

OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DE REDES DE ESCOAMENTO

Otimização da operação integrada de redes de escoamento envolvendo atividades de produção, transporte, estocagem e distribuição, utilizando decomposição hierárquica multi-nível com coordenação pelo objetivo.

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas da UNICAMP para cumprimento parcial dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica opção Automação.

Eliezer Arantes da Costa

Orientadores:

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura e
Prof. Dr. Hermano M. F. Tavares

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP
Faculdade de Engenharia de Campinas - FEC
Departamento de Engenharia Elétrica

CAMPINAS - SP - JULHO DE 1979

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

RESUMO

Neste trabalho estudam-se as operações de redes de escoamento, constituídas por atividades integradas de produção, transporte, estocagem e distribuição, com o objetivo de determinar uma política ótima de operação desses sistemas.

Este problema é formulado como uma programação convexa multi-estágios, de grande porte, com restrições lineares representando requisitos tecnológicos, comerciais e financeiros.

O estado do sistema é descrito pelos níveis de estocagem nos silos da rede, no fim de cada estágio, enquanto que o controle é efetuado sobre a produção, o transporte e a distribuição, durante cada um dos estágios.

A função de custo, a ser minimizada, é uma função convexa dos vetores de estado e de controle.

O problema assim formulado é primeiramente decomposto em dois níveis hierárquicos através de um método de coordenação pelo objetivo, obtendo-se, no nível inferior, quatro sub-problemas desacoplados: de produção, de transporte, de estocagem e de distribuição, que são convenientemente manipulados, no nível superior, por um problema de coordenação de escoamentos.

Por sua vez, os sub-problemas são igualmente decompostos em dois novos níveis hierárquicos, resultando, no nível inferior, vários sub-problemas locais e instantâneos de otimização, devidamente manipulados por outros problemas de coordenação.

Um caso particular é estudado quando a função objetivo é uma função cúbica do estado e uma função linear do controle, para o qual os algoritmos são desenvolvidos.

Uma interpretação econômica do processo de decomposição é apresentada.

Algumas generalizações são apresentadas, quanto à estrutura do grafo, quanto ao tipo de fluxo; uma indicação para demanda aleatória é também mostrada.

PREFÁCIO

Este trabalho é dedicado ao estudo e modelagem de um tipo particular de sistema dinâmico sob forma de rede, ou grafo, destinado ao escoamento de produtos desde os pontos de produção ou de aquisição sendo transportados até os pontos de distribuição ou consumo, passando por silos de estocagem iniciais, intermediários e terminais.

A motivação principal do autor no estudo desses sistemas está exatamente nos problemas de otimização operacional de grande porte, de grande interesse social e econômico.

Os problemas estratégicos das redes de escoamento, tais como: projeto da rede, dimensionamento de silos, dimensionamento da capacidade de produção, por exemplo, não são aqui considerados. A ênfase do trabalho é dada aos problemas originados pelas dificuldades inerentes à programação da operação integrada de um sistema suposto dado.

Apresentam-se de uma forma um pouco mais rigorosa, os conceitos que serão utilizados, chegando-se a uma formulação de um problema genérico de programação convexa multi-estágio de escoamentos determinísticos.

Procede-se a seguir, à decomposição hierárquica do problema, gerando um esquema de coordenação multi-nível.

Descreve-se uma aplicação dos resultados sobre um problema específico de otimização de escoamento, com o desenvolvimento de um algoritmo especialmente aplicável à forma particular do problema tratado.

Finalmente, é mostrada uma interessante interpretação econômica do método de coordenação adotado.

Algumas possíveis generalizações do problema são indicadas e tratadas de forma breve e introdutória.

Apesar deste trabalho ser despretencioso, sob o ponto de vista teórico e computacional, talvez uma rápida pincelada retrospectiva possa dar uma idéia do valor educativo que seu desenvolvimento representou para o autor: As origens do presente trabalho remontam ao período de 1968

a 1974 durante o qual o autor teve a grata oportunidade de atuar como responsável pela organização e funcionamento de um dos mais antigos grupos de pesquisa operacional do Brasil, na Cia. Vale do Rio Doce, em Vitória do Espírito Santo. Em 1974, o autor juntamente com Francisco Oliveira Filho, encarregados de estudar uma política de gerenciamento dos estoques de minério de ferro para exportação, experimentaram, com sucesso, uma formulação de um caso particular do problema, utilizando os princípios de programação dinâmica para otimizar a programação anual de estoques de minério de ferro no porto de Tubarão, E.S. Posteriormente, os mesmos autores, então trabalhando na Divisão de Engenharia de Sistemas da Promon Engenharia e matriculados no curso de Mestrado em Engenharia da UNICAMP lograram fazer, em 1976, uma extensão do trabalho anterior, [6] incorporando novos conceitos de programação dinâmica auxiliados pelos professores Dr. Gerard Authié e Dr. Fernando Curado.

Entretanto, o salto significativo sob o ponto de vista de modelagem, foi obtido posteriormente com a introdução dos conceitos de controle ótimo discreto, de fluxo em grafos com estocagem sobre os nós e, principalmente, de conceitos de programação hierárquica que permitiu a decomposição de um problema de escoamento de grande porte em muitos outros sub-problemas de menor porte e solução mais simples. Para esta fase, foram muito úteis os contatos e discussões, sugestões e estímulo dos professores Dr. Hermano Tavares e Celso Bottura.

Durante a fase final do trabalho, o autor recebeu valiosa colaboração dos colegas Anilton Garcia, na programação, Walmir Montalvão e Maria Luiza Goi, na codificação e da senhorita Elza Cotegeipe, na cuidadosa datilografia. O autor deseja expressar seu reconhecimento sincero a todos esses colegas de trabalho e professores.

Deseja também agradecer o indispensável estímulo e incentivo recebido de amigos dedicados tais como Bernardo Szpigel da CVRD, Dr. Miguel Taube Netto do IMECC - UNICAMP e Carlos M. S. Siffert, da Promon Engenharia.

Entretanto, nada disso seria possível sem o apoio incondicional de sua esposa Riitta e sem a motivação recebida de seus filhos Cristina, Carlos, Mônica e Nanci.

INDICE

- I. Plano Geral do Trabalho
 - I.1. Apresentação do problema
 - I.2. Orientação geral do trabalho
 - I.3. Notação para as matrizes
- II. Formulação dos Problemas de Otimização de Escoamento
 - II.1. Apresentação
 - II.2. Conceitos básicos
 - II.3. Conceitos específicos para o trabalho
 - II.4. Conceito de escoamento, nível e fluxo
 - II.5. Problema de otimização de escoamento
- III. Decomposição dos Problemas de Otimização do Escoamento
 - III.1. Resumo da Teoria da Dualidade
 - III.2. Aplicação da Teoria da Dualidade ao (PCOE)
 - III.3. Separabilidade do (SP.PCOE)
- IV. Decomposição do Sub-problema de Otimização de Estocagem
 - IV.1. Separabilidade temporal de (SP.X)
 - IV.2. Sub-problema convexo-linear-canalizado de estocagem
 - IV.3. Decomposição hierárquica do (SP.CLC.X.k)
 - IV.4. Solução dos sub-problemas (SP.CLC.X.ik)
- V. Sub-problema de Otimização de Transportes
 - V.1. Separabilidade temporal do (SP.U)
 - V.2. Sub-problema convexo-linear-canalizado de transporte
 - V.3. Decomposição hierárquica do (SP.CLC.U.k)
- VI. Sub-problema de Otimização de Produção e de Distribuição
 - VI.1. Separabilidade nodal do (SP.S)
 - VI.2. Sub-problema convexo-linear-canalizado de produção
 - VI.3. Decomposição hierárquica do (SP.CLC.S.i)
 - VI.4. Sub-problema (SP.V)
- VII: Exemplo de Aplicação a um Sistema Real
 - VII.1. Apresentação
 - VII.2. Descrição do sistema
 - VII.3. Equação dinâmica do sistema
 - VII.4. As restrições de problema
 - VII.5. Função objetivo
 - VII.6. O problema formalizado
 - VII.7. Apresentação dos sub-problemas
 - VII.8. Solução dos sub-problemas
- VIII. Interpretação Econômica da Coordenação pelo Objetivo
 - VIII.1. As funções e características do gerente operacional
 - VIII.2. Fatores de interconexão do sistema
 - VIII.3. Tipos de decomposição
 - VIII.4. Sequência de decomposição escolhida
 - VIII.5. Sequências alternativas de decomposição
 - VIII.6. Interpretação econômica da decomposição

IX. Generalizações dos Problemas de Otimização de Escoamento

- IX.1. Generalizações quanto à estrutura do grafo
- IX.2. Generalizações quanto ao escoamento
- IX.3. Generalizações quanto ao fluxo
- IX.4. Generalizações para demanda aleatória

Referências

Apêndice A . Resumo dos Conceitos da Teoria dos Grafos

- A.1. Grafo, nó e arco
- A.2. Matriz de incidência
- A.3. Arcos convergentes e divergentes
- A.4. Nós origem e nós destino
- A.5. Redes de escoamento

Apêndice B . Resumo dos Resultados da Teoria de Dualidade

- B.1. Teoria de dualidade para problemas convexos de otimização
- B.2. Solução do problema dual (PD')

Apêndice C . Método de Gradiente Ótimo com Busca Unidimensional

- C.1. Método de gradiente ótimo para problemas irrestritos
- C.2. Método de gradiente ótimo para problemas com restrições

Apêndice D . Programação Linear Canalizada

- D.1 Com mais de uma restrição
- D.2 Com uma única restrição

I. PLANO GERAL DO TRABALHO

I.1. Apresentação do Problema

Nos sistemas produtivos, de maneira geral, o ritmo de produção raramente segue o mesmo ritmo da entregas, por diversas razões:

- a programação da produção leva em conta fatores próprios do universo da empresa, tais como: fatores humanos, fatores climáticos, existência de matéria prima, produtividade das instalações bem como interrupções programadas tais como manutenção geral ou férias coletivas.
- a entrega, por outro lado, segue as leis do mercado, ditada pelo interesse dos clientes e fatores ligados ao transporte do produto.

Este descompasso entre produção e entrega é contornado satisfatoriamente através de instalações de armazenagem de produtos convenientemente geridos. É basicamente sobre a gestão destes estoques que procuraremos desenvolver o trabalho.

O problema geral de gestão operacional de estoques abordado aqui, além da estocagem propriamente dita, envolve também a movimentação do produto sobre uma rede de transporte e de estocagem chamada rede de escoamento.

O produto entra no sistema através de alguns pontos especiais e são ali estocados. Desse estoque na zona de recebimento, são eles transportados por uma rede de transportes para as zonas de entrega, onde são novamente estocados, sofrendo também, ao longo da rede, estocagens intermediárias.

Dos estoques para entrega, são eles retirados através de operações de distribuição, abandonando, assim, o sistema em questão.

I.2. Orientação geral do trabalho

Procurou-se estruturar o trabalho sob a forma tanto quanto possível rigorosa, partindo-se de conceitos gerais e consagrados, como Teoria dos Grafos e, a partir daí, através de definições e de hipóteses particularizadoras, construir um problema suficientemente geral mas ainda trabalhável, que represente a maioria dos problemas práticos de otimização de escoamentos sobre redes.

A medida que novas hipóteses simplificadoras vão sendo introduzidas, mais trabalhável se torna o problema, até o ponto de se obter soluções relativamente simples para os problemas e sub-problemas formulados.

O raciocínio lógico que orientou os trabalhos pode ser visto na Figura I.1. Através delas o leitor poderá se situar no contexto, sabendo exatamente quais são as hipóteses necessárias para validade dos algoritmos apresentados.

I.3. Notação para as matrizes

Adotamos, para o trabalho, uma notação para representação de quadros ("arrays"), inspirada nos escritos de Sakarovitch [20].

O Quadro I.1 apresenta as principais notações adotadas, destacando-se:

- matrizes tri-dimensionais
- matrizes retangulares
- vetores linha, linhas de matrizes
- vetores coluna, colunas de matrizes
- elementos de quadros.

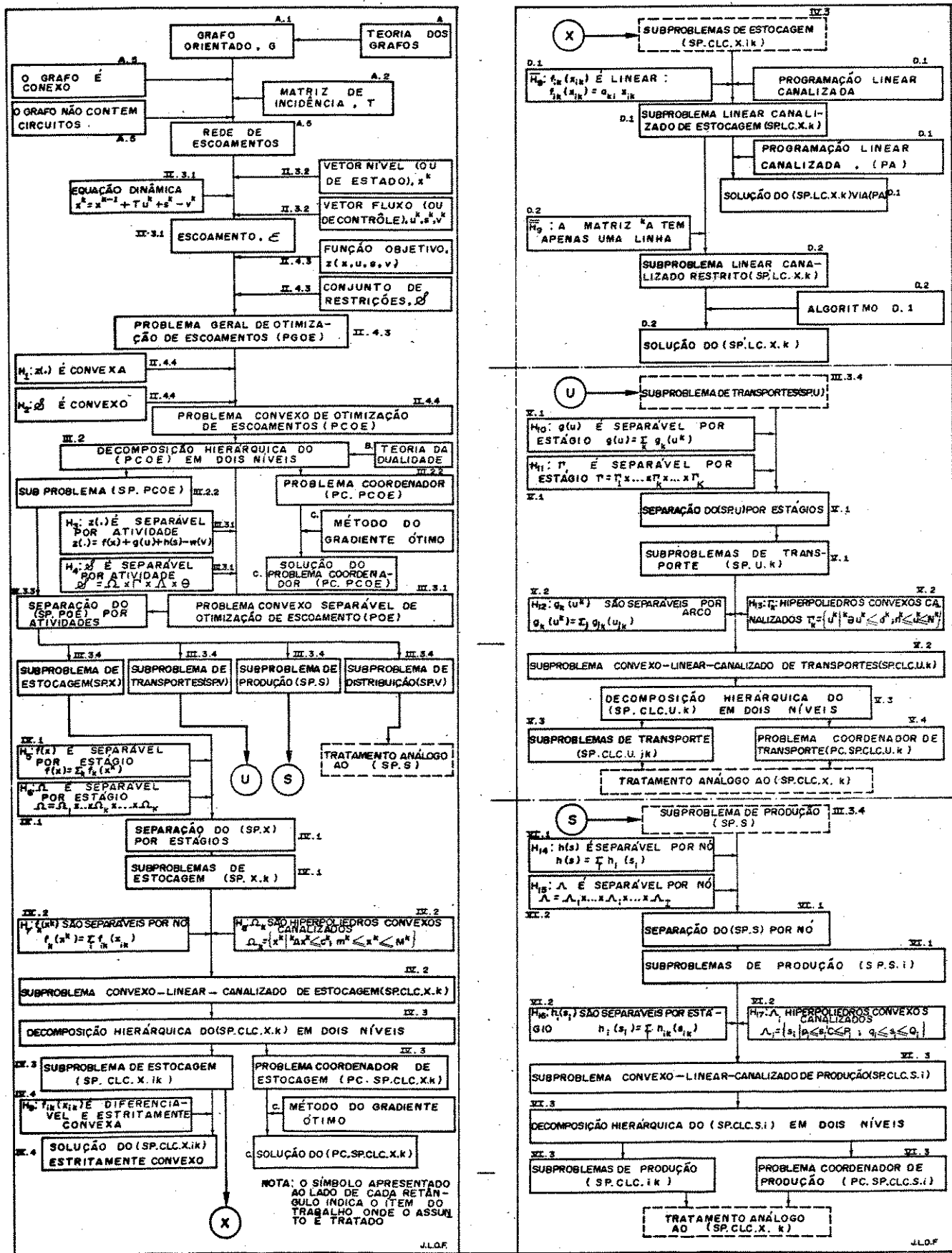


FIGURA I.1.- Esquema geral da apresentação do trabalho

QUADRO I.1

NOTAÇÃO UTILIZADA NAS MATRIZES E VETORES

	MATRIZ TRI-DIMENSIONAL	MATRIZ	VETOR LINHA	VETOR COLUNA	ELEMENTO
MATRIZ DE INCIDÊNCIA		T	T_i	T^j	T_{ij}
VARIÁVEIS DOS PROBLEMAS	-	x	x_i	x^k	x_{ij}
	-	u	u_j	u^k	u_{jk}
	-	s	s_i	s^k	s_{ik}
	-	v	v_i	v^k	v_{ik}
MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	-	γ	γ_k	γ^i	γ_{ki}
	-	λ	λ_k	λ^ℓ	$\lambda_{k\ell}$
	-	μ	μ_k	μ^ℓ	$\mu_{k\ell}$
	-	$\eta, \bar{\eta}$	$\eta_\ell, \bar{\eta}_\ell$	$\eta^i, \bar{\eta}^i$	$\eta_{\ell i}, \bar{\eta}_{\ell i}$
	-	$v, \bar{v}$	$v_\ell, \bar{v}_\ell$	$v^i, \bar{v}^i$	$v_{\ell i}, \bar{v}_{\ell i}$
MATRIZES TECNOLÓGICAS	A	k_A	$k_{A\ell}$	k_A^i	$A_{\ell ik}$
	B	k_B	$k_{B\ell}$	k_B^j	$B_{\ell jk}$
	C	i_C	i_{Ck}	i_C^ℓ	$C_{k\ell i}$
	D	i_D	i_{Dk}	i_D^ℓ	$D_{k\ell i}$
LIMITANTES DE RECURSOS	-	c	c_ℓ	c^k	$c_{\ell k}$
	-	d	d_ℓ	d^k	$d_{\ell k}$
	-	p, P	p_i, P_i	p^ℓ, P^ℓ	$p_{i\ell}, P_{i\ell}$
	-	r, R	r_i, R_i	r^ℓ, R^ℓ	$r_{i\ell}, R_{i\ell}$
LIMITANTES DE CANALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS	-	m, M	m_i, M_i	m^k, M^k	m_{ik}, M_{ik}
	-	n, N	n_j, N_j	n^k, N^k	n_{jk}, N_{jk}
	-	q, Q	q_i, Q_i	q^k, Q^k	q_{ik}, Q_{ik}
	-	e, E	e_i, E_i	e^k, E^k	e_{ik}, E_{ik}

II. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE ESCOAMENTO

II.1. Apresentação

Os problemas de produção, de transportes de estocagem e de distribuição têm sido separadamente tratados na literatura de forma extensiva [3, 4, 8, 9, 16, 21, 22].

Nosso propósito, entretanto, será entrelaçar convenientemente estes quatro problemas de tal forma a criar modelos e algoritmos que permitam a otimização concomitante dessas quatro atividades operativas que, na realidade, constituem-se em apenas uma única operação combinada de produção-transporte-estocagem - distribuição, que chamaremos de "escoamento", a ser otimizada.

A maioria dos problemas de otimização de produção ou de transporte bem como a maioria dos problemas de otimização de estocagem ou de distribuição podem ser considerados como casos particulares de problemas de uma classe mais geral, que aqui chamaremos de problemas de otimização de escoamentos [5, 7].

Os escoamentos que aqui veremos, são supostos ocorrer sobre estruturas particulares, a semelhança de redes de transporte ao longo da qual se permitem pontos de acumulação temporária de matéria ou produto.

As áreas de aplicações mais imediatas deste conceito de escoamento podem ser encontradas na geração hidro-elétrica [13,14,18], na produção estocagem e transporte de safras agrícolas [1] ou na produção, beneficiamento e transporte de minérios até os mercados consumidores [6]. Propoi indica outras aplicações [19].

II.2. Conceitos básicos

O trabalho que se segue pretende ser, tanto quanto possível e, a medida da conveniência, razoavelmente formalizado.

Entretanto, a formalização pretendida será construída sobre conceitos físicos tais como : sistema, processo, produto e tempo.

De mesma maneira, algumas formalizações matemáticas presentes na literatura serão aqui assumidas sem maiores considerações, tais como: conjuntos, naturais, reais, espaços vetoriais e grafos.

Na área específica de otimização, vários conceitos já consagrados serão aqui utilizados sem a devida formalização, por exemplo : função critério, algoritmo, multiplicadores de Lagrange, programação linear e não linear, dualidade e, programação multi-nível [16]. Serão também utilizados conceitos de engenharia de sistemas, tais como: vetor de estado, vetor de controle, equação de estado, bem como idéias gerais de controle ótimo e de dinâmica industrial [10].

II.3. Conceitos específicos para o trabalho

3.1. Redes de escoamento

Os sistemas sobre os quais se desenrolam os escoamentos serão supostos dados e serão modelados a partir de observações das estruturas reais e de seus elementos constituintes. Para fins dessa formulação, as redes de escoamentos serão modeladas sob a forma de estruturas de grafos, como descrito na literatura [3]. Essas redes ou grafos suportarão transportes sobre seus arcos e estocagem sobre seus nós. Receberão produção sobre seus nós origem e permitirão distribuição sobre seus nós destino.

3.2. Processos de escoamento

A evolução, ao longo do tempo, do escoamento em uma rede, será modelada como constituída a partir da evolução de grandezas reais associados à produção e distribuição nos nós, e aos transportes nos arcos, que chamaremos fluxos, e a estocagens nos nós, que chamaremos níveis [10]. Ao processo combinado pelos fluxos e pelos níveis, chamaremos de "processos de escoamento".

