\theta; r_1, r_2) = \frac{\dot{\sigma}}{4\pi\sigma} \text{erf}\left(\frac{r_1^{\alpha/2}}{\sqrt{2}\sigma}, \frac{r_2^{\alpha/2}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \times \left[\frac{1}{\exp\left(-r_1^\alpha/2\sigma^2\right) - \exp\left(-r_2^\alpha/2\sigma^2\right)}\right] \quad (5.12)$$

onde $\text{erf}(a, b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \exp(-t^2) dt$. Perceba que (5.12) é independente do nível de fase específico θ. Isso já era esperado pois a PDF conjunta da envoltória R, da fase Θ e de sua derivada $\dot{\Theta}$, presente no numerador de (5.11), assim como a CDF da envoltória, são ambas independentes de θ.

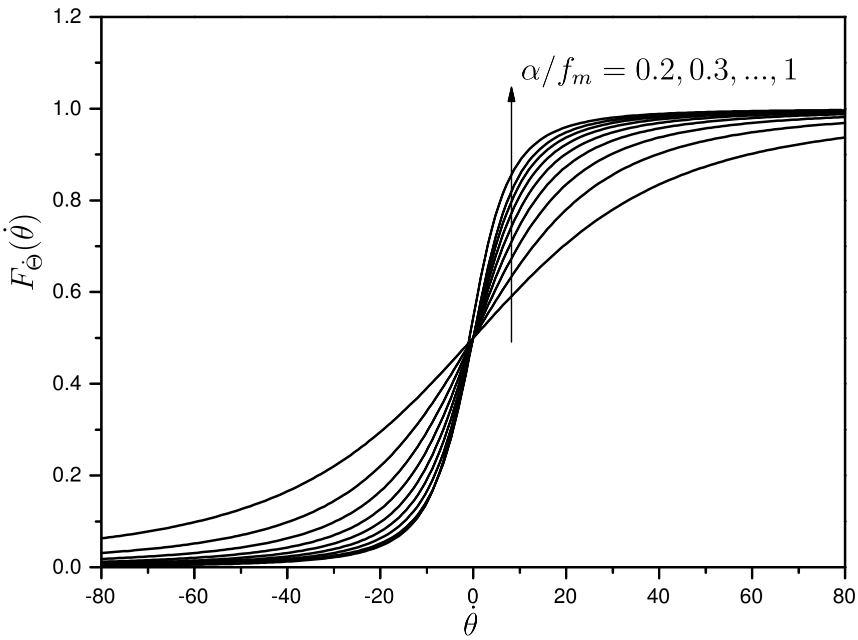

Fig. 5.2: CDF de $\dot{\Theta}$ para diferentes valores de α/f_m

Em particular, para $\alpha = 2$ em (5.12), obtemos a GPCR para canais de desvanecimento Rayleigh

$$N_{\Theta_R|R_R}(\theta; r_1, r_2) = \frac{\dot{\sigma}}{4\pi\sigma}\text{erf}\left(\frac{r_1}{\sqrt{2}\sigma}, \frac{r_2}{\sqrt{2}\sigma}\right) \times \left[\frac{1}{\exp\left(-r_1^2/2\sigma^2\right) - \exp\left(-r_2^2/2\sigma^2\right)}\right] \tag{5.13}$$

Após obtida a GPCR, vamos agora particularizar essa estatística para o caso específico (descondicionado) no qual $r_1 = 0$ e $r_2 = \infty$. Então, aplicando tal condição em (5.12), segue que

$$N_\Theta(\theta) = \frac{\dot{\sigma}}{4\pi\sigma} \tag{5.14}$$

Observe que $N_\Theta(\theta)$ é independente tanto do nível de cruzamento da fase θ quanto do parâmetro de potência α. É bom enfatizar também que (5.14) dá o mesmo resultado que o caso de desvanecimento Rayleigh. Embora os resultados sejam idênticos, as expressões utilizadas para obter tais resultados são diferentes. Portanto, apesar da GPCR para canais de desvanecimento Weibull ser afetada pela não-linearidade α, a PCR do mesmo não é afetada por tal. Em outras palavras, a GPCR para o caso Weibull e Rayleigh são distintas, porém a PCR (condição particular da GPCR) é a mesma. Isso mostra que, mesmo modelando a distribuição da fase do sinal Weibull (estatística de primeira ordem) de modo que esta seja dependente do parâmetro α, a PCR (estatística de segunda ordem) fica independente de α e possui resultado idêntico ao caso Rayleigh. Apenas a GPCR sofre influência de

α. Temos também que, dado α e um limite inferior e superior para o nível da envoltória, a GPCR é constante pois independe do nível de cruzamento da fase. Sendo assim, por questão de simplicidade, optamos por não traçar gráficos relativos a esta estatística.

5.4 PDFs Condicionais da Envoltória e do Ruído FM Aleatório

Esta Seção relata as PDFs condicionais da envoltória e do ruído FM aleatório condicionado a eventos de cruzamentos ascendentes da fase ocorrendo em um nível de fase arbitrário[1] θ_0^+. Essas PDFs condicionais nos permite descrever as estatísticas de R e $\dot{\Theta}$ nos instantes quando $\theta = \theta_0^+$. Na seqüência, $f_{R|\theta_0^+}(\cdot)$ e $f_{\dot{\Theta}|\theta_0^+}(\cdot)$ denotam, respectivamente, a PDF condicional de R dado o nível de cruzamento da fase θ_0^+ e a PDF condicional de $\dot{\Theta}$ dado o nível de cruzamento da fase θ_0^+.

Para obter as PDFs descritas acima, é necessário se ter a CDF conjunta condicional $F_{R,\dot{\Theta}|\theta_0^+}(r_0, \dot{\theta}_0)$ que é definida em [42, 43] como

$$F_{R,\dot{\Theta}|\theta_0^+}(r_0, \dot{\theta}_0) = \frac{\int_0^{r_0} dr \int_0^{\dot{\theta}_0} \dot{\theta} f_{R,\Theta,\dot{\Theta}}(r, \theta_0^+, \dot{\theta}) d\dot{\theta}}{N_\Theta(\theta_0^+)}, \quad r_0 \geq 0, \dot{\theta}_0 \geq 0 \tag{5.15}$$

Substituindo (5.6) e (5.14) em (5.15), $F_{R,\dot{\Theta}|\theta_0^+}(r_0, \dot{\theta}_0)$ é obtido. A partir da CDF $F_{R,\dot{\Theta}|\theta_0^+}(r_0, \dot{\theta}_0)$, a PDF condicional $f_{R|\theta_0^+}(r_0)$ é obtida como

$$f_{R|\theta_0^+}(r_0) = \frac{d}{dr} F_{R,\dot{\Theta}|\theta_0^+}(r_0, \infty) = \frac{\alpha r_0^{\alpha/2-1}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{r_0^\alpha}{2\sigma^2}\right) \tag{5.16}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a PDF condicional $f_{\dot{\Theta}|\theta_0^+}(\dot{\theta}_0)$ pode ser expressa como

$$f_{\dot{\Theta}|\theta_0^+}(\dot{\theta}_0) = \frac{d}{d\dot{\theta}_0} F_{R,\dot{\Theta}|\theta_0^+}(\infty, \dot{\theta}_0) = \frac{2\alpha^2 \dot{\theta}_0}{\sigma^2 \dot{\sigma}} \left(\frac{4}{\sigma^2} + \frac{\alpha^2 \dot{\theta}_0^{\,2}}{\dot{\sigma}^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{5.17}$$

Figuras 5.3 e 5.4 esboçam as PDFs condicionais $f_{R|\theta_0^+}(r_0)$ e $f_{\dot{\Theta}|\theta_0^+}(\dot{\theta}_0)$ para alguns parâmetros de desvanecimento ($\alpha = 1, 2, ..., 5$). Na Figura 5.3 perceba que a curva reduz a uma função gaussiana quando $\alpha = 2$, que é verificado em (5.16) para $\alpha = 2$. Além disso, quando α tende ao infinito, observe que as variáveis aleatórias R e $\dot{\Theta}$ tornam-se determinísticas (nas Figuras 5.3 e 5.4, respectivamente).

[1]O superscrito $+$ refere-se a cruzamentos ascendentes. Perceba que em cruzamentos ascendentes temos que $0 \leq \dot{\Theta} < \infty$.

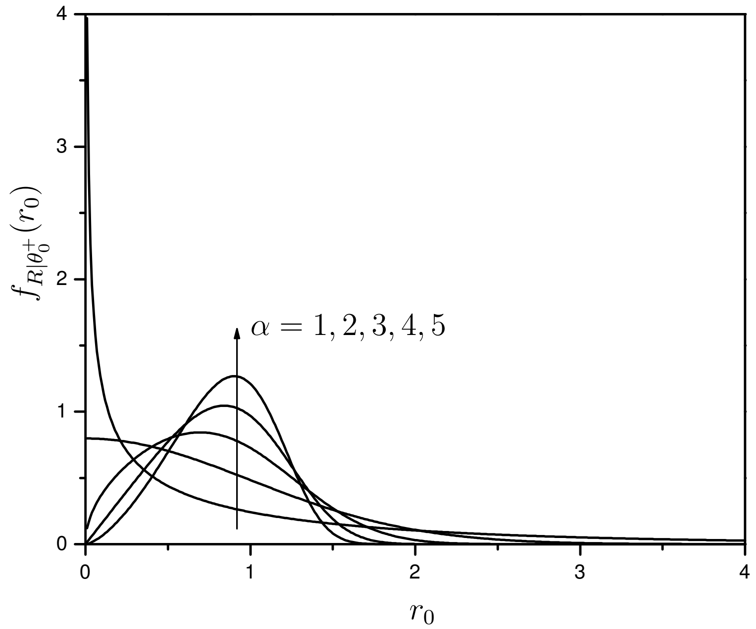

Fig. 5.3: PDF condicional $f_{R|\theta_0^+}(r_0)$ para alguns parâmetros de desvanecimento

5.5 Conclusões

Neste Capítulo uma expressão simples e em forma fechada para a GPCR em canais de desvanecimento Weibull foi obtida. Particularizando esta expressão para o caso em que o intervalo da envoltória r_1 e r_2 assumia valores 0 e ∞, a PCR também foi derivada. Percebeu-se que, embora a distribuição da fase dependesse do parâmetro α, apenas a GPCR sofria influência de tal-não linearidade. Indo mais além, dado α, r_1 e r_2, a GPCR assumiu valores constantes para qualquer nível de cruzamento da fase θ. Isto mostra que a GPCR independe de θ. É bom salientar que uma análise desse tipo nunca tinha sido feita na literatura para canais de desvanecimento Weibull. Além de abordar as estatísticas de segunda ordem da fase do sinal Weibull, uma análise para as estatísticas de primeira ordem do ruído FM aleatório foi feita assim como as PDFs condicionais da envoltória e do ruído FM aleatório condicionado a um nível de fase arbitrário foram apresentadas neste Capítulo.

