

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

Departamento de Engenharia Elétrica

ESTUDO DA ESTABILIDADE
DE UMA MÁQUINA SÍNCRONA

MARIA BEATRIZ DE PAIVA GUZZELLI

Orientador:

YARO BURIAN JUNIOR

Campinas - 1977

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Agradeço a Yaro Burian Jr.

pelos privilégios de sua orientação.

SUMÁRIO

Esse estudo tem por objetivo elucidar aspectos importantes na análise da estabilidade da máquina síncro na, porém sem utilizar métodos complexos (equações de ordem elevada) e que sob métodos elementares conhecidos ficam pouco evidentes. Discussão do modelo e hipóteses assumidas para a máquina síncrona. Redução da ordem do sistema de equações através de centragem. Análise da equação de terceira ordem por integração numérica. Estudo do amortecimento das oscilações relacionadas com a corrente de rotor.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - MODELO	3
I.1 - Equação elétrica da máquina	4
I.1.1 - Equação de tensão	5
I.1.2 - Equação de torque elétrico	6
I.2 - Transformação de Park	7
I.3 - Equação eletromecânica	20
I.4 - Eliminação das tensões das equações da máquina	24
I.4.1 - Barra Infinita	25
CAPÍTULO II - MODELO DE QUARTA ORDEM	31
II.1 - Equação característica	32
II.2 - Centragem das equações da máquina: estudo do sistema de segunda ordem	33
CAPÍTULO III - MODELO DE QUINTA ORDEM	43
III.1 - Equação característica	45
III.2 - Centragem das equações da máquina: estudo do sistema de terceira ordem	48

III.3 - Curvas torque-ângulo	51
III.3.1 - Exemplo de aplicação	55
III.4 - Solução aproximada das equações de terceira ordem	56
CONCLUSÃO	67
APÊNDICE A	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

INTRODUÇÃO

Usualmente, os estudos de estabilidade de máquina síncrona são feitos de duas formas diversas.

Uma, que se pode chamar de elementar, na qual o torque elétrico é calculado em regime e, em seguida, utilizado na equação diferencial do movimento do rotor. De fato, o torque elétrico é calculado numa situação chamada "transitória" (Ref. 4), levando à substituição de certos parâmetros - f.e.m e reatância - de regime por parâmetros chamados de transitórios. A diferença entre estas categorias de parâmetros é a resistência de rotor, que pode ser suposta infinita em regime e nula na situação transitória.

A outra, que se pode chamar de "completa", na qual é estabelecido um modelo de ordem elevada (sétima) levando em consideração todas as variáveis de estado envolvidas.

No presente trabalho procura-se estabelecer uma conexão entre as duas formas de estudo, ou seja, como, a partir de um modelo de ordem relativamente elevada, se pode chegar aos modelos elementares.

A consideração da resistência de rotor, nem nula, nem infinita, permite evidenciar um amortecimento das oscilações mecânicas do rotor. Este efeito é semelhante ao produzido pelos enrolamentos amortecedores (Ref. 7), que para velocidades superiores à síncrona ocasionam um torque frenador; e para velocidades inferiores, um torque acelerador.

Finalmente, uma escolha conveniente de resistência de rotor pode maximizar o amortecimento das oscilações mecânicas.

CAPÍTULO - I

MODELO

Como consequência das aproximações feitas ao se estabelecer um modelo para a máquina síncrona - como para qualquer sistema físico - existirão diferenças entre o comportamento previsto pelo modelo e o observado da máquina. Diferenças tanto maiores quanto mais simples o modelo.

Modelos simples, mas que mantenham ainda as características essenciais da máquina, tem um atrativo por permitirem eventualmente mostrar efeitos que seriam dissolvidos na complexidade de modelos melhores.

Existem na máquina síncrona relações não lineares essenciais (o torque é dado por produtos de fluxos e correntes) e não essenciais (as relações fluxos-correntes : é possível construir máquinas em que estas sejam lineares ou tão próximas de lineares quanto se queira). Como a hipótese simplificadora da linearidade dos circuitos magnéticos é muito cômoda, ela é adotada sem menção explícita (Ref . 1). Esta hipótese será sempre admitida neste trabalho.

Admitindo apenas um grau de liberdade mecânico para a máquina (rotação de um rotor rígido em torno de um eixo fixo) e levando em conta os seis enrolamentos independentes (três fases no estator, campo e dois enrolamentos amortecedores no rotor), um modelo razoavelmente completo da máquina será de oitava ordem. A linearidade dos circuitos magnéticos permite relacionar fluxos e correntes por uma matriz indutância 6×6 , mas o acoplamento mecânico - elétrico se traduz no fato de dependerem os elementos desta matriz da posição do rotor.

Uma transformação de variáveis clássica (transformação de Park) aplicada às três variáveis de estado correntes de estator permite desacoplar inteiramente - uma variável de todas as demais da máquina (a corrente de sequência zero). Desta forma, o modelo da máquina passa a ser de sétima ordem, com a matriz indutância 5×5 .

Os dois enrolamentos amortecedores não são essenciais para o funcionamento da máquina síncrona. Seu efeito, que aparece quando a velocidade da máquina é diferente da velocidade síncrona, é análogo ao mecanismo que origina o torque em máquinas de indução e foi estudado sob este ponto de vista (Ref. 7). Sem estes enrolamentos o modelo da máquina passa a ser de quinta ordem, com matriz indutância 3×3 .

Nesse estudo, sempre serão omitidos os enrolamentos amortecedores. Além de não essenciais, sua presença tenderá a ocultar o amortecimento introduzido pelo enrolamento de campo, que é um dos tópicos a ser tratado.

Finalmente convém lembrar que a alimentação do rotor por fonte de corrente, reduz, ainda de uma unidade a ordem do modelo, pois fixa uma das variáveis de estado.

I.1 - Equação elétrica da máquina

A máquina síncrona contém basicamente quatro enrolamentos magneticamente acoplados: três enrolamentos idênticos dispostos simetricamente no estator (circuito de armadura) e um enrolamento distribuído no rotor (circuito de campo). O acoplamento magnético entre os enrolamentos é função da posição do rotor.

O comportamento elétrico da máquina é tradu-

zido pelas equações de tensão e torque eletromagnético desenvolvidas a seguir.

I.1.1 - Equação de tensão

Conforme o esquema da Fig. I.1, cada enrolamento está constituído de resistência, indutância própria e indutância mútua relativa aos demais enrolamentos.

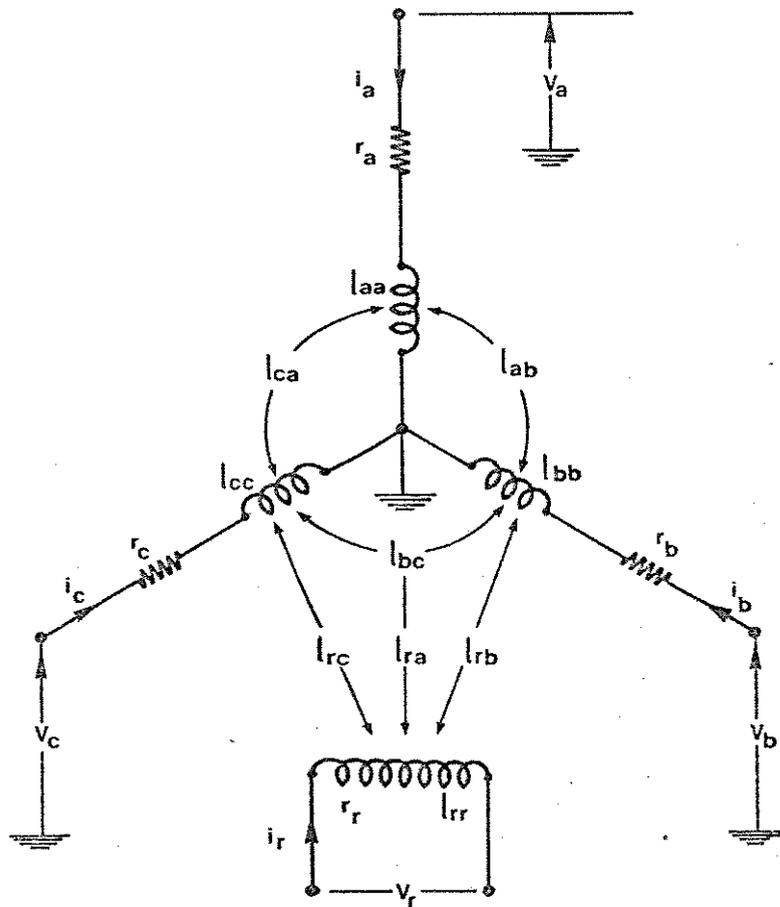


Fig. I.1 - Parâmetros dos enrolamentos - Resistências e indutâncias

Com a hipótese de linearidade dos circuitos magnéticos a tensão terminal instantânea em qualquer um desses enrolamentos com a convenção de sinais adotada (Fig. I.1), pode ser escrita na forma

$$v_t = r_i + \frac{d}{dt} (li) . \quad (I. 1)$$

A equação (I.1) pode ser detalhada para todos os enrolamentos :

$$v_a = r_a i_a + \frac{d}{dt} (l_{aa} i_a) + \frac{d}{dt} (l_{ab} i_b) + \frac{d}{dt} (l_{ac} i_c) + \frac{d}{dt} (l_{ar} i_r) \quad (I.2a)$$

$$v_b = r_b i_b + \frac{d}{dt} (l_{ba} i_a) + \frac{d}{dt} (l_{bb} i_b) + \frac{d}{dt} (l_{bc} i_c) + \frac{d}{dt} (l_{br} i_r) \quad (I.2b)$$

$$v_c = r_c i_c + \frac{d}{dt} (l_{ca} i_a) + \frac{d}{dt} (l_{cb} i_b) + \frac{d}{dt} (l_{cc} i_c) + \frac{d}{dt} (l_{cr} i_r) \quad (I.2c)$$

$$v_r = r_r i_r + \frac{d}{dt} (l_{ra} i_a) + \frac{d}{dt} (l_{rb} i_b) + \frac{d}{dt} (l_{rc} i_c) + \frac{d}{dt} (l_{rr} i_r) . \quad (I.2d)$$

As resistências do estator são, por construção, iguais e relativamente pequenas $r_a = r_b = r_c = r$.

A posição do rotor é designada por θ , considerado como ângulo elétrico, tomando para máquinas com mais de dois pólos o valor

$$\theta = \frac{p}{2} \theta_m$$

onde θ_m é o ângulo mecânico que para o caso da Fig. I.2 coincide com o ângulo elétrico.

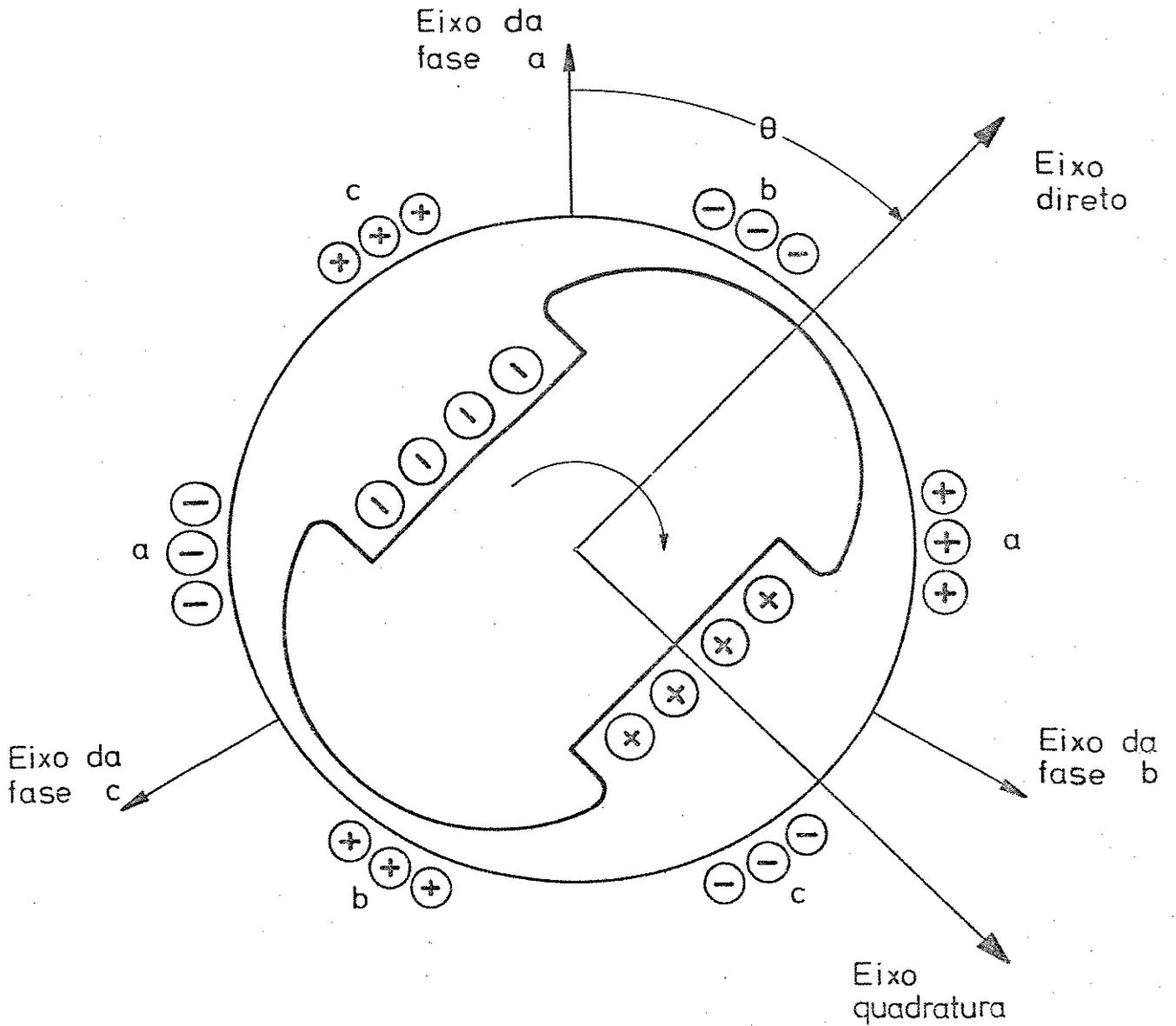


Fig. I.2 - Representação esquemática de uma máquina síncrona.

