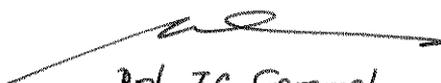


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
JANEIRO DE 1989

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Oscar Salviano Silva Filho e aprovada pela Comissão Julgadora em 17/02/89.


Prof. J.C. Geromel

UMA ESTRUTURA DE CONTROLE PARCIALMENTE
EM MALHA FECHADA PARA
PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO ESTOCÁSTICO

Por : Oscar Salviano Silva Filho

Orientador : Prof. Dr. José Cláudio Geromel

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica, da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

DEDICADO A

Nil, Isadora e Giselle

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração desta Tese. Em especial, ao Prof. Geromel pela orientação objetiva e atenção especial dedicado a este trabalho; aos amigos da MAP/CTI e ao próprio CTI pelo apoio institucional.

RESUMO

Neste Trabalho analisa-se a solução em malha aberta de um problema de controle ótimo estocástico, constituído por um sistema linear discreto no tempo, com perturbações por hipótese gaussianas. As variáveis de saída e de controle estão sujeitas a restrições probabilísticas com graus de violação fixados a priori. É mostrado que, em muitos casos, o problema determinístico associado ao procedimento em malha aberta pode ser infactível. De modo a eliminar esta indesejável característica, propõe-se uma estrutura de controle parcialmente em malha fechada. É mostrado, também, que esta metodologia mantém-se válida para modelos mais gerais, como é o caso do problema sob o enfoque de imperfeita informação de estado. Por fim, é discutido e resolvido um problema real de controle estocástico, relacionado à operação ótima de sistemas hidroelétricos.

ABSTRACT

In this work, an open-loop solution of stochastic control problem, composed by a discrete-time linear system with gaussian noise, is analysed. The control and output variables are subjected to probabilistic constraints, with a priori fixed degree of violation. It is shown that, in many cases, the deterministic optimization problem associated to the open-loop procedure can be infeasible. In order to eliminate this undesirable feature, a partial closed-loop structure is proposed. It is also shown that, this approach can be applied to more complex models as, for instance, the problem under imperfect state information. A real problem of stochastic control, concerned with the optimal operation of a hydroelectric system, is solved and discussed.

INDICE

INTRODUÇÃO GERAL.....	1
 CAPÍTULO I - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA.....	 6
I.1. Introdução.....	7
I.2. Formulação do Problema.....	8
I.3. Programação Dinâmica Estocástica.....	10
I.3.1. Algoritmo de Programação Dinâmica Estocástica.....	11
I.3.2. Considerações sobre este Tipo de Solução.....	13
I.4. Métodos Sub-ótimos.....	13
I.4.1. Procedimento Sub-ótimo NFC.....	14
I.4.2. Procedimento Sub-ótimo OLFC.....	16
I.4.3. A Questão da Adaptatividade dos Controladores Sub- ótimos.....	17
I.5. Restrições Probabilísticas.....	18
I.5.1. Análise da Solução do Problema com Restrição de Saída por Programação Dinâmica.....	19
I.5.2. Análise dos Métodos Sub-ótimos para o Problema com Restrição de Saída.....	24
I.6. Perfeita e Imperfeita Informação de Estado.....	26
I.6.1. Perfeita Informação de Estado.....	27
I.6.2. Imperfeita Informação de Estado.....	27
I.7. Exemplo de Aplicação.....	29
I.7.1. Resultados.....	32
I.8. Conclusão.....	35
 CAPÍTULO II - PERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO.....	 36
II.1. Introdução.....	37
II.2. Solução em Malha Aberta de um Sistema Linear Estocástico	38
II.2.1. Redução a um Problema Determinístico Equivalente	38
II.2.2. Solução em Malha Aberta do Problema Determinís- tico.....	43
II.3. Estrutura de Controle Proposta.....	46
II.3.1. Aspectos Teóricos do Problema da Variância.....	46
II.3.2. Procedimento de Controle Parcialmente em Malha	

Fechada.....	52
II.4. Considerações sobre o Problema da Média.....	54
II.5. Considerações sobre o Problema da Variância.....	55
II.6. Aplicação.....	56
II.6.1. Solução em Malha Aberta - Proposta de Lassere...	57
II.6.2. Aplicação do Procedimento Proposto.....	57
II.7. Conclusão.....	62
 CAPITULO III - IMPERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO.....	 63
III.1. Introdução.....	64
III.2. Solução do Problema Estocástico sob o Enfoque de Imperfeita Informação de Estado.....	65
III.2.1. Redução da Informação - Estatística Suficiente	66
III.2.2. Solução Ótima do Problema Estocástico.....	67
III.2.3. Soluções Sub-Ótimas.....	68
III.3. Sistema Linear-Gaussiano.....	72
III.3.1. O Filtro de Kalman.....	73
III.3.2. Introdução do Filtro na Malha de Realimentação	80
III.4. Estrutura de Controle Parcialmente em Malha Fechada...	81
III.4.1. Problema da Média.....	83
III.4.2. Problema da Variância.....	84
III.5. Exemplo de Aplicação.....	90
III.6. Conclusão.....	94
 CAPITULO IV - MODELAGEM ENERGÉTICA.....	 95
IV.1. Introdução.....	96
IV.2. Modelagem do Sistema Hidroelétrico.....	98
IV.3. Modelagem dos Aportes de Água.....	102
IV.4. A Formulação do Problema de Geração de Energia de um Sistema Hidroelétrico.....	111
IV.5. Propostas Existentes na Literatura.....	113
IV.6. Conclusão.....	116
 CAPITULO V - APLICAÇÃO PRÁTICA.....	 117
V.1. Introdução.....	118
V.2. Aplicação do Método Proposto ao Problema Hidroelétrico...	119
V.3. Características Operacionais das Usinas em Estudo.....	122

V. 4. Simulação.....	124
V. 5. Conclusão.....	132
CONCLUSÃO GERAL.....	133
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	136
APÊNDICES A, B, C e D.....	142

INTRODUÇÃO GERAL

Neste trabalho analisa-se a solução de um problema de controle ótimo estocástico, que é constituído por um sistema linear, gaussiano, discreto no tempo, com variáveis de saída e de controle satisfazendo restrições probabilísticas, com graus de violação fixados a priori.

Generalizando um resultado apresentado em [Lassere,1984], obtem-se uma formulação determinística equivalente para o problema estocástico, que preserva suas propriedades estruturais e permite calcular uma política ótima em malha aberta, independentemente, da dimensão do problema. Este fato é muito importante, pois existe na literatura um vasta variedade de métodos que podem ser aplicados.

É observado que o problema determinístico equivalente pode ser infactível e, neste caso, falha no sentido de fornecer uma política de controle em malha aberta. Esta indesejável característica ocorre devido à natureza das suposições necessárias para definir esta formulação equivalente. Isto é, no instante inicial de tempo, o estado é observado (perfeita informação de estado) e é assumido que medidas futuras não serão permitidas, assim por consequência o controle é tido como essencialmente determinístico. Ocorre, entretanto, que as restrições do problema determinístico dependem fortemente do segundo momento estatístico do estado que pode evoluir sem controle no tempo, ou seja, em malha aberta. Neste caso, o segundo momento da variável de estado é completamente determinado pela estatística do ruído e pelo modelo em malha aberta do sistema em questão [Bertsekas,1979].

Se o sistema em malha aberta é instável, a variância da saída pode ser ilimitada. Como consequência, o problema determinístico pode tornar-se infactível para qualquer que seja o grau de violação imposto pelo projetista.

Tem-se então que, para adotar restrições probabilísticas, modificar o procedimento proposto por Lassere (1984), no sentido

de controlar tanto a média quanto a variância do processo [Geromel e Silva F.,1988]. Assim sendo, propõe-se uma estrutura de controle que divide o problema estocástico em duas partes: na primeira define-se um problema de controle de variância mínima que admite uma solução em malha fechada e que tem a propriedade de maximizar a probabilidade das variáveis satisfazerem suas restrições físicas. A segunda parte, consiste em determinar as trajetórias médias ótimas, em malha aberta, a partir de um problema de controle determinístico.

O procedimento proposto é válido também para modelos mais gerais, como é o caso de problemas com imperfeita informação de estado [Silva F. e Geromel,1988]. De fato considerando-se a linearidade da dinâmica do sistema e as hipóteses de estatística gaussiana para os ruídos pertinentes, segue que toda informação necessária para os objetivos de controle são obtidas pela estimativa ótima de estado gerada a partir de um mecanismo apropriado de filtragem. Por conseguinte, a política de realimentação, dada pelo problema de variância mínima, é consequência imediata da propriedade da separação [Astrom,1970].

O conteúdo do trabalho está organizado em 5 capítulos, assim distribuídos:

CAPÍTULO 1 - Programação Dinâmica Estocástica

Neste capítulo introduz-se uma formulação geral para o problema estocástico e discute-se sua solução através do algoritmo de programação dinâmica estocástica. A utilização deste algoritmo pode não ser possível em virtude da questão da dimensão do problema, por isto analisa-se, como alternativa, a aplicação de procedimentos sub-ótimos. São introduzidos os aspectos relativos a formulação do problema segundo os enfoques de perfeita e imperfeita informação de estado e também as implicações de se considerar o estado do sistema sobre um espaço restritivo. Alguns resultados são apresentados e estão associados

a aplicação do algoritmo de programação dinâmica a um problema monovariável simplificado de operação de uma usina hidroelétrica isolada.

CAPITULO II - Perfeita informação de Estado

Neste capítulo analisa-se a solução do problema estocástico sob o enfoque de perfeita informação de estado. O sistema em consideração é linear com perturbação gaussiana. Com o objetivo de minimizar o risco de infactibilidade do problema determinístico associado, apresenta-se a proposta de uma estrutura de controle parcialmente em malha fechada.

CAPITULO III - Imperfeita Informação de Estado

É discutido, em primeiro lugar, a solução de uma classe geral de problemas estocásticos, sob o enfoque de imperfeita informação de estado. Comenta-se sua solução através do algoritmo de programação dinâmica estocástica e dos algoritmos sub-ótimos. Algumas noções importantes são apresentadas como é o caso da propriedade da Separação e do conceito de estatística suficiente. Em seguida, considerando-se o caso do sistema linear-gaussiano, mostra-se que a solução do problema estocástico pode ser fornecida sem grandes dificuldades pelo procedimento proposto.

CAPITULO IV - Modelagem Energética

Como proposta de aplicação deste procedimento, apresenta-se o problema de operação de um sistema de geração de energia hidroelétrica. Neste sentido, discute-se aspectos da formulação, introduzindo-se questões relativas à modelagem das usinas do sistema, bem como sua função de geração. Um modelamento matemático para representar os aportes de água de cada usina é

também discutido. Por fim, resume-se, de modo breve, algumas das abordagens de controle empregadas para resolver este tipo de problema.

CAPITULO V - Aplicação Prática

Discute-se a solução do problema de geração de energia hidroelétrica, através da metodologia proposta. Vários casos são simulados, para um horizonte de 5 anos discretizado mês a mês. Os resultados ótimos obtidos para os dois passos do procedimento são apresentados.

CAPÍTULO I

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA

I.1 INTRODUÇÃO.

Neste capítulo discute-se certos aspectos numéricos envolvidos na solução de um problema de controle ótimo estocástico sequencial com horizonte de tempo finito. De um modo genérico, o problema pode ser descrito como segue:

1. um sistema discreto no tempo constituído por uma dinâmica estocástica relacionando as variáveis de estado e de controle;
2. um custo funcional;
3. restrições nas variáveis de saída e controle.

O objetivo é determinar uma sequência de controle ótima para atuar em 1 e que otimize 2 quando sujeita à 3. Este problema é de natureza bastante complexa e sua solução só é possível, a menos de casos muito simples, através de um computador digital. A possibilidade do controlador, à cada instante de tempo, utilizar informações do estado do sistema, sugere um esquema de realimentação. Adicionando a isto a complexidade do custo funcional, tem-se como quase impossível a aplicação de técnicas da programação matemática. Se for possível assegurar requisitos de separabilidade ao custo funcional, tem-se no algoritmo de programação dinâmica uma opção apropriada para este tipo de abordagem. Entretanto, este algoritmo deixa de ser atrativo para problemas de grande dimensão, em virtude de ocorrerem dificuldades computacionais. Considerando-se, então, que a maioria dos problemas práticos são multidimensionais, torna-se necessário procurar novas técnicas que permitam tratá-los. Neste sentido, pode-se propor simplificações ou modificações na formulação original do problema, de tal modo a permitir a aplicação de outras técnicas de otimização, em decorrência disto, a solução do problema será sub-ótima. Existem uma vasta variedade de procedimentos que apresentam esta característica de sub-otimalidade, sendo difícil

classificá-los ou analisá-los de uma maneira unificada [Bertsekas, 1976]. Em geral, estes algoritmos agem no sentido de satisfazer o compromisso de conseguir uma melhor eficiência computacional, preservando as propriedades estruturais do problema.

O capítulo está organizado da seguinte maneira: a seção I.2 discute a formulação do problema estocástico, sem considerar restrições de estado. A seção I.3, discute a aplicação do algoritmo de programação dinâmica ao problema formulado na seção I.2. Na seção I.4, analisa-se a aplicação de duas técnicas sub-ótimas, conhecidas como "Naive Feedback Control" e "Open-loop Feedback Control", para resolver o problema estocástico em estudo. Além disto, discute-se a noção de adaptatividade dos controladores sub-ótimos. A seção I.5, considera a formulação do problema, discutido na seção I.2, com restrição na variável de saída tomada em probabilidade e discute a solução deste problema, inicialmente através do algoritmo de programação dinâmica e em seguida usando os métodos sub-ótimos, empregados no texto. A seção I.6, discute a importância de se conhecer o tipo de informação recebida pelo controlador, neste sentido, o problema é formulado segundo dois enfoques: perfeita e imperfeita informação de estado. Por fim, a seção I.7, ilustra os principais conceitos, apresentados ao longo do capítulo, resolvendo um problema de controle ótimo linear estocástico, com restrições físicas nas variáveis de saída e de controle.

I.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja o sistema estocástico discreto no tempo,

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), w(k)), \quad k \in [0, N-1] \quad (1.1)$$

$$y(k) = h(x(k)), \quad k \in [0, N] \quad (1.2)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ representam, respectivamente,

te, as variáveis de estado, controle e saída. O vetor $w(k) \in \mathbb{R}^n$, é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida. As funções matemáticas $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são responsáveis, respectivamente, pelos seguintes mapeamentos: $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Além disto, a variável de controle está restrita ao seguinte conjunto limitado $u(k) \in U \subset \mathbb{R}^m$.

Com as considerações acima, pode-se formular o problema como segue:

Dado um estado inicial $x(0)$, deseja-se determinar uma política ótima de controle para atuar em (1.1), como solução do seguinte problema:

$$J(u) = \min_{u(k)} E \left\{ f_N(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x(k), u(k)) \right\}$$

sujeito a

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), w(k)) \quad (1.3)$$

$$y(k) = h(x(k))$$

$$u(k) \in U$$

$$k \in [0, N-1]$$

A sequência de controle gerada com solução de (1.3) pode ser classificada de duas maneiras distintas, que dependem do modo como as informações observadas do sistema são empregadas, ou seja:

(a) Se para resolver (1.3) considera-se apenas uma medida inicial do sistema (p. ex., o estado inicial) ignorando-se todas as possíveis medidas futuras, pode-se dizer que o problema é essencialmente determinístico e fornece uma sequência de controle $\{u^*(0), \dots, u^*(N-1)\}$, com $u^*(\cdot) \in U$, dita ótima em malha aberta;

(b) Se as medidas observadas do sistema, a cada instante, são utilizadas, a sequência de controle gerada em (1.3) é função

destas medidas, caracterizando assim um esquema de realimentação. Considerando-se, por exemplo, que o estado possa ser medido exatamente, isto é, $y(k)=x(k)$, a sequência de controle ótimo gerada, será assim dada por $\{u^*(x(k)), k=0,1,\dots,N-1\}$, com $u^*(x(\cdot)) \in U$.

É importante acrescentar que a formulação apresentada em (1.3) não considera a variável de estado (saída) restrita a adotar valores de algum conjunto limitado. O fato é que se isto fôsse considerado, o problema ficaria sem sentido, uma vez que devido a natureza estocástica do sistema não seria possível garantir sua factibilidade. Na seção I.4. estuda-se uma maneira de resolver este problema, empregando este tipo de restrição.

A seção seguinte discute a solução do problema (1.3) através do algoritmo de programação dinâmica.

I.3. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA

A programação dinâmica estocástica, técnica desenvolvida por Richard E. Bellman na década de 50, tem sido largamente aplicada na solução de problemas de decisão multi-estágios. O principal atrativo desta técnica está na facilidade com que incorpora em sua formulação características não-lineares e estocásticas encontrados em problemas práticos.

A complexidade deste problema inviabiliza a utilização de muitos métodos da programação matemática estocástica [Vadja,1972] podendo-se assinalar como principais fatores: a não convexidade do custo funcional e a dependência do controle às medidas observadas do sistema.

Uma política ótima de controle para este problema, pode ser obtida através do algoritmo de programação dinâmica. Para isto, é necessário que o custo funcional satisfaça a condição de separabilidade [Nemhauser,1966]. Consequentemente, por mais complicado que seja o problema, este poderá ser decomposto em uma

série de sub-problemas que são resolvidos recursivamente para cada estágio do horizonte de tempo do problema [Bellman,1957]. Esta decomposição constitui a característica chave deste algoritmo. A recursão empregada pelo algoritmo pode ser tanto "forward" quanto "backward", sendo que para problemas estocásticos a segunda é mais adequada.

A desvantagem deste procedimento verifica-se para problemas de grande dimensão, nos quais o número de variáveis de estado envolvidas tendem a tornar este algoritmo ineficiente do ponto de vista computacional.

I.3.1. ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA.

Com o custo funcional em (1.3) satisfazendo a condição de separabilidade no tempo, pode-se aplicar o princípio da otimalidade [Bellman,1957] ao problema, obtendo-se, por conseguinte, uma série de sub-problemas que são resolvidos recursivamente. Este procedimento é exposto sucintamente a seguir:

Considere-se que, no instante k , o estado $x(k)$ seja conhecido, (perfeita informação de estado, vide seção I.6), então a política ótima necessária para ir deste instante inicial k até o instante final N , é dada resolvendo-se o seguinte sub-problema :

$$J_k(x(k)) = \min_{u(i)} E_{v(i)} \left\{ f_N(x(N)) + \sum_{i=k}^{N-1} f_k(x(i), u(i)) \right\} \quad (1.4)$$

onde $u(i) \in U$, com $i = k, \dots, N-1$. Supondo-se que a sequência aleatória $(w(i), i=k, \dots, N-1)$ seja independente, pode-se escrever:

$$J_k(x(k)) = \text{Min}_{u(k)} E_{v(k)} \left\{ f_k(x(k), u(k)) + \text{Min}_{u(i)} E_{v(i)} \left\{ f_N(x(N)) + \sum_{i=k+1}^{N-1} f_i(x(i), u(i)) \right\} \right\} \quad (1.5)$$

ou seja,

$$J_k(x(k)) = \text{Min}_{u(k)} E_{v(k)} \left\{ f_k(x(k), u(k)) + J_{k+1}(x(k+1)) \right\} \quad (1.6)$$

que representa a equação recursiva da programação dinâmica, sendo resolvida "backward" no tempo, a partir de uma condição final fixada para o custo funcional, isto é, $J(x(N)) = f(x(N))$.

Em resumo, aplicando-se o seguinte algoritmo recursivo ao problema (1.3):

$$J_N(x(N)) = f_N(x(N))$$

$$J_k(x(k)) = \text{Min}_{u(k)} E_{v(k)} \left\{ f_k(x(k), u(k)) + J_{k+1}(x(k+1)) \right\} \quad (1.7)$$

sujeito a

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), w(k)) \quad , \quad k \in [0, N-1]$$

obtem-se uma lei de controle ótima em malha fechada, dada por:

$$u^*(k) = \phi_k(x(k)), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (1.8)$$

onde $\phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ denota a relação funcional do controle ao valor corrente do estado do sistema, para cada instante k .

O valor ótimo do custo funcional é dado por $J^* = J_0(x(0))$, para uma dada condição inicial $x(0)$. Detalhes relacionados com a

otimalidade e convergência deste algoritmo não são abordados neste trabalho, porém deixa-se como referência para consulta [Bellman e Dreyfus, 1962] e [Bertsekas, 1976].

1.3.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE ESTE TIPO DE SOLUÇÃO.

Nenhuma dificuldade teórica é observada nesta forma de tratar o problema. Entretanto, dificuldades numéricas surgem à medida que se tenta melhorar a precisão da solução, reduzindo por exemplo o passo de discretização das variáveis que compõem o problema. Esta redução tende a aumentar enormemente a quantidade de cálculo e de armazenamento no computador digital. Além disto, estes requisitos computacionais tendem a crescer exponencialmente com a dimensão do problema tratado. Conseqüentemente, aplicar o algoritmo de programação dinâmica a problemas multidimensionais é praticamente impossível.

Uma vez que, a complexidade do problema inviabiliza a aplicação das técnicas de programação matemática e os aspectos combinatorios, citados acima, tornam impraticável uma abordagem do problema através de programação dinâmica, deve-se então procurar procedimentos alternativos que permitam resolvê-los. A seção seguinte discute a solução do problema estocástico (1.3), através de dois procedimentos sub-ótimos, que simplificam estruturalmente o problema permitindo por conseguinte que um grande número de técnicas clássicas de otimização possam ser empregadas.

1.4. MÉTODOS SUB-ÓTIMOS

Os problemas encontrados na prática, em geral, apresentam fatores complicantes (não-linearidades, incertezas, critério não convexo, um grande número de estados, etc...) que dificultam ou mesmo inviabilizam a aplicação de um grande número de técnicas de otimização. Do ponto de vista prático, então, grande atenção vem sendo dada aos algoritmos de controle sub-ótimos [Tse, 1972]. A

atração por tais procedimentos está relacionada as simplificações impostas a estrutura original do problema, o que torna possível aplicar as técnicas de otimização antes inviáveis. Dois métodos sub-ótimos, conhecidos por "Naive Feedback Control" (NFC) e "Open-Loop Feedback Control" (OLFC), de aplicabilidade geral, são discutidos com respeito ao problema (1.3). Estruturalmente, estes dois procedimentos são similares, operando da seguinte maneira: para cada instante de tempo k , uma medida do sistema é observada e utilizada como condição inicial para resolver um problema de controle ótimo determinístico para o restante do período $[k, N-1]$. Uma vez que medidas futuras do sistema são ignoradas, a sequência de controle ótima obtida é malha aberta. Seleciona-se, então, somente o primeiro elemento desta sequência, para atuar no sistema, desprezando-se os demais. Uma nova medida é observada para o instante seguinte $k+1$ e o procedimento é repetido. Percebe-se, então, que estas técnicas utilizam a simplicidade da determinação de uma política em malha aberta para resolver o problema de otimização, incorporando, no entanto, realimentação no sentido de melhorar o desempenho do sistema. A diferença entre estas duas técnicas, como será visto a seguir, está na forma de tratar a natureza estocástica do sistema.

I.4.1. PROCEDIMENTO SUB-ÓTIMO NFC

A idéia básica deste procedimento é considerar às incertezas do sistema fixadas em algum valor conhecido. Por exemplo, supondo-se conhecidas as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas, uma possibilidade é substituí-las pelos seus respectivos primeiros momentos estatísticos. Neste sentido, é possível compreender o controlador sub-ótimo NFC, como aquele que a cada instante de tempo aplica a entrada do sistema, uma lei de controle que seria considerada ótima se às perturbações no sistema fossem fixadas em seus valores médios.

Supondo-se, por simplicidade, que o estado do sistema possa ser medido exatamente, isto é, $y(k) = x(k)$, e que se conheça a

distribuição de probabilidade da variável $w(k)$, de tal modo a poder fixá-la em seu valor médio $m_v(k)$. Neste caso, o procedimento NFC aplicado a (1.3), pode ser descrito como segue: para cada instante de tempo k , o estado do sistema $x(k)$ é observado e empregado como condição inicial para resolver o seguinte problema de otimização determinístico:

$$\text{Min}_{u(k)} \sum_{i=k}^{N-1} f_i(x(i), u(i)) + f_N(x(N))$$

sujeito à

$$x(i+1) = g(x(i), u(i), m_v(i)), \quad i=k, k+1, \dots, N-1 \quad (1.9)$$

$$x(k) \text{ dado;}$$

$$u(i) \in U$$

uma vez que, novas medidas do sistema não são permitidas, a solução é uma sequência de controle essencialmente determinística (malha aberta) $\{u^*(k), u^*(k+1), \dots, u^*(N-1)\}$. Segue então, que o NFC seleciona para atuar no sistema, no instante k , somente a variável $u^*(k)$, ignorando todas as demais da sequência obtida. Como consequência da atuação uma nova medida é observada, para o instante $k+1$, e o procedimento é repetido.

A estrutura NFC impõe que o problema determinístico seja resolvido num total de N vezes, ou seja, para cada instante k de operação do sistema, (1.9) deve ser resolvido. As vantagens observadas, neste tipo de abordagem são: a de poder contar com uma variedade de técnicas de otimização que resolvem (1.9) e a de não precisar armazenar uma grande quantidade de variáveis, como ocorre em programação dinâmica. A principal desvantagem deste procedimento é o de não garantir que o valor ótimo do custo funcional será melhor do que o custo ótimo obtido para o mesmo problema resolvido em malha aberta.

I.4.2. PROCEDIMENTO SUB-ÓTIMO OLFC.

O procedimento OLFC apesar de operar de modo similar ao NFC distingue-se no fato de procurar preservar a natureza estocástica do sistema, uma vez que, leva em conta as incertezas acerca de $x(k)$ e $\{w(i), i=k, \dots, N\}$ quando calcula a variável de controle a ser aplicada no instante k . Isto torna sua implementação mais complicada que a do NFC, desde que é necessário não só conhecer a distribuição da incerteza $w(i)$, para todo período, mas também a distribuição da variável de estado no instante k . Em geral, reside no cálculo da distribuição do estado o fator complicante nesta implementação, por exemplo, se não for possível medir exatamente o estado, sua distribuição condicionada as medidas observadas deverá ser estimada (vide Cap. III).

Supondo-se perfeitas medidas do estado (vide seção I.6), o procedimento OLFC aplicado ao problema (1.3) pode ser descrito como segue: para cada instante k , uma medida de estado do sistema é tomada e uma sequência de controle $\{u^*(i), i \in [k, N-1]\}$ é obtida como solução do seguinte problema de otimização determinístico:

$$\text{Min}_{u(k)} \quad E_{v(i)} \left\{ f_N(x(N)) + \sum_{i=k}^{N-1} f_i(x(i), u(i)) \right\}$$

sujeito à

$$x(i+1) = g(x(i), u(i), w(i)), \quad i = k, k+1, \dots, N-1 \quad (1.10)$$

$$x(k) \text{ dado;}$$

$$u(i) \in U$$

uma vez que, não é permitido adotar medidas futuras, a sequência de controle é essencialmente determinística (malha aberta). Para atuar no sistema é selecionado a variável $u^*(k)$, ignorando todas as demais, isto é, $\{u^*(k+1), \dots, u^*(N-1)\}$. Logo que uma nova medida seja observada, o procedimento é repetido. Este procedimento

requer que o problema de otimização determinístico (1.10) seja resolvido num total de N vezes. Técnicas de programação matemática também podem ser aplicadas. E não há necessidade de armazenar variáveis. A implementação, como dito antes, é mais complicada que a do NFC, desde que, para cada período de operação, o valor esperado do custo funcional deverá ser avaliado. Sua principal vantagem sobre o NFC é que pode-se garantir que o custo ótimo da operação não será pior que o obtido pela solução em malha aberta.

Para maiores detalhes dos aspectos teóricos e de aplicação deste algoritmo deixa-se as seguintes referências: [Curry,1969], [Aoki,1967], [Tse,1972], [Dreyfus,1964].

1.4.3. A QUESTÃO DA ADAPTATIVIDADE DOS CONTROLADORES SUB-ÓTIMOS

Pode-se dizer que a adaptatividade é uma característica essencial de qualquer controlador sub-ótimo [Bertsekas,1976]. Assim torna-se interessante, para o entendimento desta classe de controladores, que se possa definir esta característica.

Sejam J_o^* e J^* , respectivamente, os valores ótimos em malha aberta e malha fechada do custo funcional (1.3). Segue então que,

$$J^* \leq J_o^* \quad (1.11)$$

isto é uma consequência do fato de que a classe de controladores que não levam em conta as medidas observadas (malha aberta) é um sub-conjunto da classe de controladores que tiram vantagem das observações (ou seja, usando realimentação).

Com base no exposto acima, é de se esperar que muitos controladores sub-ótimos, que levem em consideração as medidas obtidas do sistema, sejam considerados aceitáveis somente se

o seu correspondente valor de custo funcional J_{so} satisfizer a seguinte condição [Bertsekas,1976]:

$$J^* \leq J_{so} \leq J_o^* \quad (1.12)$$

neste caso, o controlador é denominado de quase-adaptativo. No caso da desigualdade da direita em (1.12) ser estrita, tem-se que o controlador é adaptativo, como é o caso dos controladores tipo "self-tuning".

É interessante compreender que nem todos os controladores sub-ótimos apresentam esta característica, ou seja, nem todos tomam as informações disponíveis com vantagem. No contexto, dos dois controladores apresentados anteriormente, somente o OLFC é quase-adaptativo. O NFC, não exhibe esta característica, podendo ocorrer que $J_{so} > J_o^*$. Em geral, o NFC opera pior que o OLFC [Bertsekas,1976].

I.5. RESTRIÇÕES PROBABILÍSTICAS.

É objetivo, desta seção, discutir o problema (1.3) considerando restrições tanto na variável de controle quanto na variável de saída. A dificuldade, então, fica por conta de como considerar esta última restrição preservando sua factibilidade. Uma maneira, muito adotada para tratar esta dificuldade consiste em não tomá-la explicitamente na formulação, utilizando para isto uma função de penalização associada ao critério [Minoux,1983], com a finalidade de evitar possíveis violações. Uma outra maneira, talvez mais realista de tratar esta restrição consiste em considerá-la em probabilidade. A seguir, investiga-se a utilização desta última alternativa, considerando-se inicialmente a solução do problema por meio do algoritmo de programação dinâmica e em seguida através dos métodos sub-ótimos.

I.5.1. ANÁLISE DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA COM RESTRIÇÃO NA SAÍDA POR PROGRAMAÇÃO DINÂMICA.

Seja a seguinte restrição de saída $y(k+1) \in Y$ incorporada ao problema (1.3). Supondo-se, então, que no instante k , o estado do sistema $x(k)$ é observado (perfeita informação de estado), esta restrição pode ser colocada na forma $g(x(k), u(k), w(k)) \in Y$, conseqüentemente tem-se que:

$$\left. \begin{array}{l} u(k) \in U \\ g(x(k), u(k), w(k)) \in Y \end{array} \right\} \rightarrow u(k) \in U(x(k), w(k)) \quad (1.13)$$

A incerteza em $U(\cdot)$, torna sem sentido o problema (1.3) desde que não é possível garantir uma seqüência de controle admissível. Observe-se, entretanto, que se for conhecida a distribuição de probabilidade de $w(k)$, pode-se manter a restrição de saída no problema, tomando-a em probabilidade. Assim sendo, obtém-se

$$\text{Prob.} \left\{ \begin{array}{l} u(k) \in U \\ g(x(k), u(k), w(k)) \in Y \end{array} \right\} \geq p_0 \quad \left. \right\} \rightarrow u(k) \in \Omega_{p_0}(x(k)) \quad (1.14)$$

onde p_0 denota uma medida de probabilidade fixada pelo projetista e que determina as chances de não violação da restrição.

Portanto, supondo-se conhecida a distribuição de probabilidade de $w(k)$ e tendo fixado o valor de p_0 , então, tão logo o estado $x(k)$ tenha sido observado, o conjunto $\Omega(\cdot)$ pode ser imediatamente avaliado. Para ilustrar isto, considera-se a seguir como exemplo, o caso particular do sistema ser linear-gaussiano.

EXEMPLO:

Seja o sistema descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + w(k) \\ y(k) = c^T x(k) \end{cases} \quad (1.15)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $w(k) \in \mathbb{R}^n$ é por hipótese gaussiana com média $m_w(k)$ e variância finita V_w . A variável de controle adota valores de \mathcal{U} e a variável de saída está restrita ao conjunto finito \mathcal{Y} , definidos como segue:

$$\mathcal{U} = \langle u \in \mathbb{R} \mid \underline{u} \leq u(k) \leq \bar{u} \rangle \quad (1.16)$$

$$\mathcal{Y} = \langle y \in \mathbb{R} \mid \underline{y} \leq y(k) \leq \bar{y} \rangle \quad (1.17)$$

Uma vez que, a perturbação $w(k)$ é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida e o sistema é linear, segue das propriedades de processos gaussianos que as variáveis de estado do sistema são aleatórias com distribuição dada pela média $m_x(k)$ e variância $V_x(k)$. Portanto, para incluir a restrição de saída no problema, uma proposta interessante é considerá-la em probabilidade. O problema é formulado como segue,

$$\text{Min}_{u(k)} E_{w(k)} \left\{ f_N(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x(k), u(k)) \right\}$$

sujeito à

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + w(k) \quad (1.18)$$

$$y(k) = c^T x(k)$$

$$u(k) \in \mathcal{U}$$

$$\text{Prob.}(c^T x(k+1) \in \mathcal{Y}) \geq p_0$$

É interessante observar, que fixado um valor para p_0 , o conjunto de restrições de saída fica automaticamente determinado, uma vez que a função distribuição de probabilidade do estado é conhecida. Para verificar este fato, defini-se inicialmente o seguinte conjunto de soluções admissíveis $\Omega(x(k))$, para o qual deve satisfazer toda lei de controle gerada em (1.18). Para determinar este conjunto o seguinte procedimento será adotado:

Considere-se inicialmente o seguinte Lema,

LEMA :

Sejam α e β medidas de probabilidades dadas e

$$\begin{cases} \text{Prob.} (c^T x(k+1) \geq \underline{y}) \geq \alpha \\ \text{Prob.} (c^T x(k+1) \leq \bar{y}) \geq \beta \end{cases} \quad (1.19)$$

Então,

$$\text{Prob.} (c^T x(k+1) \in \mathcal{Y}) \geq p_0, \text{ onde } p_0 = \alpha + \beta - 1$$

Prova :

Da teoria da probabilidade tem-se que,

$$\begin{aligned} \text{Prob.} (c^T x(k+1) \in \mathcal{Y}) &= \text{Prob.} (\underline{y} \leq c^T x(k+1) \leq \bar{y}) \\ &= \text{Prob.} (c^T x(k+1) \leq \bar{y}) - \text{Prob.} (c^T x(k+1) < \underline{y}) \\ &= \text{Prob.} (c^T x(k+1) \leq \bar{y}) + \text{Prob.} (c^T x(k+1) \geq \underline{y}) - 1 \end{aligned}$$

segue, então, que substituindo (1.19) no resultado acima, resulta $\text{Prob.} (c^T x(k+1) \in \mathcal{Y}) \geq \alpha + \beta - 1$, conseqüentemente $p_0 = \alpha + \beta - 1$. \square

Observe-se que p_0 é uma função linear das medidas α e β . Supondo-se, então, que seja fixado $\beta = \alpha$, tem-se que $p_0 = 2\alpha - 1$.

