



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Telemática

UM ALGORITMO GENÉTICO PARA OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO FUZZY

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da
Universidade Estadual de Campinas em 17/05/2002, como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica

por

Luciano de Moura

sob orientação do Professor Dr.

Akebo Yamakami

Banca examinadora :

Prof. Dr. Anésio dos Santos Júnior - FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti - IMECC/UNICAMP

Prof^a. Dr^a. Isamara Carvalho Alves - UFBA

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira - FEEC/UNICAMP

Resumo

Desenvolveu-se um algoritmo genético para o problema de otimização multiobjetivo com restrições fuzzy ou coeficientes fuzzy nos objetivos e restrições. O algoritmo utiliza uma estrutura baseada na evolução de duas populações, formadas por soluções com medidas de Pareto-dominância e níveis de factibilidade intermediários.

Admitiu-se a impossibilidade de aplicação de métodos de escalarização e o desconhecimento de preferências ou níveis de aspiração dos objetivos, de forma que o método trata os objetivos simultaneamente e incorpora as imprecisões dos problemas diretamente no processo de evolução das populações. O algoritmo é designado à geração de um conjunto de pontos de equilíbrio para que um decisor possa escolher uma solução de compromisso entre as alternativas indicadas.

O algoritmo foi testado em problemas com diferentes características: não-convexidade, não-linearidade, restrições de integralidade, problemas com grande porte, problemas com falso conjunto eficiente, etc. Em todas as situações testadas o algoritmo foi capaz de encontrar soluções compatíveis ou superiores às aquelas indicadas na literatura, comprovando sua flexibilidade e eficiência.

Abstract

We developed a genetic algorithm for multiobjective optimization problems with fuzzy constraints and fuzzy coefficients. The algorithm works with two different populations, each of them comprises solutions with intermediate feasibility degree and non-dominance measurement.

The proposed genetic algorithm was designed to solve fuzzy multiobjective problems without any prior knowledge about objective preferences, aspiration levels or weights for scalarization techniques. The aim is to point out the set of equilibrium solutions (in agreement with a fuzzy non-dominance relation), allowing a decision maker to choose a compromise solution from the set of available alternatives.

A set of optimization problems with different features (non-convexity, non-linearity, integer variables, etc) was used to test our technique. The algorithm was successful in pointing out the desired solutions in all tested situations and it proved to be very flexible and efficient.

Eu sou mais meu chinelo de dedo, do que cromo alemão apertado
Sou daqueles melhor só, do que mal acompanhado
Vou rolando no mundo igual bola, só porque a gente não nasceu quadrado
Eu fico com um olho no peixe fritando, e fico com outro no gato do lado ...
(“*Velho Ditado*”, Dudu Nobre/Luizinho)

Agradecimentos

- Ao Prof. Akebo, pelo apoio e confiança depositados em meu trabalho.
- Aos amigos da Engenharia Elétrica, por tornarem o ambiente de pesquisa tão agradável e divertido.
- Aos irmãos Roberto, Andréia, Leonardo, Marco Aurélio, Sérgio e Ítalo, pela amizade incondicional.
- À meus pais, os grandes cúmplices de minhas vitórias.
- À Laura, que enche meus dias de felicidade com sua presença.
- Ao Prof. Moretti, pelo privilégio de sua amizade.
- À CAPES, pelo apoio financeiro que tornou viável a execução deste projeto.

Sumário

Introdução	1
1 Otimização Multiobjetivo	3
1.1 Definição e Conceitos Básicos	3
1.2 Caracterização de Soluções <i>Pareto-Ótimas</i>	5
1.3 Métodos a-Priori	6
1.3.1 Métodos baseados em Limitantes	7
1.3.2 Métodos Lexicográficos	7
1.4 Métodos a-Posteriori	7
1.4.1 Método das Ponderações	7
1.4.2 Método das ϵ -Restrições	8
1.4.3 Método Simplex Multiobjetivo	8
1.5 Métodos Iterativos	11
1.5.1 Método de Geoffrion, Dyer e Feinberg	11
1.5.2 STEM - STEP Method	13
2 Matemática Fuzzy	15
2.1 Conjuntos Fuzzy	15
2.2 Relações Fuzzy	20
2.3 Números Fuzzy	21
2.4 Funções Fuzzy	26
2.5 Otimização Fuzzy	28
2.5.1 Otimização com Restrições Fuzzy	28
2.5.2 Otimização com Objetivo e Restrições Fuzzy	31
2.5.3 Otimização com Coeficientes Fuzzy na Função Objetivo	31
2.5.4 Otimização com Coeficientes Fuzzy nas Restrições	32
3 Algoritmos Genéticos	35
3.1 Conceitos Básicos	35

3.2	Algoritmos Genéticos aplicados à Otimização Multiobjetivo	37
4	Algoritmos Genéticos para Otimização Multiobjetivo com Restrições Fuzzy	41
4.1	Introdução	41
4.2	Algoritmo Genético Proposto	45
4.3	Experimentos Computacionais	49
4.3.1	Teste Computacional 1 - Função de Schaffer	50
4.3.2	Teste Computacional 2 - Problemas Diversos	56
4.3.3	Teste Computacional 3 - Problema Multiobjetivo com Falso Conjunto <i>Efi-</i> <i>ciente</i>	70
5	Algoritmos Genéticos para Otimização Multiobjetivo com Coeficientes Fuzzy	79
5.1	Introdução	79
5.2	Algoritmo Genético Proposto	81
5.3	Experimentos Computacionais	83
5.3.1	Teste Computacional 1 - Função de Schaffer	83
5.3.2	Teste Computacional 2 - Problema Multiobjetivo Não-Convexo	88
5.3.3	Teste Computacional 3 - Problema Multiobjetivo com Falso Conjunto <i>Efi-</i> <i>ciente</i>	91
6	Conclusões	95
	Referências	97

Lista de Tabelas

1.1	Quadro Simplex Multiobjetivo.	9
4.1	Custos fixos e variáveis de expansão da capacidade dos processos.	64
4.2	Capacidade de expansões e limites de capital.	64
4.3	Preços, disponibilidades e demandas de insumos e produtos finais.	65
4.4	Custos de operação.	65
4.5	Coefficientes de balanceamento de materiais.	65
4.6	Processos selecionados e níveis de operação (kton) (desconsiderando os ganhos e perdas de material no processo).	66
4.7	Quantidades compradas e vendidas (kton).	66
4.8	Processos selecionados e níveis de operação (kton) (desconsiderando os ganhos e perdas de material no processo).	69
4.9	Quantidades compradas e vendidas (kton).	69
5.1	Coefficientes fuzzy dos objetivos e restrições.	89
5.2	Resultados obtidos pelo algoritmo descrito em (Sakawa & Yauchi [2000]).	89
5.3	Soluções de equilíbrio encontradas.	91

Lista de Figuras

1.1	Identificação de soluções <i>eficientes</i>	5
2.1	Exemplos de funções de pertinência.	16
2.2	Exemplos de funções de pertinência de números fuzzy.	22
2.3	Comparação de números fuzzy.	25
2.4	Aplicação da <i>função índice</i> descrita em (Kim & Park [1990]): $a=\mu_{\tilde{D}_o}(1)$, $b=\mu_{\tilde{D}_o}(2)$, $c=\mu_{\tilde{D}_p}(1)$ e $d=\mu_{\tilde{D}_p}(2)$	26
3.1	Operadores de crossover.	37
4.1	Função de pertinência para restrição fuzzy.	42
4.2	Função de pertinência para intervalo fuzzy de definição das variáveis.	43
4.3	Estrutura geral do algoritmo genético proposto.	46
4.4	Função de Schaffer: (a) Funções objetivo e conjunto <i>Pareto-ótimo</i> do problema irrestrito; (b) Representação do conjunto <i>Pareto-ótimo</i> na curva paramétrica dos objetivos - pontos obtidos através de implementação do <i>Método das Ponderações</i> em AIMMS 3.2.	51
4.5	Problema com restrição $x \geq 1$: (a) Região factível; (b) Conjunto <i>Pareto-ótimo</i> ; Problema com restrição fuzzy $x \gtrsim 1$, $d = 1$: (c) Factibilidade fuzzy; (d) Conjunto <i>Pareto fuzzy</i>	52
4.6	Esboço da função de pertinência para o conjunto <i>Pareto fuzzy</i> : (a) problema com restrição $x \gtrsim 1$, $d = 1$; (b) problema com restrição $x \gtrsim 2$, $d = 1$	53
4.7	Esboço da função de pertinência no conjunto <i>Pareto fuzzy</i> : (a) $x \gtrsim 3$, $d = 2$; (b) $x \gtrsim 3$, $d = 0.5$; (c) $x \gtrsim 3$, $d = 0.01$	54
4.8	Espalhamento do conjunto <i>Pareto fuzzy</i> em função do número de gerações - população inicializada no intervalo $[-100, 100]$	54
4.9	Esboço da função de pertinência para o conjunto <i>Pareto fuzzy</i> de acordo com a precisão: (a) 0.001; (b) 0.005; (c) 0.01	55

4.10	Esboço da função de pertinência para o conjunto <i>Pareto fuzzy</i> de acordo com o limite de indivíduos na população externa: (a) 50 indivíduos; (b) 100 indivíduos; (c) 150 indivíduos; (d) 200 indivíduos.	56
4.11	Conjunto <i>Pareto fuzzy</i> inteiro.	57
4.12	Utilização do <i>Método das Ponderações</i> : (a) Conjunto <i>Pareto-ótimo</i> convexo - todos os pontos podem ser encontrados com a variação dos pesos w_1 e w_2 ; (b) conjunto <i>Pareto-ótimo</i> não-convexo - pontos intermediários não são encontrados.	58
4.13	Solução obtida com o <i>Método das Ponderações</i>	58
4.14	Resultados obtidos com o algoritmo: (a) Conjunto <i>Pareto-ótimo</i> ; (b) Conjunto <i>Pareto-fuzzy</i>	59
4.15	Esboço da função de pertinência.	61
4.16	Diagrama de fluxo de produção.	64
4.17	Problema com conjunto <i>eficiente</i> local: (a) Função bimodal; (b) Conjuntos <i>Pareto-ótimos</i> local e global.	71
4.18	Distribuição de 10000 pontos aleatórios na curva paramétrica dos objetivos.	72
4.19	Esboço da função de pertinência.	73
4.20	Curvas de nível da função de pertinência e conjunto <i>Pareto-fuzzy</i> obtido.	74
4.21	Problema com restrições fuzzy e variação dos desvios permitidos.	75
4.22	Esboço da função de pertinência ($d_{g_1} = d_{g_2} = 0.1$).	75
4.23	Esboço da função de pertinência ($d_{g_1} = 0.44$ e $d_{g_2} = 0.5$).	76
4.24	Número de indivíduos no <i>suporte</i> do conjunto <i>Pareto fuzzy</i> em função do aumento dos desvios d_{g_1} e d_{g_2}	77
5.1	Estrutura geral do algoritmo genético proposto.	82
5.2	Função de Schaffer: (a) Funções objetivo do problema com coeficientes ordinários; (b) Funções objetivo do problema com coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 0]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$	84
5.3	Esboço da função de pertinência para o conjunto <i>Pareto fuzzy</i> : (a) problema com coeficientes <i>crisp</i> ; (b) problema com coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 0]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$	85
5.4	Função de Schaffer: (a) Funções objetivo do problema com coeficientes ordinários; (b) Funções objetivo do problema com coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 2]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$	85
5.5	Esboço da função de pertinência para o conjunto <i>Pareto fuzzy</i> : (a) problema com coeficientes <i>crisp</i> ; (b) problema com coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 2]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$	86
5.6	Esboço da função de pertinência para o conjunto <i>Pareto fuzzy</i> : (a) precisão 0.01 - 150 indivíduos no suporte; (b) precisão 0.05 - 113 indivíduos no suporte; (c) precisão 0.2 - 26 indivíduos no suporte.	87
5.7	Esboço da função de pertinência para o conjunto <i>Pareto fuzzy</i> : (a) coeficientes não-fuzzy - restrição fuzzy $x \gtrsim 2$, $d = 1$; (b) coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 2]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$ - restrição fuzzy $x \gtrsim 2$, $d = 1$	87

5.8	Crescimento do nível de factibilidade dos indivíduos da população externa: (a) gerações 0 a 50; (b) gerações 0 a 2000.	90
5.9	Função bimodal $\tilde{h}(x_2)$ com coeficientes fuzzy $\tilde{c}_1 = [0.2, 0.2, 0.4]$ e $\tilde{c}_2 = [0.6, 0.6, 0.6]$	92
5.10	Esboço da função de pertinência ($\tilde{c}_1 = [0.2, 0.2, 0.4]$ e $\tilde{c}_2 = [0.6, 0.6, 0.6]$).	93
5.11	Esboço da função de pertinência ($\tilde{c}_1 = [0.2, 0.2, 0.5]$ e $\tilde{c}_2 = [0.3, 0.6, 0.6]$).	93
5.12	Distribuição dos pontos do conjunto <i>Pareto fuzzy</i> na curva paramétrica dos objetivos ($x_2 \approx 0.4$).	94
5.13	Esboço da função de pertinência ($\tilde{c}_1 = [0, 0.2, 0.2]$ e $\tilde{c}_2 = [0.6, 0.6, 1]$).	94

Introdução

No processo de modelagem matemática, a escolha da função objetivo representa uma tarefa crítica, já que a solução obtida é totalmente dependente dessa escolha e em muitos casos, pode-se identificar diversos objetivos associados, geralmente conflitantes ou não-comensuráveis. A otimização multiobjetivo aparece como uma boa opção nesse contexto, por considerar simultaneamente todos os objetivos identificados.

É bastante comum a representação de processos reais por problemas de otimização multiobjetivo: em problemas de roteamento de frota, podem-se associar como objetivos a minimização do custo, tempo ou distância total de operação, minimização do número de veículos, maximização do número de clientes por rota, etc. Em problemas de sequenciamento de produção, a maximização do montante produzido e a minimização dos tempos de produção e da configuração de máquinas são os objetivos comumente utilizados. Em problemas de corte busca-se minimizar a perda de material, maximizar o número de peças cortadas, minimizar o tempo de configuração de máquinas cortadeiras, etc.

A solução esperada de um problema de otimização multiobjetivo é composta por um conjunto de pontos de equilíbrio denominados *eficientes* ou *Pareto-ótimos*, caracterizados por não serem dominados por nenhum outro ponto da região factível. A técnica mais comum de resolução desse tipo de problema é a *Ponderação dos Objetivos*, que associa uma única função escalarizada ao problema, gerada através da atribuição de pesos aos objetivos originais. Essa técnica pressupõe o conhecimento de relações de preferências ou prioridades entre os objetivos. Para os casos em que essas relações não são conhecidas, os métodos buscam caracterizar os pontos de equilíbrio para que um decisor possa escolher uma solução de compromisso entre as alternativas indicadas.

A associação de técnicas de otimização matemática com a teoria fuzzy permite representar as imprecisões envolvidas na modelagem de situações reais. Na prática, o modelador ganha ferramentas para tratar valores tipicamente imprecisos : demanda prevista, custos de aquisição de materiais, coeficientes de rendimento de processos, pontos de reabastecimento de estoque, etc. Em geral, os métodos de resolução de problemas de otimização dessa natureza baseiam-se em reduções a problemas não-fuzzy, que podem ser solucionados através da aplicação de métodos conhecidos.

Assim, a modelagem de processos através de problemas de otimização multiobjetivo fuzzy confere uma representação muito mais realística dos elementos a serem modelados, permitindo

o tratamento simultâneo de vários objetivos e admitindo as imprecisões de valores pertencentes ao processo real.

Como a solução é dada na forma de um conjunto de pontos de equilíbrio, torna-se intuitiva a aplicação de métodos populacionais na resolução desse tipo de problema, já que são capazes de gerar o conjunto procurado de soluções em apenas uma execução. Em especial, algoritmos genéticos têm demonstrado grande eficiência e versatilidade nessa tarefa.

Em geral, a utilização de algoritmos genéticos na resolução de problemas multiobjetivos fuzzy tem sido realizada de forma bastante específica, ou seja, o algoritmo explora as características de uma determinada classe de problemas e sua estrutura dificilmente pode ser estendida a outras classes.

O foco deste trabalho é a apresentação de um algoritmo genético elaborado para problemas gerais de otimização multiobjetivo com restrições fuzzy ou coeficientes fuzzy nas funções objetivo e restrições. Em ambos os casos, o conceito de soluções de equilíbrio é modificado para tratar soluções com diferentes níveis de factibilidade e não-dominância, configurando o que denominamos soluções *Pareto fuzzy*.

O algoritmo foi elaborado com o intuito de ser genérico o bastante para tratar problemas de otimização numérica com características que usualmente dificultam a utilização de métodos exatos: não-linearidade, não-convexidade, restrições de integralidade, etc.

Em oposição à extensa maioria dos métodos encontrados na literatura, o algoritmo deste estudo não utiliza técnicas de escalarização dos objetivos ou reduções a problemas não-fuzzy. Admite-se que não são conhecidas informações de preferências entre os objetivos, de forma que o algoritmo deve gerar alternativas para a posterior escolha de um decisor. Assim, o algoritmo trata todos os objetivos e imprecisões, incorporando-os no processo de evolução da população.

O trabalho está organizado da seguinte forma : os três primeiros capítulos têm por objetivo definir as técnicas e conceitos utilizados ao longo do estudo. Assim, o Capítulo 1 apresenta os conceitos básicos de otimização multiobjetivo clássica, com uma breve ilustração dos métodos mais conhecidos de resolução. O Capítulo 2 é dedicado à apresentação e discussão dos principais tópicos em matemática fuzzy e otimização escalar fuzzy, descrevendo os elementos que fazem parte do algoritmo descrito neste estudo. Os algoritmos genéticos são apresentados no Capítulo 3, com ênfase nas características da aplicação dessa técnica em problemas de otimização multiobjetivo. O Capítulo 4 descreve o algoritmo genético elaborado para a resolução de problemas multiobjetivos com restrições fuzzy. Os resultados de sua aplicação a três diferentes experimentos são exibidos, ilustrando sua eficiência e versatilidade. Da mesma forma, o Capítulo 5 apresenta uma extensão do algoritmo para problemas com coeficientes fuzzy nas funções objetivo e restrições. Por fim, as conclusões do trabalho e as perspectivas de estudos complementares são apresentadas no Capítulo 6.

Capítulo 1

Otimização Multiobjetivo

1.1 Definição e Conceitos Básicos

Uma das etapas críticas no processo de modelagem de problemas reais por técnicas de programação matemática é a escolha do objetivo a ser otimizado, uma vez que a solução a ser obtida é totalmente dependente desta escolha e, na extensa maioria dos casos, pode-se identificar diversos objetivos relacionados com o problema, muitas vezes conflitantes e/ou não-comensuráveis. Por exemplo, em um processo de corte industrial de bobinas a partir de grandes rolos de papel, um procedimento de otimização deve ser capaz de indicar as melhores combinações geométricas das bobinas, de forma a minimizar critérios como a perda total de matéria-prima e o tempo de configuração das máquinas de corte. Geralmente, uma solução ótima em termos de perda de matéria-prima é obtida com pequenas repetições de uma grande variedade de padrões de corte, acarretando constante mudança na configuração das facas. Por outro lado, pode-se minimizar o tempo de configuração, gerando-se menor variedade nos padrões de corte a serem produzidos e elevando o número de repetições de cada um, o que acarreta maior perda de matéria-prima.

A otimização multiobjetivo é o ramo da otimização matemática que busca desenvolver métodos de resolução para problemas em que se identificam várias funções objetivos. A motivação para o uso e desenvolvimento desses procedimentos é o tratamento simultâneo de todos os objetivos identificados no problema. Matematicamente, um problema multiobjetivo pode ser descrito na forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)), \quad k \geq 2 \\ x &\in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^k$ é um conjunto parcialmente ordenado de acordo com a relação

“ $\leq$ ”¹, perde-se o conceito usual de otimalidade adotado em problemas escalares, ou seja, em geral não é possível identificar um ponto ótimo x^* na forma:

$$F(x^*) \leq F(x), \quad \forall x \in X \quad (1.2)$$

Geralmente, a solução de problemas multiobjetivos é caracterizada por um grupo de pontos factíveis de equilíbrio, denominado conjunto *eficiente* ou *Pareto-ótimo*. O conjunto *Pareto-ótimo* determina a curva de *trade-off* entre os objetivos e será indicado por $Pareto(X)$ neste trabalho.

Definição 1. Uma solução $x^* \in X$ é dita ser *eficiente* ou *Pareto-ótima* se não é dominada por nenhuma outra solução factível, ou seja²:

$$\nexists x \in X \text{ tal que } F(x) \leq F(x^*) \text{ e } F(x) \neq F(x^*) \quad (1.3)$$

Pode-se também caracterizar soluções *eficientes* através do seguinte resultado: se $x^* \in X$ é *Pareto-ótimo*, então qualquer outra solução $x \in X$ que melhore o valor de um dos objetivos (relativo àquele produzido por x^*), simultaneamente piora o valor de pelo menos um outro objetivo (Figura 1.1).

Como o conjunto *Pareto-ótimo* pode conter um número elevado de soluções, muitas vezes infinito, admite-se a existência de uma segunda etapa na resolução de problemas multiobjetivos, caracterizada por critérios fornecidos por um decisor, no intuito de selecionar uma solução de compromisso.

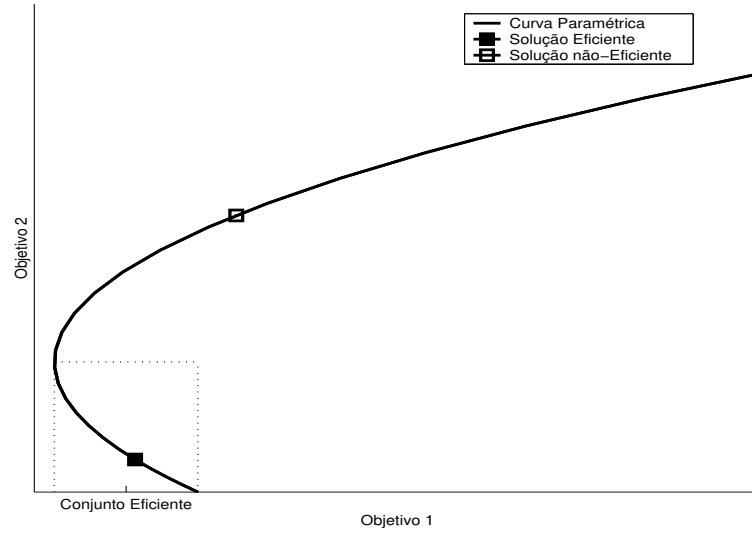
Assim, os métodos conhecidos na literatura para a resolução desses problemas podem ser classificados de acordo com o momento em que o decisor aplica seus critérios (Valente [1999]): *métodos a-priori* são caracterizados pela aplicação de informações sobre prioridades, ordenação ou intervalos aceitáveis para os objetivos, fornecidos pelo decisor, como parâmetros do problema a ser resolvido. Nos *métodos a-posteriori*, o problema multiobjetivo é solucionado sem a intervenção do decisor, fornecendo como resultado o conjunto *eficiente* (ou um subconjunto de pontos significativos), para que então o decisor possa escolher um ponto de compromisso segundo seus critérios. Por fim, nos *métodos iterativos*, o decisor participa diretamente do processo de resolução do problema, indicando suas preferências ao longo da execução.

¹Um conjunto C é dito ser parcialmente ordenado de acordo com a relação “ $\leq$ ” se obedece às Propriedades 1 a 3 abaixo, mas nem todos seus elementos podem ser comparados segundo a relação:

$$c_1, c_2 \in C \Rightarrow c_1 \leq c_2 \text{ ou } c_2 \leq c_1$$

- (1) $c_1 \leq c_1, \quad c_1 \in C$
- (2) $c_1 \leq c_2 \text{ e } c_2 \leq c_3 \Rightarrow c_1 \leq c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in C$
- (3) $c_1 \leq c_2 \text{ e } c_2 \leq c_1 \Rightarrow c_1 = c_2, \quad c_1, c_2 \in C$

²Considerando um problema de minimização. Condições análogas para maximização são imediatas.

Figura 1.1: Identificação de soluções *eficientes*

1.2 Caracterização de Soluções *Pareto-Ótimas*

Esta seção apresenta resultados para a caracterização de soluções *eficientes* através de técnicas de escalarização, que reduzem o problema multiobjetivo a um ou mais problemas escalares. A solução dos novos problemas correspondem, sob determinadas condições, a pontos do conjunto *Pareto-ótimo* do problema multiobjetivo original.

Os teoremas ¹ a seguir (Chankong & Haimes [1982]) estabelecem esses resultados e condições:

Teorema 1. Se x^* é uma solução *eficiente* de (1.1), então x^* soluciona os k problemas escalares de otimização:

$$\begin{aligned}
 P_i : \text{Minimizar } f_i(x), \quad i = 1, \dots, k \\
 x \in X \\
 f_j(x) \leq f_j(x^*), \quad \forall j \neq i
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Teorema 2. Se x^* é solução única de P_i , para algum $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, então x^* é solução *Pareto-ótima* de (1.1).

¹As provas dos teoremas podem ser encontradas em (Chankong [1977], Chankong & Haimes [1983], DaCunha & Polak [1967]).

Teorema 3. Se x^* soluciona P_i , $\forall i$, então x^* é solução *eficiente* de (1.1).

Teorema 4. Se x^* é solução *eficiente* de (1.1), então existem um inteiro $i \in \{1, \dots, k\}$ e reais ϵ_j , $j = 1, \dots, k$, $j \neq i$, tais que x^* resolve :

$$\begin{aligned} P_i(\epsilon) : \text{Minimizar } & f_i(x) \\ & x \in X \\ & f_j(x) \leq \epsilon_j, \forall j \neq i \end{aligned} \quad (1.5)$$

sendo $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_k)$ elemento do conjunto $Y_i = \{\epsilon : \{x : f_j(x) \leq \epsilon_j, j \neq i, x \in X\} \neq \emptyset\}$, ou seja, tal que $P_i(\epsilon)$ seja factível.

Teorema 5. Dado $\epsilon \in Y_i$, se x^* é solução única de $P_i(\epsilon)$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$, então x^* é *eficiente*.

Teorema 6. Dado $\epsilon \in Y_i$, x^* é *eficiente* se soluciona $P_i(\epsilon)$, $\forall i$.

Teorema 7. Se X é um conjunto convexo, f_i , $i = 1, \dots, k$, são funções convexas definidas em X e x^* é ponto *Pareto-ótimo*, então existe $w \in W = \{w : w \in \mathbb{R}^k, w_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^k w_i = 1\}$ tal que x^* resolve o problema:

$$\begin{aligned} P(w) : \text{Minimizar } & \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \\ & x \in X \end{aligned} \quad (1.6)$$

Teorema 8. x^* é solução *eficiente* de (1.1) se existe $w \in W$ tal que x^* resolve $P(w)$ e pelo menos uma das condições abaixo é satisfeita:

- (i) $w_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ (Geoffrion [1968], Kuhn & Tucker [1951])
- (ii) x^* é solução única de $P(w)$ (Zadeh [1963])

1.3 Métodos a-Priori

Os algoritmos pertencentes a essa classe utilizam as preferências do decisor como parâmetros de busca no espaço das soluções. As técnicas mais comuns transformam o problema original multiobjetivo em problemas com formatos mais simples, através da inserção das preferências na definição matemática do problema. Essa transformação é realizada de tal forma que o novo problema possa ser resolvido mais facilmente através de métodos conhecidos.

1.3.1 Métodos baseados em Limitantes

O decisor deve selecionar um objetivo de referência f_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, e indicar limitantes $\underline{f}_j$ e $\overline{f}_j$ para os objetivos f_j , $j \in \{1, \dots, k\}$, $j \neq i$.

Deve-se então resolver o problema modificado, para cada i :

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f_i(x) \\ & x \in X \\ & \underline{f}_j \leq f_j(x) \leq \overline{f}_j, \forall j \neq i \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.3.2 Métodos Lexicográficos

O decisor deve listar os objetivos em ordem decrescente de prioridades $\phi = \{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}\}$, $\bigcup_{j=1}^k i_j = \{1, 2, \dots, k\}$, $i_j \neq i_l$, $j, l = 1, 2, \dots, k$, e resolver o problema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f_{i_1}(x) \\ & x \in X_1 \end{aligned} \tag{1.8}$$

em que $X_1 = X$.

Para $l = 2, \dots, k$, faz-se $X_l = \{x : x \in X_{l-1}, x = \operatorname{argmin} \{f_{i_l}\}\}$ e resolve-se o problema:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f_{i_l}(x) \\ & x \in X_l \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.4 Métodos a-Posteriori

Os métodos dessa classe são executados sem a intervenção do decisor, com o objetivo de gerar o conjunto *Pareto-ótimo* ou um subconjunto representativo de seus pontos. O decisor pode então, selecionar entre os pontos de equilíbrio encontrados, aquele que será utilizado como solução de compromisso para o problema.

1.4.1 Método das Ponderações

Utilizando os resultados dos Teoremas 7 e 8 (Seção 1.2), o *Método das Ponderações* baseia-se na resolução do Problema $P(w)$ com variação do vetor $w \in W = \{w : w \in \mathbb{R}^k, w_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^k w_i = 1\}$.

Na prática, o método é útil na geração de subconjuntos de $\operatorname{Pareto}(X)$ caracterizados pelas “preferências” indicadas pelos pesos w , sendo inviável a geração de todo o conjunto *Pareto-ótimo* através desse método.

1.4.2 Método das ϵ -Restrições

O *Método das ϵ -Restrições* baseia-se nos Teoremas 4, 5 e 6 (Seção 1.2) e é executado através da variação do vetor $\epsilon \in Y_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$ e resolução do Problema $P_i(\epsilon)$ associado.

Trata-se de uma técnica mais geral de obtenção de soluções *Pareto-ótimas*, já que não impõe restrições de convexidade como o *Método das Ponderações*. Em contrapartida, para cada problema escalar a ser resolvido, $k-1$ restrições são adicionadas ao problema original multiobjetivo.

Assim como o *Método das Ponderações*, esta técnica é utilizada na geração de subconjuntos de $Pareto(X)$.

1.4.3 Método Simplex Multiobjetivo

Para problemas lineares na forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } Cx \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

em que

$$C = \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ \vdots \\ C^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad C^i \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m \quad e \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.11}$$

os objetivos podem ser tratados simultaneamente sem o uso de técnicas de escalarização, através do *Método Simplex Multiobjetivo* (Zeleny [1974]) descrito a seguir:

Como a região factível X de (1.10) assume forma poliédrica, tem-se um número finito de pontos extremos, e consequentemente, um número finito de pontos extremos *eficientes*. Assim, o *Método Simplex Multiobjetivo* “caminha” de um ponto extremo *eficiente* a outro, até que o conjunto $Pareto(X)$ esteja caracterizado. Tal conjunto é formado por pontos extremos *eficientes* e faces *eficientes* (obtidas através de combinações convexas dos primeiros).