3.3. Escoamentos com atraso

Na maioria dos sistemas reais, o tempo de viagem do produto ao longo de um arco não pode ser negligenciado sem se introduzir distorções apreciáveis nos modelos. Assim sendo serão também modeladas certas situações simples de atraso, (IX.2).

3.4. Discretização no tempo

Para efeito deste trabalho, a variável tempo será modelada como sendo discretizada em intervalos não obrigatoriamente espaçados igualmente. Será suposto, portanto, que as variáveis nível só serão observáveis nos instantes de discretização e que as variáveis fluxo só serão observáveis quanto ao total produzido ou distribuído em cada nó e transportado em cada arco, ao longo de cada intervalo de tempo. A grande maioria dos sistemas reais poderá vir a ser tratada satisfatoriamente com o uso de modelos discretos no tempo, pelo que, esta hipótese simplificada não deve ser considerada como severamente limitante para o uso do modelo. O tratamento de escoamento contínuos no tempo está fora do escopo deste trabalho.

3.5. Escoamentos multi-produtos

Para as finalidades do modelamento básico inicial, será suposto que os produtos que escoam na rede podem ser considerados, para efeito de produção, transporte, estocagem, como se fossem um único tipo de produto. Esta hipótese pode ser aceita como razoável, em um bom número de problemas reais. Entretanto, será também indicado o caminho a seguir no caso de vários produtos distintos compartilharem redes de escoamento, (IX.3).

3.6. Transformações de produtos

Na modelagem inicial, não se aceitará que os produtos possam ser transformados em outros produtos ao longo do processo de escoamento. Porém, indicações serão fornecidas sobre o tratamento adequado àqueles nós onde se efetuam transformações de produtos, (IX.3).

3.7. Escoamentos estocásticos

Em toda nossa modelagem, será suposto que fluxos e estoques bem como suas respectivas evoluções ao longo do tempo são conhecidas com certeza. Esta hipótese restritiva limita a gama de aplicações dos modelos que serão desenvolvidos. O tratamento de escoamentos estocásticos está fora do escopo deste trabalho. Entretanto, um caso de demanda aleatória é mostrado, (IX.4).

II.4. Conceito de escoamento, nível e fluxo

Este capítulo tratará de introduzir formalmente os conceitos de escoamento, de nível e de fluxo, calcados sobre conceitos e notação da Teoria dos Grafos e de redes de escoamento apresentados no Apêndice A.

Como já mencionamos anteriormente, os escoamentos que nos interessam, inicialmente, são considerados discretos no tempo, sem atrasos, determinísticos, e com apenas um único produto na rede. Algumas generalizações que eliminem algumas destas restrições serão apresentadas posteriormente, (IX).

4.1. Escoamento em uma Rede

Faremos a seguir a definição de escoamento, nível e fluxo.

Definição II.1

Sejam:

- a - um grafo $G = (X, U)$ em forma de rede de escoamento com matriz de incidência T e conjunto origem X^0 e conjunto destino X^D , não vazios;
- b - uma sucessão de $(K + 1)$ instantes de tempo $t_0 < t_1 < \dots < t_K < \dots$ $\dots < t_K$ determinado K intervalos de tempo $^K(t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{K-1}, t_K]$, numerador de 1 até K ;
- c - um vetor coluna x^0 , associado a t_0 , de dimensão $(I \times 1)$;
- d - uma sucessão de K vetores coluna x^k , formando uma matriz x , $(I \times K)$ associados a cada um dos instantes de tempo, $t_1, \dots, t_k, \dots, t_K$, cujas componentes reais não negativos x_{ik} estão associados a cada um dos nós $X_i \in X$;
- e - uma sucessão de K vetores coluna u^k formando uma matriz u , $(J \times K)$ associados a cada um dos intervalos de

tempo $(t_{k-1}, t_k]$ e cujas componentes reais não negativas u_{jk}^k estão associadas a cada um dos arcos U_j de G ;

- f - duas sucessões de K vetores coluna, s^k e v^k , formando duas matrizes s e v , ambas $(I \times K)$, associados a cada um dos intervalos de tempo $(t_{k-1}, t_k]$ cujas componentes reais não negativas s_{ik} e v_{ik} estão associadas a cada um dos nós,

verificando a seguinte sucessão de equações dinâmicas:

$$x^k = x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k; k = 1, 2, \dots, K$$

$$\text{dado } x^0 \quad (II.1)$$

então, chama-se escoamento sobre o grafo G , de x^0 até x^D , na sucessão, $\{t_k\}$, ao processo descrito pelas quatro matrizes x , u , s , v e pelo vetor x^0 , e se denota por $\epsilon = (x^0, x, u, s, v)$

4.2. Vetor nível e vetor fluxo

A partir da definição de escoamento acima, pode-se introduzir o conceito de vetor nível e vetor fluxo, de acordo com os conceitos de dinâmica industrial [10].

Definição II.2

Seja um escoamento $\epsilon = (x^0, x, u, s, v)$ sobre um grafo $G(X, U)$

Então:

- i) chamam-se vetores nível no conjunto de nós X aos vetores x^k ;
- ii) chamam-se vetores fluxo no conjunto de arcos U de G , aos vetores u^k, s^k, v^k .

4.3. Vetor de estado e vetor de controle

Na terminologia da teoria de controle de sistemas, o conceito de vetor nível pode ser associado ao de vetor estado do sistema e estes termos poderiam ser utilizados indistintamente. A utilização do termo nível, entretanto, tem a virtude de associação imediata do modelo com o nível de estocagem dos sistemas que se pretende estudar.

Analogamente, o conceito de vetor fluxo pode também ser associado ao de vetor de controle do sistema e estes termos poderiam ser utilizados indistintamente. A utilização do termo fluxo, entretanto, permite a associação imediata com a idéia da movimentação física de matéria ou de produto através dos meios de transporte ou da produção para os estoques, ou ainda, dos estoques para os destinos.

A Figura II.1, a seguir, ilustra a sequência de vetores nível (ou estado) e dos vetores fluxo (ou controle) de um escoamento, relacionando-os no tempo. Uma interpretação física de escoamento é dado em VII.

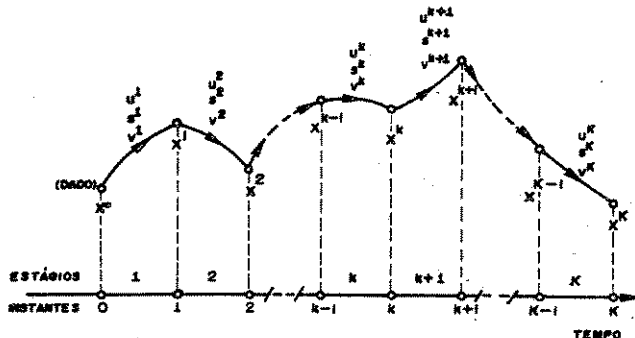


FIGURA II.1 - Sequência de vetores de estado e de controle em um escoamento

II.5. Problemas de otimização de escoamentos

Os processos de escoamento definidos atrás, ocorrendo em sistemas produtivos, consomem ou imobilizam recursos que, por serem escassos, devem ser utilizados de maneira econômica e é exatamente neste fato que reside a maior motivação do presente trabalho.

5.1. Restrições sobre as variáveis

As variáveis nível e fluxo em uma rede de escoamento não estão livres para assumir qualquer valor no campo dos reais.

Muitas restrições são impostas aos escoamentos, dadas pelas características físicas, tecnológicas, financeiras ou comerciais de funcionamento do sistema.

Em nossa formulação serão considerados quatro tipos de restrições sobre os vetores:

- a - restrições sobre os níveis de estocagem;
- b - restrições sobre os fluxos de produção;
- c - restrições sobre os fluxos de transportes;
- d - restrições sobre os fluxos de distribuições

5.2. Função objetivo

A função objetivo para a operação de escoamento, que representa um real a ser minimizado é considerada como constituída das seguintes parcelas:

- a - custo de produção
- b - custo de estocagem
- c - custo de transporte
- d - receita da distribuição

Deve-se também prover uma forma de valorizar estados futuros desejáveis e penalizar estados futuros indesejáveis. Isto pode ser feito escolhendo valores convenientes para os custos de estocagem no fim do último estágio de programação.

5.3. O problema geral de otimização de escoamentos

Com estas considerações, pode-se formular um problema geral de otimização de escoamentos, como segue:

Sejam dados:

- i) um grafo $G(X, U)$, com matriz de incidência T ;
- ii) uma sucessão de $(K + 1)$ instantes de tempo $\{t_k\}$, determinando K intervalos de tempo $(t_{k-1}, t_k]$, numerados de 1 a K
- iii) um subespaço $\& \in R^{(3I+J).K}$
- iv) uma função real $z(x, u, s, v)$ definida em $\&$
- v) um estado inicial x^0

Definiremos um problema geral de otimização de escoamentos como sendo o problema de determinar um escoamento $\epsilon = (x^0, x^*, u^*, s^*, v^*)$ que minimize a função $z(x, u, s, v)$ dada, atendendo à restrição $(x^*, u^*, s^*, v^*) \in \&$.

Este problema geral de otimização de escoamento, que denotaremos por (PGOE) pode ser escrito sob forma abreviada como segue:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad z(x, u, s, v) \\ & (x, u, s, v) \\ & \text{sujeito a:} \\ & \text{(PGOE): } x^k = x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k, \\ & \quad K = 1, \dots, K \\ & \text{dado } x^0 \\ & (x, u, s, v) \in \& \end{aligned}$$

Este problema tal qual acima formulado é de solução praticamente impossível pelos meios convencionais, a não ser que certas hipóteses simplificadoras possam ser adotadas.

5.4. Problema convexo de otimização de escoamentos

Para tornar possível a aplicação da teoria da dualidade, façamos inicialmente as seguintes hipóteses simplificadoras:

- H.1: $z(x, u, s, v)$ é uma função convexa
- H.2: $\&$ é um subespaço convexo

Com estas hipóteses vamos construir um problema de otimização mais restrito, porém de melhor tratamento.

Chamemo-lo problema convexo de otimização de escoamentos:

$$\begin{array}{l}
 \text{Min} \quad z(x, u, s, v) \in T_c \\
 (x, u, s, v) \\
 \text{sujeito a:} \\
 \text{(PCOE): } x^k = x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k, \\
 \quad \quad \quad k = 1, \dots, K \\
 \text{dado } x^0 \\
 (x, u, s, v) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}
 \end{array}$$

onde:

T_c é a família das funções convexas em $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ é a família dos subespaços convexas em $\mathbb{R}^{3I+J}$

Veremos, a seguir, uma forma de decompor o (PCOE) em dois outros problemas mais simples.

III. DECOMPOSIÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE ESCOAMENTO

III.1. Resumo da Teoria da Dualidade

A solução do (PCOE), ou melhor, de sua versão simplificada (PCOE) que supõe a convexidade da função objetivo e das restrições é dificultada pelo porte dos problemas práticos razão pela qual se torna desejável dispor de métodos que permitam executar uma decomposição do problema original.

Entre os métodos de decomposição disponíveis na literatura optamos por um que forneça uma separação "natural" do problema em sub-problemas que tenham uma certa consistência lógica e mesmo operacional, [8, 21].

Isto foi feito utilizando-se os resultados da Teoria da Dualidade, conforme apresentada no Apêndice B [8, 13, 18], embora haja outras alternativas [9, 14, 19, 22].

III.2. Aplicação da Teoria da Dualidade ao (PCOE)

2.1. Analogia entre (P) e (PCOE)

Retomemos agora o problema (PCOE) apresentado em II e apliquemos sobre ele os conceitos e resultados descritos no Apêndice B, [15].

Através de simples comparação entre o (PCOE) e (P), do Apêndice pode-se observar sua semelhança estrutural, bastando, para isto, fazermos as seguintes correspondências:

- i) a variável x é substituída pela variável (x, u, s, v)
- ii) a função $f(x)$ é substituída pela função $z(x, u, s, v)$
- iii) a restrição $g_i(x) \leq 0$ é substituída pelas restrições

$$x^k - x^{k-1} - T u^k - s^k + v^k = 0, \quad k = 1, \dots, K$$
- iv) o conjunto S é substituído pelo conjunto $\&$

Assim, com algumas modificações ligeiras ditadas pela notação e pelo fato de que a restrição em (PCOE) ser uma igualdade enquanto que em (P) é uma desigualdade, podemos escrever os problemas resultantes.

2.2. Problema coordenador e sub-problema associados ao (PCOE)

Escrevamos o Lagrangeano do problema (PCOE):

$$L(x, u, s, v, \gamma) = z(x, u, s, v) + \sum_{k=1}^K \gamma_k [x^k - x^{k-1} - T u^k - s^k + v^k] \quad (\text{III.1})$$

onde γ_k é um vetor linha, chamado vetor multiplicador de Lagrange para a k -ésima equação dinâmica relaxada. Seja γ a matriz de dimensão $(K \times 1)$ formada com os vetores linhas γ_k .

Escrevamos agora o par primal-dual correspondentes ao (PCOE):

(PP.PCOE):

(PD.PCOE):

$$\begin{aligned} \text{Min}_{(x, u, s, v)} \quad & z(x, u, s, v) \\ \text{sujeito a:} \quad & x^k = x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k \\ & k = 1, \dots, K \\ & (x, u, s, v) \in \& \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Max}_{\gamma} \quad & \phi(\gamma) \\ & \gamma \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

onde:

$$\phi(\bar{\gamma}) = \min_{(x, u, s, v) \in \&} L(x, u, s, v, \bar{\gamma}) \quad (\text{III.2})$$

e $\bar{\gamma}$ é um valor particular de γ .

Como a solução de (PD.PCOE) implica também na solução de (PP.PCOE) e como (PD.PCOE) é mais simples do que (PP.PCOE), pode-se resolver (PCOE) resolvendo-se (PD.PCOE). Entretanto, como a solução de (PD.PCOE) não é elementar, criamos um problema equivalente, mais simples.

(PD'.PCOE):

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\gamma \text{ irrestrito}} \quad & \left[\min_{(x, u, s, v) \in \&} L(x, u, s, v, \gamma) \right] \end{aligned}$$

Assim, pode-se definir dois problemas associados a (PD'.PCOE) que, resolvidos alternadamente, resultam na solução de (PD'.PCOE) e, consequentemente, de (PCOE). Analogamente a (SP) e (PC), podemos escrever (SP.PCOE) e (PC.PCOE) a seguir:

(SP.PCOE):

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\gamma}) = \min_{(x, u, s, v)} \quad & L(x, u, s, v, \bar{\gamma}) \\ \text{sujeito a:} \quad & (x, u, s, v) \in \& \end{aligned}$$

onde $\bar{\gamma}$ é dado

(PC.PCOE):

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Max } \phi(\gamma) & ; \quad \gamma \text{ irrestrito} \\ \gamma & \end{array} \right.$$

Observe-se que no (PC.PCOE) γ é irrestrito enquanto que em (PC), λ era não negativo. Essa distinção prende-se ao fato de que a restrição relaxada no (PC.PCOE) é de igualdade, enquanto que, no (PC) é de desigualdade (≤ 0), resultado este que é demonstrado na teoria da dualidade.

2.3. Algoritmo para solução de (PD'.PCOE)

Podemos resolver (PCOE) resolvendo o seu dual utilizando o seguinte algoritmo; que é derivado do Algoritmo (A.1) do Apêndice A.

Algoritmo III.1

- i) fixe um valor para γ^* . (Por exemplo, $\gamma^* = 0$)
- ii) faça $\gamma = \gamma^*$
- iii) resolva (SP.PCOE), encontrando (x^*, u^*, s^*, v^*)
- iv) faça $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{v}) = (x^*, u^*, s^*, v^*)$
- v) verifique se $\bar{x}^k = \bar{x}^{k-1} + T \bar{u}^k + \bar{s}^k - \bar{v}^k$, $k = 1, \dots, K$

a - caso afirmativo, a solução é ótima;
Saia com $\bar{x}, \bar{u}, \bar{s}, \bar{v}, \bar{\gamma}$ e pare;

b - caso negativo, vá para (vi).

- vi) resolva (PC.PCOE) modificado, encontrando γ^* tal que $\phi(\gamma^*) > \phi(\bar{\gamma})$;

a - utilize, (por exemplo), a direção do gradiente de $\phi(\gamma)$ no ponto $\bar{\gamma}$ dada por:

$$\nabla \phi^{(k)}(\gamma) \Big|_{\bar{\gamma}} = \bar{x}^k - \bar{x}^{k-1} - T \bar{u}^k - \bar{s}^k + \bar{v}^k, \quad (\text{III.3})$$

$$k = 1, \dots, K$$

b - faça uma busca unidimensional naquela direção, utilizando, por exemplo, o método de aproximação polinomial, conforme veremos à frente

c - vá para (ii).

A solução do passo (vi) do algoritmo pode ser obtida através de um método qualquer de gradiente, por exemplo, de gradiente ótimo ou gradiente conjugado. O Apêndice C apresenta um método para solução deste problema. Entretanto, a solução do passo (iii) pode vir a se tornar bastante trabalhosa, a não ser que o problema original tenha propriedades de separabilidade conforme veremos a seguir.

III.3. Separabilidade do (SP.PCOE)

Apresentamos as condições para que se possa efetuar uma decomposição do problema (SP.PCOE) em quatro sub-problemas separados, envolvendo, cada um deles, apenas a produção, a estocagem, o transporte e a distribuição.

Para que isto seja possível, é necessário que, além das hipóteses de convexidade utilizadas (H.1) e (H.2), adicionemos também hipóteses sobre a separabilidade do problema, (PCOE), como veremos a seguir.

3.1. Problema convexo-separável de otimização de escoamentos (POE)

Duas hipóteses são necessárias para a separabilidade do (PCOE):

H.3: O subespaço $\mathcal{E}$ é separável de forma a poder ser escrito como produto cartesiano de quatro subespaços convexos:

$$(x, u, s, v) \in \mathcal{E} = \Omega \times \Gamma \times \Lambda \times \Theta$$

$$\text{onde: } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{I \times K}; u \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{J \times K}$$

$$s \in \Lambda \subset \mathbb{R}^{I \times K}; v \in \Theta \subset \mathbb{R}^{I \times K}$$

H.4: A função objetivo $z(x, u, s, v)$ é aditivamente separável em quatro funções convexas $f(x), g(u), h(s), w(v)$ definidas para todo $\Omega, \Gamma, \Lambda, \Theta$, respectivamente, com

$$z(x, u, s, v) = f(x) + g(u) + h(s) + w(v)$$

Com estas hipóteses, (e mais H.1 e H.2) pode-se escrever um novo problema de otimização, convexo e separável por atividades:

(POE):

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min} \\ (x, u, s, v) \end{array} [f(x) + g(u) + h(s) - w(v)] \right.$$

sujeito a:

$$x^k = x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k, \quad k = 1, \dots, K$$

$$(x, u, s, v) \in \Omega \times \Gamma \times \Lambda \times \Theta$$

onde:

$f(x)$, $g(u)$, $h(s) - w(v)$ são funções convexas e Ω , Γ , Λ , e Θ são subespaços convexos.

3.2. Separabilidade do Lagrangeano

Escrevamos o Lagrangeano do (POE) relaxando-se apenas as equações dinâmicas:

$$\begin{aligned} L(x, u, s, v, \gamma) &= f(x) + g(u) + h(s) - w(v) + \\ &+ \sum_k \gamma_k [x^k - x^{k-1} - T u^k - s^k + v^k] = \\ &= [f(x) + \sum_k \gamma_k (x^k - x^{k-1})] + \\ &+ [g(u) - \sum_k \gamma_k T u^k] + \\ &+ [h(s) - \sum_k \gamma_k s^k] + [-w(v) + \sum_k \gamma_k v^k] \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Como se pode ver, o Lagrangeano pode ser decomposto em quatro parcelas, cada uma delas dependendo apenas de um dos vetores.

Chamemos, portanto:

$$L^x(x, \gamma) = f(x) + \sum_k \gamma_k (x^k - x^{k-1}) \quad (\text{III.5})$$

$$L^u(u, \gamma) = g(u) - \sum_k \gamma_k T u^k \quad (\text{III.6})$$

$$L^s(s, \gamma) = h(s) - \sum_k \gamma_k s^k \quad (\text{III.7})$$

$$L^v(v, \gamma) = -w(v) + \sum_k \gamma_k v^k \quad (\text{III.8})$$

Donde se pode escrever que:

$$L(x, u, s, v, \gamma) = L^x(x, \gamma) + L^u(u, \gamma) + L^s(s, \gamma) + L^v(v, \gamma) \quad (\text{III.9})$$

3.3. Separabilidade do sub-problema (SP.POE) por atividades

De forma idêntica ao (PCOE), pode-se escrever um problema dual modificado para o (POE) que chamaremos (PD'.POE) cuja solução poderá ser obtida através da solução alternada de um problema coordenador (PC.POE) e de um sub-problema (SP.POE) como segue:

(PC.POE) é idêntico ao (PC.PCOE)

(SP.POE):

$$\left[\begin{array}{l} \phi(\bar{\gamma}) = \text{Min}_{x, u, s, v} [L^x(x, \bar{\gamma}) + L^u(u, \bar{\gamma}) + \\ \quad + L^s(s, \bar{\gamma}) + L^v(v, \bar{\gamma})] \\ \text{sujeito a:} \\ (x, u, s, v) \in \Omega \times \Gamma \times \Lambda \times \Theta \end{array} \right.$$

onde $\bar{\gamma}$ é um valor dado de γ .

