

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

**Aplicação dos Elementos das Polinomiais  
Cúbicas de Hermite na Discriminação de  
Formas**

**Agostinho de Medeiros Brito Júnior**  
Orientador: **Prof. Dr. Clésio Luiz Tozzi**

Dissertação de Mestrado

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
defendida por Agostinho de Medeiros  
Brito Júnior e aprovada pela Comissão  
Julgadora em 23 / 10 / 1996

Orientador 

Campinas - SP Brasil  
1996

461256

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO**

**Aplicação dos Elementos das Polinomiais  
Cúbicas de Hermite na Discriminação de  
Formas**

**Agostinho de Medeiros Brito Júnior**

**Orientador: Prof. Dr. Clésio Luiz Tozzi**

Dissertação submetida à  
Faculdade de Engenharia  
Elétrica e de Computação da  
Universidade Estadual de  
Campinas como parte dos  
requisitos exigidos para a  
obtenção do Título de Mestre  
em Engenharia Elétrica, Área  
de concentração: Automação  
Industrial

Campinas - SP Brasil

1996

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B777a

Brito Júnior, Agostinho de Medeiros

Aplicação dos elementos das polinomiais cúbicas de Hermite na discriminação de formas / Agostinho de Medeiros Brito Júnior.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Clésio Luiz Tozzi.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Hermite, Polinômios de. 2. Percepção da forma. 3. Folhas - Morfologia. 4. Ajuste de curva. I. Tozzi, Clésio Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO**

**Aplicação dos Elementos das Polinomiais  
Cúbicas de Hermite na Discriminação de  
Formas**

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 23 de outubro de 1996,  
pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

---

Prof. Dr. Clésio Luiz Tozzi, Presidente  
Universidade Estadual de Campinas

---

Prof. Dr. George John Shepherd  
Universidade Estadual de Campinas

---

Prof. Dra. Wu Shin-Ting  
Universidade Estadual de Campinas

Aos meus pais, Agostinho e Lindalva

# Agradecimentos

Aos meus pais, Agostinho e Lindalva, e às minhas irmãs, Andréa e Adriana, pelos sacrifícios que fizeram para que pudesse galgar todos os degraus da minha vida acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Clésio Tozzi, pela sua dedicação, zelo, incentivo e paciência dispensados ao meu trabalho ao longo destes dois anos.

À professora Ana Tozzi, do Instituto de Biologia, pela orientação prestada na análise das plantas e por ter fornecido as amostras de folíolos.

Aos meus amigos, Marco Antônio, Guilherme e Pedro, pelos momentos de companheirismo que compartilhamos na convivência em “república”.

Aos muitos e bons amigos que ganhei: Luiz Affonso e Inêz, José Ricardo, Wellington, Douglas, Mauro, Denilson, Paulo Bueno, Castanho, Olga, Júlio Hasegawa, Luís Gonzaga, Alencar, Márcio Leandro, Walderson, João Matos, Hosiberto, Jorge, Diego, Danúzia, Maria Jesus, Aluizio, Catharina, Jhuli, Roberto, Eduardo, Hugo, Michel, Henrique, Fabiana, Raniere, Kleber e a tantos outros que de alguma forma iluminaram meus caminhos durante o mestrado.

Aos ilustríssimos amigos Rildeci Medeiros e Rogério Cruz, por todas as palavras, carinho e ânimo que fertilizaram meus terrenos. Sua alegria, dedicação ao estudo e ao trabalho serviram de espelho para minhas realizações.

À minha prima Maria, pelo seu apoio nos momentos em que se iniciava minha jornada de trabalho em Campinas.

A Deus, pela oportunidade de evolução profissional e espiritual.

"Human kind will  
never reach  
Dimensions of the  
Universe before they  
explore inside their  
hearts."

Sergio Pommerening  
do Grupo Voyager, em seu CD Dimensions.

# Sumário

<b>AGRADECIMENTOS</b>	i
<b>SUMÁRIO</b>	i
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	iv
<b>LISTA DE TABELAS</b>	viii
<b>RESUMO</b>	ix
<b>ABSTRACT</b>	x
<b>1. Introdução</b>	1
1.1. Motivação.....	1
1.2. Objetivos .....	2
1.3. Organização do trabalho .....	4
<b>2. Conceitos Básicos em Representação de Curvas e Reconhecimento de Padrões</b>	5
2.1. Introdução .....	5
2.2. Revisão de reconhecimento de padrões .....	5

2.3. Modelos para representação de curvas .....	7
2.3.1. <i>Curvas não-paramétricas</i> .....	8
2.3.2. <i>Curvas paramétricas</i> .....	9
2.4. Ferramentas de redução dimensional .....	15
2.4.1. <i>Discriminante linear de Fisher</i> .....	15
2.4.2. <i>A transformada de Hotelling</i> .....	17
<b>3. Aproximação de Curvas por Polinômios de Hermite</b> .....	<b>21</b>
3.1. Introdução .....	21
3.2. Representação na forma de Hermite .....	21
3.3. Ajuste polinomial pelo método dos mínimos quadrados .....	26
3.3.1. <i>Ajuste polinomial para uma função explícita</i> .....	26
3.4. Ajuste de curvas para um modelo paramétrico .....	29
3.4.1. <i>Modificação no método dos mínimos quadrados</i> .....	30
3.4.2. <i>Determinação do parâmetro <math>t</math></i> .....	31
<b>4. Uso da Representação de Hermite na Discriminação de Espécies de Plantas</b> .....	<b>33</b>
4.1. Introdução .....	33
4.2. As estruturas das folhas e folíolos .....	35
4.3. Condições para invariância dos descritores .....	36
4.4. Aquisição de pontos e determinação do modelo de curva .....	39
4.5. Descritores utilizados na discriminação das espécies .....	40
<b>5. Experimentos, Resultados e Discussões</b> .....	<b>43</b>
5.1. Introdução .....	43
5.2. Vetores de geometria de Hermite calculados a partir dos modelos .....	44
5.2.1. <i>Faixa de amostragem de pontos: curva inteira (<math>a=1</math>)</i> .....	45
5.2.2. <i>Faixa de amostragem de pontos: metade da projeção horizontal (<math>a=2</math>)</i> .....	49

5.2.3. <i>Faixa de amostragem de pontos: um terço da projeção horizontal</i> ( $a=3$ ) .....	53
5.3. Outros descritores para as curvas .....	58
5.3.1. <i>Faixa de amostragem de pontos : Curva inteira (<math>a=1</math>)</i> .....	58
5.3.2. <i>Faixa de amostragem de pontos : metade da projeção horizontal</i> ( $a=2$ ) .....	61
5.3.3. <i>Faixa de amostragem de pontos: um terço da projeção horizontal</i> ( $a=3$ ) .....	63
5.4. Análise das relações entre tamanho e forma para os folíolos .....	67
<b>6. Conclusões</b>	68
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	71
<b>APÊNDICE 1</b>	75
<b>APÊNDICE 2</b>	81

# Lista de Figuras

2.1.	Exemplos de conjuntos de padrões separáveis (a) e não-separáveis (b).....	7
2.2.	Exemplo de curva cúbica.....	11
2.3.	Curva de Bézier com seu polígono característico definido pelos pontos $B_0$ , $B_1$ , $B_2$ , $B_3$ .....	12
2.4.	Exemplo de funções de base de Bernstein para as curvas de Bézier ( $n=2$ ) .....	13
2.5.	Exemplo de funções de <i>blending</i> para B-splines.....	14
3.1.	Curva de Hermite com os vetores de geometria $P_1$ , $P_2$ , $R_1$ e $R_2$ .....	22
3.2.	Funções de <i>blending</i> de Hermite associadas aos elementos do vetor de geometria $G_H$ .....	24
3.3.	Exemplos de curvas para diferentes vetores de geometria .....	25
3.3.	Ajuste de uma curva paramétrica após uma iteração (a), três (b) e dez iterações (c) .....	32
4.1.	Folíolos de <i>Lonchocarpus muehlbergianus</i> Hassl.(a) e <i>L. subglaucescens</i> Mart. ex Benth (b).....	35
4.2.	Estrutura da folha.....	36
4.3.	Estrutura de um folíolo.....	37

4.4.	Imagem de um folíolo antes (a) e depois (b) da limiarização.....	38
4.5.	Colocação dos sistemas referenciais sobre as nervuras do folíolo .....	39
4.6.	Imagem de um folíolo com a marcação dos pontos amostrados.....	40
4.7.	Faixa de amostragem de pontos sobre cada nervura.....	41
5.1.	Componentes do vetor de geometria $R_1$ para $a=1$ .....	45
5.2.	Componentes do vetor de geometria $R_2$ para $a=1$ .....	46
5.3.	Componentes do vetor de geometria $P_2$ para $a=1$ .....	46
5.4.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ e $R_2$ para $a=1$ .....	47
5.5.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ e $P_2$ para $a=1$ .....	47
5.6.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ , $R_2$ e $P_2$ para $a=1$ .....	48
5.7.	Componentes do vetor de geometria $R_1$ para $a=2$ .....	50
5.8.	Componentes do vetor de geometria $R_2$ para $a=2$ .....	50
5.9.	Componentes do vetor de geometria $P_2$ para $a=2$ .....	51
5.10.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ e $R_2$ para $a=2$ .....	51
5.11.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ e $P_2$ para $a=2$ .....	52
5.12.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ , $R_2$ e $P_2$ para $a=2$ .....	52
5.13.	Componentes do vetor de geometria $R_1$ para $a=3$ .....	54
5.14.	Componentes do vetor de geometria $R_2$ para $a=3$ .....	54

5.15.	Componentes do vetor de geometria $P_2$ para $a=3$ .....	55
5.16.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ e $R_2$ para $a=3$ .....	55
5.17.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ e $P_2$ para $a=3$ .....	56
5.18.	Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria $R_1$ , $R_2$ e $P_2$ para $a=3$ .....	56
5.19.	Fase do vetor $R_1$ para $a=1$ (em graus) .....	59
5.20.	Curvatura no ponto inicial da curva ( $t=0$ ) para $a=1$ .....	60
5.21.	Vetor derivada segunda da curva em $t=0$ para $a=1$ .....	60
5.22.	Primeira e segunda componentes principais resultantes da descorrelação dos coeficientes das curvas paramétricas para $a=1$ .....	61
5.23.	Valor de $\langle R_1 \rangle$ para $a=2$ .....	62
5.24.	Valor da curvatura no ponto inicial da curva para $a=2$ .....	62
5.25.	Vetor derivada segunda em $t=0$ para $a=2$ .....	63
5.26.	Primeira e segunda componentes principais resultantes da descorrelação dos coeficientes das curvas paramétricas para $a=2$ .....	63
5.27.	Valor de $\langle R_1 \rangle$ para $a=3$ .....	64
5.28.	Valor da curvatura no ponto inicial da curva para $a=3$ .....	64
5.29.	Vetor derivada segunda em $t=0$ para $a=3$ .....	65
5.30.	Primeira e segunda componentes principais resultantes da descorrelação dos coeficientes das curvas paramétricas para $a=3$ .....	65
5.31.	Modelos de Hermite com diferentes vetores de geometria.....	66
A1.1.	Curva paramétrica e grandezas associadas .....	76

A1.2. Componentes do vetor tangente .....	77
A1.3. O vetor $\bar{N}_l$ .....	79
A2.1. Variação da média considerando intervalos de confiança.....	84
A2.2. Variação da variância considerando intervalos de confiança .....	85
A2.3. Funções de distribuição utilizadas no cálculo do limiar T .....	87
A2.4. Exemplos de distribuições de probabilidade para os dados dos descritores das amostras analisadas .....	88

## Lista de Tabelas

5.1.	Equações das fronteiras de separação entre as classes para $a=1$ .....	48
5.3.	Probabilidades de classificação de um folíolo da espécie A como sendo da espécie B considerando faixa de amostragem com $a=1$ .....	49
5.3.	Equações das fronteiras de separação entre as classes para $a=2$ .....	53
5.4.	Probabilidades de classificação de um folíolo da espécie A como sendo da espécie B considerando faixa de amostragem com $a=2$ .....	53
5.5.	Equações das fronteiras de separação entre as classes para $a=3$ .....	57
5.6.	Probabilidades de classificação de um folíolo da espécie A como sendo da espécie B considerando faixa de amostragem com $a=3$ .....	57
5.7.	Coeficientes de correlação entre $\langle R_1 \rangle$ ( $a=3$ ) e medidas de forma e tamanho para o folíolo.....	67

# Resumo

BRITO JÚNIOR, A. M. **Aplicação dos elementos das polinomiais cúbicas de Hermite na discriminação de formas.** Campinas: DCA/FEEC/UNICAMP, 1996.  
(Dissertação de Mestrado)

Este trabalho apresenta um método para discriminação de curvas baseado na representação polinomial cúbica de Hermite. Os elementos da representação de Hermite são utilizados como descritores de curvas e o seu potencial discriminatório é exemplificado através da identificação de duas espécies de plantas. O trabalho contribui com um descritor simples e viável para discriminação de curvas na visão computacional e introduz um método formal e preciso para descrição de formas na biologia, que poderia ser considerado em adição aos métodos normalmente utilizados.

Palavras-chave: Polinômios de Hermite, Percepção da forma, Folhas-morfologia, Ajuste de curva.

# Abstract

BRITO JÚNIOR., M. **Application of Hermite cubic polynomials elements in shape discrimination.** Campinas: DCA/FEEC/UNICAMP, 1996. (Dissertação de Mestrado)

This work presents a method for curve discrimination based on Hermite cubic polynomial representation. The elements of Hermite representation are taken as curve descriptors and their discriminatory potential is exemplified by identifying two species of plants. It contributes with a simple and viable descriptor for curve discrimination in computer vision and introduces a formal and accurate method for description of shape in biology, that might be considered in addition to commonly used methods.

Keywords: Hermite polynomial, Shape perception, Leaf-morphology, Curve fitting.

## Capítulo 1

# Introdução

### 1.1. Motivação

A Visão Computacional tem sido uma das áreas de maior desenvolvimento e significância na resolução de diversos problemas em engenharia, medicina, biologia, cartografia, etc.. A evolução tecnológica dos sistemas de processamento de imagens vem transformando algumas tarefas antes manuais em processos automáticos, aumentando assim a velocidade e a capacidade analítica dos sistemas. Deste modo, são estendidas as habilidades e facilitado o trabalho dos profissionais destes ramos da ciência.

Em todas estas áreas, a identificação dos objetos presentes numa imagem por um ser humano é feita com base nas características de cor, textura e forma destes objetos. Entretanto, experimentos psicológicos indicam que estamos aptos a reconhecer objetos considerando principalmente a sua forma (VANDERHEIT et al., 1981), o que a coloca numa posição preponderante no contexto das variáveis envolvidas no processo de visão e reconhecimento.

Em se tratando de visão por computador, os processos de reconhecimento de formas em geral são complicados e não são realizados diretamente sobre os *pixels* da imagem. Tais processos demandam uma representação mais abstrata dos dados presentes na mesma, que pode ser obtida a partir de técnicas de segmentação que particionam a

imagem em conjuntos de *pixels* pela semelhança de seus atributos. O reconhecimento, então, é realizado pela análise de descritores calculados com base nestes atributos. Diante disto, os pesquisadores têm sido encorajados a buscar métodos cada vez mais eficientes para segmentação e representação de objetos.

Diversas são as maneiras de descrever a forma de um objeto. Entre elas, podemos destacar: ângulo tangente e curvatura (TSAI & CHEN, 1994), momentos (GONZALES & WOODS, 1992), descritores de Fourier (BOOKSTEIN et al., 1982; EHRlich et al., 1983; PERSON & FU, 1986; LIN & HUANG, 1987; FERSON et al., 1985; McLELLAN, 1993) e invariantes algébricos ou geométricos (RIVLIN & WEISS, 1995; KEREN, 1994). Em todo caso, se desejarmos reconhecer um objeto pelos seus descritores, é necessário que os mesmos possam representar de maneira adequada as características que o discriminam de outros objetos.

## 1.2. Objetivos

Diante disto, este trabalho propõe o uso dos elementos da forma de Hermite para modelagem de curvas planas na descrição global da forma destas curvas. Nosso intuito não é o de realizar uma análise comparativa do desempenho desta representação frente a outras, mas de analisar o seu potencial e de sugeri-la como uma opção simples e interessante para a descrição de curvas, dado que o seu uso possibilita uma representação explícita associada a uma fácil visualização dos parâmetros que determinam o comportamento de uma curva.

Para exemplificar o potencial dos elementos da forma de Hermite face a discriminação de classes de curvas procuramos solucionar um problema da área de biologia sistemática que envolve a análise de curvas bidimensionais. A biologia, em especial a botânica, é uma ciência que apresenta elevado potencial para utilização das técnicas de visão computacional, visto que a identificação de espécimes vegetais se faz com base na comparação com padrões pré-determinados, tais como as características das flores, dos frutos, das folhas e do arranjo destes elementos no espécime. Conseqüentemente, a compreensão da forma e dos componentes externos de uma planta deve ser o alicerce de qualquer investigação botânica. Procuramos, então, discriminar duas

A entrada de um sistema de reconhecimento de padrões consiste em um conjunto de características que podem ser extraídas do domínio do problema e utilizadas no processo de reconhecimento. Tais características podem ser sinais elétricos, números, formas, elementos simbólicos como cor ou palavras, ou qualquer outra variável que esteja envolvida no problema.

Classificar significa associar um dado de entrada a uma determinada classe pré-especificada com base em suas características. Estas classes são determinadas de acordo com a natureza do problema de reconhecimento que se deseja solucionar.

Dependendo do modo como o reconhecimento de padrões é realizado, o mesmo ser (SHALKOFF, 1992):

1. estatístico, quando os dados de entrada do sistema de reconhecimento são organizados em vetores de características, que são assumidos gerados por fenômenos naturais e, em geral, são tratados por funções de decisão baseadas em modelos paramétricos ou não-paramétricos para o arranjo espacial dos dados.
2. sintático ou estrutural, quando as interconexões entre os elementos de entrada do sistema de reconhecimento contém informações essenciais para que a identificação dos padrões possa ser feita, como no caso do reconhecimento de palavras, notas em uma partitura, circuitos elétricos, etc. Neste caso, o uso de gramáticas que definam as possíveis associações lingüísticas entre os elementos em estudo se faz necessário.
3. por redes neurais, onde os elementos são identificados por um sistema neural artificial previamente treinado com base em um conjunto de elementos representativos das classes que se deseja identificar. As redes neurais são uma tentativa de simular o comportamento biológico das interações que ocorrem no cérebro humano e tem gerado bons resultados e expectativas na área de reconhecimento de padrões.

No caso da abordagem estatística, aplicada neste trabalho, a identificação dos padrões é feita com base na análise de funções discriminantes e para que os conjuntos ou classes possam ser corretamente discriminados, é necessário que os mesmos

espécies aparentadas e simpátricas de leguminosas (*Lonchocarpus subglaucescens* Mart. ex Benth. e *L. muehlbergianus* Hassl.), que apresentam grande semelhança nas características vegetativas incluindo as formas de suas nervuras e de seus contornos, utilizando o modelo de Hermite na representação das suas nervuras foliolares secundárias e os seus parâmetros como discriminadores para as espécies de plantas.

As nervuras (anatomicamente falando, os feixes vasculares) são características notáveis de muitas folhas. O padrão de venação é frequentemente distintivo para uma dada espécie de planta ou pode ser característico de um grupo taxonômico maior. Na literatura, existem poucos trabalhos sobre a classificação para a venação das folhas, destacando-se os elaborados por HICKEY (1973, 1979), MELVILLE (1969, 1976) e RIZZINI (1977). Nestes trabalhos, a descrição da venação limita-se a uma caracterização qualitativa do curso das nervuras, da localização do ponto de inserção e da terminação, do comprimento relativo e da espessura, além das medidas de ângulos formados entre as mesmas (ângulos de inserção ou de divergência). Estas medidas, em geral, apresentam resolução limitada, visto que são feitas dentro de faixas muito largas, resultando numa quantificação pouco precisa e conseqüentemente de pequena importância no processo taxonômico (HICKEY, 1979). Além disso, a medida de ângulos realizada é de natureza local, não refletindo o comportamento da nervura do folíolo.

Assim, a abordagem por polinômios de Hermite estende as medidas de ângulo de inserção das nervuras secundárias (tradicionalmente consideradas no processo taxonômico (HICKEY, 1973)) passando os seus elementos a serem medidas de forma mais adequadas para testes de homologia, visto que estes não se limitam a uma simples medida de ângulo mas sim a um descritor representativo global da forma da curva considerada.

Descreveremos no nosso trabalho as características mais importantes da forma de Hermite para curvas e de como curvas reais podem ser modeladas utilizando esta representação, bem como toda a metodologia empregada na modelagem das nervuras pelas equações cúbicas na forma de Hermite e do modo como os parâmetros desta representação são utilizados na caracterização das curvas analisadas.

### 1.3. Organização do trabalho

Este trabalho encontra-se organizado como segue.

No capítulo 2 fazemos uma revisão das principais formas de representação de curvas, reconhecimento e classificação de objetos.

No capítulo 3 discutimos os aspectos teóricos da representação de curvas na forma de Hermite e o método de ajuste paramétrico que utilizamos para realizar o modelagem das nervuras pelas curvas bidimensionais.

No capítulo 4 apresentamos as características básicas dos objetos de estudo envolvidos no problema de discriminação de espécies que desejamos solucionar utilizando os elementos da representação de Hermite e descrevemos os procedimentos necessários para que seu uso na caracterização dos modelos para as nervuras secundárias possa ser concretizado.

No capítulo 5, os resultados obtidos para os conjuntos de amostras analisadas são apresentados e discutidos. Calculamos as estimativas dos erros de classificação proporcionados pelos classificadores utilizados para cada um dos descritores que proporcionaram a discriminação das duas espécies de leguminosas e observamos o seu desempenho no processo de reconhecimento.

No capítulo 6, desfechamos as conclusões sobre o tema e resultados deste trabalho e apresentamos sugestões para trabalhos futuros dedicados a esta linha de pesquisa: discriminação de curvas e formas.

Incluímos também neste documento dois apêndices: um no qual realizamos uma revisão das características vetoriais de uma curva no plano e outro a respeito de algumas técnicas de análise estatística que utilizamos na análise de dados.

## Capítulo 2

# Conceitos Básicos em Representação de Curvas e Reconhecimento de Padrões

### 2.1. Introdução

Apresentamos neste capítulo os conceitos básicos envolvidos num problema de reconhecimento de padrões. Apresentamos também uma breve revisão dos modelos polinomiais mais difundidos e utilizados na representação de curvas bidimensionais, discutindo a formulação e as características principais de cada um deles.

Além disso, discutimos os aspectos teóricos de duas ferramentas utilizadas para redução dimensional de espaço de variáveis: a transformada de Hotelling e a função discriminante linear de Fisher. Suas propriedades são empregadas na análise dos parâmetros do modelo para representação de curvas e no cálculo das fronteiras de separação de classes para a aplicação enfocada neste trabalho.

### 2.2. Revisão de reconhecimento de padrões

Reconhecimento de padrões é a ciência que trata da descrição e/ou classificação de medidas, sendo as suas técnicas bastante úteis em sistemas que necessitam de realizar tomada de decisões (SCHALKOFF, 1992).

estejam separados no espaço de padrões, como mostra a figura 2.1a. Desse modo, é possível definir fronteiras que separem as classes, particionando o espaço de variáveis em regiões associadas a cada tipo de padrão. Já na figura 2.1b os conjuntos não se encontram espacialmente separados e a determinação de uma fronteira não se faz possível. Estas fronteiras, por sua vez, são estabelecidas a partir da análise de funções discriminantes associadas as variáveis analisadas (SHALKOFF, 1992).