As iterações do método são executadas utilizando um quadro semelhante àquele do *Método Simplex* clássico (escalar):

	Z_1	Z_2	...	Z_k	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	RHS
Z_1	1	0	...	0	r_1^1	r_2^1	...	r_n^1	0	0	...	0	$\overline{Z}_1$
Z_2	0	1	...	0	r_1^2	r_2^2	...	r_n^2	0	0	...	0	$\overline{Z}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Z_k	0	0	...	1	r_1^k	r_2^k	...	r_n^k	0	0	...	0	$\overline{Z}_k$
x_{n+1}	0	0	...	0	$\overline{a}_{11}$	$\overline{a}_{12}$	...	$\overline{a}_{1n}$	1	0	...	0	$\overline{b}_1$
x_{n+2}	0	0	...	0	$\overline{a}_{21}$	$\overline{a}_{22}$	...	$\overline{a}_{2n}$	0	1	...	0	$\overline{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	0	0	...	0	$\overline{a}_{m1}$	$\overline{a}_{m2}$	...	$\overline{a}_{mn}$	0	0	...	1	$\overline{b}_m$

Tabela 1.1: Quadro Simplex Multiobjetivo.

com

$$\overline{Z}_i = C_B^i B^{-1}b, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.12)$$

$$\overline{b}_j = B^{-1}b, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.13)$$

$$\overline{a}_l = \begin{pmatrix} \overline{a}_{1l} \\ \overline{a}_{2l} \\ \vdots \\ \overline{a}_{ml} \end{pmatrix} = B^{-1}a_l, \quad l \in I_n \quad (1.14)$$

$$r_l^i = C_B^i B^{-1}a_l - C_l^i, \quad i = 1, \dots, k, \quad l \in I_n \quad (1.15)$$

em que C_B^i é o vetor de custos das variáveis básicas referente ao objetivo i , B é a matriz das variáveis básicas, C_l^i é o custo da variável não-básica l referente ao i -ésimo objetivo e I_n é o conjunto dos índices das variáveis não-básicas.

Os teoremas enunciados a seguir formam a base teórica para o algoritmo *Simplex Multiobjetivo*:

Teorema 8. (Zeleny [1974]) Dada uma solução básica factível e admitindo $\theta_l = \min \{ \frac{\overline{b}_j}{\overline{a}_{jl}}, \overline{a}_{jl} > 0 \} > 0$, para algum $l \in I_n$, se $r_l^i \leq 0, \forall i$ e $r_l^i < 0$ para algum $i, i = 1, \dots, k$, então a base atual não é eficiente.

Teorema 9. (Zeleny [1974]) Dada uma solução básica factível e assumindo $\theta_l > 0$, para algum $l \in I_n$, se $r_l^i \geq 0, \forall i$ e $r_l^i > 0$ para algum $i, i = 1, \dots, k$, então a introdução da coluna não-básica x_l na base leva a uma solução não-eficiente.

Teorema 10. (Zeleny [1974]) Dada uma solução básica factível, se existem colunas $l_1, l_2 \in I_n$ tais que $\theta_{l_1} \leq \theta_{l_2}$, $\forall i$ e $\theta_{l_1} r_{l_1}^i < \theta_{l_2} r_{l_2}^i$ para algum i , $i = 1, \dots, k$, então a solução resultante da introdução da variável x_{l_2} é dominada pela solução resultante da introdução de x_{l_1} .

Teorema 11. Dado $x^t \in X$ e seja Z_a^* o valor ótimo do problema auxiliar

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } Z_a &= \sum_{i=1}^k d_i \\ Ax &\leq b \\ Cx + d &= Cx^t \\ x &\geq 0, \quad d \geq 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

em que $d = (d_1, d_2, \dots, d_k)$, então x^t é eficiente se e somente se $Z_a^* = 0$.

Prova (Zeleny [1974]) : Considere Z_a^* e x^* factível. Então existe $d_i^* > 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$, tal que $C^i x^* + d_i^* = C^i x^t \Rightarrow C^i x^* < C^i x^t$, de forma que x^t não é eficiente.

Seja $Z_a^* = 0$, então $d_i^* = 0$, $i = 1, \dots, k$ e $\nexists x^*$ factível tal que $Cx^* < Cx^t$ e $Cx^* \neq Cx^t$, ou seja, x^t é eficiente.

Com base nos teoremas apresentados, o algoritmo *Simplex Multiobjetivo* pode ser descrito através dos seguintes passos:

PASSO 1: Encontre uma solução básica factível x^0 e faça $t = t_{efi} = 0$.

PASSO 2: Se x^t minimiza algum objetivo, ou seja, se $r_l^i \geq 0$, para todo $l \in I_n$ e algum $i \in \{1, \dots, k\}$, então x^t (ou alguma solução ótima alternativa, caso $r_l^i = 0$ para algum $l \in I_n$) é eficiente. Armazene x^t (ou a solução alternativa não dominada), faça $t_{efi} = t_{efi} + 1$ e execute o Passo 5.

PASSO 3: Se para algum $l \in I_n$, $r_l^i \leq 0$, $\forall i$ e $r_l^i < 0$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$ e a introdução da coluna l levar a uma base ainda não explorada, faça o pivoteamento (como no *Método Simplex* clássico), faça $t = t + 1$ e volte para o Passo 2. Caso contrário, execute o Passo 8.

PASSO 4: Resolva o problema auxiliar (1.16). Se x^t é eficiente, guarde x^t e faça $t_{efi} = t_{efi} + 1$.

PASSO 5: Se existe coluna dominante (Teorema 10) e a base resultante de sua introdução ainda não foi explorada, faça o pivoteamento, faça $t = t + 1$ e vá para o Passo 2. Se a base resultante já foi explorada, execute o Passo 8.

Se não existe coluna dominante e x^t não é eficiente, vá para o Passo 8.

Se não existe coluna dominante e x^t é eficiente e/ou $t_{efi} = 0$, execute o Passo 6.

PASSO 6: Se não existem colunas $r_l = [r_l^1, r_l^2, \dots, r_l^k]$, $l \in I_n$ não comparáveis com o vetor 0, execute o Passo 8.

PASSO 7: Armazene todas as colunas não exploradas que não levariam a bases dominadas.

PASSO 8: Se existem bases armazenadas não exploradas, selecione uma delas, realize o pivoteamento, faça $t = t + 1$ e execute o Passo 2. Caso contrário, encerre a execução do algoritmo.

1.5 Métodos Iterativos

1.5.1 Método de Geoffrion, Dyer e Feinberg

O *Método GDF* (Geoffrion, Dyer e Feinberg [1972]) baseia-se no conhecido *Algoritmo de Frank-Wolfe* e é destinado a problemas na forma:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } U(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \\ &x \in X \end{aligned} \quad (1.17)$$

em que U é uma função côncava crescente que reflete as preferências gerais de um decisor em relação aos k objetivos.

O *Algoritmo de Frank-Wolfe* pode ser descrito resumidamente da seguinte forma:

PASSO 1: Determine um ponto inicial $x^0 \in X$ e faça $l = 0$.

PASSO 2: Determine a solução ótima y^l do problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } \nabla_x U(f_1(x^l), f_2(x^l), \dots, f_k(x^l))y^l \\ &y^l \in X \end{aligned} \quad (1.18)$$

e calcule a direção de busca $d^l = y^l - x^l$.

PASSO 3: Determine o passo ótimo t^l na direção d^l resolvendo o problema unidimensional:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } U(f_1(x^l + t^l d^l), f_2(x^l + t^l d^l), \dots, f_k(x^l + t^l d^l)) \\ &0 \leq t^l \leq 1 \end{aligned} \quad (1.19)$$

PASSO 4: Calcule $x^{l+1} = x^l + t^l d^l$ e faça $l = l + 1$. Se algum critério de parada ¹ é obedecido, encerre a execução do algoritmo. Caso contrário, volte ao Passo 2.

¹Por exemplo, $\|x^{l+1} - x^l\| < \epsilon$, $\epsilon > 0$, ϵ suficientemente pequeno.

No que segue admite-se que a função U não é conhecida explicitamente, portanto os Passos 2 e 3 são modificados no *Algoritmo GDF*, de forma a admitir o auxílio do decisor na execução.

Como $\nabla_x U(f_1(x^l), f_2(x^l), \dots, f_k(x^l)) = \sum_{i=1}^k (\frac{\partial U}{\partial f_i})^l \nabla_x f_i(x^l)$ não é totalmente conhecido e a solução ótima y^l de (1.18) não é afetada pela divisão da função objetivo por um coeficiente positivo, pode-se encontrar y^l através do problema equivalente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & \sum_{i=1}^k w_i^l \nabla_x f_i(x^l) y^l \\ & y^l \in X \end{aligned} \quad (1.20)$$

em que $w_i^l = \frac{(\frac{\partial U}{\partial f_i})^l}{(\frac{\partial U}{\partial f_1})^l}$, $i = 1, \dots, k$.

Observe que admitiu-se, sem perda de generalidade, a função f_1 como referência e $(\frac{\partial U}{\partial f_1})^l > 0$.

Os valores w_i^l , $i = 1, \dots, k$, são calculados solicitando ao decisor que indique valores $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ correspondentes à sua medida de indiferença em relação a uma mudança nos valores das funções f_1 (referência) e f_i , $i = 1, \dots, k$, ou seja, os valores Δ_i , $i = 1, \dots, k$ devem ser tais que:

$$\begin{aligned} (f_1(x^l), f_2(x^l), \dots, f_k(x^l)) &\sim (f_1(x^l) + \Delta_1, f_2(x^l) - \Delta_2, f_3(x^l) \dots, f_k(x^l)) \\ &\vdots \\ (f_1(x^l), f_2(x^l), \dots, f_k(x^l)) &\sim (f_1(x^l) + \Delta_1, f_2(x^l), \dots, f_{i-1}(x^l), f_i(x^l) - \Delta_i, f_{i+1}(x^l), \dots, f_k(x^l)) \\ &\vdots \\ (f_1(x^l), f_2(x^l), \dots, f_k(x^l)) &\sim (f_1(x^l) + \Delta_1, f_2(x^l), \dots, f_{k-1}(x^l), f_k(x^l) - \Delta_k) \end{aligned}$$

Calculam-se então,

$$w_i^l = \frac{\Delta_1}{\Delta_i}, \quad i = 1, \dots, k \quad (1.21)$$

Como a função U não é totalmente conhecida, o passo ótimo t^l na direção d^l deve ser indicado pelo decisor ao comparar os valores de $f(x^l + t^l d^l)$, $t^l \in [0, 1]$ através de gráficos ou tabelas.

O algoritmo segue até que um critério de parada seja atingido.

1.5.2 STEM - STEP Method

O *Método STEM* (Benayoun, Montgolfier & Tergny [1971]) é um procedimento iterativo (o decisor indica suas preferências durante a execução do algoritmo) direcionado à resolução de problemas de otimização multiobjetivo lineares:

$$\text{Maximizar } F(x) = (C^1(x), C^2(x), \dots, C^k(x)) \quad (1.22)$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

em que $C^j(x) = \sum_{i=1}^n c_i^j x_i$, $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$.

O algoritmo é iniciado com a resolução de k problemas de otimização escalares, formados pelo isolamento de cada um dos objetivos, a fim de encontrar seus valores utópicos M^j e pessimistas m^j , $j = 1, \dots, k$:

$$M^j = C^j(x^j), \text{ em que } x^j = \operatorname{argmax} C^j(x), Ax \leq b, x \geq 0 \quad (1.23)$$

$$m^j = \min \{C^j(x^i)\}, \quad 1 \leq i \leq k \quad (1.24)$$

Seja $F^* \in \mathbb{R}^k$ o vetor formado pelos valores M^j . Calculam-se os pesos π^j para cada um dos objetivos:

$$\pi^j = \frac{\alpha^j}{\sum_j \alpha^j} \quad (1.25)$$

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{M^j - m^j}{M^j} \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_i^n (C_i^j)^2}} \right), & \text{se } M^j \geq 0. \\ \frac{m^j - M^j}{m^j} \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_i^n (C_i^j)^2}} \right), & \text{se } M^j < 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

de forma que o peso π^j é tanto maior quanto for a variação de $C^j(x)$ em relação ao ótimo, ao se variar a solução x .

Resolve-se então o problema auxiliar:

$$\text{Minimizar } \lambda \quad (1.27)$$

$$\lambda \geq M^j - C^j(x)\pi^j, \quad j = 1, \dots, k$$

$$x \in D^l, \quad \lambda \geq 0.$$

sendo D^l o conjunto dos pontos factíveis da iteração l . Na primeira iteração, utiliza-se o conjunto factível original.

Solicita-se ao decisor classificar cada um dos objetivos como satisfatório ou insatisfatório, ao comparar a solução encontrada $F(x^l)$ em (1.27) com o vetor de soluções utópicas F^* . Se todos os objetivos $C^j(x^l)$ forem satisfatórios, o algoritmo é encerrado e x^l é admitida como solução de compromisso. Caso contrário, o decisor deve indicar um valor de relaxamento ΔC^j para um ou mais objetivos C^j , $j \in \{1, \dots, k\}$, classificados como satisfatórios, a fim de que se possa melhorar os valores dos outros objetivos.

Em consequência, a região factível para a próxima iteração é modificada de forma a incorporar as indicações do decisor:

$$D^{l+1} = \begin{cases} D^l \\ C^j(x) \geq C^j(x^l) - \Delta C^j, \text{ se } j \in S \\ C^j(x) \geq C^j(x^l), \text{ se } j \in I \\ S \cap I = \emptyset \end{cases} \quad (1.28)$$

em que S e I são os conjuntos dos índices dos objetivos satisfatórios e insatisfatórios, respectivamente.

Os pesos $\pi^j \in S$ são igualados a zero e o algoritmo retorna ao cálculo dos pesos para os objetivos insatisfatórios e segue até que todos os objetivos sejam satisfatórios ou se conclua que o problema não admite solução de compromisso.

Capítulo 2

Matemática Fuzzy

2.1 Conjuntos Fuzzy

Um conjunto é dito ser fuzzy quando sua definição é dada através de características subjetivas ou suas fronteiras não podem ser identificadas com segurança, impossibilitando uma clara definição matemática. Exemplos são os conjuntos caracterizados por expressões como: “mulheres bonitas”, “temperaturas altas”, “números próximos de 2”, “números muito maiores que 5”, etc. Dessa forma, o conceito de pertinência de um elemento x em um conjunto $\tilde{A}$ com essas características torna-se nebulosa, sendo caracterizada por uma graduação dada por uma função de pertinência.

Definição 1. Seja X um conjunto universo e x um elemento desse conjunto. Um conjunto fuzzy $\tilde{A}$ é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}$ que associa a cada ponto $x \in X$ um valor real no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \{x / \mu_{\tilde{A}}(x)\}, \\ \mu_{\tilde{A}}(x) : X &\rightarrow [0, 1]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

A função $\mu_{\tilde{A}}(x)$ indica o grau de pertinência de x em $\tilde{A}$, de forma que quanto mais próximo esse valor esteja de 1, maior a pertinência do elemento.

Para os exemplos de funções de pertinência abaixo, admite-se que m é um valor modal, a é um limite inferior e b é um limite superior de aplicação.

(1) Função Triangular :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } x \in [a, m] \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{se } x \in [m, b] \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases} \quad (2.2)$$

(2) Função *Gamma* :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a \\ \frac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2}, & \text{se } x > a \end{cases} \quad k > 0. \quad (2.3)$$

(3) Função Gaussiana :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \exp\{-k(x-m)^2\}, \quad k > 1. \quad (2.4)$$

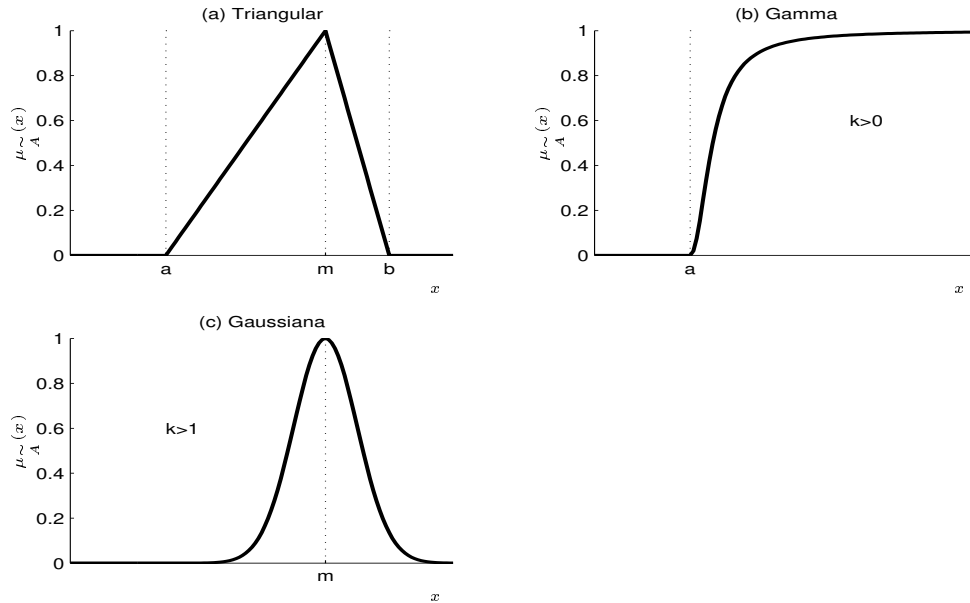


Figura 2.1: Exemplos de funções de pertinência.

A forma e os parâmetros da função de pertinência mais adequados para caracterizar certo conjunto fuzzy são dependentes do contexto da aplicação, mas existem algumas técnicas gerais sugeridas para a determinação de tais funções. Para determinar os parâmetros da função,

a técnica de *Aproximação Horizontal* utiliza informações baseadas na frequência relativa dos resultados de um dado experimento. Por exemplo, solicita-se a um grupo de indivíduos que classifiquem, através dos termos “*baixa*”, “*média*” ou “*alta*”, um conjunto discreto de temperaturas. Baseado na frequência de resposta para cada uma das temperaturas, pode-se determinar as funções de pertinências com a normalização dos resultados obtidos e a geração de valores intermediários através de interpolação ou ajuste de curvas.

Com o método de *Aproximação Vertical*, a partir de uma dada distribuição de probabilidade, é possível identificar o conjunto $\tilde{A}$ dos pontos cuja probabilidade é maior ou igual a um dado valor $p_{\sim}(x) \in [0, 1]$. A função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}$ pode ser definida como a curva formada pelos pontos $(x, p(x))$ tais que $x \in \tilde{A}$.

Podem-se citar ainda técnicas baseadas em ajustes de curvas que, conhecidos alguns pontos $(x_i, \mu(x_i))$, definem os parâmetros da função de pertinência de forma a obter o menor erro em relação às informações conhecidas. Um bom exemplo desse tipo de enfoque é dado em (Arslan & Kaya [2001]), que determinam os parâmetros de funções de pertinência triangulares através de ajustes com algoritmos genéticos.

As propriedades e operações descritas abaixo para conjuntos fuzzy são extensões daquelas aplicadas a conjuntos ordinários ¹. Sejam $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ conjuntos fuzzy:

Conjunto vazio : $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \quad \forall x \in X;$

Igualdade de conjuntos : $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall x \in X;$

Complemento ² : $\overline{\mu_{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x);$

Inclusão : $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x);$

União : $(\mu_{\tilde{A}} \cup \mu_{\tilde{B}})(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\};$

Intersecção : $(\mu_{\tilde{A}} \cap \mu_{\tilde{B}})(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\};$

Da mesma forma, continuam válidas no caso de conjuntos fuzzy, as propriedades comutativa, associativa, distributiva, transitiva, involutiva, idempotência e Leis de Morgan.

Definição 2. Um conjunto fuzzy $\tilde{A}$ é dito ser *normal* se $\sup\{\mu_{\tilde{A}}(x)\} = 1$. Caso contrário, o conjunto é denominado *subnormal*.

¹Também serão utilizados os termos *crisp* ou *não-fuzzy*.

²Deve-se ressaltar que em geral, $\tilde{A} \cap \tilde{\tilde{A}} \neq \emptyset$ e $\tilde{A} \cup \tilde{\tilde{A}} \neq X$.

Definição 3. O conjunto *suporte* de $\tilde{A}$ é dado por:

$$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}. \quad (2.5)$$

Definição 4. Núcleo (*core*) do conjunto fuzzy $\tilde{A}$:

$$Core(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}. \quad (2.6)$$

Definição 5. A *cardinalidade* de $\tilde{A}$ é dada por ¹:

$$Card(\tilde{A}) = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x). \quad (2.7)$$

Definição 6. A *possibilidade* de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ é dada por:

$$Poss(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup_{x \in X} \{Min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]\}. \quad (2.8)$$

$Poss(\tilde{A}, \tilde{B})$ gera uma idéia de sobreposição dos conjuntos $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$.

Definição 7. O conjunto fuzzy $\tilde{A}$ é convexo, se e somente se:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}. \\ \forall x_1, x_2 \in X, \quad \lambda &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

De forma análoga, um conjunto fuzzy $\tilde{B}$ é côncavo, se e somente se:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\leq \max\{\mu_{\tilde{B}}(x_1), \mu_{\tilde{B}}(x_2)\} \\ \forall x_1, x_2 \in X, \quad \lambda &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definição 8. A combinação convexa dos conjuntos fuzzy $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{\Lambda}$, é dada pela relação :

$$\mu_{(\tilde{A}, \tilde{B}; \tilde{\Lambda})}(x) = \mu_{\tilde{\Lambda}}(x) \mu_{\tilde{A}}(x) + [1 - \mu_{\tilde{\Lambda}}(x)] \mu_{\tilde{B}}(x), \quad x \in X. \quad (2.11)$$

¹No caso contínuo, $Card(\tilde{A}) = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) dx$.

Uma forma alternativa de descrever um conjunto fuzzy é através do *Teorema da Representação*, que afirma que qualquer conjunto fuzzy pode ser reconstruído a partir da sobreposição de conjuntos denominados α -cortes.

Definição 9. Um α -corte de $\tilde{A}$ é um conjunto composto pelos pontos cuja pertinência excede um valor $\alpha \in [0, 1]$:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad (2.12)$$

de modo que se $\alpha_1 > \alpha_2$, então $\tilde{A}_{\alpha_1} \subset \tilde{A}_{\alpha_2}$.

Teorema da Representação. Um conjunto fuzzy $\tilde{A}$ pode ser decomposto em uma família de α -cortes, ou seja:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} (\alpha \mu_{\tilde{A}_\alpha}), \quad (2.13)$$

ou ainda,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \{\alpha \mu_{\tilde{A}_\alpha}\}. \quad (2.14)$$

O teorema tem aplicação direta na parametrização de restrições em problemas de otimização fuzzy (veja Seção 2.5).

Definição 10. Uma *norma triangular* (*norma-t*) é uma operação binária $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo propriedades de comutatividade, associatividade, monotonicidade ($x \leq y$ e $w \leq z \Rightarrow xtw \leq wtz$) e as seguintes condições de contorno:

$$0tx = 0 \text{ e } 1tx = x \quad (2.15)$$

Uma *co-norma* (*norma-s*) deve apresentar as mesmas propriedades de uma norma-t, com exceção das condições de contorno, dadas a seguir:

$$0sx = x \text{ e } 1sx = 1 \quad (2.16)$$

A intersecção e a união são exemplos de norma-t e norma-s, respectivamente.

O princípio enunciado a seguir permite caracterizar a função de pertinência de um conjunto fuzzy resultante de uma transformação aplicada em outros conjuntos fuzzy:

Princípio da Extensão. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ e Y conjuntos universos. Considere também o produto cartesiano $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e os conjuntos fuzzy $\tilde{A}_i$ em X_i com funções de pertinência $\mu_{\tilde{A}_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Se f é uma aplicação de X em Y , gerando o conjunto fuzzy $\tilde{B} \subset Y$, então :

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{B}}(y) &= \sup_x \{ \text{Min}[\mu_{\tilde{A}_1}, \mu_{\tilde{A}_2}, \dots, \mu_{\tilde{A}_n}] \} \\ y &= f(x) \\ x &\in X \end{aligned} \quad (2.17)$$

O *Princípio da Extensão* tem grande utilidade na teoria fuzzy e será revisto por exemplo, na teoria de funções fuzzy e na determinação das funções de pertinência de números resultantes de operações com números fuzzy.

As definições e resultados indicados sobre conjuntos fuzzy são baseados em (Zadeh [1965]). Outras informações sobre determinação de funções de pertinência podem ser obtidos em (Türk-sen [1991], Pedrycz & Gomide [1998] e Bilgiç & Türksen [1999]).

2.2 Relações Fuzzy

O conceito de relação em conjuntos ordinários pode ser estendido facilmente para o caso dos conjuntos fuzzy:

Definição 11. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ conjuntos universos. Uma relação fuzzy $\tilde{R}$ é definida como um conjunto fuzzy no espaço do produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Assim,

$$\mu_{\tilde{R}} : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow [0, 1]^1, \quad (2.18)$$

de forma que, dados $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$, se $\mu_{\tilde{R}}(x_1, \dots, x_n) = 1$ diz-se que $x_1, \dots, x_n$ estão totalmente relacionados segundo $\tilde{R}$ e se $\mu_{\tilde{R}}(x_1, \dots, x_n) = 0$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ não apresentam relação de acordo com $\tilde{R}$.

Pode-se então, através do uso de relações fuzzy, representar matematicamente expressões na forma: “ x e y aproximadamente iguais”, “ x muito maior que y ”, etc.

¹Nos casos discretos, a relação fuzzy $\tilde{R}$ pode ser representada por uma matriz ou um grafo direcionado.

Sejam $\tilde{R}$ e $\tilde{W}$ duas relações fuzzy definidas no espaço $X \times Y$, então são válidas as seguintes relações:

$$\text{União : } (\tilde{R} \cup \tilde{W})(x, y) = \tilde{R}(x, y) s \tilde{W}(x, y);$$

$$\text{Intersecção : } (\tilde{R} \cap \tilde{W})(x, y) = \tilde{R}(x, y) t \tilde{W}(x, y);$$

$$\text{Complemento : } \bar{\mu}_{\tilde{R}}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y);$$

$$\text{Inclusão : } \tilde{R} \subset \tilde{W} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{W}}(x, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y;$$

$$\text{Igualdade : } \tilde{R} = \tilde{W} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{W}}(x, y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Definição 12. Uma relação fuzzy $\tilde{G}(x, y)$, determinada pela composição de duas relações fuzzy $\tilde{R}(x, z)$ e $\tilde{W}(z, y)$, denotada por $\tilde{R} \circ \tilde{W}(x, y)$, é dada através de uma das seguintes formas :

$$\tilde{G}(x, y) = \sup_{z \in Z} [\tilde{R}(x, z) t \tilde{W}(z, y)], \quad (2.19)$$

ou

$$\tilde{G}(x, y) = \inf_{z \in Z} [\tilde{R}(x, z) s \tilde{W}(z, y)]. \quad (2.20)$$

2.3 Números Fuzzy

Um número fuzzy $\tilde{a}$ é uma quantidade com valor impreciso, sendo utilizado na representação de expressões na forma “quase 50”, “próximo de 2”, etc. Usualmente, um número fuzzy $\tilde{a}$ é representado por uma notação do tipo $\tilde{a} = [\underline{a}, a_0, \bar{a}]$, sendo a_0 o valor modal, $\underline{a}$ e $\bar{a}$ os limitantes inferiores e superiores do espalhamento, respectivamente. Associa-se a cada número fuzzy uma função $\mu_{\tilde{a}}(x)$ que indica o grau de pertinência dos valores x contidos em um domínio X (Figura 2.2).

Uma outra forma de representação de números fuzzy muito utilizada é a notação tipo LR :

Definição 13. Um número fuzzy $\tilde{a}$ é dito ser do tipo LR , denotado por $\tilde{a} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$, se:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}), & \text{para } x \leq m, \alpha > 0 \\ R(\frac{x-m}{\beta}), & \text{para } x \geq m, \beta > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

em que R (*right*) e L (*left*) denotam a direção do desvio em relação ao valor médio m de $\tilde{a}$. Os valores α e β são denominados espalhamento à esquerda e à direita, respectivamente. Assim, por exemplo, pode-se definir números fuzzy trapezoidais $\tilde{a} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$ através de:

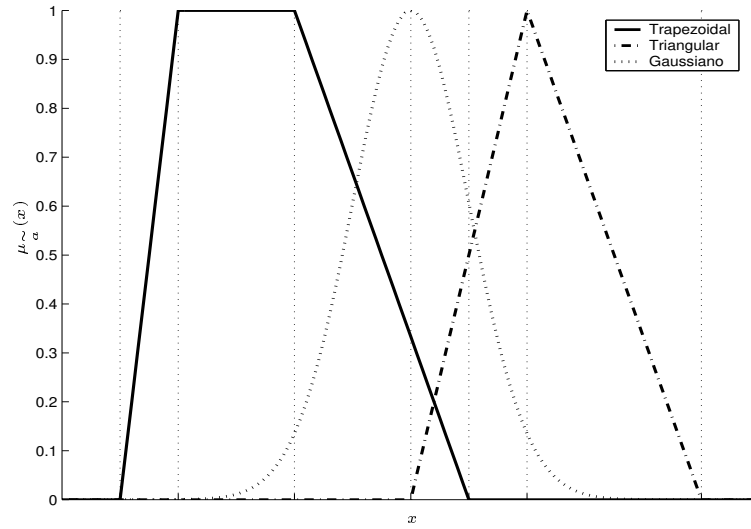


Figura 2.2: Exemplos de funções de pertinência de números fuzzy.

$$\mu_a(x) = \begin{cases} L(\frac{m_1-x}{\alpha}), & \text{para } x \leq m, \alpha > 0 \\ R(\frac{x-m_2}{\beta}), & \text{para } x \geq m, \beta > 0 \\ 1, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.22)$$

Para as operações definidas abaixo, considere $\tilde{a} = [\underline{a}, a_0, \bar{a}]$ e $\tilde{b} = [\underline{b}, b_0, \bar{b}]$ números fuzzy quaisquer:

Adição : $\tilde{a} + \tilde{b} = [\underline{a} + \underline{b}, a_0 + b_0, \bar{a} + \bar{b}]$;

Subtração : $\tilde{a} - \tilde{b} = [\underline{a} - \bar{b}, a_0 - b_0, \bar{a} - \underline{b}]$;

Multiplicação : $\tilde{a} \tilde{b} = [\text{Min}\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, a_0 b_0, \text{Max}\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}]$;

Divisão : $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = [\text{Min}\{\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\}, \frac{a_0}{b_0}, \text{Max}\{\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\}]$;

Inversa : $\tilde{a}^{-1} = [\text{Min}\{\frac{1}{\underline{a}}, \frac{1}{\bar{a}}\}, \frac{1}{a_0}, \text{Max}\{\frac{1}{\underline{a}}, \frac{1}{\bar{a}}\}]$. Note que $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \tilde{a} \tilde{b}^{-1}$.

A determinação da função de pertinência do número resultante das operações descritas acima é realizada com base no *Princípio da Extensão*, de forma que :

$$\begin{aligned}\tilde{c} = f(\tilde{a}, \tilde{b}) \Rightarrow \mu_{\tilde{c}}(z) &= \sup_{x,y} \{ \min[\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)] \} \\ x &\in X, y \in Y \\ z &= f(x, y).\end{aligned}\tag{2.23}$$

A comparação de números fuzzy $\tilde{a}_i$, $i = 1, \dots, n$ é geralmente realizada utilizando uma das técnicas abaixo:

(i) Com o auxílio de funções $F(\tilde{a})$, denominadas *índices*, que fazem o mapeamento de cada número fuzzy na reta real $\Re$ utilizando, na extensa maioria dos casos, propriedades geométricas da função de pertinência do número fuzzy;

(ii) Determinação de um conjunto fuzzy de alternativas $\tilde{D} = \{i/\mu_D(i), i = 1, \dots, n\}$, em que $\mu_D(i) \in [0, 1]$ indica o grau em que o i -ésimo número fuzzy pode ser considerado a melhor alternativa.

Em (Yager [1981]) a ordenação de subconjuntos fuzzy no intervalo $[0, 1]$ é realizada com a aplicação da *função índice* abaixo, podendo ser estendida facilmente ao caso da comparação de números fuzzy:

$$F(\tilde{a}) = \int_0^{\alpha_{max}} M(\tilde{a}_\alpha) d\alpha, \tag{2.24}$$

em que α_{max} é o valor máximo de pertinência do número fuzzy $\tilde{a}$ e $M(\tilde{a}_\alpha)$ é o valor médio do α -corte de $\tilde{a}$: $\tilde{a}_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$.