Graças às características de separabilidade operacional assumidas, o (SP.POE) pode ser separado, como segue:

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\gamma}) &= \text{Min}_{(x, u, s, v) \in \Omega \times \Gamma \times \Lambda \times \Theta} [L^x(x, \bar{\gamma}) + L^u(u, \bar{\gamma}) + \\ &+ L^s(s, \bar{\gamma}) + L^v(v, \bar{\gamma})] = \text{Min}_{x \in \Omega} L^x(x, \bar{\gamma}) + \\ &+ \text{Min}_{u \in \Gamma} L^u(u, \bar{\gamma}) + \text{Min}_{s \in \Lambda} L^s(s, \bar{\gamma}) + \text{Min}_{v \in \Theta} L^v(v, \bar{\gamma}) = \\ &= \phi^x(\bar{\gamma}) + \phi^u(\bar{\gamma}) + \phi^s(\bar{\gamma}) + \phi^v(\bar{\gamma}) \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Donde se conclue que a soluç~ao (x^* , u^* , s^* , v^*) que se deseja para (SP.POE) pode ser obtida resolvendo-se quatro problemas separados por atividades cuja única interligação é dada pelo vetor coordenador $\bar{\gamma}$, passado como parâmetro a cada sub-problema.

3.4. Os quatro sub-problemas do (POE)

Pode-se portanto escrever os quatro sub-problemas do (POE) como segue:

- sub-problema de otimização de estoques:

$$(SP.X): \left[\begin{array}{l} \phi^x(\bar{\gamma}) = \text{Min } L^x(x, \bar{\gamma}) \\ x \in \Omega \end{array} \right.$$

- sub-problema de otimização de transportes:

$$(SP.U): \left[\begin{array}{l} \phi^u(\bar{\gamma}) = \text{Min } L^u(u, \bar{\gamma}) \\ u \in \Gamma \end{array} \right.$$

- sub-problema de otimização de produção:

$$(SP.S): \left[\begin{array}{l} \phi^s(\bar{\gamma}) = \text{Min } L^s(s, \bar{\gamma}) \\ s \in \Lambda \end{array} \right.$$

- sub-problema de otimização de distribuição:

$$(SP.V): \left[\begin{array}{l} \phi^v(\bar{\gamma}) = \text{Min } L^v(v, \bar{\gamma}) \\ v \in \Theta \end{array} \right.$$

donde se pode escrever que:

$$\phi(\bar{\gamma}) = \phi^x(\bar{\gamma}) + \phi^u(\bar{\gamma}) + \phi^s(\bar{\gamma}) + \phi^v(\bar{\gamma})$$

(III.11)

é a função a ser maximizada no (PC.POE).

3.5. Diagrama de blocos para solução de (PD'.POE)

O problema (PD'.POE) pode ser resolvido através do mesmo algoritmo (III.1) apresentado, bastando subdividir o passo (iii) em quatro passos independentes para cada um dos quatro sub-problemas, conforme se pode ver no diagrama de blocos da Figura III.1.

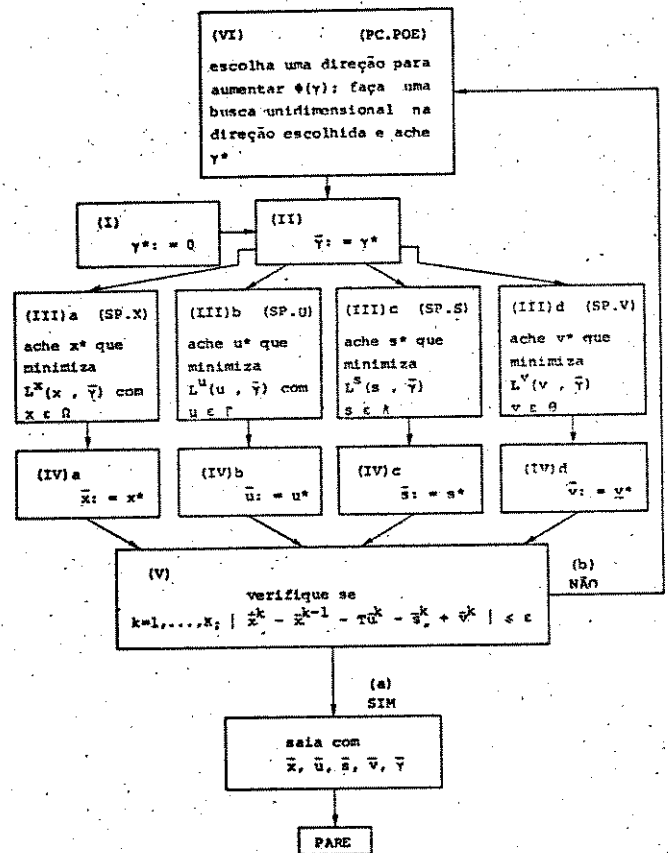


FIGURA III.1 - Diagrama de blocos para solução do (POE)

IV. DECOMPOSIÇÃO DO SUB-PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE ESTOCAGEM

Tendo em vista suas características de convexidade e separabilidade, o (POE) será objeto de estudos detalhados no restante do trabalho e, como ele foi decomposto em quatro problemas separados relacionados a cada uma das quatro atividades e mais um problema coordenador estudaremos, um a um, cada sub-problema. Começamos por estudar o (SP.X), conforme apresentado em III.3.4.

IV.1. Separabilidade Temporal do (SP.X)

O (SP.X), tal qual obtido após aplicação das hipóteses de convexidade e de separabilidade operacional assumiu a forma:

$$\begin{aligned}\phi^x(\bar{y}) &= \min_{x \in \Omega} L^x(x, \bar{y}) = \\ &= \min_{x \in \Omega} [f(x) + \sum_k \bar{y}_k (x^k - x^{k-1})]\end{aligned}\quad (IV.1)$$

Embora se saiba que $f(x)$ é uma função convexa e que Ω é um subespaço convexo, pouco se pode fazer pela solução do (SP.X), como está.

Algumas hipóteses simplificadoras permitirão uma decomposição de (SP.X) em outros sub-problemas mais simples. A primeira delas, que surge quase que naturalmente, é a separabilidade temporal do (SP.X).

Admitamos, assim, as seguintes hipóteses:

H.5: A função $f(x)$ pode ser escrita como uma soma de K funções escalares convexas dos vetores estado, a cada estágio:

$$f(x) = \sum_k f_k(x^k)$$

Isto implica que o custo total provocado pelo estoque é a soma dos custos em cada estágio.

H.6: O conjunto Ω pode ser escrito como produto cartesiano de K subespaços convexas Ω_k associados a cada estágio k : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_K$ de forma que $x^k \in \Omega_k$, $k = 1, \dots, K$.

Isto implica que a cada estágio existem restrições especificadas que, se atendidas isto será suficiente.

Com essas hipóteses, pode reescrever o sub-problema (SP.X) de forma a isolar a expressão (IV.1) em termos de x^k :

$$\begin{aligned}\phi^x(\bar{y}) &= \min_{x \in \Omega} L^x(x, \bar{y}) = \min_{x \in \Omega} \left[\sum_k f_k(x^k) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_k \bar{y}_k (x^k - x^{k-1}) \right]\end{aligned}\quad (IV.2)$$

mas, como

$$\begin{aligned}\sum_k \bar{y}_k (x^k - x^{k-1}) &= \sum_k \bar{y}_k x^k - \sum_k \bar{y}_k x^{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^K \bar{y}_k x^k - \sum_{k=0}^{K-1} \bar{y}_{k+1} x^k = \\ &= -\bar{y}_1 x^0 + \sum_{k=1}^K (\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1}) x^k\end{aligned}\quad (IV.3)$$

onde $\bar{y}_{K+1}$ foi definido como um vetor linha, nulo;

Teremos:

$$\begin{aligned}\phi^x(\bar{y}) &= \min_{x \in \Omega} \left\{ -\bar{y}_1 x^0 + \sum_k [f_k(x^k) + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1}) x^k] \right\} = -\bar{y}_1 x^0 + \\ &\quad + \sum_k \min_{x^k \in \Omega_k} [f_k(x^k) + (\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1}) x^k]\end{aligned}\quad (IV.4)$$

pois, $\bar{y}_1 x^0$ é uma constante para o processo da minimização e as funções a somar são aditivamente separáveis sobre subespaços também separáveis.

Assim, pode-se ver que o problema (SP.X) pode ser resolvido, resolvendo-se K sub-problemas mais simples, desacoplados no tempo.

Chamemos

$$L_k^x(x^k, \bar{y}_k, \bar{y}_{k+1}) = f_k(x^k) + (\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1}) x^k\quad (IV.5)$$

Então teremos:

(SP.X.k); $k = 1, \dots, K$:

$$\begin{aligned}&\min_{x^k \in \Omega_k} L_k^x(x^k, \bar{y}_k, \bar{y}_{k+1}) \\ &\text{onde } \bar{y}_k \text{ e } \bar{y}_{k+1} \text{ são dados}\end{aligned}$$

Seja $\phi_k^x(\bar{y}_k, \bar{y}_{k+1})$ o resultado da minimização acima:

Então:

$$\phi^x(\bar{y}) = -\bar{y}_1 x^0 + \sum_k \phi_k^x(\bar{y}_k, \bar{y}_{k+1})\quad (IV.6)$$

que é uma das quatro componentes de função $\phi(\gamma)$, a ser maximizada no (PC.POE).

IV.2. Sub-problema convexo-linear-canalizado de estocagem (SP.CLC.X.k)

A solução de cada um dos (SP.X.k) vai depender agora da forma da função $f_k(x^k)$ e da forma do subespaço Ω_k .

A aplicação, que faremos a seguir apresenta a solução dos (SP.X.k) para as seguintes hipóteses:

H.7: As K funções $f_k(x^k)$ escalares podem ser escritas como sendo:

$$f_k(x^k) = \sum_{i=1}^I f_{ik}(x_{ik})$$

onde cada $f_{ik}(x_{ik})$ é uma função escalar convexa de x_{ik} .

H.8: Os K subespaços Ω_k podem ser escritos como hiperpoliedros convexos, com restrições de canalização do tipo:

$$\Omega_k = \{x^k \mid k_A x^k \leq c^k; m^k \leq x^k \leq M^k\}$$

onde m^k e M^k são vetores coluna ($I \times 1$) k_A é matriz de dimensão ($L \times I$) e c^k é vetor coluna ($L \times 1$); L é o número de restrições de desigualdade.

Ao sub-problema (SP.X.k) com as hipóteses (H.7) e (H.8) damos o nome de sub-problema convexo-linear-canalizado de estocagem (SP.CLC.X.k).

Fazendo o desenvolvimento de $L_k^x(x^k, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1})$, teremos:

$$\begin{aligned} L_k^x(x^k, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}) &= f(x^k) + (\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_{k+1}) x^k = \\ &= \sum_i f_{ik}(x_{ik}) + \sum_i (\bar{\gamma}_{k,i} - \bar{\gamma}_{(k+1),i}) x_{ik} = \\ &= \sum_i [f_{ik}(x_{ik}) + (\bar{\gamma}_{k,i} - \bar{\gamma}_{(k+1),i}) x_{ik}] = \\ &= \sum_i L_{ik}^x(x_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \bar{\gamma}_{(k+1),i}) \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Reescrevendo o sub-problema, teremos:

(SP.CLC.X.k); $k = 1, \dots, K$:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min}_{x^k} \sum_i L_{ik}^x(x_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \bar{\gamma}_{(k+1),i}) \\ \text{sujeito a: } k_A x^k \leq c^k \\ m^k \leq x^k \leq M^k \end{array} \right] \quad (IV.8)$$

$$(IV.9)$$

IV.3. Decomposição hierárquica do (SP.CLC.X.k)

Cada sub-problema (SP.CLC.X.k) pode vir a ser separado em I sub-problemas, um para cada nó, aplicando-se-lhe os resultados da teoria da dualidade atrás exposta.

Escrevamos o Lagrangeano do sub-problema, relaxando as restrições de desigualdade (IV.8):

Vamos introduzir novo vetor multiplicador de Lagrange, λ_k , vetor linha, ($1 \times L$). Chamemos de λ a matriz tomadas com os vetores linha λ_k , com dimensão ($K \times L$).

$$\begin{aligned} f_k^x(x^k, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \lambda_k) &= L_k^x(x^k, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}) + \\ &+ \lambda_k (k_A x^k - c^k) = \\ &= \sum_i [f_{ik}^x(x_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \bar{\gamma}_{(k+1),i}, \lambda_k)] - \lambda_k c^k \end{aligned} \quad (IV.10)$$

com

$$f_{ik}^x(x_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \bar{\gamma}_{(k+1),i}, \lambda_k) = f_{ik}(x_{ik}) + \alpha_{ki} x_{ik} \quad (IV.11)$$

e

$$\alpha_{ki} = \bar{\gamma}_{ki} - \bar{\gamma}_{(k+1),i} + \lambda_k k_A^i. \quad (IV.12)$$

onde:

k_A^i é a i-ésima coluna da matriz k_A

Pode-se, assim escrever um problema dual do (SP.CLC.X.k) como segue:

(PD.CLC.X.k):

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max}_{\lambda_k \geq 0} \psi_k^x(\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \lambda_k) \end{array} \right]$$

onde:

$$\begin{aligned} \psi_k^x(\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\lambda}_k) &= \text{Min}_{m^k \leq x^k \leq M^k} f_k^x(x^k, \bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \bar{\lambda}_k) = \\ &= \text{Min}_{m_{ik} \leq x_{ik} \leq M_{ik}} \left[\sum_i f_{ik}^x(x_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \bar{\gamma}_{(k+1),i}, \bar{\lambda}_k) - \bar{\lambda}_k c^k \right] = \\ &= \sum_i \text{Min}_{m_{ik} \leq x_{ik} \leq M_{ik}} f_{ik}^x(x_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \bar{\gamma}_{(k+1),i}, \bar{\lambda}_k) - \\ &- \bar{\lambda}_k c^k = \sum_i \psi_{ik}^x(\bar{\gamma}_{ki}, \bar{\gamma}_{(k+1),i}, \bar{\lambda}_k) - \bar{\lambda}_k c^k \end{aligned} \quad (IV.13)$$

Portanto, a solução do (PD.CLC.X.k) pode ser obtida hierarquicamente em dois novos níveis; um novo problema coordenador do sub-problema, de maximização de $\psi_k^x(\cdot)$ e I sub-problemas separados de minimização de $f_{ik}^x(\cdot)$, como segue:

- sub-problemas de estocagem:

(SP.CLC.X.ik) ; $i = 1, \dots, I$; $k = 1, \dots, K$

$$\begin{aligned} \psi_{ik}^x(\bar{y}_{ki}, \bar{y}_{(k+1)i}, \bar{\lambda}_k) &= \\ &= \min_{m_{ik} \leq x_{ik} \leq M_{ik}} f_{ik}^x(x_{ik}, \bar{y}_{ki}, \bar{y}_{(k+1)i}, \bar{\lambda}_k) \end{aligned}$$

- e um problema coordenador:

(PC.SP.CLC.X.k) ; $k = 1, \dots, K$:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\lambda_k \geq 0} \psi_k^x(\bar{y}_k, \bar{y}_{k+1}, \lambda_k) \end{aligned}$$

onde

$$\psi_k^x(\bar{y}_k, \bar{y}_{k+1}, \bar{\lambda}_k) = \sum_i \psi_{ik}^x(\bar{y}_{ki}, \bar{y}_{(k+1)i}, \bar{\lambda}_k) - \bar{\lambda}_k c^k \quad (\text{IV.14})$$

A Figura IV.1 apresenta um diagrama de blocos para a solução do (SP.CLC.X.k).

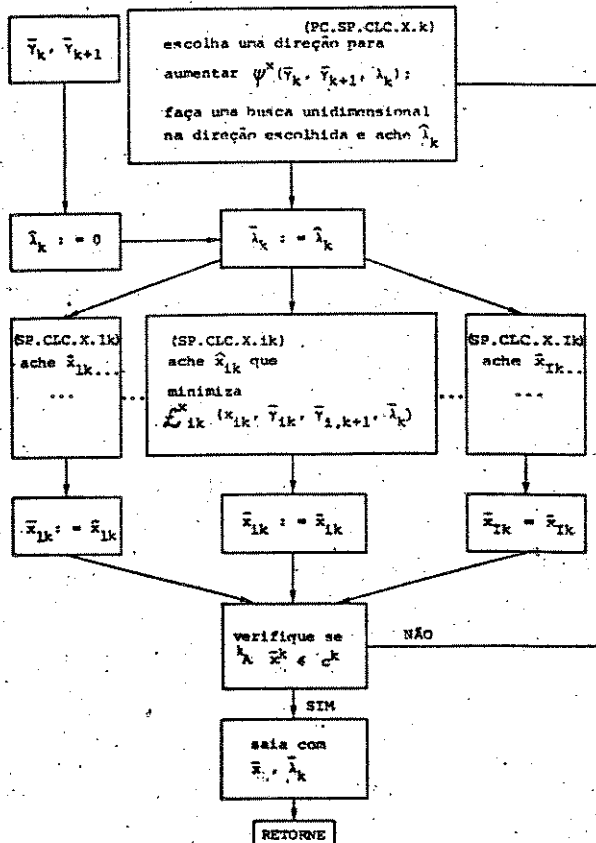


FIGURA IV.1 - Diagrama de blocos para a solução do (SP.CLC.X.k)

IV.4. Solução dos sub-problemas (SP.CLC.X.ik)

A solução dos sub-problemas (SP.CLC.X.ik) pode ser facilmente obtida no caso da função $f_{ik}^x(x_{ik})$ ser diferenciável e estritamente convexa, senão vejamos:

H.9: As funções $f_{ik}(x_{ik})$ são diferenciáveis e estritamente convexas em $m_{ik} < x_{ik} < M_{ik}$.

Com esta hipótese é possível derivar $f_{ik}^x(x_{ik}, y_{ki}, y_{(k+1)i}, \lambda_k)$ em relação a x_{ik} , igualando a zero para achar o ponto de mínimo $\bar{x}_{ik}$.

Seja, portanto, $\bar{x}_{ik}$ a solução da equação:

$$\frac{d}{dx_{ik}} f_{ik}(x_{ik}) + \alpha_{ki} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

Como $\bar{x}_{ik}$ pode estar fora do intervalo $[m_{ik}, M_{ik}]$, a solução do sub-problema (SP.CLC.X.ik) será dada por:

$$\bar{x}_{ik} = \text{Max} [m_{ik}; \text{Min}(M_{ik}; \bar{x}_{ik})] \quad (\text{IV.16})$$

Caso uma ou mais funções de custo $f_{ik}(x_{ik})$ sejam lineares, o método acima apresentado poderá apresentar problemas, pois, poderá haver indeterminação em $\bar{x}_{ik}$. Neste caso deve-se adotar os métodos apresentados no Apêndice D.

V. SUB-PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE TRANSPORTES

Este capítulo cuida de desenvolver a solução do sub-problema de otimização de transportes, tal qual formulado na parte III. Algumas hipóteses de separabilidade são adotadas.

V.1. Separabilidade temporal do (SP.U)

Retomemos o (SP.U), obtido após a separação do (POE) por atividades:

$$\phi^u(\bar{\gamma}) = \min_{u \in \Gamma} L^u(u, \bar{\gamma}) = \min_{u \in \Gamma} \left[g(u) - \sum_k \bar{\gamma}_k T u^k \right] \quad (V.1)$$

A solução desse problema será grandemente simplificada se pudermos supor certas hipóteses de separabilidade do sub-problema de transportes.

Admitindo, assim uma separabilidade temporal do (SP.U) teremos:

H.10: A função escalar $g(u)$ pode ser escrita como uma soma de funções escalares convexas dos vetores de transporte em cada período:

$$g(u) = \sum_k g_k(u^k)$$

H.11: O conjunto Γ pode ser escrito como produto cartesiano de K subespaços convexas Γ_k associados a cada intervalo de tempo $(t_{k-1}, t_k]$:

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k \times \dots \times \Gamma_K \quad \text{tal que}$$

$$u^k \in \Gamma_k \quad ; \quad k = 1, \dots, K$$

Valem aqui as considerações feitas após as hipóteses (H.8) e (H.9), em IV.

Com essas hipóteses, pode-se reescrever o sub-problema (SP.U) de forma a isolar a expressão V.1 em termos de u^k :

$$\begin{aligned} \phi^u(\bar{\gamma}) &= \min_{u \in \Gamma} L^u(u, \bar{\gamma}) = \\ &= \min_{u \in \Gamma} \left[\sum_k g_k(u^k) - \sum_k \bar{\gamma}_k T u^k \right] = \\ &= \min_{u \in \Gamma} \sum_k [g_k(u^k) - \bar{\gamma}_k T u^k] = \\ &= \sum_k \min_{u^k \in \Gamma_k} [g_k(u^k) - \bar{\gamma}_k T u^k] \end{aligned} \quad (V.2)$$

pois a função a minimizar é aditivamente separável em u_k sobre espaços também separáveis.

