



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MÁQUINAS, COMPONENTES E SISTEMAS INTELIGENTES
LCSI – LABORATÓRIO DE CONTROLE E SISTEMAS INTELIGENTES

**PROPOSTA DE PROJETO DE CONTROLE
DE SISTEMAS NÃO LINEARES USANDO *BACKSTEPPING*
FLEXIBILIZADO E COMPUTAÇÃO EVOLUTIVA**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica

por

ERICK VILE GRINITS

PROF. DR. CELSO PASCOLI BOTTURA

Orientador – FEEC/UNICAMP

Membros da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente)

Prof. Dr. Liu Hsu – COPPE/UFRJ

Prof. Dr. José Cláudio Geromel – FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Fernando José Von Zuben – FEEC/UNICAMP

6 de dezembro de 2002.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

| | |
|-------|---|
| G885p | <p>Grinits, Erick Vile Proposta de projeto de controle de sistemas não lineares usando <i>backstepping</i> flexibilizado e computação evolutiva / Erick Vile Grinits.--Campinas, SP: [s.n.], 2002.</p> <p>Orientador: Celso Pascoli Bottura. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.</p> <p>1. Teoria do controle não-linear. 2. Algoritmos genéticos. I. Bottura, Celso Pascoli. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.</p> |
|-------|---|

Resumo

Propõe-se, neste estudo, um novo método para o projeto de controladores para sistemas não lineares com base numa proposta de flexibilização da técnica de *backstepping* usual e de suas premissas básicas, contemplando-se o caso em que a derivada da função de Lyapunov ao longo das soluções do sistema é definida positiva em regiões ilimitadas do espaço de estados. O emprego de algoritmos evolutivos na busca de valores mais adequados para os parâmetros da lei de controle obtida segundo essa nova estratégia conduz a resultados significativamente superiores em relação aos conseguidos através do *backstepping* tradicional em termos de esforço de controle e desempenho no transitório.

Abstract

It is proposed in this thesis a new version of the backstepping method based on the relaxation of its premises. It is explored the case in which the derivative of the Lyapunov function along the system solutions may be positive definite in unbounded regions of the state space. The deployment of evolutionary computation techniques in search of suitable parameter values for the control law thus achieved leads to results considerably better than those obtained through the traditional backstepping as far as the control effort and the transient performance are concerned.

Aos meus pais, Victor e Alice, e à minha irmã, Laura.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura, meu orientador, pelo apoio, amizade, incentivo e entusiasmo sempre presentes no andamento da pesquisa;

Aos membros da Banca Examinadora, pelas sugestões e comentários construtivos;

À Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP, em especial ao Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes;

Aos professores que contribuíram de forma decisiva na minha formação;

Aos colegas do Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes, pela convivência e troca de informações;

À Biblioteca da Área de Engenharia, pela presteza, boa vontade e eficiência em seu trabalho;

À CPG, pelas inúmeras ajudas;

Ao CNPQ, pelo suporte financeiro.

Índice

| | |
|---|----------|
| 1. Introdução | 1 |
| 1.1. Objetivos | 1 |
| 1.2. Organização | 1 |
| | |
| 2. Estabilidade e Convergência em Sistemas Dinâmicos | 3 |
| 2.1. Introdução | 3 |
| 2.2. Sistemas Dinâmicos | 4 |
| 2.2.1. Definição e Caracterização | 4 |
| 2.2.2. Estados Estacionários em Sistemas Não Lineares | 7 |
| 2.2.2.1. Ponto de Equilíbrio | 7 |
| 2.2.2.2. Soluções Periódicas | 8 |
| 2.2.2.3. Soluções Quase-Periódicas | 8 |
| 2.2.2.4. Caos | 8 |
| 2.2.3. Aspectos Relativos ao Estudo de Sistemas Dinâmicos | 8 |
| 2.2.3.1. Representação | 9 |
| 2.2.3.2. Geração de Soluções | 9 |
| 2.2.3.3. Exploração de Relações Estruturais | 9 |
| 2.2.3.4. Controle | 10 |
| 2.3. Estabilidade e Convergência | 10 |
| 2.3.1. Propriedades de Conjuntos | 10 |
| 2.3.2. Existência e Unicidade | 13 |
| 2.3.3. Sistemas Autônomos | 16 |
| 2.3.3.1. Método Direto de Lyapunov | 18 |
| 2.3.3.2. Princípio de Invariância de La Salle | 20 |
| 2.3.4. Sistemas Não Autônomos | 27 |
| 2.4. Conclusão | 28 |

| | |
|--|-----------|
| 3. Métodos Recursivos para o Controle de Sistemas Não Lineares | 31 |
| 3.1. Introdução | 31 |
| 3.2. Técnicas Precursoras de Controle de Sistemas Não Lineares | 32 |
| 3.3. Funções de Lyapunov de Controle | 36 |
| 3.4. Funções de Lyapunov de Controle e <i>Backstepping</i> Integrador | 38 |
| 3.4.1. Passo 1 | 39 |
| 3.4.2. Passo 2 | 40 |
| 3.4.3. Aspectos de Implementação | 41 |
| 3.4.4. Transformação de Coordenadas do <i>Backstepping</i> | 42 |
| 3.4.5. Sistema Resultante | 42 |
| 3.4.6. Avaliação da Estabilidade | 43 |
| 3.5. <i>Backstepping</i> Integrador | 43 |
| 3.6. <i>Backstepping</i> | 51 |
| 3.6.1. Sistemas de Realimentação Estrita | 51 |
| 3.6.2. Aplicação do <i>Backstepping</i> em Sistemas de Realimentação Estrita – Controle de Sistemas Caóticos | 55 |
| 3.6.2.1. Algumas Técnicas Precursoras de Controle de Caos | 55 |
| 3.6.2.2. <i>Backstepping</i> Aplicado a Sistemas Caóticos | 57 |
| 3.7. Conclusão | 63 |
| | |
| 4. Flexibilização do <i>Backstepping</i> | 65 |
| 4.1. Introdução | 65 |
| 4.2. Otimização Baseada em Computação Evolutiva | 66 |
| 4.2.1. Algoritmos Genéticos | 66 |
| 4.2.1.1. Codificação de Indivíduos | 69 |
| 4.2.1.2. Operadores de Inicialização | 69 |
| 4.2.1.3. Operadores Genéticos | 70 |
| 4.2.1.3.1. Operador de <i>Crossover</i> | 70 |
| 4.2.1.3.2. Operador de Mutação | 71 |
| 4.2.1.4. Operadores de Seleção | 72 |

| | |
|---|------------|
| 4.3. Flexibilização do <i>Backstepping</i> | 72 |
| 4.3.1. Exemplo de Aplicação – Sincronização de Sistemas Caóticos | 73 |
| 4.3.1.1. Aplicação do <i>Backstepping</i> Tradicional e Proposta de Melhoria dos Resultados Obtidos | 76 |
| 4.3.1.2. Flexibilização das Premissas do <i>Backstepping</i> e Novos Resultados | 86 |
| 4.3.1.2.1. Caso 1 | 88 |
| 4.3.1.2.2. Caso 2 | 89 |
| 4.3.1.2.3. Novas Leis de Controle e Análise dos Resultados | 90 |
| 4.3.1.2.3.1. Caso 1 | 90 |
| 4.3.1.2.3.2. Caso 2 | 97 |
| 4.3.2. Algoritmo Genérico para Síntese de Controladores para Sistemas Não Lineares de Realimentação Estrita Resultante da Flexibilização das Premissas do <i>Backstepping</i> | 103 |
| 4.3.2.1. Passo 1 | 104 |
| 4.3.2.2. Passo 2 | 105 |
| 4.3.2.3. Passo 3 | 106 |
| 4.3.2.4. Passo 4 | 107 |
| 4.3.2.5. Passo i ($2 \leq i \leq k$) | 109 |
| 4.3.2.6. Passo $k+1$ | 112 |
| 4.3.2.7. Sistema Resultante | 114 |
| 4.3.3. Outro Exemplo – Sistema Massa-Mola | 115 |
| 4.4. Conclusão | 128 |
| 5. Conclusões e Perspectivas | 129 |
| 5.1. Conclusões | 129 |
| 5.2. Perspectivas | 130 |
| Bibliografia | 133 |
| Índice de Autores | 137 |

Capítulo 1

Introdução

1.1. Objetivos

O objetivo principal desta tese é o desenvolvimento de esquemas recursivos de síntese de controladores eficientes para sistemas não lineares baseados numa flexibilização do *backstepping* e de suas premissas básicas. Para tanto, constata-se que não é necessário que a derivada da função de Lyapunov ao longo das soluções do sistema seja, no mínimo, semidefinida negativa. De fato, a derivada da função de Lyapunov pode ser positiva em regiões ilimitadas do espaço de estados.

A possibilidade de se obter controladores em condições menos restritivas torna viável o emprego de ferramentas de otimização que resultem em uma maior eficiência no processo de controle. A utilização de computação evolutiva na busca de valores mais adequados para os parâmetros da lei de controle obtida por meio do *backstepping* flexibilizado conduz a resultados significativamente superiores em comparação aos conseguidos através do *backstepping* tradicional.

1.2. Organização

Este trabalho compõe-se de cinco capítulos.

Os conceitos relacionados às noções de convergência e estabilidade em sistemas dinâmicos não lineares genéricos são apresentados no Capítulo 2.

O Capítulo 3 trata da construção de controladores para sistemas não lineares e apresenta o método de *backstepping* tradicional para sistemas de realimentação estrita. São abordados o caso regulador e o caso seguidor.

O Capítulo 4 propõe a flexibilização do *backstepping* e traz resultados que comprovam que a convergência para um ponto fixo e o seguimento de referências pré-determinadas são obtidos mesmo quando a derivada da função de Lyapunov do sistema assume valores positivos. Dois exemplos são tratados: a sincronização de dois sistemas caóticos de Chua e o controle de um sistema massa-mola não linear. Empregam-se ferramentas de computação evolutiva na otimização dos parâmetros do controlador não linear.

O Capítulo 5 traz as conclusões e os comentários pertinentes, assim como apresenta perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Estabilidade e Convergência em Sistemas Dinâmicos

2.1. Introdução

Este capítulo trata de conceitos fundamentais de estabilidade e convergência em sistemas dinâmicos. O Método Direto de Lyapunov, o Princípio de Invariância de La Salle e o Teorema de La Salle-Yoshizawa são os pilares sobre os quais se sustentam os processos tradicionais de síntese de controladores para sistemas não lineares por meio de procedimentos recursivos, como o *backstepping*. Após uma exposição dos conceitos principais associados à teoria de sistemas dinâmicos, contida na seção 2.2, a seção 2.3.1 dedica-se a expor as definições básicas utilizadas na elaboração dessas ferramentas. A seção 2.3.2 versa sobre os requisitos para existência e unicidade de soluções em um sistema não linear genérico. A seção 2.3.3 aborda o caso de sistemas autônomos e apresenta aspectos importantes relacionados ao Método Direto de Lyapunov e ao Princípio de Invariância de La Salle, juntamente com uma extensão desse princípio introduzida recentemente. A seção 2.3.4 trata do caso de sistemas não autônomos e expõe os conceitos essenciais relativos ao Teorema de La Salle-Yoshizawa. Por fim, a seção 2.4 traz as conclusões pertinentes.

2.2. Sistemas Dinâmicos

2.2.1. Definição e Caracterização

O termo *dinâmico* associa-se a fenômenos que produzem padrões variantes no tempo, estando as características de um dado padrão em determinado instante inter-relacionadas com aquelas de outros instantes. Refere-se, portanto, ao desenrolar de eventos num processo que se desenvolve seqüencialmente (Luenberger, 1979).

Praticamente todas as situações observadas no cotidiano ou em investigações científicas apresentam aspectos dinâmicos importantes. Em vista disso, muitos fenômenos dinâmicos podem ser percebidos e examinados de forma intuitiva. No entanto, é necessária a introdução de esquemas sistemáticos que empreguem ferramentas matemáticas quando se deseja analisar tais fenômenos com maior eficiência e profundidade.

Dinâmico adquire, dessa maneira, duas acepções: a primeira vincula-se aos fenômenos em si e sua evolução ao longo do tempo; a segunda, aos procedimentos matemáticos utilizados para sua representação e análise.

O termo *sistema* designa uma coleção de elementos unidos por algum tipo de interação ou interdependência, possuindo cada elemento um conjunto de atributos relevantes que o descreve (Luenberger, 1979). Um sistema massa-mola, por exemplo, é composto de vários elementos (objeto móvel, mola, atrito, etc.).

O padrão de resposta relativo ao fenômeno associado a um sistema (por exemplo, o tipo de movimento do objeto móvel num sistema massa-mola) recebe influências, em maior ou menor grau, de todos os elementos que constituem o sistema. Dessa forma, uma investigação que se queira produtiva acerca de algum fenômeno específico requer que se leve em conta o meio no qual ele está inserido. Os elementos selecionados para análise, contudo, possivelmente representarão apenas algum(alguns) aspecto(s) dentre os vários que compõem todo o complexo formado pelo fenômeno e os eventos que o cercam e o afetam. No exemplo do sistema massa-mola, uma análise minimamente eficaz deverá levar em conta os seguintes aspectos: massa do objeto móvel, caracterização da mola e do atrito e condições iniciais.

Encontrar a descrição matemática de um sistema equivale a determinar um conjunto de relações matemáticas entre os atributos dos elementos que compõem o sistema a partir do conhecimento das relações entre esses elementos e entre os atributos de um mesmo elemento. Isso significa que modelos matemáticos de sistemas envolvem, de forma geral, uma pluralidade de variáveis inter-relacionadas (*sistemas multivariáveis*).

Um *sistema dinâmico* equivale, portanto, a uma estrutura multivariável (ou monovariável, caso se considere apenas um aspecto dessa estrutura) que se desenvolve no decorrer do tempo. Todos os sistemas examinados neste trabalho serão sistemas dinâmicos. Os sistemas dinâmicos são usualmente representados através de equações diferenciais e equações a diferenças. O emprego de equações diferenciais ou a diferenças se dá, respectivamente, conforme a evolução do fenômeno por elas descrito é considerada ocorrer em tempo contínuo ou discreto. Os sistemas estudados neste trabalho restringir-se-ão ao caso contínuo.

O *estado* de um sistema dinâmico é definido como o conjunto de valores de suas variáveis necessário e suficiente para caracterizar univocamente a situação física desse sistema (Kalman et al., 1969).

A representação matemática de um sistema dinâmico adota, habitualmente, a seguinte notação:

- Sistema dinâmico: $\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, u)$;
- Variável temporal: $t \in T$ (neste trabalho, $T = \mathfrak{R}_+$);
- Função de entrada: $u : T \rightarrow U$ (neste trabalho, $U = \mathfrak{R}$);
- Função de saída: $y : T \rightarrow Y$ (em geral, $Y = \mathfrak{R}^r$);
- Função de estado: $\mathbf{x} : T \rightarrow X$ (em geral, $X = \mathfrak{R}^n$).

Supondo-se que, para cada $t \in T$, Σ receba alguma entrada $u(t) \in U$ e produza alguma saída $y(t) \in Y$, a saída y dependerá tanto da entrada instantânea u quanto da história pregressa de Σ . A introdução da classe de funções de entrada $\Lambda(t_i, t_f)$ que assumem valores instantâneos em U e estão definidas no intervalo $[t_i, t_f]$ – logo, $u : [t_i, t_f] \rightarrow U$ e

$u \in \Lambda(t_i, t_f)$ –, com $0 \leq t_i \leq t_f$, permite que se enuncie a definição de estado consoante a notação apresentada (cf. Kalman et al. (1969)):

Definição 2.1. O estado $\mathbf{x}(t) \in X$ de um sistema dinâmico Σ é um atributo interno de Σ , no instante de tempo $t \in T$, que descreve completamente a parte da história passada de Σ que é relevante na determinação da saída $y(t) \in Y$ para uma dada entrada $u \in \Lambda(t_0, t_1)$.

Assim, se $\mathbf{x}(t_0)$ for o estado do sistema dinâmico no instante $t_0 < t_1$, o conhecimento de $u \in \Lambda(t_0, t_1)$ deverá ser necessário e suficiente para determinar $\mathbf{x}(t_1)$.

As *variáveis de estado* de um sistema dinâmico são as variáveis que pertencem ao menor conjunto de variáveis que determina o estado do sistema dinâmico (Ogata, 1997). Todo estado pode ser expresso por um ponto no *espaço de estados*, sendo que cada coordenada representa uma variável de estado. A evolução do estado de um sistema dinâmico ao longo do tempo no espaço de estados é denominada *trajetória* (ou *fluxo*, ou *órbita*).

Parte do estudo efetuado neste trabalho irá lidar com a *equação de estado* $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, u)$; na maioria das vezes, sem a presença explícita de uma entrada u , ou seja,

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Isso não significa, contudo, que a entrada do sistema é nula. De fato, a entrada pode ter sido expressa como função do tempo, $u = \gamma(t)$, função do estado, $u = \gamma(\mathbf{x})$, ou ambos os casos, $u = \gamma(t, \mathbf{x})$. A substituição de $u = \gamma$ em $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}, u)$ conduz, então, à configuração (2.1).

Quando a função f não depende explicitamente de t , é possível reescrever (2.1) da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Diz-se, nesse caso, que o sistema é *autônomo* ou *invariante no tempo*. Um sistema autônomo é invariante a deslocamentos temporais na origem, pois uma mudança na

variável de tempo de t para $\tau = t - a$ não altera o lado direito da equação de estado (2.2). Se o sistema não for autônomo, ele será denominado *não autônomo* ou *variante no tempo*.

Um sistema dinâmico será *linear* se acaso for possível o emprego do *princípio da superposição* (Ogata, 1997). Esse princípio afirma que a resposta produzida pela aplicação da soma de duas entradas diferentes num sistema é a soma das respostas individuais de cada uma das entradas. Na impossibilidade de aplicação do princípio da superposição, o sistema dinâmico será *não linear*. Embora muitos sistemas reais sejam representados por modelos lineares, na maior parte dos casos as relações físicas que os constituem são não lineares. Na prática, portanto, muitos sistemas eletromecânicos, hidráulicos, pneumáticos, etc., envolvem interações não lineares de suas variáveis. Os sistemas tratados neste trabalho serão todos não lineares.

2.2.2. Estados Estacionários em Sistemas Não Lineares

Nesta seção, os sistemas dinâmicos não lineares autônomos são classificados em termos de seu comportamento de estado estacionário (ou de regime). A razão de se restringir as classificações expostas a seguir apenas para o caso de sistemas autônomos se deve ao fato de o campo vetorial de sistemas não autônomos ser dependente do tempo, não fazendo sentido analisá-los com base em conceitos definidos para $t \rightarrow \infty$.

A despeito de um mesmo sistema dinâmico poder apresentar trajetórias iniciais completamente diferentes, essas trajetórias convergem para um padrão característico quando $t \rightarrow \infty$, conhecido como *comportamento de estado estacionário* (ou *de regime*). Para um dado sistema, o caminho percorrido pela trajetória de estado entre o estado inicial e o estado final denomina-se *transitório* (Ogata, 1997).

2.2.2.1. Ponto de Equilíbrio

Um estado $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$ será um *estado de equilíbrio* (ou *ponto de equilíbrio*, ou *ponto fixo*) de um dado sistema dinâmico Σ caso ele seja invariante sob a dinâmica associada ao sistema, ou seja, se se constatar que $\dot{\mathbf{x}}_e = f(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}$. Um sistema não linear pode possuir múltiplos pontos de equilíbrio.

2.2.2.2. Soluções Periódicas

Sistemas não lineares podem apresentar oscilações de amplitude e período constantes sem que sejam verificadas excitações externas continuadas. Essas oscilações, *soluções periódicas*, são, grosso modo, denominadas *ciclos-limites*.

2.2.2.3. Soluções Quase-Periódicas

Uma solução *quase-periódica*, por sua vez, corresponde a uma oscilação cuja frequência é a soma de frequências de oscilações periódicas não múltiplas entre si.

2.2.2.4. Caos

Um sistema não linear pode exibir um comportamento de regime mais complicado que não se insere em nenhum dos três padrões acima descritos (ponto de equilíbrio, solução periódica ou solução quase-periódica) e que aparenta ser aleatório. Tal comportamento é designado por *caos*. Uma solução caótica não é, de fato, aleatória. Aleatoriedade implicaria em que o modelo do sistema ou sua entrada contivessem incertezas, o que resultaria na impossibilidade de se analisar as soluções produzidas por esse sistema sem recorrer a métodos estatísticos. No caso de ocorrência de caos, ao contrário, o problema em questão é determinístico, isto é, não há incertezas no modelo, entrada ou condições iniciais.

Mais detalhes sobre estados estacionários em sistemas dinâmicos não lineares podem ser encontrados em Slotine & Li (1991) e Mira (1990).

2.2.3. Aspectos Relativos ao Estudo de Sistemas Dinâmicos

Como descreve Luenberger (1979), o estudo de um sistema dinâmico pode ser dividido em quatro estágios: representação, geração de soluções, exploração de relações estruturais e controle. Dependendo dos objetivos a que se propõe o estudo, na maior parte dos casos enfatiza-se um ou dois desses aspectos.

2.2.3.1. Representação

O processo de obtenção de uma descrição matemática associada a um sistema dinâmico real é denominado *modelagem*, sendo o resultado final um *modelo*. Esta etapa é essencial, pois deve assegurar um grau de fidelidade aceitável entre o comportamento do fenômeno real sob investigação e os padrões produzidos pela interação das variáveis selecionadas que compõem o estado do sistema-modelo¹.

2.2.3.2. Geração de Soluções

O uso mais imediato de um modelo dinâmico se dá na *geração de soluções* que atendem às equações que descrevem o sistema. O padrão temporal das variáveis que compõem o estado do sistema numa solução específica é estudado visando-se aos mais variados propósitos.

Uma solução pode, às vezes, ser expressa analiticamente; mais freqüentemente, e especialmente no caso de sistemas não lineares, porém, faz-se necessária a geração numérica de soluções específicas por meio de simulações. As simulações podem ser empregadas para se testar a validade de um modelo, de maneira que uma dada solução deverá apresentar as propriedades comumente associadas ao fenômeno representado pelo sistema-modelo. As simulações contidas neste trabalho foram efetuadas no aplicativo Matlab.

Um modelo representa um rol de soluções, cada uma delas determinada por diferentes entradas, diferentes valores de parâmetros e diferentes condições iniciais.

2.2.3.3. Exploração de Relações Estruturais

Boa parte da teoria de sistemas dinâmicos é motivada pelo desejo de se ir além do estágio do simples cômputo de soluções particulares de um modelo, tendo como meta a investigação e o estabelecimento de *relações estruturais* entre, por exemplo, um dado parâmetro do sistema e sua interferência na solução. Tais relações são obtidas

¹ Neste capítulo e nos ulteriores, a palavra *sistema* incorporará a acepção associada a *modelo*, devendo o sentido ficar claro conforme o contexto em que o termo for utilizado.

indiretamente, através do uso de conceitos analíticos auxiliares. Um exemplo disso é a averiguação da estabilidade de um dado sistema por meio de funções auxiliares que levem em conta a estrutura do sistema-modelo, sem que seja necessária a geração prévia de soluções.

2.2.3.4. Controle

Muitas das metodologias de estudo de sistemas dinâmicos são movidas pelo objetivo de se criar maneiras eficazes de mudar um dado sistema de sorte que sua resposta seja melhorada segundo algum aspecto. Dessa forma, o *controle* é uma atividade continuada executada sobre e ao longo da operação do sistema que deverá ter como resultado uma resposta tão próxima da ideal quanto for possível de acordo com algum critério.

Este trabalho enfatiza o terceiro e o quarto aspectos no estudo de sistemas dinâmicos não lineares – respectivamente, a exploração de relações estruturais e a determinação de estratégias para um controle eficiente desses sistemas.

2.3. Estabilidade e Convergência

2.3.1. Propriedades de Conjuntos

Esta seção apresenta alguns conceitos basilares que serão empregados nas seções subseqüentes.

O termo *conjunto*, neste trabalho, está relacionado a uma coleção finita ou infinita de pontos. Por exemplo, os pontos que compõem uma reta ou que se localizam dentro de uma esfera no \mathfrak{R}^n são conjuntos. Um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *limitado* caso exista um escalar $r > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| < r$ para todos os pontos $\mathbf{x} \in S$. Neste estudo, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ (norma Euclidiana).

Definição 2.2. Seja um escalar $\varepsilon > 0$ e sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} pontos no \mathfrak{R}^n . O conjunto $N(\mathbf{x}, \varepsilon) := \{\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ é denominado *vizinhança* de \mathbf{x} com *raio* ε . O vetor \mathbf{x} chama-se *centro*. Caso o valor do raio não seja relevante, representa-se a vizinhança de \mathbf{x} por $N(\mathbf{x})$.

Supondo-se que S seja um subconjunto do \mathfrak{R}^n , o vetor $\mathbf{x} \in S$ será um *ponto interior* de S se todos os pontos da vizinhança $N(\mathbf{x})$ pertencerem a S . Admitindo-se, por outro lado, que \mathbf{x} não necessariamente pertença a S , \mathbf{x} será um *ponto de acumulação* de S se toda vizinhança de \mathbf{x} contiver pelo menos um ponto de S distinto de \mathbf{x} .

Teorema 2.3. Se $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ for um ponto de acumulação de $S \subset \mathfrak{R}^n$, toda vizinhança $N(\mathbf{x})$ conterá infinitos pontos de S .

Prova. Cf. Apostol (1965), p.49.

Está implícito nesse teorema o fato de que não se observam pontos de acumulação em conjuntos com finitos pontos. A afirmação contrária, todavia, não se verifica. O conjunto $Z_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, por exemplo, é composto de infinitos termos e não possui pontos de acumulação. Por outro lado, um conjunto com infinitos termos *limitado sempre* apresenta um ponto de acumulação. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Bolzano-Weierstrass*.

Teorema 2.4 (Bolzano-Weierstrass). Se um conjunto limitado $S \subset \mathfrak{R}^n$ possuir infinitos pontos, haverá pelo menos um ponto no \mathfrak{R}^n que será um ponto de acumulação de S .

Prova. Cf. Apostol (1965), pp.49-51.

Uma seqüência de vetores no \mathfrak{R}^n $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dots\}$, representada por $\{\mathbf{x}_n\}$, convergirá para um vetor-limite \mathbf{x} caso se verifique $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Um vetor

\mathbf{x} será um ponto de acumulação da seqüência $\{\mathbf{x}_n\}$ se existir alguma subseqüência de $\{\mathbf{x}_n\}$ que convirja para \mathbf{x} , ou seja, se houver um conjunto \mathbb{E} com infinitos termos pertencentes a Z_+ tal que $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{E}}$ convirja para \mathbf{x} . De acordo com o Teorema de Bolzano-Weierstrass, uma seqüência limitada $\{\mathbf{x}_n\}$ no \mathfrak{R}^n possui pelo menos um ponto de acumulação no \mathfrak{R}^n . Uma seqüência de números reais $\{r_n\}$ monótona, não decrescente e superiormente limitada converge para um número real. De forma similar, uma seqüência de números reais $\{r_n\}$ monótona, não crescente e inferiormente limitada também converge para um número real.

Exemplo 2.5. O conjunto S de números da forma $1/n$, com $n = 1, 2, 3, \dots$ tem 0 como ponto de acumulação. Deve-se atentar ao fato de 0 não pertencer ao conjunto S .

Um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *aberto* se todo ponto de S for um ponto interior de S . Por exemplo, um intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto em \mathfrak{R} . No entanto, não é um conjunto aberto no \mathfrak{R}^n , pois vizinhanças n -dimensionais não estão definidas em (a, b) .

Um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *fechado* se ele contiver todos os seus pontos de acumulação. Por exemplo, um intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado em \mathfrak{R} e também no \mathfrak{R}^n . Intervalos abertos em \mathfrak{R} não são conjuntos fechados porque não contêm seus extremos, ambos pontos de acumulação. Pelo mesmo motivo, intervalos semi-abertos do tipo $(a, b]$ ou $[a, b)$ não são conjuntos fechados. Entretanto, tais intervalos tampouco são conjuntos abertos. Com efeito, para o caso $(a, b]$ a vizinhança $N(b)$ não contém apenas pontos interiores. O \mathfrak{R}^n é um conjunto aberto e, simultaneamente, um conjunto fechado. O mesmo vale para o conjunto vazio.

Um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *compacto* se for limitado e fechado.

Um ponto $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^n$ será um *ponto-limite* de um conjunto $S \subset \mathfrak{R}^n$ se toda vizinhança de \mathbf{p} contiver pelo menos um ponto de S e um ponto não pertencente a S . O conjunto de todos os pontos-limites de S , expresso por ∂S , é denominado *limite* (ou *fronteira*) de S . Um conjunto fechado contém todos os seus pontos-limites. Um conjunto aberto não contém nenhum de seus pontos-limites. O *interior* de S é designado por $S - \partial S$. Um conjunto

aberto é igual ao seu interior. Um conjunto fechado é igual a $S + \partial S$, i.e., à união de S e sua fronteira.

Um conjunto aberto $S \subset \mathfrak{R}^n$ será *conexo* se todo par de pontos em S puder ser interligado por um arco contido em S . A união de um conjunto S aberto e conexo com alguns, nenhum ou todos os seus pontos-limites denomina-se *região*. Caso nenhum dos pontos de fronteira pertença à união, a região em questão será designada por *domínio* ou *região aberta*.

2.3.2. Existência e Unicidade

Considerando-se o problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \quad \text{com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ e $f: \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, como a representação matemática de um sistema físico sob experimentação, deseja-se que, ao partir de um estado inicial \mathbf{x}_0 no instante t_0 , o sistema (2.3) assuma um estado definido no instante futuro $t = t_1 > t_0$, ou seja, demanda-se a *existência* de uma solução para o problema (2.3). Além disso, caso o sistema seja determinístico, espera-se que, se as condições do experimento anterior puderem ser repetidas de maneira exata, a dinâmica do sistema seja a mesma e se alcance novamente o mesmo estado em $t_1 > t_0$. Para que o modelo matemático (2.3) preveja de forma correta o estado futuro de um sistema dinâmico a partir do estado atual em $t = t_0$, o problema (2.3) deverá ter *solução única* para cada condição inicial.

Entende-se como *solução* de (2.3) num intervalo $[t_0, t_1]$ uma função contínua $\mathbf{x}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ tal que $\dot{\mathbf{x}}(t)$ seja definida e $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)) \forall t \in [t_0, t_1]$. Se $f(t, \mathbf{x})$ for contínua em t e em \mathbf{x} , então a solução $\mathbf{x}(t)$ será continuamente diferenciável. Caso $f(t, \mathbf{x})$ seja contínua em \mathbf{x} , mas somente contínua por partes em t , a solução $\mathbf{x}(t)$ será apenas continuamente diferenciável por partes. A suposição de continuidade por partes em t remonta aos casos em que o sistema $f(t, \mathbf{x})$ depende de uma entrada variável no tempo com descontinuidades do tipo degrau, por exemplo.

A questão de existência e unicidade, que será abordada por meio de restrições introduzidas em $f(t, \mathbf{x})$, é essencial para que o modelo descrito por equações diferenciais (2.3) seja válido como representação do comportamento de um sistema dinâmico real.

Definição 2.6. Seja $f : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ uma função $f(t, \mathbf{x})$. Se a desigualdade

$$\|f(t, \mathbf{y}_1) - f(t, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad (2.4)$$

for satisfeita para todo (t, \mathbf{y}_1) e (t, \mathbf{y}_2) em alguma vizinhança de (t_0, \mathbf{x}_0) , a função f será *Lipschitz em \mathbf{x}* . A constante positiva L é denominada *constante de Lipschitz*.

Diz-se que uma função $f(\mathbf{x})$ é *localmente Lipschitz* num dado domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$ se cada ponto de D possuir uma vizinhança D_0 de tal forma que f atenda à condição de Lipschitz (2.4) para todos os pontos de D_0 com alguma constante de Lipschitz L_0 . Uma função $f(\mathbf{x})$ será *Lipschitz num conjunto W* se (2.4) for satisfeita para todos os pontos de W com a mesma constante de Lipschitz L . Uma função localmente Lipschitz num domínio D não é necessariamente Lipschitz em D , uma vez que a condição (2.4) pode não valer de maneira uniforme (i.e., com a mesma constante L) para todos os pontos em D . No entanto, uma função localmente Lipschitz num domínio D será Lipschitz em todo subconjunto compacto de D (Khalil, 1992). Diz-se que uma função é *globalmente Lipschitz* caso ela seja Lipschitz no \mathfrak{R}^n . Pode-se mostrar que o fato de uma função $f(\mathbf{x})$ ser Lipschitz num conjunto W implica continuidade de $f(\mathbf{x})$ em W (Khalil, 1992).

Essa terminologia permanece sendo válida no caso de uma função dependente do tempo $f(t, \mathbf{x})$, contanto que a condição de Lipschitz valha de maneira uniforme em t para todos os instantes num dado intervalo de tempo.

Teorema 2.7 (Existência e Unicidade Locais). Seja $f : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ uma função $f(t, \mathbf{x})$ contínua por partes na variável t que satisfaz a condição de Lipschitz (2.4) para

todo $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in B = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Existirá, então, um $\delta > 0$, dependente de \mathbf{x}_0 , tal que a equação de estado (2.3) possua solução única em $[t_0, t_0 + \delta]$.

Prova. Cf. Khalil (1992), p.74.

No Teorema 2.7, a principal restrição introduzida em $f(t, \mathbf{x})$ corresponde à exigência de satisfação de (2.4). Todavia, o resultado obtido é local, pois existência e unicidade são conseguidas apenas no intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$, onde δ pode ser muito pequeno. Pode-se requerer, a fim de se garantir existência e unicidade globais, que f atenda a condições *globais* de Lipschitz, i.e., aumenta-se o peso das restrições às quais f deve obedecer. Esse é um recurso limitador, entretanto. Muitos modelos de sistemas físicos que apresentam soluções únicas e globais não atendem a condições globais de Lipschitz. Ainda, exemplos de funções f contínuas e contínuas por partes que não satisfazem condições locais de Lipschitz são raros, sendo razoável supor que representações matemáticas de sistemas práticos como (2.3) atendam a condições locais de Lipschitz (Khalil, 1992). Pode-se, dessa maneira, buscar um teorema que garanta existência e unicidade globais requerendo-se apenas a validade de condições locais de Lipschitz, à custa de se ter mais informações sobre a solução do sistema. Para o caso de sistemas autônomos, por exemplo, tem-se o teorema a seguir (a extensão para sistemas não autônomos pode ser encontrada em Hahn (1967)):

Teorema 2.8. Seja $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ uma função $f(\mathbf{x})$ localmente Lipschitz em \mathbf{x} num domínio $D \subset \mathfrak{R}^n$ e seja W um subconjunto compacto de D . Suponha que $\mathbf{x}_0 \in W$ e que se sabe que toda solução de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, com $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, localiza-se inteiramente em W . Existirá, então, uma solução única para cada \mathbf{x}_0 definida para todo $t \geq t_0$.

Prova. Cf. Khalil (1992), p.83.

O ponto a ser destacado nesse teorema é a necessidade de se saber que a solução está de fato num conjunto compacto sem que se tenha de resolver o sistema de equações diferenciais. O Método Direto de Lyapunov é uma ferramenta muito útil nesse sentido.

2.3.3. Sistemas Autônomos

Considere o sistema não linear invariante no tempo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \text{com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ e $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é suposta localmente Lipschitz em \mathbf{x} . Uma solução $\mathbf{x}(t)$ desse sistema será *limitada* caso exista uma função $\gamma(\mathbf{x}(t))$ não negativa contínua por partes tal que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \gamma(\mathbf{x}(t)), \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.6)$$

Designa-se \mathbf{x}_e como o ponto de equilíbrio de (2.5), ou seja,

$$f(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Por conveniência, todas as definições e teoremas deste capítulo referem-se ao caso em que o ponto de equilíbrio localiza-se na origem do \mathfrak{R}^n , ou seja, $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Essa suposição não acarreta perda de generalidade, pois qualquer ponto de equilíbrio pode ser transladado para a origem através de uma mudança de variáveis.

O equilíbrio \mathbf{x}_e de (2.5) será

- *estável*, caso haja, para cada $\varepsilon > 0$, um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0; \quad (2.8)$$

- *instável*, se não for estável;
- *atrativo*, no caso de existir algum escalar $r(\mathbf{x}(t)) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0; \quad (2.9)$$

- *(localmente) assintoticamente estável (AE)*, se acaso \mathbf{x}_e for estável e atrativo;

Um ponto de equilíbrio AE possui uma *região de atração* – um conjunto Ψ de estados iniciais $\mathbf{x}(t_0)$ tal que $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_e$ com $t \rightarrow \infty$ para todo $\mathbf{x}_0 \in \Psi$.

- *globalmente estável* (GE), se \mathbf{x}_e for estável e se todas as soluções $\mathbf{x}(t)$ de (2.5) forem limitadas;
- *globalmente assintoticamente estável* (GAE), se a região de atração de \mathbf{x}_e for o \mathfrak{R}^n ;
- *(localmente) exponencialmente estável* (EE), caso existam constantes positivas α , λ e r tal que

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \alpha e^{-\lambda t} \|\mathbf{x}(t_0)\|, \quad \forall t \geq t_0; \quad (2.10)$$

- *globalmente exponencialmente estável* (GEE), se existirem constantes positivas α e λ tal que para todo $\mathbf{x}(t_0) \in \mathfrak{R}^n$ (i.e., a região de atração de \mathbf{x}_e é o \mathfrak{R}^n)

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \alpha e^{-\lambda t} \|\mathbf{x}(t_0)\|, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.11)$$

Essas definições partem do pressuposto de que as soluções de (2.5) são definidas para todo $t \geq t_0$. Essa suposição não é garantida pela condição local de Lipschitz atendida por f . Todavia, as exigências adicionais demandadas pelo Método Direto de Lyapunov no Teorema 2.9 a seguir garantirão existência global de $\mathbf{x}(t)$, para todo $t \geq t_0$, no contexto do Teorema 2.8.

Para sistemas dinâmicos não autônomos, os conceitos listados acima podem variar de acordo com o instante inicial t_0 . Se forem independentes de t_0 , serão denominados *uniformes*.

Mais detalhes sobre estabilidade de pontos de equilíbrio podem ser encontrados em Vidyasagar (1978).

2.3.3.1. Método Direto de Lyapunov

A idéia central do Método Direto de Lyapunov resulta da extensão matemática de uma constatação física fundamental: se a energia total de um sistema mecânico ou elétrico for continuamente dissipada, o sistema, seja linear ou não linear, deverá tender a um estado de equilíbrio. Logo, é possível entrever a estabilidade de um sistema dinâmico por meio do exame da variação de alguma função escalar (como a função da energia).

Considere, por exemplo, o sistema descrito pela equação a seguir (Slotine & Li, 1991):

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0. \quad (2.12)$$

A expressão (2.12) representa um sistema massa-mola não linear (a não-linearidade da mola é indicada pelo termo $k_0x + k_1x^3$) com amortecimento $b\dot{x}|\dot{x}|$ também não linear (v. Figura 2.1).