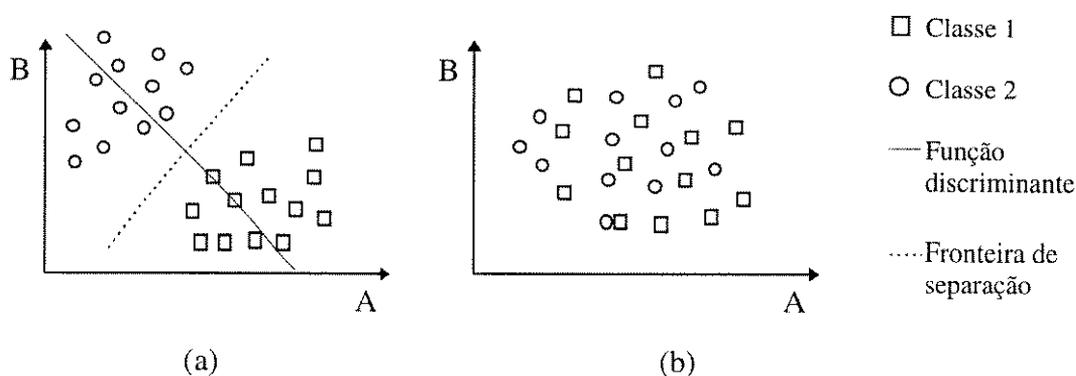


Figura 2.1: Exemplos de conjuntos de padrões separáveis (a) e não-separáveis (b).

Assim, a seleção do conjunto adequado de descritores para a representação de um padrão, ou seja, um conjunto que possibilite a separação espacial dos padrões, é tarefa primordial para que o seu reconhecimento possa se concretizar.

Em se tratando do reconhecimento de curvas, os seus parâmetros são os mais fortes candidatos a compor o vetor de características a ser utilizado na sua descrição. Daí a necessidade do uso de parâmetros adequados para a representação de uma curva ou modelo de curva.

Na seção 2.3 a seguir mostramos alguns dos modelos mais utilizados na representação de curvas bidimensionais.

### 2.3. Modelos para representação de curvas

Dentre os resultados que um sistema de visão computacional fornece podemos destacar os modelos para a cena ou para os objetos da imagem. A utilização de modelos matemáticos para representação de sistemas é de grande conveniência para o seu estudo. O uso do modelo adequado facilita o entendimento do sistema,

proporcionando uma visão concreta do seu comportamento, das suas características e das transformações que ocorrem no seu contexto.

Uma característica importante de um modelo é que os seus parâmetros podem ser utilizados para descrever a instâncias deste modelo e resolvemos, por isto, realizar neste trabalho um estudo que trata do uso dos parâmetros de modelos de curvas bidimensionais na descrição e reconhecimento de formas.

Os modelos mais conhecidos e utilizados na representação de curvas são apresentados nas seções 2.3.1 e 2.3.2, a seguir. Discutimos as características das equações polinomiais explícitas e implícitas, curvas de Bézier, *splines* cúbicas e *B-splines*, todas descritas em ROGERS & ADAMS(1990).

### 2.3.1. Curvas não-paramétricas

#### 2.3.1.1. Equações explícitas

Uma das formas mais simples de se representar uma curva no plano é através de uma equação polinomial explícita, cuja expressão matemática é dada por

$$y = f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad (2.1)$$

onde  $n$  é o grau do polinômio.

As equações explícitas apresentam alguns problemas quando são utilizadas no modelagem de uma curva. Quando o grau do polinômio é pequeno, a qualidade do ajuste do modelo pode não ser satisfatória. Se aumentarmos este grau, o conjunto de equações que leva ao cálculo do ajuste pode ser mal-condicionado e difícil de ser resolvido (ZHOU et al., 1985). Além disto, curvas fechadas ou de múltiplos valores como uma circunferência não pode ser representada por este tipo de equações.

#### 2.3.1.2. Equações implícitas

Equações implícitas são aquelas que podem ser escritas na forma

$$f(x, y) = 0. \quad (2.2)$$

Representações implícitas apresentam diversas e atrativas vantagens que incentivam o seu uso para modelagem de objetos. Entre outras, podemos citar algumas encontradas em KEREN et al. (1994):

1. Capacidade de descrever objetos de formas irregulares por um pequeno número de parâmetros.
2. Reconhecimento de objetos por verificação se um conjunto de dados que é bem ajustado a um polinômio implícito específico é rápida.
3. O ajuste de polinômios é pouco sensível a ruídos do conjunto de dados.
4. Ajuste de polinômios implícitos fechados a dados ruidosos possui baixo custo computacional.
5. Sua natureza permite verificar facilmente se um objeto está dentro ou fora do contorno que um determinado polinômio representa.

Entretanto, tanto os polinômios explícitos quanto os implícitos apresentam a limitação de serem dependentes dos eixos em que são representados. Os seus parâmetros não podem ser utilizados diretamente como descritores para as curvas, sendo necessário o cálculo de invariantes algébricos a partir destes parâmetros e demandando um custo computacional maior.

As curvas paramétricas, por sua vez, são independentes dos eixos. Os pontos final e inicial das curvas são fixados por uma faixa de parâmetros e, desse modo, as curvas podem ser facilmente manipuladas por transformações afins (ROGERS & ADAMS, 1990).

### 2.3.2. Curvas paramétricas

Curvas paramétricas são conjuntos de pontos expressos sob a forma  $Q(t) = [x(t) \ y(t)]$ , onde  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções paramétricas em  $t$  e cada valor  $t=t_i$  define um ponto  $(x_i, y_i)$  sobre a curva.

Dependendo das características desejadas para as curvas paramétricas, as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  podem assumir diversas formulações matemáticas. Algumas delas são apresentadas nas seções 2.3.2.1 a 2.3.2.3.

### 2.3.2.1. Curvas cúbicas paramétricas

Curvas cúbicas paramétricas são aquelas cujas componentes  $x(t)$  e  $y(t)$  são equações polinomiais cúbicas. As equações polinomiais cúbicas que definem uma curva paramétrica genérica  $Q(t)$  são do tipo:

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $\{t^3, t^2, t^1, t^0\}$  formam a base monomial das funções polinomiais.

Uma representação mais compacta das equações 2.3 é obtida utilizando-se uma representação matricial da forma.

$$Q(t) = T \cdot C \quad (2.4)$$

onde:

$$T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

e

$$C = \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A opção pela utilização de funções paramétricas de terceiro grau conduz a uma boa flexibilidade no controle da forma da curva. Funções paramétricas de grau inferior não permitem um ajuste adequado da forma, enquanto funções de grau superior, além de proporcionarem ondulações indesejadas na forma da curva, requerem um custo computacional maior. Um exemplo de curva cúbica gerada pelas funções paramétricas

$$x(t) = 10t^3 - 14t^2 + 5t \quad e$$

$$y(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3.1t$$

é mostrado na figura 2.2.

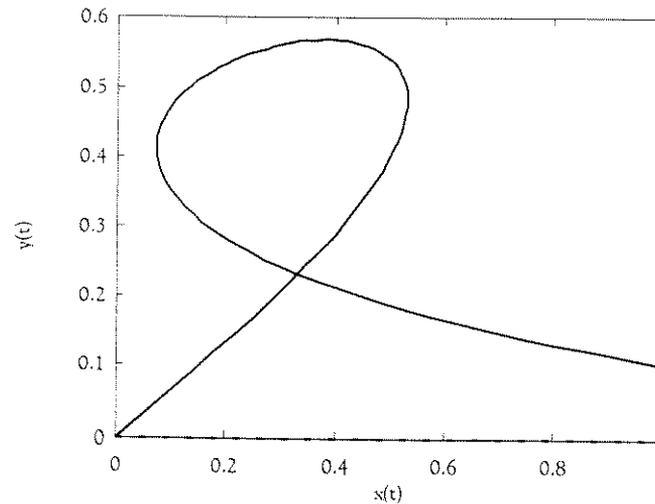


Figura 2.2: Exemplo de curva cúbica.

O modelo de Hermite para curvas é uma representação alternativa para curvas cúbicas dadas pela equação 2.3 e, por ser o escolhido neste trabalho, resolvemos apresentá-lo em detalhes no capítulo 3.

### 2.3.2.2. Curvas de Bézier

Na representação de Bézier para curvas, o segmento de curva é determinado pelo posicionamento de pontos de controle arranjados numa estrutura poligonal. Curvas de Bézier são bastante utilizadas quando é necessário modelar um objeto cujo comportamento quantitativo ainda não é conhecido e se procura definir um esboço inicial para o mesmo. O esboço de uma curva de Bézier é mostrado na figura 2.3.

A expressão matemática que define uma curva de Bézier é dada por

$$P(t) = \sum_{i=0}^N B_i J_{n,i}(t) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.7)$$

onde

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

é conhecida como função de *blending* ou de base de Bernstein.

Os elementos  $B_i$  são os pontos de controle da curva constituintes do polígono característico e

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

para um polígono de  $n+1$  vértices.

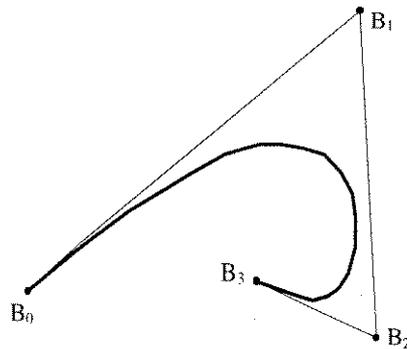


Figura 2.3: Curva de Bézier com seu polígono característico definido pelos pontos  $B_0, B_1, B_2, B_3$ .

Na figura 2.4 é mostrado o comportamento das funções de base  $J_{n,i}$  para um polígono com quatro vértices.

Dentre as propriedades das curvas de Bézier, podemos destacar:

- A curva sempre passa pelos pontos inicial e final do polígono que a define.
- A direção dos vetores tangentes à curva nos pontos final e inicial coincidem com a direção dos primeiro e último segmentos de reta do polígono, respectivamente.
- A curva em geral tende a acompanhar o comportamento do polígono, sendo o grau do polinômio que a define igual ao número de pontos do seu polígono característico menos 1.

As curvas de Bézier não passam obrigatoriamente pelos pontos de controle e são adequadas quando se deseja realizar um ajuste visual da sua forma.

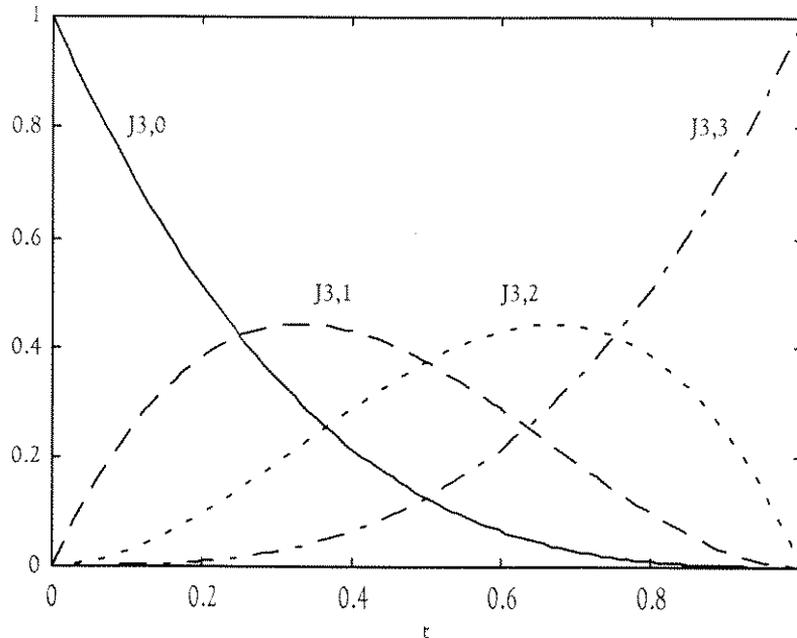


Figura 2.4: Exemplo de funções de base de Bernstein para as curvas de Bézier ( $n=2$ ).

### 2.3.2.3. B-Splines

Embora a abordagem de Bézier para representação de curvas seja uma boa solução para o problema do modelagem inicial de um determinado objeto, ela apresenta algumas limitações decorrentes de sua formulação matemática. Podemos citar como exemplo o fato de o grau do polinômio que define uma curva ser dependente do número de vértices do polígono característico, ou também a dificuldade de se realizar mudanças locais na curva, visto que as funções de base de Bernstein assumem valores diferentes de zero para toda a faixa do parâmetro  $t$ .

As curvas chamadas *B-Splines* contornam este problema, pois utilizam funções de base independentes para cada vértice do polígono característico da curva. As *B-Splines* são definidas matematicamente como:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad 2 \leq k \leq n+1 \quad (2.8)$$

onde os elementos  $B_i$  são os pontos do polígono característico, que possui  $n+1$  vértices. Os elementos  $N_{i,k}$  são as funções de base normalizadas para *B-Splines* e são definidas como

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x_i \leq t \leq x_{i+1} \\ 0 & , \text{caso contrario} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (2.10)$$

Os elementos  $x_i$  constituem um vetor de nós que determinam o comportamento das funções de base e devem satisfazer a relação  $x_i \leq x_{i+1}$ .

Observe na figura 2.5 o comportamento das funções de blending para um polígono característico de cinco vértices, com funções de base de terceira ordem ( $k=3$ ) utilizando um vetor de nós  $x = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3]$ . Podemos notar que cada ponto do polígono exerce influência sobre uma região pequena da curva, exemplificando a maleabilidade desta em se tratando da necessidade de se realizar ajustes locais na forma do modelo.

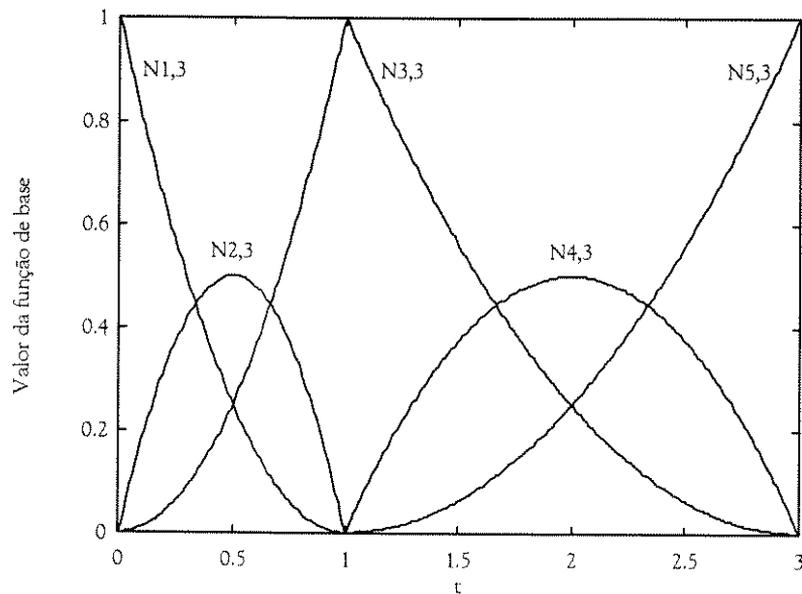


Figura 2.5: Exemplo de funções de *blending* para B-splines.

## 2.4 Ferramentas de redução dimensional

Um dos problemas que podemos encontrar na análise de um conjunto de dados reside no tamanho da variável amostral que representa um elemento da população que estamos estudando. Quando realizada em espaços n-dimensionais, a análise matemática pode se tornar complicada e a existência de ferramentas que possibilitem a reduzir a dimensão do espaço de análise sem perda de informação é de grande interesse para o tratamento dos dados.

A primeira ferramenta que apresentamos se trata do discriminante linear de Fisher, utilizada para determinar a melhor região de separação entre duas classes de dados arranjadas no espaço n-dimensional. A fronteira separadora de classes é determinada pela teoria de Bayes. Apresentamos na seção 2.4.1 um resumo da teoria relacionada a este discriminante e que pode ser encontrada em SCHALKOFF (1992).

A segunda delas é a transformada de Hotelling, ou das componentes principais (PCA), que consiste numa transformação linear que faz uso das propriedades estatísticas do conjunto de dados multidimensional a ser transformado (GONZALES & WOODS, 1993). Esta transformação descorrelaciona as componentes vetoriais do conjunto de dados e condensa nas primeiras dimensões do sistema transformado a grande maioria da informação original.

### 2.4.1 Discriminante linear de Fisher

O método de Fisher determina uma reta no espaço n-dimensional cuja orientação  $\underline{w}$  assegura que os conjuntos dos dados projetados ortogonalmente na mesma possuam a máxima separação possível.

Dado um conjunto de treinamento  $C = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N\}$  e que contém dois subconjuntos  $C_1$  e  $C_2$ , o vetor dos dados projetados é determinado pelos valores de  $y$  na equação a seguir.

$$y = \underline{w}^T \underline{x}_i \quad (2.11)$$

A orientação  $\underline{w}$ , quando baseada em um conjunto de amostras, é calculada maximizando uma função que relaciona as estimativas das médias e variâncias das amostras projetadas, tal como na equação 2.12.

$$J = \frac{(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)^2}{\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2} \quad (2.12)$$

O método define uma matriz de espalhamento  $S_i$  dentro de cada classe como

$$S_i = \sum_{x \in \text{classe } i} (x - \underline{m}_i) \cdot (x - \underline{m}_i)^T, \quad i = 1, 2 \quad (2.13)$$

e uma matriz de espalhamento  $S_w$  como

$$S_w = S_1 + S_2 \quad (2.14)$$

Logo, o denominador da equação 2.12 poderá ser reescrito como

$$\bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2 = \underline{w}^T S_w \underline{w} \quad (2.15)$$

De modo análogo,

$$(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)^2 = \underline{w}^T (\underline{m}_1 - \underline{m}_2)(\underline{m}_1 - \underline{m}_2)^T \underline{w} = \underline{w}^T S_B \underline{w} \quad (2.16)$$

onde  $S_B$  é a matriz de espalhamento entre as classes. Com estas novas relações, a equação 2.12 pode ser reescrita como

$$J = \frac{\underline{w}^T S_B \underline{w}}{\underline{w}^T S_w \underline{w}} \quad (2.17)$$

Minimizando a equação 2.17 em relação aos elementos do vetor  $\underline{w}$ , ou seja,  $\partial J / \partial \underline{w} = \underline{0}$ , chegaremos à equação matricial a seguir.

$$S_B \hat{\underline{w}} = S_w \hat{\underline{w}} (\hat{\underline{w}}^T S_B \hat{\underline{w}}) (\hat{\underline{w}}^T S_w \hat{\underline{w}})^{-1} \quad (2.18)$$

A equação 2.18 nos leva a um problema de autovetores generalizados do tipo  $A \cdot x = \lambda B \cdot x$  onde, neste caso,  $\lambda = (\hat{\underline{w}}^T S_B \hat{\underline{w}}) (\hat{\underline{w}}^T S_w \hat{\underline{w}})^{-1}$ , o que nos leva a reescrevê-la como  $S_B \hat{\underline{w}} = \lambda S_w \hat{\underline{w}}$ .

Se  $S_W$  possuir matriz inversa, então uma solução para a direção do vetor  $\hat{w}$  pode ser

$$\hat{w} = S_W^{-1} S_B \hat{w} \quad (2.19)$$

Sabendo que  $S_B \underline{w} = (\underline{m}_1 - \underline{m}_2)(\underline{m}_1 - \underline{m}_2)^T \underline{w} = k(\underline{m}_1 - \underline{m}_2)$ , ou seja, possui a mesma direção do vetor  $\hat{w}$ , podemos encontrar este vetor pela equação 2.20.

$$\hat{w} = S_W^{-1} (\underline{m}_1 - \underline{m}_2) \quad (2.20)$$

Para cada conjunto de dados projetados na reta correspondente às classes consideradas assumimos uma distribuição normal  $N(\mu_i, \sigma_i)$ . Enfim, definindo intervalos de confiança para as médias e para as variâncias calculamos, pelo método de Bayes, o ponto de separação entre classes na reta de projeção.

#### 2.4.2 A transformada de Hotelling

Considere um conjunto de  $M$  vetores aleatórios da forma:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Seja  $m_x$  o valor médio do conjunto de vetores, onde:

$$m_x = E\{X\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \quad (2.22)$$

onde  $E\{\text{variável}\}$  é o valor esperado de *variável*.

A matriz de covariância desta população de vetores será dada por:

$$C_X = E\{(X - m_x) \cdot (X - m_x)^T\} \quad (2.23)$$

Sendo  $X$  um vetor  $n$ -dimensional, a matriz de covariância  $C_x$  será de ordem  $n \times n$ . Como  $X$  é um vetor real e  $x_i x_j = x_j x_i$  a matriz  $C_x$  será real e simétrica ( $C_{xij} = C_{xji}$ ).

A população de vetores terá seus elementos  $x_i$  e  $x_j$  descorrelacionados se os elementos  $C_{xij} = C_{xji}$  forem iguais a zero.

Expandindo a equação 2.23 teremos:

$$\begin{aligned} C_x &= E\{X \cdot X^T - X \cdot m_x^T - m_x \cdot X^T + m_x \cdot m_x^T\} = \\ &= E\{X \cdot X^T\} - E\{X\} \cdot m_x^T - m_x \cdot E\{X^T\} + m_x \cdot m_x^T = \\ &= E\{X \cdot X^T\} - m_x \cdot m_x^T \end{aligned}$$

Logo,

$$C_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \cdot X_i^T - m_x \cdot m_x^T \quad (2.24)$$

Como  $C_x$  é real e simétrica então possui um conjunto N de autovetores reais e ortonormais. Podemos dispor estes autovetores nas linhas de uma matriz A na ordem decrescente dos autovalores a que cada autovetor está associado, ou seja,  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ , onde  $i=1, 2, \dots, n-1$  é o índice da linha da matriz.

A transformação da forma

$$y = A \cdot (X - m_x), \quad (2.25)$$

é conhecida como transformada de Hotelling e tem as seguintes propriedades:

i) Os dados transformados possuem valor médio igual a zero.

$$\begin{aligned} E\{y\} &= E\{A \cdot (X - m_x)\} = A \cdot E\{X - m_x\} = A \cdot E\{X\} - A \cdot E\{m_x\} \\ E\{y\} &= A \cdot m_x - A \cdot m_x = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } C_y &= E\{A \cdot (x - m_x) \cdot [A \cdot (X - m_x)]^T\} = E\{A \cdot (X - m_x) \cdot (X - m_x)^T \cdot A^T\} \\ C_y &= A \cdot E\{(X - m_x) \cdot (X - m_x)^T\} \cdot A^T = A \cdot C_x \cdot A^T \end{aligned} \quad (2.27)$$

iii) Os dados transformados são totalmente descorrelacionados, ou seja,  $C_y$  é uma matriz diagonal.

Como sabemos,  $C_X \cdot Z = \lambda_i Z_i$ , se  $\lambda_i$  é autovalor de  $C_X$  e  $Z_i$  é um autovetor pertencente a  $\lambda_i$ .

Podemos mostrar que

$$C_X \cdot Z = Z \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad (2.28)$$

onde  $Z$  é uma matriz onde suas colunas são os autovetores de  $C_X$ .

Expandindo o primeiro membro da equação 2.28 teremos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{11} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & & z_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N1} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} c_{11}z_{11} + \dots + c_{1N}z_{N1} & c_{11}z_{12} + \dots + c_{1N}z_{N2} & \dots & c_{11}z_{1N} + \dots + c_{1N}z_{NN} \\ c_{21}z_{12} + \dots + c_{2N}z_{N1} & c_{21}z_{12} + \dots + c_{2N}z_{N2} & & c_{21}z_{1N} + \dots + c_{2N}z_{NN} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{N1}z_{11} + \dots + c_{NN}z_{N1} & c_{N1}z_{12} + \dots + c_{NN}z_{N2} & \dots & c_{N1}z_{1N} + \dots + c_{NN}z_{NN} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \lambda_1 z_{11} & \lambda_2 z_{12} & \dots & \lambda_N z_{1N} \\ \lambda_1 z_{21} & \lambda_2 z_{22} & & \lambda_N z_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 z_{N1} & \lambda_2 z_{N2} & \dots & \lambda_N z_{NN} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & & z_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N1} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix} = Z \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \end{aligned}$$

A matriz de autovetores  $Z$  corresponde ao transposto da matriz de transformação  $A$ . Assim sendo,

$$C_X \cdot A^T = A^T \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (2.29)$$

Multiplicando ambos os membros da equação 2.29 por  $A$ , teremos

$$A \cdot C_X \cdot A^T = A \cdot A^T \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = C_Y \quad (2.30)$$



Sendo os autovetores arranjados na matriz  $A$  ortonormais entre si, o produto matricial  $A \cdot A^T$  será igual à matriz identidade. Logo, a equação 2.30 será reescrita como

$$C_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Podemos notar que, pela equação 2.31, a correlação entre as componentes descorrelacionadas de índices  $i$  e  $j$ ,  $i \neq j$ , é nula.

