

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Engenharia de Sistemas

Métodos de Pontos Interiores  
Aplicados em Sistemas de Potência  
Modelados por Fluxo em Redes

**Aluno:** Anibal Tavares de Azevedo

**Orientador:** Secundino Soares Filho

**Co-orientador:** Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

**Banca Examinadora:**

Kátia Campos de Almeida - EEL/UFSC

Marcus Fabius Henriques de Carvalho - DGE/CENPRA

Christiano Lyra Filho - FEEC/UNICAMP

Paulo Augusto Valente Ferreira - FEEC/UNICAMP

Takaaki Ohishi - FEEC/UNICAMP

Tese de Doutorado submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos requisitos exigidos para a obtenção do título de DOUTOR em Engenharia Elétrica.

Campinas, Março de 2006  
SP-Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Az25m Azevedo, Anibal Tavares de  
Métodos de pontos interiores aplicados em sistemas de  
potência modelados por fluxo em redes / Anibal Tavares de  
Azevedo. – Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientadores: Secundino Soares Filho, Aurelio Ribeiro  
Leite de Oliveira.

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistema de energia elétrica. 2. Programação não-linear.  
3. Usinas hidrelétricas. 4. Energia elétrica - Transmissão -  
Corrente contínua. 5. Energia hidrelétrica. I. Soares Filho,  
Secundino. II. Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de. III.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Interior-point methods applied on power  
systems modeled by network flows  
Palavras-chave em Inglês: Interior-point methods, Power systems,  
Non-linear programming, Hydrothermal  
scheduling, Quadratic programming, DC  
optimal power flow, Network flow  
Área de concentração: Energia  
Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica  
Banca Examinadora: Kátia Campos de Almeida, Marcius Fabius  
Henriques de Carvalho, Christiano Lyra  
Filho, Paulo Augusto Valente Ferreira e  
Takaaki Ohishi  
Data da defesa: 08/03/2006

## Resumo

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo de otimização a usinas individualizadas e de um modelo de fluxo de potência ótimo CC visando contribuir para o planejamento e a programação da operação de sistemas hidrotérmicos, em particular do sistema elétrico brasileiro. Para tanto, foram desenvolvidos métodos de pontos interiores que exploram as particularidades dos problemas, em especial a estrutura de fluxo em redes, resultando em métodos robustos e eficientes. O desempenho computacional dos métodos é verificado em problemas testes reais de grande porte com o Sistema Interligado Nacional. Os métodos de pontos interiores obtiveram bom desempenho, convergindo rapidamente para os problemas testados.

## Abstract

The aim of this work is to develop an optimization model for individual hydro-plants and a model for DC optimal power flow for the hydro-thermal operational planning and programming, in particular for the brazilian electric power system. For this purpose interior-point methods that explore problems properties, in particular the network flow structure, has been developed resulting in robust and fast methods. The computational results has been extracted from real and big problems from National Interconnected System. The interior-point methods have shown good performance achieving fast convergence for the instances tested.

---

Dedico esta tese aos meus Pais, Carlos e Marília

---

*Este trabalho teve o suporte financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento  
Pessoal de Nível Superior - (CAPES).*

---

## Agradecimentos

Esta tese representa um longo caminho que não poderia ter sido percorrido se não fosse pela ajuda dos muitos amigos que encontrei.

A Deus e a Nossa Senhora por me guiar em todas as etapas de minha vida e nos momentos em que quase acreditei não ser possível concluir este trabalho.

Aos meus orientadores Aurelio e Secundino pela convivência, orientação e pelas idéias e sugestões que ajudaram a enriquecer os resultados e o texto desta tese.

Aos meus pais e à minha família que sempre me apoiou, não medindo esforços, em todos os passos da minha vida com amor e carinho incondicionais.

À Helena, Ricardo, Silvia, Diomar, Munemasa, Emília, Ana, Dora, Carlos, Tios e Tias, Primos e Primas por estarem sempre ao meu lado e pela alegria de estarmos em família.

À Regina por ter aprendido e vivenciado com você o sentido do amor, modificando minha maneira de pensar e ser.

Aos meus amigos do DENSIS, Amanda, Alana, André, Aline, Camila, Carolina, Chicão, Cíntia, Cláudio, Daniela, Danitiela, Daniel, Eduardo, Edilson, Eliane, Elias, Fábio, Fran, Gabriela, Gerardo, Joana João, José, Josi, Júlio, Leonardo, Luizão, Marcelo, Marcos, Mariella, Marta, Moacir, Olinto, Paulo, Rodrigão, Roger, Sacchi, Sara e Vinicius pelos cafés, confraternizações de final de ano e pela amizade. Aos meus amigos do COSE, Adriano, André, Arce, Erinaldo, Fred, Ivette, Leonardo, Luisa, Makoto, Manoel, Marcelo, Marcos, Marina, Mônica, Oderson, Ricardo, Sandra, Thais e Thyago pelas conversas, esportes e ajudas nos estudos de caso. Aos meus amigos do DT, Ceará, Edgar, Edilson, Fábio, Márcia, Rúbia, Tatiane pelos congressos e conversa amiga. Aos meus amigos do DSEE Alexandre e Lia pela atenção, ajuda e amizade. Aos amigos do Karatê.

Aos professores Kátia, Marcius, Christiano, Luiz Carlos, Paulo e Takaaki pelas contribuições e melhorias para esta tese.

Ao pessoal do ONS, Alberto, Cadu e Kazuo pelos dados da parte elétrica, a Carolina, Marcelo e Thyago pela ajuda com os dados da parte energética.

---

# Sumário

Resumo	iii
Abstract	iii
Agradecimentos	vi
Lista de Símbolos	1
<b>1 Introdução</b>	<b>9</b>
1.1 História e Consumo de Energia . . . . .	9
1.2 Reservas e Produção Energética . . . . .	16
<b>2 Cadeia de Coordenação Hidrotérmica</b>	<b>37</b>
2.1 Introdução . . . . .	37
2.2 Planejamento da Operação . . . . .	41
2.3 Programação da Operação . . . . .	42
2.4 Objetivos e Estrutura da Tese . . . . .	45
<b>3 Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas</b>	<b>47</b>
3.1 Construindo modelos por fluxo em redes . . . . .	47
3.2 Representação Matricial . . . . .	58
3.3 Função Objetivo . . . . .	67
<b>4 Métodos de Pontos Interiores para o Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas</b>	<b>79</b>
4.1 Introdução . . . . .	79
4.2 Métodos de Pontos Interiores . . . . .	81
4.2.1 MPI Tradicional . . . . .	84
4.2.2 Detalhes de Implementação . . . . .	88

---

4.3	Explorando a Estrutura Esparsa . . . . .	94
4.3.1	Resolvendo o MOUI com modelo $(x, u)$ . . . . .	99
4.3.2	Matrizes $A$ e $D$ do MOUI $(x, q, v)$ . . . . .	103
4.4	Resumo dos MPIS . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Resultados para o Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas</b>	<b>113</b>
5.1	Introdução . . . . .	113
5.2	Primeira fase de testes . . . . .	113
5.3	Segunda fase de testes . . . . .	134
<b>6</b>	<b>Modelo do Fluxo de Potência Ótimo Corrente Contínua</b>	<b>147</b>
6.1	Modelagem por Fluxos em Redes . . . . .	147
6.2	Modelo Matricial do Fluxo de Potência CC . . . . .	155
6.3	Consideração das perdas de transmissão . . . . .	159
<b>7</b>	<b>Método de Pontos Interiores para o Fluxo de Potência Ótimo CC</b>	<b>165</b>
7.1	Introdução . . . . .	165
7.2	Método de Pontos Interiores Primal-Dual . . . . .	166
7.3	Inicialização, Parâmetros e Critério de Convergência . . . . .	172
<b>8</b>	<b>Resultados para o Fluxo de Potência Ótimo CC</b>	<b>173</b>
8.1	Introdução . . . . .	173
8.2	Testes do FPO CC sem perdas . . . . .	175
8.3	Testes do FPO CC com perdas . . . . .	179
8.4	Redespacho minimizando perdas de transmissão . . . . .	181
<b>9</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>193</b>
9.1	Conclusões e Trabalhos Futuros . . . . .	193
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>197</b>
<b>A</b>	<b>Derivadas da Função Objetivo</b>	<b>209</b>
A.1	Derivadas primeiras para o modelo $(x, u)$ . . . . .	209
A.2	Derivadas segundas para o modelo $(x, u)$ . . . . .	215
A.3	Derivadas primeiras para o modelo $(x, q, v)$ . . . . .	223
A.4	Derivadas segundas para o modelo $(x, q, v)$ . . . . .	227

---

---

<b>B</b>	<b>Dedução da Inversa Rápida de Matriz Tridiagonal</b>	<b>239</b>
B.1	Introdução . . . . .	239
B.2	Inversa de matrizes particulares . . . . .	241
B.3	Cálculo da inversa de outra matriz tridiagonal . . . . .	266
B.4	Cálculo da inversa de uma matriz pentadiagonal . . . . .	276
<b>C</b>	<b>Métodos de Pontos Interiores para Estrutura Bloco Angular</b>	<b>279</b>
C.1	Aproveitamento da Estrutura Esparsa do Problema . . . . .	279
<b>D</b>	<b>Solução Detalhada do Sistema <math>AD^{-1}A^t</math></b>	<b>285</b>
D.1	Resolução de $AD^{-1}A^t$ para o modelo $(x, u)$ . . . . .	285
D.2	Resolução de $AD^{-1}A^t$ para o modelo $(x, q, v)$ . . . . .	292
<b>E</b>	<b>Dados do Parque Termelétrico Brasileiro</b>	<b>297</b>
E.1	Dados das usinas termelétricas brasileiras . . . . .	297
<b>F</b>	<b>Modelagem do Fluxo de Potência CC</b>	<b>301</b>
F.1	Obtendo o Fluxo de Potência CC . . . . .	301

---

# Lista de Figuras

1.1	Consumo médio mensal de alguns eletrodomésticos. . . . .	10
1.2	Visão noturna da Terra no dia 27 de Novembro de 2000 (Fonte [65]). . . . .	12
1.3	Energia comercial utilizada em economias emergentes (Fonte: [2]). . . . .	14
1.4	Composição percentual das fontes de energia primária usadas em 1998 (Fonte: [44]). . . . .	15
1.5	Composição percentual das fontes de energia primária usadas em 1998 (Fonte: [44]). . . . .	15
1.6	Reservas por combustível e países com maiores reservas (Fontes: [2, 31]). . . . .	17
1.7	Reservas provadas de petróleo em 1998 (bilhões de barris - Fonte: [32]). . . . .	19
1.8	Reservas provadas de gás natural em 1998 (trilhões de metros cúbicos - Fonte: [32]). . . . .	20
1.9	Reservas provadas de carvão em 1998 (trilhões de toneladas - Fonte: [32]). . . . .	21
1.10	Energia elétrica gerada por meios convencionais (queima de carvão ou petróleo) e por usina nuclear (Fonte: [44]). . . . .	23
1.11	Geração de energia elétrica em um reator nuclear que utiliza água pressurizada (PWR)(Fonte: [35]). . . . .	24
1.12	Potencial técnico de aproveitamento hidrelétrico no mundo em 1999 (Em TWh/ano - Fonte: [32]). . . . .	25
1.13	Bacias que compõem a Hydro-Quebec, Canadá. . . . .	27
1.14	Usinas da Manitoba-Hydro, Canadá. . . . .	28
1.15	Usinas da Tennessee Valey Authority, EUA. . . . .	29
1.16	Bacias hidrográficas do Brasil (Fonte: ANEEL). . . . .	30

---

1.17	Evolução da concentração das usinas hidrelétricas no Brasil (1950 e 2000 - Fonte: [32]). . . . .	32
1.18	Evolução do consumo final de energia por fonte (Fonte: Balanço energético nacional - Sumário Executivo, 2005). . . . .	33
1.19	Evolução da capacidade instalada de geração em MW (Fonte: Balanço energético nacional - Sumário Executivo, 2005). . . . .	34
1.20	Detalhamento da evolução da capacidade instalada de geração em MW (Fonte: Balanço energético nacional - Sumário Executivo, 2005). . . . .	35
1.21	Sistema Interligado Nacional (SIN - Fonte: ONS). . . . .	36
1.22	Comparação do SIN com a Europa (Fonte: ONS). . . . .	36
2.1	Cadeia de coordenação hidrotérmica (Fonte: [28]). . . . .	40
2.2	Cadeia de modelos para solução do problema de planejamento da operação (Fonte: [28]). . . . .	42
2.3	Cadeia de modelos para solução do problema de programação da operação (Fonte: [28]). . . . .	44
3.1	Geração de energia em uma usina hidrelétrica . . . . .	48
3.2	Exemplos de turbinas hidráulicas (Francis, Kaplan e Pelton, respectivamente). . . . .	49
3.3	Elementos de uma usina hidrelétrica . . . . .	49
3.4	Variáveis associadas aos elementos de uma usina hidrelétrica. . . . .	50
3.5	Vazões naturais de um estações hidrometeorológicas. . . . .	51
3.6	Cascata com usinas de Reservatório e a Fio D'água. . . . .	52
3.7	Detalhamentos dos rios e usinas da bacia do rio Paraná (Fonte: ANA). . . . .	54
3.8	Usinas hidrelétricas Despachadas pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (Fonte: ONS). . . . .	55
3.9	Representação do balanço de água para uma usina considerando vazão defluente $u_{i,t}$ , armazenagem $x_{i,t}$ e vazão incremental $y_{i,t}$ . . . . .	56
3.10	Representação do balanço de água para uma usina considerando vertimento $v_{i,t}$ , turbinagem $q_{i,t}$ , armazenagem $x_{i,t}$ e vazão incremental $y_{i,t}$ . . . . .	56
3.11	Etapas da modelagem matemática para quatro usinas hidrelétricas em cascata e três períodos de tempo. . . . .	58

---

---

3.12	Representação da rede exemplo considerando volume $x_{i,t}$ e vazão defluente $u_{i,t}$ . . . . .	59
3.13	Representação da rede exemplo considerando volume $x_{i,t}$ , vazão turbinada $q_{i,t}$ e vertida $v_{i,t}$ . . . . .	63
3.14	Contabilizando a cota de montante usando volume do final de um intervalo. . . . .	68
3.15	Contabilizando a cota de montante usando volume médio de um intervalo. . . . .	69
3.16	Afogamento entre usinas do rio Iguaçu. . . . .	70
3.17	Curva da função de custo de operação para o parque termelétrico brasileiro. . . . .	73
3.18	Função $q_{i,t} = \text{Min}\{u_{i,t}, \bar{q}_{i,t}\}$ e seu ponto de quina. . . . .	76
3.19	Comparação entre as abordagens dos modelos $(x, u)$ e $(x, u)m$ . . . . .	77
4.1	MPI primal dual para estrutura esparsa $A$ . . . . .	89
4.2	Identificação das operações matriciais de um MPI. . . . .	95
4.3	Descrição dos componentes de um método de pontos interiores. . . . .	96
4.4	Classes para matriz $A$ bloco primal. . . . .	97
4.5	Operação $y = Ax$ para matriz $A$ constituída por blocos de matrizes genéricas. . . . .	98
5.1	Trajetórias dos volumes na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1980 até abril de 1990, usando modelos $(x, u)m$ e $(x, q, v)$ . . . . .	119
5.2	Trajetórias das defluências, defluência mínima, turbinagem máxima e afluência na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1980 até abril de 1990, usando modelos $(x, u)m$ e $(x, q, v)$ . . . . .	120
5.3	Trajetórias das gerações hidrelétricas na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1980 até abril de 1990, usando modelos $(x, u)m$ e $(x, q, v)$ . . . . .	121
5.4	Trajetória de volume na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1982 até abril de 1983, usando modelos $(x, u)m$ e $(x, q, v)$ . . . . .	123
5.5	Trajetória de defluência, defluência mínima, turbinagem máxima e afluência na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1982 até abril de 1983, usando modelos $(x, u)m$ e $(x, q, v)$ . . . . .	124

---

---

5.6	Trajетórias das gerações hidrelétricas na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1982 até abril de 1983, usando modelos $(x, u)m$ e $(x, q, v)$ . . . . .	125
5.7	Trajетória de volume na operação de Furnas para o Caso 5, usando modelos $(x, u)m$ e $(x, q, v)$ . . . . .	130
5.8	Trajетória de defluência, defluência mínima, turbinagem máxima e afluência na operação de Furnas para o Caso 5, usando modelos $(x, u)m$ e $(x, q, v)$ . . . . .	131
5.9	Usinas hidrelétricas que compõem o Sistema Interligado Nacional (primeira parte). . . . .	136
5.10	Usinas hidrelétricas que compõem o Sistema Interligado Nacional (segunda parte). . . . .	137
5.11	Trajетórias de geração hidráulica fornecidas pelo MPI $(x, q, v)$ e o HydroMax no sistema de 82 usinas e afluência de 80% da MLT. . . . .	139
5.12	Trajетórias de geração hidráulica para a usina de Furnas fornecidas pelo MPI $(x, q, v)$ e pelo HydroMax no sistema de 82 usinas e afluência de 80% da MLT. . . . .	140
5.13	Trajетórias de volume para a usina de Furnas fornecidas pelo MPI $(x, q, v)$ e o HydroMax no sistema de 82 usinas e afluência de 80% da MLT. . . . .	141
5.14	Trajетórias de defluência, defluência mínima, turbinagem máxima e afluência para a usina de Furnas fornecidas pelo MPI $(x, q, v)$ e o HydroMax no sistema de 82 usinas e afluência de 80% da MLT. . . . .	142
6.1	Representação dos elementos de uma rede elétrica. . . . .	148
6.2	Representação da rede elétrica do Exemplo 1. . . . .	149
6.3	Representação em grafo da rede elétrica do Exemplo 1. . . . .	149
6.4	Representação da lei das malhas na rede do Exemplo 1. . . . .	151
6.5	Representação da rede elétrica do Exemplo 2. . . . .	153
6.6	Representação esquemática da consideração da Perda 1 ou 2. . . . .	161
6.7	Representação esquemática da consideração da Perda 3 ou 4. . . . .	164
8.1	Sistema Interligado Nacional - SIN (Fonte ONS). . . . .	174
8.2	Configurações do SIN para cada meia-hora. . . . .	174

---

8.3	Barras cuja diferença entre as injeções líquidas de potência ativa fornecidas pelo despacho original e pelo redespacho são maiores ou iguais que 1000 MW para carga leve. . . . .	182
8.4	Localização das usinas de Itaipu e Angra 2 no SIN. . . . .	183
8.5	Distribuição da injeção líquida de potência ativa, para áreas com 800 MW de potência ativa ou mais, para o despacho original ou para o redespacho no caso de carga leve. . . . .	184
8.6	Barras cuja diferença entre as injeções líquidas de potência ativa fornecidas despacho original e pelo redespacho que são maiores ou iguais que 1000 MW para carga média. . . . .	186
8.7	Distribuição da injeção líquida de potência ativa maior ou igual a 800 MW, por área, para despacho original e para o redespacho no caso de carga média. . . . .	187
8.8	Barras cuja diferença entre as injeções líquidas de potência ativa fornecidas despacho original e pelo redespacho são maiores ou iguais que 1000 MW para carga pesada. . . . .	189
8.9	Distribuição da injeção líquida de potência ativa maiores ou iguais que 800 MW, por área, para o despacho original e para o redespacho no caso de carga pesada. . . . .	190
A.1	Cálculo das derivadas de $\omega_1$ e $\omega_2$ . . . . .	216
A.2	Cálculo das derivadas de $\omega_1$ e $\omega_2$ . . . . .	217
A.3	Cálculo das derivadas de $\omega_3$ e $\omega_4$ . . . . .	218
A.4	Cálculo das derivadas de $\omega_1$ e $\omega_2$ . . . . .	219
A.5	Resumo do cálculo de $\frac{\partial f}{\partial q_{i,t}}$ . . . . .	224
A.6	Resumo do cálculo de $\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}}$ . . . . .	226
A.7	Resumo do cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}}$ , termo $\frac{\partial f}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$ . . . . .	227
A.8	Resumo do cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}}$ , termo $\frac{\partial f}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}}$ . . . . .	228
A.9	Cálculo das derivadas de $\omega_1$ e $\omega_2$ para $\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2}$ . . . . .	229
A.10	Cálculo das derivadas de $\omega_1$ e $\omega_2$ para $\frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}^2}$ . . . . .	230
A.11	Cálculo das derivadas de $\omega_1$ e $\omega_2$ para $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}}$ . . . . .	231
A.12	Cálculo das derivadas de $\omega_1$ e $\omega_2$ para $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial v_{i,t}}$ . . . . .	232
B.1	Representação do cálculo de $AD^{-1}A^t$ . . . . .	240
C.1	Representação do cálculo de $(L_i^{-1}B_i^t)^t(L_i^{-1}B_i^t)$ . . . . .	282

---

# Lista de Tabelas

1.1	Unidades de trabalho, energia e potência. . . . .	11
1.2	Consumo de energia primária em 1998 (Fonte: [44]). . . . .	13
1.3	Total mundial de reservas provadas para as fontes de energia não-renováveis (Fontes: [31, 2]). . . . .	18
1.4	Capacidade de geração hidrelétrica em operação (Fonte: [31]).	26
1.5	Número de usinas para cada sistema considerado. . . . .	26
3.1	Custos do déficit de acordo com o nível de racionamento(fonte: Plano Decenal 2001-2010). . . . .	53
3.2	Algumas usinas afogadas no sistema elétrico brasileiro. . . . .	69
5.1	Tempos computacionais e custo da solução final em segundos do MPI e do Fmincon. . . . .	116
5.2	Tempos computacionais e valores da solução final obtida em segundos para o MPI usando Hessiana Tridiagonal. . . . .	127
5.3	Tempos computacionais e valores da solução final em segundos para o MPI. . . . .	129
5.4	Características dos problemas resolvidos para cada caso. . . . .	132
5.5	Número de iterações de MPI preditor-corretor para cada inicialização. . . . .	133
5.6	Número de iterações de MPI primal-dual para cada inicialização.	133
5.7	Desempenho dos métodos para 82 usinas e 80% da MLT. . . . .	138
5.8	Desempenho dos métodos em MW médio ao longo de 12 meses com afluência de 80% da MLT. . . . .	143
5.9	Desempenho do MPI com parâmetros $P_2$ em problemas do MOUI de grande porte. . . . .	144
5.10	Artigos e maiores problemas MOUI resolvidos. . . . .	144

---

6.1	Injeção líquida de potência ativa para cada barra da rede do Exemplo 2. . . . .	154
6.2	Valor da reatância $x_{km}$ para cada barra da rede do Exemplo 2.	154
6.3	Valor dos fluxos obtidos para a rede da Figura 6.5, usando transformador defasador. . . . .	155
6.4	Valor dos fluxos obtidos para a rede da Figura 6.5, sem considerar transformador defasador. . . . .	155
6.5	Combinações possíveis de considerações das perdas. . . . .	160
8.1	Resumo das características das três configurações. . . . .	175
8.2	Resumo das diferenças de injeção líquida de potência ativa entre o FPO CC e o Anarede para o patamar de Carga leve. . . . .	176
8.3	Comparação entre a solução do Anarede e do FPO CC em nove barras. . . . .	177
8.4	Resumo das diferenças de injeção líquida de potência ativa e dos fluxos de potência ativa entre o FPO CC e o Anarede para carga leve, média e pesada, sem considerar perdas. . . . .	178
8.5	Resumo das diferenças de injeção líquida de potência ativa e dos fluxos de potência ativa entre o FPO CC e o Anarede para carga leve, média e pesada, considerando perdas. . . . .	180
8.6	Resumo das perdas das 3 configurações do SIN. . . . .	181
8.7	Resultado do redespacho para o caso de carga leve. . . . .	181
8.8	Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.3 para carga leve. . . . .	182
8.9	Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.5 para carga leve. . . . .	185
8.10	Resultado do redespacho para o caso de carga média. . . . .	185
8.11	Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.6 para carga média. . . . .	186
8.12	Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.7 para carga média. . . . .	188
8.13	Resultado do redespacho para o caso de carga pesada. . . . .	188
8.14	Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.8 para carga pesada. . . . .	189
8.15	Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.9 para carga pesada. . . . .	191
8.16	Resumo dos resultados obtidos com o redespacho de potência que minimiza as perdas de transmissão realizado pelo FPO CC.	191

---

---

A.1	Algoritmo para cálculo da Hessiana da função objetivo do MOUI para o modelo $(x, u)$ . . . . .	222
B.1	Algoritmo para multiplicação entre duas matrizes. . . . .	240
B.2	Algoritmo para obtenção de $AD^{-1}A^t$ . . . . .	241
B.3	Algoritmo para obtenção rápida de $D^{-1}$ . . . . .	257
B.4	Algoritmo para obtenção rápida de $D^{-1}$ . . . . .	265
E.1	Capacidade e Custo de geração para usinas termelétricas brasileiras no ano de 2005. . . . .	299

---

# Lista de Símbolos

A seguir são descritos os símbolos e a terminologia utilizada nesta tese com o objetivo de facilitar a leitura e a compreensão dos conceitos, deduções e métodos utilizados.

Primeiramente segue a lista de símbolos utilizados pelos métodos de pontos interiores.

$\mathfrak{R}^n$	- Espaço real de dimensão $n$ ;
$\mathfrak{R}^{m \times n}$	- Conjunto das matrizes reais de dimensões $m \times n$ ;
$\ \cdot\ , \ \cdot\ _2$	- Norma euclidiana; Para $u \in \mathfrak{R}^n$ , $\ u\  = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ . Para uma matriz $M$ , $\ M\  = \max_{\ u\ =1} \ Mu\ $ ;
Direção afim-escala	- É a direção de Newton pura, obtida quando $\sigma = 0$ ;
Direção de centragem	- É a direção obtida quando $\sigma = 1$ ;
$\alpha, \beta$	- São pesos atribuídos a geração e transmissão, respectivamente;
$\alpha_p^k, \alpha_d^k$	- Tamanho do passo para variáveis primais e duais, respectivamente;
$\gamma$	- Corresponde ao valor do GAP;
$\gamma/n_p$	- Valor do GAP médio, sendo que $n_p$ é o número de pares complementares;
$\sigma$	- Parâmetro de centragem utilizado no cálculo do passo. Seu valor é restringido ao intervalo $[0, 1]$ ;
$\mu$	- Parâmetro associado à perturbação e está associada aos valores dos parâmetros $\gamma$ e $\sigma$ ;
$\varepsilon$	- Valor da tolerância adotada como critério de parada para os métodos de pontos interiores;

---

$(dx, ds, dy, dz, dw)$	- Passo genérico do primal-dual;
$e$	- $(1, 1, \dots, 1)^T$
$k$	- (superescrito ou subescrito) Contador de iterações, como a sequência, $k = 0, 1, 2, \dots$ ;
$r_d$	- Resíduo Dual, definido como $\nabla(f) - A^t y + w - z$ ;
$r_f$	- Resíduo Primal, definido como $f^{max} - f - s_f$ ;
$r_g$	- Resíduo Dual, definido como $c_p + y_p - z_p + w_p + Hp$ ;
$r_i$	- Resíduo Dual, definido como $l_i + p - Af$ ;
$r_p$	- Resíduo Primal, definido como $b - Ax$ ou como $p^{max} - p - s_p$ ;
$r_a$	- Resíduo Primal, definido como $\bar{x} - x - s$ ;
$r_v$	- Resíduo Primal, definido como $l_v - Xf$ ;
$r_y$	- Resíduo Primal, definido como $c_f - B^t y - z_f + w_f + Rf$ ;
$r_k$	- Resíduo auxiliar;
$s$	- $\mathfrak{R}^n$ - Vetor das variáveis de folga primais;
$x$	- $\mathfrak{R}^n$ - Vetor das variáveis primais;
$t$	- $\mathfrak{R}^n$ - Vetor das variáveis de folga primais;
$(x^k, t^k, y^k, z^k, w^k)$	- Iteração genérica do método de pontos interiores primal-dual;
$w$	- $\mathfrak{R}^n$ - Vetor das variáveis duais;
$y$	- $\mathfrak{R}^m$ - Vetor das variáveis duais;
$z$	- $\mathfrak{R}^n$ - Vetor das variáveis de folga duais;
$A$	- $\mathfrak{R}^{m \times n}$ - Matriz das restrições lineares do problema ou matriz de incidência nó-arco;
$F$	- Matriz diagonal construída a partir do vetor $f$ : $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ;
$H$	- Matriz diagonal dos coeficientes do termo quadrático de geração

---

---

	$H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_m)$ ou Hessiana de $f$ ;
$I$	- Matriz identidade de dimensões apropriadas;
$P$	- Matriz diagonal construída a partir do vetor $p$ : $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ ;
$R$	- Matriz diagonal associada às resistências das linhas de transmissão: $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ;
$S, S^k$	- $\Re^{n \times n}$ Matriz diagonal construída a partir do vetor $s$ ou $s^k$ : $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ;
$T, T^k$	- $\Re^{n \times n}$ Matriz diagonal construída a partir do vetor $t$ ou $t^k$ : $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ;
$X$	- $\Re^{n \times n}$ Matriz de reatâncias do problema de fluxo de potência;
$X, X^k$	- $\Re^{n \times n}$ Matriz diagonal construída a partir do vetor $x$ ou $x^k$ : $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
$W, W^k$	- $\Re^{n \times n}$ Matriz diagonal construída a partir do vetor $w$ ou $w^k$ : $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ;
$Z, Z^k$	- $\Re^{n \times n}$ Matriz diagonal construída a partir do vetor $z$ ou $z^k$ : $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ;

Uma outra lista importante de símbolos é aquela associada ao Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas.

$MOUI$	- Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas.
$x$	- Volume do reservatório ( $hm^3$ );
$u$	- Vazão descarregada pela usina (defluência) ( $m^3/s$ );
$q$	- Vazão turbinada pela casa de máquinas (engolimento) ( $m^3/s$ );
$v$	- Vazão descarregada pelo vertedor (vertimento) ( $m^3/s$ );
$\phi(x)$	- Cota de montante do reservatório (função do volume) ( $m$ );

---

---

$\theta(u)$	- Cota de jusante do canal de fuga (função da defluência) ( $m$ );
$h_b = \phi(x) - \theta(u)$	- Altura de queda bruta ( $m$ );
$y$	- Vazão incremental afluyente à usina ( $m^3/s$ );
$y_i$	- Vazão incremental da usina $i$ ( $m^3/s$ );
$y_{n,i}$	- Vazão natural da usina $i$ ( $m^3/s$ );
$\Omega_i$	- Conjunto das usinas imediatamente a montante da usina $i$ ;
$x_{i,t}$	- Volume do reservatório da usina $i$ ao final do intervalo $t$ ( $hm^3$ );
$\underline{x}_{i,t}, \bar{x}_{i,t}$	- Limites mínimo e máximo de volume para a usina $i$ no final do intervalo $t$ ( $hm^3$ ), respectivamente;
$u_{i,t}$	- Vazão defluente da usina $i$ durante o intervalo $t$ ( $m^3/s$ );
$\underline{u}_{i,t}, \bar{u}_{i,t}$	- Limites mínimo e máximo de defluência da usina $i$ no tempo $t$ ( $m^3/s$ ), respectivamente;
$q_{i,t}$	- Vazão turbinada da usina $i$ durante o intervalo $t$ ( $m^3/s$ );
$\underline{q}_{i,t}, \bar{q}_{i,t}$	- Limites mínimo e máximo de vazão turbinada da usina $i$ no tempo $t$ ( $m^3/s$ ), respectivamente;
$v_{i,t}$	- Vazão vertida pela usina $i$ durante o intervalo $t$ ( $m^3/s$ );
$y_{i,t}$	- Vazão incremental afluyente à usina $i$ durante o intervalo $i$ ;
$\Delta t_t$	- Tamanho do intervalo $t$ (em segundos) dividido por $10^6$ ;
$A$	- Matriz das restrições de balanço de água do MOUI ou a matriz de incidência nó-ramo associada aos arcos de volume $x$ ;
$S$	- Matriz de incidência nó-ramo associada aos arcos de defluência $u$ ou aos arcos de turbinagem $q$ e vertimento $v$ ;
$\tilde{A}$	- Matriz das restrições lineares de conservação

---

---

	de água do MOUI, tal que $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}$ ;
$A_i$ e $S_i$	- Estrutura esparsa das submatrizes $A$ e $S$ do MOUI;
$C_i$	- Submatriz diagonal de $A$ ;
$M$	- Submatriz de $S$ ;
$I$	- Submatriz identidade de dimensões apropriadas;
$R$	- Submatriz de $A$ ;
$\phi_i(x_{i,t})$	- polinômio do quarto grau que representa a relação entre a cota de montante e o volume do reservatório $x_{i,t}$ da usina $i$ ;
$\theta_i(u_{i,t})$	- Polinômio do quarto grau que a partir da defluência $u_{i,t}$ fornece o valor da cota do canal de fuga (ou de jusante) da usina $i$ ;
$h_{bi,t}$	- Altura de queda bruta ( $m$ ) da usina $i$ no intervalo $t$ , dada por $h_{bi,t} = \phi_i(x_{i,t}) - \theta_i(u_{i,t})$ ;
$pc_{i,t}$	- Perda de carga hidráulica da usina $i$ no intervalo $t$ ;
$h_{li,t}$	- Altura de queda líquida ( $m$ ) da usina $i$ no intervalo $t$ , dada por $h_{li,t} = h_{bi,t} - pc_{i,t}$ ;
$p_{i,t}$	- Potência média produzida pela usina $i$ durante o intervalo de tempo $t$ (MW);
$k_i$	- Constante de produtividade específica da usina $i$ ( $\frac{MW}{(m^3/s)m}$ );
$N_{c,i}$	- Número de conjuntos de unidades geradoras da usina $i$ ;
$N_{j,i}$	- Número de unidades geradoras do conjunto $j$ da usina $i$ ;
$q_{efj,i,t}$	- Vazão turbinada de cada conjunto gerador $j$ que submetida à queda efetiva produz a potência efetiva $p_{efj,i,t}$ ;
$h_{efj,i,t}$	- Menor queda líquida sob a qual o conjunto $j$ , em operação, desenvolve a sua potência efetiva $p_{efj,i,t}$ ;
$p_{efj,i,t}$	- Máxima potência ativa possível de ser gerada em regime permanente, para toda unidade geradora pertencente ao conjunto $j$ ;
$\alpha$	- Expoente que interfere na turbinagem máxima $\bar{q}_{i,t}$ da usina $i$ no intervalo $t$ ;
$D_t$	- Mercado de energia elétrica no intervalo $t$

---

---

	em MW médio;
$G_t$	- Complementação termelétrica no período $t$ em MW médio;
$\lambda_t$	- Coeficiente de valor presente para o intervalo $t$ ;
$T$	- Número de intervalos de tempo;
$I$	- Número de usinas hidrelétricas do sistema;
$\Psi$	- Função de custo resultante do despacho termelétrico ( $\frac{R\$}{MW}$ );

Uma última lista importante de símbolos é aquela associada ao FPO CC.

$FPO\ CC$	- Abreviação de Fluxo de Potência Ótimo Corrente Contínua. Seu significado compreende tanto o modelo matemático como o método de solução associado a otimização do Fluxo de Potência Ótimo CC;
$A$	- Matriz de incidência nó-arco;
$f$	- Vetor de fluxo de potência em cada ramo;
$p$	- Vetor de geração de potência ativa em cada barra;
$d$	- Vetor de demanda por potência ativa em cada barra de carga;
$X$	- Matriz de laços;
$p_{min}$ e $p_{max}$	- Vetores com os valores de mínimo e máximo de $p$ , respectivamente;
$f_{min}$ e $f_{max}$	- Vetores com os valores mínimo e máximo de $f$ , respectivamente;
$f_1(f)$	- Função que representa a perda de transmissão;
$R$	- Matriz diagonal dos valores das resistências dos ramos;
$f_2(p)$	- Função que representa o custo de geração;
$H$	- Matriz diagonal dos coeficientes quadráticos;
$c$	- Vetor de coeficientes lineares;
$\varphi$	- Vetor tal que o componente $\varphi_i$ é obtido somando os valores das defasagens dos ramos pertencentes ao $i$ -ésimo laço da rede, observando o sentido em que os ramos do laço são percorridos;
$P_k$	- Injeção líquida de potência ativa na barra $k$ ;

---

---

$Q_k$	- Injeção líquida de potência reativa na barra $k$ ;
$V_k$	- Magnitude de tensão na barra $k$ ;
$\theta_k$	- Ângulo de tensão na barra $k$ ;
$\theta_{km}$	- Diferença angular entre as barras $k$ e $m$ ( $\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ );
$\varphi_{km}$	- Ângulo de defasagem entre as barras $k$ e $m$ ;
$\Omega_k$	- Conjunto de todas as barras $m$ adjacentes à barra $k$ , incluindo a própria barra $k$ ;
$G_{km}$ e $B_{km}$	- Correspondem aos elementos das matrizes de condutância e de susceptância de barra associados ao ramo $k - m$ , respectivamente;
$p_k^*$	- Potência ativa especificada na barra $k$ ;
$P_k$	- Injeção líquida de potência ativa;
$Q_k$	- Injeção líquida de potência reativa;
$P_{km}$	- Fluxo de potência ativa do ramo que conecta as barras $k$ e $m$ ;
$Q_{km}$	- Fluxo de potência reativa do ramo que conecta as barras $k$ e $m$ ;
$a_{km}$	- Valor do tap do ramo que conecta as barras $k$ e $m$ ;
$g_{km}$	- Condutância do ramo que conecta as barras $k$ e $m$ ;
$b_{km}$	- Susceptância do ramo que conecta as barras $k$ e $m$ ;
$b_{km}^{sh}$	- Susceptância do shunt que conecta as barras $k$ e $m$ ;
$x_{km}$	- Reatância do ramo $k - m$ ;
$X_d$	- Matriz diagonal cujos elementos são as reatâncias $x_{km}$ dos ramos;
$P$	- Vetor de injeção líquida de potência para cada barra;
$P^c$	- Vetor que contabiliza as perdas do fluxo de potência como injeção líquida de potência nas barras;
$\theta$	- Vetor de ângulo de fase para cada barra;
$B$	- Matriz de susceptância;
$x_{km}$	- Reatância do ramo que liga a barra $k$ à barra $m$ ; ( $b_{km} = \frac{1}{x_{km}}$ );
$\varepsilon$	- Tolerância estabelecida, que no caso do POCP, é igual à $10^{-8}$ ;
$r_{km}$	- Valor da resistência em série, em p.u., do ramo $k - m$ ;
$p_{km}$	- Fluxo de potência ativa, em p.u., no ramo $k - m$ ;
$g_{km}$	- Condutância do ramo $k - m$ ;

---

- $a_{km}$  - Fator que representa a perda de potência do fluxo no ramo  $k - m$ ;
- $P_{km}^{perda}$  - Carga incremental que representa as perdas do fluxo no ramo  $k - m$ ;
- $P_m$  - Potência que chega no final da linha de transmissão  $k - m$ ;
-

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 História e Consumo de Energia

A energia média necessária para um ser humano adulto permanecer vivo é aproximadamente mil kcal por dia (um Kcal = mil cal). Para um adulto engajado em atividades normais, ela é de aproximadamente duas mil kcal por dia. Para um homem que realiza um trabalho manual pesado, são necessárias quatro mil kcal por dia.

Desde o *homem primitivo*, há um milhão de anos atrás, até o *homem tecnológico* de hoje, podem ser destacados seis estágios no desenvolvimento humano de acordo com o padrão do consumo diário de energia *per capita* [44]:

- O *homem primitivo* (Leste da África, aproximadamente um milhão de anos atrás) sem o uso do fogo dispunha apenas da energia dos alimentos que ele ingeria (duas mil kcal/dia).
- O *homem caçador* (Europa, aproximadamente um milhão de anos atrás) dispunha de mais alimentos e também queimava madeira para obter calor e para cozinhar.
- O *homem agrícola primitivo* (Mesopotâmia em 5000 a.c.) utilizava a energia de animais de tração.
- O *homem agrícola avançado* (Noroeste da Europa, em 1400 d.c.) usava carvão para aquecimento, a força da água, do vento e o transporte animal.



Figura 1.1: Consumo médio mensal de alguns eletrodomésticos.

- O *homem industrial* (na Inglaterra, em 1875) dispunha da máquina a vapor.
- O *homem tecnológico* (nos EUA, em 1970) consumia 230 mil kcal/dia.

De um consumo de energia muito baixo (duas mil kcal por dia), que caracterizava o homem primitivo, o consumo de energia cresceu, em um milhão de anos, para 230 mil kcal por dia, isto é, um aumento por um fator maior que 100. O número de 230 mil kcal é obtido contabilizando as atividades de transporte, indústria e agricultura, moradia e comércio, e alimentação.

Neste sentido, cabe uma breve ilustração do consumo médio mensal de energia elétrica de alguns eletrodomésticos como fornecido na Figura 1.1.

A partir da Tabela 1.1, é possível verificar que o consumo de 117 quilowatt-hora dos aparelhos da Figura 1.1 equivale à cerca de 100 mil kcal.

Uma visão geral do consumo mundial da energia de origem elétrica, pelo

---

1 joule (J)	= $10^7$ ergs
1 watt (W)	= $1J/s$
1 HP	= $746W$
1 cal	= $4,18J$
1 quilowatt-hora	= $3,6 \times 10^{13} \text{ergs} = 3600kJ$ = $860kcal = 8,6 \times 10^{-5} TEP$
1 TEP (tonelada equivalente de petróleo)	= $10^7 kcal = 11630kwh$
1 BTU - British Thermal Unit (unidade térmica britânica)	= $252cal$

---

Tabela 1.1: Unidades de trabalho, energia e potência.

menos no que se refere a sua utilização para iluminação, pode ser obtida com a Figura 1.2. Quanto mais clara a cor no mapa, maior o grau de intensidade luminosa.



Figura 1.2: Visão noturna da Terra no dia 27 de Novembro de 2000 (Fonte [65]).

	Consumo de Energia( $10^9$ TEP)	População ( $10^9$ )	Consumo de energia <i>per capita</i> (TEP)
Países em Desenvolvimento	3,86	4,56	0,85
Países industrializados	6,70	1,34	5,00
Mundo	10,56	5,90	1,79

Tabela 1.2: Consumo de energia primária em 1998 (Fonte: [44]).

Com a Figura 1.2 é possível determinar que o consumo de energia elétrica, pelo menos com uso na iluminação, não é uniforme, sendo especialmente maior para os EUA, Europa e Japão.

Essa diferença na iluminação pode ser numericamente avaliada através da energia primária consumida.

A diferença entre a energia primária consumida em valores absolutos e valores *per capita* nos países desenvolvidos e nos países em desenvolvimento é melhor visualizada com a Tabela 1.2.

A Tabela 1.2 destaca uma diferença de mais de dez vezes entre o consumo de energia *per capita* dos países industrializados, onde vive 23% da população e 63,5% da energia primária é consumida, em contraste com os países em desenvolvimento, onde vive cerca de 77% da população mundial.

As fontes não comerciais, como lenha, carvão vegetal, bagaço e resíduos agrícolas estão incluídas no consumo *per capita* da Tabela 1.2.

Mesmo o consumo de energia comercial entre os países em desenvolvimento não é uniforme, como mostrado na Figura 1.3.

A composição percentual das fontes de energia primária usadas em países industrializados e em países em desenvolvimento é fornecida nas Figuras 1.4 e 1.5, respectivamente.

Considerando que a energia primária cuja fonte é biomassa ou hidrelétrica é renovável, então, de acordo com as Figuras 1.4 e 1.5, os países desenvolvidos possuem 10% e os em desenvolvimento 29% de energia renovável.

A fonte de energia primária utilizada em cada país está relacionada ao seu potencial energético. Neste sentido, a próxima seção irá fornecer um panorama do potencial e da utilização das fontes primárias para o mundo e o Brasil.

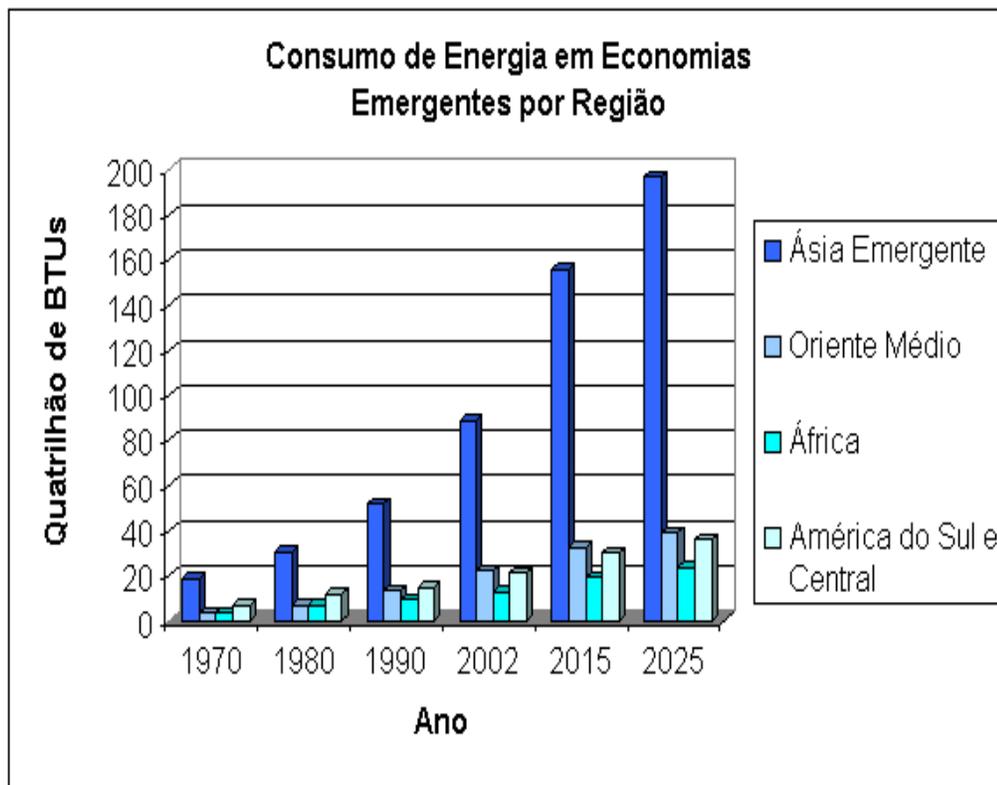


Figura 1.3: Energia comercial utilizada em economias emergentes (Fonte: [2]).

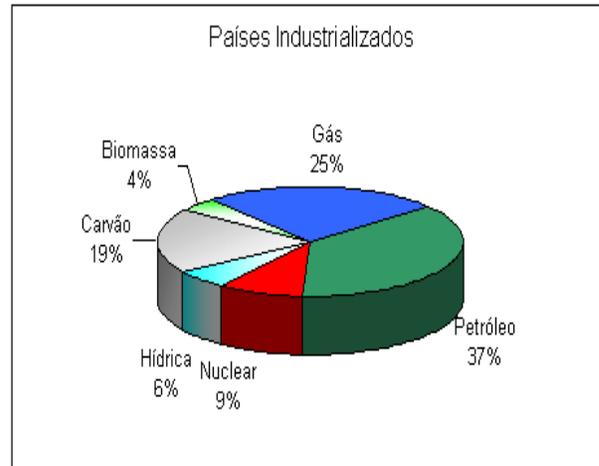


Figura 1.4: Composição percentual das fontes de energia primária usadas em 1998 (Fonte: [44]).

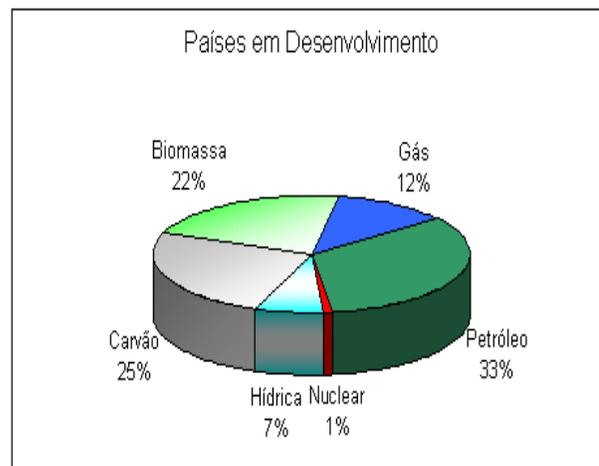


Figura 1.5: Composição percentual das fontes de energia primária usadas em 1998 (Fonte: [44]).

---

## 1.2 Reservas e Produção Energética

Quatro fontes distintas de energia podem ser utilizadas pelo homem:

- A energia radiante emitida pelo Sol.
- A energia das marés, proveniente da energia gravitacional do sistema Lua-Terra-Sol.
- A energia geotérmica que se origina do interior da Terra.
- A energia nuclear.

A quase totalidade da energia contida nestas fontes é indisponível, seja por se dissipar ou por ser inacessível. A quantidade estimada que de alguma forma está ao alcance do homem para utilização é denominada de *recursos energéticos*. Os recursos identificados e medidos são chamados de *reservas energéticas*. As reservas, portanto, aumentam em função do grau de certeza e de viabilidade de recuperação econômica dos recursos estimados.

As fontes de energia podem ser classificadas de acordo com o tipo de reserva energética que utilizam. As fontes de energia não-renováveis utilizam os seguintes recursos:

- Carvão
- Petróleo
- Gás
- Urânio

A Figura 1.6 apresenta as reservas energéticas de combustíveis fósseis e urânio com destaque para os países com as maiores reservas <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Os dados das reservas para os combustíveis fósseis são de 2005, sendo que a descoberta de grande reserva de petróleo no Canadá ocorreu em 2003. Os dados dos combustíveis fósseis foram obtidos em [2]. As reservas de urânio consideradas são tais que podem ser obtidas com um custo máximo de até US\$ 130,00/kg. Os dados sobre urânio são de 1999 e foram obtidos em [31].

---

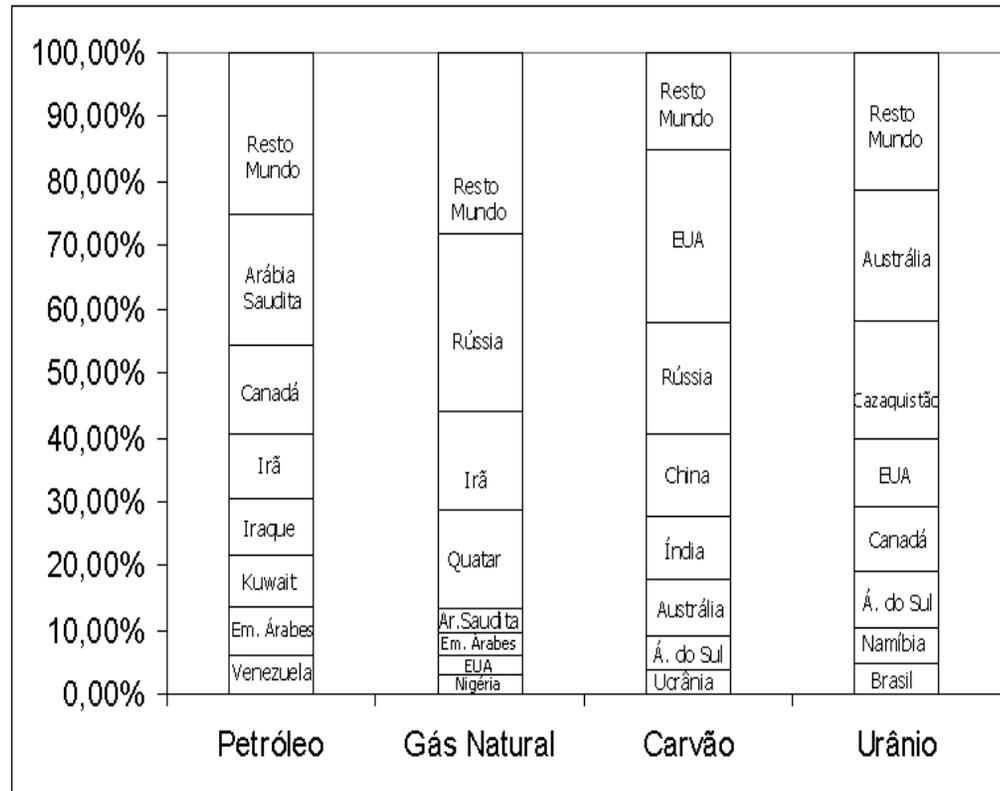


Figura 1.6: Reservas por combustível e países com maiores reservas (Fontes: [2, 31]).

Petróleo	Gás Natural	Carvão	Urânio
1.277,702	6.043,677	1.000.912	3.281,5

Tabela 1.3: Total mundial de reservas provadas para as fontes de energia não-renováveis (Fontes: [31, 2]).

A quantidade total de reservas<sup>2</sup> provadas mundiais é expresso na Tabela 1.3. Uma visão global da distribuição das reservas combustíveis fósseis, usando dados de 1998, é fornecido pelas Figuras 1.7, 1.8 e 1.9.

---

<sup>2</sup>Quantidade de petróleo em bilhões de barris, quantidade de gás natural em trilhões de metros cúbicos, quantidade de carvão em milhões de toneladas e quantidade de urânio em mil toneladas.

---

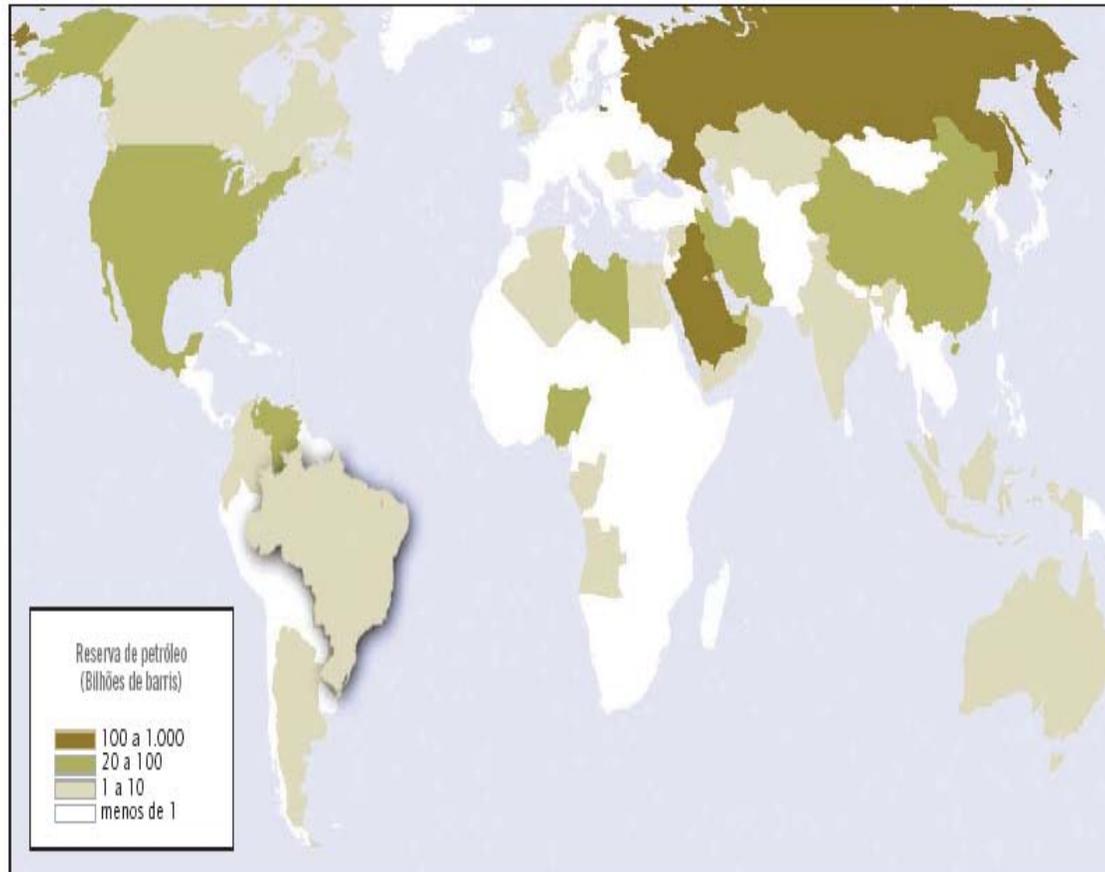


Figura 1.7: Reservas provadas de petróleo em 1998 (bilhões de barris - Fonte: [32]).

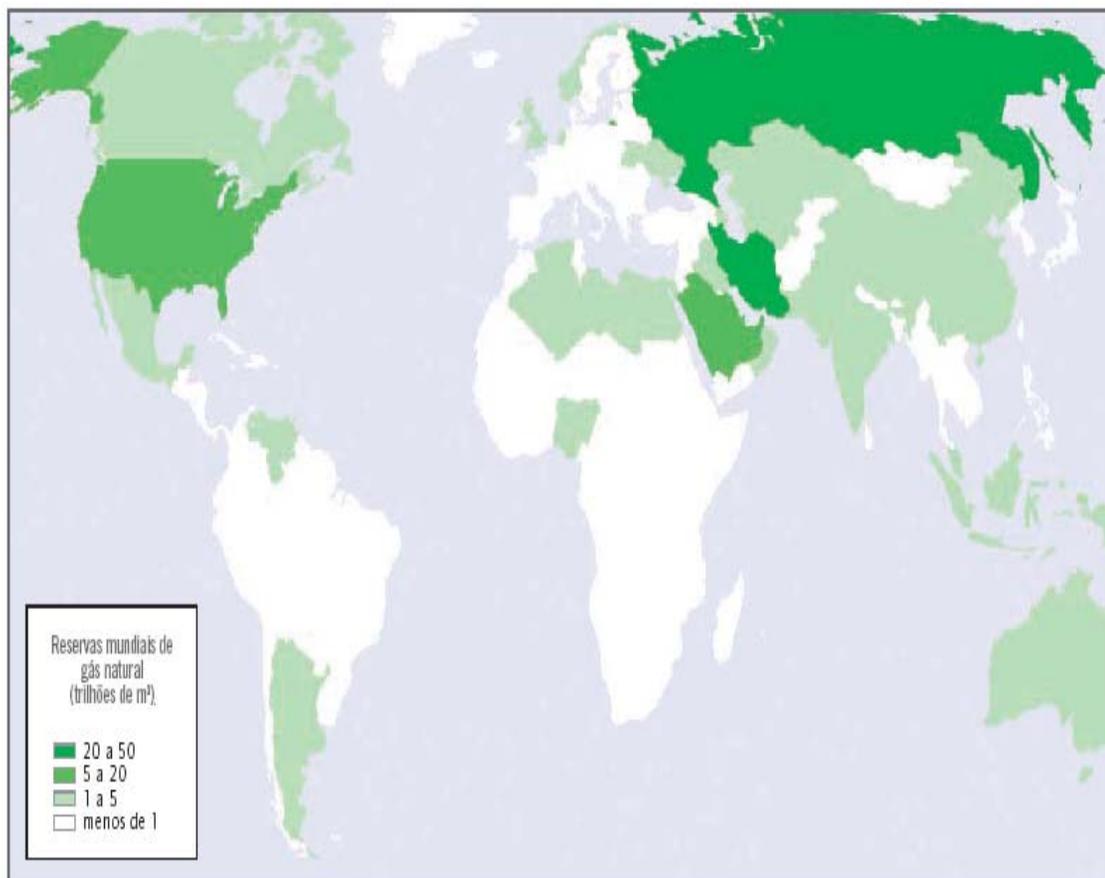


Figura 1.8: Reservas provadas de gás natural em 1998 (trilhões de metros cúbicos - Fonte: [32]).

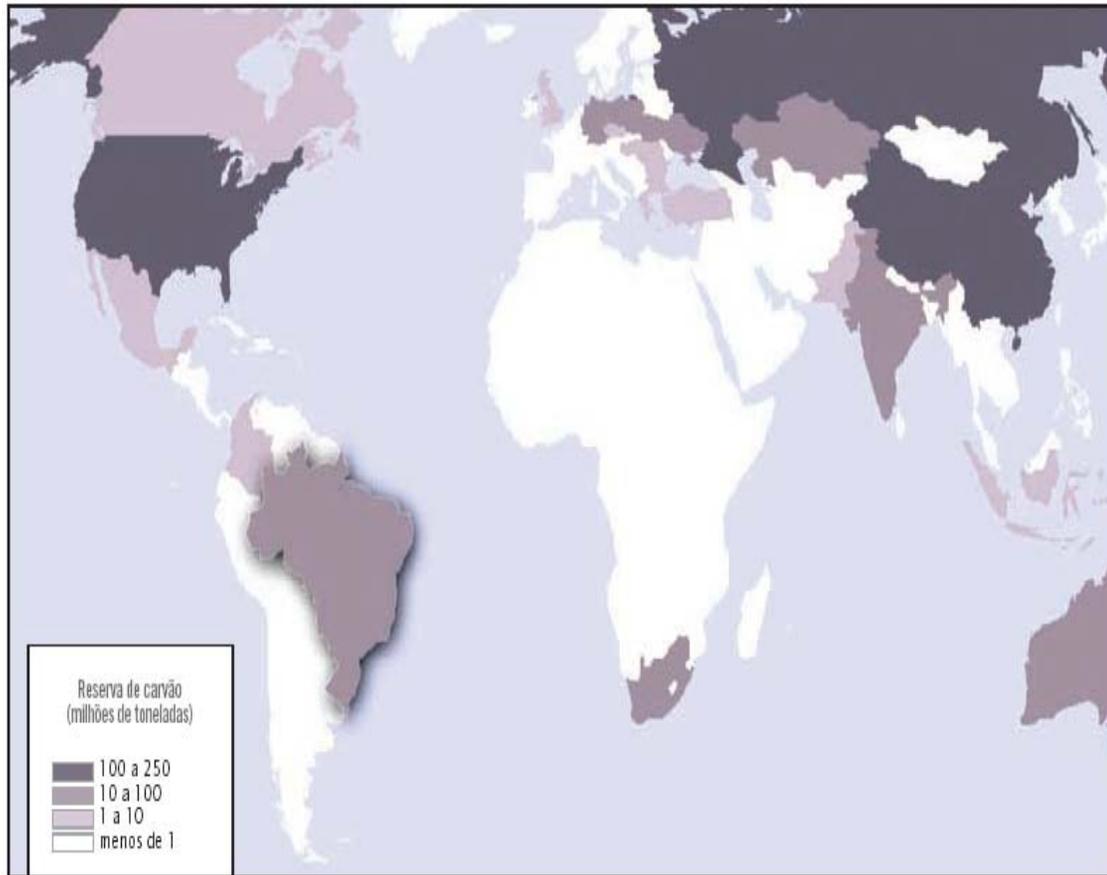


Figura 1.9: Reservas provadas de carvão em 1998 (trilhões de toneladas - Fonte: [32]).

Os recursos como petróleo, gás natural, carvão e urânio podem ser utilizados para gerar eletricidade a partir de usinas termelétricas.

O funcionamento das centrais termelétricas é semelhante, independentemente do combustível utilizado. O combustível é armazenado em parques ou depósitos adjacentes, de onde é enviado para a usina, onde será queimado na caldeira. Esta gera vapor a partir da água que circula por uma extensa rede de tubos que revestem suas paredes. A função do vapor é movimentar as pás de uma turbina, cujo rotor gira juntamente com o eixo de um gerador que produz a energia elétrica. O vapor é resfriado em um condensador e convertido outra vez em água, que volta aos tubos da caldeira, dando início a um novo ciclo.

Uma central nuclear também pode ser considerada uma usina termelétrica, onde o combustível é um material radioativo que, em sua fissão, gera o calor que produz o vapor necessário para seu funcionamento. Uma comparação entre o funcionamento de uma termelétrica que utiliza combustível fóssil e urânio é fornecida na Figura 1.10.

A Figura 1.11 fornece mais detalhes do esquema de funcionamento de um reator de uma usina termonuclear.

A energia renovável pode ser gerada a partir dos seguintes recursos:

- Biomassa
- Geotérmica
- Hidrelétrica
- Oceânica
- Solar
- Vento

Das energias renováveis, a que possui papel principal na geração de energia no sistema elétrico brasileiro é a energia de origem hidrelétrica. Isto se deve ao fato do Brasil ser um dos países com grande potencial hidráulico disponível, como pode ser observado na Figura 1.12.

---

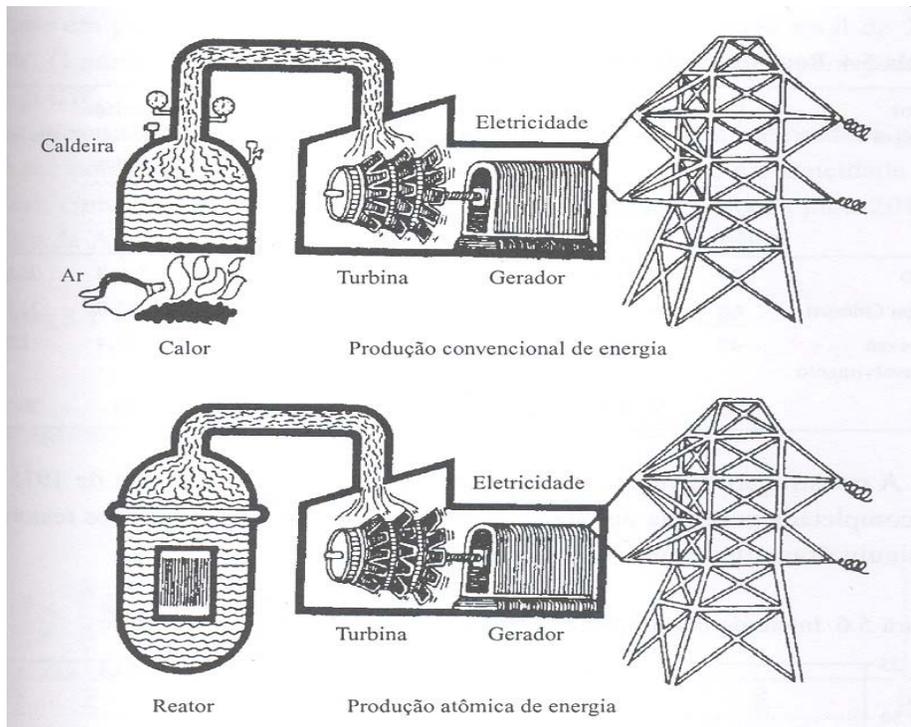


Figura 1.10: Energia elétrica gerada por meios convencionais (queima de carvão ou petróleo) e por usina nuclear (Fonte: [44]).

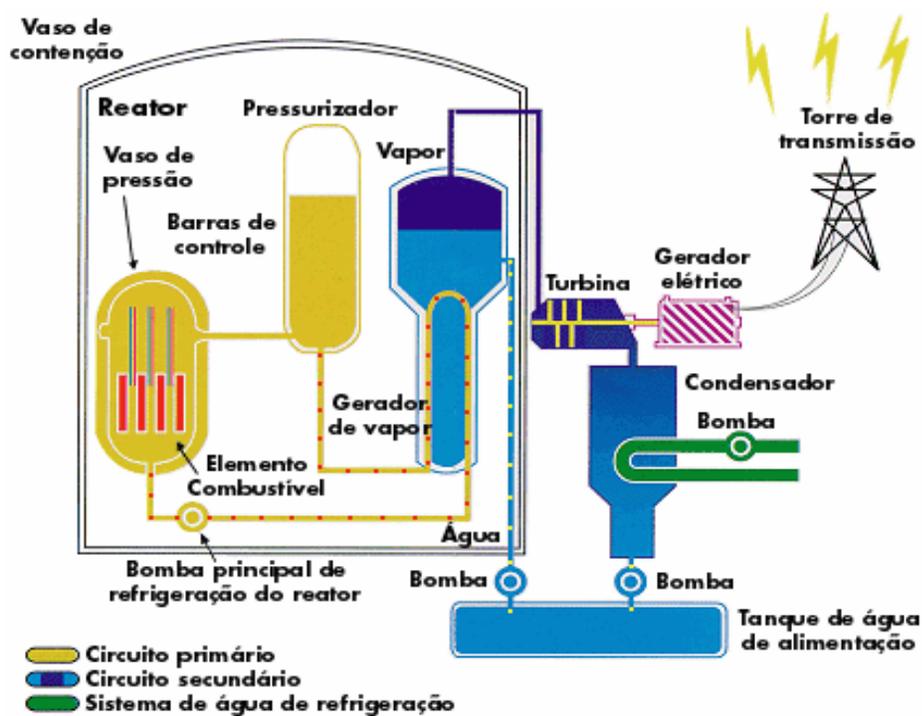


Figura 1.11: Geração de energia elétrica em um reator nuclear que utiliza água pressurizada (PWR)(Fonte: [35]).

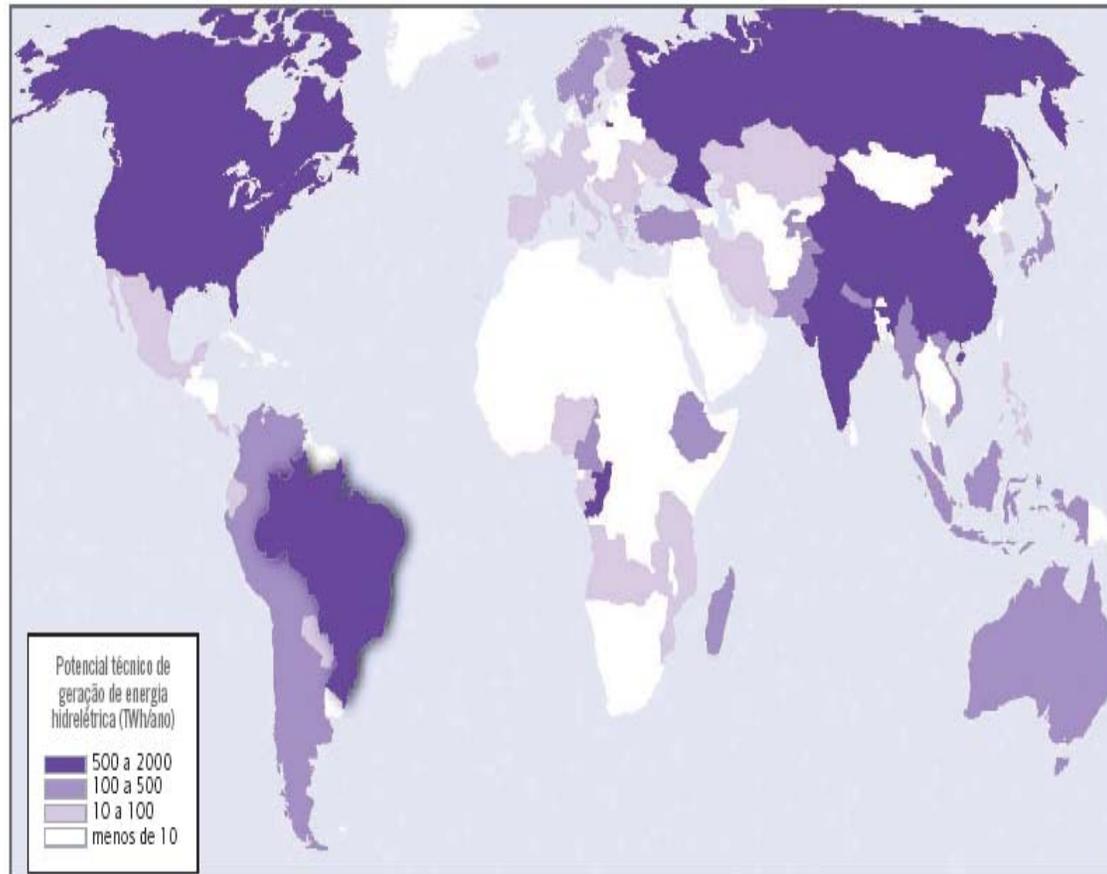


Figura 1.12: Potencial técnico de aproveitamento hidrelétrico no mundo em 1999 (Em TWh/ano - Fonte: [32]).

