



Iara da Cunha Ribeiro da Silva

MÉTODO DA BARREIRA MODIFICADA
VIA REESCALONAMENTO NÃO LINEAR
APLICADO AO FLUXO DE POTÊNCIA REATIVA ÓTIMO

Campinas
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Iara da Cunha Ribeiro da Silva

MÉTODO DA BARREIRA MODIFICADA VIA REESCALONAMENTO NÃO LINEAR
APLICADO AO FLUXO DE POTÊNCIA REATIVA ÓTIMO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica, na área de Energia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Anésio dos Santos Júnior

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pela aluna Iara da Cunha Ribeiro da Silva e orientada pelo Prof. Dr. Anésio dos Santos Júnior

Campinas
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Si38m Silva, Iara da Cunha Ribeiro da, 1983-
Método da barreira modificada via reescalonamento não linear aplicado ao fluxo de potência reativa ótimo / Iara da Cunha Ribeiro da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Anésio dos Santos Júnior.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Programação não linear. 2. Sistemas de energia elétrica. 3. Energia elétrica - Transmissão. 4. Potência reativa (Engenharia Elétrica). I. Anésio dos Santos Júnior, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Modified barrier method by nonlinear rescaling applied to optimal reactive power flow

Palavras-chave em inglês:

Nonlinear programming
Electric power systems
Electricity - Transmission
Reactive power (Electrical Engineering)

Área de concentração: Energia Elétrica

Titulação: Doutora em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Anésio dos Santos Júnior [Orientador]
Geraldo Roberto Martins da Costa
Katia Campos de Almeida
Akebo Yamakami

Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira

Data de defesa: 05-08-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidata: Iara da Cunha Ribeiro da Silva

Data da Defesa: 5 de agosto de 2013

Título da Tese: "Método da Barreira Modificada via Reescalonamento Não Linear Aplicado ao Fluxo de Potência Reativa Ótimo"

Prof. Dr. Anésio dos Santos Júnior (Presidente):

Prof. Dr. Geraldo Roberto Martins da Costa:

Profa. Dra. Katia Campos de Almeida:

Prof. Dr. Akebo Yamakami:

Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite De Oliveira:

DEDICO ESTA TESE À MINHA FAMÍ-
LIA.

Agradecimentos

Agradeço,

Ao Prof. Anésio dos Santos Júnior, pela oportunidade de fazer esta pesquisa e pelas suas sugestões.

Ao CNPq, pela bolsa concedida e apoio financeiro.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Senhor, concede-me a serenidade para aceitar as coisas que não posso modificar, coragem para modificar aquelas que eu posso e sabedoria para perceber a diferença.

São Francisco de Assis

Resumo

Nesta tese é apresentado o método da barreira modificada via princípio de reescalonamento não linear aplicado ao fluxo de potência reativa ótimo. Esse método é baseado na transformação das restrições de desigualdade do fluxo de potência reativa ótimo, gerando um problema de barreira modificado. Resolvendo uma sequência desses problemas barreira modificado, o método pode alcançar a solução do fluxo de potência reativa ótimo. A estratégia de busca é composta por dois ciclos: o primeiro minimiza a função Lagrangeana associada ao problema de barreira modificada através do método de Newton e o segundo ciclo atualiza as variáveis duais do problema não linear. O método barreira modificado é aplicado em sistemas elétricos do IEEE e os resultados são apresentados na tese.

Palavras-chave: programação não linear, reescalonamento não linear, fluxo de potência reativa ótimo, método da barreira modificada, método de Newton.

Abstract

In this thesis is presented the modified barrier method, based on the nonlinear rescaling principle and applied to the problem for optimal reactive power flow. This method is based on the transformation of nonlinear inequality constraints of the optimal power flow, that generates a modified barrier problem. On searching the solution of a sequence of these problems the method can achieve the solution of the optimal power flow. The search strategy is composed by two stages: the first one update the dual variable approximation of inequality constraints of the problem. The second one minimizes the Lagrangian function of the modified barrier problem by Newton's method. This strategy has been applied to optimal power flow IEEE systems and the results are also shown in this thesis.

Key-words: nonlinear programming, nonlinear rescaling, optimal reactive power flow, modified barrier method, Newton's method.

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Fluxograma dos Métodos de Gradiente. | 10 |
| 2.2 | Fluxograma dos Métodos de Newton. | 12 |
| 3.1 | Fluxograma do ciclo externo. | 23 |
| 3.2 | Fluxograma do ciclo interno. | 25 |
| 3.3 | Representação gráfica do PNL exemplo original e relaxado. | 29 |
| 3.4 | Trajetória das variáveis primais geradas pelo MBM. | 30 |
| 4.1 | MBM aplicado ao FPRO. | 47 |
| 4.2 | Sistema de 3 barras. | 49 |
| 4.3 | Solução do FP do sistema de 3 barras. | 52 |
| 4.4 | Ponto Inicial e solução final obtida pelo MBM aplicado ao sistema de 3 barras - caso C1. | 53 |
| 4.5 | Valores das folgas complementares e funções objetivo para o sistema de 3 barras - caso C1. | 54 |
| 4.6 | Ponto inicial e solução final obtida pelo MBM aplicado ao sistema de 3 barras - caso C2. | 55 |
| 4.7 | Valores das folgas complementares e das funções objetivo para o sistema de 3 barras - caso C2. | 56 |
| 4.8 | Ponto inicial e solução final obtido pelo MBM aplicado ao sistema de 3 barras - caso C3. | 57 |
| 4.9 | Gráficos referentes ao sistema de 3 barras - caso C3. | 58 |
| 4.10 | Curvas de nível da função perda de potência ativa em MW e as trajetórias das tensões geradas pelo MBM para o sistema de 3 barras. | 59 |
| 4.11 | Sistema IEEE 14 barras. | 61 |
| 4.12 | Solução do FP do IEEE 14 barras. | 63 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.13 | Magnitudes de tensão obtidas pelo MBM para o IEEE 14 - caso C1. | 63 |
| 4.14 | Magnitudes de tensão obtidas pelo MBM para o IEEE 14 - caso C2. | 65 |
| 4.15 | Magnitudes de tensão obtidas pelo MBM para o IEEE 14 - caso C3. | 66 |
| 4.16 | Magnitudes de tensão obtidas pelo MBM para o IEEE 14 - caso C4. | 68 |
| 4.17 | Valores das funções objetivo do FPRO e FPROBM ao longo das iterações externas. | 73 |
| | | |
| 5.1 | Sistema IEEE 30 barras. | 77 |
| 5.2 | Solução do FP do IEEE 30 barras. | 78 |
| 5.3 | Sistema IEEE 57 barras. | 87 |
| 5.4 | Solução do FP do IEEE 57 barras. | 87 |
| 5.5 | Sistema IEEE 118 barras. | 95 |
| 5.6 | Solução do FP do IEEE 118 barras. | 96 |
| | | |
| C.1 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C1. | 125 |
| C.2 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C1A. | 125 |
| C.3 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C1B. | 126 |
| C.4 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C2. | 126 |
| C.5 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C3. | 126 |
| C.6 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C4. | 127 |
| C.7 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C1. | 127 |
| C.8 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C1A. | 127 |
| C.9 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C1B. | 128 |
| C.10 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C2. | 128 |
| C.11 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C3. | 128 |
| C.12 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C1. | 129 |
| C.13 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C1A. | 129 |
| C.14 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C1B. | 129 |
| C.15 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C2. | 130 |
| C.16 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C3. | 130 |
| C.17 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C4. | 130 |
| C.18 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C5. | 131 |
| C.19 | Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C6. | 131 |
| | | |
| D.1 | Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C1. | 133 |
| D.2 | Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C1A. | 133 |
| D.3 | Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C1B. | 134 |

| | | |
|------|---|-----|
| D.4 | Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C2. | 134 |
| D.5 | Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C3. | 134 |
| D.6 | Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C4. | 135 |
| D.7 | Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C1. | 135 |
| D.8 | Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C1A. | 135 |
| D.9 | Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C1B. | 136 |
| D.10 | Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C2. | 136 |
| D.11 | Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C3. | 136 |
| D.12 | Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C1. | 137 |
| D.13 | Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C1A. | 137 |
| D.14 | Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C1B. | 137 |
| D.15 | Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C2. | 138 |
| D.16 | Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C3. | 138 |
| D.17 | Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C4. | 138 |
| D.18 | Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C5. | 139 |
| D.19 | Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C6. | 139 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------|---|----|
| 4.1 | Características dos testes efetuados no sistema de 3 barras. | 51 |
| 4.2 | Limites mínimos e máximos das potências reativa geradas em p.u. | 52 |
| 4.3 | Pontos iniciais das variáveis do FPRO para o sistema de 3 barras. | 52 |
| 4.4 | Solução final sistema de 3 barras - caso C1. | 53 |
| 4.5 | Convergência do sistema de 3 barras - caso C1. | 54 |
| 4.6 | Solução Final sistema de 3 barras - caso C2. | 55 |
| 4.7 | Convergência do sistema de 3 barras - caso C2. | 56 |
| 4.8 | Solução final sistema de 3 barras - caso C3. | 57 |
| 4.9 | Convergência do sistema de 3 barras - caso C3. | 58 |
| 4.10 | Valores das Perdas de Potência Ativa para o sistema de 3 barras. | 59 |
| 4.11 | Características dos testes efetuados no IEEE 14 barras. | 61 |
| 4.12 | Valores especificados em p.u. do IEEE 14 barras. | 62 |
| 4.13 | Valores iniciais das variáveis. | 62 |
| 4.14 | Solução Final IEEE 14 - caso C1. | 64 |
| 4.15 | Convergência para o IEEE 14 barras - caso C1. | 64 |
| 4.16 | Solução Final IEEE 14 - caso C2. | 65 |
| 4.17 | Convergência para o IEEE 14 barras - caso C2. | 66 |
| 4.18 | Solução Final IEEE 14 - caso C3. | 67 |
| 4.19 | Convergência para o IEEE 14 barras - caso C3. | 67 |
| 4.20 | Solução Final IEEE 14 - caso C4. | 68 |
| 4.21 | Convergência para o IEEE 14 barras - caso C4. | 69 |
| 4.22 | Solução Final IEEE 14 - caso C4A. | 69 |
| 4.23 | Convergência para o IEEE 14 barras - caso C4A. | 70 |
| 4.24 | Solução Final IEEE 14 - caso C4B. | 71 |
| 4.25 | Convergência para o IEEE 14 barras - caso C4B. | 71 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.26 | Valores das Perdas de Potência Ativa para o IEEE 14. | 72 |
| 5.1 | Valores iniciais das variáveis. | 76 |
| 5.2 | Características dos testes efetuados no IEEE 30. | 78 |
| 5.6 | Convergência para o IEEE 30 - caso C1. | 81 |
| 5.7 | Convergência para o IEEE 30 - caso C1A. | 81 |
| 5.8 | Convergência para o IEEE 30 - caso C1B. | 82 |
| 5.10 | Convergência para o IEEE 30 - caso C2. | 83 |
| 5.12 | Convergência para o IEEE 30 - caso C3. | 84 |
| 5.14 | Convergência para o IEEE 30 - 4ª iteração do caso C4. | 85 |
| 5.15 | Perda de potência ativa e máximo e mínimo de tensões IEEE 30. | 86 |
| 5.16 | Características dos testes efetuados no IEEE 57. | 88 |
| 5.20 | Convergência para o IEEE 57 - caso C1. | 90 |
| 5.27 | Perda de potência ativa e máximo e mínimo de tensões IEEE 57. | 95 |
| 5.28 | Características dos testes efetuados no IEEE 118. | 96 |
| 5.45 | Perda de potência ativa e máximo e mínimo de tensões IEEE 118. | 107 |
| A.1 | Valores das variáveis primais e multiplicadores de Lagrange. | 113 |
| A.2 | Valores das variáveis duais. | 113 |
| A.3 | Valores das folgas complementares, normas e funções objetivo. | 114 |
| A.4 | Valores das variáveis primais e multiplicadores de Lagrange. | 114 |
| A.5 | Valores das variáveis duais. | 114 |
| A.6 | Valores das folgas complementares, normas e funções objetivo. | 115 |

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Métodos de Gradiente e Newton aplicados ao Fluxo de Potência Reativa Ótimo | 5 |
| 2.1 | Estrutura dos método de Gradiente e de Newton | 7 |
| 2.1.1 | Métodos de Gradiente | 9 |
| 2.1.2 | Métodos de Newton | 9 |
| 3 | O Princípio do Reescalonamento Não Linear e sua aplicação | 13 |
| 3.1 | O Princípio de Reescalonamento Não Linear | 14 |
| 3.2 | Problema Não Linear e suas Condições de KKT | 17 |
| 3.3 | Problema Reescalonado | 19 |
| 3.4 | Problema de Barreira Modificada | 20 |
| 3.5 | Método da Barreira Modificada | 21 |
| 3.5.1 | Ciclo Externo do MBM | 21 |
| 3.5.2 | Ciclo Interno do MBM | 24 |
| 3.5.3 | Exemplo ilustrativo | 25 |
| 4 | Método da Barreira Modificada Aplicado ao Fluxo de Potência Reativa Ótimo | 31 |
| 4.1 | O problema FPRO com variáveis auxiliares e suas condições de KKT | 31 |
| 4.1.1 | As Equações do Fluxo de Potência e algumas definições | 32 |
| 4.1.2 | Variáveis, Funcionais restritos e Função objetivo | 34 |
| 4.1.3 | Restrições de Desigualdade | 35 |
| 4.1.4 | Formulação com Variáveis Auxiliares | 35 |
| 4.1.5 | Condições de KKT para o FPRO com variáveis auxiliares | 37 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.2 | Método da Barreira Modificada aplicado ao FPRO | 39 |
| 4.2.1 | O FPRO relaxado e reescalonado | 39 |
| 4.2.2 | O FPRO de Barreira Modificada e as condições necessárias de 1ª ordem . | 40 |
| 4.2.3 | Método da Barreira Modificada aplicado ao FPRO | 42 |
| 4.2.4 | Comparação do Método da Barreira Modificada com os da literatura . . | 46 |
| 4.3 | Aplicação do Método da Barreira Modificada em sistemas elétricos | 48 |
| 4.3.1 | Sistema de 3 barras de Dommel e Tinney | 49 |
| 4.3.2 | Sistema IEEE 14 barras | 60 |
| 4.3.3 | Comentários Finais | 73 |
| 5 | Testes e Resultados | 75 |
| 5.1 | Sistema IEEE 30 barras | 77 |
| 5.2 | Sistema IEEE 57 barras | 86 |
| 5.3 | Sistema IEEE 118 barras | 95 |
| 5.4 | Comentários Finais | 107 |
| 6 | Conclusões e Perspectivas | 109 |
| A | Resultados gerados pelo MBM para o exemplo ilustrativo | 113 |
| B | Valores especificados dos sistemas IEEE 30,IEEE 57 e IEEE 118 | 117 |
| B.1 | IEEE 30 | 117 |
| B.2 | IEEE 57 | 118 |
| B.3 | IEEE 118 | 120 |
| C | Gráficos das magnitudes de tensão | 125 |
| C.1 | IEEE 30 | 125 |
| C.2 | IEEE 57 | 127 |
| C.3 | IEEE 118 | 129 |
| D | Gráficos das folgas complementares e funções objetivos | 133 |
| D.1 | IEEE 30 | 133 |
| D.2 | IEEE 57 | 135 |
| D.3 | IEEE 118 | 137 |
| | Bibliografia | 140 |

Introdução

A privatização do setor elétrico, que iniciou-se na década de 80 com as companhias chilenas Endesa e Chilectra S. A., trouxe a desregulamentação dos mercados de energia elétrica que foi copiado em outros países (Araneda and Rios 2005). Isso tornou o mercado mais competitivo e o custo pode ser reduzido gerando incertezas de quanto de energia gerar para que as empresas concorrentes vendam sua eletricidade (Rudnick 2003). Já em outros lugares, a infraestrutura desenvolvida no setor elétrico não é compatível com a crescente demanda de consumidores, acarretando problemas nos equipamentos da rede. Uma outra mudança são as fontes de energia renováveis, como eólica e solar, que aumenta a grau de complexidade no escalonamento do fluxo de energia. Todos estes fatores contribuíram para o desenvolvimento de novos métodos de otimização rápidos e confiáveis onde questões de segurança e econômicas são levados em conta. O Fluxo de Potência Ótimo (FPO) tem sido o modelo predominante para essa análise desde a sua introdução, por Carpentier em 1962 (Carpentier 1983). Os métodos de otimização têm sido muito utilizados na operação, análise e planejamento de sistemas de potência.

O FPO consiste na otimização de um determinado objetivo que pode ser: custos ou algum critério de planejamento, por meio do controle do fluxo de potência de uma rede elétrica sem violar o balanço desse fluxo de energia ou limites de operação e equipamentos do sistema. Como no Fluxo de Potência (FP) convencional (Monticelli 1983), o FPO determina a tensão, a corrente e a potência injetada em um sistema elétrico, isto é, o estado do sistema de operação. Ao contrário do FP, que consiste em resolver um sistema não linear descrito pelo balanço de potências ativas e reativas da rede, o FPO além dessa e outras restrições possui uma função objetivo a ser otimizada. Por isso, o FPO realiza várias iterações do FP, a fim de otimizar a função objetivo. O FPO é um problema de otimização estático, não-linear, não-convexo, de grande escala e que pode conter tanto variáveis de controle contínuas quanto discretas. Existem várias formulações para FPO, mas sua forma geral compõem de minimizar ou maximizar uma

função objetivo sujeito a restrições de igualdade e desigualdade. Independentemente do nome que a formulação proposta tenha, qualquer problema de otimização de sistemas de energia que possui um conjunto de equações de fluxo de potência nas restrições pode ser classificado como uma forma de FPO. Esse é o caso do Fluxo de Potência Reativo Ótimo (FPRO) que não deixa de ser um problema de FPO. O FPRO minimiza as perdas totais da potência ativa enquanto mantém o perfil de tensão em um intervalo aceitável. As variáveis de controle incluem tensão dos geradores, *taps* dos transformadores e fontes de VAR (bancos de reatores e capacitores).

O FPRO pode ser modelado em coordenadas polares (Dommel and Tinney 1968) ou cartesianas (Yan, Yu, Yu and Bhattarai 2006). A forma polar tem como variáveis de estado a magnitude e ângulo de fase de tensões nodais. A representação da tensão nodal na forma retangular é representada pelas componentes real e imaginária ao invés de magnitude e ângulo de fase. A vantagem de usar a forma retangular é a ausência de funções trigonométricas no conjunto restrição e as derivadas parciais de segunda ordem são constantes. No trabalho de Tate e Overbye (Tate and Overbye 2005) eles resolvem o FP com um método de Newton para as coordenadas polares e retangulares e concluem que para o caso polar obtém-se os melhores resultados.

Em sistema de potência de grande porte, geralmente as linhas de transmissão possuem a relação resistências por reatância muito elevada (Stott and Alsac 1974). Neste tipo de sistema há uma interessante propriedade: alterações na potência ativa são mais sensíveis às variações nos ângulos de fase e menos sensíveis às variações nas magnitudes da tensão. Do mesmo modo, alterações na potência reativa é mais sensível às mudanças nas magnitudes da tensão e menos sensível às mudanças nos ângulo. Devido a isso, uma das características do FPRO é a presença das restrições de controle da magnitude de tensão nas barras de carga, essa imposição de controle de magnitude de tensão influencia na potência reativa gerada.

Dependendo dos propósitos a serem obtidos de uma rede elétrica, as formulações de FPO podem ser classificadas em: programação não linear (PNL), programação linear (PL), programação quadrática (PQ), programação linear inteira mista (PLIM) e programação não linear inteira mista (PNLIM). A modelagem de um sistema elétrico através de PNL e PNLIM são os que mais condizem sobre os aspecto físico e operacional, entretanto, são formulações mais precisas. As formulações com PNLIM representam os sistemas de potência com elementos de controles discreto, por isso, são as mais precisas e os mais complexas de resolver. Devido a dificuldade em manipular as restrições é comum usar métodos não determinísticos (heurísticos) (Sharif and Taylor 1997). Já as formulações de FPO com PNL modelam o sistema elétrico conservando as propriedades físicas e operacionais mas devido a não convexidade torna-se difícil

encontrar uma solução para o problema. Mesmo assim, pode-se aplicar métodos determinísticos para resolvê-los. Quando o problema FPO necessita controlar a potência reativa no sistema, que é o caso do FPRO, não há como linearizar o modelo.

Devido a precisão do modelo PNL para o FPRO vários métodos determinísticos foram estudados e aplicados em sistemas de potência. Diante da complexidade e não convexidade dos modelos de FPRO muitas técnicas e metodologias são propostas afim de resolvê-lo com mais rapidez, robustez e precisão.

Na literatura existem vários artigos que fazem um levantamento bibliográficos de formulações e algoritmos para FPO (Momoh, Adapa and El-Hawary 1999a), (Momoh, El-Hawary and Adapa 1999b), (Pandya and Joshi 2008), (Qiu, Deconinck and Belmans 2009) e (Frank, Steponavice and Rebennack 2012).

Devido a complexidade do problema de FPRO muitos métodos foram desenvolvidos como por exemplo: método de gradiente reduzido (Dommel and Tinney 1968), método baseado em Newton (Sasson, Vilorio and Aboytes 1973), métodos da Lagrangeana Aumentada (Santos Jr., Deckmann and Soares 1988) e técnicas de Pontos Interiores (PI) (Granville 1994).

O Método da Barreira Modificado (MBM) que é apresentado neste trabalho baseia-se no método desenvolvido por Polyak (Polyak 1992) e que utiliza o princípio de Reescalamento Não Linear (RNL). O primeiro trabalho a utilizar função logarítmica modificada no FPRO foi o de Sousa, Baptista e Costa (De Sousa, Baptista and Da Costa 2004). Diferentemente do MBM apresentado nesta tese, o método deles não leva em conta o princípio de reescalamento não linear.

O MBM baseado no princípio de RNL já teve aplicações em outros problemas de engenharia como pode ser visto nos trabalhos: (Khot, Polyak, Schneur and Berke 1995), (Vassiliadis and Brooks 1998) e (Chen and Vassiliadis 2003).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 2 tem-se uma revisão dos métodos existentes na literatura para solucionar o FPRO.

No capítulo 3 é apresentado uma breve explicação da classe de métodos de RNL que engloba o MBM. O método MBM é aplicado em uma problema de duas variáveis para ilustrar sua funcionalidade.

No capítulo 4 é apresentado o FPRO e o MBM aplicado nele. Para exemplificação do MBM aplicado ao FPRO são utilizados dois exemplos testes de sistemas elétricos um de 3 barras e o outro de 14 barras.

No capítulo 5 são apresentados os resultados gerados pelo MBM aplicados em sistemas

elétricos maiores para comprovar a acurácia e a boa convergência no método.

Por fim, no capítulo 6 é apresentada a conclusão a respeito da proposta do MBM empregado ao FPRO baseada nas análises dos resultados gerados.

Métodos de Gradiente e Newton aplicados ao Fluxo de Potência Reativa Ótimo

Existem várias formulações para o Fluxo de Potência Reativa Ótimo (FPRO), mas geralmente seu modelo compõe de minimizar ou maximizar uma função objetivo sujeito a restrições de igualdade e desigualdade. O FPRO é um modelo não linear, estático e não convexo que na maioria das vezes tem por objetivo minimizar as perdas totais da potência ativa enquanto mantém o perfil de tensão em um intervalo aceitável. O controle das variáveis incluem tensão dos geradores, *taps* dos transformadores e fontes de var (bancos de reatores e capacitores). O problema de despacho de potência reativa ótimo foi formulado na década de sessenta como pode ser conferido nos trabalhos de (Smith Jr. and Tong 1963) e (Dommel and Tinney 1968). Desde então, muitos outros trabalhos com formulação e técnicas de solução para FPRO foram desenvolvidos (Mota-Palomino and Quintana 1986), (Bjelogrlic, Calovic, Ristanovic and Babic 1990), (Quintana and Santos-Nieto 1989), (Sharif and Taylor 1997), (Yan et al. 2006), (De Sousa 2006), (Gonçalves 2008), (Song, Dosano, Kim, Lee, Shin and Kim 2009) e (Leeton, Ratniyomchai and Kulworawanichpong 2010).

O problema de FPRO não tem como ser linearizado e devido a sua complexidade muitos métodos de PNL foram aplicados em sua resolução. A primeira proposta de um método de PNL para resolver um FPRO foi apresentado em 1968 por Dommel e Tinney (Dommel and Tinney 1968). Eles aplicaram o método gradiente reduzido e as restrições canalizadas nas magnitudes da tensão de controle e geração de potência reativa foram inseridas na função objetivo através de funções de penalidade. Em 1970, Sasson (Sasson 1969) propôs um melhoramento no método utilizado por Dommel e Tinney levando a uma melhora na convergência, utilizando para isso o método das direções conjugadas de Powell (Powell 1984). Todos esses métodos ao atualizar as variáveis de controle utilizam apenas informações de primeira ordem da função objetivo e

restrições. As vantagens dos métodos dessa categoria é que são fáceis de programar e garantem a convergência para problemas convexos. A desvantagem é que são mais lentos comparados com métodos de ordem maiores.

Em 1973 é apresentado a primeira versão de método baseado em Newton (Sasson et al. 1973) que utiliza informações de derivadas de segunda ordem da função objetivo. Apesar do método proposto por Sasson, Vitoria e Aboyte (Sasson et al. 1973) não utilizar a função Lagrangeana, a maioria dos métodos baseados em Newton utiliza a função Lagrangeana relacionada ao PNL. Em 1984, Sun, Ashlet, Brewer e Hughes (Sun, Ashley, Brewer, Hughes and Tinney 1984) propuseram um algoritmo eficiente que resolve uma aproximação quadrática da Lagrangeana do problema em cada iteração. Visando o melhoramento na eficiência dos métodos baseados em Newton, a função Lagrangeana foi substituída ao longo do tempo por outras como a Lagrangeana aumentada (Santos Jr. et al. 1988, Santos Jr. and da Costa 1995), funções barreira logarítmicas (Granville 1994, Wu, Debs and Marsten 1994, Granville, O. and Melo 1996, Gonçalves 2008) e funções barreiras logarítmicas modificada (De Sousa et al. 2004, De Sousa 2006, De Sousa, Baptista and Da Costa 2007, De Sousa, Baptista and Da Costa 2009).

Em 1994, Granville (Granville 1994) foi o primeiro a utilizar pontos interiores no FPRO. Esse método teve uma vasta aplicação no FPRO sendo atualmente a técnica mais utilizada (Wu et al. 1994, Granville et al. 1996, Baptista, Belati and Da Costa 2001, De Sousa et al. 2004, De Sousa 2006, Yan et al. 2006, De Sousa et al. 2007, De Sousa et al. 2009, Song et al. 2009). Em (De Sousa et al. 2004) Sousa, Baptista e Costa em vez de penalizar as restrições utilizando a função barreira clássica optaram em aplicar a função logarítmica modificada proposta por (Polyak 1992). As vantagens em utilizar a função barreira modificada ao invés da barreira clássica devem-se: a convergência do método da barreira modificada é finita enquanto a barreira clássica é assintótica; a barreira modificada permite que a solução possa estar na fronteira da região factível, já a barreira clássica não dá condições em alcançá-la; representação explícita das variáveis duais e para obter a solução o parâmetro de penalidade não precisa crescer infinitamente (Da Silva 2008).

O método proposto por (Polyak 1992) combina as melhores qualidades das funções Lagrangeanas e barreiras clássica e permite gerar pontos infactíveis. Por mais que o método para resolver FPRO proposto em (De Sousa et al. 2004) use a função barreira modificada a sua estrutura é de pontos interiores.

Nas próximas seções apresentaremos as estruturas dos métodos do tipo gradiente e do tipo Newton.

2.1 Estrutura dos método de Gradiente e de Newton

Os métodos mais citados na literatura para resolver FPRO são basicamente oriundos de duas classes de métodos: gradiente e métodos do tipo Newton. Os métodos do tipo gradiente, chamados também de descida, não precisam de informação de derivadas de segunda ordem e são mais simples de implementar. Já os do tipo Newton são métodos de segunda ordem onde há melhoras na convergência e na solução obtida. A desvantagem é que dependendo do ponto inicial dada o método de Newton não converge. Essas duas técnicas de método serão apresentadas nas seções 2.1.1 e 2.1.2

Para exemplificar a funcionalidade desses dois métodos considere o problema geral de FRPO:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(\bar{x}) \\ &\text{sujeito a} && h(\bar{x}) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (2.1a)$$

$$\underline{g} \leq g(\bar{x}) \leq \bar{g} \quad (2.1b)$$

onde $\bar{x} = (v, u)^t$, $v \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^l$, $n = m + l$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ representa as equações básicas do FP, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ funções operacionais lineares e funcionais, v é variável dependente e u é a variável independente ou parâmetro de controle.

Reescrevendo a restrição canalizada (2.1b) em duas restrições não negativas têm-se:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(\bar{x}) \\ &\text{sujeito a} && h(\bar{x}) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$g(\bar{x}) - \underline{g} \geq \mathbf{0}_{t \times 1} \quad (2.2b)$$

$$\bar{g} - g(\bar{x}) \geq \mathbf{0}_{t \times 1} \quad (2.2c)$$

Para simplificar a formulação do PNL (2.2) é definido $r(\bar{x}) = \begin{bmatrix} g(\bar{x}) - \underline{g} \\ \bar{g} - g(\bar{x}) \end{bmatrix}$. O problema (2.2) reescrito torna-se:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(\bar{x}) \\ &\text{sujeito a} && h(\bar{x}) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$r(\bar{x}) \geq \mathbf{0}_{t \times 1} \quad (2.3b)$$

onde $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^t$ e $t = 2q$.

Ambos métodos usam penalizações nas restrições de desigualdades. As funções de penalização mais comuns são:

- (a) penalidade quadrática (Dommel and Tinney 1968, Sasson 1969, Bjelogrljic et al. 1990),
- (b) Lagrangeana aumentada (Burchett, Happ, Vierath and Wirgau 1982, Santos Jr. 1986, Santos Jr. et al. 1988, Da Costa 1990, Santos Jr. and da Costa 1995),
- (c) barreira logarítmica (Granville 1994, Wu et al. 1994, Granville et al. 1996, Gonçalves 2008),
- (d) barreira logarítmica modificada (De Sousa et al. 2004, De Sousa 2006, De Sousa et al. 2007, De Sousa et al. 2009).

As funções (a) e (b) diminuem seus valores quando os pontos gerados aproximam-se da factibilidade, esses métodos são chamados também de penalidade externa. Já os valores de funções de barreira aumentam quando os pontos gerados aproximam-se da fronteira, ou seja, os pontos gerados não podem sair da região factível, por isso são chamados de penalidades interna. Os métodos que utilizam a barreira logarítmica modificada, por sua vez, não precisam gerar pontos factíveis¹ e possuem seu parâmetro de penalidade não precisa crescer infinitamente quando os pontos gerados aproximam-se da fronteira. Os métodos que utilizam as funções (a), (b) e (d) não precisam de um “ponto inicial” factível para a inicialização já os que utilizam a função (c) necessitam de um “ponto inicial” factível. Existem métodos para o FPRO que combinam essas funções como os trabalhos de Baptista, Belati e Costa (Baptista et al. 2001) e Carvalho (Carvalho 2004, Carvalho, Santos Jr. and Ma 2008) que penalizam as restrições de desigualdades com barreira logarítmica clássica e lagrangeana aumentada e o trabalho de Lage, Sousa e Costa (Lage, De Sousa and Da Costa 2009) que utiliza função de penalidade quadrática ou função barreira modificada nas restrições de desigualdade.

Antes de apresentar como funciona os métodos tipo gradiente e Newton o problema (2.3) será reescrito com as restrições de desigualdade (2.3b) penalizadas por uma função ψ que pode ser uma das citadas (a)-(d) anteriormente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(v, u) + \Psi(r(v, u)) \\ \text{sujeito a} \quad & h(\bar{x}) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $\Psi(r(v, u)) = \sum_{i=1}^t \psi(r_i(v, u))$.

A função Lagrangeana associada ao problema (2.4) é:

$$l(v, u, \lambda) = f(v, u) + \Psi(r(v, u)) + \lambda^t h(v, u) \tag{2.5}$$

¹O método da função barreira modificada proposto por Polyak (Polyak 1992) permite que o ponto inicial e os pontos gerados pelo algoritmo sejam infactíveis.

e as condições de KKT são:

$$\nabla_v l(v, u, \lambda) = \nabla_v f(v, u) + J_v^r(v, u)^t \nabla_r \psi(r(v, u)) + J_v^h(v, u)^t \lambda = \mathbf{0}_{m \times 1} \quad (2.6a)$$

$$\nabla_u l(v, u, \lambda) = \nabla_u f(v, u) + J_u^r(v, u)^t \nabla_r \psi(r(v, u)) + J_u^h(v, u)^t \lambda = \mathbf{0}_{l \times 1} \quad (2.6b)$$

$$\nabla_\lambda l(v, u, \lambda) = h(v, u) = \mathbf{0}_{p \times 1} \quad (2.6c)$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^p$.

Essas condições serão úteis para descrever os métodos que utilizam as técnicas de gradiente e de Newton.

2.1.1 Métodos de Gradiente

Dado um ponto inicial u^k os métodos tipo gradiente encontra a variável v^k resolvendo o FP pela equação (2.6c) e λ (2.6a). Para encontrar a variável u^k é necessário encontrar uma direção de descida que produza um novo u^{k+1} cuja o valor da função objetivo diminua, ou seja, $f(v^k, u^{k+1}) \leq f(v^k, u^k)$. Note que ao calcular a direção de descida

$$d_k = -(\nabla_u f(v^k, u^k) + J_u^r(v^k, u^k)^t \nabla_r \psi(r(v^k, u^k)) + J_u^h(v^k, u^k)^t \lambda) \quad (2.7)$$

as informações da função, restrições de igualdade e desigualdade são todas de primeira ordem. Encontrando a direção de descida através de (2.6b) a variável u^k é atualizada. O método converge quando as condições de KKT (2.6) são satisfeitas.

Os principais passos dos métodos tipo gradiente podem ser vistos no fluxograma da Figura 2.1.

2.1.2 Métodos de Newton

A principal contribuição da aplicação dos métodos de Newton no FPRO foi em relação a convergência (Sasson et al. 1973). Dependendo do conjunto de restrições a solução converge às condições de estacionariedade em poucas iterações (Sun et al. 1984). A direção de descida dos métodos tipo Newton é extraída da resolução dos sistema não linear oriundas das condições de KKT:

$$F(v, u, \lambda) = \mathbf{0}_{w \times 1} \quad (2.8)$$

onde $F(v, u, \lambda) = [\nabla_v l(v, u, \lambda), \nabla_u l(v, u, \lambda), \nabla_\lambda l(v, u, \lambda)]$ e $w = m + l + p$.

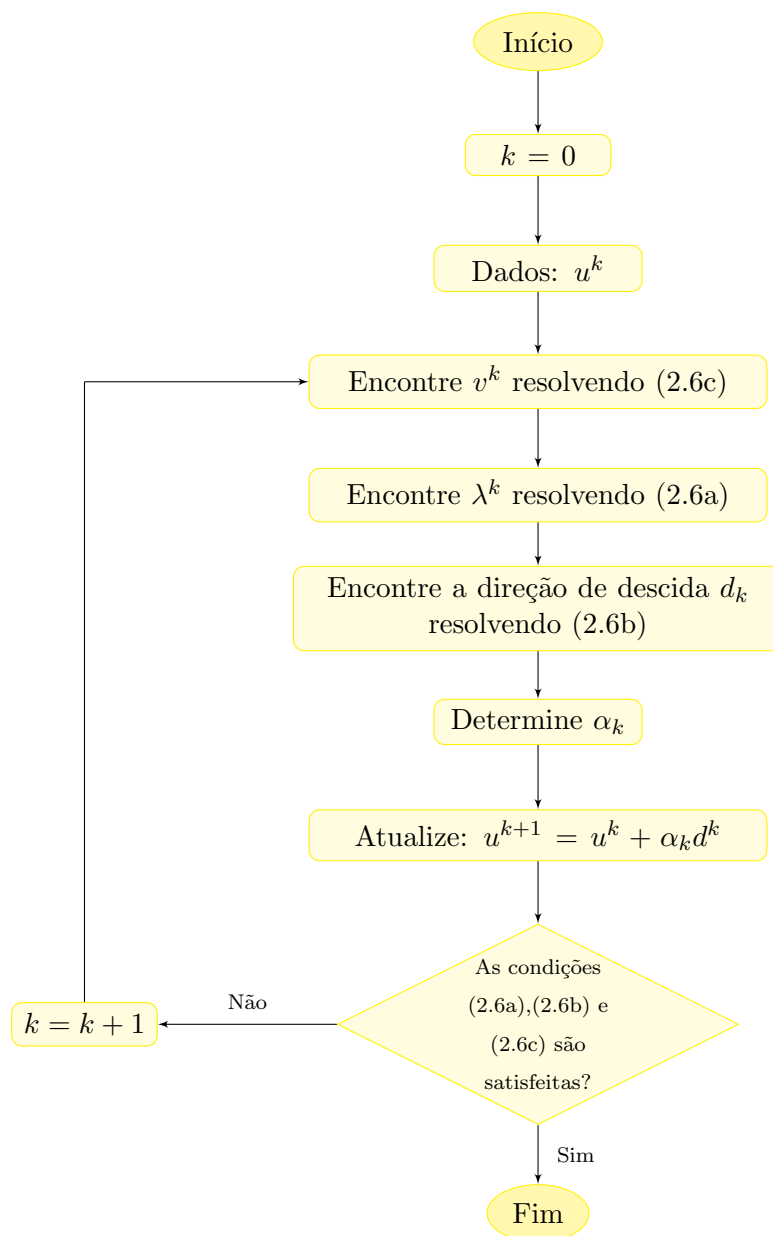


Figura 2.1: Fluxograma dos Métodos de Gradiente.

Para resolver o sistema não linear (2.8) utiliza-se o passo Newton

$$J_F^{v,u,\lambda}(v^k, u^k) \Delta d^k = -F(v^k, u^k, \lambda^k). \quad (2.9)$$

onde $\Delta d^k = [\Delta u^k, \Delta v^k, \Delta \lambda^k]$ e $J_F^{v,u,\lambda}(v, u, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_{vv}^2 l(v, u, \lambda) & \nabla_{uv}^2 l(v, u, \lambda) & J_h^v(v, u)^t \\ \nabla_{vu}^2 l(v, u, \lambda) & \nabla_{uu}^2 l(v, u, \lambda) & J_h^u(v, u)^t \\ J_h^v(v, u) & J_h^u(v, u) & \mathbf{0}_{p \times p} \end{bmatrix}$. O passo de Newton é utilizado de duas formas:

- Um único passo de Newton
- Vários passos de Newton até que $\| F(v^k, u^k, \lambda^l) \|$ aproxime-se a uma tolerância próxima de zero.

Realizando um único passo de Newton o algoritmo que é obtido possui apenas um ciclo como pode ser visto em (Bjelogrlic et al. 1990, Granville 1994). Já o que utiliza vários passos tem por objetivo resolver o sistema não linear (2.6) em um ciclo interno, portanto, esses métodos que utilizam Newton possuem dois ciclos como descritos nos trabalhos de (Santos Jr. et al. 1988, Santos Jr. and da Costa 1995).

No FPRO, quando utiliza-se o método de Newton para o sistema não linear (2.8), na Jacobiana $J_F^{v,u,\lambda}(v^k, u^k)$ do passo (2.9) há informações das derivadas de segunda ordem do problema. O diagrama de funcionalidade dos métodos tipo Newton pode ser visto na Figura 2.2.

Ambas estruturas de métodos aqui apresentadas (gradiente e Newton) tem por objetivo resolver as equações (2.6a)-(2.6c) referentes as condições de KKT (Karush–Kuhn–Tucker). Para a atualização da variável independente u^k o método do tipo gradiente necessita de três passos já o método do tipo Newton necessita apenas um.

O MBM que será apresentado no Capítulo 3 e aplicado no Capítulo 4 pertence à classe de métodos tipo Newton e resolve o sistema não linear (2.8) para encontrar as direções para atualizar as variáveis.

Os métodos da barreira modificada presentes na literatura (De Sousa et al. 2004, De Sousa 2006, De Sousa et al. 2007, De Sousa et al. 2009, Lage et al. 2009, de Sousa, Baptista and da Costa 2012, Soler, de Sousa and da Costa 2012) usufruem da qualidades da função barreira modificada mas dentro do escopo de pontos interiores. O método de barreira modificada apresentado neste trabalho está mais próximo dos métodos de Langrangeano aumentado (Santos Jr. and da Costa 1995). A regra de atualização das variáveis do método aqui implementado permitem pontos infactíveis.

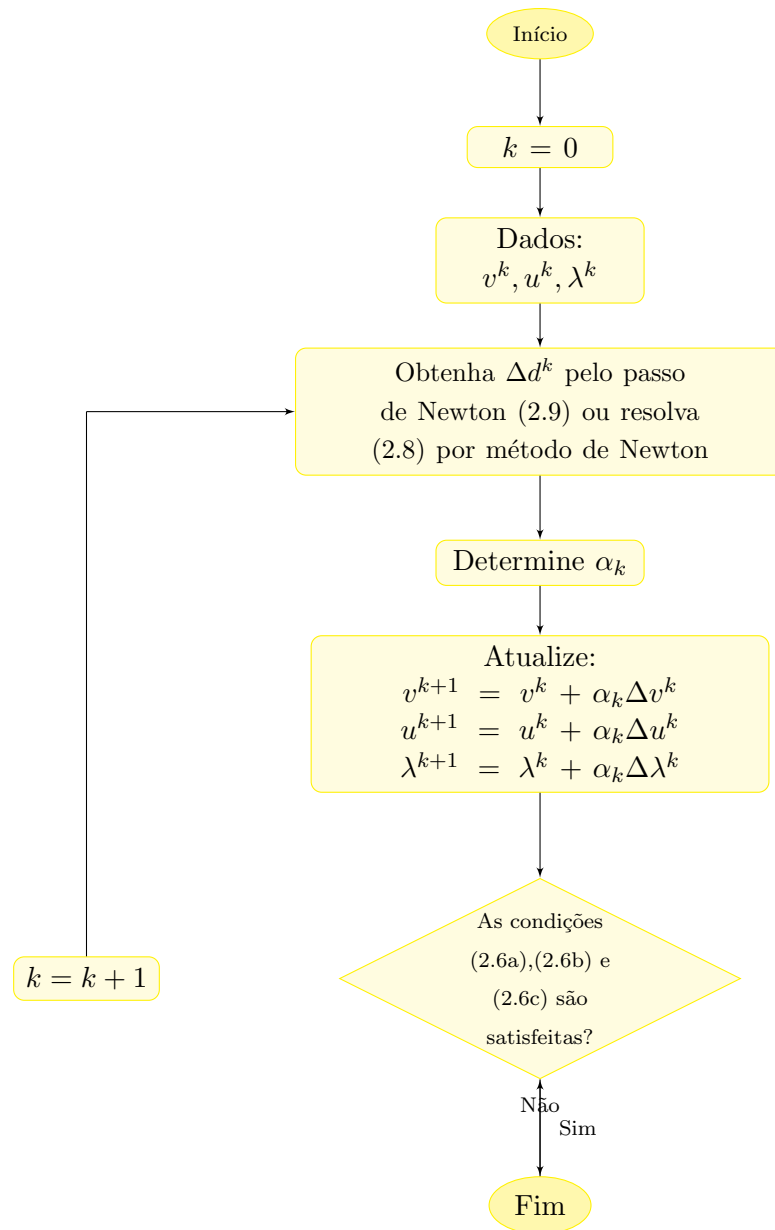


Figura 2.2: Fluxograma dos Métodos de Newton.

O Princípio do Reescalonamento Não Linear e sua aplicação

Neste capítulo são apresentados o princípio de reescalonamento aplicado a problemas não lineares e o método da barreira modificada dele obtido. Esse princípio é utilizado sobre uma formulação adequada ao Fluxo de Potência Reativa Ótimo, na qual se consideram restrições de desigualdade canalizadas com variáveis auxiliares. A partir dessa formulação é desenvolvido um método de barreira modificada, cujo algoritmo também é apresentado.

Para esclarecer o funcionamento do MBM é apresentada na seção 3.1 a classe de métodos chamados de Reescalonamento Não Linear (RNL) (Polyak and Teboulle 1997, Polyak 2002, Griva and Polyak 2006), o qual o MBM pertence, enfatizada com uma pequena explicação de sua funcionalidade através de um PNL com apenas restrições de não negatividade.

Na seção 3.2 será apresentado o PNL que modela a maioria dos FPRO e suas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Esse PNL visa minimizar uma função objetivo sujeito às restrições não lineares de igualdade e de restrições canalizadas que podem ser lineares e/ou não lineares. Essas restrições canalizadas, neste trabalho, são normalizadas e substituídas por variáveis auxiliares para facilitar a implementação.

Após ser apresentado o problema original são realizadas na seção 3.3 as transformações necessárias para obter o Problema de Barreira Modificada (PBM) visto na seção 3.4.

Para finalizar este capítulo será explanado na seção 3.5 o funcionamento do MBM e uma aplicação dele em um exemplo de PNL com duas variáveis.

3.1 O Princípio de Reescalonamento Não Linear

Os métodos de PNL construídos diante do princípio de RNL baseiam-se na transformação das restrições de desigualdade de um problema de otimização restrito resultando em um problema modificado. A transformação não linear é aplicação de uma função que reescalona as restrições de desigualdade do problema de otimização original e introduz um parâmetro positivo nas mesmas. Esse parâmetro pode ser apenas um escalar ou um vetor onde cada componente associa-se a respectiva restrição de desigualdade. As funções de reescalonamento satisfazem as seguintes propriedades (Polyak 2002):

P1. $\tau(0) = 0, \tau'(0) = 1;$

P2. $\tau'(t) > 0;$

P3. $\tau''(t) < 0;$

P4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau'(t) = 0;$

onde $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau \in C^2$ no intervalo $(a, +\infty)$, $-\infty \leq a < 0$, $\tau(a) = -\infty$ e $\tau'(a) = +\infty$.

Algumas funções que satisfazem essas propriedades são

- Função Barreira Modificada Logarítmica (Polyak 1992): $\tau_1(t) = \ln(t + 1)$,
- Função Barreira Modificada Hiperbólica (Polyak 1992): $\tau_2(t) = t(t + 1)^{-1}$,
- Transformação Exponencial (Kort and Bertsekas 1973): $\tau_3(t) = 1 - e^{-t}$,
- Transformação Sigmodal Logarítmica (Polyak 2002): $\tau_4(t) = 2(\ln 2 + t - \ln(1 + e^t))$,
- Função Chen-Harker-Kanzow-Smale (CHKS) Modificada (Polyak 2002): $\tau_5(t) = t - \sqrt{t^2 + 4a} + 2\sqrt{a}$, $a > 0$.

Esses métodos consistem em sucessivas minimizações da função Lagrangeana do problema modificado seguida pelas atualizações das variáveis duais.

Para exemplificar o funcionamento desses métodos de RNL considere o seguinte PNL:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && g(x) \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$

Inserindo a variável de excesso $s \in \mathbb{R}^q$ no PNL (3.1) obtém-se o seguinte problema que é considerado como o PNL original:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && g(x) - s = \mathbf{0}_{q \times 1} \\ & && s \in \Omega_o \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\Omega_o = \{s \in \mathbb{R}^q \mid s \geq \mathbf{0}_{q \times 1}\}$.

A função Lagrangeana $\mathcal{L}_o : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ correspondente ao problema (3.2) é

$$\mathcal{L}_o(x, s, \pi, \mu) = f(x) + \pi^t (g(x) - s) - \mu^t s \tag{3.3}$$

onde $\pi \in \mathbb{R}^p$ é o multiplicador de Lagrange associado a restrição de igualdade do problema (3.2) e $\mu \in \mathbb{R}^q$ é a variável dual associado ao conjunto Ω_o .

Dado um escalar $c > 0$ e devido as propriedades (P1) e (P2) tem-se:

$$s \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \Leftrightarrow c^{-1}T(cs) \geq \mathbf{0}_{q \times 1}$$

onde $T : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ e sua i -ésima componente é $T_i(cs_i) = \tau(cs_i)$. Desse modo, tem-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && g(x) - s = \mathbf{0}_{q \times 1} \\ & && s \in \Omega_e \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $\Omega_e = \{s \in \mathbb{R}^q \mid c^{-1}T(cs) \geq \mathbf{0}_{q \times 1}\}$.

O problema (3.4) pode ser reescrito deixando-o com apenas as restrições de igualdade e inserindo as restrições que formam o conjunto Ω_e na função objetivo. Dessa forma, o problema modificado(3.5) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && f(x) - \mu^t c^{-1}T(cs) \\ & \text{sujeito a} && g(x) - s = \mathbf{0}_{q \times 1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}^q$ é o vetor multiplicador de barreira.

A função Lagrangeana $\mathcal{L}_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ associada ao problema modificado (3.5) é dada pela seguinte fórmula:

$$\mathcal{L}_e(x, s, \pi, \mu, c) = f(x) - \mu^t c^{-1}T(cs) + \pi^t (g(x) - s) \tag{3.6}$$

onde $\pi \in \mathbb{R}^p$ é o multiplicador de Lagrange associado a restrição de igualdade do problema (3.5).

A minimização dessa Lagrangeana \mathcal{L}_e é responsável pelas atualizações das variáveis primais (x e s) e do multiplicador de Lagrange (π) relacionado a restrição de igualdade do problema modificado (3.5). A atualização da variável dual (μ) é extraída da comparação das condições de KKT dos problemas (3.2) e (3.5).

