

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

*Otimização de Sincronismo em Redes Digitais
Síncronas com Preditor de Kalman*

Autor

Gustavo Abraham Hirchoren

Orientador

Dalton Soares Arantes

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Gustavo Abraham
Hirchoren e aprovada pela Comissão
 julgadora em 02, 08 1996.
Dalton Soares Arantes
Orientador

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Campinas, 2 de Agosto de 1996.

9619 249

UNICAMP

UNIDADE	BC		
N.º CHAMADA	H6140		
V.	E.		
T.º DE BO.	29108		
PREÇO	667,96		
C	<input type="checkbox"/>	D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	2611,00		
DATA	23/11/96		
N.º CPD			

CM-00095017-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

H614o Hirchoren, Gustavo Abraham
Otimização de sincronismo em redes digitais síncronas com preditor de Kalman / Gustavo Abraham Hirchoren.-- Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Dalton Soares Arantes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sincronização. 2. Sistemas de telecomunicações. 3. Processamento de sinais - Técnicas digitais. 4. Kalman, Filtragem de. I. Arantes, Dalton Soares. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Agradecimentos

Desejo expressar meu profundo agradecimento ao meu orientador, Prof. Dalton Soares Arantes, pela valiosa colaboração neste trabalho e pela disponibilidade sempre presente.

Desejo agradecer ao Prof. Carlos F. Belaustegui Goitia quem foi o tutor do meu trabalho Diseño óptimo de lazo de enganche de fase para sincronismo de redes digitales na Faculdade de Engenharia da Universidad de Buenos Aires.

Agradeço também aos meus amigos Mylene Christine Q. de Farias, Marcelo Menezes de Carvalho, Guillermo Kemper Vasquez e Naylamp López pelo grande apoio.

Um agradecimento especial a meus pais Benjamin e Rosa e ao meu irmão Hernán pelo constante incentivo e veemente apoio às minhas idéias.

Resumo

A sincronização de redes digitais tem como objetivo sincronizar as escalas de tempo e frequência de todos os relógios de uma rede. Deve-se procurar o projeto ótimo do filtro do laço de sincronismo de fase buscando minimizar o erro quadrático médio de tempo do relógio.

Os resultados encontrados na literatura determinam os parâmetros ótimos de forma mais ou menos empírica. Este trabalho desenvolve uma técnica, de modo sistemático, para o projeto ótimo do laço de sincronismo de fase, mediante um preditor de Kalman.

Um problema associado com as redes mestre-escravo é a possível perda do sinal de referência proveniente do relógio mestre. Este trabalho desenvolve também uma técnica que consiste em compensar o erro do relógio local mediante o uso de um preditor ótimo a "n+1 passos". Demonstra-se que, embora a variância do erro de fase aumente com o tempo, usando-se a técnica proposta neste trabalho ela cresce muito mais lentamente do que no caso de se deixar livre o relógio a partir do instante da interrupção da referência. Mostra-se que ela cresce mais lentamente também que no caso de se usar a técnica conhecida na literatura com o nome de "Holdover".

Sumário

Capítulo 1	Introdução	1
	1.1 Técnicas de sincronização de redes	1
	1.2 Redes plesiócronas	3
	1.3 Redes síncronas	3
Capítulo 2	Modelo dos erros de um relógio	12
	2.1 Modelo do sinal de saída	12
	2.2 Domínio da frequência de Fourier	14
	2.3 Domínio do tempo	16
	2.3.1 Variância Verdadeira	18
	2.3.2 Variância Amostral	18
	2.3.3 Variância de Allan	19
	2.3.4 Estimador da variância de Allan	20
	2.3.5 Relação entre $\sigma_y^2(\tau)$ e $S_y(f)$	21
	2.4 Modelo em variáveis de estado dos erros de relógio	21
Capítulo 3	Projeto ótimo de laço de sincronismo de fase....	35
	3.1 Considerações iniciais	35
	3.2 Solução ótima variante no tempo	55
	3.3 Estabilidade do laço	58
	3.4 Simulações	60
Capítulo 4	Análise da interrupção do sinal de referência do relógio mestre	71
	4.1 Considerações iniciais	71
	4.2 Comparações de desempenho	77
	4.3 Comparação de desempenho entre a técnica de predição ótima a "(n+1) passos" e a técnica de "Holdover"	88
	4.4 Simulações	92

Apêndice 1	Demonstração de que o ruído flicker não pode ser representado exatamente mediante um modelo de estados linear de ordem finita	97
Apêndice 2	Cálculos auxiliares	99
Programas de Matlab	101
Referências bibliográficas	107

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A sincronização de redes digitais trata do problema da distribuição de tempo e frequência em uma rede de relógios que se encontram em posições espacialmente remotas. Estes relógios se interconectam de alguma maneira, como por exemplo, linhas físicas ou rádio enlaces.

O objetivo é sincronizar as escalas de tempo e frequência de todos os relógios de uma rede, usando a capacidade de comunicação de dados dos citados enlaces.

Numa rede digital de comunicações, devido a que os sinais permanecem na forma digital em toda a rede, é necessário usar multiplexação e comutação por divisão de tempo. Portanto, os bits que chegam ao multiplexador devem estar disponíveis nos instantes corretos, de modo que as janelas de tempo designadas sejam preenchidas corretamente e não se percam bits. Tendo em vista que estes bits chegam de diferentes nós da rede, é essencial que seus relógios estejam adequadamente sincronizados.

Nos primeiros sistemas digitais foram adotadas técnicas de justificação de bits ("pulse-stuffing") em cada estágio de multiplexação. Nestes são acrescentados bits de justificação a cada um dos fluxos de bits que chegam ao multiplexador para que tenham a mesma frequência. Um método mais conveniente é sincronizar todos os nós da rede. Isto resolve não somente o problema da multiplexação por divisão de tempo, mas permite também a utilização da rede para outras aplicações, como por exemplo, navegação, determinação de posição, fácil acesso a enlaces via satélite, entre outras.

1.1 *Técnicas de sincronização de redes*

De acordo com a natureza dos sinais de controle que se usam para obter sincronização, as redes de transferência de tempo e frequência podem se dividir em duas grandes categorias [1]:

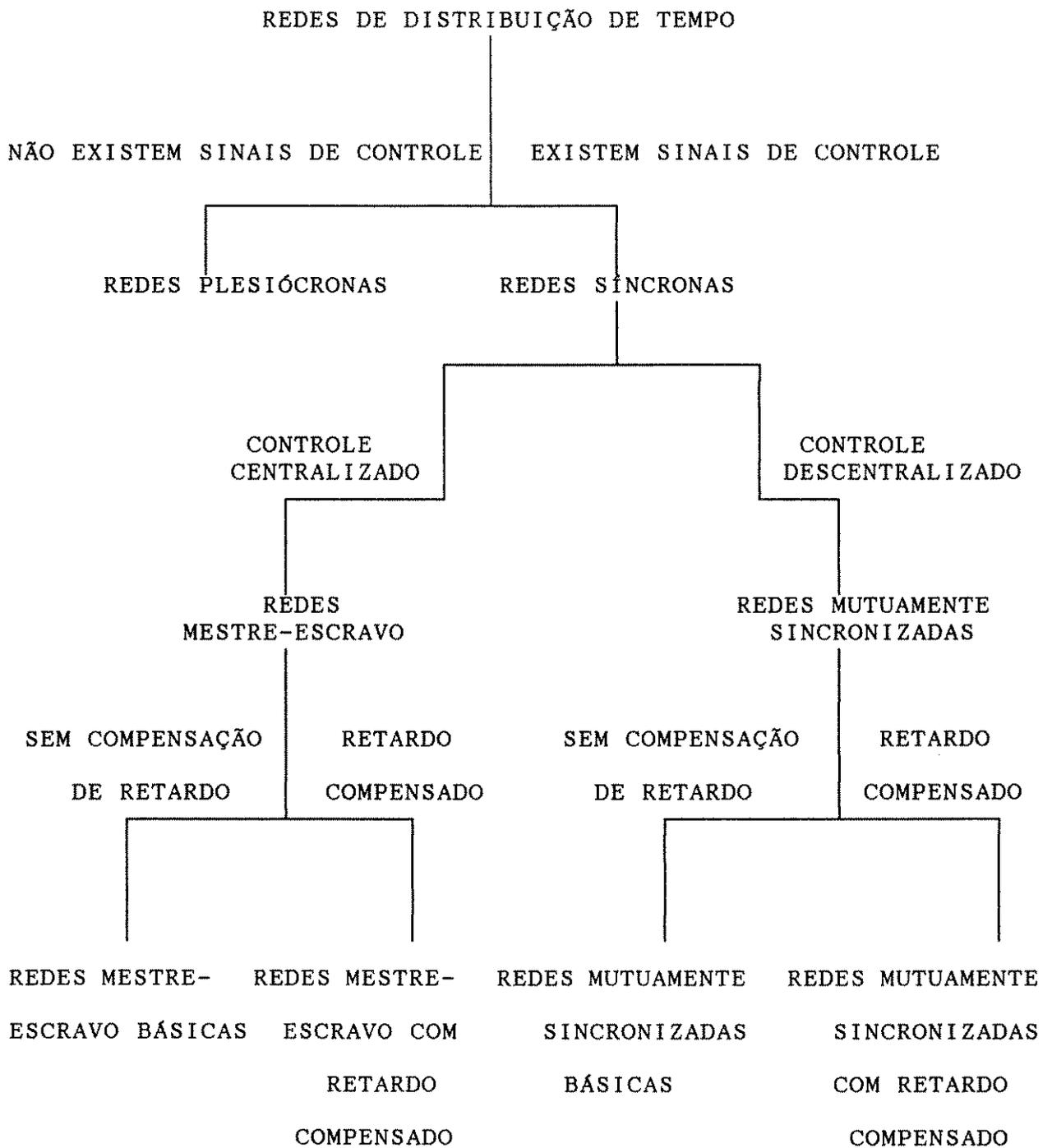


Fig. 1.1 Classificação das redes de distribuição de tempo e freqüência.

pleσιόcronas (assíncronas) e síncronas.

Na figura 1.1 pode-se observar a classificação das redes de distribuição de tempo e frequência.

1.2 *Redes plesiόcronas*

Numa rede plesiόcrona cada nó contém seu próprio relόgio exato (com deslocamentos ("offsets") e derivas ("drifts") muito pequenos) e não existem sinais de controle que possam coordenar o funcionamento destes relόgios (figura 1.2).

Inicialmente os relόgios são ajustados de forma que a diferença de tempo entre eles é zero. Dado que os relόgios numa rede plesiόcrona são independentes, suas frequências livres ("free-running") são ligeiramente diferentes e o erro de tempo entre eles cresce linearmente com o tempo. Outros fatores como derivas e ruído de fase também contribuem para a acumulação de erros de tempo. Este erro de tempo pode eventualmente exceder um valor aceitável e tornar indispensável a recalibração dos relόgios.

As vantagens das redes plesiόcronas são sua facilidade de implementação e sua robustez. A maior desvantagem é o alto custo de compra, instalação e manutenção de relόgios muito exatos e a necessidade de freqüentes recalibrações.

1.3 *Redes síncronas*

Numa rede síncrona todos os relόgios estão sincronizados em tempo (fase) e frequência a um tempo e frequência comuns da rede; ou seja, as escalas de tempo geradas pelos relόgios espacialmente remotos são em média idênticas.

As técnicas de sincronização empregadas em redes síncronas podem ser divididas em centralizadas e descentralizadas, de acordo com a natureza dos sinais de controle. As redes centralizadas usam a técnica de sincronização mestre-escravo, na qual todos os nós da rede estão, seja direta ou indiretamente, atrelados a um relόgio mestre, o que impõe a escala de tempo e de frequência da rede (figura 1.3).

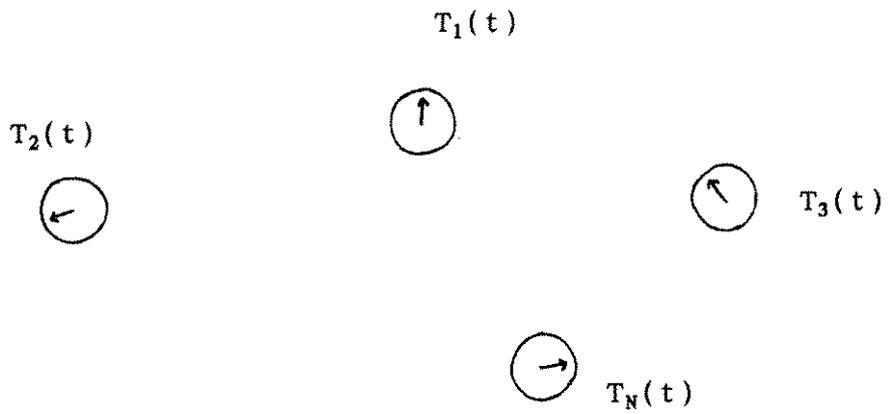


Fig. 1.2 Rede plesiócrona.

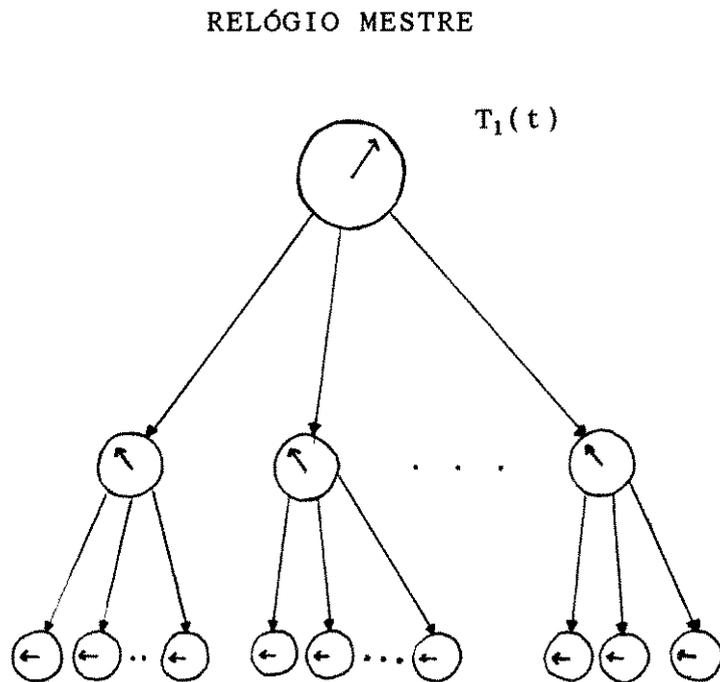


Fig. 1.3 Rede mestre-escravo hierárquica.

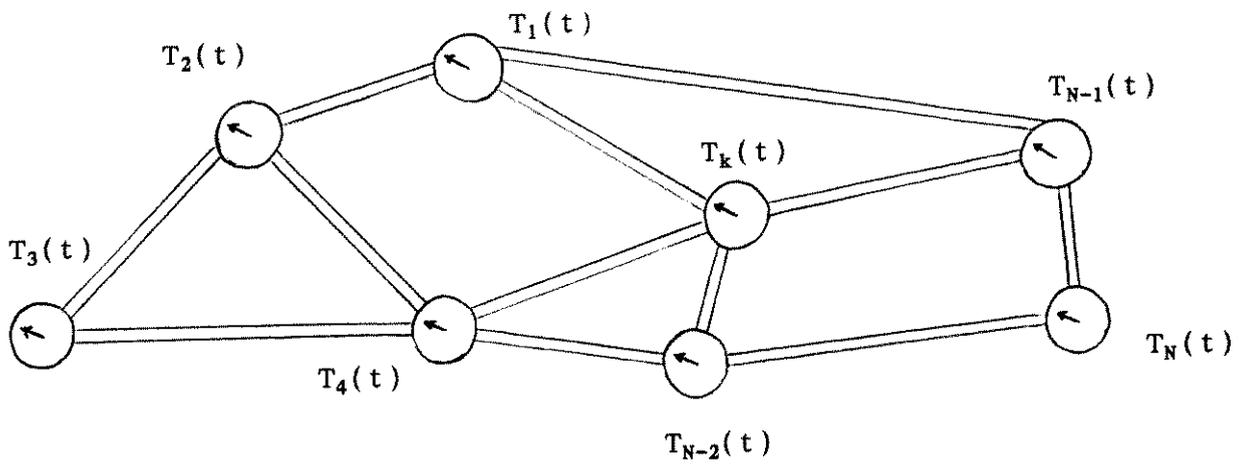
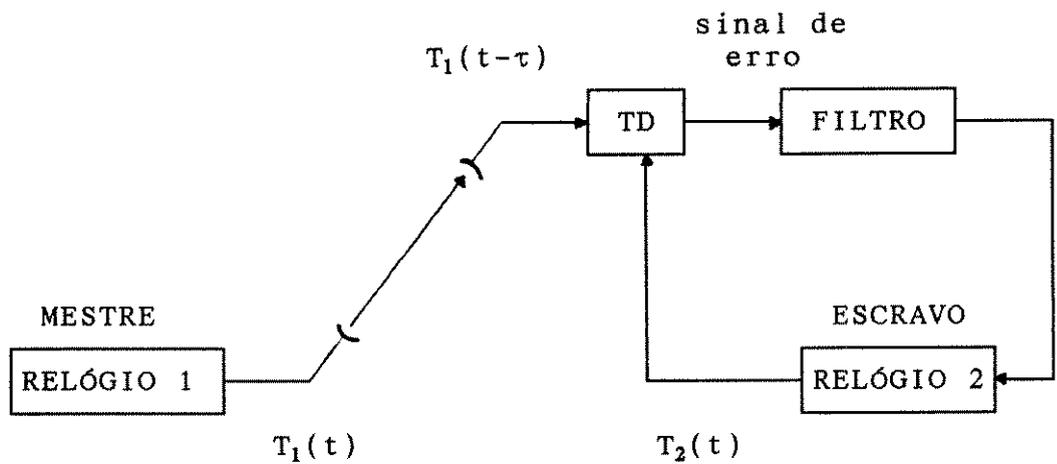


Fig. 1.4 Rede mutuamente sincronizada.



TD: detector de
diferença de tempo

Fig. 1.5 Princípio de operação de uma rede de sincronização mestre-escravo de 2 nós.

As redes descentralizadas se baseiam no princípio da sincronização mútua. As redes mutuamente sincronizadas não têm um relógio mestre, mas todos os relógios contribuem igualmente na determinação da escala de tempo e frequência da rede (figura 1.4). Das duas técnicas de sincronização, a técnica mestre-escravo é a mais conhecida e a mais amplamente utilizada. A figura 1.5 mostra o princípio de operação duma rede mestre-escravo de 2 nós. O relógio 1 se denomina mestre e o relógio 2 escravo. As escalas de tempo produzidas pelos dois relógios são $T_1(t)$ e $T_2(t)$, respectivamente. Para sincronizar o relógio escravo com o mestre, este último transmite sua escala de tempo ao relógio escravo; este último gera um sinal de erro comparando o sinal de tempo que recebe, $T_1(t-\tau)$ (a escala de tempo do relógio mestre atrasada pelo retardo de transmissão), com sua própria escala de tempo $T_2(t)$, num detector de diferença de tempo (TD). Este sinal de erro é então utilizado para corrigir continuamente o relógio escravo. Em estado estacionário, a escala de tempo do escravo está travada à versão retardada da escala de tempo do mestre. Para eliminar esta polarização ("bias") de estado estacionário entre os relógios e conseguir que suas escalas de tempo sejam menos dependentes dos retardos de transmissão, devem-se compensar os mencionados retardos.

Na figura 1.6 mostra-se uma possível técnica de compensação, que é aplicável quando o retardo de transmissão pode ser estimado. O sinal de tempo do relógio escravo é então retardado de um valor igual a esta estimativa, antes de compará-lo com o sinal de tempo mestre recebido.

Desta maneira, não haverá nenhuma polarização em estado estacionário se a estimativa do retardo for exata. Esta técnica de compensação de retardo é denominada de "compensação com linha de retardo". Outra técnica utilizada é a do "relógio adiantado", na qual em lugar de retardar o sinal do relógio local e compará-lo com o sinal que chega, o sinal de tempo de cada relógio primeiro se adianta pelo retardo de canal medido e então é transmitido ao nó posterior.

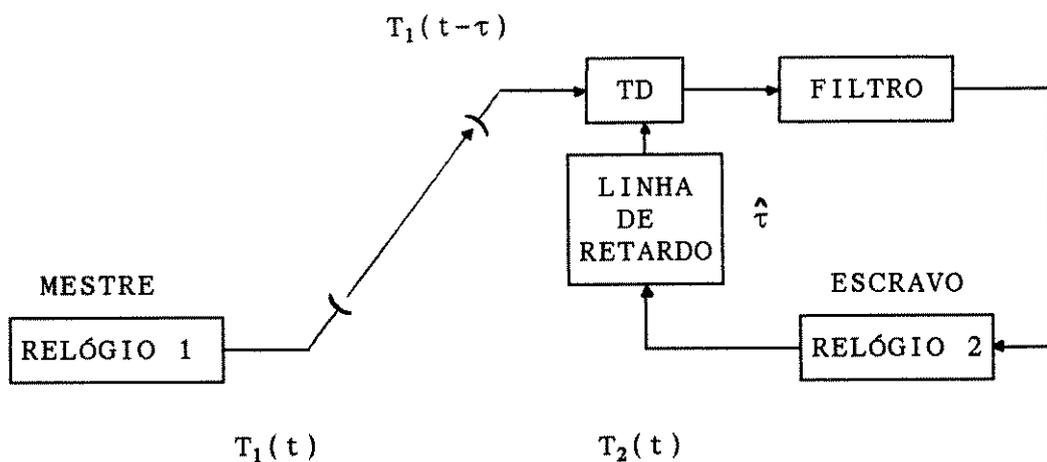


Fig. 1.6 Compensação do retardo de transmissão numa rede de sincronização mestre-escravo de 2 nós.

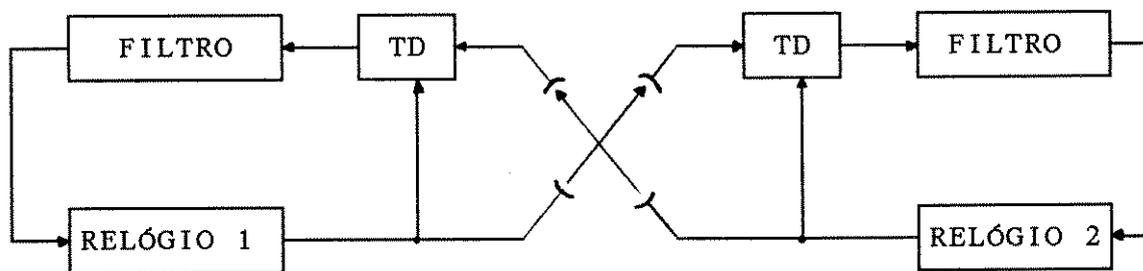


Fig. 1.7 Relógios mutuamente sincronizados

Um problema associado com as redes mestre-escravo é a possível perda do sinal de tempo mestre. Este problema pode-se corrigir parcialmente projetando relógios mestres alternativos ou funcionando o relógio escravo de forma independente até que o sinal mestre possa ser restabelecido. O último método requer na maioria dos casos um relógio de reserva ("backup") muito preciso e portanto caro em cada nó.

Numa rede mutuamente sincronizada não existe nenhum relógio mestre; no entanto, é o próprio conjunto dos relógios da rede que estabelece a escala de tempo. A figura 1.7 mostra o funcionamento básico de dois relógios sincronizados mutuamente. Em cada nó é gerado um sinal de erro comparando-se o sinal de tempo, que se recebe, com o sinal local. É este sinal de erro que se usa para corrigir o relógio local. Como no caso das redes mestre-escravo, o erro de tempo em estado estacionário entre os dois relógios depende dos retardos de transmissão. Além disso, aqui a frequência da rede em estado estacionário depende dos retardos de transmissão. Pode-se usar qualquer uma das técnicas de compensação de retardo mencionadas para uma rede mestre-escravo, para reduzir esta dependência.

A figura 1.8 mostra o caso mais geral em que o nó i recebe N entradas, onde então são computadas N diferenças de tempo entre os sinais recebidos e o local. O sinal de correção do relógio local é obtido pela combinação linear dos N sinais de erro. Se observa nesta figura que é usada a técnica de compensação com linha de retardo.

A vantagem das redes mutuamente sincronizadas é que, dado que cada nó da rede tem importância equivalente, já que não existe um relógio mestre, resulta um controle descentralizado ou distribuído. Suas desvantagens são a complexidade de implementação e o problema de sua estabilidade associada com transitórios. A existência de laços fechados na rede pode torná-la instável para certos valores dos parâmetros.

Este trabalho se concentrará na técnica de sincronização mestre-escravo, que é a mais conhecida e a mais amplamente utilizada.

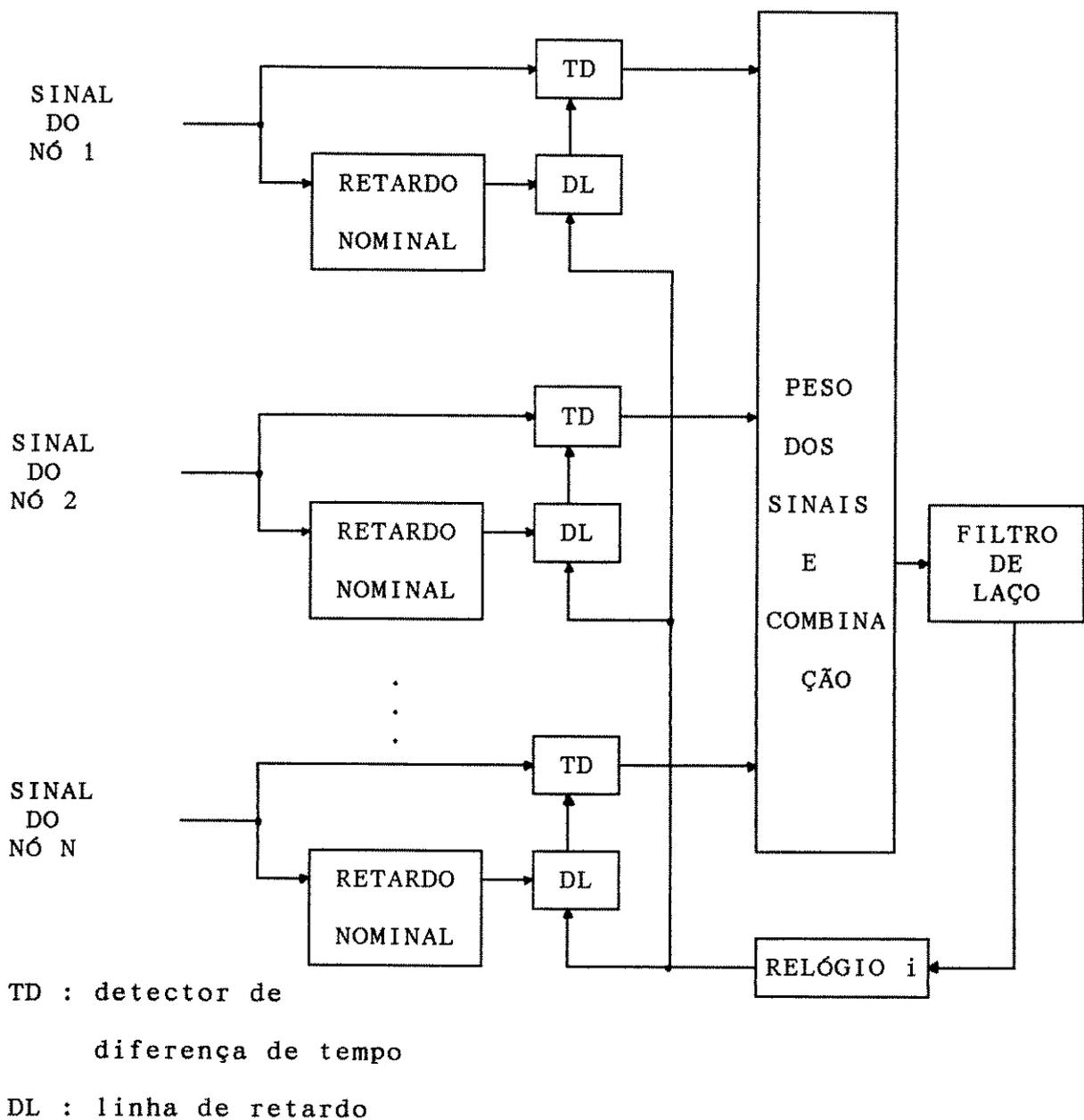


Fig. 1.8 Relógio numa rede mutuamente sincronizada de N nós com compensação do retardo.

