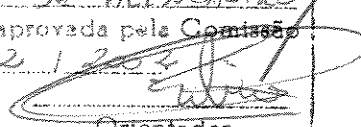


Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por SÍLVIO DE ALENCASTRO
PREGNOLATTO e aprovada pela Comissão
julgada em 09/12/2002

Orientador

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Área de Concentração: Automação

200308167
**O Mal-das-Cadeiras em capivaras:
estudo, modelagem e simulação de um caso**

Autor: Sílvio de Alencastro Pregnolato

Orientador: Prof. Dr. Raul Vinhas Ribeiro

Co-orientador: Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer

**Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica
e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção
do título de Doutor em Engenharia Elétrica**

Campinas, São Paulo
Dezembro - 2002

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

NIDADE	EX
1ª CHAMADA	UNICAMP
	P913m
EX	
OMBO BCI	5 2547
ROC.	16-224/03
C	☐
P	☒
REÇO	R\$ 11,00
ATA	13/03/03
1ª CPD	

CM00180504-3

18 10 284906

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P913m Pregnolatto, Sílvio de Alencastro
O mal-das-cadeiras em capivaras: estudo, modelagem e
simulação de um caso / Sílvio de Alencastro Pregnolatto. -
-Campinas, SP: [s.n.], 2002.

Orientadores: Raul Vinhas Ribeiro e João Frederico da
Costa Azevedo Meyer.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Método dos elementos finitos. 2. Modelos
matemáticos. 3. Difusão. 4. Simulação (Computadores).
I. Ribeiro, Raul Vinhas. II. Meyer, João Frederico da
Costa Azevedo. III. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV.
Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Depto de Engenharia de Sistemas

Tese de Doutorado defendida por Sílvio de Alencastro
Pregnotatto e aprovada em 9 de dezembro de 2002 pela banca
examinadora constituída pelos professores

Orientador: Prof. Dr. Raul Vinhas Ribeiro

Co-orientador: Prof. Dr. João Frederico da C. Azevedo Meyer

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Prof. Dr. Christiano Lyra Filho

Profa. Dra. Tânia Maria Vilela Salgado Lacaz

Prof. Dr. Hermano de Medeiros Ferreira Tavares

Prof. Dr. Mohamed Ez el Din Mostafa Habib

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é criar uma ferramenta para poder simular cenários adequados ao estudo e controle de uma epizootia em uma população num ecossistema relativamente fechado. Definem-se, em contextualização histórica e acadêmica, modelos de dinâmica populacional de espécie única e sistemas de duas ou mais espécies com variação temporal e espacial, incluindo interação entre estas. São descritos algoritmos para a aproximação de solução de tais sistemas, caracterizados por uma forte não-linearidade. Para a aproximação temporal, aplica-se o método de Crank-Nicolson, e, para a espacial, o Método de Elementos Finitos, com um processo iterativo interno a cada passo no tempo para sucessivamente aproximar a característica não-linear. Para estudo da presença da mencionada endemia numa população de capivaras são apresentados dois modelos principais: o primeiro incluindo uma variação cíclica anual (sazonal) da taxa de contágio; o segundo incluindo a interação entre as capivaras e os vetores do protozoário causador do mal (as mutucas), além dos diferentes comportamentos de sub-grupos dos mamíferos e dos insetos.

Palavras-chave: Simulação, modelagem de endemias, não-linearidade, elementos finitos.

Abstract

The main objective of this thesis is the creation of an appropriate tool for simulating scenarios for the study and the control of an epizootic in a population within a relatively closed ecosystem. Models of the population dynamics of a single population are defined describing the historical and scientific context of this kind of study in which emphasis from time-varying models moved to models with both temporal and spatial variations including interactions between them. Algorithms are presented for the approximation of solutions in this kind of situation, which presents strong non-linearity. The method for temporal approximation is that of Crank-Nicolson, while spatial approximations are dealt with using the Finite Element Method, with an iterative method (in each time-step) for the non-linear aspects of the model. For the study of the mentioned disease in a population of capybaras two main models are presented: the first one includes a cyclic annual variation of the infection rate, which oscillates according to the populational variation of the vector in the ecosystem. The second model includes the interaction between species as well as between those different groups within each: susceptible and infected capybaras, along with the corresponding groups in stable flies.

Key words: Simulation, modeling endemics, non-linearity, finite-elements

*Aos meus pais
Doca e Hugo
(in memoriam)*

Glória, a todas as lutas inglórias...
(João Bosco –Aldir Blanc)

A terra é azul!!!
(Yuri Gagarin)

Agradecimentos

Todas as pessoas, sem exceção, que em algum momento e em quaisquer circunstâncias compartilharam comigo esta jornada de 60 anos de aprendizagem, têm crédito decisivo nos ideais que nortearam a concepção e realização deste trabalho. As falhas refletem apenas deficiências individuais do autor

Índice

<i>Introdução</i>	3
Histórico	3
Os primeiros modelos de Dinâmica Populacional: as Equações de Diferenças e Equações Diferenciais Ordinárias	6
A inclusão de mais espécies	12
Alastramento de epidemias: modelos tipo SIR	16
Caracterização das espécies envolvidas e da enfermidade	19
Comentários finais	23
<i>Capítulo 1</i>	25
Uma espécie, com dispersão espacialmente dependente, e dinâmica populacional de tipo não linear	25
<i>Capítulo 2</i>	45
Duas ou mais espécies em dispersão espacialmente dependente, interagindo entre si, com dinâmica populacional de tipo logístico.	45
<i>Capítulo 3</i>	69
Novos Desafios: Mal-das-cadeiras de Capivaras	69
<i>Capítulo 4</i>	101
Conclusões	101
<i>A aproximação da solução: justificativas teóricas</i>	104
<i>Referências Bibliográficas</i>	111
<i>Anexos: os algoritmos</i>	121
Naolin.m	121
Duasdif.m	125
Tripop.m	131
Pentap.m	134

Introdução

Histórico

Em 1998, durante a realização de um dos Workshops internacionais de Ecologia Matemática, no ICTP, em Trieste, na Itália, discutiu-se a formulação de um projeto no qual se estudassem diversos aspectos e estratégias que contribuíssem decisivamente para um manejo equilibrado e uma comunidade sustentável na região de pantanal existente no nordeste argentino, na província de Corrientes, os Esteros de Iberá. Este projeto recebeu alguns apoios imediatos: os de pesquisadores em ecologia matemática nas universidades argentinas de Tandil e Lujan, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em Porto Alegre e na Universidade Federal de Minas Gerais em Belo Horizonte, além de pesquisadores do grupo de Biomatemática da Universidade Estadual de Campinas. Recebeu, também, imediato apoio de pesquisadores do Departamento de Ecologia Química da Universidade de Siena e do Instituto Oceanográfico ligado à Universidade de Roma. Estes últimos, por sua localização, assumiram a coordenação do projeto, tendo agregado à equipe inicial, pesquisadores das universidades de Cádiz, na Espanha, do Aveiro, em Portugal, de York, na Inglaterra, e da Universidade del Salvador, de Buenos Aires. De modo relativamente rápido, o projeto foi constituído, avaliado e recebeu apoio financeiro da Comunidade Européia. No projeto final, coube ao grupo de Campinas a modelagem e a análise numérica de dois aspectos básicos. Primeiro o da presença e influência, em determinadas espécies vivas, de produtos impactantes nos meios aquáticos, provenientes de atividades humanas, particularmente do cultivo de arroz na região circunvizinha. E, segundo, o da modelagem e simulação numérica de uma periódica endemia que atinge ciclicamente a população de uma das espécies carismáticas da região, a das capivaras (*Hydrochoerus hydrochoeris*).

Os esteros, ou os alagados de Iberá¹ se localizam na região maior do nordeste argentino entre os paralelos 27° 35' e 28° 41' sul e os meridianos 58° 58' e 60° a oeste de Paris.

¹ Neste texto, dada a relação próxima com documentos argentinos e a facilidade do uso de mapas em espanhol, será usada a toponímia local ou regional, sem se recorrer nem a uma tradução, nem a um aportuguesamento. Assim, "Jaciretá" aparecerá como "Yaciretá", a versão espanhola (e local) para o termo guarani.

Isso significa que dois terços da província de Corrientes são ocupados pelos alagados. A lagoa de Iberá, a maior do conjunto e que dá nome ao complexo, é aquela sobre a qual se conhecem muitas lendas, sendo que seu próprio nome – que significa “águas brilhantes” ou “água que brilha”, em tradução do tupi-guarani – é repleto de significados.

No início do século passado o amplo movimento na sociedade Argentina que visava a inclusão deste imponente parque hidrográfico no circuito econômico e legal daquele país, culminou, em 1905, com a organização e realização de uma expedição de reconhecimento denominada, aliás, “Expedição para Iberá”, por proposta da Sociedade Científica Argentina. À Sociedade coube, no grande levantamento global, a elaboração dos objetivos e a indicação dos responsáveis científicos pelas diferentes áreas temáticas a serem abordadas, como a catalogação de espécies da flora e da fauna, levantamentos geológicos e geográficos, etc., cabendo ao governo central o financiamento da expedição. O resultado foi um extenso relatório do Centro Regional Litoral do Instituto Nacional de Ciência e Técnicas Hídricas da Argentina. Alguns dos questionamentos, que a citada missão buscava esclarecer em visão científica, dão-nos uma idéia das preocupações e desconhecimentos que envolviam os Esteros, naquela época:

- Existe relação entre as cheias do rio Paraná e o aumento do nível de água da lagoa?
- Existem vertentes no leito da lagoa?
- Existem vestígios de algum leito antigo do rio Paraná nas proximidades da lagoa?
- Qual a natureza da faixa de terra entre a Lagoa e o povoado de Ituzaingó (note-se que o rio Paraná, na altura de Ituzaingó, muda para o oeste o seu curso que, a montante, aponta em direção ao sul, formando os limites setentrionais dos alagados de Iberá)?
- A redução ou o desaparecimento da lagoa poderia provocar alterações climáticas na região?
- Há possibilidades para o cultivo intensivo de arroz?

As questões da expedição de 1905 se tornam muito atuais em vista de um comentado projeto a ser, possivelmente, financiado pelo Banco Mundial, cujo objetivo é o de “endireitar” o Rio Paraná, para aumentar a eficiência do transporte fluvial dos grãos produzidos em toda a macro-bacia, mas com impacto extraordinário no ambiente.

Genericamente, as respostas a estas questões indicam não haver relação entre as cheias do Paraná e o aumento do nível de água na lagoa de Iberá, a não ser a coincidência da época de chuvas na bacia superior do referido rio e no nordeste da província de Corrientes. Nessa época, que se inicia nos meses de março-abril e que vai até os meses de setembro-outubro, os rios, riachos e córregos transbordam criando uma enorme região inundada, paisagem onde os claros não submersos são especialmente represas (embalsados), extensas faixas de vegetação aquática que, muitas vezes também formam represas, outeiros, e, de longe em longe, “ilhas” flutuantes nas lagoas naturais perenes anteriores à inundação, (algo que se assemelha, certamente em menores propor  es, com o fen  meno das terras caídas no rio Amazonas) e extensões de pouca profundidade com a vegeta  o característica (em Iber  , formada pelos chamados “pajonales”). Os alagados, de Ituzaingó, ao norte até Passo Claro no seu limite meridional, se dividem entre duas bacias fluviais, do Paraná a oeste e do Uruguai a leste, e seu leito é sempre mais elevado que o nível das águas desses rios, independentemente da cheia que neles esteja ocorrendo. No relatório final indicavam-se fortes suspeitas de existência de fontes de água no leito da lagoa de Iber  , sendo, entretanto, as precipita  es pluviais a principal fonte de água dos alagados. Hoje, o grupo de ecologia matemática da Universidade de Tandil, estudando possíveis rela  es entre a altura das águas a montante da represa do Rio Paraná em Yaciret  , oferece interessantes hipóteses para o “surgimento” de água no ecossistema de Iber  . Os pesquisadores desse grupo argentino apresentam argumentos muito sólidos para a tese de que a contínua eleva  o do nível das águas de Iberê se deve a uma fenda na camada de basalto no sub-solo da região, fenda esta localizada na região da represa. Quanto ao comportamento a jusante, as águas de Iber   afluem para os rios Paraná e Uruguai em seus cursos inferiores através de canais naturais e dos rios Corrientes e Miri  ay, principalmente.

Atualmente se constata certa explora  o ecológico-turística, com planos de expansão, destacando-se atividades de pesca desportiva, passeios de barco para apreciar a natureza

exuberante, numa região em que a parte inexplorada constitui perto de 40% do total. A capivara é um dos importantes atrativos para o desenvolvimento de atividades turísticas e, nesse sentido, é amplamente justificável procurarmos entender as relações desse animal com o ambiente em que vive.

Os primeiros modelos de Dinâmica Populacional: as Equações de Diferenças e Equações Diferenciais Ordinárias

Do ponto de vista histórico, variações dinâmicas de determinadas populações têm sido modeladas com sistemas de Equações Diferenciais ou com Equações de Diferenças, distinguindo-se estas daquelas por características de cada espécie estudada, separando-as assim, entre as que são modeladas por relações discretas, ou sazonais as que o são por relações de continuidade. Alguns dos modelos têm suas raízes em estudos realizados há mais de duzentos anos, como por exemplo, o Modelo Malthusiano. Iremos, nesta introdução, comentar a evolução deste tipo de modelagem, terminando com uma crítica relativamente recente que veio a incluir variações espaciais àquelas tão somente temporais.

Os primeiros modelos de Dinâmica Populacional visavam estudar modelos de uma única espécie e utilizavam Equações de Diferenças, com expressões do tipo $P_{N+1} = F(P_N)$ ou, mais precisamente, $P_{N+1} = P_N \cdot f(P_N)$, nas quais transparece a hipótese de que a variação populacional num determinado instante depende da população nesse momento. Esta família de modelos abarca os que são genericamente designados de “densidade dependentes”. Nestas Equações de Diferenças P_N indica, ora o número total de indivíduos, ora uma densidade populacional. Para estes modelos, então, na forma geral indicada, $P_{N+1} = P_N \cdot f(P_N)$, o termo $f(P_N)$ representa uma taxa que se traduz em natalidade mais imigração menos mortalidade e emigração, refletindo com maior generalidade a variação populacional por unidade de tempo e por unidade populacional. Tais modelos consideram uma geração dependendo de modo direto apenas da geração anterior. Diversas situações, porém, exigem formulações que incluam mais gerações, e uma forma do tipo

$$P_{N+1} = P_N \cdot f(P_N, P_{N-1}, P_{N-2}, \dots) \text{ ou, de modo mais geral,}$$

$$P_{N+1} = F(P_N, P_{N-1}, P_{N-2}, \dots),$$

é adotada quando necessário. Em Edelstein-Keshet (1988), há a descrição de diversos destes casos, abordando modelagens de situações como bancos de sementes ou o controle fisiológico de processos respiratórios (Mackey e Glass, 1977 e, também, Glass e Mackey, 1978 *in* Edelstein-Keshet, *op. cit.*), entre outros.

Nos primeiros ensaios, atribuíam-se a $f(P_N)$ um valor constante, de modo que $f(P_N) = \lambda$ (denominado de Modelo Discreto de Malthus). Posteriormente, criaram-se modelos em que $f(P_N)$ assumia diferentes formas para transmitir uma efetiva dependência dessa taxa em relação à população presente.

Embora este tipo de modelagem venha se prestando, de forma bastante satisfatória, para análises e estudos de comportamentos populacionais em curtos períodos de tempo sendo usados como linguagem corrente em avaliações demográficas, para muitas modelagens também se exige mais do que uma avaliação discreta anual, ou por gerações - e é então necessário trabalhar com Equações Diferenciais.

Nesse contexto, o que se tem são expressões como

$$\frac{dP}{dt} = F(P) \text{ ou } \frac{dP}{dt} = F(P, t),$$

em que surge claramente a analogia com as Equações de Diferenças, lineares ou não.

É importante destacar que em muitas situações nas quais se impõe uma aproximação do modelo contínuo com diferenças finitas para a sua resolução, quando se obtém uma equação discreta, deve-se considerar que não há uma conexão simples entre os Modelos em Equações de Diferenças e os que seriam os análogos em Equações Diferenciais.

Muitos são os modelos usando Equações Diferenciais Ordinárias para descrever fenômenos populacionais, mas há uma característica comum a todos eles: esta é a de partir do pressuposto de que a variação da população “depende” apenas e tão somente do tempo. Na realidade, tanto a população quanto os parâmetros variam, de fato, no tempo, dependendo, porém, de muitas outras variáveis que por sua vez variam, também, no tempo.

Este mencionado pressuposto, que resulta numa simplicidade muito prática, não tem prejudicado o uso de modelos de Equações Diferenciais Ordinárias e de Equações de Diferenças em demografia e no estudo de dinâmicas populacionais. Muito pelo contrário, um uso criterioso desses modelos continua a produzir resultados bastante úteis. Um exemplo célebre que data do final do século 19, mencionado por Braun (*in* Braun, Coleman e Drew, 1978) é o da criação comercial de peixes na baía de São Francisco, peixes estes que, depois de aprisionados no litoral do estado de Nova Jérsei, foram transportados por via férrea de um lado ao outro do continente: num local apropriado da mencionada baía, foram lançados em reservatórios especiais; dos mais de setecentos retirados do Atlântico, resistiram à viagem pouco mais de quatrocentos. Neste caso, o uso do Modelo Contínuo de Malthus resulta em uma descrição bastante precisa da evolução dessa comunidade em seu novo habitat (o erro relativo no período modelado de quase 20 anos é inferior a 0.4%!):

$$P(t) = 435e^{0.4818t}.$$

O modelo de Verhulst (1837), dado por

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cdot P \cdot \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right) \right],$$

vem sendo utilizado há mais de 100 anos, além de outros que se seguiram: todos, embora não “expliquem” os fenômenos de crescimento populacional densidade-dependente ou a capacidade suporte - dada nas equações aqui citadas por K - descrevem-nos com uma precisão surpreendente (*cf* entre outros, Braun, Coleman e Drew, 1983), usando a simplicidade do modelo a seu favor. Por um lado, uma vasta gama de fenômenos parece passar despercebida no modelo, embora, por outro lado, os parâmetros “consigam” incluir de modo genérico essas características - e os resultados possam ser usados, com cuidado, sim, dentro de limiares estritos, mas de modo muito eficiente.

Um clássico do uso adequado de modelos desse tipo foi a explicação dada pelo citado autor para o rápido crescimento da população da província francesa do Québec, num tempo em que a população de origem na França crescia de modo bem mais lento. O modelo de Verhulst não “explicou”, mas “viu” as populações, com muito mais

semelhanças que diferenças, em momentos diferentes de suas histórias e, portanto, com diferentes taxas de crescimento (*cf* Braun, Coleman e Drew, 1983). O fato dos modelos não levarem em conta variações espaciais ou geográficas, então, revela uma característica que, se por um lado se define enquanto incapacidade do modelo de incluir características diversas, também apresenta uma vantagem - a de descrever de modo simplificado o que o modelo não “sabe”.

Assim, também, publicações recentes ainda se referem ao cruzamento de curvas mencionado por Malthus no final do século 18, ponto em que o crescimento populacional, em Progressão Geométrica, ultrapassa o crescimento da produção de alimentos, em Progressão Aritmética. Tal situação provocaria, ainda segundo o estudo de Malthus, algum fenômeno catastrófico, como uma guerra, uma pandemia, uma crise geradora de grandes fomes (*cf* Coutinho, M. O Espectro da Fome e da Desigualdade, *Ciência Hoje*, nº 145, vol. 25, 1998 e Ehrlich, P., *apud* Hallowell, C., *Will the World go hungry?*, Time Special Issue, Nov., 1997).

Portanto, como já ressaltamos, todos estes modelos têm se caracterizado por uma expressão geral do tipo:

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot f(P), \text{ com } P(0) = P_0 \quad (0.1)$$

ou

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot f(t, P), \text{ com } P(0) = P_0 \quad (0.2)$$

em que f representa a taxa intrínseca de crescimento, ou o crescimento populacional pela população ou pela densidade populacional, uma função da própria população ou densidade (0.1) ou uma função dessa população e do tempo (0.2), caso clássico da situação que ocorre com coeficientes periódicos, por exemplo. A condição inicial, além dos intervalos de variação da variável temporal e da solução, bem como o comportamento da solução e da função f , devem ser objeto de atenção cuidadosa.

Nos casos (0.1) e (0.2), e, sendo ambas as formulações ditas fortes ou clássicas, no sentido da Análise Funcional, as condições para a existência e para a unicidade da solução podem ser expressas como:

Teorema 1

(para a Equação Autônoma, 0.1): A função f deve ser contínua num intervalo real aberto que contenha a condição inicial P_0 e não pode se anular nesse intervalo; (para a Equação 0.2): A função $f(t, P)$ deve ser contínua numa vizinhança aberta do par $(0, P_0)$, com a derivada parcial de f relativamente à segunda variável também contínua nessa vizinhança. No que se escolheu para a formulação da existência e da unicidade, temos a condição inicial dada para $t = 0$. Isto poderia ser feito, obviamente, para t_0 genérico, e a vizinhança poderia ser escolhida como um disco, por exemplo (*cf* Bassanezi e Ferreira Jr., 1988).

Em Bassanezi e Ferreira (*op. cit.*) são apresentadas diversas Equações Diferenciais Ordinárias que descrevem diferentes situações e levam, hoje, o nome de seus proponentes. Além disso, apresentam características semelhantes em termos de capacidade de suporte, de competição intra-específica e estabilidade:

Modelo de Gompertz (1825):
$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cdot P \cdot \ln\left(\frac{K}{P}\right),$$

Modelo de Smith (1963):
$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cdot P \cdot \frac{K - P}{K + a \cdot P},$$

Modelo de Ayalla, Ehrenfeld e Gilpin (1973):
$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cdot P \cdot \left[1 - \left(\frac{P}{K}\right)^\alpha\right], \text{ ou ainda}$$

Modelo de Goel, Maitra e Montroll (1971):
$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cdot P \cdot (1 - a \cdot P + b \cdot e^{-\mu P})$$

além dos mais recentes

Monod (*in* Engel, A., 1984)
$$\frac{dP}{dt} = a \cdot P \cdot (P - K)^2$$

Engel e Paraíba
$$\frac{dP}{dt} = W(P) \cdot \prod_{i=1}^N (P - P_i)^{v_i}, \quad P_N = K$$

Moran e Ricker (ambos em Engel, *op. cit.*)
$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cdot P \cdot (e^{\mu \cdot (1 - \frac{P}{K})} - 1)$$

Ricker (*in* Greenwell, *apud* Edelstein-Keshet, 1985) $\frac{dP}{dt} = \lambda.P.e^{-\mu P}$, ou

Beverton-Holt $\frac{dP}{dt} = \frac{\lambda.P}{\alpha + P}$

entre outros tantos exemplos que figuram na bibliografia, modelando, também, situações mais ou menos características.

Se, por um lado, é verdade que esta formulação autônoma favorece muito a possibilidade de se obterem razoáveis soluções analíticas, também as aproximações polinomiais e numéricas podem ser facilitadas. Do ponto de vista de se delinearem modelos “viáveis”, expressões como as apresentadas acima são uma rara combinação de simplicidade, utilidade e tratabilidade em Análise Numérica, fornecendo soluções ou aproximações em que a “clientela” aprendeu a confiar, item este que, muitas vezes, não está presente nos diálogos de especialistas da Biomatemática com um interlocutor de outras áreas.

Ao acrescentarmos, por exemplo, às condições dos resultados de existência e unicidade acima expressos, as condições mínimas para o uso de alguma forma conveniente de Runge-Kutta, ou Runge-Kutta/Fehlberg, inúmeros são os *softwares* que fornecem aproximações, representações gráficas e excelentes visualizações qualitativas das soluções em suas muitas aproximações possíveis. O mesmo não se pode afirmar sobre a facilidade de se encontrar *softwares* que façam uso de métodos ditos multi-passo, infelizmente não tão populares com os produtores de programas.

Ao mesmo tempo pode-se lamentar, também, que muitas destas aplicações surgem como verdadeiras “caixas pretas” em que métodos de passo simples, como variações de tipo Runge-Kutta, ou análogos de 2ª ou 4ª ordens, são adotadas sem conhecimento do usuário, que deve tão somente “acreditar” nos resultados numéricos...

A crescente relevância dos modelos citados se dá, também, pela facilidade relativa em simulações de Dinâmicas Populacionais que incluam outros fatores, como é o caso de certas situações de pesca, em que figuram os Modelos de Ricker e Beverton-Holt, citados acima, além do caso bem conhecido da predação saturada de Ludwig que iremos mencionar no parágrafo seguinte.

Além destes casos históricos e clássicos (no sentido de transcenderem “modas” científicas) do uso de Equações de Diferenças ou Diferenciais, devem também ser mencionados os trabalhos daqueles pesquisadores no campo de Dinâmica Populacional que se dedicam ao uso de Sistemas de Equações em que a única variável independente é a variável temporal; os modelos desenvolvidos continuam a fornecer significativas contribuições em muitos campos, desde a própria demografia - no estudo evolutivo das assim chamadas “pirâmides etárias” até, por exemplo, em casos bastante específicos no estudo de epizootias ou na modelagem do controle biológico e manejo de pragas (*cf* Zotin, 1999, Raimundo, 1986, Cushing e Li, *in* DeAngelis e Gross, 1992, Young-Pessoa, 1996, Sujii, 1998, entre outros).

A inclusão de mais espécies

Uma crítica comum aos modelos apresentados anteriormente é a de que nenhuma espécie existe de modo totalmente isolado de outras, e, em alguns casos em que as Equações de Diferenças e as Equações Diferenciais “falharam” no estudo descritivo de algum fenômeno, esta crítica procedia. Os modelos uniespecíficos, por assim dizer, percorrem apenas parte dos possíveis caminhos da Dinâmica Populacional.

Em alguns desses casos, aspectos de um relacionamento interespecífico podem ser incorporados à Equação Diferencial ou de Diferenças, e um exemplo é aquele em que aparece uma predação saturada, numa modelagem em que a mortalidade pela predação por outra espécie depende apenas da população estudada e não diretamente da densidade populacional do predador (*cf* Ludwig, D., Aronson, D.G. e Weinberger, 1979). Este modelo, dito de Ludwig, é, de forma genérica, dado por:

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot f(t, P) - \left(\frac{\alpha \cdot P^2}{\beta + P^2} \right) , \quad (0.3)$$

com parâmetros estritamente positivos. O último termo do lado direito indica uma queda no crescimento populacional, queda esta que varia com a própria população. Seu uso transformou o modelo de Ludwig em um caso clássico.

No entanto, naqueles casos gerais tratando do estudo de mais de uma espécie e de como estas se inter-relacionam, sistemas de Equações de Diferenças ou Diferenciais têm sido

adotados com algum sucesso há relativamente bastante tempo. Desde os trabalhos de Volterra (1926) e de Lotka (1925), sistemas desse tipo vêm sendo usados de diversos modos no estudo e na compreensão de muitos fenômenos de convívio entre espécies.

No recente livro de Peschel, M. e Mende, W. (*The Predator-Prey Model: Do we live in a Volterra World?*, 1986), as referências históricas indicam o quanto se necessitou e os conseqüentes saltos qualitativos em modelagem de fenômenos de dinâmica populacional provenientes de se considerarem situações de ação interespecífica, desde os históricos sucessos de Volterra e Lotka, respectivamente lidando com a pesca e com a modelagem de fenômenos de reação química no início do século 20. Estes modelos abriram o caminho para a definição de uma modelagem mais sistêmica, no sentido de incluir diferentes espécies num só quadro, tendo havido casos de poucas espécies e em situações bem precisas em que seus resultados são surpreendentemente efetivos:

- Lebre e Lince Árticos (Odum, in Edelstein-Keshet, 1988). Neste caso, os resultados analíticos clássicos de Lotka-Volterra "dão conta" da descrição dos ciclos vitais do convívio destas duas espécies;
- Broca da Cana-de-Açúcar e Braconídeo (Borri, M. *et alii*, 1996) (Prática utilizada na Copersucar de Piracicaba com a vespa *Cotesia flavipes* criada em laboratório desde 1975). Aqui, também o modelo se ajusta admiravelmente ao manejo da praga com a introdução de um controle biológico.
- Há, no caso de controle biológico, outros exemplos do mencionado convívio sistêmico como o controle de ácaros com a introdução de uma população de joaninhas.

Estes Modelos, expressos numa forma genérica já apresentada neste texto, nomeadamente,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{P}), \quad \text{com} \quad \mathbf{P}(0) = [P_1(0), P_2(0), \dots, P_N(0)], \quad \text{para}$$

$$\mathbf{P}(t) = [P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)], \text{ e}$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{P}) = [f_1(t, \mathbf{P}(t)), f_2(t, \mathbf{P}(t)), \dots, f_N(t, \mathbf{P}(t))], \quad (0.4)$$

mereceram uma enorme quantidade de estudos, análises, e aproximações - e muitas são as ferramentas construídas para “tratá-los”, seja em instrumental analítico, sejam processos numéricos.

No caso de sistemas como este, resultados clássicos de Existência, Unicidade e Dependência Contínua dos Parâmetros para a Solução do Problema de Cauchy se enunciam:

Teorema 0.2

Seja $\mathbf{F}(\mathbf{P}, \lambda)$ um campo vetorial no $\mathbf{R}^n$, dependente de um parâmetro $\lambda \in \mathbf{R}^k$,

(i) contínuo em uma vizinhança de $(\mathbf{P}_0, \mathbf{0}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, e

(ii) lipschitziano em $\mathbf{P}$, isto é,

$$\| \mathbf{F}(\mathbf{P}_1, \lambda) - \mathbf{F}(\mathbf{P}_2, \lambda) \| \leq L \cdot \| \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 \|, \text{ para todo } \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \lambda \text{ nessa vizinhança.}$$

Então existe uma função vetorial $\mathbf{P}(t, \lambda)$, definida em uma vizinhança de $(0, \mathbf{0}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$ contínua, diferenciável em t e que satisfaz o Problema de Cauchy (0.4). Ainda,

(iii) se $\mathbf{F}(\mathbf{P}, \lambda)$ for continuamente diferenciável em relação a (t, λ) , então o mesmo sucederá com a solução $\mathbf{P}(t, \lambda)$.

O caso clássico e paradigmático de Volterra foi o do célebre estudo da interação entre pescadas e tubarões no Mar Adriático, nas costas da Ístria, em que, qualitativamente se apresentaram as dinâmicas populacionais de pescadas, P_1 , e de tubarões, P_2 , respectivamente como:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= P_1 \cdot (a - b \cdot P_2) \\ \frac{dP_2}{dt} &= P_2 \cdot (-p + q \cdot P_1) \end{aligned} \tag{0.5}$$

Este modelo não-linear é, ainda hoje, importante na compreensão de fenômenos como aquele que motivou seu estudo no início do século: com a suspensão da pesca por força da Primeira Guerra Mundial, a população de pescada - no que se apresentava na época como surpreendente - diminuiu; isto ocorreu pois foi interrompida também a pesca do principal predador, o tubarão. Conclusões semelhantes podem ser tiradas, como de fato o

foram, relativamente à pulverização de plantações onde havia o controle biológico, com resultados da mesma ordem, que já não poderiam ser classificados como surpreendentes...

Este sistema de Equações Diferenciais Ordinárias também tem importância didática, já que motiva de modo muito interessante o uso de Planos de Fase, especialmente na passagem do sistema (0.5) para os sistemas com capacidades suporte

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= P_1 \cdot (a - b \cdot P_2) - r \cdot P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} &= P_2 \cdot (-p + q \cdot P_1) - s \cdot P_2\end{aligned}\tag{0.6}$$

em que se acrescentou um termo que reflete a pesca respectivamente de pescadas e tubarões; e também na passagem do referido sistema para

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= P_1 \cdot (a - b \cdot P_2 - r \cdot P_1) \\ \frac{dP_2}{dt} &= P_2 \cdot (p + q \cdot P_1 - s \cdot P_2)\end{aligned}\tag{0.7}$$

em que se introduziu uma competição intra-específica, descrevendo simultaneamente os efeitos negativos para a pescada decorrentes tanto da presença de tubarões quanto da competição interna à espécie; e os efeitos positivos para os tubarões decorrentes da presença de pescadas além dos mesmos efeitos negativos da competição interna dessa espécie.

Estes modelos, ainda que sejam os iniciais do ponto de vista histórico, já identificam uma característica quase onipresente nas dinâmicas populacionais: a não linearidade.

Ainda hoje, modelos deste tipo podem ser usados numa primeira abordagem de diversas situações com relações inter e intra-específicas, variando, por exemplo, os parâmetros que figuram no sistema, indicando sazonalidade ou variações estocásticas em fatores tanto bióticos quanto abióticos (*cf* Zotin, 1993, Barros, 1997).

Do ponto de vista analítico, sistemas como os (0.4) podem ter N componentes, embora, na realidade, um número exagerado de espécies possa levar a usos inconclusivos do modelo, especialmente se forem combinados efeitos das Dinâmicas Populacionais menos "simples". Na maioria dos casos citados acima, é necessário recorrer a métodos

numéricos, criando mais um nível de aproximação, embora se devam considerar os muitos resultados sobre as boas ordens de convergência com que se pode contar.

Para casos gerais estes modelos continuam a prestar valiosas contribuições no estudo e na compreensão de diversas situações que envolvem dinâmicas populacionais. Há casos, no entanto, em que não basta considerar a variável temporal como única, e é necessário incluir no estudo, além do tempo, o espaço. Também aqui é necessário que se comente que os fenômenos não dependem do tempo e do espaço literalmente ou exclusivamente, mas, as variações do que se estuda e analisa são observadas ponto a ponto no tempo e no espaço. Nesse sentido, devem ser revistas situações como a marcha da cólera no passado pela Europa, e agora, pela América do Sul, a invasão sistemática da Broca da cana-de-açúcar, da Cigarrinha-da-pastagem ou do Bicudo do algodoeiro, citando apenas alguns dentre muitos exemplos que foram e continuam sendo objeto de estudo do grupo de Biomatemática do IMECC, da UNICAMP. A análise desses modelos que incluem, de fato, fatores espaciais de modo explícito, será objeto dos capítulos 1 e 2 desta dissertação: no capítulo 1 iremos analisar e aproximar casos de uma única espécie, com características de dispersão variando espacial e temporalmente, enquanto que, no capítulo 2, faremos estudo análogo, com duas espécies interagindo. Aqui, visando o estudo a que este trabalho se destina, qual seja o de apresentar sugestões para modelar as periódicas endemias que afetam uma das espécies que, por seu carisma, contribuem significativamente para a indústria do ecoturismo na região de Iberá, a capivara, iremos mencionar um outro conjunto de sistemas que, embora variando apenas no tempo, mantêm impressionante relevância em considerações de comportamentos sociais de enfermidades, e continuam sendo citados como ferramental básico em termos de saúde pública. São estes os modelos de tipo SIR ou SIRS (*cf* Kermack e McKendrick, 1926-27) e seus muitos derivados. No capítulo 3 iremos incorporar características dos modelos de tipo SIR em modelos com dispersão populacional e interação entre espécies

Alastramento de epidemias: modelos tipo SIR

Estes modelos dividem a sociedade estudada em categorias, ou compartimentos, de suscetíveis (S), infectados (I) e removidos, ou resistentes, (R), por exemplo, estudando,

com um sistema não-linear de Equações Diferenciais, a passagem de indivíduos de um a outro compartimento, descrevendo, desse modo, o percurso social da doença em análise. Nos modelos ditos SIR, historicamente os primeiros, avaliam-se as passagens de um a outro compartimento através de parâmetros constantes, de contágio e de retirada de infectados, respectivamente. Alguns modelos novos têm considerado, em vez de indivíduos, outros objetos de estudo, como, por exemplo, casas no estudo do comportamento do mal de Chagas, em que as residências podem ser vistas como "infectadas", pela presença de insetos, ou "resistentes", quando do uso de elementos de construção inóspitos para o barbeiro, o vetor do *Trypanosoma crucis*. Nestes modelos não se localizam geograficamente focos de males, ou as viagens de uma pandemia, e sim, suas taxas de crescimento ao longo dos períodos estudados. É evidente que para uma grande maioria das doenças estas taxas são informação fundamental na definição de estratégias de combate e prevenção.

Após estas considerações genéricas apresentemos o modelo SIR:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I\end{aligned}\tag{0.8}$$

Pode-se ver que este modelo mais simples pressupõe, por exemplo, que, uma vez removido desse compartimento, o indivíduo nunca mais volta a ser suscetível nem infectado, e como a doença é considerada de curta duração, não figuram no sistema termos de dinâmicas populacionais, um crescimento - ou uma queda - que se pode desconsiderar, mantendo-se, portanto, constante o número de indivíduos da população, com:

$$N = S(t) + I(t) + R(t).\tag{0.9}$$

Nos modelos ditos SIRS, a passagem de resistentes para suscetíveis (indicando uma imunidade temporária) bem como destes para os infectados, pode ocorrer, e o modelo

(0.8), em primeira aproximação, se torna, (fazendo, ainda, uso de parâmetros constantes ao longo do tempo):

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I - \gamma R\end{aligned}\tag{0.10}$$

Como em outros casos já citados neste texto, se reafirma que a utilidade relativa destes modelos se manifesta de modo muito especial exatamente para a saúde pública, embora, ao mesmo tempo, eles deixem de considerar muitos outros fatores de relevância muito significativa nesta área de estudo e pesquisa. Nestes sistemas, estuda-se o comportamento social evolutivo de cada doença ao longo do tempo, sendo que as muitas características presentes podem ser incorporadas aos parâmetros - permitindo a sistemas que não "vêem" todos os fenômenos presentes, modelar-lhes um comportamento geral.

A estes modelos se podem acrescentar características de males que não são de curta duração, mas que têm longa presença nas sociedades, acrescentando a cada compartimento - quando necessária - a dinâmica populacional. Assim, podemos ter quando, por exemplo, apenas os suscetíveis podem procriar:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI + \gamma R + S.f(t, S) \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I - \gamma R\end{aligned}\tag{0.11}$$

Muitas outras tentativas bastante razoáveis e bem sucedidas têm sido feitas no sentido de incluir comportamentos variados, sejam eles cíclicos ou periódicos, ou ainda com a inclusão de outros compartimentos, fruto de características tanto da doença quanto da sociedade e sua cultura e, também, de estratégias de prevenção e programas de combate a epidemias. Podem ser citados aqui os trabalhos de: Bassanezi, R. C. e equipe com estudos sobre a transmissão da Aids incluindo sua relação com a tuberculose; da dengue, da dengue hemorrágica, incluindo fatores de periodicidade nos modelos apresentados (*cf*

Zotin, R., 1999, Raimundo, S., 1997, Leite B.M., 1998). Podemos destacar também uma nova exploração de modelos, apresentados em trabalhos científicos em que os parâmetros que relatam contágio ou incidência têm caráter *fuzzy* (cf Barros, L., 2000).