Perceba que a aplicação do *índice* de Yager em um número *crisp* a resulta no próprio número:

$$\alpha_{max} = 1 \tag{2.25}$$

$$a_\alpha = \{a\}, \quad \forall \alpha \tag{2.26}$$

$$M(\tilde{a}_\alpha) = a, \tag{2.27}$$

e então

$$F(a) = \int_0^1 a d\alpha = a. \tag{2.28}$$

Em (Peneva & Popchev [1998]), números fuzzy triangulares ou trapezoidais $\tilde{a}_i = [a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4]$, $i = 1, \dots, n$, na forma:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \in (-\infty, a_i^1] \\ g_i(x), & \text{para } x \in [a_i^1, a_i^2] \\ 1, & \text{para } x \in [a_i^2, a_i^3] \\ h_i(x), & \text{para } x \in [a_i^3, a_i^4] \\ 0, & \text{para } x \in [a_i^4, \infty) \end{cases} \quad (2.29)$$

$g_i(x)$ função linear crescente
 $h_i(x)$ função linear decrescente

podem ser ordenados de acordo com o índice $F(\tilde{a}_i)$:

$$F(\tilde{a}_i) = kF_1(\tilde{a}_i) + (1 - k)F_2(\tilde{a}_i), \quad k \in [0, 1]^1 \quad (2.30)$$

em que

$$F_1(\tilde{a}_i) = a_i^1 + \frac{(a_i^4 - a_i^1) + (a_i^3 - a_i^2)}{2} \frac{1}{\sqrt{(a_i^4 - a_i^3)^2 + 1}} \quad (2.31)$$

$$F_2(\tilde{a}_i) = a_i^4 - \frac{(a_i^4 - a_i^1) + (a_i^3 - a_i^2)}{2} \frac{1}{\sqrt{(a_i^2 - a_i^1)^2 + 1}}. \quad (2.32)$$

O valor do índice $F_1(\tilde{a}_i)$ é tanto maior quanto forem o limite esquerdo a_i^1 e a área do trapézio/triângulo. Para dois números fuzzy $\tilde{a}_1$ e $\tilde{a}_2$ com $a_1^1 = a_2^1$ e mesma área, a distinção é feita pelo seno do ângulo β (Figura 2.3(a)), de forma que quanto maior o ângulo, maior o valor do índice associado ao número fuzzy. Na Figura 2.3(b), $\tilde{a}_2$ é maior que $\tilde{a}_1$, segundo esse índice.

A função índice $F_2(\tilde{a}_i)$ pode ser entendida de forma análoga. A diferença entre os dois índices $F_1(\tilde{a}_i)$ e $F_2(\tilde{a}_i)$ torna-se clara ao comparar um número fuzzy triangular $\tilde{a}_3$ e um trapezoidal $\tilde{a}_4$ com mesmos limitantes (Figura 2.3(c)): o número $\tilde{a}_4$ é maior segundo o índice F_1 e $\tilde{a}_3$ segundo F_2 . Assim, $F(\tilde{a}_i)$ é uma ponderação entre $F_1(\tilde{a}_i)$ e $F_2(\tilde{a}_i)$.

Em (Kim & Park [1990])², números fuzzy $\tilde{a}_i$, $i = 1, \dots, n$ são ordenados através da obtenção do conjunto fuzzy de alternativas $\tilde{D} = \{i/\mu_D(i)\}$ com

$$\mu_{\tilde{D}}(i) = k\mu_{\tilde{D}_o}(i) + (1 - k)\mu_{\tilde{D}_p}(i), \quad k \in [0, 1], \quad (2.33)$$

$$\mu_{\tilde{D}_o}(i) = Poss(\tilde{a}_i, \tilde{G}_{max}), \quad (2.34)$$

$$\mu_{\tilde{D}_p}(i) = 1 - Poss(\tilde{a}_i, \tilde{G}_{min}), \quad (2.35)$$

¹Em (Peneva & Popchev[1998]) são utilizados os valores $k = 0, 0.5$ e 1 .

²Em (Kim & Park [1990]) são utilizados os valores $k = 0, 0.5$ e 1 .

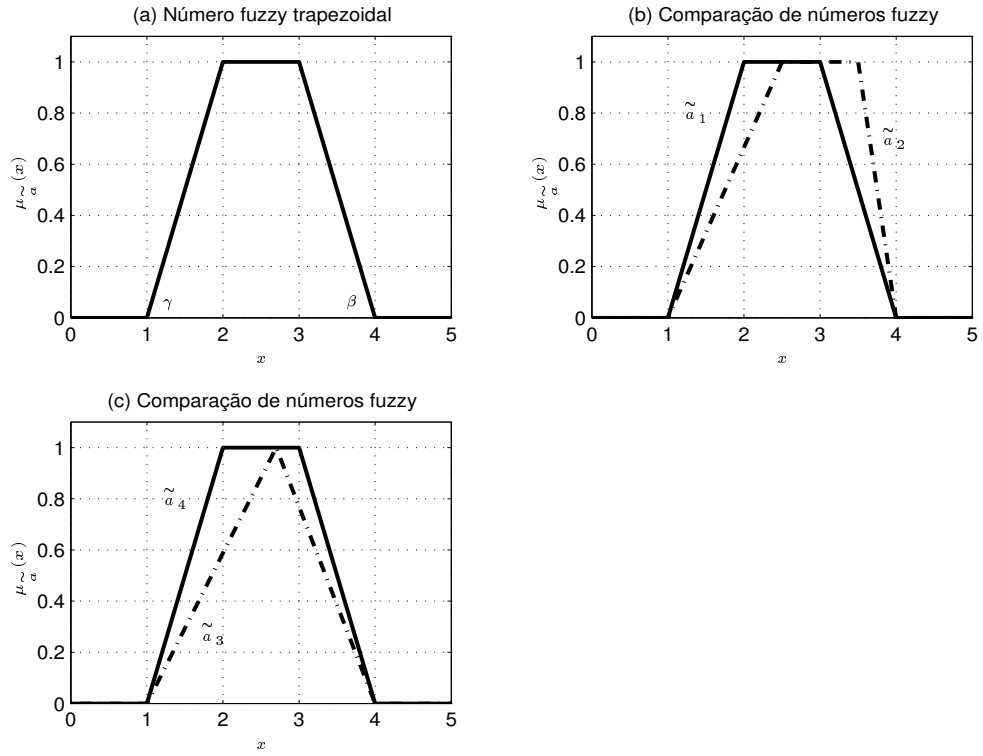


Figura 2.3: Comparação de números fuzzy.

em que

$$\tilde{G}_{max} = \{x / \mu_{\tilde{G}_{max}}(x)\}, \quad x \in Y = \text{Supp}\{\cup \tilde{a}_i\}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{G}_{min} = \{x / \mu_{\tilde{G}_{min}}(x)\}, \quad x \in Y = \text{Supp}\{\cup \tilde{a}_i\}, \quad (2.37)$$

e

$$\mu_{\tilde{G}_{max}}(x) = \frac{x - \inf Y}{\sup Y - \inf Y}, \quad (2.38)$$

$$\mu_{\tilde{G}_{min}}(x) = \frac{\sup Y - x}{\sup Y - \inf Y}. \quad (2.39)$$

Percebe-se que $\mu_{\tilde{G}_{max}}$ e $\mu_{\tilde{G}_{min}}$ indicam o grau de aproximação de $x \in Y$ aos valores de $\sup Y$ e $\inf Y$, respectivamente. Assim, $\mu_{\tilde{D}_o}(i)$ gradua a possibilidade de $\tilde{a}_i$ ser máximo e $\mu_{\tilde{D}_p}(i)$ a possibilidade de $\tilde{a}_i$ não ser mínimo. A Figura 2.4 ilustra a aplicação do índice descrito.

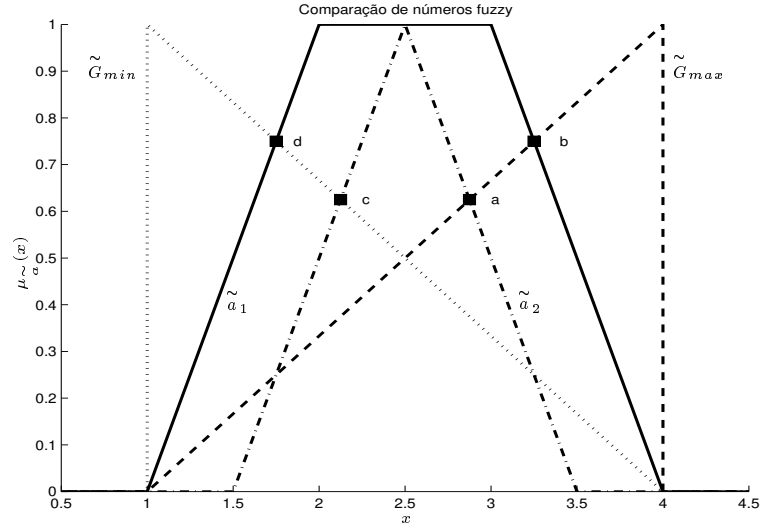


Figura 2.4: Aplicação da *função índice* descrita em (Kim & Park [1990]): $a = \mu_{\tilde{D}_o}^{\sim}(1)$, $b = \mu_{\tilde{D}_o}^{\sim}(2)$, $c = \mu_{\tilde{D}_p}^{\sim}(1)$ e $d = \mu_{\tilde{D}_p}^{\sim}(2)$.

2.4 Funções Fuzzy

Os conceitos relacionados a funções fuzzy podem ser resumidamente descritos em três tipos de enfoques:

- (i) Funções não-fuzzy com argumentos fuzzy;
- (ii) Funções com parâmetros fuzzy e variáveis não-fuzzy;
- (iii) Funções com definições fuzzy.

Sendo $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ conjuntos fuzzy, o primeiro enfoque considera funções ordinárias na forma

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \tilde{X}, \quad \tilde{y} \in \tilde{Y}, \quad (2.40)$$

podendo-se aplicar o *Princípio da Extensão* :

$$\mu_{f(\tilde{x})}^{\sim}(\tilde{y}) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(\tilde{y})} \mu_{\tilde{X}}^{\sim}(x), & \text{se } f^{-1}(\tilde{y}) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(\tilde{y}) = \emptyset \end{cases} \quad (2.41)$$

Por exemplo,

$$\tilde{X} = \{-1/0.2, 0/0.9, 1/0.7, 2/0.5\} \text{ e } f(\tilde{x}) = 2\tilde{x}^2 - 1 \Rightarrow \tilde{Y} = \{1/0.7, -1/0.9, 7/0.5\}.$$

Definição 14. Sejam X e Y conjuntos universos, $f : X \rightarrow Y$ uma função ordinária qualquer e $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ conjuntos fuzzy em X e Y , respectivamente. Diz-se que f é uma função com restrições em um domínio fuzzy $\tilde{A}$ e contra-domínio fuzzy $\tilde{B}$ se, e somente se

$$\forall x \in X, \mu_{\tilde{B}}(f(x)) \geq \mu_{\tilde{A}}(x). \quad (2.42)$$

Funções com parâmetros fuzzy $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ realizam o mapeamento de variáveis de um domínio *crisp* X em um conjunto imagem fuzzy $\tilde{Y}$ e podem ser tratadas como um conjunto de operações com números fuzzy. Por exemplo, para $\tilde{y} = \tilde{f}(x) = \tilde{a}x + \tilde{b}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \{Min[\underline{ax}, \bar{ax}], a_0x, Max[\underline{ax}, \bar{ax}]\} + \{\underline{b}, b_0, \bar{b}\} = \\ &= \{Min[\underline{ax}, \bar{ax}] + \underline{b}, a_0x + b_0, Max[\underline{ax}, \bar{ax}] + \bar{b}\}. \end{aligned}$$

O último enfoque trata de funções com definições dadas por conjuntos fuzzy de funções ordinárias :

$$\tilde{f}: X \rightarrow \tilde{Y} = \{(f_i/\mu_{\tilde{f}}(f_i)) | f_i : X \rightarrow Y, i = 1, \dots, p\}, \quad (2.43)$$

podendo-se novamente utilizar o *Princípio da Extensão*. Para exemplificar, considere:

$$X = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$\tilde{f} = \{x/0.3, x^2/0.8, x^3/0.5\}.$$

$$\text{De } f_1 \text{ vem que } \tilde{f} = \{-1/0.3, 0/0.3, 1/0.3, 2/0.3\}.$$

$$\text{De } f_2 \text{ vem que } \tilde{f} = \{1/0.8, 0/0.8, 1/0.8, 4/0.8\}.$$

$$\text{De } f_3 \text{ vem que } \tilde{f} = \{-1/0.5, 0/0.5, 1/0.5, 8/0.5\}.$$

e então :

$$\tilde{f}(-1) = \{-1/0.5, 1/0.8\}$$

$$\tilde{f}(0) = \{0/0.8\}$$

$$\tilde{f}(1) = \{1/0.8\}$$

$$\tilde{f}(2) = \{2/0.3, 4/0.8, 8/0.5\}.$$

2.5 Otimização Fuzzy

De uma maneira geral, a otimização fuzzy pode ser entendida como uma extensão do problema clássico de otimização :

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &g_i(x) \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.44}$$

com a propriedade de melhor caracterizar os processos reais, dado que os métodos dessa classe incorporam as quantidades imprecisas envolvidas no problema a ser modelado e resolvido.

Diversos enfoques são conhecidos e estudados na literatura, de acordo com o ponto em que se encontram as imprecisões: restrições fuzzy, funções fuzzy, coeficientes fuzzy nos objetivos e restrições, etc. O restante deste capítulo é dedicado a apresentar esses diferentes enfoques e alguns métodos conhecidos de resolução.

2.5.1 Otimização com Restrições Fuzzy

O problema geral de otimização com restrições fuzzy pode ser formulado da seguinte forma :

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &g_i(x) \tilde{\geq} b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.45}$$

modificando o conceito usual de factibilidade e a forma de entender cada restrição. Em um problema fuzzy como (2.45), as restrições são resultado da modelagem de expressões como “ b_i essencialmente menor ou igual a $g_i(x)$ ”, “*desejável que $g_i(x)$ seja maior ou igual a b_i* ”, etc; de forma a permitir uma violação d_i , $i = 1, \dots, m$ em cada restrição, acarretando a existência de pontos com diferentes níveis de factibilidade, calculados a partir de funções de pertinência do tipo:

$$\mu_{g_i(x)} = \begin{cases} 1, & \text{se } g_i(x) \geq b_i \\ \frac{g_i(x) - b_i + d_i}{d_i}, & \text{se } b_i - d_i \leq g_i(x) < b_i \\ 0, & \text{se } g_i(x) < b_i - d_i \end{cases} \tag{2.46}$$

Em (Zimmerman [1976]) é apresentado um procedimento para a resolução de (2.45) baseado no *Princípio de Decisão Fuzzy* (Bellman & Zadeh [1970]), enunciado a seguir:

Princípio de Bellman e Zadeh para decisão fuzzy. Considere um conjunto X de infinitas alternativas a serem avaliadas por k diferentes objetivos. Seja $C_j(x) \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, k$ uma função de pertinência que indica o nível de satisfação do j -ésimo objetivo pelo ponto x , então o nível $D(x)$ de satisfação de todos os objetivos pelo ponto x é dado por :

$$D(x) = \text{Min}\{C_1(x), C_2(x), \dots, C_k(x)\}, \quad (2.47)$$

de forma que a melhor alternativa x^* é determinada por

$$D(x^*) = \text{Max}_{x \in X} D(x). \quad (2.48)$$

O algoritmo é iniciado com a escolha de um nível de aspiração b_0 para o objetivo, transformando-o em uma restrição ¹ do tipo:

$$f(x) \leq b_0 \quad (2.49)$$

O Problema (2.45) pode então ser transformado em:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } D(x) &= \text{Min}\{\mu_{g_1(x)}, \mu_{g_2(x)}, \dots, \mu_{g_m(x)}\} \\ f(x) &\leq b_0 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \lambda & \\ f(x) &\leq b_0 \\ 1 + \frac{g_i(x) - b_i}{d_i} &\geq \lambda, \quad i = 1, \dots, m \\ \lambda &\in [0, 1] \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

de forma que os resultados x^* e λ^* representam a melhor solução de compromisso e seu nível de satisfação, respectivamente.

Em (Verdegay [1982]), assume-se que as restrições fuzzy do Problema (2.45) são lineares:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \gtrsim b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.52)$$

¹Em (Zimmerman [1976]) a função objetivo é transformada em uma restrição fuzzy.

e suas funções de pertinência $\mu_{g_i(x)}$, $i = 1, \dots, m$ são contínuas e estritamente monotônicas.

Utilizando o *Teorema da Representação*, o conjunto C das restrições pode ser caracterizado por:

$$C = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha C_\alpha, \quad (2.53)$$

em que C_α são os α -cortes do conjunto de restrições:

$$C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | \mu_{g_i(x)} \geq \alpha, \ i = 1, \dots, m\}, \quad \alpha \in [0, 1], \quad (2.54)$$

mas

$$\begin{aligned} \mu_{g_i(x)} &= 1 + \frac{\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) - b_i}{d_i} \geq \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\geq b_i - (1 - \alpha)d_i \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq \mu_{G_i}^{-1}(\alpha), \end{aligned} \quad (2.55)$$

logo,

$$C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq \mu_{G_i}^{-1}(\alpha), \ i = 1, \dots, m\}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (2.56)$$

Assim, considerando somente restrições lineares, a solução de (2.45) pode ser obtida através do seguinte problema paramétrico :

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &x \geq 0 \\ &x \in C_\alpha, \\ &\alpha \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.57)$$

ou mais claramente,

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i - (1 - \alpha)d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ &\alpha \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

2.5.2 Otimização com Objetivo e Restrições Fuzzy

Trata-se de uma generalização do Problema (2.45) na forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & g_i(x) \gtrsim b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.59}$$

no qual pode-se novamente utilizar a técnica descrita em (Zimmerman [1976]), mas transformando a função objetivo de (2.59) em mais uma restrição fuzzy :

$$f(x) \lesssim b_0 \tag{2.60}$$

Assim como no caso das restrições, define-se uma função de pertinência para valorar o nível de satisfação do objetivo em relação à aspiração estabelecida:

$$\mu_{f(x)} = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x) \leq b_0 \\ \frac{d_0 - f(x) + b_0}{d_0}, & \text{se } b_0 < f(x) \leq b_0 + d_0 \\ 0, & \text{se } f(x) > b_0 + d_0 \end{cases} \tag{2.61}$$

em que $d_0 > 0$ representa um desvio permitido no nível de aspiração.

O Problema (2.59) é transformado então no seguinte problema de maximização do nível de satisfação :

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } \lambda \\ & 1 - \frac{f(x) - b_0}{d_0} \geq \lambda \\ & 1 + \frac{g_i(x) - b_i}{d_i} \geq \lambda, \quad i = 1, \dots, m \\ & \lambda \in [0, 1] \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

do qual pode-se obter a solução de compromisso x^* e o nível de satisfação λ^* em relação às restrições e à aspiração para o objetivo.

2.5.3 Otimização com Coeficientes Fuzzy na Função Objetivo

Diferente dos dois casos anteriores, considera-se aqui um problema com restrições não-fuzzy e função objetivo linear com coeficientes fuzzy, o que pode representar problemas reais de decisão baseados em custos imprecisos: compras, localização, etc. A formulação matemática geral para esse tipo de problema é descrita abaixo:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 + \dots + \tilde{c}_n x_n \\
& g_i(x) \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Admite-se que os coeficientes $\tilde{c}_j = [\underline{c}_j, c_j, \bar{c}_j]$, $j = 1, \dots, n$, são números fuzzy com função de pertinência:

$$\mu_{\tilde{c}_j(\theta_j)} = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{c}_j \leq \theta_j \text{ ou } \theta_j \leq \underline{c}_j \\ \underline{h}_{c_j}(\theta_j), & \text{se } \underline{c}_j \leq \theta_j \leq c_j \\ \bar{h}_{c_j}(\theta_j), & \text{se } c_j \leq \theta_j \leq \bar{c}_j \end{cases} \tag{2.64}$$

em que $\underline{h}_{c_j}$ e $\bar{h}_{c_j}$ são funções contínuas não-decrescente e não-crescente, respectivamente; tais que $\underline{h}_{c_j}(c_j) = \bar{h}_{c_j}(c_j) = 1$.

Em (Tanaka, Ichihashi & Asai [1984]), admite-se que as funções $\underline{h}_{c_j}$ e $\bar{h}_{c_j}$ são lineares e $\tilde{c}_j$, $j = 1, \dots, n$, são números fuzzy triangulares $[\underline{c}_j, c_j, \bar{c}_j]$. Consequentemente, o valor da função objetivo $f(x) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 + \dots + \tilde{c}_n x_n$ também é um número fuzzy com função de pertinência :

$$\mu_{f(x)} = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, f(x) = 0 \\ 1, & \text{se } x = 0, f(x) > 0 \\ 1 - \frac{|2f(x) - (\bar{c} + \underline{c})|x}{(\bar{c} - \underline{c})x}, & \text{se } x > 0, f(x) > 0 \end{cases} \tag{2.65}$$

em que $\underline{c} = [\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n]$ e $\bar{c} = [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n]$.

Assim, a solução do Problema (2.63) é obtida com a resolução do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } w_1 \bar{c}x + w_2 \underline{c}x \\
& g_i(x) \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \\
& w_1 + w_2 = 1, \quad w_1, w_2 \in [0, 1]
\end{aligned} \tag{2.66}$$

2.5.4 Otimização com Coeficientes Fuzzy nas Restrições

No problema considerado aqui, a função objetivo é *crisp* e as restrições são lineares com valores imprecisos para os componentes da matriz das restrições e do vetor independente, modelados como números fuzzy. A formulação matemática segue abaixo:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar } f(x) \\
& \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.67}$$

de forma que ao contrário do Problema (2.45), em (2.67) não é permitido qualquer violação no atendimento das restrições.

Em (Tanaka, Ichihashi & Asai [1984]), o Problema (2.67) é transformado em :

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar } f(x) \\
& [(1 - \tfrac{1}{2}h)(a_i + \bar{a}_i) + \tfrac{1}{2}h(a_i - \underline{a}_i)]x \leq (1 - \tfrac{1}{2}h)(b_i + \bar{b}_i) + \tfrac{1}{2}h(b_i - \underline{b}_i) \\
& [\tfrac{1}{2}h(a_i + \bar{a}_i) + (1 - \tfrac{1}{2}h)(a_i - \underline{a}_i)]x \leq \tfrac{1}{2}h(b_i + \bar{b}_i) + (1 - \tfrac{1}{2}h)(b_i - \underline{b}_i) \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{2.68}$$

em que $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, a_{ij}, \bar{a}_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, são números fuzzy triangulares, $a_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ e $h \in (0, 1]$ é o nível de otimismo definido por um decisor.

Para a obtenção de (2.68), considera-se a seguinte relação de ordem entre números fuzzy :

$$\begin{aligned}
& \text{Sejam } \tilde{a} = [\underline{a}, a, \bar{a}] \text{ e } \tilde{b} = [\underline{b}, b, \bar{b}] \text{ números fuzzy, então} \\
& \tilde{a} > \tilde{b} \text{ se } (a + \bar{a})_\alpha \geq (b + \bar{b})_\alpha \text{ e } (a - \underline{a})_\alpha \geq (b - \underline{b})_\alpha, \forall \alpha \in [h, 1]
\end{aligned} \tag{2.69}$$

em que $(a + \bar{a})_\alpha$ e $(a - \underline{a})_\alpha$ são os limitantes superior e inferior do α -corte de $\tilde{a}$.

Observe que apesar dos resultados anteriores terem sido apresentados de uma maneira geral, os métodos são mais eficientes em problemas fuzzy lineares, visto que a maioria baseia-se na redução a problemas *crisp* e é possível que para determinados problemas não-lineares não se conheçam algoritmos exatos para sua resolução. O mesmo vale para problemas com restrições de integralidade das variáveis, dado que depois da redução a problemas não-fuzzy, o tempo computacional de resolução por métodos exatos, em problemas com grande número de variáveis, pode tornar inviável a aplicação das técnicas descritas. Para outras técnicas de resolução de problemas de otimização fuzzy veja (Delgado, Verdegay & Vila [1989], Tanaka, Okuda & Asai [1974], Liu [1999] e Inuiguchi, Ichihashi & Tanaka [1990]).

Capítulo 3

Algoritmos Genéticos

3.1 Conceitos Básicos

Algoritmos genéticos (Holland [1975]) são métodos heurísticos, não-específicos, utilizados principalmente na exploração do espaço de soluções de problemas de otimização matemática discreta. São geralmente aplicados em problemas cuja complexidade dificulta, ou até mesmo impede a utilização de métodos exatos, já que são capazes de fornecer soluções quase-ótimas em tempo de execução aceitável, sem a imposição de condicionantes como linearidade, convexidade, etc.

Por ser um algoritmo evolutivo, sua estrutura é baseada nos conceitos de reprodução celular e evolução natural, podendo ser descrito por quatro elementos básicos: uma *população de soluções*, geralmente factíveis, representada através de uma estrutura computacional adequada; uma *função de fitness* que associa a cada indivíduo da população um valor da medida de desempenho na resolução do problema; *operadores genéticos* (*crossover* e *mutação*), que realizam a troca de informações entre as soluções, introduzem ou modificam indivíduos e mantêm a diversidade da população; e um *processo de seleção* de indivíduos que promove, em analogia à seleção natural, a sobrevivência e reprodução das melhores soluções, acarretando o aumento do *fitness* médio da população ao longo das gerações. A estrutura básica comum desse tipo de algoritmo pode ser resumida da seguinte forma:

PASSO 1: Gerar população inicial.

PASSO 2: Avaliar população.

PASSO 3: Aplicar crossover e mutação.

PASSO 4: Selecionar indivíduos para nova geração.

PASSO 5: Retornar ao Passo 2 até que uma condição de parada seja alcançada.

Cada indivíduo da população (*cromossomo*), codificado através de estruturas computacionais (vetores, grafos, etc), representa uma possível solução para o problema tratado. Na versão clássica do algoritmo (Holland [1975]), os indivíduos são representados através de vetores binários de tamanho fixo.

A escolha da codificação dos cromossomos a ser adotada é uma etapa bastante importante na construção do algoritmo genético, já que deve permitir a representação da solução completa do problema, sem dificultar a medida da função de *fitness* ou a aplicação dos operadores genéticos.

Em geral, a população é inicializada de forma aleatória e mantém tamanho fixo. Informações e restrições do problema podem ser incorporados na geração da população inicial de forma a facilitar as soluções ou melhorar a qualidade da população.

A função de *fitness* deve ser escolhida de forma a medir o desempenho de cada indivíduo como solução do problema. Na maioria dos casos, essa medida não é absoluta e sim, relativa aos outros indivíduos da geração atual.

Em problemas restritos, a função de *fitness* pode incorporar a medida de infactibilidade do indivíduo (Michalewicz [1995]), na intenção de que indivíduos infactíveis converjam para a factibilidade e indivíduos factíveis converjam para soluções com melhores *fitness*.

O crossover e a mutação são os operadores genéticos mais utilizados nesse tipo de algoritmo. O primeiro é responsável pela geração de novos indivíduos através da “troca de informações” entre duas ou mais soluções da população; e o segundo, responsável por modificações aleatórias em um cromossomo, a fim de promover a variabilidade da população, sem comprometer a convergência já alcançada. Os operadores de crossover e mutação são aplicados com probabilidades p_c e p_m determinadas na definição do algoritmo.

Existe uma grande quantidade de operadores de crossover propostos na literatura, com aplicação direcionada a diferentes tipos de codificações e problemas. Os mais comuns são o *Crossover Simples* (algoritmo genético clássico), em que dois indivíduos pais selecionados geram dois novos indivíduos através da troca do segmento de cromossomo iniciado em um ponto de corte escolhido aleatoriamente (Figura 3.1(a)); o *Crossover Uniforme* (Syswerda [1989]), em que uma quantidade determinada de genes aleatórios (unidade de informação no cromossomo - um bit na codificação binária) é trocada entre dois indivíduos pais (Figura 3.1(b)); e o *Crossover Aritmético* (Michalewicz [1996]), utilizado em populações com codificação em ponto flutuante, que gera dois novos indivíduos x_3 e x_4 a partir de combinações convexas das soluções pais x_1 e x_2 :

$$x_3 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \quad x_4 = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (3.1)$$

Para problemas com codificação binária, a *Mutação Simples* troca o valor de um ou mais genes em um cromossomo selecionado. Em algoritmos com codificação real pode-se utilizar entre outros, a *Mutação Uniforme*, em que o valor do gene a ser modificado é selecionado aleatoriamente ou de acordo com uma distribuição de probabilidade adequada; e o operador de *Mutação Indutiva*, em que o valor selecionado é somado ao valor atual do gene.

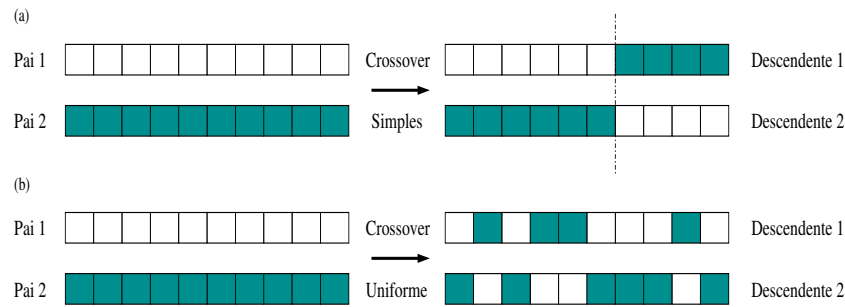


Figura 3.1: Operadores de crossover.

No algoritmo genético clássico, as soluções são selecionadas para a próxima geração através de uma técnica denominada *Roulette Wheel*, que atribui a cada indivíduo da população uma probabilidade de seleção proporcional a seu valor de *fitness*. A grande desvantagem desse esquema é a possibilidade de perda do melhor indivíduo da população atual na montagem da nova geração. Essa dificuldade pode ser superada com uma estratégia elitista, que consiste em manter o melhor indivíduo (ou um grupo dos melhores) da geração atual na seguinte.

Citam-se ainda as técnicas de *Seleção por Diversidade*, em que os indivíduos mais diversos da população são selecionados e *Seleção por Torneio*, em que duas soluções são indicadas aleatoriamente e a melhor é selecionada se um número aleatório $r \in [0, 1]$ for menor que o parâmetro $p \in [0, 1]$ previamente determinado; caso contrário, a outra solução é escolhida.

É interessante notar que todas as técnicas de seleção apresentadas podem também ser utilizadas na identificação de indivíduos para aplicação dos operadores genéticos.

3.2 Algoritmos Genéticos aplicados à Otimização Multiobjetivo

Considerando que a solução de um problema de otimização multiobjetivo é constituída por um conjunto de pontos, a utilização de algoritmos genéticos parece imediata, dado que a cada geração no algoritmo, considera-se simultaneamente uma população de soluções.

“Evolutionary algorithms seem particularly suitable to solve multiobjective optimization problems because they deal simultaneously with a set of possible solutions (the so-called population) which allows to find an entire set of Pareto optimal solutions in a single run of the algorithm, instead of having to perform a series of separate runs as in the case of the traditional mathematical programming techniques.” (Coello [1999]).

Em problemas de otimização multiobjetivo, os algoritmos genéticos podem ser aplicados como métodos a-posteriori, ou seja, direcionados à geração de pontos que caracterizem o conjunto *Pareto-ótimo*, para possibilitar ao decisor a escolha de uma solução de compromisso. Essa

caracterização deve ser tal que os pontos gerados apresentem distribuição aproximadamente uniforme no conjunto.