País	Capacidade (MW)
EUA	79.511
Canadá	66.954
China	65.000
Brasil	57.517
Rússia	44.000
Índia	22.083

Tabela 1.4: Capacidade de geração hidrelétrica em operação (Fonte: [31]).

Sistema	Número de usinas
Hydro-Quebec	52
Manitoba Hydro	14
TVA	30

Tabela 1.5: Número de usinas para cada sistema considerado.

Os maiores potenciais hidráulicos estão localizados nos EUA, Canadá, Brasil, Rússia, China e Índia. A Tabela 1.4 fornece detalhes acerca da capacidade de geração hidrelétrica aproveitada em cada um dos países destacados anteriormente no ano de 1999.

Alguns exemplos da utilização da energia hidráulica no Canadá são as companhias Hydro-Quebec e Manitoba-Hydro cujas usinas estão descritas nas Figuras 1.13 e 1.14, respectivamente. Nos EUA, destaca-se a companhia Tennessee Valey Authority (TVA), cujas usinas estão descritas na Figura 1.15. A Tabela 1.5 fornece o número de usinas hidrelétricas existentes em cada um dos sistemas das Figuras 1.13, 1.14 e 1.15, respectivamente.

No Brasil, a energia de origem hidráulica gera cerca de 90% de toda a eletricidade produzida no país. Afinal, o sistema brasileiro tem como característica grandes bacias hidrográficas, descritas na Figura 1.16.

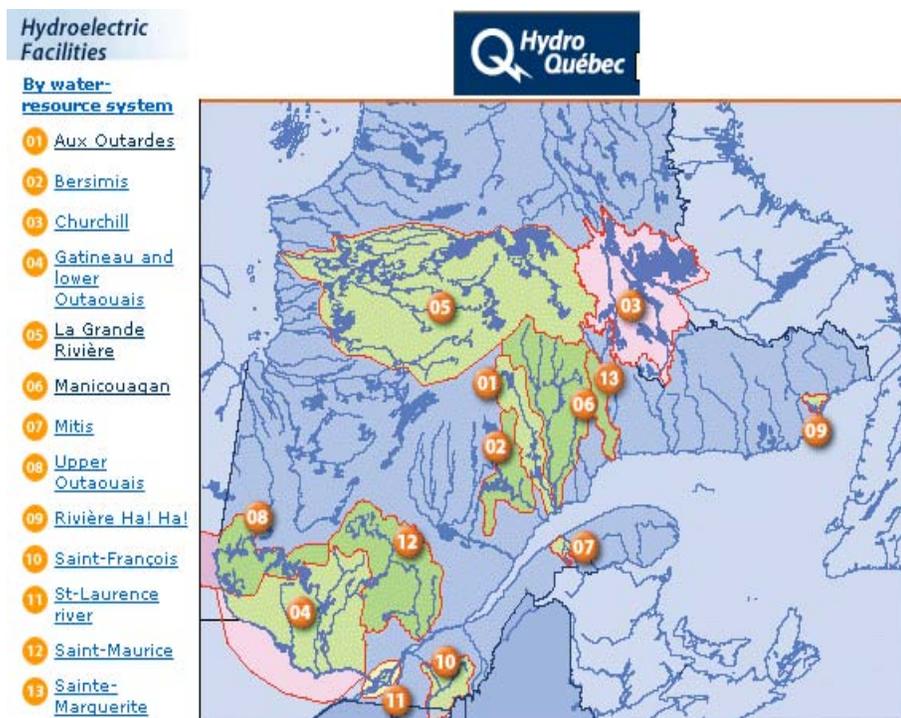


Figura 1.13: Bacias que compõem a Hydro-Quebec, Canadá.

### Hydraulic Generating Stations

1. Grand Rapids
2. Great Falls
3. Jenpeg
4. Kelsey
5. Kettle
6. Laurie River I
7. Laurie River II
8. Limestone
9. Long Spruce
10. McArthur
11. Pine Falls
12. Seven Sisters
13. Pointe du Bois
14. Slave Falls

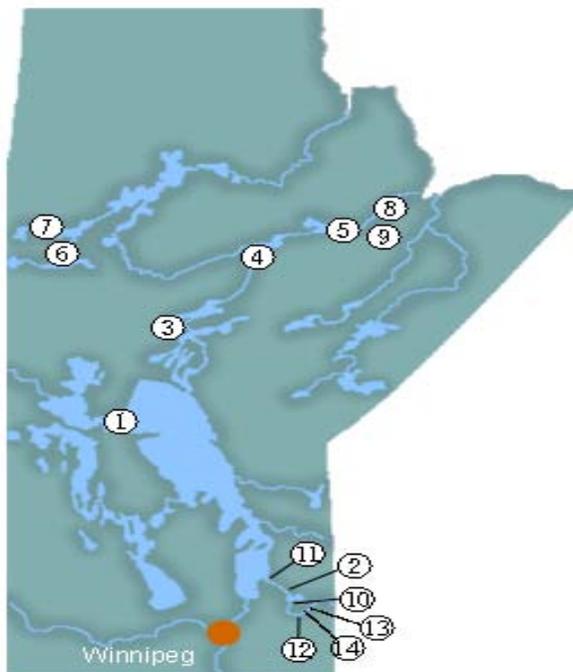


Figura 1.14: Usinas da Manitoba-Hydro, Canadá.

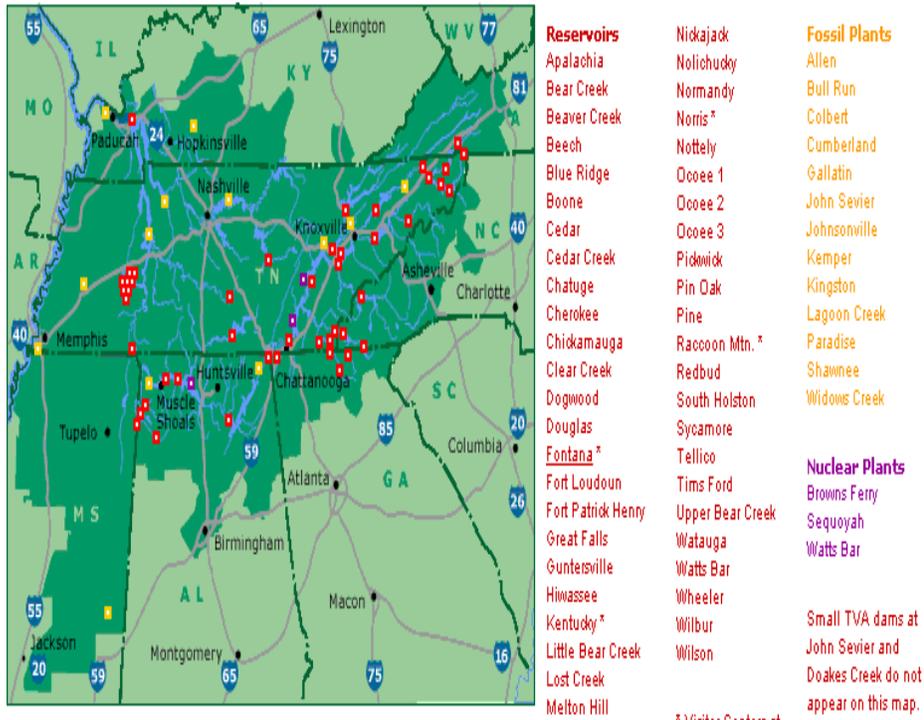


Figura 1.15: Usinas da Tennessee Valey Authority, EUA.

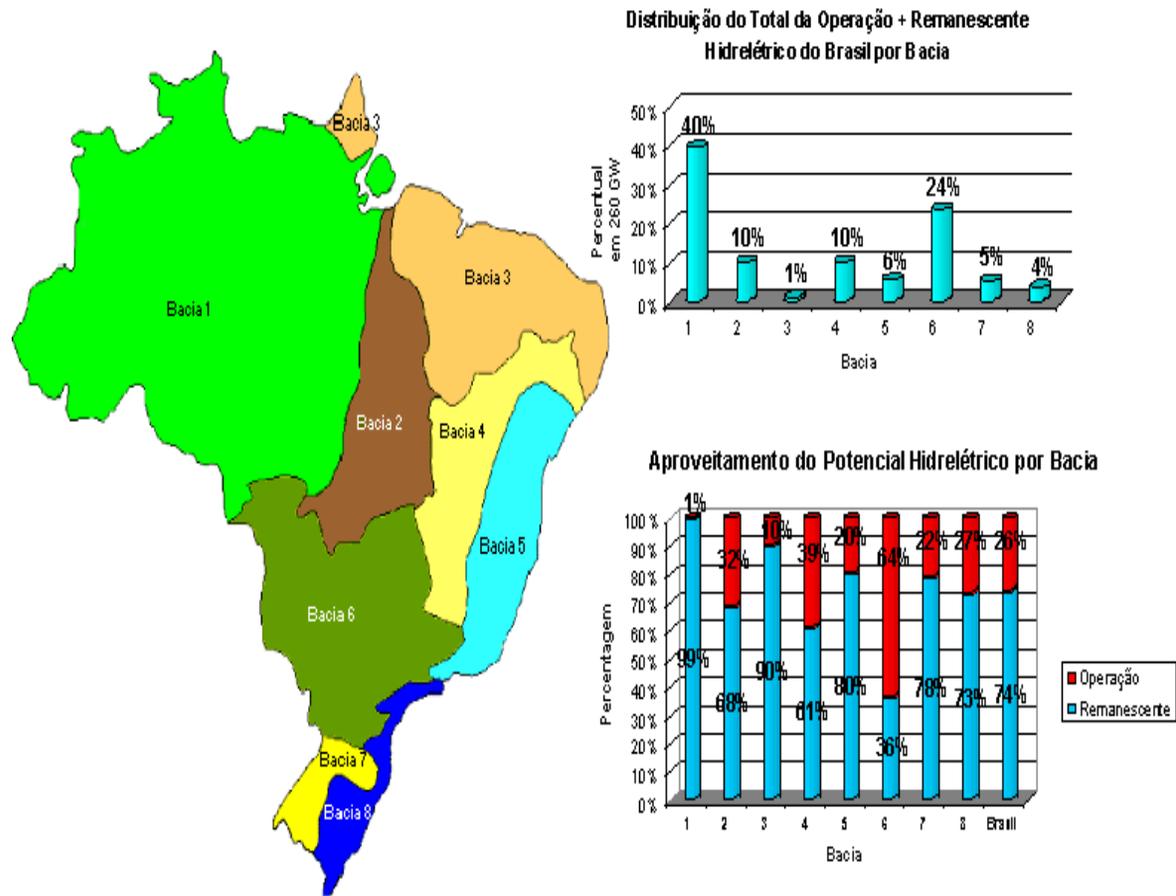


Figura 1.16: Bacias hidrográficas do Brasil (Fonte: ANEEL).

Apesar da tendência de aumento de outras fontes, devido a restrições socioeconômicas e ambientais de projetos hidrelétricos, tudo indica que a energia hidráulica continuará sendo, por muitos anos, a principal fonte geradora de energia elétrica do Brasil. Estima-se que nos próximos anos, pelo menos 50% da necessidade da expansão da capacidade de geração seja atendida pela hidreletricidade.

Porém, a evolução da construção de usinas hidrelétricas, como descrito na Figura 1.17, fez com que os maiores potenciais remanescentes estejam localizados em regiões com fortes restrições ambientais e distantes dos principais centros consumidores.

De qualquer forma, a predominância da geração hidrelétrica tem profunda influência no planejamento e programação da operação do sistema elétrico brasileiro como será discutido no Capítulo 2.

Na verdade, até o ano de 1970, a energia final consumida de origem elétrica, no Brasil, tinha uma participação no consumo final menor de 5,5%, como pode ser visto na Figura 1.18.

Após o primeiro choque do petróleo, o consumo final de energia de origem elétrica era de  $5,5 \times 10^6$  Tonelada Equivalente de Petróleo (tep) em 1970, atingindo, em 2004, o valor de  $16,2 \times 10^6$  tep, ou seja, 16,2% de participação no consumo final de energia.

Vale observar que as hidrelétricas são responsáveis, atualmente, por cerca de 75,5% da energia elétrica gerada, considerando que a geração de Itaipu 50 Hz não incluída nesta porcentagem, pois é considerada como importação. Se esta parcela for considerada, então, a participação hidrelétrica sobe para 92%.

Esta predominância da hidroeletricidade fica mais clara quando é analisada a evolução da capacidade instalada do setor elétrico na Figura 1.19.

A partir do detalhamento da capacidade instalada, que consta na Figura 1.20, é possível verificar que em 2004, dos cerca de 90GW de capacidade, 69GW são hidroeletricidade e as térmicas possuem 22 GW.

Este quadro se deve aos investimentos feitos em hidrelétricas de grande porte, em especial, a construção de Itaipu Binacional, cuja capacidade instalada é de 12,6GW [76]. Se por um lado estes projetos necessitaram de investimentos de grande vulto [4], por outro lado o custo de geração resultante tem sido compensador em relação às demais alternativas [76].

O sistema brasileiro de geração de energia elétrica conta com características que o tornam único no mundo [76]:

---

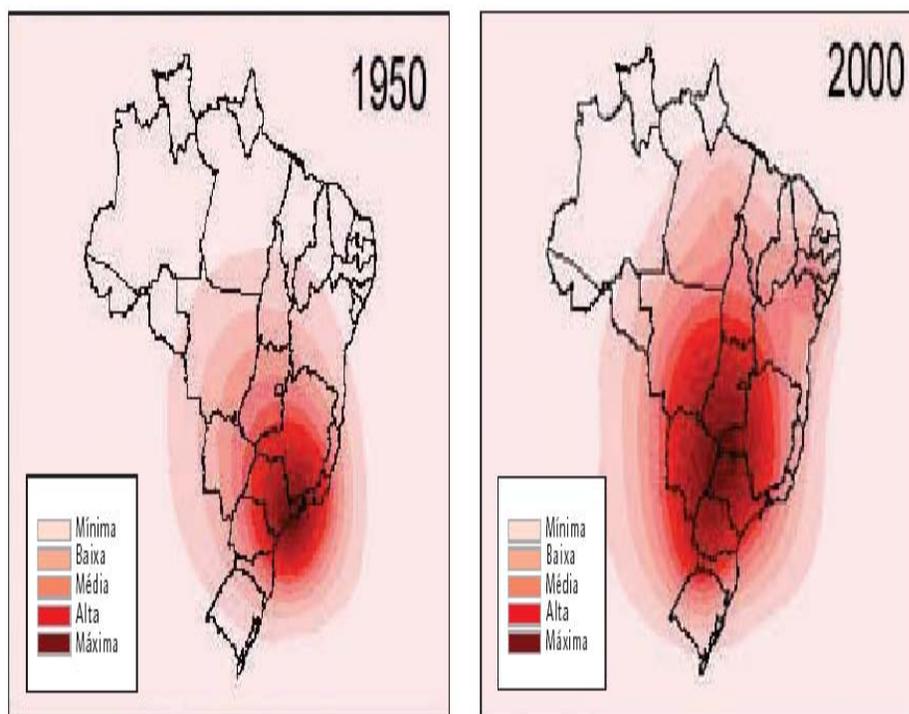


Figura 1.17: Evolução da concentração das usinas hidrelétricas no Brasil (1950 e 2000 - Fonte: [32]).

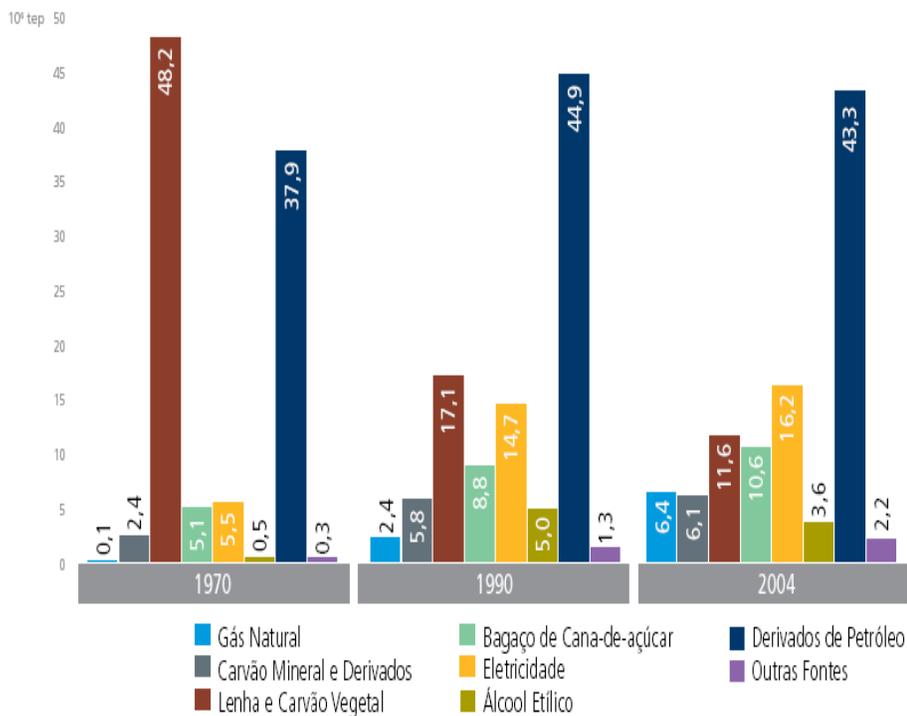
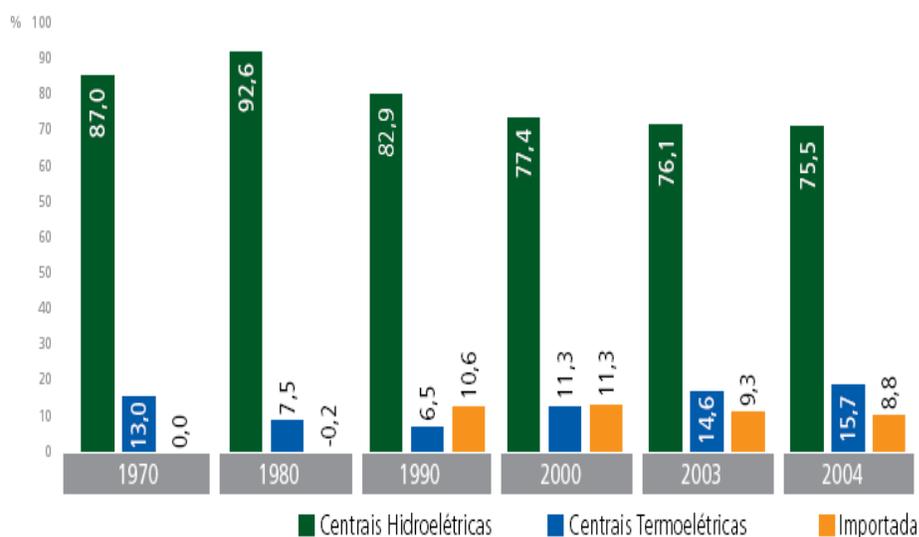


Figura 1.18: Evolução do consumo final de energia por fonte (Fonte: Balanço energético nacional - Sumário Executivo, 2005).

1. Predominância hidrelétrica.
2. Grande potencial hidrelétrico inexplorado.
3. Vários potenciais de aproveitamento em um mesmo rio.
4. Diversidade de regimes hidrológicos e pluviométricos.
5. Grandes extensões geográficas e grandes distâncias entre as fontes geradoras e os principais centros consumidores.
6. Grau de interligação elétrica entre os sistemas (região sul/sudeste/centro-oeste) relativamente alto em comparação com outros países.

As características (1), (2), (3) e (4) são relativas a parte energética e foram a motivação para se elaborar o modelo matemático do Capítulo 3 e o



<sup>1</sup> Centrais Termoelétricas inclui centrais termoelétricas a partir da fonte nuclear.

<sup>2</sup> Importada é a diferença entre o consumo interno total de energia elétrica (inclusive consumo próprio, perdas de transformação, transmissão e distribuição) e a geração de energia elétrica interna.

Figura 1.19: Evolução da capacidade instalada de geração em MW (Fonte: Balanço energético nacional - Sumário Executivo, 2005).

correspondente método de pontos interiores, descrito no Capítulo 4.

O modelo desenvolvido no Capítulo 3 consiste em otimizar a produção de energia elétrica contemplando os múltiplos usos que os recursos hídricos possuem, utilizando critérios que tentam atender necessidades como [76]:

- Manutenção de condições de navegabilidade nos rios.
- Proteção dos portos, pontes e outras instalações ribeirinhas.
- Segurança do abastecimento de água de núcleos populacionais.
- Controle de cheias.
- Manutenção de reservas energéticas capazes de suportar períodos de baixas precipitações pluviométricas, com conseqüente minimização dos riscos de déficits de suprimento de energia.

	Unidades	1970	1980	1990	2000	2003	2004	% 04 / 03 <sup>2</sup>
<b>CAPACIDADE INSTALADA DE GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA</b>	<b>GW</b>	<b>11,05</b>	<b>33,47</b>	<b>53,05</b>	<b>73,71</b>	<b>86,51</b>	<b>90,73</b>	<b>4,7</b>
<b>Centrais Hidroelétricas</b>	<b>GW</b>	<b>8,84</b>	<b>27,65</b>	<b>45,56</b>	<b>61,06</b>	<b>67,79</b>	<b>69,00</b>	<b>1,7</b>
Centrais Elétricas de Serviço Público	%	76,8	80,9	84,7	81,5	77,0	74,5	1,5
Centrais Elétricas Autoprodutoras	%	3,2	1,7	1,2	1,3	1,4	1,6	15,5
<b>Centrais Termoeleétricas<sup>1</sup></b>	<b>GW</b>	<b>2,21</b>	<b>5,82</b>	<b>7,49</b>	<b>12,65</b>	<b>18,71</b>	<b>21,73</b>	<b>13,9</b>
Centrais Elétricas de Serviço Público	%	14,7	10,4	9,1	11,6	15,8	18,2	17,2
Centrais Elétricas Autoprodutoras	%	5,4	7,0	5,0	5,5	5,8	5,7	3,6
<b>Eficiência Média das Centrais Termoeleétricas<sup>1</sup></b>								
Centrais Elétricas de Serviço Público	%	25	28	28	30	35	36	-
Centrais Elétricas Autoprodutoras	%	33	42	40	39	40	41	-

<sup>1</sup> Inclusive centrais termoeleétricas a partir da fonte nuclear.

<sup>2</sup> Variação dos valores absolutos do parâmetro entre os anos de 2003 e de 2004.

Figura 1.20: Detalhamento da evolução da capacidade instalada de geração em MW (Fonte: Balanço energético nacional - Sumário Executivo, 2005).

As características (5) e (6) são relativas ao problema elétrico e são ilustradas na Figura 1.21.

Uma comparação da dimensão do Sistema Interligado Nacional (SIN) com a Europa, dada na Figura 1.22, mostra o grande porte deste sistema e a complexidade de se planejar o mesmo.

Estas características mostram a importância de que a expansão e utilização do sistema de geração e transmissão sejam planejadas de modo integrado.

Planejar o sistema integrado de modo otimizado é uma tarefa complexa, pois é necessário coordenar aspectos hidráulicos do problema, considerando um horizonte de planejamento de anos, com aspectos elétricos, em base horária.

A idéia é conseguir operar a rede elétrica ao menor custo de complementação termelétrica, sem deixar de considerar a sazonalidade anual das

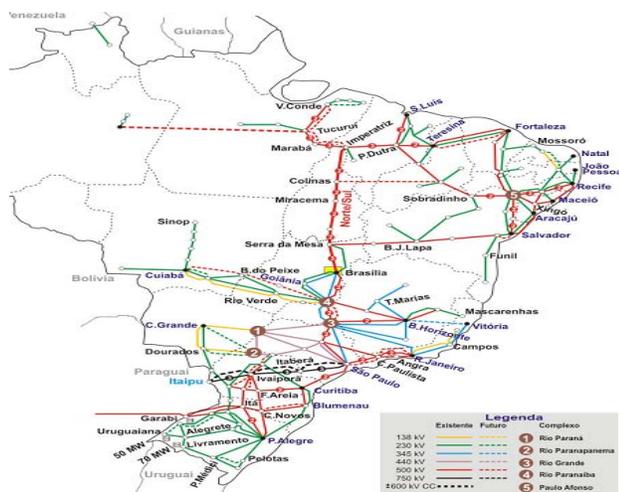


Figura 1.21: Sistema Interligado Nacional (SIN - Fonte: ONS).

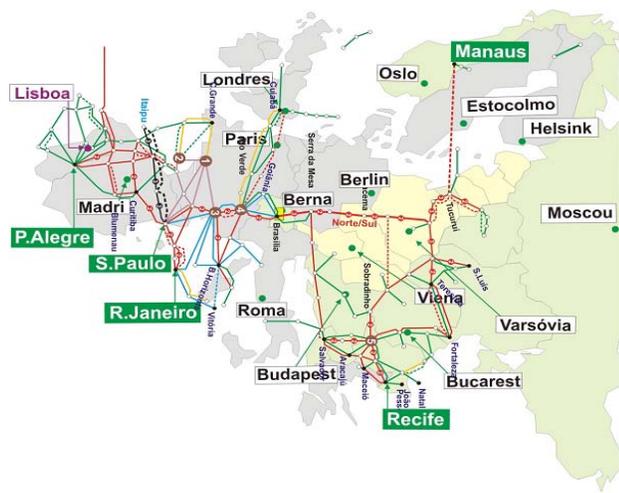


Figura 1.22: Comparação do SIN com a Europa (Fonte: ONS).

afluências e a possibilidade de uma sequência de anos com baixas precipitações pluviométricas.

Para tanto, foi adotada a Cadeia de Coordenação Hidrotérmica descrita no Capítulo 2.

# Capítulo 2

## Cadeia de Coordenação Hidrotérmica

### 2.1 Introdução

Como observado no capítulo anterior, o Brasil é um país com geração predominantemente hidrelétrica. Isto significa que é necessário um gerenciamento que compatibilize a gestão do armazenamento dos reservatórios das usinas hidrelétricas com o despacho de geração e os fluxos de potência no sistema de transmissão do Sistema Interligado Nacional (SIN). Este gerenciamento é denominado de problema da coordenação da operação de um sistema hidrotérmico de potência.

Devido a complexidade deste problema, sua resolução requer a criação do que se chama cadeia de coordenação hidrotérmica da operação. A cadeia consiste em um conjunto de modelos computacionais concatenados que determinam a distribuição da geração entre as usinas hidrelétricas e termelétricas do sistema em diferentes escalas de tempo.

Diversas cadeias de coordenação hidrotérmica têm sido propostas na literatura especializada procurando explorar as características específicas dos sistemas hidrotérmicos considerados [82]. A cadeia de coordenação hidrotérmica adotada pelo setor elétrico brasileiro, e que será utilizada nesta tese, para o sistema interligado nacional (SIN) é composta por duas etapas:

- Planejamento da Operação: Etapa com horizonte de até cinco anos e discretização mensal, sendo o primeiro mês discretizado em semanas (longo prazo). O objetivo é o gerenciamento otimizado dos reser-

vatórios de acumulação das usinas hidrelétricas visando a minimização dos custos esperados de complementação do mercado através de geração termelétrica, importação e racionamento.

- Programação da Operação: Etapa com horizonte de até uma semana e discretização horária, sendo o primeiro dia discretizado em meias-horas (curto prazo). O objetivo principal é o atendimento da carga respeitando restrições energéticas, hidráulicas e elétricas dos sistemas de geração e transmissão. Do ponto de vista energético, as restrições são representadas pelas metas de geração das usinas hidrelétricas estabelecidas pelo planejamento da operação para a semana em consideração. Do ponto de vista hidráulico, as restrições correspondem aos limites operacionais das usinas, aos usos múltiplos da água, e aos tempos de viagem da água entre usinas em cascata. Do ponto de vista elétrico, as restrições correspondem aos limites de transmissão da rede elétrica.

A divisão do problema em etapas tem por finalidade permitir a consideração adequada dos aspectos mais significativos da representação do problema em cada horizonte de análise. Assim, por exemplo, a aleatoriedade das vazões deve ser considerada através de modelos estocásticos na etapa com horizontes anuais, podendo ser considerada de forma determinística na etapa com horizonte de uma semana. Por outro lado, a representação do sistema de transmissão pode ser considerada de forma simplificada na etapa com horizontes anuais, através de restrições de intercâmbio entre regiões, mas precisa ser considerada de forma detalhada na etapa de horizonte semanal.

A cadeia de coordenação da operação de sistemas hidrotérmicos tem por objetivo assegurar uma operação econômica e confiável para o sistema elétrico de potência. O resultado deve ser uma seqüência de decisões de geração que procure minimizar o custo da operação e garantir o atendimento da demanda com confiabilidade.

Para tanto, é necessário utilizar modelos matemáticos. No caso do planejamento da operação para o SIN, a representação individualizada das usinas hidrelétricas e a consideração estocástica das afluições, em um único modelo matemático, constituem o maior obstáculo para a solução adequada do problema.

Uma tentativa de solução para o impasse entre a representação estocástica das vazões afluentes e a representação individualizada das usinas hidrelétricas tem sido a agregação do sistema hidrelétrico através de modelagem equivalente [6] para permitir o uso de técnica de solução baseada em programação

---

dinâmica estocástica. Essa tem sido a linha adotada no Brasil desde a década de 70, e que evoluiu para a utilização da técnica de solução baseada em programação dinâmica estocástica dual [83]. Uma outra alternativa [64] ao impasse tem sido a consideração da aleatoriedade das vazões através de modelos de previsão e a utilização de técnica de otimização determinística com representação individualizada das usinas hidrelétricas [23, 18, 81, 89]. Essa segunda alternativa, desenvolvida pelo grupo de pesquisa da Unicamp, será a adotada nesta tese. Ela baseia-se em três premissas principais:

- A operação individualizada das usinas hidrelétricas e termelétricas.
- A representação detalhada das características de operação dessas usinas.
- A representação indireta da estocasticidade das vazões através de modelo de previsão.

Essas três características são as mais importantes para a diferenciação entre a metodologia proposta nessa tese e aquela em vigor no setor elétrico brasileiro.

Para a programação da operação é necessário obter um cronograma de despacho de máquinas e de geração para a próxima semana em base horária, com o primeiro dia em base de meia-hora, que seja compatível com as metas de geração das usinas hidrelétricas estabelecidas pelo planejamento da operação e que sirva como uma referência operativa para a operação em tempo real do sistema. Neste contexto, é fundamental uma detalhada representação de todos os aspectos operativos do sistema, incluindo os aspectos energéticos, hidráulicos e elétricos. Devem ser consideradas restrições como tempo de percurso de água entre usinas, rampa de tomada de carga das máquinas, perdas hidráulicas no sistema de adução, eficiência das turbinas e geradores, e limites de fluxo de potência no sistema de transmissão.

Uma visão global dos modelos utilizados e as características de cada etapa da cadeia de planejamento considerada é apresentada na Figura 2.1.

Mais detalhes sobre os modelos adotados no planejamento e programação da operação da cadeia de planejamento serão fornecidos nas Seções 2.2 e 2.3, respectivamente.

---

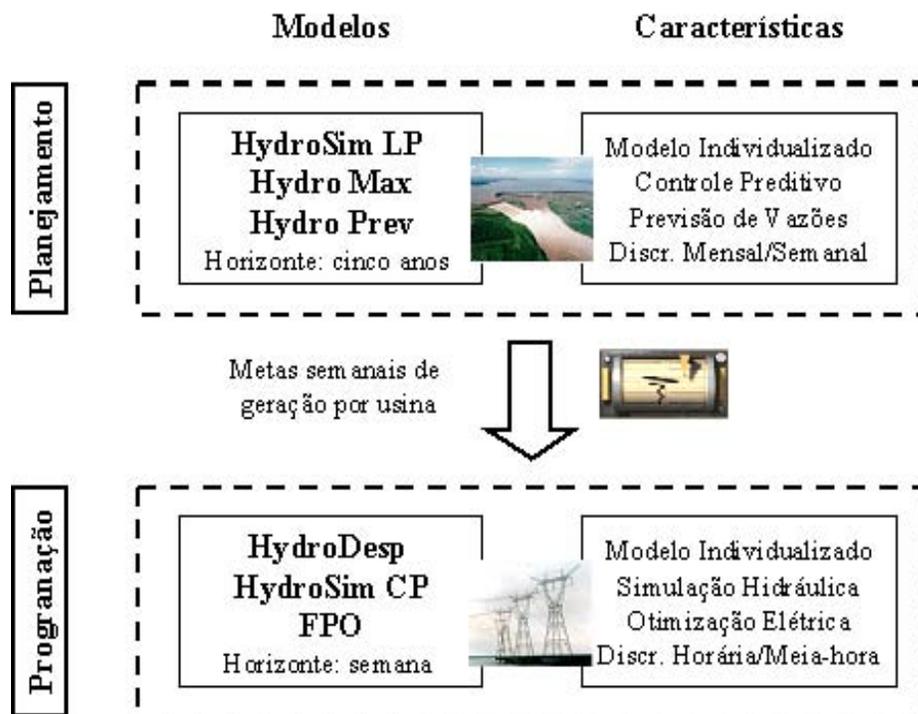


Figura 2.1: Cadeia de coordenação hidrotérmica (Fonte: [28]).

## 2.2 Planejamento da Operação

A metodologia proposta para a solução do problema de planejamento da operação se denomina *Controle Preditivo* (CP) e se baseia na combinação de um modelo de otimização determinística a usinas individualizadas alimentado por um modelo estocástico de previsão de vazões. A composição desses dois modelos permite criar uma política de operação para o planejamento da operação do sistema hidrotérmico cujo desempenho é melhor que o da programação dinâmica estocástica, mesmo para sistemas com uma única usina hidrelétrica [64].

O *controle preditivo* é uma política operacional baseada num processo adaptativo de tomada de decisões onde a cada intervalo de tempo as decisões (turbinagens e vertimentos) são tomadas pelo modelo de otimização a usinas individualizadas alimentado pelas previsões de vazões. O procedimento de previsão/otimização é repetido a cada intervalo do horizonte de planejamento visando minimizar os desvios na trajetória ótima dos reservatórios das usinas provocados pelos erros entre os valores previstos e verificados das vazões.

O simulador de longo prazo (LP) tem por objetivo avaliar o desempenho de uma dada política operacional, permitindo avaliar e comparar diferentes políticas.

Os modelos envolvidos no planejamento da operação, conforme a política operativa proposta, possuem as seguintes características:

- HydroMax: modelo de otimização determinística do planejamento da operação para sistemas hidrotérmicos. Esse modelo contém uma metodologia baseada em algoritmos de fluxo em rede não linear com arcos capacitados. As usinas são representadas individualmente [23, 27, 81]. Este modelo será denominado ao longo deste trabalho de modelo de otimização a usinas individualizadas (MOUI).
  - HydroPrev: modelo de previsão de vazões baseado em redes neurais combinadas com lógica fuzzy. A previsão de vazões pode utilizar um conjunto de vazões fornecidas, sem que essas estejam em seqüência [11].
  - HydroSim LP: modelo de simulação da operação para sistemas hidrotérmicos. A metodologia contida no simulador representa de forma individualizada as usinas a serem simuladas, bem como um grande conjunto de restrições reais das condições operativas das usinas hidrelétricas e termelétricas.
-

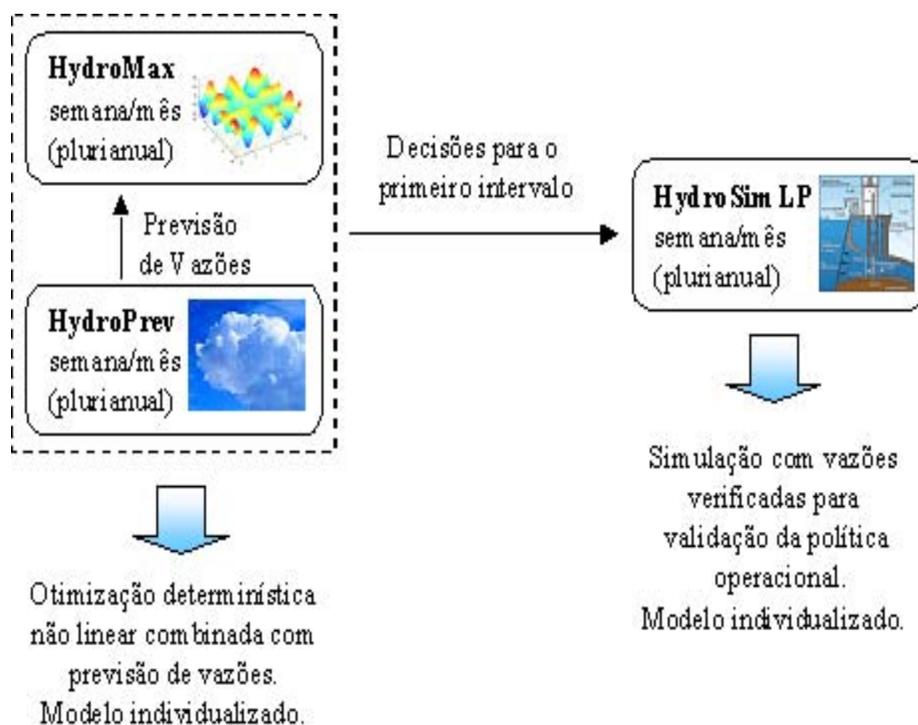


Figura 2.2: Cadeia de modelos para solução do problema de planejamento da operação (Fonte: [28]).

A relação entre os modelos pode ser ilustrada através do fluxo de informações e objetivos de cada modelo, conforme apresentado na Figura 2.2.

Como resultado dessa etapa de planejamento, são obtidas metas semanais de geração por usina que servem como dados de entrada para a programação da operação. Essas metas constituem o mecanismo de acoplamento entre as etapas de planejamento e programação da operação, conforme descrito na Figura 2.1.

## 2.3 Programação da Operação

As metas de geração por usina, obtidas pela etapa de planejamento da operação, são fornecidas aos modelos de programação da operação, cujas características são descritas a seguir.

- HydroDesp: modelo de otimização do despacho de máquinas e de geração em usinas hidrelétricas e termelétricas, tendo como objetivo a minimização das perdas de geração nas usinas hidrelétricas, do custo de combustível nas usinas termelétricas, e do custo de partida/parada das unidades geradoras [5].
- HydroSim CP: modelo de simulação a usinas individualizadas em base horária para a programação da operação de sistemas hidrotérmicos. A modelagem adotada no simulador representa de forma individualizada os conjuntos turbinas/geradores a serem simulados, bem como um grande conjunto de restrições reais das condições operativas das usinas hidrelétricas e termelétricas em horizonte de curto prazo (CP), tais como tempo de viagem, operação de comportas, capacidade de vertimento e restrições de rampa.
- FPO: modelo de fluxo de potência ótimo CC com função objetivo que minimiza os desvios em relação ao despacho de geração fornecido pelos modelos anteriores, visando a obtenção de uma solução eletricamente factível (ou seja, que respeita os limites de geração e transmissão) [79].

O modelo matemático do FPO CC pode ser aplicado aos seguintes problemas [22, 23]:

- Análise de segurança.
- Despacho econômico.
- Capacidade máxima de suprimento.
- Mínimo corte de carga.
- Confiabilidade conjunta de geração-transmissão.
- Expansão dos sistemas de geração e transmissão.

Assim como foi mostrado para o problema de planejamento da operação, a relação entre os modelos de programação da operação pode ser ilustrada através do fluxo de informações e objetivos de cada modelo, conforme apresentado na Figura 2.3.

---

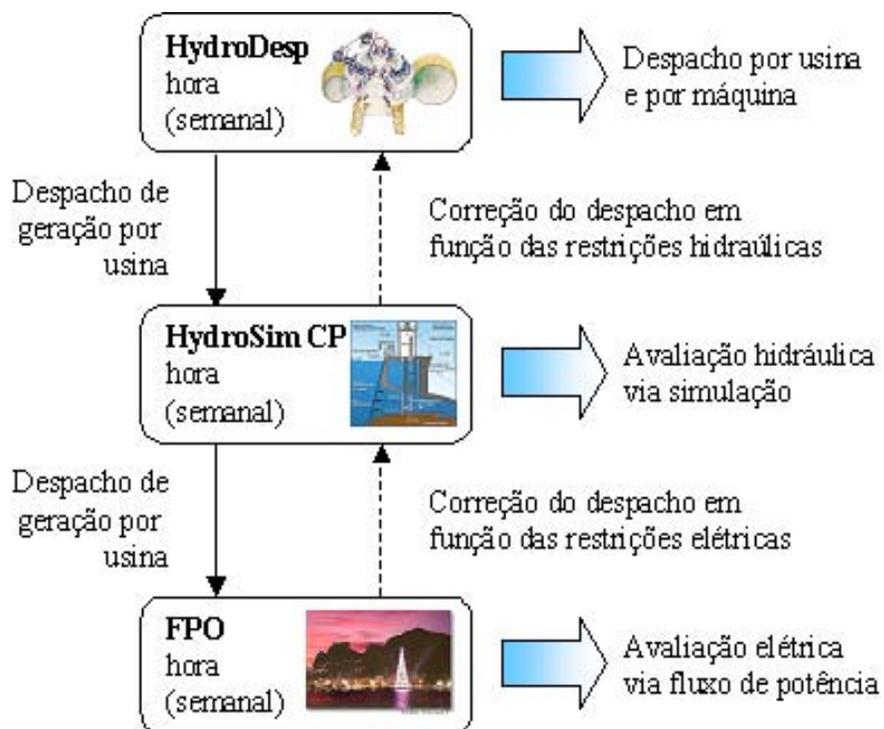


Figura 2.3: Cadeia de modelos para solução do problema de programação da operação (Fonte: [28]).

A cadeia de modelos para a programação da operação considerada neste trabalho é baseada na utilização de um modelo de otimização para o despacho de máquinas e de geração, sendo os resultados desse modelo validados por um simulador da operação hidráulica de curto prazo. A composição desses dois modelos permite obter uma programação da operação que otimiza o ponto de operação das máquinas e geradores ao mesmo tempo em que respeita um grande conjunto de restrições do sistema hidráulico através de simulação de curto prazo. Restrições hidráulicas não atendidas pela simulação são traduzidas em termos de restrições de potência e introduzidas no modelo de despacho de máquinas e de geração para que um novo despacho hidraulicamente viável seja obtido.

Após a iteração entre os modelos HydroDesp e HydroSim CP, o despacho de geração é submetido a uma fase de validação elétrica através de um modelo de fluxo de potência ótimo CC. Esse modelo tem como função objetivo minimizar desvios quadráticos em relação ao despacho de geração determinado pelos modelos anteriores, respeitando os limites de transmissão da rede elétrica. A técnica de solução utilizada nesse modelo combina a representação por fluxo em redes com restrições adicionais e o método de pontos interiores [79].

Uma vez apresentada a cadeia de coordenação hidrotérmica da operação e os modelos que a compõem, a Seção 2.4 apresenta os modelos em que esta tese fornece contribuições.

## 2.4 Objetivos e Estrutura da Tese

O objetivo deste trabalho é construir métodos de pontos interiores, propondo metodologias de solução para dois modelos da cadeia de coordenação hidrotérmica:

- No planejamento da operação de longo prazo (POLP): Construir uma metodologia alternativa, baseada em métodos de pontos interiores, que seja rápida e robusta em relação à metodologia atualmente utilizada para encontrar uma solução ao problema matemático associado ao MOUI.
  - Na programação da operação de curto prazo (POCP): Estender o trabalho de Oliveira, Soares e Nepomuceno em [79], que não considera transformador defasador e perdas de transmissão, permitindo que o
-

método de pontos interiores seja aplicado na resolução do Fluxo de Potência Ótimo Corrente Contínua para o Sistema Interligado Nacional.

Este trabalho pode ser dividido em duas grandes partes.

A primeira parte consiste no desenvolvimento de um método de pontos interiores para resolver o MOUI e é composta pelos Capítulos 3, 4 e 5.

No Capítulo 3 será discutida a modelagem matemática referente ao problema hidráulico, que consiste em determinar o volume e a defluência de cada usina em cada mês.

O Capítulo 4 fornecerá o desenvolvimento de um método de pontos interiores que, explorando as características do problema, é robusto e eficiente na resolução do modelo descrito no Capítulo 3.

No Capítulo 5 são mostrados os resultados obtidos ao se utilizar o método de pontos interiores na resolução do MOUI.

A segunda parte tem por objetivo a aplicação do método de pontos interiores para resolver o FPO CC, usando os dados do SIN, e é composta pelos Capítulos 6, 7 e 8.

O Capítulo 6 introduz e formula o problema elétrico, cuja resolução será feita pelo método de pontos interiores descrito no Capítulo 7. Os resultados obtidos estão descritos no Capítulo 8.

Finalmente, o Capítulo 9 fornecerá conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

---

# Capítulo 3

## Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas

### 3.1 Construindo modelos por fluxo em redes

Para construir um modelo matemático associado ao problema de planejamento da operação de sistemas elétricos com geração predominantemente de origem hidráulica, é necessário considerar as características e recursos de uma usina hidrelétrica.

As usinas hidrelétricas têm como característica a utilização da água para geração de energia elétrica. A energia hidrelétrica é gerada quando a água armazenada no reservatório é conduzida sob pressão, através de condutos forçados, ao conjunto de turbinas chamado casa de máquinas. Esta água movimentada as turbinas que estão conectadas aos geradores responsáveis por converter a energia de movimento em energia elétrica. A água utilizada para este processo segue para o rio pelo canal de fuga. Uma ilustração deste processo pode ser vista na Figura 3.1.

As turbinas são máquinas que convertem a energia da corrente de um fluido em energia mecânica ao girar de um sistema de pás. As partes que constituem uma turbina hidráulica são:

- Distribuidor: Conduz a água ao rotor, segundo a direção adequada a um melhor rendimento.
- Rotor: A energia cinética da água, que chega pelo distribuidor, é transformada em energia mecânica por meio de um eixo que está ligado ao

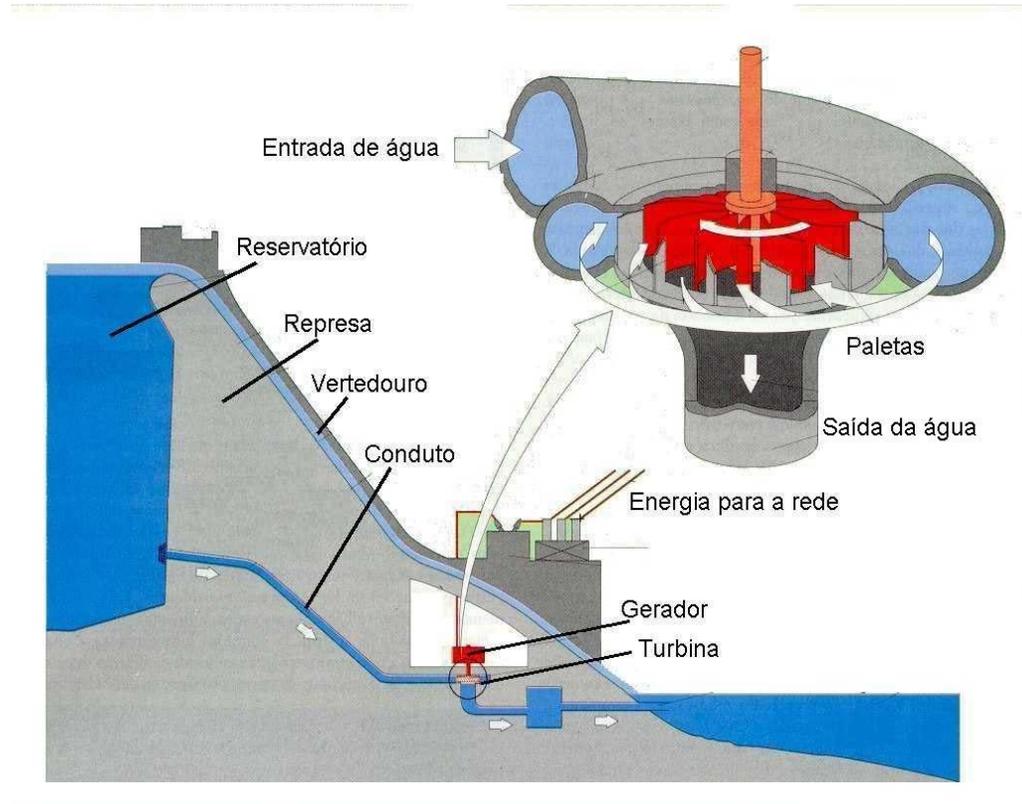


Figura 3.1: Geração de energia em uma usina hidrelétrica

rotor do gerador elétrico.

No sistema elétrico brasileiro são utilizados três tipos de turbinas. O modelo mais utilizado é o tipo Francis, uma vez que se adapta tanto a locais com baixa queda quanto a locais de alta queda. Entre outros modelos de turbinas hidráulicas, destacam-se o tipo Kaplan, adequado a locais de baixa queda (10 m a 70 m), e o tipo Pelton, mais apropriado a locais de queda elevada (200 m a 1500 m). A Figura 3.2 ilustra os três modelos.

Uma outra forma da água seguir para o rio, mas sem gerar energia, é através do vertedor. Uma das funções do vertedor é dar vazão controlada à água quando o reservatório atinge seu volume máximo.

A Figura 3.3 descreve os principais componentes constituintes de usinas hidráulicas.

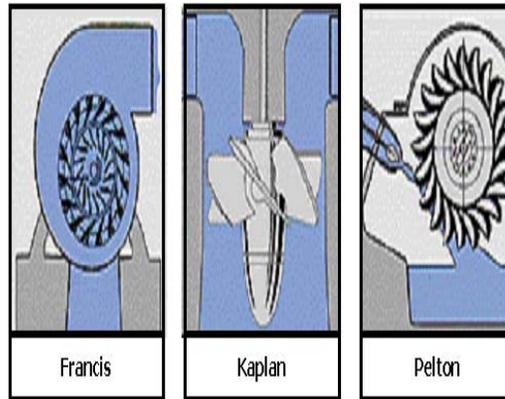


Figura 3.2: Exemplos de turbinas hidráulicas (Francis, Kaplan e Pelton, respectivamente).



Figura 3.3: Elementos de uma usina hidrelétrica

Os componentes de uma usina hidrelétrica são associados às variáveis que serão utilizadas no modelo matemático, como descrito na Figura 3.4.

A partir dessas informações é possível definir as seguintes variáveis de uma usina hidrelétrica:

- $x$ : Volume do reservatório ( $hm^3$ ).
  - $u$ : Vazão descarregada pela usina (defluência) ( $m^3/s$ ).
  - $q$ : Vazão turbinada pela casa de máquinas (engolimento) ( $m^3/s$ ).
-

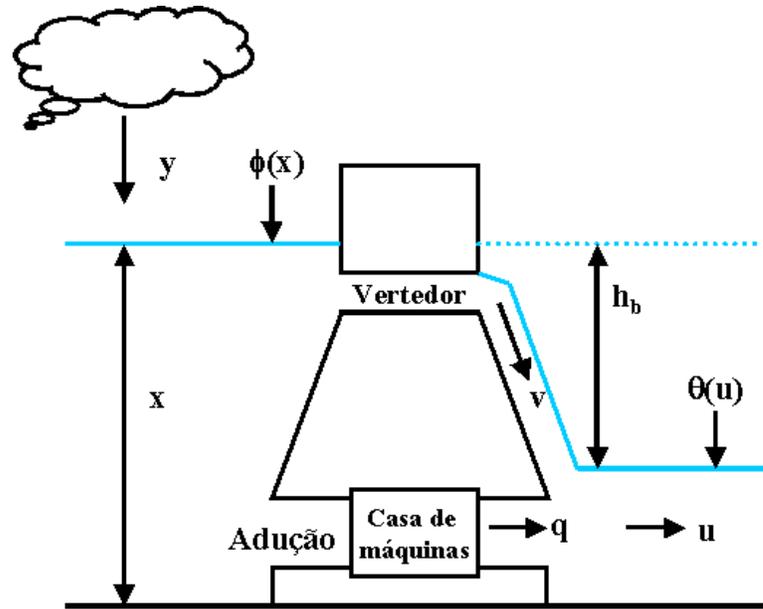


Figura 3.4: Variáveis associadas aos elementos de uma usina hidrelétrica.

- $v$ : Vazão descarregada pelo vertedor (vertimento) ( $m^3/s$ ).
- $\phi(x)$ : Cota de montante do reservatório (função do volume) (m).
- $\theta(u)$ : Cota de jusante do canal de fuga (função da defluência) (m).
- $h_b = \phi(x) - \theta(u)$ : Altura de queda bruta (m).
- $y$ : Vazão incremental afluyente à usina ( $m^3/s$ ).

Em relação às variáveis das usinas é importante observar que a defluência  $u$ , a turbinagem  $q$  e o vertimento  $v$  estão relacionadas pela equação (3.1):

$$u = q + v . \quad (3.1)$$

Para a vazão incremental  $y$ , cabe esclarecer que esta pode ser obtida a partir das vazões naturais  $y_n$ <sup>1</sup>. A vazão natural contabiliza as descargas hidráulicas a montante e inclui as vazões do próprio manancial em questão. Para ilustrar este conceito, serão considerados os mananciais da Figura 3.5.

<sup>1</sup>Muito embora as medições de campo não forneçam os dados de vazões naturais, sendo



Figura 3.5: Vazões naturais de um estações hidrometeorológicas.

Pelo ponto 1 é medido uma vazão natural  $y_{n,1}$ , a estação hidrometeorológica Estrada do Iguatemi mede uma vazão natural  $y_{n,2}$ , a estação Balsa de Santa Maria uma vazão natural  $y_{n,3}$  e Guaíra mede  $y_{n,4}$ .

A vazão natural de Guaíra contabiliza as vazões naturais de todos os pontos a montante e a sua própria (vazão incremental). Assim, a relação entre a vazão natural  $y_{n,4}$  e a vazão incremental  $y_4$  para a estação Guaíra será dada por:  $y_{n,4} = y_{n,1} + y_{n,2} + y_{n,3} + y_4$ .

Portanto, a vazão incremental de uma usina  $i$  qualquer é dada por (3.2):

$$y_i = y_{n,i} - \sum_{k \in \Omega_i} y_{n,k}. \quad (3.2)$$

Onde:

- $y_i$ : A vazão incremental da usina  $i$  ( $m^3/s$ ).
- $y_{n,i}$ : A vazão natural da usina  $i$  ( $m^3/s$ ).
- $\Omega_i$ : O conjunto das usinas imediatamente a montante da usina  $i$ .

Existe um histórico de vazões naturais das usinas brasileiras, com discretização mensal e semanal, desde 1931 até 1998. A partir destes dados é

---

necessário uma série de cálculos para a sua obtenção, a base de dados utilizada neste trabalho dispunha apenas dos valores de  $y_n$ . Mais detalhes do procedimento de campo adotado para a obtenção das vazões naturais no Brasil em [37].

---

possível calcular a média das vazões para cada mês do ano para cada usina. Esta média é conhecida como Média de Longo Termo (MLT).

É importante verificar que as usinas podem ser classificadas de acordo com sua capacidade de regulação das afluições <sup>2</sup> a partir da variável volume  $x_i$ . Sob o ponto de vista da operação, somente as usinas com reservatório de acumulação podem variar a quantidade de água armazenada em seus reservatórios. As usinas a fio d'água mantêm armazenagem constante, com vazão defluente igual à afluente. Uma seleção das usinas do sistema elétrico brasileiro ilustra esta classificação na Figura 3.6.

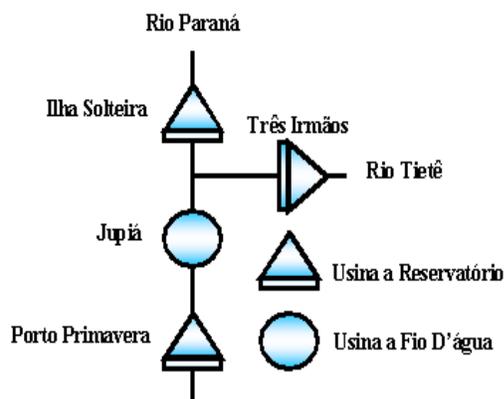


Figura 3.6: Cascata com usinas de Reservatório e a Fio D'água.

Se a afluência das usinas hidrelétricas fosse suficiente para atender toda a demanda de energia elétrica em todos os períodos, então, tanto os reservatórios, como o planejamento da operação energética não seriam necessários. Ocorre, porém, que além da afluência não ser suficiente para atender toda a demanda, ela não é constante para todos os períodos do ano, nem uniforme para todas as usinas de uma mesma bacia hidrográfica, muito menos homogênea para todo o território brasileiro.

Surge assim a necessidade do planejamento da operação energética, em que a utilização dos recursos implica na tomada de decisões observando um intervalo de tempo. Ou seja, é necessário descrever as decisões a serem tomadas para cada usina  $i$  em um dado intervalo de tempo  $t$ .

---

<sup>2</sup>A afluência contabiliza a vazão incremental da usina mais a defluência das usinas imediatamente a montante

---

---

Racionamento %	Custo do Déficit (US\$/MWh)
0 a 5	221,00
5 a 10	477,00
10 a 20	997,00
$\geq 20$	1133,00

---

Tabela 3.1: Custos do déficit de acordo com o nível de racionamento(fonte: Plano Decenal 2001-2010).

Dependendo da decisão que é tomada na geração de energia hidrelétrica em cada período e em cada reservatório, uma maior ou menor complementação energética das usinas térmicas será necessária para atender a demanda.

Como o custo de geração das usinas hidrelétricas é desprezível frente ao custo de geração das usinas termelétricas, o papel dos reservatórios, portanto, é o de regular as aflúncias, minimizando a utilização das termelétricas em todos os períodos, sejam eles períodos de baixa ou alta aflúncia.

Dessa forma, o gerenciamento ótimo dos recursos hídricos implica em um compromisso temporal entre o momento presente e o futuro, já que o recurso usado poderá comprometer a disponibilidade para o restante do horizonte de planejamento. Este é portanto um problema *dinâmico* cuja solução ótima é um equilíbrio entre o benefício presente do uso da água e o benefício futuro decorrente do seu armazenamento.

Este equilíbrio, porém, é difícil de ser equacionado devido a incerteza das vazões afluentes, que tornam o problema *estocástico*. Ou seja, a decisão de guardar água pode ocasionar vertimento caso as vazões futuras sejam elevadas. Já a decisão de usar muita água no presente pode provocar uma complementação termelétrica elevada, ou até mesmo déficit, caso falte água no futuro. A Tabela 3.1 ilustra o custo do déficit por patamares adotado no setor elétrico brasileiro.

Além disso, o sistema brasileiro tem como característica grandes bacias hidrográficas com destaque para a bacia do rio Paraná na Figura 3.7.

Algumas bacias, por sua vez, possuem um grande número de usinas como pode ser observado nas Figuras 3.7 e 3.8.

As usinas pertencentes a uma mesma bacia hidrográfica possuem um

---



Figura 3.7: Detalhamentos dos rios e usinas da bacia do rio Paraná (Fonte: ANA).

acoplamento operativo tal que a operação de uma usina interfere na operação das demais usinas a sua jusante, tornando o problema *interconectado*.

A idéia de que a decisão da operação de uma usina interfere na operação das demais usinas que pertencem à mesma bacia hidrográfica e que uma decisão no presente afeta a disponibilidade futura de recursos é fundamental para construir o modelo de fluxos em redes. Este modelo fornece a interligação da tomada de decisões para cada usina no tempo. Dois modelos de representação de variáveis de decisão serão consideradas neste trabalho:

1. Considerar que para cada usina  $i$  em um tempo  $t$  deve ser decidido o volume de água a ser armazenada  $x_{i,t}$  e a vazão defluente  $u_{i,t}$ . Neste caso, uma usina pode ser representada como o nó da Figura 3.9.
2. Considerar que para cada usina  $i$  em um tempo  $t$  deve ser decidido o



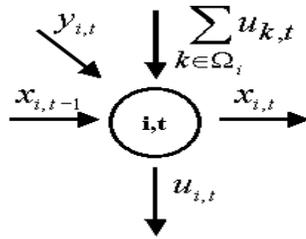


Figura 3.9: Representação do balanço de água para uma usina considerando vazão defluente  $u_{i,t}$ , armazenagem  $x_{i,t}$  e vazão incremental  $y_{i,t}$ .

volume de água a ser armazenada  $x_{i,t}$ , bem como a vazão turbinada  $q_{i,t}$  e a vazão a ser vertida  $v_{i,t}$ . Agora, uma usina pode ser representada como o nó da Figura 3.10.

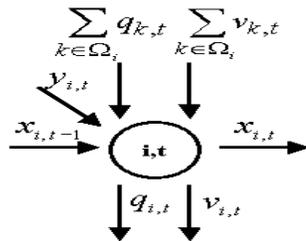


Figura 3.10: Representação do balanço de água para uma usina considerando vertimento  $v_{i,t}$ , turbinagem  $q_{i,t}$ , armazenagem  $x_{i,t}$  e vazão incremental  $y_{i,t}$ .

Em princípio, os dois modelos diferem apenas em como tratar a vazão defluente. No primeiro modelo, a vazão defluente  $u_{i,t}$  engloba o vertimento e a turbinagem tal que  $u_{i,t} = q_{i,t} + v_{i,t}$ . Como neste modelo as variáveis são o volume  $x_{i,t}$  e defluência  $u_{i,t}$ , ele será denominado modelo  $(x, u)$ . No segundo modelo, a vazão defluente passa a ser representada por meio de duas variáveis: turbinagem  $q_{i,t}$  e vertimento  $v_{i,t}$ . Assim, suas variáveis serão o volume  $x_{i,t}$ , a turbinagem  $q_{i,t}$  e o vertimento  $v_{i,t}$ , sendo denominado modelo  $(x, q, v)$ .

À primeira vista o modelo  $(x, u)$  é mais vantajoso por requerer um número menor de variáveis para representar o mesmo problema. Porém, esta eliminação de variáveis trará dificuldades na obtenção da derivada primeira e segunda da função objetivo. Esta discussão será retomada quando a função

objetivo e demais restrições forem discutidas, e assim o modelo matemático estiver completo.

Para ilustrar a utilização da representação de grafos para um dado conjunto de usinas e um certo número de períodos de planejamento, serão consideradas as quatro usinas da cascata descrita na Figura 3.6 e três períodos de tempo.

O processo consiste dos seguintes passos:

- Passo 1: Identificar quais usinas de uma dada bacia hidrográfica serão consideradas no estudo.
- Passo 2: Construção do grafo que indica como as usinas selecionadas se conectam através da bacia hidrográfica.
- Passo 3: Replicar para cada período do planejamento o grafo construído no passo anterior e construir arcos adicionais que conectam as decisões para todos os períodos de tempo.

Uma representação do processo de consideração dos modelos de grafos para o modelo  $(x, u)$ , aplicado na cascata da Figura 3.6, é fornecida na Figura 3.11. O processo de obtenção para o modelo  $(x, q, v)$  é análogo.

Os elementos de fluxos em rede assumem os seguintes significados:

- Nós: representam as usinas hidrelétricas para um dado intervalo de tempo.
- Arcos: representam transferências dos recursos hídricos, podendo ser:
  1. Arcos de defluência: Entre a usina  $k$  e a usina  $k + 1$  para um mesmo intervalo de tempo  $t$ .
  2. Arcos de volume: Entre intervalos de tempo  $t$  e  $t + 1$  para uma mesma usina  $k$ .

Vale destacar que apesar das usinas a Fio D'Água não possuírem capacidade de regulação entre dois períodos consecutivos, seus arcos de volume não serão desconsiderados para facilitar a construção e exploração da representação matricial das restrições de conservação de água, como será mostrado na seção 3.2. Detalhes sobre as simplificações que podem ser realizadas para usinas a Fio D'água estão descritos em [62].

---

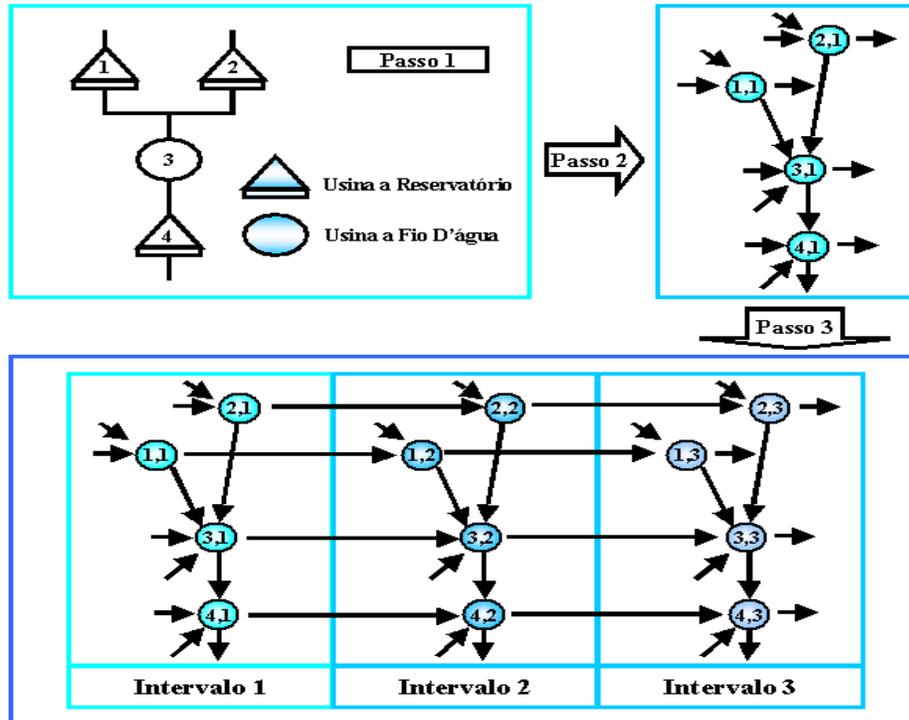


Figura 3.11: Etapas da modelagem matemática para quatro usinas hidrelétricas em cascata e três períodos de tempo.

## 3.2 Representação Matricial

Com intuito de ilustrar a estrutura esparsa da matriz associada às restrições de conservação de fluxo da rede, a rede da Figura 3.11 é utilizada como exemplo.

A equação de balanço dos recursos hídricos de cada usina é dada por (3.3):

$$x_{i,t} = x_{i,t-1} + \left( y_{i,t} + \sum_{k \in \Omega_i} u_{k,t} - u_{i,t} \right) \cdot \Delta t_t, \forall i, t \quad (3.3)$$

Onde:

- $x_{i,t}$ : volume do reservatório da usina  $i$  ao final do intervalo  $t$  em  $hm^3$ .

- $u_{i,t}$ : vazão defluente da usina  $i$  durante o intervalo  $t$  em  $m^3/s$ .
- $y_{i,t}$ : vazão incremental afluyente à usina  $i$  durante o intervalo  $t$  em  $m^3/s$ .
- $\Delta t_t$ : Tamanho do intervalo  $t$  em segundos e dividido por  $10^6$ .
- $\Omega_i$ : conjunto das usinas imediatamente a montante da usina  $i$ .

Uma descrição detalhada da rede obtida pelo processo descrito na Figura 3.11 é dada na Figura 3.12.

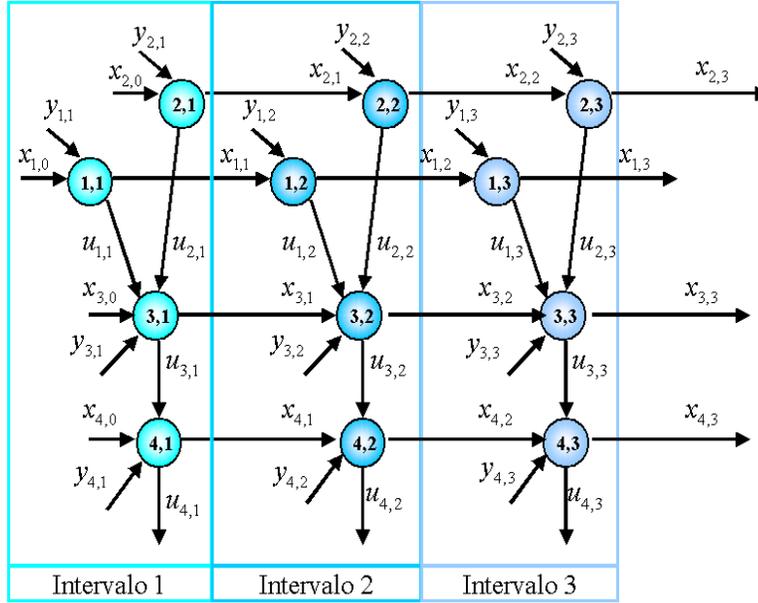


Figura 3.12: Representação da rede exemplo considerando volume  $x_{i,t}$  e vazão defluente  $u_{i,t}$ .