Deve-se procurar o projeto ótimo do filtro do laço de sincronismo de fase, tendo em conta as propriedades do ruído com que se recebe o sinal de referência proveniente do relógio mestre, além do ruído de fase do próprio relógio local. O critério de projeto será minimizar o erro quadrático médio de tempo do relógio local controlado.

Os resultados encontrados na literatura, que levam em consideração no projeto as propriedades de ambos os ruídos mencionados, são muito escassos e determinam os parâmetros ótimos de forma mais ou menos empírica.

Gardner [2] mostra um exemplo onde considera o ruído aditivo do sinal de referência como branco e o ruído do relógio local como de cintilação de frequência ("flicker") e propõe encontrar os parâmetros B_L (largura de faixa de ruído do APLL-"Analog Phase-Locked Loop") e ζ (fator de amortecimento), que caracterizam o laço de segunda ordem, diferenciando a expressão da variância do erro de fase do relógio controlado, em relação a estes parâmetros. O problema desta técnica reside em que a complexidade é incrementada notavelmente se as densidades espectrais dos ruídos são arbitrárias.

Wolaver [3] mostra um exemplo onde considera o ruído aditivo do sinal de referência como branco e o ruído de fase do relógio local do tipo caminho aleatório ("random-walk"). Ele encontra os parâmetros do filtro ótimo "ajustando" a posição dos pólos da função de transferência a laço fechado de forma empírica, com base nas características das densidades espectrais dos ruídos mencionados.

Vanier e Têtu [4] propõem graficar a densidade espectral do erro do relógio controlado para diferentes valores de f_n (frequência natural do laço) e ζ (fator de amortecimento) e portanto, por tentativa e erro, encontrar os parâmetros ótimos.

Em nenhuma destas referências se trata de modo sistemático o projeto ótimo do laço de sincronismo de fase. Além disso, não se leva em consideração que o processo "erro de tempo" do relógio local não é estacionário.

Nosso objetivo é desenvolver uma técnica, de modo sistemático,

para o projeto ótimo do laço de sincronismo de fase, mediante um preditor de Kalman "oculto" no laço.

No capítulo 2 é analisado um modelo dos erros do relógio local. No capítulo 3 é desenvolvida a técnica de otimização e são apresentados os resultados de simulação.

Como foi mencionado, um problema associado com as redes mestre-escravo é a possível perda do sinal de referência proveniente do relógio mestre. Este problema pode ser corrigido parcialmente projetando-se relógios mestres alternativos ou funcionando o relógio escravo de forma independente, até que possa ser restabelecido o sinal mestre. O último método requer, na maioria dos casos, um relógio de reserva ("backup") muito preciso e portanto caro, em cada nó. No capítulo 4 vamos desenvolver uma técnica alternativa que consiste em compensar o erro do relógio local mediante o uso de um preditor ótimo a "n+1 passos", baseado no modelo dos erros de um relógio analisado no capítulo 2, adotando como critério de otimalidade a minimização do erro quadrático médio de fase do relógio.

Vamos demonstrar que embora a variância do erro de fase divirja com o tempo, usando a técnica proposta neste trabalho, de predição a "n+1 passos", ela cresce muito mais lentamente que no caso de deixar livre o relógio a partir do instante da interrupção da referência. Veremos que ela também cresce mais lentamente que no caso de usar a técnica conhecida na literatura com o nome de "Holdover", que consiste em manter o último valor memorizado na entrada de controle antes de ocorrer a perda do sinal de referência.

Capítulo 2

MODELO DOS ERROS DE UM RELÓGIO

O problema em estudo requer uma precisa caracterização das propriedades do sinal de saída de um oscilador real.

O sinal de saída de um oscilador ideal livre de ruídos e sem derivas ("drifts") seria uma onda senoidal pura. Qualquer dispositivo real no entanto, ainda que bastante estável, é perturbado por processos inevitáveis como ruídos aleatórios, derivas ("drifts") devido ao envelhecimento, efeitos de interferência do ambiente, entre outros.

O problema que consideraremos é a caracterização das instabilidades devidas a ruídos aleatórios, que existem em toda classe de dispositivos. Portanto, o primeiro passo é desenvolver um modelo matemático tratável para o sinal de saída quase-senoidal de um oscilador.

2.1 *Modelo do sinal de saída*

Um modelo relativamente simples e que tem encontrado ampla aceitação é dado por

$$v(t) = (v_0 + \epsilon(t)) \text{ sen } [2\pi v_0 t + \phi(t)]$$

onde $\phi(t)$ é um processo estocástico que denota ruído de fase, v_0 e v_0 são a amplitude e freqüência nominais, respectivamente, e o ruído na amplitude é caracterizado por $\epsilon(t)$, que usualmente pode ser desprezado nas fontes de alto desempenho. Neste tratamento, supomos que a deriva de freqüência ("drift"), quando existir, já foi subtraída do modelo. Esta é uma suposição usual que se faz para trabalhar com flutuações de valor esperado nulo [5], [6].

O processo de fase do oscilador é dado por

$$2\pi\nu_0 t + \phi(t)$$

ao passo que o processo tempo, $T(t)$, é obtido dividindo-se o processo de fase pela frequência angular nominal do oscilador $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, resultando em

$$T(t) = t + \frac{\phi(t)}{2\pi\nu_0}$$

O processo erro de tempo do relógio é dado então por

$$x(t) = \frac{\phi(t)}{2\pi\nu_0}$$

Este sinal quase-senoidal $v(t)$ tem uma frequência instantânea definida por

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi\nu_0 t + \phi(t)] = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.1)$$

O ruído de frequência é o processo estocástico definido por

$$\Delta v(t) \equiv v(t) - \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.2)$$

que existe simultaneamente com o ruído de fase e tem propriedades similares a ele, como veremos adiante.

É útil introduzir as flutuações de frequência normalizadas adimensionais

$$y(t) = \frac{\Delta v(t)}{\nu_0} \quad (2.3)$$

Esta quantidade permanece invariante sob multiplicação ou divisão de frequência e pode ser usada como uma base normalizada para comparar osciladores a diferentes frequências nominais.

Dado que temos modeladas as flutuações de frequência e de fase por processos estocásticos, agora o problema da caracterização das instabilidades de frequência (ou fase) consiste em introduzir parâmetros significativos e práticos (ou seja mensuráveis) para descrever as propriedades estatísticas de $\phi(t)$ (processo erro de fase), $x(t)$ (processo erro de tempo), $\Delta v(t)$ (processo erro de frequência) e $y(t)$ (processo erro de frequência normalizada).

Os usuários de padrões de frequência em vários campos reconheceram que se necessitam duas classes de parâmetros para cumprir com os requisitos de diferentes aplicações, o que levou à introdução de dois conjuntos de parâmetros como ferramentas para a caracterização de osciladores:

- 1) Densidades espectrais das flutuações de frequência e de fase no domínio da frequência de Fourier.
- 2) Variâncias (ou desvios padrões) das flutuações de frequência no domínio do tempo, que permitem avaliar a estabilidade sobre um dado intervalo de tempo.

Primeiro descreveremos estas duas classes diferentes de parâmetros e logo após analisaremos as relações entre elas.

2.2 Domínio da frequência de Fourier

No domínio da frequência de Fourier, as flutuações de fase e frequência podem ser caracterizadas pelas respectivas densidades espectrais unilaterais $S_\phi(f)$ e $S_{\Delta v}(f)$, que estão relacionadas pela simples lei

$$S_{\Delta v}(f) = f^2 S_\phi(f)$$

que corresponde à relação de derivada temporal entre $\phi(t)$ e $\Delta v(t)$. A densidade espectral $S_y(f)$ é usada também amplamente e está relacionada com $S_{\Delta v}(f)$ e $S_\phi(f)$ por

$$S_y(f) = \frac{1}{v_0^2} S_{\Delta v}(f) = \frac{f^2}{v_0^2} S_\phi(f)$$

Deve-se notar que a palavra "freqüência" é usada aqui com dois significados diferentes que não devem ser confundidos: $v(t)$ é a freqüência instantânea (dependente do tempo) do oscilador, e f é a freqüência de Fourier independente do tempo.

Foi demonstrado [5] [6], tanto por considerações teóricas como por medições experimentais, que as densidades espectrais devidas a ruído aleatório de todos os padrões de freqüência de alta estabilidade podem ser modeladas por leis de potência, onde as densidades espectrais variam como uma potência de f . Ou seja, pode-se escrever $S_y(f)$ como a soma

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^0 h_\alpha f^\alpha$$

para $0 \leq f \leq f_h$, onde f_h é uma freqüência de corte superior.

Cada termo está relacionado com uma dada fonte de ruído do oscilador (ruído branco, ruído de cintilação "flicker", etc.).

Tipo de ruído	α	$S_y(f)$	$\sigma_y^2(\tau)$
Branco de freqüência	0	h_0	$h_0 / 2\tau$
"Flicker" de freqüência	-1	$h_1 f^{-1}$	$2 (\ln(2)) h_1$
Caminho aleatório de freqüência	-2	$h_2 f^{-2}$	$(2/3) \pi^2 \tau h_2$

TABELA 1 Tipos de ruído mais comuns encontrados nas fontes práticas.

Na tabela 1 são mostrados os tipos de ruído mais comuns encontrados nas fontes práticas [6]. As leis de potência podem conduzir a "patologias matemáticas" (divergência de integrais) quando elas são integradas desde $f = 0$ a $f = \infty$, mas esta limitação pode ser superada por considerações físicas (largura de faixa e duração limitadas, por exemplo).

2.3 Domínio do tempo

A caracterização no domínio do tempo da estabilidade de frequência é usada amplamente dado que responde a seguinte pergunta: como caracterizar a estabilidade durante um intervalo de tempo τ (τ pode ir de milisegundos a meses e anos, de acordo com a aplicação) ?

No domínio do tempo o aparato de medição básico é um contador digital que nos proporciona \bar{y}_k , o k -ésimo valor médio de $y(t)$ durante um intervalo de tempo τ que começa no instante t_k (qualquer medição física tem uma duração finita τ que não pode ser zero, o que implica em que a frequência instantânea não pode ser medida).

A figura 2.1 mostra o ciclo de medição básico. Foi traçada a diferença de tempo entre dois osciladores $x(t)$ em função do tempo. Para conhecer a estabilidade de frequência sobre um intervalo de tempo τ , é necessário fazer uma série de medições, cada uma de duração τ , para obter os resultados \bar{y}_k , $k=1, \dots, N$; onde \bar{y}_k é a diferença de frequência fracional média dada por

$$\bar{y}_k = \frac{x(t_k + \tau) - x(t_k)}{\tau} \quad (2.4)$$

Devido às flutuações aleatórias de $y(t)$, os números \bar{y}_k são amostras de uma variável aleatória e a estabilidade de frequência durante τ só pode ser definida de forma estatística. Uma ferramenta amplamente usada para isso é a variância σ^2 , ou a sua raiz quadrada σ (desvio padrão).

Para a caracterização de osciladores, distintos autores tem introduzido distintas classes de variâncias. Portanto, é necessário descrever essas distintas variâncias e, quando existirem, as

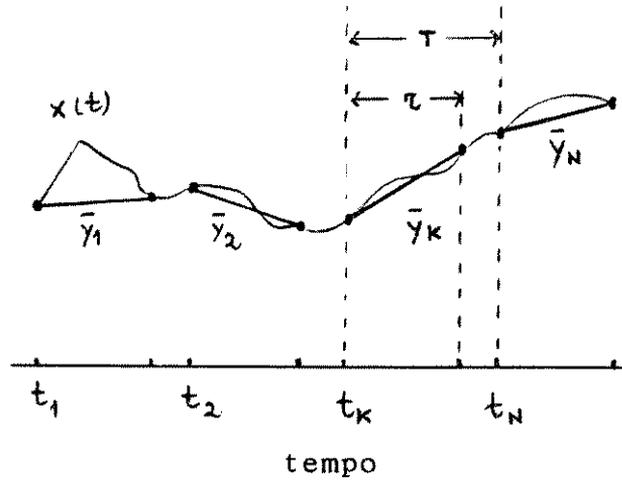


Fig. 2.1 Medição de estabilidade de freqüência no domínio do tempo.

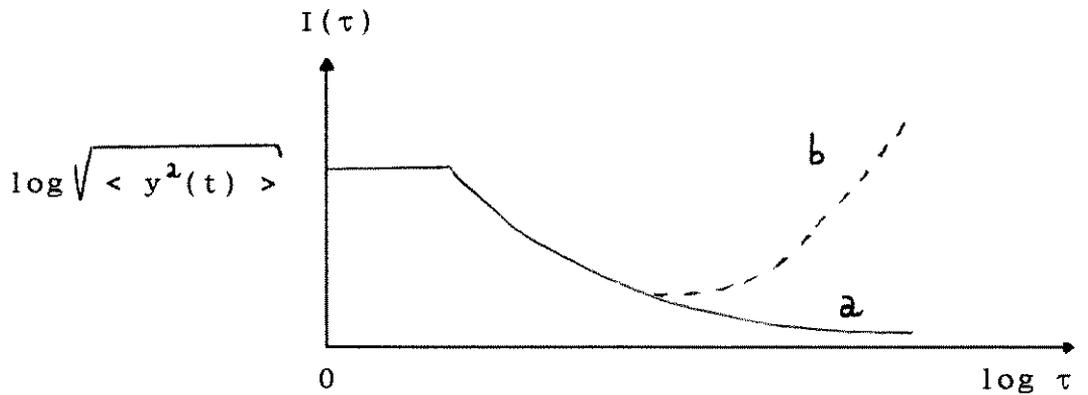


Fig. 2.2 Raiz quadrada da variância verdadeira para flutuações estacionárias de freqüência (a); e para flutuações não estacionárias (fontes reais) (b).

relações entre elas e as densidades espectrais.

2.3.1 *Variância Verdadeira*

A variância verdadeira é um parâmetro teórico denotado por $I^2(\tau)$ e simplesmente definido como $I^2(\tau) = \langle \bar{y}_k^2 \rangle$, onde $\langle \rangle$ significa uma média de tempo infinito. Para flutuações estacionárias de frequência ao redor de ν_0 , $I^2(\tau)$ diminui de $\langle y^2(t) \rangle$ para $\tau = 0$ a $I^2(\tau) = 0$, para $\tau \rightarrow \infty$ onde as flutuações são completamente promediadas, como mostra a curva (a) da figura 2.2.

Apesar de sua simplicidade matemática, a variância verdadeira não é realmente útil para propósitos experimentais, dado que ela se aproxima do infinito para todos os osciladores reais, como mostra a curva b da figura 2.2. Isso é devido a que as flutuações de frequência do tipo cintilação ("flicker") ou as do tipo caminho aleatório ("random-walk") que, como foi dito, são comuns nas fontes práticas, são não estacionárias e divergentes.

Foram então introduzidos estimadores práticos da estabilidade no domínio do tempo baseados no conceito de variância amostral, para evitar a divergência da variância verdadeira observada na maioria das fontes.

2.3.2 *Variância Amostral*

A variância amostral é uma estimacão mais prática da estabilidade no domínio do tempo, baseada em um número finito de N amostras \bar{y}_k ($k=1, \dots, N$). Cada amostra tem uma duração τ , onde a k -ésima amostra começa no instante t_k , a amostra $(k+1)$ começa no instante $t_{k+1} = t_k + T$ e o tempo morto entre duas sucessivas amostras é $T - \tau$. A quantidade T é o intervalo de repetição para medições individuais de duração τ , como mostra a figura 2.1.

A variância amostral é definida como

$$\sigma_y^2 (N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \right)^2 \quad (2.5)$$

Esta quantidade é uma variável aleatória, onde N é o tamanho da amostra. Sua média temporal $\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle$ pode ser usada como uma medida da estabilidade de frequência sobre um intervalo de tempo τ .

2.3.3 Variância de Allan

Com a variância amostral definida acima há distintos valores possíveis para os parâmetros N e T (τ está fixo já que é a duração do intervalo sobre o qual se deseja medir a estabilidade). Para atingir a meta de recomendar uma única medição no domínio do tempo que possa ser usada sem ambigüidade em todos os laboratórios do mundo, deve-se fazer alguma opção quanto a estes parâmetros.

Seguindo o trabalho pioneiro de David Allan, a comissão sobre estabilidade e frequência do IEEE recomendou usar a média da variância com $N = 2$ e amostras adjacentes, ou seja, $T = \tau$ (tempo morto igual a zero entre medições). A medida resultante é representada por $\sigma_y^2(\tau)$ e conhecida como a variância de Allan ou variância bi-amostral, dado que são agrupadas pares de medições adjacentes

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2(\tau) &= \langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j)^2 \rangle \\
&= \langle [\bar{y}_1 - \frac{1}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)]^2 + [\bar{y}_2 - \frac{1}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)]^2 \rangle \\
&= \langle \frac{1}{4} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 + \frac{1}{4} (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle \quad (2.6)$$

A variância $\sigma_y^2(\tau)$ é também uma medição teórica dado que está implícita uma duração infinita na média denotada por $\langle \rangle$. Não obstante, tem mais utilidade prática que $I^2(\tau)$, dado que existe para todas as densidades espectrais com leis de potências encontradas nos osciladores reais, exceto para o tipo de ruído caminho aleatório de frequência, em cujo caso $\sigma_y^2(\tau)$ diverge com τ (tabela 1). A escolha de $N = 2$ é a característica chave na definição de $\sigma_y^2(\tau)$.

2.3.4 Estimador da variância de Allan

Experimentalmente, só se pode ter estimações de $\sigma_y^2(\tau)$ a partir de um número finito m de amostras \bar{y}_k , tomadas sobre uma duração finita. Um estimador amplamente usado é dado por

$$\sigma_y^2(\tau, m) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} (\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)^2$$

2.3.5 Relação entre $\sigma_y^2(\tau)$ e $S_y(f)$

Cutler e Searle demonstraram que existe uma relação entre $\sigma_y^2(\tau)$ e $S_y(f)$ [7], [8], dada por

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^\infty S_y(f) \frac{\text{sen}^4(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2} df$$

Com esta expressão pode-se achar a variância de Allan $\sigma_y^2(\tau)$ para cada tipo de ruído da tabela 1, a partir da densidade espectral $S_y(f)$ correspondente.

2.4 Modelo em variáveis de estado dos erros de relógio

Após haver analisado os distintos tipos de ruído de um oscilador e a variância de Allan, que é a ferramenta que se usa para caracterizar a estabilidade, estamos em condições de apresentar um modelo em variáveis de estado dos erros de relógio.

Vamos considerar um modelo de dois estados [9], [10] que tem bom sentido intuitivo. Na figura 2.3 é mostrado o referido modelo.

A variável x_1 representa o erro de tempo, a variável x_2 um erro de frequência normalizada e u_1 e u_2 são entradas independentes de ruído branco e Gaussiano, com amplitudes espectrais S_f e S_g , respectivamente. É preciso esclarecer que o erro de frequência normalizada total é dado por $x_2 + u_1$, mas doravante nos referiremos ao estado x_2 como o erro de frequência normalizada.

Observa-se neste modelo que tanto o erro de frequência normalizada como o erro de tempo do relógio são processos estocásticos não estacionários, o que está de acordo com o analisado anteriormente. Este modelo considera que o erro de frequência normalizada tem uma componente de ruído branco (devida ao processo de ruído branco u_1) mais uma componente de ruído de tipo caminho aleatório (devida ao processo de ruído branco u_2 integrado).

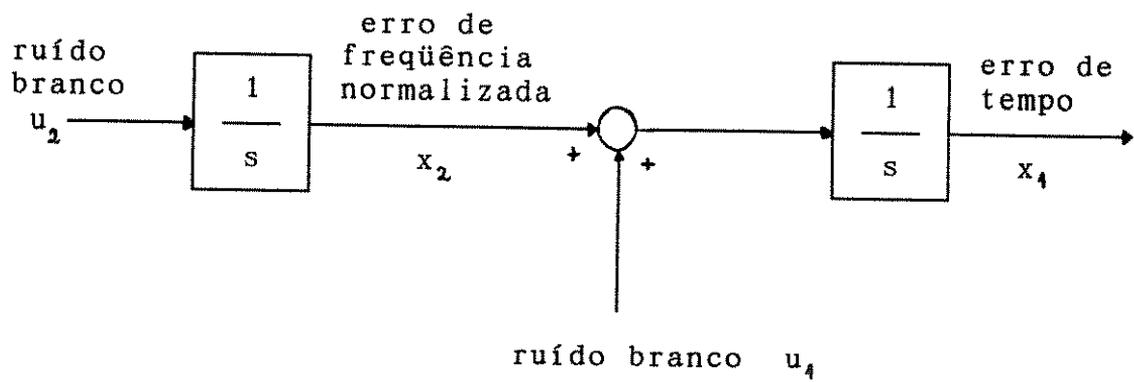


Fig. 2.3 Modelo em variáveis de estado que descreve os erros do relógio.

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = u_2$$

ou

$$\dot{x} = A x + B u$$

onde

$$x = [x_1 \ x_2]^T \quad u = [u_1 \ u_2]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar o modelo de tempo discreto associado

$$x(t_{k+1}) = F(t_{k+1}, t_k) x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_{k+1}, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

ou em notação abreviada

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k$$

devemos achar a matriz de transição de estado F_k e a matriz de covariância Q_k , que são dadas por

$$F_k = F(t_{k+1}, t_k)$$

$$Q_k = E [w_k w_k^T]$$

$$= E \left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_{k+1}, \xi) B(\xi) u(\xi) d\xi \right) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_{k+1}, \eta) B(\eta) u(\eta) d\eta \right)^T \right]$$

$$= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_{k+1}, \xi) B(\xi) E[u(\xi) u^T(\eta)] B^T(\eta) F^T(t_{k+1}, \eta) d\xi d\eta$$

Em nosso caso particular, dado que o modelo de tempo contínuo é invariante no tempo, a matriz de transição de estado pode ser calculada como

$$F_k = F(t_{k+1}, t_k) = e^{A(t_{k+1} - t_k)} = e^{A \Delta t}$$

Logo,

$$F = e^{A \Delta t} = I + A \Delta t + \frac{A^2 (\Delta t)^2}{2!} + \dots$$

onde Δt é o passo de discretização.

Em consequência,

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Esta expressão é exata, já que a exponencial matricial se reduz a dois termos porque $A^j = 0$, para $j > 1$.