Por inspeção da Fig. I.2 , obtêm-se as seguintes expressões para as indutâncias, admitindo-as como funções harmônicas da posição do rotor.

Indutâncias próprias do estator:

$$l_{aa} = L_1 + L_2 \cos 2\theta \quad (\text{I.4a})$$

$$l_{bb} = L_1 + L_2 \cos 2 \left(\theta - 2 \frac{\Pi}{3} \right) \quad (\text{I.4b})$$

$$l_{cc} = L_1 + L_2 \cos 2 \left(\theta - 4 \frac{\Pi}{3} \right) \quad (\text{I.4c})$$

Indutâncias mútuas do estator:

$$l_{ab} = l_{ba} = -L_3 - L_2 \cos 2 \left(\theta + \frac{\Pi}{6} \right) \quad (\text{I.5a})$$

$$l_{bc} = l_{cb} = -L_3 - L_2 \cos 2 \left(\theta - \frac{\Pi}{2} \right) \quad (\text{I.5b})$$

$$l_{ca} = l_{ac} = -L_3 - L_2 \cos 2 \left(\theta - \frac{\Pi}{6} \right) \quad (\text{I.5c})$$

Indutância própria do rotor:

$$l_{rr} = L_4 \quad (\text{I.6})$$

Indutâncias mútuas rotor-estator:

$$l_{ar} = l_{ra} = L_5 \cos \theta \quad (\text{I.7a})$$

$$l_{br} = l_{rb} = L_5 \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (\text{I.7b})$$

$$l_{cr} = l_{rc} = L_5 \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \quad (\text{I.7c})$$

As indutâncias L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 são constantes positivas com $L_1 > L_2$ e $L_3 > L_2$. Excluindo as indutâncias mútuas rotor - estator , as demais são constantes para máquinas com rotor cilíndrico pois, nesse caso, $L_2 = 0$.

As indutâncias dadas por (I.4) , (I.5) , (I. 6) e (I.7) são utilizadas na equação (I.2), escrita na seguinte forma matricial

$$\underline{v} = [R] \underline{i} + \frac{d}{dt} \left\{ [L] \underline{i} \right\} \quad (\text{I. 8})$$

onde são definidas as matrizes abaixo :

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_r \end{bmatrix} \quad \underline{i} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_r \end{bmatrix} \quad (\text{I. 9})$$

$$\begin{bmatrix}
 L_1 + L_2 \cos 2\theta & -L_3 - L_2 \cos(2\theta + \frac{\Pi}{3}) & -L_3 - L_2 \cos(2\theta - \frac{\Pi}{3}) & L_5 \cos \theta \\
 -L_3 - L_2 \cos(2\theta + \frac{\Pi}{3}) & L_1 + L_2 \cos(2\theta - \frac{4\Pi}{3}) & -L_3 - L_2 \cos(2\theta - \Pi) & L_5 \cos(\theta - \frac{2\Pi}{3}) \\
 -L_3 - L_2 \cos(2\theta - \frac{\Pi}{3}) & -L_3 - L_2 \cos(2\theta - \Pi) & L_1 + L_2 \cos(2\theta + \frac{4\Pi}{3}) & L_5 \cos(\theta + \frac{2\Pi}{3}) \\
 L_5 \cos \theta & L_5 \cos(\theta - \frac{2\Pi}{3}) & L_5 \cos(\theta + \frac{2\Pi}{3}) & L_4
 \end{bmatrix}$$

[L]=

$$[R] = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_r \end{bmatrix} \quad (I.11)$$

Uma vez que a posição do rotor θ , varia com o tempo, o sistema resultante de (I.8) a (I.11) se compõe de equações diferenciais com parâmetros não constantes.

I.1.2 - Equação de torque elétrico

O torque elétrico decorre da interação entre os três circuitos do estator e o circuito de campo. Portanto o torque T_e produzido por esses enrolamentos pode ser derivado aplicando-se o princípio da conservação da energia em circuitos elétricos.

Desprezando as perdas elétricas, pode-se estabelecer o seguinte, em termos de energia incremental :

$$\begin{bmatrix} \text{energia} \\ \text{incremental} \\ \text{mecânica} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{energia} \\ \text{incremental} \\ \text{elétrica} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{energia} \\ \text{incremental} \\ \text{armazenada} \end{bmatrix}$$

Usando as variáveis de circuito elétrico, se obtém a equação :

$$T_e d\theta = \underline{i}^T d \{ [L] \underline{i} \} - \frac{1}{2} d \{ \underline{i}^T [L] \underline{i} \} .$$

Nota-se que o torque elétrico depende do fluxo concatenado entre os enrolamentos, bem como de suas correntes.

Levando a efeito os cálculos, em que a simetria da matriz indutância $[L]$, garante a igualdade

$$d \underline{i}^T [L] \underline{i} = \underline{i}^T [L] d \underline{i}$$

a expressão para o torque se resume na forma matricial

$$T_e = \frac{1}{2} \underline{i}^T \frac{d [L]}{d\theta} \underline{i} . \quad (I.12)$$

As equações (I.8) e (I.12) são de emprego pouco cômodo pois contêm indutâncias não constantes. Porém, as relações entre indutância e corrente são simplificadas pela transformação de Park.

I.2 - Transformação de Park

Sob essa transformação, um conjunto de ten-

ções e correntes fictícias são definidas como função das tensões e correntes reais. Com esse objetivo, as novas variáveis são obtidas pela projeção das variáveis reais sobre três eixos localizados no rotor. Um eixo é estacionário e os outros dois coincidem respectivamente com o eixo magnético do rotor, chamado eixo direto, e com o eixo magnético neutro do rotor, chamado eixo quadratura, representados na Fig. I.2 .

Este é o efeito produzido pela transformação de Park. No presente estudo a matriz transformação $[M]$ é definida por:

$$[M] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos (\theta - 2 \frac{\Pi}{3}) & \cos (\theta + 2 \frac{\Pi}{3}) & 0 \\ -\text{sen } \theta & -\text{sen } (\theta - 2 \frac{\Pi}{3}) & -\text{sen } (\theta + 2 \frac{\Pi}{3}) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

Pré - multiplicando as variáveis \underline{v} e \underline{i} pela matriz $[M]$ são obtidas as variáveis modificadas, as-

sim definidas:

$$\underline{v}_M = \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_o \\ v_r \end{bmatrix} = [M] \underline{v} \quad (I.13)$$

$$\underline{i}_M = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_r \end{bmatrix} = [M] \underline{i} \quad (I.14)$$

Embora não se alterem, as componentes de campo v_r e i_r foram anexadas a transformação por medida de unificação de fórmula. As demais componentes v_d, v_q e v_o ; i_d, i_q e i_o são chamadas, respectivamente, de componentes de eixo direto, de eixo quadratura e de sequência zero.

Consegue-se a transformação inversa através das equações:

$$\underline{v} = [M]^{-1} \underline{v}_M$$

$$\underline{i} = [M]^{-1} \underline{i}_M$$

Particularmente, a matriz $[M]$ escolhida é ortogonal e por isso tem a propriedade

$$[M]^T = [M]^{-1} .$$

Isso faz com que a potência elétrica permaneça como produto de corrente e tensão, quer para variáveis reais, quer para variáveis modificadas, pois

$$\underline{i}^T \underline{v} = \underline{i}_M^T \underline{v}_M .$$

É claro que a invariância é extensiva para energia.

A equação (I.8) colocada em termos das variáveis modificadas toma a forma

$$\underline{v}_M = [M] [R] [M]^T \underline{i}_M + [M] \frac{d}{dt} \{ [L] [M]^T \} \underline{i}_M + [M] [L] [M]^T \frac{d}{dt} \underline{i}_M . \quad (I.15)$$

Efetuada os cálculos necessários a equação (I.15) pode ser escrita como segue:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_b \\ v_o \\ v_r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_r \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dissipação}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -L_b & 0 & 0 \\ L_d & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz conversão}} \frac{d\theta}{dt} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}L_5 \\ 0 & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_o & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}L_5 & 0 & 0 & L_4 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz armazenamento}} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_b \\ i_o \\ i_r \end{bmatrix}$$

(I.16)

Os múltiplos produtos de funções trigonométricas são reduzidos a simples constantes, definidas como

$$L_d = L_1 + \frac{3}{2} L_2 + L_3 \quad (\text{I.17 a})$$

$$L_q = L_1 - \frac{3}{2} L_2 + L_3 \quad (\text{I.17 b})$$

$$L_o = L_1 - 2 L_3 \quad (\text{I.17 c})$$

e chamadas respectivamente, indutância síncrona de eixo direto, indutância síncrona de eixo quadratura e indutância de seqüência zero.

A interpretação física do sistema resultante é fácil de ser percebida nas parcelas da equação (I.16), destacando a matriz de dissipação, a matriz de conversão e a matriz de armazenamento.

O modelo em tensão da máquina, decorre da equação (I.16) com as seguintes formas componentes:

$$v_d = r i_d - L_q i_q \frac{d\theta}{dt} + L_d \frac{d}{dt} i_d + \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 \frac{d}{dt} i_r \quad (\text{I.18 a})$$

$$v_q = r i_q + (L_d i_d + \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 i_r) \frac{d\theta}{dt} + L_q \frac{d}{dt} i_q \quad (\text{I.18 b})$$

$$v_o = r i_o + L_o \frac{d}{dt} i_o \quad (\text{I.18.c})$$

$$v_r = r_r i_r + \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 \frac{d}{dt} i_d + L \frac{d}{dt} i_r \quad (\text{I.18.d})$$

Podem-se avaliar algumas consequências favoráveis da transformação de variáveis em comparação com as equações (I.2). A equação de tensão em sequência zero (I.18 c) depende só de i_o e $\frac{d}{dt} i_o$ portanto, pode ser resolvida separadamente desde que sua condição inicial seja conhecida. As equações restantes são acopladas, mas em menor grau que as anteriores (I.2). Outro efeito relevante é a substituição de coeficientes variáveis por parâmetros constantes.

O circuito equivalente baseado nas equações (I.18) é esboçado na Fig. I.3 .

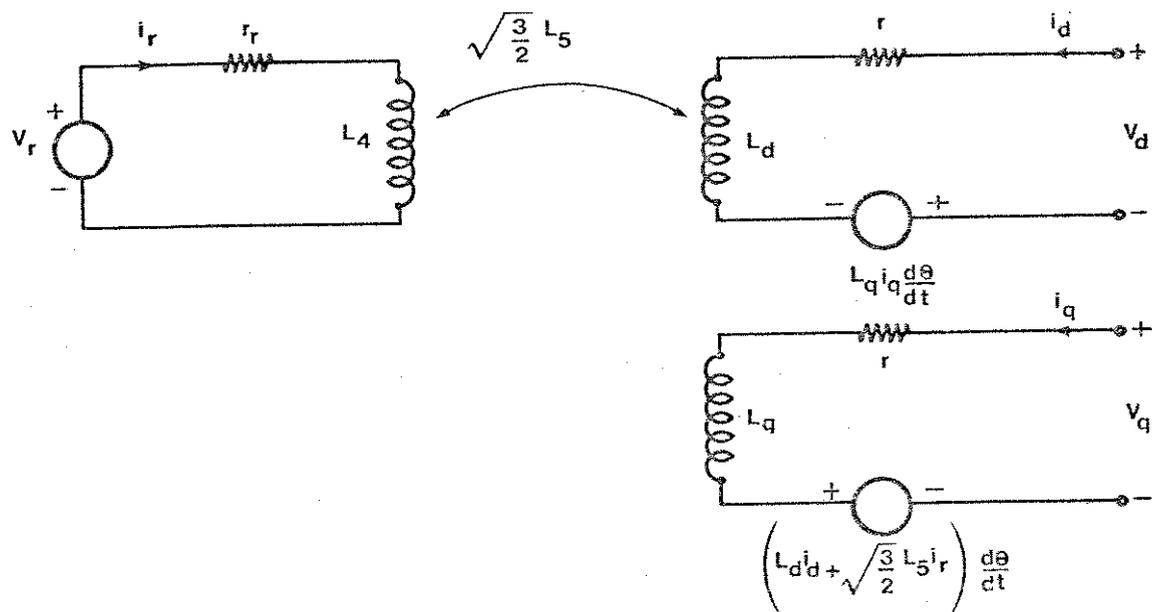


Fig. I.3 - Circuito equivalente d-q da máquina síncrona .