A esta rede é possível associar o seguinte conjunto de equações:

- Período 1:
 
$$\frac{x_{1,1} - x_{1,0}}{\Delta t_1} = y_{1,1} - u_{1,1}$$

$$\frac{x_{2,1} - x_{2,0}}{\Delta t_1} = y_{2,1} - u_{2,1}$$

$$\frac{x_{3,1} - x_{3,0}}{\Delta t_1} = y_{3,1} + u_{1,1} + u_{2,1} - u_{3,1}$$

$$\frac{x_{4,1} - x_{4,0}}{\Delta t_1} = y_{4,1} + u_{3,1} - u_{4,1}$$

- Período 2:

$$\frac{x_{1,2}-x_{1,1}}{\Delta t_2} = y_{1,2} - u_{1,2}$$

$$\frac{x_{2,2}-x_{2,1}}{\Delta t_2} = y_{2,2} - u_{2,2}$$

$$\frac{x_{3,2}-x_{3,1}}{\Delta t_2} = y_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,2} - u_{3,2}$$

$$\frac{x_{4,2}-x_{4,1}}{\Delta t_2} = y_{4,2} + u_{3,2} - u_{4,2}$$

- Período 3:

$$\frac{x_{1,3}-x_{1,2}}{\Delta t_3} = y_{1,3} - u_{1,3}$$

$$\frac{x_{2,3}-x_{2,2}}{\Delta t_3} = y_{2,3} - u_{2,3}$$

$$\frac{x_{3,3}-x_{3,2}}{\Delta t_3} = y_{3,3} + u_{1,3} + u_{2,3} - u_{3,3}$$

$$\frac{x_{4,3}-x_{4,2}}{\Delta t_3} = y_{4,3} + u_{3,3} - u_{4,3}$$

Supondo que os valores de volume inicial  $x_{i,0}$  e afluência  $y_{i,t}$  sejam conhecidos, e reescrevendo o sistema no formato  $Ax = b$ :

- Período 1:

$$\frac{x_{1,1}}{\Delta t_1} + u_{1,1} = \frac{x_{1,0}}{\Delta t_1} + y_{1,1}$$

$$\frac{x_{2,1}}{\Delta t_1} + u_{2,1} = \frac{x_{2,0}}{\Delta t_1} + y_{2,1}$$

$$\frac{x_{3,1}}{\Delta t_1} - u_{1,1} - u_{2,1} + u_{3,1} = \frac{x_{3,0}}{\Delta t_1} + y_{3,1}$$

$$\frac{x_{4,1}}{\Delta t_1} - u_{3,1} + u_{4,1} = \frac{x_{4,0}}{\Delta t_1} + y_{4,1}$$

- Período 2:

$$\frac{x_{1,2}-x_{1,1}}{\Delta t_2} + u_{1,2} = y_{1,2}$$

$$\frac{x_{2,2}-x_{2,1}}{\Delta t_2} + u_{2,2} = y_{2,2}$$

$$\frac{x_{3,2}-x_{3,1}}{\Delta t_2} - u_{1,2} - u_{2,2} + u_{3,2} = y_{3,2}$$

$$\frac{x_{4,2}-x_{4,1}}{\Delta t_2} - u_{3,2} + u_{4,2} = y_{4,2}$$

- Período 3:

$$\frac{x_{1,3}-x_{1,2}}{\Delta t_3} + u_{1,3} = y_{1,3}$$

$$\frac{x_{2,3}-x_{2,2}}{\Delta t_3} + u_{2,3} = y_{2,3}$$

$$\frac{x_{3,3}-x_{3,2}}{\Delta t_3} - u_{1,3} - u_{2,3} + u_{3,3} = y_{3,3}$$

$$\frac{x_{4,3}-x_{4,2}}{\Delta t_3} - u_{3,3} + u_{4,3} = y_{4,3}$$


---

Estas equações podem ser expressas na forma matricial descrita por (3.4).

$$Ax + Su = x_0 + y \quad (3.4)$$

Onde:

$$x = [x_{1,1} \ x_{2,1} \ x_{3,1} \ x_{4,1} \ x_{1,2} \ x_{2,2} \ x_{3,2} \ x_{4,2} \ x_{1,3} \ x_{2,3} \ x_{3,3} \ x_{4,3}]^t;$$

$$u = [u_{1,1} \ u_{2,1} \ u_{3,1} \ u_{4,1} \ u_{1,2} \ u_{2,2} \ u_{3,2} \ u_{4,2} \ u_{1,3} \ u_{2,3} \ u_{3,3} \ u_{4,3}]^t;$$

$$x_0 = \left[ \frac{x_{1,0}}{\Delta t_1} \ \frac{x_{2,0}}{\Delta t_1} \ \frac{x_{3,0}}{\Delta t_1} \ \frac{x_{4,0}}{\Delta t_1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^t;$$

$$y = [y_{1,1} \ y_{2,1} \ y_{3,1} \ y_{4,1} \ y_{1,2} \ y_{2,2} \ y_{3,2} \ y_{4,2} \ y_{1,3} \ y_{2,3} \ y_{3,3} \ y_{4,3}]^t;$$

$$A =$$

Arco Nó	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	$x_{3,1}$	$x_{4,1}$	$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	$x_{3,2}$	$x_{4,2}$	$x_{1,3}$	$x_{2,3}$	$x_{3,3}$	$x_{4,3}$
1,1	$\frac{1}{\Delta t_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2,1	0	$\frac{1}{\Delta t_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3,1	0	0	$\frac{1}{\Delta t_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4,1	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0
1,2	$-\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	0	0	0	0
2,2	0	$-\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	0	0	0
3,2	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	0	0
4,2	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	0
1,3	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0	0
2,3	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0
3,3	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_3}$	0
3,4	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_3}$

$$S =$$

Arco Nó	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$	$u_{4,1}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$	$u_{3,2}$	$u_{4,2}$	$u_{1,3}$	$u_{2,3}$	$u_{3,3}$	$u_{4,3}$
1,1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2,1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3,1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4,1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1,2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2,2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3,2	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0	0	0	0
4,2	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
1,3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
3,3	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
3,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

É interessante observar que o sistema (3.4) possui uma estrutura esparsa bastante particular. Na verdade, as matrizes  $A$  e  $S$  podem ser representadas

por:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_1 & 0 & 0 \\ \hline -B_2 & B_2 & 0 \\ \hline 0 & -B_3 & B_3 \\ \hline \end{array}; S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline M & 0 & 0 \\ \hline 0 & M & 0 \\ \hline 0 & 0 & M \\ \hline \end{array}.$$

$$\text{Onde: } B_i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{1}{\Delta t_i} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\Delta t_i} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t_i} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t_i} \\ \hline \end{array} \text{ e } M = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Uma observação importante é que independentemente do número de intervalos considerados a matriz  $A$  continuará sendo uma matriz escada por blocos  $B_i$  e a matriz  $S$  uma matriz diagonal por blocos  $M$ .

A representação matricial do modelo  $(x, u)$  é dada por (3.4), ou ainda, (3.5):

$$Ax + Su = b \tag{3.5}$$

Aplicando a equação (3.1) em (3.5) é possível obter a representação matricial para o modelo  $(x, q, v)$ :

$$Ax + Sq + Sv = b \tag{3.6}$$

Esta representação matricial equivale a considerar o grafo dado pela Figura 3.13.

A exploração da estrutura esparsa das matrizes  $A$  e  $S$ , tanto do modelo  $(x, u)$  como do modelo  $(x, q, v)$ , será imprescindível no desenvolvimento de métodos de pontos interiores eficientes. Este assunto será abordado no Capítulo 4.

É importante observar, também, que a estrutura esparsa descrita anteriormente foi obtida ao se numerar as usinas a partir da usina mais a montante até a última usina a jusante na cascata. Depois foi necessário agrupar os arcos de acordo com o intervalo de tempo a que pertencem.

Caso os arcos fossem ordenados de acordo com a usina a que pertencem, então, as matrizes  $A$  e  $S$  seriam dadas por:

$A =$

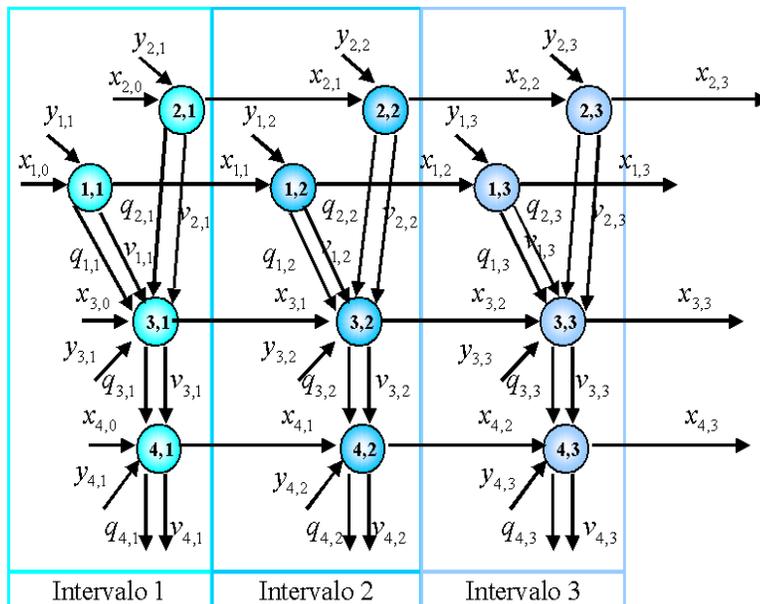


Figura 3.13: Representação da rede exemplo considerando volume  $x_{i,t}$ , vazão turbinada  $q_{i,t}$  e vertida  $v_{i,t}$ .

Arco Nó	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$x_{3,3}$	$x_{4,1}$	$x_{4,2}$	$x_{4,3}$
1,1	$\frac{1}{\Delta t_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,2	$-\frac{1}{\Delta t_2}$	$\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,3	0	$-\frac{1}{\Delta t_3}$	$\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2,1	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0
2,2	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_2}$	$\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	0	0	0	0
2,3	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_3}$	$\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0	0	0	0	0
3,1	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_1}$	0	0	0	0	0
3,2	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_2}$	$\frac{1}{\Delta t_2}$	0	0	0	0
3,3	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_3}$	$\frac{1}{\Delta t_3}$	0	0	0
4,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\Delta t_1}$	0	0
4,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_2}$	$\frac{1}{\Delta t_2}$	0
4,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{\Delta t_3}$	$\frac{1}{\Delta t_3}$

$S =$

Arco Nó	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$u_{3,3}$	$u_{4,1}$	$u_{4,2}$	$u_{4,3}$
<b>1,1</b>	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1,2</b>	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>1,3</b>	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>2,1</b>	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>2,2</b>	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
<b>2,3</b>	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
<b>3,1</b>	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0
<b>3,2</b>	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0
<b>3,3</b>	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0
<b>4,1</b>	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0
<b>4,2</b>	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0
<b>4,3</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1

Observe que com esta nova ordenação dos elementos das matrizes  $A$  e  $S$ , as mesmas passam a possuir a seguinte estrutura esparsa:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline R & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & R & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R \\ \hline \end{array}; S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & 0 & 0 \\ \hline -I & -I & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & -I & I \\ \hline \end{array}.$$

Onde:  $I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$  e  $R = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{\Delta t_1} & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{\Delta t_2} & \frac{1}{\Delta t_2} & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{\Delta t_3} & \frac{1}{\Delta t_3} \\ \hline \end{array}.$

A desvantagem desta ordenação, por usina, é que a estrutura esparsa da matriz  $S$  é tal que a ordenação dos blocos de matrizes identidade  $I$  depende do grafo associado a cascata formada pelas usinas escolhidas. Ou seja, a estrutura esparsa da matriz  $S$ , para esta ordenação, não independe das usinas escolhidas. Portanto, a primeira ordenação apresentada é a que será utilizada na dedução de métodos de pontos interiores.

Além das equações de balanço de água, para se obter um modelo mais completo é necessário considerar:

1. A vazão defluente  $u_{i,t}$  é igual a soma do volume  $q_{i,t}$  turbinado mais o volume  $v_{i,t}$  vertido.
2. Além da geração de energia elétrica, os reservatórios das usinas têm compromissos como: manutenção da navegabilidade dos rios, irrigação,

proteção contra cheias, dentre outros. Portanto, é necessário estabelecer:

- O nível mínimo  $\underline{x}_{i,t}$  e o nível máximo  $\bar{x}_{i,t}$  do reservatório da usina  $i$  no tempo  $t$ .
  - O atendimento de parte da demanda de energia elétrica, estabelecendo um volume mínimo  $\underline{q}_{i,t}$  e um volume máximo  $\bar{q}_{i,t}$  de turbinagem da usina  $i$  no tempo  $t$ .
  - O volume mínimo  $\underline{u}_{i,t}$  e o volume máximo  $\bar{u}_{i,t}$  de defluência da usina  $i$  no tempo  $t$ , garantindo a utilização dos recursos hídricos para outras atividades além da geração de eletricidade.
3. Para o vertimento não são estabelecidos limites, pois os vertedouros dos reservatórios das usinas são projetados para suportar uma vazão associada a maior cheia que ocorre a cada dez mil anos (a cheia decamilenar). Portanto, o limite máximo de vertimento  $\bar{v}_{i,t}$  é um valor muito grande e que pode ser desprezado sem maiores prejuízos na obtenção de soluções do modelo considerado.

As considerações anteriores são expressas por meio das equações dadas de (3.7) até (3.11).

$$u_{i,t} = q_{i,t} + v_{i,t}, \forall i, t \quad (3.7)$$

$$\underline{x}_{i,t} \leq x_{i,t} \leq \bar{x}_{i,t}, \forall i, t \quad (3.8)$$

$$\underline{u}_{i,t} \leq u_{i,t} \leq \bar{u}_{i,t}, \forall i, t \quad (3.9)$$

$$\underline{q}_{i,t} \leq q_{i,t} \leq \bar{q}_{i,t}, \forall i, t \quad (3.10)$$

$$v_{i,t} \geq 0, \forall i, t. \quad (3.11)$$

Onde:

---

- $u_{i,t}, \underline{u}_{i,t}, \bar{u}_{i,t} [m^3/s]$  : vazão defluente e seus limites mínimo e máximo para a usina  $i$  no tempo  $t$ , respectivamente.
- $q_{i,t}, \underline{q}_{i,t}, \bar{q}_{i,t} [m^3/s]$ : vazão turbinada e seus limites mínimo e máximo para a usina  $i$  no tempo  $t$ , respectivamente.
- $v_{i,t} [m^3/s]$ : vazão vertida pela usina  $i$  no tempo  $t$ .
- $x_{i,t}, \underline{x}_{i,t}, \bar{x}_{i,t} [hm^3]$  : volume do seu reservatório e seus limites mínimo e máximo para a usina  $i$  no tempo  $t$ , respectivamente.

Para o modelo  $(x, u)$ , a defluência  $u_{i,t}$  é uma variável, tal que tanto a turbinagem  $q_{i,t}$  como o vertimento  $v_{i,t}$  se tornam funções de  $u_{i,t}$ :

$$q_{i,t} = \text{Min}\{u_{i,t}, \bar{q}_{i,t}\}, \forall i, t \quad (3.12)$$

$$v_{i,t} = \text{Max}\{u_{i,t} - \bar{q}_{i,t}, 0\}, \forall i, t \quad (3.13)$$

Com (3.12) e (3.13) é possível observar que as variáveis  $q_{i,t}$  e  $v_{i,t}$  são determinadas a partir dos valores de  $u_{i,t}$ . Portanto, com (3.12) e (3.13) as restrições (3.10) e (3.11) podem ser eliminadas da formulação  $(x, u)$  do problema, cuja forma matricial passa a ser dada por (3.14).

$$\begin{cases} Ax + Su = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \end{cases} \quad (3.14)$$

Para construir a modelagem com volume, turbinagem e vertimento, basta considerar as equações (3.6), (3.8), (3.10) e (3.11):

$$\begin{cases} Ax + Sq + Sv = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{q} \leq q \leq \bar{q} \\ v \geq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.3 Função Objetivo

Para completar a modelagem matemática é necessário considerar a função objetivo que visa minimizar o custo da complementação termelétrica. Para tanto, é definida a função de produção de energia de uma usina hidrelétrica  $i$  no tempo  $t$ :

$$p_{i,t} = k_i h_{l,i,t} q_{i,t}. \quad (3.16)$$

Onde:  $p_{i,t}$  é a potência média produzida pela usina  $i$  durante o intervalo de tempo  $t$  (MW),  $k_i$  é constante de produtividade específica da usina  $i$  ( $\frac{MW}{(m^3/s)m}$ ),  $h_{l,i,t}$  é a altura de queda líquida (m) e  $q_{i,t}$  é a vazão turbinada ( $m^3/s$ ). Mais detalhes da obtenção da função (3.16) podem ser vistos em [27]. A produtividade específica da usina  $k_i$  mede o rendimento médio da unidade geradora. Já a altura de queda líquida é obtida a partir da queda bruta  $h_{bi,t}$  menos as perdas de carga  $pc_{i,t}$ :

$$h_{l,i,t} = h_{bi,t} - pc_{i,t}. \quad (3.17)$$

As perdas de carga  $pc_{i,t}$  representam a perda devido ao atrito da água com o duto do canal de adução que sai do reservatório e vai até a turbina, como ilustrado na Figura 3.1. A perda de carga pode ser representada de três formas:

- Como uma percentagem da altura de queda efetiva  $h_{ef}$ , que é a menor queda sob a qual se obtém a potência efetiva  $p_{ef}$ , da usina:  $pc_{i,t} = ch_{efi,t}$ .
- Como um valor constante:  $pc_{i,t} = c$ .
- Como uma função da turbinagem:  $pc_{i,t} = cq_{i,t}^2$ .

A altura de queda bruta, ilustrada na Figura 3.4, é definida como:  $h_{bi,t} = \phi_i(x_{i,t}) - \theta_i(u_{i,t})$ .

Onde:  $\phi_i(x_{i,t})$  é um polinômio do quarto grau que representa a relação entre a cota de montante e o volume do reservatório  $x_{i,t}$  da usina  $i$  e  $\theta_i(u_{i,t})$  também é um polinômio do quarto grau que a partir da defluência  $u_{i,t}$  fornece o valor da cota do canal de fuga (ou de jusante) da usina  $i$ .

---

Uma observação importante é que a função de produção hidráulica é empregada em intervalos de tempo discretos. Porém, as variáveis de volume  $x_{i,t}$  representam o volume armazenado no reservatório ao final do intervalo.

Nos trabalhos anteriores à [27], como [20, 33, 62], foi adotada a cota de montante relativa apenas ao volume do final do período (ou volume instantâneo), como ilustrado na Figura 3.14.

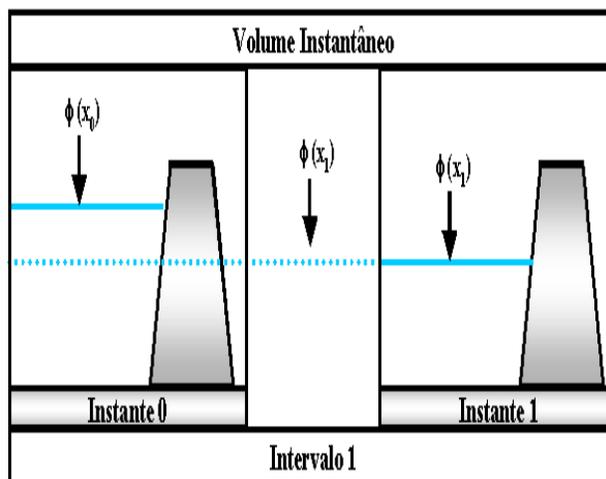


Figura 3.14: Contabilizando a cota de montante usando volume do final de um intervalo.

De acordo com [27], o cálculo da cota de montante do reservatório será mais realístico se esta cota for calculada utilizando-se a média entre os volumes de início e fim do período (ou volume médio). A representação desta proposta é dada na Figura 3.15.

Assim, a altura de queda bruta a ser utilizada será dada por:

$$h_{bi,t} = \phi_i\left(\frac{x_{i,t-1} + x_{i,t}}{2}\right) - \theta_i(u_{i,t}). \quad (3.18)$$

Deve ser considerado, também, o fenômeno do afogamento. Este fenômeno ocorre em usinas da mesma bacia e que estão relativamente próximas. O afogamento é tal que valor da cota do canal de fuga de uma usina passa a depender do volume do reservatório da usina diretamente à jusante. Exemplos de usinas do sistema elétrico brasileiro em que ocorre o afogamento estão na Tabela 3.2.

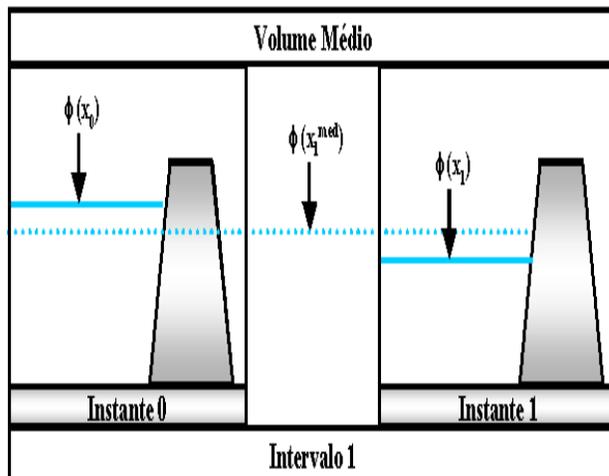


Figura 3.15: Contabilizando a cota de montante usando volume médio de um intervalo.

Usina Afogada	Usina a jusante
São Simão	Ilha Solteira
Foz do Areia	Segredo
Segredo	Salto Santiago

Tabela 3.2: Algumas usinas afogadas no sistema elétrico brasileiro.

Uma ilustração do afogamento entre as usinas Foz do Areia, Segredo e Salto Santiago é fornecida na Figura 3.16.

Para determinar a cota de jusante de usinas com afogamento do canal de fuga, são ajustados polinômios Defluência x Cota do Canal de Fuga para diferentes cotas do reservatório imediatamente à jusante da usina afogada. Assim, uma usina afogada possui mais de um polinômio para a cota do canal de fuga, sendo cada um desses polinômios associados a uma cota do reservatório a jusante. A cota do canal de fuga destas usinas é obtida por meio de interpolação de polinômios, de acordo com o nível da água do reservatório que provoca o afogamento.

Como exemplo, considere que a usina de Foz do Areia esteja afogada pela usina de Segredo, e que a usina de Segredo tem reservatório com cota  $z$ , tal que  $z_{ref}^k < z < z_{ref}^{k+1}$ . Para as duas cotas de referência estão associados dois

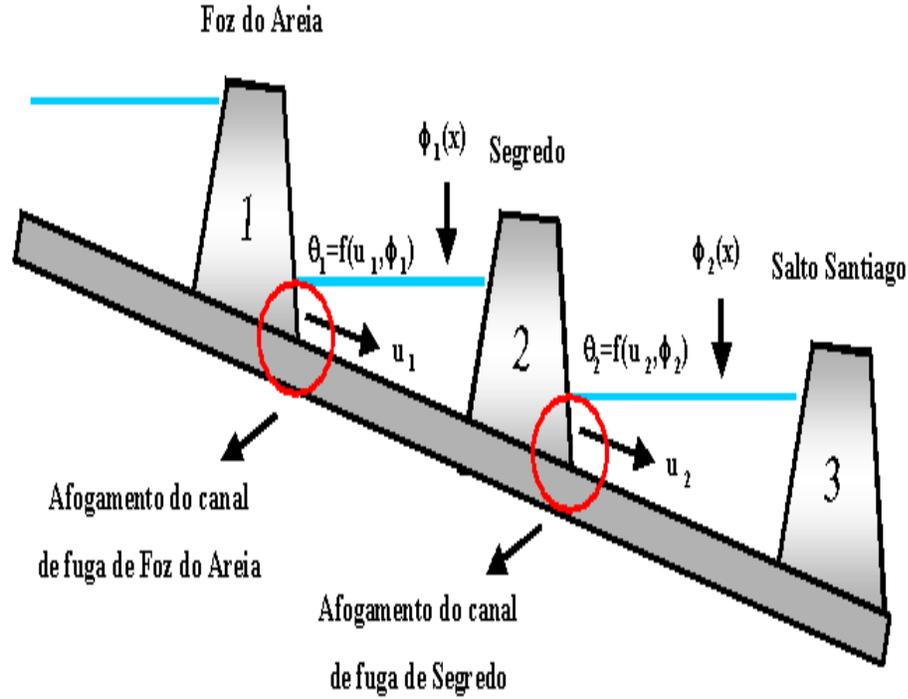


Figura 3.16: Afogamento entre usinas do rio Iguaçu.

polinômios  $\theta_1^k$  e  $\theta_1^{k+1}$ , respectivamente. A equação (3.17) fornece o polinômio do canal de fuga da usina afogada  $\theta_1(u_{i,t})$  via interpolação dos polinômios de referência:

$$\theta_1(u_{i,t}) = \theta_k + \frac{z - z_{ref}^k}{z_{ref}^{k+1} - z_{ref}^k} (\theta_1^{k+1} - \theta_1^k). \quad (3.19)$$

O último aspecto que falta ser analisado na equação (3.19) é a turbinagem  $q_{i,t}$ . É interessante observar que o valor de  $q_{i,t}$  é limitado pela capacidade de turbinagem ou engolimento máximo da usina,  $\bar{q}_{i,t}$ . Para calcular  $\bar{q}_{i,t}$ , pode-se utilizar uma representação em que  $\bar{q}_{i,t}$  é uma função da altura de queda líquida  $h_{li,t}$  como dado na expressão (3.20):

$$\bar{q}_{i,t} = \sum_{j=1}^{N_{c,i}} \left( N_{j,i} q_{efj,i,t} \left( \frac{h_{li,t}}{h_{efj,i,t}} \right)^\alpha \right). \quad (3.20)$$

Onde:  $\bar{q}_{i,t}$  é a turbinagem máxima da usina,  $N_{c,i}$  é o número de conjuntos de unidades geradoras da usina  $i$ ,  $N_{j,i}$  é o número de unidades geradoras do conjunto  $j$  da usina  $i$ ,  $q_{efj,i,t}$  é a vazão turbinada de cada conjunto gerador  $j$  que submetida à queda efetiva produz a potência efetiva  $p_{efj,i,t}$ ,  $h_{efj,i,t}$  é a menor queda líquida sob a qual o conjunto  $j$ , em operação, desenvolve a sua potência efetiva  $p_{efj,i,t}$ ,  $p_{efj,i,t}$  é a máxima potência ativa possível de ser gerada, em regime permanente, para toda unidade geradora pertencente ao conjunto  $j$ ,  $\alpha$  é um expoente dado por:

$$\alpha = \begin{cases} 0.5 & \text{se } h_{li,t} < h_{efi,t} \text{ e Turbina}=(\text{Francis ou Pelton}) \\ 0.2 & \text{se } h_{li,t} < h_{efi,t} \text{ e Turbina}=(\text{Kaplan}) \\ -1.0 & \text{se } h_{li,t} \geq h_{efi,t}. \end{cases} \quad (3.21)$$

A expressão (3.20) tem uma propriedade interessante. Para calcular a turbinagem máxima  $\bar{q}_{i,t}$  é necessário utilizar o valor da altura líquida  $h_{li,t}$ . Esta, por sua vez, depende, como dado nas equações (3.17) e (3.18), dos polinômios de montante (e portanto de  $x_{i,t}$ ) e de jusante (e de  $u_{i,t}$ ). Porém,  $u_{i,t}$  está relacionada com  $q_{i,t}$  por meio da equação (3.7). E por sua vez  $q_{i,t}$  é decidida de acordo com  $\bar{q}_{i,t}$ .

Uma segunda representação considera que a turbinagem máxima é constante, para qualquer altura de queda líquida  $h_{li,t}$ , e igual a turbinagem efetiva, como dado na expressão (3.22):

$$\bar{q}_{i,t} = \sum_{j=1}^{N_{c,i}} (N_{j,i} q_{efj,i,t}). \quad (3.22)$$

Assim, a turbinagem máxima  $\bar{q}_{i,t}$  pode ser:

- Turbinagem Máxima Variável: Considera um procedimento iterativo para o cálculo da turbinagem máxima  $\bar{q}_{i,t}$ . Este procedimento está descrito e ilustrado em [27].
- Turbinagem Máxima Constante: Considera a turbinagem efetiva  $q_{efi,t}$  como a turbinagem máxima, como adotado por [21, 23, 63, 81].

Para completar o modelo, é necessário estabelecer a relação entre a função de produção hidráulica  $p_{i,t}$  e a complementação termelétrica:

---

$$G_t = D_t - \sum_{i=1}^I p_{i,t} \quad (3.23)$$

Onde:  $D_t$  é a demanda de energia elétrica no intervalo  $t$  em MW médio<sup>3</sup>,  $p_{i,t}$  é a função de produção hidráulica da usina  $i$  no tempo  $t$  em MW médio,  $G_t$  é a complementação termelétrica no período  $t$  em MW médio.

Associada à geração termelétrica  $G_t$  existe um custo de operação destas usinas. O custo de operação de um sistema termelétrico é parametrizado pela demanda atendida, através de uma curva  $\Psi(G_t)$ , aproximada por polinômios do segundo grau, resultante do despacho econômico do parque termelétrico [13, 27, 33]. A Figura 3.17 ilustra esta curva <sup>4</sup>.

Para completar a função objetivo, pode se supor a existência de uma taxa de juros. Assim, o custo da geração termelétrica em um intervalo  $t$  deve ser associado a um coeficiente de valor presente  $\lambda_t$ .

A expressão (3.25) reúne as equações (3.16), (3.17), (3.18) e (3.23), mais o coeficiente de valor presente  $\lambda_t$ , fornecendo a função objetivo que minimiza a complementação termelétrica:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T \lambda_t \Psi \left( \left( D_t - \sum_{i=1}^I k_i \left( \phi_i \left( \frac{x_{i,t-1} + x_{i,t}}{2} \right) - \theta_i(u_{i,t}) - pc_{i,t} \right) q_{i,t} \right) \right), \quad (3.25)$$

A partir da função objetivo (3.25) e considerando todas as restrições do problema, a formulação do modelo matemático do MOUI se apresenta como segue:

---

<sup>3</sup>A unidade para expressar energia neste trabalho será o MW médio. Em um dado intervalo de tempo  $\Delta_t$  a energia produzida por uma fonte geradora de potência de 1 MW é 1 MW médio. Como a geração térmica é expressa em MW médio, e os coeficientes da função de custo térmico consideram a geração dada em  $MWh$ , é necessário realizar uma conversão de unidades. A conversão de uma geração  $G_t$ , em MW médio, produzida ao longo de um intervalo com  $\Delta t$  segundos para  $MWh$  é dada por:

$$G_t^{MWh} = \frac{\Delta t}{3600} G_t^{MW} \quad (3.24)$$

<sup>4</sup>A Figura 3.17 foi construída em dois passos. O primeiro foi considerar os dados das usinas do parque termelétrico brasileiro cujas informações de potência, custo em reais por  $MWh$  e MW médio constam no Apêndice E. Depois, foi encontrada a quadrática que melhor se ajustava aos dados considerando as usinas com custo de geração de até  $R\$200/MWh$ .

---

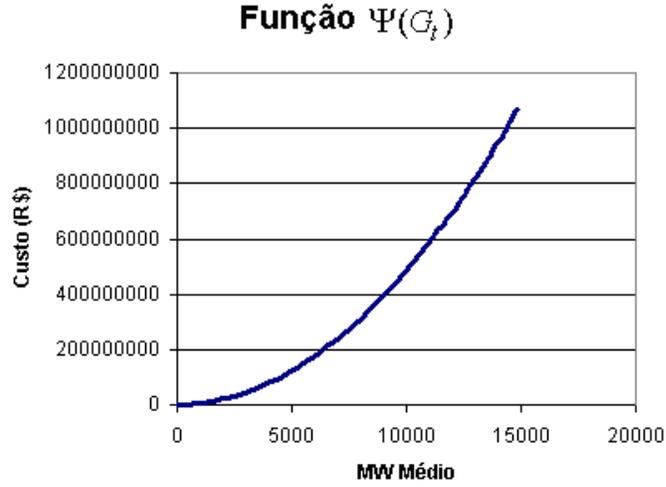


Figura 3.17: Curva da função de custo de operação para o parque termelétrico brasileiro.

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T \lambda_t \Psi \left( \left( D_t - \sum_{i=1}^I k_i \left( \phi_i \left( \frac{x_{i,t-1} + x_{i,t}}{2} \right) - \theta_i(u_{i,t}) - p_{C_{i,t}} q_{i,t} \right) \right) \right), \quad (3.26)$$

s.a:

$$x_{i,t} = x_{i,t-1} + \left( y_{i,t} + \sum_{k \in \Omega_i} u_{k,t} - u_{i,t} \right) \Delta t_t, \quad \forall i, t \quad (3.27)$$

$$u_{i,t} = q_{i,t} + v_{i,t} \quad (3.28)$$

$$\underline{x}_{i,t} \leq x_{i,t} \leq \bar{x}_{i,t}, \quad \forall i, t \quad (3.29)$$

$$\underline{q}_{i,t} \leq q_{i,t} \leq \bar{q}_{i,t}, \quad \forall i, t \quad (3.30)$$

$$v_{i,t} \geq 0, \forall i, t \quad (3.31)$$

Onde:

- $T$ : número de intervalos de tempo.
- $I$ : número de usinas hidrelétricas do sistema.
- $\lambda_t$ : coeficiente de valor presente para o intervalo  $t$ .
- $D_t$ : mercado a ser atendido durante o período  $t$  em  $MW$  médio.
- $\Psi$ : Função de custo resultante do despacho termelétrico em  $R\$$ .
- $k_i$ : Produtibilidade específica da usina  $i$  em  $\frac{MW}{(m^3s)m}$ .
- $\phi_i(x)$ : polinômio da cota de montante do reservatório da usina  $i$  em  $m$ .
- $\theta_i(u)$ : polinômio da cota de jusante do canal de fuga da usina  $i$  em  $m$ .
- $pc_{i,t}$ : perda de carga hidráulica da usina  $i$  durante o intervalo  $t$  em  $m$ .
- $x_{i,t}$ : volume da usina  $i$  no final do intervalo  $t$  em  $hm^3$ .
- $u_{i,t}$ : vazão defluente da usina  $i$  durante o intervalo  $t$  em  $\frac{m^3}{s}$ .
- $q_{i,t}$ : vazão turbinada pela usina  $i$  durante o intervalo  $t$  em  $\frac{m^3}{s}$ .
- $v_{i,t}$ : vazão vertida pela usina  $i$  durante o intervalo  $t$  em  $\frac{m^3}{s}$ .
- $y_{i,t}$ : vazão incremental afluyente à usina  $i$  durante o intervalo  $i$  em  $\frac{m^3}{s}$ .
- $\Omega_i$ : conjunto das usinas imediatamente a montante da usina  $i$ .
- $\Delta t_t$ : tamanho do intervalo  $t$  em  $s$  dividido por  $10^6$ .

De posse do MOUI, o modelo  $(x, u)$  pode ser obtido, resultando nas seguintes características:

---

- O valor da turbinagem  $q_{i,t}$  e do vertimento  $v_{i,t}$  são determinados a partir do valor de  $u_{i,t}$  de acordo com as expressões (3.32) e (3.33), respectivamente:

$$q_{i,t} = \text{Min}\{u_{i,t}, \bar{q}_{i,t}\}, \forall i, t. \quad (3.32)$$

$$v_{i,t} = \text{Max}\{u_{i,t} - \bar{q}_{i,t}, 0\}, \forall i, t. \quad (3.33)$$

- Os limites de  $q_{i,t}$  e  $v_{i,t}$ , são considerados implicitamente através das expressões (3.32) e (3.33), respectivamente. Assim, as restrições (3.30) e (3.31) podem ser desconsideradas no modelo  $(x, u)$ .
- A função de produção hidráulica (3.16) depende de  $q_{i,t}$  e, portanto é modificada para:

$$p_{i,t} = k_i h_{l,i,t} \text{Min}\{u_{i,t}, \bar{q}_{i,t}\}. \quad (3.34)$$

A expressão (3.34) confere as seguintes características à função de produção hidráulica do modelo  $(x, u)$  [20, 33]:

- A função é crescente em relação a  $u_{i,t}$  para  $u_{i,t} < \bar{q}_{i,t}$ .
  - A função é constante, ou levemente decrescente em relação a  $u_{i,t}$  para  $u_{i,t} > \bar{q}_{i,t}$ , devido a influência do vertimento no canal de fuga (perda de altura de queda).
  - A produtividade das usinas aumenta com o volume armazenado no reservatório, pois aumenta a altura de queda (também chamado de efeito cota).
  - A função de produção hidráulica dada por (3.34) é não diferenciável no ponto  $u_{i,t} = \bar{q}_{i,t}$  quando o limite da turbinagem é atingido. Isto ocorre, pois a expressão (3.32) possui o comportamento ilustrado na Figura 3.18.
-

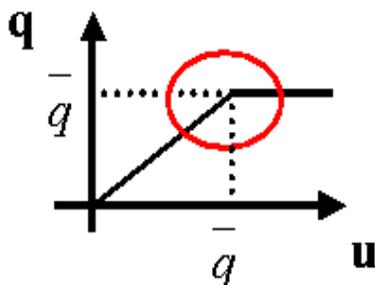


Figura 3.18: Função  $q_{i,t} = \text{Min}\{u_{i,t}, \bar{q}_{i,t}\}$  e seu ponto de quina.

Uma denominação alternativa, mais simples, para o ponto de não diferenciabilidade, é se referir ao mesmo como ponto de quina. No ponto de quina as derivadas de primeira e segunda ordem da função objetivo não existem.

O tratamento das quinas do modelo  $(x, u)$  é crucial no emprego dos métodos de pontos interiores, pois estes precisam do valor do gradiente e da Hessiana da função objetivo. As opções de tratamento deste problema que consideradas neste trabalho foram:

1. A obtenção do passo da direção de descida do método de solução deverá contemplar quinas, utilizando busca unidimensional especialmente adaptada. Esta abordagem foi utilizada por [23, 27, 63, 81]. Testes computacionais utilizando métodos de pontos interiores com busca unidimensional [34] não obtiveram bom desempenho.
2. Para o cálculo das derivadas primeira e segunda da função objetivo, desconsiderar o ponto de quina, utilizando  $q_{i,t} = u_{i,t}$  na função de produção hidráulica da Equação (3.34). O modelo  $(x, u)$  com esta consideração foi denominado de modelo  $(x, u)$  modificado ou simplesmente  $(x, u)m$ .

Outras opções para o tratamento das quinas, mas que não foram testadas, são: a suavização da expressão (3.32) ou a consideração de variáveis booleanas.

Apesar da necessidade de tratamento das quinas, a escolha do modelo  $(x, u)$  em trabalhos anteriores foi motivada, principalmente, por um esquema

---

de aproveitamento muito eficiente da estrutura de fluxo em rede do problema, baseada em uma representação particular das bases (árvores), como descrito em [23, 81].

A Figura 3.19 fornece uma comparação entre os modelos  $(x, u)$  e  $(x, u)m$ .

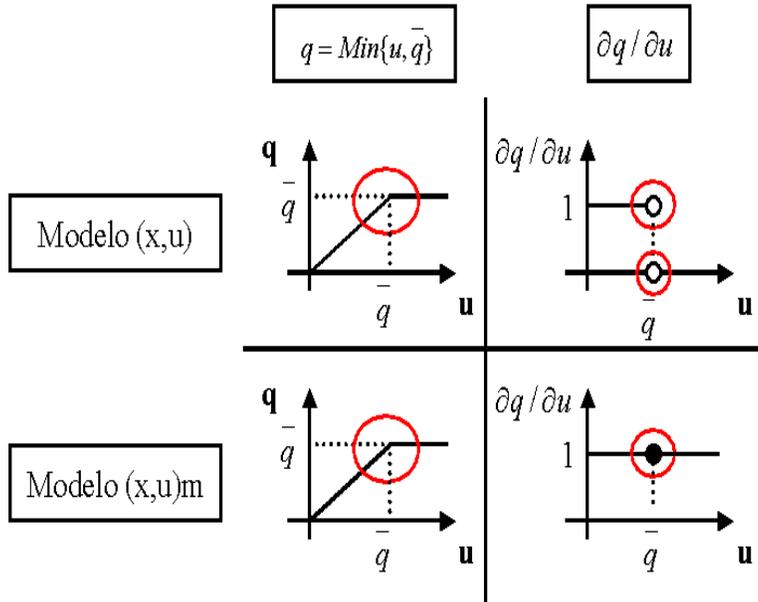


Figura 3.19: Comparação entre as abordagens dos modelos  $(x, u)$  e  $(x, u)m$ .

A formulação matricial dos modelos  $(x, u)$  e  $(x, u)m$  é obtida a partir das restrições (3.14) e a função objetivo (3.26), resultando em (3.35):

$$\begin{cases} \text{Min } f(x, u) \\ Ax + Su = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \end{cases} \quad (3.35)$$

Uma segunda derivação do MOUI fornece o modelo  $(x, q, v)$ .

A principal vantagem do modelo  $(x, q, v)$  é eliminar o problema de não-diferenciabilidade oferecido pela expressão (3.32). A desvantagem, porém, é que isto ocasiona um aumento de 50% no número de variáveis, aumentando o esforço computacional por iteração do método de resolução a ser empregado.

Uma modificação do modelo  $(x, q, v)$ , inspirada pelo artigo [66], é que os valores iniciais de  $q_{i,t}$  podem desconsiderar os limites  $\bar{q}_{i,t}$ . Isto pode ser

realizado, pois o ponto inicial do método de pontos interiores só precisa ser interior [97]. Assim, para garantir a factibilidade da solução final, para cada iteração do MPI, a variável  $q_{i,t}$  não pode exceder seu valor  $\bar{q}_{i,t}$ . Portanto, para uma dada iteração do método de resolução, é efetuada a atribuição dada por (3.36):

$$q_{i,t} > \bar{q}_{i,t} \Rightarrow \begin{cases} v_{i,t} = q_{i,t} - \bar{q}_{i,t} \\ q_{i,t} = \bar{q}_{i,t} \end{cases} \quad (3.36)$$

O modelo  $(x, q, v)$  com esta consideração é denominado de modelo  $(x, q, v)m$ .

A partir das restrições (3.15) e da função objetivo (3.26), a formulação matricial dos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$  é dada por (3.37).

$$\begin{cases} \text{Min } f(x, q, v) \\ Ax + Sq + Sv = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{q} \leq q \leq \bar{q} \\ v \geq 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Uma observação importante é que a modificação que resulta no modelo  $(x, q, v)m$  visa acelerar a convergência do modelo  $(x, q, v)$ , ao passo que a modificação contida no modelo  $(x, u)m$  visa garantir a obtenção de uma solução.

---

# Capítulo 4

## Métodos de Pontos Interiores para o Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas

### 4.1 Introdução

Historicamente, as primeiras técnicas aplicadas à resolução do MOUI que considera afluência determinística, foram técnicas de programação não-linear [52, 55]. Devido, porém, as grandes dimensões que o MOUI pode assumir, surgiram trabalhos que exploram a estrutura de fluxos em redes do problema [89, 23, 63, 38, 81]. A partir dos anos 90, os métodos de pontos interiores começam a ser aplicados à resolução do MOUI [84, 74, 75, 36, 67, 96, 60, 25].

Existem diversas formas de se utilizar o MOUI, que é um modelo de otimização determinístico, com o objetivo de se obter uma política operativa eficiente para o planejamento da operação energética, que é um problema estocástico devido à incerteza sobre as vazões futuras. Uma alternativa é a técnica de cenários, onde a decisão tomada é obtida ao se ponderar as soluções ótimas do MOUI de cada cenário pela probabilidade de ocorrência [17, 36]. Outra alternativa é a metodologia proposta por Nabona em [74], que se baseia em um modelo de fluxo multiproduto, onde cada produto é representado por uma quantidade de água, à qual está associada uma determinada probabilidade de ocorrência. Esta abordagem pode ser estendida para considerar fornecimento de diversos tipos de combustível para as usinas térmicas ou mesmo representar conjuntamente a rede de fornecimento de combustível

das térmicas com a rede hidráulica [25, 75]. Uma outra alternativa, que vem sendo pesquisada na Unicamp, é aquela que utiliza o MOUI para o cenário de vazões futuras mais provável, obtido por meio de um modelo de previsão de vazões [64].

Em aplicações de curto prazo, onde as vazões podem ser consideradas determinísticas, o MOUI pode ser utilizado em conjunto com as restrições de transmissão representadas por um modelo linearizado da rede elétrica [36, 38, 60], ou com um modelo não-linear da rede elétrica [96]. O MOUI tem sido também aplicado na coordenação hidrotérmica de curto prazo que considera reserva girante, restrições de rampa e alocação de unidades térmicas, resultando em um problema linear ou quadrático inteiro misto [39, 66, 90, 101].

Em relação aos trabalhos anteriores, cabe observar que os métodos de pontos interiores nos últimos anos têm sido empregados com sucesso na resolução de problemas relacionados ao MOUI [60, 66, 67, 84, 96]. Porém, nenhum destes trabalhos considera uma função objetivo não-linear. Os artigos [66, 67, 84] consideram uma aproximação linear para a função de produção hidráulica. Já [60, 96] consideram que a turbinagem pode ser aproximada por uma função quadrática da potência gerada. De todos os trabalhos acerca do MOUI analisados, o único que considera a rede hidráulica e a rede elétrica com modelo não-linear na mesma formulação é um método de pontos interiores [96].

Além das observações anteriores para definir o desenvolvimento de um método de pontos interiores, para a abordagem a ser adotada nesta tese é necessário considerar três questões:

- A resolução do MOUI utilizando a função de produção hidráulica não-linear, tal que a função objetivo seja a mais fiel possível ao comportamento real das usinas.
- Explorar a estrutura esparsa decorrente da representação das restrições de conservação de água via matriz de incidência nó-arco, dado que o problema é de grande porte.
- Como o MOUI é um problema não-convexo, o MPI deve ser capaz de lidar com situações em que a Hessiana da função objetivo não é definida positiva.

A resolução adequada da primeira questão depende do procedimento adotado para resolver a terceira questão. O método de pontos interiores desenvolvido nesta tese se baseou na abordagem proposta por [3, 14] para lidar

---

com o problema de que a Hessiana da função objetivo do MOUI não é definida positiva em alguns pontos do espaço de busca [33]. Esta abordagem consiste em somar um termo de regularização para garantir que a Hessiana seja sempre definida positiva. Detalhes serão dados na seção 4.2.

Para solucionar a segunda questão foi utilizada a metodologia de exploração de estrutura esparsa descrita em [48] que foi adaptada para a estrutura do MOUI, como descrito na Seção 4.3.

## 4.2 Métodos de Pontos Interiores

Historicamente, o desenvolvimento dos métodos de pontos interiores teve grande impulso devido a Karmarkar [59], e aos bons resultados obtidos em [1]. Hoje em dia, os métodos de pontos interiores para programação linear estão bem estabelecidos tanto em termos de fundamentação teórica [49, 97, 92], quanto prática [45, 68, 77], existindo uma série de códigos de boa qualidade disponíveis [97].

Em relação ao desenvolvimento de MPis para problemas de programação não-linear, os trabalhos de Vanderbei e Gondzio apresentam resultados de destaque. Vanderbei resolveu uma grande variedade de problemas com funções objetivos e restrições não-lineares, e os comparou com outras abordagens como gradiente reduzido combinado com método quase-newton do MINOS [73] e uma combinação de lagrangeano aumentado com região de confiança e gradiente projetado do LANCELOT [30], demonstrando a robustez e eficiência dos MPis [94]. Em [15], as mesmas conclusões foram obtidas quando os MPis foram comparados com os pacotes SNOPT [42, 43], que utiliza programação quadrática sequencial combinada com gradiente reduzido, e KNITRO [19], que utiliza método de pontos interiores mais região de confiança e programação quadrática sequencial. Detalhes sobre o trabalho desenvolvido por Vanderbei na página: [http://www.princeton.edu/~rvdb/techreps\\_pdf.html](http://www.princeton.edu/~rvdb/techreps_pdf.html).

Já Gondzio tem aplicações de MPis em problemas não lineares e de grande porte [47, 46]. Em [46], Gondzio consegue resolver problemas não-lineares com milhões de variáveis usando MPI e computação paralela, obtendo desempenho superior ao CPLEX. No trabalho [46], Gondzio resolve um problema não-linear expressivamente de grande porte, com mais de um bilhão de variáveis, demonstrando o potencial dos MPis. Detalhes sobre o trabalho desenvolvido por Gondzio na página: <http://www.maths.ed.ac.uk/>

---

[~gondzio/reports/Welcome.html](http://gondzio/reports/Welcome.html).

A eficiência de um MPI depende da exploração da estrutura esparsa do problema em questão. Para tanto, existem duas abordagens de dedução de um MPI.

A primeira abordagem consiste nas seguintes etapas:

1. Construir o lagrangeano associado ao problema.
2. Obter as condições de otimalidade.
3. Aplicar o método de Newton às condições de otimalidade.
4. Resolver o sistema linear resultante.

Os MPIs assim deduzidos serão denominados MPIs Tradicionais. Exemplos de utilização desta abordagem são fornecidos por [8, 80, 16, 24].

A segunda abordagem é proposta em [48] e consiste em:

1. Construir um método de pontos interiores, sem considerar estrutura esparsa particular, utilizando a primeira abordagem.
2. Identificar as operações algébricas relacionadas aos cálculos dos métodos de pontos interiores.
3. Definir as operações algébricas em função da estrutura esparsa do problema.

Os MPIs assim deduzidos serão denominados de MPIs por blocos. Esta abordagem, porém, depende da utilização de conceitos de programação orientada a objetos. Ou seja, a implementação de métodos de pontos interiores será restrita a linguagens de programação como C++ e Java.

É possível estender a abordagem de [48], permitindo que esta possa ser utilizada em ambientes de programação procedural, como Matlab. Detalhes podem ser vistos em [10, 46, 48] e na seção 4.3.

Esta discussão é importante, pois para se deduzir um método de pontos interiores capaz de resolver o MOUI eficientemente é preciso aproveitar a estrutura esparsa das restrições.

Para tanto, é importante observar que podem ser utilizadas duas modelagens para o problema (cada uma resultando em uma estrutura esparsa diferente):

---

1. Modelo  $(x, u)$  ou  $(x, u)m$ : As variáveis para cada usina  $i$  no intervalo de tempo  $t$  são a defluência  $u_{i,t}$  e o volume do reservatório da usina  $x_{i,t}$ .
2. Modelo  $(x, q, v)$  ou  $(x, q, v)m$ : As variáveis para cada usina  $i$  no intervalo de tempo  $t$  são a turbinagem  $q_{i,t}$ , o vertimento  $v_{i,t}$  e o volume do reservatório da usina  $x_{i,t}$ .

Repare que a estrutura esparsa dos modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)m$  é a mesma dos modelos  $(x, u)$  e  $(x, q, v)$ , respectivamente. Assim, a mesma consideração de estrutura esparsa pode servir tanto para  $(x, u)$  como para  $(x, u)m$ , por exemplo.

A escolha do modelo matemático a ser empregado é importante, pois além de definir a estrutura esparsa da matriz, a partir desta informação será possível calcular o valor das derivadas da função e, conseqüentemente, obter o método de pontos interiores.

Além da escolha do modelo matemático, é necessário definir qual será a estrutura esparsa a ser escolhida. Considerando o modelo matemático  $(x, u)$  é possível definir três estruturas esparsas:

1. **Estrutura esparsa A:** Considera que o MOUI pode ser modelado por:

$$\begin{cases} \text{Min } f' \\ \tilde{A}x' = b' \\ \underline{x}' \leq x' \leq \bar{x}' \end{cases} \quad (4.1)$$

2. **Estrutura esparsa A e S:** Neste caso, considera-se que  $f' = \begin{bmatrix} f_x & f_u \end{bmatrix}$ ;  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & S \end{bmatrix}$ ;  $x' = \begin{bmatrix} x & u \end{bmatrix}^t$ ;  $\underline{x}' = \begin{bmatrix} \underline{x} & \underline{u} \end{bmatrix}^t$  e  $\bar{x}' = \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{u} \end{bmatrix}^t$ , tal que:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(x, u) \\ \text{S.a. : } & \begin{cases} Ax + Su = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$


---

3. **Estrutura esparsa  $A_i$  e  $S_i$ :** Este modelo é idêntico ao anterior, exceto pelo fato de que considera a estrutura esparsa mais detalhada das matrizes  $A$  e  $S$ . Ilustrando para apenas três períodos de tempo:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad f(x_t, u_t) \\
 & \text{S.a. :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} B_1 & 0 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 \\ 0 & -B_3 & B_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \\ \left[ \begin{array}{ccc} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_t \leq x_t \leq \bar{x}_t, \\ \underline{u}_t \leq u_t \leq \bar{u}_t, \forall t = 1, \dots, 3. \end{array} \right. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Para considerar a estrutura esparsa do modelo  $(x, q, v)$ , basta lembrar que neste modelo a matriz  $\tilde{A}$  será dada por:  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & S & S \end{bmatrix}$ . Isto pode ser realizado, pois no segundo modelo matemático, a variável de defluência  $u_{i,t}$  é substituída pelas variáveis de turbinagem  $q_{i,t}$  e vertimento  $v_{i,t}$  pela relação  $u_{i,t} = q_{i,t} + v_{i,t}$ .

Os métodos de pontos interiores serão obtidos considerando a abordagem de dedução por blocos sugerida por [48]. Para tanto, será necessária a dedução do MPI tradicional para a estrutura esparsa dada por (4.1).

### 4.2.1 MPI Tradicional

Para ilustrar a dedução de um MPI de acordo com a primeira abordagem, seja o problema (4.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad f(x) \\ Ax = b \\ \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

considerando a transformação de variável  $x = \tilde{x} + \underline{x}$ :

---

$$\begin{cases} \text{Min } f(\tilde{x}) \\ A\tilde{x} = b - A\underline{x} \\ \tilde{x} + s = \bar{x} - \underline{x} \\ \tilde{x} - t = 0 \\ s, t \geq 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Sem perda de generalidade, assumindo que  $\bar{x} = \bar{x} - \underline{x}$ ,  $b = b - A\underline{x}$  e eliminando os tils, então, a função Lagrangeana associada ao problema de otimização, com função objetivo não-linear e restrições lineares é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & f(x) - y^t(Ax - b) - \tilde{w}^t(x + s - \bar{x}) - z^t(x - t) \\ & - \mu \left( \sum_{i=1}^p \log s_i + \sum_{i=1}^p \log t_i \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

As condições de otimalidade de primeira ordem são dadas por:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L} = \nabla f(x) - A^t y - \tilde{w} - z &= 0 \\ \nabla_y \mathcal{L} = Ax - b &= 0 \\ \nabla_w \mathcal{L} = x + s - \bar{x} &= 0 \\ \nabla_s \mathcal{L} = -\tilde{w} - \mu S^{-1} e &= 0 \\ \nabla_t \mathcal{L} = z - \mu X^{-1} e &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde:  $S$ ,  $X$  são matrizes diagonais com elementos estritamente positivos e  $e$  é um vetor de 1's de dimensão apropriada.

A formulação (4.7) pode ser simplificada para a formulação (4.8), observando que  $\tilde{w} = -w$ :

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - A^t y + w - z &= 0 \\ Ax - b &= 0 \\ x + s - \bar{x} &= 0 \\ SWe &= \mu e \\ XZe &= \mu e, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde:  $X$ ,  $W$  e  $Z$  são matrizes diagonais com elementos estritamente positivos.

---

Para simplificar a notação, define-se  $H(x) = \nabla^2 f(x)$ . Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade:

$$\begin{bmatrix} -H(x) & A^t & -I & I & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & S & 0 & W \\ Z & 0 & 0 & X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dw \\ dz \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d \\ r_p \\ r_a \\ r_b \\ r_c \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

onde:

$$r_d = \nabla f(x) - A^t y + w - z$$

$$r_p = b - Ax$$

$$r_a = \bar{x} - x - s$$

$$r_b = \mu e - SWe$$

$$r_c = \mu e - XZe$$

Reescrevendo o sistema linear:

$$\begin{cases} A^t dy - dw + dz - H(x)dx & = r_d \\ Adx & = r_p \\ dx + ds & = r_a \\ Sdw + Wds & = r_b \\ Xdz + Zdx & = r_c \end{cases} \quad (4.10)$$

Da terceira equação de (4.10):

$$ds = r_a - dx \quad (4.11)$$

Considerando que  $Z$ ,  $X$ ,  $W$  e  $S$  são matrizes diagonais com elementos positivos, e portanto inversíveis, então, com as duas últimas equações de (4.10):

$$\begin{cases} dz = X^{-1}(r_c - Zdx) \\ dw = S^{-1}(r_b - Wds) \end{cases} \quad (4.12)$$

Aplicando (4.11) em (4.12):

---

$$\begin{cases} dz = X^{-1}(r_c - Zdx) \\ dw = S^{-1}(r_b - Wr_a) + S^{-1}Wdx. \end{cases} \quad (4.13)$$

Usando (4.13) na primeira equação de (4.10):

$$A^t dy - S^{-1}(r_b - Wr_a) - S^{-1}Wdx + (X^{-1}(r_c - Zdx)) - H(x)dx = r_d \Rightarrow$$

$$A^t dy - S^{-1}(r_b - Wr_a) - S^{-1}Wdx + X^{-1}r_c - X^{-1}Zdx - H(x)dx = r_d \Rightarrow$$

$$A^t dy - (H(x)dx + S^{-1}Wdx + X^{-1}Zdx) = r_d + S^{-1}(r_b - Wr_a) - X^{-1}r_c \Rightarrow$$

$$A^t dy - Ddx = r_k. \quad (4.14)$$

Onde:  $D = (H(x) + S^{-1}W + X^{-1}Z)$  e  $r_k = r_d + S^{-1}(r_b - Wr_a) - X^{-1}r_c$ .

Utilizando (4.14) e a segunda equação de (4.10), o sistema é reduzido para:

$$\begin{cases} Adx = r_p \\ A^t dy - Ddx = r_k. \end{cases} \quad (4.15)$$

Se a matriz  $H(x)$  for definida positiva e diagonal, então,  $D$  pode ser facilmente invertida, pois ela é a soma de matrizes definidas positivas. A direção  $dx$  pode então ser obtida da seguinte forma:

$$dx = D^{-1}(A^t dy - r_k). \quad (4.16)$$

A primeira equação de (4.15) fornece que:

$$AD^{-1}A^t dy - r_p = AD^{-1}r_k \Rightarrow$$

$$dy = (AD^{-1}A^t)^{-1}(r_p + AD^{-1}r_k). \quad (4.17)$$

Cabe destacar que a inversão de  $AD^{-1}A^t$  para encontrar  $dy$  envolve a maior parte do esforço computacional do método. Mas, dado que  $A$  é  $m \times p$ ,

---

$m < p$ , tendo  $m$  linhas linearmente independentes, e que  $H$  é  $p \times p$  com termos de regularização adicionados [3], então,  $AD^{-1}A^t$  é simétrica, definida positiva e, na prática, é usada a decomposição de Cholesky para resolver o sistema linear [97].

Caso a matriz Hessiana  $H(x)$  associada à função objetivo não seja definida positiva, então, é aplicado o procedimento descrito em [3, 14]. Este procedimento, denominado em [3] de regularização, consiste em utilizar uma matriz Hessiana perturbada  $\tilde{H}(x) = H(x) + \lambda I$ , quando  $H(x)$  não é definida positiva. Em [3], é proposto ainda que ao invés de se fixar o valor da perturbação  $\lambda$ , seja adotado dinamicamente um valor que se concentre apenas em pivôs da fatoração de Cholesky que sejam potencialmente instáveis.

As deduções anteriores fornecem o MPI primal dual com variáveis canalizadas e restrições de igualdade que é resumido na Tabela 4.1.

## 4.2.2 Detalhes de Implementação

Algumas observações adicionais se fazem necessárias para o bom funcionamento do método desenvolvido. Para tanto, a seguir, serão abordadas as seguintes questões:

- *MPI Preditor-Corretor*: O método de pontos interiores proposto na Figura 4.1 é um método primal-dual. Uma pequena modificação deste método pode fornecer o método preditor-corretor desenvolvido por Mehrotra [68]. Espera-se que o preditor-corretor tenha pequenos custos computacionais adicionais por iteração, mas com ganho no número total de iterações. A idéia deste método é utilizar uma direção que contém 3 componentes:
    - Direção Afim Escala (direção preditora ou de Newton).
    - Direção de Centragem cujo tamanho é determinado pela perturbação  $\mu$ .
    - Direção de Correção que tenta compensar a aproximação linear do método de Newton dada por  $(X + Dx)^t(Z + Dz)e = -DxDze$ . O termo  $-DxDze$  corresponde ao resíduo da próxima iteração caso fosse tomada a direção afim com passo 1. Este termo realiza uma correção não-linear, já que é necessário resolver um sistema linear adicional [97].
-

**MPI Primal Dual estrutura esparsa  $A$**

Dados  $(x^0, s^0, w^0, z^0) > 0$ ,  $y^0$  livre e  $\tau \in (0, 1)$ ;

Para  $k = 0, 1, \dots$

$\mu^k = \sigma\gamma^k/n_p$ ,

onde:  $n_p$  =dimensão do vetor  $(x, s)$ ,  $\gamma^k$  é o GAP e  $\gamma^k/n_p$  é o GAP médio.

$$r_d^k = \nabla f(x^k) - A^t y^k + w^k - z^k$$

$$r_p^k = b - Ax^k$$

$$r_a^k = \bar{x} - x^k - s^k$$

$$r_b^k = \mu^k e - S^k W^k e$$

$$r_c^k = \mu^k e - X^k Z^k e$$

$$r_k^k = r_d^k + S^{-1}(r_b^k - W r_a^k) - (X^k)^{-1} r_c^k$$

$$D^k = (H(x^k) + (S^k)^{-1} W^k + (X^k)^{-1} Z^k)$$

$$dy^k = (A(D^k)^{-1} A^t)^{-1} (r_p^k + A(D^k)^{-1} r_k^k)$$

$$dx^k = (D^k)^{-1} (A^t dy^k - r_k^k)$$

$$ds^k = r_a^k - dx^k$$

$$dw^k = (S^k)^{-1} (r_b^k - W^k ds^k)$$

$$dz^k = (X^k)^{-1} (r_c^k - Z^k dx^k)$$

$$\alpha_p^k = \text{Min} \left\{ \text{Min}_{\partial x_i^k < 0} \left( \frac{-x_i^k}{\partial x_i^k} \right), \text{Min}_{\partial s_i^k < 0} \left( \frac{-s_i^k}{\partial s_i^k} \right) \right\}$$

$$\alpha_d^k = \text{Min} \left\{ \text{Min}_{\partial w_i^k < 0} \left( \frac{-w_i^k}{\partial w_i^k} \right), \text{Min}_{\partial z_i^k < 0} \left( \frac{-z_i^k}{\partial z_i^k} \right) \right\}$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k dy^k$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k dx^k$$

$$s^{k+1} = s^k + \alpha_p^k ds^k$$

$$w^{k+1} = w^k + \alpha_d^k dw^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k dz^k$$

$$k \leftarrow k + 1$$

**Até Convergir**

Figura 4.1: MPI primal dual para estrutura esparsa  $A$ .

Ou seja, ao se calcular a direção afim-escala, com  $\mu = 0$ , o progresso do método ao longo desta direção é verificado. Se o progresso nesta direção for grande, a perturbação  $\mu$  será pequena. Caso contrário, é conveniente aumentar o peso da direção de centragem, tal que a perturbação  $\mu$  seja

grande.

Uma vez que uma segunda direção é calculada, também é acrescentada a correção não-linear utilizando o mesmo Jacobiano, para que o esforço computacional por iteração não duplique.

Porém, não é necessário calcular as direções dos dois sistemas, bastando seguir as seguintes etapas:

- Calcule a direção preditora  $(dy, dx, dw, dz, ds)$ , com as equações (4.11), (4.12), (4.16) e (4.17), assumindo que  $r_b = -SWe$  e  $r_c = -XZe$  (ou seja, utilizando  $\mu = 0$ ).
- Usando a mesma matriz  $AD^{-1}A^t$ , calcular a direção de correção  $(\tilde{d}y, \tilde{d}x, \tilde{d}w, \tilde{d}z, \tilde{d}s)$  a partir do ponto  $(y, x, w, z, s) = (y + \tilde{d}y, x + \tilde{d}x, w + \tilde{d}w, z + \tilde{d}z, s + \tilde{d}s)$ . Ou seja, calcular  $(\tilde{d}y, \tilde{d}x, \tilde{d}w, \tilde{d}z, \tilde{d}s)$  através das equações (4.11), (4.12), (4.16) e (4.17), usando  $\tilde{r}_b = r_b + (\mu e - DsDwe)$  e  $\tilde{r}_c = r_c + (\mu e - DxDze)$ .

Além disso, o cálculo de  $\mu$  é função da direção afim. Quanto melhor a direção afim, menor a perturbação e vice-versa. Ou seja:

- $\gamma = x^t z + s^t w$
- $\tilde{\gamma} = (x + \tilde{\alpha}_p d\tilde{x})^t (z + \tilde{\alpha}_d d\tilde{z}) + (s + \tilde{\alpha}_p d\tilde{s})^t (w + \tilde{\alpha}_d d\tilde{w})$
- $\mu = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}\right)^2 \left(\frac{\tilde{\gamma}}{n^2}\right), & \text{se } \gamma \geq 1 \\ \left(\frac{\gamma^2}{n^2}\right), & \text{se } \gamma < 1 \end{cases}$

Onde:  $\gamma$  é o valor do GAP,  $n$  é o número de pares complementares, sendo  $\gamma/n$  o GAP médio e  $\mu$  é a perturbação. Maiores detalhes acerca destes parâmetros podem ser vistos em [97].

- *Método de Busca Unidimensional*: O método de busca unidimensional proposto em [34] foi utilizado para encontrar o valor do passo ótimo  $\alpha_{pd}^k$  único para as direções primal e dual, ou seja, para o conjunto de direções  $dy, dx, dt, dw$  e  $dz$ . A busca consiste em aplicar um procedimento de “backtracking” em uma função de mérito relativa ao quadrado da norma das condições de otimalidade. Sua aplicação, porém é restrita aos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ , devido a dificuldade de se adaptar a busca unidimensional para considerar os pontos de quina existentes no modelo  $(x, u)$ .
-

- *Solução inicial:*

1. Solução inicial para MPI genérico: Para um problema de otimização com  $f(x)$  genérica e restrições lineares  $Ax = b$  e canalização  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ , pode ser utilizada a seguinte inicialização:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{b} = \frac{2}{3}(AA^t)^{-1}(b - Au/2) \\ \tilde{u} = (u - A^t\tilde{b})/2 \\ \tilde{x} = (A^t\tilde{b} + \tilde{u}) \\ \tilde{s} = \tilde{u} \\ \tilde{w} = (\nabla f(x) - A^ty)/2 \\ \tilde{z} = \tilde{w} \\ x = \tilde{x} + \alpha_p \\ s = \tilde{s} + \alpha_p \\ w = \tilde{w} + \alpha_d \\ z = \tilde{z} + \alpha_d \\ y = (AA^t)^{-1}(Ac). \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Onde:  $\alpha_p$  e  $\alpha_d$  são calculados por:

- $\alpha_p = \delta_p + 1/2 * \frac{\gamma^+}{\sum(\tilde{z}_i + \delta_d e + \tilde{w}_i + \delta_d e)}$ ,
- $\alpha_d = \delta_d + 1/2 * \frac{\gamma^+}{\sum(\tilde{x}_i + \delta_p e + \tilde{s}_i + \delta_p e)}$ .

Onde:

- $\delta_p = \text{Max}(-1.5 * \text{Min}(\tilde{x}), -1.5 * \text{Min}(\tilde{s}), 0.01)$ ,
- $\delta_d = \text{Max}(-1.5 * \text{Min}(\tilde{w}), -1.5 * \text{Min}(\tilde{z}), 0.01)$ ,
- $\gamma^+ = (\tilde{x} + \delta_p e)^t (\tilde{z} + \delta_d e) + (\tilde{s} + \delta_p e)^t (\tilde{w} + \delta_d e)$ .

2. Solução inicial específica para o MOUI: Observando as características específicas do MOUI e do MPI foi projetada a inicialização dada em [66]. Apesar de neste trabalho utilizar-se uma linearização da função de produção hidráulica, sua inicialização contempla aspectos importantes para o MPI como quais valores utilizar para as variáveis duais. A inicialização é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = A^t(AA^t)^{-1}b \\ x_j^0 = \max\{\tilde{x}_j, \epsilon_1\} \\ s_j^0 = \max\{\epsilon_1, \bar{x}_j - x_j^0\} \\ y^0 = 0 \\ \begin{array}{ll} z_j = (c_j + \epsilon_2) & \text{e } w_j = \epsilon_2 \quad \text{Se } c_j \geq \epsilon_2 \\ z_j = -c_j & \text{e } w_j = -2c_j \quad \text{Se } c_j < -\epsilon_2 \\ z_j = c_j + \epsilon_2 & \text{e } w_j = \epsilon_2 \quad \text{Se } 0 \leq c_j \leq \epsilon_2 \\ z_j = \epsilon_2 & \text{e } w_j = -c_j + \epsilon_2 \quad \text{Se } -\epsilon_2 \leq c_j \leq 0. \end{array} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Onde:  $\epsilon_1 = \max\{-\min_{1 \leq j \leq n} \tilde{x}_j, \epsilon_3, \frac{\|b\|}{100}\}$ ,  $\epsilon_2 = 1 + \epsilon_4 \|c\|$ ,  $\epsilon_3 = 100$ ,  $\epsilon_4 = 10$  e  $c = \nabla f(x)$ .

- Solução inicial específica para o MOUI, utilizando a informação de turbinagem média: Esta inicialização é idêntica à anterior, exceto pelo valor calculado para a variável  $\tilde{x}$ . O valor da média das vazões afluentes previstas para um dado período de tempo é atribuído como o valor de defluência de todas as usinas para todos os intervalos de tempo. Considerando, para o modelo  $(x, u)$  que a variável  $\tilde{x}$  possui uma componente referente ao volume  $x_{i,t}$  e outra referente às defluências  $u_{i,t}$ , então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_{i,t}^u = (\sum_{t=1}^T y_{i,t})/T \\ \tilde{x}^x = A^{-1}(b - S\tilde{x}^u) \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Para o modelo  $(x, q, v)$  foi assumido que a componente referente ao vertimento de  $\tilde{x}$  é  $x_{i,t}^v = \max\{x_{i,t}^u - \bar{q}_{i,t}, 0\}$ .

- Solução inicial específica para o MOUI, utilizando a informação de turbinagem máxima: Esta inicialização é idêntica à anterior, exceto pelo valor calculado para a variável  $\tilde{x}$ . O valor da turbinagem máxima é atribuído como o valor de defluência para todas as usinas em todos os intervalos de tempo. Considerando, para o modelo  $(x, u)$  que a variável  $\tilde{x}$  possui uma componente referente ao volume  $x_{i,t}$  e outra referente às defluências  $u_{i,t}$ , então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^u = \bar{q} \\ \tilde{x}^x = A^{-1}(b - S\tilde{x}^u) \end{array} \right. \quad (4.21)$$


---

Para o modelo  $(x, q, v)$  foi assumido que a componente referente ao vertimento de  $\tilde{x}$  é  $x_{i,t}^v = 0$ .

- *Critério de convergência:* A verificação da convergência é realizada a partir de um critério análogo ao utilizado no caso em que  $f(x)$  é linear e o problema não é canalizado.

O primeiro passo é estabelecer um cálculo alternativo para o valor do GAP para uma função genérica  $f(x)$ . Ou seja, demonstrar que o GAP dado por  $\gamma = x^t \nabla f - b^t y + \bar{x}^t w$  equivale à  $\gamma = x^t z + s^t w$ , para todo ponto factível.

Sejam:

(i)  $(x^t z + s^t w)$

(ii) Se  $(x, s, z, w)$  é um ponto factível, logo, dual factível também:  $\nabla f(x) - A^t y + w - z = 0 \Rightarrow z = \nabla f(x) - A^t y + w$  (iii)

Usando (iii) em (i):

$$x^t (\nabla f(x) - A^t y + w) + s^t w = x^t \nabla f(x) - x^t A^t y + x^t w + s^t w = x^t \nabla f(x) - (Ax)^t y + x^t w + s^t w \text{ (iv)}$$

Como o ponto é, também, primal factível:  $\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x + s = \bar{x} \end{array} \right\}$ . Assim, usando a primal factibilidade em (iv):

$$x^t \nabla f(x) - b^t y + (\bar{x} - s)^t w + s^t w = x^t \nabla f(x) - b^t y + \bar{x}^t w - s^t w + s^t w = x^t \nabla f(x) - b^t y + \bar{x}^t w \text{ (v)}$$

E (v) pode ser verificada para:

- *Caso Linear:* Se  $f(x) = c^t x$ , então,  $\gamma = c^t x - b^t y + \bar{x}^t w$ .
- *Caso Quadrático:* Se  $f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x$ , então,  $\gamma = c^t x + x^t Q x - b^t y + \bar{x}^t w$ .