KKT do Problema 3.2:

$$\nabla_x \mathcal{L}_o = \nabla f(x) + J_{g(x)}^t \pi = \mathbf{0}_{n \times 1} \quad (3.7a)$$

$$\nabla_s \mathcal{L}_o = -\pi - \mu = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.7b)$$

$$\nabla_\pi \mathcal{L}_o = g(x) - s = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.7c)$$

$$\mathbb{S} \mu = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.7d)$$

$$s \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.7e)$$

KKT do Problema 3.5:

$$\nabla_x \mathcal{L}_e = \nabla f(x) + J_{g(x)}^t \pi = \mathbf{0}_{n \times 1} \quad (3.8a)$$

$$\nabla_s \mathcal{L}_e = -\pi - T'(cs) \mu = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.8b)$$

$$\nabla_\pi \mathcal{L}_e = g(x) - s = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.8c)$$

onde $J_{g(x)} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ é a matriz Jacobiana de g em x , $\mathbb{S} = \text{diag}(s_i)_{i=1}^q$ e $T'(cs) = \text{diag}(\tau'(cs_i))_{i=1}^q$.

Das condições (3.7b) e (3.8b) obtém-se a seguinte regra de atualização:

$$\mu^{k+1} = T'(c^k s^{k+1}) \mu^k. \quad (3.9)$$

Note que μ do problema (3.5) é visto como um vetor constante mas que é atualizado via (3.9) para cada sequência de problemas (3.5) resolvidos. Essa regra faz com que o vetor multiplicador de barreira μ aproxime-se da solução dual μ^* do problema original (3.2). Isso também ocorre nas variáveis primais e multiplicadores de Lagrange, geradas pela resolução da minimização irrestrita da função \mathcal{L}_e , que aproximam-se da solução do problema (3.2)

Com os passo principais do ciclos interno e externo definidos, respectivamente, pela minimização de \mathcal{L}_e e pela atualização das variáveis duais (3.9) pode-se descrever o método de RNL. Dados $\mu^0 \in \mathbb{R}^q$ e c um valor escalar positivo. O método de RNL gera as sequências pelas seguintes fórmula:

- Ciclo interno:

$$(x^{k+1}, s^{k+1}, \pi^{k+1}) = \arg \min \{ \mathcal{L}_e(x, s, \pi, \mu^0, c^0) \mid x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^q \text{ e } \pi \in \mathbb{R}^q \} \quad (3.10)$$

- Ciclo externo:

$$\mu^{k+1} = T'(c^k s^{k+1}) \mu^k \quad (3.11)$$

Devido a atualização da variável dual μ o parâmetro c não precisa crescer infinitamente para que o método de RNL convirja, como mostram os artigos (Polyak 1992), (Polyak and Teboulle 1997), (Polyak 2002) e (Griva and Polyak 2006). Um outro ponto interessante discutido em (Polyak 1992), (Polyak 2002) e (Griva and Polyak 2006) é que mesmo utilizando um valor $c > 0$ fixo o método também converge para os casos convexos. Em (Polyak and Teboulle 1997), pode-se constatar que o método de RNL iniciando com $\mu > \mathbf{0}_{q \times 1}$ e utilizando a regra de atualização (3.9) gera pontos $\{\mu^k\}$ factíveis para o problema dual associado ao (3.2). Em contrapartida, as sequências $\{x^k\}$, $\{s^k\}$ e $\{\pi^k\}$ produzidas pelo ciclo interno não precisam ser factíveis.

3.2 Problema Não Linear e suas Condições de KKT

O problema de FPRO é matematicamente modelado através do seguinte PNL:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{aligned} \tag{3.12a}$$

$$\underline{g} \leq g(x) \leq \bar{g} \tag{3.12b}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$.

A restrição canalizada do problema (3.12) é reescrita de uma forma equivalente utilizando variáveis auxiliares para facilitar na implementação e análise dos resultados como já foi comentado anteriormente. O primeiro passo para reescrever a restrição canalizada é normalizando-a:

$$\mathbf{0}_{q \times 1} \leq \mathbb{G}^{-1} (g(x) - \underline{g}) \leq \mathbf{e}_{q \times 1} \tag{3.13}$$

onde $\mathbb{G} = \text{diag}(\bar{g}_i - \underline{g}_i)_{i=1}^q$ e $\mathbf{e}_{q \times 1} = (1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^q$ é o vetor unitário.

Desse modo, a restrição (3.12b) pode ser substituída por essas duas restrições:

$$\mathbf{0}_{q \times 1} \leq s \leq \mathbf{e}_{q \times 1} \tag{3.14a}$$

$$\underline{g} - g(x) + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g}) = \mathbf{0}_{q \times 1} \tag{3.14b}$$

onde $s = \mathbb{G}^{-1} (g(x) - \underline{g}) \in \mathbb{R}^q$.

Reescrevendo a canalização (3.14a) e duas restrições de não negatividade tem-se:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & h(x) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{array} \quad (3.15a)$$

$$\underline{g} - g(x) + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g}) = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.15b)$$

$$s \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.15c)$$

$$\mathbf{e}_{q \times 1} - s \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.15d)$$

O PNL com a variável auxiliar (3.15) é definido como o Problema Original (PO).

O conjunto formado pelas restrições de desigualdade (3.15c) e (3.15d) pode ser definido como:

$$\Omega = \{s : s_i \geq 0 \text{ e } 1 - s_i \geq 0, i = 1, \dots, q\}. \quad (3.16)$$

A função Lagrangeana referente ao PO (3.15) é:

$$\mathcal{L}_o(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = f(x) + \lambda^t h(x) + \pi^t (\underline{g} - g(x) + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g})) - \underline{\mu}^t s - \bar{\mu}^t (\mathbf{e} - s) \quad (3.17)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^p$ e $\pi \in \mathbb{R}^q$ são os multiplicadores de lagrange associados às restrições de igualdade (3.15a) e (3.15b), respectivamente, e $\underline{\mu}$ e $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^q$ são as variáveis duais associadas às restrições de desigualdade (3.15c) e (3.15d), respectivamente.

As condições de KKT referente ao PO (3.15) são:

$$\nabla_x \mathcal{L}_o(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = \nabla f(x) + J_{h(x)}^t \lambda + J_{g(x)}^t \pi = \mathbf{0}_{n \times 1} \quad (3.18a)$$

$$\nabla_s \mathcal{L}_o(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = \mathbb{G}\pi - \underline{\mu} + \bar{\mu} = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.18b)$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}_o(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = h(x) = \mathbf{0}_{p \times 1} \quad (3.18c)$$

$$\nabla_\pi \mathcal{L}_o(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = \underline{g} - g(x) + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g}) = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.18d)$$

$$\mathbb{S}\underline{\mu} = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.18e)$$

$$(\mathbb{I}_{q \times q} - \mathbb{S})\bar{\mu} = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.18f)$$

$$s \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.18g)$$

$$\mathbf{e}_{q \times 1} - s \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.18h)$$

$$\underline{\mu} \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.18i)$$

$$\bar{\mu} \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.18j)$$

para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}^p$ e $\pi \in \mathbb{R}^q$, onde $J_{h(x)} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $J_{g(x)} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ são matrizes Jacobianas,

respectivamente, de h e g em x e $\mathbb{I}_{q \times q} = \text{diag}(1)_{i=1}^q$ é a matriz identidade. As condições de KKT do problema (3.15) são constituídas de $n+p+4q$ equações, $4q$ inequações e $n+p+4q$ incógnitas, são elas que determinam a convergência global do PNL (3.15).

3.3 Problema Reescalonado

Nesta seção é apresentado o Problema Reescalonado (PR) do PNL (3.15). O PR é resultante de alguns transformações nas restrições de desigualdades (3.15c) e (3.15d), de modo, a não alterar as propriedades do problema original (3.15).

Para reescalonar as restrições (3.15c) e (3.15d) multiplica-se as inequações do problema (3.15) por um parâmetro de penalidade $c \in \mathbb{R}_+^*$ e adiciona um vetor unitário em ambos os lados dessas restrições, resultando no seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & h(x) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{array} \quad (3.19a)$$

$$\underline{g} - g(x) + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g}) = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.19b)$$

$$cs + \mathbf{e}_{q \times 1} \geq \mathbf{e}_{q \times 1} \quad (3.19c)$$

$$c(\mathbf{e}_{q \times 1} - s) + \mathbf{e}_{q \times 1} \geq \mathbf{e}_{q \times 1} \quad (3.19d)$$

Aplica-se o funcional \ln em ambos os lados das desigualdades (3.19c) e (3.19d). Devido a essa função ser monotonicamente crescente a desigualdade é preservada. Desse modo, obtém-se o seguinte problema reescalonado:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & h(x) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{array} \quad (3.20a)$$

$$\underline{g} - g(x) + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g}) = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.20b)$$

$$c^{-1} \ln(cs + \mathbf{e}_{q \times 1}) \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.20c)$$

$$c^{-1} \ln(c(\mathbf{e}_{q \times 1} - s) + \mathbf{e}_{q \times 1}) \geq \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.20d)$$

onde $\ln(cs + \mathbf{e}) = (\ln(cs_1 + 1), \ln(cs_2 + 1), \dots, \ln(cs_q + 1))^t$ e $\ln(c(\mathbf{e}_{q \times 1} - s) + \mathbf{e}_{q \times 1}) = (\ln(c(1 - s_1) + 1), \ln(c(1 - s_2) + 1), \dots, \ln(c(1 - s_q) + 1))^t$.

As transformações realizadas nesta seção não alteram o conjunto solução do PO (3.15). A função Lagrangeana associada ao problema (3.20) é esquivante ao do Problema de Barreira Modificada apresentada na seção a seguir.

3.4 Problema de Barreira Modificada

O Problema de Barreira Modificada (PBM) é a Função Barreira Logarítmica (FBM), formulada por (Polyak 1992),

$$\mathcal{B}(\underline{\mu}, \bar{\mu}) = -\underline{\mu}^t (c^{-1} \ln(cs + \mathbf{e}_{q \times 1})) - \bar{\mu}^t (c^{-1} \ln(c(\mathbf{e}_{q \times 1} - s) + \mathbf{e}_{1 \times 1})) \quad (3.21)$$

aplicada às restrições de desigualdades e adicionada a função objetivo. O PBM pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_{bm}(x, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = f(x) + \mathcal{B}(\underline{\mu}, \bar{\mu}) \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) = \mathbf{0}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\underline{g} + g(x) + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g}) = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.22b)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^p$ e $\pi \in \mathbb{R}^q$ são os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade (3.22a) e (3.22b), respectivamente, e $\underline{\mu}$ e $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^q$ são os vetores multiplicadores de barreira.

A função Lagrangeana associada ao problema (3.22) é:

$$\mathcal{L}_{bm}(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = f(x) + \mathcal{B}(\underline{\mu}, \bar{\mu}) + \lambda^t h(x) + \pi^t (g(x) - \underline{g} + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g})) \quad (3.23)$$

As condições de estacionariedade do problema (3.22) são:

$$\nabla_x \mathcal{L}_{bm}(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = \nabla f(x) + J_{h(x)}^t \lambda + J_{g(x)}^t \pi = \mathbf{0}_{n \times 1} \quad (3.24a)$$

$$\nabla_s \mathcal{L}_{bm}(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = \mathbb{G}\pi - \mathbb{E}^{-1} \underline{\mu} + \bar{\mathbb{E}}^{-1} \bar{\mu} = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.24b)$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}_{bm}(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = h(x) = \mathbf{0}_{q \times 1} \quad (3.24c)$$

$$\nabla_\pi \mathcal{L}_{bm}(x, s, \lambda, \pi, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = \underline{g} - g(x) + \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g}) = \mathbf{0}_{p \times 1} \quad (3.24d)$$

onde $\mathbb{E} = \text{diag}(cs_i + 1)_{i=1}^q$, $\bar{\mathbb{E}} = \text{diag}(c(1 - s_i) + 1)_{i=1}^q$.

Os problemas (3.15) e (3.22) são PNL distintos apesar de possuírem conjunto solução equivalentes. A ideia dos métodos RNL é resolver uma sequência de problemas (3.22) com determinados vetores multiplicadores de barreira ($\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$) e esses atualizados de tal forma que aproximem-se da solução dual $\underline{\mu}^*$ e $\bar{\mu}^*$ do problema (3.15). Consequentemente, quando as atualizações de $\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$ caminham para a solução dual do problema (3.15) ao se resolver o problema (3.22), a solução primal obtida também está próxima da solução primal do PNL (3.15).

Quando resolve-se o problema (3.22) o conjunto formado pelas restrições de desigualdades

são relaxadas

$$\Omega_R = \{s : s_i \geq -1/c \text{ e } 1 - s_i + 1 \geq -1/c, i = 1, \dots, q\}. \quad (3.25)$$

Na seção (3.5) é visto como o problema (3.22) é resolvido e as variáveis duais atualizadas.

3.5 Método da Barreira Modificada

O método da barreira modificada (MBM) é fundamentado por intermédio da composição das condições de estacionariedade da Lagrangeana do problema (de barreira modificada) (3.24a)-(3.24d) combinadas com uma regra de atualização de aproximações das variáveis duais relativas às restrições de desigualdade do problema original com variáveis auxiliares (3.18c)-(3.18d). A regra de atualização das aproximações das variáveis duais são obtidas a partir das condições de estacionariedades relacionadas ao problema original reescalonado (3.20).

Observe que para determinados vetores multiplicadores de barreira ($\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$) existe um problema de barreira modificado (3.22) relacionado. A metodologia do método baseia-se em dois ciclos:

- dados $\underline{\mu}$, $\bar{\mu}$ e c resolve o PBM (3.22), que equivale a minimizar sua função Lagrangeana associada a esse problema, em relação as variáveis x , s , λ e π ,
- atualiza via uma regra as variáveis duais ($\underline{\mu}$, $\bar{\mu}$) do PO (3.15).

Esses dois ciclos serão apresentados detalhadamente nas seções 3.5.1 e 3.5.2. São utilizadas as letras r e m para designar, respectivamente, os contadores para os ciclos interno e externo.

3.5.1 Ciclo Externo do MBM

O ciclo externo é responsável pela atualização das variáveis duais ($\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$) e do parâmetro de penalidade (c).

Os $\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$ representam as variáveis duais do problema (3.15) e são vistas como um parâmetro para o PBM (3.22). A regra de atualização utilizada pelo MBM faz com que $\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$ convirjam para a solução dual do problema (3.15). As condições de KKT a serem analisadas para a construção da regra de atualização das variáveis duais são (3.18b) e (3.24b). A condição (3.18b) refere-se ao PO (3.15) e as condições (3.24b) ao PBM (3.22). Observe que para essas condições serem iguais:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}\pi - \underline{\mu} + \bar{\mu} &= \mathbf{0}_{q \times 1} \\ \mathbb{G}\pi - \underline{\mathbb{E}}^{-1}\underline{\mu} + \bar{\mathbb{E}}^{-1}\bar{\mu} &= \mathbf{0}_{q \times 1} \end{aligned}$$

as igualdades $\underline{\mu} = \underline{\mathbb{E}}^{-1} \underline{\mu}$ e $\bar{\mu} = \bar{\mathbb{E}}^{-1} \bar{\mu}$ devem ser respeitadas. Dessas relações, obtêm-se as regras de atualizações das variáveis duais:

$$\underline{\mu}^{(m+1)} = (\text{diag}(c^{(m)} s_i^{(r+1)} + 1)_{i=1}^q)^{-1} \underline{\mu}^{(m)} \quad (3.26)$$

$$\bar{\mu}^{(m+1)} = (\text{diag}(c^{(m)} (1 - s_i^{(r+1)}) + 1)_{i=1}^q)^{-1} \bar{\mu}^{(m)} \quad (3.27)$$

onde o vetor $s^{(r+1)}$ é obtido no ciclo interno.

Após as atualizações de $\underline{\mu}$ e $\bar{\mu}$ a região relaxada é diminuída por um fator $\beta > 1$, tal que, $-\frac{1}{c^{(m)}} > -\frac{1}{c^{(m+1)}}$.

A atualização do parâmetro de penalidade pode ser realizada de várias formas tal que $\lim_{m \rightarrow +\infty} c^m = \infty$, uma forma de atualização é dada em (3.28):

$$c^{(m+1)} = \beta c^{(m)}. \quad (3.28)$$

O ciclo externo encerra-se quando a convergência global é atingida. São analisados duas situações para identificar a convergência do MBM. A primeira análise verifica-se as condições de primeira ordem do PNL (3.15) que são:

- estacionariedade primal: determinada pelas condições (3.18a) e (3.18b),
- factibilidade: determinada pelas condições (3.18c) e (3.18d),
- folgas complementares: determinadas pelas condições (3.18e) e (3.18f).

Definindo o funcional $\zeta(y, \underline{\mu}, \bar{\mu})$, onde $y = (x, s, \lambda, \pi) \in \mathbb{R}^l$ e $l = n + p + 2q$, composto pelas condições (3.18a), (3.18b), (3.18c), (3.18d), (3.18e) e (3.18f):

$$\zeta(y, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + J_{h(x)}^t \lambda + J_{g(x)}^t \pi \\ \mathbb{G}\pi - \underline{\mu} + \bar{\mu} \\ g(x) - \underline{g} - \mathbb{S}(\bar{g} - \underline{g}) \\ \mathbb{S}\underline{\mu} \\ \bar{\mathbb{M}}(\mathbf{e} - s) \\ (\mathbb{I}_{q \times q} - \mathbb{S})\bar{\mu} \end{bmatrix}$$

o ciclo externo é encerrado quando

$$\| \zeta(y^{(r)}, \underline{\mu}^{(m)}, \bar{\mu}^{(m)}) \| \leq \varepsilon \quad (3.29)$$

para um valor de ε próximo de zero. A segunda forma para verificar se o MBM converge é

analisando os valores das funções objetivo dos problemas (3.15) e (3.22). Quando essas funções estiverem muito próximas, ou seja, o valor da função barreira modificada for próxima de uma tolerância,

$$\mathcal{B}(\underline{\mu}^{(m)}, \bar{\mu}^{(m)}) \leq \varepsilon \quad (3.30)$$

o ciclo externo também é encerrado.

O fluxograma referente ao ciclo externo pode ser visto na Figura 3.1.

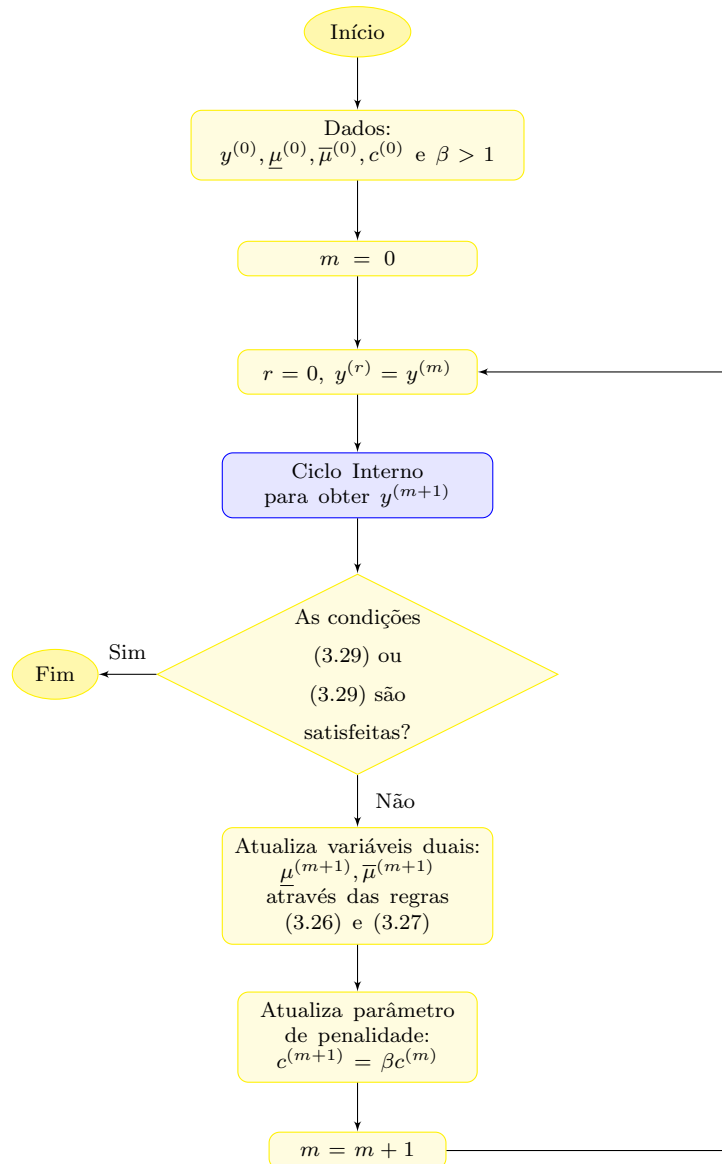


Figura 3.1: Fluxograma do ciclo externo.

3.5.2 Ciclo Interno do MBM

O ciclo interno é caracterizado em minimizar a função Lagrangeana associada ao PNL (3.22). Para isso basta encontrar um ponto (x, s, λ, π) que satisfaça as condições de primeira ordem (3.24a)-(3.24d) do problema (3.22). Para encontrar esse ponto estacionário resolve-se o sistema de equações não lineares formada pelas condições (3.24a)-(3.24d) em relação as variáveis x , s , λ e π :

$$\nabla F(y) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \nabla h(x)^t \lambda + \nabla g(x)^t \pi \\ \mathbb{G}\pi - \underline{\mathbb{E}}^{-1} \underline{\mu} + \overline{\mathbb{E}}^{-1} \overline{\mu} \\ h(x) \\ g(x) - \underline{g} - \mathbb{S}(\overline{g} - \underline{g}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_l. \quad (3.31)$$

Para resolver o sistema (3.31) utiliza-se o método de Newton (Nocedal and Wright 1999). Este método visa resolver através de aproximações lineares sistemas não lineares de forma iterativa até que todas as equações do sistema não linear se aproximem de zero. A aproximação linear do sistema mencionado anteriormente para cada iteração do processo de Newton é:

$$J_F \Delta y^{(r)} = -F(y^{(r)}) \quad (3.32)$$

onde $J_F \in \mathbb{R}^{l \times l}$ é a matriz Jacobiana do funcional F em y e $\Delta y^{(r)} = y^{(r+1)} - y^{(r)}$.

O ciclo interno funciona da seguinte forma:

Dados $\underline{\mu}^k$ e $\overline{\mu}^k$ e um ponto inicial $y^{(0)} = (x^{(0)}, s^{(0)}, \lambda^{(0)}, \pi^{(0)})$. Resolve-se o sistema linear (3.32) obtendo o vetor $\Delta y^{(r)} = (\Delta x^{(r)}, \Delta s^{(r)}, \Delta \lambda^{(r)}, \Delta \pi^{(r)})$ e atualiza-se as variáveis $x^{(r+1)} = x^{(r)} + \alpha \Delta x^{(r)}$, $s^{(r+1)} = s^{(r)} + \alpha \Delta s^{(r)}$, $\lambda^{(r+1)} = \lambda^{(r)} + \alpha \Delta \lambda^{(r)}$ e $\pi^{(r+1)} = \pi^{(r)} + \alpha \Delta \pi^{(r)}$, com $\alpha = 1$. Com o novo ponto $y^{(r+1)}$ verifica-se a sua factibilidade em relação à região factível relaxada, $\Omega_R^{(m)} = \{s : c^{(m)-1} \ln(c^{(m)} s_i + 1) \geq 0 \text{ e } c^{(m)-1} \ln(c^{(m)}(1 - s_i) + 1) \geq 0, i = 1, \dots, q\}$. também tratada apenas como região relaxada. Se $s^{(r+1)}$ não pertence ao conjunto $\Omega_R^{(m)}$ é então realizado o controle de passo para que $s^{(r+1)}$ retorne à região factível relaxada. Esse controle visa encontrar um valor positivo de α , denominado de tamanho do passo da direção $\Delta y^{(r)}$, tal que $s^{(r+1)} = s^{(r)} + \alpha \Delta s^{(r)} \in \Omega_R^{(m)}$. Existem várias formas de encontrar o tamanho de passo α , por exemplo, no artigo de Polyak (Polyak 1992) o tamanho do passo inicial sempre é igual a um, $\alpha = 1$, quando o ponto gerado pelo passo de Newton (3.32) não pertence a região factível relaxada α é reduzido pela metade até que o ponto passe a pertencer a região relaxada. A técnica de controle de passo implementada neste trabalho pode ser visto na subseção 4.2.3 do Capítulo 4. Com o α encontrado o ponto $(x^{(r)}, s^{(r)}, \lambda^{(r)}, \pi^{(r)})$ é atualizado e verificado se o sistema não linear (3.31) foi resolvido, ou seja, se a norma $\|F(y^{(r+1)})\|$ é aproximadamente igual a zero, isso também determina se o ponto encontrado atingiu a estacionariedade do PNL (3.22). Para

problemas não lineares esta condição é suficiente para o critério de parada. Na seção 4.2 é dada outras condições de parada para caso de problemas não convexos.

Na Figura 3.2 é apresentado o fluxograma do ciclo interno.

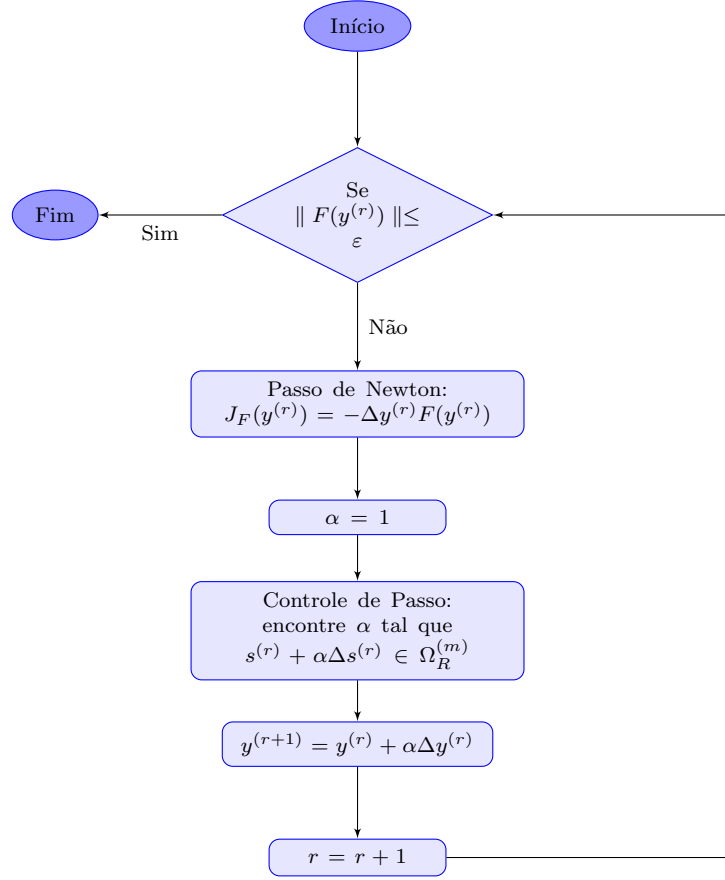


Figura 3.2: Fluxograma do ciclo interno.

3.5.3 Exemplo ilustrativo

Para ilustrar o MBM descrito nesta seção considere o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 - 3 = 0 \end{aligned} \tag{3.33a}$$

$$-2 \leq x_1^2 - x_2 \leq 0 \tag{3.33b}$$

$$1, 5 \leq x_2 \leq 2. \tag{3.33c}$$

Este problema foi retirado da tese de Sousa (De Sousa 2006), mas foi alterado para que ficasse na forma do PNL (3.12).

Reescrevendo o problema (3.33) com as variáveis auxiliares s_1 e s_2 tem-se:

$$\text{Minimizar } f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$$

$$\text{sujeito a } x_1 + x_2 - 3 = 0 \quad (3.34a)$$

$$0,5x_1^2 - 0,5x_2 + 1 - s_1 = 0 \quad (3.34b)$$

$$2x_2 - 3 - s_2 = 0 \quad (3.34c)$$

$$s_1 \geq 0 \quad (3.34d)$$

$$1 - s_1 \geq 0 \quad (3.34e)$$

$$s_2 \geq 0 \quad (3.34f)$$

$$1 - s_2 \geq 0 \quad (3.34g)$$

As condições necessárias de primeira ordem do problema (3.34) são utilizadas no critério que determina a convergência global do MBM.

A função Lagrangeana associada ao problema (3.34) é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_o(x, s, \lambda, \mu) = & f(x) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 3) + \pi_1(0,5x_1^2 - 0,5x_2 + 1 - s_1) + \\ & + \pi_2(2x_2 - 3 - s_2) - \mu_1^- s_1 - \mu_1^+(1 - s_1) - \mu_2^- s_2 - \mu_2^+(1 - s_2) \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^t$ é o vetor com os multiplicadores de Lagrange e $\mu = (\mu_1^-, \mu_1^+, \mu_2^-, \mu_2^+)^t$ é o vetor com as variáveis duais.

As condições de KKT do problema (3.34) são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial x_1} = 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) + \lambda_1 + \pi_1 x_1 = 0 \quad (3.36a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial x_2} = -4(x_1 - 2x_2) + \lambda_1 - 0,5\pi_1 + 2\pi_2 = 0 \quad (3.36b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial s_1} = -\pi_1 - \mu_1^- + \mu_1^+ = 0 \quad (3.36c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial s_2} = -\pi_2 - \mu_2^- + \mu_2^+ = 0 \quad (3.36d)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - 3 = 0 \quad (3.36e)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \pi_1} = 0,5x_1^2 - 0,5x_2 + 1 - s_1 = 0 \quad (3.36f)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \lambda_3} = 2x_2 - 3 - s_2 = 0 \quad (3.36g)$$

$$\mu_1^- s_1 = 0 \quad (3.36h)$$

$$\mu_1^+ (1 - s_1) = 0 \quad (3.36i)$$

$$\mu_2^- s_2 = 0 \quad (3.36j)$$

$$\mu_2^+ (1 - s_2) = 0 \quad (3.36k)$$

$$\mu_1^- \geq 0 \quad (3.36l)$$

$$\mu_1^+ \geq 0 \quad (3.36m)$$

$$\mu_2^- \geq 0 \quad (3.36n)$$

$$\mu_2^+ \geq 0 \quad (3.36o)$$

O problema com conjunto solução equivalente ao PNL (3.34) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_{bm} = f(x) + \mathcal{B}(\mu) \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 - 3 = 0 \end{aligned} \quad (3.37a)$$

$$0,5x_1^2 - 0,5x_2 + 1 - s_1 = 0 \quad (3.37b)$$

$$2x_2 - 3 - s_2 = 0 \quad (3.37c)$$

onde

$$\mathcal{B}(\mu) = -c^{-1}(\mu_1^- \ln(cs_1 + 1) + \mu_1^+ \ln(c(1 - s_1) + 1) + \mu_2^- \ln(cs_2 + 1) + \mu_2^+ \ln(c(1 - s_2) + 1)).$$

é a função barreira modificada.

A função Lagrangeana associada ao problema (3.37) é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{bm}(x, s, \lambda, \mu) = & f(x) + \mathcal{B}(\mu) + \lambda_1(x_1 + x_2 - 3) + \pi_1(0,5x_1^2 - 0,5x_2 + 1 - s_1) + \\ & + \lambda_3(2x_2 - 3 - s_2) \end{aligned} \quad (3.38)$$

As condições de KKT para o problema (3.37) são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial x_1} = 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) + \lambda_1 + \pi_1 x_1 = 0 \quad (3.39a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial x_2} = -4(x_1 - 2x_2) + \lambda_1 - 0,5\pi_1 + 2\pi_2 = 0 \quad (3.39b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial s_1} = -\pi_1 - \frac{\mu_1^-}{cs_1 + 1} + \frac{\mu_1^+}{c(1 - s_1) + 1} = 0 \quad (3.39c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial s_2} = -\lambda_3 - \frac{\mu_2^-}{cs_2 + 1} + \frac{\mu_2^+}{c(1 - s_2) + 1} = 0 \quad (3.39d)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - 3 = 0 \quad (3.39e)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial \pi_1} = 0,5x_1^2 - 0,5x_2 + 1 - s_1 = 0 \quad (3.39f)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial \lambda_3} = 2x_2 - 3 - s_2 = 0 \quad (3.39g)$$

O ciclo interno responsável em atualizar as variáveis x , s e λ através da minimização irrestrita da função Lagrangeana (3.38) que equivale a resolver o sistema não linear formado pelas condições de KKT (3.39a)-(3.39g):

$$F(y) = \begin{bmatrix} 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) + \lambda_1 + \pi_1 x_1 \\ -4(x_1 - 2x_2) + \lambda_1 - 0,5\pi_1 + 2\pi_2 \\ -\pi_1 - \frac{\mu_1^-}{cs_1 + 1} + \frac{\mu_1^+}{c(1 - s_1) + 1} \\ -\lambda_3 - \frac{\mu_2^-}{cs_2 + 1} + \frac{\mu_2^+}{c(1 - s_2) + 1} \\ x_1 + x_2 - 3 \\ 2x_2 - 3 - s_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{7 \times 1} \quad (3.40)$$

onde $y = (x_1, x_2, s_1, s_2, \lambda_1, \pi_1, \lambda_3)^t$.

O sistema não linear (3.40) é resolvido através do método de Newton. O passo de Newton é dado por:

$$J_F(y^{(r)})\Delta y^{(r)} = -F(y^{(r)})$$

onde

$$J_F(y^{(r)}) = \begin{bmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2 + \pi_1 & -4 & 0 & 0 & 1 & x_1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 1 & -0,5 & 2 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & -0,5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \frac{c\mu_1^-}{(cs_1 + 1)^2} + \frac{c\mu_1^+}{(c(1 - s_1) + 1)^2}$$

e

$$M_2 = \frac{c\mu_2^-}{(cs_2 + 1)^2} + \frac{c\mu_2^+}{(c(1 - s_2) + 1)^2}$$

As atualizações das variáveis duais são dadas pelas regras:

$$(\mu_1^-)^{(m+1)} = \frac{(\mu_1^-)^{(m)}}{c^{(m)}s_1^{(r+1)} + 1}$$

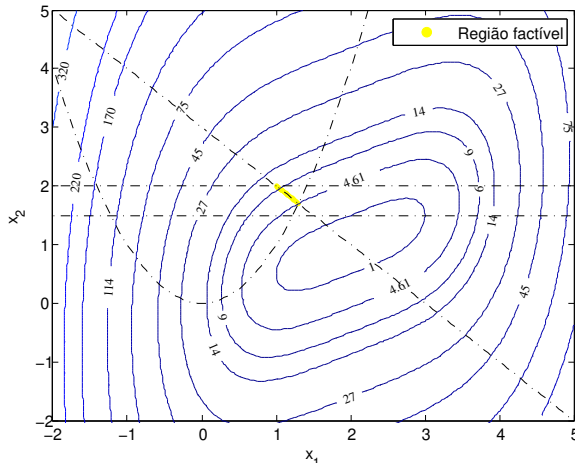
$$(\mu_1^+)^{(m+1)} = \frac{(\mu_1^+)^{(m)}}{c^{(m)}(1 - s_1^{(r+1)}) + 1}$$

$$(\mu_2^-)^{(m+1)} = \frac{(\mu_2^-)^{(m)}}{c^{(m)}s_2^{(r+1)} + 1}$$

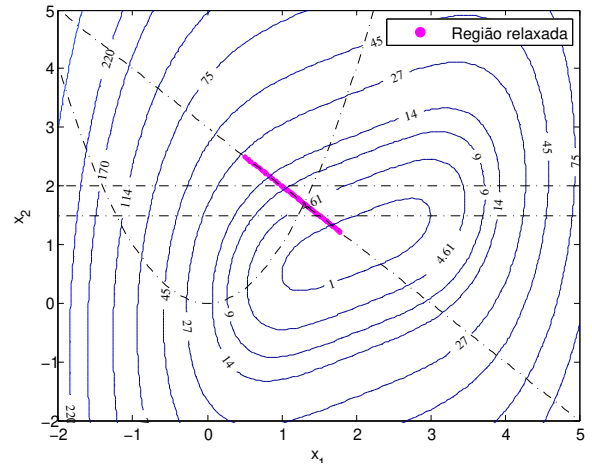
$$(\mu_2^+)^{(m+1)} = \frac{(\mu_2^+)^{(m)}}{c^{(m)}(1 - s_2^{(r+1)}) + 1}$$

O algoritmo para resolver o PNL (3.34) pelo MBM segue as estruturas apresentadas nos fluxogramas 3.1 e 3.2. Detalhes de implementação como controle de passo e atualização do parâmetro de penalidade podem ser vistos na subseção 4.2.3 do Capítulo 4.

Na Figura 3.3(a) tem-se a representação gráfica do problema (3.33) e na Figura 3.3(b) tem-se o problema (3.33) relaxado usando como valor de parâmetro $c = 1$.



(a) PNL exemplo original



(b) PNL exemplo relaxado

Figura 3.3: Representação gráfica do PNL exemplo original e relaxado.

Na Figura 3.4 tem-se as trajetórias obtidas pelo MBM para duas inicializações: $x^0 = (-1, 3)^t$ e $x^0 = (-1, -1)^t$.

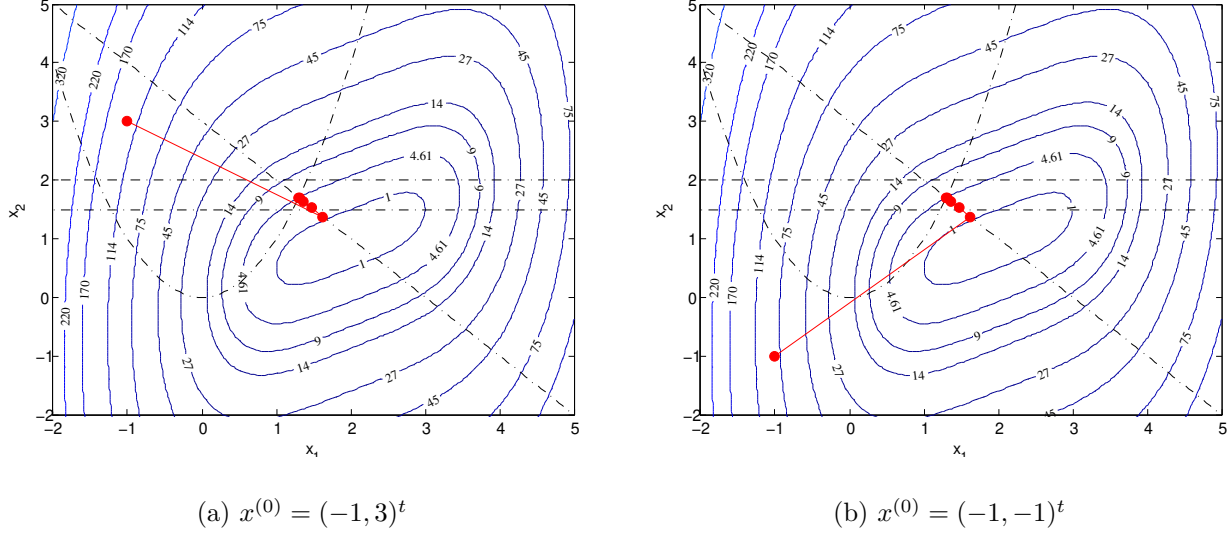


Figura 3.4: Trajetória das variáveis primais geradas pelo MBM.

Observe que apesar do x_0 estar fora da região factível relaxada, as variáveis auxiliares s_1 e s_2 iniciam-se, respectivamente, em -0,5 e 1,5 e estão dentro da região factível relaxada. Essa é a vantagem de reescrever o PNL (3.33) com variáveis auxiliares canalizadas em 0 e 1, pois as únicas variáveis que devem estar na região relaxada são essas.

A solução primal encontrada pelo MBM para o problema (3.34) é $x^* = (1, 3036; 1, 6964)^t$ e o valor da função objetivo é 4,5997.

No Apêndice A estão as tabelas com os valores de todas as variáveis do PNL (3.34), da norma do gradiente da Lagrangeana associada ao problema (3.34), das folgas complementares e funções $f(x)$ e $f(x) + \mathcal{B}(\mu)$ gerados em cada iteração externa pelo MBM.

Método da Barreira Modificada Aplicado ao Fluxo de Potência Reativa Ótimo

Neste capítulo são apresentados o modelo de Fluxo de Potência Reativa Ótimo (FPRO) e a aplicação do método de reescalonamento, via função barreira logarítmica modificada, em sua resolução. Este método é referenciado por Método da Barreira Modificada (MBM).

A seção 4.1 é iniciada com uma breve descrição das equações de FP e algumas definições úteis para o FPRO. Ainda nesta seção é apresentado o modelo do FPRO, descrevendo as variáveis, a função objetivo e as restrições desse PNL.

Na seção 4.2, o problema de FPRO passa por transformações em suas restrições, como relaxação e reescalonamento, até chegar no FPRO da Barreira Modificada (FPROBM). Nesta mesma seção é apresentado o MBM aplicado ao FPRO.

Para ilustrar essa aplicação é apresentado na seção 4.3 dois exemplos de sistemas elétricos (3 barras e 14 barras). No exemplo de 3 barras o FPRO e o FPROBM são descritos e também são apresentados os funcionais utilizados pelo MBM. A apresentação da formulação e aplicação do MBM para o sistema de 3 barras é mais detalhada para melhor exemplificar o método. Os resultados são apresentados para os dois exemplos (3 barras e 14 barras) para que se possa avaliar o desempenho do método utilizado.

4.1 O problema FPRO com variáveis auxiliares e suas condições de KKT

O FPRO é um problema não linear, estático e não convexo que busca encontrar um ponto de operação, através de métodos para PNL, que visa otimizar uma função objetivo, por exemplo, minimizar custos ou perdas de potência, de forma que o balanço de potências ativas e reativas

e outras restrições sejam satisfeitas. O problema FPRO utilizado nesta tese é formulado da seguinte maneira:

$$\text{Minimizar } f(\theta, V) \quad (4.1a)$$

$$\text{sujeito a } P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \text{PV} \cup \text{PQ} \quad (4.1b)$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \text{PQ} \quad (4.1c)$$

$$Q_{Gk}^{min} \leq Q_{Gk}(\theta, V) \leq Q_{Gk}^{max} \quad k \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.1d)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad k \in \text{N} \quad (4.1e)$$

onde as variáveis (V, θ) , a função objetivo, os funcionais e os parâmetros limites são definidos nas subseções apresentadas a seguir.

4.1.1 As Equações do Fluxo de Potência e algumas definições

Muitas das informações contidas nesta subseção são baseadas no livro Fluxo de Potência em Redes de Energia Elétrica (Monticelli 1983).

A rede de transmissão de potência é composta por barras (nós) conectados por circuitos cujos modelos contém os seguintes elementos:

- barra de referência ou slack ($\text{P}\theta$),
- barras com controle de tensão (barra PV),
- barras de carga (barra PQ),
- linhas de transmissão,
- transformadores.

A barra slack fornece a referência angular e fecha o balanço de potência do sistema.

Para facilitar o entendimento são úteis algumas definições:

- **SL**: barra slack,
- **PV**: conjunto das barras PV,
- **PQ**: conjunto das barras PQ,
- **N**: conjunto de todas as barras do sistema,
- **Γ** : conjunto dos circuitos série do sistema,

- y_{km} : admitância série do ramo $k - m$,
- g_{km} : condutância série do ramo $k - m$,
- b_{km} : susceptância série do ramo $k - m$,
- G_{km} : elemento da matriz condutância,
- B_{km} : elemento da matriz susceptância,
- P_{Ck} : carga ativa na barra k ,
- Q_{Ck} : carga reativa na barra k ,
- P_{Gk} : geração de potência ativa na barra k ,
- Q_{Gk} : geração de potência reativa na barra k ,
- **NPV**: quantidade de barras PV existente em uma rede elétrica,
- **NPQ**: quantidade de barras PQ existente em uma rede elétrica,
- **NSL**¹: quantidade de barras SL existente em uma rede elétrica,
- **NB**: quantidade total de barras em uma rede elétrica, $NB=NPV+NPQ+NSL$.

A cada barra da rede são associadas quatro variáveis:

- V_k : magnitude de tensão,
- θ_k : ângulo de tensão,
- P_k : geração líquida de potência ativa,
- Q_k : injeção líquida de potência reativa.

As equações básicas do FP são obtidas da lei de corrente de Kirchhoff, que neste caso é convertida para a conservação de potência (potência injetada num nó é igual a soma das potências que fluem pelos ramos ligados ao nó), e a lei de Ohm que é utilizada para expressar os fluxos de potência nos elementos como função das tensões nos seus terminais. As equações básicas do FP são representadas através das expressões de balanço (4.1b) e (4.1c):

$$P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = \Delta P_k = 0, \quad k \in PV \cup PQ \quad (4.2)$$

¹Todo sistema elétrico de transmissão, para o cálculo do FP e FPO, possui uma única barra de referência (slack).

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = \Delta Q_k = 0, \quad k \in \text{PQ}. \quad (4.3)$$

onde P_k^{esp} e Q_k^{esp} são respectivamente, potências ativa e reativa especificadas, ou seja, seus valores são conhecidos e extraídos dos dados de geração e carga das barras (P_{Gk} , P_{Ck} , Q_{Gk} e Q_{Ck}) por intermédio das relações:

$$P_k^{esp} = P_{Gk} - P_{Ck}, \quad k \in \text{PV} \cup \text{PQ} \quad (4.4)$$

$$Q_k^{esp} = Q_{Gk} - Q_{Ck}, \quad k \in \text{PQ}. \quad (4.5)$$

As potências $P_k(\theta, V)$ e $Q_k(\theta, V)$ são calculadas por intermédio das funções das variáveis nodais θ_k e V_k :

$$P_k(\theta, V) = V_k \sum_{m \in \text{N}} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (4.6)$$

$$Q_k(\theta, V) = V_k \sum_{m \in \text{N}} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}). \quad (4.7)$$

Nas expressões (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) são definidas as componentes das restrições de igualdade (4.1b) e (4.1c) do problema FPRO.

As variáveis, a função objetivo e as restrições que compõem o FPRO são vistas a seguir.

4.1.2 Variáveis, Funcionais restritos e Função objetivo

As variáveis a serem determinadas no FPRO são:

- magnitude de tensão de todas as barras da rede elétrica: V_k , $k \in \text{N}$
- ângulo de tensão das barras de PV e PQ: θ_k , $k \in \text{PV} \cup \text{PQ}$.

O funcional restrito representa a geração de potência reativa nas barras SL e PV, $Q_{Gk}(\theta, V)$, sendo esta calculada pela seguinte expressão:

$$Q_{Gk}(\theta, V) = Q_k(\theta, V) + Q_{Ck} \quad (4.8)$$

onde $Q_k(\theta, V)$ é dada em (4.7) e Q_{Ck} é obtida dos dados.

O método de otimização busca as variáveis V_k e θ_k . Os valores de Q_{Gk} nas barras SL e PV são obtidos através da expressão descrita em (4.8).

A função objetivo utilizada no FPRO (4.1a) neste trabalho é a perda de potência ativa do sistema e é definida como:

$$f(\theta, V) = \sum_{(k,m) \in \Gamma} g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \quad (4.9)$$

4.1.3 Restrições de Desigualdade

As restrições de desigualdade são divididas em: funcionais (4.1d) e lineares (4.1e). As desigualdades funcionais:

$$Q_{Gk}^{min} \leq Q_{Gk}(\theta, V) \leq Q_{Gk}^{max} \quad k \in SL \cup PV$$

estão presentes nas barras onde há geração de potência reativa que são as barras SL e PV e são delimitadas inferiormente por uma potência reativa gerada mínima Q_{Gk}^{min} e superiormente por uma potência reativa gerada máxima Q_{Gk}^{max} . A potência reativa gerada nas barras SL e PV é expressa por

$$Q_{Gk}(\theta, V) = Q_{Ck} + V_k \sum_{m \in N} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}). \quad (4.10)$$

As desigualdades lineares:

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad k \in N$$

controlam as magnitudes de tensão de todas as barras para que estejam em uma faixa delimitada por uma magnitude de tensão mínima V_k^{min} e uma magnitude de tensão máxima V_k^{max} .

É no modelo de FPRO (4.1) representado por intermédio de variáveis auxiliares que é aplicado o MBM.

4.1.4 Formulação com Variáveis Auxiliares

As restrições (4.1d) e (4.1e) serão normalizadas para que todas as canalizações sejam lineares e delimitadas por 0 e 1 e em função das variáveis auxiliares:

- sq_k : para as restrições referentes às potências reativas;
- sv_k : para as restrições referentes às magnitudes de tensões.

A primeira transformação que é feita no problema (4.1) é a normalização das restrições canalizadas para que fiquem no intervalo $[0, 1]$:

$$Q_{Gk}^{min} \leq Q_{Gk}(\theta, V) \leq Q_{Gk}^{max} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{Q_{Gk}(\theta, V) - Q_{Gk}^{min}}{Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}} \leq 1 \quad k \in SL \cup PV \quad (4.11a)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{V_k - V_k^{min}}{V_k^{max} - V_k^{min}} \leq 1 \quad k \in N. \quad (4.11b)$$

Definindo

$$sq_k = \frac{Q_{Gk}(\theta, V) - Q_{Gk}^{min}}{Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}} \quad (4.12) \quad sv_k = \frac{V_k - V_k^{min}}{V_k^{max} - V_k^{min}}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.8) em (4.12) e reescrevendo (4.13) obtém-se:

$$Q_{Gk}^{min} - Q_{Gk} + sq_k(Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}) - Q_k(\theta, V) = 0 \quad (4.14)$$

$$V_k^{min} + sv_k(V_k^{max} - V_k^{min}) - V_k = 0. \quad (4.15)$$

Substituindo as restrições de canalização (4.1d) e (4.1e) por (4.11a) e (4.11b) e acrescentando as equações (4.14) e (4.15) no PNL (4.1) tem-se o seguinte problema:

Minimizar $f(\theta, V)$

$$\text{sujeito a } P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = 0 \quad k \in PV \cup PQ \quad (4.16a)$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in PQ \quad (4.16b)$$

$$Q_{Gk}^{min} - Q_{Gk} + sq_k(Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}) - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in SL \cup PV \quad (4.16c)$$

$$V_k^{min} - V_k + sv_k(V_k^{max} - V_k^{min}) = 0 \quad k \in N \quad (4.16d)$$

$$0 \leq sq_k \leq 1 \quad k \in SL \cup PV \quad (4.16e)$$

$$0 \leq sv_k \leq 1 \quad k \in N. \quad (4.16f)$$

Reescrevendo as canalizações (4.16e) e (4.16f) para que tornem-se não negativas obtém-se:

Minimizar $f(\theta, V)$

$$\text{sujeito a } P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = 0 \quad k \in PV \cup PQ \quad (4.17a)$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in PQ \quad (4.17b)$$

$$Q_{Gk}^{min} - Q_{Gk} + sq_k(Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}) - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in SL \cup PV \quad (4.17c)$$

$$V_k^{min} - V_k + sv_k(V_k^{max} - V_k^{min}) = 0 \quad k \in N \quad (4.17d)$$

$$sq_k \geq 0 \quad k \in SL \cup PV \quad (4.17e)$$

$$1 - sq_k \geq 0 \quad k \in SL \cup PV \quad (4.17f)$$

$$sv_k \geq 0 \quad k \in N \quad (4.17g)$$

$$1 - sv_k \geq 0 \quad k \in N. \quad (4.17h)$$

Como visto no Capítulo 3, as condições de parada do ciclo externo do MBM usam informações do KKT desse problema (4.17). Por ele ser equivalente ao PNL (4.1) também é referenciado por FPRO.