Notar que pela assimetria da matriz de conversão (I.16) é necessário usar fontes controladas para representar o acoplamento entre as variáveis diretas e de quadratura.

A equação (I.12) colocada em termos das correntes definidas em (I.14), toma a forma

$$T_e = \frac{1}{2} \cdot \underline{i}_M^T [M] \frac{d[L]}{d\theta} [M]^T \underline{i}_M$$

resultando em

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_d & i_q & i_o & i_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3L_2 & 0 & 0 \\ 3L_2 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_r \end{bmatrix}$$

Então, o torque elétrico tem a seguinte expressão:

$$T_e = \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 i_r i_q + 3L_2 i_d i_q$$

não dependendo da corrente de sequência zero, que é, então, inteiramente desacoplada das demais variáveis.

Da relação (I.17), se obtêm a equação

$$T_e = \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 i_r i_q + (L_d - L_q) i_d i_q \quad (I.19)$$

cujo segundo termo é reconhecido como conjugado de relutância, devido à saliência do rotor. Para máquina de rotor liso, essa parte do conjugado se anula, pois $L_d = L_q$. Por outro lado, para máquina de pólos salientes existe torque de relutância mesmo sem corrente de rotor (máquina de relutância).

I.3 - Equação eletromecânica

O conjugado mecânico fornecido à máquina girando em sincronismo é igual ao conjugado elétrico de saída se forem desprezadas as perdas. Qualquer variação no conjugado de saída deverá ser sustentado pela energia armazenada na massa rotativa, provocando alteração na velocidade. Então, o desequilíbrio entre o conjugado mecânico e o conjugado elétrico, deve acarretar aceleração ou desaceleração da máquina. A aceleração é função da posição do rotor. Desprezada a influência dos enrolamentos amortecedores, o comportamento dinâmico da máquina síncrona é refletido na equação diferencial

$$J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = T_m + T_e \quad (I.20)$$

onde J é o momento de inércia da massa girante, T_m é o tor

que aplicado ao eixo e T_e é o torque elétrico desenvolvido - na equação (I.19).

Através da equação (I.3), pode-se reescrever (I.20) como:

$$J \frac{2}{p} \frac{d\theta}{dt} = T_m + T_e \quad (I.21)$$

Uma vez que θ varia constantemente com o tempo, é mais conveniente medir a posição angular relativa a uma referência que gira com velocidade síncrona, ou seja, a posição do rotor em qualquer instante é obtida por

$$\theta = \omega t + \delta \quad (I.22)$$

onde ω é a velocidade angular síncrona e δ é a medida de posição do rotor com relação ao campo girante.

Derivando em relação ao tempo, se obtêm

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega + \frac{d\delta}{dt} \quad (I.23)$$

Derivando novamente

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad (I.24)$$

À equação dinâmica da máquina (I.21) pode ser reescrita a partir das equações (I.19) e (I.24).

$$J \frac{2}{p} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = T_m + \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 i_r i_q + (L_d - L_q) i_d i_q$$

Esta equação juntamente com o conjunto das equações (I.18) considerando (I.23) completam o modelo matemático da máquina síncrona.

$$J \frac{2}{p} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = T_m + \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 i_r i_q + (L_d - L_q) i_d i_q$$

$$v_d = r i_d - L_q i_q \left(\omega + \frac{d\delta}{dt} \right) + L_d \frac{d i_d}{dt} + \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 \frac{d i_r}{dt}$$

$$v_q = r i_q + (L_d i_d + \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 i_r) \left(\omega + \frac{d\delta}{dt} \right) + L_q \frac{d i_q}{dt}$$

$$v_o = r i_o + L_o \frac{d i_o}{dt}$$

$$v_r = r_r i_r + \sqrt{\frac{3}{2}} L_5 \frac{d i_d}{dt} + L_4 \frac{d i_r}{dt}$$

Por definição, as reatâncias síncronas de eixos direto e

quadratura são respectivamente :

$$X_d = \omega L_d$$

$$X_q = \omega L_q$$

Sem perda apreciável de precisão, as resistências dos enrolamentos do estator são desprezadas com conseqüente simplificação numérica. Pelo mesmo motivo, pode-se tomar o exemplo particular da máquina de dois pólos. Então

$$J \frac{d^2\delta}{dt^2} = T_m + K L_5 i_r i_q + (L_d - L_q) i_d i_q \quad (I.25a)$$

$$L_d \frac{d i_d}{dt} = v_d + L_q i_q \frac{d\delta}{dt} + X_q i_q - K L_5 \frac{d i_r}{dt} \quad (I.25b)$$

$$L_q \frac{d i_q}{dt} = v_q - (L_d i_d + K L_5 i_r) \frac{d\delta}{dt} - X_d i_d - \omega K L_5 i_r \quad (I.25c)$$

$$L_o \frac{d i_o}{dt} = v_o \quad (I.25d)$$

$$L_4 \frac{d i_r}{dt} = v_r - K L_5 \frac{d i_d}{dt} - r_r i_r \quad (I.25e)$$

sendo $K = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

As equações (I.25) descrevem o comportamento dinâmico da máquina síncrona, isoladamente. Além das seis variáveis de estado (δ , $\frac{d\delta}{dt}$, i_d , i_q , i_o e i_r) elas envolvem as tensões v_d , v_q e v_o , obtidas através da transformação de Park das tensões terminais v_a , v_b e v_c . As relações entre estas tensões e as variáveis de estado dependem do circuito externo à máquina e serão estudadas na próxima seção.

I.4 - Eliminação das tensões das equações da máquina

O circuito externo pode ser extremamente complexo, envolvendo um grande número de outras máquinas. Por esta razão é necessária alguma hipótese simplificadora.

Uma hipótese do tipo "carga resistiva equilibrada", implica em

$$v_d = -R i_d$$

$$v_q = -R i_q$$

$$v_o = -R i_{ro}$$

mas tem interesse prático reduzido por não se aproximar de uma situação real frequente.

A hipótese mais conveniente é a da chamada

"barra infinita" : devido à grande inércia do sistema, as tensões terminais v_a , v_b e v_c constituem um sistema trifásico equilibrado, de frequência ω

$$v_a = v_{\text{barra}} \text{ sen } (\omega t + \gamma) \quad (\text{I.26a})$$

$$v_b = v_{\text{barra}} \text{ sen } \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \gamma \right) \quad (\text{I.26b})$$

$$v_c = v_{\text{barra}} \text{ sen } \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \gamma \right) \quad (\text{I.26c})$$

e não dependem da situação da máquina. O ângulo γ depende da escolha da origem dos tempos.

I.4.1 - Barra infinita

É ilustrativo lembrar como a máquina é ligada ao sistema. Ela é operada em aberto até que as tensões terminais coincidam em fase e amplitude com as tensões de barra. Se a origem dos tempos é escolhida de modo que, em $t = 0$ o eixo direto do rotor esteja alinhado com o eixo da fase a do estator (Fig. I.2), isto é, de modo que a equação (I.22) se escreva

$$\theta = \omega t$$

e lembrando que, em vazio

$$i_a = i_b = i_c = 0$$

tem-se, com i_r constante

$$i_r = i_{r0}$$

a partir da equação (I.2)

$$v_a = i_{r0} \frac{d}{dt} l_{ra}$$

$$v_b = i_{r0} \frac{d}{dt} l_{rb}$$

$$v_c = i_{r0} \frac{d}{dt} l_{rc}$$

Substituindo as indutâncias mútuas dadas em (I.7) resulta

$$v_a = -\omega L_5 i_{r0} \operatorname{sen} \omega t = \omega L_5 i_{r0} \operatorname{sen} (\omega t + \Pi) \quad (\text{I.27a})$$

$$v_b = -\omega L_5 i_{r0} \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{2\Pi}{3} \right) = \omega L_5 i_{r0} \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{2\Pi}{3} + \Pi \right) \quad (\text{I.27b})$$

$$v_c = -\omega L_5 i_{r0} \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2\Pi}{3} \right) = \omega L_5 i_{r0} \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2\Pi}{3} + \Pi \right) \quad (\text{I.27c})$$

A citada escolha da origem dos tempos implica em

$$\gamma = \Pi .$$

Para que as tensões terminais da máquina - coincidam em amplitude com as tensões da barra é necessário fazer

$$\omega L_5 i_{ro} = v_{barra}$$

ou

$$i_{ro} = \frac{v_{barra}}{\omega L_5} .$$

Então, a partir de (I.26) com a escolha feita para a origem dos tempos, obtêm-se as tensões de barra :

$$v_a = -v_{barra} \text{ sen } \omega t \quad (\text{I.28a})$$

$$v_b = -v_{barra} \text{ sen } \left(\omega t - \frac{2\Pi}{3} \right) \quad (\text{I.28b})$$

$$v_c = -v_{barra} \text{ sen } \left(\omega t + \frac{2\Pi}{3} \right) . \quad (\text{I.28c})$$

Se agora, a máquina receber um torque mecânico diferente de

zero, mantidas estas tensões terminais, ela será acelerada ou retardada, passando a valer (I.22)

$$\theta = \omega t + \delta$$

Nestas condições, das equações (I.13) e (I.26) vem que

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_o \\ v_r \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_{\text{barra}} \sin \omega t \\ -v_{\text{barra}} \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ -v_{\text{barra}} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ r_r i_{ro} \end{bmatrix}$$

Efetutando os cálculos

$$v_d = v \sin\delta$$

$$v_q = v \cos\delta$$

$$v_o = 0$$

$$v_r = r_r i_{ro}$$

onde
$$v = \sqrt{\frac{3}{2}} v_{\text{barra}} .$$

Fica claro que a equação de tensão em sequência zero não tem interesse em estabilidade de máquina sob condições de equilíbrio.

Substituindo os componentes de tensão nas equações (I.25b) e (I.25c), o sistema final para condições de funcionamento equilibrado é :

$$J \frac{d^2 \delta}{dt^2} = T_m + KL_5 i_r i_q + (L_d - L_q) i_d i_q \quad (I.29a)$$

$$L_d \frac{d i_d}{dt} = v \operatorname{sen} \delta + L_q i_q \frac{d \delta}{dt} + X_q i_q - KL_5 \frac{d i_r}{dt} \quad (I.29b)$$

$$L_q \frac{d i_q}{dt} = v \operatorname{cos} \delta - (L_d i_d + KL_5 i_r) \frac{d \delta}{dt} - X_d i_d - \omega KL_5 i_r \quad (I.29c)$$

$$L_r \frac{d i_r}{dt} = v_r - KL_5 \frac{d i_r}{dt} - r_r i_r \quad (I.29d)$$

É interessante observar que as equações de estado da máqui-

na são autônomas, apesar do sistema físico máquina - barra infinita não o ser. Isto decorre da transformação de Park, que substitui as tensões de barramento, senoidais, por constantes.

CAPÍTULO - II

MODELO DE QUARTA ORDEM

A hipótese de corrente de rotor constante não é realista, entretanto, como etapa preliminar para o estudo da dinâmica da máquina, torna-se interessante, por reduzir a ordem do modelo matemático.

Com essa condição, o comportamento da máquina passa a ser descrito pelas seguintes equações de estado não lineares :

$$\frac{d\delta}{dt} = y \quad (\text{II.la})$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{T_m}{J} + K \frac{L_5}{J} i_{ro} i_q + \frac{L_d - L_q}{J} i_d i_q \quad (\text{II.lb})$$

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{v}{L_d} \text{sen} \delta + \frac{L_q}{L_d} y i_q + \omega \frac{L_q}{L_d} i_q \quad (\text{II.lc})$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{v}{L_q} \text{cos} \delta - K L_5 i_{ro} y - \frac{L_d}{L_q} y i_d - \omega \frac{L_d}{L_q} i_d - \omega K \frac{L_5}{L_q} i_{ro} \quad (\text{II.ld})$$

II.1 - Equação característica

Chamando δ_o , i_{do} e i_{qo} os valores das variáveis δ , i_d e i_q , correspondentes a uma posição de equilíbrio ou ponto de operação para o sistema (II.1), obtém-se :

$$i_{qo} = - \frac{v}{X_q} \text{sen} \delta_o \quad (\text{II.2a})$$

$$i_{do} = \frac{v}{X_d} \text{cos} \delta_o - K \frac{L_5}{L_d} i_{ro} \quad (\text{II.2b})$$

É evidente que a variável y se anula no ponto de equilíbrio. A equação (II.1b) no ponto de operação resulta na conhecida relação

$$\omega T_m = \omega K L_5 i_{ro} \frac{v}{X_d} \text{sen} \delta_o + \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \text{sen} 2\delta_o \quad (\text{II.2c})$$

onde a força eletromotriz $\omega K L_5 i_{ro}$ é geralmente designada por E (Ref. 4) .

Para valores usuais dos parâmetros, a equação (II.2c) é satisfeita por dois valores diferentes para δ_0 no intervalo $-\pi$ a $+\pi$ (Fig. II.1), desde que ωT_m não seja muito grande.