Yang, H.M. (2001) desenvolveu recentemente um modelo global para a transmissão da malária, incluindo diferentes níveis de imunidade adquirida por hospedeiros humanos e parâmetros relativos aos mosquitos vetores desse mal, variando com a temperatura. Ele e equipe realizam importante trabalho no estabelecimento de estratégias para o enfrentamento de epidemias como é o caso atual da dengue no Estado de São Paulo.

E, finalmente podemos nos referir ao trabalho bastante extenso de Capasso V. (1993), com abrangente bibliografia, onde é apresentado um grande número de situações e modelos de expansão de epidemias e de transmissão de enfermidades, levando em consideração situações de heterogeneidade de populações, heterogeneidade espacial e variação temporal periódica, simulando sazonalidade.

Caracterização das espécies envolvidas e da enfermidade

A capivara (*Hydrochoerus hydrochoeris*), o maior roedor do mundo (chega a pesar 100 quilos, 1 metro e trinta de comprimento e 60 centímetros de altura), é um espécime de uma fauna silvestre muito diversificada, que habita grandes extensões de toda a América Latina, desde o Panamá até a mesopotâmia argentina, em regiões pantanosas ou muito úmidas. É animal bastante estimado pelas populações, sendo sua caça ainda bastante apreciada. Como seria de se esperar, tem muitos nomes de sabor popular: chigüire, poncho, carpincho, ronsoco, entre outros, e seu nome no Brasil deriva do tupi guarani “comedor de capim”. É um animal que vive em “manadas” de até trinta indivíduos, com um macho dominante e alguns outros submetidos. Sua reprodução se dá durante todo o ano, mas é maior na época das chuvas. Pode ter duas crias por ano, com 3 a 4 filhotes por cria. Convive bem com animais domésticos, embora, quando faminta, por escassez de seu alimento preferido, cause estragos substanciais a hortas e plantações. Alimenta-se de gramíneas baixas devido a seus grandes dentes, sendo bem menos devastadora de pastagens do que bovinos e eqüinos, e muito mais conservadora que os caprinos. Seu habitat são as margens de rios, lagos e brejos, dando-se muito bem em pântanos e

alagados, pois seu acasalamento se dá em águas pouco profundas. Os corpos aquáticos constituem também seu refúgio (ela tem grande capacidade respiratória, conseguindo ficar submersa mais de 5 minutos) e assim elas pouco se afastam das margens de rios e lagoas.

Apesar dos conhecimentos biológico-científicos deste animal não serem muito difundidos para o grande público, experimentos há, particularmente na Venezuela e no Brasil, que permitiram um relativo acúmulo de informações que possibilitam uma incipiente exploração “econômica”, ainda bastante artesanal, da capivara como fonte de carne para a alimentação e de pele para a fabricação de produtos de couro. É muito dócil, de fácil adaptação ao cativeiro, conforme testemunha um número relativamente expressivo de criadores no país que, pela legislação brasileira, devem ser registrados no IBAMA. Colocam-se assim as questões de uma exploração econômica baseada num manejo sustentado e, também de preservação e controle visando o eco-turismo. Isto posto, sabe-se que, em certa medida, esse animal compete por pastos com o gado bovino, eqüino, ovino e caprino e, mais, que ele é um reservatório importante (e vítima) do protozoário *Trypanosoma equinum*, que causa nos eqüinos o “mal das cadeiras”, enfermidade fonte de consideráveis prejuízos para fazendeiros e criadores. Já em 1905 ficou comprovada a relação entre tal enfermidade e o protozoário. Esta que é a principal moléstia por ele provocada recebe, além da citada, várias denominações que aludem às ancas caídas, ao andar vacilante: surra americana, derrengadera, desrengadera, murrina, quebrabunda, etc.

Pela literatura consultada, o *T. equinum* (phylum PROTOZOA, subphylum SARCOMASTIGOPHORA, classe MASTIGOPHORA, grupo SALIVARIA) e os protozoários *T. evanzi* (Índia), *T. hippicum* (Panamá), *T. venezuelense*, *T. annamense*, *T. marocanum*, e *T. soudanense*, cujas denominações já denunciavam a região de sua influência, constituem, ou uma única espécie, ou espécies distintas da família dos *Trypanosoma brucei*, segundo classificação encontrada em “Veterinary Parasitology” (Urquhart *et alii*, 1987). Soulsby (1982) afirma que, originalmente, a distribuição geográfica do *T. evanzi* coincidia com a do camelo, sendo este protozoário o causador da enfermidade denominada “surra” (palavra indiana que significa decaído), que ataca camelos e cavalos. Esse autor considera, por exemplo, que o *T. equinum* difere do *T.*

evanzi apenas pela ausência do denominado cinetoplasto. Podemos constatar a existência de um certo consenso de que tal protozoário foi importado na época da conquista.

O *T. equinum*, estando presente no sangue de um animal contaminado, passa para o sistema digestivo do vetor quando este se alimenta com o sangue do hospedeiro. No proboscis ele não se reproduz, e tem, nesse ambiente, uma vida bastante breve, da ordem de 15 a 20 minutos. Este intervalo de tempo é suficiente para que o inseto, afugentado e buscando concluir o repasto, ataque outro animal, ao qual transfere o protozoário. Tal transmissão é dita não-cíclica, mecânica. No corpo do hospedeiro ele se localiza nos gânglios e na medula óssea onde se reproduz rapidamente. Na fase aguda da enfermidade é detectada a presença de organismos na circulação periférica, detecção esta que se torna mais difícil em estágios mais avançados da infecção.

O gado bovino e o mular desempenham o papel de reservatórios ou portadores sadios.

Os vetores no caso, são mutucas ou insetos tabanídeos (*Chrysops*, *Bellardia*, *Taenotabanus*, e *Tabanus*) ou ainda o *Stomoxys calcitrans* (a mosca dos estábulos). Os insetos hematófagos da família *Reduviidae*, como o barbeiro, não desempenham papel de vetor do causador do “mal das cadeiras”.

De acordo com Von Zuben (2002) as mutucas constituem uma extensa família de moscas. As fêmeas são hematófagas e os machos alimentam-se principalmente de pólen e néctar. As larvas da maioria das espécies são aquáticas e predadoras e os adultos são normalmente encontrados nas proximidades de pântanos, lagoas e brejos. A maioria dos tabanídeos voa muito bem. Os ovos (de 100 a 1000) são geralmente postos nos períodos mais quentes do ano em massas sobre folhas ou outros objetos perto da água de rios ou lagoas. A incubação dos ovos é de 5 a 7 dias. Em clima temperado, que é o que interessa a este estudo, algumas espécies produzem 2 gerações por ano, outras 1 geração, e outras precisam de 2 a 3 anos para completar o seu desenvolvimento larval. O estágio de pupa, que é alcançado em 1 ou 2 dias após o enterramento da larva, pode durar de 5 dias a uma semana.

No caso da mosca-dos-estábulo, *Stomoxys calcitrans*, diferentemente das mutucas vistas acima, indivíduos de ambos os sexos sugam sangue mas não invadem residências; apesar do nome, a espécie não é encontrada com tanta frequência em estábulos quanto a

mosca-doméstica. É encontrada em grande número em épocas quentes do ano e podem se criar em excrementos, mas principalmente em alfafa, grãos ou farinhas úmidas embaixo de cochos nos currais, e sob pilhas de grama cortada em jardins. Os ovos são depositados e formam cachos. Cada fêmea produz até 632 ovos, e pode realizar até mais de 20 posturas durante seu período de vida. O período de incubação dos ovos é de 3 dias sob uma temperatura média de 26° C. As larvas recém-eclodidas procuram se enterrar para escapar da luz e evitar a desidratação. A larva completa o seu período de desenvolvimento entre 14 e 26 dias à temperatura de 21-26 graus. Quanto maior a temperatura, mais rápido é o desenvolvimento. O período de pupa pode durar de 6 a 26 dias, à temperatura de 21 a 26 graus. Esta espécie apresenta ciclo de vida ininterrupto em lugares mais quentes do globo.

A razão sexual em moscas em geral é de 1 macho por fêmea. Isto também deve ocorrer com estas espécies.

Detectou-se que, nas Américas, certas espécies de morcegos hematófagos particularmente o *Desmodus rotundus rotundus*, seriam simultaneamente transmissores e hospedeiros desse protozoário. Neste caso sua vida no vetor é bastante mais longa, e é também causa de sua morte. Devemos destacar ainda que porcos, o gado bovino, e animais domésticos também são reservatórios desse protozoário embora a enfermidade não atinja a evolução que atinge em cavalos e capivaras.

O período de incubação da enfermidade é de quatro a dez dias, ocorrendo em seguida a pirexia e a parasitemia. O enfraquecimento geral e o surgimento de edemas são indicadores clínicos no início da enfermidade sendo que os edemas variam da forma de placas de urticária no pescoço e nos flancos a edemas nas pernas e partes inferiores do corpo, com perda dos pelos e feridas dando a impressão de sarna. Ocorrem conjuntivite, ceratite e edemas em torno dos olhos. Com o progresso da infecção aumenta o enfraquecimento dos membros posteriores, e os animais enfermos caem e não mais se levantam. A enfermidade, quando aguda, provoca, especialmente em cavalos, a morte em algumas semanas; é importante ressaltar aqui que há fortes indícios de que a virulência da enfermidade se ameniza quando o protozoário é transmitido ao cavalo vindo de capivaras.

Em capivaras, uma das características da infecção é visual: animais enfermos ficam apáticos, enfraquecidos e incapazes de mover os quartos traseiros de maneira coordenada. Mudam de hábitos e ficam solitários, deitados em águas pouco profundas, podendo permanecer num mesmo local por semanas. É uma doença mortal para a capivara. (cf Juhani, 1973).

Como os tabanídeos são mais abundantes no verão, o maior número de casos ocorre no outono até o início do inverno.

Chega-se a sugerir, como medida profilática, a eliminação das capivaras e de cavalos muito afetados que não respondem ao tratamento, embora, por outro lado, especialistas tenham uma tendência a identificar o “mal-das-cadeiras” como “controle de população”.

A etiologia dessa enfermidade de curso agudo ou crônico explica uma certa confusão por parte de não especialistas, sendo que este mal recebe o nome de sarna-de-capivara, por exemplo, pois o animal infectado apresenta como já dissemos, diversas ulcerações em sua pele, em forma de placas, com perda de pelos, além de uma fraqueza muscular generalizada.

A cronicidade do mal das cadeiras se caracteriza pela ausência do *Tripanosoma* no sangue durante longos períodos, observação que significa que no sangue periférico há ausência do *T. equinum* que se refugia em órgãos como o baço para sua reprodução.

Comentários finais

Modelos matemáticos que incorporem muitas informações em seus detalhes podem se transformar nos “spaghetti models” (inúmeras ligações ente um número enorme de compartimentos). Estes modelos estão, de fato, mais próximos da realidade, mas fornecem menos informações sobre os efeitos de uma interferência. Assim, resultados positivos têm sido obtidos no estudo e na compreensão de fenômenos de endemias com modelos que têm incorporado novas informações, mas de modo mais lento e muito cauteloso. Lento porque diversas situações são testadas, e apenas as razoáveis são guardadas, e cauteloso porque esforços reducionistas dependem das características incluídas nos modelos, e da importância relativa a elas conferida pelos especialistas.

Capítulo 1

Uma espécie, com dispersão espacialmente dependente, e dinâmica populacional de tipo não linear

Levin, S. e Okubo, A. (1980), além de Murray, J.B (1977, 1989), e Edelstein-Keshet, L. (1988), entre outros, citando Skellam em seu pioneiro trabalho publicado em 1951, apresentam uma série de críticas ao uso de modelos de variação tão somente temporal, apontando para a necessidade de se incluírem as variações espaciais nessa modelagem. Em casos como aqueles vistos no final da Introdução, em que se estuda o comportamento evolutivo de uma enfermidade no conjunto da sociedade, a variação espacial pode ser deixada de lado, e políticas de vacinação, por exemplo, podem ser escolhidas com o auxílio das simulações que se obtêm com os modelos SIR, ou SIRS. O mesmo se pode dizer sobre o estudo e a modelagem da dinâmica de determinadas populações, em que o conhecimento das quantidades totais é suficiente para muitos resultados relevantes. No entanto, há casos em que a localização física ou a posição geográfica intervêm de modo determinante no resultado daquilo que se estuda, e, então, variáveis espaciais também precisam ser consideradas no estudo de variações populacionais. Nestes últimos casos, diversos autores defendem o uso de Equações de Difusão-Advecção ou de Difusão-Convecção no estudo de fenômenos de Dispersão e Movimento de Populações. É este o caso de Skellam, quando adotou, no trabalho de 1951, a equação a derivadas parciais dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \text{div}(\alpha \nabla p) + \text{div}(V.p) = p.f(p),$$

para modelar a dispersão de determinada espécie, sendo o parâmetro α aquele descritivo da dispersão em termos de área por tempo.

Nas conclusões do citado trabalho, Skellam afirma que, para a grande maioria de animais terrestres e plantas, não obstante a necessidade da introdução de um termo de transporte, podemos assumir uma dispersão aleatória. E isto, ainda segundo Skellam, vale para aqueles animais que podemos classificar como "os mais inteligentes", porque sua dispersão se dá em termos significativamente mais amplos do que é a sua percepção

do meio. As expressões "aleatório" e "browniano", são as que esse autor usa para esse movimento. Ainda que possamos sentir certo exagero por parte de um autor que defendia sua teoria, e defendia-a bem, mesmo assim devemos considerar que o uso destas equações tinha um advogado que preparou bem seu trabalho de casa! Muitos anos depois, o entomologista P. M. Kareiva (1983), usou a equação evolutiva de difusão para classificar a dispersão de 14 tipos de insetos, ajustando dados de marca-recaptura à citada equação. Antes de mencionar os trabalhos de Cosner e outros, vale dizer que não são estes os únicos a fazer uso deste tipo de modelagem: trata-se antes de ressaltar alguns dos autores cujos argumentos favoráveis se destacam. Cosner (1996) afirma que o uso de EDP pode incorporar ao modelo um tratamento em que não se "mascaram" diversos efeitos de variabilidade temporal, estocasticidade ambiental ou outros "fatores complicadores" – fazendo uso de uma tradução livre do texto mencionado. Entre aqueles autores para quem o uso de EDP é fundamental, devemos incluir os artigos clássicos dos autores já mencionados, e, também trabalhos de Gurtin (1973) e desse mesmo autor, junto com MacCamy (1977), Gurney e Nisbet (1974), incluindo também trabalhos desenvolvidos mais recentemente por Mimura *et alii*, Diekmann *et al*, Cantrell, Diniz, Sossae, Lacaz, etc.

Deve ser registrado que há muitos casos em que as variabilidades espaciais não desempenham papel relevante. Em 1994, Young-Pessoa, motivada pelo crescimento da praga do bicudo do algodoeiro em plantações de praticamente todo o centro-sul do Brasil, obteve excelentes resultados modelando a interação do próprio bicudo, do algodoeiro e da vespa usada no manejo da praga – usando modelos estruturados. Este trabalho levou à criação de um *software* eficiente com o uso apenas da variável temporal discreta, sem precisar levar em consideração aspectos de dispersão. Estudando o problema da referida dispersão dessa mesma praga do bicudo, Lacaz (1999) já usou uma EDP de difusão-advecção, com características espaciais e dando mais atenção à macro e meso escalas, enquanto que, para Young-Pessoa, o interesse era a efetiva situação local, a área efetivamente plantada, com vistas a técnicas de manejo integrado de diversas ações de controle da praga.

Nem todos os autores, portanto, se sentem à vontade com o uso deste tipo de equação ou sistema, assim como nem todos os pesquisadores precisam dele. Em uma célebre

conferência, Ferreira, Jr, W.C. (1998) apresentou um trabalho mencionando partículas que não têm vontade própria - deixando claro que a "vontade" dos animais retiraria o caráter aleatório mencionado por Skellam no estudo e na modelagem de populações de animais. Além disto, Roughgarden (*in* Cosner, 1996) chama a atenção para o fato de que "... equações diferenciais, especialmente em sistemas complexos, exigem demasiado em suas especificações e prevêm demasiado, para que se lhes possa testar os resultados...". Por outro lado, o conceito de difusão efetiva ou difusão aparente, mencionado por Csanady, (1973) ou por Marchuk, (1986), vem sistematicamente encontrando espaço em publicações relativamente recentes:

Ludwig, Aronson e Weinberger (1979), usando uma modelagem de EDP do tipo citado (embora o trabalho fosse motivado por um estudo interespecífico, reduzido a uma só espécie), na estimativa de dimensões espaciais para estabelecer os limites da ocorrência de uma praga em unidades de reflorestamento;

Langlais (1988), exibindo um estudo que buscava comportamentos assintóticos, reunindo a modelagem indicada à estrutura etária junto com uma Dinâmica Malthusiana;

Brown, Lin e Tertikas (1989), fazendo uso desse tipo de EDP para chegar a estados estacionários, no estudo de seleção-migração em genética de populações enquanto que

Ethier e Nagylaki (1989) usaram, numa formulação bem geral, a equação de difusão-reação na aproximação de processos de dispersão.

Kurata, Kisimoto e Yanagida (1989), selecionando este mesmo tipo de equação - inclusive avaliando criticamente trabalhos anteriores da mesma linha - buscando retirar informações relevantes para o modelo de comportamentos assintóticos;

Britton (1990), com o uso de EDP do tipo apresentado, inclusive com um termo fonte, ou da Dinâmica Populacional de tipo logístico, re-introduzindo uma característica de não linearidade já abordada por Kolmogorov, Petrovskii e Piskunov (1937) e Fisher (1937);

Hess e Weinberger (1990), trabalhando na mesma linha de Britton, estudou atratores globais, tendo modificado as condições de contorno referentes a domínios limitados;

Hayes (1991), apresentando uma situação não-linear - referindo-se à equação de Fisher - explorou técnicas analíticas em que a difusibilidade varia com a própria população

(ainda que através de uma tangente hiperbólica). O ponto importante foi o de apresentar uma dispersão que aumentasse de modo grosseiramente logístico, com o aumento populacional.

Os já citados Cantrell e Cosner (em 1991) e ambos, em co-autoria com Hutson (1996), avaliaram o uso desse tipo de EDP para incorporar meios com forte heterogeneidade, mantendo, ainda, as não-linearidades na Dinâmica ou apresentando efeitos como os de Allee; e

Lewis, White que, com Murray (1997) usaram a EDP, cuja relevância vem sendo aqui apresentada, na modelagem de reações comportamentais de matilhas de lobos à presença da marcação de território por elementos da espécie estranhos à comunidade, enquanto

Sánchez-Garduño e Maini (1997) estudavam, com técnicas analíticas em domínios ilimitados, uma formulação não-linear para processos de dispersão, usando, ao mesmo tempo, como modelo da Dinâmica, uma expressão com limiares, do tipo de *Allee*.

Em 2000 foi publicado um trabalho de Feltham e Chaplain, no qual uma solução analítica para um problema de dispersão-migração (com quemotaxia) é comparada com resultados numéricos sugerindo este caminho no esforço de melhorar os modelos, perdendo características que forneçam soluções analíticas, mas confiando nas análises numéricas para que se possa construir um bom senso na avaliação crítica dos modelos.

Esta lista não pretende ser conclusiva nem descritiva, mas apenas e tão somente ilustrar como as Equações Diferenciais Parciais de Difusão-Reação com componentes Convectivos ou Advectivos - vêm sendo utilizadas, em muitos casos, no estudo de diversos fenômenos de dispersão, migração e ocupação de território. O que não se vê, em geral, é a possibilidade de explorar as características modeladas em regiões limitadas espacialmente, permitindo a presença de esquemas numéricos para simulações computacionais. Esse trabalho difere do que se apresenta neste capítulo em pontos de fundamental importância: o modelo de Feltham e Chaplain é de curta duração, isto é, não se considera aí a dinâmica populacional. Por outro lado, é espacialmente unidimensional, e se refere a uma situação em que nematódios são soltos em um longo cilindro com uma forte presença de bióxido de carbono em um dos extremos agindo

como atrator, atrator este que sofre um decaimento ao longo do tempo – e que se difunde pelo domínio cilíndrico.

No texto que se segue, a abordagem utilizada é aquela em que se usa uma Equação a Derivadas Parciais para modelar a Dispersão Populacional, indo além daqueles que o fizeram para meios espacialmente homogêneos, fazendo com que a difusibilidade varie no espaço e, possivelmente, no tempo. Isto é relativamente simples do ponto de vista conceitual e numérico, embora dificuldades maiores apareçam na busca de resultados analíticos. O mesmo deverá ser feito para o termo de decaimento, isto é, será aceita a variação, espacial e temporal de características hostis do meio, além da mortalidade natural, característica de espécie da população estudada. Um exemplo ilustrativo poderia ser o de considerar esse termo como se fosse um poluente presente no meio e cujo efeito variasse de ponto a ponto e de instante a instante, agindo de modo tóxico sobre a população (*cf.* Bernardes, 1998). Se o estudo abrange um período de tempo tal que se considere também a Dinâmica Populacional da espécie, o termo dito de perturbação passaria a ser função das variáveis independentes consideradas e também dos níveis populacionais, isto é, da variável dependente. Em trabalhos anteriores do grupo de Biomatemática do IMECC, embora considerando a difusibilidade como constante (o que corresponde a um meio espacial homogêneo), Diniz (1994) estudou este tipo de equação para modelar uma brusca mudança de habitat, e, como o período de tempo considerado era relativamente curto, fez uso de um termo de Dinâmica Populacional Malthusiana; Sossae (1995), porém, considerou uma Dinâmica Logística, tendo trabalhado as dificuldades inerentes à presença do termo não-linear, com relação à obtenção de aproximações numéricas usando Elementos Finitos de ordem superior. Além destes, Lacaz (1999) trabalhou casos em que a difusibilidade era dependente da densidade, recorrendo, devido semelhantemente ao pequeno período de tempo considerado, a uma Dinâmica Populacional Malthusiana.

Aqui, porém, deveremos passar para algo logístico, verhulstiano, enquanto se considera um meio heterogêneo, com uma dispersão variando no espaço e no tempo; poderíamos iniciar com um Modelo de Goel e outros, com um parâmetro γ como expoente na parte não-linear, embora a intenção de imediato seja iniciar os ensaios com o valor unitário

para γ . Ou seja, algo com uma formulação coerente com os modelos até aqui citados. Teremos, então,

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \text{div}(\alpha \cdot \nabla p) + \text{div}(V \cdot p) + \sigma \cdot p = p \cdot f(p),$$

com um termo $p \cdot f(p)$ de dinâmica populacional que apresente aquelas características que vierem a ser consideradas como essenciais, ou desejadas. Assim, e adotando por generalidade o Modelo de Ayala e outros nesse termo da dinâmica populacional, temos:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \text{div}(\alpha(x, y; t) \cdot \nabla p) + \text{div}(V \cdot p) + \sigma(x, y; t) \cdot p = \lambda \cdot p \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{K}\right)^\gamma\right], \quad (1.1)$$

consideraremos $\text{div}(V) = 0$, e, inicialmente, com $\gamma = 1$.

Isto nos leva, executando algumas das operações, a:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \alpha(x, y; t) \bullet \nabla p - \alpha \cdot \Delta p + V \bullet \nabla p + \sigma(x, y; t) \cdot p = \lambda \cdot p \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{K}\right)^\gamma\right]. \quad (1.2)$$

Nesta equação figuram parâmetros considerados pelo modelo como indicativos de aspectos do fenômeno, a saber:

- $\alpha(x, y; t)$, a dispersão populacional, no já citado sentido de Skellam e Kareiva, variando tanto no espaço quanto no tempo;
- $V(x, y; t)$, um campo de forças devido a fatores externos como, por exemplo, ventos predominantes na região, ou armadilhas de feromônio, ou ainda como exemplo, características migratórias da espécie;
- $\sigma(x, y; t)$, um parâmetro descritivo da hostilidade do meio, já que aspectos de mortalidade da dinâmica populacional da espécie figuram no termo do lado direito, em $p \cdot f(p)$ ou seja em $\lambda \cdot p \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{K}\right)^\gamma\right]$ onde
- γ figura como um fator de ajuste para que a expressão escolhida para representar a dinâmica populacional possa representar melhor o comportamento da espécie. No caso de $\gamma = 1$, por exemplo, temos a dinâmica de Verhulst. Restou, finalmente,

- K , a capacidade de suporte do meio.

Mesmo com $\gamma = 1$, a não linearidade se faz presente do lado direito, e a dependência espacial da dispersão e da hostilidade do meio (Lacaz, 1999) estão explicitadas.

Podemos considerar condições inicial e de contorno dadas por:

$$p(x,y;0) = p_0(x,y) \quad (1.3)$$

e, para $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, com Γ_0 e Γ_1 disjuntos, e $t \in (0, t]$, escolhemos, em primeira aproximação, as condições de contorno mistas dadas por

$$p(x, y; t)|_{\Gamma_0} = 0 \text{ bem como } -\alpha(x, y; t) \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = 0. \quad (1.4)$$

Estas duas relações definidas respectivamente sobre trechos da fronteira da região em estudo, indicam uma parte dessa fronteira onde não há elementos da espécie: Γ_0 , e a outra parte, Γ_1 , em que pode haver indivíduos, mas que não a atravessam, como se houvesse uma barreira natural, por exemplo.

É importante notar que as condições de contorno acima poderiam ser reunidas e generalizadas colocando-se:

$$k_0(x, y; t) \cdot p(x, y; t)|_{\partial\Omega} + k_1(x, y; t) \cdot \alpha(x, y; t) \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\partial\Omega} = g(x, y; t), \quad (1.5)$$

para $(x,y) \in \partial\Omega$ e $t \in (0, T]$,

atribuindo convenientes valores para k_0 e k_1 .

Nesta parte deste capítulo, porém, serão usadas as condições de contorno (1.4) na forma indicada acima.

Passemos em seguida à formulação fraca, ou variacional do problema, num espaço com menores restrições de diferenciabilidade, onde se buscam soluções e de onde se retiram condições e parâmetros. Deixaremos, então, de considerar o espaço de funções com todas as derivadas parciais necessárias à formulação clássica, junto com a regularidade que tais definições exigem, bem como aquelas outras exigências impostas sobre a

solução e os parâmetros para que se possam obter resultados que garantam existência e unicidade. O problema que estudamos aqui será resolvido em outro quadro, a saber:

encontrar $p(x, y; t) \in H$, onde, para

$$L^2((0, T], H^1(\Omega)) = \{ v(x, y, t) : \forall t \in (0, T], v(x, y, \cdot) \in H^1(\Omega) \},$$

$$H = \{ v \in L^2((0, T], H^1(\Omega)) \text{ tal que } \forall t \in (0, T], \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega), \quad v|_{\Gamma_0} = 0 \}, \quad (1.6)$$

$$p(x, y, 0) = p_0(x, y), (x, y) \in \Omega.$$

Para enunciar, de fato, a formulação variacional, iremos recorrer às seguintes notações, sublinhando que, por simplicidade, os sub-índices que puderem ser omitidos sem perda de clareza, eventualmente o serão:

$$(v|w)_{0,\Omega} = \iint_{\Omega} v(x, y) \cdot w(x, y) d\mu \text{ considerando-se esta integral e as seguintes no sentido de}$$

Lebesgue e, obviamente, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

$$(v||w)_{0,\Omega} = \iint_{\Omega} [v_1(x, y) \cdot w_1(x, y) + v_2(x, y) \cdot w_2(x, y)] d\mu, \text{ e, ainda,}$$

$$\langle v|w \rangle_{0,\Gamma} = \int_{\Gamma} v(x, y) \cdot w(x, y) dy, \text{ onde } \Gamma \text{ é um subconjunto da fronteira do domínio } \Omega.$$

Finalmente, define-se o espaço de funções teste: $V = \{ v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0 \}.$

O problema (1.2) apresentado acima, pode ser formulado variacionalmente, então, para se obter:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} | v \right)_{0,\Omega} - (\operatorname{div}(\alpha \nabla p) | v)_{0,\Omega} + (\tilde{V} \bullet \nabla p | v)_{0,\Omega} + (\sigma \cdot p | v)_{0,\Omega} = \left(\lambda \cdot p \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{K} \right)^{\gamma} \right] | v \right)_{0,\Omega} \quad \forall v \in V, \text{ ou,}$$

também,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial p}{\partial t} | v \right)_{0,\Omega} - (\alpha \cdot \Delta p | v)_{0,\Omega} + (\tilde{V} \bullet \nabla p | v)_{0,\Omega} + (\sigma \cdot p | v)_{0,\Omega} = \\ & = \left(\lambda \cdot p \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{K} \right)^{\gamma} \right] | v \right)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Fazendo uso do Teorema de Green no segundo membro do lado esquerdo, passamos a ter:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial p}{\partial t} | v \right)_{0,\Omega} + (\alpha \nabla p \parallel \nabla v)_{0,\Omega} - \left\langle \alpha \frac{\partial p}{\partial \eta} | v \right\rangle_{0,\partial\Omega} + (\tilde{V} \bullet \nabla p | v)_{0,\Omega} \\ & + (\sigma \cdot p | v)_{0,\Omega} = \left(\lambda \cdot p \left[1 - \left(\frac{p}{K} \right)^{\gamma} \right] | v \right)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (1.7)$$

O membro relativo à integral ao longo da fronteira do domínio Ω pode ser decomposto nas duas partes que a formam, Γ_0 e Γ_1 , para se obter, ao longo da primeira parte, um resultado nulo, visto que $v \in V$, e, ao longo da segunda, também um resultado nulo, porque vale a condição de contorno repetida em (1.6). O problema (1.7) torna-se, então:

Encontrar $p=p(x, y; t) \in H$ tal que:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial p}{\partial t} | v \right)_{0,\Omega} + (\alpha \nabla p \parallel \nabla v)_{0,\Omega} + (\tilde{V} \bullet \nabla p | v)_{0,\Omega} + (\sigma \cdot p | v)_{0,\Omega} \\ & = \left(\lambda \cdot p \left[1 - \left(\frac{p}{K} \right)^{\gamma} \right] | v \right)_{0,\Omega}, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Em vez de se trabalhar com a formulação clássica, optou-se aqui pela variacional, em que as derivadas no sentido das distribuições permitem relaxar exigências de regularidade, delineando um primeiro nível de aproximação. No entanto, a obtenção de soluções analíticas segue um caminho contrário, ou seja, essas não se "aproximam". O recurso é o de recorrer às soluções numéricas, neste escopo definidas pelo método de Galerkin, no qual se opta por:

- trabalhar com uma sequência de subespaços de dimensões finitas que irão se aproximar cada vez mais de H pelo refinamento da malha, subespaços estes gerados por bases convenientemente escolhidas;
- escolher tais espaços de modo apropriado com vistas aos procedimentos numéricos de Elementos Finitos (no espaço) e de tipo Crank-Nicolson (no tempo);

- incorporar recursos mais sofisticados aos algoritmos obtidos à medida que, em função da melhoria de resultados, sejam exigidos refinamentos na busca de aproximações "razoáveis".

Não iremos, aqui, reproduzir a teoria de Elementos Finitos ou a fundamentação teórica do Método de Crank-Nicolson, remetendo o leitor a obras clássicas e claras na apresentação desse tipo de método, como Kardestuncer e Norrie (ed., 1987), Carey e Oden (vol. 1 - 6, 1983, 1984), Ciarlet (1987), ou Strang e Fix (1973), por exemplo. Considerando, então, este método, passamos ao problema discretizado, substituindo o espaço acima definido como V por um subespaço de dimensão finita N , indicado aqui por V_h , sendo este sub-índice relacionado com as dimensões máximas escolhidas na discretização do domínio espacial. A base de V_h é formada pelas funções adequadamente escolhidas, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$.

Neste subespaço, o problema dado acima em (1.8) transforma-se em:

Para cada $t \in (0, T]$, encontrar $p_h = p_h(x, y; t)$ tal que²:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial p_h}{\partial t} \mid \varphi_i \right)_{0,\Omega} + (\alpha \nabla p_h \mid \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} + (\vec{V} \bullet \nabla p_h \mid \varphi_i)_{0,\Omega} + (\sigma \cdot p_h \mid \varphi_i)_{0,\Omega} \\ & = \left(\lambda \cdot p_h \cdot \left[1 - \left(\frac{p_h}{K} \right)^r \right] \mid \varphi_i \right)_{0,\Omega}, \quad \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Como, para cada $t \in (0, T]$, os procedimentos de aproximação exigem $p_h(x, y; t) \in V_h$, introduz-se a separação de variáveis indicada por

$$p_h = \sum_j c_j(t) \cdot \varphi_j(x, y)$$

As funções-teste escolhidas serão, então, as do Método de Elementos Finitos, usando elementos ditos de primeira ordem sobre triângulos que compõem a malha τ_h com que se discretiza o domínio Ω . Dada a geometria deste domínio, a malha escolhida é regular o

² A notação clássica adotada até aqui, a saber " $(\cdot \mid \cdot)_{0,\Omega}$ " será estendida, sempre que necessário, de modo a incluir onde não houver risco de confusão, tanto " $(\cdot \mid \cdot)_{0,\Omega}$ ", como " $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{0,\Gamma}$ ". Além do mais em partes posteriores estes pesados subíndices serão simplesmente omitidos em benefício da leveza da notação.

que simplifica diversos dos detalhes técnicos naturais deste tipo de aproximação. Nesta perspectiva, o problema apresentado em (1.9) se torna:

Encontrar $c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t)$ tais que:

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{dc_j(t)}{dt} \cdot (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \sum_j c_j(t) \cdot (\alpha \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} + \sum_j c_j(t) \cdot (\vec{V} \bullet \nabla \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \\ & + \sum_j c_j(t) \cdot (\sigma \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} = \\ & = \left(\lambda \cdot \left(\sum_j c_j(t) \cdot \varphi_j \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{\sum_k c_k(t) \cdot \varphi_k}{K} \right)^\gamma \right] \right) | \varphi_i \Big|_{0,\Omega} \quad \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h. \text{ Ou, ainda :} \\ & \sum_j \frac{dc_j(t)}{dt} \cdot (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} = - \sum_j c_j(t) \cdot (\alpha \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} - \sum_j c_j(t) \cdot (\vec{V} \bullet \nabla \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} - \\ & - \sum_j c_j(t) \cdot (\sigma \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \left(\lambda \cdot \sum_j c_j(t) \cdot \left[1 - \left(\frac{\sum_k c_k(t) \cdot \varphi_k}{K} \right)^\gamma \right] \cdot \varphi_j \right) | \varphi_i \Big|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

$\forall \varphi_i \in \text{base de } V_h$.

Conforme indicado anteriormente, ao trabalharmos com $\gamma = 1$, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{dc_j(t)}{dt} \cdot (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} = & - \sum_j c_j(t) \cdot \{ (\alpha \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} + (\vec{V} \bullet \nabla \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \\ & + (\sigma \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} - \lambda \cdot \left[1 - \left(\frac{\sum_k c_k(t) \cdot \varphi_k}{K} \right) \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} \} \quad \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Esta expressão nos remete a um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias, dado por

$$A \cdot \frac{dC}{dt} = -B(C) \cdot C, \quad \text{para } C = C(t) = (c_j(t))_{j=1,\dots,N} \quad (1.11)$$

onde as matrizes A e B , com B dependendo do valor de C , são dadas por

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ com $a_{ij} = (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega}$ e $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ com b_{ij} dado pelo termo entre chaves na fórmula acima.

A solução de um sistema não-linear de Equações Diferenciais Ordinárias (1.11) pode ser abordada de muitos modos. Aqui, vamos optar pelo Método de tipo Implícito de Crank-Nicolson, em que as aproximações na variável temporal são da ordem de Δt^2 .