Assim sendo, desde que $p_0 \in [0,1)$, o valor de α deverá sempre satisfazer o intervalo $[1/2,1)$, como ilustra figura 1.1.

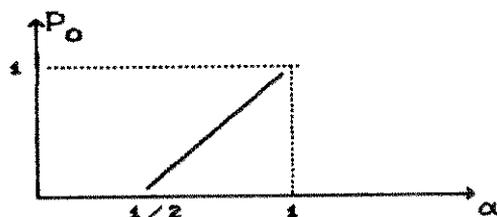


Fig.1.1. Relação linear entre as medidas de probabilidade p_0 e α .

Utilizando as desigualdades (1.19) pode-se escrever equivalentemente que:

$$\begin{cases} \text{Prob.} \langle A_c x(k) + b_c u(k) + c^T w(k) \geq \underline{y} \rangle \geq \alpha \\ \text{Prob.} \langle A_c x(k) + b_c u(k) + c^T w(k) \leq \bar{y} \rangle \geq \alpha \end{cases} \quad (1.20)$$

desde que, supõe-se conhecida a distribuição de probabilidade de $w(k)$, pode-se reescrever (1.20) como segue,

$$1 - F_{c^T v} [\underline{y} - A_c x(k) - b_c u(k)] \geq \alpha \quad (1.21)$$

$$F_{c^T v} [\bar{y} - A_c x(k) - b_c u(k)] \geq \alpha \quad (1.22)$$

onde $A_c = c^T A$ e $b_c = c^T b \in \mathbb{R}$. Sendo $F_{c^T v}$ uma função bijetora pode-se utilizar este fato para determinar as seguintes desigualdades com respeito a variável de controle:

$$u(k) \geq (1/b_c) \left\{ -A_c x(k) + [\underline{y} + F_{c^T v}^{-1}(\alpha)] \right\} = \underline{u}_{\alpha,k} \quad (1.23)$$

$$u(k) \leq (1/b_c) \left\{ -A_c x(k) + [\bar{y} - F_{c^T v}^{-1}(\alpha)] \right\} = \bar{u}_{\alpha,k} \quad (1.24)$$

válidas para $b_c > 0$. Para o caso de $b_c < 0$, deve-se inverter o sentido das desigualdades. Não existe interesse aqui pelo caso de $b_c = 0$.

Denotando-se $\underline{u}(x(k), \alpha)$ e $\bar{u}(x(k), \alpha)$ como os limitantes inferior e superior, respectivamente, de $\Omega_\alpha(x(k))$. É possível então escreve-los utilizando (1.16), (1.23) e (1.24) como segue:

$$\begin{cases} \underline{u}(x(k), \alpha) = \text{MAX} [\underline{u} , \underline{u}_{\alpha, k}] \\ \bar{u}(x(k), \alpha) = \text{MIN} [\bar{u} , \bar{u}_{\alpha, k}] \end{cases} \quad (1.25)$$

Uma importante propriedade deste conjunto é a seguinte:

$$\Omega_{\alpha_2}(x(k)) \subseteq \Omega_{\alpha_1}(x(k)) , \text{ para } \alpha_2 \geq \alpha_1 \quad (1.26)$$

isto é, quanto mais aumentamos α , mais restritivo fica Ω_α .

Empregando, então, o algoritmo de programação dinâmica para resolver o problema (1.18), obtem-se:

$$\begin{aligned} J_N(x(N)) &= f_N(x(N)) \\ J_k(x(k)) &= \text{Min}_{u(k) \in \Omega_\alpha} \text{E}_{v(k)} \left\{ f_k(x(k), u(k)) + J_{k+1}(x(k+1)) \right\} \\ & \quad k=0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.27)$$

A lei de controle ótima (malha fechada), obtida da aplicação de (1.27), é dada por:

$$u^*(k) = \phi_k(x(k), \alpha) \quad (1.28)$$

e depende do valor fixado para α . O valor ótimo do custo funcional também depende de α , sendo dado por $J^* = J_0(x(0), \alpha)$.

As dificuldades computacionais, discutidas na seção I.3, inviabilizam a aplicação de (1.27) em problemas multidimensionais. Além disto, nesta formulação, deve-se acrescentar uma outra dificuldade relacionada com a seleção da medida de probabilidade. Não existe um procedimento padrão para escolha desta medida, portanto, ela dependerá da experiência do projetista. É importante acrescentar que a escolha inadequada desta medida pode tornar o problema infactível.

I.5.2. ANÁLISE DOS MÉTODOS SUB-ÓTIMOS PARA O PROBLEMA COM RESTRIÇÃO DE SAÍDA.

Seja uma sequência de controle obtida a partir da solução de um problema determinístico, o qual é estabelecido considerando a seguinte observação: para qualquer instante de operação do sistema $k \in [0, N-1]$, o estado do sistema é observado (perfeita informação de estado) e uma sequência de controle $\{u(i), i \in [k, N-1]\}$ é determinada com a imposição de que nenhuma outra medida será permitida. Este procedimento, dito em malha aberta, constitui a idéia chave de implementação de muitos algoritmos sub-ótimos, dentre os quais se incluem os investigados na seção I.4.

Considere-se que, a variável de saída esteja sujeita a satisfazer uma restrição probabilística. Desde que, neste tipo de procedimento toda medida futura deve ser ignorada, torna-se importante o conhecimento da função distribuição de probabilidade da saída $F_{y,k}$, para cada instante de operação do sistema, de tal modo a poder avaliar a restrição probabilística associada.

Calcular a função $F_{y,k}$, dependendo das características do sistema (p. ex., não linearidades, etc.) pode ser uma tarefa muito complicada. No caso particular do sistema ser linear-gaussiano (ver exemplo a seguir) este cálculo é muito simples.

EXEMPLO

Considere-se o sistema linear, descrito por (1.15), onde a perturbação $w(k)$ é do tipo gaussiana com média $m_w(k)$ e variância finita $V_w > 0$. Supondo-se, então, que o estado é medido exatamente, todo o efeito estocástico do sistema será dependente da distribuição de $w(k)$. Como decorrência da linearidade da dinâmica do sistema, a variável de estado observada, no instante k , será também gaussiana com média e variância dadas por $m_x(k)$ e $V_x(k)$, respectivamente. Além disto, o comportamento futuro desta variável poderá ser avaliado considerando para isto, a evolução de seu primeiro e segundos momentos estatísticos, que são facilmente calculados, a partir de (1.15), como segue:

$$\begin{cases} m_x(k+1) = Am_x(k) + bu(k) + m_w(k) \\ V_x(k+1) = AV_x(k)A^T + V_w \end{cases} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.29)$$

com as seguintes condições iniciais: $m_x(0) = x(0)$ e $V_x(0) = 0$.

Uma vez que, (1.29) determina completamente a distribuição de probabilidade do estado $F_{x,k+1}$, decorre então da linearidade do sistema, que a distribuição de probabilidade da variável de saída $F_{y,k}$ pode ser calculada. Assim sendo, a restrição de probabilidade, $\text{Prob. } (y(k+1) \in Y) \geq 2\alpha - 1$, pode ser avaliada, obtendo-se o seguinte conjunto determinístico,

$$Y_k \triangleq \left\{ m_y \mid \underline{y} + F_{y,k}^{-1}(\alpha) \leq m_y(k) \leq \bar{y} - F_{y,k}^{-1}(\alpha) \right\} \quad (1.30)$$

onde $F_{y,k}^{-1}(\cdot)$ denota a função distribuição inversa.

Deve-se observar que, se o estado não for medido exatamente o cálculo da distribuição de estado ficará condicionada às medi-

das realizadas com respeito a entrada e saída do sistema (vide seção I.6). Devido, a natureza linear-gaussiana do sistema a distribuição condicional do estado, pode ser calculada pelo filtro de Kalman (ver Cap. III).

COMENTÁRIO :

Explorando a característica de contar com um sistema constituído por uma dinâmica linear e perturbação gaussiana, Lasserre (1984) propôs um procedimento para reduzir um problema de controle ótimo estocástico linear com restrições nas variáveis de controle e estado (sendo esta última tomada em probabilidade) a um problema determinístico equivalente, preservando as principais características do problema original. A partir desta formulação é possível empregar uma variedade de técnicas de programação matemática determinística, obtendo-se, por conseguinte, uma política ótima em malha-aberta para o problema. No capítulo II, é verificado que, sob certas condições, o problema determinístico associado pode tornar-se infactível. Neste sentido, propõe-se uma estrutura de controle que minimiza o risco disto ocorrer.

I.6. PERFEITA E IMPERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO

Em problemas de controle estocástico é muito importante especificar o tipo de informação disponível ao controlador. Dois enfoques são frequentemente adotados na formulação do problema, a saber: perfeita informação de estado, que utiliza medidas exatas do estado e imperfeita informação de estado, onde o estado não é medido precisamente e em geral está acrescido de incertezas provenientes, por exemplo, do próprio dispositivo de medida.

Antes de se apresentar a formulação do problema segundo estes dois enfoques, considere-se o dispositivo de saída descrito pela seguinte equação:

$$y(k) = h(x(k), v(k)) , \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (1.31)$$

onde $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ denota o vetor de variáveis de saída, que conterá toda a informação disponível sobre o estado $x(k)$. A incerteza neste dispositivo é denotada através de uma variável aleatória, $v(k) \in \mathbb{R}^p$.

I.6.1. PERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO

Se a saída do sistema, para cada instante de tempo k (com $v(k) = 0$), fornece valores exatos do vetor de estado, ou seja, $y(k) = x(k)$, tem-se definida uma situação de perfeita informação de estado. Neste caso o problema de controle estocástico (1.3), com restrição de saída tomada em probabilidade, é formulado como segue:

$$\text{Min}_{u(k)} E_{v(k)} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x(k), u(k)) + f_N(x(N)) \right\}$$

sujeito a

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), w(k)) , \quad k \in [0, N-1] \quad (1.32)$$

$$y(k) = x(k)$$

$$u(k) \in U$$

$$\text{Prob.} \{ y(k+1) \in Y \} \geq 2\alpha - 1$$

onde $\alpha \in [1/2, 1)$, como discutido na seção anterior.

I.6.2. IMPERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO

É comum em problemas práticos deparar-se com sistemas, onde as variáveis de estado não podem ser medidas exatamente. Para

representar este tipo de sistema é comum considerar-se a equação de saída perturbada, isto é, $v(k) \neq 0$. Assim sendo, a cada instante de tempo, o dispositivo de saída incorpora ruído as medidas de estado. Neste enfoque, portanto, o controlador deixa de receber informações exatas sobre o estado, passando então a ser função de um conjunto de medidas que contem todas as observações efetuadas junto a saída do sistema, até o instante presente de operação, e as variáveis de controle já executadas. Define-se então, para cada instante de tempo, o seguinte conjunto de medidas:

$$I_k^T = [u(0), u(1), \dots, u(k-1), y(0), y(1), \dots, y(k)] \quad (1.33)$$

onde $I_k \in \{ (u, y) : u(k) \in U \text{ e } y(k) \in Y \}$ é denominado de vetor de informações disponíveis. A partir desta definição, pode-se formular o problema estocástico, como segue:

$$\text{Min}_{u(k), v(k)} E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x(k), u(k)) + f_N(x(N)) \mid I_k \right\}$$

sujeito a

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), w(k)) \quad , \quad k \in [0, N-1] \quad (1.34)$$

$$y(k) = h(x(k), v(k))$$

$$u(k) \in U$$

$$\text{Prob.} \{ y(k+1) \in Y \mid I_k \} \geq 2\alpha - 1$$

g

onde $\alpha \in [1/2, 1)$ é fixado pelo projetista. A expressão $E(\cdot \mid I_k)$ indica a esperança do custo funcional condicionada a I_k , com o seu valor mínimo sendo tomado em relação a todas as estratégias de controle que expressam $u(k)$ como função de I_k .

É claro que a solução do problema segundo este enfoque é

muito mais complicada do que sob o enfoque de perfeita informação de estado. Pode-se assinalar como sendo uma das causas desta dificuldade, o fato da dimensão do vetor I_k crescer a medida que o tempo k cresce (ver Cap. III).

I.7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO.

Com objetivo de estudar numericamente os aspectos teóricos da formulação discutida em I.5, desenvolveu-se um programa em linguagem Fortran para tratar um problema simplificado de controle ótimo de geração hidroelétrica de uma dada usina do sistema nacional, utilizando o algoritmo de programação dinâmica. Este problema, considerado num horizonte de planejamento a longo prazo, é essencialmente estocástico (ver Cap. IV) e o modelo dinâmico do sistema é linear com restrições operativas tanto para a saída quanto para o controle, o que o torna interessante como exemplo de aplicação neste trabalho.

O modelo simplificado de uma dada unidade hidroelétrica, é composto de um reservatório, cuja a dinâmica é dada por:
[Halliburton,1984]

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) - u(k) + w(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases} \quad (1.35)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}$ é o volume de água armazenado ($10^9 m^3$); $u(k) \in \mathbb{R}$ é o volume de água turbinado ($10^9 m^3$); $w(k) \in \mathbb{R}$ é o aporte independente de água ($10^9 m^3$), sendo uma variável aleatória gaussiana com média $m_w(k)$ e variância invariante V_w . A variável $y(k) \in \mathbb{R}$ denota a variável de saída, que para este exemplo, observa o estado exatamente.

Considerando, a formulação apresentada na seção I.5, tem-se que o planejamento ótimo, a longo prazo, de geração de energia desta unidade, consiste, então, da determinação de uma política

ótima de controle $\{u^*(1), u^*(2), \dots, u^*(N-1)\}$ que resolva o seguinte problema estocástico (ver Cap. IV):

$$\text{Max}_{u(k), v(k)} E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} u(k) h(x(k)) \right\} \quad (1.36)$$

sujeito a (1.35) e satisfazendo as seguintes restrições de operação:

$$\left. \begin{array}{l} u(k) \in U \\ \text{Prob.} \langle x(k+1) \in Y \rangle \geq 2\alpha - 1 \end{array} \right\} \rightarrow \Omega_{\alpha}(x(k)) \quad (1.37)$$

onde $h(x(k))$ denota a altura de queda de água sendo, em geral, uma função côncava. Segue da seção 1.5.1, que o conjunto $\Omega_{\alpha}(x(k))$, de políticas admissíveis, tem seus limitantes dados por:

$$\begin{aligned} \underline{u}(x(k), \alpha) &= \text{MAX} \langle \underline{u}, [x(k) - (\underline{y} - F_V^{-1}(\alpha))] \rangle \\ \bar{u}(x(k), \alpha) &= \text{MIN} \langle \bar{u}, [x(k) - (\bar{y} + F_V^{-1}(\alpha))] \rangle \end{aligned} \quad (1.38)$$

sendo (\underline{y}, \bar{y}) e (\underline{u}, \bar{u}) os limitantes físicos do reservatório e de turbinagem, respectivamente. A medida de probabilidade α é fixada a priori pelo projetista.

A usina selecionada neste exemplo é a de São Simão, pertencente ao parque hidroelétrico da região Sudeste do país. A tabela 1.1, contém dados referentes as características operacionais desta usina, além de outras informações necessárias para resolver o problema acima.

TABELA 1.1 - Dados do problema

$m_v(k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	4.0	4.5	4.5	3.5	2.5	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.5	3.0
$\sigma_v^{1/2} = 0.65$						$N = 12$						
$\underline{u} = 2$			$\bar{u} = 7$			$\underline{y} = 7$			$\bar{y} = 13$			
$h(x) = (0.65E-2)x + 0.166$												

Utilizando os valores estatísticos conhecidos do ruído $w(k)$ é possível definir um conjunto contável W_k , que conterá os valores que esta variável poderá assumir durante a operação do sistema. Para obtê-lo, procede-se como segue: seja a função densidade de probabilidade de $w(k)$, no instante k , como está ilustrado na figura 1.2.

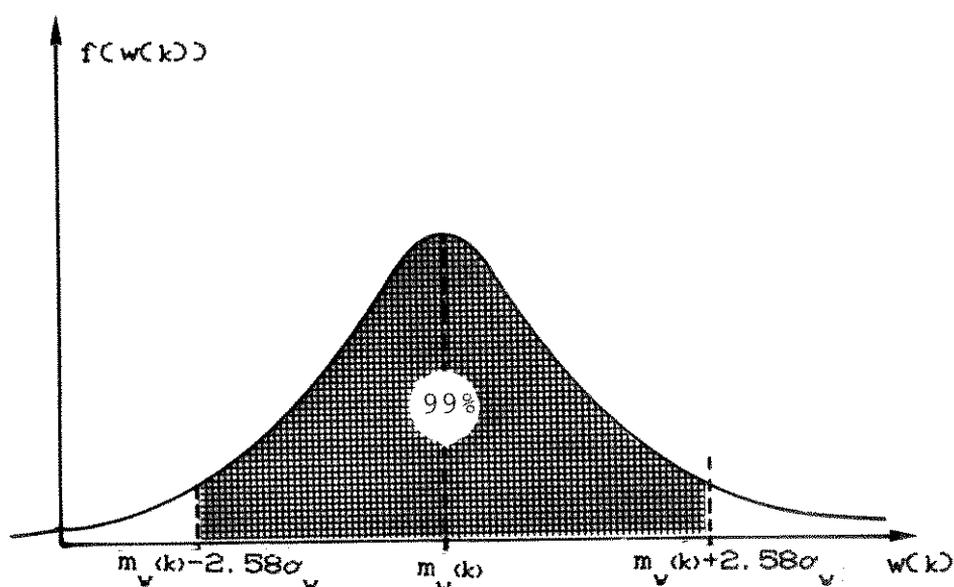


Fig 1.2.: Função densidade de probabilidade da variável w no instante k .

A área hachurada, nesta figura, indica o intervalo de possibilidade de ocorrência desta variável, fixada nesta aplicação em 99%. Consequentemente os limites mínimo e máximo para o conjunto W_k ficam determinados, sendo dados respectivamente por:

$$\begin{cases} \underline{w}(k) = m_v(k) - 2.58 \sigma_v \\ \bar{w}(k) = m_v(k) + 2.58 \sigma_v \end{cases} \quad (1.38)$$

onde $\sigma_v = V_v^{1/2}$, denota o desvio estatístico da variável $w(k)$.

I.7.1. RESULTADOS

Dois casos foram investigados: o primeiro considerando a medida de probabilidade $\alpha = 0.5$ e o segundo fixando α em 0.95. Os resultados são apresentados graficamente, mostrando as trajetórias ótimas de estado e controle obtidas, e que representam, respectivamente, a evolução do reservatório e o turbinamento mês a mês. São também apresentadas as superfícies de controle que representam os espaços das políticas de controle admissíveis, $\Omega_\alpha(\cdot)$, geradas para cada um dos casos. Segue, então, como comentário final uma análise comparativa destes resultados.

CASO 1: $\alpha = 0.5$

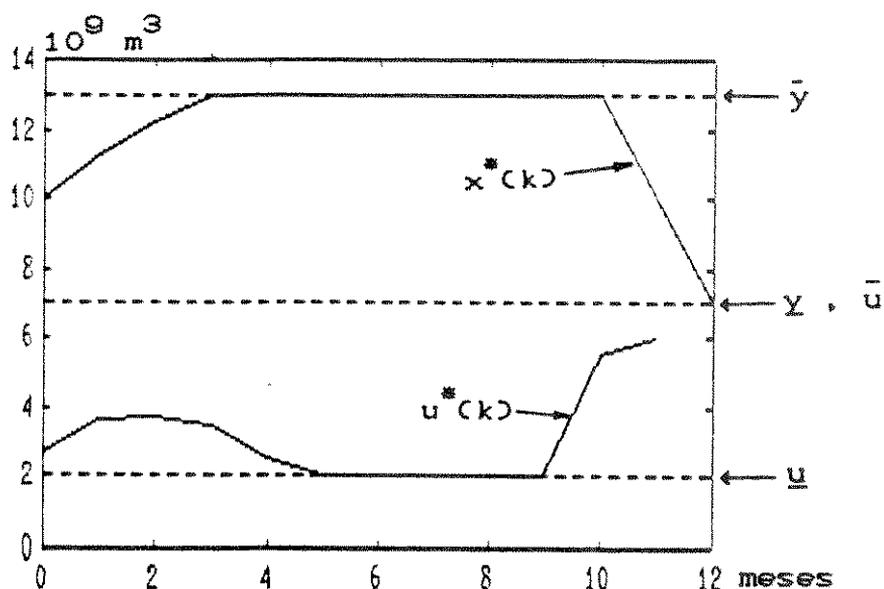


Fig.1.3.: Trajetória ótimas para $\alpha=0.5$

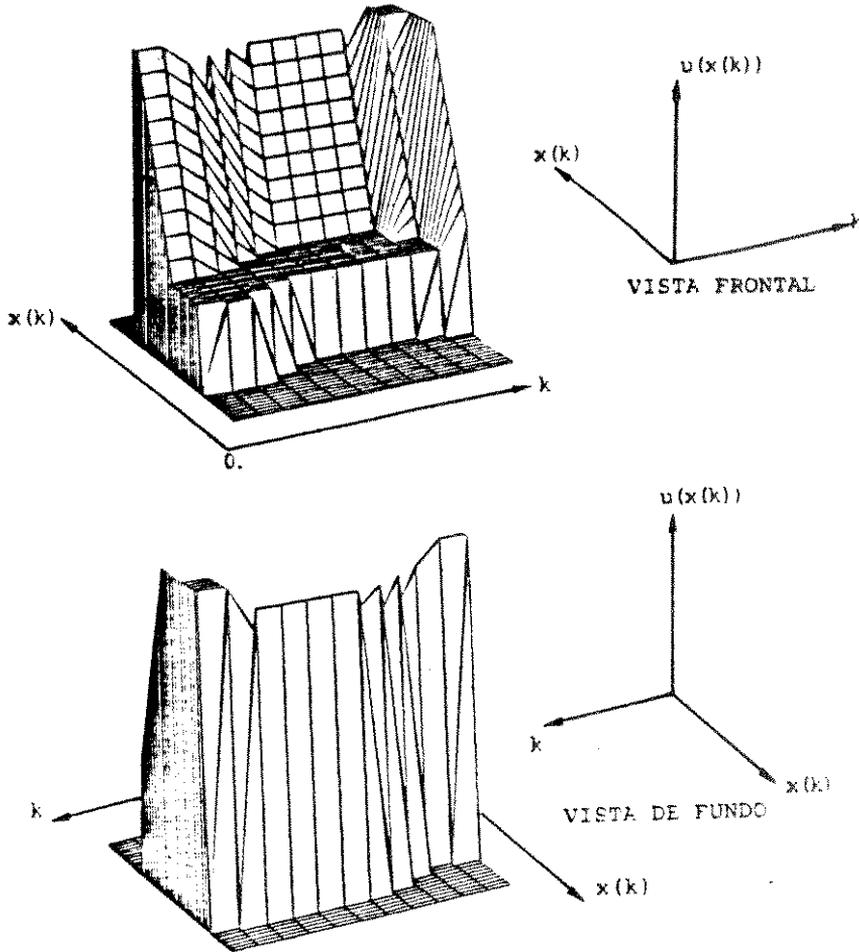


Fig.1.4.: Espaço de controles admissíveis, para $\alpha=0.5$

CASO 2: $\alpha = 0.95$

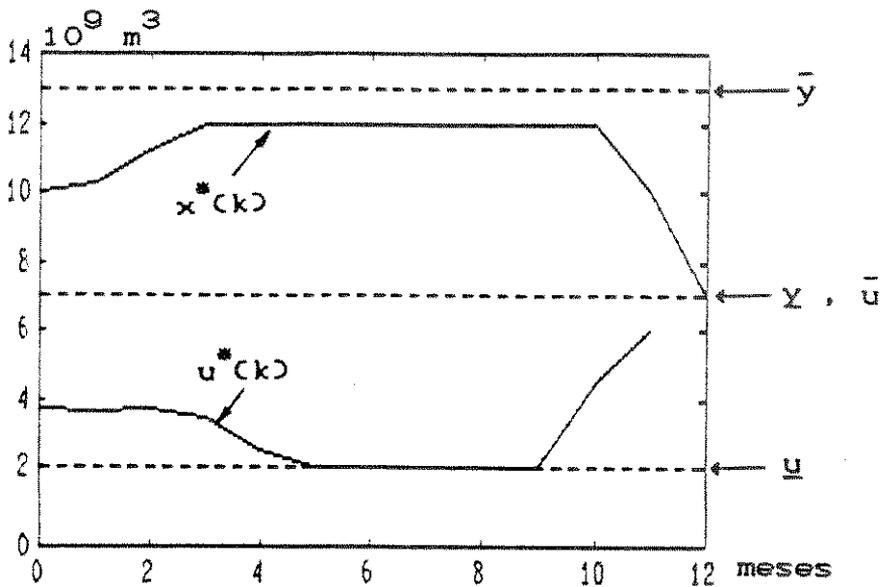


Fig.1.5.: Trajetórias ótimas para $\alpha=0.95$

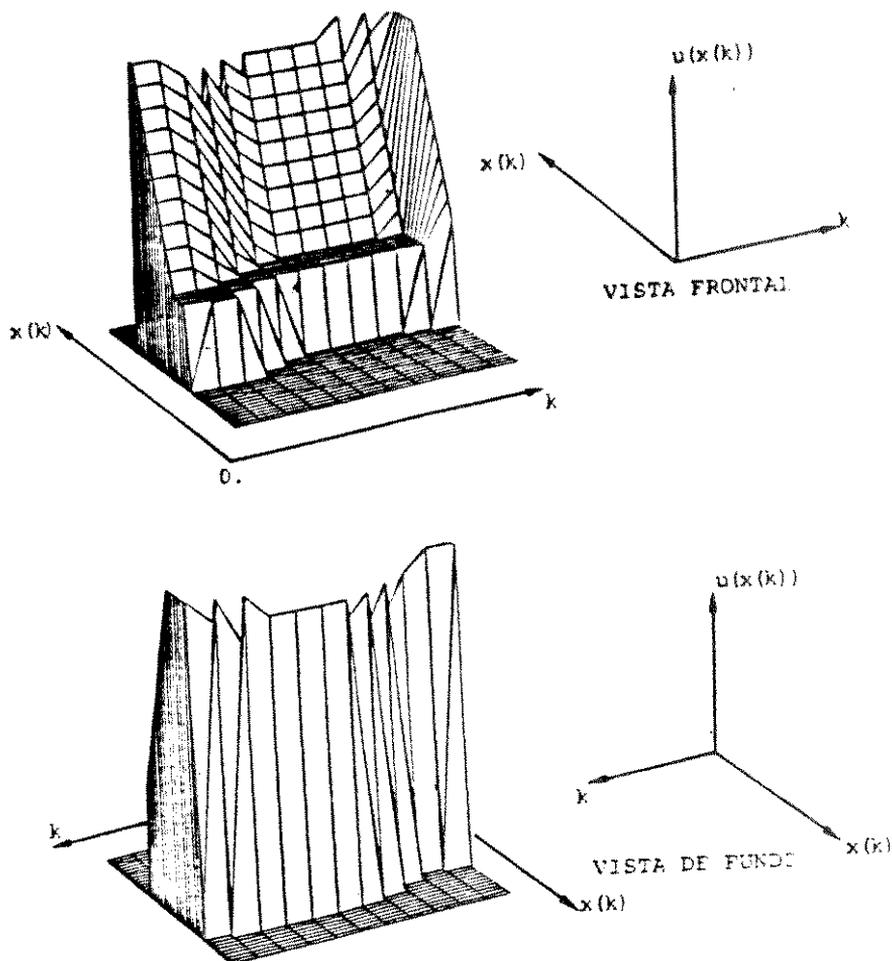


Fig.1.6.: Espaço de controles admissíveis, para $\alpha=0.95$

Análise dos resultados:

A principal característica observada nos resultados obtidos, diz respeito a influência da medida α no comportamento das trajetórias de estado e de controle. A propriedade (1.26), discutida na seção I.4., é também verificada: o espaço de controle obtido para $\alpha = 0.95$ (figura 1.6.) é bem mais restritivo do que aquele obtido para $\alpha = 0.5$ (ver figura 1.4), ou seja, $\Omega_{0.95} < \Omega_{0.5}$. Isto significa, que o sistema torna-se mais conservativo a medida que α aumenta. Pode-se verificar este fato observando-se a evolução do reservatório: para $\alpha = 0.95$, as chances de não violação da restrição de saída são bem maiores que para $\alpha = 0.5$, por consequência, a decisão é de turbinar mais, ver figuras 1.3. e 1.5.

I.8. CONCLUSÃO

A exposição, feita até então, mostra que obter uma política ótima em malha fechada para uma certa classe de problemas estocásticos nem sempre é possível. Alguns pontos que merecem destaques são:

(a) A solução clássica adotadas para problemas estocásticos com restrições na saída e no controle, através do algoritmo de programação dinâmica, não apresenta dificuldades teóricas para ser resolvido. Apresentando, entretanto, dificuldades numéricas para o caso de problemas multidimensionais.

(b) As dificuldades em (a), podem ser contornadas adotando-se procedimentos sub-ótimos. Estes métodos impõem simplificações ao problema original, tornando possível a aplicação de uma variedade de técnicas de otimização, antes não permitidas. Além disso, tais procedimentos permitem reduzir consideravelmente o esforço computacional de armazenamento e cálculo, que constituem em particular, fatores restritivos para aplicação do algoritmo de programação dinâmica.

(c) Uma característica importante a considerar na escolha de um procedimento sub-ótimo é a questão da adaptatividade, isto é, deve-se garantir que a solução sub-ótima é no pior caso igual a solução ótima em malha aberta do problema. Em outras palavras, o controlador sub-ótimo deve utilizar as informações recebidas do sistema (medidas) com vantagem.

(d) A solução do problema estocástico, considerando em probabilidade a restrição no estado, é mais realista que o tratamento clássico comentado na seção I.3. A escolha a priori da medida de probabilidade α , constitui a principal dificuldade neste tipo de formulação.

CAPÍTULO II

PERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO

II.1 INTRODUÇÃO.

Neste capítulo analisa-se a solução em malha aberta de um sistema linear estocástico discreto no tempo com variáveis de saída e de controle sujeitas a restrições tomadas em probabilidade.

Seguindo um resultado recentemente publicado [Lassere,1984] obtém-se uma formulação determinística equivalente para o problema estocástico, a qual preserva suas propriedades estruturais e permite obter uma política ótima em malha aberta.

O problema determinístico associado pode ser infactível e, neste caso, falha no sentido de obter uma política ótima em malha aberta. Esta indesejável característica ocorre devido à natureza das suposições necessárias para definir a formulação equivalente. Isto é, no instante inicial de tempo, o estado é observado (perfeita informação de estado) e é assumido que medidas futuras não serão permitidas. Consequentemente, o controle é essencialmente determinístico. Ocorre, no entanto, que as restrições do problema determinístico dependem fortemente do segundo momento estatístico do estado que evolui sem controle no tempo, isto é, em malha aberta. Sabe-se, em princípio, que os segundos momentos da variável de estado são completamente determinados pela estatística do ruído e do modo em malha aberta do sistema [Bertsekas,1976].

Se o sistema em malha aberta é instável, a variância da saída pode torna-se ilimitada. Como consequência, o problema determinístico pode tornar-se infactível para qualquer grau de violação imposto pelo projetista.

Assim sendo, para se adotar restrições probabilísticas, deve-se modificar o procedimento proposto por Lassere (1984), no sentido de controlar tanto a média quanto a variância do processo [Geromel e Silva F.,1988].

Para superar estas dificuldades, propõe-se uma estratégia de controle que divide o problema estocástico em dois outros, que são resolvidos nos seguintes passos: no Passo 1, resolve-se um problema da variância mínima, estabelecido de tal modo a minimizar o risco de infactibilidade. Com esta garantia, resolve-se, no Passo 2, o problema de determinação das trajetórias médias, seguindo o procedimento proposto por Lasserre (1984).

Por fim, adotando-se um modelo simplificado de uma usina do parque hidroelétrico da região Sudeste do país (o mesmo do capítulo anterior), aplica-se o procedimento proposto para obter uma política ótima de controle de geração de energia. Resultados são fornecidos e comparados com os do capítulo anterior.

II.2. SOLUÇÃO EM MALHA ABERTA DE UM SISTEMA LINEAR ESTOCASTICO

Nesta seção, obtém-se uma formulação determinística equivalente para um problema de controle ótimo linear estocástico, com restrições nas variáveis de saída e controle [Lasserre,1984]. Esta formulação equivalente tem a vantagem de preservar as mesmas propriedades estruturais do problema original. Discute-se a possibilidade do problema determinístico falhar no sentido de fornecer uma política ótima em malha aberta.