Escrevendo:

$$L_k^u(u^k, \bar{\gamma}_k) = g_k(u^k) - \bar{\gamma}_k T u^k \quad (V.3)$$

o sub-problema (SP.U) pode ser resolvido ao se resolverem K outros sub-problemas mais simples, desacoplados no tempo, como segue:

$$(SP.U.k) \quad ; \quad k = 1, \dots, K:$$

$$\left[\begin{array}{l} \min_{u^k \in \Gamma_k} L_k^u(u^k, \bar{\gamma}_k) \\ \text{onde } \bar{\gamma}_k \text{ é dado} \end{array} \right.$$

Chamando de $\phi_k^u(\bar{\gamma}_k)$ ao resultado da minimização acima, teremos:

$$\phi^u(\bar{\gamma}) = \sum_k \phi_k^u(\bar{\gamma}_k) \quad (V.4)$$

que é uma das quatro componentes da função $\phi(\gamma)$, a ser minimizada no (PC.POE).

V.2. Sub-problema convexo-linear-canalizado de transporte (SP.CLC.U.k)

A solução de cada (SP.U.k) vai depender da forma das funções $g_k(u^k)$ e da forma dos subespaços Γ_k .

Analogamente ao que fizemos em IV, faremos a seguir as seguintes hipóteses simplificadoras:

H.12: As K funções $g_k(u^k)$ podem ser escritas como sendo:

$$g_k(u^k) = \sum_{j=1}^J g_{jk}(u_{jk})$$

onde cada $g_{jk}(u_{jk})$ é uma função convexa de u_{jk} .

H.13: Os K subespaços Γ_k podem ser escritos como hiperpoliedros convexas com restrições de canalização do tipo:

$$\Gamma_k = \{u^k \mid B u^k \leq d^k; n^k \leq u^k \leq N^k\}$$

onde n^k, N^k são vetores coluna $(J \times 1)$, B é matriz de dimensão $(L \times J)$ e d^k é vetor coluna $(L \times 1)$. L é o número de restrições de desigualdade.

Estamos usando aqui a mesma letra L utilizada para designar o número de restrições de desigualdade no (SP.X.k), embora eles não sejam obrigatoriamente iguais. O contexto indicará a qual deles estamos nos referindo.

Analogamente ao (SP.X.k), com as hipóteses (H.12) e (H.13) pode-se escrever um sub-problema convexo-linear-canalizado:

(SP.CLC.U.k) ; $k = 1, \dots, K$:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min}_{u^k} \sum_j [g_{jk}(u_{jk}) - (\gamma_k^j T^j) u_{jk}] \\ \text{sujeito a:} \\ k_B u^k \leq d^k \\ n^k \leq u^k \leq N^k \end{array} \right] \quad (V.5)$$

$$n^k \leq u^k \leq N^k \quad (V.6)$$

V.3. Decomposição hierárquica do (SP.CLC.U.k)

Cada (SP.CLC.U.k) pode ser, separados em J sub-problemas, um para cada arco, aplicando-se-lhe os resultados de teoria da dualidade.

Relaxando a restrição (V.5) e introduzindo-se um outro multiplicador de Lagrange μ_k , vetor linha ($1 \times L$) podemos escrever o Lagrangeano do sub-problema. Chamemos de μ a matriz formada com os vetores linha μ_k , com dimensão ($K \times L$). Assim:

$$\begin{aligned} f_k^u(u^k, \bar{\gamma}_k, \mu_k) &= L_k^u(u^k, \bar{\gamma}_k) + \mu_k (k_B u^k - d^k) = \\ &= \sum_j [g_{jk}(u_{jk}) - (\gamma_k^j T^j) u_{jk}] + \mu_k (k_B u^k - d^k) = \\ &= \sum_j g_{jk}(u_{jk}) - (\bar{\gamma}_k^j T^j - \mu_k^{k_B j}) u_{jk} - \mu_k d^k = \\ &= \sum_j [f_{jk}^u(u_{jk}, \gamma_k^j, \mu_k^j)] - \mu_k d^k \end{aligned} \quad (V.7)$$

onde

$$f_{jk}^u(u_{jk}, \gamma_k^j, \mu_k^j) = g_{jk}(u_{jk}) + \beta_{kj} u_{jk} \quad (V.8)$$

com

$$\beta_{kj} = \bar{\gamma}_k^j T^j + \mu_k^{k_B j} \quad (V.9)$$

onde k_B^j é a j -ésima coluna de k_B .

Donde se pode escrever um problema dual para (SP.CLC.U.k) e, conseqüentemente, um novo

problema coordenador de sub-problemas, (PC.SP.CLC.U.k) e J sub-problemas separados (SP.CLC.U.jk) de minimização, como segue:

(SP.CLC.U.jk) ; $j = 1, \dots, J$; $k = 1, \dots, K$

$$\left[\begin{array}{l} f_{jk}^u(\bar{\gamma}_k, \mu_k) = \text{Min}_{n_{jk} \leq u_{jk} \leq N_{jk}} f_{jk}^u(u_{jk}, \bar{\gamma}_k, \mu_k) \end{array} \right]$$

e

(PC.SP.CLC.U.k) ; $k = 1, \dots, K$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max}_{\mu_k \geq 0} \psi_k^u(\bar{\gamma}_k, \mu_k) \end{array} \right]$$

onde

$$\psi_k^u(\bar{\gamma}_k, \mu_k) = \sum_j \psi_{jk}^u(\bar{\gamma}_k, \mu_k) - \mu_k d^k \quad (V.10)$$

A solução do (SP.CLC.U.k) é obtida através da solução alternada do conjunto dos ($J \times K$) sub-problemas, (SP.CLC.U.jk) e dos K problemas coordenadores (PC.CLC.SP.U.k) através de um diagrama de blocos análogo ao apresentado na Figura IV.1 e utilizando algoritmos também similares.

As mesmas considerações feitas em IV.3, IV.4 e no Apêndice C são também válidas aqui.

Entretanto, caso a função objetivo seja linear pode-se optar por não fazer a dualização da restrição de desigualdade resolvendo-se diretamente (SP.CLC.U.k) através de um dos algoritmos clássico de programação linear. Pode-se também usar o método apresentado no Apêndice D.

Se, porém, k_B tiver apenas uma linha, ou seja, apenas uma restrição envolvendo o conjunto dos valores de u_{jk} , como acontece em muitas aplicações, o método simplexo pode ser evitado, utilizando-se então, a simplificação mostrada também, no Apêndice D.

VI. SUB-PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE PRODUÇÃO E DE DISTRIBUIÇÃO

Os sub-problemas de produção e de distribuição podem ter estruturas bastante semelhantes, razão pela qual serão tratados no mesmo capítulo, sendo apenas indicados os pontos onde eles divergem. Tratemos inicialmente o problema de produção.

VI.1. Separabilidade nodal do (SP.S)

As restrições normalmente encontradas para produção e distribuição não permitem escrever uma hipótese de separabilidade temporal como o fizemos para o estoque e para o transporte, portanto, façamos uma hipótese de separabilidade nodal para (SP.S). Isto quer dizer que as restrições relacionam todas as quantidades produzidas em cada nó.

H.14: A função $h(s)$ pode ser escrita como uma soma de funções convexas das quantidades produzidas, da forma:

$$h(s) = \sum_i h_i(s_i)$$

onde s_i é um vetor linha formado com a i -ésima linha da matriz s .

H.15: O conjunto A pode ser escrito como produto cartesiano de I subespaços convexas A_i associado a cada nó i .

$A = A_1 \times \dots \times A_i \times \dots \times A_I$ tal que

$$s_i \in A_i, \quad i = 1, \dots, I$$

Com o que será possível separar o (SP.S) em I sub-problemas de otimização.

Retomando (SP.S), dado por:

$$\left[\begin{array}{l} \phi^s(\bar{\gamma}) = \min_{s \in A} L^s(s, \bar{\gamma}) \end{array} \right.$$

Chamando $\bar{\gamma}^i$ ao vetor coluna formado com a i -ésima coluna de $\bar{\gamma}$, teremos:

$$\begin{aligned} L^s(s, \bar{\gamma}) &= h(s) - \sum_k \bar{\gamma}_k s^k = \\ &= \sum_i h_i(s_i) - \sum_k \sum_i \bar{\gamma}_{ki} s_{ik} = \\ &= \sum_i \left[h_i(s_i) - \sum_k s_{ik} \bar{\gamma}_{ki} \right] = \\ &= \sum_i (h_i(s_i) - s_i \bar{\gamma}^i) = \sum_i L_i^s(s_i, \bar{\gamma}^i) \end{aligned} \quad (VI.1)$$

Donde:

(SP.S.i) ; $i = 1, \dots, I$:

$$\left[\begin{array}{l} \min_{s_i \in A_i} L_i^s(s_i, \bar{\gamma}^i) \end{array} \right.$$

Chamando de $\phi_i^s(\bar{\gamma}^i)$ ao resultado da minimização acima, teremos:

$$\phi^s(\bar{\gamma}) = \sum_i \phi_i^s(\bar{\gamma}^i) \quad (VI.2)$$

que é uma das quatro componentes da função $\phi(\bar{\gamma})$ a ser minimizada no (PC.POE).

VI.2. Sub-problema convexo-linear-canalizado de produção

Façamos algumas hipóteses simplificadoras sobre (SP.S.i), para permitir um melhor tratamento do problema:

H.16: As I funções escalares $h_i(s_i)$ poderão ser escritas como sendo:

$$h_i(s_i) = \sum_k h_{ik}(s_{ik})$$

onde cada $h_{ik}(s_{ik})$ é uma função escalar convexa de s_{ik} .

H.17: Os I subespaços A_i podem ser escritos como hiperpoliedros convexas com restrições de canalização do tipo:

$$A_i = \{s_i \mid p_i \leq s_i^i C \leq P_i ; q_i \leq s_i \leq Q_i\}$$

onde q_i, Q_i são vetores linha, $(1 \times K)$.
 C é uma matriz $(K \times L)$.
 p_i, P_i são vetores linha $(1 \times L)$
 L é o número de restrições do tipo
 $p_i \leq s_i^i C \leq P_i$.

Vale aqui também a observação sobre a letra L , feita anteriormente.

Com o que se pode escrever I sub-problemas convexo-linear-canalizados do tipo:

(SP.S.CLC.i) ; $i = 1, \dots, I$:

$$\left[\begin{array}{l} \min_{s_i} \sum_k [h_{ik}(s_{ik}) - s_{ik} \bar{\gamma}_{ki}] \\ \text{sujeito a:} \\ p_i \leq s_i^i C \leq P_i \\ q_i \leq s_i \leq Q_i \end{array} \right. \quad (VI.3)$$

$$(VI.4)$$

VI.3. Decomposição hierárquica do (SP.CLC.S.i)

Utilizando-se dos resultados da teoria da dualidade, pode-se obter a separabilidade de (SP.CLC.S.i) relaxando-se algumas restrições, tal como se fez em IV e em V.

Chamemos η^i e $\bar{\eta}^i$, vetores coluna ($I \times 1$) os vetores multiplicadores de Lagrange para as restrições $p_i \leq s_i^i C$, $s_i^i C \leq P_i$, respectivamente:

$$\begin{aligned} f_i^s(s_i, \bar{\gamma}^i, \eta^i, \bar{\eta}^i) &= \sum_k [h_{ik}(s_{ik}) - s_{ik} \bar{\gamma}_{ki}] + \\ &+ (s_i^i C - p_i) \eta^i + (s_i^i C - P_i) \bar{\eta}^i = \\ &= \sum_k [h_{ik}(s_{ik}) - s_{ik} \bar{\gamma}_{ki}] + s_i^i C (\eta^i + \bar{\eta}^i) - \\ &- (p_i \eta^i + P_i \bar{\eta}^i) = \sum_k [h_{ik}(s_{ik}) - s_{ik} \bar{\gamma}_{ki} + \\ &+ s_{ik}^i C_k (\eta^i + \bar{\eta}^i)] - (p_i \eta^i + P_i \bar{\eta}^i) = \\ &= \sum_k f_{ik}^s(s_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \eta^i, \bar{\eta}^i) - (p_i \eta^i + P_i \bar{\eta}^i) \end{aligned} \quad (VI.5)$$

onde iC_k é a k-ésima linha da matriz iC .

Donde

$$\begin{aligned} f_{ik}^s(s_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \eta^i, \bar{\eta}^i) &= h_{ik}(s_{ik}) + \\ &+ s_{ik} [-\bar{\gamma}_{ki} + iC_k (\eta^i + \bar{\eta}^i)] \end{aligned} \quad (VI.6)$$

Donde se pode escrever K sub-problemas do tipo:

(SP.CLC.S.ik); $i = 1, \dots, I$; $k = 1, \dots, K$:

$$\left[\begin{aligned} \psi_{ik}^s(\bar{\gamma}_{ki}, \bar{\eta}^i, \bar{\eta}^i) &= \min_{q_{ik} \leq s_{ik} \leq Q_{ik}} f_{ik}^s(s_{ik}, \bar{\gamma}_{ki}, \bar{\eta}^i, \bar{\eta}^i) \end{aligned} \right.$$

e o problema coordenador será:

(PC.CLC.SP.S.i)

$$\left[\begin{aligned} \max_{\eta^i, \bar{\eta}^i} \quad & \psi_i^s(\bar{\gamma}^i, \bar{\eta}^i, \bar{\eta}^i) \\ \text{com } \eta^i & \leq 0 \quad \bar{\eta}^i \geq 0 \end{aligned} \right.$$

onde

$$\psi_i^s(\bar{\gamma}^i, \eta^i, \bar{\eta}^i) = \sum_k \psi_{ik}^s(\bar{\gamma}_{ki}, \eta^i, \bar{\eta}^i) - (p_i \eta^i + P_i \bar{\eta}^i) \quad (VI.7)$$

A solução final de (SP.CLC.S.i) é obtida iterativamente como nos casos anteriores.

VI.4. Sub-problema (SP.V)

Para o sub-problema de distribuição faremos tudo análogo ao (SP.S), apenas substituindo letras e alguns sinais.

Assim, com as hipóteses:

H.18: A função $-w(v)$ pode ser escrita como sendo:

$$-w(v) = \sum_i -w_i(v_i)$$

onde $-w_i$ é uma função convexa e onde v_i é um vetor linha formado com a i-ésima linha da matriz v.

H.19: O conjunto Θ pode ser escrito como sendo:

$$\Theta = \Theta_1 \times \dots \times \Theta_i \times \dots \times \Theta_I$$

tal que

$$v_i \in \Theta_i, \quad i = 1, \dots, I$$

obtem-se, analogamente, uma decomposição nodal de (SP.S) sob a forma de I sub-problemas de otimização:

(SP.V.i); $i = 1, \dots, I$:

$$\left[\begin{aligned} \phi_i^v(\bar{\gamma}^i) &= \min_{v_i \in \Theta_i} L_i^v(v_i, \bar{\gamma}^i) \end{aligned} \right.$$

onde

$$L_i^v(v_i, \bar{\gamma}^i) = -w_i(v_i) + v_i \bar{\gamma}^i \quad (VI.8)$$

e

$$\phi^v(\bar{\gamma}) = \sum_i \phi_i^v(\bar{\gamma}^i) \quad (VI.9)$$

Pode-se também obter novas decomposição em cada (SP.V.i)

H.20: As I funções - $w_i(v_i)$ podem ser escritas como sendo:

$$-w_i(v_i) = \sum_k (-w_{ik}(v_{ik}))$$

onde cada $-w_{ik}(v_{ik})$ é uma função convexa em v_{ik} .

H.21: Os I subespaços Θ_i podem ser escritos como hiperpoliedros convexos com restrições de canalização, do tipo:

$$\Theta_i = \{v_i \mid r_i \leq v_i^i D \leq R_i; e_i \leq v_i \leq E_i\}$$

onde e_i, E_i são vetores linha ($1 \times K$)
 D é uma matriz ($K \times L$)

r_i, R_i são vetores linha ($1 \times L$)

L é o número de restrições do tipo
 $r_i \leq v_i^i D \leq R_i$

Com o que se pode escrever I sub-problemas convexos lineares canalizados do tipo:

(SP.CLC.V.i) ; $i = 1, \dots, I$:

$$\text{Min}_{v_i} \sum_k [-w_{ik}(v_{ik}) + v_{ik} \bar{y}_{ki}]$$

sujeito a:

$$r_i \leq v_i^i D \leq R_i \quad (\text{VI.10})$$

$$e_i \leq v_i \leq E_i \quad (\text{VI.11})$$

A separabilidade temporal de (SP.CLC.V.i) é obtida escrevendo-se o seu problema dual, relaxando as restrições $r_i \leq v_i^i D \leq R_i$.

Chamemos $v^i, \bar{v}^i$ os vetores multiplicadores de Lagrange, vetores coluna ($L \times 1$) para as restrições $p_i \leq v_i^i D$ e $s_i^i D \leq R_i$, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} f_i^v(v_i, \bar{y}^i, v^i, \bar{v}^i) &= \sum_k \{-w_{ik}(v_{ik}) + v_{ik} \bar{y}_{ki}\} + \\ &+ (v_i^i D - r_i) v^i + (v_i^i D - R_i) \bar{v}^i = \\ &= \sum_k \{-w_{ik}(v_{ik}) + v_{ik} \bar{y}_{ki}\} + \\ &+ v_i^i D (v^i + \bar{v}^i) - (r_i v^i + R_i \bar{v}^i) = \\ &= \sum_k \{-w_{ik}(v_{ik}) + v_{ik} \bar{y}_{ki} + v_{ik}^i D_k (v^i + \bar{v}^i)\} - \\ &- (r_i v^i + R_i \bar{v}^i) = \sum_k f_{ik}^v(s_{ik}, \bar{y}_{ki}, v^i, \bar{v}^i) - \\ &- (r_i v^i + R_i \bar{v}^i) \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

onde

$$f_{ik}^v(v_{ik}, \bar{y}_{ki}, v^i, \bar{v}^i) = -w_{ik}(v_{ik}) + v_{ik} [\bar{y}_{ki} + v_{ik}^i D_k (v^i + \bar{v}^i)] \quad (\text{VI.13})$$

Donde se podem escrever K sub-problemas, separados no tempo, do tipo:

(SP.CLC.V.ik) ; $i = 1, \dots, I$; $k = 1, \dots, K$

$$\left[\psi_{ik}^v(\bar{y}_{ki}, \bar{v}^i, \bar{v}^i) = \text{Min}_{v_{ik}} f_{ik}^v(v_{ik}, \bar{y}_{ki}, v^i, \bar{v}^i) \right]$$

e o problema coordenador será do tipo:

(PC.SP.CLC.S.i) ; $i = 1, \dots, I$:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max}_{v^i, \bar{v}^i} \psi_i^v(\bar{y}_i, v^i, \bar{v}^i) \\ \text{com } v^i \leq 0 \quad \text{e} \quad \bar{v}^i \geq 0 \end{array} \right]$$

onde

$$\psi_i^v(\bar{y}_i, \bar{v}^i, \bar{v}^i) = \sum_k \psi_{ik}^v(\bar{y}_{ki}, \bar{v}^i, \bar{v}^i) - (r_i \bar{v}^i + R_i \bar{v}^i) \quad (\text{VI.14})$$

que serão resolvidos, alternadamente, como descrito anteriormente. Entretanto, tanto para os sub-problemas de produção como para os de distribuição valem as mesmas observações e considerações feitas anteriormente sobre as funções objetivas lineares, cujo tratamento detalhado é feito no Apêndice D.

VII. EXEMPLO DE APLICAÇÃO A UM SISTEMA REAL

VII.1. Apresentação do Problema

Com o objetivo de ilustrar a aplicabilidade dos métodos propostos, sobre problemas reais de otimização de escoamento, formulou-se um problema de produção, estocagem, transporte e distribuição de um produto, inspirado nos sistemas produtivos da Cia. Vale do Rio Doce e da Cooperativa Tritícola Serrana - COTRIJUI. Na CVRD o autor desenvolveu atividades profissionais em um grupo de pesquisa operacional encarregado, entre outras tarefas, de fornecer apoio a programação e otimização operacional do escoamento de minério de ferro para exportação e consumo interno [1].

A COTRIJUI foi objeto de visita técnica do autor durante a qual pode conhecer o sistema de escoamento de soja para exportação e para industrialização visando produção de óleo de soja e farelo.

VII.2. Descrição do sistema

Façamos um modelo para o complexo minerador, constituído por duas unidades produtivas P_1 e P_2 e dois pontos de destino D_1 e D_2 . O produto é escoado através de 9 arcos de transporte $U_1, \dots, U_9$, passando por 6 silos de estocagem $X_1, \dots, X_6$.

Procura-se otimizar o funcionamento desse sistema ao longo do horizonte de 12 meses subdivididos em 12 estágios espaçados de 1 mês.

Esquematicamente, o sistema pode ser representado pela Figura VII.1, a seguir.