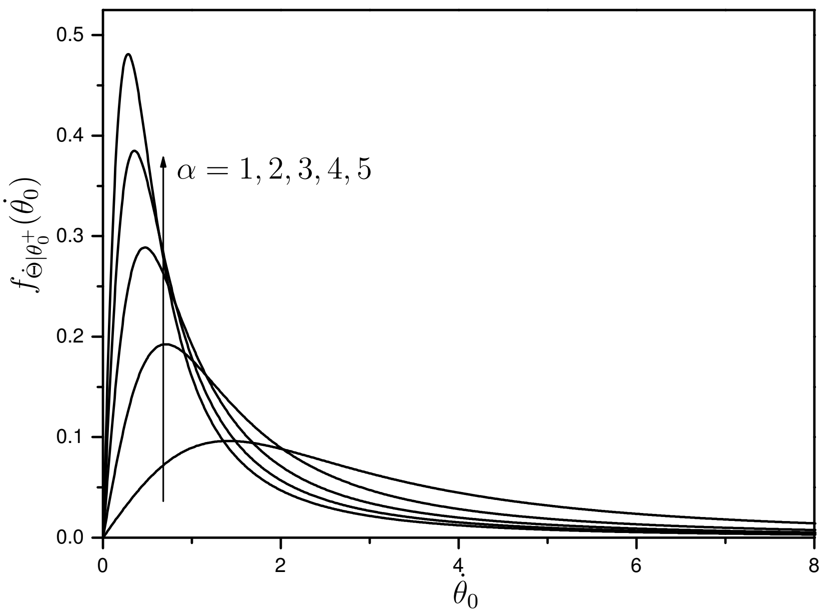

Fig. 5.4: PDF condicional $f_{\dot{\Theta}|\theta_0^+}(\dot{\theta}_0)$ para alguns parâmetros de desvanecimento

Capítulo 6

Taxa de Cruzamento de Fase Generalizada para Canais de Desvanecimento Nakagami-*m*

Como descrito no Capítulo 5, em sistemas de comunicação sem fio, a envoltória e a fase do sinal recebido variam de maneira aleatória devido ao desvanecimento causado por multipercurso, no qual o sinal que chega ao receptor é composto por um grande número de ondas espalhadas. O comportamento da envoltória em ambientes de desvanecimento tem sido extensivamente explorado na literatura. Por outro lado, embora o conhecimento da variação da fase do sinal recebido exerça um papel crucial no projeto de qualquer técnica de comunicação, sua caracterização para um canal de desvanecimento importante, denominado Nakagami-*m*, permanece desconhecida. O estudo do comportamento da fase pode ser útil, por exemplo, no projeto de recuperação de portadoras em sistemas de sincronismo de receptores coerentes [15].

Este Capítulo provê uma expressão nova, simples, exata e em forma fechada para a GPCR de canais de desvanecimento Nakagami-*m*. É claro que a PCR é também obtida como um caso especial. Simulações exaustivas validam completamente a formulação proposta aqui. Além disso, algumas estatísticas em forma fechada da envoltória, da fase e de suas derivadas temporais, até então nunca apresentadas na literatura, serão obtidas. Nossa formulação faz uso do modelo de desvanecimento recentemente apresentado em [20], no qual a PDF conjunta da envoltória e da fase do sinal Nakagami-*m* foi obtida.

6.1 O Modelo da Envoltória e Fase do Sinal Nakagami-*m*

Quando a distribuição da envoltória do sinal Nakagami-*m* foi proposta (por meios empíricos) [6], nenhuma informação a respeito da distribuição da fase foi fornecida. Dessa forma, correntemente adotava-se que a PDF da fase era uniforme e independente do parâmetro m de desvanecimento.

Em [20], os autores suspeitaram da veracidade de tal suposição devido as seguintes razões que serão explicadas a seguir. É largamente conhecido que a distribuição Nakagami-*m* aproxima-se da de Hoyt, para $m < 1$, e da de Rice, para $m > 1$. De fato, quando os parâmetros de Hoyt b e Rice k igualam a 0 e o parâmetro de Nakagami-*m* iguala a 1, estas três distribuições reduzem ao caso Rayleigh, em que a uniformidade da fase é válida. Exceto para estes casos muito especiais, as distribuições (ou PDFs) da fase de Hoyt e Rice não são uniformes. Além disso, para $b = \pm 1$ e $m = 0.5$, as PDFs da envoltória de Hoyt e Nakagami-*m* coincidem com uma gaussiana unilateral, e a PDF da fase de Hoyt consiste de impulsos em 0 e π, ou em $\pi/2$ e $3\pi/2$. Também, para $k \to \infty$ e $m \to \infty$, as PDFs da fase de Rice e Nakagami-*m* tendem a coincidir uma com a outra, e a fase de Rice nesse caso tende a um impulso na fase onde a componente dominante se encontra. Dessa forma, qualquer modelo proposto para a fase do sinal Nakagami-*m* deve coincidir com os modelos da fase de Hoyt e Rice no qual as respectivas PDFs da envoltória se igualam.

Em [20], um modelo de desvanecimento para a envoltória e a fase do sinal Nakagami-*m* foi proposto. Nesta Seção faremos uma revisão deste modelo [20], apresentando as principais estatísticas obtidas. Sejam R_m e Θ_m variáveis aleatórias representando, respectivamente, a envoltória e a fase do sinal Nakagami-*m*. A PDF conjunta da envoltória e fase $f_{R_m,\Theta_m}(r,\theta)$ do sinal Nakagami-*m* é dada por [20]

$$f_{R_m,\Theta_m}(r,\theta) = \frac{m^m|\sin(2\theta)|^{m-1}\, r^{2m-1}}{2^{m-1}\Omega^m\,\Gamma^2(m/2)} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right) \tag{6.1}$$

onde $\Omega = \mathrm{E}(R_m^2)$ e $m = E^2(R_m^2)/(E(R_m^4) - E^2(R_m^2))$. Mostrou-se em [20] que, ao contrário da suposição feita nos demais trabalhos existentes na literatura, a PDF da fase não é uniforme, exceto para o caso $m = 1$, e tem como expressão

$$f_{\Theta_m}(\theta) = \frac{\Gamma(m)|\sin(2\theta)|^{m-1}}{2^m\,\Gamma^2(m/2)} \tag{6.2}$$

Ainda de acordo com tal modelo [20], se assumirmos X e Y como, respectivamente, as componentes em fase e em quadratura do sinal Nakagami-*m*, temos que $f_W(w)$, $W = X$ or $W = Y$, é dada por

$$f_W(w) = \frac{m^{m/2}\,|w|^{m-1}}{\Omega^{m/2}\,\Gamma(m/2)} \exp\left(-\frac{mw^2}{\Omega}\right), -\infty < w < \infty \tag{6.3}$$

Perceba que X e Y são as componentes em fase e em quadratura do sinal Nakagami-*m* e não dos *clusters* das ondas de multipercurso que compõe esse sinal. De fato, as componentes em fase e em quadratura de cada um dos clusters que constitui o sinal são variáveis gaussianas de média nula e variâncias idênticas. A variável W pode ser escrita como $W = S\,|W|$, onde S representa $sgn\,(W)$ (sinal de W) e $|W|$ segue a distribuição de Nakagami-*m*. Por simplicidade matemática, escrevemos

$W = SN$, onde N denota uma variável Nakagami-*m*.

6.2 Estatísticas Conjuntas do Sinal Nakagami-*m*

Nesta Seção algumas estatísticas conjuntas da envoltória, da fase e de suas respectivas derivadas temporais serão apresentadas após uma demonstração minuciosa que X, $\dot{X}$, Y, $\dot{Y}$ são independentes entre si (a prova de tal independência está a seguir). Seja $\dot{W}$ a derivada no tempo de W. Da Seção 6.1, podemos tirar a seguinte relação $\dot{W} = \dot{S}N + S\dot{N}$. Como S assume valores constantes ± 1, exceto nos instante de transição ($-1 \to +1$ e $+1 \to -1$), sua derivada no tempo é nula. Além disso, como W é contínuo, os instantes de transição ocorrem exatamente, e somente, nos instantes em que W cruza o zero de forma que $N = |W|$ é nulo. Portanto, $\dot{S}N$ será sempre nulo e $\dot{W} = S\dot{N}$. Foi mostrado em [44] que $\dot{N}$ é independente de N e segue uma distribuição gaussiana com média nula e desvio padrão $\dot{\sigma} = \pi f_m \sqrt{\Omega/m}$. Sabendo-se que $\dot{W} = S\dot{N}$, então $\dot{W}$ condicionado a $W = SN$ também segue uma distribuição gaussiana, tendo os mesmos parâmetros da distribuição de $\dot{N}$. Conseqüentemente, $\dot{W}$ é independente de W. De forma mais clara, X é independente de $\dot{X}$ e Y é independente de $\dot{Y}$. No modelo proposto em [20], X e Y são processos independentes. Portanto, X é independente de $\dot{Y}$ e Y é independente de $\dot{X}$. Usando (6.3) para a PDF de W e sabendo que $\dot{W}$ segue uma distribuição gaussiana com os parâmetros citados, então a PDF conjunta $f_{X,\dot{X},Y,\dot{Y}}(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ é dada por

$$f_{X,\dot{X},Y,\dot{Y}}\left(x,\dot{x},y,\dot{y}\right) = f_X\left(x\right) f_{\dot{X}}\left(\dot{x}\right) f_Y\left(y\right) f_{\dot{Y}}\left(\dot{y}\right) = \frac{m^{m+1}\ |x|^{m-1}|y|^{m-1}}{\Omega^{m+1}\ \Gamma^2(\frac{m}{2})\ 2\pi^3\ f_m^2} \times \exp\left(-\frac{m}{\Omega}\left(x^2+y^2+\frac{1}{2\pi^2 f_m^2}\dot{x}^2+\frac{1}{2\pi^2 f_m^2}\dot{y}^2\right)\right) \tag{6.4}$$

Sabe-se que as componentes em fase e em quadratura do sinal Nakagami-*m* podem ser escritas em função da envoltória e da fase do mesmo tal que $X = R_m \cos\Theta_m$ e $Y = R_m \sin\Theta_m$. Portanto, derivando X e Y, segue que $\dot{X} = \dot{R}_m \cos\Theta_m - R_m\dot{\Theta}_m \sin\Theta_m$ e $\dot{Y} = \dot{R}_m \sin\Theta_m + R_m\dot{\Theta}_m \cos\Theta_m$. Aplicando o procedimento estatístico padrão de transformação de variáveis e após manipulações algébricas, a PDF conjunta $f_{R_m,\dot{R}_m,\Theta_m,\dot{\Theta}_m}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ da envoltória, da fase, e de suas respectivas derivadas temporais, é obtida como

$$f_{R_m,\dot{R}_m,\Theta_m,\dot{\Theta}_m}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = \frac{m^{m+1}\ r^{2m}\ |\sin(2\theta)|^{m-1}}{\Omega^{m+1}\ \Gamma^2(\frac{m}{2})\ 2^m\pi^3 f_m^2} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}\left(r^2+\frac{\dot{r}^2+r^2\ \dot{\theta}^2}{2\pi^2\ f_m^2}\right)\right) \tag{6.5}$$