II.2.1 REDUÇÃO A UM PROBLEMA DETERMINISTICO EQUIVALENTE

Introduz-se, inicialmente, a notação a ser seguida no transcorrer deste capítulo: seja $z(k) \in \mathbb{R}^n$, um vetor de variáveis aleatórias gaussianas caracterizado pela média $m_z(k)$ e variância $V_z(k)$. A função distribuição de probabilidade do vetor $\Delta z(k) = z(k) - m_z(k)$ é denotada por $F_{z,k}(\cdot)$.

Considere-se o seguinte problema de controle ótimo linear

estocástico, descrito segundo um enfoque de perfeita informação de estado:

$$\text{Min}_{u(k)} E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x(k), u(k)) + f_N(x(N)) \right\}$$

sujeito a

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + w(k), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

$$y(k) = c^T x(k)$$

$$u(k) \in U$$

$$\text{Prob.} (y(k+1) \in Y) \geq 2\alpha - 1, \quad \alpha \in [1/2, 1)$$

e tendo ainda,

$$U \triangleq \{ u \in \mathbb{R} \mid \underline{u} \leq u(k) \leq \bar{u} \}$$

$$Y \triangleq \{ y \in \mathbb{R} \mid \underline{y} \leq y(k) \leq \bar{y} \} \quad (2.2)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}$, $y(k) \in \mathbb{R}$ são as variáveis de estado, de controle e saída, respectivamente. O vetor $w(k)$ representa um ruído gaussiano com média $m_w(k)$ e variância invariante no tempo $V_w(k) \geq 0$.

Dois fatores tornam o processo de redução de (2.1) ao seu equivalente determinístico bastante simples, são eles: a linearidade das equações do sistema e a hipótese de que o ruído $w(k)$ é gaussiano.

a) Transformação do Sistema

Decorre da linearidade de (2.1) e do conhecimento da função distribuição (por hipótese gaussiana) do ruído $w(k)$ que as variáveis de estado e saída são igualmente aleatórias e gaussianas com médias e variâncias dadas respectivamente por $(m_x(k),$

$V_x(k)$ e $(m_y(k), V_y(k))$. Assim sendo, as variáveis do sistema podem ser decompostas da seguinte maneira,

$$\begin{cases} x(k) = m_x(k) + \delta x(k) \\ y(k) = m_y(k) + \delta y(k) \\ w(k) = m_w(k) + \delta w(k) \end{cases} \quad (2.3)$$

como consequência, o comportamento médio do sistema pode ser avaliado, em cada instante k , através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} m_x(k+1) &= A m_x(k) + b m_u(k) + m_w(k) \\ m_y(k) &= c^T m_x(k) \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde para efeito de notação, considera-se que $u(k) = m_u(k)$, com $\delta u(k) = 0$.

b) Transformação da Restrição Probabilística da Saída

Seja a restrição probabilística, dada em (2.1),

$$\text{Prob.} \{ y(k+1) \in Y \} \geq 2\alpha - 1 \quad (2.5)$$

uma vez calculada a função distribuição de probabilidade da variável de saída $F_{y,k}(\cdot)$, pode-se adotar o procedimento apresentado na seção I.5.2, para obter o seguinte conjunto $Y_{\alpha,k}$:

$$Y_{\alpha,k} \triangleq \{ m_y(k) \mid \underline{y} + F_{y,k}^{-1}(\alpha) \leq m_y(k) \leq \bar{y} - F_{y,k}^{-1}(\alpha) \} \quad (2.6)$$

onde F^{-1} denota a função de probabilidade inversa.

c) Transformação do Custo Funcional.

A partir da função distribuição de probabilidade $F_{x,k}$, pode-se avaliar a esperança matemática do custo funcional de (2.1), como segue:

$$\begin{aligned}
 E_x \left\{ f_k(x(k), u(k)) \right\} &= E_x \left\{ f_k(m_x(k) + \delta x(k), m_u(k)) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(m_x(k) + \tau, m_u(k)) \rho_x(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(m_x(k) + \tau, m_u(k)) dF_{x,k}(\cdot) \\
 &= F_k(m_x(k), m_u(k)) \qquad (2.7)
 \end{aligned}$$

onde $\rho_x(\tau) = \frac{d}{d\tau} F_{x,k}(\cdot)$ representa a função densidade de probabilidade de $x(k)$ ou igualmente de $\delta x(k)$.

De modo análogo, tem-se que

$$E_x \left\{ f_N(x(N)) \right\} = F_N(m_x(N)) \qquad (2.8)$$

d) O Problema Determinístico Equivalente.

Com os resultados das transformações apresentadas em a), b) e c) pode-se formular o problema determinístico associado, como segue:

$$\text{Min}_{m_u(k)} \sum_{k=0}^{N-1} F_k(m_x(k), m_u(k)) + F_N(m_x(N))$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
m_x(k+1) &= Am_x(k) + bm_u(k) + m_v(k), \quad m_x(0) = x(0) \\
m_y(k) &= c^T m_x(k) \\
c^T m_x(k+1) &\in Y_{\alpha, k+1} \\
m_u(k) &\in U \\
k &\in [0, N-1]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Pode-se dizer que (2.9), mantem as mesmas propriedades estruturais de (2.1), ou seja, [Lassere, 1984]:

- conserva a mesma dinâmica, excetuando-se o fato dela ser determinística;
- mantem a linearidade das restrições;
- e preserva a convexidade do custo funcional.

Esta última propriedade pode ser facilmente verificada. Para isto considere-se a seguinte função $F_k(z) = E\langle f_k(z+\delta z) \rangle$, onde δz é um vetor aleatório no \mathbb{R}^n . Se $f_k(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, segue que para todo $z^1, z^2 \in \mathbb{R}^n$ e um escalar μ , com $0 \leq \mu \leq 1$, tal que,

$$\begin{aligned}
F_k(\mu z^1 + (1-\mu)z^2) &= E\langle f_k(\mu z^1 + (1-\mu)z^2 + \delta z) \rangle \\
&= E\langle f_k(\mu z^1 + (1-\mu)z^2 + \mu\delta z + (1-\mu)\delta z) \rangle \\
&= E\langle f_k(\mu(z^1 + \delta z) + (1-\mu)(z^2 + \delta z)) \rangle
\end{aligned} \tag{2.10}$$

decorre, então, do fato de $f_k(\cdot)$ ser convexa e do operador esperança ser linear e finito para todo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
F_k(\mu z^1 + (1-\mu)z^2) &\leq E\langle \mu f_k(z^1 + \delta z) + (1-\mu) f_k(z^2 + \delta z) \rangle \\
&\leq \mu E\langle f_k(z^1 + \delta z) \rangle + (1-\mu) E\langle f_k(z^2 + \delta z) \rangle
\end{aligned}$$

$$\leq \mu F_k(z^1) + (1-\mu)F_k(z^2) \quad (2.11)$$

o que mostra que $F_k(\cdot)$ é também uma função convexa.

Os fatores acima mencionados, tornam o problema (2.9) muito atrativo, para aplicações de controle, desde que é possível resolvê-lo de modo eficiente, independentemente de qual possa ser sua dimensão. Além disto, uma variedade de técnicas clássicas de otimização podem ser utilizadas em sua solução.

II.2.2. SOLUÇÃO EM MALHA ABERTA DO PROBLEMA DETERMINÍSTICO

Uma solução em malha aberta para o problema estocástico (2.1), pode ser encontrada através do seguinte procedimento: no instante inicial de operação do sistema, $k = 0$, o estado do sistema é observado e é assumido que medidas futuras não serão permitidas. Consequentemente a sequência de controle ($m_u(k)$, $k = 0, \dots, N-1$), gerada pelo problema (2.9) é tida como essencialmente determinística, ou seja, em malha aberta. A figura 2.1 ilustra de maneira esquemática este tipo de procedimento.

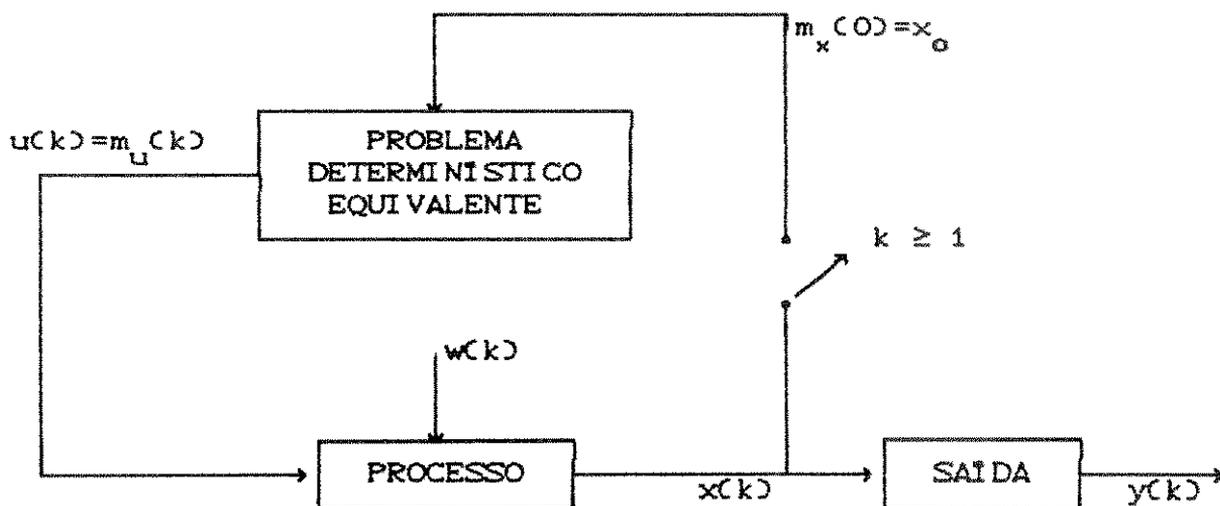


Fig.2.1. - Estratégia de controle em malha aberta

É possível mostrar que o problema determinístico (2.9) pode falhar, no sentido de fornecer uma política de controle em malha aberta. Esta indesejável característica, ocorre em virtude da natureza das suposições necessárias para definir esta formulação equivalente. Isto é, sendo a variável de controle do sistema essencialmente determinística, ela não afeta o segundo momento estatístico da variável de estado, que assim pode evoluir sem controle e desta forma inviabilizar a restrição (2.6).

Para verificar o fato acima, analisa-se inicialmente a influência que a medida de probabilidade α , selecionada pelo projetista, tem sobre os limitantes do espaço de restrição de saída $\mathcal{Y}_{\alpha,k}$. De imediato, duas situações podem ocorrer:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Se } 1/2 < \alpha < 1 & \rightarrow \mathcal{Y}_{\alpha,k} \subset \mathcal{Y} \\ \text{Se } \alpha = 1/2 & \rightarrow \mathcal{Y}_{\alpha,k} \equiv \mathcal{Y} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

De (2.12) conclui-se que aumentar o valor de α , significa tornar mais restritivo o conjunto $\mathcal{Y}_{\alpha,k}$, dado em (2.6). Isto ocorre, em virtude da função distribuição inversa $F_{y,k}^{-1}$ crescer à medida que α cresce. Neste sentido, sérias dificuldades podem vir a ocorrer se para o valor de α fixado, o conjunto $\mathcal{Y}_{\alpha,k}$ ficar tão restrito a ponto de tornar-se vazio, isto é, $\mathcal{Y}_{\alpha,k} \equiv \emptyset$. Isto, sem dúvida, ocorrerá se, para algum $k \in [0, N-1]$, os limitantes de $\mathcal{Y}_{\alpha,k}$ cruzarem-se, ou seja,

$$\underline{y} + F_{y,k}^{-1}(\alpha) > \bar{y} - F_{y,k}^{-1}(\alpha) \quad (2.13)$$

implicando, por conseguinte, em

$$\alpha > F_{y,k}(\Delta y/2) \quad (2.14)$$

onde $\Delta y = \bar{y} - y$. A desigualdade (2.14), portanto, indica uma condição de infactibilidade para o problema (2.9).

Investiga-se, agora, sob quais circunstâncias este efeito indesejável poderá acontecer. Considere-se então a função distribuição $F_{y,k}(\Delta y/2)$, que sendo gaussiana, tem seu comportamento fortemente dependente do segundo momento estatístico $V_y(k)$. Desde que, o sistema opera em malha aberta, a lei de controle é determinística e assim nenhum efeito tem sobre a variância do estado. Consequentemente, a variância da saída evolui livremente, segundo:

$$V_y(k) = c^T V_x(k) c \quad (2.15)$$

com

$$\begin{cases} V_x(k+1) = A V_x(k) A^T + V_v & k = 0, \dots, N-1 \\ V_x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

É fácil verificar que como (2.16) cresce ao longo do tempo, a variância da saída também crescerá, ou seja, $V_y(k+1) \geq V_y(k)$, $\forall k \geq 0$. Tem-se então que o pior caso para (2.14), em termos de projeto, ocorrerá para $k = N$, isto é,

$$\alpha > \min_k F_{y,k}(\Delta y/2) = F_{y,N}(\Delta y/2) \quad (2.17)$$

esta desigualdade permite concluir que em muitos casos (2.9) pode tornar-se infactível. Se, por exemplo, o sistema em malha aberta for instável e o par (A, c) observável, ocorrerá que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = \infty \quad (2.18)$$

consequentemente o lado direito de (2.17) tende para $1/2$ (dependendo do valor de N), o que conduz a infactibilidade de (2.9), para $\forall \alpha > 1/2$ fixado pelo projetista.

Na seção seguinte, propõe-se um método que generaliza o procedimento apresentado por Lassere (1984).

II.3. ESTRUTURA DE CONTROLE PROPOSTA

Com objetivo de reduzir o risco de infactibilidade do problema determinístico associado, propõe-se uma estrutura de controle parcialmente em malha fechada, de modo a controlar tanto a média quanto a variância do processo [Silva F. e Geromel, 1988].

Este procedimento divide o problema estocástico em dois outros problemas, que são resolvidos nos seguintes passos: no Passo 1, um problema de variância mínima generalizado é definido de tal modo a fornecer uma política de controle em malha fechada e tem a propriedade de maximizar a probabilidade das variáveis satisfazerem certas restrições físicas. No Passo 2, determina-se as trajetórias médias ótimas, em malha aberta, do problema determinístico equivalente.

II.3.1 ASPECTOS TEÓRICOS DO PROBLEMA DA VARIANCIA (PASSO 1).

Uma vez que, o Passo 1 deste procedimento requer a introdução de realimentação no sistema, a variável de controle antes tida como essencialmente determinística, passa a ser uma variável aleatória.

De modo a preservar a natureza linear-gaussiana do sistema, propõe-se que a estrutura de realimentação seja linear. Assim sendo, a variável de controle terá uma distribuição de probabilidade gaussiana com média $m_u(k)$ e variância $V_u(k)$.

Uma consequência imediata deste fato, é que $u(k) \in U$ deixa de fazer sentido, isto significa que para garantir a factibilidade da restrição de controle torna-se necessária tomá-la igualmente em probabilidade, ou seja,

$$\text{Prob.} \langle u(k) \in U \rangle \geq 2\beta - 1 \quad (2.19)$$

onde $\beta \in [1/2, 1)$ é um valor fixado pelo projetista.

Assim sendo, a variável de controle, pode ser decomposta como segue:

$$u(k) = m_u(k) + \delta u(k) \quad (2.20)$$

onde $\delta u(k) \sim N(0, V_u^{1/2}(k))$. Nota-se ainda, que de modo similar a (2.6), pode-se definir o seguinte conjunto:

$$U_{\beta,k} \triangleq \left\{ m_u(k) \mid \underline{u} + F_{u,k}^{-1}(\beta) \leq m_u(k) \leq \bar{u} - F_{u,k}^{-1}(\beta) \right\} \quad (2.21)$$

Definindo $\Delta u \triangleq \bar{u} - \underline{u}$, se para algum $k \geq 0$, ocorrer $\beta > F_{u,k}(\Delta u/2)$ então $U_{\beta,k} \equiv \emptyset$. Em analogia a (2.17), o pior caso aqui ocorre para $k = N-1$.

Conclui-se, então, que se $\Upsilon_{\alpha,k+1}$ e/ou $U_{\beta,k}$ são conjuntos vazios para algum $k \in [0, N-1]$, o problema determinístico torna-se infactível, uma vez que,

$$(\alpha + \beta) > F_{y,N}(\Delta y/2) + F_{u,N-1}(\Delta u/2) \quad (2.22)$$

O lado direito de (2.22) pode ser usado como uma medida de infactibilidade de (2.9). O ganho de realimentação, proposto a

seguir, deve maximizá-lo.

Uma vez que, as variâncias de saída e controle afetam o desempenho do sistema, podendo levar a ocorrência de (2.22), deve-se propor uma lei de controle em malha fechada capaz de minimizar este risco. O tipo de controlador a ser empregado, neste caso, deve satisfazer dois requisitos importantes, a saber:

a) ter um ganho linear, de modo a preservar as propriedades estruturais do problema (vide seção II.2);

b) ser capaz de minimizar a combinação linear das variâncias de saída e controle.

O problema de variância mínima ponderado, muito empregado em problemas de identificação e controle [Clark, Cope e Gawthrop, 1975] é aqui proposto, por satisfazer os requisitos acima citados. Sua formulação é apresentada a seguir.

Seja o sistema, em estudo, descrito em termos do desvio de suas variáveis reais com respeito a suas respectivas médias,

$$\begin{aligned}\delta x(k+1) &= A\delta x(k) + b\delta u(k) + \delta w(k) \\ \delta y(k) &= c^T \delta x(k)\end{aligned}\tag{2.23}$$

deseja-se, então, obter uma lei de controle, que permita minimizar o seguinte critério:

$$E \left\{ \delta y(k+1)^2 + \lambda \delta u(k)^2 \right\}\tag{2.24}$$

quando sujeito a (2.23). Note-se que o parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}_+$, que pondera a variável de controle, representa o termo de compromisso entre as variâncias das variáveis envolvidas.

Para resolver (2.24), desloca-se inicialmente a equação de saída de 1-passo à frente, ou seja,

$$\delta y(k+1) = c^T A \delta x(k) + \langle c, b \rangle \delta u(k) + c^T \delta w(k) \quad (2.25)$$

onde $\langle c, b \rangle \stackrel{\Delta}{=} c^T b$. Em seguida, substituindo (2.25) em (2.24) e assumindo-se as seguintes hipóteses : $E\{\delta x(k)\delta w(k)\} = E\{\delta u(k)\delta w(k)\} = 0$, o problema fica reduzido a:

$$\text{Min}_{\delta u(k)} \left\{ c^T A \delta x(k) \delta x(k)^T A^T c + 2\langle c, b \rangle c^T A \delta x(k) \delta u(k) + [\lambda + \langle c, b \rangle^2] \delta u(k)^2 + c^T V_v c \right\} \quad (2.26)$$

cuja solução é imediata, fornecendo uma lei de controle em malha fechada, dada simplesmente por:

$$\delta u(k) = -G(\lambda) \delta x(k) \quad (2.27)$$

com

$$G(\lambda) = \frac{\langle c, b \rangle}{\lambda + \langle c, b \rangle^2} c^T A \quad (2.28)$$

representando o ganho do sistema em malha fechada, sendo função do valor de λ .

Investiga-se, a partir de então, a influência de λ sobre as variâncias do controle e da saída. Para isto, procede-se substituindo (2.27) em (2.23), obtendo-se a equação que descreve o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada, ou seja,

$$\delta x(k+1) = A_\lambda \delta x(k) + \delta w(k) \quad (2.29)$$

onde $A_\lambda = A - bG(\lambda)$. Conclui-se que, o parametro λ influencia a estabilidade do sistema, uma vez que ele altera o posicionamento dos autovalores do sistema em malha fechada. Assim sendo, mesmo que o sistema seja instável, seu comportamento em malha fechada poderá ser estável.

A partir de (2.29), pode-se obter a propagação da variância do estado, que é dada por:

$$V_x(k+1) = A_\lambda V_x(k) A_\lambda^T + V_v \quad (2.30)$$

com condição inicial $V_x(0) = 0$. Segue, então que, tanto a variância de controle, $V_u(k) = G(\lambda) V_x(k) G(\lambda)^T$, quanto a variância de saída, $V_y(k) = c^T V_x(k) c$, são prontamente calculadas.

É interessante observar, que o problema (2.24) permite determinar o lugar geométrico de todas as possíveis variâncias de saída e controle, do sistema em malha fechada, controladas pelo ganho de realimentação (2.28). Em especial, para $k = N-1$ (instante onde existem as maiores chances de ocorrência de (2.22)), este lugar geométrico é dado pelo seguinte conjunto,

$$\Gamma_N \triangleq \left\{ (\theta, \gamma) \mid \theta = V_y(N) \text{ e } \gamma = V_u(N-1), \lambda \in \mathbb{R}_+ \right\} \quad (2.31)$$

geometricamente Γ_N é ilustrado pela figura 2.2.

Esta solução mostra que $V_y(N)$ decresce somente se $V_u(N)$ crescer e vice-versa. O parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}_+$ pode ser interpretado como um compromisso entre as variâncias de saída e de controle e deve ser determinado tendo em vista que os intervalos Δy e Δu dos conjuntos \mathcal{Y} e \mathcal{U} podem ser completamente diferentes.

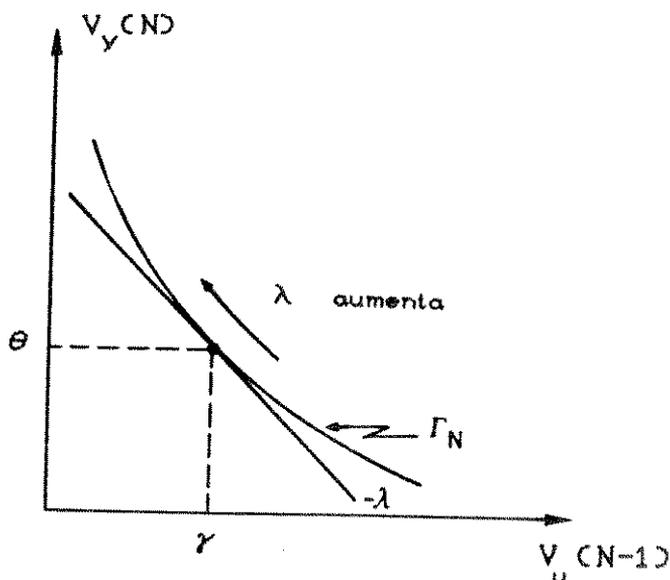


Fig. 2.2. - Interpretação geométrica de Γ_N

Tendo determinado o conjunto Γ_N , é possível determinar um par (θ, γ) que maximize o lado direito de (2.22). Com este objetivo procede-se como segue:

Associado a qualquer par $(\theta, \gamma) \in \Gamma_N$ define-se as seguintes funções,

$$\begin{aligned} v_y(\theta) &\triangleq F_{y,N}(\Delta y/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta y/2\sqrt{\theta}} \exp(-\tau^2/2) d\tau \end{aligned} \quad (2.32)$$

e $v_u(\gamma) = F_{u,N-1}(\Delta u/2)$. Consequentemente, usando o ganho de realimentação parametrizado (2.28), o valor máximo para o lado direito de (2.22) é obtido para $\lambda = \lambda^*$, como solução do seguinte problema:

$$\text{Max}_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \left\{ v_y(\theta) + v_u(\gamma) \mid (\theta, \gamma) \in \Gamma_N \right\} \quad (2.33)$$

a solução de (2.33) é muito simples de calcular, desde que ela envolve apenas um procedimento de busca no \mathbb{R}_+ . Além disso, a solução ótima (θ^*, γ^*) constitui uma importante informação de projeto, pois soluções factíveis para o problema determinístico só serão possíveis se as condições $\alpha \leq v_y(\theta^*)$ e $\beta \leq v_u(\gamma^*)$ forem simultaneamente satisfeitas.

II.3.2 PROCEDIMENTO DE CONTROLE PARCIALMENTE EM MALHA FECHADA.

A solução ótima em malha aberta do problema de controle estocástico (2.1), é dada por :

$$u(k) = m_u(k) - G(\lambda^*)(x(k) - m_x(k)) \quad (2.34)$$

onde as médias m_u , m_x e o ganho parametrizado $G(\lambda^*)$ são determinados, resolvendo os dois seguintes passos do procedimento proposto :

PASSO 1 (Problema da Variância):

Seja (θ^*, γ^*) a solução ótima de

$$\text{Max} \left\{ v_y(\theta) + v_u(\gamma) \mid (\theta, \gamma) \in \Gamma_N \right\}$$

calcula-se, então, $G(\lambda^*)$ a partir de (2.28) e escolhe-se α, β de tal modo a satisfazer $\alpha \leq v_y(\theta^*)$ e $\beta \leq v_u(\gamma^*)$. Partindo-se de (2.30), calcula-se as variâncias de saída e de controle e também $F_{y,k+1}^{-1}(\alpha)$, $F_{u,k}^{-1}(\beta)$, para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

PASSO 2 (Problema da Média):

Definido os conjuntos $Y_{\alpha, k+1}$ e $U_{\beta, k}$. Resolve-se, por meio de qualquer método aplicável, o seguinte problema determinístico equivalente:

$$\text{Min}_{m_x(k), m_u(k)} \sum_{k=0}^{N-1} F_k(m_x(k), m_u(k)) + F_N(m_x(N))$$

s. a.

$$m_x(k+1) = Am_x(k) + bm_u(k) + m_v(k) \quad (2.35)$$

$$m_x(0) = x_0$$

$$m_u(k) \in U_{\beta, k}$$

$$c^T m_x(k+1) \in Y_{\alpha, k+1}$$

Como comentário final, é importante frisar que o resultado apresentado em [Lassere, 1984] constitui um caso especial deste procedimento. De fato, fixando-se $\lambda = +\infty$, tem-se que $V_u(k) = 0$ e $U_{\beta, k} \equiv U$, para $\forall \beta \in [1/2, 1)$ e $k \in [0, N-1]$. Neste caso o problema (2.35), resolvido no Passo 2, reduz-se a (2.9).

Uma representação esquemática desta estrutura de controle é apresentada na figura 2.3.

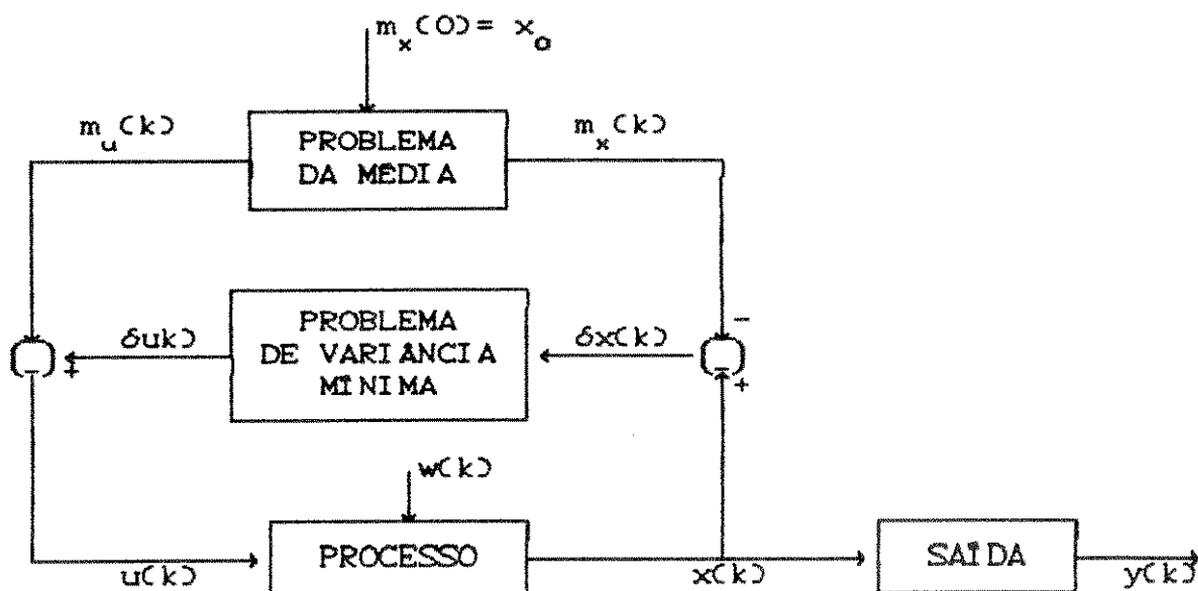


Fig. 2.3. - Representação esquemática da estratégia de controle proposta.

II.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA DA MÉDIA.

O Passo 2 deste procedimento, tem por objetivo resolver um problema de otimização determinística, resultante das simplificações impostas ao problema estocástico (2.1). A principal vantagem desta redução é permitir a aplicação de um grande número de técnicas da programação matemática. Neste trabalho adotou-se, para resolver o problema da média, o algoritmo de Gradiente Modificado [Ferreira,1983] e [Geromel e Ferreira,1986], o qual permite tratar problemas de controle ótimo com restrições nas variáveis de entrada e saída do sistema.

Convém ressaltar que para resolver o problema da média, outros procedimentos podem ser escolhidos, como é o caso, por exemplo do algoritmo OLFC (ver seção I.4.2).

II.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROBLEMA DA VARIANCIA.

Nesta seção discute-se alguns pontos importantes relativos ao Passo 1 do procedimento. Inicialmente, considere-se o problema (2.33), uma solução simplificada pode ser obtida utilizando-se a desigualdade de Tchebycheff [Silva F.,1982].

Seja a função (2.32), aplicando-se a desigualdade de Tchebycheff (vide apêndice A), resulta:

$$v_y(\theta) = \frac{1}{2} \text{Prob.} \left\{ |y(k) - m(k)| \leq \Delta y / 2 \right\} + \frac{1}{2} \\ \geq 1 - 2 \theta / \Delta y^2 \quad (2.36)$$

analogamente, tem-se que $v_u(\gamma) \geq 1 - 2 \gamma / \Delta u^2$. Consequentemente, o critério em (2.33), pode ser reescrito como segue:

$$v_y(\theta) + v_u(\gamma) \geq 2 \left\{ 1 - \frac{\theta}{\Delta y^2} - \frac{\gamma}{\Delta u^2} \right\} \quad (2.37)$$

de onde conclui-se, que o máximo limite inferior (2.37) da função objetivo de (2.33) é atingido, quando o problema (2.24) é resolvido para

$$\lambda = \lambda_0 = \Delta y^2 / \Delta u^2 \quad (2.38)$$

Assim, para efeito de implementação, a determinação da terna $(\lambda, \theta, \gamma)$ segue duas alternativas :

- 1 - Através de uma busca unidimensional no \mathbb{R}_+ , determinando-se λ^* que maximiza (2.33) e consecutivamente o par (θ^*, γ^*) .

2 - Adotando-se a solução aproximada $\lambda = \lambda_0$ e determinando-se o par (θ^0, γ^0) .

II.6. APLICAÇÃO

No capítulo I, apresentou-se como exemplo de aplicação, um problema de controle ótimo estocástico, cujo objetivo consistia na determinação de uma política ótima de geração de energia hidroelétrica. Nesta seção, este mesmo exemplo será empregado.

Inicialmente resolve-se o exemplo, considerando-se o resultado apresentado em Lassere (1984). Em seguida, o problema é resolvido utilizando o procedimento proposto. Para efeito de comparação as trajetórias ótimas obtidas são comparadas com as determinadas, no capítulo anterior, pelo algoritmo de programação dinâmica.

O problema determinístico equivalente, obtido de transformações realizadas em (1.36), é formulado como segue:

$$\text{Max} \sum_{k=0}^{N-1} m_u(k) h(m_x(k))$$

s. a.

$$m_x(k+1) = m_x(k) - m_u(k) + m_v(k) \quad (2.39)$$

$$m_y(k) = m_x(k)$$

$$m_x(k+1) \in \mathcal{Y}_{\alpha, k+1}$$

$$m_u(k) \in \mathcal{U}_{\beta, k}$$

com $m_x(0) = x_0$ e $k \in [0, N-1]$. Os conjuntos $\mathcal{Y}_{\alpha, k}$ e $\mathcal{U}_{\beta, k}$, tem seus limitantes dependentes das características operacionais da usina, vide tabela 1.1. Adota-se como medidas de probabilidade $\alpha=0.95$ e $\beta=0.5$.

II.6.1. SOLUÇÃO EM MALHA ABERTA - PROPOSTA DE LASSERE.

Para reduzir (2.39) a forma proposta por Lassere (1984), fixa-se $\lambda = +\infty$, em consequência, $V_u(k) = 0$ e a lei de controle portanto é determinística. Para este valor de λ , obtem-se como resultado: $v_y(\theta) \cong 0.85$ e $v_u(\gamma) = 1.00$. A conclusão, neste caso, é que a proposta de Lassere falha no sentido de fornecer uma política de controle ótima em malha aberta para, para qualquer α , escolhido pelo projetista, na faixa $[0.85, 1)$. Portanto a escolha de $\alpha=0.95$, dada anteriormente, não permite obter soluções factíveis para o problema.

II.6.2. APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO PROPOSTO.

Neste caso, adota-se um valor finito para λ . Este valor como visto, pode ser escolhido de um modo ótimo, resolvendo-se (2.33) ou aproximadamente a partir de (2.38), que para este exemplo é $\lambda_o = 1.44$ (vide tabela 1.1). O ganho de realimentação neste caso é dado simplesmente por:

$$G(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda} \quad (2.40)$$

O Passo 2, nesta estrutura, adota a formulação (2.39) com a restrição de controle sendo tomada em probabilidade.

Para testar este procedimento, simulou-se dois casos um considerando $\lambda = \lambda^*$ e o outro com $\lambda = \lambda_o$. Os resultados obtidos são ilustrados pelas curvas de estado e controle apresentados nas figuras 2.4 (a)-(b). Observe-se que para efeito de comparação plotou-se também as respectivas trajetórias ótimas em malha fechada obtidas via programação dinâmica.