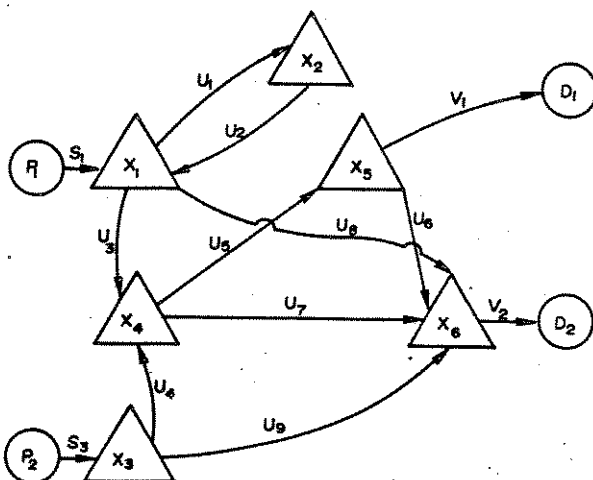


FIGURA VII.1 - Esquema geral do sistema estudado

A estrutura do sistema adotado pode ser assim descrita:

A produção P_1 alimenta o silo X_1 através do arco S_1 e a produção P_2 alimenta o silo X_3 através do arco S_3 .

O silo X_1 dispõe de uma área de estocagem de emergência, X_2 para onde pode enviar seus excessos pelo arco U_1 e trazê-los de volta pelo arco U_2 . O silo intermediário X_4 pode receber produtos dos silos X_1 e X_3 pelos arcos U_3 e U_4 respectivamente, entregando produtos aos silos X_5 e X_6 pelos arcos U_5 e U_7 respectivamente. Os silos X_5 e X_6 podem alimentar o ponto de entrega D_1 pelo arco V_1 bem como transferir produtos ao silo X_6 pelo arco U_6 .

O silo X_6 , que é o ponto de entrega ao destino D_2 pelo arco V_2 recebe também dos silos X_1 , X_3 e X_4 diretamente, pelos arcos U_8 , U_9 e U_7 , respectivamente. Embora o grafo contenha circuitos $\{(X_1, X_3); (X_3, X_1)\}$, o item IX.1 garante a validade dos resultados.

VII.3. Equação dinâmica do sistema

Seja o grafo $G = (X, U)$ associado ao sistema em questão onde

$$X = \{X_1, \dots, X_6\} \text{ e } U = \{U_1, \dots, U_9\}$$

Então a matriz de incidência do grafo G é dada por:

$$T = (T_{ij}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$T_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{indica que o arco } U_j \text{ chega ao nó } X_i; \\ -1 & \text{indica que o arco } U_j \text{ deixa o nó } X_i; \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Chamando:

x_{ik} o nível de estoque no silo X_i no fim do estágio k

u_{jk} a quantidade transportada pelo arco U_j no estágio k

s_{ik} a quantidade produzida e alimentada ao sistema no silo X_i no estágio k

v_{ik} a quantidade entregue ao destino a partir do silo X_i no estágio k .

temos:

$$x_{ik} = x_{i(k-1)} + \sum_{j=1}^9 T_{ij} u_{jk} + s_{ik} - v_{ik} \quad (\text{VII.1})$$

com

$$i = 1, \dots, 6$$

$$k = 1, \dots, 12$$

onde $x_{1,0}, \dots, x_{i,0}, \dots, x_{6,0}$ são dados

Em notação matricial, podemos escrever:

$$x^k = x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k, \quad k = 1, \dots, 12 \quad (\text{VII.2})$$

que é chamada a equação dinâmica do sistema, onde x_0 é dado, $s_{2k} = s_{4k} = s_{5k} = s_{6k} = 0$, pois não há entrada nos silos 2, 4, 5 e 6 e $v_{1k} = v_{2k} = v_{3k} = v_{4k} = 0$, pois não há entregas a partir dos silos 1, 2, 3 e 4.

VII.4. As restrições do problema

4.1. Restrições sobre o estoque

O estado do sistema é representado pelo vetor x_k que obedece às seguintes limitações:

i) restrições tecnológicas

$$m_{ik} \leq x_{ik} \leq M_{ik} \quad i = 1, \dots, 6 \\ k = 1, \dots, 12 \quad (\text{VII.3})$$

Estas restrições indicam que, em cada silo e em cada estágio o estoque de minério não pode assumir qualquer valor. Ele é limitado a um intervalo dado pelas restrições tecnológicas, tais como dimensões físicas, etc.

ii) restrições de recursos

deve-se introduzir restrições ligadas à totalidade dos estoques, do tipo:

$$k_A x^k \leq c^k; \quad k = 1, \dots, 12 \quad (\text{VII.4})$$

Isto indica que, em cada estágio, os estoques imobilizam algum(s) tipo(s) de recurso (por exemplo, capital de giro) cuja disponibilidade é representada por c^k . No desenvolvimento que fizemos consideramos apenas um recurso restritivo.

4.2. Restrição sobre os transportes

O transporte u^k obedece às seguintes limitações:

i) restrições tecnológicas ligadas a cada arco

$$n_{jk} \leq u_{jk} \leq N_{jk}; \quad j = 1, \dots, 9 \\ k = 1, \dots, 12 \quad (\text{VII.5})$$

Isto significa que o transporte em cada arco e em cada estágio não pode assumir qualquer valor. Ele é limitado a um intervalo dado pelas restrições tecnológicas tais como capacidade de transporte, etc.

ii) restrições de recursos

deve-se introduzir uma restrição ligada a totalidade transportada em cada estágio, do tipo:

$$k_B u^k \leq d^k \quad (\text{VII.6})$$

Isto significa que, em cada estágio, os transportes imobilizam algum(s) tipo(s) de recursos (por exemplo, veículos) cuja disponibilidade é representada por d^k . No desenvolvimento feito consideramos apenas um recurso restritivo.

4.3. Restrições sobre a produção

i) a produção recebe as seguintes limitações:

$$q_{ik} \leq s_{ik} \leq Q_{ik}; \quad i = 1, 3 \\ k = 1, \dots, 12 \quad (\text{VII.7})$$

que representam restrições tecnológicas e de capacidade produtiva.

ii) além disso, a produção total em cada nó, ao longo dos 12 estágios, esta limitada por condições comerciais ou de exaustão de jazidas do tipo:

$$r_i \leq s_i^i C \leq R_i; \quad i = 1, 3 \quad (\text{VII.8})$$

No trabalho feito consideramos apenas uma restrição.

4.4. Restrição sobre a distribuição

i) a distribuição recebe limitações do tipo:

$$e_{ik} \leq v_{ik} \leq E_{ik}; \quad i = 5, 6; \\ k = 1, \dots, 12 \quad (\text{VII.9})$$

que representam restrições tecnológicas de capacidade e comerciais.

- ii) analogamente à produção foram adotadas restrições do tipo:

$$r_i \leq v_i^i D \leq R_i \quad ; \quad i = 5, 6 \quad (\text{VII.10})$$

Estas restrições significam que em cada nó, há limitações envolvendo o conjunto das distribuições ao longo dos 12 estágios. Admitimos apenas uma restrição desse tipo.

VII.5. Função objetivo

5.1. Custos de estocagem

São supostos aproximáveis a um polinômio de 3º grau (em sua região convexa) no intervalo $[m_{ik}, M_{ik}]$, portanto:

$$f_{ik}(x_{ik}) = F_{ki}^0 + F_{ki}^1 x_{ik} + F_{ki}^2 (x_{ik})^2 + F_{ki}^3 (x_{ik})^3$$

$$i = 1, \dots, 9 \quad ; \quad k = 1, \dots, 12 \quad (\text{VII.11})$$

O termo de ordem zero foi omitido por não interferir no processo de otimização e não alterar a solução ótima. As constantes $F_{ki}^1, F_{ki}^2, F_{ki}^3$ são obtidas por ajustamento cúbico à função de custo real.

5.2. Custos de transportes

São supostos lineares com a quantidade transportada, no intervalo $[n_{ik}, N_{ik}]$ considerado.

Portanto:

$$g_{jk}(u_{jk}) = G_{kj}^0 + G_{kj} u_{jk} \quad ;$$

$$j = 1, \dots, 9 \quad ; \quad k = 1, \dots, 12$$

(VII.12)

O termo de ordem zero foi omitido por não interferir no processo de otimização. A constante G_{kj} é obtida pelo processo de ajustamento linear à curva de custos reais.

5.3. Custos de produção

O custo de produção (ou alternativamente, preço de compra a terceiros) é suposto linear com as quantidades produzidas (ou compradas), para o intervalo $[q_{ik}, Q_{ik}]$ considerado.

Portanto:

$$h_{ik}(s_{ik}) = H_{ki}^0 + s_{ik} H_{ki} \quad ; \quad (\text{VII.13})$$

$$i = 1, 3 \quad ; \quad k = 1, \dots, 12$$

O termo de ordem zero foi omitido.

5.4. Receitas da venda

O preço de venda é suposto linear com as quantidades entregues, no intervalo $[e_{ik}, E_{ik}]$ considerado.

Portanto:

$$w_{ik}(v_{ik}) = W_{ki}^0 + v_{ik} W_{ki} \quad ;$$

$$i = 5, 6 \quad ; \quad i = 1, \dots, 12 \quad (\text{VII.14})$$

O termo de ordem zero foi omitido.

Observe-se que, como o preço de venda representa entrada de recursos financeiros tendo, assim, sinal contrário aos demais custos, ele vai aparecer com sinal negativo na função objetivo.

5.5. Função objetivo escolhida

Adotou-se, como função objetivo, o valor atual da série financeira representando custos menos receitas. Seja z_k o custo líquido no estágio k :

Então:

$$z_k = f_k(x^k) + g_k(u^k) + h_k(s^k) - w_k(v^k) \quad (\text{VII.15})$$

Portanto:

$$z = \sum_k \rho^k z_k \quad ; \quad 0 < \rho < 1 \quad (\text{VII.16})$$

onde ρ é o fator de atualização do capital em cada estágio.

Para não sobrecarregar a notação, omitimos ρ^k , admitindo que ele já está incorporado no valor de z_k .

Lembre-se que, como o sistema tem um funcionamento contínuo, embora o horizonte de tempo esteja, por razões práticas, em 12 meses, há necessidade de levar em conta interesses futuro na programação. Neste sentido $f_{12}(x^{12})$ deve levar em conta esses interesses, penalizando artificialmente os estoques indesejáveis, e estimulando os estoques desejados.

VII.6. O problema formalizado

Com esta formulação o problema apresentado poderá ser escrito como:

(POE.CLC):

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x,u,s,v} \quad z(x,u,s,v) &= \sum_{k=1}^{12} \{ f_k(x^k) + g_k(u^k) + h_k(s^k) - w_k(v^k) \} \\ \text{sujeito a:} \\ x^k &= x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k \quad (\gamma_k) \\ m^k &\leq x^k \leq M^k; \quad k_A x^k \leq c^k \quad (\lambda_k) \\ n^k &\leq u^k \leq N^k; \quad k_B u^k \leq d^k \quad (\mu_k) \\ q_i &\leq s_i \leq Q_i; \quad p_i \leq s_i^i C \leq P_i \quad (\eta^i, \bar{\eta}^i) \\ e_i &\leq v_i \leq E_i; \quad r_i \leq v_i^i D \leq R_i \quad (\nu^i, \bar{\nu}^i) \\ \text{com } k &= 1, \dots, 12 \quad i = 1, \dots, 9 \end{aligned}$$

onde $\gamma_k, \lambda_k, \mu_k, \eta^i, \bar{\eta}^i, \nu^i, \bar{\nu}^i$ são multiplicadores de Lagrange associados às restrições indicadas.

Como as parcelas da função objetivo, relativas ao transporte, a produção e a distribuição são supostas lineares, para estes sub-problemas pode ser preferível a adoção de um algoritmo qualquer de programação linear, dispensando, assim, a dualização.

VII.7. Apresentação dos sub-problemas

Aplicando-se ao problema (POE.CLC) as técnicas apresentadas em III, IV, V e VI obtém-se a seguinte decomposição hierárquica:

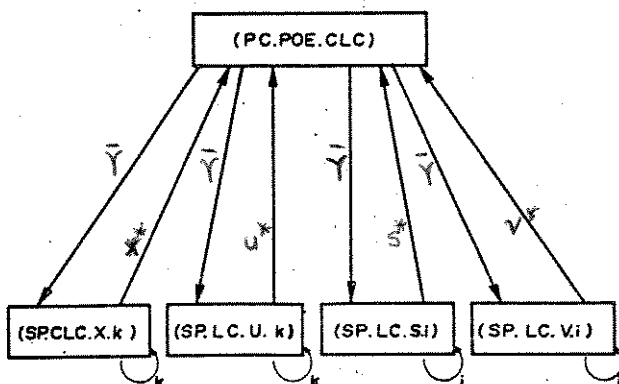


FIGURA VII.2 - Decomposição hierárquica do (POE.CLC)

onde

(SP.CLC.X.k); $k = 1, \dots, 12$:

$$\begin{aligned} \phi_k^x(\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}) &= \text{Min}_{x^k} \{ \sum_i [F_{ki}^1 x_{ik} + F_{ki}^2 (x_{ik})^2 + F_{ki}^3 (x_{ik})^3] + (\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_{k+1}) x^k \} \\ \text{sujeito a: } k_A x^k &\leq c^k; \quad m^k \leq x^k \leq M^k \end{aligned}$$

(SP.LC.U.k); $k = 1, \dots, 12$:

$$\begin{aligned} \phi_k^u(\bar{\gamma}_k) &= \text{Min}_{u^k} \{ \sum_j [G_{kj} u_{jk}] - \bar{\gamma}_k T u^k \} \\ \text{sujeito a: } k_B u^k &\leq d^k; \quad n^k \leq u^k \leq N^k \end{aligned}$$

(SP.LC.S.i); $i = 1, \dots, 9$:

$$\begin{aligned} \phi_i^s(\bar{\gamma}^i) &= \text{Min}_{s_i} \{ \sum_k [s_{ik} H_{ki}] - s_i \bar{\gamma}^i \} \\ \text{sujeito a: } p_i &\leq s_i^i C \leq P_i; \quad q_i \leq s_i \leq Q_i \end{aligned}$$

(SP.LC.V.i); $i = 1, \dots, 9$:

$$\begin{aligned} \phi_i^v(\bar{\gamma}^i) &= \text{Min}_{v_i} \{ - \sum_k [v_{ik} W_{ki}] + v_i \bar{\gamma}^i \} \\ \text{sujeito a: } r_i &\leq v_i^i D \leq R_i; \quad e_i \leq v_i \leq E_i \end{aligned}$$

(PC.POE.CLC):

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\gamma} \quad &\phi(\gamma) \\ &\gamma \text{ irrestrito} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \phi(\bar{\gamma}) &= - \bar{\gamma}_1 x^0 + \sum_k \phi_k^x(\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}) + \\ &+ \sum_k \phi_k^u(\bar{\gamma}_k) + \sum_i \phi_i^s(\bar{\gamma}^i) + \sum_i \phi_i^v(\bar{\gamma}^i) \end{aligned}$$

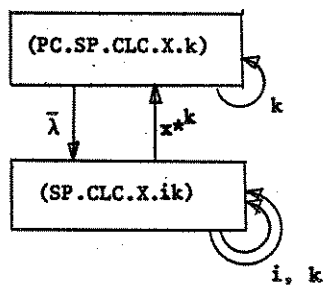
(VII.17)

VII.8. Solução dos sub-problemas

O sub-problema (PC.POE.CLC), sendo não linear irrestrito foi resolvido utilizando-se o método gradiente ótimo com busca unidimensional utilizando aproximação cúbica, conforme descrito no Apêndice C, algoritmo C.1.

Os sub-problemas (SP.LC.U.k), (SP.LC.S.i) (SP.LC.V.i), por serem lineares e com apenas uma restrição linear envolvendo todas as variáveis, foram resolvidos utilizando o algoritmo apresentado no Apêndice D.

O sub-problema (SP.CLC.X.k) por ser não linear, com restrições lineares foi novamente de composto, como segue:



onde

(SP.CLC.X.ik); $i = 1, \dots, 9$; $k = 1, \dots, 12$:

$$\begin{aligned} \psi_{ik}^x(\bar{y}_{ki}, \bar{y}_{(k+1)i}, \bar{\lambda}_k) = \\ = \text{Min}_{x_{ik}} \{ F_{ki}^1(x_{ik}) + F_{ki}^2(x_{ik})^2 + F_{ki}^3(x_{ik})^3 + \\ + (\bar{y}_{ki} - \bar{y}_{(k+1)i} + \bar{\lambda}_k^i A_k) x_{ik} \} \\ \text{sujeito a: } m_{ik} \leq x_{ik} \leq M_{ik} \end{aligned}$$

(PC.SP.CLC.X.k); $k = 1, \dots, 12$:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max}_{\lambda_k \geq 0} \psi_k^x(\bar{y}_k, \bar{y}_{k+1}, \lambda_k) \end{array} \right]$$

onde

$$\psi_k^x(\bar{y}_k, \bar{y}_{k+1}, \bar{\lambda}_k) =$$

$$\left[\sum_i \psi_{ik}^x(\bar{y}_{ki}, \bar{y}_{(k+1)i}, \bar{\lambda}_k) \right] - \bar{\lambda}_k c^k$$

(VII.18)

O sub-problema coordenador (PC.SP.CLC.X.k), sendo não linear, foi resolvido utilizando o algoritmo C.2 apresentado no Apêndice C.

O sub-problema (SP.CLC.X.ik), foi resolvido utilizando-se o algoritmo apresentado em IV.4, tomando-se os cuidados lembrados no Apêndice D para o caso de alguma função $f_{ik}(x_{ik})$ ser linear; porém, neste caso, o problema (PA) ali mencionado ficou extremamente simplificado, pois a matriz A_k para o problema estudado, só tem uma linha.

VIII. INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DA COORDENAÇÃO POR OBJETIVOS

VIII.1. As funções e características do gerente operacional

O método de coordenação hierárquica por objetivos adotada neste trabalho permite interpretações econômico-gerenciais do problema muito interessantes [18].

A própria idéia da decomposição, em si, já pode ser interpretada como uma subdivisão da tarefa otimizadora e, consequentemente, gerenciadora. Admite-se que o gerente (ou sub-gerente) de operações de um sistema (ou sub-sistema) é uma pessoa ou entidade que:

- conhece exatamente as restrições e condicionantes operacionais comerciais ou tecnológicos do (sub) sistema sob sua responsabilidade;
- dispõe de um conjunto de variáveis operacionais sob seu controle, isto é, que podem ser fixados livremente por ele, e sabe como fixá-las de forma a não violar as restrições do seu (sub) sistema;
- conhece claramente seus custos e receitas de forma a poder formular uma função objetivo para ser minimizada (ou maximizada);
- dispõe de um algoritmo que lhe permita descobrir quais os valores numéricos para fixação das variáveis sob seu controle de forma a minimizar (ou maximizar) sua função objetivo, dentro de suas restrições;
- dispõe de meios de comunicação com os (sub)gerentes de outros (sub) sistemas interconectados com o seu, de forma a poder receber informações que possam alterar sua função objetivo (ou suas restrições) e transmitir informações que possam afetar os outros (sub) sistemas.

Neste trabalho nós nos fixamos na opção na qual o sub-gerente recebe informações que apenas alteram a sua função objetivo, daí o nome de coordenação pelo objetivo. A outra alternativa, na qual as restrições são alteradas, também chamada coordenação pelo modelo, não é aqui estudada.

VIII.2. Fatores de interconexão do sistema

Em uma rede de escoamento para a qual se definiu o problema geral de otimização de escoamento (PGOE) ou, em particular, o (POE.CLC), cinco são os fatores que criam a interconexão do

sistema.

i) conexão por atividade

O sistema possui quatro atividades distintas, devidamente interconectadas: produção, transporte, estocagem e distribuição, ligadas entre si pela equação dinâmica

$$x^k = x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k$$

(VIII.1)

ii) interconexão dos estágios

O estado do sistema, a cada estágio de tempo, x^k , está conectado com os estados nos estágios adjacentes, x^{k-1} (antecessor) e x^{k+1} (sucessor), também através da mesma equação dinâmica. Além disso, outras restrições sobre alguma das atividades (tipos $p_i \leq s_i \leq C_i$ ou $r_i \leq v_i \leq D_i$, por exemplo) podem interconectar aquela atividade do longo de todos os estágios.

iii) conexão pela estrutura da rede

O estado do sistema, em cada nó i , da rede, e o controle, através da atuação sobre o transporte em cada arco j , estão interconectados através da matriz de incidência $T = (T_{ij})$, também presente na equação dinâmica.

iv) interconexão nodal

Algumas atividades (estocagem, por exemplo) podem ter restrições que interconectem os valores das variáveis sobre os nós da rede (tipo $A x^k \leq c^k$).

v) interconexão dos arcos

A atividade de transporte pode ter restrições que interconectam os valores das variáveis sobre todos os arcos da rede (tipo ${}^k B u^k \leq d^k$).

As demais restrições admitidas em (POE.CLC) (VII.7) apenas limitam inferior e superiormente o valor de cada variável, criando assim uma característica chamada de canalização das variáveis (tipo $m_{ik} \leq x_{ik} \leq M_{ik}$; $n_{jk} \leq u_{jk} \leq N_{jk}$; $g_{ik} \leq s_{ik} \leq G_{ik}$; $e_{ik} \leq v_{ik} \leq E_{ik}$, $i=1, \dots, I$, $j=1, \dots, J$; $k=1, \dots, K$), sem interconexão direta entre as variáveis.