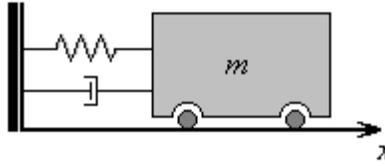


Figura 2.1. Sistema massa-mola não linear

Supondo-se que o objeto móvel seja deslocado para além do comprimento normal da mola e então solto, deseja-se saber se o movimento resultante será estável. Como não se dispõe da solução analítica de (2.12) e linearizações podem prejudicar uma correta avaliação do comportamento do sistema, torna-se necessário recorrer a outros métodos que efetuem uma análise satisfatória de sua estabilidade. Verificando-se a equação da energia

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0\chi + k_1\chi^3)d\chi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4, \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$, observa-se que a estabilidade assintótica equivale à convergência da energia mecânica para zero, ou seja, à afluência do estado do sistema para o ponto de equilíbrio $[x \ \dot{x}]^T = [0 \ 0]^T$. A taxa de variação da energia durante a operação do sistema corresponde à derivada de $V(\mathbf{x})$ levando-se em consideração (2.12):

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0x + k_1x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}|) = -b|\dot{x}|^3. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) indica que a energia do sistema, a partir de algum valor inicial, é continuamente dissipada até que o movimento da massa seja cessado, i.e., até que $\dot{x} = 0$.

O Método Direto de Lyapunov corresponde a uma generalização dos conceitos empregados no exemplo do sistema massa-mola não linear para sistemas mais complexos. A partir de um conjunto de equações diferenciais não lineares, o procedimento requer a introdução de uma função escalar cuja derivada irá indicar o grau de estabilidade e convergência das soluções do sistema em questão.

Teorema 2.9 (Método Direto de Lyapunov). Seja \mathbf{x}_e um ponto de equilíbrio de (2.5) e presuma que $f(\mathbf{x})$ seja localmente Lipschitz em \mathbf{x} . Seja $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável que satisfaz

- $V(\mathbf{x}) > 0$, i.e., $V(\mathbf{x})$ é definida positiva, e $V(\mathbf{0}) = 0$;
- $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0$;
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ com $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, i.e., $V(\mathbf{x})$ é *ilimitada radialmente*.

Então, $V(\mathbf{x})$ será uma *função de Lyapunov* e o ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e será GE caso $W(\mathbf{x}) \geq 0$ (W semidefinida positiva) ou GAE caso $W(\mathbf{x}) > 0$ (W definida positiva).

Prova. Cf. Hahn (1967), pp.102-103, e Khalil (1992), pp.101-102. Deve-se ressaltar que a prova desse teorema, que foge dos propósitos deste capítulo, garante existência e unicidade das soluções de (2.5) no \mathfrak{R}^n para $t \geq t_0$.

A exigência de que $V(\mathbf{x})$ seja ilimitada radialmente é necessária para que os resultados do Teorema 2.9 sejam globais (conforme Teorema de Barbashin-Krasovskii em Khalil (1992)). Entretanto, as condições do teorema são apenas suficientes, pois o fato de não se satisfazer as condições de estabilidade ou estabilidade assintótica para uma dada candidata a função de Lyapunov não significa que o ponto de equilíbrio em questão não seja GE ou GAE. Indica, apenas, que tais características não podem ser estabelecidas utilizando-se tal candidata a função de Lyapunov. De fato, não há um procedimento sistemático que construa funções de Lyapunov adequadas para todos os tipos de problemas. A introdução

dos métodos recursivos de *backstepping* configura-se, nesse sentido, num grande avanço, pois resolve essa questão para diversas classes de sistemas não lineares.

Se acaso o sistema autônomo (2.5) for linear, ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (2.15)$$

uma candidata a função de Lyapunov é a função quadrática $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}$, onde P é uma matriz simétrica real definida positiva. A derivada de V ao longo das trajetórias do sistema linear é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T P\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T P\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (PA + A^T P)\mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde Q é uma matriz simétrica definida pela *equação de Lyapunov*

$$PA + A^T P = -Q. \quad (2.17)$$

Se Q for definida positiva, a origem será assintoticamente estável. Mais detalhes sobre o caso linear podem ser encontrados em Franklin et al. (1995).

2.3.3.2. Princípio de Invariância de La Salle

A necessidade de se ter $W(\mathbf{x}) > 0$ (ou $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$) para que se consiga estabilidade assintótica global é, em muitos casos, difícil de ser satisfeita (Fossen & Strand, 1999). O Princípio de Invariância de La Salle pode, então, ser empregado para que se consiga verificar se um sistema não linear autônomo é GAE mesmo com $\dot{V}(\mathbf{x})$ semidefinida negativa. Algumas definições, porém, devem ser introduzidas antes de se enunciar o Teorema de La Salle.

Definição 2.10. Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução do sistema não linear $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, com $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Um ponto \mathbf{p} será um *ponto-limite positivo* de $\mathbf{x}(t)$ caso haja uma seqüência $\{t_n\}$, com $t_n \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$, de tal forma que $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{p}$ quando $n \rightarrow \infty$. O conjunto de todos os pontos-limites positivos de $\mathbf{x}(t)$ é denominado *conjunto-limite positivo* de $\mathbf{x}(t)$.

Deve-se destacar que o conceito de *ponto-limite positivo* é de natureza inteiramente diversa do de *ponto-limite* apresentado na seção 2.3.1. A definição de *ponto-limite positivo* associa-se ao conceito de *ponto de acumulação*.

Definição 2.11. Seja um sistema não linear $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, com $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Um conjunto M será denominado *invariante* se qualquer solução $\mathbf{x}(t)$ desse sistema que pertença a M em algum instante t_1 pertencer a M em todos os instantes:

$$\mathbf{x}(t_1) \in M \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in M, \forall t \in \mathfrak{R}. \quad (2.18)$$

Um conjunto Ω será *positivamente invariante* caso a definição acima seja verdadeira apenas para instantes futuros:

$$\mathbf{x}(t_1) \in \Omega \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \Omega, \forall t \geq t_1. \quad (2.19)$$

Uma propriedade fundamental dos conjuntos-limites é o lema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em Khalil (1992):

Lema 2.12. Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução limitada de (2.5). Supondo-se que $\mathbf{x}(t)$ pertença ao domínio D para todo $t \geq t_0$, seu conjunto-limite positivo L^+ será um conjunto compacto invariante não vazio. Além disso, $\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+$ quando $t \rightarrow \infty$.

Prova. Cf. Khalil (1992), p.491.

Apresentadas as definições e comentários necessários, pode-se agora enunciar o Teorema de La Salle:

Teorema 2.13 (Princípio de Invariância de La Salle). Seja Ω um conjunto compacto positivamente invariante de (2.5). Seja, ainda, $V : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Defina $E := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ e seja M o maior conjunto invariante contido em E . Então, toda solução limitada $\mathbf{x}(t)$ iniciando-se em Ω converge para M com $t \rightarrow \infty$.

Prova (Khalil, 1992, p.117). Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução de (2.5) iniciando-se em Ω . Como $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ em Ω , $V(\mathbf{x})$ é uma função não crescente. Ademais, a continuidade de $V(\mathbf{x})$ no conjunto compacto Ω implica que $V(\mathbf{x})$ é inferiormente limitada em Ω . Logo, $V(\mathbf{x})$ possui um limite a para $t \rightarrow \infty$. Note, ainda, que o conjunto-limite positivo L^+ localiza-se em Ω , pois Ω é um conjunto fechado (um conjunto compacto é fechado) e positivamente invariante. Considerando-se a Definição 2.10 e a continuidade de $V(\mathbf{x})$, tem-se que $V(\mathbf{p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t_n)) = a$, onde $\mathbf{p} \in L^+$ e $\mathbf{x}(t_n) \rightarrow \mathbf{p}$ quando $n \rightarrow \infty$ para uma seqüência $\{t_n\}$ com $t_n \rightarrow \infty$. Portanto, $V(\mathbf{x}) = a$ em L^+ . Como, pelo Lema 2.12, L^+ é um conjunto invariante, verifica-se que $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ em L^+ . Assim, $L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$. Como $\mathbf{x}(t)$ é limitado, $\mathbf{x}(t)$ tende a L^+ quando $t \rightarrow \infty$ (Lema 2.12). Conseqüentemente, $\mathbf{x}(t)$ aproxima-se de M quando $t \rightarrow \infty$.

Deve-se notar que o Teorema de La Salle não requer que $V(\mathbf{x})$ seja definida positiva. A Figura 2.2 traz uma interpretação geométrica do Teorema 2.13.

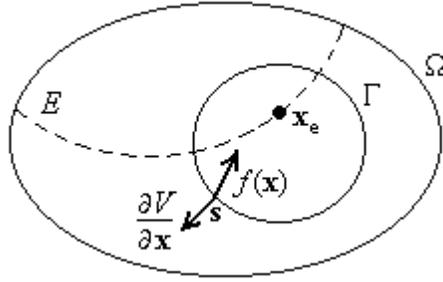


Figura 2.2. Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de La Salle.

Supondo-se, por hipótese, que na fronteira do conjunto positivamente invariante Ω a função de Lyapunov assumo o valor $V(\mathbf{x}) = v_1$, define-se $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid V(\mathbf{x}) \leq v_1\}$, uma vez que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ em Ω . A linha tracejada representa o conjunto E onde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Admite-se que o maior conjunto invariante M em E seja composto apenas pelo ponto de equilíbrio estável \mathbf{x}_e . Define-se a curva de nível $\Gamma := \{\mathbf{x} \in \Omega \mid V(\mathbf{x}) = v_2 < v_1\}$; seja \mathbf{s} um ponto $\mathbf{s} \in \Gamma$. Em \mathbf{s} :

$$\dot{V} = \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{s}} = \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{s}} \leq 0. \quad (2.20)$$

Como $\partial V / \partial \mathbf{x}$ é o vetor gradiente de $V(\mathbf{x})$ – logo, perpendicular a Γ e “saindo” – e $f(\mathbf{x})$ é o vetor velocidade $\dot{\mathbf{x}}$ – tangente às trajetórias do sistema –, a equação (2.20) indica que o produto escalar do vetor gradiente de $V(\mathbf{x})$ com o vetor velocidade $f(\mathbf{x})$ deve ser menor ou igual a zero. Isso significa que o ângulo entre os dois vetores deve ser maior ou igual a 90° . Dado que essa relação é verificada para todos os pontos de Γ , as soluções $\mathbf{x}(t)$ de (2.5) estão necessariamente entrando na região delimitada por Γ . Como isso é válido para todas as curvas de nível internas a Ω , conclui-se que toda solução com condição inicial em Ω converge para o ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e .

Corolário 2.14 (Estabilidade Assintótica). Seja $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ o único ponto de equilíbrio de (2.5). Seja $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável, definida positiva e ilimitada radialmente tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$. Seja, ainda, $E := \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ e

presuma que nenhuma solução senão $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ possa permanecer indefinidamente em E . Então, a origem será GAE.

Conclui-se, portanto, que as propriedades de convergência do sistema dinâmico em questão serão tanto mais poderosas quanto menor for a dimensão de M . No caso de estabilidade assintótica, o maior subconjunto invariante M de E reduz-se à origem $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$.

Rodrigues et al. (2002) propuseram uma extensão do Princípio de Invariância de La Salle na qual não se exige que a derivada da função de Lyapunov seja sempre, no mínimo, semidefinida negativa. O teorema a seguir apresenta essa versão mais geral do Teorema 2.13 que permite que a derivada da função de Lyapunov ao longo das trajetórias do sistema seja positiva em algumas regiões.

Teorema 2.15 (Extensão do Princípio de Invariância de La Salle). Seja $v \in \mathfrak{R}$ uma constante tal que $\Omega_v = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid V(\mathbf{x}) < v\}$ seja um conjunto limitado positivamente invariante de (2.5). Seja, ainda, $V : \Omega_v \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável. Defina $C := \{\mathbf{x} \in \Omega_v \mid \dot{V}(\mathbf{x}) > 0\}$ e presuma que $\sup_{\mathbf{x} \in C} V(\mathbf{x}) = l < v$. Defina, ainda, $\bar{\Omega}_l := \{\mathbf{x} \in \Omega_v \mid V(\mathbf{x}) \leq l\}$ e $E := \{\mathbf{x} \in \Omega_v \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ e seja M o maior conjunto invariante de (2.5) contido em E . Então, toda solução limitada $\mathbf{x}(t)$ iniciando-se em Ω_v converge para M quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, se $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_l$, então $\mathbf{x}(t) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq t_0$ e $\mathbf{x}(t)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.5) contido em $\bar{\Omega}_l$.

Prova (Rodrigues et al., 2002, p.53). Suponha, primeiramente, que $\mathbf{x}_0 \in \Omega_v$ e $\mathbf{x}_0 \notin \bar{\Omega}_l$. Seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução de (2.5) iniciando-se em Ω_v . Admita, de início, que $\mathbf{x}(t)$ permaneça fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \geq t_0$. Como $C \subset \bar{\Omega}_l$, verifica-se, nesse caso, $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$. Assim, $V(\mathbf{x})$ é uma função não crescente. Ainda, o conjunto-limite positivo L^+ de $\mathbf{x}(t)$ está contido no conjunto invariante Ω_v ; mais precisamente, no subconjunto compacto de Ω_v dado por $\{\mathbf{x} \in \Omega_v \mid V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_0)\}$. Como a função $V(\mathbf{x})$ é não crescente e contínua, $V(\mathbf{x})$ é

inferiormente limitada nesse conjunto. Logo, $V(\mathbf{x})$ possui um limite a para $t \rightarrow \infty$. Considerando-se a Definição 2.10 e o Lema 2.12, tem-se que $V(\mathbf{x}) = a$ em L^+ e, uma vez que L^+ é um conjunto invariante de (2.5), $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ em L^+ . Assim, $L^+ \subset \Omega_v - C$, donde se conclui que $\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+ \subset M$ quando $t \rightarrow \infty$.

Admitindo-se, agora, que $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}_l$, tem-se que $V(\mathbf{x}_0) \leq l$. Afirma-se que a solução $\mathbf{x}(t)$ permanece em $\overline{\Omega}_l$ para todo $t \in [t_0, t_+)$. Para provar essa afirmação, suponha que há um instante $t^* > t_0$ em que $V(\mathbf{x}(t^*)) > l$. Existirá, então, um $s \in [t_0, t^*)$ tal que $V(\mathbf{x}(s)) = l$ e $V(\mathbf{x}(t)) > l$ para $t \in (s, t^*)$. Isso significa que existe algum $t' \in (s, t^*)$ em que se verifica $\dot{V}(\mathbf{x}(t')) > 0$, o que contradiz o fato de que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ fora de $\overline{\Omega}_l \supset C$. Assim, $t_+ = \infty$ e a solução permanece dentro de $\overline{\Omega}_l$ para $t \geq t_0$. Portanto, o conjunto-limite positivo L^+ é não vazio e a solução aproxima-se dele quando $t \rightarrow \infty$. Ademais, L^+ é um subconjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$. Logo, a solução $\mathbf{x}(t)$ aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$ quando $t \rightarrow \infty$.

A Figura 2.3 traz uma interpretação geométrica da Extensão do Princípio de Invariância de La Salle. O Teorema 2.15 garante que todas as soluções de (2.5) com condição inicial dentro de Ω_v tendem para o maior conjunto invariante contido em E . Se, em particular, esse maior conjunto invariante estiver contido em $\overline{\Omega}_l$, então todas as soluções com condição inicial em Ω_v tendem para o maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$. Uma vez dentro de $\overline{\Omega}_l$, as soluções não saem desse conjunto. Duas coisas podem ocorrer dentro de $\overline{\Omega}_l$: ou as soluções tendem para o conjunto $\{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}_l \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ ou permanecem entrando e saindo do conjunto C (Rodrigues et al., 2002).

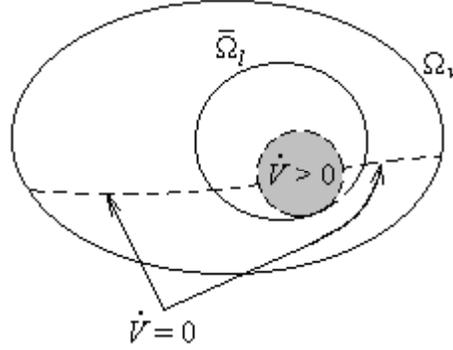


Figura 2.3. Interpretação geométrica da Extensão do Teorema de La Salle.

Teorema 2.16 (Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância de La Salle).

Seja $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função $V(\mathbf{x})$ continuamente diferenciável. Defina $C := \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \dot{V}(\mathbf{x}) > 0\}$ e presuma que $\sup_{\mathbf{x} \in C} V(\mathbf{x}) = l \in \mathfrak{R}$. Defina, ainda, $\bar{\Omega}_l := \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid V(\mathbf{x}) \leq l\}$ e $E := \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ e seja M o maior conjunto invariante de (2.5) contido em E . Então, toda solução limitada $\mathbf{x}(t)$ converge para M quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, se $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_l$, então $\mathbf{x}(t) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq t_0$ e $\mathbf{x}(t)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.5) contido em $\bar{\Omega}_l$.

Prova (Rodrigues et al., 2002, p.54). Suponha, primeiramente, que $\mathbf{x}_0 \notin \bar{\Omega}_l$ e presuma que a solução $\mathbf{x}(t)$ de (2.5) seja limitada para $t \geq t_0$. Admitindo-se que $\mathbf{x}(t)$ permaneça fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \geq t_0$, verificar-se-á $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ para $t \geq t_0$. Como $V(\mathbf{x})$ é não crescente e inferiormente limitada, $V(\mathbf{x}) \rightarrow a \in \mathfrak{R}$ quando $t \rightarrow \infty$. O conjunto-limite positivo L^+ de $\mathbf{x}(t)$ é compacto, não vazio e invariante (Lema 2.12). Isso implica que $V(\mathbf{x}) = a$ em L^+ e, conseqüentemente, que $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ em L^+ . Assim, $L^+ \subset M$, donde se conclui que $\mathbf{x}(t) \rightarrow L^+ \subset M$ quando $t \rightarrow \infty$.

Admitindo-se, agora, que $\mathbf{x}_0 \in \bar{\Omega}_l$, tem-se que $V(\mathbf{x}_0) \leq l$. Afirma-se que a solução $\mathbf{x}(t)$ permanece em $\bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq t_0$. Para provar essa afirmação, suponha que há um instante $t^* > t_0$ em que $V(\mathbf{x}(t^*)) > l$. Existirá, então, um $s \in [t_0, t^*)$ tal que $V(\mathbf{x}(s)) = l$ e $V(\mathbf{x}(t)) > l$ para $t \in (s, t^*)$. Isso contradiz o fato de que $\dot{V} \leq 0$ fora de $\bar{\Omega}_l \supset C$. Tal como

no teorema anterior, a solução permanece dentro de $\overline{\Omega}_l$ para $t \geq t_0$. Portanto, o conjunto-limite positivo L^+ é não vazio e a solução aproxima-se dele quando $t \rightarrow \infty$. Ademais, L^+ é um subconjunto invariante de (2.5) contido em $\overline{\Omega}_l$. Logo, a solução $\mathbf{x}(t)$ aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $\overline{\Omega}_l$ quando $t \rightarrow \infty$.

Se acaso, no Teorema 2.16 acima, $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ for ilimitada radialmente, ou seja, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ com $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, toda solução $\mathbf{x}(t)$ será limitada para $t \geq t_0$ e as conclusões do Teorema 2.16 serão válidas para todas as soluções.

2.3.4. Sistemas Não Autônomos

No caso de sistemas autônomos, o Teorema de La Salle (Teorema 2.13) mostra que a trajetória do sistema em consideração tende ao maior subconjunto invariante contido em E , onde E é o conjunto de todos os pontos de Ω que satisfazem $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Por outro lado, no caso de um sistema não autônomo

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}), \quad \text{com } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$, $t \in \mathfrak{R}_+$ e $f: \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é suposta localmente Lipschitz em \mathbf{x} , mesmo o processo de se determinar um conjunto E pode não ser evidente, uma vez que $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ é função tanto de t como de \mathbf{x} . A situação torna-se mais clara, no entanto, quando

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (2.22)$$

visto que, nesse caso, o conjunto E poderá ser definido como o conjunto de pontos onde $W(\mathbf{x}) = 0$. Dessa forma, pode-se esperar que a trajetória do sistema aproxime-se de E à medida que $t \rightarrow \infty$.

O Teorema de La Salle-Yoshizawa, importante ferramenta para a análise de convergência de sistemas não autônomos, formaliza esses resultados:

Teorema 2.17 (La Salle-Yoshizawa). Seja $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ o ponto de equilíbrio de (2.21) e presume-se que $f(t, \mathbf{x})$ seja localmente Lipschitz em \mathbf{x} uniformemente em t . Seja $V : \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma função $V(t, \mathbf{x})$ continuamente diferenciável que satisfaz

- $V(t, \mathbf{x}) > 0$, i.e., $V(t, \mathbf{x})$ é definida positiva;
- $\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0$;
- $V(t, \mathbf{x}) \rightarrow \infty$ com $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, i.e., $V(t, \mathbf{x})$ é ilimitada radialmente,

onde W é uma função contínua. Então, todas as soluções de (2.21) serão *globalmente uniformemente limitadas* e atenderão a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}(t)) = 0. \quad (2.23)$$

Ainda, se W for definida positiva ($W(\mathbf{x}) > 0$), o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ de (2.21) será *globalmente uniformemente assintoticamente estável* (GUAE).

Prova. Versões gerais podem ser encontradas em Khalil (1992), p.187, e Krstić et al. (1995), p.492.

2.4. Conclusão

Os teoremas de estabilidade de Lyapunov tradicionais vistos neste capítulo (Teoremas 2.9, 2.13 e 2.17) fornecem condições suficientes para estabilidade, estabilidade assintótica, etc. Existem teoremas que estabelecem que estas condições são, de fato, *necessárias* para algumas formas de estabilidade (Vidyasagar, 1978); ou seja, para um dado sistema dinâmico sabidamente estável, é possível inferir a *existência* de funções de Lyapunov adequadas. Esta questão é abordada em detalhes por Hahn (1967).

Os diferentes resultados obtidos neste capítulo são reunidos na tabela a seguir:

| | | |
|------------------------|---|---------------------------------|
| Sistemas autônomos | $V > 0, \dot{V} < 0$ | Método Direto de Lyapunov |
| | $\dot{V} \leq 0$ | Teorema de La Salle |
| | $\dot{V} \leq 0$ com $\dot{V} > 0$ em algumas regiões | Extensão do Teorema de La Salle |
| Sistemas não autônomos | $V > 0, \dot{V} < 0$ | Teorema de La Salle-Yoshizawa |

Tabela 2.1. Classificação dos teoremas de estabilidade e convergência.

Capítulo 3

Métodos Recursivos para o Controle de Sistemas Não Lineares

3.1. Introdução

Tal como mencionado no capítulo anterior, a maior parte dos sistemas dinâmicos reais possuem interações não lineares das diversas variáveis que os compõem. A representação desses sistemas por meio de modelos lineares conduz, portanto, a inevitáveis discrepâncias entre o comportamento do sistema real e as soluções geradas por sua descrição matemática. Por exemplo, a linearização de um sistema não linear ao redor de um ponto de operação é válida apenas nessa região restrita. Técnicas de controle que tenham como objetivo uma atuação mais ampla sobre a resposta do sistema são inviáveis sob tal enfoque.

Os últimos anos têm assistido a um desenvolvimento crescente na teoria associada ao estudo de sistemas não lineares, especialmente no campo da síntese de controladores eficientes. A partir dos anos 80, conceitos desenvolvidos a partir da geometria diferencial provaram ser ferramentas eficazes na análise e síntese de sistemas não lineares, sendo a técnica de linearização por realimentação, por exemplo, um método amplamente empregado no tratamento de alguns tipos de não-linearidades (cf. Isidori (1996)).

Algumas desvantagens da metodologia atrelada à geometria diferencial, no entanto, são a impossibilidade de resolução de vários tipos de sistemas não lineares e o elevado esforço de controle despendido. A introdução de métodos recursivos de síntese de

controladores a partir dos anos 90 (cf. Kanellakopoulos et al. (1992)), entretanto, resolveu vários desses problemas. A técnica de *backstepping*, descrita em detalhes por Krstić et al. (1995), é, hoje, um dos meios mais populares de tratamento de sistemas não lineares, sendo, inclusive, aplicável a vários sistemas não “linearizáveis” (Kokotović, 1992).

O *backstepping* fundamenta-se no conceito de Funções de Lyapunov de Controle (cf. seção 3.3) e nas teorias de estabilidade e convergência de sistemas dinâmicos exploradas no Capítulo 2 deste trabalho – em especial, os Teoremas de La Salle e La Salle-Yoshizawa e o Método Direto de Lyapunov. Após uma breve descrição dos aspectos mais relevantes das abordagens tradicionais de controle não linear (cf. seção 3.2), a seção 3.4 dedica-se a expor as características básicas do *backstepping* integrador, versão preliminar de processos de *backstepping* mais genéricos. A seção 3.5 traz formalizações conceituais basilares. A seção 3.6 apresenta o método de *backstepping* aplicado a um sistema genérico de realimentação estrita e apresenta o controle de um sistema caótico de Lorenz, altamente não linear. Por fim, a seção 3.7 traz as conclusões pertinentes.

3.2. Técnicas Precursoras de Controle de Sistemas Não Lineares

Muitas tentativas de introdução de abordagens sistemáticas visando a um controle eficaz de sistemas não lineares têm sido propostas nos últimos anos. Um dos primeiros e mais populares métodos voltados para o projeto de controladores para sistemas não lineares é a técnica de *linearização por realimentação*, descrita em Isidori (1996). Essa metodologia utiliza mudança de coordenadas e controle por realimentação com o objetivo de transformar um sistema dinâmico não linear em um sistema cujas dinâmicas sejam, ao menos parcialmente, lineares.

Seja o sistema não linear genérico

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n$ é o estado, $u \in \mathfrak{U}$ é a entrada e $y \in \mathfrak{Y}$ é a saída. As funções f , g e h são não-linearidades suaves conhecidas. Diz-se que o sistema (3.1) possui *grau relativo* ρ num ponto \mathbf{x}_0 se houver uma vizinhança $N(\mathbf{x}_0)$ ² na qual se verifique

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \dots = \frac{\partial \psi_{\rho-1}}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.2)$$

e

$$\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \neq 0, \quad (3.3)$$

onde $\psi_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ e $\psi_i(\mathbf{x}) = (\partial \psi_{i-1} / \partial \mathbf{x}) f(\mathbf{x})$, $i = 2, \dots, \rho$. Se acaso (3.2) e (3.3) forem válidos para todo $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n$, o grau relativo de (3.1) será *definido globalmente*.

Supondo que o sistema (3.1) apresente grau relativo $\rho < n$ no ponto \mathbf{x}_0 , pode-se empregar uma mudança de coordenadas e controle por realimentação para transformar (localmente) esse sistema numa conexão em cascata de um sistema linear de dimensão ρ e um sistema não linear de dimensão $n - \rho$. De fato, derivando-se ρ vezes a saída $y = h(\mathbf{x})$, tem-se:

$$y^{(\rho)} = \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) u. \quad (3.4)$$

Como $(\partial \psi_\rho / \partial \mathbf{x}) g \neq 0$ numa vizinhança de \mathbf{x}_0 , pode-se linearizar a representação entrada-saída do sistema (3.1) através de uma realimentação que cancele as não-linearidades em (3.4) (*linearização entrada-saída*):

$$u = \frac{1}{\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} \left(-\frac{\partial \psi_\rho}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + v \right). \quad (3.5)$$

² O conjunto de pontos onde um grau relativo pode ser definido é um subconjunto aberto e denso do conjunto aberto U onde o sistema (3.1) é definido (Isidori, 1996). Para uma definição de *conjunto denso*, cf. Isidori (1996), p.474.

Assim, as dinâmicas de y e suas derivadas são governadas por uma cadeia de ρ integradores: $y^{(\rho)} = v$. Não obstante, como o sistema original tem dimensão n , é necessário considerar, ainda, as $n - \rho$ variáveis de estado restantes. Através do uso de ferramentas de geometria diferencial, é possível (Krstić et al., 1995) encontrar $n - \rho$ funções $\psi_{\rho+1}(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})$, com $(\partial \psi_i / \partial \mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$, $i = \rho + 1, \dots, n$, de tal forma que a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= y = h(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}), \\
 \zeta_2 &= \dot{y} = \psi_2(\mathbf{x}), \\
 &\vdots \\
 \zeta_\rho &= y^{(\rho-1)} = \psi_\rho(\mathbf{x}), \\
 \zeta_{\rho+1} &= \psi_{\rho+1}(\mathbf{x}), \\
 &\vdots \\
 \zeta_n &= \psi_n(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

seja inversível localmente e transforme, junto com (3.5), o sistema não linear (3.1) em

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{\zeta}_{\rho-1} &= \zeta_\rho \\
 \dot{\zeta}_\rho &= v \\
 \dot{\zeta}_{\rho+1} &= \frac{\partial \psi_{\rho+1}}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \phi_{\rho+1}(\boldsymbol{\zeta}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\zeta}_n &= \frac{\partial \psi_n}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \phi_n(\boldsymbol{\zeta}) \\
 y &= \zeta_1,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1 \dots \zeta_n]^T$. A aplicação do controle (3.5) torna as variáveis de estado do subsistema não linear de (3.7), $\zeta_{\rho+1}, \dots, \zeta_n$, não observáveis a partir da saída y .

A utilização da nova entrada de controle v com a finalidade de estabilizar o subsistema linear de (3.7) não garante a estabilidade de todo o sistema, a menos que a estabilidade da porção não linear de (3.7) seja estabelecida separadamente.

Quando v é empregada para manter a saída y igual a zero para todo $t > t_0$, ou seja, quando $\zeta_1 \equiv \dots \equiv \zeta_\rho \equiv 0$, as dinâmicas de $\zeta_{\rho+1}, \dots, \zeta_n$ são descritas por

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_{\rho+1} &= \phi_{\rho+1}(0, \dots, 0, \zeta_{\rho+1}, \dots, \zeta_n) \\ &\vdots \\ \dot{\zeta}_n &= \phi_n(0, \dots, 0, \zeta_{\rho+1}, \dots, \zeta_n)\end{aligned}\tag{3.8}$$

e são denominadas *dinâmicas nulas* de (3.1), pois evoluem no subconjunto do espaço de estados no qual a saída do sistema é nula. Se o equilíbrio em $\zeta_{\rho+1} = \dots = \zeta_n = 0$ das dinâmicas nulas (3.8) for assintoticamente estável, o sistema (3.1) será de *fase mínima*.

Dado que o grau relativo e as dinâmicas nulas de um sistema não podem ser alterados por meio de realimentação de saída (Kokotović & Arcak, 2001), sistemas com dinâmicas nulas instáveis (sistemas de fase não mínima) são muito mais difíceis de se controlar que sistemas de fase mínima.

Considerando-se, pois, o problema de estabilização por realimentação de um sistema em cascata genérico formado por uma parte linear e outra parte não linear oriundo de um processo de linearização entrada-saída,

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= A\zeta + Bv \\ \dot{\phi} &= f(\phi, \zeta),\end{aligned}\tag{3.9}$$

tem-se que o fato de se constatar estabilidade assintótica global de $\dot{\phi} = f(\phi, \mathbf{0})$ não é suficiente para garantir estabilidade assintótica global de toda a cascata por meio de uma realimentação $v = K\zeta$ (Kokotović & Arcak, 2001). Em geral, é necessária uma realimentação tanto de ζ quanto de ϕ , ou seja, $v = K\zeta + w(\phi, \zeta)$. Kokotović e Sussman (1989) propuseram, por exemplo, o método de *passivação por realimentação*, no qual busca-se converter (3.9) numa interconexão de dois blocos passivos como a ilustrada na Figura 3.1 e encontrar, então, uma expressão para a lei de controle $v = K\zeta + w(\phi, \zeta)$ que traga estabilidade a todo o sistema. Destaca-se o fato de que um sistema constituído pela interconexão de dois blocos passivos com a configuração indicada na Figura 3.1 é passivo (Krstić et al., 1995). A noção de *passividade*, que remonta à idéia de dissipação de energia em resistores num circuito elétrico, tem sido muito utilizada com o propósito de se analisar

a estabilidade de sistemas não lineares. Sistemas passivos, tais como circuitos lineares contendo apenas resistores positivos, são estáveis (Byrnes et al., 1991).

Apesar de sua popularidade, a abordagem ligada ao conceito de passividade é limitada a sistemas com grau relativo menor que dois (Kokotović et al., 1992). Devido à impossibilidade de se alterar o grau relativo de um sistema dinâmico através de realimentação de saída, tal restrição tem sido um obstáculo na criação de leis de controle eficazes para sistemas não lineares em geral segundo essa metodologia.

Essa limitação, no entanto, foi removida de forma muito eficiente por meio da introdução de procedimentos recursivos para a geração de leis de controle para sistemas não lineares, especialmente o *backstepping* (Kokotović et al., 1992). A ideia básica do *backstepping* é projetar uma seqüência de *sistemas virtuais* de grau relativo unitário, sendo o sistema original o último elemento dessa seqüência. Para cada sistema virtual, o grau relativo é reduzido a *um* através da seleção de uma *entrada virtual*, conseguindo-se, então, passividade com relação a uma *saída virtual*. A escolha de pares entrada-saída virtuais é flexível e o processo de estabilização faz uso de *funções de Lyapunov de controle*.

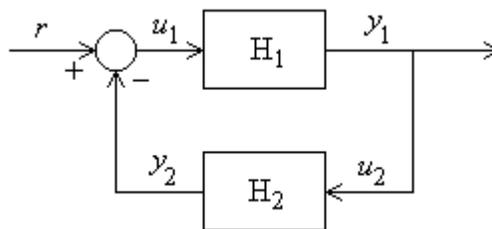


Figura 3.1. Interconexão de dois sistemas passivos (H_1 e H_2).

3.3. Funções de Lyapunov de Controle

A noção de *função de Lyapunov de controle*, uma extensão do conceito de função de Lyapunov introduzida por Artstein (1983) e Sontag (1983), representou uma mudança no paradigma das teorias de estabilização vigente ao final dos anos 70 (Kokotović & Arcak, 2001), pois redirecionou o enfoque dessas teorias, até então na *análise* das características de um dado sistema dinâmico, para o objetivo de se *criar* sistemas em malha fechada com propriedades de estabilidade desejáveis.

Tradicionalmente, uma maneira de se estabilizar um sistema não linear é selecionar uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ e então tentar encontrar uma lei de controle $u(\mathbf{x})$ que faça com que $\dot{V}(\mathbf{x})$ seja definida negativa. Supondo que o sistema apresente a configuração

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n, \quad u \in \mathfrak{R}, \quad f(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

objetiva-se determinar $u(\mathbf{x})$ de tal forma que o equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema em malha fechada seja GAE. Pode-se tomar uma função $V(\mathbf{x})$ como uma candidata a função de Lyapunov e requerer que sua derivada ao longo das soluções de (3.10) atenda à desigualdade $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x})$, onde $W(\mathbf{x})$ é uma função definida positiva, ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u) \leq -W(\mathbf{x}) < 0. \quad (3.11)$$

Escolhas inadequadas de $V(\mathbf{x})$ e $W(\mathbf{x})$ podem levar à não-satisfação de (3.11). Diz-se de um sistema para o qual é possível uma escolha conveniente de $V(\mathbf{x})$ e $W(\mathbf{x})$ que possui uma *função de Lyapunov de controle (FLC)*.

Definição 3.1. Seja $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ uma função $V(\mathbf{x})$ suave, definida positiva e ilimitada radialmente. $V(\mathbf{x})$ será uma *função de Lyapunov de controle* para (3.10) se

$$\inf_{u \in \mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u) \right\} < 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Artstein (1983) demonstra que a relação (3.12) é suficiente para assegurar a existência de uma lei de controle que satisfaça (3.11), i.e., a existência de uma FLC é equivalente à estabilizabilidade assintótica global.

A principal limitação do conceito de FLC como ferramenta de projeto consiste em não se conhecer uma FLC adequada para a maior parte dos sistemas não lineares. A tarefa de se encontrar uma FLC apropriada pode ser tão complexa quanto a de se determinar uma lei de controle estabilizadora. Para várias classes importantes de sistemas não lineares estes dois problemas são resolvidos simultaneamente por meio da utilização do *backstepping*.

3.4. Funções de Lyapunov de Controle e *Backstepping* Integrador

A construção recursiva de funções de Lyapunov de controle através do *backstepping integrador* – uma versão preliminar dos processos de *backstepping* mais genéricos – será ilustrada por meio do sistema não linear de segunda ordem (cf. Fossen & Strand (1999))

$$\dot{x} = f(x) + \xi \quad (3.13a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (3.13b)$$

$$y = x, \quad (3.13c)$$

onde $x \in \mathfrak{R}$, $\xi \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{R}$ e $u \in \mathfrak{R}$. A função $f(x)$ é uma não-linearidade conhecida. Tenciona-se a regulação de $y(t)$ em zero, ou seja, deseja-se que $y(t) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$ para todo $[x(0) \ \xi(0)]^T$. Obviamente, o sinal $\xi(t)$ deverá permanecer limitado. De (3.13a), o ponto de equilíbrio com $x=0$ corresponde a $[x \ \xi]^T = [0 \ -f(0)]^T$. O objetivo é, portanto, fazer com que esse ponto de equilíbrio seja GAE. Como o sistema (3.13) compõe-se de duas variáveis de estado, x e ξ , o projeto compreenderá dois passos. Dessa forma, (3.13) será encarado como uma disposição em cascata de dois subsistemas de primeira ordem, cada um apresentando entrada e saída únicas. O procedimento inicia-se com o tratamento do subsistema x e prossegue com o tratamento do subsistema ξ . O subsistema ξ é um integrador que precede o subsistema x .

Introduzir-se-á uma mudança de coordenadas durante o processo recursivo dada por

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}), \quad (3.14)$$

onde $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T$ e $\mathbf{x} = [x \ \xi]^T$. A transformação $\phi(\mathbf{x}): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ será um difeomorfismo *global* se o mapeamento $\phi(\mathbf{x})$ for válido no \mathfrak{R}^n com $\phi(\mathbf{x})$ e $\phi^{-1}(\mathbf{z})$ continuamente diferenciáveis e *local* se a transformação inversa

$$\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z}) \quad (3.15)$$

existir apenas num domínio do \mathfrak{R}^n .

3.4.1. Passo 1

Inicialmente, escolhe-se a primeira variável auxiliar do processo:

$$z_1 := x - \alpha_0. \quad (3.16)$$

Como o objetivo principal do projeto é a regulação da saída $y = x$ em zero, o valor desejado para x é

$$x_d = 0. \quad (3.17)$$

Definindo-se $\alpha_0 := x_d$, tem-se que a variável z_1 corresponde ao desvio de x em relação ao valor desejado x_d . Logo, z_1 é uma *variável de erro*. Se o objetivo fosse o seguimento de algum sinal de referência $r(t)$ variante no tempo, ter-se-ia $\alpha_0 = r$.