Para $m = 1$, (6.5) reduz ao caso de desvanecimento Rayleigh dado em [36, Eq. 1.3-33]. Perceba também que $f_{R_m,\dot{R}_m,\Theta_m,\dot{\Theta}_m}(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = f_{\dot{R}_m}(\dot{r}) f_{\Theta_m}(\theta) f_{R_m,\dot{\Theta}_m}(r,\dot{\theta})$, ou seja, a fase e a derivada temporal da envoltória constituem processos independentes. O mesmo não pode ser dito para a envoltória e a derivada temporal da fase. Algumas densidades importantes são obtidas realizando a integração apropriada em (6.5) e serão mostradas em seguida

$$f_{R_m,\Theta_m,\dot{\Theta}_m}(r,\theta,\dot{\theta}) = \frac{m^{m+\frac{1}{2}}\, r^{2m} |\sin(2\theta)|^{m-1}}{2^{m-\frac{1}{2}}\,\Omega^{m+\frac{1}{2}}\,\Gamma^2(\frac{m}{2})\, f_m\, \pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\left(1+\frac{\dot{\theta}^2}{2\pi^2 f_m^2}\right)\right) \tag{6.6}$$

$$f_{\Theta_m,\dot{\Theta}_m}(\theta,\dot{\theta}) = \frac{|\sin(2\theta)|^{m-1}\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{2^{m+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\dot{\theta}^2}{2\pi^2 f_d^2}\right)^{m+\frac{1}{2}}\Gamma^2(\frac{m}{2})\, f_m\, \pi^{3/2}} \tag{6.7}$$

$$f_{\dot{\Theta}_m}(\dot{\theta}) = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\left(1+\frac{\dot{\theta}^2}{2\pi^2 f_d^2}\right)^{m+\frac{1}{2}}\Gamma(m)\, f_m\, \pi^{3/2}} \tag{6.8}$$

A distribuição $F_{\dot{\Theta}_m}(\dot{\theta})$ de $\dot{\Theta}_m$ é obtida como

$$F_{\dot{\Theta}_m}(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} + \frac{\dot{\theta}\,\Gamma(m+\frac{1}{2})\;{}_2F_1\left(m, \frac{1}{2}+m; \frac{3}{2}; -\frac{\dot{\theta}^2}{2\pi^2 f_m^2}\right)}{\sqrt{2}\, f_m\;\pi^{3/2}\Gamma(m)} \tag{6.9}$$

É bom salientar que as equações de (6.4) a (6.9) nunca tinham sido apresentadas na literatura devido a inexistência de um modelo para a fase do sinal Nakagami-*m* (os autores consideravam a distribuição da fase uniforme). Porém, de posse do modelo proposto em [20] e após provarmos que X, $\dot{X}$, Y, $\dot{Y}$ são independentes entre si, tais expressões foram encontradas. A partir destes resultados, uma caracterização dinâmica (estatísticas de ordem superior) mais detalhada e confiável do canal pode agora ser realizada. Em particular, na próxima Seção apresentaremos a GPCR para canais de desvanecimento Nakagami-*m*, que no caso será completamente validada por simulação.

6.3 Taxa de Cruzamento de Fase Generalizada

Esta Seção apresenta e analisa as mesmas estatísticas da Seção 5.3 mas agora para canais de desvanecimento Nakagami-*m*. Optamos por colocá-la em um outro Capítulo pois a abordagem realizada neste para obter as estatísticas de primeira ordem, que são de vital importância para se chegar a expressão final da GPCR, é completamente diferente daquela feita no Capítulo 5.

Como visto na Seção 5.3 para o caso Weibull, a PCR usual, denotada neste Capítulo como $N_{\Theta_m}(\theta)$, é definida como o número médio de cruzamentos ascendentes (ou descendentes) por segundo do sinal num nível de fase específico θ. Essa definição pode ser extendida para um caso geral (GPCR), na qual a taxa de cruzamento da fase está condicionada a envoltória está dentro de um intervalo arbitrário $r_1 \leq R_m \leq r_2$, como realizado por Rice [14] na investigação de ruídos *click* em sistemas FM. Portanto, a GPCR para canais Nakagami-*m* (que é a mesma formulação para canais Weibull) é expressa como

$$\begin{aligned} N_{\Theta_m|R_m}(\theta; r_1, r_2) &= \int_0^\infty \dot{\theta} f_{\Theta_m,\dot{\Theta}_m;R_m}(\theta, \dot{\theta}|r_1 \leq R_m \leq r_2) d\dot{\theta} \\ &= \frac{\int_{r_1}^{r_2} \int_0^\infty \dot{\theta} f_{R_m,\Theta_m,\dot{\Theta}_m}(r, \theta, \dot{\theta}) d\dot{\theta} dr}{F_{R_m}(r_2) - F_{R_m}(r_1)} \end{aligned} \tag{6.10}$$

Temos que $F_{R_m}(\cdot)$ é dada por $F_{R_m}(r) = \gamma(m, mr^2/\Omega)/\Gamma(m)$, onde $\gamma(\cdot, \cdot)$ é a função Gamma incompleta [35, Eq. 6.5.2], e $f_{R_m,\Theta_m,\dot{\Theta}_m}(\cdot, \cdot, \cdot)$ já foi anteriormente obtida em (6.6). Fazendo as substituições apropriadas e realizando as manipulações algébricas necessárias, uma expressão simples e em forma fechada para a GPCR é encontrada

$$N_{\Theta_m|R_m}(\theta; r_1, r_2) = \frac{\sqrt{\pi} f_m \, |\sin(2\theta)|^{m-1}}{2^{m+\frac{1}{2}} \, \Gamma^2(\frac{m}{2})} \, \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + m; m\rho_1^2, m\rho_2^2) \, \Gamma(m)}{\Gamma(m, m\rho_2^2, m\rho_1^2)} \tag{6.11}$$

onde $\Gamma(a; b, c) = \gamma(a, b) - \gamma(a, c)$ é a função Gamma generalizada incompleta e $\rho_i^2 = r_i^2/\Omega$, $i = 1, 2$. Em particular, para $m = 1$, obtemos a GPCR para canais de desvanecimento Rayleigh, que é expressa da seguinte forma

$$N_{\Theta_R|R_R}(\theta; r_1, r_2) = \frac{f_m \; \Gamma(\frac{1}{2}; \rho_1^2, \rho_2^2)}{2\sqrt{2\pi} \, (\exp(-\rho_1^2) - \exp(-\rho_2^2))} \tag{6.12}$$

Como era de se esperar, (5.13) e (6.12) são iguais pois ambas representam a GPCR para canais Rayleigh, apesar do procedimento realizado para se chegar a tais expressões ser diferente. Uma pecularidade interessante relativa a (6.12) (ou (5.13)) é que elas independem do nível de cruzamento da fase do sinal, dependendo apenas do intervalo arbitrário da envoltória. Tal pecularidade não se aplica em (6.11) para canais Nakagami-*m*, com exceção de $m = 1$. Para o caso específico no qual $r_1 = 0$ e $r_2 = \infty$, (6.11) resulta na PCR usual, ou seja, descondicionada do intervalo arbitrário da envoltória

$$N_{\Theta_m}(\theta) = \frac{\sqrt{\pi} \, f_m \; |\sin(2\theta)|^{m-1} \; \Gamma(m - \frac{1}{2})}{2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma^2(\frac{m}{2})} \tag{6.13}$$

Reduzindo (6.13) para o caso Rayleigh ($m = 1$), temos

$$N_{\Theta_R}(\theta) = \frac{f_m}{2\sqrt{2}} \tag{6.14}$$

Observe que, assim como em (6.12), (6.14) também é independente do nível de fase θ, que é coerente com o resultado obtido por Rice [14], e é idêntico a (5.14), pois $\dot{\sigma}$ dado em (5.14) pode também ser expresso como $\dot{\sigma} = \sqrt{2}\pi f_m \, \sigma$. Em contrapartida, esta independência relacionada a fase não se aplica a (6.13). É bom salientar que estes resultados (equações 6.11 a 6.14), que por sinal são simples e em forma fechada, nunca tinham sido apresentados na literatura.

6.4 Resultados Numéricos

Após a obtenção das equações analíticas, alguns gráficos serão traçados nesta Seção de forma que ilustrem tais equações. Assim, analisando algumas propriedades das curvas, poderemos ter uma noção do comportamento dinâmico da fase do sinal Nakagami-*m*, estando este sujeito a determinadas condições de desvanecimento. Além disso, a validade da formulação proposta é checada comparando as curvas teóricas com os resultados simulados. A simulação foi feita usando o software desenvolvido em [45,46]. Como será observado, uma excelente concordância irá ser atingida entre os resultados de simulação e as expressões analíticas. Nas Figuras 6.1 e 6.2, a PCR, $N_{\Theta_m}(\theta)/f_m$, é traçada em função de θ para alguns parâmetros de desvanecimento m. Para $m = 1$ (caso Rayleigh), esta estatística é independente do nível de fase, como já constatado em (6.14), assumindo um valor constante igual a $1/(2\sqrt{2})$, que é coerente com o resultado obtido por Rice [14]. Para $m = 1.5, 2, 2.5, 4, 4.5$, a PCR é periódica com período $\pi/2$ e nula para inteiros múltiplos de $\pi/2$. Observe uma excelente concordância entre as curvas teóricas e simuladas. Perceba que, assim como para a PDF da fase dada em (6.2), exceto para $m = 1$, a PCR não é uniforme.

Para $m = 2$, Figura 6.3 mostra a GPCR, $N_{\Theta_m|R_m}(\theta; r_1, r_2)/f_m$. Fazendo $\rho_1 = 0$ e variando ρ_2, observe que as curvas não diferem muito umas das outras para $\rho_2 = 2$ e $\rho_2 = 50$. De fato, nota-se que a curva para $\rho_2 = 2$ é praticamente coincidente com aquela na qual $\rho_2 \to \infty$, ou seja, a envoltória tendo intensidade de duas ou cinqüenta vezes do seu valor rms (do inglês *root mean square*), não altera a GPCR. Assim, para fins práticos, considera-se ρ_2 assumindo no máximo valor 2, caso se mantenha ρ_1 nulo.

Figura 6.4 esboça a PCR para alguns parâmetros de desvanecimento. Para valores de m maiores que 1, as curvas atingem o máximo em múltiplos ímpares de $\pi/4$. Para valores de m entre 0.5 e 1, as curvas são convexas com mínimo em múltiplos ímpares de $\pi/4$ e tendem ao infinito em múltiplos inteiros de $\pi/2$, que é coerente com [17, Eq.10].