Deste modo, e sem nos atermos em demasia aos relevantes detalhes da discretização temporal, citamos apenas as substituições genéricas do método implícito e incondicionalmente estável escolhido:

$$\begin{aligned} \frac{dc_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} &\equiv \frac{c_j(t_{n+1}) - c_j(t_n)}{\Delta t} \text{ com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \text{ e} \\ c_j(t_n + \Delta t/2) &\equiv \frac{c_j(t_{n+1}) + c_j(t_n)}{2} \text{ com erro da mesma ordem.} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Denominando $c_j^{(n)}$ a aproximação de $c=c(x_j, y_j, t_n)$, pode-se usar (1.12) e voltar à expressão (1.10) para obter:

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} - c_j^{(n)}}{\Delta t} \cdot (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} &= - \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} \cdot \{ (\alpha^{(n+1/2)} \nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} + \\ &+ (\bar{V}^{(n+1/2)} \bullet \nabla \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + (\sigma^{(n+1/2)} \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} - \\ &- \lambda \cdot (\varphi_j | 1 - \left[\frac{\sum_k \frac{c_k^{(n+1)}(t) + c_k^{(n)}(t)}{2} \cdot \varphi_k}{K} \right] | \varphi_i)_{0,\Omega} \}, \quad \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Após os necessários cálculos algébricos, além de, para simplificar a notação, omitir os índices superiores relativos ao passo intermediário no tempo $(t_n + \Delta t/2)$, o que se obtém é:

$$\begin{aligned}
& \sum_j c_j^{(n+1)} \cdot \left\{ \left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{2} \right] \varphi_j | \varphi_i \rangle_{0,\Omega} + \left(\frac{\alpha \Delta t}{2} \nabla \varphi_j \middle| \nabla \varphi_i \right)_{0,\Omega} + \frac{\Delta t}{2} (\bar{V}^{(n+1/2)} \bullet \nabla \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda \Delta t}{2K} (\varphi_j \middle| \sum_k \frac{c_k(t)^{(n+1)} + c_k(t)^{(n)}}{2} \cdot \varphi_k) | \varphi_i \rangle_{0,\Omega} \right\} = \\
& = \sum_j c_j^{(n)} \cdot \left\{ \left[1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} + \frac{\lambda \Delta t}{2} \right] \varphi_j | \varphi_i \rangle_{0,\Omega} - \left(\frac{\alpha \Delta t}{2} \nabla \varphi_j \middle| \nabla \varphi_i \right)_{0,\Omega} - \frac{\Delta t}{2} (\bar{V}^{(n+1/2)} \bullet \nabla \varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} - \right. \\
& \left. - \frac{\lambda \Delta t}{2K} (\varphi_j \middle| \sum_k \frac{c_k(t)^{(n+1)} + c_k(t)^{(n)}}{2} \cdot \varphi_k) | \varphi_i \rangle_{0,\Omega} \right\} \\
& \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

A notação empregada ajuda significativamente a tornar esta formulação mais clara, ocultando muitas das dificuldades envolvidas do ponto de vista dos necessários procedimentos computacionais. Conforme já foi afirmado, este sistema não-linear pode ser expresso de modo direto e, então, teremos:

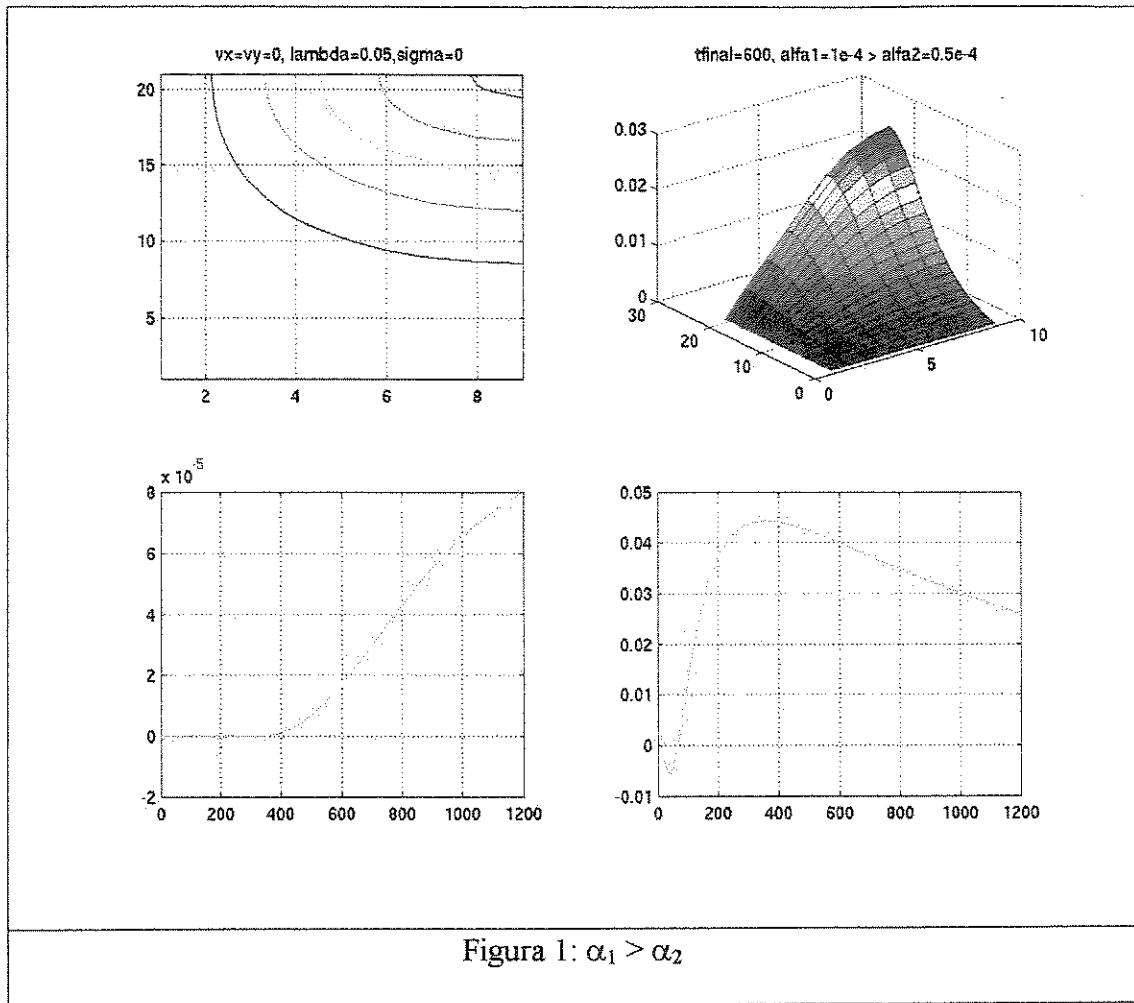
$$\begin{aligned}
& M(C^{(n+1)}, C^{(n)}) \cdot C^{(n+1)} = N(C^{(n+1)}, C^{(n)}) \cdot C^{(n)} \\
& \text{com } C^{(0)} \text{ dado por } (c_j^{(0)})_j = (p_0(x_j, y_j))_j.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Os ensaios numéricos realizados com esta aproximação indicam a influência da variação de valores da difusibilidade, ou, em uma linguagem mais "próxima" ao estudo de populações, as mudanças da dispersão da população estudada em termos da região ocupada.

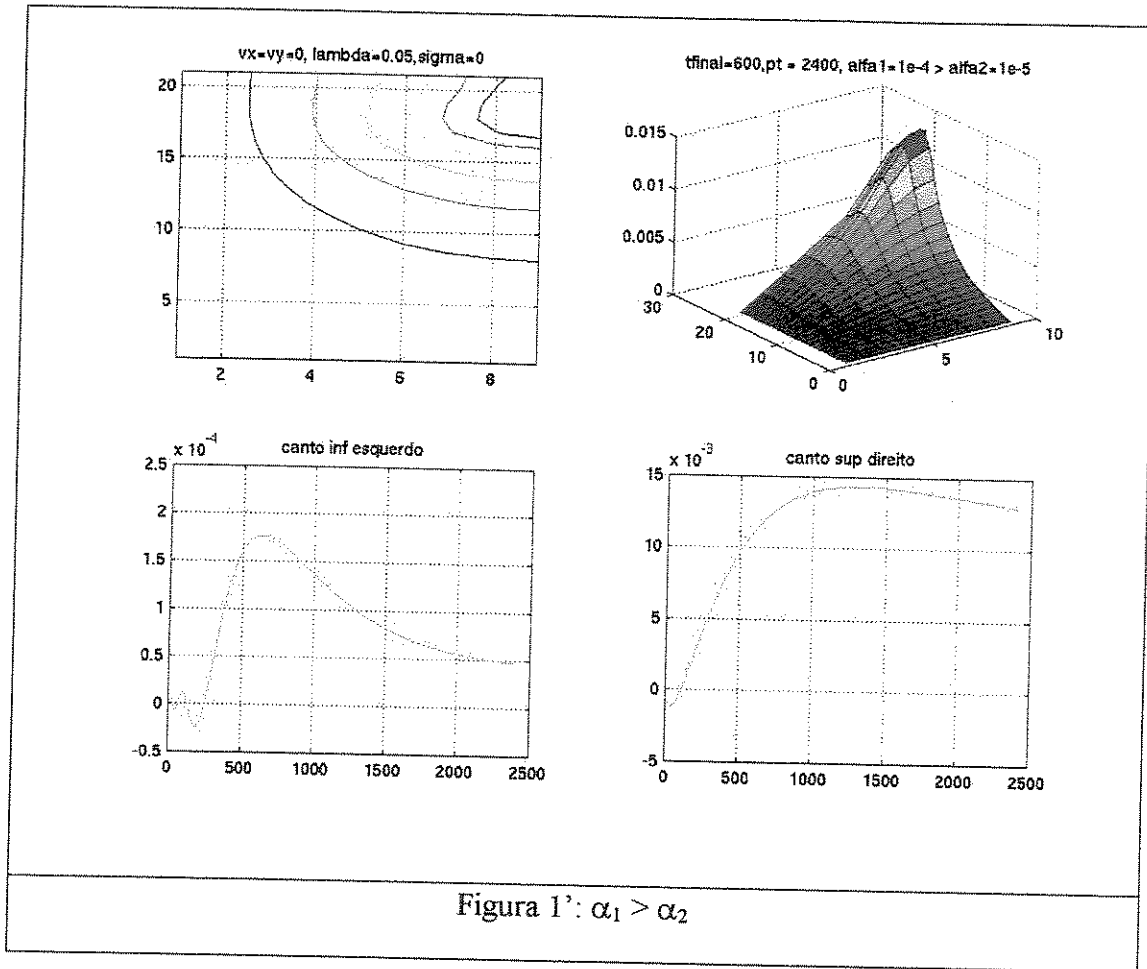
Com um intuito de conhecer qualitativamente o comportamento do modelo, foi escolhido um domínio retangular Ω dentro do qual se localizou outro retângulo, menor: Ω_2 , para poder simular dois tipos de ambientes físicos - Ω_1 e Ω_2 , caracterizados no modelo por diferentes parâmetros de dispersão populacional: α_1 e α_2 . Além disso, o código numérico (*cf* nos anexos, o programa intitulado **naolin.m**) permite, também, diferenciar os parâmetros indicativos de hostilidade do meio, σ_1 e σ_2 (embora, por clareza, os exemplos abaixo não o façam). Os ensaios, além de testar o algoritmo proposto, visavam criar uma intuição relativa a diferentes valores para os parâmetros α_1 e α_2 de difusibilidade, justificando iniciar os testes com um domínio tão idealizado. As figuras contêm, na linha superior, as curvas de nível da superfície e o gráfico 3-d com a concentração populacional para cada ponto do domínio em um determinado tempo final,

e, na linha inferior, gráficos da evolução temporal da concentração populacional para pontos genéricos dos domínios: o maior, Ω_1 , à esquerda e o menor, Ω_2 à direita.

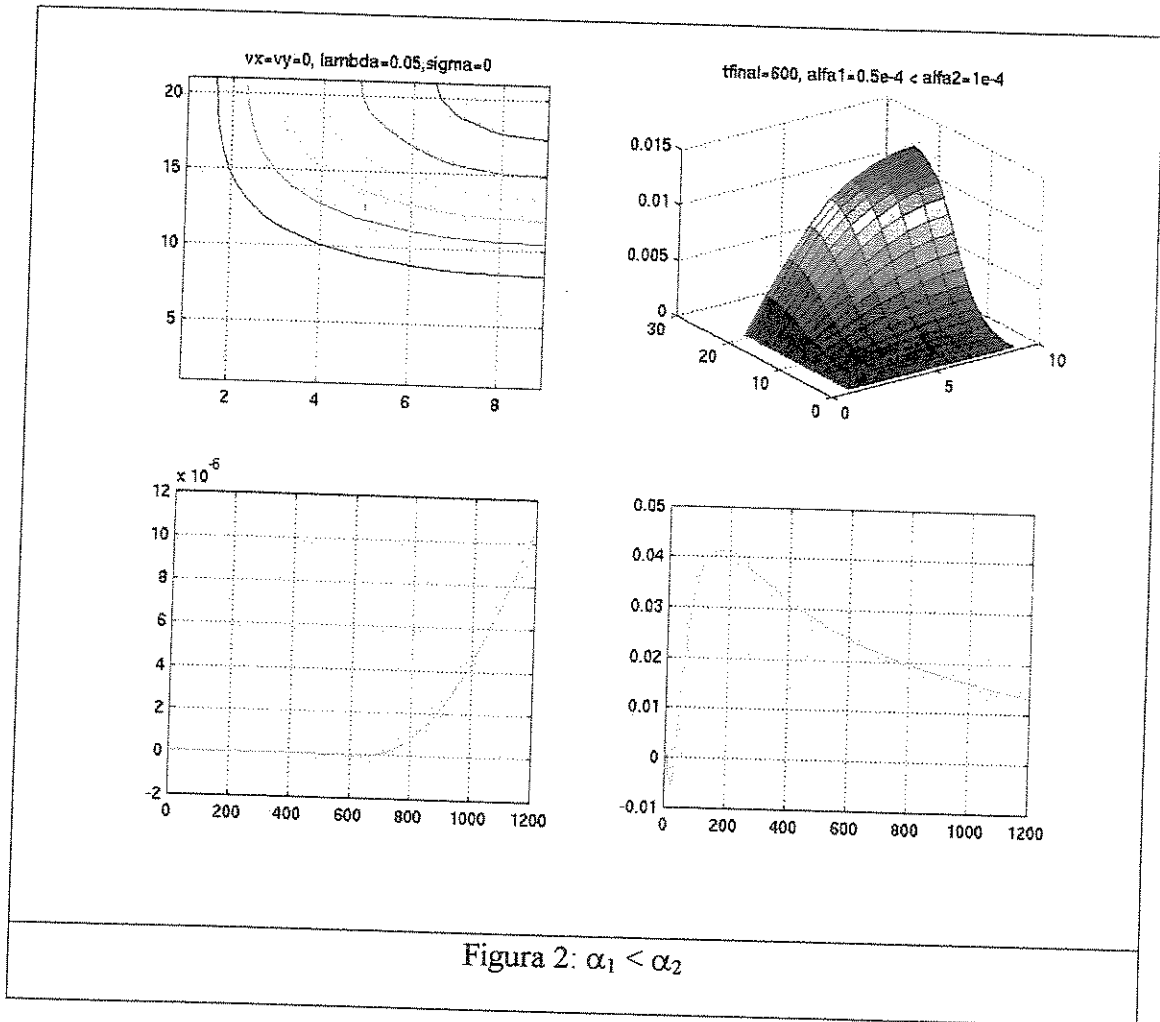
No primeiro conjunto de gráficos, temos uma dispersão maior na parte mais ampla, chamada de Ω_1 e um parâmetro de menor valor, metade, aliás – indicando impedimento maior na mobilidade da espécie no retângulo menor, Ω_2 , mantendo iguais os outros fatores. Pode-se observar como a população, partindo de uma situação inicial dada por um agrupamento de população na fronteira dos domínios tem uma tendência a rapidamente procurar ocupar o domínio maior, embora tendo certa dificuldade de ocupar o domínio menor. Com isto, temos uma maior concentração na parte central como se a população estivesse sendo desestimulada a movimentar-se no domínio de menor dispersão. Este modo de interpretar as figuras se confirma com os gráficos na parte inferior da Figura 1, em que aparecem, do lado esquerdo, para um ponto genérico do domínio maior (e de maior dispersão) um crescimento relativamente rápido, após um período inicial sem população: a população “demorou” um pouco para ocupar o domínio maior, mas nessa região pode se “espalhar” mais depressa – o que favoreceu o crescimento populacional.



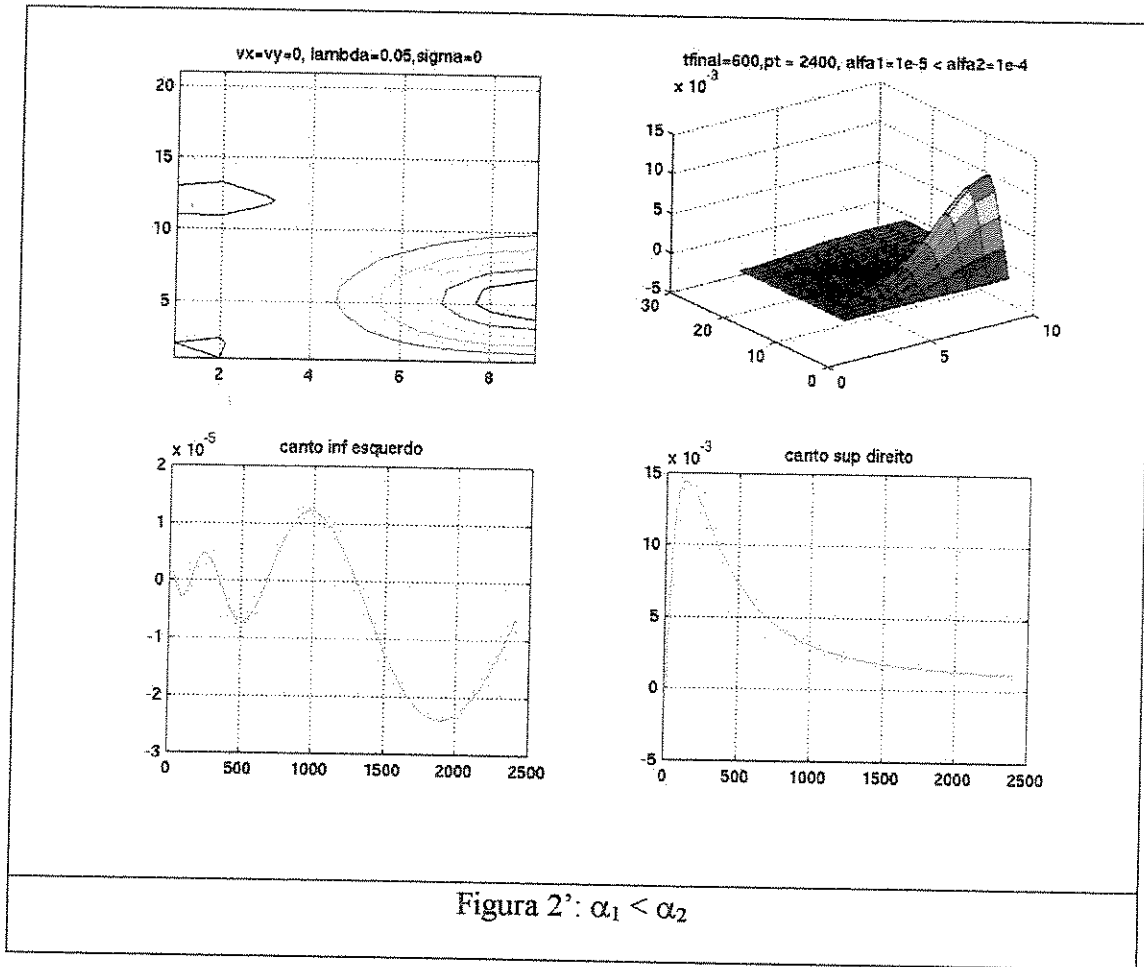
Uma simulação análoga pode ser vista a seguir, na figura 1'. Neste caso, temos, diferentemente do caso imediatamente anterior, $\alpha_1=10^{-4} > \alpha_2=10^{-5}$. Além disto, a condição inicial também foi mudada, simulando, porém, um idêntico processo: o aparecimento de um grupo na fronteira do domínio. As diferenças deste caso em relação aos que seguem abaixo são ainda mais evidentes, e isto tanto nos casos em que o tempo final é o mesmo, mas com um número maior de subdivisões do tempo, isto é, com um maior número de passos no tempo, como nos casos em que os tempos finais são distintos.



Diferentemente deste, o outro resultado é obtido com o caso inverso, com uma simulação em que a dispersão em Ω_1 é menor do que em Ω_2 : α_1 é agora metade de α_2 . Nesta nova situação, e partindo de igual condição inicial, observa-se que, devido a uma maior facilidade de dispersão no domínio menor a superfície é um pouco mais “achatada”, isto é, a população mais rapidamente “ocupou” essa região. Além disso, observando os dois gráficos bidimensionais de baixo, podemos ver os contrastes desta segunda situação com aquela primeira: no domínio maior a população demora muito mais para começar a crescer, enquanto que, no menor, a população, com maior dispersão, rapidamente ocupa Ω_2 . Cabe, ainda, um comentário sobre a incongruência no início do intervalo de tempo em que varia a função que descreve a população em um determinado ponto do domínio: resulta da dificuldade inicial do método de Crank-Nicolson.



Como no caso das figuras 1 e 1', temos na figura 2' uma nova simulação, com $\alpha_1=10^{-5} < \alpha_2=10^{-4}$. Nestas novas imagens temos, também, o mesmo instante final com um maior número de passos no tempo, bem como uma diferente condição inicial. Os efeitos da diferença, porém, ficam mais evidentes.



Observando a oscilação do gráfico bidimensional inferior à esquerda, temos uma idéia tanto da oscilação numérica proveniente do método de aproximação, quanto de sua baixa influência, visto que esta se dá na ordem de 100 vezes menos do que os valores envolvidos na simulação. Esta oscilação é, também, aparente no primeiro gráfico, o das curvas de nível – exatamente num ponto relativamente distante da condição inicial não-nula. É uma oscilação esperada e controlada. As figuras 2'' e 3'' abaixo repetem estes mesmos gráficos, acrescentando, porém, outros dois gráficos da evolução da concentração populacional em pontos genéricos no domínio, com os quais o mesmo procedimento se dá – e, neles, não se evidencia esta oscilação. Um último detalhe a observar, o da grande diferença da distribuição populacional para as diferentes situações de dispersão – em 2', $\alpha_1 < \alpha_2$ e, em 3', $\alpha_1 > \alpha_2$:

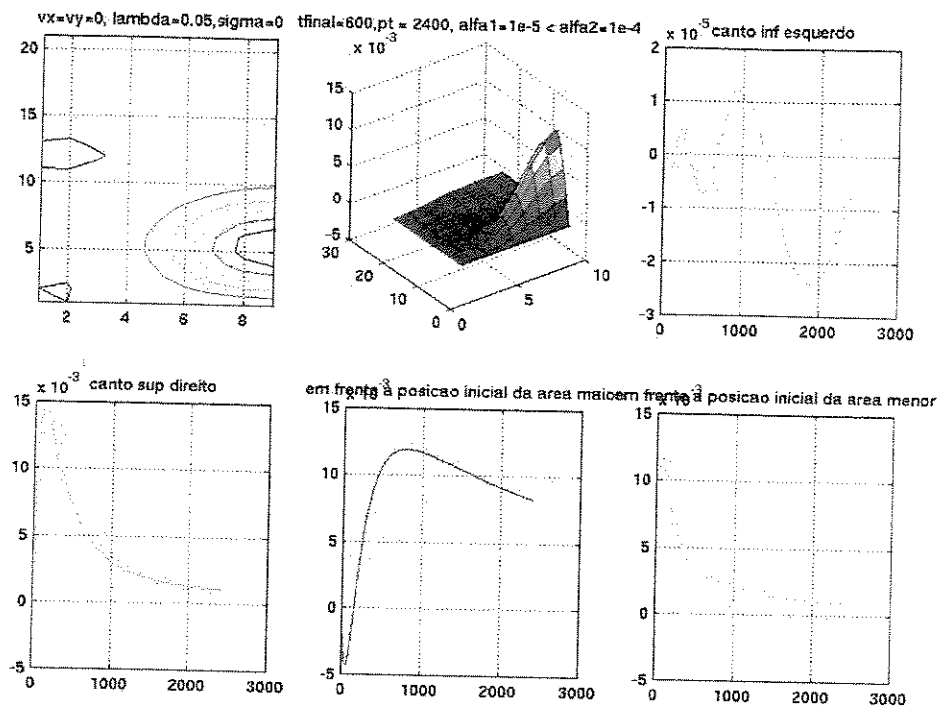


Figura 2'', como a 2', acrescida da descrição de outros dois pontos no tempo.

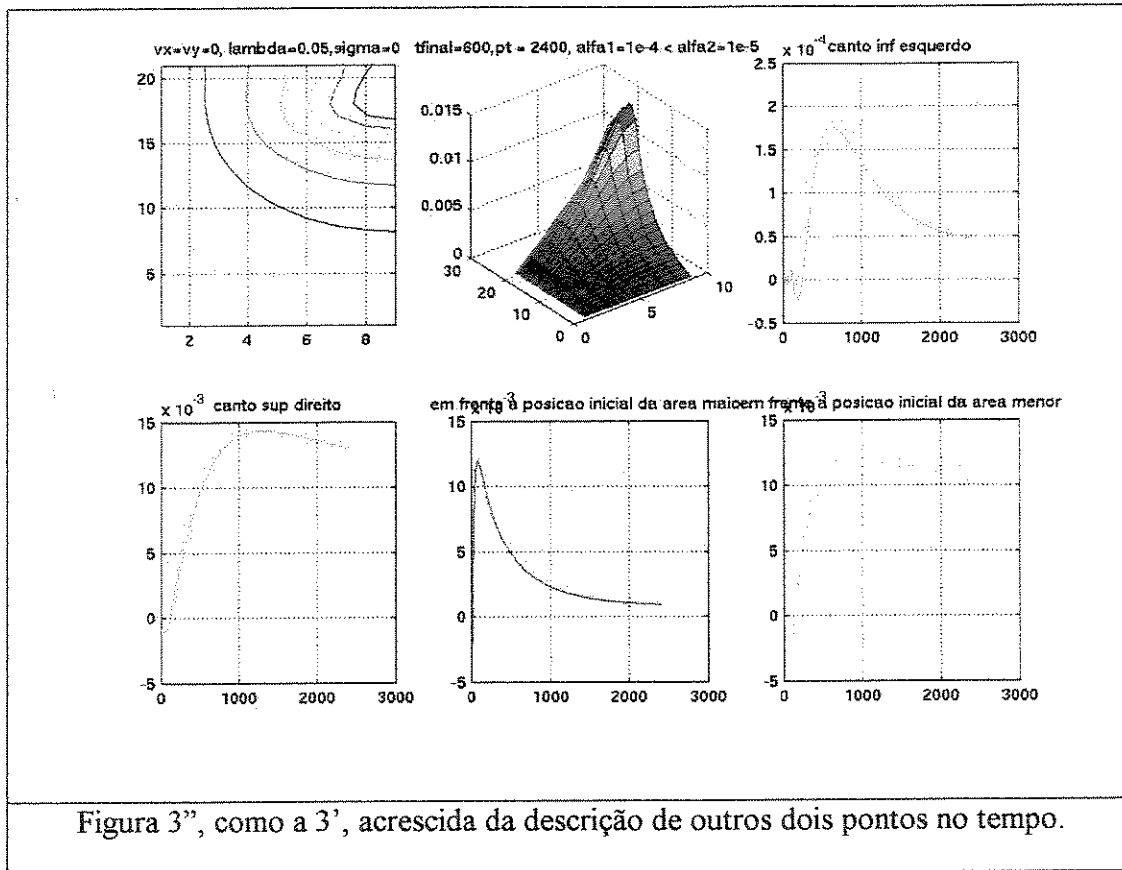


Figura 3'', como a 3', acrescida da descrição de outros dois pontos no tempo.

Muitas críticas têm sido feitas a modelos de espécie única, sobretudo no estudo de uma determinada população *in natura*, devido às muitas características sistêmicas presentes, indicando uma linha de trabalho alternativa – e possivelmente mais eficiente – que inclua outras espécies e modelando suas ações interespecíficas, além das intra-específicas aqui consideradas. Embora estes comentários mereçam cuidadosa atenção, tem sido possível, mesmo assim, contribuir em muitos casos com modelos de uma única espécie, ainda que inseridos em contextos *a fortiori* sistêmicos, e o levantamento bibliográfico evidencia a relativa conveniência desta abordagem. Em outras palavras, há ainda muito que fazer neste sentido – inclusive porque o que se conseguir no caso de modelos em que, como naqueles aqui apresentados, com fortes características de não linearidade, pode e deve ser estendido a sistemas de mais espécies. É isto que será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 2

Duas ou mais espécies em dispersão espacialmente dependente, interagindo entre si, com dinâmica populacional de tipo logístico.

Assim como, no capítulo anterior, tornou-se necessário abandonar aqueles modelos para os quais tão somente o tempo era a variável independente em favor daqueles para os quais o espaço desempenhava relevante papel, aqui um passo análogo é apresentado. É bastante raro que aqueles modelos que descrevem as dinâmicas populacionais em função de espaço e tempo para espécie única se adaptem facilmente àquelas situações em que considerações sistêmicas e, portanto, multi-específicas, interferem fortemente. Nestes casos, essa interação entre diferentes espécies passa a influenciar de modo significativo os respectivos comportamentos das espécies consideradas no sistema analisado. Mesmo em casos do estudo de espécie única, muitos modelos necessitam incluir diferentes comportamentos estruturados por idade, pela morfologia, pela etologia, ou fazendo figurar separadamente, se não diferentes espécies, pelo menos diferentes estádios de determinada espécie. Tais agrupamentos apresentam diferentes comportamentos reprodutivos, migratórios, de forrageamento ou sofrem de modo diferenciado a influência dos demais membros da espécie, de outras espécies e do meio. Nesta linha, um trabalho interessante é o de Diniz e outros (1997). No caso do estudo do convívio de mais de uma espécie, com modelos que levam em consideração as variações espacial e temporal temos, também, Sossae (1996), Meyer e Lacaz (1999), Meyer, Sossae, Rossi e Loiselle (1998) em que, além dos modelos apresentados e analisados, métodos de aproximação são propostos e aspectos qualitativos do comportamento das aproximações numéricas dos modelos são discutidos.

Apresentamos aqui, de início, um modelo genérico com duas espécies $p=p(x, y; t)$ e $q=q(x, y; t)$ com dinâmicas populacionais de tipo dependente da densidade e submetidas

a uma hostilidade do meio. Iremos supor ainda que interajam entre si, como competidoras por recursos. Incluiremos, portanto, no modelo:

- As hostilidades do meio para cada uma das espécies, dadas, respectivamente, por $\sigma = \sigma(x, y; t)$ e $v = v(x, y; t)$;
- As dinâmicas próprias de cada espécie, aí incluída a ação da outra: $p.f(p, q)$ e $q.g(p, q)$;
- As capacidades suporte do meio para cada espécie, dadas, respectivamente por K e L .
- As difusibilidades de cada uma das espécies, dadas, respectivamente, por $\alpha = \alpha(x, y; t)$ e $\beta = \beta(x, y; t)$;
- Dois campos de velocidade que indicam, de modo primário, tendências migratórias ou quemotaxias, dadas por V e por W ;
- Os parâmetros da dinâmica populacional dita de Verhulst geralmente indicados no termo não-linear ao lado direito do sistema.

Abaixo, como exemplo, figura um sistema deste tipo, identificando, pela escolha de sinais, uma competição interespecífica, além de impedimentos de tipo intra-específico de formulação verhulstiana:

Obter $p(x, y; t)$ e $q(x, y; t)$ conhecidas as populações iniciais dadas por $p_0(x, y)$ e $q_0(x, y)$ tais que, além de condições de contorno apropriadas, se tenham:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div}[\alpha(x, y; t) \cdot \nabla p - V \cdot p] + \sigma(x, y; t) \cdot p &= \lambda \cdot p \cdot [1 - \frac{p}{K}] - r \cdot p \cdot q \text{ e} \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \text{div}[\beta(x, y; t) \cdot \nabla q - W \cdot q] + v(x, y; t) \cdot q &= \mu \cdot q \cdot [1 - \frac{q}{L}] - s \cdot p \cdot q. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Numa revisão bibliográfica, este é o sistema que tem figurado nos textos científicos de modo recorrente, com evidentes variações que visam, por um lado, restringir o estudo a casos específicos, ou ampliá-lo incluindo aspectos mais genéricos, por outro. Respeitadas tais variações, então, este é o tipo de sistema que aparece nos trabalhos que passamos a listar.

Em 1974, Hadler, Heiden e Rothe apresentaram um trabalho sobre distribuição espacial não-homogênea de duas populações combinada com equações clássicas de Lotka-Volterra, isto é, reunindo as ações inter e intra-específicas com a distribuição espacial.

Em 1978, o mesmo Rothe com Mottoni repetiu esta idéia, com ênfase agora em resultados analíticos de existência e de unicidade, exigindo para isso pesadas condições de regularidade. Na mesma linha de estudo, apareceu em 1983 o trabalho de Hirano e Naito, em que num sistema como os mencionados anteriormente, figuram operadores de Difusão-Reação dependentes do tempo, para os quais são apresentados resultados de convergência para soluções assintóticas.

Edelstein-Keshet, apresentando um trabalho no qual, em 1986, propôs uma modelagem para sistemas planta-herbívoros, mencionou um sistema de equações a derivadas parciais do tipo daqueles que, genericamente, são aqui citados. A análise do comportamento qualitativo de soluções e a proposição de expressões lineares e quadráticas para dispersão e convecção tornam este trabalho um dos fundamentais no estudo evolutivo da interação entre diferentes espécies com dispersão espaço-dependente.

Em 1991, Wollkind, Collings e Barba apresentaram um trabalho em que se discutia a introdução de difusibilidade instável em um meio unidimensional dependente da temperatura com duas espécies num contexto presa-predador (que eles denominaram de “vítima-explorador”). Além de importantes considerações analíticas, o texto traz referências à “*cross-diffusivity*” em que a dispersão de uma espécie varia com a presença da outra, considerando também uma conseqüente variação na capacidade suporte do meio. Neste aspecto, este estudo adquire uma relevância significativa no contexto dos estudos aqui apresentados.

Timm e Okubo apresentaram em 1992 o trabalho intitulado *Diffusion-driven Instability in a predator-prey system with time-varying diffusivities*. Nele, um sistema clássico de tipo Lotka-Volterra é linearizado e sujeito a condições de contorno de Dirichlet homogêneas; a variação temporal das difusividades respectivas é considerada “small”, possivelmente devido às exigências necessárias para se obterem resultados de estabilidade.

Um dos trabalhos fundamentais deste período é o de Ikeda e Mimura (1993), em que um sistema geral de tipo Lotka-Volterra para três espécies é apresentado em conjunto com dispersão populacional clássica e condições de fronteira de tipo von Neumann homogêneas. Nesse estudo, alguns ensaios numéricos são apresentados e discutidos e, por meio de uma adimensionalização, são obtidos resultados analíticos relativos a estabilidade. Aqui, diferentemente dos casos citados acima em que se consideram situações estacionárias que aproximam soluções assintóticas, a parte desprezada nos ensaios numéricos é a da dispersão populacional em mais de uma dimensão, preservada aquela que se dá em uma delas, usando como justificativa a correta aproximação por simetria do meio considerado.

Choudhury, em 1994, usou um modelo de tipo presa-predador com três espécies, levando em conta uma difusão espacial uni-dimensional para duas delas. Seus bons resultados analíticos serviram de base para um segundo trabalho, ainda em 1994 e no mesmo periódico (SIAM J. Appl. Math), em que se adicionam ao modelo uni-dimensional termos modelando retardamento. Os resultados são analíticos no estudo de bifurcação e instabilidade.

Em 1995, Newson estudou um modelo uni-dimensional no sentido do espaço para a distribuição de biomassa de raízes no tempo e no espaço, fazendo uso da equação de difusão-reação com transporte e uma dinâmica de crescimento malthusiana. Ainda em 1995, Ngwa e Maini partiram de um sistema clássico de interação combinado com a equação de conservação, origem de expressivo número de trabalhos com formulações de dispersão e convecção. As condições na fronteira são de tipo von Neumann homogêneas, e sucessivas simplificações permitem resultados de estabilidade para comportamentos padrão.

Neste mesmo ano, apareceu o trabalho de Ruuth, em que, de modo pioneiro, surge a discussão dos métodos de discretização temporal para a aproximação da solução de sistemas de equações de reação-difusão com interação interespecífica, e condições iniciais e de contorno bastante precisas.

Merecem referência, ainda em 1995, os trabalhos de Buffoni, Griffa, Li e Mottoni no estudo de comunidades espacialmente distribuídas em um sistema de consumidor-

recursos, e de Rasle e Ziti analisando modelos de quemotaxia (embora o termo não conste do Aurélio, parece servir como razoável tradução para *chemotaxis*...). Finalmente, como precursor de métodos numéricos no estudo de sistemas que modelam a ação interespecífica e incluem aspectos de não-linearidade e dispersão populacional, surgiu em 1995 o trabalho de Wilder, Christie e Colbert. Os autores adaptam o uso de métodos de sistemas de EDO de tipo Runge-Kutta-Fehlberg, comparando-os com os preditores-corretores usados iterativamente. Algumas dessas estratégias são semelhantes às aquelas que serão usadas no presente trabalho, embora em outro quadro de aproximações.

Em 1996 foi publicado um estudo relevante de Raychaudhuri, Sinha e Chattopadhyay, cujo título indica seu alcance: “*Effect of time varying cross-diffusivity in a two-species Lotka-Volterra competitive system*”. Nele, os autores trataram de eliminar as não-linearidades no sentido de transformar o sistema de Equações a Derivadas Parciais num sistema de Equações Ordinárias. Além dessa simplificação, uma única variável espacial (radial) é utilizada. Com isto se obtém um resultado de estabilidade.

A partir de 1996 aparece uma série de trabalhos que indicam uma tendência a se unificar a abordagem com o uso de sistemas em que, junto com as interações nas espécies e entre diferentes espécies, podem figurar a dependência do espaço e do tempo nas densidades populacionais e nos parâmetros. Um dos primeiros exemplos é o de Gourley e Britton (1996), com sistemas de 1 ou 2 espécies combinando equações clássicas de dispersão populacional com sistemas de tipo Lotka-Volterra. As dinâmicas populacionais deixam de ser simplesmente malthusianas, e dinâmicas de tipo Verhulst reforçam as não-linearidades presentes.

Uma referência básica na discussão sobre a viabilidade do uso desse tipo de sistemas de Equações Diferenciais Parciais nesta linha de estudo, apareceu ainda em 1996, no trabalho de Cosner: “*Variability, Vagueness and Comparison Methods for Ecological Models*”. Este trabalho leva em consideração muitas das simplificações presentes em trabalhos anteriores aqui mencionados, comparando a utilidade de modelagens via Sistemas de Equações de Diferenças, de Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais. A bibliografia apresentada no final desse texto (que vem sob o título “*Literature*”) é importante referência em estudos desse tipo.

Ainda em 1996, Gourley, Britton, Chaplain e Byrne seguem uma tendência geral de apresentar formulações genéricas para n espécies, combinando interações de tipo Lotka-Volterra com dispersão espacial variando periodicamente no tempo, simplificando-as a seguir a fim de obter resultados analíticos que permitam uma visão mais rica dos processos. Estes autores trabalharam em uma única dimensão espacial e com condições de fronteira de tipo von Neumann homogêneas.

Allegretto, Xie e Yang, em 1997, seguiram estudando sistemas de Difusão-Reação combinados com dinâmicas populacionais e relações interespecíficas conhecidas. O problema proposto, reduzido a uma única dimensão espacial, tratava genericamente de quimiotaxia. Nesse mesmo ano, Gourley e Bartuccelli ainda em dimensão única, insistiram nos efeitos de um retardamento devido ao período de gestação – o que pareceria indicar um tratamento em meso-escala, mas com outras componentes de tratamento matemático, típicas de períodos mais longos no tempo. Um ponto importante no trabalho é o de reunir referências prévias nesta área de estudo. No mesmo ano Cantrell e Ward, Jr. trabalhando com 3 espécies e, também, 3 variáveis espaciais além do tempo, voltaram sua atenção para a modelagem do caso clássico de Lotka–Volterra com dispersão espacial e parâmetros constantes no tempo e no espaço, do tipo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - \alpha_1 \Delta u_1 + \sigma_1 \cdot u_1 &= a_1 \cdot u_1 \cdot \left(1 - \frac{u_1}{K_1}\right) + u_1 \cdot (-\alpha_{12} u_2 + \beta_1 u_1 \cdot u_2 - \alpha_{13} u_3) = \\
&= u_1 \cdot F_2(u_1, u_2, u_3), \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} - \alpha_2 \Delta u_2 + \sigma_2 \cdot u_2 &= a_2 \cdot u_2 \cdot \left(1 - \frac{u_2}{K_2}\right) + u_2 \cdot (-\alpha_{21} u_1 + \beta_2 u_1 \cdot u_2 - \alpha_{23} u_3) = \\
&= u_2 \cdot F_2(u_1, u_2, u_3) \text{ e} \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} - \alpha_3 \Delta u_3 + \sigma_3 \cdot u_3 &= a_3 \cdot u_3 \cdot \left(1 - \frac{u_3}{K_3}\right) + u_3 \cdot (-\alpha_{31} u_1 - \alpha_{32} u_2) = \\
&= u_3 \cdot F_3(u_1, u_2, u_3).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

em que se estudam efeitos qualitativos sobre a estabilidade de soluções simulando a ausência de cada uma das espécies sucessivamente. Ao comentário inevitável de que construir um modelo com três espécies deveria, no mínimo, implicar no estudo dessas três espécies devemos ponderar que, no entanto, o objetivo maior desse tipo de trabalho vem sendo o de conhecer tanto modelos quanto seus comportamentos, numa tentativa de

ganhar intuição sobre esses comportamentos relativos do modelo, preparando-o para uma eventual aplicação. Cabe repetir um comentário sobre os parâmetros: como exibiu Kareiva (1983), estes parâmetros podem ser obtidos pelo ajuste dos dados de campo ao modelo, usando o quadro de suposições matemáticas da estrutura do modelo como ferramental de avaliação de comportamentos de espécies.