Continuando, vamos calcular a matriz de covariância Q_k . Começaremos calculando o integrando da expressão de Q_k , dado por

$$\begin{aligned} E[u(\xi) u^T(\eta)] &= \begin{bmatrix} E[u_1(\xi) u_1(\eta)] & E[u_1(\xi) u_2(\eta)] \\ E[u_2(\xi) u_1(\eta)] & E[u_2(\xi) u_2(\eta)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_g \end{bmatrix} \delta(\xi - \eta) \end{aligned}$$

$$B(\xi) E[u(\xi) u^T(\eta)] B^T(\eta) = \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_g \end{bmatrix} \delta(\xi - \eta)$$

$$F(t_{k+1}, \xi) \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_g \end{bmatrix} \delta(\xi - \eta) F^T(t_{k+1}, \eta) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t_{k+1} - \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{k+1} - \eta & 1 \end{bmatrix} \delta(\xi - \eta)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Q_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & t_{k+1} - \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{k+1} - \xi & 1 \end{bmatrix} d\xi \\
&= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 1 & t_{k+1} - \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ S_g (t_{k+1} - \xi) & S_g \end{bmatrix} d\xi \\
&= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} S_f + S_g (t_{k+1} - \xi)^2 & S_g (t_{k+1} - \xi) \\ S_g (t_{k+1} - \xi) & S_g \end{bmatrix} d\xi \\
&= \begin{bmatrix} S_f \xi \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} - \frac{S_g}{3} (t_{k+1} - \xi)^3 \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} & -\frac{S_g}{2} (t_{k+1} - \xi)^2 \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} \\ -\frac{S_g}{2} (t_{k+1} - \xi)^2 \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} & S_g \xi \Big|_{t_k}^{t_{k+1}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_f \Delta t + \frac{S_g}{3} \Delta t^3 & \frac{S_g}{2} \Delta t^2 \\ \frac{S_g}{2} \Delta t^2 & S_g \Delta t \end{bmatrix} \tag{2.8}
\end{aligned}$$

É útil trabalharmos também com outra expressão da matriz Q. Em nosso caso, o sistema de tempo contínuo do qual provém este modelo tem parâmetros constantes e além disso o vetor $u = [u_1 \ u_2]^T$ é composto por processos de ruído branco. Assim, a matriz de covariância Q pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
Q &= E [x(\Delta t) x^T(\Delta t)] \text{ | com condições iniciais nulas} \\
&= \begin{bmatrix} E [x_1^2(\Delta t)] & E [x_1(\Delta t) x_2(\Delta t)] \\ E [x_1(\Delta t) x_2(\Delta t)] & E [x_2^2(\Delta t)] \end{bmatrix} \tag{2.9}
\end{aligned}$$

A fim de demonstrar a expressão acima, consideremos a expressão de Q_k

$$Q_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(t_{k+1}, \xi) B(\xi) E[u(\xi) u^T(\eta)] B^T(\eta) F^T(t_{k+1}, \eta) d\xi d\eta$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\xi_1 = \xi - t_k$$

$$\eta_1 = \eta - t_k$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e dado que o modelo de tempo contínuo tem parâmetros constantes, temos então que

$$F(t_{k+1}, \xi) = e^{A(t_{k+1} - \xi)} = e^{A[t_{k+1} - (\xi_1 + t_k)]} = e^{A(\Delta t - \xi_1)}$$

$$F(t_{k+1}, \eta) = e^{A(t_{k+1} - \eta)} = e^{A[t_{k+1} - (\eta_1 + t_k)]} = e^{A(\Delta t - \eta_1)}$$

Por outro lado,

$$B(\xi) = B(\eta) = B$$

Então,

$$Q = \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \xi_1)} B E[u(\xi_1 + t_k) u^T(\eta_1 + t_k)] B^T [e^{A(\Delta t - \eta_1)}]^T d\xi_1 d\eta_1$$

Dado que $u = [u_1 \ u_2]^T$ é um vetor de processos estacionários com correlação cruzada nula, temos

$$E[u(\xi_1 + t_k) u^T(\eta_1 + t_k)] = E[u(\xi_1) u^T(\eta_1)]$$

Logo,

$$Q = E \left[\left[\int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \xi_1)} B u(\xi_1) d\xi_1 \right] \left[\int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \eta_1)} B u(\eta_1) d\eta_1 \right]^T \right]$$

Portanto,

$$Q = E [x(\Delta t) x^T(\Delta t)] \quad | \text{com condições iniciais nulas } (x(0) = [0 \ 0]^T)$$

$$= \begin{bmatrix} E[x_1^2(\Delta t)] & E[x_1(\Delta t) x_2(\Delta t)] \\ E[x_1(\Delta t) x_2(\Delta t)] & E[x_2^2(\Delta t)] \end{bmatrix}$$

já que

$$x(\Delta t) = e^{A \Delta t} x(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} B(\tau) u(\tau) d\tau \quad | \text{com } x(0) = [0 \ 0]^T$$

$$= \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t - \tau)} B(\tau) u(\tau) d\tau$$

Assim, comparando (2.9) com (2.8), temos que

$$E[x_1^2(\Delta t)] = S_f \Delta t + \frac{S_g \Delta t^3}{3} \quad (2.10)$$

$$E[x_2^2(\Delta t)] = S_g \Delta t \quad (2.11)$$

$$E[x_1(\Delta t) x_2(\Delta t)] = \frac{S_g \Delta t^2}{2} \quad (2.12)$$

Devemos agora determinar os parâmetros da matriz de covariância Q a partir dos parâmetros de variância de Allan convencionais.

Vamos comparar $E [x_1^2(\Delta t)]$ com dados experimentais e assim obter as amplitudes espectrais S_f e S_g , que nos permitem então calcular todas as componentes da matriz de covariância Q .

A relação que existe entre a variância de Allan e a variância do erro de tempo quando as flutuações aleatórias de frequência são dos tipos indicados na tabela 1, é dada por [5]

$$E [x^2(\tau)] = \tau^2 \sigma_y^2(\tau) \quad (2.13)$$

ou

$$\sigma_y(\tau) = \frac{\sqrt{E[x^2(\tau)]}}{\tau} \quad (2.14)$$

Esta é a relação entre a raiz quadrada da variância de Allan e a variância do erro de tempo x (em nosso caso o estado x_1). Vamos concentrar-nos, então, na variância do estado x_1 . Em particular, se tomamos em (2.10) o valor eficaz (rms) de x_1 mediado durante o intervalo τ , obtemos a expressão da raiz quadrada da variância de Allan correspondente ao modelo de dois estados

$$\begin{aligned} \sigma_y(\tau) &= \frac{\sqrt{S_f \tau + \frac{S_g \tau^3}{3}}}{\tau} \\ &= \sqrt{\frac{S_f}{\tau} + \frac{S_g \tau}{3}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

É útil traçar a equação (2.15) usando escalas logarítmicas (figura 2.4). A aproximação assintótica tem a forma de "V". Gráficos deste estilo são conhecidos como gráficos de variância de Allan (em realidade é traçada a raiz quadrada da variância de Allan) e são uma forma conveniente de apresentar a informação de estabilidade de um relógio. Para encontrar o erro de tempo raiz quadrática média (rms) no instante τ , deve-se ler o valor correspondente na ordenada e multiplicá-lo por τ .

Por outro lado, consideremos a variância de Allan $\sigma_y^2(\tau)$ real de um oscilador. Suponhamos que os ruídos que o afetam são os da tabela 1, ou seja, ruído branco, cintilação e caminho aleatório de frequência. Então, considerando-os independentes, a variância de Allan total será a soma das variâncias.

Usando as expressões da referida tabela para a variância de cada ruído, obtemos

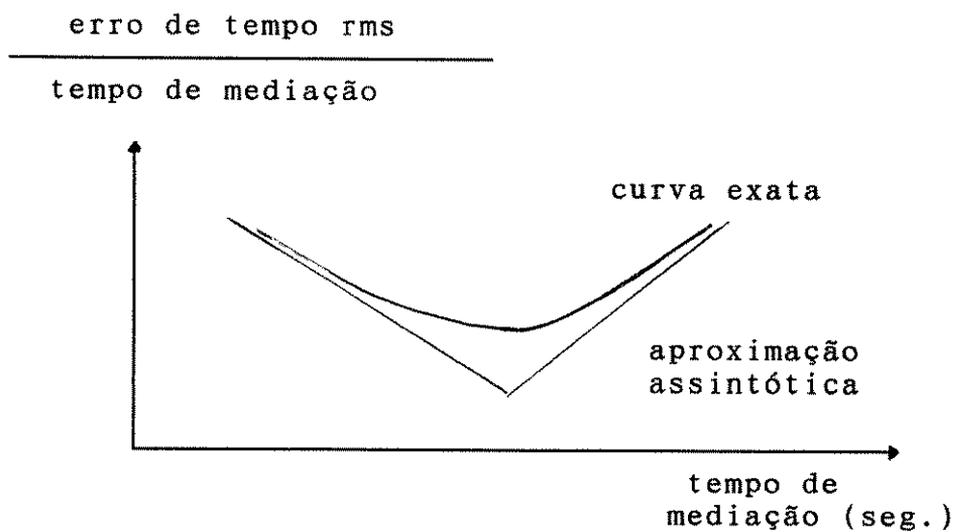


Fig. 2.4 Gráfico de variância de Allan para o modelo dos erros do relógio de dois estados.

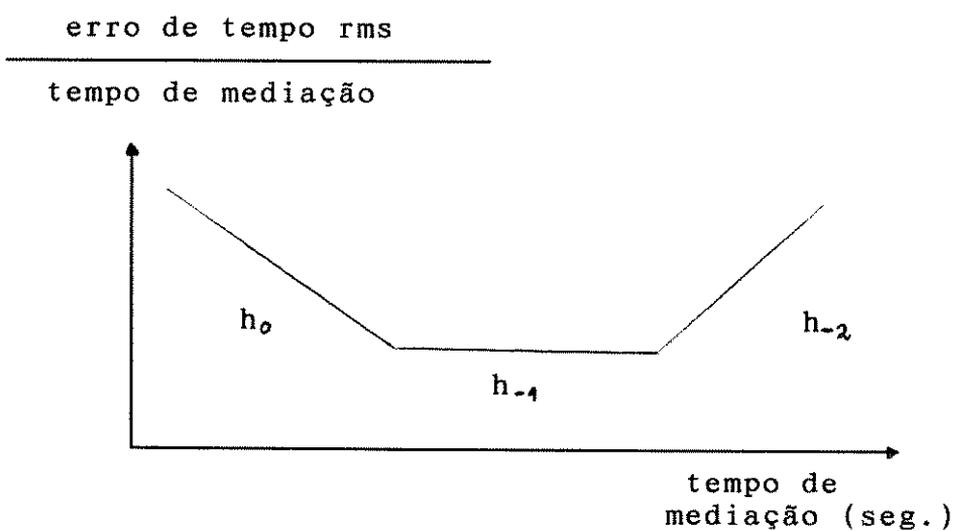


Fig. 2.5 Variância de Allan assintótica típica de um oscilador a cristal.

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{h_0}{2\tau} + 2 (\ln(2)) h_{-1} + \frac{2\pi^2 h_{-2} \tau}{3} \quad (2.16)$$

Então, usando (2.13) e (2.16) temos

$$\begin{aligned} E [x^2(\tau)] &= \tau^2 \sigma_y^2(\tau) \\ &= \frac{h_0}{2} \tau + 2 (\ln(2)) h_{-1} \tau^2 + \frac{2\pi^2 h_{-2}}{3} \tau^3 \quad (2.17) \end{aligned}$$

Na figura 2.5 é mostrada uma curva assintótica de variância de Allan típica de um oscilador a cristal. Observa-se uma zona plana, enquanto que o modelo de dois estados não a apresenta. Esta zona corresponde ao ruído de cintilação, "flicker" (termo h_{-1} de (2.16)). O ruído "flicker" produz um termo da ordem de τ^2 na expressão da variância do erro de tempo (2.17) e é impossível modelar este termo exatamente com um modelo de estados de ordem finita (como é mostrado no Apêndice 1). Faremos então a seguinte aproximação: Primeiro ignoraremos o ruído de cintilação e calcularemos a curva em "V" que se ajusta bem para tempos de mediação pequenos e grandes; e em seguida elevaremos a curva em "V" para atingir um melhor ajuste na zona de ruído de cintilação.

Consideremos um oscilador a cristal e utilizemos os seguintes valores típicos dos parâmetros [9]

$$h_0 = 9.43 (10^{-20}) \text{ seg} \quad h_{-1} = 1.8 (10^{-19}) \quad h_{-2} = 3.8 (10^{-21}) \text{ seg}^{-1}$$

Voltemos ao problema de determinar as amplitudes espectrais S_f e S_g . Igualando os termos de igual ordem em Δt das equações (2.10) e (2.17), obtemos

$$S_f \approx \frac{h_0}{2}$$

$$S_g \approx 2\pi^2 h_{-2}$$

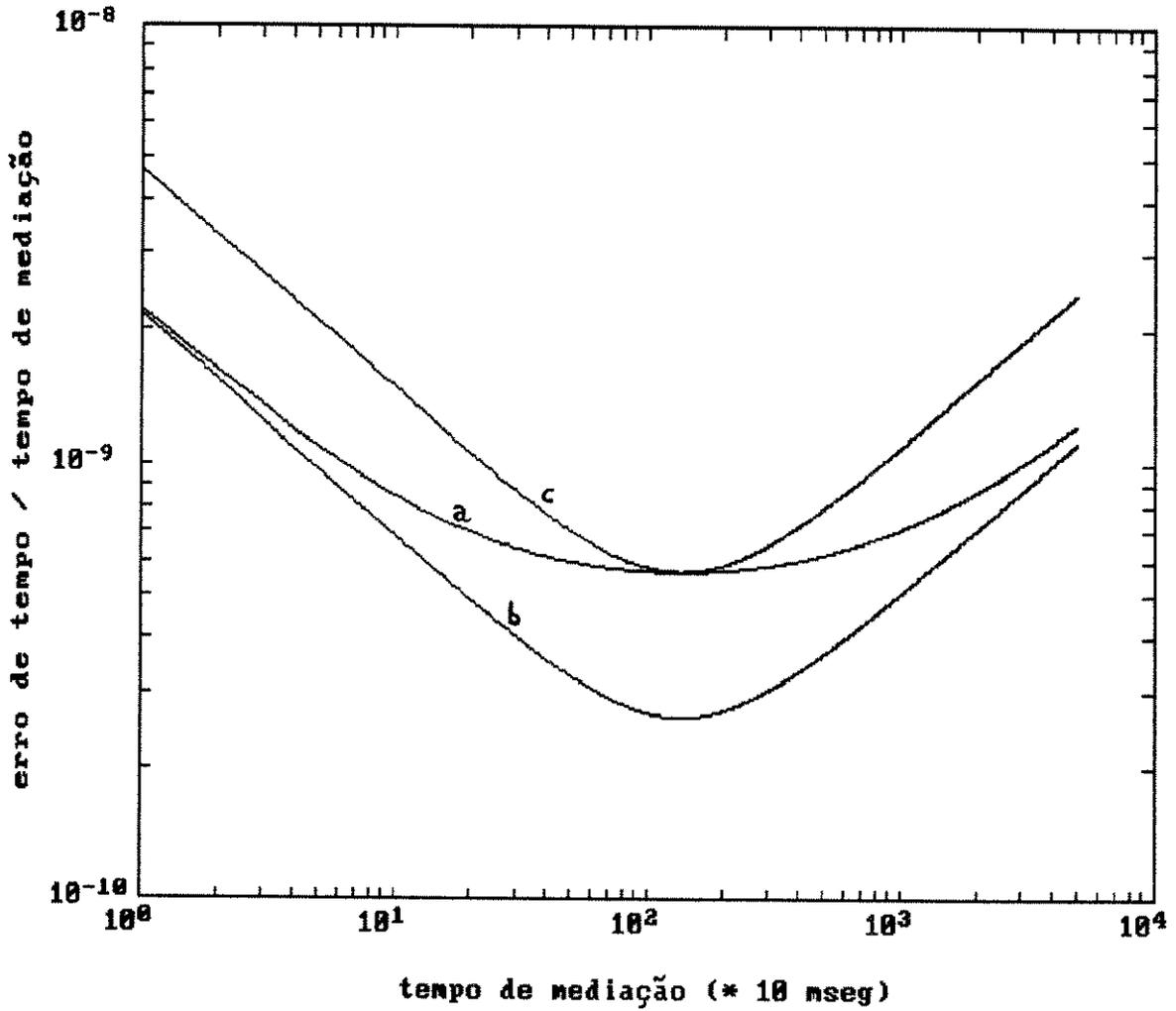


Fig. 2.6 Curva real da variância de Allan (curva a), a aproximação sem ter em conta o ruído de cintilação (curva b) e a curva da variância de Allan anterior elevada do valor 2.159, que é a que usaremos finalmente no modelo (curva c).

Agora então elevamos a curva em "V" do modelo de dois estados de um fator de aproximadamente 2.159 (ou seja, os valores obtidos anteriormente devem ser multiplicados por 4.66, pois o gráfico representa a raiz quadrada da variância de Allan), para atingir uma melhor adaptação geral, como é observado na figura 2.6. Nela é representada a curva real da variância de Allan (curva a), a aproximação sem ter em conta o ruído de cintilação (curva b) e a curva da variância de Allan anterior elevada do valor mencionado, que é a que usaremos finalmente no modelo (curva c). A curva do modelo estará então um pouco acima da verdadeira para tempos de mediação pequenos e grandes, mas é preferível realizar um projeto que seja mais conservativo que otimista.

Portanto, os valores finais de projeto para S_f e S_g são

$$S_f = 4.66 \frac{h_0}{2} \quad (2.18)$$

$$S_g = 4.66 \cdot 2 \pi^2 h_{-2} \quad (2.19)$$

Assim, usando as expressões (2.18) e (2.19) obtemos

$$S_f = 2.1972 (10^{-19}) \text{ seg} \quad S_g = 3.4954 (10^{-19}) \text{ seg}^{-1}$$

Adotando o intervalo de discretização em 0.125 mseg devido a que 8 kHz é a frequência fundamental em comunicações digitais, temos

$$\Delta t = 1.25 (10^{-4}) \text{ seg}$$

e usando (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) e (2.12) obtemos

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1.25 (10^{-4}) \text{ seg} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2.7465 (10^{-23}) \text{ seg}^2 & 2.7308 (10^{-27}) \text{ seg} \\ 2.7308 (10^{-27}) \text{ seg} & 4.3693 (10^{-23}) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

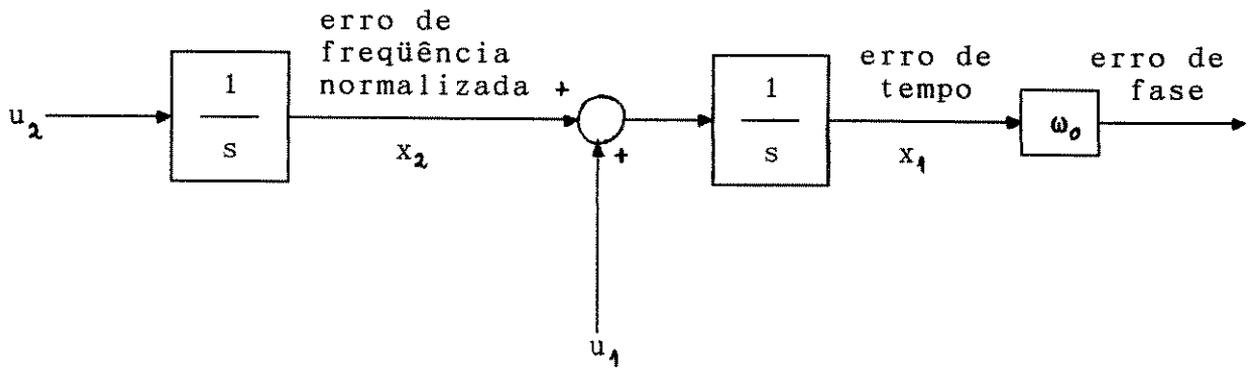


Fig. 2.7.a Modelo cujos estados estão normalizados.

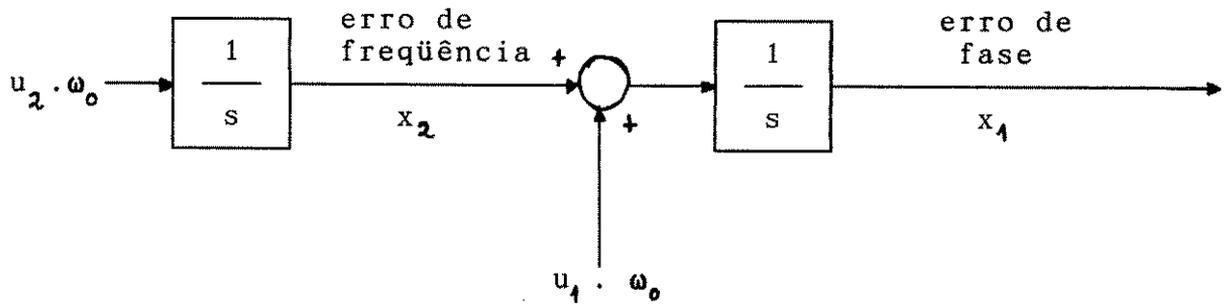


Fig. 2.7.b Modelo cujos estados são o erro de fase e o erro de freqüência.

No modelo da figura 2.3, os estados estão normalizados de tal forma que x_1 é o erro de tempo e x_2 é o erro de frequência normalizada.

Para passar do erro de tempo ao erro de fase devemos multiplicar pela frequência nominal do oscilador ω_0 (figura 2.7.a). Reordenando os blocos passamos à figura 2.7.b, onde agora x_1 representa o erro de fase (em radianos) e x_2 representa o erro de frequência (em radianos por segundo).

Note que agora as entradas de ruído branco u_1 e u_2 estão multiplicadas por ω_0 . Com isto as novas amplitudes espectrais são

$$S_f^* = S_f \omega_0^2$$

$$S_g^* = S_g \omega_0^2$$

e a matriz de covariância de ruído do novo modelo é então dada por

$$Q^* = Q \omega_0^2$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} 6.9394 (10^{-14}) \text{ rad}^2 & 6.8997 (10^{-18}) \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}} \\ 6.8997 (10^{-18}) \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}} & 1.1039 (10^{-13}) \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}^2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

As equações (2.20) e (2.22) são os parâmetros do modelo dos erros do relógio e serão usadas nos capítulos seguintes.

Capítulo 3

PROJETO ÓTIMO DE LAÇO DE SINCRONISMO DE FASE

3.1 *Considerações iniciais*

Consideremos uma rede síncrona na qual é utilizada a técnica de sincronização mestre-escravo.

A confiabilidade e a estabilidade de curto prazo do sistema, melhora notavelmente se o sinal de referência, proveniente do relógio mestre, é usado para controlar um relógio local no nó através de um laço de sincronismo de fase (PLL), em lugar de usar diretamente o sinal de referência. Por exemplo, se o sinal mestre é interrompido, o relógio local pode funcionar durante certo período antes que a sincronização se perca totalmente. Além disso, o ruído de alta frequência, devido aos meios de transmissão, compromete substancialmente a estabilidade de curto prazo do sinal recebido. O laço de sincronismo de fase combina a boa estabilidade a longo prazo do sinal de referência recebido, com a excelente estabilidade a curto prazo do sinal do relógio local.

Neste capítulo é procurado o método ótimo de se projetar o laço de sincronismo de fase para se atingir este equilíbrio entre o sinal de referência e o local. É preciso destacar que as referências [2] e [3] propõem métodos de projeto, mas estes são sub-ótimos e empíricos. Aqui desenvolveremos uma técnica de otimização baseada na aplicação de um filtro de Kalman para estimar o erro de tempo.

Seja um nó i do primeiro nível, o qual recebe o sinal

$$A \sin [\omega_0 t] + N(t) \quad (3.1)$$

ou seja, recebe $T(t) + n_r(t)$, onde $T(t)$ é a escala de tempo do relógio mestre (doravante vamos desprezar o retardo de transmissão, supondo que este se encontra compensado pela técnica de "relógio adiantado") e $n_r(t)$ é o erro de tempo que apresenta o sinal de referência devido ao ruído aditivo do canal $N(t)$, o qual supomos

branco e Gaussiano. Além disso, o nó conta com sua própria escala de tempo gerada localmente, $T_i(t)$, que é afetada pela estabilidade de seu relógio local, a qual pode-se caracterizar pelo modelo dos processos erro de fase e erro de frequência analisados no capítulo 2. Ou seja, $T_i(t) = T(t) + n_c(t)$, onde $n_c(t)$ representa o processo erro de tempo do relógio local. Portanto, o nó dispõe de duas observações do mesmo sinal: $T(t)$, a escala de tempo real; mas contaminadas com ruído. O problema consiste em como combinar de forma ótima toda a informação disponível para obter a melhor estimativa $\hat{T}(t)$ que minimize o erro quadrático médio de tempo $E[T(t) - \hat{T}(t)]^2$.

Consideremos o problema de combinar duas medições ruidosas independentes do mesmo sinal, $T(t) + n_r(t)$ e $T(t) + n_c(t)$, onde $n_r(t)$ é o ruído do sinal de referência e $n_c(t)$ é o ruído do relógio local. Esse problema pode ser resolvido com a estrutura de filtros complementares da figura 3.1.a, onde o termo de sinal não é afetado pela escolha de $G(s)$. Por outro lado, os dois ruídos de entrada são modificados pelas funções de transferência complementares $[1+G(s)]$ e $-G(s)$. A figura 3.1.b é equivalente à 3.1.a onde $G(s)$ deve ser um filtro que receba como entrada o sinal $n_c(t) - n_r(t)$ e sua saída seja a estimativa $-\hat{n}_c(t)$, de tal forma a minimizar o ruído do sinal de saída no sentido quadrático médio. Vemos então que a performance do sistema depende do erro quadrático médio de estimação do filtro $G(s)$. Trataremos então de chegar à situação da figura 3.1.b.

Partimos da hipótese de que é utilizado um laço de sincronismo de fase para sincronizar o relógio local com o sinal de referência que é recebido proveniente do relógio mestre.

Vamos supor que o relógio local é implementado de forma analógica com um oscilador controlado por tensão (VCO). Mais adiante justificaremos a escolha desta técnica.

O sinal de saída do VCO é dado por

$$\text{sen} \left[\omega_0 t + C_0 \int_0^t u(\tau) d\tau - \phi(t) \right] \quad (3.2)$$

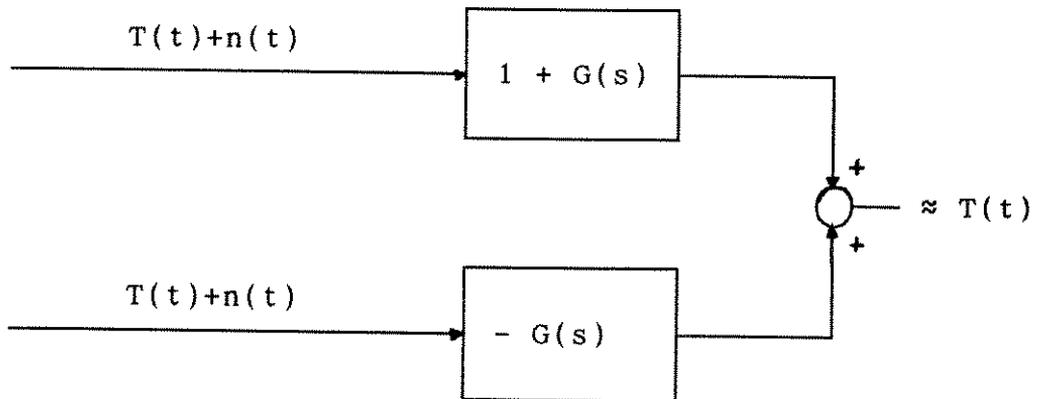


Fig. 3.1.a Filtros complementares.

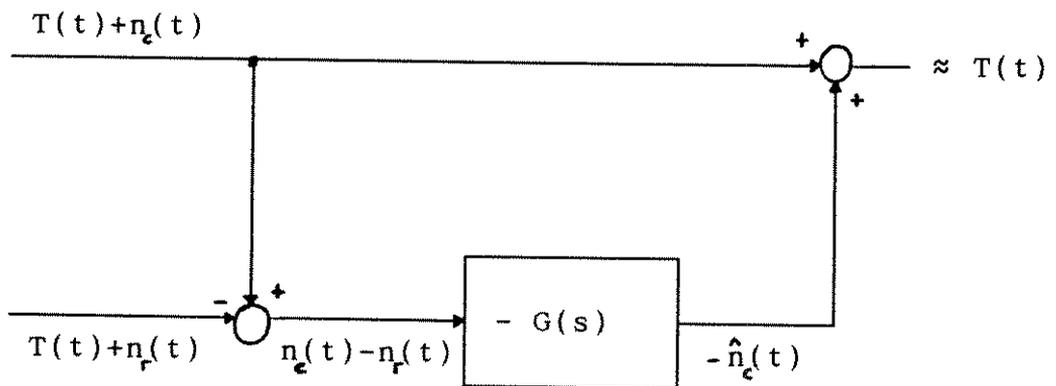


Fig. 3.1.b Diagrama equivalente.

onde $u(t)$ é o sinal de entrada de controle do VCO em Volts, C_0 é a constante do VCO em rad/(volts.seg), $\omega_0 = 2\pi/T_0$ é a frequência nominal de oscilação e $\phi(t)$ é o processo erro de fase do oscilador.