6.5 Conclusões

Neste Capítulo estatísticas de ordem superior da fase para canais de desvanecimento Nakagami-*m* foram apresentadas. Em especial, uma expressão simples e em forma fechada para a GPCR foi encontrada, sendo esta possível através da obtenção das estatísticas conjuntas da envoltória, da fase e de suas respectivas derivadas temporais, até então nunca reportadas na literatura. Obviamente, a PCR foi também obtida como um caso particular da GPCR. Dessa forma, pôde se ter uma noção do comportamento dinâmico da fase sob determinadas condições de desvanecimento. Foi verificado que, exceto para $m = 1$, a PCR não era uniforme. Alguns resultados numéricos obtidos por simulação foram apresentados e validaram completamente a formulação proposta aqui. Percebeu-se um excelente ajuste entre as curvas teóricas e as simuladas.

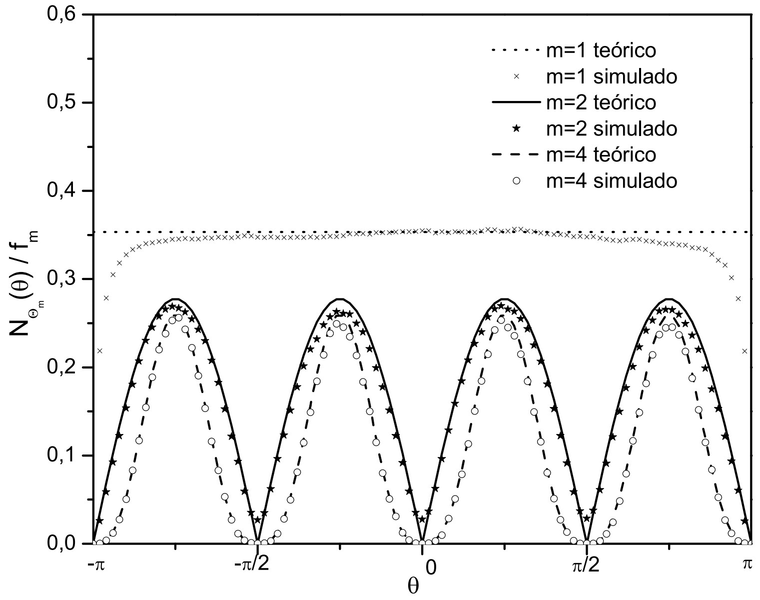

Fig. 6.1: Comparação entre as curvas teóricas e simuladas relacionadas a PCR.

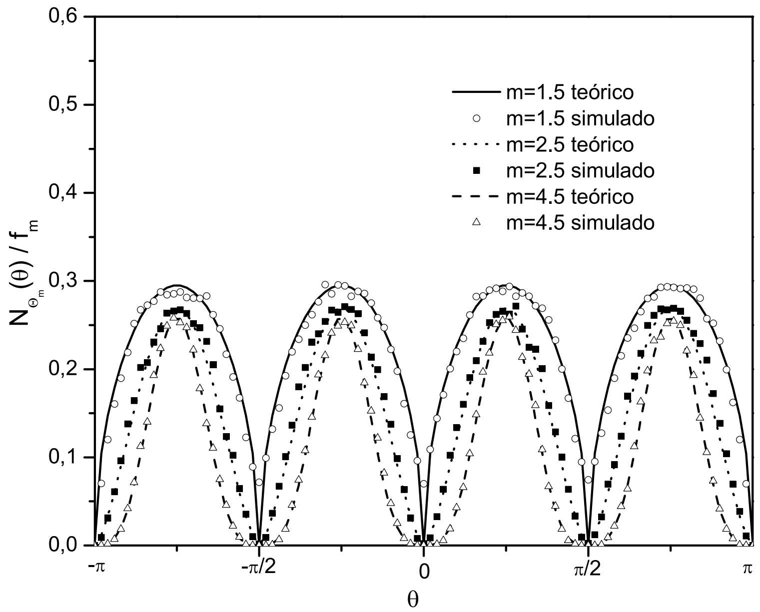

Fig. 6.2: Comparação entre as curvas teóricas e simuladas relacionadas a PCR.

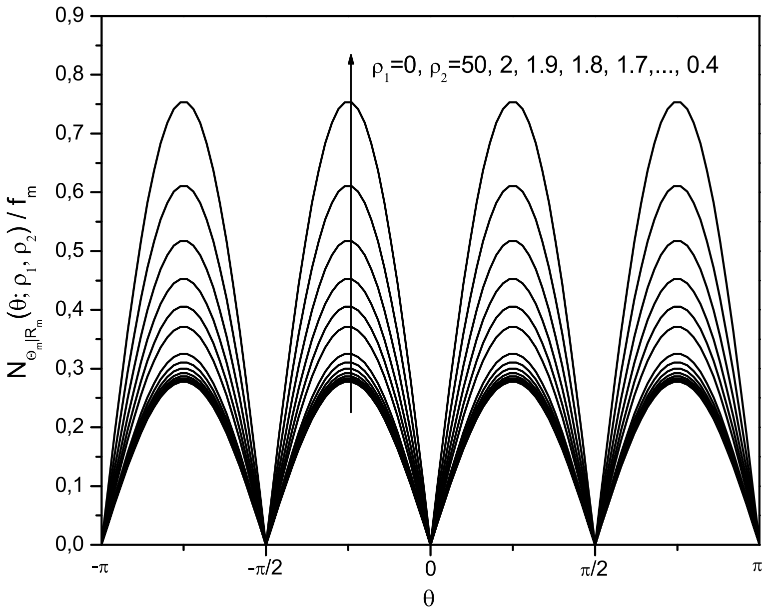

Fig. 6.3: GPCR para um parâmetro de desvanecimento $m = 2$.

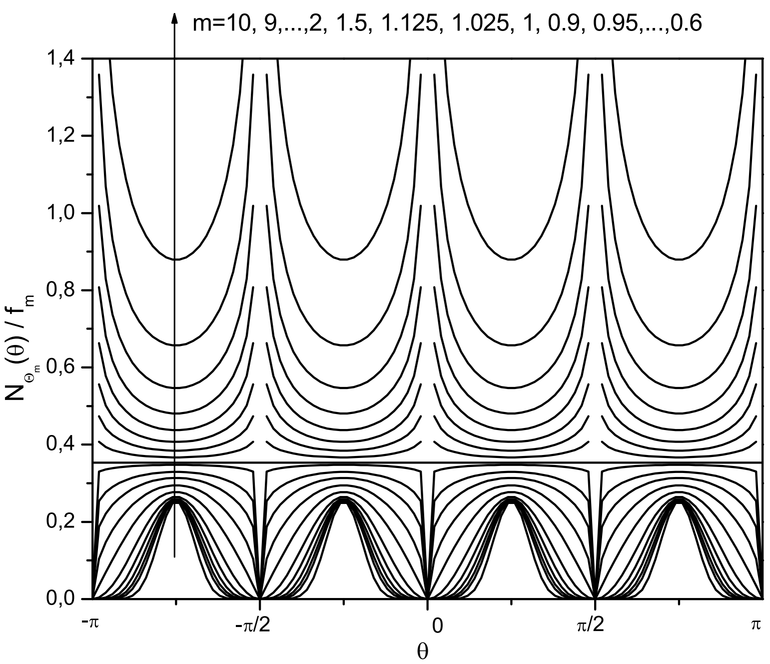

Fig. 6.4: PCR em função de alguns parâmetros de desvanecimento.

Capítulo 7

Considerações Finais

A distribuição Weibull é uma das distribuições de tempo de vida mais utilizadas em engenharia de confiabilidade. Devido à sua origem, apenas recentemente tal distribuição passou a ser utilizada para aplicações em comunicações sem fio. Portanto, ainda existem poucos estudos na literatura analisando o comportamento estatístico do sinal em um ambiente de desvanecimento Weibull. Nos Capítulos 3, 4 e 5 algumas estatísticas do sinal Weibull até então nunca abordada na literatura para tal ambiente de desvanecimento foram obtidas e discutidas. Diferentemente dos Capítulos anteriores, o Capítulo 6 reportou algumas estatísticas do sinal operando em um ambiente de desvanecimento Nakagami-*m*.

No Capítulo 3, estatísticas conjuntas de duas variáveis Weibull correlacionadas foram apresentadas. Em particular, a PDF conjunta, os momentos conjuntos generalizados e o coeficiente de correlação generalizado das envoltórias foram obtidos em termos de parâmetros físicos bem conhecidos, tais como potência (DC e AC), comprimento de onda, velocidade do receptor, tempo de chegada das amostras do sinal no receptor, dentre outros. A PDF conjunta Weibull apresentada nesse Capítulo possuía algumas pecularïedades, pois era simples, era completamente caracterizada em termos de parâmetros físicos e era consistente com outras PDFs conjuntas mais gerais utilizadas em comunicações sem fio, tais como Rice [23, 24] e Nakagami-*m* [6], desde que ela compreendia a PDF conjunta Rayleigh como caso especial. Observou-se também que as propriedades de correlação para o ambiente de desvanecimento Weibull eram aproximadamente iguais as do caso Rayleigh quando o parâmetro de potência (ou parâmetro de Weibull) α era maior que 1. Por outro lado, elas diferiram substancialmente uma das outras quando α foi menor que 1. O Capítulo 4 apresentou expressões para estatísticas de ordem superior (LCR e AFD) de sinais Weibull correlacionados, desbalanceados e não-idênticos usando diversidade SC, EGC e MRC com dois ramos. As expressões obtidas para a LCR e a AFD foram gerais e podiam ser aplicadas a qualquer tipo de diversidade. Além disso, a restrição feita em [25–27] no qual os processos descritos pelas derivadas no tempo das envoltórias dos ramos eram assumidos ser independentes entre si e com as envoltórias dos demais ramos, foi desprezada na derivação das expressões. A envoltória do i-ésimo ramo foi considerada de fato independente de sua derivada, mas esta última era correlacionada com a envoltória e a derivada no tempo da envoltória do l-ésimo ramo, $i \neq l$.

O Capítulo 5 investigou as estatísticas de ordem superior, em especial a GPCR, do processo de fase e analisou as estatísticas de primeira ordem da derivada temporal da fase (ruído FM aleatório) em um ambiente Weibull sem diversidade. A fase foi assumida ser uniformemente distribuída de $-2\pi/\alpha$ a $2\pi/\alpha$, diferentemente dos Capítulos 3 e 4. Tal consideração foi feita de maneira proposital pois, fazendo a distribuição da fase dependente de α, pretendíamos verificar se a GPCR ou até mesmo a PCR eram afetadas por tal não-linearidade. A expressão final para a GPCR foi função do parâmetro α, mas a PCR, além de não ser influenciada por α, resultava na mesma expressão que a do caso Rayleigh, embora as estatísticas utilizadas para obter tais resultados fossem diferentes. O Capítulo 6 obteve uma expressão para a GPCR de canais de desvanecimento Nakagami-*m*. Nossa abordagem baseou-se num modelo recentemente proposto em [20]. Após demonstrarmos que as componentes em fase, em quadratura e suas derivadas no tempo eram independentes entre si, estatísticas conjuntas da envoltória, da fase e de suas respectivas derivadas no tempo foram apresentadas. Por fim, resultados numéricos obtidos por simulação validaram a formulação proposta nesse Capítulo.