4.1.5 Condições de KKT para o FPRO com variáveis auxiliares

A função Lagrangeana associada ao problema (4.17) é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_o(\theta, V, sq, sv, \lambda^P, \lambda^Q, \pi^Q, \pi^V, \mu_{sq}, \mu_{sv}) = & f(\theta, V) + \\ & + \sum_{k \in PV \cup PQ} \lambda_k^P (P_k^{esp} - P_k(\theta, V)) + \sum_{k \in PQ} \lambda_k^Q (Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V)) \\ & + \sum_{k \in SL \cup PV} \pi_k^Q (Q_{Gk}^{min} - Q_{Ck} + sq_k(Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}) - Q_k(\theta, V)) \\ & + \sum_{k \in N} \pi_k^V (V_k^{min} - V_k + sv_k(V_k^{max} - V_k^{min})) \\ & - \sum_{k \in SL \cup PV} (\mu_{sqk}^- sq_k + \mu_{sqk}^+ (1 - sq_k)) \\ & - \sum_{k \in N} (\mu_{svk}^- sv_k + \mu_{svk}^+ (1 - sv_k)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $\mu_{sq} = (\mu_{sq}^-, \mu_{sq}^+)$ e $\mu_{sv} = (\mu_{sv}^-, \mu_{sv}^+)$.

As condições de KKT para o FPRO são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f}{\partial \theta_i} - \sum_{k \in PV \cup PQ} \lambda_k^P \frac{\partial P_k}{\partial \theta_i} - \sum_{k \in PQ} \lambda_k^Q \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_i} - \sum_{k \in SL \cup PV} \lambda_k^Q \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_i} = 0, \quad \forall i \in PV \cup PQ \quad (4.19a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial V_i} = \frac{\partial f}{\partial V_i} - \sum_{k \in PV \cup PQ} \lambda_k^P \frac{\partial P_k}{\partial V_i} - \sum_{k \in PQ} \lambda_k^Q \frac{\partial Q_k}{\partial V_i} - \sum_{k \in SL \cup PV} \lambda_k^Q \frac{\partial Q_k}{\partial V_i} - \pi_i^V = 0, \quad \forall i \in N \quad (4.19b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial sq_i} = \pi_i^Q (Q_{Gi}^{max} - Q_{Gi}^{min}) - \mu_{sqi}^- + \mu_{sqi}^+ = 0, \quad \forall i \in SL \cup PV \quad (4.19c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial sv_i} = \pi_i^V (V_k^{max} - V_k^{min}) - \mu_{svi}^- + \mu_{svi}^+ = 0, \quad \forall i \in N \quad (4.19d)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \lambda_i^P} = P_i^{esp} - P_i(\theta, V) = 0, \quad \forall i \in PV \cup PQ \quad (4.19e)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \lambda_i^Q} = Q_i^{esp} - Q_i(\theta, V) = 0, \quad \forall i \in PQ \quad (4.19f)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \pi_i^Q} = Q_{Gi}^{min} - Q_{Ci} + sq_i(Q_{Gi}^{max} - Q_{Gi}^{min}) - Q_i(\theta, V) = 0, \quad \forall i \in N \quad (4.19g)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \pi_i^V} = V_i^{min} - V_i + sv_i(V_i^{max} - V_i^{min}) = 0, \quad \forall i \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.19h)$$

$$\mu_{sqi}^- sq_i = 0, \quad \forall i \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.19i)$$

$$\mu_{sqi}^+ (1 - sq_i) = 0, \quad \forall i \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.19j)$$

$$\mu_{svi}^- sv_i = 0, \quad \forall i \in \text{N} \quad (4.19k)$$

$$\mu_{svi}^+ (1 - sv_i) = 0, \quad \forall i \in \text{N} \quad (4.19l)$$

$$\mu_{sqi}^- \geq 0, \quad \forall i \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.19m)$$

$$\mu_{sqi}^+ \geq 0, \quad \forall i \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.19n)$$

$$\mu_{svi}^- \geq 0, \quad \forall i \in \text{N} \quad (4.19o)$$

$$\mu_{svi}^+ \geq 0, \quad \forall i \in \text{N}. \quad (4.19p)$$

Os multiplicadores de Lagrange $\lambda^P, \lambda^Q, \pi^Q, \pi^V$ podem assumir qualquer valores.

A quantidade de variáveis associadas ao problema (4.17) é:

1. NPV + NPQ variáveis primais θ_k ,
2. NB variáveis primais V_k
3. NSL + NPV variáveis auxiliares sq_k :
4. NB variáveis auxiliares sv_k
5. NPV + NPQ multiplicadores de Lagrange λ_k^P
6. NPQ multiplicadores de Lagrange λ_k^Q
7. NSL + NPV multiplicadores de Lagrange π_k^Q
8. NB multiplicadores de Lagrange π_k^V
9. NSL + NPV variáveis duais μ_{sqk}^-
10. NSL + NPV variáveis duais μ_{sqk}^+
11. NB variáveis duais μ_{svk}^-
12. NB variáveis duais μ_{svk}^+

totalizando o valor de $6\text{NB} + 3\text{NSL} + 5\text{NPV} + 2\text{NPQ} = 8\text{NB} + \text{NSL} + 3\text{NPV}$ incógnitas.

4.2 Método da Barreira Modificada aplicado ao FPRO

A construção do MBM depende de algumas transformações do FPRO (4.17). O MBM que foi implementado neste trabalho é composto de dois ciclos: ciclo externo e ciclo interno. A convergência global do MBM, controlada pelo ciclo externo, inclui no critério de parada as condições de KKT do problema (4.17). Já o ciclo interno minimiza a Lagrangeana associada ao PNL, que é visto em 4.2.2, denominado FPRO de barreira modificada (FPROBM). O FPRO e FPROBM são problemas distintos mas possuem o conjunto solução equivalentes. As transformações aplicadas para se chegar ao problema FPROBM são vistas a seguir.

4.2.1 O FPRO relaxado e reescalonado

Para que possa aplicar o MBM é necessário que o FPRO (4.17) passe por algumas transformações, sendo a primeira o relaxamento das restrições de desigualdades. A relaxação permite que as restrições de não negatividade possam ser menores que zero, ou seja, é imposto que as restrições (4.17e) e (4.17f) sejam maiores ou iguais a $-1/c_{sq}$ e as restrições (4.17g) e (4.17h) sejam maiores ou iguais a $-1/c_{sv}$. Os valores c_{sq} e c_{sv} são chamados de parâmetros de penalidade e são relacionados às restrições lineares de desigualdades que envolvem as variáveis sq e sv , respectivamente. Esses parâmetros são atualizados a cada iteração externa do MBM até que $-1/c_{sq}$ e $-1/c_{sv}$ aproxime-se de zero. O FPRO relaxado (FPROR) pode ser escrito como:

Minimizar $f(\theta, V)$

$$\text{sujeito a } P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = 0 \quad k \in PV \cup PQ \quad (4.20a)$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in PQ \quad (4.20b)$$

$$Q_{Gk}^{min} - Q_{Gk} + sq_k(Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}) - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in SL \cup PV \quad (4.20c)$$

$$V_k^{min} - V_k + sv_k(V_k^{max} - V_k^{min}) = 0 \quad k \in N \quad (4.20d)$$

$$sq_k \geq -c_{sq}^{-1} \quad k \in SL \cup PV \quad (4.20e)$$

$$1 - sq_k \geq -c_{sq}^{-1} \quad k \in SL \cup PV \quad (4.20f)$$

$$sv_k \geq -c_{sv}^{-1} \quad k \in N \quad (4.20g)$$

$$1 - sv_k \geq -c_{sv}^{-1} \quad k \in N. \quad (4.20h)$$

Reescalando as restrições relaxadas, o problema equivalente torna-se:

Minimizar $f(\theta, V)$

$$\text{sujeito a } P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \text{PV} \cup \text{PQ} \quad (4.21a)$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \text{PQ} \quad (4.21b)$$

$$Q_{Gk}^{min} - Q_{Gk} + sq_k(Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}) - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.21c)$$

$$V_k^{min} - V_k + sv_k(V_k^{max} - V_k^{min}) = 0 \quad k \in \text{N} \quad (4.21d)$$

$$c_{sq}^{-1} \ln(c_{sq} sq_k + 1) \geq 0 \quad k \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.21e)$$

$$c_{sq}^{-1} \ln(c_{sq}(1 - sq_k) + 1) \geq 0 \quad k \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.21f)$$

$$c_{sv}^{-1} \ln(c_{sv} sv_k + 1) \geq 0 \quad k \in \text{N} \quad (4.21g)$$

$$c_{sv}^{-1} \ln(c_{sv}(1 - sv_k) + 1) \geq 0 \quad k \in \text{N}. \quad (4.21h)$$

Este PNL (4.21) é reescrito na subseção 4.2.2 com as restrições de desigualdades (4.21e), (4.21f), (4.21g) e (4.21h) penalizadas na função objetivo.

4.2.2 O FPRO de Barreira Modificada e as condições necessárias de 1ª ordem

Como já comentado anteriormente, o ciclo interno do MBM é caracterizada pela minimização de um problema similar ao FPRO (4.17) denominado FPRO de barreira modificada (FPROBM). O FPROBM é um PNL sujeito apenas de restrições de igualdade e com uma função da barreira modificada adicionada a função objetivo. A função da barreira modificada é definida através das restrições de desigualdades (4.21e, 4.21f, 4.21g e 4.21h) sendo estas multiplicadas, respectivamente, por μ_{sqk}^- , μ_{sqk}^+ , μ_{svk}^- e μ_{svk}^+ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mu_{sq}, \mu_{sv}) = & -c_{sq}^{-1} \sum_{k \in \text{SL} \cup \text{PV}} (\mu_{sqk}^- \ln(c_{sq} sq_k + 1) + \mu_{sqk}^+ \ln(c_{sq}(1 - sq_k) + 1)) \\ & -c_{sv}^{-1} \sum_{k \in \text{N}} (\mu_{svk}^- \ln(c_{sv} sv_k + 1) + \mu_{svk}^+ \ln(c_{sv}(1 - sv_k) + 1)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

O FPRO de barreira modificada tem a seguinte formulação:

$$\text{Minimizar } f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv}) = f(\theta, V) + \mathcal{B}(\mu_{sq}, \mu_{sv})$$

$$\text{sujeito a } P_k^{esp} - P_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \text{PV} \cup \text{PQ} \quad (4.23a)$$

$$Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \text{PQ} \quad (4.23b)$$

$$Q_{Gk}^{min} - Q_{Gk} + sq_k(Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}) - Q_k(\theta, V) = 0 \quad k \in \text{SL} \cup \text{PV} \quad (4.23c)$$

$$V_k^{min} - V_k + sv_k(V_k^{max} - V_k^{min}) = 0 \quad k \in \text{N}. \quad (4.23d)$$

A função Lagrangeana associada ao PNL (4.23) é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{bm}(\theta, V, sq, sv, \lambda^P, \lambda^Q, \pi^Q, \pi^V) = & f(\theta, V) + \mathcal{B}(\mu_{sq}, \mu_{sv}) + \\
& + \sum_{k \in \text{PV} \cup \text{PQ}} (\lambda_k^P (P_k^{esp} - P_k(\theta, V))) \\
& + \sum_{k \in \text{PQ}} (\lambda_k^Q (Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V))) \\
& + \sum_{k \in \text{SL} \cup \text{PV}} (\pi_k^Q (Q_{Gk}^{min} - Q_{Ck} + sq_k(Q_{Gk}^{max} - Q_{Gk}^{min}) - Q_k(\theta, V))) \\
& + \sum_{k \in \text{N}} (\pi_k^V (V_k^{min} - V_k + sv_k(V_k^{max} - V_k^{min}))). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Essa função Lagrangeana é a mesma função Lagrangeana associada ao problema (4.21).

As condições necessárias de primeira ordem para o problema (4.23) são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f}{\partial \theta_i} - \sum_{\forall i \in \text{PV} \cup \text{PQ}} \lambda_k^P \frac{\partial P_k}{\partial \theta_i} - \sum_{k \in \text{PQ}} \lambda_k^Q \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_i} - \sum_{k \in \text{SL} \cup \text{PV}} \pi_k^Q \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_i} = 0, \quad \forall i \in \text{PV} \cup \text{PQ} \tag{4.25a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial V_i} = \frac{\partial f}{\partial V_i} - \sum_{\forall i \in \text{PV} \cup \text{PQ}} \lambda_k^P \frac{\partial P_k}{\partial V_i} - \sum_{k \in \text{PQ}} \lambda_k^Q \frac{\partial Q_k}{\partial V_i} - \sum_{k \in \text{SL} \cup \text{PV}} \pi_k^Q \frac{\partial Q_k}{\partial V_i} - \pi_i^V = 0, \quad \forall i \in \text{N} \tag{4.25b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial sq_i} = \frac{\mu_{sqi}^-}{c_{sq} sq_i + 1} - \frac{\mu_{sqi}^+}{c_{sq}(1 - sq_i) + 1} + \pi_i^Q (Q_{Gi}^{max} - Q_{Gi}^{min}) = 0, \quad \forall i \in \text{SL} \cup \text{PV} \tag{4.25c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial sv_i} = \frac{\mu_{svi}^-}{c_{sv} sv_i + 1} - \frac{\mu_{svi}^+}{c_{sv}(1 - sv_i) + 1} + \pi_i^V (V_i^{max} - V_i^{min}) = 0, \quad \forall i \in \text{N} \tag{4.25d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial \lambda_i^P} = P_i^{esp} - P_i(\theta, V) = 0, \quad \forall i \in \text{PV} \cup \text{PQ} \tag{4.25e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial \lambda_i^Q} = Q_i^{esp} - Q_i(\theta, V) = 0, \quad \forall i \in \text{PQ} \tag{4.25f}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial \pi_i^Q} = Q_{Gi}^{min} - Q_{Ci} + sq_i(Q_{Gi}^{max} - Q_{Gi}^{min}) - Q_i(\theta, V) = 0, \quad \forall i \in \text{SL} \cup \text{PV} \tag{4.25g}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{bm}}{\partial \pi_i^V} = V_i^{min} - V_i + sv_i(V_i^{max} - V_i^{min}) = 0, \quad \forall i \in \text{N}. \tag{4.25h}$$

Observe que encontrar um ponto estacionário para o PNL (4.23) e minimizar a lagrangiana (4.24) são problemas equivalentes, ambos necessitam que o ponto encontrado $(\theta, V, sq, sv, \lambda^P, \lambda^Q, \lambda^V)$ satisfaça as condições (4.25a)-(4.25h).

A quantidade de variáveis associadas ao problema (4.23) considerando as variáveis $\mu_{sqk}^-, \mu_{sqk}^+, \mu_{svk}^-$ e μ_{svk}^+ como parâmetro e c_{sq}, c_{sv} fixos é:

1. NPV + NPQ variáveis primais θ_k ,

2. NB variáveis primais V_k ,
3. NSL + NPV variáveis auxiliares sq_k ,
4. NB variáveis auxiliares sv_k ,
5. NPV + NPQ multiplicadores de Lagrange λ_k^P ,
6. NPQ multiplicadores de Lagrange λ_k^Q ,
7. NSL + NPV multiplicadores de Lagrange π_k^Q ,
8. NB multiplicadores de Lagrange π_k^V ,

somando o total de $4NB + NSL + 3NPV + 2NPQ = 5NB + 2NPV + NPQ$ incógnitas.

4.2.3 Método da Barreira Modificada aplicado ao FPRO

Os dois ciclos do MBM são:

- **Ciclo interno**² Encontra o ponto $(\theta, V, sq, sv, \lambda^P, \lambda^Q, \pi^Q, \pi^V)$ que minimiza o problema (4.23) para valores fixos de $\mu_{sq}, \mu_{sv}, c_{sq}$ e c_{sv} .
- **Ciclo externo**³ Atualiza através de uma regra as variáveis duais $(\mu_{sq}^-, \mu_{sq}^+, \mu_{sv}^-, \mu_{sv}^+)$ e parâmetros de barreira c_{sq} e c_{sv} .

A minimização da Lagrangeana associada ao problema (4.23) que acontece no ciclo interno é realizada via a resolução do sistema não linear composto pelas equações formadas pelas condições necessárias de primeira ordem (4.25). O ponto $(\theta, V, sq, sv, \lambda^P, \lambda^Q, \pi^Q, \pi^V)$ encontrado neste ciclo satisfaz as condições necessárias de primeira ordem que dão a garantia de estacionariedade e nem sempre de otimalidade para o problema (4.23).

O sistema não linear em função das variáveis $\theta, V, sq, sv, \lambda^P, \lambda^Q, \pi^Q$ e π^V pode ser escrito da seguinte maneira:

$$F(y) = \mathbf{0}_W \quad (4.26)$$

onde F é um funcional formado pelas $5NB + 2NPV$ equações não lineares descritas em (4.25), $W = 5NB + 2NPV + NPQ$ e $y = (\theta, V, sq, sv, \lambda^P, \lambda^Q, \pi^Q, \pi^V)$

O sistema não linear (4.26) é resolvido pelo método de Newton. Para esse sistema o passo de Newton é:

$$J_F(y^{(r)}) = -\Delta y^{(r)} F(y^{(r)}) \quad (4.27)$$

²É utilizado r como contador do ciclo interno.

³É utilizado m como contador do ciclo externo.

onde J_F é a Jacobiana do funcional F em relação a y e $\Delta y^{(r)} = y^{(r+1)} - y^{(r)} = (\Delta \theta^{(r)}, \Delta V^{(r)}, \Delta sq^{(r)}, \Delta sv^{(r)}, \Delta \lambda^{P(r)}, \Delta \lambda^{Q(r)}, \Delta \pi^{Q(r)}, \Delta \pi^{V(r)})$.

No MBM o passo de Newton é repetido até que $\| F(y^{(r)}) \|$ seja próximo de zero. O $\Delta y^{(r)}$ encontrado através do sistema linear (4.27) é utilizado para atualizar as variáveis primais, auxiliares e multiplicadores de Lagrange:

$$\theta^{(r+1)} = \theta^{(r)} + \alpha \Delta \theta^{(r)} \quad (4.28a)$$

$$V^{(r+1)} = V^{(r)} + \alpha \Delta V^{(r)} \quad (4.28b)$$

$$sq^{(r+1)} = sq^{(r)} + \alpha \Delta sq^{(r)} \quad (4.28c)$$

$$sv^{(r+1)} = sv^{(r)} + \alpha \Delta sv^{(r)} \quad (4.28d)$$

$$\lambda^{P(r+1)} = \lambda^{P(r)} + \alpha \Delta \lambda^{P(r)} \quad (4.28e)$$

$$\lambda^{Q(r+1)} = \lambda^{Q(r)} + \alpha \Delta \lambda^{Q(r)} \quad (4.28f)$$

$$\pi^{Q(r+1)} = \pi^{Q(r)} + \alpha \Delta \pi^{Q(r)} \quad (4.28g)$$

$$\pi^{V(r+1)} = \pi^{V(r)} + \alpha \Delta \pi^{V(r)} \quad (4.28h)$$

para $\alpha = 1$. O novo ponto encontrado $y^{(r+1)}$ pode ser infactível, ou seja, $sq_i^{(r+1)} \notin [-1/c_{sq}^{(m)}, 1 + 1/c_{sq}^{(m)}]$ ou $sv_j^{(r+1)} \notin [-1/c_{sv}^{(m)}, 1 + 1/c_{sv}^{(m)}]$. Caso isso ocorra é efetuado o controle de passo, que resume-se em encontrar um α tal que o novo ponto $y^{(r+1)}$ seja factível. O α é determinado da seguinte forma no controle de passo:

$$\alpha = \min\{1, \Gamma_{sq}, \Gamma_{sv}\} \quad (4.29)$$

considere $\gamma_{sq} \in \mathbb{R}^{\text{SL} \cup \text{PV}}$ e $\gamma_{sv} \in \mathbb{R}^{\text{N}}$, as coordenadas desses vetores podem ser definidas como:

$$\gamma_{sqi} = \begin{cases} \frac{c_{sq}^{(m)}(1 - sq_i^{(r)}) + 1}{c_{sq}^{(m)} \Delta sq_i^{(r)}}, & \text{se } \Delta sq_i^{(r)} \geq 0 \\ \frac{-(c_{sq}^{(m)} sq_i^{(r)} + 1)}{c_{sq}^{(m)} \Delta sq_i^{(r)}}, & \text{se } \Delta sq_i^{(r)} < 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\gamma_{svj} = \begin{cases} \frac{c_{sv}^{(m)}(1 - sv_j^{(r)}) + 1}{c_{sv}^{(m)} \Delta sv_j^{(r)}}, & \text{se } \Delta sv_j^{(r)} \geq 0 \\ \frac{-(c_{sv}^{(m)} sv_j^{(r)} + 1)}{c_{sv}^{(m)} \Delta sv_j^{(r)}}, & \text{se } \Delta sv_j^{(r)} < 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

para $i \in \text{SL} \cup \text{PV}$ e $j \in \text{N}$, onde $\Gamma_{sq} = \rho \min_{i \in \text{SL} \cup \text{PV}} \{\gamma_{sqi}\}$ e $\Gamma_{sv} = \rho \min_{j \in \text{N}} \{\gamma_{svj}\}$. O fator ρ é um valor entre 0,0 e 0,999 que evita que $sq_j^{(r)}$ e $sv_j^{(r)}$ fiquem nas margens dos seus respectivos intervalos,

$[-1/c_{sq}^{(m)}, 1 + 1/c_{sq}^{(m)}]$ e $[-1/c_{sv}^{(m)}, 1 + 1/c_{sv}^{(m)}]$.

Com o novo ponto factível $y^{(r+1)}$ o MBM vai para o ciclo externo onde as variáveis duais e parâmetros de penalidade são atualizados.

Os problemas (4.17) e (4.23) são distintos. A equivalência desses problemas dá-se no ponto solução de ambos. O conjunto solução de (4.17) e (4.23) é o mesmo, mas para que a solução do FPRO (4.23) convirja pra a solução do FPRO de barreira modificada (4.17), as variáveis duais são atualizadas de modo que as variáveis duais do FPRO se aproxime das variáveis duais do problema FPRO de barreira modificada. A regra para que isso seja possível é retirada das comparações das equações (4.19c) com (4.25c) e (4.19d) com (4.25d):

$$(\mu_{sqi}^-)^{(m+1)} = \frac{(\mu_{sqi}^-)^{(m)}}{c_{sq}^{(m)} sq_i^{(m+1)} + 1} \quad (4.32)$$

$$(\mu_{sqi}^+)^{(m+1)} = \frac{(\mu_{sqi}^+)^{(m)}}{c_{sq}^{(m)} (1 - sq_i^{(r+1)}) + 1} \quad (4.33)$$

$$(\mu_{svj}^-)^{(m+1)} = \frac{(\mu_{svj}^-)^{(m)}}{c_{sv}^{(m)} sv_j^{(r+1)} + 1} \quad (4.34)$$

$$(\mu_{svj}^+)^{(m+1)} = \frac{(\mu_{svj}^+)^{(m)}}{c_{sv}^{(m)} (1 - sv_j^{(r+1)}) + 1}. \quad (4.35)$$

onde $i \in \text{SL} \cup \text{PV}$ e $j \in \text{N}$.

A atualização do parâmetro de penalidade é feita da seguinte maneira:

$$c_{sq}^{(m+1)} = \beta c_{sq}^{(m)} \quad (4.36a)$$

$$c_{sv}^{(m+1)} = \beta c_{sv}^{(m)} \quad (4.36b)$$

onde $\beta > 1$ é o fator que faz com que o parâmetro de penalidade cresça. Como visto no trabalho de Polyak (Polyak 1992) uma das diferenças entre o MBM e da barreira clássica é que no primeiro o parâmetro de penalidade não precisa crescer infinitamente para que convirja, já o segundo método isso não acontece. A atualização (4.36a) só ocorre se o controle de passo não foi efetuado em sq gerado no ciclo interno, o mesmo procedimento é realizado para $c_{sv}^{(m+1)}$.

Devido ao FPRO ser um problema não convexo algum critério de parada pode não ser atendido mesmo chegando a uma solução. Por exemplo, no ciclo interno foi comentado anteriormente que este encerra-se quando $\|F(y^{(r)})\|$ está próximo de zero, computacionalmente isso significa que $\|F(y^{(r)})\| \leq \varepsilon$, onde ε é uma tolerância pré estabelecida de grandeza pequena. Dependendo do problema, essa condição pode não ocorrer. Em problemas reais complexos, muitas vezes, a

factibilidade tem uma importância maior que a otimalidade. No caso do FPRO o atendimento de carga é muito importante que aconteça. Devido a isso, a medição das equações de balanços está presente nas condições de parada do ciclo interno e externo. Para saber se essas restrições são atendidas efetua-se o seguinte cálculo:

$$DP = \max\{P_k^{esp} - P_k(\theta, V)\}, \quad k \in PV \cup PQ \quad (4.37)$$

$$DQ = \max\{Q_k^{esp} - Q_k(\theta, V)\}, \quad k \in PQ \quad (4.38)$$

os valores DP e DQ são chamados de *mismatches* e são usados como critério de parada no Fluxo de Potência (Monticelli 1983).

As condições utilizadas no critério de parada no ciclo interno são:

$$DP \leq \varepsilon_1 \text{ e } DQ \leq \varepsilon_2 \quad (A1)$$

$$|f(\theta^{(r+1)}, V^{(r+1)}) - f(\theta^{(r)}, V^{(r)})| \leq \varepsilon_3 \quad (A2)$$

$$\|\Delta y^{(r)}\| \leq \varepsilon_4 \quad (A3)$$

onde ε_1 , ε_2 , ε_3 e ε_4 são valores próximo de uma tolerância.

A condição (A1) é o atendimento de carga já comentado anteriormente. A condição (A2) calcula o valor absoluto da diferença entre a função objetivo da iteração anterior com a atual e a condição (A3) retorna o tamanho da direção $\Delta y^{(r)}$ calculado pelo passo de Newton (4.27). Se uma dessas condições for satisfeita, seja o atendimento de carga (A1) ou a função objetivo que não mudou em relação à iteração anterior (A2) ou o tamanho da direção é tão pequeno incapaz de alterar a ponto atual ($y^{(r)}$) (A3), o ciclo interno é encerrado.

No ciclo externo as condições de parada são estabelecidas para verificar a convergência global, ou seja, o critério de parada é construído através do KKT do problema FPRO (4.17). Das condições de KKT do problema FPRO são analisados:

- Otimalidade: através do gradiente da Lagrangeana do FPRO (4.17) em relação as variáveis primais e auxiliares, $\|\nabla \mathcal{L}_o(y)\|$,
- Factibilidade: através das equações de atendimento de carga calculadas em (4.37) e (4.38),
- Folgas complementares: através do cálculo de $folgas = \max\{folgas_{sq}, folgas_{sv}\}$ onde $folgas_{sq} = \max\{\mu_{sqk}^- sq_k, \mu_{sqk}^+ (1 - sq_k)\}$ $k \in SL \cup PV$ e $folgas_{sv} = \max\{\mu_{svk}^- sv_k, \mu_{svk}^+ (1 - sv_k)\}$ $k \in N$.

Outra condição que também é analisada no ciclo externo é o valor da função da barreira modificada, $\mathcal{B}(\mu_{sq}^{(m)}, \mu_{sv}^{(m)})$. No artigo do Polyak (Polyak 1992) é dito que no ponto solução a função objetivo do problema FPRO (4.17) e do problema FPROBM (4.23) são iguais.

As condições utilizadas para o critério de parada no ciclo externo são:

$$DP \leq \varepsilon_5 \text{ e } DQ \leq \varepsilon_6 \text{ e } \|\nabla \mathcal{L}_o(y^{(m)})\| \leq \varepsilon_7 \text{ e } folgas \leq \varepsilon_8 \quad (\text{B1})$$

$$|\mathcal{B}(\mu_{sq}^{(m)}, \mu_{sv}^{(m)})| \leq \varepsilon_9 \quad (\text{B2})$$

onde ε_5 , ε_6 , ε_7 , ε_8 e ε_9 são valores próximo de uma tolerância. O ciclo externo encerra-se caso uma das condições (B1) ou (B2) seja satisfeita.

Na Figura 4.1 é apresentado o fluxograma com o MBM aplicado ao FPRO.

Na seção 4.3, o MBM é aplicado em dois sistemas elétricos (3 barras e 14 barras) para exemplificar seu funcionamento e comprovar seu bom funcionamento diante de problemas não convexos.

4.2.4 Comparação do Método da Barreira Modificada com os da literatura

Esta subseção tem por objetivo fazer algumas comparações com o MBM apresentado neste trabalho com os outros métodos que utilizam funções logarítmicas modificadas.

O método da barreira modificada proposto por Sousa, Baptista e Costa (De Sousa et al. 2004) não utiliza o princípio de reescalonamento não linear (RNL) visto na seção 3.1 do Capítulo 3. Este princípio, em suma, consiste em transformar a função objetivo e/ou restrições em um problema modificado e minimizar sua função Lagrangeana associada e atualizar as variáveis duais através de uma fórmula explícita. O método proposto em (De Sousa et al. 2004) transforma o FPRO em um problema modificado através do relaxamento e reescalonamento das restrições de desigualdades e atualiza as variáveis duais via uma regra apresentada no artigo de Polyak (Polyak 1992). Mas a minimização irrestrita da função Lagrangeana que retorna a vetor direção para a atualização das variáveis primais e multiplicadores de Lagrange não é realizada. Em vez disso, a atualização é feita através de um passo de Newton, construído através do gradiente da Lagrangeana do problema modificado e sua Hessiana, portanto não há ciclo interno neste método. O tamanho do passo utilizado na atualização das variáveis é determinado através de uma regra utilizada nos métodos de pontos interiores e inspiradas em (Granville 1994, Wu et al. 1994), não permitindo que as variáveis com restrições de não negatividade sejam violadas. Todos os outros trabalhos presentes na literatura que utilizam a função da barreira modificada

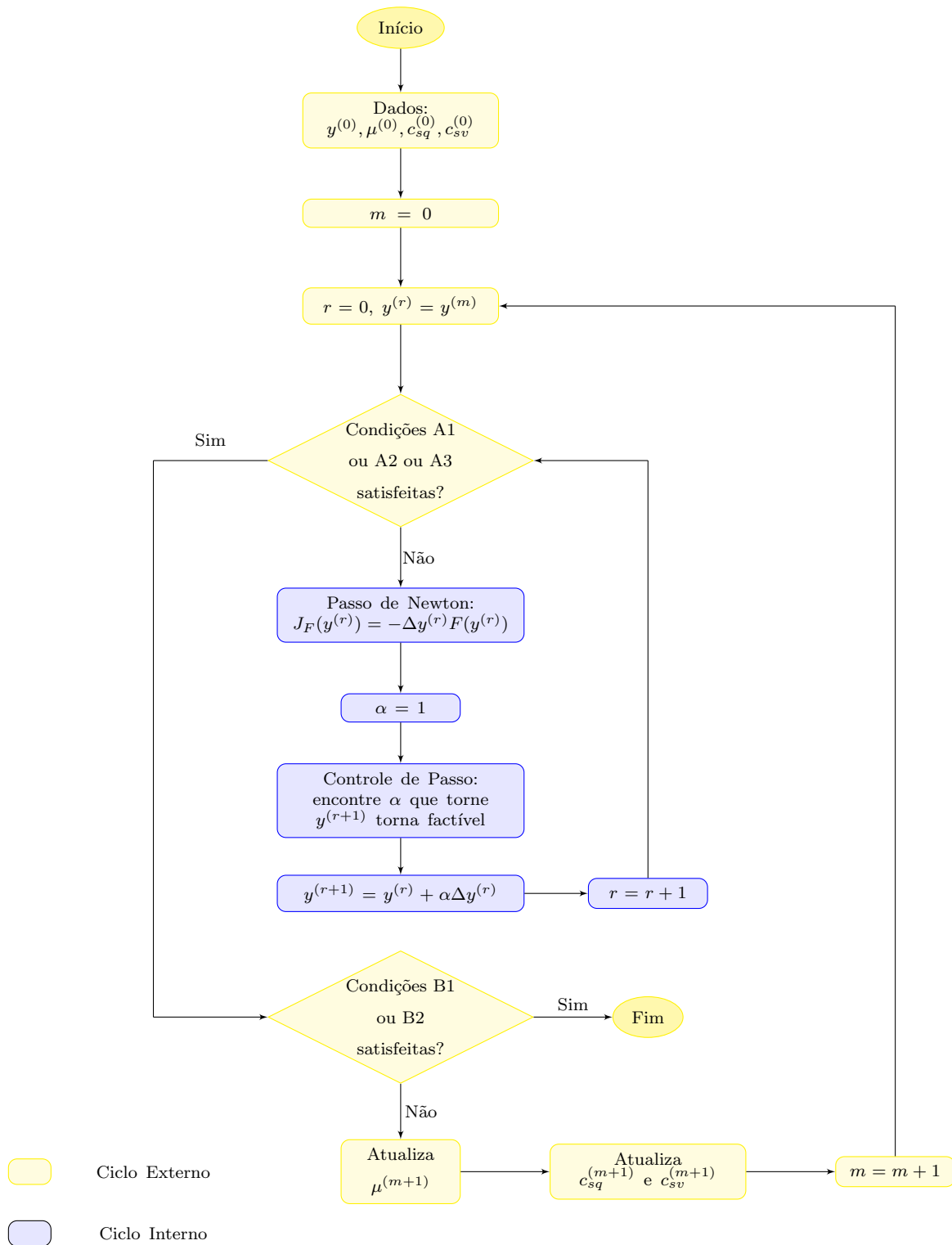


Figura 4.1: MBM aplicado ao FPRO.

(De Sousa et al. 2004, De Sousa 2006, De Sousa et al. 2007, De Sousa et al. 2009, Lage et al. 2009) não empregam o princípio de RNL e o tamanho de passo é calculado via métodos de pontos interiores.

O MBM para resolver FPRO apresentado neste trabalho foi implementado baseado no método da barreira modificada de Newton proposto por Polyak em 1992 (Polyak 1992) e que segue os princípios dos métodos de RNL. Como feito no trabalho de Sousa, Baptista e Costa (De Sousa et al. 2004) o FPRO foi transformado em um problema modificado. As variáveis duais são atualizadas com uma regra adaptada do Polyak (Polyak 1992) e as variáveis primais, auxiliares e multiplicadores de Lagrange utilizam a direção de descida calculada pela minimização irrestrita da Lagrangeana associada ao problema modificado para se atualizarem. Este último processo, na prática, é solucionado através do método de Newton aplicado ao sistema não linear formado pelas condições de primeira ordem do problema modificado. O passo de Newton é repetido até que um ponto estacionário do problema modificado seja encontrado. O tamanho do passo utiliza uma regra que permite deslocar-se sobre a região relaxada, ou seja, para as variáveis que possuem restrições de não negatividade, essas podem ser negativas mas dentro da faixa de relaxação permitida. Portanto, o MBM para FPRO proposto neste trabalho permite pontos infactíveis.

4.3 Aplicação do Método da Barreira Modificada em sistemas elétricos

Nesta seção é aplicado o MBM em dois sistemas elétricos: um com 3 barras e outro com 14 barras. Os testes realizados nos sistemas exemplo distinguem entre si pelos valores V_k^{min} , V_k^{max} e V_k^0 inicial estabelecidos. Este ponto inicial (V_k^0) pode pertencer ao intervalo (V_k^{min}, V_k^{max}) ou não. O exemplo com o sistema de 3 barras serve para elucidar a aplicação e funcionalidade do MBM e o sistema de 14 barras fornece uma descrição do comportamento dos resultados gerados pelo método. Todos os valores dos resultados apresentados estão em p.u. (por unidade) com exceção dos valores das curvas de nível, apresentados nos gráficos da Figuras 4.10, que representam as perdas de potência ativa em MW.

As tolerâncias e parâmetros fixos estabelecidos na implementação do MBM para os dois exemplos são:

- tolerâncias do ciclo externo: 10^{-4} ,
- tolerâncias do ciclo interno: 10^{-3} ,

- fator que diminui a região relaxada: 10,
- fator multiplicador para o controle de passo: 0,95,
- quantidade máxima de iterações externas: 30,
- quantidade máxima de iterações internas: 100,

Os parâmetros de penalidade iniciais são:

- $c_{sv}^0 = 10$,
- $c_{sq}^0 = 10$.

4.3.1 Sistema de 3 barras de Dommel e Tinney

O exemplo apresentado no artigo de (Dommel and Tinney 1968) é um sistema de 3 barras radial com as seguintes características:

- 3 barras
 - 1 de referência (SL)
 - 1 de controle de tensão (PV)
 - 1 de carga (PQ)
- 2 linhas de transmissão

A Figura 4.2 tem a representação deste sistema com os valores especificados de potências ativa e reativa e valores das admitâncias dos ramos:

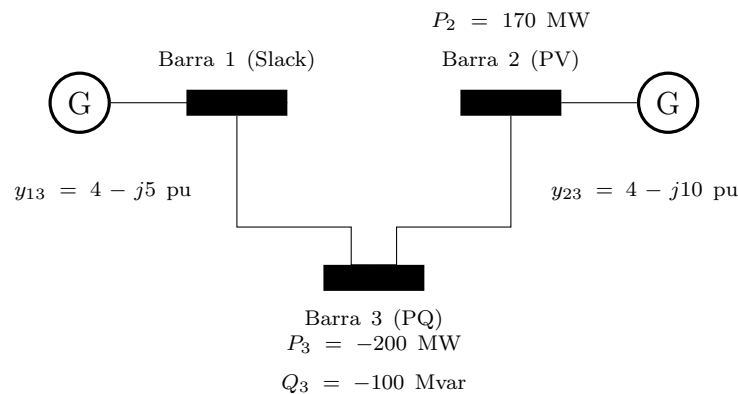


Figura 4.2: Sistema de 3 barras.

O problema de FPRO para esse sistema é representado pelo modelo:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(\theta, V) = g_{13}(V_1^2 + V_3^2 - 2V_1V_3 \cos \theta_{13}) + g_{23}(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos \theta_{23}) \\
\text{sujeito a} \quad & P_2 - P_2(\theta, V) = 0 \\
& P_3 - P_3(\theta, V) = 0 \\
& Q_3 - Q_3(\theta, V) = 0 \\
& Q_{G1}^{min} \leq Q_{G1}(\theta, V) \leq Q_{G1}^{max} \\
& Q_{G2}^{min} \leq Q_{G2}(\theta, V) \leq Q_{G2}^{max} \\
& V_1^{min} \leq V_1 \leq V_1^{max} \\
& V_2^{min} \leq V_2 \leq V_2^{max} \\
& V_3^{min} \leq V_3 \leq V_3^{max}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

O problema de FPRO com variáveis auxiliares utilizado para a análise da convergência global é:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(\theta, V) = g_{13}(V_1^2 + V_3^2 - 2V_1V_3 \cos \theta_{13}) + g_{23}(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos \theta_{23}) \\
\text{sujeito a} \quad & P_2 - P_2(\theta, V) = 0 \\
& P_3 - P_3(\theta, V) = 0 \\
& Q_3 - Q_3(\theta, V) = 0 \\
& Q_{G1}^{min} - Q_{C1} + sq_1(Q_{G1}^{max} - Q_{G1}^{min}) - Q_1(\theta, V) = 0 \\
& Q_{G2}^{min} - Q_{C2} + sq_2(Q_{G2}^{max} - Q_{G2}^{min}) - Q_2(\theta, V) = 0 \\
& V_1^{min} - V_1 + sv_1(V_1^{max} - V_1^{min}) = 0 \\
& V_2^{min} - V_2 + sv_2(V_2^{max} - V_2^{min}) = 0 \\
& V_3^{min} - V_1 + sv_3(V_3^{max} - V_3^{min}) = 0 \\
& sq_1 \geq 0 \\
& 1 - sq_1 \geq 0 \\
& sq_2 \geq 0 \\
& 1 - sq_2 \geq 0 \\
& sv_1 \geq 0 \\
& 1 - sv_1 \geq 0 \\
& sv_2 \geq 0 \\
& 1 - sv_2 \geq 0 \\
& sv_3 \geq 0 \\
& 1 - sv_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

O FPROBM que tem o conjunto solução equivalente ao problema (4.40) e representado pelo modelo:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv}) = f(\theta, V) + \mathcal{B}(\mu_{sq}, \mu_{sv}) \\
\text{sujeito a} \quad & P_2 - P_2(\theta, V) = 0 \\
& P_3 - P_3(\theta, V) = 0 \\
& Q_3 - Q_3(\theta, V) = 0 \\
& Q_{G1}^{min} - Q_{C1} + sq_1(Q_{G1}^{max} - Q_{G1}^{min}) - Q_1(\theta, V) = 0 \\
& Q_{G2}^{min} - Q_{C2} + sq_2(Q_{G2}^{max} - Q_{G2}^{min}) - Q_2(\theta, V) = 0 \\
& V_1^{min} - V_1 + sv_1(V_1^{max} - V_1^{min}) = 0 \\
& V_2^{min} - V_2 + sv_2(V_2^{max} - V_2^{min}) = 0 \\
& V_3^{min} - V_1 + sv_3(V_3^{max} - V_3^{min}) = 0
\end{aligned} \tag{4.41}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mu_{sq}, \mu_{sv}) = & c_{sq}^{-1} \mu_{sq1}^{-} \ln(c_{sq} sq_1 + 1) - c_{sq}^{-1} \mu_{sq1}^{+} \ln(c_{sq}(1 - sq_1) + 1) - \\
& c_{sq}^{-1} \mu_{sq2}^{-} \ln(c_{sq} sq_2 + 1) - c_{sq}^{-1} \mu_{sq2}^{+} \ln(c_{sq}(1 - sq_2) + 1) - \\
& c_{sv}^{-1} \mu_{sv1}^{-} \ln(c_{sv} sv_1 + 1) - c_{sv}^{-1} \mu_{sv1}^{+} \ln(c_{sv}(1 - sv_1) + 1) - \\
& c_{sv}^{-1} \mu_{sv2}^{-} \ln(c_{sv} sv_2 + 1) - c_{sv}^{-1} \mu_{sv2}^{+} \ln(c_{sv}(1 - sv_2) + 1) - \\
& c_{sv}^{-1} \mu_{sv3}^{-} \ln(c_{sv} sv_3 + 1) - c_{sv}^{-1} \mu_{sv3}^{+} \ln(c_{sv}(1 - sv_3) + 1).
\end{aligned}$$

Os testes realizados foram divididos nos seguintes casos apresentados na Tabela 4.1:

Tabela 4.1: Características dos testes efetuados no sistema de 3 barras.

| Testes | $V_{SL,PV}^{min}$ | $V_{SL,PV}^{max}$ | V_{PQ}^{min} | V_{PQ}^{max} | $V_{SL,PV}^0$ | V_{PQ}^0 |
|--------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|---------------|------------|
| C1 | 0,8 | 1,2 | 0,8 | 1,2 | 1 | 1 |
| C2 | 0,8 | 1,2 | 0,8 | 1 | 1 | 1 |
| C3 | 0,8 | 1,2 | 0,8 | 1 | 1,15 | 1,1 |

Os casos C1 e C2 iniciam o V_k^0 no mesmo ponto mudando apenas o limite da magnitude de tensão superior da barra PQ. Ambos os casos iniciam V_k^0 dentro do limite de tensões estabelecidas. O caso C3 limita as magnitudes de tensão da mesma forma que o caso C2, mas a inicialização de V_k^0 não está contida no intervalo estabelecido de tensão, ou seja, inicializa em um ponto infactível.

As tensões obtidas através do FP para o sistema de 3 barras podem ser conferidas na Figura 4.3:

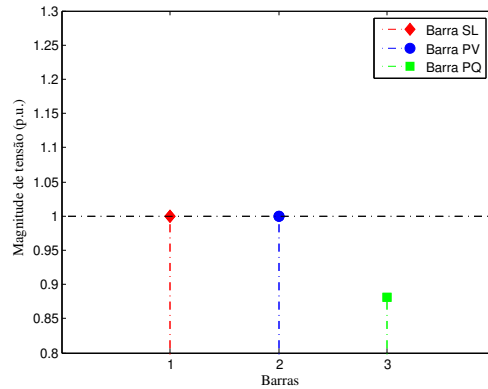


Figura 4.3: Solução do FP do sistema de 3 barras.

Como pode ser visto na Figura 4.3 a solução do FP é $V_1 = V_2 = 1$ e $V_3 = 0,8818$. O valor da perdas de potência ativa dada por essa solução é $f(\theta, V) = 0,1768$ p.u.

Os limites mínimos e máximos das potências reativa geradas nas barras SL e PV são:

Tabela 4.2: Limites mínimos e máximos das potências reativa geradas em p.u.

| Barra | Q_G^{min} | Q_{G1}^{max} |
|--------|-------------|----------------|
| 1 - SL | -30 | 30 |
| 2 - PV | -10 | 30 |

Os valores iniciais das variáveis foram os mesmos para os três testes e estão na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Pontos iniciais das variáveis do FPRO para o sistema de 3 barras.

| IBarra | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|--------|---------|------|--------------|--------------|-------|---------|------|--------------|--------------|
| 1 - SL | 100 | 0,5 | 10 | 10 | 0 | 100 | 0,5 | 1 | 1 |
| 2 - PV | 100 | 0,5 | 10 | 10 | 0 | 100 | 0,5 | 1 | 1 |
| 3 - PQ | 100 | 0,5 | 10 | 10 | | | | | |

As magnitudes de tensão obtidas para o caso C1 podem ser vistas na Figura 4.4. Na figura do lado esquerdo tem-se as magnitudes de tensões iniciais e na figura do lado direito tem-se as magnitudes de tensões finais obtidas no fim do processo iterativo do MBM.

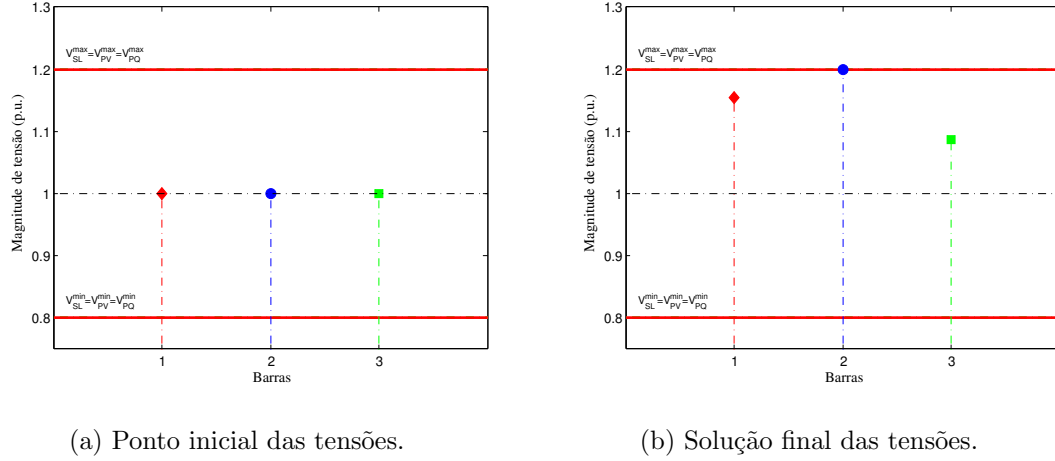


Figura 4.4: Ponto Inicial e solução final obtida pelo MBM aplicado ao sistema de 3 barras - caso C1.

A maior magnitude de tensão obtida é na barra PV onde atinge-se o seu máximo permitido que é de 1,2 p.u. e a menor magnitude de tensão é na barra PQ com o valor de 1,0887 p.u. como pode ser visto na Tabela 4.4. Além dos valores das magnitudes de tensões, pode-se observar nesta tabela os valores dos multiplicadores de Lagrange, as variáveis auxiliares e duais do FPRO para o sistema de 3 barras. Note que os valores das magnitudes de tensões, potências reativa geradas e as variáveis auxiliares estão dentro dos limites estabelecidos para o problema.

Tabela 4.4: Solução final sistema de 3 barras - caso C1.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,1548 | -0,0431 | 0,8870 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3088 | 0,0000 | 0,5015 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,2000 | -0,1534 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0618 | 0,9413 | 0,0000 | 0,5047 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 0 | 1,0877 | 0,0050 | 0,7192 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Os valores obtidos em cada iteração externa das folgas complementares e funções objetivos do FPRO ($f(\theta, V)$) e a do FPROBM ($f(\theta, V) + \mathcal{B}(\mu_{sq}, \mu_{sv})$) estão na Figura 4.5.