O (POE.CLC), como formulado, normalmente de grande porte, merece um tratamento via decomposição. O método de decomposição adotado foi a relaxação sucessiva ou simultânea de restrições ou equações pela introdução dos respectivos multiplicadores de Lagrange na função objetivo original. Este método, como se viu, acaba criando um problema de coordenação via multiplicadores de Lagrange, resolvido em nível hierárquico

superior aos dos sub-problemas gerados.

A interpretação econômica que se segue procura associar um sub-gerente a cada um dos sub-problemas obtidos após as decomposições obtidas.

VIII.3. Tipos de decomposição

A sequência de decomposições adotadas neste trabalho é apenas uma entre diversas possíveis, pois, cada uma das interconexões citadas em VIII.2 pode ser eliminada pela relaxação da restrição que a provoca.

O problema convexo-linear-canalizado (POE.CLC) é decomposto em uma combinação dos seguintes tipos:

i) decomposição por atividades (tipo AA')

O sistema é decomposto em quatro sub-sistemas, de produção, de transporte, de estocagem e de distribuição; obtida relaxando-se a equação dinâmica.

ii) decomposição por estágios (tipo kk')

O sistema é decomposto em K sub-sistemas, cada um relativo a cada estágio do sistema; obtida relaxando-se a equação dinâmica e as restrições $p_i \leq s_i \leq P_i$; $e_i \leq v_i \leq E_i$.

iii) decomposição estrutural (tipo ij)

O sistema é decomposto em um sub-sistema que só envolve os nós i e outro que só envolve os arcos j; obtida relaxando-se a equação dinâmica.

iv) decomposição nodal (tipo ii')

O sub-sistema de estocagem é decomposto em I sub-sistemas, cada um relativo a cada nó i, obtida relaxando-se as restrições $k_A x^k \leq c^k$.

v) decomposição em arcos (tipo jj')

O sub-sistema de transportes é decomposto em J sub-sistemas, cada um relativo a cada arco j; obtida relaxando-se a restrição $k_B u^k \leq d^k$.

VIII.4. Sequência de decomposição escolhida

Daqui é possível imaginar que a sequência de relaxações mais conveniente, sob o ponto de vista de vantagens na decomposição, é a seguinte:

- i) relaxação da equação dinâmica, pois ela permite, de imediato, as decomposições do tipo AA' e do tipo ij, favorecendo, ainda, as do tipo

kk' para os sub-sistemas de estocagem e de transporte e com as do tipo ii' para os sub-sistemas de produção e de distribuição.

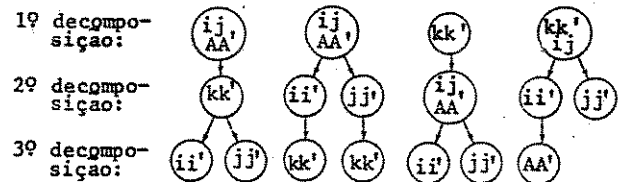
- ii) em seguida, cada um dos sub-sistemas pode ser novamente decomposto, através de relaxações convenientes:

- o sub-sistema de estocagem, no tipo ii'
- o sub-sistema de transporte, no tipo jj'
- os sub-sistemas de produção e de distribuição, no tipo kk'.

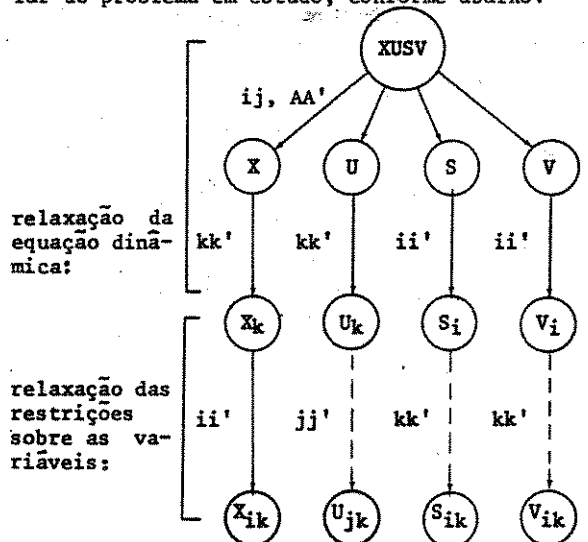
- iii) as restrições de canalização não são relaxadas, pois não conduzem a decomposições.

VIII.5. Sequências alternativas de decomposição

É fácil ver que outras sequências de decomposição seriam possíveis. Por exemplo:



A sequência de decomposições que adotamos, entretanto, foi uma solução mista, tentando tirar o máximo proveito da estrutura particular do problema em estudo, conforme abaixo:



onde X, U, S e V representam: estocagem, transporte, produção e distribuição, respectivamente.

Note-se, entretanto, que a 3ª decomposição, indicada em tracejada na Figura poderá ser

omitida em um ou mais sub-sistemas:

- se a função objetivo do sub-sistema for linear, ter-se-á um problema típico de programação linear para o qual se poderá aplicar um dos algoritmos clássicos de programação linear, sem necessidade, portanto, de nova decomposição;

- se a função objetivo do sub-sistema for não linear, há também a possibilidade de se utilizar um dos algoritmos de programação linear-por-partes, ou mesmo de programação não-linear, dispensando-se a decomposição [2, 11, 12].

Finalmente, cabe dizer que, em princípio, não se pode assegurar que, computacionalmente, uma sequência de decomposições é melhor que outra. Os valores numéricos de I, J e K, o número de restrições L para cada sub-problema, a forma da função objetivo, etc., é que vão ditar a forma mais conveniente de se fazer a decomposição. Da mesma forma, a omissão da 3ª decomposição só pode ser decidida caso a caso, considerando-se as características particulares de cada sub-sistema.

VIII.6. Interpretação econômica da decomposição

Faremos agora, a título de ilustração, uma interpretação econômica da 1ª decomposição da alternativa escolhida.

Suponhamos que o gerente geral, responsável pela otimização do sistema de escoamento em estudo, resolva descentralizar a atividade de gerenciar o sistema. Para isto, ele constitui, hipoteticamente, quatro outras companhias subsidiárias, encarregadas, respectivamente, de produzir, transportar, estocar e distribuir o produto.

Cada um dos gerentes das quatro companhias tem sob sua responsabilidade uma parte do sistema, exercendo, sobre ele, as funções descritas em VIII.1, ignorando as restrições, custos, objetivos e níveis operativos dos demais sub-sistemas. Consequentemente, o atendimento da equação dinâmica não poderá ser intencionalmente obtido pelos quatro gerentes.

Por sua vez, o gerente geral, que agora assumirá uma função apenas coordenadora, passa a desconhecer as restrições e as funções objetivo de cada um dos sub-sistemas. Ele se preocupará exclusivamente com o atendimento da equação dinâmica.

O programa ótimo para o sistema, para um período de K estágios será obtido após uma sucessiva troca de informações entre o Coordenador e cada um dos Gerentes. Os quatro Gerentes não trocam nem informações nem produtos entre si: O Coordenador "compra" e "vende" produtos a cada Gerente em cada nó i e em cada estágio k, obedecendo a uma tabela de preços $\bar{Y} = (\bar{Y}_{ki})$ fixada por ele. Por sua vez, cada Gerente, com os preços tabelados, estabelecerá seu nível operativo, procurando maximizar seus lucros, obedecendo, apenas, às suas próprias restrições.

Vejamos cada um dos quatro problemas de otimização:

a - Problema de otimização de produção

O Gerente da empresa de produção "vende" sua produção $s = (s_{ik})$ ao Coordenador, ao preço unitário $\bar{Y} = (\bar{Y}_{ki})$, tendo como objetivo maximizar seu lucro líquido, dado pela diferença entre sua "receita" de vendas, $\sum_i \sum_k \bar{Y}_{ki} s_{ik}$, e

seus custos de produção $h(s)$. Esta maximização deve satisfazer, entretanto, as restrições determinadas pelo conjunto Ω . Portanto seu problema será:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \left[\sum_i \sum_k \bar{Y}_{ki} s_{ik} - h(s) \right] \\ \text{se} \Omega \end{aligned} \quad (\text{VIII.2})$$

Recorde-se que este problema é exatamente o mesmo problema (SP.S), apresentado em III.3.4., bastando substituir a minimização por maximização e trocando-se o sinal da função objetivo.

Seja $s^*(\bar{Y})$ a solução do problema acima e $-\phi^S(\bar{Y})$ o valor da função objetivo no ponto de ótimo.

b - Problema de otimização de distribuição

O Gerente da empresa de distribuição "compra" ao Coordenador, a quantidade $v = (v_{ik})$, pagando o preço unitário $\bar{Y} = (\bar{Y}_{ki})$ e revende ao mercado, apurando uma receita $w(v)$. Isto será feito de forma a maximizar seu lucro líquido, obedecendo as restrições dadas pelo conjunto Θ . Disto resulta o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \left[w(v) - \sum_i \sum_k \bar{Y}_{ki} v_{ik} \right] \\ \text{se} \Theta \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

que é o mesmo problema (SP.V), em III.3.4., fazendo-se as devidas substituições mencionadas em (a).

Seja $v^*(\bar{Y})$ a solução do problema acima e $-\phi^V(\bar{Y})$ o valor da função objetivo no ponto de ótimo.

c - Problema de otimização de estocagem

De forma análoga, o Gerente da firma de estocagem "compra" e "vende" do Coordenador, de forma a promover variações em seu estoque. No estágio k, no nó i, a redução de estoque será dada algebricamente por $[x_i(k-1) - x_{ik}]$, pela qual ele receberá uma receita unitária $\bar{Y}_{ki}$. Como seu objetivo será maximizar seu lucro líquido, terá o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \left[\sum_i \sum_k \bar{Y}_{ki} (x_i(k-1) - x_{ik}) - f(x) \right] \\ \text{se} \Omega \end{aligned} \quad (\text{VIII.4})$$

que é o mesmo problema (SP.X), com as devidas substituições.

Seja $x^*(\bar{Y})$ a solução do problema acima e $-\phi^X(\bar{Y})$ o valor da função objetivo no ponto de ótimo.

d - Problema de otimização de transportes

O Gerente da firma de transportes "compra" o produto em um nó, transporta-o pelo arco j e "vende-o" em outro nó. Em um nó i , num estágio k o saldo entre chegadas e saídas de produto, por conta do transporte, é dada por $\sum_j T_{ij} u_{jk}$, o que gerará uma receita líquida de $\sum_j \bar{y}_{ki} (\sum_j T_{ij} u_{jk})$. Como seu objetivo será maximizar seu lucro líquido, seu problema será:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max} \\ u \in \Gamma \end{array} \left[\sum_i \sum_k \bar{y}_{ki} (\sum_j T_{ij} u_{jk}) - g(u) \right] \right] \quad (\text{VIII.5})$$

que é o mesmo problema (SP.V), com as devidas substituições.

Seja $u^*(\bar{y})$ a solução do problema acima $-\phi^u(\bar{y})$ o valor da função objetivo no ponto de ótimo.

e - Problema coordenador

É óbvio que, as soluções independentes dos quatro sub-problemas de otimização não conduzirão automaticamente à satisfação da equação dinâmica. Pode-se dizer que, ao nível dos sub-sistemas, a equação dinâmica foi relaxada. Por sua vez, o Coordenador terá sob seu controle exclusivo, a fixação dos preços $\gamma = (\gamma_{ki})$ com o qual ele poderá influir indiretamente sobre o comportamento dos quatro Gerentes, estimulando maiores volumes de "vendas" através do aumento de preços ou estimulando maiores volumes de "compras" através da redução de preços.

Vejamos como isto pode ser feito, ao nível da interpretação econômica em curso.

Os lucros máximos dos quatro sub-sistemas para um dado $\bar{y}$ será:

$$- [\phi^x(\bar{y}) + \phi^u(\bar{y}) + \phi^s(\bar{y}) + \phi^v(\bar{y})] = -\phi(\bar{y})$$

Como o Coordenador negocia contra os quatro Gerentes, qualquer lucro dos Gerentes será obtido em detrimento dos interesses do Coordenador.

Coloquemos, portanto, como objetivo para o Coordenador, minimizar a soma dos lucros líquidos dos Gerentes, manipulando apenas γ . Assim seu problema será:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min} \\ \gamma \end{array} [-\phi(\gamma)] ; \quad \text{com } \gamma \text{ irrestrito} \right] \quad (\text{VIII.6})$$

que é o mesmo problema coordenador (PC.PCOE) apresentado em III.2.2., bastando substituir a maximização por minimização e trocar o sinal da função objetivo. Veja também (PC.POE.CLC), VII.7.

Seja γ^* a solução neste problema.

Vejamos a que conduzirá este comportamento do Coordenador. Estudemos $\phi(\gamma)$:

$$\phi(\bar{y}) = \phi^x(\bar{y}) + \phi^u(\bar{y}) + \phi^s(\bar{y}) + \phi^v(\bar{y}) =$$

$$= \sum_i \sum_k \bar{y}_{ki} [(x_{ik}^* - x_{i(k-1)}^* - \sum_j T_{ij} u_{jk}^* -$$

$$- s_{ik}^* + v_{ik}^*] + f(x^*) + g(u^*) + h(s^*) - w(v^*) =$$

$$= z(x^*, u^*, s^*, v^*) + \sum_k \bar{y}_k (x^{*k} - x^{*(k-1)} -$$

$$- T u^{*k} - s^{*k} + v^{*k}) = z(x^*, u^*, s^*, v^*) + \sum_k \bar{y}_k \xi^{*k}$$

onde

$$x^{*k} = x^{*(k-1)} + T u^{*k} + s^{*k} - v^{*k} + \xi^{*k}$$

(VIII.8)

A variável ξ^{*k} pode ser interpretada como uma perturbação da equação dinâmica: quando $\xi^{*k} = 0$ para todo $k = 1, \dots, K$ isto quer dizer que a equação dinâmica foi atendida plenamente pelos valores x^* , u^* , s^* , v^* .

A minimização de $-\phi(\gamma)$ ou, alternativamente, a maximização de $\phi(\gamma)$ implicará o seguinte:

- se $\xi_{ik}^* > 0$, então deve-se aumentar algebricamente γ_{ki} para aumentar $\phi(\gamma)$;

- se $\xi_{ik}^* < 0$, deve-se diminuir algebricamente γ_{ki} para aumentar $\phi(\gamma)$;

- se $\xi_{ik}^* = 0$, não se deve alterar γ_{ki} pois isto não teria influência sobre $\phi(\gamma)$.

Mas este comportamento tem a seguinte interpretação econômica:

- $\xi_{ik}^* > 0$ significa que

$$x_{ik}^* > x_{i(k-1)}^* + \sum_j T_{ij} u_{jk}^* + s_{ik}^* - v_{ik}^*,$$

(VIII.9)

ou seja, há deficiência de produto no nó i no estágio k e o procedimento será aumentar o preço γ_{ki} para estimular entradas (vendas) e desestimular as saídas (compras).

- $\xi_{ik}^* < 0$ terá raciocínio oposto;

- $\xi_{ik}^* = 0$ indicará balanço perfeito no nó i no estágio k , portanto, o preço γ_{ik} já estava justo.

A solução do problema global será feita através de uma sucessão de soluções do problema coordenador e dos quatro problemas de otimização, com troca de informações dos resultados parciais, em um esquema semelhante ao da Figura III.1.

Finalizando-se a interpretação econômica, pode-se, dizer que, após obtida a solução ótima x^* , u^* , s^* , γ^* os valores

encontrados atendem à equação dinâmica e o Coordenador pode "sair do negócio", permitindo assim que as "compras" e "vendas" se façam diretamente entre os quatro gerentes aos preços γ^* encontrados.

Por outro lado $\gamma^* = (\gamma_{ki}^*)$, valor de equilíbrio do preço, tem também a seguinte interpretação interessante: Suponhamos existirem produtores (ou consumidores) marginais que oferecem produtos para venda (ou procuram para compra) no nó i , no estágio k .

Pode-se mostrar facilmente que a política ótima em relação a eles será a seguinte:

- . se o preço oferecido para venda for inferior a γ_{ki}^* , haverá vantagens em realizar alguma compra, para qualquer dos quatro Gerentes ou mesmo para o Coordenador;
- . se o preço oferecido para compra for superior a γ_{ki}^* , haverá vantagens em realizar alguma venda, para qualquer dos quatro Gerentes ou mesmo para o Coordenador.

Isto leva a um conceito de utilidade marginal de uma perturbação ξ_{ik} :

- a preços inferiores a γ_{ki}^* perturbações ξ_{ik}^* positivas reduzem o custo global;
- a preços superiores a γ_{ki}^* perturbações ξ_{ik}^* negativas reduzem o custo global.

Entendendo-se por custo global o custo $z(x^*, u^*, s^*, v^*)$ acrescido dos pagamentos as compras feitas a terceiros (ou decrescido das receitas de vendas feitas a terceiros).

Interpretações econômicas análogas podem ser feitas em outras decomposições via relaxação de restrições ou igualdades.

Finalmente, pode-se utilizar esta interpretação econômica para se preparar uma inicialização mais conveniente do problema: O algoritmo desenvolvido exige um valor inicial γ^0 . Em vez de se utilizar $\gamma^0 = 0$, por exemplo, calcule-se uma estimativa dos custos de produção, transporte, estocagem até aquele nó i no estágio k e utilize-se estes custos como preços iniciais.

Este procedimento reduzirá o número de iterações necessárias até o ótimo.

IX. GENERALIZAÇÕES DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE ESCOAMENTOS

Algumas das hipóteses restritivas explícitas colocadas na formulação do problema de otimização de escoamentos, podem ser facilmente dispensáveis e só foram adotadas para simplificar a formulação ou para não sobrecarregar a notação ou mesmo para permitir soluções mais simples. Outras hipóteses, porém, representam realmente premissas muito fortes, cujo abandono implicaria em mudanças radicais na formulação do problema ou em impossibilidades de solução com as técnicas utilizadas.

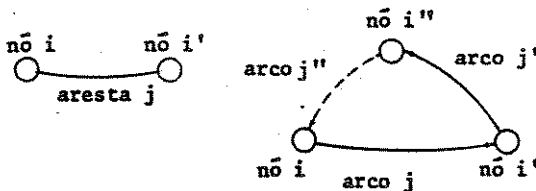
O propósito deste capítulo é indicar algumas restrições que são facilmente relaxáveis, mostrando, se possível, o caminho para o tratamento resultante.

IX.1. Generalizações quanto à estrutura do grafo

Admitamos, no Apêndice A, uma estrutura particular de grafo G : orientado, conexo, sem circuitos e invariante com o tempo. Vejamos como seria possível relaxar estas restrições, uma de cada vez.

1.1. O grafo não precisa ser orientado

Se o grafo for não orientado, como é o caso de uma malha viária genérica, basta substituir cada aresta por um par de arcos orientados em sentidos opostos. Por facilidade notacional e para manter a consistência notacional da matriz T , pode-se fazer como segue:



A introdução do nó fantasma i'' e do arco fantasma j'' tem a finalidade exclusiva de garantir a correspondência unívoca entre arcos e pares ordenados de nós.

1.2. O grafo não precisa ser conexo

Na realidade, os problemas de otimização de escoamentos em grafos não conexos podem ser facilmente decomponíveis em tantos outros problemas independentes quantos sejam os sub-grafos conexos obtíveis a partir do grafo original.

1.3. O grafo pode conter circuitos

Os grafos com circuitos podem, em princípio, permitir recirculação de produtos ao longo dos circuitos. Entretanto, se não houver

custos negativos ao longo do circuito, e se houver escoamento viável, sem recirculação, a solução ótima não conterá recirculação, pois elas, se presente, causariam aumento dos custos globais.

Problemas específicos podem ser imaginados com restrições tais que somente a existência de recirculação viabilizaria algum escoamento. Neste caso, com custos não negativos, alguma recirculação estará presente na solução ótima, mas apenas a indispensável para garantir a viabilidade do escoamento ótimo.

Quando houver custos negativos ao longo de um circuito, é possível que o surgimento ou o incremento da recirculação reduza o custo global. Neste caso, a solução ótima conterá o máximo de recirculação permitida pelas restrições de canalização no transporte e na estocagem. Lembre-se que, neste caso, a inexistência de canalização poderia resultar em inexistência de solução ótima (caso de solução ilimitada).

1.4. O grafo pode sofrer variações com o tempo

Para isto, basta que as alterações estruturais (novos arcos, novos nós, extinção temporária de arcos ou nós) coincidam com algum instante t_k .

Seja k_T a matriz de incidência do grafo vigente, ao longo do período k . Então a equação dinâmica ficará:

$$x^k = x^{k-1} + k_T u^k + s^k - v^k \quad (\text{IX.1})$$

e todo o desenvolvimento feito permanece válido, com alterações mínimas.

IX.2. Generalizações quanto ao escoamento

O capítulo II introduziu o conceito de escoamento que, entretanto, pode sofrer, facilmente, as seguintes generalizações:

2.1. O escoamento não precisa ser conservativo

Admitimos que não há perdas nem acréscimos de produto ao longo do escoamento. Seja, entretanto, $\xi^k = (\xi_{ik})$ a quantidade (conhecida) de produto ganha (ou perdida, no caso de $\xi_{ik} < 0$), no nó i , no período k . Então a equação dinâmica ficará:

$$x^k = x^{k-1} + T u^k + s^k - v^k + \xi^k \quad (\text{IX.2})$$

e todo o desenvolvimento feito poderá ser facilmente adaptado para esta alteração.