Vale à pena ressaltar que o conteúdo desta dissertação é totalmente original, motivo pelo qual originou duas publicações em revistas internacionais do IEEE e quatro em congressos. Com exceção das expressões apresentadas no Capítulo 4, todas as demais expressões são simples e em forma fechada. Através destas, alguns tópicos da pesquisa relacionados à caracterização estatística do canal rádio-móvel poderão, em trabalhos futuros, ser explorados de uma forma mais elegante, sem tediosos procedimentos matemáticos.

7.1 Investigações Futuras

Esta dissertação é fruto de um trabalho em andamento e possui uma vasta área no ramo da pesquisa, voltada à caracterização estatística do sinal em desvanecimento, que pode ser investigada baseada nos resultados, e acima de tudo, nas idéias aqui propostas.

Em seguida, listamos algumas propostas de trabalhos futuros a serem feitos relacionados a esta dissertação:

- Relacionado aos modelos de desvanecimento generalizados $\alpha - \mu$, $\eta - \mu$ e $\kappa - \mu$, estatísticas de ordem superior, em especial a LCR e a AFD, podem ser obtidas para ambientes com e sem diversidade. Além disso, uma caracterização estática e dinâmica para a fase do sinal de cada um dos modelos pode ser realizada. Quando tais modelos foram propostos, nenhuma informação a respeito da fase do sinal foi fornecida. Dessa forma, a PDF conjunta da envoltória e fase do sinal bem com a GPCR são umas das estatísticas da fase que também podem ser estudadas. Baseado nesta PDF conjunta, uma análise do comportamento da fase para cada um dos modelos poderá ser feita. Outros parâmetros que podem ser analisados são o coeficiente de correlação da fase, largura de banda de coerência da fase e tempo/distância de coerência da fase. Por último, uma caracterização do ruído FM aleatório (derivada temporal do processo de fase) para cada um dos modelos poderá ser investigada.

- Dando continuidade à análise apresentada no Capítulo 4 para sistemas SC, EGC e MRC com dois ramos de diversidade, expressões gerais e exatas para a LCR e AFD operando em tais sistemas com multi-ramos desbalanceados, correlacionados e não-idênticos poderão ser obtidas. Tais estatísticas podem ser encontradas para os diversos modelos de desvanecimento existentes na literatura (Weibull, Rice, Hoyt, Nakagami-*m*). De fato, a abordagem é uma generalização da apresentada no Capítulo 4. Resultados numéricos podem ser discutidos particularizando as expressões gerais para os casos apresentados na literatura.

- Outra proposta de trabalho é a implementação de um simulador para ramos de diversidade correlacionados. No ramo de comunicações, um grande número de algoritmos têm sido propostos para a geração de variáveis aleatórias Rayleigh correlacionadas através de gaussianas correlacionadas [47–50]. Entre estes, simuladores baseados na soma de senóides, no método de filtragem do ruído branco, ou na transformada discreta inversa de Fourier (IDFT, do inglês *inverse discrete Fourier transform*) tornaram-se populares. Porém, algumas limitações inerentes a estes simuladores nos impede de simular o que propusemos no item anterior. A seguir, algumas dessas limitações serão comentadas. Sérios problemas afetam o comportamento estatístico dos simuladores via soma de senóides. Em particular, foi mostrado em [51] que o simulador clássico de Jakes produz sinais de desvanecimento que não são estacionários no sentido amplo. Novos métodos de soma de senóides, tais como os propostos em [52, 53], foram sugeridos com o objetivo de resolver o problema da não-estacionariedade. A técnica IDFT, por outro lado, é bem conhecida por gerar um simulador eficiente e de alta qualidade [47]. Infelizmente, uma desvantagem do método IDFT é que todas as amostras são geradas de uma só vez com uma única operação do algoritmo, utilizando a transformada rápida de Fourier. Essa abordagem torna-se pouco atrativa na geração de um grande número de variáveis aleatórias correlacionadas, devido às exigências de armazenamento. Certamente, é mais viável e interessante gerar as amostras à medida que for necessário. Uma outra pecularidade dos simuladores existentes na literatura (principal motivo para propormos esse novo simulador) é que eles não consideram diversidade e, os que fazem, não a consideram como um fenômeno espacial. O simulador proposto tem que levar em conta a diversidade de ramos correlacionados, tratando-o da maneira correta, ou seja, como um fenômeno espacial.

- Dando seqüência à caracterização da fase do sinal Nakagami-m, outra proposta de trabalho é descrever e caracterizar alguns dos vários efeitos da propagação por multipercurso na fase do mesmo. O coeficiente de correlação da fase, a largura de banda de coerência e o tempo/distância de coerência da fase são algumas das estatísticas que podem ser calculadas para parâmetros de desvanecimento arbitrários. É bom enfatizar que estas estatísticas já foram obtidas para a envoltória do sinal Nakagami-m [54]. Para a obtenção de tais estatísticas relacionadas à fase, a PDF conjunta da envoltória e da fase para dois sinais Nakagami-m terá de ser determinada. Este processo de derivação consiste numa generalização ao realizado em [20].

As propostas de trabalhos futuros aqui apresentadas pretendem preencher uma lacuna ainda existente relacionada aos fundamentos das comunicações sem fio. Esse campo tem despertado interesse em diversos pesquisadores da área que recentemente têm publicado com o objetivo de melhor fundamentar o fenômeno de rádio propagação. Acreditamos que tais propostas poderão contribuir de forma significativa neste sentido.

Referências Bibliográficas

[1] M. D. Yacoub. *Foundations of Mobile Radio Engineering*. 1993.

[2] W. R. Braun and U. Dersch. A physical mobile radio channel model. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 40(2):472–482, May 1991.

[3] W. C. Y. Lee. *Mobile Communications Engineering*. 2nd edition, 1997.

[4] W. C. Jakes. *Microwave Mobile Communications*. Piscataway, NJ, 1993.

[5] R. S. Hoyt. Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate. *Bell System Technical Journal*, 26:318–359, Apr. 1947.

[6] M. Nakagami. The m-distribution - A general formula of intensity distribution of rapid fading. in Statistical methods in radio wave propagation, W. C. Hoffman, Ed. Elmsford, NY: Pergamon,1960.

[7] M. D. Yacoub. The $\eta - \mu$ distribution: A general fading distribution. In *IEEE Veh. Technol. Conference*, volume 2, pages 872–877, Sep. 2000.

[8] M. D. Yacoub. The $\kappa - \mu$ and the $\eta - \mu$ distribution. *Accepted for publication in IEEE Ant. and Prop. Magazine*, 2005.

[9] M. D. Yacoub. The $\kappa - \mu$ distribution: A general fading distribution. In *IEEE Veh. Technol. Conference*, volume 3, pages 1427–1431, Oct. 2001.

[10] M. D. Yacoub. The $\alpha - \mu$ distribution: A general fading distribution. *IEEE Inter. Symp. on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, PIMRC2002*, 2:629–633, Sep. 2002.

[11] M. D. Yacoub. The $\alpha - \mu$ distribution: a physical fading model for the generalized Gamma distribution. *Accepted for publication in IEEE Trans. Veh. Technol.*, 2006.

[12] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 4th edition, 2002.

[13] S. Haykin. *Communication Systems*. 4th edition, 2001.

[14] S. O. Rice. Statistical properties of sine wave plus random noise. *Bell System Technical Journal*, 27:109–157, Jan. 1948.

[15] D. T. Hess. Cycle slipping in a first order phase locked loop. *IEEE Trans. Commun. Technol.*, 35:pp. 255–260, Apr. 1968.

[16] N. Youssef, T. Munakata, and T. Mimaki. Level crossing of phase of sine wave plus Gaussian noise. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 32(12A):5815–5822, Dec. 1993.

[17] N. Youssef, W. Elbahri, M. Patzold, and S. Elasmi. On the crossing statistics of phase processes and random FM noise in Nakagami-q mobile fading channels. *IEEE Trans. on Wireless Commun.*, 4(1):24–29, Jan. 2005.

[18] F. Adachi, M. T. Feeney and J. D. Parsons. Effects of correlated fading on level crossing rates and average fade durations with predectection diversity reception. In *Proc. Inst. Elect. Eng.*, pages 11–17, Feb. 1988.

[19] J. C. S. S. Filho, G. Fraidenraich, M. D. Yacoub. Exact crossing rates of dual diversity over unbalanced correlated Rayleigh channels. *IEEE Commun. Lett.*, 1(10), Jan. 2005.

[20] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho. Nakagami-*m* phase-envelope joint distribution. *Electron. Lett.*, 41(5), Mar. 2005.

[21] J. C. Lu and G. K. Bhattaacharyya. Some new constructions of bivariate Weibull models. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 42(3):543–559, 1990.

[22] N. C. Sagias, G. K. Karagiannidis, D. A. Zogas, P. T. Mathiopoulus, and G. S. Tombras. Performance analysis of dual selection diversity in correlated Weibull fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 52(7):1063–1067, Jul. 2004.

[23] D. Middleton. Some general results in theory of noise through nonlinear devices. *Quart. Appl. Math.*, 5:445–498, Jan. 1948.

[24] S. O. Rice. Statistical properties of random noise currents. *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, pages 52–114, 1954. N. Wax. Ed. New York:Dover.

[25] M.-S. Lin Yang; Alouni. An exact analysis of the impact of fading correlation on the average level crossing rate and average fade duration of selection combining . In *Proc. IEEE Vehicular Technology Conference*, volume 1, pages 241–245, Apr. 2003.

[26] Xiaofei Dong and Norman C. Beaulieu. Average level crossing rate and fade duration of maximal-ratio diversity in unbalanced and correlated channels. In *WCNC - IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, pages 762–767, Mar. 2002.

[27] Dongdong Li and Vasant K. Prabhu. Average level crossing rates and average fade durations for maximal-ratio combining in correlated Nakagami channels. In *WCNC - IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, pages 339–344, Mar. 2004.

[28] H. Hashemi. The indoor radio propagation channel. In *IEEE Proc.*, volume 81, pages 943–968, Jul. 1993.

[29] M. S. Adawi. Coverage prediction for mobile radio systems operating in the 800/900 MHz frequency range. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, (37):3–72, Feb. 1988.

[30] N. H. Shepherd. Radio wave loss deviation and shadow loss at 900 MHz. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 26:309–313, Jun. 1977.