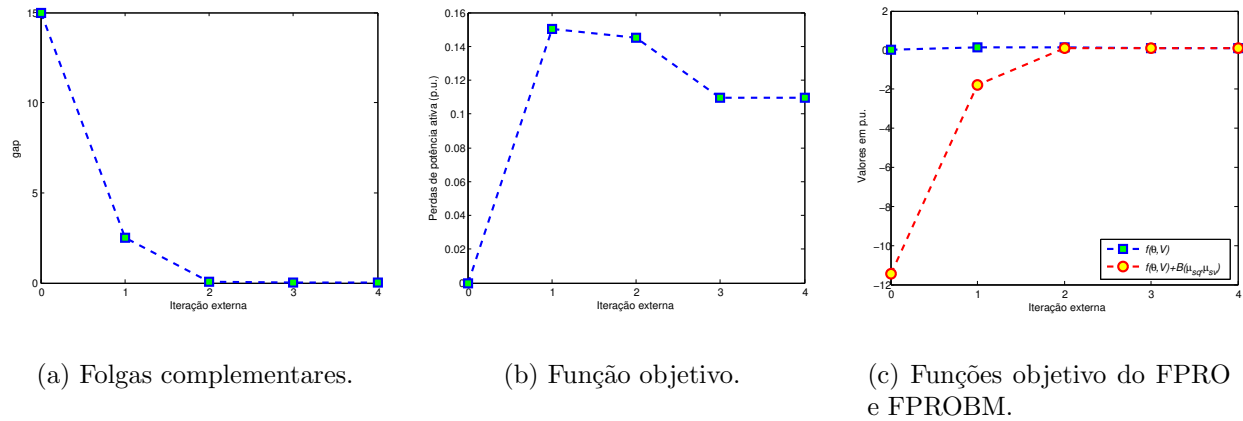


Figura 4.5: Valores das folgas complementares e funções objetivo para o sistema de 3 barras - caso C1.

Os valores da norma do gradiente da Lagrangeana do problema de FPRO, as funções objetivos do FPRO e FPROBM, as folgas complementares e o balanço de potência ativa obtidos em cada iteração externa são apresentados na Tabela 4.5. Nesta mesma tabela há o número de iterações internas realizada em cada ciclo externo. O símbolo # designa quantidade.

Tabela 4.5: Convergência do sistema de 3 barras - caso C1.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | f | f_{bm} | folgas | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------|------------|-----------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 19998,000000 | 0,000000 | -11,467261 | 15,000000 | 2,000000 | 1,000000 | 0 |
| 1 | 0,825168 | 0,150370 | -1,773900 | 2,488770 | 0,000001 | 0,000000 | 8 |
| 2 | 0,524047 | 0,145206 | 0,103856 | 0,052695 | 0,000005 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 0,409814 | 0,109817 | 0,109712 | 0,000106 | 0,000007 | 0,000000 | 17 |
| 4 | 0,409728 | 0,109731 | 0,109733 | 0,000003 | 0,000007 | 0,000000 | 1 |

Note através da Figura 4.5(a) e da Tabela 4.5 que apesar do problema de FPRO para o sistema de 3 barras ser não convexo o valor das folgas complementares atingem a tolerância estabelecida. Já a norma da função Lagrangeana associada ao problema de FPRO não atinge essa tolerância. As funções objetivo do FPRO e FPROBM possuem os mesmos valores na solução final como pode-se ver na Figura 4.5(c), isso demonstra que o MBM convergiu para esse caso. Observe também na Tabela 4.5 que o atendimento de carga é satisfeita.

O caso C2 difere do caso C1 devido ao limite máximo da magnitude de tensão na barra PQ, que no caso C1 era de 1,2 p.u. e no caso C2 é de 1 p.u.

Observe na Figura 4.6 que o ponto inicial da magnitude de tensão da barra PQ inicia no seu limite máximo.

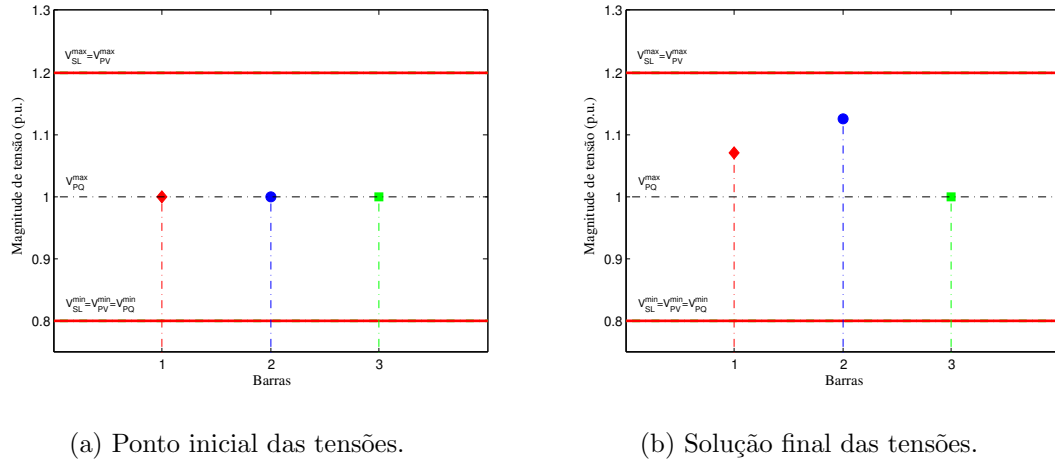


Figura 4.6: Ponto inicial e solução final obtida pelo MBM aplicado ao sistema de 3 barras - caso C2.

No caso C1 a barra que atingiu o limite máximo foi a PV, por isso, a variável auxiliar referente a essa barra sv_2 atinge o valor 1 p.u. que é seu limite máximo e a variável dual ($\mu_{sv_2}^+$) associada a restrição $1 - sv_2 \geq 0$ é diferente de zero. Para o caso C2 isso também ocorre mas na barra PQ, pois é nela que atinge-se o máximo estabelecido, o valor de sv_3 é 1 p.u. e $\mu_{sv_3}^+$ é diferente de zero como pode ser visto na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Solução Final sistema de 3 barras - caso C2.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0710 | 0,0000 | 0,6776 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2826 | 0,0000 | 0,5014 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,1248 | 0,0000 | 0,8119 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0122 | 0,0000 | 0,5051 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 0 | 1,0000 | -0,2350 | 1,0000 | 0,0003 | 0,0744 | | | | | |

Na Figura 4.7 têm-se os gráficos dos valores das folgas complementares, função objetivo do FPRO e a função objetivo do FPROBM em comparação com a do problema original de FPRO.

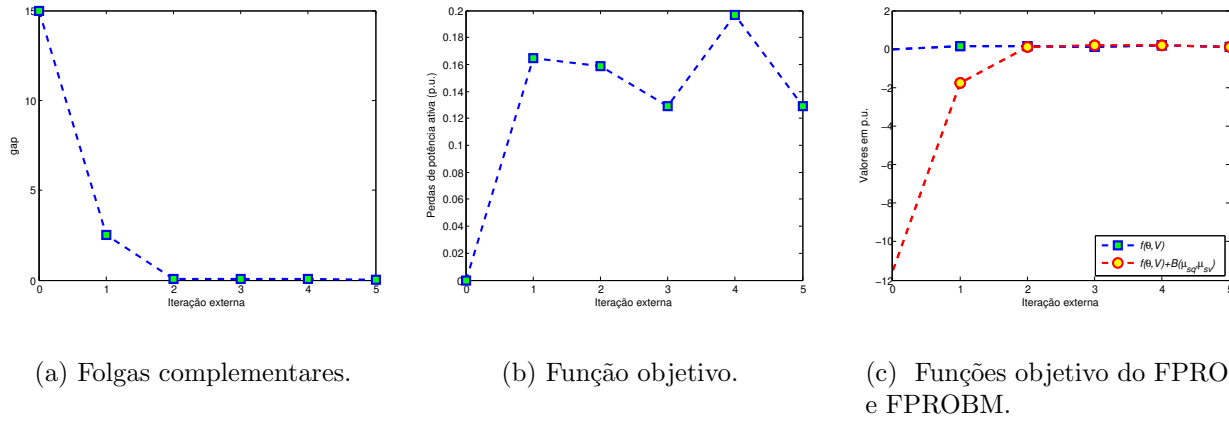


Figura 4.7: Valores das folgas complementares e das funções objetivo para o sistema de 3 barras - caso C2.

Na Tabela 4.7 é apresentado os valores da norma da Lagrangeana associada ao FPRO, das folgas complementares, das funções e *mismatches* utilizados nos critérios de parada do MBM para o sistema de 3 barras.

Tabela 4.7: Convergência do sistema de 3 barras - caso C2.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | f | f_{bm} | $folgas$ | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------|------------|-----------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 19998,000000 | 0,000000 | -11,467261 | 15,000000 | 2,000000 | 1,000000 | 0 |
| 1 | 0,464596 | 0,164596 | -1,747416 | 2,511411 | 0,000000 | 0,000000 | 7 |
| 2 | 0,458606 | 0,158615 | 0,120837 | 0,050329 | 0,000010 | 0,000001 | 2 |
| 3 | 76,694034 | 0,129160 | 0,206168 | 0,076615 | 0,000088 | 0,000002 | 10 |
| 4 | 0,846230 | 0,196800 | 0,178756 | 0,076648 | 0,031989 | 0,003373 | 8 |
| 5 | 0,429217 | 0,129220 | 0,129141 | 0,000322 | 0,000006 | 0,000000 | 10 |

Observe que o valor das folgas complementares está próximo de zero e as cargas são atendidas, já o valor $\|\nabla \mathcal{L}_o\|$ não satisfaz a condição de estacionariedade.

O caso C3 é parecido com o caso C2. Os limites de magnitude de tensão são os mesmos mas tensões iniciais são diferentes.

Na Figura 4.8, pode-se ver que a tensão na barra PQ inicializa-se em um valor maior que o limite máximo estipulado que é 1 p.u.

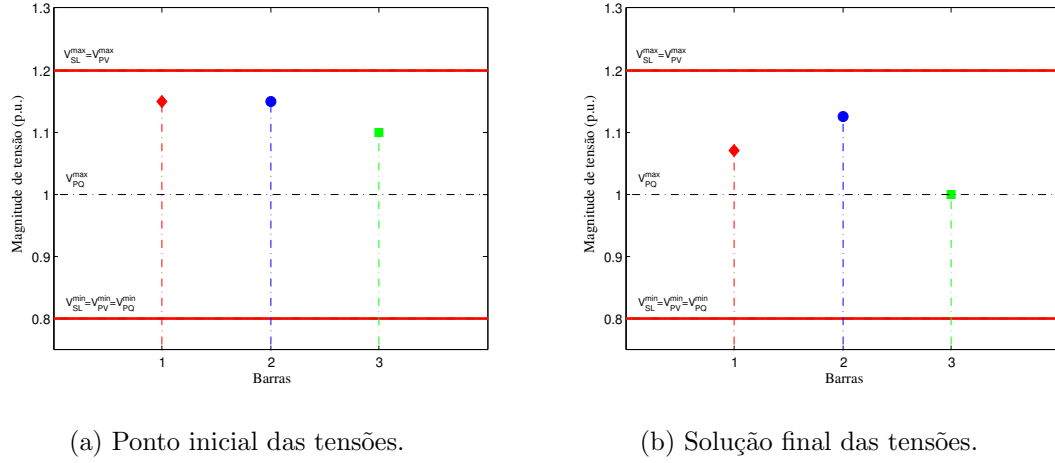


Figura 4.8: Ponto inicial e solução final obtido pelo MBM aplicado ao sistema de 3 barras - caso C3.

Observe na Tabela 4.8 que a solução obtida no caso C3 é parecida com a solução do caso C2. A maior tensão obtida é na barra PV, porém dentro do seu limite, e a menor na barra PQ que coincide com o valor da magnitude de tensão máxima estabelecida que é de 1 p.u. Devido a isso, o valor a variável auxiliar relacionada a essa barra (sv_3) é a variável dual $\mu_{sv_3}^+$ referente a restrição do limite superior de V_3 é diferente de zero.

Tabela 4.8: Solução final sistema de 3 barras - caso C3.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0710 | 0,0000 | 0,6775 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2826 | 0,0000 | 0,5014 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,1247 | 0,0000 | 0,8119 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0122 | 0,0000 | 0,5051 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 0 | 1,0000 | -0,2350 | 0,9998 | 0,0003 | 0,0649 | | | | | |

Observe na Figura 4.9(b) que a função objetivo do caso C3 tem o mesmo comportamento que a função objetivo do caso C2. Nas figuras 4.9(a) e 4.9(c) são apresentados, respectivamente, o valor das folgas complementares que tende a zero com o avanço das iterações externas e os valores das funções objetivo do FPRO e FPROBM que se aproximam perto da solução do FPRO.

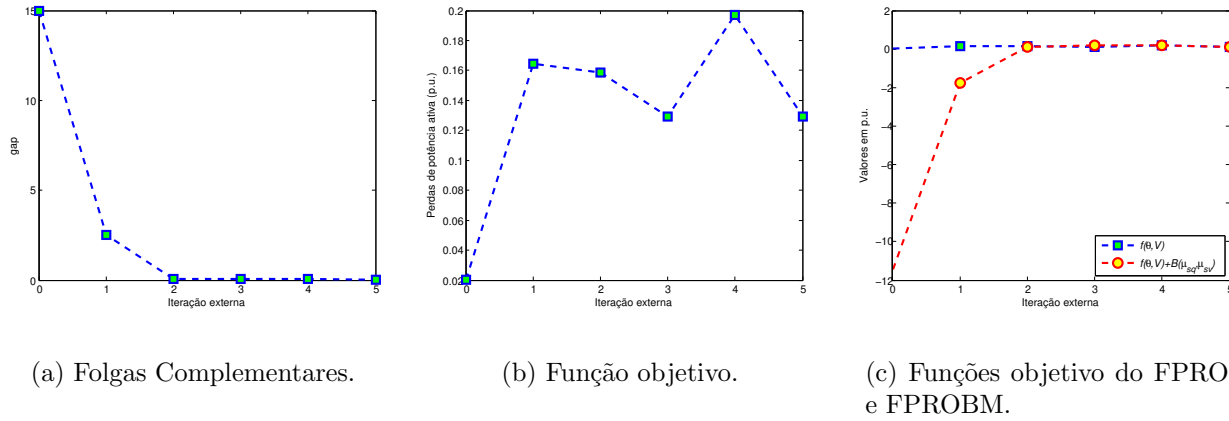


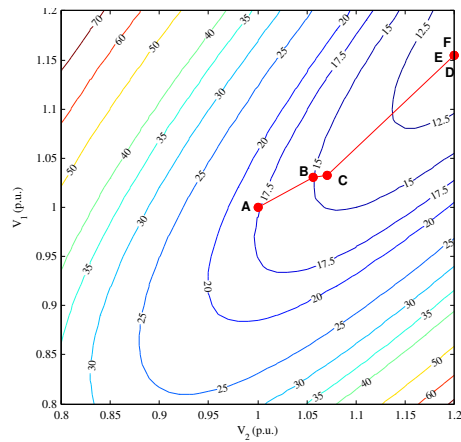
Figura 4.9: Gráficos referentes ao sistema de 3 barras - caso C3.

Observe na Tabela 4.9 que os valores obtidos da norma $\| \nabla \mathcal{L}_o \|$, f , f_{bm} , $folgas$ e $mismatches$ são similares comparando-se com os valores da Tabela 4.7 do caso C2.

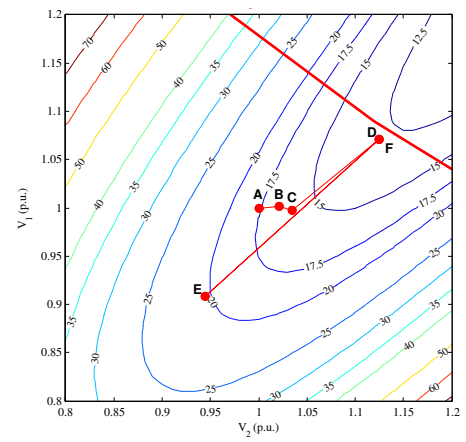
Tabela 4.9: Convergência do sistema de 3 barras - caso C3.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o \ $ | f | f_{bm} | $folgas$ | $\ \Delta P_{PV,PQ} \ $ | $\ \Delta Q_{PQ} \ $ | # it. in. |
|---------|------------------------------|----------|------------|-----------|--------------------------|-----------------------|-----------|
| 0 | 19998,000000 | 0,020001 | -11,447260 | 15,000000 | 1,559978 | 0,175154 | 0 |
| 1 | 0,464597 | 0,164597 | -1,747415 | 2,511392 | 0,000000 | 0,000000 | 8 |
| 2 | 0,458604 | 0,158613 | 0,120835 | 0,050327 | 0,000010 | 0,000001 | 2 |
| 3 | 76,814971 | 0,129160 | 0,206290 | 0,076736 | 0,000088 | 0,000002 | 10 |
| 4 | 0,846254 | 0,196800 | 0,178727 | 0,076768 | 0,031990 | 0,003373 | 8 |
| 5 | 0,429225 | 0,129228 | 0,129139 | 0,000322 | 0,000006 | 0,000000 | 10 |

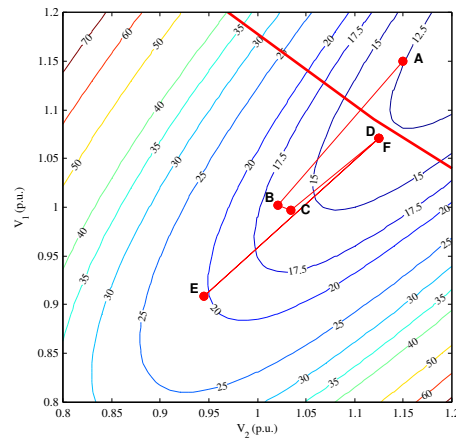
As trajetórias geradas pelo MBM para os casos C1, C2 e C3 são apresentadas na Figura 4.10 onde o ponto A designa o ponto inicial referente às magnitudes de tensão.



(a) Caso C1



(b) Caso C2



(c) Caso C3

Figura 4.10: Curvas de nível da função perda de potência ativa em MW e as trajetórias das tensões geradas pelo MBM para o sistema de 3 barras.

Na Tabela 4.10 é apresentado o valor final da função objetivo do FPRO obtida nos três testes em comparação ao valor das perdas de potência ativa do Fluxo de Potência:

Tabela 4.10: Valores das Perdas de Potência Ativa para o sistema de 3 barras.

| Casos | Perdas de Potência Ativa (p.u.) |
|-------|---------------------------------|
| FP | 0,176793 |
| C1 | 0,109731 |
| C2 | 0,129220 |
| C3 | 0,129228 |

Para os três casos houve a convergência do método e o valor das perdas de potência foram menores que a do caso base obtida pelo FP. Observe que a tensão de maior valor se dá no caso

C1 onde a tensão da barra PV atinge o máximo valor permitido que é de 1,2 p.u. Nos outros casos devido a restrição $0,8 \leq V_3 \leq 1$ imposta de limite superior para a barra PQ a tensão que atinge o máximo é a desta mesma barra fazendo com que as tensões das barras SL e PV não sejam tão altas que no caso C1. A função objetivo para o caso C1, a partir da primeira iteração externa, decresceu. Já para os casos C2 e C3 isso não ocorre. Observe que apesar das inicializações dos casos C2 e C3 serem diferentes, as trajetórias B-C-D-E-F são iguais.

Mesmo o FPRO sendo um problema não convexo nota-se que o valor das folgas complementares aproxima-se de zero. Para um problema não convexo nem sempre a solução do seu problema dual é igual a do problema primal, ou seja, pode ser que o valor folgas complementares não seja zero. Observe também que nos gráficos 4.5(c), 4.7(c) e 4.9(c) a função objetivo do FPROBM atinge o mesmo valor que a função objetivo do problema FPRO no ponto solução.

Os testes efetuados no sistema de 3 barras foram satisfatórios. As soluções geradas para os três casos analisados são viáveis, as tensões obtidas estão dentro dos limites estabelecidos, houve uma otimização em relação ao caso base das perdas de potências ativa e os números de iterações internas e externas necessárias para a convergência do método foram poucas. Foram necessárias menos de 6 iterações externas para cada um dos três casos e a média de iteração interna foi 7,25 iterações para o caso C1, 7,4 iterações para o caso C2 e 7,6 iterações para o caso C3.

4.3.2 Sistema IEEE 14 barras

O sistema de 14 barras faz parte dos 5 casos testes (14, 30, 57, 118 e 300 barras) disponíveis no sítio da Engenharia Elétrica da Universidade de Washington (University of Washington Electrical Engineering n.d.). Este sistema tem as seguintes características:

- 14 barras
 - 1 de referência (SL)
 - 4 de controle de tensão (PV)
 - 9 de carga (PQ)
- 27 linhas de transmissão

Essa rede possui 3 transformadores com *tap* variável que serão desconsiderados na formulação do problema. O diagrama unifilar que representa o sistema de 14 barras pode ser visto na Figura (4.11).

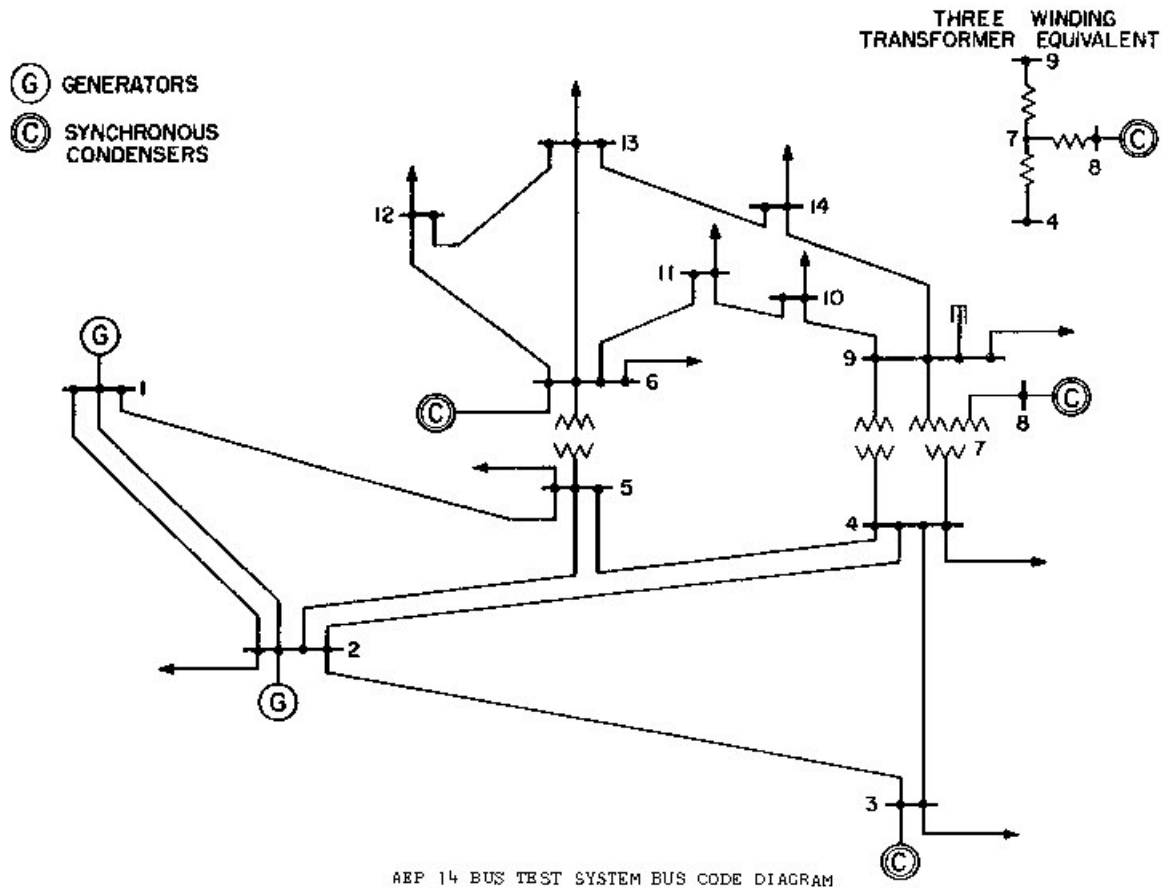


Figura 4.11: Sistema IEEE 14 barras.

Os testes realizados foram divididos nos seguintes casos:

Tabela 4.11: Características dos testes efetuados no IEEE 14 barras.

| Testes | V^{min} | V^{max} | V^0 |
|--------|-----------|-----------|-------|
| C1 | 0,95 | 1,09 | 1 |
| C2 | 0,95 | 1,05 | 1 |
| C3 | 1 | 1,05 | 1 |
| C4 | 0,97 | 1,02 | 1 |
| C4A | 0,97 | 1,02 | 0,9 |
| C4B | 0,97 | 1,02 | 1,05 |

Os valores apresentados na Tabela 4.11 estão em p.u. e refere-se a todas as barras.

No teste C1 é estipulado como limite máximo de magnitude de tensão o maior valor de tensão obtido no FP, as tensões iniciais são factíveis para todas as barras. No caso C2 os limites de tensões são definidos para que as tensões resultantes do MBM possam variar no máximo 5% abaixo e 5% acima do valor nominal de 1 p.u., as tensões iniciais para esse caso também são factíveis. No caso C3 o valor máximo da magnitude de tensão é mantido igual ao caso

C2 e aumenta-se o limite mínimo da tensão de 0,95 p.u para 1 p.u, as tensões iniciais são factíveis, porém, são iguais ao limite inferior estipulado para as tensões. Os casos C4, C4A e C4B possuem os mesmos limitantes inferior e superior de tensões mas diferem-se nas tensões iniciais. Para o caso C4 as tensões iniciais são factíveis e para os casos C4A e C4B são infactíveis, no entanto, para o caso C4A as tensões inicializam-se abaixo do limite inferior e para o caso C4B inicializam-se acima do limite superior de tensão estipulado.

Os valores especificados das potências ativa (P_G) e reativa (Q_G) geradas, as potências ativa (P_C) e reativa Q_G consumidas, o limite mínimo (Q_G^{min}) e máximo (Q_G^{max}) da potência reativa gerada nas barras SL e PV's podem ser vistas na Tabela 4.12. Todos esses valores estão por unidade (p.u.).

Tabela 4.12: Valores especificados em p.u. do IEEE 14 barras.

| Barra | Tipo | P_G | P_C | Q_G | Q_C | Q_G^{min} | Q_G^{max} |
|-------|------|-------|-------|--------|--------|-------------|-------------|
| 1 | SL | 2,324 | 0,000 | -0,169 | 0,000 | -5,00* | 1,00* |
| 2 | PV | 0,400 | 0,217 | 0,424 | 0,127 | -0,400 | 0,500 |
| 3 | PV | 0,000 | 0,942 | 0,234 | 0,190 | 0,000 | 0,400 |
| 4 | PQ | 0,000 | 0,478 | 0,000 | -0,039 | 0,000 | 0,000 |
| 5 | PQ | 0,000 | 0,076 | 0,000 | 0,016 | 0,000 | 0,000 |
| 6 | PV | 0,000 | 0,112 | 0,122 | 0,075 | -0,060 | 0,240 |
| 7 | PQ | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 8 | PV | 0,000 | 0,000 | 0,174 | 0,000 | 0,000 | 0,240 |
| 9 | PQ | 0,000 | 0,295 | 0,000 | 0,166 | 0,000 | 0,000 |
| 10 | PQ | 0,000 | 0,090 | 0,000 | 0,058 | 0,000 | 0,000 |
| 11 | PQ | 0,000 | 0,035 | 0,000 | 0,018 | 0,000 | 0,000 |
| 12 | PQ | 0,000 | 0,061 | 0,000 | 0,016 | 0,000 | 0,000 |
| 13 | PQ | 0,000 | 0,135 | 0,000 | 0,058 | 0,000 | 0,000 |
| 14 | PQ | 0,000 | 0,149 | 0,000 | 0,050 | 0,000 | 0,000 |

*No aquivo de dados o valor Q_G^{min} e Q_G^{max} não estavam especificados para a barra SL.

Os valores iniciais das variáveis primais, auxiliares, multiplicadores de Lagrange e duais estão na Tabela 4.13:

Tabela 4.13: Valores iniciais das variáveis.

| Barra | θ | sv | sq | λ^P | λ^Q | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|----------|------|------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| SL | - | 0,5 | 0,5 | - | 100 | 10 | 10 | 1 | 1 |
| PV | 0 | 0,5 | 0,5 | 100 | 100 | 10 | 10 | 1 | 1 |
| PQ | 0 | 0,5 | - | 100 | 100 | 10 | 10 | - | - |

As magnitudes de tensão obtidas através do FP podem ser vistas na Figura 4.12.

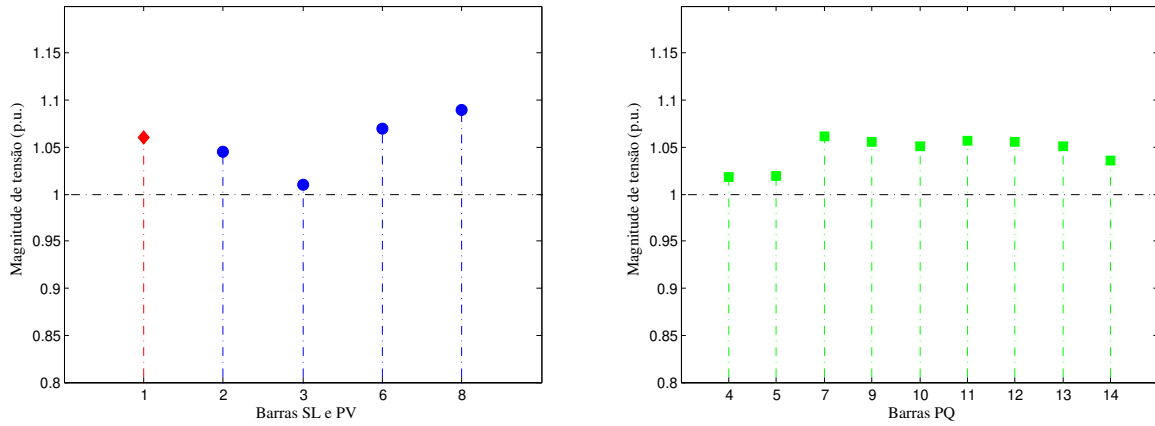


Figura 4.12: Solução do FP do IEEE 14 barras.

A perda de potência ativa para a solução base do FP é de 0,1339 p.u. A tensão máxima obtida pelo FP ocorreu na barra PV número 8 com tensão de 1,09 p.u. e a menor ocorreu na barra PV número 3 com o valor de 1,01 p.u.

O caso C1 é o teste onde o limite máximo de tensão é o maior estipulado e baseia-se na maior tensão obtida do FP. Na Figura 4.13 pode-se verificar que a maior tensão ocorre na barra 1 que é a slack, já no FP como pode ser visto na Figura 4.12 a maior tensão ocorre na barra 8 que é uma barra PV.

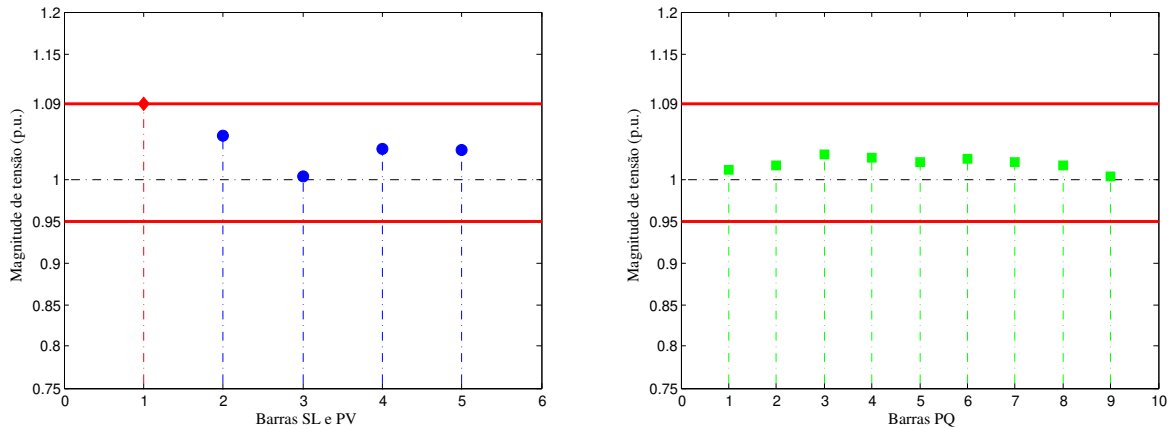


Figura 4.13: Magnitudes de tensão obtidas pelo MBM para o IEEE 14 - caso C1.

Na Tabela 4.14 pode-se confirmar as informações obtidas no gráfico 4.13, que mostra que o maior valor das tensões está na barra slack com o valor de 1,09 p.u. e a menor ocorre na barra PQ número 14 com valor de 1,0030 p.u.. Observe que todas as tensões obtidas estão acima do valor nominal.

Tabela 4.14: Solução Final IEEE 14 - caso C1.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0900 | 1,5720 | 1,0000 | 0,0000 | 0,3056 | 0,4054 | -0,0027 | 0,5394 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0523 | -0,0874 | 0,7306 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2319 | 0,0514 | 0,6943 | 0,0000 | 0,0002 |
| 3 | 2 | 1,0034 | 0,1585 | 0,3811 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1797 | 0,1360 | 0,4048 | 0,0000 | 0,0001 |
| 6 | 2 | 1,0359 | -0,1746 | 0,6134 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0087 | 0,0281 | 0,1704 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0345 | -0,1254 | 0,6033 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0288 | 0,0230 | 0,2940 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0 | 1,0109 | 0,2092 | 0,4350 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 1,0164 | 0,1797 | 0,4744 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 1,0296 | -0,0341 | 0,5683 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0256 | -0,0082 | 0,5403 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 1,0198 | 0,0288 | 0,4986 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 11 | 0 | 1,0242 | -0,0335 | 0,5298 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 12 | 0 | 1,0209 | -0,0290 | 0,5062 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 13 | 0 | 1,0162 | 0,0139 | 0,4729 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 1,0030 | 0,1714 | 0,3783 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Devido as tensões serem acima do valor nominal e o valor de tensão na barra slack ter um valor maior que a do FP, a perda de potência ativa é menor em comparação com a perda do FP. Além da função objetivo no caso C1 ser otimizada pode-se ver na Tabela 4.15 que as cargas são atendidas. Apesar das condições de estacionariedade do FPRO dada por $\|\nabla\mathcal{L}_o\|$ e as folgas complementares não serem atendidas o MBM convergiu.

Tabela 4.15: Convergência para o IEEE 14 barras - caso C1.

| It. ex. | $\ \nabla\mathcal{L}_o\ $ | f | f_{bm} | $folgas$ | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|---------------------------|----------|------------|-----------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 1949,807021 | 0,000000 | -55,048282 | 70,000000 | 0,942000 | 0,284729 | 0 |
| 1 | 0,690482 | 0,143945 | -12,629855 | 21,578554 | 0,000002 | 0,000000 | 8 |
| 2 | 0,666253 | 0,137714 | -3,105859 | 21,578554 | 0,000001 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 1515,286416 | 0,143634 | 1,162261 | 21,578554 | 0,004729 | 0,000200 | 5 |
| 4 | 142,135998 | 0,133809 | 0,463544 | 21,578554 | 0,002302 | 0,000520 | 4 |
| 5 | 1,145153 | 0,132825 | -0,006216 | 21,578554 | 0,002595 | 0,000567 | 4 |
| 6 | 0,969130 | 0,132962 | 0,132863 | 21,578554 | 0,003662 | 0,000552 | 4 |

No caso C2 a tensão maior obtida também é na barra slack com o valor de 1,0499 p.u, quase atingido o máximo do limite superior de tensão.

Na Figura 4.14, note que apesar de haver uma queda nos valores de tensões o comportamento delas é similar ao do caso C1.

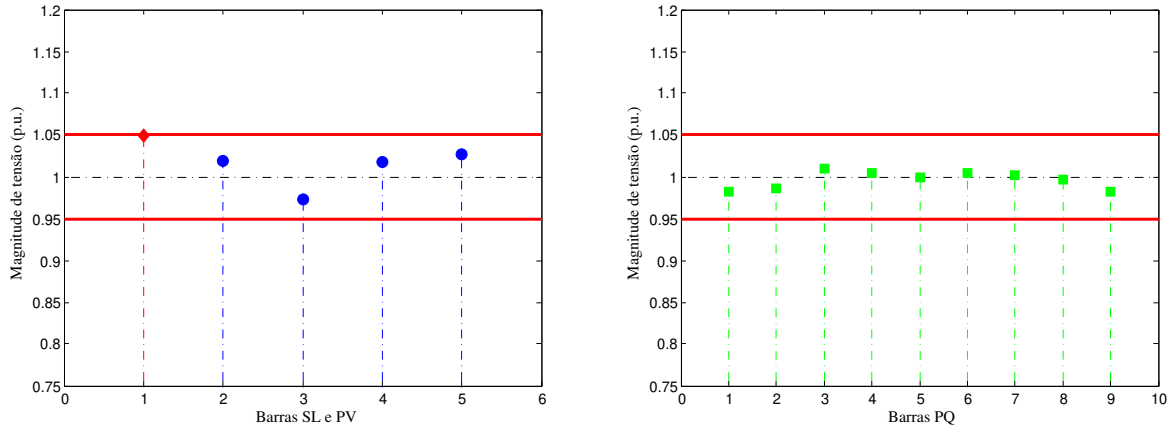


Figura 4.14: Magnitudes de tensão obtidas pelo MBM para o IEEE 14 - caso C2.

Na Tabela 4.16 pode-se ver que existem tensões abaixo do valor nominal mas todas elas estão acima de 0,95 p.u e abaixo de 1,05 p.u.

Tabela 4.16: Solução Final IEEE 14 - caso C2.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0499 | -0,0001 | 0,9994 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2045 | 0,0000 | 0,5204 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0195 | 0,0000 | 0,6947 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3238 | -0,0001 | 0,8042 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 2 | 0,9734 | 0,0000 | 0,2337 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2023 | 0,0000 | 0,5056 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 2 | 1,0178 | 0,0000 | 0,6781 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0623 | 0,0000 | 0,4078 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0265 | 0,0000 | 0,7649 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0953 | 0,0000 | 0,5176 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0 | 0,9821 | 0,0000 | 0,3208 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 0,9866 | 0,0000 | 0,3662 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 1,0101 | 0,0000 | 0,6014 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0044 | 0,0000 | 0,5443 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 0,9990 | 0,0000 | 0,4898 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 11 | 0 | 1,0046 | 0,0000 | 0,5464 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 12 | 0 | 1,0023 | 0,0000 | 0,5230 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 13 | 0 | 0,9973 | 0,0000 | 0,4734 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 0,9824 | 0,0000 | 0,3237 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Observe na Tabela 4.17 que houve uma queda nos valores de tensão em relação ao caso C1, isso afetou na perda de potência ativa do sistema dado por f . Na Tabela 4.17 pode-se ver que o valor da perda de potência ativa no sistema aumentou em relação aos valores dos casos base e C1.

Tabela 4.17: Convergência para o IEEE 14 barras - caso C2.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | f | f_{bm} | f_{olgas} | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------|------------|-------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 1949,807021 | 0,000000 | -55,048282 | 70,000000 | 0,942000 | 0,284729 | 0 |
| 1 | 0,841581 | 0,153036 | -12,556935 | 21,578554 | 0,000000 | 0,000000 | 12 |
| 2 | 0,887150 | 0,144098 | -2,926350 | 21,578554 | 0,000005 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 102,706707 | 0,143247 | -0,286770 | 21,578554 | 0,002082 | 0,000089 | 4 |
| 4 | 1,236967 | 0,145758 | 0,056823 | 21,578554 | 0,000863 | 0,000083 | 4 |
| 5 | 5,031447 | 0,147702 | 0,151878 | 21,578554 | 0,001877 | 0,000086 | 5 |
| 6 | 0,348446 | 0,149736 | 0,149256 | 21,578554 | 0,008149 | 0,000370 | 5 |
| 7 | 0,264304 | 0,141200 | 0,141200 | 21,578554 | 0,000010 | 0,000002 | 8 |

O caso C3 o limite superior de tensão é o mesmo que no caso C2, mas o limite inferior é diferente, no caso C2 era 0,95 p.u. e neste caso é 1 p.u. Observe na Figura 4.15 que há um aumento das tensões comparando com o caso C2.

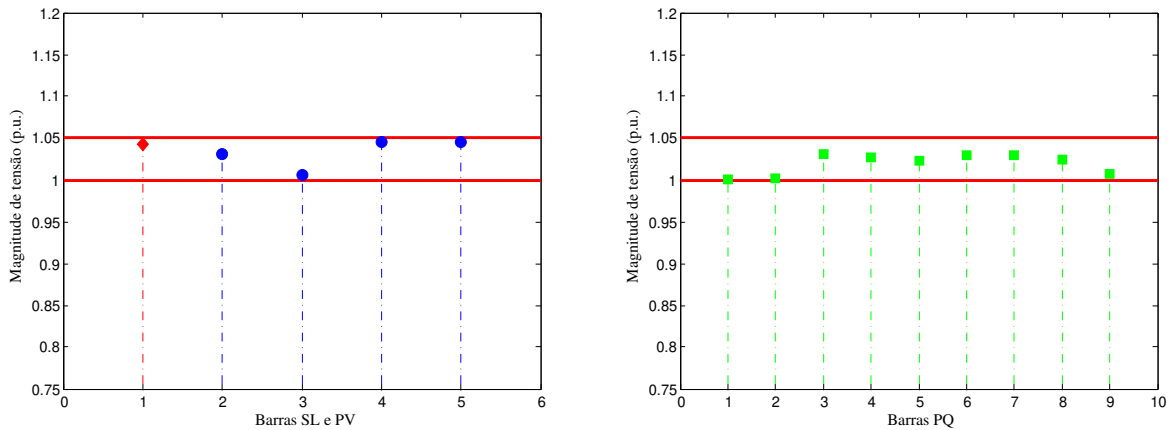


Figura 4.15: Magnitudes de tensão obtidas pelo MBM para o IEEE 14 - caso C3.

Na Tabela 4.18 as tensões nas barras 3, 4, 5, 10, 13 e 14 são maiores que o valor nominal, diferente do caso 2 onde nessas barras as tensões foram abaixo de 1 p.u. como ser conferido na

Tabela 4.16.

Tabela 4.18: Solução Final IEEE 14 - caso C3.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0423 | -0,4237 | 0,8463 | 0,0000 | 0,0000 | -0,2311 | 0,0000 | 0,4768 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0310 | 0,0000 | 0,6205 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5000 | -0,0035 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 2 | 1,0061 | 0,3004 | 0,1218 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3866 | -0,0081 | 0,9658 | 0,0000 | 0,0001 |
| 6 | 2 | 1,0450 | 0,0000 | 0,9007 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1187 | 0,0000 | 0,5958 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0458 | 0,0000 | 0,9152 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0881 | 0,0000 | 0,4937 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0 | 1,0002 | 0,0008 | 0,0039 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 1,0016 | 0,0000 | 0,0325 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 1,0309 | 0,0000 | 0,6184 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0272 | 0,0000 | 0,5446 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 1,0227 | 0,0000 | 0,4548 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 11 | 0 | 1,0302 | 0,0000 | 0,6036 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 12 | 0 | 1,0296 | 0,0000 | 0,5918 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 13 | 0 | 1,0244 | 0,0000 | 0,4883 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 1,0075 | 0,0000 | 0,1503 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Todas as tensões do caso C3 estão acima do valor nominal, isso impacta no valor da função objetivo que diminui em relação ao caso C2. Observe na Tabela 4.19 que o atendimento de carga relacionada a potência ativa é mais preciso para o caso C2, mas ambas atendem a tolerância estipulada pelo método.

Tabela 4.19: Convergência para o IEEE 14 barras - caso C3.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | f | f_{bm} | f_{olgas} | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------|------------|-------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 1949,807021 | 0,000000 | -55,048282 | 70,000000 | 0,942000 | 0,284729 | 0 |
| 1 | 2,730076 | 0,147964 | -12,491266 | 21,578554 | 0,000000 | 0,000000 | 11 |
| 2 | 1,439565 | 0,143459 | -2,021392 | 21,578554 | 0,000001 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 147,146065 | 0,138672 | 0,875575 | 21,578554 | 0,000546 | 0,000026 | 4 |
| 4 | 40,479193 | 0,137806 | -0,092034 | 21,578554 | 0,000519 | 0,000084 | 3 |
| 5 | 10,696230 | 0,137806 | 0,108421 | 21,578554 | 0,000519 | 0,000084 | 1 |
| 6 | 0,411941 | 0,140136 | 0,132828 | 21,578554 | 0,000185 | 0,000008 | 5 |
| 7 | 0,290082 | 0,140095 | 0,140086 | 21,578554 | 0,000185 | 0,000008 | 3 |

No caso C4 é estabelecido o menor intervalo para que as tensões variem, os limites inferior e superior estão em 0,97 p.u. e 1,02 p.u. As tensões obtidas para esse caso estão na Figura 4.16.

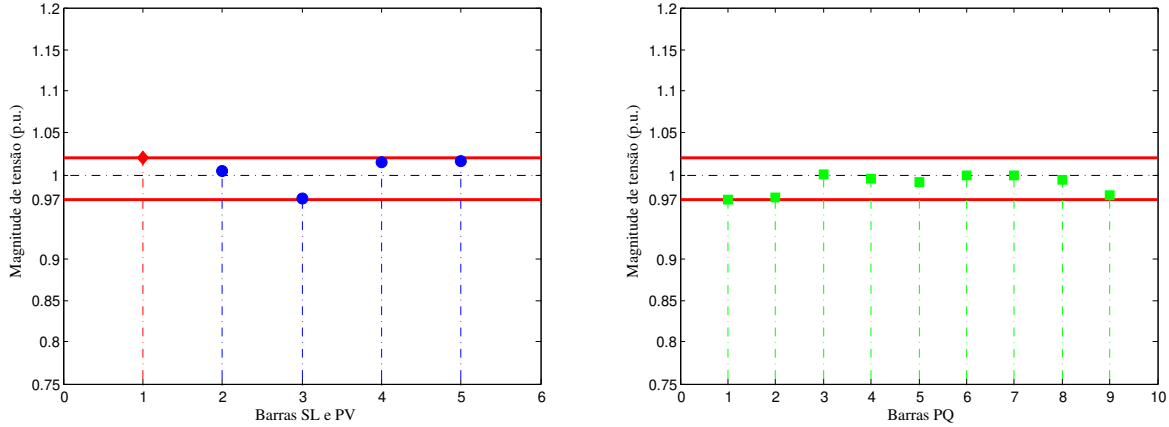


Figura 4.16: Magnitudes de tensão obtidas pelo MBM para o IEEE 14 - caso C4.

Observe que o limite máximo de tensão é o menor comparando com os casos anteriores. Nota-se na Tabela 4.20 que mais da metade das barras do sistema possuem valores menores que 1 p.u.

Tabela 4.20: Solução Final IEEE 14 - caso C4.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|----------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0200 | -14,7335 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0300 | -0,1351 | 0,0014 | 0,4864 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0045 | -18,4605 | 0,6903 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4986 | -0,2906 | 0,9982 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 2 | 0,9717 | -4,9833 | 0,0334 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3267 | -0,8468 | 0,8096 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 2 | 1,0156 | -29,2792 | 0,9126 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1327 | -0,0528 | 0,6421 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0166 | -10,5695 | 0,9315 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0931 | 0,1427 | 0,5099 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0 | 0,9707 | 20,3439 | 0,0149 | 0,0001 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 0,9733 | 22,8196 | 0,0668 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 1,0004 | -2,7918 | 0,6089 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 0,9959 | -0,5606 | 0,5176 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 0,9915 | 2,1438 | 0,4298 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 11 | 0 | 0,9997 | -2,1780 | 0,5946 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 12 | 0 | 0,9996 | -1,7088 | 0,5920 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 13 | 0 | 0,9942 | 1,3100 | 0,4833 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 0,9760 | 33,2301 | 0,1206 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

As tensões obtidas no caso C4 são as menores em comparação com os casos anteriores, devido a isso o valor de perda de potência ativa também é a maior de todos os casos pode ser visto na Tabela 4.21.

Tabela 4.21: Convergência para o IEEE 14 barras - caso C4.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o \ $ | f | f_{bm} | $folgas$ | $\ \Delta P_{PV,PQ} \ $ | $\ \Delta Q_{PQ} \ $ | # it. in. |
|---------|------------------------------|----------|------------|-----------|--------------------------|-----------------------|-----------|
| 0 | 1949,807021 | 0,000000 | -55,048282 | 70,000000 | 0,942000 | 0,284729 | 0 |
| 1 | 3,235360 | 0,157642 | -12,444635 | 21,578554 | 0,000009 | 0,000002 | 10 |
| 2 | 1,814282 | 0,153090 | -1,895807 | 21,578554 | 0,000001 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 157,860959 | 0,148116 | -0,715448 | 21,578554 | 0,000517 | 0,000023 | 4 |
| 4 | 62,416870 | 0,147040 | 0,090524 | 21,578554 | 0,000516 | 0,000092 | 3 |
| 5 | 21,008432 | 0,147044 | 0,104912 | 21,578554 | 0,000515 | 0,000092 | 2 |
| 6 | 152,379823 | 0,147045 | 0,287073 | 21,578554 | 0,000515 | 0,000092 | 1 |
| 7 | 14,190216 | 0,147199 | 0,008269 | 21,578554 | 0,000464 | 0,000083 | 3 |
| 8 | 1,789282 | 0,147199 | 0,145699 | 21,578554 | 0,000464 | 0,000083 | 1 |
| 9 | 1,661504 | 0,147044 | 0,147043 | 21,578554 | 0,000432 | 0,000077 | 3 |

Para os casos C4A e C4B que possuem os limites inferior e superior de tensão iguais ao caso C4, é apresentado apenas as tabelas com os valores das variáveis geradas pelo MBM. Nos três casos a maior tensão obtida atinge o limite máximo de tensão que é de 1,02 p.u. e é dada pela barra número 1 que é a slack e as menores tensões ocorrem numa barra PV número 3 e numa barra PQ número 4 com o valor de 0,9702 p.u.