Consideremos a implementação do laço de sincronismo de fase da figura 3.2. O sinal de entrada, após de ser filtrado, é amostrado nos instantes de cruzamento de zero com derivada positiva do sinal de saída do VCO. As amostras são digitalizadas e logo processadas pelo filtro digital do laço $D(z)$. Sua saída é convertida para analógica e é usada para controlar a frequência do VCO. O sinal de saída útil é o sinal * gerado pelo detector de cruzamento de zero positivo.

Nosso objetivo é o projeto ótimo do laço de sincronismo de fase da figura 3.2, que consiste em encontrar o filtro digital, $D(z)$, que minimiza o erro quadrático médio de tempo do relógio local controlado, ou seja, do sinal *. Portanto, o intervalo entre os pulsos de saída do detector de cruzamento de zero será de aproximadamente T_0 seg. A temporização ("timing") do laço é dada justamente pela saída do detector de cruzamento de zero. Conseqüentemente, a saída do conversor A/D, a saída do filtro digital do laço $D(z)$ e a saída do conversor D/A, mudarão aproximadamente a cada T_0 segundos, nos instantes de amostragem $t_k \approx kT_0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Consideraremos desprezíveis os retardos dos conversores e do filtro frente a T_0 ($\sum \tau_i \ll T_0$) e que o detector de cruzamento de zero não tem nenhum retardo (já que se tivesse poder-se-ia incluí-lo no modelo dos erros de fase do VCO). Com isto $u(t)$ permanece constante entre os instantes t_{k-1} e t_k e, além disso, dado que $t_k - t_{k-1} \approx T_0$ ($\forall k$), temos

$$C_0 \int_0^{t_k} u(\tau) d\tau = C_0 \left[\int_0^{t_{k-1}} u(\tau) d\tau + u(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1}) \right]$$

$$\approx C_0 \int_0^{t_{k-1}} u(\tau) d\tau + C_0 u(t_{k-1}) T_0$$

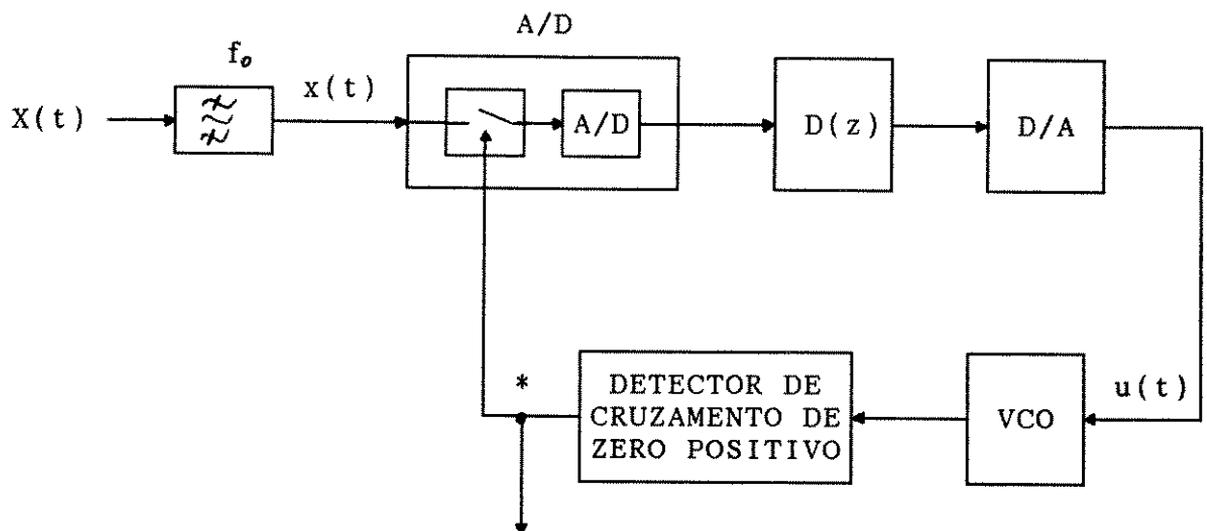


Fig. 3.2 Diagrama em blocos do laço de sincronismo de fase.

Se definirmos

$$y(t_k) \triangleq C_0 \int_0^{t_k} u(\tau) d\tau$$

então,

$$y(t_k) = y(t_{k-1}) + C_0 T_0 u(t_{k-1})$$

ou

$$y_k = y_{k-1} + C_0 T_0 u_{k-1}$$

e em termos da frequência complexa z

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{C_0 T_0}{z - 1} = C(z) \quad (3.3)$$

Os instantes t_k nos quais o sinal de saída do VCO cruza pelo zero com derivada positiva, são aqueles em que

$$\text{sen} \left[\omega_0 t_k + C_0 \int_0^{t_k} u(\tau) d\tau - \phi(t_k) \right] = 0$$

$$\omega_0 t_k + C_0 \int_0^{t_k} u(\tau) d\tau - \phi(t_k) = k 2\pi$$

$$2\pi \left[\frac{t_k}{T_0} + \frac{y(t_k)}{2\pi} - \frac{\phi(t_k)}{2\pi} \right] = 2\pi k$$

Logo,

$$t_k = k T_0 - \frac{1}{\omega_0} y(t_k) + \frac{1}{\omega_0} \phi(t_k)$$

Aqui se manifestam os efeitos do erro de fase do VCO sobre os instantes de cruzamento de zero.

Sejam $y(k) = y(t_k)$ e $\phi(k) = \phi(t_k)$. Então,

$$t_k = k T_0 - \frac{1}{\omega_0} y(k) + \frac{1}{\omega_0} \phi(k) \quad (3.4)$$

Podemos definir o processo erro de tempo do relógio local controlado como a sequência

$$e_t(k) \triangleq t_k - k T_0 = -\frac{1}{\omega_0} y(k) + \frac{1}{\omega_0} \phi(k)$$

O processo erro de fase do relógio local é dado por

$$e_\phi(k) \triangleq \omega_0 e_t(k) = -y(k) + \phi(k) \quad (3.5)$$

O sinal de entrada proveniente do relógio de referência é filtrado e logo amostrado nos instantes t_k . De (3.1), (3.4) e (3.5), conclui-se que a saída do amostrador é dada por

$$\begin{aligned} x_k \triangleq x(t_k) &= A \text{sen}(\omega_0 t_k) + n(t_k) \\ &= A \text{sen}[k 2\pi - y(t_k) + \phi(t_k)] + n(t_k) \\ &= A \text{sen}[\phi(t_k) - y(t_k)] + n(t_k) \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_k = A \text{sen}[e_\phi(k)] + n(t_k) \quad (3.6)$$

Devemos agora analisar as características do processo $n(t_k)$. Como é mostrado na figura 3.3, o sinal proveniente do relógio mestre, $A \text{sen}(\omega_0 t) + N(t)$, passa por um filtro passa-faixa com frequência central $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ e cuja largura de faixa é escolhida próxima de f_0 . Com esta suposição, o processo de ruído amostrado $\{n_k\} \triangleq \{n(t_k)\}$ (onde $t_k \approx kT_0$) será aproximadamente uma sequência de variáveis aleatórias Gaussianas, INDEPENDENTES e idênticamente distribuídas com média zero e variância $\sigma^2\{n_k\} = N_0 f_0$, como será demonstrado adiante.

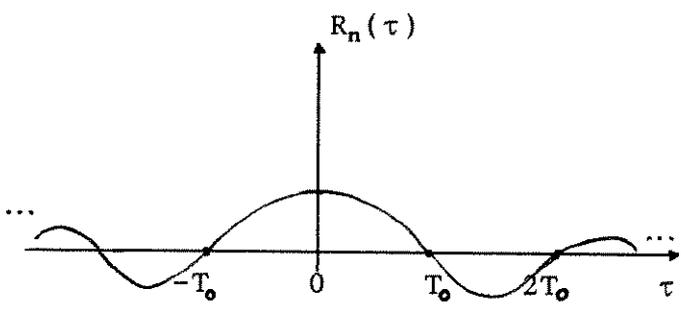
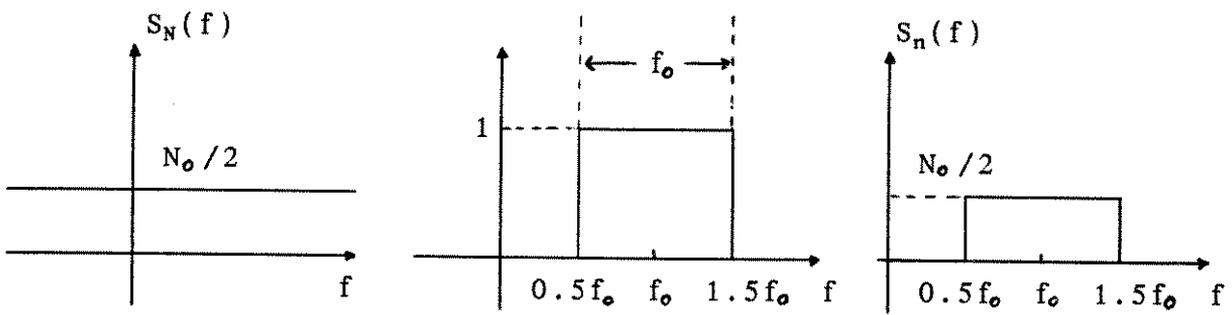
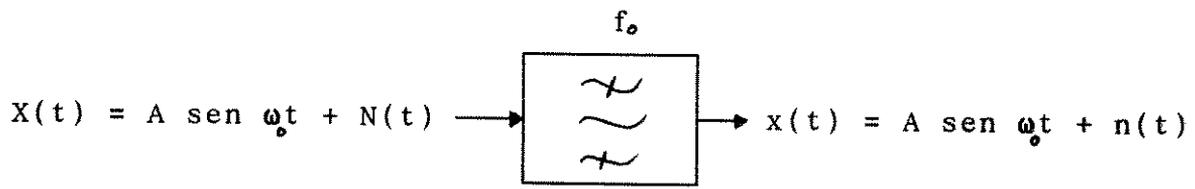


Fig. 3.3 Densidade espectral de potência e função de autocorrelação do processo $n(t)$.

Na figura 3.3 são mostradas as densidades espectrais de $N(t)$ (o ruído de entrada do filtro) e de $n(t)$ (o ruído de saída do filtro), bem como a função de autocorrelação do processo $n(t)$. Observa-se que esta tem zeros em kT_0 , portanto $\{n_k\}$ será aproximadamente uma sequência "branca" se os instantes de amostragem forem $t_k \approx kT_0$. Ademais,

$$\sigma^2 [n(t_k)] = E[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = N_0 f_0$$

Então,

$$E [n_k n_l] = N_0 f_0 \delta(k - l) \quad (3.7)$$

Logo, x_k passa pelo conversor A/D com constante C_1 [1/volts], pelo filtro de laço $D(z)$ e pelo conversor D/A com constante C_2 [volts] para gerar a entrada de controle u_k do VCO. Com isto se obtém o modelo matemático da figura 3.4, correspondente ao diagrama em blocos da figura 3.2.

Dado que o objetivo procurado é a sincronização em fase e frequência do relógio local com o de referência, deseja-se que $t_k \approx kT_0$, então (por (3.5)) deve-se ter $e_\phi(k) = \phi(k) - y(k) \approx 0$. Logo, pode-se fazer a seguinte aproximação

$$\text{sen} [\phi(k) - y(k)] \approx \phi(k) - y(k) \quad (3.8)$$

com a qual o modelo da figura 3.4 é convertido no modelo linearizado da figura 3.5.

Assim, o objetivo é encontrar o filtro de laço $D(z)$ que minimize o valor quadrático médio do processo $e_\phi(k)$. Todas as demais constantes e parâmetros serão supostamente conhecidos.

Devido a que o modelo da figura 3.5 é linear, é válido aplicar o princípio da superposição. Além disso, podemos utilizar transformadas Z para calcular as funções de transferência. Sejam

$$E_\phi(z) = Z [e_\phi(k)] \quad N(z) = Z [n(k)]$$

$$\Phi(z) = Z [\phi(k)] \quad U(z) = Z [u(k)]$$

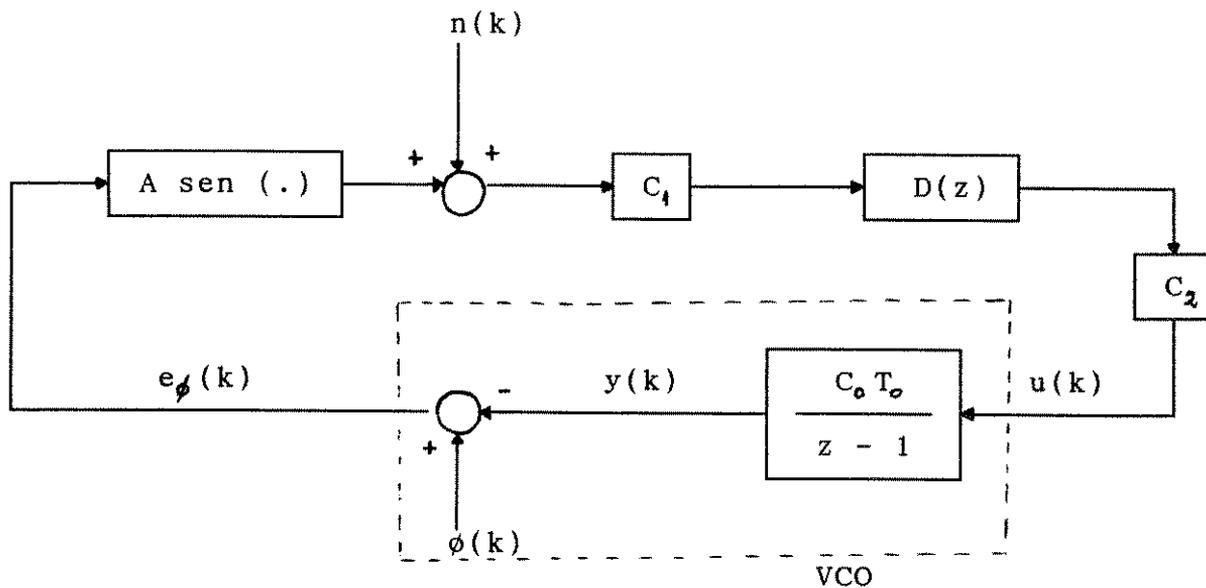


Fig. 3.4 Modelo matemático do laço.

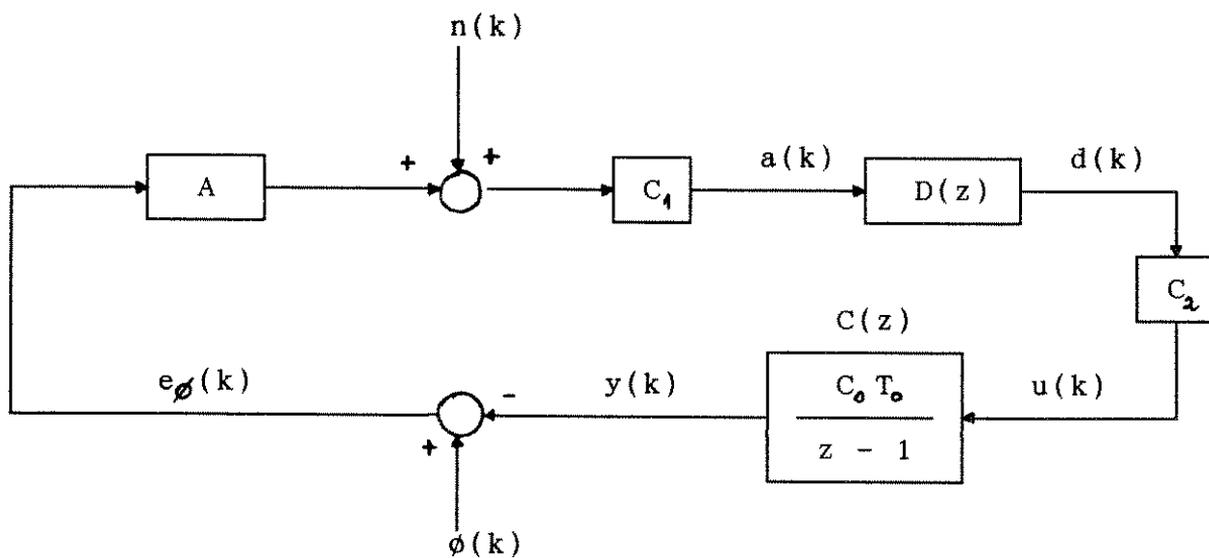


Fig. 3.5 Modelo matemático linearizado.

Cabe aclarar que, rigorosamente, estas sequências não têm transformada Z por serem processos aleatórios; mas a suposição de sequência determinística facilita o cálculo das funções de transferência. Doravante, as transformadas Z deste tipo de sequência devem ser entendidas da mesma maneira.

Então, com $\phi = 0$

$$E_{\phi}(z) = - C(z) U(z) = - C(z) C_2 D(z) C_1 [N(z) + A E_{\phi}(z)]$$

$$E_{\phi}(z) [1 + A C_1 C_2 C(z) D(z)] = - C_1 C_2 C(z) D(z) N(z)$$

Logo,

$$E_{\phi}(z) = - \frac{C_1 C_2 C(z) D(z)}{1 + A C_1 C_2 C(z) D(z)} N(z)$$

Seja

$$F(z) = C_1 C_2 C(z) D(z) \quad (3.9)$$

Então,

$$E_{\phi}(z) = - \frac{F(z)}{1 + A F(z)} N(z)$$

Fazendo

$$H(z) = - \frac{F(z)}{1 + A F(z)} \quad (3.10)$$

obtemos,

$$E_{\phi}(z) = H(z) N(z)$$

onde $H(z)$ é a transferência entre $n(k)$ e $e_{\phi}(k)$, com $\phi(k) = 0$.
Com $n = 0$ temos que

$$E_{\phi}(z) = \Phi(z) - C(z) U(z) = \Phi(z) - C(z) C_2 D(z) C_1 A E_{\phi}(z)$$

$$E_{\phi}(z) [1 + A C_1 C_2 C(z) D(z)] = \Phi(z)$$

Logo,

$$E_{\phi}(z) = \frac{1}{1 + A C_1 C_2 C(z) D(z)} \Phi(z)$$

ou

$$E_{\phi}(z) = \frac{1}{1 + A F(z)} \Phi(z) = [1 + A H(z)] \Phi(z)$$

Então, aplicando o princípio da superposição

$$E_{\phi}(z) = H(z) N(z) + [1 + A H(z)] \Phi(z) = \Phi(z) + H [A \Phi(z) + N(z)]$$

Logo,

$$e_{\phi}(k) = \phi(k) + h(k) * [A \phi(k) + n(k)] \quad (3.11)$$

onde

$$h(k) = Z^{-1}[H(z)]$$

e * representa o produto de convolução.

Dado que se procura minimizar o valor quadrático médio do processo $e_{\phi}(k)$, deve-se ter $h(k) * [A \phi(k) + n(k)] = -\hat{\phi}(k)$, como é depreendido de (3.11). Portanto, deve-se procurar o filtro $h(k)$ tal que recebendo como entrada $A \phi(k) + n(k)$, forneça na saída $-\hat{\phi}(k)$, sendo $\hat{\phi}(k)$ a melhor estimativa do processo $\phi(k)$ no sentido quadrático médio.

Então, $h(k)$ deve ser um filtro linear em tempo discreto que recebe uma observação do processo a estimar $A \phi(k)$, com o ruído adicionado, e deve produzir $-\hat{\phi}(k)$, como é representado na figura 3.6.

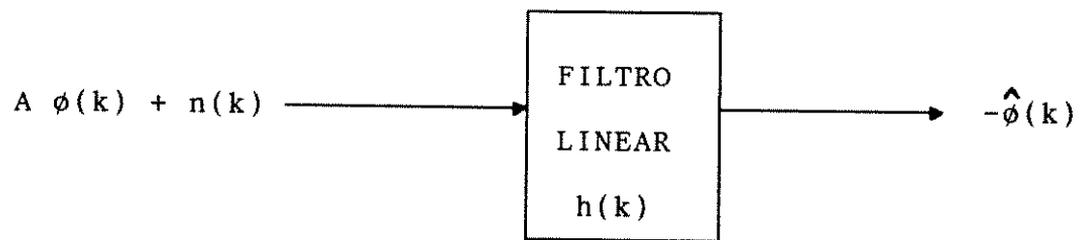


Fig. 3.6 Filtro linear com resposta impulsiva $h(k)$.

Chegamos então, a uma situação equivalente à da figura 3.1.b, mas em tempo discreto, onde o filtro $h(k)$ cumpre o papel do filtro $G(s)$, já que recebe a soma de dois processos aleatórios e deve estimar um deles, o erro de fase do relógio local. Além disso, a performance do sistema será dada pelo valor quadrático médio do erro em sua estimação.

Lembremos que o processo $n(k)$ é Gaussiano e branco com variância $E[n^2(k)] = N_0 f_0$ e $\phi(k)$ é o processo não estacionário que representa o erro de fase do relógio local. Justamente pelo fato de que este processo é não estacionário, o filtro $h(k)$ não pode ser projetado mediante o uso da teoria de Wiener. Utilizaremos um filtro de Kalman que, como se sabe, pode ser aplicado à estimação de processos não estacionários.

Suponhamos que o filtro de Kalman seja assintoticamente invariante no tempo, o que garante que, em regime estacionário, sua transferência pode ser representada por $H(z)$. Logo, usando (3.9) e (3.10) pode-se encontrar o filtro de laço ótimo $D(z)$, pois

$$H(z) = - \frac{F(z)}{1 + A F(z)} = - \frac{C_1 C_2 C(z) D(z)}{1 + A C_1 C_2 C(z) D(z)}$$

implica em

$$D(z) = - \frac{H(z)}{C_1 C_2 C(z) [1 + A H(z)]} \quad (3.12)$$

Seja

$$H(z) = \frac{NH}{DH}$$

onde $NH(z)$ e $DH(z)$ são os polinômios do numerador e denominador de $H(z)$. Além disso, lembremos que

$$C(z) = \frac{C_0 T_0}{z-1}$$

Então substituindo em (3.12)

$$D(z) = - \frac{\frac{NH}{DH}}{\frac{T_0 C_0}{z-1} C_1 C_2 \left[1 + A \frac{NH}{DH} \right]} = - \frac{NH (z-1)}{T_0 C_0 C_1 C_2 [DH + A NH]} \quad (3.13)$$

Observa-se que se a transferência $H(z)$ fosse um FILTRO, teríamos $\text{GRAU}(NH) = \text{GRAU}(DH)$, o que implica que $\text{GRAU}(ND) > \text{GRAU}(DD)$, onde ND e DD são os polinômios do numerador e denominador de $D(z)$. Isto resultaria em $D(z)$ não causal, não podendo portanto funcionar em tempo real. Em consequência, $H(z)$ deve ser um PREDITOR no sentido de que sua saída no instante k não depende de sua entrada no instante k , mas das entradas anteriores. Com isto, $\text{GRAU}(DH) > \text{GRAU}(NH)$ resulta em $\text{GRAU}(ND) \leq \text{GRAU}(DD)$. Portanto, $H(z)$ deve ser um PREDITOR de Kalman a "um passo", dado que é o preditor linear que tem a melhor performance. Assim, $H(z)$ recebe no instante k a observação $A\phi(k)+n(k)$ e produz como saída $-\hat{\phi}(k/k-1)$, ou seja, a melhor estimacão de $-\phi(k)$ dispondo das observacões até o instante $k-1$, inclusive, o que é representado na figura 3.7. A observacão do instante k não pode ser usada para a estimacão de $-\phi(k)$ porque, como já foi dito, resultaria em $D(z)$ não causal. Isto é devido ao retardo introduzido pelo bloco que denominamos $C(z)$, o qual faz parte da transferência a laço fechado $H(z)$.

Com respeito à estimacão que produz $H(z)$, pode-se dizer que se comporta como um preditor "atrasado", já que entrega a predição $-\hat{\phi}(k/k-1)$ no instante k .

Em resumo, o preditor de Kalman a um passo, $H(z)$, não está realmente presente no laço, mas é a transferência ótima que se deve verificar entre a entrada $n(k)$ e a saída $e_\phi(k)$, com a entrada $\phi(k)=0$, para minimizar o valor quadrático médio do processo erro de fase ($E[e_\phi^2(k)]$). A equação (3.13) relaciona a transferência deste preditor de Kalman com a do filtro real do laço $D(z)$. Continuando, então, vamos projetar o preditor e logo após encontrar a expressão do filtro ótimo $D(z)$.

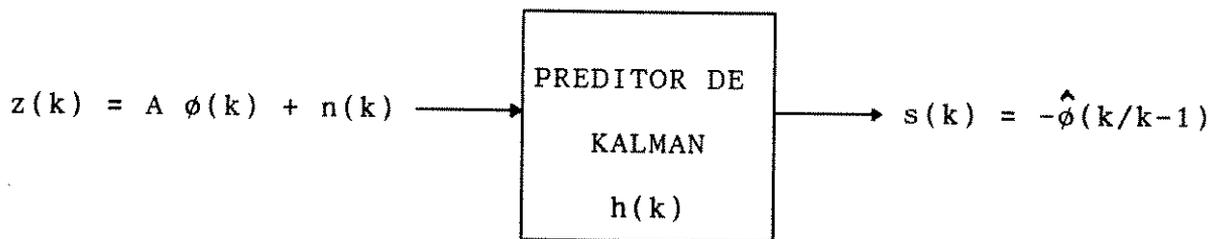


Fig. 3.7 Preditor de Kalman a "um passo" que estima o erro de fase $\phi(k)$ do relógio local.

Como o preditor deve estimar $-\phi(k)$, então lembremos, do capítulo 2, o modelo em variáveis de estado dos erros do relógio local

$$x_{k+1} = F x_k + w_k \quad (3.14)$$

com

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{bmatrix}$$

onde $x^1 = \phi$ representa o erro de fase e x^2 é o erro de frequência, sendo que a matriz F é dada por

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde Δt é o intervalo de discretização, que em nosso caso é igual a T_0 , ou seja, o período nominal do relógio.

Além disso,

$$E [w_k w_j] = Q \delta(k - j)$$

onde Q é a matriz de covariância dada pela equação (2.8). A observação deve ser posta na forma

$$z_k = H x_k + v_k \quad (3.15)$$

onde H é a matriz de observação, que não deve ser confundida com a transferência $H(z)$ do preditor.