O segundo passo, é observar que o critério de convergência do problema sem canalização é dado pelas condições de otimalidade [97]:

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\|b - Ax^k\|}{1 + \|b\|} \\ \frac{\|c - A^t y^k - z^k\|}{1 + \|c\|} \\ \frac{c^t x^k - b^t y^k}{1 + \|c^t x^k + b^t y^k\|} \end{array} \right) \leq \varepsilon$$


---

Onde:  $\varepsilon$  é tolerância estabelecida.

Por analogia, para o problema canalizado e com  $f(x)$  genérica:

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\|b-Ax^k\|}{1+\|b\|} \\ \frac{\|\bar{x}-x^k-s^k\|}{1+\|\bar{x}\|} \\ \frac{\|\nabla f(x^k)-A^t y^k+w^k-z^k\|}{1+\|\nabla f(x^k)\|} \\ \frac{x^t \nabla f(x^k)-b^t y^k+\bar{x}^t w^k}{1+\|x^t \nabla f(x^k)+b^t y^k+\bar{x}^t w^k\|} \end{array} \right) \leq \varepsilon$$

Para  $f(x)$  não-linear e restrições lineares, é utilizado  $\varepsilon = 10^{-8}$  para a primeira e a segunda condições de otimalidade (associadas a factibilidade da solução e às restrições lineares) e  $\varepsilon = 10^{-3}$  para a terceira e quarta condições (que são condições associadas à função não-linear  $f(x)$ ).

Outros critérios de parada adicionais são o número máximo de iterações que é fixado em 200 e  $\gamma < 10^{-4}$ , sendo o último extraído de [60].

- *Valor do Gradiente e da Hessiana:* Os procedimentos para o cálculo do gradiente  $\nabla f(x)$  e da Hessiana  $H(x)$  associados à função  $f(x)$  são fornecidos na próxima seção.

O desenvolvimento de métodos de pontos interiores que explorem a estrutura esparsa do MOUI será abordado a seguir.

### 4.3 Explorando a Estrutura Esparsa

Suponha que matriz  $A$ , para a qual foi desenvolvido o MPI dado na Figura 4.1, possua uma estrutura esparsa bloco primal dada por:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n & 0 \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n & A_{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$


---

A dedução tradicional de um MPI que explore a estrutura bloco angular de  $A$  implicaria em refazer os passos descritos na seção 4.2. Detalhes desta abordagem podem ser vistos em [8, 16, 24].

Neste trabalho, ao invés da abordagem tradicional, será empregada a dedução por blocos, devido a facilidade de se achar possíveis erros de programação e reaproveitamento de código que ela oferece. A grande vantagem desta abordagem no desenvolvimento dos MPIs é a facilidade com que se pode explorar as estruturas esparsas da matriz  $A$ . A idéia chave do processo é identificar quais são as operações matriciais relacionadas aos cálculos dos MPIs, como descrito na Figura 4.2.

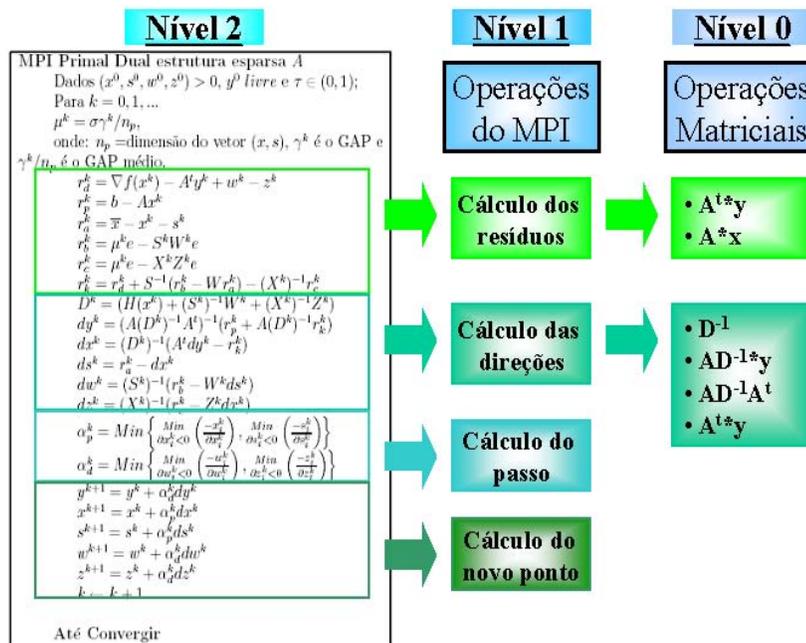


Figura 4.2: Identificação das operações matriciais de um MPI.

A Figura 4.2 mostra que para se definir um MPI de acordo com uma estrutura esparsa particular, basta se redefinir o significado das seguintes operações matriciais  $C_1$ :

- Dados  $A$  e  $D$ , calcular:  $\Phi = AD^{-1}A^t$ .
- Calcular o fator  $L$ :  $\Phi = LL^t$ .

- Resolver o sistemas linear  $\Phi x = b$ :  $Ly = b$  e  $L^t x = y$ .
- Calcular os produtos de matriz com vetor:  $Nz$ ,  $N^t z$  para  $A$ ,  $D$  e  $\Phi$ .

Ou seja, para se deduzir um MPI por blocos, cuja matriz  $A$  possui a estrutura esparsa dada pela Eq. (4.22), basta utilizar o MPI da Figura 4.1 com operações matriciais  $C_1$  redefinidas de acordo com a estrutura (4.22).

A idéia deste processo é observar que a construção de MPIs depende da implementação das operações algébricas. Isto é ilustrado na Figura 4.3.

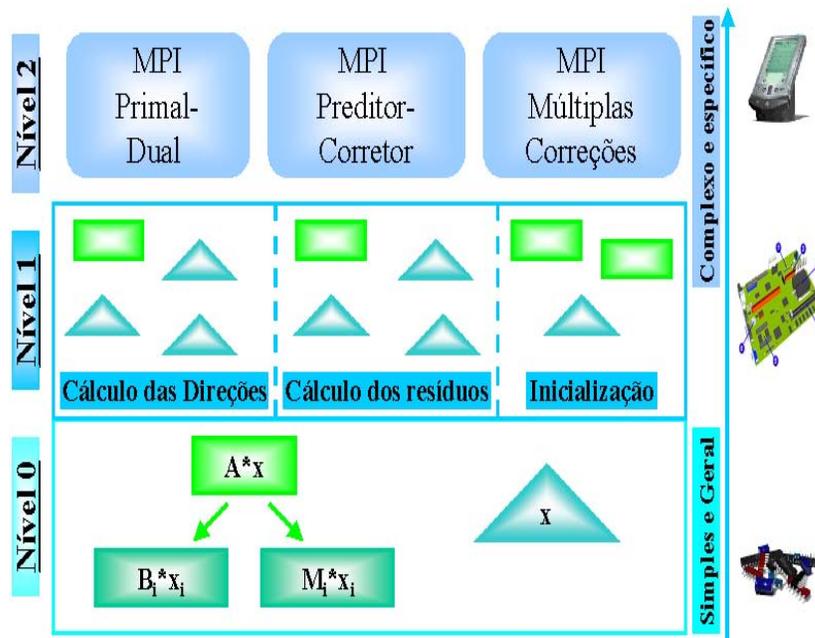


Figura 4.3: Descrição dos componentes de um método de pontos interiores.

Portanto, a modificação das operações algébricas do MPI para uma determinada estrutura esparsa equivale a construir um MPI que considere esta estrutura.

Este processo, em termos de orientação a objeto, é realizado através dos seguintes passos.

Suponha definida uma classe *Vector* que descreve os vetores associados às matrizes. Uma possível declaração de uma classe abstrata *Matrix* seria:

```

class Matrix
{
    virtual void ComputeAThetaAt(Matrix theta);
    virtual void Factorize();
    virtual void SolveAThetaAt(Vector x, Vector y);
    virtual void SolveTriang(Vector x, Vector y);
    virtual void SolveTransTriang(Vector x, Vector y);
    virtual void MatrixVectProd(Vector x, Vector y);
    virtual void MatrixTransVectProd(Vector x, Vector y);
}

```

A classe *Matrix* pode ser estendida para classes *concretas* as quais serão responsáveis por fornecer uma implementação para as funções membro.

Ou seja, utilizando o *polimorfismo* de um objeto da classe *Matrix* (é possível representar diferentes objetos que compartilham os mesmos métodos) as operações apropriadas são implementadas de acordo com a estrutura esparsa da matriz.

A Figura 4.4 ilustra a aplicação deste conceito para matrizes *A* bloco primal.

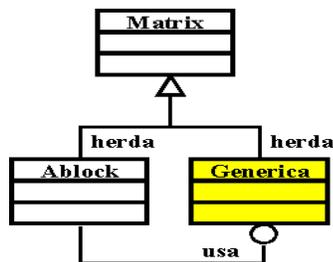


Figura 4.4: Classes para matriz *A* bloco primal.

A classe *Ablock* representa a matriz *A* bloco primal do problema. Como a matriz *A* é composta por matrizes sem estrutura esparsa definida, denominada genéricas (matrizes  $A_i$  e  $S_i$ ), então, ela utiliza classes que implementam estas matrizes e suas operações (classe *Generica*).

Isto só é possível, pois as classes *Ablock* e *Generica* herdam a mesma interface, da classe *Matrix*, que define as operações  $C_1$ .

Com isso uma multiplicação de um objeto matriz *A* da classe *Ablock* por um vetor  $x$  pode ser representada em termos das operações definidas na classe *Generica*.

Dessa forma, parte da declaração da classe *Ablock*, contendo dois vetores de matrizes da classe *Generica*, será:

```
class Ablock : public Matrix
{
private:
    int NumBlocks
    Generica[] Ai;
    Generica[] Si;
}
```

A Figura 4.5 exemplifica a utilização de orientação a objeto para o cálculo de  $y = Ax$ , matriz  $A$  como em Eq. (4.22). Existindo a classe *Generica*, com todos os métodos  $C_1$  implementados, então a operação  $y = A * x$  da classe *Ablock* utiliza a operação de multiplicação de matriz por vetor da classe *Generica* para calcular  $y = A_i * x$  e  $y = S_i * x$ .

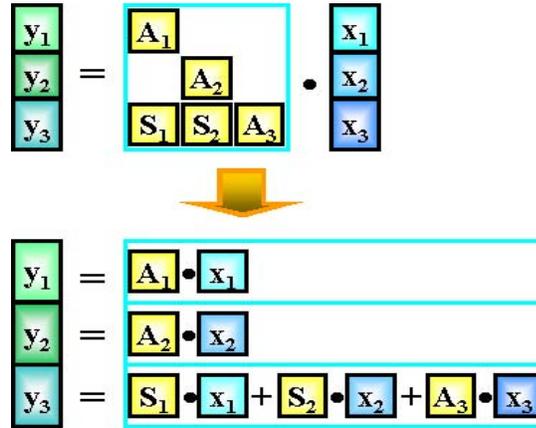


Figura 4.5: Operação  $y = Ax$  para matriz  $A$  constituída por blocos de matrizes genéricas.

Como observado na apresentação do MPI da Figura 4.1, a operação de maior custo computacional é a resolução do sistema (4.23):

$$(AD^{-1}A^t)dy = (r_p + AD^{-1}r_k) \Rightarrow \Phi x = b \tag{4.23}$$

onde:  $D = H(x) + S^{-1}W + X^{-1}Z$ .

---

Uma observação importante é que esta estrutura esparsa é utilizada para problemas em que em um modelo de MOUI com consideração da estocasticidade das vazões através de uma formulação multifluxo [25, 54, 74]. A formulação apresentada no Apêndice C pode ser facilmente adaptada para resolver o MOUI descrito em [74].

### 4.3.1 Resolvendo o MOUI com modelo $(x, u)$

O MOUI foi modelado por fluxo em redes com restrições lineares e função objetivo não-linear como dado no Capítulo 3.

Sua representação matricial simplificada é dada pelo problema (4.24):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(\tilde{x}) \\ \text{S.a. :} \quad & A\tilde{x} = b \\ & l \leq \tilde{x} \leq u. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Para explorar a estrutura esparsa do MOUI, é necessário identificar a estrutura das matrizes  $A$  e  $D$  a serem empregadas na resolução do sistema linear dado por (4.17). Para tanto:

- A matriz  $A$  é formada por duas submatrizes  $\tilde{A}$  e  $S$ . A matriz  $\tilde{A}$  está associada à variável  $x_{i,t}$  que representa o volume dos reservatório  $i$  no intervalo  $t$ . A matriz  $S$  está relacionada com a defluência  $u_{i,t}$  do reservatório  $i$  no intervalo  $t$ .

$$A = \left[ \tilde{A} \mid S \right].$$

- A matriz  $\tilde{A}$  tem dimensão  $T \times T$  blocos matriciais tal que cada bloco possui dimensão  $I \times I$ , onde  $T$  é o número de intervalos de tempo e  $I$  é o número de usinas hidrelétricas. Ela possui a seguinte estrutura:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -B_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{T-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -B_T & B_T \end{bmatrix}.$$


---

Onde:  $B_i$  é a matriz identidade de dimensão  $I \times I$  com cada elemento dividido por um fator associado ao número de segundos para cada intervalo de tempo  $i$ .

- A matriz  $S$  tem dimensão de  $T \times T$  blocos matriciais tal que cada bloco tem dimensão  $I \times I$ , e tem por estrutura:

$$S = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{bmatrix}.$$

Onde:  $M$  é uma matriz de incidência nó-arco associada à variável de defluência  $u$  cujos elementos são valores iguais a  $+1$ ,  $-1$  e  $0$ .

- A matriz  $A$  tem dimensão  $T \times 2T$  blocos, e será dada por:

$$A = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -B_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & M & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{T-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -B_T & B_T & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{array} \right].$$

- A matriz Hessiana  $H$  da função objetivo é dada por:

$$H = \left[ \begin{array}{c|c} H_1 & H_2 \\ \hline H_2 & H_3 \end{array} \right].$$

Onde:  $H_i$  é uma matriz diagonal separada em  $T$  blocos de matrizes diagonais. A obtenção da matriz Hessiana, para o modelo  $(x, u)$ , está descrita em detalhes no Apêndice A.

Ou seja,  $H_i$  é dada por:

---

$$H_i = \begin{bmatrix} H_{i(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & H_{i(2)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{i(T-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & H_{i(T)} \end{bmatrix}.$$

Onde:  $H_{i(j)}$  é matriz diagonal da componente  $i$  associada ao intervalo de tempo  $j$ .

Assim, a Hessiana  $H$  tem a seguinte estrutura:

$$H = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} H_{1(1)} & \cdots & 0 & H_{2(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_{1(T)} & 0 & \cdots & H_{2(T)} \\ \hline H_{2(1)} & \cdots & 0 & H_{3(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & H_{2(T)} & 0 & \cdots & H_{3(T)} \end{array} \right].$$

- A matriz  $D$  é formada pela soma da matriz  $H$  com uma matriz diagonal separada em blocos  $D_p$  que é obtida a partir das matrizes diagonais do MPI:

$$D_p = \left[ \begin{array}{c|c} D_x & 0 \\ \hline 0 & D_u \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} D_{x(1)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{x(T)} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & D_{u(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & D_{u(T)} \end{array} \right].$$

- Portanto, a matriz  $D$  será:

$$D = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} D_{1(1)} & \cdots & 0 & D_{2(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{1(T)} & 0 & \cdots & D_{2(T)} \\ \hline D_{2(1)} & \cdots & 0 & D_{3(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{2(T)} & 0 & \cdots & D_{3(T)} \end{array} \right].$$


---

Onde:  $D_{1(i)} = H_{1(i)} + D_{x(i)}$ ,  $D_{2(i)} = H_{2(i)}$  e  $D_{3(i)} = H_{3(i)} + D_{u(i)}$ .

Observando que  $D$  e sua inversa possuem a mesma estrutura esparsa <sup>1</sup> e utilizando a mesma notação das componentes de  $D$  para representar as componentes de  $D^{-1}$ :

$$D^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} D_{1(1)} & \cdots & 0 & D_{2(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{1(T)} & 0 & \cdots & D_{2(T)} \\ \hline D_{2(1)} & \cdots & 0 & D_{3(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{2(T)} & 0 & \cdots & D_{3(T)} \end{array} \right].$$

A matriz  $AD^{-1}A^t$  tem a seguinte estrutura:

$$AD^{-1}A^t = \left[ \begin{array}{ccccccc} \Phi_1 & C_1^t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & \Phi_2 & C_2^t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & \Phi_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Phi_{T-2} & C_{T-2}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{T-2} & \Phi_{T-1} & C_{T-1}^t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{T-1} & \Phi_T \end{array} \right] = \Phi.$$

Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_i = -B_{i+1}(D_{1(i)}B_i + D_{2(i)}M^t), \forall i = 1, \dots, n \\ \Phi_i = B_i D_{1(i-1)} B_i + B_i (D_{1(i)} B_i + D_{2(i)} M^t) + M (D_{2(i)} B_i + D_{3(i)} M^t), \\ \forall i = 2, \dots, T \\ \Phi_1 = B_1 (D_{1(1)} B_1 + D_{2(1)} M^t) + M (D_{2(1)} B_1 + D_{3(1)} M^t). \end{array} \right.$$

Detalhes da obtenção dos componentes da matriz  $AD^{-1}A^t$  estão descritos no Apêndice D. A matriz  $AD^{-1}A^t$  pode ser fatorada na forma  $LL^t$  desde que  $AD^{-1}A^t > 0$ . A resolução do sistema linear  $\Phi x = b$  por meio da fatoração  $L$  obtida consiste em verificar que:

---

<sup>1</sup>A inversa da matriz  $D$  além de preservar a mesma estrutura esparsa de  $D$ , pode ser calculada rapidamente utilizando um algoritmo cujos detalhes estão descritos no Apêndice B.

---

$$\begin{cases} L_1 L_1^t = \Phi_1 \\ L_{n,i} L_i^t = C_i, \forall i = 1, \dots, n \\ L_{n,i-1} L_{n,i-1}^t + L_i L_i^t = \Phi_i, \forall i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.25)$$

A utilização dos fatores  $L_i$  na resolução do sistema  $\Phi x = b$  está resumida em (4.26). Detalhes da obtenção de (4.26) podem ser obtidos no Apêndice D.

$$\begin{cases} z_1 = L_1^{-1} b_1 \\ z_i = L_i^{-1} (b_i - (C_{i-1} L_{i-1}^{-t}) z_{i-1}), i = 2, \dots, n \\ x_n = L_n^{-t} z_n \\ x_i = L_i^{-t} (z_i - (L_i^{-1} C_i^t) x_{i+1}), i = 1, \dots, (n-1). \end{cases} \quad (4.26)$$

Uma observação importante é que em nenhum momento (4.26) utiliza as matrizes  $L_{n,i}$ , tal que não é necessário calcular as mesmas. Portanto, as fatorações  $L_{n,i}$  calculadas em (4.25) são ditas fatorações implícitas.

### 4.3.2 Matrizes $A$ e $D$ do MOUI $(x, q, v)$

Na seção 4.3.1 foi exposto como deduzir o método de pontos interiores para o modelo  $(x, u)$  do MOUI. De forma análoga será considerada a estrutura de blocos das matrizes  $A$  e  $D$  para o modelo  $(x, q, v)$ , cujas variáveis de decisão são o volume  $x$ , a turbinagem  $q$  e o vertimento  $v$ .

Para tanto é importante observar que o MOUI sem considerar estrutura esparsa é como dado pelo problema (4.24).

- A matriz  $A$  é formada por duas submatrizes  $\tilde{A}$  e  $S$ . A matriz  $\tilde{A}$  está associada à variável  $x_{i,t}$  que representa o volume dos reservatório  $i$  no tempo  $t$ . A matriz  $S$  está relacionada com a turbinagem  $q_{i,t}$  e com o vertimento  $v_{i,t}$  do reservatório  $i$  no tempo  $t$ . Para maior clareza de notação, mas sem perda de generalidade, nas deduções a seguir todas as submatrizes irão considerar apenas três intervalos de tempo.

$$A = \left[ \tilde{A} \mid S \mid S \right].$$


---

- A matriz  $\tilde{A}$  tem dimensão  $3 \times 3$  blocos matriciais com cada bloco tendo  $I \times I$  elementos, onde  $I$  é o número de usinas hidrelétricas. Ela possui a seguinte estrutura:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 \\ 0 & -B_3 & B_3 \end{bmatrix}.$$

Onde: sendo considerado três intervalos de tempo,  $B_i$  é a matriz identidade de dimensão  $I \times I$  com cada elemento dividido por um fator associado ao número de segundos para cada intervalo de tempo  $i$ .

- A matriz  $S$  tem dimensão  $3 \times 3$  blocos com  $I \times I$  elementos. Sua estrutura é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}.$$

Onde:  $M$  é uma matriz de incidência nó-arco associada à variável de turbinagem  $q$  ou vertimento  $v$  com cujos elementos são valores iguais a  $+1$ ,  $-1$  e  $0$ .

- A matriz  $A$ , com dimensão  $3 \times 9$  blocos, será dada por:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} B_1 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & -B_3 & B_3 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & M \end{array} \right].$$

- A matriz Hessiana  $H$  da função objetivo é dada por:

$$H = \left[ \begin{array}{c|c|c} H_1 & H_4 & 0 \\ \hline H_4 & H_2 & H_5 \\ \hline 0 & H_5 & H_3 \end{array} \right].$$

Onde:  $H_i$  é matriz diagonal separada em 3 blocos de matrizes diagonais. Detalhes da obtenção de  $H$  no Apêndice A.

Ou seja,  $H_i$  é dada por:

---



- Portanto, a matriz  $D$  será:

$$D = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} D_{1(1)} & 0 & 0 & D_{4(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{1(2)} & 0 & 0 & D_{4(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{1(3)} & 0 & 0 & D_{4(3)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline D_{4(1)} & 0 & 0 & D_{2(1)} & 0 & 0 & D_{5(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{4(2)} & 0 & 0 & D_{2(2)} & 0 & 0 & D_{5(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{4(3)} & 0 & 0 & D_{2(3)} & 0 & 0 & D_{5(3)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & D_{5(1)} & 0 & 0 & D_{3(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{5(2)} & 0 & 0 & D_{3(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{5(3)} & 0 & 0 & D_{3(3)} \end{array} \right].$$

Onde:  $D_{1(i)} = H_{1(i)} + D_{xx(i)}$ ,  $D_{2(i)} = H_{2(i)} + D_{qq(i)}$ ,  $D_{3(i)} = H_{3(i)} + D_{vv(i)}$ ,  
 $D_{4(i)} = H_{4(i)}$  e  $D_{5(i)} = H_{5(i)}$ .

Lembrando que a estrutura esparsa da inversa de  $D$  é igual a estrutura esparsa de  $D$  e utilizando a mesma notação das componentes de  $D$  para representar as componentes de  $D^{-1}$ :

$$D^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} D_{1(1)} & 0 & 0 & D_{4(1)} & 0 & 0 & D_{6(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{1(2)} & 0 & 0 & D_{4(2)} & 0 & 0 & D_{6(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{1(3)} & 0 & 0 & D_{4(3)} & 0 & 0 & D_{6(3)} \\ \hline D_{4(1)} & 0 & 0 & D_{2(1)} & 0 & 0 & D_{5(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{4(2)} & 0 & 0 & D_{2(2)} & 0 & 0 & D_{5(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{4(3)} & 0 & 0 & D_{2(3)} & 0 & 0 & D_{5(3)} \\ \hline D_{6(1)} & 0 & 0 & D_{5(1)} & 0 & 0 & D_{3(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{6(2)} & 0 & 0 & D_{5(2)} & 0 & 0 & D_{3(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{6(3)} & 0 & 0 & D_{5(3)} & 0 & 0 & D_{3(3)} \end{array} \right].$$

Resumindo as informações anteriores,  $AD^{-1}A^t$  possui a seguinte estrutura esparsa:

$$AD^{-1}A^t = \left[ \begin{array}{ccccccc} \Phi_1 & C_1^t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & \Phi_2 & C_2^t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & \Phi_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Phi_{T-2} & C_{T-2}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{T-2} & \Phi_{T-1} & C_{T-1}^t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{T-1} & \Phi_T \end{array} \right] = \Phi.$$

Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_i = -B_{i+1}(D_{1(i)}B_i + (D_{4(i)} + D_{6(i)})M^t), \forall i = 1, \dots, n \\ \Phi_i = B_i D_{1(i-1)}B_i + B_i(D_{1(i)}B_i + (D_{4(i)} + D_{6(i)})M^t) + \\ M(D_{4(i)}B_i + (D_{2(i)} + D_{5(i)})M^t) + M(D_{6(i)}B_i + (D_{5(i)} + D_{3(i)})M^t), \\ \forall i = 2, \dots, T \\ \Phi_1 = B_1(D_{1(1)}B_1 + (D_{4(1)} + D_{6(1)})M^t) + M(D_{4(1)}B_1 + (D_{2(1)} + D_{5(1)})M^t) + \\ M(D_{6(1)}B_1 + (D_{5(1)} + D_{3(1)})M^t) \end{array} \right.$$

É importante destacar que as fórmulas obtidas para  $C_i$  e  $\Phi_i$  foram generalizadas para um modelo  $(x, q, v)$  com  $T$  intervalos de tempo. Detalhes da obtenção das fórmulas de  $C_i$  e  $\Phi_i$  estão no Apêndice D.

Além disso,  $\Phi$  possui a mesma estrutura esparsa que foi obtida na resolução de  $\Phi x = b$  para o modelo  $(x, u)$ .

Portanto, todas as deduções de utilização de fatoração por blocos associadas a matriz  $L$ , aplicadas para o modelo  $(x, u)$ , podem ser utilizadas para o modelo  $(x, q, v)$ .

Ou seja, após os cálculos de  $\Phi_i$  e  $C_i$ , específicos do modelo  $(x, q, v)$ , basta utilizar o sistema (4.26) para resolver  $\Phi x = b$  do modelo  $(x, q, v)$ .

## 4.4 Resumo dos MPIs

Segue um resumo das opções de implementação dos métodos de pontos interiores para o MOUI:

1. *Modelagem Matemática*: Existem 4 modelos possíveis que podem ser adotados:  $(x, u)$ ,  $(x, u)m$ ,  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ .

- **Modelo  $(x, u)$** : Considera como variáveis de decisão o volume  $x_{i,t}$ , e a defluência  $u_{i,t}$ . O método de pontos interiores implementado para este modelo não oferece nenhum tratamento especial para a quina, usando a expressão (4.27).

$$q_{i,t} = \text{Min}\{u_{i,t}, \bar{q}_{i,t}\} \quad (4.27)$$

- **Modelo  $(x, u)m$** : Considera como variáveis de decisão o volume  $x_{i,t}$ , e a defluência  $u_{i,t}$ . Para calcular o valor da derivada primeira

e segunda da função objetivo é utilizada a expressão  $q_{i,t} = u_{i,t}$ , no lugar da expressão (4.27). A motivação para esta substituição é a de se verificar o quanto a solução obtida será diferente para uma solução cujo modelo matemático trata adequadamente a expressão (4.27) (como os modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ ).

- **Modelo  $(x, q, v)$ :** As variáveis consideradas são a decisão de volume  $x_{i,t}$ , a turbinagem  $q_{i,t}$  e o vertimento  $v_{i,t}$ .
- **Modelo  $(x, q, v)m$ :** Este modelo difere do modelo  $(x, q, v)$  ao assumir que a variável  $q_{i,t}$  não pode exceder seu valor  $\bar{q}_{i,t}$ . Portanto, para uma dada iteração, é efetuada a atribuição dada por (4.28):

$$q_{i,t} > \bar{q}_{i,t} \Rightarrow \begin{cases} v_{i,t} = q_{i,t} - \bar{q}_{i,t} \\ q_{i,t} = \bar{q}_{i,t} \end{cases} \quad (4.28)$$

2. *Estrutura esparsa:* Considerando um modelo em que as variáveis de decisão são o volume  $x_{i,t}$ , e a defluência  $u_{i,t}$ , podem ser considerados três estruturas esparsas possíveis:

- Estrutura Esparsa  $A$ : Não considera nenhuma estrutura esparsa particular, sendo que a formulação MOUI será dada pelo sistema (4.24).
- Estrutura Esparsa  $\tilde{A}$  e  $S$ : Considera que

$$A = [ \tilde{A} \mid S ],$$

tal que a estrutura esparsa considera uma matriz para as variáveis de volume  $x_{i,t}$  e outra matriz para a defluência  $u_{i,t}$ .

- Estrutura Esparsa  $A_i$  e  $S_i$ : São detalhados os blocos matriciais que existem nas matrizes  $\tilde{A}$  e  $S$  de acordo com as características do MOUI (descritas na seção 4.3).

Para o caso em que as variáveis de decisão são  $x_{i,t}$ ,  $q_{i,t}$  e  $v_{i,t}$ , a consideração de estrutura esparsa é análoga. Só deve ser observado que o sistema (4.24) será modificado através de  $u_{i,t} = q_{i,t} + v_{i,t}$ , tal que a estrutura esparsa  $A$  e  $S$  para o modelo  $(x, q, v)$  será dada por (4.29):

---

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & f(x, q, v) \\
\text{S.a. :} \quad & \tilde{A}x + Sq + Sv = b \\
& \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\
& \underline{q} \leq q \leq \bar{q} \\
& 0 \leq v.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Assim, podem ser consideradas 3 tipos de estruturas esparsas ao se redefinir as operações matriciais para o método de pontos interiores.

3. Matriz Hessiana<sup>2</sup>: Para o caso em que as variáveis de decisão são  $x_{i,t}$  e  $u_{i,t}$ , a matriz Hessiana possui a seguinte estrutura:

$$H = \left[ \begin{array}{c|c} H_{xx} & H_{xu} \\ \hline H_{xu} & H_{uu} \end{array} \right].$$

Onde:  $H_{xx}$ ,  $H_{xu}$  e  $H_{uu}$  são matrizes diagonais associadas aos valores da derivada segunda da função objetivo.

Uma opção, estudada neste trabalho, é considerar apenas as matrizes  $H_{xx}$  e  $H_{uu}$  associadas à diagonal principal de H e verificar o desempenho dos métodos de pontos interiores ao utilizar esta aproximação da Hessiana. Esta abordagem será denominada matriz Hessiana diagonal, ao passo que a consideração completa da Hessiana será denominada matriz Hessiana Tridiagonal (devido à sua estrutura esparsa).

Para as formulações em que as variáveis de decisão são  $x_{i,t}$ ,  $q_{i,t}$  e  $v_{i,t}$ , a matriz H será dada por:

$$H = \left[ \begin{array}{c|c|c} H_{xx} & H_{xq} & 0 \\ \hline H_{xq} & H_{qq} & H_{vq} \\ \hline 0 & H_{vq} & H_{vv} \end{array} \right].$$

Onde:  $H_{xx}$ ,  $H_{qq}$ ,  $H_{vv}$ ,  $H_{xq}$ ,  $H_{vq}$  são matrizes diagonais associadas aos valores da derivada segunda da função objetivo.

---

<sup>2</sup>Mais detalhes sobre as deduções das derivadas parciais e a estrutura esparsa da matriz Hessiana resultante, ilustrada brevemente na seção 4.3, podem ser vistas no Anexo A.

---

Para os modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ , a consideração apenas das submatrizes  $H_{xx}$ ,  $H_{qq}$  e  $H_{vv}$  para o cálculo da Hessiana será denominada Hessiana Diagonal. Se toda matriz Hessiana  $H$  for considerada, então será dito que a Hessiana Tridiagonal é que está sendo utilizada.

Assim, existem duas possibilidades de consideração de matriz Hessiana.

4. Método de pontos interiores: O MPI a ser implementado pode utilizar uma direção preditora e outra corretora (preditor-corretor) ou não (primal-dual). Isto resulta em duas possibilidades de implementação de MPI. Detalhes na seção 4.2.2.
5. Busca Unidimensional: A busca unidimensional descrita em [34] pode ser utilizada para fornecer um único passo para as direções primais e duais, ou ainda, pode ser adotado um tamanho fixo para o passo primal e outro para o dual (o tamanho do passo está relacionado com o parâmetro  $\tau$ ).
6. Ponto inicial: Podem ser considerados quatro tipos de ponto inicial (como descritos na seção 4.2.2).
7. Parâmetro de centragem  $\sigma$  do MPI pode assumir os valores  $1/n$ ,  $1/\sqrt{n}$  e 0.
8. Parâmetro  $\tau$  que garante que o MPI permaneça interior pode assumir os valores 0,995 ou 0,99995.

O total de MPIs possíveis é igual à:  $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 2304$ . Todas as combinações foram implementadas e seu funcionamento verificado.

Para testar e verificar qual a melhor combinação é necessário estabelecer dois critérios: Robustez e Velocidade.

Obviamente não é intenção deste trabalho expor testes exaustivos com todas as combinações de parâmetros. Isto, além de resultar em uma tarefa demorada, implicaria em dificuldades para se analisar qual combinação é melhor que as demais.

Por exemplo, se fossem considerados 10 casos testes, então, armazenando a análise de desempenho e valor da função objetivo para cada opção de implementação do MPI resultaria em um tabela  $2304 \times 20$  (valor da função objetivo e tempo computacional para cada um dos 10 casos). A solução

---

adotada para este problema é separar a obtenção de resultados em duas fases.

Na primeira fase serão feitos testes verificando como cada opção de cada parâmetro se comporta em relação aos demais, observando robustez e velocidade do MPI.

Em uma segunda fase, as melhores opções de cada parâmetro serão testadas para problemas de grande porte.

---

# Capítulo 5

## Resultados para o Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas

### 5.1 Introdução

A idéia fundamental deste Capítulo é selecionar uma configuração de método de pontos interiores, dentre as 2304 opções existentes, que é robusta e eficiente para a resolução de MOUI's com grande número de usinas e intervalos de tempo considerados.

Para tanto, serão realizadas duas fases de testes. Em uma primeira fase serão selecionadas opções de MPI considerando apenas estudos de caso com poucas usinas e períodos e comparando as opções de MPI observando dois critérios: robustez e eficiência.

Na segunda fase, o MPI, com as opções de parâmetros selecionadas na primeira fase, será aplicado em problemas de grande porte, como, por exemplo, as usinas hidrelétricas do Sistema Interligado Nacional (SIN) despachadas pelo ONS (vide Figura 3.8).

### 5.2 Primeira fase de testes

Para esta primeira fase de testes foram consideradas as seguintes condições gerais  $C_1$ :

- Discretização mensal das decisões e das afluências.
- Afluência do histórico de vazões.
- Mês inicial maio e horizontes múltiplos de 12 meses.
- Volume inicial e final dos reservatórios iguais a 100% do volume útil.
- Sistema termelétrico representado por usina equivalente que inclui importação e racionamento, com função de custo quadrática dada por:  $\Psi(G_t) = \frac{1}{2}G_t^2$ .
- Taxa de juros nula ( $\lambda_t = 1$ ).
- Mercado de energia correspondente a 100% da potência instalada do parque hidrelétrico.
- Turbinagem máxima constante.

O primeiro conjunto de testes a ser realizado com o MPI foi verificar como a escolha do modelo matemático  $((x, u), (x, u)m, (x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ ) afeta a qualidade e a velocidade de obtenção da solução. Neste sentido foi necessário fixar os seguintes parâmetros  $P_1$ :

- Matriz Hessiana: Diagonal.
- Desenvolvimento do MPI: Tradicional.
- Estrutura esparsa:  $A$ .
- Busca unidimensional: não usa.
- Método de pontos interiores: Preditor-corretor.
- Ponto Inicial: inicialização genérica de MPI.
- Parâmetro de centragem:  $\sigma = 1/n$ .
- Tamanho do passo:  $\tau = 0,995$ .

Para o conjunto de condições  $C_1$  e os parâmetros  $P_1$  foram elaborados os seguintes estudos de caso considerando apenas a usina de Furnas, cuja potência instalada é de 1312 MW:

---

- Caso 1: Afluências mensais de 1950 até 1960 (inclui uma grande seca).
- Caso 2: Afluências mensais de 1980 até 1990 (inclui uma grande cheia).
- Caso 3: Afluências mensais de 1931 até 1998 (histórico disponível).

Os resultados de tempo computacional e os valores da função objetivo para as soluções finais obtidas utilizando o MPI e o comando de otimização não-linear `Fmincon` [91], do Matlab, estão apresentados na Tabela 5.1. O computador utilizado tem um processador Pentium, 1,5 GHz, 256 M de Ram e todos os programas foram elaborados e executados em MATLAB 6.1 no ambiente Windows 2000. Os dados marcados com \* são casos em que o limite de tempo máximo de 14000 segundos foi ultrapassado. A marca NM indica que o critério de parada de número máximo de iterações foi atingido.

---

		Tempo (s)			F.o.		
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1	Caso 2	Caso 3
<b>MPI</b>	$(x, u)$	0,14	NM	NM	155.672.856	NM	NM
	$(x, u)m$	0,14	0,17	2,23	155.672.826	79.266.935	758.746.329
	$(x, q, v)$	0,23	0,30	5,45	155.677.740	77.959.751	757.336.964
	$(x, q, v)m$	0,27	0,23	3,31	155.677.022	77.966.504	757.420.839
<b>Fmincon</b>	$(x, u)$	110,51	NM	*	155.672.828	NM	*
	$(x, u)m$	100,32	200,47	*	155.672.828	79.621.937	*
	$(x, q, v)$	3043,03	3213,34	*	155.672.840	77.991.960	*
	$(x, q, v)m$	3128,84	3160,31	*	155.673.029	77.994.420	*

Tabela 5.1: Tempos computacionais e custo da solução final em segundos do MPI e do Fmincon.

O comando `Fmincon` empregado utiliza um método quase-Newton BFGS [85, 29], mas seu desempenho computacional não é competitivo com os MPIs. Assim, seu papel nos testes realizados é o de validar as expressões relativas à derivada segunda da função objetivo que formaram a matriz Hessiana utilizada pelos MPIs.

Ainda de acordo com os resultados da Tabela 5.1, nos Casos 2 e 3 verifica-se que os modelos  $(x, u)$  e  $(x, u)m$  ou não convergem ou fornecem uma solução final com custo maior, respectivamente.

Somente no Caso 1 esses modelos conseguem bom desempenho, pois corresponde a um período de vazões baixas onde a solução ótima turbina bem abaixo do engolimento máximo e, portanto a função objetivo não apresenta quinas.

Gráficos relativos as trajetórias de volume e defluência para o Caso 2, obtidos com o uso dos modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$  são fornecidos pelas Figuras 5.1 e 5.2. Apenas as trajetórias relativas ao modelo  $(x, q, v)$  serão mostradas, pois as trajetórias das soluções dos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$  se superpõem. Nestas figuras existem legendas cujos significados são:

- $y$ : Afluência do período histórico considerado.
- $qmax$ : Turbinagem máxima  $\bar{q}$ .
- $umin$ : Defluência mínima  $\underline{u}$ .
- $MPI(x, q, v)$ : Trajetória de volume ou de defluência obtida com a resolução do modelo  $(x, q, v)$ .
- $MPI(x, u)m$ : Trajetória de volume ou de defluência obtida com a resolução do modelo  $(x, u)m$ .

É importante lembrar que a defluência  $u$  acima da turbinagem máxima  $qmax$  corresponde a um vertimento  $v$ . A Figura 5.2 mostra que a diferença das trajetórias de defluência dos modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$  existe em períodos de grandes afluências onde não é possível evitar o vertimento. Aliás, a solução do modelo  $(x, q, v)$  forneceu um vertimento acumulado no período analisado de  $4479m^3/s$ , enquanto o modelo  $(x, u)m$  apresentou  $6587m^3/s$  de vertimento acumulado. Assim, a solução do MPI  $(x, q, v)$  é melhor que do MPI  $(x, u)m$ , pois depleciona integralmente o reservatório em novembro de 1982 antes da grande cheia de 1982/1983, minimizando o vertimento acumulado. A partir de 1984, as duas soluções são idênticas, pois não requerem vertimentos.

---

As trajetórias de geração hidrelétrica dos modelos  $(x, u)_m$  e  $(x, q, v)$  para o Caso 2 são mostradas na Figura 5.3. O modelo  $(x, q, v)$  tem uma geração hidrelétrica média ao longo do período de  $858,32MW$  e o modelo  $(x, u)_m$  uma geração média de  $850,42MW$ , sendo essa diferença concentrada nos anos anteriores à grande cheia de 1982/1983.

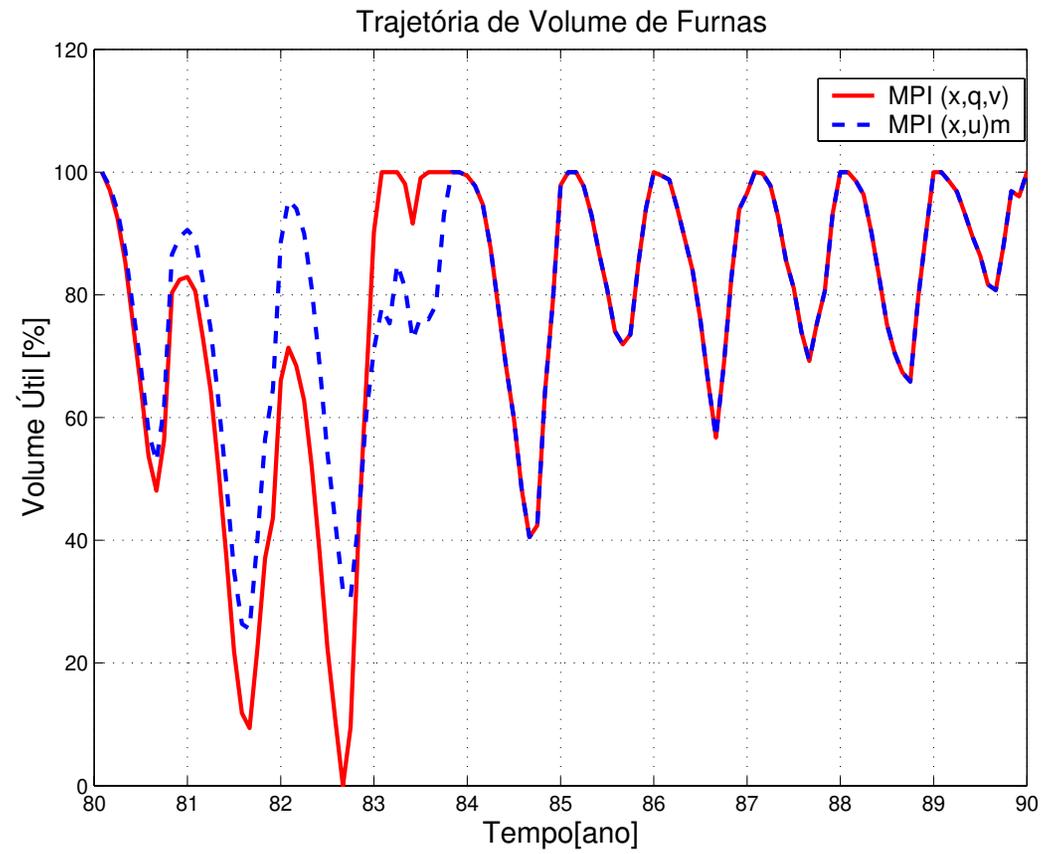


Figura 5.1: Trajetórias dos volumes na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1980 até abril de 1990, usando modelos  $(x, u)_m$  e  $(x, q, v)$ .

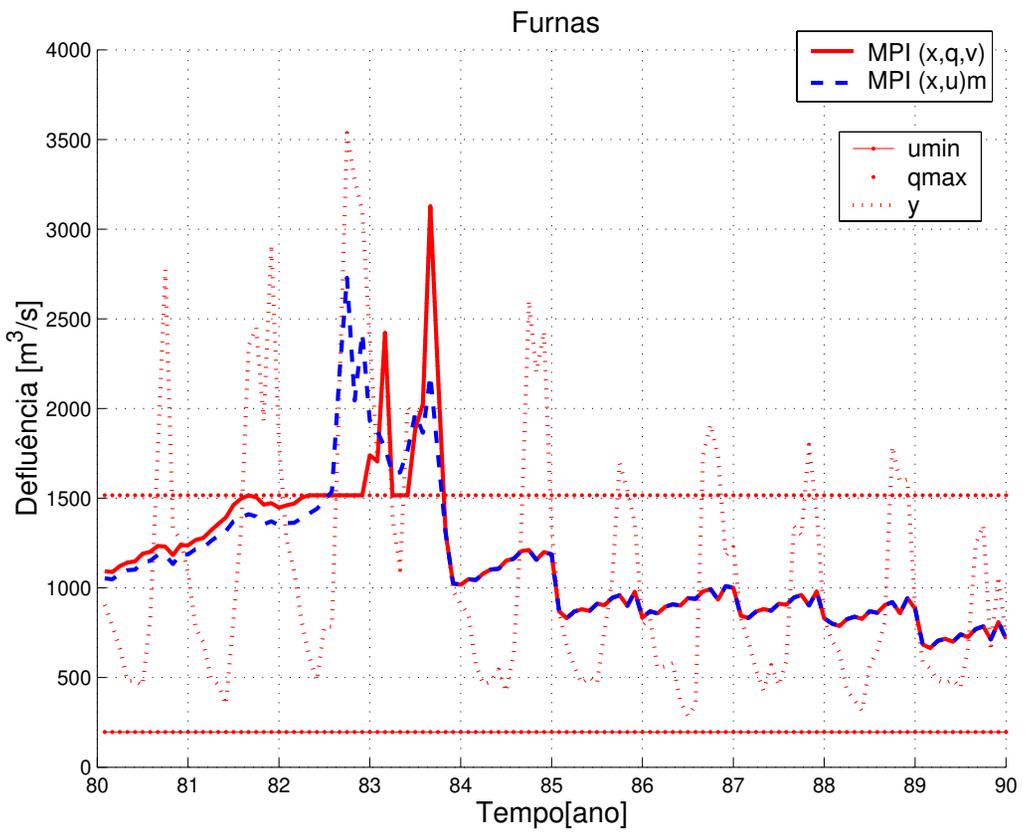


Figura 5.2: Trajetórias das defluências, defluência mínima, turbinagem máxima e afluência na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1980 até abril de 1990, usando modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$ .

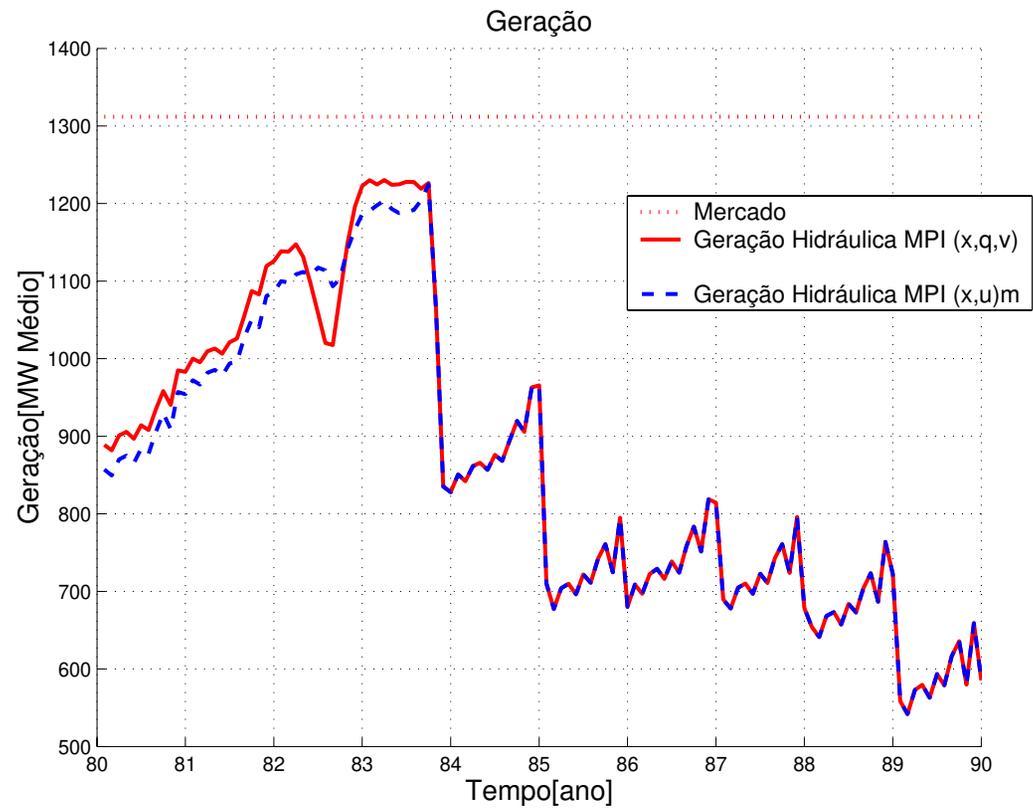


Figura 5.3: Trajetórias das gerações hidrelétricas na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1980 até abril de 1990, usando modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$ .

Para esclarecer a diferença entre as trajetórias dos modelos  $(x, u)$  e  $(x, q, v)$ , foi elaborado o Caso 4 em que foram consideradas as mesmas condições  $C_1$ , parâmetros  $P_1$  e a operação isolada de Furnas como nos Casos 1, 2 e 3, mas com as seguintes afluições:

- Caso 4: Afluições mensais de 1982 até 1983.

Os resultados acerca da trajetória de volume e defluência para os modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$  no Caso 4 podem ser observados na Figuras 5.4 e 5.5, respectivamente. Novamente, como as trajetórias das soluções dos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$  são coincidentes, somente as trajetórias do modelo  $(x, q, v)$  são mostradas. A solução do modelo  $(x, q, v)$  forneceu um vertimento acumulado no período analisado de  $1971m^3/s$ , enquanto o modelo  $(x, u)m$  apresentou  $2417m^3/s$  de vertimento acumulado. As trajetórias de geração hidrelétrica dos modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$  são mostradas na Figura 5.6. O modelo  $(x, q, v)$  tem uma geração hidrelétrica média ao longo do período de 1176,  $38MW$  e o modelo  $(x, u)m$  uma geração média de 1140,  $32MW$ .

---

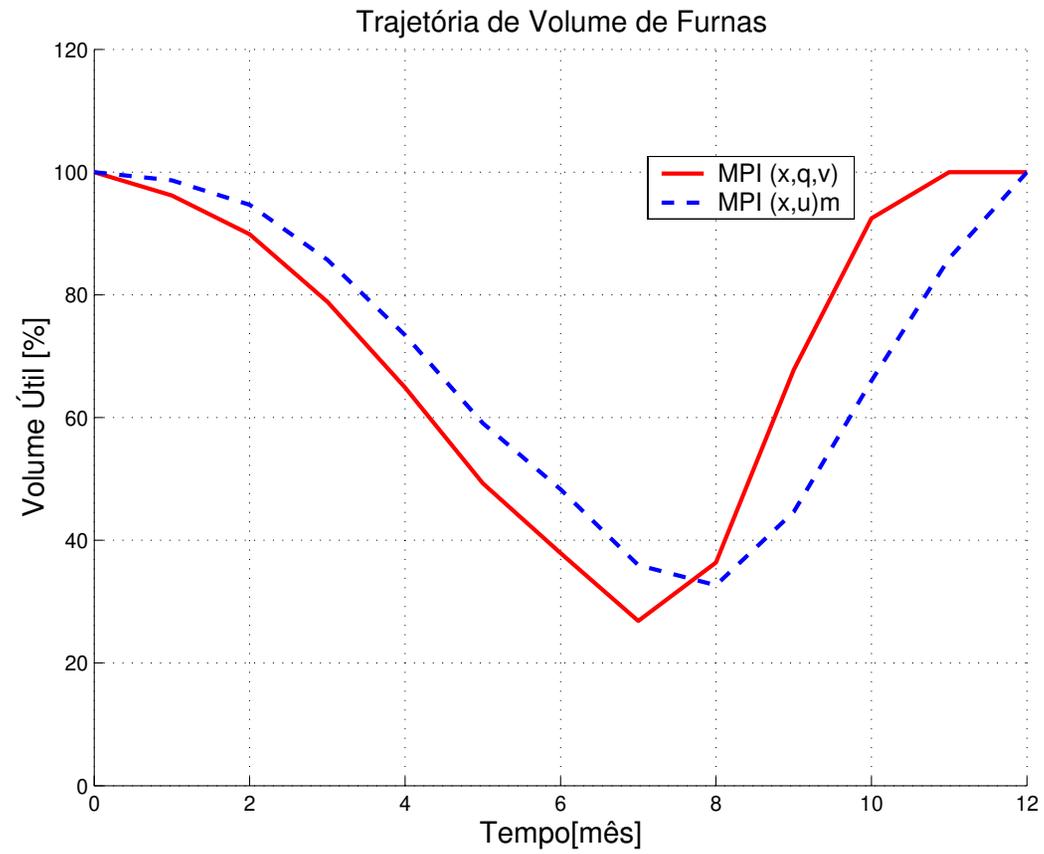


Figura 5.4: Trajetória de volume na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1982 até abril de 1983, usando modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$ .

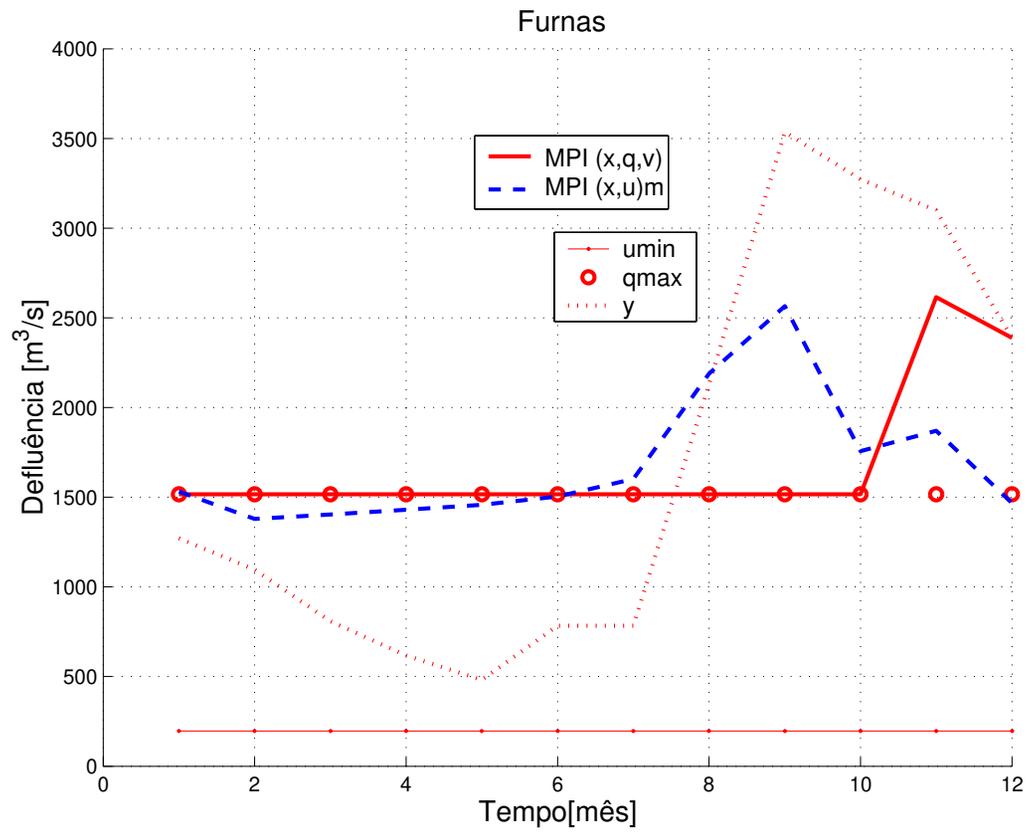


Figura 5.5: Trajetória de defluência, defluência mínima, turbinagem máxima e afluência na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1982 até abril de 1983, usando modelos  $(x, u)_m$  e  $(x, q, v)$ .

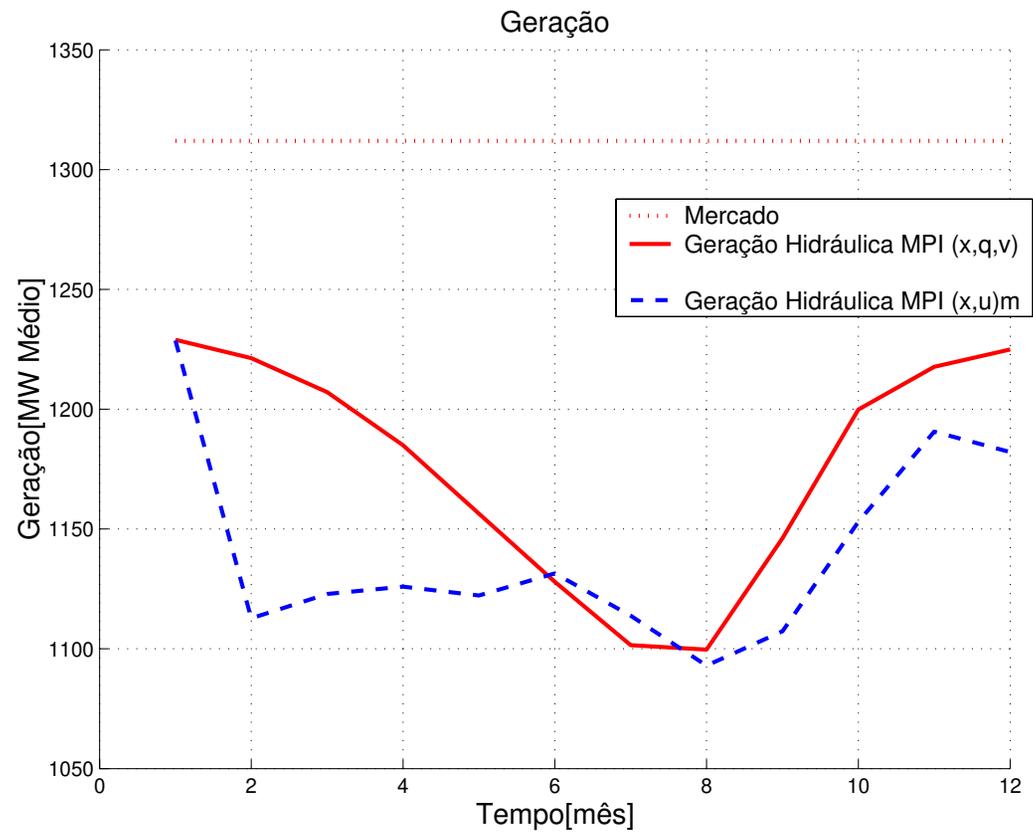


Figura 5.6: Trajetórias das gerações hidrelétricas na operação isolada da usina de Furnas no período de maio de 1982 até abril de 1983, usando modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$ .

Com a Figura 5.5 é possível observar que devido ao grande volume de água afluente neste período, as trajetórias de defluência dos três modelos apresentam vertimento. A trajetória de defluência do modelo  $(x, u)m$ , porém, verte no início do período chuvoso. Já a trajetória dos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$  mantêm a turbinagem no máximo e concentra o vertimento no final do período chuvoso.

De acordo com a Figura 5.6, o único momento em que a geração hidrelétrica do modelo  $(x, u)m$  é maior que a geração do modelo  $(x, q, v)$  ocorre do mês 6 até o mês 8, pois neste período ambos os modelos têm a turbinagem no máximo (vide Figura 5.5), mas a altura de queda do modelo  $(x, u)m$  é maior (vide Figura 5.4).

Essa diferença de comportamento é que justifica o valor da função objetivo do modelo  $(x, u)m$  ser 73,29% maior que a solução dos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$  para o Caso 2 e 0,18% no Caso 3. A menor diferença no Caso 3 se explica pela ocorrência no histórico de vazões de poucas situações hidrológicas como a do Caso 2, em que a solução final possui vertimento.

Em termos matemáticos o modelo  $(x, u)m$  forneceu uma solução pior que os demais modelos, pois o cálculo das suas derivadas primeiras é tal que despreza a presença das quinas da função objetivo. Assim, quando a solução final for tal que existe vertimento, e portanto é necessário calcular as derivadas primeiras para além do ponto de quina, o modelo  $(x, u)m$  fornecerá uma solução pior que a solução dos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ .

Outro teste realizado foi verificar o ganho computacional que pode existir quando apenas a diagonal principal da Hessiana é considerada nos cálculos de otimização do MPI. Para verificar se o custo computacional de utilização da Hessiana Tridiagonal, no caso de uso do MPI, é incrementado conforme a dimensão do problema é aumentada, foram utilizados os Casos 1, 2 e 3. Os resultados da Tabela 5.2 são para Hessiana Tridiagonal.

---

		Tempo (s)			F.o.		
		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1	Caso 2	Caso 3
<b>MPI</b>	$(x, u)$	0,28	NM	NM	155672772	NM	NM
	$(x, u)m$	0,22	0,27	6,16	155672829	79282558	758755037
	$(x, q, v)$	0,34	1,05	24,31	155672762	77933436	757335878
	$(x, q, v)m$	0,34	0,92	61,97	155672744	77931339	757325867

Tabela 5.2: Tempos computacionais e valores da solução final obtida em segundos para o MPI usando Hessiana Tridiagonal.

Comparando a Tabela 5.1 com a Tabela 5.2 é possível verificar que o MPI, utilizando Hessiana Tridiagonal, obteve uma ligeira melhoria na função objetivo: no Caso 1 uma melhoria de 0,001%, no Caso 2 uma melhoria de 0,1% e no Caso 3 uma melhoria de 0,01%. Esta melhoria, porém, acarretou um acréscimo no tempo computacional: até 50% no Caso 1, até 250% no Caso 2 e até 1772% no Caso 3. Diante destes resultados, conclui-se que a melhoria no valor da função objetivo não compensa o aumento do tempo computacional, optando-se pela utilização da Hessiana Diagonal.

Outro conjunto de testes acerca do comportamento dos modelos matemáticos desenvolvidos com o MPI foi realizado para casos com mais de uma usina, considerando:

- O conjunto de condições  $C_1$ .
- O conjunto de parâmetros  $P_1$ .

Para o conjunto de condições  $C_1$  e de parâmetros  $P_1$  foram consideradas sete usinas: Emborcação, Itumbiara, São Simão, Furnas, Marimbondo, Água Vermelha e Ilha Solteira, cuja potência instalada conjunta corresponde à 12824MW, ou seja, 18,71% da capacidade instalada das usinas hidrelétricas do SIN no ano de 2005, de acordo com o ONS (vide Figura 3.8). Com elas foram elaborados os seguintes estudos de caso:

- Caso 5: Afluências mensais de 1950 até 1960 (inclui uma grande seca).
- Caso 6: Afluências mensais de 1980 até 1990 (inclui uma grande cheia).

Os resultados do MPI para estas considerações estão na Tabela 5.3. Os Casos 5 e 6 confirmam que a melhor escolha para a resolução do MOUI via MPI, considerando robustez, é o uso dos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ . Afinal, os modelos  $(x, u)$  e  $(x, u)m$  não convergiram para o Caso 6. Para o Caso 5 o modelo  $(x, u)m$  convergiu, mas sua solução apresenta custo maior que dos modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ .

As Figuras 5.7 e 5.8 mostram as trajetórias de volume e defluência para os modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$ , respectivamente. Novamente os resultados do modelo  $(x, q, v)m$  serão omitidos por serem coincidentes com os do modelo  $(x, q, v)$ . Observe-se que, ao contrário do Caso 1, a presença de mais usinas no sistema, algumas a jusante de Furnas, causa dificuldades para o modelo  $(x, u)m$ , mesmo em uma hidrologia baixa como a década de 50.

---

		Tempo (s)		F.o.	
		Caso 5	Caso 6	Caso 5	Caso 6
<b>MPI</b>	$(x, u)$	NM	NM	NM	NM
	$(x, u)m$	4,94	NM	11558276721	NM
	$(x, q, v)$	18,52	13,89	11293032665	5771611281
	$(x, q, v)m$	20,36	15,00	11292294907	5771446805

Tabela 5.3: Tempos computacionais e valores da solução final em segundos para o MPI.

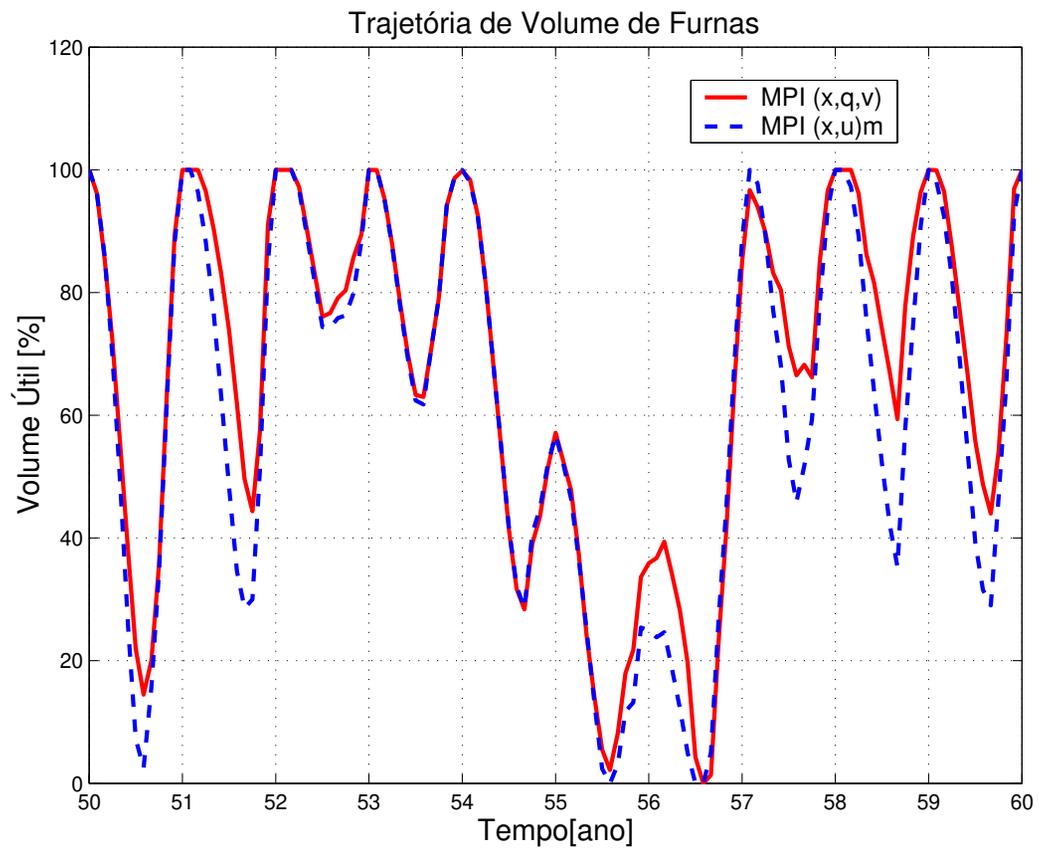


Figura 5.7: Trajetória de volume na operação de Furnas para o Caso 5, usando modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$ .

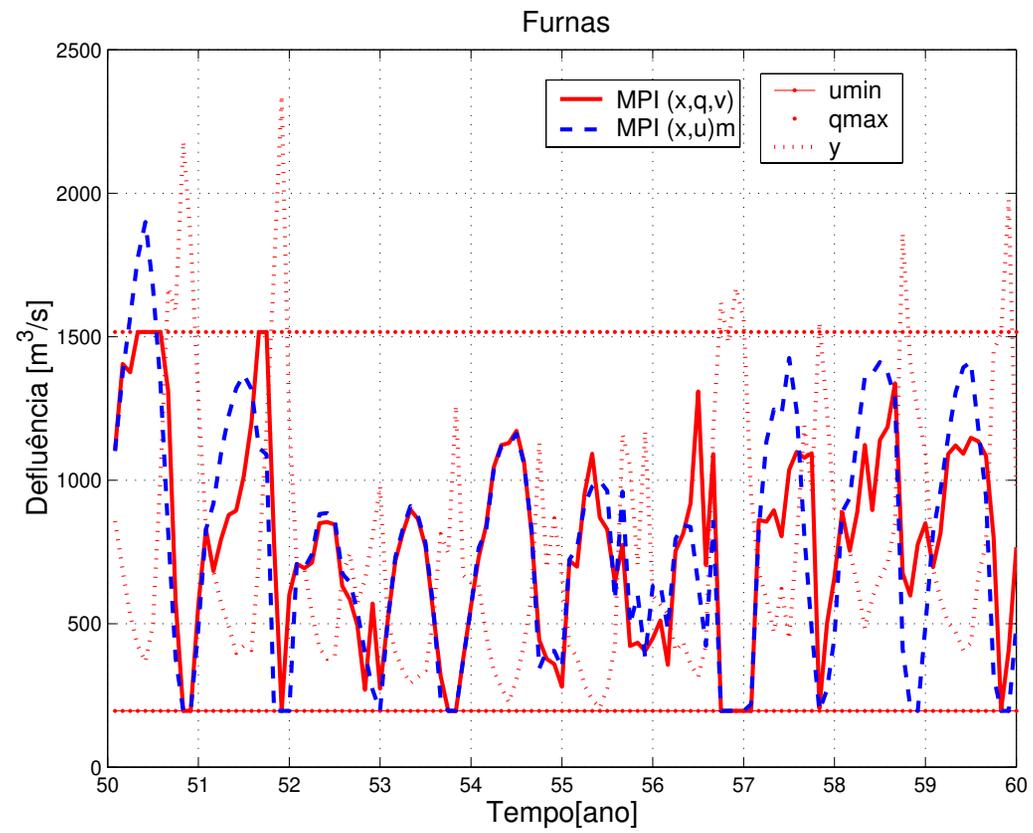


Figura 5.8: Trajetória de defluência, defluência mínima, turbinagem máxima e afluência na operação de Furnas para o Caso 5, usando modelos  $(x, u)m$  e  $(x, q, v)$ .

A Tabela 5.4 contém as dimensões dos problemas relacionados com cada um dos 6 casos já formulados e resolvidos.

Caso	Número de variáveis		Número de restrições	
	$(x, u)$ e $(x, u)m$	$(x, q, v)$ e $(x, q, v)m$	$(x, u)$ e $(x, u)m$	$(x, q, v)$ e $(x, q, v)m$
<b>1</b>	240	360	600	720
<b>2</b>	240	360	600	720
<b>3</b>	1608	2412	4020	4824
<b>4</b>	24	36	60	72
<b>5</b>	1680	2520	4200	5040
<b>6</b>	1680	2520	4200	5040

Tabela 5.4: Características dos problemas resolvidos para cada caso.