## Capítulo 3

# Aproximação de Curvas por Polinômios de Hermite

### 3.1. Introdução

Descreveremos neste capítulo a representação de curvas através de equações cúbicas paramétricas na forma de Hermite (FOLEY et al., 1990). O uso da forma de Hermite, além de possuir uma formulação matemática simples, possibilita uma representação explícita dos parâmetros têm interpretações geométricas e intuitivas (vetores de geometria), facilitando o estudo do seu comportamento.

Nas seções 3.2 a 3.6 apresentamos uma revisão dos conceitos relacionados à representação de Hermite e ajuste polinomial de curvas, destacando a técnica de parametrização utilizada.

### 3.2. Representação na forma de Hermite

Quando a curva é representada na forma de Hermite o segmento polinomial é determinado pelos valores dos seus pontos finais  $P_1$  e  $P_2$  e dos vetores tangentes à curva nestes pontos,  $R_1$  e  $R_2$ , onde  $t$  assume valores no intervalo  $[0,1]$ . Estes vetores são denominados vetores de geometria da curva e estão representados na figura 3.1.

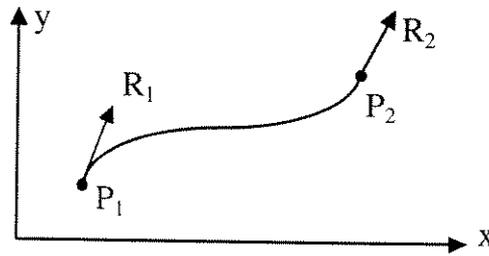


Figura 3.1: Curva de Hermite com os vetores de geometria  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $R_1$  e  $R_2$ .

Os vetores de geometria podem ser expressos em função do vetor de posição  $Q(t)$  dado pela equação 2.4, ou seja,

$$P_1 = [p_{1x} \quad p_{1y}] = Q(0) \quad (3.1 \text{ a})$$

$$P_2 = [p_{2x} \quad p_{2y}] = Q(1) \quad (3.1 \text{ b})$$

$$R_1 = [r_{1x} \quad r_{1y}] = Q'(0) \quad (3.1 \text{ c})$$

$$R_2 = [r_{2x} \quad r_{2y}] = Q'(1) \quad (3.1 \text{ d})$$

onde

$$Q'(t) = dQ(t)/dt = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0] \cdot C \quad (3.2)$$

Definindo a matriz de geometria

$$G_H = \begin{bmatrix} P_{1x} & P_{1y} \\ P_{2x} & P_{2y} \\ R_{1x} & R_{1y} \\ R_{2x} & R_{2y} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

é possível mostrar que o vetor de posição  $Q(t)$  pode ser escrito como função da matriz de geometria  $G_H$ .

De acordo com as equações 3.1 os vetores de geometria serão dados por:

$$\begin{aligned} P_1 = Q(0) &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \cdot C \\ P_2 = Q(1) &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \cdot C \\ R_1 = Q'(0) &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot C \\ R_2 = Q'(1) &= [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0] \cdot C \end{aligned} \quad (3.4)$$

Logo, poderemos relacionar  $G_H$  e  $C$  pela equação matricial a seguir:

$$G_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot C \quad (3.5)$$

Se definirmos uma matriz  $M_H$  tal que:

$$G_H = M_H \cdot C \Rightarrow C = M_H^{-1} \cdot G_H \quad (3.6)$$

ou seja,

$$M_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

é possível expressar a matriz de coeficientes  $C$  em função da matriz de geometria de Hermite  $G_H$ , realizando uma simples inversão na matriz  $M_H$ .

$$C = M_H^{-1} \cdot G_H \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot G_H \quad (3.8)$$

Podemos agora reescrever a equação 2.4 na forma:

$$Q(t) = [x(t) \quad y(t)] = T \cdot C = T \cdot M_H^{-1} \cdot G_H, \quad (3.9)$$

onde os elementos da matriz

$$B_H = T \cdot M_H^{-1} \quad (3.10)$$

são conhecidos como funções de *blending* de Hermite e servem para ponderar a influência de cada elemento da matriz  $G_H$  ao longo da curva  $Q(t)$ , e a equação 3.9, a representação de uma curva na forma de Hermite.

Realizando o produto  $T \cdot M_H^{-1}$  chegaremos às expressões para as funções de *blending*.

$$B_H = \begin{bmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

Os gráficos das funções de *blending* de Hermite estão apresentadas na figura 3.2 a seguir.

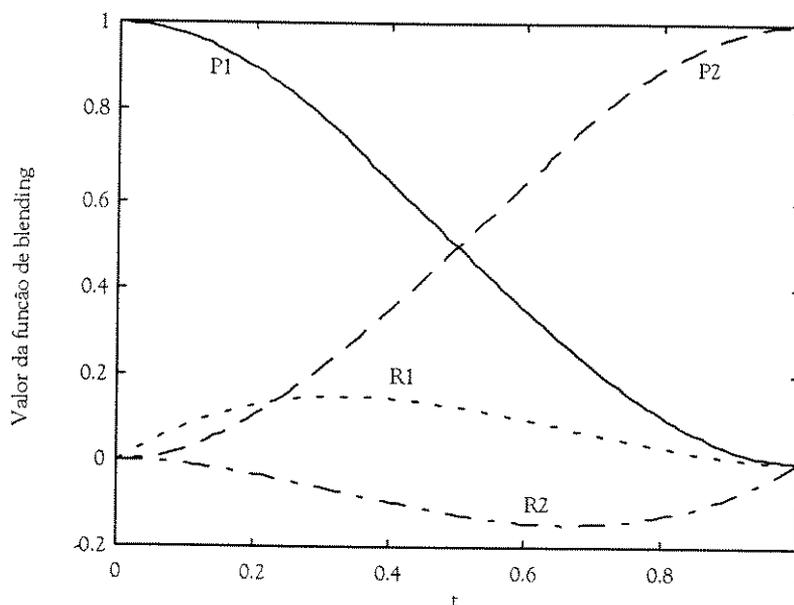


Figura 3.2: Funções de *blending* de Hermite associadas aos elementos do vetor de geometria  $G_H$ .

É importante salientarmos que todos os elementos da representação de Hermite são importantes na representação da curva. Se observarmos a figura 3.2, poderemos notar que, com exceção dos pontos inicial ( $t = 0$ ) e final ( $t = 1$ ), as funções de *blending* assumem valores não nulos em toda a faixa de variação do parâmetro  $t$ . Deste modo, caso apenas um deles seja alterado, toda a forma da curva será influenciada por esta alteração. Esta afirmação pode ser verificada pelos exemplos mostrados nas figuras 3.3a a 3.3d. Elas mostram situações onde cada um dos elementos é alterado enquanto que os outros permanecem inalterados. Na figura 3.3a, apenas o vetor de geometria  $P_1$  muda na matriz de geometria. Já na figura 3.3b, quem muda é o vetor  $P_2$ . Na figura 3.3c a mudança ocorre por parte de  $R_1$ . Finalmente na figura 3.3d, a mudança ocorre em  $R_2$ . Nestes últimos dois casos a

associação entre as curvas e os correspondentes vetores de geometria pode ser feita pelo tipo de tracejado do desenho. Em todas as situações, podemos constatar que a forma da curva muda completamente quando apenas um elemento sofre alteração, o que nos leva mais uma vez a reforçar que todos os vetores de geometria devem ser levados em consideração na análise da curva.

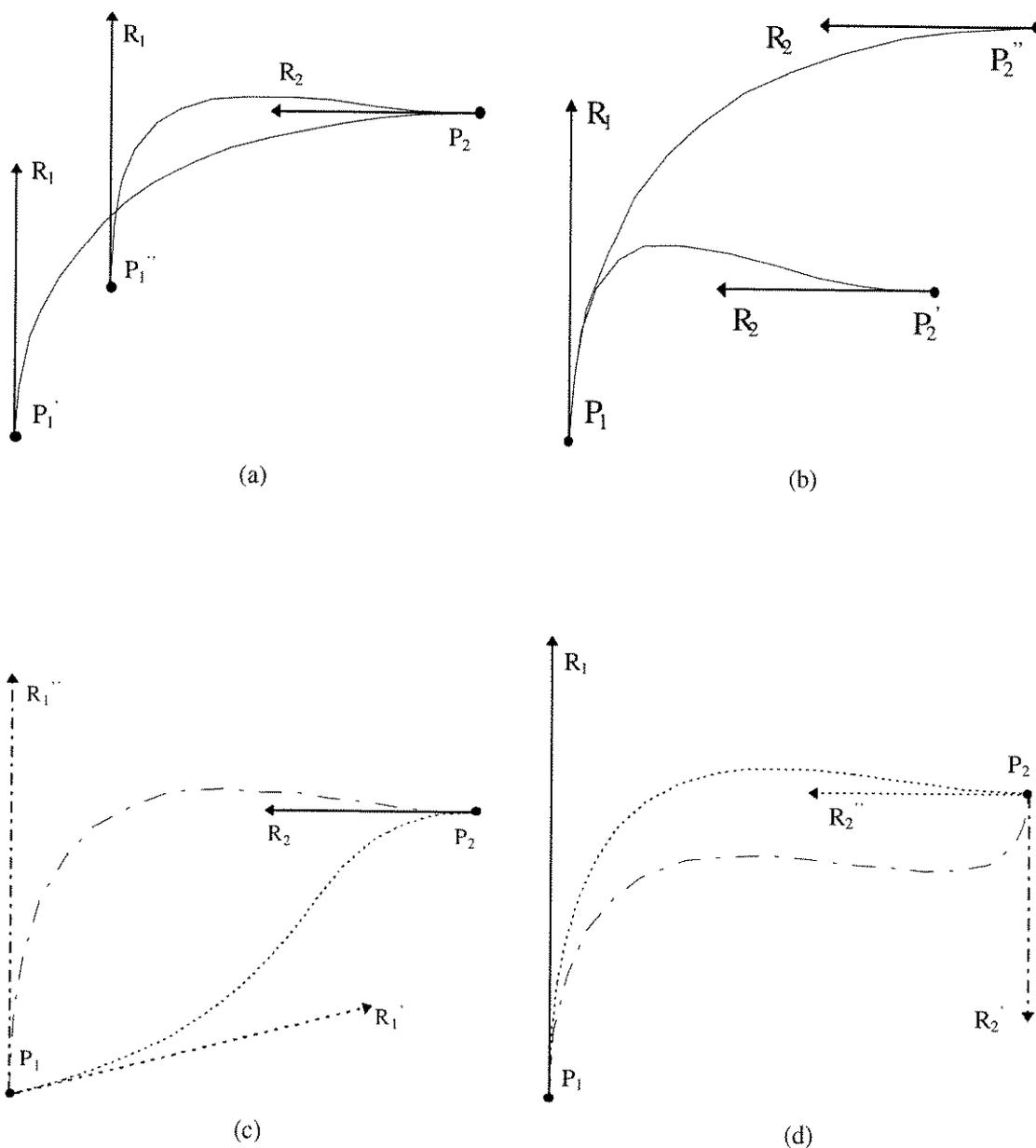


Figura 3.3: Exemplos de curvas para diferentes vetores de geometria.

### 3.3. Ajuste polinomial pelo método dos mínimos quadrados

Para uma dada curva real, desejamos encontrar os parâmetros da matriz de geometria que proporcionam a sua melhor representação. Duas formas para determinação destes parâmetros podem ser consideradas. A primeira delas consiste no ajuste iterativo dos módulos e direções dos vetores de geometria, até que a aproximação desejada para a curva real seja obtida. Tal abordagem não é recomendada pois, além de exigir um trabalho exaustivo para o ajuste, depende da experiência de quem o realiza. Na segunda forma, os parâmetros ideais da matriz são obtidos pela minimização do erro entre um conjunto de pontos amostrados sobre a curva real e o correspondente modelo para esta curva, calculado com base nestes pontos. Esta última abordagem, por ser a mais apropriada, foi utilizada neste trabalho e os aspectos relacionados a sua implementação são apresentados a seguir.

O ajuste da curva a ser modelada é feito através do método dos mínimos quadrados (PRESS et al., 1992), sendo os seus parâmetros ideais obtidos através da minimização de uma função de erro entre a curva modelada e a curva real.

#### 3.3.1. Ajuste polinomial para uma função explícita

O ajuste polinomial consiste em encontrar para um polinômio de grau  $p$  o conjunto de coeficientes  $b_i$  que minimize a função de erro para um conjunto de  $N$  pontos com coordenadas  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ , amostrados sobre a curva. O valor ajustado  $\hat{y}_i$  relativo a  $x_i$  é dado por

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \dots + b_p x_i^p \quad (3.12)$$

que, numa representação matricial, equivale a

$$\hat{y}_i = X_i \cdot B, \quad (3.13)$$

onde

$$X_i = [1 \quad x_i \quad x_i^2 \quad \dots \quad x_i^p] \text{ e} \quad (3.14)$$

$$B = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_N]^T, \quad P < N, \quad (3.15)$$

Para um dado conjunto de coeficientes  $b_i$  definimos um erro  $e_i$ , diferença entre cada valor  $y_i$  da amostra e seu respectivo ajuste  $\hat{y}_i$ , e uma matriz de erro  $E$ , que contém os valores dos desvios  $e_i$ , ou seja,

$$e_i = y_i - \hat{y}_i ; \quad (3.16)$$

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_N \end{bmatrix} = Y - \hat{Y} \quad (3.17)$$

onde:

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]^T, \quad (3.18)$$

$$\hat{Y} = [\hat{y}_1 \quad \hat{y}_2 \quad \cdots \quad \hat{y}_N]^T \text{ e} \quad (3.19)$$

Combinando as equações 3.13 e 3.17 chegamos a uma expressão que relaciona a matriz de erro  $E$  com a matriz de coeficientes  $B$ .

$$E = Y - \hat{Y} = Y - XB, \quad (3.20)$$

onde:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^p \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

O erro quadrático  $\xi$  é definido como a soma dos quadrados dos desvios  $e_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) para os pontos da amostra, ou seja,

$$\xi = \sum_{i=1}^N e_i^2 = e_1 e_1 + e_2 e_2 + \cdots + e_N e_N = E^T \cdot E \quad (3.22)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \xi &= E^T \cdot E = (Y - XB)^T (Y - XB) \\ &= Y^T Y - B^T X^T Y - Y^T X B + (XB)^T X B \\ &= Y^T Y - 2B^T X^T Y + B^T X^T X B \end{aligned} \quad (3.23)$$

O ajuste polinomial consiste em encontrar o conjunto de coeficientes  $b_i$  que minimize o erro quadrático  $\xi$  dos pontos  $(x_i, y_i)$  em relação a cada elemento  $B$ .

Diferenciando-se a equação 3.23 em relação a cada elemento da matriz  $B$  e igualando o resultado a zero, chegaremos a um valor mínimo para o erro quadrático. Assim procedendo, chegaremos a:

$$0 = -2 X^T Y + 2 X^T X B \Rightarrow X^T X B = X^T Y \quad (3.24)$$

Expandindo o primeiro e o segundo membros da equação 3.24 obteremos um sistema de equações lineares que fornecerá a matriz de coeficientes  $B$ .

1º membro:

$$X^T \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^P & x_2^P & \dots & x_N^P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^P \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^P \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^P \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^P \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{P+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \sum x_i^{P+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^P & \sum x_i^{P+1} & \sum x_i^{P+2} & \dots & \sum x_i^{2P} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

2º membro:

$$X^T \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^P & x_2^P & \dots & x_N^P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^P \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Combinando as expressões 3.25 e 3.26 chegaremos a uma expressão final para o sistema de equações lineares.

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_p \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{p+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_p & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_{2p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde:

$$s_j = \sum_{i=1}^N x_i^j \quad \text{e} \quad k_j = \sum_{i=1}^N y_i x_i^j$$

### 3.4. Ajuste de curvas para um modelo paramétrico

Em se tratando de uma representação polinomial paramétrica, a abordagem apresentada no item 3.3 deve ser modificada de modo que as equações paramétricas  $x(t)$  e  $y(t)$  sejam ajustadas adequadamente à curva real no plano  $xy$  e de uma forma conjunta. Como decorrência, os ajustes das duas curvas  $[t, x(t)]$  e  $[t, y(t)]$  deverão ser efetuados iterativamente.

Salientamos aqui dois aspectos importantes para o ajuste de curvas aplicado à representação de Hermite. O primeiro deles trata de uma modificação que realizamos no método dos mínimos quadrados no intuito de assegurar que a curva passe pelos pontos inicial e final do conjunto de dados a ser ajustado, proporcionando uma representação adequada para a curva quando colocada na forma de Hermite.

O segundo é o fato de os valores numéricos do parâmetro  $t$  necessários para realizar o ajuste das curvas paramétricas não serem conhecidos a priori. Neste caso, é necessário que exista um método para determinar os valores ideais de  $t$  para cada um dos pontos da curva real, possibilitando uma modelagem correta da curva paramétrica.

As discussões para estes aspectos estão apresentadas nas seções 3.4.1 e 3.5.2, a seguir.

### 3.4.1. Modificação no método dos mínimos quadrados

Tendo em vista o uso das características do modelo polinomial de Hermite, fizemos modificações no método dos mínimos quadrados de modo a introduzir restrições garantindo que os pontos inicial e final da curva modelada coincidam com os pontos inicial e final da curva real, respectivamente. Deste modo, o método dos mínimos quadrados será desenvolvido como segue.

$$\bar{x}(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \quad (3.28)$$

Se observarmos as componentes da matriz de geometria, veremos que:

$$\hat{x}(0) = d_x = P_{1x} \quad (3.29)$$

$$\hat{x}(1) = a_x + b_x + c_x + d_x = P_{2x} \Rightarrow a_x = P_{2x} - P_{1x} - b_x - c_x \quad (3.30)$$

Logo,

$$\hat{x}_i = x(t_i) = (P_{2x} - P_{1x} - b_x - c_x)t_i^3 + b_x t_i^2 + c_x t_i + P_{1x} \quad (3.31)$$

$$\hat{x}_i = x(t_i) = (t_i^2 - t_i^3)b_x + (t_i - t_i^3)c_x + (P_{2x} - P_{1x})t_i^3 + P_{1x} \quad (3.32)$$

$$\hat{x}_i = k_{1i}b_x + k_{2i}c_x + k_{3i} \quad (3.33)$$

O erro  $e_i$  (eq. 3.16) será então

$$\begin{aligned} e_i = \hat{x}_i - x_i &= k_{1i}b_x + k_{2i}c_x + k_{3i} - x_i = k_{1i}b_x + k_{2i}c_x + k_{4i} \\ e_i &= K_i L + k_{4i} \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde  $k_{4i} = k_{3i} - x_i$ ,  $K_i = [k_{1i} \quad k_{2i}]$  e  $L = [b_x \quad c_x]$ .

De acordo com as equações 3.17 e 3.22, teremos:

$$\xi = E^T \cdot E = (KL + K_4)^t \cdot (KL + K_4), \quad (3.35)$$

onde

$$K_4 = [k_{41} \quad k_{42} \quad \dots \quad k_{4N}]^T \quad \text{e} \quad (3.36)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \end{bmatrix}^T \quad (3.37)$$

Submetendo a equação 3.35 a uma minimização semelhante à apresentada na seção 3.3 chegaremos à equação matricial 3.38.

$$K^T KL = -K^T K_d \quad (3.38)$$

Expandindo ambos os membros da equação 3.38, obteremos:

$$\begin{bmatrix} \sum k_{1i}^2 & \sum k_{1i}k_{2i} \\ \sum k_{1i}k_{2i} & \sum k_{2i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ c_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum k_{1i}k_{d_i} \\ -\sum k_{2i}k_{d_i} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Por fim, reescrevemos a equação 3.39, explicitando os parâmetros conhecidos da curva real.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sum (t_i^2 - t_i^3)^2 & \sum (t_i^2 - t_i^3)(t_i - t_i^3) \\ \sum (t_i^2 - t_i^3)(t_i - t_i^3) & \sum (t_i - t_i^3)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ c_x \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\sum (t_i^2 - t_i^3)[(P_{2x} - P_{1x})t_i^3 + P_{1x} - x_i] \\ -\sum (t_i - t_i^3)[(P_{2x} - P_{1x})t_i^3 + P_{1x} - x_i] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.4.2. Determinação do parâmetro $t$

Para o ajuste das curvas paramétricas  $x(t)$  e  $y(t)$  é necessário que o parâmetro  $t$  seja estabelecido. Os valores ideais de  $t_i$  associados a cada ponto amostrado  $(x_i, y_i)$  são determinados pelo algoritmo de otimização proposto por PLASS & STONE (1983), que minimiza o erro entre a curva modelada e os pontos amostrados.

O algoritmo é iterativo e utiliza inicialmente uma distribuição uniforme para os valores do parâmetro  $t_i$ . O ajuste das curvas  $x(t)$  e  $y(t)$  é feito pelo método dos mínimos quadrados e em cada iteração seguinte são calculados, pelo método de Newton-Raphson (PRESS et al., 1992), os valores de  $t_{i,n+1}$  (onde  $t_{i,n}$  é o valor do parâmetro  $t$ , na iteração  $n$ ) que minimizam o quadrado da distância,

$$d_{i,n+1}^2 = (x_i - \hat{x}(t_{i,n+1}))^2 + (y_i - \hat{y}(t_{i,n+1}))^2, \quad (3.41)$$

de cada ponto amostrado à curva modelada.

Na equação 3.42,  $t_{i,n}$  é o valor de  $t_i$  para a  $n$ -ésima iteração durante a passagem pelo método de Newton-Raphson.

$$t_{i,n+1} = t_{i,n} - \frac{\dot{x}(t_{i,n+1})[x_i - x(t_{i,n})] + \dot{y}(t_{i,n})[y_i - y(t_{i,n})]}{\dot{x}(t_{i,n})[x_i - x(t_{i,n})] - [\dot{x}(t_{i,n})]^2 + \dot{y}(t_{i,n})[y_i - y(t_{i,n})] - [\dot{y}(t_{i,n})]^2} \quad (3.42)$$

Com estes novos valores de  $t_i$  o método dos mínimos quadrados é utilizado para o ajuste das novas curvas  $[t, x(t)]$  e  $[t, y(t)]$ , sendo este processo de ajuste repetido até que um critério de convergência seja satisfeito. O critério adotado foi a estabilização do erro entre a curva modelada e os pontos amostrados, onde este erro é a soma de todos valores de  $d_i^2$ , ou seja,

$$\xi = \sum_i d_i^2 \quad (3.43)$$

Um exemplo do processo de ajuste é mostrado na figura 3.3 a seguir.

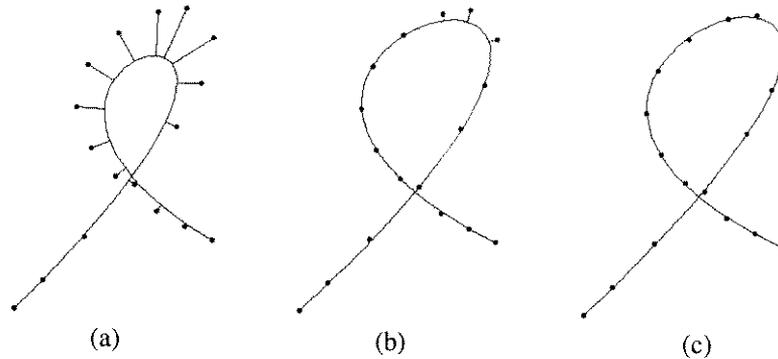


Figura 3.3: Ajuste de uma curva paramétrica após uma iteração (a), três (b) e dez iterações (c).

## Capítulo 4

# Uso da Representação de Hermite na Discriminação de Espécies de Plantas

### 4.1. Introdução

Embora a forma apresente um importante papel no processo de reconhecimento na biologia, a sua descrição e a comparação entre formas não é uma tarefa trivial (NIKLAS, 1994). A subjetividade associada à descrição das características relacionadas à forma para cada espécie ainda se faz bastante presente, podendo estabelecer restrições de uso para algumas peculiaridades que também são importantes na caracterização geral de uma espécie analisada.