Para o subsistema x , divide-se a variável de estado ξ como sua *entrada de controle virtual*. Do mesmo modo como foi feito para o estado x , a variável auxiliar relativa a ξ tem a forma

$$z_2 := \xi - \alpha_1. \quad (3.18)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, α_1 corresponderá ao valor desejado para ξ :

$$\alpha_1 = \xi_d = -f(0) \quad (3.19)$$

e, portanto, a variável de erro z_2 indica o desvio de ξ em relação ao seu valor desejado.

O subsistema x pode ser reescrito em termos das variáveis de erro:

$$\dot{z}_1 = f(x) + \alpha_1 + z_2. \quad (3.20)$$

A nova variável de estado z_2 não é utilizada neste primeiro passo, mas sua presença é importante, pois é o elo entre o subsistema z_1 (3.20) e o subsistema z_2 a ser tratado no próximo passo.

A *função estabilizadora* α_1 , representando o valor desejado para a entrada de controle virtual ξ , provê a realimentação necessária para o subsistema z_1 . Escolhendo-se, por exemplo,

$$\alpha_1 = -f(x) - c_1 z_1, \quad (3.21)$$

tem-se que

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2. \quad (3.22)$$

A expressão (3.21) equivale à lei de controle para o subsistema x obtida segundo a técnica de linearização por realimentação.

Uma candidata a função de Lyapunov para o subsistema z_1 é

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2, \quad (3.23)$$

cuja derivada ao longo de (3.22) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $c_1 > 0$ é um ganho de realimentação constante. O termo $z_1 z_2$, de magnitude e sinal desconhecidos, será cancelado no passo seguinte.

3.4.2. Passo 2

A dinâmica do subsistema z_2 é computada derivando-se (3.18) em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{\xi} - \dot{\alpha}_1 \\ &= u - \dot{\alpha}_1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Uma candidata a função de Lyapunov para o subsistema z_2 é

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2, \quad (3.26)$$

cuja derivada ao longo de (3.25) é dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\
 &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 \dot{z}_2 \\
 &= -c_1 z_1^2 + z_2 (z_1 + \dot{z}_2) \\
 &= -c_1 z_1^2 + z_2 (u - \dot{\alpha}_1 + z_1)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Como o sistema dinâmico original (3.13) é composto de apenas duas variáveis de estado, a entrada de controle real u aparece neste segundo passo. Para que se consiga estabilidade assintótica global, consoante o Método Direto de Lyapunov, é necessário que $\dot{V}_2 < 0$. Portanto, uma expressão conveniente para u é a seguinte:

$$u = \dot{\alpha}_1 - z_1 - c_2 z_2, \tag{3.28}$$

onde $c_2 > 0$ é uma constante. Dessa forma,

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 < 0, \quad \forall z_1 \neq 0, \quad \forall z_2 \neq 0, \tag{3.29}$$

e V_2 é uma FLC para o sistema formado pelas equações (3.22) e (3.25) e, por extensão, para o sistema (3.13).

3.4.3. Aspectos de Implementação

Uma característica interessante do método de *backstepping* é a não-utilização de diferenciadores na implementação da derivada $\dot{\alpha}_1$ presente na lei de controle (3.28) (Krstić et al., 1995); como α_1 é uma função conhecida, pode-se computar sua derivada analiticamente:

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \dot{x} = -\frac{\partial f(x)}{\partial x} \dot{x} - c_1 \dot{x} = -\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + c_1\right)(f(x) + \xi). \tag{3.30}$$

Conseqüentemente, a expressão final para a lei de controle é dada por

$$u = -\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + c_1\right)(f(x) + \xi) - x - c_2(\xi + f(x) + c_1 x). \tag{3.31}$$

3.4.4. Transformação de Coordenadas do *Backstepping*

A transformação de coordenadas $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x})$ assume a forma:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \xi + f(x) + c_1 x \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

enquanto a transformação inversa $\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z})$ é

$$\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 - f(z_1) - c_1 z_1 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

3.4.5. Sistema Resultante

Ao final do projeto efetuado segundo o método de *backstepping*, a dinâmica do sistema em malha fechada expresso nas coordenadas (z_1, z_2) pode ser escrita como a soma de uma matriz diagonal e uma matriz anti-simétrica multiplicadas pelo novo vetor de estado. Para o sistema de segunda ordem em questão:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{matriz diagonal}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz anti-simétrica}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad (3.34)$$

ou, de forma equivalente,

$$\dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{S}\mathbf{z}, \quad (3.35)$$

onde $\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2]^T$, $\mathbf{C} = \text{diag}\{c_1, c_2\} > 0$ e

$$\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

onde \mathbf{S} atende a $\mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z} = 0$, $\forall \mathbf{z}$.

3.4.6. Avaliação da Estabilidade

Como $V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}$ e

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \mathbf{z}^T (-\mathbf{Cz} + \mathbf{Sz}) \\ &= -\mathbf{z}^T \mathbf{Cz}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

o Método Direto de Lyapunov para sistemas autônomos – (3.35) é um sistema autônomo – garante a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $[z_1 \ z_2]^T = [0 \ 0]^T$. Conseqüentemente, $[x \ \xi]^T = [0 \ -f(0)]^T$ é GAE. Ademais, pode-se mostrar que esse equilíbrio será também GEE (Fossen & Strand, 1999).

3.5. *Backstepping* Integrador

O *backstepping* integrador como ferramenta de projeto genérica baseia-se na Suposição 3.2 e no Lema 3.3 (cf. Krstić et al. (1995)) a seguir:

Suposição 3.2. Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \quad f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (3.38)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ é o estado e $u \in \mathfrak{R}$ é a entrada de controle. É presumida a existência de uma lei de controle

$$u = \alpha(\mathbf{x}), \quad \alpha(\mathbf{0}) = 0, \quad (3.39)$$

continuamente diferenciável e uma função $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+$ suave, definida positiva e ilimitada radialmente tal que

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x})) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n, \quad (3.40)$$

onde $W : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é semidefinida positiva.

Essa suposição estabelece que o controle (3.39) aplicado ao sistema (3.38) assegura limitação global de $\mathbf{x}(t)$ e, por via do Teorema de La Salle-Yoshizawa (Teorema 2.17), a regulação de $W(\mathbf{x}(t))$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}(t)) = 0. \quad (3.41)$$

Um resultado de convergência mais forte é obtido empregando-se o Teorema de La Salle (Teorema 2.13) com $\Omega = \mathfrak{R}^n$: $\mathbf{x}(t)$ irá convergir para o maior conjunto invariante M contido em $E = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid W(\mathbf{x}) = 0\}$. Se acaso $W(\mathbf{x})$ for definida positiva, o controle (3.39) fará com que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja o ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável de (3.38).

Lema 3.3 (Backstepping Integrador). Seja o sistema (3.38) acrescido de um integrador:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi \quad (3.42a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (3.42b)$$

e admita que (3.42a) satisfaça a Suposição 3.2 com $\xi \in \mathfrak{R}$ como sua entrada de controle.

(i) Se $W(\mathbf{x})$ for definida positiva,

$$V_a(\mathbf{x}, \xi) = V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\xi - \alpha(\mathbf{x}))^2 \quad (3.43)$$

será uma FLC para o sistema (3.42) inteiro, ou seja, haverá uma lei de controle $u = \alpha_a(\mathbf{x}, \xi)$ que fará com que $[\mathbf{x}^T \ \xi]^T = [\mathbf{0}^T \ 0]^T$ seja o ponto de equilíbrio GAE de (3.42). Uma expressão possível para u é

$$u = -c(\xi - \alpha(\mathbf{x})) + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}g(\mathbf{x}), \quad c > 0. \quad (3.44)$$

(ii) Se $W(\mathbf{x})$ for apenas semidefinida positiva, existirá então um controle de realimentação de modo que V_a (3.43) atenda a $\dot{V}_a \leq -W_a(\mathbf{x}, \xi) \leq 0$, onde $W_a(\mathbf{x}, \xi) > 0$ sempre que $W(\mathbf{x}) > 0$ ou $\xi \neq \alpha(\mathbf{x})$. Isso garante limitação global e

convergência de $[\mathbf{x}(t)^T \quad \xi(t)]^T$ para o maior conjunto invariante M_a contido em $E_a = \{[\mathbf{x}(t)^T \quad \xi(t)]^T \in \mathfrak{R}^{n+1} \mid W(\mathbf{x}) = 0, \xi = \alpha(\mathbf{x})\}$.

Prova (Krstić et al., 1995, p.34). Introduzindo-se a variável de erro

$$z = \xi - \alpha(\mathbf{x}) \quad (3.45)$$

e derivando-a em relação ao tempo, pode-se reescrever o sistema (3.42) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})(\alpha(\mathbf{x}) + z) \\ \dot{z} &= u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})(\alpha(\mathbf{x}) + z)] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Utilizando-se (3.40), a derivada de (3.43) ao longo das soluções de (3.46) será dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (f + g\alpha + gz) + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + g(\alpha + z)] \right\} \\ &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} (f + g\alpha) + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + g(\alpha + z)] + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \right\} \\ &\leq -W(\mathbf{x}) + z \left\{ u - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + g(\alpha + z)] + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Com base no Teorema de La Salle-Yoshizawa (Teorema 2.17), qualquer escolha de u com a qual se verifica $\dot{V}_a \leq -W_a(\mathbf{x}, \xi) \leq 0$, com a parcela em $z = \xi - \alpha(\mathbf{x})$ de W_a definida positiva, assegura limitação global de \mathbf{x} , z e ξ e regulação de $W(\mathbf{x}(t))$ e $z(t)$. Além disso, o Teorema de La Salle (Teorema 2.13) garante convergência de $[\mathbf{x}(t)^T \quad z(t)]^T$ para o maior conjunto invariante contido em $E_a = \{[\mathbf{x}^T \quad z]^T \in \mathfrak{R}^{n+1} \mid W(\mathbf{x}) = 0, z = 0\}$. A maneira mais simples de se fazer \dot{V}_a definida negativa em z é a escolha do controle (3.44). Dessa forma,

$$\dot{V}_a \leq -W(\mathbf{x}) - cz^2 := -W_a(\mathbf{x}, \xi) \leq 0. \quad (3.48)$$

Ainda, se $W(\mathbf{x})$ for definida positiva, o Teorema 2.17 garante estabilidade assintótica global de $[\mathbf{x}^T \quad z]^T = [\mathbf{0}^T \quad 0]^T$, o que, por sua vez, implica que $V_a(\mathbf{x}, \xi)$ é uma FLC e que $[\mathbf{x}^T \quad \xi]^T = [\mathbf{0}^T \quad 0]^T$ é o equilíbrio GAE de (3.42), visto que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Deve-se ressaltar o fato de que o principal resultado do *backstepping* tradicional não é a forma específica do controle (3.44), mas sim a possibilidade de construção de uma função de Lyapunov cuja derivada possa ser feita negativa por meio de várias leis de controle diferentes. Por conseguinte, no caso do *backstepping* integrador segundo o Lema 3.3, o projeto de um controlador estabilizador se resume ao atendimento da desigualdade

$$\dot{V}_a \leq -W(\mathbf{x}) + z \left\{ \alpha_a(\mathbf{x}, \xi) - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} [f + g(\alpha + z)] + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g \right\} = -W_a(\mathbf{x}, \xi) \leq 0. \quad (3.49)$$

Aplicando-se o Lema 3.3 repetidas vezes, torna-se possível o tratamento de sistemas dinâmicos da forma (3.38) precedidos de uma cadeia de integradores (Krstić et al., 1995).

Corolário 3.4. Seja o sistema (3.38), que atende à Suposição 3.2 com $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_0(\mathbf{x})$, acrescido de uma cadeia de k integradores:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} &= \xi_k \\ \dot{\xi}_k &= u. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Para esse sistema, aplicações seguidas do Lema 3.3 com ξ_1, \dots, ξ_k como controles virtuais resultam na função de Lyapunov

$$V_a(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) = V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\xi_i - \alpha_{i-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}))^2. \quad (3.51)$$

Qualquer escolha de controle u que resulte em $\dot{V}_a \leq -W_a(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) \leq 0$, com $W_a(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) = 0$ apenas se $W(\mathbf{x}) = 0$ e $\xi_i = \alpha_{i-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})$, $i = 1, \dots, k$, garante que $[\mathbf{x}(t)^T \ \xi_1(t) \ \dots \ \xi_k(t)]^T$ permanece limitado globalmente e converge para o maior conjunto invariante M_a contido em

$$E_a = \left\{ [\mathbf{x}^T \ \xi_1 \ \dots \ \xi_k]^T \in \mathfrak{R}^{n+k} \mid W(\mathbf{x}) = 0, \xi_i = \alpha_{i-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}), i = 1, \dots, k \right\}.$$

Além do mais, se $W(\mathbf{x})$ for definida positiva, ou seja, se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ puder ser feito GAE através de ξ_1 , então (3.51) será uma FLC para (3.50) e o equilíbrio

$$\left[\mathbf{x}(t)^T \quad \xi_1(t) \quad \dots \quad \xi_k(t) \right]^T = \left[\mathbf{0}^T \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T$$

será feito GAE por meio de u .

Portanto, o cerne dos processos de *backstepping* (em geral) consiste em, iniciando-se com um sistema estabilizável por meio de uma lei de realimentação conhecida obtida por meio de uma função de Lyapunov conhecida, adicionar recursivamente integradores à entrada e projetar novas leis de realimentação estabilizadoras através de novas funções de Lyapunov.

Exemplo 3.5. Este exemplo ilustra a aplicação do Lema do *Backstepping* Integrador na estabilização de um sistema não linear de segunda ordem, a saber:

$$\dot{x} = x\sqrt{x} + x\xi \tag{3.52a}$$

$$\dot{\xi} = u. \tag{3.52b}$$

Uma observação importante com relação a esse sistema é o fato de o sistema linearizado não ser controlável; de fato, a equação linearizada relativa a (3.52a) tem a forma

$$\dot{x} = 0. \tag{3.53}$$

Logo, técnicas lineares de controle não podem ser utilizadas neste caso.

Seguindo a notação da Suposição 3.2 e do Lema 3.3, a derivada da candidata a função de Lyapunov do subsistema x , $V(x) = x^2 / 2$, torna-se definida negativa fazendo-se

$$\xi = \alpha(x) = -\sqrt{x} - c_1 x^2. \tag{3.54}$$

De fato,

$$\dot{V} = -c_1 x^4. \tag{3.55}$$

Definindo-se a variável de erro z , $z := \xi - \alpha$, pode-se reescrever o subsistema x da seguinte forma:

$$\dot{x} = -c_1 x^3 + xz. \quad (3.56)$$

O subsistema z , por sua vez, possui a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{\xi} - \dot{\alpha} \\ &= u - \frac{\partial \alpha}{\partial x} \dot{x} \\ &= u + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2c_1 x \right) (-c_1 x^3 + xz) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dessa maneira, a FLC do sistema será expressa por $V_a = x^2/2 + z^2/2$, e sua derivada ao longo de (3.56) e (3.57) terá a seguinte conformação:

$$\dot{V}_a = -c_1 x^4 + z \left[u + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2c_1 x \right) (-c_1 x^3 + xz) + x^2 \right]. \quad (3.58)$$

O emprego da lei de controle sugerida em (3.44),

$$u = -c_2 z - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2c_1 x \right) (-c_1 x^3 + xz) - x^2, \quad (3.59)$$

conduz a

$$\dot{V}_a = -c_1 x^4 - c_2 z^2. \quad (3.60)$$

O Lema 3.3 (por via do Teorema 2.17), portanto, assegura a estabilidade assintótica global de $[x \ z]^T = [0 \ 0]^T$. Isso implica que $[x \ \xi]^T = [0 \ 0]^T$ é o equilíbrio GAE de (3.52).

A Figura 3.2 apresenta a evolução das variáveis de estado x e ξ e da variável de erro z ao longo do tempo, com condição inicial $[x \ \xi]^T = [10 \ -5]^T$. As simulações foram efetuadas no Matlab. Os resultados obtidos confirmam a estabilidade assintótica de x e ξ . O teste com outras condições iniciais confirma a estabilidade assintótica global.

Observa-se um compromisso entre a duração do transitório e o esforço de controle, motivado pelos valores de c_1 e c_2 : maiores valores de c_1 e c_2 conduzem a uma resposta mais rápida à custa de se verificar um maior esforço de controle nos instantes iniciais e vice-versa. Neste exemplo, foram utilizados os seguintes valores: $c_1 = 5$ e $c_2 = 10$. A Figura 3.3 apresenta os valores assumidos pelo esforço de controle. A Figura 3.4 apresenta a evolução da função de Lyapunov de controle do sistema, V_a , e sua derivada ao longo do processo de controle. Deve-se notar que \dot{V}_a é sempre não positiva.

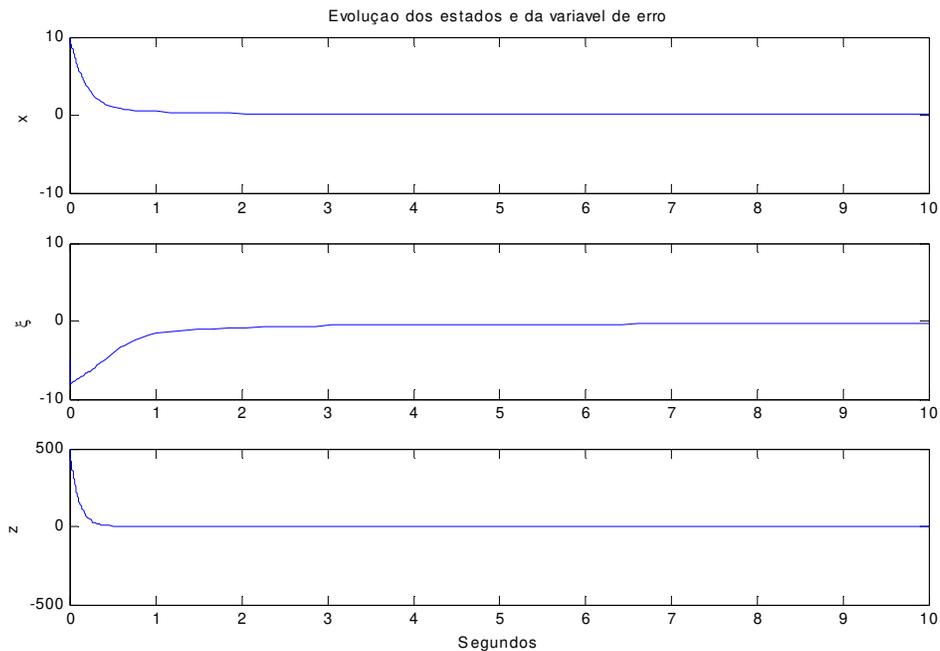


Figura 3.2. Estabilização com *backstepping*. Formas de onda para x , ξ e z .

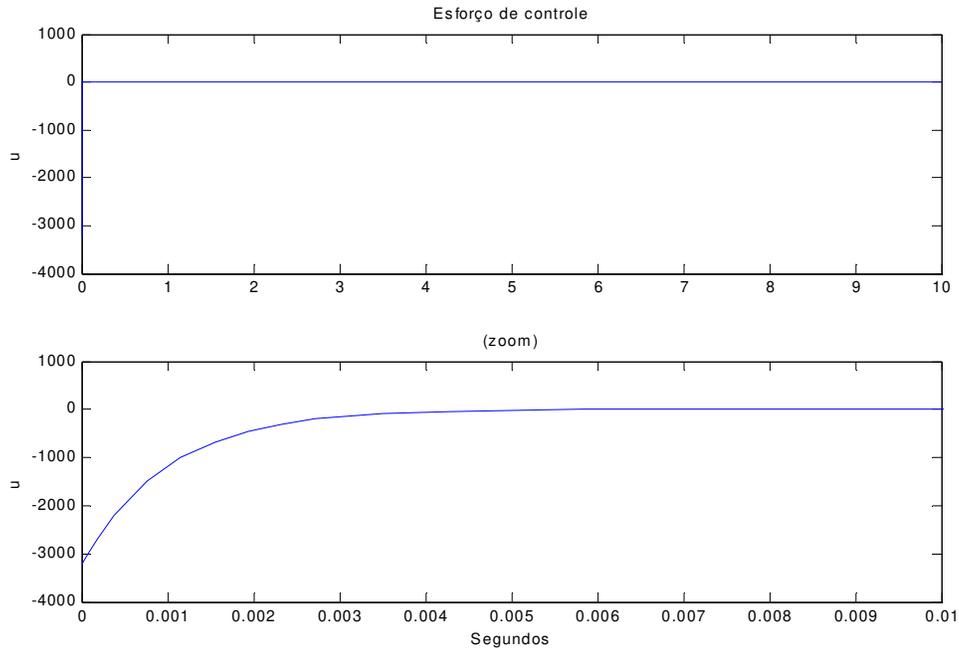


Figura 3.3. Esforço de controle. O segundo gráfico apresenta uma ampliação do que ocorre nos instantes iniciais.

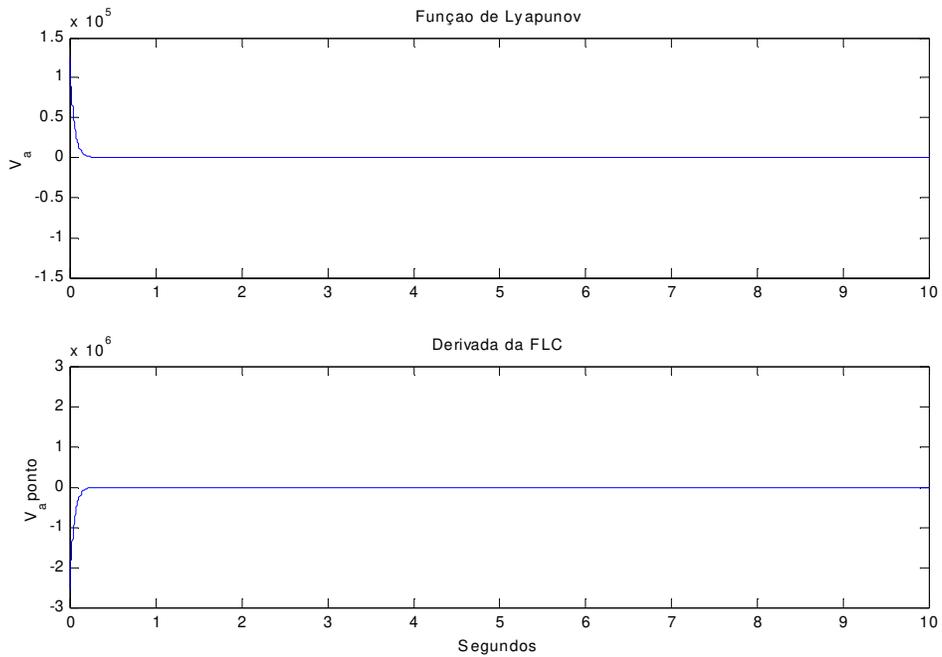


Figura 3.4. FLC e sua derivada.

3.6. Backstepping

Krstić et al. (1995) empregam os conceitos associados ao *backstepping* integrador para construir procedimentos de projeto sistemáticos para classes mais gerais de sistemas não lineares, tais como os sistemas de realimentação estrita.

3.6.1. Sistemas de Realimentação Estrita

Os sistemas não lineares de realimentação estrita apresentam a forma

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi_1 \\
 \dot{\xi}_1 &= f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1)\xi_2 \\
 \dot{\xi}_2 &= f_2(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) + g_2(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)\xi_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{k-1} &= f_{k-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) + g_{k-1}(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})\xi_k \\
 \dot{\xi}_k &= f_k(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) + g_k(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k)u,
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ e ξ_1, \dots, ξ_k são escalares. As funções $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $f_i(\cdot)$ e $g_i(\cdot)$, $i=1, \dots, k$, são não-linearidades conhecidas. O subsistema \mathbf{x} atende à Suposição 3.2 com $V(\mathbf{x})$, sendo ξ_1 sua entrada de controle virtual. O processo recursivo de controle inicia-se com o subsistema

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi_1 \\
 \dot{\xi}_1 &= f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1)\xi_2.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Se $f_1 \equiv 0$ e $g_1 \equiv 1$, o Lema do *Backstepping* Integrador (Lema 3.3) poderia ser aplicado diretamente em (3.62), admitindo-se ξ_2 como controle. Proceder-se-á, contudo, de maneira análoga, introduzindo-se a função de Lyapunov $V_1(\mathbf{x}, \xi_1)$ para (3.62):

$$V_1(\mathbf{x}, \xi_1) = V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\xi_1 - \alpha(\mathbf{x}))^2, \tag{3.63}$$

onde $\alpha(\mathbf{x})$ é um sinal de realimentação estabilizador que satisfaz (3.40) para o subsistema \mathbf{x} . Leis de controle intermediárias – como $\alpha(\mathbf{x})$ – são denominadas *funções estabilizadoras*

(como já mencionado na seção 3.4). A determinação de uma função estabilizadora $\alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)$ para ξ_2 , o controle virtual em (3.62), deverá levar em conta a exigência de se ter a derivada \dot{V}_1 não positiva quando $\xi_2 = \alpha_1$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + (\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})) \left(\dot{\xi}_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right) \\
&= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})(\alpha(\mathbf{x}) + \xi_1 - \alpha(\mathbf{x}))] + \\
&\quad + (\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})) \left[f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \xi_2 - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \xi_1) \right] \\
&\stackrel{(3.40)}{\leq} -W(\mathbf{x}) + (\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})) \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1) + \right. \\
&\quad \left. + g_1(\mathbf{x}, \xi_1) (\xi_2 - \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)) - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \xi_1) \right] \\
&= -W(\mathbf{x}) + (\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})) \underbrace{\left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1) - \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \xi_1) \right]}_{-W_1(\mathbf{x}, \xi_1)} + \\
&\quad + \underbrace{(\xi_1 - \alpha(\mathbf{x}))}_{\frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}(\mathbf{x}, \xi_1)} g_1(\mathbf{x}, \xi_1) (\xi_2 - \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{V}_1 = -W_1(\mathbf{x}, \xi_1) + \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}(\mathbf{x}, \xi_1) g_1(\mathbf{x}, \xi_1) (\xi_2 - \alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)), \quad (3.64)$$

onde $W_1(\mathbf{x}, \xi_1) > 0$ quando $W(\mathbf{x}) > 0$ ou $\xi_1 \neq \alpha(\mathbf{x})$. Se $g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \neq 0$ para todo \mathbf{x} e ξ_1 , uma escolha possível para α_1 é

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1) &= \frac{1}{g_1(\mathbf{x}, \xi_1)} \left[-c_1 (\xi_1 - \alpha(\mathbf{x})) - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x}, \xi_1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \xi_1) \right], \quad (3.65)
\end{aligned}$$

com $c_1 > 0$. Dessa forma, $W_1(\mathbf{x}, \xi_1) = W(\mathbf{x}) + c_1 (\xi_1 - \alpha(\mathbf{x}))^2$. Entretanto, como já mencionado anteriormente, outras escolhas para $\alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)$ são possíveis, mesmo com $g_1(\mathbf{x}, \xi_1) = 0$ em alguns pontos (Krstić et al., 1995).

Terminado o processo de determinação de $\alpha_1(\mathbf{x}, \xi_1)$, o próximo passo consiste em se acrescentar em (3.62) o subsistema ξ_2 . Adotando-se uma notação mais compacta, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_1 &= F_1(\mathbf{X}_1) + G_1(\mathbf{X}_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) + g_2(\mathbf{X}_1, \xi_2)\xi_3,\end{aligned}\quad (3.66)$$

onde

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \quad F_1(\mathbf{X}_1) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\xi_1 \\ f_1(\mathbf{x}, \xi_1) \end{bmatrix}, \quad G_1(\mathbf{X}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(\mathbf{x}, \xi_1) \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

A estrutura de (3.66) é a mesma de (3.62). Repete-se de forma similar, portanto, o procedimento efetuado no passo anterior. Introduce-se, assim, a função de Lyapunov

$$\begin{aligned}V_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) &= V_1(\mathbf{X}_1) + \frac{1}{2}(\xi_2 - \alpha_1(\mathbf{X}_1))^2 \\ &= V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\xi_i - \alpha_{i-1}(\mathbf{X}_{i-1}))^2,\end{aligned}\quad (3.68)$$

onde, por conveniência, faz-se $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}$ e $\alpha_0(\mathbf{X}_0) = \alpha(\mathbf{x})$. A função estabilizadora $\alpha_2(\mathbf{X}_2)$, $\mathbf{X}_2^T = [\mathbf{X}_1^T \quad \xi_2]^T$, para o controle virtual ξ_3 é então determinada de tal forma que se verifique

$$\dot{V}_2 = -W_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) + \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2}(\mathbf{X}_1, \xi_2)g_2(\mathbf{X}_1, \xi_2)(\xi_3 - \alpha_2(\mathbf{X}_2)), \quad (3.69)$$

com $W_2(\mathbf{X}_1, \xi_2) > 0$ quando $W_1(\mathbf{x}, \xi_1) > 0$ ou $\xi_2 \neq \alpha_1(\mathbf{X}_1)$.

O procedimento recursivo será concluído no passo k , quando todo o sistema (3.61) será estabilizado por meio do controle real u . Na notação compacta adotada, o sistema (3.61) é reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_{k-1} &= F_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) + G_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1})\xi_k \\ \dot{\xi}_k &= f_k(\mathbf{X}_{k-1}, \xi_k) + g_k(\mathbf{X}_{k-1}, \xi_k)u,\end{aligned}\quad (3.70)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-2} \\ \xi_{k-1} \end{bmatrix}, \quad F_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) = \begin{bmatrix} F_{k-2}(\mathbf{X}_{k-2}) + G_{k-2}(\mathbf{X}_{k-2})\xi_{k-1} \\ f_{k-1}(\mathbf{X}_{k-2}, \xi_{k-1}) \end{bmatrix}, \\ G_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ g_{k-1}(\mathbf{X}_{k-2}, \xi_{k-1}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

As expressões (3.70) e (3.71) possuem a mesma conformação de (3.66) e (3.67). Logo, a função de Lyapunov para (3.70) terá a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} V_k(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) &= V_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) + \frac{1}{2} (\xi_k - \alpha_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}))^2 \\ &= V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (\xi_i - \alpha_{i-1}(\mathbf{X}_{i-1}))^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Uma observação atenta da equação (3.72) leva à conclusão de que as funções estabilizadoras $\alpha_i(\mathbf{X}_i)$ atuam como ferramentas para se construir uma função de Lyapunov adequada para o sistema (3.61).

Uma escolha apropriada para o controle u produz $\dot{V}_k \leq -W_k \leq 0$, com $W_k > 0$ quando $W_{k-1} > 0$ ou $\xi_k \neq \alpha_{k-1}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} \dot{\mathbf{X}}_{k-1} + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left(\dot{\xi}_k - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} \dot{\mathbf{X}}_{k-1} \right) \\ &\leq -W_{k-1}(\mathbf{X}_{k-2}, \xi_{k-1}) + \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} (\xi_k - \alpha_{k-1}) + \\ &\quad + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[f_k + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right] \\ &= -W_{k-1}(\mathbf{X}_{k-2}, \xi_{k-1}) + (\xi_k - \alpha_{k-1}) \left[\frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} + f_k + g_k u - \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right]. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\dot{V}_k \leq -W_k(\mathbf{X}_{k-1}, \xi_k) \leq 0. \quad (3.73)$$

Caso a condição de não-singularidade

$$g_k(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n, \quad \forall \xi_i \in \mathfrak{R}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.74)$$

seja satisfeita, a escolha mais simples para o controle u é expressa por

$$u = \frac{1}{g_k} \left[-c_k (\xi_k - \alpha_{k-1}) - \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \xi_{k-1}} g_{k-1} - f_k + \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \mathbf{X}_{k-1}} (F_{k-1} + G_{k-1} \xi_k) \right], \quad (3.75)$$

com $c_k > 0$. Assim, $W_k = W_{k-1} + c_k (\xi_k - \alpha_{k-1})^2$. Deve-se reiterar o fato de que esta conformação para u não é única, sendo possível o emprego de outras opções.

Krstić et al. (1995) definem procedimentos de projeto para outras classes de sistemas não lineares, como os de *realimentação pura* e os de *realimentação estrita em bloco*. Este trabalho limitar-se-á aos sistemas de realimentação estrita.

3.6.2. Aplicação do *Backstepping* em Sistemas de Realimentação Estrita – Controle de Sistemas Caóticos

Comportamentos de estado estacionário caóticos podem ser observados em muitos sistemas físicos (cf. Ott (1997)). Por exemplo, fenômenos de turbulência em mecânica de fluidos, vibrações aparentemente aleatórias em sistemas elétricos ou mecânicos e oscilações atmosféricas imprevisíveis. Tais acontecimentos irregulares e complexos são usualmente indesejáveis. Muitas aplicações práticas demandam o controle de fenômenos caóticos – para se evitar, por exemplo, falhas advindas de fadiga num sistema mecânico –, de modo que se consiga que a trajetória estacionária do sistema seja periódica ou, preferencialmente, que seja atraída para um ponto fixo. O problema de controle do caos é, portanto, um campo de pesquisas importante na área de sistemas não lineares (cf., por exemplo, Fradkov & Pogromsky (1998)).

3.6.2.1. Algumas Técnicas Precursoras de Controle do Caos

Denomina-se *atrator estranho* o ente geométrico no espaço de estados para o qual uma trajetória caótica se encaminha. Um aspecto fundamental que denota a existência de comportamento caótico num dado sistema dinâmico é a presença de um conjunto denso de

pontos pertencentes a órbitas periódicas instáveis que revestem o atrator. De fato, a existência de um número infinito de soluções periódicas instáveis é indicativa de caos (Ott, 1997). Essas soluções são instáveis em razão de o menor desvio (resultante de ruído ou alteração espúria em algum parâmetro, por exemplo) entre a trajetória do sistema e uma dada órbita periódica do atrator crescer exponencialmente com o tempo. Como resultado, apesar de várias órbitas periódicas estarem presentes no espaço de estados, elas não são plenamente observadas na resposta de regime do sistema. Verifica-se, ao contrário, uma trajetória que vaga pelo espaço de estados de maneira errática, aparentemente aleatória. Assim, o sistema pode seguir por alguns instantes um dado ciclo periódico motivado pela proximidade em relação a uma determinada solução e logo afastar-se em direção a outra solução presente no atrator.

Uma das estratégias pioneiras de controle de caos, proposta por Ott, Grebogi e Yorke (1990), aproveita-se dessa extrema suscetibilidade a pequenas perturbações observada em sistemas que apresentam comportamento caótico. O “método OGY” consiste na seleção de uma resposta desejada dentre a grande variedade de padrões naturalmente presentes em um atrator estranho e na estabilização desse padrão por meio da aplicação controlada de pequenas modificações em algum parâmetro acessível do sistema. Dessa maneira, a sensibilidade de sistemas caóticos é usada para se direcionar a trajetória do sistema para uma solução conveniente pré-determinada.

A aplicação do método OGY é limitada, contudo, devido a inevitáveis erros de medição (Fuh & Tung, 1995). Um sistema dinâmico não linear com comportamento de regime caótico tem esse tipo de erro amplificado de forma exponencial no decorrer do tempo, de tal modo que a trajetória pode não ser controlada com a precisão necessária para o método OGY. O emprego de linearização por realimentação, todavia, permite que se converta uma resposta de regime caótica para qualquer padrão de estado estacionário desejado (órbita periódica ou ponto fixo) (cf. Fuh & Tung (1995)). Uma vantagem importante dessa abordagem consiste no fato de que a referência de estado estacionário pode ser qualquer ponto de equilíbrio ou órbita periódica arbitrária, mesmo fora do atrator estranho.

Com efeito, é essencial o desenvolvimento de metodologias de controle que sejam capazes não somente de fazer com que o sistema siga uma órbita periódica, mas também de

fazer com que se encaminhe a um estado de equilíbrio, pois soluções na forma de pontos fixos representam o modo de operação mais vantajoso em muitos sistemas não lineares, tais como circuitos eletrônicos (cf. Madan (1993)) ou sistemas a laser (cf. Gills et al. (1992)). Ainda, com o propósito de se obter abordagens de aplicabilidade mais geral, é desejável que se desenvolvam técnicas que não sejam relacionadas a um sistema caótico em particular.

Uma desvantagem importante de se utilizar linearização por realimentação com essa finalidade, no entanto, é o elevado esforço de controle despendido. Ele pode, no entanto, ser diminuído com a aplicação do *backstepping*. Como já mencionado, a principal característica dessa técnica é a flexibilidade na construção de leis de controle, o que permite evitar cancelamentos de não-linearidades que possam porventura ser úteis, de tal forma que as metas de estabilização ou seguimento de alguma referência pré-estabelecida sejam alcançadas com um esforço de controle reduzido. Como o *backstepping* é um procedimento recursivo que entrelaça a escolha de uma função de Lyapunov com o projeto de controle de realimentação, pode-se utilizar o Método de Lyapunov para “quebrar” o problema original em uma seqüência de projetos para sistemas de menor ordem. Explorando-se a simplicidade presente em sistemas de menor ordem, o *backstepping* pode resolver problemas de estabilização e seguimento sob condições menos restritivas que aquelas encontradas em outras técnicas (tais como o método OGY e linearização por realimentação).