2.2. O fluxo poderá conter atrasos nos arcos

Suponhamos os t_k igualmente espaçados tal que $t_{k+1} - t_k = \delta$ e sejam os atrasos sob a forma $\tau \delta$, com τ inteiro e τ_m o maior dos valores de τ .

Construa-se, a partir de G , um novo grafo ao longo dos quais o atraso seja τ . Chama-se $T(\tau)$ a matriz de incidência do grafo $G(\tau)$. Observa-se que $T = \sum_{\tau=0}^{\tau_m} T(\tau)$.

Pode-se mostrar que a nova equação dinâmica pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} x^k &= x^{k-1} + T(0) u^k + \dots + T(\tau) u^{k-\tau} + \dots + \\ &+ T(\tau_m) u^{k-\tau_m} + s^k - v^k, \quad \text{ou} \\ x^k &= x^{k-1} + \sum_{\tau=0}^{\tau_m} T(\tau) u^{k-\tau} + s^k - v^k \end{aligned} \quad (IX.3)$$

dados $x^0, u^0, \dots, u^{-\tau}, \dots, u^{-(\tau_m-1)}$

e todo o desenvolvimento poderá ser facilmente refeito para acomodar esta alteração.

Esta generalização é muito útil, pois, em grande parte das possíveis aplicações, o tempo de transporte ao longo de um arco pode superar o intervalo de tempo entre dois instantes consecutivos.

IX.3. Generalizações quanto ao fluxo

No capítulo II assumimos que um único produto é produzido, transportado, estocado e distribuído. Vejamos que generalizações podem ser feitas quanto ao número de produtos.

3.1. A rede pode escoar mais de um produto

Suponhamos que a rede possa permitir o escoamento de mais de um produto, compartilhando as instalações de transporte e de estocagem, embora utilizando instalações de produção especializada por produto e atendendo a mercados específicos, por produto.

Chamemos $y = 1, \dots, Y$ o índice que designa os produtos sendo escoados. Então, para cada produto se pode escrever uma equação dinâmica:

$$\begin{aligned} y_x^k &= y_x^{k-1} + T y_u^k + y_s^k - y_v^k \\ k &= 1, \dots, K; \quad y = 1, \dots, Y \end{aligned} \quad (IX.4)$$

Ilustremos a generalização para o (POE) com as hipóteses de separabilidade e linearidades adotadas em (POE.CLC), como em VII.7.

A função objetivo será:

$$\begin{aligned} z(x, u, s, v) &= \sum_{y=1}^Y \sum_{k=1}^K [f_k^y(y_x^k) + g_k^y(y_u^k) + \\ &+ h_k^y(y_s^k) - w_k^y(y_v^k)] \end{aligned} \quad (IX.5)$$

E as restrições sobre os estoques, transportes, produção e distribuição que sofrerão alterações são as seguintes:

$$m^k \leq \sum_y y_x^k \leq M^k; \quad k = 1, \dots, K \quad (IX.6)$$

$$n^k \leq \sum_y y_u^k \leq N^k; \quad k = 1, \dots, K \quad (IX.7)$$

As demais restrições permanecerão as mesmas, sendo uma para cada um dos produtos y .

O tratamento deste problema via coordenação hierárquica pode seguir a seguinte linha de trabalho: Cria-se um novo nível hierárquico, mais alto, fazendo-se inicialmente a relaxação simultânea das restrições IX.6 e IX.7, que são aquelas que fazem a interconexão dos produtos.

Daí por diante, se obterá um sub-problema separado para cada produto y , para o qual se pode aplicar tratamento análogo ao que já foi feito neste trabalho.

3.2. A rede pode permitir também transformações de produtos

Suponha-se que, em um nó especial i , haja instalações tais que permitam a transformação, sem perdas, de um produto em vários outros ou, vice-versa, de vários produtos em um só.

Seja $i_H = (i_{H_y}, y')$ onde i_{H_y}, y' é a fração do produto y' que se transforma em produto y'' no estágio seguinte, no nó i .

Então $y'_{x_i(k-1)}$, quantidade de produto y' disponível no nó i , no final do estágio $(k-1)$ se transformará em $(i_{H_y}, y'') y'_{x_i(k-1)}$ do produto y'' no final do estágio k .

Assim, a equação dinâmica para o nó i será:

$$\begin{aligned} y_{x_{ik}} &= \sum_{y'=1}^Y i_{H_y, y'} y'_{x_i(k-1)} + \sum_{j=1}^J T_{ij} y_{u_{jk}} + \\ &+ y_{s_{ik}} - y_{v_{ik}} \end{aligned} \quad (IX.8)$$

para $k = 1, \dots, K; \quad y = 1, \dots, Y$

Caso um nó i não permita transformações, a matriz i_H será simplesmente a matriz identidade recaído-se, assim, no caso particular para o qual o trabalho original tinha sido

REFERÊNCIAS

- [1] ALBUQUERQUE, R.H.P.L., TAVARES, H.M.F. e COSTA, E.A.; "Sistema de escoamento da safra de soja da COTRIJUI"; UNICAMP, FEC, documento interno, 1977.
- [2] AOKI, M.; Introduction to Optimization Techniques ; Macmillan, New York, 1971.
- [3] AUTHIÉ, G.; Otimização em Grafos ; Convênio UNICAMP/METRO, Campinas, 1976.
- [4] BECKMANN, M.J.; Inventory Control ; Springer-Verlag, New York, 1969.
- [5] BOTTURA, C.P., TAVARES, H.M.F. e COSTA, E.A.; "Hierarchical control of a production-transportation network with buffer storage", submetido ao Simpósio do IEEE - Systems, Man and Cybernetics, 1979.
- [6] COSTA, E.A. e OLIVEIRA FILHO, F.; "Export policy optimization for an iron ore company"; 79 International Symposium in Operations Research, IFORS, Tokio, 1975.
- [7] COSTA, E.A., TAVARES, H.M.F. e BOTTURA, C.P.; "Otimização hierárquica da operação de uma rede de escoamento"; apresentado ao XI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Brasília, 1978.
- [8] DREW, S.A.W.; "The Application of hierarchical control methods to a management problem"; Int. J. System Sci., vol. 6, nº 4, pp. 371-395, 1975.
- [9] FORD, L.R.; FULKERSON, D.R.; Flows in Network; Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
- [10] FORRESTER, J.W.; Industrial Dynamics; Cambridge, Mass., The M.I.T. Press, 1961.
- [11] GARCIA, A.S.; "Método dual-Simplex linear por partes"; Tese de Mestrado, UNICAMP, IMECC, 1978.
- [12] GEOFRION, A.M., (Editor); Perspectives on Optimization ; Addison-Wesley, USA, 1972.
- [13] HAIMES, Y.Y.; "Hierarchical modeling of regional total water resources systems"; Automatic, vol.II, pp. 25-26, Pergamon Press, 1975.
- [14] LARSON, R.E. e KECKLER, W.G.; "Application of dynamic programming to the control of water resources systems"; Automatica, vol. 5, pp. 15-26, Pergamon Press, 1969.
- [15] LASDON, L.S.; "Duality and decomposition in mathematical programming"; IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. SSC - 4, nº 2, pp. 86 - 100, 1968.
- [16] LASDON, L.S.; Optimization Theory for Large Systems ; Macmillan, New York, 1970
- [17] LYRA, C., SOARES, S. e TAVARES, H.M.F.; "Otimização da geração em sistemas hidro-elétricos de grande porte"; XI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Brasília, 1978.
- [18] NAINIS, W.S. e HAIMES, Y.Y.; "A multilevel approach to planning for capacity expansion in water resources systems"; IEEE - Transaction on Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC - 5, nº 1, pp. 53 - 63, 1975.
- [19] PROPOI, A.I.; "Problems of dynamic linear Programming"; IIASA - International Institute for Applied Systems Analysis, Laxemburg, Austria, 1976.
- [20] SAKAROVITCH, M.; Notes on Linear Programming ; Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1971.
- [21] SIMMONS, M.D. e WHITE, G.W.T.; "The decentralized profit maximization of interconnected production systems"; (Part I e II), Int. J. Control, vol.25, nº 5, pp. 705-744, 1977.
- [22] YOSHIKAWA, T.; "Dynamic programming approach to decentralized stochastic control problems"; IEEE - Transaction on Automatic Control (Technical notes and correspondence), pp. 796-797, 1975.

APÊNDICE A

RESUMO DOS CONCEITOS DA TEORIA DOS GRAFOS

Este Apêndice será dedicado a apresentação formal dos conceitos, notações e terminologias que serão adotados na formulação dos problemas de otimização de escoamentos.

Alguns termos serão aqui definidos de forma idêntica aquela apresentada na literatura e servem apenas para estruturar a apresentação e introduzir a terminologia e notação que será utilizada ao longo do trabalho. Outros termos pretendem ser extensões de conceitos já consagrados visando facilitar as atividades de modelagem [3].

A.1. Grafo, nó e arco

Os sistemas de escoamento serão supostos sob a estrutura de grafos, abaixo definida a partir do conceito de conjuntos e de par ordenado. O conceito de nó estará associado ao conceito de locais de estocagem de produtos; pode também estar associado a pontos onde exista convergência ou divergência de fluxos de transporte. O conceito de arco está associado ao meio físico através do qual o transporte se efetua, de um nó para outro nó.

Definição A.1

Sejam:

a - um conjunto finito

$$X = \{X_1, \dots, X_i, \dots, X_I\} \quad e$$

b - um conjunto $U = \{U_1, \dots, U_j, \dots, U_J\}$ formado por pares ordenados $U_j = (X_i, X_i')$ de elementos de X , obedecendo à restrição:

$$se \ U_j = (X_i, X_i') \in U ;$$

$$então \ (X_i', X_i) \notin U$$

i) chama-se grafo, orientado G , a uma estrutura descrita univocamente pelo par ordenado de conjuntos X e U , ou seja,

$$G = (X, U)$$

ii) chama-se nó de um grafo $G = (X, U)$ a cada um dos elementos $X_i \in X$;

iii) chama-se arco de um grafo $G = (X, U)$ a cada um dos elementos $U_j \in U$

A restrição colocada em (b) tem por finalidade eliminar, do grafo, os laços, ou sejam os arcos do tipo $U_j = (X_i, X_i')$ bem como criar um caso particular de grafo, chamado anti-simétrico (ou orientado) que é o que nos interessa.

A.2. Matriz de incidência

Um grafo $G = (X, U)$ pode ser associado bi-univocamente a uma matriz de I linhas e J colunas com elementos valendo 0, +1 ou -1, chamada matriz de incidência, abaixo definida:

Definição A.2

Chama-se matriz de incidência de um grafo $G = (X, U)$, a matriz $T = (T_{ij})$ de dimensão $I \times J$, onde:

$$T_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } U_j = (X_i, X_i') \\ +1 & \text{se } U_j = (X_i'', X_i) \\ 0 & \text{se } U_j \neq (X_i, X_i') \text{ e } U_j \neq (X_i'', X_i) \end{cases}$$

$$X_i, X_i', X_i'' \in X ; \quad U_j \in U$$

A i -ésima linha da matriz T denotada por T_i , enquanto a j -ésima coluna é denotada por T_j

Esta definição cobre apenas as situações de escoamentos com fluxos sem atrasos. Posteriormente o conceito de matriz de incidência será redefinido para cobrir situações onde o atraso deva ser considerado.

A.3. Arcos convergentes e divergentes

Os conceitos de arcos convergentes e divergentes serão necessários para definição de nós origem e nós destino de um grafo.

Definição A.3

Seja um grafo $G = (X, U)$

i) chama-se feixe convergente ao nó $X_i \in X$, e se denota por $U_{X_i}^+$, ao conjunto dado por:

$$U_{X_i}^+ = \{U_j \mid U_j \in U; U_j = (X_i', X_i); X_i' \in X\}$$

ii) chama-se feixe divergente do nó $X_i \in X$ e se denota por $U_{X_i}^-$, ao conjunto dado por:

$$U_{X_i}^- = \{U_j \mid U_j \in U; U_j = (X_i, X_i'); X_i' \in X\}$$

A.4. Nós origem e nós destino

Os grafos com os quais trabalharemos terão sempre, pelo menos um nó, chamado nó origem a partir do qual apenas feixes divergentes são admitidos e pelo menos um nó, chamado nó destino, para o qual apenas feixes convergentes são admitidos.

Quando mais de um nó passa funcionar como nó origem (ou como nó destino) pode-se criar artificialmente um nó origem único (ou um nó destino único) a partir do qual divergem (ou convergem) arcos para todos os nós inicialmente considerados como origem (ou de todos os nós inicialmente considerados como destino).

Definição A.4

Seja um grafo $G = (X, U)$ e $\emptyset$ conjunto vazio.

- i) chama-se conjunto origem do grafo $G(X, U)$, e se denota por X^O , ao conjunto dado por

$$X^O = \{ X_i \mid U_{X_i} = \emptyset \}$$

- ii) chama-se conjunto destino do grafo $G(X, U)$, e se denota por X^D , ao conjunto dado por:

$$X^D = \{ X_i \mid U_{X_i} = \emptyset \}$$

Definição A.5

- i) Se o conjunto X^O tiver um único elemento, este elemento é chamado nó origem do grafo G e se denota por X_O , onde:

$$X^O = \{ X_O \}$$

- ii) Se o conjunto X^D tiver um único elemento, este elemento é chamado nó destino do grafo G e se denota por X_D , onde:

$$X^D = \{ X_D \}$$

A.5. Redes de escoamento

As redes de escoamento são definidas a partir de certas estruturas particulares de grafos, como veremos a seguir:

Definição A.6

Dado um arco $U_j = (X_i, X_j)$, chama-se extremidade inicial de U_j ao nó X_i e extremidade final de U_j ao nó X_j . Tanto X_i como X_j são chamados extremidades de U_j .

Definição A.7

Chama-se caminho de um grafo G a uma sequência de arcos $U_1, U_2, \dots, U_j, \dots, U_N$, de G , onde a extremidade final de um arco U_j coincide com a extremidade inicial do arco U_{j+1} , $j = 1, \dots, (N-1)$.

Definição A.8

Chama-se circuito de um grafo G a um caminho onde a extremidade final do último arco coincide com a extremidade inicial do primeiro.

Definição A.9

Chama-se cadeia de um grafo G a uma sequência de arcos $U_1, U_2, \dots, U_j, \dots, U_N$, de G , onde a extremidade de um arco U_j coincide com a extremidade do arco U_{j+1} , $j = 1, \dots, (N-1)$.

Definição A.10

Um grafo é dito conexo quando existe pelo menos uma cadeia entre cada par de seus nós.

Definição A.11

Chamamos de rede de escoamento com matriz de incidência T a um tipo particular de grafo orientado, com as seguintes propriedades:

- o grafo é conexo
- o grafo não contém circuitos

Portanto, daqui para frente, toda vez que nos referimos a grafos, estaremos subentendendo tratar-se dessas redes de escoamento tais como acima definidas, descritas unívocamente pela matriz de incidência T .

APÊNDICE B

RESUMO DOS RESULTADOS DA TEORIA DA DUALIDADE

B.1. Teoria da dualidade para problemas convexos de otimização

A fim de introduzir o método de coordenação hierárquica multinível com coordenação pelo objetivo, veremos sua aplicação num problema convexo genérico de otimização com restrições.

A simbologia que utilizaremos neste Apêndice, é diferente daquela utilizada na formulação do (PCOE). O item III.2 mostra a correspondência entre elas.

Seja dado um problema genérico de otimização com restrições do tipo:

$$(P): \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \\ \text{sujeito a:} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (B.1)$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (B.2)$$

$$x \in S \subset \mathbb{R}^n \quad (B.3)$$

onde:

x é um vetor qualquer, $x \in \mathbb{R}^n$

$f(x)$ e $g(x)$ são funções reais definidas para $x \in S$

Para o problema (P) acima pode-se definir uma função chamada "função de Lagrange" como segue:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) \quad (B.4)$$

onde:

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, vetor linha

$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$, vetor coluna

A partir de (P), [15, 16] pode-se definir um novo problema de otimização, chamado "problema de Lagrange".

$$(PL): \begin{cases} \text{Min } L(x, \lambda) \\ x, \lambda \\ \text{sujeito a:} \\ x \in S \end{cases} \quad (B.5)$$

$$x \in S \quad (B.6)$$

Para $L(x, \lambda)$ define-se um ponto (x^0, λ^0) chamado "ponto de sela" com as seguintes propriedades:

$$L(x^0, \lambda^0) \leq L(x, \lambda^0); \quad \forall x \in S \quad (B.7)$$

$$L(x^0, \lambda^0) \geq L(x^0, \lambda); \quad \lambda > 0 \quad (B.8)$$

O vetor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ recebe o nome de "multiplicador de Lagrange" e tem papel destacado na solução do problema inicial (P).

Karlin [15] provou que, se S é um conjunto fechado, se $f(x)$ é uma função convexa definida em S e se $g(x)$ é um vetor de funções também convexas definidas em S , e, ainda se x^0 é um ponto no qual $f(x)$ assume seu valor mínimo sujeito a $g(x) \leq 0$; $x \in S$, então existe um vetor $\lambda^0 \geq 0$ tal que (x^0, λ^0) é um ponto de sela para $L(x, \lambda)$. Provou ainda que, se (x^0, λ^0) é um ponto de sela para $L(x, \lambda)$, então x^0 minimiza $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$, $x \in S$.

Seja

$$D = \{\lambda \mid \lambda \geq 0, \text{ tal que } \text{Min}_{x \in S} L(x, \lambda) \text{ existe}\} \quad (B.9)$$

Em particular, se $L(x, \lambda)$ é contínuo em x para todo $x \in S$ e se S é um conjunto fechado e limitado, então, pelo teorema de Weierstrass, teremos:

$$D = (\mathbb{R}^m)^+ = \{\lambda \mid \lambda \geq 0\} \quad (B.10)$$

Com estes resultados, pode-se definir um par de problemas, chamados "problema-primal" (PP) e "problema-dual" (PD), respectivamente, como segue:

$$\begin{array}{ll} (PP): & (PD): \\ \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \\ \text{sujeito a:} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, m \\ x \in S \end{cases} & \begin{cases} \text{Max } \phi(\lambda) \\ \lambda \\ \text{sujeito a:} \\ \lambda \in D \end{cases} \end{array}$$

onde:

$$\phi(\lambda) = \text{Min}_{x \in S} L(x, \lambda) \quad (B.11)$$

Lasdon mostra, em [15], que:

$$\text{Min}_{x \in S} f(x) = \text{Min}_{x \in S} [\text{Sup}_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)] \quad (B.12)$$

A partir dos resultados resumidos acima, pode-se mostrar que (PP) e (PD) podem ser reescritos como segue:

(PP'):

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min} \left[\text{Sup}_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \right] \\ x \in S \end{array} \right]$$

(PD'):

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max} \left[\text{Min}_{x \in S} L(x, \lambda) \right] \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right]$$

E, finalmente, Karlin mostrou também que, se o ponto de sela (x^0, λ^0) existe, então:

$$\text{Min}_{x \in S} \left[\text{Sup}_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \right] = \text{Max}_{\lambda \geq 0} \left[\text{Min}_{x \in S} L(x, \lambda) \right] \quad (\text{B.13})$$

e, conseqüentemente, os valores das funções objetivo de (PP') e do (PD') nos respectivos pontos de ótimo coincidem e, além disso, o ponto de sela (x^0, λ^0) fornece as soluções x^0 para (PP') e λ^0 para o (PD').

Lasdon mostra, em [15], que a solução de (PD') implica na solução de (PP'). Vamos então resolver (PD') que é mais simples que (PP'), que é equivalente ao problema original (P).

B.2. Solução do problema dual (PD')

2.1. Conceituação dos métodos hierárquicos

A solução de (PD') não é trivial, pois implica numa maximização em $\lambda \geq 0$ após uma minimização em $x \in S$ do Lagrangeano $L(x, \lambda)$.

Uma maneira de resolvê-lo é substituí-lo por dois outros problemas, resolvidos alternadamente: um problema de maximização $\phi(\lambda)$, chamado problema coordenador (PC), e um problema de minimização de $L(x, \bar{\lambda})$ chamado sub-problema (SP), onde $\bar{\lambda}$ é um valor dado de λ , conforme abaixo descrito:

(SP):

$$\left[\begin{array}{l} \phi(\bar{\lambda}) = \text{Min}_{x \in S} L(x, \bar{\lambda}) \\ \text{dado } \bar{\lambda} \end{array} \right]$$

(PC)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max}_{\lambda \geq 0} \phi(\lambda) \end{array} \right]$$

Estes 2 problemas são resolvidos alternadamente, trocando entre si informações: (SP) encontra x^* e informa a (PC); (PC) encontra λ^* e envia a (SP). Uma solução inicial ($\lambda = 0$ por exemplo) e um critério de parada devem ser adicionados.