Os testes realizados nos 6 casos sugerem fortemente a adoção dos modelos  $(x, q, v)$  ou  $(x, q, v)m$ . Para os próximos testes com os demais parâmetros serão considerados somente estes dois modelos.

Duas outras análises que podem ser combinadas, consistem na verificação de qual ponto inicial acelera a convergência do MPI e a decisão entre qual MPI é o mais robusto: preditor-corretor ou primal-dual. Para tanto, foi considerado um MPI com modelo  $(x, q, v)$  e os demais parâmetros como descrito por  $P_1$ . Assim, foram testados os quatro pontos iniciais já descritos em 4.2.2:

- MPIG: Ponto inicial criado a partir de um MPI genérico.
- MOUI: Ponto inicial utilizado em [66].
- TMED: Adaptação do ponto inicial MOUI para considerar as defluências iniciais iguais ao valor de se turbinar a média das afluentes.
- TMAX: Adaptação do ponto inicial MOUI para considerar as defluências iniciais iguais ao valor da turbinagem máxima.

A Tabela 5.5 indica o desempenho do MPI preditor-corretor para cada uma das inicializações existentes, mostrando que a inicialização mais robusta para o MPI preditor-corretor é a MPIG.

Com a Tabela 5.6 é possível concluir que o melhor desempenho para o MPI primal-dual é obtido com a inicialização MOUI.

<b>Ponto Inicial</b>	<b>Caso 5</b>	<b>Caso 6</b>
MPIG	36	39
MOUI	NM	25
TMED	29	NM
TMAX	NM	NM

Tabela 5.5: Número de iterações de MPI preditor-corretor para cada inicialização.

<b>Ponto Inicial</b>	<b>Caso 5</b>	<b>Caso 6</b>
MPIG	52	51
MOUI	26	29
TMED	29	70
TMAX	NM	NM

Tabela 5.6: Número de iterações de MPI primal-dual para cada inicialização.

Os resultados preliminares das Tabelas 5.5 e 5.6 indicam que o MPI primal-dual com inicialização MOUI é a opção mais robusta (converge para os Casos 5 e 6) e mais rápida (menor número de iterações).

Devido ao bom desempenho dos MPIs sem a utilização de busca unidimensional, apesar desta opção ter sido implementada, sua utilização foi descartada neste trabalho.

O parâmetro de centragem  $\sigma = 1/n$  e o parâmetro de tamanho do passo  $\tau = 0,995$  apresentaram resultados satisfatórios ao longo dos testes dos demais parâmetros, sendo adotados sem demais análises.

Por último, o aproveitamento de estrutura esparsa da matriz  $A$  permite a resolução de problemas de grande porte. Assim, a adoção da estrutura esparsa  $A_i$  e  $S_i$  é uma necessidade e não serão realizados testes com as demais estruturas esparsas. Na verdade, as estruturas esparsas  $A$  e  $A$  e  $S$  foram desenvolvidas com o intuito de validar as soluções obtidas para o MPI que utiliza a estrutura esparsa  $A_i$  e  $S_i$ .

Resumindo, portanto, as conclusões obtidas com os testes da primeira fase acerca dos valores mais adequados dos parâmetros  $P_2$  do MPI são:

1. Modelagem matemática: modelo  $(x, q, v)$  ou  $(x, q, v)m$ .
2. Estrutura esparsa:  $A_i$  e  $S_i$  <sup>1</sup>.
3. Matriz Hessiana: Diagonal.
4. MPI: primal-dual.
5. Busca unidimensional: não usar.
6. Ponto inicial: MOUI.
7. Parâmetro de centragem:  $\sigma = 1/n$ .
8. Parâmetro do tamanho do passo:  $\tau = 0,995$ .

### 5.3 Segunda fase de testes

O estudo de caso considera agora uma configuração do SIN com 82 usinas, descritas nas Figuras 5.9 e 5.10, que totalizam um potência instalada de 66858,41 MW. O problema será resolvido para um horizonte de 12 meses, com a afluência mais provável de ocorrência que é 80% da MLT e as condições  $C_1$ . Cabe lembrar que a política operativa de controle preditivo (CP) descrita no Capítulo 2 consiste na aplicação do modelo ao SIN em um horizonte semelhante a este. A diferença é que no CP se usa uma previsão de vazões ao invés da porcentagem mais provável da MLT.

A resolução deste problema foi realizada pelo MPI com os parâmetros  $P_2$ , sendo que foram considerados os modelos  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$ . Como já destacado, os resultados do MPI foram obtidos utilizando Matlab 6.1 em um computador com processador Pentium 1,5 GHz, 256 M de memória Ram, Windows 2000. Além disso, a ferramenta de solução atualmente utilizada pelo HydroMax (cuja implementação e descrição foi realizada por [27] e se baseia em um modelo de fluxo em redes que adota a representação  $(x, u)$  com tratamento das quinas via busca unidimensional) também foi utilizada para comparação. Esta ferramenta foi desenvolvida em C++ Builder 6 e seus resultados computacionais foram obtidos em um Computador com Processador

---

<sup>1</sup>Testes computacionais, indicaram que a partir de 10 usinas hidrelétricas a estrutura esparsa  $A$ , para problemas com 60 intervalos de tempo, gasta no mínimo o dobro do tempo computacional em comparação com a estrutura esparsa  $A_i$  e  $S_i$ .

---

Pentium de 3,2GHz, 1024 M de memória Ram, em ambiente Windows XP, versão 2002.



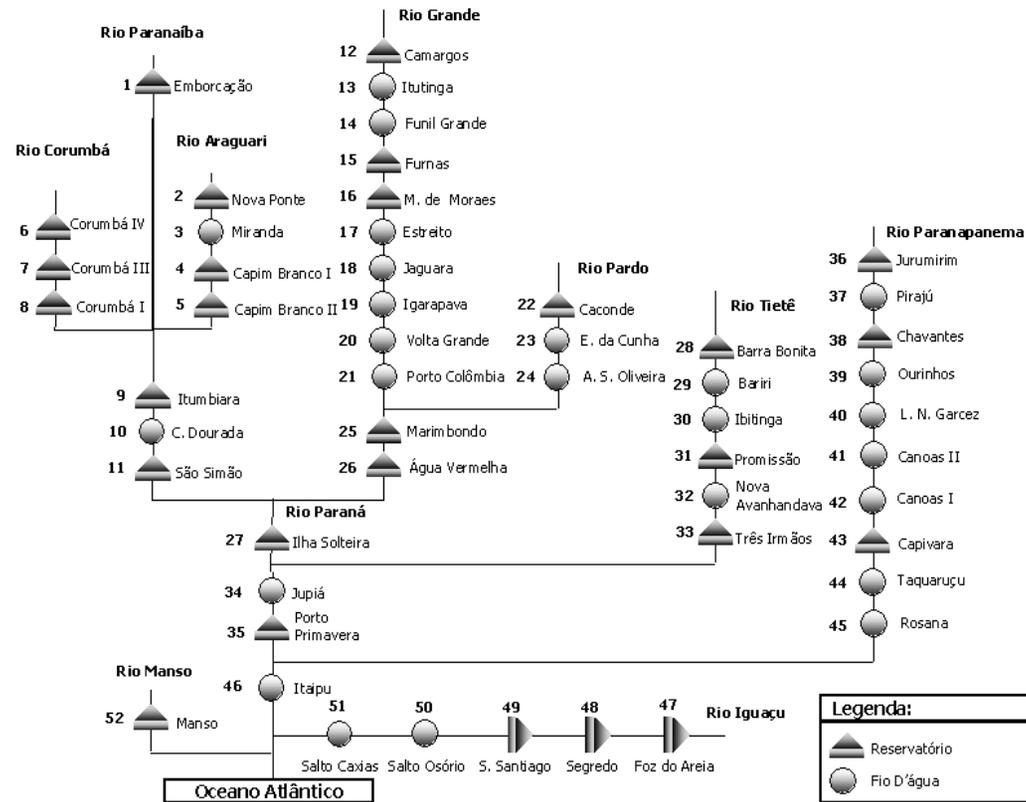


Figura 5.9: Usinas hidrelétricas que compõem o Sistema Interligado Nacional (primeira parte).

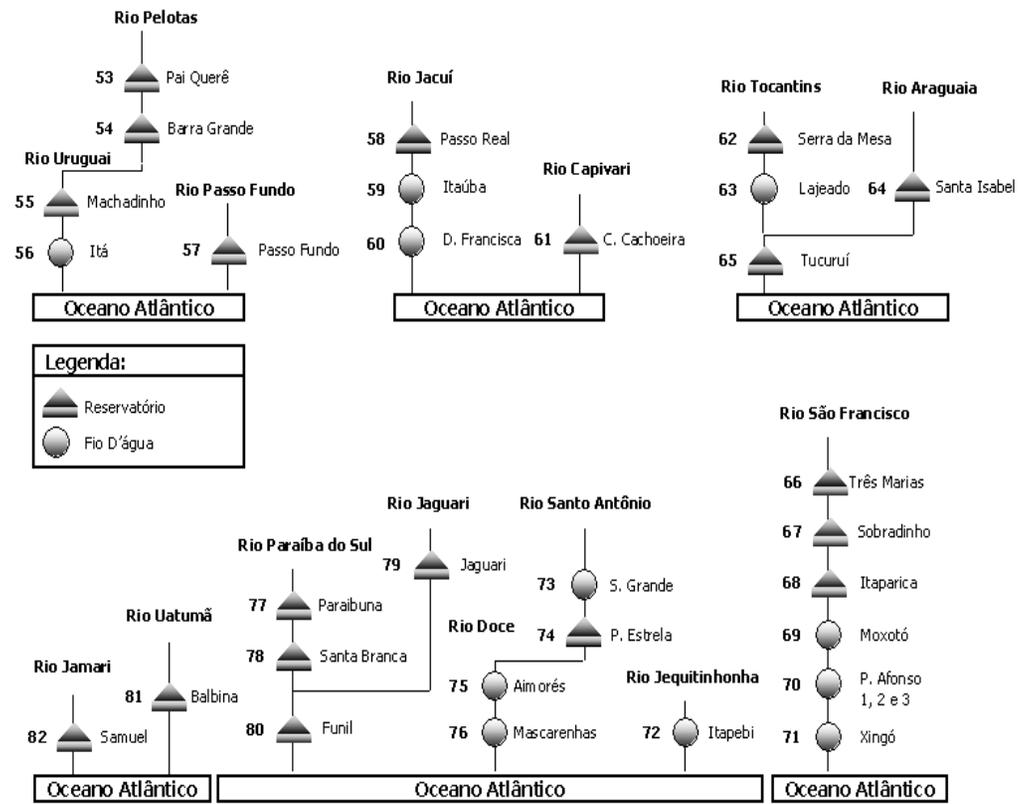


Figura 5.10: Usinas hidrelétricas que compõem o Sistema Interligado Nacional (segunda parte).

A Tabela 5.7 descreve o desempenho de cada método para afluência de 80% da MLT.

Método	Iterações	Tempo(s)	F.o.
MPI $(x, q, v)$	231	113,50	24325439264
MPI $(x, q, v)m$	81	39,78	24381942993
HydroMax	3440	13,28	24891445090

Tabela 5.7: Desempenho dos métodos para 82 usinas e 80% da MLT.

A Tabela 5.7 indica que o MPI  $(x, q, v)$  e MPI  $(x, q, v)m$  conseguiram soluções cujos valores da função objetivo são 2,27% e 2,04% menores que a solução do HydroMax, respectivamente. Neste caso, o MPI  $(x, q, v)$  conseguiu uma solução de menor custo, porém  $(x, q, v)m$  utilizou quase um terço das iterações de  $(x, q, v)$ .

A Figura 5.11 fornece a trajetória de geração hidrelétrica e mercado do sistema de 82 usinas para cada um dos métodos, considerando afluências de 80% da MLT. Dentre as 82 usinas, as Figuras 5.12, 5.13 e 5.14 focalizam no comportamento da usina de Furnas para as trajetórias de geração hidráulica, volume do reservatório e defluência com cada um dos métodos, respectivamente. Novamente as trajetórias de geração hidráulica dos métodos MPI  $(x, q, v)$  e  $(x, q, v)m$  se superpõem. A trajetória de Figura 5.11 indica diferenças entre a geração hidrelétrica das 82 usinas proposta pela ferramenta de solução do HydroMax e as obtidas pelo MPI. Analisando a Figura 5.14, observa-se que a trajetória de defluência (turbinagem) de Furnas, com o MPI  $(x, q, v)$ , possui uma oscilação oposta à da afluência, indicando que o comportamento do reservatório da cabeceira é inverter a sazonalidade das vazões para regularizar as afluências das usinas à jusante, as quais recebem ainda vazões incrementais com sazonalidade normal. A solução do HydroMax não possui tal comportamento.

---

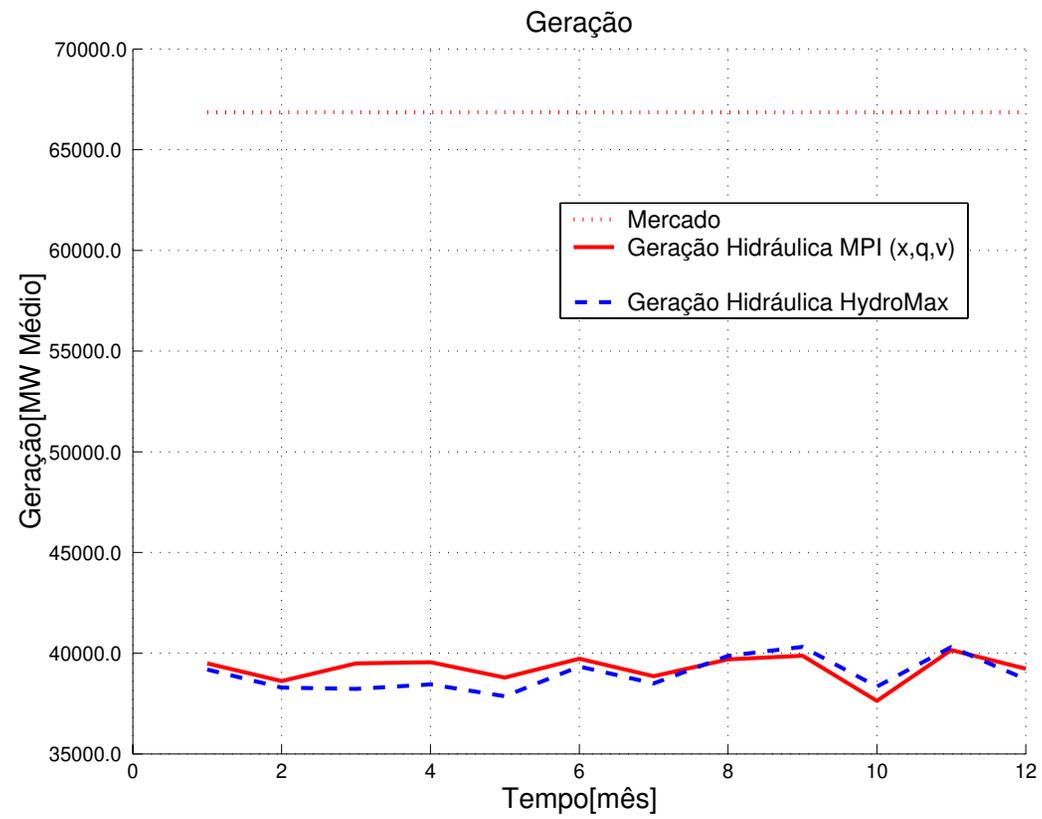


Figura 5.11: Trajetórias de geração hidráulica fornecidas pelo MPI ( $x, q, v$ ) e o HydroMax no sistema de 82 usinas e afluência de 80% da MLT.

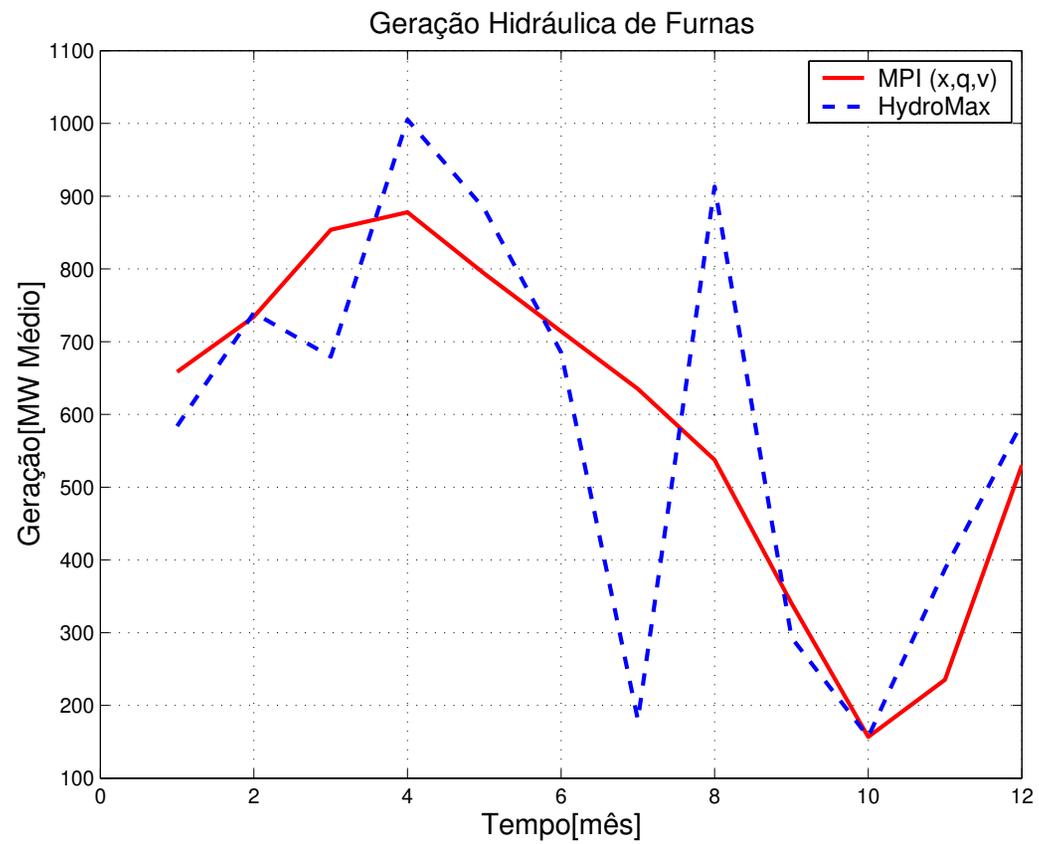


Figura 5.12: Trajetórias de geração hidráulica para a usina de Furnas fornecidas pelo MPI  $(x, q, v)$  e pelo HydroMax no sistema de 82 usinas e afluência de 80% da MLT.

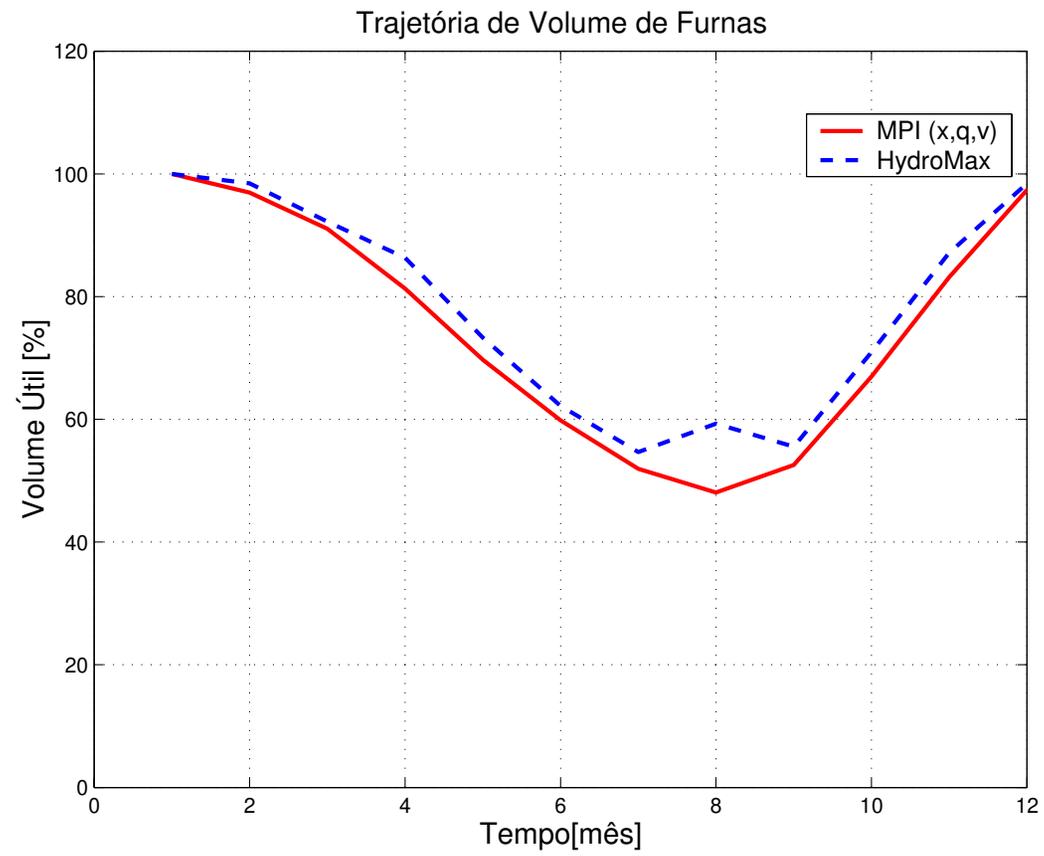


Figura 5.13: Trajetórias de volume para a usina de Furnas fornecidas pelo MPI  $(x, q, v)$  e o HydroMax no sistema de 82 usinas e afluência de 80% da MLT.

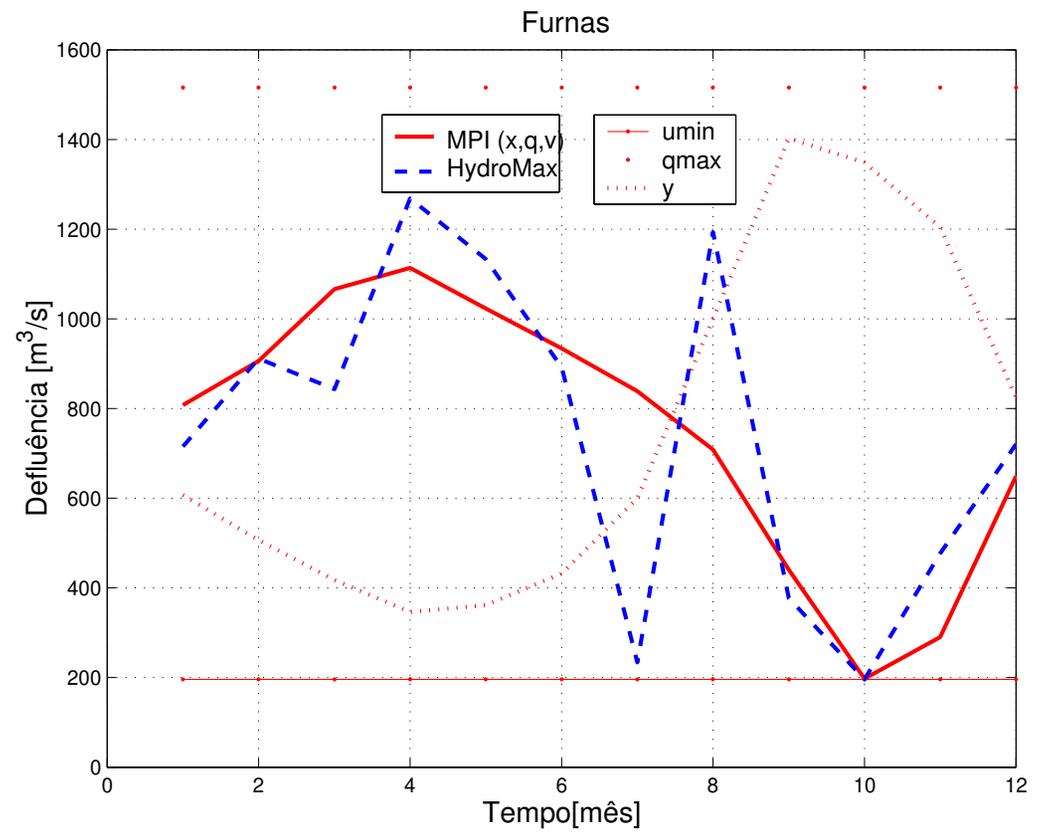


Figura 5.14: Trajetórias de defluência, defluência mínima, turbinagem máxima e afluência para a usina de Furnas fornecidas pelo MPI  $(x, q, v)$  e o HydroMax no sistema de 82 usinas e afluência de 80% da MLT.

Para indicar em termos financeiros o benefício que as soluções do MPI fornecem em relação a ferramenta atualmente em uso no HydroMax, foi construída a Tabela 5.8. A Tabela 5.8 fornece os valores de geração hidrelétrica média de cada método ao longo dos 12 meses de planejamento para afluência de 80% da MLT. Como pode ser verificado, a solução proposta pelo MPI  $(x, q, v)m$  oferece um aumento da geração hidráulica média, ao longo de 12 meses, de 279,27 MW médios para afluência de 80% da MLT.

Afluência	Método	MW Médio
80%	MPI $(x, q, v)$	39259,97
	MPI $(x, q, v)m$	39227,57
	HydroMax	38948,30

Tabela 5.8: Desempenho dos métodos em MW médio ao longo de 12 meses com afluência de 80% da MLT.

Considerando que esta geração adicional tivesse que ser obtida a partir de uma termelétrica com custo de geração <sup>2</sup> de  $R\$ 6,4/MWh$ , então, a solução proposta pelos modelos corresponderia a uma economia de:

- Modelo  $(x, q, v)m$ : Fazendo-se a seguinte conta  $279,27 \times 6,4 \times 24 \times 365 = 15.641.856$ , resultando em mais de quinze milhões de reais por ano.
- Modelo  $(x, q, v)$ : A energia adicional gerada ao longo de 12 meses é de 311,67 MW médios. Realizando uma conta análoga, a economia será de  $R\$17.473.466$  ao ano.

Para verificar o desempenho e a robustez do MPI com os parâmetros  $P_2$  em problemas de grande porte, foram consideradas as usinas numeradas de 1 até 61 conforme as Figuras 5.9 e 5.10. Não foram consideradas as 82 usinas disponíveis, pois algumas usinas apresentam incompatibilidade entre os valores de defluência mínima e afluência histórica. Além disso, foi considerado todo o histórico de vazões disponíveis para as 61 usinas, ou seja, 780 intervalos de tempo (que corresponde ao número de meses existentes entre maio de 1931 e abril de 1996). Com isso, o problema não-linear, para os modelos  $(x, q, v)$  ou  $(x, q, v)m$ , resultante possui  $61 \times 780 \times 3 = 142.740$  variáveis e

<sup>2</sup>Este custo corresponde a usina térmica de menor custo marginal do Sistema Interligado Nacional, como consta no Apêndice E.

285.480 restrições dentre as quais 47.580 são restrições de igualdade e 237.900 são canalizações. O desempenho computacional do MPI com os parâmetros  $P_2$  e modelo  $(x, q, v)$  para este problema está descrito na Tabela 5.9. O resultado mostra que o MPI é capaz de resolver um problema de programação não-linear que é mais de dez vezes maior do que o problema resolvido pelo MINOS no trabalho [12], com um tempo computacional razoável.

Iterações	Tempo(s)	F.o.
61	5869,75	719663202367

Tabela 5.9: Desempenho do MPI com parâmetros  $P_2$  em problemas do MOUI de grande porte.

Os resultados da Tabela 5.9 devem ser analisados sob a luz do histórico dos trabalhos que resolveram o MOUI sem realizar aproximações da sua função objetivo não-linear como dado na Tabela 5.10.

Ano	Artigo	Usinas	Períodos	Variáveis $(x, q, v)$
1987	[23]	20	60	3.600
1988	[63]	31	60	5.580
1990	[21]	51	60	9.180
1995	[33]	27	60	4.860
2003	[12]	75	60	13.500

Tabela 5.10: Artigos e maiores problemas MOUI resolvidos.

Uma análise das dimensões dos problemas resolvidos por cada artigo da Tabela 5.10 deve considerar, também, os recursos computacionais disponíveis da época. Da Tabela 5.10, apesar de em [12] ter sido utilizado um software de propósito geral, o MINOS [73], foi resolvido o MOUI com maior número de variáveis. Para tanto, foi utilizado um computador com processador Pentium 3 de 500 MHz e 160 MB de memória RAM, rodou o caso com 75 usinas e 60 períodos em 8340 segundos.

Isto confirma para o MOUI, portanto, a afirmação do trabalho de Vanderbei que mostra o desempenho superior dos métodos de pontos interiores por ele desenvolvidos (LOQO - [94]) em relação a outras abordagens, tais

---

como uma abordagem baseada em região de confiança (KNITRO - [19]) e um método quase-newton (SNOPT - [42]). A comparação entre estas abordagens é descrita em detalhes em [94].

---

# Capítulo 6

## Modelo do Fluxo de Potência Ótimo Corrente Contínua

### 6.1 Modelagem por Fluxos em Redes

O modelo de alocação de despacho de potência ativa a ser utilizado neste trabalho foi proposto em [22], sendo um modelo de fluxo de potência linearizado CC (Corrente Contínua), representado por um modelo de fluxos em redes com restrições adicionais.

Para construir o modelo, foi considerada uma simplificação do sistema elétrico em que todos os elementos do sistema são classificados como:

- Barras: podem representar geradores ou cargas.
- Ramos: podem representar linhas de transmissão ou transformadores.

O processo de construção da representação da rede elétrica é ilustrado na Figura 6.1.

A partir deste processo será elaborado um modelo de fluxo de potência ótimo (FPO) que contempla apenas as cargas ativas de uma rede elétrica (modelo CC ou simplesmente CC).

Visando a melhor compreensão da construção do FPO CC, a partir do modelo de fluxos em redes, será utilizada uma pequena rede elétrica.

**Exemplo 1:** Seja uma rede elétrica com duas barras de geração que podem representar ou usinas hidrelétricas ou termoeletricas, ou qualquer

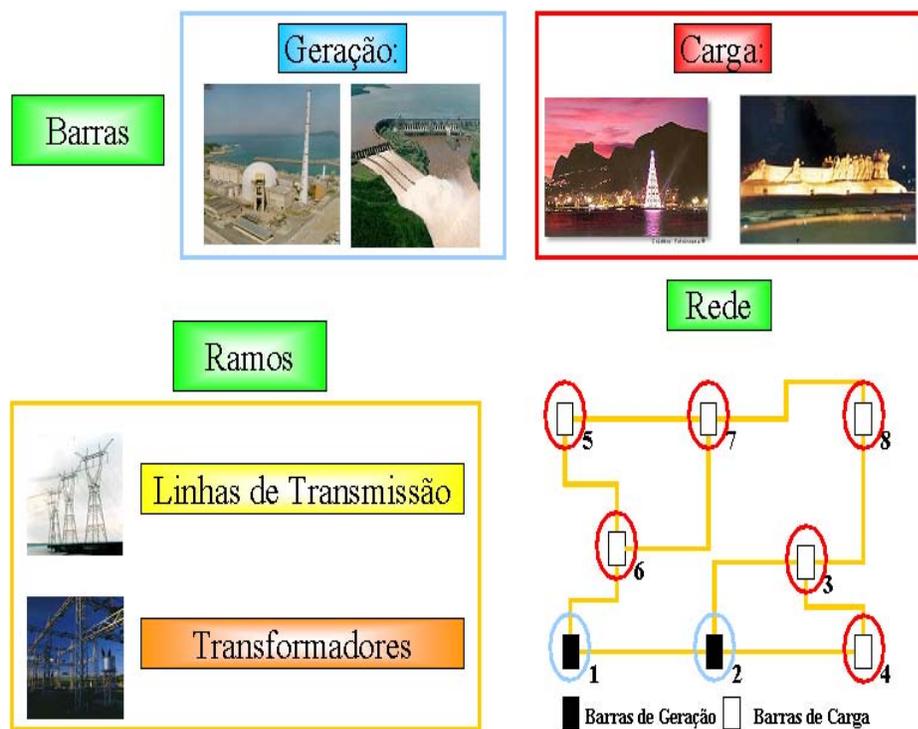


Figura 6.1: Representação dos elementos de uma rede elétrica.

outra fonte de geração de energia. Sejam, também, seis barras de carga que podem representar o consumo de cidades, ou de grandes indústrias. A Figura 6.2 ilustra esta rede.

A chave para transformar a representação do modelo de barras e ramos em um grafo é observar que deverão fluir pelo sistema elétrico as quantidades de potência produzidas pelas barras de geração para atender as demandas das barras de carga.

Portanto, para construir a representação de grafos da Figura 6.2, é preciso observar que:

- Nós: representam as barras de geração ou as barras de carga (barras).
- Arcos: representam as linhas de transmissão ou transformadores (ramos).

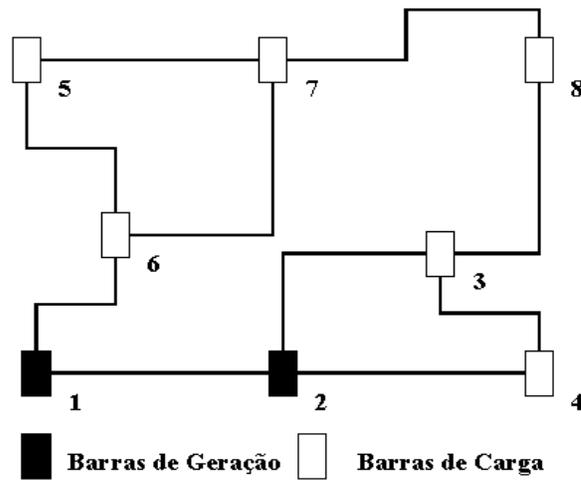


Figura 6.2: Representação da rede elétrica do Exemplo 1.

Assim, a Figura 6.2 pode ser representada pelo grafo dado na Figura 6.3.

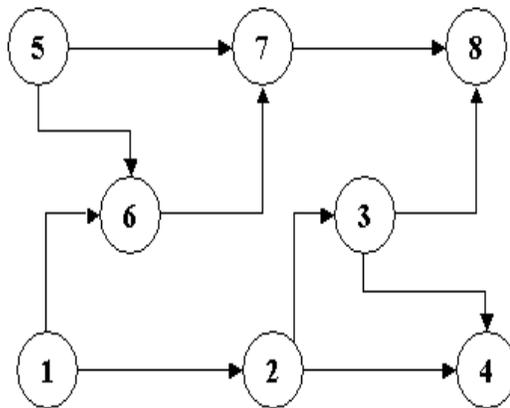


Figura 6.3: Representação em grafo da rede elétrica do Exemplo 1.

Para construir o FPO CC a partir da modelagem por grafos, é preciso considerar as leis de Kirchhoff. A lei dos nós de Kirchhoff [51, 88], fornece a equação (6.1).

$$Af = p - d. \quad (6.1)$$

Onde:  $A$  representa a matriz de incidência nó-arco,  $f$  representa o vetor de fluxo de potência ativa em cada ramo,  $p$  representa o vetor de geração de potência ativa em cada barra e  $d$  representa o vetor de demanda por potência ativa em cada barra.

A equação (6.1) expressa o balanço de potência nos nós da rede elétrica. Ou seja, a injeção líquida de potência ativa em cada nó deve ser igual ao fluxo líquido que escoar pelos arcos que se conectam a ele.

A lei dos nós, descrita com (6.1), aplicado no grafo da Figura 6.3 é dada matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{16} \\ f_{23} \\ f_{24} \\ f_{56} \\ f_{57} \\ f_{67} \\ f_{78} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \end{bmatrix}$$

Além do atendimento de demanda de potência, é necessário considerar que a soma das tensões em cada um dos percursos fechados existentes na rede elétrica deve ser igual a zero, ou seja, a lei das malhas de Kirchhoff [51, 88], conforme a equação (6.2).

$$Xf = 0 \tag{6.2}$$

Onde:  $X$  representa a matriz de reatâncias de laços cujas linhas representam os laços elementares <sup>1</sup> e cujas colunas representam os ramos existentes na rede.

Aplicando a lei das malhas no grafo da Figura 6.3, considerando os laços elementares 1, 2 e 3 da Figura 6.4, a representação matricial é dada por:

---

<sup>1</sup>Laços elementares são qualquer conjunto de  $M-N+1$  (no caso  $10-8+1 = 3$ ) laços linearmente independentes da rede, selecionado para impor a lei das malhas de Kirchhoff. Qualquer laço não-elementar pode ser obtido pela combinação dos laços elementares. O sinal associado à reatância de um dado arco de um dado laço é positivo (negativo) se a orientação do arco (não) coincide com a do laço.

---

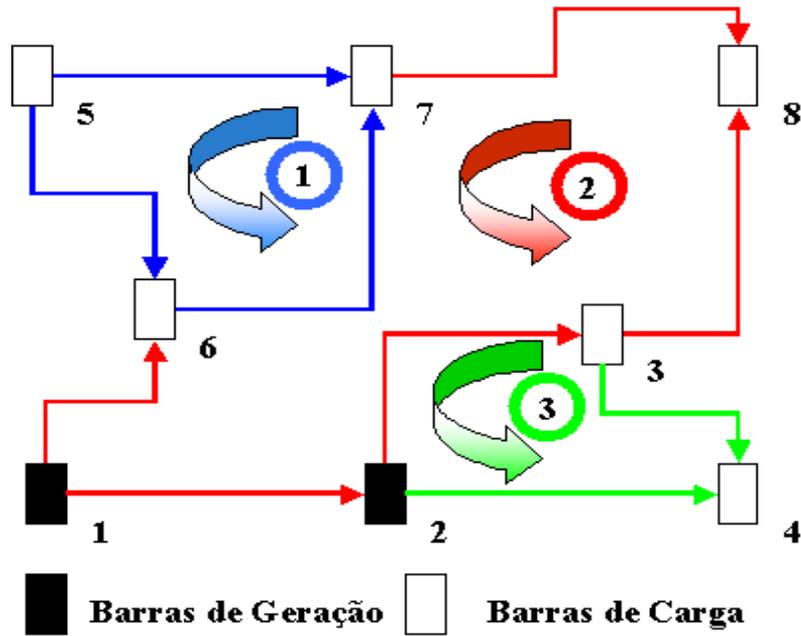


Figura 6.4: Representação da lei das malhas na rede do Exemplo 1.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{56} & -x_{57} & x_{67} & 0 \\
 x_{12} & -x_{16} & x_{23} & 0 & 0 & x_{38} & 0 & 0 & -x_{67} & -x_{78} \\
 0 & 0 & -x_{23} & x_{24} & -x_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 f_{12} \\
 f_{16} \\
 f_{23} \\
 f_{24} \\
 f_{34} \\
 f_{38} \\
 f_{56} \\
 f_{57} \\
 f_{67} \\
 f_{78}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Além disso, devem ser considerados os limites de geração e transmissão de energia elétrica que são representados pelas equações (6.3) e (6.4), respectivamente.

$$p_{min} \leq p \leq p_{max} \tag{6.3}$$

$$f_{min} \leq f \leq f_{max}. \quad (6.4)$$

Onde:  $p_{min}$  e  $p_{max}$  representam os vetores com os valores de mínimo e máximo de  $p$ , respectivamente;  $f_{min}$  e  $f_{max}$  representam os vetores com os valores mínimo e máximo de  $f$ , respectivamente.

Por último, é considerada uma função objetivo quadrática separável, como dado pela Equação (6.5).

$$Min \alpha f_1(f) + \beta f_2(p), \quad (6.5)$$

onde:  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares que ponderam os valores das funções  $f_1(f)$  e  $f_2(p)$ , que por sua vez são:

- $f_1(f)$  corresponde a função que representa a perda de transmissão dada por:

$$f_1(f) = \frac{1}{2} f' R f, \quad (6.6)$$

onde:  $R$  é a matriz diagonal dos valores das resistências dos ramos.

- $f_2(p)$  corresponde a função que representa o custo de geração dado por:

$$f_2(p) = \frac{1}{2} p' H p + c' p, \quad (6.7)$$

onde:  $H$  é a matriz diagonal dos coeficientes quadráticos,  $c$  é o vetor de coeficientes lineares. Este custo de geração pode representar:

1. O custo da perda de geração em usinas hidrelétricas [5].
2. O custo do combustível em usinas termelétricas.

Portanto, o modelo matemático do problema de FPO CC a ser considerado é dado por (6.8).

$$\begin{aligned} &Min \alpha f_1(f) + \beta f_2(p) \\ &S.a. : Af = p - d \\ &Xf = 0 \\ &p_{min} \leq p \leq p_{max} \\ &f_{min} \leq f \leq f_{max}. \end{aligned} \quad (6.8)$$


---

A formulação descrita por (6.8) foi utilizada por [22, 38, 79, 80].

Neste trabalho, que visa aplicação ao Sistema Interligado Nacional, a formulação dada por (6.8) será modificada de forma a se considerar a existência de transformadores defasadores na rede elétrica. Para tanto, basta verificar que a lei das malhas pode ser generalizada para transformadores defasadores com a equação (6.9).

$$Xf = \varphi, \quad (6.9)$$

onde:  $\varphi$  é um vetor tal que a componente  $\varphi_i$  é obtida somando os valores das defasagens dos ramos pertencentes ao  $i$ -ésimo laço elementar da rede, observando o sentido em que os ramos do laço são percorridos.

Para ilustrar a aplicação da lei das malhas generalizada para transformadores defasadores, segue o Exemplo 2.

**Exemplo 2:** Considere a rede elétrica da Figura 6.5. Os dados de injeção líquida de potência ativa  $P$  (ou seja,  $P = p - d$ ) já estão determinados e dados na Tabela 6.1. As reatâncias  $x_{km}$  desta rede são fornecidas na Tabela 6.2. As defasagens são  $\varphi_{12} = -0,1$  e  $\varphi_{25} = -0,2$  (em radianos).

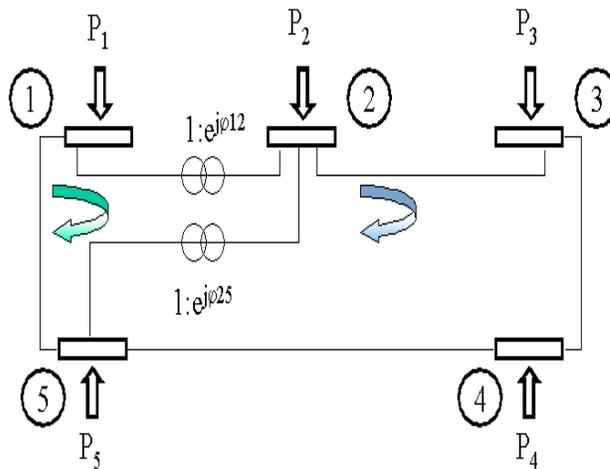


Figura 6.5: Representação da rede elétrica do Exemplo 2.

Barra	1	2	3	4	5
P	3,5	-0,5	-1,0	-1,0	-1,0

Tabela 6.1: Injeção líquida de potência ativa para cada barra da rede do Exemplo 2.

Reatância	$x_{12}$	$x_{15}$	$x_{23}$	$x_{25}$	$x_{34}$	$x_{45}$
Valor	1/3	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

Tabela 6.2: Valor da reatância  $x_{km}$  para cada barra da rede do Exemplo 2.

Como a geração já está definida, então, utilizando os dados das Tabelas 6.1 e 6.2 e a Figura 6.5, basta resolver o seguinte sistema para obter o valor dos fluxos nos ramos:

$$\begin{bmatrix} A \\ X \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} P \\ \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ x_{12} & -x_{15} & 0 & x_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{23} & -x_{25} & x_{34} & x_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{15} \\ f_{23} \\ f_{25} \\ f_{34} \\ f_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ -0.5 \\ -1.0 \\ -1.0 \\ -1.0 \\ \varphi_{12} + \varphi_{25} \\ -\varphi_{25} \end{bmatrix}$$

Para obter a solução deste sistema é necessário eliminar uma linha redundante da matriz  $A$ , e o correspondente elemento do vetor de injeção líquida de potência  $P$ . Este procedimento em sistemas de potência também é denominado de escolher uma barra de referência. Escolher uma barra de referência equivale a igualar o ângulo desta ao valor zero. Os ângulos das demais barras são obtidos considerando o ângulo de referência. Mudando a barra de referência, mudam os ângulos, mas as diferenças angulares permanecem iguais.

Assim, independentemente da escolha da linha a ser eliminada, a solução deste sistema é como dado na Tabela 6.3:

---

Fluxo	$f_{12}$	$f_{15}$	$f_{23}$	$f_{25}$	$f_{34}$	$f_{45}$
Valor	1,70	1,79	1,15	0,05	0,15	-0,84

Tabela 6.3: Valor dos fluxos obtidos para a rede da Figura 6.5, usando transformador defasador.

Para efeito de comparação, a solução obtida para a mesma rede, mas sem considerar os transformadores defasadores (resolvendo o sistema anterior com  $\varphi_{12} = 0$  e  $\varphi_{25} = 0$ ) é dada na Tabela 6.4.

Fluxo	$f_{12}$	$f_{15}$	$f_{23}$	$f_{25}$	$f_{34}$	$f_{45}$
Valor	1,91	1,58	1,10	0,31	0,10	-0,89

Tabela 6.4: Valor dos fluxos obtidos para a rede da Figura 6.5, sem considerar transformador defasador.

A generalização da lei das malhas para sistemas de potência por modelos de fluxos em redes será aproveitada para o caso do Sistema Nacional Interligado (SIN).

O modelo completo obtido por fluxos em redes é dado pelo sistema (6.10):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \alpha f_1(f) + \beta f_2(p) \\
 & \text{S.a. : } Af = p - d \\
 & \quad Xf = \varphi \\
 & \quad p_{min} \leq p \leq p_{max} \\
 & \quad f_{min} \leq f \leq f_{max}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Na próxima seção, será mostrada a modelagem matricial do problema de fluxo de potência CC, bem como uma comparação com a modelagem por fluxos em redes. Detalhes da obtenção do problema de fluxo de potência CC no Apêndice F.

## 6.2 Modelo Matricial do Fluxo de Potência CC

O vetor ângulo de barra  $\theta$ , e abertura angular  $\Delta\theta$ , de componentes dadas pelas aberturas angulares  $\theta_{km}$  (descritas no Apêndice F), estão relacionadas

---

por (6.11):

$$\Delta\theta = A^t\theta . \quad (6.11)$$

Considerando que  $f$  é o vetor de fluxos nos ramos, com componentes  $f_{km}$  (descritas no Apêndice F), então, a partir de (6.11) é obtido (6.12):

$$f = X_d^{-1}A^t\theta . \quad (6.12)$$

A Equação (6.12) relaciona as correntes (fluxos) com tensões (ângulos), representando a segunda lei de Kirchoff, ou lei das tensões.

A primeira lei ou lei dos nós é dada por (6.13).

$$Af = p - d = P . \quad (6.13)$$

Aplicando (6.12) na lei dos nós (dada por (6.13)):

$$(A(X_d^{-1})A^t)\theta = P . \quad (6.14)$$

Define-se a matriz de susceptância  $B$  como (6.15):

$$B = A(X_d)^{-1}A^t , \quad (6.15)$$

onde:  $A$  é matriz de incidência barra-ramo e  $X_d$  é matriz diagonal cujos elementos são as reatâncias  $x_{km}$  dos ramos.

Utilizando (6.14) e (6.15), a formulação matricial do fluxo de potência CC é dada por (6.16):

$$P = B\theta , \quad (6.16)$$

onde:  $P$  é o vetor de injeção líquida de potência para cada barra e  $\theta$  é o vetor de ângulo.

O Exemplo 3 ilustra a utilização da equação (6.16).

**Exemplo 3:** Seja a rede elétrica do Exemplo 2. Supondo que as defasagens são iguais a zero, as matrizes para se obter o fluxo de potência CC nos ramos são dadas por:

$$\begin{cases} \theta = (A(X_d)^{-1}A^t)^{-1}P \\ f = X_d^{-1}A^t\theta \end{cases}$$


---

onde:  $A$  é matriz de incidência barra-ramo do Exemplo 2,  $P$  é o vetor de injeção líquida de potência como fornecido no Exemplo 2 e  $X_d$  é matriz diagonal de reatâncias dada por:

$$X_d = \begin{bmatrix} x_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{45} \end{bmatrix} .$$

Os valores de fluxo encontrados para  $f$  são como os fornecidos pela Tabela (6.4), confirmando a equivalência entre o modelo de fluxos em redes e o modelo de fluxo de potência CC, sem considerar transformador defasador.

Resta ainda provar a equivalência dos modelos quando é incluído o transformador defasador.

A consideração do transformador defasador consiste em adicionar termos relativos aos ângulos de defasagem como injeções de potência na equação (6.16), resultando em (6.17), bem como acrescentar um ângulo de defasagem  $\varphi$  ao se obter a diferença angular da equação (6.12), resultando em (6.18).

$$\theta = (A(X_d)^{-1}A^t)^{-1}(P + P^c) , \quad (6.17)$$

$$f = X_d^{-1}(A^t\theta + \varphi) . \quad (6.18)$$

Onde:  $P^c$  representa o vetor de injeção de potência associado aos termos relativos aos ângulos de defasagem modelados como reatâncias entre duas barras. Assim, se existir uma defasagem  $\varphi_{km}$  no ramo  $k - m$ , a barra  $k$  terá uma injeção de  $-b_{km}\varphi_{km}$  e a barra  $m$  uma injeção de  $b_{km}\varphi_{km}$ .

Para ilustrar a consideração do transformador defasador segue o Exemplo 4.

**Exemplo 4:** Seja a rede elétrica do Exemplo 2. Supondo que as defasagens são  $\varphi_{12} = -0,1$  e  $\varphi_{25} = -0,2$ , para se obter o vetor  $\theta$  é necessário resolver o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{12}\varphi_{12} \\ b_{12}\varphi_{12} - b_{25}\varphi_{25} \\ 0 \\ 0 \\ b_{25}\varphi_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_{12} + b_{15}) & -b_{12} & 0 & 0 & -b_{15} \\ -b_{12} & (b_{12} + b_{23} + b_{25}) & -b_{23} & 0 & -b_{25} \\ 0 & -b_{23} & (b_{23} + b_{34}) & -b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{34} & (b_{34} + b_{45}) & -b_{45} \\ -b_{15} & -b_{25} & 0 & -b_{45} & (b_{15} + b_{25} + b_{45}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix},$$

onde:  $b_{km} = \frac{1}{x_{km}}$  e  $x_{km}$  é a reatância do ramo que liga a barra  $k$  à barra  $m$ .

É importante observar que a matriz  $B$ , como dada no sistema anterior, é singular, pois a soma das componentes  $b_{ij}$ ,  $i \neq j$  para uma linha  $i$  em  $B$  é igual ao elemento  $b_{ii}$  da diagonal principal.

Para se obter o valor de  $\theta$  é necessário atribuir a uma das barras a função de *referência angular*. Como exemplo, adotando  $\theta_5 = 0$ , a equação correspondente à barra 5 do sistema de equações deve ser retirada. Assim, o número de equações será igual ao número de incógnitas.

O valor de  $\theta$  encontrado com o sistema anterior será aplicado no sistema a seguir para encontrar o valor de  $f$ :

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{15} \\ f_{23} \\ f_{25} \\ f_{34} \\ f_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/x_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/x_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/x_{45} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{15} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{25} \\ \varphi_{34} \\ \varphi_{45} \end{bmatrix} \right)$$

A solução deste sistema é dada na Tabela 6.3, comprovando a equivalência dos modelos CC por fluxos em redes e o fluxo de potência CC, também para os casos com transformadores defasadores.

---

## 6.3 Consideração das perdas de transmissão

O modelo CC é aproximado e não considera perdas de transmissão. Para melhorar a sua representação da realidade é usual considerar de forma aproximada as perdas de transmissão através de um processo iterativo.

A idéia é resolver o modelo inicialmente sem considerar as perdas. Obtidos os fluxos de potência nos ramos ou os ângulos nas barras, as perdas são estimadas e os parâmetros do modelo inicial são alterados de modo a incorporar as perdas estimadas. Repetir o procedimento até os valores das perdas não se alterarem.

Usualmente, a alteração de parâmetros para incorporação das perdas consiste no aumento do carregamento das barras no valor de metade das perdas dos ramos aos quais estão interligadas.

Em [7], entretanto, a contabilização das perdas, é feita através da alteração de outros parâmetros, no caso os coeficientes da matriz de incidência, resultando num grafo generalizado.

Neste trabalho a representação das perdas de transmissão foi estendida, resultando em duas expressões para o cálculo das perdas e duas abordagens para contabilizar os efeitos das perdas na rede, conforme descrito a seguir:

### 1. Cálculo das Perdas:

- (a) A perda em um ramo  $k - m$  pode ser calculada em função da potência ativa transmitida pelo mesmo [7]:

$$P_{km}^{perda} = r_{km} f_{km}^2, \quad (6.19)$$

onde:  $r_{km}$  é o valor da resistência em série, em p.u., do ramo  $k - m$ ,  $f_{km}$  é o fluxo de potência ativa, em p.u., no ramo  $k - m$ .

- (b) Essa perda também pode ser calculada a partir de aproximações, das funções seno e co-seno, estabelecidas por meio da expansão em série de Taylor [71]:

$$P_{km}^{perda} = g_{km} \theta_{km}^2 = \left( \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \right) \theta_{km}^2, \quad (6.20)$$

onde:  $g_{km}$  é a condutância do ramo  $k - m$ ,  $x_{km}$  é a reatância do ramo  $k - m$  e  $\theta_{km}$  é diferença angular entre as barras  $k$  e  $m$ .

---

		Contabilização	
		<i>A</i>	<i>d</i>
Cálculo	Equação (6.19)	Perda 1	Perda 3
	Equação (6.20)	Perda 2	Perda 4

Tabela 6.5: Combinações possíveis de considerações das perdas.

2. Contabilização das Perdas:

- (a) Modificação da matriz *A*: A perda já calculada no ramo  $k - m$  pode ser contabilizada como uma perda do fluxo  $p_{km}$ , o que torna a potência recebida na barra de destino menor que a potência enviada pela barra de origem. Essa perda pode ser representada a partir de um fator  $a_{km}$  onde  $a_{km} = \frac{1 - P_{km}^{perda}}{f_{km}}$ . Portanto, se a potência ativa enviada pela barra  $k$  é dada por  $f_{km}$ , a potência que chega na barra  $m$  será dada por  $a_{km}f_{km}$ . Esta contabilização de perdas implica na modificação dos elementos da matriz de incidência nó-ramo *A*.
- (b) Modificação do vetor *d*: A perda também pode ser contabilizada como uma carga incremental  $P_{km}^{perda}$ , igualmente distribuída entre suas barras terminais, sendo necessário alterar o vetor de demanda ativa *d*, da formulação (6.10).

Assim, são possíveis quatro opções de consideração das perdas, conforme apresentado na Tabela 6.5.

Ao observar as equações (6.19) e (6.20), é possível verificar que as perdas são calculadas a partir dos valores dos fluxos nos ramos ou dos ângulos das barras que dependem, por sua vez, das perdas. Isto requer um procedimento iterativo independente da forma adotada de consideração das perdas.

- Passo 1: Obtenha os fluxos nos ramos  $k - m$  por meio da formulação (6.10).
  - Passo 2: Calcule os valores das perdas associadas aos fluxos utilizando (6.19) ou (6.20).
  - Passo 3: Contabilize as perdas modificando ou a matriz *A* (usando grafo generalizado), ou o vetor *d* (usando injeção de potência).
-

- Passo 4: Obtenha novos fluxos que contabilizem as perdas obtidas no Passo 2.
- Passo 5: Se a diferença entre os novos fluxos obtidos no Passo 3 e os anteriores for menor que uma tolerância pré-especificada, pare. Senão volte para o Passo 2.

Para o caso em que as perdas são contabilizadas modificando a matriz  $A$ , o procedimento iterativo  $PI$  é como ilustrado na Figura 6.6.

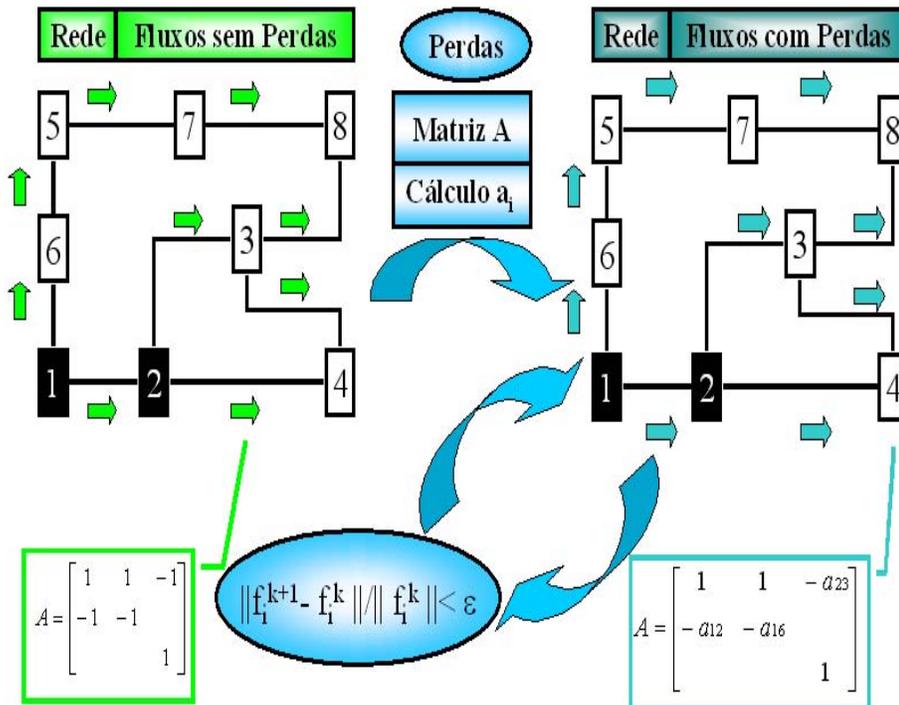


Figura 6.6: Representação esquemática da consideração da Perda 1 ou 2.

O cálculo da Perda 1 pode ser simplificado. Esta perda está associada ao fluxo de potência  $f_{km}$  que passa pela linha  $k - m$ , como descrito por (6.19). Portanto, a potência que chegará no final da linha de transmissão  $i$  será dada pela equação (6.21).

$$P_m = (f_{km} - r_{km} f_{km}^2), \quad (6.21)$$

onde:  $P_m$  é a potência que chega no final da linha de transmissão  $k - m$ .

A perda em uma linha de transmissão pode ser definida como sendo a razão entre a potência do final da linha de transmissão sobre a potência do início da linha de transmissão. Com esta definição, a perda na linha de transmissão  $k - m$  será dada pela equação (6.22).

$$a_{km} = \frac{P_m}{f_{km}} = \frac{(f_{km} - r_{km}f_{km}^2)}{f_{km}} = (1 - r_{km}f_{km}) \quad (6.22)$$

Então, o cálculo da Perda 1 dos fluxos nas linhas de transmissão, como descrito na equação (6.22), só depende dos valores de resistência  $r_{km}$  e fluxo  $P_{km}$ . Para ilustrar a utilização da Perda 1, segue o Exemplo 1:

**Exemplo 1:** Seja uma rede elétrica qualquer tal que sua topologia produz a matriz  $A$  dada por (6.23). Então o procedimento de contabilização para as Perdas 1 ou 2 será como segue.

1. Considerar um FPO CC sem perdas. A solução deste problema é o vetor de geração  $p^0$  e o vetor de fluxos nos ramos  $f^0$ . Neste problema a matriz  $A$  é tal que tem apenas elementos 0,1 e -1, ou seja, é da forma de (6.23).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

2. Para cada elemento  $f_{km}^0$  do vetor dos fluxos nas linhas de transmissão  $f^0$ , calcule o coeficiente  $a_{km}$  relativo à perda, utilizando a equação (6.24).

$$a_{km}^0 = 1 - r_{km}f_{km}^0, \quad (6.24)$$

onde:  $a_{km}^0$  fornece os valores das perdas associadas ao fluxo  $f_{km}^0$  na linha  $k - m$  e  $r_{km}$  representa o valor da resistência da linha  $k - m$ .

3. De posse dos valores das perdas em cada linha de transmissão, é formulado um novo problema, tal que a nova matriz  $A$  do problema com grafo generalizado tem a forma dada por (6.25).
-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{23} & -a_{43} & 1 \\ 0 & -a_{14} & -a_{24} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

onde:  $a_{km}$  representa as perdas para cada linha de transmissão  $k - m$  calculadas de acordo com a equação (6.25).

4. Com a nova matriz  $A$ , é resolvido um novo FPO CC, determinando novas soluções  $p^1$  e  $f^1$ .
5. A diferença das soluções  $(p^0, f^0)$  e  $(p^1, f^1)$  é calculada. Se esta diferença estiver abaixo de uma certa tolerância, o procedimento para. Senão, a partir da solução  $(p^1, f^1)$ , é calculada uma nova matriz  $A$  de modo a gerar um novo problema que contabilize as perdas nas restrições e obter a solução  $(p^2, f^2)$  do FPO CC. A diferença entre  $(p^1, f^1)$  e  $(p^2, f^2)$  é calculada e o procedimento pára ou continua de acordo esse valor.

Embora não haja prova matemática de convergência do procedimento anterior, o trabalho desenvolvido em [7] mostra que não é necessário um número grande de resoluções de problemas com matrizes  $A$  diferentes. Em geral duas ou três iterações são suficientes.

A mesma afirmação é válida para as Perdas 3 ou 4, cujo esquema representativo consta na Figura 6.7.

O esquema ilustrado na Figura 6.7 é o que é usualmente utilizado, ou seja, contabilizar as perdas de transmissão através da injeção de potência nas barras.

Este esquema será empregado na obtenção dos resultados descritos no Capítulo 8.

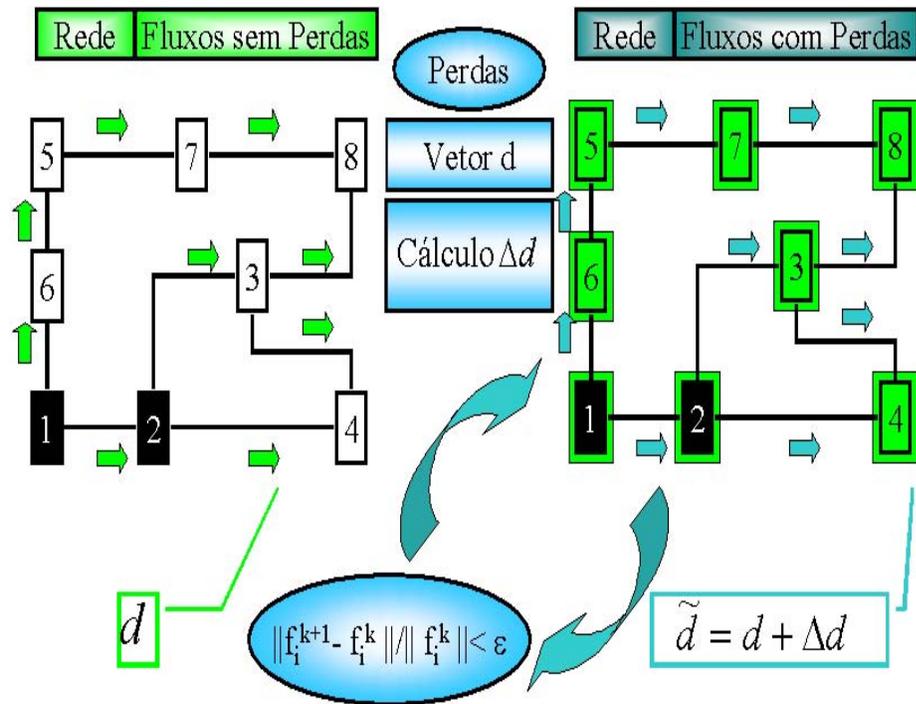


Figura 6.7: Representação esquemática da consideração da Perda 3 ou 4.

# Capítulo 7

## Método de Pontos Interiores para o Fluxo de Potência Ótimo CC

### 7.1 Introdução

As técnicas existentes para se resolver um fluxo de potência ótimo podem ser classificadas em [69, 70]:

- Programação não-linear,
- Programação quadrática,
- Resolução das condições de otimalidade via algoritmos baseados no método de Newton,
- Programação linear,
- Versões híbridas de programação linear e programação inteira, e
- Métodos de pontos interiores.

Um histórico dos trabalhos em fluxo de potência ótimo pode ser encontrado em artigos de revisão bibliográfica [53, 56, 69, 70, 86].

Estas referências são indicadas, pois o foco deste trabalho não é detalhar as possibilidades de modelagem ou resolução do FPO CA ou CC, mas sim

desenvolver um método de pontos interiores para a formulação de FPO CC obtida no Capítulo 6.

A motivação para tal é que, de modo geral, os métodos de pontos interiores têm sido aplicados com sucesso na área de estudo de análise de fluxo de carga para problemas de grande porte.

Estas iniciativas abrangem:

- Estudo da flexibilidade de pontos interiores em problemas de geração e transmissão de energia elétrica [41, 61].
- Discussão sobre os métodos utilizados em fluxo de potência, abordando inclusive a utilização de MPI [70, 86], e o aproveitamento da estrutura do problema por MPI [99].
- Uso de pontos interiores em sistemas de potência [87, 93, 95, 98].
- Despacho de potência ótimo ativo e reativo [40, 50, 57, 58, 100].

De modo geral, todos os artigos argumentam que a escolha pela utilização do MPI em problemas de sistemas de potência se deve a sua eficiência [41, 50, 87, 99] e a sua capacidade de lidar com problemas de grande porte [40, 41, 86, 87].

Motivados pelos resultados com MPI na literatura, utilizamos o mesmo no problema do FPO CC como descrito em [79]. Portanto, a proposta deste Capítulo é desenvolver um MPI que seja adequado ao problema do FPO CC. Ou seja, assim como o Capítulo 4 forneceu deduções para um MPI de propósito geral, e que depois foi adaptado para aproveitar as especificidades do problema do MOUI, nesta seção será desenvolvido um MPI eficiente para o FPO CC.

## 7.2 Método de Pontos Interiores Primal-Dual

A formulação (6.10) é simplificada com:

- Mudança de variáveis  $\tilde{f} = f - f^{min}$  e  $\tilde{p} = p - p^{min}$ .
  - As ponderações  $\alpha$  e  $\beta$  terão valor  $\frac{1}{2}$ .
-

Após estas alterações, temos a formulação dada por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \left(\frac{1}{2}\right)(\tilde{f}'R\tilde{f} + c'_f\tilde{f}) + \left(\frac{1}{2}\right)(\tilde{p}'H\tilde{p} + c'_p\tilde{p}) \\
 & \text{S.a. : } A\tilde{f} - \tilde{p} = \tilde{l}_i \\
 & \quad X\tilde{f} = \tilde{l}_v \\
 & \quad 0 \leq \tilde{p} \leq \tilde{p}^{max} \\
 & \quad 0 \leq \tilde{f} \leq \tilde{f}^{max}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Onde:  $c_f = Rf^{min}$ ,  $c_p = Hp^{min}$ ,  $\tilde{l}_i = -d - Af^{min} + p^{min}$  e  $\tilde{l}_v = \varphi - Xf^{min}$ .

Introduzindo as variáveis de folga das restrições de capacidade e eliminando os “ $\sim$ ” para maior clareza do texto, temos (7.2).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \left(\frac{1}{2}\right)(f'Rf + c'_ff) + \left(\frac{1}{2}\right)(p'Hp + c'_pp) \\
 & \text{S.a. : } Af - p = l_i \\
 & \quad Xf = l_v \\
 & \quad p + s_p = p^{max} \\
 & \quad f + s_f = f^{max} \\
 & \quad 0 \leq (f, s_f) \\
 & \quad 0 \leq (p, s_p)
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Ao problema primal dado por (7.2), é associado o problema dual formulado em (7.3).

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } l'y - (f^{max})'w_f - \left(\frac{1}{2}\right)f'Rf - (p^{max})'w_p - \left(\frac{1}{2}\right)p'Hp \\
 & \text{S.a. : } B'y + z_f - w_f - Rf = c_f \\
 & \quad -y_p + z_p - w_p - Hp = c_p \\
 & \quad 0 \leq (z_p, w_p) \\
 & \quad 0 \leq (z_f, w_f)
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Onde:  $B = \begin{pmatrix} A \\ X \end{pmatrix}$ ,  $l = \begin{pmatrix} l_i \\ l_v \end{pmatrix}$  e  $y_p$  que representa os elementos da variável dual  $y$  correspondentes às barras.

De posse da formulação primal e dual do problema são obtidas as condições de otimalidade:

$$\text{(i)Factibilidade Primal: } \begin{cases} Af - p = l_i \\ Xf = l_v \\ p + s_p = p^{max} \\ f + s_f = f^{max} \\ (f, s_f) \geq 0 \\ (p, s_p) \geq 0 \end{cases}$$


---

$$(ii) \text{ Factibilidade Dual: } \begin{cases} B^t y + z_f - w_f - Rf = c_f \\ -y_p + z_p - w_p - Hp = c_p \\ (z_p, w_p) \geq 0 \\ (z_f, w_f) \geq 0 \end{cases}$$

$$(iii) \text{ Complementariedade: } \begin{cases} FZ_f e = 0 \\ PZ_p e = 0 \\ S_f W_f e = 0 \\ S_p W_p e = 0 \end{cases}$$

Aplicando o método de Newton nas condições de otimalidade, é obtido o MPI primal-dual para FPO, como a seguir:

$$\begin{bmatrix} A & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 0 & B^t & 0 & I & -I & 0 & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & I & -I \\ Z_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & W_f & 0 & 0 & 0 & 0 & S_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} df \\ dp \\ ds_f \\ ds_p \\ dy \\ dy_p \\ dz_f \\ dw_f \\ dz_p \\ dw_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i \\ r_v \\ r_f \\ r_p \\ r_y \\ r_g \\ r_{zf} \\ r_{zp} \\ r_{wf} \\ r_{wp} \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\begin{cases} r_i = l_i + p - Af \\ r_v = l_v - Xf \\ r_f = f^{\max} - f - s_f \\ r_p = p^{\max} - p - s_p \\ r_y = c_f - B^t y - z_f + w_f + Rf \\ r_g = c_p + y_p - z_p + w_p + Hp \\ r_{zf} = \mu e - FZ_f e \\ r_{zp} = \mu e - PZ_p e \\ r_{wf} = \mu e - S_f W_f e \\ r_{wp} = \mu e - S_p W_p e \end{cases}$$

Com isso obtemos as seguintes equações:

$$Adf - dp = r_i \quad (7.4)$$

$$Xdf = r_v \quad (7.5)$$

$$df + ds_f = r_f \quad (7.6)$$

$$dp + ds_p = r_p \quad (7.7)$$

$$B^t dy + dz_f - dw_f - Rdf = r_y \quad (7.8)$$

$$-dy_p + dz_p - dw_p - Hdp = r_g \quad (7.9)$$

$$Z_f df + Fdz_f = r_{zf} \quad (7.10)$$

$$Z_p dp + Pdz_p = r_{zp} \quad (7.11)$$

$$W_f ds_f + S_f dw_f = r_{wf} \quad (7.12)$$

$$W_p ds_p + S_p dw_p = r_{wp} \quad (7.13)$$

Utilizando (7.6), (7.7) e (7.10) até (7.13), temos:

$$ds_f = r_f - df \quad (7.14)$$

$$ds_p = r_p - dp \quad (7.15)$$

$$dz_f = F^{-1}(r_{zf} - Z_f df) \quad (7.16)$$

$$dz_p = P^{-1}(r_{zp} - Z_p dp) \quad (7.17)$$

$$dw_f = S_f^{-1}(r_{wf} - W_f ds_f) \quad (7.18)$$

$$dw_p = S_p^{-1}(r_{wp} - W_p ds_p) \quad (7.19)$$

Substituindo (7.14), (7.16) e (7.18) em (7.8):

$$B^t dy - F^{-1}Z_f df - S_f^{-1}W_f df - Rdf = r_y - F^{-1}r_{zf} + S_f^{-1}r_{wf} - S_f^{-1}W_f r_f$$

$$B^t dy - D_f df = r_a \quad (7.20)$$

Onde:  $D_f = (F^{-1}Z_f + S_f^{-1}W_f + R)$  e  $r_a = r_y - F^{-1}r_{zf} + S_f^{-1}r_{wf} - S_f^{-1}W_f r_f$ .