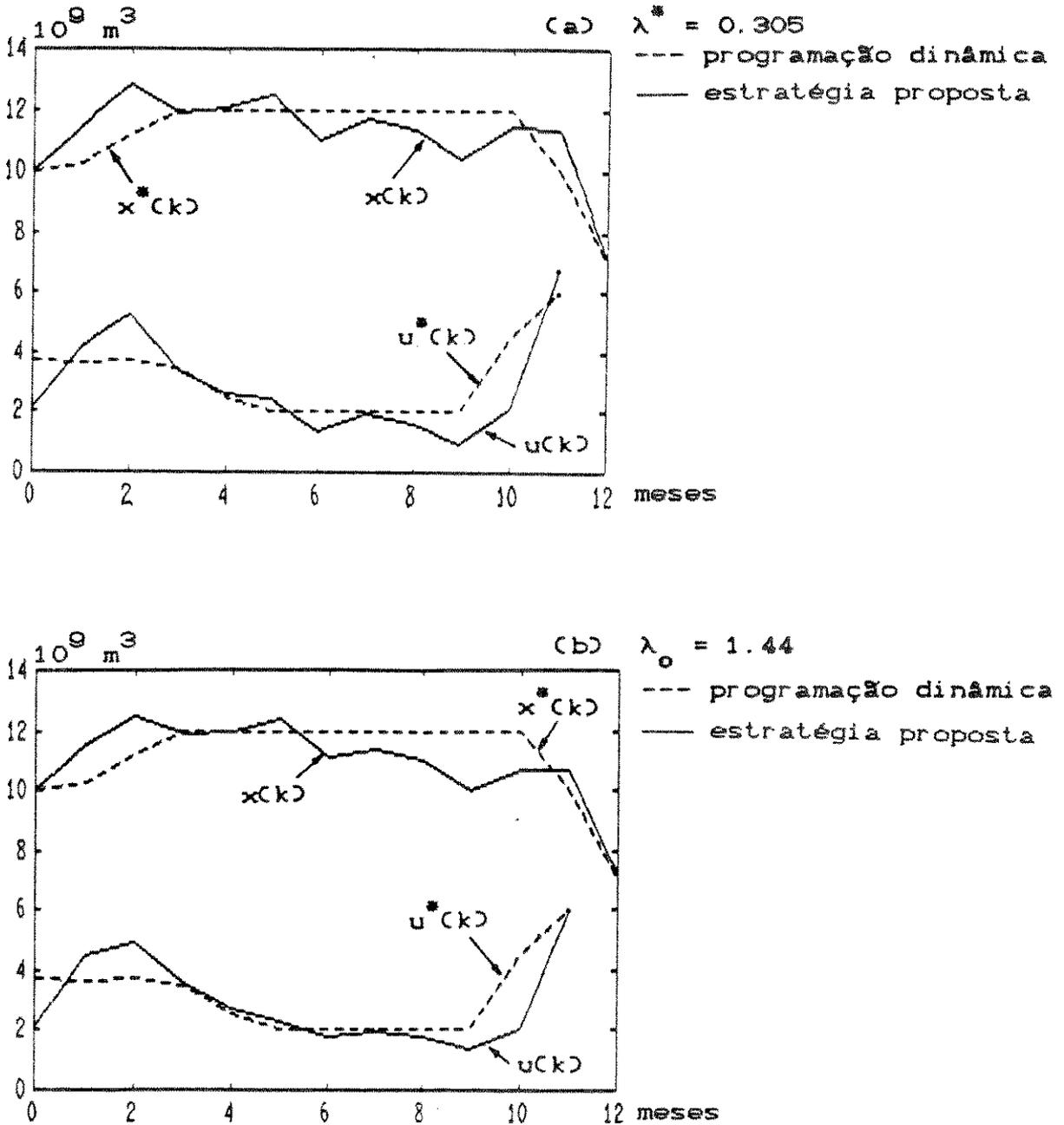


Fig. 2.4 - Trajetórias ótimas de estado e controle.

Comparando as trajetórias, verifica-se, em ambos os casos, a sequência de controle gerada $(u(k), k=0, 1, \dots, N-1)$ atua no sistema mantendo as trajetórias de estado próximas da trajetória ótima obtida via programação dinâmica (capítulo I). Isto ocorre, em virtude da estrutura de realimentação empregada.

Os resultados obtidos para o Passo 1 deste procedimento, foram os seguintes:

1. - Adotando-se a solução ótima, obteve-se:

$$\lambda^* = 0.305 \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^* \cong 0.447 \rightarrow v(\theta^*) \cong 0.99999642 \\ \gamma^* \cong 0.262 \rightarrow v(\gamma^*) \cong 0.99999946 \end{array} \right.$$

2. - Através da solução aproximada, encontrou-se:

$$\lambda_o = 1.44 \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^o \cong 0.648 \rightarrow v(\theta^o) \cong 0.99990302 \\ \gamma^o \cong 0.109 \rightarrow v(\gamma^o) \cong 1.00 \end{array} \right.$$

Como consequência, para os dois casos acima, a factibilidade de (2.39) está garantida, desde que, $\alpha=0.95 < v(\theta)$ e $\beta=0.5 < v(\gamma)$.

Um ponto a ser assinalado, com respeito as soluções do Passo 2, é que a despeito da diferença entre a solução ótima $(\lambda^*, \theta^*, \gamma^*)$ e a solução aproximada $(\lambda^o, \theta^o, \gamma^o)$ ser significativa, os valores obtidos para $(v(\theta^*) + v(\gamma^*))$ e $(v(\theta^o) + v(\gamma^o))$ não apresentam diferença significativa. Concluindo-se portanto, que para este exemplo, o valor máximo do limite inferior da função (2.37), constitui uma boa aproximação para o problema (2.33). Para ilustrar este comportamento, seguem alguns resultados gráficos conseguidos.

A figura 2.5(a) mostra a superfície gerada pela função $v(\theta)+v(\gamma)$, para θ e γ variando no intervalo de 0.0 a 15.0, com incrementos de 0.1. E a figura 2.5(b) mostra as curvas de níveis, obtidas para $v(\theta)+v(\gamma)=k$, para k assumindo os seguintes valores (1.6, 1.7, 1.8, 1.9 e 1.99).

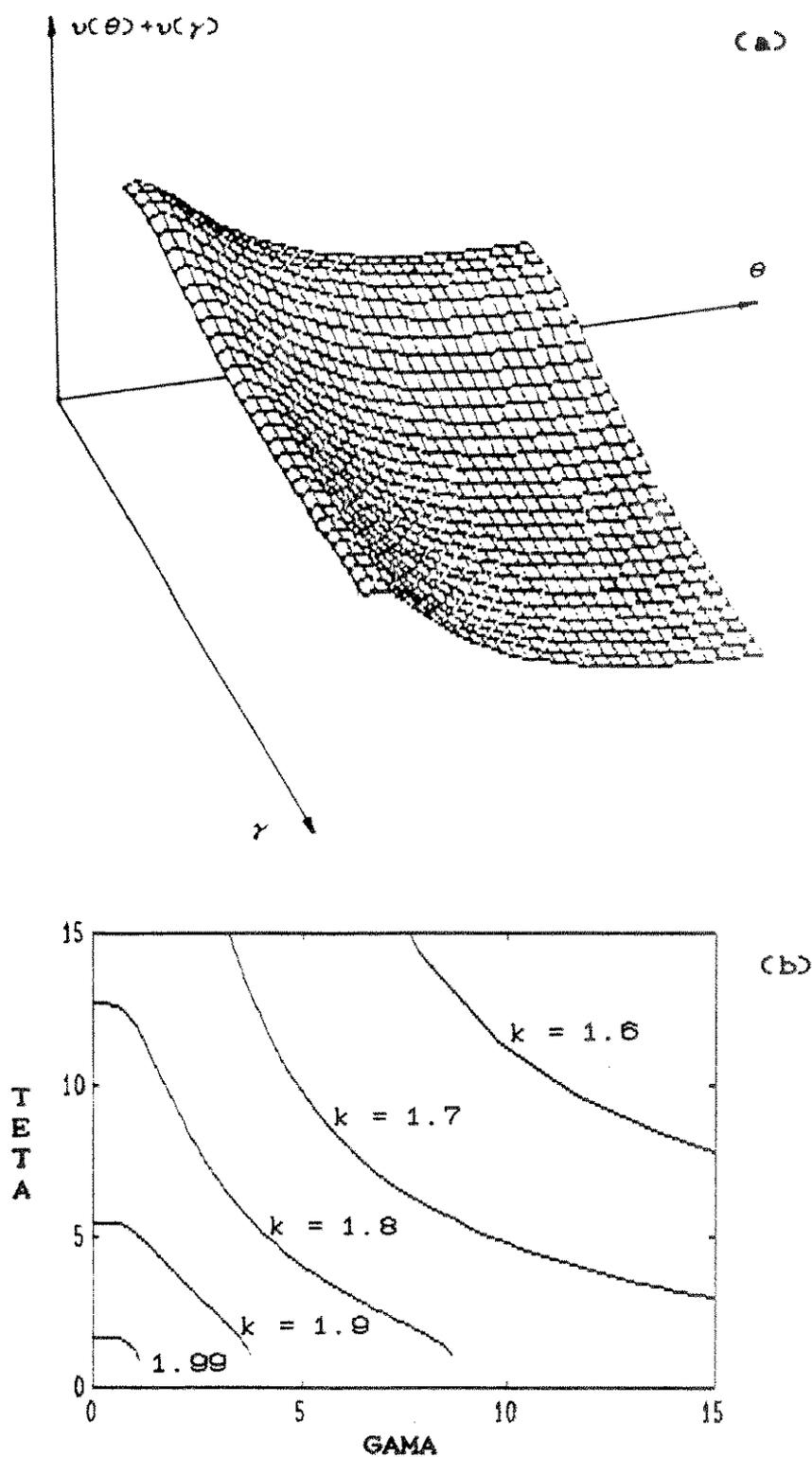


Fig.2.5: Superfície (a) e curvas de nível (b) de $v(\theta) + v(\gamma)$

A figura 2.6 (a)-(b) mostra o comportamento desta função próximo da origem (região de interesse para este exemplo) em ter-

mos de superfície e curvas de nível, respectivamente. Em especial a figura 2.6 (b), relaciona suas curvas de nível com o conjunto Γ_N , definido em (2.31), para λ variando de 0.0 a 2.0, permitindo assim observar os pontos de otimalidade $(\lambda^*, \theta^*, \gamma^*)$ e de sub-otimalidade $(\lambda^0, \theta^0, \gamma^0)$.

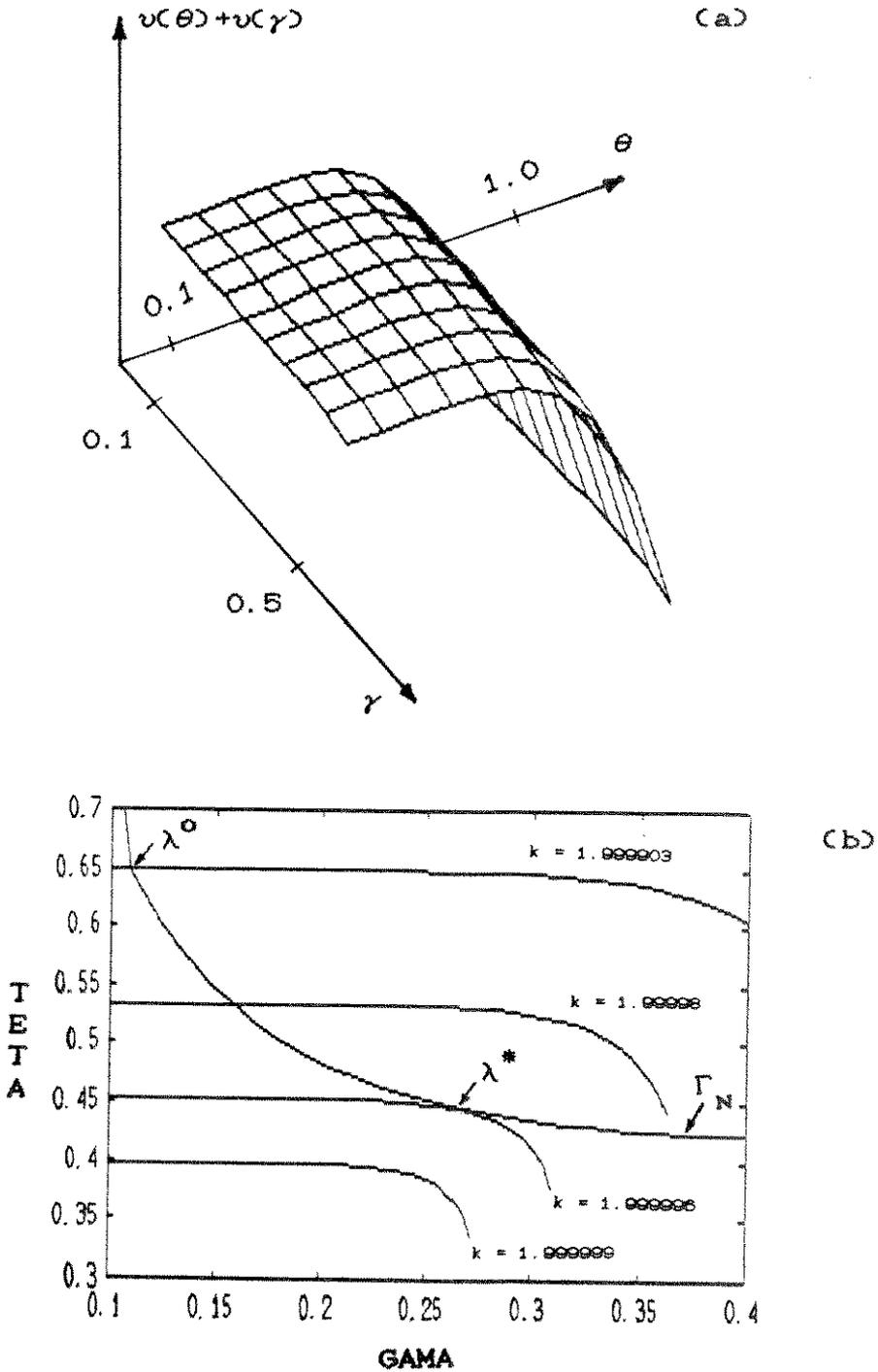


Fig.2.6: Superfície (a) e curvas de nível (b) de $v(\theta) + v(\gamma)$

II.7. CONCLUSÃO

Adotando-se a hipótese de perfeita informação de estado, analisou-se a solução em malha aberta de um problema de controle ótimo estocástico, com restrições probabilísticas nas variáveis de saída e de controle.

Seguindo um recente resultado apresentado em [Lassere,1984] obteve-se uma formulação determinística equivalente para o problema, a qual falha no sentido de fornecer uma política de controle em malha aberta. Mostrou-se, sob que condições isto pode ocorrer e propôs-se um método para acomodar este problema.

Basicamente, o procedimento proposto divide o problema estocástico em duas partes: Supondo as variáveis do sistema como gaussianas, foi definido inicialmente um problema de controle de variância mínima (Passo 1) que admite uma solução em malha fechada e que tem a propriedade de maximizar a probabilidade das variáveis satisfazerem suas restrições físicas.

A partir desta solução, foi possível determinar as trajetórias médias ótimas como solução do problema determinístico equivalente (Passo 2).

Pode-se dizer que, a idéia chave deste método está no cálculo de um ganho de realimentação linear (invariante no tempo) como função de um parâmetro positivo, que é determinado de tal modo que a medida de infactibilidade do problema determinístico associado seja minimizada.

Para comprovar a viabilidade do procedimento, adotou-se esta estratégia para resolver um problema de controle de geração de energia hidroelétrica, considerando-se para isto o modelo simplificado da usina discutida no capítulo anterior. Os resultados obtidos neste caso foram comparados com aqueles obtidos através de programação dinâmica.

CAPÍTULO III

IMPERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO

III.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo analisa-se a solução do problema de controle ótimo estocástico sob o enfoque de imperfeita informação de estado. A importância de investigar esta classe de problema, advem do fato de que em aplicações práticas comumente os estados do sistema não se encontram inteiramente disponíveis. Inúmeras razões podem ser levantadas para explicar tal fato, basicamente pode-se destacar a inacessibilidade física das variáveis que compoem o sistema, ou ainda, mesmo sendo possível acessá-las é muito provável que tenha-se que recorrer a sensores, os quais por seu turno, adicionam incerteza a estas medidas, impedindo assim seu conhecimento exato.

Adotando-se uma formulação geral para o problema discute-se sua solução ótima através do algoritmo de programação dinâmica. Neste sentido, alguns conceitos importantes são introduzidos, como é o caso da estatística suficiente e da propriedade da separação. Além disto, discute-se a aplicação de procedimentos sub-ótimos.

Em seguida analisa-se o caso particular, onde o sistema é descrito por equações lineares com incertezas gaussianas. A principal vantagem deste caso é que toda informação necessária, para os objetivos de controle fica resumida na média condicional do estado, obtida a partir do filtro de kalman. A introdução deste mecanismo de filtragem na malha de realimentação é discutida.

Considerando-se então um problema de controle ótimo linear estocástico (gaussiano) com restrições probabilísticas nas variáveis de saída e controle, mostra-se que sua solução em malha aberta pode ser obtida através da estrutura de controle apresentada no capítulo anterior.

Finalizando-se o capítulo, aplica-se este procedimento ao problema de controle de geração de energia hidroelétrica.

III.2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTOCÁSTICO SOB O ENFOQUE DE IMPERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO.

Seja a equação que descreve a evolução do estado do sistema, dada por

$$x(k+1) = g(x(k), u(k), w(k)) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

onde $x(k)$ é o estado, $u(k) \in U$ denota o controle e $w(k)$ denota uma variável aleatória que modela a incerteza do processo. Assume-se ainda $x(0)$ como uma variável aleatória que modela a incerteza do estado inicial. Considera-se que as medidas do processo são extraídas de um dispositivo de saída, descrito através da seguinte equação,

$$y(k) = h(x(k), v(k)) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.2)$$

onde $v(k)$ é uma variável aleatória que representa a incerteza nas medidas tomadas.

O objetivo é determinar uma sequência de controle $\{u(k) \in U \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1\}$, para algum $N > 0$, que minimize o seguinte custo funcional:

$$J(u) = E \left\{ f_N(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x(k), u(k)) \mid I_k \right\} \quad (3.3)$$

sujeito a satisfazer (3.1) e (3.2).

O problema assim formulado é mais complicado de ser resolvido, uma vez que, na ausência de exata informação de estado torna-se necessário utilizar o conhecimento extraído das observações feitas junto a entrada e saída do sistema que são

armazenadas, para cada instante k , no vetor I_k (vide seção I.6.2). De fato, a medida que o sistema evolui, novas informações são incorporadas neste conjunto, aumentando conseqüentemente sua dimensão. Isto, portanto, pode ocasionar sérias dificuldades computacionais, principalmente no caso da utilização do algoritmo de programação dinâmica. É recomendável, então, investigar um modo de reduzir a quantidade de informação a ser empregada, tal que somente as informações necessárias para propósito de controle sejam utilizadas. Esta quantidade reduzida de informação é denominada de estatística suficiente [Striebel,1965] e será definida a seguir.

III.2.1. REDUÇÃO DA INFORMAÇÃO - ESTATÍSTICA SUFICIENTE.

Define-se como estatística suficiente, uma função s^k , $k = 0,1,\dots,N-1$, que mapeia o espaço formado pelo vetor de informação I_k , no interior de algum espaço Λ_k , $k = 0,1,\dots,N-1$, definido a priori.

Existem muitas maneiras de especificar esta função, inclusive fixando-se $s^k = I_k$. Uma maneira interessante, ocorre no caso em que as funções densidades de probabilidade das incertezas $x(0)$, $w(k)$ e $v(k)$ são conhecidas, podendo-se neste caso substituir o vetor I_k , pela seguinte estatística suficiente [Bar-Shalom,1981]:

$$s^k = \rho(x(k) | I_k) \quad (3.4)$$

onde $\rho(\cdot | \cdot)$ é a função densidade de probabilidade condicional de estado. Striebel (1965) mostra que sendo isto possível, pode-se então visualizar o comportamento dinâmico do sistema como uma transição de probabilidade, expressa recursivamente por:

$$\rho(x(k+1) | I_k) = \psi_k(\rho(x(k) | I_k), u(k), y(k+1)) \quad (3.5)$$

onde $\psi_k(\cdot)$ é uma função determinada a partir das propriedades do sistema. E assim, pode-se concluir que na ausência de perfeita informação de estado, o controlador pode adotar como informação o estado probabilístico (3.5).

A seguir apresenta-se o algoritmo de programação dinâmica aplicado ao problema (3.1)-(3.3), levando em conta a estatística suficiente (3.4).

III.2.2. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PROBLEMA ESTOCASTICO

Como o custo funcional em (3.3) apresenta o requisito de separabilidade, pode-se aplicar o algoritmo de programação dinâmica com objetivo de obter uma lei de controle ótima para este problema.

A equação recursiva resultante da aplicação deste algoritmo ao problema é dada como segue:

Dado $\theta^k = p(x(k) | I_k)$, tem-se

$$J_k(\theta^k) = \min_u E_{x(k)} \left\{ f_k(x(k), u(k)) + J_{k+1}(\theta^{k+1}) | I_k \right\} \quad (3.6)$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$

sujeito a (3.5). E tendo como condição inicial,

$$J_N(\theta^N) = E_{x(N)} \left\{ f_N(x(N)) | I_N \right\} \quad (3.7)$$

A lei de controle ótima gerada de (3.6)-(3.7) é dada por,

$$u^*(k) = \phi_k(p(x(k) | I_k)) , k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8)$$

onde $\phi_k(\cdot)$ são funções que mapeiam o espaço formado pela probabilidade condicional do estado no espaço de controle. Tem-se ainda que o valor ótimo do custo funcional é obtido para

$$J^* = E_{x(0)} \left\{ J_0(\rho(x(0)|I_0)) \right\} \quad (3.9)$$

com J_0 determinado no último estágio de operação do procedimento (3.6) e com $I_0 = y(0)$, com distribuição de probabilidade calculada a partir das estatísticas de $x(0)$, $v(0)$ e da equação $y(0) = h(x(0), v(0))$.

É importante assinalar que a dimensionalidade do problema pode tornar este algoritmo ineficiente computacionalmente. Uma outra dificuldade é o cálculo da estatística suficiente $\rho(\cdot|\cdot)$ que pode ser muito complicado. Para muitos casos práticos, estes fatores podem inviabilizar a determinação de uma política ótima de controle. Neste sentido, torna-se interessante analisar procedimentos que mantenham um compromisso entre um menor esforço computacional e a preservação das propriedades do sistema. Tais procedimentos são ditos sub-ótimos e constituem o assunto da seção seguinte.

III.2.3. SOLUÇÕES SUB-ÓTIMAS.

Como visto previamente, a solução do problema de controle ótimo estocástico é dado por um controlador, do tipo (3.8), que depende, a cada instante k , da função densidade de probabilidade condicional do estado. Esta característica, permite separar a estrutura do controlador em duas partes diferentes porém ligadas em cascata, são elas: um *estimador* que usa o vetor de informações disponíveis I_k para calcular a função densidade de probabilidade condicional do estado. E de um *atuador* que gera uma variável de controle, para atuar no sistema, que é função das informações enviadas pelo estimador. A figura 3.1 ilustra este esquema.

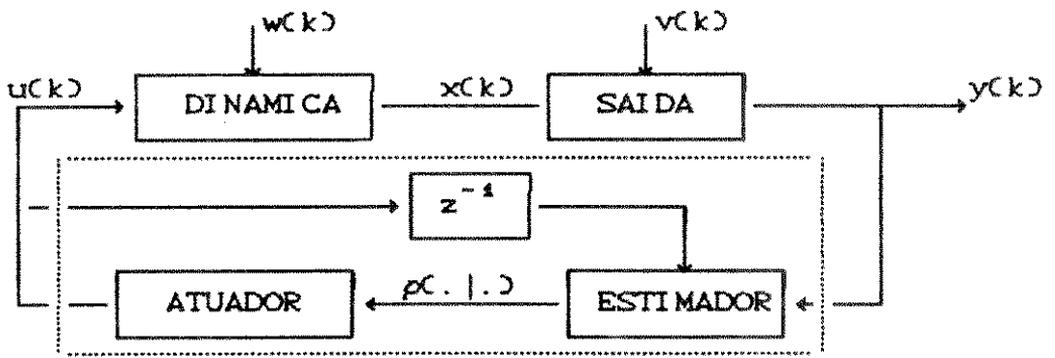


Fig. 3.1 - Propriedade da Separação

Esta característica é denominada na literatura de propriedade da separação [Bar-Shallon e Tse,1974], pois fundamentalmente separa o problema de controle estocástico sob enfoque de imperfeita informação de estado em dois problemas independentes: um de estimação e outro de controle (onde supõe-se o estado acessível). Convém ressaltar que esta propriedade é preservada mesmo que o custo funcional não seja quadrático e que o controle não seja uma função linear das estimativas do estado [Wohman,1968].

É interessante notar que para classe de problemas estocásticos que envolvem um sistema linear gaussiano com critério quadrático, a propriedade de separação é usada no sentido de obter-se soluções ótimas. Neste caso particular, a lei de controle ótima é gerada como um produto de um ganho linear (obtida como solução do problema supondo-se a ausência de efeitos estocásticos) pela estimativa ótima do estado (obtida, em geral, através do algoritmo do filtro de Kalman). Como referência básica para este tipo de problema pode-se citar o número especial sobre o Problema Linear Quadrático Gaussiano publicado em 1971 pelo IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-16.

A importância de introduzir aqui esta propriedade, se deve ao fato de que sua interpretação constitui a base de muitos procedimentos sub-ótimos [Bertsekas,1975]. Neste sentido, um controlador sub-ótimo pode ser decomposto em duas partes (um

estimador e um atuador) que são projetados a priori no sentido de satisfazer os objetivos de controle. Em seguida discute-se a aplicação de duas técnicas sub-ótimas, que se utilizam desta propriedade, para resolver o problema estocástico em questão.

- Naive Feedback Control (NFC).

O controlador NFC age da seguinte maneira: para cada instante de operação do sistema, é aplicada uma variável de controle que seria ótima caso todas as incertezas do sistema fossem fixadas em quantidades conhecidas.

Uma vez que, se assume como conhecidas as funções densidades de probabilidade das perturbações do sistema (3.1)-(3.2) pode-se fixar o ruído do processo em seu primeiro momento estatístico, isto é, $m_v(k) = E \{w(k)\}$ e através de algum mecanismo apropriado de estimação [Sage & Melsa, 1982] calcular a estimativa de primeira ordem do estado, isto é, $E \{x(k) | I_k\}$. Com estas considerações, os passos deste procedimento são fornecidos a seguir:

PASSO 1) dado I_k , calcula-se $E \{x(k) | I_k\}$.

PASSO 2) determina-se uma lei de controle em malha aberta $\{u(i), i = k, \dots, N-1\}$ resolvendo-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{u \in U} \quad & f_N(x(N)) + \sum_{i=k}^{N-1} f_i(x(i), u(i)) \\ \text{s. a.} \quad & x(i+1) = g(x(i), u(i), m_v(i)), \quad i \in [k, N-1] \\ & x(k) = E \{x(k) | I_k\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

PASSO 3) seleciona-se a primeira variável da sequência de

controle, obtida no passo 2, para atuar no sistema. Logo que uma nova medida do sistema esteja disponível retorna-se ao passo 1.

Este procedimento é repetido para cada instante de operação do sistema, o que significa que o problema determinístico (3.10) é resolvido num total de N vezes, porém com a vantagem de permitir a aplicação de um variedade de técnicas de otimização, onde se inclui o algoritmo de programação dinâmica. A desvantagem deste procedimento é não garantir que seja satisfeita a noção de quase-adaptatividade (ver capítulo I).

- Open-Loop Feedback Control (OLFC)

Este procedimento sub-ótimo opera de maneira similar ao NFC distinguindo-se deste, no entanto, por considerar no cálculo da lei de controle às incertezas contidas no sistema.

Os seguintes passos constituem o procedimento OLFC:

PASSO 1) dado I_k , calcula-se a função densidade de probabilidade condicional do estado (3.4).

PASSO 2) determina-se uma sequência de controle em malha aberta $\{u(i), i = k, \dots, N-1\}$ resolvendo-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{u \in U} \quad E_{x(k)} \quad & \left\{ f_N(x(N)) + \sum_{i=k}^{N-1} f_i(x(i), u(i)) \mid I_k \right\} \\ \text{s. a.} \quad & \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$x(i+1) = g(x(i), u(i), w(i)), \quad i \in [k, N-1]$$

PASSO 3) seleciona-se da sequência de controle, somente a

primeira variável para atuar no sistema. Em seguida o desempenho do sistema é observado e retorna-se ao Passo 1.

Como pode-se observar o controlador OLFC (do mesmo modo que o NFC) é derivado para cada instante de tempo, minimizando (3.11) sob a suposição de que nenhuma medida futura estará disponível (malha aberta).

Este procedimento, além das vantagens de permitir que uma variedade de métodos de otimização possam ser aplicados a (3.11) e de não necessitar de grandes espaços de armazenamento de variáveis, satisfaz a noção de quase-adaptatividade. Como desvantagem, tem-se que o cálculo de $p(x(k)|I_k)$ pode ser muito complicado.

A próxima seção apresenta um modelo particular para o sistema que torna mais simples os procedimentos anteriores e permite que novos procedimentos sejam testados.

III.3. SISTEMA LINEAR-GAUSSIANO.

Na seção anterior discutiu-se a solução do problema estocástico considerando-se um modelo geral para o sistema. Assumiu-se ainda que as funções densidades de probabilidades das incertezas envolvidas e as estruturas funcionais do processo g_k e da saída h_k fossem conhecidas, permitindo assim calcular a função densidade de probabilidade condicional do estado e considerá-la como uma estatística suficiente para o problema. A principal justificativa de se adotar (3.4) é que ela resume toda informação contida em I_k necessária para controle. Infelizmente, para muitos casos, esta função estatística pode ter dimensão infinita, tornando-se assim pouco atrativa para os propósitos mencionados. Para alguns casos, no entanto, como aqueles onde os espaços estatísticos das incertezas são finitos ou então gaussianos esta justificativa é preservada. Neste sentido, passa-se a investigar

o caso particular em que o sistema é linear com perturbações gaussianas.

Seja o sistema apresentado em (3.1) e (3.2), descrito agora pelas seguintes equações lineares estocásticas:

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + w(k) \quad (3.12)$$

$$y(k) = c^T x(k) + v(k) \quad (3.13)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}$ e $y(k) \in \mathbb{R}$. Assume-se $w(k) \in \mathbb{R}^n$ e $v(k) \in \mathbb{R}$ variáveis aleatórias gaussianas independentes definidas por:

$$\begin{cases} E \langle w(k) \rangle = m_v(k) & E \langle (w(k) - m_v(k))(w(k) - m_v(k))^T \rangle = V_v \geq 0 \\ E \langle v(k) \rangle = 0 & E \langle v(k)^2 \rangle = V_v > 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Tem-se ainda $x(0)$ como uma variável aleatória gaussiana independente de $w(k)$ e $v(k)$, com média $m_x(0)$ e variância $V_x(0)$.

A importância das propriedades assumidas para o sistema, neste caso, está na função densidade $p(x(k)|I_k)$ que agora é gaussiana e portanto pode ser parametrizada simplesmente pela sua média e covariância condicionais. Além disto, estes dois parâmetros podem ser gerados recursivamente no tempo utilizando para isto o filtro de Kalman, como será visto a seguir.

III.3.1 O FILTRO DE KALMAN

O objetivo aqui é desenvolver as equações do filtro de Kalman numa forma apropriada para as aplicações em questão.

Inicialmente deve-se entender que a natureza linear e

gaussiana do sistema, permite estabelecer uma variedade de critérios de otimização (i.e. mínimos quadrados, variância mínima, máxima verossimilhança, etc.) para gerar as mesmas equações de interesse. O tratamento que será utilizado aqui consistirá da aplicação do teorema da projeção ortogonal, que nada mais é do que minimizar a variância do erro de estimação de estado, dado I_k .