Porém, a utilização de algoritmos genéticos em problemas desse tipo apresenta dificuldades relacionadas à convergência prematura para um único ponto e à identificação da função de *fitness*. A primeira, está associada à perda de diversidade na população e na tendência natural do algoritmo em convergir à melhor solução do problema, agrupando os indivíduos em torno de um único ponto. Tal dificuldade é usualmente superada através de técnicas que forçam uma busca multimodal. A mais utilizada é a *nichagem*, mais especificamente a estratégia de *Fitness Sharing* (Goldberg & Richardson [1987]), baseada no conceito de nichos ecológicos, em que indivíduos de uma mesma região devem compartilhar os recursos disponíveis, ou seja, o *fitness* de uma solução da população deve refletir o número de indivíduos localizados em uma região de proximidade definida por um *raio de nicho* σ_{share} :

O *fitness* compartilhado $f_{share}(i)$ do i -ésimo indivíduo da população é dado por :

$$f_{share}(i) = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N sh(d(i, j))} \quad (3.2)$$

em que f_i é o *fitness* do indivíduo i , $d(i, j)$ é uma medida de distância qualquer entre os indivíduos i e j ; e sh é a função de compartilhamento dos componentes da população:

$$sh(d(i, j)) = \begin{cases} 1 - (\frac{d(i, j)}{\sigma_{share}})^\alpha, & \text{se } d(i, j) < \sigma_{share}, \quad \alpha \geq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.3)$$

A identificação da função de *fitness* é especialmente complexa nesse tipo de problema, pois deve valorar a condição de inclusão de cada indivíduo no conjunto *Pareto-ótimo*. Em (Zitzler & Thiele [1998]) são identificados três diferentes enfoques para superar tal dificuldade:

(1) *Avaliação por Mudança de Objetivos* :

Nesta técnica, a avaliação e seleção dos indivíduos são realizadas com base na formação de sub-populações referentes à aplicação de cada objetivo separadamente. Assim, cada nova geração é composta pelas soluções com grande desempenho em um dos objetivos.

No algoritmo *VEGA* (*Vector Evaluated Genetic Algorithm*) (Schaffer[1984], Schaffer[1985]), k sub-populações são formadas (uma para cada objetivo) e evoluídas através de seleção proporcional (*Roulette Wheel*). A nova população é constituída pela junção das sub-populações e aplicação dos operadores de crossover e mutação. O grande problema desse enfoque é a tendência de selecionar indivíduos com grande desempenho em apenas um dos objetivos, ignorando aqueles com desempenho médio em todos os objetivos, o que impede uma boa caracterização do conjunto *Pareto-ótimo*.

(2) *Avaliação por Escalarização com Variação de Parâmetros :*

Esta estratégia baseia-se na utilização de uma função de *fitness* composta pela ponderação dos k objetivos do problema (veja Seção 1.2).

Em (Hajela & Lin [1992]), os indivíduos da população são avaliados por diferentes funções de *fitness*, formadas por combinações convexas dos objetivos. Acrescenta-se uma variável a cada cromossomo, indicando a combinação dos objetivos utilizada como função de *fitness*. A diversificação das soluções é mantida através da aplicação de técnicas de *nichagem* nos vetores de peso $W = [w_1 w_2 \dots w_k]$ dos objetivos. Em um segundo enfoque, a população é dividida em k sub-populações (como em Schaffer [1984], Schaffer[1985]) que são avaliadas por k diferentes combinações dos objetivos, levando a uma busca em diversas direções.

Por ser baseado em escalarização por *Ponderação dos Objetivos*, o método gera soluções insatisfatórias em problemas com conjunto *Pareto* não-convexo.

(3) *Avaliação baseada em Pareto-Dominância :*

Proposta inicialmente em (Goldberg [1989]), esta técnica utiliza a noção de *Pareto*-dominância diretamente na avaliação da população, refletindo no valor de *fitness* o nível de dominância ou dominação dos indivíduos, atribuindo probabilidades iguais de seleção às soluções não-dominadas em cada nível.

Em (Goldberg [1989]), os indivíduos são avaliados através de um processo iterativo de classificação: inicialmente atribui-se à todas soluções não-dominadas um mesmo valor de *fitness* elevado, isolando-as da população. Em seguida, repete-se o processo com as soluções restantes, mas atribuindo *fitness* inferiores em relação aos níveis anteriores. O processo segue até que todos os indivíduos sejam avaliados.

Em (Srinivas & Deb [1994]), o algoritmo *NSGA (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm)* baseia-se na avaliação dos indivíduos da população através do procedimento acima e aplicação da técnica de *Fitness Sharing* a cada nível, ou seja, nas soluções isoladas a cada iteração do processo de avaliação. Os valores de *fitness* atribuídos são tais que o maior *fitness* compartilhado do nível $k + 1$ é inferior ao menor do nível k .

No algoritmo *MOGA (Multiple Objective Genetic Algorithm)* (Fonseca & Fleming [1993]), a classificação de cada indivíduo corresponde ao número de soluções da população corrente que o dominam. Assim como nos dois métodos acima, a estratégia de *nichagem* é utilizada na manutenção da diversidade da população, porém é aplicada no espaço dos objetivos, o que pode prejudicar a eficiência do algoritmo em problemas que apresentam diferentes pontos *eficientes* com mesmos valores objetivos.

Em (Horn & Nafpliotis [1993]), o algoritmo *NPGA (Niche Pareto Genetic Algorithm)* faz uso de *Seleção por Torneio* baseado no conceito de dominância entre as soluções, utilizando a técnica de *Fitness Sharing* para o desempate entre os indivíduos. No processo, duas soluções são escolhidas aleatoriamente na população e avaliadas, em relação à dominância, por um conjunto de indivíduos da população. O número de componentes desse conjunto determina a pressão de

seleção nos candidatos. A *nichagem*, aplicada no espaço dos objetivos, é utilizada no desempate das soluções candidatas (quando ambas são dominadas ou não-dominadas pelo conjunto de comparação), favorecendo aquela com o menor número de pontos no nicho.

O algoritmo *SPEA* (*Strength Pareto Evolutionary Approach*) (Zitzler & Thiele [1998]) faz uso de uma população externa, atualizada a cada geração, de forma que contenha as soluções não-dominadas em relação aos indivíduos gerados até o momento. Como o algoritmo faz uso de uma estratégia de agrupamento, os pontos da população externa apresentam distribuição aproximadamente uniforme. Ao final, a população externa é utilizada como conjunto *Pareto-ótimo*. A função de *fitness* é associada à medida de dominação dos indivíduos da população externa em relação a cada solução da geração atual. Na intenção de manter a diversidade, o algoritmo *SPEA* busca distribuir uniformemente a população convencional em torno dos pontos da população externa, de forma que cada solução da segunda domine aproximadamente o mesmo número de indivíduos da primeira. A grande vantagem dessa estratégia é a eliminação do parâmetro de raio de nicho σ_{share} .

Para boas referências de utilização de algoritmos genéticos na resolução de problemas de otimização multiobjetivo veja (Coello [1999], Fonseca & Fleming [1995], Zitzler, Deb & Thiele [2000], Deb [2001]).

Capítulo 4

Algoritmos Genéticos para Otimização Multiobjetivo com Restrições Fuzzy

4.1 Introdução

O problema geral de otimização multiobjetivo com restrições fuzzy e intervalos fuzzy de definição das variáveis, foco de estudo deste capítulo, pode ser descrito matematicamente na forma :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)), \quad k \geq 2 \\ g_i(x) &\stackrel{\sim}{\geq} b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ l_{x_j} &\stackrel{\sim}{\leq} x_j \stackrel{\sim}{\leq} u_{x_j}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que $f_l(x)$, $l = 1, \dots, k$ e $g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ são funções lineares ou não-lineares e x_j , $j = 1, \dots, n$ são variáveis reais ou inteiras.

Trata-se de uma extensão do Problema (1.1) que busca considerar as imprecisões do processo real na modelagem matemática. Apenas para exemplificar, no problema de corte industrial de bobinas descrito na Seção 1.1 permite-se, na maioria dos casos, um desvio porcentual na demanda (em toneladas) dos itens requeridos, o que pode ser facilmente modelado por restrições fuzzy.

A introdução de restrições dessa natureza causa duas grandes mudanças no tipo de resultado esperado para o problema :

(1) *conceito usual de factibilidade* : com a incorporação das imprecisões nas restrições, o conceito de solução factível torna-se nebulosa, já que as restrições admitem uma violação em seu atendimento. Como consequência, os métodos de resolução devem considerar soluções com níveis intermediários de factibilidade, graduados por funções de pertinência. Neste estudo utilizam-se principalmente funções de pertinência lineares, de forma que a factibilidade fuzzy de um ponto x em relação à restrição :

$$g_i(x) \gtrsim b_i \quad (4.2)$$

com desvio d_i permitido, será dada por (Figura 4.1) :

$$\mu_{g_i(x)} = \begin{cases} 0, & \text{se } g_i(x) \leq b_i - d_i \\ \frac{g_i(x) - b_i + d_i}{d_i}, & \text{se } b_i - d_i \leq g_i(x) \leq b_i \\ 1, & \text{se } g_i(x) \geq b_i \end{cases} \quad (4.3)$$

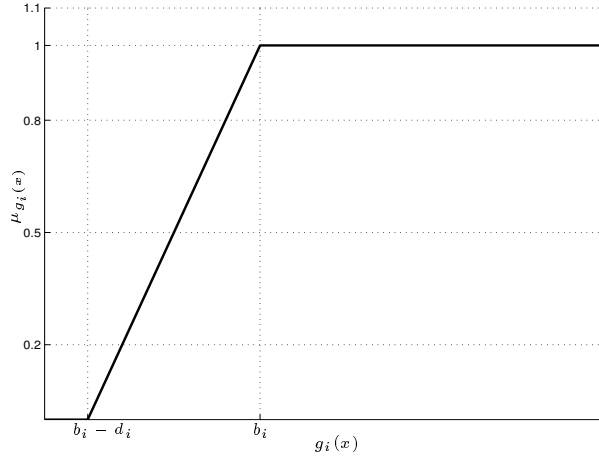


Figura 4.1: Função de pertinência para restrição fuzzy.

O intervalo de definição da variável x_j é dito ser fuzzy, denotado neste trabalho por $\tilde{I}_j = [\tilde{l}_{x_j}, \tilde{u}_{x_j}]$, quando a identificação de seus limitantes é feita de forma imprecisa, permitindo desvios $d_{l_{x_j}}$ e $d_{u_{x_j}}$ em sua fronteira (Figura 4.2). Observe que um intervalo dessa natureza pode ser tratado como duas restrições fuzzy $x_j \gtrsim l_{x_j}$ e $x_j \lesssim u_{x_j}$.

(2) *conjunto Pareto fuzzy* : No problema multiobjetivo clássico, a solução é formada por um conjunto de pontos de equilíbrio, factíveis e não-dominados de acordo com a relação (1.3). Como em problemas de otimização fuzzy são tratadas soluções com diferentes níveis de factibilidade, é comum a ocorrência de situações como : a solução x_1 domina x_2 mas é menos factível; o

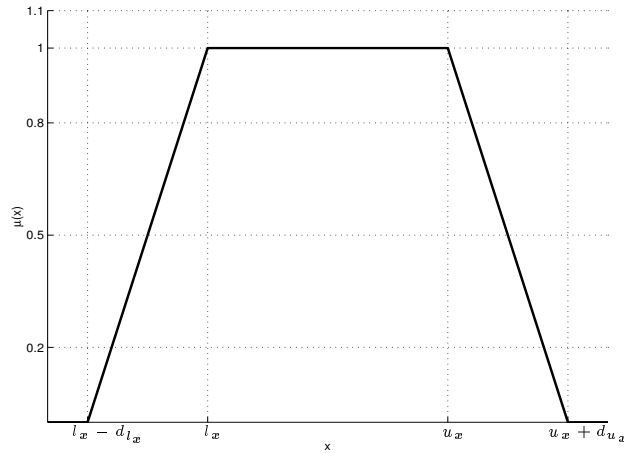


Figura 4.2: Função de pertinência para intervalo fuzzy de definição das variáveis.

ponto x_1 não é dominado por nenhuma outra solução mas tem baixa factibilidade; o ponto x_2 é dominado apenas por soluções com menores níveis de factibilidade, etc. Assim, para esse tipo de problema, a solução é formada por um conjunto de pontos de equilíbrio com diferentes níveis de pertinência, calculados através de uma combinação dos níveis de factibilidade e não-dominância, configurando o que neste estudo denomina-se conjunto *Pareto fuzzy*.

As considerações e técnicas apresentadas na Seção 2.5 (otimização escalar fuzzy) podem ser facilmente estendidas para o caso multiobjetivo. Como os métodos são, na grande maioria, baseados em reduções a problemas de otimização *crisp*, a modificação consiste na escolha da técnica de resolução para o problema multiobjetivo gerado com a redução. Dessa forma, essas pequenas adaptações não serão apresentadas aqui.

De acordo com (Herrera & Lozano [1998]), a associação de algoritmos genéticos com a teoria fuzzy pode ser realizada sob dois enfoques diferentes:

- (1) utilização de técnicas fuzzy para a determinação dinâmica dos diversos parâmetros de um algoritmo genético;
- (2) utilização de algoritmos genéticos na resolução de problemas de otimização fuzzy.

Considerando apenas o segundo enfoque, a extensa maioria dos trabalhos busca a resolução de problemas de otimização fuzzy escalares (Herrera, Lozano & Verdegay [1994], Buckley & Feuring [2000], Lu & Fang [2000]). Para o problema de otimização multiobjetivo com restrições fuzzy (4.1), (Cadenas & Jimenez [1995]) propõe dois algoritmos diferentes. No primeiro, o problema original é transformado em :

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar } \text{Min}\{\mu_{f_l(x)}, \mu_{g_i(x)}\} \\
& f_l(x) \lesssim L_l, \quad l = 1, \dots, k \\
& g_i(x) \gtrsim b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{4.4}$$

em que L_l , $l = 1, \dots, k$ são os níveis de aspiração dos objetivos, $\mu_{g_i(x)}$, $i = 1, \dots, m$ são as funções de pertinência das restrições e $\mu_{f_l(x)}$, $l = 1, \dots, k$ são as pertinências para as inequações fuzzy geradas com os objetivos:

$$\mu_{f_l(x)} = \begin{cases} 0, & \text{se } f_l(x) \geq U_l \\ \frac{U_l - f_l(x)}{U_l - L_l}, & \text{se } L_l \leq f_l(x) \leq U_l \\ 1, & \text{se } f_l(x) \leq L_l \end{cases} \tag{4.5}$$

sendo U_l , $l = 1, \dots, k$ os valores pessimistas dos objetivos, como descrito em (Zimmerman [1978]).

Propõe-se então, a aplicação de um algoritmo genético utilizando representação binária, operadores genéticos clássicos e a função objetivo de (4.4) como medida de *fitness* da população.

No segundo enfoque, o Problema (4.1) é escalarizado através da ponderação dos objetivos e as restrições são parametrizadas pelo nível de factibilidade α (como em Verdegay [1982]), transformando-o em :

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } \sum_{l=1}^k w_l f_l(x) \\
& g_i(x) \geq b_i - (1 - \alpha)d_i, \quad i = 1, \dots, m \\
& \sum_{l=1}^k w_l = 1 \\
& \alpha, w_l \in [0, 1], \quad l = 1, \dots, k \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{4.6}$$

O algoritmo genético busca então, resolver o Problema (4.6) através de execuções independentes para os valores do conjunto $L = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_i \leq \alpha_j, i \leq j\}$, de forma a obter um conjunto de pontos como resultado.

Utiliza-se uma população de indivíduos representados por vetores de números reais, avaliados pela função objetivo de (4.6). Como a população é constituída apenas por indivíduos factíveis, os procedimentos de inicialização das soluções, crossover e mutação são realizados de forma a manter a factibilidade. Para tanto, impõe-se que as funções $g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ sejam dadas na forma:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} h_{ij}(x_j), \quad i = 1, \dots, m \quad (4.7)$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j$ e h_{ij} sejam funções exponenciais, potenciais, logarítmicas ou trigonométricas.

4.2 Algoritmo Genético Proposto

O algoritmo elaborado para a resolução do Problema (4.1) é direcionado aos casos em que não se conhecem os níveis de aspiração dos objetivos. Admite-se também que não são conhecidas informações sobre preferências entre os objetivos, impossibilitando o uso de técnicas de escalarização do problema. Assim, o algoritmo deve operar segundo o enfoque de indicação a-posteriori, caracterizando o conjunto *Pareto fuzzy* para que então, o decisor possa optar por uma solução de compromisso.

O algoritmo considera todos os objetivos simultaneamente, utilizando os níveis de factibilidade e não-dominância das soluções na definição da função de *fitness*. A Figura 4.3 ilustra a estrutura geral do algoritmo desenvolvido.

Utiliza-se uma estratégia baseada na manutenção de duas populações :

(1) uma população de tamanho fixo, composta por indivíduos representados por vetores de compontes reais $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, escolhidos inicialmente da seguinte forma:

$$x_j \text{ escolhido aleatoriamente no intervalo } I_j = [l_{x_j}, u_{x_j}], \quad j = 1, \dots, n,$$

em que l_{x_j} e u_{x_j} são os limitantes dos valores permitidos para a variável x_j , $j = 1, \dots, n$.

No caso em que o intervalo de definição $\tilde{I}_j = [\tilde{l}_{x_j}, \tilde{u}_{x_j}]$ é fuzzy, o espalhamento do intervalo deve ser considerado (Figura 4.2), de forma que x_j pertença a $Supp(\tilde{I}_j)$:

$$x_j \text{ escolhido aleatoriamente no intervalo } I_j = [l_{x_j} - d_{l_{x_j}}, u_{x_j} + d_{u_{x_j}}], \quad j = 1, \dots, n.$$

Para os problemas em que as variáveis não são canalizadas, as soluções podem ser inicializadas da seguinte forma:

$$x_j \text{ escolhido aleatoriamente no intervalo } [a_j - \delta_j, b_j + \delta_j], \quad j = 1, \dots, n$$

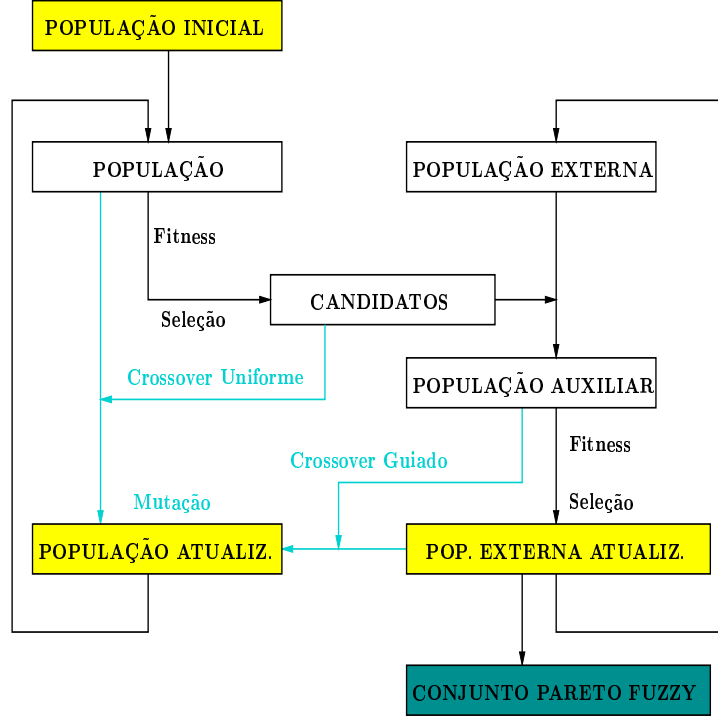


Figura 4.3: Estrutura geral do algoritmo genético proposto.

com

$$\begin{aligned}
 a_j &= \text{Min} \{x_j^l\} = \text{Min} \{x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^k\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, k \\
 b_j &= \text{Max} \{x_j^l\} = \text{Max} \{x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^k\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, k \\
 \text{com } x^l &= [x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l] = \text{argmin}_{x \in X'} \{f_l(x)\}, \quad l = 1, \dots, k.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

O valor δ_j pode ser escolhido de acordo com algum conhecimento adicional do problema. Quando isso não é possível, adota-se uma configuração inicial que pode ser ajustada ao longo dos testes. Neste trabalho, utilizou-se $\delta_j = [b_j - a_j]$.

Nos k problemas escalares utilizados na determinação dos valores a_j e b_j , $j = 1, \dots, n$, a região factível do problema original deve ser modificada através da transformação das restrições fuzzy:

$$g_i(x) \gtrsim b_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{4.9}$$

em restrições *crisp* na forma:

$$g_i(x) \geq b_i - d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.10)$$

ou seja, incorporando as violações d_i das restrições fuzzy. O mesmo deve ser feito com os intervalos fuzzy de definição das variáveis. Assim,

$$X' = \{x \mid g_i(x) \geq b_i - d_i, \quad l_{x_j} - d_{l_{x_j}} \leq x_j \leq u_{x_j} + d_{u_{x_j}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\} \quad (4.11)$$

O número de casas decimais adotado na representação das soluções exerce uma função semelhante ao raio de nicho, de forma que quanto maior a precisão escolhida, maior o número de indivíduos que podem ser encontrados dentro de um mesmo intervalo, ou seja, o espalhamento das soluções depende fortemente da precisão escolhida.

(2) uma população externa de tamanho variável, com a função de alocar as soluções mais adaptadas. Os componentes dessa população são testados e atualizados ao longo das gerações, de forma a manter um conjunto de soluções estáveis, que ao final da execução é associado ao conjunto *Pareto fuzzy*.

O tamanho máximo escolhido para a população externa exerce um papel fundamental no tipo de resultado obtido com o algoritmo: quanto menor a população, mais próximo do conjunto *Pareto-ótimo* clássico estarão os pontos encontrados. Para uma população externa de maior porte, aumenta a possibilidade de identificação de pontos (com pertinência não-nula) não pertencentes ao conjunto *Pareto-ótimo*.

Assim, o tamanho máximo da população externa e a precisão na representação das soluções são os parâmetros que qualificam o tipo de resultado a ser obtido com o algoritmo:

(i) *Geração de pontos do conjunto Pareto fuzzy* : obtido com a diminuição da precisão das soluções, forçando a baixa incidência de pontos em um dado intervalo. É uma configuração semelhante a um aumento do raio de nicho σ_{share} na técnica de *nichagem*;

(ii) *Tendência de geração de pontos do conjunto Pareto-ótimo* : obtido, em oposição a (i), com o aumento da precisão das soluções;

(iii) *Esboço/caracterização da função de pertinência* : obtido com a diminuição da precisão das soluções, aumento do número máximo de indivíduos da população externa e aumento do número de gerações.

A função de *fitness* descrita abaixo foi elaborada com o intuito de associar, a cada indivíduo da população, seu valor de pertinência no conjunto *Pareto fuzzy*. É importante ressaltar neste ponto, que no cálculo dessa função são considerados todos os outros componentes da população atual, sendo portanto, uma medida relativa de pertinência.

O *fitness* de uma solução x é determinado com o cálculo do nível de factibilidade $\alpha(x)$ e da medida de não-dominância $\beta(x)$ em relação às outras soluções da população.

O nível de factibilidade é dado por:

$$\alpha(x) = \text{Min}_i\{\mu_{g_i}(x)\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.12)$$

em que $\mu_{g_i}(x)$, $i = 1, \dots, m$ indica o grau de satisfação da i -ésima restrição, calculado através da função de pertinência (4.3).

A medida de não-dominância do indivíduo x é obtida através da relação:

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é dominado por todas as soluções consideradas;} \\ 1, & \text{se } x \text{ não é dominado por nenhuma das soluções consideradas;} \\ \frac{ND(x)}{tam_pop-1}, & c.c. \end{cases} \quad (4.13)$$

em que $ND(x)$ é o número de soluções que não dominam o indivíduo x na população de tamanho tam_pop .

O *fitness* pode ser construído a partir de diversas combinações dos valores $\alpha(x)$ e $\beta(x)$. Neste estudo, adotou-se um critério rigoroso, semelhante à operação de *concentração fuzzy*:

$$fitness(x) = \alpha(x)\beta(x) \in [0, 1] \quad (4.14)$$

Observe que, ao contrário do nível de factibilidade $\alpha(x)$, a medida de não-dominância $\beta(x)$ de uma solução varia a cada geração, por ser somente baseada nos indivíduos da população corrente. Consequentemente, o *fitness* de uma solução também é variável e seu valor não pode ser diretamente associado à sua pertinência no conjunto *Pareto fuzzy*. O algoritmo faz uso então da população externa para a “calibragem” dessa pertinência.

Para tanto, os indivíduos da população são avaliados e ordenados de acordo com seu valor de *fitness*, e os melhores indivíduos são selecionados como candidatos à população externa (o número de candidatos é o mínimo entre os tamanhos das duas populações).

Uma população auxiliar é formada com os candidatos selecionados e os componentes atuais da população externa. Após o cálculo dos valores de *fitness*, atualiza-se a população externa com os melhores indivíduos da auxiliar. Essa atualização é feita respeitando a precisão estabelecida, ou seja, admitindo apenas indivíduos distantes entre si no mínimo pelo valor da precisão escolhida.

Como esse procedimento é repetido a cada geração, a população externa realiza o papel de um grupo estável de soluções e o *fitness* associado a cada indivíduo poderá ser utilizado como a sua pertinência no conjunto *Pareto fuzzy*.

A população da nova geração é formada com a aplicação dos operadores de *Crossover Guiado*, *Crossover Uniforme* e *Mutação Uniforme* nos indivíduos da população atual.

O *Crossover Uniforme* segue o procedimento descrito na Seção 3.1. No *Crossover Guiado*, um novo indivíduo é obtido através de uma combinação convexa, ponderada pelos valores de *fitness* dos dois indivíduos pais:

$$\begin{aligned} \text{Indivíduo Pai1} : x^1 &= [x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1] \text{ com fitness } f_1 \\ \text{Indivíduo Pai2} : x^2 &= [x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2] \text{ com fitness } f_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\text{Indivíduo Descendente} : x^3 = [x_1^3, x_2^3, \dots, x_n^3] \text{ com} \quad (4.16)$$

$$x_i^3 = \begin{cases} \frac{f_1}{f_1+f_2}x_i^1 + \frac{f_2}{f_1+f_2}x_i^2, & \text{se } f_1 \neq 0, f_2 \neq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{1}{2}x_i^1 + \frac{1}{2}x_i^2, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.17)$$

Na *Mutação Uniforme*, escolhe-se aleatoriamente uma coordenada da solução indicada e seu valor é definido de acordo com o procedimento de geração da população inicial.

Os indivíduos não candidatos à população externa realizam *Crossover Uniforme* (com taxa de 45%) com uma solução candidata escolhida aleatoriamente. Da mesma forma, os indivíduos da população auxiliar não constituintes da nova população externa realizam *Crossover Guiado* (com taxa de 20%) com componentes desta última, selecionados aleatoriamente. O operador de mutação (taxa de 10%) é aplicado em indivíduos escolhidos aleatoriamente, após a aplicação dos operadores de crossover.

O tipo de indivíduos pais utilizados e a estrutura do *Crossover Guiado* conferem a esse operador um comportamento direcionado à convergência às melhores soluções. Por outro lado, a aplicação de *Crossover Uniforme* com indivíduos de baixo desempenho (não-candidatos ou candidatos não selecionados à população externa) e a alta probabilidade de aplicação de mutação, garantem a manutenção da diversidade da população.

O algoritmo genético é executado até que um número escolhido de gerações seja alcançado. Ao final, a população externa é utilizada como conjunto *Pareto fuzzy* e a pertinência de cada indivíduo é obtida através de seu valor de *fitness*, calculado novamente em relação às soluções dessa população.

Assim, o número de gerações escolhido como critério de parada exerce grande influência na qualidade do *fitness* dos indivíduos como medida de pertinência no conjunto *Pareto fuzzy*.

4.3 Experimentos Computacionais

Os testes com o algoritmo proposto foram realizados sob três diferentes enfoques:

Teste 1 : O primeiro experimento foi realizado com a introdução de restrições fuzzy ao problema de minimização da função $F(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x^2, (x-2)^2)$ (Schaffer [1984]), escolhida pela sua simplicidade e ampla utilização em testes de algoritmos multiobjetivos. A idéia principal é validar o conjunto *Pareto fuzzy*, resultado da execução do algoritmo genético, a partir do conjunto *Pareto-ótimo* conhecido em cada situação.

Teste 2 : O algoritmo é utilizado na resolução de um conjunto de problemas com características bem diferenciadas: solução *Pareto-ótima* formada por conjunto não-convexo, problemas de otimização com variáveis binárias, etc. O objetivo do experimento é ilustrar a versatilidade do algoritmo.

Teste 3 : Para o último experimento escolheu-se uma família de problemas descrita em (Deb [1999]), mais especificamente, um problema que gera regiões de atração para “falsos” pontos *eficientes* (denominados *Pareto-ótimos* locais), dificultando a obtenção dos pontos não-dominados da região. Como no Experimento 1, a validação do algoritmo é realizada através da introdução de restrições fuzzy e análise dos resultados obtidos.

4.3.1 Teste Computacional 1 - Função de Schaffer

Escolheu-se utilizar uma família de problemas de otimização baseada na função apresentada em (Schaffer [1984]). Como os problemas formados não oferecem grande dificuldade de resolução, é possível avaliar todas as características do algoritmo genético.

A formulação geral dos problemas tratados aqui segue abaixo (com $g_i(x)$ e b_i definidos a cada caso estudado):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x) &= (f_1(x), f_2(x)) = (x^2, (x-2)^2) \\ g_i(x) &\stackrel{\sim}{\geq} b_i \\ -2 &\leq x \leq 6 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Considerando o Problema (4.18) sem as restrições, o conjunto *Pareto-ótimo* é formado pelos pontos $x^* \in [0, 2]$ (Figura 4.4), factíveis e não-dominados de acordo com a relação (1.3). Esse resultado é importante na validação do conjunto *Pareto fuzzy* obtido com a introdução de restrições fuzzy.

É fácil perceber que com a inclusão da restrição *crisp*:

$$x \geq 1 \tag{4.19}$$

o conjunto *Pareto-ótimo* original se reduz a $x^* \in [1, 2]$. Como esperado, com a “fuzzificação” da restrição através da admissão de violações, a solução apresenta maior espalhamento, ou seja, o conjunto *Pareto-ótimo* é acrescido de pontos com pertinência $0 \leq \mu \leq 1$ (consequência da factibilidade ou não-dominância intermediária) (Figura 4.5).

Assim, o conjunto *Pareto fuzzy* obtido com o algoritmo para o problema :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x) &= (f_1(x), f_2(x)) = (x^2, (x-2)^2) \\ x &\stackrel{\sim}{\geq} 1 \\ -2 &\leq x \leq 6 \end{aligned} \tag{4.20}$$

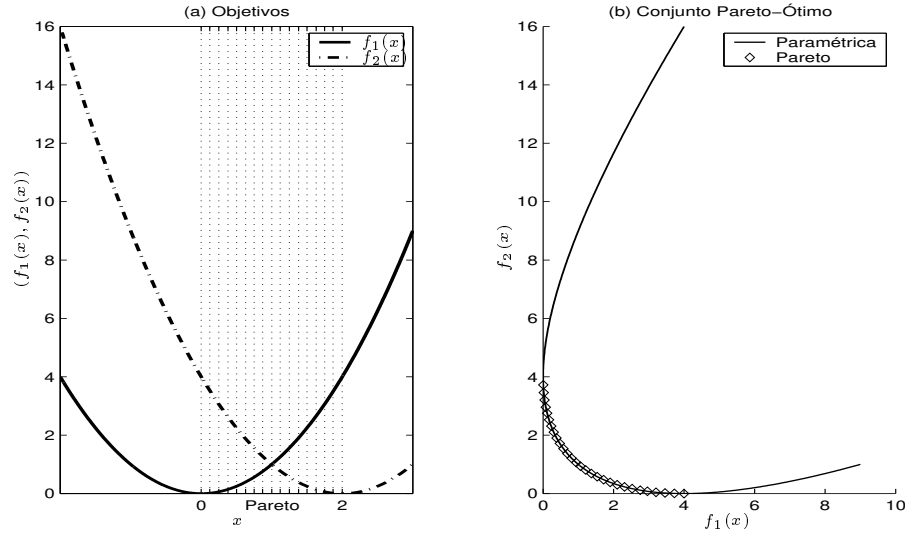


Figura 4.4: Função de Schaffer: (a) Funções objetivo e conjunto *Pareto-ótimo* do problema irrestrito; (b) Representação do conjunto *Pareto-ótimo* na curva paramétrica dos objetivos - pontos obtidos através de implementação do *Método das Ponderações* em AIMMS 3.2.

com função de pertinência linear (4.3) e desvio permitido $d = 1$, é composto por um total de 150 pontos no intervalo $x_{fuzzy}^* \in [0.48, 2.93]$. Observe que neste problema, é possível identificar os pontos do conjunto *Pareto-ótimo* ($x_{fuzzy}^* \in [1, 2]$) como aqueles com pertinência igual a 1 (Figura 4.6), consequência da função de *fitness* escolhida.