Substituindo (7.15), (7.17) e (7.19) em (7.9), temos:

$$\begin{aligned}
 -dy_p - P^{-1}Z_p dp - S_p^{-1}W_p dp - Hdp &= r_g - P^{-1}r_{zp} + S_p^{-1}r_{wp} - S_p^{-1}W_p r_p \\
 -dy_p - D_p dp &= r_b
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Onde:  $D_p = P^{-1}Z_p + S_p^{-1}W_p + H$  e  $r_b = r_g - P^{-1}r_{zp} + S_p^{-1}r_{wp} - S_p^{-1}W_p r_p$ . Assim, obtemos  $df$  e  $dp$  por meio de (7.20) e (7.21):

$$df = -D_f^{-1}(r_a - B^t dy) \tag{7.22}$$

$$dp = -D_p^{-1}(r_b + dy_p) \tag{7.23}$$

Usando (7.22) e (7.23) em (7.4) e (7.5), temos:

$$AD_f^{-1}B^t dy + D_p^{-1}dy_p = r_i + AD_f^{-1}r_a - D_p^{-1}r_b \tag{7.24}$$

$$XD_f^{-1}B^t dy = r_v + XD_f^{-1}r_a \tag{7.25}$$

Como temos que  $B = \begin{pmatrix} A \\ X \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} -D_p^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $dy_p = Ddy$  e  $r = \begin{pmatrix} r_i \\ r_v \end{pmatrix}$ . Então, utilizando conjuntamente as equações (7.24) e (7.25):

$$(BD_f^{-1}B^t + D)dy = r + BD_f^{-1}r_a - Dr_b \tag{7.26}$$

De posse da equação (7.26), construímos o método de pontos interiores primal-dual:

Dados  $(f^0, p^0, s_f^0, s_p^0, y^0, z_f^0, w_f^0, z_p^0, w_p^0) \geq 0$  e  $y_p^0$  livre e  $\sigma \in (0, 1)$

Para  $k = 0, 1, \dots$

$\mu^k = \sigma \gamma^k / n_p$ , onde:  $n_p =$  dimensão do vetor  $(x^0, s_f^0)$ .

$$r_i = l_i + p - Af$$

$$r_v = l_v - Xf$$

$$r_f = f^{\max} - f - s_f$$

$$r_p = p^{\max} - p - s_p$$

$$r_y = c_f - B^t y - z_f + w_f + Rf$$

$$r_g = c_p + y_p - z_p + w_p + Hp$$

$$r_{zf} = \mu e - FZ_f e$$

$$r_{zp} = \mu e - PZ_p e$$

$$r_{wf} = \mu e - S_f W_f e$$


---

$$r_{wp} = \mu e - S_p W_p e$$

$$r_a = r_y - F^{-1} r_{zf} + S_f^{-1} r_{wf} - S_f^{-1} W_f r_f$$

$$D_f = (F^{-1} Z_f + S_f^{-1} W_f + R)$$

$$dy = (BD_f^{-1} B^t + D)^{-1} (r + BD_f^{-1} r_a - Dr_b)$$

$$df = -D_f^{-1} (r_a - B^t dy)$$

$$dy_p = \begin{pmatrix} -D_p^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} dy$$

$$D_p = P^{-1} Z_p + S_p^{-1} W_p + H$$

$$r_b = r_g - P^{-1} r_{zp} + S_p^{-1} r_{wp} - S_p^{-1} W_p r_p$$

$$dp = -D_p^{-1} (r_b + dy_p)$$

$$ds_f = r_f - df$$

$$ds_p = r_p - dp$$

$$dz_f = F^{-1} (r_{zf} - Z_f df)$$

$$dz_p = P^{-1} (r_{zp} - Z_p dp)$$

$$dw_f = S_f^{-1} (r_{wf} - W_f ds_f)$$

$$dw_p = S_p^{-1} (r_{wp} - W_p ds_p)$$

$$e_p^k = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{\delta f_i^k < 0} \left( \frac{-f^k}{\delta f_i^k} \right), \text{Min}_{\delta p_i^k < 0} \left( \frac{-p^k}{\delta p_i^k} \right), \text{Min}_{\delta s f_i^k < 0} \left( \frac{-s f^k}{\delta s f_i^k} \right), \\ \text{Min}_{\delta s p_i^k < 0} \left( \frac{-s p^k}{\delta s p_i^k} \right) \end{array} \right\}$$

$$e_d^k = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{\delta z f_i^k < 0} \left( \frac{-z f^k}{\delta z f_i^k} \right), \text{Min}_{\delta w f_i^k < 0} \left( \frac{-w f^k}{\delta w f_i^k} \right), \text{Min}_{\delta z p_i^k < 0} \left( \frac{-z p^k}{\delta z p_i^k} \right), \\ \text{Min}_{\delta w p_i^k < 0} \left( \frac{-w p^k}{\delta w p_i^k} \right) \end{array} \right\}$$

$$\alpha_p^k = \text{Min}(1, \tau e_p^k)$$

$$\alpha_d^k = \text{Min}(1, \tau e_d^k)$$

$$f^{k+1} = f^k + \alpha_p^k df^k$$

$$p^{k+1} = p^k + \alpha_p^k dp^k$$

$$s_f^{k+1} = s_f^k + \alpha_p^k ds_f^k$$

$$s_p^{k+1} = s_p^k + \alpha_p^k ds_p^k$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k dy^k$$

$$z_f^{k+1} = z_f^k + \alpha_d^k dz_f^k$$

$$w_f^{k+1} = w_f^k + \alpha_d^k dw_f^k$$

$$z_p^{k+1} = z_p^k + \alpha_d^k dz_p^k$$

$$w_p^{k+1} = w_p^k + \alpha_d^k dw_p^k$$

$$k \leftarrow k + 1$$

Até Convergir

### 7.3 Inicialização, Parâmetros e Critério de Convergência

Para a implementação do MPI, utilizamos:  $\tau = 0,99995$  e  $\sigma = 1/\sqrt{n}$ . Para o método predictor-corrector temos que  $\mu$  é dado por:

$$\begin{cases} \mu^k = \sigma(\gamma^k)^2/n_p, \text{ se } \gamma^k < 1 \\ \mu^k = \sigma\gamma^k/n_p, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Para ambos os métodos o ponto inicial adotado foi:

$$\begin{aligned} f^0 &= s_f^0 = \frac{f^{max}}{2} \\ p^0 &= s_p^0 = \frac{p^{max}}{2} \\ y^0 &= 0 \\ z_f^0 &= w_f^0 = (R + I)e \\ z_p^0 &= w_p^0 = e \end{aligned}$$

O critério de convergência é dado por:

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\|l_i + p^k - Af^k\|}{1 + \|l_i\|} \\ \frac{\|l_v - Xf^k\|}{1 + \|l_v\|} \\ \frac{\|f^{max} - f^k - s_f^k\|}{1 + \|f^{max}\|} \\ \frac{\|p^{max} - p^k - s_p^k\|}{1 + \|p^{max}\|} \\ \frac{\|c_f - B^t y^k - z_f^k + w_f^k + Rf^k\|}{1 + \|c_f\|} \\ \frac{\|c_p - y_p^k - z_p^k + w_p^k + Hp^k\|}{1 + \|c_p\|} \\ \frac{f^t z_f + p^t z_p + s_p^t w_p + s_f^t w_f}{1 + \|c_f^t f^k + c_p^t p^k + (f^k)^t Rf^k + 2 + (p^k)^t Qp^k + 2 + l^t y^k - (f^{max})^t w_f^t - (p^{max})^t w_p^t\|} \end{array} \right) \leq \varepsilon$$

Onde:  $\varepsilon$  é tolerância estabelecida e é igual à  $10^{-8}$ .

Maiores detalhes de implementação são discutidos em [78, 79].

---

# Capítulo 8

## Resultados para o Fluxo de Potência Ótimo CC

### 8.1 Introdução

A proposta deste Capítulo é ilustrar os resultados que foram obtidos ao se aplicar o MPI, desenvolvido no Capítulo 7, para resolver o FPO CC, descrito no Capítulo 6, para o Sistema Interligado Nacional (SIN).

O SIN, que é a rede elétrica a ser considerada neste trabalho, consiste na rede de transmissão, compreendendo as tensões de 230 kV a 750 kV, seguindo a definição do ano de 2005 do Operador Nacional do Sistema (ONS).

Ainda de acordo com o ONS, o SIN atingiu em dezembro de 2004 uma extensão de 80.022 km, englobando 815 circuitos de transmissão e uma capacidade de transformação de 178.447 MVA, em 321 subestações. A dimensão dos sistemas a serem estudados é de aproximadamente 4.000 ramos e 3.400 barras. Uma representação simplificada do SIN é fornecida na Figura 8.1.

Nos estudos relativos a operação da rede elétrica para o dia seguinte, o ONS programa a operação do sistema em base de meia hora, cada uma correspondendo a uma configuração do SIN como, por exemplo, das 00:00 às 00:30. Como ilustrado na Figura 8.2.

Os 48 despachos de geração  $P^*$  e os correspondentes fluxos de potência  $f^*$  programados para o dia 03/02/2005 pelo ONS foram utilizados em experimentos computacionais para testar o FPO CC desenvolvido.

Optou-se por expor os resultados para três configurações. Cada configuração foi escolhida de modo a representar um patamar de carga, dentre os

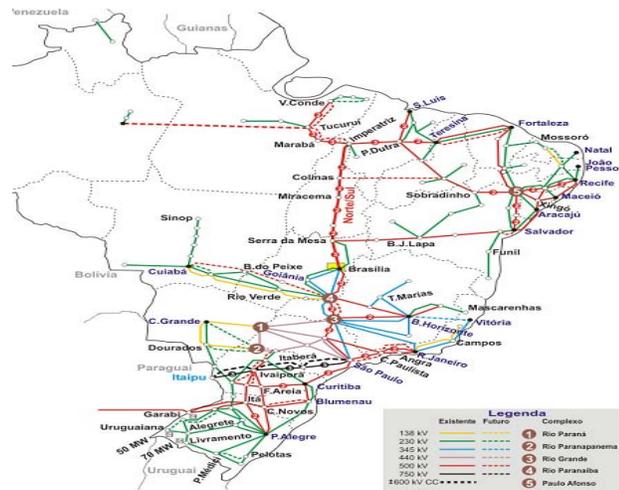


Figura 8.1: Sistema Interligado Nacional - SIN (Fonte ONS).

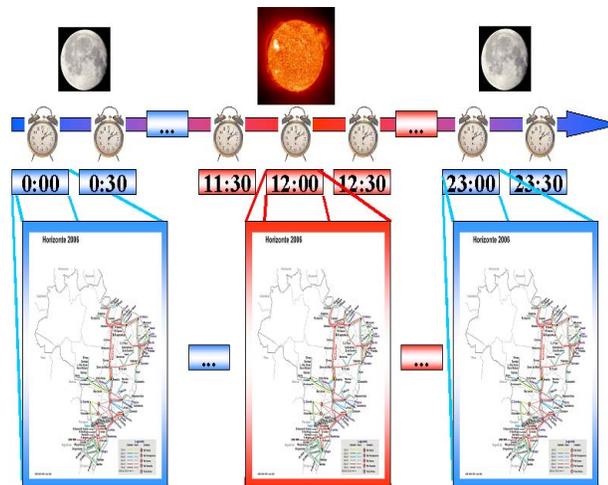


Figura 8.2: Configurações do SIN para cada meia-hora.

três possíveis: leve, médio e pesado. A Tabela 8.1 ilustra as características das três configurações escolhidas <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Os valores de carga ativa para os patamares de carga Leve e Média estão corretos, embora a carga ativa do patamar Leve seja maior que a do patamar Média. O patamar de carga Média, porém, possui mais carga reativa que o patamar Leve

Caso	Meia-hora	Barras	Ramos	Patamar de Carga	Carga(MW)
1	0:00-0:30	3397	4077	Leve	42252,15
2	7:30-8:00	3397	4078	Média	41581,12
3	20:00-20:30	3397	4080	Pesada	47058,04

Tabela 8.1: Resumo das características das três configurações.

Para validar os resultados obtidos ao se resolver o problema de FPO CC para um sistema elétrico deste porte foi estabelecida a seguinte sequência de testes:

- Validação dos resultados do FPO CC com os resultados do fluxo de potência CC do programa Anarede [26] para o SIN em três configurações, e sem considerar as perdas de transmissão.
- Validação dos resultados do FPO CC com os resultados do FC CC do Anarede para o SIN em três configurações, e considerando as perdas de transmissão através da Perda 4.
- Redespacho das três configurações do SIN, utilizando o FPO CC com o objetivo de minimizar as perdas de transmissão fazendo  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  em (6.10) e considerando as perdas de transmissão através da Perda 4.

Para cada um dos itens anteriormente listados será destinada uma seção, detalhando o trabalho realizado. O conjunto de testes relativos ao primeiro item será discutido na Seção 8.2. Os testes do segundo item são fornecidos na Seção 8.3. O terceiro e último item é discutido na Seção 8.4.

## 8.2 Testes do FPO CC sem perdas

Para validar os resultados do MPI aplicado no FPO CC, sem considerar as perdas de transmissão, foram utilizados os resultados obtidos com a aplicação de fluxo de potência CC do programa Anarede.

Como o objetivo é comparar as soluções obtidas pelo Anarede com as obtidas pelo FPO CC, para um mesmo despacho de geração, o teste consistiu na resolução do FPO CC com função objetivo dada por:  $Min f_2(p) = \frac{1}{2}(p - p^*)'I(p - p^*)$ .

A  $p^*$  é fornecida através da leitura dos dados de um arquivo no formato Anarede. Estes mesmos dados de  $p^*$  são lidos pelo FC CC do Anarede. Portanto, as soluções a serem obtidas pelo FPO CC ou FC CC tem de ser iguais, ou seja,  $f_2(p) = 0$ .

Para comparar os fluxos de potência ativa  $f$  e a injeção líquida de potência ativa  $P = p - d$  obtidos para cada um dos programas, foi construído um programa em Matlab 6.1 capaz de comparar os fluxos e a injeção de potência fornecidos pelos dois programas.

Colocar os quase 4000 fluxos e as cerca de 3400 injeções de potência, obtidos pelo FPO CC e pelo FC CC, em uma tabela, e em seguida comparar os mesmos, não é uma idéia interessante. Ao invés disso, procurou-se estabelecer estatísticas acerca da comparação entre os valores obtidos para cada programa.

A Tabela 8.2 mostra as estatísticas relativas a comparação da injeção de potência entre a solução obtida pelo FPO CC e o Anarede para o caso de carga leve. Com a Tabela 8.2 fica claro que apenas nove barras possuem uma diferença maior que 1 MW.

Diferença em MW	Número de barras	Percentual de barras
Maior que 1	9	0,27
Entre 0, 1 e 1	259	7,62
Entre 0, 01 e 0, 1	1320	38,86
Entre 0 e 0, 01	1809	53,25

Tabela 8.2: Resumo das diferenças de injeção líquida de potência ativa entre o FPO CC e o Anarede para o patamar de Carga leve.

A Tabela 8.3 fornece uma análise detalhada destas nove barras. O campo  $p^* - d$  se utiliza do fato de que a potência ativa especificada  $p^*$  já está dada, bem como a carga  $d$  e fornece o valor que deve ser obtido tanto pelos fluxos do FC CC (que está no campo Potência Anarede) como pelos fluxos do FPO CC (no campo Potência FPO CC).

Assim, o valor de injeção líquida de potência ativa destas nove barras para o Anarede e o FPO CC é analisado na Tabela 8.3. Com a Tabela 8.3 é possível verificar que a solução do FPO CC está de acordo com o valor  $p^* - d$ , ao passo que o FC CC chega a ter uma diferença de 2.5 MW para a barra 5802. Uma possível explicação para este fato é que o arquivo de

Barra	$p^* - d$	Potência Anarede	Potência FPO CC
1137	-25,87	-24,80	-25,87
5131	-42,33	-40,70	-42,33
5152	-45,30	-43,80	-45,30
5673	-33,00	-31,80	-33,00
5751	-87,52	-88,70	-87,52
5753	-171,20	-172,80	-171,20
5802	-256,20	-258,70	-256,20
5822	-158,60	-160,00	-158,60
5824	-172,50	-174,20	-172,50

Tabela 8.3: Comparação entre a solução do Anarede e do FPO CC em nove barras.

resultados, de onde foi extraída a solução obtida com o programa Anarede, são fornecidos em MW e com apenas uma casa decimal de precisão.

Em relação aos fluxos de potência, a Tabela 8.4 mostra as estatísticas relativas a comparação dos fluxos de potência para o Caso 1 (carga leve), Caso 2 (carga média) e Caso 3 (carga pesada).

	Carga Leve		Carga Média		Carga Pesada	
Diferença(MW)	Barras	Barras(%)	Barras	Barras(%)	Barras	Barras(%)
Maior que 1	9	0,27	11	0,32	10	0,29
Entre 0,1 e 1	259	7,62	250	7,36	278	8,18
Entre 0,01 e 0,1	1320	38,86	1348	39,68	1281	37,71
Entre 0 e 0,01	1809	53,25	1788	52,64	1828	53,82
Diferença(MW)	Ramos	Ramos(%)	Ramos	Ramos(%)	Ramos	Ramos(%)
Maior que 5	1	0,02	1	0,02	60	1,47
Entre 2 e 5	3	0,07	76	1,86	48	1,18
Entre 1 e 2	26	0,64	56	1,37	85	2,08
Entre 0 e 1	4047	99,27	3937	96,55	3887	95,27

Tabela 8.4: Resumo das diferenças de injeção líquida de potência ativa e dos fluxos de potência ativa entre o FPO CC e o Anarede para carga leve, média e pesada, sem considerar perdas.

Pela Tabela 8.4, para o caso de carga leve, menos de 1% dos ramos possuem diferença maior que 1 MW. O ramo 5741 – 5750 é o que possui uma diferença maior que 5 MW. Neste ramo o fluxo obtido pela solução do FPO CC é de  $-1283,64$  MW, e pela solução do FC CC é de  $-1289,10$ . Ou seja, a diferença de  $5,45$  MW é menos de 1% do valor total do fluxo.

Para os casos de carga média e pesada, uma análise estatística semelhante pode ser realizada, de modo que se pode concluir pela validação do modelo no caso sem perdas.

### 8.3 Testes do FPO CC com perdas

Esta seção é semelhante a anterior, pretendendo validar as soluções obtidas pelo FPO CC, ao comparar com as soluções do Anarede, para as 3 configurações do SIN. A diferença fica por conta da contabilização das perdas de transmissão, utilizando a Perda 4, na obtenção das soluções. Ou seja, mostrar que o FPO CC elaborado e que considera perdas do tipo 4 é compatível com o FC CC estabelecido que considera perdas.

As comparações de injeção líquida de potência ativa e fluxos nos ramos para os casos de carga leve, média e pesada, considerando perdas de transmissão através da Perda 4, estão resumidas na Tabela 8.5. Pela análise dos resultados pode-se, também, validar os resultados do FPO CC com perdas.

	Carga Leve		Carga Média		Carga Pesada	
Diferença(MW)	Barras	Barras(%)	Barras	Barras(%)	Barras	Barras(%)
Maior que 1	10	0,29	11	0,29	10	0,29
Entre 0,1 e 1	223	6,56	515	15,16	531	15,63
Entre 0,01 e 0,1	2066	60,83	1912	56,28	1930	56,81
Entre 0 e 0,01	1098	32,32	959	28,23	926	27,25
Diferença(MW)	Ramos	Ramos(%)	Ramos	Ramos(%)	Ramos	Ramos(%)
Maior que 5	1	0,02	17	0,42	25	0,61
Entre 2 e 5	21	0,52	68	1,67	133	3,26
Entre 1 e 2	80	1,96	118	2,89	161	3,95
Entre 0 e 1	3975	97,50	3875	95,02	3761	92,18

Tabela 8.5: Resumo das diferenças de injeção líquida de potência ativa e dos fluxos de potência ativa entre o FPO CC e o Anarede para carga leve, média e pesada, considerando perdas.

Um resumo das cargas e das perdas em MW para os casos do SIN analisados segue na Tabela 8.6.

Caso	Carga (MW)	Perdas (MW)	Perdas (%)
1	42252,15	1751,11	4,14
2	41581,12	1661,13	3,99
3	47058,04	1813,02	3,85

Tabela 8.6: Resumo das perdas das 3 configurações do SIN.

Com as informações estatísticas anteriores é possível validar os resultados obtidos para a carga leve, média e pesada do FPO CC que considera perdas do tipo Perda 4.

## 8.4 Redespacho minimizando perdas de transmissão

O propósito desta seção é obter uma solução com função objetivo que visa a minimização das perdas de transmissão, respeitando os limites de geração e transmissão. Isso se consegue, fazendo  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  na formulação (6.10).

Os resultados obtidos com o redespacho de geração são resumidos na Tabela 8.7. Nota-se que o redespacho de geração fornecido para carga leve produz uma redução nas perdas de transmissão de cerca de 63%, o que equivale a cerca de 1000MW.

Despacho	Geração (MW)	Carga (MW)	Perdas (%)	Ramos no Limite
Original	44002,77	42252,15	4,14	15
Redespacho	42993,49	42252,15	1,52	41
Diferença	1009,28	0,00	2,38	26
Redução %	2,29	0,00	63,28	-173,33

Tabela 8.7: Resultado do redespacho para o caso de carga leve.

Como não é possível comparar detalhadamente a geração proposta pelo redespacho com a fornecida pelo despacho original, pois existem cerca de 300

barras de geração no SIN, foram selecionadas aquelas barras cuja diferença entre as injeções líquidas de potência ativa fornecidas pelo despacho original e pelo redespacho são maiores ou iguais que 1000 MW. Informações sobre alterações nestas barras estão na Figura 8.3 e detalhadas na Tabela 8.8.

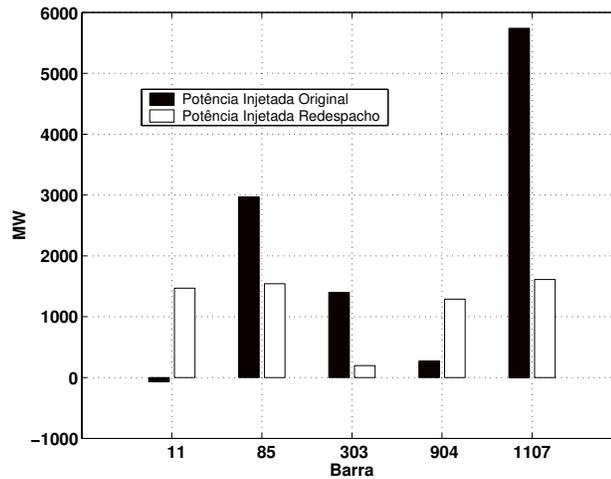


Figura 8.3: Barras cuja diferença entre as injeções líquidas de potência ativa fornecidas pelo despacho original e pelo redespacho são maiores ou iguais que 1000 MW para carga leve.

Barra	Usina	Original (MW)	Redespacho (MW)
11	Angra 2	-67,90	1470.00
85	Itaipu 50Hz	2966,00	1541.65
303	São Simão	1400,00	196.59
904	Itá	269,80	1289.49
1107	Itaipu 60Hz	5741,00	1612.63

Tabela 8.8: Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.3 para carga leve.

É interessante notar um aumento da geração para a barra de Angra 2 que está perto dos centros de carga. Aliás, um dos motivos da escolha da localização de Angra 2 foi a sua proximidade com os centros de carga como mostrado na Figura 8.4.



Figura 8.4: Localização das usinas de Itaipu e Angra 2 no SIN.

A Figura 8.4 é particularmente esclarecedora do motivo pelo qual a minimização de perdas realiza uma modificação tão grande principalmente na geração de Angra 2 e Itaipu. Grandes modificações também ocorrem em relação a geração das usinas de São Simão (redução) e Itá (aumento).

Uma avaliação global da modificação entre a geração original e a redespachada para carga leve pode ser obtida com a Figura 8.5. Cada barra e ramo do SIN possui uma informação relativa à região ou empresa a que pertence, denominada área. Com base nesta informação foi construída a Figura 8.5 que fornece os valores de injeção líquida de potência ativa para as áreas cuja geração do despacho original ou do redespacho é maior ou igual que 800 MW. O destaque é a redução significativa da geração nas áreas 8 e 17 (Cesp e Itaipu) que é compensada por um aumento nas áreas 1 e 41 (Furnas e Produtores Independentes). Oscilações de menor magnitude na solução proposta pelo redespacho ocorrem para as áreas 51 e 59 (redução) e 19, 21 e 27 (aumento).

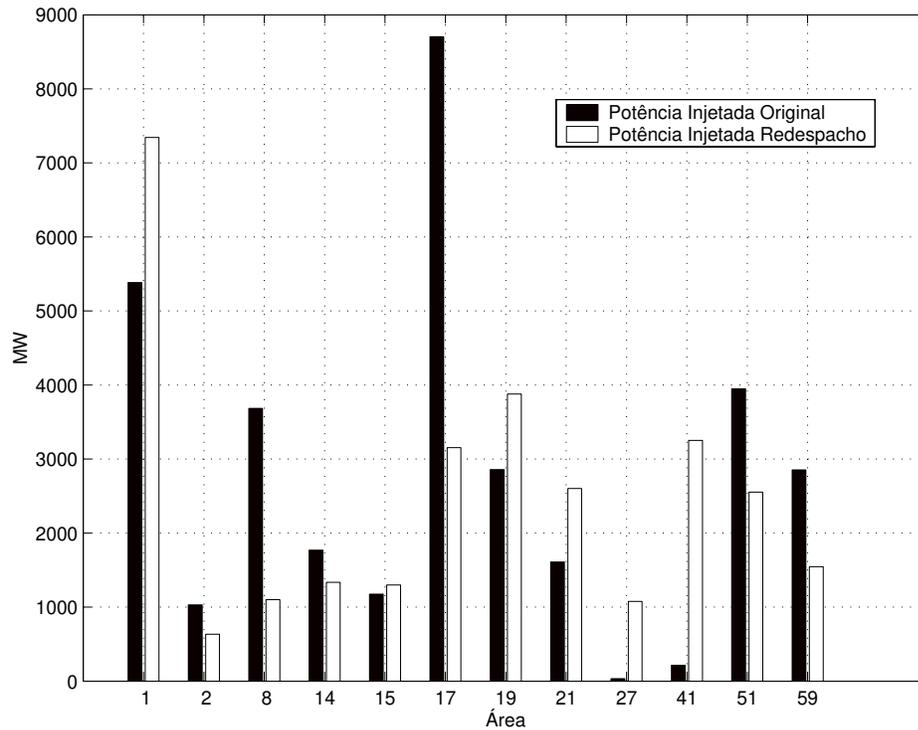


Figura 8.5: Distribuição da injeção líquida de potência ativa, para áreas com 800 MW de potência ativa ou mais, para o despacho original ou para o redespacho no caso de carga leve.

A relação completa entre as áreas e as empresas proprietárias, bem como os valores detalhados de potência ativa é fornecida na Tabela 8.9.

Uma comparação entre a solução do despacho original e o redespacho minimizando perdas para carga média segue na Tabela 8.10. A redução de perdas é próxima do valor obtido para carga leve, ficando em torno de 1000 MW. As barras cujas diferenças de potência ativa, maiores ou iguais a 1000 MW, entre o original e o redespacho para carga média são dadas na Tabela 8.11, indicando uma alteração significativa na geração de seis barras (que representam cinco usinas). A Figura 8.6 é construída com os dados da Tabela 8.11.

Novamente, como no caso de carga leve, as maiores modificações de geração ocorrem para Angra 2, Itaipu e São Simão. Outras duas grandes modificações são específicas para carga média, a redução drástica da geração

Área	Empresa	Original (MW)	Redespacho (MW)
1	Furnas	5384,20	7344,72
2	Cemig	1029,90	633,46
8	Cesp	3684,20	1100,26
14	Aes Tietê	1769,00	1335,22
15	Duke Energy	1175,00	1299,18
17	Itaipu	8704,90	3154,12
19	Tractebel Energia - Sul	2856,60	3877,94
21	Copel	1609,10	2601,21
27	Emae	33,00	1077,53
41	Produtores Independentes	214,60	3251,13
51	Complexo PAF + UAS + ULG + UX	3948,10	2553,15
59	Área Tucuruí- Belém	2852,70	1545,04

Tabela 8.9: Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.5 para carga leve.

Despacho	Geração (MW)	Carga (MW)	Perdas (%)	Ramos no Limite
Original	43242,25	41581,12	3,99	11
Redespacho	42310,78	41581,12	1,75	35
Diferença	931,47	0,00	2,24	24
Redução %	2,15	0,00	62,66	-218,18

Tabela 8.10: Resultado do redespacho para o caso de carga média.

das usinas de Ilha Solteira e Porto Primavera.

A Figura 8.7 fornece os valores de injeção líquida de potência ativa para cada área no caso da carga média, ilustrando a redução significativa de geração das áreas 8 e 17 (Cesp e Itaipu) e o grande aumento das áreas 1, 19 e 41 (Furnas, Tractebel Energia-Sul e Produtores Independetes).

A relação entre as áreas e as empresas proprietárias ou regiões é fornecida

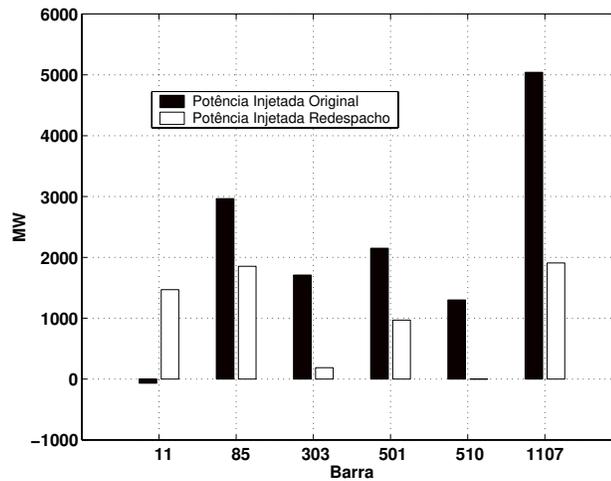


Figura 8.6: Barras cuja diferença entre as injeções líquidas de potência ativa fornecidas despacho original e pelo redespacho que são maiores ou iguais que 1000 MW para carga média.

Barra	Usina	Original (MW)	Redespacho (MW)
11	Angra 2	-67,90	1470,00
85	Itaipu 50Hz	1854,33	2966,00
303	São Simão	187,89	1710,00
501	Ilha Solteira	968,46	2149,80
510	Porto Primavera	0,47	1300,00
1107	Itaipu 60Hz	1908,13	5041,00

Tabela 8.11: Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.6 para carga média.

na Tabela 8.12.

Uma comparação entre a solução do despacho original e do redespacho minimizando perdas para carga pesada segue na Tabela 8.13. Neste caso, ocorre a maior redução de perdas em valores absolutos, 1114,69MW, porém com menor aumento do número de ramos no limite (apenas 4).

Novamente, como no caso de carga leve e média, as maiores modificações de geração ocorrem para Angra 2 e Itaipu. Assim como na carga média, a usina de Porto Primavera sofreu uma redução grande de geração no redes-

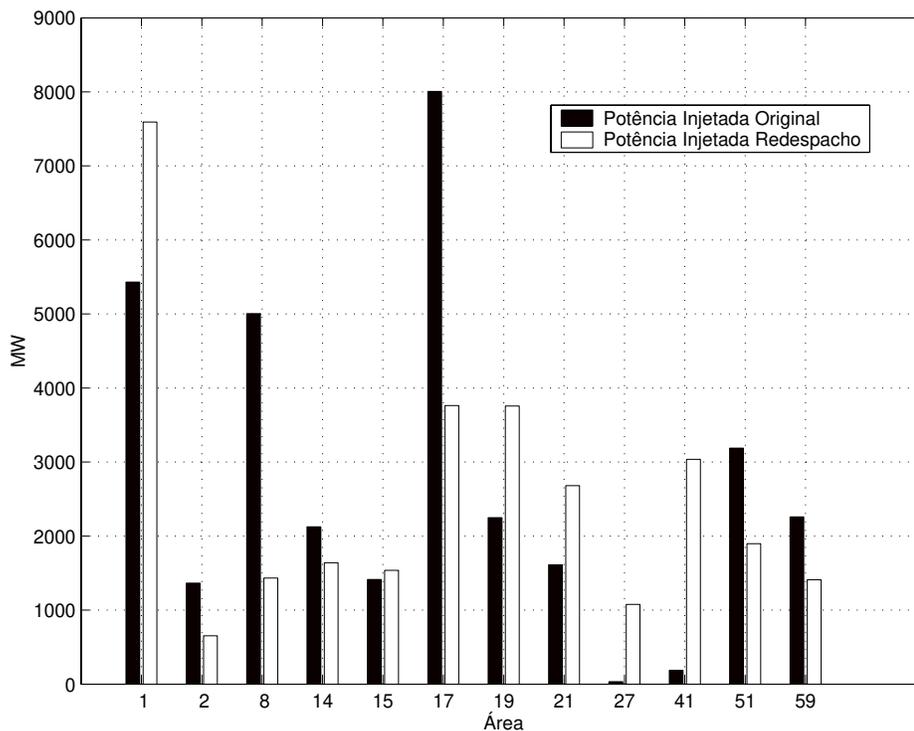


Figura 8.7: Distribuição da injeção líquida de potência ativa maior ou igual a 800 MW, por área, para despacho original e para o redespacho no caso de carga média.

pacho como pode ser visto na Figura 8.8. Uma modificação de geração para carga pesada, que também ocorre nos demais casos, é a redução da geração da usina de São Simão.

Detalhes das informações fornecidas na Figura 8.8 podem ser observados na Tabela 8.14.

A Figura 8.9 fornece uma melhor avaliação global da modificação da geração, mostrando um aumento significativo de geração nas áreas 1, 19, 21, 27 e 41, de forma a compensar a redução que ocorre nas áreas 1, 8, 17, 51 e 59.

A relação entre as áreas e as empresas proprietárias é fornecida na Tabela 8.15.

Um resumo da redução das perdas de transmissão e o respectivo aumento do número de ramos no limite para cada patamar de carga é dado na Tabela

Área	Empresa	Original (MW)	Redespacho (MW)
1	Furnas	5431,50	7594,02
2	Cemig	1363,70	653,69
8	Cesp	5005,90	1433,39
14	Aes Tietê	2124,00	1638,59
15	Duke Energy	1413,00	1537,32
17	Itaipu	8005,40	3762,23
19	Tractebel Energia-Sul	2249,40	3755,85
21	Copel	1611,70	2679,99
27	Emae	32,80	1077,56
41	Produtores Independentes	186,80	3035,51
51	Complexo PAF + UAS + ULG + UX	3188,80	1896,67
59	Área Tucuruí- Belém	2258,60	1409,67

Tabela 8.12: Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.7 para carga média.

Despacho	Geração (MW)	Carga (MW)	Perdas (%)	Ramos no Limite
Anarede	48848,42	47058,04	3,85	15
FPO CC	47733,73	47058,04	1,43	19
Diferença	1114,69	0,00	2,42	4
Redução %	2,28	0,00	62,85	-26,67

Tabela 8.13: Resultado do redespacho para o caso de carga pesada.

8.16.

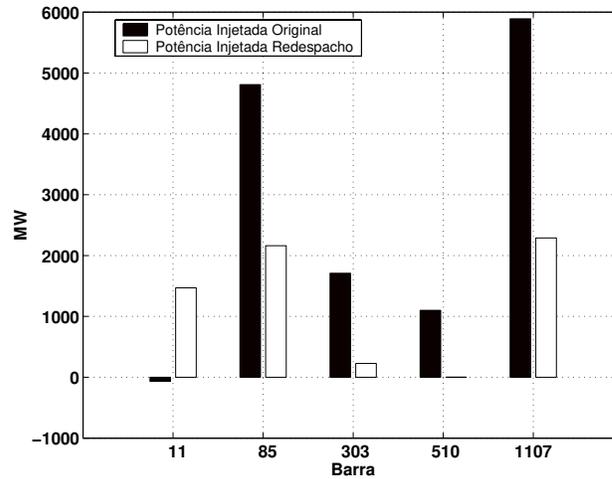


Figura 8.8: Barras cuja diferença entre as injeções líquidas de potência ativa fornecidas despacho original e pelo redespacho são maiores ou iguais que 1000 MW para carga pesada.

Barra	Usina	Original (MW)	Redespacho (MW)
11	Angra 2	-67,90	1470,00
85	Itaipu 50Hz	4618,40	2161,21
303	São Simão	1710,00	227,36
510	Porto Primavera	1100,00	1,28
1107	Itaipu 60Hz	5091,00	2289,72

Tabela 8.14: Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.8 para carga pesada.

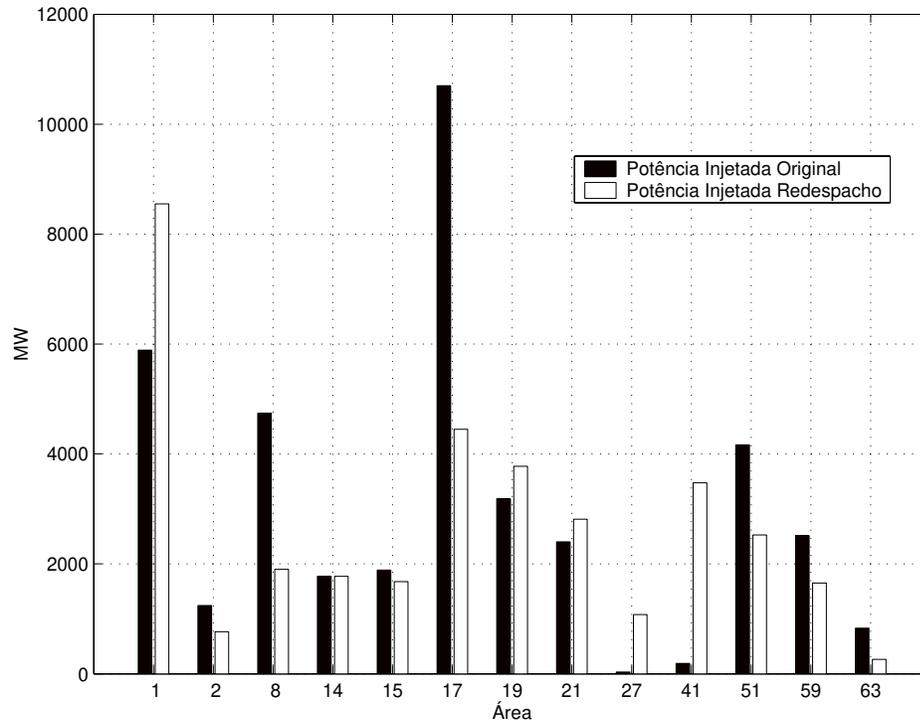


Figura 8.9: Distribuição da injeção líquida de potência ativa maiores ou iguais que 800 MW, por área, para o despacho original e para o redespacho no caso de carga pesada.

Área	Empresa	Original (MW)	Redespacho (MW)
1	Furnas	5488,50	8550,59
2	Cemig	1241,70	765,62
8	Cesp	4740,40	1902,70
14	Aes Tietê	1774,00	1774,33
15	Duke Energy	1888,00	1676,91
17	Itaipu	10699,30	4450,61
19	Tractebel Energia-Sul	2402,40	3776,91
21	Copel	2402,40	2812,11
27	Emae	32,10	1076,73
41	Produtores Independentes	188,40	3475,63
51	Complexo PAF + UAS + ULG + UX	4165,90	2525,85
59	Área Tucuruí- Belém	2516,30	1652,20
63	Interligação Norte-Sul	831,30	262,40

Tabela 8.15: Valores de injeção líquida de potência ativa para as barras da Figura 8.9 para carga pesada.

Carga	Redução das Perdas de Transmissão(%)	Aumento de Ramos no Limite (%)
Leve	63,28	173,33
Média	62,66	218,18
Pesada	62,85	26,67

Tabela 8.16: Resumo dos resultados obtidos com o redespacho de potência que minimiza as perdas de transmissão realizado pelo FPO CC.

# Capítulo 9

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 9.1 Conclusões e Trabalhos Futuros

O Brasil é um país com geração predominantemente hidrelétrica, sendo necessário um gerenciamento que compatibilize a gestão do armazenamento dos reservatórios das usinas hidrelétricas com o despacho de geração e os fluxos de potência no Sistema Interligado Nacional (SIN).

Devido a complexidade deste problema, sua resolução requer a criação de uma cadeia de coordenação hidrotérmica da operação, composta de um conjunto de modelos computacionais concatenados que determinam a distribuição da geração entre as usinas hidrelétricas e termelétricas do sistema em diferentes escalas de tempo.

A cadeia de coordenação hidrotérmica para o SIN considerada nesta tese é composta de duas etapas: Planejamento da Operação e Programação da Operação.

No âmbito do Planejamento da Operação, o Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas (MOUI) foi resolvido por métodos de pontos interiores, obtendo-se uma configuração adequada para a resolução de problemas de grande porte, como é o caso do SIN, destacando-se:

- Dois grupos de modelos foram analisados neste trabalho. Um grupo considera como variáveis de decisão o volume e a defluência, acarretando pontos de não-diferenciabilidade na função objetivo. Outro grupo considera que a defluência é composta de turbinagem e vertimento, evitando os pontos de não-diferenciabilidade da função objetivo. Para o caso de apenas uma usina e afluentes tais que a solução

ótima não apresenta turbinagens no máximo, as soluções entre os dois grupos são iguais. Quando para uma usina são consideradas afluições tais que a solução ótima apresenta turbinagens no máximo, ou ainda, mais de uma usina é considerada, então, o tratamento inadequado desses pontos para os modelos do grupo que considera volume e defluência acarretou problemas de convergência para os métodos de pontos interiores. Portanto, os resultados obtidos indicaram que modelos que realizam a decomposição da variável de defluência em turbinagem e vertimento apresentaram maior robustez para problemas do MOUI de grande porte.

- Aproveitamento da estrutura esparsa do problema através da metodologia proposta por Gondzio em [48], possibilitando a implementação e teste de 2304 métodos de pontos interiores para o Modelo de Otimização a Usinas Individualizadas (MOUI). Dentre estes 2304 MPI's foi escolhido um MPI capaz de resolver o MOUI com 82 usinas hidrelétricas do SIN e 12 intervalos de tempo, ou ainda, um MOUI com 61 usinas e 780 intervalos de tempo. Este último MOUI resulta em um problema com cerca de 140.000 variáveis e 280.000 restrições. Vale destacar que o MOUI é um problema de programação não-linear.
- Avaliação dos métodos de pontos interiores primal-dual e preditor-corretor. O preditor-corretor mostrou melhor desempenho para casos com menor número de usinas, porém o primal-dual é mais robusto, pois converge para problemas com pequeno ou grande número de usina.

As perspectivas de trabalhos futuros para os métodos de pontos interiores aplicados no MOUI são:

- Devido ao bom desempenho computacional obtido com o MPI em Matlab, é importante integrar a metodologia de métodos de pontos interiores desenvolvida nesta tese no ambiente computacional HydroLab, utilizando linguagem C ou C++, com o intuito de reduzir seu tempo computacional.
  - Desenvolvimento de um método de pontos interiores preditor-corretor que mantenha a velocidade computacional, mas que seja robusto para casos com muito usinas hidrelétricas.
-

- A abordagem proposta por Gondzio em [48], além de possibilitar a implementação futura do programa de método de pontos interiores em paradigma de programação orientada a objeto, permite a rápida implementação de novos métodos de pontos interiores para problemas com estruturas esparsas que englobem a estrutura esparsa do MOUI. Assim, a estrutura esparsa de um problema de multifluxo (descrita no Apêndice C) pode ser combinada com a estrutura esparsa do MOUI, permitindo que os fluxos de água sejam associados a uma probabilidade de ocorrência, como proposto por Nabona em [74]. Como esta consideração implica em um aumento das dimensões do problema, é interessante utilizar inicializações específicas para a estrutura esparsa do problema de multifluxo que podem reduzir em até 60% o tempo computacional do MPI [9].

No âmbito da Programação da Operação, o Fluxo de Potência Ótimo Corrente Contínua (FPO CC) modelado por fluxo em redes foi resolvido por métodos de pontos interiores, destacando-se:

- A modelagem do FPO CC via fluxo em redes proposta em [79] não contemplava transformadores defasadores. Esta tese contribui com uma modificação visando adicionar esta consideração ao FPO CC via fluxo em redes.
- A inclusão de transformadores defasadores no modelo de fluxos em redes do FPO CC, permitiu uma melhor representação e comparação dos resultados com programas de fluxo de carga já estabelecidos.
- Com o auxílio de uma função objetivo flexível, foi possível tanto validar os resultados obtidos pelo método de pontos interiores com um programa de fluxo de carga já estabelecido, como redespachar a geração minimizando as perdas de transmissão.
- A aplicação do FPO CC desenvolvido no SIN, uma rede elétrica de grande porte com cerca de 3400 barras e de 4000 ramos, convergindo rapidamente para todos os casos testados.
- Finalmente, foram propostas e implementadas quatro formas de representação das perdas de transmissão do FPO CC.

As perspectivas de trabalhos futuros para o FPO CC são:

---

- Avaliar as diferenças existentes entre as quatro formas de representação das perdas do FPO CC, utilizando, para tanto, a solução de um FPO CA ou um FP CA.
  - Inserir restrições de segurança na modelagem do FPO CC, representados por inequações, que relacionam gerações e fluxos de potência.
  - Estender a metodologia de Gondzio, descrita em [48], para o FPO CC, facilitando a incorporação de restrições de segurança, rampa, reserva girante, dentre outras. Um benefício adicional é a possibilidade de se integrar o FPO CC ao HydroLab.
-

# Referências Bibliográficas

- [1] I. Adler, M. G. C. Resende, G. Veiga, and N. Karmarkar. An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 44:297–335, 1989.
- [2] E. I. Administration. Official energy statistics from the u.s. government. <http://www.eia.doe.gov/emeu/international/contents.html>.
- [3] A. Altman and J. Gondzio. Regularized symmetric indefinite systems in interior point methods for linear and quadratic optimization. *Optimization Methods and Software*, 11(12):275–302, 1999.
- [4] C. A. Amaral and F. A. A. Prado. *Pequenas centrais hidrelétricas*. Páginas e Letras Editora e Gráfica, São Paulo, SP, 2000.
- [5] A. S. Arce, T. Ohishi, and S. Soares. Optimal dispatch of generating units of the itaipu hydroelectric plant. *IEEE Transaction on Power Systems*, 17(1):154–158, 2002.
- [6] N. V. Arvanitidis and J. Rosing. Composite representation of multireservoir hydroelectric power system. *IEEE Transaction on PAS*, 89(2):319–326, 1970.
- [7] A. T. Azevedo, M. F. H. Carvalho, A. R. L. Oliveira, and S. Soares. Problema de fluxo de potência ótimo dc com grafo generalizado via método de pontos interiores com restrições adicionais. In S. B. de Pesquisa Operacional, editor, *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pages 1454–1462, 2001.
- [8] A. T. Azevedo, M. F. H. Carvalho, A. R. L. Oliveira, and S. Soares. Métodos de pontos interiores aplicados a problema de multifluxo com

- restrições adicionais. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 3(1):41–50, 2002.
- [9] A. T. Azevedo, A. R. L. Oliveira, and S. Soares. Eficiência e robustez de métodos de pontos interiores no planejamento e controle da produção modelado por fluxos em redes. In S. B. de Pesquisa Operacional, editor, *Anais do XXXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pages 1916–1927, 2004.
- [10] A. T. Azevedo, A. R. L. Oliveira, and S. Soares. Uma alternativa na obtenção de métodos de pontos interiores orientados a objetos explorando estruturas esparsas para problemas de otimização. *XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - XXV CILAMCE*, 1(1), 2004.
- [11] R. Ballini. Previsão de vazões através de sistemas neuro-fuzzy. Tese de Doutorado, FEEC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, 2000.
- [12] M. T. L. Barros, F. T.-C. Tsai, S.-L. Yang, J. E. Lopes, W. W.-G. Yeh, and H. Asce. Optimization of large-scale hydropower system operations. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 129(3):178–188, 2003.
- [13] L. Bayon, J. M. Grau, and P. Suarez. A new formulation of the equivalent thermal in optimization of hydrothermal systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 8(3):181–196, 2002.
- [14] H. Benson, D. Shanno, and R. Vanderbei. Interior point methods for nonconvex nonlinear programming: Jamming and comparative numerical testing. 2000. Technical report ORFE-00-02, Operation Research and Financial Engineering, Princeton University. [http://www.princeton.edu/~rvdb/ps/loqo3\\_5.pdf](http://www.princeton.edu/~rvdb/ps/loqo3_5.pdf).
- [15] H. Y. Benson, D. F. Shanno, and R. J. Vanderbei. A comparative study of large-scale nonlinear optimization algorithms, 2001. Technical report ORFE-01-04, Operation Research and Financial Engineering, Princeton University. [citeseer.ist.psu.edu/benson01comparative.html](http://citeseer.ist.psu.edu/benson01comparative.html).
- [16] T. Bhatia and L. Biegler. Multiperiod design and planning with interior point methods. *Computer and Chemical Engineering*, 23(7):919–932, 1999.
-

- 
- [17] J. Birge. Stochastic programming computation and applications: State-of-the-art survey. *INFORMS Journal on Computing*, 9(2):111–133, 1997.
- [18] V. Bissonnette. A hydro-thermal scheduling model for the hydro-québec production systems. *PWRS*, 1(2):204–210, 1986.
- [19] R. Byrd, M. Hribar, and J. Nocedal. An interior point algorithm for large scale nonlinear programming. *SIAM J. Opt.*, 9(4):877–900, 1999.
- [20] A. A. F. M. Carneiro. Contribuição ao planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos de potência. Tese de Doutorado, FEEC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, 1991.
- [21] A. A. F. M. Carneiro, S. Soares, and F. S. Bond. A large scale application of an optimal deterministic hydrothermal scheduling algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, 5(1):204–211, 1990.
- [22] M. F. Carvalho, M. F. Soares, and T. Ohishi. Optimal active power dispatch by network flow approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(3):1640–1647, 1988.
- [23] M. F. Carvalho and S. Soares. An efficient hydrothermal scheduling algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2(3):537–542, 1987.
- [24] J. Castro. A specialized interior-point algorithm for multicommodity network flows. *SIAM J. Optimization*, 10(1):852–877, 2000.
- [25] J. Castro and J. A. González. A nonlinear optimization package for long-term hydrothermal coordination. *European Journal of Operational Research*, 154(3):641–658, 2004.
- [26] CEPEL. *Manual do Programa de Análise de Redes, V07-08/99 - Anarede*. Centro de Pesquisa de Energia Elétrica - CEPEL, 1999.
- [27] M. A. Cicogna. Modelo de planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos a usinas individualizadas orientado por objetos. Dissertação de Mestrado, FEEC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, 1999.
-

- 
- [28] M. A. Cicogna. Sistema de suporte à decisão para o planejamento e programação da operação de sistemas de energia elétrica. Tese de Doutorado, FEEC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, 2003.
- [29] T. F. Coleman and Y. Li. An interior, trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 6(2):418–445, 1996.
- [30] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and P. L. Toint. *LANCELOT: a Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization (Release A)*. Springer Verlag, Heidelberg, New York, 1992.
- [31] W. E. Council. Survey of energy resources. <http://www.worldenergy.org/wec-geis/publications/reports/ser/uranium/ur%anium.asp>.
- [32] A. N. de Energia Elétrica ANEEL. Atlàs de energia elétrica do brasil. [http://www.aneel.gov.br/arquivos/PDF/livro\\_atlas.pdf](http://www.aneel.gov.br/arquivos/PDF/livro_atlas.pdf).
- [33] G. G. de Oliveira. Otimização da operação energética de sistemas hidrotérmicos com representação individualizada das usinas e afliência determinísticas. Dissertação de Mestrado, FEEC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, 1993.
- [34] A. S. El-Bakry, R. A. Tapia, T. Tsuchiya, and Y. Zhang. On the formulation and theory of the newton interior-point method of nonlinear programming. *Journal on Optimization Theory and Applications*, 89(3):507–541, 1996.
- [35] Eletronuclear. Funcionamento da usina para um reator pwr. [http://www.eletronuclear.gov.br/sys/interna.asp?IdSecao=9&secao\\_mae=2](http://www.eletronuclear.gov.br/sys/interna.asp?IdSecao=9&secao_mae=2).
- [36] L. F. Escudero, C. Garcia, J. L. de la Fuente, and F. J. Prieto. Hydro-power generation management under uncertainty via scenario analysis and parallel computation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(2):683–689, 1996.
- [37] L. A. M. Fortunato, T. A. A. Neto, J. C. R. Albuquerque, and M. V. F. Pereira. *Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica*. Editora Universitária da Universidade Federal Fluminense - EDUFF, 1990.
-

- 
- [38] P. Franco, M. F. Carvalho, and S. Soares. A network flow model for short-term hydro-dominated hydrothermal scheduling problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):1016–1022, 1994.
- [39] R. Fuentes-Loyola and V. H. Quintana. Medium-term hydrothermal coordination by semidefinite programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(4):1515–1522, 2003.
- [40] A. Garzillo, M. Innorta, and M. Ricci. The problem of the active and reactive optimum power dispatching solved by utilizing a primal-dual interior point method. *Electrical Power and Energy Systems*, 20(6):427–434, 1998.
- [41] A. Garzillo, M. Innorta, and M. Ricci. The flexibility of interior point based optimal power flow algorithms facing critical network situations. *Electrical Power and Energy Systems*, 21(8):579–584, 1999.
- [42] P. Gill, W. Murray, and M. Saunders. User guide for snopt 5.3: A fortran package for large-scale nonlinear programming. *Technical report, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, Stanford, CA*, 1997.
- [43] P. Gill, W. Murray, and M. Saunders. Snopt: An sqp algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 12(4):979–1006, 2002.
- [44] J. Goldemberg and L. D. Villanueva. *Energia, Meio Ambiente & Desenvolvimento*. Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- [45] J. Gondzio. Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming. *Computational Optimization and Applications*, 6(2):137–156, 1996.
- [46] J. Gondzio and A. Grothey. Exploiting structure in parallel implementation of interior point methods for optimization, 2005. [http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/reports/oops\\_comp.pdf](http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/reports/oops_comp.pdf).
- [47] J. Gondzio and A. Grothey. Solving nonlinear portfolio optimization problems with the primal-dual interior point method, 2005. <http://www.maths.ed.ac.uk/~gondzio/reports/almnlp.pdf>.
-

- [48] J. Gondzio and R. Sarkissian. Parallel interior point solver for structured linear programs. *Mathematical Programming*, 96(3):561–584, 2003.
  - [49] C. C. Gonzaga. Path following methods for linear programming. *SIAM Review*, 34(2):167–227, 1992.
  - [50] S. Granville. Optimal reactive power dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1):136–146, 1994.
  - [51] D. Halliday and R. Resnick. *Fundamentos de Física: Eletromagnetismo*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Terceira Edição, 1994.
  - [52] M. Hanscom, L. Lafond, L. Lasdon, and G. Provonost. Modelling and resolution of the deterministic mid-term energy production problem for the hydro-quebec system. *Mgmt. Sci.*, 26:659–668, 1980.
  - [53] H. H. Happ. Optimal power dispatch - a comprehensive survey. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 96(3):841–854, 1977.
  - [54] F. J. Heredia and N. Nabona. Optimum short-term hydrothermal scheduling with spinning reserve through network flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3):1642–1651, 1995.
  - [55] R. H. Hicks, S. L. S. J. C. R. Gagnon, and J. S. Kowalik. Large scale, nonlinear optimization of energy capability for the pacific northwest hydroelectric systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 93:1604–1612, 1974.
  - [56] M. Huneault and F. D. Galiana. A survey of the optimal power flow literature. *IEEE Transactions on Power Systems*, 6(2):762–770, 1991.
  - [57] G. Irisarri, L. M. Kimball, K. A. Clements, A. Bagchi, and P. W. Davis. Economic dispatch with network and ramping constraints via interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(1):236–242, 1998.
  - [58] R. A. Jabr, A. H. Coonick, and B. J. Cory. A primal-dual interior point method for optimal power flow dispatching. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(3):654–662, 2002.
-

- 
- [59] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4):373–395, 1984.
- [60] L. M. Kimball, K. A. Clements, P. W. Davis, and I. Nejdawi. Multi-period hydrothermal economic dispatch by an interior point method. *Mathematical Problems in Engineering*, 8(1):33–42, 2002.
- [61] C. N. Lu and M. R. Unum. Network constrained security control using an interior point algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(3):1068–1076, 1993.
- [62] C. Lyra. Contribuição ao planejamento da produção de energia em sistemas de potência. Tese de Doutorado, FEEC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, 1984.
- [63] C. Lyra and H. Tavares. A contribution to the midterm scheduling of large scale hydrothermal power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(3):852–857, 1988.
- [64] L. Martinez and S. Soares. Comparison between closed-loop and partial open loop feedback control policies in long term hydrothermal scheduling. *Transactions on Power Systems*, 17(2):330–336, 2002.
- [65] C. Mayhew and R. Simmon. Astronomy picture of the day. <http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap001127.html>.
- [66] J. Medina, V. Quintana, and A. Conejo. A clipping-off interior-point technique for medium-term hydro-thermal coordination. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):266–273, 1999.
- [67] J. Medina, V. Quintana, A. Conejo, and F. P. Thoden. A comparison of interior-point codes for medium-term hydro-thermal coordination. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(3):836–843, 1998.
- [68] S. Mehrotra. On implementation of a primal-dual interior point methods. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4):575–601, 1994.
- [69] J. A. Momoh, M. E. El-Hawary, and R. Adapa. A review of selected optimal power flow literature to 1993, part i: Nonlinear and quadratic programming approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):96–104, 1999.
-

- [70] J. A. Momoh, M. E. El-Hawary, and R. Adapa. A review of selected optimal power flow literature to 1993, part ii newton, linear programming and interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):105–111, 1999.
- [71] A. J. Monticelli. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. Editora Edgard Blucher LTDA, 1983.
- [72] A. J. Monticelli and A. Garcia. *Introdução a Sistemas de Energia Elétrica*. Editora Unicamp, 2000.
- [73] B. A. Murtagh and M. A. Saunders. Minos 5.4 user's guide. *Technical Rep. SOL 83-20R, Dept. of Operations Research, Stanford Univ., Stanford Calif.*, 1995.
- [74] N. Nabona. Multicommodity network flow for long-term hydrogeneration optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(2):395–404, 1993.
- [75] N. Nabona, J. Castro, and J. A. Gonzalez. Optimum long-term hydrothermal coordination with fuel limits. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(2):1054–1062, 1995.
- [76] A. Oliveira. Uma metodologia para o cálculo do spot price em sistemas hidrotérmicos. Dissertação de Mestrado da FEEC - UNICAMP - Campinas, SP, 1999.
- [77] A. Oliveira and C. Lyra. Implementação de um método de pontos interiores para programação linear. *Revista SBA: Controle e Automação*, 3(2):370–382, 1991.
- [78] A. Oliveira and S. Soares. Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo dc. *SBA: Controle e Automação*, 14(3):278–285, 2003.
- [79] A. Oliveira, S. Soares, and L. Nepomuceno. Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(4):1235–1240, 2003.
- [80] A. Oliveira, S. Soares, and L. Nepomuceno. Short term hydroelectric scheduling combining network flow and interior point approaches. *Electrical Power and Energy Systems*, 27(2):91–99, 2005.
-

- 
- [81] G. G. Oliveira and S. Soares. A second-order network flow algorithm for hydrothermal scheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3):1635–1641, 1995.
- [82] M. V. F. Pereira. Optimal scheduling of hydrothermal system - an overview. In IFAC, editor, *IFAC Symposium on Planning and Operation of Electric Energy Systems*, pages 1–9, 1985.
- [83] M. V. F. Pereira and L. M. V. G. Pinto. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: A decomposition approach. *Water Resources Research*, 21(6):779–792, 1985.
- [84] K. Ponnambalam, V. H. Quintana, and A. Vannelli. A fast algorithm for power system optimization problems using an interior point method. *Transactions on Power Systems*, 7(2):892–899, 1992.
- [85] M. J. D. Powell. *A Fast Algorithm for Nonlinear Constrained Optimization Calculations*, volume 15. Numerical Analysis, ed. G.A.Watson, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1978.
- [86] V. H. Quintana, G. L. Torres, and J. Medina-Palomo. Interior point methods and their applications on power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(1):170–176, 2000.
- [87] J. M. Ramirez and E. E. Barocio. Solving state estimation in power systems by an interior point method. *Electrical Power and Energy Systems*, 22(5):355–365, 2000.
- [88] J. R. Reitz, F. J. Milford, and R. W. Christy. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Editora Campus, 1991.
- [89] R. E. Rosenthal. A nonlinear network flow algorithm for maximization of benefits in a hydroelectric power system. *Operations Research*, 29(4):763–786, 1981.
- [90] S. Salam, K. M. Nor, and A. R. Hamdan. Comprehensive algorithm for hydrothermal coordination. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings*, 144(5):482–488, 1997.
-

- [91] K. Schittkowski. Nlqpl: A fortran subroutine solving constrained non-linear programming problems. *Annals of Operations Research*, 5:485–500, 1985.
  - [92] R. A. Tapia and Y. Zhang. Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for linear programming revisited. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 73:229–242, 1992.
  - [93] G. L. Torres and V. H. Quintana. An interior-point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(4):1211–1218, 1998.
  - [94] R. Vanderbei and D. Shanno. An interior-point algorithm for nonconvex nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 13(1):231–252, 1999.
  - [95] H. Wei, H. Sasaki, J. Kubokawa, and R. Yokoyama. An application of interior point quadratic programming algorithm to power system optimization problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(1):260–266, 1996.
  - [96] H. Wei, H. Sasaki, J. Kubokawa, and R. Yokoyama. Large scale hydrothermal optimal power flow problems based on interior point nonlinear programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(1):396–403, 2000.
  - [97] S. J. Wright. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM Publications, 1996.
  - [98] Y.-C. Wu, A. S. Debs, and R. E. Marsten. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):876–883, 1994.
  - [99] X. Yan and V. H. Quintana. An infeasible interior-point algorithm for optimal power-flow problems. *Electric Power Systems Research*, 19(1):39–46, 1996.
  - [100] X. Yan and V. H. Quintana. An efficient predictor-corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(2):803–810, 1997.
-

- [101] C. E. Zoumas, A. G. Bakirtzis, J. B. Theocharis, and V. Petridis. A genetic algorithm solution approach to the hydrothermal coordination problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(2):1356–1364, 2004.
-

# Apêndice A

## Derivadas da Função Objetivo

### A.1 Derivadas primeiras para o modelo $(x, u)$

Supondo que o modelo matemático utilizado possui apenas volume  $x$  e defluência  $u$  como variáveis, então a função objetivo será dada pela Eq. (A.1):

$$\text{Min } f(x, u) = \sum_{t=1}^T [\lambda_t \cdot \Psi(G_t)], \quad (\text{A.1})$$

tal que:

$$G_t = D_t - P_t, \forall t; \quad (\text{A.2})$$

$$P_t = \sum_{i=1}^I p_{i,t}, \forall t; \quad (\text{A.3})$$

$$p_{i,t} = k_i h_{l_{i,t}} q_{i,t}, \forall i, t; \quad (\text{A.4})$$

$$h_{l_{i,t}} = \phi(x_{i,t}^{med}) - \theta(u_{i,t}) - pc_{i,t}; \forall i, t; \quad (\text{A.5})$$

$$x_{i,t}^{med} = \frac{x_{i,t} + x_{i,t+1}}{2}, \forall i, t; \quad (A.6)$$

$$q_{i,t} = Min\{u_{i,t}, \bar{q}_{i,t}\} \forall i, t; \quad (A.7)$$

$$\bar{q}_{i,t} = \sum_{j=1}^{Nc} (N_{j,i,t} \overline{q_{j,i,t}}); \quad (A.8)$$

$$\overline{q_{j,i,t}} = q_{ef,j,i} \left( \frac{h_{l_{i,t}}}{h_{ef,j,i}} \right)^\alpha; \quad (A.9)$$

$$u_{i,t} = q_{i,t} + v_{i,t}. \quad (A.10)$$

Onde:

- $T$ : número de intervalos de tempo.
  - $I$ : número de usinas hidrelétricas do sistema.
  - $\lambda_t$ : coeficiente de valor presente para o intervalo  $t$ .
  - $p_{i,t}$ : geração de energia hidrelétrica  $i$  durante o intervalo  $t$ .
  - $G_t$ : geração de energia termelétrica total durante o intervalo  $t$ .
  - $P_t$ : geração de energia hidrelétrica total durante o intervalo  $t$ .
  - $D_t$ : mercado a ser atendido durante o período  $t$ .
  - $x_{i,t}^{med}$ : volume médio do reservatório da usina  $i$  durante o intervalo  $t$ .
  - $h_{l_{i,t}}$ : altura de queda líquida da usina  $i$  durante o intervalo  $t$ .
  - $pc_{i,t}$ : perda de carga hidráulica da usina  $i$  durante o intervalo  $t$ .
  - $u_{i,t}$ : vazão defluente da usina  $i$  durante o intervalo  $t$ .
-

- $q_{i,t}$ : vazão turbinada pela usina  $i$  durante o intervalo  $t$ .
- $v_{i,t}$ : vazão vertida pela usina  $i$  durante o intervalo  $t$ .
- $y_{i,t}$ : vazão incremental afluyente à usina  $i$  durante o intervalo  $i$ .
- $\phi_i(x)$ : polinômio da cota de montante do reservatório da usina  $i$ .
- $\theta_i(u)$ : polinômio da cota de jusante do canal de fuga da usina  $i$ .
- $\Delta t_t$ : tamanho do intervalo  $t$  em segundos.
- $N_c$ : Número de conjuntos de unidades geradoras da usina.
- $N_{j,i,t}$ : Número de unidades geradoras do conjunto  $j$  na usina  $i$  no período  $t$ .
- $q_{ef,j}$ : Turbinagem efetiva para cada unidade geradora do conjunto  $j$ . É definida como a vazão turbinada que submetida à queda efetiva  $h_{ef,j}$  produz a potência efetiva  $p_{ef,j}$ .
- $h_{ef,j}$ : Altura de queda efetiva de cada unidade do conjunto  $j$ . É definida como a menor queda líquida sob a qual a unidade, em operação, desenvolve a sua potência efetiva.
- $p_{ef,j}$ : Potência efetiva de cada unidade geradora do conjunto  $j$ . A potência efetiva é definida como a máxima potência ativa possível de ser gerada, em regime permanente, na unidade geradora.
- $\alpha = \begin{cases} 0.5 & \text{se } h_{li,t} < h_{ef,j,i,t} \text{ e Tipo} = (\text{Francis ou Pelton}) \\ 0.2 & \text{se } h_{li,t} < h_{ef,j,i,t} \text{ e Tipo} = (\text{Kaplan}) \\ -1.0 & \text{se } h_{li,t} \geq h_{ef,j,i,t} \end{cases}$

As derivadas de  $f(x, u)$  em relação à defluência e ao volume, para uma dada usina  $i$  em um intervalo de tempo  $t$  são dadas por:

- Defluência: Para calcular as derivadas primeiras será desconsiderado o efeito do afogamento. Este fenômeno, descrito no Capítulo 3, é tal que o polinômio de jusante  $\theta(u)$  da usina afogada passa a depender do volume  $x$  da usina imediatamente a jusante. Desconsiderando este efeito, então:  $\frac{\partial f}{\partial u_{i,t}} = \lambda_t \frac{\partial \Psi}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial u_{i,t}}$

- Volume: Também desconsiderando o efeito de afogamento, mais observando o uso de volume médio no polinômio de cota de montante  $\theta(x)$ :  

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}} = \lambda_t \frac{\partial \Psi}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} + \lambda_{t+1} \frac{\partial \Psi}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}}$$

Após as deduções detalhadas para cada termo das derivadas parciais, as expressões completas das derivadas parciais serão apresentadas resumidamente sob a forma de árvore, detalhando os termos mais complexos.