Sejam então as notações as serem seguidas:

$$\begin{aligned} x(k|k) &= E \langle x(k) | I_k \rangle \text{ denota a estimativa ótica do estado;} \\ \varepsilon_x(k|k) &= x(k) - E \langle x(k) | I_k \rangle \text{ denota o erro nas estimativas;} \\ P_x(k|k) &= E \langle \varepsilon_x(k|k) \varepsilon_x(k|k)^T \rangle \text{ denota a matriz de covariância.} \end{aligned}$$

Da teoria da estimação, sabe-se que dado um sistema caracterizado unicamente por variáveis aleatórias, a estimativa ótica de estado é descrita analiticamente por [Meditch, 1969]:

$$x(k+1|k+1) = E \langle x(k+1) | I_{k+1} \rangle \quad (3.15)$$

e do teorema da projeção ortogonal [Sage e Melsa, 1982], sabe-se que (3.15) pode ser decomposto em:

$$\begin{aligned} x(k+1|k+1) &= E \langle x(k+1) | I_k, \varepsilon_y(k+1|k) \rangle^{\$} \\ &= E \langle x(k+1) | I_k \rangle + E \langle x(k+1) | \varepsilon_y(k+1|k) \rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $\varepsilon_y(k+1|k) = y(k+1) - E \langle y(k+1) | I_k \rangle$ é ortogonal a I_k . Desenvolve-se agora, expressões para os dois operadores do lado direito de (3.16). Inicialmente, seja $x(k+1|k) = E \langle x(k+1) | I_k \rangle$ de onde segue:

$$x(k+1|k) = E \langle (Ax(k) + bu(k) + w(k)) | I_k \rangle$$

^{\\$} Deve-se notar que $y(k+1)$ não é ortogonal a I_k e que o espaço formado por $\langle I_k, y(k+1) \rangle$ é idêntico ao espaço $\langle I_k, \varepsilon_y(k+1) \rangle$ com a diferença que $\varepsilon_y(k+1)$ é ortogonal a I_k .

$$= Ax(k|k) + bu(k) + m_v(k) \quad (3.17)$$

onde $u(k)$ (determinístico) e $w(k)$ são independentes de I_k . O segundo termo do lado direito de (3.16) é obtido a partir do teorema da projeção ortogonal, ou seja:

$$\begin{aligned} E \langle x(k+1) | \varepsilon_y(k+1|k) \rangle = \\ E \langle x(k+1|k) \varepsilon_y(k+1|k)^T \rangle [E \langle \varepsilon_y(k+1|k) \varepsilon_y(k+1|k)^T \rangle]^{-1} \varepsilon_y(k+1|k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$\varepsilon_y(k+1|k) = y(k+1) - E \langle c^T x(k+1) + v(k+1) | I_k \rangle \quad (3.19)$$

considerando-se que, $v(k+1)$ é não correlata com o vetor I_k e também que $E \langle v(k+1) \rangle = 0$, pode-se escrever (3.19) como segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y(k+1|k) &= y(k+1) - c^T x(k+1|k) \\ &= c^T \varepsilon_x(k+1|k) + v(k+1) \end{aligned} \quad (3.20)$$

O resultado (3.20) é importante, pois permite desenvolver expressões para o lado direito de (3.18). Para isto, sejam as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} \text{a) } E \langle x(k+1) \varepsilon_y(k+1|k)^T \rangle = \\ E \langle (\varepsilon_x(k+1|k) + x(k+1|k)) [\varepsilon_x(k+1|k)^T c + v(k+1)] \rangle \end{aligned}$$

assumindo-se $v(k+1)$ independente de $x(k+1|k)$ e de $\varepsilon_x(k+1|k)$ e ainda que $E \langle x(k+1|k) \varepsilon_x(k+1|k) \rangle = 0$, resulta que:

$$E \langle x(k+1) \varepsilon_x(k+1|k) \rangle = P_x(k+1|k) c \quad (3.21)$$

onde $P_x(k+1|k) = E \langle \varepsilon_x(k+1|k) \varepsilon_x(k+1|k)^T \rangle$.

$$\begin{aligned} b) \quad E \langle \varepsilon_y(k+1|k) \varepsilon_y(k+1|k)^T \rangle &= \\ &= E \langle [c^T \varepsilon_x(k+1|k) + v(k+1)] [c^T \varepsilon_x(k+1|k) + v(k+1)]^T \rangle \end{aligned}$$

assumindo-se as mesmas hipóteses, feitas acima, para $v(k+1)$, resulta que:

$$E \langle \varepsilon_y(k+1|k) \varepsilon_y(k+1|k)^T \rangle = c^T P_x(k+1|k) c + V_v \quad (3.22)$$

onde $V_v = E \langle v(k)^2 \rangle > 0$ é invariante no tempo. Substituindo-se então (3.21) e (3.22) em (3.18) obtém-se:

$$E \langle x(k+1) | \varepsilon_y(k+1|k) \rangle = P_x(k+1|k) c [c^T P_x(k+1|k) c + V_v]^{-1} \varepsilon_y(k+1|k) \quad (3.23)$$

A partir dos resultados (3.17) e (3.22) pode-se escrever a estimativa ótima do estado como sendo:

$$x(k+1|k+1) = Ax(k|k) + bu(k) + m_v(k) + K(k+1) \varepsilon_y(k+1|k) \quad (3.24)$$

onde

$$K(k+1) = P_x(k+1|k) c [c^T P_x(k+1|k) c + V_v]^{-1} \quad (3.25)$$

denota o ganho ótimo do filtro de Kalman. Usando o segundo membro da igualdade (3.20), pode-se colocar (3.24) na seguinte forma,

$$\begin{aligned} x(k+1|k+1) &= Ax(k|k) + bu(k) + m_v(k) \\ &+ K(k+1) [y(k+1) - c^T x(k+1|k)] \quad (3.26) \end{aligned}$$

Observe-se que o ganho $K(\cdot)$ depende de $P_x(k+1|k)$, cuja expressão analítica ainda não foi obtida. Os passos dados a seguir são então destinados a sua determinação: Inicialmente,

deve-se determinar uma expressão para o erro de estimação, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \epsilon_x(k+1|k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) \\ &= A\delta x(k|k) + \delta w(k) - K(k+1)\epsilon_y(k+1|k) \end{aligned} \quad (3.27)$$

sabe-se que $\epsilon_x(k+1|k) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)$, utilizando o resultado dado em (3.17), obtém-se que $\epsilon_x(k+1|k) = A\epsilon_x(k|k) + \epsilon_v(k)$. Consequentemente, reescreve-se (3.27) como sendo:

$$\epsilon_x(k+1|k+1) = \epsilon_x(k+1|k) - K(k+1)\epsilon_y(k+1|k) \quad (3.28)$$

a partir deste resultado, a matriz de covariância do erro de estimação $P_x(k+1|k+1)$, pode ser determinada:

$$\begin{aligned} P_x(k+1|k+1) &= E\{\epsilon_x(k+1|k+1)\epsilon_x(k+1|k+1)^T\} \\ &= E\{\epsilon_x(k+1|k)\epsilon_x(k+1|k)^T\} - K(k+1)c^T E\{\epsilon_x(k+1|k)\epsilon_x(k+1|k)^T\} - \\ &E\{\epsilon_x(k+1|k)\epsilon_x(k+1|k)^T\}c[K(k+1)] + K(k+1)E\{\epsilon_y(k+1|k)\epsilon_y(k+1|k)^T\}K(k+1)^T \end{aligned} \quad (3.29)$$

substituindo então (3.22) em (3.29), resulta:

$$\begin{aligned} P_x(k+1|k+1) &= P_x(k+1|k) - K(k+1)c^T P_x(k+1|k) \\ &- P_x(k+1|k)c[K(k+1)]^T + K(k+1)[c^T P_x(k+1|k)c + V_v] K(k+1)^T \end{aligned} \quad (3.30)$$

da expressão do ganho dada em (3.25), tem-se que:

$$K(k+1)[c^T P_x(k+1|k)c + V_v] K(k+1)^T = P_x(k+1|k)cK(k+1) \quad (3.31)$$

consequentemente (3.30) é simplificada para:

$$P_x(k+1|k+1) = P_x(k+1|k) - K(k+1)c^T P_x(k+1|k) \quad (3.32)$$

e a expressão para $P_x(k+1|k)$ é dada simplesmente por:

$$\begin{aligned} P_x(k+1|k) &= E \langle \varepsilon_x(k+1|k) \varepsilon_x(k+1|k)^T \rangle \\ &= E \langle [A\varepsilon_x(k|k) + \varepsilon_v(k)] [A\varepsilon_x(k|k) + \varepsilon_v(k)]^T \rangle \\ &= A V_x(k|k) A^T + V_v \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde $\varepsilon_v(k) = w(k) - m_v(k)$ e $V_v = E \langle \varepsilon_v(k) \varepsilon_v(k)^T \rangle \geq 0$.

As equações (3.26), (3.32) e (3.33) representam as expressões recursivas do filtro de Kalman [Rhodes,1970]. Com o objetivo de facilitar a parte de implementação deste algoritmo, considera-se uma forma alternativa de representar (3.26). Para isto, adota-se o desenvolvimento proposto em [Bertsekas,1976]:

Seja a seguinte igualdade,

$$P_x(k+1|k+1)cV_v^{-1} = P_x(k+1|k)c[c^T P_x(k+1|k)c + V_v]^{-1} \quad (3.34)$$

para mostrar sua validade, manipula-se o lado direito da mesma:

$$\begin{aligned} P_x(k+1|k+1)cV_v^{-1} &= [P_x(k+1|k) - \\ &\quad P_x(k+1|k)c(c^T P_x(k+1|k)c + V_v)^{-1}c^T P_x(k+1|k)]cV_v^{-1} \\ &= P_x(k+1|k)cV_v^{-1} - \\ &\quad P_x(k+1|k)c[c^T P_x(k+1|k)c + V_v]^{-1}c^T P_x(k+1|k)cV_v^{-1} \\ &= P_x(k+1|k)c[V_v^{-1} - \end{aligned}$$

$$(c^T P_x(k+1|k)c + V_v)^{-1} c^T P_x(k+1|k) c V_v^{-1} \quad (3.35)$$

considerando-se o seguinte artifício:

$$\begin{aligned} V_v^{-1} &= [c^T P_x(k+1|k)c + V_v]^{-1} [c^T P_x(k+1|k)c + V_v] V_v^{-1} \\ &= [c^T P_x(k+1|k)c + V_v]^{-1} [c^T P_x(k+1|k)c V_v^{-1} + 1] \end{aligned}$$

que substituído em (3.35) produz o lado esquerdo de (3.34). Utilizando esta igualdade as equações do filtro a serem implementadas computacionalmente são:

Estimativa ótima:

$$\begin{aligned} x(k+1|k+1) &= Ax(k|k) + bu(k) + m_v(k) \\ &\quad + P_x(k+1|k+1) c V_v^{-1} [y(k+1) - c^T (Ax(k|k) + bu(k))] \quad (3.36) \end{aligned}$$

Covariância do erro de estimacao:

$$\begin{aligned} P_x(k+1|k+1) &= P_x(k+1|k) - \\ &\quad P_x(k+1|k) c [c^T P_x(k+1|k)c + V_v]^{-1} c^T P_x(k+1|k) \quad (3.37) \end{aligned}$$

$$P_x(k+1|k) = A P_x(k|k) A^T + V_v \quad (3.38)$$

tendo por condição inicial,

$$\begin{cases} x(0|0) = m_x(0) + P_x(0|0) c V_v^{-1} [y(0) - c^T m_x(0)] & (3.39) \\ P_x(0|0) = V_x(0) - V_x(0) c [c^T V_x(0) c + V_v]^{-1} c^T V_x(0) & (3.40) \end{cases}$$

com $m_x(0)$ e $V_x(0)$ denotando as estatísticas do estado inicial.

Por fim, pode-se destacar alguns pontos importantes deste algoritmo:

- (i) a matriz de covariância P_x independe do vetor de medidas I_k , dependendo somente de V_v e V_v ;
- (ii) para calcular a melhor estimativa é necessário calcular a distribuição de $x(k+1)$ condicionado ao vetor de medidas. Uma vez que, a distribuição é gaussiana, a média (3.36) e a matriz de covariância (3.37) a caracterizam totalmente. Consequentemente, pode-se entender o filtro de Kalman como um mecanismo que determina a cada instante de tempo a distribuição de probabilidade do estado (estatística suficiente);
- (iii) não existe necessidade de armazenar todas as saídas e entradas passadas durante os cálculos, uma vez que as equações (3.36) a (3.38), à cada instante k , concentram todas estas informações.

III.3.2. INTRODUÇÃO DO FILTRO NA MALHA DE REALIMENTAÇÃO.

Seja o problema de controle estocástico, que consiste em determinar uma lei de controle admissível [Tse,1971] que minimize (3.3) sujeito a (3.12) e (3.13). O interesse aqui é investigar de que modo a introdução do filtro de Kalman favorece a obtenção desta política de controle.

Na seção III.2, verificou-se que uma lei de controle para o problema genérico podia ser obtida como uma função da densidade de probabilidade condicional $p(x(k)|I_k)$. Assumindo-se a hipótese do sistema ser linear-gaussiano, sabe-se que esta função estatística será também gaussiana e portanto caracterizada completamente por dois parâmetros, que são a média e a

perfeita informação de estado; o Teorema 2, por seu turno, demonstra como a inacessibilidade do estado afeta, restringindo, o problema de variância mínima. Isto pode ser explicado pelo fato de que toda a informação disponível sobre o estado está condicionada estatisticamente as observações tomadas junto ao sistema. Em termos de otimização, este condicionamento estatístico se reflete em restrições adicionais ao problema de perfeita informação de estado, o que torna o resultado do Teorema 2 perfeitamente justificável.

III.5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nesta seção, aplica-se o procedimento discutido na seção anterior para obter uma política de controle para um sistema de geração de energia elétrica. O sistema a ser considerado é exatamente o mesmo descrito no capítulo I, excetuando-se o fato de que o estado do reservatório não é acessível diretamente. As medidas que se tem do reservatório são dadas pelo seguinte dispositivo:

$$y(k) = x(k) + v(k) \quad (3.61)$$

onde y representa o volume de água medido através de um equipamento de medição e v denota a incerteza nas medidas decorrente da imperfeição do equipamento, sendo assumida por hipótese gaussiana com média nula e desvio padrão $V_v^{1/2}$.

Os dados do problema são os mesmos fornecidos na tabela 1.1. Para simulação, dois casos foram investigados: no primeiro considera-se $\lambda = \lambda^*$ e no segundo $\lambda = \lambda_0 = 1.44$. Para efeito de análise de resultados são considerados:

- i) o desvio padrão do ruído de saída inicialmente igual a 0.25 e em seguida igual a 0.5;

covariância condicional do estado. Considerando-se que a matriz de covariância $P(k|k)$ é independente das informações de controle e da saída, segue que a estatística suficiente para o problema é dada pela média condicional do estado, isto é, $s^k = x(k|k)$. Uma consequência imediata deste fato é que a lei de controle ótima para o problema assume a forma:

$$u(k) = \phi_k(x(k|k)) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.41)$$

onde $\phi_k(\cdot)$ denota uma classe de funções que mapeiam o espaço gerado pela estimativa ótima $x(k|k)$ no espaço de controle. Note-se ainda que (3.41) pode ser interpretada como resultado da propriedade de separação, discutida na seção III.2.3, onde o estimador (disposto em cascata com o atuador na malha de realimentação, figura 3.1) é substituído pelo filtro de Kalman.

Com a natureza linear-gaussiana assumida para o sistema, percebe-se que toda informação necessária para controle fica concentrada na estimativa ótima do estado fornecida pelo filtro de Kalman, isto certamente facilita a solução do problema estocástico.

Na seção seguinte, considera-se o problema de controle linear estocástico com restrição de saída e controle, dadas em probabilidade e analisa-se sua solução através do procedimento de controle proposto no capítulo anterior.

III.4. ESTRUTURA DE CONTROLE PARCIALMENTE EM MALHA FECHADA.

Seja o sistema linear estocástico discreto no tempo descrito pelas equações (3.12) e (3.13). Deseja-se determinar uma lei de controle que minimize a função objetivo (3.3). Adicionalmente, considera-se que as variáveis de saída e controle devem satisfazer as seguintes restrições:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(k) \in U \\ \text{Prob} (y(k+1) \in Y) \geq 2\alpha-1 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

onde $\alpha \in [1/2, 1)$ é um parâmetro fornecido e os conjuntos U e Y estão definidos em (2.2).

Em virtude da natureza linear-gaussiano do sistema, é possível aplicar ao problema o resultado apresentado em [Lassere, 1984]. Sabe-se, no entanto, que o problema determinístico resultante pode ser infactível, falhando assim no propósito de gerar uma política em malha aberta para aplicar no sistema. Isto é justificado no fato da restrição de saída depender fortemente do segundo momento estatístico da variável de estado, que evolui livremente no tempo, isto é sem controle.

Para eliminar estas indesejável característica, propõe-se que tanto a média quanto a variância do processo sejam controladas. Assim, a política de controle, para o problema estocástico descrito acima, será gerada resolvendo-se o problema da média (solução em malha aberta do problema determinístico equivalente) e o problema de variância (solução do problema de variância mínima) que minimiza o risco de infactibilidade, como discutido no capítulo anterior.

Dois fatores devem ser considerados, antes de estabelecer este procedimento:

- a) A lei de controle em malha fechada, que permitirá controlar a variância, deverá ser linear, de modo a permitir que o sistema em malha fechada permaneça gaussiano.
- b) A introdução de realimentação, torna $u(k)$ uma variável aleatória (gaussiana, em virtude de (a)) e assim a restrição $u(k) \in U$ deixa de fazer sentido, devendo ser

substituída por:

$$\text{Prob} \langle u(k) \in U \rangle \geq 2\beta - 1 \quad (3.43)$$

onde $\beta \in [1/2, 1)$ é fixado a priori pelo projetista.

III.4.1 PROBLEMA DA MÉDIA

Consiste em gerar uma sequência de controle ótima em malha aberta $\langle m_u(k), k = 0, 1, \dots, N-1 \rangle$ que resolve o seguinte problema determinístico equivalente:

$$\text{Min} \sum_{k=0}^{N-1} F_k(m_x(k), m_u(k)) + F_N(m_x(N))$$

s. a.

$$m_x(k+1) = Am_x(k) + bm_u(k) + m_v(k)$$

$$m_x(0) = E \langle x(0) \rangle$$

$$m_y(k) = c^T m_x(k) \quad (3.44)$$

$$m_u(k) \in U_{\beta, k}$$

$$c^T m_x(k+1) \in Y_{\alpha, k+1}$$

onde $m_x(k) = E \langle x(k) \rangle = E \langle E \langle x(k) | I_k \rangle \rangle$ denota a média do estado e $m_u(k) = E \langle u(k) \rangle$. Tem-se ainda que

$$F_k(m_x(k), m_u(k)) \triangleq E_x \left\{ f_k(x(k), u(k)) \mid I_k \right\} \quad (3.45)$$

$$F_N(m_x(N)) \triangleq E_x \left\{ f_N(x(N)) \mid I_N \right\} \quad (3.46)$$

Os conjuntos $Y_{\alpha, k}$ e $U_{\beta, k}$ são definidos de maneira análoga a (2.6) e (2.21), respectivamente.

Finalmente para garantir a factibilidade de (3.44) é necessário que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\alpha \leq F_{y,N}(\Delta y/2) \quad \text{e} \quad \beta \leq F_{u,N-1}(\Delta u/2) \quad (3.47)$$

onde $\Delta y = \bar{y} - \underline{y}$ e $\Delta u = \bar{u} - \underline{u}$.

Apesar do problema da média apresentar semelhante formulação para os casos de perfeita e imperfeita informação de estado, será mostrado na seção seguinte que os limitantes de $V_{\alpha,k}$ e $U_{\beta,k}$ tendem a ser mais restritivo para o caso de imperfeita informação.

III.4.2. PROBLEMA DA VARIANCIA

Seja o sistema descrito por

$$\delta x(k+1) = A\delta x(k) + b\delta u(k) + \delta w(k) \quad (3.48)$$

$$\delta y(k) = c^T \delta x(k) + v(k) \quad (3.49)$$

onde $\delta x(k) = x(k) - m_x(k)$ denota o vetor de desvio do estado. O objetivo é determinar uma lei de controle linear em malha fechada $\{\delta u(k), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ que maximize o lado direito de (3.47). Como visto no capítulo anterior, isto pode ser obtido resolvendo-se o seguinte problema de variância mínima generalizado[§]:

$$\text{Min}_{\delta u} E \left\{ \delta y(k+1)^2 + \lambda \delta u(k)^2 \mid I_k \right\} \quad (3.50)$$

$$\text{s. a.} \quad (3.48) \text{ e } (3.49)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro a ser determinado.

[§]Um modo simples de resolver este problema é discutido no Apên. B

Uma vez que, o estado do sistema não é acessível, a solução ótima de (3.50) depende do vetor I_k . Entretanto, sendo o sistema linear e gaussiano sabe-se (seção III.3) que toda informação sobre o estado está resumida em sua estimativa média condicional, gerada pelo filtro de Kalman. Além disto, sabe-se também que como consequência da propriedade de separação, o problema (3.50) pode ser dividido em dois problemas independentes: num calcula-se a estimativa ótima $x(k|k)$ e no outro resolve-se (3.50) assumindo-se que o estado seja exatamente conhecido. Assim a lei de controle em malha fechada para este problema é dada por

$$\delta u(k) = - G(\lambda) (x(k|k) - m_x(k)) \quad (3.51)$$

com o ganho parametrizado dado por

$$G(\lambda) = \frac{\langle c, b \rangle}{\lambda + \langle c, b \rangle^2} c^T A \quad (3.52)$$

que é o mesmo do capítulo anterior.

A partir de (3.51), a evolução em malha fechada do processo (3.48) pode ser determinada por

$$\delta x(k+1) = A_f \delta x(k) + b G e_x(k|k) + \delta w(k) \quad (3.53)$$

onde $A_f = A - bG$ e $e_x(k|k) = x(k) - x(k|k)$ denota o erro da estimação. Segue então, que o comportamento (malha fechada) da variância de estado é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x(k+1) = A_f V_x(k) A_f^T + b G P_x(k|k) G^T b^T + V_v \\ V_x(0) = 0 \end{array} \right. \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.54)$$

onde $P_x(k|k)$ é a matriz de covariância do erro de estimação, calculada para cada instante k , por (3.37) e (3.38). Por conseguinte, as variâncias de saída e controle, isto é, $V_y(k) = c^T V_x(k) c + V_v$ e $V_u(k) = G V_x(k) G^T$, podem ser calculadas e satisfazem (3.54).

Como consequência, o lugar geométrico de todas as possíveis variâncias de saída e controle do sistema em malha fechada controlado pelo ganho de realimentação $G(\lambda)$, pode então ser obtido. Assim, no instante $k = N-1$, tem-se

$$\Gamma_N \triangleq \left\{ (\theta, \gamma) \mid \theta = V_y(N) ; \gamma = V_u(N-1) , \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (3.55)$$

Partindo-se então de (3.55), determina-se o par ótimo (θ^*, γ^*) associado a $\lambda = \lambda^*$, que resolve o seguinte problema:

$$\text{Max}_{\lambda} \left\{ v_y(\theta) + v_u(\gamma) \mid (\theta, \gamma) \in \Gamma_N \right\} \quad (3.56)$$

onde $v_y(\theta) = F_{y,N}(\Delta y/2)$ e $v_u(\gamma) = F_{u,N-1}(\Delta u/2)$.

Por fim, com a solução de (3.56), determina-se o ganho ótimo do problema, isto é, $G(\lambda^*)$ e além disso obtem-se uma importante informação sobre a factibilidade de (3.44), ou seja, para que este problema apresente solução factível é necessário que as medidas de probabilidade selecionadas pelo projetista, satisfaçam as seguintes condições: $\alpha \leq v_y(\theta^*)$ e $\beta \leq v_u(\gamma^*)$.

A seguir alguns pontos importantes relacionados ao problema da variância são apresentados.

Em analogia ao caso de perfeita informação de estado, pode-se obter uma solução aproximada para o problema (3.56), utilizando para isto a desigualdade de Tchebycheff. Neste caso, o

parâmetro λ é dado simplesmente por $\lambda = \lambda_0 = \Delta y^2 / \Delta u^2$.

Uma maneira alternativa de resolver o problema da variância consiste em calcular o ganho ótimo do controlador supondo-se que o estado seja medido exatamente, como tratado no capítulo anterior. Entretanto, para efeito de atuação no sistema, substitui-se o estado real pela sua estimativa condicional. Deve-se observar que, neste caso o termo corretivo $bG_P^T(k|k)G^T b^T$, é completamente ignorado no cálculo da variância de estado, portanto, não influenciando na determinação do lugar geométrico (3.55). Consequentemente, este tipo de solução é sub-ótima para o problema.

Algumas propriedades podem ser estabelecidas comparando-se as soluções de perfeita e imperfeita informação de estado. Estas propriedades são apresentadas a seguir.

LEMA 1 :

Seja $V_x^I(k)$ a variância de estado obtida em (3.54), para o caso de imperfeita informação de estado. E seja $V_x^P(k)$ a variância para o caso de perfeita informação de estado (2.30). Então, para todo $k = 0, 1, \dots, N-1$, tem-se que $V_x^I(k) \geq V_x^P(k)$.

Prova :

Dado que, no instante inicial ($k = 0$), $V_x^I(0) = V_x^P(0) = 0$ e $P_x(0|0) = 0$ (vide eq. 3.40), tem-se que, a partir de (2.30) e (3.54) que, $V_x^I(1) = V_x^P(1) = V_v$.

Agora, supondo-se que, para o instante k , $V_x^I(k) \geq V_x^P(k)$ e considerando-se que por definição $P_x(k|k) \geq 0$, $\forall k$, segue então de (3.54),

$$V_x^I(k+1) = A_f V_x^I(k) A_f^T + V_v + bG_P^T(k|k)G^T b^T$$

$$\begin{aligned}
&\geq A_f V_x^I(k) A_f^T + V_v \\
&\geq A_f V_x^P(k) A_f^T + V_v = V_x^P(k+1)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

conclui-se, portanto, por indução que $V_x^I(k+1) \geq V_x^P(k+1)$, para todo o $k \in [0, N-1]$. \square

Como decorrência imediata do lema 1, seguem os seguintes teoremas:

Teorema 1 :

Sejam $U_{\beta,k}^I$ e $Y_{\alpha,k}^I$ as restrições de controle e saída do problema determinístico equivalente, para o caso de imperfeita informação de estado. E seja $U_{\beta,k}^P$ e $Y_{\alpha,k}^P$ os mesmos conjuntos para caso de perfeita informação de estado. Segue então que $U_{\beta,k}^P \supseteq U_{\beta,k}^I$ e $Y_{\alpha,k}^P \supseteq Y_{\alpha,k}^I$.

Prova :

Do lema 1, tem-se que $V_u^I(k) \geq V_u^P(k)$ e $V_y^I(k) \geq V_y^P(k)$, para todo k . Considerando-se então as propriedades dos processos gaussianos sabe-se que $F_{u,k}^{-1}(\beta)^I \geq F_{u,k}^{-1}(\beta)^P$ e $F_{y,k}^{-1}(\alpha)^I \geq F_{y,k}^{-1}(\alpha)^P$.

Consequentemente, obtém-se :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} + F_{u,k}^{-1}(\beta)^I \geq \underline{u} + F_{u,k}^{-1}(\beta)^P \\ \bar{u} - F_{u,k}^{-1}(\beta)^I \leq \bar{u} - F_{u,k}^{-1}(\beta)^P \end{array} \right. \tag{3.58}$$

conclui-se então que $U_{\beta,k}^P \supseteq U_{\beta,k}^I$. Procedendo-se de modo análogo a

(3.58), para restrição de saída, obtém-se que $V_{\alpha,k}^P \geq V_{\alpha,k}^I$.

Teorema 2 :

Sejam $J^I(\lambda)$ e $J^P(\lambda)$ os valores obtidos pela função objetivo do problema de variância mínima nos casos de imperfeita e perfeita informação de estado, respectivamente. Tem-se então que $J^I(\lambda) \geq J^P(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$.

Prova :

Considere-se o problema de variância mínima (2.50) dado na seguinte forma equivalente:

$$J^I(\lambda) = \text{Min}_G \left\{ V_y^I(k+1) + \lambda V_u^I(k) \right\} \quad (3.59)$$

como consequência do lema 1, tem-se que $V_y^I(k+1) \geq V_y^P(k+1)$ e $V_u^I(k) \geq V_u^P(k)$. Segue então da solução ótima de (3.59) que:

$$\begin{aligned} J^I(\lambda) &= V_y^I(k+1)^* + \lambda V_u^I(k)^* \\ &\geq V_y^P(k+1)^* + \lambda V_u^P(k)^* \geq \text{Min}_G \left\{ V_y^P(k+1) + \lambda V_u^P(k) \right\} = J^P(\lambda) \end{aligned} \quad (3.60)$$

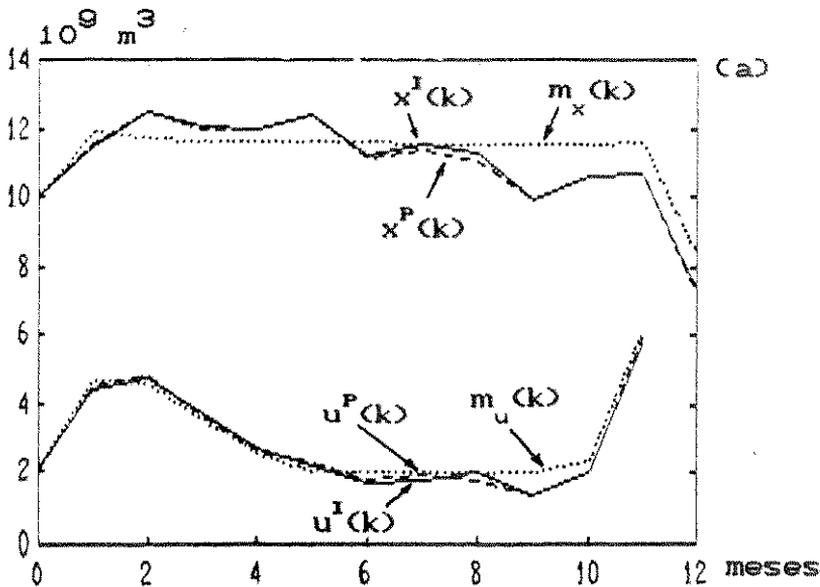
o que prova este teorema. \square

Uma análise qualitativa dos teoremas apresentados sugere o aspecto restritivo imposto pela impossibilidade de se medir exatamente os estados do sistema. Assim o Teorema 1 mostra que os limitantes das variáveis de saída e de controle, no caso de imperfeita informação de estado, estão contidos no espaço restritivo obtido para estas mesmas variáveis sob o enfoque de

ii) usando (i), calcula-se as trajetórias ótimas de estado e de controle para $\lambda = \lambda_0$ e $\lambda = \lambda^*$. Tais resultados são comparados graficamente com as suas respectivas trajetórias médias e com as trajetórias ótimas obtidas para o caso de perfeita e imperfeita informação de estado (vide capítulo anterior).

RESULTADOS:

A solução ótima do primeiro nível forneceu os seguintes resultados: para $V_v^{1/2} = 0.25$, obteve-se $v_y(\theta^*) \cong 0.9999885$ e $v_u(\gamma^*) \cong 0.99999869$ associado com $\lambda = \lambda^* \cong 0.2466$. Para $V_v^{1/2} = 0.5$, obteve-se $v_y(\theta^*) \cong 0.9998635$ e $v_u(\gamma^*) \cong 0.99999368$ associado a $\lambda = \lambda^* \cong 0.1447$. Com respeito a solução aproximada, ou seja, $\lambda = \lambda_0 = 1.44$, obteve-se $v_y(\theta) \cong 0.999$ e $v_u(\gamma) = 1.000$, para ambos os casos. A seguir apresenta-se as trajetórias de estado e controle obtidas como solução. Com ojetivo de distinguir as trajetórias ótimas de perfeita e imperfeita informação de estado adota-se os seguintes índices "I" (imperfeita) e "P" (perfeita).



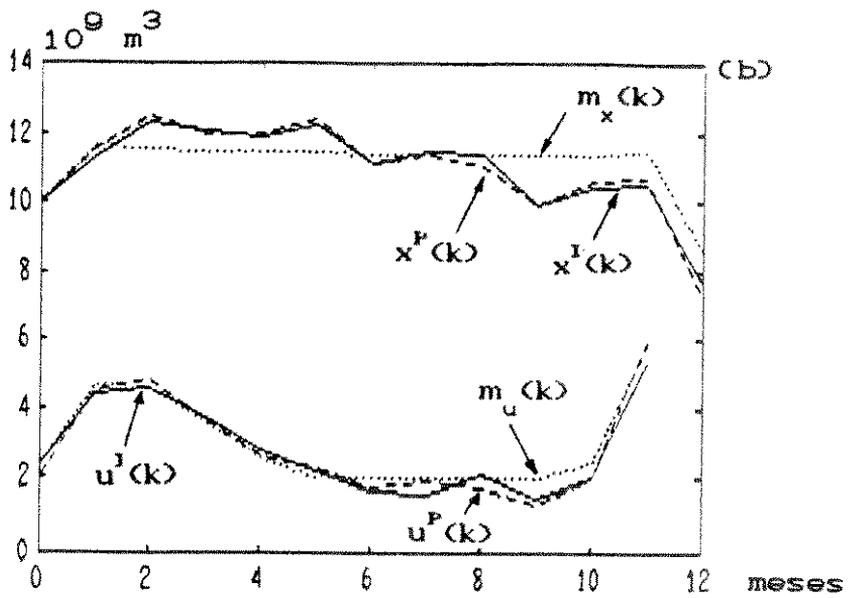
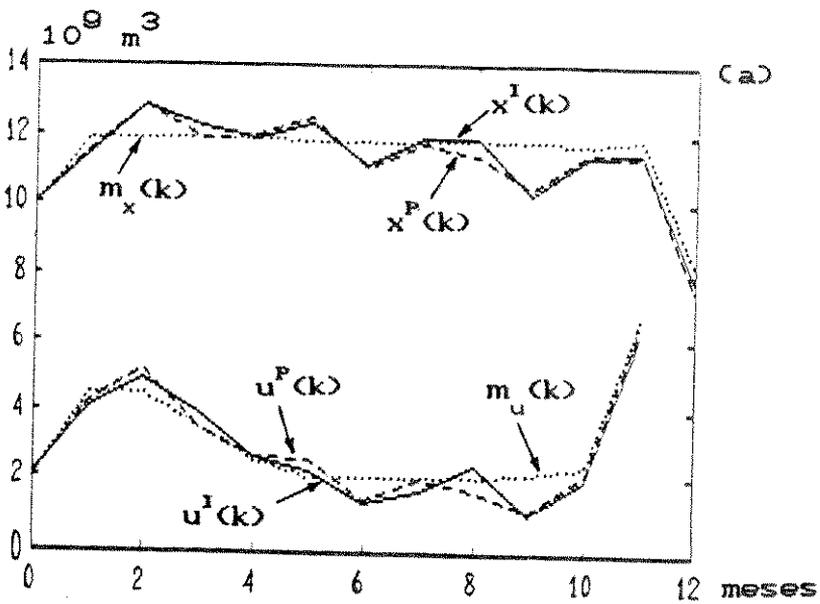


Fig. 3.2. - Trajetórias de estado e controle para $\lambda_0 = 1.44$. (a) $V_v^{1/2} = 0.25$; (b) $V_v^{1/2} = 0.5$



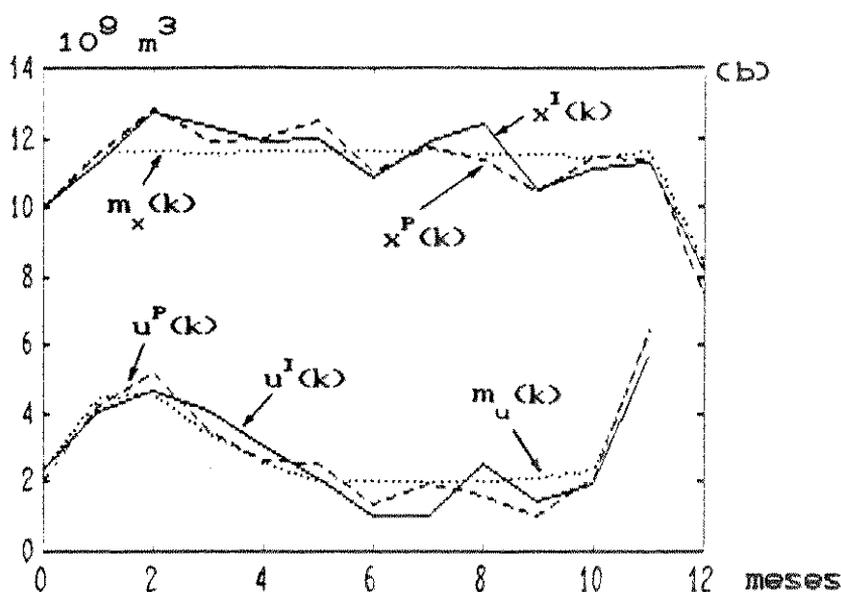


Fig 3.3. - Trajetórias de estado e de controle para $\lambda = \lambda^*$: (a) $V_v^{1/2} = 0.25$; (b) $V_v^{1/2} = 0.5$

Os resultados obtidos permitem os seguintes comentários:

1. A adição de um ruído nas medidas de estado com desvio de 0.25 praticamente não afeta as trajetórias obtidas em comparação com as trajetórias de referência. Como se poderia esperar, aumentado-se o desvio para 0.5, o erro de estimação aumenta e por conseguinte as trajetórias obtidas passam a ser diferentes das trajetórias de referência. Observe-se que o controlador age no sentido de não permitir que estas trajetórias se distanciem de suas respectivas médias (referência).
2. A escolha do fator de ponderação em termos de $\lambda = \lambda_0$ ou $\lambda = \lambda^*$ não altera significativamente as trajetórias. Para o caso onde $V_v^{1/2} = 0.5$, observa-se que a trajetória de controle para λ^* varia bem mais que a obtida para λ_0 , ilustrando assim uma propriedade do controlador de variância mínima ponderado.