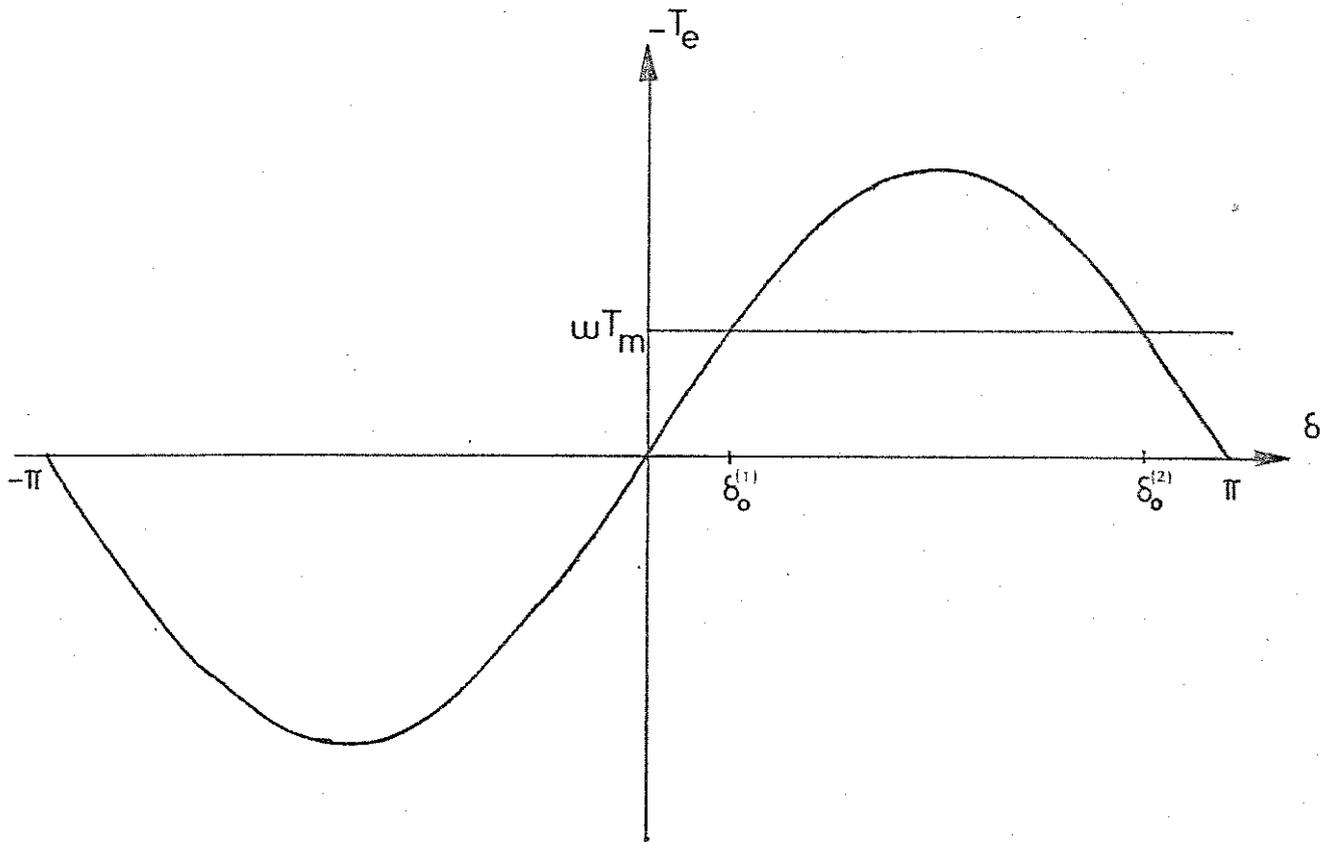


Fig. II.1 - Torque em função do ângulo do rotor

Para estudar a natureza do ponto de equilíbrio é necessário linearizar, em torno dessa posição, o sistema (II.1) :

$$\frac{d\delta_A}{dt} = y \quad (\text{II.3a})$$

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{L_d - L_q}{J} \frac{v}{X_q} \text{sen}\delta_o i_{d_A} + \left[\frac{L_d - L_q}{J} \frac{v}{X_d} \text{cos}\delta_o - K \frac{L_s L_q}{J L_d} i_{ro} \right] i_{q_A} \quad (\text{II.3b})$$

$$\frac{di_{d_A}}{dt} = \frac{v}{L_d} \text{cos}\delta_o \delta_A - \frac{v}{X_d} \text{sen}\delta_o y + \omega \frac{L_q}{L_d} i_{q_A} \quad (\text{II.3c})$$

$$\frac{di_{q_A}}{dt} = - \frac{v}{L_q} \text{sen}\delta_o \delta_A - \frac{v}{X_q} \text{cos}\delta_o y - \omega \frac{L_d}{L_q} i_{d_A} \quad (\text{II.3d})$$

onde $\delta_A = \delta - \delta_o$, $i_{d_A} = i_d - i_{do}$ e $i_{q_A} = i_q - i_{qo}$.

As equações (II.3) podem ser escritas na forma matricial

$$\dot{\underline{x}} = [A] \underline{x} \quad (\text{II.4})$$

com $\underline{x} = \left[\delta_A \quad Y \quad i_{dA} \quad i_{qA} \right]^T$ e

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_d - L_q}{J} i_{q0} & \frac{v}{J\omega} \cos\delta_0 - \frac{L_q}{J} i_{d0} \\ \frac{v}{L_d} \cos\delta_0 & -\frac{v}{X_d} \sin\delta_0 & 0 & \omega \frac{L_q}{L_d} \\ -\frac{v}{L_q} \sin\delta_0 & -\frac{v}{X_q} \cos\delta_0 & -\omega \frac{L_d}{L_q} & 0 \end{bmatrix}$$

(II.5)

A matriz $[A]$ tem direções próprias \underline{h}_i e valores próprios λ_i , se for satisfeita a condição

$$[A] \underline{h}_i = \lambda_i \underline{h}_i$$

equivalente a

$$(\lambda_i [I] - [A]) \underline{h}_i = 0$$

cuja solução não trivial conduz à equação característica

$$\det (\lambda_i [\bar{I}] - [A]) = 0$$

que, no caso, vale

$$(\lambda^2 + \omega^2) \left[\lambda^2 + K \frac{L_5}{J} i_{ro} \frac{v}{X_d} \cos \delta_o + \frac{v^2}{J\omega^2} \left(\frac{1}{L_q} - \frac{1}{L_d} \right) \cos 2\delta_o \right] = 0 \quad (\text{II.5})$$

Das quatro raízes desta equação, duas são sempre imaginárias puras

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega$$

enquanto as demais são imaginárias puras

$$\lambda_{3,4} = \pm j \left[K \frac{L_5}{J} i_{ro} \frac{v}{X_d} \cos \delta_o + \frac{v^2}{J\omega^2} \left(\frac{1}{L_q} - \frac{1}{L_d} \right) \cos 2\delta_o \right]^{\frac{1}{2}} = \pm j\Omega$$

para δ_o solução mais próxima de zero da equação (II.2c). Para a outra determinação de δ_o uma das raízes será positiva e a posição de equilíbrio é instável. De agora em diante, δ_o será apenas a primeira solução da equação (II.2c).

Para pequenas oscilações, o comportamento da máquina é descrito aproximadamente pela equação (II.4). Um sistema linear desta forma, possuindo dois pares de raízes imaginárias puras $\pm j\omega$ e $\pm j\Omega$, apresenta dois modos de oscilação, que podem ser desacoplados mediante uma transformação de variáveis que o coloque na forma

$$\dot{\underline{z}} = [\underline{A}_m] \underline{z}$$

onde

$$[\underline{A}_m] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & 0 & \Omega & 0 \end{bmatrix}$$

No apêndice A está feita esta transformação.

As novas variáveis, desacopladas, são combinações lineares das variáveis originais.

II.2 - Centragem das equações da máquina: estudo do sistema de segunda ordem

Para as equações não lineares (II.1) não é mais possível fazer considerações sobre os modos de oscilação, da mesma forma que desacoplar o sistema.

A análise das equações (II.1c) e (II.1d) aqui reproduzidas

$$L_d \frac{di_d}{dt} - X_q i_q - L_q i_q \frac{d\delta}{dt} = v \operatorname{sen} \delta$$

$$L_q \frac{di_q}{dt} + X_d i_d + \omega K L_5 i_{ro} + (L_d i_d + K L_5 i_{ro}) \frac{d\delta}{dt} = v \operatorname{cos} \delta$$

mostra que elas admitem, para qualquer $\delta(t)$ as seguintes soluções

$$i_d = \frac{v}{X_d} \operatorname{cos} \delta - K \frac{L_5}{L_d} i_{ro} + \frac{\mu}{L_d} \operatorname{sen}(\theta + \phi) \quad (\text{II.6a})$$

$$i_q = -\frac{v}{X_q} \operatorname{sen} \delta + \frac{\mu}{L_q} \operatorname{cos}(\theta + \phi) \quad (\text{II.6b})$$

com $\theta = \omega t + \delta$, e μ e ϕ constantes arbitrárias satisfazendo condições iniciais.

Substituindo as soluções (II.6) nas equações (II.2a) e (II.2b), obtém-se o sistema de segunda ordem, não autônomo

$$\frac{d\delta}{dt} = y \quad (\text{II.7a})$$

$$\frac{dy}{dt} = f(\mu, \delta, t) \quad (\text{II.7b})$$

sendo

$$f(\mu, \delta, t) = \frac{T_m}{J} + \frac{1}{J} \left\{ KL_5 i_{ro} + (L_d - L_q) \left[\frac{v}{X_d} \cos \delta - K \frac{L_5}{L_d} i_{ro} + \frac{\mu}{L_d} \sin(\theta + \phi) \right] \right\} \\ \left\{ - \frac{v}{X} \sin \delta + \frac{\mu}{L_q} \cos(\theta + \phi) \right\}.$$

Nota-se que $f(\mu, \delta, t)$ é periódica no tempo, com período $\frac{2\pi}{\omega}$.

Em primeira aproximação, a solução de (II.7) é dada pelo sistema "centrado" correspondente (Ref. 3),

$$d\delta = y \quad (\text{II.8a})$$

$$\frac{dy}{dt} = f(\mu, \delta) \quad (\text{II.8b})$$

onde $f(\mu, \delta)$ é a média, em relação ao tempo explícito, de $f(\mu, \delta, t)$:

$$f(\mu, \delta) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(\mu, \delta, t) dt .$$

Feitos os cálculos, verifica-se que $f(\mu, \delta)$ independe de μ , pois

$$f(\mu, \delta) = f(\delta) = \frac{1}{J} \left\{ T_m - KL_5 i_{ro} \frac{v}{X_q} \operatorname{sen} \delta - \frac{v^2}{2\omega} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \operatorname{sen} 2\delta \right\} .$$

O sistema de equações (II.8) pode ser analisado no plano de fase (δ, y) . Introduzindo uma função potencial

$$V(\delta) = - \int_0^{\delta} f(\delta) d\delta$$

verifica-se que as curvas da equação

$$\frac{1}{2} y^2 + V(\delta) = C^* \tag{II.9}$$

são curvas integrais para o sistema, que é conservativo. A constante C^* tem um significado análogo a energia. A rela -

ção (II.9) exprime a conservação da energia, e fornece diretamente as trajetórias do plano (δ, y) :

$$\frac{d\delta}{dt} = 2 \left[C^* + \frac{T_m}{J} \delta + K \frac{L_5}{J} i_{ro} \frac{v}{X_d} \cos\delta + \frac{v^2}{4J\omega} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \cos 2\delta \right] .$$

Neste plano de fase (Fig.II.2) aparecem as duas posições de equilíbrio, estável (centro) e instável (sela).