[31] S. J. Howard and K. Pahlavan. Fading results from narrowband measurements of the indoor radio channel. In *IEEE Int. Symp. Personal, Indoor, and Mobile Radio Commun.*, pages 92–97, London, Sep. PIRMC 1991.

[32] F. Babich and G. Lombardi. Statistics analysis and characterization of the indoor propagation channel. *IEEE Trans. Commun.*, 48(3):455–464, Mar. 2000.

[33] J. D. Parsons. *The Mobile Radio Channel*, volume 1. Wiley, Chichester, U.K., 2nd edition, 2000.

[34] G. Tzeremes and C. G. Christodoulou. Use of Weibull distribution for describing outdoor multipath fading. In *Proc. IEEE Ant. and Prop. Society Int. Symp.*, pages 232–235, San Antonio, TX, 2002.

[35] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1972.

[36] W. C. Jakes. *Microwave Mobile Communications*. New York: Wiley, 1974.

[37] N. C. Sagias, D. A. Zogas, G. K. Karagiannidis, and G. S. Tombras. Channel capacity and second-order statistics in Weibull fading. *IEEE Commun. Lett.*, 8(6):377–379, Jun. 2004.

[38] G. Fraidenraich, J. C. S. S. Filho, and M. D. Yacoub. Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Hoyt fading. *IEEE Commun. Lett.*, 9(1), Jan. 2005.

[39] D. G. Brennan. Linear diversity combining techniques. *In IRE*, 47:1075–1102, Jun. 1959.

[40] Schwartz M., Bennett W.R., and Stein S. *Communications Systems and Techniques*. New York, 1966.

[41] G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, and J. C. S. S. Filho. Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Weibull fading. *IEEE Commun. Lett.*, 9(6):499–501, Jun. 2005.

[42] I. B. David and S. Shamai. On the Rice model of noise in FM receivers. *IEEE Trans. Commun.*, 34:1406–1419, Nov. 1988.

[43] M. Kac and D. Slepian. Large excursions of Gaussian processes. *Ann. Math. statist.*, 30:1215–1228, 1959.

[44] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista and L. G. R. Guedes. On high order statistics of the Nakagami-m distribution. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 48(3):790–793, May 1999.

[45] J. E. V. Bautista and M. D. Yacoub. Wideband radio channel simulation with shadowed-Nakagami statistics. In *Proc IEEE Int. Telecommunications Symp.*, pages 218–222, Oct. 1996.

[46] J. E. V. Bautista and M. D. Yacoub. CeSSSiT: Cellular spread spectrum simulation toolbox. Technical report, Apr. 1999. [Online]. Available: http://polo01.feg.unesp.br:80/jvargas/cesssit/.

[47] D. J. Young and N. C. Beaulieu. The generation of correlated Rayleigh random variates by inverse Fourier transform. *IEEE Trans. Commun.*, 48(7):1114–1127, Jul. 2000.

[48] C. Loo and N. Secord. Computer models for fading channels with applications to digital transmission. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 40(4):700–707, Nov. 1991.

[49] P. Höher. A statistical discrete-time model for the WSSUS multipath channel. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 41(4):461–468, Jul. 1992.

[50] D. Verdin and T. Tozer. Generating a fading process for the simulation of land-mobile radio communications. *Electron. Lett.*, 29(23):2011–2012, Nov. 1993.

[51] M. F. Pop and N. C. Beaulieu. Limitations of sum-of-sinusoids fading channels simulators. *IEEE Trans. Commun.*, 49(4):699–708, Apr. 2001.

[52] Y. R. Zheng and C. Xiao. Improved models for the generation of multiple uncorrelated Rayleigh fading waveforms. *IEEE Commun. Lett.*, 6(6):256–258, Jun. 2002.

[53] Y. R. Zheng and C. Xiao. Simulation models with correct statistical properties for Rayleigh fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 51(6):920–928, Jun. 2003.

[54] J. C. S. S. Filho, G. Fraidenraich, U. S. Dias, and M. D. Yacoub. On the Nakagami-*m* crosscorrelation function. In *Proc. International Microwave and Optoelectronis Conference (IMOC)*, Brasilia, Brazil, 25–28 Jul. 2005.

Apêndice A

PDF marginal da envoltória de um processo Weibull

Este Apêndice mostra a dedução da PDF da envoltória resultante R de um processo Weibull. De (3.1), temos que $R^\alpha = X^2 + Y^2$. A CDF de R pode ser escrita como [12]

$$F_R(r) = Pr\left(R \leq r\right) = Pr(\sqrt[\alpha]{X^2 + Y^2} \leq r) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq r^\alpha} f_{X,Y}(x, y)dxdy \tag{A.1}$$

onde $Pr(\cdot)$ denota probabilidade e $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ representa a PDF conjunta das componentes em fase e em quadratura do sinal. A região delimitada por $x^2 + y^2 \leq r^\alpha$ representa a área de um círculo com raio $\sqrt{r^\alpha}$. Portanto, a CDF de R pode ser reescrita como

$$F_R(r) = \int_{y=-r^{\alpha/2}}^{r^{\alpha/2}} \int_{x=-\sqrt{r^\alpha - y^2}}^{\sqrt{r^\alpha - y^2}} f_{X,Y}(x, y)dxdy \tag{A.2}$$

Derivando (A.2) com relação a r, temos que a PDF de R pode ser expressa como

$$f_R(r) = \frac{dF_R(r)}{dr} = \int_{-r^{\alpha/2}}^{r^{\alpha/2}} \frac{\alpha\, r^{\alpha-1}}{2\sqrt{r^\alpha - y^2}} \left[f_{X,Y}(\sqrt{r^\alpha - y^2}, y) + f_{X,Y}(-\sqrt{r^\alpha - y^2}, y)\right] dy \tag{A.3}$$

Como X e Y são processos gaussianos mutuamente independentes de média nula e variâncias idênticas iguais a $\sigma^2 = \hat{r}^\alpha/2$, então (A.3) reduz a

$$f_R(r) = \int_0^{r^{\alpha/2}} \frac{2\alpha\, r^{\alpha-1}}{\sqrt{r^\alpha - y^2}} f_{X,Y}(\sqrt{r^\alpha - y^2}, y)dy \tag{A.4}$$

Pela independência entre X e Y, temos também que

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi \hat{r}^{\alpha}}} \exp\left(-\frac{x^2}{\hat{r}^{\alpha}}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi \hat{r}^{\alpha}}} \exp\left(-\frac{y^2}{\hat{r}^{\alpha}}\right) \\
\therefore f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{\pi \hat{r}^{\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\hat{r}^{\alpha}}\right)
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Substituindo (A.5) em (A.4), a PDF da envoltória R segue

$$
\begin{aligned}
f_R(r) &= \frac{2\alpha\, r^{\alpha-1}}{\pi \hat{r}^{\alpha}} \exp\left(-\frac{r^{\alpha}}{\hat{r}^{\alpha}}\right) \int_0^{r^{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{r^{\alpha} - y^2}}\, dy \\
\therefore f_R(r) &= \frac{\alpha r^{\alpha-1}}{\hat{r}^{\alpha}} \exp\left(-\frac{r^{\alpha}}{\hat{r}^{\alpha}}\right)
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

Apêndice B

Formulação da matriz de covariância complexa

Este Apêndice tem por finalidade obter de maneira detalhada os termos da matriz de covariância complexa Φ dada em (4.27). Inicialmente, Φ é definida como

$$\Phi = \frac{1}{2} E \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{Z}} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}^T \right] \tag{B.1}$$

onde $\dot{\mathbf{Z}} = [\dot{Z}_1 \dot{Z}_2]$ e $\mathbf{Z} = [Z_1 Z_2]$ são as matrizes colunas de $\dot{Z}_i = \dot{Z}_i(t)$ e $Z_i = Z_i(t)$, respectivamente. As variáveis $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$, Z_1 e Z_2 são variáveis gaussinas complexas de média nula e mutuamente correlacionadas. Realizando a multiplicação entre os termos das matrizes colunas, a matriz de covariância complexa Φ pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1) & Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2) & Cov(\dot{Z}_1, Z_1) & Cov(\dot{Z}_1, Z_2) \\ Cov(\dot{Z}_2, \dot{Z}_1) & Cov(\dot{Z}_2, \dot{Z}_2) & Cov(\dot{Z}_2, Z_1) & Cov(\dot{Z}_2, Z_2) \\ Cov(Z_1, \dot{Z}_1) & Cov(Z_1, \dot{Z}_2) & Cov(Z_1, Z_1) & Cov(Z_1, Z_2) \\ Cov(Z_2, \dot{Z}_1) & Cov(Z_2, \dot{Z}_2) & Cov(Z_2, Z_1) & Cov(Z_2, Z_2) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1) & Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2) & Cov(\dot{Z}_1, Z_1) & Cov(\dot{Z}_1, Z_2) \\ Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2)^* & Cov(\dot{Z}_2, \dot{Z}_2) & Cov(\dot{Z}_2, Z_1) & Cov(\dot{Z}_2, Z_2) \\ Cov(\dot{Z}_1, Z_1)^* & Cov(\dot{Z}_2, Z_1)^* & Cov(Z_1, Z_1) & Cov(Z_1, Z_2) \\ Cov(\dot{Z}_1, Z_2)^* & Cov(\dot{Z}_2, Z_2)^* & Cov(Z_1, Z_2)^* & Cov(Z_2, Z_2) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H & \mathbf{b} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Igualando os termos das matrizes em (B.2), temos que as matrizes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são dadas por

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1) & Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2) \\ Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2)^* & Cov(\dot{Z}_2, \dot{Z}_2) \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Cov(Z_1, Z_1) & Cov(Z_1, Z_2) \\ Cov(Z_1, Z_2)^* & Cov(Z_2, Z_2) \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Cov(\dot{Z}_1, Z_1) & Cov(\dot{Z}_1, Z_2) \\ Cov(\dot{Z}_2, Z_1) & Cov(\dot{Z}_2, Z_2) \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

Definindo $\rho_{il}(\tau)$ como a função de correlação cruzada complexa entre o i-ésimo e l-ésimo ramos, dada em (4.28), e sendo $\dot{\rho}_{il} = \left.\frac{d\rho_{il}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$, $\ddot{\rho}_{il} = \left.\frac{d^2\rho_{il}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}$, $\rho_{il} \triangleq \rho_{il}(0)$, calcularemos em seguida cada um dos termos das matrizes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$:

- Cálculo de $Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1)$:

$$\begin{aligned} Cov(Z_1(t), Z_1(t+\tau)) &= \rho_{11}(\tau)\,\Omega_1 \\ \therefore Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1) &= -\Omega_1 \left.\frac{d^2\rho_{11}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} = -\ddot{\rho}_{11}\Omega_1 \end{aligned} \tag{B.6}$$

- Cálculo de $Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2)$:

$$\begin{aligned} Cov(Z_1(t), Z_2(t+\tau)) &= \rho_{12}(\tau)\,\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\ \therefore Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2) &= -\sqrt{\Omega_1\Omega_2}\left.\frac{d^2\rho_{12}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} = -\ddot{\rho}_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \end{aligned} \tag{B.7}$$

- Cálculo de $Cov(\dot{Z}_2, \dot{Z}_2)$:

$$\begin{aligned} Cov(Z_2(t), Z_2(t+\tau)) &= \rho_{22}(\tau)\,\Omega_2 \\ \therefore Cov(\dot{Z}_2, \dot{Z}_2) &= -\Omega_2 \left.\frac{d^2\rho_{22}(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} = -\ddot{\rho}_{22}\Omega_2 = -\ddot{\rho}_{11}\Omega_2 \end{aligned} \tag{B.8}$$

  Sabendo que $\rho_{11}(\tau) = \rho_{22}(\tau) = J_0(2\pi f_m \tau)$, isso implica que $\ddot{\rho}_{11} = \ddot{\rho}_{22}$.