Em 1998, Hernández também apresenta um modelo bastante genérico com variações espacial e temporal e com a introdução de diversos tipos de não-linearidades diferentes daquelas que figuram neste texto.

Por outro lado, dadas as condições em que o presente estudo se realiza, e o objetivo de produzir modelos que possam efetivamente auxiliar na avaliação de fenômenos ambientais, torna-se necessário obter resultados de existência e unicidade de solução analítica, além de definir métodos de aproximação, obtendo garantias de convergência, além de produzir códigos numéricos suficientemente robustos para efetivar simulações e testes, possibilitando uma cooperação efetiva no estudo de fenômenos de interação de espécies em determinados meios.

Um primeiro passo, então, é o de definir para um modelo genérico um espaço conveniente H em que possa ser postulado o problema (obviamente junto com as condições inicial e de contorno):

Obter $p(x,y,t)$ e $q(x,y,t)$ em H – para $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e para $t \in (0,T]$ – conhecidas as populações iniciais dadas por $p(x,y,0) = p_0(x,y)$ e $q(x,y,0) = q_0(x,y)$ tais que, além de condições de contorno apropriadas, se tenham:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}[\alpha(x,y,t) \cdot \nabla p - V \cdot p] + \sigma(x,y,t) \cdot p &= p \cdot f(x,y,t;p,q) \text{ e} \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div}[\beta(x,y,t) \cdot \nabla q - W \cdot q] + v(x,y,t) \cdot q &= q \cdot g(x,y,t;p,q). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mencionar condições de contorno convenientes significa basicamente traduzir determinados comportamentos para a linguagem clássica de equações a derivadas parciais.

Ainda que bastante semelhantes às formulações anteriormente citadas, cabe a discriminação dos parâmetros:

- $\alpha = \alpha(x, y, t)$ descreve a dispersão populacional da espécie p,
- $\beta = \beta(x, y, t)$ descreve, por sua vez, a dispersão da espécie q, com
- $\sigma = \sigma(x, y, t)$ e $\upsilon = \upsilon(x, y, t)$ correspondendo respectivamente às mortalidades devidas à hostilidade do meio, enquanto
- V e W indicam os campos vetoriais de possíveis processos advectivos (como migração, por exemplo) e
- f e g representam as respectivas dinâmicas populacionais na região Ω estudada.

A necessidade de introduzir uma formulação variacional, destinada a problemas como aquele que aqui se apresenta, implica em exigir integrabilidade no sentido de Lebesgue, tanto das funções quanto de suas derivadas de primeira ordem. Assim, vamos de imediato precisar que, para cada $t \in (0, T]$, $p(x, y, \cdot), q(x, y, \cdot) \in H^1(\Omega)$.

Os primeiros termos de derivadas temporais de p e de q também irão exigir integrabilidade espacial e, portanto, deveremos ter:

$p(x, y, t), q(x, y, t) \in H$, onde, para

$L^2((0, T], H^1(\Omega)) = \{ v(x, y, t) \in L^2 : \forall t \in (0, T], v(\cdot, \cdot, t) \in H^1(\Omega) \}$, possamos definir

H como

$$H = \{ v \in L^2((0, T], H^1(\Omega)) \text{ tal que } \forall t \in (0, T], \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0 \}.$$

(2.4)

A formulação variacional do sistema indicado acima será dada por:

Encontrar $p = p(x, y, t)$ e $q = q(x, y, t)$ tais que

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial p}{\partial t} \mid v \right) - (\operatorname{div}[\alpha(x, y; t) \cdot \nabla p - V \cdot p] \mid v) + (\sigma(x, y; t) \cdot p \mid v) = \\
& = (p \cdot f(x, y, t; p, q) \mid v), \text{ e} \\
& \left(\frac{\partial q}{\partial t} \mid v \right) - (\operatorname{div}[\beta(x, y; t) \cdot \nabla q - W \cdot q] \mid v) + (v(x, y; t) \cdot q \mid v) = \\
& = (q \cdot g(x, y, t; p, q) \mid v), \text{ satisfazendo} \\
& p(x, y; 0) = p_0(x, y) \text{ e } q(x, y; 0) = q_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\
& \forall v \in V = H^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Com o uso criterioso do Teorema de Green na expressão dada em (2.5), teremos:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial p}{\partial t} \mid v \right) + (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla p \mid \nabla v) + (V \cdot \nabla p \mid v) + (\sigma(x, y; t) \cdot p \mid v) - \int_{\partial\Omega} \alpha \frac{\partial p}{\partial \eta} \cdot v d\gamma = \\
& = (p \cdot f(x, y, t; p, q) \mid v), \text{ e} \\
& \left(\frac{\partial q}{\partial t} \mid v \right) + (\beta(x, y; t) \cdot \nabla q \mid \nabla v) + (W \cdot \nabla q \mid v) + (v(x, y; t) \cdot q \mid v) - \int_{\partial\Omega} \beta \frac{\partial q}{\partial \eta} \cdot v d\gamma = \\
& = (q \cdot g(x, y, t; p, q) \mid v),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$\forall v \in H^1$, onde, além das condições iniciais, consideramos $\operatorname{div}(V)$ e $\operatorname{div}(W)$ ambos nulos. Esta condição corresponde a considerar que os campos de velocidades dados, respectivamente, por V e por W , sejam solenoidais. A esta formulação variacional há que se acrescentar, ainda, o efeito das condições de contorno, que no caso das condições de Dirichlet e von Neumann serem homogêneas, por exemplo, implicariam no desaparecimento da integral sobre a fronteira $\partial\Omega$. Em outras palavras, se as condições de contorno forem, dadas por expressões do tipo

$$\begin{aligned}
& k_0 \cdot p \Big|_{\Gamma_0} = s_0(x, y; t) \Big|_{\Gamma_0} \text{ ou} \\
& -k_1 \cdot \alpha \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1} = s_1(x, y; t) \Big|_{\Gamma_1} \text{ ou, ainda genericamente, por} \\
& k_0(x, y; t) \cdot p(x, y; t) \Big|_{\partial\Omega} + k_1(x, y; t) \cdot \alpha(x, y; t) \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{\partial\Omega} = s(x, y; t), \\
& \Gamma_0 \text{ e } \Gamma_1 \text{ disjuntos, } \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset, \text{ formam a fronteira, } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

deveremos ter, no lugar de integrais de linha como as que figuram acima, expressões respectivamente do tipo (*cf* capítulo 1):

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_0} s_0 \cdot v d\gamma \text{ do lado direito do sistema, com} \\
& + \int_{\Gamma_1} s_1 \cdot p \cdot v d\gamma \text{ do lado esquerdo, visto que nesta figura a solução procurada } p = p(x, y, t).
\end{aligned}$$

Analogamente, expressões semelhantes aparecem com $q = q(x, y, t)$ na segunda equação do sistema (2.6):

$$\begin{aligned}
& k_0 \cdot q|_{\Gamma_0} = r_0(x, y, t)|_{\Gamma_0} \text{ ou} \\
& -k_1 \cdot \beta \frac{\partial q}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} = r_1(x, y, t)|_{\Gamma_1} \text{ ou, ainda genericamente, por} \\
& k_0(x, y, t) \cdot q(x, y, t)|_{\partial\Omega} + k_1(x, y, t) \cdot \beta(x, y, t) \cdot \frac{\partial q}{\partial \eta}|_{\partial\Omega} = r(x, y, t), \\
& \Gamma_0 \text{ e } \Gamma_1 \text{ disjuntos, } \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset, \text{ e } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{2.7'}$$

levando às expressões

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_0} r_0 \cdot v d\gamma \text{ do lado direito do sistema, com} \\
& + \int_{\Gamma_1} r_1 \cdot q \cdot v d\gamma \text{ do lado esquerdo, visto que nesta figura a solução procurada } q = q(x, y, t).
\end{aligned}$$

Em termos da existência e da unicidade de solução para o problema (2.5) – (2.7') em que pese a dificuldade, sobretudo na notação ao se trabalhar com as duas expressões funcionais vetoriais, podemos mencionar os trabalhos de Lions (1968), que descreve, comenta e prova o seguinte resultado:

Sejam os espaços V e H , espaços de Hilbert separáveis, com $V \subset H$ topologicamente, e, V denso em H ; considerando-se uma perturbação $f \in L^2(-\infty, T; H)$, f nula quase sempre para $t < 0$, as condições:

1. Para todos os pares $u, v \in V$, a função $t \rightarrow a(t; u, v)$ é mensurável,
2. $M \cdot \|u\| \cdot \|v\| \geq |a(t; u, v)|$, com M uma constante real independente de t, u e v , e
3. Existe λ real tal que $a(t; v, v) + \lambda \cdot \|v\|^2 \geq \alpha \cdot \|v\|^2$, $\alpha > 0$, $v \in V$,

garantem a existência e a unicidade de solução do problema dado por

encontrar $u(t) \in L^2(-\infty, T; V)$, com $u \equiv 0$ q.s. para $t < 0$, tal que

$$a(t, u(., t), v) + (du/dt, v) = (f, v) + (u_0, v)\delta.$$

Neste caso, o operador $a(t, u, v)$ representa o sistema dado em (2.3). A prova de que o sistema mencionado satisfaz, de fato, as exigências do teorema de Lions, pode ser vista em Lacaz (1999), por exemplo, onde se pode verificar como as condições do presente modelo satisfazem as exigências do resultado citado.

No entanto, a prova da existência da solução $u = (p(x, y; t), q(x, y; t))$ não garante infelizmente a possibilidade de sua expressão em alguma forma analítica, e, como sempre, será necessário definir pragmaticamente um método de aproximação. O pragmatismo mencionado refere-se à necessidade do método ser a um tempo exeqüível em sistemas computacionais disponíveis e também confiável em termos de sua aproximação...

Deste ponto de vista, a escolha do método de aproximação será pelo Método de Galerkin com vistas ao Método de Elementos Finitos de 1ª ou 2ª ordens no domínio espacial, além de Crank-Nicolson ao longo do tempo. Para isso, como no capítulo anterior, deveremos substituir o espaço V das funções teste (*cf* cap. 1) pelo subespaço de dimensão finita N_h , denominado V_h . Este subespaço é resultado de uma opção na aproximação desejada que se constitui, de fato, numa separação de variáveis, em que as funções teste citadas surgem em combinações lineares finitas de elementos da base de V_h . Além disto, a verificação das equações em sua formulação variacional (2.6) “... para todo $v \in V$ ” passará a ser exigida apenas para os N_h elementos $\varphi_j(x, y)$ da base de V_h . Teremos, então:

$$p_h = \sum_j p_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \quad \text{e} \quad q_h = \sum_j q_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \quad (2.8)$$

e, em vez de (2.6), em que se propunha obter as funções $p_h(x, y, t)$ e $q_h(x, y, t)$, iremos calcular as $2n$ funções apenas da variável temporal t , dadas por $p_j(t)$ e $q_j(t)$, $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{dp_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i)_{\tau_h} + \sum_{j=1}^n p_j(t) (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\tau_h} + \sum_{j=1}^n p_j(t) (V \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i)_{\tau_h} + \\
& + \sum_{j=1}^n p_j(t) (\sigma(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i)_{\tau_h} - \sum_{j' \in \partial \Omega} p_{j'}(t) \int_{\partial \Omega} \alpha \frac{\partial \varphi_{j'}}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma = \\
& = \sum_{j=1}^n p_j(t) \left(\varphi_j \cdot f(x, y, t; \sum_{k=1}^n p_k(t) \varphi_k, \sum_{s=1}^n q_s(t) \varphi_s) | \varphi_i \right)_{\tau_h}, \text{ e} \\
& \sum_{i=1}^n \frac{dq_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i)_{\tau_h} + \sum_{j=1}^n q_j(t) (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i)_{\tau_h} + \sum_{j=1}^n q_j(t) (W \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i)_{\tau_h} + \\
& + \sum_{j=1}^n q_j(t) (v(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i)_{\tau_h} - \sum_{j' \in \partial \Omega} q_{j'}(t) \int_{\partial \Omega} \beta \frac{\partial \varphi_{j'}}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma = \\
& = \sum_{j=1}^n q_j(t) \left(\varphi_j \cdot g(x, y, t; \sum_{k=1}^n p_k(t) \varphi_k, \sum_{s=1}^n q_s(t) \varphi_s) | \varphi_i \right)_{\tau_h} \quad i=1, \dots, n
\end{aligned}$$

$\forall \varphi_i \in \text{base de } V_h$, com $(p_j(0))_j$ e $(q_j(0))_j$ dados.

Em (2.9), há uma somatória de integrais cujo subíndice é dado pela expressão $j' \in \partial \Omega$: isto deve evidenciar a soma para aqueles vértices cujos lados estão sobre a fronteira do domínio, excluindo tanto os vértices do interior de Ω quanto os que estão no bordo, mas cujos lados não pertencem a $\partial \Omega$. Conforme as condições de contorno, os termos podem reduzir-se a expressões do tipo:

$$\langle \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} | \varphi_i \rangle_{\Gamma_i, 0} = \langle \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} | \varphi_i \rangle_{\{\sup(\varphi_i) \cap \sup(\varphi_j) \cap \Gamma_i\}, 0}$$

onde deve figurar (como no caso de α), a difusibilidade da espécie estudada no interior do meio do qual η é o versor externo ortogonal à fronteira.

Este sistema de Equações Diferenciais Ordinárias com $2n$ equações e $2n$ incógnitas funcionais aparenta uma simplicidade em termos de resolução analítica, a não se reparar nem nas características de não-linearidade nem nas dimensões do sistema – para o qual a obtenção numérica de autovalores e autovetores associados se torna proibitivamente complexa. Isto posto, como em parte anterior, iremos recorrer ao Método de Crank-Nicolson. Ora é reconhecido que este método pode apresentar certas falhas provocando pequenas oscilações nos primeiros passos ao longo do tempo (*cf* Isaacson e Keller, 1994), mas no tipo de problemas aqui apresentado, o que interessa é simular um comportamento qualitativo a médio ou até a longo prazo em vez de obter resultados

quantitativos em curtos períodos no tempo. O que indica a conveniência do uso de Crank-Nicolson de comprovada confiabilidade nesse tipo de situação.

Faremos, portanto, uso das discretizações para a variável de tempo já apresentadas em capítulo anterior, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{dc_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} &\equiv \frac{c_j(t_{n+1}) - c_j(t_n)}{\Delta t} \text{ com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \text{ e} \\ c_j(t_n + \Delta t/2) &\equiv \frac{c_j(t_{n+1}) + c_j(t_n)}{2} \text{ com erro da mesma ordem.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como anteriormente, denominando $c_j^{(n)}$ a aproximação de $c = c(x_j, y_j; t_n)$, pode-se usar (2.10) em (2.9) para obter:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (V \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\sigma(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\ &- \sum_{j' \in \partial \Omega} \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \int_{\partial \Omega} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \left(\varphi_j \cdot f(x, y, t; \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s) | \varphi_i \right) \\ &\text{e} \\ &\sum_{i=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (W \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (v(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\ &- \sum_{j' \in \partial \Omega} \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} \int_{\partial \Omega} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} \left(\varphi_j \cdot g(x, y, t; \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s) | \varphi_i \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$\forall \varphi_i \in \text{base de } V_h$, com $(p_j^{(0)})_j$ e $(q_j^{(0)})_j$ dados.

Isolando as ocorrências explícitas das incógnitas $p^{(n+1)} = (p_j^{(n+1)})_{j=1, \dots, N}$ e $q^{(n+1)} = (q_j^{(n+1)})_{j=1, \dots, N}$ (definidas para o passo de tempo $t = t_{n+1}$) do lado esquerdo, deixando as

ocorrências explícitas de ambos os vetores $p^{(n)} = (p_j^{(n)})_{j=1, \dots, N}$ e $q^{(n)} = (q_j^{(n)})_{j=1, \dots, N}$ do lado direito dos sinais de igualdade e, ainda, tomando-se o devido cuidado de efetuar as integrais sobre a parte Γ_1 da fronteira apenas quando estas, de fato, existirem, este sistema não-linear pode ser reescrito como se segue:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=j}^n p_j^{(n+1)} \{ (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (V \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} (\sigma(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_j \cdot f(x, y, t; \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s) | \varphi_i \right) \} = \\
& = \sum_{i=j}^n p_j^{(n)} \{ (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} (V \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\sigma(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_j \cdot f(x, y, t; \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s) | \varphi_i \right) \} \\
& \text{e} \\
& \sum_{i=j}^n q_j^{(n+1)} \{ (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (W \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} (v(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_j \cdot g(x, y, t; \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s) | \varphi_i \right) \} = \\
& = \sum_{i=j}^n q_j^{(n)} \{ (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} (W \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (v(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(\varphi_j \cdot g(x, y, t; \sum_{k=1}^n \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \varphi_k, \sum_{s=1}^n \frac{p_s^{(n+1)} + p_s^{(n)}}{2} \varphi_s) | \varphi_i \right) \}, \\
& \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h, \text{ com } (p_j(0))_j \text{ e } (q_j(0))_j \text{ dados.}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Este sistema se caracteriza pela não linearidade, impondo desafios numéricos de maior ou menor complexidade, basicamente em função do aspecto que assumem as funções f e g , ambas de x, y, t, p e q . Um dos possíveis exemplos a serem discretizados neste quadro é o de Lotka-Volterra clássico, com a competição interna a cada espécie modelada pela função de Verhulst, exemplo este (com os parâmetros tradicionalmente definidos) dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \cdot \nabla p) + \operatorname{div}(V \cdot p) + \sigma \cdot p &= \lambda \cdot p \cdot \left(1 - \frac{p}{K}\right) - c \cdot p \cdot q \quad \text{e} \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div}(\beta \cdot \nabla q) + \operatorname{div}(W \cdot q) + \upsilon \cdot p &= \mu q \cdot \left(1 - \frac{q}{L}\right) - d \cdot p \cdot q \end{aligned} \quad (2.13)$$

Obtem-se então, usando $\sigma' = \sigma - \lambda$ e $\upsilon' = \upsilon - \mu$, o sistema não-linear:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=j}^n p_j^{(n+1)} \{ (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (v \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} (\sigma'(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma + \\
& + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \left(\varphi_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) + \frac{c \cdot \Delta t}{2} \left(\varphi_j \cdot \left(\sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \} = \\
& = \sum_{i=j}^n p_j^{(n)} \{ (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\alpha(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} (v \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\sigma'(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma - \\
& - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \left(\varphi_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) - \frac{c \cdot \Delta t}{2} \left(\varphi_j \cdot \left(\sum_{s=1}^n \frac{q_s^{(n+1)} + q_s^{(n)}}{2} \varphi_s \right) | \varphi_i \right) \} \\
& e \\
& \sum_{i=j}^n q_j^{(n+1)} \{ (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} (w \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} (v'(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma + \\
& + \frac{\mu \Delta t}{2L} \left(\varphi_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) + \frac{d \cdot \Delta t}{2} \left(\varphi_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) \} = \\
& = \sum_{i=j}^n q_j^{(n)} \{ (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (\beta(x, y; t) \cdot \nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} (w \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\Delta t}{2} (v'(x, y; t) \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_1} \beta \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \cdot \varphi_i d\gamma - \\
& - \frac{\mu \Delta t}{2L} \left(\varphi_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) - \frac{d \cdot \Delta t}{2} \left(\varphi_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \varphi_k \right) | \varphi_i \right) \}, \\
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$\forall \varphi_i \in \text{base de } V_h$, com $(p_j(0))_j$ e $(q_j(0))_j$ dados.

Este sistema, dado por (2.14), corresponde a:

$$\begin{aligned}
E(p^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) \cdot p^{(n+1)} &= F(p^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) \cdot p^{(n)} \text{ e} \\
G(p^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) \cdot q^{(n+1)} &= H(p^{(n)}, q^{(n)}, p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) \cdot q^{(n)}, \\
&\text{dados } p^{(0)} \text{ e } q^{(0)}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

As expressões de E, de F, de G e de H estão dadas acima, em (2.14), e o algoritmo de aproximação numérica será análogo ao do capítulo 1. Este procedimento numérico

apóia-se na facilidade de utilizar esquemas numéricos modulares reaproveitando trabalhos anteriores de aproximação por Elementos Finitos (como o que se usou no capítulo anterior) e, além disso, visa contornar a não-linearidade com o uso de um processo iterativo que consiste em:

Dados $p^{(0)}$ e $q^{(0)}$,

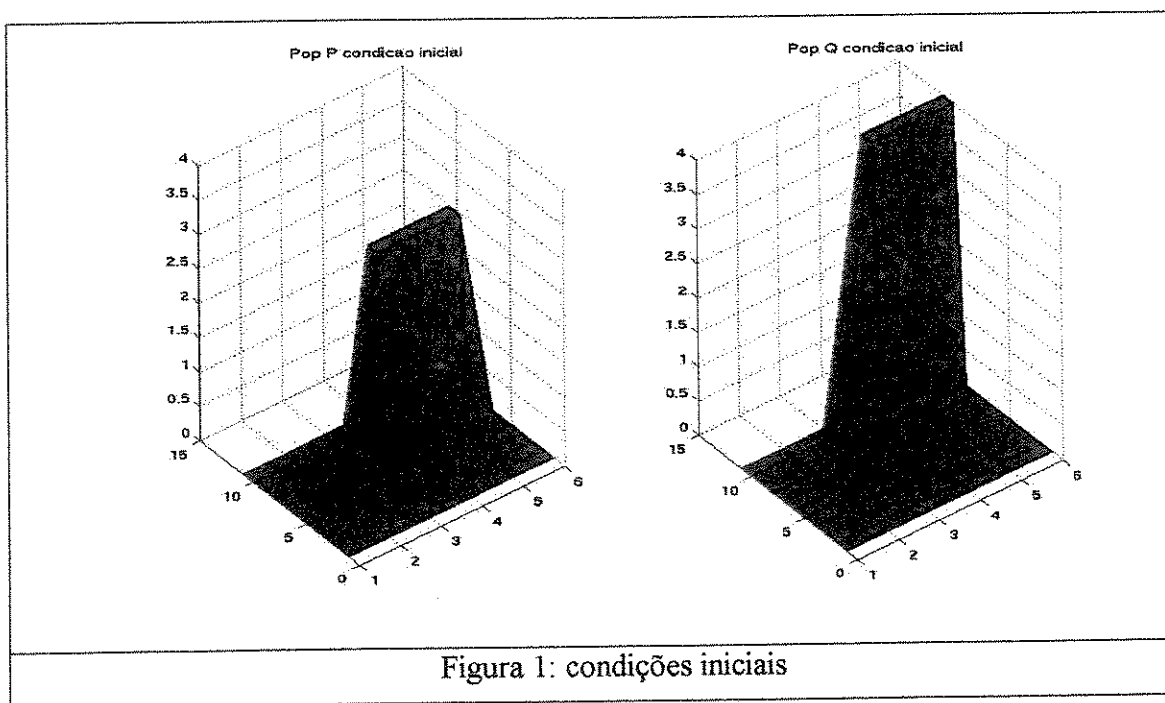
1. resolve-se o sistema $E(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(0)}, q^{(0)}) \cdot p^{(*)} = F(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(0)}, q^{(0)}) \cdot p^{(0)}$, obtendo o vetor $p^{(*)}$;
2. resolve-se, em seguida o sistema $G(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(*)}, q^{(0)}) \cdot q^{(*)} = H(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(*)}, q^{(0)}) \cdot q^{(0)}$, obtendo $q^{(*)}$.
3. Resolve-se em seguida $E(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(*)}, q^{(*)}) \cdot p^{(**)} = F(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(*)}, q^{(*)}) \cdot p^{(0)}$, obtendo $p^{(**)}$;
4. e também o sistema $G(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(**)}, q^{(*)}) \cdot q^{(**)} = H(p^{(0)}, q^{(0)}, p^{(**)}, q^{(*)}) \cdot q^{(0)}$, obtendo $q^{(**)}$.
5. Procedendo analogamente, obtêm-se $p^{(***)}$ bem como $q^{(***)}$, e assim sucessivamente até que se definam as aproximações dos vetores $p^{(1)}$, $q^{(1)}$. Em geral não há ganhos ao se repetir muitas vezes estas iterações internas a cada passo no tempo (*cf* Peaceman e Rachford).
6. O procedimento todo, de 1. a 5. é repetido com $p^{(n)}$ e $q^{(n)}$ no lugar de $p^{(0)}$ e $q^{(0)}$, para se obter, após as iterações internas ao $(n+1)$ -ésimo passo na iteração temporal, $p^{(n+1)}$, $q^{(n+1)}$.

Para não tornar ainda mais pesada a leitura do texto, toda a parte algorítmica da construção das matrizes, bem como das repetidas soluções a cada passo no tempo não serão parte do presente texto. Referências para este tipo de procedimento são, por exemplo, Sossae (1995) ou Meyer (1988) e os programas usados estão listados no anexo ao final (*cf* duasdif.m).

Usando um conjunto de dados qualitativamente aceitáveis, embora desprovidos de base real em termos de observações de campo, ensaios numéricos evidenciaram características de comportamento teórico bastante sugestivos, e indicam a validade do tipo de modelagem aqui proposto.

No primeiro conjunto de ensaios foi usado um domínio retangular com características de simetria. Desse modo foi possível discretizar apenas um quarto do domínio total, definindo a condição de contorno nos dois lados “internos” do domínio maior (correspondendo aos lados superior e direito do retângulo discretizado) como sendo de von Neumann homogêneo. Nos outros dois lados (correspondendo ao inferior e ao lateral direito tanto no retângulo maior quanto naquele que foi discretizado) a opção foi por uma condição Dirichlet homogênea. Para a condição inicial, que corresponde às distribuições iniciais de população, foram imaginadas duas situações: a de populações que, de início, ocupam regiões bastante diferentes e separadas, e um outro caso em que, já de início, temos a interação pela proximidade.

Na primeira situação, portanto, temos as populações iniciais dadas na figura 1, em que se caracteriza a distância entre elas, e apenas a dispersão irá promover o encontro e, conseqüentemente, a interação competitiva.



Depois de 5000 passos no tempo, para um instante final de 2000 u.t., o que se obtém é apresentado na figura 2, onde se vê claramente que a população denominada de $p(x,y,t)$ que começou próximo da margem lateral esquerda tem uma certa dificuldade inicial de ocupar a região no modo clássico desse tipo de situação de dispersão, ficando com uma

maior densidade populacional ligeiramente abaixo do canto superior direito, precisamente a região ocupada pela outra população $q(x,y,t)$ que, tendo começado já nessa região, e tendo-a ocupado antes da outra espécie, resiste nessa fase inicial a um convívio competitivo, impedindo aí a presença da espécie p . Na linha de baixo, temos, para apenas 2000 passos no tempo, o comportamento evolutivo da concentração das respectivas populações de p e q em um determinado ponto do domínio, em que se pode observar, após uma variação inicial, uma tendência assintótica posterior.

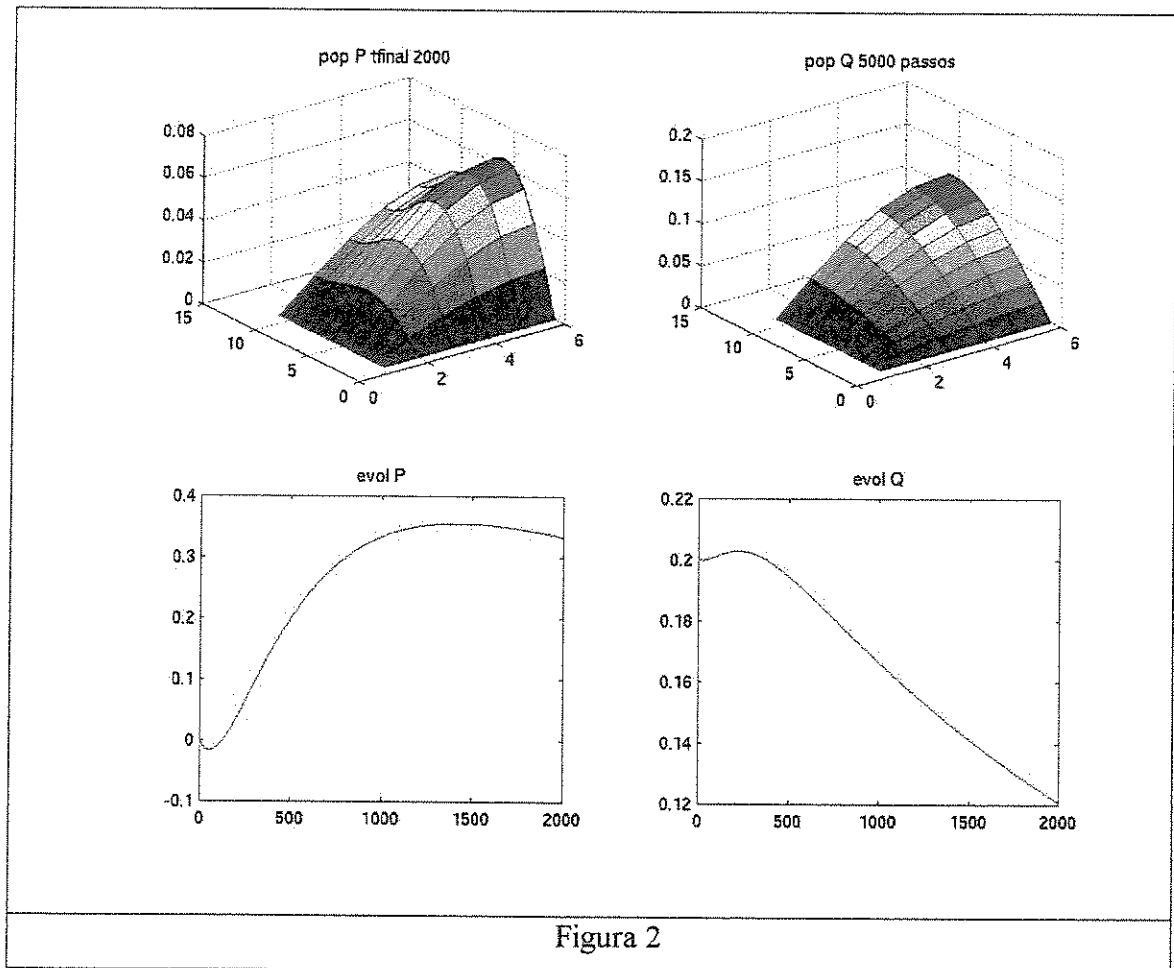
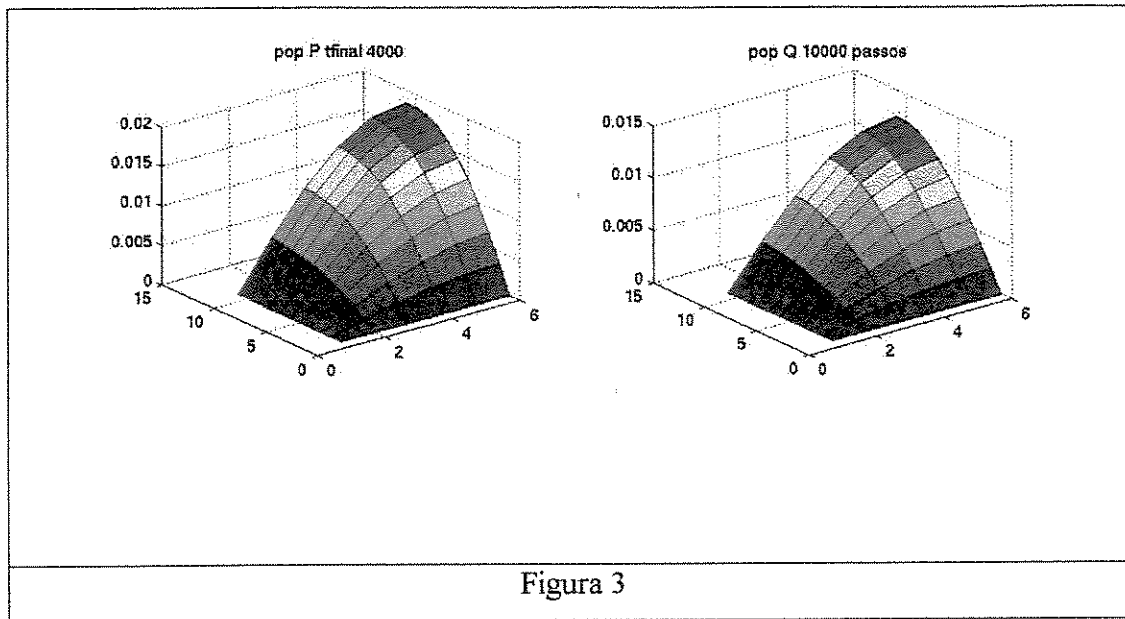


Figura 2

No entanto, depois de 10000 passos no tempo, o que se vê (na figura 3) é o esperado convívio das duas espécies na forma das soluções clássicas de modelos de dispersão uniespecíficos, tendo desaparecido a separação espacial de ambas as populações. Destacamos, também, a queda nos níveis populacionais ao longo do tempo, devida às disputas inter- e intraespecíficas.



Ainda neste primeiro conjunto de ensaios, escolhemos um nó do domínio discretizado para que, fixado esse ponto no domínio espacial, se possa ilustrar um comportamento evolutivo de ambas as espécies modeladas. O ponto escolhido se localiza aproximadamente no centro do domínio para que possam ser acompanhadas as variações temporais:

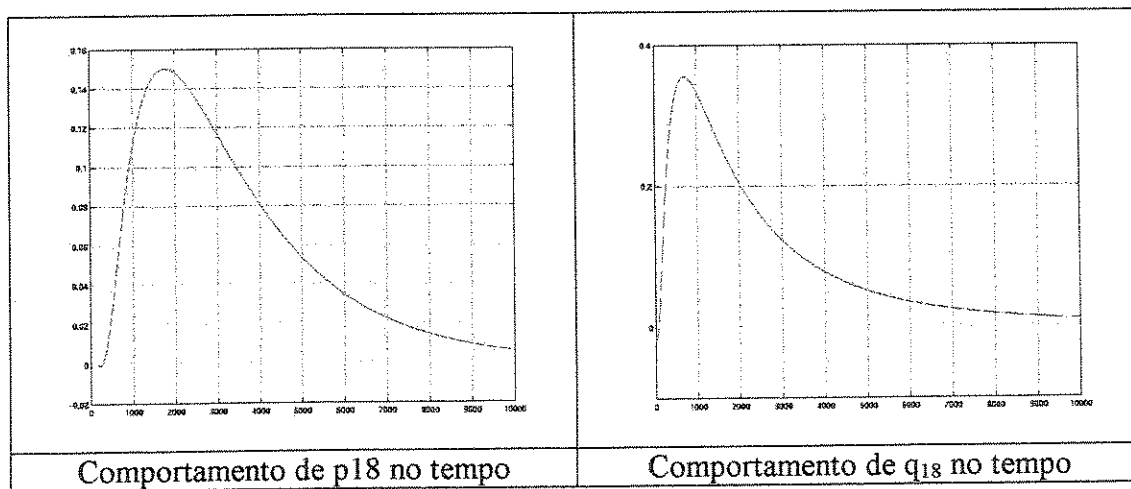
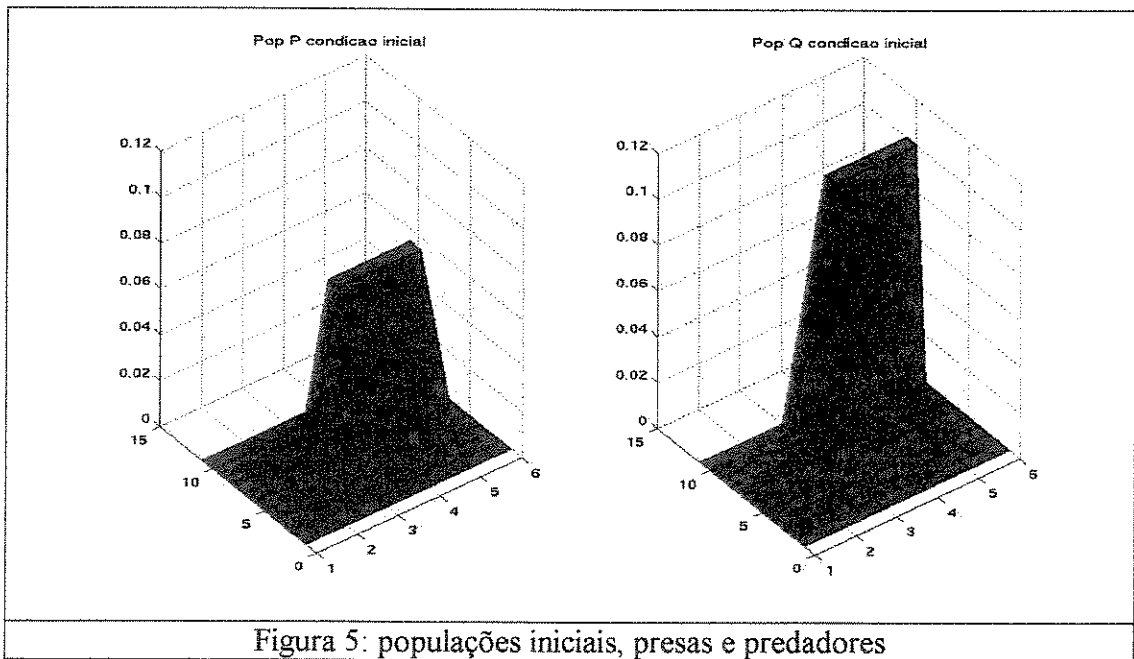


Figura 4

No segundo conjunto de ensaios, a modelagem dada em (2.13) foi alterada a fim de acompanhar um modelo clássico de predador-presa, também com uma dinâmica populacional de tipo logístico. O modelo adotado, então, é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div}(\alpha \cdot \nabla p) + \text{div}(V \cdot p) + \sigma \cdot p &= \lambda \cdot p \cdot \left(1 - \frac{p}{K}\right) + c \cdot p \cdot q \quad \text{e} \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \text{div}(\beta \cdot \nabla q) + \text{div}(W \cdot q) + \nu \cdot p &= \mu q \cdot \left(1 - \frac{q}{L}\right) - d \cdot p \cdot q \end{aligned} \quad (2.16)$$

Em (2.16) a única diferença de (2.13) é o sinal que precede o último termo do lado direito da segunda equação: $-d \cdot p \cdot q$, evidenciando o efeito negativo do predador, $p(x,y;t)$, no crescimento populacional da presa $q(x,y;t)$. São os mesmos os significados dos demais parâmetros de dispersão, migração, hostilidade do meio e de dinâmica populacional. Não parece ser necessário repetir as formulações variacional nem a variacional discretizada, como também é dispensável repetir as expressões e a sequência algorítmica dadas em (2.14)-(2.15), onde a única diferença, além dos valores usados, é aquela aqui indicada relativa aos sinais dos últimos termos de cada equação. As condições iniciais usadas nos ensaios seguintes estão dadas na figura 5. O objetivo deste conjunto de ensaios é o de simular o convívio de duas espécies numa relação predador-presa, com ambas as populações separadas por uma determinada extensão de terreno – em outras palavras, o encontro entre indivíduos irá ocorrer por força da dispersão populacional.