3.6.2.2. *Backstepping* Aplicado a Sistemas Caóticos

Muitos sistemas caóticos arquetípicos, tais como o sistema de Rössler, o circuito de Chua, o oscilador de Duffing e o sistema de Lorenz pertencem à classe de sistemas de realimentação estrita (Yang et al., 2001). Mascolo & Grassi (1997) ilustram a aplicação do *backstepping* no controle de sistemas dessa natureza com o sistema de Lorenz a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -10x_1 + 10x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3 - R_0 - u,\end{aligned}\tag{3.76}$$

onde u é a entrada de controle. Quando $R_0 = 28$, o sistema não controlado (i.e., $u = 0$) é caótico e há três pontos de equilíbrio instáveis:

$$(\sqrt{27}, \sqrt{27}, -1), (0, 0, -28) \text{ e } (-\sqrt{27}, -\sqrt{27}, -1).$$

Se se desejar estabilizar o sistema de Lorenz em $(\sqrt{27}, \sqrt{27}, -1)$, por exemplo, verifica-se que o atrator estranho do sistema não inclui esse ponto de equilíbrio. Logo, o método de OGY não é aplicável nesse caso (Fuh & Tung, 1995). Transladando-se a origem do sistema (3.76) para o ponto fixo $(\sqrt{27}, \sqrt{27}, -1)$, as equações do sistema podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= x - \xi_1 - (\sqrt{27} + x)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \sqrt{27}(x + \xi_1) - \xi_2 + x\xi_1 - u. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Comparando-se (3.77) com o sistema genérico (3.61), tem-se que $f(x) = -10$, $g(x) = 10$, $f_1(x, \xi_1) = x - \xi_1$, $g_1(x, \xi_1) = -(\sqrt{27} + x)$, $f_2(x, \xi_1, \xi_2) = \sqrt{27}(x + \xi_1) - \xi_2 + x\xi_1$ e $g_2(x, \xi_1, \xi_2) = -1$. Objetiva-se encontrar uma lei de controle u que estabilize o estado $\mathbf{x} = [x \ \xi_1 \ \xi_2]^T$ do sistema (3.77) na origem. Iniciando-se pela primeira equação, uma função estabilizadora $\alpha(x)$ deve ser projetada para o controle virtual ξ_1 de forma a se fazer com que a derivada de $V(x) = x^2 / 2$,

$$\dot{V} = -10x^2 + 10x\xi_1, \quad (3.78)$$

seja definida negativa quando $\xi_1 = \alpha(x)$. Escolhendo-se $\alpha(x) = 0$ e definindo-se a variável de erro z_1 :

$$z_1 := \xi_1 - \alpha(x), \quad (3.79)$$

obtem-se o subsistema (x, z_1) :

$$\dot{x} = -10x + 10\xi_1 \quad (3.80a)$$

$$\dot{z}_1 = x - z_1 - (\sqrt{27} + x)\xi_2, \quad (3.80b)$$

para o qual uma candidata a função de Lyapunov é $V_1(x, z_1) = V(x) + z_1^2/2$. Como sua derivada ao longo de (3.80b)

$$\dot{V}_1 = -10x^2 + z_1 \left[11x - z_1 - (\sqrt{27} + x)\xi_2 \right] \quad (3.81)$$

torna-se definida negativa através da escolha do controle virtual ξ_2 como

$$\xi_2 = \alpha_1(x, z_1) = \frac{11x}{\sqrt{27} + x}, \quad (3.82)$$

o desvio de ξ_2 da função estabilizadora α_1

$$z_2 := \xi_2 - \frac{11x}{\sqrt{27} + x} \quad (3.83)$$

fornece o seguinte sistema nas coordenadas (x, ξ_1, ξ_2) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -10x + 10z_1 \\ \dot{z}_1 &= x - z_1 - (\sqrt{27} + x)(z_2 + \alpha_1) \\ \dot{z}_2 &= \left[\sqrt{27}(x + z_1) - z_2 - \alpha_1 + xz_1 - u \right] - \left[\frac{11\sqrt{27}}{(\sqrt{27} + x)^2} (-10x + 10z_1) \right]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Por fim, a derivada de $V_2(x, z_1, z_2) = V_1 + z_2^2/2$,

$$\dot{V}_2 = -10x^2 - z_1^2 + z_2 \left[\sqrt{27}x - z_2 - \frac{11x}{\sqrt{27} + x} - u - \frac{11\sqrt{27}(-10x + 10\xi_1)}{(\sqrt{27} + x)^2} \right],$$

torna-se definida negativa com a seguinte escolha de u :

$$u = \sqrt{27}x - \frac{11x}{\sqrt{27} + x} - \frac{11\sqrt{27}(-10x + 10\xi_1)}{(\sqrt{27} + x)^2}. \quad (3.85)$$

Portanto, conforme o Método Direto de Lyapunov, o estado $[x \ z_1 \ z_2]^T$ converge assintoticamente para $[0 \ 0 \ 0]^T$. Ainda, o Teorema de La Salle-Yoshizawa garante que $[x \ \xi_1 \ \xi_2]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ é um ponto de equilíbrio GAE. Tendo-se em vista (3.79) e (3.83), conclui-se, portanto, que a equação (3.85) representa a lei de controle que estabiliza

o sistema (3.76) no ponto de equilíbrio $(\sqrt{27}, \sqrt{27}, -1)$. As Figuras 3.5 e 3.6 apresentam resultados de simulações para o caso regulador com condição inicial $\mathbf{x}(0) = [2 \ 0 \ 0]^T$. Após um pequeno transitório, x , ξ_1 e ξ_2 logo convergem para a origem. Destaca-se que $\dot{V}_2 = 0$ no ponto fixo.

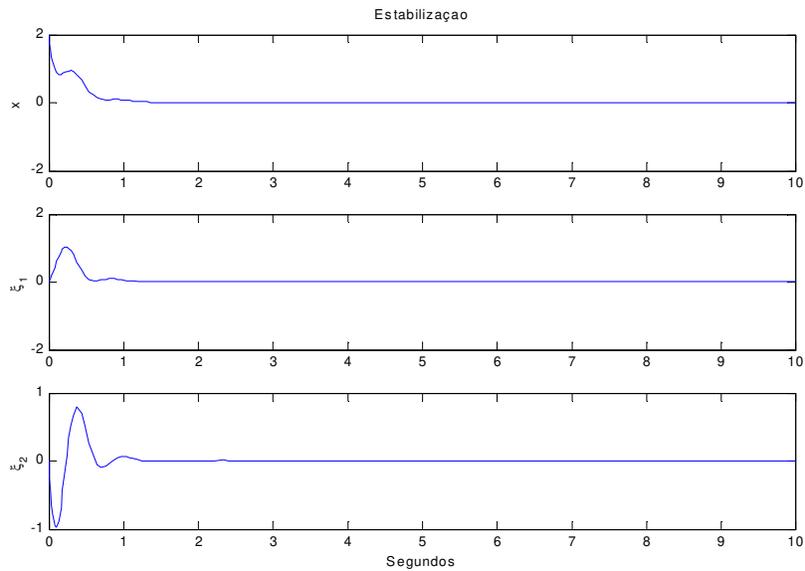


Figura 3.5. Estabilização com *backstepping*. Formas de onda para x , ξ_1 e ξ_2 .

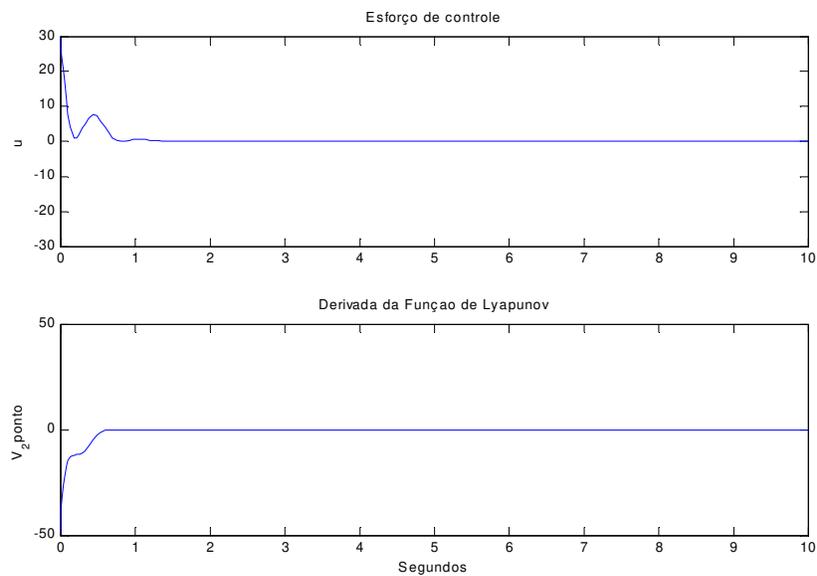


Figura 3.6. Estabilização com *backstepping*. Esforço de controle e derivada da Função de Lyapunov

Como apontam Mascolo & Grassi (1997), caso se queira encontrar uma lei de controle que faça com que a saída siga alguma referência $r(t)$ pré-estabelecida, pequenas modificações no projeto são necessárias. Seja, por exemplo, $y = \xi_1$ a saída e seja z_1 a variável de erro correspondente:

$$z_1 := \xi_1 - r(t) \quad (3.86)$$

A derivada da função de Lyapunov $V_1 = z_1^2 / 2$

$$\dot{V}_1 = z_1 [x - z_1 - r(t) - (\sqrt{27} + x)\xi_2 - \dot{r}(t)] \quad (3.87)$$

torna-se negativa através da escolha do controle virtual ξ_2 como

$$\xi_2 = \alpha_1 = \frac{x - r - \dot{r}}{\sqrt{27} + x}. \quad (3.88)$$

Novamente, dado $V_2 = V_1 + z_2^2 / 2$, onde $z_2 := \xi_2 - \alpha_1$ é o desvio entre o controle virtual e a função estabilizadora, a derivada

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -z_1^2 - z_2 [z_1 \sqrt{27} + z_1 x - \sqrt{27}(x + \xi_1) + z_2 + \\ & + \alpha_1 - x \xi_1 + u + \dot{\alpha}_1] \end{aligned} \quad (3.89)$$

é feita negativa pela escolha da seguinte entrada de controle:

$$\begin{aligned} u = & \frac{(10x - 10\xi_1)(\sqrt{27} + r + \dot{r})}{(\sqrt{27} + x)^2} + \frac{2\dot{r} + \ddot{r} - x + r}{\sqrt{27} + x} + \\ & + r(\sqrt{27} + x) + \sqrt{27}x, \end{aligned} \quad (3.90)$$

que garante que ξ_1 segue o sinal de referência r .

As Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 apresentam resultados de simulações para o caso seguidor com condição inicial $\mathbf{x}(0) = [2 \ 0 \ 0]^T$. Observa-se que $y = \xi_1$ segue, após um pequeno transitório, a referência $r = \cos(t)$ com erro nulo. O Teorema de La Salle-Yoshizawa garante, ainda, a limitação da evolução de x e ξ_2 (Figura 3.8). A Figura 3.9 mostra o comportamento da derivada da função de Lyapunov ao longo do tempo. Destaca-se que

$\dot{V}_2 \rightarrow 0$, permanecendo sempre negativa à medida que \mathbf{z} ruma em direção à origem (estado de equilíbrio).

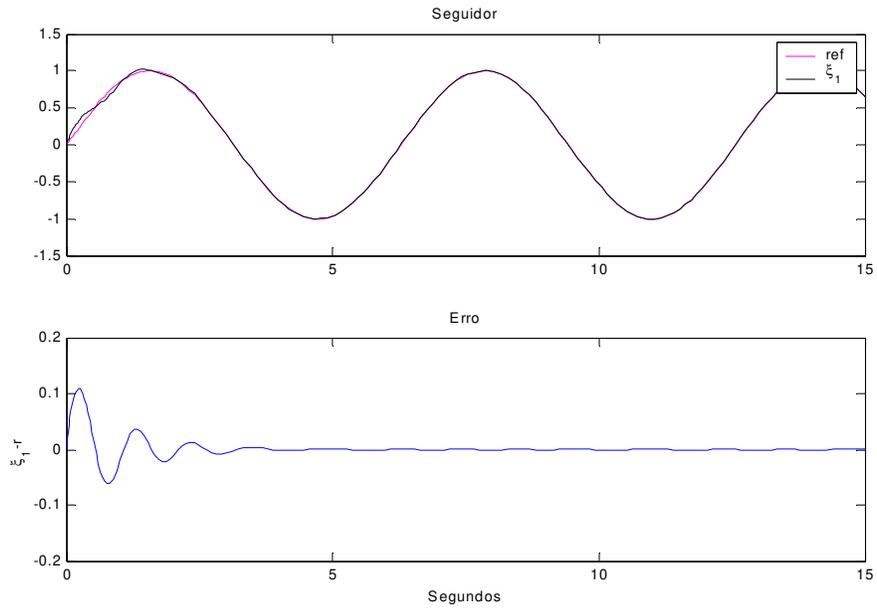


Figura 3.7. A saída y segue o sinal de referência $\cos(t)$.

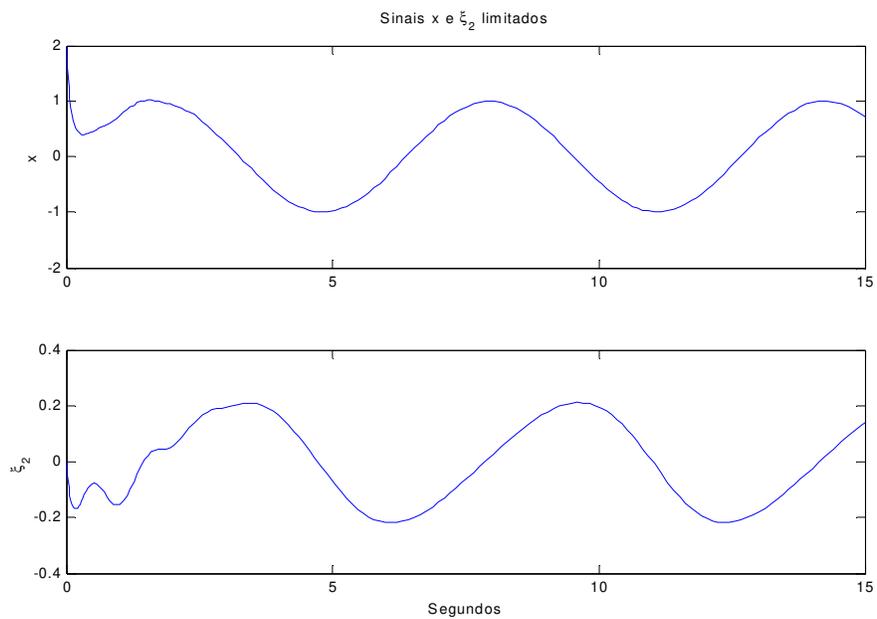


Figura 3.8. Os sinais das variáveis x e ξ_2 permanecem limitados.

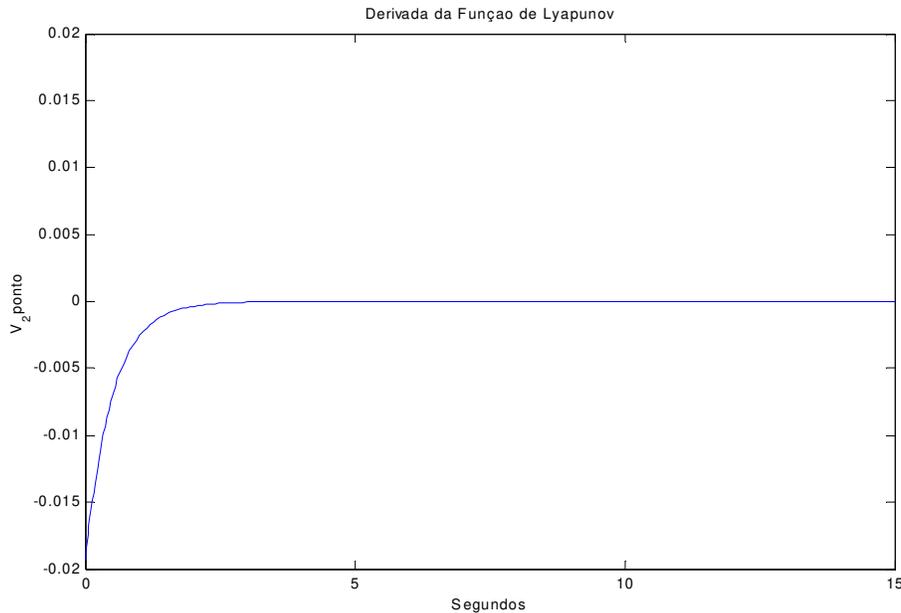


Figura 3.9. Evolução da derivada da Função de Lyapunov do sistema.

Mascolo & Grassi (1997) apresentam resultados que comprovam que o método de *backstepping* é mais eficiente que esquemas baseados em geometria diferencial, pois requer menor esforço de controle. A razão é que o *backstepping* persegue os objetivos de estabilização e seguimento ao invés de se ocupar com linearizações.

3.7. Conclusão

Como descrito neste capítulo, a síntese de controladores através do *backstepping* sustenta-se na premissa de que a derivada da função de Lyapunov de controle do sistema é, no mínimo, semidefinida negativa. De fato, a cada passo é introduzida uma candidata a função de Lyapunov intermediária e escolhida uma função estabilizadora de tal forma que a derivada dessa função-candidata resulte (semi)definida negativa. A FLC corresponde à soma das k funções de Lyapunov intermediárias, onde k é a ordem do sistema. Como consequência, chega-se, ao final do processo de *backstepping*, a um sistema de erros linear $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_z \mathbf{z}$ assintoticamente estável na origem. Os objetivos de estabilização e seguimento são, em vista disso, satisfatoriamente atingidos.

Capítulo 4

Flexibilização do *Backstepping*

4.1. Introdução

Como exposto no capítulo anterior, o *backstepping* tradicional sustenta-se na premissa de que um sistema dinâmico é estabilizável (ou passível de seguir alguma referência pré-estabelecida), consoante o indicado pelo Teorema de La Salle-Yoshizawa, apenas quando a derivada de sua função de Lyapunov de controle for definida negativa. Alternativamente, se se verificar que for semidefinida negativa, o Teorema de La Salle clássico garante que a solução do sistema tende ao maior conjunto invariante contido no conjunto onde essa derivada é nula.

Este trabalho propõe uma flexibilização do *backstepping*, aplicável em alguns tipos de problemas, que permite que a derivada da função de Lyapunov do sistema assumam valores positivos ao longo do processo de controle. De fato, estabilidade e convergência podem ser garantidas mesmo sem a aplicação dos Teoremas de La Salle-Yoshizawa e de La Salle, bastando-se assegurar que a parte real dos autovalores do sistema de erros $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_z \mathbf{z}$ resultante seja negativa. Dessa maneira, com condições menos restritivas para estabilidade, consegue-se resultados melhores que os obtidos quando do uso do *backstepping* clássico em alguns problemas, como será apresentado neste capítulo (cf. seção 4.3).

A possibilidade de se obter controladores em condições mais favoráveis torna viável o emprego menos restrito de ferramentas de otimização que conduzam a uma maior

eficiência no processo de controle. Nos casos apresentados neste capítulo foram utilizadas técnicas de computação evolutiva (cf. seção 4.2) com essa finalidade.

4.2. Otimização Baseada em Computação Evolutiva

Analogias entre o mecanismo biológico de seleção natural e processos matemáticos de otimização conduziram ao desenvolvimento dos *algoritmos evolutivos*, cuja característica principal é a simulação do processo evolutivo num computador com vistas à solução de problemas de otimização. Alguns paradigmas relacionados aos algoritmos evolutivos são *algoritmos genéticos*, *programação evolutiva* e *estratégias evolutivas* (Fogel, 1995).

Em geral, os algoritmos evolutivos simulam o processo de evolução utilizando os seguintes elementos: representação matemática dos indivíduos candidatos à solução, uma população formada por possíveis soluções, operadores que atuam sobre os indivíduos da população, uma função de *fitness* que indica a qualidade de um indivíduo em comparação aos demais e um mecanismo de seleção para a geração (iteração) seguinte. A diferença entre os paradigmas citados reside nas diferentes possibilidades de configuração e aplicação desses elementos. Neste trabalho são utilizados *algoritmos genéticos*.

A evolução (método de busca paralela de soluções dentre um número muito grande de candidatos, sujeitos a condições de adaptação variáveis) é uma estratégia promissora no tratamento de problemas computacionais de complexidade elevada ou para os quais não é possível obter uma formalização adequada para o emprego de técnicas convencionais. Por exemplo, em problemas que requerem busca dentre um número muito grande de candidatos a solução (cf., por exemplo, Paiva (1997), Ursem et al. (2002), Fleming & Purshouse (2001) e Neto (2000)). Esses problemas podem se beneficiar do paralelismo inerente aos processos evolutivos, em que muitas possibilidades de solução são exploradas simultaneamente (cf. Von Zuben (2000)).

4.2.1. Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos foram introduzidos por Holland (1975) com o objetivo de formalizar matematicamente e explicar rigorosamente processos de adaptação em sistemas naturais e desenvolver sistemas artificiais (simulados em computador) que retivessem os mecanismos encontrados em sistemas naturais.

A terminologia empregada pelos algoritmos genéticos origina-se da teoria da evolução natural e da genética. Dessa forma, um indivíduo da população, formada por um subconjunto de possíveis soluções para o problema em questão, é denominado *cromossomo*. Cromossomos são usualmente implementados na forma de listas de atributos ou vetores. Cada atributo é designado por *gene*. Os possíveis valores que um determinado gene pode assumir são denominados *alelos*. Um cromossomo é uma codificação de uma possível solução para o problema. A essa codificação dá-se o nome de *genótipo*. A interpretação do código presente em um cromossomo chama-se *fenótipo*. O *espaço de busca* tem como elementos todos os candidatos à solução do problema. A *população* é um subconjunto do espaço de busca. A *função de adaptação* ou *fitness* atribui a cada elemento da população (cromossomo) um valor de adaptação, que indica a qualidade do candidato à solução em relação aos demais. É, portanto, uma medida relativa de desempenho e representa a pressão do ambiente sobre o fenótipo dos indivíduos.

Os *operadores de inicialização* produzem a primeira geração de indivíduos (população inicial) selecionando elementos do espaço de busca segundo algum critério pré-determinado. Os *operadores genéticos* implementam o mecanismo de introdução de variabilidade aleatória no genótipo da população. Os *operadores de seleção* implementam o mecanismo de seleção natural de indivíduos na passagem para a geração seguinte. A ação desses três operadores tende a conduzir o processo de otimização rumo a uma solução adequada para o problema.

Fogel (1995) descreve a estrutura básica de um algoritmo genético:

- (i) A iteração t apresenta uma população de soluções potenciais $P(t)$;
- (ii) Cada solução é avaliada e é produzida uma medida que a qualifica com relação à possibilidade de resolver o problema (*fitness*);

- (iii) Uma nova população (iteração $t+1$) é então formada, privilegiando a participação dos melhores indivíduos através do emprego dos operadores de seleção;
- (iv) Alguns membros da nova população passam por alterações, por meio da atuação dos operadores genéticos, para formar novas soluções potenciais;
- (v) O processo se repete até que um número pré-determinado de iterações (gerações) seja atingido, ou até que um nível de adaptação esperado seja alcançado.

O processo de evolução executado por um algoritmo genético corresponde a uma busca pelo melhor indivíduo em um espaço de soluções potenciais para o problema. Essa procura requer um equilíbrio entre dois objetivos aparentemente conflitantes: o aproveitamento das melhores soluções já encontradas e uma exploração ampla do espaço de busca (*exploitaiton* \times *exploration*) (Michalewicz, 1996). Tal equilíbrio praticamente inexistente quando se considera outras técnicas, como (a) métodos de otimização clássicos (o método do gradiente, por exemplo), que apenas aproveitam a melhor solução conhecida na investigação de possíveis aprimoramentos, sem realizar uma exploração efetiva do espaço, e (b) métodos de busca aleatória, que exploram o espaço de possíveis soluções ignorando o aproveitamento de regiões promissoras. Os algoritmos genéticos, por outro lado, são uma classe de métodos de busca de propósito geral que apresentam um balanço notável entre aproveitamento de boas soluções e exploração do espaço de busca (Von Zuben, 2000).

O processo de pesquisa de soluções é multidirecional, encorajando a troca de informação entre as direções. A cada geração, soluções relativamente boas se reproduzem, enquanto que soluções relativamente ruins são eliminadas. Como já mencionado, para fazer a distinção entre diferentes soluções é empregada uma função de avaliação ou de adaptabilidade (*fitness*) que simula o papel da pressão exercida pelo ambiente sobre o indivíduo.

Embora apresentem etapas não determinísticas em seu desenvolvimento, os algoritmos genéticos não são métodos de busca puramente aleatórios, pois combinam variações aleatórias com seleção, polarizada pelos valores de adequação atribuídos a cada indivíduo (Von Zuben, 2000).

Michalewicz (1996) relaciona os cinco componentes necessários a um algoritmo genético para um dado problema:

- Uma representação genética para os candidatos a solução;
- Uma maneira de se criar uma população inicial de soluções potenciais;
- Uma função de avaliação que classifique os indivíduos da população quanto à sua capacidade de resolver o problema em questão;
- Operadores genéticos;
- Valores para os diversos parâmetros utilizados pelo algoritmo genético (tamanho da população, probabilidade de aplicação dos operadores genéticos, etc.).

4.2.1.1. Codificação de Indivíduos

Cada indivíduo de uma população representa um potencial candidato à solução do problema em questão. No algoritmo genético clássico, proposto por Holland (1975), as soluções candidatas são codificadas em arranjos binários de tamanho fixo.

Entretanto, em diversas aplicações práticas a utilização de codificação binária leva a um desempenho insatisfatório (Von Zuben, 2000). Em problemas de otimização numérica com parâmetros reais, algoritmos genéticos com representação inteira (cada cromossomo é um vetor cujos elementos são números inteiros) ou em ponto flutuante (cada cromossomo é um vetor de números na representação em ponto flutuante) freqüentemente apresentam desempenho superior àqueles com codificação binária. Michalewicz (1996) apresenta simulações computacionais comparando o desempenho de algoritmos genéticos com codificação binária e com ponto flutuante aplicados a um problema de controle. Os resultados apresentados mostram uma clara superioridade da codificação em ponto flutuante.

4.2.1.2. Operadores de Inicialização

O método mais comum utilizado na definição da população inicial é a inicialização aleatória dos indivíduos. Se algum conhecimento inicial a respeito do problema estiver disponível, pode ser utilizado na inicialização da população.

4.2.1.3. Operadores Genéticos

Os operadores mais frequentemente utilizados em algoritmos genéticos são os operadores de *crossover* e de mutação.

4.2.1.3.1. Operador de *Crossover*

O operador de *crossover* (ou *recombinação*) cria novos indivíduos através da combinação de dois ou mais indivíduos. A idéia intuitiva por trás do operador de *crossover* é a troca de informação entre diferentes soluções candidatas.

O operador de *crossover* mais comumente empregado é o *crossover* de um ponto. Para a aplicação desse operador, são selecionados dois indivíduos (pais) e, a partir de seus cromossomos, são gerados dois novos indivíduos (filhos). Para gerar os filhos, seleciona-se aleatoriamente um mesmo ponto de corte nos cromossomos dos pais; os segmentos de genes a partir do ponto de corte são trocados. O *crossover* de um ponto está ilustrado na figura a seguir, onde os indivíduos possuem codificação binária:

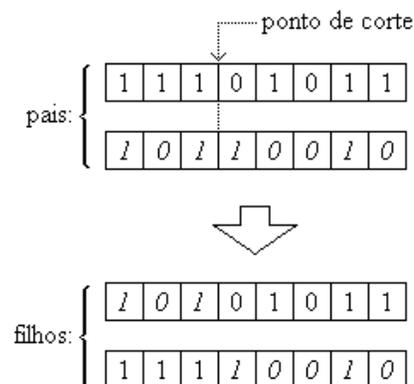


Figura 4.1. *Crossover* de um ponto.

Muitos outros tipos de *crossover* têm sido propostos na literatura (cf. Bäck et al. (2000)). Por exemplo, no *crossover de dois pontos*, selecionam-se dois pontos de corte e faz-se a troca do material cromossômico entre eles. Já no *crossover uniforme* (Syswerda, 1989), para cada bit do primeiro filho é decidido (com alguma probabilidade fixa p) qual pai irá contribuir com seu valor para aquela posição; o segundo filho receberá o bit do outro pai. Não há, no entanto, nenhum operador de *crossover* que claramente apresente um desempenho superior aos demais. Os operadores de recombinação para cromossomos com codificação binária podem ser utilizados em cromossomos com codificação em ponto flutuante. Entretanto, existem operadores de *crossover* especialmente desenvolvidos para uso em indivíduos com codificação em ponto flutuante. Um exemplo é o *crossover aritmético* (Michalewicz & Schönauer, 1996). Este operador é definido como uma combinação de dois vetores (cromossomos): sejam \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 dois indivíduos selecionados para *crossover*; os dois filhos resultantes serão $\mathbf{x}'_1 = a\mathbf{x}_1 + (1-a)\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}'_2 = a\mathbf{x}_2 + (1-a)\mathbf{x}_1$, onde a é um número aleatório pertencente ao intervalo $[0, 1]$.

Outros operadores de recombinação são descritos em Michalewicz & Schönauer (1996).

4.2.1.3.2. Operador de Mutação

O operador de mutação modifica aleatoriamente um ou mais genes de um cromossomo. A probabilidade de ocorrência de mutação em um gene é denominada *taxa de mutação*. A idéia intuitiva por trás do operador de mutação é criar uma variabilidade extra na população, mas sem destruir o progresso já obtido com a busca.

No caso de problemas com codificação binária, o operador de mutação padrão simplesmente troca o valor de um gene em um cromossomo (Michalewicz, 1996). No caso de problemas com codificação em ponto flutuante, o operador de mutação *uniforme*, por exemplo, seleciona aleatoriamente um componente do cromossomo $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_k \dots x_n]^T$, $k \in \{1, \dots, n\}$, e gera um indivíduo $\mathbf{x}' = [x_1 \dots x'_k \dots x_n]^T$, em que x'_k é um número aleatório (com distribuição de probabilidade uniforme) amostrado no intervalo $[LI_k, LS_k]$; LI_k e LS_k são, respectivamente, os limites inferior e superior para o alelo x_k . Na *mutação não*

uniforme, supondo que o gene x_l , $l \in \{1, \dots, n\}$, seja selecionado pelo operador genético, o cromossomo resultante será $\mathbf{x}' = [x_1 \dots x'_l \dots x_n]^T$, em que

$$x'_l = \begin{cases} x_l + \Delta(t, LS_l - x_l), & \text{se um dado índice aleatório for 0;} \\ x_l - \Delta(t, x_l - LI_l), & \text{se um dado índice aleatório for 1,} \end{cases}$$

onde LI_l e LS_l são os limites inferior e superior para o alelo x_l , respectivamente. Nesse caso, a função $\Delta(t, y)$ retorna um valor no intervalo $[0, y]$ de sorte que a probabilidade de $\Delta(t, y)$ assumir um valor próximo de zero aumenta à medida que t aumenta. Essa característica faz com que o operador explore o espaço de busca de forma global inicialmente e, em gerações avançadas, de modo progressivamente local.

Outros operadores de mutação são descritos em Michalewicz & Schönauer (1996).

4.2.1.4. Operadores de Seleção

O algoritmo genético clássico utiliza um esquema de seleção de indivíduos para a próxima geração chamado *roulette wheel* (Michalewicz, 1996). O *roulette wheel* atribui a cada indivíduo de uma população uma probabilidade de passar para a próxima geração proporcional ao seu *fitness*. Assim, quanto mais apto for um indivíduo, maior será sua probabilidade de passar para a próxima geração. Com a seleção de indivíduos por *roulette wheel*, contudo, há o risco de que o melhor indivíduo da população seja perdido, ou seja, não passe para a próxima geração. Uma opção é manter sempre o melhor indivíduo da geração atual na geração seguinte, estratégia esta conhecida como seleção *elitista*. A seleção elitista garante convergência assintótica. A taxa de convergência, porém, é específica para cada problema e, geralmente, desconhecida (Fogel, 1995).

Outros mecanismos de seleção podem ser encontrados em Bäck et al. (2000).

4.3. Flexibilização do *Backstepping*

O projeto de controladores eficientes por meio do *backstepping* sem a obrigatoriedade de se verificar a derivada da função de Lyapunov do sistema definida negativa (ou semidefinida negativa) será inicialmente ilustrado através de uma aplicação representada por um sistema de realimentação estrita.

4.3.1. Exemplo de Aplicação – Sincronização de Sistemas Caóticos

A sincronização de sistemas caóticos é uma aplicação importante na área de segurança em sistemas de comunicação. A finalidade de um sistema de comunicação é a transmissão de sinais portadores de informação a partir de um transmissor, estabelecido num dado local, para um receptor, localizado a uma certa distância do transmissor. O envio de informação é feito por meio de um canal de comunicação, que provê uma conexão física entre a saída do transmissor e a entrada do receptor. Para que uma mensagem possa ser conduzida pelo canal, ela deve ser processada numa forma adequada para transmissão. Tal operação é designada *modulação* (Haykin, 1989). Num processo de modulação, alguma(s) característica(s) do sinal portador é(são) alterada(s) de acordo com um sinal modulador (Haykin, 1989). Tradicionalmente, tanto o sinal portador quanto o modulador são sinais senoidais. Disso resulta que a potência transmitida é concentrada numa faixa estreita de frequências, o que acarreta uma alta densidade espectral de potência. Como apontam Kolumbán et al. (1997), isso traz uma série de desvantagens, dentre as quais a elevada probabilidade de interceptação desses sinais por receptores não autorizados. Visando-se a um maior grau de segurança na transmissão de informações, técnicas de espalhamento de espectro têm sido propostas. Em Dixon (1994), por exemplo, adicionalmente a um esquema de modulação digital, uma seqüência pseudo-aleatória é usada com o propósito de espalhar o espectro do sinal transmitido. Uma exigência dos métodos de espalhamento de espectro é o sincronismo das seqüências pseudo-aleatórias no transmissor e no receptor, a fim de que a informação seja satisfatoriamente recuperada no destinatário. Uma desvantagem dessa abordagem, contudo, é a elevada complexidade dos circuitos geradores dessas seqüências (Kolumbán et al., 1997).

Sinais caóticos, por outro lado, podem ser gerados empregando-se circuitos muito simples. Além disso, dado que são sinais de banda larga – cujos espectros assemelham-se aos de ruído –, podem ser empregados em vários contextos com o objetivo de aumentar a segurança na transmissão de informações à luz da estratégia de espalhamento de espectro (Cuomo et al., 1993). De fato, a descoberta da possibilidade de sincronização de sistemas caóticos (Pecora & Carrol (1990)) permitiu o desenvolvimento de esquemas eficientes de transmissão segura de informações confidenciais (cf., por exemplo, Cuomo et al. (1993) e Kolumbán et al. (1998)). Recentemente, especialistas da área de controle não linear voltaram sua atenção ao estudo da sincronização de sistemas caóticos e sua potencial aplicação em comunicações (cf., por exemplo, Fradkov & Pogromsky (1996) e Suykens et al. (1997)). Nesse contexto, Yang et al. (2001) propuseram a aplicação do *backstepping* visando à sincronização de dois sistemas de Chua; aqui, o estado do sistema que representa o circuito receptor converge assintoticamente ao do transmissor. Ao se confrontar esse método com os esquemas de sincronização que fazem uso de observadores (cf. Nijmeijer & Mareels (1997)), uma desvantagem é a necessidade de utilização de diversas variáveis de estado na formação do controle. Todavia, a sistematização proporcionada pelo *backstepping* torna o método atrativo, visto que é aplicável a uma vasta classe de sistemas não lineares, incluindo-se vários sistemas caóticos e hipercaóticos presentes na literatura. Além disso, a limitação mencionada pode ser superada com a introdução de estimadores de estado no sistema receptor (Yang et al., 2001).

Dado que o foco deste trabalho incide na introdução e utilização do *backstepping* flexibilizado associado a algoritmos genéticos, a sincronização de dois sistemas caóticos será abordada como um exemplo de problema de *controle não linear*. Logo, as peculiaridades relacionadas ao emprego dessa técnica em sistemas de comunicação não serão aqui tratadas.

O circuito de Chua contém três elementos acumuladores de energia (um indutor L e dois capacitores C_1 e C_2), um resistor linear R e um resistor não linear $I(v_1)$. Suas equações dinâmicas possuem a seguinte conformação (Madan, 1993):

$$\begin{aligned}
C_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{R}(v_2 - v_1) - I(v_1) \\
C_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{R}(v_1 - v_2) + i_L \\
L \frac{di_L}{dt} &= -v_2,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde C_1 , C_2 , L e R são parâmetros do circuito, i_L é a corrente no indutor L e v_1 e v_2 são as tensões nos capacitores C_1 e C_2 , respectivamente. Em Yang et al. (2001), a não-linearidade é cúbica: $I(v_1) = Av_1 + Bv_1^3$. Os parâmetros podem, por exemplo, assumir os valores: $C_1 = 1,2\text{nF}$, $C_2 = 12\text{nF}$, $R = 2\text{k}\Omega$, $L = 3\text{mH}$ e $A = -4,285 \times 10^{-4}\text{S}$ e $B = 5 \times 10^{-4}\text{SV}^{-2}$. Dada a elevada discrepância de ordens de grandeza entre esses valores, nos sistemas tratados em Yang et al. (2001) foram introduzidas as seguintes mudanças de escala e de variáveis: $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$, $x_3 = Ri_L$ e $\kappa = t/RC_2$. Dessa forma, reescreve-se (4.1) de modo a se obter o seguinte conjunto de equações diferenciais adimensionais:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\kappa} &= \alpha[x_2 - x_1 - I(x_1)] \\
\frac{dx_2}{d\kappa} &= x_1 - x_2 + x_3 \\
\frac{dx_3}{d\kappa} &= -\beta x_2,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $I(x_1) = ax_1 + bx_1^3$ e κ é uma “unidade de tempo adimensional”, com $\kappa = 4,17 \times 10^4 t$. Os parâmetros do sistema (4.2) adotam os seguintes valores: $\alpha = C_2/C_1 = 10$, $\beta = R^2 C_2/L = 16$, $a = -0,857$ e $b = 1$.

Sob a óptica de controle de sistemas, a sincronização de dois sistemas de Chua é um problema similar ao caso seguidor, pois almeja-se que um sistema-escravo Σ_2 siga um sistema-mestre Σ_1 . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : & \begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1^3 - 0,143x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -16x_2 \end{cases} \\ \Sigma_2 : & \begin{cases} \dot{y}_1 = 10(y_2 - y_1^3 - 0,143y_1) + u \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + y_3 \\ \dot{y}_3 = -16y_2, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ e $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$. Em (4.3), é adotada a notação $\dot{p} = dp/d\kappa$. Objetiva-se, pois, determinar u de modo que se verifique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Com base nas equações dos sistemas Σ_1 e Σ_2 , obtém-se o seguinte *sistema de erros*:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -16e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ \dot{e}_3 &= 10e_2 - 1,43e_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3 - u, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ é o erro de sincronização e $e_1 := x_3 - y_3$, $e_2 := x_2 - y_2$ e $e_3 := x_1 - y_1$. Ressalta-se que, com essa mudança de variáveis, o sistema de erros segue a conformação de um sistema não linear de realimentação estrita. De fato, comparando-se (4.5) com (3.61), constata-se que $f(e_1) = 0$, $g(e_1) = -16$, $f_1(e_1, e_2) = e_1 - e_2$, $g_1(e_1, e_2) = 1$, $f_2(e_1, e_2, e_3) = 10e_2 - 1,43e_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3$ e $g_2(e_1, e_2, e_3) = -1$. Com uma escolha adequada de u , o sistema (4.5) será estabilizado na origem.

4.3.1.1. Aplicação do *Backstepping* Tradicional e Proposta de Melhoria dos Resultados Obtidos

As linhas a seguir trazem o procedimento de *backstepping* clássico de Yang et al. (2001) para o projeto de um controlador visando-se à estabilização do sistema (4.5).