- Cálculo de $Cov(Z_1, Z_1)$:

$$Cov(Z_1, Z_1) = Cov(Z_1(t), Z_1(t+\tau))|_{\tau=0} = \rho_{11}(\tau)|_{\tau=0}\,\Omega_1 = \Omega_1 \tag{B.9}$$

- Cálculo de $Cov(Z_2, Z_2)$:

$$Cov(Z_2, Z_2) = Cov(Z_2(t), Z_2(t+\tau))|_{\tau=0} = \rho_{22}(\tau)|_{\tau=0}\,\Omega_2 = \Omega_2 \tag{B.10}$$

- Cálculo de $Cov(Z_1, Z_2)$:

$$Cov(Z_1, Z_2) = Cov(Z_1(t), Z_2(t+\tau))|_{\tau=0} = \rho_{12}(\tau)|_{\tau=0}\,\sqrt{\Omega_1\Omega_2} = \rho_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \tag{B.11}$$

- Cálculo de $Cov(\dot{Z}_1, Z_1)$:

$$\begin{aligned} &Cov(Z_1(t), Z_1(t+\tau)) = \rho_{11}(\tau)\,\Omega_1 \\ &\therefore Cov(\dot{Z}_1, Z_1) = \Omega_1\, \left.\frac{d\rho_{11}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0 = Cov(\dot{Z}_2, Z_2) \end{aligned} \tag{B.12}$$

pois $\rho_{11}(\tau) = \rho_{22}(\tau) = J_0(2\pi f_m \tau)$.

- Cálculo de $Cov(\dot{Z}_1, Z_2)$:

$$\begin{aligned} &Cov(Z_1(t), Z_2(t+\tau)) = \rho_{12}(\tau)\,\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\ &\therefore Cov(\dot{Z}_1, Z_2) = -\sqrt{\Omega_1\Omega_2}\, \left.\frac{d\rho_{12}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = -\dot{\rho}_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \end{aligned} \tag{B.13}$$

- Cálculo de $Cov(\dot{Z}_2, Z_1)$:

$$\begin{aligned} &Cov(Z_2(t+\tau), Z_1(t)) = Cov(Z_1(t), Z_2(t+\tau)) = \rho_{12}(\tau)\,\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\ &\therefore Cov(\dot{Z}_2, Z_1) = \sqrt{\Omega_1\Omega_2}\, \left.\frac{d\rho_{12}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \dot{\rho}_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \end{aligned} \tag{B.14}$$

Apêndice C

Demonstração das estatísticas condicionais de $\dot{R}_i$

Neste Apêndice mostraremos as deduções das relações dadas em (4.36), (4.37) e (4.38).

- Prova de $E(\dot{R}_i|\mathbf{Z})$:

  De (4.1) temos que

$$Z_i = R_i^{\alpha_i/2} e^{j\Theta_i} \tag{C.1}$$

onde $e^{j\Theta_i} \triangleq \exp(j\Theta_i)$. Derivando ambos os lados da equação acima

$$\dot{Z}_i = \frac{\alpha_i}{2} R_i^{\alpha_i/2-1} \dot{R}_i\, e^{j\Theta_i} + j\dot{\Theta}_i R_i^{\alpha_i/2} e^{j\Theta_i} \tag{C.2}$$

Rearranjando os termos

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i\, e^{-j\Theta_i} &= \frac{\alpha_i}{2} R_i^{\alpha_i/2-1} \dot{R}_i + j\dot{\Theta}_i R_i^{\alpha_i/2} \\ \therefore \dot{R}_i &= \frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\alpha_i/2} \mathrm{Re}[\dot{Z}_i e^{-j\Theta_i}] \end{aligned} \tag{C.3}$$

Portanto, aplicando o operador média, condicionado a $\mathbf{Z}$, em cada um dos lados da igualdade, concluímos a demonstração

$$E(\dot{R}_i|\mathbf{Z}) = \frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\alpha_i/2} \mathrm{Re}[E(\dot{Z}_i|\mathbf{Z}) e^{-j\Theta_i}] \tag{C.4}$$

- Prova de $Var(\dot{R}_i|\mathbf{Z})$:

Usando a identidade Re$[x] = \frac{x+x^*}{2}$ em (C.3), podemos escrever

$$\dot{R}_i = \frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\alpha_i/2} \mathrm{Re}[\dot{Z}_i\, e^{-j\Theta_i}] = \frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\alpha_i/2} \left(\frac{\dot{Z}_i\, e^{-j\Theta_i} + \dot{Z}_i^*\, e^{j\Theta_i}}{2} \right) \tag{C.5}$$

Usando a definição de variância complexa, segue que

$$Var(\dot{R}_i|\mathbf{Z}) = E(|\dot{R}_i|^2|\mathbf{Z}) - |E(\dot{R}_i|\mathbf{Z})|^2 \tag{C.6}$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade dada em (C.6) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &E(|\dot{R}_i|^2|\mathbf{Z}) = E(\dot{R}_i\, \dot{R}_i^*|\mathbf{Z}) = \\ &= E\left(\left(\frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\alpha_i/2}\, \frac{\dot{Z}_i\, e^{-j\Theta_i} + \dot{Z}_i^*\, e^{j\Theta_i}}{2} \right) \left(\frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\alpha_i/2}\, \frac{\dot{Z}_i^*\, e^{j\Theta_i} + \dot{Z}_i\, e^{-j\Theta_i}}{2} \right) |\mathbf{Z} \right) \\ &= \frac{R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2} \left(2E(|\dot{Z}_i|^2|\mathbf{Z}) + e^{-j2\Theta_i} E(\dot{Z}_i^2|\mathbf{Z}) + e^{j2\Theta_i} E((\dot{Z}_i^*)^2|\mathbf{Z}) \right) \end{aligned} \tag{C.7}$$

O segundo termo do lado direito da igualdade dada em (C.6) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &|E(\dot{R}_i|\mathbf{Z})|^2 = E(\dot{R}_i|\mathbf{Z}) E(\dot{R}_i^*|\mathbf{Z}) = \\ &= E\left(\frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\alpha_i/2}\, \frac{\dot{Z}_i\, e^{-j\Theta_i} + \dot{Z}_i^*\, e^{j\Theta_i}}{2} |\mathbf{Z} \right) E\left(\frac{2}{\alpha_i} R_i^{1-\alpha_i/2}\, \frac{\dot{Z}_i^*\, e^{j\Theta_i} + \dot{Z}_i\, e^{-j\Theta_i}}{2} |\mathbf{Z} \right) \\ &= \frac{R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2} \left(2|E(\dot{Z}_i|\mathbf{Z})|^2 + e^{-j2\Theta_i} E(\dot{Z}_i|\mathbf{Z})^2 + e^{j2\Theta_i} E(\dot{Z}_i^*|\mathbf{Z})^2 \right) \end{aligned} \tag{C.8}$$

Usando os resultados de (C.7) e (C.8) em (C.6), temos

$$\begin{aligned} &Var(\dot{R}_i|\mathbf{Z}) = \\ &= \frac{R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2} \left(2Var(\dot{Z}_i|\mathbf{Z}) + e^{-j2\Theta_i}(E(\dot{Z}_i^2|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i|\mathbf{Z})^2) + e^{j2\Theta_i}(E((\dot{Z}_i^*)^2|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i^*|\mathbf{Z})^2) \right) \\ &= \frac{R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2} \left(2Var(\dot{Z}_i|\mathbf{Z}) + e^{-j2\Theta_i}(E(\dot{Z}_i^2|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i|\mathbf{Z})^2) + (e^{-j2\Theta_i}(E(\dot{Z}_i^2|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i|\mathbf{Z})^2)^* \right) \\ &= \frac{2R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2} \left(Var(\dot{Z}_i|\mathbf{Z}) + \mathrm{Re}[e^{-j2\Theta_i}((E(\dot{Z}_i^2|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i|\mathbf{Z})^2))] \right) \\ &= \frac{2R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2} \left(Var(\dot{Z}_i|\mathbf{Z}) + \mathrm{Re}[e^{-j2\Theta_i} Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_i^*|\mathbf{Z})^*] \right) \end{aligned} \tag{C.9}$$

Sabendo que o termo $Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_i^*|\mathbf{Z})^*$ é sempre nulo, (C.9) reduz a

$$Var(\dot{R}_i|\mathbf{Z}) = \frac{2R_i^{2-\alpha_i}}{\alpha_i^2} Var(\dot{Z}_i|\mathbf{Z}) \tag{C.10}$$

Para a demonstração de (4.37) ficar completa, falta agora provarmos que $Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_i^*|\mathbf{Z})^*$ é sempre nula. Provando que $Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1^*|\mathbf{Z})^*$ é nula, a prova para $Cov(\dot{Z}_2, \dot{Z}_2^*|\mathbf{Z})^*$ é análoga. Seguiremos um procedimento similar ao realizado na Seção 4.3. Seja $\mathbf{\dot{Z}_1'} = [\dot{Z}_1 \dot{Z}_1^*]$ e $\mathbf{Z} = [Z_1 Z_2]$ matrizes colunas de $\dot{Z}_1' = \dot{Z}_1'(t)$ e $Z_i = Z_i(t)$, respectivamente. A matriz complexa de covariância, $\Phi'(4 \times 4)$, entre elas é definida como [18]

$$\Phi' = \frac{1}{2} E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{\dot{Z}_1'} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathbf{\dot{Z}_1'} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix}^T \right] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^H & \mathbf{p} \end{bmatrix} \tag{C.11}$$

Realizando a multiplicação entre os termos de (C.11), as matrizes $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{p}$ são expressas como

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1) & Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1^*) \\ Cov(\dot{Z}_1^*, \dot{Z}_1) & Cov(\dot{Z}_1^*, \dot{Z}_1^*) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\ddot{\rho}_{11}\Omega_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{C.12}$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Cov(\dot{Z}_1, Z_1) & Cov(\dot{Z}_1, Z_2) \\ Cov(\dot{Z}_1^*, Z_1) & Cov(\dot{Z}_1^*, Z_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\rho}_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{C.13}$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Cov(Z_1, Z_1) & Cov(Z_1, Z_2) \\ Cov(Z_1, Z_2)^* & Cov(Z_2, Z_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Omega_1 & \rho_{12}\sqrt{\Omega_1\Omega_2} \\ \rho_{12}^*\sqrt{\Omega_1\Omega_2} & \Omega_2 \end{bmatrix} \tag{C.14}$$