III.6. CONCLUSÃO

Neste capítulo mostrou-se que é possível aplicar o procedimento de controle parcialmente em malha fechada, para tratar um problema de controle ótimo linear estocástico sob o enfoque de imperfeita informação de estado.

Tendo em vista, a natureza linear-gaussiana do sistema, toda a informação necessária para os objetivos de controle (estatística suficiente) é obtida a partir do filtro de Kalman. Por conseguinte, a política de realimentação, derivada do problema de variância mínima, segue como consequência da aplicação do Teorema da Separação.

Certas propriedades foram apresentadas e mostram certas particularidades relacionadas com as soluções obtidas para os casos de perfeita e imperfeita informação de estado. A conclusão obtida é que no caso de imperfeita informação de estado, a solução do problema é sempre mais restritiva.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM ENERGÉTICA

IV.1. INTRODUÇÃO.

Um sistema hidro-térmico de geração de energia elétrica é constituído normalmente por dois meios distintos de produção, a saber: unidades térmicas e hidráulicas, que devem ser conjuntamente operadas, de modo a satisfazer a demanda requerida pelo mercado consumidor. Na figura 4.1., ilustra-se de forma esquemática este sistema energético, para o qual E_T , E_H e E_D representam, respectivamente, as energias geradas pelos sub-sistemas térmico e hidráulico e a aquela consumida pelo mercado [Geromel,1982].

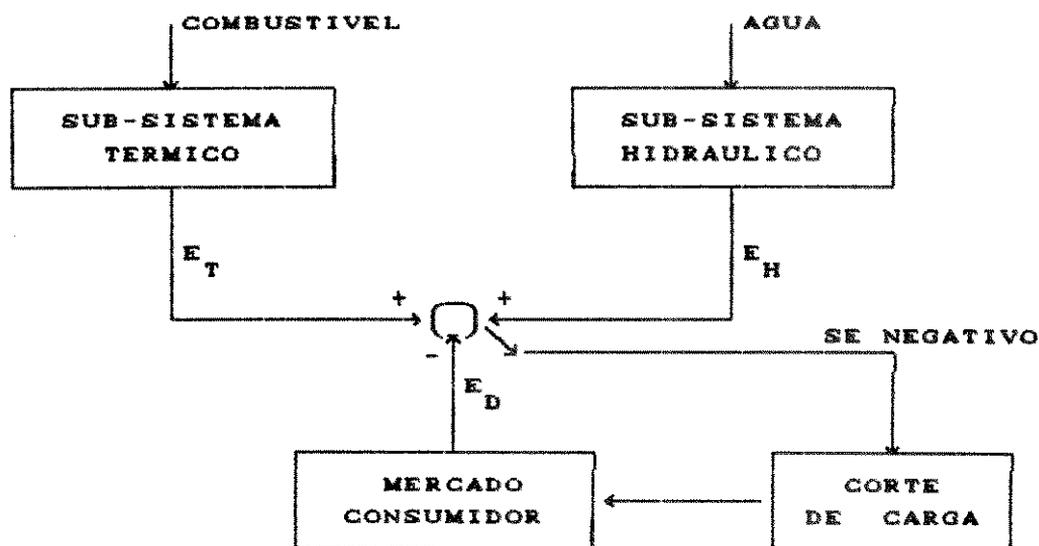


Fig. 4.1. Esquema Energético de um mercado consumidor

A política ótima de operação do sistema global - devido ao baixo custo de produção do sub-sistema hidráulico em relação ao sub-sistema térmico - depende quase que totalmente do sub-sistema hidroelétrico, conseqüentemente torna-se importante a decisão de quando e quanto gerar com estes sub-sistemas, conhecendo suas limitações físicas, tais como : capacidades de armazenamento e turbinamento de água, os aportes independentes de água e os rendimentos das unidades geradoras. Neste contexto, resta ao sub-sistema térmico satisfazer o déficit de produção, ou seja, ge

rar o equivalente à diferença entre a demanda e a produção de energia do meio hidroelétrico. Desta maneira, o problema de operação ótima do sistema como um todo, pode ser entendido como a minimização do custo total de combustível usado na geração termoelétrica, procurando equilibrar o uso temporal da energia hidráulica e térmica, com a finalidade de atender a demanda do mercado consumidor, em cada período [Geromel e Luna,1980], [Lyra, 1979].

Um aspecto importante do sistema hidrotérmico é seu ciclo de produção. Apesar dos sub-sistemas térmicos e hidráulicos estarem acoplados fisicamente, eles apresentam ciclos diferentes: Em princípio, o ciclo térmico é semanal (ciclo de demanda) e o ciclo hidráulico é anual (ciclo das águas), sugerindo uma política ótima de operação a curto ou longo prazo, respectivamente. A tabela 4.1 mostra aspectos de um sistema hidrotérmico para horizontes de curto e longo prazo.

TABELA 4.1. - Aspectos de um sistema hidrotérmico

	CURTO PRAZO	LONGO PRAZO
HORIZONTE DE OTIMIZACAO	menor que 1 semana	maior que um ano
DEMANDA	aleatória	determinística
APORTES DE AGUA	determinístico	aleatório
ATRASSO DE TRANSPORTE	significativo	não significativo
CARACTERISTICA DO PROBLEMA	linear [§]	não linear

O modelo matemático do sistema hidrotérmico dependerá em sua especificação dos aspectos descritos na tabela acima. É claro que, é desejável considerar aquele modelo que mais se aproxima da realidade, entretanto isto pode tornar o problema de otimização

§
E uma aproximacao valida supondo-se que o nivel do canal de fuga seja constante.

demasiadamente complicado, conseqüentemente um compromisso entre a qualidade do modelo e a eficiência de sua solução é em geral recomendável.

Quando este problema é tratado para um horizonte de longo prazo, os aportes de água do sistema são variáveis aleatórias. Considerando-se ainda que este problema envolve um grande número de usinas (multi-dimensional) e que o custo de geração é uma função não linear, obter sua solução ótima não é uma tarefa fácil.

Nas seções seguintes deste capítulo, atenção será dada para a operação de longo prazo do sub-sistema hidroelétrico. Inicialmente, destaca-se os aspectos de modelamento da dinâmica do reservatório e sua função objetivo (seção IV.2); o modelamento dos aportes através de uma representação tipo ARMA e sua introdução na equação dinâmica do reservatório são apresentados na seção IV.3. Na seção IV.4. formula-se o problema de geração hidroelétrica, considerando-se inicialmente o caso de uma usina desacoplada e em seguida o caso multireservatório (o sistema interligado). Por fim, na seção IV.5 um breve resumo de dois procedimentos usados para resolver este problema é apresentado.

IV.2. MODELAGEM DO SISTEMA HIDROELÉTRICO

Considere-se um conjunto de M usinas hidráulicas interconectadas. Cada usina, deste sistema, tem sua dinâmica descrita matematicamente pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{r}_i(t) &= -u_i(t) + \sum_{j \in J_i} u_j(t) + \xi_i(t) \quad i=1, \dots, M \\ r_i(0) &= r_{i0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ela representa a evolução do volume de água no reservatório da i -ésima usina, no instante de tempo t , sendo formada pelas

seguintes variáveis: $r_i(t)$ é o volume de água (m^3) armazenado no reservatório; $u_i(t)$ representa a quantidade de água turbinada ($m^3/\text{seg.}$); $\xi_i(t)$ constitui a vazão ($m^3/\text{seg.}$) correspondentes aos aportes de água (chuva, afluências, etc...) e J_i denota o conjunto dos índices correspondentes a contribuição de água turbinada pelas usinas localizadas imediatamente à montante da i -ésima. Por motivo de simplicidade, não considera-se neste modelamento o volume de água vertida, entretanto cabe aqui salientar que sua introdução não constitui nenhuma dificuldade adicional.

Para obter o modelo discreto equivalente a (4.1), procede-se tomando sua integral entre dois instantes de tempo consecutivos, t e $t+\Delta t$. Decorre, então, da linearidade de (4.1), que:

$$\int_t^{t+\Delta t} \dot{r}_i(\tau) d\tau = - \int_t^{t+\Delta t} u_i(\tau) d\tau + \sum_{j \in J_i} \int_t^{t+\Delta t} u_j(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \xi_i(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

considerando-se u_i e ξ_i constantes neste intervalo, fixando-se $t=k$ e assumindo-se $\Delta t = 1$ mês, resulta:

$$r_i(k+1) = r_i(k) - u_i(k) + \sum_{j \in J_i} u_j(k) + \xi_i(k) \quad (4.3)$$

onde deve-se ressaltar que a equação (4.3), tem todas as variáveis dadas na mesma unidade (m^3).

Considerando-se, então, todas as usinas do sistema em estudo, pode-se escrever (4.3) na seguinte forma:

$$r(k+1) = r(k) + Bu(k) + \xi(k) \quad (4.4)$$

$$r(0) = r_0$$

onde $r_0 \in \mathbb{R}^M$ denota o estado inicial;

$$r(k) = [r_1 \dots r_M]^T \in \mathbb{R}^M;$$

$$u(k) = [u_1 \dots u_M]^T \in \mathbb{R}^M;$$

$$\xi(k) = [\xi_1 \dots \xi_M]^T \in \mathbb{R}^M;$$

tem-se ainda $B \in \mathbb{R}^{M \times M}$ formada por elementos -1, 0 e 1, correspondentes a estrutura de interligação das M usinas, ou seja, ela denota a estrutura de acoplamento do sistema global. Esta matriz apresenta as seguintes propriedades estruturais:

$$\begin{cases} (B)_{i,j} = 0 & \text{se } i < j \\ (B)_{i,j} = -1 & \text{se } i = j \\ (B)_{i,j} = 1 & \text{se } j \in J_i \end{cases} \quad (4.5)$$

Toda matriz que satisfaz (4.5) constitui o conjunto \mathcal{B} . Ainda são válidos:

$$a) \det(B) = (-1)^M, \quad \forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^{-1} \text{ existe}$$

$$b) B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^{-1} \in \mathcal{B}$$

estas propriedades serão fundamentais para solução do problema hidroelétrico, a ser discutido no capítulo seguinte.

Este sistema está restrito fisicamente, isto é, existem restrições operacionais com respeito ao volume de água possível de armazenar nos reservatórios e ao volume de água possível para turbinar, os quais são sintetizados por:

$$r_i(k) \in R_i = \{ r_i \mid \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i \} \quad (4.6)$$

$$u_i(k) \in U_i = \{ u_i \mid \underline{u}_i \leq u_i \leq \bar{u}_i \} \quad (4.7)$$

onde \underline{r}_i , \bar{r}_i , \underline{u}_i e \bar{u}_i são os limites mínimos e máximos do reservatório e de turbinagem da i -ésima usina.

Tendo-se determinado a dinâmica de cada reservatório (4.3), passa-se agora ao modelamento de sua função de geração. Pode-se aproximar o funcionamento de uma usina hidroelétrica como sendo um sistema que transforma com um certo rendimento a energia potencial de água armazenada em energia elétrica, consequentemente sua função de geração pode ser expressa como segue:

$$\begin{aligned} \phi_i(r_i(k), u_i(k)) &= \Delta (\text{rendimento}) \times \left(\begin{array}{c} \text{massa} \\ \text{turbinada} \\ \text{por mês} \end{array} \right) \times g \times \left(\begin{array}{c} \text{altura} \\ \text{de} \\ \text{queda} \end{array} \right) \\ &= \pi_i u_i(k) h_i(r_i(k)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

significando a potência (energia média gerada em 1 mês) da usina i , sendo função da quantidade de água turbinada e da altura de queda (energia potencial). A equação (4.8) é constituída por: uma constante π_i , cujo valor depende do rendimento da usina, da aceleração da gravidade g , e de h_i que representa uma função polinomial, em geral de quarta ordem, que transforma um determinado volume de água armazenado r_i em altura de queda e portanto depende do perfil topográfico de cada reservatório (função cota-volume) [Ferreira, 1983].

Deve-se observar que mesmo sendo $h_i(\cdot)$, por natureza física, uma função côncava, a função de geração $\phi_i(\cdot)$ não apresenta qualquer propriedade de convexidade ou concavidade. Isto é devido ao fato de ϕ_i , sendo função das variáveis $r_i(k)$ e $u_i(k)$, implicar na obtenção de uma matriz hessiana, onde

$$\lambda_1(H\phi_i) \times \lambda_2(H\phi_i) < 0 \quad ; \quad \forall r_i \in R_i \text{ e } u_i \in U_i \quad (4.9)$$

sendo $\lambda_1(.)$ e $\lambda_2(.)$ os autovalores de $(.)$. Isto confirma a ausência da propriedade referida acima. Este fato, tende a dificultar a solução do problema de controle associado ao sistema hidroelétrico, uma vez que, pelo menos teoricamente, os métodos clássicos de decomposição não podem ser utilizados.

Considerando-se então, as M usinas que compoem o sistema, pode-se escrever, a partir de (4.8), a função de geração total das usinas, como

$$\phi(r(k), u(k)) = \sum_{i=1}^M \pi_i u_i(k) h_i(r_i(k)) \quad (4.10)$$

IV.3. MODELAGEM DOS APORTES DE ÁGUA

No modelo matemático, apresentado na seção anterior, para representar a dinâmica, equação (4.3), observa-se a presença da variável $\zeta(k)$ que denota os aportes de água do sistema. Quando o problema de operação do sub-sistema hidráulico é tomado a longo prazo esta variável é essencialmente aleatória, isto é justificado no fato dela depender de eventos naturais, tais como chuva, seca, etc..., os quais não são possíveis de ser previstos com antecedência.

Visando empregar os aportes num esquema de otimização ou de simulação, pode-se adotar para isto: uma sequência de aportes extraídos do histórico de operação de cada usina ou um modelo matemático identificado a partir deste histórico.

Em [Silva F.,1982] foi desenvolvido uma metodologia para identificação de modelos lineares do tipo autoregressivo-média móvel (ARMA) e como aplicação foi identificado um modelo para os aportes. A seguir resume-se os passos utilizados neste procedimento:

PASSO 1) Análise estatística das medidas (histórico), consistindo da obtenção das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, cuja avaliação [Box e Jenkins,1970] permite identificar, à priori, o tipo (processo AR, MA, ARMA) e a ordem do modelo.

PASSO 2) Estimação inicial dos parâmetros do modelo identificado no passo 1. Se este for autoregressivo (AR), a solução será obtida resolvendo-se a equação de Yule-Walker. Se for média-móvel (MA) será adotado o algoritmo de Newton-Raphson. Ambas soluções serão empregadas se o modelo for identificado como sendo ARMA.

PASSO 3) Estimação ótima dos parâmetros. Para isto, emprega-se técnicas de decomposição visando maximizar a função de Verossimilhança [Silva F.,1982]. Este método foi denominado de estimador da Matriz Estendida Generalizada, uma vez que ela possui as mesmas propriedades do estimador da Matriz Estendida [Amaral,1981].

PASSO 4) Obtenção das Variâncias dos parâmetros estimados com objetivo de adquirir informações sobre suas respectivas dispersões [Mendel,1973] e por conseguinte poder distinguir os parâmetros mais significativos para o modelo.

PASSO 5) Validação do modelo. Adotou-se aquele que testa a função de autocorrelação do resíduo [Box e Jenkins,1970].

Este procedimento é aplicado de maneira iterativa, ou seja, se na fase de validação (passo 5) o modelo for considerado inadequado, então o projetista deve propor modificações no tipo e na ordem do mesmo e retornar ao passo 2, repetindo a operação. A figura 4.2., ilustra os passos deste algoritmo através de um diagrama de blocos.

Para construção do modelo dos aportes de água, fixou-se a priori alguns requisitos a serem atingidos:

- o modelo deveria ser suficientemente simples, de modo a não aumentar a complexidade do problema estocástico;
- a possibilidade de predição, com um mês de antecedência, dos aportes mais prováveis com boa precisão.

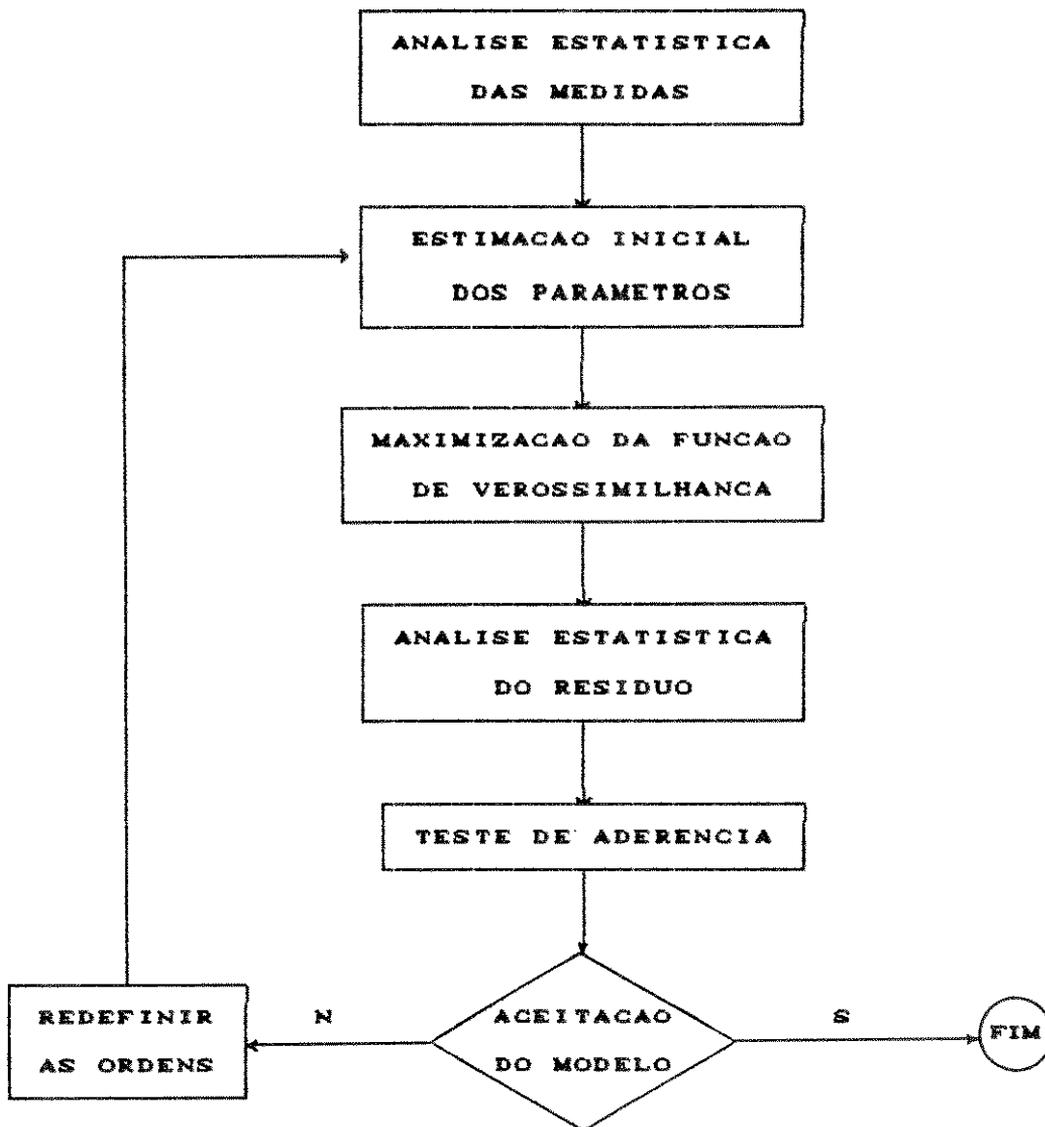


Fig. 4.2. - Fluxograma do procedimento proposto

O sistema hidroelétrico investigado em [Silva F.,1982] compõe-se de quatro usinas interligadas, distribuídas na forma de árvore como mostra a figura 4.3. e representa uma porção importante do parque hidroelétrico da região sudeste do país.

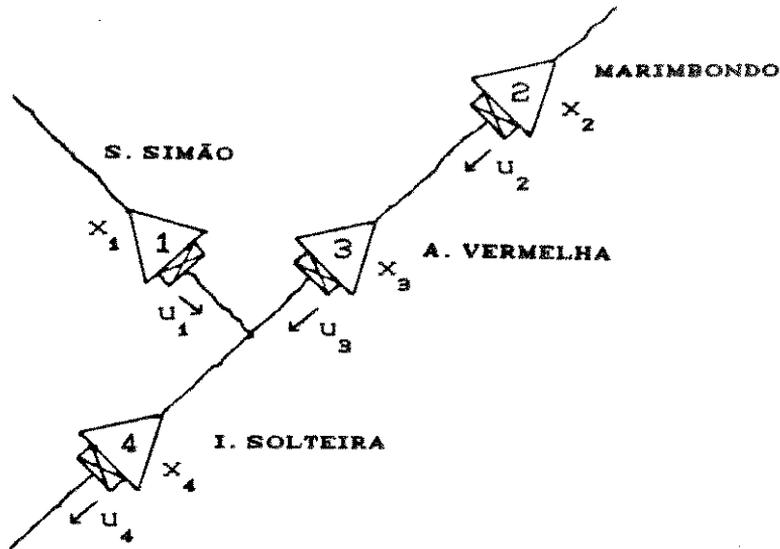


Fig.4.3. - Esquema do parque hidráulico em estudo

Para cada usina, existe uma tabela contendo os aportes de água (chuva, seca, evaporação, ...) medidos, em volume de água, a partir do ano de 1931 até 1970 e que tomadas mês a mês totaliza um histórico de 480 medidas. Aplicando o procedimento, descrito acima, a estas medidas determinou-se que o modelo mais adequado para representá-las era um processo autoregressivo de ordem 10 (ARC(10)), ou seja,

$$\xi_i(k) = \frac{C_i(z^{-1})}{D_i(z^{-1})} \theta_i(k) + m_{\xi}^i(k) \quad , \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.11)$$

onde $\theta(k)$ denota o ruído branco gaussiano de média nula e desvio σ_{θ}^i ; m_{ξ}^i representa a média dos aportes observados num período de 12 meses (sazonalidade). E $C_i(\cdot)$ e $D_i(\cdot)$ são polinômios em z^{-1} , dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_i(z^{-1}) = 1 \\ D_i(z^{-1}) = 1 + \alpha_1^i z^{-1} + \alpha_2^i z^{-2} + \alpha_{10}^i z^{-10} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

a tabela 4.2. apresenta os valores numéricos dos parâmetros estimados para as quatro usinas e a percentagem de aceitação dos mesmos.

TABELA 4.2. - Modelo padrão das usinas - ARC(10)

USINAS	α_1	α_2	α_{10}	σ_θ	ACEITAÇÃO
SÃO SIMÃO	- 0.585 ± 0.046	- 0.034 ± 0.053	+ 0.090 ± 0.053	.65	> 75%
MARIMBONDO	- 0.723 ± 0.046	+ 0.138 ± 0.056	- 0.085 ± 0.057	.44	> 75%
ÁGUA VERMELHA	- 0.638 ± 0.046	+ 0.005 ± 0.054	- 0.103 ± 0.055	.17	> 99%
ILHA SOLTEIRA	- 0.413 ± 0.046	- 0.009 ± 0.049	- 0.109 ± 0.049	.80	> 95%

Com objetivo de avaliar o grau de aderência do modelo - adequado de acordo com o teste de correlação do resíduo - foi proposto a construção de um preditor de 1-passo à frente, cuja equação é dada abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_k^i(1) = m_\xi^i(k+1) + D_*^i(z^{-1}) \cdot (\xi_i(k) - m_\xi^i(k)) \\ z^{-1} \cdot D_*^i(z^{-1}) \triangleq 1 - D^i(z^{-1}) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

onde $\xi_k^i(1) = E \langle \xi_i(k+1) \rangle$ representa o valor predito de ξ , no instante $k+1$, para i -ésima usina. Pode-se, então, traçar curvas para o modelo preditivo (4.13) e compará-las com as observadas do sistema real e assim constatar visualmente o grau de aderência existente. A figura 4.4, ilustra o resultado de uma simulação de 5 anos realizado para usina de São Simão.

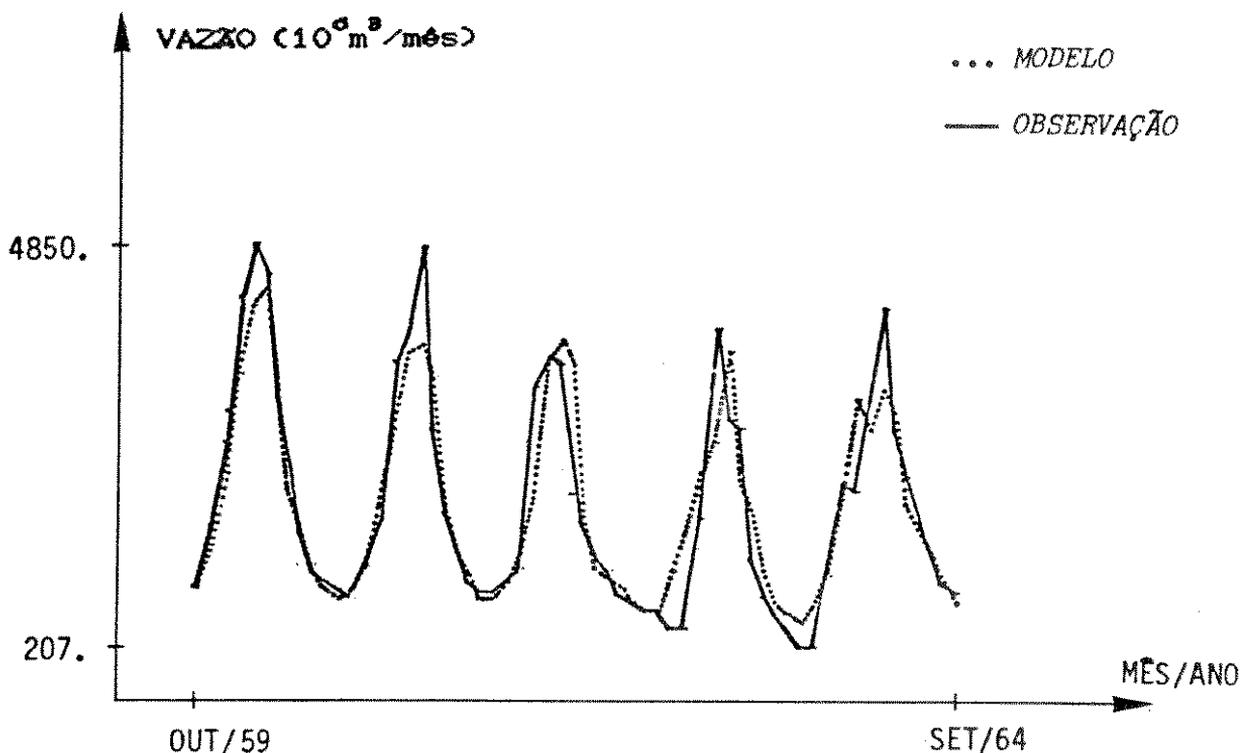


Fig. 4.4. - Comparação de curvas preditas e reais de S. Simão

Destaca-se, em seguida, alguns comentários a respeito do modelo selecionado:

- embora o modelo seja estacionário, procurou-se estudar igualmente um modelo não estacionário (sazonal) que por não apresentar uma aderência significativamente maior foi descartado;
- a hipótese de não correlação espacial dos aportes pode ser retirada, tornando (4.11) um modelo multi-variável para o qual existem algoritmos eficientes para identificação paramétrica, vide [Amaral, 1981].

É interessante observar, que o modelo tipo entrada-saída adotado para representar os aportes (4.11) não está em acordo com a representação de estado adotada para descrever a dinâmica do

reservatório (4.3). Sendo objetivo, neste trabalho manter uma descrição geral na forma de equações de estado, propõe-se converter (4.11) a esta forma. Para isto procede-se como segue: seja a descrição matemática da equação dinâmica de uma dada usina i dada pela composição dos dois seguintes modelos,

- Modelo do reservatório:

$$r_i(k+1) = r_i(k) - u_i(k) + \sum_{j \in J_i} u_j(k) + \delta \xi_i(k) + m_{\xi}^i(k) \quad (4.14)$$

com $\delta \xi_i = \xi_i - m_{\xi}^i$.

- Modelo de aportes:

$$\delta \xi_i(k) = \frac{1}{1 - \alpha_1^i z^{-1} - \alpha_2^i z^{-2} - \alpha_{10}^i z^{-10}} \theta_i(k) \quad (4.15)$$

a equação (4.15) pode ser colocada equivalentemente como uma equação à diferenças, ou seja,

$$\delta \xi_i(k) - \alpha_1^i \delta \xi_i(k-1) - \alpha_2^i \delta \xi_i(k-2) - \alpha_{10}^i \delta \xi_i(k-10) = \theta_i(k) \quad (4.16)$$

a partir de (4.16) pode-se extrair os estados associados, que serão representados por p^i , do seguinte modo:

$$\begin{array}{rcl}
 p_1^i(k) & = & \delta \xi_i(k-10) \\
 p_2^i(k) & = & \delta \xi_i(k-9) = p_1^i(k+1) \\
 \vdots & & \vdots \\
 p_{10}^i(k) & = & \delta \xi_i(k-1) = p_9^i(k+1) \\
 & & \delta \xi_i(k) = p_{10}^i(k+1)
 \end{array}$$

onde $p_{10}^i(k+1) = \alpha_{10}^i p_1^i(k) + \alpha_2^i p_9^i(k) + \alpha_1^i p_{10}^i(k) + \theta_i(k)$

Isto pode ser reescrito compactamente como segue:

$$p_i(k+1) = P_i p_i(k) + d_i \theta_i(k) \quad (4.17)$$

onde

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ \alpha_{10}^i & 0 & 0 & \dots & \alpha_2^i & \alpha_1^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$$

$$d_i^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

$$p_i^T = [p_1^i \quad p_2^i \quad \dots \quad p_{10}^i] \in \mathbb{R}^{1 \times 10}$$

observe-se ainda que $\delta \xi_i$ pode ser representado na seguinte forma:

$$\delta \xi_i(k) = f_i^T p_i(k) + \theta_i(k) \quad (4.18)$$

onde $f_i^T = [\alpha_{10}^i \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \alpha_2^i \quad \alpha_1^i] \in \mathbb{R}^{1 \times 10}$. Por conseguinte, substituindo-se (4.18) em (4.14) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 r_i(k+1) &= r_i(k) - u_i(k) + \sum_{j \in J_i} u_j(k) + f_i^T p_i(k) + \theta_i(k) + m_\xi^i(k) \\
 &= r_i(k) + f_i^T p_i(k) + b_i u(k) + \theta_i(k) + m_\xi^i(k) \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

onde $u(k)^T = [u_1(k) \dots u_M(k)]$ e b_i^T corresponde a i -ésima linha da matriz de acoplamento B , dada em (4.4). Definindo-se então,

$$x_i(k) = \begin{bmatrix} r_i(k) \\ \dots \\ p_i(k) \end{bmatrix} \begin{matrix} > 1 \\ > 10 \end{matrix}$$

obtem-se uma representação geral para dinâmica do sistema,

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + D_i u(k) + w_i(k) \quad (4.20)$$

onde $w_i(k) = g_i \theta_i(k) + q_i m_\xi^i(k)$, denota uma variável aleatória com média $m_w^i(k) = q_i m_\xi^i(k)$ e variância invariante $V_w^i = \sigma_{\theta_i}^2 g_i g_i^T$. E

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & & & f_i^T \\ 0 & & & \dots \\ \vdots & & & P_i \\ 0 & & & \dots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{11 \times 11} ;$$

$$D_i = \begin{bmatrix} & & b_i^T & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \diagdown & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{11 \times M} ;$$

$$g_i^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \in \mathbb{R}^{1 \times 11} ;$$

$$q_i^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 11}$$

Finalizando, assume-se que toda informação sobre o estado do reservatório i , é obtido a partir do seguinte dispositivo de saída:

$$y_i(k) = c_i^T x_i(k) + v_i(k) \quad (4.21)$$

onde $c_i^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 11}$ e $v_i(k) \sim N(0, \sigma_v^i)$ denota a imprecisão do medidor da i -ésima usina.