Veja que o fato de um ponto ter pertinência igual a 1 não é suficiente para classificá-lo como solução *Pareto-ótima* do problema *crisp* associado. Como o nível de pertinência é calculado a partir do *fitness* dos componentes da população externa e, portanto, relativo aos indivíduos avaliados durante a execução do algoritmo, é possível a ocorrência de soluções com medida de não-dominância igual a 1, mas que são dominadas por pontos não visitados pelo algoritmo no espaço de busca considerado.

Os pontos no intervalo $[0.48, 1)$, mesmo apresentando nível de factibilidade menor que 1, são componentes da solução do problema *crisp* sem restrições e, portanto, são soluções não-dominadas no espaço considerado, acarretando em pertinência não-nula no conjunto *Pareto fuzzy*. Perceba que a pertinência desses pontos diminui linearmente com o decréscimo do nível de factibilidade (Figura 4.6). Por outro lado, os pontos no intervalo $(2, 2.93]$ são absolutamente factíveis, mas apresentam menor medida de não-dominância $\beta(x)$. Pode-se também perceber o declínio linear da pertinência à medida que os pontos se afastam do conjunto *Pareto-ótimo* original.

Como o número de indivíduos obtidos na solução é bem razoável, é possível esboçar o gráfico

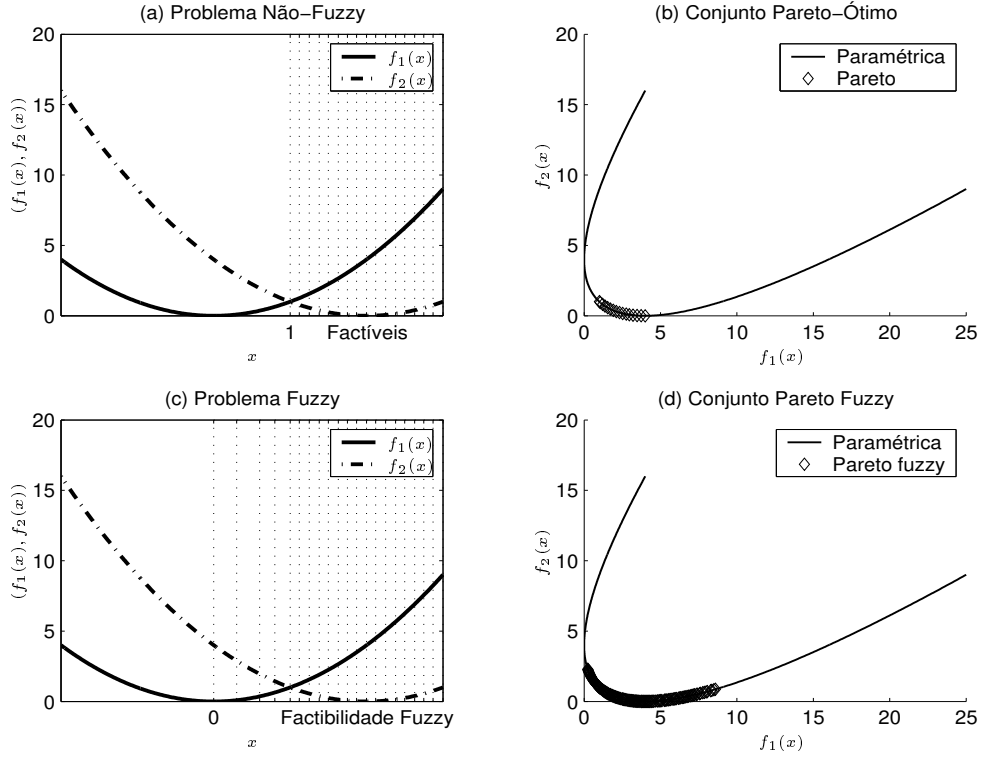


Figura 4.5: Problema com restrição $x \geq 1$: (a) Região factível; (b) Conjunto *Pareto-ótimo*; Problema com restrição fuzzy $x \gtrsim 1$, $d = 1$: (c) Factibilidade fuzzy; (d) Conjunto *Pareto fuzzy*.

da função de pertinência do conjunto *Pareto fuzzy*. Como esse conjunto contém os pontos *Pareto-ótimos* do problema *crisp* associado, com pertinência máxima, a função assume um formato trapezoidal (Figura 4.6). De forma semelhante, considerando o mesmo problema e admitindo a restrição :

$$x \gtrsim 2, \quad d = 1 \quad (4.21)$$

a função de pertinência assume um formato triangular, com o ápice no ponto $x_{fuzzy}^* = 2$, coincidente com o único ponto *eficiente* do problema associado com restrições não-fuzzy.

A fim de validar a capacidade do algoritmo em esboçar a função de pertinência, um experimento foi realizado com a introdução da restrição :

$$x \gtrsim 3 \quad (4.22)$$

e variação do desvio d permitido. Assim, utilizando $d = 2$, obtém-se um conjunto *Pareto-*

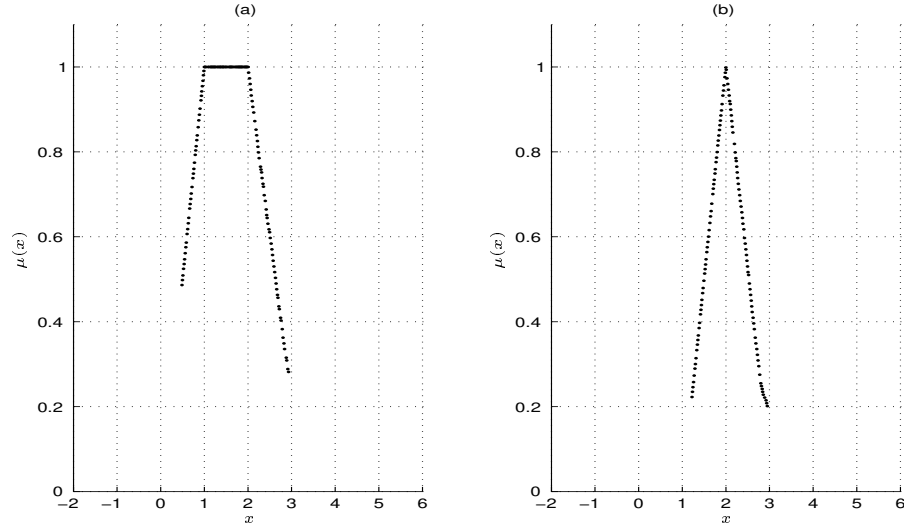


Figura 4.6: Esboço da função de pertinência para o conjunto *Pareto fuzzy*: (a) problema com restrição $x \gtrsim 1$, $d = 1$; (b) problema com restrição $x \gtrsim 2$, $d = 1$.

fuzzy subnormal, consequência da existência de pontos $x \in [1, 2]$ no conjunto que, apesar de possuírem baixo nível de factibilidade, exercem grande dominância sobre todas as outras soluções consideradas. Para $d = 0.5$ ocorre situação semelhante, ou seja, o conjunto *Pareto-fuzzy* continua sendo subnormal, já que os pontos $x \in [2.5, 3)$ dominam os demais. Observe que o valor de pertinência do ponto 3 é bem maior neste segundo caso, já que este ponto é dominado por um número menor de soluções (Figura 4.7). Com o desvio bem próximo de zero ($d = 0.01$), o valor de pertinência do ponto 3 aproxima-se de 1 ($\mu(3) \approx 0.98$) e o conjunto ainda é subnormal, pois o algoritmo incluiu pontos no intervalo $[1, 3)$ com nível de pertinência nula no conjunto *Pareto-fuzzy*, mas com dominância sobre os pontos $x \in [3, \infty)$.

O teste acima é interessante para ilustrar o comportamento do algoritmo diante de comparações conflitantes: uma solução domina a outra mas tem menor nível de factibilidade. A Figura 4.7(c) ilustra que o algoritmo, apesar de atribuir nível de pertinência nula para o ponto $x' \approx 1.68$ (como consequência de factibilidade nula), penalizou a pertinência do ponto 3 por ser dominado pelo primeiro.

Para a obtenção dos resultados acima, o algoritmo foi executado ao longo de 100 gerações, com uma população convencional de 70 indivíduos e uma população externa limitada a 150 soluções. Adotou-se uma precisão de 0.01 na representação dos indivíduos.

Para comprovar a convergência do algoritmo, uma população inicial foi escolhida aleatoriamente no intervalo $[-100, 100]$ para o Problema (4.20). Como já discutido na descrição do algoritmo, o número de gerações tem grande relação com a qualidade dos valores obtidos para a

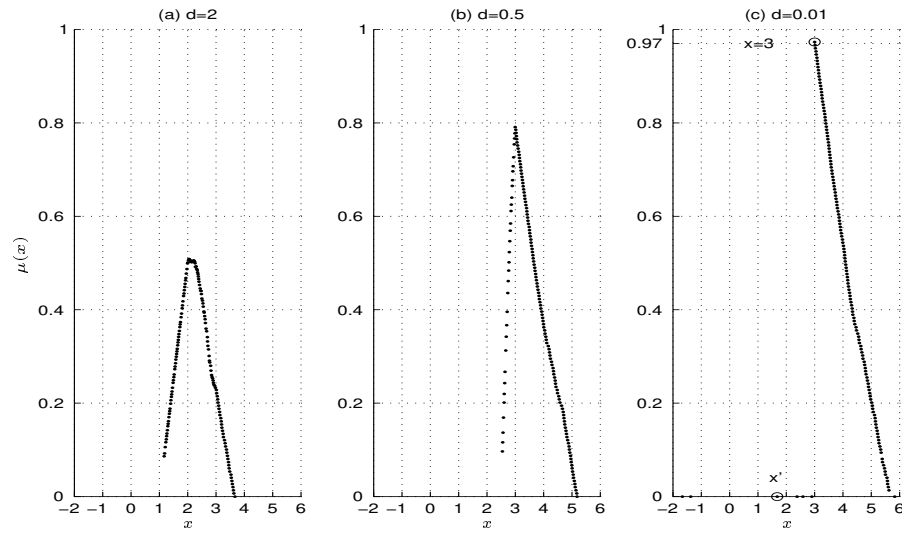


Figura 4.7: Esboço da função de pertinência no conjunto *Pareto fuzzy*: (a) $x \gtrsim 3$, $d = 2$; (b) $x \gtrsim 3$, $d = 0.5$; (c) $x \gtrsim 3$, $d = 0.01$.

função de pertinência. A Figura 4.8 exibe o espalhamento obtido em função do número escolhido de gerações.

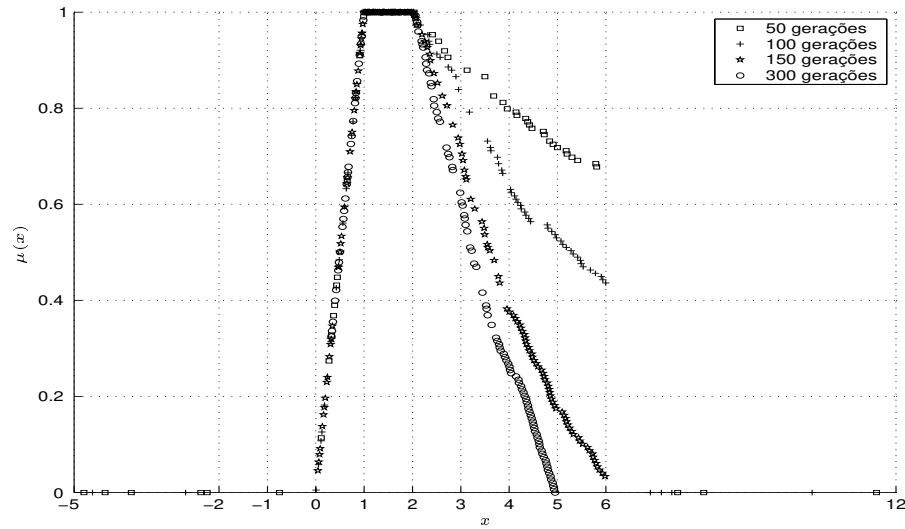


Figura 4.8: Espalhamento do conjunto *Pareto fuzzy* em função do número de gerações - população inicializada no intervalo $[-100, 100]$.

Note que à medida que o número de gerações é acrescido, o espalhamento do conjunto torna-se menor e o total de pontos no *suporte* do conjunto *Pareto fuzzy* aumenta. Assim, ao final de 300 gerações alcança-se um resultado muito próximo daquele obtido com a população inicializada no intervalo $[-2, 6]$.

A Figura 4.9 ilustra como a precisão escolhida na representação das soluções influencia o espalhamento dos pontos obtidos, funcionando como um raio de nicho. Quanto maior a precisão, maior o número de pontos alocados em um mesmo intervalo e de acordo com as características do algoritmo, mais próximos do conjunto *Pareto-ótimo* estarão os pontos *Pareto fuzzy*.

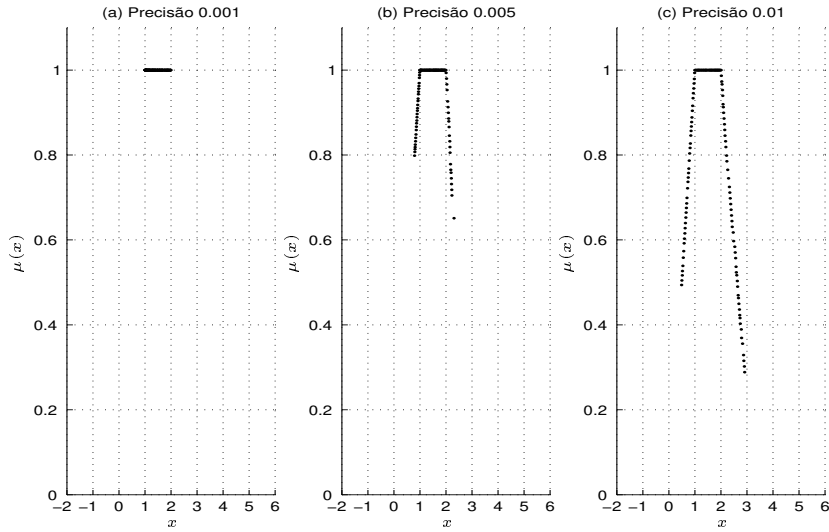


Figura 4.9: Esboço da função de pertinência para o conjunto *Pareto fuzzy* de acordo com a precisão: (a) 0.001; (b) 0.005; (c) 0.01 .

Análise semelhante vale para o tamanho máximo escolhido para a população externa, estando os pontos obtidos mais próximos da solução *crisp* quanto menor o tamanho indicado. A Figura 4.10 ilustra quatro execuções do algoritmo com diferentes tamanhos de população externa, mantendo fixos todos os outros parâmetros.

Com a utilização da precisão das soluções igual a 1, arredondamento dos valores obtidos nos procedimentos de geração da população inicial, *Crossover Guiado* e mutação, o algoritmo é capaz de resolver problemas com restrições de integralidade. Assim, para o problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x) &= (f_1(x), f_2(x)) = (x^2, (x-2)^2) \\ x &\geq 1, \quad d = 1 \\ -2 &\leq x \leq 6, \quad x \text{ inteiro} \end{aligned} \tag{4.23}$$

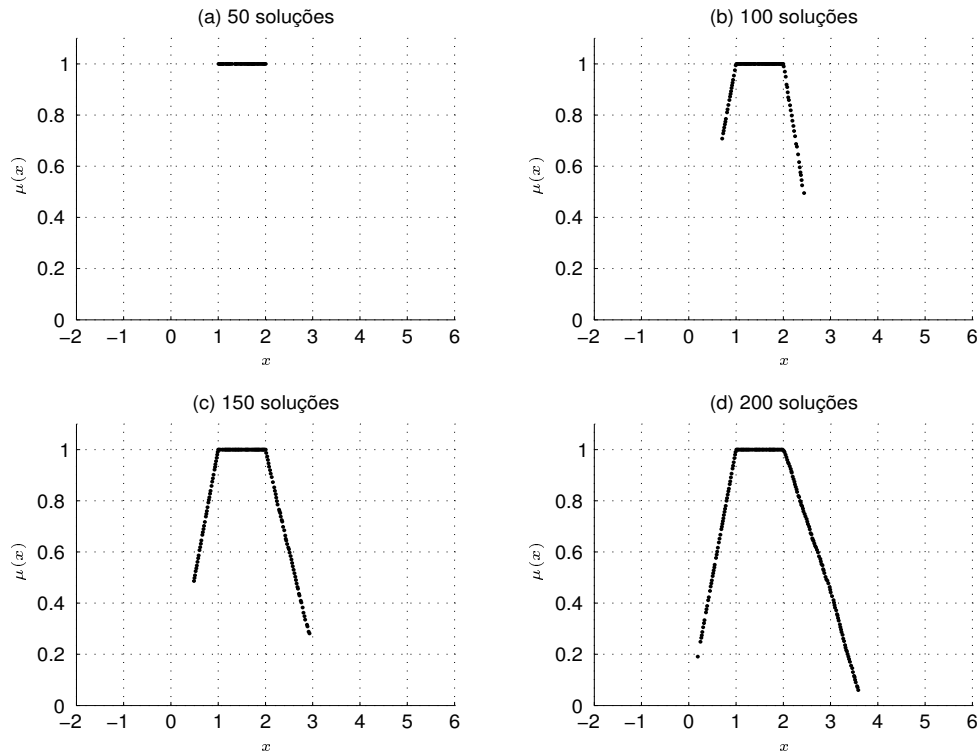


Figura 4.10: Esboço da função de pertinência para o conjunto *Pareto fuzzy* de acordo com o limite de indivíduos na população externa: (a) 50 indivíduos; (b) 100 indivíduos; (c) 150 indivíduos; (d) 200 indivíduos.

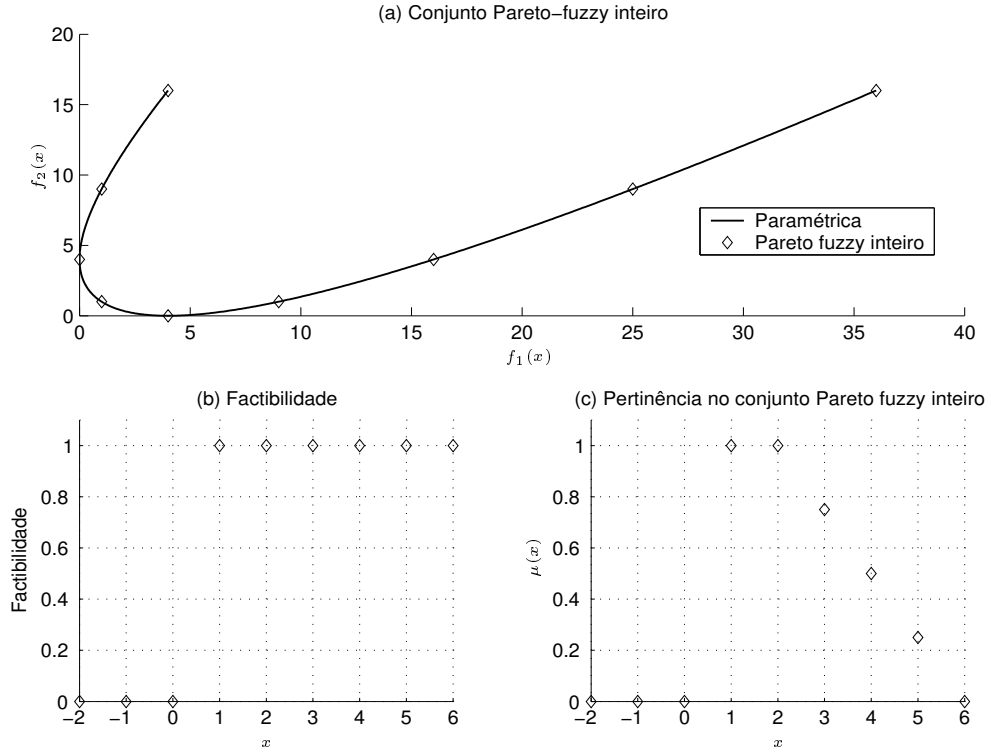
o algoritmo obteve soluções discretas inteiras concordantes com aquelas obtidas no problema contínuo (4.20) ¹.

Os resultados indicados na Figura 4.11 confirmam a versatilidade dos algoritmos evolutivos, já que é possível gerar boas soluções para problemas de otimização com variáveis inteiras, sem aumentar a dificuldade ou o tempo computacional do processo de resolução, necessitando apenas a configuração de poucos parâmetros.

4.3.2 Teste Computacional 2 - Problemas Diversos

Problema 1 : O primeiro problema deste experimento apresenta como solução, na sua versão não-fuzzy associada, um conjunto *Pareto-ótimo* não-convexo. Nesse tipo de problema, a

¹Todos os outros parâmetros do problema (4.20) foram mantidos : tamanho da população, limite de indivíduos na população externa e número de gerações.

Figura 4.11: Conjunto *Pareto fuzzy* inteiro.

caracterização dos pontos *eficientes* através de métodos baseados em ponderação dos objetivos é ineficiente, pois técnicas dessa natureza não identificam pontos intermediários na região de não-convexidade (Figura 4.12).

Busca-se solucionar o problema :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x_1, x_2) &= (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1^2 + (x_2 - 2)^3) \quad (4.24) \\ -2 &\lesssim x_1 \lesssim 3 \\ 0 &\lesssim x_2 \lesssim 5 \end{aligned}$$

com violações permitidas $d_{l_{x_1}}$, $d_{u_{x_1}}$, $d_{l_{x_2}}$ e $d_{u_{x_2}}$ nas fronteiras dos intervalos.

A Figura 4.13 ilustra o conjunto de pontos *eficientes* do problema não-fuzzy associado a (4.24) e sua resolução através do *Método das Ponderações* (implementado em AIMMS 3.2). Observe que a solução obtida não caracteriza o conjunto *Pareto-ótimo*, já que não são gerados pontos na região de não-convexidade.

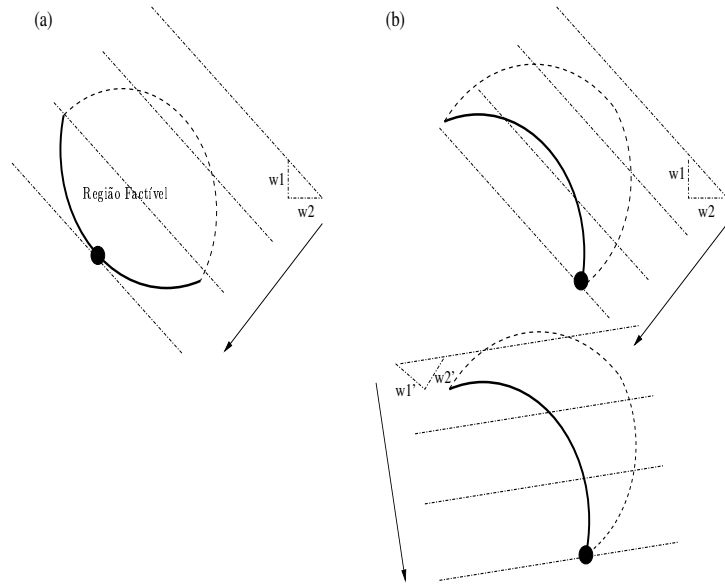


Figura 4.12: Utilização do *Método das Ponderações*: (a) Conjunto *Pareto-ótimo* convexo - todos os pontos podem ser encontrados com a variação dos pesos w_1 e w_2 ; (b) conjunto *Pareto-ótimo* não-convexo - pontos intermediários não são encontrados.

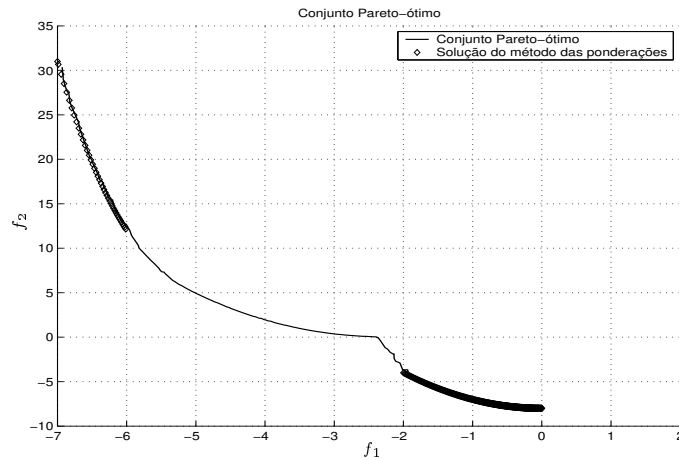


Figura 4.13: Solução obtida com o *Método das Ponderações*.

O algoritmo genético foi executado com duas configurações diferentes para os desvios: com $d_{l_{x_1}} = d_{u_{x_1}} = d_{l_{x_2}} = d_{u_{x_2}} = 0$ testa-se a capacidade do algoritmo em caracterizar o conjunto *Pareto-ótimo* não-convexo e com $d_{l_{x_1}} = 5$, $d_{u_{x_1}} = 2$, $d_{l_{x_2}} = 3$ e $d_{u_{x_2}} = 4$ busca-se analisar o

espalhamento obtido com a admissão de pontos com pertinência intermediária. O algoritmo foi executado por 300 gerações, mantendo os outros parâmetros idênticos àqueles do Experimento 1.

Com a primeira configuração o algoritmo encontrou um total de 114 soluções, todas coincidentes com o conjunto *Pareto-ótimo*. Ao admitir violações nas restrições, o algoritmo obteve o conjunto *Pareto fuzzy* formado por 150 pontos com pertinências intermediárias.

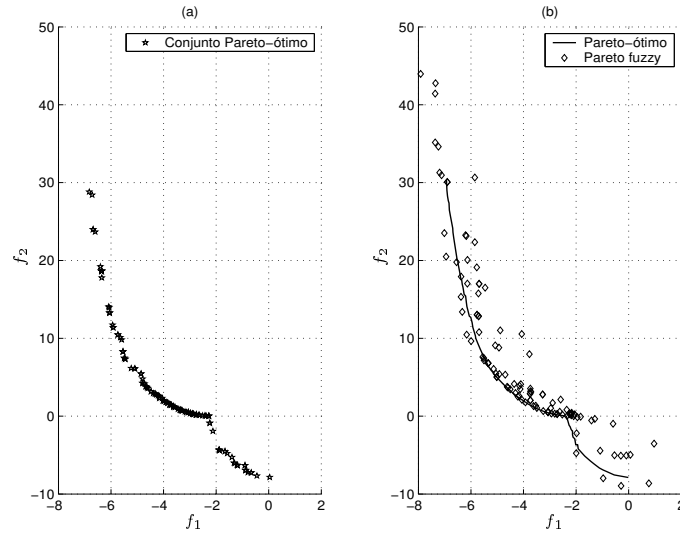


Figura 4.14: Resultados obtidos com o algoritmo: (a) Conjunto *Pareto-ótimo*; (b) Conjunto *Pareto-fuzzy*.

Observe que no conjunto *Pareto fuzzy* (Figura 4.14(b)), aparecem pontos com factibilidade intermediária que dominam pontos do conjunto *Pareto-ótimo* associado. Assim, a solução é formada por :

- (i) Pontos abaixo e à esquerda do conjunto *Pareto-ótimo* : grande medida de não-dominância e factibilidade intermediária;
- (ii) Pontos acima da curva *Pareto-ótima* : factibilidade total com baixa medida de não-dominância;
- (iii) Pontos coincidentes com o conjunto *Pareto-ótimo* : factibilidade total e não-dominância intermediária.

Problema 2 : Em (Zimmerman [1978]) é formulado o seguinte problema de otimização multiobjetivo :

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } f_1(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 &\text{Maximizar } f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
 &\quad -x_1 + 3x_2 \leq 21 \\
 &\quad x_1 + 3x_2 \leq 27 \\
 &\quad 4x_1 + 3x_2 \leq 45 \\
 &\quad 3x_1 + x_2 \leq 30 \\
 &\quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

solucionado através da seguinte estratégia fuzzy: encontram-se os valores otimistas ($\bar{f}_1 = 14$ e $\bar{f}_2 = 21$) e pessimistas ($\underline{f}_1 = -3$ e $\underline{f}_2 = 7$) de cada função, e definem-se funções de pertinência baseadas nesses valores:

$$\mu_{f_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_1(x_1, x_2) \leq -3 \\ \frac{f_1(x_1, x_2) + 3}{17}, & \text{se } -3 \leq f_1(x_1, x_2) \leq 14 \\ 1, & \text{se } f_1(x_1, x_2) \geq 14 \end{cases} \tag{4.26}$$

e

$$\mu_{f_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_2(x_1, x_2) \leq 7 \\ \frac{f_2(x_1, x_2) - 7}{14}, & \text{se } 7 \leq f_2(x_1, x_2) \leq 21 \\ 1, & \text{se } f_2(x_1, x_2) \geq 21 \end{cases} \tag{4.27}$$

transformando (4.25) em um problema de maximização do nível de satisfação dos objetivos, calculado através das funções (4.26) e (4.27). Como resultado, obteve-se o ponto $x^* = (5.03, 7.32)$, com $f_1^* = 9.61$, $f_2^* = 17.38$ e nível de satisfação $\lambda^* = 0.74$.

Para a execução do algoritmo genético, as funções objetivo de (4.25) foram transformadas em restrições fuzzy e adicionadas ao problema :

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar } f_1(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\
 &\text{Maximizar } f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
 &\quad -x_1 + 2x_2 \stackrel{\sim}{\geq} 14 \\
 &\quad 2x_1 + x_2 \stackrel{\sim}{\geq} 21 \\
 &\quad -x_1 + 3x_2 \leq 21 \\
 &\quad x_1 + 3x_2 \leq 27
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 45$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

com o nível de satisfação medido pelas funções (4.26) e (4.27).

Como as variáveis do problema não são canalizadas, a população é inicializada nos intervalos $x_1 \in [-9, 18]$ e $x_2 \in [-1, 11]$ de acordo com o procedimento descrito na Seção 4.2. O algoritmo foi executado com os mesmos parâmetros utilizados no Experimento 1, com exceção do limite de indivíduos na população externa, reduzido a apenas 10 soluções, a fim de promover maior pressão na seleção dos indivíduos candidatos à essa população.

Foram realizadas 100 execuções do algoritmo, encontrando-se pelo menos 6 soluções de equilíbrio com o ponto x^* , em cada conjunto *Pareto fuzzy* obtido.

Aumentando o número de indivíduos na população externa, é possível esboçar o gráfico da função de pertinência do conjunto *Pareto fuzzy* (Figura 4.15).