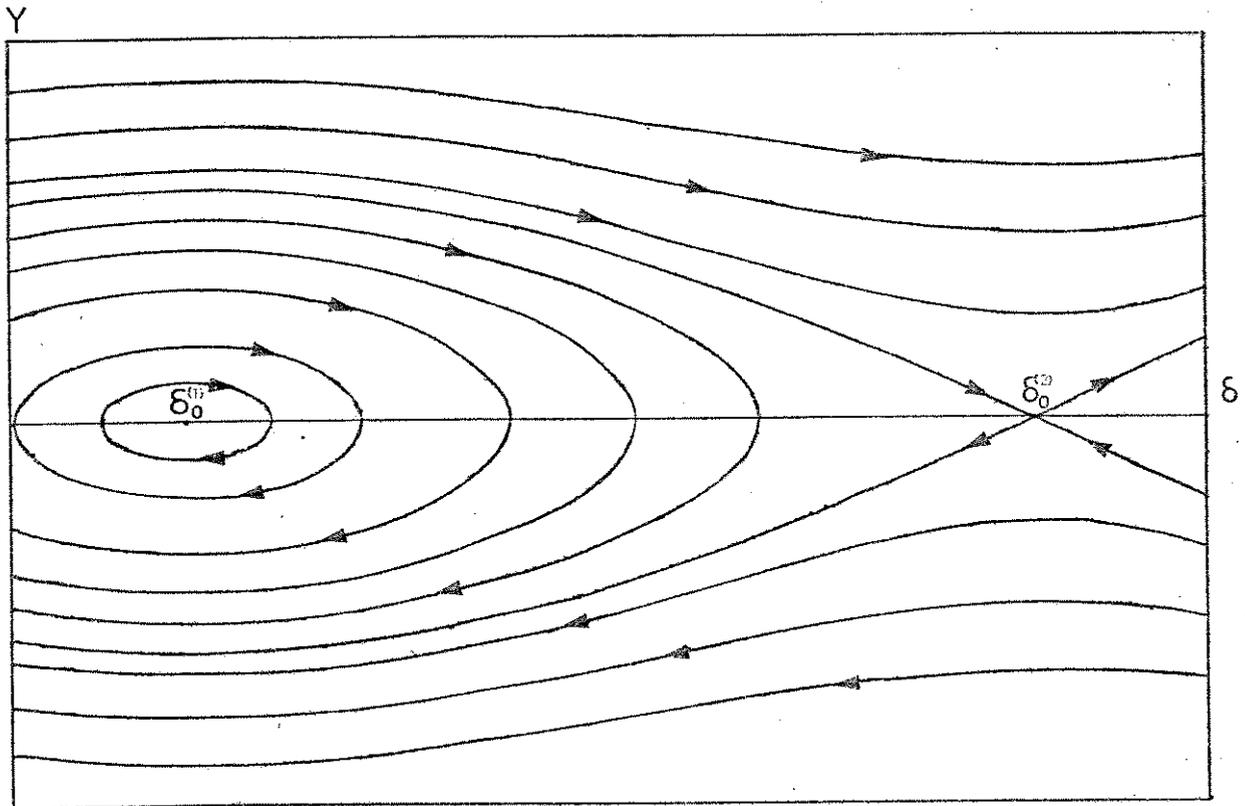


Fig. II.2 - Plano de fase da máquina ligada a uma barra infinita

Existe uma energia de bifurcação C^* tal que, para valores inferiores de energia, a máquina oscila em torno da posição de equilíbrio estável. Para valores superiores, o movimento de δ é sempre crescente (a partir de certo tempo) e a máquina perde o sincronismo.

CAPÍTULO - III

MODELO DE QUINTA ORDEM

Considerando a variação de corrente de rotor, deve ser estudado o modelo de quinta ordem para a máquina. A hipótese da máquina de pólos lisos, isto é, $L_d = L_q = L$ é adotada com o intuito de reduzir as expressões. O modelo é descrito pelas equações :

$$\frac{d\delta}{dt} = \gamma \quad \text{(III.1a)}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{T_m}{J} + K \frac{L_5}{J} i_r i_q \quad \text{(III.1b)}$$

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{v}{L} \sin\delta + (\omega + \gamma) i_q - K \frac{L_5}{L} \frac{di_r}{dt} \quad \text{(III.1c)}$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{v}{L} \cos\delta - (\omega + \gamma) (i_d + K \frac{L_5}{L} i_r) \quad \text{(III.1d)}$$

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{v_r}{L_4} - K \frac{L_5}{L_4} \frac{di_d}{dt} - \frac{r_r}{L_4} i_r \quad \text{(III.1e)}$$

sendo o ponto de operação dado por

$$T_m = K L_5 i_{ro} \frac{v}{X} \text{sen} \delta_o$$

$$i_{do} = \frac{v}{X} \text{cos} \delta_o - K \frac{L_5}{L} i_{ro}$$

$$i_{qo} = - \frac{v}{X} \text{sen} \delta_o$$

$$i_{ro} = \frac{v_r}{r_r}$$

O sistema (III.1) pode ser colocado na forma normal :

$$\frac{d\delta}{dt} = y \tag{III.2a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{T_m}{J} + K \frac{L_5}{J} i_r i_q \tag{III.2b}$$

$$\frac{di_d}{dt} = \frac{v}{L'} \text{sen} \delta + (\omega + y) \frac{Li_q}{L'} - K \frac{L_5}{L_4 L'} (v_r - r_r i_r) \tag{III.2c}$$

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{v}{L} \cos \delta - (\omega + \gamma) \left(i_d + K \frac{L_5}{L} i_r \right) \quad (\text{III.2d})$$

$$\frac{di_r}{dt} = -K \frac{L_5}{L_4 L'} \left| v \sin \delta + (\omega + \gamma) i_q \right| + \frac{L}{L_4 L'} (v_r - r_r i_r) . \quad (\text{III.2e})$$

O acoplamento magnético entre as correntes i_d e i_r , visível nas equações (III.1) é traduzido, nas equações (III.2), pela redução da indutância síncrona L para a indutância transitória L' valendo

$$L' = L - \frac{3}{2} \frac{L_5^2}{L_4}$$

e, portanto a reatância síncrona transitória vale

$$X' = \omega L' .$$

III.1 - Equação característica

Linearizando as equações (III.2) e colocando na forma matricial

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}] \underline{x} \quad (\text{III.3})$$

com

$$\underline{x} = [\delta_A \ y \ i_{dA} \ i_{qA} \ i_{rA}]^T$$

vem

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \frac{L_5}{J} i_{ro} & -K \frac{L_5}{J} \frac{v}{X} \text{sen} \delta_o \\ \frac{v}{L'} \text{cos} \delta_o & -\frac{v}{X'} \text{sen} \delta_o & 0 & \omega \frac{L}{L'} & K \frac{L_5}{L_4} \frac{r_r}{L'} \\ -\frac{v}{L} \text{sen} \delta_o & \frac{v}{X} \text{cos} \delta_o & -\omega & 0 & -\omega K \frac{L_5}{L} \\ -K \frac{L_5 v}{L_4 L'} \text{cos} \delta_o & K \frac{L_5 v}{L_4 X'} \text{sen} \delta_o & 0 & K \frac{L_5 X}{L_4 L'} & -\frac{r_r L}{L_4 L'} \end{bmatrix}$$

A equação característica correspondente ao sistema de equações diferenciais (III.3) é

$$(\lambda^2 + \omega^2) \left[\left(\lambda + \frac{r_r L}{L_4 L'} \right) (\lambda^2 + \Omega^2) + K^2 \frac{L_5^2 v^2}{J L_4 X X'} \text{sen}^2 \delta_o \lambda \right] = 0 \quad (\text{III.4})$$

onde Ω é igual ao caso anterior referente a máquina de pólos lisos, ou seja

$$\Omega^2 = K \frac{L_5}{J} i_{ro} \frac{v}{X} \cos \delta_o .$$

Comparando com a equação característica (II.5) onde se considera corrente de rotor constante, nota-se que:

- são mantidas as raízes $\pm j\omega$.
- as raízes restantes permanecem com parte real positiva, desde que Ω^2 seja positivo, ou, conseqüentemente

$$|\delta_o| < \frac{\pi}{2} .$$

É, ainda, interessante verificar na equação (III.4) que, para r_r nulo, estas três raízes são respectivamente,

$$0 \text{ e } \pm j\Omega \sqrt{1 + \frac{C}{\Omega^2}}$$

com

$$C = \frac{K^2 L_5^2}{J L_4} \frac{v^2}{X X'} \sin^2 \delta_o . \quad (\text{III.5})$$

Para r_r tendendo a infinito, a primeira destas raízes tende a $-\infty$ e as duas outras a $\pm j\Omega$, reproduzindo a situação encontrada no caso de corrente de rotor constante.

III.2 - Centragem das equações da máquina: estudo do sistema de terceira ordem

As equações (III.2c) e (III.2d) têm solução facilmente verificadas

$$i_d = \frac{v}{X} \cos \delta - K \frac{L_5}{L} i_r + \frac{\mu}{L} \sin(\theta + \phi)$$

$$i_q = -\frac{v}{X} \sin \delta + \frac{\mu}{L} \cos(\theta + \phi)$$

e que, introduzidas nas equações restantes, levam ao seguinte sistema de terceira ordem, não autônomo:

$$\frac{d\delta}{dt} = y \tag{III.6a}$$

$$J \frac{dy}{dt} = T_m + KL_5 i_r \left[-\frac{v}{X} \sin \delta + \frac{\mu}{L} \cos(\theta + \phi) \right] \tag{III.6b}$$

$$\frac{L'}{L} \frac{di_r}{dt} = \frac{1}{L_4} (v_r - r_r i_r) + K \frac{L_5}{L_4} \left[-\frac{v}{X} \sin \delta - y - \frac{\mu}{L} \cos(\theta + \phi) \right] \frac{d\theta}{dt} \tag{III.6c}$$

Centrando as equações (III.6), obtém-se o sistema de terceira ordem, autônomo, que descreve aproximadamente o comportamento da máquina :

$$\frac{d\delta}{dt} = y \quad (\text{III.7a})$$

$$J \frac{dy}{dt} = T_m - KL_5 i_r \frac{v}{X} \text{sen} \delta \quad (\text{III.7b})$$

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{v_r}{L_4} \frac{L}{L'} + K \frac{L_5}{L_4} \frac{v}{X'} \text{sen} \delta y - \frac{r_r}{L_4} \frac{L}{L'} i_r \quad (\text{III.7c})$$

Definindo $i_{ro} = \frac{v_r}{r_r}$ e chamando $i_r = i_{ro} + i_{rA}$, vem

$$\frac{d\delta_A}{dt} = y \quad (\text{III.8a})$$

$$J \frac{dy}{dt} = T_m - KL_5 (i_{ro} + i_{rA}) \frac{v}{X} \text{sen} \delta \quad (\text{III.8b})$$

$$\frac{di_{rA}}{dt} = K \frac{L_5}{L_4} \frac{v}{X'} \text{sen} \delta y - \frac{r_r}{L_4} \frac{L}{L'} i_{rA} \quad (\text{III.8c})$$

Nas equações (III.7b) e (III.8b) o segundo termo do segundo membro representa o torque elétrico instantâneo.

Não é mais possível estudar este sistema de terceira ordem no plano de fase : suas trajetórias evoluem num espaço de três dimensões. A linearização das equações (III.7) ou (III.8) nas proximidades de seus pontos de equilíbrio permite estabelecer a natureza destas posições. Feitos os cálculos, encontra-se a equação característica correspondente às equações linearizadas,

$$(\lambda^2 + \Omega^2) \left(\lambda + \frac{r_r L}{L_4 L'} \right) + C \lambda = 0$$

que reproduz exatamente o segundo fator da equação característica (III.4). Para Ω^2 positivo as posições de equilíbrio, estáveis, serão, por exemplo, do tipo foco-estável - (Ref. 6).

Integrando numericamente as equações (III.7) ou (III.8) podem-se construir as projeções das trajetórias num plano qualquer. É óbvio que neste plano as projeções podem eventualmente se cruzar, pois um ponto não define mais uma trajetória.

Em lugar de projetar as trajetórias no plano (δ, y) , que é o plano de fase do caso de corrente de rotor constante, é preferível projetar no plano (δ, T_e) . Uma área neste plano tem o significado físico de energia .

Para isso é possível recorrer a uma mudança de variáveis no sistema (III.7), introduzindo a variável T_e e eliminando i_r . Uma alternativa prática para a construção

destas projeções é o cálculo do torque elétrico em cada ponto.

III.3 - Curvas torque-ângulo

As curvas torque-ângulo são as projeções das curvas integrais de (III.7) ou (III.8) no plano (δ, T_e) .

Se r_r for infinito, a equação (III.8c) implica em $i_{rA} = 0$, e o torque elétrico é portanto dado por

$$-T_e = KL_5 i_{r0} \frac{v}{X} \text{sen} \delta \quad (\text{III.9})$$

sendo apenas função de δ . As trajetórias no espaço (δ, y, T_e) estão contidas na superfície cilíndrica da equação (III.9), que é também a equação da projeção de todas as trajetórias no plano (δ, T_e) . A equação (III.9) tem também o significado de torque elétrico em regime.

Para r_r nulo, a equação (III.8c) leva a

$$\frac{di_{rA}}{dt} = -K \frac{L_5 v}{L_4 X'} \frac{d}{dt} \text{cos} \delta$$

que, integrada com a condição de que na posição de equilíbrio δ_0 , i_{rA} seja nulo, implica em

$$i_{rA} = -K \frac{L_5}{L_4} \frac{v}{X'} (\cos\delta - \cos\delta_0) .$$

Nestas condições o torque elétrico, chamado de transitório (Ref. 4) é dado por

$$-T_e = K L_5 \left[i_{ro} - K \frac{L_5}{L_4} \frac{v}{X'} (\cos\delta - \cos\delta_0) \right] \frac{v}{X} \operatorname{sen}\delta \quad (\text{III.10})$$

e novamente só depende de δ . As trajetórias estão mais uma vez contidas numa superfície cilíndrica da equação (III.10)

É bom notar que, neste caso, são possíveis - outras superfícies cilíndricas e portanto outros valores para o torque elétrico transitório, dependendo da escolha de δ_0 correspondente a i_{rA} nulo. As trajetórias no espaço ocupam uma família de superfícies cilíndricas, de parâmetro δ_0 .

Nas Figs. (III.1) e (III.2), são construídas curvas torque ângulo para um exemplo, incluindo os três casos :

- r_r infinito, ou torque de regime .
- r_r nulo, ou torque transitório .
- r_r finito, não nulo.

Apenas para o terceiro caso é possível indicar, sobre as curvas, um sentido de percurso.