Após 10000 passos no tempo, o que se obteve está ilustrado na figura 6 – no que corresponde a um “quadro” que faz parte de um “filme”.

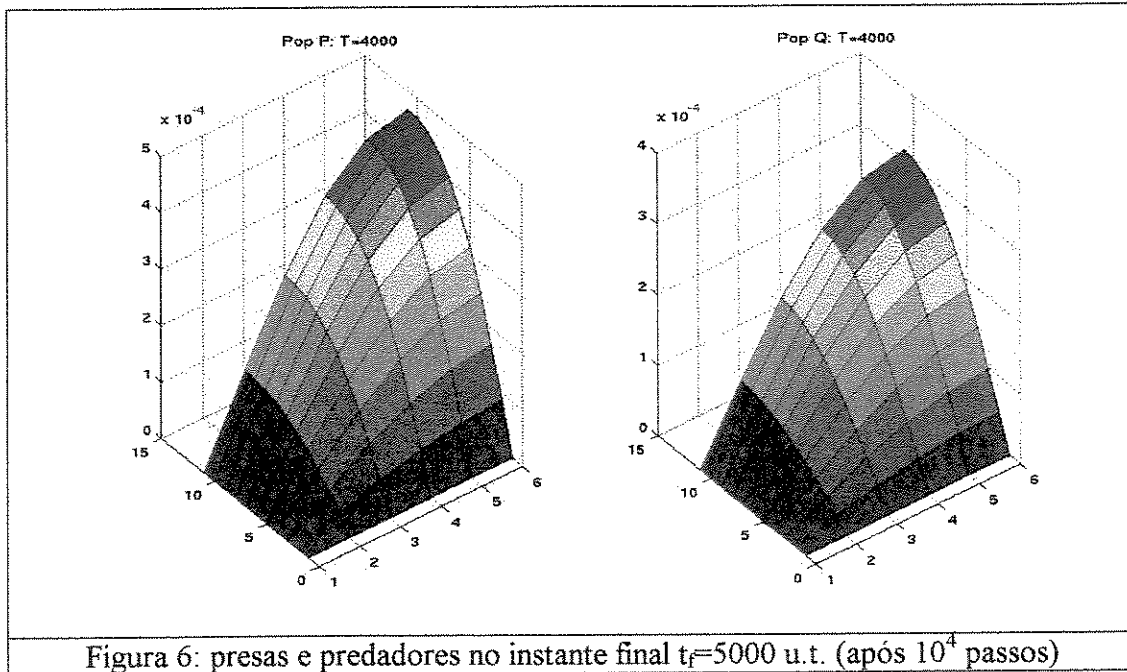


Figura 6: presas e predadores no instante final $t_f=5000$ u.t. (após 10^4 passos)

Embora as superfícies de densidades populacionais apresentem, num determinado instante, aspecto bastante semelhante àquele do modelo de competição, a figura 7 destaca uma diferença fundamental na dinâmica do processo simulado que o “quadro” da figura 6 não descreve: podem ser verificados os ciclos característicos dos modelos clássicos dependentes da densidade para predador-presa de Lotka-Volterra, ciclos que ocorrem ao mesmo tempo em que se dá a dispersão populacional. Isto é feito descrevendo o comportamento ao longo do tempo das variações populacionais apenas no 5º nó da malha usada.

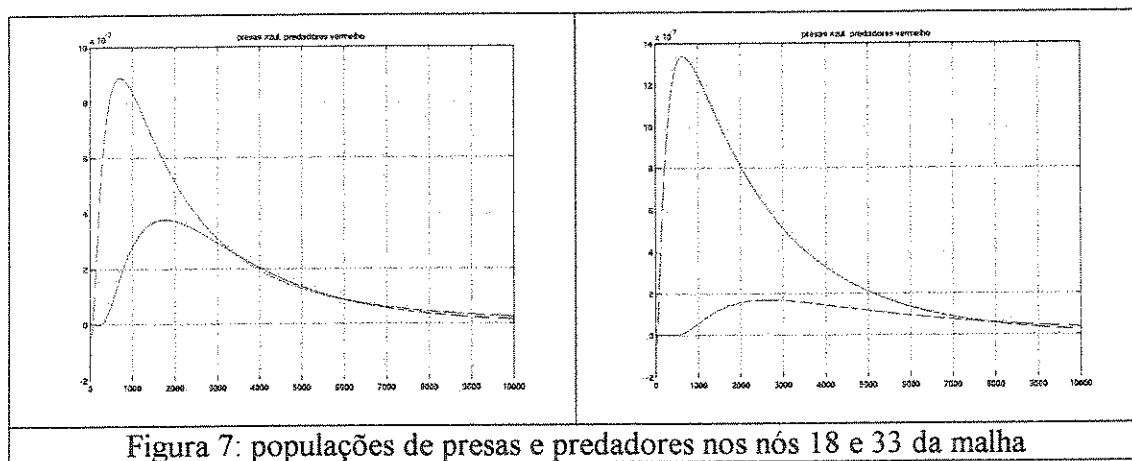


Figura 7: populações de presas e predadores nos nós 18 e 33 da malha

Com algum cuidado se pode notar na figura que, partindo de uma situação em que não há indivíduos das espécies em nenhum dos nós assinalados, algum tempo depois surgem populações ora com predomínio de presas, ora com predomínio de predadores – e mais: esse predomínio é alterado no tempo. Em resumo, apesar do modelo ter incluído características de dispersão, o modelo continua a “herdar” aspectos da modelagem clássica (embora os ciclos não sejam os mesmos, evidentemente).

Na passagem da introdução para o 1º capítulo, destacamos que, em modelos de dinâmica populacional, o espaço pode, também, ter relevância semelhante à do tempo. Ao passarmos do 1º para o 2º capítulo foi mencionado que muitas vezes devem ser consideradas outras relações além das interespecíficas, podendo ser analisados diferentes estádios de uma mesma espécie, bem como relações entre espécies distintas que convivem num mesmo domínio. No 3º capítulo sugerimos dois diferentes modelos para a epizootia: subdivimos as capivaras em distintos compartimentos, com características acentuadamente diferentes e, em seguida, incluímos neste quadro, a população de vetores, sua dinâmica vital, sua dispersão, subdividindo-os em dois compartimentos: o dos portadores do protozoário e o dos não portadores.

Capítulo 3

Novos Desafios: Mal-das-cadeiras de Capivaras

Historicamente, modelos para estudo do comportamento de epidemias têm considerado apenas a variável temporal, pressupondo uma densidade homogênea das populações analisadas ou, equivalentemente, ser desnecessário analisar variações espaciais. Mesmo nos relatos históricos de se identificar fontes contaminadas de água, por exemplo, a localização de indivíduos doentes – e, portanto, a consideração da variabilidade espacial – tinha mais a ver com medidas de interdição de poços em termos de saúde pública do que com o comportamento da doença em termos de espaço. Em alguns casos mais recentes, também, as doenças não viajam segundo um modelo de dispersão, mas fazem-no de navio, avião e ônibus (ou caminhão), de modo que, também aí, parece ser desnecessário ou até inútil introduzir considerações espaciais contínuas nos modelos. Por outro lado, há muitos casos em que tais considerações são, de fato, essenciais ao estudo evolutivo da morbidez na sociedade estudada e, então, sem considerações de ordem espacial os resultados podem ser deficientes a ponto de não permitir uma compreensão abrangente do fenômeno estudado. O mesmo pode dar-se com epidemias em espécies animais – muitas vezes com consequências de diversos tipos para seres humanos.

Neste terceiro capítulo, iremos introduzir um modelo de tipo Kermack-McKendrick clássico que inclui a variação espacial evolutiva da população estudada. Tais modelos não são novos no sentido genérico. De fato, Capasso e Maddalena, já em 1981, acoplaram, num sistema de segunda ordem, termos de dispersão constante com partes específicas para a descrição do espalhamento de doenças de classes viral e bacteriana. O modelo usado por estes dois autores foi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(x;t)}{\partial t} &= d_1 \Delta u_1(x;t) - a_{11} u_1(x;t) + a_{12} u_2(x;t) \\ \frac{\partial u_2(x;t)}{\partial t} &= d_2 \Delta u_2(x;t) + g(u_1(x;t)) - a_{22} u_2(x;t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

com $(x,t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

para $n = 1, 2$ ou 3 , sendo $\partial\Omega$ suave de modo suficiente.

Um ano mais tarde, em 1982, Webb publicou um trabalho em que um sistema como o de (3.1) na parte de dispersão populacional apresenta as relações de modelos de tipo SIR/SIRS. Para tirar conclusões analíticas, porém, transforma-o em um sistema espacialmente homogêneo.

Em 1989, Murray reuniu uma coletânea de trabalhos a partir dos quais propôs um sistema semelhante a (3.1) com o qual analisou o espalhamento espacial de uma raiva epidêmica em raposas. Nesse modelo, aparece o termo de dispersão populacional ora na parte da espécie de indivíduos infectados, ora nos removidos. Estes dois modelos são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(x;t)}{\partial t} &= -r.S.I + \beta.S.(1 - \frac{S}{S_0}), \\ \frac{\partial I(x;t)}{\partial t} &= r.S.I - aI + \alpha \frac{\partial^2 I}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{3.2}$$

com $(x,t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^1$.

e por

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(x;t)}{\partial t} &= -a.S - b.S - \frac{(a-b).N.S}{K} - \beta.R.S, \\ \frac{\partial I(x;t)}{\partial t} &= -b.I - \frac{(a-b).N.I}{K} + \beta.R.S - \sigma.I, \\ \frac{\partial R(x;t)}{\partial t} &= -b.R - \frac{(a-b).N.R}{K} - \sigma.I + -\mu.R + \alpha \frac{\partial^2 R}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{3.3}$$

com $(x,t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^1$.

Neste último sistema em que se define a dispersão populacional em apenas uma dimensão cartesiana (direção esta que não é a direção radial!), além dos parâmetros usuais, podemos considerar:

$$N = S + I + R. \quad (3.4)$$

E, como fez Murray (*op. cit.*), somando as três equações de (3.3), obtêm-se após algum esforço algébrico:

$$\frac{dN}{dt} = a.S - b.N - \frac{(a-b).N^2}{K} - \mu.R \quad (3.5)$$

Usando este conjunto de equações, Murray obteve, fazendo uso de soluções estacionárias, resultados analíticos a partir dos quais conseguiu tirar conclusões sobre uma frente de onda viajante epizootica: uma onda de infecção que “viaja” pela população previamente não-infectada.

Já em 1998, Keeling e Grenfell recorreram a instrumental estocástico para analisar, também, o espalhamento espacial de doenças, e trabalharam evolutivamente com as probabilidades de infecção de população suscetível espacialmente distribuída.

Numa linha análoga, em 1998, Grasman parte de um modelo formulado estocasticamente para chegar a uma equação de difusão-reação expressa conjuntamente com termos de tipo SIR para duas populações com migrações entre elas. Todos os resultados desse trabalho são de ordem analítica, embora ele apresente tabelas com valores de diversos parâmetros para poliomielite, sarampo e para uma epidemia de *tristeza citrus*.

Neste terceiro capítulo, o objetivo é o de recorrer a instrumental numérico em sistemas do tipo acima descritos a que iremos acrescentar determinadas hipóteses relacionadas a um estudo de caso. Neste exemplo, iremos tentar descrever algumas das hipóteses relacionadas à avaliação do mal-das-cadeiras em populações de capivaras, uma epizootia com espalhamento espacial cíclico em determinadas situações com tal tipo de roedor em ambientes naturais. A idéia, então, seria a de colocar um modelo SIR ou SIM, porém apenas com equações para Suscetíveis e Infectados, já que os removidos o são por morte (o que explica a sigla: SIM), simulando o comportamento evolutivo da epizootia citada. Este modelo incluiria a dispersão espacial das capivaras infectadas, o contágio das suscetíveis, e uma dinâmica populacional das suscetíveis, já que as infectadas praticamente não se reproduzem como tal. Além disto, como a população inicial de capivaras suscetíveis é homogênea, nada ocorre em termos de difusibilidade numa fase

inicial, mas a variação espacial e temporal surge quando, por contágio, parte da população de animais suscetíveis passa a infectados e estes, após algum tempo, a mortos (ou removidos). O primeiro modelo não irá incluir insetos transmissores do *Trypanopssoma equinum* causador desse mal endêmico.

Este primeiro modelo é dado, conseqüentemente, por:

$$\begin{aligned} S &= S(x, y; t), \quad I = I(x, y; t) \quad \text{e} \quad M = M(x, y; t) \quad \text{tais que} \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_s \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V} \cdot S) + \sigma_s S &= \lambda S \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI, \\ \frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_i \Delta I + \sigma_i I &= +\beta SI - \gamma I \quad \text{e} \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \gamma I \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Uma condição inicial possível é dada por $S(x, y; 0) = S_0$, constante em todo o domínio, por $M(x, y; 0) = 0$ e por $I(x, y; 0) = I_0(x, y)$, onde se supõe uma população de animais sadios, e suscetíveis, homoganeamente distribuída pelo domínio do estudo, e uma população de infectados concentrada em alguma sub-região do domínio Ω . As condições de contorno são – numa modelagem exploratória, inicial – de tipo Dirichlet e von Neumann homogêneas, indicando partes de fronteira $\partial\Omega$ em que há um obstáculo à passagem de indivíduos da espécie estudada (Γ_1) e onde não há indivíduos (Γ_0):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \quad \text{para } t \in (0, T] \quad \text{e} \\ S(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} &= 0 \quad \text{para } t \in (0, T], \quad \text{além de} \\ \left. \frac{\partial I(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \quad \text{para } t \in (0, T] \quad \text{e} \\ I(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} &= 0 \quad \text{para } t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Os parâmetros que figuram em (3.6) indicam, como é usual:

- α_s e α_i são, respectivamente, os parâmetros de dispersão populacional de Suscetíveis e de Infectados;
- σ_s e σ_i são, por sua vez, parâmetros indicativos da hostilidade do meio, para Suscetíveis e Infectados, respectivamente;

- V indica (se necessário) uma direção preferencial de movimento de indivíduos suscetíveis, com $\text{div}(V) = 0$;
- λ fornece a taxa intrínseca de reprodução (considerada aqui para um modelo de dinâmica logística) de elementos Suscetíveis da espécie;
- K é a capacidade de suporte do meio;
- β dá a taxa de infecção; e
- γ é a taxa de falecimento de indivíduos infectados.

Uma das razões que motiva o uso experimental deste modelo consiste no fato se obter um falso estado estacionário, dado por:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{\sigma_I + \gamma}{\beta} \\ \bar{I} &= \frac{\beta.K.(\lambda - \sigma_S) - \lambda.(\sigma_I + \gamma)}{\beta.(\lambda + \beta.K)}\end{aligned}\tag{3.8}$$

Este par de valores, ainda que permaneça (pelo menos teoricamente) estável em termos das respectivas populações de animais suscetíveis e infectados, irá corresponder a uma variação linear no tempo para a população de indivíduos mortos, contrabalançando o crescimento da população pela reprodução dos sadios. Evidentemente esta terna dada por $(\bar{S}, \bar{I}, M(t))$ depende de serem também constantes todos os parâmetros envolvidos. Do ponto de vista da população efetivamente afetada, isto pareceria apontar para um equilíbrio populacional possível com a coexistência de animais sadios e infectados. As condições de variabilidade, porém, tanto nas características das espécies, quanto em fatores que fazem variar coeficientes de contágio e de infecção, bem como de remoção, descartam essa convivência estática da doença no meio de uma população.

Isto posto, iremos recorrer a métodos de aproximação para descrever soluções do sistema (3.6) acima, incorporando características qualitativas com as quais se possa analisar o mal-das-cadeiras que pretendemos avaliar em uma população endêmica. Desse modo, iremos aproximar taxa de infecção – que descreve o contágio – por uma senoidal, que deve retratar (numa primeira aproximação) a variação periódica sazonal da população do inseto transmissor. Serão aqui consideradas apenas as mutucas ou

“tábanos” já que o presente modelo não irá incluir os barbeiros ou “vinchucas” que, embora transmissores, não se manifestam significativamente no meio estudado. Assim, associando a ação do transmissor à sua densidade populacional, sua disponibilidade, teremos de (3.6), substituindo a taxa de infecção constante β pela expressão $\beta + \delta \cdot \sin(\pi \cdot t/6)$:

$$\begin{aligned} S &= S(x, y; t), \quad I = I(x, y; t) \text{ e } M = M(x, y; t) \text{ tais que} \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_s \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V} \cdot S) + \sigma_s S &= \lambda S \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right) S \cdot I, \\ \frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_i \Delta I + \sigma_i I &= + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right) S \cdot I - \gamma I, \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \gamma I, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

com $S(x, y, 0) = S_0 = \text{constante}$, $M(x, y, 0) = 0$ e $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$, além de satisfazer a (3.7). A unidade temporal aqui usada é o mês (o que justifica o termo oscilatório anual $\pi \cdot t/6$ em (3.9)).

Abrimos mão, evidentemente da exibição de uma expressão simples para a solução analítica, e dedicamo-nos, aqui, à busca e ao manejo exploratório de soluções aproximadas. O objetivo, muito mais do que defender que tais soluções retratariam realidades possíveis, é o de criar uma cultura de modelos para que, à medida que novas características de cenários reais e efetivos sejam incorporadas ao modelo, uma intuição adquirida auxilie na consideração avaliativa das soluções aproximadas, permitindo uma crítica efetiva do uso do modelo e de seus resultados.

Nessas condições, passaremos à formulação variacional do sistema acima descrito, escolhendo antes espaços funcionais convenientes para esta linha de trabalho:

$$\begin{aligned} H &= \{ u : \forall t \in (0, T], u \in H^1(\Omega), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega) \text{ e } u|_{\Gamma_0} = 0 \} \\ V &= \{ v : v \in H^1(\Omega) \text{ e } v|_{\Gamma_0} = 0 \}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O que se obtém é, então:

$S = S(x, y; t)$, $I = I(x, y; t)$ e $M = M(x, y; t)$ em H tais que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S}{\partial t} \mid v \right) - \alpha_s (\Delta S \mid v) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} S \mid v) + \sigma_s (S \mid v) = \\ & = \lambda (S \mid v) - \frac{\lambda}{K} (S^2 \mid v) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot (S \cdot I \mid v), \\ & \left(\frac{\partial I}{\partial t} \mid v \right) - \alpha_i (\Delta I \mid v) + \sigma_i (I \mid v) = +\beta (S \cdot I \mid v) - \gamma (I \mid v), \\ & \left(\frac{\partial M}{\partial t} \mid v \right) = \gamma (I \mid v), \quad \text{para } \forall v \in V. \end{aligned}$$

Ora, para $\forall t \in (0, T]$, este sistema, com o uso do Teorema de Green e a incorporação das condições de contorno de Dirichlet e de Von Neumann homogêneas, leva a:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S}{\partial t} \mid v \right) + \alpha_s (\nabla S \parallel \nabla v) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} S \mid v) + \sigma_s (S \mid v) = \\ & = \lambda (S \mid v) - \frac{\lambda}{K} (S^2 \mid v) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot (S \cdot I \mid v), \\ & \left(\frac{\partial I}{\partial t} \mid v \right) - \alpha_i (\nabla I \parallel \nabla v) + \sigma_i (I \mid v) = + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot (S \cdot I \mid v) - \gamma (I \mid v), \\ & \left(\frac{\partial M}{\partial t} \mid v \right) = \gamma (I \mid v), \quad \text{para } \forall v \in V. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Há, ainda, que se exigir das funções procuradas S , I e M que satisfaçam as condições iniciais, $S(x, y, 0) = S_0 = \text{constante}$, $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$, e $M(x, y, 0) = 0$. Deste modo, temos a formulação fraca, ou variacional, do problema originalmente proposto, formulação apropriada para a discretização via Método de Galerkin, com Elementos Finitos. Além disto iremos recorrer a Crank-Nicolson na discretização da variável temporal. Para isto, na prática, é necessário promover uma separação de variáveis: tratamentos diferenciados para a variável tempo e para as espaciais. O espaço de Hilbert H será aproximado por subespaços V_h cujos elementos são da forma

$$v = \sum_{j=1}^N c_j(t) \cdot \varphi_j(x, y).$$

As funções $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_N$ geram um subespaço V_h do espaço V de funções teste (já definido em capítulo anterior).

As soluções de (3.11) S, I e M serão aproximadas por expressões do tipo:

$$\begin{aligned}
S_h &= \sum_{j=1}^N p_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \\
I_h &= \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \\
M_h &= \sum_{j=1}^N r_j(t) \cdot \varphi_j(x, y)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

o que, em (3.11), leva ao sistema não-linear de Equações Diferenciais Ordinárias:

$$\begin{aligned}
&\sum_j \frac{dp_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j p_j(t) (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \sum_j p_j(t) (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
&+ \sigma_s \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = \\
&= \lambda \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda}{K} \sum_j p_j(t) \sum_k p_k(t) \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
&- \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j p_j(t) \sum_k q_k(t) \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \\
&\sum_j \frac{dq_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_i \sum_j q_j(t) (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \sigma_i \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = \\
&= + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot \sum_j p_j(t) \sum_k q_k(t) \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i), \\
&\sum_j \frac{dr_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) = + \gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i), \text{ para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

O passo seguinte é o de se substituírem os termos de variação temporal, usando o método implícito de Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned}
\frac{dc_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} &\equiv \frac{c_j(t_{n+1}) - c_j(t_n)}{\Delta t} \text{ com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \text{ e} \\
c_j(t_n + \Delta t/2) &\equiv \frac{c_j(t_{n+1}) + c_j(t_n)}{2} \text{ com erro da mesma ordem.}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Denominando $p_j^{(n)}$, $q_j^{(n)}$ e $r_j^{(n)}$ as aproximações de p , de q e de r nos nós (x_j, y_j, t_n) , pode-se usar (3.14) e voltar a (3.13) para obter uma nova aproximação do sistema dado aí:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \sigma_s \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \lambda \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\lambda}{K} \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} . (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(\frac{\pi t}{6} \frac{n+1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} . (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_i \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \\
& + \sigma_i \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = + \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(\frac{\pi t}{6} \frac{n+1}{2}\right) \right) \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} . (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \gamma \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j \frac{r_j^{(n+1)} - r_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) = + \gamma \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} (\varphi_k | \varphi_i),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

para $\forall \varphi_i \in \text{base de } V_h$.

As condições iniciais também têm que ser discretizadas:

$$S_j^{(0)} = S_0(x_j, y_j) = S_0, I_j^{(0)} = I_0(x_j, y_j) \text{ e } M_j^{(0)} = 0, j = 1, \dots, N. \tag{3.16}$$

Nesta expressão, separando os termos em t_{n+1} e em t_n , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\vec{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\sigma_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_j p_j^{(n+1)} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(-\frac{\pi t}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \sum_j p_j^{(n+1)} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\vec{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\sigma_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_j p_j^{(n)} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(-\frac{\pi t}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \sum_j p_j^{(n)} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \frac{\sigma_I \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(-\frac{\pi t}{6} + \frac{1}{2}\right) \right) \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j q_j^{(n+1)} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \frac{\sigma_I \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{\beta} + \delta \sin\left(-\frac{\pi t}{6} + \frac{1}{2}\right) \right) \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j q_j^{(n)} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i), \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$\sum_j r_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \gamma \Delta t \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2}(\varphi_j | \varphi_i),$$

para $\forall \varphi_i \in \text{base de } V_h$.

Reagrupando convenientemente os termos de (3.17), visando facilitar uma expressão que conduza de modo mais natural às manipulações algorítmicas, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_s \Delta t}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} = \\
& = \sum_j p_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_s \Delta t}{2} + \frac{\lambda \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\}, \\
& \sum_j q_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_i \Delta t}{2} + \frac{\gamma \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_i \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} = \\
& = \sum_j q_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_i \Delta t}{2} - \frac{\gamma \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_i \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} \\
& \sum_j r_j^{(n+1)} (\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)} (\varphi_j | \varphi_i) + \gamma \Delta t \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned} \tag{3.17'}$$

Este sistema pode ser expresso de modo bastante resumido (visando a explicitação do procedimento algorítmico de aproximação) como:

$$U_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot S^{(n+1)} = W_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot S^{(n)},$$

$$U_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot I^{(n+1)} = W_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot I^{(n)}, \text{ e}$$

$U_M \cdot M^{(n+1)} = W_M \cdot M^{(n)} + w(I^{(n)}, I^{(n+1)})$, onde os operadores não lineares U_S , W_S , U_I , W_I e as matrizes U_M e W_M , além do vetor $w(I^{(n+1)}, I^{(n)})$, são dados, respectivamente por:

$$\begin{aligned}
U_S(i, j) &= [1 + \frac{\sigma_S \Delta t}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \\
W_S(i, j) &= [1 - \frac{\sigma_S \Delta t}{2} + \frac{\lambda \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \\
&- \frac{\Delta t}{2} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
&- \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \\
U_I(i, j) &= [1 + \frac{\sigma_I \Delta t}{2} + \frac{\gamma \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \\
&- \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \\
W_I(i, j) &= [1 - \frac{\sigma_I \Delta t}{2} - \frac{\gamma \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i), \\
U_M(i, j) &= W_M(i, j) = (\varphi_j | \varphi_i) \text{ e, ainda, o vetor } w \text{ sendo dado por} \\
w(i) &= \gamma \Delta t \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \text{ para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

A obtenção dos valores de $S^{(n+1)}$, $I^{(n+1)}$ e $M^{(n+1)}$ será por meio do seguinte esquema identificado como (3.19) e expresso tanto de modo didático quanto algorítmico:

A partir de $S^{(0)}$, $I^{(0)}$ e $M^{(0)}$

1. Obter $S^{(*)}$ da equação linear

$$U_S(S^{(0)}, S^{(0)}, I^{(0)}, I^{(0)}) \cdot S^{(*)} = W_S(S^{(0)}, S^{(0)}, I^{(0)}, I^{(0)}) \cdot S^{(0)};$$
2. Obter $I^{(*)}$ da equação linear

$$U_I(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(0)}) \cdot I^{(*)} = W_I(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(0)}) \cdot I^{(0)}; \quad (3.19)$$
3. Obter $M^{(*)}$ da equação linear

$$U_M \cdot M^{(*)} = W_M \cdot M^{(0)} + w(I^{(0)}, I^{(*)});$$
4. Obter $S^{(**)}$ da equação linear

$$U_S(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot S^{(**)} = W_S(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot S^{(0)};$$
5. Obter $I^{(**)}$ da equação linear

$$U_I(S^{(0)}, S^{(**)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(**)} = W_I(S^{(0)}, S^{(**)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(0)};$$
6. Obter $M^{(**)}$ da equação linear

$$U_M \cdot M^{(**)} = W_M \cdot M^{(0)} + w(I^{(0)}, I^{(**)});$$
7. De modo análogo, obter $S^{(***)}$, $I^{(***)}$ e $M^{(***)}$;
8. Depois de um número relativamente pequeno de iterações deste tipo, fazer $S^{(1)} = S^{(**...*)}$, $I^{(1)} = I^{(**...*)}$ e $M^{(1)} = M^{(**...*)}$;
9. Este procedimento triplo é repetido para cada passo no tempo para se obter:

$$U_S(S^{(n)}, S^{(*)...}, I^{(n)}, I^{(*)...}) \cdot S^{(**...)} = W_S(S^{(n)}, S^{(*)...}, I^{(n)}, I^{(*)...}) \cdot S^{(n)},$$

$$U_I(S^{(n)}, S^{(**...)}, I^{(n)}, I^{(*)...}) \cdot I^{(**...)} = W_I(S^{(n)}, S^{(**...)}, I^{(n)}, I^{(*)...}) \cdot I^{(n)}, \text{ e}$$

$$U_M \cdot M^{(**...)} = W_M \cdot M^{(n)} + w(I^{(n)}, I^{(**...)});$$
10. Fazer $S^{(n+1)} = S^{(**...)} , I^{(n+1)} = I^{(**...)} \text{ e } M^{(n+1)} = M^{(**...)}.$

Este algoritmo do modo como é aqui apresentado, repete em diversas dimensões um trabalho anterior, para uma única equação, de Peaceman e Rachford, onde além da sugestão para contornar iterativamente a não-linearidade do sistema, temos resultados de convergência.

Nos anexos deste trabalho, segue uma das listagens do programa usado neste caso, sob a denominação de tripop.m. Foi codificado no aplicativo Matlab visando, por um lado, utilizar os recursos de matrizes esparsas, e, por outro, os de visualização. Embora os ensaios iniciais tenham demorado razoavelmente, execuções mais recentes têm se revelado animadoramente rápidas.

Nas figuras abaixo, temos de início (fig. 1), as curvas de nível dos três compartimentos após 300 passos no tempo, mais a condição inicial da população de infectados. Neste domínio idealizado, podemos ver a simulação de uma situação possível: uma “invasão” no domínio de animais suscetíveis por um pequeno grupo de capivaras infectadas (presentes no canto superior direito – e só.). Nas imagens, podemos ver, ressaltadas as diferenças de concentração, a presença complementar de infectados e de suscetíveis, com a presença de morte “seguindo” a população de animais doentes. Na fig. 2, o quarto gráfico ilustra a evolução de um ponto no interior do domínio, e pode ser observada a mortalidade devida à doença, mais uma recuperação populacional seguindo uma curva que, a um tempo, sugere a periodicidade senoidal acoplada a uma evolução de tipo logístico. Este comportamento na simulação numérica do modelo é condizente com as informações locais, que dão conta de uma larga mortalidade seguida de uma recuperação populacional. As figuras seguintes (3, 4, 3' e 4') realçam de algum modo os comportamentos descritos nos primeiros gráficos: por um lado o caráter complementar da presença de diferentes compartimentos no domínio, enquanto que se pode observar a característica de oscilação senoidal somada à dinâmica populacional logística dos mamíferos suscetíveis.