A entrada ao preditor (figura 3.7) é

$$z_k = A \phi_k + n_k$$

Logo,

$$H = [A \ 0] \quad (3.16)$$

e $v(k)=n(k)$ é o processo de ruído branco caracterizado por (3.7). Com isto, a matriz de covariância do ruído de observação, que em nosso caso se reduz a um escalar, é

$$R = E [v_k v_k^T] = E [n_k^2] = \sigma_n^2 = N_0 f_0$$

Portanto, (3.14) e (3.15) são as equações do modelo de sinal e da observação, respectivamente.

Sejam

$\hat{x}_{k/k-1}$: a estimação do vetor de estados no instante k , x_k , dado que dispomos da observação até o instante $k-1$.

$\hat{x}_{k/k}$: a estimação de x_k dado que dispomos das observações até o instante k .

$\Sigma_{k/k-1}$ e $\Sigma_{k/k}$: as matrizes de covariância dos erros das estimações anteriores, dadas por

$$\Sigma_{k/k-1} = E [(x_k - \hat{x}_{k/k-1}) (x_k - \hat{x}_{k/k-1})^T]$$

$$\Sigma_{k/k} = E [(x_k - \hat{x}_{k/k}) (x_k - \hat{x}_{k/k})^T]$$

As equações do filtro de Kalman são as seguintes:

GANHO DE KALMAN:

$$K_k = \Sigma_{k/k-1} H^T (H \Sigma_{k/k-1} H^T + R)^{-1} \quad (3.17)$$

ESTIMAÇÃO ATUALIZADA:

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (z_k - H \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.18)$$

MATRIZ DE COVARIÂNCIA DO ERRO DA ESTIMAÇÃO ATUALIZADA:

$$\Sigma_{k/k} = (I - K_k H) \Sigma_{k/k-1} \quad (3.19)$$

ESTIMAÇÃO A PRIORI:

$$\hat{x}_{k+1/k} = F \hat{x}_{k/k} \quad (3.20)$$

MATRIZ DE COVARIÂNCIA DO ERRO DA ESTIMAÇÃO A PRIORI:

$$\Sigma_{k+1/k} = F \Sigma_{k/k} F^T + Q \quad (3.21)$$

onde estamos considerando que em nosso caso as matrizes F, Q, H e R são invariantes no tempo.

A inicialização do filtro é dada por

$$\hat{x}_{0/-1} = E [x_0] = \bar{x}_0$$

$$\Sigma_{0/-1} = E [(x_0 - \hat{x}_{0/-1}) (x_0 - \hat{x}_{0/-1})^T] = P_0$$

Em nosso caso, vamos supor que inicialmente o relógio local é ajustado tal que seus erros de fase e de frequência são nulos em $t=0$. Então, a estimação inicial a priori e a matriz de covariância do erro desta estimação são dadas por

$$\hat{x}_{0/-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{0/-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como foi dito, em nosso caso devemos usar a predição a um passo $\hat{x}_{k+1/k}$. Logo, usando (3.18) e (3.20), em estado estacionário teremos

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1/k} &= F \hat{x}_{k/k} = F [\hat{x}_{k/k-1} + K (z_k - H \hat{x}_{k/k-1})] \\ &= F (I - KH) \hat{x}_{k/k-1} + F K z_k \end{aligned}$$

onde

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$$

é o ganho de Kalman em estado estacionário.

Vamos aplicar transformadas Z (supondo condições iniciais nulas, $\hat{x}_{0/-1} = 0$).

Fazendo $X(z) = Z \{ \hat{x}_{k/k-1} \}$ e $Z(z) = Z \{ z_k \}$, temos

$$z X(z) = F (I - K H) X(z) + F K Z(z)$$

Reordenando e isolando $X(z)$, temos

$$X(z) = [z I - F (I - K H)]^{-1} F K Z(z)$$

Como é de nosso interesse apenas a predição do erro de fase do relógio, então a transferência buscada é

$$H(z) = - [1 \ 0] [z I - F (I - K H)]^{-1} F K \quad (3.22)$$

onde o produto por $[1 \ 0]$ é usado para extrair a primeira transferência do vetor $[z I - F(I-KH)]^{-1} FK$, que contém duas transferências, e o sinal negativo é devido ao fato de que necessitamos de $-\hat{\phi}$ à saída do preditor (ver figura 3.7).

Então,

$$H(z) = - \frac{[z (K_1 + K_2 \Delta t) - K_1]}{z^2 + z [-2 + (K_1 + K_2 \Delta t) A] + (1 - K_1 A)} \quad (3.23)$$

como é demonstrado no Apêndice 2.

Usando (3.13) pode-se encontrar o filtro de laço ótimo $D(z)$

$$D(z) = \frac{[z (K_1 + K_2 \Delta t) - K_1] (z - 1)}{T_0 C_0 C_1 C_2 (z^2 - 2 z + 1)} = \frac{[z (K_1 + K_2 \Delta t) - K_1]}{T_0 C_0 C_1 C_2 (z - 1)}$$

ou

$$D(z) = G_1 + \frac{G_2}{1 - z^{-1}} \quad (3.24)$$

onde

$$G_1 = \frac{K_1}{T_0 C_0 C_1 C_2} \quad G_2 = \frac{K_2 \Delta t}{T_0 C_0 C_1 C_2}$$

Observa-se então que, para o modelo de erros do relógio local de dois estados, o filtro ótimo de laço resulta em um filtro proporcional mais acumulador e o laço resulta ser de segunda ordem.

3.2 Solução ótima variante no tempo

A equação (3.23) representa a transferência do preditor de Kalman em estado estacionário. Quando esta é utilizada desde $k=0$, obtém-se um comportamento subótimo no regime transitório. Na realidade, o preditor de Kalman para valores arbitrários de k é variante no tempo. Nesta seção vamos calcular a sua expressão para o caso genérico. A partir dela encontraremos o filtro ótimo D variante no tempo.

Nosso objetivo, portanto, é encontrar o preditor ótimo "a um passo", $h(k)$, variante no tempo, que é mostrado na figura 3.7. Usando (3.18) e (3.20), temos

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k/k-1} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_{k/k-1}^1 \\ \hat{x}_{k/k-1}^2 \end{bmatrix} = F \hat{x}_{k-1/k-1} = F [\hat{x}_{k-1/k-2} + K_{k-1} (z_{k-1} - H \hat{x}_{k-1/k-2})] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1/k-2}^1 + K_{k-1}^1 (z_{k-1} - A \hat{x}_{k-1/k-2}^1) \\ \hat{x}_{k-1/k-2}^2 + K_{k-1}^2 (z_{k-1} - A \hat{x}_{k-1/k-2}^1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Doravante, para abreviar a notação, ficará subentendido que trabalhamos com as predições dos estados ($x_k^1 = \hat{x}_{k/k-1}^1$, $x_k^2 = \hat{x}_{k/k-1}^2$).

Assim, da equação matricial acima são obtidas as seguintes equações

$$x_k^1 = x_{k-1}^1 + K_{k-1}^1 (z_{k-1} - A x_{k-1}^1) + \Delta t [x_{k-1}^2 + K_{k-1}^2 (z_{k-1} - A x_{k-1}^1)] \quad (3.25)$$

$$x_k^2 = x_{k-1}^2 + K_{k-1}^2 (z_{k-1} - A x_{k-1}^1)$$

Supondo condições iniciais nulas ($x_0^1 = 0$, $x_0^2 = 0$), temos

$$x_{k-1}^2 = \sum_{i=0}^{k-2} K_i^2 (z_i - A x_i^1)$$

Então, substituindo em (3.25) obtemos

$$x_k^1 = x_{k-1}^1 + K_{k-1}^1 (z_{k-1} - A x_{k-1}^1) + \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} K_i^2 (z_i - A x_i^1) \quad (3.26)$$

onde z_k é a entrada do preditor ($A \phi_k + n_k$) e x_k^1 é a saída ($\hat{\phi}_k$). Na figura 3.7 observa-se que a saída deve ser $s_k = -\hat{\phi}_k$. Com isto a equação (3.26) se converte em

$$s_k = s_{k-1} - K_{k-1}^1 (z_{k-1} + A s_{k-1}) - \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} K_i^2 (z_i + A s_i) \quad (3.27)$$

Esta é a equação a diferenças do preditor ótimo $h(k)$ variante no tempo da figura 3.7, cuja entrada é $z(k)$ e saída $s(k)$. Note que as componentes do vetor de ganho de Kalman, K_k^1 e K_k^2 , podem ser calculadas "off line" com as equações (3.17), (3.19) e (3.21), já que não dependem das observações.

Lembremos que no caso da solução em estado estacionário, $H(z)$ era a transferência ótima entre $n(k)$ e $e_\phi(k)$ com $\phi(k)=0$. No caso mais geral, variante no tempo, a relação ótima entre $n(k)$ e $e_\phi(k)$ é dada por (3.27), portanto essa deve ser a equação a diferenças que relaciona $n(k)$ com $e_\phi(k)$ quando $\phi(k)=0$.

Afirmamos então que o filtro de laço D ótimo é representado pela equação a diferenças com coeficientes variantes no tempo

$$d_k = \frac{K_k^1}{C_1 C_2 C_0 T_0} a_k + \sum_{i=0}^k \frac{K_i^2 \Delta t}{C_1 C_2 C_0 T_0} a_i \quad (3.28)$$

onde $a(k)$ é a entrada do filtro e $d(k)$ é a saída, como é observado na figura 3.5. A seguir vamos demonstrá-lo.

Observemos da figura 3.5 que

$$y_k = y_{k-1} + C_0 T_0 u_{k-1} = y_{k-1} + C_0 T_0 C_2 d_{k-1}$$

Então, usando (3.28),

$$y_k = y_{k-1} + C_0 T_0 C_2 \left[\frac{K_{k-1}^1}{C_1 C_2 C_0 T_0} a_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{K_i^2 \Delta t}{C_1 C_2 C_0 T_0} a_i \right]$$

Além disso,

$$a_k = C_1 (n_k - A y_k) \quad , \quad e_\phi(k) = -y_k$$

Logo,

$$a_k = C_1 (n_k + A e_\phi(k))$$

Então resulta

$$e_\phi(k) = e_\phi(k-1) - K_{k-1}^1 (n_{k-1} + A e_\phi(k-1)) - \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} K_i^2 (n_i + A e_\phi(i))$$

Observa-se que esta equação é idêntica à (3.27), portanto o filtro de laço ótimo é dado efetivamente por (3.28).

Vamos demonstrar agora que em estado estacionário a equação (3.28) é reduzida à (3.24), que obtivemos anteriormente para o caso de estado estacionário mediante o uso de transformadas Z.

Em estado estacionário $K_k^1 = K^1$, $K_k^2 = K^2$ ($\forall k$). Então, aplicando a transformada Z em (3.28)

Portanto,

$$d(z) = \left[\frac{K^1}{T_0 C_0 C_1 C_2} + \frac{K^2 \Delta t}{T_0 C_0 C_1 C_2} \frac{z}{z-1} \right] A(z)$$

$$D(z) = \frac{d(z)}{A(z)} = \left[\frac{K^1}{T_0 C_0 C_1 C_2} + \frac{\frac{K^2 \Delta t}{T_0 C_0 C_1 C_2}}{1 - z^{-1}} \right]$$

que coincide com (3.24).

Cabe aclarar que temos desprezado o erro de quantização relacionado com a quantidade finita de bits do conversor A/D. Por outro lado, optamos por um oscilador na forma analógica (VCO), ao invés de usar um digital (DCO), que apresenta problemas de erros de quantização associados a sua natureza discreta.

3.3 Estabilidade do laço

Devemos analisar agora a estabilidade do laço quando $D(z)$ é o filtro ótimo dado por (3.24). Para que seja estável, os pólos de $H(z)$ (3.23) devem se encontrar dentro do círculo unitário, o que equivale a $|\lambda_i [F(I - KH)]| < 1$, ou seja, os autovalores λ_i da matriz $F(I - KH)$, devem ter módulos menores que 1.

Vamos demonstrar que quaisquer que sejam os valores dos parâmetros no modelo adotado, o preditor ótimo correspondente resulta sempre estável. Para isso vamos aplicar o seguinte teorema [11]:

Teorema: Se o modelo do processo do sinal é invariante no tempo e não necessariamente assintoticamente estável, mas o par $[F, H]$ é completamente detectável e o par $[F, G_1]$ é completamente estabilizável para qualquer G_1 com $G_1 G_1^T = Q$, então

$$-\lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_{k+1/k} = \Sigma^\circ$$

com Σ° independente de $\Sigma_{0/-1}$, satisfazendo a equação de Riccati de estado estacionário

$$\Sigma^e = F [\Sigma^e - \Sigma^e H^T (H \Sigma^e H^T + R)^{-1} H \Sigma^e] F^T + Q$$

$$- | \lambda_1 [F (I - K^e H)] | < 1$$

onde K^e é o ganho de Kalman em estado estacionário

$$K^e = \lim_{k \rightarrow \infty} K_k = \Sigma^e H^T (H \Sigma^e H^T + R)^{-1}$$

Primeiro, vamos analisar a condição de detectabilidade

$$\begin{bmatrix} H \\ H F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & A \Delta t \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} H \\ H F \end{bmatrix} = A^2 \Delta t \neq 0$$

ou seja, o par $[F, H]$ é completamente detectável.

Vejamos agora a segunda condição. Para isso usaremos uma definição equivalente de estabilizabilidade:

O par $[F, G_1]$ é completamente estabilizável para qualquer G_1 com $G_1 G_1^T = Q$ se e somente se:

para algum λ constante: $w^T G_1 = 0$, $w^T F = \lambda w^T$, $G_1 G_1^T = Q \rightarrow$
 $\rightarrow | \lambda | < 1$ ou $w = 0$.

Demonstração: Por absurdo, suponhamos que $\lambda = 1$ e $w \neq 0$. Logo,

$$F^T w = w \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta t w_1 + w_2 = w_2 \Rightarrow w_1 = 0$$

$$\text{Seja } w = \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \end{bmatrix} ; w_2 \neq 0$$

$$w^T G_1 = [0 \ 0] \Rightarrow [0 \ w_2] \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} = [0 \ 0] \Rightarrow$$

$$\rightarrow w_2 g_3 = 0, \quad w_2 g_4 = 0 \rightarrow g_3 = g_4 = 0$$

$$\rightarrow G_1 G_1^T = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ g_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^2 + g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq Q$$

o que é um absurdo, já que por hipótese $G_1 G_1^T = Q$ e lembremos que os elementos de Q são distintos de zero. Portanto cumpre-se a condição da estabilizabilidade.

Dessa forma, as hipóteses do teorema acima são satisfeitas e em consequência o filtro é assintoticamente invariante no tempo e estável.

3.4 Simulações

As seguintes simulações foram realizadas usando-se

$$\Delta t = T_0 = 1.25(10^{-4}) \text{ seg}$$

Com isto, a matriz de transição e a matriz de covariância de ruído do modelo dos erros do relógio são dadas por (2.20) e (2.22), respectivamente, ou seja,

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1.25(10^{-4}) \text{ seg} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 6.9394(10^{-14}) \text{ rad}^2 & 6.8997(10^{-18}) \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}} \\ 6.8997(10^{-18}) \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}} & 1.1039(10^{-13}) \frac{\text{rad}^2}{\text{seg}^2} \end{bmatrix}$$

Da figura 3.7 verifica-se que a performance do preditor ótimo depende da relação entre A^2 e a potência do ruído de medição σ_n^2 . Portanto, definimos como relação sinal-ruído

$$\rho = \frac{A^2 \cdot (1 \text{ rad}^2)}{\sigma_n^2}$$

onde multiplicou-se por 1 rad^2 , já que A tem unidades de Volt/rad, como é observado no modelo linearizado da figura 3.5.

Por outro lado, lembremos que

$$\sigma_n^2 = R$$

é a matriz de covariância do ruído de medição.

Os gráficos das figuras 3.8, 3.9 e 3.10 foram calculados em função do parâmetro ρ , deixando $A = 1$ Volt/rad constante e variando R .

Nas figuras 3.8 e 3.9 observam-se os ganhos de Kalman K^1 e K^2 em estado estacionário em função de ρ , respectivamente.

Na figura 3.10 observa-se o gráfico da variância em estado estacionário do erro na predição do erro de fase $E[(\phi(k) - \hat{\phi}(k/k-1))^2]$, ou seja, a componente (1,1) da matriz de covariância $\Sigma_{k/k-1}^e$ em função de ρ . Como era de se esperar, esta é uma curva monotonicamente decrescente, já que com uma maior relação sinal-ruído melhora o desempenho do preditor.

Nas figuras 3.11 e 3.12 se encontram as simulações do preditor. Foram utilizados os valores

$$H = [1 \text{ Volt/rad} \quad 0] \quad R = [1(10^{-10}) \text{ (Volts)}^2]$$

Na figura 3.11 são observadas três curvas: o processo erro de fase a estimar $A \phi(k)$ (onde multiplicamos por $A = 1$ Volt/rad para que todas as curvas estejam expressas em volts), a observação ou entrada do preditor $A \phi(k) + n(k)$ e a predição de saída $A \hat{\phi}(k)$. Na figura 3.12 foi traçado só o processo a estimar e a predição obtida. Pode-se notar a boa performance do preditor.

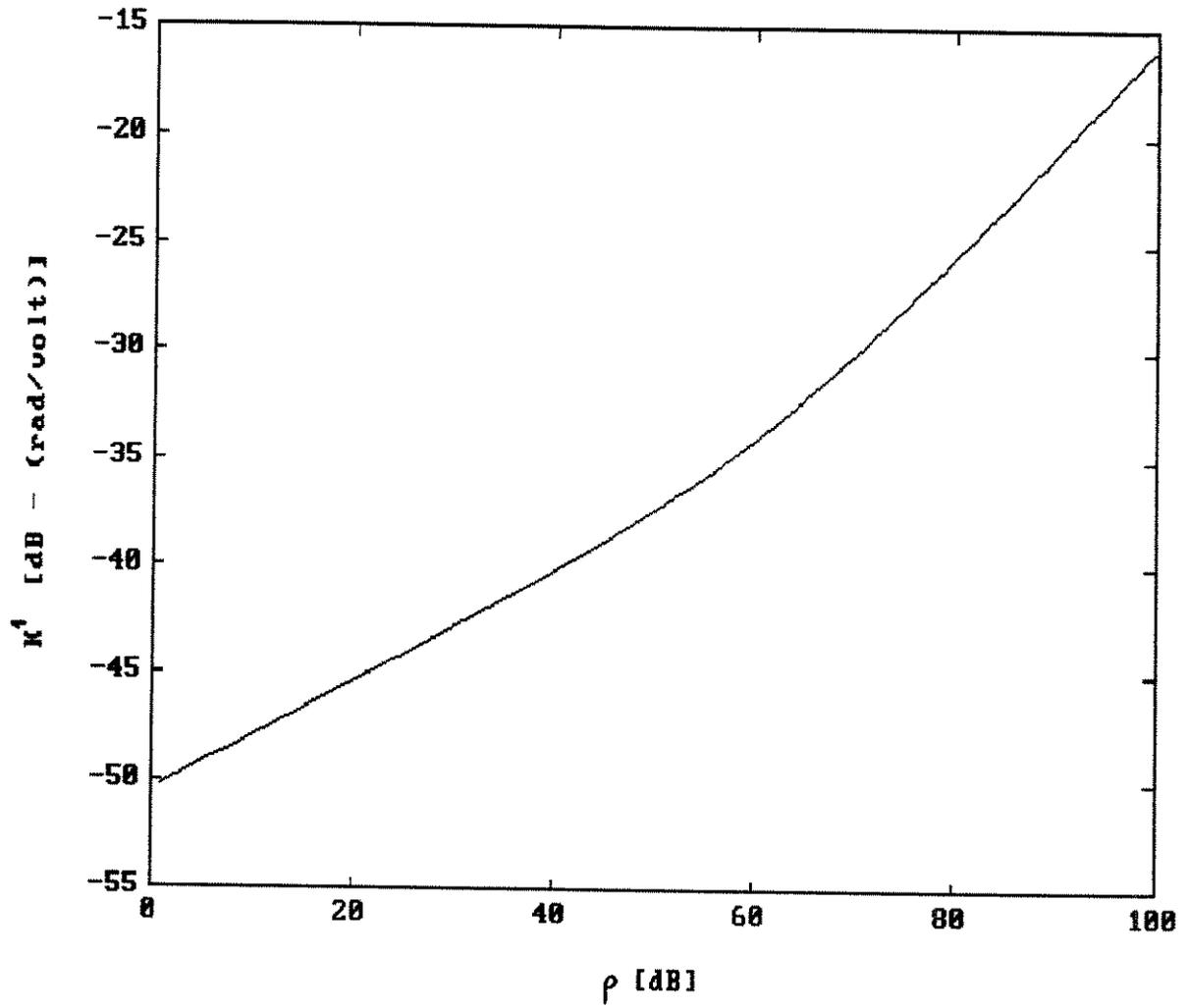


Fig. 3.8 Ganho de Kalman K^1 em estado estacionário em função de ρ .

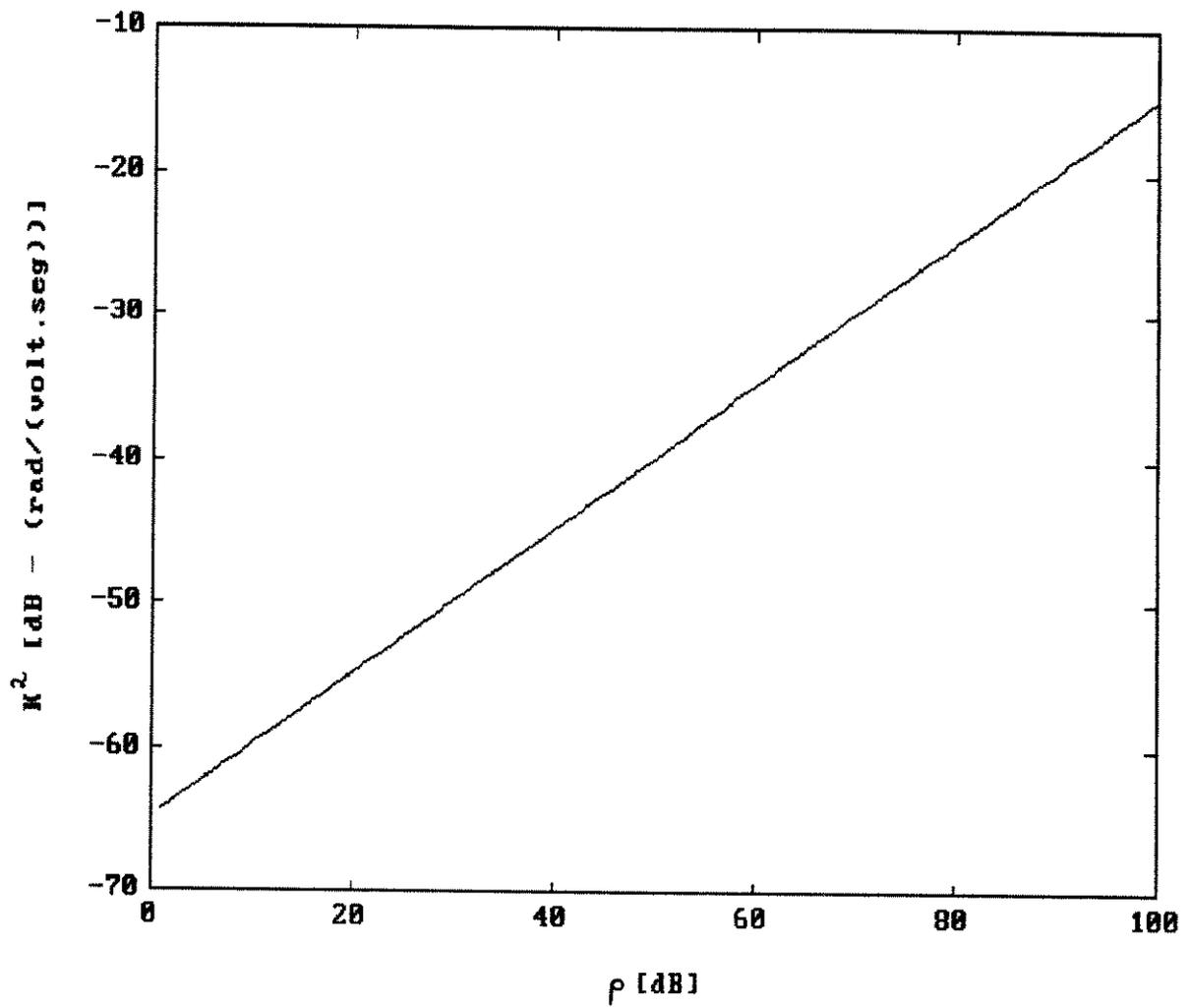


Fig. 3.9 Ganho de Kalman K^2 em estado estacionário em função de ρ .

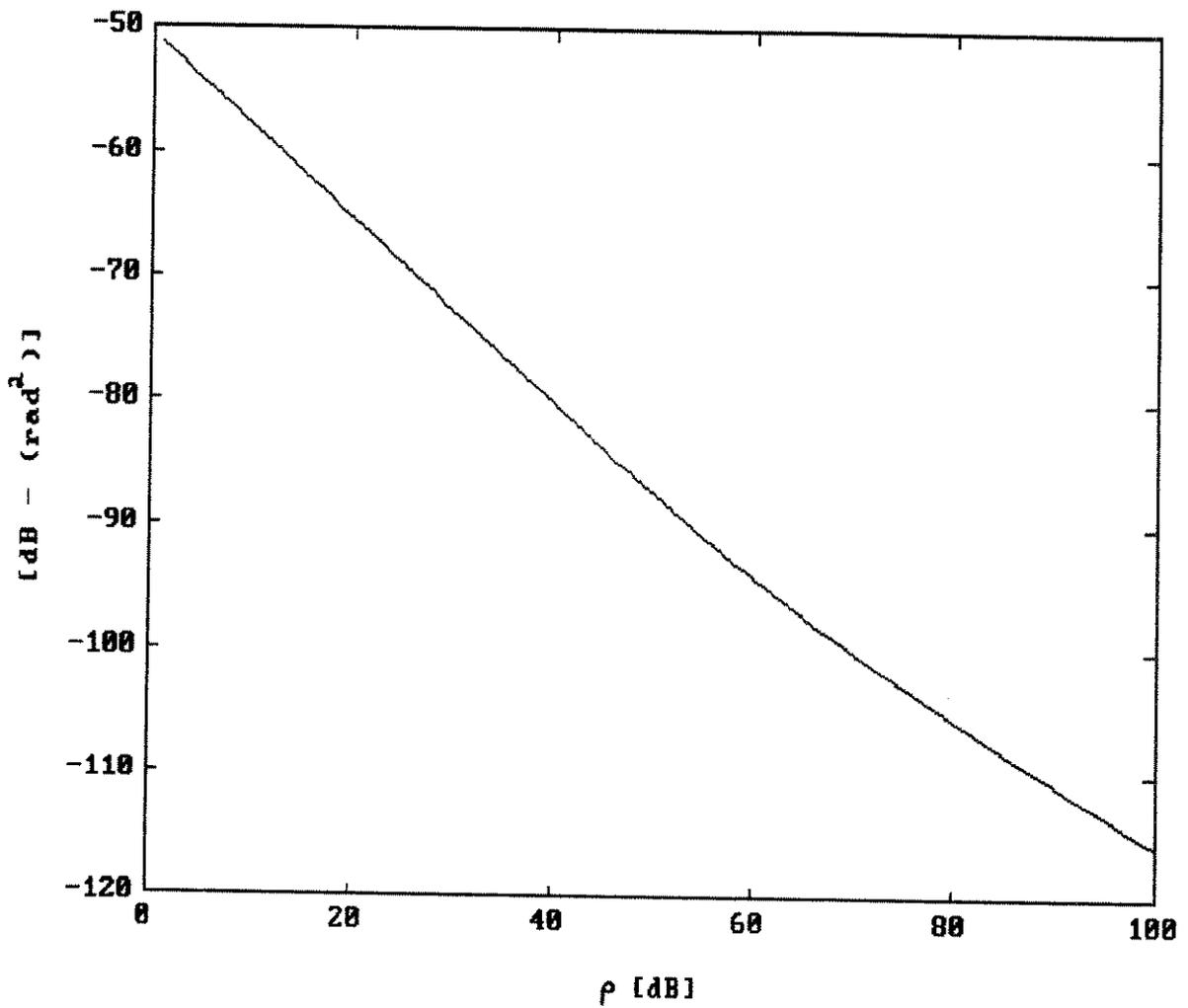


Fig. 3.10 Variância em estado estacionário do erro na predição do erro de fase, $E[(\phi(k) - \hat{\phi}(k/k-1))^2]$, em função de ρ .