IV.4. A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE GERAÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA DE UM SISTEMA HIDROELÉTRICO.

Com base no modelamento matemático exposto nas seções anteriores, o problema de controle ótimo estocástico de geração de energia hidroelétrica pode agora ser formulado. Considera-se em primeiro lugar o problema de controle de uma única usina (isolada no contexto de um sistema interligado) e em seguida estende-se esta formulação para o caso multireservatório (geração total de energia do sistema interligado).

(i) O caso de um único reservatório:

Seja a i -ésima usina de um sistema hidroelétrico, suposta completamente desacoplada das usinas situadas a sua montante. O modelo do reservatório apresentado em (4.20) permanece válido, porém sua componente de controle leva em conta somente o que é turbinado por esta usina, ou seja,

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + b_i u_i(k) + w_i(k) \\ y_i(k) &= c_i^T x_i(k) + v_i(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $u_i(k) \in \mathbb{R}$ e $b_i^T = [-1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{11}$.

Assim, dada a condição inicial $x_i(0) = E(x_{i,0})$, deseja-se determinar uma política de controle $\{u_i(k), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ que resolva o seguinte problema (estocástico) de geração de energia elétrica:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{w_i(k)} \quad E \left\{ \phi_i(x_i(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi_i(x_i(k), u_i(k)) \mid I_k \right\} \\ \text{s. a.} \quad (4.22) \text{ e } (4.21) \end{aligned} \quad (4.23)$$

com as variáveis de saída e controle sujeitas as seguintes restrições probabilísticas:

$$\begin{cases} \text{Prob} (y_i(k+1) \in R_i) \geq 2\alpha_i - 1 \\ \text{Prob} (u_i(k) \in U_i) \geq 2\beta_i - 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

onde R_i , U_i e $\phi_i(\cdot)$ são dados respectivamente por (4.6), (4.7) e (4.8). As constantes α_i e β_i são medidas de probabilidade, fornecidas pelo projetista, para usina i .

(ii) O caso Multireservatório:

Considere-se, agora, um total de M usinas interligadas de um sistema hidroelétrico. O problema estocástico de grande porte é dado por:

$$\text{Max}_{w(k)} \quad E \left\{ \phi(x(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} \phi(x(k), u(k)) \mid I_k \right\} \\ \text{sujeito a} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Du(k) + w(k), \quad x(0) = E(x_0) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

com restrições probabilística nas variáveis $y_i(k)$ e $u_i(k)$ ($i=1,2,\dots,M$) dadas por (4.24). Para esta formulação tem-se o custo funcional dado por

$$\begin{aligned}\phi(x(k), u(k)) &= \sum_{i=1}^M \phi_i(x_i(k), u_i(k)) \\ \phi(x(N)) &= \sum_{i=1}^M \phi_i(x_i(N))\end{aligned}\tag{4.26}$$

e as matrizes $A \in \mathbb{R}^{(11M \times 11M)}$, $D \in \mathbb{R}^{(11M \times M)}$ e $C \in \mathbb{R}^{(M \times 11M)}$ são dadas respectivamente por,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_M \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_M \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} c_1^T & & & \\ & c_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_M^T \end{bmatrix}$$

onde as matrizes A_i , B_i e c_i^T ($i=1,2,\dots,M$) estão definidas em (4.20) e (4.21).

IV.5. PROPOSTAS EXISTENTES NA LITERATURA

A determinação de uma política ótima para operar um sistema hidroelétrico num horizonte de longo prazo, envolve a solução de um problema de controle ótimo estocástico de grande dimensão e portanto de difícil solução. A formulação deste problema foi assunto da seção anterior. A seguir são apresentadas algumas abordagens empregadas para resolver este problema.

1ª Abordagem:

Considera-se um modelo individualizado para cada usina hidráulica, com os aportes de água assumindo valores conhecidos, como por exemplo uma condição de pior caso (o ano mais seco do histórico).

Este enfoque vem sendo empregado por vários grupos de pesquisa em universidades (UFMG, UFSC, EFEI, UNICAMP, dentre outras). Tem como principal característica a determinação de uma política ótima para cada usina como função do tempo, isto é, em malha aberta, utilizando vários métodos de programação matemática [Soares Lyra e Tavares, 1980], [Geromel e Luna, 1981], [Geromel e Baptistella, 1981] e [Soares, 1987]. Neste caso, para poder aplicar tais algoritmos torna-se necessário ignorar os efeitos estocásticos do sistema, assumindo para isto valores determinísticos para os aportes durante todo o horizonte de planejamento. Portanto a desvantagem desta abordagem é que ela não é capaz de absorver as variações exógenas que ocorrem na prática.

2ª Abordagem:

Considera-se um modelo equivalente (um único reservatório) para o sub-sistema hidroelétrico e os aportes aleatórios. Neste caso o problema de controle estocástico apresenta uma dimensão reduzida viabilizando assim o uso da programação dinâmica estocástica.

Este enfoque é utilizado pelo CEPEL/ELETRORÁS [Terry e et alii, 1986] e traz como característica a determinação de uma política ótima de geração em malha fechada. Ao contrário da abordagem anterior, às incertezas relativas aos aportes são consideradas e assim a natureza estocástica do sistema é preservada. Como método de solução é utilizado o algoritmo de

programação dinâmica estocástica. Uma vez que, este método é inviável computacionalmente para resolver o problema global em virtude de seu dimensionamento elevado, é adotado um procedimento de agregação de todo parque hidráulico em um único reservatório equivalente expresso em termos de energia. Da mesma forma, os aportes de água para cada usina, são agregados em um único aporte de energia. Sendo, além disto, adotado um modelo matemático de primeira ordem para representar suas características estatísticas [Pereira e et alii, 1984]. Consequentemente, a dimensão do problema fica reduzida a apenas duas variáveis de estado. Supõe-se que esta simplificação seja aceitável, pelo fato de que a precisão da representação individualizada de cada usina é não significativa frente às incertezas decorrentes dos aportes, em operações de longo prazo.

Após obter a solução ótima em malha fechada do problema agregado, o passo seguinte consiste de um procedimento de desagregação, do qual são obtidas as políticas de operação individualizadas para as usinas do sistema.

Presume-se que a desvantagem desta abordagem está no processo de agregação-desagregação, uma vez que, isto pode acrescentar erros significativos nas soluções individualizadas determinadas para cada uma das usinas.

3ª Abordagem:

Trata-se de uma abordagem alternativa que utiliza-se do algoritmo proposto neste trabalho, para resolver o problema de operação de um sistema hidroelétrico de grande porte. Este tratamento, como será visto no capítulo seguinte, preserva a natureza estocástica dos aportes, bem como permite considerar o modelo individualizado de cada usina.

IV. 6. CONCLUSÃO

Neste capítulo discutiu-se sobre os aspectos da formulação e sobre as propostas de solução de um problema de controle ótimo de geração hidroelétrica com horizonte de longo prazo. Destaque foi dado para o modelamento das unidades hidroelétricas, apresentando-se modelos para descrever a dinâmica, os aportes e a função de geração de uma dada usina. As principais características físicas de operação destas unidades foram assinaladas, sendo ainda apresentado os passos computacionais de um procedimento de identificação de parâmetros, que foi utilizado para obter um modelo matemático para os aportes. Utilizando os modelos citados apresentou-se a formulação do problema de geração hidroelétrica. Por fim, comentou-se sobre o emprego de procedimentos utilizados para resolver este problema de otimização.

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO PRÁTICA

V.1. INTRODUÇÃO.

Este capítulo é dedicado aos aspectos de simulação de um sistema hidroelétrico de geração de energia elétrica, onde faz-se uso da metodologia proposta.

Neste estudo, adota-se o conjunto formado por quatro usinas (ver figura 4.3) extraído do parque hidráulico da região Sudeste do país. Este sub-sistema é particularmente interessante, desde que ele resume as principais características do acoplamento encontradas no sistema global.

O horizonte de simulação adotado é de cinco anos. As características operacionais fornecidas (ver seção V.3) obedecem suas especificações reais, extraídas de documentação da própria concessionária. Os casos investigados incluem a solução do problema para uma única usina isolada e para o sub-sistema interligado (composto de quatro usinas). Considera-se para cada um dos casos a condição de perfeita e imperfeita informação de estado. Dois tipos de representação para os aportes são utilizados: num considera-se o modelo autoregressivo de ordem 10, representado na forma equivalente de estados, enquanto que no outro considera-se simplesmente a média mensal dos aportes adicionada de ruído branco gaussiano.

É importante salientar que a estrutura de acoplamento do sistema, não afeta a solução do problema da Variância (Passo 1), onde a solução ótima é obtida individualmente para cada usina. Um outro ponto importante, é que a inclusão do modelo AR(10) para representar os aportes, não aumenta a dimensão do problema da Média, que terá sempre como dimensão o número de usinas tratadas.

Os resultados ótimos obtidos para os dois passos do método empregado são apresentados e discutidos, para cada um dos casos estudados. Em particular, as trajetórias ótimas de estado e de controle são apresentadas para a usina de São Simão. Inclue-se ainda, os tempos de CPU gastos para resolver cada um dos passos.

V.2. APLICAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO AO PROBLEMA HIDROELÉTRICO.

O objetivo desta seção é discutir alguns pontos importantes observados da aplicação do método, proposto neste trabalho, ao problema hidroelétrico. Neste sentido, considera-se as duas formulações apresentadas no capítulo anterior, que representam o problema para os casos de uma única usina isolada (4.23) e multireservatório (4.25). Para ambos os casos, são discutidos os aspectos relacionados com o problema da variância (Passo 1) e com o problema da média (Passo 2).

- O CASO DE UM ÚNICO RESERVATÓRIO

Considere-se o problema formulado em (4.23), relativo ao caso de uma única usina i (isolada) do sistema, com o respectivo modelo AR(10) incluído. Aplicando-se, então, o procedimento proposto, obtém-se os seguintes passos:

PASSO 1 :

Calcula-se um ganho de realimentação linear $G_i(\lambda_i)$ resolvendo-se,

$$\text{Min } E \left\{ \delta y_i(k+1)^2 + \lambda_i \delta u_i(k)^2 \right\}$$

s. a.

$$\delta x_i(k+1) = A_i \delta x_i(k) + b \delta u_i(k) + \delta w_i(k) \quad (5.1)$$

$$\delta y_i(k) = c_i^T \delta x_i(k) + v_i(k)$$

onde $b^T = [-1 \ 0 \ \dots \ 0]$. O parâmetro ótimo $\lambda_i = \lambda_i^*$ é obtido como solução do seguinte problema:

$$\text{Max}_{\lambda_i} \left\{ v_y(\theta_i) + v_u(\gamma_i) \mid (\theta_i, \gamma_i) \in \Gamma_N^i \right\} \quad (5.2)$$

Por fim, se as condições $\alpha_i \leq v_y(\theta_i^*)$ e $\beta_i \leq v_u(\gamma_i^*)$ forem satisfeitas, então, o passo seguinte (problema da média) terá solução factível.

PASSO 2 :

Como visto no capítulo anterior, o sistema com o modelo AR(10) incluído, tem um total de 11 estados, denotados como segue: $x_i^T = [r_i \mid p_i^T]$, onde $r_i \in \mathbb{R}$ e $p_i \in \mathbb{R}^{10}$. Desde que, os estados p_i tem médias nulas, a formulação do problema da média será dada em termos da equação média do reservatório. Assim sendo, denotando $m_r^i(k) = E \{r_i(k)\}$, segue o seguinte problema determinístico:

$$\text{Max} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_i(m_r^i(k), m_u^i(k)) + \phi_i(m_r^i(N))$$

s. a

$$\begin{aligned} m_r^i(k+1) &= m_r^i(k) - m_u^i(k) + m_v^i(k), & \begin{cases} m_r^i(0) = r_i(0) \\ m_r^i(N) = r_i(0) \end{cases} \\ m_y^i(k) &= m_r^i(k) \\ m_y^i(k+1) &\in R_{\alpha_i, k+1}^i & (5.3) \\ m_u^i(k) &\in U_{\beta_i, k}^i \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} R_{\alpha_i, k}^i &= \left\{ m_y^i \mid \bar{r}_i + F_{y,k}^{-1}(\alpha) \leq m_y^i(k) \leq \bar{r}_i - F_{y,k}^{-1}(\alpha) \right\} \\ U_{\beta_i, k}^i &= \left\{ m_u^i \mid \bar{u}_i + F_{u,k}^{-1}(\beta) \leq m_u^i(k) \leq \bar{u}_i - F_{u,k}^{-1}(\beta) \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

com as distribuições de $F_{y,k}$ e $F_{u,k}$ tendo sido calculadas no passo anterior.

- O CASO MULTIRESERVATÓRIO.

Seja agora, a formulação para o problema multireservatório (4.25). Então aplicando-se o procedimento, os seguintes passos são obtidos:

PASSO 1 :

A estrutura de interconexão em árvore, particular do sub-sistema hidroelétrico, é tal que, após ser determinado o controle em uma dada usina, esta informação pode ser enviada para aquelas imediatamente à jusante. Isto significa que, na usina i , os valores ocorridos à montante, ou seja, $\{\delta u_j(k), j \in J_i\}$, são conhecidos exatamente. Esta hipótese não é necessária, porém simplifica enormemente a solução do problema da variância, em virtude de torná-lo completamente desacoplado.

Assim, para cada usina i do sub-sistema interligado, determina-se o ganho de realimentação $G_i(\lambda_i)$, como solução de

$$\text{Min}_{G_i} E \left\{ \delta y_i(k+1)^2 + \lambda \delta u_i(k)^2 \mid \delta u_j(k), j \in J_i \right\}$$

s. a.

$$\delta x_i(k+1) = A_i \delta x_i(k) + b \delta u_i(k) + \delta w_i(k) \quad (5.5)$$

$$\delta y_i(k) = c_i^T \delta x_i(k) + v_i(k)$$

onde $\lambda_i = \lambda_i^*$ é obtido de (5.2).

PASSO 2 :

Desde que, como visto no caso anterior, os estados gerados pelo modelo individualizado de cada usina, apresentam médias nulas, segue que eles não influenciam na solução do problema da

média. Consequentemente, sua formulação leva em conta apenas a dinâmica dos reservatórios interligados. O problema, assim, é dado como segue:

$$\text{Max} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(m_r(k), m_u(k)) + \phi(m_r(N))$$

s. a.

$$m_r(k+1) = m_r(k) + Bm_u(k) + m_v(k), \quad \begin{cases} m_r(0) = r(0) \\ m_r(N) = r(0) \end{cases}$$

$$m_y(k) = m_r(k)$$

$$m_y^i(k+1) \in R_{\alpha_i, k+1}^i \quad (5.6)$$

$$m_u^i(k) \in U_{\beta_i, k}^i$$

onde $m_r^T = [m_r^1 \ m_r^2 \ \dots \ m_r^M]$, $m_u^T = [m_u^1 \ m_u^2 \ \dots \ m_u^M]$ e a matriz B de dimensão $M \times M$, contém a estrutura de interligação das M usinas (vide seção IV.2).

V.3. CARACTERÍSTICAS OPERACIONAIS DAS USINAS EM ESTUDO.

Nesta seção, apresentam-se as principais características de operação das usinas em estudo. Cada usina, aqui considerada, tem um número associado, de modo a identificá-la (ver figura 4.3), assim segue que,

- | | |
|---------------|------------------|
| 1. São Simão | 3. Água Vermelha |
| 2. Marimbondo | 4. Ilha Solteira |

esta numeração será empregada de agora em diante.

A tabela 5.1 fornece o volume médio mensal de água (10^9 m^3) e o desvio padrão de cada usina, extraído de um conjunto de medidas (histórico incremental) que relaciona os anos de 1931 a

1970. É importante salientar, que operacionalmente as usinas 1 e 2, dependem das contribuições de água das usinas imediatamente à montante. Considera-se, então, em adição as médias mensais destas duas usinas (Tabela 5.1), as constantes 2.4 e 2.5 (10^9 m^3) obtidos supondo-se que as respectivas usinas à montante, operam exatamente na média de suas faixas físicas de turbinamento.

Para função de geração de energia hidroelétrica (4.8) adotou-se uma função cota-volume linear [Ferreira,1983] representada por:

$$h(x_i(k)) = a_0^i + a_1^i x_i(k) \quad (5.7)$$

cujos coeficientes são dados pela tabela 5.2. Os rendimentos ρ_i e os limitantes de saída (volume armazenado) e controle (tubinação) de cada reservatório são apresentados na tabela 5.3.

TABELA 5.1. - Média mensal dos aportes e desvios

σ_θ	USINA	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
0.65	1	3.0	3.4	3.4	2.5	1.6	1.2	1.0	0.7	0.6	0.7	1.2	2.0
0.44	2	1.4	1.9	1.9	1.4	1.0	0.8	0.6	0.5	0.4	0.5	0.7	0.9
0.17	3	1.0	1.0	1.0	0.7	0.5	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4	0.7
0.80	4	2.4	2.9	3.0	2.7	1.9	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.6	2.0

TABELA 5.2. - Coeficientes da função cota-volume

USINA	a_0^i	a_1^i
1	48.49	1.92
2	41.59	3.66
3	32.38	2.10
4	25.27	1.04

TABELA 5.3. - RENDIMENTOS E LIMITES FISICOS

USINA	ρ_i	\underline{r}_i	\bar{r}_i	\underline{u}_i	\bar{u}_i
1	0.89	7.00	12.50	1.79	6.63
2	0.88	0.90	6.15	1.18	6.84
3	0.88	4.40	11.00	1.25	7.57
4	0.89	12.74	21.16	3.63	20.71

V.4. SIMULAÇÃO.

Esta seção analisa a aplicação do procedimento proposto para resolver o problema de operação do sistema hidroelétrico, com horizonte de longo prazo. Para este objetivo, dois casos são investigados: no primeiro considera-se a solução de uma única usina (isolada) e no segundo caso estuda-se a solução do sistema interligado, formado pelas quatro usinas (grande porte). As soluções são obtidas supondo-se o problema tanto sob enfoque de perfeita informação de estado quanto imperfeita informação de estado, neste último enfoque adota-se um ruído branco gaussiano adicional as medidas, com desvio padrão de $\sigma_v^i = 0.1$.

A simulação é realizada considerando-se um horizonte de 5 anos. O problema da média é resolvido somente para o primeiro ano e as trajetórias ótimas de estado e controle são repetidas para os anos seguintes. Como garantia de que estas trajetórias fossem exatamente iguais, impõe-se as restrições adicionais $m_r^i(0) = m_r^i(N)$, como pode ser observado nos problemas (5.3) e (5.6).

Os estados iniciais adotados durante a simulação são os seguintes:

USINA	1	2	3	4
$r_i(0)$	8.42	1.82	5.44	14.11

Assume-se, também, como medidas de probabilidade para as restrições de saída e de controle (4.24), os seguintes valores: $\alpha_i = 0.95$ e $\beta_i = 0.5$.

Por fim, os parâmetros do modelo linear (ordem 10) para os aportes estão presentes na tabela 4.2. A seguir são apresentados os resultados obtidos.

CASO 1 : Uma Única Usina Isolada.

1.1. Perfeita Informação de estado

Para este caso, supõe-se o modelo ordem 1, apresentado no capítulo I, com os aportes sendo representados pela média, Tabela 5.1., com ruído branco gaussiano adicional tendo como desvio σ_θ^i . A figura 5.1 ilustra as trajetórias ótimas resultantes da simulação de 5 anos, para a usina de S. Simão.

Como solução ótima problema da variância (Passo 1) obteve-se $v(\theta^*) = 0.99998307$ e $v(\gamma^*) = 0.99999738$ com $\lambda^* = 0.248071$.

A solução do Passo 1 envolveu 24, variáveis num tempo de CPU de aproximadamente 2.20 segundos. Enquanto que o Passo 2,

envolveu um total de 85 variáveis num tempo de 0.13 segundos.

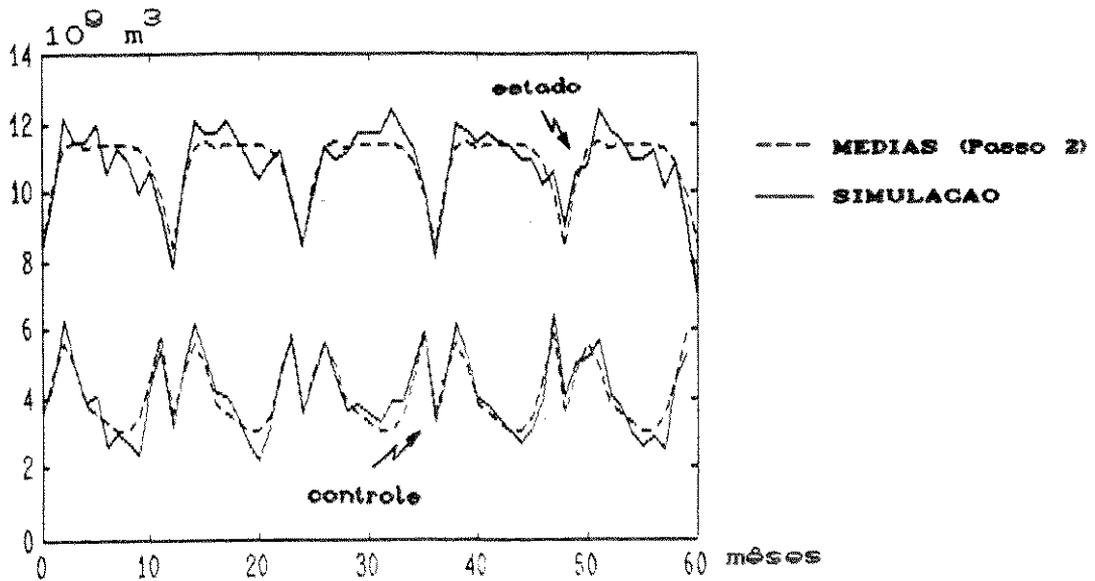


Fig. 5.1. Trajetórias ótimas da usina S. Simão adotando-se o modelo simples.

1.2. Imperfeita Informação de Estado

Duas situações são apresentadas aqui. A primeira considera durante todo o processo de simulação o modelo dinâmico completo (ordem 11); a segunda consiste em adotar as mesmas soluções ótimas obtidas para o Passo 1 e Passo 2, na situação anterior, porém substituindo, na fase de simulação, o modelo de ordem 11, pelo modelo do reservatório (ordem 1), com os aportes sendo representados pelos valores reais tomados do histórico da usina.

Os valores ótimos obtidos para o problema da variância foram neste caso: $v(\theta^*) = 0.99932563$ e $v(\gamma^*) = 0.99877840$ com $\lambda^* = 0.689879$. As trajetórias ótimas de estado e controle, obtidas para usina de S. Simão, estão apresentadas nas figuras 5.2 e 5.3.

A solução do Passo 1 envolveu um total de 276 variáveis,

com um tempo de CPU de aproximadamente 30.0 segundos. No Passo 2, o número de variáveis e o tempo de CPU são os mesmos da situação anterior.

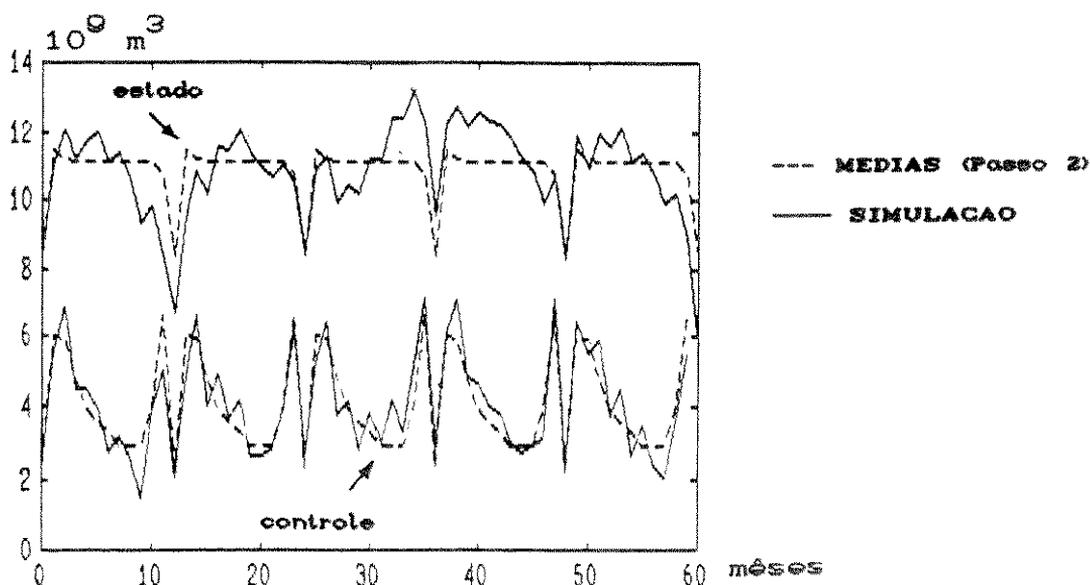


Fig. 5.2. - Trajetórias ótimas para o caso do modelo completo (ordem 11)

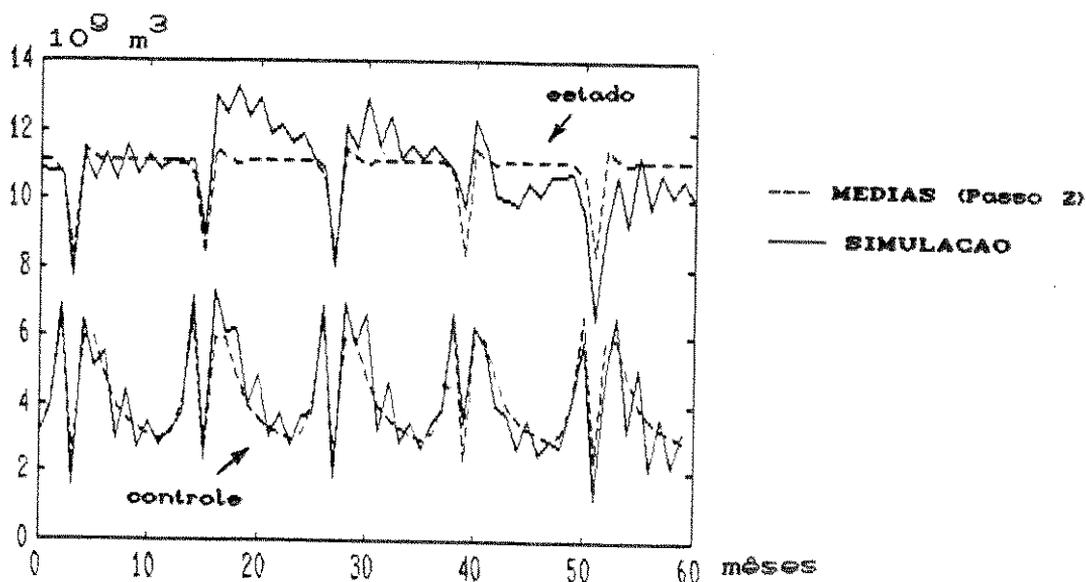


Fig. 5.3. - Trajetórias ótimas usando o histórico da usina S. Simão. O período coberto é de out/59 a set/64.

CASO 2 : O Sistema Interligado

Neste caso adota-se o sistema composto pelas quatro usinas, como ilustra a figura 4.3. A estrutura de interligação destas usinas é dada como segue, (vide Cap. IV)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Esta estrutura, permite tratar o problema da variância (Passo 1) de forma desacoplada, como visto na seção V.2.

As mesmas situações simuladas no caso anterior, são aqui repetidas.

2.1. Perfeita Informação de Estado.

Supõe-se aqui o modelo dinâmico do reservatório (ordem 1). Os aportes são dados pela média mensal acrescida de ruído branco com desvio σ_{θ}^i (vide Tabela 5.1). Os valores ótimos, obtidos para cada usina, resolvendo-se Passo 1 são dados na tabela 5.3.

5.3.

TABELA 5.3. - Solução do Passo 1

USINA	$v(\theta^*)$	$v(\gamma^*)$	λ^*
1	0.9999831	0.9999974	0.248071
2	0.9999999	1.0000000	0.938076
3	1.0000000	1.0000000	+ ∞
4	0.9999998	1.0000000	0.377173

O Passo 1 levou 0.2 segundos de tempo de CPU, por usina, para ser resolvido, envolvendo um total de 24 variáveis. A solução do Passo 2 levou 70.0 segundos, envolvendo 340 variáveis.

As trajetórias ótimas de estado e controle, para usina de S. Simão são apresentadas na figura 5.4.

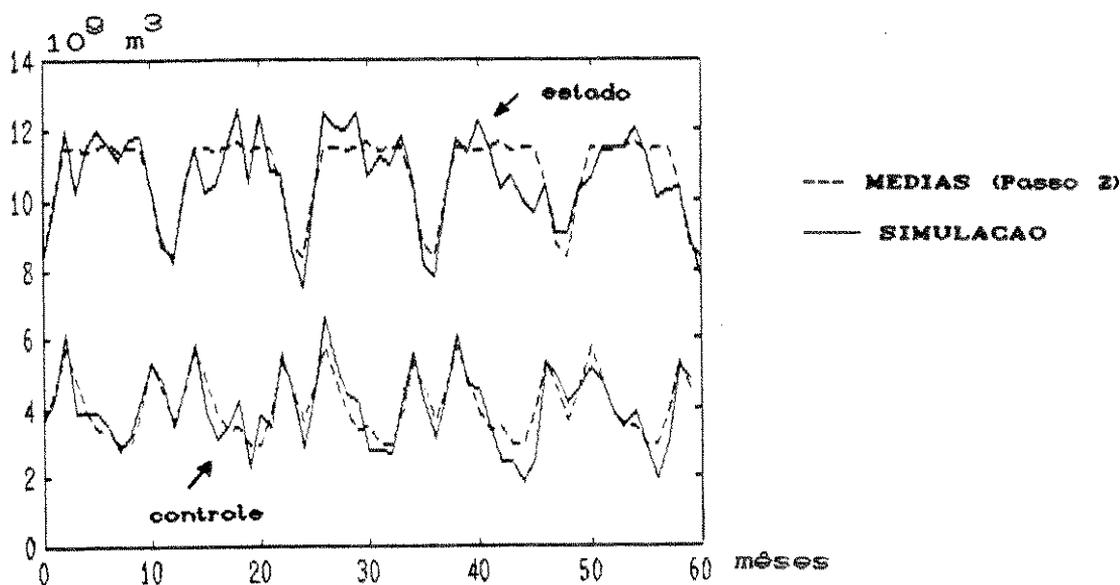


Figura 5.4. Trajetórias ótimas da usina S. Simão

2.2. Imperfeita informação de Estado.

Duas situações são analisadas: a primeira utiliza o modelo dinâmico (ordem 11), durante toda a simulação; e a segunda utiliza a mesma solução ótima da situação anterior, porém para simular adota o modelo do reservatório (ordem 1), introduzindo as medidas obtidas do histórico de cada usina, nas variáveis relativas aos aportes.

A solução ótima do Passo 1 é dado pela tabela 5.4., para cada uma das usinas. As figuras 5.6 e 5.7 mostram as trajetórias

ótimas obtidas para a usina de S. Simão, correspondentes as duas situações em questão.

A solução do Passo 1 envolveu um total de 276 variáveis por usina, com um tempo de CPU/usina de aproximadamente 30 segundos. O Passo 2 envolveu um total de 340 variáveis, com tempo de CPU de 70 segundos.