Iniciando-se pela primeira equação, uma escolha possível para a função estabilizadora $\alpha_1(e_1)$ relativa ao controle virtual e_2 , de forma a se fazer a derivada da função de Lyapunov $V_1(e_1) = e_1^2 / 2$,

$$\dot{V}_1 = -16e_1e_2, \quad (4.6)$$

definida negativa quando $e_2 = \alpha_1(e_1)$, é $\alpha_1(e_1) = e_1$, resultando em

$$\dot{V}_1 = -16e_1^2. \quad (4.7)$$

Após a definição de z_1 :

$$z_1 := e_1, \quad (4.8)$$

define-se a variável de erro z_2 :

$$z_2 := e_2 - \alpha_1(e_1) = e_2 - e_1. \quad (4.9)$$

O subsistema (z_1, z_2) tem a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -16z_1 - 16z_2 \\ \dot{z}_2 &= 16z_1 + 15z_2 + e_3, \end{aligned} \quad (4.10)$$

para o qual uma candidata a função de Lyapunov é $V_2 = V_1 + z_2^2 / 2$. Escolhendo-se o controle virtual e_3 como $e_3 = \alpha_2(z_1, z_2) = -16z_2$, a derivada de V_2

$$\dot{V}_2 = -16z_1^2 - z_2^2 + z_2(e_3 + 16z_2) \quad (4.11)$$

torna-se definida negativa.

A definição da variável de erro z_3 :

$$z_3 := e_3 - \alpha_2(z_1, z_2) = e_3 + 16z_2 \quad (4.12)$$

conduz ao sistema nas coordenadas (z_1, z_2, z_3) a seguir:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -16z_1 - 16z_2 \\
\dot{z}_2 &= 16z_1 - z_2 + z_3 \\
\dot{z}_3 &= 272z_1 + 22,88z_2 + 14,57z_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3 - u.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Uma candidata a função de Lyapunov para esse sistema é

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2, \tag{4.14}$$

cuja derivada é expressa por

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3 &= z_1(-16z_1 - 16z_2) + z_2(16z_1 - z_2 + z_3) + \\
&\quad + z_3(272z_1 + 22,88z_2 + 14,57z_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3 - u) \\
&= -16z_1^2 - z_2^2 + z_3(272z_1 + 23,88z_2 + 14,57z_3 - 10x_1^3 + 10y_1^3 - u).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

A escolha da lei de controle

$$\begin{aligned}
u &= 272z_1 + 23,88z_2 + 14,57z_3 + 10(y_1^3 - x_1^3) \\
&= 15,57(x_1 - y_1) + 273(x_2 - y_2) - (x_3 - y_3) + 10(y_1^3 - x_1^3)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

resulta em

$$\dot{V}_3 = -16z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \tag{4.17}$$

e no sistema $\dot{\mathbf{z}} = A_z \mathbf{z}$, onde

$$A_z = \begin{bmatrix} -16 & -16 & 0 \\ 16 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

é uma matriz anti-simétrica cujos autovalores têm parte real negativa.

Pelo Teorema de La Salle-Yoshizawa (ou, ainda, pelo Método Direto de Lyapunov), o estado $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$ converge para a origem (ponto fixo GAE, pois V_3 é ilimitada radialmente). Ainda, como a função de Lyapunov do sistema (V_3) é suave e definida positiva, e como sua derivada \dot{V}_3 é definida negativa ao longo do tempo, tem-se que,

conforme o Corolário 2.14, o maior conjunto invariante M de $E = \{\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^n \mid \dot{V}_3(\mathbf{z}) = 0\}$ é a origem. Além disso, com base nas expressões que definem as variáveis de erro, (4.8), (4.9) e (4.12), conclui-se que o estado $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ também converge assintoticamente para a origem. Consegue-se, dessa forma, a sincronização dos sistemas Σ_1 e Σ_2 .

As Figuras 4.2 e 4.3 ilustram a eficácia da lei de controle (4.16) na resolução do problema. Foram utilizadas as condições iniciais sugeridas em Yang et al. (2001): $\mathbf{x}(0) = [2,3 \ 1,2 \ 3,1]^T$ e $\mathbf{y}(0) = [0,1 \ 3,2 \ 1,1]^T$. A Figura 4.2 mostra a evolução das variáveis de estado do sistema de erros (4.5) rumo à origem. A Figura 4.3 mostra o progresso das variáveis de erro que compõem \mathbf{z} . O transitório aproximado de cada variável para ambos os casos é de $\kappa_t \approx 3$. Destaca-se a magnitude elevada do valor de pico de e_3 em comparação aos valores de pico de e_1 e e_2 .

As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam a evolução de e_1 , e_2 e e_3 e das variáveis de erro z_1 , z_2 e z_3 nos seus espaços de estados, respectivamente. As trajetórias $\mathbf{e}(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ convergem para a origem, de acordo com os resultados obtidos por intermédio do Teorema de La Salle-Yoshizawa.

A Figura 4.6 mostra os valores assumidos pelo esforço de controle u ao longo do tempo. Ressalta-se a magnitude extremamente elevada desses valores nos instantes iniciais.

A Figura 4.7 apresenta a evolução dos valores assumidos pela função de Lyapunov do sistema, V_3 , e por sua derivada, \dot{V}_3 . Como já destacado, \dot{V}_3 é sempre negativa, convergindo para $\dot{V}_3 = 0$ à medida que \mathbf{z} e \mathbf{e} tendem à origem.

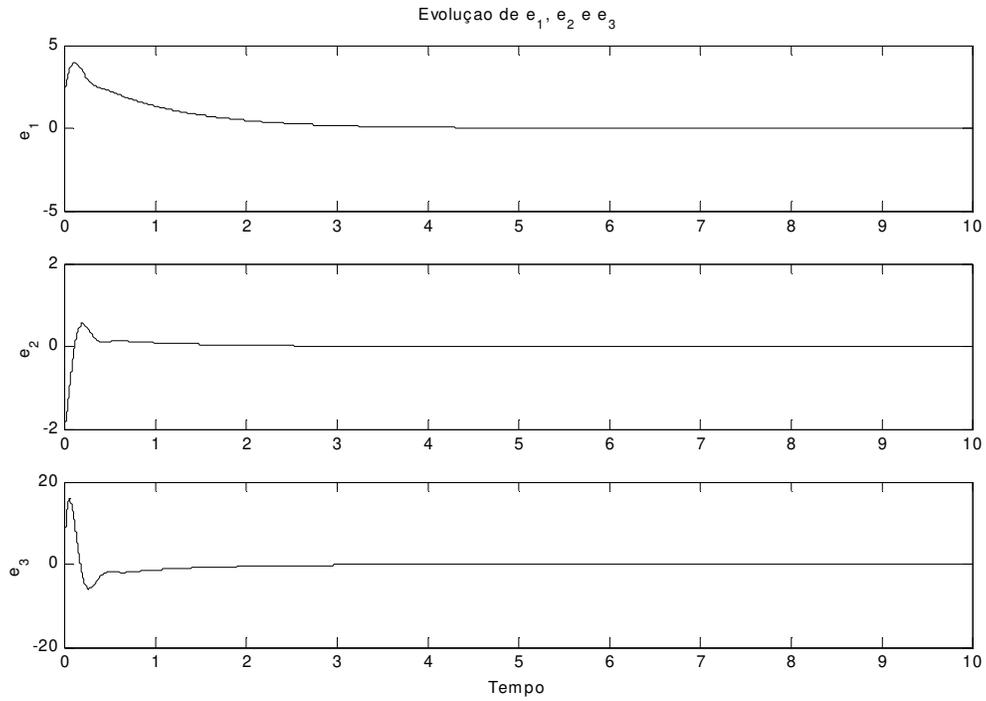


Figura 4.2. A norma $\|e\| \rightarrow 0$ com a lei de controle (4.16).

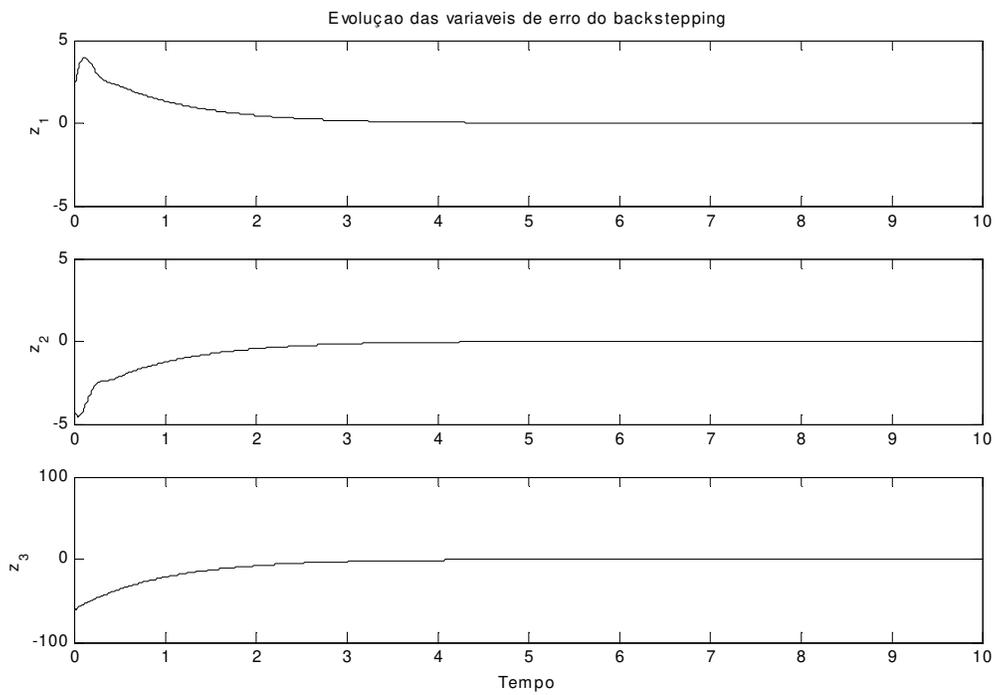


Figura 4.3. $z \rightarrow 0$ com a lei de controle (4.16).

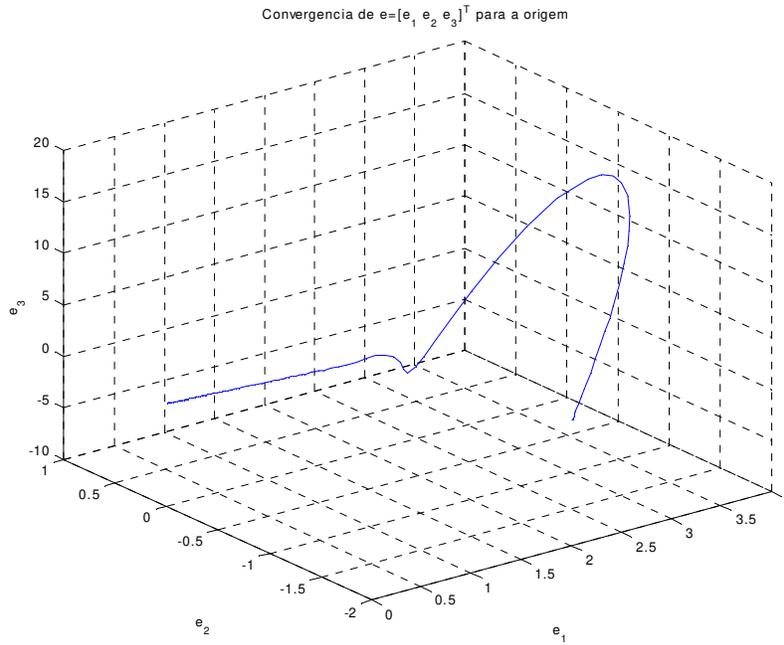


Figura 4.4. Trajetória de e rumo à origem (ponto de equilíbrio) com a lei de controle (4.16).

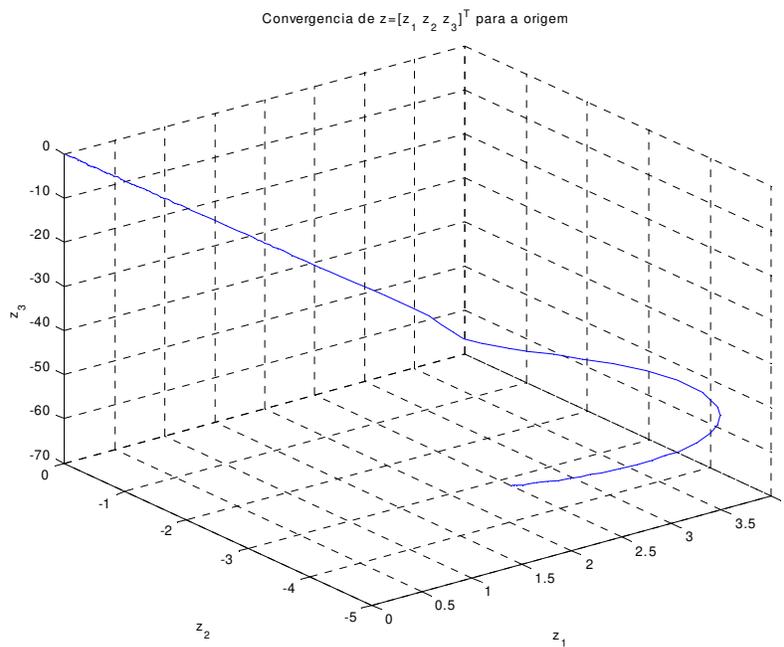


Figura 4.5. Trajetória de z rumo à origem (ponto de equilíbrio) com a lei de controle (4.16).

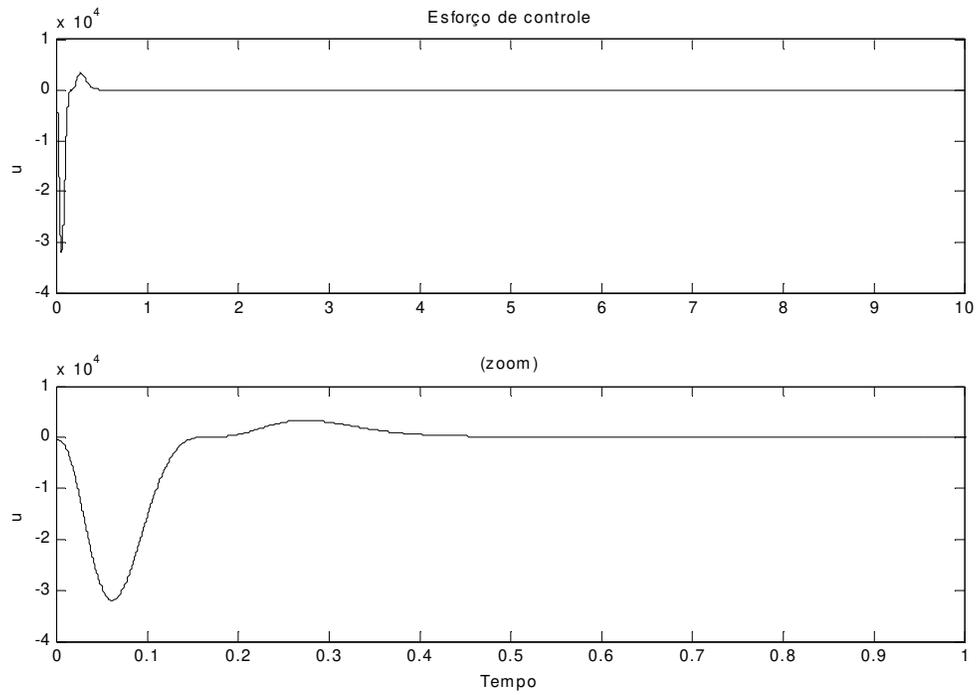


Figura 4.6. Esforço de controle u e detalhe ampliado dos instantes iniciais – equação (4.16).

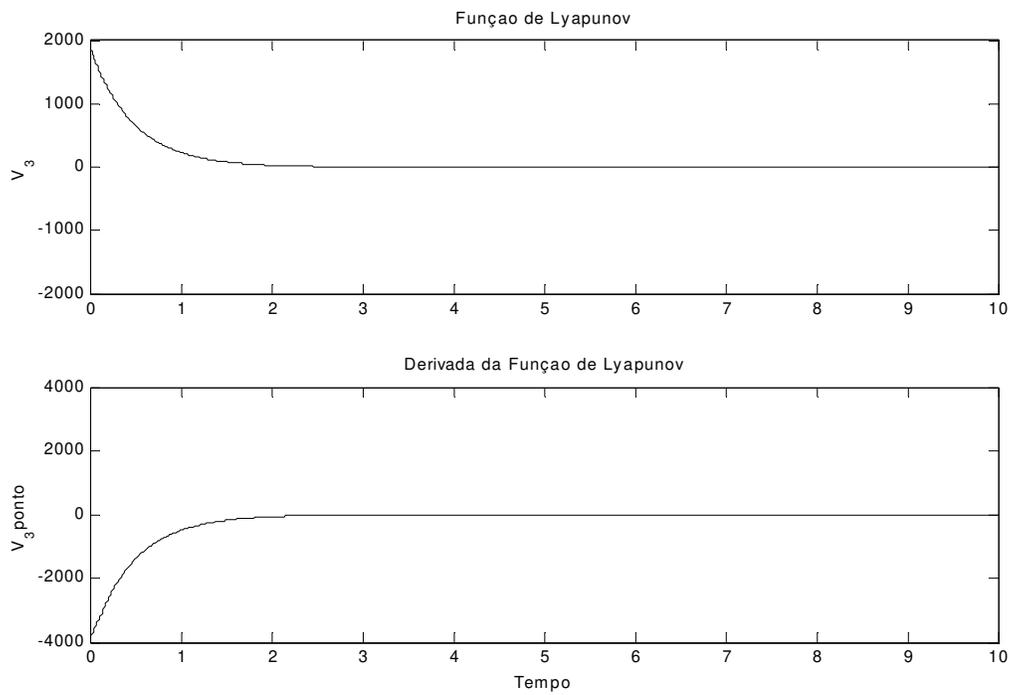


Figura 4.7. V_3 e \dot{V}_3 com a lei de controle (4.16).

Uma observação atenta dos resultados ilustrados nas Figuras 4.2 e 4.6 leva à conclusão de que existem dois aspectos que podem ser melhorados na resposta conseguida: em primeiro lugar, uma diminuição do transitório e da intensidade dos picos verificados na evolução das variáveis de estado de \mathbf{e} , de sorte que se tenha uma sincronização mais rápida e mais suave de Σ_1 e Σ_2 e, mais importante, uma redução do esforço de controle – que, como já mencionado, assume valores por demasiado elevados nos instantes iniciais. Magnitudes excessivas e variações abruptas do esforço de controle conduzem a valores elevados de tensão e corrente, o que prejudica o bom funcionamento do circuito de Chua.

Tendo em vista esses dois pontos, poder-se-ia, inicialmente, cogitar uma alteração nos parâmetros numéricos da lei de controle u (4.16), mantendo-se, todavia, a premissa de obrigatoriedade de que a derivada \dot{V}_3 seja definida negativa. Sugere-se, dessa forma, uma alteração no coeficiente do termo z_3 . Por exemplo:

$$\begin{aligned} u &= 272z_1 + 23,88z_2 + 18,57z_3 + 10(y_1^3 - x_1^3) \\ &= 18,57(x_1 - y_1) + 321(x_2 - y_2) - 49(x_3 - y_3) + 10(y_1^3 - x_1^3). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Logo,

$$\dot{V}_3 = -16z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^2. \quad (4.20)$$

As Figuras 4.8 e 4.9 apresentam, respectivamente, a evolução de \mathbf{e} ao longo do tempo e o esforço de controle. Nota-se que, embora a duração do transitório tenha diminuído, os valores elevados no transitório de e_3 permaneceram inalterados e a magnitude do esforço de controle aumentou consideravelmente nos instantes iniciais.

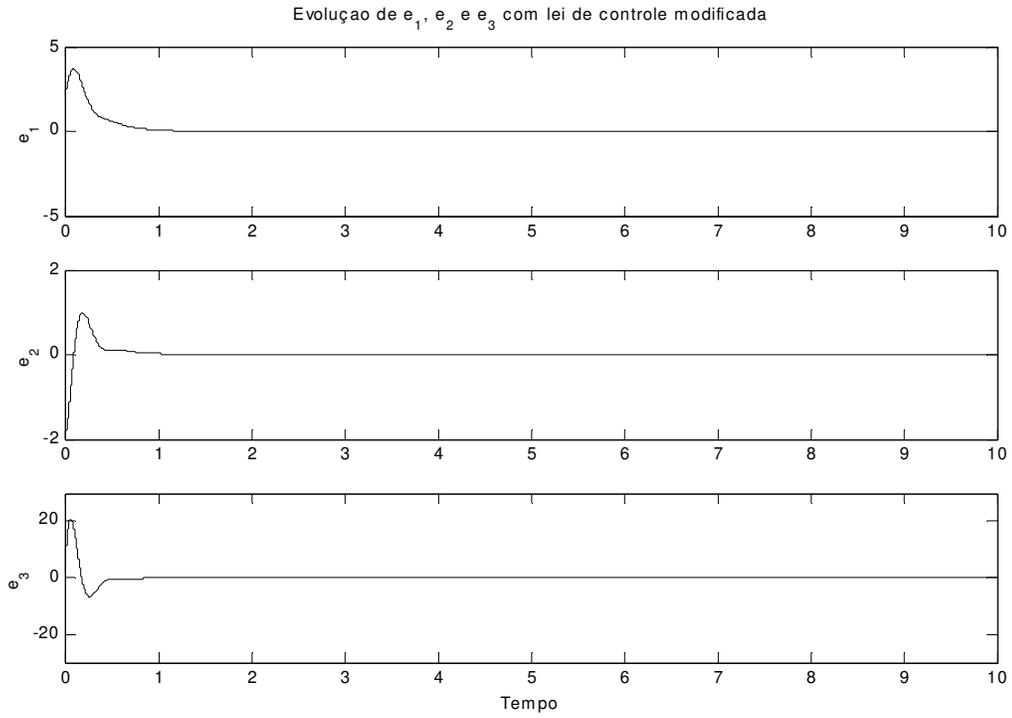


Figura 4.8. Diminuição do transitório para $\|e\| \rightarrow 0$ em comparação à Figura 4.2.

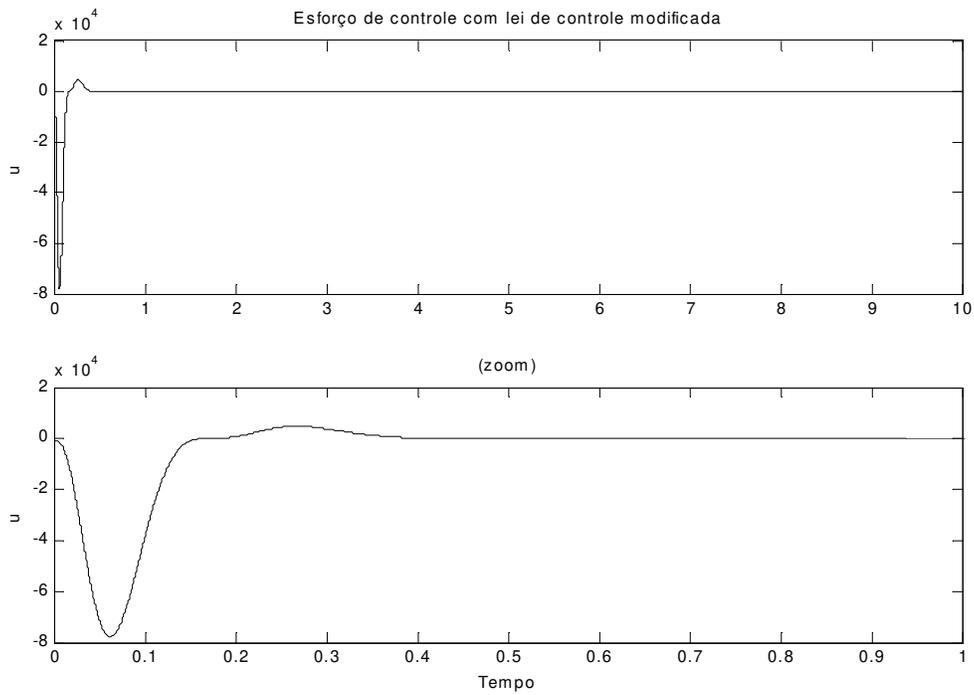


Figura 4.9. Aumento da magnitude do esforço de controle u – eq. (4.19) – em comparação à Figura 4.6.

Os resultados obtidos com a utilização da nova lei de controle (4.19) indicam a existência de uma relação inversa entre a duração do transitório observado na evolução das variáveis componentes de \mathbf{e} rumo ao ponto de equilíbrio e o esforço de controle despendido durante o processo de estabilização de (4.5) (sincronização de Σ_1 e Σ_2). Como demonstrado pelos resultados advindos da modificação de um parâmetro numérico da lei de controle u , as características dessa relação são determinadas de acordo com os valores assumidos pelos parâmetros do controlador obtido por meio do *backstepping*. Conclui-se, dessa maneira, que existem valores ideais para esses parâmetros que conduzam a um balanço adequado entre a duração do transitório e a intensidade do esforço de controle.

Todavia, o imperativo de se verificar a derivada da função de Lyapunov no mínimo semidefinida negativa não dá margem a uma busca plenamente eficaz desses valores ideais. Propondo-se um abrandamento dessa exigência, os coeficientes das três variáveis de erro, z_1 , z_2 e z_3 , na expressão da lei de controle u são substituídos por incógnitas a serem determinadas:

$$\begin{aligned} u &= az_1 + bz_2 + cz_3 + 10(y_1^3 - x_1^3) \\ &= c(x_1 - y_1) + (b + 16c)(x_2 - y_2) - (a - b - 16c)(x_3 - y_3) + 10(y_1^3 - x_1^3) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Exprime-se, pois, a derivada da função de Lyapunov do sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -16z_1^2 - z_2^2 + z_3[(272 - a)z_1 + (23,88 - b)z_2 + (14,57 - c)z_3] \\ &= -16z_1^2 - z_2^2 + (14,57 - c)z_3^2 + (272 - a)z_1z_3 + (23,88 - b)z_2z_3. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tem-se, portanto, um novo problema, que consiste na procura de valores apropriados para as incógnitas a , b e c que levem a melhores resultados em termos da duração do transitório de \mathbf{e} e da intensidade do esforço de controle sem que o sinal da derivada da função de Lyapunov seja levado em conta:

$$\{a, b, c\} = \arg \min_{a, b, c} \left[\left(\begin{array}{c} \text{intensidade do esforço} \\ \text{de controle } u \end{array} \right) e \left(\begin{array}{c} \text{duração do transitório} \\ \text{das variáveis de estado de } \mathbf{e} \end{array} \right) \right]. \quad (4.23)$$

De acordo com o Teorema de *No Free Lunch* (Wolpert & Macready, 1997), não existe uma única ferramenta que resolva *todos* os problemas de maneira ótima. Na

resolução de problemas de otimização, por exemplo, métodos clássicos e dedicados mostram-se mais eficientes do que algoritmos evolutivos quando são válidas hipóteses restritivas acerca do espaço de busca, tais como: continuidade, existência de derivadas, convexidade, unimodalidade, etc. Por outro lado, como destaca Von Zuben (2000), algoritmos evolutivos são capazes de lidar com problemas para os quais não é possível ou é muito custoso obter uma descrição detalhada, ou ainda junto aos quais não é possível suportar restrições muito fortes (ambas condições necessárias para a aplicação de ferramentas de solução dedicadas). Por exemplo, algoritmos de programação linear requerem que a função-objetivo seja linear; caso ela não seja linear, algoritmos de busca baseados no gradiente requerem que a função-objetivo seja diferenciável e que se possa calcular essa derivada a um baixo custo computacional. Na ausência de linearidade e na impossibilidade de se obter a derivada (seja porque ela não existe ou por representar uma etapa muito custosa) da função-objetivo, os algoritmos evolutivos passam a representar uma das poucas alternativas de se chegar à solução.

Para o problema (4.23) não é possível obter formalização e descrição apropriadas para o uso de métodos convencionais (baseados em gradientes, por exemplo). De fato, a função-objetivo em (4.23) não permite o cálculo de derivadas e características do espaço de busca cujo conhecimento é necessário para a aplicação desses métodos – continuidade, convexidade, etc. – não são passíveis de verificação. Opta-se, portanto, pela utilização de técnicas de otimização baseadas em computação evolutiva na busca de valores adequados para a , b e c .

4.3.1.2. Flexibilização das Premissas do *Backstepping* e Novos Resultados

São utilizados *algoritmos genéticos* nos processos de otimização apresentados nesta seção. É importante destacar, contudo, que, como enfatiza De Jong (1985), os algoritmos genéticos não são diretamente comparáveis a algoritmos tradicionais de otimização, visto que não garantem convergência para o mesmo ótimo local quando executados várias vezes. Por outro lado, a otimização é um dos campos mais significativos do espectro de aplicações dos algoritmos genéticos, pois excelentes resultados são obtidos quando do emprego desses algoritmos em problemas de otimização de elevada complexidade, nos quais não é possível

o uso de métodos tradicionais (Michalewicz, 1996). Dessa forma, posto que não assegurem eficiência total na obtenção da solução, podendo não convergir para o ótimo global, os algoritmos genéticos geralmente garantem a obtenção de uma “boa aproximação” para a solução. Para que um algoritmo genético encontre uma boa solução para um dado problema, um dos requisitos mais importantes é os termos que compõem a solução serem codificados de forma adequada. Assim, para o problema (4.23), cada cromossomo será composto de três genes, referentes às três incógnitas, como mostra a Figura 4.10.

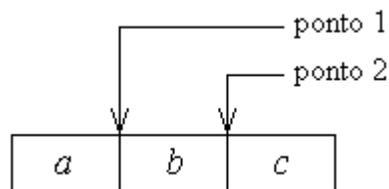


Figura 4.10. Cromossomo genérico.

Permite-se que os alelos (números reais) de cada gene (a , b e c) variem no intervalo $[-1000, 1000]$. A abordagem na base decimal foi escolhida pela simplicidade no processo de codificação/decodificação, além de oferecer a possibilidade de monitoramento da dinâmica de operação do algoritmo genético. Os indivíduos da população inicial são definidos aleatoriamente dentro do intervalo $[-1000, 1000]$.

A seleção de indivíduos para a geração seguinte adota uma variação da estratégia elitista descrita na seção 4.2.1.4, em que não apenas o melhor indivíduo passa intacto para a geração seguinte, mas os d melhores. A motivação por trás da seleção elitista tradicional, em que o melhor cromossomo sobrevive inalterado, reside no fato de que, após um dado número de iterações, um candidato à solução que possa estar próximo da solução ótima não corra o risco de sofrer manipulações por parte dos operadores genéticos que revertam em prejuízo do desempenho do algoritmo genético. A modificação introduzida no esquema elitista, que admite a manutenção de um *grupo* de indivíduos na passagem de uma geração para a subsequente, procura evitar a convergência para extremos locais. É conveniente, na situação hipotética em que o melhor indivíduo, num dado momento do processo de otimização, aponta para um extremo local no espaço de busca, a conservação de outro

indivíduo que aponte para o extremo global, mesmo que não possua, naquele instante, uma avaliação tão boa em relação à função de *fitness*.

A função de *fitness*, que indica a qualidade de um indivíduo em comparação aos demais, leva em consideração a norma Euclidiana H_2 de e (efeito do transitório) e o módulo de u (esforço de controle) nas primeiras 5 unidades de tempo de simulação:

$$fitness(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{p + \int_0^5 \left(\sqrt{e_1^2(\tau) + e_2^2(\tau) + e_3^2(\tau)} + |u(\tau)| \right) d\tau}. \quad (4.24)$$

Assim, quanto menores forem o esforço de controle e o transitório, maior será o valor da função de *fitness*.

Dois tipos de operador de *crossover* são testados: num primeiro momento, o *crossover* aritmético e, posteriormente, o *crossover* uniforme. Tanto num caso quanto no outro a recombinação é aplicada, em cada geração, a todos os $10 \times d$ melhores indivíduos.

O operador de mutação evita que o processo de otimização seja conduzido a uma solução local, oferecendo a possibilidade de que um cromossomo seja redirecionado a uma localização mais conveniente em relação à solução global. Como uma taxa de mutação elevada resulta numa busca aleatória pelo espaço de busca (“*random walk*”), seu valor deve ser relativamente pequeno. Contudo, a certeza de se dispor de boas soluções trazida pelo uso da estratégia de seleção elitista modificada permite que se aumente o valor da taxa de mutação.

É importante salientar que, visto que a flexibilização do *backstepping* proposta reside na eliminação da exigência de não-positividade da derivada da função de Lyapunov do sistema, algum mecanismo deve ser introduzido no algoritmo genético no intuito de se evitar soluções instáveis. É levado em conta, para tanto, o sinal da parte real dos autovalores da matriz A_z do sistema de erros resultante do *backstepping* $\dot{\mathbf{z}} = A_z \mathbf{z}$. É imposta uma penalidade de magnitude $p = 10^{10}$ ao *fitness* do indivíduo que conduzir a partes reais positivas de algum(alguns) dos autovalores de A_z . A penalidade aplicada é estática (Michalewicz, 1996); todos os indivíduos infactíveis são igualmente penalizados. Para os indivíduos factíveis, $p = 0$.

Deve-se enfatizar que o objetivo deste trabalho não é encontrar nem o ótimo global nem o melhor algoritmo evolutivo que resolva o problema de busca de valores para as incógnitas a , b e c , mas sim utilizar o algoritmo genético acima descrito de forma a se encontrar valores para esses parâmetros que corroborem a proposta de não-obrigatoriedade de se ter derivadas de funções de Lyapunov sempre negativas (ou não positivas) na síntese recursiva de controladores estabilizadores *mais eficientes* para sistemas não lineares.

4.3.1.2.1. Caso 1

A diferença entre este Caso 1 e o Caso 2, a ser apresentado na próxima seção, reside no operador de *crossover* utilizado. Emprega-se, aqui, o *crossover* aritmético.

A população, em cada geração, é composta de 400 indivíduos; os $d = 8$ melhores são mantidos inalterados para a geração seguinte. A taxa de mutação é de 30%. A Figura 4.11 mostra a evolução da função de *fitness* do melhor indivíduo para $t = 200$ gerações.

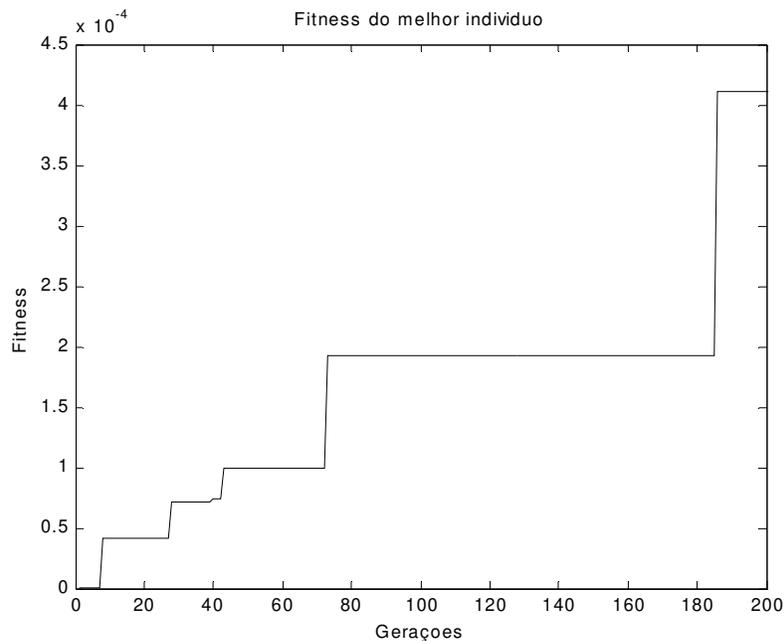


Figura 4.11. Otimização com algoritmo genético (*crossover* aritmético) – *fitness* do melhor indivíduo.

O melhor indivíduo, após $t = 200$ gerações, possui *fitness* igual a $(2433,52)^{-1}$ e equivale aos valores $a = 19,0078$, $b = -413,6282$ e $c = 26,8953$. Para efeito de

comparação, o *fitness* relativo aos valores $a = 272$, $b = 23,88$ e $c = 15,57$, utilizados na lei de controle resultante do processo tradicional de *backstepping*, apresenta o valor $(285111,81)^{-1}$.

4.3.1.2.2. Caso 2

Emprega-se, aqui, o *crossover* uniforme. A população, em cada geração, é composta de 400 indivíduos; como no caso anterior, os $d = 8$ melhores são mantidos inalterados para a geração seguinte. A taxa de mutação permanece 30%. A Figura 4.12 mostra a evolução da função de *fitness* do melhor indivíduo para $t = 200$ gerações.

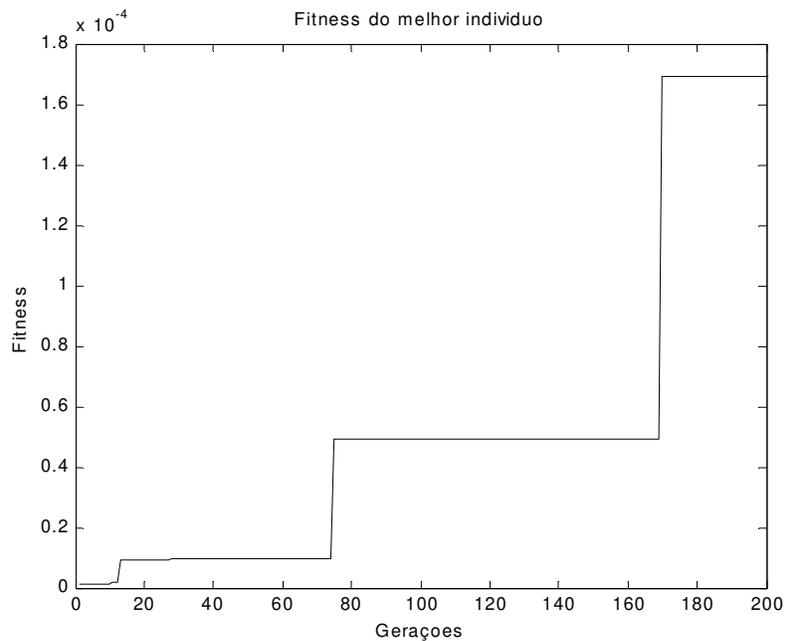


Figura 4.12. Otimização com algoritmo genético (*crossover* uniforme) – *fitness* do melhor indivíduo.

O melhor indivíduo, após $t = 200$ gerações, possui *fitness* igual a $(5914,15)^{-1}$ e equivale aos valores $a = 87,1542$, $b = -593,7852$ e $c = 42,7071$.

Dada a complexidade do problema de otimização em questão (i.e., minimização de uma função de adaptação cuja restrição é o padrão temporal de quatro variáveis de um sistema dinâmico), é possível que existam soluções melhores que as encontradas neste Caso

2 e no Caso 1. Contudo, os valores conseguidos servem de maneira muito adequada aos propósitos deste capítulo. Reitera-se o fato de que encontrar a melhor solução para este problema (i.e., o ótimo global) não faz parte dos objetivos deste trabalho.