Um dos órgãos vegetais de grande interesse no estudo taxonômico é a folha. Devido à sua disponibilidade e à ampla faixa de variações morfológicas que as folhas apresentam, a forma da folha tem sido um rica fonte de dados sistemáticos desde o início do estudo da classificação de plantas (DICKINSON et al., 1987).

Entretanto, a utilização de métodos de descrição quantitativa baseados em medidas não permite determinar onde a diferença de forma está localizada e, embora haja correspondência entre pontos da estrutura, a comparação não pode ser estendida a todas as partes do organismo, nem determinada a extensão das regiões que diferem

entre si. Nestes casos o que se compara é uma mera lista de medidas ou coeficientes, que algumas vezes podem ser redundantes ou altamente correlatos (WEST & NOBLE, 1984).

Nos estudos taxonômicos, a terminologia utilizada na descrição de formas é derivada mais ou menos diretamente da terminologia genérica existente, que por sua vez deriva mais da propensão humana de reconhecer do que analisar formas. Deste modo, folhas tem sido descritas principalmente pela comparação com folhas de plantas bem conhecidas ou por comparação com órgãos ou artefatos. O uso de algumas formas geométricas tem sido considerado na busca de uma padronização, incluindo algumas relações preestabelecidas como, por exemplo, as relações entre comprimento e largura e a posição relativa do ponto de maior largura (DICKINSON et al., 1987).

Ainda assim, estas medidas não posicionam a forma num âmbito global e o uso de descritores para representação destas de formas com base em modelos tem se tornado cada vez mais difundido na biologia. Os mais comuns são os descritores de Fourier.

Assim, tendo em vista analisar o potencial discriminatório dos elementos da forma de Hermite no processo de caracterização de curvas, utilizamos sua formulação na identificação de duas espécies aparentadas de leguminosas (*Lonchocarpus subglaucescens* e *L. muehlbergianus*) através das nervuras secundárias de seus folíolos. Acrescentamos assim mais um conjunto de elementos a serem utilizados na taxonomia destas espécies, sendo estes de natureza global.

A dificuldade associada à discriminação destas espécies por caracteres vegetativos como os dos folíolos reside no fato de eles apresentarem grande semelhança nas formas de suas nervuras e de seu contorno, como pode ser observado na figura 4.1.

Neste contexto, o processo de reconhecimento das espécies consiste em realizar a modelagem das nervuras secundárias através de equações polinomiais cúbicas de Hermite com base num conjunto de pontos amostrados nas imagens dos folíolos e, em seguida,

utilizar os elementos associados a esta representação na caracterização da forma das nervuras e posterior discriminação dos folíolos para cada uma das espécies.

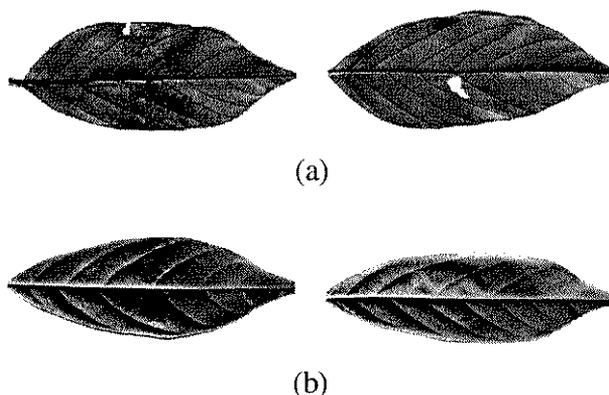


Figura 4.1: Folíolos de *Lonchocarpus muehlbergianus* Hassl.(a) e *L. subglaucescens* Mart. ex Benth (b).

O que apresentamos neste capítulo é uma descrição geral da estrutura das folhas das espécies estudadas no trabalho e do método que utilizamos para realizar a modelagem das nervuras dos folíolos, detalhando todas as etapas envolvidas neste processo, desde a aquisição dos dados até o cálculo dos descritores de curva.

## 4.2. As estruturas das folhas e folíolos

A estrutura de uma folha de *Lonchocarpus* consiste num conjunto de folíolos opostos presos a uma ráquis, tal como exemplificado na figura 4.2. Cada folíolo é classificado de acordo com a sua posição ao longo da folha. Os folíolos situados mais próximos da base da folha são chamados de folíolos basais. Quando seguimos em direção ao ápice da folha encontramos o primeiro par, o segundo, até o n-ésimo par de folíolos, seguidos dos folíolos sub-terminais e, por fim, do folíolo terminal ou apical.

Embora a estrutura da figura 4.2 seja representativa para ambas as espécies analisadas, o número de folíolos que podem ser encontrados tanto em uma quanto em outra pode variar, e portanto a amostragem de folíolos numa posição pré-determinada da folha se faz necessária. Assim sendo, em todos os casos, a amostragem foi feita no terceiro folíolo contado a partir da base.

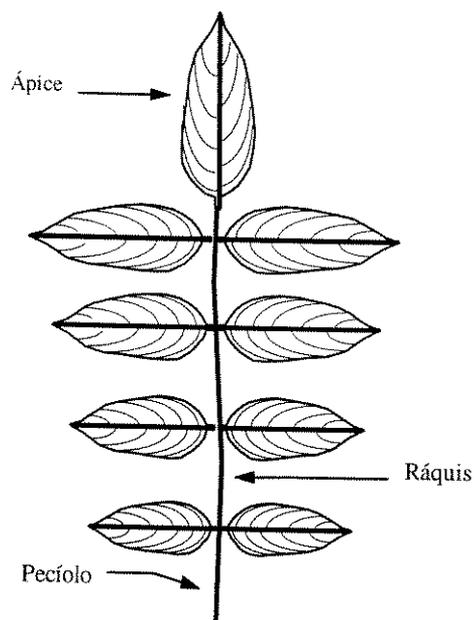


Figura 4.2: Estrutura da folha

Cada folíolo possui uma única nervura primária de onde emergem as nervuras secundárias e sua estrutura é apresentada na figura 4.3.

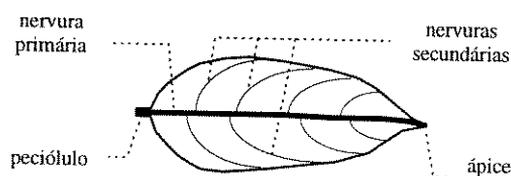


Figura 4.3 : Estrutura de um folíolo

### 4.3. Condições para invariância dos descritores

Antes de passarmos à fase de modelagem das nervuras é necessário que tomemos alguns cuidados na aquisição e tratamento de dados, de modo que os conjuntos de descritores que venhamos a calcular com base nos modelos possam ser corretamente analisados e comparados. Quando realizamos a amostragem dos pontos podemos nos deparar com alguns problemas, como mostram os parágrafos a seguir.

Embora para uma mesma espécie exista uma grande variação no tamanho dos folíolos, as formas de seus contornos e de suas nervuras não se alteram significativamente. Assim, se realizarmos a comparação entre parâmetros dos

modelos de Hermite para as nervuras sem realizar algum tipo de normalização em relação ao tamanho provavelmente chegaremos a conclusões equivocadas sobre a natureza dos espécimes.

Além disso, as imagens analisadas podem ser capturadas com os folíolos assumindo diferentes orientações no dispositivo de aquisição, podendo levar mais uma vez a uma análise errada de parâmetros se os pontos forem amostrados em sistemas referenciais com orientações diferentes. Conseqüentemente, a origem do sistema referencial também é importante para normalização em relação à rotação e à translação, pois, como sabemos, os vetores de geometria  $P_1$  e  $P_2$  dependem da posição da curva no espaço.

Assim, temos que garantir aos elementos a serem utilizados como descritores para as curvas invariância às transformações afins de translação, rotação e escala.

Também associada ao estudo da forma de seres vivos encontra-se a questão do tamanho. Dentre as constantes discussões que podemos encontrar na literatura existem aquelas tratam das correlações existentes entre um e outro e do modo como este conjunto "size-shape" pode ser definido e analisado (BOOKSTEIN, 1989; SOMERS, 1989).

Tradicionalmente, a forma tem sido considerada como o elemento mais importante no estudo das variações entre classes. O tamanho, por sua vez, tem sido considerado por muitos autores como um "ruído aleatório" e descartado de suas análises, embora isto tenha sido bastante criticado por alguns estudiosos (SUNDBERG, 1989).

Existem situações onde tamanho e forma devem ser tratados independentemente, mas existem aquelas onde o tamanho está intimamente correlacionado com a forma e o estudo destas variáveis deve ser feito em conjunto (SUNDBERG, 1989).

Considerando os descritores de curvas do nosso trabalho e a partir de análises preliminares dos resultados, assumimos não haver relação direta entre a forma das nervuras e o tamanho do folíolo, bem como entre a forma das nervuras e a forma do

folíolo. Em virtude disto, resolvemos incluir medidas de tamanho e forma para os folíolos na análise morfométrica e verificar o grau de correlação entre forma e tamanho na aplicação em pauta. Utilizamos, então, como elementos para determinação dos tamanhos geométricos de cada folíolo a sua área, o comprimento do semi-eixo maior do folíolo e a medida  $\sqrt{xy}$  (MOSIMANN, 1970), onde x e y são os comprimentos dos semi-eixos maior e menor do folíolo.

Para isso, realizamos um *Threshold* global manual na imagem do folíolo de modo a separar a parte da imagem que contivesse somente a região abrangida pela sua base, como mostrado na figura 4.4. Deste modo, o cálculo da área se torna uma tarefa trivial, bastando para isto determinar a proporção dos *pixels* “escuros” em relação à totalidade da imagem.

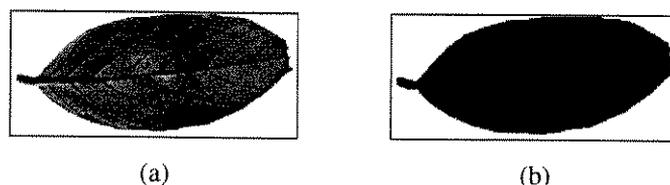


Figura 4.4: Imagem de um folíolo antes (a) e depois (b) da limiarização.

A análise da relação “*shape-size*” é feita com base no cálculo de um coeficiente que expressa a correlação que existe entre a variável que define o tamanho e uma outra que expressa a forma para a nervura secundária. Escolheremos como variável determinante da forma uma que possa servir como bom descritor para as nervuras secundárias.

Caso este grau de correlação seja pequeno, então nossas análises são válidas e o método para medida da variável forma pode ser utilizado sem a preocupação com a variável tamanho. Esta mesma observação também é válida para a variável que define a forma do folíolo.

A medida da correlação entre estas duas variáveis é dada pelo coeficiente de correlação linear, discutido no apêndice 2.

#### 4.4. Aquisição de pontos e determinação do modelo de curva

O primeiro passo do processo de modelagem das curvas consiste na aquisição de conjuntos de pontos associados a cada nervura secundária. Para isso, desenvolvemos uma ferramenta computacional que possibilita a leitura, visualização e marcação de pontos sobre imagens do tipo Windows BITMAP - 8/4/1 bits (BRITO JÚNIOR, 1996). Para o ajuste das curvas foram estabelecidos sistemas referenciais para cada nervura, como mostra a figura 4.5. De modo a manter consistência entre os sistemas referenciais de todas as nervuras secundárias e possibilitar a análise dos dados modelados, os eixos horizontais dos sistemas referenciais estabelecidos são coincidentes com a nervura principal do folíolo, tendo o sentido base  $\rightarrow$  ápice, e os eixos verticais de cada nervura o sentido nervura principal  $\rightarrow$  borda lateral correspondente. A origem dos eixos, para cada nervura modelada, é colocada no ponto de inserção da nervura secundária analisada. Assim, a invariância dos descritores às transformações de rotação e translação é assegurada. Quanto à invariância à escala, a solução adotada é realizar uma mudança de escala global nas coordenadas dos pontos amostrados de modo a colocá-los numa faixa  $x \in [0,1]$  e  $y \in [0,1]$ , ou seja, garantir que as coordenadas dos pontos estarão encerradas dentro de um quadrado de lado 1. Portanto, quando a projeção horizontal da nervura for maior que sua projeção vertical, o valor máximo de  $x$  será 1 enquanto o valor máximo de  $y$  estará situado entre 0 e 1, e vice-versa.

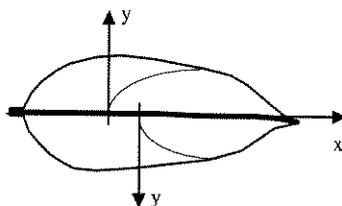


Figura 4.5: Colocação dos sistemas referenciais sobre as nervuras do folíolo.

Quando é feita a aquisição das imagens não temos a garantia de que os eixos horizontais dos folíolos estarão alinhados com o eixo horizontal da tela gráfica, sendo muitas vezes preciso realizar uma rotação na imagem de forma que os pontos sejam amostrados no sistema referencial correto. O programa de manipulação de imagens possibilita a realização de rotações nas imagens Bitmap. Para isto, é feita a colocação

manual de um segmento de reta que aproxime a nervura principal do folíolo e que servirá de referência que realizará o alinhamento do eixo principal do folíolo com o eixo horizontal do dispositivo de exibição. Realizado o alinhamento da nervura principal, os pontos são então marcados sobre as nervuras, tal como observado na figura 4.6.

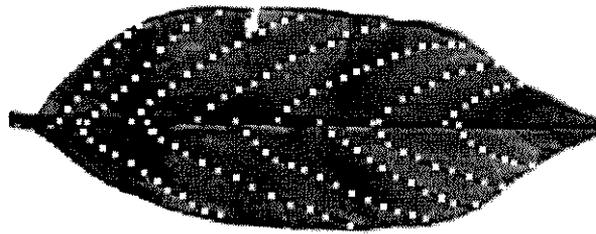


Figura 4.6: Imagem de um folíolo com a marcação dos pontos amostrados

Em resumo, o programa para aquisição de dados e determinação dos elementos da matriz de geometria que caracterizam as curvas correspondentes às nervuras foliolas secundárias analisadas foi implementado conforme as fases a seguir.

1. Aproximação da nervura principal do folíolo por uma reta, rotação da imagem para coincidência do eixo horizontal do dispositivo de exibição com a nervura principal e amostragem de pontos sobre as nervuras secundárias;
2. Modelagem das respectivas curvas paramétricas pelo método apresentado no capítulo 3 e obtenção dos elementos de geometria de Hermite através das equações 3.5.

#### **4.5. Descritores utilizados na discriminação das espécies**

Antes de relacionarmos os descritores para curva e forma que utilizamos é necessário que façamos algumas observações. A primeira delas é sobre o modelagem da curva. A amostragem dos pontos foi realizada sobre toda a extensão da nervura secundária. Entretanto, a parte da nervura que fica mais próxima à borda é muitas vezes sujeita a irregularidades decorrentes da forma do folíolo. Por isto, resolvemos fazer três tipos de modelagem com diferentes faixas de amostragem e analisar o desempenho discriminatório relativo a cada estratégia.

As três faixas de amostragem, definidas pelos valores de  $a$  (fig. 4.7), são as seguintes:

1. Nervura inteira ( $a=1$ ).
2. Pontos considerados até a metade da projeção horizontal da nervura ( $a=2$ ).
3. Pontos considerados até um terço da projeção horizontal da nervura ( $a=3$ ).

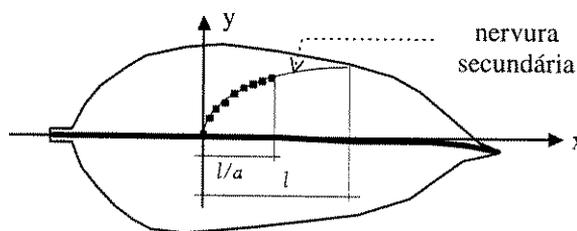


Figura 4.7: Faixa de amostragem de pontos sobre cada nervura.

A segunda observação é sobre a determinação dos descritores. O cálculo de cada descritor de curva pode ser feito para todas as nervuras dos folíolos. Entretanto, procuramos encontrar um valor que melhor pudesse representar o descritor em cada folíolo. Decidimos então fazer a escolha de uma nervura representativa para o folíolo com base no vetor de geometria  $R_1$ . Uma transformação da forma

$$\theta_1 = \langle R_1 \rangle = \tan^{-1}(R_{1y}/R_{1x}) \quad (4.1)$$

é realizada e o valor de  $\theta_1$  calculado para todas as curvas do folíolo. Aquela associada com o valor mediano para  $\theta_1$  é considerada a nervura representativa no folíolo e, como veremos posteriormente, demonstrou ser uma boa solução. Sendo  $P_1$  o ponto da curva escolhido para o cálculo do elemento determinante da nervura representativa, resolvemos realizar as estimativas das curvatura e aceleração da curva neste ponto específico.

Apresentamos a seguir uma listagem dos descritores de curva que utilizamos para discriminação das espécies de folíolos.

1. Valor dos elementos da representação de Hermite utilizando as combinações:

- 1.1.  $R_1, R_2$  e  $P_2$  ( $P_1=0$ !).

- 1.2.  $R_1$  e  $R_2$ .
  - 1.3.  $R_1$  e  $P_2$ .
  - 1.4.  $R_1$ .
  - 1.5.  $R_2$ .
  - 1.6.  $P_2$ .
2.  $\langle R_1 \rangle$ , ângulo que o vetor  $R_1$  forma com o eixo horizontal.
  3. Valor da curvatura no ponto inicial da curva,  $k(t=0)$ .
  4. Valor da aceleração da curva no seu ponto inicial,  $\vec{A}(t=0)$ .
  5. Primeira e segunda componentes principais do resultado da transformada de Hotelling quando aplicada aos coeficientes das equações paramétricas das curvas.

## Capítulo 5

# Experimentos, Resultados e Discussões

### 5.1. Introdução

Para estudarmos a viabilidade do uso dos elementos representativos da forma de Hermite (vetores de geometria) como discriminadores para as espécies consideradas, analisamos um conjunto de 76 amostras de folíolos, sendo 38 amostras da espécie *Lonchocarpus subglaucescens* e 38 de *L. muehlbergianus*, coletadas de diversos indivíduos (incluindo jovens e adultos) e de diferentes partes da árvore (folíolos sombreados e expostos ao sol).

Fizemos o cálculo dos vetores de geometria com base na nervura representativa do folíolo e analisamos o potencial de discriminação para a representação proposta considerando as seis combinações de vetores descritas no capítulo 4. Este potencial por sua vez foi quantificado e qualificado de acordo com as propriedades estatísticas dos conjuntos de dados, mais especificamente no que tange às probabilidades de classificação correta de uma determinada amostra a ser identificada pelo classificador.

Calculamos também as outras características mencionadas no capítulo 4 para as curvas modeladas: o ângulo que o vetor  $R_1$  faz com o eixo horizontal, a derivada segunda no ponto inicial da curva, o valor da curvatura neste ponto e as primeira e

segunda componentes principais da transformada de Hotelling aplicada aos coeficientes das equações paramétricas.

O classificador que utilizamos foi o discriminante linear de Fisher associado à teoria de Bayes. Como discutimos na seção 2.4.1, o método de Bayes determina o ponto de fronteira na reta de projeção que assegura a melhor separação estatística entre as classes. Entretanto, se levarmos em conta que estamos trabalhando com amostras, devemos considerar intervalos de confiança para as estimativas das médias e das variâncias dos dados projetados. Por isso, assumindo uma distribuição normal  $N(\mu_i, \sigma_i)$  para estes dados, utilizamos intervalos de confiança de 95% no cálculo das fronteiras.

A teoria envolvida no cálculo dos outros descritores para curvas (curvatura e derivada segunda) é discutida no apêndice 1 deste documento e os fundamentos de análise estatística de dados que utilizamos são apresentados no apêndice 2.

Finalizando o capítulo, apresentamos uma seção que trata das relações entre tamanho e forma nos folíolos.

## **5.2. Vetores de geometria de Hermite calculados a partir dos modelos**

Fizemos a modelagem das curvas polinomiais levando em conta as várias faixas de amostragem mencionadas na seção 4.4 ( $a=1,2,3$ ). Os resultados obtidos para as combinações de vetores de geometria são apresentados nas seções 5.2.1 a 5.2.3.

Nos casos onde o subconjunto de vetores de geometria possibilitou a separação de classes, apresentamos nos gráficos correspondentes as fronteiras de separação calculadas pelo método de Fisher, onde o vetor de treinamento C, discutido na seção 2.4.1, é composto de todas as componentes dos vetores de geometria envolvidos na análise discriminatória.

Quando somente o vetor de geometria  $R_1$  é considerado resolvemos apresentar as fronteiras no espaço de variáveis  $R_{1x} \times R_{1y}$ , isto porque, além de estarmos tratando de um espaço de análise bidimensional, esta forma de visualização é mais adequada que a simples apresentação dos dados projetados, como nos casos em que é feita a combinação de vetores. Deste modo, teremos que a fronteira de separação de classes considerando  $R_1$  será dada por uma reta, enquanto que nos demais casos a fronteira de separação será um ponto sobre a reta de projeção de dados, aqui denominado de  $y_{front}$ .

As expressões matemáticas para as fronteiras de separação entre as classes e os valores dos erros de classificação para cada faixa de amostragem serão apresentados em diferentes tabelas ao fim de cada subseção. O cálculo destes erros está descrito no anexo 1, juntamente com a revisão dos conceitos de análise estatística.

### 5.2.1. Faixa de amostragem de pontos: curva inteira ( $a=1$ )

Nos gráficos das figuras 5.1 a 5.6 apresentamos os valores calculados para as combinações dos vetores de geometria considerando uma faixa de amostragem de pontos sobre toda a extensão da nervura secundária.

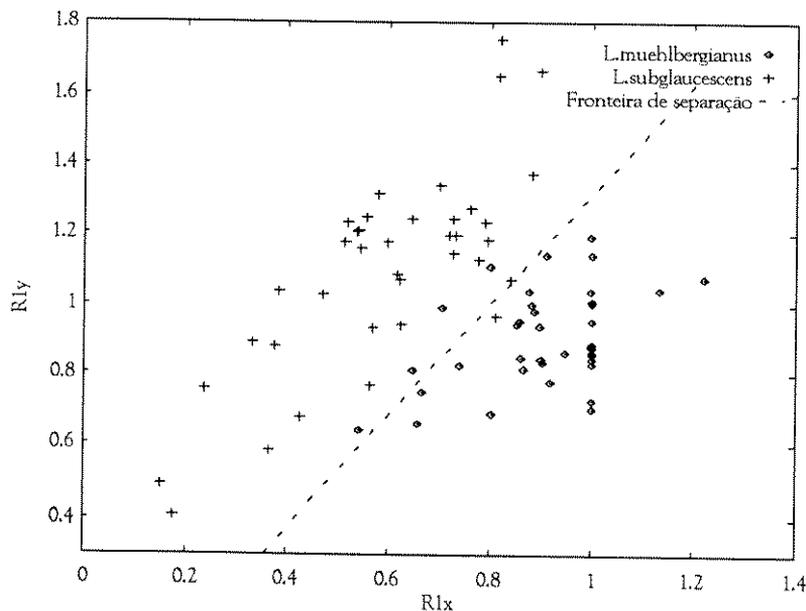


Figura 5.1: Componentes do vetor de geometria  $R_1$  para  $a=1$ .

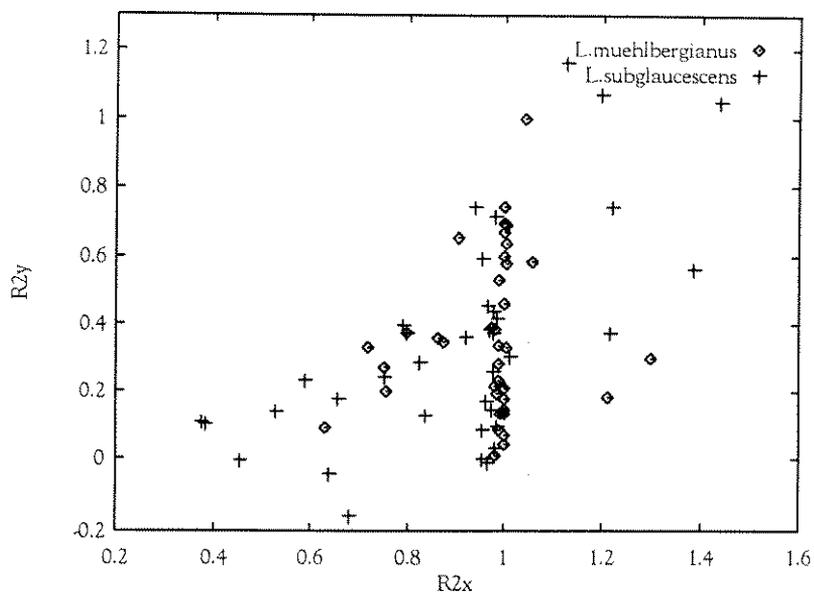


Figura 5.2: Componentes do vetor de geometria  $R_2$  para  $a=1$ .