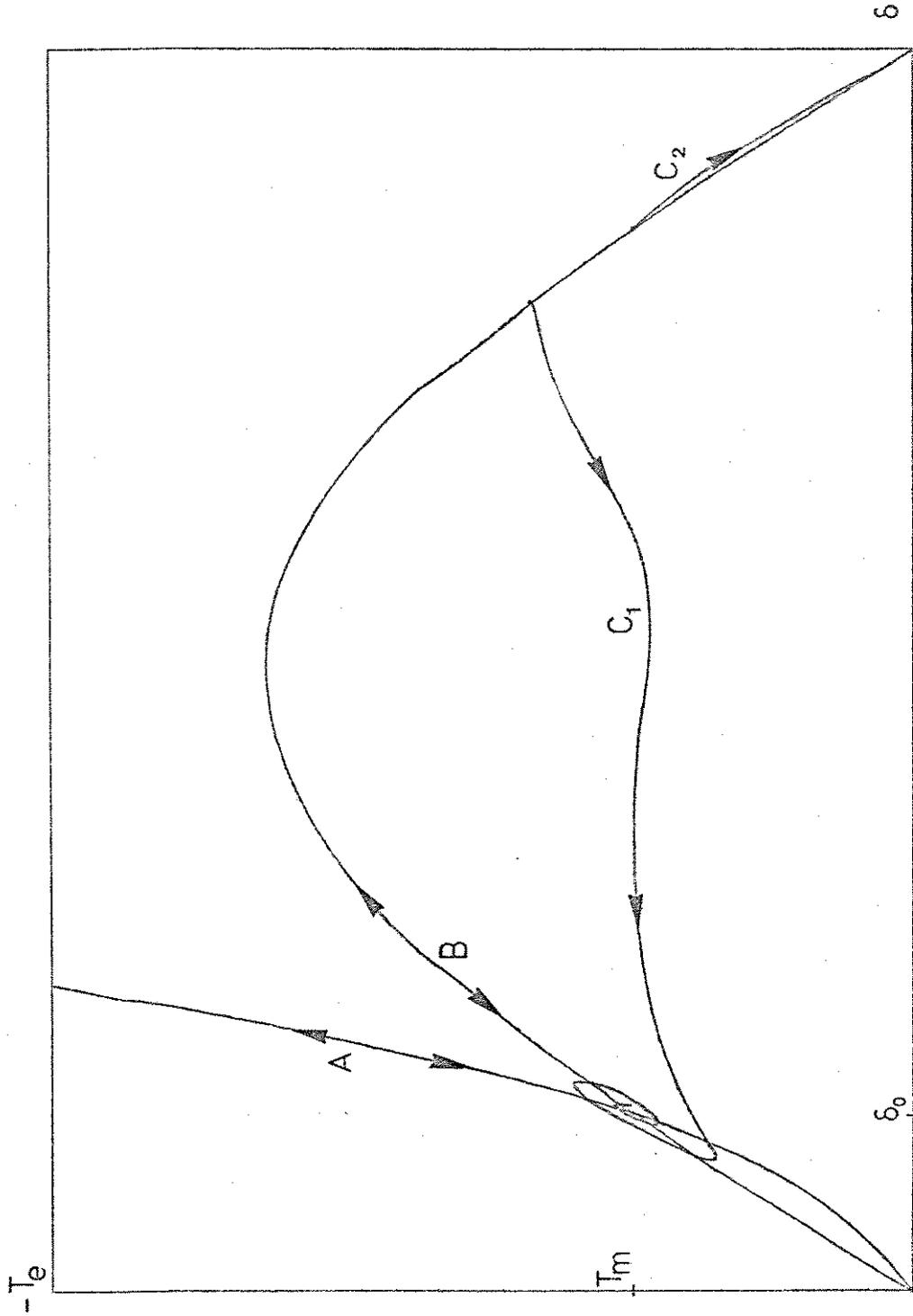


Fig. III.1.1 - Curvas torque-ângulo com r_f nulo (A), infinito (B) e finito não nulo (C) (com duas condições iniciais : estável (C_1) e instável (C_2)) .

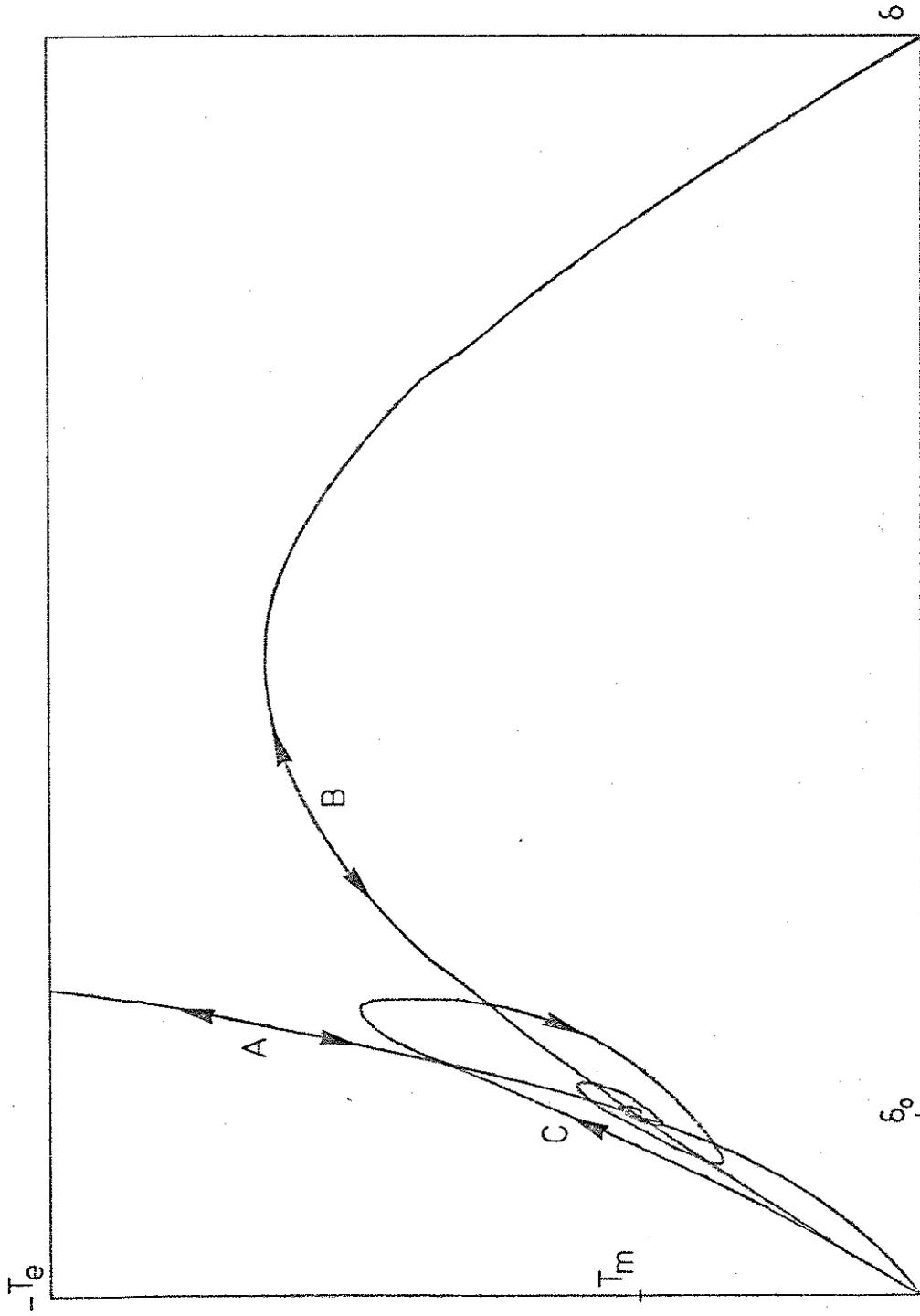


Fig. III.2 - Curvas torque-ângulo com r_f nulo (A), infinito (B) e finito não nulo (C) (com condição inicial nula) .

III.3.1 - Exemplo de aplicação

Uma situação frequentemente considerada na análise da estabilidade de uma máquina ligada a uma barra infinita é a seguinte :

A máquina, sob condição inicial de equilíbrio, é desligada da barra (em consequência de uma falha) e após um curto intervalo de tempo ela é religada.

No instante de desligamento, impõe-se $i_d = i_q = 0$. As equações (III.1c) e (III.1d) perdem o significado pois a tensão de barra v deixa de ser definida.

A equação (III.1e) permite concluir que ocorrerá uma descontinuidade na corrente de rotor, dada por

$$i_{rA} = K \frac{L_5}{L_4} i_{do}$$

onde i_{do} é o valor de i_d antes do desligamento.

O sistema (III.1) se reduz a

$$\frac{d\delta}{dt} = y \quad (III.11a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{T_m}{J} \quad (III.11b)$$

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{v_r}{L_4} - \frac{r_r}{L_4} i_r \quad (III.11c)$$

e pode ser facilmente integrado. No instante de religamento, chamado τ , obtêm-se

$$\delta(\tau) = \frac{T_m}{2J} \tau^2 + \delta_o \quad (\text{III.12a})$$

$$y(\tau) = \frac{T_m}{J} \tau \quad (\text{III.12b})$$

$$i_r(\tau) = i_{ro} + K \frac{L_5}{L_4} i_{do} \exp\left(-\frac{r_r}{L_4} \tau\right) \quad (\text{III.12c})$$

As equações (III.12) serão as condições iniciais para a integração do sistema (III.7) ou (III.8) para construção das curvas torque-ângulo após o religamento da máquina.

Estas curvas estão ilustradas nas Figs. III.3 e III.4 para um valor finito, não nulo de r_r . A título de comparação, as figuras incluem o torque de regime e o torque transitório respectivamente.

III.4 - Solução aproximada das equações de terceira ordem

No interesse de se estudarem as oscilações da máquina em torno da posição de equilíbrio

$$\delta = \delta_o$$

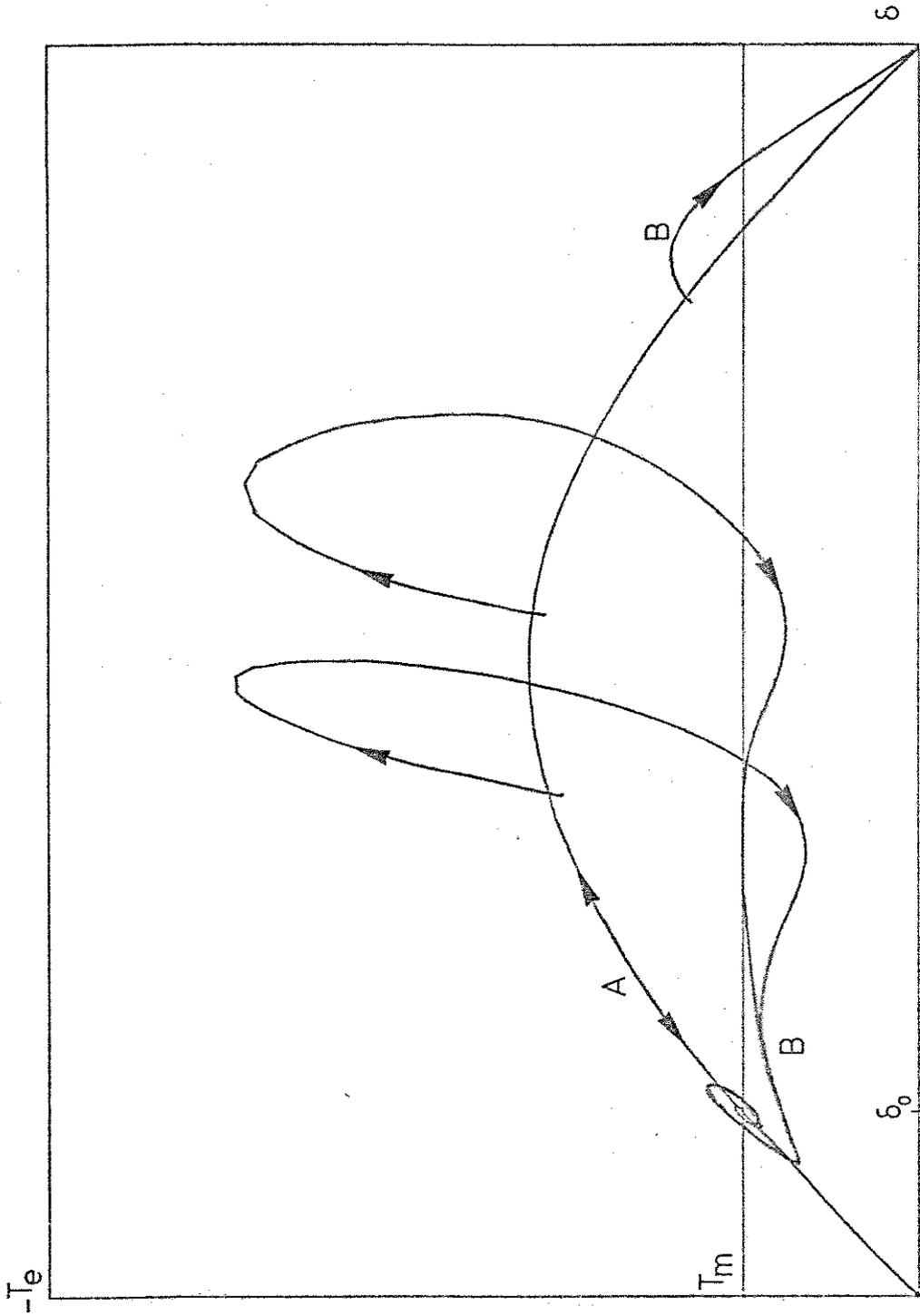


Fig. III.3 - Curvas torque-ângulo com r_r infinito (A) e finito (B) (em tempos de religamento diferentes) .