4.3.1.2.3. Novas Leis de Controle e Análise dos Resultados

4.3.1.2.3.1. Caso 1

Os valores dos parâmetros a , b e c obtidos no Caso 1 serão aplicados na lei de controle (4.217). Dessa forma:

$$\begin{aligned} u &= 19,0078z_1 - 413,6282z_2 + 26,8953z_3 + 10(y_1^3 - x_1^3) \\ &= 26,8953(x_1 - y_1) + 16,6975(x_2 - y_2) - 2,3104(x_3 - y_3) + 10(y_1^3 - x_1^3). \end{aligned} \quad (4.25)$$

A derivada da função de Lyapunov (4.14) é, então, dada por:

$$\dot{V}_3 = -16z_1^2 - z_2^2 - 12,3253z_3^2 + 252,9921z_1z_3 + 437,5082z_2z_3. \quad (4.26)$$

A expressão (4.26) acima corresponde a uma forma quadrática $\dot{V}_3 = -\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}$, onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -126,49605 \\ 0 & 1 & -218,7541 \\ -126,49605 & -218,7541 & 12,3253 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Aplicando-se o *critério de Sylvester* – que afirma que as condições necessárias e suficientes para uma forma quadrática $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ ser definida positiva são as menores principais líderes de \mathbf{P} serem positivas (Strang, 1988) – em (4.27), verifica-se que:

$$\begin{aligned} 16 &> 0, \\ \begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} &> 0 \text{ e} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 0 & -126,49605 \\ 0 & 1 & -218,7541 \\ -126,49605 & -218,7541 & 12,3253 \end{vmatrix} < 0.$$

Como as menores principais líderes de Q não são todas positivas, \dot{V}_3 não é definida negativa (nem semidefinida negativa).

A Figura 4.13 apresenta a evolução de e ao longo do tempo. Note que os valores de pico dos transitórios são iguais ou menores àqueles verificados quando da aplicação da lei de controle obtida por meio do *backstepping* tradicional (Figura 4.2). A duração do transitório ($\kappa_l \cong 5$), contudo, é maior que a observada naquele caso.

A Figura 4.14 mostra a convergência dos componentes do vetor de variáveis de erro \mathbf{z} para o ponto fixo (origem).

As Figuras 4.15 e 4.16 exibem o progresso de e_1 , e_2 e e_3 e das variáveis de erro z_1 , z_2 e z_3 rumo à origem nos seus espaços de estados, respectivamente.

A Figura 4.17 mostra os valores assumidos pelo esforço de controle u ao longo do tempo. Destaca-se a redução substancial do módulo do valor de pico em relação à resposta obtida segundo o *backstepping* tradicional (vide Figura 4.6).

A Figura 4.18 mostra a curva relativa à evolução da função de Lyapunov (4.14) e a Figura 4.19 apresenta o comportamento da derivada da função de Lyapunov (4.26) ao longo do tempo. Verifica-se que a estabilização de (4.13) e do sistema de erros (4.5) foi conseguida mesmo com a derivada da função de Lyapunov do sistema assumindo valores positivos ao longo do processo de controle.

Definindo-se o conjunto C como o conjunto onde $\dot{V}_3 > 0$,

$$C := \{\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^3 \mid 16z_1^2 + z_2^2 + 12,3253z_3^2 - 252,9921z_1z_3 - 437,5082z_2z_3 < 0\}, \quad (4.29)$$

verifica-se que a fronteira de C , onde $\dot{V}_3 = 0$, é um cone quádrico ilimitado. De acordo com a Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância de La Salle (cf. Cap. 2), $\bar{\Omega}_l$ é um conjunto compacto – portanto, limitado – cuja definição está atrelada ao cômputo do escalar finito $l = \sup_{\mathbf{z} \in C} V(\mathbf{z})$. Para o conjunto C (4.29), não existe $\bar{\Omega}_l$ compacto. Dessa

forma, os Teoremas 2.15 e 2.16 não são aplicáveis nesse caso. A estabilidade é garantida, entretanto, pelo sistema de erros do *backstepping* $\dot{\mathbf{z}} = A_z \mathbf{z}$. De fato, a parte real dos autovalores de

$$A_z = \begin{bmatrix} -16 & -16 & 0 \\ 16 & -1 & 1 \\ 252,9922 & 436,5082 & -12,3253 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

é negativa. Efetivamente, pelo Lema 2.12, dado que $\mathbf{z}(t)$ e $\mathbf{e}(t)$ são soluções limitadas, elas convergem assintoticamente a um conjunto-limite positivo invariante L^+ – no caso, a origem ($\mathbf{z} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{e} = \mathbf{0}$) – independentemente do fato de a derivada da função de Lyapunov do sistema (4.26) ser indefinida.

Um aspecto interessante é o fato de a solução permanecer entrando e saindo de C . A aplicação da lei de controle (4.25) com o propósito de estabilizar o sistema faz com que a magnitude dessas oscilações seja continuamente reduzida no decorrer do processo de controle; assim, a trajetória do estado \mathbf{z} (e, portanto, \mathbf{e}) tende assintoticamente ao ponto de equilíbrio estável (origem), ao mesmo tempo que $\dot{V}_3 \rightarrow 0$ (note que a origem pertence à fronteira de C , onde $\dot{V}_3 = 0$). De fato, um exame mais acurado do comportamento de \dot{V}_3 mostra que a intensidade das oscilações cai rapidamente, mas não cessa por completo, tomando valores insignificantes após alguns instantes. Isso pode ser verificado na Figura 4.20, em que o eixo vertical adota uma escala logarítmica.

Essa alternância de posicionamento das trajetórias de estado \mathbf{z} e \mathbf{e} em relação ao conjunto C pode ser visualizada por meio de sua evolução nos respectivos espaços de estados. A Figura 4.15 mostra a trajetória do estado \mathbf{e} e a Figura 4.16, a trajetória de \mathbf{z} . Observe que a oscilação decrescente verificada no progresso da derivada da função de Lyapunov do sistema traduz-se numa convergência à origem na forma de uma espiral.

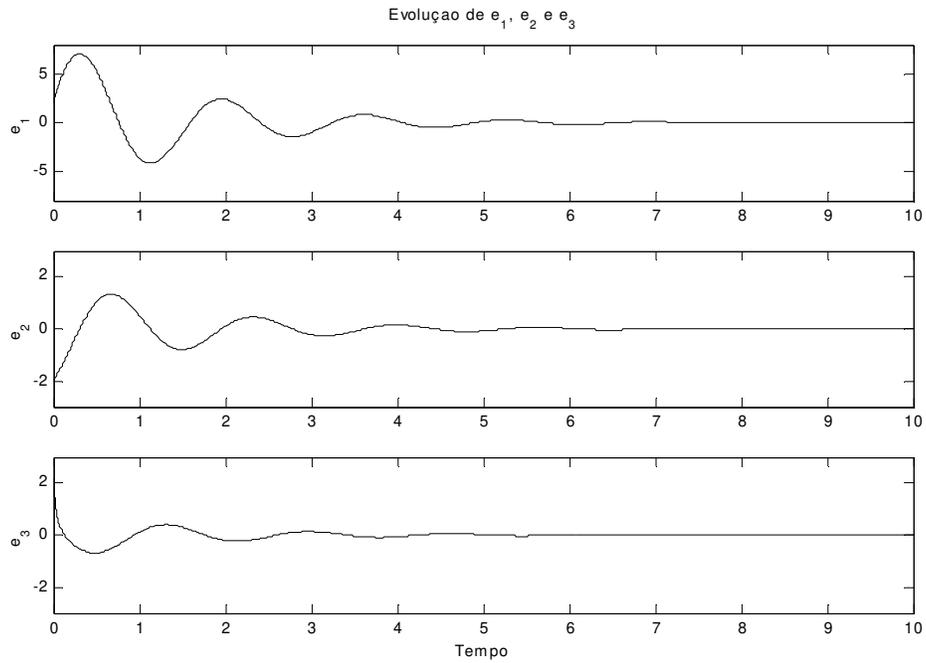


Figura 4.13. A norma $\|e\| \rightarrow 0$ com a lei de controle (4.25).

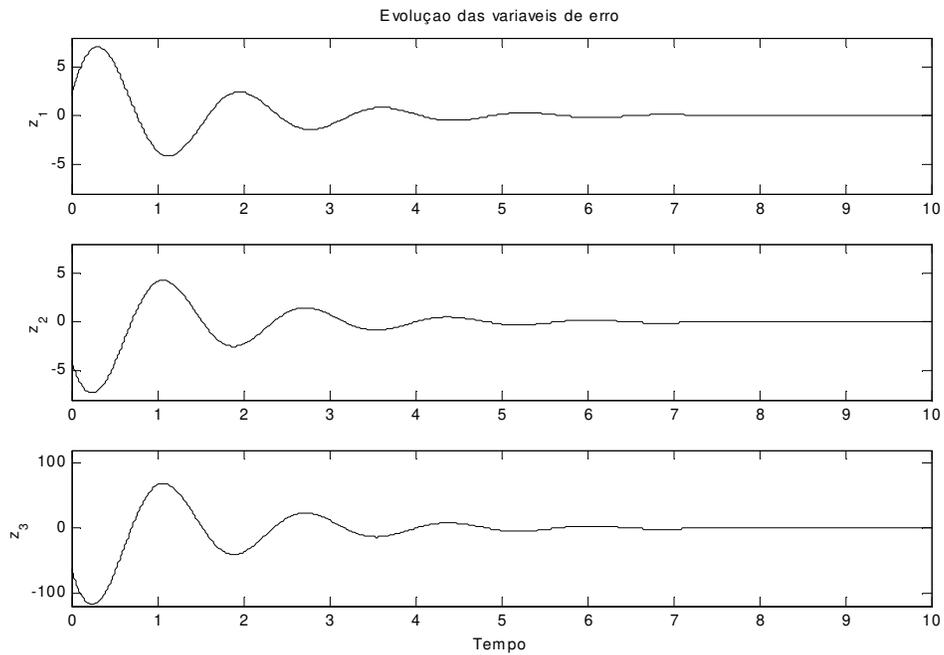


Figura 4.14. $z \rightarrow 0$ com a lei de controle (4.25).

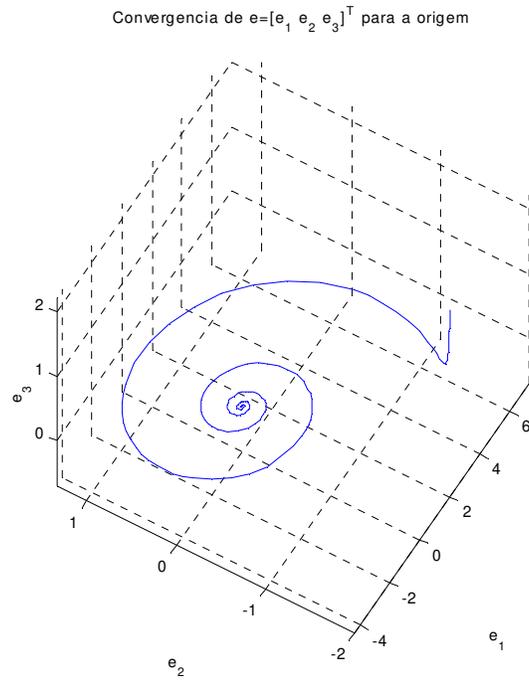


Figura 4.15. Trajetória de e rumo à origem (ponto de equilíbrio) com a lei de controle (4.25).

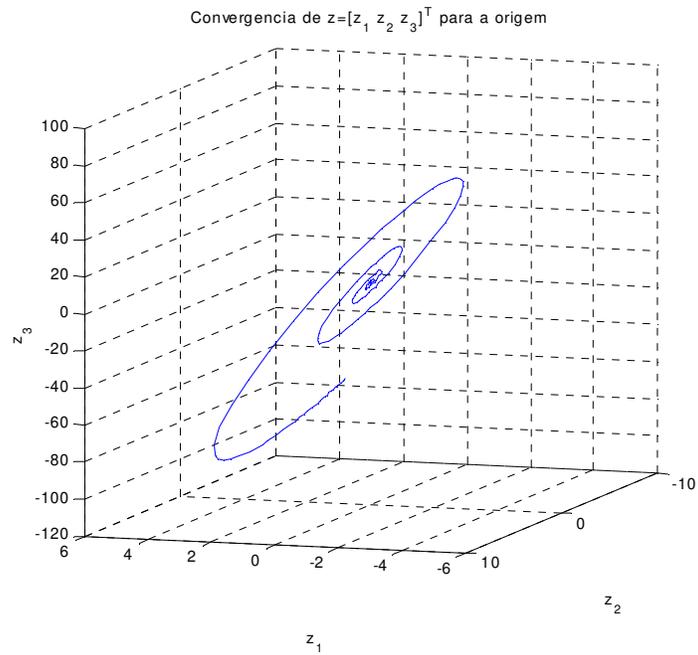


Figura 4.16. Trajetória de z rumo à origem (ponto de equilíbrio) com a lei de controle (4.25).

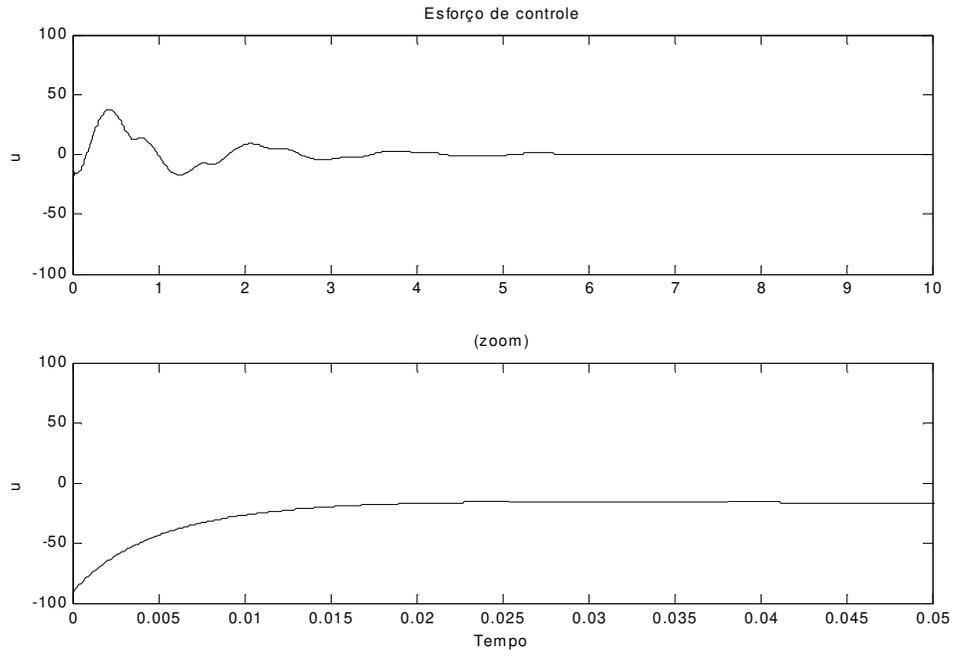


Figura 4.17. Esforço de controle u – equação (4.25) – e detalhe ampliado dos instantes iniciais.

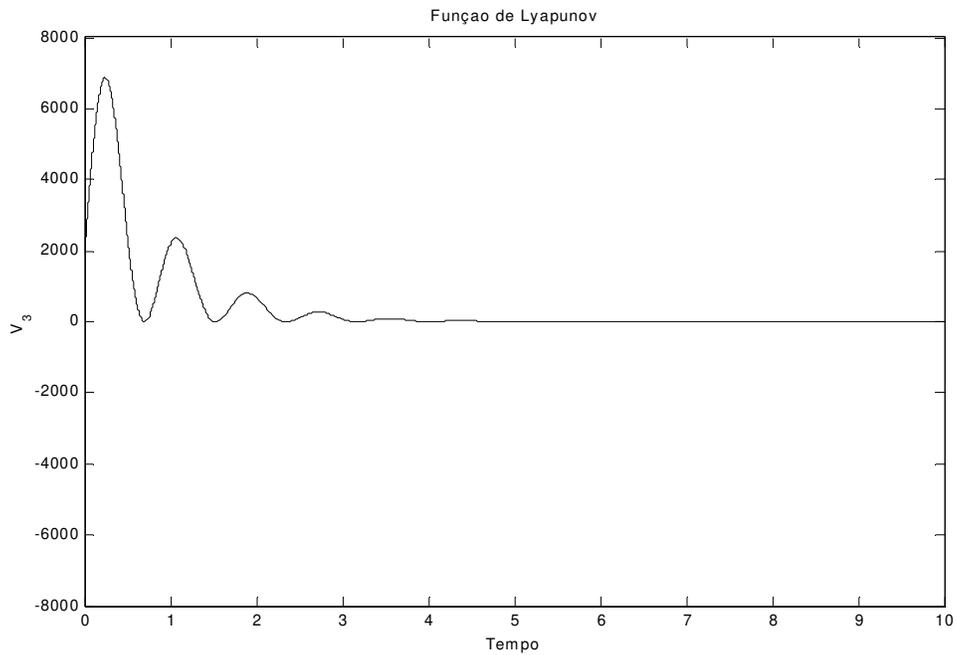


Figura 4.18. V_3 com a lei de controle (4.25).

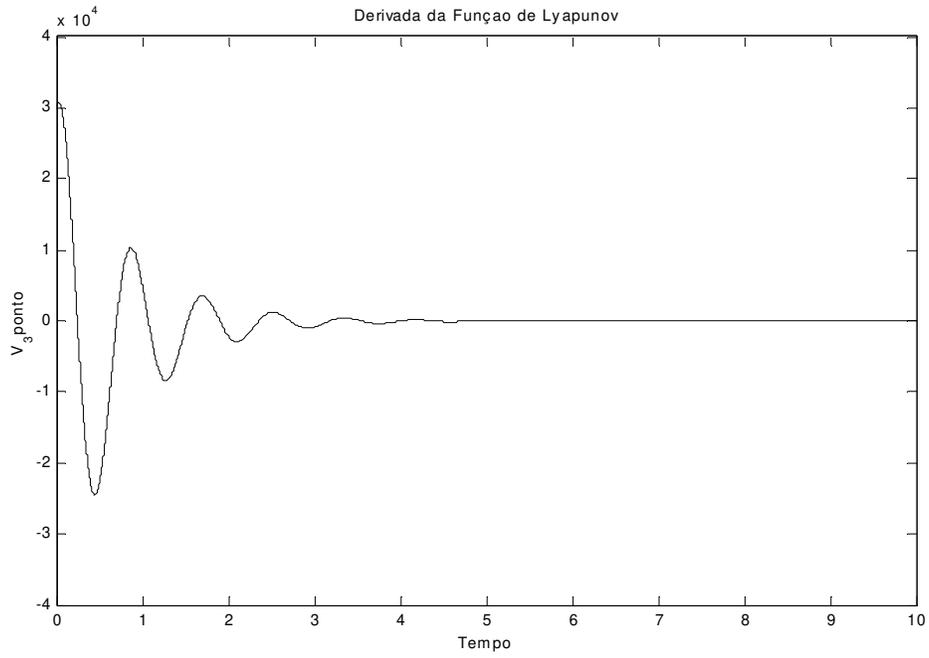


Figura 4.19. \dot{V}_3 com a lei de controle (4.25).

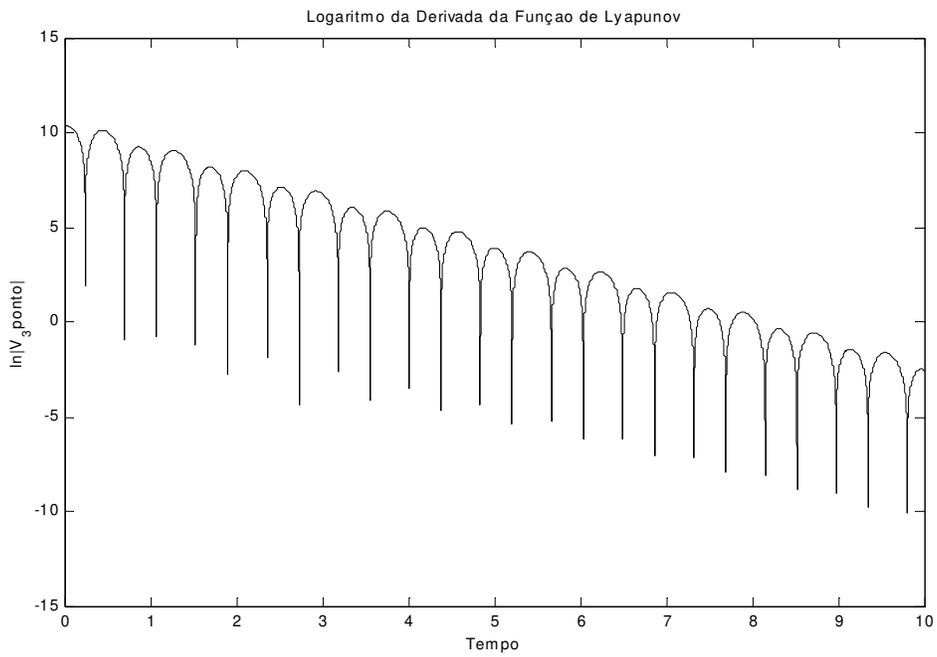


Figura 4.20. $\ln|\dot{V}_3|$ com a lei de controle (4.25).

4.3.1.2.3.2. Caso 2

Os valores dos parâmetros a , b e c obtidos no Caso 2 serão agora aplicados em (4.21). Logo,

$$\begin{aligned} u &= 87,1542z_1 - 593,7852z_2 + 42,7071z_3 + 10(y_1^3 - x_1^3) \\ &= 42,7071(x_1 - y_1) + 89,5284(x_2 - y_2) + 2,3742(x_3 - y_3) + 10(y_1^3 - x_1^3). \end{aligned} \quad (4.31)$$

E a derivada da função de Lyapunov do sistema é dada por:

$$\dot{V}_3 = -16z_1^2 - z_2^2 - 28,1371z_3^2 + 184,8458z_1z_3 + 617,6652z_2z_3. \quad (4.32)$$

A expressão (4.32) acima corresponde a uma forma quadrática $\dot{V}_3 = -\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}$, onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -92,4229 \\ 0 & 1 & -308,8326 \\ -92,4229 & -308,8326 & 28,1371 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Pode-se comprovar o fato de (4.32) não ser definida negativa por meio da aplicação do critério de Sylvester (Strang, 1988):

$$16 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \text{ e} \quad (4.34)$$

$$\begin{vmatrix} 16 & 0 & -92,4229 \\ 0 & 1 & -308,8326 \\ -92,4229 & -308,8326 & 28,1371 \end{vmatrix} < 0.$$

Como as menores principais líderes de \mathbf{Q} não são todas positivas, \dot{V}_3 não é definida negativa (nem semidefinida negativa).

As Figuras 4.21 e 4.22 mostram a evolução de \mathbf{e} e \mathbf{z} ao longo do tempo, respectivamente. As Figuras 4.23 e 4.24 exibem o progresso das trajetórias \mathbf{e} e \mathbf{z} rumo à origem nos seus espaços de estados. A Figura 4.25 apresenta a intensidade do esforço de controle ao longo do processo de estabilização.

Uma apreciação dos resultados contidos nas Figuras 4.21 e 4.25 leva à conclusão de que o controlador (4.31), que incorpora os valores dos parâmetros a , b e c correspondentes ao Caso 2, pode ser considerado uma solução mais adequada ao problema de sincronização dos dois sistemas de Chua do que o obtido por meio do *backstepping* tradicional, uma vez que todos os objetivos propostos foram atingidos com maior eficiência:

- redução significativa do esforço de controle, em comparação à resposta verificada quando da aplicação do *backstepping* tradicional (vide Figuras 4.25 e 4.6);
- transitórios de pequena duração nas variáveis de estado que compõem e (na Figura 4.21, $\kappa_i \approx 2,5$);
- resposta suave, sem a existência de picos de magnitude elevada (vide resposta de e_3 nas Figuras 4.21 e 4.2).

Além da diminuição do esforço de controle conduzir a um menor dispêndio de energia na sincronização dos sistemas de Chua, a eliminação de variações excessivamente abruptas no sinal de controle evita o surgimento de valores demasiadamente elevados de tensão e corrente nos componentes do circuito receptor, o que poderia danificá-los.

Tal qual ocorreu no Caso 1, a estabilização do sistema (4.5) foi conseguida mesmo com a derivada da função de Lyapunov do sistema assumindo valores positivos ao longo do processo de controle (Figura 4.27), sendo o resultado final, em termos do esforço de controle e da duração do transitório, superior ao obtido quando da construção de um controlador conforme a premissa tradicional de derivadas no mínimo semidefinidas negativas.

O conjunto C onde $\dot{V}_3 > 0$, no caso presente, é dado por:

$$C := \{z \in \mathfrak{R}^3 \mid 16z_1^2 + z_2^2 + 28,1371z_3^2 - 184,8458z_1z_3 - 617,6652z_2z_3 < 0\} \quad (4.35)$$

Novamente, a fronteira de C é um cone quádrico ilimitado. Logo, tal como se verificou no Caso 1, os Teoremas 2.15 e 2.16 também aqui não são aplicáveis. O emprego do controlador (4.31) em (4.13) e (4.5), todavia, faz com que os sistemas resultantes,

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -16 & -16 & 0 \\ 16 & -1 & 1 \\ 184,8458 & 616,6652 & -28,1371 \end{bmatrix}}_{A_z} \mathbf{z} \quad (4.36)$$

e

$$\dot{\mathbf{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -16 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2,3742 & -79,5284 & -44,1371 \end{bmatrix}}_{A_e} \mathbf{e}, \quad (4.37)$$

seja estáveis. De fato, os três autovalores de A_z e os três de A_e têm parte real negativa, o que garante estabilidade assintótica da origem. Dessa forma, conforme pode ser verificado na Figura 4.27, a solução $\mathbf{z}(t)$, a partir de $\mathbf{z}_0 \in C$, permanece entrando e saindo de C com oscilações de magnitude decrescente ao mesmo tempo em que evolui em direção ao ponto fixo.

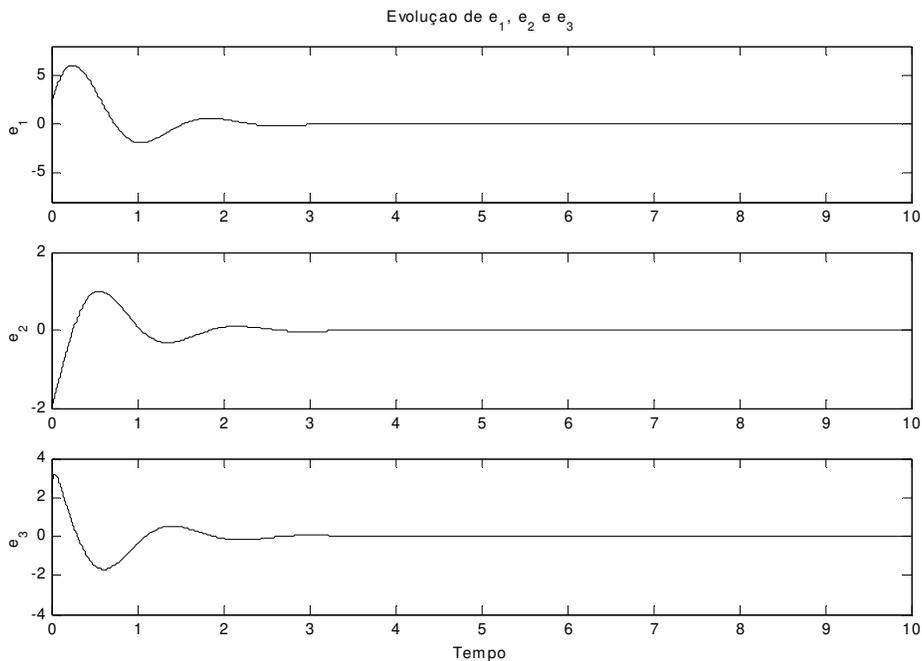


Figura 4.21. A norma $\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0$ com a lei de controle (4.31).

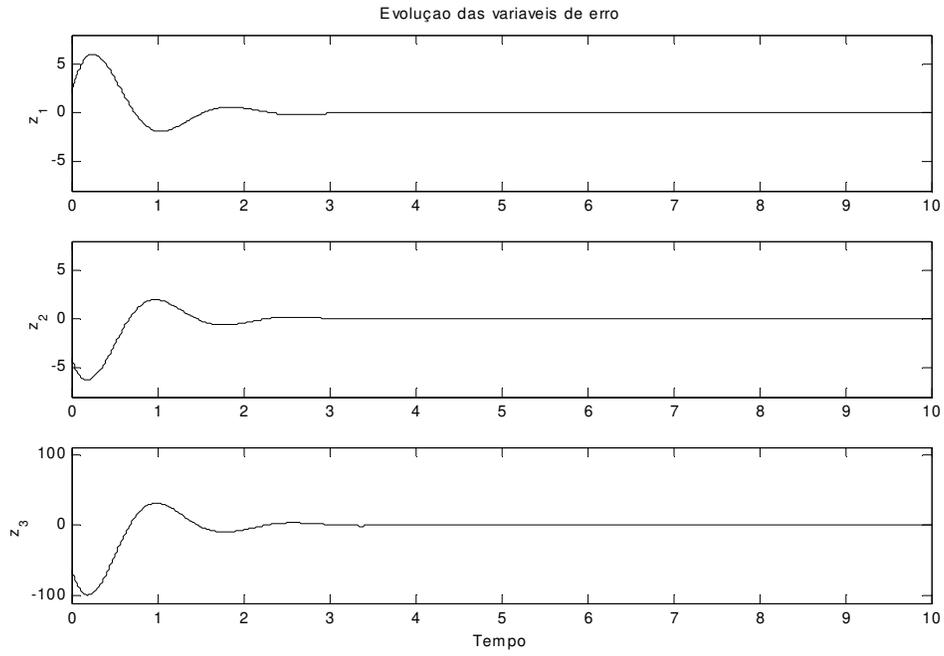


Figura 4.22. $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ com a lei de controle (4.31).

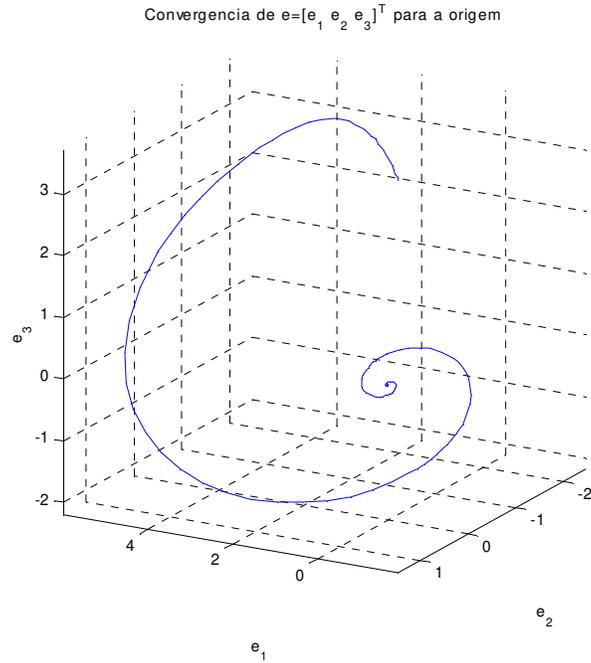


Figura 4.23. Trajetória de \mathbf{e} rumo à origem (ponto de equilíbrio) com a lei de controle (4.31).

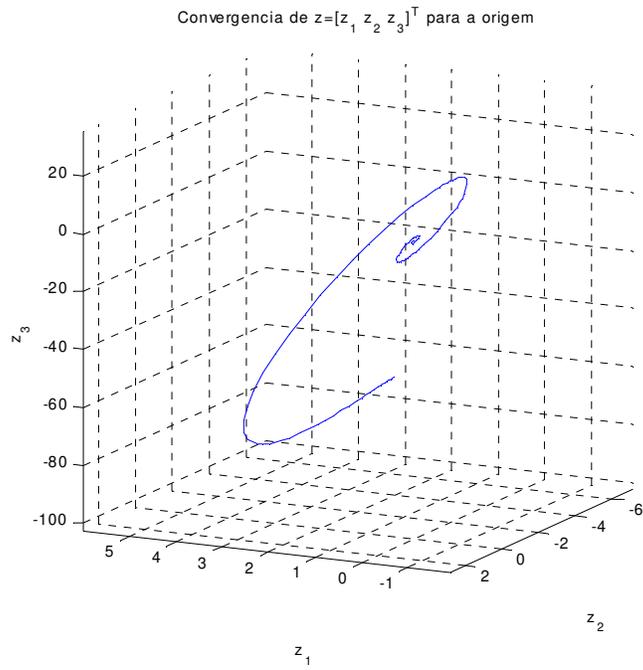


Figura 4.24. Trajetória de z rumo à origem (ponto de equilíbrio) com a lei de controle (4.31).

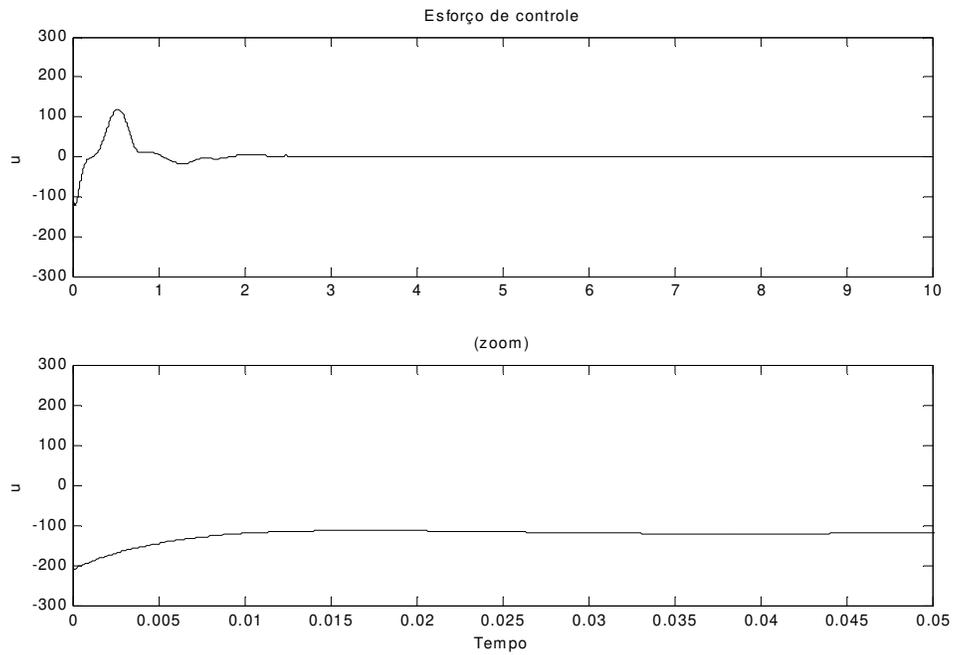


Figura 4.25. Esforço de controle u – equação (4.31) – e detalhe ampliado dos instantes iniciais.

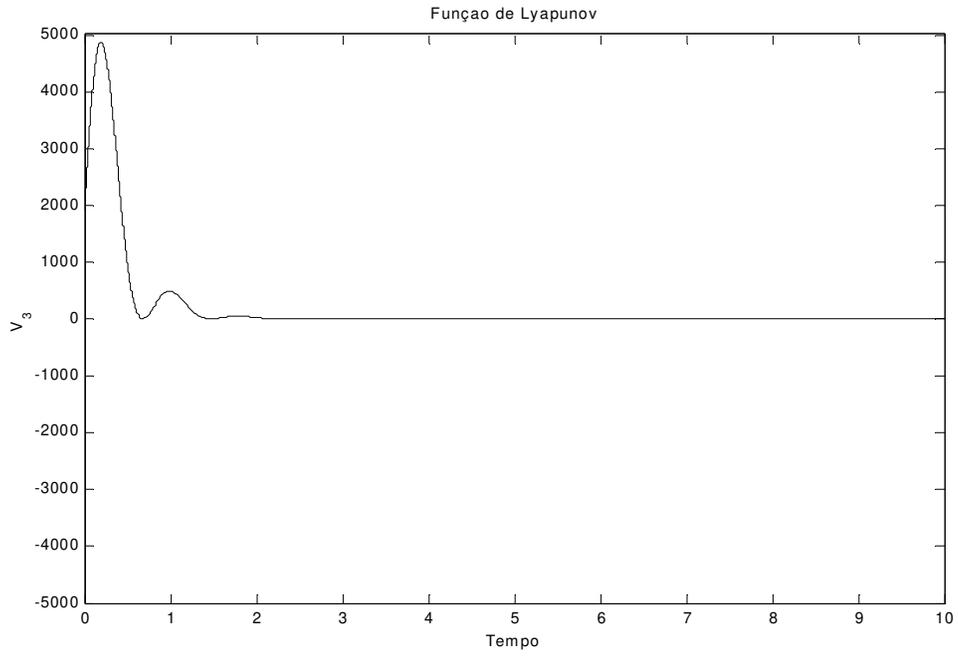


Figura 4.26. V_3 com a lei de controle (4.31).

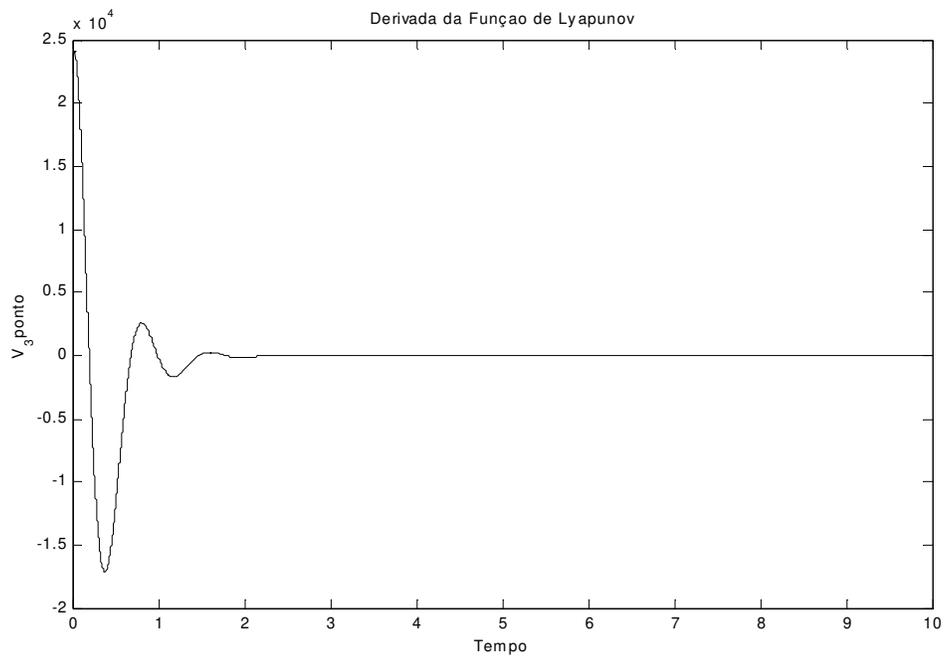


Figura 4.27. \dot{V}_3 com a lei de controle (4.31).