No caso C4A as tensões iniciais têm o valor de 0,9 p.u. portanto abaixo do limite inferior de tensão que é de 0,97 p.u. Os resultados e análise de convergência estão, respectivamente, nas tabelas 4.22 e 4.23.

Tabela 4.22: Solução Final IEEE 14 - caso C4A.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|----------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0200 | -14,8317 | 1,0000 | 0,0000 | 0,1630 | -0,1363 | 0,0014 | 0,4863 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0046 | -18,5885 | 0,6918 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5012 | -0,2925 | 1,0010 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 2 | 0,9716 | -5,0159 | 0,0326 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3259 | -0,8530 | 0,8075 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|--------|----------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|
| 6 | 2 | 1,0156 | -29,4747 | 0,9121 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1326 | -0,0531 | 0,6417 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0165 | -10,6366 | 0,9294 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0927 | 0,1437 | 0,5088 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0 | 0,9707 | 20,4865 | 0,0149 | 0,0002 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 0,9734 | 22,9786 | 0,0670 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 1,0004 | -2,8141 | 0,6080 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 0,9958 | -0,5662 | 0,5169 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 0,9915 | 2,1575 | 0,4292 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 11 | 0 | 0,9997 | -2,1934 | 0,5940 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 12 | 0 | 0,9996 | -1,7198 | 0,5915 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 13 | 0 | 0,9941 | 1,3202 | 0,4828 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 0,9760 | 33,4491 | 0,1200 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Tabela 4.23: Convergência para o IEEE 14 barras - caso C4A.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | f | f_{bm} | f_{olgas} | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------|------------|-------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 1579,343687 | 0,000000 | -55,048282 | 70,000000 | 0,942000 | 0,233671 | 0 |
| 1 | 3,239055 | 0,157622 | -12,446389 | 21,578554 | 0,000002 | 0,000000 | 11 |
| 2 | 1,812336 | 0,153104 | -1,893803 | 21,578554 | 0,000001 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 157,247871 | 0,148120 | -0,714131 | 21,578554 | 0,000519 | 0,000023 | 4 |
| 4 | 62,270516 | 0,147043 | 0,090980 | 21,578554 | 0,000519 | 0,000092 | 3 |
| 5 | 21,239589 | 0,147047 | 0,105277 | 21,578554 | 0,000517 | 0,000092 | 2 |
| 6 | 197,201300 | 0,147047 | 0,332046 | 21,578554 | 0,000517 | 0,000092 | 1 |
| 7 | 20,334112 | 0,147189 | -0,029522 | 21,578554 | 0,000471 | 0,000084 | 3 |
| 8 | 1,804671 | 0,147189 | 0,145096 | 21,578554 | 0,000471 | 0,000084 | 1 |
| 9 | 1,672454 | 0,147048 | 0,147047 | 21,578554 | 0,000436 | 0,000078 | 9 |

Para o caso C4B a inicialização das tensões deram-se na infactibilidade acima do limite superior que é de 1,02 p.u, o valor estipulado para a tensão inicial foi de 1,05 p.u. para todas as barras. Na Tabela 4.24 é apresentado os resultados obtidos para este caso e na Tabela 4.25 a análise de convergência.

Tabela 4.24: Solução Final IEEE 14 - caso C4B.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|----------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0200 | -14,8144 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0349 | -0,1355 | 0,0014 | 0,4863 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0045 | -18,5683 | 0,6909 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4998 | -0,2922 | 0,9995 | 0,0000 | -0,0000 |
| 3 | 2 | 0,9716 | -5,0108 | 0,0325 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3261 | -0,8519 | 0,8082 | 0,0000 | -0,0000 |
| 6 | 2 | 1,0156 | -29,4450 | 0,9121 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1326 | -0,0530 | 0,6418 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0165 | -10,6277 | 0,9304 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0929 | 0,1435 | 0,5095 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0 | 0,9707 | 20,4606 | 0,0146 | 0,0001 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 0,9733 | 22,9511 | 0,0667 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 1,0004 | -2,8092 | 0,6082 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 0,9958 | -0,5645 | 0,5170 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 0,9915 | 2,1558 | 0,4292 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 11 | 0 | 0,9997 | -2,1906 | 0,5940 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 12 | 0 | 0,9996 | -1,7182 | 0,5915 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 13 | 0 | 0,9941 | 1,3183 | 0,4827 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 0,9760 | 33,4164 | 0,1201 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Tabela 4.25: Convergência para o IEEE 14 barras - caso C4B.

| It. ex. | $\ \nabla\mathcal{L}_o\ $ | f | f_{bm} | folgas | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|---------------------------|----------|------------|-----------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 2149,662240 | 0,000000 | -55,048282 | 70,000000 | 0,942000 | 0,312274 | 0 |
| 1 | 3,243313 | 0,157628 | -12,445679 | 21,578554 | 0,000000 | 0,000000 | 11 |
| 2 | 1,812927 | 0,153101 | -1,894383 | 21,578554 | 0,000001 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 157,317331 | 0,148118 | -0,715345 | 21,578554 | 0,000519 | 0,000023 | 4 |
| 4 | 62,234477 | 0,147042 | 0,091071 | 21,578554 | 0,000519 | 0,000092 | 3 |
| 5 | 21,115105 | 0,147046 | 0,105179 | 21,578554 | 0,000518 | 0,000092 | 2 |
| 6 | 177,695734 | 0,147046 | 0,312497 | 21,578554 | 0,000518 | 0,000092 | 1 |
| 7 | 17,709243 | 0,147192 | -0,013057 | 21,578554 | 0,000470 | 0,000084 | 3 |
| 8 | 1,799762 | 0,147192 | 0,145352 | 21,578554 | 0,000470 | 0,000084 | 1 |
| 9 | 1,670818 | 0,147046 | 0,147044 | 21,578554 | 0,000437 | 0,000078 | 3 |

Os resultados gerados nos casos C4, C4A e C4B são bem parecidos apesar das diferenças na quantidade de iterações interna em cada ciclo externo.

Na Tabela 4.26 é apresentado o valor da perda de potência ativa para os casos: base, C1, C2, C3, C4, C4A e C4B.

Tabela 4.26: Valores das Perdas de Potência Ativa para o IEEE 14.

| Casos | Perdas de Potência Ativa (p.u.) |
|-------|---------------------------------|
| FP | 0,133933 |
| C1 | 0,132962 |
| C2 | 0,141200 |
| C3 | 0,140095 |
| C3 | 0,147044 |
| C3 | 0,147048 |
| C3 | 0,147046 |

Intuitivamente, sabe-se que no caso C1 o valor da função objetivo é o menor comparando com os outros casos, pois o limite superior estabelecido foi o maior. Já o caso C3 tem o mesmo limite superior que o caso C2, mas houve um aumento do seu limite inferior que era de 0,95 p.u. para o caso C2 para 1 p.u., assim obrigou uma elevação nas tensões que ficaram abaixo de 1 p.u. no caso C2 ocasionando uma queda na perda de potência ativa em relação ao caso C2. Para os casos C4, C4A e C4B foram estipulados o menor valor para o limite superior de tensão e o limite inferior permaneceu abaixo de 1 p.u., isso ocasionou uma queda de tensão na maioria das barras do sistema ficando abaixo do valor nominal e resultando no maior valor da função objetivo entre todos os casos.

Na Figura 4.17 é apresentado os gráficos da função objetivo do FPRO ($f(\theta, V)$) e da função objetivo do FPROBM ($f(\theta, V) + \mathcal{B}(\mu_{sq}, \mu_{sv})$), observe que para todos os casos os valores dessas funções são os mesmos na solução, comprovando que o MBM convergiu para todos eles.

Para todos os casos testados o MBM convergiu. Observe que todas as variáveis canalizadas V_k , Q_{Gk} , sq_k e sv_k então dentro dos limitantes estipulados. No caso C1 o valor de perdas de potência ativa foi de 0,1327 p.u menor que a do caso base que foi de 0,1339 p.u. Nota-se que para o intervalo de magnitude de tensão ($0,95 \leq V_k \leq 1,09$) que tem como limite superior a máxima tensão obtida do FP foi otimizada e permaneceu na factibilidade. Os outros casos tiveram como limitante superior para a tensão os valores de 1,05 p.u. para os casos C2 e C3 e 1,02 p.u. para os casos C4, C4A e C4B e não obtiveram valores menores de perdas de potência ativa como no caso C1. Os resíduos de potência ativa e reativa para todos os casos estão próximos de zero e o número de iterações internas e externas foram satisfatórias.

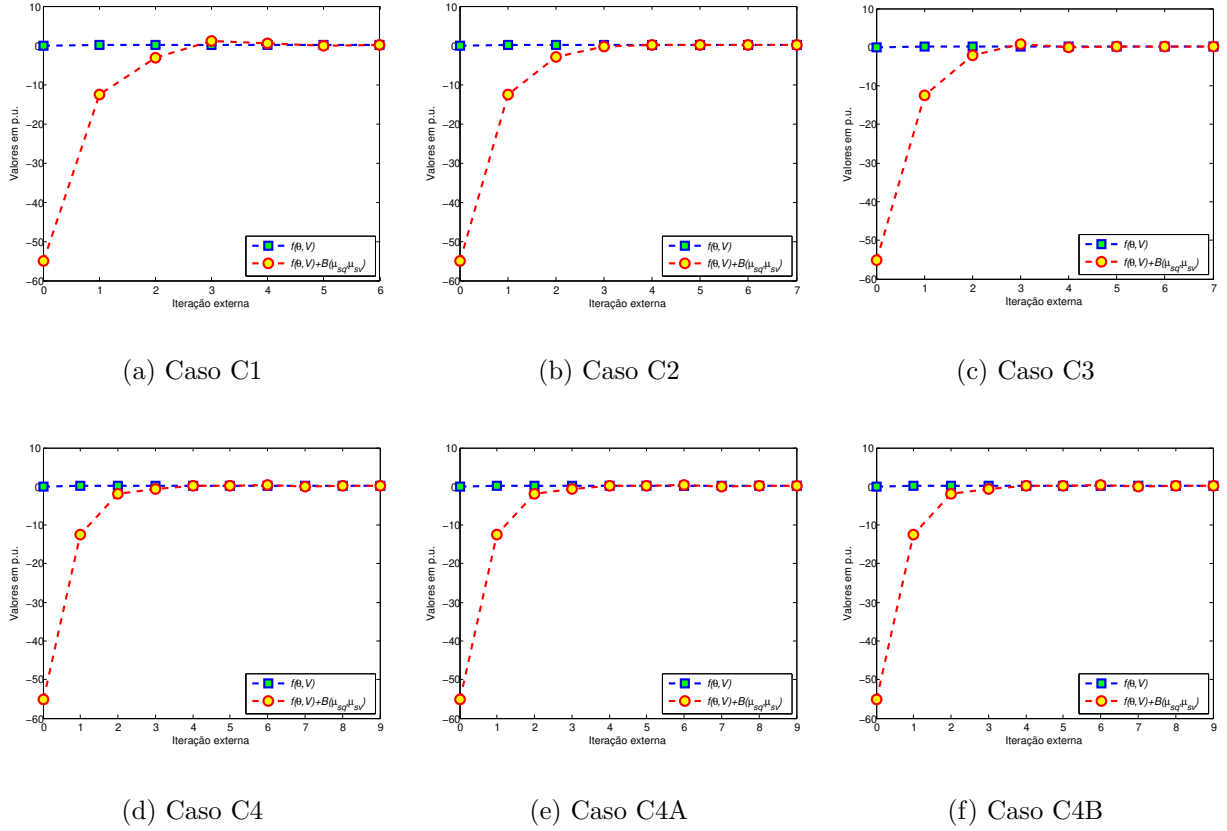


Figura 4.17: Valores das funções objetivo do FPRO e FPROBM ao longo das iterações externas.

4.3.3 Comentários Finais

Foram utilizados dois exemplos de rede elétrica de pequeno porte para facilitar a compreensão da funcionalidade do MBM. Com o sistema de 3 barras pode-se mostrar as transformações do modelo de FPRO para que o método fosse aplicado e a trajetória dos pontos gerados pelo MBM para três casos analisados. Para todos os casos analisados e testados, sejam para o sistema de 3 barras e de 14 barras, o MBM convergiu inicializando com magnitudes de tensão factíveis e infactíveis. Para ambos os exemplos, de 3 e 14 barras, os resultados gerados pelo algoritmo foram precisos e satisfatórios no quesito de factibilidade e esforço computacional medido pela quantidade de iterações internas e externas.

Testes e Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados dos testes para os três sistemas elétricos:

- IEEE 30 barras,
- IEEE 57 barras,
- IEEE 118 barras.

Os dados destas redes elétricas estão no sítio da Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade de Washington (University of Washington Eletrical Engineering n.d.).

A solução ideal para o FPRO são os valores de magnitude de tensão bem próximas ao valor nominal (1 p.u), mas há muitos fatores que fazem que estas tensões sejam diferentes do nominal. Por isso, ao resolver o FPRO é dado um intervalo que esteja próximo do valor 1 p.u., e que caso convirja esse intervalo é reduzido, o ciclo de testes acaba quando encontra-se um limite que o MBM não convirja.

Cada sistema é analisado individualmente e os testes realizados divididos em casos que se caracterizam principalmente pelos valores dos limites inferior V^{min} e superior V^{max} das magnitudes de tensão estipulados para as barras. Os limites inferior e superior de todas as barras nos testes serão iguais. Testes para analisar o comportamento do MBM para inicializações de tensões V_0 diferentes são também realizados neste trabalho.

Os três sistemas são modelados conforme o FPRO (4.17) apresentado na subseção 4.1.4. É esse PNL que determina a convergência global do ciclo externo do MBM, mas pelo fato do problema de FPRO não ser convexo as informações deste modelo são para análise do comportamento do mesmo. A convergência do ciclo interno determinada pelas condições de KKT do problema de FPROBM, modelado conforme o PNL (4.23) da subseção 4.2.2, segue os critérios descritos na subseção 4.2.3.

A análise de convergência é feita através das seguintes informações:

- diferenças das funções objetivo do FPRO ($f(\theta, V)$) e do FPROBM $f_{bm}(V, \theta, \underline{\mu}, \bar{\mu})$,
- estacionariedade do FPRO dado pela norma do gradiente da lagrangiana associado ao problema FPRO $\|\nabla \mathcal{L}_o\|$,
- folgas complementares fc ,
- atendimento de carga dados pelas normas $\|\Delta P_{PV,PQ}\|$ e $\|\Delta Q_{PQ}\|$.

No critério de parada há um valor máximo de iterações interna e externa:

- Número máximo de iterações interna: 100
- Número máximo de iterações externa: 30

As tolerâncias estipuladas no critério de convergência são:

- Tolerância do ciclo interno: 10^{-6}
- Tolerância do ciclo externo: 10^{-5} .

Os valores de parâmetros utilizados nos testes são:

- fator que diminui a região relaxada: 10,
- fator multiplicador para o controle de passo: 0,95,
- parâmetro de penalidade inicial relacionado às magnitudes de tensão c_{sv}^0 : 10,
- parâmetro de penalidade inicial relacionado às gerações de reativo c_{sq}^0 : 10.

Os valores de inicialização das variáveis primais, multiplicadores de Lagrange e variáveis duais estão na tabela 5.1

Tabela 5.1: Valores iniciais das variáveis.

| Barra | θ | sv | sq | λ^P | λ^Q | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|----------|------|------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| SL | – | 0,5 | 0,5 | – | 100 | 10 | 10 | 1 | 1 |
| PV | 0 | 0,5 | 0,5 | 100 | 100 | 10 | 10 | 1 | 1 |
| PQ | 0 | 0,5 | – | 100 | 100 | 10 | 10 | – | – |

Para todos os sistemas testados os valores dos *taps* dos transformadores são considerados considerados iguais a 1.

Todos os valores apresentados estão por unidade (p.u.).

O MBM foi implementado em MATLAB[®] 7.0.1 em um computador Intel[®] Core[™] 2 Duo E4500 com velocidade de 2,20 GHz e 1,97 GB de memória RAM, Windows XP, seguindo o algoritmo apresentado no fluxograma 4.1 na seção 4.2.3.

5.1 Sistema IEEE 30 barras

Nesta seção é analisado o comportamento dos testes realizados no IEEE 30 barras. Esse sistema é estrutura da seguinte maneira:

- 30 barras
 - 1 de referência (SL)
 - 5 de controle de tensão (PV)
 - 24 de carga (PQ)
- 37 linhas de transmissão

O diagrama deste sistema está representado na Figura 5.1:

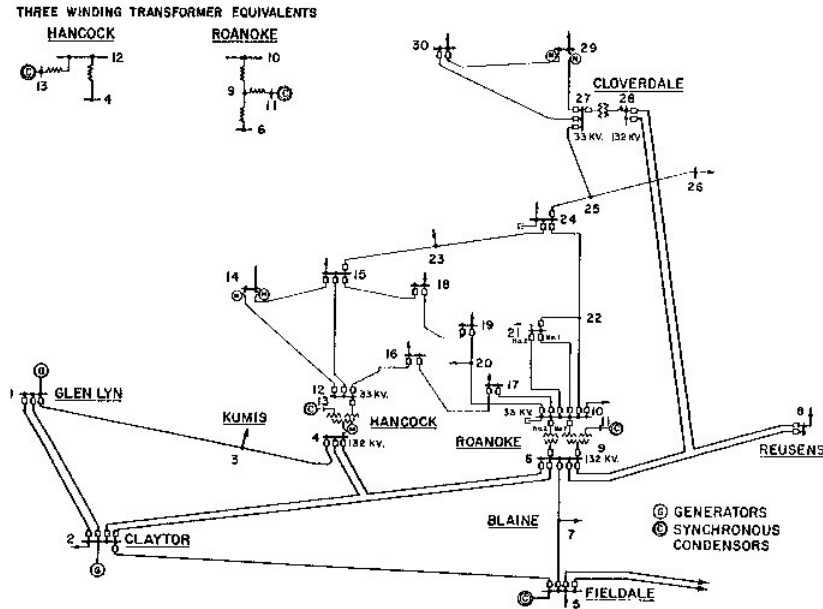


Figura 5.1: Sistema IEEE 30 barras.

A tabela com os valores especificados das potências ativa e reativa gerada e de carga (P_G, P_C, Q_G e Q_C) e os limites máximo e mínimo da potência reativa gerada (Q_G^{min} e Q_G^{max}) está no Apêndice B.

A solução obtida do FP para IEEE 30 barras está representada na Figura 5.2:

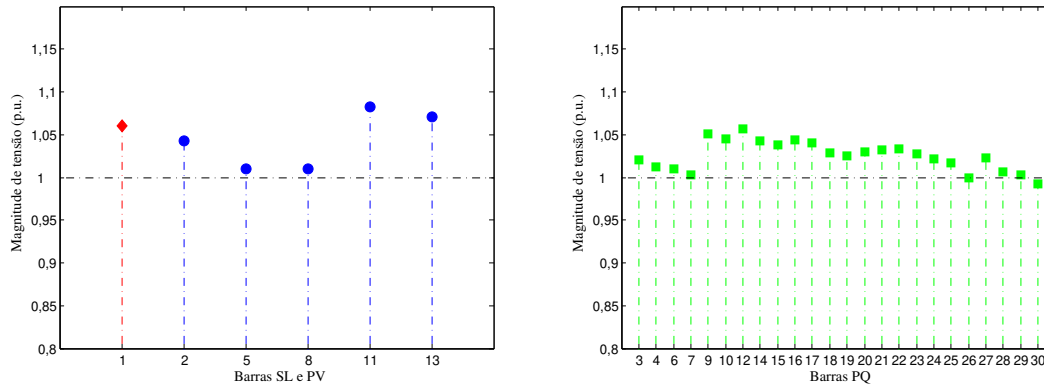


Figura 5.2: Solução do FP do IEEE 30 barras.

A maior tensão obtida no FP é 1,082 p.u. e ocorre na barra PV número 11 e a menor tensão é de 0,9919 p.u. e é referente à barra PQ número 30.

Os teste realizados para o sistema IEEE 30 barras diferenciam-se em:

Tabela 5.2: Características dos testes efetuados no IEEE 30.

| Testes | V^{min} | V^{max} | $V_{SL,PV}^0$ | V_{PQ}^0 |
|--------|-----------|-----------|---------------|------------|
| C1 | 0,95 | 1,05 | 1 | 1 |
| C1A | 0,95 | 1,05 | 0,9 | 1,1 |
| C1B | 0,95 | 1,05 | 1,1 | 0,9 |
| C2 | 0,96 | 1,05 | 1 | 1 |
| C3 | 0,97 | 1,05 | 1 | 1 |
| C4 | 0,98 | 1,05 | 1 | 1 |

Os casos C1, C1A e C1B têm os mesmos limites inferior e superior de magnitude de tensão para todas as barras, mas inicializam-se em pontos diferentes de tensões. Na maioria dos casos a inicialização é em 1 p.u. que está dentro da faixa estipulada de tensão. Os casos C1A e C1B iniciam fora dos limites estipulados. Como o caso C1 converge, os outros casos foram testados para valores de limite de tensão mínima com décimo de p.u. a mais que a do teste anterior até encontrar um caso que não convirja que é o C4.

Analisando os resultados obtidos nos casos C1, C1A e C1B note nas tabelas 5.3, 5.4 e 5.5 que as variáveis auxiliares sv e sq estão dentro dos limites estipulados de tensão. Com valores das variáveis auxiliares de outras variáveis relacionadas com essas como é o caso da magnitude de tensão V e geração de reativo Q_G veja que sv_1 , ou seja, a tensão nesta barra atingiu o limite máximo que é 1,05 p.u de tensão.

Tabela 5.3: Solução Final IEEE 30 - caso C1.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0500 | -0,8251 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0139 | 0,1891 | -0,0000 | 0,5943 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0186 | -0,0150 | 0,6860 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4378 | -0,0279 | 0,9308 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 2 | 0,9644 | 0,0130 | 0,1438 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2250 | -0,0573 | 0,7812 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 0,9719 | 0,0161 | 0,2187 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2876 | -0,0696 | 0,7751 | 0,0000 | 0,0000 |
| 11 | 2 | 1,0444 | -0,4421 | 0,9437 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1537 | -0,0015 | 0,7123 | 0,0000 | 0,0000 |
| 13 | 2 | 1,0396 | -0,5786 | 0,8958 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1216 | -0,0009 | 0,6052 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 0 | 1,0232 | -0,0215 | 0,7321 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0138 | -0,0080 | 0,6375 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 16 | 0 | 1,0087 | -0,0050 | 0,5868 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 1,0076 | -0,0045 | 0,5757 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 1,0074 | -0,0042 | 0,5738 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 30 | 0 | 0,9524 | 0,4460 | 0,0239 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 26 | 0 | 0,9605 | 0,0817 | 0,1051 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 0,9627 | 0,0299 | 0,1266 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 29 | 0 | 0,9644 | 0,0440 | 0,1435 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 28 | 0 | 0,9709 | 0,0196 | 0,2087 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Tabela 5.4: Solução Final IEEE 30 - caso C1A.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0500 | -0,1107 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,1864 | -0,0000 | 0,5930 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0187 | -0,0012 | 0,6870 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4325 | -0,0021 | 0,9251 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 2 | 0,9657 | 0,0011 | 0,1566 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2354 | -0,0044 | 0,7943 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 0,9721 | 0,0012 | 0,2211 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2872 | -0,0053 | 0,7744 | 0,0000 | 0,0000 |
| 11 | 2 | 1,0440 | -0,0309 | 0,9401 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1519 | -0,0001 | 0,7063 | 0,0000 | 0,0000 |
| 13 | 2 | 1,0394 | -0,0402 | 0,8943 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1205 | -0,0001 | 0,6017 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 0 | 1,0232 | -0,0017 | 0,7320 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0137 | -0,0006 | 0,6375 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 16 | 0 | 1,0087 | -0,0004 | 0,5869 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 1,0076 | -0,0004 | 0,5761 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 1,0074 | -0,0003 | 0,5738 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 30 | 0 | 0,9526 | 0,0299 | 0,0258 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 26 | 0 | 0,9607 | 0,0063 | 0,1065 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

| | | | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| 7 | 0 | 0,9633 | 0,0024 | 0,1335 | 0,0000 | 0,0000 |
| 29 | 0 | 0,9645 | 0,0034 | 0,1454 | 0,0000 | 0,0000 |
| 28 | 0 | 0,9711 | 0,0015 | 0,2112 | 0,0000 | 0,0000 |

Tabela 5.5: Solução Final IEEE 30 - caso C1B.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0500 | -0,5616 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1404 | -0,0000 | 0,5701 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0205 | -0,0093 | 0,7050 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4723 | -0,0175 | 0,9691 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 2 | 0,9628 | 0,0129 | 0,1283 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1817 | -0,0372 | 0,7271 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 0,9779 | 0,0088 | 0,2793 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3496 | -0,0562 | 0,8990 | 0,0000 | 0,0000 |
| 11 | 2 | 1,0432 | -0,0548 | 0,9323 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1371 | -0,0007 | 0,6568 | 0,0000 | 0,0000 |
| 13 | 2 | 1,0440 | -0,1231 | 0,9404 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1269 | -0,0005 | 0,6231 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 0 | 1,0270 | -0,0134 | 0,7702 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0159 | -0,0048 | 0,6590 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 16 | 0 | 1,0122 | -0,0030 | 0,6216 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 1,0112 | -0,0026 | 0,6117 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 1,0105 | -0,0027 | 0,6055 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 30 | 0 | 0,9567 | 0,8796 | 0,0667 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 0,9643 | 0,0232 | 0,1426 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 26 | 0 | 0,9645 | 0,0565 | 0,1451 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 29 | 0 | 0,9686 | 0,0289 | 0,1858 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 28 | 0 | 0,9751 | 0,0122 | 0,2513 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Nas tabelas de convergência 5.6, 5.7 e 5.8 para os três casos C1, C1A e C1B observe que apesar do total de iteração externas serem diferentes, o comportamento dos valores obtidos em cada ciclo externo são bem parecidos. Na 3ª iteração externa há um salto do valor do gradiente $\|\nabla \mathcal{L}_o\|$. Isso ocorre porque no fim do ciclo interno uma ou mais variáveis auxiliares se encontram bem próximas da margem do conjunto factível relaxado e ao atualizar as variáveis duais essas adquirem um valor alto. Veja na subseção 4.1.5 a estrutura do gradiente $\nabla \mathcal{L}_o$. Observe que as equações (4.19c) e (4.19d) são as que causam esse valor grande da norma do gradiente de \mathcal{L}_o . Os valores da norma $\|\nabla \mathcal{L}_o\|$ e das folgas complementares, devido a não convexidade do problema são bem maiores que tolerância estipulada fazendo com que não atuem

no critério de parada do MBM. Mas esses valores são úteis para analisar o comportamento do mesmo, por exemplo, pode-se saber durante o processo iterativo alguma variável dual esteve bem próxima da margem da região factível relaxada. O fator determinante do critério de parada foi a diferença dos valores das funções f e f_{bm} que na solução possuem quase os mesmos valores. A partir da 5ª iteração externa a função f começa a se aproximar de f_{bm} nos casos C1 e C1A, no caso C1B isso ocorre na 6ª iteração. Nos três casos desde a 1ª iteração a carga já está atendida. O valor das folgas complementares manteve estável.

Tabela 5.6: Convergência para o IEEE 30 - caso C1.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | fc | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 2127,840167 | 0,000000 | -109,655680 | 150,000000 | 0,942000 | 0,294700 | 0 |
| 1 | 5,205681 | 0,183507 | -16,602692 | 34,127719 | 0,000001 | 0,000000 | 13 |
| 2 | 4,026372 | 0,183752 | -0,625485 | 34,127719 | 0,000001 | 0,000000 | 6 |
| 3 | 1289,381475 | 0,185855 | 1,449659 | 34,127719 | 0,000096 | 0,000016 | 5 |
| 4 | 22,202127 | 0,185446 | -0,802527 | 34,127719 | 0,000045 | 0,000009 | 3 |
| 5 | 5,028969 | 0,185075 | 0,159790 | 34,127719 | 0,000044 | 0,000009 | 3 |
| 6 | 0,510965 | 0,185110 | 0,179656 | 34,127719 | 0,000127 | 0,000008 | 4 |
| 7 | 0,510964 | 0,185110 | 0,185097 | 34,127719 | 0,000127 | 0,000008 | 1 |
| 8 | 0,368804 | 0,184612 | 0,184612 | 34,127719 | 0,000129 | 0,000006 | 4 |

Tabela 5.7: Convergência para o IEEE 30 - caso C1A.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | fc | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 1824,920682 | 0,624794 | -109,030885 | 150,000000 | 1,754600 | 6,122378 | 0 |
| 1 | 5,205914 | 0,183503 | -16,724865 | 34,127719 | 0,000000 | 0,000000 | 11 |
| 2 | 3,978656 | 0,183709 | -0,616298 | 34,127719 | 0,000005 | 0,000001 | 5 |
| 3 | 1071,755988 | 0,185895 | 1,231267 | 34,127719 | 0,000098 | 0,000017 | 5 |
| 4 | 22,562537 | 0,185628 | -0,662055 | 34,127719 | 0,000054 | 0,000011 | 3 |
| 5 | 52,656817 | 0,185112 | 0,208484 | 34,127719 | 0,000055 | 0,000011 | 4 |
| 6 | 1,138613 | 0,185149 | 0,140394 | 34,127719 | 0,000117 | 0,000009 | 3 |
| 7 | 0,539670 | 0,185149 | 0,185027 | 34,127719 | 0,000117 | 0,000009 | 1 |
| 8 | 0,327692 | 0,184649 | 0,184651 | 34,127719 | 0,000084 | 0,000004 | 4 |
| 9 | 0,317717 | 0,185020 | 0,185018 | 34,127719 | 0,000148 | 0,000007 | 4 |
| 10 | 0,304600 | 0,184481 | 0,184481 | 34,127719 | 0,000152 | 0,000007 | 4 |

Tabela 5.8: Convergência para o IEEE 30 - caso C1B.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f^c | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 2450,789756 | 0,624794 | -109,030885 | 150,000000 | 2,001323 | 4,780149 | 0 |
| 1 | 4,606934 | 0,183951 | -16,849152 | 34,127719 | 0,000009 | 0,000001 | 9 |
| 2 | 4,066836 | 0,183483 | -0,575263 | 34,127719 | 0,000003 | 0,000001 | 5 |
| 3 | 3090,814853 | 0,186423 | 3,259453 | 34,127719 | 0,000127 | 0,000028 | 5 |
| 4 | 163,855819 | 0,185409 | -2,303052 | 34,127719 | 0,000115 | 0,000024 | 4 |
| 5 | 4,355303 | 0,184752 | -0,043183 | 34,127719 | 0,000148 | 0,000030 | 3 |
| 6 | 0,868712 | 0,184753 | 0,184226 | 34,127719 | 0,000148 | 0,000030 | 1 |
| 7 | 0,361483 | 0,184230 | 0,184213 | 34,127719 | 0,000058 | 0,000010 | 3 |
| 8 | 0,342831 | 0,183956 | 0,183956 | 34,127719 | 0,000043 | 0,000008 | 3 |

Os gráficos com os comportamentos dos valores de f , f_{bm} e f^c durante o processo iterativo podem ser vistos no Apêndice D. O perfil de tensão desses três casos analisados estão no Apêndice C.

No caso C2, há um aumento nos valores de tensões devido ao aumento de 0,1 p.u. no limite inferior de magnitude de tensão. Como nos casos anteriores C1, C1A e C1B o maior valor de tensão ocorre na barra *slack* atingindo seu limite máximo de 1,05 p.u. Na Tabela 5.9 estão os valores das variáveis do FPRO obtidas pelo MBM.

Tabela 5.9: Solução Final IEEE 30 - caso C2.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0500 | -3,9761 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0224 | 0,0761 | 0,0002 | 0,5378 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0231 | -0,0791 | 0,7015 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4465 | -0,1401 | 0,9405 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 2 | 0,9769 | 0,0466 | 0,1878 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2802 | -0,2878 | 0,8499 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 0,9823 | 0,0567 | 0,2475 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3410 | -0,3695 | 0,8818 | 0,0000 | 0,0000 |
| 11 | 2 | 1,0487 | -1,0457 | 0,9856 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1418 | -0,0029 | 0,6724 | 0,0000 | 0,0000 |
| 13 | 2 | 1,0441 | -1,4582 | 0,9339 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1107 | -0,0010 | 0,5686 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 0 | 1,0292 | -0,1204 | 0,7690 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0206 | -0,0437 | 0,6731 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 16 | 0 | 1,0152 | -0,0255 | 0,6136 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

| | | | | | | |
|----|---|--------|---------|--------|--------|--------|
| 10 | 0 | 1,0148 | -0,0248 | 0,6084 | 0,0000 | 0,0000 |
| 14 | 0 | 1,0137 | -0,0206 | 0,5962 | 0,0000 | 0,0000 |
| 30 | 0 | 0,9614 | 3,0139 | 0,0153 | 0,0000 | 0,0000 |
| 26 | 0 | 0,9690 | 0,5008 | 0,0996 | 0,0000 | 0,0000 |
| 7 | 0 | 0,9729 | 0,1290 | 0,1429 | 0,0000 | 0,0000 |
| 29 | 0 | 0,9732 | 0,2204 | 0,1470 | 0,0000 | 0,0000 |
| 28 | 0 | 0,9797 | 0,0861 | 0,2190 | 0,0000 | 0,0000 |

O perfil de tensão encontra-se no Apêndice C.

Na Tabela 5.10, a 3ª iteração o valor da norma $\| \nabla \mathcal{L}_o \|$ dá um sobressalto como ocorrido nos casos anteriores analisados.

Tabela 5.10: Convergência para o IEEE 30 - caso C2.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o \ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV, PQ} \ $ | $\ \Delta Q_{PQ} \ $ | # it. in. |
|---------|------------------------------|----------------|---|------------|---------------------------|-----------------------|-----------|
| 0 | 2127,840167 | 0,000000 | -109,655680 | 150,000000 | 0,942000 | 0,294700 | 0 |
| 1 | 6,843197 | 0,182248 | -16,492959 | 34,127719 | 0,000000 | 0,000000 | 10 |
| 2 | 5,380290 | 0,182383 | -0,577487 | 34,127719 | 0,000006 | 0,000001 | 4 |
| 3 | 1134,847288 | 0,182930 | 1,271524 | 34,127719 | 0,000115 | 0,000022 | 4 |
| 4 | 324,026019 | 0,182446 | -0,483319 | 34,127719 | 0,000102 | 0,000020 | 4 |
| 5 | 10,888698 | 0,182654 | -0,154592 | 34,127719 | 0,000075 | 0,000015 | 3 |
| 6 | 0,918989 | 0,182866 | 0,169199 | 34,127719 | 0,000067 | 0,000013 | 3 |
| 7 | 0,918970 | 0,182866 | 0,182816 | 34,127719 | 0,000067 | 0,000013 | 1 |
| 8 | 0,647370 | 0,182145 | 0,182145 | 34,127719 | 0,000122 | 0,000008 | 4 |

No caso C3, pode ser ver na tabela 5.11 que a tensão que mais aproxima-se do limite máximo está na barra PV número 13 e não na *slack*.

Tabela 5.11: Solução Final IEEE 30 - caso C3.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|----------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0473 | -37,0688 | 0,9665 | 0,0000 | 0,0000 | -0,1060 | 0,0025 | 0,4469 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0281 | -3,3496 | 0,7265 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5000 | -1,2669 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 2 | 0,9935 | 0,7035 | 0,2940 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3747 | -2,4803 | 0,9684 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|--------|----------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|
| 8 | 2 | 0,9926 | 1,3769 | 0,2831 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3897 | -3,6390 | 0,9794 | 0,0000 | 0,0000 |
| 11 | 2 | 1,0497 | -11,9885 | 0,9959 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1177 | 0,0011 | 0,5922 | 0,0000 | 0,0000 |
| 13 | 2 | 1,0499 | -12,9618 | 0,9981 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1063 | 0,0114 | 0,5544 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 0 | 1,0357 | -3,5461 | 0,8209 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0264 | -1,6786 | 0,7044 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 16 | 0 | 1,0218 | -0,9728 | 0,6479 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 10 | 0 | 1,0214 | -1,0531 | 0,6431 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 1,0203 | -0,7450 | 0,6286 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 30 | 0 | 0,9704 | 31,3841 | 0,0045 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 26 | 0 | 0,9773 | 9,3485 | 0,0917 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 29 | 0 | 0,9821 | 4,7630 | 0,1512 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 7 | 0 | 0,9849 | 2,5603 | 0,1858 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 28 | 0 | 0,9887 | 2,2085 | 0,2333 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Analisando o comportamento do método para o caso C2 na Tabela 5.12, observe que os sobressaltos dos valores da norma $\| \nabla \mathcal{L}_o \|$ não são tão grandes como nos casos anteriores. Isso quer dizer que não houve variáveis auxiliares que ficaram tão próximas das margens da região factível relaxada.

Tabela 5.12: Convergência para o IEEE 30 - caso C3.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o \ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV, PQ} \ $ | $\ \Delta Q_{PQ} \ $ | # it. in. |
|---------|------------------------------|----------------|---|------------|---------------------------|-----------------------|-----------|
| 0 | 2127,840167 | 0,000000 | -109,655680 | 150,000000 | 0,942000 | 0,294700 | 0 |
| 1 | 9,562170 | 0,181142 | -15,118006 | 34,127719 | 0,000000 | 0,000000 | 10 |
| 2 | 8,692035 | 0,181050 | -0,513175 | 34,127719 | 0,000006 | 0,000001 | 4 |
| 3 | 7,086118 | 0,180812 | 0,079433 | 34,127719 | 0,000008 | 0,000001 | 1 |
| 4 | 10,132147 | 0,180551 | 0,179238 | 34,127719 | 0,000013 | 0,000001 | 3 |
| 5 | 5,463818 | 0,180936 | 0,179625 | 34,127719 | 0,000022 | 0,000001 | 3 |
| 6 | 5,429155 | 0,180942 | 0,180837 | 34,127719 | 0,000022 | 0,000001 | 2 |
| 7 | 4,980215 | 0,180552 | 0,180489 | 34,127719 | 0,000031 | 0,000001 | 3 |
| 8 | 12,865171 | 0,180552 | 0,182277 | 34,127719 | 0,000031 | 0,000001 | 1 |
| 9 | 3,450711 | 0,181259 | 0,179774 | 34,127719 | 0,000062 | 0,000003 | 4 |
| 10 | 3,450694 | 0,181259 | 0,181258 | 34,127719 | 0,000062 | 0,000003 | 1 |

O número de iterações externas obtidas no caso C4 foi de 30, ou seja, atingiu o máximo de iterações permitidas. O perfil de tensão obtida na 30ª iteração está no Apêndice C. Na Tabela 5.13 estão os valores das variáveis obtidas na 4ª iteração do método MBM.

Tabela 5.13: Solução Final IEEE 30 - 4ª iteração do caso C4.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|-----------|---------|--------------|--------------|---------|----------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0539 | -394,0873 | 1,0562 | 0,0071 | 27,6024 | -0,0555 | 0,0022 | 0,4723 | 0,0076 | 0,0031 |
| 2 | 2 | 1,0325 | -5,0494 | 0,7498 | 0,0139 | 0,3674 | 0,4529 | -13,7999 | 0,9476 | 0,0007 | 12,4261 |
| 5 | 2 | 0,9978 | 0,8900 | 0,2541 | 0,0911 | 0,0288 | 0,3710 | -24,3846 | 0,9638 | 0,0007 | 19,5087 |
| 8 | 2 | 0,9969 | 1,7759 | 0,2417 | 0,1450 | 0,0207 | 0,3813 | -37,4716 | 0,9626 | 0,0007 | 18,7371 |
| 11 | 2 | 1,0539 | -134,6082 | 1,0552 | 0,0080 | 9,4615 | 0,1159 | -0,0006 | 0,5862 | 0,0046 | 0,0048 |
| 13 | 2 | 1,0541 | -154,6798 | 1,0579 | 0,0079 | 10,8640 | 0,1029 | 0,0069 | 0,5431 | 0,0059 | 0,0038 |
| 12 | 0 | 1,0404 | -7,8078 | 0,8626 | 0,0121 | 0,5587 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0310 | -2,3995 | 0,7285 | 0,0180 | 0,1859 | | | | | |
| 16 | 0 | 1,0266 | -1,2444 | 0,6663 | 0,0236 | 0,1107 | | | | | |
| 10 | 0 | 1,0263 | -1,3514 | 0,6614 | 0,0228 | 0,1174 | | | | | |
| 14 | 0 | 1,0251 | -0,9368 | 0,6441 | 0,0265 | 0,0921 | | | | | |
| 30 | 0 | 0,9754 | 496,2150 | -0,0653 | 34,7422 | 0,0070 | | | | | |
| 26 | 0 | 0,9824 | 36,3991 | 0,0342 | 2,5568 | 0,0089 | | | | | |
| 29 | 0 | 0,9871 | 10,5203 | 0,1015 | 0,7477 | 0,0113 | | | | | |
| 7 | 0 | 0,9894 | 4,3938 | 0,1336 | 0,3224 | 0,0149 | | | | | |
| 28 | 0 | 0,9932 | 3,3770 | 0,1887 | 0,2524 | 0,0160 | | | | | |

* Não Convergiu.

Na Tabela 5.14 pode-se ver que as magnitudes de tensão são consideradas pontos aceitáveis que atendem a carga.

Tabela 5.14: Convergência para o IEEE 30 - 4ª iteração do caso C4.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 2127,840167 | 0,000000 | -109,655680 | 150,000000 | 0,942000 | 0,294700 | 0 |
| 1 | 15,329526 | 0,180123 | -10,830006 | 34,127719 | 0,000000 | 0,000000 | 10 |
| 2 | 17,806639 | 0,180544 | 3,851437 | 34,127719 | 0,000008 | 0,000001 | 2 |
| 3 | 40,301599 | 0,178951 | 5,400970 | 34,127719 | 0,000000 | 0,000000 | 4 |

Na Tabela 5.15 estão os valores das perdas de potência ativa e os valores máximo e mínimo obtidos das magnitudes de tensão para os casos base (que é a solução do Fluxo de Potência), C1, C1A, C1B, C2 e C3. O valor de perda de potência é menor no caso base devido a maior tensão obter o valor maior que o limite máximo de tensão usado no FBRO.

Tabela 5.15: Perda de potência ativa e máximo e mínimo de tensões IEEE 30.

| Testes | $f(\theta, V)$ | $V_{SL,PV}^{min}$ | $V_{SL,PV}^{max}$ | V_{PQ}^{min} | V_{PQ}^{max} |
|--------|----------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|
| CB | 0,1755 | 1,0100 | 1,0820 | 0,9919 | 1,0571 |
| C1 | 0,1846 | 0,9644 | 1,0500 | 0,9524 | 1,0232 |
| C1A | 0,1845 | 0,9657 | 1,0500 | 0,9526 | 1,0232 |
| C1B | 0,1840 | 0,9628 | 1,0500 | 0,9567 | 1,0270 |
| C2 | 0,1821 | 0,9769 | 1,0500 | 0,9614 | 1,0292 |
| C3 | 0,1813 | 0,9926 | 1,0499 | 0,9704 | 1,0357 |

Note também o menor valor de perda ativa ocorre no caso C3 e os valores de tensões estão mais próximas do valor nominal.

5.2 Sistema IEEE 57 barras

As características do sistema IEEE 57 barras são:

- 57 barras
 - 1 de referência (SL)
 - 6 de controle de tensão (PV)
 - 50 de carga (PQ)
- 63 linhas de transmissão

O sistema IEEE 57 barras está representado na Figura 5.3:

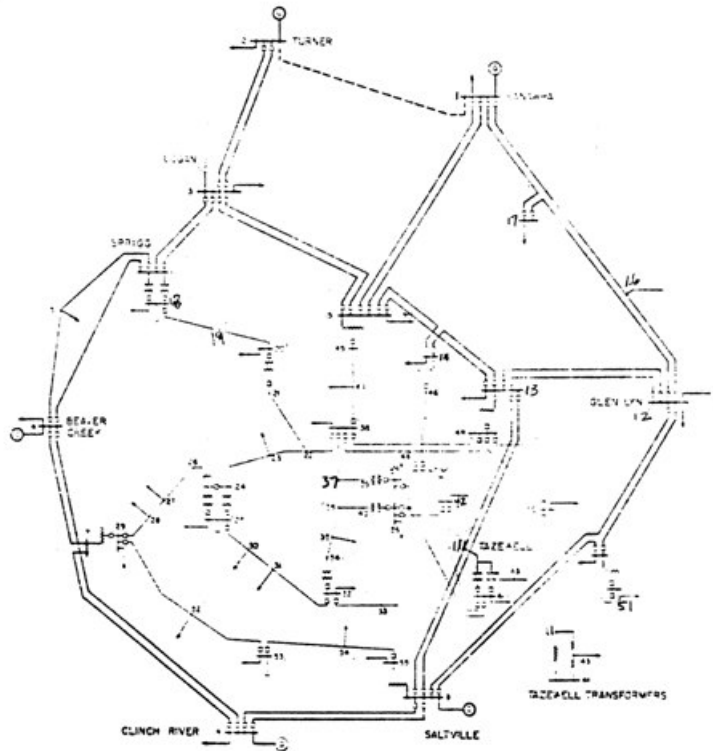


Figura 5.3: Sistema IEEE 57 barras.

A tabela com os valores especificados das potências ativa e reativa gerada e de carga (P_G, P_C, Q_G e Q_C) e os limites máximo e mínimo da potência reativa gerada (Q_G^{min} e Q_G^{max}) está no Apêndice B.

As magnitudes de tensão obtidas do FP para esse sistema estão representada na Figura 5.4:

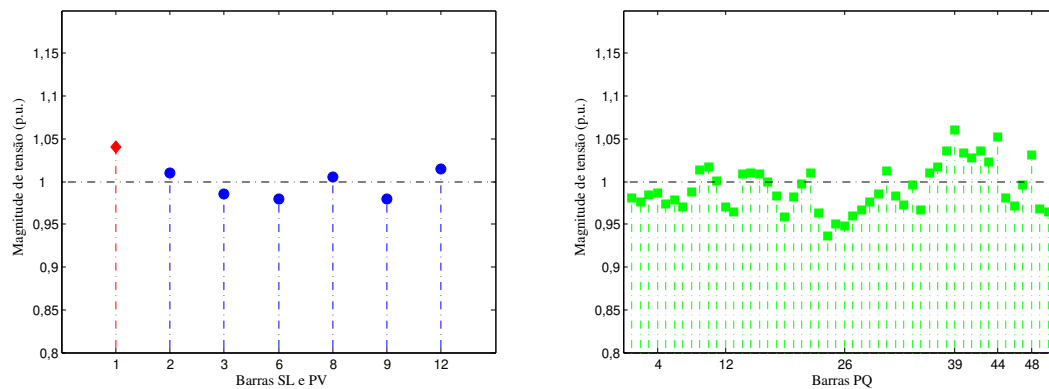


Figura 5.4: Solução do FP do IEEE 57 barras.

A maior tensão obtida no FP é 1,082 p.u. e ocorre na barra PV número 11 e a menor tensão é de 0,9919 p.u. e é referente à barra PQ número 30.

Os testes realizados para o sistema IEEE57 são:

Tabela 5.16: Características dos testes efetuados no IEEE 57.

| Testes | V^{min} | V^{max} | $V_{SL,PV}^0$ | V_{PQ}^0 |
|--------|-----------|-----------|---------------|------------|
| C1 | 0,93 | 1,05 | 1 | 1 |
| C1A | 0,93 | 1,05 | 0,9 | 1,1 |
| C1B | 0,93 | 1,05 | 1,1 | 0,9 |
| C2 | 0,94 | 1,05 | 1 | 1 |
| C3 | 0,95 | 1,05 | 1 | 1 |

Como não houve convergência para o $V^{min}=0,95$ e $V^{max}=1,05$, os teste iniciaram em $V^{min}=0,943$.

Para o sistema IEEE 57 barras não houve convergência para os limites de tensões em 0,95 e 1,05 . Para o caso 0,94 e 1,05 o método atinge o limite máximo de iterações mas chega a convergir. A análise desse casos é tratada mais adiante.

O caso C1, C1A e C1B possuem o mesmo limite inferior e superior de magnitude de tensão estipulado em 0,93 e 1,05. Nas tabelas 5.17, 5.18 e 5.19 são apresentados os valores das variáveis obtidas pelo MBM. Note que as diferenças são mínimas.