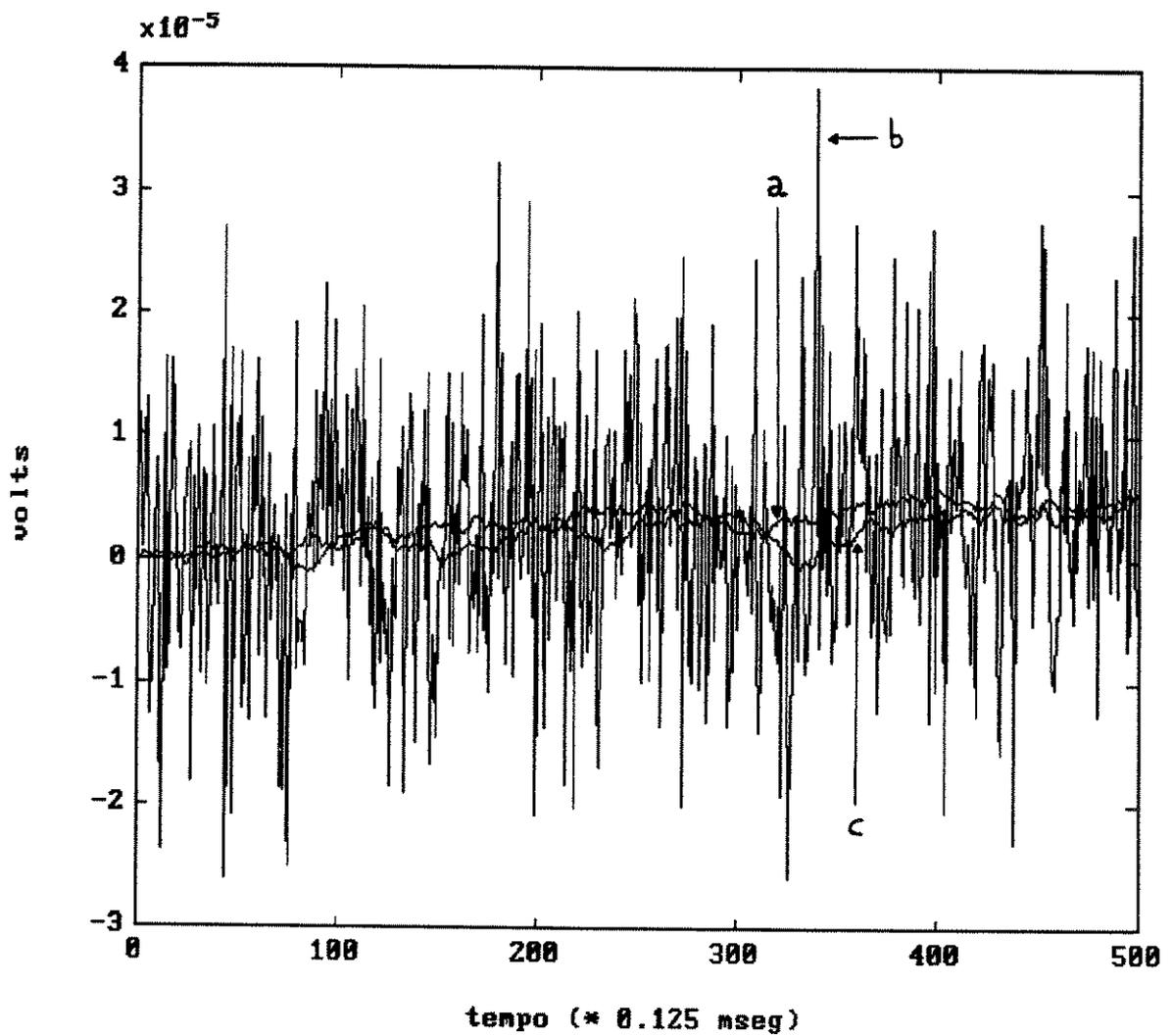


Fig. 3.11 Simulação do preditor: erro de fase (a); observação (b); predição (c).

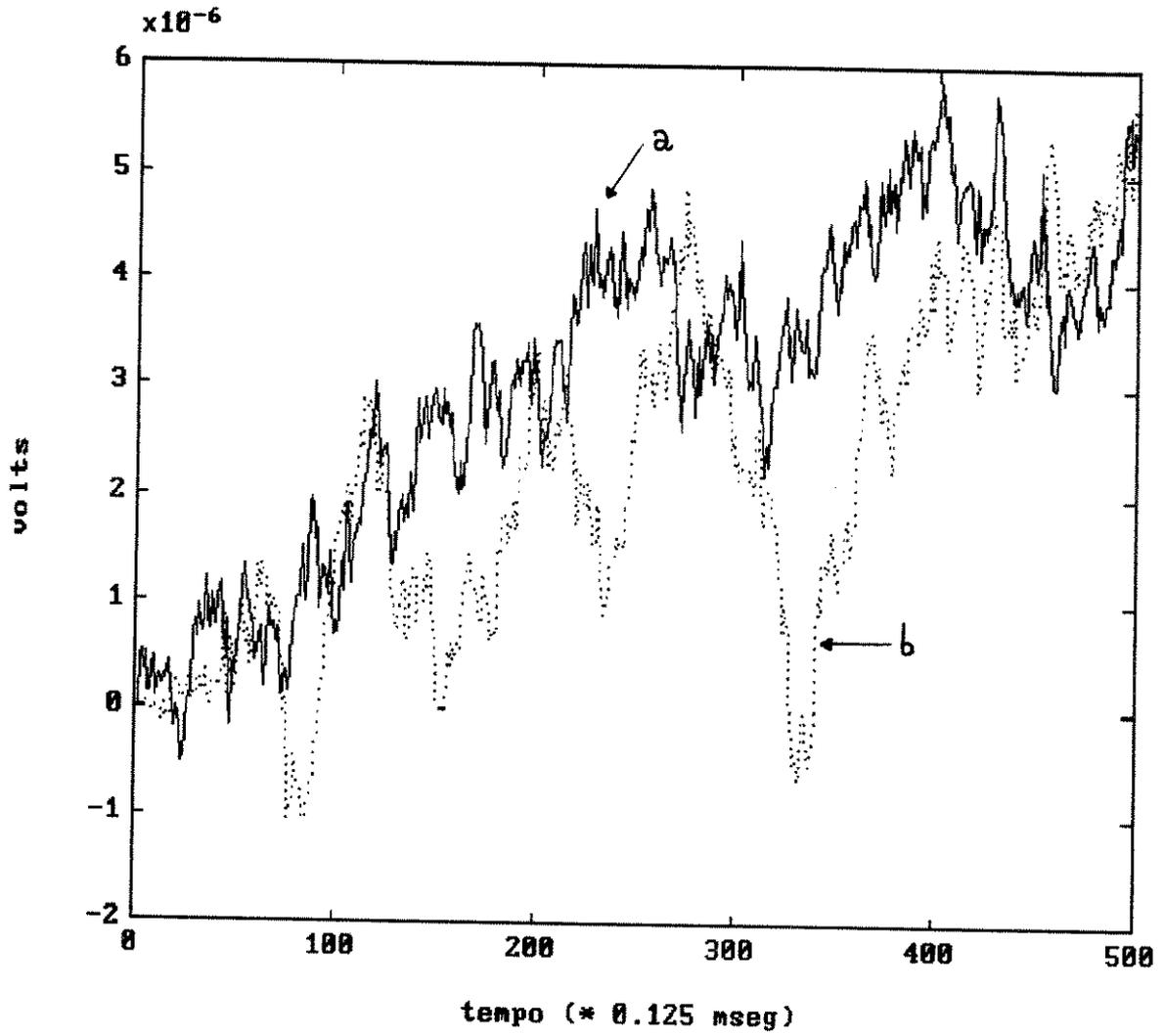


Fig.3.12 Simulação do preditor: erro de fase (a); predição (b).

A seguir vamos ver outra forma de interpretar o comportamento do laço ótimo, que utilizaremos doravante.

Na figura 3.13 foi representado novamente o laço da figura 3.5. Dado que $y(k) = \hat{\phi}(k/k-1)$, pode-se considerar que o conjunto dos blocos caracterizados por C_1 , D , C_2 e $C(z)$ comporta-se como um preditor de Kalman "oculto" no laço, que estima o erro de fase do relógio local. Além disso, é um preditor "atrasado" já que no instante k recebe como entrada

$$z_k = A (x_k^1 - \hat{x}_{k/k-1}^1) + n_k \quad (3.29)$$

e produz como saída $\hat{x}_{k/k-1}^1$. Lembremos que o estado x^1 representa o erro de fase do oscilador ($x^1 = \phi$).

Logo, temos agora o seguinte modelo de observação para o preditor

$$z_k = H x_k + v_k + r_k \quad (3.30)$$

Comparando (3.29) e (3.30) e usando-se (3.7), observa-se que

$$H = [A \ 0]$$

$$v_k = n_k \quad , \quad R = E [v_k v_k^T] = N_0 f_0$$

A expressão $r(k)$ é o termo determinístico devido à realimentação e é dado, segundo (3.29), por

$$r_k = -A \hat{x}_{k/k-1}^1$$

O modelo do processo a estimar é aquele dado pelos erros do relógio local e, portanto, é dado pela equação (3.14) com a mesma matriz de transição F e mesma matriz de covariância Q usadas anteriormente.

As equações de projeto do preditor para o ganho de Kalman, estimação a priori, matriz de covariância do erro da estimação atualizada e matriz de covariância do erro da estimação a priori, são as mesmas dadas por (3.17), (3.20), (3.19) e (3.21), respectivamente.

Preditor de Kalman

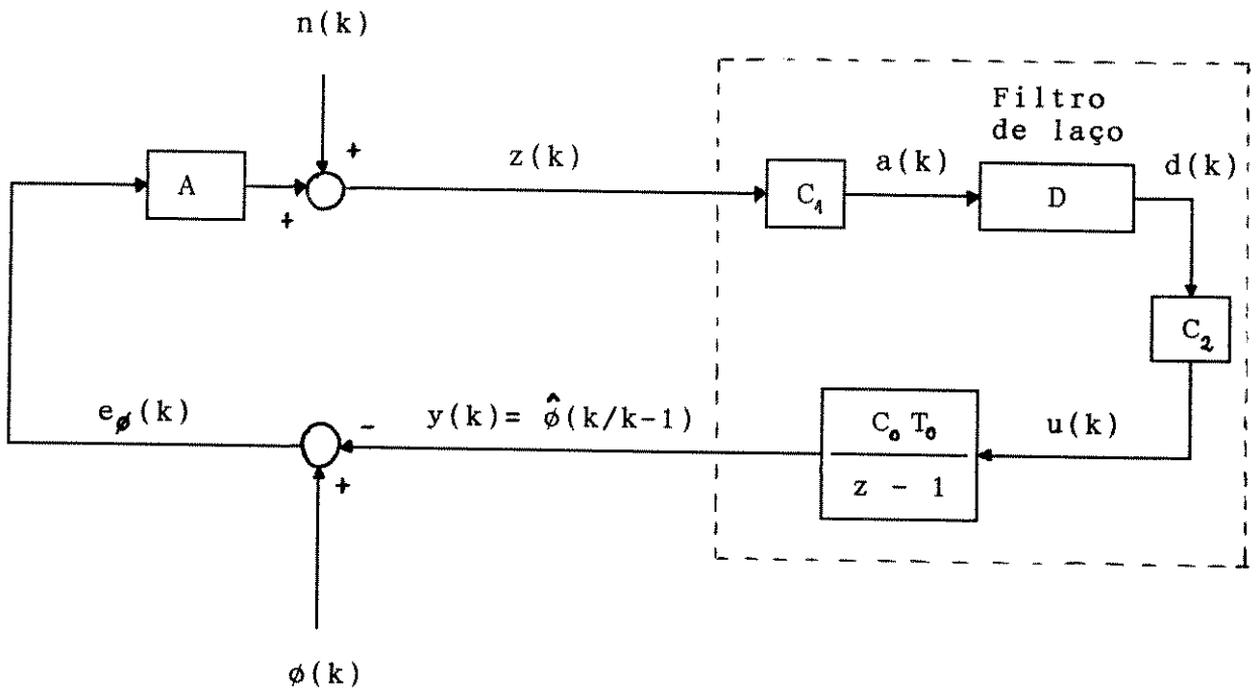


Fig. 3.13 Preditor de Kalman "oculto" no laço.

A expressão da estimação atualizada passa a ser

$$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k [z_k - (H \hat{X}_{k/k-1} + r_k)]$$

que em nosso caso reduz-se a

$$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k z_k \quad (3.31)$$

De (3.20) e (3.31) temos que

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k/k-1} &= \begin{bmatrix} \hat{X}_{k/k-1}^1 \\ \hat{X}_{k/k-1}^2 \end{bmatrix} = F \hat{X}_{k-1/k-1} = F [\hat{X}_{k-1/k-2} + K_{k-1} z_{k-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{k-1/k-2}^1 + K_{k-1}^1 z_{k-1} \\ \hat{X}_{k-1/k-2}^2 + K_{k-1}^2 z_{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

ou

$$\hat{X}_{k/k-1}^1 = \hat{X}_{k-1/k-2}^1 + K_{k-1}^1 z_{k-1} + \Delta t [\hat{X}_{k-1/k-2}^2 + K_{k-1}^2 z_{k-1}] \quad (3.33)$$

$$\hat{X}_{k/k-1}^2 = \hat{X}_{k-1/k-2}^2 + K_{k-1}^2 z_{k-1} \quad (3.34)$$

Supondo condições iniciais nulas ($\hat{X}_{0/-1}^1 = 0$, $\hat{X}_{0/-1}^2 = 0$), de (3.34) deduz-se que

$$\hat{X}_{k-1/k-2}^2 = \sum_{i=0}^{k-2} K_i^2 z_i \quad (3.35)$$

Então, substituindo em (3.33) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k/k-1}^1 &= \hat{X}_{k-1/k-2}^1 + K_{k-1}^1 z_{k-1} + \Delta t \left[\sum_{i=0}^{k-2} K_i^2 z_i + K_{k-1}^2 z_{k-1} \right] \\ &= \hat{X}_{k-1/k-2}^1 + K_{k-1}^1 z_{k-1} + \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} K_i^2 z_i \end{aligned} \quad (3.36)$$

Esta equação a diferenças é a que caracteriza o preditor ótimo de Kalman da figura 3.13.

Concluimos portanto que o filtro de laço D ótimo é representado por

$$d_k = \frac{K_k^1}{C_1 C_2 C_0 T_0} a_k + \sum_{i=0}^k \frac{K_i^2 \Delta t}{C_1 C_2 C_0 T_0} a_i \quad (3.37)$$

já que, como é observado na figura 3.13,

$$a_k = C_1 z_k$$

$$y_k = y_{k-1} + C_0 T_0 u_{k-1} = y_{k-1} + C_0 T_0 C_2 d_{k-1}$$

de onde então resulta

$$y_k = y_{k-1} - K_{k-1}^1 z_{k-1} + \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} K_i^2 z_i$$

que coincide com (3.36).

Tendo em vista que o filtro de laço ótimo D, dado por (3.37), é idêntico ao dado por (3.28), conclui-se que esta forma de projetar o filtro ótimo de laço é totalmente equivalente à que apresentamos anteriormente.

Capítulo 4

ANÁLISE DA INTERRUPÇÃO DO SINAL DE REFERÊNCIA DO RELÓGIO MESTRE

4.1 *Considerações iniciais*

Como foi mencionado no capítulo 1, o maior problema associado com as redes mestre-escravo é a possível perda do sinal de referência proveniente do relógio mestre. Este problema tem sido amenizado projetando-se relógios mestres alternativos ou funcionando o relógio escravo de forma independente, até que possa ser restabelecido o sinal mestre. O último método requer, na maioria dos casos, um relógio de reserva ("backup") muito preciso, e portanto muito caro, em cada nó.

Neste capítulo é desenvolvida uma técnica alternativa que consiste em compensar o erro do relógio local mediante o uso de um preditor ótimo, baseado no modelo dos erros de um relógio proposto no capítulo 2. Novamente adotamos como critério de otimalidade a minimização do erro quadrático médio de fase do relógio.

Nas figuras 4.1 e 4.2 é mostrado o funcionamento completo do laço de sincronismo de fase de um nó. Na figura 4.1 observa-se a operação em condições normais, ou seja, com o sinal de referência e portanto com o laço fechado. O conjunto formado pelos blocos caracterizados por C_1 , $D(z)$, C_2 e $C(z)$ comporta-se como um preditor a "um passo". Na figura 4.2 observa-se a operação no caso em que é interrompido o sinal de referência. Neste caso, o laço é aberto e o conjunto dos blocos caracterizados por $D(z)$, C_2 e $C(z)$ deve cumprir agora a função de preditor a "n+1 passos", a fim de se conseguir que $y_{i+n} \approx \phi_{i+n}$ de tal forma que $E[(\phi_{i+n} - y_{i+n})^2]$ seja mínimo.

O sinal de saída do VCO está dado por

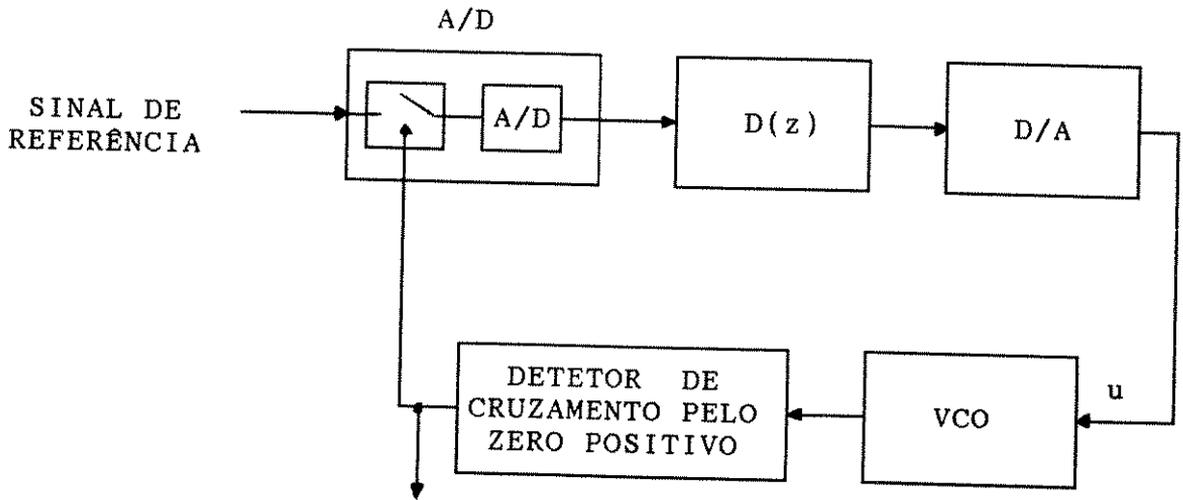


Fig. 4.1.a Funcionamento do laço de sincronismo de fase em condições normais.

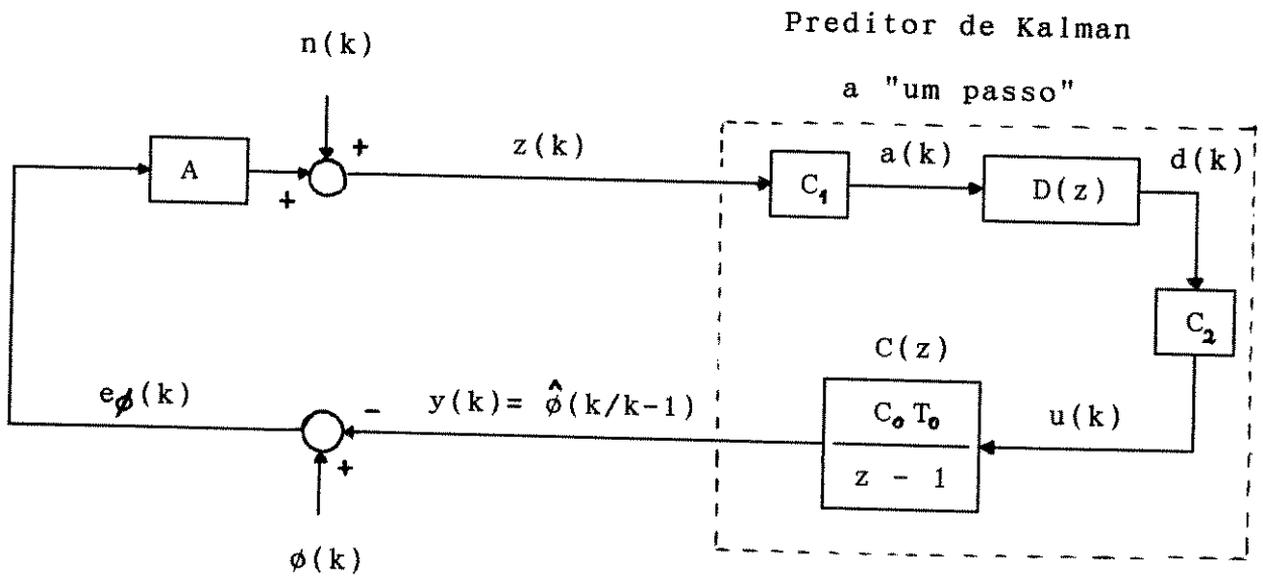


Fig. 4.1.b Modelo matemático.

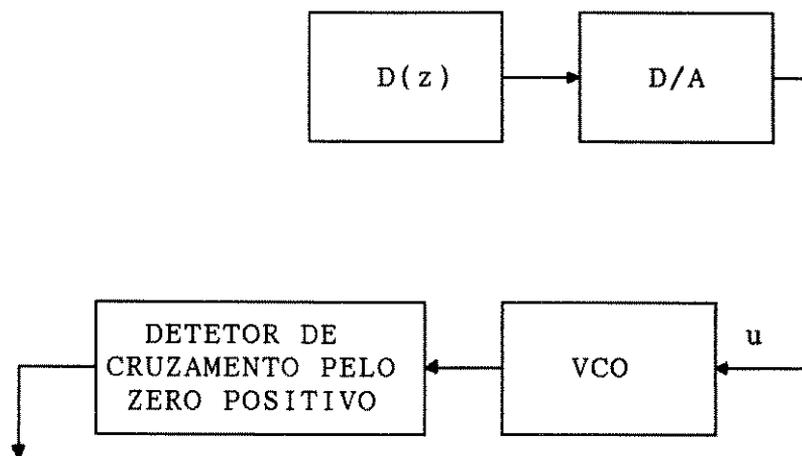


Fig. 4.2.a Funcionamento em caso de interrupção do sinal de referência.

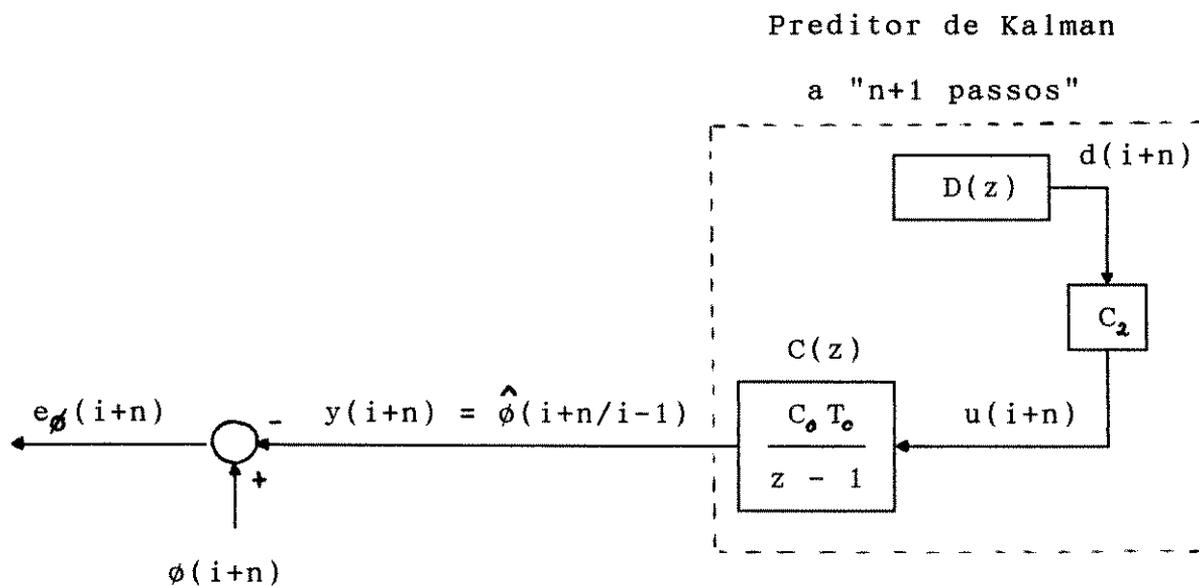


Fig. 4.2.b Modelo matemático.

$$\text{sen} \left[\omega_0 t + C_0 \int_0^t u(\tau) d\tau - \phi(t) \right]$$

onde $\phi(t)$ é o processo ruído de fase do VCO.