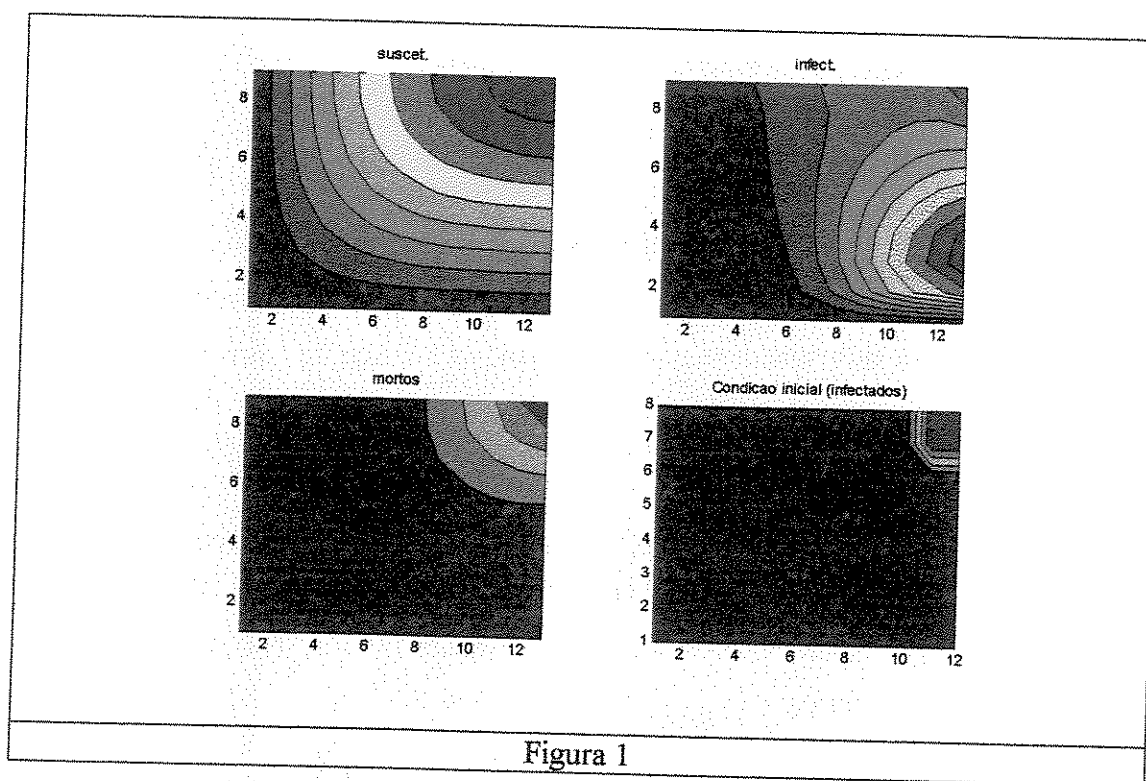


Figura 1

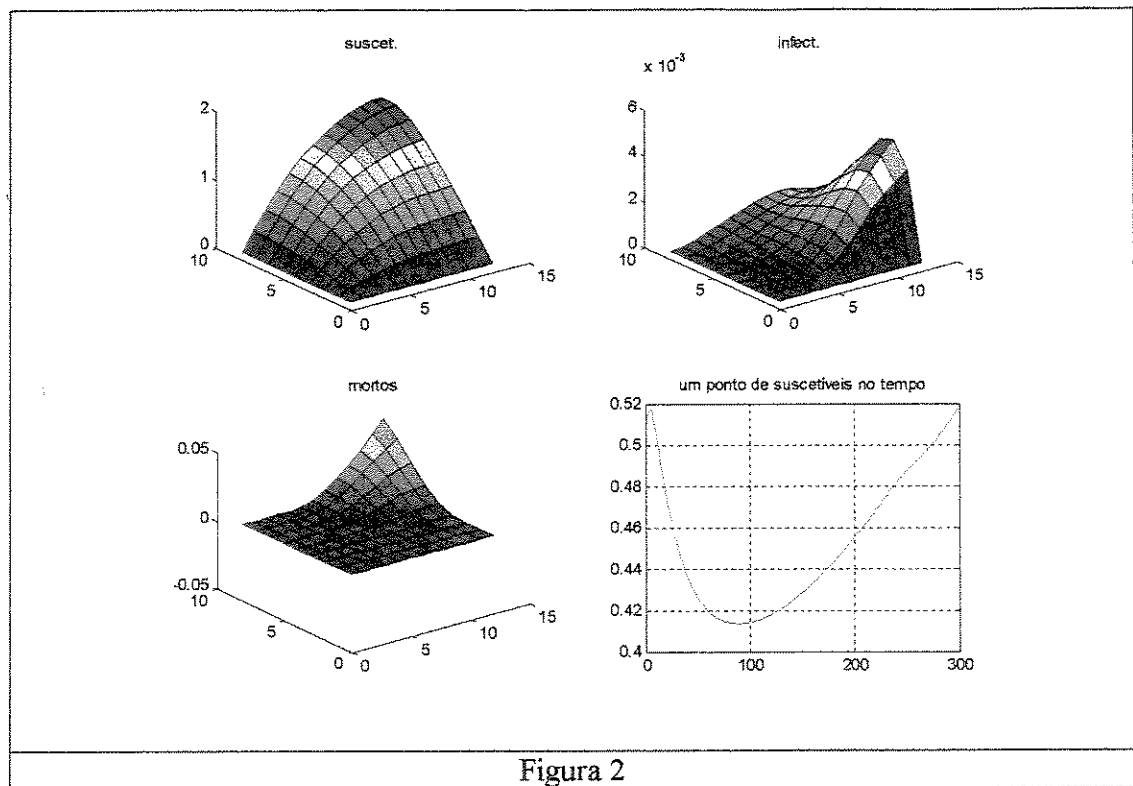


Figura 2

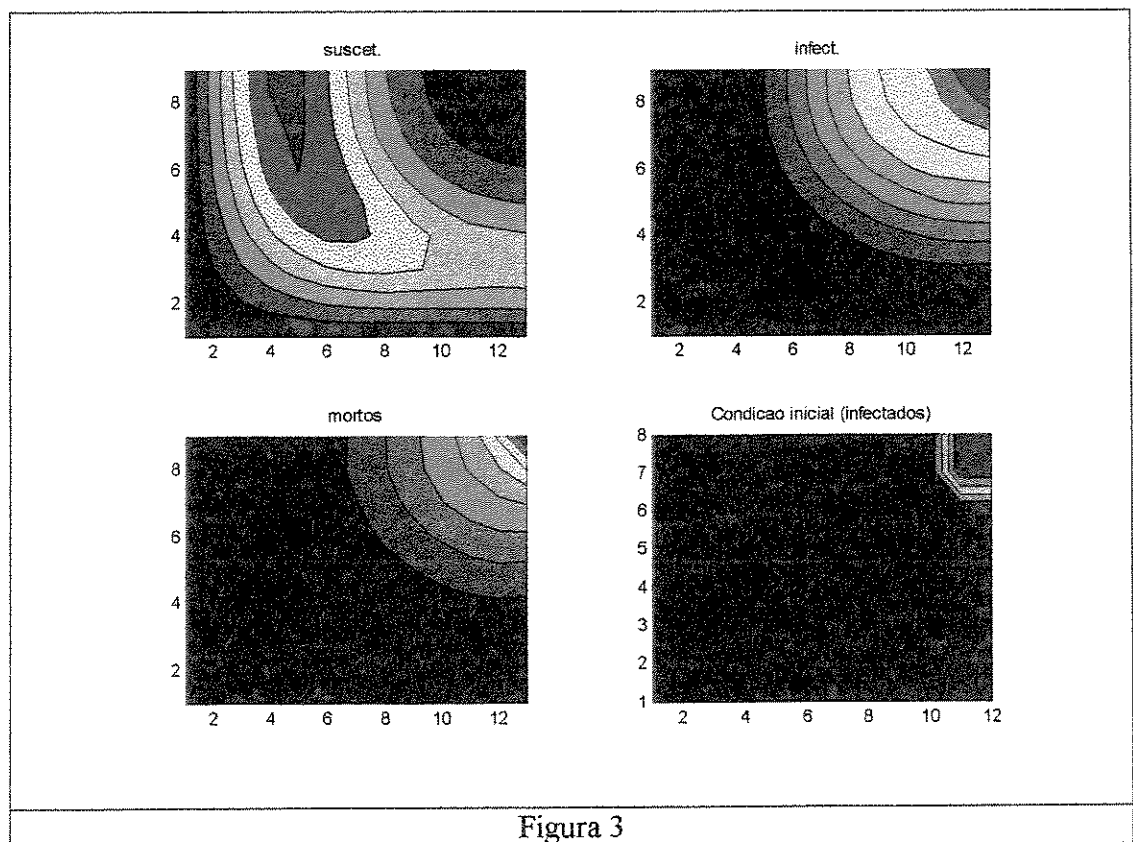


Figura 3

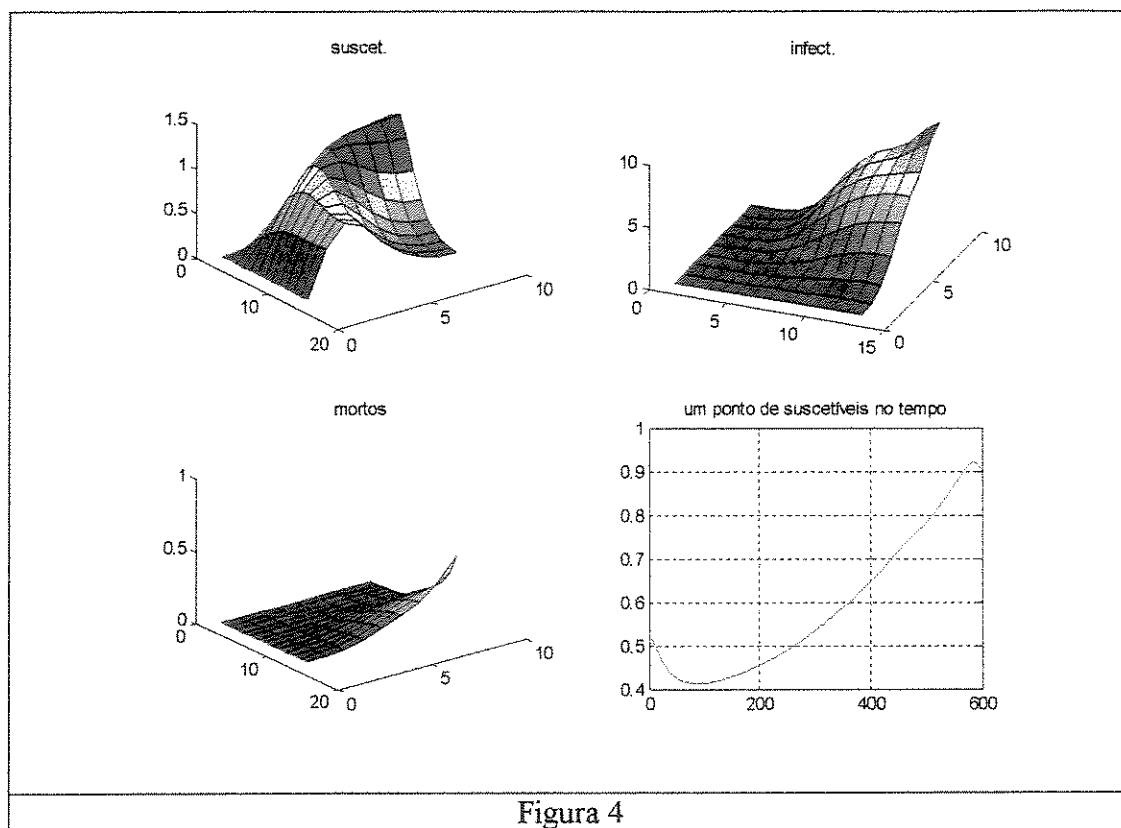


Figura 4

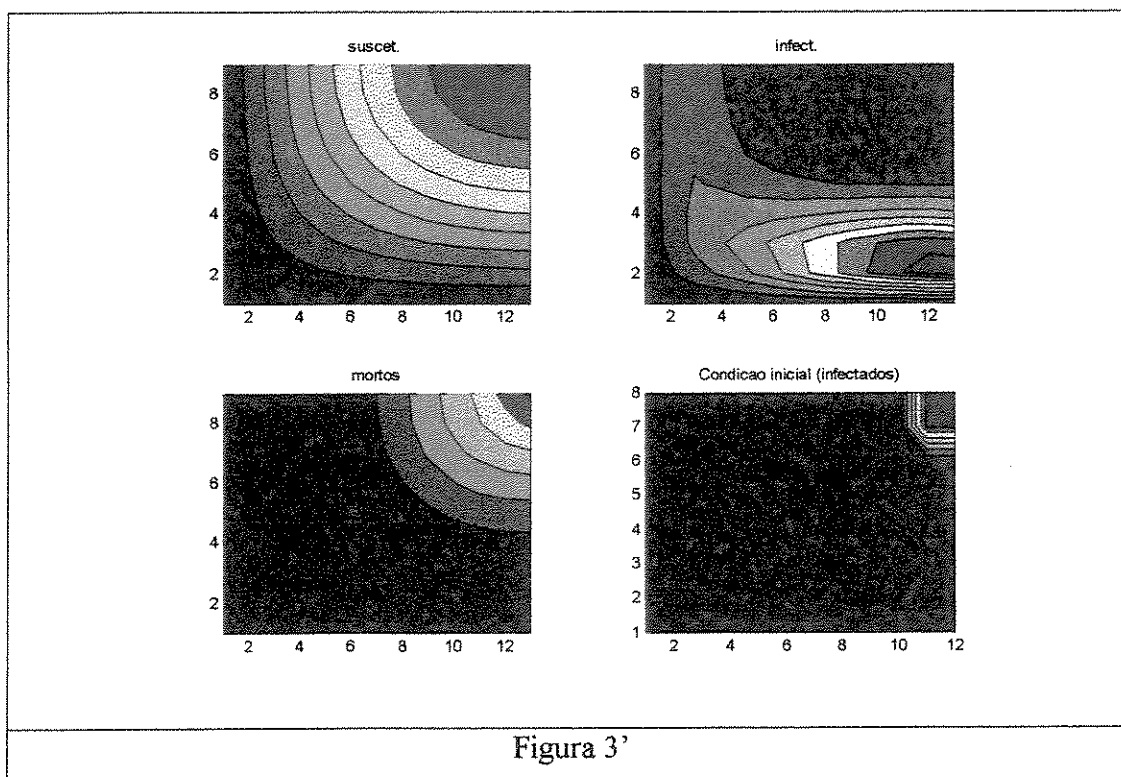


Figura 3'

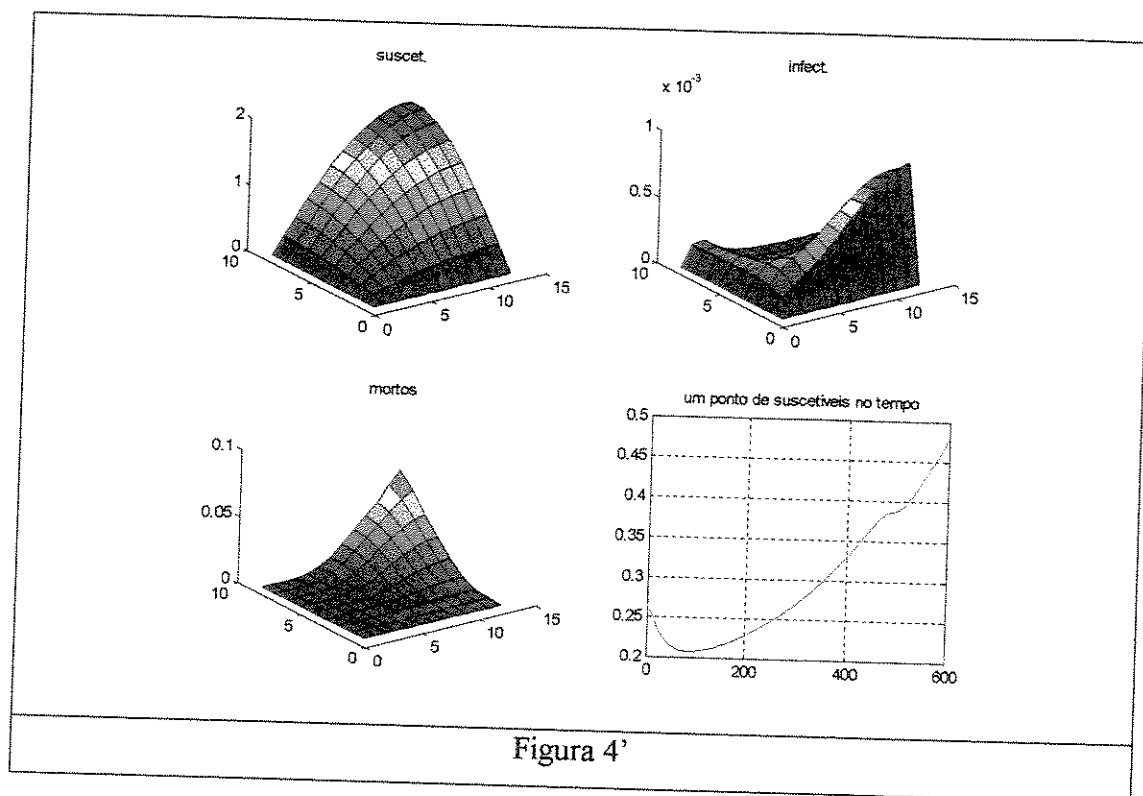
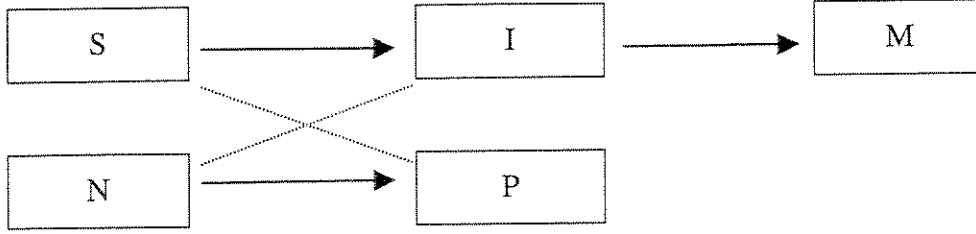


Figura 4'

Ao se introduzir o modelo apresentado no início deste 3º capítulo, foi feita a suposição de que o contágio variaria com as características oscilatórias periódicas da população do inseto transmissor e, no lugar do parâmetro constante indicativo de um contágio invariante, uma senoidal representou, então, o efeito da variação da população de insetos transmissores em termos do contágio entre roedores suscetíveis e infectados. Uma outra possibilidade, porém, de modelar o comportamento social desta endemia poderia ser a de incluir no sistema, além dos três compartimentos de capivaras (suscetíveis, infectadas e mortas), dois compartimentos do inseto, o dos portadores e dos não-portadores, além de sua dinâmica populacional. Neste novo quadro, os roedores continuarão a ser identificados em termos compartimentais como os suscetíveis ($S(t)$), os infectados ($I(t)$) e os mortos ($M(t)$), enquanto os insetos são divididos em portadores ($P(t)$) e não-portadores ($N(t)$). Incluindo as mutucas e sua dinâmica populacional, não é mais necessário modelar, com a senoidal adotada anteriormente, a influência abiótica em termos climáticos sobre a população, mas é necessário incluir aquelas características de dinâmica populacional dos insetos transmissores que permitam incluir sua reprodução e

dependência logística da densidade. O modelo proposto, na linha daqueles citados no levantamento bibliográfico do início deste capítulo, é, então, dado por:



Aqui, além das passagens possíveis de um compartimento ao seguinte, destacam-se, com linhas pontilhadas, as possibilidades de contágio, isto é, de um roedor suscetível em contato com um inseto portador do protozoário ou de um inseto não portador com uma capivara infectada. Assim, o que se tem é:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_S \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V}.S) + \sigma_S.S &= \lambda_S.S.(1 - \frac{S+I}{K_1}) - \beta_1.S.P, \\
 \frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_I \Delta I + \sigma_I.I &= \beta_1.S.P - \gamma.I, \\
 \frac{\partial M}{\partial t} &= \gamma.I, \\
 \frac{\partial N}{\partial t} - \alpha_N \Delta N + \operatorname{div}(\vec{W}.N) + \sigma_N.N &= \lambda_N.(P+N).(1 - \frac{P+N}{K_2}) - \beta_2.N.I, \\
 \frac{\partial P}{\partial t} - \alpha_N \Delta P + \operatorname{div}(\vec{W}.P) + \sigma_N.P &= \beta_2.N.I, \\
 \text{para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } t \in (0, T].
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Apesar de se repetirem alguns dos coeficientes já descritos no modelo anterior nos quais havia apenas três compartimentos, vale a pena defini-los formalmente:

- α_S : dispersão populacional (difusibilidade) das capivaras não contaminadas,
- α_I : dispersão populacional das capivaras infectadas,
- α_N : dispersão populacional dos insetos – que supomos ser a mesma para portadores e não portadores,
- σ_S : mortalidade de capivaras suscetíveis por fatores representativos de hostilidade do meio,

- σ_I : mortalidade de capivaras infectadas por fatores representativos da hostilidade do meio - e não pela infecção em si, e
- σ_N : mortalidade de insetos por fatores representativos da hostilidade do meio (este coeficiente é igual para insetos portadores e não portadores do protozoário).
- λ_S : taxa intrínseca de crescimento de capivaras sadias, e
- λ_N : taxa intrínseca de crescimento dos insetos (considera-se que insetos portadores e insetos não-portadores têm ambas crias não-portadoras).
- β_1 : taxa de infecção de capivaras sadias por contato (picada) de insetos portadores,
- β_2 : taxa de transformação de insetos não portadores em portadores por contato (picada) em capivaras infectadas.
- γ : taxa de mortalidade de capivaras infectadas.
- K_1 : capacidade de suporte do meio para as capivaras e
- K_2 : capacidade de suporte do meio para insetos (portadores ou não). Ainda,
- V : vetor direção e intensidade de uma possível migração de capivaras e
- W : vetor direção e intensidade de uma possível migração de insetos.

As condições de contorno que serão aqui usadas são de tipo homogêneo misto, com partes da fronteira em que não há capivaras nem mutucas, e partes da fronteira em que não há passagem de indivíduos dessas duas espécies:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial S(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } S(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial I(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } I(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial M(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } M(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial N(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } N(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial P(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } P(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Tanto o modelo quanto o algoritmo se prestam, de modo muito simples a condições de contorno bem mais complexas, do tipo da descrita abaixo, para a população de Suscetíveis, mas ilustrando todos os compartimentos:

$$-a \cdot \frac{\partial S}{\partial \eta} + b \cdot S = g, \text{ com } a, b \text{ e } g \text{ definidos apropriadamente.}$$

Em termos de condições iniciais, adota-se uma distribuição homogênea de roedores suscetíveis, um foco restrito de capivaras infectadas e, de início, nenhum animal morto pela endemia. Analogamente, iremos considerar distribuição homogênea apenas de varejeiras, sem que haja, nesse instante inicial, portadores:

$$S(x,y,0) = S_0 = \text{constante}, I(x,y,0) = I_0(x,y), M(x,y,0) = 0, N(x,y,0) = N_0 = \text{constante} \\ \text{e } P(x,y,0) = 0, \text{ em todo o domínio } \Omega.$$

Como anteriormente, e fazendo uso das condições de contorno adotadas, iremos passar à formulação variacional, para obter o problema do estudo da endemia das capivaras conjuntamente com a dinâmica populacional das varejeiras tanto portadoras quanto não portadoras do protozoário *Trypanosoma equinum*. O que se obtém é o problema:

Achar $S = S(x,y,t)$, $I = I(x,y,t)$, $M = M(x,y,t)$, $N = N(x,y,t)$ e $P = P(x,y,t)$, num espaço H convenientemente definido, satisfazendo as condições indicadas acima. Como já foi mencionado em (3.10), necessitaremos também do espaço de funções teste, V . Assim,

$$H = \{ u : \forall t \in (0, T], u \in H^1(\Omega), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega) \text{ e } u|_{\Gamma_0} = 0 \} \\ V = \{ v : v \in H^1(\Omega) \text{ e } v|_{\Gamma_0} = 0 \}.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial S}{\partial t} \mid v \right) + \alpha_s (\nabla S \parallel \nabla v) + (\bar{V} \cdot \bar{\nabla} S \mid v) + \sigma_s (S \mid v) = \\
& = \lambda_s (S \mid v) - \frac{\lambda_s}{K_1} ((S + I)^2 \mid v) - \beta_1 \cdot (S \cdot P \mid v), \\
& \left(\frac{\partial I}{\partial t} \mid v \right) - \alpha_1 (\nabla I \parallel \nabla v) + \sigma_1 (I \mid v) = +\beta_1 \cdot (S \cdot P \mid v) - \gamma (I \mid v), \\
& \left(\frac{\partial M}{\partial t} \mid v \right) = \gamma (I \mid v), \\
& \left(\frac{\partial N}{\partial t} \mid v \right) + \alpha_N (\nabla N \parallel \nabla v) + (\bar{W} \cdot \bar{\nabla} N \mid v) + \sigma_N (N \mid v) = \\
& = \lambda_N (P + N \mid v) - \frac{\lambda_N}{K_2} ((P + N)^2 \mid v) - \beta_2 \cdot (N \cdot I \mid v), \\
& \left(\frac{\partial P}{\partial t} \mid v \right) + \alpha_N (\nabla P \parallel \nabla v) + (\bar{W} \cdot \bar{\nabla} P \mid v) + \sigma_N (P \mid v) = \beta_2 \cdot (N \cdot I \mid v), \\
& \text{para } \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Adotando o mesmo método usado acima, iremos discretizar as funções que descrevem cada um dos compartimentos populacionais, procedendo, também a uma separação de variáveis:

$$\begin{aligned}
S_h &= \sum_{j=1}^N p_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\
I_h &= \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\
M_h &= \sum_{j=1}^N r_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\
N_h &= \sum_{j=1}^N c_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\
\text{e } P_h &= \sum_{j=1}^N d_j(t) \cdot \varphi_j(x, y).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Usando estas aproximações em (3.22), obtem-se o sistema não-linear de Equações Diferenciais Ordinárias dado por:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{dp_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j p_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j p_j(t) (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + (\sigma_s - \lambda_s) \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_s}{K_1} \sum_j p_j(t) \sum_i p_i(t) \cdot (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda_s}{K_1} \sum_j p_j(t) \sum_i q_i(t) \cdot (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \beta_1 \sum_j p_j(t) \sum_i d_i(t) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dq_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_t \sum_j q_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + (\sigma_t + \gamma) \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \beta_1 \sum_j p_j(t) \sum_i d_i(t) \cdot (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dr_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dc_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j c_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j c_j(t) (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + (\sigma_N - \lambda_N) \sum_j c_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \lambda_N \sum_j d_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j c_j \sum_i c_i(t) \cdot (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + 2 \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j c_j(t) \sum_i d_i(t) \cdot (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j d_j(t) \sum_i d_i(t) \cdot (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \beta_2 \sum_j c_j(t) \sum_i q_i(t) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dd_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j d_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j d_j(t) (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \sigma_N \sum_j d_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \beta_2 \sum_j c_j(t) \sum_i q_i(t) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

A seguir, iremos substituir os termos de variação temporal, usando o método implícito de Crank-Nicolson, isto é, procedendo às aproximações exaustivamente mencionadas, e repetidas:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} &\equiv \frac{x_j(t_{n+1}) - x_j(t_n)}{\Delta t} \text{ com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \text{ e} \\
x_j(t_n + \Delta t/2) &\equiv \frac{x_j(t_{n+1}) + x_j(t_n)}{2} \text{ com erro da mesma ordem.}
\end{aligned}$$

Denominando $p_j^{(n)}$, $q_j^{(n)}$, $r_j^{(n)}$, $c_j^{(n)}$ e $d_j^{(n)}$ as aproximações temporais de p , q , r , c e d nos nós (x_j, y_j, t_n) , pode-se obter:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_s - \lambda_s) \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda_s}{K_1} \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \cdot \sum_i \left(\frac{p_i^{(n+1)} + p_i^{(n)}}{2} + \frac{q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}}{2} \right) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \\
& + \beta_i \sum_j \frac{p_i^{(n+1)} + p_i^{(n)}}{2} \sum_1 \frac{d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}}{2} (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) = 0 \\
& \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + (\sigma_1 + \gamma) \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \beta_1 \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_1 \frac{d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}}{2} (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) = 0 \\
& \sum_j \frac{r_j^{(n+1)} - r_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} - c_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_N - \lambda_N) \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} \cdot \sum_i \left(\frac{c_i^{(n+1)} + c_i^{(n)}}{2} + 2 \cdot \frac{d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}}{2} \right) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \\
& + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} \sum_1 \frac{d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}}{2} (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) - \lambda_N \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_N) \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \beta_2 \Delta t \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} \sum_1 \frac{q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}}{2} (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) = 0
\end{aligned}$$

Neste sistema, separando em cada equação os termos em t_{n+1} e em t_n da correspondente população e reagrupando-os convenientemente para facilitar a implementação do algoritmo, como o fizemos em (3.16), obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_s - \lambda_s) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \right. \\
& V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \\
& \left. \frac{\lambda_s \Delta t}{4K_1} \sum_1 (p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_j p_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_s - \lambda_s) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \right. \\
& V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \\
& \left. \frac{\lambda_s \Delta t}{4K_1} \sum_1 (p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\
& \sum_j q_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_1 + \gamma) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_j q_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_1 + \gamma) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) \right\} + \\
& \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_j (p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}) \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j r_j^{(n+1)} (\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)} (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j (q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}) (\varphi_j | \varphi_i),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j c_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_N - \lambda_N) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \\
& \left. \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_i (c_i^{(n+1)} + c_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_j c_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_N - \lambda_N) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) - \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_i (c_i^{(n+1)} + c_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \left. + \right. \\
& \left. \frac{\lambda_N \Delta t}{2} \sum_j (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) * [(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{1}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} - d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i)], \right. \\
& \sum_j d_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_N \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \left. \right\} = \\
& \sum_j d_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_N \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \left. \right\} + \\
& \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_j (c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}) \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned}$$

Novamente realizando os procedimentos realizados na resolução do modelo anterior, o sistema (3.26) pode ser expresso como:

Dados $S^{(0)}$, $I^{(0)}$, $M^{(0)}$, $N^{(0)}$ e $P^{(0)}$, obtêm-se os sucessivos valores de $S^{(n)}$, $I^{(n)}$, $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ e $P^{(n)}$ resolvendo o sistema não-linear abaixo fazendo uso da aproximação linear já apresentada neste texto – que, por simplicidade, não vai aqui explicitada (*cf.* nos apêndices, o programa ‘pentap.m’):

$$U_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot S^{(n+1)} = W_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot S^{(n)},$$

$$U_I (S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) . I^{(n+1)} = W_I (S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) . I^{(n)} + w_I (S^{(n+1)}, S^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}),$$

$$U_M . M^{(n+1)} = W_M . M^{(n)} + w_M (I^{(n+1)}, I^{(n)}),$$

$$U_N (I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) . N^{(n+1)} = W_N (I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) . N^{(n)} + w_N (P^{(n+1)}, P^{(n)}),$$

$U_P . P^{(n+1)} = W_P . P^{(n)} + w_P (I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)})$, onde os operadores não lineares $U_S, W_S, U_I, W_I, U_N, W_N$, as matrizes U_M, W_M, U_P, W_P e os vetores $w_I (S^{(n+1)}, S^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)})$, $w_M (I^{(n+1)}, I^{(n)})$ e $w_P (I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)})$, são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} U_S(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_S - \lambda_S) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_S \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\ &V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \\ &\left. \frac{\lambda_S \Delta t}{4K_1} \cdot \sum_i (p_i^{(n+1)} + p_i^{(n)} + q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\ W_S(i, j) &= \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_S - \lambda_S) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_S \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\ &V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) - \\ &\left. \frac{\lambda_S \Delta t}{4K_1} \cdot \sum_i (p_i^{(n+1)} + p_i^{(n)} + q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\ U_I(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_I + \gamma) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_I \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) \right\}, \\ W_I(i, j) &= \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_I + \gamma) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_I \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) \right\}, \text{ com} \\ w_I(i) &= \sum_j \frac{\beta_1 \Delta t}{4} (p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}) \cdot \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i), \\ U_M(i, j) &= (\varphi_j | \varphi_i), \text{ e} \\ W_M(i, j) &= (\varphi_j | \varphi_i), \text{ com } w_M(i) = \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j (q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}) (\varphi_j | \varphi_i). \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
U_N(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_N - \lambda_N)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \right. \\
&W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\
&+ \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) + \\
&\left. \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_i (c_i^{(n+1)} + c_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\
W_N(i, j) &= \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_N - \lambda_N)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - \right. \\
&W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) - \\
&\frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} + d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_i (c_i^{(n+1)} + c_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i) \Big\}, \\
w_N(i) &= \frac{\lambda_N \Delta t}{2} \sum_j (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) \cdot [(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{1}{2K_2} \sum_i (d_i^{(n+1)} - d_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i)], \\
U_P(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_N \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \right. \\
&W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \Big\}, \\
W_P(i, j) &= \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_N \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - \right. \\
&W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \Big\}, \text{ com} \\
w_P(i) &= \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_j (c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}) \sum_i (q_i^{(n+1)} + q_i^{(n)}) (\varphi_i \varphi_j | \varphi_i).
\end{aligned}$$

Este algoritmo foi programado no ambiente do Matlab, usando estruturas de matrizes esparsas, e foi possível obter, para um domínio genérico, resultados que vêm sistematicamente de acordo com os fenômenos observados. Cabe mencionar o longo tempo despendido (mais de 8 horas, num Pentium 4, com 1.5 GHz) em cada ensaio numérico, dada a necessidade de serem resolvidos diversos sistemas lineares a cada um dos passos no tempo, além, claro, das operações matriciais e vetoriais. Isto correspondeu a algo entre centenas e milhares de resoluções de sistemas lineares com matrizes da

ordem de 60x60. O tempo para estas execuções deverá cair rapidamente em função de uma melhoria significativa de recursos computacionais.

A seguir, iremos apresentar, apenas visualmente, os resultados de alguns desses ensaios. O algoritmo programado encontra-se nos anexos, sob a denominação pentap.m

No caso abaixo (fig. 5), para um período relativamente curto de tempo (tempo final escolhido como 75 u.t.), podemos observar que a única população significativamente presente no meio é de insetos portadores. Além do mais, as populações de infectados, mortos e de insetos não-portadores, se concentram em torno do ponto em que primeiro apareceram os insetos portadores, enquanto que a população de insetos suscetíveis segue seu caminho verhulstiano:

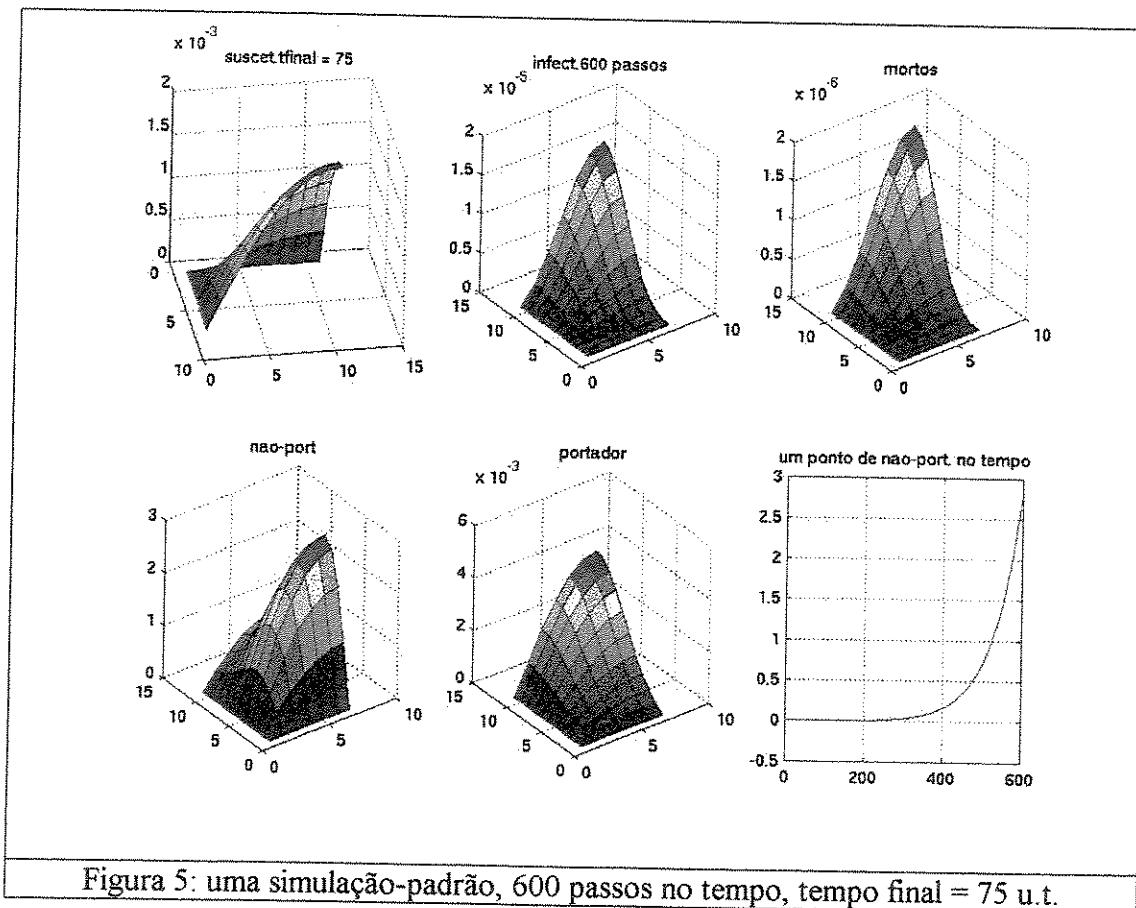
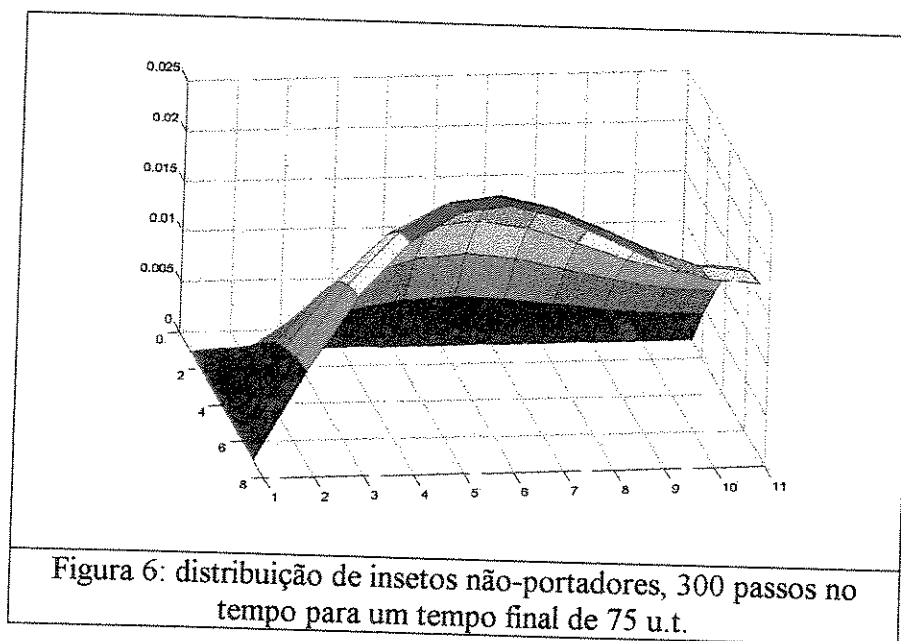


Figura 5: uma simulação-padrão, 600 passos no tempo, tempo final = 75 u.t.

Observamos que a população de insetos não-portadores está crescendo no ponto genérico do domínio que foi escolhido para se ter uma visão evolutiva do processo, apesar da presença de insetos e de animais infectados. Observamos também que há,

ainda, coincidência nas concentrações de populações de mamíferos, mas não na de insetos.

A figura 6 destaca o gráfico de não-portadores numa perspectiva de mais fácil visualização. Pode-se observar que, na região em que se concentra a maior quantidade de insetos portadores, a concentração dos não-portadores já iniciou um processo de queda populacional:



Com mais tempo, porém, essa aparente concordância de comportamentos tanto de capivaras suscetíveis e infectadas, quanto de insetos portadores e não-portadores deixa de se manifestar, surgindo uma presença por assim dizer complementar, aliás esperada! São, evidentemente, mais passos no tempo (no caso da fig. 7, o tempo final foi considerado como 750 unidades, e foram usados 1500 passos no tempo):

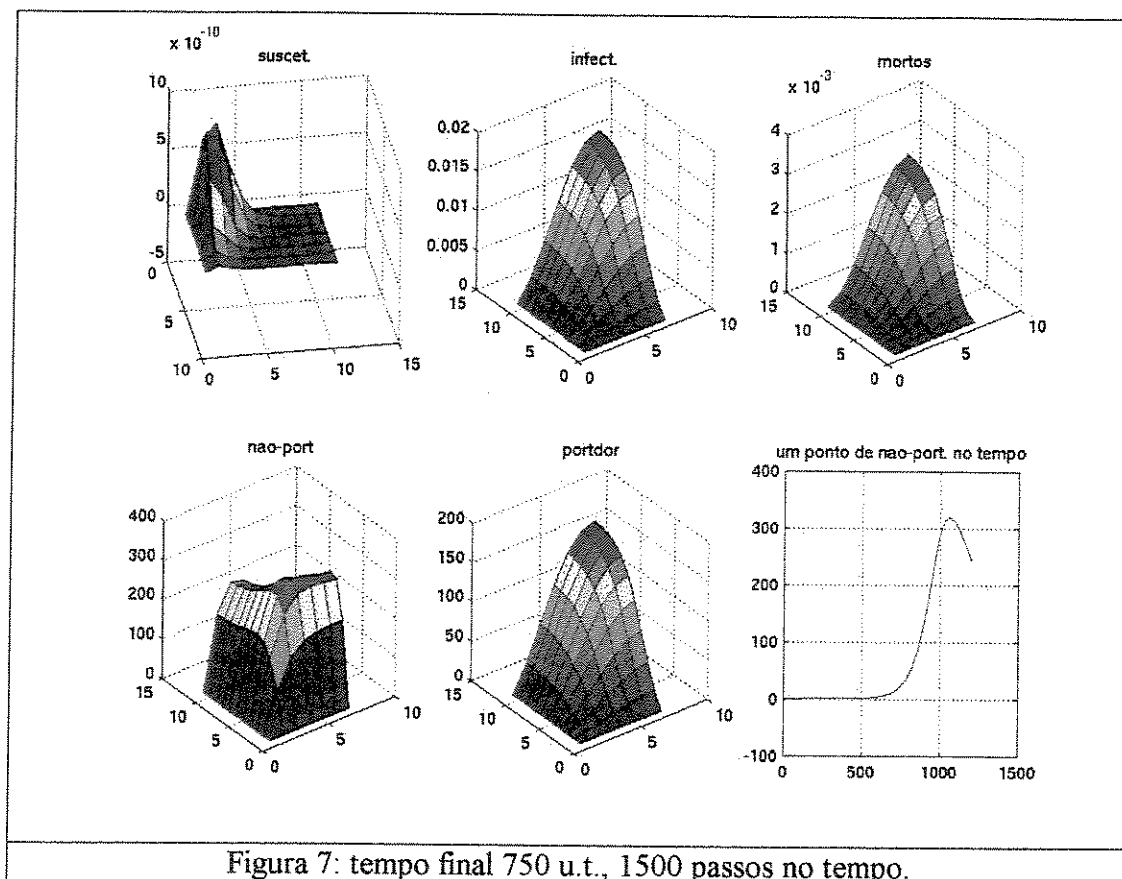


Figura 7: tempo final 750 u.t., 1500 passos no tempo.

Da figura 7 acima, podemos destacar duas superfícies na figura 8: a de capivaras suscetíveis e aquela de insetos não portadores. O objetivo deste destaque é o de enfatizar a mudança de comportamento à medida que o tempo evolui. Ocorre uma presença complementar com relação, respectivamente, às populações de mamíferos infectados e de insetos portadores. Ora esta situação é como a que se descreve *in loco*, quando os guias e guardas florestais (a denominação permanece embora não haja, formalmente, florestas a serem guardadas...) relatam o desaparecimento de capivaras sãs (que na superfície $S(x,y,t)$ se deslocam para as fronteiras mais distantes do domínio), e seu ressurgimento passado o período de algumas gerações. Podemos observar também que, após o crescimento inicial da população de insetos não portadores, vem sua queda, tendo a população de insetos passado para o compartimento de portadores, em grande parte devido ao crescimento da população de roedores infectados.

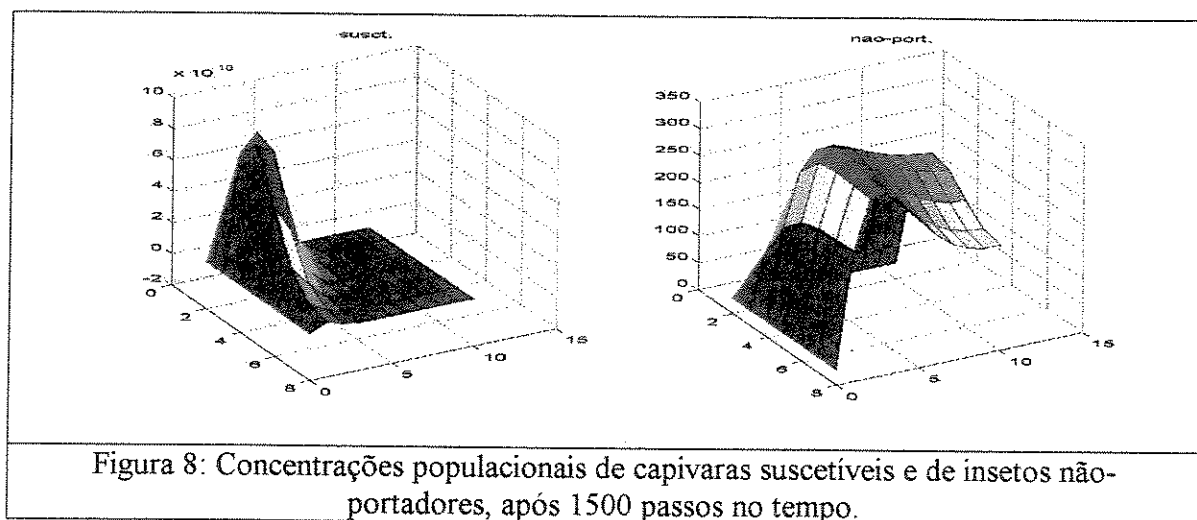


Figura 8: Concentrações populacionais de capivaras suscetíveis e de insetos não-portadores, após 1500 passos no tempo.