Tabela 5.17: Solução Final IEEE 57 - caso C1.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0208 | 0,0000 | 0,7570 | 0,0000 | 0,0000 | 0,8476 | 0,0000 | 0,9235 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0030 | 0,0000 | 0,6082 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2367 | -0,0074 | 0,6056 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 2 | 0,9956 | 0,0000 | 0,5469 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3877 | 0,0000 | 0,6967 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 2 | 1,0086 | 0,0000 | 0,6546 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2086 | -0,0023 | 0,8747 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0304 | 0,0000 | 0,8370 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0711 | 0,0000 | 0,7268 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 2 | 0,9835 | 0,0000 | 0,4460 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0901 | 0,0006 | 1,0010 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 2 | 0,9736 | 0,0000 | 0,3631 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3684 | 0,0000 | 0,6126 | 0,0000 | 0,0000 |
| 46 | 0 | 1,0478 | 0,0000 | 0,9820 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 55 | 0 | 1,0368 | 0,0000 | 0,8901 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 29 | 0 | 1,0324 | 0,0000 | 0,8532 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 51 | 0 | 1,0308 | 0,0000 | 0,8400 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 45 | 0 | 1,0282 | 0,0000 | 0,8180 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 31 | 0 | 0,9335 | 0,0000 | 0,0290 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 33 | 0 | 0,9420 | 0,0000 | 0,1004 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 32 | 0 | 0,9444 | 0,0000 | 0,1196 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 34 | 0 | 0,9507 | 0,0000 | 0,1727 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 57 | 0 | 0,9561 | 0,0000 | 0,2178 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Tabela 5.18: Solução Final IEEE 57 - caso C1A.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0207 | 0,0000 | 0,7556 | 0,0000 | 0,0000 | 0,7779 | 0,0000 | 0,8888 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0046 | 0,0000 | 0,6220 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3150 | -0,0055 | 0,7216 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 2 | 0,9961 | 0,0000 | 0,5508 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3886 | 0,0000 | 0,6980 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 2 | 1,0079 | 0,0000 | 0,6490 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1891 | -0,0022 | 0,8155 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0306 | 0,0000 | 0,8385 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0833 | 0,0000 | 0,7304 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 2 | 0,9836 | 0,0000 | 0,4466 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0901 | 0,0002 | 1,0010 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 2 | 0,9734 | 0,0000 | 0,3617 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3637 | 0,0000 | 0,6110 | 0,0000 | 0,0000 |
| 46 | 0 | 1,0479 | 0,0000 | 0,9825 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 55 | 0 | 1,0369 | 0,0000 | 0,8905 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 29 | 0 | 1,0323 | 0,0000 | 0,8522 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 51 | 0 | 1,0308 | 0,0000 | 0,8396 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 45 | 0 | 1,0283 | 0,0000 | 0,8189 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 31 | 0 | 0,9335 | 0,0000 | 0,0291 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 33 | 0 | 0,9421 | 0,0000 | 0,1007 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 32 | 0 | 0,9444 | 0,0000 | 0,1199 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 34 | 0 | 0,9508 | 0,0000 | 0,1731 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 57 | 0 | 0,9562 | 0,0000 | 0,2182 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Tabela 5.19: Solução Final IEEE 57 - caso C1B.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0208 | 0,0000 | 0,7564 | 0,0000 | 0,0000 | 0,8246 | 0,0000 | 0,9121 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 1,0035 | 0,0000 | 0,6125 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2618 | -0,0068 | 0,6428 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 2 | 0,9958 | 0,0000 | 0,5482 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3882 | 0,0000 | 0,6974 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 2 | 1,0083 | 0,0000 | 0,6528 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2024 | -0,0024 | 0,8558 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0305 | 0,0000 | 0,8374 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0746 | 0,0000 | 0,7278 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 2 | 0,9835 | 0,0000 | 0,4462 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0901 | 0,0005 | 1,0010 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 2 | 0,9735 | 0,0000 | 0,3629 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3676 | 0,0000 | 0,6123 | 0,0000 | 0,0000 |
| 46 | 0 | 1,0479 | 0,0000 | 0,9822 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 55 | 0 | 1,0368 | 0,0000 | 0,8902 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 29 | 0 | 1,0323 | 0,0000 | 0,8528 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 51 | 0 | 1,0308 | 0,0000 | 0,8400 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 45 | 0 | 1,0282 | 0,0000 | 0,8183 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

| | | | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| 31 | 0 | 0,9335 | 0,0000 | 0,0291 | 0,0000 | 0,0000 |
| 33 | 0 | 0,9421 | 0,0000 | 0,1005 | 0,0000 | 0,0000 |
| 32 | 0 | 0,9444 | 0,0000 | 0,1197 | 0,0000 | 0,0000 |
| 34 | 0 | 0,9507 | 0,0000 | 0,1729 | 0,0000 | 0,0000 |
| 57 | 0 | 0,9562 | 0,0000 | 0,2179 | 0,0000 | 0,0000 |

Analisando os resultados obtidos das tabelas anteriores, veja que na barra 9 é alcançado o limite de geração de potência reativa que é de 0,09 p.u. A variável que indica isso é a sq_9 que em todos os casos atingiu o valor de 1,001, esse valor é o limite superior da região relaxada, portanto factível. Como visto na subseção 4.2.3, a respeito da atualização do parâmetro de penalidade, há ciclos em que a região relaxada não diminui. A convergência do método ocorreu devido à aproximação das funções objetivo do FPRO e FPROBM que na solução não há muitas diferenças. Observe nas tabelas 5.20, 5.21 e 5.22 que durante os processo iterativo algumas variáveis auxiliares ficaram na margem do conjunto factível. O valor das folgas complementares se manteve estável e a carga foi atendida.

Tabela 5.20: Convergência para o IEEE 57 - caso C1.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | fc | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5687,354497 | 0,000000 | -206,769043 | 285,000000 | 3,000000 | 1,719784 | 0 |
| 1 | 6,405643 | 0,276770 | -33,735064 | 46,193588 | 0,000000 | 0,000000 | 14 |
| 2 | 4,534943 | 0,277748 | -6,710524 | 46,193588 | 0,000002 | 0,000000 | 4 |
| 3 | 79,813711 | 0,279468 | 0,041459 | 46,193588 | 0,000028 | 0,000004 | 5 |
| 4 | 9,520856 | 0,279424 | 0,211170 | 46,193588 | 0,000027 | 0,000003 | 3 |
| 5 | 4,766754 | 0,278540 | 0,267436 | 46,193588 | 0,000027 | 0,000002 | 4 |
| 6 | 6,630899 | 0,278540 | 0,284979 | 46,193588 | 0,000027 | 0,000002 | 1 |
| 7 | 3,496562 | 0,277947 | 0,275924 | 46,193588 | 0,000229 | 0,000006 | 6 |
| 8 | 3,494718 | 0,275969 | 0,275965 | 46,193588 | 0,000124 | 0,000002 | 4 |
| 9 | 3,494718 | 0,275969 | 0,275969 | 46,193588 | 0,000124 | 0,000002 | 1 |

Tabela 5.21: Convergência para o IEEE 57 - caso C1A.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5039,548944 | 1,873663 | -204,895380 | 285,000000 | 3,475426 | 6,941604 | 0 |
| 1 | 6,406042 | 0,276865 | -33,727481 | 46,193588 | 0,000009 | 0,000002 | 15 |
| 2 | 4,537367 | 0,277751 | -6,713625 | 46,193588 | 0,000002 | 0,000000 | 4 |
| 3 | 86,179391 | 0,279464 | 0,047616 | 46,193588 | 0,000029 | 0,000004 | 5 |
| 4 | 17,076480 | 0,279438 | 0,209228 | 46,193588 | 0,000027 | 0,000004 | 3 |
| 5 | 4,666963 | 0,278471 | 0,263013 | 46,193588 | 0,000031 | 0,000002 | 4 |
| 6 | 4,923914 | 0,278471 | 0,283116 | 46,193588 | 0,000031 | 0,000002 | 1 |
| 7 | 3,496565 | 0,277947 | 0,276447 | 46,193588 | 0,000229 | 0,000006 | 6 |
| 8 | 3,494018 | 0,275289 | 0,275286 | 46,193588 | 0,000114 | 0,000001 | 4 |
| 9 | 3,494018 | 0,275289 | 0,275289 | 46,193588 | 0,000114 | 0,000001 | 1 |

Tabela 5.22: Convergência para o IEEE 57 - caso C1B.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 6352,731183 | 1,873663 | -204,895380 | 285,000000 | 2,929868 | 5,568543 | 0 |
| 1 | 6,406811 | 0,276776 | -33,733514 | 46,193588 | 0,000008 | 0,000000 | 12 |
| 2 | 4,535431 | 0,277765 | -6,711199 | 46,193588 | 0,000002 | 0,000000 | 4 |
| 3 | 80,858619 | 0,279475 | 0,042462 | 46,193588 | 0,000029 | 0,000004 | 5 |
| 4 | 11,707813 | 0,279438 | 0,211123 | 46,193588 | 0,000027 | 0,000003 | 3 |
| 5 | 4,700489 | 0,278508 | 0,266252 | 46,193588 | 0,000029 | 0,000002 | 4 |
| 6 | 5,568916 | 0,278508 | 0,283863 | 46,193588 | 0,000029 | 0,000002 | 1 |
| 7 | 3,496547 | 0,277931 | 0,276232 | 46,193588 | 0,000229 | 0,000006 | 6 |
| 8 | 3,494479 | 0,275738 | 0,275734 | 46,193588 | 0,000124 | 0,000002 | 4 |
| 9 | 3,494479 | 0,275738 | 0,275738 | 46,193588 | 0,000124 | 0,000002 | 1 |

Para os limites de magnitude de tensão 0,94 e 1,05 do caso C2, o MBM quase atingiu o limite máximo de 30 iterações externas permitidas, convergindo na 28ª iteração.

Observe na Tabela 5.23 que as variáveis primais, auxiliares e duais são soluções admissíveis, mas os valores dos multiplicadores de Lagrange não são os habituais.

Tabela 5.23: Solução Final IEEE 57 - caso C2.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|-----------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0053 | -1,3773 | 0,5938 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1976 | -0,0125 | 0,5986 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 2 | 0,9982 | -0,2806 | 0,5289 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4990 | -0,0301 | 0,9985 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 2 | 1,0020 | -0,2323 | 0,5637 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5676 | -0,0784 | 0,9530 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 2 | 1,0243 | -1,1783 | 0,7667 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2500 | -0,3227 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8 | 2 | 1,0499 | -13,0760 | 0,9987 | 0,0000 | 0,0000 | 1,3468 | -0,0068 | 0,8076 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 2 | 0,9931 | 0,5190 | 0,4825 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0534 | 0,0563 | 0,6948 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 2 | 0,9713 | 0,6820 | 0,2845 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3198 | -0,0068 | 0,5965 | 0,0000 | 0,0000 |
| 46 | 0 | 1,0499 | -118,4787 | 0,9987 | 0,0000 | 0,0001 | | | | | |
| 29 | 0 | 1,0490 | -7,8121 | 0,9910 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 55 | 0 | 1,0479 | -11,2960 | 0,9811 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 51 | 0 | 1,0337 | -9,5209 | 0,8522 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 28 | 0 | 1,0321 | -2,2228 | 0,8369 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 31 | 0 | 0,9414 | 96,3936 | 0,0126 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 33 | 0 | 0,9484 | 13,9863 | 0,0766 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 32 | 0 | 0,9507 | 10,8147 | 0,0974 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 34 | 0 | 0,9551 | 6,1691 | 0,1373 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 14 | 0 | 0,9600 | 3,5937 | 0,1818 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Analisando a tabela de convergência 5.24 nota-se que a norma $\|\nabla\mathcal{L}_o\|$ oscila bastante e o valor das folgas complementares também apresenta variações. Isso acontece porque variáveis auxiliares ficam próximas da margem da região relaxada no final de cada ciclo interno consecutivamente. Como variáveis duais estão se aproximando da solução dual do FPRO o MBM se estabiliza e converge.

Tabela 5.24: Convergência para o IEEE 57 - caso C2.

| It. ex. | $\ \nabla\mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | fc | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|---------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5687,354497 | 0,000000 | -206,769043 | 285,000000 | 3,000000 | 1,719784 | 0 |
| 1 | 9,311085 | 0,274725 | -32,334524 | 46,193588 | 0,000003 | 0,000000 | 9 |
| 2 | 8,695357 | 0,279499 | -6,413090 | 46,193588 | 0,000009 | 0,000001 | 3 |
| 3 | 54,403049 | 0,280562 | -1,350966 | 46,193588 | 0,000016 | 0,000001 | 4 |
| 4 | 71,537978 | 0,280795 | 0,868323 | 46,193588 | 0,000016 | 0,000001 | 3 |
| 5 | 504,820434 | 0,280795 | 4,783002 | 46,193588 | 0,000016 | 0,000001 | 1 |

| | | | | | | | |
|----|--------------|----------|------------|-----------|----------|----------|---|
| 6 | 334,574927 | 0,284061 | 1,426478 | 46,193588 | 0,000448 | 0,000020 | 4 |
| 7 | 341,007719 | 0,284281 | -1,015637 | 46,193588 | 0,000398 | 0,000020 | 4 |
| 8 | 348,167971 | 0,284281 | 0,820510 | 46,193588 | 0,000398 | 0,000020 | 1 |
| 9 | 470,434638 | 0,284281 | 3,805865 | 46,193588 | 0,000398 | 0,000020 | 1 |
| 10 | 1459,401582 | 0,284339 | 10,342287 | 46,193588 | 0,000396 | 0,000020 | 3 |
| 11 | 4452,168034 | 0,284339 | 31,128789 | 46,193588 | 0,000396 | 0,000020 | 1 |
| 12 | 13509,008303 | 0,284339 | 93,914451 | 90,461280 | 0,000396 | 0,000020 | 1 |
| 13 | 6632,860920 | 0,285546 | -67,099028 | 70,888104 | 0,000327 | 0,000017 | 4 |
| 14 | 570,337851 | 0,285546 | -5,580679 | 46,193588 | 0,000327 | 0,000017 | 1 |
| 15 | 35,975002 | 0,285546 | -0,221862 | 46,193588 | 0,000327 | 0,000017 | 1 |
| 16 | 54,202942 | 0,285704 | 0,298873 | 46,193588 | 0,000324 | 0,000017 | 3 |
| 17 | 234,137644 | 0,285718 | 0,462593 | 46,193588 | 0,000323 | 0,000017 | 2 |
| 18 | 13,738062 | 0,285525 | 0,071839 | 46,193588 | 0,000301 | 0,000015 | 3 |
| 19 | 218,296148 | 0,285168 | 0,504146 | 46,193588 | 0,000287 | 0,000014 | 3 |
| 20 | 265,366184 | 0,285211 | 0,332015 | 46,193588 | 0,000284 | 0,000014 | 3 |
| 21 | 321,922075 | 0,285211 | 0,342817 | 46,193588 | 0,000284 | 0,000014 | 1 |
| 22 | 389,961889 | 0,285211 | 0,354581 | 46,193588 | 0,000284 | 0,000014 | 1 |
| 23 | 471,817811 | 0,285211 | 0,368649 | 46,193588 | 0,000284 | 0,000014 | 1 |
| 24 | 570,295347 | 0,285211 | 0,385564 | 46,193588 | 0,000284 | 0,000014 | 1 |
| 25 | 235,916947 | 0,285308 | -0,053488 | 46,193588 | 0,000280 | 0,000014 | 3 |
| 26 | 10,603299 | 0,285308 | 0,261833 | 46,193588 | 0,000280 | 0,000014 | 1 |
| 27 | 12,905297 | 0,285308 | 0,285135 | 46,193588 | 0,000280 | 0,000014 | 1 |
| 28 | 13,032563 | 0,285308 | 0,285308 | 46,193588 | 0,000280 | 0,000014 | 1 |

O último caso analisado é da não convergência do caso C4. As variáveis duais, neste caso, tendem ao infinito e o MBM não converge. Analisando a solução gerada na 4ª iteração do caso C3, as variáveis primais e auxiliares na Tabela 5.25 possuem valores razoáveis.

Tabela 5.25: Solução Final IEEE 57 - 4ª iteração do caso C3.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|--------|---------|--------|--------------|--------------|
| 1 | 3 | 1,0098 | -2,5813 | 0,5976 | 0,0264 | 0,0930 | 0,2086 | -0,0210 | 0,6040 | 0,0000 | 0,0002 |
| 2 | 2 | 1,0026 | -0,2469 | 0,5261 | 0,0424 | 0,0507 | 0,4858 | -0,0905 | 0,9786 | 0,0000 | 0,0038 |
| 3 | 2 | 1,0073 | -0,6410 | 0,5731 | 0,0369 | 0,0595 | 0,6072 | -0,2798 | 1,0100 | 0,0000 | 951,4901 |

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|--------|-----------|---------|---------|----------|---------|---------|--------|--------|-----------|
| 6 | 2 | 1,0283 | -4,7091 | 0,7832 | 0,0176 | 0,2095 | 0,2508 | -1,2121 | 1,0023 | 0,0000 | 6317,7628 |
| 8 | 2 | 1,0527 | -42,2112 | 1,0271 | 0,0082 | 7,6854 | 1,3675 | -0,0202 | 0,8135 | 0,0000 | 0,0007 |
| 9 | 2 | 0,9944 | 1,2646 | 0,4444 | 0,0657 | 0,0339 | -0,0174 | 0,5016 | 0,1054 | 0,0012 | 0,0000 |
| 12 | 2 | 0,9743 | 3,3591 | 0,2431 | 0,1598 | 0,0202 | 0,3123 | -0,0107 | 0,5934 | 0,0000 | 0,0002 |
| 46 | 0 | 1,0540 | -495,6229 | 1,0398 | 0,0065 | 112,4747 | | | | | |
| 29 | 0 | 1,0525 | -51,1850 | 1,0245 | 0,0080 | 7,9543 | | | | | |
| 55 | 0 | 1,0496 | -59,9747 | 0,9962 | 0,0079 | 6,2211 | | | | | |
| 51 | 0 | 1,0367 | -24,8700 | 0,8667 | 0,0102 | 1,2411 | | | | | |
| 28 | 0 | 1,0356 | -8,9049 | 0,8560 | 0,0132 | 0,4497 | | | | | |
| 31 | 0 | 0,9462 | 394,3139 | -0,0382 | 60,5231 | 0,0067 | | | | | |
| 33 | 0 | 0,9531 | 57,1134 | 0,0311 | 4,4861 | 0,0082 | | | | | |
| 32 | 0 | 0,9554 | 40,6518 | 0,0539 | 2,7681 | 0,0087 | | | | | |
| 34 | 0 | 0,9594 | 22,5170 | 0,0940 | 1,2588 | 0,0100 | | | | | |
| 14 | 0 | 0,9637 | 13,5485 | 0,1372 | 0,6480 | 0,0116 | | | | | |

* Não Convergiu.

Na Tabela 5.26 note que a solução obtida na 4ª iteração no caso C4 tem a carga atendida.

Tabela 5.26: Convergência para o IEEE 57 - 4ª iteração do caso C3.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5687,354497 | 0,000000 | -206,769043 | 285,000000 | 3,000000 | 1,719784 | 0 |
| 1 | 18,359185 | 0,274685 | -25,835923 | 46,193588 | 0,000000 | 0,000000 | 14 |
| 2 | 4847,496090 | 0,282188 | 50,319161 | 48,460346 | 0,000596 | 0,000044 | 4 |
| 3 | 6317,362767 | 0,283079 | 32,407034 | 46,193588 | 0,000546 | 0,000041 | 4 |

* Não Convergiu.

No Apêndice C estão os perfil de tensão e no Apêndice D estão os gráficos da análise da convergência e do comportamento do MBM de todos os casos analisados.

Na Tabela 5.27 estão os valores das perdas de potência ativa e os valores máximo e mínimo obtidos das magnitudes de tensão para os casos base (que é a solução o FP), C1, C1A, C1B e C2. O valor de perda de potência é menor no caso base devido a maior tensão obter o valor maior que o limite máximo de tensão usado no FBRO.

Tabela 5.27: Perda de potência ativa e máximo e mínimo de tensões IEEE 57.

| Testes | $f(\theta, V)$ | $V_{SL,PV}^{min}$ | $V_{SL,PV}^{max}$ | V_{PQ}^{min} | V_{PQ}^{max} |
|--------|----------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|
| CB | 0,2786 | 0,9800 | 1,0400 | 0,9359 | 1,0598 |
| C1 | 0,2760 | 0,9736 | 1,0304 | 0,9335 | 1,0478 |
| C1A | 0,2753 | 0,9734 | 1,0306 | 0,9335 | 1,0479 |
| C1B | 0,2757 | 0,9735 | 1,0305 | 0,9335 | 1,0479 |
| C2 | 0,2853 | 0,9713 | 1,0499 | 0,9414 | 1,0499 |

5.3 Sistema IEEE 118 barras

As características do sistema IEEE 118 barras são:

- 118 barras
 - 1 de referência (SL)
 - 53 de controle de tensão (PV)
 - 64 de carga (PQ)
- 170 linhas de transmissão

O sistema IEEE 118 barras está representado na Figura 5.5:

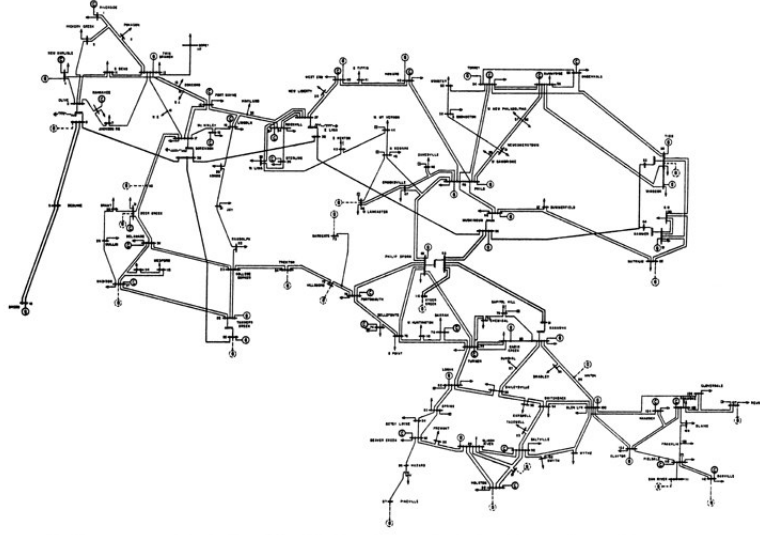


Figura 5.5: Sistema IEEE 118 barras.

A Tabela com os valores especificados das potências ativa e reativa gerada e de carga (P_G, P_C, Q_G e Q_C) e os limites máximo e mínimo da potência reativa gerada (Q_G^{min} e Q_G^{max}) está no Apêndice B.

As magnitudes de tensão obtidas do FP para esse sistema estão representada na Figura 5.6:

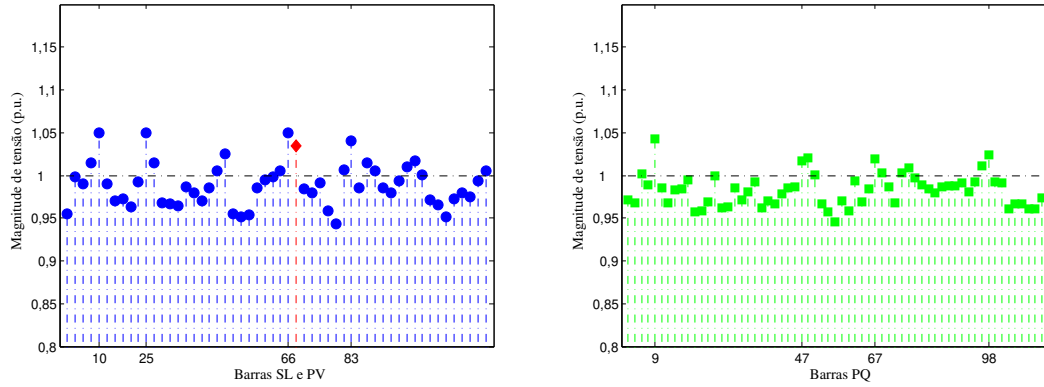


Figura 5.6: Solução do FP do IEEE 118 barras.

A maior tensão obtida no FP é 1,05 p.u. e ocorre nas barras de controle de tensão números 10, 25 e 66 e a menor tensão é de 0,9430 p.u. e é referente à barra PV número 76. O valor de perda ativa é de 1,3248 p.u.

Os casos analisados para o sistema IEEE 118 barras foram:

Tabela 5.28: Características dos testes efetuados no IEEE 118.

| Testes | V^{min} | V^{max} | $V_{SL,PV}^0$ | V_{PQ}^0 |
|--------|-----------|-----------|---------------|------------|
| C1 | 0,95 | 1,05 | 1 | 1 |
| C1A | 0,95 | 1,05 | 0,9 | 1,1 |
| C1B | 0,95 | 1,05 | 1,1 | 0,9 |
| C2 | 0,96 | 1,05 | 1 | 1 |
| C3 | 0,97 | 1,05 | 1 | 1 |
| C4 | 0,98 | 1,05 | 1 | 1 |
| C5 | 0,99 | 1,05 | 1 | 1 |
| C6 | 1 | 1,05 | 1 | 1 |

Os casos C1, C1A e C1B possuem os mesmos limites de tensão porém com inicializações diferentes. As soluções obtidas nestes casos podem ser conferidas nas tabelas 5.29, 5.30 e 5.31. Note que as soluções são bem parecidas e o valor de perda de potência ativa nos três casos é de 1,2540 pu. O maior valor de magnitude de tensão ocorre na barra PV número 25 e tem o valor do limite máximo de tensão que é de 1,05.

Tabela 5.29: Solução Final IEEE 118 - caso C1.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 69 | 3 | 1,0413 | -0,1069 | 0,9132 | 0,0000 | 0,0000 | -0,5010 | 0,0001 | 0,4165 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 2 | 1,0500 | -0,0413 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,4160 | 0,0029 | 0,0287 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|--------|---------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|--------|--------|
| 10 | 2 | 1,0414 | -0,0044 | 0,9138 | 0,0000 | 0,0000 | -0,7623 | 0,0010 | 0,2039 | 0,0000 | 0,0000 |
| 66 | 2 | 1,0361 | -0,2497 | 0,8612 | 0,0000 | 0,0000 | -0,6707 | 0,0033 | -0,0007 | 0,0000 | 0,0000 |
| 80 | 2 | 1,0322 | -0,0355 | 0,8218 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4248 | 0,0000 | 0,4662 | 0,0000 | 0,0000 |
| 26 | 2 | 1,0315 | 0,0071 | 0,8149 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5588 | 0,0000 | 0,5273 | 0,0000 | 0,0000 |
| 76 | 2 | 0,9659 | 0,1084 | 0,1590 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2227 | -0,0226 | 0,9757 | 0,0000 | 0,0000 |
| 74 | 2 | 0,9766 | 0,0125 | 0,2663 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0219 | -0,0092 | 0,2540 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 2 | 0,9858 | 0,0117 | 0,3576 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1457 | -0,0076 | 0,9776 | 0,0000 | 0,0000 |
| 19 | 2 | 0,9928 | 0,0018 | 0,4276 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0134 | -0,0022 | 0,2919 | 0,0000 | 0,0000 |
| 116 | 2 | 0,9940 | 0,0005 | 0,4402 | 0,0000 | 0,0000 | -0,1599 | -0,0000 | 0,4920 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 1,0425 | -0,0084 | 0,9254 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 1,0227 | -0,0079 | 0,7270 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 17 | 0 | 1,0196 | -0,0080 | 0,6965 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 37 | 0 | 1,0183 | -0,0082 | 0,6828 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 98 | 0 | 1,0181 | -0,0086 | 0,6814 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 118 | 0 | 0,9690 | 0,0468 | 0,1905 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 38 | 0 | 0,9797 | 0,0233 | 0,2966 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 21 | 0 | 0,9831 | 0,0095 | 0,3313 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 75 | 0 | 0,9838 | 0,0079 | 0,3378 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 95 | 0 | 0,9841 | 0,0083 | 0,3411 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Tabela 5.30: Solução Final IEEE 118 - caso C1A.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|---------|---------|---------|--------------|--------------|
| 69 | 3 | 1,0413 | -0,1069 | 0,9132 | 0,0000 | 0,0000 | -0,5008 | 0,0001 | 0,4165 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 2 | 1,0500 | -0,0413 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,4159 | 0,0029 | 0,0287 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 2 | 1,0414 | -0,0044 | 0,9138 | 0,0000 | 0,0000 | -0,7623 | 0,0010 | 0,2039 | 0,0000 | 0,0000 |
| 66 | 2 | 1,0361 | -0,2497 | 0,8612 | 0,0000 | 0,0000 | -0,6706 | 0,0033 | -0,0007 | 0,0000 | 0,0000 |
| 80 | 2 | 1,0322 | -0,0355 | 0,8216 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4243 | 0,0000 | 0,4661 | 0,0000 | 0,0000 |
| 26 | 2 | 1,0315 | 0,0071 | 0,8149 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5587 | 0,0000 | 0,5273 | 0,0000 | 0,0000 |
| 76 | 2 | 0,9659 | 0,1084 | 0,1589 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2227 | -0,0226 | 0,9756 | 0,0000 | 0,0000 |
| 74 | 2 | 0,9766 | 0,0125 | 0,2662 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0218 | -0,0092 | 0,2544 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 2 | 0,9858 | 0,0117 | 0,3576 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1457 | -0,0076 | 0,9776 | 0,0000 | 0,0000 |
| 19 | 2 | 0,9928 | 0,0018 | 0,4276 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0134 | -0,0022 | 0,2918 | 0,0000 | 0,0000 |
| 116 | 2 | 0,9940 | 0,0005 | 0,4402 | 0,0000 | 0,0000 | -0,1599 | -0,0000 | 0,4920 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 1,0425 | -0,0084 | 0,9254 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

| | | | | | | |
|-----|---|--------|---------|--------|--------|--------|
| 5 | 0 | 1,0227 | -0,0079 | 0,7270 | 0,0000 | 0,0000 |
| 17 | 0 | 1,0196 | -0,0080 | 0,6965 | 0,0000 | 0,0000 |
| 37 | 0 | 1,0183 | -0,0082 | 0,6828 | 0,0000 | 0,0000 |
| 98 | 0 | 1,0181 | -0,0086 | 0,6813 | 0,0000 | 0,0000 |
| 118 | 0 | 0,9690 | 0,0468 | 0,1904 | 0,0000 | 0,0000 |
| 38 | 0 | 0,9797 | 0,0233 | 0,2966 | 0,0000 | 0,0000 |
| 21 | 0 | 0,9831 | 0,0095 | 0,3313 | 0,0000 | 0,0000 |
| 75 | 0 | 0,9838 | 0,0079 | 0,3378 | 0,0000 | 0,0000 |
| 95 | 0 | 0,9841 | 0,0083 | 0,3410 | 0,0000 | 0,0000 |

Tabela 5.31: Solução Final IEEE 118 - caso C1B.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|---------|---------|---------|--------------|--------------|
| 69 | 3 | 1,0413 | -0,1069 | 0,9132 | 0,0000 | 0,0000 | -0,5008 | 0,0001 | 0,4165 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 2 | 1,0500 | -0,0413 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,4159 | 0,0029 | 0,0287 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 2 | 1,0414 | -0,0044 | 0,9138 | 0,0000 | 0,0000 | -0,7623 | 0,0010 | 0,2039 | 0,0000 | 0,0000 |
| 66 | 2 | 1,0361 | -0,2497 | 0,8612 | 0,0000 | 0,0000 | -0,6706 | 0,0033 | -0,0007 | 0,0000 | 0,0000 |
| 80 | 2 | 1,0322 | -0,0355 | 0,8217 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4244 | 0,0000 | 0,4662 | 0,0000 | 0,0000 |
| 26 | 2 | 1,0315 | 0,0071 | 0,8149 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5587 | 0,0000 | 0,5273 | 0,0000 | 0,0000 |
| 76 | 2 | 0,9659 | 0,1084 | 0,1589 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2227 | -0,0226 | 0,9756 | 0,0000 | 0,0000 |
| 74 | 2 | 0,9766 | 0,0125 | 0,2663 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0219 | -0,0092 | 0,2543 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 2 | 0,9858 | 0,0117 | 0,3576 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1457 | -0,0076 | 0,9776 | 0,0000 | 0,0000 |
| 19 | 2 | 0,9928 | 0,0018 | 0,4276 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0134 | -0,0022 | 0,2919 | 0,0000 | 0,0000 |
| 116 | 2 | 0,9940 | 0,0005 | 0,4402 | 0,0000 | 0,0000 | -0,1599 | -0,0000 | 0,4920 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 1,0425 | -0,0084 | 0,9254 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 1,0227 | -0,0079 | 0,7270 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 17 | 0 | 1,0196 | -0,0080 | 0,6965 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 37 | 0 | 1,0183 | -0,0082 | 0,6828 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 98 | 0 | 1,0181 | -0,0086 | 0,6813 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 118 | 0 | 0,9690 | 0,0468 | 0,1904 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 38 | 0 | 0,9797 | 0,0233 | 0,2966 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 21 | 0 | 0,9831 | 0,0095 | 0,3313 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 75 | 0 | 0,9838 | 0,0079 | 0,3378 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 95 | 0 | 0,9841 | 0,0083 | 0,3411 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Analisando a convergência nas tabelas 5.32, 5.33 e 5.34 nota-se que as inicializações afetam no MBM. Apesar dos três casos convergiram com 16 iterações externas, o caso C1 que com tensões iniciais iguais a 1, obteve 24 iterações internas na 1ª iteração do ciclo externo, já os casos com tensões iniciais infactíveis tiveram 59 e 72 iterações internas, respectivamente.

Tabela 5.32: Convergência para o IEEE 118 - caso C1.

| It. ex. | $\ \nabla\mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|---------------------------|----------------|---|------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5892,126231 | 0,000000 | -442,206237 | 590,000000 | 6,070000 | 1,668142 | 0 |
| 1 | 2,238764 | 1,283613 | -72,558118 | 245,185584 | 0,000000 | 0,000000 | 24 |
| 2 | 1,178370 | 1,283532 | -0,968778 | 245,185584 | 0,000004 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 5,942945 | 1,281807 | 1,259526 | 245,185584 | 0,000554 | 0,000020 | 4 |
| 4 | 14,818130 | 1,261012 | 1,271836 | 245,185584 | 0,004839 | 0,000581 | 5 |
| 5 | 0,453851 | 1,256930 | 1,245214 | 245,185584 | 0,002410 | 0,000289 | 4 |
| 6 | 0,452658 | 1,255923 | 1,255717 | 245,185584 | 0,001957 | 0,000235 | 4 |
| 7 | 70,468172 | 1,255923 | 1,326751 | 245,185584 | 0,001957 | 0,000235 | 1 |
| 8 | 20,034700 | 1,255659 | 1,205873 | 245,185584 | 0,001893 | 0,000227 | 3 |
| 9 | 1,501143 | 1,255034 | 1,237535 | 245,185584 | 0,001753 | 0,000210 | 4 |
| 10 | 107,391657 | 1,255034 | 1,361652 | 245,185584 | 0,001753 | 0,000210 | 1 |
| 11 | 21,438463 | 1,254847 | 1,170772 | 245,185584 | 0,001665 | 0,000200 | 3 |
| 12 | 0,716392 | 1,254041 | 1,235561 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 4 |
| 13 | 0,453461 | 1,254041 | 1,253416 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |
| 14 | 0,453461 | 1,254041 | 1,254020 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |
| 15 | 0,453461 | 1,254041 | 1,254040 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |

Tabela 5.33: Convergência para o IEEE 118 - caso C1A.

| It. ex. | $\ \nabla\mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|---------------------------|----------------|---|------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 14837,188223 | 16,562320 | -425,643917 | 590,000000 | 6,828155 | 75,406044 | 0 |
| 1 | 2,237571 | 1,283582 | -72,558269 | 245,185584 | 0,000000 | 0,000000 | 59 |
| 2 | 1,178239 | 1,283529 | -0,968766 | 245,185584 | 0,000004 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 5,940564 | 1,281804 | 1,259521 | 245,185584 | 0,000554 | 0,000020 | 4 |
| 4 | 14,817089 | 1,261009 | 1,271834 | 245,185584 | 0,004839 | 0,000581 | 5 |
| 5 | 0,453830 | 1,256927 | 1,245212 | 245,185584 | 0,002410 | 0,000289 | 4 |
| 6 | 0,452639 | 1,255922 | 1,255716 | 245,185584 | 0,001958 | 0,000235 | 4 |

| | | | | | | | |
|----|------------|----------|----------|------------|----------|----------|---|
| 7 | 70,883790 | 1,255922 | 1,327167 | 245,185584 | 0,001958 | 0,000235 | 1 |
| 8 | 20,183783 | 1,255658 | 1,205608 | 245,185584 | 0,001894 | 0,000227 | 3 |
| 9 | 1,513247 | 1,255034 | 1,237404 | 245,185584 | 0,001754 | 0,000211 | 4 |
| 10 | 107,556759 | 1,255034 | 1,361806 | 245,185584 | 0,001754 | 0,000211 | 1 |
| 11 | 21,401587 | 1,254846 | 1,170580 | 245,185584 | 0,001665 | 0,000200 | 3 |
| 12 | 0,714111 | 1,254039 | 1,235592 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 4 |
| 13 | 0,453443 | 1,254039 | 1,253417 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |
| 14 | 0,453443 | 1,254039 | 1,254018 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |
| 15 | 0,453443 | 1,254039 | 1,254039 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |

Tabela 5.34: Convergência para o IEEE 118 - caso C1B.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 14155,387482 | 16,562320 | -425,643917 | 590,000000 | 7,501079 | 59,527751 | 0 |
| 1 | 2,237912 | 1,283587 | -72,558215 | 245,185584 | 0,000000 | 0,000000 | 72 |
| 2 | 1,178294 | 1,283529 | -0,968770 | 245,185584 | 0,000004 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 5,940952 | 1,281804 | 1,259521 | 245,185584 | 0,000554 | 0,000020 | 4 |
| 4 | 14,817337 | 1,261009 | 1,271834 | 245,185584 | 0,004839 | 0,000581 | 5 |
| 5 | 0,453835 | 1,256928 | 1,245212 | 245,185584 | 0,002410 | 0,000289 | 4 |
| 6 | 0,452644 | 1,255922 | 1,255716 | 245,185584 | 0,001958 | 0,000235 | 4 |
| 7 | 70,780954 | 1,255922 | 1,327063 | 245,185584 | 0,001958 | 0,000235 | 1 |
| 8 | 20,147485 | 1,255658 | 1,205674 | 245,185584 | 0,001894 | 0,000227 | 3 |
| 9 | 1,510278 | 1,255033 | 1,237435 | 245,185584 | 0,001754 | 0,000211 | 4 |
| 10 | 107,490943 | 1,255033 | 1,361742 | 245,185584 | 0,001754 | 0,000211 | 1 |
| 11 | 21,405040 | 1,254846 | 1,170646 | 245,185584 | 0,001665 | 0,000200 | 3 |
| 12 | 0,714575 | 1,254039 | 1,235588 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 4 |
| 13 | 0,453447 | 1,254039 | 1,253416 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |
| 14 | 0,453447 | 1,254039 | 1,254018 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |
| 15 | 0,453447 | 1,254039 | 1,254039 | 245,185584 | 0,001278 | 0,000153 | 1 |

No caso C2 na Tabela 5.35, mesmo que o valor da maior tensão tenha decrescido em comparação ao caso anterior, as outras variáveis tiveram um aumento.

Tabela 5.35: Solução Final IEEE 118 - caso C2.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 69 | 3 | 1,0448 | -0,2885 | 0,9421 | 0,0000 | 0,0000 | -0,5754 | 0,0002 | 0,4041 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 2 | 1,0498 | -0,0981 | 0,9972 | 0,0000 | 0,0001 | -0,4701 | 0,0037 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0000 |
| 66 | 2 | 1,0374 | -0,8039 | 0,8602 | 0,0000 | 0,0000 | -0,5822 | 0,0129 | 0,0317 | 0,0000 | 0,0000 |
| 80 | 2 | 1,0372 | -0,1095 | 0,8577 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4290 | 0,0001 | 0,4672 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 2 | 1,0369 | -0,0063 | 0,8543 | 0,0000 | 0,0000 | -0,7952 | 0,0024 | 0,1945 | 0,0000 | 0,0000 |
| 26 | 2 | 1,0305 | 0,0173 | 0,7832 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5025 | 0,0000 | 0,5243 | 0,0000 | 0,0000 |
| 76 | 2 | 0,9696 | 0,3169 | 0,1070 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1928 | -0,0504 | 0,8795 | 0,0000 | 0,0000 |
| 74 | 2 | 0,9832 | 0,0296 | 0,2579 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0047 | -0,0240 | 0,4313 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 2 | 0,9909 | 0,0287 | 0,3428 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1495 | -0,0080 | 0,9965 | 0,0000 | 0,0000 |
| 65 | 2 | 0,9985 | 0,0052 | 0,4278 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0468 | 0,0014 | 0,2333 | 0,0000 | 0,0000 |
| 19 | 2 | 0,9987 | 0,0034 | 0,4303 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0295 | -0,0051 | 0,3423 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 1,0393 | -0,0169 | 0,8815 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 1,0262 | -0,0179 | 0,7352 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 17 | 0 | 1,0248 | -0,0200 | 0,7195 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 37 | 0 | 1,0232 | -0,0210 | 0,7027 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 98 | 0 | 1,0230 | -0,0211 | 0,7002 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 118 | 0 | 0,9738 | 0,1316 | 0,1528 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 38 | 0 | 0,9824 | 0,0707 | 0,2487 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 21 | 0 | 0,9882 | 0,0232 | 0,3134 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 45 | 0 | 0,9887 | 0,0188 | 0,3187 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 95 | 0 | 0,9890 | 0,0209 | 0,3227 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Esse pequeno aumento nas tensões pode ser percebido na Tabela 5.36 devido a um aumento da função objetivo em relação ao casos C1, C1A e C1B.

Tabela 5.36: Convergência para o IEEE 118 - caso C2.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f^c | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5892,126231 | 0,000000 | -442,206237 | 590,000000 | 6,070000 | 1,668142 | 0 |
| 1 | 2,810924 | 1,271071 | -72,490559 | 245,185584 | 0,000001 | 0,000000 | 27 |
| 2 | 1,558835 | 1,271771 | -1,048255 | 245,185584 | 0,000005 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 12536,726873 | 1,268571 | 13,835704 | 245,185584 | 0,000903 | 0,000048 | 6 |
| 4 | 82,981337 | 1,250067 | -6,340183 | 245,185584 | 0,002782 | 0,000329 | 5 |

| | | | | | | | |
|---|----------|----------|----------|------------|----------|----------|---|
| 5 | 7,267009 | 1,249976 | 1,233925 | 245,185584 | 0,002712 | 0,000320 | 3 |
| 6 | 0,458665 | 1,247560 | 1,241199 | 245,185584 | 0,001894 | 0,000223 | 4 |
| 7 | 0,458665 | 1,247560 | 1,247541 | 245,185584 | 0,001894 | 0,000223 | 1 |
| 8 | 0,458322 | 1,247150 | 1,247150 | 245,185584 | 0,001826 | 0,000215 | 3 |

Os casos C3 e C4 devido ao aumento do limite inferior de tensão também houve um leve aumento no valores de magnitude de tensão em todas as barras, como pode ser visto nas tabelas 5.37 e 5.38.

Tabela 5.37: Solução Final IEEE 118 - caso C3.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 69 | 3 | 1,0479 | -0,7324 | 0,9741 | 0,0000 | 0,0000 | -0,6945 | 0,0004 | 0,3842 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 2 | 1,0500 | -0,1939 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0017 | -0,4652 | 0,0050 | 0,0031 | 0,0003 | 0,0000 |
| 80 | 2 | 1,0424 | -0,3446 | 0,9056 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4282 | 0,0002 | 0,4670 | 0,0000 | 0,0000 |
| 66 | 2 | 1,0388 | -1,2289 | 0,8599 | 0,0000 | 0,0000 | -0,6646 | 0,0205 | 0,0010 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 2 | 1,0360 | -0,0086 | 0,8252 | 0,0000 | 0,0000 | -0,8195 | 0,0042 | 0,1874 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 2 | 1,0318 | -0,0420 | 0,7727 | 0,0000 | 0,0000 | 0,6226 | -0,0002 | 0,6036 | 0,0000 | 0,0000 |
| 76 | 2 | 0,9726 | 1,0112 | 0,0322 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1485 | -0,1329 | 0,7371 | 0,0000 | 0,0000 |
| 74 | 2 | 0,9900 | 0,0592 | 0,2503 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0344 | -0,0553 | 0,6293 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 2 | 0,9940 | 0,0606 | 0,3005 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1198 | -0,0145 | 0,8480 | 0,0000 | 0,0000 |
| 65 | 2 | 1,0015 | 0,0124 | 0,3943 | 0,0000 | 0,0000 | -0,1209 | 0,0029 | 0,2056 | 0,0000 | 0,0000 |
| 19 | 2 | 1,0047 | 0,0053 | 0,4338 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0468 | -0,0090 | 0,3963 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 1,0393 | -0,0327 | 0,8659 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 1,0303 | -0,0352 | 0,7532 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 17 | 0 | 1,0298 | -0,0438 | 0,7481 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 37 | 0 | 1,0287 | -0,0486 | 0,7335 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 98 | 0 | 1,0281 | -0,0452 | 0,7259 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 118 | 0 | 0,9781 | 0,3514 | 0,1011 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 38 | 0 | 0,9864 | 0,2010 | 0,2054 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 45 | 0 | 0,9927 | 0,0400 | 0,2842 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 63 | 0 | 0,9931 | 0,0730 | 0,2892 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 21 | 0 | 0,9935 | 0,0486 | 0,2936 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Tabela 5.38: Solução Final IEEE 118 - caso C4.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|---------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 69 | 3 | 1,0497 | -1,3374 | 0,9963 | 0,0000 | 0,0000 | -0,9395 | 0,0004 | 0,3434 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 2 | 1,0476 | -0,4258 | 0,9656 | 0,0000 | 0,0000 | -0,3661 | 0,0073 | 0,0558 | 0,0000 | 0,0000 |
| 80 | 2 | 1,0469 | -0,8539 | 0,9558 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3311 | 0,0002 | 0,4452 | 0,0000 | 0,0000 |
| 66 | 2 | 1,0439 | -1,0228 | 0,9123 | 0,0000 | 0,0000 | -0,6693 | 0,0201 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 2 | 1,0416 | -0,0089 | 0,8800 | 0,0000 | 0,0000 | -0,8504 | 0,0040 | 0,1785 | 0,0000 | 0,0000 |
| 73 | 2 | 1,0401 | -0,1061 | 0,8584 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2300 | -0,0004 | 0,6150 | 0,0000 | 0,0000 |
| 76 | 2 | 0,9841 | 2,3415 | 0,0586 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2217 | -0,2445 | 0,9728 | 0,0000 | 0,0000 |
| 74 | 2 | 0,9972 | 0,0729 | 0,2452 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0330 | -0,0847 | 0,6198 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 2 | 1,0013 | 0,0828 | 0,3037 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1478 | -0,0137 | 0,9884 | 0,0000 | 0,0000 |
| 65 | 2 | 1,0079 | 0,0168 | 0,3986 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0373 | 0,0031 | 0,2646 | 0,0000 | 0,0000 |
| 104 | 2 | 1,0102 | 0,0088 | 0,4309 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1290 | -0,0059 | 0,6742 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 1,0455 | -0,0466 | 0,9353 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 5 | 0 | 1,0353 | -0,0458 | 0,7897 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 37 | 0 | 1,0349 | -0,0775 | 0,7846 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 17 | 0 | 1,0346 | -0,0635 | 0,7797 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 98 | 0 | 1,0327 | -0,0604 | 0,7535 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 118 | 0 | 0,9873 | 0,6448 | 0,1044 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 38 | 0 | 0,9916 | 0,4009 | 0,1659 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 45 | 0 | 0,9976 | 0,0533 | 0,2513 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 63 | 0 | 0,9980 | 0,1057 | 0,2576 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 21 | 0 | 0,9989 | 0,0633 | 0,2693 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Consequentemente, as perdas de potência ativa também diminuem para os dois casos, como pode-se ver nas tabelas 5.39 e 5.40

Tabela 5.39: Convergência para o IEEE 18 - caso C3.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f^c | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5892,126231 | 0,000000 | -442,206237 | 590,000000 | 6,070000 | 1,668142 | 0 |
| 1 | 3,721258 | 1,258940 | -72,311403 | 245,185584 | 0,000001 | 0,000000 | 31 |
| 2 | 2,251297 | 1,260512 | -1,154128 | 245,185584 | 0,000005 | 0,000000 | 3 |
| 3 | 1600,143754 | 1,256102 | 2,823570 | 245,185584 | 0,001050 | 0,000084 | 5 |
| 4 | 11,810792 | 1,240568 | 0,231335 | 245,185584 | 0,002961 | 0,000341 | 4 |

| | | | | | | | |
|---|----------|----------|----------|------------|----------|----------|---|
| 5 | 0,469370 | 1,240181 | 1,232543 | 245,185584 | 0,002857 | 0,000329 | 3 |
| 6 | 0,469257 | 1,240122 | 1,240099 | 245,185584 | 0,002841 | 0,000327 | 3 |
| 7 | 3,121532 | 1,240122 | 1,240434 | 245,185584 | 0,002841 | 0,000327 | 1 |
| 8 | 0,468539 | 1,239838 | 1,239539 | 245,185584 | 0,002750 | 0,000316 | 3 |
| 9 | 0,468539 | 1,239838 | 1,239837 | 245,185584 | 0,002750 | 0,000316 | 1 |

Tabela 5.40: Convergência para o IEEE 118 - caso C4.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_C | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5892,126231 | 0,000000 | -442,206237 | 590,000000 | 6,070000 | 1,668142 | 0 |
| 1 | 5,402876 | 1,247274 | -71,829574 | 245,185584 | 0,000000 | 0,000000 | 28 |
| 2 | 3,624112 | 1,248821 | -1,154355 | 245,185584 | 0,000008 | 0,000001 | 2 |
| 3 | 1327,579518 | 1,244163 | 2,512113 | 245,185584 | 0,001057 | 0,000091 | 5 |
| 4 | 21,356151 | 1,234875 | 0,218869 | 245,185584 | 0,001853 | 0,000209 | 4 |
| 5 | 0,476134 | 1,231649 | 1,211807 | 245,185584 | 0,001869 | 0,000215 | 4 |
| 6 | 10,546605 | 1,231649 | 1,232662 | 245,185584 | 0,001869 | 0,000215 | 1 |
| 7 | 0,472689 | 1,230199 | 1,229219 | 245,185584 | 0,001609 | 0,000185 | 4 |
| 8 | 0,463513 | 1,227783 | 1,227781 | 245,185584 | 0,001079 | 0,000125 | 4 |
| 9 | 0,463513 | 1,227783 | 1,227783 | 245,185584 | 0,001079 | 0,000125 | 1 |

Ao estabelecer os limites de tensão em 0.99 e 1.05, a solução obtida no caso C5 eleva as tensões mas não há mais diminuição de perda ativa no sistema. A Tabela 5.41 tem-se as variáveis obtidas pelo MBM e na Tabela 5.42 seu comportamento.