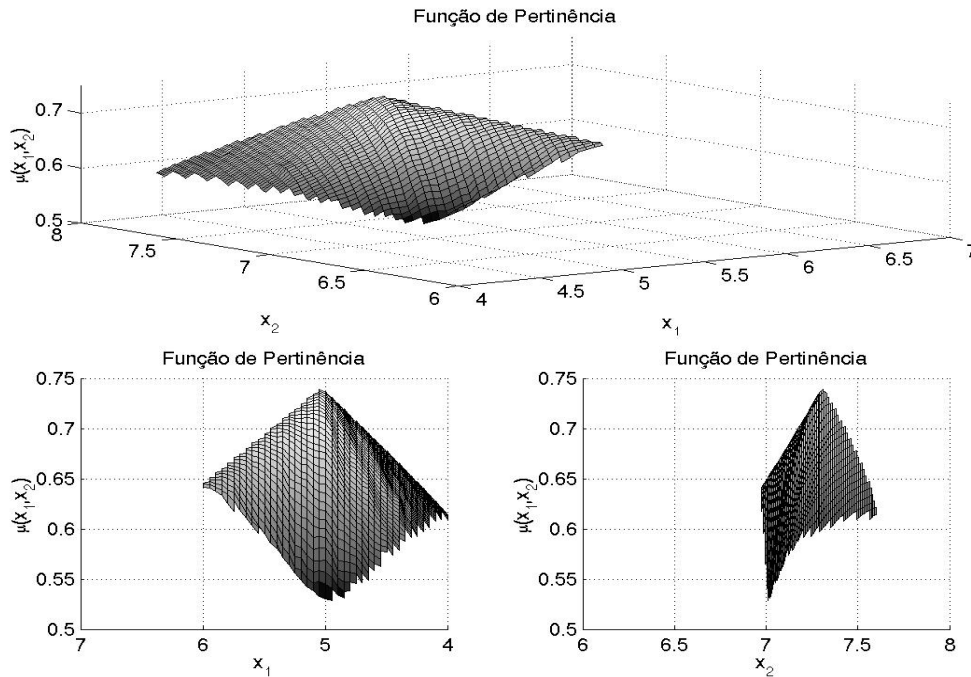


Figura 4.15: Esboço da função de pertinência.

Observe que a região de pertinência máxima ($\mu \approx 0.74$) ocorre, como esperado, nas vizinhanças do ponto $x^* = (5.03, 7.32)$ obtido em (Zimmerman [1978]).

Problema 3 : Em (Liu & Sahinidis [1997]) é apresentado um modelo matemático para o planejamento tático de uma indústria química. O modelo envolve a alocação e expansão de processos químicos e a compra/venda de insumos e produtos finais ao longo de um horizonte de planejamento:

(Valor atual)

$$\text{Maximizar } NPV = \sum_{j=1}^{NC} \sum_{l=1}^{NM} \sum_{t=1}^{NT} (\gamma_{jlt} S_{jlt} - \Gamma_{jlt} P_{jlt}) - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} (\alpha_{it} E_{it} + \beta_{it} y_{it}) - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} \delta_{it} W_{it} \quad (4.29)$$

(Capacidade de expansão dos processos em cada período)

$$y_{it} E_{it}^L \leq E_{it} \leq y_{it} E_{it}^U, \quad i = 1, \dots, NP, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.30)$$

(Capacidade do processo i no período t)

$$Q_{it} = Q_{i,t-1} + E_{it}, \quad i = 1, \dots, NP, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.31)$$

(Limitação do nível de operação)

$$W_{it} \leq Q_{it}, \quad i = 1, \dots, NP, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.32)$$

(Balanceamento de materiais)

$$I_{ijt} = \mu_{ij} W_{it}, \quad i = 1, \dots, NP, \quad j = 1, \dots, NC, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.33)$$

$$O_{ijt} = \eta_{ij} W_{it}, \quad i = 1, \dots, NP, \quad j = 1, \dots, NC, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.34)$$

$$\sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} = \sum_{l=1}^{NM} S_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} I_{ijt}, \quad j = 1, \dots, NC, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.35)$$

(Limitação de suprimento do produto j no mercado l no período t)

$$a_{jlt}^L \leq P_{jlt} \leq a_{jlt}^U, \quad j = 1, \dots, NC, \quad l = 1, \dots, NM, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.36)$$

(Limitação de demanda do produto j no mercado l no período t)

$$b_{jlt}^L \leq S_{jlt} \leq b_{jlt}^U, \quad j = 1, \dots, NC, \quad l = 1, \dots, NM, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.37)$$

(Limitação do número de expansões de processos)

$$\sum_{t=1}^{NT} y_{it} \leq NEXP(i), \quad i \in I' \subseteq \{1, 2, \dots, NP\} \quad (4.38)$$

(Limitação de capital para investimento)

$$\sum_{i=1}^{NP} (\alpha_{it} E_{it} + \beta_{it} y_{it}) \leq CI(t), \quad t \in T' \subseteq \{1, 2, \dots, NT\} \quad (4.39)$$

(Variáveis binárias)

$$y_{it} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, NP, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.40)$$

(Não-negatividade)

$$E_{it}, Q_{it}, W_{it}, I_{ijt}, O_{ijt}, P_{jlt}, S_{jlt} \geq 0, \quad \forall i, j, l, t \quad (4.41)$$

em que o nível de satisfação das restrições (4.36) e (4.37) são calculados através das funções de pertinência:

$$\mu_{(U)}(P_{jlt}) = \begin{cases} 1, & \text{se } P_{jlt} \leq a_{jlt}^U \\ 1 - \frac{P_{jlt} - a_{jlt}^U}{d_{a_{jlt}^U}}, & \text{se } a_{jlt}^U < P_{jlt} < a_{jlt}^U + d_{a_{jlt}^U}, \quad \forall j, l, t \\ 0, & \text{se } P_{jlt} \geq a_{jlt}^U + d_{a_{jlt}^U} \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\mu_{(L)}(P_{jlt}) = \begin{cases} 1, & \text{se } a_{jlt}^L \leq P_{jlt} \\ 1 - \frac{a_{jlt}^L - P_{jlt}}{d_{a_{jlt}^L}}, & \text{se } a_{jlt}^L - d_{a_{jlt}^L} < P_{jlt} < a_{jlt}^L, \quad \forall j, l, t \\ 0, & \text{se } P_{jlt} \leq a_{jlt}^L - d_{a_{jlt}^L} \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\mu_{(U)}(S_{jlt}) = \begin{cases} 1, & \text{se } S_{jlt} \leq b_{jlt}^U \\ 1 - \frac{S_{jlt} - b_{jlt}^U}{d_{b_{jlt}^U}}, & \text{se } b_{jlt}^U < S_{jlt} < b_{jlt}^U + d_{b_{jlt}^U}, \quad \forall j, l, t \\ 0, & \text{se } S_{jlt} \geq b_{jlt}^U + d_{b_{jlt}^U} \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\mu_{(L)}(S_{jlt}) = \begin{cases} 1, & \text{se } b_{jlt}^L \leq S_{jlt} \\ 1 - \frac{b_{jlt}^L - S_{jlt}}{d_{b_{jlt}^L}}, & \text{se } b_{jlt}^L - d_{b_{jlt}^L} < S_{jlt} < b_{jlt}^L, \quad \forall j, l, t \\ 0, & \text{se } S_{jlt} \leq b_{jlt}^L - d_{b_{jlt}^L} \end{cases} \quad (4.45)$$

O modelo foi testado em um cenário com horizonte formado por três períodos de 2, 2 e 3 anos, respectivamente. São possíveis 6 diferentes processos (nenhum inicialmente instalado) envolvendo 2 insumos e 2 produtos finais, comercializados em um único mercado. Com a aplicação do cenário, o modelo gerado é composto por um total de 18 variáveis binárias, 222 variáveis contínuas e 243 restrições (sem considerar integralidade e não-negatividade). A Figura 4.16 ilustra o diagrama de fluxo de produção e as Tabelas 4.1-4.5 fornecem os valores dos parâmetros:

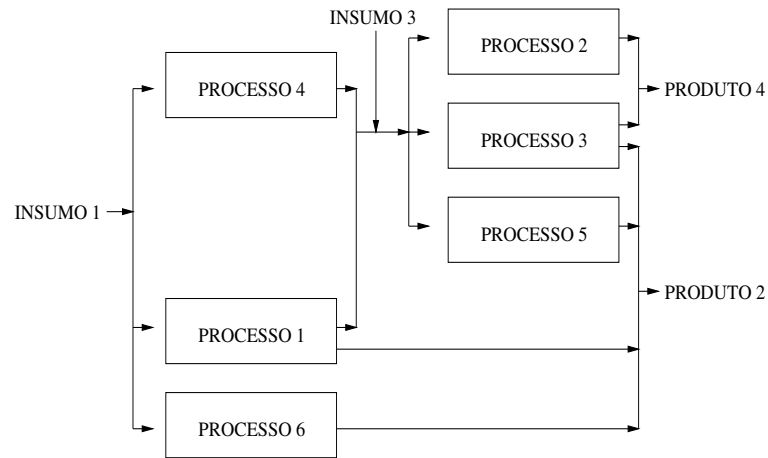


Figura 4.16: Diagrama de fluxo de produção.

Processo	$\beta_{it}(10^5\$)$			$\alpha_{it}(10^5\$)$			Limite Expansões
	t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3	
1	206	257	399	9.25	8.03	4.9	2
2	484	510	300	5.18	10.97	11.2	2
3	409	547	403	8.46	5.97	7.64	2
4	294	532	550	8.16	4.18	7.68	2
5	508	496	401	8.41	5.35	4.42	2
6	334	396	568	10.36	6.39	9.12	2

Tabela 4.1: Custos fixos e variáveis de expansão da capacidade dos processos.

Processo	Capacidade de Expansão (kton)		
	t=1	t=2	t=3
1	200	200	300
2	200	200	300
3	200	200	300
4	200	200	300
5	200	200	300
6	200	200	300
Limite \$	892×10^5	446×10^5	975×10^5

Tabela 4.2: Capacidade de expansões e limites de capital.

Produto	Preço ($10^5 \$/kton$)			Disponibilidade/Demanda (kton)		
	t=1	t=2	t=3	t=1	t=2	t=3
	Insumo			Disponibilidade		
1	37.54	28.40	25.87	53	55	36
3	29.05	22.69	34.71	50	58	34
	Produto			Demanda		
2	51.36	23.77	40.36	52	73	60
4	42.04	45.64	55.48	61	72	85

Tabela 4.3: Preços, disponibilidades e demandas de insumos e produtos finais.

Processo	$\delta_{it}(10^5 \$/kton)$		
	t=1	t=2	t=3
1	0.2	0.3	0.2
2	0.3	0.3	0.3
3	0.6	0.5	0.5
4	0.3	0.4	0.3
5	0.6	0.5	0.4
6	0.6	0.6	0.4

Tabela 4.4: Custos de operação.

Processo	μ_{ij} ou (η_{ij})			
	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Prod. 4
1	1.11	(0.59)	(1)	
2			0.51	(1)
3		(1)	0.74	(0.87)
4	0.57		(1)	
5	0.61	(1)	0.58	
6	0.93	(1)		

Tabela 4.5: Coeficientes de balanceamento de materiais.

No cenário proposto, admite-se uma violação de 50% nos limites de suprimento e demanda e 20% nos parâmetros que definem as restrições de balanceamento de materiais e limitação de

capital. O planejamento obtido (Liu & Sahinidis [1997])¹ está descrito nas Tabelas 4.6-4.7, com valor atual $NPV = \$10655.2 \times 10^5$.

Processo		t=1	t=2	t=3
1	Capacidade		30.0	30.0
	Produção		6.1	30.0
2	Capacidade			48.2
	Produção			48.2
3	Capacidade	69.4	69.4	69.4
	Produção	58.1	69.4	42.3

Tabela 4.6: Processos selecionados e níveis de operação (kton) (desconsiderando os ganhos e perdas de material no processo).

Produto	t=1	t=2	t=3
Compras			
1		6.4	31.5
3	40.6	42.1	21.1
Vendas			
2	54.9	77.0	63.3
4	53.3	63.7	89.7

Tabela 4.7: Quantidades compradas e vendidas (kton).

Para a resolução do Problema (4.29)-(4.41) com o algoritmo aqui proposto, algumas adaptações devem ser feitas no modelo apresentado:

(i) As imprecisões nos parâmetros são aproximadas por restrições fuzzy :

(Balanceamento de materiais)

$$\sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} \approx \sum_{l=1}^{NM} S_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} I_{ijt}, \quad j = 1, \dots, NC, \quad t = 1, \dots, NT \quad (4.46)$$

¹Utiliza-se um algoritmo de otimização global baseado em *Branch-and-Bound*, aplicado ao problema *crisp* resultante da incorporação dos desvios nas restrições e a parametrização das mesmas pelo nível de satisfação. Para a aplicação da técnica, o objetivo foi transformado em uma restrição fuzzy com função de pertinência baseada em seus valores otimista e pessimista.

(Limitação de capital para investimento)

$$\sum_{i=1}^{NP} (\alpha_{it} E_{it} + \beta_{it} y_{it}) \lesssim CI(t), \quad t \in T' \subseteq \{1, 2, \dots, NT\} \quad (4.47)$$

com funções de pertinência lineares para (4.47) e triangulares para as restrições de igualdade fuzzy (4.46) :

$$\mu\left(\sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} < 0.8K_{jt} \\ 1 + \frac{\sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} - K_{jt}}{0.2K_{jt}}, & \text{se } 0.8K_{jt} \leq \sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} \leq K_{jt} \\ 1, & \text{se } \sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} = K_{jt} \\ 1 - \frac{\sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} - K_{jt}}{0.2K_{jt}}, & \text{se } K_{jt} \leq \sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} \leq 1.2K_{jt} \\ 0, & \text{se } \sum_{l=1}^{NM} P_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} O_{ijt} > 1.2K_{jt} \end{cases} \quad (4.48)$$

em que $K_{jt} = \sum_{l=1}^{NM} S_{jlt} + \sum_{i=1}^{NP} I_{ijt}$, $j = 1, \dots, NC$, $t = 1, \dots, NT$.

(ii) Como o problema é escalar, a função objetivo (4.29) deve ser transformada em duas ou mais funções. A correta escolha dos objetivos é essencial na qualidade do resultado esperado. Assim, ao se optar por:

$$\text{Maximizar } f_1 = \sum_{j=1}^{NC} \sum_{l=1}^{NM} \sum_{t=1}^{NT} (\gamma_{jlt} S_{jlt} - \Gamma_{jlt} P_{jlt}) \quad (4.49)$$

$$\text{Minimizar } f_2 = \sum_{i=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} (\alpha_{it} E_{it} + \beta_{it} y_{it}) + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} \delta_{it} W_{it} \quad (4.50)$$

geram-se dificuldades na obtenção de boas soluções, já que pontos com mesma factibilidade e em equilíbrio de acordo com os objetivos, podem apresentar grandes diferenças em relação ao valor de NPV: sejam x_1^* e x_2^* , $x_1^* \neq x_2^*$ soluções quaisquer do Problema (4.29)-(4.41), com mesmo nível de factibilidade. Considere ainda que

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*) &= 3.18 \times 10^8 \text{ e } f_1(x_2^*) = 2.75 \times 10^7 \\ f_2(x_1^*) &= 1.67 \times 10^8 \text{ e } f_2(x_2^*) = 1.44 \times 10^8 \end{aligned}$$

de forma que não há dominância entre os pontos x_1^* e x_2^* segundo os objetivos (4.49) e (4.50). Dessa forma o algoritmo pode atribuir valores de *fitness* muito próximos para os dois pontos

$(\mu(x_1^*) = 0.6224 \text{ e } \mu(x_2)^* = 0.6103)$ ¹, independente de x_1^* e x_2^* apresentarem uma grande diferença no valor de NPV :

$$NPV(x_1^*) = 1.51 \times 10^8 \text{ e } NPV(x_2^*) = -1.16 \times 10^8 \quad (4.51)$$

O que deve ser notado neste modelo é que o critério de seleção do decisor é conhecido e expresso pela função objetivo (4.29). Ao gerar o problema multiobjetivo equivalente, adotando as funções (4.49) e (4.50), esse critério é perdido e o algoritmo busca caracterizar o conjunto *Pareto fuzzy* sem esse tipo de informação. Para a obtenção de soluções no nível daquela apresentada, é preciso que a escolha dos objetivos mantenha tal critério. Assim, adotou-se:

$$\text{Maximizar } NPV = \sum_{j=1}^{NC} \sum_{l=1}^{NM} \sum_{t=1}^{NT} (\gamma_{jlt} S_{jlt} - \Gamma_{jlt} P_{jlt}) - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} (\alpha_{it} E_{it} + \beta_{it} y_{it}) - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{t=1}^{NT} \delta_{it} W_{it} \quad (4.52)$$

$$\text{Maximizar } cNPV, \quad c > 0. \quad (4.53)$$

Algumas configurações especiais no algoritmo foram necessárias para representar todas as diferentes características do modelo:

(i) As variáveis binárias y_{it} , $i = 1, \dots, NP$, $t = 1, \dots, NT$ foram inicializadas através de escolha aleatória no intervalo $[0, 1]$ e arredondamento para o extremo mais próximo. Durante a execução do algoritmo, o mesmo arredondamento foi feito para as soluções resultantes da aplicação de *Crossover Guiado* ou mutação.

(ii) As restrições de capacidade dos processos (4.31) não foram incluídas no algoritmo, sendo encaradas como definições das variáveis Q_{it} em função de E_{it} , $i = 1, \dots, NP$, $t = 1, \dots, NT$. Essas variáveis foram calculadas ao longo do algoritmo e utilizadas como o vetor independente das restrições (4.32).

(iii) A dificuldade de resolução de problemas muito restritos através de algoritmos genéticos é conhecida e bastante estudada na literatura (Homaifar, Lai & Qi [1994], Michalewicz [1995], Michalewicz & Attia [1994], Schoenauer & Xanthakis [1993]). Em geral, é necessário que se introduzam técnicas de penalização das soluções infactíveis ou procedimentos de factibilização. Em especial, problemas com restrições de igualdade introduzem uma complexidade de resolução dificilmente superada por técnicas de penalização. Nesses casos, os procedimentos de factibilização das soluções podem ser utilizados com sucesso, mas aumentam significativamente o tempo de resolução. Perceba que em problemas dessa natureza, um processo de factibilização deve resolver um sistema de equações lineares ou não-lineares no procedimento de inicialização da população e a cada aplicação dos operadores genéticos.

¹Valores obtidos em uma execução do algoritmo.

Em geral, problemas com restrições de desigualdade fuzzy não oferecem tais dificuldades de convergência, dispensando o uso das técnicas descritas. Perceba que procedimentos de factibilização para problemas com restrições de igualdade fuzzy não necessitam resolver sistemas de equações e sim, apenas escolher pontos dentro dos limites estabelecidos pelos desvios permitidos nessas restrições.

Assim, para a resolução do problema de planejamento, a população é inicializada com um procedimento que busca gerar soluções dentro dos intervalos estabelecidos pelos desvios das restrições de igualdade fuzzy. O mesmo procedimento é executado na aplicação dos operadores genéticos, buscando manter a solução gerada dentro desses intervalos.

O algoritmo foi executado ao longo de 200 gerações, configurado com uma população convencional de 200 indivíduos, limite de 10 soluções na população externa e precisão igual a 1.

O conjunto *Pareto fuzzy*, obtido em diversas execuções do algoritmo, constitui-se de pontos cujo nível de factibilidade diminui com a melhora dos valores de NPV. Assim, para exemplificar, o algoritmo obteve soluções com $NPV \approx 6000 \times 10^5$ e nível de factibilidade $\lambda \approx 0.75$ e soluções com $NPV \approx 10000 \times 10^5$ e $\lambda \approx 0.10$. As Tabelas (4.8)-(4.9) ilustram o planejamento obtido para uma solução com $NPV = 10697.98 \times 10^5$ e $\lambda = 0.12$:

Processo		t=1	t=2	t=3
3	Capacidade	66.64	66.64	66.64
	Produção	59.93	62.98	46.67

Tabela 4.8: Processos selecionados e níveis de operação (kton) (desconsiderando os ganhos e perdas de material no processo).

Produto	t=1	t=2	t=3
Compras			
1			
3	38.44	54.18	29.77
Vendas			
2	63.56	74.02	52.53
4	60.08	62.15	47.48

Tabela 4.9: Quantidades compradas e vendidas (kton).

O algoritmo foi executado em uma máquina Pentium 233MHz e cada execução do modelo ¹ (gerando 10 soluções de equilíbrio) é realizada em aproximadamente 400s, o que comprova que o algoritmo é capaz de resolver problemas desse porte em tempo computacional aceitável.

¹A implementação do algoritmo foi realizada utilizando o software Delphi 3.

4.3.3 Teste Computacional 3 - Problema Multiobjetivo com Falso Conjunto *Eficiente*

O problema selecionado para o último experimento é componente da família de problemas proposta em (Deb [1999]), escolhida por apresentar características que dificultam o sucesso de algoritmos genéticos para otimização multiobjetivo. O problema tem como consequência a formação de conjuntos *Pareto-ótimos* locais, ou seja, conjuntos de soluções que obedecem à relação (1.3) apenas localmente, dificultando a obtenção do conjunto *Pareto-ótimo* global. Em problemas desse tipo com restrições fuzzy, espera-se que a solução seja dada pelo conjunto *Pareto-ótimo* global com espalhamento formado por pontos dos conjuntos *eficientes* locais.

Em (Deb [1999]), são apresentados problemas na forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (x_1, \frac{h(x_2)}{x_1}) \\ x_1 > 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

em que a função $h(x_2)$ deve ser escolhida de forma a admitir apenas valores estritamente positivos.

Antes da definição do teste escolhido, é interessante destacar algumas propriedades dessa família de problemas:

Lema 1. Se duas soluções x^1 e x^2 possuem mesma coordenada $x_2^1 = x_2^2$, então nenhuma das duas soluções domina a outra.

Como $x_2^1 = x_2^2$, então $h(x_2^1) = h(x_2^2) = c$ e,

- (i) se $x_1^1 < x_1^2$ então $f_1(x^1) < f_1(x^2)$ e $f_2(x^1) > f_2(x^2)$,
- (ii) se $x_1^1 > x_1^2$ então $f_1(x^1) > f_1(x^2)$ e $f_2(x^1) < f_2(x^2)$,
- (iii) se $x_1^1 = x_1^2$ então $f_1(x^1) = f_1(x^2)$ e $f_2(x^1) = f_2(x^2)$,

de forma que tanto x_1 quanto x_2 são não-dominadas em relação à outra.

Lema 2. Se duas soluções x^1 e x^2 possuem mesma coordenada $x_1^1 = x_1^2$, então aquela com menor valor de $h(x_2)$ domina a outra.

Como $x_1^1 = x_1^2$, então $f_1(x^1) = f_1(x^2)$ e f_2 será menor para a solução com o menor valor na função $h(x_2)$, dominando a outra.

Lema 3. Para duas soluções x^1 e x^2 com $x_1^1 \neq x_1^2, x_2^1 \neq x_2^2$ e $h(x_2^1) < h(x_2^2)$, existe uma solução $x^3 = (x_1^2, x_2^1)$ que domina a solução x^2 .

Como x^3 e x^2 possuem mesma coordenada x_1^2 e $h(x_2^1) < h(x_2^2)$, então de acordo com o lema anterior, x^3 domina a solução x^2 .

Teorema 1. O Problema (4.54) apresenta soluções *Pareto-ótimas* (x_1^*, x_2^*) locais ou globais, para x_2^* mínimo local ou global de $h(x_2)$, respectivamente; independente do valor de x_1^* .

Prova. Seja x_2^* o ponto de mínimo global de $h(x_2)$, então de acordo com o Lema 2, toda solução (a, x_2) é dominada por (a, x_2^*) . Assim, para todo valor de x_1 existe um ponto (x_1, x_2^*) que domina os pontos (x_1, x_2) , $\forall x_2$. Logo, o conjunto *Pareto-ótimo* global é formado pelos pontos (x_1, x_2^*) . Análise semelhante é válida considerando apenas a vizinhança de um ponto x_2^* , mínimo local de $h(x_2)$, constituindo um conjunto *Pareto-ótimo* local.

Assim, de acordo com o Teorema 1, se a função $h(x_2)$ tiver um mínimo local x_2^* e um mínimo global x_2^{**} , o problema de otimização multiobjetivo (4.54) apresentará conjuntos *Pareto-ótimos* locais e globais, dados pelos pontos (x_1, x_2^*) e (x_1, x_2^{**}) , respectivamente.

Como a função

$$h(x_2) = 2 - \exp\left\{-\left(\frac{x_2-0.2}{0.004}\right)^2\right\} - 0.8 \exp\left\{-\left(\frac{x_2-0.6}{0.4}\right)^2\right\} \quad (4.55)$$

$$x_2 \in [0, 1]$$

apresenta um mínimo local em $x_2^* \approx 0.6$ e um global em $x_2^{**} \approx 0.2$, sua utilização no Problema (4.54) leva à obtenção de um conjunto *Pareto-ótimo* global com pontos $(x_1, 0.2)$ e um local com pontos $(x_1, 0.6)$, como ilustrado na Figura 4.17.

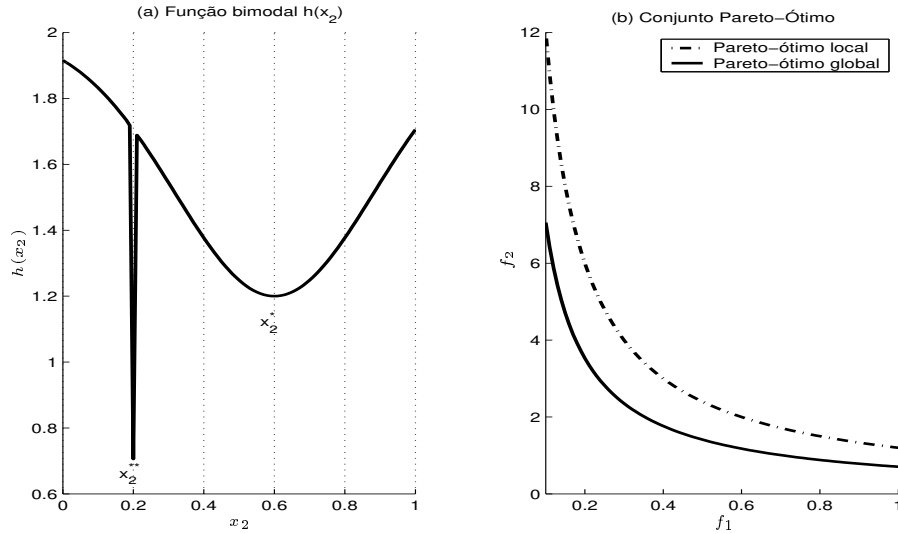


Figura 4.17: Problema com conjunto *eficiente* local: (a) Função bimodal; (b) Conjuntos *Pareto-ótimos* local e global.

A existência de um conjunto de pontos localmente *eficientes*, dificulta a obtenção dos pontos do conjunto *Pareto-ótimo* global. Neste experimento em especial, essa dificuldade é agravada pelo fato de que o ponto x_2^* está contido em uma região de atração muito mais ampla que o ponto de mínimo global x_2^{**} . A Figura 4.18 ilustra, na curva paramétrica dos objetivos, a distribuição de um conjunto de 10000 pontos gerados aleatoriamente, comprovando que a grande maioria das soluções encontram-se nas vizinhanças do conjunto *Pareto-ótimo* local.

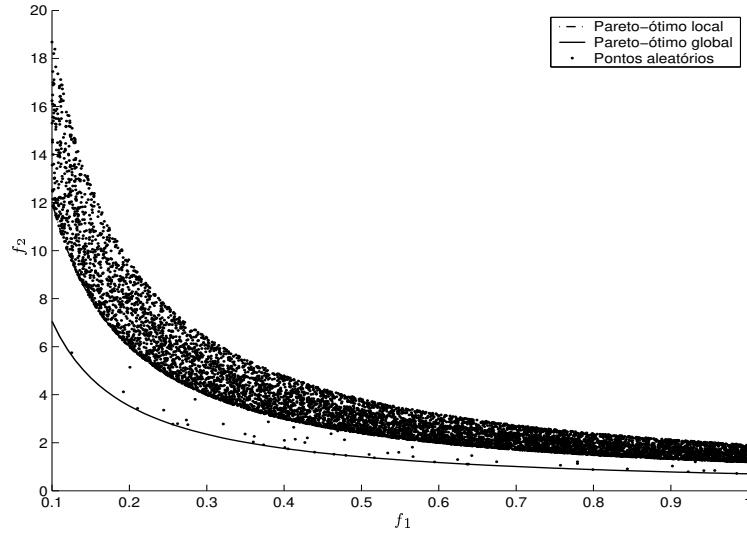


Figura 4.18: Distribuição de 10000 pontos aleatórios na curva paramétrica dos objetivos.

Para comprovar a dificuldade do problema, em (Deb [1999]) são realizadas 100 execuções do algoritmo *NSGA* com diferentes populações iniciais. O algoritmo foi executado com uma população de 60 indivíduos, escolhidos aleatoriamente nos intervalos $x_1 \in [0.1, 1]$ e $x_2 \in [0, 1]$, utilizando *Crossover Simple* com probabilidade $p_c = 1$ e nenhuma estratégia de mutação. Como resultado, o conjunto *Pareto-ótimo* global foi obtido em apenas 41% dos testes.

Experimento semelhante foi realizado com o algoritmo descrito neste capítulo, utilizando uma população convencional de 70 indivíduos e uma população externa limitada a 150 soluções, evoluídos ao longo de 100 gerações¹. A forma de inicialização da população é a mesma do *NSGA*, com uma precisão de 0.05. Para simular o ambiente *crisp* do experimento descrito, incluiu-se a seguinte restrição ao problema:

$$x_1 \gtrsim 0.1, \quad d = 0 \quad (4.56)$$

Como esperado, o algoritmo encontrou pontos pertencentes ao conjunto *Pareto-ótimo* global e criou um espalhamento com pontos do conjunto *Pareto-ótimo* local e vizinhança (região de

¹Utilizou-se, a fim de facilitar a configuração, os mesmos parâmetros do Experimento Computacional 1.

atração). Esse comportamento foi verificado em 76% dos testes. Nos 24% restantes, o resultado ficou restrito a pontos do conjunto *Pareto-ótimo* local.

É importante ressaltar que apesar do experimento simular o ambiente *crisp*, o algoritmo opera com soluções de diferentes níveis de pertinência no conjunto *Pareto-fuzzy*, permitindo a existência de um espalhamento formado por pontos *Pareto-ótimos* locais.

Como o menor nível de pertinência no conjunto *Pareto fuzzy* obtido com os experimentos anteriores é $\mu \approx 0.85$, para gerar um esboço do gráfico de pertinência, pode-se ampliar o limite de indivíduos na população externa ou diminuir a precisão na representação das soluções. Optou-se então por modificar a precisão para 0.1. A Figura 4.19 ilustra o gráfico da função obtida.