- (1) Derivada da função objetivo  $f$  em relação à  $u_{i,t}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial u_{i,t}} = \frac{\partial f}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial u_{i,t}} \quad (\text{A.11})$$

Onde:

- Utilizando a definição de  $f(x, u)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial G_t} = \frac{\partial \left( \sum_{t=1}^T [\lambda_t \Psi(G_t)] \right)}{\partial G_t} = \lambda_t \Psi'(G_t) \quad (\text{A.12})$$

- Utilizando a equação (A.2):

$$\frac{\partial G_t}{\partial P_t} = \frac{\partial(D_t - P_t)}{\partial P_t} = -1 \quad (\text{A.13})$$

- Com as equações (A.3) e (A.4):

$$\frac{\partial P_t}{\partial u_{i,t}} = \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^I k_i h_{i,t} q_{i,t} \right)}{\partial u_{i,t}} = \frac{\partial(k_i h_{i,t} q_{i,t})}{\partial u_{i,t}} = k_i \left[ \frac{\partial(h_{i,t})}{\partial u_{i,t}} q_{i,t} + \frac{\partial(q_{i,t})}{\partial u_{i,t}} h_{i,t} \right] \quad (\text{A.14})$$

Usando (A.5) para encontrar o valor de  $\frac{\partial h_{i,t}}{\partial u_{i,t}}$ :

$$\frac{\partial h_{i,t}}{\partial u_{i,t}} = \frac{[\phi(x_{i,t}^{med}) - \theta(u_{i,t}) - pc_{i,t}]}{\partial u_{i,t}} = -\theta'(u_{i,t}) \quad (\text{A.15})$$

Para obter o valor de  $\frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}}$  usa-se (A.7):

$$\frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} = q'(u_{i,t}) = \begin{cases} 1, & \text{se } u_{i,t} < \bar{q}_{i,t} \\ 0, & \text{se } u_{i,t} > \bar{q}_{i,t} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

- A expressão completa de  $\frac{\partial f}{\partial u_{i,t}}$  é obtida usando as equações de (A.12) até (A.16) em (A.11):

$$\frac{\partial f}{\partial u_{i,t}} = -\lambda_t \Psi'(G_t) k_i [-\theta'(u_{i,t})q_{i,t} + q'(u_{i,t})h_{li,t}] \quad (\text{A.17})$$

(2) Derivada da função objetivo  $f$  em relação à  $x_{i,t}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial f}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial f}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}} \quad (\text{A.18})$$

Onde:

- Os valores de  $\frac{\partial f}{\partial G_t}$  e  $\frac{\partial G_t}{\partial P_t}$  são dados por (A.12) e (A.13), respectivamente. O valor de  $\frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$  é encontrado, utilizando a equação (A.3):

$$\frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^I k_i h_{li,t} q_{i,t} \right)}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial (k_i h_{li,t} q_{i,t})}{\partial x_{i,t}} = k_i \left[ \frac{\partial (h_{li,t})}{\partial x_{i,t}} q_{i,t} + \frac{\partial (q_{i,t})}{\partial x_{i,t}} h_{li,t} \right] \quad (\text{A.19})$$

- Usando (A.5) para encontrar o valor de  $\frac{\partial h_{li,t}}{\partial x_{i,t}}$ :

$$\frac{\partial h_{li,t}}{\partial x_{i,t}} = \frac{[\phi(x_{i,t}^{med}) - \theta(u_{i,t}) - pc_{i,t}]}{\partial x_{i,t}} = \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t}^{med}) \quad (\text{A.20})$$

- Para obter o valor de  $\frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}}$  usa-se (A.7):

$$\frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} = 0. \quad (\text{A.21})$$


---

- A expressão completa relativa ao termo  $\partial x_{i,t}$  é obtida usando as equações de (A.18) até (A.21).

$$\frac{\partial f}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} = -\lambda_t \Psi'(G_t) k_i \left[ \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t}^{med}) q_{i,t} + q'(x_{i,t}) h_{li,t} \right] \quad (A.22)$$

- Em analogia à (A.12) e (A.13), os valores de  $\frac{\partial f}{\partial G_{t+1}}$  e  $\frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}}$  são dados por  $\lambda_{t+1} \Phi'(G_{t+1})$  e  $-1$ , respectivamente. O valor de  $\frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$  é encontrado, utilizando a equação (A.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t+1}} &= \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^I k_i h_{li,t} q_{i,t} \right)}{\partial x_{i,t+1}} = \frac{\partial (k_i h_{li,t+1} q_{i,t+1})}{\partial x_{i,t+1}} = \\ &= k_i \left[ \frac{\partial (h_{li,t+1})}{\partial x_{i,t+1}} q_{i,t+1} + \frac{\partial (q_{i,t+1})}{\partial x_{i,t+1}} h_{li,t+1} \right] \end{aligned} \quad (A.23)$$

- Usando (A.5) para encontrar o valor de  $\frac{\partial h_{li,t+1}}{\partial x_{i,t+1}}$ :

$$\frac{\partial h_{li,t+1}}{\partial x_{i,t+1}} = \frac{[\phi(x_{i,t+1}^{med}) - \theta(u_{i,t+1}) - pc_{i,t+1}]}{\partial x_{i,t+1}} = \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t+1}^{med}) \quad (A.24)$$

- Para obter o valor de  $\frac{\partial q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t+1}}$  usa-se (A.7):

$$\frac{\partial q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t+1}} = 0. \quad (A.25)$$

- A expressão completa relativa ao termo  $\partial x_{i,t+1}$  é obtida usando as equações de (A.22) até (A.25).

$$\frac{\partial f}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}} = -\lambda_{t+1} \Psi'(G_{t+1}) k_i \left[ \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t+1}^{med}) q_{i,t+1} + q'(x_{i,t+1}) h_{li,t+1} \right] \quad (A.26)$$

- Compondo as informações de (A.22) e (A.26):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_t} &= -\lambda_t \Psi'(G_t) k_i \left[ \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t}^{med}) q_{i,t} + q'(x_{i,t}) h_{li,t} \right] \\ &\quad - \lambda_{t+1} \Psi'(G_{t+1}) k_i \left[ \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t+1}^{med}) q_{i,t+1} + q'(x_{i,t+1}) h_{li,t+1} \right] \end{aligned} \quad (A.27)$$

É importante observar que a ordem dos elementos do gradiente é a mesma que é utilizada na restrição de balanço de água  $Ax = b$ . Ou seja, primeiro vem os elementos relativos à variável de volume  $x$  e depois os elementos de defluência  $u$ . Entre os elementos de volume ou de defluência, existe uma ordenação crescente de acordo com o intervalo de tempo e depois por numeração da usina.

Maiores detalhes na seção 3.2. Como exemplo, o gradiente para a rede com 4 usinas e 3 períodos de tempo daquela seção tem a seguinte ordenação dos seus elementos:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, u)^t &= \left[ \nabla f(x, u)_x^t \quad \nabla f(x, u)_u^t \right], \text{ tal que} \\ \nabla f(x, u)_x^t &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_{1,1}} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_{4,1}} \quad \frac{\partial f}{\partial x_{1,2}} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_{4,2}} \quad \frac{\partial f}{\partial x_{1,3}} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_{4,3}} \right] \\ \nabla f(x, u)_u^t &= \left[ \frac{\partial f}{\partial u_{1,1}} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial u_{4,1}} \quad \frac{\partial f}{\partial u_{1,2}} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial u_{4,2}} \quad \frac{\partial f}{\partial u_{1,3}} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial u_{4,3}} \right] \end{aligned}$$

## A.2 Derivadas segundas para o modelo $(x, u)$

Para construir a matriz Hessiana a ser utilizada pelo método de pontos interiores, um método de segunda ordem, é necessário obter a expressão das seguintes derivadas segundas:  $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t} \partial x_{i,t}}$ .

A expressão  $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2}$  pode ser obtida a partir de (A.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial u_{i,t}} \right)}{\partial u_{i,t}} = -\lambda_t k_i \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial u_{i,t}} \omega_2 + \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial u_{i,t}} \right], \text{ tal que } \omega_1 = \Psi'(D_t - P_t) \text{ e} \\ \omega_2 &= \left( -q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right). \end{aligned}$$

Os cálculos de derivada de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , tais que possibilitam encontrar  $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2}$ , estão na Figura A.1.

A partir dos valores de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e suas derivadas é possível calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2}$  com A.28.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2} &= -\lambda_t k_i \left[ -\Psi''(G_t) k_i \left( -q_{i,t} \theta'(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \left( -q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Psi'(G_t) \left( -q_{i,t} \theta''(u_{i,t}) - 2\theta'(u_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2} &= \lambda_t \Psi''(G_t) \left( k_i \left( -q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \right)^2 \\ &\quad - \lambda_t \Psi'(G_t) k_i \left( -q_{i,t} \theta''_i(u_{i,t}) - 2\theta'_i(u_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \end{aligned} \tag{A.28}$$

A expressão  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2}$  pode ser obtida a partir de (A.27):

<b>1</b>	$\frac{\partial \omega_1}{\partial u_{i,t}} = \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial u_{i,t}}$
<b>1.1</b>	$\frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} = \Psi''(G_t) = \Psi''(D_t - P_t)$
<b>1.2</b>	$\frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$
<b>1.3</b>	$\frac{\partial P_t}{\partial u_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial u_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial u_{i,t}} = -k_i q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + k_i h_{i,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}}$

$\frac{\partial \omega_1}{\partial u_{i,t}} = -\Psi'''(G_t)(-k_i q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + k_i h_{i,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}})$
---

$\frac{\partial \omega_2}{\partial u_{i,t}} = \left( -q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}) - \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \theta_i'(u_{i,t}) + h_{i,t} \frac{\partial^2 q_{i,t}}{\partial u_{i,t}^2} - \theta_i'(u_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right)$
--

$\frac{\partial \omega_2}{\partial u_{i,t}} = \left( -q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}) - 2\theta_i'(u_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right)$
--

Figura A.1: Cálculo das derivadas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x_{i,t}} \right)}{\partial x_{i,t}} = -\lambda_t k_i \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} \omega_2 + \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} \right] - \lambda_{t+1} k_i \left[ \frac{\partial \omega_3}{\partial x_{i,t}} \omega_4 + \omega_3 \frac{\partial \omega_4}{\partial x_{i,t}} \right]$ , tal que  $\omega_1 = \Psi'(D_t - P_t)$ ,  $\omega_2 = \left( \frac{1}{2} q_{i,t} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) + h_{i,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} \right)$ ,  $\omega_3 = \Psi'(D_{t+1} - P_{t+1})$  e  $\omega_4 = \left( \frac{1}{2} q_{i,t+1} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}) + h_{i,t+1} \frac{\partial q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t+1}} \right)$ .

Os cálculos de derivada de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  e  $\omega_4$  tais que possibilitam encontrar  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2}$ , estão nas Figuras A.2 e A.3.

A partir dos valores de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_4$  e suas derivadas é possível calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2}$  com (A.29).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2} = & -\lambda_t k_i \left[ \Psi'(G_t) q_{i,t} \phi_i''(\bar{x}_{i,t}) - \Psi''(G_t) k_i q_{i,t} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) q_{i,t} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \right] \\ & -\lambda_{t+1} k_i \left[ \Psi'(G_{t+1}) q_{i,t+1} \phi_i''(\bar{x}_{i,t+1}) \right. \\ & \left. - \Psi''(G_{t+1}) k_i q_{i,t+1} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}) q_{i,t+1} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}) \right] \end{aligned}$$

$1 \bullet \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$
$1.1 \bullet \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} = \Psi''(G_t) = \Psi''(D_t - P_t)$
$1.2 \bullet \frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$
$1.3 \bullet \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}} = k_i q_{i,t} \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) + k_i h_{i,t} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}}$

$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} = -\Psi''(G_t) k_i \omega_2$
--

$2 \bullet \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} = \left( \frac{1}{4} q_{i,t} \phi_i''(\bar{x}_{i,t}) + \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} + h_{i,t} \frac{\partial^2 q_{i,t}}{\partial x_{i,t}^2} + \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} \right)$
---

$\frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} = \left( \frac{1}{4} q_{i,t} \phi_i''(\bar{x}_{i,t}) + \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} \right)$
--

Figura A.2: Cálculo das derivadas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2} &= \lambda_t \Psi''(G_t) (k_i q_{i,t} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}))^2 - \lambda_t \Psi'(G_t) k_i q_{i,t} \phi_i''(\bar{x}_{i,t}) \\ &\quad + \lambda_{t+1} \Psi''(G_{t+1}) (k_i q_{i,t+1} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}))^2 \\ &\quad - \lambda_{t+1} \Psi'(G_{t+1}) k_i q_{i,t+1} \phi_i''(\bar{x}_{i,t+1}) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

A expressão  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial u_{i,t}}$  pode ser obtida a partir de (A.17):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial u_{i,t}} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial u_{i,t}} \right)}{\partial x_{i,t}} = -\lambda_t k_i \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} \omega_2 + \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} \right], \text{ tal que } \omega_1 = \Psi'(D_t - P_t) \text{ e}$$

$$\omega_2 = \left( -q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + h_{i,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right).$$

Os cálculos de derivada de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , tais que possibilitam encontrar  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial u_{i,t}}$ , estão na Figura A.4.

$$\begin{aligned}
\mathbf{3} \quad & \frac{\partial \omega_3}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial \Psi'}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}} \\
\mathbf{3.1} \quad & \frac{\partial \Psi'}{\partial G_{t+1}} = \Psi''(G_{t+1}) = \Psi''(D_{t+1} - P_{t+1}) \\
\mathbf{3.2} \quad & \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} = -1 \\
\mathbf{3.3} \quad & \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial P_{t+1}}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial P_{t+1}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}} = k_i q_{i,t+1} \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}) + k_i h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t}} \\
\frac{\partial \omega_3}{\partial x_{i,t}} &= -\Psi''(G_{t+1}) k_i \omega_4 \\
\mathbf{4} \quad & \frac{\partial \omega_4}{\partial x_{i,t}} = \left( \frac{1}{4} q_{i,t+1} \phi_i''(\bar{x}_{i,t+1}) + \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}) \frac{\partial q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t}} + h_{li,t+1} \frac{\partial^2 q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t}^2} + \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}) \frac{\partial q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t}} \right) \\
\frac{\partial \omega_4}{\partial x_{i,t}} &= \left( \frac{1}{4} q_{i,t+1} \phi_i''(\bar{x}_{i,t+1}) + \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}) \frac{\partial q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t}} \right)
\end{aligned}$$

Figura A.3: Cálculo das derivadas de  $\omega_3$  e  $\omega_4$ .

A partir dos valores de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e suas derivadas é possível calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2}$  com (A.30).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial u_{i,t}} &= -\lambda_t k_i \left[ -\Psi''(G_t) (k_i q_{i,t} \phi_i'(x_{i,t})) \left( -q_{i,t} \theta'(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \Psi'(G_t) \left( \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \right] \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial u_{i,t}} &= \lambda_t \Psi''(G_t) k_i (k_i q_{i,t} \phi_i'(\bar{x}_{i,t})) \left( -q_{i,t} \theta'(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \\
&\quad - \lambda_t \Psi'(G_t) k_i \left( 2 \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \tag{A.30}
\end{aligned}$$

**Exemplo 1:** Para mostrar a estrutura da Hessiana, considere o planejamento de uma rede com duas usinas hidrelétricas para dois períodos de

$1 \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$
$1.1 \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} = \Psi''(G_t) = \Psi'''(D_t - P_t)$
$1.2 \quad \frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$
$1.3 \quad \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}} = k_i q_{i,t} \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) + k_i h_{i,t} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}}$

$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} = -\Psi'''(G_t) \left( k_i q_{i,t} \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) + k_i h_{i,t} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}} \right)$
--

$2 \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} = \left( -\frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} \theta_i'(u_{i,t}) + \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right)$
--

$\frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} = \left( -\frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} \theta_i'(u_{i,t}) + \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right)$
--

Figura A.4: Cálculo das derivadas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

tempo e cujas variáveis são  $x_{i,t}$  e  $u_{i,t}$ . A matriz Hessiana será dada por:

$$H(x, u) = \begin{bmatrix} H11 & H12 \\ H21 & H22 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$H11 = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial x_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial x_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial x_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial x_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial x_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial x_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial x_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial x_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial x_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial x_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial x_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial x_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2}^2} \end{array} \right]$$



(A.30).

Além disso, é importante observar que:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial x_{i+1,t}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i+1,t} \partial x_{i,t}} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial x_{i,t+1}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t+1} \partial x_{i,t}} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial x_{i-1,t}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i-1,t} \partial x_{i,t}} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial x_{i,t-1}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t-1} \partial x_{i,t}} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t} \partial u_{i+1,t}} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i+1,t} \partial u_{i,t}} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t} \partial u_{i,t+1}} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t+1} \partial u_{i,t}} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t} \partial u_{i-1,t}} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i-1,t} \partial u_{i,t}} = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t} \partial u_{i,t-1}} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t-1} \partial u_{i,t}} = 0$

Ou seja, a matriz  $H(x, u)$  pode ser simplificada para:

$$H(x, u) = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial u_{1,1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial u_{2,1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial u_{1,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial u_{2,2}} \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial u_{1,1} \partial x_{1,1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial u_{1,1}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial u_{2,1} \partial x_{2,1}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial u_{2,1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial u_{1,2} \partial x_{1,2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial u_{1,2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial u_{2,2} \partial x_{2,2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial u_{2,2}^2} \end{array} \right]$$

Pelo Exemplo 1 é possível verificar que  $H11$ ,  $H12$ ,  $H21$  e  $H22$  são submatrizes esparsas cujos elementos pertencentes à diagonal principal são diferentes de zero.

Desse modo é possível estabelecer o algoritmo descrito na Tabela A.1.

**Algoritmo para cálculo da Hessiana da função objetivo do MOUI com variáveis de Volume  $x_{i,t}$  e Defluência  $u_{i,t}$**

Dados  $\lambda_t, \Psi'(G_t), k_i, \theta(u_{i,t}), \theta'(u_{i,t}), \theta''(u_{i,t}), \phi(x_{i,t}^{med}), \phi'(x_{i,t}^{med}), \phi''(x_{i,t}^{med}), q_{i,t}, \frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}}$  e  $\frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}}$ .

Onde:  $\theta(x_{i,t}^{med})$  é a cota de montante,  
 $\phi(u_{i,t}^{med})$  é a cota de jusante,  
 $q_{i,t}$  é a turbinagem da usina  $i$  no período  $t$ ,  
 $k_i$  é a produtividade específica da usina  $i$ ,  
 $\Psi(G_t)$  é função de custo de complementação termelétrica e  
 $\lambda_t$  é o coeficiente de valor presente para o período  $t$ .

Calcular

- Para  $i = t$ :
  - $H11(i, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2} =$   
 $= -\lambda_t \Psi'(G_t) k_i [\Psi'(G_t) q_{i,t} \phi''(\bar{x}_{i,t}) - \Psi''(G_t) k_i (q_{i,t} \phi'_i(\bar{x}_{i,t}))^2]$   
 $-\lambda_{t+1} \Psi'(G_{t+1}) k_i [\Psi'(G_{t+1}) q_{i,t+1} \phi''(\bar{x}_{i,t+1})$   
 $-\Psi''(G_{t+1}) k_i (q_{i,t+1} \phi'_i(\bar{x}_{i,t+1}))^2]$
  - $H12(i, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2} =$   
 $\lambda_t \Psi''(G_t) k_i (k_i q_{i,t} \phi'_i(\bar{x}_{i,t})) \left( -q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right)$   
 $-\lambda_t \Psi'(G_t) k_i \left( 2 \phi'_i(\bar{x}_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right)$
  - $H21(i, t) = H12(i, t)$
  - $H22(i, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2} =$   
 $= \lambda_t \Psi''(G_t) \left( k_i \left( -q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right) \right)^2$   
 $-\lambda_t \Psi'(G_t) k_i \left( -q_{i,t} \theta''_i(u_{i,t}) - 2 \theta'_i(u_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial u_{i,t}} \right)$
- Para  $i \neq t$ :  $H11(i, t) = H12(i, t) = H21(i, t) = H22(i, t) = 0$ .

Construir:

- A Matriz Hessiana, usando:  $H(x, u) = \begin{bmatrix} H11 & H12 \\ H21 & H22 \end{bmatrix}$

Tabela A.1: Algoritmo para cálculo da Hessiana da função objetivo do MOUI para o modelo  $(x, u)$ .

### A.3 Derivadas primeiras para o modelo $(x, q, v)$

A partir das informações e deduções do modelo  $(x, u)$  pode-se determinar as expressões das derivadas da função objetivo.

É importante observar que este modelo matemático tem como variáveis  $x_{i,t}$ ,  $q_{i,t}$  e  $v_{i,t}$ .

(1) Derivada da função objetivo  $f$  em relação à  $q_{i,t}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial q_{i,t}} = \frac{\partial f}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial q_{i,t}} \quad (\text{A.31})$$

Onde:

- Os valores de  $\frac{\partial f}{\partial G_t}$  e  $\frac{\partial G_t}{\partial P_t}$  são dados por (A.12) e (A.13), respectivamente. O valor de  $\frac{\partial P_t}{\partial q_{i,t}}$  é encontrado, utilizando a equação (A.3):

$$\frac{\partial P_t}{\partial q_{i,t}} = \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^I k_i h_{li,t} q_{i,t} \right)}{\partial q_{i,t}} = \frac{\partial (k_i h_{li,t} q_{i,t})}{\partial q_{i,t}} = k_i \left[ \frac{\partial (h_{li,t})}{\partial q_{i,t}} q_{i,t} + h_{li,t} \right] \quad (\text{A.32})$$

- Usando (A.5) para encontrar o valor de  $\frac{\partial h_{li,t}}{\partial q_{i,t}}$ :

$$\frac{\partial h_{li,t}}{\partial q_{i,t}} = \frac{[\phi(x_{i,t}^{med}) - \theta(q_{i,t} + v_{i,t}) - pc_{i,t}]}{\partial q_{i,t}} = -\theta'(q_{i,t} + v_{i,t}) \quad (\text{A.33})$$

- A expressão completa de  $\frac{\partial f}{\partial q_{i,t}}$  é obtida usando as equações de (A.31) até (A.33).

$$\frac{\partial f}{\partial q_{i,t}} = -\lambda_t \Psi'(G_t) k_i [-\theta'(q_{i,t} + v_{i,t}) q_{i,t} + h_{li,t}] \quad (\text{A.34})$$

Um resumo das deduções para calcular  $\frac{\partial f}{\partial q_{i,t}}$  está descrito na Figura A.5.

(2) Derivada da função objetivo  $f$  em relação à  $v_{i,t}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}} = \frac{\partial f}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial v_{i,t}} \quad (\text{A.35})$$

Onde:

$\frac{\partial f}{\partial q_{i,t}} = \lambda_t \frac{\partial \Psi}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial q_{i,t}}$	1	$\frac{\partial \Psi}{\partial G_t} = \Psi'(G_t) = \Psi'(D_t - P_t)$	
	2	$\frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$	
	3	$\frac{\partial P_t}{\partial q_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q_{i,t}}$	
	3.1	$\frac{\partial P_t}{\partial \theta_i} = -k_i q_{i,t}$	
	3.2	$\frac{\partial \theta_i}{\partial q_{i,t}} = \theta_i'(u_{i,t})$	
	3.3	$\frac{\partial P_t}{\partial q_i} = k_i h_{i,t}$	
	3.4	$\frac{\partial q_i}{\partial q_{i,t}} = 1$	
$\frac{\partial f}{\partial q_{i,t}} = -\lambda_t k_i \Psi'(D_t - P_t) (-q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + h_{i,t})$			

Figura A.5: Resumo do cálculo de  $\frac{\partial f}{\partial q_{i,t}}$ .

- Os valores de  $\frac{\partial f}{\partial G_t}$  e  $\frac{\partial G_t}{\partial P_t}$  são dados por (A.12) e (A.13), respectivamente. O valor de  $\frac{\partial P_t}{\partial v_{i,t}}$  é encontrado, utilizando a equação (A.3):

$$\frac{\partial P_t}{\partial v_{i,t}} = \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^I k_i h_{i,t} q_{i,t} \right)}{\partial v_{i,t}} = \frac{\partial (k_i h_{i,t} q_{i,t})}{\partial v_{i,t}} = k_i \left[ \frac{\partial (h_{i,t})}{\partial v_{i,t}} q_{i,t} + h_{i,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial v_{i,t}} \right] \quad (\text{A.36})$$

- Usando (A.5) para encontrar o valor de  $\frac{\partial h_{i,t}}{\partial v_{i,t}}$ :

$$\frac{\partial h_{i,t}}{\partial v_{i,t}} = \frac{[\phi(x_{i,t}^{med}) - \theta(q_{i,t} + v_{i,t}) - pc_{i,t}]}{\partial v_{i,t}} = -\theta'(q_{i,t} + v_{i,t}) \quad (\text{A.37})$$

- Para encontrar o valor de  $\frac{\partial q_{i,t}}{\partial v_{i,t}}$ , é necessário lembrar que  $x$ ,  $q$  e  $v$  são variáveis tais que não podem ser escritas em função umas das outras. Assim:

$$\frac{\partial q_{i,t}}{\partial v_{i,t}} = 0 \quad (\text{A.38})$$

- A expressão completa de  $\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}}$  é obtida usando as equações de (A.35) até (A.38).

$$\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}} = -\lambda_t \Psi'(G_t) k_i [-q_{i,t} \theta'(u_{i,t})] \quad (\text{A.39})$$

Um resumo das deduções para calcular  $\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}}$  está descrito na Figura A.6.

(3) Derivada da função objetivo  $f$  em relação à  $x_{i,t}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial f}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial f}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}} \quad (\text{A.40})$$

Onde:

- Os valores de  $\frac{\partial f}{\partial G_t}$  e  $\frac{\partial G_t}{\partial P_t}$  são dados por (A.12) e (A.13), respectivamente. O valor de  $\frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$  é encontrado, utilizando a equação (A.3):

$$\frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^I k_i h_{i,t} q_{i,t} \right)}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial (k_i h_{i,t} q_{i,t})}{\partial x_{i,t}} = k_i \left[ \frac{\partial (h_{i,t})}{\partial x_{i,t}} q_{i,t} \right] \quad (\text{A.41})$$

- Usando (A.5) para encontrar o valor de  $\frac{\partial h_{i,t}}{\partial x_{i,t}}$ :

$$\frac{\partial h_{i,t}}{\partial x_{i,t}} = \frac{[\phi(x_{i,t}^{med}) - \theta(q_{i,t} + v_{i,t}) - pc_{i,t}]}{\partial x_{i,t}} = \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t}^{med}) \quad (\text{A.42})$$

- O termo  $\frac{\partial f}{\partial x_{i,t+1}} = \frac{\partial f}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}}$  pode ser obtido de maneira análoga.
-

$\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}} = \lambda_t \frac{\partial \Psi}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial v_{i,t}}$			
	<b>1</b>	$\frac{\partial \Psi}{\partial G_t} = \Psi'(G_t) = \Psi'(D_t - P_t)$	
	<b>2</b>	$\frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$	
	<b>3</b>	$\frac{\partial P_t}{\partial v_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial v_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial v_{i,t}}$	
			<b>3.1</b>
			$\frac{\partial P_t}{\partial \theta_i} = -k_i q_{i,t}$
			<b>3.2</b>
			$\frac{\partial \theta_i}{\partial v_{i,t}} = \theta_i'(u_{i,t})$
			<b>3.3</b>
			$\frac{\partial P_t}{\partial q_i} = k_i h_{i,t}$
			<b>3.4</b>
			$\frac{\partial q_{i,t}}{\partial v_{i,t}} = 0$
$\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}} = -\lambda_t \Psi'(G_t) (-k_i q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}))$			

Figura A.6: Resumo do cálculo de  $\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}}$ .

- A expressão completa de  $\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}}$  é obtida usando as equações de (A.40) até (A.42).

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}} = -\lambda_t \cdot \Psi'(G_t) \cdot k_i \cdot \left[ \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t}^{med}) q_{i,t} \right] - \lambda_{t+1} \cdot \Psi'(G_{t+1}) \cdot k_i \cdot \left[ \frac{1}{2} \phi'(x_{i,t+1}^{med}) q_{i,t+1} \right] \quad (\text{A.43})$$

Um resumo das deduções para calcular  $\frac{\partial f}{\partial v_{i,t}}$  está descrito nas Figuras A.7 e A.8.

$\bullet \frac{\partial \Psi}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} \quad 1$	
	$\frac{1.1}{\bullet} \frac{\partial \Psi}{\partial G_t} = \Psi'(G_t) = \Psi'(D_t - P_t)$
	$\frac{1.2}{\bullet} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$
	$\frac{1.3}{\bullet} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}}$
	$\frac{1.3.1}{\bullet} \frac{\partial P_t}{\partial \phi_i} = k_i q_{i,t}$
	$\frac{1.3.2}{\bullet} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} = \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t})$
	$\frac{1.3.3}{\bullet} \frac{\partial P_t}{\partial q_i} = k_i h_{i,t}$
	$\frac{1.3.4}{\bullet} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}} = 0$

Figura A.7: Resumo do cálculo de  $\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}}$ , termo  $\frac{\partial f}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$ .

## A.4 Derivadas segundas para o modelo $(x, q, v)$

Para construir a matriz Hessiana a ser utilizada pelo método de pontos interiores, um método de segunda ordem, é necessário obter a expressão das seguintes derivadas segundas:  $\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}} x_{i,t}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}} x_{i,t}$ .

A expressão  $\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2}$  pode ser obtida a partir de (A.34):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial q_{i,t}} \right)}{\partial q_{i,t}} = -\lambda_t k_i \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial q_{i,t}} \omega_2 + \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial q_{i,t}} \right], \text{ tal que } \omega_1 = \Psi'(D_t - P_t) \text{ e}$$

$$\omega_2 = \left( -q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + h_{i,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial q_{i,t}} \right).$$

Os cálculos de derivada de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , tais que possibilitam encontrar  $\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2}$ , estão na Figura A.9.

$\bullet \frac{\partial \Psi}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}} \quad 2$	
$2.1 \bullet \frac{\partial \Psi}{\partial G_{t+1}} = \Psi'(G_{t+1}) = \Psi'(D_{t+1} - P_{t+1})$	
$2.2 \bullet \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} = -1$	
$2.3 \bullet \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial P_{t+1}}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial P_{t+1}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}}$	
$2.3.1 \bullet \frac{\partial P_{t+1}}{\partial \phi_i} = k_i q_{i,t+1}$	
$2.3.2 \bullet \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} = \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1})$	
$2.3.3 \bullet \frac{\partial P_{t+1}}{\partial q_i} = k_i h_{i,t+1}$	
$2.3.4 \bullet \frac{\partial q_{i,t+1}}{\partial x_{i,t}} = 0$	

Figura A.8: Resumo do cálculo de  $\frac{\partial f}{\partial x_{i,t}}$ , termo  $\frac{\partial f}{\partial G_{t+1}} \frac{\partial G_{t+1}}{\partial P_{t+1}} \frac{\partial P_{t+1}}{\partial x_{i,t}}$ .

A partir dos valores de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e suas derivadas é possível calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2}$  com (A.44).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2} = -\lambda_t k_i \left[ -\Psi''(G_t) k_i \left( -q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial q_{i,t}} \right) \left( -q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + h_{li,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial q_{i,t}} \right) + \Psi'(G_t) \left( -q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}) - 2\theta_i'(u_{i,t}) \frac{\partial q_{i,t}}{\partial q_{i,t}} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_{i,t}^2} = \lambda_t \Psi''(G_t) (k_i (-q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + h_{li,t}))^2 - \lambda_t \Psi'(G_t) k_i (-q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}) - 2\theta_i'(u_{i,t})) \quad (A.44)$$

A expressão  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}^2}$  pode ser obtida a partir de (A.39):

$1 \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial q_{i,t}} = \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial q_{i,t}}$
$1.1 \quad \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} = \Psi''(G_t) = \Psi''(D_t - P_t)$
$1.2 \quad \frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$
$1.3 \quad \frac{\partial P_t}{\partial q_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial q_{i,t}} = -k_i q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + k_i h_{i,t}$

$\frac{\partial \omega_1}{\partial q_{i,t}} = -\Psi'''(G_t)(-k_i q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + k_i h_{i,t})$
---

$2 \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial q_{i,t}} = \left( -q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}) - \frac{\partial q_{i,t}}{\partial q_{i,t}} \theta_i'(u_{i,t}) - \theta_i'(u_{i,t}) \right)$
--

$\frac{\partial \omega_2}{\partial q_{i,t}} = (-q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}) - 2\theta_i'(u_{i,t}))$
---

Figura A.9: Cálculo das derivadas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  para  $\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2}$ .

$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial v_{i,t}} \right)}{\partial v_{i,t}} = -\lambda_t k_i \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial v_{i,t}} \omega_2 + \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial v_{i,t}} \right]$ , tal que  $\omega_1 = \Psi'(D_t - P_t)$  e  $\omega_2 = (-q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}))$ .

Os cálculos de derivada de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , tais que possibilitam encontrar  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}^2}$ , estão na Figura A.10.

A partir dos valores de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e suas derivadas é possível calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial q_{i,t}^2}$  com (A.45).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}^2} = & -\lambda_t k_i \left[ -\Psi''(G_t) k_i (-q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t})) (-q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t})) \right. \\ & \left. + \Psi'(G_t) (-q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t})) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \boxed{1 \bullet \frac{\partial \omega_1}{\partial v_{i,t}} = \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial v_{i,t}}} \\
 \hline
 \text{1.1} \bullet \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} = \Psi''(G_t) = \Psi''(D_t - P_t) \\
 \hline
 \text{1.2} \bullet \frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1 \\
 \hline
 \text{1.3} \bullet \frac{\partial P_t}{\partial v_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial v_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial v_{i,t}} = -k_i q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) \\
 \\
 \boxed{\frac{\partial \omega_1}{\partial v_{i,t}} = -\Psi''(G_t)(-k_i q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}))} \\
 \\
 \boxed{2 \bullet \frac{\partial \omega_2}{\partial v_{i,t}} = \left( -q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}) - \frac{\partial q_{i,t}}{\partial v_{i,t}} \theta_i'(u_{i,t}) \right)} \\
 \\
 \boxed{\frac{\partial \omega_2}{\partial v_{i,t}} = (-q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}))}
 \end{array}$$

Figura A.10: Cálculo das derivadas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  para  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}^2}$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial v_{i,t}^2} &= \lambda_t \Psi''(G_t) (k_i (-q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t})))^2 \\
 &\quad - \lambda_t \Psi'(G_t) k_i (-q_{i,t} \theta_i''(u_{i,t}))
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

A obtenção da expressão  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2}$  é análoga a utilizada para o modelo  $(x, q, v)$ , sendo igual ao que é fornecido pela expressão (A.29). Ou seja:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t}^2} &= \lambda_t \Psi''(G_t) (k_i q_{i,t} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}))^2 - \lambda_t \Psi'(G_t) k_i q_{i,t} \phi_i''(\bar{x}_{i,t}) \\
 &\quad + \lambda_{t+1} \Psi''(G_{t+1}) (k_i q_{i,t+1} \phi_i'(\bar{x}_{i,t+1}))^2 \\
 &\quad - \lambda_{t+1} \Psi'(G_{t+1}) k_i q_{i,t+1} \phi_i''(\bar{x}_{i,t+1})
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

A expressão  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}}$  pode ser obtida a partir de (A.34):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial q_{i,t}} \right)}{\partial x_{i,t}} = -\lambda_t k_i \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} \omega_2 + \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} \right], \text{ tal que } \omega_1 = \Psi'(D_t - P_t) \text{ e } \omega_2 = (-q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t}) + h_{li,t}).$$

Os cálculos de derivada de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , tais que possibilitam encontrar  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}}$ , estão na Figura A.11.

$$1 \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$$

1.1	$\frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} = \Psi''(G_t) = \Psi''(D_t - P_t)$
1.2	$\frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$
1.3	$\frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}} = k_i q_{i,t} \frac{1}{2} \phi'_i(\bar{x}_{i,t}) + k_i h_{li,t} \frac{\partial q_i}{\partial x_{i,t}}$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} = -\Psi'''(G_t) \left( k_i q_{i,t} \frac{1}{2} \phi'_i(\bar{x}_{i,t}) \right)$$

$$2 \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} = \left( -\frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} \theta'_i(u_{i,t}) + \frac{1}{2} \phi'_i(\bar{x}_{i,t}) \right)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} = \left( \frac{1}{2} \phi'_i(\bar{x}_{i,t}) \right)$$

Figura A.11: Cálculo das derivadas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  para  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}}$ .

A partir dos valores de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e suas derivadas é possível calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}}$  com (A.47).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}} = -\lambda_t k_i \left[ -\Psi''(G_t) \left( k_i q_{i,t} \phi'_i(\bar{x}_{i,t}) \right) \left( -q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t}) + h_{li,t} \right) + \Psi'(G_t) \left( \phi'(\bar{x}_{i,t}) \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}} = \lambda_t \Psi''(G_t) (k_i q_{i,t} \phi_i'(\bar{x}_{i,t})) k_i (-q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t}) + h_{i,t}) - \lambda_t \Psi'(G_t) (k_i \phi_i'(\bar{x}_{i,t})) \quad (\text{A.47})$$

A expressão  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial v_{i,t}}$  pode ser obtida a partir de (A.39):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial v_{i,t}} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial v_{i,t}} \right)}{\partial x_{i,t}} = -\lambda_t k_i \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} \omega_2 + \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} \right], \text{ tal que } \omega_1 = \Psi'(D_t - P_t) \text{ e } \omega_2 = (-q_{i,t} \theta_i'(u_{i,t})).$$

Os cálculos de derivada de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , tais que possibilitam encontrar  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial v_{i,t}}$ , estão na Figura A.12.

<b>1</b>	$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} \frac{\partial G_t}{\partial P_t} \frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}}$
<b>1.1</b>	$\frac{\partial \Psi'}{\partial G_t} = \Psi''(G_t) = \Psi''(D_t - P_t)$
<b>1.2</b>	$\frac{\partial G_t}{\partial P_t} = -1$
<b>1.3</b>	$\frac{\partial P_t}{\partial x_{i,t}} = \frac{\partial P_t}{\partial \phi_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{i,t}} + \frac{\partial P_t}{\partial v_i} \frac{\partial v_{i,t}}{\partial x_{i,t}} = k_i q_{i,t} \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) + k_i h_{i,t} \frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}}$

$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_{i,t}} = -\Psi'''(G_t) (k_i q_{i,t} \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}))$
---

$\frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} = \left( -\frac{\partial q_{i,t}}{\partial x_{i,t}} \theta_i'(u_{i,t}) - \frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \right)$
--

$\frac{\partial \omega_2}{\partial x_{i,t}} = \left( -\frac{1}{2} \phi_i'(\bar{x}_{i,t}) \right)$
---

Figura A.12: Cálculo das derivadas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  para  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial v_{i,t}}$ .

A partir dos valores de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e suas derivadas é possível calcular  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial v_{i,t}}$  com (A.48).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial v_{i,t}} &= -\lambda_t k_i [-\Psi''(G_t) (k_i q_{i,t} \phi'_i(\bar{x}_{i,t})) (-q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t})) \\ &\quad + \Psi'(G_t) (\phi'(\bar{x}_{i,t}))] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i,t} \partial q_{i,t}} &= \lambda_t \Psi''(G_t) (k_i q_{i,t} \phi'_i(\bar{x}_{i,t})) k_i (-q_{i,t} \theta'_i(u_{i,t})) \\ &\quad + \lambda_t \Psi'(G_t) (k_i \phi'_i(\bar{x}_{i,t})) \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

**Exemplo 2:** Para mostrar a estrutura da Hessiana, considere o planejamento de uma rede com duas usinas hidrelétricas para dois períodos de tempo e cujas variáveis são  $x_{i,t}$ ,  $q_{i,t}$  e  $v_{i,t}$ . A matriz Hessiana será dada por:

$$H(x, q, v) = \left[ \begin{array}{c|c|c} H11 & H12 & H13 \\ \hline H21 & H22 & H23 \\ \hline H31 & H32 & H33 \end{array} \right]$$

Onde:

$$H11 = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial x_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial x_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial x_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial x_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial x_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial x_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial x_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial x_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial x_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial x_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial x_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial x_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2}^2} \end{array} \right]$$

$$H12 = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial q_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial q_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial q_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial q_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial q_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial q_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial q_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial q_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial q_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial q_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial q_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial q_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial q_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial q_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial q_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial q_{2,2}} \end{array} \right]$$

$$H13 = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial v_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial v_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial v_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,1} \partial v_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial v_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial v_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial v_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,1} \partial v_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial v_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial v_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial v_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{1,2} \partial v_{2,2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial v_{1,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial v_{2,1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial v_{1,2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2,2} \partial v_{2,2}} \end{array} \right]$$



A matriz Hessiana  $H(x, q, v)$  pode ser construída com a utilização das submatrizes obtidas anteriormente. Além disso, com as simplificações anteriores, somente os elementos diagonais das submatrizes são diferentes de zero, de maneira que  $H(x, q, v)$  pode ser simplificada para:

$$H(x, q, v) =$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{11}^2}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{11} \partial q_{11}}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{21}^2}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{21} \partial q_{21}}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{12}^2}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{12} \partial q_{12}}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{22}^2}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{22} \partial q_{22}}$	0	0	0	0	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{11} \partial x_{11}}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{11}^2}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{11} \partial v_{11}}$	0	0	0	0
0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{21} \partial x_{21}}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{21}^2}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{21} \partial v_{21}}$	0	0	0
0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{12} \partial x_{12}}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{12}^2}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{12} \partial v_{12}}$	0	0
0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{22} \partial x_{22}}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{22}^2}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial q_{22} \partial v_{22}}$	0
0	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{11}^2 \partial q_{11}}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{11}^2}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{21} \partial q_{21}}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{21}^2}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{12} \partial q_{12}}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{12}^2}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{22} \partial q_{22}}$	0	0	0	$\frac{\partial^2 f}{\partial v_{22}^2}$	0

O Exemplo 3.2 ilustra a estrutura esparsa da matriz Hessiana  $H(x, q, v)$ . A estrutura esparsa obtida é particularmente interessante devido ao baixo custo de obtenção da própria matriz como de sua inversa.

# Apêndice B

## Dedução da Inversa Rápida de Matriz Tridiagonal

### B.1 Introdução

Para resolver o sistema  $\Phi x = b$ , é necessário, em primeiro lugar, calcular  $\Phi = AD^{-1}A^t$ . É possível encontrar o valor de  $\Phi$  utilizando apenas as seguintes operações:

1. Multiplicação entre uma matriz e um vetor  $Ax$ .
2. Resolução de um sistema linear  $Ax = b$ .

No cálculo da matriz  $AD^{-1}A^t$ , utilizando apenas as operações descritas anteriormente, é necessário definir que  $B = D^{-1}A^t$ .

Assim, o cálculo de  $AD^{-1}A^t$  pode ser definido como a multiplicação de duas matrizes  $A$  e  $B$ , ou seja,  $AD^{-1}A^t = AB$ . O algoritmo para multiplicar duas matrizes é descrito na Tabela B.1.

É importante observar o cálculo de  $C(i, j)$  só pode ser efetuado se for conhecido o valor da  $j$ -ésima coluna de  $B$ . O cálculo da matriz  $B$ , em particular, também é resultado de uma multiplicação de matrizes, como descrito em (B.1).

$$B_{j\text{-coluna}} = D^{-1} \cdot A_{j\text{-coluna}}^t = D^{-1} \cdot A_{j\text{-linha}} \quad (\text{B.1})$$

Este procedimento está descrito na Figura B.1.

**Algoritmo para multiplicação entre duas matrizes**

Dados  $A$ ,  $B$  e  $C$

Onde:  $A$  é matriz  $m \times n$ ,  $B$  é matriz  $n \times p$  e  $C$  é matriz  $m \times p$ .

**Para  $i = 1$  até  $m$**

**Para  $j = 1$  até  $p$**

$soma = 0, 0$

**Para  $k = 1$  até  $n$**

$soma = soma + A(i, k) \cdot B(k, j)$

$C(i, j) = soma$

• Ou seja, o elemento  $(i, j)$  da matriz  $C$  é dado por:

$$C(i, j) = \sum_{k=1}^n A(i, k) \cdot B(k, j)$$

Tabela B.1: Algoritmo para multiplicação entre duas matrizes.

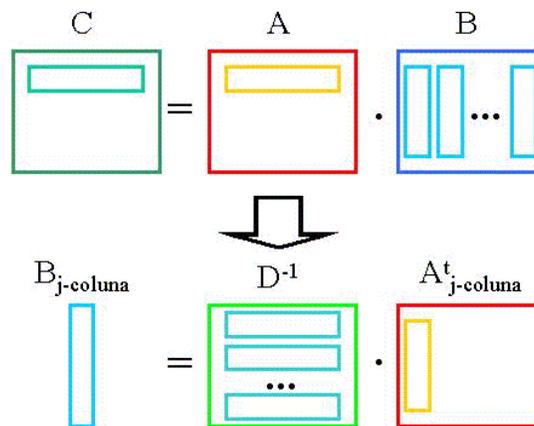


Figura B.1: Representação do cálculo de  $AD^{-1}A^t$ .

A obtenção da  $j$ -ésima coluna de  $B$  pode ser feita sem se inverter a matriz  $D$ , bastando resolver o sistema linear descrito em (B.2).

$$D \cdot x = A_{j\text{-linha}} \quad (\text{B.2})$$

Onde:  $x$  é a  $j$ -ésima coluna de  $B$ .

Incluindo esta modificação no cálculo de  $AB$ , o algoritmo será como dado na Tabela B.2.

**Algoritmo para obtenção de  $AD^{-1}A^t$ .**

*Dados*  $A$ ,  $D$ ,  $B$  e  $C$

*Onde:*  $A$  é matriz  $m \times n$ ,  $D$  é matriz  $n \times n$ ,  $B$  é matriz  $n \times p$  e  $C$  é matriz  $m \times p$ .

**Para  $i = 1$  até  $m$**

**Para  $j = 1$  até  $p$**

Cálculo da  $j$ -ésima coluna de  $B$  por meio de  $D \cdot x = A_{j\text{-linha}}$

$soma = 0, 0$

**Para  $k = 1$  até  $n$**

$soma = soma + A(i, k) \cdot x(k)$

$C(i, j) = soma$

• Ou seja, o elemento  $(i, j)$  da matriz  $C$  é dado por:

$$C(i, j) = \sum_{k=1}^n A(i, k) \cdot (D^{-1} \cdot A_{j\text{-linha}})$$

Tabela B.2: Algoritmo para obtenção de  $AD^{-1}A^t$ .

As deduções anteriores são válidas para o caso em que a estrutura da matriz  $D$  não está associada a uma estrutura particular. Caso a matriz  $D$  tenha a mesma estrutura da matriz Hessiana do MOUI, então, é possível calcular de maneira eficiente sua inversa (que será utilizada em (B.2)).

## B.2 Inversa de matrizes particulares

Suponha que uma matriz  $A$  possa ser descrita por meio de quatro submatrizes  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  e  $A_{22}$ . Uma maneira de encontrar a sua inversa é dada por (B.3).

---

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Com (B.3), é obtido o sistema (B.4).

$$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0 \\ A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Com a segunda e terceira equações de (B.4) é obtida (B.5).

$$\begin{cases} B_{12} = -A_{11}^{-1}(A_{12}B_{22}) \\ B_{21} = -A_{22}^{-1}(A_{21}B_{11}) \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Desse modo, substituindo a segunda equação de (B.5) na primeira equação de (B.4):

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} &= I \Rightarrow \\ (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})B_{11} &= I \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

De maneira análoga,  $B_{22}$  pode ser obtido ao se substituir a primeira equação de (B.5) na quarta equação de (B.4).

$$\begin{aligned} -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} + A_{22}B_{22} &= I \Rightarrow \\ (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})B_{22} &= I \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Para ilustrar a obtenção eficiente de  $B_{11}$  e  $B_{22}$ , e, conseqüentemente, a rápida inversão da matriz  $A$  serão invertidas três possíveis estruturas de  $A$ :

• **Primeiro Caso:**

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} D_{11} & 0 & 0 & M_1 \\ 0 & D_{12} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & D_{21} & 0 \\ M_2 & 0 & 0 & D_{22} \end{array} \right]$$


---

- Segundo Caso:

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{12} & M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 & D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{22} \end{array} \right]$$

- Terceiro Caso:

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} D_{11} & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & D_{12} & 0 & M_2 \\ \hline M_3 & 0 & D_{21} & 0 \\ 0 & M_4 & 0 & D_{22} \end{array} \right]$$

- Primeiro Caso:

Se  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes diagonais e se  $A_{12}$  e  $A_{21}$  são tais que:

$$\begin{aligned} A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}}_{A_{22}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{21}} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{22}M_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1K_{22}M_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Onde:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $K_{21}$  e  $K_{22}$  são matrizes diagonais.

Então, é possível obter que  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  é dado por (B.9).

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &= \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix}}_{A_{11}} - \underbrace{\begin{bmatrix} M_1K_{22}M_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}} = \\ &= \begin{bmatrix} D_{11} - M_1K_{22}M_2 & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Se  $D_{11} - M_1K_{22}M_2 \neq 0$ , então,  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  é uma matriz diagonal e portanto, inversível. Ou seja,  $B_{11}$  pode ser calculada por (B.10).

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \quad (\text{B.10})$$


---

$$\text{Onde: } A_{11} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \text{ e } A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \begin{bmatrix} M_1K_{22}M_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes diagonais e se  $A_{12}$  e  $A_{21}$  são tais como descrito anteriormente:

$$\begin{aligned} A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{12} \end{bmatrix}}_{A_{11}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & K_{11}M_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2K_{11}M_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Onde:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $K_{11}$  e  $K_{12}$  são matrizes diagonais.

Então, é possível obter que  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  é dado por (B.12).

$$\begin{aligned} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= \underbrace{\begin{bmatrix} D_{21} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}}_{A_{22}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2K_{11}M_1 \end{bmatrix}}_{A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}} = \\ &= \begin{bmatrix} D_{21} & 0 \\ 0 & D_{22} - M_2K_{11}M_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Se  $D_{22} - M_2K_{11}M_1 \neq 0$ , então,  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  é uma matriz diagonal e portanto, inversível. Ou seja,  $B_{22}$  pode ser calculada por (B.13).

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \quad (\text{B.13})$$

$$\text{Onde: } A_{11} = \begin{bmatrix} D_{21} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \text{ e } A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2K_{11}M_1 \end{bmatrix}.$$

De posse de  $B_{11}$  e  $B_{22}$  é possível calcular  $B_{12}$  e  $B_{21}$  por meio de (B.5).

A matriz  $B_{12}$  é obtida aplicando  $B_{22}$  na primeira equação de (B.5).

$$\begin{aligned}
B_{12} &= - \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{12} \end{bmatrix}}_{A_{11}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} (D_{21})^{-1} & 0 \\ 0 & (D_{22} - M_2 K_{11} M_1)^{-1} \end{bmatrix}}_{B_{22}} = \\
&= - \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M_1 (D_{22} - M_2 K_{11} M_1)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad (\text{B.14}) \\
&= - \begin{bmatrix} 0 & K_{11} M_1 (D_{22} - M_2 K_{11} M_1)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Onde:  $K_{11}$  e  $K_{12}$  são matrizes inversas de  $D_{11}$  e  $D_{12}$ , respectivamente, que podem ser facilmente calculadas, pois  $D_{11}$  e  $D_{12}$  são matrizes diagonais.

A matriz  $B_{21}$  é obtida aplicando  $B_{11}$  na segunda equação de (B.5).

$$\begin{aligned}
B_{21} &= - \underbrace{\begin{bmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}}_{A_{22}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} (D_{11} - M_1 K_{22} M_2)^{-1} & 0 \\ 0 & (D_{12})^{-1} \end{bmatrix}}_{B_{11}} = \\
&= - \begin{bmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_2 (D_{11} - M_1 K_{22} M_2)^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \quad (\text{B.15}) \\
&= - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{22} M_2 (D_{11} - M_1 K_{22} M_2)^{-1} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Onde:  $K_{21}$  e  $K_{22}$  são matrizes inversas de  $D_{21}$  e  $D_{22}$ , respectivamente, que podem ser facilmente calculadas, pois  $D_{21}$  e  $D_{22}$  são matrizes diagonais.

### **Exemplo 1:**

Seja uma matriz  $A$  dada por:

---

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} d_1 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & d_6 \end{array} \right]$$

Sua inversa é dada pela matriz B:

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{d_5}{(d_1 d_5 - b_3 b_1)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-b_1}{(d_1 d_5 - b_3 b_1)} & 0 \\ 0 & \frac{d_6}{(d_2 d_6 - b_4 b_2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-b_2}{(d_2 d_6 - b_4 b_2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_4} & 0 & 0 \\ \frac{-b_3}{(d_1 d_5 - b_3 b_1)} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_1}{(d_1 d_5 - b_3 b_1)} & 0 \\ 0 & \frac{-b_4}{(d_2 d_6 - b_4 b_2)} & 0 & 0 & 0 & \frac{d_2}{(d_2 d_6 - b_4 b_2)} \end{array} \right]$$

Para verificar esta afirmação, sejam:

$$A_{11} = \left[ \begin{array}{cc|c} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} D_{11} & 0 \\ \hline 0 & D_{12} \end{array} \right], \quad A_{12} = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & M_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$A_{21} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b_4 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline M_2 & 0 \end{array} \right] \text{ e } A_{22} = \left[ \begin{array}{c|cc} d_4 & 0 & 0 \\ 0 & d_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & d_6 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} D_{21} & 0 \\ \hline 0 & D_{22} \end{array} \right].$$

$$\text{Assim: } M_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}, \quad K_{11} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 \\ 0 & 1/d_2 \end{bmatrix},$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 1/d_3 \end{bmatrix}, \quad K_{21} = \begin{bmatrix} 1/d_4 \end{bmatrix}, \quad K_{22} = \begin{bmatrix} 1/d_5 & 0 \\ 0 & 1/d_6 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} d_3 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} d_4 \end{bmatrix} \text{ e } D_{22} = \begin{bmatrix} d_5 & 0 \\ 0 & d_6 \end{bmatrix}.$$

Utilizando (B.10),  $B_{11}$  será:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} D_{11} - M_1 K_{22} M_2 & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.16})$$

Pelas definições anteriores,  $D_{11} - M_1 K_{22} M_2$  será:

$$\begin{aligned} D_{11} - M_1 K_{22} M_2 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 b_3 / d_5 & 0 \\ 0 & b_2 b_4 / d_6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (d_1 d_5 - b_1 b_3) / d_5 & 0 \\ 0 & (d_2 d_6 - b_2 b_4) / d_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.16):

$$B_{11} = \begin{bmatrix} (d_1 d_5 - b_1 b_3) / d_5 & 0 & 0 \\ 0 & (d_2 d_6 - b_2 b_4) / d_6 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.17})$$

Para encontrar  $B_{22}$  usa-se (B.13):

$$B_{22} = \begin{bmatrix} D_{21} & 0 \\ 0 & D_{22} - M_2 K_{11} M_1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.18})$$

O valor de  $M_2 K_{11} M_1$  é:

$$\begin{aligned} D_{22} - M_2 K_{11} M_1 &= \begin{bmatrix} d_5 & 0 \\ 0 & d_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 b_3 / d_1 & 0 \\ 0 & b_2 b_4 / d_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (d_1 d_5 - b_1 b_3) / d_1 & 0 \\ 0 & (d_2 d_6 - b_2 b_4) / d_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.18):

$$B_{22} = \begin{bmatrix} d_4 & 0 \\ 0 & (d_1 d_5 - b_1 b_3) / d_1 \\ 0 & 0 & (d_2 d_6 - b_2 b_4) / d_2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.19})$$

Com (B.14),  $B_{12}$  é obtido:

$$B_{12} = - \begin{bmatrix} 0 & K_{11} M_1 (D_{22} - M_2 K_{11} M_1)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

O valor de  $K_{11} M_1 (D_{22} - M_2 K_{11} M_1)^{-1}$  é:

---

$$\begin{aligned}
 & K_{11}M_1(D_{22} - M_2K_{11}M_1)^{-1} = \\
 & \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 \\ 0 & 1/d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1/(d_1d_5 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & d_2/(d_2d_6 - b_2b_4) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} b_1/(d_1d_5 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & b_2/(d_2d_6 - b_2b_4) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.20):

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -b_1/(d_1d_5 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & 0 & -b_2/(d_2d_6 - b_2b_4) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Com (B.15),  $B_{21}$  é obtido:

$$B_{21} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{22}M_2(D_{11} - M_1K_{22}M_2)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

O valor de  $K_{22}M_2(D_{11} - M_1K_{22}M_2)^{-1}$  é:

$$\begin{aligned}
 & K_{22}M_2(D_{11} - M_1K_{22}M_2)^{-1} = \\
 & \begin{bmatrix} 1/d_5 & 0 \\ 0 & 1/d_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_5/(d_1d_5 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & d_6/(d_2d_6 - b_2b_4) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} b_3/(d_1d_5 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & b_4/(d_2d_6 - b_2b_4) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.22):

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -b_3/(d_1d_5 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & 0 & -b_4/(d_2d_6 - b_2b_4) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Com esse último cálculo, é possível observar que a inversa da matriz  $A$  pode ser obtida rapidamente por meio das fórmulas deduzidas anteriormente.

• **Segundo Caso:**

Se  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes diagonais e se  $A_{12}$  e  $A_{21}$  são tais que:

$$\begin{aligned}
A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}}_{A_{22}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{21}} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & K_{21}M_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_1K_{21}M_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Onde:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $K_{21}$  e  $K_{22}$  são matrizes diagonais.

Então, é possível obter que  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  é dado por (B.25).

$$\begin{aligned}
A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &= \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix}}_{A_{11}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_1K_{21}M_2 \end{bmatrix}}_{A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}} = \\
&= \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{12} - M_1K_{21}M_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Se  $D_{12} - M_1K_{21}M_2 \neq 0$ , então,  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  é uma matriz diagonal e portanto, inversível. Ou seja,  $B_{11}$  pode ser calculada por (B.26).

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \tag{B.26}$$

$$\text{Onde: } A_{11} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{12} \end{bmatrix} \text{ e } A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_1K_{21}M_2 \end{bmatrix}.$$

Se  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes diagonais e se  $A_{12}$  e  $A_{21}$  são tais como descrito anteriormente:

$$\begin{aligned}
A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{12} \end{bmatrix}}_{A_{11}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & M_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{12}M_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2K_{12}M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Onde:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $K_{11}$  e  $K_{12}$  são matrizes diagonais.

Então, é possível obter que  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  é dado por (B.28).

$$\begin{aligned} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= \underbrace{\begin{bmatrix} D_{21} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}}_{A_{22}} - \underbrace{\begin{bmatrix} M_2K_{12}M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}} = \\ &= \begin{bmatrix} D_{21} - M_2K_{12}M_1 & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Se  $D_{22} - M_2K_{12}M_1 \neq 0$ , então,  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  é uma matriz diagonal e portanto, inversível. Ou seja,  $B_{22}$  pode ser calculada por (B.29).

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \quad (\text{B.29})$$

$$\text{Onde: } A_{11} = \begin{bmatrix} D_{21} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \text{ e } A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \begin{bmatrix} M_2K_{12}M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De posse de  $B_{11}$  e  $B_{22}$  é possível calcular  $B_{12}$  e  $B_{21}$  por meio de (B.5). A matriz  $B_{12}$  é obtida aplicando  $B_{22}$  na primeira equação de (B.5).

$$\begin{aligned} B_{12} &= - \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{12} \end{bmatrix}}_{A_{11}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} (D_{21} - M_2K_{12}M_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (D_{22})^{-1} \end{bmatrix}}_{B_{22}} = \\ &= - \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_1(D_{21} - M_2K_{12}M_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{12}M_1(D_{21} - M_2K_{12}M_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Onde:  $K_{12}$  é matriz inversa de  $D_{12}$ , que pode ser facilmente calculada, pois  $D_{12}$  é matriz diagonal.

A matriz  $B_{21}$  é obtida aplicando  $B_{11}$  na segunda equação de (B.5).

---

$$\begin{aligned}
B_{21} &= - \underbrace{\begin{bmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}}_{A_{22}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & M_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} (D_{11})^{-1} & 0 \\ 0 & (D_{12} - M_1 K_{21} M_2)^{-1} \end{bmatrix}}_{B_{11}} = \\
&= - \begin{bmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & M_2 (D_{12} - M_1 K_{21} M_2)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad (B.31) \\
&= - \begin{bmatrix} 0 & K_{21} M_2 (D_{12} - M_1 K_{21} M_2)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Onde:  $K_{21}$  é matriz inversa de  $D_{21}$  e que pode ser facilmente calculada, pois  $D_{21}$  é matriz diagonal.

### **Exemplo 2:**

Seja uma matriz  $A$  dada por:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & b_2 & 0 \\ \hline 0 & b_3 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 \end{array} \right]$$

Sua inversa é dada pela matriz B:

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_4}{(d_2 d_4 - b_1 b_3)} & 0 & \frac{-b_1}{(d_2 d_4 - b_1 b_3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_5}{(d_3 d_5 - b_2 b_4)} & 0 & \frac{-b_2}{(d_3 d_5 - b_2 b_4)} & 0 \\ \hline 0 & \frac{-b_3}{(d_2 d_4 - b_1 b_3)} & 0 & \frac{d_2}{(d_2 d_4 - b_1 b_3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b_4}{(d_3 d_5 - b_2 b_4)} & 0 & \frac{d_3}{d_3 d_5 - b_2 b_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_6} \end{array} \right]$$

Então:

$$A_{11} = \left[ \begin{array}{c|cc} d_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} D_{11} & 0 \\ \hline 0 & D_{12} \end{array} \right], \quad A_{12} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline M_1 & 0 \end{array} \right],$$

$$A_{21} = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & b_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & M_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \text{ e } A_{22} = \left[ \begin{array}{cc|c} d_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & d_6 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} D_{21} & 0 \\ \hline 0 & D_{22} \end{array} \right].$$

Assim:  $M_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}$ ,  $K_{11} = [1/d_1]$ ,

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 1/d_2 & 0 \\ 0 & 1/d_3 \end{bmatrix}, \quad K_{21} = \begin{bmatrix} 1/d_4 & 0 \\ 0 & 1/d_5 \end{bmatrix}, \quad K_{22} = [1/d_6],$$

$$D_{11} = [1/d_1], \quad D_{12} = \begin{bmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 1/d_4 & 0 \\ 0 & d_5 \end{bmatrix} \text{ e } D_{22} = [d_6].$$

Utilizando (B.26),  $B_{11}$  será:

$$B_{11} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{12} - M_1 K_{21} M_2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.32})$$

Pelas definições anteriores,  $D_{12} - M_1 K_{21} M_2$  será:

$$D_{12} - M_1 K_{21} M_2 = \begin{bmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & d_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 b_3 / d_4 & 0 \\ 0 & b_2 b_4 / d_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (d_2 d_4 - b_1 b_3) / d_4 & 0 \\ 0 & (d_3 d_5 - b_2 b_4) / d_5 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta informação em (B.32):

$$B_{11} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & (d_2 d_4 - b_1 b_3) / d_4 & 0 \\ 0 & 0 & (d_3 d_5 - b_2 b_4) / d_5 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.33})$$

Para encontrar  $B_{22}$  usa-se (B.29):

$$B_{22} = \begin{bmatrix} D_{21} - M_2 K_{12} M_1 & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.34})$$

O valor de  $M_2K_{12}M_1$  é:

$$\begin{aligned} D_{21} - M_2K_{12}M_1 &= \begin{bmatrix} d_4 & 0 \\ 0 & d_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1b_3/d_2 & 0 \\ 0 & b_2b_4/d_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (d_2d_4 - b_1b_3)/d_2 & 0 \\ 0 & (d_3d_5 - b_2b_4)/d_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.34):

$$B_{22} = \begin{bmatrix} (d_2d_4 - b_1b_3)/d_2 & 0 & 0 \\ 0 & (d_3d_5 - b_2b_4)/d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_6 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{B.35})$$

Com (B.30),  $B_{12}$  é obtido:

$$B_{12} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{12}M_1(D_{21} - M_2K_{12}M_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

O valor de  $K_{12}M_1(D_{21} - M_2K_{12}M_1)^{-1}$  é:

$$\begin{aligned} &K_{12}M_1(D_{21} - M_2K_{12}M_1)^{-1} = \\ &\begin{bmatrix} 1/d_2 & 0 \\ 0 & 1/d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2/(d_2d_4 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & d_3/(d_3d_5 - b_2b_4) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} b_1/(d_2d_4 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & b_2/(d_3d_5 - b_2b_4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.36):

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -b_1/(d_2d_4 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & 0 & -b_2/(d_3d_5 - b_2b_4) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.37})$$

Com (B.31),  $B_{21}$  é obtido:

$$B_{21} = - \begin{bmatrix} 0 & K_{21}M_2(D_{12} - M_1K_{21}M_2)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

O valor de  $K_{21}M_2(D_{12} - M_1K_{21}M_2)^{-1}$  é:

$$\begin{aligned}
 & K_{21}M_2(D_{12} - M_1K_{21}M_2)^{-1} = \\
 & \left[ \begin{array}{cc} 1/d_4 & 0 \\ 0 & 1/d_5 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} b_3 & 0 \\ 0 & b_4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} d_4/(d_2d_4 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & d_5/(d_3d_5 - b_2b_4) \end{array} \right] = \\
 & = \left[ \begin{array}{cc} b_3/(d_2d_4 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & b_4/(d_3d_5 - b_2b_4) \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.38):

$$B_{21} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -b_3/(d_2d_4 - b_1b_3) & 0 \\ 0 & 0 & -b_4/(d_3d_5 - b_2b_4) \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{B.39})$$

Com esse último cálculo, é possível observar que a inversa da matriz  $A$  pode ser obtida rapidamente por meio das fórmulas deduzidas anteriormente.

• **Terceiro Caso:**

Sejam  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  e  $A_{22}$  são matrizes diagonais.

Então,  $A_{22}^{-1}$ , também é matriz diagonal. Como a multiplicação de matrizes diagonais fornece uma matriz diagonal, logo,  $A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  fornecerá uma matriz diagonal.

Assim, se  $A_{11} \neq A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ ,  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  é uma matriz diagonal e portanto, pode ser facilmente invertida. Ou seja, a inversa de  $B_{11}$  pode ser calculada rapidamente por (B.40).

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \quad (\text{B.40})$$

Se  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes diagonais e se  $A_{12}$  e  $A_{21}$  são tais como descrito anteriormente, então, também  $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  é matriz diagonal.

Portanto, se  $A_{22} \neq A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ , a inversa de  $B_{22}$ , dada por (B.10), pode ser calculada facilmente com (B.41), pois  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  é matriz diagonal.

$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \quad (\text{B.41})$$

De posse de  $B_{11}$  e  $B_{22}$  é possível calcular  $B_{12}$  e  $B_{21}$  por meio da primeira e segunda equações de (B.5). Este cálculo pode ser efetuado rapidamente, pois só estão envolvidas matrizes diagonais.

**Exemplo 3:**

Seja uma matriz  $A$  dada por:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} d_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & b_3 \\ \hline b_4 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & d_6 \end{array} \right]$$

Sua inversa é dada pela matriz B:

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{d_4}{(d_1d_4-b_1b_4)} & 0 & 0 & \frac{-b_1}{(d_1d_4-b_1b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_5}{(d_2d_5-b_2b_5)} & 0 & 0 & \frac{-b_2}{(d_2d_5-b_2b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_6}{(d_3d_6-b_3b_6)} & 0 & 0 & \frac{-b_3}{(d_3d_6-b_3b_6)} \\ \hline \frac{-b_4}{(d_1d_4-b_1b_4)} & 0 & 0 & \frac{d_1}{(d_1d_4-b_1b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_5}{(d_2d_5-b_2b_5)} & 0 & 0 & \frac{d_2}{(d_2d_5-b_2b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b_6}{(d_3d_6-b_3b_6)} & 0 & 0 & \frac{d_3}{(d_3d_6-b_3b_6)} \end{array} \right]$$

Para calcular  $B_{11}$ :

$$\begin{aligned}
 & A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \\
 & \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} (d_1d_4 - b_1b_4)/d_4 & 0 & 0 \\ 0 & (d_2d_5 - b_2b_5)/d_5 & 0 \\ 0 & 0 & (d_3d_6 - b_3b_6)/d_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.40):

$$B_{11} = \begin{bmatrix} d_4/(d_1d_4 - b_1b_4) & 0 & 0 \\ 0 & d_5/(d_2d_5 - b_2b_5) & 0 \\ 0 & 0 & d_6/(d_3d_6 - b_3b_6) \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

Para encontrar  $B_{22}$ :

$$\begin{aligned}
 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \\
 & \begin{bmatrix} d_4 & 0 & 0 \\ 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & d_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} (d_1d_4 - b_1b_4)/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & (d_2d_5 - b_2b_5)/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & (d_3d_6 - b_3b_6)/d_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.41):

$$B_{22} = \begin{bmatrix} d_1/(d_1d_4 - b_1b_4) & 0 & 0 \\ 0 & d_2/(d_2d_5 - b_2b_5) & 0 \\ 0 & 0 & d_3/(d_3d_6 - b_3b_6) \end{bmatrix} \quad (\text{B.43})$$

O valor de  $B_{12}$  é obtido com (B.44):

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}(A_{12}B_{22}) \quad (\text{B.44})$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
 & B_{12} = \\
 & - \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_4}{(d_1d_4 - b_1b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_5}{(d_2d_5 - b_2b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_6}{(d_3d_6 - b_3b_6)} \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$


---

$$= \begin{bmatrix} b_1/(d_1d_4 - b_1b_4) & 0 & 0 \\ 0 & b_2/(d_2d_5 - b_2b_5) & 0 \\ 0 & 0 & b_3/(d_3d_6 - b_3b_6) \end{bmatrix}$$

Com (B.45),  $B_{21}$  é obtido:

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}(A_{21}B_{11}) \quad (\text{B.45})$$

Assim:

$$\begin{aligned} B_{21} &= \\ - \begin{bmatrix} \frac{1}{d_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_4}{(d_1d_4 - b_1b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_5}{(d_2d_5 - b_2b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_6}{(d_3d_6 - b_3b_6)} \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} b_4/(d_1d_4 - b_1b_4) & 0 & 0 \\ 0 & b_5/(d_2d_5 - b_2b_5) & 0 \\ 0 & 0 & b_6/(d_3d_6 - b_3b_6) \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

Se a matriz  $D$  tiver a estrutura descrita no terceiro caso, como é o caso do modelo matemático do MOUI  $(x, u)$ , então é possível calcular  $D^{-1}$  com um menor custo computacional do que calcular sua fatoração.

O algoritmo para o cálculo rápido de  $D^{-1}$  é descrito na Tabela B.3.

#### Algoritmo para cálculo rápido da inversa de $D$

*Dados:* A matriz  $m \times m$ ,  $B$  matriz inversa de  $A$  e  $c$  escalar auxiliar.

**Para**  $i = 1$  até  $\frac{m}{2}$

$$k = \frac{m}{2} + i$$

$$c = A(i, i) \cdot A(k, k) - A(i, k) \cdot A(k, i)$$

$$B(i, i) = A(k, k)/c$$

$$B(i, k) = -A(i, k)/c$$

$$B(k, i) = -A(k, i)/c$$

$$B(k, k) = A(i, i)/c$$

Tabela B.3: Algoritmo para obtenção rápida de  $D^{-1}$ .