TABELA 5.4. - Solução do Passo 1

USINA	$v(\theta^*)$	$v(\gamma^*)$	λ^*
1	0.9993256	0.9987784	0.689879
2	0.9999988	0.9999991	0.546474
3	0.9999999	1.0000000	4.799151
4	0.9999998	1.0000000	0.206799

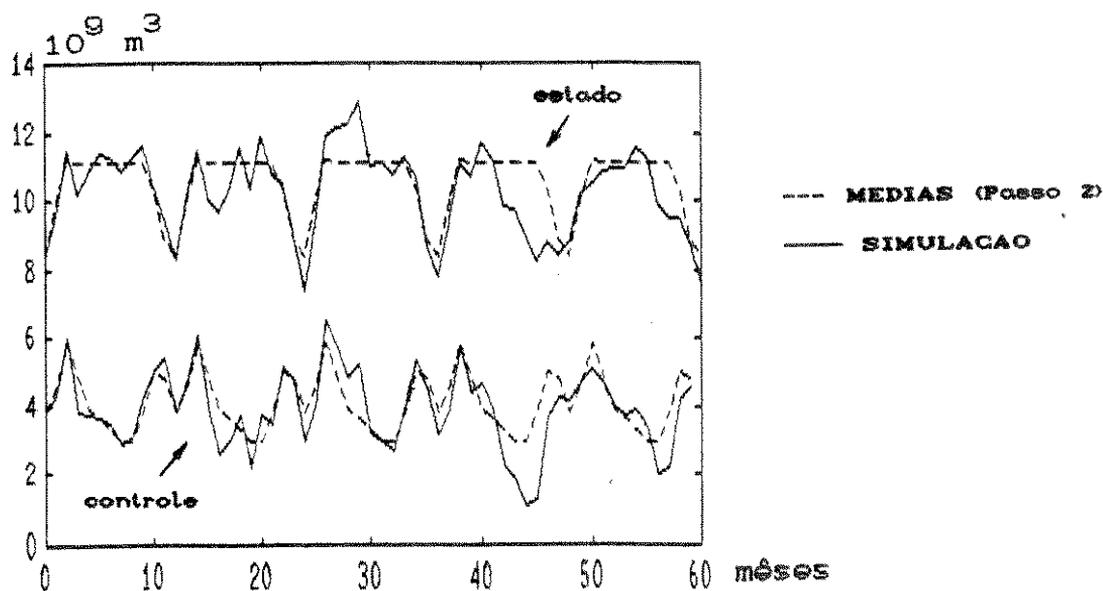


Fig. 5.5. Trajetórias ótimas para o modelo dinâmico completo (ordem 11)

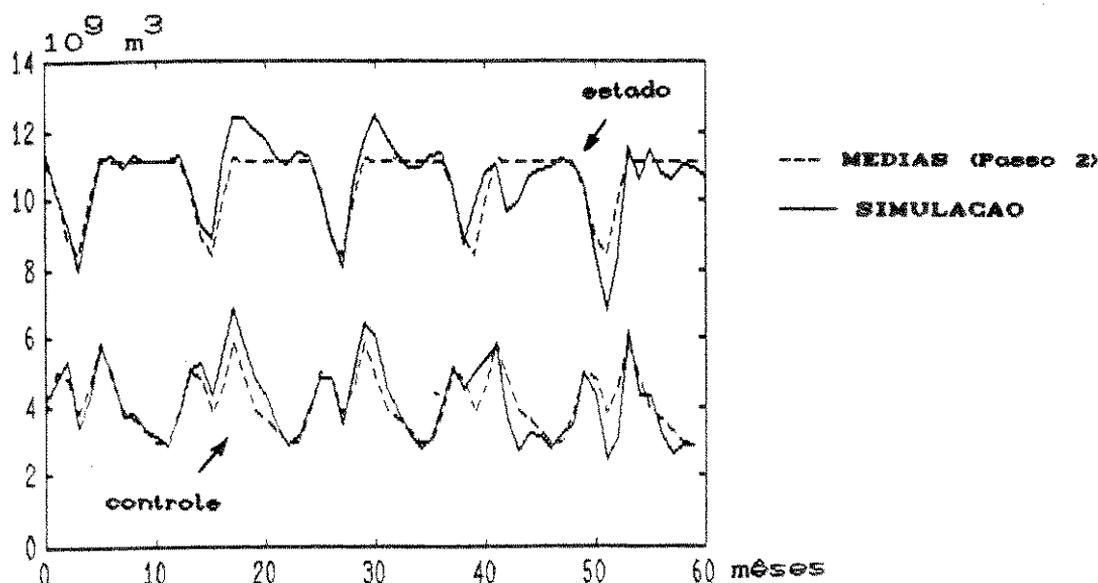


Fig. 5.6. Trajetórias ótimas usando a tabela de medidas (histórico). Período coberto out/59 a set/64.

COMENTÁRIOS SOBRE OS RESULTADOS :

a) Observa-se nas Tabelas 5.3 e 5.4, que o parâmetro de ponderação ótimo $\lambda = \lambda^*$, obtido para usina de Água Vermelha (no. 3), assume valores muito grandes frente aos obtidos para as outras usinas em estudo. Isto pode ser explicado considerando a Tabela 4.2., que mostra os desvios padrão das medidas dos aportes de cada uma destas usinas. Pode-se observar que a usina de Água Vermelha apresenta o menor destes desvios, indicando assim uma tendência de maior concentração das medidas em torno de suas respectivas médias mensais. O efeito destas características é que a contribuição da lei de controle em malha fechada é pequeno, conseqüentemente a política de controle a ser efetivamente usada está muito próxima da trajetória ótima média obtida como solução do Passo 2, isto pode ser observado na Figura C.2, do Apêndice C.

- b) A estrutura de interligação das usinas (tipo árvore) e que é denotada pela matriz B, dada em (5.7), simplifica bastante a solução do Passo 1, como discutido na seção V.2. Uma consequência disto é a redução do esforço computacional, com o tempo de CPU sendo dividido por usina.
- c) As variações da solução em torno da solução média, resultante do Passo 2, para todos os casos analisados são mínimos (vide Figuras 5.1 - 5.6), consequentemente as trajetórias de estado e controle em poucas situações violam seus respectivos limitantes físicos (vide Figura C.2 - Apêndice C). Isto indica uma boa política de controle obtida pela metodologia proposta, bem como uma boa representação da estocasticidade dos aportes pelo modelo identificado AR(10).

V.4. CONCLUSÃO.

Este capítulo mostrou que é possível resolver o problema de operação de um sistema hidroelétrico de geração de energia para um horizonte de longo prazo, através da metodologia proposta.

Simulações foram realizadas, considerando um horizonte de 5 anos. Adotou-se tanto um modelo simplificado (ordem 1), quanto um modelo dinâmico completo (ordem 11) que inclui um modelo linear para os aportes. Investigou-se o problema em questão, supondo-se inicialmente uma única usina isolada e em seguida o sistema interligado, assumindo-se tanto o enfoque de perfeita quanto de imperfeita informação de estado. A partir de tabelas contendo os históricos de cada usina, abordou-se, em termos de simulação, uma situação real.

CONCLUSÃO GERAL

Neste trabalho foi analisado a solução de uma classe de problemas estocásticos, caracterizada por um sistema linear discreto no tempo com perturbações, na dinâmica e na saída, supostas gaussianas e com restrições probabilísticas nas variáveis de saída e controle.

O problema assim formulado não é simples de ser resolvido. Sua solução ótima em malha fechada, como visto, pode ser obtida através do algoritmo de programação dinâmica, desde que para isto, o problema tenha dimensão reduzida, pois caso contrário, o esforço computacional pode inviabilizá-la. Portanto, para resolver problemas de grande porte é mais conveniente adotar-se procedimentos sub-ótimos. Neste sentido, propôs-se um método para obter soluções em malha aberta para problemas estocásticos (por isso sub-ótimo) que tem como principal característica a minimização do risco de infactibilidade de um problema determinístico associado, obtido a partir de um procedimento de redução apresentado em [Lassere, 1984]. O procedimento proposto é dividido em dois passos, a saber: o Passo 1, tem como objetivo determinar um ganho de realimentação linear para o sistema, resolvendo para isto um problema de variância mínima. A solução deste problema tem a propriedade de maximizar a probabilidade das variáveis satisfazerem certas restrições física, minimizando, por conseguinte, o risco de infactibilidade associado ao problema determinístico equivalente.

À partir desta solução, resolve-se o Passo 2, obtendo-se as trajetórias ótimas médias (em malha aberta) de estado e controle como solução do problema determinístico equivalente.

A principal conclusão deste estudo, é a possibilidade de se definir um ganho linear invariante no tempo que torna possível a determinação de soluções ótimas em malha aberta para o problema estocástico, que mantém as características anteriormente citadas. A idéia é basicamente obter uma matriz ganho dependente de um parâmetro positivo, determinado de tal modo a minimizar o risco de infactibilidade do problema determinístico associado.

Esta metodologia, em virtude da linearidade do sistema, permanece válida para tratar problemas mais complicados, como é o caso de sistemas onde o estado não é medido exatamente.

Com a finalidade de analisar a aplicação desta estrutura de controle a um problema real, considerou-se o problema de operação a longo prazo de um sistema de geração de energia hidroelétrica, o qual se encaixa dentro da classe de problemas aqui tratado. Este estudo contou com a construção de um simulador que permite tratar tanto o caso monovariável (uma usina isolada) quanto o caso multivariável (4 usinas interligadas). Como consequência, vários resultados gráficos, comparando as trajetórias simuladas com as trajetórias médias, foram obtidos ilustrando e comprovando a validade deste algoritmo. É importante salientar, que para o caso multivariável, a estrutura de acoplamento das usinas permite que o cálculo do ganho ótimo (Passo 2) se dê individualmente para cada usina.

Por fim, deixa-se como proposta de futuras investigações, a aplicação deste método para os seguintes casos : solução do problema linear quadrático e a extensão para o caso de sistemas contínuos no tempo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AOKI, M. (1967), Optimization of Stochastic Systems - Topics in Discrete Time Systems, *Academic Press*, New York.
- AMARAL, W. C. (1981), Identificação Recursiva de Sistemas Multivariáveis, *Tese de Doutorado*, FEE/UNICAMP.
- ASTROM, K. J. (1970), Introduction to Stochastic Control Theory, *Academic Press*, New York.
- ASTROM, K. J. & B. WITTENMARK (1971), Problems of Identification and Control, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 34.
- BAR-SHALOM, Y. & E. TSE (1974), Dual Effect, Certainty Equivalence and Separation in Stochastic Control, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-19.
- BAR-SHALOM, Y. (1981), Stochastic Dynamic Programming: Caution and Probing, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-26, No. 5.
- BELLMAN, R. (1957), Dynamic Programming, *Princeton Univ. Press*, Princeton, New Jersey.
- BELLMAN, R. & S. DREYFUS (1962), Applied Dynamic Programming, *Princeton Univ. Press*, Princeton, New Jersey.
- BERTESEKAS, D. P. (1976), Dynamic Programming and Stochastic Control, *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, New York, vol. 125.
- BOX G. E. P. & G. M. JENKINS (1970), Time Series Analysis - Forecasting and Control, *Holden-Day*, S. Francisco.
- CLARKE D. W., S. N. COPE & P. J. GAWTHROP (1975), Feasibility Study of Application of Microprocessor to Self-tuning Controllers, *Report 1137*, Oxford.

- CURRY, R. E. (1969), A New Algorithm for Suboptimal Stochastic Control, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-12.
- DREYFUS S. E. (1964), Some Types of Optimal Control of Stochastic Systems, *SIAM J. Contr.*, ser. A, vol. 2, no. 1.
- FERREIRA, P. A. V. (1983), Um Método Primal para Problemas de Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos de Grande Porte, *Tese de Mestrado*, FEE/UNICAMP.
- GEROMEL, J. C. & H. P. L. LUNA (1980), Operação Ótima de Sistemas Hidrotérmicos : Um Método Primal de Solução, *XIII SBPO*, vol. 1.
- GEROMEL, J. C. & H. P. L. LUNA (1981), Projection and Duality Techniques in Economic Equilibrium Models, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-11, No. 5.
- GEROMEL, J. C. & L. F. B. BAPTISTELLA (1981), Feasible Direction Method for Large Scale Nonconvex Programs: Decomposition Approach, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 35, No. 2.
- GEROMEL, J. C. (1982), Controle Ótimo de Recursos Hidráulicos, *III Encontro Nacional de Informática - SBA*, Campinas, SP.
- GEROMEL, J. C. & P. A. V. FERREIRA (1986), A Dual-Projection Method for Large Scale Systems Optimization, *Cont. Theory and Adv. Tech.*, vol.2, No. 2.
- GEROMEL, J. C. & O. S. SILVA FILHO (1988), Partial Closed-Loop Control Structure for Linear Stochastic Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-16.
- HALLIBURTON T. S. & H. R. SIRISENA (1984), Development of Stochastic Optimization for Multireservoir Scheduling, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-29, No. 1.

- JAZWINSKI, A. H. (1970), *Stochastic Process and Filtering Theory*, Academic Press, New York.
- KALMAN, R. E. (1960), A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Trans. ASME Ser. D. J. Basic Engrg.* 82.
- LASSERE, J. B.; C. BES & F. ROUBELLAT (1984), On the Open-Loop Solution of Linear Stochastic Optimal Control Problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-29, No. 6.
- LYRA, F. C. (1979), Otimização da Escala de Geração em Sistemas de Potência Hidrotérmicos, *Tese de Mestrado*, FEE/UNICAMP.
- MEIER, L.; R. E. LARSON & A. J. TETHER (1971), Dynamic Programming for Stochastic Control of Discrete Systems, *IEEE Trans. Control*, AC-16.
- MEDITCH, J. C. (1969), *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, McGraw-Hill, New York.
- MENDEL M. J. (1973), *Discrete Techniques of Parameter Estimation*, Marcel Dekker Inc., New York.
- MINOUX, M. (1983), *Programmation Mathématique : Theorie et Algorithmes*, Dunod, Paris.
- NEMHAUSER G. L. (1966), *Introduction to Dynamic Programming*, Wiley, New York.
- PAPPOULIS A. (1965), *Probability, Random Variables and Stochastic Process*, McGraw-Hill, New York.
- PEREIRA, M. V. F. ; G. C. OLIVEIRA ; C. C. G. COSTA & J. KELMAN (1984), *Stochastic Streamflow Models for Hydroelectric*

Systems, *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 3.

- RHODES, I. B. (1971), A Tutorial Introduction to Estimation and Filtering, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-16.
- SAGE, A. P. & J. L. MELSA (1982), Estimation Theory with Applications to Communications and Control, *McGraw-Hill*, N. Y.
- SILVA FILHO, O. S. (1982), Modelamento Linear e Controle Ótimo Estocástico de Usinas Hidráulicas com Representação Individualizada, *Tese de Mestrado*, FEE/UNICAMP.
- SILVA FILHO, O. S. & J. C. GEROMEL (1988), Estrutura de Controle Parcialmente em Malha Fechada para Sistemas Lineares Estocásticos, *SBA : Controle & Automação*, Vol. 2, No. 2.
- SOARES, S.; C. LYRA & H. TAVARES (1980), Optimal Generation Scheduling of Hydrothermal Power Systems, *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, vol. 99
- SOARES, S. (1987), Planejamento de Operação de Sistemas Hidrotérmicos, *SBA : Controle & Automação*, Vol. 1, No. 2.
- STRIEBEL, C. (1965), Sufficient Statistics in the Optimal Control of Stochastic Systems, *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, Vol. 12.
- STRIEBEL, C. (1975), Optimal Control of Discrete Time Stochastic Systems, *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, New York, Vol. 110.
- TERRY, L. A. & et alli (1986), Nas Malhas da Energia, *Ciência Hoje*, Vol. 4, No. 23.
- TSE, E. (1971), On the Optimal Control of Stochastic Linear

Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-16, No. 6.

TSE, E. & M. ATHANS (1972), Adaptive Stochastic Control for a Class of Linear Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC-17, No. 1.

VADJA, S. (1972), Probabilistic Programming, *Academic Press*, New York.

WITTENMARK, B. (1975), An Active Suboptimal Dual Controller for Systems with Stochastic Parameters, *Automatic Control Theory and Application*, vol. 3, No. 1.

WOHMAN, W. M. (1968), On the Separation Theorem of Stochastic Control, *SIAM J. Control*, No. 6.

APÉNDICE A

Discute-se, neste apêndice, a validade da desigualdade (2.36) apresentada na seção II.5. Para isto, analisa-se inicialmente o efeito de deslocar o valor médio m_θ de uma variável aleatória θ , entre os limitantes de um conjunto $\Theta = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, como ilustrado na figura A.1.

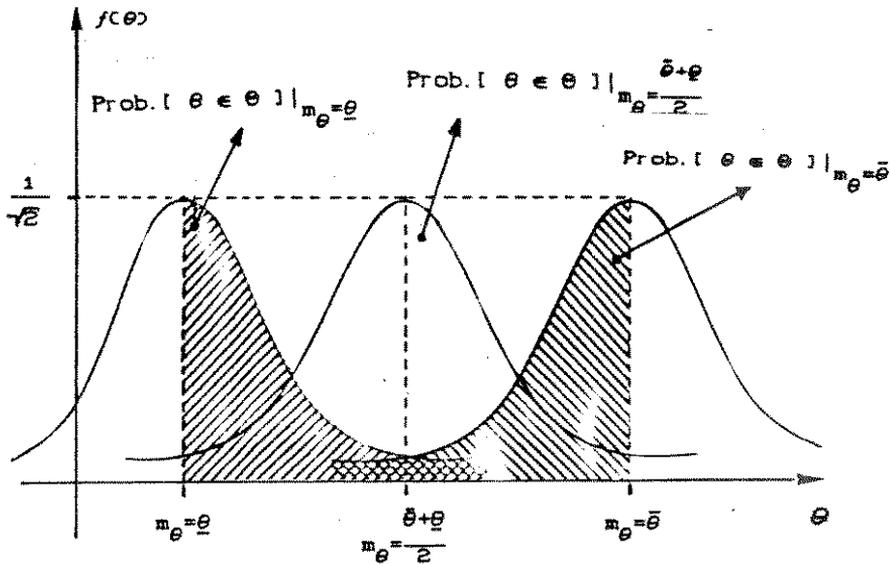


Fig. A.1. - Comportamento do processo aleatório quando a média sofre deslocamentos.

E de se esperar que numa representação em que a variável aleatória é canalizada, a densidade de probabilidade será máxima a mediada que o valor médio desta variável tenda para o centro do intervalo de Θ , como mostra a figura acima. Isto pode ser expresso estatisticamente, como sendo:

$$\text{Prob.}[\theta \in \Theta] \Big|_{\forall m_\theta \in \Theta} \leq \text{Prob.}[\theta \in \Theta] \Big|_{m_\theta = (\bar{\theta} + \underline{\theta})/2} \quad (\text{A.1})$$

tomando-se o segundo membro da desigualdade (A.1) e considerando-se que $\theta = m_\theta + \delta\theta$, com $\delta\theta \sim N(0, V_\theta)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Prob.}[\theta \in \Theta] \Big|_{m_\theta = (\bar{\theta} + \underline{\theta})/2} &= \text{Prob.}[\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}] \Big|_{m_\theta = (\bar{\theta} + \underline{\theta})/2} \\ &= \text{Prob.}[\underline{\theta} \leq m_\theta + \delta\theta \leq \bar{\theta}] \Big|_{m_\theta = (\bar{\theta} + \underline{\theta})/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Prob.} \left[-\frac{\Delta\theta}{2} \leq \delta\theta \leq \frac{\Delta\theta}{2} \right] \\
 &= \text{Prob.} \left[|\theta - m_\theta| \leq \frac{\Delta\theta}{2} \right] \quad (\text{A. 2})
 \end{aligned}$$

onde $\Delta\theta = \bar{\theta} - \underline{\theta}$. A partir de (A.2), pode-se aplicar a desigualdade de Tchebycheff, que conceitualmente descreve de que modo a área de concentração da densidade de probabilidade é medida pela sua respectiva variância [Jazwinski, 1970]. Assim sendo, tem-se que:

$$\text{Prob.} \left[|\theta - m_\theta| \leq \frac{\Delta\theta}{2} \right] \geq 1 - 4 V_\theta / \Delta\theta^2 \quad (\text{A. 3})$$

considerando-se agora a função $v_\theta(V_\theta)$, dada por:

$$v_\theta(V_\theta) \stackrel{\Delta}{=} F_\theta(\Delta\theta/2) = \text{Prob.} \left[\theta - m_\theta \leq \Delta\theta/2 \right] \quad (\text{A. 4})$$

e observando-se que

$$\begin{aligned}
 \text{Prob.} \left\{ |\theta - m_\theta| \leq \Delta\theta/2 \right\} &= \text{Prob.} \left\{ \theta - m_\theta \leq \Delta\theta/2 \right\} \\
 &\quad - \text{Prob.} \left\{ \theta - m_\theta \geq \Delta\theta/2 \right\} \\
 &= 2 \text{Prob.} \left\{ \theta - m_\theta \geq \Delta\theta/2 \right\} - 1
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\text{Prob.} \left\{ \theta - m_\theta \leq \Delta\theta/2 \right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Prob.} \left\{ |\theta - m_\theta| \leq \Delta\theta/2 \right\}$$

obtem-se como resultado que,

$$v_\theta(V_\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Prob.} \left\{ |\theta - m_\theta| \leq \Delta\theta/2 \right\} \quad (\text{A. 5})$$

comparando-se, então, (A.5) a desigualdade (A.3) conclui-se que

$$v_\theta(V_\theta) \geq 1 - 2 V_\theta / \Delta\theta^2 \quad (\text{A. 6})$$

APÊNDICE B

Um modo simples de resolver (3.50) é discutido aqui e toma por base o tratamento apresentado em [Astrom e Wittenmark,1971].

Seja o sistema descrito por (3.12) e (3.13) e pelas suas respectivas trajetórias médias, dadas em (2.4). É objetivo então determinar um sinal de controle que minimize as variâncias de entrada (controle) e de saída, respectivamente:

$$\text{Min}_{u(k)} E \left\{ [y(k+1) - m_y(k+1)]^2 + \lambda [u(k) - m_u(k)]^2 | I_k \right\} \quad (\text{B.1})$$

com $m_y(k) = c^T m_x(k)$, sendo m_x e m_u trajetórias médias obtida resolvendo-se o problema da média (Passo 2).

No instante k de operação do sistema, o vetor de informação disponível I_k é fornecido. Segue, então, que: [Astrom,1970]

$$\begin{aligned} \text{Min}_{u(k)} E \left\{ [y(k+1) - m_y(k+1)]^2 + \lambda [u(k) - m_u(k)]^2 | I_k \right\} &= \\ &= E \text{Min}_{I_k} E \left\{ [(y(k+1) - m_y(k))^2 + \lambda (u(k) - m_u(k))^2] | I_k \right\} \\ &= E \text{Min}_{I_k} \left\{ E [(y(k+1) - m_y(k))^2 | I_k] + \lambda [u(k) - m_u(k)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Esta última igualdade é resultado do fato de $u(k)$ ser determinístico, quando I_k é dado. Assim sendo o problema (B.1) fica dado por:

$$\text{Min}_u E \left\{ [(y(k+1) - m_y(k+1))^2 | I_k] + \lambda [u(k) - m_u(k)]^2 \right\} \quad (\text{B.3})$$

s. a. (3.1) e (3.2)

Segue da seção III.4 que a distribuição de probabilidade de $y(k+1)$ dado I_k é normal com média e variância dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 E \left\{ y(k+1) | I_k \right\} &= c^T E \left\{ x(k+1) | I_k \right\} & e \\
 E \left\{ y(k+1)y(k+1)^T | I_k \right\} &= c^T P_x(k+1|k)c + V_v
 \end{aligned}$$

Consequentemente, aplicando-se a fórmula padrão de cálculo da variância resulta:

$$\begin{aligned}
 &E \left\{ (y(k+1) - m_y(k+1))^2 | I_k \right\} = \\
 &= (c^T E \left\{ x(k+1) | I_k \right\} - c^T m_x(k+1))^2 + c^T P_x(k+1|k)c + V_v
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

substituindo no lado direito de (B.4), as equações (3.17) e (2.4) obtém-se [Wittenmark, 1975] :

$$\begin{aligned}
 &E \left\{ (y(k+1) - m_y(k+1))^2 | I_k \right\} = \\
 &= (c^T A(x(k|k) - m_x(k)) + c^T b(u(k) - m_u(k)))^2 + c^T P_x(k+1|k)c + V_v
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

onde $x(k|k)$ é a estimativa ótima do estado (filtro de Kalman). Denotando-se, então, $(x(k|k) - m_x(k))$ por $\delta x(k|k)$ e $(u(k) - m_u(k))$ por $\delta u(k)$, segue que (B.5) reduz-se a :

$$\text{Min}_{\delta u} \left\{ [c^T A \delta x(k|k) - c^T b \delta u(k)]^2 + \lambda (\delta u(k))^2 \right\} \tag{B.6}$$

cuja solução é a seguinte lei de controle linear,

$$\delta u(k) = \frac{\langle c, b \rangle}{\lambda + \langle c, b \rangle^2} c^T A \delta x(k|k). \tag{B.7}$$

APÊNDICE C

De modo a permitir uma fácil utilização do procedimento proposto aplicado ao problema hidroelétrico, desenvolveu-se um simulador em linguagem Fortran com implementação em um ambiente VAX/VMS 785, tendo como opção um terminal colorido Tektronix 4109A servindo como dispositivo gráfico. Este pacote, em princípio, permite simular até 4 usinas. Sua estrutura funcional está ilustrada de maneira simplificada no diagrama de blocos da figura C.1. A figura C.2 mostra uma das possíveis saídas gráficas onde o traçado "amarelo" indica os limitantes físicos, o "verde" as trajetórias médias e o "vermelho" as trajetórias simuladas.

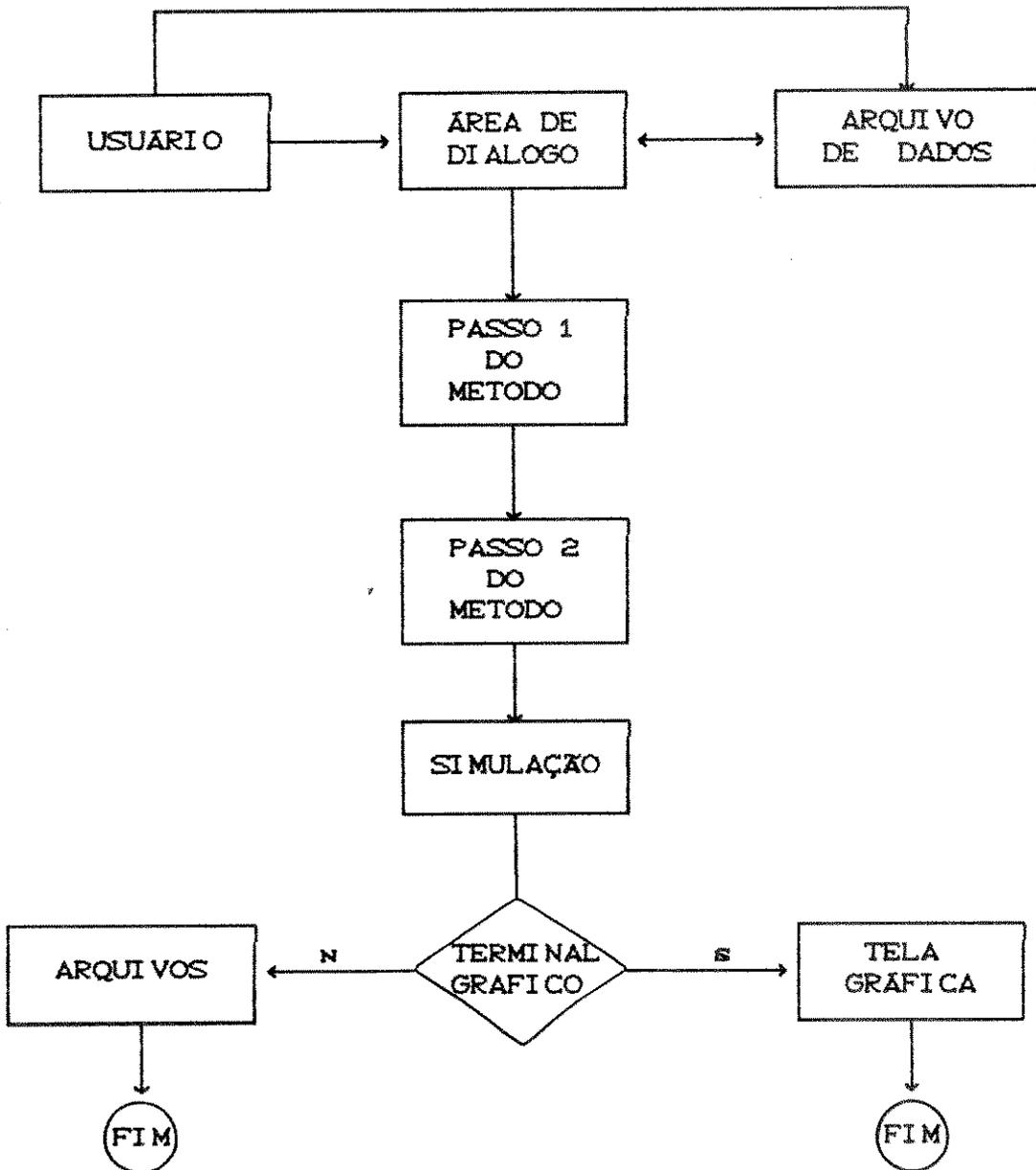
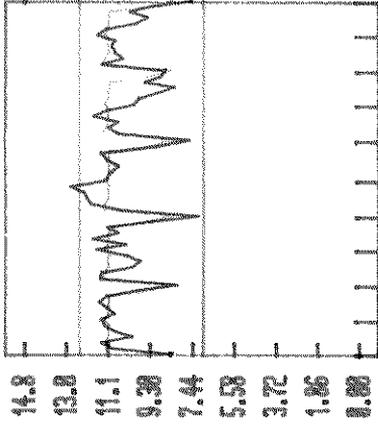


Fig. C.1. - Estrutura do simulador

S. Simão

estado

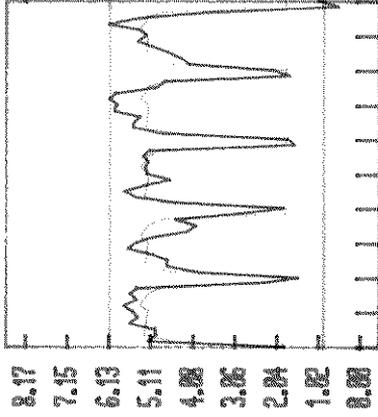


0.00 12.0 24.0 36.0 48.0 60.0

meses

Marimbondo

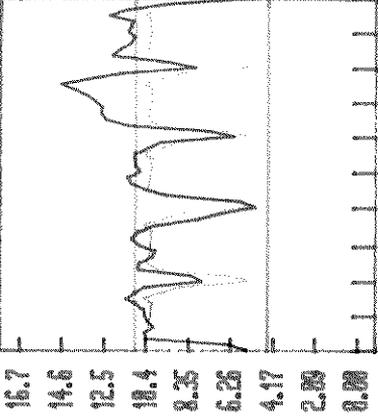
estado



0.00 12.0 24.0 36.0 48.0 60.0

A. Vermelha

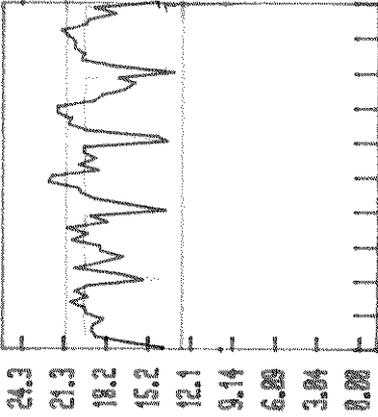
estado



0.00 12.0 24.0 36.0 48.0 60.0

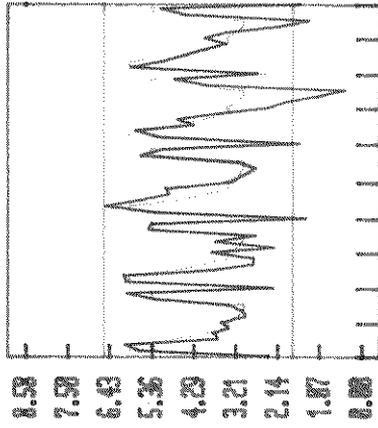
I. Solteira

estado



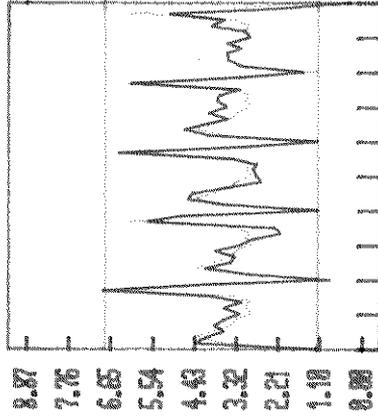
0.00 12.0 24.0 36.0 48.0 60.0

controle



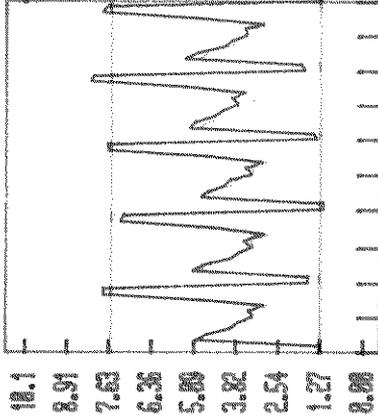
0.00 12.0 24.0 36.0 48.0 60.0

controle



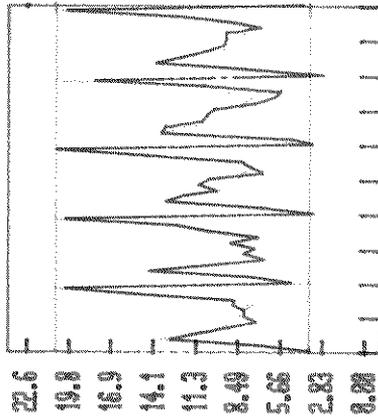
0.00 12.0 24.0 36.0 48.0 60.0

controle



0.00 12.0 24.0 36.0 48.0 60.0

controle



0.00 12.0 24.0 36.0 48.0 60.0

Fig. C.2. - Simulação das 4 usinas interligadas

APÊNDICE D

Os programas computacionais diretamente relacionados com os dois passos do método proposto neste trabalho são descritos resumidamente a seguir:

Passo 1. Problema da Variância:

BUSCA : esta rotina implementa um algoritmo de busca unidimensional no \mathbb{R}_+ , com objetivo de selecionar o parâmetro de ponderação λ , que é empregado no cálculo do ganho ótimo de realimentação.

VARIA : esta rotina calcula as variâncias de saída e controle, para cada valor de λ fornecido pelo procedimento de busca. No caso de imperfeita informação de estado, uma rotina que implementa o filtro de Kalman é empregada.

FACTI : verifica, a priori, se o problema da Média (Passo 2) terá solução factível.

BORNE : calcula os limitantes de estado e controle, decorrentes das restrições probabilísticas.

Passo 2 Problema da Média

Para resolver este problema foi utilizada a rotina MESTR, que é uma implementação do método Gradiente Modificado, voltada para a resolução de problemas de controle ótimo com restrições sobre variáveis de estado. Esta rotina explora eficientemente a estrutura particular do sistema hidráulico.

NOTA : Todo o software desenvolvido neste trabalho, incluindo as rotinas de simulação, estão disponíveis ao interessados, mediante solicitação, na FEE/UNICAMP ou no CTI.