Tabela 5.41: Solução Final IEEE 118 - caso C5.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|----------|--------|--------------|--------------|---------|---------|--------|--------------|--------------|
| 69 | 3 | 1,0476 | -44,7670 | 0,9604 | 0,0000 | 0,0000 | -1,4406 | 0,0045 | 0,2599 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 2 | 1,0500 | -8,3748 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0657 | 0,1726 | 0,2136 | 0,0000 | 0,0000 |
| 80 | 2 | 1,0496 | -38,2449 | 0,9936 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1120 | 0,0027 | 0,3959 | 0,0000 | 0,0000 |
| 66 | 2 | 1,0494 | -18,5108 | 0,9905 | 0,0000 | 0,0000 | -0,3722 | 0,3619 | 0,1114 | 0,0000 | 0,0000 |
| 73 | 2 | 1,0487 | -8,9608 | 0,9789 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2074 | -0,0029 | 0,6036 | 0,0000 | 0,0000 |
| 89 | 2 | 1,0372 | -4,0496 | 0,7868 | 0,0000 | 0,0000 | -0,2363 | 0,0025 | 0,3654 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|--------|---------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|
| 76 | 2 | 0,9904 | 71,4409 | 0,0068 | 0,0000 | 0,0000 | 0,2193 | -7,4610 | 0,9655 | 0,0000 | 0,0000 |
| 1 | 2 | 1,0031 | 4,6649 | 0,2189 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1047 | -0,4617 | 0,7732 | 0,0000 | 0,0000 |
| 74 | 2 | 1,0064 | 4,0516 | 0,2738 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0834 | -2,7447 | 0,9562 | 0,0000 | 0,0000 |
| 26 | 2 | 1,0079 | 3,0799 | 0,2988 | 0,0000 | 0,0000 | -0,4870 | 0,0000 | 0,4751 | 0,0000 | 0,0000 |
| 65 | 2 | 1,0106 | 1,2260 | 0,3431 | 0,0000 | 0,0000 | -0,2941 | 0,0174 | 0,1407 | 0,0000 | 0,0000 |
| 37 | 0 | 1,0412 | -5,9785 | 0,8526 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 71 | 0 | 1,0400 | -3,2923 | 0,8330 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0395 | -2,5240 | 0,8250 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 17 | 0 | 1,0385 | -4,0524 | 0,8086 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 98 | 0 | 1,0367 | -3,9208 | 0,7783 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 118 | 0 | 0,9939 | 24,8169 | 0,0656 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 38 | 0 | 0,9956 | 22,2965 | 0,0926 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 63 | 0 | 1,0014 | 6,5124 | 0,1907 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 45 | 0 | 1,0030 | 3,4971 | 0,2171 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |
| 52 | 0 | 1,0042 | 3,9673 | 0,2369 | 0,0000 | 0,0000 | | | | | |

Tabela 5.42: Convergência para o IEEE 118 - caso C5.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV, PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|-------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5892,126231 | 0,000000 | -442,206237 | 590,000000 | 6,070000 | 1,668142 | 0 |
| 1 | 9,240494 | 1,236173 | -70,233313 | 245,185584 | 0,000005 | 0,000000 | 24 |
| 2 | 8,421240 | 1,240302 | -1,409921 | 245,185584 | 0,000006 | 0,000000 | 4 |
| 3 | 8063,680501 | 1,235460 | 9,225810 | 245,185584 | 0,000581 | 0,000047 | 4 |
| 4 | 1266,180706 | 1,233318 | -4,542105 | 245,185584 | 0,000506 | 0,000039 | 4 |
| 5 | 397,126768 | 1,232946 | -0,056569 | 245,185584 | 0,000490 | 0,000038 | 3 |
| 6 | 29,380030 | 1,231386 | 0,862743 | 245,185584 | 0,000447 | 0,000034 | 4 |
| 7 | 4,340030 | 1,229417 | 1,202730 | 245,185584 | 0,000649 | 0,000090 | 7 |
| 8 | 4,340447 | 1,229417 | 1,229291 | 245,185584 | 0,000649 | 0,000090 | 1 |
| 9 | 4,286454 | 1,229482 | 1,229482 | 245,185584 | 0,000646 | 0,000090 | 3 |

Para o caso C6 que tem como limites de tensão de 1 e 1,05 o MBM não convergiu. A Tabela 5.43 apresenta os valores das variáveis obtidas na 3ª iteração.

Tabela 5.43: Solução Final IEEE 118 - 4^a iteração do caso C6.

| Barra | Tipo | V | π^V | sv | μ_{sv}^- | μ_{sv}^+ | Q_G | π^Q | sq | μ_{sq}^- | μ_{sq}^+ |
|-------|------|--------|-----------|---------|--------------|--------------|---------|-----------|--------|--------------|--------------|
| 69 | 3 | 1,0516 | -680,5019 | 1,0323 | 0,0069 | 34,0320 | -1,6098 | 0,0043 | 0,2317 | 0,0273 | 0,0015 |
| 80 | 2 | 1,0518 | -675,6229 | 1,0362 | 0,0069 | 33,7881 | -0,2758 | 0,0025 | 0,3088 | 0,0132 | 0,0021 |
| 24 | 2 | 1,0517 | -31,8275 | 1,0342 | 0,0114 | 1,7494 | 0,1684 | -0,0001 | 0,5281 | 0,0044 | 0,0048 |
| 73 | 2 | 1,0516 | -168,3624 | 1,0328 | 0,0082 | 8,4263 | 0,1353 | -0,0017 | 0,5676 | 0,0034 | 0,0067 |
| 72 | 2 | 1,0516 | -42,1866 | 1,0313 | 0,0115 | 2,1208 | 0,0111 | 0,0002 | 0,5055 | 0,0048 | 0,0045 |
| 89 | 2 | 1,0511 | -38,1977 | 1,0212 | 0,0102 | 1,9201 | -0,1902 | 0,0015 | 0,3745 | 0,0103 | 0,0025 |
| 76 | 2 | 0,9980 | 1385,5767 | -0,0399 | 69,2856 | 0,0066 | 0,2407 | -124,0456 | 1,0347 | 0,0006 | 38,4548 |
| 26 | 2 | 1,0062 | 8,0734 | 0,1249 | 0,4175 | 0,0138 | -0,5194 | 0,0000 | 0,4740 | 0,0050 | 0,0043 |
| 1 | 2 | 1,0095 | 8,1173 | 0,1894 | 0,4190 | 0,0132 | 0,1132 | -0,7120 | 0,8160 | 0,0010 | 0,1434 |
| 65 | 2 | 1,0130 | 2,0379 | 0,2608 | 0,1248 | 0,0230 | -0,5210 | 0,0209 | 0,0558 | 0,0573 | 0,0014 |
| 74 | 2 | 1,0135 | 4,5571 | 0,2700 | 0,2439 | 0,0161 | 0,0945 | -38,2835 | 1,0300 | 0,0007 | 5,7432 |
| 37 | 0 | 1,0489 | -44,2412 | 0,9789 | 0,0093 | 2,2213 | | | | | |
| 71 | 0 | 1,0460 | -15,8774 | 0,9204 | 0,0115 | 0,8054 | | | | | |
| 17 | 0 | 1,0453 | -13,2646 | 0,9065 | 0,0117 | 0,6749 | | | | | |
| 98 | 0 | 1,0435 | -9,5008 | 0,8697 | 0,0127 | 0,4877 | | | | | |
| 9 | 0 | 1,0430 | -6,8676 | 0,8603 | 0,0142 | 0,3576 | | | | | |
| 118 | 0 | 1,0010 | 165,8257 | 0,0208 | 8,2990 | 0,0077 | | | | | |
| 38 | 0 | 1,0022 | 127,4486 | 0,0449 | 6,3804 | 0,0079 | | | | | |
| 63 | 0 | 1,0049 | 19,3144 | 0,0980 | 0,9763 | 0,0106 | | | | | |
| 52 | 0 | 1,0073 | 9,7776 | 0,1456 | 0,5014 | 0,0125 | | | | | |
| 45 | 0 | 1,0080 | 7,4908 | 0,1602 | 0,3881 | 0,0136 | | | | | |

Não Convergiu.

Comparando as tensões da Tabela 5.43, e o gráfico do perfil de tensão na 30^a iteração no Apêndice C, nota-se que que todas as tensões aumentaram, algumas extrapolam o limite superior e em outras o aumento de tensão não é o suficiente para atingir o limite inferior estipulado no caso C6. Veja na tabela 5.44, que a 3^a iteração do ciclo externo comparada com a 3^a iteração dos casos C4 e C5, o valor das perdas de potências e atendimento de carga foram bem melhores.

Tabela 5.44: Convergência para o IEEE 118 - 4ª iteração do caso C6.

| It. ex. | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(\theta, V)$ | $f_{bm}(\theta, V, \mu_{sq}, \mu_{sv})$ | f_c | $\ \Delta P_{PV,PQ}\ $ | $\ \Delta Q_{PQ}\ $ | # it. in. |
|---------|----------------------------|----------------|---|------------|------------------------|---------------------|-----------|
| 0 | 5892,126231 | 0,000000 | -442,206237 | 590,000000 | 6,070000 | 1,668142 | 0 |
| 1 | 25,104813 | 1,226033 | -60,549796 | 245,185584 | 0,000000 | 0,000000 | 23 |
| 2 | 42,455408 | 1,230690 | -5,661094 | 245,185584 | 0,000005 | 0,000000 | 5 |
| 3 | 65,345810 | 1,228734 | 7,301441 | 245,185584 | 0,000010 | 0,000000 | 5 |

No Apêndice C está o gráfico com o perfil de tensão na 30ª iteração deste caso.

Os gráficos com os valores referente a convergência e comportamento do MBM podem ser vistos no Apêndice D.

Na Tabela 5.45 têm os valores do perda de potência ativa e as menores e maiores tensões obtidas nos casos analisados para o sistema IEEE 118 comparado com o caso base obtido pelo FP.

Tabela 5.45: Perda de potência ativa e máximo e mínimo de tensões IEEE 118.

| Testes | $f(\theta, V)$ | $V_{SL,PV}^{min}$ | $V_{SL,PV}^{max}$ | V_{PQ}^{min} | V_{PQ}^{max} |
|--------|----------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|
| CB | 1,3248 | 0,9430 | 1,0500 | 0,9460 | 1,0429 |
| C1 | 1,2540 | 0,9659 | 1,0500 | 1,0425 | 0,9690 |
| C1A | 1,2540 | 0,9659 | 1,0500 | 1,0425 | 0,9690 |
| C1B | 1,2540 | 0,9659 | 1,0500 | 1,0425 | 0,9690 |
| C2 | 1,2415 | 0,9696 | 1,0498 | 0,9738 | 1,0393 |
| C3 | 1,2398 | 0,9726 | 1,0500 | 0,9781 | 1,0393 |
| C4 | 1,2278 | 0,9841 | 1,0497 | 0,9873 | 1,0455 |
| C5 | 1,2295 | 0,9904 | 1,0500 | 0,9939 | 1,0412 |

5.4 Cometários Finais

Os resultados obtidos nos testes são satisfatórias. As soluções obtidas são boas e a média de iterações também. Foi comprovado através dos testes que mesmo inicializando em pontos diferentes o MBM obtém a mesma solução .

As características físicas do sistema afetam na convergência do método, como no caso do sistema IEEE 57 barras que não convergiu no intervalo de 0,95 e 1,05.

As solução obtidas para os casos que não convergiram são aproveitáveis apesar de estarem um pouco fora dos limites estipulados de tensão elas atendem a carga.

Conclusões e Perspectivas

Nesta Tese foi apresentado o MBM seguindo o princípio de RNL, que visa transformar as restrições e função objetivo do PNL original em um outro PNL equivalente. Os passos principais dos métodos baseados neste princípio consistem em sucessivas minimizações da função lagrangeana do PNL equivalente seguida pelas atualizações das variáveis duais.

As transformações do PNL original não alteram o seu conjunto solução mas possibilita reescalonar as restrições de uma tal maneira que a região factível fique relaxada admitindo pontos infactíveis.

O MBM reescalona as restrições de desigualdades através da função barreira logarítmica modificada que combina as melhores propriedades das funções Lagrangeana e barreira clássicas, eliminando as deficiências das mesmas. Devido as transformações da região factível, os pontos gerados pelo MBM podem ser infactíveis em relação ao PNL original. A eficiência e robustez deste método foram comprovados através de testes com sistemas elétricos: IEEE 30, IEEE 57 e IEEE 118 barras.

Uma outra vantagem do MBM é permitir que problemas que possuem soluções nas margens da região factível não se desestabilize, enquanto que os métodos com funções de barreira clássica tendem ao infinito caso isso ocorra.

Os trabalhos que utilizam as funções barreira modificada, todos são desenvolvidos a partir do enfoque de pontos interiores e não do princípio de RNL. O MBM apresentado neste trabalho permite que os pontos gerados possam ser infactíveis, diferentemente dos métodos sob o enfoque de pontos interiores.

O problema de FPRO foi reescrito com variáveis auxiliares que contribuíram na análise dos resultados e determinação dos pontos iniciais. As únicas variáveis que precisam estar na região factível relaxada quando aplica-se o MBM são as auxiliares.

Foi observado nos resultados dos testes realizados que a primeira iteração do ciclo externo

sempre há um número maior de iterações internas levando ao atendimento de carga. Com a factibilidade garantida o número de iteração interna decresce nas iterações externas seguintes.

Em relação aos resultados obtidos dos testes onde as magnitudes de tensão foram inicializadas em pontos diferentes, notou-se uma diferença em relação à convergência do método. No sistema IEEE 30 e IEEE 57 barras o caso C1B onde as magnitudes de tensão iniciaram na infactibilidade foi o mais rápido, já para o sistema IEEE 118 barras o caso C1 onde as tensões foram inicializadas na factibilidade teve menos iterações comparados com os outros casos com magnitudes de tensão infactíveis.

As soluções obtidas nos sistemas IEEE 30, IEEE 57 e IEEE 118 barras foram satisfatórias nos quesitos factibilidade e otimalidade.

Para o sistema IEEE 30 barras a perda de potência ativa obteve o menor valor, ou seja, foi o mais ótimo, no caso base, com 0,1755 p.u., em relação aos outros casos analisados. Isso deve-se ao fato da maior tensão obtida no FC, que é de 1,0820 p.u. em uma barra de controle de tensão, possuir um valor superior ao limite máximo de magnitude de tensão estipulado que é de 1,05 p.u. realizado nos testes.

O sistema IEEE 57 barras foi o que teve menos testes pois o limite estipulado mínimo e máximo das tensões em 0,95 e 1,05 p.u. não atingiram a convergência do MBM. Para os limites de tensão de 0,94 e 1,05 p.u. o método obteve 28 iterações no ciclo externo, quase sendo descartado devido ao limite máximo de 30 de iterações externas permitidas pelo MBM. Mesmo com o aumento das magnitudes de tensão da barras de carga, o valor de perda de potência ativa foi o maior obtido entre os outros casos analisados. Nos casos C1, C1A e C1B o MBM convergiu para a solução em poucas iterações tanto no ciclo interno quanto externo. O valor de perda de potência ativa para esses casos foram menores que o caso base.

O sistema IEEE 118 barras foi o caso que teve mais testes, pois o MBM só deixou de convergir quando foi estipulado os limites de tensão ente 1 e 1,05. Apesar da convergência lenta em comparação aos sistemas IEEE 30 e IEEE 57 barras os resultados obtidos foram muito bons.

As soluções geradas pelo MBM foram boas e mesmo para os casos que não convergiram os resultados podem ser aproveitados, pois o perfil de magnitude de tensão é semelhante aos casos que convergiram. Operacionalmente todos os resultados foram satisfatórios. Um outro ponto interessante é que na primeira iteração do ciclo externo o atendimento de carga (que é uma restrição importante do FPRO) já é atendida.

Para os trabalhos futuros pretende-se:

- melhorar controle de passo,
- melhorar a atualização do parâmetro de barreira,

- utilizar técnica de esparsidade,
- testar em sistemas reais,
- comparar com uma outra versão do método de barreira modificada,
- testar com outras funções objetivo,
- inserir *tap*.

Os dois primeiros itens têm o intuito de acelerar a convergência reduzindo o número de iterações e a técnica de esparsidade pretende melhorar o tempo computacional para problemas grandes.

Resultados gerados pelo MBM para o exemplo ilustrativo

Neste apêndice são apresentados os resultados de cada iteração externa gerada pelo MBM para o PNL exemplo (3.33) apresentado na subseção 3.5.3 para duas inicializações diferentes.

O primeiro resultado apresentado é a solução do PNL (3.34) pelo MBM inicializando em $x^{(0)} = (-1, 3)^t$. As simplificações it. ex. e it. in que aparecem nas tabelas significam, respectivamente, iteração externa e interna. O símbolo # denota quantidade, assim, # it. in representa quantidade de iterações internas.

Na Tabela A.1 estão os valores de todas as variáveis primais e multiplicadores de Lagrange e na Tabela A.2 estão os valores das variáveis duais gerados em cada iteração externa do MBM:

Tabela A.1: Valores das variáveis primais e multiplicadores de Lagrange.

| It. Ex. | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | λ_1 | π_2 | π_2 |
|---------|---------|--------|---------|---------|-------------|---------|---------|
| 0 | -1,0000 | 3,0000 | -0,5000 | 1,5000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1 | 1,6281 | 1,3719 | 1,6395 | -0,2563 | -1,4623 | 2,3948 | -0,9014 |
| 2 | 1,4773 | 1,5227 | 1,3298 | 0,0454 | -2,1661 | 3,9757 | -1,0593 |
| 3 | 1,3613 | 1,6387 | 1,1072 | 0,2775 | -3,3744 | 6,0598 | -0,6303 |
| 4 | 1,3134 | 1,6866 | 1,0191 | 0,3733 | -4,2571 | 7,3641 | -0,1502 |
| 5 | 1,3036 | 1,6964 | 1,0015 | 0,3928 | -4,4880 | 7,6841 | -0,0133 |

Tabela A.2: Valores das variáveis duais.

| It. Ex. | μ_1^- | μ_1^+ | μ_2^- | μ_2^+ |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1 | 0,3789 | 2,7738 | 1,3446 | 0,4432 |
| 2 | 0,1626 | 4,1388 | 1,2861 | 0,2268 |
| 3 | 0,0376 | 6,0995 | 0,7019 | 0,0716 |
| 4 | 0,0037 | 7,3696 | 0,1610 | 0,0108 |
| 5 | 0,0001 | 7,6858 | 0,0139 | 0,0006 |

Na Tabela A.3 estão presentes as quantidades de iterações internas que foram necessárias em cada ciclo externo, os valores da norma do gradiente da lagrangeana associada ao problema (3.34), os valores das folgas complementares (fc) e os valores das funções $f(x)$ e $f(x) + \mathcal{B}(\mu)$ geradas em cada iteração externa pelo MBM.

Tabela A.3: Valores das folgas complementares, normas e funções objetivo.

| It. Ex. | # It. In. | <i>folgas</i> | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(x)$ | $f(x) + \mathcal{B}(\mu)$ |
|---------|-----------|---------------|----------------------------|------------|---------------------------|
| 0 | 14 | 1,500000 | 125,776588 | 130,000000 | 129,553713 |
| 1 | 4 | 1,773754 | 0,000049 | 1,263679 | 3,763200 |
| 2 | 5 | 1,365063 | 0,000692 | 2,533728 | 3,843475 |
| 3 | 5 | 0,653570 | 0,002075 | 3,838293 | 4,439195 |
| 4 | 4 | 0,141124 | 0,001841 | 4,465465 | 4,590797 |
| 5 | 3 | 0,011710 | 0,001610 | 4,599670 | 4,610286 |

Os resultados gerados com a inicialização $x^{(0)} = (-1, -1)^t$ podem ser conferidos nas tabelas A.4, A.5 e A.6:

Tabela A.4: Valores das variáveis primais e multiplicadores de Lagrange.

| It. Ex. | x_1 | x_2 | s_1 | s_2 | λ_1 | π_1 | π_2 |
|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|---------|---------|
| 0 | -1,0000 | -1,0000 | -0,5000 | 1,5000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1 | 1,6281 | 1,3719 | 1,6395 | -0,2563 | -1,4623 | 2,3948 | -0,9014 |
| 2 | 1,4773 | 1,5227 | 1,3298 | 0,0454 | -2,1661 | 3,9757 | -1,0593 |
| 3 | 1,3613 | 1,6387 | 1,1072 | 0,2775 | -3,3744 | 6,0598 | -0,6303 |
| 4 | 1,3134 | 1,6866 | 1,0191 | 0,3733 | -4,2571 | 7,3641 | -0,1502 |
| 5 | 1,3036 | 1,6964 | 1,0015 | 0,3928 | -4,4880 | 7,6841 | -0,0133 |

Tabela A.5: Valores das variáveis duais.

| It. Ex. | μ_1^- | μ_1^+ | μ_2^- | μ_2^+ |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1 | 0,3789 | 2,7738 | 1,3446 | 0,4432 |
| 2 | 0,1626 | 4,1388 | 1,2861 | 0,2268 |
| 3 | 0,0376 | 6,0995 | 0,7019 | 0,0716 |
| 4 | 0,0037 | 7,3696 | 0,1610 | 0,0108 |
| 5 | 0,0001 | 7,6858 | 0,0139 | 0,0006 |

Tabela A.6: Valores das folgas complementares, normas e funções objetivo.

| It. Ex. | # | It. In. | <i>folgas</i> | $\ \nabla \mathcal{L}_o\ $ | $f(x)$ | $f(x) + \mathcal{B}(\mu)$ |
|---------|---|---------|---------------|----------------------------|-----------|---------------------------|
| 0 | | 14 | 1,500000 | 106,366113 | 82,000000 | 81,553713 |
| 1 | | 4 | 1,773754 | 0,000049 | 1,263679 | 3,763200 |
| 2 | | 5 | 1,365063 | 0,000692 | 2,533728 | 3,843475 |
| 3 | | 5 | 0,653570 | 0,002075 | 3,838293 | 4,439195 |
| 4 | | 4 | 0,141124 | 0,001841 | 4,465465 | 4,590797 |
| 5 | | 3 | 0,011710 | 0,001610 | 4,599670 | 4,610286 |

Valores especificados dos sistemas IEEE 30,IEEE 57 e IEEE 118

B.1 IEEE 30

Tabela B.1: Valores especificados do IEEE 30.

| Barra | Tipo | P_G | P_C | Q_G | Q_C | Q_G^{min} | Q_G^{max} |
|-------|------|--------|--------|---------|--------|-------------|-------------|
| 1 | 3 | 2,6020 | 0,0000 | -0,1610 | 0,0000 | -1,0000 | 1,0000 |
| 2 | 2 | 0,4000 | 0,2170 | 0,5000 | 0,1270 | -0,4000 | 0,5000 |
| 5 | 2 | 0,0000 | 0,9420 | 0,3700 | 0,1900 | -0,4000 | 0,4000 |
| 8 | 2 | 0,0000 | 0,3000 | 0,3730 | 0,3000 | -0,1000 | 0,4000 |
| 11 | 2 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1620 | 0,0000 | -0,0600 | 0,2400 |
| 13 | 2 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1060 | 0,0000 | -0,0600 | 0,2400 |
| 3 | 0 | 0,0000 | 0,0240 | 0,0000 | 0,0120 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0 | 0,0000 | 0,0760 | 0,0000 | 0,0160 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 7 | 0 | 0,0000 | 0,2280 | 0,0000 | 0,1090 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 0 | 0,0000 | 0,0580 | 0,0000 | 0,0200 | 0,0000 | 0,0000 |
| 12 | 0 | 0,0000 | 0,1120 | 0,0000 | 0,0750 | 0,0000 | 0,0000 |
| 14 | 0 | 0,0000 | 0,0620 | 0,0000 | 0,0160 | 0,0000 | 0,0000 |
| 15 | 0 | 0,0000 | 0,0820 | 0,0000 | 0,0250 | 0,0000 | 0,0000 |
| 16 | 0 | 0,0000 | 0,0350 | 0,0000 | 0,0180 | 0,0000 | 0,0000 |
| 17 | 0 | 0,0000 | 0,0900 | 0,0000 | 0,0580 | 0,0000 | 0,0000 |
| 18 | 0 | 0,0000 | 0,0320 | 0,0000 | 0,0090 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 19 | 0 | 0,0000 | 0,0950 | 0,0000 | 0,0340 | 0,0000 | 0,0000 |
| 20 | 0 | 0,0000 | 0,0220 | 0,0000 | 0,0070 | 0,0000 | 0,0000 |
| 21 | 0 | 0,0000 | 0,1750 | 0,0000 | 0,1120 | 0,0000 | 0,0000 |
| 22 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 23 | 0 | 0,0000 | 0,0320 | 0,0000 | 0,0160 | 0,0000 | 0,0000 |
| 24 | 0 | 0,0000 | 0,0870 | 0,0000 | 0,0670 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 26 | 0 | 0,0000 | 0,0350 | 0,0000 | 0,0230 | 0,0000 | 0,0000 |
| 27 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 28 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 29 | 0 | 0,0000 | 0,0240 | 0,0000 | 0,0090 | 0,0000 | 0,0000 |
| 30 | 0 | 0,0000 | 0,1060 | 0,0000 | 0,0190 | 0,0000 | 0,0000 |

B.2 IEEE 57

Tabela B.2: Valores especificados do IEEE 57.

| Barra | Tipo | P_G | P_C | Q_G | Q_C | Q_G^{min} | Q_G^{max} |
|-------|------|--------|--------|---------|--------|-------------|-------------|
| 1 | 3 | 1,2890 | 0,5500 | -0,1610 | 0,1700 | -1,0000 | 1,0000 |
| 2 | 2 | 0,0000 | 0,0300 | -0,0080 | 0,8800 | -0,1700 | 0,5000 |
| 3 | 2 | 0,4000 | 0,4100 | -0,0100 | 0,2100 | -0,1000 | 0,6000 |
| 6 | 2 | 0,0000 | 0,7500 | 0,0080 | 0,0200 | -0,0800 | 0,2500 |
| 8 | 2 | 4,5000 | 1,5000 | 0,6210 | 0,2200 | -1,4000 | 2,0000 |
| 9 | 2 | 0,0000 | 1,2100 | 0,0220 | 0,2600 | -0,0300 | 0,0900 |
| 12 | 2 | 3,1000 | 3,7700 | 1,2850 | 0,2400 | -1,5000 | 1,5500 |
| 4 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 0 | 0,0000 | 0,1300 | 0,0000 | 0,0400 | 0,0000 | 0,0000 |
| 7 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 0 | 0,0000 | 0,0500 | 0,0000 | 0,0200 | 0,0000 | 0,0000 |
| 11 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 13 | 0 | 0,0000 | 0,1800 | 0,0000 | 0,0230 | 0,0000 | 0,0000 |
| 14 | 0 | 0,0000 | 0,1050 | 0,0000 | 0,0530 | 0,0000 | 0,0000 |
| 15 | 0 | 0,0000 | 0,2200 | 0,0000 | 0,0500 | 0,0000 | 0,0000 |
| 16 | 0 | 0,0000 | 0,4300 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 17 | 0 | 0,0000 | 0,4200 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0000 |
| 18 | 0 | 0,0000 | 0,2720 | 0,0000 | 0,0980 | 0,0000 | 0,0000 |
| 19 | 0 | 0,0000 | 0,0330 | 0,0000 | 0,0060 | 0,0000 | 0,0000 |
| 20 | 0 | 0,0000 | 0,0230 | 0,0000 | 0,0100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 21 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 22 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 23 | 0 | 0,0000 | 0,0630 | 0,0000 | 0,0210 | 0,0000 | 0,0000 |
| 24 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 25 | 0 | 0,0000 | 0,0630 | 0,0000 | 0,0320 | 0,0000 | 0,0000 |
| 26 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 27 | 0 | 0,0000 | 0,0930 | 0,0000 | 0,0050 | 0,0000 | 0,0000 |
| 28 | 0 | 0,0000 | 0,0460 | 0,0000 | 0,0230 | 0,0000 | 0,0000 |
| 29 | 0 | 0,0000 | 0,1700 | 0,0000 | 0,0260 | 0,0000 | 0,0000 |
| 30 | 0 | 0,0000 | 0,0360 | 0,0000 | 0,0180 | 0,0000 | 0,0000 |
| 31 | 0 | 0,0000 | 0,0580 | 0,0000 | 0,0290 | 0,0000 | 0,0000 |
| 32 | 0 | 0,0000 | 0,0160 | 0,0000 | 0,0080 | 0,0000 | 0,0000 |
| 33 | 0 | 0,0000 | 0,0380 | 0,0000 | 0,0190 | 0,0000 | 0,0000 |
| 34 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 35 | 0 | 0,0000 | 0,0600 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 36 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 37 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 38 | 0 | 0,0000 | 0,1400 | 0,0000 | 0,0700 | 0,0000 | 0,0000 |
| 39 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 40 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 41 | 0 | 0,0000 | 0,0630 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 42 | 0 | 0,0000 | 0,0710 | 0,0000 | 0,0440 | 0,0000 | 0,0000 |
| 43 | 0 | 0,0000 | 0,0200 | 0,0000 | 0,0100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 44 | 0 | 0,0000 | 0,1200 | 0,0000 | 0,0180 | 0,0000 | 0,0000 |
| 45 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 46 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 47 | 0 | 0,0000 | 0,2970 | 0,0000 | 0,1160 | 0,0000 | 0,0000 |
| 48 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 49 | 0 | 0,0000 | 0,1800 | 0,0000 | 0,0850 | 0,0000 | 0,0000 |
| 50 | 0 | 0,0000 | 0,2100 | 0,0000 | 0,1050 | 0,0000 | 0,0000 |
| 51 | 0 | 0,0000 | 0,1800 | 0,0000 | 0,0530 | 0,0000 | 0,0000 |
| 52 | 0 | 0,0000 | 0,0490 | 0,0000 | 0,0220 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 53 | 0 | 0,0000 | 0,2000 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 54 | 0 | 0,0000 | 0,0410 | 0,0000 | 0,0140 | 0,0000 | 0,0000 |
| 55 | 0 | 0,0000 | 0,0680 | 0,0000 | 0,0340 | 0,0000 | 0,0000 |
| 56 | 0 | 0,0000 | 0,0760 | 0,0000 | 0,0220 | 0,0000 | 0,0000 |
| 57 | 0 | 0,0000 | 0,0670 | 0,0000 | 0,0200 | 0,0000 | 0,0000 |

B.3 IEEE 118

Tabela B.3: Valores especificados do IEEE 118.

| Barra | Tipo | P_G | P_C | Q_G | Q_C | Q_G^{min} | Q_G^{max} |
|-------|------|---------|--------|--------|--------|-------------|-------------|
| 1 | 2 | 0,0000 | 0,5100 | 0,0000 | 0,2700 | -0,0500 | 0,1500 |
| 4 | 2 | -0,0900 | 0,3000 | 0,0000 | 0,1200 | -3,0000 | 3,0000 |
| 6 | 2 | 0,0000 | 0,5200 | 0,0000 | 0,2200 | -0,1300 | 0,5000 |
| 8 | 2 | -0,2800 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -3,0000 | 3,0000 |
| 10 | 2 | 4,5000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,4700 | 2,0000 |
| 12 | 2 | 0,8500 | 0,4700 | 0,0000 | 0,1000 | -0,3500 | 1,2000 |
| 15 | 2 | 0,0000 | 0,9000 | 0,0000 | 0,3000 | -0,1000 | 0,3000 |
| 18 | 2 | 0,0000 | 0,6000 | 0,0000 | 0,3400 | -0,1600 | 0,5000 |
| 19 | 2 | 0,0000 | 0,4500 | 0,0000 | 0,2500 | -0,0800 | 0,2400 |
| 24 | 2 | -0,1300 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -3,0000 | 3,0000 |
| 25 | 2 | 2,2000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,4700 | 1,4000 |
| 26 | 2 | 3,1400 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -10,0000 | 10,0000 |
| 27 | 2 | -0,0900 | 0,6200 | 0,0000 | 0,1300 | -3,0000 | 3,0000 |
| 31 | 2 | 0,0700 | 0,4300 | 0,0000 | 0,2700 | -3,0000 | 3,0000 |
| 32 | 2 | 0,0000 | 0,5900 | 0,0000 | 0,2300 | -0,1400 | 0,4200 |
| 34 | 2 | 0,0000 | 0,5900 | 0,0000 | 0,2600 | -0,0800 | 0,2400 |
| 36 | 2 | 0,0000 | 0,3100 | 0,0000 | 0,1700 | -0,0800 | 0,2400 |
| 40 | 2 | -0,4600 | 0,2000 | 0,0000 | 0,2300 | -3,0000 | 3,0000 |
| 42 | 2 | -0,5900 | 0,3700 | 0,0000 | 0,2300 | -3,0000 | 3,0000 |
| 46 | 2 | 0,1900 | 0,2800 | 0,0000 | 0,1000 | -1,0000 | 1,0000 |
| 49 | 2 | 2,0400 | 0,8700 | 0,0000 | 0,3000 | -0,8500 | 2,1000 |
| 54 | 2 | 0,4800 | 1,1300 | 0,0000 | 0,3200 | -3,0000 | 3,0000 |
| 55 | 2 | 0,0000 | 0,6300 | 0,0000 | 0,2200 | -0,0800 | 0,2300 |

| | | | | | | | |
|-----|---|---------|--------|--------|--------|----------|---------|
| 56 | 2 | 0,0000 | 0,8400 | 0,0000 | 0,1800 | -0,0800 | 0,1500 |
| 59 | 2 | 1,5500 | 2,7700 | 0,0000 | 1,1300 | -0,6000 | 1,8000 |
| 61 | 2 | 1,6000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 3,0000 |
| 62 | 2 | 0,0000 | 0,7700 | 0,0000 | 0,1400 | -0,2000 | 0,2000 |
| 65 | 2 | 3,9100 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,6700 | 2,0000 |
| 66 | 2 | 3,9200 | 0,3900 | 0,0000 | 0,1800 | -0,6700 | 2,0000 |
| 69 | 3 | 5,1640 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -3,0000 | 3,0000 |
| 70 | 2 | 0,0000 | 0,6600 | 0,0000 | 0,2000 | -0,1000 | 0,3200 |
| 72 | 2 | -0,1200 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 1,0000 |
| 73 | 2 | -0,0600 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 1,0000 |
| 74 | 2 | 0,0000 | 0,6800 | 0,0000 | 0,2700 | -0,0600 | 0,0900 |
| 76 | 2 | 0,0000 | 0,6800 | 0,0000 | 0,3600 | -0,0800 | 0,2300 |
| 77 | 2 | 0,0000 | 0,6100 | 0,0000 | 0,2800 | -0,2000 | 0,7000 |
| 80 | 2 | 4,7700 | 1,3000 | 0,0000 | 0,2600 | -1,6500 | 2,8000 |
| 85 | 2 | 0,0000 | 0,2400 | 0,0000 | 0,1500 | -0,0800 | 0,2300 |
| 87 | 2 | 0,0400 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 10,0000 |
| 89 | 2 | 6,0700 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -2,1000 | 3,0000 |
| 90 | 2 | -0,8500 | 0,7800 | 0,0000 | 0,4200 | -3,0000 | 3,0000 |
| 91 | 2 | -0,1000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 1,0000 |
| 92 | 2 | 0,0000 | 0,6500 | 0,0000 | 0,1000 | -0,0300 | 0,0900 |
| 99 | 2 | -0,4200 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 1,0000 |
| 100 | 2 | 2,5200 | 0,3700 | 0,0000 | 0,1800 | -0,5000 | 1,5500 |
| 103 | 2 | 0,4000 | 0,2300 | 0,0000 | 0,1600 | -0,1500 | 0,4000 |
| 104 | 2 | 0,0000 | 0,3800 | 0,0000 | 0,2500 | -0,0800 | 0,2300 |
| 105 | 2 | 0,0000 | 0,3100 | 0,0000 | 0,2600 | -0,0800 | 0,2300 |
| 107 | 2 | -0,2200 | 0,2800 | 0,0000 | 0,1200 | -2,0000 | 2,0000 |
| 110 | 2 | 0,0000 | 0,3900 | 0,0000 | 0,3000 | -0,0800 | 0,2300 |
| 111 | 2 | 0,3600 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 10,0000 |
| 112 | 2 | -0,4300 | 0,2500 | 0,0000 | 0,1300 | -1,0000 | 10,0000 |
| 113 | 2 | -0,0600 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -1,0000 | 2,0000 |
| 116 | 2 | -1,8400 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -10,0000 | 10,0000 |
| 2 | 0 | 0,0000 | 0,2000 | 0,0000 | 0,0900 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 0 | 0,0000 | 0,3900 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 7 | 0 | 0,0000 | 0,1900 | 0,0000 | 0,0200 | 0,0000 | 0,0000 |
| 9 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | |
|----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 11 | 0 | 0,0000 | 0,7000 | 0,0000 | 0,2300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 13 | 0 | 0,0000 | 0,3400 | 0,0000 | 0,1600 | 0,0000 | 0,0000 |
| 14 | 0 | 0,0000 | 0,1400 | 0,0000 | 0,0100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 16 | 0 | 0,0000 | 0,2500 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 17 | 0 | 0,0000 | 0,1100 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 20 | 0 | 0,0000 | 0,1800 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 21 | 0 | 0,0000 | 0,1400 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0000 |
| 22 | 0 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0500 | 0,0000 | 0,0000 |
| 23 | 0 | 0,0000 | 0,0700 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 28 | 0 | 0,0000 | 0,1700 | 0,0000 | 0,0700 | 0,0000 | 0,0000 |
| 29 | 0 | 0,0000 | 0,2400 | 0,0000 | 0,0400 | 0,0000 | 0,0000 |
| 30 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 33 | 0 | 0,0000 | 0,2300 | 0,0000 | 0,0900 | 0,0000 | 0,0000 |
| 35 | 0 | 0,0000 | 0,3300 | 0,0000 | 0,0900 | 0,0000 | 0,0000 |
| 37 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 38 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 39 | 0 | 0,0000 | 0,2700 | 0,0000 | 0,1100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 41 | 0 | 0,0000 | 0,3700 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 43 | 0 | 0,0000 | 0,1800 | 0,0000 | 0,0700 | 0,0000 | 0,0000 |
| 44 | 0 | 0,0000 | 0,1600 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0000 |
| 45 | 0 | 0,0000 | 0,5300 | 0,0000 | 0,2200 | 0,0000 | 0,0000 |
| 47 | 0 | 0,0000 | 0,3400 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 48 | 0 | 0,0000 | 0,2000 | 0,0000 | 0,1100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 50 | 0 | 0,0000 | 0,1700 | 0,0000 | 0,0400 | 0,0000 | 0,0000 |
| 51 | 0 | 0,0000 | 0,1700 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0000 |
| 52 | 0 | 0,0000 | 0,1800 | 0,0000 | 0,0500 | 0,0000 | 0,0000 |
| 53 | 0 | 0,0000 | 0,2300 | 0,0000 | 0,1100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 57 | 0 | 0,0000 | 0,1200 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 58 | 0 | 0,0000 | 0,1200 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 60 | 0 | 0,0000 | 0,7800 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 63 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 64 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 67 | 0 | 0,0000 | 0,2800 | 0,0000 | 0,0700 | 0,0000 | 0,0000 |
| 68 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 71 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 75 | 0 | 0,0000 | 0,4700 | 0,0000 | 0,1100 | 0,0000 | 0,0000 |

| | | | | | | | |
|-----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 78 | 0 | 0,0000 | 0,7100 | 0,0000 | 0,2600 | 0,0000 | 0,0000 |
| 79 | 0 | 0,0000 | 0,3900 | 0,0000 | 0,3200 | 0,0000 | 0,0000 |
| 81 | 0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 82 | 0 | 0,0000 | 0,5400 | 0,0000 | 0,2700 | 0,0000 | 0,0000 |
| 83 | 0 | 0,0000 | 0,2000 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 84 | 0 | 0,0000 | 0,1100 | 0,0000 | 0,0700 | 0,0000 | 0,0000 |
| 86 | 0 | 0,0000 | 0,2100 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 88 | 0 | 0,0000 | 0,4800 | 0,0000 | 0,1000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 93 | 0 | 0,0000 | 0,1200 | 0,0000 | 0,0700 | 0,0000 | 0,0000 |
| 94 | 0 | 0,0000 | 0,3000 | 0,0000 | 0,1600 | 0,0000 | 0,0000 |
| 95 | 0 | 0,0000 | 0,4200 | 0,0000 | 0,3100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 96 | 0 | 0,0000 | 0,3800 | 0,0000 | 0,1500 | 0,0000 | 0,0000 |
| 97 | 0 | 0,0000 | 0,1500 | 0,0000 | 0,0900 | 0,0000 | 0,0000 |
| 98 | 0 | 0,0000 | 0,3400 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0000 |
| 101 | 0 | 0,0000 | 0,2200 | 0,0000 | 0,1500 | 0,0000 | 0,0000 |
| 102 | 0 | 0,0000 | 0,0500 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 106 | 0 | 0,0000 | 0,4300 | 0,0000 | 0,1600 | 0,0000 | 0,0000 |
| 108 | 0 | 0,0000 | 0,0200 | 0,0000 | 0,0100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 109 | 0 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 114 | 0 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0300 | 0,0000 | 0,0000 |
| 115 | 0 | 0,0000 | 0,2200 | 0,0000 | 0,0700 | 0,0000 | 0,0000 |
| 117 | 0 | 0,0000 | 0,2000 | 0,0000 | 0,0800 | 0,0000 | 0,0000 |
| 118 | 0 | 0,0000 | 0,3300 | 0,0000 | 0,1500 | 0,0000 | 0,0000 |

Gráficos das magnitudes de tensão

C.1 IEEE 30

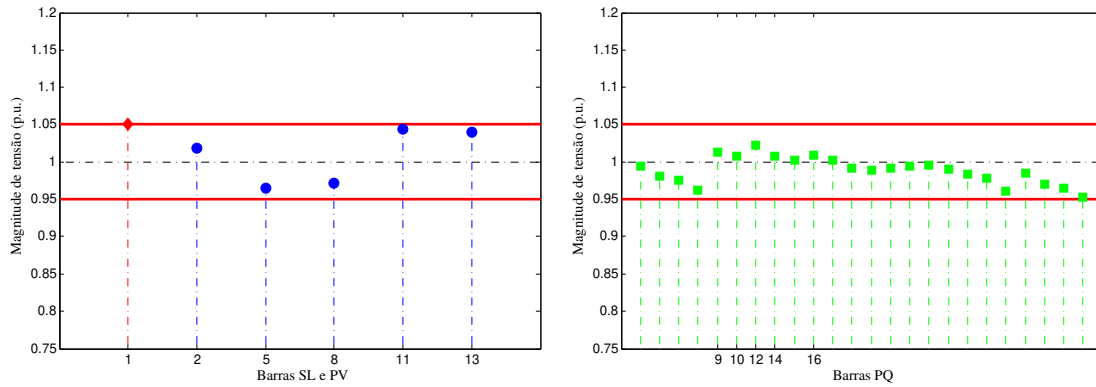


Figura C.1: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C1.

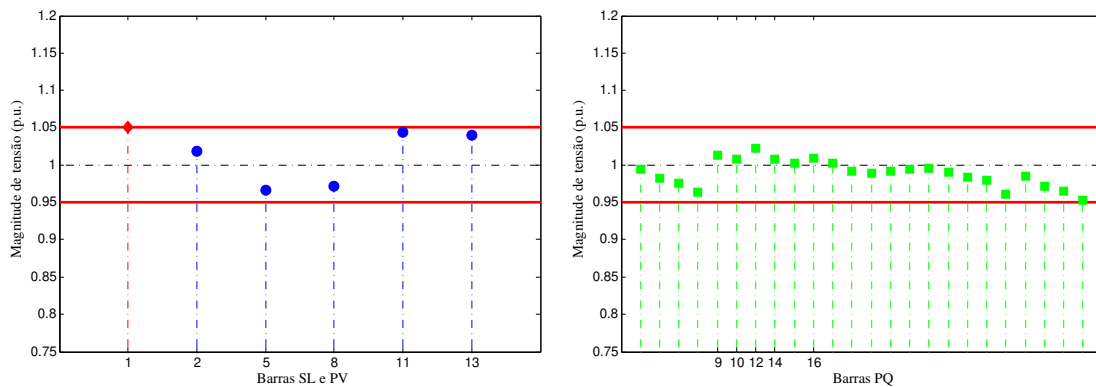


Figura C.2: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C1A.

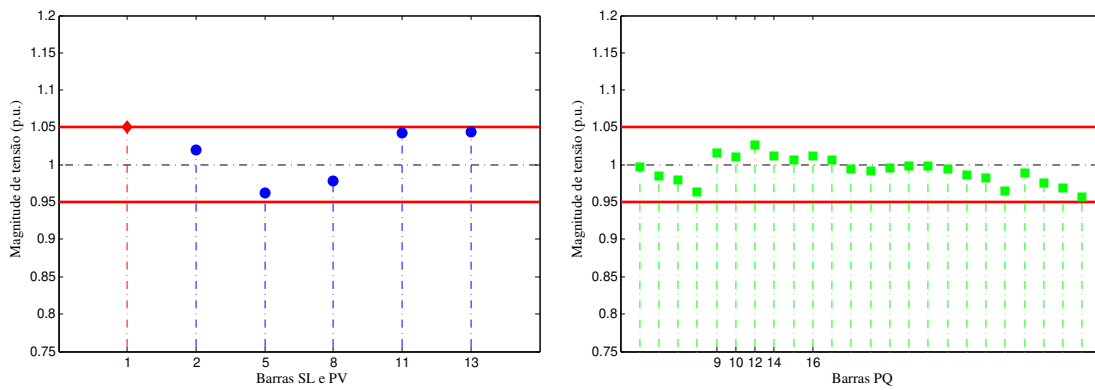


Figura C.3: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C1B.

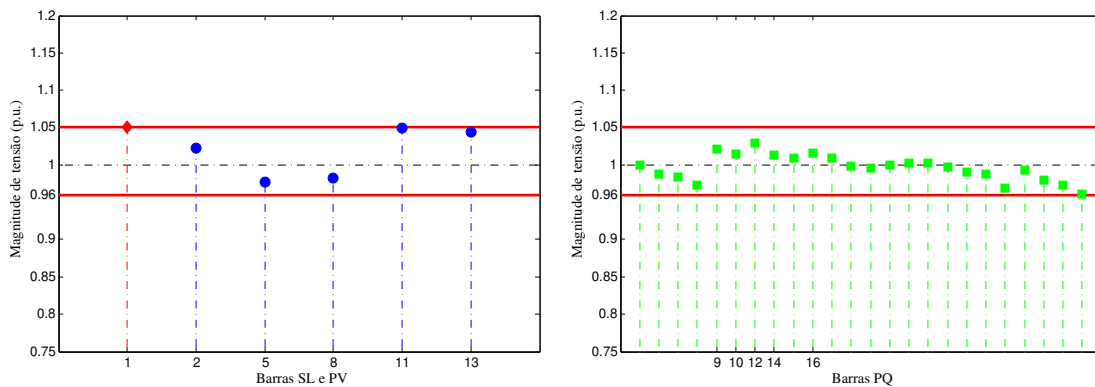


Figura C.4: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C2.

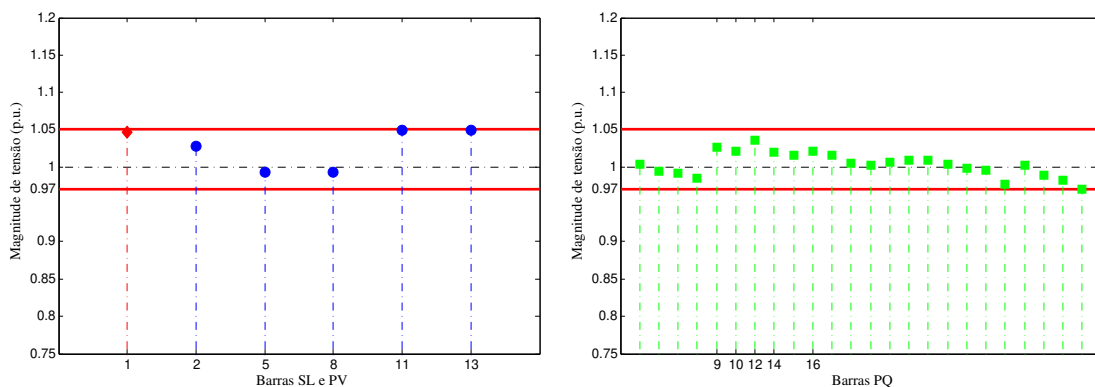


Figura C.5: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C3.

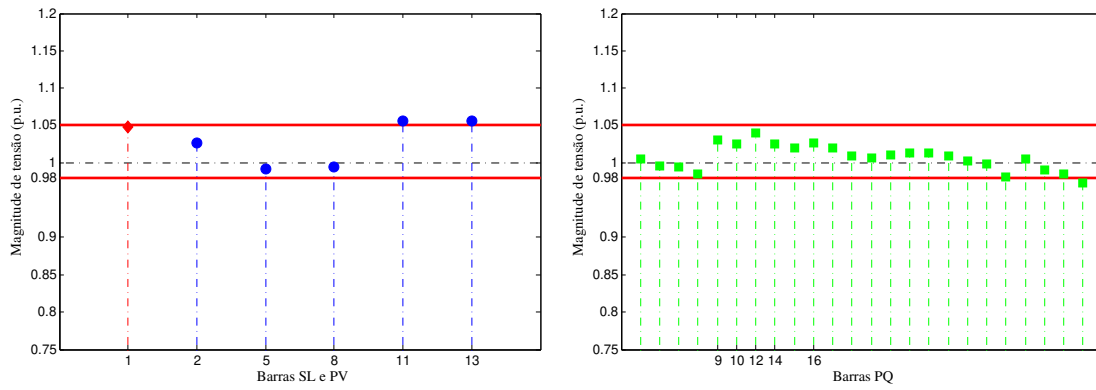


Figura C.6: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 30 - caso C4.