2.2. Um algoritmo para solução de (PD')

Como a função $\phi(\lambda)$, em geral, não é disponível analiticamente, sua maximização é impossível. Em vez de maximização vamos nos contentar em achar, a cada iteração, um novo valor para λ que resulte um aumento de $\phi(\lambda)$ conforme se pode ver no seguinte algoritmo.

Algoritmo B.1

i) inicialização:

arbitre $\lambda^* \geq 0$; faça, por exemplo, $\lambda^* = 0$;

ii) faça $\bar{\lambda} = \lambda^*$

iii) solução do (SP):

minimize $L(x, \bar{\lambda})$ em x , com $x \in S$, achando x^* como solução.

iv) faça $\bar{x} = x^*$

v) critério de parada:

verifique se $g(\bar{x}) \leq 0$

e se $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$

a - caso afirmativo, a solução é ótima.

faça $x^0 = \bar{x}$ e $\lambda^0 = \bar{\lambda}$ e pare

b - caso negativo vá para (vi)

vi) resolução de (PC) (modificado):

resolva o (PC), modificado, encontrando λ^* tal que $\phi(\lambda^*) > \phi(\bar{\lambda})$

a - utilize (por exemplo) a direção do gradiente de $\phi(\lambda)$ no ponto $\bar{\lambda}$, dado por:

$$\nabla \phi(\lambda) \Big|_{\bar{\lambda}} = g(\bar{x})$$

b - faça uma busca unidimensional na direção escolhida (conforme veremos no Apêndice C)

c - vá para (ii)

A Figura B.1 a seguir, apresenta um diagrama de blocos para implementação do algoritmo proposto.

É basicamente este algoritmo que será utilizado neste trabalho.

A primeira vantagem deste procedimento já pode ser vista pelo fato de que o problema (SP) a ser resolvido no passo (iii) do algoritmo é mais simples que o problema (P) original, pois as restrições $g(x) < 0$ foram relaxadas.

A vantagem seguinte, que ainda não foi mostrada, constitui-se exatamente na decomposição de (SP) que, dependendo do problema, pode-se conseguir, desde que se saiba escolher convenientemente quais as restrições que devem compor o conjunto S e quais as restrições devem ser incluídas em $g(x) \leq 0$.

Em compensação, uma complicação adicional foi incorporada, que é, justamente, a necessidade de se resolver um novo problema, descrito no passo (vi) do algoritmo.

No entanto, as vantagens que se pode ganhar com a decomposição do (SP), podem compensar de muito as desvantagens do problema adicional.

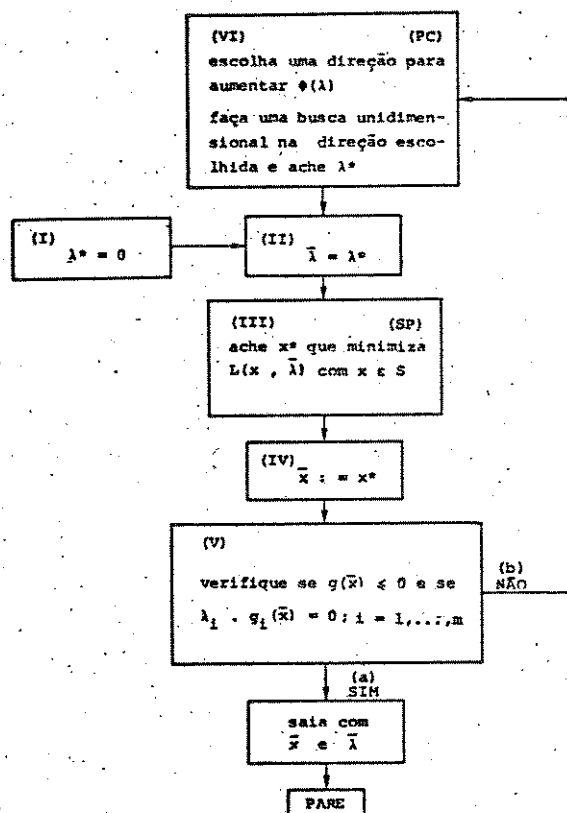


FIGURA B.1 - Diagrama de blocos para o algoritmo (B.1)

APÊNDICE C

MÉTODO DE GRADIENTE ÓTIMO COM BUSCA UNIDIMENSIONAL

Os problemas coordenadores (PC.PCOE) e (PC.SP.CLC.X.k), de maximização de funções não lineares tem solução analítica impossível, pois a expressão matemática da função objetivo não é disponível.

Os únicos elementos facilmente disponíveis da função objetivo são o seu valor e o seu vetor gradiente, a cada ponto.

A única diferença significativa entre estas dois problemas, entretanto, está no fato de que o primeiro deve maximizar $\phi(\gamma)$ para γ irrestrito, enquanto o segundo deve maximizar $\psi(\lambda)$ para $\lambda \geq 0$.

Resolvamos, portanto, o primeiro deles, e mostraremos, depois, as alterações necessárias para atacar o segundo [2, 12, 16]

C.1. Método de Gradiente Ótimo para problemas irrestritos

Seja o problema:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max} \\ \gamma \end{array} \phi(\gamma) \right], \quad \gamma \text{ irrestrito} \quad (\text{C.1})$$

Da função $\phi(\gamma)$, dispõe-se apenas, para um $\bar{\gamma}$ dado, das seguintes informações:

i) o valor da função $\phi(\bar{\gamma})$, dado por:

$$\phi(\bar{\gamma}) = \phi^x(\bar{\gamma}) + \phi^u(\bar{\gamma}) + \phi^s(\bar{\gamma}) + \phi^v(\bar{\gamma}) \quad (\text{C.2})$$

ii) o gradiente da função, dado por:

$$\nabla \phi(\gamma) \Big|_{\bar{\gamma}} = x^{*k} - x^{*k-1} - T u^{*k} - s^{*k} + v^{*k} \quad (\text{C.3})$$

Então o algoritmo será, basicamente, o III.1 apresentado em III.2.3, que descreveremos mais detalhadamente aqui.

Algoritmo (C.1)

i) fixe um valor para γ , por exemplo $\bar{\gamma} = 0$;
. fixe um passo arbitrário, $\bar{\delta} > 0$

ii) resolva os (SP.X), (SP.U), (SP.S) e

(SP.V) achando, respectivamente x^* , u^* , s^* , v^* bem como $\phi^x(\bar{\gamma})$, $\phi^u(\bar{\gamma})$, $\phi^s(\bar{\gamma})$, $\phi^v(\bar{\gamma})$

iii) calcule

$$\phi(\bar{\gamma}) = \phi^x(\bar{\gamma}) + \phi^u(\bar{\gamma}) + \phi^s(\bar{\gamma}) + \phi^v(\bar{\gamma}) \quad (\text{C.4})$$

iv) calcule

$$\begin{aligned} \nabla^k \phi(\gamma) \Big|_{\bar{\gamma}} &= x^{*k} - x^{*k-1} - T u^{*k} - \\ &\quad - s^{*k} + v^{*k}, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

v) faça $\bar{\gamma} = \bar{\gamma} + \bar{\delta} r$ (C.6)

$$\text{onde } r = \nabla \phi(\gamma) \Big|_{\bar{\gamma}} \quad (\text{C.7})$$

vi) repita os passos (ii), (iii) e (iv) para $\bar{\gamma}$ em lugar de $\bar{\gamma}$, encontrando $\phi(\bar{\gamma})$ e $\nabla^k \phi(\gamma) \Big|_{\bar{\gamma}}$, $k = 1, \dots, K$

a - se $\| \nabla \phi(\gamma) \Big|_{\bar{\gamma}} \| \approx 0$, pare; o ótimo foi encontrado.

b - caso contrário, vá para (vii).

vii) tendo os valores da função $\phi(\cdot)$ em dois pontos $\bar{\gamma}$ e $\bar{\gamma} + \bar{\delta} r$ bem os respectivos gradientes, faz-se uma aproximação cúbica da função $\phi(\delta) = \phi(\bar{\gamma} + \bar{\delta} r)$

viii) encontra-se o máximo do polinômio ajustado, encontrando-se $\hat{\delta}$

ix) a - se $\hat{\delta} \approx \bar{\delta}$, o máximo da função $\phi(\delta)$ na direção r já foi alcançado:

- faça $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}$
- faça $r = \nabla \phi(\gamma) \Big|_{\bar{\gamma}}$ (mude a direção)
- faça $\bar{\delta} = \hat{\delta}$ (por exemplo)
- faça $\bar{\gamma} = \bar{\gamma} + \bar{\delta} r$
- vá para (vi)

b - caso contrário:

- faça $\bar{\gamma} = \bar{\gamma} + \hat{\delta} r$
- retorne para (vi)

Os passos (vii) e (viii) podem ser obtidos como segue:

Seja

$$\phi(\delta) = a_0 + a_1 \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \delta^3 \quad (\text{C.8})$$

$$\phi(\delta) \Big|_{\delta=0} = a_0 = \phi(\bar{\gamma}) \quad (C.9)$$

$$\phi(\delta) \Big|_{\delta=\bar{\delta}} = a_0 + a_1\bar{\delta} + a_2\bar{\delta}^2 + a_3\bar{\delta}^3 = \phi(\bar{\gamma}) \quad (C.10)$$

$$\frac{d\phi(\delta)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} = a_1 = \|r\|^2 = \phi'(\bar{\gamma}) \quad (C.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\delta)}{d\delta} \Big|_{\delta=\bar{\delta}} &= a_1 + 2a_2\bar{\delta} + 3a_3\bar{\delta}^2 = \\ &= \langle \nabla\phi(\bar{\gamma}), r \rangle = \phi'(\bar{\gamma}) \end{aligned} \quad (C.12)$$

Resolvendo o sistema de equações lineares em a_0, a_1, a_2, a_3 , (C.8) a (C.12), temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \phi(\bar{\gamma}) ; \quad a_1 = \|r\|^2 \\ a_2 &= 3[\phi(\bar{\gamma}) - \phi(\bar{\gamma}) - \phi'(\bar{\gamma})\bar{\delta}] \div \bar{\delta}^2 - \\ &\quad - [\phi'(\bar{\gamma}) - \phi'(\bar{\gamma})] \div \bar{\delta} \end{aligned} \quad (C.13)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= [\phi'(\bar{\gamma}) - \phi'(\bar{\gamma})] \div \bar{\delta}^2 - \\ &\quad - 2[\phi(\bar{\gamma}) - \phi(\bar{\gamma}) - \phi'(\bar{\gamma})\bar{\delta}] \div \bar{\delta}^3 \end{aligned} \quad (C.14)$$

O valor de $\hat{\delta}$ que maximiza a aproximação polinomial é obtida derivando-se a igualando a zero:

$$a_1 + 2a_2\hat{\delta} + 3a_3\hat{\delta}^2 = 0, \text{ donde} \quad (C.15)$$

$$\hat{\delta} = \frac{1}{3a_3} [-a_3 \pm (a_2^2 - 3a_1a_3)^{0.5}] \quad (C.16)$$

se $a_3 < 0$, utilize o sinal +
se $a_3 > 0$, utilize o sinal -
se $a_3 = 0$, use a formula:

$$\hat{\delta} = -a_1 \div 2a_2 \quad (C.17)$$

Quando $a_2 = a_3 = 0$, o polinômio se degenerou em uma reta:

se $a_1 > 0$, faça $\hat{\delta} > 0$ arbitrário
se $a_1 < 0$, há erro
se $a_1 = 0$, caso degenerado, pare.

C.2. Método do gradiente ótimo para problemas com restrições

O problema coordenador do sub-problema de estocagem, (PC.SP.CLC.X.k) tem a seguinte formulação.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \psi_k^*(\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}, \lambda_k) , \text{ com } \bar{\gamma}_k \text{ e } \bar{\gamma}_{k+1} \text{ dados.} \\ \lambda_k \geq 0 \end{array} \right. \quad (C.18)$$

Dispensando a indicação de $\bar{\gamma}_k, \bar{\gamma}_{k+1}$ na função, escrevamos, simplificadaamente.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \psi_k^*(\lambda_k) \\ \lambda_k \geq 0 \end{array} \right. \quad (C.19)$$

Este problema é resolvido de forma semelhante ao indicado para o (PC.POE), com pequenas diferenças provocadas pelo tipo de restrição $\lambda_k \geq 0$ principalmente no cálculo de r , no cálculo do passo e na condição de parada.

Algoritmo (C.2)

- i) fixe um valor para λ_k por exemplo, $\lambda_k = 0$
fixe um passo arbitrário $\bar{\delta} > 0$
- ii) resolva os sub-problemas (SP.CLC.X.ik), achando x_{ik}^* e $\psi_{ik}^*(\bar{\lambda}_k)$
- iii) calcule
- iv) calcule
- v) calcule r , vetor coluna de L elementos, como segue:

$$\psi_k^*(\bar{\lambda}_k) = \sum_i \psi_{ik}^*(\bar{\lambda}_k) - \bar{\lambda}_k c^k \quad (C.20)$$

$$V^k \psi(\lambda_k) \Big|_{\bar{\lambda}_k} = {}^k A x^{*k} - c^k \quad (C.21)$$

$$r_\ell = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{\lambda}_{k\ell} = 0 \text{ e se } [V^k \psi(\lambda_k) \Big|_{\bar{\lambda}_k}]_\ell < 0 \\ [V^k \psi(\lambda_k) \Big|_{\bar{\lambda}_k}]_\ell & \text{em todos os demais casos} \end{cases} \quad \ell = 1, \dots, L \quad (C.22)$$

É preciso dar um passo $\bar{\delta}$ na direção r desde que isto não torne negativo nenhuma dos componentes de λ_k :

$$\text{seja } \delta' = \min_{l | r_l < 0} \{-\bar{\lambda}_{kl} \div r_l\} \quad (C.23)$$

se $\delta' < \bar{\delta}$, faça $\bar{\delta} = \delta'$

$$\text{agora calcule } \bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k + \bar{\delta}r \quad (C.24)$$

vi) repita os passos (ii), (iii) e (iv) para $\bar{\lambda}_k$ em lugar de $\bar{\lambda}$, encontrando: $\psi(\bar{\lambda}_k)$ e $\nabla^k \psi(\lambda) \big|_{\bar{\lambda}}$, $k = 1, \dots, K$

a - se $[\nabla^k \psi(\lambda) \big|_{\bar{\lambda}}]_l = 0$ ou ,

se $[\nabla^k \psi(\lambda) \big|_{\bar{\lambda}}]_l < 0$ com $\lambda_{kl} = 0$

para todo $l = 1, \dots, L$;

pare; o ótimo foi encontrado

b - caso contrário, vá para (vii)

vii) faça-se uma aproximação cúbica da função $\psi(\delta) = \psi(\bar{\lambda}_k + \delta r)$

viii) encontre o máximo da função $\psi(\delta)$, chamado $\hat{\delta}$

ix) a - se $\hat{\delta} \approx \bar{\delta}$, o máximo da função $\psi(\delta)$ na direção r já foi atingido

- faça $\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k$

- recalcule r como em (v)

- faça $\bar{\delta} = \hat{\delta}$, (por exemplo)

- recalcule $\bar{\lambda}$ como em (v)

- vá para (vi)

b - caso contrário

- calcule δ' como em (v)

- se $\delta' < \bar{\delta}$, faça $\hat{\delta} = \delta'$

- faça $\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k + \delta r$

- vá para (vi)

Os passos (vii) e (viii) terão tratamento análogo aos de (C.1).

Porém, pode-se aproveitar a restrição relaxada para se tentar obter uma solução viável para o problema.

Então, uma solução para $\bar{x}_i$ pode ser obtida como segue:

Sejam:

I^0 o conjunto dos índices i de $\bar{x}_{ik}$ para os quais $\bar{a}_i = 0$ e

I' o conjunto dos demais índices.

Reordenando convenientemente os nós i e fazendo-se uma partição da matriz A e do vetor x teremos:

$$A = (A^{I^0} : A^{I'}) \text{ e } x = \begin{bmatrix} x^{I^0} \\ \dots \\ x^{I'} \end{bmatrix}$$

Então a restrição relaxada ficará:

$$A^{I^0} x_{I^0} + A^{I'} x_{I'} < c \quad (D.4)$$

Fazendo ω^f um vetor folga, coluna $(L \times 1) \geq 0$ e ω^a um vetor variável artificial, coluna $(L \times 1)$, teremos:

$$A^{I^0} x_{I^0} + \omega^f = c - A^{I'} \bar{x}_{I'} = c' \quad (D.5)$$

Então x_{I^0} pode ser determinado resolvendo-se o seguinte problema auxiliar:

(PA):

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min} \quad (e \omega^a) \quad e = (1, 1, \dots, 1) \\ x_{I^0}, \omega^f, \omega^a \\ \\ A^{I^0} x_{I^0} + \omega^f - \omega^a = c' \\ \omega^f \geq 0 \quad \omega^a \geq 0 \\ m_{I^0} \leq x_{I^0} \leq M_{I^0} \end{array} \right.$$

Como solução inicial pode-se proceder como segue:

. faça-se $x_{I^0} = m_{I^0}$, por exemplo

. calcule $c' - A^{I^0} \cdot x_{I^0} = \bar{c}$

- para $\bar{c}_l < 0$, faça $\omega_l^f = 0$ e $\omega_l^a = -\bar{c}_l$

- para $\bar{c}_l \geq 0$, faça $\omega_l^a = 0$ e $\omega_l^f = \bar{c}_l$

Este problema (PA), uma vez resolvido, pode resultar em duas situações:

$$e \omega^a > 0 \quad \text{ou} \quad e \omega^a = 0$$

Caso $(e \omega^a) = 0$, o problema está resolvido e o x_{I^0} obtido é a solução desejada, pois com estes valores, a restrição relaxada acabou sendo satisfeita.

Caso $(e \omega^a) > 0$ isto indica que a restrição não foi satisfeita e, portanto, o vetor multiplicador deve ser alterado, portanto, deve-se retornar ao problema coordenador para corrigir λ_k .

Cabe, finalmente, ressaltar que, se algumas das funções $f_{ik}(x_{ik})$ forem estritamente convexas (não lineares), os respectivos sub-problemas poderão também ser resolvidos sem dificuldades maiores (derivando-se e igualando a zero, por exemplo); portanto, os nós i correspondentes podem ser incluídos no conjunto I' , conforme acima exposto, procedendo-se da mesma maneira.

D.2. Com uma única restrição

Quando a matriz kA contém apenas uma linha, o sub-problema ficará extremamente simplificado, como segue:

H.9: A matriz kA no sub-problema (SP.LC.X.k) tem apenas uma linha.

Seja, então, o problema restrito:

(SP.LC.X.k); $k = 1, \dots, K$:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min} \quad \left[\sum_i a'_{ki} x_{ik} \right] \\ x^k \\ \\ \sum_i k A_i x_{ik} \leq c^k, \text{ (com apenas uma linha)} \\ \\ m_{ik} \leq x_{ik} \leq M_{ik}, \quad i = 1, \dots, I \end{array} \right.$$

A solução deste problema pode ser desenvolvida através de um algoritmo simples e intuitivo, do qual se eliminou o subscrito k .

Algoritmo D.1

i) estabeleça uma solução ótima, ignorando a restrição.

para todo $j \mid a'_j < 0$, faça $x_j^* = M_j$

para todo $j \mid a'_j \geq 0$, faça $x_j^* = m_j$

ii) calcule a folga da restrição

$$x_f = c - \sum_i A_i x_i^* \quad (D.6)$$

a - se $x_f \geq 0$, pare;

x^* é ótima (e viável)

b - se $x_f < 0$, vá para (iii).

(A solução não é viável).

iii) para reduzir a inviabilidade de solução x^* , duas providências são possíveis:

a - uma variável com $A_i > 0$ e com $x_i^* = M_i$ pode passar a valer m_i ; chame-se este conjunto de índices de I^+ ;

b - uma variável com $A_i < 0$ e com $x_i^* = m_i$ pode passar a valer M_i ; chame-se este conjunto de índices de I^- ;

A escolha da primeira variável x_{i_0} que mudará de extremo será

$$\text{Max}_{i \in I^+ \cup I^-} \left[\frac{a'_i}{A_i} \right] = \frac{a'_{i_0}}{A_{i_0}} \quad (D.7)$$

com $a'_i/A_i < 0$

a - se $I^+ \cup I^- = \emptyset$ (vazio); pare; o problema não tem solução viável

b - caso contrário, obtenha i_0 .

iv) A - se $i_0 \in I^+$

a - se $M_{i_0} + \frac{x_f}{A_{i_0}} \geq m_{i_0}$

$$\text{faça } x_{i_0}^* = M_{i_0} + \frac{x_f}{A_{i_0}} \quad (D.8)$$

e pare, pois a solução é ótima

b - caso contrário,

- faça $x_{i_0}^* = m_{i_0}$;

- retire i_0 do conjunto I^+

- volte para (ii)

B - se $i_0 \in I^-$,

a - se $m_{i_0} - \frac{x_f}{A_{i_0}} \leq M_{i_0}$

$$\text{faça } x_{i_0}^* = m_{i_0} - \frac{x_f}{A_{i_0}} \quad (D.9)$$

pare, pois a solução é ótima

b - caso contrário

- faça $x_{i_0}^* = M_{i_0}$,

- retire i_0 do conjunto I^-

- volte para (ii)