Os resultados obtidos no Caso 1 e no Caso 2 para o problema de sincronização de dois sistemas caóticos de Chua comprovam que, na síntese recursiva de controladores para sistemas não lineares de realimentação estrita através do *backstepping*, a verificação de derivadas de Lyapunov (semi)definidas negativa é um requisito suficiente, porém não necessário, para se conseguir a estabilidade do sistema resultante.

4.3.2. Algoritmo Genérico para Síntese de Controladores Eficientes para Sistemas Não Lineares de Realimentação Estrita Resultante da Flexibilização do *Backstepping*

Esta seção propõe um procedimento genérico para a obtenção de controladores – cujos parâmetros possam ser otimizados segundo algum critério conveniente com base na flexibilização do *backstepping* – aplicáveis em sistemas não lineares de realimentação estrita da forma

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + k\xi_1 \\
 \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + k_1\xi_2 \\
 \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + k_2\xi_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_i &= f_i(x, \xi_1, \dots, \xi_i) + k_i\xi_{i+1} \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_k &= f_k(x, \xi_1, \dots, \xi_k) + k_k u,
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

onde $x, \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathfrak{R}$ e $u \in \mathfrak{R}$. As funções $f(\cdot)$ e $f_i(\cdot)$, $i=1, \dots, k$, são não-linearidades suaves conhecidas, com $f(0) = 0$ e $f_i(\mathbf{0}_{i \times 1}) = 0$. Os termos k e k_i , $i=1, \dots, k$, são escalares constantes. Almeja-se a estabilização do estado $\xi := [x \quad \xi_1 \quad \dots \quad \xi_k]^T \in \mathfrak{R}^{k+1}$ na origem.

4.3.2.1. Passo 1

O processo se inicia pela definição da primeira variável de erro:

$$z_1 := x. \tag{4.39}$$

O subsistema x é, então, reescrito da seguinte forma:

$$\dot{z}_1 = f + k\xi_1. \quad (4.40)$$

A função de Lyapunov para o subsistema z_1 (4.40) é expressa por

$$V = \frac{1}{2}z_1^2 \quad (4.41)$$

e sua derivada ao longo de (4.40) é dada por

$$\dot{V} = z_1(f + k\xi_1). \quad (4.42)$$

Neste ponto, a metodologia do *backstepping* tradicional exige que se encontre uma função estabilizadora α para ξ_1 que faça com que \dot{V} seja definida negativa (vide seção 3.6.1). O procedimento do *backstepping* flexibilizado suprime esse objetivo, demandando apenas que a função intermediária α cancele as não-linearidades na expressão entre parênteses em (4.42). Ressalta-se que é necessário o conhecimento exato das não-linearidades neste algoritmo. Dessa forma,

$$\xi_1 = \alpha_1 := \frac{1}{k}(-f - c_1z_1) \quad (4.43)$$

produz

$$\dot{V} = -c_1z_1^2. \quad (4.44)$$

A expressão (4.43) inclui uma parcela com a variável de erro z_1 , de sorte que \dot{V} não resulte nula.

4.3.2.2. Passo 2

Com a definição da variável de erro z_2 :

$$z_2 := \xi_1 - \alpha = \xi_1 + \frac{1}{k}(f + c_1z_1), \quad (4.45)$$

o subsistema z_1 pode ser reescrito em função de z_1 e z_2 :

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + k z_2. \quad (4.46)$$

Derivando-se (4.45) em relação ao tempo, chega-se, com (4.38) e (4.46), a

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= f_1 + k_1 \xi_2 + \frac{1}{k} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + c_1 (-c_1 z_1 + k z_2) \right] \\ &= \frac{-c_1^2}{k} z_1 + c_1 z_2 + f_1 + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + k_1 \xi_2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

A derivada da função de Lyapunov deste passo, $V_1 = V + z_2^2/2$, ao longo de (4.46) e (4.47), é dada por:

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_2 \left[\left(k - \frac{c_1^2}{k} \right) z_1 + c_1 z_2 + f_1 + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + k_1 \xi_2 \right]. \quad (4.48)$$

A função intermediária que, aplicada ao controle virtual ξ_2 , anula as não-linearidades do termo em colchetes da equação (4.48) é

$$\alpha_1 := \frac{1}{k_1} \left(-f_1 - \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} - c_2 z_2 \right). \quad (4.49)$$

Como no passo anterior, foi incluída uma parcela com a variável de erro introduzida neste passo (z_2). Assim,

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + (c_1 - c_2) z_2^2 + \left(k - \frac{c_1^2}{k} \right) z_1 z_2. \quad (4.50)$$

4.3.2.3. Passo 3

O terceiro passo se inicia com a definição da variável de erro z_3 :

$$z_3 := \xi_2 - \alpha_1 = \xi_2 + \frac{1}{k_1} \left(f_1 + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + c_2 z_2 \right). \quad (4.51)$$

Reescrevendo-se o subsistema z_2 (4.47), tem-se

$$\dot{z}_2 = \frac{-c_1^2}{k} z_1 + (c_1 - c_2) z_2 + k_1 z_3. \quad (4.52)$$

A derivada de (4.51),

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & \frac{-c_1^2 c_2}{k k_1} z_1 + \frac{c_2 (c_1 - c_2)}{k_1} z_2 + c_2 z_3 + \\ & + f_2 + \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \dot{x} \right] + k_2 \xi_3, \end{aligned} \quad (4.53)$$

permite que se expresse a derivada da função de Lyapunov $V_2 = V_1 + z_3^2 / 2$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -c_1 z_1^2 + (c_1 - c_2) z_2^2 + \left(k - \frac{c_1^2}{k} \right) z_1 z_2 + \\ & + z_3 \left\{ \frac{-c_1^2 c_2}{k k_1} z_1 + \left[k_1 + \frac{c_2 (c_1 - c_2)}{k_1} \right] z_2 + c_2 z_3 + \right. \\ & \left. + f_2 + \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \dot{x} \right] + k_2 \xi_3 \right\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

A função intermediária que, aplicada ao controle virtual ξ_3 , anula as não-linearidades do termo em chaves da equação acima é

$$\alpha_2 := \frac{1}{k_2} \left\{ -f_2 - \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \dot{x} \right] - c_3 z_3 \right\}. \quad (4.55)$$

Tal como nos passos anteriores, foi incluída uma parcela com a variável de erro introduzida neste passo (z_3). Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -c_1 z_1^2 + (c_1 - c_2) z_2^2 + (c_2 - c_3) z_3^2 + \\ & + \left(k - \frac{c_1^2}{k} \right) z_1 z_2 - \frac{c_1^2 c_2}{k k_1} z_1 z_3 + \left[k_1 + \frac{c_2 (c_1 - c_2)}{k_1} \right] z_2 z_3. \end{aligned} \quad (4.56)$$

4.3.2.4. Passo 4

O quarto passo se inicia com a definição da variável de erro z_4 :

$$z_4 := \xi_3 - \alpha_2 = \xi_3 + \frac{1}{k_2} \left\{ f_2 + \frac{1}{k_1} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \dot{x} \right] + c_3 z_3 \right\}. \quad (4.57)$$

Reescrevendo-se o subsistema z_3 (4.53), tem-se

$$\dot{z}_3 = \frac{-c_1^2 c_2}{kk_1} z_1 + \frac{c_2(c_1 - c_2)}{k_1} z_2 + (c_2 - c_3) z_3 + k_2 z_4. \quad (4.58)$$

A derivada de (4.57),

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = & \frac{-c_1^2 c_2 c_3}{kk_1 k_2} z_1 + \frac{c_2 c_3 (c_1 - c_2)}{k_1 k_2} z_2 + \frac{c_3 (c_2 - c_3)}{k_2} z_3 + c_3 z_4 + \\ & + f_3 + \frac{1}{k_2} \left\{ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{k_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) \dot{x} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) \dot{\xi}_1 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \dot{x} \right] \right\} \right\} + k_3 \xi_4, \end{aligned} \quad (4.59)$$

permite que se expresse a derivada da função de Lyapunov $V_3 = V_2 + z_4^2/2$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 + (c_1 - c_2) z_2^2 + (c_2 - c_3) z_3^2 + \left(k - \frac{c_1^2}{k} \right) z_1 z_2 - \\ & - \frac{c_1^2 c_2}{kk_1} z_1 z_3 + \left[k_1 + \frac{c_2 (c_1 - c_2)}{k_1} \right] z_2 z_3 + \\ & + z_4 \left\{ - \frac{c_1^2 c_2 c_3}{kk_1 k_2} z_1 + \frac{c_2 c_3 (c_1 - c_2)}{k_1 k_2} z_2 + \left[k_2 + \frac{c_3 (c_2 - c_3)}{k_2} \right] z_3 + \right. \\ & + c_3 z_4 + f_3 + \frac{1}{k_2} \left\{ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{k_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) \dot{x} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) \dot{\xi}_1 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \dot{x} \right] \right\} \right\} + k_3 \xi_4 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

A função intermediária que, aplicada ao controle virtual ξ_4 , anula as não-linearidades de \dot{z}_4 na equação acima é

$$\begin{aligned} \alpha_3 := & \frac{1}{k_3} \left\{ -f_3 - \frac{1}{k_2} \left\{ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} \dot{\xi}_2 \right) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{k_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) \dot{x} + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 \right) \dot{\xi}_1 + \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \dot{x} \right] \dot{x} \right\} \right\} - c_4 z_4 \right\}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Tal como nos passos anteriores, foi incluída uma parcela com a variável de erro introduzida neste passo (z_4). Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 + (c_1 - c_2) z_2^2 + (c_2 - c_3) z_3^2 + (c_3 - c_4) z_4^2 + \\ & + \left(k - \frac{c_1^2}{k} \right) z_1 z_2 - \frac{c_1^2 c_2}{k k_1} z_1 z_3 - \frac{c_1^2 c_2 c_3}{k k_1 k_2} z_1 z_4 + \\ & + \left[k_1 + \frac{c_2 (c_1 - c_2)}{k_1} \right] z_2 z_3 + \frac{c_2 c_3 (c_1 - c_2)}{k_1 k_2} z_2 z_4 + \\ & + \left[k_2 + \frac{c_3 (c_2 - c_3)}{k_2} \right] z_3 z_4. \end{aligned} \quad (4.62)$$

4.3.2.5. Passo i ($2 \leq i \leq k$)

O i -ésimo passo se inicia com a definição da variável de erro z_i ³:

³ Obs.: De acordo com a notação adotada, $\xi_0 := x$, $k_0 := k$, $f_0 := f$, $\alpha_0 := \alpha$ e $c_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
z_i := \xi_{i-1} - \alpha_{i-2} &= \xi_{i-1} + \frac{1}{k_{i-2}} \left\{ f_{i-2} + \frac{1}{k_{i-3}} \left\{ \underbrace{\frac{\partial f_{i-3}}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial f_{i-3}}{\partial \xi_{i-3}} \dot{\xi}_{i-3}}_{i-2 \text{ termos}} + \right. \right. \\
&+ \frac{1}{k_{i-4}} \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_{i-4}}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial f_{i-4}}{\partial \xi_{i-4}} \dot{\xi}_{i-4} \right) \dot{x} + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_{i-4}} \left(\frac{\partial f_{i-4}}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial f_{i-4}}{\partial \xi_{i-4}} \dot{\xi}_{i-4} \right) \dot{\xi}_{i-4}}_{i-3 \text{ termos}} + \right. \\
&+ \frac{1}{k_{i-5}} \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_{i-5}}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial f_{i-5}}{\partial \xi_{i-5}} \dot{\xi}_{i-5} \right) \dot{x} + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_{i-5}} \left(\frac{\partial f_{i-5}}{\partial x} \dot{x} + \dots + \frac{\partial f_{i-5}}{\partial \xi_{i-5}} \dot{\xi}_{i-5} \right) \dot{\xi}_{i-5}}_{i-4 \text{ termos}} + \right. \\
&+ \dots + \\
&\left. \left. \left. \left. \left. \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \dots \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \dot{x} \right] \dot{x} \right\} \dots \right\} \dots \right\} \dots \right\} \right\} \right\} + c_{i-1} z_{i-1} \right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
z_i &= \xi_{i-1} - \alpha_{i-2} \\
&= \xi_{i-1} + \frac{1}{k_{i-2}} \left\{ f_{i-2} + \frac{1}{k_{i-3}} \left\{ \sum_{j=0}^{i-3} \frac{\partial f_{i-3}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \right. \right. \\
&+ \frac{1}{k_{i-4}} \left\{ \sum_{t=0}^{i-4} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{i-4} \frac{\partial f_{i-4}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right) \dot{\xi}_t + \frac{1}{k_{i-5}} \left\{ \sum_{t=0}^{i-5} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{i-5} \frac{\partial f_{i-5}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right) \dot{\xi}_t + \right. \\
&+ \dots + \\
&\left. \left. \left. \left. \left. \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^{i-2} \frac{\partial}{\partial x} \right) (f) \left(\prod_{j=1}^{i-2} \dot{x} \right) \dots \right\} \dots \right\} \right\} \right\} + c_{i-1} z_{i-1} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Reescrevendo-se o subsistema z_{i-1} , tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{i-1} &= \underbrace{\frac{-c_1^2}{k}}_{\text{se } i=3} z_1 - \frac{c_1^2 \prod_{j=2}^{i-2} c_j}{\prod_{j=0}^{i-3} k_j} z_1 + \frac{\left(\prod_{j=2}^{i-2} c_j\right)(c_1 - c_2)}{\prod_{j=1}^{i-3} k_j} z_2 + \frac{\left(\prod_{j=3}^{i-2} c_j\right)(c_2 - c_3)}{\prod_{j=2}^{i-3} k_j} z_3 + \\
&\quad + \frac{\left(\prod_{j=4}^{i-2} c_j\right)(c_3 - c_4)}{\prod_{j=3}^{i-3} k_j} z_4 + \dots + (c_{i-2} - c_{i-1})z_{i-1} + k_{i-2}z_i \\
&= \underbrace{\frac{-c_1^2}{k}}_{\text{se } i=3} z_1 - \frac{c_1^2 \prod_{j=2}^{i-2} c_j}{\prod_{j=0}^{i-3} k_j} z_1 + \sum_{l=1}^{i-3} \left[\frac{\left(\prod_{j=l+1}^{i-2} c_j\right)(c_l - c_{l+1})}{\prod_{j=l}^{i-3} k_j} z_{l+1} \right] + (c_{i-2} - c_{i-1})z_{i-1} + k_{i-2}z_i.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

A derivada de (4.63),

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i &= \underbrace{\frac{-c_1^2}{k}}_{\text{se } i=2} z_1 - \frac{c_1^2 \prod_{j=2}^{i-1} c_j}{\prod_{j=0}^{i-2} k_j} z_1 + \sum_{l=1}^{i-2} \left[\frac{\left(\prod_{j=l+1}^{i-1} c_j\right)(c_l - c_{l+1})}{\prod_{j=l}^{i-2} k_j} z_{l+1} \right] + c_{i-1}z_i + f_{i-1} + \\
&\quad + \frac{1}{k_{i-2}} \left\{ \sum_{j=0}^{i-2} \frac{\partial f_{i-2}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right\} + \frac{1}{k_{i-3}} \left\{ \sum_{t=0}^{i-3} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{i-3} \frac{\partial f_{i-3}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right) \dot{\xi}_t \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{k_{i-4}} \left\{ \sum_{t=0}^{i-4} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{i-4} \frac{\partial f_{i-4}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right) \dot{\xi}_t + \dots + \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{\partial}{\partial x} \right) (f) \left(\prod_{j=1}^{i-1} \dot{x} \right) \right\} + k_{i-1} \dot{\xi}_i,
\end{aligned} \tag{4.65}$$

permite que se expresse a derivada da função de Lyapunov $V_{i-1} = V_{i-2} + z_i^2 / 2$ do seguinte modo:

$$\dot{V}_{i-1} = \dot{V}_{i-2} + z_i \dot{z}_i, \tag{4.66}$$

onde \dot{z}_i é dado pela expressão (4.65). A função intermediária que, aplicada ao controle virtual ξ_i , anula as não-linearidades em \dot{z}_i é

$$\begin{aligned}
\alpha_{i-1} := & \frac{1}{k_{i-1}} \left\{ -f_{i-1} + \left\{ -\frac{1}{k_{i-2}} \left\{ \sum_{j=0}^{i-2} \frac{\partial f_{i-2}}{\partial \xi_j} \xi_j \right. \right. \right. \stackrel{(i>3)}{+} \frac{1}{k_{i-3}} \left\{ \sum_{t=0}^{i-3} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{i-3} \frac{\partial f_{i-3}}{\partial \xi_j} \xi_j \right) \xi_t \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \stackrel{(i>4)}{+} \frac{1}{k_{i-4}} \left\{ \sum_{t=0}^{i-4} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{i-4} \frac{\partial f_{i-4}}{\partial \xi_j} \xi_j \right) \xi_t \right. \right. \right. \dots \left. \left. \left. \stackrel{(i \geq 2)}{+} \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{\partial}{\partial x} \right) (f) \left(\prod_{j=1}^{i-1} \dot{x} \right) \right\} \dots \right\} \right\} - c_i z_i \right\}. \quad (4.67)
\end{aligned}$$

A expressão de α_{i-1} inclui uma parcela com a variável de erro introduzida neste i -ésimo passo (z_i). Assim,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{i-1} = & -c_1 z_1^2 + \sum_{j=1}^{i-1} (c_j - c_{j+1}) z_{j+1}^2 + \left(k - \frac{c_1^2}{k} \right) z_1 z_2 - \sum_{l=2}^{i-1} \frac{c_1^2 \prod_{j=2}^l c_j}{\prod_{j=0}^{l-1} k_j} z_1 z_{l+1} + \\
& + \sum_{j=1}^{i-2} \left[k_j + \frac{c_{j+1} (c_j - c_{j+1})}{k_j} \right] z_{j+1} z_{j+2} + \sum_{l=2}^{i-2} \frac{\left(\prod_{j=2}^{l+1} c_j \right) (c_{l-1} - c_l)}{\prod_{j=1}^l k_j} z_2 z_{l+2} + \\
& + \sum_{l=3}^{i-2} \frac{\left(\prod_{j=3}^{l+1} c_j \right) (c_{l-1} - c_l)}{\prod_{j=2}^l k_j} z_3 z_{l+2} + \dots + \frac{\left(\prod_{j=i-2}^{i-1} c_j \right) (c_{i-3} - c_{i-2})}{\prod_{j=i-3}^{i-2} k_j} z_{i-2} z_i \\
= & -c_1 z_1^2 + \sum_{j=1}^{i-1} (c_j - c_{j+1}) z_{j+1}^2 + \left(k - \frac{c_1^2}{k} \right) z_1 z_2 - \sum_{l=2}^{i-1} \frac{c_1^2 \prod_{j=2}^l c_j}{\prod_{j=0}^{l-1} k_j} z_1 z_{l+1} + \\
& + \sum_{j=1}^{i-2} \left[k_j + \frac{c_{j+1} (c_j - c_{j+1})}{k_j} \right] z_{j+1} z_{j+2} + \sum_{t=2}^{i-2} \left[\sum_{l=t}^{i-2} \frac{\left(\prod_{j=t}^{l+1} c_j \right) (c_{l-1} - c_l)}{\prod_{j=t-1}^l k_j} z_l z_{l+2} \right]. \quad (4.68)
\end{aligned}$$

4.3.2.6. Passo $k+1$

A diferença primordial entre este último passo e os anteriores reside no aparecimento da entrada real de controle u .

A definição da última variável de erro, z_{k+1} , dá-se da mesma forma como foi feito nos passos anteriores; i.e., faz-se, em (4.63), $i = k+1$:

$$\begin{aligned}
z_{k+1} &= \xi_k - \alpha_{k-1} \\
&= \xi_k + \frac{1}{k_{k-1}} \left\{ f_{k-1} + \frac{1}{k_{k-2}} \left\{ \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial f_{k-2}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{k_{k-3}} \left\{ \sum_{t=0}^{k-3} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{k-3} \frac{\partial f_{k-3}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right) \dot{\xi}_t + \frac{1}{k_{k-4}} \left\{ \sum_{t=0}^{k-4} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{k-4} \frac{\partial f_{k-4}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right) \dot{\xi}_t + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \dots + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^{k-1} \frac{\partial}{\partial x} \right) (f) \left(\prod_{j=1}^{k-1} \dot{x} \right) \dots \right\} \right\} + c_k z_k.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

O subsistema z_k é obtido fazendo-se $i = k + 1$ em (4.64):

$$\dot{z}_k = \underbrace{\frac{-c_1^2}{k}}_{\text{se } k=2} z_1 - \frac{c_1^2 \prod_{j=2}^{k-1} c_j}{\prod_{j=0}^{k-1} k_j} z_1 + \sum_{l=1}^{k-2} \left[\frac{\left(\prod_{j=l+1}^{k-1} c_j \right) (c_l - c_{l+1})}{\prod_{j=l}^{k-2} k_j} z_{l+1} \right] + (c_{k-1} - c_k) z_k + k_{k-1} z_{k+1}. \tag{4.70}$$

O controle u aparece na expressão relativa ao subsistema z_{k+1} :

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{k+1} &= \underbrace{\frac{-c_1^2}{k}}_{\text{se } k=1} z_1 - \frac{c_1^2 \prod_{j=2}^k c_j}{\prod_{j=0}^{k-1} k_j} z_1 + \sum_{l=1}^{k-1} \left[\frac{\left(\prod_{j=l+1}^k c_j \right) (c_l - c_{l+1})}{\prod_{j=l}^{k-1} k_j} z_{l+1} \right] + c_k z_{k+1} + f_k + \\
&\quad + \frac{1}{k_{k-1}} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right\} + \frac{1}{k_{k-2}} \left\{ \sum_{t=0}^{k-2} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial f_{k-2}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right) \dot{\xi}_t + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{k_{k-3}} \left\{ \sum_{t=0}^{k-3} \frac{\partial}{\partial \xi_t} \left(\sum_{j=0}^{k-3} \frac{\partial f_{k-3}}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j \right) \dot{\xi}_t + \dots + \frac{1}{k} \left(\prod_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial x} \right) (f) \left(\prod_{j=1}^k \dot{x} \right) \dots \right\} \right\} + k_k u.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

A representação do subsistema z_{k+1} tal como em (4.71) permite que se expresse a derivada da função de Lyapunov $\dot{V}_k = \dot{V}_{k-1} + z_{k+1}^2 / 2$ do seguinte modo:

$$\dot{V}_k = \dot{V}_{k-1} + z_{k+1} \dot{z}_{k+1}, \tag{4.72}$$

A função intermediária que, aplicada ao controle real u , anula as não-linearidades em \dot{z}_{k+1} é

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{i-1} = & -c_1 z_1^2 + \sum_{j=1}^k (c_j - c_{j+1}) z_{j+1}^2 + \left(k - \frac{c_1^2}{k}\right) z_1 z_2 - \sum_{l=2}^{k-1} \frac{c_1^2 \prod_{j=2}^l c_j}{\prod_{j=0}^{l-1} k_j} z_1 z_{l+1} - \\
& - \left(\frac{c_1^2 \prod_{j=2}^k c_j}{\prod_{j=0}^{k-1} k_j} + a_1 \right) z_1 z_{k+1} + \sum_{j=1}^{k-2} \left[k_j + \frac{c_{j+1} (c_j - c_{j+1})}{k_j} \right] z_{j+1} z_{j+2} + \\
& + \left[k_{k-1} + \frac{c_k (c_{k-1} - c_k)}{k_{k-1}} - a_k \right] z_k z_{k+1} + \sum_{t=2}^{k-2} \left[\sum_{l=t}^{k-2} \frac{\left(\prod_{j=t}^{l+1} c_j \right) (c_{t-1} - c_t)}{\prod_{j=t-1}^l k_j} z_t z_{l+2} \right] + \\
& + \sum_{t=2}^{k-1} \left\{ \left[\frac{\left(\prod_{j=t}^k c_j \right) (c_{t-1} - c_t)}{\prod_{j=t-1}^{k-1} k_j} - a_t \right] z_t z_{k+1} \right\}. \tag{4.74}
\end{aligned}$$

4.3.2.7. Sistema Resultante

Ao final do processo, o sistema formado pelas variáveis de erro é autônomo:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z}, \tag{4.75}$$

onde $\mathbf{z} = [z_1 \ \dots \ z_{k+1}]^T \in \mathfrak{R}^{k+1}$ e $A_{(k+1) \times (k+1)}$ é uma matriz. Os termos componentes de A são expressos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -c_1; & A_{ii} &= (c_{i-1} - c_i), i = 2, \dots, k+1; \\
A_{12} &= k; & A_{i(i+1)} &= k_{i-1}, i = 2, \dots, k-1; \\
A_{21} &= -\frac{c_1^2}{k}; & A_{31} &= -\frac{c_1^2 c_2}{kk_1}; & A_{i1} &= -\frac{c_1^2 \prod_{j=2}^{i-1} c_j}{\prod_{j=0}^{i-2} k_j}, i = 4, \dots, k; & A_{i(k+1)} &= -\frac{c_1^2 \prod_{j=2}^k c_j}{\prod_{j=0}^{k-1} k_j} - a_1; \\
A_{32} &= \frac{c_2(c_1 - c_2)}{k_1}; & A_{ij} &= \frac{\left(\prod_{t=j}^{i-1} c_t \right) (c_{j-1} - c_j)}{\prod_{t=j-1}^{i-2} k_t}, i = 4, \dots, k \text{ e } j = 2, \dots, k; \\
A_{(k+1)j} &= \frac{\left(\prod_{t=j}^k c_t \right) (c_{j-1} - c_j)}{\prod_{t=j-1}^{k-1} k_t} - a_j, \quad j = 2, \dots, k.
\end{aligned}$$

O sistema (4.75) será GAE caso os autovalores de A tenham a parte real negativa. Consegue-se, nesse caso, a estabilização do estado $\xi = [x \ \xi_1 \ \dots \ \xi_k]^T$ na origem, independentemente do sinal da derivada da função de Lyapunov do sistema (4.74). Caso se queira que o processo de otimização contemple apenas soluções factíveis, o sinal da parte real dos autovalores de A para um dado conjunto de parâmetros c_i , $1 \leq i \leq k+1$, e a_i , $1 \leq i \leq k$, poderá servir como restrição.

4.3.3. Outro Exemplo – Sistema Massa-Mola

Introduzindo-se uma entrada de controle no sistema massa-mola não linear discutido no Capítulo 2 (cf. seção 2.3.3.1),

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = u, \quad (4.76)$$

a descrição de (4.76) no espaço de estados possui a configuração de um sistema de realimentação estrita do tipo (4.38). Supondo $m = 1\text{kg}$, $k_0 = 100\text{N/m}$, $k_1 = 10\text{N/m}^3$ e $b = 2\text{N.s}^2/\text{m}^2$, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -100x_1 - 10x_1^3 - 2x_2|x_2| + u.\end{aligned}\quad (4.77)$$

Considerando que, inicialmente, o objeto móvel está na posição $x_1(0) = 0,30\text{m}$ com velocidade nula, $x_2(0) = 0$, deseja-se determinar u de sorte que o veículo seja estabilizado em $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. A resolução deste problema segue o algoritmo proposto em 4.3.2.

O procedimento se inicia pela definição da primeira variável de erro

$$z_1 := x_1. \quad (4.78)$$

Assim,

$$\dot{z}_1 = x_2. \quad (4.79)$$

A função intermediária

$$x_2 = \alpha_1 := -c_1 z_1 \quad (4.80)$$

faz com que a derivada da função de Lyapunov do subsistema (4.79), $V_1 = z_1^2/2$, seja igual a

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2. \quad (4.81)$$

A introdução da variável de erro

$$z_2 := x_2 - \alpha_1 \quad (4.82)$$

permite reescrever o subsistema (4.79) da seguinte forma:

$$\dot{z}_1 = z_2 - c_1 z_1. \quad (4.83)$$

Derivando-se (4.83) em relação ao tempo,

$$\dot{z}_2 = -100x_1 - 10x_1^3 - 2x_2|x_2| + u + c_1 z_2 - c_1^2 z_1. \quad (4.84)$$

A derivada da função de Lyapunov $V_2 = V_1 + z_2^2/2$ ao longo de (4.83) e (4.84) corresponde a

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 + z_2 \left[(1 - c_1^2) z_1 + c_1 z_2 - 100x_1 - 10x_1^3 - 2x_2|x_2| + u \right] \quad (4.85)$$

O controle

$$u = \alpha_2 := 100x_1 + 10x_1^3 + 2x_2|x_2| - az_1 - c_2z_2 \quad (4.86)$$

conduz a

$$\dot{V}_2 = -c_1z_1^2 + (c_1 - c_2)z_2^2 + (1 - a - c_1^2)z_1z_2. \quad (4.87)$$

Tal como no exemplo descrito em 4.3.1, que envolvia a sincronização de dois sistemas de Chua, emprega-se um algoritmo genético para a obtenção de valores apropriados para os parâmetros c_1 , c_2 e a .

De forma semelhante a 4.3.1.2, os indivíduos (cromossomos com três genes, c_1 , c_2 e a) iniciais são definidos aleatoriamente dentro do intervalo $[-100, 100]$, e a seleção de cromossomos para a geração seguinte adota a estratégia elitista modificada, com $d = 8$ (a população é composta de 400 indivíduos). A função de *fitness* é o inverso da integral da soma ponderada da norma Euclidiana de $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ com o módulo de u nos primeiros 10 segundos de simulação :

$$fitness = \frac{1}{p + \int_0^{10} w\sqrt{x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau)} + (1-w)|u(\tau)| d\tau} \quad (4.88)$$

O valor de w é uma ponderação entre a magnitude e a duração do transitório e a intensidade do esforço de controle. Quanto maior w , maior ênfase é dada no comportamento do transitório, à custa de se verificar um maior esforço de controle. Valores menores de w visam a um melhor desempenho com relação à evolução de u . Neste problema, $w = 0,6$. A penalidade estática p é aplicada a todo indivíduo que conduzir a partes reais positivas de algum(alguns) dos autovalores da matriz A_z do sistema de erros do backstepping $\dot{\mathbf{z}} = A_z\mathbf{z}$, onde $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2]^T$.

Utiliza-se *crossover* uniforme (aplicado aos 80 melhores indivíduos) e aplica-se uma taxa de mutação de 5%. A Figura 4.28 exhibe o *fitness* do melhor indivíduo para 50 gerações.

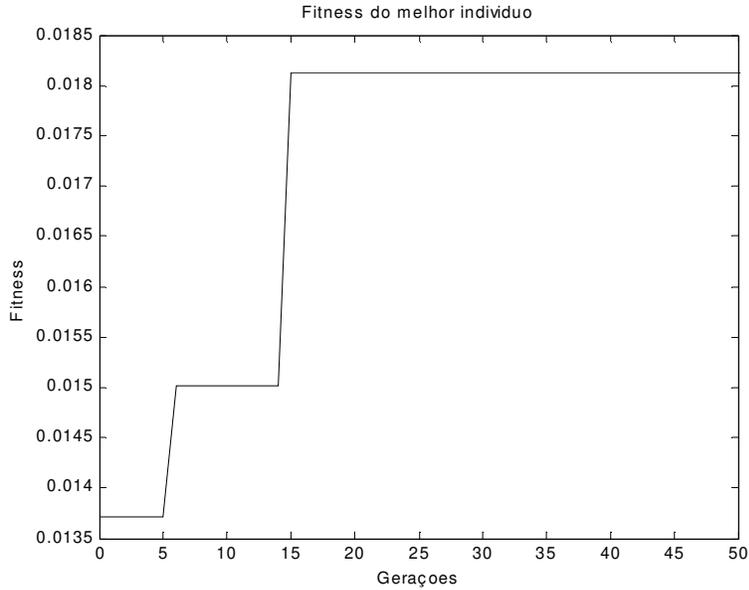


Figura 4.28. Otimização com algoritmo genético (*crossover* uniforme) – *fitness* do melhor indivíduo.

O melhor indivíduo, após 50 gerações, possui *fitness* igual a $(55,1689)^{-1}$ e corresponde aos valores $c_1 = 26,4449$, $c_2 = 6,8748$ e $a = -88,6480$. A lei de controle resultante é, portanto,

$$u = 100x_1 + 10x_1^3 + 2x_2|x_2| + 88,6480z_1 - 6,8748z_2 \quad (4.89)$$

e a derivada da função de Lyapunov é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -26,4449z_1^2 + 19,5701z_2^2 - 609,6847z_1z_2 \\ &= \mathbf{z}^T P \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (4.90)$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} -26,4449 & -304,84235 \\ -304,84235 & 19,5701 \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

A aplicação do critério de Sylvester sobre P leva à conclusão de que (4.90) não é definida negativa nem semidefinida negativa.

O sistema resultante tem a seguinte configuração:

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -26,4449 & 1 \\ -609,6847 & 19,5701 \end{bmatrix}}_{A_z} \mathbf{z}. \quad (4.92)$$

Como os autovalores de A_z têm parte real negativa, a origem é um ponto GAE de (4.92).

A Figura 4.29 mostra o progresso de x_1 e x_2 ao longo do tempo. A duração do transitório é de $t_t \approx 1,5\text{s}$. A Figura 4.30 apresenta o comportamento do esforço de controle u . Observe que u oscila entre, aproximadamente, -4N e 8N . A Figura 4.31 traz a evolução de z_1 e z_2 sobre a superfície da função de Lyapunov do sistema V_2 . A Figura 4.32 exhibe os valores assumidos pela derivada da função de Lyapunov (4.83) ao longo do processo de controle. Note que \dot{V}_2 é positiva em vários instantes.

O conjunto C , onde $\dot{V}_2 > 0$, é dado por

$$C := \{\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^2 \mid 26,4449z_1^2 - 19,5701z_2^2 + 609,6847z_1z_2 < 0\}. \quad (4.93)$$

A Figura 4.34 apresenta a superfície correspondente a C (um conjunto ilimitado), onde $\dot{V}_2 > 0$, numa dada região do espaço de estados de \mathbf{z} . Traz, ainda, a trajetória de \mathbf{z} rumo à origem sobre essa superfície. Pode-se verificar que a órbita do estado de erros entra e sai de C repetidas vezes (veja também a Figura 4.33), ao mesmo tempo que caminha na direção da origem.

A aplicação do *backstepping* tradicional na resolução deste problema conduz, por exemplo, aos seguintes parâmetros: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $a = 0$. As Figuras 4.35 e 4.36 mostram, respectivamente, a evolução de x_1 e x_2 no tempo e o esforço de controle. Destaca-se que o transitório é, aproximadamente, quatro vezes maior que o observado na Figura 4.29. Ainda, em comparação à Figura 4.30, a intensidade do esforço de controle assume valores quase quatro vezes maiores. Tem-se, com efeito, no *backstepping* tradicional, $c_1, c_2 > 0$ e $a = 0$. Quanto maiores forem as magnitudes de c_1 e c_2 , menor será a duração do transitório e maior será a intensidade do esforço de controle. Não há valores de $c_1, c_2 > 0$ que conduzam a um desempenho (em termos do esforço de controle e duração do transitório) melhor sob a óptica do *backstepping* clássico do que o obtido com os parâmetros conseguidos através do *backstepping* flexibilizado associado à computação evolutiva.

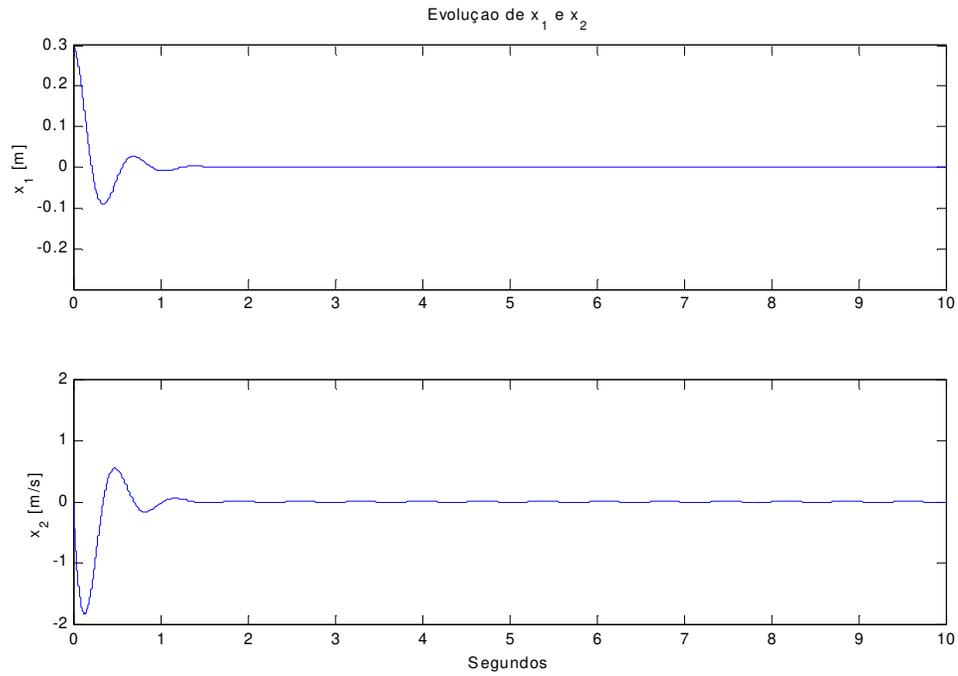


Figura 4.29. Estabilização do sistema massa-mola com *backstepping* flexibilizado.

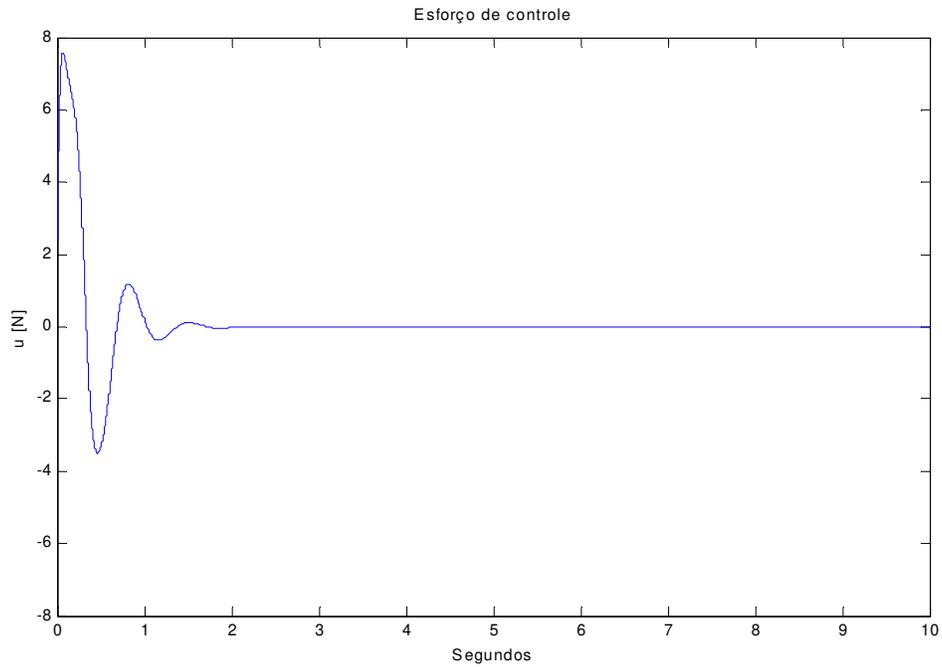


Figura 4.30. Esforço de controle u – equação (4.89).