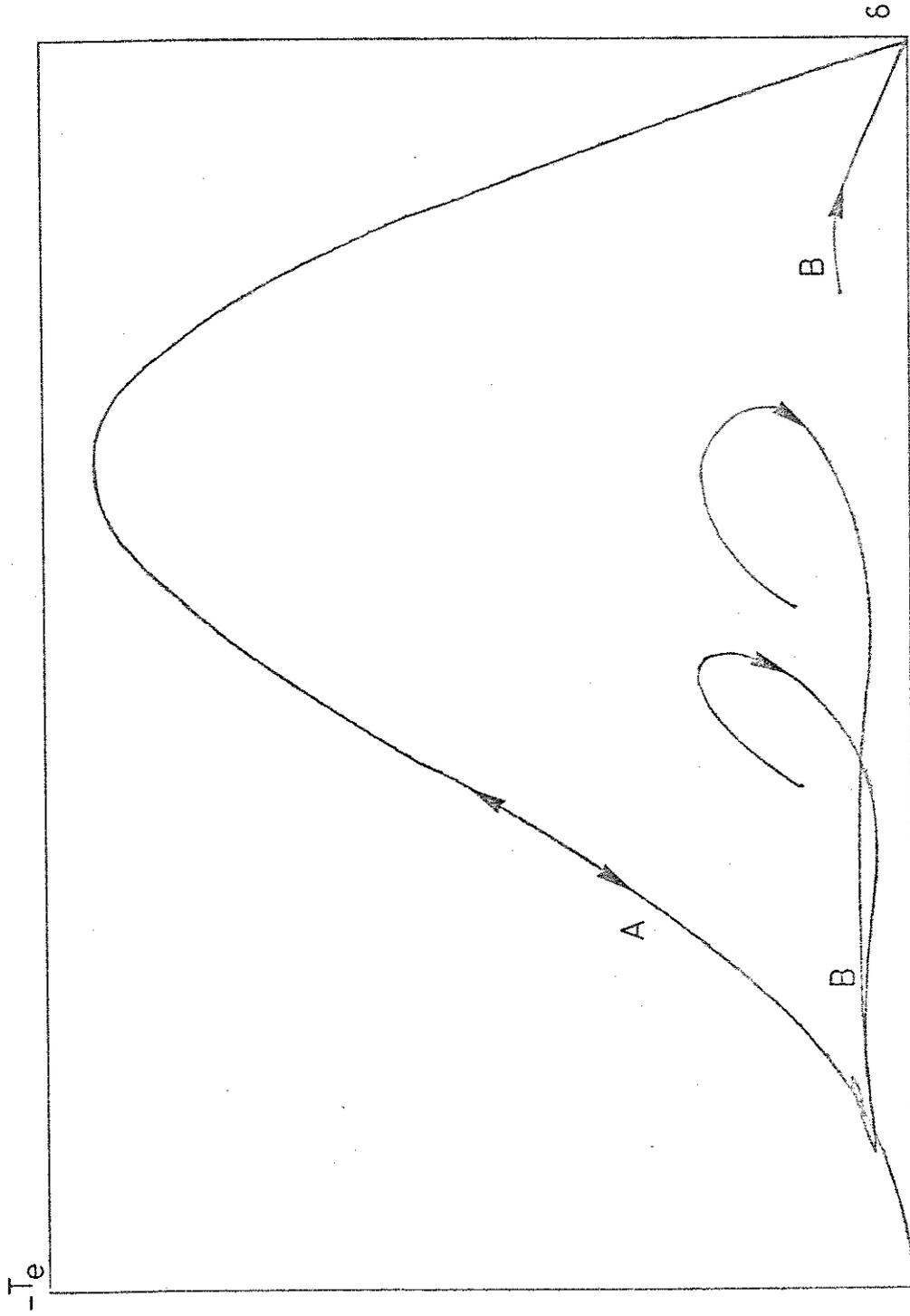


Fig. III.4 - Curvas torque-ângulo com r_T nulo (A), finito não nulo (B) (em tempos de religamento diferentes) .

$$y = 0$$

$$i_r = i_{ro}$$

pode-se fazer, nas equações (III.8) a mudança de variáveis

$$\delta = \delta_o + \delta_\Delta$$

obtendo-se

$$\frac{d\delta_\Delta}{dt} = y \quad (\text{III.13a})$$

$$J \frac{dy}{dt} = T_m - K L_5 (i_{ro} + i_{r\Delta}) \frac{v}{X} \text{sen}(\delta_o + \delta_\Delta) \quad (\text{III.13b})$$

$$\frac{di_{r\Delta}}{dt} = K \frac{L_5}{L_4} \frac{v}{X'} \text{sen}(\delta_o + \delta_\Delta) y - \frac{r_r}{L_4} \frac{L}{L'} i_{r\Delta} \quad (\text{III.13c})$$

Para a resistência de rotor muito grande, as oscilações de pequena amplitude são descritas, aproximadamente por

$$\delta_\Delta = a \cos\psi \quad (\text{III.14a})$$

$$y = -a \Omega \operatorname{sen} \psi \quad (\text{III.14b})$$

com a amplitude a e a frequência ψ aproximadamente constantes. A amplitude é arbitrária e a frequência vale

$$\dot{\psi} = \Omega$$

A corrente de rotor conterá uma componente aproximadamente função harmônica, de mesma frequência Ω . Admitindo, então

$$i_{rA} = w + b \cos(\psi + \varepsilon) \quad (\text{III.15})$$

e substituindo na equação (III.13c) obtêm-se fazendo balanço harmônico

$$b = a K \frac{L_5}{L_4} \frac{v}{X'} \operatorname{sen} \delta_o \operatorname{coss} \quad (\text{III.16a})$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{r_r}{L_4} \frac{L}{L' \Omega} \quad (1^\circ \text{ quadrante}) \quad (\text{III.16b})$$

As expressões (III.14) e (III.15) constituem a solução geratriz para o sistema (III.13). Se a resistência de rotor não for muito grande estas expressões serão

vistas como uma mudança de variáveis. As variáveis a e ψ (não mais constantes) bem como w , serão as novas variáveis em substituição a δ_A , y e i_{r_A} . Substituindo nas equações (III.13) e admitindo, para simplificar os cálculos, que a amplitude a é sempre pequena vem:

$$\dot{a} \cos \psi - a \dot{\psi} \sin \psi = -a \Omega \sin \psi$$

$$- \dot{a} \Omega \sin \psi - a \dot{\psi} \Omega \cos \psi = \frac{T_m}{J} - K \frac{L_5 v}{J X} \left[i_{r_0} + z + a K \frac{L_5 v}{L_4 X'} \sin \delta_0 \cos \epsilon \cos(\psi + \epsilon) \right]$$

$$\left[\sin \delta_0 + \cos \delta_0 a \cos \psi \right]$$

$$\dot{a} K \frac{L_5 v}{L_4 X'} \sin \delta_0 \cos \epsilon \cos(\psi + \epsilon) - a \dot{\psi} K \frac{L_5 v}{L_4 X'} \sin \delta_0 \cos \epsilon \sin(\psi + \epsilon) + \dot{w} =$$

$$= K \frac{L_5 v}{L_4 X'} \left[\sin \delta_0 + a \cos \delta_0 \cos \psi \right] \left[-a \Omega \sin \psi \right] -$$

$$- \frac{r_r L}{L_4 L'} \left[w + a K \frac{L_5 v}{L_4 X'} \sin \delta_0 \cos \epsilon \cos(\psi + \epsilon) \right]$$

A partir deste sistema é possível explicitar

\dot{a} , $\dot{\psi}$ e \dot{w} . Efetuando, nas expressões para \dot{a} , $\dot{\psi}$ e \dot{w} , a centragem em relação à variável angular ψ , vem, em primeira aproximação

$$\dot{a} = - a \frac{C}{4\Omega} \operatorname{sen} 2\varepsilon \quad (\text{III.17a})$$

$$\dot{\psi} = \Omega + \frac{C}{2\Omega} \cos^2 \varepsilon \quad (\text{III.17b})$$

$$\dot{w} = - \frac{r_r}{L_4} \frac{L'}{L} w + g(a, w) \quad (\text{III.17c})$$

sendo C dado pela equação (III.5) e $g(a, w)$ uma função não linear de a e w . A equação (III.17a) permite concluir que as oscilações do rotor serão em primeira aproximação amortecidas, com um amortecimento linear função da resistência do rotor :

$$\dot{a} = \zeta(r_r) a$$

A Fig. III.5 representa o amortecimento $\zeta(r_r)$.

A frequência $\dot{\psi}$ também é função da resistência de rotor. Este resultado pode ser traduzido pelo lugar das raízes aproximado representado na Fig. III.6

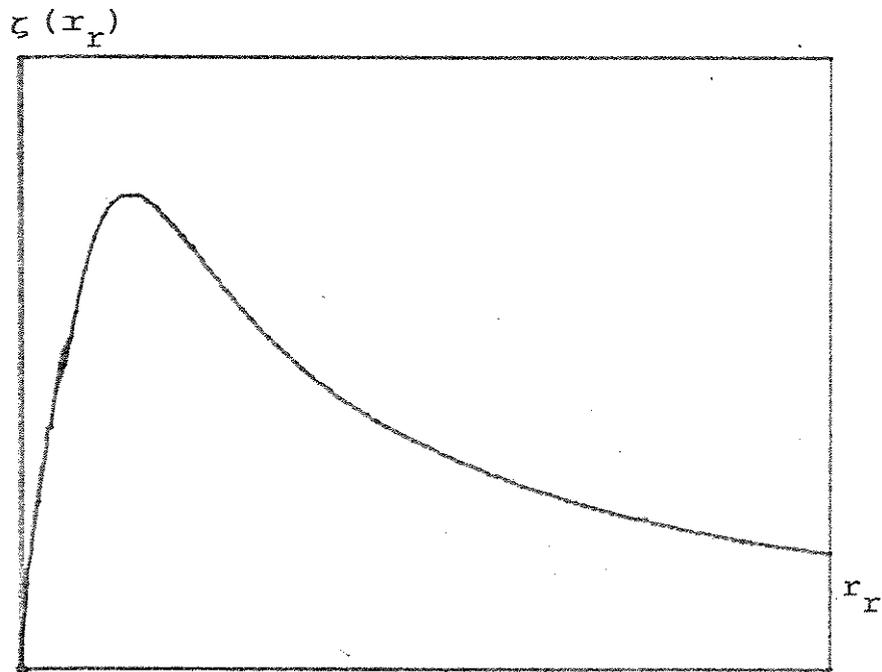


Fig. III.5 - Amortecimento em função da resistência do rotor

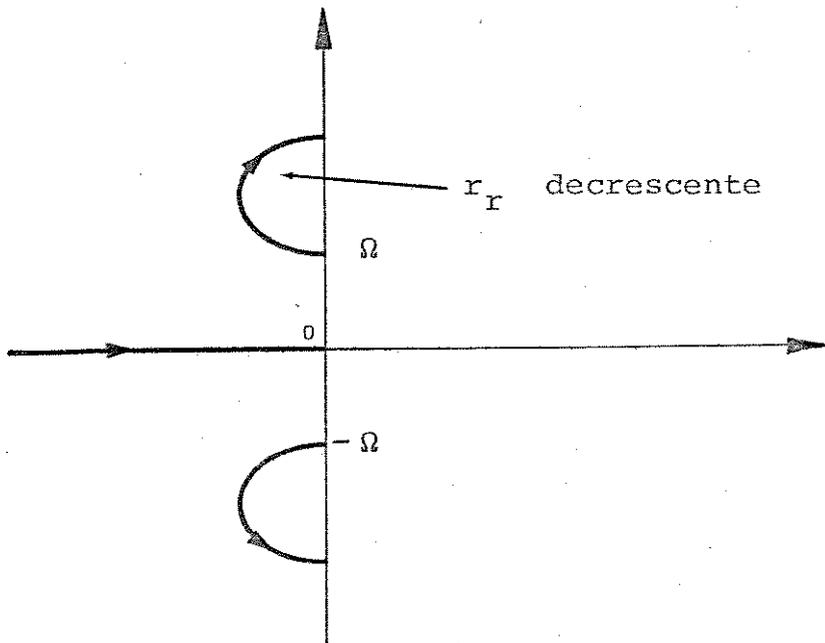


Fig. III.6 - Lugar das raízes

As raízes complexas se localizam sobre dois arcos de elipse. A terceira raiz é real negativa, correspondente a equação (III.17c) linearizada.

Seria possível não fazer a hipótese de amplitude a pequena, o que, entretanto, não parece muito interessante. De fato, a complexidade dos cálculos cresceria muito, aparecendo diversas séries de funções de Bessel e, de qualquer modo, o resultado seria ainda uma primeira aproximação.