**Exemplo 4:**

Seja uma matriz  $A$  dada por:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} d_7 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_8 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_9 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c_4 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & b_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & d_6 \end{array} \right]$$

Considerando a matriz  $A$  por blocos de matrizes, temos:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c} D_3 & C_1 & 0 \\ \hline C_2 & D_1 & B_1 \\ \hline 0 & B_2 & D_2 \end{array} \right]$$

Esta matriz  $A$  pode ser reescrita como:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} D_1 & \tilde{C}_1 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right]$$

onde:  $\tilde{C}_1 = [ C_1 \mid 0 ]$  e  $\tilde{C}_2 = \left[ \begin{array}{c} C_2 \\ 0 \end{array} \right]$

Com esta nova representação, a inversa da matriz  $A$  pode ser calculada como segue:

Para calcular  $B_{11}$ :

$$D_3 - \tilde{C}_1 \tilde{D}_2^{-1} \tilde{C}_2 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} d_7 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_8 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_9 & 0 & 0 & c_3 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} c_4 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 & d_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k_1 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & p_3 \\ \hline p_4 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & p_5 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & p_6 & 0 & 0 & k_6 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} c_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & c_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} d_7 & 0 & 0 \\ 0 & d_8 & 0 \\ 0 & 0 & d_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 k_1 c_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 k_2 c_5 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 k_3 c_6 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} d_7 & 0 & 0 \\ 0 & d_8 & 0 \\ 0 & 0 & d_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{c_1 c_4 d_4}{d_1 d_4 - b_1 b_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2 c_5 d_5}{d_2 d_5 - b_2 b_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_3 c_6 d_6}{d_3 d_6 - b_3 b_6} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Aplicando esta informação em (B.40):

$$B_{11} = \begin{bmatrix} \frac{d_1 d_4 - b_1 b_4}{d_7(d_1 d_4 - b_1 b_4) - c_1 c_4 d_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_2 d_5 - b_2 b_5}{d_8(d_2 d_5 - b_2 b_5) - c_2 c_5 d_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_3 d_6 - b_3 b_6}{d_9(d_3 d_6 - b_3 b_6) - c_3 c_6 d_6} \end{bmatrix} \quad (\text{B.46})$$

Para encontrar  $B_{22}$ :

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_2 - \tilde{C}_2 D_1^{-1} \tilde{C}_1 = \\
&\left[ \begin{array}{ccc|ccc} d_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & b_3 \\ \hline b_4 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & d_6 \end{array} \right] - \\
&\left[ \begin{array}{ccc} c_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & c_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} 1/d_7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_9 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|ccc} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \\
&= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} d_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & b_3 \\ \hline b_4 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & d_6 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} (c_1 c_4)/d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (c_2 c_5)/d_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (c_3 c_6)/d_9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] =
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 (d_1d_7 - c_1c_4)/d_7 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\
 0 & (d_2d_8 - c_2c_5)/d_8 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\
 0 & 0 & (d_3d_9 - c_3c_6)/d_9 & 0 & 0 & b_3 \\
 \hline
 b_4 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\
 0 & b_5 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\
 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & d_6
 \end{array} \right] = \\
 & = \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 s_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\
 0 & s_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\
 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 & b_3 \\
 \hline
 b_4 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\
 0 & b_5 & 0 & 0 & d_5 & 0 \\
 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & d_6
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

De acordo com a equação (B.41) é necessário calcular a inversa da matriz anterior:

$$B_{22} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{d_4}{(s_1d_4 - b_1b_4)} & 0 & 0 & \frac{-b_1}{(s_1d_4 - b_1b_4)} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{d_5}{(s_2d_5 - b_2b_5)} & 0 & 0 & \frac{-b_2}{(s_2d_5 - b_2b_5)} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{d_6}{(s_3d_6 - b_3b_6)} & 0 & 0 & \frac{-b_3}{(s_3d_6 - b_3b_6)} \\
 \hline
 \frac{-b_4}{(s_1d_4 - b_1b_4)} & 0 & 0 & \frac{s_1}{(s_1d_4 - b_1b_4)} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-b_5}{(s_2d_5 - b_2b_5)} & 0 & 0 & \frac{s_2}{(s_2d_5 - b_2b_5)} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-b_6}{(s_3d_6 - b_3b_6)} & 0 & 0 & \frac{s_3}{(s_3d_6 - b_3b_6)}
 \end{array} \right] =$$


---

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{d_4}{(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 & \frac{-b_1}{(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_5}{(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 & 0 & \frac{-b_2}{(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_6}{(s_3 d_6 - b_3 b_6)} & 0 & 0 & \frac{-b_3}{(s_3 d_6 - b_3 b_6)} \\ \hline \frac{-b_4}{(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 & \frac{s_1}{(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_5}{(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 & 0 & \frac{s_2}{(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b_6}{(s_3 d_6 - b_3 b_6)} & 0 & 0 & \frac{s_3}{(s_3 d_6 - b_3 b_6)} \end{array} \right] = \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{d_4 d_7}{(d_1 d_7 - c_1 c_4) d_4 - d_7 b_1 b_4} & 0 & 0 & \frac{-b_1 d_7}{(d_1 d_7 - c_1 c_4) d_4 - d_7 b_1 b_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_5 d_8}{(d_2 d_8 - c_2 c_5) d_5 - d_8 b_2 b_5} & 0 & 0 & \frac{-b_2 d_8}{(d_2 d_8 - c_2 c_5) d_5 - d_8 b_2 b_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_6 d_9}{(d_3 d_9 - c_3 c_6) d_6 - d_9 b_3 b_6} & 0 & 0 & \frac{-b_3 d_9}{(d_3 d_9 - c_3 c_6) d_6 - d_9 b_3 b_6} \\ \hline \frac{-b_4 d_7}{(d_1 d_7 - c_1 c_4) d_4 - d_7 b_1 b_4} & 0 & 0 & \frac{(d_1 d_7 - c_1 c_4)}{(d_1 d_7 - c_1 c_4) d_4 - d_7 b_1 b_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_5 d_8}{(d_2 d_8 - c_2 c_5) d_5 - d_8 b_2 b_5} & 0 & 0 & \frac{(d_2 d_8 - c_2 c_5)}{(d_2 d_8 - c_2 c_5) d_5 - d_8 b_2 b_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b_6 d_9}{(d_3 d_9 - c_3 c_6) d_6 - d_9 b_3 b_6} & 0 & 0 & \frac{(d_3 d_9 - c_3 c_6)}{(d_3 d_9 - c_3 c_6) d_6 - d_9 b_3 b_6} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

O valor de  $B_{12}$  é obtido com (B.44), ou seja:

$$\begin{aligned}
 B_{12} &= -D_3^{-1}(\tilde{C}_1 B_{22}) = \\
 &= - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{d_7} & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_8} & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_9} & 0 & 0 & c_3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 &= - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{d_4}{(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 & \frac{-b_1}{(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_5}{(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 & 0 & \frac{-b_2}{(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_6}{(s_3 d_6 - b_3 b_6)} & 0 & 0 & \frac{-b_3}{(s_3 d_6 - b_3 b_6)} \\ \hline \frac{-b_4}{(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 & \frac{s_1}{(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b_5}{(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 & 0 & \frac{s_2}{(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b_6}{(s_3 d_6 - b_3 b_6)} & 0 & 0 & \frac{s_3}{(s_3 d_6 - b_3 b_6)} \end{array} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{c_1 d_4}{d_7(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 & \frac{-c_1 b_1}{d_7(s_1 d_4 - b_1 b_4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2 d_5}{d_8(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 & 0 & \frac{-c_2 b_2}{d_8(s_2 d_5 - b_2 b_5)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_3 d_6}{d_9(s_3 d_6 - b_3 b_6)} & 0 & 0 & \frac{-c_3 b_3}{d_9(s_3 d_6 - b_3 b_6)} \end{array} \right] = \\
 &= - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{c_1 d_4}{(d_1 d_7 - c_1 c_4) d_4 - d_7 b_1 b_4} & 0 & 0 & \frac{-c_1 b_1}{(d_1 d_7 - c_1 c_4) d_4 - d_7 b_1 b_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2 d_5}{(d_2 d_8 - c_2 c_5) d_5 - d_8 b_2 b_5} & 0 & 0 & \frac{-c_2 b_2}{(d_2 d_8 - c_2 c_5) d_5 - d_8 b_2 b_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_3 d_6}{(d_3 d_9 - c_3 c_9) d_6 - d_9 b_3 b_6} & 0 & 0 & \frac{-c_3 b_3}{(d_3 d_9 - c_3 c_9) d_6 - d_9 b_3 b_6} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Com (B.45),  $B_{21}$  é obtido:

$$\begin{aligned}
 B_{21} &= -\tilde{D}_2^{-1}(\tilde{C}_2 B_{11}) = \\
 &= - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k_1 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & p_3 \\ \hline p_4 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & p_5 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & p_6 & 0 & 0 & k_6 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} c_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & c_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{d_1 d_4 - b_1 b_4}{d_7(d_1 d_4 - b_1 b_4) - c_1 c_4 d_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_2 d_5 - b_2 b_5}{d_8(d_2 d_5 - b_2 b_5) - c_2 c_5 d_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_3 d_6 - b_3 b_6}{d_9(d_3 d_6 - b_3 b_6) - c_3 c_6 d_6} \end{array} \right] = \\
 &= - \left[ \begin{array}{ccc} \frac{k_1 c_4 (d_1 d_4 - b_1 b_4)}{d_7(d_1 d_4 - b_1 b_4) - c_1 c_4 d_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_2 c_5 (d_2 d_5 - b_2 b_5)}{d_8(d_2 d_5 - b_2 b_5) - c_2 c_5 d_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_3 c_6 (d_3 d_6 - b_3 b_6)}{d_9(d_3 d_6 - b_3 b_6) - c_3 c_6 d_6} \\ \hline \frac{p_4 c_4 (d_1 d_4 - b_1 b_4)}{d_7(d_1 d_4 - b_1 b_4) - c_1 c_4 d_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_5 c_5 (d_2 d_5 - b_2 b_5)}{d_8(d_2 d_5 - b_2 b_5) - c_2 c_5 d_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_6 c_6 (d_3 d_6 - b_3 b_6)}{d_9(d_3 d_6 - b_3 b_6) - c_3 c_6 d_6} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

onde:  $k_1 = \frac{d_4}{(d_1 d_4 - b_1 b_4)}$ ,  $k_2 = \frac{d_5}{(d_2 d_5 - b_2 b_5)}$ ,  $k_3 = \frac{d_6}{(d_3 d_6 - b_3 b_6)}$ ,  $p_4 = \frac{b_4}{(d_1 d_4 - b_1 b_4)}$ ,  
 $p_5 = \frac{b_5}{(d_2 d_5 - b_2 b_5)}$  e  $p_6 = \frac{b_6}{(d_3 d_6 - b_3 b_6)}$ .

Assim:

$$B_{21} = - \left[ \begin{array}{ccc} \frac{d_4 c_4}{d_7(d_1 d_4 - b_1 b_4) - c_1 c_4 d_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_5 c_5 (d_2 d_5 - b_2 b_5)}{d_8(d_2 d_5 - b_2 b_5) - c_2 c_5 d_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_6 c_6 (d_3 d_6 - b_3 b_6)}{d_9(d_3 d_6 - b_3 b_6) - c_3 c_6 d_6} \\ \hline \frac{b_4 c_4}{d_7(d_1 d_4 - b_1 b_4) - c_1 c_4 d_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_5 c_5}{d_8(d_2 d_5 - b_2 b_5) - c_2 c_5 d_5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_6 c_6}{d_9(d_3 d_6 - b_3 b_6) - c_3 c_6 d_6} \end{array} \right]$$

Com esse último cálculo é obtida a inversa da matriz  $A$ .

Se a matriz  $D$  tiver a estrutura descrita no quarto caso, como é o caso do modelo matemático do MOUI  $(x, q, v)$ , então é possível calcular  $D^{-1}$  com um menor custo computacional do que calcular sua fatoração.

O algoritmo para o cálculo rápido de  $D^{-1}$  é descrito na Tabela B.4.

**Algoritmo para cálculo rápido da inversa de  $D$** 

*Dados:*  $A$  matrix  $m \times m$ ,  $B$  matriz inversa de  $A$  e  $c$  escalar auxiliar.

**Para**  $i = 1$  até  $\frac{m}{3}$

$$j = \frac{m}{3} + i$$

$$k = \frac{2m}{3} + i$$

$$c = A(i, i) \cdot (A(j, k) \cdot A(k, j) - A(j, j) \cdot A(k, k)) \\ + A(k, k) \cdot A(i, j) \cdot A(j, i)$$

$$B(i, i) = (A(j, k) \cdot A(k, j) - A(j, j) \cdot A(k, k))/c$$

$$B(i, j) = (A(i, j) \cdot A(k, k))/c$$

$$B(j, i) = (A(j, i) \cdot A(k, k))/c$$

$$B(j, j) = (-A(i, i) \cdot A(k, k))/c$$

$$B(j, k) = (A(i, i) \cdot A(j, k))/c$$

$$B(k, j) = (A(i, i) \cdot A(k, j))/c$$

$$B(i, k) = (-A(i, j) \cdot A(j, k))/c$$

$$B(k, i) = (-A(j, i) \cdot A(k, j))/c$$

$$B(k, k) = (A(i, j) \cdot A(j, i) - A(i, i) \cdot A(j, j))/c$$

Tabela B.4: Algoritmo para obtenção rápida de  $D^{-1}$ .

### B.3 Cálculo da inversa de outra matriz tridiagonal

Com os resultados da seção anterior, pode ser obtida a inversa de uma matriz tridiagonal de maneira bastante interessante.

Para tanto, é necessário estabelecer a resolução de dois casos básicos:

• **Primeiro Caso:** A matriz tridiagonal  $A$  é de dimensão  $m \times m$ , onde  $m$  é par e  $n = \frac{m}{2}$ .

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & d_3 & f_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & d_4 & f_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_5 & d_5 & f_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e_{m-3} & d_{m-3} & f_{m-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_{m-2} & d_{m-2} & f_{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_{m-1} & d_{m-1} & f_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_m & d_m \end{bmatrix}$$

A matriz  $A$  pode ser particionada em quatro sub-matrizes  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  e  $A_{22}$  dadas por:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{ccccccc|ccccccc} d_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e_{n-1} & d_{n-1} & f_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_n & d_n & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_{n+1} & d_{n+1} & f_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_{n+2} & d_{n+2} & f_{n+2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e_{m-1} & d_{m-1} & f_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m & f_m \end{array} \right]$$

Da mesma maneira como  $A$  foi separado em quatro submatrizes,  $A_{11}$  e  $A_{22}$  também podem ser particionadas. Esse procedimento deve prosseguir até que duas matrizes de dimensões  $4 \times 4$ , como a descrita por  $C$ , sejam obtidas.

$$C = \left[ \begin{array}{cc|cc} C_{11} & C_{12} & & \\ C_{21} & C_{22} & & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} d_1 & f_1 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & 0 \\ \hline 0 & e_3 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & e_4 & d_4 \end{array} \right]$$

A inversa  $B$  dessa matriz pode ser obtida com (B.47):

$$\begin{cases} B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} \\ B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ B_{12} = -A_{11}^{-1}(A_{12}B_{22}) \\ B_{21} = -A_{22}^{-1}(A_{21}B_{11}) \end{cases} \quad (\text{B.47})$$

Para obter  $B_{11}$ :

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k_{11}e_3 \\ 0 & k_{12}e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_2k_{11}e_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & d_2 - f_2k_{11}e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & k_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A inversa da matriz resultante fornece  $B_{11}$ :

$$B_{11} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{(d_1k_1 - f_1e_2)} & \frac{-f_1}{(d_1k_1 - f_1e_2)} \\ \frac{-e_2}{(d_1k_1 - f_1e_2)} & \frac{d_1}{(d_1k_1 - f_1e_2)} \end{bmatrix}$$

Onde:  $k_1 = d_2 - f_2k_{11}e_3$  e  $k_{11} = \frac{d_4}{d_3d_4 - f_3e_4}$ .

Para obter  $B_{22}$ :

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} d_3 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} d_3 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{21}f_2 & 0 \\ q_{22}f_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_3q_{22}f_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} d_3 - e_3q_{22}f_2 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A inversa da matriz resultante fornece  $B_{22}$ :

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{d_4}{(d_4q_2 - f_3e_4)} & \frac{-f_3}{(d_4q_2 - f_3e_4)} \\ \frac{-e_4}{(d_4q_2 - f_3e_4)} & \frac{q_2}{(d_4q_2 - f_3e_4)} \end{bmatrix}$$

Onde:  $q_2 = d_3 - f_2q_{22}e_3$  e  $q_{22} = \frac{d_2}{d_1d_2 - f_1e_2}$ .

Com  $B_{22}$  e  $B_{11}$ ,  $B_{12}$  e  $B_{21}$  podem ser calculadas:

$$\begin{aligned}
 B_{12} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{22}(1,1) & B_{22}(1,2) \\ B_{22}(2,1) & B_{22}(2,2) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2B_{22}(1,1) & f_2B_{22}(1,2) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} k_{12}f_2B_{22}(1,1) & k_{12}f_2B_{22}(1,2) \\ k_{22}f_2B_{22}(1,1) & k_{22}f_2B_{22}(1,2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{21} &= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}(1,1) & B_{11}(1,2) \\ B_{11}(2,1) & B_{11}(2,2) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3B_{11}(2,1) & e_3B_{11}(2,2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} q_{11}e_3B_{11}(2,1) & q_{11}e_3B_{11}(2,2) \\ q_{21}e_3B_{11}(2,1) & q_{21}e_3B_{11}(2,2) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$


---

Com  $B_{11}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{12}$  e  $B_{21}$  fica estabelecida a inversa  $(A_{11}^{n0})^{-1}$  de uma submatriz de dimensão  $4 \times 4$ .

Seja a inversa de uma submatriz tridiagonal  $C^{n0}$  de dimensão  $8 \times 8$  dada como a seguir:

$$B^{n0} = \left[ \begin{array}{cc|cc} B_{11}^{n0} & B_{12}^{n0} & & \\ B_{21}^{n0} & B_{22}^{n0} & & \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} d_1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & d_3 & f_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & d_4 & f_4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e_5 & d_5 & f_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 & d_6 & f_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_7 & d_7 & f_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_8 & d_8 \end{array} \right]^{-1}$$

Para obter a inversa de  $B^{n0}$ , basta utilizar  $(A_{11}^{n0})^{-1}$ , calcular  $(A_{22}^{n0})^{-1}$  de maneira análoga ao cálculo de  $(A_{11}^{n0})^{-1}$ , e a partir de  $(A_{11}^{n0})^{-1}$  e  $(A_{22}^{n0})^{-1}$  obter  $B_{11}^{n0}$ ,  $B_{22}^{n0}$ ,  $B_{12}^{n0}$  e  $B_{21}^{n0}$ .

Utilizando (B.47):

Para  $B_{11}^{n0}$ :

$$A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & 0 \\ 0 & e_3 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & e_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} A_{22}^{n0}(1, 1) & A_{22}^{n0}(1, 2) & A_{22}^{n0}(1, 3) & A_{22}^{n0}(1, 4) \\ A_{22}^{n0}(2, 1) & A_{22}^{n0}(2, 2) & A_{22}^{n0}(2, 3) & A_{22}^{n0}(2, 4) \\ A_{22}^{n0}(3, 1) & A_{22}^{n0}(3, 2) & A_{22}^{n0}(3, 3) & A_{22}^{n0}(3, 4) \\ A_{22}^{n0}(4, 1) & A_{22}^{n0}(4, 2) & A_{22}^{n0}(4, 3) & A_{22}^{n0}(4, 4) \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & 0 \\ 0 & e_3 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & e_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_4(A_{22}^{n0}(1, 1))^{-1}e_5 \end{bmatrix} =$$


---

$$= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 & 0 & & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & & 0 \\ 0 & e_3 & d_3 & & f_3 \\ 0 & 0 & e_4 & d_4 - f_4(A_{22}^{n_0}(1,1))^{-1}e_5 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & 0 \\ 0 & e_3 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & e_4 & k_1 \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz resultante fornece  $B_{11}^{n_0}$ . Esta inversa pode ser obtida como no cálculo de matrizes tridiagonais de dimensão  $4 \times 4$ . Além disso,  $B_{22}^{n_0}$  pode ser obtida de maneira análoga.

Com  $B_{11}^{n_0}$  é possível obter  $B_{12}^{n_0}$ :

$$B_{12}^{n_0} = \begin{bmatrix} A_{11}^{n_0}(1,1) & A_{11}^{n_0}(1,2) & A_{11}^{n_0}(1,3) & A_{11}^{n_0}(1,4) \\ A_{11}^{n_0}(2,1) & A_{11}^{n_0}(2,2) & A_{11}^{n_0}(2,3) & A_{11}^{n_0}(2,4) \\ A_{11}^{n_0}(3,1) & A_{11}^{n_0}(3,2) & A_{11}^{n_0}(3,3) & A_{11}^{n_0}(3,4) \\ A_{11}^{n_0}(4,1) & A_{11}^{n_0}(4,2) & A_{11}^{n_0}(4,3) & A_{11}^{n_0}(4,4) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{22}(1,1) & B_{22}(1,2) & B_{22}(1,3) & B_{22}(1,4) \\ B_{22}(2,1) & B_{22}(2,2) & B_{22}(2,3) & B_{22}(2,4) \\ B_{22}(3,1) & B_{22}(3,2) & B_{22}(3,3) & B_{22}(3,4) \\ B_{22}(4,1) & B_{22}(4,2) & B_{22}(4,3) & B_{22}(4,4) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}^{n_0}(1,1) & A_{11}^{n_0}(1,2) & A_{11}^{n_0}(1,3) & A_{11}^{n_0}(1,4) \\ A_{11}^{n_0}(2,1) & A_{11}^{n_0}(2,2) & A_{11}^{n_0}(2,3) & A_{11}^{n_0}(2,4) \\ A_{11}^{n_0}(3,1) & A_{11}^{n_0}(3,2) & A_{11}^{n_0}(3,3) & A_{11}^{n_0}(3,4) \\ A_{11}^{n_0}(4,1) & A_{11}^{n_0}(4,2) & A_{11}^{n_0}(4,3) & A_{11}^{n_0}(4,4) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_4 B_{22}(1,1) & f_4 B_{22}(1,2) & f_4 B_{22}(1,3) & f_4 B_{22}(1,4) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{n_0}(1,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,1) & A_{11}^{n_0}(1,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,2) & A_{11}^{n_0}(1,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,3) & A_{11}^{n_0}(1,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,4) \\ A_{11}^{n_0}(2,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,1) & A_{11}^{n_0}(2,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,2) & A_{11}^{n_0}(2,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,3) & A_{11}^{n_0}(2,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,4) \\ A_{11}^{n_0}(3,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,1) & A_{11}^{n_0}(3,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,2) & A_{11}^{n_0}(3,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,3) & A_{11}^{n_0}(3,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,4) \\ A_{11}^{n_0}(4,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,1) & A_{11}^{n_0}(4,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,2) & A_{11}^{n_0}(4,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,3) & A_{11}^{n_0}(4,4)^{-1} f_4 B_{22}(1,4) \end{bmatrix}$$

A submatriz  $B_{21}^{n_0}$  pode ser calculada de maneira análoga.

Calculadas as submatrizes  $B_{11}^{n_0}$ ,  $B_{22}^{n_0}$ ,  $B_{12}^{n_0}$  e  $B_{21}^{n_0}$ , a inversa de  $B^{n_0}$  terá sido encontrada.

Procedendo da mesma maneira para submatrizes de dimensões maiores, a inversa  $B$  da matriz original  $A$  será obtida.

- **Exemplo 1:** A matriz tridiagonal  $A$  é de dimensão  $4 \times 4$ :

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} d_1 & f_1 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & 0 \\ 0 & e_3 & d_3 & f_3 \\ 0 & 0 & e_4 & d_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

Esta matriz é muito semelhante à matriz  $C$  do segundo caso de matrizes rápidas de serem invertidas:

$$C = \left[ \begin{array}{cc|cc} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & M_1 & 0 \\ 0 & M_2 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right]$$

A diferença entre  $A$  e  $C$  é o facilidade do cálculo das inversas de suas sub-matrizes  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  e  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ .

Enquanto  $B_{11}$  e  $B_{22}$  são matrizes diagonais,  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes cheias.

Porém, a inversa de uma matriz qualquer cheia  $A_{11}$  de dimensão  $2 \times 2$ , desde que  $(d_1 d_2 - f_1 e_2) \geq 0$ , é dada por:

$$A_{11}^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{d_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{-f_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \\ \frac{-e_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{d_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \end{array} \right]$$

De maneira análoga é possível calcular  $A_{22}^{-1}$ , com  $(d_3 d_4 - f_3 e_4) \geq 0$ :

$$A_{22}^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{d_4}{d_3 d_4 - f_3 e_4} & \frac{-f_3}{d_3 d_4 - f_3 e_4} \\ \frac{-e_4}{d_3 d_4 - f_3 e_4} & \frac{d_3}{d_3 d_4 - f_3 e_4} \end{array} \right]$$

De posse de  $A_{11}^{-1}$  e  $A_{22}^{-1}$ , a matriz  $B$ , inversa da matriz  $A$ , será calculada por meio de:

$$\begin{cases} B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} \\ B_{22} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \\ B_{12} = -A_{11}^{-1} (A_{12} B_{22}) \\ B_{21} = -A_{22}^{-1} (A_{21} B_{11}) \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

Para o cálculo de  $B_{11}$  :

$$\begin{aligned}
 A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_4}{d_3d_4 - f_3e_4} & \frac{-f_3}{d_3d_4 - f_3e_4} \\ \frac{-e_4}{d_3d_4 - f_3e_4} & \frac{d_3}{d_3d_4 - f_3e_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{e_3d_4}{d_3d_4 - f_3e_4} \\ 0 & \frac{-e_3e_4}{d_3d_4 - f_3e_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_2e_3d_4}{d_3d_4 - f_3e_4} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & \frac{d_2(d_3d_4 - f_3e_4) - d_4f_2e_3}{d_3d_4 - f_3e_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & \frac{d_2 \cdot \det(A_{22}) - d_4f_2e_3}{\det(A_{22})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & k_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{d_1k_2 - f_1e_2} & \frac{-f_1}{d_1k_2 - f_1e_2} \\ \frac{-e_2}{d_1k_2 - f_1e_2} & \frac{d_1}{d_1k_2 - f_1e_2} \end{bmatrix}$$

Para o cálculo de  $B_{22}$  :

$$\begin{aligned}
 A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= \begin{bmatrix} d_3 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_2}{d_1d_2 - f_1e_2} & \frac{-f_1}{d_1d_2 - f_1e_2} \\ \frac{-e_2}{d_1d_2 - f_1e_2} & \frac{d_1}{d_1d_2 - f_1e_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} d_3 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-f_1f_2}{d_1d_2 - f_1e_2} & 0 \\ \frac{d_1f_2}{d_1d_2 - f_1e_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{d_1f_2e_3}{d_1d_2 - f_1e_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{d_3(d_1d_2 - f_1e_2) - d_1f_2e_3}{d_1d_2 - f_1e_2} & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_3 \cdot \det(A_{11}) - d_1f_2e_3}{\det(A_{11})} & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & f_3 \\ e_4 & d_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{d_4}{k_1d_4 - f_3e_4} & \frac{-f_3}{k_1d_4 - f_3e_4} \\ \frac{-e_4}{k_1d_4 - f_3e_4} & \frac{k_1}{k_1d_4 - f_3e_4} \end{bmatrix}$$

Os resultados anteriores permitem calcular  $B_{12}$  e  $B_{21}$ :

$$\begin{aligned}
B_{12} &= - \begin{bmatrix} \frac{d_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{-f_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \\ \frac{-e_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{d_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{22}(1,1) & B_{22}(1,2) \\ B_{22}(2,1) & B_{22}(2,2) \end{bmatrix} = \\
&= - \begin{bmatrix} \frac{d_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{-f_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \\ \frac{-e_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{d_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_2 B_{22}(1,1) & f_2 B_{22}(1,2) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{f_1 f_2 B_{22}(1,1)}{\det(A_{11})} & \frac{f_1 f_2 B_{22}(1,2)}{\det(A_{11})} \\ \frac{-d_1 f_2 B_{22}(1,1)}{\det(A_{11})} & \frac{-d_1 f_2 B_{22}(1,2)}{\det(A_{11})} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{21} &= - \begin{bmatrix} \frac{d_4}{d_3 d_4 - f_3 e_4} & \frac{-f_3}{d_3 d_4 - f_3 e_4} \\ \frac{-e_4}{d_3 d_4 - f_3 e_4} & \frac{d_3}{d_3 d_4 - f_3 e_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}(1,1) & B_{11}(1,2) \\ B_{11}(2,1) & B_{11}(2,2) \end{bmatrix} = \\
&= - \begin{bmatrix} \frac{d_4}{d_3 d_4 - f_3 e_4} & \frac{-f_3}{d_3 d_4 - f_3 e_4} \\ \frac{-e_4}{d_3 d_4 - f_3 e_4} & \frac{d_3}{d_3 d_4 - f_3 e_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 B_{11}(2,1) & e_3 B_{11}(2,2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e_3 d_4 B_{11}(2,1)}{\det(A_{22})} & \frac{e_3 d_4 B_{11}(2,2)}{\det(A_{22})} \\ \frac{-e_3 e_4 B_{11}(2,1)}{\det(A_{22})} & \frac{-e_3 e_4 B_{11}(2,2)}{\det(A_{22})} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

• **Segundo Caso:** A matriz tridiagonal  $A$  é de dimensão  $m \times m$ , onde  $m$  é ímpar e  $n = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & d_2 & f_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_3 & d_3 & f_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & d_4 & f_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_5 & d_5 & f_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e_{m-3} & d_{m-3} & f_{m-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_{m-2} & d_{m-2} & f_{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_{m-1} & d_{m-1} & f_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_m & d_m \end{bmatrix}$$

A matriz  $A$  pode ser particionada em quatro sub-matrizes  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  e  $A_{22}$  dadas por:



$$= \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & d_2 - \frac{f_2 e_3}{d_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & f_1 \\ e_2 & k_1 \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz resultante fornece  $B_{11}$ :

$$B_{11} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{(d_1 k_1 - f_1 e_2)} & \frac{-f_1}{(d_1 k_1 - f_1 e_2)} \\ \frac{-e_2}{(d_1 k_1 - f_1 e_2)} & \frac{d_1}{(d_1 k_1 - f_1 e_2)} \end{bmatrix}$$

Onde:  $k_1 = d_2 - \frac{f_2 e_3}{d_3}$ .

Para  $B_{22}$ :

$$\begin{aligned} C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12} &= \begin{bmatrix} d_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{-f_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \\ \frac{-e_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{d_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} d_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_3 \frac{d_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A inversa da matriz resultante fornece  $B_{22}$ :

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_2} \end{bmatrix}$$

Onde:  $k_2 = d_3 - \frac{d_1 f_2 e_3}{d_1 d_2 - f_1 e_2}$ .

Assim,  $B_{12}$  e  $B_{21}$  podem ser obtidos:

$$\begin{aligned} B_{12} &= - \begin{bmatrix} \frac{d_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{-f_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \\ \frac{-e_2}{d_1 d_2 - f_1 e_2} & \frac{d_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} [B_{22}(1, 1)] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{f_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} f_2 B_{22}(1, 1) \\ \frac{-d_1}{d_1 d_2 - f_1 e_2} f_2 B_{22}(1, 1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{21} &= - \begin{bmatrix} k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}(1, 1) & B(1, 2) \\ B_{11}(2, 1) & B(2, 2) \end{bmatrix} = \\ &= - \begin{bmatrix} k_2 e_3 B_{11}(2, 1) & k_2 e_3 B_{11}(2, 2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De posse de  $B$ , a inversa de  $C$ , é possível estabelecer as inversas de submatrizes de dimensões maiores até obter a inversa da matriz original por meio de procedimento semelhante ao descrito no primeiro caso.

---

## B.4 Cálculo da inversa de uma matriz penta-diagonal

Seja uma matriz  $A$  cuja estrutura é dada por:

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|cc} D_{11} & 0 & M_1 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & D_{12} & 0 & M_2 & 0 & N_2 \\ M_3 & 0 & D_{21} & 0 & P_1 & 0 \\ 0 & M_4 & 0 & D_{22} & 0 & P_2 \\ \hline N_3 & 0 & P_3 & 0 & M_{31} & 0 \\ 0 & N_4 & 0 & P_4 & 0 & M_{32} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

Onde:  $D_{ij}$ ,  $N_i$  e  $P_i$  são matrizes diagonais.

A matriz inversa de  $A$  pode ser obtida, utilizando:

$$\begin{cases} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})B_{11} = I \\ (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})B_{22} = I \\ B_{12} = -A_{11}^{-1}(A_{12}B_{22}) \\ B_{21} = -A_{22}^{-1}(A_{21}B_{11}) \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

Se  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes facilmente inversíveis, e se  $A_{12}$  e  $A_{21}$  são tais que:

$$\begin{aligned} A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} &= \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \\ P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}}_{A_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}}_{A_{22}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_3 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 & P_4 \end{bmatrix}}_{A_{21}} = \\ &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \\ P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{21}N_3 & 0 & K_{21}P_3 & 0 \\ 0 & K_{22}N_4 & 0 & K_{22}P_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} N_1K_{21}N_3 & 0 & N_1K_{21}P_3 & 0 \\ 0 & N_2K_{22}N_4 & 0 & N_2K_{22}P_4 \\ P_1K_{21}N_3 & 0 & P_1K_{21}P_3 & 0 \\ 0 & P_2K_{22}N_4 & 0 & P_2K_{22}P_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Onde:  $N_i$ ,  $P_i$  e  $K_{ij}$  são matrizes diagonais.

Então é possível obter que  $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  é dado por:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & D_{12} & 0 & M_2 \\ M_3 & 0 & D_{21} & 0 \\ 0 & M_4 & 0 & D_{22} \end{bmatrix}}_{A_{11}} - \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \\ N_1K_{21}N_3 & 0 & N_1K_{21}P_3 & 0 \\ 0 & N_2K_{22}N_4 & 0 & N_2K_{22}P_4 \\ P_1K_{21}N_3 & 0 & P_1K_{21}P_3 & 0 \\ 0 & P_2K_{22}N_4 & 0 & P_2K_{22}P_4 \end{bmatrix}}_{A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}} = \\ & = \begin{bmatrix} D_{11} - N_1K_{21}N_3 & 0 & M_1 - N_1K_{21}P_3 & 0 \\ 0 & D_{12} - N_2K_{22}N_4 & 0 & M_2 - N_2K_{22}P_4 \\ M_3 - P_1K_{21}N_3 & 0 & D_{21} - P_1K_{21}P_3 & 0 \\ 0 & M_4 - P_2K_{22}N_4 & 0 & D_{22} - P_2K_{22}P_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

A inversa desta matriz pode ser encontrada utilizando o algoritmo descrito anteriormente.

Se  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são matrizes facilmente inversíveis e se  $A_{12}$  e  $A_{21}$  são tais como descrito anteriormente:

$$\begin{aligned} A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= \underbrace{\begin{bmatrix} N_3 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 & P_4 \end{bmatrix}}_{A_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & D_{12} & 0 & M_2 \\ M_3 & 0 & D_{21} & 0 \\ 0 & M_4 & 0 & D_{22} \end{bmatrix}}_{A_{11}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \\ P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}}_{A_{12}} = \\ &= \begin{bmatrix} N_3 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}N_1 + M_1P_1 & 0 \\ 0 & D_{12}N_2 + M_2P_2 \\ M_3N_1 + D_{21}P_1 & 0 \\ 0 & M_4N_2 + D_{22}P_2 \end{bmatrix} = \\ & \left[ \begin{array}{cc} N_3(D_{11}N_1 + M_1P_1) + P_3(M_3N_1 + D_{21}P_1) & 0 \\ 0 & N_4(D_{12}N_2 + M_2P_2) + P_4(M_4N_2 + D_{22}P_2) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Onde:  $D_{ij}$ ,  $M_i$  e  $N_i$  são matrizes diagonais.

Então, é possível obter que  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  é dado por:

$$\begin{aligned} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} &= \underbrace{\begin{bmatrix} M_{31} & 0 \\ 0 & M_{32} \end{bmatrix}}_{A_{22}} - \\ & \left[ \begin{array}{cc} N_3(D_{11}N_1 + M_1P_1) + P_3(M_3N_1 + D_{21}P_1) & 0 \\ 0 & N_4(D_{12}N_2 + M_2P_2) + P_4(M_4N_2 + D_{22}P_2) \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{cc} M_{31} - N_3(D_{11}N_1 + M_1P_1) + P_3(M_3N_1 + D_{21}P_1) & 0 \\ 0 & M_{32} - N_4(D_{12}N_2 + M_2P_2) + P_4(M_4N_2 + D_{22}P_2) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Se as submatrizes resultantes da subtração não tiverem nenhum elemento igual a zero, então,  $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  é uma matriz diagonal e portanto, inversível.

# Apêndice C

## Métodos de Pontos Interiores para Estrutura Bloco Angular

### C.1 Aproveitamento da Estrutura Esparsa do Problema

Para os casos em que a função  $f(x)$  é linear ou quadrática, tal que  $D$  é matriz diagonal separada por blocos, e a matriz  $A$  é bloco primal:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n & 0 \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n & A_{n+1} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Então, a matriz  $AD^{-1}A^t$  será dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n & 0 \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n & A_{n+1} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} D_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{n+1}^{-1} \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^t & 0 & \cdots & 0 & S_1^t \\ 0 & A_2^t & \cdots & 0 & S_2^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n^t & S_n^t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n+1}^t \end{bmatrix}}_{A^t} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} A_1 D_1^{-1} A_1^t & 0 & \cdots & 0 & A_1 D_1^{-1} S_1^t \\ 0 & A_2 D_2^{-1} A_2^t & \cdots & 0 & A_2 D_2^{-1} S_2^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n D_n^{-1} A_n^t & A_n D_n^{-1} S_n^t \\ S_1 D_1 A_1^t & S_2 D_2^{-1} A_2^t & \cdots & S_n D_n^{-1} A_n^t & \sum_{i=1}^{n+1} S_i D_i^{-1} S_i^t + A_{n+1} D_{n+1}^{-1} A_{n+1}^t \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \cdots & 0 & B_1^t \\ 0 & \Phi_2 & \cdots & 0 & B_2^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Phi_n & B_n^t \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n & \Phi_{n+1} \end{bmatrix} = \Phi
 \end{aligned}$$

onde:  $B_i = S_i D_i^{-1} A_i^t$  e  $\Phi_i = A_i D_i^{-1} A_i^t$ , para  $i = 1, \dots, n$  e  $\Phi_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} S_i D_i^{-1} S_i^t + A_{n+1} D_{n+1}^{-1} A_{n+1}^t$ .

A fatoração da matriz  $\Phi$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Phi = LL^t &= \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_n & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \cdots & L_{n,n} & L_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^t & 0 & \cdots & 0 & L_{n,1}^t \\ 0 & L_2^t & \cdots & 0 & L_{n,2}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_n^t & L_{n,n}^t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{n+1}^t \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_1 L_1^t & 0 & \cdots & 0 & L_1 L_{n,1}^t \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 & L_2 L_{n,2}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_n & L_n L_{n,n}^t \\ L_{n,1} L_1^t & L_{n,2} L_2^t & \cdots & L_{n,n} L_n^t & \sum_{i=1}^n L_{n,i} L_{n,i}^t + L_{n+1} L_{n+1}^t \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \cdots & 0 & B_1^t \\ 0 & \Phi_2 & \cdots & 0 & B_2^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Phi_n & B_n^t \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n & \Phi_{n+1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

assim:

$$\begin{cases} L_i L_i^t = \Phi_i \\ L_{n,i} L_i^t = B_i \\ \sum_{i=1}^n L_{n,i} L_{n,i}^t + L_{n+1} L_{n+1}^t = \Phi_{n+1}. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Porém, não é necessário obter as fatorações  $L_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Utilizando a segunda equação de (C.2):

$$L_{n,i} L_i^t = B_i \Rightarrow$$

$$L_{n,i} = B_i L_i^{-t} \quad (\text{C.3})$$

Utilizando (C.3) na terceira equação de (C.2):

$$\begin{aligned} L_{n+1} L_{n+1}^t &= \Phi_{n+1} - \sum_{i=1}^n L_{n,i} L_{n,i}^t = \Phi_{n+1} - \sum_{i=1}^n (B_i L_i^{-t})(B_i L_i^{-t})^t = \\ &= \Phi_{n+1} - \sum_{i=1}^n B_i L_i^{-t} L_i^{-1} B_i^t = \Phi_{n+1} - \sum_{i=1}^n (L_i^{-1} B_i^t)^t (L_i^{-1} B_i^t) \end{aligned}$$

$$L_{n+1} L_{n+1}^t = \Phi_{n+1} - \sum_{i=1}^n (L_i^{-1} B_i^t)^t (L_i^{-1} B_i^t) \quad (\text{C.4})$$

É importante observar que o somatório descrito em (C.4) é melhor calculado com a seguinte consideração:

$$(L_k^{-1} B_k^t)^t (L_k^{-1} B_k^t) = A_k^t A_k = R_k$$

Portanto, o elemento  $R_k(i, j)$  pode ser obtido com:

$$R_k(i, j) = A_{k(i-\text{linha})}^t A_{k(j-\text{coluna})} = A_{k(i-\text{coluna})} A_{k(j-\text{coluna})} \quad (\text{C.5})$$

Para calcular o valor da  $t$ -ésima coluna de  $A_k$ :

$$A_{k(t-coluna)} = L_k^{-1} B_{k(t-coluna)}^t = L_k^{-1} B_{k(t-linha)} \quad (C.6)$$

Substituindo (C.6) em (C.5):

$$R_k(i, j) = (L_k^{-1} B_{k(i-linha)})(L_k^{-1} B_{k(j-linha)}) \quad (C.7)$$

Todas estas operações estão resumidas no esquema proposto na Figura C.1.

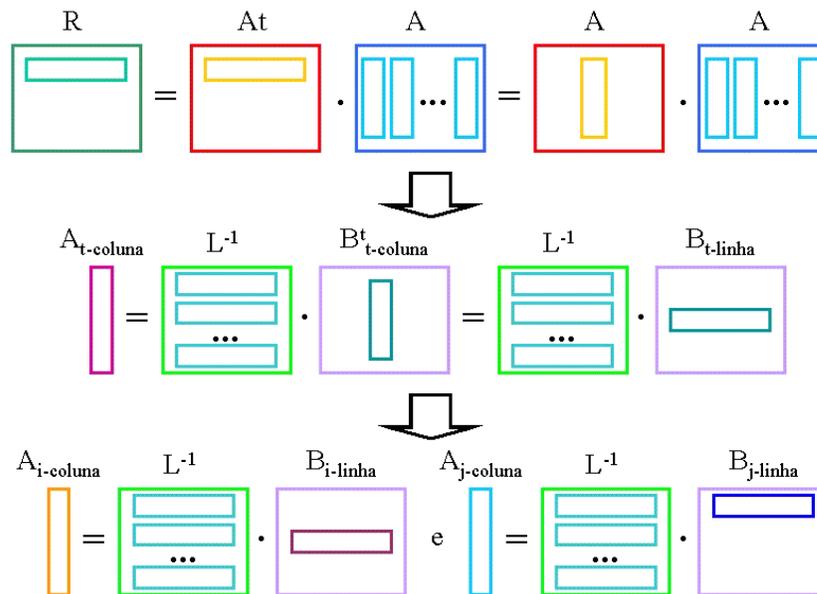


Figura C.1: Representação do cálculo de  $(L_i^{-1} B_i^t)^t (L_i^{-1} B_i^t)$ .

Resolver o sistema linear  $\Phi x = b$  por meio da fatoração  $L$  consiste em:

$$\Phi x = b \Rightarrow LL^t x = b \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Lz = b \\ L^t x = z \end{cases} \quad (C.8)$$

Para a primeira equação de (C.8):

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_n & 0 \\ L_{n,1} & L_{n,2} & \cdots & L_{n,n} & L_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_1 z_1 = b_1 \\ L_2 z_2 = b_2 \\ \vdots \\ L_n z_n = b_n \\ \sum_{i=1}^n L_{n,i} z_i + L_{n+1} z_{n+1} = b_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_i = L_i^{-1} b_i, \quad i = 1, \dots, n \\ z_{n+1} = L_{n+1}^{-1} (b_{n+1} - \sum_{i=1}^n L_{n,i} z_i) \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Para a segunda equação de (C.8):

$$\begin{bmatrix} L_1^t & 0 & \cdots & 0 & L_{n,1}^t \\ 0 & L_2^t & \cdots & 0 & L_{n,2}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_n^t & L_{n,n}^t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{n+1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = L_{n+1}^{-1} z_{n+1} \\ x_n = L_n^{-t} (z_n - L_{n,n}^t x_{n+1}) \\ \vdots \\ x_2 = L_2^{-t} (z_2 - L_{n,2}^t x_{n+1}) \\ x_1 = L_1^{-t} (z_1 - L_{n,1}^t x_{n+1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = L_{n+1}^{-t} z_{n+1} \\ x_i = L_i^{-t} (z_i - L_{n,i}^t x_{n+1}), \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Aplicando (C.3) em (C.9) e (C.10):

$$\begin{cases} z_i = L_i^{-1}b_i, i = 1, \dots, n \\ z_{n+1} = L_{n+1}^{-1}(b_{n+1} - \sum_{i=1}^n B_i L_i^{-t} z_i) \\ x_{n+1} = L_{n+1}^{-t} z_{n+1} \\ x_i = L_i^{-t}(z_i - L_i^{-1} B_i^t x_{n+1}), i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

O sistema (C.11) é utilizado para resolver  $\Phi x = b$  através da fatoração  $\Phi = LL^t$ .

Uma importante observação é que em nenhum momento são utilizadas as matrizes  $L_{n,i}$ , não sendo necessário calcular as mesmas. Portanto, as fatorações calculadas em (C.9) ou (C.10) são ditas fatorações implícitas.

# Apêndice D

## Solução Detalhada do Sistema $AD^{-1}A^t$

### D.1 Resolução de $AD^{-1}A^t$ para o modelo $(x, u)$

Para o modelo  $(x, u)$  do POLP, a matriz  $AD^{-1}A^t$  tem a seguinte estrutura esparsa:

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -B_{n-1} & B_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -B_n & B_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M \end{array} \right]}_A$$

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccccc|ccccc}
 D_{1(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & D_{2(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & D_{1(2)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & D_{2(2)} & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & D_{1(n-1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{2(n-1)} & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{1(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{2(n)} \\
 \hline
 D_{2(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & D_{3(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & D_{2(2)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & D_{3(2)} & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & D_{2(n-1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{3(n-1)} & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{2(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{3(n)}
 \end{array} \right]}_{D^{-1}}$$

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccccccc}
 B_1 & -B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & B_2 & -B_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & B_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{n-2} & -B_{n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{n-1} & -B_n \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_n \\
 \hline
 M^t & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & M^t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & M^t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & M^t & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M^t & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M^t
 \end{array} \right]}_{A^t} =$$

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccccccc|cccccc}
 B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 -B_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -B_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & M & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & -B_{n-1} & B_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & M & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -B_n & B_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & M
 \end{array} \right]}_A$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
 D_{1(1)}B_1+ & -D_{1(1)}B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 D_{2(1)}M^t & & & & & \\
 0 & D_{1(2)}B_2+ & -D_{1(2)}B_3 & \cdots & 0 & 0 \\
 & D_{2(2)}M^t & & & & \\
 0 & 0 & D_{1(3)}B_3+ & \cdots & 0 & 0 \\
 & & D_{2(3)}M^t & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{1(n-1)}B_{n-1}+ & -D_{1(n-1)}B_n \\
 & & & & D_{2(n-1)}M^t & \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{1(n)}B_n+ \\
 & & & & & D_{2(n)}M^t \\
 D_{2(1)}B_1+ & -D_{2(1)}B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 D_{3(1)}M^t & & & & & \\
 0 & D_{2(2)}B_2+ & -D_{2(2)}B_3 & \cdots & 0 & 0 \\
 & D_{3(2)}M^t & & & & \\
 0 & 0 & D_{2(3)}B_3+ & \cdots & 0 & 0 \\
 & & D_{3(3)}M^t & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & D_{2(n-1)}B_{n-1}+ & -D_{2(n-1)}B_n \\
 & & & & D_{3(n-1)}M^t & \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_{2(n)}B_n+ \\
 & & & & & D_{3(n)}M^t
 \end{bmatrix}}_{D^{-1}A^t} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_1(D_{1(1)}B_1 + D_{2(1)}M^t) + M(D_{2(1)}B_1 + D_{3(1)}M^t) & -(B_1D_{1(1)} + MD_{2(1)})B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -B_2(D_{1(1)}B_1 + D_{2(1)}M^t) & B_2D_{1(1)}B_2 + B_2(D_{1(2)}B_2 + D_{2(2)}M^t) + M(D_{2(2)}B_2 + D_{3(2)}M^t) & -(B_2D_{1(2)} + MD_{2(2)})B_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_3(D_{1(2)}B_2 + D_{2(2)}M^t) & B_3D_{1(2)}B_3 + B_3(D_{1(3)}B_3 + D_{2(3)}M^t) + M(D_{2(3)}B_3 + D_{3(3)}M^t) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{n-2}D_{1(n-3)}B_{n-2} + B_{n-2}(D_{1(n-2)}B_{n-2} + D_{2(n-2)}M^t) + M(D_{2(n-2)}B_{n-2} + D_{3(n-2)}M^t) & -(B_{n-2}D_{1(n-2)} + MD_{2(n-2)})B_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -B_{n-1}(D_{1(n-2)}B_{n-2} + D_{2(n-2)}M^t) & B_{n-1}D_{1(n-2)}B_{n-1} + B_{n-1}(D_{1(n-1)}B_{n-1} + D_{2(n-1)}M^t) + M(D_{2(n-1)}B_{n-1} + D_{3(n-1)}M^t) & -(B_{n-1}D_{1(n-1)} + MD_{2(n-1)})B_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -B_n(D_{1(n-1)}B_{n-1} + D_{2(n-1)}M^t) & B_nD_{1(n-1)}B_n + B_n(D_{1(n)}B_n + D_{2(n)}M^t) + M(D_{2(n)}B_n + D_{3(n)}M^t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_1 & C_1^t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & \Phi_2 & C_2^t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & \Phi_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Phi_{n-2} & C_{n-2}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-2} & \Phi_{n-1} & C_{n-1}^t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-1} & \Phi_n \end{bmatrix} = \Phi.$$

Onde:

$$\begin{cases} C_i = -B_{i+1}(D_{1(i)}B_i + D_{2(i)}M^t), \forall i = 1, \dots, n \\ \Phi_i = B_i D_{1(i-1)} B_i + B_i (D_{1(i)} B_i + D_{2(i)} M^t) + M (D_{2(i)} B_i + D_{3(i)} M^t), \\ \forall i = 2, \dots, n \\ \Phi_1 = B_1 (D_{1(1)} B_1 + D_{2(1)} M^t) + M (D_{2(1)} B_1 + D_{3(1)} M^t). \end{cases}$$

A matriz  $AD^{-1}A^t$  pode ser associada a uma fatoração  $LL^t$  cuja matriz  $L$  é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ L_{n,1} & L_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{n,2} & L_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_{n,n-2} & L_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{n,n-1} & L_n \end{bmatrix}.$$

Os valores de  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são obtidos com:

$$\Phi = LL^t = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_{n,1} & L_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n,n-1} & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^t & L_{n,1}^t & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_2^t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n-1}^t & L_{n,n-1}^t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_n^t \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} L_1 L_1^t & L_1 L_{n,1}^t & \cdots & 0 & 0 \\ \hline L_{n,1} L_1^t & L_{n,1} L_{n,1}^t + & \cdots & 0 & 0 \\ & L_2 L_2^t & & & \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & L_{n,n-2} L_{n,n-2}^t + & L_n L_{n,n-1}^t \\ & & \cdots & L_{n-1} L_{n-1}^t & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & L_{n,n-1} L_n^t & L_{n,n-1} L_{n,n-1}^t + \\ & & & & L_n L_n^t \end{array} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \Phi_1 & C_1^t & \cdots & 0 & 0 \\ \hline C_1 & \Phi_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \Phi_{n-1} & C_{n-1}^t \\ \hline 0 & 0 & \cdots & C_{n-1} & \Phi_n \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{cases} L_1 L_1^t = \Phi_1 \\ L_{n,i} L_i^t = C_i, \forall i = 1, \dots, n \\ L_{n,i-1} L_{n,i-1}^t + L_i L_i^t = \Phi_i, \forall i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Porém, não é necessário obter as fatorações  $L_{n,i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Utilizando a segunda equação de (D.1):

$$L_{n,i} L_i^t = C_i \Rightarrow$$

$$L_{n,i} = C_i L_i^{-t} \quad (\text{D.2})$$

Substituindo (D.2) na terceira equação de (D.1):

$$(C_{i-1} L_{i-1}^{-t})(C_{i-1} L_{i-1}^{-t})^t + L_i L_i^t = \Phi_i \Rightarrow$$

$$L_i L_i^t = \Phi_i - (C_{i-1} L_{i-1}^{-t})(C_{i-1} L_{i-1}^{-t})^t = \Phi_i - (L_{i-1}^{-1} C_{i-1}^t)^t (L_{i-1}^{-1} C_{i-1}^t) \Rightarrow$$

$$L_i L_i^t = \Phi_i - (L_{i-1}^{-1} C_{i-1}^t)^t (L_{i-1}^{-1} C_{i-1}^t) \quad (D.3)$$

Dessa maneira, um esquema semelhante ao descrito na Figura (C.1) pode ser aplicado para o cálculo dos fatores  $L_k, \forall k = 2, \dots, n$ , tal que:

$$L_k(i, j) = (L_{k-1}^{-1} C_{k-1}(i\text{-linha})) (L_{k-1}^{-1} C_{k-1}(j\text{-linha})) \quad (D.4)$$

Resolver o sistema linear  $\Phi x = b$  por meio da fatoração  $L$  obtida consiste em resolver os dois sistemas triangulares dados por (C.8):

Para a primeira equação de (C.8):

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_{n,1} & L_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n,n-1} & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_1 z_1 = b_1 \\ L_2 z_2 = b_2 - L_{n,1} z_1 \\ \vdots \\ L_n z_n = b_n - L_{n,n-1} z_{n-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_1 = L_1^{-1} b_1 \\ z_i = L_i^{-1} (b_i - L_{n,i-1} z_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (D.5)$$

Para a segunda equação de (C.8):

$$\begin{bmatrix} L_1^t & L_{n,1}^t & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_2^t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n-1}^t & L_{n,n-1}^t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = L_1^{-t} (z_1 - L_{n,1}^t x_2) \\ x_2 = L_2^{-t} (z_2 - L_{n,2}^t x_3) \\ \vdots \\ x_{n-1} = L_{n-1}^{-t} (z_{n-1} - L_{n,n-1}^t x_n) \\ x_n = L_n^{-t} z_n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_n = L_n^{-t} z_n \\ x_i = L_i^{-t} (z_i - L_{n,i}^t x_{i+1}), i = 1, \dots, (n-1). \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

Aplicando (D.2) em (D.5) e (D.6):

$$\begin{cases} z_1 = L_1^{-1} b_1 \\ z_i = L_i^{-1} (b_i - (C_{i-1} L_{i-1}^{-t}) z_{i-1}), i = 2, \dots, n \\ x_n = L_n^{-t} z_n \\ x_i = L_i^{-t} (z_i - (L_i^{-1} C_i^t) x_{i+1}), i = 1, \dots, (n-1). \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

Uma observação importante é que em nenhum momento são utilizadas as matrizes  $L_{n,i}$ , tal que não é necessário calcular as mesmas. Portanto, as fatorações calculadas em (D.5) ou (D.6) são ditas fatorações implícitas.

## D.2 Resolução de $AD^{-1}A^t$ para o modelo $(x, q, v)$

Para o modelo  $(x, q, v)$  do POLP, a matriz  $AD^{-1}A^t$  tem a seguinte estrutura esparsa:

$$AD^{-1}A^t = \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & | & M & 0 & 0 & | & M & 0 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 & | & 0 & M & 0 & | & 0 & M & 0 \\ 0 & -B_3 & B_3 & | & 0 & 0 & M & | & 0 & 0 & M \end{bmatrix}}_A$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D_{1(1)} & 0 & 0 & | & D_{4(1)} & 0 & 0 & | & D_{6(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{1(2)} & 0 & | & 0 & D_{4(2)} & 0 & | & 0 & D_{6(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{1(3)} & | & 0 & 0 & D_{4(3)} & | & 0 & 0 & D_{6(3)} \\ \hline D_{4(1)} & 0 & 0 & | & D_{2(1)} & 0 & 0 & | & D_{5(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{4(2)} & 0 & | & 0 & D_{2(2)} & 0 & | & 0 & D_{5(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{4(3)} & | & 0 & 0 & D_{2(3)} & | & 0 & 0 & D_{5(3)} \\ \hline D_{6(1)} & 0 & 0 & | & D_{5(1)} & 0 & 0 & | & D_{3(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{6(2)} & 0 & | & 0 & D_{5(2)} & 0 & | & 0 & D_{3(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{6(3)} & | & 0 & 0 & D_{5(3)} & | & 0 & 0 & D_{3(3)} \end{bmatrix}}_{D^{-1}}$$

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|ccc} B_1 & -B_2 & 0 & & & \\ 0 & B_2 & -B_3 & & & \\ 0 & 0 & B_3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline M^t & 0 & 0 & & & \\ 0 & M^t & 0 & & & \\ 0 & 0 & M^t & & & \\ \hline M^t & 0 & 0 & & & \\ 0 & M^t & 0 & & & \\ 0 & 0 & M^t & & & \end{array} \right]}_{A^t} =$$

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} B_1 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ -B_2 & B_2 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & -B_3 & B_3 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & M \end{array} \right]}_A$$


---

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{c|c|c}
 D_{1(1)}B_1+ & -D_{1(1)}B_2 & 0 \\
 D_{4(1)}M^t+ & & \\
 D_{6(1)}M^t & & \\
 \hline
 0 & D_{1(2)}B_2+ & -D_{1(2)}B_3 \\
 & D_{4(2)}M^t+ & \\
 & D_{6(2)}M^t & \\
 \hline
 0 & 0 & D_{1(3)}B_3+ \\
 & & D_{4(3)}M^t+ \\
 & & D_{6(3)}M^t \\
 \hline
 D_{4(1)}B_1+ & -D_{4(1)}B_2 & 0 \\
 D_{2(1)}M^t+ & & \\
 D_{5(1)}M^t & & \\
 \hline
 0 & D_{4(2)}B_2+ & -D_{4(2)}B_3 \\
 & D_{2(2)}M^t+ & \\
 & D_{5(2)}M^t & \\
 \hline
 0 & 0 & D_{4(3)}B_3+ \\
 & & D_{2(3)}M^t+ \\
 & & D_{5(3)}M^t \\
 \hline
 D_{6(1)}B_1+ & -D_{6(1)}B_2 & 0 \\
 D_{5(1)}M^t+ & & \\
 D_{3(1)}M^t & & \\
 \hline
 0 & D_{6(2)}B_2+ & -D_{6(2)}B_3 \\
 & D_{5(2)}M^t+ & \\
 & D_{3(2)}M^t & \\
 \hline
 0 & 0 & D_{6(3)}B_3+ \\
 & & D_{5(3)}M^t+ \\
 & & D_{3(3)}M^t
 \end{array} \right]}_{D^{-1}A^t} =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{l} B_1(D_{1(1)}B_1 + (D_{4(1)} + D_{6(1)})M^t) + \\ M(D_{4(1)}B_1 + (D_{2(1)} + D_{5(1)})M^t) + \\ M(D_{6(1)}B_1 + (D_{5(1)} + D_{3(1)})M^t) \\ \hline -B_2(D_{1(1)}B_1 + (D_{4(1)} + D_{6(1)})M^t) \end{array} & \begin{array}{l} -(B_1D_{1(1)} + M(D_{4(1)} + D_{6(1)}))B_2 \\ \\ \\ \hline B_2D_{1(1)}B_2 + \\ B_2(D_{1(2)}B_2 + (D_{4(2)} + D_{6(2)})M^t) + \\ M(D_{4(2)}B_2 + (D_{2(2)} + D_{5(2)})M^t) + \\ M(D_{6(2)}B_2 + (D_{5(2)} + D_{3(2)})M^t) \\ \hline -B_3(D_{1(2)}B_2 + (D_{4(2)} + D_{6(2)})M^t) \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \\ \\ \hline -(B_2D_{1(2)} + M(D_{4(2)} + D_{6(2)}))B_3 \\ \\ \\ \hline B_3D_{1(2)}B_3 + \\ B_3(D_{1(3)}B_3 + (D_{4(3)} + D_{6(3)})M^t) + \\ M(D_{4(3)}B_3 + (D_{2(3)} + D_{5(3)})M^t) + \\ M(D_{6(3)}B_3 + (D_{5(3)} + D_{3(3)})M^t) \end{array} \\ \hline 0 & & \end{array} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi_1 & C_1^t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & \Phi_2 & C_2^t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & \Phi_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Phi_{n-2} & C_{n-2}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-2} & \Phi_{n-1} & C_{n-1}^t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-1} & \Phi_n \end{bmatrix} = \Phi.$$

Onde:

$$\begin{cases} C_i = -B_{i+1}(D_{1(i)}B_i + (D_{4(i)} + D_{6(i)})M^t), \forall i = 1, \dots, n \\ \Phi_i = B_i D_{1(i-1)} B_i + B_i (D_{1(i)} B_i + (D_{4(i)} + D_{6(i)}) M^t) + \\ M(D_{4(i)} B_i + (D_{2(i)} + D_{5(i)}) M^t) + M(D_{6(i)} B_i + (D_{5(i)} + D_{3(i)}) M^t), \\ \forall i = 2, \dots, n \\ \Phi_1 = B_1 (D_{1(1)} B_1 + (D_{4(1)} + D_{6(1)}) M^t) + M(D_{4(1)} B_1 + (D_{2(1)} + D_{5(1)}) M^t) + \\ M(D_{6(1)} B_1 + (D_{5(1)} + D_{3(1)}) M^t) \end{cases}$$

É importante destacar que as fórmulas obtidas para  $C_i$  e  $\Phi_i$  foram generalizadas para um modelo  $(x, q, v)$  com  $n$  intervalos de tempo.

Além disso,  $\Phi$  possui a mesma estrutura esparsa que foi obtida na resolução de  $\Phi x = b$  para o modelo  $(x, u)$ .

Portanto, todas as deduções de utilização de fatoração por blocos associadas a matriz  $L$ , aplicadas para o modelo  $(x, u)$ , podem ser utilizadas para o modelo  $(x, q, v)$ .

Ou seja, após os cálculos de  $\Phi_i$  e  $C_i$ , específicos do modelo  $(x, q, v)$ , basta utilizar o sistema (D.7) para resolver  $\Phi x = b$  do modelo  $(x, q, v)$ .

# Apêndice E

## Dados do Parque Termelétrico Brasileiro

### E.1 Dados das usinas termelétricas brasileiras

A construção da função de complementação termelétrica  $\Psi(G_t)$  ilustrada na Figura 3.17 utilizou os dados as usinas termelétricas brasileiras que constam na Tabela E.1.

Usina	Potência Instalada	Custo ( $R\$/MWh$ )	Custo ( $R\$/MWm$ )
CUIABA GCC	480	6,4	4608
ANGRA 2	1350	9,2	6646
ANGRA 1	657	10,5	7560
TERMOPE	638	40,0	28800
ARGENTINA 1	1018	42,5	30578
ARGENTINA 2B	200	46,1	33185
ARGENTINA 2A	400	46,1	33185
FORTALEZA	347	58,2	41933
FAFEN	151	71,3	51307
URUGUAIANAG	638	76,0	54713
IBIRITERMO	235	77,5	55771
TERMOCEARA	220	82,7	59558
P.MEDICI A	126	86,1	61978

Usina	Potência Instalada	Custo (R\$/MWh)	Custo (R\$/MWm)
P.MEDICI B	320	86,1	61978
TERMOBAHIA	186	87,1	62726
MACAE MERCHA	923	97,2	69948
ELETROBOLT	386	100,4	72288
NORTEFLU	860	108,0	77760
CANOAS	161	110,5	79546
TRES LAGOAS	240	110,5	79546
J.LACERDA C	363	110,7	79718
TERMORIO	670	124,8	89834
JUIZ DE FORA	87	131,6	94781
CAMACARI G	216	139,1	100145
J.LACERDA B	262	147,4	106092
J.LACERDA A2	132	153,4	110426
ARGENTINA 2C	400	157,3	113220
CHARQUEADAS	72	173,5	124891
NOVA PIRAT	400	180,0	129600
W.ARJONA G	190	185,6	133661
FIGUEIRA	20	186,6	134345
J.LACERDA A1	100	188,1	135432
ARGENTINA 2D	100	191,5	137851
ARGENTINA 1B	60	191,6	137938
R.SILVEIRA G	32	211,5	152302
S.JERONIMO	20	215,0	154829
COCAL	21	220,5	158760
BAHIA I	31	237,3	170878
PETROLINA	128	244,0	175702
ITAENGA	20	244,5	176011
ST.CRUZ 12	168	245,4	176688
ST.CRUZ 34	440	245,4	176688
TERMOCABO	48	256,3	184565
BREITENER	154	273,8	197165
IGARAPE	131	291,2	209686
PIRAT.12 G	200	299,0	215258
ST.CRUZ N.DI	166	408,4	294034

Usina	Potência Instalada	Custo (R\$/MWh)	Custo (R\$/MWm)
CABO	5	427,9	308059
RIO FORMOSO	5	427,9	308059
PORTO	5	427,9	308059
IPOJUCA	5	427,9	308059
PRAZERES	5	427,9	308059
SUAPE	5	427,9	308059
POTIGUAR	48	486,1	349963
R LARGO BRA	168	536,6	386366
TUBARAO	40	537,9	387259
PONTA DO UBU	40	538,0	387367
JARDIM BRA	60	547,5	394229
CIVIT BRA	20	550,7	396526
VCARAPINA BRA	40	550,7	396526
XAVANTES	48	563,3	405583
DAIA	44	586,9	422597
CARIOBA	36	591,5	425866
ALEGRETE	66	779,0	560858
UTE BRASILIA	10	956,9	688975
NUTEPA	24	1215,4	875088

Tabela E.1: Capacidade e Custo de geração para usinas termelétricas brasileiras no ano de 2005.

# Apêndice F

## Modelagem do Fluxo de Potência CC

### F.1 Obtendo o Fluxo de Potência CC

A função de um sistema de transmissão é garantir o fluxo de potência ativa e reativa, seguindo um conjunto de equações e inequações não-lineares, conhecidas como equações de *Fluxo de Carga* ou de *Fluxo de Potência* [72].

As injeções de potência ativa e reativa, para cada barra da rede, podem ser expressas, respectivamente, pelas equações (F.1) e (F.2).

$$P_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + B_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km})) , \quad (\text{F.1})$$

$$Q_k = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) - B_{km} \cos(\theta_{km} + \varphi_{km})) , \quad (\text{F.2})$$

onde:

- $P_k$ : Injeção líquida de potência ativa na barra  $k$ .
- $Q_k$ : Injeção líquida de potência reativa na barra  $k$ .
- $V_k$ : Tensão na barra  $k$ .
- $\theta_k$ : Ângulo de tensão na barra  $k$ .

- $\theta_{km}$ : Diferença angular  $\theta_k - \theta_m$  entre as barras  $k$  e  $m$ .
- $\varphi_{km}$ : Ângulo de defasagem entre as barras  $k$  e  $m$ .
- $\Omega_k$ : Conjunto de todas as barras  $m$  adjacentes à barra  $k$ , incluindo a própria barra  $k$ .
- $G_{km}$  e  $B_{km}$ : Correspondem aos elementos das matrizes de condutância e de susceptância de barra associados as barras  $k$  e  $m$ , respectivamente.

Para a linha de transmissão conectada às barras  $k$  e  $m$ , os fluxos de potência ativa e reativa, respectivamente  $P_{km}$  e  $Q_{km}$  são dados por (F.3) e (F.4):

$$P_{km} = (a_{km}V_k)^2 g_{km} - (a_{km}V_kV_m)[g_{km}\cos(\theta_{km} + \varphi_{km}) + b_{km}\sin(\theta_{km} + \varphi_{km})] \quad , \quad (\text{F.3})$$

$$Q_{km} = -(a_{km}V_k)^2(b_{km} + b_{km}^{sh}) - (a_{km}V_kV_m)[g_{km}\sin(\theta_{km} + \varphi_{km}) - b_{km}\cos(\theta_{km} + \varphi_{km})] \quad , \quad (\text{F.4})$$

onde:

- $P_{km}$ : Fluxo de potência ativa do ramo que conecta as barras  $k$  e  $m$ .
- $Q_{km}$ : Fluxo de potência reativa do ramo que conecta as barras  $k$  e  $m$ .
- $a_{km}$ : Valor do tap do ramo que conecta as barras  $k$  e  $m$ .
- $g_{km}$ : Condutância série do ramo que conecta as barras  $k$  e  $m$ .
- $b_{km}$ : Susceptância série do ramo que conecta as barras  $k$  e  $m$ .
- $b_{km}^{sh}$ : Susceptância do shunt que conecta as barras  $k$  e  $m$ .

As equações (F.1), (F.2), (F.3) e (F.4) constituem um conjunto de equações não lineares, também denominado de fluxo de potência CA (Corrente Alternada). Para sua resolução são desenvolvidos métodos numéricos que utilizam processos iterativos para encontrar uma solução. Os métodos mais utilizados são Newton-Raphson, Newton Desacoplado e Newton Desacoplado Rápido [71].

Para redes de transmissão de Extra-alta tensão (EHV) e Ultra-alta Tensão (UHV), as reatâncias dos ramos são muito maiores que as resistências (relações

$X/R > 5$  são tipicamente encontradas). Assim, a relação entre fluxo de potência ativa e as aberturas angulares é do mesmo tipo da existente entre os fluxos de corrente e as quedas de tensão em um circuito de corrente contínua, para a qual é válida a lei de Ohm. Esta propriedade permite o desenvolvimento de um modelo aproximado, chamado de fluxo de potência CC (Corrente Contínua), também chamado de modelo linearizado.

É importante observar que o fluxo de potência CC não considera as magnitudes das tensões nodais, as potências reativas e os *taps* dos transformadores. Porém, como este é baseado no acoplamento entre as variáveis  $P$  e  $\theta$  (potência ativa e ângulo), apresentará resultados tanto melhores quanto mais elevado o nível de tensão [71].

A expressão para o fluxo de potência ativa no ramo  $k - m$ , no modelo CC, é obtida desprezando-se as perdas da expressão (F.3) [71]:

$$P_{km} = -V_k V_m b_{km} \text{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) . \quad (\text{F.5})$$

E realizando algumas considerações tais como:

- $V_k \cong V_m \cong 1pu$ .
- $\text{sen}(\theta_{km} + \varphi_{km}) \cong (\theta_{km} + \varphi_{km})$ .
- $b_{km} \cong \frac{-1}{x_{km}}$ .
- $\varphi_{km} = 0$ .

Para simplificar as deduções foi adotado que transformadores defasadores não são considerados ( $\varphi_{km} = 0$ ). Mais à frente será mostrado como incluir estes transformadores.

As considerações anteriores são tais que o fluxo de potência ativa é simplificado para (F.6).

$$P_{km} = \frac{\theta_{km}}{x_{km}} , \quad (\text{F.6})$$

Ou seja, o fluxo de potência ativa é diretamente proporcional à abertura angular  $\theta_{km}$  sobre o ramo  $k - m$  e inversamente proporcional à sua reatância  $x_{km}$ , sendo ainda que o sentido positivo do fluxo será da barra de maior ângulo para a de menor.