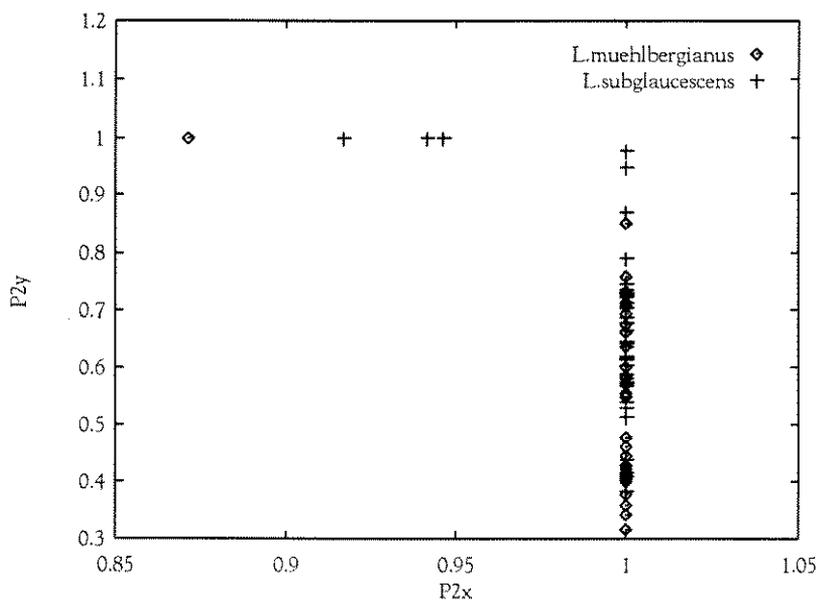


Figura 5.3: Componentes do vetor de geometria  $P_2$  para  $a=1$ .

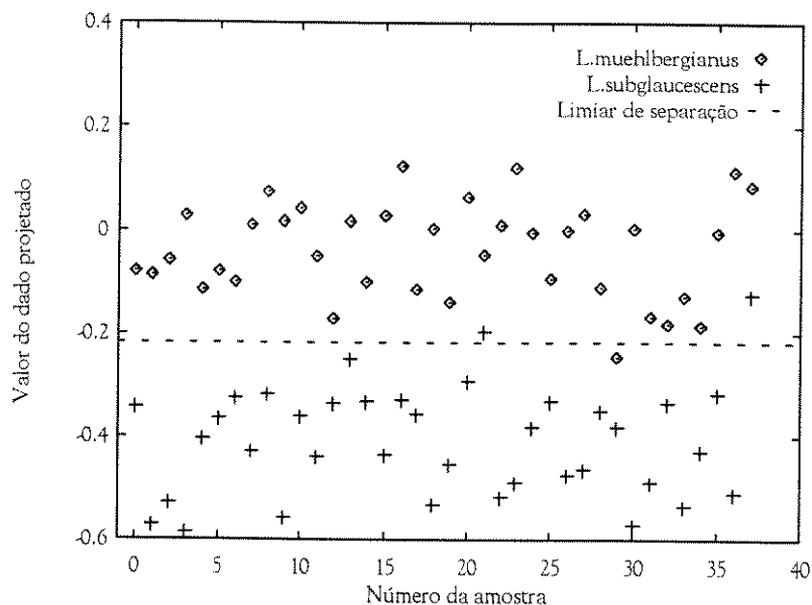


Figura 5.6: Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria  $R_1$ ,  $R_2$  e  $P_2$  para  $a=1$ .

As fronteiras de separação apresentadas para as combinações de descritores que possibilitaram a separação das espécies estão dispostas na tabela 5.1.

Vetores de geometria considerados	Equações das fronteiras de separação
$R_1$	$R_1y - 1,572477 R_1x = -0,260170$
$R_1$ e $R_2$	$y_{front} = 0,036489$
$R_1$ e $P_2$	$y_{front} = -0,078592$
$R_1$ , $R_2$ e $P_2$	$y_{front} = -0,217606$

Tabela 5.1: Equações das fronteiras de separação entre as classes para  $a=1$ .

Para as fronteiras discriminadas na tabela 5.1, o desempenho discriminatório pode ser observado na tabela 5.2.

Espécie A	Probabilidade de classificação errada (%)	
	<i>L.muehlbergianus</i>	<i>L.subglaucescens</i>
Espécie B	<i>L.subglaucescens</i>	<i>L.muehlbergianus</i>
Vetores de geometria considerados		
R1	14,57 %	12,50 %
R1 e R2	14,15 %	10,39 %
R1 e P2	14,54 %	12,41 %
R1, R2 e P2	13,79 %	9,94 %

Tabela 5.2: Probabilidades de classificação de um folíolo da espécie A como sendo da espécie B considerando faixa de amostragem com  $a=1$ .

Os dados da tabela 5.2 nos mostram que a discriminação das espécies pelos descritores de Hermite para um modelo calculado com base numa faixa de amostragem de pontos sobre toda a nervura não é uma boa alternativa. Obtivemos probabilidades de classificação incorreta na faixa dos 14%, o que não dá uma boa garantia de que a discriminação será realizada corretamente.

### 5.2.2. Faixa de amostragem de pontos: metade da projeção horizontal ( $a=2$ )

A segunda estratégia de modelagem foi realizada considerando pontos amostrados até somente metade da projeção horizontal da nervura e os descritores calculados a partir dos modelos de nervuras são apresentados nas figuras 5.7 a 5.12.

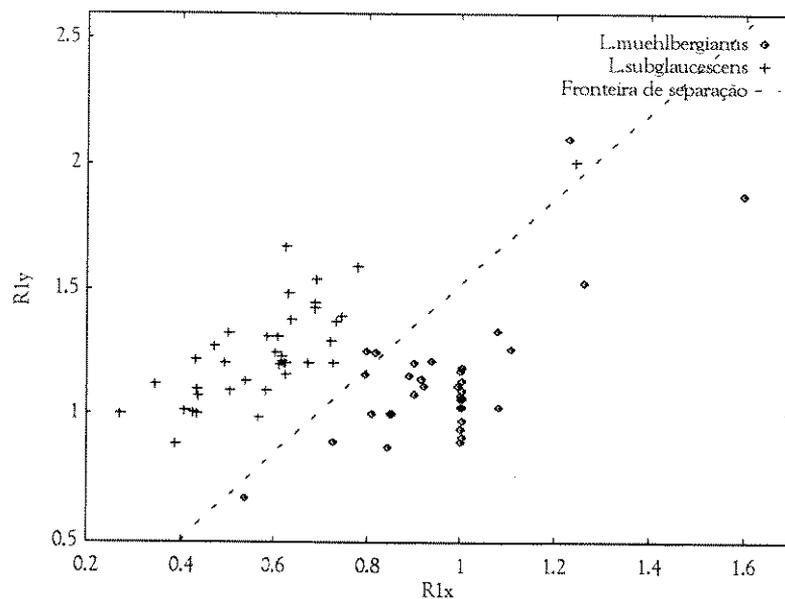


Figura 5.7: Componentes do vetor de geometria  $R_1$  para  $a=2$ .

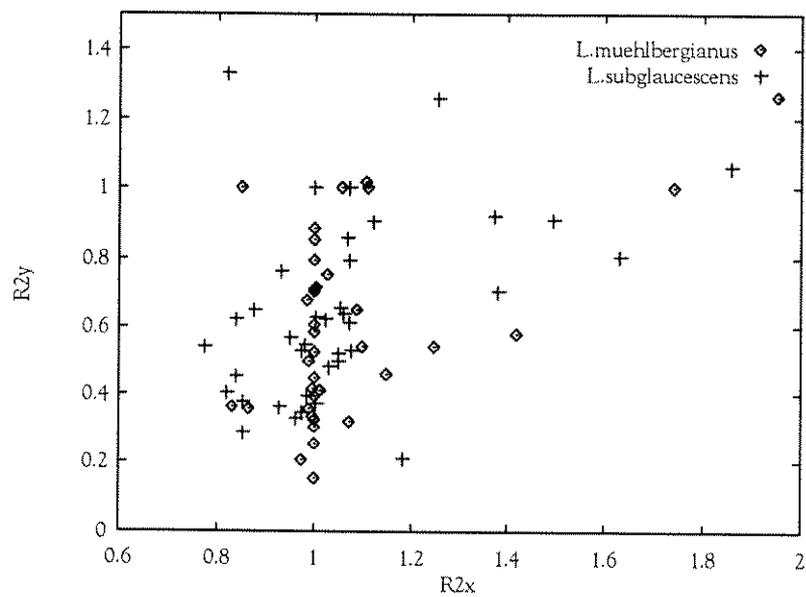


Figura 5.8: Componentes do vetor de geometria  $R_2$  para  $a=2$ .

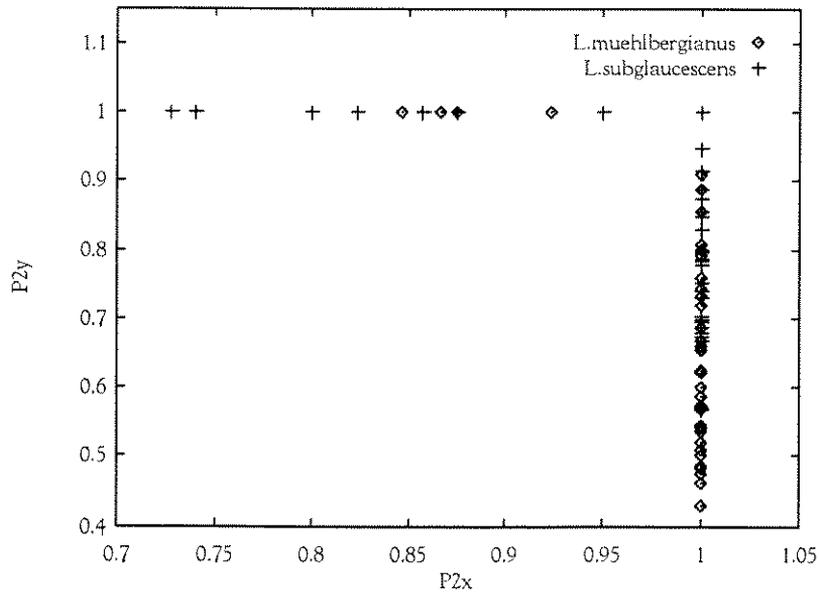


Figura 5.9: Componentes do vetor de geometria  $P_2$  para  $a=2$ .

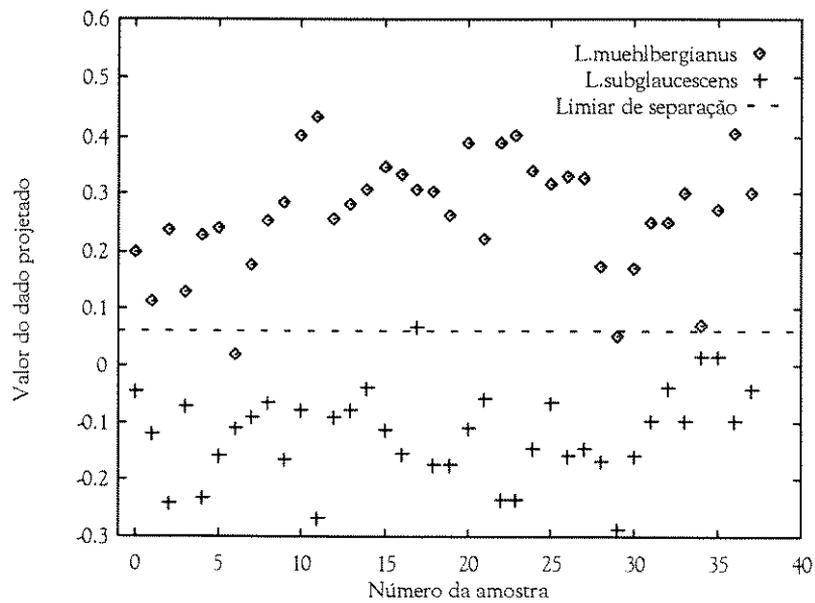


Figura 5.10: Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria  $R_1$  e  $R_2$  para  $a=2$ .

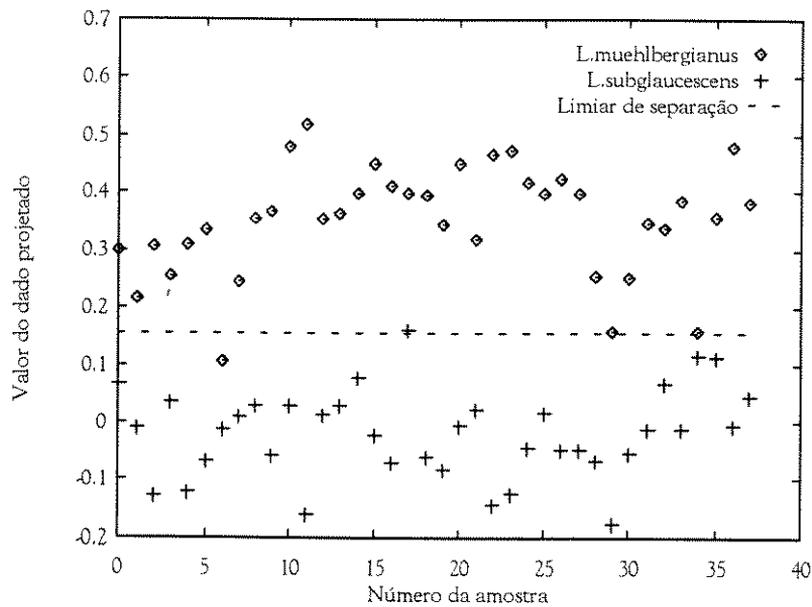


Figura 5.11: Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria  $R_1$  e  $P_2$  para  $a=2$ .

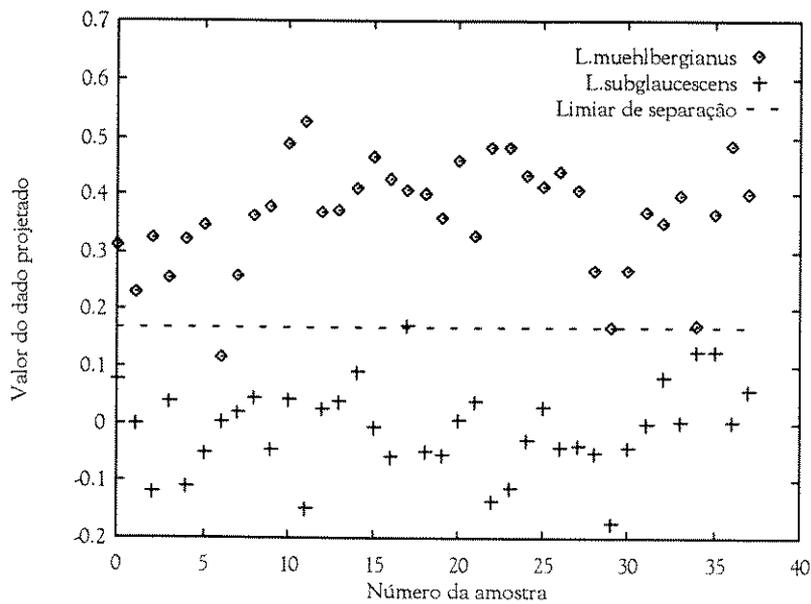


Figura 5.12: Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria  $R_1$ ,  $R_2$  e  $P_2$  para  $a=2$ .

De modo análogo à subseção anterior, mostramos as fronteiras de separação entre classes para as combinações de descritores que possibilitaram a discriminação das espécies (tabela 5.3).

Vetores de geometria considerados	Equações das fronteiras de separação
R1	$R1y - 1,701764 R1x = -0,176729$
R1 e R2	$y_{front} = 0,059864$
R1 e P2	$y_{front} = 0,154930$
R1, R2 e P2	$y_{front} = 0,166641$

Tabela 5.3: Equações das fronteiras de separação entre as classes para  $a=2$ .

Considerando estas fronteiras, a análise estatísticas dos dados projetados nos leva às probabilidades de classificação incorretas apresentas na tabela 5.3.

Espécie A	Probabilidade de classificação errada (%)	
	<i>L.muehlbergianus</i>	<i>L.subglaucescens</i>
Espécie B	<i>L.subglaucescens</i>	<i>L.muehlbergianus</i>
Vetores de geometria considerados		
R1	7,26 %	8,63 %
R1 e R2	7,00 %	8,38 %
R1 e P2	7,12 %	8,14 %
R1, R2 e P2	7,02 %	8,14 %

Tabela 5.4: Probabilidades de classificação de um folíolo da espécie A como sendo da espécie B considerando faixa de amostragem com  $a=2$ .

Podemos observar que esta abordagem de modelagem nos leva a melhor discriminação das espécies, com erros máximos de classificação estimados em torno de 8%.

### 5.2.3. Faixa de amostragem de pontos: um terço da projeção horizontal ( $a=3$ )

A última forma de modelagem foi feita considerando pontos amostrados até somente a terça parte da projeção horizontal da nervura e o resultado desta estratégia está apresentado nos gráficos das figuras 5.13 a 5.18.

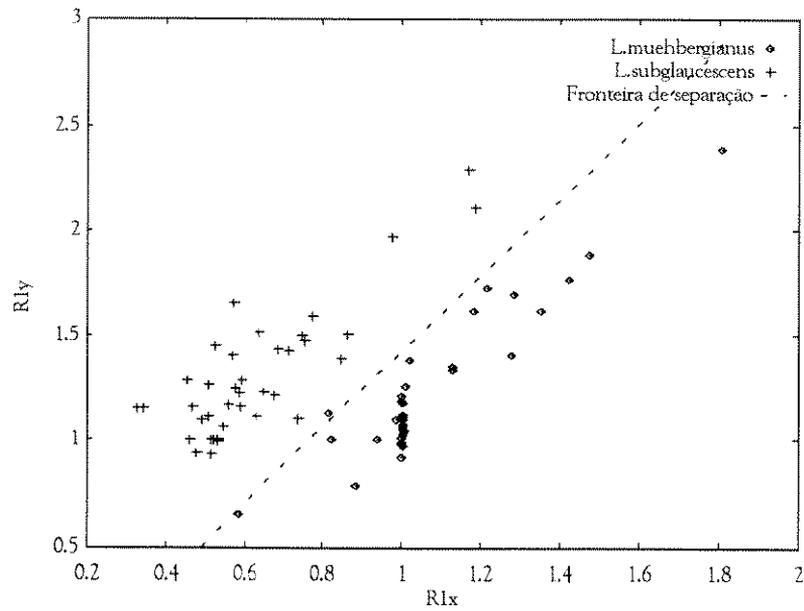


Figura 5.13: Componentes do vetor de geometria  $R_1$  para  $a=3$ .

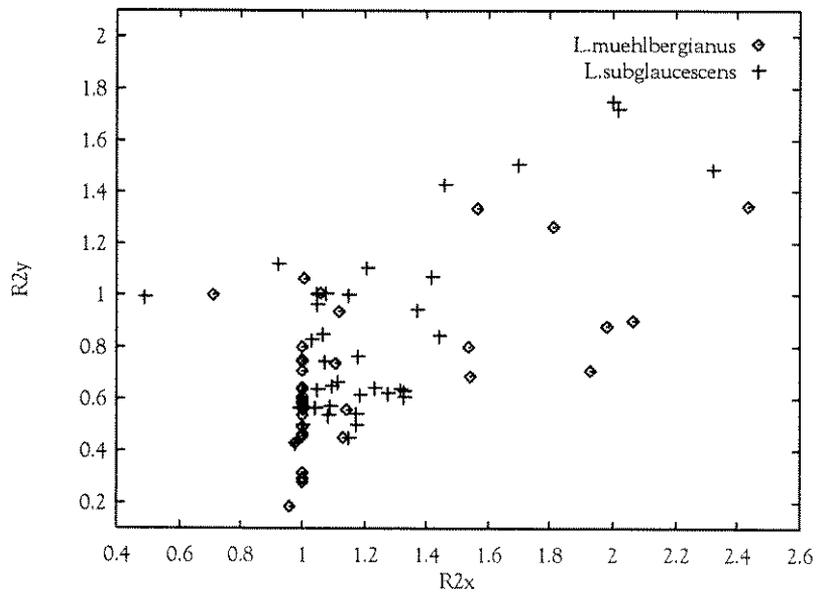


Figura 5.14: Componentes do vetor de geometria  $R_2$  para  $a=3$ .

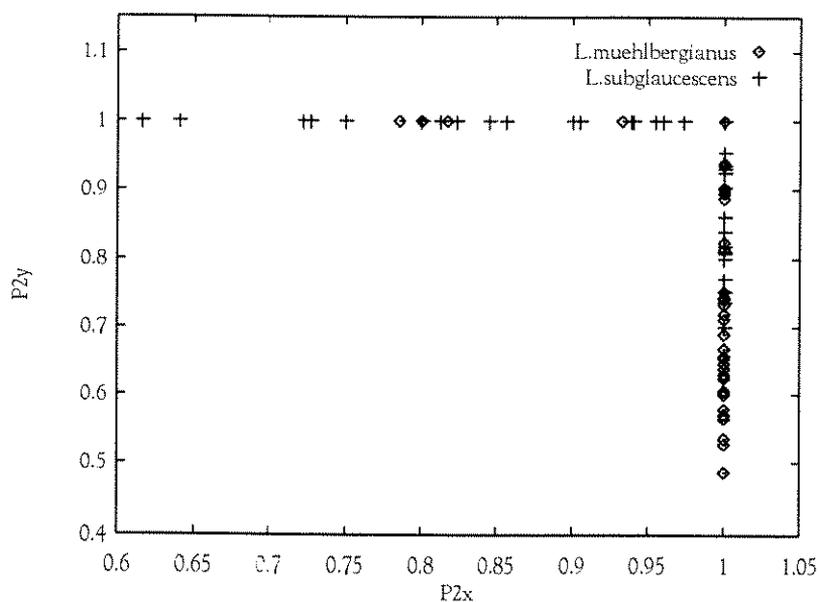


Figura 5.15: Componentes do vetor de geometria  $P_2$  para  $a=3$ .

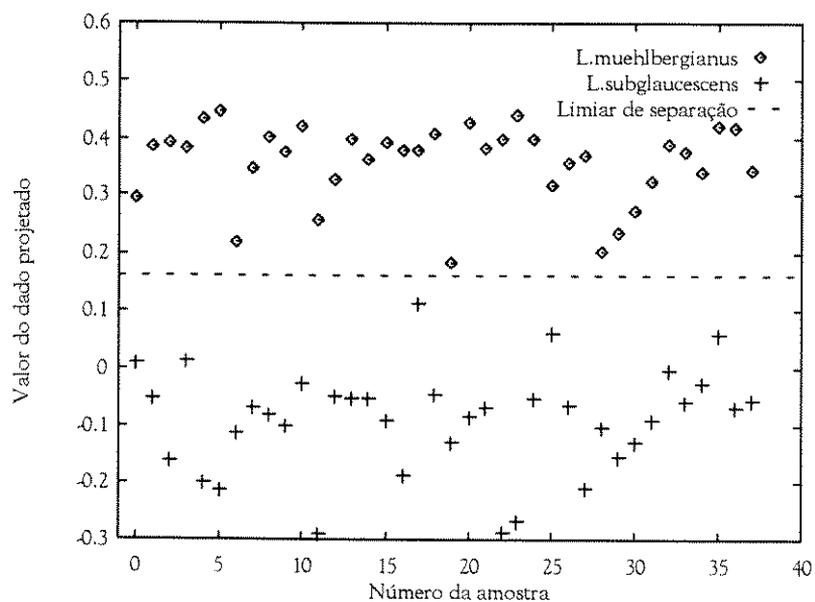


Figura 5.16: Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria  $R_1$  e  $R_2$  para  $a=3$ .