Capítulo 4

Conclusões

Este trabalho pode se caracterizar por um certo caminho. Em primeiro lugar, ao estudar equações diferenciais ordinárias na análise de dinâmicas populacionais, apresentou motivos para que, em alguns casos, o tempo não seja a única variável – e, assim, passamos no capítulo 1 a equações a derivadas parciais, em que se incluem as variáveis espaciais. Em preparação para a generalização das modelagens estudadas, foi apresentado o tratamento numérico de um caso de dispersão populacional, com características migratórias e com variabilidade do habitat. Este tratamento numérico é o do método dos elementos finitos nas variáveis espaciais e Crank-Nicolson na variável temporal. Para que alguns resultados pudessem ser apresentados e discutidos, foi necessário produzir um modo para, iterativamente, contornar a dificuldade numérica que o problema apresenta em função de sua forte não-linearidade (na dinâmica populacional).

Em seguida, no capítulo 2, foi incluída no modelo de dispersão-migração outra espécie, com a qual a primeira espécie se relaciona e, novamente, o sistema de equações a derivadas parciais recebe um tratamento numérico – via método dos elementos finitos para as variáveis de espaço e Crank-Nicolson na variável temporal. Também aqui foi necessário tratar especialmente das não-linearidades, não apenas as das respectivas dinâmicas populacionais, mas também (e especialmente) daquelas não-linearidades provenientes das inter-relações entre as espécies.

Na bibliografia estudada não há registro deste tratamento algorítmico, nem do tipo de solução computacional adotada para a execução do programa resultante.

A visualização dos resultados numéricos mereceu cuidados no sentido de criar um modo de se poder identificar qualitativamente determinados comportamentos das espécies estudadas.

Finalmente, no capítulo 3 o caminho pré-figurado nos dois anteriores se repete: de início, estuda-se apenas a espécie das capivaras, e sua subdivisão em compartimentos que representam estádios de diferentes comportamentos e características: uma única

espécie, sim, mas com a presença do contágio periódico simulando a variação periódica do vetor da epizootia. Este modelo, bem como seu tratamento numérico, são inéditos. Em seguida, e tendo já os resultados do modelo sem o vetor, passou-se ao modelo de duas espécies: capivara e tabanídeo, com suas inter-relações, suas regras de contágio, suas dinâmicas populacionais e mantendo a possibilidade de agregar todas as peculiaridades anteriormente estudadas. Esta modelagem não existiu previamente na literatura estudada.

No entanto, esta anterior inexistência na literatura, embora desejável como condição necessária ao ineditismo do presente trabalho, não é o eixo principal que o motivou. Esta motivação tem suas bases no Projeto Ibera, descrito anteriormente no texto, e a necessidade de se poder criar instrumental matemático, numérico e computacional que possa servir como ferramenta auxiliar na definição de estratégias de conservação de regiões de maneira a preservar, também, a população local em sua coexistência com o meio.

Finalmente, e ainda apresentando características de ineditismo deste trabalho, no anexo de suporte matemático, temos a demonstração de resultados teóricos relevantes o que, em conjunto com a programação em Pascal do Matlab, fecham a descrição da contribuição do presente trabalho.

O uso do instrumental que aqui foi descrito de modo sumário permite algumas conclusões iniciais com relação ao problema estudado:

1. As frases da população local, dando conta de um “desaparecimento” total da população em períodos, são muito próximas das situações retratadas pelo modelo, em que apenas uma baixíssima concentração populacional consegue sobreviver à epizootia periódica e, mesmo assim, nos cantos mais afastados da reserva;
2. Há espaço para que especialistas considerem a manutenção de determinados níveis populacionais das capivaras de maneira a não fornecer ao protozoário uma população muito grande de animais sãos e suscetíveis. Como esta hipótese de colheita ou caça está afastada pela legislação presentemente em vigor, um ferramental matemático de modelagem e que permita sucessivas simulações

computacionais torna-se instrumento fundamental para embasar esta discussão e quaisquer propostas que possam surgir.

3. Finalmente, estes modelos podem servir para a discussão que já está aberta entre conservacionistas e agricultores, entre ecólogos e ecologistas sobre as fontes de protozoários, possivelmente vindo a criar condições de isentar as capivaras como as principais culpadas desta dificuldade vivida por criadores, uma vez que a epizootia, como foi registrado, não se restringe às capivaras, afetando cavalos, gado, ovelhas nas grandes criações a oeste da reserva.

A aproximação da solução: justificativas teóricas

O principal objetivo deste trabalho é o de criar uma linguagem algorítmica que se preste a ensaios numéricos com os quais se possam testar hipóteses e verificar o valor de parâmetros relativos a fenômenos naturais e sistêmicos. No entanto, não há como negar a origem do pesquisador que a esta tarefa se dedica, e essa origem é a da Matemática, e mais, de Matemática Aplicada. Assim, justifica-se largamente a preocupação com ferramentas que confirmem a estes esforços uma confiabilidade não apenas pragmática, ou empírica, mas também heurística. Esta a motivação para que se possa justificar, matematicamente, a crença nos processos aqui descritos – e aplicados. A opção por colocar estas considerações à parte não se baseou em considerar a justificativa como secundária, mas em dar um destaque a um tempo que lhe realçasse a importância sem influir na fluidez de um texto que se pretende de leitura fácil.

O problema que vimos tratando é o de buscar a solução para uma equação diferencial parcial ou um sistema de equações a derivadas parciais que pode ser expresso como

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(t, x, u) && \text{em } \Omega \times (0, T), \\ Bu &= g(t, x, u) && \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0, x) &= u_0(x) \text{ com } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Nesta formulação, o operador L encerra aquilo de que se tem necessidade nos diversos casos estudados, bem como o faz o operador $f(t, x, u)$. Ainda, podemos considerar u tanto como função escalar quanto como vetorial, também em função daquilo que venhamos a necessitar.

Para obtermos uma condição de existência para o problema que vimos tratando, aplicaremos o seguinte resultado (*cf* Pao, 1978 e Czischke, 1978 *in* Sperb, 1981):

Seja o problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(t, x, u) && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ Bu &= g(t, x, u) && \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ \text{com } u(0, x) &= u_0(x).\end{aligned}$$

onde L é um operador uniformemente elíptico, para $t \in (0, T]$, dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

com B definido como

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu$$

1. onde ν é um campo vetorial externo cuja direção nunca coincide com a da tangente a $\partial\Omega$, e $h(x)=0$ em Ω , sendo, ainda, satisfeitas as seguintes condições:

Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, limitado por uma superfície $\partial\Omega$ de classe $C^{2+\alpha}$ com $\alpha \in (0, 1)$, de maneira que Ω esteja localmente de um lado de $\partial\Omega$.

2. Os coeficientes de L e de B satisfazem as condições de suavidade dadas por
3. $a^{ik} \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, $b^i \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $\nu \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$ e $h \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$.
4. g satisfaz uma condição lipschitziana em relação ao argumento u para qualquer $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (0, T]$,
5. e, para qualquer $y \neq 0$, existe $c(y) \neq 0$, dependente apenas de y , tal que vale a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}|f(t_2, x_2, u_2) - f(t_1, x_1, u_1)| &\leq c(y) \left(|t_2 - t_1|^{1/2} + |x_2 - x_1|^2 \right)^\alpha + |u_2 - u_1| \\ \text{para } t_1, t_2 &\in [0, T], \quad x_1, x_2 \in D, \quad u_1, u_2 \in [-y, y]\end{aligned}$$

Existem uma sub-solução $\underline{u}$ e uma super-solução $\bar{u}$ para o problema acima, tais que $\underline{u} \leq \bar{u}$ em $\Omega \times (0, T]$.

Nestas condições, existe uma solução u para o problema com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ em $\Omega \times (0, T]$.

Como corolário deste teorema apresentado temos:

Caso Ω , L , e f , satisfaçam as condições de suavidade do teorema e

Para $(x, t) \in \bar{\Omega} \times (0, T]$, temos que $0 \leq f(t, x, u) \leq h(u)$;

$$0 \leq u_0 \leq M_0 \text{ e } \int_{M_0}^{\infty} \frac{dy}{h(y)} = T_*,$$

Então o problema considerado, com a condição de contorno substituída pelas condições de Dirichlet, tem uma solução positiva para todo $t \in (0, T]$ e $T \geq T_*$.

Dadas as condições que f e u_0 devem satisfazer, $\underline{u} = 0$ é evidentemente uma solução. Como super-solução $\bar{u}$ podemos escolher a solução $z(t)$ do problema de Cauchy dado aqui como: $z' = h(z)$, com $z(0) = M_0$.

Verifica-se imediatamente que $z(t)$ é realmente uma super-solução que permanece finita para todo $t \in (0, T_*)$, onde $T_* = \int_{M_0}^{\infty} \frac{dy}{h(y)}$, o que prova o corolário.

Vejamos agora a aplicação desse teorema para o problema proposto, em que o operador L é dado por: $Lu = \text{div}[(\alpha(x). \text{grad}(u)) - (\mathbf{V}.u)]$, ou, também,

$$Lu = \alpha(x). \Delta u + \text{grad}(\alpha). \text{grad}(u) - \text{div}(\mathbf{V}).u - \mathbf{V}. \text{grad}(u), \text{ ainda,}$$

$$Lu = \alpha(x). \Delta u + \text{grad}(\alpha). \text{grad}(u) - \mathbf{V}. \text{grad}(u), \text{ visto que, no caso aqui tratado, vale a condição } \text{div}(\mathbf{V}) = 0.$$

Expandindo este operador L de modo adequado, obtem-se:

$$\begin{aligned} L(u) &= \alpha(x). \Delta(u) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^2 V_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \alpha(x) \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x) - V_i \right] \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ ou,} \end{aligned}$$

usando a notação que usamos no teorema acima,

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \text{ onde temos}$$

$$a^{ij} = \alpha(x) \delta^{ij}, \quad b^i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} - V_i.$$

Ainda, a função $f(t,x,u)$ é, simplesmente $f(u) = (\lambda - \sigma)u - \frac{\lambda}{K}u^2$, para $0 \leq u \leq \frac{\lambda - \sigma}{\lambda}K$

Por outro lado, o operador $Bu = \frac{\partial u}{\partial v} + hu$ pode ser reescrito como $Bu = \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + h.u.$

Desta maneira se nota de imediato que as condições 1) e 2) do teorema de Pao-Czischke são evidentemente satisfeitas. Verifiquemos que a segunda parte da condição 3) também é:

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &= \left| (\lambda - \sigma)u - \frac{\lambda}{K}u^2 - (\lambda - \sigma)v - \frac{\lambda}{K}v^2 \right| = \left| (\lambda - \sigma)(u - v) - \frac{\lambda}{K}(u^2 - v^2) \right| \leq \\ &|\lambda - \sigma||u - v| + \frac{\lambda}{K}|u^2 - v^2| = |\lambda - \sigma||u - v| + \frac{\lambda}{K}|u - v||u + v| \leq |\lambda - \sigma||u - v| + \frac{\lambda}{K}|u - v|(|u| + |v|). \end{aligned}$$

Neste ponto, seja $y > 0$, y qualquer, e sejam u e v quaisquer, pertencentes ao intervalo $[-y, y]$. Teremos então as desigualdades $|u| < y$ e $|v| < y$, o que, levadas à sucessão de desigualdades anterior, leva a

$$|f(u) - f(v)| \leq (|\lambda - \sigma| + \frac{\lambda}{K}(2y))|u - v|. \text{ Ou seja: } |f(u) - f(v)| \leq C(y)|u - v|,$$

$$\text{onde } C(y) = (|\lambda - \sigma| + \frac{\lambda}{K}(2y)), \quad C(y) \geq 0.$$

Quanto à condição 4) temos que $\underline{u} = 0$ é sub-solução do problema isto é, $\underline{u} = 0$ é

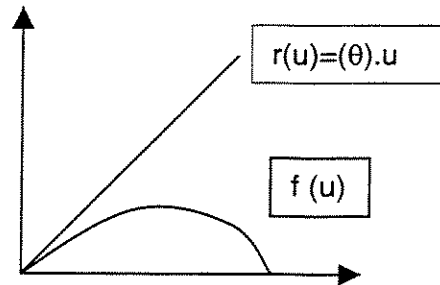
solução de $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu \leq f(u)$ e $\bar{u} = \frac{\lambda + \sigma}{\lambda}K$ é super-solução do problema, isto é,

$\bar{u} = \frac{\lambda - \sigma}{\lambda}K$ é solução de $\frac{\partial u}{\partial t} - Lu \geq f(u)$. De fato, $\underline{u}$ e $\bar{u}$ são soluções de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(u) \text{ pois } f(0) = f(\frac{\lambda - \sigma}{\lambda}K) = 0.$$

Assim, existe solução u para o problema original e $0 \leq u \leq \frac{\lambda + \sigma}{\lambda} K$.

A verificação analítica da condição 3) do teorema apresentado acima, tem um significado geométrico claro, que transparece na figura abaixo, publicada em trabalho de Galaktionov (1995) em que esse autor comenta o clássico problema de Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (KPP): o gráfico da função fonte é uma parábola cujo gráfico se situa abaixo da reta pela origem, $r(u)$ cujo coeficiente angular é θ :



O gráfico representa interesse também na visão do problema “KPP” num círculo em $\mathbb{R}^2$, com condições homogêneas de Dirichlet. Cabe aqui destacar que há, diversas abordagens e visões do Problema “KPP” para situações como aquelas aqui estudada em alguns dos trabalhos assinalados nas referências.

Para o problema estacionário com $f(u)$ mais geral, ou seja, aquele em que se tem $-\Delta u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u^q$, com λ e μ positivos e $q > 1$.

Berestycki (1981) demonstrou a existência e unicidade de solução do problema de Dirichlet para esta equação. Note-se que, no problema KPP, $\mu = \lambda/K$ e $q = 2$. Por outro lado, os resultados de simetria de Gidas, Ni e Nirenberg (1981) ou de Lions (1981) implicam na solução u da equação diferencial $-\Delta u = \lambda(1 - \frac{1}{K}u)$ num círculo com centro

na origem, ser radial, isto é, esta solução é da forma: $u(x,y) = v(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Desse modo, a formulação do problema estacionário se reduziria a (com as convenientes substituições):

$$v''(r) + \frac{1}{r} v'(r) = \frac{\lambda}{\alpha K} v^2(r) - \frac{\lambda}{\alpha} v, \quad r \in (0, R), \quad v'(0) = v(R) = 0.$$

Muitos resultados referentes às soluções radiais, além de outros mais gerais, da equação $\Delta u + f(u) = 0$, a correspondente estacionária da equação de reação-difusão, podem ser encontrados em Ni *et alii* (1988).

Uma outra visão da procura de soluções exatas para equações parabólicas é dada por Galaktionov *et alii* (1995) que propõem a busca de tal solução baseada numa técnica de separação não linear de variáveis na forma

$$c(t) + \sum c_i(t) f_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Estes autores mostram, por exemplo, que a equação de $\frac{\partial u}{\partial t} - Mu = f(u)$, onde M se consitui num operador não linear em u e com derivadas de u até ordem 2, possui solução na forma proposta acima. É importante destacar que estes resultados se referem principalmente a casos em que a homogeneidade de M em relação a u é igual à homogeneidade de f em relação a u . Nesses artigos foi construído um sub-espço invariante de soluções na forma $c(t) + \sum c_i(t) f_i(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Para o nosso operador e , conseqüentemente, para o nosso problema, tal procedimento se revelaria bastante complexo porque o grau de homogeneidade de M em relação a u (que é igual a 1), não se iguala ao grau de homogeneidade do termo fonte, que possui um termo quadrático em u .

Com relação a sistemas de equações parabólicas, um resultado bastante geral de existência de soluções foi provado por Amann (1978), tratando de sistemas de Equações Diferenciais Parciais na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \mathbf{u} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) && \text{em } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) && \text{em } \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $\nabla \mathbf{u} = (\nabla u_1, \nabla u_2, \dots, \nabla u_m)$ é uma matriz $m \times n$, com o operador A dado por

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x})\mathbf{u} = (A^1(t, \mathbf{x})u_1, A^2(t, \mathbf{x})u_2, \dots, A^m(t, \mathbf{x})u_m),$$

$$A^i(t, \mathbf{x})v = \sum_{j,k=1}^n a^i_{jk}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b^i_j(t, \mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_j} + c^i(t, \mathbf{x})v, \quad i = 1, \dots, m.$$

Para definirmos o operador $\mathbf{B}$ consideremos o seguinte:

para $i = 1, \dots, m$ sejam

a) os números $\delta h^i \in \{0, 1\}$

b) as funções $b^i \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R})$, $b^i \geq 0$

c) os vetores $\beta^i \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ com direções apontando ao exterior da superfície e não-tangentes a ela

d) $B^i(\mathbf{x})v := b^i(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) + h^i \frac{\partial v}{\partial \beta^i}(\mathbf{x})$, sendo $b^i(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$ caso $\delta h^i = 0$.

Isto posto, o operador $\mathbf{B}$ é definido por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = (B^1(\mathbf{x})u_1, B^2(\mathbf{x})u_2, \dots, B^m(\mathbf{x})u_m) \text{ para } \mathbf{u} : \partial\Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

A função vetorial $f(\circ, \circ, \xi, \eta)$ é α -Hölder contínua uniformemente em relação a ξ e η , pertencente a subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, e é tal que $f(t, \mathbf{x}, \circ, \circ) : [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é localmente Lipschitz-contínua, uniformemente em relação a $(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$, e existe uma constante $c > 0$ tal que $|f(t, \mathbf{x}, \xi, \eta)| \leq c \cdot (1 + |\eta|^2)$ para todo $(t, \mathbf{x}, \xi, \eta) \in [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. O teorema de Amann (*Op. cit.*) afirma, então, que existe uma única solução clássica em $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega} \times (0, T])$.

Referências Bibliográficas

- ALEGRETTO, W., XIE, H. e YANG, S. Properties of solutions for a chemotaxis system. **J. Math. Biology**, v. 35, 949-966, 1997.
- AMMAN H., "Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems", **J. Math. Anal. Appl.**, v. 65, 432-467, 1978.
- ANDERSON, R.M. e MAY, R.M. **Vaccination against rubella and measles: quantitative investigation on different policies**. Cópia não-identificada, 259-325.
- ARONSON, D.G. Regularity properties of flows through porous media. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 17, n. 2, 461-467, 1969.
- BANKS, H.T. e KAREIVA, P. Parameter Estimation Techniques for Transport Equations with Application to Population Dispersal and Tissue Bulk Flow Models. **J. Math. Biology**, v. 17, 253-273, 1983.
- BASSANEZI, R.C. e FERREIRA Jr., W.C. **Equações Diferenciais e Aplicações**, HARBRA, 1988.
- BERESTYCKI H., "Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires elliptiques", **J. Funct. Anal.**, v. 40, 1-29, 1981.
- BLAINE, T.W. e DEANGELIS, D.L. The interaction of spatial scale and predator-prey functional response. **Ecological Modelling**, v. 95, 319-328, 1997.
- BOCH, J. e SUPPERER, R. **Parasitologia em medicina veterinária**. Ed. Hemisfério Sur S.A., Buenos Aires, 627 pp., 1992.
- BOERO, J.J. **Parasitosis animalis**. Ed. Universitaria de Buenos Aires, 524 pp., 1967.
- BOLKER, B. e PACALA, S.W. Using Moment Equations to understand Stochastic Driven Spatial Pattern Formation in Ecological Systems. **Theor. Popul. Biol.**, v. 52, 179-197, 1997.
- BRAUN, M., COLEMAN, C.S. e DREW, D.A. **Differential Equation Models**. Springer, 1978.
- BERNARDES, M. Poluição de copo aquáticos de baixa circulação. Tese de Mestrado. IMECC - UNICAMP, 1998.
- BRITTON, N.F. Spatial structures and periodic traveling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 50, n. 6, 1663-1688, 1990.

- BROWN, K.J., LIN, S.S. e TERTIKAS, A. Existence and non-existence of steady-state solutions for a selection-migration model in population genetics. **J. Math. Biology**, v. 27, 91-104, 1989.
- BUFFONI, G., GRIFFA, A., LI, Z. e MOTTONI, P. Spatially distributed communities: the resource-consumer system. **J. Math. Biology**, v. 33, 723-743, 1995.
- CANTRELL, R.S. e COSNER, C. A comparison of foraging strategies in patchy environment. **Math. Biosc.**, v.160, 25-46, 1999.
- CANTRELL, R.S. e COSNER, C. On the effects of spatial heterogeneity on the persistence of interacting species. **J. Math. Biology**, v. 37, 103-145, 1998.
- CANTRELL, R.S. e COSNER, C. Spatially Explicit Models for the Population Dynamics of a Species colonizing an Island. **Math. Biosc.**, v. 136, 65-107, 1996.
- CANTRELL, R.S. e WARD Jr, J.R. On competition-mediated coexistence. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 57, n. 5, 1311-1327, 1997.
- CANTRELL, R.S., COSNER, C. e FAGAN, W.F. Competitive reversals inside ecological reserves: the role of external habitat degradation. **J. Math. Biology**, v. 37, 491-533, 1998.
- CAPASSO, V. e MADDALENA, L. Convergence to equilibrium states for a reaction-diffusion system modelling spatial spread of a class of bacterial and viral diseases. **J. Math. Biology**, v. 13, 173-184, 1981.
- CAPASSO, V. Mathematical Structures of Epidemic Systems, **Lecture Notes in Biomathematics**, v. 97, Springer-Verlag, 1993.
- CAREY, G.F. e ODEN, J.T. **Finite Elements: a second course**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- CAREY, G.F. e ODEN, J.T. **Finite Elements: mathematical aspects**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- CAREY, G.F., ODEN, J.T. e BECKER, E.B. . **Finite Elements: an introduction**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981.
- CARL, E.A. Population control in arctic ground squirrels. **Ecology**, v. 52, 395-413, 1971.
- CHEWNING, W.C. Migratory effects in Predator-Prey models. **Math. Biosc.**, v. 23, 253-262, 1975.
- CHIU, C-H. e HSU, S-B. Extinction of top-predator in a three-level food-chain model. **J. Math. Biology**, v. 37, 372-380, 1998.

- CHOUDHURY, S.R. Turing instability in competition models with delay 1: linear theory. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 54, n. 5, 1425-1450, 1994.
- CHOUDHURY, S.R. Turing instability in competition models with delay 2: nonlinear theory. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 54, n. 5, 1451-1467, 1994.
- CIARLET, P.G. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. North-Holland, New York, 1978.
- COSSNER, C., Variability, vagueness and comparison methods for ecological models. **Bull. Mathematical Biology**, v. 58, n. 2, 207-246, 1996.
- COUTINHO, M. O Espectro da Fome e da Desigualdade, **Ciência Hoje**, v. 25, nº 145, 72-73, 1998
- CUSHING, J.M. e LI, J.: The dynamics of a size-structured intraspecific competition model with density-dependent juvenile growth rate. In DeAngelis, D. e Gross, L., **Individual-based models and approaches in ecology**. Routledge, Chapman & Hall, New York, 1992.
- DEANGELIS, D.L. e GROSS, L. J. **Individual-based Models and Approaches in Ecology**, Routledge, Chapman and Hall, 1992.
- DIEKMANN, O. Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic. **J. Diff. Eq.**, v. 33, 58-73, 1979.
- DINIZ, G.L. Mudanças de *habitat* de populações de peixes: de rio a represa – o modelo matemático. Tese de Mestrado. IMECC – UNICAMP, Campinas, 1994.
- EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. Random-House, 1988.
- EDELSTEIN-KESHET, L. Mathematical theory of plant-herbivore systems. **J. Math. Biology**, v. 24, 25-58, 1986.
- EHRlich, P., apud Hallowell, C., Will the World go hungry?, **Time Special Issue**, Nov., 1997.
- ENGEL, A.B. Introdução à matemática determinista dos sistemas ecológicos. **Anais do 7º CNMAC**, minicurso, 173 pp. Campinas, 1984.
- ETHIER, S.N. e NAGYLAKI, T. Diffusion approximation of the two-locus Wright-Fisher model. **J. Math. Biology**, v. 27, 17-28, 1989.
- FELTHAM, D.L. e CHAPLAIN, M.A.J. Analytical solutions of a minimal model of species migration in a bounded domain. **J. Math. Biology**, v. 40, 321-342, 2000.
- FERREIRA Jr., W.C. Conferência – Minisimpósio de Biomatemática. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Santos, SP, Setembro de 1998.

FISHER, R.A. The wave of advance of advantageous genes. **Ann. Eugenics**, v. 7, 353-369, 1937.

GALAKTIONOV V. A., "Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities", **Proc. Roy. Soc. Ed.**, v. 125A, 225-246, 1995.

GALAKTIONOV V. A., POSASHKOV, S. A., "On invariant sets and new explicit solutions of evolution equations with quadratic nonlinearities", **Diff. Int. Eqs.**, v. 8, 1997-2024, 1995

GIDAS B., NI W., NIREMBERG L., "Symetry and related properties via the maximum principle", **Comm. Math. Phys.**, v.68, 209-243, 1981.

GOH, B.-S. Management and analysis of biological populations. **Developments in Agricultural and Managed-forest Ecology**, #8. Elsevier Sci. Publ. Co. Amsterdam, 1980.

GOURLEY, S.A. e BARTUCCELLI, M.V. Parameter domains for instability of uniform states in systems with many delays. **J. Math. Biology**, v. 35, 843-867, 1997.

GOURLEY, S.A. e BRITTON, N.F. A predator-prey reaction-diffusion system with non-local effects. **J. Math. Biology**, v. 34, 297-333, 1996.

GOURLEY, S.A., BRITTON, N.F., CHAPLAIN, M.A.J. e BYRNE, H.M. Mechanisms for stabilization and destabilization of systems of reaction-diffusion equations. **J. Math. Biology**, v. 34, 857-877, 1996.

GRASMAN, J. Stochastic epidemics: the expected duration of the endemic period in higher dimensional models. **Math. Biosc.**, v. 152, 13-27, 1998.

GUERON, S. e LIRON, N. A model of herd grazing as a travelling wave, chemotaxis and stability. **J. Math. Biology**, v. 27, 595-608, 1989.

GUO B.-Y., MITCHELL, A. R., SLEEMAN B. D. "Spatial Pattering of Spruce Budworm in a Circular Region", **Science in China** (Series A), v. 34, n° 6, 676-688, 1991.

GURNEY, W.S.C. e NISBET, R.M. The Regulation of Inhomogeneous Populations. **J. Theor. Biology**, v. 52, 441-457, 1975.

GURTIN, M.E. A System of Equations for Age-dependent Population diffusion (letter to the editor). **J. Theor. Biology**, v. 40, 389-392, 1973.

GURTIN, M.E. e MACCAMY, R. On the Diffusion of Biological Populations. **Math. Biosc.**, v. 33, 35-49, 1977.

- HADELER, K.P., AN DER HEIDEN, U. e ROTH, F. Nonhomogeneous distribution of populations. **J. Math. Biology**, v. 1, 165-176, 1974.
- HART, D. R. e GARDNER, R.H. A spatial Model for the spread of invading organisms subject to competition. **J. Math. Biology**, v. 35, 935-948, 1997.
- HAYES, C.K. A new traveling-wave solution of Fisher's equation with density-dependent diffusivity. **J. Math. Biology**, v. 29, 531-537, 1981.
- HERNÁNDEZ, G.E. Age-density dependent population dispersal in R^n . **Math. Biosci.**, v. 149, 37-56, 1998.
- HESS, P. e WEINBERGER, H. Convergence to spatial-temporal clines in the Fisher equation with time-periodic fitnesses. **J. Math. Biology**, v. 28, 83-98, 1990.
- HETHCOTE, H.W. e VAN DEN DRIESSCHE, P. Two SIS epidemiological models with delays. **J. Math. Biology**, v. 40, 3-26, 2000.
- HIRANO, N. e NAITO, K. On the asymptotic behavior of solutions of a reaction-diffusion system. **J. Math. Analysis and Appl.**, v. 95, 335-343, 1983.
- HOPPENSTEADT, F. **Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics**. SIAM, 1975.
- IKEDA, T. e MIMURA, M. An interfacial approach to regional segregation of two competing species mediated by a predator. **J. Math. Biology**, v. 31, 215-240, 1993.
- ISAACSON, E. e KELLER, H.B. **Analysis of Numerical Methods**. Dover Publications, New York, 1994.
- JUHANI O. Estudio biológico del chigüire o capibara. **Fundo Nacional de Investigaciones Agropecuárias**, 271 pp. Caracas, 1973.
- KARDESTUNCER, H. e NORRIE, D.H. (ed.). **Finite Element Handbook**. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- KAREIVA, P.M. Local movements in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. **Oecology**, v. 57, 322-327, 1983.
- KEELING, M.J. e GRENFELL, B.T. Effect of Variability in Infection Period on the Persistence and Spatial Spread of Infectious Diseases. **Math. Biosci.**, v.147, 207-226, 1998.
- KERMACK, W.O., McKENDRICK, A.. G. :Contributions to the mathematical theory of epidemics. Part I, **Proc. Roy. Soc., A**, v. 115 , 700-721, 1927.

KMET, T. e HOLCIK, J. The diffusive Lotka-Volterra Model as applied to the population dynamics of the German carp and predator and prey species in the Danube River basin. **Ecological Modelling**, v. 74, 277-285, 1994.

KOLMOGOROV, A., PETROVSKY, I. e PISCOUNOV, N. Étude de l'Équation de Diffusion avec Croissance de la Quantité de Matière et son Application à un Problème Biologique. **Moscow Univ. Bull. Ser. Internat. Sec. A.**, v. 1, 1-25, 1937.

KURATA, K., KISIMOTO, K. e YANAGIDA, E. the asymptotic transactional/circumferential homogeneity of the solutions of reaction-diffusion systems in/on cylinder-like domains. **J. Math. Biology**, v. 27, 485-490, 1989.

LACAZ, T.M.V.S. Análises dos problemas populacionais intraespecíficos e interespecíficos com difusão densidade-dependente. Tese de Doutorado. IMECC – UNICAMP, 1999.

LANGLAIS, M. Large time behavior in a nonlinear age-dependent population dynamics problem with spatial diffusion. **J. Math. Biology**, v. 26, 319-345, 1988.

LEVIN, S.A. e PACALA, S.W. Theories of simplification and Scaling in Ecological Systems. **Third Autumn Workshop on Mathematical Ecology**, SMR.940-29, 1996.

LIONS, J.L. **Équations Différentielles Opérationnelles et problèmes aux limites**. Springer, Berlin, 292 pp., 1961.

LIONS P. L. Two geometrical properties of solutions of semilinear problems, **Appl. Anal.**, v. 12, 267-272, 1981.

LUDWIG, D., ARONSON, D.G. e WEINBERGER, H.F. Spatial Patterning of the Spruce Budworm. **J. Math. Biology**, v. 8, 217-258, 1979.

LUDWIG, D., JONES, D.D. e HOLLING, C.S. Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest. **J. Anim. Eco.**, v. 47, 315-332, 1978.

MARCHUK, G.I. Mathematical Models in Environmental Problems, in **Studies in Mathematics and its Applications**, #16. North-Holland, Amsterdam, 1986.

MARCUS-ROBERTS, H. e THOMPSON, M. **Life Science Models**, Springer, 1978.

MATLAB®. Guia do usuário, versão 04. Makron Books, S. Paulo, 305 p., 1997.

MERINO, S. Cyclic competition of three species in the time periodic and diffusive case. **J. Math. Biology**, v. 34, 789-809, 1996.

MEYER, J.F.C.A. Modelagem e Simulação Numérica do Transiente Térmico em Meios Compostos. Tese de Douorado. IMECC-UNICAMP, Cmpinas, 1998.

- MEYER, J.F.C.A. e DINIZ, G.L. Changes of Habitat in Fish Populations. **Int. J. Math. Edu. In Science and Technology**, v 28, n. 4, 519-529, 1997.
- MEYER, J.F.C.A. e SOSSAE, R. **Dinâmica populacional densidade-dependente em processos de dispersão e migração**. Publicação interna, IMECC, 9pp., 1994.
- MEYER, J.F.C.A. e SOSSAE, R. Uma Aproximação de Soluções de Problemas Populacionais Densidade-Dependentes: Dinâmica Vital não-Linear. A aparecer, **Bol. Inst. de Pesca**.
- MURRAY, J.D. **Lectures on Nonlinear Differential Equation Models in Biology**. Oxford University Press, 1977.
- MURRAY, J.D. **Mathematical Biology**. Springer, 1989.
- NEWSON, R. A canonical model for production and distribution of root mass in space and time. **J. Math. Biology**, v. 33, 477-488, 1995.
- NGWA, G.A. e MAINI, P.K. Spatial-temporal patterns in a mechanical model for mesenchymal morphogenesis. **J. Math. Biology**, v. 33, 489-520, 1995.
- NI W.-M., PELETIER L. A., SERRIN J., editors, "Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States I e II" in **Mathematical Sciences Research Institute Publications**. v.12,13, Springer-Verlag,, (1988).
- ODUM, E.P. **Fundamentals in Ecology**. Saunders, 1953.
- OJASTI, J. Estudio biologico del chigüire o capibara. **Fond. Nac. Investigaciones Agropecuarias**. Caracas, 271 pp., 1973.
- OKUBO, A. **Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models**. Springer, 1980.
- PAO, C.V. Asymptotic behavior and nonexistenc of global solutions for a class of nonlinear boundary value problems of parabolic type. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 65, 616-637, 1978.
- PATTLE, R.E. Diffusion from an instantaneous point source with a concentration-dependent coefficient. **Quart. J. Mech. And Appl. Math.**, v. 12, Pt. 4, 407-409, 1959.
- PEACEMAN, D.W. e RACHFORD, Jr, H.H. The numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations. **J. SIAM**, v. 3, no 1, 28-41, 1955.
- PESCHEL, M. e Mende, W. **The Predator-Prey Model: Do we live in a Volterra World?** Springer, 1986.
- PETREIRE, Jr. M. Migraciones de Peces de Agua Dulce en America Latina.: Algunos Comentarios. **COPESCAL - doc. Ocasional no. 1**, FAO/ONU, 1985.

- RACHAYDHURI, S., SINHA, D.K. e CHATTOPADHYAY, J. Effect of time-varying cross-diffusivity in a two-species Lotka-Volterra competitive system. **Ecological Modelling**, v. 92, 55-64, 1996.
- RAIMUNDO, S. M. **Uma abordagem determinística da interação de doenças: Aids e Tuberculose num presídio.** Tese de Doutorado IMECC UNICAMP, 1997.
- RASCLE, M. e ZITI, C. Finite time blow-up in some models of chemotaxis. **J. Math. Biology**, v. 33, 388-414, 1995.
- ROTHER, F. e MOTTONI, P. A simple system of reaction-diffusion equations describing morphogenesis: asymptotic behavior. **Annali di Matematica pura e applicata**, v. 122, 141-152, 1979.
- RUUTH, S.J. Implicit-explicit methods for reaction-diffusion problems in pattern formation. **J. Math. Biology**, v. 34, 148-176, 1995.
- SAMMARSKII A. A., GALAKTIONOV V. A., KURDYUMOV S.P., MIKHAILOV A.P., **"Blow-up in quasi-linear parabolic equations"**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.
- SANCHEZ-GARDUÑO, F. e MAINI, P.K. Travelling wave phenomena in non-linear diffusion degenerate Nagumo equations. **J. Math. Biology**, v. 35, 713-728, 1997.
- SHIGESADA, N. Spatial distribution of dispersing animals. **J. Math. Biology**, v. 9, 85-96, 1980.
- SKELLAM, J.G. Random Dispersal in Theoretical Populations. **Biometrika**, v. 38, 196-218, 1951.
- SOSSAE, R.C. **Dispersão Populacional e Processos de Migração: uma dinâmica populacional densidade-dependente.** T. de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 1995.
- SOSSAE, R.C., MEYER, J.F.C.A., LOISELLE, S. e ROSSI, C. Mathematical Modeling and numerical simulation of space-dependent multispecies interactions. In Rossi, C., Bastianoni, S., Donati, A. e Marchettini, N. (ed.). *Tempos in Science and Nature: Structures, Relations and Complexity.* **Annals of the New York Academy of Sciences**, v. 879, 440-443, 1998.
- SPERB R. S., "Maximum Principles and Their Applications", in **Mathematics in Science and Engineering**, v. 157, Acad. Press, 1981.
- STRANG, G. e FIX, G.J. **An analysis of the Finite Element Method.** Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.

- SUJII, E.R., **Modelagem e Simulação da dinâmica populacional da cigarrinha-das-pastagens *Deois falvopicta* (Homóptera: Cercopidae)**, tese de Doutorado, IB/UNICAMP, 1998.
- SUMMERS, D., WU, Z. e SABIN, G.C. Disturbed nonlinear multispecies models in ecology. **Math. Biosci.**, v. 104, 159-184, 1991.
- THIEME, H.R. Well-posedness of physiologically structured population models for *Daphnia magna* – how biological concepts can benefit by abstract mathematical analysis. **J. Math. Biology**, v. 26, 298-317, 1988.
- TIMM, U. e OKUBO, A. Diffusion-driven instability in a predator-prey system with time-varying diffusivities. **J. Math. Biology**, v. 30, 307-320, 1992.
- U. e ROTHE, F. Nonhomogeneous Spatial Distribution of Populations. **J. Math. Biology**, 12, 177-185, 1974.
- URQUHART, G.M., ARMOUR, J., DUNCAN, J.L., DUNN, A.M. e JENNINGS, F.W. **Veterinary Parasitology**, Longman Scientific and Technical, London, 286 pp., 1987.
- VAN DEN DRIESSCHE, P. e WATMOUGH, J. A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation. **J. Math. Biology**, v. 40, 525-540, 2000.
- VON ZUBEN, C. **Comunicação pessoal**, IMECC/UNICAMP. Fevereiro, 2002
- VICKERS, G.T., HUTSON, V.C.L. e BUDD, C.J. Spatial patterns in population conflicts. **J. Math. Biology**, v. 31, 411-430, 1993.
- WALKER, I. Competition and information. **Acta Biotheoretica**, v. 41, 249-266, 1993.
- WEBB, G.F. A recovery-relapse epidemic model with spatial diffusion. **J. Math. Biology**, v. 14, 177-194, 1982.
- WILDER, J.W., CHRISTIE, I. e COLBERT, J.J. Modeling of one-dimensional spatial effects on the spread of Gipsy moths. **Ecological Modelling**, v. 78, 219-234, 1995.
- WILDER, J.W., CHRISTIE, I. e COLBERT, J.J. Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of Forest pests and their management. **Ecological Modelling**, v. 82, 287-298, 1995.
- WITELSKI, T.P. An asymptotic solution for traveling waves of a nonlinear-diffusion Fisher's equation. **J. Math. Biology**, v. 33, 1-16, 1994.
- WOLKIND, D.J., COLLINGS, J.B. e BARBA, M.C.B. Diffusive instabilities in a one-dimensional temperature-dependent model system for a mite predator-prey

interaction on fruit trees: dispersal motility and aggregative preytaxis effects. **J. Math. Biology**, v. 29, 339-362, 1991.

YAKUBU, A-A. Prey dominance in discrete predator-prey systems with a prey refuge. **Math. Biosci.**, v. 144, 155-178, 1997.

YANG, M.H. A Malaria Transmission Model considering different levels of acquired immunity among human hosts and temperature-dependent vector related parameters, pre-print, IMECC-UNICAMP, 19 pp., 1999.