A fase deste sinal nos instantes $t_k = kT_0$ é dada por

$$k 2\pi + C_0 \int_0^{t_k} u(\tau) d\tau - \phi(t_k)$$

Definindo, como fizemos no capítulo 3,

$$y(k) = C_0 \int_0^{t_k} u(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

então a fase do sinal de saída do VCO nos instantes t_k pode ser expressa como

$$k 2\pi + y(k) - \phi(k)$$

onde $\phi(k) \triangleq \phi(t_k)$.

Podemos definir o processo erro de fase do relógio local "controlado pela predição", como a sequência

$$e_\phi(k) = -y(k) + \phi(k) \quad (4.2)$$

O processo erro de tempo do relógio é dado então por

$$e_t(k) = \frac{e_\phi(k)}{\omega_0} = -\frac{y(k)}{\omega_0} + \frac{\phi(k)}{\omega_0}$$

Portanto, o problema consiste em encontrar o sinal de controle $u(t)$ ótimo, isto é, que resulte em $E[e_\phi^2(k)]$ mínimo. Lembremos que não se dispõe de nenhuma observação (dado que foi interrompido o sinal de referência) e, portanto, a busca do sinal $u(t)$ ótimo deve-se basear somente no modelo dos erros do relógio.

Lembremos também que na presença do sinal de referência ($k \leq i-1$) a estimação ótima de $\phi(k)$ é dada pela predição a um passo $\hat{\phi}_{k/k-1}$. Suponhamos agora que a partir do instante $k = i$ é produzida a interrupção da referência. Assim, a partir do instante $i+1$ a estimação ótima será a predição a "n+1 passos"

$$\hat{\phi}_{i+n/i-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dado que a última observação antes de que se interrompa a referência ocorreu no instante $i-1$.

Lembremos também o modelo do processo dos erros do relógio local

$$X_{k+1} = F X_k + W_k \quad ; \quad E[W_k W_j^T] = Q \delta(k-j) \quad \forall k, j$$

Então,

$$X_{i+1} = F X_i + W_i$$

$$X_{i+2} = F X_{i+1} + W_{i+1} = F^2 X_i + F W_i + W_{i+1}$$

.....

Logo,

$$X_{i+n} = F^n X_i + \sum_{j=1}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} W_j \quad (4.3)$$

Tomando-se o valor esperado condicional com respeito às observações até o instante $i-1$, temos

$$\hat{X}_{i+n/i-1} = E(X_{i+n/i-1}) = F^n E(X_{i/i-1}) = F^n \hat{X}_{i/i-1} \quad (4.4)$$

dado que $E(W_j) = 0$, para todo j .

Desenvolvendo a equação matricial (4.4)

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+n/i-1} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_{i+n/i-1}^1 \\ \hat{x}_{i+n/i-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1}^1 \\ \hat{x}_{i/i-1}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & n \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1}^1 \\ \hat{x}_{i/i-1}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1}^1 + n \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 \\ \hat{x}_{i/i-1}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto a predição ótima a "n+1 passos" do erro de fase é

$$\hat{x}_{i+n/i-1}^1 = \hat{x}_{i/i-1}^1 + n \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 \quad (4.5)$$

Note que este resultado é bastante razoável. A predição do erro de fase a "n+1 passos" contém um termo proporcional ao tempo transcorrido e à predição mais recente do erro de frequência.

Observa-se que o filtro digital D necessita conhecer a predição a um passo $\hat{x}_{i/i-1}^2$ do erro de frequência. Então, é necessário que se tenha implementado o preditor a um passo de x^2 , para que se tenha disponível a predição do erro de frequência, a qual será usada no caso em que se interrompa o sinal de referência.

Na figura 4.1.b observa-se que o bloco D recebe como entrada o processo de saída do conversor A/D caracterizado por C_1

$$a_k = C_1 z_k = C_1 (A x_k^1 + n_k - A \hat{x}_{k/k-1}^1)$$

Assim, com as equações (3.29) e (3.35) pode-se calcular a predição $\hat{x}_{k/k-1}^2$

$$\hat{x}_{k/k-1}^2 = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{K_i^2 a_i}{C_1} \quad (4.6)$$

Portanto, o bloco digital D deve implementar a equação (4.6) para

dispor da predição do erro de frequência $\hat{x}_{k/k-1}^2$ e poder usa-la, posteriormente, caso necessário, a partir do instante de interrupção da referência.

Na figura 4.2.b observa-se que

$$y_{k+1} = y_k + C_0 T_0 u_k = y_k + C_0 T_0 C_2 d_k \quad (4.7)$$

Suponhamos que no instante $k = i$ é produzido o corte do sinal de referência. Até o instante $i-1$ foi recebido, portanto,

$$y_k = \hat{x}_{k/k-1}^1 \quad \forall k \leq i$$

Daí em diante o filtro D deve produzir como saída o valor

$$d_{i+n} = \frac{\hat{x}_{i/i-1}^2}{C_2 C_0} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

já que, combinando (4.7) e (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + C_0 T_0 C_2 d_i = \hat{x}_{i/i-1}^1 + \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 \\ y_{i+2} &= y_{i+1} + C_0 T_0 C_2 d_{i+1} = \hat{x}_{i/i-1}^1 + 2 \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ou seja, y_{i+n} ($n = 1, 2, \dots$) resulta na predição ótima a "n+1 passos" de ϕ_{i+n} dada por (4.5).

4.2 Comparações de desempenho

Nesta seção realizaremos comparações do erro quadrático médio de fase do relógio local, funcionando nas seguintes situações:

- 1) Com sinal de referência:
 - a) Com o laço de sincronismo de fase ótimo que foi derivado no capítulo 3, ou seja, com a estrutura de preditor a um passo "oculto" no laço, como foi representado na figura 4.1.b.
 - b) Sem laço de controle (relógio permanecendo sempre livre).

2) Quando é interrompido o sinal de referência:

c) Laço funcionando com a estrutura de preditor ótimo a "n+1 passos", como foi representado na figura 4.2.b.

d) Deixando livre o relógio local a partir da interrupção do sinal de referência (ou seja, com a entrada de controle $u(t)=0$).

e) Aplicando a técnica conhecida na literatura com o nome de "Holdover" [13].

Em princípio, nos propomos demonstrar que

$$\Sigma^a \leq \Sigma^b \quad (4.9)$$

$$\Sigma^c \leq \Sigma^d \quad (4.10)$$

onde Σ^i representa a matriz de covariância dos erros do relógio quando é utilizada a técnica i ($i = a, b, c, d$). Além disso, desejamos traçar a variância do erro de fase em função do tempo para as quatro situações acima. Para isto, teremos que extrair a componente (1,1) das referidas matrizes de covariância. A aplicação da técnica de "Holdover" será vista posteriormente.

Vamos começar demonstrando (4.9). Observemos que estas matrizes são na realidade a matriz de covariância do erro da predição ótima a um passo, $\Sigma_{k+1/k}$, e a matriz de covariância do processo dos erros do relógio local, P_{k+1} . Então, demonstrar (4.9) equivale a demonstrar a seguinte propriedade

$$\Sigma_{k+1/k} \leq P_{k+1} \quad (4.11)$$

Vejamos as expressões destas matrizes

$$X_{k+1} = F_k X_k + w_k$$

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E[X_{k+1} X_{k+1}^T] = E[(F_k X_k + w_k) (X_k^T F_k^T + w_k^T)] \\ &= F_k P_k F_k^T + Q_k \end{aligned}$$

$$\Sigma_{k+1/k} = F_k \Sigma_{k/k} F_k^T + Q_k$$

$$= F_k \Sigma_{k/k-1} [I - H_k^T (H_k \Sigma_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} H_k \Sigma_{k/k-1}] F_k^T + Q_k$$

Vamos demonstrar (4.11) por indução.

Consideremos $k = 0$, temos

$$\Sigma_{0/-1} = P_0$$

$$\Sigma_{0/0} = P_0 - P_0 H_0^T (H_0 P_0 H_0^T + R_0)^{-1} H_0 P_0$$

Dado que P_0 e R_0 são matrizes de covariância, elas são positivas semidefinidas, e então o segundo termo é também positivo semidefinido.

Logo,

$$\Sigma_{0/0} \leq P_0$$

Assim,

$$F_0 \Sigma_{0/0} F_0^T + Q_0 \leq F_0 P_0 F_0^T + Q_0$$

e portanto

$$\Sigma_{1/0} \leq P_1$$

ou seja, resultado que é válido para $k = 0$.

Suponhamos que seja válido também até $k = n$ (hipótese indutiva), isto é,

$$\Sigma_{n+1/n} \leq P_{n+1}$$

Então, para $k = n+1$

$$\Sigma_{n+1/n+1} = \Sigma_{n+1/n} - \Sigma_{n+1/n} H_{n+1}^T (H_{n+1} \Sigma_{n+1/n} H_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1} H_{n+1} \Sigma_{n+1/n} \leq P_{n+1}$$

onde aplicamos a hipótese indutiva e o fato de que o segundo termo é positivo semidefinido.

Assim,

$$\Sigma_{n+2/n+1} = F_{n+1} \Sigma_{n+1/n+1} F_{n+1}^T + Q_{n+1} \leq F_{n+1} P_{n+1} F_{n+1}^T + Q_{n+1} = P_{n+2}$$

e em consequência

$$\Sigma_{n+2/n+1} \leq P_{n+2}$$

com o qual fica demonstrada a propriedade.

A partir da equação (4.3), podemos calcular

$$\begin{aligned} P_{i+n} &= E [X_{i+n} X_{i+n}^T] \\ &= E \left[\left(F^n X_i + \sum_{j=1}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} W_j \right) \left(X_i^T F^{nT} + \sum_{j=1}^{i+n-1} W_j^T [F^{(i+n-1)-j}]^T \right) \right] \end{aligned}$$

Então,

$$P_{i+n} = E [X_{i+n} X_{i+n}^T] = F^n P_i F^{nT} + \sum_{j=1}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} Q [F^{(i+n-1)-j}]^T \quad (4.12)$$

Fazendo $i=0$, obtemos

$$P_n = E [X_n X_n^T] = F^n P_0 F^{nT} + \sum_{j=0}^{n-1} F^{(n-1)-j} Q [F^{(n-1)-j}]^T \quad (4.13)$$

Essa seria a matriz de covariância dos erros de fase e frequência do relógio local se este funcionasse sempre livre, sem a existência do laço de controle.

Nos interessa agora encontrar a expressão da variância do erro de fase do relógio funcionando livremente. Para isto devemos extrair a componente (1,1) da matriz de covariância dada por (4.13). Suponhamos que o relógio é ajustado de tal forma que, inicialmente, seus erros de fase e frequência sejam nulos. Então,

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_0 = E [x_0 x_0^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a componente (1,1) do termo 1 é 0.

Extraindo agora a componente (1,1) do termo 2, temos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} F^{n-1-j} Q [F^{n-1-j}]^T = \\ & = \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & (n-1-j) \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1-j) \Delta t & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com isto a componente (1,1) é dada por

$$\begin{aligned} (1,1) &= \sum_{j=0}^{n-1} [[Q_{11} + (n-1-j) \Delta t Q_{12}] + [Q_{12} + Q_{22} (n-1-j) \Delta t] (n-1-j) \Delta t] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} [Q_{11} + 2 (n-1-j) \Delta t Q_{12} + Q_{22} (n-1-j)^2 (\Delta t)^2] \\ &= n Q_{11} + 2 \Delta t Q_{12} \sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j) + Q_{22} (\Delta t)^2 \sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j)^2 \\ &= (n \Delta t) S_f + \frac{1}{3} S_g (n \Delta t)^3 \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde se usou as expressões

$$\sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j) = \frac{(n-1) n}{2}$$

$$\sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j)^2 = \frac{(n-1) n (2n-1)}{6}$$

e as componentes da matriz de covariância Q dadas pelas equações (2.10), (2.11) e (2.12). Então,

$$E [(x_k^1)^2] = (k \Delta t) S_f + \frac{1}{3} S_g (k \Delta t)^3 \quad (4.15)$$

Analisaremos agora as possíveis técnicas a se usarem no caso em que se interrompa o sinal de referência no instante $k=i$.

Consideremos primeiro o caso c), ou seja, a implementação do preditor ótimo a "n+1 passos", dado por (4.4)

$$\hat{x}_{i+n/i-1} = F^n \hat{x}_{i/i-1}$$

Logo,

$$x_{i+n} - \hat{x}_{i+n/i-1} = F^n (x_i - \hat{x}_{i/i-1}) + \sum_{j=i}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} w_j$$

Assim a matriz de covariância para o caso c) (Σ^c) é dada pela matriz de covariância do erro de predição a "n+1 passos"

$$\begin{aligned} \Sigma_{i+n/i-1}^c &= E [(x_{i+n} - \hat{x}_{i+n/i-1}) (x_{i+n} - \hat{x}_{i+n/i-1})^T] \\ &= F^n \Sigma_{i/i-1} F^{nT} + \sum_{j=i}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} Q [F^{(i+n-1)-j}]^T \end{aligned} \quad (4.16)$$

Consideremos agora a situação d). A partir do instante em que se interrompe o sinal de referência, o relógio é deixado livre, ou seja, com sua entrada de controle nula.

Dado que, por (4.1),

$$y(k) = C_0 \int_0^{t_k} u(\tau) d\tau$$

então deixar o relógio livre a partir de t_i ($u(\tau) = 0$ para $\tau > t_i$) equivale a usar a predição

$$\hat{x}_{i+n/i-1}^d = \hat{x}_{i/i-1}$$

Em consequência, a matriz de covariância para o caso d (Σ^d) será a matriz de covariância do erro de estimação associada a esta predição

$$x_{i+n} - \hat{x}_{i/i-1} = F^n x_i - \hat{x}_{i/i-1} + \sum_{j=1}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} w_j$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Sigma_{i+n/i-1}^d &= E [(x_{i+n} - \hat{x}_{i/i-1}) (x_{i+n} - \hat{x}_{i/i-1})^T] \\ &= E [(F^n (x_i - (F^n)^{-1} \hat{x}_{i/i-1}) + \sum_{j=1}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} w_j) \cdot \\ &\quad \cdot ((x_i^T - \hat{x}_{i/i-1}^T (F^n)^{-1T}) (F^n)^T + \sum_{j=1}^{i+n-1} w_j^T [F^{(i+n-1)-j}]^T)] \\ &= F^n E [(x_i - (F^n)^{-1} \hat{x}_{i/i-1}) (x_i - (F^n)^{-1} \hat{x}_{i/i-1})^T] (F^n)^T + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} Q [F^{(i+n-1)-j}]^T \end{aligned} \quad (4.17)$$

Seja a predição a um passo e a matriz de covariância do erro desta predição

$$\hat{X}_{i/i-1}^* = (F^n)^{-1} \hat{X}_{i/i-1}$$

$$\Sigma_{i/i-1}^* = E [(X_i - (F^n)^{-1} \hat{X}_{i/i-1}) (X_i - (F^n)^{-1} \hat{X}_{i/i-1})^T]$$

Após substituição na equação (4.17), temos

$$\Sigma_{i+n/i-1}^d = F^n \Sigma_{i/i-1}^* (F^n)^T + \sum_{j=1}^{i+n-1} F^{(i+n-1)-j} Q [F^{(i+n-1)-j}]^T \quad (4.18)$$

Dado que a predição ótima a um passo é $\hat{X}_{i/i-1}$, então a predição a um passo

$$(F^n)^{-1} \hat{X}_{i/i-1}$$

será sub-ótima e, portanto,

$$\Sigma_{i/i-1} \leq \Sigma_{i/i-1}^*$$

Assim, das equações (4.16) e (4.18) deduz-se a seguinte relação entre a matriz de covariância do erro da predição ótima a "n+1 passos" e a matriz de covariância do erro correspondente à predição usada no caso de se deixar o relógio livre a partir da interrupção do sinal de referência

$$\Sigma_{i+n/i-1}^c \leq \Sigma_{i+n/i-1}^d$$

Pretendemos agora encontrar as expressões da variância do erro de fase para os casos c e d.

Vamos começar buscando a expressão da variância do erro de fase do relógio funcionando sob predição ótima a "n+1 passos". Devemos então extrair a componente (1,1) da matriz de covariância dada por (4.16). Sejam

$$\Sigma_{i/i-1} = E[(x_i - \hat{x}_{i/i-1}) (x_i - \hat{x}_{i/i-1})^T] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}$$

Primeiro vamos extrair a componente (1,1) do termo 1 de (4.16)

$$\begin{bmatrix} 1 & n \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1,1) = (\sigma_1^2 + n \Delta t \sigma_{12}) + (\sigma_{12} + n \Delta t \sigma_2^2) n \Delta t$$

$$= \sigma_1^2 + 2 n \Delta t \sigma_{12} + (n \Delta t)^2 \sigma_2^2$$

$$= E(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1)^2 + (n \Delta t)^2 E[(x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)^2] +$$

$$+ 2 (n \Delta t) E[(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)]$$

Para extrairmos a componente (1,1) do termo 2, fazemos $u=j-i$, o que resulta em

$$\sum_{u=0}^{n-1} F^{n-1-u} Q [F^{n-1-u}]^T$$

Dado que esta expressão é igual à do termo 2 da equação (4.13), então sua componente (1,1) é dada por (4.14).

Assim,

$$\begin{aligned}
E [(x_{i+n}^1 - \hat{x}_{i+n/i-1}^1)^2] &= E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1)^2] + (n \Delta t)^2 E [(x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)^2] + \\
&+ 2 (n \Delta t) E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)] + \\
&+ (n \Delta t) S_f + \frac{1}{3} S_g (n \Delta t)^3 \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Vamos buscar agora a expressão da variância do erro de fase do relógio quando este é deixado livre a partir da interrupção da referência. Para isso, devemos extrair a componente (1,1) da expressão (4.18)

$$\begin{aligned}
[F^n]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & n \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -n \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
x_i - [F^n]^{-1} \hat{x}_{i/i-1} &= \begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_{i/i-1}^1 - n \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 \\ \hat{x}_{i/i-1}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_i^1 - (\hat{x}_{i/i-1}^1 - n \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2) \\ x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Seja

$$\Sigma_{i/i-1}^* = E [(x_i - [F^n]^{-1} \hat{x}_{i/i-1}) (x_i - [F^n]^{-1} \hat{x}_{i/i-1})^T] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

Extraíndo a componente (1,1) do termo 1 da expressão (4.18), temos

$$(1,1) = a_1 + 2 n \Delta t a_2 + a_3 (n \Delta t)^2$$

onde

$$\begin{aligned}
a_1 &= E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) + n \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2]^2 \\
&= E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1)^2] + 2n\Delta t E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) \hat{x}_{i/i-1}^2] + (n\Delta t)^2 E [(\hat{x}_{i/i-1}^2)^2] \\
a_2 &= E [((x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) + n \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2) (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)] \\
&= E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)] + n \Delta t E [\hat{x}_{i/i-1}^2 (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)] \\
a_3 &= E [(x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)^2]
\end{aligned}$$

Pelo princípio da ortogonalidade,

$$E [(x_i - \hat{x}_{i/i-1}) \hat{x}_{i/i-1}^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em particular,

$$E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) \hat{x}_{i/i-1}^2] = 0$$

$$E [(x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2) \hat{x}_{i/i-1}^2] = 0$$

$$E (x_i^2 \hat{x}_{i/i-1}^2) = E [(\hat{x}_{i/i-1}^2)^2]$$

Logo,

$$a_1 = E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1)^2] + (n \Delta t)^2 E [(\hat{x}_{i/i-1}^2)^2]$$

$$a_2 = E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)]$$

$$a_3 = E [(x_i^2)^2] - E [(\hat{x}_{i/i-1}^2)^2]$$

Então, a componente (1,1) do termo 1 é

$$E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1)^2] + 2 (n \Delta t) E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)] + \\ + (n \Delta t)^2 E [(x_i^2)^2]$$

Como o termo 2 da expressão (4.18) é igual ao termo 2 da expressão (4.16), então sua componente (1,1) é dada por (4.14).

Finalmente, a expressão da variância do erro de fase, deixando livre o relógio a partir da interrupção da referência, é

$$E [(x_{i+n}^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1)^2] = E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1)^2] + (n \Delta t)^2 E [(x_i^2)^2] + \\ + 2 (n \Delta t) E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)] + \\ + (n \Delta t) S_f + \frac{1}{3} S_g (n \Delta t)^3 \quad (4.20)$$

4.3 Comparação de desempenho entre a técnica de predição ótima a "(n+1) passos" e a técnica de "Holdover".

Desejamos realizar agora a comparação da variância do erro de fase do relógio local quando são aplicadas as seguintes técnicas a partir do instante de interrupção do sinal de referência:

- A técnica de predição ótima a "(n+1) passos", que propomos neste trabalho.

- A técnica conhecida na literatura com o nome de "Holdover", que consiste em manter o último valor memorizado da entrada de controle antes de ocorrer a interrupção da referência [13].

Vamos inicialmente analisar o caso de "Holdover".

Das expressões (3.33) e (3.34) pode-se obter

$$\hat{x}_{i/i-1}^1 = \hat{x}_{i-1/i-2}^1 + \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 + K_{i-1}^1 z_{i-1} \\ = \hat{x}_{i-1/i-2}^1 + \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 + K_{i-1}^1 [A(x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}] \quad (4.21)$$

Por outro lado, temos que a predição do erro de fase dada pelo laço é

$$y_i = y_{i-1} + C_0 T_0 u_{i-1} \quad (4.22)$$

Suponhamos que a partir do instante t_i se interrompa o sinal de referência. Comparando as expressões (4.21) e (4.22), obtemos a seguinte expressão para o último valor memorizado da entrada de controle

$$u_{i-1} = \frac{1}{C_0} \hat{x}_{i/i-1}^2 + \frac{K_{i-1}^1}{C_0 T_0} [A (x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}]$$

já que y_i e y_{i-1} são as predições a um passo

$$y_i = \hat{x}_{i/i-1}^1 \quad ; \quad y_{i-1} = \hat{x}_{i-1/i-2}^1$$

Como foi dito, a técnica de "Holdover" é baseada na manutenção do último valor memorizado da entrada de controle. Assim,

$$u_{i+n} = u_{i-1} \quad ; \quad n \geq 0$$

Logo,

$$y_{i+1} = y_i + C_0 T_0 u_i = \hat{x}_{i/i-1}^1 + \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 + K_{i-1}^1 [A (x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}]$$

$$y_{i+2} = y_{i+1} + C_0 T_0 u_{i+1} = \hat{x}_{i/i-1}^1 + 2 [\Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 + K_{i-1}^1 [A (x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}]]$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y_{i+n} = \hat{x}_{i/i-1}^1 + n [\Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 + K_{i-1}^1 [A (x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}]] \quad (4.23)$$

Desejamos calcular a variância do erro de fase do relógio quando é usada a técnica de "Holdover". Utilizando (4.3) e (4.23) podemos calcular o erro na predição do erro de fase

$$\begin{aligned}
 x_{i+n}^1 - y_{i+n} &= \left(x_i^1 + n \Delta t x_i^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j) u_{i+j}^2 + \sum_{l=0}^{n-1} u_{i+l}^1 \right) - \\
 &\quad - \left(\hat{x}_{i/i-1}^1 + n \left[\Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 + K_{i-1}^1 [A(x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}] \right] \right) \\
 &= \underbrace{\left[\left(x_i^1 + n \Delta t x_i^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j) u_{i+j}^2 + \sum_{l=0}^{n-1} u_{i+l}^1 \right) - \right.}_{\textcircled{1}} \\
 &\quad \left. - \left(\hat{x}_{i/i-1}^1 + n \Delta t \hat{x}_{i/i-1}^2 \right) \right]}_{\textcircled{1}} - \underbrace{n K_{i-1}^1 [A(x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}]}_{\textcircled{2}}
 \end{aligned}$$

Logo, a variância do erro de fase aplicando a técnica de "Holdover" é dada por

$$E [(x_{i+n}^1 - y_{i+n})^2] = E [(\textcircled{1})^2] - 2 E [\textcircled{1} \textcircled{2}] + E [(\textcircled{2})^2]$$

onde $E [(\textcircled{1})^2]$ é a variância do erro de fase no caso de se usar o preditor ótimo a "(n+1) passos", que é dada pela expressão (4.19). Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 E [\textcircled{1} \textcircled{2}] &= E \left[(x_{i+n}^1 - \hat{x}_{i+n/i-1}^1) n K_{i-1}^1 [A(x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}] \right] \\
 &= E \left[\left((x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) + n \Delta t (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2) + \Delta t \sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j) u_{i+j}^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{l=0}^{n-1} u_{i+l}^1 \right) n K_{i-1}^1 [A(x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1}] \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

resultado este devido ao princípio de ortogonalidade e à independência de w_{i+j} ($j \geq 0$) com v_{i-1} , \hat{x}_{i-1}^1 e $\hat{x}_{i-1/i-2}^1$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
 E [\textcircled{2}^2] &= n^2 (K_{i-1}^1)^2 E [(A(x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1) + v_{i-1})^2] \\
 &= n^2 (K_{i-1}^1)^2 [A^2 E [(x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1)^2] + E [v_{i-1}^2]]
 \end{aligned}$$

Finalmente, a variância do erro de fase, quando é aplicada a técnica de "Holdover" a partir da interrupção da referência, é dada por

$$\begin{aligned}
 E [(x_{i+n}^1 - \hat{x}_{hold}^1)^2] &= E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1)^2] + (n \Delta t)^2 E [(x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)^2] + \\
 &\quad + 2 (n \Delta t) E [(x_i^1 - \hat{x}_{i/i-1}^1) (x_i^2 - \hat{x}_{i/i-1}^2)] + \\
 &\quad + (n \Delta t) S_f + \frac{1}{3} S_g (n \Delta t)^3 + \\
 &\quad + n^2 [(K_{i-1}^1)^2 A^2 E [(x_{i-1}^1 - \hat{x}_{i-1/i-2}^1)^2] + \\
 &\quad + (K_{i-1}^1)^2 E [v_{i-1}^2]]
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Lembremos as expressões correspondentes da variância do erro de fase no caso de se utilizar o preditor ótimo a "(n+1) passos" ($u = \hat{x}_{i/i-1}^2 / C_0$), a qual é dada por (4.19) , e no caso de se deixar livre o relógio a partir da interrupção da referência ($u=0$), a qual é dada por (4.20)

$$\begin{aligned}
E [(X_{i+n}^1 - \hat{X}_{i+n/i-1}^1)^2] &= E [(X_i^1 - \hat{X}_{i/i-1}^1)^2] + (n \Delta t)^2 E [(X_i^2 - \hat{X}_{i/i-1}^2)^2] + \\
&+ 2 (n \Delta t) E [(X_i^1 - \hat{X}_{i/i-1}^1) (X_i^2 - \hat{X}_{i/i-1}^2)] + \\
&+ (n \Delta t) S_f + \frac{1}{3} S_g (n \Delta t)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E [(X_{i+n}^1 - \hat{X}_{i+n}^1 \text{ livre})^2] &= E [(X_i^1 - \hat{X}_{i/i-1}^1)^2] + (n \Delta t)^2 E [(X_i^2)^2] + \\
&+ 2 (n \Delta t) E [(X_i^1 - \hat{X}_{i/i-1}^1) (X_i^2 - \hat{X}_{i/i-1}^2)] + \\
&+ (n \Delta t) S_f + \frac{1}{3} S_g (n \Delta t)^3
\end{aligned}$$

4.4 Simulações

Nas simulações foram utilizados os seguintes valores para H e R:
 $H = [1 \text{ Volt/rad} \quad 0]$ $R = [1(10^{-7}) \text{ (Volts)}^2]$

Para o intervalo de discretização e as componentes da matriz de covariância Q, foram usados os mesmos valores que no capítulo 3.