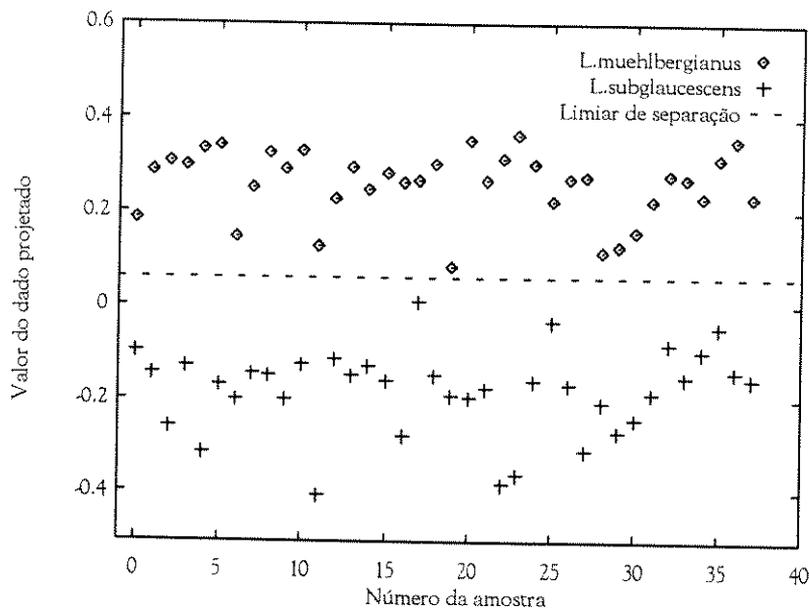


Figura 5.17: Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria  $R_1$  e  $P_2$  para  $a=3$ .

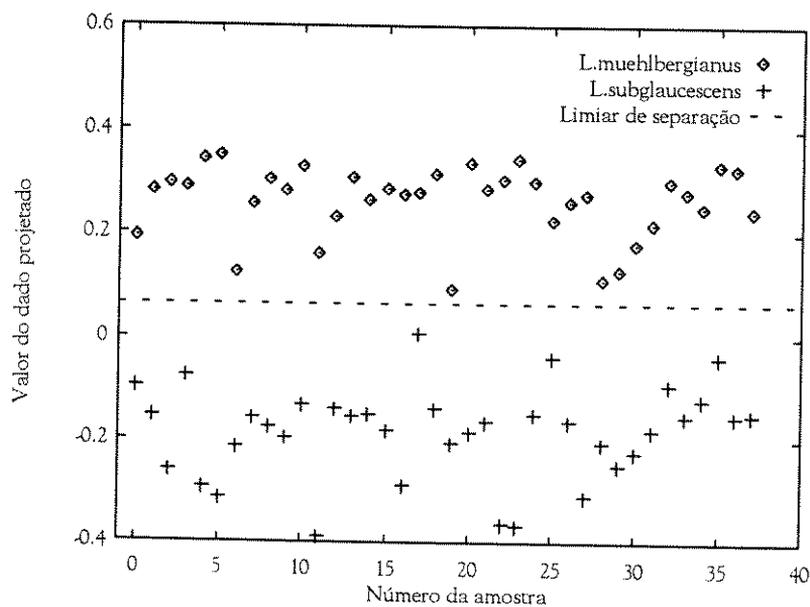


Figura 5.18: Valores das projeções para a combinação dos vetores de geometria  $R_1$ ,  $R_2$  e  $P_2$  para  $a=3$ .

As equações que descrevem as fronteiras de separação entre classes para esta estratégia de modelagem são apresentadas na tabela 5.5.

Vetores de geometria considerados	Equações das fronteiras de separação
R1	$R1y - 1,808584R1x = -0,383671$
R1 e R2	$y_{front} = 0,159511$
R1 e P2	$y_{front} = 0,056966$
R1, R2 e P2	$y_{front} = 0,063331$

Tabela 5.5: Equações das fronteiras de separação entre as classes para  $a=3$ .

As probabilidades de classificação para esta abordagem são apresentadas na tabela 5.6.

Espécie A	Probabilidade de classificação errada (%)	
	<i>L.muehlbergianus</i>	<i>L.subglaucescens</i>
Espécie B	<i>L.subglaucescens</i>	<i>L.muehlbergianus</i>
Vetores de geometria considerados		
R1	4,29 %	2,45 %
R1 e R2	3,23 %	1,97 %
R1 e P2	3,81 %	2,52 %
R1, R2 e P2	3,19 %	1,95 %

Tabela 5.6: Probabilidades de classificação de um folíolo da espécie A como sendo da espécie B considerando faixa de amostragem com  $a=3$ .

A análise estatística dos dados da tabela 5.6 nos mostra que esta estratégia de modelagem foi a que melhor conseguiu discriminar as duas espécies de plantas. Podemos observar que os erros máximos calculados para nossa estimativa encontram-se na ordem de 5%, garantindo uma boa confiabilidade na classificação.

Com isto, podemos concluir que a parte da nervura secundária que se encontra mais próxima ao ponto de inserção na nervura principal do folíolo é a região determinante no processo de classificação. Quando extensões maiores da nervura secundária foram consideradas na modelagem, a qualidade do ajuste do modelo sobre a curva real da nervura era boa, mas não o suficiente para a representação ideal da parte da curva mais próxima ao ponto de inserção. À medida que a faixa de amostragem de pontos era diminuída, a curva real a ser modelada se apresentava mais

suave, a curva ajustada se adequava melhor à curva real e a porção inicial da curva ficava mais bem superposta à porção inicial da curva real, o que diminuía os erros de classificação. Isto nos mostra que um polinômio de terceiro grau não é totalmente adequado às nossas necessidades quando aplicado a toda a extensão da nervura.

Outra observação importante é que o vetor de geometria  $R_1$  mostrou ser o descritor dominante sobre todos os outros vetores de geometria. É evidente o fato de que quando outros vetores foram utilizados em combinação com  $R_1$ , o resultado da análise estatística mostrou que a diminuição da probabilidade de classificação incorreta não foi sensível. Além disso, quando  $R_2$  e  $P_2$  foram considerados separadamente, a discriminação não foi possível.

Numa análise visual comparativa realizada entre dois folíolos de espécies diferentes, poderíamos sugerir que, aqueles cujas nervuras secundárias que saem com inclinação vertical mais acentuada pertencem à espécie *L.subglauscecens* enquanto que aqueles cuja inclinação é menos acentuada pertencem à espécie *L.muehlberghianus*.

### 5.3. Outros descritores para as curvas

Consideramos outros descritores para os modelos de curvas para as nervuras dos folíolos. Nos gráficos das seções 5.6.1 a 5.6.3 apresentamos os valores do ângulo que o vetor de geometria  $R_1$  faz com o eixo horizontal ( $\langle R_1 \rangle$ ) e os valores da derivada segunda da curva e da curvatura, ambos no ponto inicial da curva ( $t=0$ ). Escolhemos este ponto para realizar o cálculo destas características por está situado na região da curva que possibilita a melhor discriminação entre as espécies analisadas. Apresentamos também gráficos com a primeira x segunda componentes principais da transformada de Hotelling, condensando a informação existente nos coeficientes das curvas modeladas.

#### 5.3.1. Faixa de amostragem de pontos : Curva inteira ( $a=1$ )

Na figura 5.19 observamos os valores de  $\langle R_1 \rangle$  considerando uma faixa de amostragem de pontos sobre toda a extensão da nervura secundária.

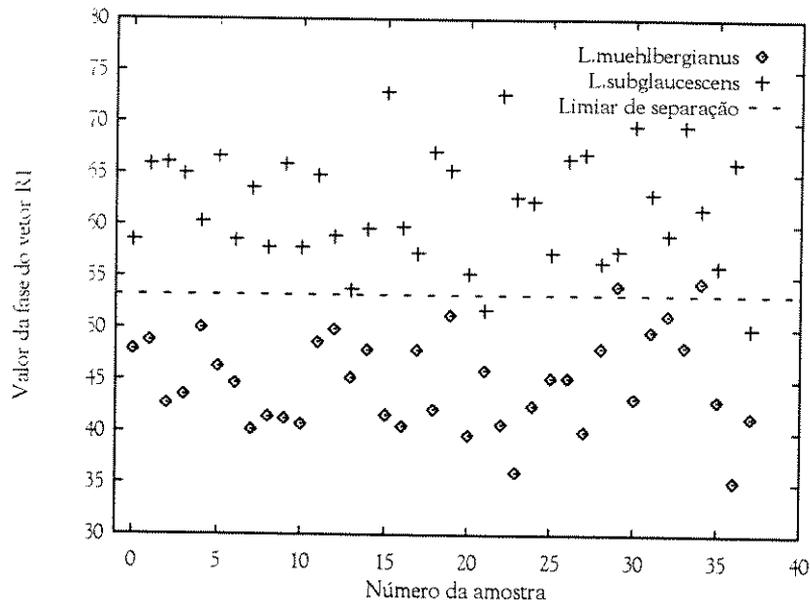


Figura 5.19: Fase do vetor  $R_1$  para  $a=1$  (em graus).

Para esta estratégia de modelagem, as probabilidades de classificação errada quando o limiar  $\langle R_1 \rangle = 53.17$  graus é utilizado são de 12,99% para se classificar um folíolo de *L.subglaucescens* como sendo de *L.muehlbergianus* e de 14,92%, caso contrário.

Além disto, podemos observar nos gráficos das figuras 5.20 e 5.22 que os descritores apresentados em cada um não se mostraram eficientes no processo de classificação.

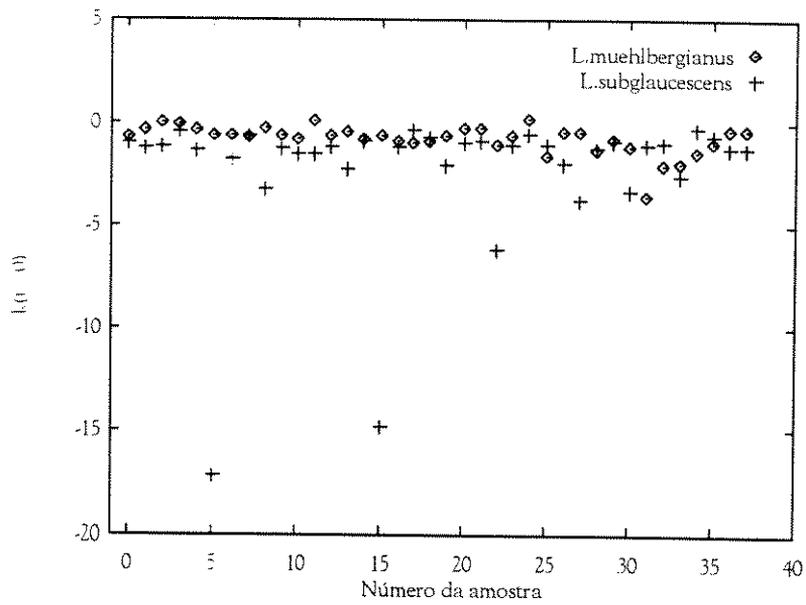


Figura 5.20: Curvatura no ponto inicial da curva ( $t=0$ ) para  $a=1$ .

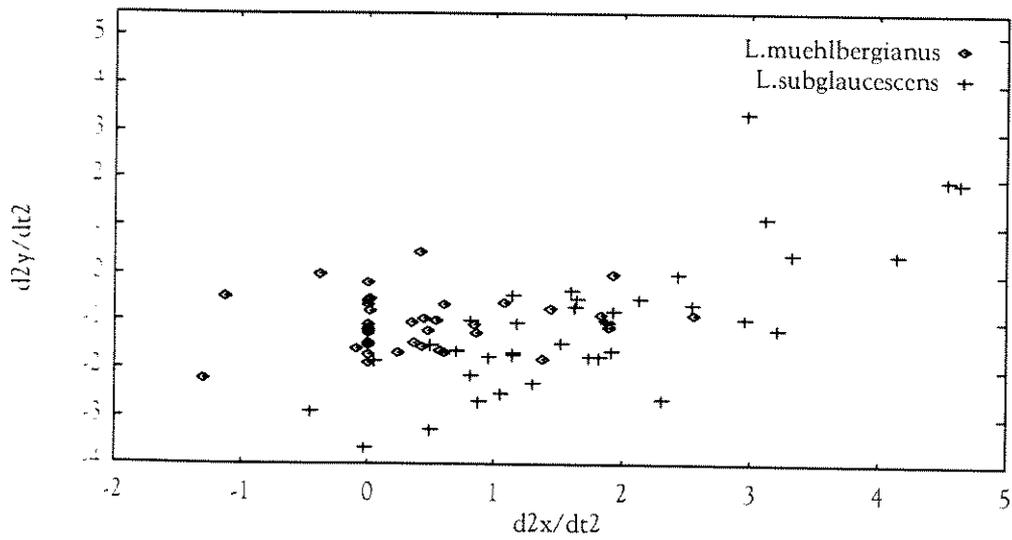


Figura 5.21: Vetor derivada segunda da curva em  $t=0$  para  $a=1$ .

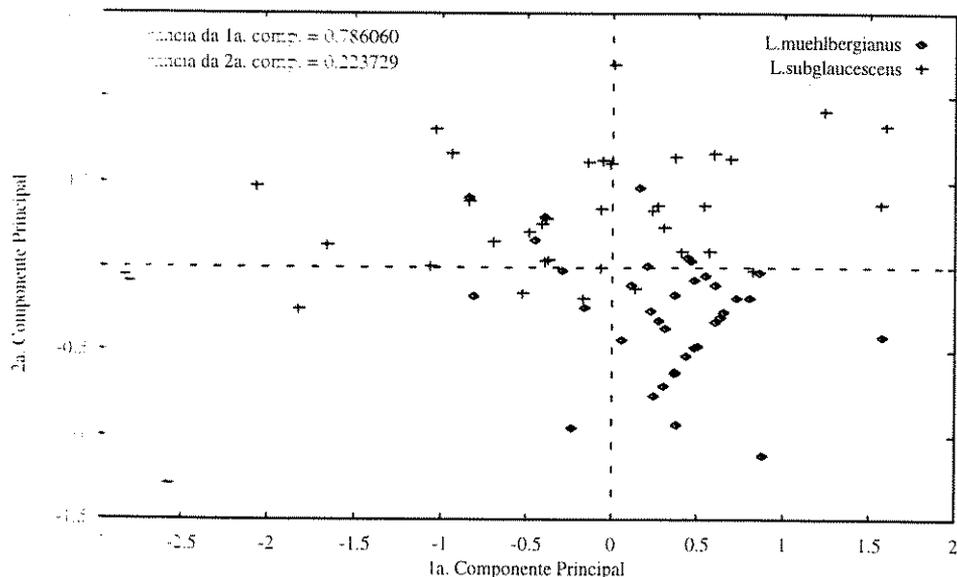


Figura 5.22: Primeira e segunda componentes principais resultantes da decorrelação dos coeficientes das curvas paramétricas para  $a=1$ .

### 5.3.2. Faixa de amostragem de pontos : metade da projeção horizontal ( $a=2$ )

Calculando os descritores para  $a=2$ , obtivemos os valores apresentados nos gráficos das figuras 5.23 a 5.26. Novamente, apenas  $\langle R_1 \rangle$  foi capaz de realizar a discriminação das espécies. Considerando um valor de limiar  $\langle R_1 \rangle = 57,38$  graus, as probabilidades de classificação incorreta são de 9,57% para se classificar um folíolo de *L.subglaucescens* como sendo de *L.muehlbergianus* e de 7,49%, caso contrário.

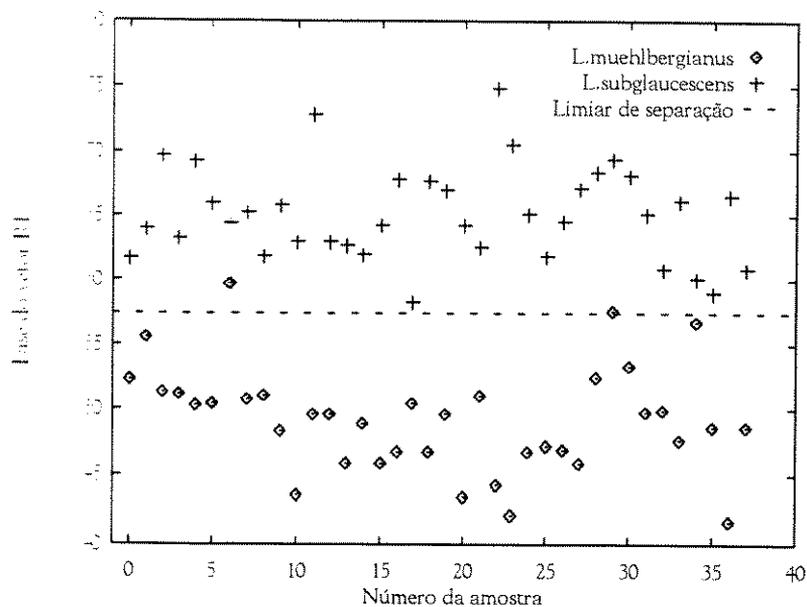


Figura 5.23: Valor de  $\langle R_1 \rangle$  para  $a=2$ .

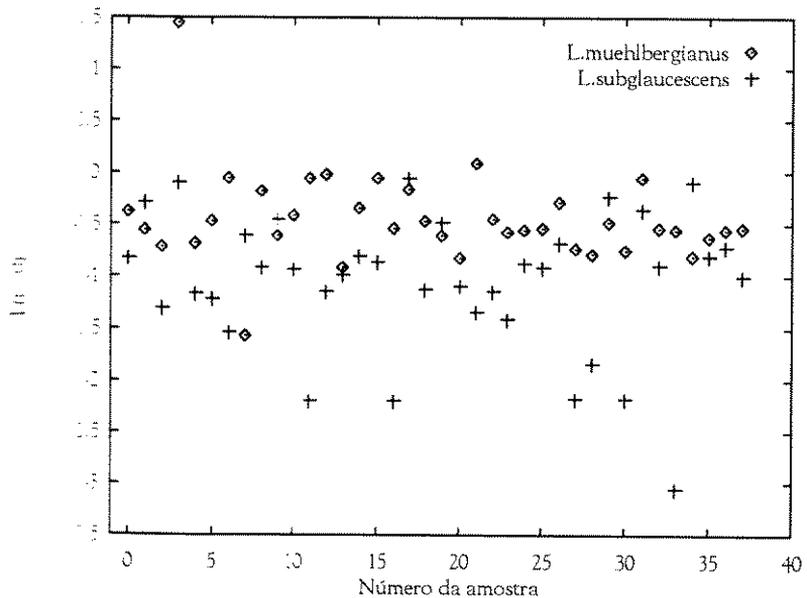


Figura 5.24: Valor da curvatura no ponto inicial da curva para  $a=2$ .

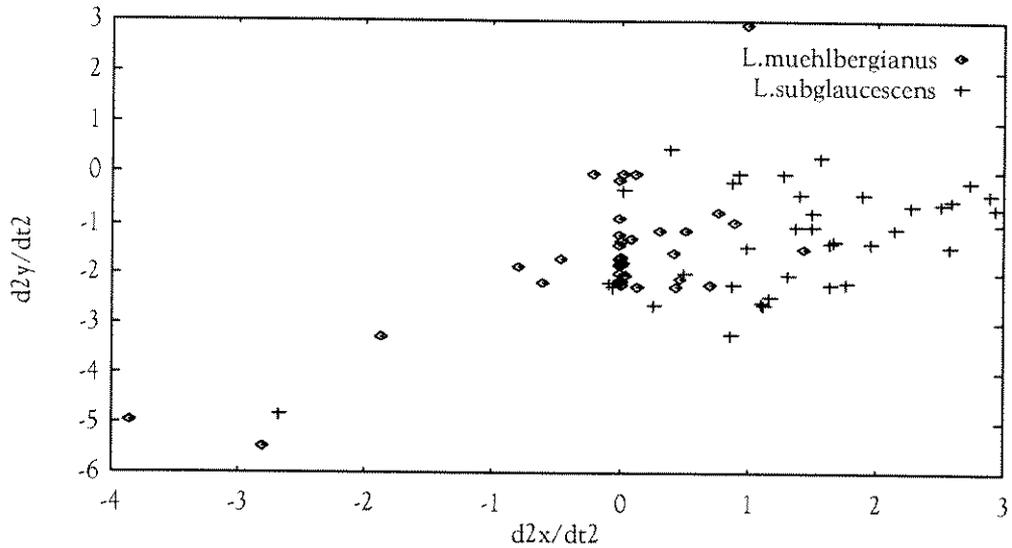


Figura 5.25: Vetor derivada segunda em  $t=0$  para  $a=2$ .

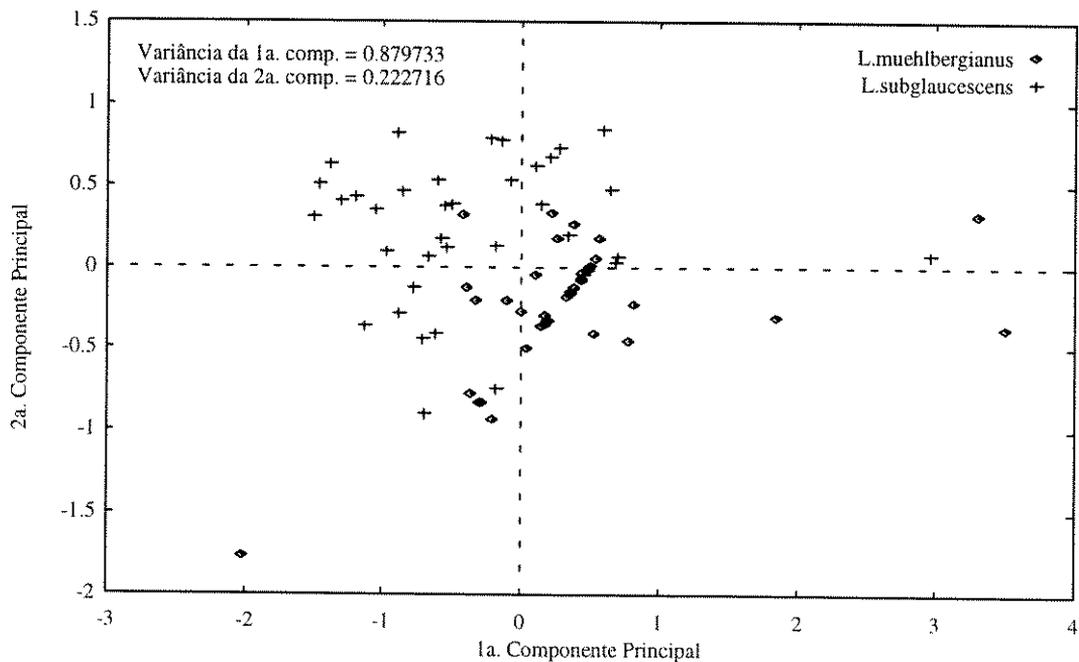


Figura 5.26: Primeira e segunda componentes principais resultantes da decorrelação dos coeficientes das curvas paramétricas para  $a=2$ .

### 5.3.3. Faixa de amostragem de pontos: um terço da projeção horizontal ( $a=3$ )

Para  $a=3$ , os resultados obtidos não diferiram muito qualitativamente dos resultados correspondentes às estratégias anteriores (figuras 5.27 a 5.30). Entretanto,

esta estratégia é a que possibilita a melhor discriminação para  $\langle R_1 \rangle$ . Considerando esta faixa de amostragem a análise estatísticas dos dados calculados mostra que as probabilidades máximas de classificação incorreta considerando um limiar  $\langle R_1 \rangle = 56,12$  graus são de 6,13% para se classificar um foliolo de *L.subglaucescens* como sendo de *L.muehlbergianus* e de 6,70%, caso contrário.