C.2 IEEE 57

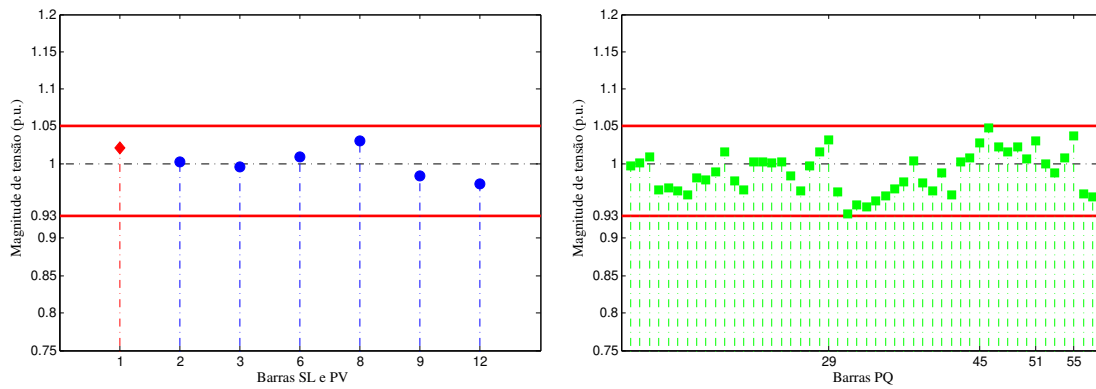


Figura C.7: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C1.

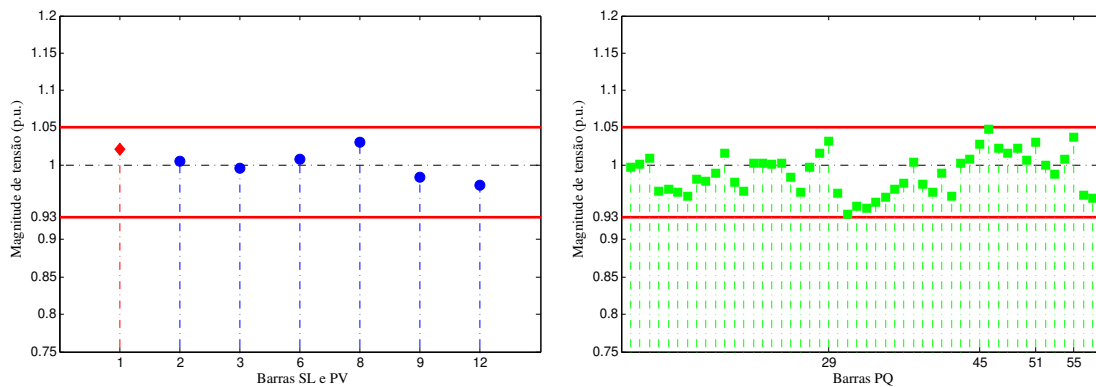


Figura C.8: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C1A.

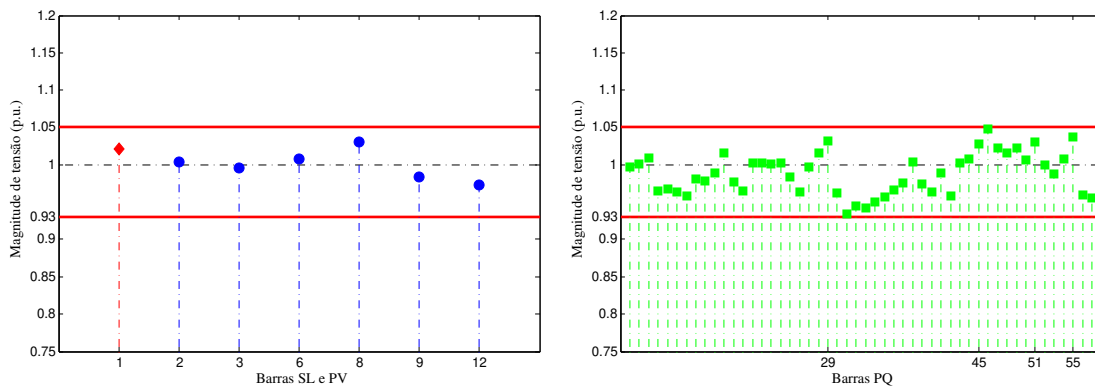


Figura C.9: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C1B.

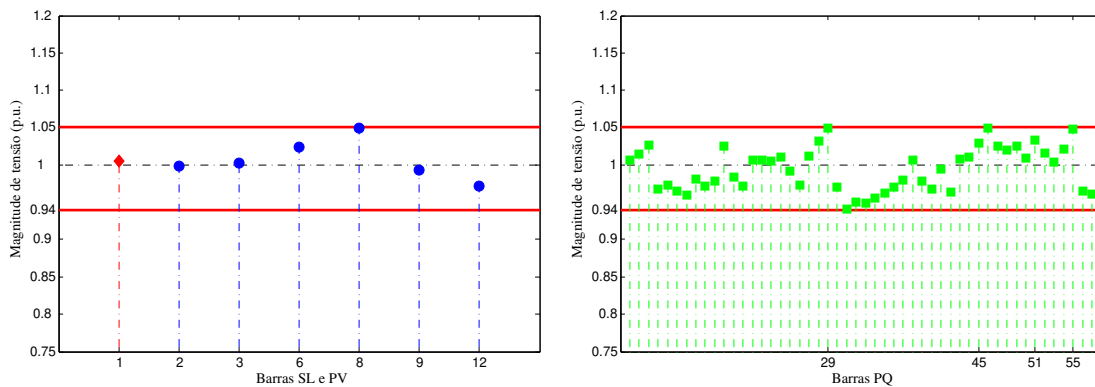


Figura C.10: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C2.

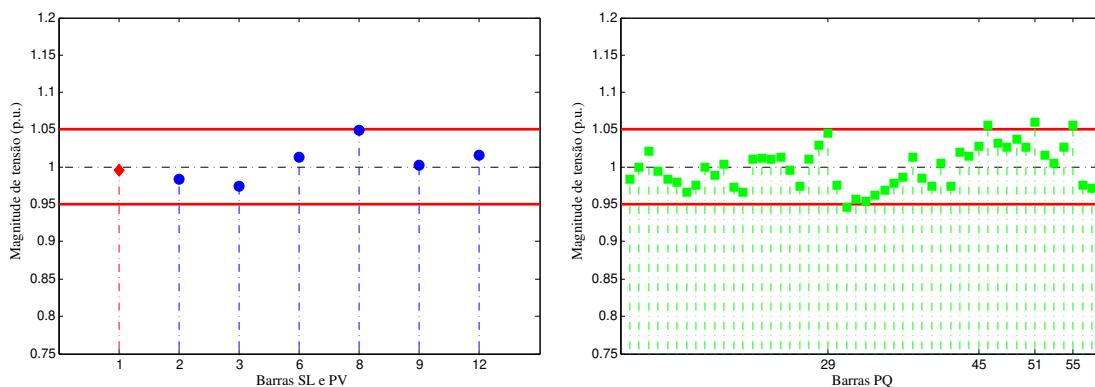


Figura C.11: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 57 - caso C3.

C.3 IEEE 118

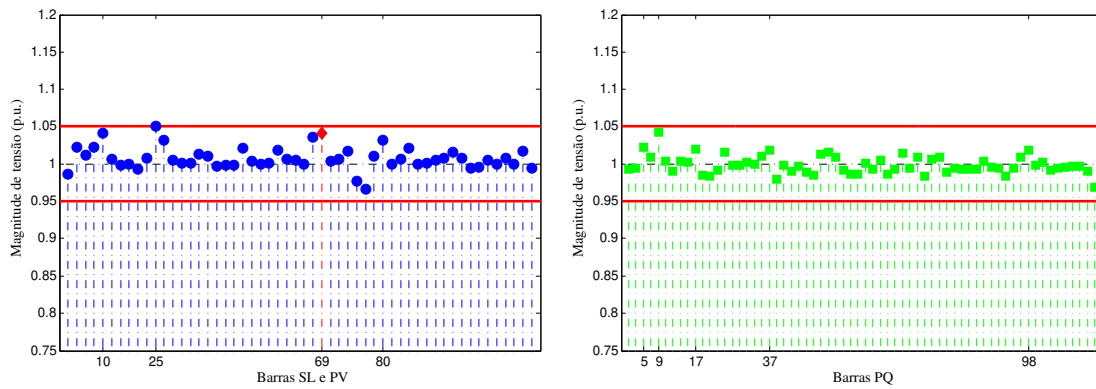


Figura C.12: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C1.

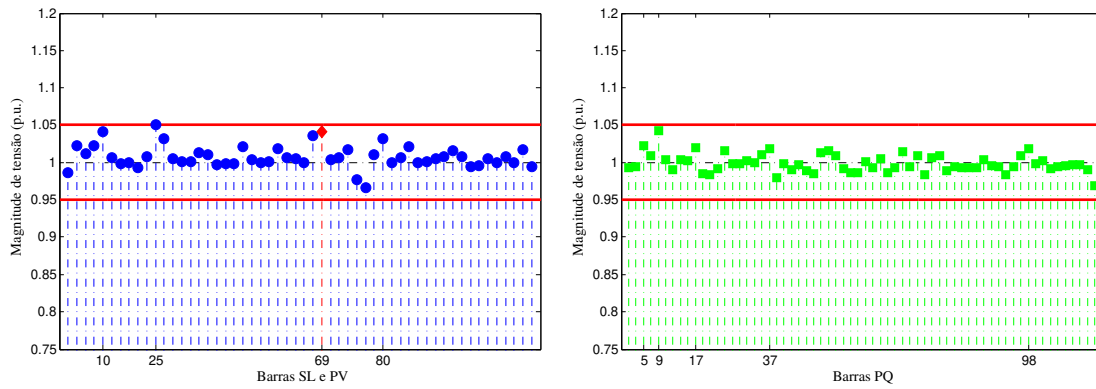


Figura C.13: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C1A.

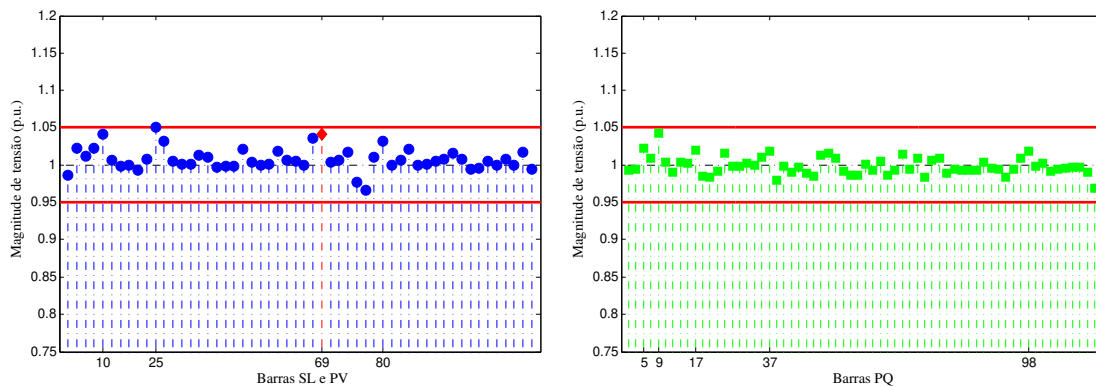


Figura C.14: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C1B.

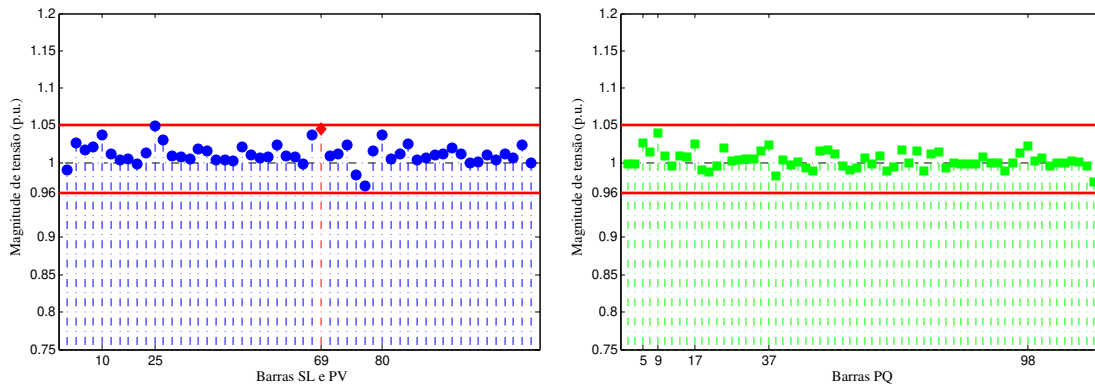


Figura C.15: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C2.

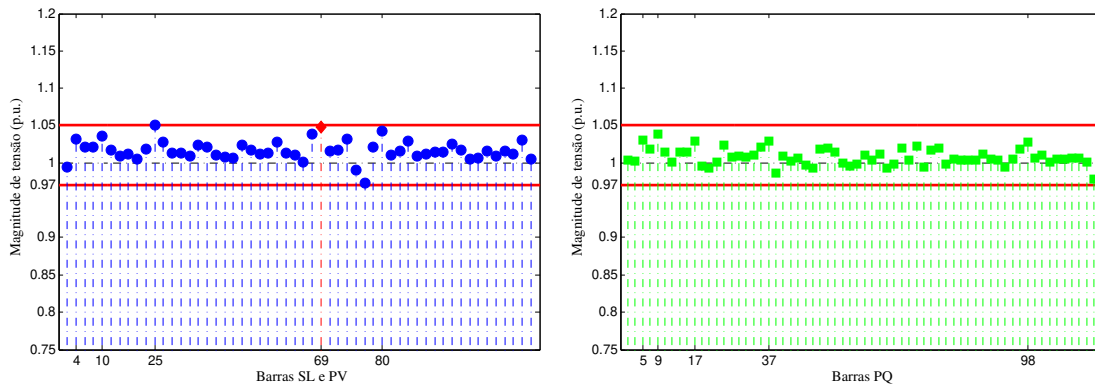


Figura C.16: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C3.

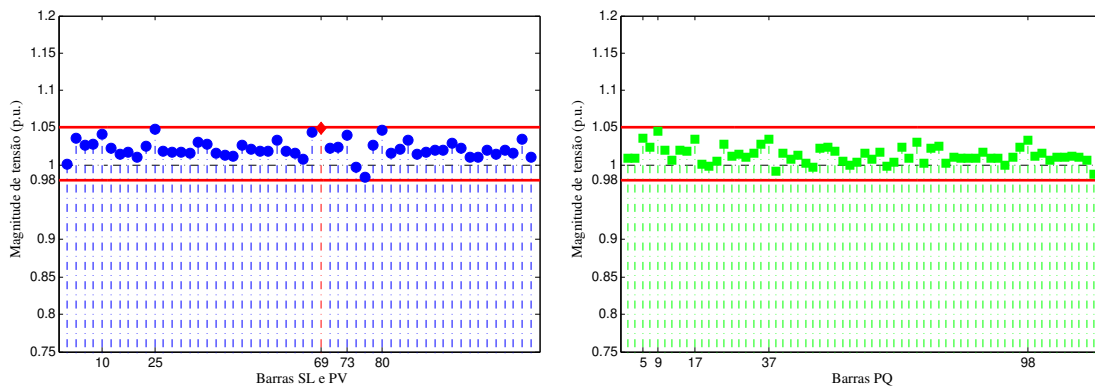


Figura C.17: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C4.

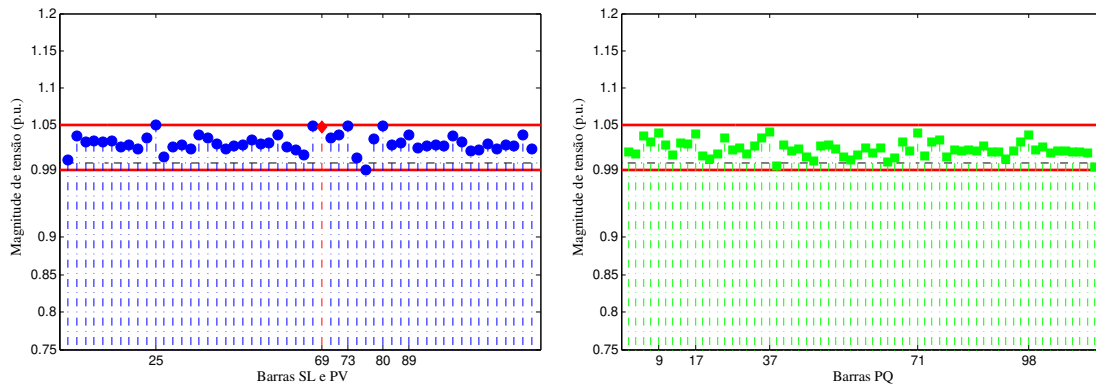


Figura C.18: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C5.

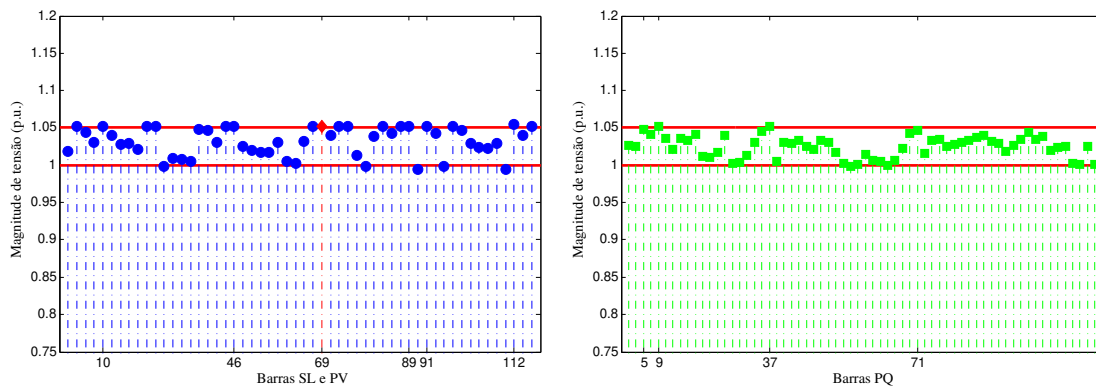


Figura C.19: Perfil de tensão obtida pelo MBM para IEEE 118 - caso C6.

Gráficos das folgas complementares e funções objetivos

D.1 IEEE 30

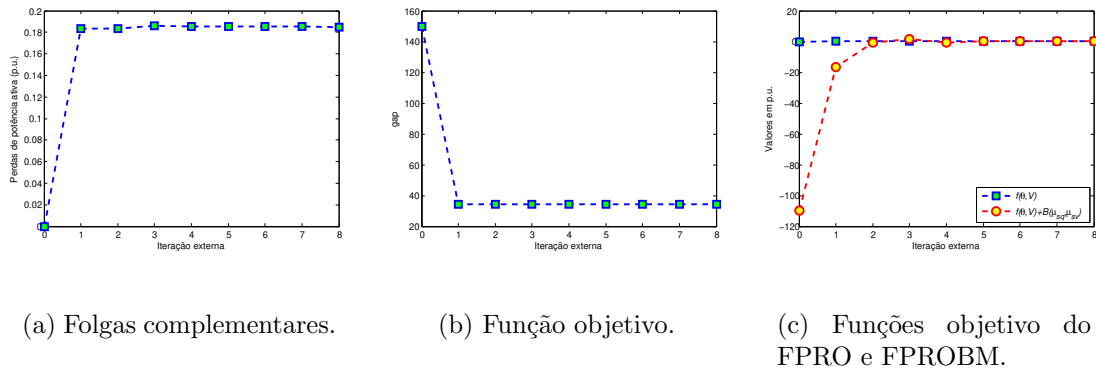


Figura D.1: Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C1.

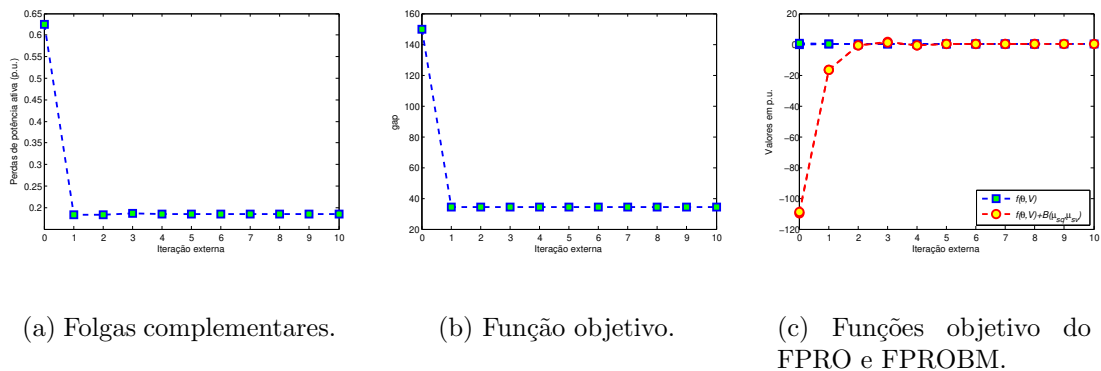
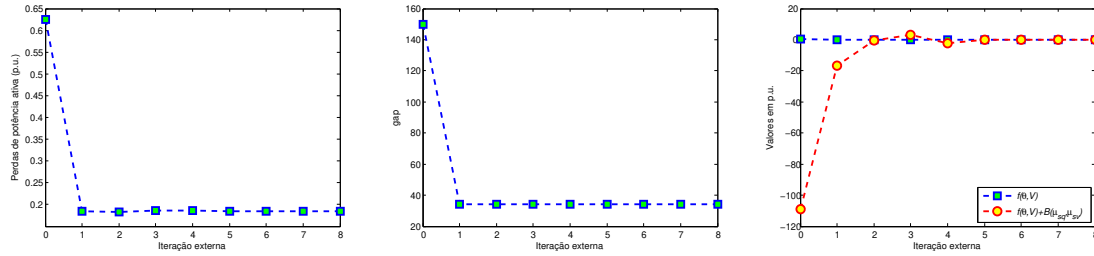


Figura D.2: Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C1A.

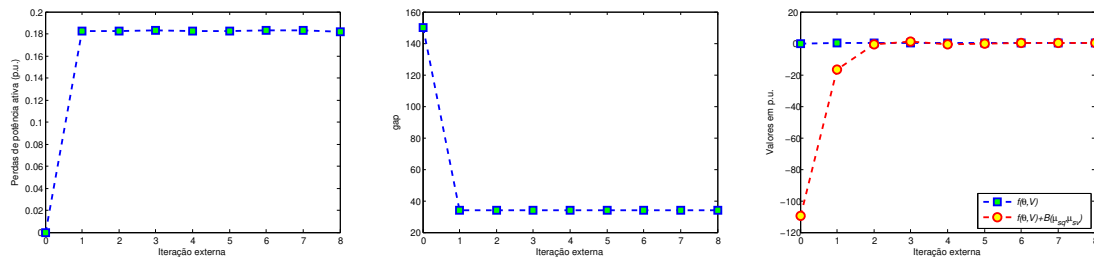


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.3: Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C1B.

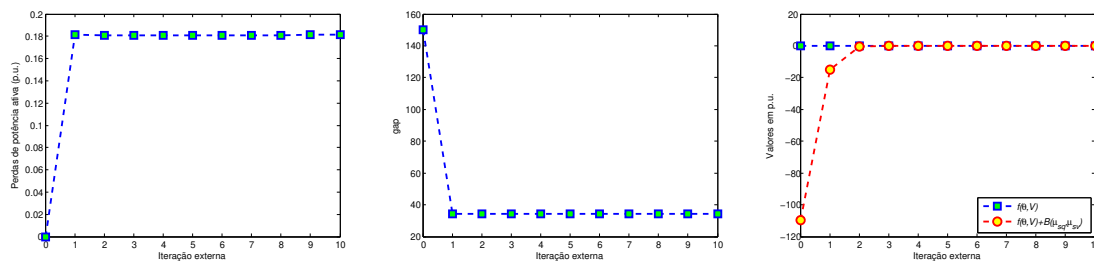


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.4: Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C2.



(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.5: Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C3.

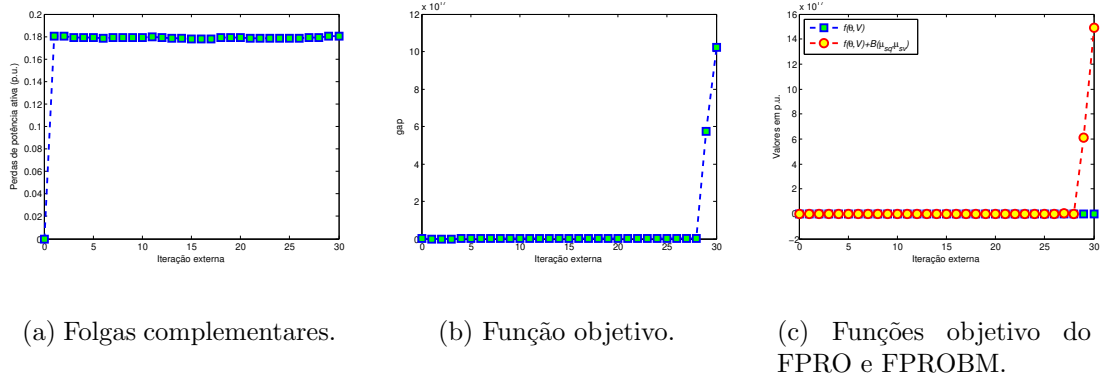


Figura D.6: Gráficos referentes ao IEEE 30 - caso C4.

D.2 IEEE 57

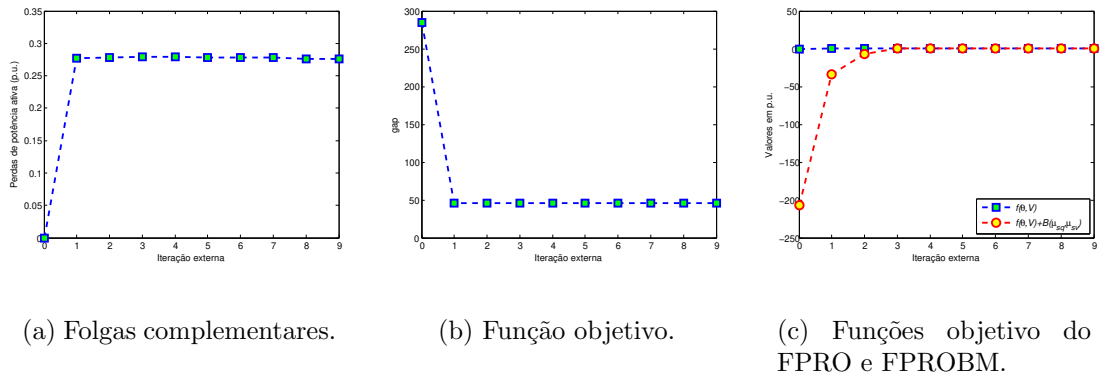


Figura D.7: Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C1.

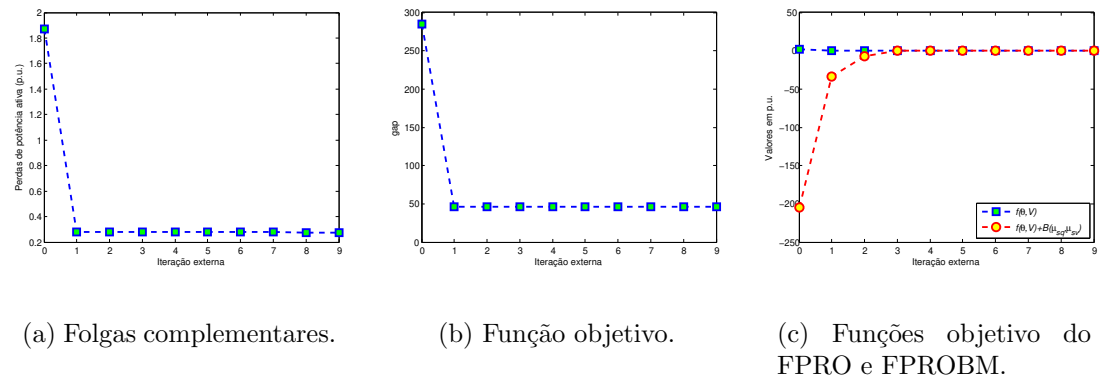
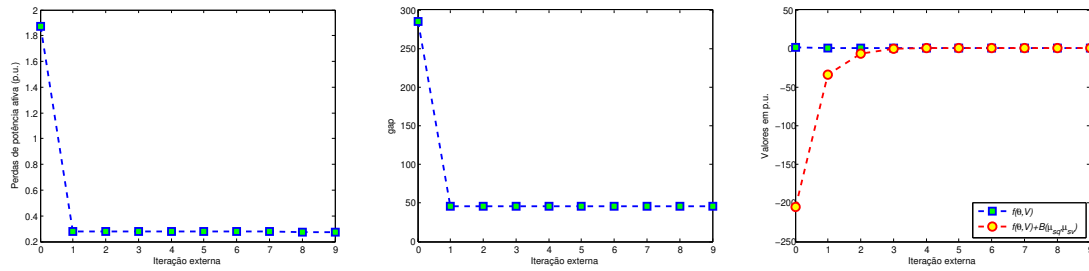


Figura D.8: Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C1A.

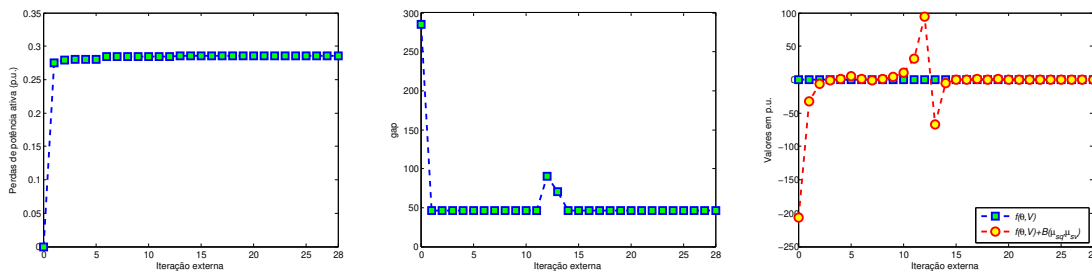


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.9: Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C1B.

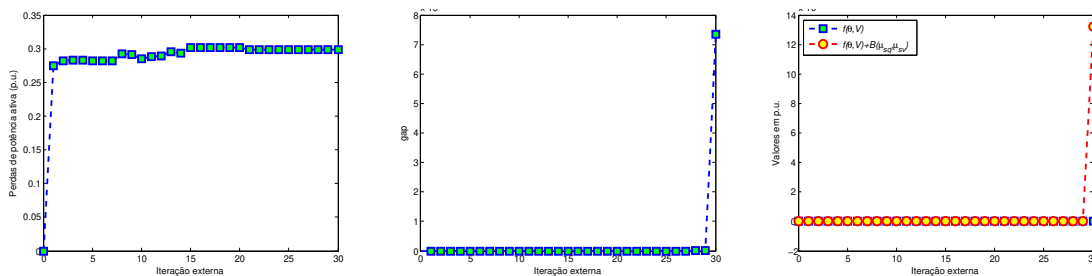


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.10: Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C2.



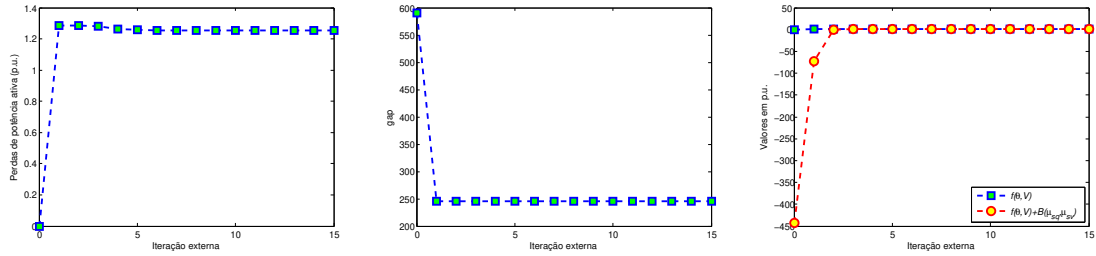
(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.11: Gráficos referentes ao IEEE 57 - caso C3.

D.3 IEEE 118

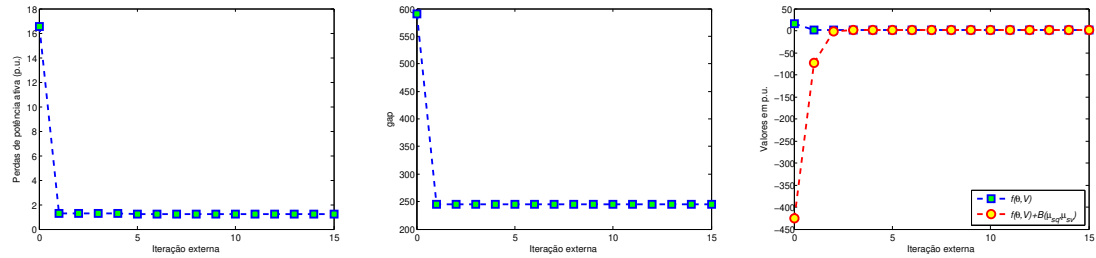


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.12: Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C1.

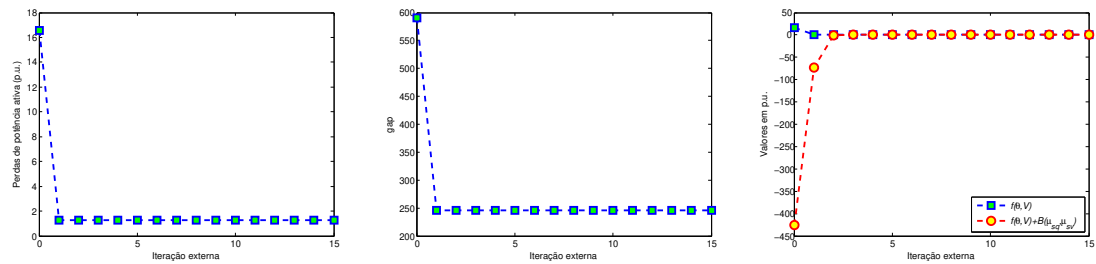


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.13: Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C1A.

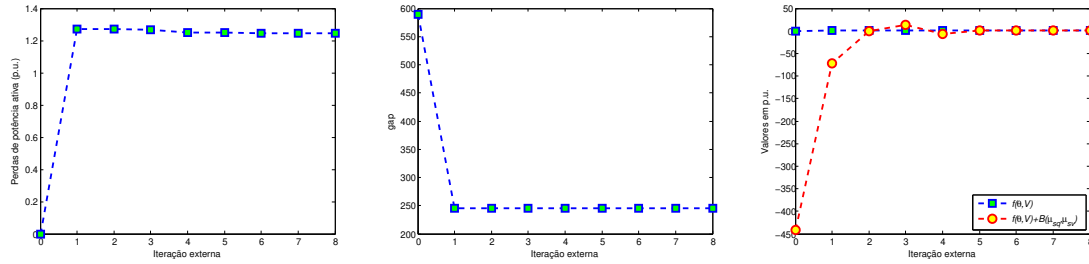


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.14: Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C1B.

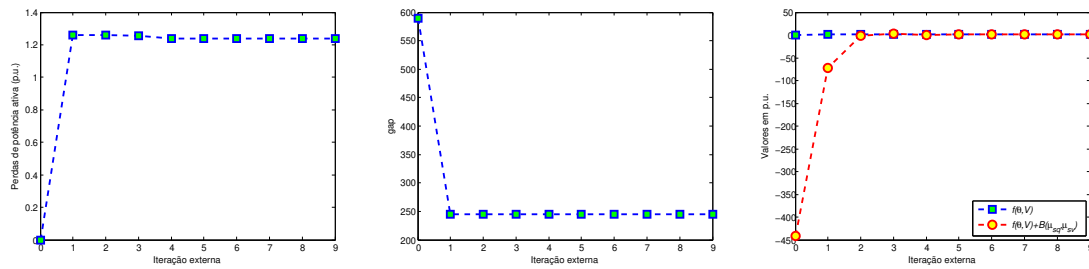


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.15: Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C2.

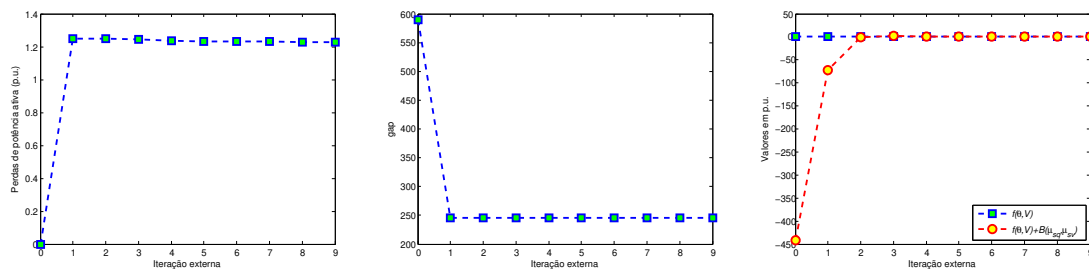


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.16: Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C3.

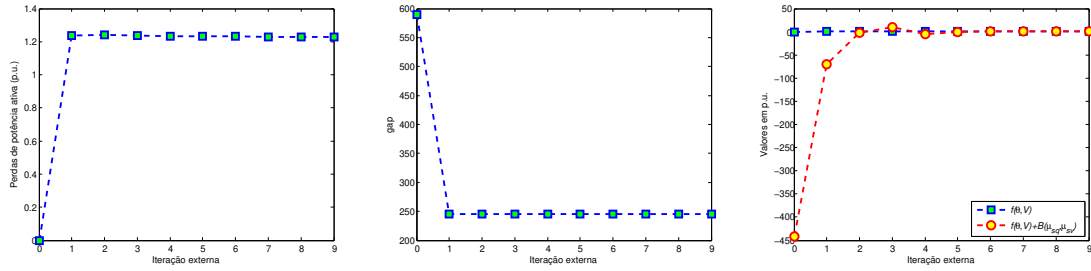


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.17: Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C4.

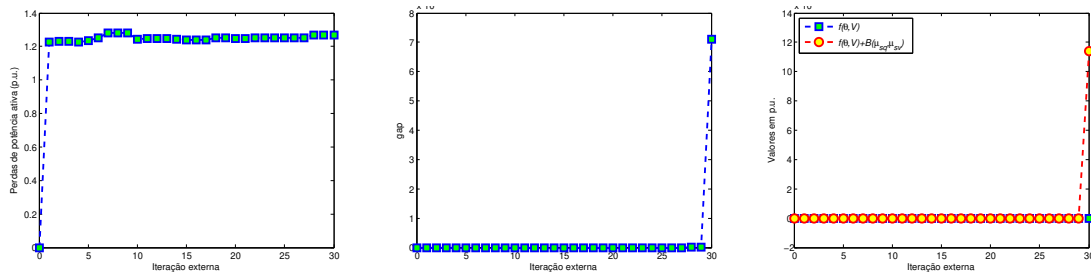


(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.18: Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C5.



(a) Folgas complementares.

(b) Função objetivo.

(c) Funções objetivo do FPRO e FPROBM.

Figura D.19: Gráficos referentes ao IEEE 118 - caso C6.

Bibliografia

- Araneda, J. C. and Rios, S. (2005). Transmission expansion under market conditions: The Chilean experience, *Power Tech, 2005 IEEE Russia*, pp. 1–6.
- Baptista, E. C., Belati, E. A. and Da Costa, G. R. M. (2001). A new solution to the optimal power flow problem, *Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto*, Vol. 3, pp. 5 pp. vol.3–.
- Bjelogrljic, M., Calovic, M. S., Ristanovic, P. and Babic, B. S. (1990). Application of Newton’s optimal power flow in voltage/reactive power control, *Power Systems, IEEE Transactions on* **5**(4): 1447–1454.
- Burchett, R. C., Happ, H. H., Vierath, D. R. and Wirgau, K. A. (1982). Developments in Optimal Power Flow, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* **PAS-101**(2): 406–414.
- Carpentier, J. L. (1983). Optimal Power Flows: uses, methods and development, *Proc. of IFAC symposium on Planning and operation of electrical energy system*, pp. 11 –21.
- Carvalho, E. P. (2004). *Lagrangeana Aumentada e Barreira Combinadas com o Método do Gradiente Reduzido na Solução do Fluxo de Potência Ótimo*, Master’s thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica - Universidade Estadual de Campinas.
- Carvalho, E. P., Santos Jr., A. and Ma, T. F. (2008). Reduced gradient method combined with augmented Lagrangian and barrier for the optimal power flow problem, *Applied Mathematics and Computation* **200**(2): 529 – 536. <ce:title>Special Issue on The Foz2006 Congress of Mathematics and its Applications</ce:title>.
- Chen, T. W. C. and Vassiliadis, V. S. (2003). Solution of general nonlinear optimization problems using the penalty/modified barrier method with the use of exact Hessians, *Computers and Chemical Engineering* **27**(4): 501 – 525.

- Da Costa, G. R. M. (1990). *O Método Dual-Newton Aplicado ao Fluxo de Carga Ótimo*, PhD thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica -Universidade Estadual de Campinas.
- Da Silva, I. C. R. (2008). *Estudo e Implementação dos Métodos da Lagrangeana Aumentada e da Barreira Modificada*, Master's thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica-Universidade Estadual de Campinas.
- De Sousa, V. A. (2006). *Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada*, PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos -Universidade de São Paulo.
- De Sousa, V. A., Baptista, E. and Da Costa, G. (2009). Loss minimization by the predictor-corrector modified barrier approach, *Electric Power Systems Research* **79**(5): 803 – 808.
- De Sousa, V. A., Baptista, E. C. and Da Costa, G. R. M. (2004). Modified barrier method for optimal power flow problem, *Power Engineering Society General Meeting, 2004. IEEE*, pp. 831–836 Vol.1.
- De Sousa, V. A., Baptista, E. C. and Da Costa, G. R. M. (2007). Optimal Power Flow via Interior-Exterior Method, *Power Engineering Society General Meeting, 2007. IEEE*, pp. 1–6.
- de Sousa, V., Baptista, E. and da Costa, G. (2012). Optimal reactive power flow via the modified barrier Lagrangian function approach, *Electric Power Systems Research* **84**(1): 159 – 164.
- Dommel, H. W. and Tinney, W. F. (1968). Optimal Power Flow Solutions, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* **PAS-87**(10): 1866 –1876.
- Frank, S., Steponavice, I. and Rebennack, S. (2012). Optimal power flow: a bibliographic survey I, *Energy Systems* **3**: 221–258.
- Gonçalves, R. (2008). *Método de Pontos Interiores e Vínculos Implícitos nas Restrições do Fluxo de Potência Ótimo Reativo*, Master's thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica - Universidade Estadual de Campinas.
- Granville, S. (1994). Optimal reactive dispatch through interior point methods, *Power Systems, IEEE Transactions on* **9**(1): 136 –146.
- Granville, S., O., M. J. C. and Melo, A. C. G. (1996). Application of interior point methods to power flow unsolvability, *Power Systems, IEEE Transactions on* **11**(2): 1096–1103.

- Griva, I. and Polyak, R. A. (2006). Primal-dual nonlinear rescaling method with dynamic scaling parameter update, *Mathematical Programming* **106**: 237–259.
- Khot, N. S., Polyak, R. A., Schneur, R. and Berke, L. (1995). Structural optimization using the Newton modified barrier method, *Structural optimization* **10**(3-4): 209–216.
- Kort, B. W. and Bertsekas, D. P. (1973). Multiplier methods for convex programming, *Decision and Control including the 12th Symposium on Adaptive Processes, 1973 IEEE Conference on*, Vol. 12, pp. 428 –432.
- Lage, G. G., De Sousa, V. A. and Da Costa, G. R. M. (2009). Optimal power flow solution using the penalty/modified barrier method, *PowerTech, 2009 IEEE Bucharest*, pp. 1–6.
- Leeton, U., Ratniyomchai, T. and Kulworawanichpong, T. (2010). Optimal reactive power flow with distributed generating plants in electric power distribution systems, *Advances in Energy Engineering (ICAEE), 2010 International Conference on*, pp. 166 –169.
- Momoh, J. A., Adapa, R. and El-Hawary, M. E. (1999a). A review of selected optimal power flow literature to 1993. I. Nonlinear and quadratic programming approaches, *Power Systems, IEEE Transactions on* **14**(1): 96 –104.
- Momoh, J. A., El-Hawary, M. E. and Adapa, R. (1999b). A review of selected optimal power flow literature to 1993. II. Newton, linear programming and interior point methods, *Power Systems, IEEE Transactions on* **14**(1): 105 –111.
- Monticelli, A. J. (1983). *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*, Edgard Blucher, Sao Paulo, SP.
- Mota-Palomino, R. and Quintana, V. H. (1986). Sparse Reactive Power Scheduling by a Penalty Function - Linear Programming Technique, *Power Systems, IEEE Transactions on* **1**(3): 31 –39.
- Nocedal, J. and Wright, J. S. (1999). *Numerical Optimization*, Springer-Verlag.
- Pandya, K. S. and Joshi, S. K. (2008). A Survey of Optimal Power Flow Methods, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology* **4**(5): 450 –458.
- Polyak, R. (1992). Modified barrier functions (theory and methods), *Mathematical Programming* **54**: 177–222.

- Polyak, R. A. (2002). Nonlinear rescaling vs. smoothing technique in convex optimization, *Mathematical Programming* **92**: 197–235.
- Polyak, R. and Teboulle, M. (1997). Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization, *Mathematical Programming* **76**: 265–284.
- Powell, M. J. D. (1984). Nonconvex minimization calculations and the conjugate gradient method, in D. Griffiths (ed.), *Numerical Analysis*, Vol. 1066 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 122–141.
- Qiu, Z., Deconinck, G. and Belmans, R. (2009). A literature survey of Optimal Power Flow problems in the electricity market context, *Power Systems Conference and Exposition, 2009. PSCE '09. IEEE/PES*, pp. 1–6.
- Quintana, V. H. and Santos-Nieto, M. (1989). Reactive-power dispatch by successive quadratic programming, *Energy Conversion, IEEE Transactions on* **4**(3): 425–435.
- Rudnick, H. (2003). Risk responsibility for supply in deregulated electricity markets - the Chilean case, *Power Engineering Society General Meeting, 2003, IEEE*, Vol. 1, pp. 525–528 Vol. 1.
- Santos Jr., A. (1986). *O Método da Lagrangeana Aumentada Aplicado ao Fluxo de Carga Ótimo*, PhD thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica-Universidade Estadual de Campinas.
- Santos Jr., A. and da Costa, G. R. M. (1995). Optimal-power-flow solution by Newton's method applied to an augmented Lagrangian function, *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-* **142**(1): 33–36.
- Santos Jr., A., Deckmann, S. and Soares, S. (1988). A dual augmented Lagrangian approach for optimal power flow, *Power Systems, IEEE Transactions on* **3**(3): 1020–1025.
- Sasson, A. M. (1969). Combined Use of the Powell and Fletcher - Powell Nonlinear Programming Methods for Optimal Load Flows, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* **PAS-88**(10): 1530–1537.
- Sasson, A. M., Vilorio, F. and Aboytes, F. (1973). Optimal Load Flow Solution Using the Hessian Matrix, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* **PAS-92**(1): 31–41.
- Sharif, S. S. and Taylor, J. H. (1997). MINLP formulation of optimal reactive power flow, *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*, Vol. 3, pp. 1974–1978 vol.3.

- Smith Jr., H. M. and Tong, S. Y. (1963). Minimizing Power Transmission Losses by Reactive-Volt-Ampere Control, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* **82**(67): 542–544.
- Soler, E. M., de Sousa, V. A. and da Costa, G. R. (2012). A modified Primal-Dual Logarithmic-Barrier Method for solving the Optimal Power Flow problem with discrete and continuous control variables, *European Journal of Operational Research* **222**(3): 616 – 622.
- Song, H., Dosano, R. D., Kim, T., Lee, B., Shin, J. and Kim, T. K. (2009). A penalty approach for NIPM based optimal reactive power flow including discrete variables, *Transmission Distribution Conference Exposition: Asia and Pacific, 2009*, pp. 1–4.
- Stott, B. and Alsac, O. (1974). Fast Decoupled Load Flow, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* **PAS-93**(3): 859–869.
- Sun, D. I., Ashley, B., Brewer, B., Hughes, A. and Tinney, W. F. (1984). Optimal Power Flow by Newton Approach, *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on* **PAS-103**(10): 2864–2880.
- Tate, J. E. and Overbye, T. J. (2005). A comparison of the optimal multiplier in polar and rectangular coordinates, *Power Systems, IEEE Transactions on* **20**(4): 1667 – 1674.
- University of Washington Eletrical Engineering (n.d.). Power System Test Case Archive, <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>.
- Vassiliadis, V. S. and Brooks, S. A. (1998). Application of the modified barrier method in large-scale quadratic programming problems, *Computers and Chemical Engineering* **22**(9): 1197 – 1205.
- Wu, Y.-C., Debs, A. S. and Marsten, R. E. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows, *Power Systems, IEEE Transactions on* **9**(2): 876–883.
- Yan, W., Yu, J., Yu, D. C. and Bhattarai, K. (2006). A new optimal reactive power flow model in rectangular form and its solution by predictor corrector primal dual interior point method, *Power Systems, IEEE Transactions on* **21**(1): 61–67.