- Na figura 4.3 foram traçadas a variância do erro de fase do relógio controlado pelo laço, com o filtro ótimo D desenvolvido no capítulo 3 (caso a), e a variância do erro de fase do relógio funcionando sempre livre (caso b), a qual é dada por (4.15).

Observa-se que a primeira é uma curva crescente mas que se estabiliza em um valor no estado estacionário, ao passo que a outra curva, correspondente ao relógio livre, é divergente, o que é consequência do modelo não estacionário divergente que descreve as instabilidades do relógio.

- Nas figuras 4.4 e 4.5 foi traçada a evolução da variância do erro de fase do relógio no caso de interrupção da referência, quando são aplicadas as seguintes técnicas:

c) Usar o preditor ótimo a "n+1 passos" dado por (4.5). Neste caso a variância do erro de fase é dada por (4.19).

d) Deixar o relógio livre ($u(t) = 0$) a partir da interrupção do sinal de referência. A variância evolui com o tempo segundo a equação (4.20).

e) Utilizar a técnica de "Holdover". A variância evolui com o tempo segundo a equação (4.24).

Observa-se que, embora o erro de fase divirja nos três casos, usando o preditor ótimo o erro de fase cresce muito mais lentamente que nos casos de deixar o relógio livre ou utilizar a técnica de "Holdover". É evidente a vantagem deste método para manter o sincronismo da rede face a interrupções do relógio mestre.

Na figura 4.4 o sinal de referência se interrompe após um mês de inicialização do sistema; enquanto que na figura 4.5 se interrompe após dez meses de funcionamento.

Observa-se que, para este último caso, a variância do erro de fase ao deixar livre o relógio diverge muito mais rapidamente que no caso de interrupção após um mês. Isto é devido a que, enquanto é recebido o sinal de referência, o laço em realidade não corrige os erros do relógio, mas os compensa. Então, dado que estes erros são processos não estacionários, a variância do erro de fase diverge tanto mais rápido quanto mais tarde é produzida a interrupção do sinal do relógio mestre.

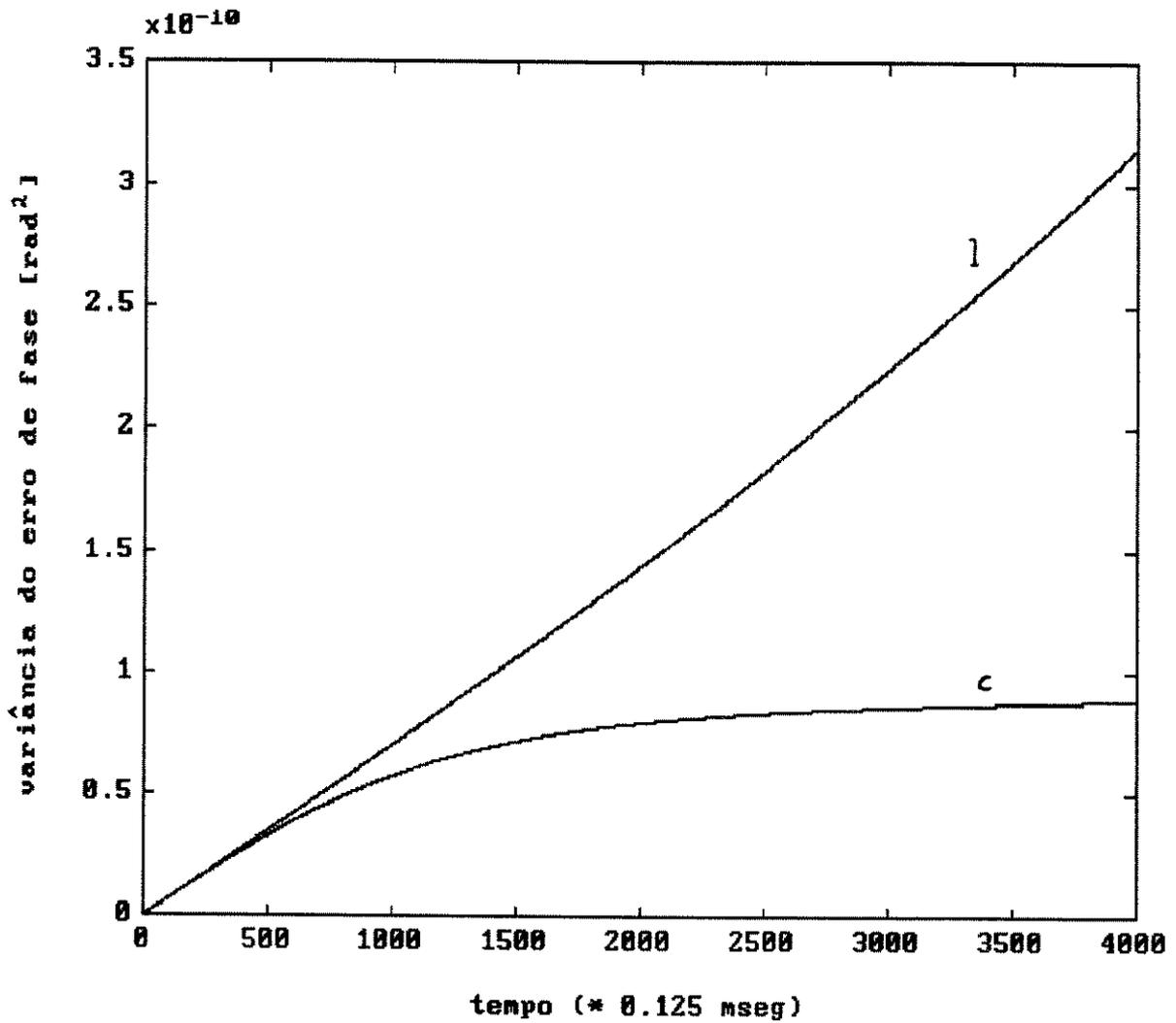


Fig. 4.3 Variância do erro de fase do relógio livre (curva l) e do relógio controlado (curva c).

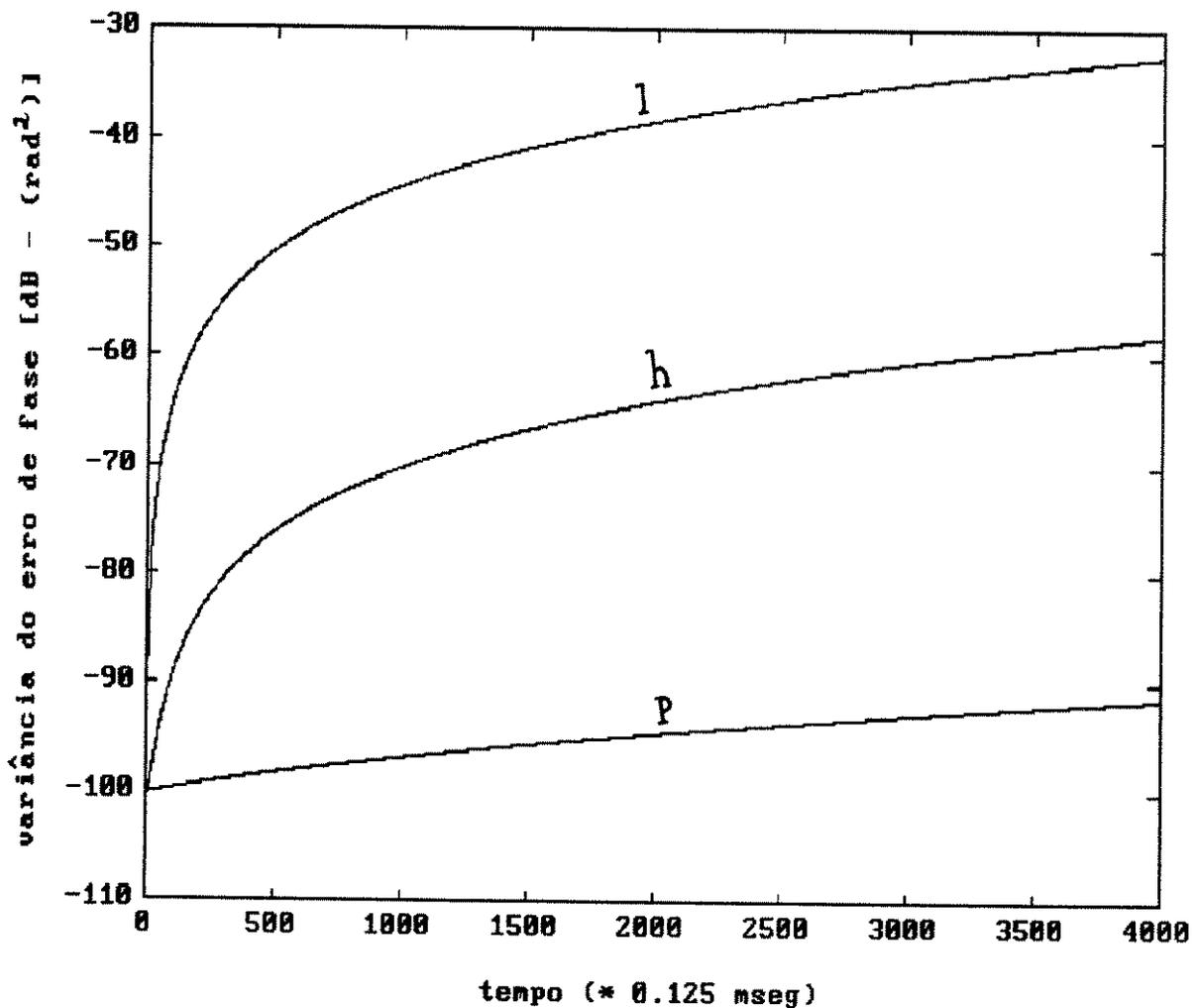


Fig. 4.4 Evolução da variância do erro de fase do relógio no caso de interrupção da referência após um mês de funcionamento quando são aplicadas as seguintes técnicas: relógio livre (curva l); "Holdover" (curva h) e preditor ótimo a "n+1 passos"(curva p).

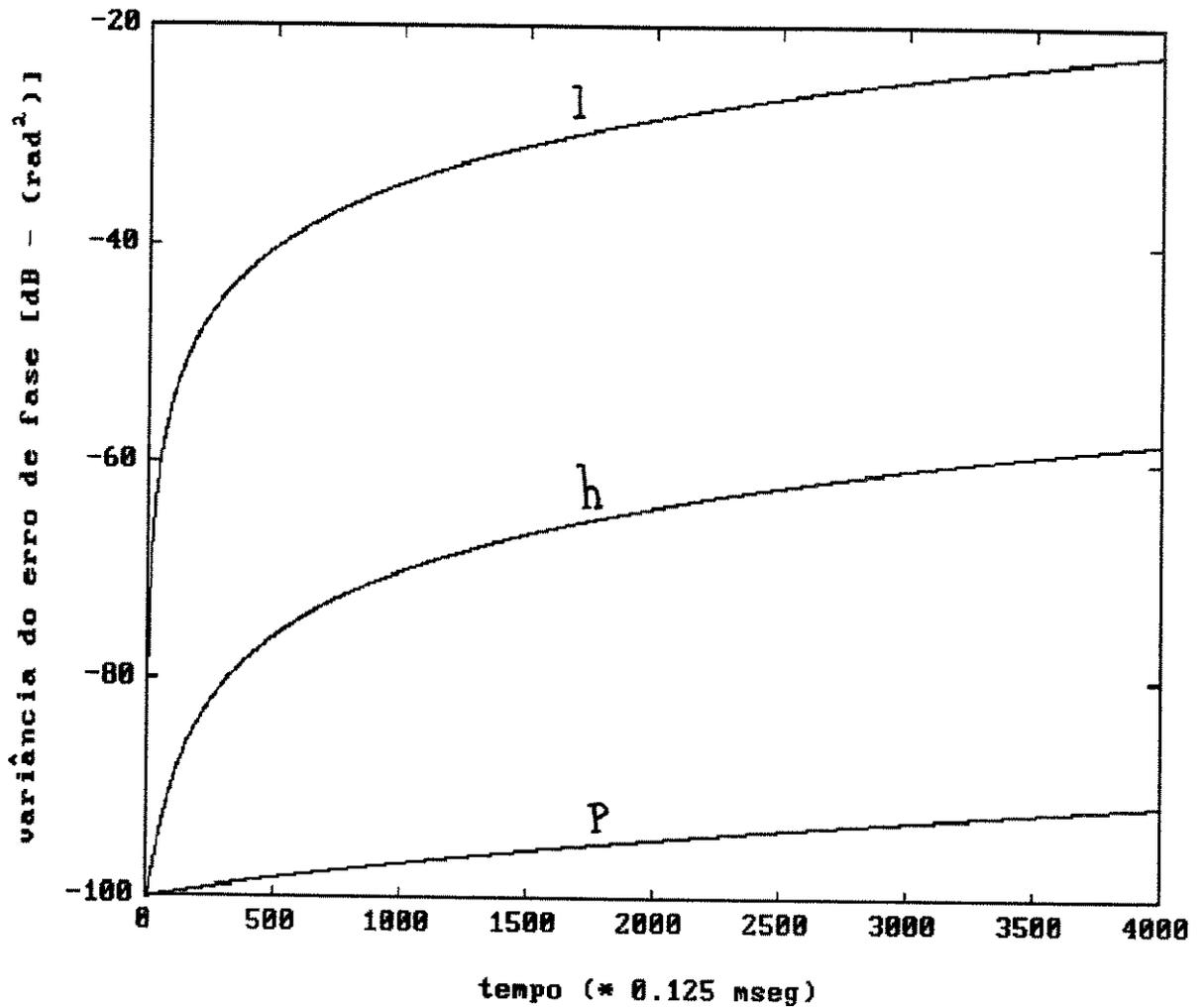


Fig. 4.5 Evolução da variância do erro de fase do relógio no caso de interrupção da referência após dez meses de funcionamento quando são aplicadas as seguintes técnicas: relógio livre (curva l); "Holdover" (curva h) e preditor ótimo a "n+1 passos" (curva p).

Apêndice 1

DEMONSTRAÇÃO DE QUE O RUÍDO FLICKER NÃO PODE SER REPRESENTADO EXATAMENTE MEDIANTE UM MODELO DE ESTADOS LINEAR DE ORDEM FINITA

Existem processos que não podem ser modelados como saída de um sistema dinâmico linear de ORDEM FINITA, cuja entrada é um vetor de ruído branco. Por exemplo, o ruído branco Gaussiano de faixa estreita não pode ser modelado dessa maneira, já que requer um filtro passa-baixas ideal e tal filtro não pode ser representado como um quociente de polinômios em s de ordem finita.

Existe um teorema de Chen [18], na teoria de sistemas lineares, que apresenta o seguinte critério para a realização de modelos dinâmicos lineares:

Teorema: Um modelo dinâmico linear da forma

$$\dot{x} = A x + B u$$

$$y = C x + D u$$

para um sistema com uma resposta impulsiva entrada-saída $G(t, \tau)$, existirá SE E SOMENTE SE $G(t, \tau)$ puder ser fatorado na forma

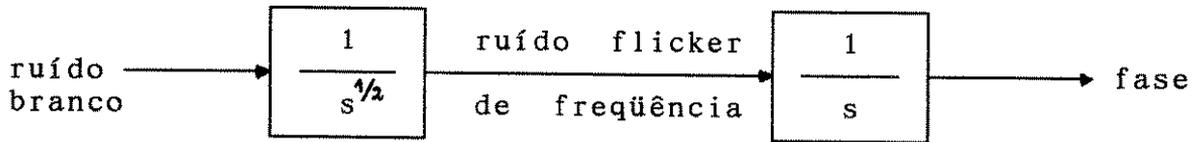
$$G(t, \tau) = M(t) N(\tau)$$

onde M e N são matrizes de ordem finita.

Se $G(t, \tau)$ é escalar (ou seja, uma entrada - uma saída), $M(t)$ é um vetor linha e $N(\tau)$ é um vetor coluna.

Este teorema pode ser usado como uma prova para determinar se existe um sistema dinâmico linear de ordem finita para uma dada função de resposta impulsiva.

Vejamos o caso de ruído flicker de frequência de um oscilador,



A função transferência que relaciona o ruído branco de entrada com o ruído de fase de saída é $1/s^{3/2}$. Então, a antitransformada de $1/s^{3/2}$ dá como resposta a um impulso aplicado em $t = 0$, a função $2\sqrt{t} / \pi$.

Assim, a resposta a um impulso aplicado em $t = \tau$ é

$$G(t, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t - \tau} \quad ; \quad t > \tau$$

Observa-se que $G(t, \tau)$ não pode ser fatorada na forma $M(t) N(\tau)$; o que prova que não existe nenhum modelo de estados linear de ordem finita que represente exatamente o ruído flicker.

Apêndice 2

CÁLCULOS AUXILIARES

Demonstração da função de transferência ótima a laço fechado entre $n(k)$ e $e_p(k)$ com $\phi(k) = 0$

Da equação (3.22)

$$H(z) = - [1 \ 0] [zI - F(I - KH)]^{-1} FK$$

Então,

$$[zI - F(I - KH)]^{-1} = \frac{1}{\det [zI - F(I - KH)]} \text{ADJUNTA } [zI - F(I - KH)]$$

$$I - KH = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} [A \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 A & 0 \\ K_2 A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - K_1 A & 0 \\ -K_2 A & 1 \end{bmatrix}$$

$$F(I - KH) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - K_1 A & 0 \\ -K_2 A & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - K_1 A - \Delta t K_2 A & \Delta t \\ -K_2 A & 1 \end{bmatrix}$$

$$zI - F(I - KH) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - K_1 A - \Delta t K_2 A & \Delta t \\ -K_2 A & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z - 1 + K_1 A + \Delta t K_2 A & -\Delta t \\ K_2 A & z - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det (zI - F (I - KH)) &= (z - 1 + K_1 A + \Delta t K_2 A) (z - 1) + K_2 A \Delta t \\
&= z^2 + z [-1 + K_1 A + \Delta t K_2 A - 1] + \\
&\quad + [1 - K_1 A - \Delta t K_2 A + K_2 A \Delta t] \\
&= z^2 + z [-2 + (K_1 + K_2 \Delta t) A] + (1 - K_1 A)
\end{aligned}$$

$$\text{ADJUNTA } [zI - F (I - KH)] = \begin{bmatrix} z - 1 & \Delta t \\ K_2 A & z - 1 + K_1 A + K_2 \Delta t A \end{bmatrix}$$

$$F K = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 \Delta t \\ K_2 \end{bmatrix}$$

Logo, temos que:

$$H(z) = - \frac{1}{z^2 + z[-2 + (K_1 + K_2 \Delta t) A] + (1 - K_1 A)} [1 \ 0] .$$

$$\cdot \begin{bmatrix} z - 1 & \Delta t \\ K_2 A & z - 1 + K_1 A + K_2 \Delta t A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 + K_2 \Delta t \\ K_2 \end{bmatrix}$$

$$= - \frac{(z - 1) (K_1 + K_2 \Delta t) + \Delta t K_2}{z^2 + z [-2 + (K_1 + K_2 \Delta t) A] + (1 - K_1 A)}$$

$$= \frac{z (K_1 + K_2 \Delta t) - K_1}{z^2 + z [-2 + (K_1 + K_2 \Delta t) A] + (1 - K_1 A)}$$

$$H(z) = - \frac{[z (K_1 + K_2 \Delta t) - K_1]}{z^2 + z [-2 + (K_1 + K_2 \Delta t) A] + (1 - K_1 A)} \quad (3.23)$$

Observa-se que o denominador da transferência $H(z)$ é o determinante da matriz $[zI - F(I - KH)]$. Portanto, as raízes do denominador de $H(z)$, ou seja, os polos do sistema a laço fechado são os autovalores da matriz $F(I - KH)$.

KALMANE.M

```
% Calculos do filtro de kalman em estado estacionario
% Parametro max
```

```
dt=1.25e-4
```

```
h1=1;
```

```
aa=2*pi/dt;
```

```
a=[1 dt;0 1];
```

```
g=[1 0;0 1];
```

```
c=[h1 0];
```

```
sf=2.1972e-19;
```

```
sg=3.49542e-19;
```

```
q(1,1)=sf*dt+sg*(dt^3)/3;
```

```
q(1,2)=sg*(dt^2)/2;
```

```
q(2,2)=sg*dt;
```

```
q(2,1)=q(1,2);
```

```
q=(aa^2)*q;
```

```
r=[1];
```

```
max=100,
```

```
for i=1:max,
```

```
r=r/(10^(1/10));
```

```
[l,m,p]=dlqe(a,g,c,q,r);
```

```
% Calculo dos polos do preditor em estado estacionario
```

```
l=real(l);
```

```
s(1)=1;
```

```
s(2)=-2+(l(1)+l(2)*dt)*h1;
```

```
s(3)=1-l(1)*h1;
```

KALMANE.M

```
[pol(:,i)]=roots(s);

% Ganho de Kalman estacionario.
k(:,i)=10*log(1)/log(10);

m=real(m);

% Variancia do erro de predicao.
e1(i)=10*log(m(1,1))/log(10);

gussss
end

plot(k(1,:));
pause

plot(k(2,:));
pause

plot(e1)
pause
```

SIMU.M

```
% Simula o filtro de kalman. Calcula a variancia do erro de predicao.
```

```
% Ingresar max,r
```

```
max=500;
```

```
dt=1.25e-4;
```

```
%randn('normal')
```

```
e=[0;0];
```

```
h=[1 0];
```

```
xp1=[0 0]';
```

```
pp=[0 0;0 0] ;
```

```
r=[1e-10];
```

```
%r=[1e-7];
```

```
f=[1 dt;0 1];
```

```
sf=2.1972e-19;
```

```
sg=3.49542e-19;
```

```
q(1,1)=(sf*dt+sg*(dt^3)/3);
```

```
q(1,2)=sg*(dt^2)/2;
```

```
q(2,2)=sg*dt;
```

```
q(2,1)=q(1,2);
```

```
q=q*((2*pi/dt)^2);
```

```
w1=q(1,2)/sqrt(q(2,2));
```

```
w2=sqrt(q(2,2));
```

```
w3=sqrt(q(1,1)-q(1,2)^2/q(2,2));
```

```
w4=0;
```

```
ww=[w1 w2 ;w3 w4];
```

SIMU.M

```
for i=1:max,
n=sqrt(r)*randn;
z1=h*e+n;
est(i,1)=z1;
est(i,2)=e(1);
est(i,3)=xp1(1);

l=pp*h'*inv(h*pp*h'+r);
pp=f*(pp-pp*h'*inv(h*pp*h'+r)*h*pp)*f'+q;

% Para graficar a variancia do erro de estimacao em funcao do t
empo
var(i)=pp(1,1);

xp1=f*(xp1+l*(z1-xp1(1)));
ruído=(ww'*randn(2,1));
e=f*e+ruído;
end

plot(est)
```

RELOGIO.M

```
cc(i,1)=10*log(cc(i,1))/log(10);
```

```
cc(i,2)=10*log(cc(i,2))/log(10);
```

```
c3(i)=10*log(c3(i))/log(10);
```

```
end
```

```
plot(cc);
```

```
hold on
```

```
plot(c3);
```

Referências bibliográficas

- [1] W. C. Lindsey, F. Ghazvinian, W. C. Hagmann, K. Dessouky, "Network Synchronization", *Proc. IEEE*, vol. 73, Oct. 1985.
- [2] F. M. Gardner, *Phaselock Techniques*, PTR Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [3] D. H. Wolaver, *Phase-Locked Loop Circuit Design*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1991.
- [4] J. Vanier, M. Têtu, "Phase-Locked Loops Used with Masers: Atomic Frequency Standards", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-30, Oct. 1982.
- [5] P. Kartaschoff, "Computer Simulation of the Conventional Clock Model", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-28, Sep. 1979.
- [6] J. Rutman, F. L. Walls, "Characterization of Frequency Stability In Precision Frequency Sources", *Special Issue on Time and Frequency, Proc. IEEE*, vol. 79, July 1991.
- [7] L. S. Cutler, C. L. Searle, "Some Aspects of the Theory and Measurement of Frequency Fluctuations in Frequency Standards", *Proc. IEEE*, vol. 54, Feb. 1966.
- [8] W. Egan, *Frequency Synthesis by Phase lock*, Wiley, 1981.
- [9] R. G. Brown, P. Y. C. Hwang, *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*.
- [10] R. G. Brown, "Kalman Filter Modeling", *Proceedings of the 16th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Applications and Planning Meeting*, NASA Goddard Space Flight Center, 1984.

- [11] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, New Jersey, 1979.
- [12] H. W. Sorenson, Ed., *Kalman Filtering: Theory and Application*, IEEE PRESS, 1985.
- [13] Bellcore TA-1244, *Synchronized Clocks: Common Generic Criteria*, Issue 1, Sept. 1991.
- [14] W. C. Lindsey, M. K. Simon, Eds., *Phase-Locked Loops and Their Application*, IEEE PRESS, 1978.
- [15] W. C. Lindsey, C. M. Chie, Eds., *Phase-Locked Loops*, IEEE PRESS, 1986.
- [16] W. C. Lindsey, C. M. Chie, "A Survey of Digital Phase-Locked Loops", *Proc. IEEE*, vol. 69, April 1981.
- [17] G. S. Gill, S. C. Gupta, "First-Order Discrete Phase-Locked Loop With Applications to Demodulation of Angle-Modulated Carrier", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, June 1972.
- [18] C. T. Chen, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart, Winston, 1970.
- [19] G. A. Hirchoren, *Diseño óptimo de lazo de enganche de fase para sincronismo de redes digitales*, Tesis de Ingeniería Electrónica, tutor: Carlos F. Belaustegui Goitia, Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, 1993.