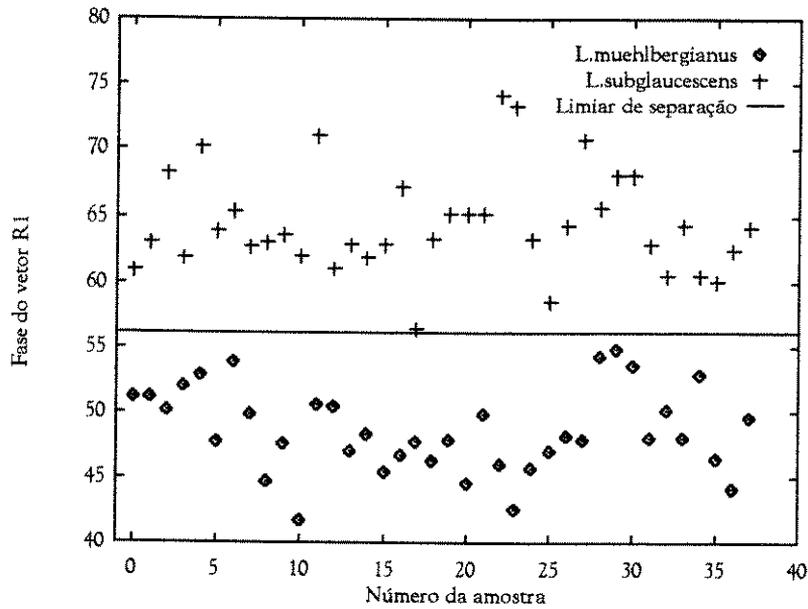


Figura 5.27: Valor de  $\langle R_1 \rangle$  para  $a=3$ .

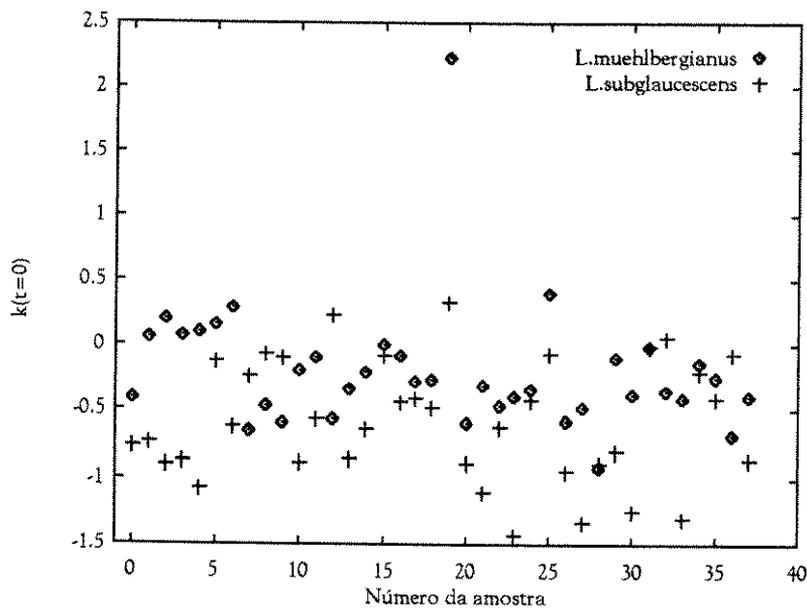


Figura 5.28: Valor da curvatura no ponto inicial da curva para  $a=3$ .

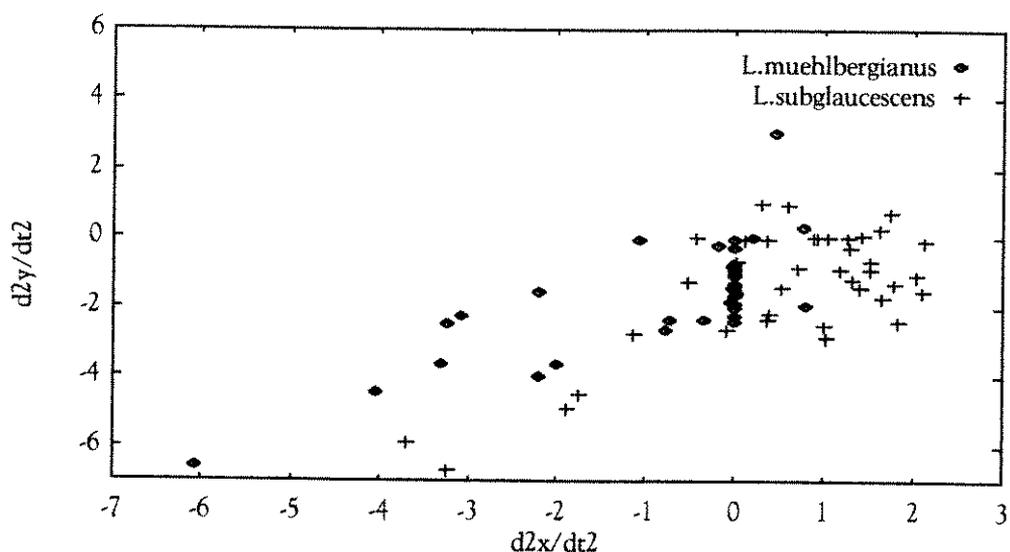


Figura 5.29: Vetor derivada segunda em  $t=0$  para  $a=3$ .

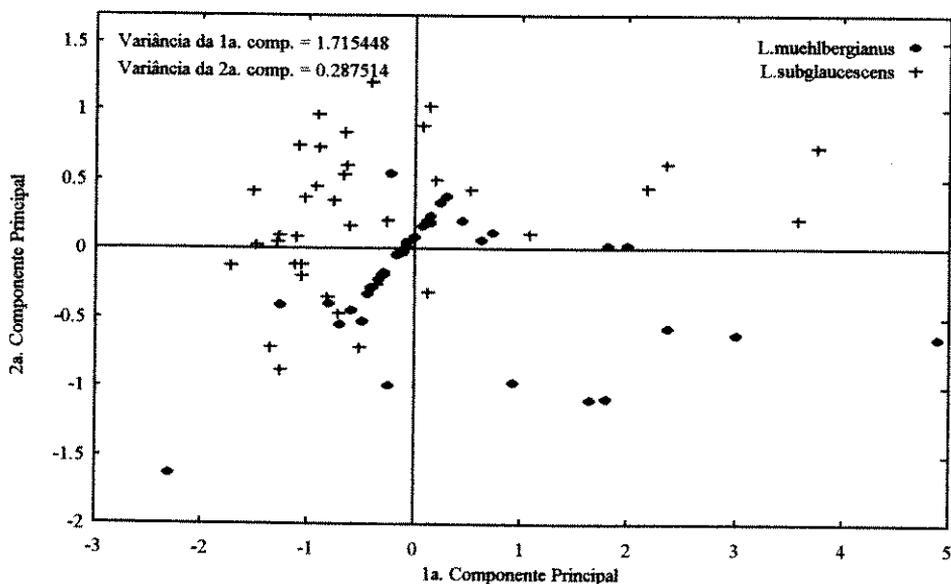


Figura 5.30: Primeira e segunda componentes principais resultantes da descorrelação dos coeficientes das curvas paramétricas para  $a=3$ .

Como pôde ser visto nestes gráficos, os valores da curvatura e da derivada segunda não conseguiram discriminar as curvas, o que pode ser explicado pelo fato de ambas as classes de curvas modeladas apresentarem um comportamento suave e aproximadamente semelhante. Da mesma forma, os coeficientes das curvas paramétricas também não se mostraram eficientes como elementos para discriminação da forma das nervuras dos folíolos. Portanto, nenhum destas variáveis (curvatura, derivada segunda e coeficientes) foram utilizadas na discriminação das espécies.

Observamos que apenas  $\langle R_1 \rangle$  conseguiu discriminar corretamente, visto que se trata de uma transformação aplicada ao vetor  $R_1$ . Entretanto, a informação de módulo para o vetor  $R_1$  também é importante na caracterização da curva. Ainda que pequena para a nossa aplicação, a diminuição dos erros de classificação pôde ser constatada (tabela 5.7), reforçando assim a importância do uso desta característica em outros casos.

Espécie A	Probabilidade de classificação errada (%)	
	L.muehlbergianus	L.subglaucescens
Espécie B	L.subglaucescens	L.muehlbergianus
Elementos considerados ( $a=3$ )		
$R_1$	4.29 %	2.45 %
$\theta_1$	6.70%	6.13%

Tabela 5.7: Probabilidades de classificação incorreta de um folíolo da espécie A como sendo da espécie B considerando os elementos  $R_1$  e  $\theta_1$ .

Um exemplo bem ilustrativo para isto pode ser observado na figura 5.31. Temos representadas duas curvas com pontos inicial e final iguais, bem como vetores  $R_2$  idênticos. Para ambas as curvas o ângulo do vetor de saída  $R_1$  é mantido, mas as suas magnitudes alteradas. É bastante notável que utilizando apenas a informação de ângulo para caracterizar a forma das curvas chegaríamos a conclusão (errada) que ambas seriam idênticas, o que não constitui uma verdade para este caso.

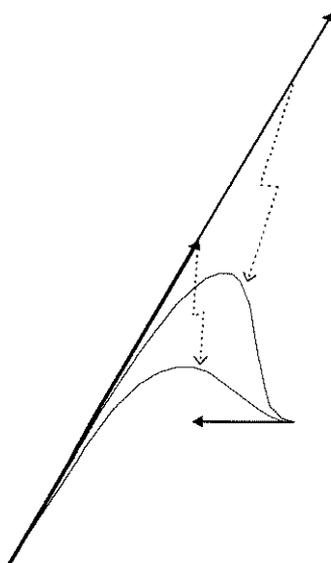


Figura 5.31: Modelos de Hermite com diferentes vetores de geometria.

Mais uma vez, notamos a melhoria do classificador quando utilizamos faixas de amostragens menores, reforçando as observações feitas no final da seção 5.2.

Uma observação importante é a de os coeficientes das curvas paramétricas não terem sido descritores eficientes para a forma, pois não conseguiram discriminar as duas classes de curvas. Imaginamos que o fato de combinações diferentes de curvas paramétricas conseguirem refletir a mesma instância do vetor de geometria  $R_1$  pode ter levado à superposição entre as classes no espaço de variáveis dos coeficientes das curvas.

Isto nos leva a concluir que o uso de uma representação alternativa para curvas como a de Hermite é mais apropriado quando desejamos estudar a forma de um determinado objeto.

#### **5.4. Análise das relações entre tamanho e forma para os folíolos**

De acordo com a seção 4.5, calculamos o coeficiente de correlação entre variáveis associadas ao folíolo: o ângulo de inserção da nervura secundária na nervura principal ( $\langle R_1 \rangle$ ) que, como vimos, também mostrou ser um bom descritor global para a forma da nervura, e outras tais como área e comprimento do folíolo, como elementos representativos para o seu tamanho, e a relação entre semi-eixos do folíolo como representativa para a sua forma.

Para  $\langle R_1 \rangle$  escolhemos a faixa de amostragem que propiciou a melhor separação entre as espécies:  $a=3$ . Assim, através da equação 4.2 e considerando todas as amostras para cada uma das espécies, calculamos os coeficientes de correlação  $r_m$  entre as variáveis relativas à espécie *L.muehlbergianus* e  $r_s$  entre as relativas à espécie *L.subglaucescens* e apresentamos os seus valores na tabela 5.7.

Medida de tamanho ou forma para a base do folíolo	L. muehbergianus		L. subglaucescens	
	Coefficiente de correlação $r_m$	Nível de significância (%)	Coefficiente de correlação $r_s$	Nível de significância (%)
área da base	0,005252	97,64	0,344752	3,42
$\sqrt{x \cdot y}$	-0,01686	91,84	0,2188	18,75
$x$	-0,03677	82,50	0,1599	33,85
$x / y$	-0,04578	78,34	-0.2078	20.99

Tabela 5.8: Coeficientes de correlação entre  $\langle R_1 \rangle$  ( $a=3$ ) e medidas de forma e tamanho para o folíolo.

Podemos observar pelos dados da tabela 5.7 que a correlação existente entre os elementos descritores de tamanho e forma para folíolos de *L.muehlbergianus* é quase nula, enquanto que para os folíolos de *L.subglaucescens* esta correlação é pequena, podendo ser desconsiderada, mostrando que o método para medida de forma é válido quando realizado independente do tamanho.

Assim, considerando a hipótese  $H_0: \rho=0$ , podemos aceitar os valores estimados para as correlações, vistos os níveis de significância dos testes.

## Capítulo 6

# Conclusões

Discutimos neste trabalho a utilização da representação polinomial de Hermite na modelagem, caracterização e discriminação de curvas. Diante da flexibilidade que pode ser obtida na modelagem e do modo como os parâmetros de controle da forma podem ser observados e analisados, podemos concluir que o uso da representação de Hermite é uma boa opção no processo de discriminação de curvas.

Pelos resultados expostos no capítulo 5 verificamos que este potencial é decorrente da influência que os vetores de geometria exercem sobre toda a extensão da curva.

Para a aplicação particular discutida em detalhes neste trabalho, o modelo de Hermite revelou ser útil na descrição de forma para espécimes vegetais. Procurando distinguir duas espécies de plantas semelhantes, exemplificamos o potencial discriminatório dos elementos associados à representação proposta.

Neste caso, os vetores se mostraram como bons separadores para as duas espécies de plantas, sendo  $R_1$  o mais representativo dentre eles, isto porque o ângulo que

$R_1$  forma com o eixo horizontal pode ser comparado com o ângulo de inserção da nervura secundária, e a sua magnitude indica o quão rápido a curva se afasta deste vetor. Desse modo, para as espécies consideradas, a quantificação do vetor  $R_1$  se torna uma grandeza de caracterização de forma mais confiável que uma medida aproximada do ângulo formado entre as nervuras principal e secundária, como feita usualmente.

É importante enfatizarmos que os vetores de geometria  $R_2$  e  $P_2$  não devem ser desconsiderados em outras aplicações. Nesta em particular, não se mostraram necessários, pois não salientaram a característica decisiva na discriminação das duas espécies. Entretanto, em outras aplicações podem ser cruciais na caracterização do elemento forma. Assim, todos os elementos são importantes na determinação da forma de uma curva.

Além disso, quando nos valem dos coeficientes das curvas paramétricas para tentar caracterizar e discriminar as nervuras, os resultados obtidos não foram satisfatórios, não se caracterizando estes como descritores adequados para a forma no processo de identificação desejado.

O estudo que realizamos mostrou que um problema de discriminação de duas classes de curvas bastante semelhantes foi resolvido de maneira satisfatória, indicando que o uso desta representação pode ser estendido para outras classes de aplicação.

Seguindo esta linha de pesquisa, poderíamos sugerir o uso de representações alternativas para curvas como a de Bézier que, para a aplicação deste trabalho, provavelmente viesse a fornecer resultados bem semelhantes aos que obtivemos para o modelo de Hermite.

Características como a forma do contorno das folhas podem ser modeladas utilizando as representações de Hermite, Bézier ou B-splines, que demandam custo computacional inferior àquele necessário para o cálculo dos tradicionais descritores de Fourier.

Além disto, podemos sugerir a aplicação do modelo considerado na solução de outros problemas de interesse na Botânica tratando da caracterização e identificação automática da forma de espécimes vegetais.

## Referências Bibliográficas

- BOOKSTEIN, F. L. "Size and shape": a comment on semantics. *Systematic zoology*, v. 38, n. 2, p. 173-180, 1989.
- BOOKSTEIN, F. L., STRAUSS, R. E., HUMPHRIES, J. M., CHERNOFF, B., ELDER, R. L., SMITH, G. R. A comment upon the uses of Fourier methods in systematics. *Systematic zoology*, v. 31, n. 1, p. 85-92, 1982.
- BOX, G. E. P., HUNTER J. S. **Statistics for experimenters: an introduction to design, data analysis, and model building.** New York: John Wiley & Sons, 1978.
- BRITO JÚNIOR, A. M. **Ferramentas computacionais para modelagem de curvas e redução dimensional.** Campinas: DCA/FEEC/UNICAMP, 1996. (relatório interno n. 04/96)
- DICKINSON, T. A., PARKER, W. H., STRAUSS, R. E. Another approach to leaf shape comparisons. *Taxon*, v. 36, n. 1, p. 1-20, fevereiro 1987.
- EHRlich, R., PHARR, R. B., JR., HEALY-WILLIAMS, N. Comments on the validity of Fourier descriptors in systematics: a reply to Bookstein et al.. *Systematic zoology*, v. 32, n. 2, p. 202-206, 1983.

- FERSON, S., ROHLF, F. J., KOEHN, R. K. Measuring shape variations of two-dimensional outlines. **Systematic zoology**, v. 34, n. 1, p. 59-68, 1985.
- FOLEY, J. D., VAN DAM, A., FEINER, S. K., HUGHES, J. F. **Computer graphics: principles and practice**. 2. ed.. New York: Addison-Wesley, 1993, 1175 p.
- GONZALEZ, R. C., WOODS, R. E. **Digital image processing**. New York: Addison-Wesley, 1993, 716 p.
- HICKEY, L. J. Classification of the architecture of Dicotyledonous leaves. **American journal of botany**, v. 60, n. 1, p. 17-33, 1973.
- HICKEY, L. J. A revised classification of the architecture of Dicotyledonous leaves. *In*: METCALFE, C. R., CHALK, L. **Anatomy of the Dicotyledons**. 2. ed., vol. 1, Oxford: Clarendon, 1979.
- KEREN, D., COOPER, D., SUBRAHMONIA, J. Describing complicated objects by implicit polynomials. **IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence**, v. 16, n. 1, p. 38-53, 1994.
- KEREN, D. Using symbolic computation to find algebraic invariants. **IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence**, v. 16, n. 11, p. 1143-1149, 1994.
- LIN, C.-S., HWANG, C.-L. New forms of shape invariants from elliptic Fourier descriptors, **Pattern recognition**, v. 20, n. 5, p. 535-545, 1987.
- McLELLAN, T. The roles of heterochrony and heteroblasty in the diversification of leaf shapes in *Begonia dregei* (*begoniaceae*). **American journal of botany**, v. 80, n. 7, p. 796-804, 1993.
- MELVILLE, R. The terminology of leaf architecture. **Taxon**, v. 25, n. 5, p. 549-561, 1969.

- MELVILLE, R. Leaf venation patterns and the origin of the Angiosperms. **Nature**, v. 224, p. 121-125, 1976.
- MOSIMANN, J. E. Size allometry: size and shape variables with characterizations of the lognormal and generalized gamma distributions. **Journal of the american statistical association**, v. 65, n. 330, p. 930-945, 1970.
- NIKLAS, K. J. **Plant allometry: the scaling of form and process**. Chicago: The University of Chicago, 1994.
- PERSOON, E., FU, K.-S. Shape discrimination using Fourier descriptors. **IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence**, v. 8, n. 3, p. 388-397, 1986.
- PLASS, M., STONE, M. Curve-fitting with piecewise parametric cubics. **Computer graphics**, v. 17, n. 3, p. 229-239, Julho 1983.
- PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T., FLANNERY B. P. **Numerical recipes in C**. New York: Cambridge, 1992, 994 p.
- RIVLIN, E., WEISS, I. Local invariants for recognition. **IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence**, v. 17, n. 3, p. 226-238, março 1995.
- RIZZINI, C. T. Sistematização terminológica da folha. **Rodriguesia**, n. 42, p. 103-125, 1977.
- ROGERS, D. F., ADAMS, J.A. **Mathematical elements for computer graphics**. 2. ed.. Singapore: McGraw-Hill, 1990, 611 p.
- SCHALKOFF, R. **Pattern recognition**. New York: John Wiley & Sons, 1992, 653 p.
- SOMERS, K. M. Allometry, isometry and shape in principal components analysis. **Systematic zoology**, v. 38, n. 2, p. 169-173, 1989.
- SUNDBERG, P. Shape and size-constrained principal component analysis. **Systematic zoology**, v. 38, n. 2, p. 166-168, 1989.

- THORNDIKE, R. M. **Correlation procedures for research**. New York: Gardner, 1978, 340p.
- TOU, J. T., GONZALEZ, R. C. **Pattern recognition principles**. Reading: Addison-Wesley, 1974.
- TSAI, D.-M., CHEN M.-F., Curve fitting approach for tangent angle and curvature measurements, **Pattern recognition**, v. 27, n. 5, p. 699-711, 1994.
- VANDERHEIT, C., DOM, F., OOSTERLINCK, VAN DER BERGHE, H. Two-dimensional shape decomposition using fuzzy subset theory applied to automated chromosome analysis. **Pattern recognition**, v. 13, n. 2, p. 147-151, 1981.
- WEST, J. G., NOBLE, I. R. Analyses of digitised leaf images of the *Dodonaea viscosa* complex in Australia. **Taxon**, v. 33, n. 4, p. 595-613, novembro 1984.
- ZELDITCH, M. L., FINK, W. L., SWIDERSKI, D. L. Morphometrics, homology, and phylogenetics: quantified characters as synapomorphies. **Systematic biology**, v. 44, n. 2, p. 179-189, 1995.
- ZHOU, Y.-H., LING, L.-B., ROHLF, F. J. Automatic description of the venation of mosquito wings from digitized images. **Systematic zoology**, v. 34, n. 3, p. 346-358, 1985.

## **Apêndice 1**

# **Revisão de Conceitos Relacionados a Curvas**

### **A1.1 Introdução**

Além dos descritores enfatizados neste trabalho (vetores de geometria de Hermite), estudamos outras características das curvas, tais como derivadas segunda e curvatura, e analisamos seu potencial discriminatório quando comparado com os elementos da representação de Hermite. Para isto, apresentamos na seção A1.2 deste anexo o desenvolvimento matemático para a obtenção destas características.

### **A1.2 Características vetoriais de uma curva no plano**

Definimos inicialmente uma curva paramétrica genérica  $C$  e um conjunto de grandezas a ela associadas (Fig. A1.1).

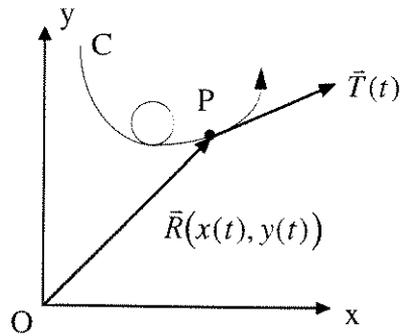


Figura A1.1: Curva paramétrica e grandezas associadas.

Seja  $\vec{R}(t)$  o vetor posição dos pontos da curva e  $t$  o parâmetro que definirá cada ponto  $P$  sobre a curva  $C$ .  $\vec{R}(t)$  terá duas componentes vetoriais: uma horizontal,  $x(t)$ , e uma vertical,  $y(t)$ , tal como explicitadas na equação A1.1. Teremos ainda associadas a cada ponto um vetor velocidade  $\vec{V}(t)$  e um vetor aceleração  $\vec{A}(t)$ .

$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (\text{A1.1})$$

$$\vec{V}(t) = \vec{R}'(t) = d\vec{R}(t)/dt = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} \quad (\text{A1.2})$$

$$\vec{A}(t) = \vec{R}''(t) = d\vec{V}(t)/dt = d^2\vec{R}(t)/dt^2 = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} \quad (\text{A1.3})$$

Das equações A1.2 e A1.3 podemos calcular o módulo e fase dos vetores velocidade e aceleração.

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \quad (\text{A1.4})$$

$$\langle \vec{V}(t) \rangle = \text{tg}^{-1}[y'(t) / x'(t)] \quad (\text{A1.5})$$

$$|\vec{A}(t)| = \sqrt{[x''(t)]^2 + [y''(t)]^2} \quad (\text{A1.6})$$

$$\langle \vec{A}(t) \rangle = \text{tg}^{-1}[y''(t) / x''(t)] \quad (\text{A1.7})$$

A velocidade escalar de um corpo com movimento descrito por  $\vec{R}(t)$  em um ponto qualquer da curva é definida como

$$v(t) = |\vec{V}(t)| = ds(t)/dt \quad (\text{A1.8})$$

sendo  $s(t)$  o comprimento de arco sobre a curva  $C$ .

Definimos  $\vec{T}(t)$  como sendo o vetor unitário tangente à curva em cada ponto. O ângulo formado entre  $\vec{T}(t)$  e o eixo  $x$  será denominado  $\alpha(t)$  (fig. A1.2).