Aplicando a teoria de matriz descrita em [40, pp. 495-496], a densidade condicional de $\mathbf{\dot{Z}_1'}$ dado $\mathbf{Z}$ é gaussiana com matriz média $\mathbf{M}'$ e matriz de covariância $\mathbf{\Delta}'$ dada por

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} E(\dot{Z}_1|\mathbf{Z}) \\ E(\dot{Z}_1^*|\mathbf{Z}) \end{bmatrix} = (\mathbf{n}\mathbf{p}^{-1})^* \, \mathbf{Z} \tag{C.15}$$

$$\mathbf{\Delta}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Var(\dot{Z}_1|\mathbf{Z}) & Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1^*|\mathbf{Z}) \\ Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1^*|\mathbf{Z})^* & Var(\dot{Z}_1^*|\mathbf{Z}) \end{bmatrix} = \mathbf{m} - \mathbf{n}\mathbf{p}^{-1}\mathbf{n}^H \tag{C.16}$$

Substituindo (C.12), (C.13) e (C.14) em (C.16), temos que o termo $Cov(\dot{Z}_1, \dot{Z}_1^*|\mathbf{Z})^*$ da matriz $\mathbf{\Delta}'$ é nulo. Usando a matriz coluna $\mathbf{\dot{Z}_2'} = [\dot{Z}_2 \dot{Z}_2^*]$ ao invés da $\mathbf{\dot{Z}_1'} = [\dot{Z}_1 \dot{Z}_1^*]$, provamos de forma análoga que $Cov(\dot{Z}_2, \dot{Z}_2^*|\mathbf{Z})^*$ também é nula. Portanto $Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_i^*|\mathbf{Z})^*$ é sempre nula.

- Prova de $Cov(\dot{R}_i, \dot{R}_l|\mathbf{Z})$:

Esta demonstração é análoga a anterior. Usando a definição de covariância, segue que

$$Cov(\dot{R}_i, \dot{R}_l|\mathbf{Z}) = E(\dot{R}_i\dot{R}_l|\mathbf{Z}) - E(\dot{R}_i|\mathbf{Z})E(\dot{R}_l|\mathbf{Z}) \tag{C.17}$$

Sabendo que $\dot{R}_i$ é dado em (C.5), $\dot{R}_l$ também pode ser obtido a partir de (C.5) apenas substituindo o subscrito i por l. Dessa forma, o primeiro termo do lado direito da igualdade em (C.17) pode ser escrito como

$$E(\dot{R}_i\dot{R}_l|\mathbf{Z}) = \frac{4}{\alpha_i\alpha_l}R_i^{1-\alpha_i/2}R_l^{1-\alpha_l/2}E\left(\left(\frac{\dot{Z}_i\,e^{-j\Theta_i}+\dot{Z}_i^*\,e^{j\Theta_i}}{2}\right)\left(\frac{\dot{Z}_l\,e^{-j\Theta_l}+\dot{Z}_l^*\,e^{j\Theta_l}}{2}\right)|\mathbf{Z}\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha_i\alpha_l}R_i^{1-\alpha_i/2}R_l^{1-\alpha_l/2}E\left((\dot{Z}_i\dot{Z}_l\,e^{-j(\Theta_i+\Theta_l)}+\dot{Z}_i\dot{Z}_l^*\,e^{j(\Theta_l-\Theta_i)}+\dot{Z}_i^*\dot{Z}_l\,e^{j(\Theta_i-\Theta_l)}+\dot{Z}_i^*\dot{Z}_l^*\,e^{j(\Theta_i+\Theta_l)})|\mathbf{Z}\right) \tag{C.18}$$

O segundo termo do lado direito da igualdade em (C.17) pode ser escrito como

$$E(\dot{R}_i|\mathbf{Z})E(\dot{R}_l|\mathbf{Z}) = \frac{4}{\alpha_i\alpha_l}R_i^{1-\alpha_i/2}R_l^{1-\alpha_l/2}E\left(\frac{\dot{Z}_i\,e^{-j\Theta_i}+\dot{Z}_i^*\,e^{j\Theta_i}}{2}|\mathbf{Z}\right)E\left(\frac{\dot{Z}_l\,e^{-j\Theta_l}+\dot{Z}_l^*\,e^{j\Theta_l}}{2}|\mathbf{Z}\right) =$$
$$\frac{1}{\alpha_i\alpha_l}R_i^{1-\alpha_i/2}R_l^{1-\alpha_l/2}\Big(E(\dot{Z}_i\,e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z})E(\dot{Z}_l\,e^{-j\Theta_l}|\mathbf{Z})+E(\dot{Z}_i\,e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z})E(\dot{Z}_l^*\,e^{j\Theta_l}|\mathbf{Z})$$
$$+E(\dot{Z}_i^*\,e^{j\Theta_i}|\mathbf{Z})E(\dot{Z}_l\,e^{-j\Theta_l}|\mathbf{Z})+E(\dot{Z}_i^*\,e^{j\Theta_i}|\mathbf{Z})E(\dot{Z}_l^*\,e^{j\Theta_l}|\mathbf{Z})\Big) \tag{C.19}$$

Substituindo (C.18) e (C.19) em (C.17) obtemos

$$Cov(\dot{R}_i, \dot{R}_l|\mathbf{Z}) = \frac{1}{\alpha_i\alpha_l}R_i^{1-\alpha_i/2}R_l^{1-\alpha_l/2}\Big[(E(\dot{Z}_i\dot{Z}_l\,e^{-j(\Theta_i+\Theta_l)}|\mathbf{Z})-E(\dot{Z}_i\,e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z})E(\dot{Z}_l\,e^{-j\Theta_l}|\mathbf{Z}))$$
$$+(E(\dot{Z}_i^*\dot{Z}_l^*\,e^{j(\Theta_i+\Theta_l)}|\mathbf{Z})-E(\dot{Z}_i^*\,e^{j\Theta_i}|\mathbf{Z})E(\dot{Z}_l^*\,e^{j\Theta_l}|\mathbf{Z}))\Big]+\Big[(E(\dot{Z}_i\dot{Z}_l^*\,e^{j(\Theta_l-\Theta_i)}|\mathbf{Z})-$$
$$E(\dot{Z}_i\,e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z})E(\dot{Z}_l^*\,e^{j\Theta_l}|\mathbf{Z}))+(E(\dot{Z}_i^*\dot{Z}_l\,e^{j(\Theta_i-\Theta_l)}|\mathbf{Z})-E(\dot{Z}_i^*\,e^{j\Theta_i}|\mathbf{Z})E(\dot{Z}_l\,e^{-j\Theta_l}|\mathbf{Z}))\Big] \tag{C.20}$$

Mas (C.20) também pode ser escrito como

$$Cov(\dot{R}_i, \dot{R}_l|\mathbf{Z}) = \frac{1}{\alpha_i \alpha_l} R_i^{1-\alpha_i/2} R_l^{1-\alpha_l/2} \Big[(E(\dot{Z}_i \dot{Z}_l \, e^{-j(\Theta_i+\Theta_l)}|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i \, e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z}) E(\dot{Z}_l \, e^{-j\Theta_l}|\mathbf{Z}))$$
$$+(E(\dot{Z}_i \dot{Z}_l \, e^{-j(\Theta_i+\Theta_l)}|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i \, e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z}) E(\dot{Z}_l \, e^{-j\Theta_l}|\mathbf{Z}))^* \Big] + \Big[(E(\dot{Z}_i \dot{Z}_l^* \, e^{j(\Theta_l-\Theta_i)}|\mathbf{Z}) -$$
$$E(\dot{Z}_i \, e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z}) E(\dot{Z}_l^* \, e^{j\Theta_l}|\mathbf{Z})) + (E(\dot{Z}_i \dot{Z}_l^* \, e^{j(\Theta_l-\Theta_i)}|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i \, e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z}) E(\dot{Z}_l^* \, e^{j\Theta_l}|\mathbf{Z}))^* \Big] \tag{C.21}$$

Usando as seguintes identidades em (C.21)

$$2\,\mathrm{Re}[e^{-j(\Theta_i+\Theta_l)}\, Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_l^*|\mathbf{Z})^*] = \Big[(E(\dot{Z}_i \dot{Z}_l \, e^{-j(\Theta_i+\Theta_l)}|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i \, e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z}) E(\dot{Z}_l \, e^{-j\Theta_l}|\mathbf{Z}))$$
$$+(E(\dot{Z}_i \dot{Z}_l \, e^{-j(\Theta_i+\Theta_l)}|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i \, e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z}) E(\dot{Z}_l \, e^{-j\Theta_l}|\mathbf{Z}))^* \Big] \tag{C.22}$$

$$2\,\mathrm{Re}[e^{j(\Theta_l-\Theta_i)}\, Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_l|\mathbf{Z})^*] = \Big[(E(\dot{Z}_i \dot{Z}_l^* \, e^{j(\Theta_l-\Theta_i)}|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i \, e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z}) E(\dot{Z}_l^* \, e^{j\Theta_l}|\mathbf{Z})) +$$
$$(E(\dot{Z}_i \dot{Z}_l^* \, e^{j(\Theta_l-\Theta_i)}|\mathbf{Z}) - E(\dot{Z}_i \, e^{-j\Theta_i}|\mathbf{Z}) E(\dot{Z}_l^* \, e^{j\Theta_l}|\mathbf{Z}))^* \Big] \tag{C.23}$$

obtemos que

$$Cov(\dot{R}_i, \dot{R}_l|\mathbf{Z}) = \frac{2}{\alpha_i \alpha_l} R_i^{1-\alpha_i/2} R_l^{1-\alpha_l/2} \Big(\mathrm{Re}[e^{-j(\Theta_i+\Theta_l)}\, Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_l^*|\mathbf{Z})^*] +$$
$$\mathrm{Re}[e^{j(\Theta_l-\Theta_i)}\, Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_l|\mathbf{Z})^*] \Big) \tag{C.24}$$

Sabendo que $Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_l^*|\mathbf{Z})^*$ (demonstração análoga a de $Cov(\dot{Z}_i, \dot{Z}_i^*|\mathbf{Z})^*$) é sempre nula, obtemos finalmente

$$Cov(\dot{R}_i, \dot{R}_l|\mathbf{Z}) = \frac{2}{\alpha_i \, \alpha_l} \, R_i^{1-\alpha_i/2} \, R_l^{1-\alpha_l/2} \, \mathrm{Re}[e^{j\Theta_{il}}\, Cov(\dot{Z}_i, \, \dot{Z}_l|\mathbf{Z})^*] \tag{C.25}$$