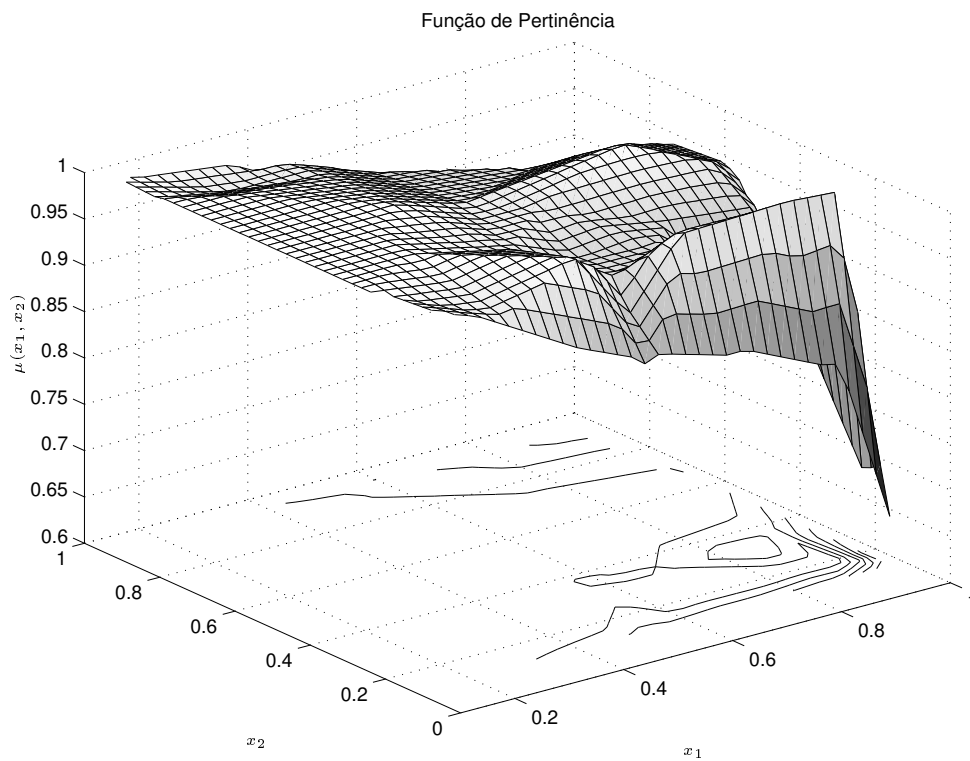


Figura 4.19: Esboço da função de pertinência.

Perceba que a função de pertinência apresenta, como esperado, maiores valores para $x_2^* \approx 0.6$ e $x_2^{**} \approx 0.2$, correspondentes aos mínimos local e global de $h(x_2)$, respectivamente (Figura 4.20).

Com a introdução de restrições fuzzy, pode-se avaliar o comportamento do algoritmo através do espalhamento dos pontos obtidos como solução. Assim, considerando o problema:

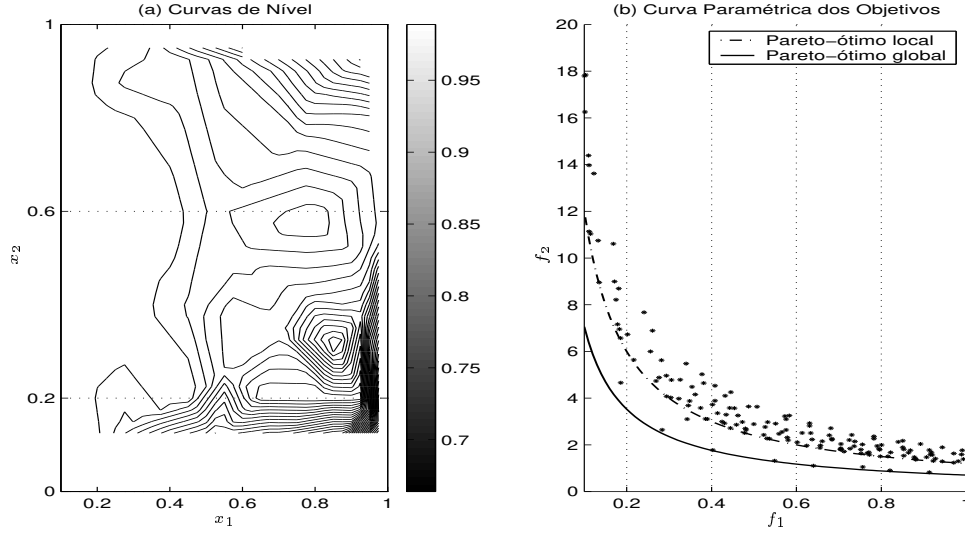


Figura 4.20: Curvas de nível da função de pertinência e conjunto *Pareto-fuzzy* obtido.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } x_1 \\
 & \text{Minimizar } \frac{2 - \exp\left\{-\left(\frac{x_2 - 0.2}{0.004}\right)^2\right\} - 0.8 \exp\left\{-\left(\frac{x_2 - 0.6}{0.4}\right)^2\right\}}{x_1} \\
 & x_1 > 0
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

e incluindo as restrições :

$$g_1(x_1, x_2) = x_2 \stackrel{\sim}{\leq} 0.3 \tag{4.58}$$

$$g_2(x_1, x_2) = h(x_2) \stackrel{\sim}{\leq} 1 \tag{4.59}$$

com desvios d_{g_1} e d_{g_2} (Figura 4.21), obtém-se uma solução formada por pontos pertencentes ao conjunto *Pareto-ótimo* global, e um espalhamento com pontos *eficientes* locais proporcional ao aumento nos desvios das restrições.

A Figura 4.22 ilustra a função de pertinência obtida ao configurar $d_{g_1} = d_{g_2} = 0.1$. Observe que o ponto de mínimo local $x_2^* \approx 0.6$ de $h(x_2)$ apresenta nível de factibilidade igual a 0, e portanto o *suporte* do conjunto *Pareto fuzzy* fica limitado a uma pequena vizinhança do conjunto *Pareto-ótimo* global do problema *crisp* associado.

Ao incrementar os valores dos desvios para $d_{g_1} = 0.44$ e $d_{g_2} = 0.5$, os pontos da vizinhança de $x_2^* \approx 0.6$ passam a ter factibilidade não nula e o conjunto *Pareto fuzzy* passa a incorporar um espalhamento formado por esses pontos (Figura 4.23).

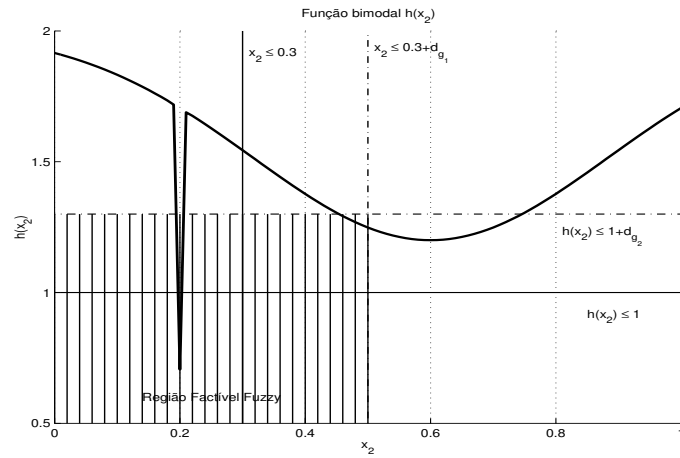


Figura 4.21: Problema com restrições fuzzy e variação dos desvios permitidos.

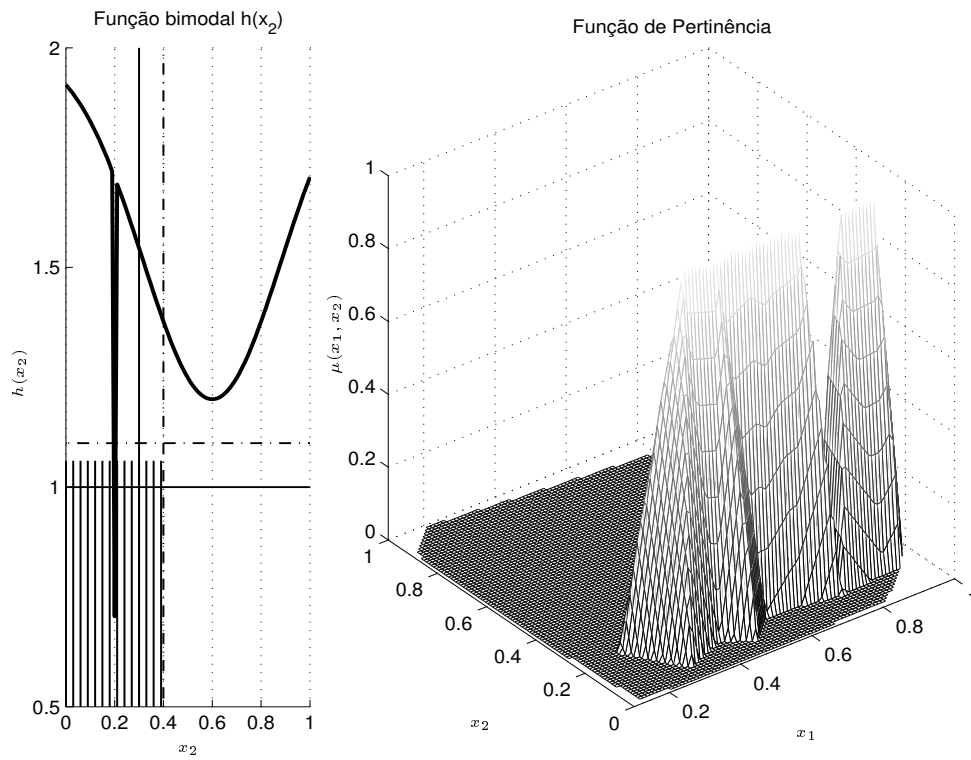


Figura 4.22: Esboço da função de pertinência ($d_{g_1} = d_{g_2} = 0.1$).

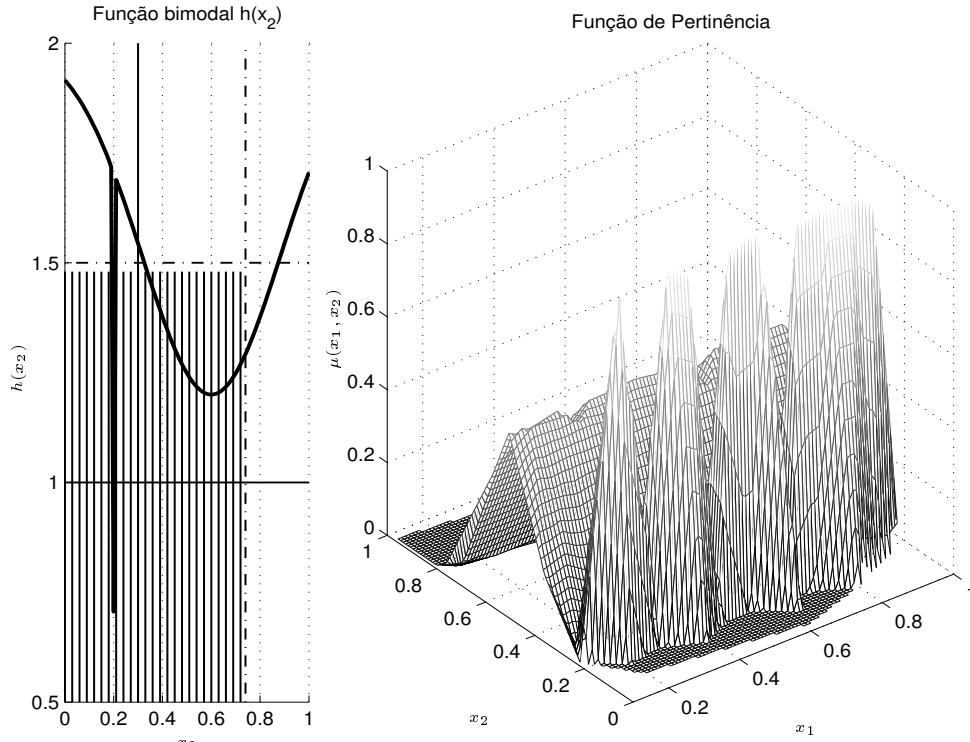


Figura 4.23: Esboço da função de pertinência ($d_{g_1} = 0.44$ e $d_{g_2} = 0.5$).

Observe que, como esperado, a função de pertinência para este caso apresenta duas regiões de picos: em $x_2 \approx 0.2$, pontos com factibilidade e medida de não-dominância igual a 1; e em $x_2 \approx 0.6$, pontos com pertinência intermediária, consequência da dominação por pontos da primeira região e do nível de factibilidade inferior a 1.

Assim, percebe-se que à medida que os valores dos desvios são incrementados, a factibilidade da vizinhança do ponto x_2^* aumenta e consequentemente o número de pontos no *suporte* do conjunto *Pareto fuzzy* também é acrescido (Figura 4.24).

Os resultados descritos foram obtidos com a execução do algoritmo por 300 gerações, mantendo inalterados os outros parâmetros. Perceba que apesar do problema desse experimento ser muito mais complicado do que aquele do Experimento 1, os parâmetros do algoritmo sofreram pequenas mudanças: a precisão foi relaxada e o número de gerações foi incrementado, de forma a ajustar o espalhamento do conjunto *Pareto fuzzy* e a convergência do algoritmo, respectivamente.

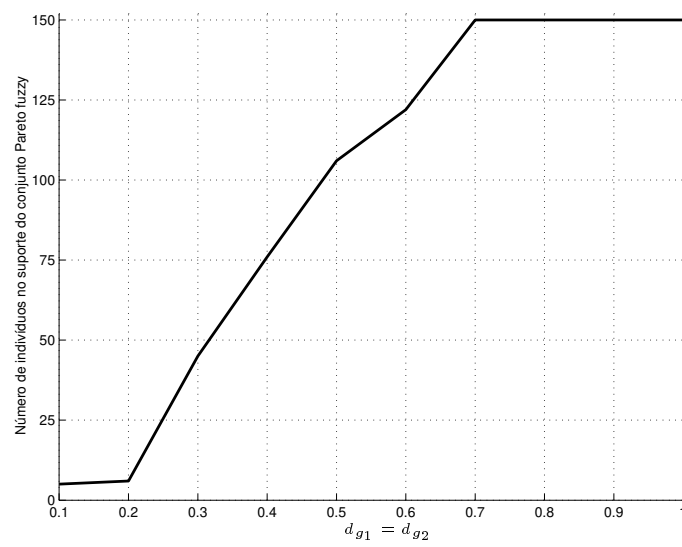


Figura 4.24: Número de indivíduos no *suporte* do conjunto *Pareto fuzzy* em função do aumento dos desvios d_{g1} e d_{g2} .

Capítulo 5

Algoritmos Genéticos para Otimização Multiobjetivo com Coeficientes Fuzzy

5.1 Introdução

A formulação matemática geral para o problema de otimização multiobjetivo com coeficientes fuzzy nas funções objetivo e restrições, é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } \tilde{F}(x) &= (\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \dots, \tilde{f}_k(x)), \quad k \geq 2 \\ X &= \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid \tilde{g}_i(x) \geq \tilde{b}_i, \quad l_j \leq x_j \leq u_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

em que $\tilde{f}_l(x)$, $l = 1, \dots, k$ e $\tilde{g}_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ são funções lineares ou não-lineares e x_j , $j = 1, \dots, n$ são variáveis reais ou inteiras. Considera-se que $\tilde{f}_l(x)$ e $\tilde{g}_i(x)$, $l = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, m$ são funções com parâmetros fuzzy e variáveis não-fuzzy (Seção 2.4).

O modelo (5.1) busca representar problemas multiobjetivos com coeficientes imprecisos. Novamente citando o exemplo do processo de corte industrial (Seção 1.1), diversos valores envolvidos no modelo podem ser representados por números fuzzy: tempo de configuração de cortadeiras para mudança de padrões de corte, valores de referência para sucateamento ou estocagem de sobras de material, precisão de corte, etc.

A consequência imediata da admissão de funções objetivo fuzzy é a mudança dos conceitos relacionados à avaliação e escolha das soluções. Os valores dos objetivos passam a ser imprecisos, caracterizados por números fuzzy, de forma que a relação de *Pareto* dominância (1.3), base para

a identificação das soluções *eficientes*, deve ser utilizada de acordo com os procedimentos de comparação entre números dessa natureza :

$$x^* \in Pareto_{fuzzy}(X) \Leftrightarrow \nexists x \in X \text{ tal que } \tilde{F}(x) \leq_f \tilde{F}(x^*) \text{ e } \tilde{F}(x) \neq_f \tilde{F}(x^*) \quad (5.2)$$

em que os símbolos $\leq_f$ e $\neq_f$ denotam relações de ordem entre dois números fuzzy.

É interessante analisar as diferenças entre restrição fuzzy e restrição com coeficientes fuzzy. A primeira, como discutido no capítulo anterior, modela situações em que são permitidas violações em seu atendimento, definindo diferentes níveis de factibilidade. No segundo caso, dois enfoques podem ser adotados: (i) associação do espalhamento dos coeficientes fuzzy como desvio na restrição, o que dependendo da técnica utilizada, é bastante semelhante a uma restrição fuzzy¹; (ii) a restrição é tratada como uma comparação entre dois números fuzzy ($\tilde{g}_i(x)$ e $\tilde{b}_i$, $i = 1, \dots, m$) e deve ser atendida totalmente. Como o Capítulo 4 aborda a resolução de problemas com restrições fuzzy, adotou-se o segundo enfoque como padrão neste capítulo.

Problemas de otimização multiobjetivo com coeficientes fuzzy, em oposição ao problema tratado no capítulo anterior, são amplamente estudados na literatura. Em geral, os métodos designados para esses problemas são bastante específicos, de forma que as estruturas desses algoritmos dificilmente podem ser generalizadas para outros problemas. Outra característica comum a esses métodos é a resolução baseada em escalarizações e reduções a problemas *crisp*.

Em (Sakawa & Kubota [2000]) é apresentado um algoritmo genético para um problema de *Job Shop* multiobjetivo, com tempo de processamento e data de entrega imprecisos. As soluções são representadas por matrizes tarefas×máquinas dos tempos fuzzy de finalização e os operadores genéticos mantêm a diversidade da população através da geração de indivíduos com baixa similaridade.

Em (Li, Ida & Gen [1997]) é apresentado um algoritmo genético para o problema multi-objetivo de distribuição de produtos com veículos heterogêneos e custos de transporte fuzzy. No algoritmo, as soluções são representadas por matrizes tridimensionais e as comparações entre os objetivos fuzzy, base dos processos de avaliação e seleção das soluções, são realizadas com a aplicação de *funções índices*. Como o modelo apresenta um número elevado de restrições de igualdade, a população é inicializada e evoluída utilizando procedimentos de factibilização.

Em (Sakawa & Yauchi [2000]), problemas multiobjetivos não-convexos com coeficientes fuzzy nos objetivos e restrições são resolvidos através de um algoritmo genético baseado no conceito de soluções α -Pareto-ótimas: conjunto de pontos não-dominados para um α -corte dos coeficientes fuzzy. O algoritmo faz uso de uma população de referência (constituída por soluções totalmente factíveis) e uma população convencional (com atendimento parcial do conjunto de restrições). A primeira solução de referência é gerada com a resolução de um problema de minimização dos desvios das restrições. Ao longo das gerações, novas soluções factíveis são geradas através

¹Um bom exemplo é o problema de planejamento tático da empresa química, solucionado no Teste Computacional 2 do capítulo anterior.

do *Método de Bissecção*, aplicado na direção formada por uma solução de referência e um indivíduo da população convencional. Este último procedimento é executado após a aplicação dos operadores genéticos.

Em (Sakawa & Nishizaki [2002]), é apresentado um algoritmo genético para problemas multiobjetivos com diferentes níveis de prioridades entre os objetivos. Os problemas são resolvidos de forma interativa, permitindo ao decisor informar os níveis de satisfação dos objetivos prioritários durante a execução do algoritmo.

5.2 Algoritmo Genético Proposto

O algoritmo proposto para a resolução de problemas com restrições fuzzy (Capítulo 4) pode, a partir de pequenas extensões, buscar soluções de problemas na forma (5.1). Novamente admite-se o desconhecimento de preferências entre os objetivos e a impossibilidade de aplicação de técnicas de escalarização do problema. A meta do algoritmo é, mais uma vez, caracterizar o conjunto *Pareto fuzzy*, de forma a permitir que um decisor escolha uma solução de compromisso entre aquelas selecionadas como alternativas.

Para tanto, o algoritmo deve incluir duas novas características:

(i) O cálculo dos valores dos objetivos deve ser realizado, para aqueles que contêm coeficientes fuzzy, através do *Princípio da Extensão*. Perceba que essa implementação não modifica a natureza operacional do algoritmo, permitindo que em um mesmo problema, sejam tratados objetivos fuzzy e não-fuzzy simultaneamente. O mesmo procedimento deve ser adotado para o cálculo das funções $\tilde{g}_i(x)$, $i = 1, \dots, m$.

Sem perda de generalidade, este estudo utiliza números fuzzy triangulares, a fim de facilitar os cálculos na execução do algoritmo. Apesar dos coeficientes serem representados por esse tipo de número fuzzy, as funções de pertinência dos objetivos e restrições não possuem necessariamente esse formato. Por questões de simplicidade, esses valores serão aproximados por números triangulares.

(ii) Aplicação de uma *função índice* (Seção 2.3) para as comparações entre os objetivos fuzzy. Essas comparações devem ser realizadas no cálculo da medida de não-dominância, influenciando nos valores de *fitness* e consequentemente, no processo de formação da população auxiliar e a seleção de componentes para a população externa. A *função índice* também deve ser aplicada na comparação dos valores fuzzy $\tilde{g}_i(x)$ e $\tilde{b}_i$, $i = 1, \dots, m$, para a verificação do atendimento das restrições.

Como a aplicação de algumas *funções índices* em um número *crisp* retorna o próprio número, sua utilização no algoritmo torna-o bastante genérico, possibilitando comparações de números fuzzy ou ordinários. Por sua facilidade de implementação, adotou-se a *função índice* apresentada em (Peneva & Popchev [1998]).

A Figura 5.1 ilustra a estrutura do algoritmo modificado:

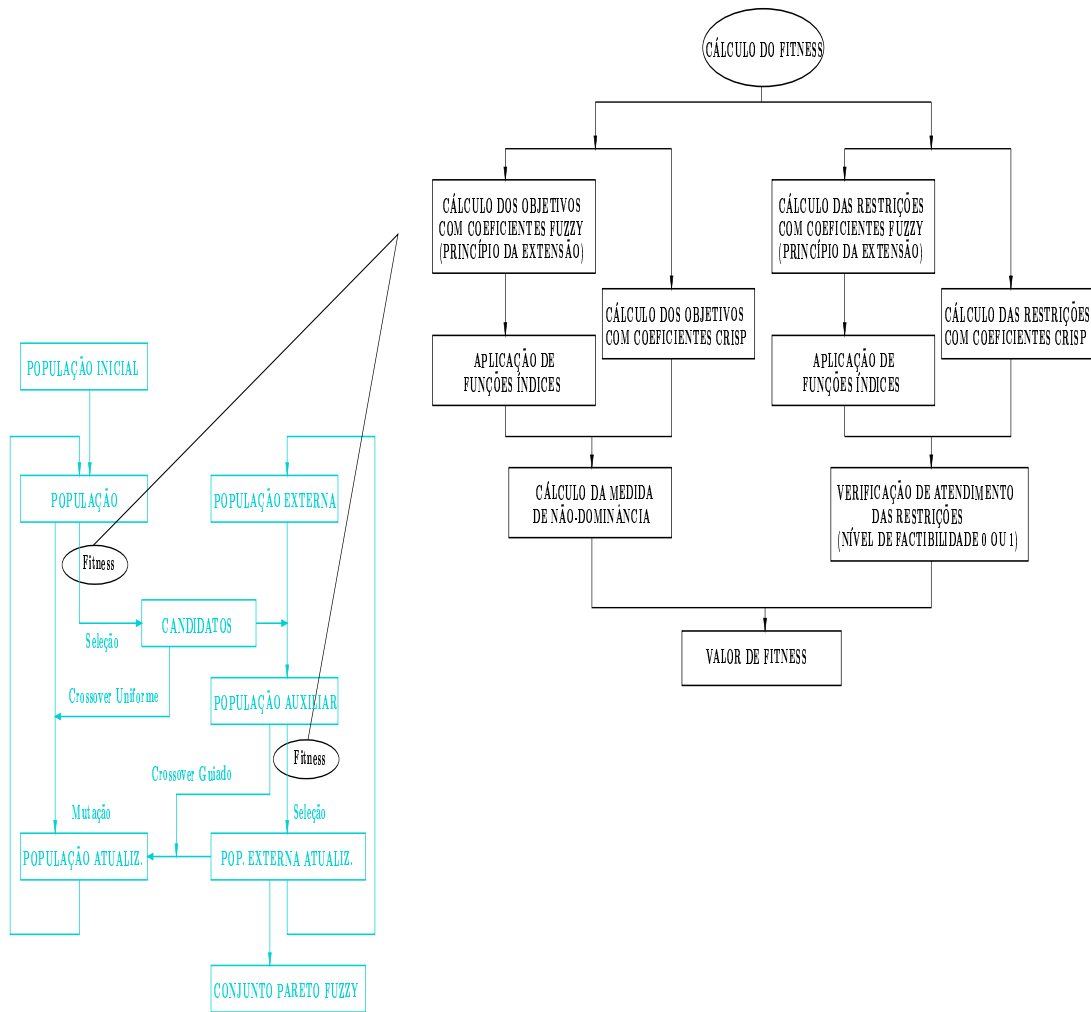


Figura 5.1: Estrutura geral do algoritmo genético proposto.

Para a utilização de algoritmos genéticos na resolução de problemas de otimização muito restritos, usualmente são aplicadas técnicas de penalização de pontos inactivos. Como já comentado no Capítulo 4, problemas com restrições de igualdade são particularmente complexos e em geral, necessitam da implementação de procedimentos de factibilização.

Em problemas com restrições *crisp* de desigualdade, sua “fuzzificação” através da admissão de desvios pode funcionar como um método de penalização. No algoritmo proposto, o valor de *fitness* de uma solução é proporcional ao seu nível de factibilidade, de forma que ao longo das gerações, soluções inactivas tendem a convergir para as regiões de factibilidade e pontos

factíveis convergem para soluções com melhores medidas de não-dominância. Neste estudo, não há o interesse de comparar a eficiência da “fuzzificação” das restrições com outras técnicas de penalização, apenas aproveitar uma estrutura já existente no algoritmo para a geração de pontos factíveis, sem a necessidade de mudanças no algoritmo ou inclusão de novas variáveis.

Os demais procedimentos e configurações permanecem sem qualquer tipo de modificação, incluindo as taxas de aplicação dos operadores genéticos.

Com a implementação das modificações descritas, o algoritmo torna-se uma ferramenta muito mais genérica no tratamento de problemas multiobjetivos fuzzy, já que é possível gerar soluções para quaisquer combinações dos seguintes elementos: restrições fuzzy, intervalos fuzzy de definição de variáveis, funções com coeficientes fuzzy e restrições com parâmetros fuzzy.

5.3 Experimentos Computacionais

O algoritmo estendido foi testado em três diferentes problemas:

Teste 1 : Para o primeiro experimento, adotou-se novamente o problema de minimização da função $F(x) = (x^2, (x_2 - 2)^2)$ (Schaffer [1984]). Como o conjunto *Pareto-ótimo* do problema *crisp* é conhecido, é possível analisar facilmente os efeitos causados no conjunto solução pela admissão de coeficientes fuzzy nas funções objetivo.

Teste 2 : Escolheu-se o problema multiobjetivo não-convexo (com parâmetros fuzzy) apresentado em (Sakawa & Yauchi [2000]). Como a identificação de pontos factíveis é bastante complexa nesse problema, utilizam-se restrições fuzzy como técnica de penalização de soluções.

Teste 3 : Para o último experimento, adotou-se o mesmo problema do Teste Computacional 3 do capítulo anterior. O objetivo é analisar os efeitos causados pela admissão de coeficientes fuzzy nas funções objetivo e comparar os resultados com aqueles já conhecidos.

5.3.1 Teste Computacional 1 - Função de Schaffer

O primeiro experimento com o algoritmo estendido foi realizado novamente com a função apresentada em (Schaffer [1984]). A idéia é admitir coeficientes fuzzy nos objetivos e validar o conjunto *Pareto fuzzy* obtido em cada situação com o conjunto *Pareto-ótimo* do problema *crisp* associado. A formulação geral dos problemas tratados aqui segue abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x) = (f_1(x), f_2(x)) &= ((x + \tilde{a}_1)^2, (x - \tilde{a}_2)^2) \\ &-2 \leq x \leq 6 \end{aligned} \quad (5.3)$$

em que $\tilde{a}_1 = [\underline{a}_1, a_1, \overline{a}_1]$ e $\tilde{a}_2 = [\underline{a}_2, a_2, \overline{a}_2]$ são números fuzzy triangulares.

Para a obtenção dos resultados abaixo, o algoritmo foi configurado com 70 indivíduos na população convencional e limite de 150 soluções na população externa. Adotou-se uma precisão de 0.01 na representação dos indivíduos e um critério de 100 gerações para finalizar a execução.

Como já visto anteriormente, o conjunto *Pareto-ótimo* para o problema não-fuzzy associado a (5.3) (valores modais iguais a $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$ e espalhamentos iguais a zero) é formado pelos pontos $x^* \in [0, 2]$. Para testar os efeitos causados pela incorporação de imprecisões nos coeficientes das funções objetivo, variou-se os valores dos números fuzzy $\tilde{a}_1$ e $\tilde{a}_2$. Assim, escolhendo $\tilde{a}_1 = [0, 0, 0]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$, cria-se um espalhamento da função $(x - \tilde{a}_2)^2$ para a direita (Figura 5.2(b)), tornando nebulosa a extensão do conjunto de pontos com medida de não-dominância igual a 1.

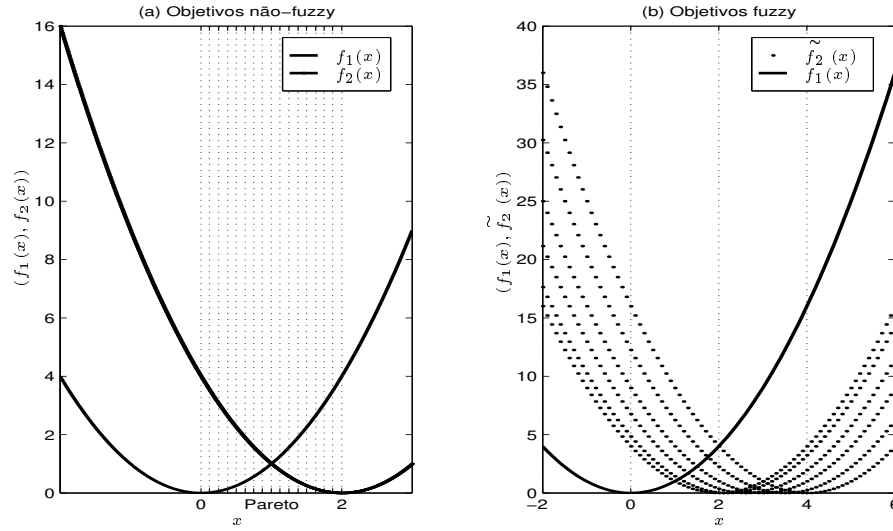


Figura 5.2: Função de Schaffer: (a) Funções objetivo do problema com coeficientes ordinários; (b) Funções objetivo do problema com coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 0]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$.

A consequência imediata, decorrente da utilização da relação de não-dominância fuzzy (5.2), é o aumento do número de pontos com pertinência igual a 1 no conjunto *Pareto fuzzy*, refletindo a imprecisão nos limites do conjunto *Pareto-ótimo* (nível de factibilidade e medida de não-dominância iguais a 1, neste problema). A Figura 5.3 ilustra o esboço da função de pertinência do conjunto *Pareto fuzzy* obtido.

Ao adotar $\tilde{a}_1 = [0, 0, 2]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$, cria-se um espalhamento do conjunto *Pareto-ótimo* em ambas extremidades (Figura 5.4(b)). Como esperado, ocorre um aumento no número de soluções pertencentes ao núcleo do conjunto *Pareto fuzzy* (pertinência igual a 1): os pontos no intervalo $[-1.01, 0)$ são gerados pela imprecisão nos parâmetros da função $(x + \tilde{a}_1)^2$; e as soluções no intervalo $(2, 2.99]$ são consequência da nebulosidade da função $(x - \tilde{a}_2)^2$ (Figura 5.5).