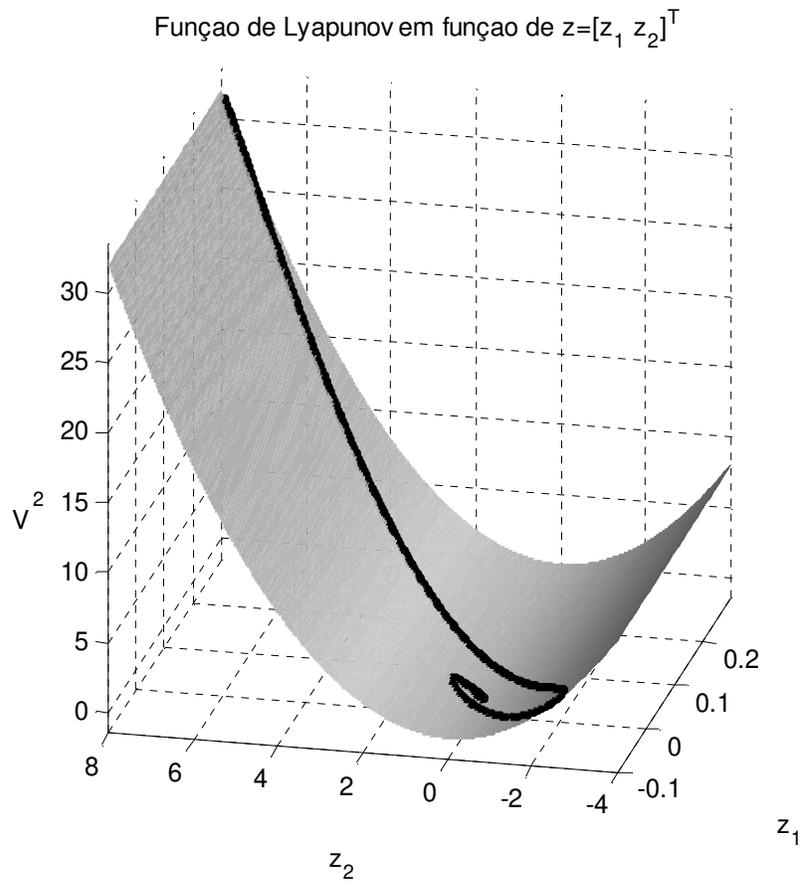


Figura 4.31. Função de Lyapunov $V_2(z_1, z_2)$ e evolução de z rumo à origem.

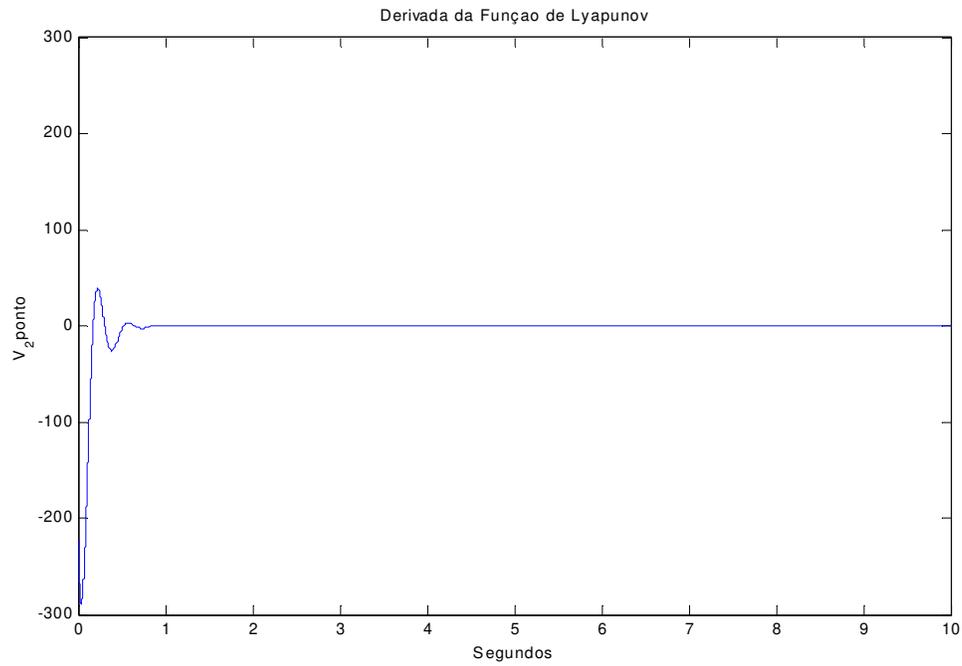


Figura 4.32. Evolução de \dot{V}_2 com a lei de controle (4.89).

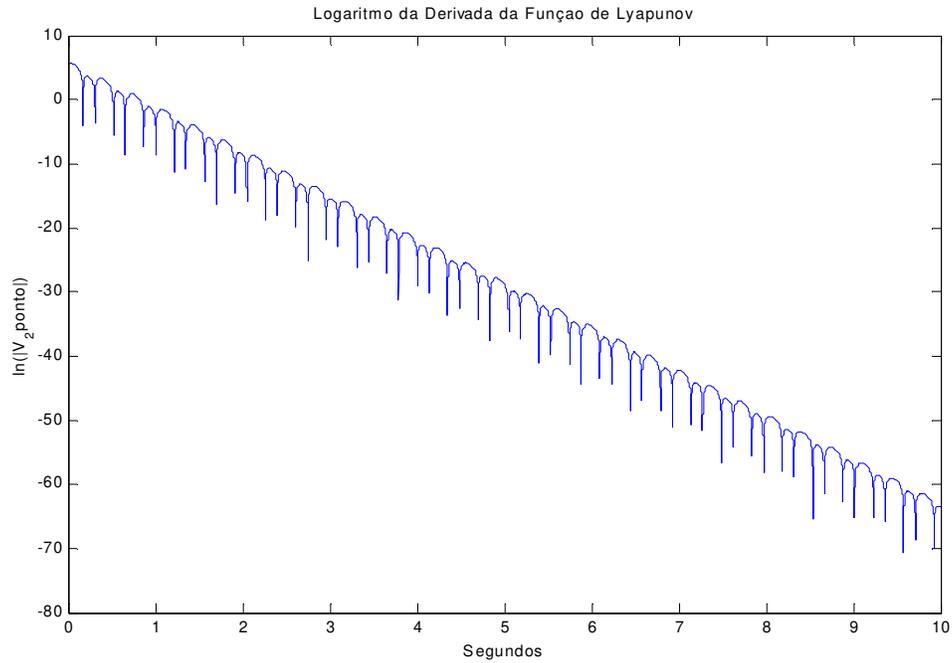


Figura 4.33. $\ln|\dot{V}_2|$ com a lei de controle (4.89).

Uma parte do conjunto C e evolução de V_2 ponto em função de z_1 e z_2

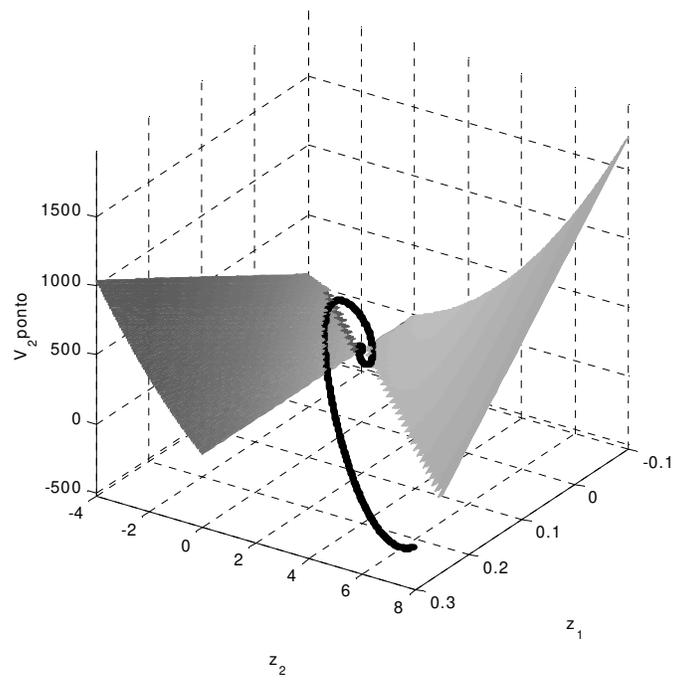


Figura 4.34. Uma parte do conjunto C e progresso da derivada da função de Lyapunov do sistema em função das variáveis de erro.

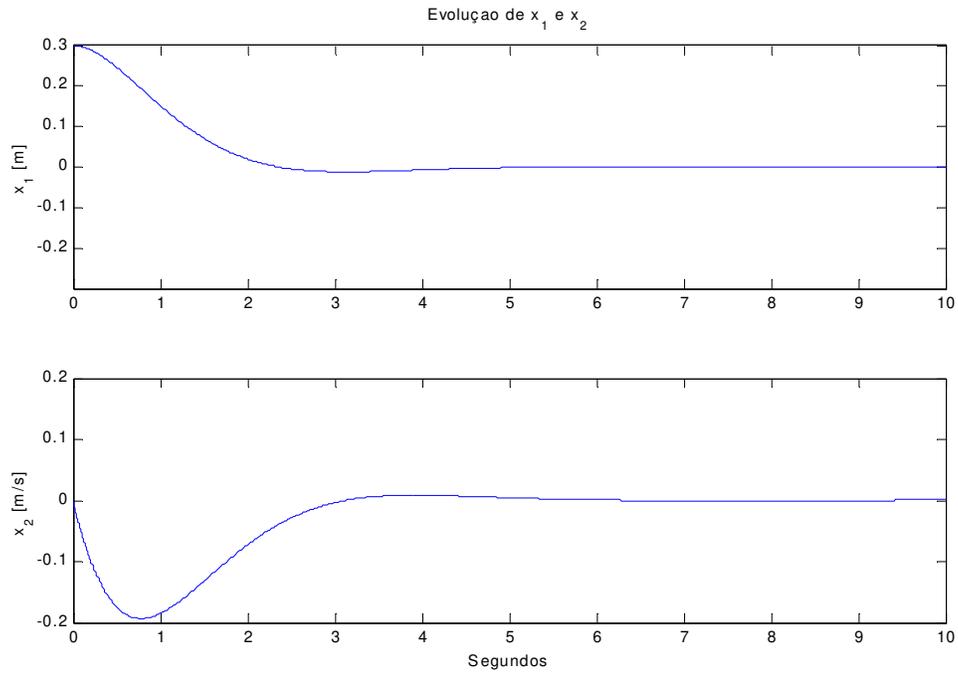


Figura 4.35. Estabilização do sistema massa-mola com *backstepping* tradicional.

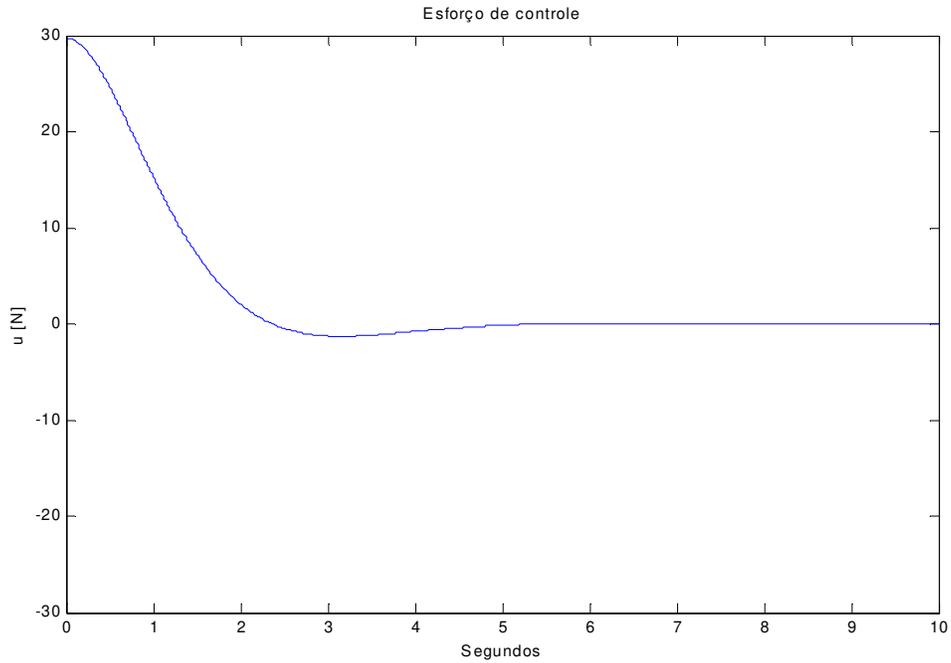


Figura 4.36. Esforço de controle com *backstepping* tradicional.

Caso se deseje que o veículo siga alguma referência $r(t)$ pré-determinada, bastam apenas algumas modificações no projeto, motivadas pela nova definição da variável de erro z_1 (vide comentário na seção 3.4.1). Assim,

$$z_1 := x_1 - \text{sen}(t), \quad (4.94)$$

para $r(t) = \text{sen}(t)$. O projeto efetuado com z_1 dado por (4.94) leva à seguinte expressão para z_2 :

$$z_2 = x_2 + c_1 z_1 - \cos(t). \quad (4.95)$$

A lei de controle para este caso seguidor exprime-se da seguinte forma:

$$u = 100x_1 + 10x_1^3 + 2x_2|x_2| - \text{sen}(t) - c_2 z_2 - az_1 \quad (4.96)$$

e a derivada da função de Lyapunov permanece igual a (4.90).

A Figura 4.37 mostra o progresso de x_1 e o erro $e = x_1 - r(t)$. A Figura 4.38 apresenta a evolução de x_1 e x_2 no espaço de estados; a Figura 4.39, o esforço de controle e a Figura 4.40 traz o comportamento da derivada da função de Lyapunov ao longo do tempo. Destaca-se o fato de que \dot{V}_2 tem o mesmo padrão do caso estabilizador, uma vez que, em ambos os casos, as variáveis de erro z_1 e z_2 tendem a zero (a origem é um ponto de equilíbrio GAE para o sistema autônomo resultante $\dot{\mathbf{z}} = A_2 \mathbf{z}$).

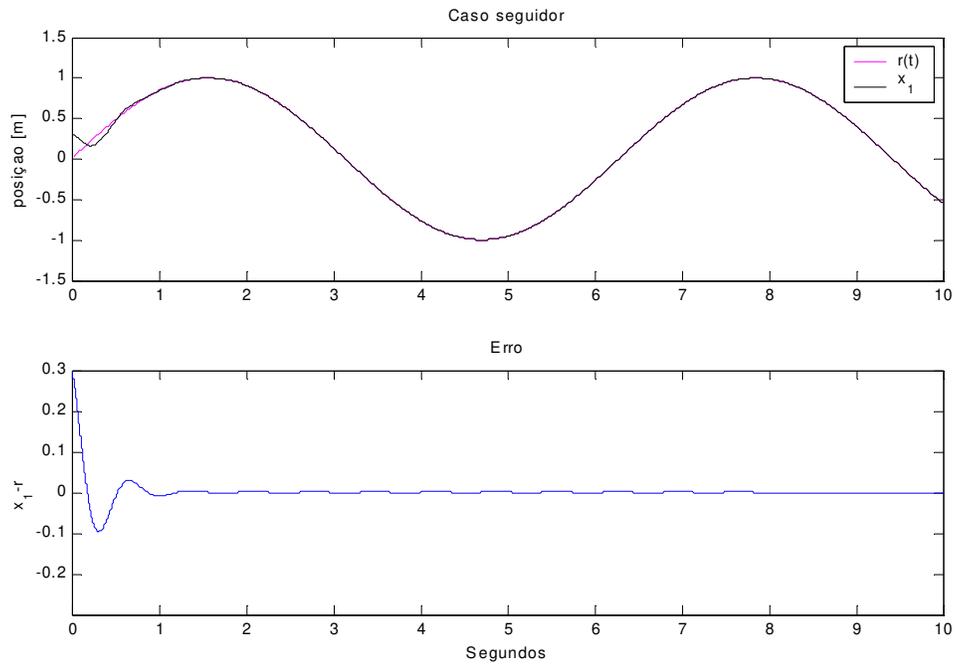


Figura 4.37. Caso seguidor – O veículo oscila com amplitude e frequência fixas.

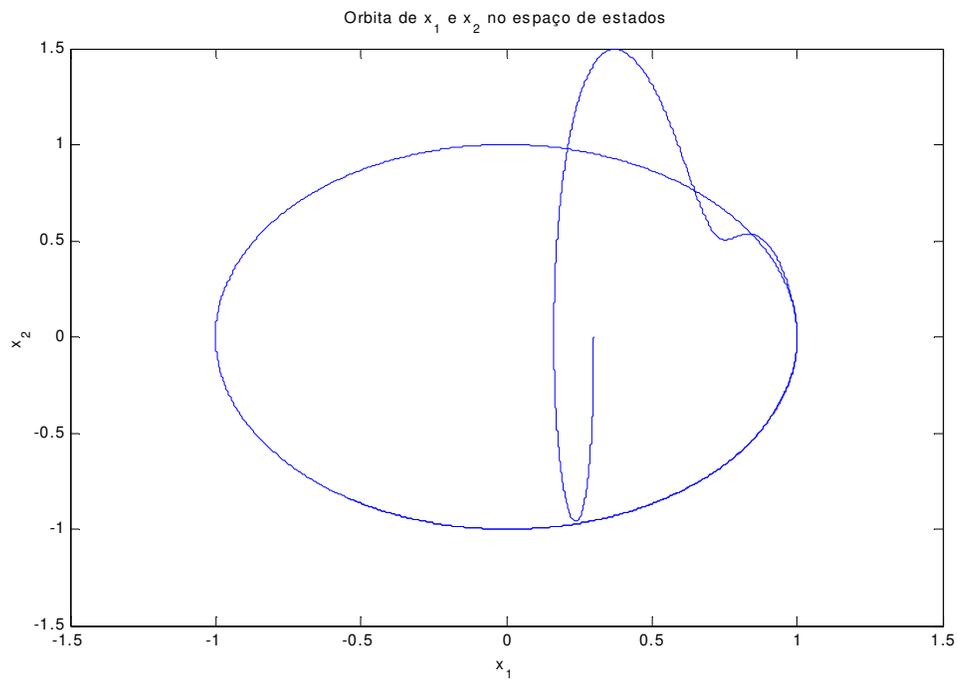


Figura 4.38. Trajetória de $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$.

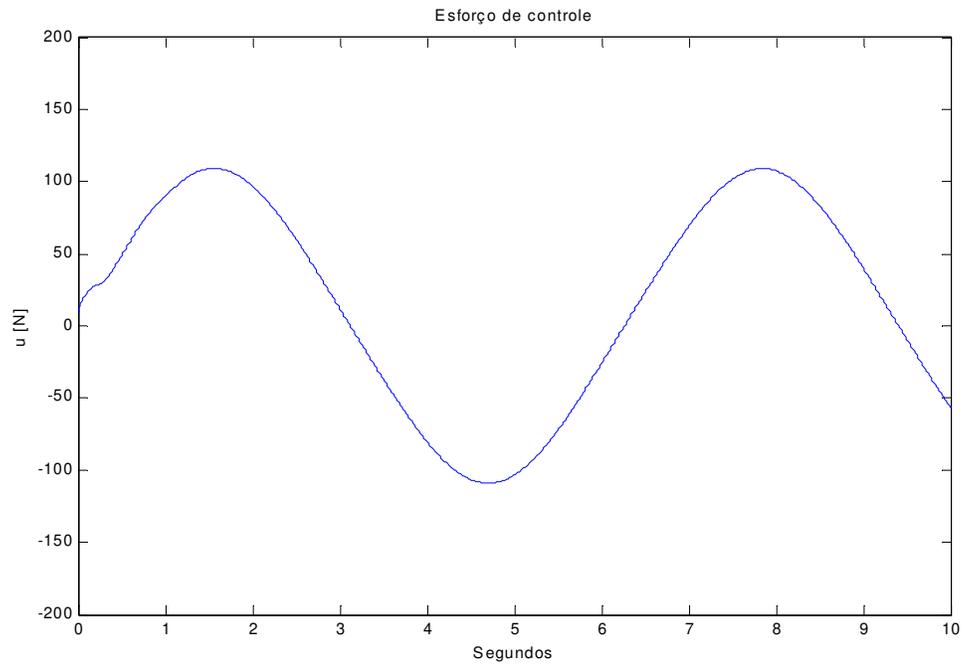


Figura 4.39. Esforço de controle para o caso seguidor.

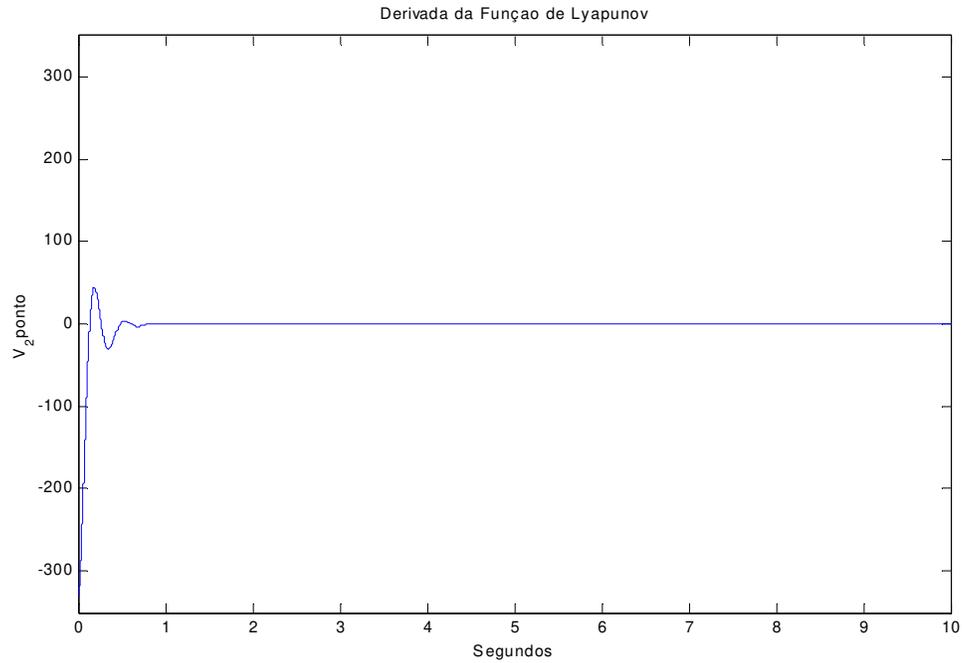


Figura 4.40. Derivada da Função de Lyapunov: $\dot{V}_2 \rightarrow 0$, pois $z_1 \rightarrow 0$ e $z_2 \rightarrow 0$.

4.4. Conclusão

Os exemplos apresentados neste capítulo, i.e., a sincronização de dois sistemas caóticos e o controle de um sistema massa-mola não linear, são apenas dois casos em que a metodologia de síntese de controladores a partir das novas premissas proporcionadas pela flexibilização do *backstepping* atrelada a técnicas de otimização baseadas em computação evolutiva é aplicável. Com efeito, para todos os sistemas de realimentação estrita com a configuração (4.32) o algoritmo genérico apresentado na seção 4.3.2 é válido.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

5.1. Conclusões

A teoria associada às noções de estabilidade e convergência em sistemas dinâmicos, apresentada no Capítulo 2, conduziu ao desenvolvimento de técnicas recursivas de síntese de controladores para diversas classes de sistemas não lineares. O método de *backstepping*, exposto no Capítulo 3, é, hoje, a metodologia mais popular de tratamento de sistemas não lineares, pois permite uma abordagem sistemática mais eficiente que as observadas em outras técnicas mais tradicionais, como processos oriundos da geometria diferencial.

A metodologia do *backstepping* clássico, descrita em detalhes em Krstić et al. (1995), atrela o desenvolvimento de leis de controle à construção de funções de Lyapunov que, por via dos teoremas de La Salle, La Salle-Yoshizawa e do Método Direto de Lyapunov, garantem estabilidade assintótica, global ou local, do sistema.

A premissa básica contida nos conceitos relacionados ao Princípio de Invariância de La Salle, ao Teorema de La Salle-Yoshizawa e ao Método Direto de Lyapunov é o fato de a derivada da função de Lyapunov do sistema ser, no mínimo, semidefinida negativa.

Os resultados obtidos neste trabalho, entretanto, comprovam que esse requisito é suficiente, porém não necessário, para se conseguir regulação e/ou seguimento num sistema dinâmico. De fato, conforme a recente Extensão ao Princípio de Invariância de La Salle apresentada em Rodrigues et al. (2002), que inclui o caso em que é facultado à derivada da função de Lyapunov ao longo das soluções do sistema ser positiva numa região limitada do espaço, estabilidade e convergência são conseguidas mesmo com a derivada da função de

Lyapunov assumindo valores positivos em determinadas regiões do espaço. O Capítulo 4 propôs uma flexibilização do esquema de construção de controladores por meio do *backstepping* em que não há a necessidade de se considerar o sinal da derivada da função de Lyapunov ao longo do processo. Efetivamente, a estabilidade é garantida pelo sinal da parte real dos autovalores da matriz do sistema de erros resultante do *backstepping*, não havendo necessidade de se pautar pelo Método Direto de Lyapunov, pelos teoremas de La Salle e La Salle-Yoshizawa ou até mesmo pela Extensão ao Princípio de Invariância, visto que o sinal da derivada pode ser positivo em regiões *ilimitadas* do espaço de estados.

A eliminação das restrições impostas pelos teoremas de estabilidade apresentados no Capítulo 2 no procedimento de *backstepping* fornece maior liberdade de utilização de técnicas de otimização com vistas a um melhor desempenho dos sistemas controlados. Técnicas baseadas em computação evolutiva, como mostrado no Capítulo 4, levam a resultados claramente superiores em comparação aos conseguidos com o *backstepping* tradicional nos casos apresentados, tanto em termos do esforço de controle quanto na duração e intensidade do transitório na evolução das variáveis de estado. O algoritmo genérico proposto mostra que o *backstepping* flexibilizado associado a algoritmos genéticos é aplicável a todos os sistemas de realimentação estrita do tipo (4.32).

5.2. Perspectivas

O processo de síntese de controladores através do *backstepping* flexibilizado apresentado neste trabalho restringiu-se a uma classe de sistemas de realimentação estrita. É possível entrever a flexibilização do *backstepping* em outras classes de sistemas de realimentação estrita e em sistemas de realimentação pura e realimentação estrita em bloco (cf. Krstić et al. (1995)). Além disso, a introdução dos conceitos apresentados neste trabalho nos processos de *backstepping* adaptativo é um prognóstico interessante.

Nos sistemas aqui tratados, as não-linearidades foram supostas todas conhecidas. Uma perspectiva de desenvolvimento futuro do *backstepping* flexibilizado associado à computação evolutiva reside no controle de sistemas com não-linearidades parcialmente conhecidas, incorporando-se técnicas de controle robusto e redes neurais.

No que se refere à fase de otimização dos parâmetros do controlador, os exemplos deste trabalho fizeram uso de um algoritmo genético simples. Uma perspectiva interessante de melhoria dos resultados obtidos é a investigação e aplicação de formas mais complexas e eficientes de algoritmos evolutivos, tais como estratégias evolutivas (cf. Bäck et al. (2000)), e a introdução e teste de diferentes operadores genéticos e de seleção.

Bibliografia

- [1] APOSTOL, T. M. *Mathematical Analysis*. 2. ed. Reading, MA, Addison-Wesley, 1965.
- [2] ARTSTEIN, Z. Stabilization with Relaxed Controls. *Nonlinear Analysis*, TMA-7: 1163-1173, 1983.
- [3] BÄCK, Thomas, FOGEL, David B. & MICHALEWICZ, Zbigniew. (eds.), *Evolutionary Computation I*; Basic Algorithms and Operators. Philadelphia, PA, Institute of Physics Publishing, 2000.
- [4] BYRNES, Christopher I., ISIDORI, Alberto & WILLEMS, Jan C. Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 (11): 1228-1240, nov. 1991.
- [5] CUOMO, Kevin M., OPPENHEIM, Alan V. & STROGATZ, Steven H. Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Applications to Communications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Analog and Digital Signal Processing*, 40 (10): 626-633, out. 1993.
- [6] DE JONG, K. A. Genetic Algorithms: A 10 Year Perspective, in GREFFENSTETTE, J. J. (ed.), *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillside, NJ, pp. 169-177, 1985.
- [7] DIXON, R. C. *Spread Spectrum Communication Systems with Commercial Applications*. 3.ed. New York, NY, John Wiley & Sons, 1994.
- [8] FLEMING, P. J. & PURSHOUSE, R. C. *Genetic Algorithms in Control Systems Engineering*. Research Report No.789, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, UK, 2001.
- [9] FOGEL, David B. *Evolutionary Computation*; Toward a New Philosophy of Machine Intelligence. New York, NY, IEEE Press, 1995.
- [10] FOSSEN, Thor I. & STRAND, Jann P. Tutorial on Nonlinear Backstepping: Applications to Ship Control. *Modeling, Identification and Control*, 20 (2): 83-135, 1999.
- [11] FRADKOV, A. L. & POGROMSKY, A. Speed Gradient Control of Chaotic Continuous-Time Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, 43 (?): 907-913, 1996.
- [12] FRADKOV, A. L. & POGROMSKY, A. *Introduction to Control of Oscillations and Chaos*. Singapore, World Scientific, 1998.

- [13] FRANKLIN, Gene F., POWELL, J. D. & EMAMI-NAEINI, Abbas. *Feedback Control of Dynamic Systems*. 3. ed. Reading, MA, Addison-Wesley, 1995.
- [14] FUH, Chyun-Chau & TUNG, Pi-Cheng. Controlling Chaos Using Differential Geometric Method. *Physical Review Letters*, 75 (16): 2952-2955, out. 1995.
- [15] GILLS, Z., IWATA, C., ROY, R., SWARTZ, I. B. & TRIANDAF, I. Tracking Unstable Steady States: Extending the Stability Regime of a Multimode Laser System. *Physical Review Letters*, 69 (22): 3169-3172, 1992.
- [16] HAHN, Wolfgang. *Stability of Motion*. New York, NY, Springer-Verlag, 1967.
- [17] HAYKIN, Simon. *An Introduction to Analog and Digital Communications*. New York, NY, John Wiley & Sons, 1989.
- [18] HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [19] ISIDORI, Alberto. *Nonlinear Control Systems*. 3. ed. London, Springer-Verlag, 1996.
- [20] KALMAN, R. E., FALB, P. L. & ARBIB, M. A. Topics in Mathematical System Theory. *International Series in Pure and Applied Mathematics*. McGraw-Hill, 1969.
- [21] KANELLAPOULOS, I., KOKOTOVIĆ, P. V. & MORSE, A.S. A Toolkit for Nonlinear Feedback Design. *Systems & Control Letters*, 18: 83-92, 1992.
- [22] KHALIL, Hassan K. *Nonlinear Systems*. New York, NY, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [23] KOKOTOVIĆ, Petar V. The Joy of Feedback: Nonlinear and Adaptive; 1991 Bode Prize Lecture. *Control Systems Magazine*, 12: 7-17, jun. 1992.
- [24] KOKOTOVIĆ, Petar V. & ARCAK, Murat. Constructive Nonlinear Control: A Historical Perspective. *Automatica*, 37 (?): 637-662, 2001.
- [25] KOKOTOVIĆ, Petar V., KRSTIĆ, Miroslav & KANELLAPOULOS, Ioannis. Backstepping to Passivity: Recursive Design of Adaptive Systems. *Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*. Tucson, AZ, pp. 3276-3280, dez. 1992.
- [26] KOKOTOVIĆ, P. V. & SUSSMAN, H. J. A Positive Real Condition for Global Stabilization of Nonlinear Systems. *Systems and Control Letters*, 13: 125-133, 1989.
- [27] KOLUMBÁN, Géza, KENNEDY, Michael P. & CHUA, Leon O. The Role of Synchronization in Digital Communications Using Chaos – Part I: Fundamentals of Digital Communications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, 44 (10): 927-936, out. 1997.

- [28] KOLUMBÁN, Géza, KENNEDY, Michael P. & CHUA, Leon O. The Role of Synchronization in Digital Communications Using Chaos – Part II: Chaotic Modulation and Chaotic Synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, 45 (11): 1129-1140, nov. 1998.
- [29] KRSTIĆ, Miroslav, KANELAKOPOULOS, Ioannis & KOKOTOVIĆ, Petar. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York, NY, John Wiley & Sons, 1995.
- [30] LUENBERGER, David G. *Introduction to Dynamic Systems; Theory, Models, and Applications*. New York, NY, John Wiley & Sons, 1979.
- [31] MADAN, R. (ed.), *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*. Singapore, World Scientific, 1993.
- [32] MASCOLO, Saverio & GRASSI, Giuseppe. Controlling Chaos via Backstepping Design. *Physical Review E*, 56 (5): 6166-6169, nov. 1997.
- [33] MICHALEWICZ, Zbigniew. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. 3. ed. New York, NY, Springer-Verlag, 1996.
- [34] MICHALEWICZ, Zbigniew & SCHÖNAUER, Marc. Evolutionary Algorithms for Constrained Parameter Optimization Problems. *Evolutionary Computation*, 4 (1): 1-32, 1996.
- [35] MIRA, Christian. *Systèmes Asservis Non Lineaires; Aspects Continus et Discrets*. Paris, Hermès, 1990.
- [36] NETO, João Viana da Fonseca. *Alocação Computacional Inteligente de Auto-estruturas para Controle Multivariável*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2000.
- [37] NIJMEIJER, Henk & MAREELS, Iven M. Y. An Observer Looks at Synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, 44 (10): 882-890, out. 1997.
- [38] OGATA, Katsuhiko. *Modern Control Engineering*. 3. ed. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1997.
- [39] OTT, Edward. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1997.
- [40] OTT, Edward, GREBOGI, Celso & YORKE, James A. Controlling Chaos. *Physical Review Letters*, 64 (11): 1196-1199, 1990.
- [41] PAIVA, Ely Carneiro de. *Otimização Restrita de Controladores Robustos Utilizando Algoritmos Genéticos*. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 1997.
- [42] PECORA, Louis M. & CARROL, Thomas L. Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, 64 (8): 821-824, fev. 1990.

- [43] RODRIGUES, Hildebrando, ALBERTO, Luís F. C. & BRETAS, Newton G. Um Princípio de Invariância Uniforme. Robustez com Relação à Variação de Parâmetros. *Revista Controle & Automação*, 13 (1): 51-67, 2002.
- [44] SLOTINE, Jean-Jacques E. & LI, Weiping. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1991.
- [45] SONTAG, E. D. A Lyapunov-like Characterization of Asymptotic Controllability. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 21: 462-471, 1983.
- [46] STRANG, Gilbert. *Linear Algebra and its Applications*. 3. ed. Harcourt College Publishers, 1988.
- [47] SUYKENS, J. K., CURRAN, P. F., VANDEWALLE, J. & CHUA, L. O. Robust Nonlinear H_∞ Synchronization of Chaotic Lur'e Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, 44 (10): 891-904, out. 1997.
- [48] SYSWERDA, G. Uniform Crossover in Genetic Algorithms, in SCHAFFER, J. D. (ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*. Morgan Kaufmann Publishers, pp. 2-9, 1989.
- [49] URSEM, Rasmus K., KRINK, Thimo, JENSEN, Mikkel T. & MICHALEWICZ, Zbigniew. Analysis and Modeling of Control Tasks in Dynamic Systems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6 (4): 378-389, ago. 2002.
- [50] VIDYASAGAR, M. *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1978.
- [51] VON ZUBEN, Fernando J. *Computação Evolutiva: Uma Abordagem Pragmática*. DCA/FEEC, Unicamp, 2000.
- [52] WOLPERT, D. H. & MACREADY, W. G. No Free Lunch Theorems for Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1 (1): 67-82, 1997.
- [53] YANG, Tao, LI, Xiao Feng & SHAO, Hui He. Chaotic Synchronization Using Backstepping Method with Application to the Chua's Circuit and Lorenz System. *Proceedings of the American Control Conference*. Arlington, VA, pp. 2299-2300, jun. 2001.

Índice de Autores

- Alberto 24, 25, 26, 129
Apostol 11
Arbib 5, 6
Arcak 35, 36
Artstein 36, 37
Bäck 70, 72, 130
Bretas 24, 25, 26, 129
Byrnes 36
Carrol 73
Chua 73, 74
Cuomo 73
Curran 74
De Jong 86
Dixon 73
Emami-Naeini 20
Falb 5, 6
Fleming 66
Fogel 66, 67, 70, 72, 130
Fossen 20, 38, 43
Fradkov 55, 74
Franklin 20
Fuh 56, 58
Gills 57
Grassi 57, 61, 63
Grebogi 56
Hahn 15, 19, 28
Haykin 73
Holland 66, 69
Isidori 31, 32, 33, 36
Iwata 57
Jensen 66
Kalman 5, 6
Kanellakopoulos 28, 31, 32, 34, 35, 36, 41, 43, 45, 46, 51, 52, 55, 129, 130
Kennedy 73, 74
Khalil 14, 15, 19, 21, 22, 28
Kokotović 28, 31, 32, 34, 35, 36, 41, 43, 45, 46, 51, 52, 55, 129, 130
Kolumbán 73, 74
Krink 66
Krstić 28, 32, 34, 35, 36, 41, 43, 45, 46, 51, 52, 55, 129, 130
Li, W. 8, 18
Li, X. 57, 74, 75, 76, 78
Luenberger 4, 8
Macready 85
Madan 57, 74
Mareels 74
Mascolo 57, 61, 63
Michalewicz 66, 68, 69, 70, 71, 72, 86, 88, 130
Mira 8
Morse 31
Neto 66
Nijmeijer 74
Ogata 6, 7
Oppenheim 73
Ott 55, 56
Paiva 66
Pecora 73
Pogromsky 55, 74
Powell 20
Purshouse 66
Rodrigues 24, 25, 26, 129
Roy 57
Schönauer 71, 72
Shao 57, 74, 75, 76, 78
Slotine 8, 18
Sontag 36
Sussman 35
Strand 20, 38, 43
Strang 91, 98
Strogatz 73
Suykens 74
Swartz 57
Syswerda 70
Triandaf 57
Tung 56, 58
Ursem 66
Vandewalle 74
Vidyasagar 17, 28
Von Zuben 66, 68, 69, 85
Willems 36
Wolpert 85
Yang 57, 74, 75, 76, 78
Yorke 56