YOUNG-PESSOA, M.C.P. **Simulação e Inteligência Artificial aplicadas ao estudo da Dinâmica Populacional do Bicudo do Algodoeiro na região de Campinas, SP**, tese de doutorado, DENSIS-FEE/UNICAMP, 1994.

ZOTIN, R., 1993 **Efeitos abióticos e a periodicidade em Dinâmica Populacional**. Tese de Mestrado, IMECC – UNICAMP.

ZOTIN, R., 1999 **Controle ótimo da aplicação de fungicidas na lavoura**. Tese de Doutorado, IMECC – UNICAMP.

Anexos: os algoritmos

A seguir estão relacionados os programas efetivamente utilizados na obtenção de resultados e figuras ilustrativas. Foram executados em Matlab, usando recursos desse aplicativo sempre que conveniente ou possível.

Naolin.m

```
clear all
% NAOLIN --> Naolin versão corrigida junho
%           Região retangular
%           variando os valores relativos dos
%           alfas e mantendo os demais parametros
%           fixos (respeitado a restricao dada pelo
%           núcleo de Peclet).
%
t0=clock;
%
%   parametros do problema
%
alfa1=1e-4;
alfa2=1e-5;
sigma1=0;
sigma2=0;
k=100;
lambda=0.05;
v1=0;
v2=0;
%
%   parametros do dominio
%
cx=1.0;
ly=0.4;
%
%   parametros da discretizacao espacial
%
nx=20;
ny=8;
dx=cx/nx;
dy=ly/ny;
nn=nx*ny;
ntr=2*nx*ny;
%
%   parametros da discretizacao temporal
%
tfinal=600;
npt=2400;
dt2=tfinal/(2*npt);
%
%   condicao inicial
%
%   Canto da Area menor
%   -----
%
```

```

p0=zeros(nn,1);
p0(4*ny)=0.2;
p0(5*ny)=0.2;
p0(17*ny)=0.2;
p0(18*ny)=0.2;
%
%  montagem das submatrizes de rigidez
%  apenas as fixas
%
fij=[2 1 1; 1 2 1; 1 1 2]*dx*dy/24;
grfij=[dy/dx+dx/dy -dx/dy -dy/dx;
-dx/dy dx/dy 0; -dy/dx 0 dy/dx]/2;
mxij=[1 0 -1; 1 0 -1; 1 0 -1]*dy/6;
myij=[-1 1 0; -1 1 0; -1 1 0]*dx/6;
%
%  construcao dos vetores alfa e sigma
%
for i=1:nn
alfa(i)=alfal;sigma(i)=sigma1;
end

%  Os valores de alfa2 e de sigma2 nos vetores alfa e sigma

for i=(3*nx/4+1):nx
    for j=(ny/2+1):ny
        ind=(i-1)*ny+j;
        alfa(ind)=alfa2;
        sigma(ind)=sigma2;
    end
end
%
%  montagem das matrizes tridiagonais (cúbicas) em forma
%  de tres matrizes bidiagonais (quadradas)
%
tr1=[1 1/3 1/3; 1/3 1/3 1/6; 1/3 1/6 1/3]*(dx*dy/20);
tr2=[1/3 1/3 1/6; 1/3 1 1/3; 1/6 1/3 1/3]*(dx*dy/20);
tr3=[1/3 1/6 1/3; 1/6 1/3 1/3; 1/3 1/3 1]*(dx*dy/20);
%
%  matriz da malha
%
malha=zeros(ntr,3);
ae=zeros(nn,nn);
bd=zeros(nn,nn);
it=0;
for i=1:nx;
    for j=1:ny;
        it=it+1;
        malha(it,1)=(i-1)*ny+j-1;
        malha(it,2)=(i-1)*ny+j;
        if (((i-2)*ny+j-1)>0) malha(it,3)=(i-2)*ny+j-1;
        end;
        it=it+1;
        if (((i-2)*ny+j)>0) malha(it,1)=(i-2)*ny+j;
        end;
        if (((i-2)*ny+j-1)>0) malha(it,2)=(i-2)*ny+j-1;
        end;
        malha(it,3)=(i-1)*ny+j;
    end
end
for i=1:(nx-1)
it=2*ny*i+1;
malha(it,1)=0;
malha(it,3)=0;

```

```

malha(it+1,2)=0;
end
%
% montagem das partes fixas das matrizes gerais
%
me=zeros(nn,nn);
md=zeros(nn,nn);
for itr=1:ntr
    for il=1:3
        igl=malha(itr,il);
        if(igl~=0)
            for jl=1:3
                jgl=malha(itr,jl);
                if(jgl~=0)
                    ie=(-1)^(rem(itr,2)+1);
                    me(igl,jgl)=me(igl,jgl)+fij(il,jl)*(1+(sigma(igl)-
                    lambda)*dt2)+dt2*(grfij(il,jl)*alfa(igl)+(ie)*(v1*mxij(il,jl)+v2*myij(il,jl)));
                    md(igl,jgl)=md(igl,jgl)+fij(il,jl)*(1-(sigma(igl)+lambda)*dt2)-
                    dt2*(grfij(il,jl)*alfa(igl)-(ie)*(v1*mxij(il,jl)+v2*myij(il,jl)));
                end
            end
        end
    end
end
%
% iteracao temporal
%
for i=1:npt
    pst=p0;
    for int=1:2;
        ae=zeros(nn,nn);
        bd=zeros(nn,nn);
        %
        % calcular a(p0,pst) e b(p0,pst)
        %
        for itr=1:ntr;
            for il=1:3;
                igl=malha(itr,il);
                if(igl~=0)
                    for jl=1:3;
                        jgl=malha(itr,jl);
                        if(jgl~=0);ss1=0;ss2=0;ss3=0;
                        i1=malha(itr,1);i2=malha(itr,2);i3=malha(itr,3);
                        if(i1~=0) ss1=(pst(i1)+p0(i1))*tr1(il,jl);end
                        if(i2~=0) ss2=(pst(i2)+p0(i2))*tr2(il,jl);end
                        if(i3~=0) ss3=(pst(i3)+p0(i3))*tr3(il,jl);end
                        s=(ss1+ss2+ss3)*lambda*dt2/(2*k);
                        ae(igl,jgl)=ae(igl,jgl)+s;
                        bd(igl,jgl)=bd(igl,jgl)-s;
                    end
                end
            end
        end
    end
    ae=ae+me;
    bd=bd+md;
    %
    % resolver ae.x=bd*p0
    %
    pst=ae\b(d*p0);
end
p0=pst;

```

```

% if(rem(i,10)==0)
%     ind=0;
%     for ix=1:nx;
%         for jy=1:ny;
%             ind=ind+1;
%             ver(ix,jy)=p0(ind);
%         end
%     end
% surf(ver)
% pause
% end

wa(i)=pst(1); % ponto 1 (extremo inferior esquerdo)
wb(i)=pst(nn); % ponto nn (extremo superior direito)
wc(i)=pst(4*ny-2); % ponto em frente a posicao inicial (4*ny)
wd(i)=pst(17*ny-2); % ponto em frente a posicao inicial (17*ny)
end
% p150=p0;
%
%     visualização de resultados
%     esta a construcao da matriz para visualizao
%
ver=zeros(nx+1,ny+1);
ind=0;
    for ix=1:nx;
        for jy=1:ny;
            ind=ind+1;
            ver(ix+1,jy+1)=p0(ind);
        end
    end
end
% save 'newver' ver -V4
%pause(3)
%contour(ver),grid
%see
    subplot(2,3,1),contour(ver),title('vx=vy=0, lambda=0.05,sigma=0'),grid
    subplot(2,3,2),surf(ver),title('tfinal=600,pt = 2400, alfa1=1e-4 <
alfa2=1e-5');
    subplot(2,3,3),plot(wa,'g'),grid,title('canto inf esquerdo')
    subplot(2,3,4),plot(wb,'c'),grid,title('canto sup direito')
    subplot(2,3,5),plot(wc,'r'),grid,title('em frente a posicao inicial da area
maior')
    subplot(2,3,6),plot(wd,'y'),grid,title('em frente a posicao inicial da area
menor')
%
%
etime (clock, t0)

```


Duasdif.m

```

% ROTINA ONDE SE COLOCAM OS DADOS E SE EXECUTAM OS PROCEDIMENTOS DE
% CÁLCULOS NECESSÁRIOS PARA A RESOLUÇÃO DE UM PROGRAMA DE ELEMENTOS
% FINITOS PARA DUAS POPULAÇÕES QUE INTERAGEM E SE DIFUNDEM A PARTIR
% DE UMA POPULAÇÃO INICIAL.
% MEDIDAS DA ÁREA RETANGULAR E NÚMERO DE SUBDIVISÕES
% OBS: CORRIGIDA NA PARTE DA SOMA DA MATRIZ COM COMPONENTES ORIGINÁRIOS
% DA PARTE LINEAR COM A DE ELEMENTOS ORIGINÁRIOS DA PARTE NÃO LINEAR
% COM AS CORREÇÕES ITERATIVAS DE P E DE Q

t0 = clock;
Fr = 1;           % dimensões frente
Fu = 0.5;         % dimensões fundo
Nx = 10;          % Número de intervalos na frente
Ny = 5;           % Número de intervalos no fundo
deltax = Fr/Nx;
deltay = Fu/Ny;
T = 5;           % tempo de duração do processo
npt = 20;         % número de passos no tempo;
deltat = T/npt;   % intervalo no tempo
nn = Nx*Ny;       % número de nós
ntr = 2*Nx*Ny;    % número de triângulos
niter = 2;        % número de atualizações de P e Q passando
                    % por pest e qest

                    % Vetores das populações iniciais

pinicial = [4 4 4 0 0 4 4 4 zeros(1,nn-8)]';
qinicial = 0.2*[ones(1,nn)]';

%pinicial = plm;
%qinicial = qlm;

% Parâmetros do processo

alfa = 0.5e-4 ; beta = 1.0e-4;           %coeficientes de difusão,
                                           % respectivamente das
populações 1 e 2

K = 200; L = 500;                        % capacidade de suporte do meio para as
                                           % populações 1 e 2 respectivamente

lambda = 2.5e-4;                         % coeficientes de Verhulst para os
mi      = 1.5e-4;                         % respectivos crescimentos populacionais

sigma = 2.5e-4; ro = 1.5e-6;             % coeficientes de decaimento populacional
                                           % das populações P e Q respectivamente

a = 0.00003; b = 0.00004; % coeficientes de interação entre as
                           % populações P e Q, e Q e P , respectivamente

                           % Início da execução: montagem da matriz malha
                           % e das matrizes do sistema com as atualizações

% Construção da matriz malha

```

```

malha=zeros(2*Nx*Ny,3);

k = 0;
for i = 1:Nx
    for j =1:Ny
        k = k + 1;
        malha(k,1) = (i-2)*Ny + j-1;
        malha(k,2) = (i-1)*Ny + j-1;
        malha(k,3) = (i-2)*Ny + j;
        k = k + 1;
        malha(k,1) = (i-1)*Ny + j;
        malha(k,2) = (i-2)*Ny + j;
        malha(k,3) = (i-1)*Ny + j-1;

    end
end

% Zerando nos pontos da lateral esquerda
for e = 1 : 2 : 2*Ny-1
    malha(e,1) = 0;
    malha(e,3) = 0;
end

for e = 2 : 2 : 2*Ny
    malha(e,2) = 0;
end

% Zerando nos pontos da fronteira inferior
for e = 1: 2*Ny: 2*Ny*(Nx-1)+ 1
    malha(e,1) = 0;
    malha(e,2) = 0;
    malha(e+1,3) = 0;
end

% Matrizes para os termos não lineares, de rigidez e do
% produto dos gradeintes
dxy = deltax*deltay;

MNL1=[dxy/20 dxy/60 dxy/60;
      dxy/60 dxy/60 dxy/120;
      dxy/60 dxy/120 dxy/60];

MNL2=[dxy/60 dxy/60 dxy/120;
      dxy/60 dxy/20 dxy/60;
      dxy/120 dxy/60 dxy/60];

MNL3=[dxy/60 dxy/120 dxy/60;
      dxy/120 dxy/60 dxy/60;
      dxy/60 dxy/60 dxy/20];

MR1=[dxy/12 dxy/24 dxy/24;
     dxy/24 dxy/12 dxy/24;
     dxy/24 dxy/24 dxy/12];

dxdy = deltax/deltay;
dydx = deltay/deltax;

MG1=(1/2)*[(dxdy + dydx)    -dydx        -dxdy;

```

```

        -dydx          dydx          0;
        -dxdy          0          dxdy];

% Matrizes dos sistemas: A1*p(n+1)= A2*p(n) e
%                               B1*q(n+1)= B2*q(n)
% Nesta etapa entram apenas as partes lineares
% Inicialmente
% A1=ME;

A1 = zeros(nn,nn);
A2 = zeros(nn,nn);
B1 = zeros(nn,nn);
B2 = zeros(nn,nn);

cmr1 = deltat*( sigma -lambda )/2;
cmg1 = alfa*deltat/2;
dmr1 = deltat*( ro - mi )/2;
dmg1 = beta*deltat/2;

for elem = 1 : ntr
    for iloc = 1 : 3
        igl = malha(elem,iloc);
        if igl ~=0
            for jloc = 1 : 3
                jgl = malha(elem,jloc);
                if jgl ~=0

A1(igl,jgl) = A1(igl,jgl) + (1+cmr1)*MR1(jloc,iloc) + cmg1*MG1(jloc,iloc);
B1(igl,jgl) = B1(igl,jgl) + (1+dmr1)*MR1(jloc,iloc) + dmgl*MG1(jloc,iloc);
A2(igl,jgl) = A2(igl,jgl) + (1-cmr1)*MR1(jloc,iloc) - cmg1*MG1(jloc,iloc);
B2(igl,jgl) = B2(igl,jgl) + (1-dmr1)*MR1(jloc,iloc) - dmgl*MG1(jloc,iloc);

                                end
                        end
                end
            end
        end

% Inicio dos ciclos (externos) no tempo. Os ciclos internos corrigem,
% em dois passos os valores de P e de Q. Isto é feito simultaneamente ao
% acrescentarmos os termos originários das não-linearidades às posições
% das matrizes anteriormente obtidas (A1,A2,B1,B2) quando consideramos
% apenas os termos lineares

panter = pinicial;
qanter = qinicial;

% Processo avançando no tempo

ptesp = [zeros(1,npt)];
qtesp = [zeros(1,npt)];
ptesl = [zeros(1,npt)];
qtesl = [zeros(1,npt)];

for t = 1:npt

    ptesp(t) = panter(18);
    qtesp(t) = qanter(18);
    ptesl(t) = panter(33);

```

```

qtesl(t) = qanter(33);

% MATRIZES DO SISTEMA ACRESCENTANDO ÀS POSIÇÕES, NA MATRIZ,
% OS TERMOS ORIGINÁRIOS DA NÃO LINEARIDADE

% Faremos iter correções, isto é, iter atualizações dos
% valores de P e de Q.

% Os resultados de cada passagem serão vetores p e q que darão
% sequencia ao processo até o tempo final

ldk = lambda*deltat/(4*K);
ad = a*deltat/4;
mdl = mi*deltat/(4*L);
bd = b*deltat/4;

pest = panter;
qest = qanter;

% Ciclos internos, corretores dos vetores no valor correspondente
% do tempo, sendo iter o contador dessas iterações

for iter = 1 : niter

    ADD = zeros(nn,nn);
    AEE = zeros(nn,nn);
    BDD = zeros(nn,nn);
    BEE = zeros(nn,nn);

    for elem = 1 : ntr;
        for iloc = 1 : 3
            igl = malha(elem,iloc);
            if igl ~=0
                for jloc = 1 : 3
                    jgl = malha(elem,jloc);
                    if jgl ~=0

sp = 0;
sq = 0;

if malha(elem,1)~=0
    sp=sp+MNL1(jloc,iloc)*(pest(malha(elem,1))+panter(malha(elem,1)));
    sq=sq+MNL1(jloc,iloc)*(qest(malha(elem,1))+qanter(malha(elem,1)));
end

if malha(elem,2)~=0
    sp=sp+MNL2(jloc,iloc)*(pest(malha(elem,2))+panter(malha(elem,2)));
    sq=sq+MNL2(jloc,iloc)*(qest(malha(elem,2))+qanter(malha(elem,2)));
end

if malha(elem,3)~=0
    sp=sp+MNL3(jloc,iloc)*(pest(malha(elem,3))+panter(malha(elem,3)));
    sq=sq+MNL3(jloc,iloc)*(qest(malha(elem,3))+qanter(malha(elem,3)));
end

% Aqui a correção: substituímos A1 e A2 no
% membro direito da equação, (A1 e A2 são as matrizes
% da parte linear do sistema, parte fixa) por AEE e ADD
% onde ficarão armazenados os termos não lineares.

AEE(igl,jgl) = AEE(igl,jgl) + sp*ldk + sq*ad;

```

```

ADD(igl,jgl) = ADD(igl,jgl) - sp*ldk - sq*ad;

                                end
                                end
                                end
                                end
                                end

% Somamos agora as matrizes onde estão armazenadas as partes
% linear e não linear, guardando o resultado em AEE e ADD

AEE = AEE + A1;
ADD = ADD + A2;

pest = AEE\ (ADD*panter);

% Corrigindo o valor de Q

for elem = 1 : ntr
    for iloc = 1 : 3
        igl = malha(elem,iloc);
        if igl ~=0
            for jloc = 1 : 3
                jgl = malha(elem,jloc);
                if jgl ~=0

sp=0;
sq=0;

if malha(elem,1)~=0
    sp=sp+MNL1(jloc,iloc)*(gest(malha(elem,1))+qanter(malha(elem,1)));
    sq=sq+MNL1(jloc,iloc)*(pest(malha(elem,1))+panter(malha(elem,1)));
end

if malha(elem,2)~=0
    sp=sp+MNL2(jloc,iloc)*(gest(malha(elem,2))+qanter(malha(elem,2)));
    sq=sq+MNL2(jloc,iloc)*(pest(malha(elem,2))+panter(malha(elem,2)));
end

if malha(elem,3)~=0
    sp=sp+MNL3(jloc,iloc)*(gest(malha(elem,3))+qanter(malha(elem,3)));
    sq=sq+MNL3(jloc,iloc)*(pest(malha(elem,3))+panter(malha(elem,3)));
end

% Aqui novamente a correção : substituímos B1 e B2 (como estava escrito)
% no membro direito da equação, (B1 e B2 são as matrizes
% da parte linear do sistema, parte fixa) por BEE e BDD
% onde ficarão armazenados os termos não lineares.

BEE(igl,jgl) = BEE(igl,jgl) + mdl*sp + bd*sq;
BDD(igl,jgl) = BDD(igl,jgl) - mdl*sp - bd*sq;

                                end
                                end
                                end
                                end
                                end

% Somamos agora as matrizes onde estão armazenadas as partes
% linear e não linear, guardando o resultado em BEE e BDD

BEE = BEE + B1;

```


Tripop.m

```
%
%      Aproximação de um sistema não-linear de tipo SIM
%      numa população, com dispersão, migração e uma
%      taxa de infecção senoidal: (beta+delta*seno(pi*t/6))
%
clear all; t0=clock;
%
%
alfs=0.1e-2; alfi=0.1e-3; v1=0.0e-4; v2=0;
sigs=0; sigi=0; lamb=0.075; k=50;
beta=0.5e-1; del=0.5-2; gam=0.5e-2;
%
cx=0.50; ly=0.3;
tfinal=150.0;
%
nx=10; ny=6; npt=750;
dx=cx/nx; dy=ly/ny; dxy=dx*dy;
dt=tfinal/npt; mdt=dt/2;
dxdy=dx/dy; dydx=dy/dx;
nn=nx*ny; ntr=2*nn; niter=3;
nny=2*ny;
%
p0=0.05*ones(nn,1);
q0=[zeros(1,nn-ny-4) 0.25 0.25 zeros(1, ny) 0.25 0.5]';
r0=zeros(nn,1);

%
%
%
k=0;
for i=1:nx; for j=1:ny; k=k+1;
malha(k,1)=(i-2)*ny+j-1;
malha(k,2)=(i-1)*ny+j-1;
malha(k,3)=(i-2)*ny+j; k=k+1;
malha(k,1)=(i-1)*ny+j;
malha(k,2)=(i-2)*ny+j;
malha(k,3)=(i-1)*ny+j-1;
end; end
%      zeros na lateral esquerda
for i=1:2:nny-1;
malha(i,1)=0;
malha(i,3)=0; end
for i=2:2:nny;
malha(i,2)=0; end
%      zeros na fronteira inferior
for i=1:nny:nny*(nx-1)+1;
malha(i,1)=0;
malha(i,2)=0;
malha(i+1,3)=0; end
%
%      submatrizes de rigidez, parte não-linear
%
mn11=(dxy/20)*[1 1/3 1/3;
1/3 1/3 1/6; 1/3 1/6 1/3];
mn12=(dxy/20)*[1/3 1/3 1/6;
1/3 1 1/3; 1/6 1/3 1/3];
mn13=(dxy/20)*[1/3 1/6 1/3;
1/6 1/3 1/3; 1/3 1/6 1];
```

```

%
%      submatrizes de rigidez, parte linear
%
%      (fi-j)*(fi-i)
%
mr1=(dxy/24)*[2 1 1;
1 2 1; 1 1 2];
%
%      [(dfi-j/dx)*fi-i] e [(dfi-j/dy)*fi-i]
%
mdx=(dy/6)*[-1 1 0;
-1 1 0; -1 1 0];
mdy=(dy/6)*[-1 0 1;
-1 0 1; -1 0 1];
%
%      grad(fi-j)*grad(fi-i)
%
mg1=(1/2)*[dxdy+dydx -dydx -dxdy;
-dydx dydx 0; -dxdy 0 dxdy];
%
%      preparação de parâmetros
%
crp=mdt*(sigs-lamb); cgp=alfs*mdt;
vpv=v1*mdt; vpy=mdt*v2;
nlp=lamb*mdt/(k*2);
crq=mdt*(sigi+gam); cgq=alfi*mdt; cdm=mdt*gam;
%
%      montagem das matrizes da parte linear (e fixa)
%
us=zeros(nn,nn); ws=zeros(nn,nn); fus=zeros(nn,nn); fws=zeros(nn,nn);
ui=zeros(nn,nn); wi=zeros(nn,nn); fui=zeros(nn,nn); fwi=zeros(nn,nn);
um=zeros(nn,nn); wm=zeros(nn,nn); wr=zeros(nn,1);

for iel=1:ntr;
    for il=1:3
        ig=malha(iel,il);
        if ig~=0;
            for jl=1:3;
                jg=malha(iel,jl);
                if jg~=0;
                    us(ig,jg)=us(ig,jg)+(1+crp)*mr1(jl,il)+cgp*mg1(jl,il)+vpv*mdx(jl,il)+vpy*mdy(jl,il);
                    ws(ig,jg)=ws(ig,jg)+(1-crq)*mr1(jl,il)-cgq*mg1(jl,il)-vpv*mdx(jl,il)-vpy*mdy(jl,il);
                    ui(ig,jg)=ui(ig,jg)+(1+crq)*mr1(jl,il)+cgq*mg1(jl,il);
                    wi(ig,jg)=wi(ig,jg)+(1-crq)*mr1(jl,il)-cgq*mg1(jl,il);
                    um(ig,jg)=um(ig,jg)+mr1(jl,il);
                end;
            end;
        end;
    end;
end;
%
%      parte iterativa: atualização de p, q e r,
%      obtenção da parte não-linear das matrizes,
%      e do vetor w e a resolução dos sistemas.
%
for it=1:npt
    fus=zeros(nn,nn); fws=zeros(nn,nn);
    fui=zeros(nn,nn); fwi=zeros(nn,nn);
    tn=pi*(it-0.5)*dt/6;
    p=p0; q=q0; r=r0;
    for iter=1:niter;

```



```

dnt=mdt*(beta+del*sin(tn)); dntp=dnt/2+nlp;
for iel=1:ntr;
    for il=1:3; ig=malha(iel,il); if ig~=0; sm=0;
        for jl=1:3; jg=malha(iel,jl); if jg~=0;
            spe=0; spd=0; sqe=0; sqd=0;
            r1=malha(iel,1); if r1~=0;
                spe=spe+mnl1(jl,il)*(dntp*(q0(r1)+q(r1))+nlp*(p0(r1)+p(r1)));
                spd=spd-mnl1(jl,il)*(dntp*(q0(r1)+q(r1))+nlp*(p0(r1)+p(r1)));
                sqe=sqe-mnl1(jl,il)*dnt*(p0(r1)+p(r1));
                sqd=sqd+mnl1(jl,il)*dnt*(p0(r1)+p(r1)); end
            r2=malha(iel,2); if r2~=0;
                spe=spe+mnl2(jl,il)*(dntp*(q0(r2)+q(r2))+nlp*(p0(r2)+p(r2)));
                spd=spd-mnl2(jl,il)*(dntp*(q0(r2)+q(r2))+nlp*(p0(r2)+p(r2)));
                sqe=sqe-mnl2(jl,il)*dnt*(p0(r2)+p(r2));
                sqd=sqd+mnl2(jl,il)*dnt*(p0(r2)+p(r2)); end
            r3=malha(iel,3); if r3~=0;
                spe=spe+mnl3(jl,il)*(dntp*(q0(r3)+q(r3))+nlp*(p0(r3)+p(r3)));
                spd=spd-mnl3(jl,il)*(dntp*(q0(r3)+q(r3))+nlp*(p0(r3)+p(r3)));
                sqe=sqe-mnl3(jl,il)*dnt*(p0(r3)+p(r3));
                sqd=sqd+mnl3(jl,il)*dnt*(p0(r3)+p(r3)); end
            fus(ig,jg)=fus(ig,jg)+spe;
            fws(ig,jg)=fws(ig,jg)+spd;
            fui(ig,jg)=fui(ig,jg)+sqe;
            fwi(ig,jg)=fwi(ig,jg)+sqd;
        end; end
    end; end
end

%
%      juntar partes linear e não-linear
%
fus=fus+us; fws=fws+ws;
fui=fui+ui; fwi=fwi+wi;

%
%      resolver o sistema nesta parte do iter-esimo
%      passo no tempo
%
p=fus/(fws*p0);
q=fui/(fwi*q0);
r=um/(um*(r0+cdm*(q+q0))); verp(it)=p(nn-2*ny);
end
p0=p; q0=q; r0=r;
end; etime(clock,t0)
in=0; for i=1:nx; for j=1:ny;
in=in+1; sus(i+1,j+1)=p(in);
sin(i+1,j+1)=q(in);
smo(i+1,j+1)=r(in); end; end
for it=1:250; seep(it)=verp(npt-250+it); end
subplot(2,2,1),surf(sus),grid,title('suscet.').view([80 30])
subplot(2,2,2),surf(sin),grid,title('infect.')
subplot(2,2,3),surf(smo),grid,title('mortos')
subplot(2,2,4),plot(seep),grid,title('um ponto de suscetíveis no tempo')
%
%

```

Pentap.m

```

%
%   Aproximação de um sistema não-linear de tipo SIM
%   para duas populações, com dispersão, migração e uma
%   taxa de infecção fixa, porém dependente da população
%   das varejeiras transmissoras: são cinco compartimentos,
%   a saber, suscetíveis, infectadas, pós-mortas, não-portadoras
%   e portadoras.
%
clear all; t0=clock;
%
%   parâmetros do separados por variável dependente
%
als=0.1e-2; sgs=0; lbs=0.075; ks=50; bts=0.5e-1;
ali=0.1e-3; sgi=0; gam=0.5e-2;
v1=0.0e-4; v2=0;
aln=0.25e-3; sgn=0; lbn=0.125; kp=500; btn=0.75e0;
w1=0.0; w2=0.0;
%
%   parâmetros do domínio (espaço e tempo)
%
cx=0.50; ly=0.30;
tfinal=150.0;
%
%   parâmetros da discretização
%
nx=10; ny=6; npt=1200;
dx=cx/nx; dy=ly/ny; dxy=dx*dy;
dt=tfinal/npt; mdt=dt/2;
dxdy=dx/dy; dydx=dy/dx;
nn=nx*ny; ntr=2*nn; niter=2;
nny=2*ny;
%
%   condição inicial (incluída idéia do Rodney)
%
s0=0.05*ones(nn,1); i0=zeros(nn,1);
m0=zeros(nn,1); n0=0.2*ones(nn,1);
p0=[zeros(1,nn-ny-4) 0.05 0.05 zeros(1, ny) 0.05 0.0375]';
%
%
%   montagem da malha de elementos finitos
%
k=0;
for i=1:nx; for j=1:ny; k=k+1;
malha(k,1)=(i-2)*ny+j-1;
malha(k,2)=(i-1)*ny+j-1;
malha(k,3)=(i-2)*ny+j; k=k+1;
malha(k,1)=(i-1)*ny+j;
malha(k,2)=(i-2)*ny+j;
malha(k,3)=(i-1)*ny+j-1;
end; end
%
%   zeros na lateral esquerda
for i=1:2:nny-1;
malha(i,1)=0;
malha(i,3)=0; end
for i=2:2:nny;
malha(i,2)=0; end
%

```

```

%      zeros na fronteira inferior
for i=1:nny:nny*(nx-1)+1;
malha(i,1)=0;
malha(i,2)=0;
malha(i+1,3)=0; end
%
%      submatrizes de rigidez, parte não-linear
%
mn11=(dxy/20)*[1 1/3 1/3;
1/3 1/3 1/6; 1/3 1/6 1/3];
mn12=(dxy/20)*[1/3 1/3 1/6;
1/3 1 1/3; 1/6 1/3 1/3];
mn13=(dxy/20)*[1/3 1/6 1/3;
1/6 1/3 1/3; 1/3 1/6 1];
%
%      submatrizes de rigidez, parte linear
%
%      (fi-j)*(fi-i)
%
mr1=(dxy/24)*[2 1 1;
1 2 1; 1 1 2];
%
%      [(dfi-j/dx)*fi-i] e [(dfi-j/dy)*fi-i]
%
mdx=(dy/6)*[-1 1 0;
-1 1 0; -1 1 0];
mdy=(dx/6)*[-1 0 1;
-1 0 1; -1 0 1];
%
%      grad(fi-j)*grad(fi-i)
%
mg1=(1/2)*[dxdy+dydx -dydx -dxdy;
-dydx dydx 0; -dxdy 0 dxdy];
%
%      preparação de parâmetros
crs=mdt*(sgs-lbs); cgs=als*mdt;
vpx=v1*mdt; vpy=v2*mdt;
nls=lbs*mdt/(2*ks);
cri=mdt*(sgi+gam); cgi=ali*mdt;
bis=mdt*bts/2; cdm=mdt*gam;
crn=mdt*(sgn-lbn); cgn=aln*mdt;
wpx=w1*mdt; wpy=mdt*w2;
bpn=mdt*btn/2; nln=lbn*mdt/(2*kp);
crp=mdt*sgn;
%
%      montagem das matrizes da parte linear (e fixa): respectivamente
%
%
us=sparse(nn,nn); ws=sparse(nn,nn);
ui=sparse(nn,nn); wi=sparse(nn,nn);
um=sparse(nn,nn); vm=zeros(nn,1);
un=sparse(nn,nn); wn=sparse(nn,nn);
up=sparse(nn,nn); wp=sparse(nn,nn);
% fwp=sparse(nn,nn);
%
%
%
for iel=1:ntr;
for il=1:3
ig=malha(iel,il);
if ig~=0;
for jl=1:3;

```

```

        jg=malha(iel,jl);
        if jg~=0;
us(ig,jg)=us(ig,jg)+(1+crs)*mr1(jl,il)+cgs*mg1(jl,il)+vpv*mdx(jl,il)+vpy*mdy(jl,il);
ws(ig,jg)=ws(ig,jg)+(1-crs)*mr1(jl,il)-cgs*mg1(jl,il)-vpv*mdx(jl,il)-vpy*mdy(jl,il);
ui(ig,jg)=ui(ig,jg)+(1+cri)*mr1(jl,il)+cgi*mg1(jl,il);
wi(ig,jg)=wi(ig,jg)+(1-cri)*mr1(jl,il)-cgi*mg1(jl,il);
um(ig,jg)=um(ig,jg)+mr1(jl,il);
un(ig,jg)=un(ig,jg)+(1+crn)*mr1(jl,il)+cgn*mg1(jl,il)+wpv*mdx(jl,il)+wpy*mdy(jl,il);
wn(ig,jg)=wn(ig,jg)+(1-crn)*mr1(jl,il)-cgn*mg1(jl,il)-wpv*mdx(jl,il)-wpy*mdy(jl,il);
up(ig,jg)=up(ig,jg)+(1+crp)*mr1(jl,il)+cgn*mg1(jl,il)+wpv*mdx(jl,il)+wpy*mdy(jl,il);
wp(ig,jg)=wp(ig,jg)+(1-crp)*mr1(jl,il)-cgn*mg1(jl,il)-wpv*mdx(jl,il)-wpy*mdy(jl,il);
        end;
    end;
end;
end;
%
%     parte iterativa: atualização de s, i, m, n e p,
%     obtenção da parte não-linear do sistema,
%     e do termo independente.
%     Ainda, a resolução dos sucessivos sistemas.
%
for it=1:npt
    npt+1-it
    fus=zeros(nn,nn); fws=zeros(nn,nn);
    fui=zeros(nn,nn);
    fun=sparse(nn,nn); fwn=sparse(nn,nn);
    ajn=sparse(nn,nn); ajp=sparse(nn,nn);
    s=s0; i=i0; m=m0; n=n0; p=p0;
    for iter=1:niter;
        for iel=1:ntr;
            for il=1:3; ig=malha(iel,il); if ig~=0; sm=0;
                for jl=1:3; jg=malha(iel,jl); if jg~=0;
                    spe=0; spd=0; sqd=0; sce=0; scd=0; sdd=0; auxn=0;
                    r1=malha(iel,1); if r1~=0;
                        spe=spe+mn11(jl,il)*(nls*(i0(r1)+i(r1)+s0(r1)+s(r1))+bis*(p0(r1)+p(r1)));
                        spd=spd-mn11(jl,il)*(nls*(i0(r1)+i(r1)+s0(r1)+s(r1))+bis*(p0(r1)+p(r1)));
                        sqd=sqd+mn11(jl,il)*bis*(p0(r1)+p(r1));

                    sce=sce+mn11(jl,il)*(nln*(2*(p0(r1)+p(r1))+n0(r1)+n(r1))+bpn*(i0(r1)+i(r1)));
                    scd=scd-
                    mn11(jl,il)*(nln*(2*(p0(r1)+p(r1))+n0(r1)+n(r1))+bpn*(i0(r1)+i(r1)));
                    auxn=auxn+mn11(jl,il)*nln*(p0(r1)+p(r1));
                    sdd=sdd+mn11(jl,il)*bpn*(n0(r1)+n(r1)); end
                    r2=malha(iel,2); if r2~=0;
                        spe=spe+mn12(jl,il)*(nls*(i0(r2)+i(r2)+s0(r2)+s(r2))+bis*(p0(r2)+p(r2)));
                        spd=spd-mn12(jl,il)*(nls*(i0(r2)+i(r2)+s0(r2)+s(r2))+bis*(p0(r2)+p(r2)));
                        sqd=sqd+mn12(jl,il)*bis*(p0(r2)+p(r2));

                    sce=sce+mn12(jl,il)*(nln*(2*(p0(r2)+p(r2))+n0(r2)+n(r2))+bpn*(i0(r2)+i(r2)));
                    scd=scd-
                    mn12(jl,il)*(nln*(2*(p0(r2)+p(r2))+n0(r2)+n(r2))+bpn*(i0(r2)+i(r2)));
                    auxn=auxn+mn12(jl,il)*nln*(p0(r2)+p(r2));
                    sdd=sdd+mn12(jl,il)*bpn*(n0(r2)+n(r2)); end
                    r3=malha(iel,3); if r3~=0;
                        spe=spe+mn13(jl,il)*(nls*(i0(r3)+i(r3)+s0(r3)+s(r3))+bis*(p0(r3)+p(r3)));
                        spd=spd-mn13(jl,il)*(nls*(i0(r3)+i(r3)+s0(r3)+s(r3))+bis*(p0(r3)+p(r3)));

```

```

sqd=sqd+mnl3(jl,il)*bis*(p0(r3)+p(r3));

sce=sce+mnl3(jl,il)*(nln*(2*(p0(r3)+p(r3))+n0(r3)+n(r3))+bpn*(i0(r3)+i(r3)));
scd=scd-
mnl3(jl,il)*(nln*(2*(p0(r3)+p(r3))+n0(r3)+n(r3))+bpn*(i0(r3)+i(r3)));
auxn=auxn+mnl3(jl,il)*nln*(p0(r3)+p(r3));
sdd=sdd+mnl3(jl,il)*bpn*(n0(r3)+n(r3)); end
fus(ig,jg)=fus(ig,jg)+spe;
fws(ig,jg)=fws(ig,jg)+spd;
fui(ig,jg)=fui(ig,jg)+sqd;
fun(ig,jg)=fun(ig,jg)+sce;
fwn(ig,jg)=fwn(ig,jg)+scd;
ajm(ig,jg)=ajm(ig,jg)+auxn;
ajp(ig,jg)=ajp(ig,jg)+sdd;
end; end
end; end
end

%
%      juntar partes linear e não-linear
%
fus=fus+us; fws=fws+ws;
fun=fun+un; fwn=fwn+wn;
%
%      resolver o sistema nesta parte do iter-esimo
%      passo no tempo
%
s=fus/(fws*s0);
i=ui/(wi*i0+fui*(s0+s));

m=um/(um*m0+cdm*(um*(i+i0)));

n=fun/(fwn*n0-ajm*(p0+p));
p=up/(wp*p0+ajp*(i0+i));
vern(it)=n(round(nn/2));
end
s0=s; i0=i; m0=m; n0=n; p0=p;
end; etime(clock,t0)
%
%      visualizacao
nnx=nx+1; nny=ny+1;
sus=zeros(nnx,nny); infc=zeros(nnx,nny);
mor=zeros(nnx,nny); nao=zeros(nnx,nny);
por=zeros(nnx,nny);
in=0; for ji=1:nx; for jj=1:ny;
in=in+1; sus(ji+1,jj+1)=s(in);
infc(ji+1,jj+1)=i(in); mor(ji+1,jj+1)=m(in);
nao(ji+1,jj+1)=n(in); por(ji+1,jj+1)=p(in); end; end
for it=1:npt; seep(it)=vern(it); end
subplot(2,3,1),surf(sus),grid on,title('suscet. '),view([80 30])
subplot(2,3,2),surf(infc),title('infect. ')
subplot(2,3,3),surf(mor),title('mortos')
subplot(2,3,4),surf(nao),title('nao-port')
subplot(2,3,5),surf(por),title('portdor')
subplot(2,3,6),plot(seep),grid on,title('um ponto de nao-port. no tempo')

```


UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