Uma aplicação interessante consiste em escolher a resistência de rotor de modo a maximizar o amortecimento. Isto equivale a

$$\frac{d\zeta}{d_{rr}} = 0$$

ou

$$\frac{d\zeta}{d\varepsilon} = 0$$

e portanto,

$$\frac{C}{8\Omega} \cos 2\varepsilon = 0$$

A resistência de campo que confere máximo -
amortecimento ao sistema corresponde a

$$\varepsilon = \frac{\Pi}{4}$$

e pela equação (III.16b) vale :

$$r_r^* = \Omega L_4 \frac{L'}{L}$$

Nas Figs. III.7 e III.8 são comparados o com-
portamento de máquina com duas resistências de rotor dife-
rentes, uma delas corresponde ao amortecimento máximo.

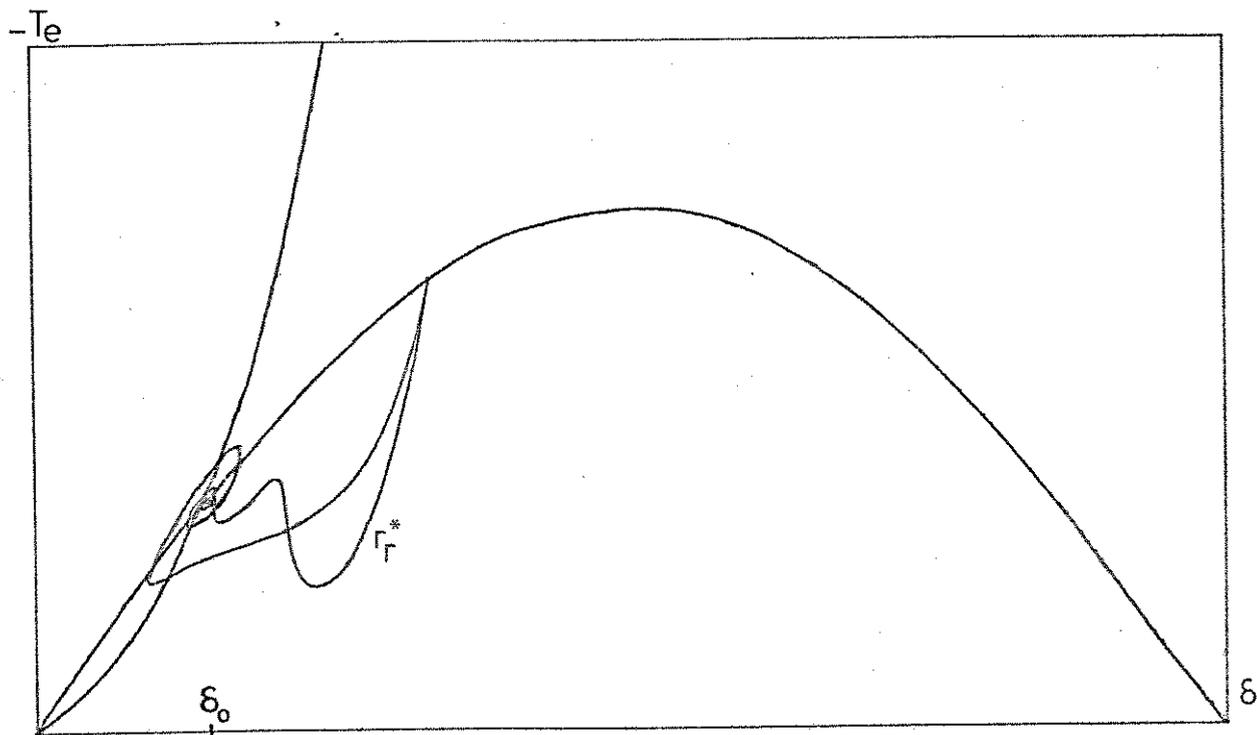


Fig. III.7 - Curvas torque-ângulo: influência da variação de r_r no amortecimento .

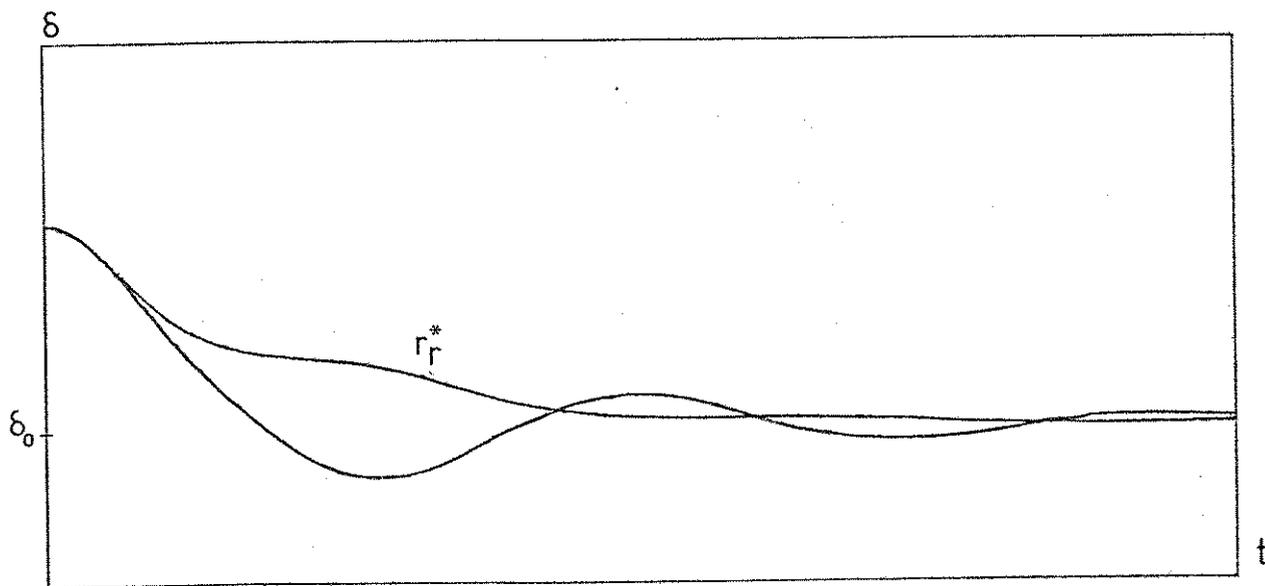


Fig. III.8 - Curvas de oscilação: influência da variação de r_r no amortecimento .

CONCLUSÃO

Foi apresentada uma análise do comportamento dinâmico de uma máquina síncrona. A complexidade de um modelo de máquina que pretendesse ser completo, levando em conta todas as variáveis e fenômenos envolvidos dificultaria a obtenção de resultados, sendo necessárias, hipóteses simplificadoras.

Fez-se, como frequentemente na bibliografia, a hipótese de linearidade dos circuitos magnéticos. Além da comodidade decorrente desta hipótese, é possível operar máquinas em condições muito próximas da linearidade, sem diferenças essenciais no seu comportamento.

Uma hipótese de outra natureza é a ausência de enrolamentos amortecedores. Além de não haver necessidade desses enrolamentos em certos tipos de máquina (rotor não laminado), esta hipótese reduz a ordem do sistema de equações do modelo. Entretanto, outra razão sugere o emprego desta hipótese: evidenciar o papel amortecedor do enrolamento de campo.

As curvas torque-ângulo da máquina síncrona são bastante estudadas na bibliografia. São apresentadas, usualmente, duas curvas, referidas como torque em regime e torque transitório. De fato, o torque em regime tem o significado claro que se lhe atribui normalmente; o mesmo não se pode dizer do torque transitório.

As curvas torque transitório-ângulo são, na verdade, projeções de curvas integrais das equações da máquina e só se confundem com as curvas da bibliografia no caso muito particular e não realista de resistência nula do

enrolamento de campo.

No estudo destas curvas integrais fica evidenciado o amortecimento introduzido pelo enrolamento de campo. É possível, para pequenas oscilações pelo menos, obter um valor de resistência de campo que maximize este amortecimento. No interesse das aplicações práticas seria necessário levar em conta os enrolamentos amortecedores. Com isso, a máquina seria descrita por um sistema de sétima ordem, que, após a centragem das equações, se reduziria à quinta ordem. O procedimento, entretanto, seria o mesmo feito neste trabalho. De fato seria talvez interessante levar em conta que, na prática, o acoplamento magnético entre o enrolamento amortecedor direto e o campo é grande; a hipótese de acoplamento perfeito permitiria substituir o enrolamento amortecedor direto por uma modificação nos parâmetros do campo e o modelo passaria a ser de sexta ordem, e quarta após a centragem.

APÊNDICE A

Seja o sistema em estudo

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}] \underline{x} \quad (\text{A.1})$$

Como a matriz $[\underline{A}]$ tem valores próprios imaginários puros, é possível através de uma transformação conveniente obter a matriz $[\underline{A}_m]$ na forma

$$[\underline{A}_m] = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & -\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

Para tanto, considera-se uma matriz transformação $[\underline{N}]$ tal que

$$\underline{x} = [\underline{N}] \underline{z}$$

Substituindo na equação (A.1) fica

$$\dot{\underline{z}} = [\underline{N}]^{-1} [\underline{A}] [\underline{N}] \underline{z}$$

$$\dot{\underline{z}} = [\underline{A}_m] \underline{z}$$

Sendo $\underline{h}^{1,2}$ e $\underline{h}^{3,4}$ as direções próprias da matriz $[\underline{A}]$, a matriz transformação $[\underline{N}]$ tem a seguinte formação :

$$[\underline{N}] = \left[\underline{R}_e(\underline{h}^1) \quad \underline{I}_m(\underline{h}^1) \quad \underline{R}_e(\underline{h}^3) \quad \underline{I}_m(\underline{h}^3) \right]$$

Para máquina com rotor liso as direções próprias são respectivamente

$$\underline{h}^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm j\omega \\ -\frac{\underline{v}}{x} \operatorname{sen} \delta_o \pm jK \frac{L_5}{J} i_{ro} (\omega^2 - \Omega^2) \\ -\frac{\omega^2 J}{K L_5 i_{ro}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{h}^{3,4} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm j \Omega \\ -\frac{v}{x} \operatorname{sen} \delta \\ -\frac{v}{x} \operatorname{cos} \delta \end{bmatrix}$$

Portanto

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \Omega \\ -\frac{v}{x} \operatorname{sen} \delta_0 & \frac{KL_5}{J} i_{r0} (\omega^2 - \Omega^2) & -\frac{v}{x} \operatorname{sen} \delta_0 & 0 \\ \frac{-\omega^2 J}{KL_5 i_{r0}} & 0 & -\frac{v}{x} \operatorname{cos} \delta_0 & 0 \end{bmatrix}$$

As novas variáveis são dadas pela transformação inversa, ou seja

$$\underline{z} = [\underline{N}]^{-1} \underline{x}$$

com

$$[\underline{N}]^{-1} = \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \begin{bmatrix} -\Omega^2 & 0 & 0 & -\frac{K^L_5}{J} i_{ro} \\ \frac{K^L_5}{J} i_{ro} \frac{v}{X} \text{sen} \delta_o & 0 & \frac{K^L_5}{J} i_{ro} & 0 \\ \omega^2 & 0 & 0 & \frac{K^L_5}{J} i_{ro} \\ \frac{K^L_5}{J} \frac{i_{ro}}{\Omega} \frac{v}{L} \text{sen} \delta_o & \frac{(\omega^2 - \Omega^2)}{\Omega} & -\frac{K^L_5}{J} i_{ro} \frac{\omega}{\Omega} & 0 \end{bmatrix}$$

Nota-se que a terceira das variáveis modificadas é dada por

$$\frac{\omega^2 \delta_\Delta}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{KL_5 i_{ro} i_{q\Delta}}{J(\omega^2 - \Omega^2)} \cong \delta_\Delta + \frac{\omega KL_5 i_{ro}}{J \omega^3} \cdot i_{q\Delta}$$

A contribuição de $i_{q\Delta}$ é extremamente pequena.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDERSON, P.M. & FOUAD, A.A. Power system control and stability. Rio de Janeiro, COPPE / UFRJ, C 1972. v. 1-2. ilust.
2. ANDRONOV, A.A. , VITT, A.A. & KHAIKIN, S.E. Theory of oscillators. Oxford, Pergonon 1977. 815 p. ilust. (International series of manographs in physics, v. 4)
3. BOGOLIOUBOV , N. & MITROPOLSKI, I. Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires. Paris, Gauthier - Villors, 1962. 518 p. ilust.
4. ELGERD O.I. Electric energy systems theory : An introduction. New York, McGraw-Hill, C 1971. 564 p. ilust. (McGraw-Hill electrical and electronic engineering series)
5. FITZGERALD , A.E., KINGSLEY, C. & KUSKO, A. Máquinas elétricas , São Paulo, McGraw-Hill do Brasil , 1975. 623 p. ilust.
6. GILLE, J.C. , PELEGRIN, M. & DECAULNE, P. Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis Paris, Dunod, 1960. 460 p. ilust.

7. KIMBARK, E.W. Power system stability : synchronous - machines New York, Dover, 1968, C 1956 v. 4. ilustr.

8. SLEMON, G.R. Magnetolectric devices transducers , transformers and machines. New York, John Wiley, 1966. 544 p. ilustr.