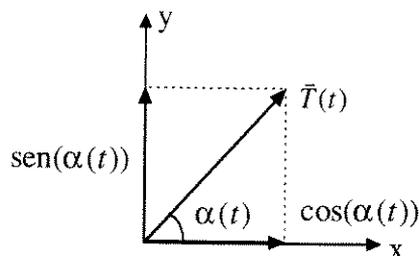


Figura A1.2: Componentes do vetor tangente.

Sendo o vetor  $\vec{T}(t)$  tangente à curva, terá também a mesma direção do vetor velocidade  $\vec{V}(t)$ , ou seja,

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|} = \frac{\vec{V}(t)}{v(t)} = \frac{d\vec{R}/dt}{|d\vec{R}/dt|} = \frac{x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \quad (\text{A1.9})$$

Como podemos observar na Figura A1.2, o vetor unitário  $\vec{T}(t)$  possui duas componentes vetoriais, tal como na equação A1.10.

$$\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j} \quad (\text{A1.10})$$

Logo, pelas equações A1.9 e A1.10 ,

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} ; \sin(\alpha(t)) = \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \quad (\text{A1.11})$$

Podemos ainda obter o valor do ângulo  $\alpha(t)$  em função das componentes vetoriais  $g(t)$  e  $h(t)$ , como mostram as equações A1.12 e A1.13.

$$tg(\alpha(t)) = \frac{\sin(\alpha(t))}{\cos(\alpha(t))} = \frac{\frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}}{\frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad (\text{A1.12})$$

$$\alpha(t) = tg^{-1}(y'(t)/x'(t)) \quad (\text{A1.13})$$

Quando a curva enverga mais sensivelmente, o vetor tangente unitário  $\vec{T}(t)$  muda sua direção com uma rapidez mais acentuada, isto é, a taxa de variação  $d\alpha(t)/ds$  do ângulo  $\alpha(t)$  em relação ao comprimento de arco  $s(t)$  é maior em módulo. Esta taxa de variação é denominada curvatura da curva **C** no ponto **P**.

No caso de uma curva paramétrica, a curvatura é definida pela equação A1.14 a seguir.

$$k(t) = d\alpha(t)/ds \quad (\text{A1.14})$$

Procurando estabelecer uma relação entre o vetor de aceleração  $\vec{A}(t)$  e o vetor tangente à curva  $\vec{T}(t)$ , nos reportamos à equação A1.9 e isolamos o vetor velocidade  $\vec{V}(t)$ .

$$\vec{V}(t) = v(t)\vec{T}(t) \quad (\text{A1.15})$$

O vetor aceleração poderá ser então reescrito na forma da equação A1.16.

$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v(t)\vec{T}(t)) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{T}(t) + v(t)\frac{d\vec{T}(t)}{dt} \quad (\text{A1.16})$$

Sabendo que

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = \frac{d\vec{T}(t)}{ds} \frac{ds(t)}{dt} = v(t) \frac{d\vec{T}(t)}{ds} \quad (\text{A1.17})$$

podemos chegar a uma nova expressão para o vetor aceleração:

$$\vec{A}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{T}(t) + v^2(t) \frac{d\vec{T}(t)}{ds} \quad (\text{A1.18})$$

Definimos também o vetor unitário  $\vec{N}_l(t)$ , perpendicular e rotacionado de  $90^\circ$  em relação a  $\vec{T}(t)$  (fig. A1.3). O vetor  $\vec{N}_l(t)$  ficará sempre à esquerda de um observador que caminhe na curva na direção e sentido do vetor tangente. Sua expressão é dada pela equação A1.61.

$$\vec{N}_l(t) = \cos(\alpha(t) + \frac{\pi}{2})\vec{i} + \text{sen}(\alpha(t) + \frac{\pi}{2})\vec{j}$$

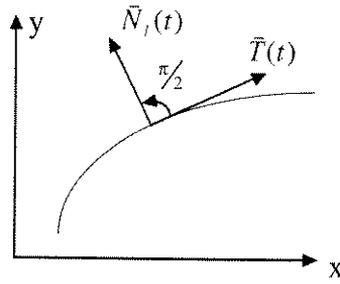


Figura A1.3: O Vetor  $\vec{N}_i(t)$ .

$$\vec{N}_i(t) = -\text{sen}(\alpha(t))\vec{i} + \text{cos}(\alpha(t))\vec{j} \quad (\text{A1.19})$$

Das equações A1.11 e A1.19, teremos:

$$\vec{N}_i(t) = \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} (-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}) \quad (\text{A1.20})$$

Derivando a equação A1.10 em relação a  $s$ , teremos:

$$\frac{d\vec{T}(t)}{ds} = \left( -\text{sen}(\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{ds} \right)\vec{i} + \left( \text{cos}(\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{ds} \right)\vec{j} \quad (\text{A1.21})$$

De acordo com as equações A1.14 e A1.19, a equação A1.21 poderá ser reescrita como:

$$\frac{d\vec{T}(t)}{ds} = [-\text{sen}(\alpha(t))\vec{i} + \text{cos}(\alpha(t))\vec{j}]\frac{d\alpha(t)}{ds} = \vec{N}_i(t)\frac{d\alpha(t)}{ds} = k(t)\vec{N}_i(t) \quad (\text{A1.22})$$

Fazendo o produto escalar de  $\vec{A}(t)$  por  $\vec{N}_i(t)$ , podemos chegar a uma nova expressão para a função curvatura  $k(t)$ .

$$\vec{A}(t) \cdot \vec{N}_i(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{T}(t) \cdot \vec{N}_i(t) + v^2(t) \frac{d\vec{T}(t)}{ds} \cdot \vec{N}_i(t) \quad (\text{A1.23})$$

Algumas modificações podem ainda ser feitas na equação A1.21. Podemos ver que, pela equação A1.22,

$$\frac{d\vec{T}(t)}{ds} \cdot \vec{N}_i(t) = k(t)\vec{N}_i(t) \cdot \vec{N}_i(t) = k(t) \quad (\text{A1.24})$$

Além disso,  $\vec{T}(t) \cdot \vec{N}_i(t) = 0$ , pois  $\vec{T}(t)$  e  $\vec{N}_i(t)$  são vetores normais entre si. Desse modo, a expressão A1.23 se transforma em

$$\vec{A}(t) \cdot \vec{N}_t(t) = v^2(t)k(t) \quad (\text{A1.25})$$

Isolando  $k(t)$  na equação A1.25, encontraremos uma nova expressão para a curvatura.

$$k(t) = \frac{\vec{A}(t) \cdot \vec{N}_t(t)}{v^2(t)} \quad (\text{A1.26})$$

Fazendo o produto escalar de A1.3 por A1.23 e substituindo o resultado na equação A1.26 chegaremos a

$$k(t) = \frac{\vec{A}(t) \cdot \vec{N}_t(t)}{v^2(t)} = \frac{1}{v^2(t)} (x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}) \cdot \frac{(-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j})}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \quad (\text{A1.27})$$

onde, pela equação A1.24,

$$v(t)^2 = |\vec{V}(t)|^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \quad (\text{A1.28})$$

E, finalmente, fazendo o produto interno na equação A1.21, encontramos uma expressão final para a curvatura  $k(t)$  em função das componentes  $x(t)$  e  $y(t)$ .

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{3/2}} \quad (\text{A1.29})$$

## **Apêndice 2**

# **Revisão de Conceitos Relacionados a Análise Estatística de Dados**

### **A2.1 Introdução**

Incluimos neste apêndice uma revisão de conceitos relacionados a análise estatística de um conjunto de dados, tais como média, variância e intervalos de confiança, necessários na etapa de classificação pelo método de Fisher e na análise de erro decorrente da classificação de dados.

### **A2.2 Descrição estatística dos dados**

A teoria estatística está intimamente ligada aos fenômenos que ocorrem na natureza. Os fenômenos estudados pela estatística são aqueles cujo resultado, mesmo em condições normais de experimentação, variam de uma observação para outra, dificultando dessa maneira a previsão de um resultado futuro.

O comportamento destes fenômenos aleatórios na maioria das vezes pode ser explicado por modelos matemáticos probabilísticos dentre os quais encontram-se as

funções de distribuição (BOX, 1978), que modelam a ocorrência das variáveis envolvidas neste fenômeno. A função de distribuição mais utilizada para representar variáveis naturais é uma gaussiana, ou função Normal, sendo aplicada em inúmeras situações e constantemente utilizada para o desenvolvimento teórico da inferência estatística. A sua expressão matemática é dada pela equação A2.1.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A2.1})$$

A notação utilizada é  $N(\mu, \sigma^2)$ , significando que uma variável amostral  $x$  possui distribuição normal de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , considerando todos os elementos do espaço amostral.

Quando não podemos tomar conhecimento de todos os elementos de um determinado espaço amostral, as análises que realizamos sobre as características deste espaço são feitas sobre um subconjunto do mesmo e o que calculamos são estimativas para a média e a variância de  $x$ , que chamamos aqui de  $\bar{x}$  e  $s^2$ , respectivamente, sendo os seus valores são dados pelas equações A2.2 e A2.3 a seguir.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x \quad (\text{A2.2})$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x - \bar{x})^2 \quad (\text{A2.3})$$

### A2.2.1 Intervalos de confiança

A medida que aumentamos o número de amostras, as estimativas  $\bar{x}$  e  $s^2$  se tornam mais confiáveis, isto é, mais próximas dos valores da média e variância reais.

É possível estimar intervalos onde os valores da média e da variância real do espaço amostral podem ser encontrados com um determinado nível de probabilidade.

Estes intervalos são chamados intervalos de confiança. Um exemplo de intervalo de confiança pode ser: “a altura média da população X encontra-se entre 1.65m e 1.75m com 95% de confiança”. 95%, neste caso, seria a probabilidade da média da altura certamente se encontrar entre 1.65m e 1.75m.

Os intervalos de confiança são bastante úteis, por exemplo, no cálculo de testes de significância quando tratamos da classificação de variáveis através da teoria de Bayes. Nas seções A2.2.1.1 e A2.2.1.2 mostramos como é feito o cálculo de intervalos de confiança para a média e para a variância de uma população com base nos valores de suas estimativas.

#### ***A2.2.1.1 Intervalo de Confiança para a média***

Para uma amostra de tamanho  $N$ , cujo valor médio estimado é  $\bar{x}$  e a variância estimada é  $s^2$ , a distribuição de  $\bar{x}$  também é normal e variância desta distribuição é dada por  $s^2/N$ , sendo o intervalo de confiança para a média desta amostra determinado pela equação A.4.

$$\bar{x} - \frac{k}{\sqrt{N}} s < \mu < \bar{x} + \frac{k}{\sqrt{N}} s \quad (\text{A2.4})$$

ou seja,

$$ma < \mu < mb$$

O valor da variável  $k$  serve para determinar o nível de confiança que se deseja para o intervalo de variação da média. Na figura A2.1, por exemplo, onde a média da função de distribuição encontra-se entre  $ma$  e  $mb$ , podemos observar o posicionamento da função de distribuição dentro do intervalo.

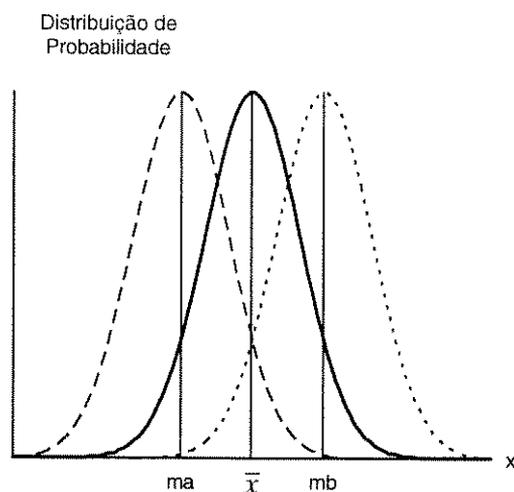


Figura A2.1: Variação da média considerando intervalos de confiança.

### A2.2.1.2 Intervalo de confiança para a variância

Do mesmo modo que para a média, podemos também definir intervalos de confiança para a variância da amostra. As variâncias de amostras calculadas de um conjunto de dados distribuídos normalmente assumem uma distribuição chi-quadrada  $\chi^2$ , sendo o intervalo de confiança para os valores da variância dado por

$$\frac{(n-1)s^2}{B} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{A} \quad (\text{A2.5})$$

Os valores de A e B correspondem aos valores do  $\chi^2$  que asseguram níveis de probabilidade para iguais a  $1-\alpha/2$  e  $\alpha/2$  na função de distribuição, respectivamente, onde  $1-\alpha$  é o nível de confiança desejado.

Na figura A2.2 mostra o comportamento da variância quando um intervalo de confiança para a mesma é considerado. A linha contínua representa a distribuição de uma amostra para o valor da variância estimado pela equação A2.3. As outras linhas mostram como seria a mesma distribuição para os valores máximo e mínimo das variâncias calculados pela equação A2.5.

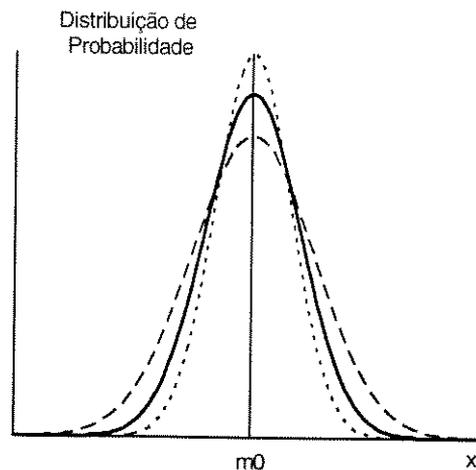


Figura A2.2: Variação da variância considerando intervalos de confiança.

### A2.2.2 A teoria de Bayes

Uma ferramenta importante que utilizamos para realizar a classificação dos elementos estudados neste trabalho é o classificador de Bayes (TOU & GONZALEZ, 1974). Este classificador possibilita associar um padrão desconhecido a uma das classes conhecidas num determinado problema.

Considere duas classes  $C_1$  e  $C_2$  com médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$ ,  $\mu_1 < \mu_2$ , variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , e que apresentam distribuições de probabilidade de ocorrência  $p_1(x)$  e  $p_2(x)$ . O classificador de Bayes procura encontrar um valor de limiar  $T$  que delimite as classes e que possibilite classificar um elemento com um mínimo de erro.

A probabilidade de classificar um objeto pertencente à classe  $C_2$  como sendo pertencente à classe  $C_1$  é dada por

$$E_1(T) = \int_{-\infty}^T p_2(z) dz \quad (\text{A2.6})$$

Do mesmo modo, a probabilidade de classificar um objeto pertencente à classe  $C_1$  como sendo pertencente à classe  $C_2$  é dada por

$$E_2(T) = \int_T^{\infty} p_1(z) dz \quad (\text{A2.7})$$

A probabilidade de erro total é dada por

$$E(T) = P_2 E_1(T) + P_1 E_2(T) \quad (\text{A2.8})$$

onde  $P_1$  e  $P_2$  ( $P_1 + P_2 = 1$ ) são as probabilidades de ocorrência dos elementos das classes  $C_1$  e  $C_2$  no universo amostral, respectivamente.

O valor ideal para  $T$  será dado quando  $E(T)$  assumir seu valor mínimo. Assim, diferenciando a equação A2.8 em relação a  $T$  e igualando o resultado a zero, poderemos encontrar este mínimo, apresentado na expressão A2.9 a seguir.

$$P_2 p_1(T) = P_1 p_2(T) \quad (\text{A2.9})$$

Quando os elementos das duas classes podem ocorrer em quantidades iguais (caso discutido neste trabalho),  $P_1 = P_2 = 0.5$ , podemos mostrar que o valor desejado de  $T$  será dado por

$$T = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{A2.10})$$

onde:  $a = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$ ,

$$b = 2(\mu_1 \sigma_2^2 - \mu_2 \sigma_1^2) \text{ e}$$

$$c = \mu_1^2 \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2 - 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_2} .$$

Quando tratamos de amostras de uma população, devemos levar em conta o uso de intervalos de confiança para as estimativas das médias e das variâncias dos dois subconjuntos  $C_1$  e  $C_2$  estudados no cálculo do limiar  $T$  e dos erros de classificação

associados. Desse modo, a determinação do valor de limiar deve ser calculado para os valores de média e variância que impliquem na maior superposição das gaussianas  $p_1(x)$  e  $p_2(x)$ , como mostra a figura A2.3.

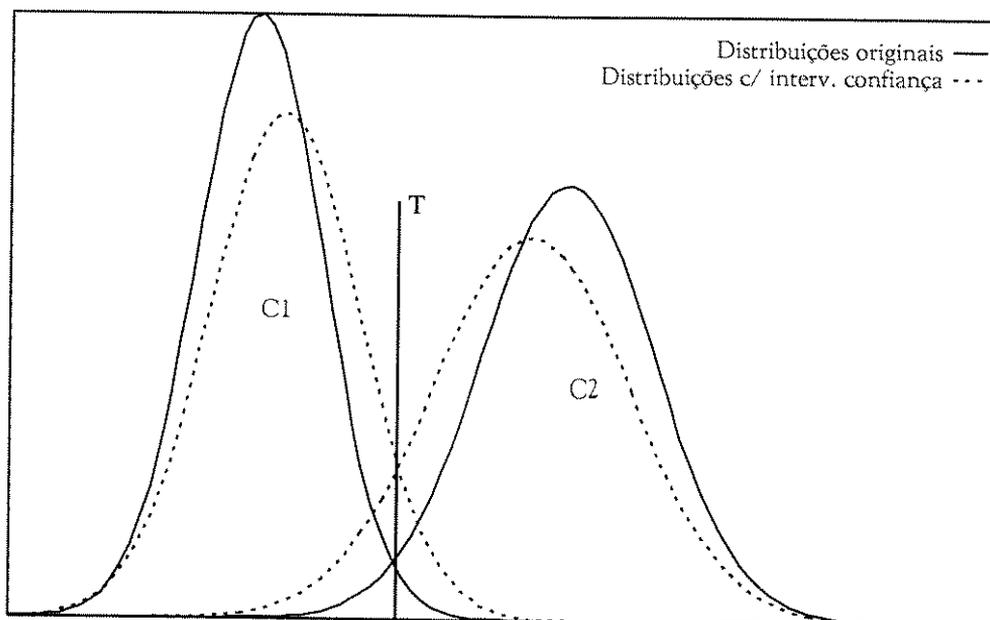


Figura A2.3: Funções de distribuição utilizadas no cálculo do limiar T.

Assim, o valor da média da classe  $C_1$  utilizado no cálculo do limiar deve ser igual ao limite superior do seu intervalo de confiança, enquanto que para a classe  $C_2$  este valor deve corresponder ao limite inferior. Além disso, em ambos os casos, as variâncias consideradas no cálculo do limiar devem corresponder aos limites superiores dos intervalos de confiança para a variância de cada uma das classes.

Os erros de classificação são calculados pelas integrais definidas pelas equações A2.6 e A2.7. É conveniente observar que os valores destas integrais correspondem aos erros máximos de classificação para as espécies. Como pode ser visto no exemplo da figura A2.4, quanto mais o valor de um dado correspondente a um elemento da classe  $C_1$  ou  $C_2$  se afasta do limiar de separação T, maior a certeza na sua classificação e menor o risco de classificação incorreta.

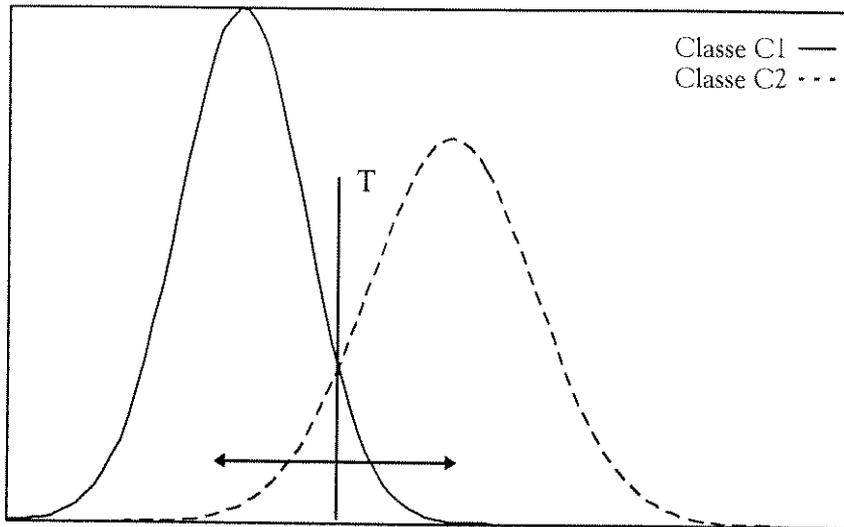


Figura A2.4: Exemplos de distribuições hipotéticas de probabilidade para os dados dos descritores das amostras analisadas.

### A2.2.3 Análise de correlação

Podemos encontrar em PRESS et al. (1992) uma medida que expressa o quanto duas variáveis estão correlacionadas, ou associadas. Esta medida chama coeficiente de correlação linear ou coeficiente de Pearson ( $\rho$ ) e sua estimativa é dada pela fórmula

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}}, \quad (\text{A2.11})$$

onde os pares  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  são as amostras disponíveis para análise da correlação entre as variáveis  $X$  e  $Y$ . As variáveis  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  são os valores médios de  $X_i$  e  $Y_i$ , respectivamente. O valor numérico de  $r$  encontra-se entre -1 e 1, e quanto mais próximo de zero ele estiver, mais descorrelacionadas as variáveis  $X$  e  $Y$  estarão.

O coeficiente de correlação linear entre duas variáveis pode ser utilizado para verificar a precisão associada à predição de variáveis via regressão linear. Definindo

as  $x = X - \bar{X}$  e  $y = Y - \bar{Y}$ , e o erro de predição como  $y - y'$ , onde  $y'$  é o valor da predição, a variância da distribuição destes erros (variância de  $y$  dado  $x$ ) será dada por

$$s_{y.x}^2 = \frac{\sum (y - y')^2}{N} \quad (\text{A2.12})$$

A variância desta distribuição é a diferença entre os valores real ( $s_y^2$ ) e previsto ( $s_{y'}^2$ ) da variância da amostra  $y$  (THORNDIKE, 1978), ou seja,

$$s_y^2 = s_{y'}^2 + s_{y.x}^2. \quad (\text{A2.13})$$

É possível mostrar a partir da equação A2.12 que a variância  $s_{y.x}^2$  é igual a

$$s_{y.x}^2 = s_y^2(1 - r^2), \quad (\text{A2.14})$$

ou seja, quanto mais próximo de 1 o valor de  $r^2$  estiver, maior será a correlação entre as duas variáveis e mais confiável será a predição da variável  $y$  com base em  $x$  através da regressão linear.

Das equações A2.13 e A2.14, podemos notar que

$$r^2 = \frac{s_{y'}^2}{s_y^2}, \quad (\text{A2.15})$$

indicando que o quadrado deste coeficiente consiste na proporção da variância no escore de  $y$  que é previsível de  $x$ .

Assim, um coeficiente de correlação  $r = 0,4$  indica que apenas 16 % ( $= r^2$ ) da variância de uma variável é previsível da outra, com um erro de previsão  $s_{y.x}^2$  associado de aproximadamente 84 % do valor real de  $s_y^2$ . Um coeficiente de correlação  $r = 0,9$ , por sua vez, indica que 81 % da variância pode ser prevista, reduzindo o erro de previsão para aproximadamente 19 % do valor real de  $s_y^2$ .

A confiança na estimativa do coeficiente de correlação é função do número de amostras que foram utilizadas e quanto maior este número, maior será a confiança no coeficiente calculado. É possível analisar esta confiança com base na distribuição da variável  $r$ , pois, sendo o coeficiente de correlação uma variável amostral, ele possui uma distribuição de probabilidades. É possível mostrar que, no caso da distribuição das variáveis  $X$  e  $Y$  ser normal, a variável

$$\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad ; \quad t_{N-2} \quad (\text{A2.16})$$

apresenta uma distribuição  $t$  de Student com  $N-2$  graus de liberdade para a hipótese  $H_0: \rho = 0$ . Com isto, a probabilidade de ocorrência de valores maiores ou iguais ao valor  $r = r_0$  calculados, ou seja, o nível de significância do teste de hipótese realizado, é dada pela área sobre a cauda da função de distribuição considerando um teste bicaudal e, portanto, quanto maior for o valor desta área, maior será a confiança na hipótese  $H_0$ .