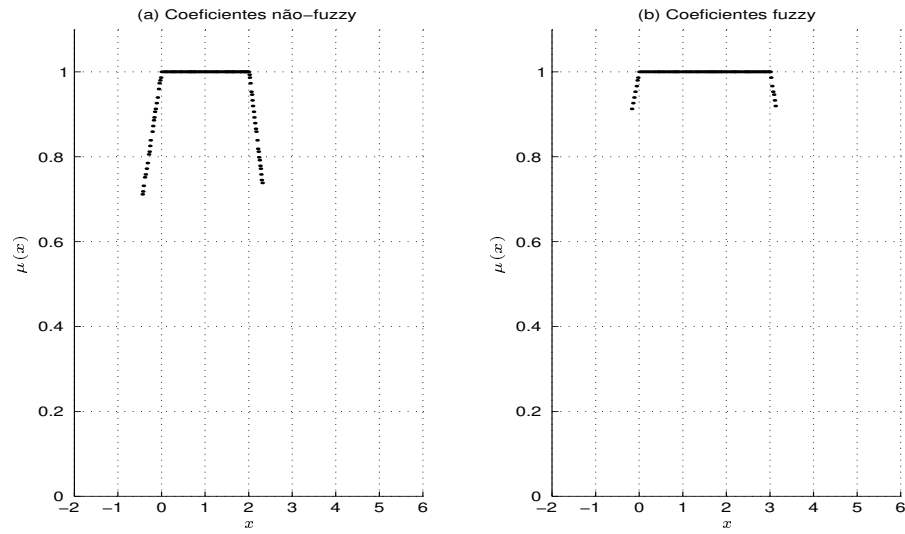


Figura 5.3: Esboço da função de pertinência para o conjunto *Pareto fuzzy*: (a) problema com coeficientes *crisp*; (b) problema com coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 0]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$.

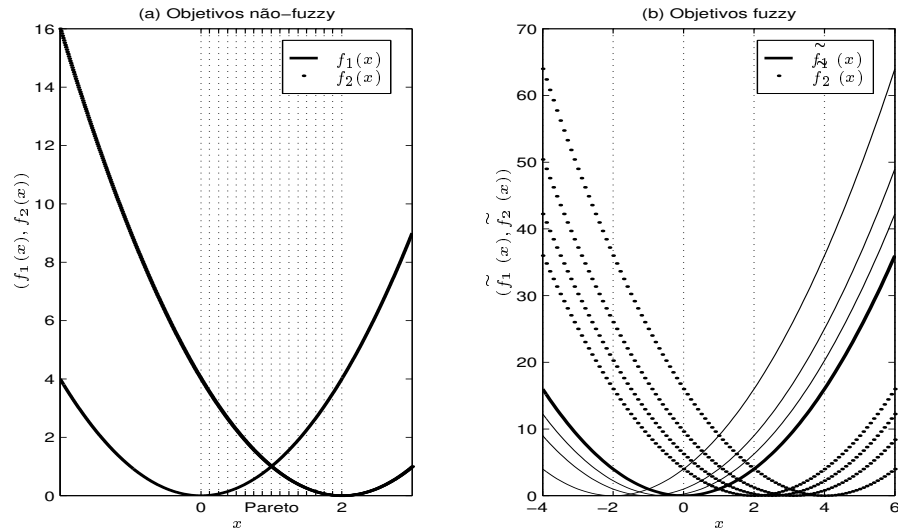


Figura 5.4: Função de Schaffer: (a) Funções objetivo do problema com coeficientes ordinários; (b) Funções objetivo do problema com coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 2]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$.

Como já visto em outros experimentos, a precisão e o limite de indivíduos na população externa exercem grande influência no espalhamento das soluções do conjunto *Pareto fuzzy*. A

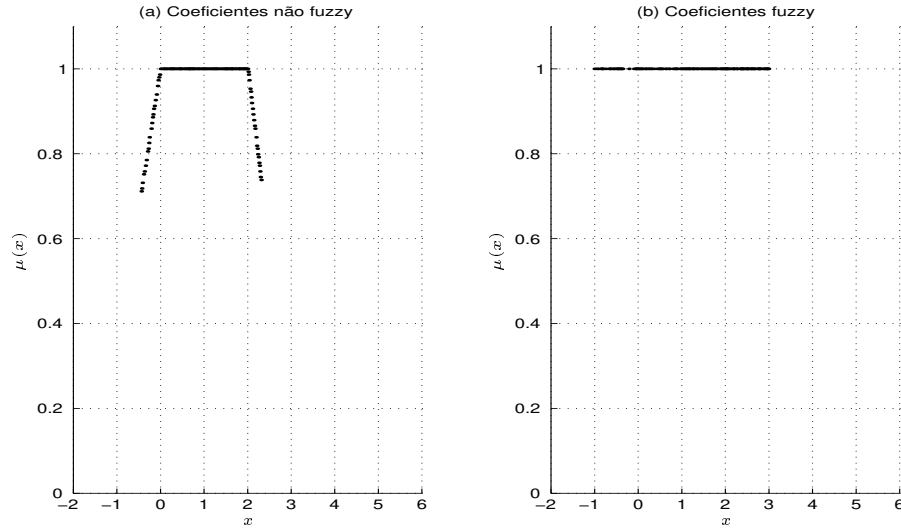


Figura 5.5: Esboço da função de pertinência para o conjunto *Pareto fuzzy*: (a) problema com coeficientes *crisp*; (b) problema com coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 2]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$.

Figura 5.6 ilustra, através das funções de pertinência, a variação do espalhamento de acordo com a precisão escolhida.

Observe que ao utilizar a precisão igual a 0.2, o espalhamento das soluções é praticamente idêntico àquele obtido com o uso de precisão 0.05, mas o número de pontos no suporte do conjunto *Pareto fuzzy* é menor, decorrente da utilização da precisão como raio de nicho.

No Experimento Computacional 1 do capítulo anterior, ao incluir a restrição fuzzy $x \gtrsim 2$, $d = 1$, obteve-se uma função de pertinência triangular para o conjunto *Pareto fuzzy*. Procedendo da mesma forma aqui, mas admitindo coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 2]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$, a função de pertinência passa a ser trapezoidal (Figura 5.7).

A mudança no formato da função de pertinência é consequência da alteração nas medidas de não-dominância das soluções (calculadas a partir de funções fuzzy), modificando os indivíduos pertencentes ao núcleo do conjunto *Pareto fuzzy*.

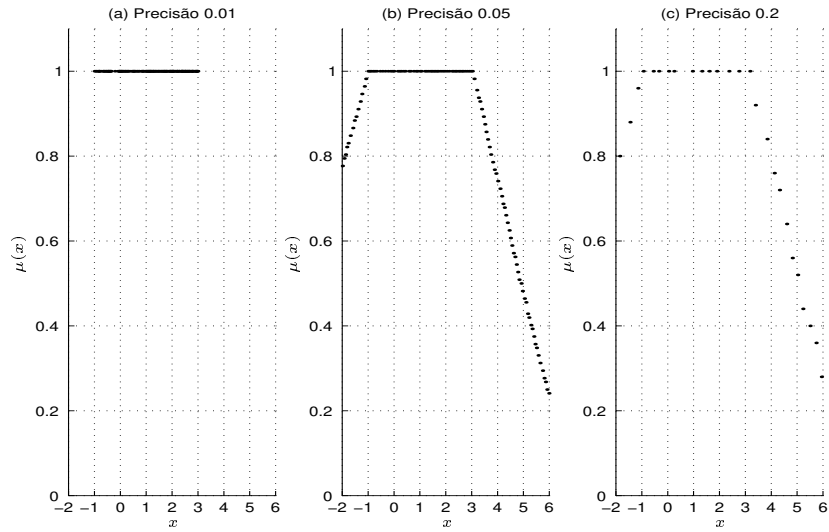


Figura 5.6: Esboço da função de pertinência para o conjunto *Pareto fuzzy* : (a) precisão 0.01 - 150 indivíduos no suporte; (b) precisão 0.05 - 113 indivíduos no suporte; (c) precisão 0.2 - 26 indivíduos no suporte.

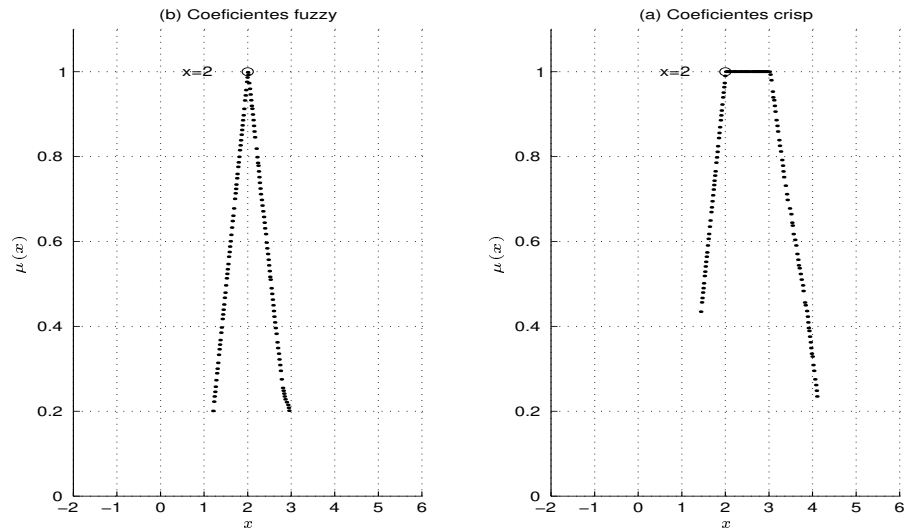


Figura 5.7: Esboço da função de pertinência para o conjunto *Pareto fuzzy* : (a) coeficientes não-fuzzy - restrição fuzzy $x \gtrsim 2$, $d = 1$; (b) coeficientes fuzzy $\tilde{a}_1 = [0, 0, 2]$ e $\tilde{a}_2 = [2, 2, 4]$ - restrição fuzzy $x \gtrsim 2$, $d = 1$.

5.3.2 Teste Computacional 2 - Problema Multiobjetivo Não-Convexo

O experimento desta seção é baseado no problema multiobjetivo não-convexo proposto em (Sakawa & Yauchi [2000]):

$$\begin{aligned}
 \text{Min } f_1(x) &= 7x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 + 8(x_3 - 10)^2 + \tilde{c}_3 (x_4 - 5)^2 + (x_5 - 3)^2 + 2(x_6 - 1)^2 + \tilde{c}_4 x_7^2 + \tilde{c}_5 (x_8 - 11)^2 + 2(x_9 - 10)^2 + x_{10}^2 + 45 \\
 \text{Min } f_2(x) &= (x_1 - 5)^2 + \tilde{c}_6 (x_2 - 12)^2 + 0.5x_3^4 + \tilde{c}_7 (x_4 - 11)^2 + 0.2x_5^5 + \tilde{c}_8 x_6^2 + 0.1x_7^4 + \\
 &\quad + \tilde{c}_9 x_6x_7 + \tilde{c}_{10} x_6 - 8x_7 + x_8^2 + 3(x_9 - 5)^2 + (x_{10} - 5)^2 \\
 \text{Min } f_3(x) &= x_1^3 + (x_2 - 5)^2 + \tilde{c}_{11} (x_3 - 9)^2 + \tilde{c}_{12} x_3 + 2x_4^3 + \tilde{c}_{13} x_5^2 + (x_6 - 5)^2 + \tilde{c}_{14} x_7^2 + \\
 &\quad + \tilde{c}_{15} (x_7 - 2)x_8^2 - x_9x_{10} + 4x_9^3 + 5x_1 - 8x_1x_7 \\
 \\
 \tilde{a}_1 (x_1 - 2)^2 - 4(x_2 - 3)^2 - 2x_3^2 + 7x_4 + \tilde{a}_2 x_5x_5x_8 + 120 &\geq 0 \\
 -5x_1^2 + \tilde{a}_3 x_2 - (x_3 - 6)^2 + \tilde{a}_4 x_4 + 40 &\geq 0 \\
 -x_1^2 - 2(x_2 - 2)^2 + \tilde{a}_5 x_1x_2 + \tilde{a}_6 x_5 - 6x_5x_6 &\geq 0 \\
 \tilde{a}_7 (x_1 - 8)^2 - 2(x_2 - 4)^2 - 3x_5^2 + \tilde{a}_8 x_5x_8 + 30 &\geq 0 \\
 3x_1 - 6x_2 + \tilde{a}_9 (x_9 - 8)^2 + \tilde{a}_{10} x_{10} &\geq 0 \\
 \tilde{a}_{11} x_1 + 5x_2 + \tilde{a}_{12} x_7 + 9x_8 &\leq 105 \\
 10x_1 + \tilde{a}_{13} x_2 + \tilde{a}_{14} x_7 + 2x_8 &\leq 0 \\
 -8x_1 + 2x_2 + 5x_9 + \tilde{a}_{15} x_{10} &\leq 12 \\
 -5 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, \dots, 10
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

com coeficientes fuzzy indicados na Tabela 5.1.

Em problemas com região factível não-convexa, podem-se encontrar grandes dificuldades na geração de soluções factíveis, comprometendo a convergência dos algoritmos genéticos. Para ilustrar tal dificuldade, foram gerados 10000 pontos aleatórios no intervalo $-5 \leq x_i \leq 10$, $i = 1, \dots, 10$ e verificada a factibilidade de cada um para o conjunto de restrições¹ do Problema (5.4). Como resultado, em 10 repetições do experimento foram encontrados um total de 6 soluções factíveis.

Nesses casos, como comentado no capítulo anterior, é comum a utilização de técnicas de penalização das soluções infactíveis ou procedimentos de factibilização. Aqui, utilizaremos a “fuzzificação” das restrições como método de penalização. Dessa forma, à cada restrição permite-se uma violação em seu atendimento, possibilitando a existência de pontos com níveis intermédios de factibilidade, a fim de que, ao longo das gerações, as soluções converjam para pontos

¹Considerando os coeficientes fuzzy.

mais factíveis. Objetiva-se que após um determinado número de gerações, os componentes da população externa sejam completamente factíveis.

	$\underline{c_i}$	c_i	$\overline{c_i}$		$\underline{a_i}$	a_i	$\overline{a_i}$
$\tilde{c}_1$	-14.5	-14	-13.5	$\tilde{a}_1$	-3.3	-3	-2.6
$\tilde{c}_2$	-16.5	-16	-15.5	$\tilde{a}_2$	-2.2	-2	-1.8
$\tilde{c}_3$	3.7	4	4.4	$\tilde{a}_3$	-8.6	-8	-7.4
$\tilde{c}_4$	4.5	5	5.5	$\tilde{a}_4$	1.8	2	2.2
$\tilde{c}_5$	6.4	7	7.5	$\tilde{a}_5$	1.7	2	2.4
$\tilde{c}_6$	4.5	5	5.5	$\tilde{a}_6$	-14.8	-14	-13.2
$\tilde{c}_7$	2.7	3	3.3	$\tilde{a}_7$	-0.9	-0.5	-0.2
$\tilde{c}_8$	6.5	7	7.5	$\tilde{a}_8$	0.8	1	1.2
$\tilde{c}_9$	-4.5	-4	-3.6	$\tilde{a}_9$	-12.8	-12	-11.2
$\tilde{c}_{10}$	-10.7	-10	-9.3	$\tilde{a}_{10}$	6.5	7	7.5
$\tilde{c}_{11}$	2.8	3	3.3	$\tilde{a}_{11}$	3.6	4	4.4
$\tilde{c}_{12}$	-12.8	-12	-11.2	$\tilde{a}_{12}$	-3.4	-3	-2.6
$\tilde{c}_{13}$	3.5	4	4.5	$\tilde{a}_{13}$	-8.4	-8	-7.6
$\tilde{c}_{14}$	5.6	6	6.4	$\tilde{a}_{14}$	-19	-18	-17
$\tilde{c}_{15}$	2.8	3	3.2	$\tilde{a}_{15}$	-2.2	-2	-1.8

Tabela 5.1: Coeficientes fuzzy dos objetivos e restrições.

O algoritmo em (Sakawa & Yauchi [2000]) opera sob um enfoque interativo e iterativo, ou seja, permite que o decisor informe, por exemplo, o α -corte dos coeficientes fuzzy a serem utilizados em cada iteração, na qual duas populações com 70 indivíduos cada são evoluídas ao longo de 5000 gerações. A Tabela 5.2 apresenta os pontos de equilíbrio obtidos em 5 iterações desse algoritmo.

Iteração	1	2	3	4	5
α -corte	1	1	0.9	0.9	0.8
$f_1(x)$	642.9	648.4	624.1	694.9	622.4
$f_2(x)$	796.4	738.9	736.8	725.2	679.9
$f_3(x)$	660.4	697.9	696.8	774.5	722.4

Tabela 5.2: Resultados obtidos pelo algoritmo descrito em (Sakawa & Yauchi [2000]).

O algoritmo genético deste estudo foi configurado com 200 soluções na população convencional, limite de 15 indivíduos na população externa e 2000 gerações como critério de parada. A

precisão das soluções foi configurada para 1. Escolheu-se um desvio¹ $d = 200$ para as restrições (com exceção das canalizações das variáveis, que foram mantidas não-fuzzy).

Para verificar a eficiência do uso de restrições fuzzy como método de penalização para o Problema (5.4), realizou-se 100 execuções do algoritmo (com diferentes populações iniciais). Em 94% dos casos foram gerados pontos com factibilidade 1 na população externa, em equilíbrio com aqueles apresentados na Tabela 5.2. Os 6% restantes apresentaram níveis de factibilidade superiores a 0.98.

A Figura 5.8 ilustra, para uma execução do algoritmo, o crescimento do nível de factibilidade dos indivíduos da população externa ao longo das gerações.

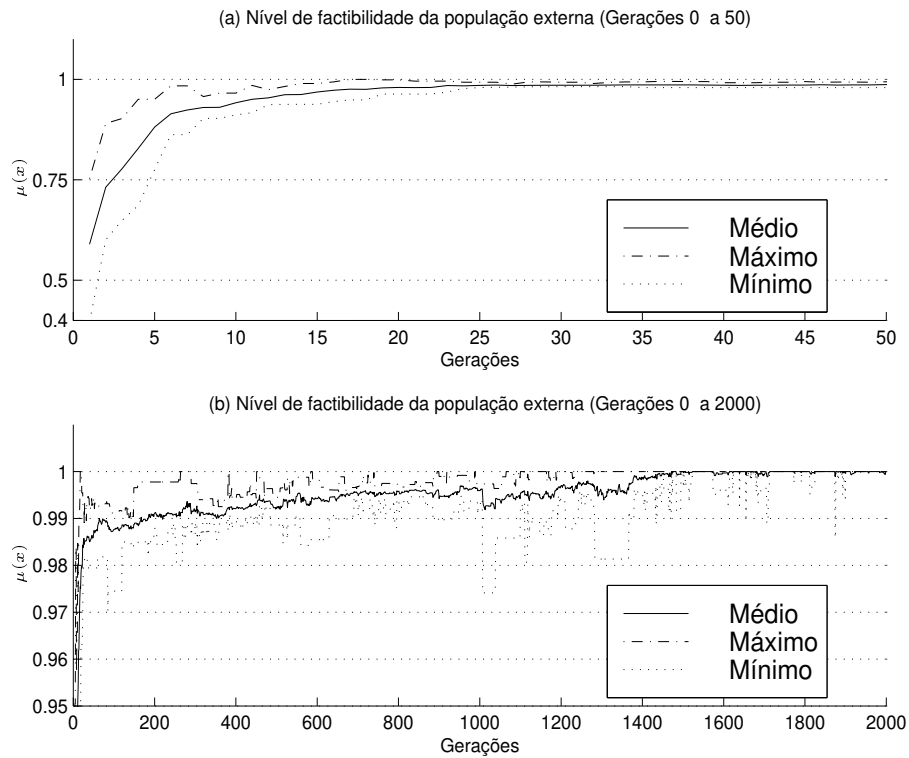


Figura 5.8: Crescimento do nível de factibilidade dos indivíduos da população externa: (a) gerações 0 a 50; (b) gerações 0 a 2000.

Observe que é bastante rápida a convergência para níveis de factibilidade $\mu(x) \approx 0.98$ (por volta de 25 gerações). A partir desse ponto, a convergência torna-se mais lenta, em consequência da proximidade entre os valores de *fitness* dos pontos da população externa. Ao final de 2000

¹Para o desvio permitido nas restrições escolheu-se, aproximadamente, a média das violações na factibilidade de uma população inicializada aleatoriamente.

gerações, todos os 15 elementos da população externa possuem factibilidade total.

Apenas para exemplificar, a Tabela 5.3 ilustra alguns dos pontos do conjunto *Pareto fuzzy* obtido na mesma execução do algoritmo:

Ponto	$\tilde{f}_1$	$\tilde{f}_2$	$\tilde{f}_3$
1	[662.61, 688.79, 713.43]	[418.82, 457.78, 496.61]	[2488.62, 2502.94, 2520.55]
2	[153.85, 159.87, 165.60]	[1625.07, 1671.59, 1717.97]	[1267.48, 1282.90, 1298.75]
3	[570.51, 589.16, 608.34]	[442.97, 481.55, 519.97]	[2789.10, 2803.39, 2820.80]
4	[762.13, 798.94, 833.26]	[407.39, 445.83, 484.10]	[2840.93, 2852.20, 2866.59]
5	[150.96, 157.19, 163.05]	[1797.93, 1845.29, 1892.51]	[950.26, 968.47, 987.03]
6	[528.29, 541.36, 555.29]	[452.65, 491.48, 530.18]	[2520.45, 2537.64, 2558.12]
7	[356.59, 364.52, 372.86]	[612.96, 653.87, 694.63]	[1883.81, 1902.44, 1923.22]

Tabela 5.3: Soluções de equilíbrio encontradas.

Assim, com apenas um execução do algoritmo é possível gerar diversas soluções de equilíbrio em tempo computacional aceitável para a complexidade do problema. O algoritmo foi executado em um Pentium 233MHz e o tempo de execução médio para esse problema é de 450s.

5.3.3 Teste Computacional 3 - Problema Multiobjetivo com Falso Conjunto *Eficiente*

O último teste com o algoritmo é baseado no problema proposto em (Deb [1999]), utilizado no Experimento 3 do capítulo anterior. A idéia é introduzir coeficientes fuzzy nas funções objetivo e validar os resultados obtidos a partir daqueles encontrados na Seção 4.5. A formulação geral dos problemas tratados aqui segue abaixo:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } x_1 \\
 &\text{Minimizar } \frac{\tilde{h}(x_2)}{x_1} \\
 &x_1 > 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

com

$$\tilde{h}(x_2) = 2 - \exp\left\{-\left(\frac{x_2 - \tilde{c}_1}{0.004}\right)^2\right\} - 0.8 \exp\left\{-\left(\frac{x_2 - \tilde{c}_2}{0.4}\right)^2\right\} \tag{5.6}$$

em que $\tilde{c}_1 = [\underline{c}_1, c_1, \overline{c}_1]$ e $\tilde{c}_2 = [\underline{c}_2, c_2, \overline{c}_2]$ são números fuzzy triangulares

É importante citar mais uma vez que, com coeficientes não-fuzzy, o tipo de problema escolhido gera conjuntos *Pareto-ótimos* locais, dificultando a obtenção do conjunto *Pareto-ótimo*

global. No problema original, os coeficientes são ordinários ($c_1 = 0.2$ e $c_2 = 0.6$) e pontos na forma $x^* = (x_1, 0.6)$ e $x^{**} = (x_1, 0.2)$, $\forall x_1 \in [0.1, 1]$ formam os conjuntos *Pareto-ótimos* locais e globais, respectivamente. Com a introdução de restrições fuzzy (Capítulo 4), o algoritmo encontrou soluções coincidentes com o conjunto *Pareto-ótimo* global e criou um espalhamento com pontos do conjunto *Pareto-ótimo* local e vizinhança.

No que segue, os espalhamentos de $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$ serão variados e os resultados comparados com aqueles do capítulo anterior. Assim, ao configurar $\tilde{c}_1 = [0.2, 0.2, 0.4]$ e $\tilde{c}_2 = [0.6, 0.6, 0.6]$, cria-se uma imprecisão no ponto que minimiza globalmente a função $h(x_2)$ (Figura 5.9).

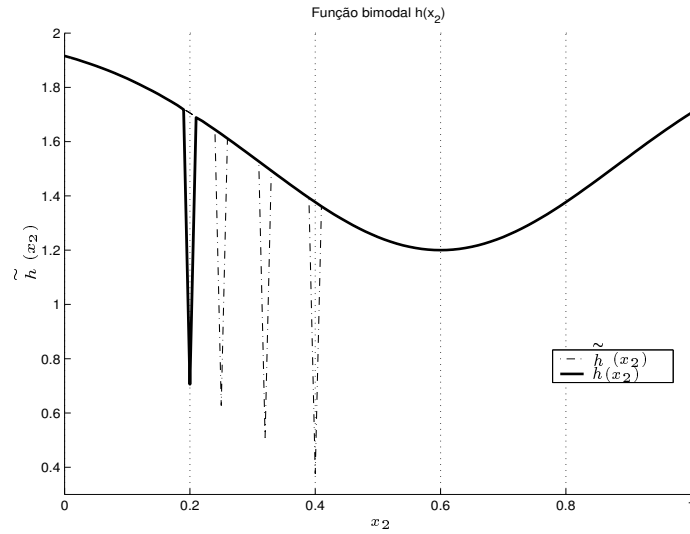


Figura 5.9: Função bimodal $\tilde{h}(x_2)$ com coeficientes fuzzy $\tilde{c}_1 = [0.2, 0.2, 0.4]$ e $\tilde{c}_2 = [0.6, 0.6, 0.6]$.

A função de pertinência do conjunto *Pareto fuzzy* obtido (Figura 5.10) deve ser comparada com aquela ilustrada na Figura 4.19, na qual identificam-se um pico bastante proeminente ($x_2^{**} \approx 0.2$) e um segundo com maior dispersão ($x_2^* \approx 0.6$), correspondentes às vizinhanças dos pontos de mínimos global e local de $h(x_2)$, respectivamente. A Figura 5.10 ilustra, como esperado, a influência da imprecisão em $\tilde{c}_1$ refletindo-se na extensão do conjunto *Pareto-ótimo* global do problema não-fuzzy associado. Assim, o primeiro pico, formado por pontos coincidentes com o conjunto *Pareto-ótimo*, é suavizado pelo aumento de soluções.

Perceba que agora é possível identificar apenas um pico, na vizinhança de $x_2^{**} \approx 0.2$, já que os pontos com maior pertinência no conjunto *Pareto fuzzy* obtido encontram-se nessa região.

Assim, baseando-se nos resultados obtidos, ao configurar $\tilde{c}_1 = [0.2, 0.2, 0.5]$ e $\tilde{c}_2 = [0.3, 0.6, 0.6]$, espera-se que a função de pertinência apresente apenas um pico (com grande dispersão) entre $x_2^{**} = 0.2$ e $x_2^* = 0.6$ (Figura 5.11).

De fato, as soluções com maior pertinência no conjunto *Pareto fuzzy* encontram-se na vizi-

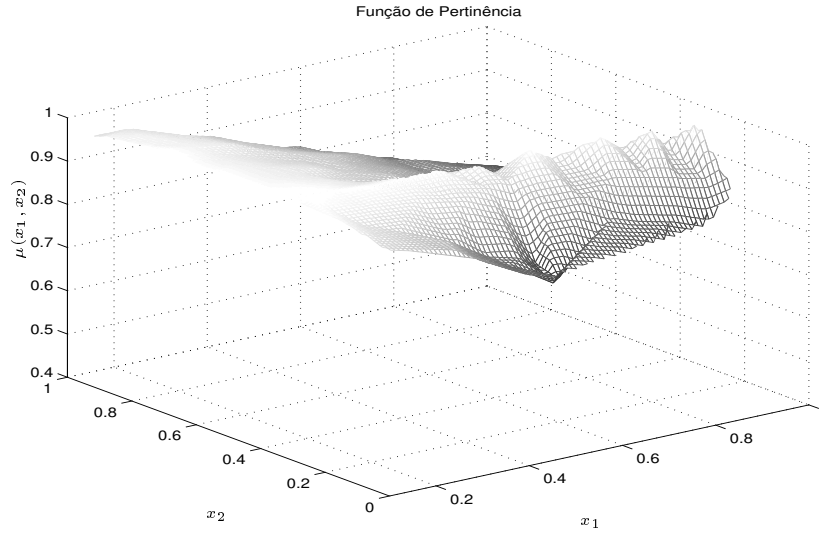


Figura 5.10: Esboço da função de pertinência ($\tilde{c}_1 = [0.2, 0.2, 0.4]$ e $\tilde{c}_2 = [0.6, 0.6, 0.6]$).

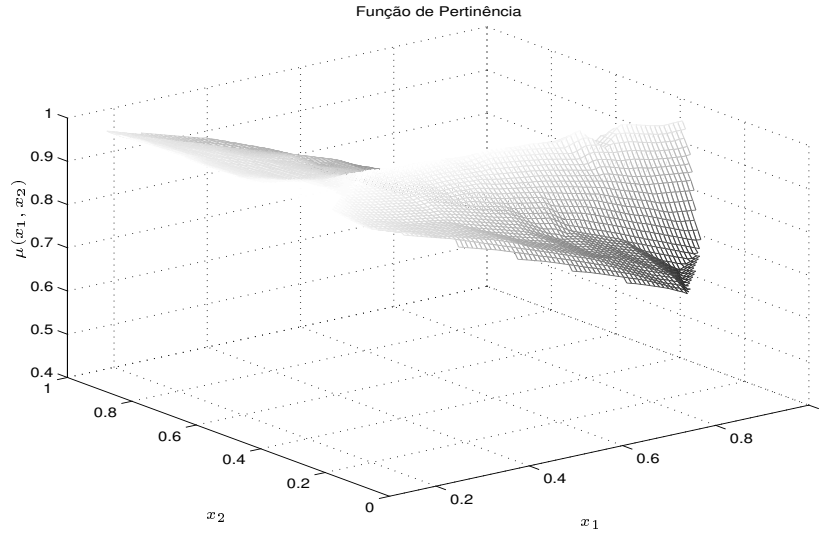


Figura 5.11: Esboço da função de pertinência ($\tilde{c}_1 = [0.2, 0.2, 0.5]$ e $\tilde{c}_2 = [0.3, 0.6, 0.6]$).

nhança dos pontos $(x_1, 0.4)$, $\forall x_1 \in [0.1, 1]$. A Figura 5.12 ilustra a distribuição das soluções em relação à curva paramétrica dos objetivos (fixou-se $x_2 \approx 0.4$).

Por fim, ao utilizar $\tilde{c}_1 = [0, 0.2, 0.2]$ e $\tilde{c}_2 = [0.6, 0.6, 1]$, a função de pertinência do conjunto *Pareto fuzzy* caracteriza-se pela formação de duas elevações, separadas por pontos de baixa

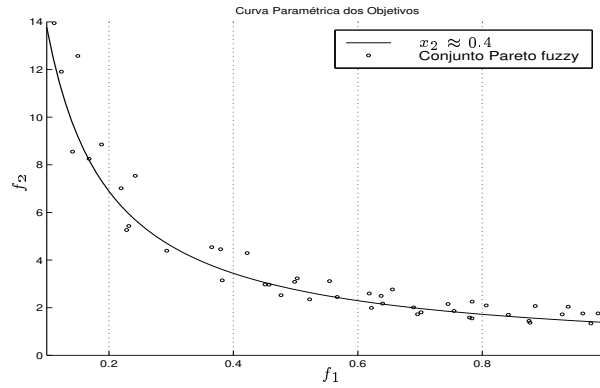


Figura 5.12: Distribuição dos pontos do conjunto *Pareto fuzzy* na curva paramétrica dos objetivos ($x_2 \approx 0.4$).

pertinência (Figura 5.13). Perceba que a distância entre os picos é bem maior do que aquela na função de pertinência da Figura 4.19, consequência da admissão de coeficientes imprecisos que modificam os mínimos global e local de $h(x_2)$ (tendem a diminuir o valor do ponto x_2^{**} e aumentar o valor de x_2^*).

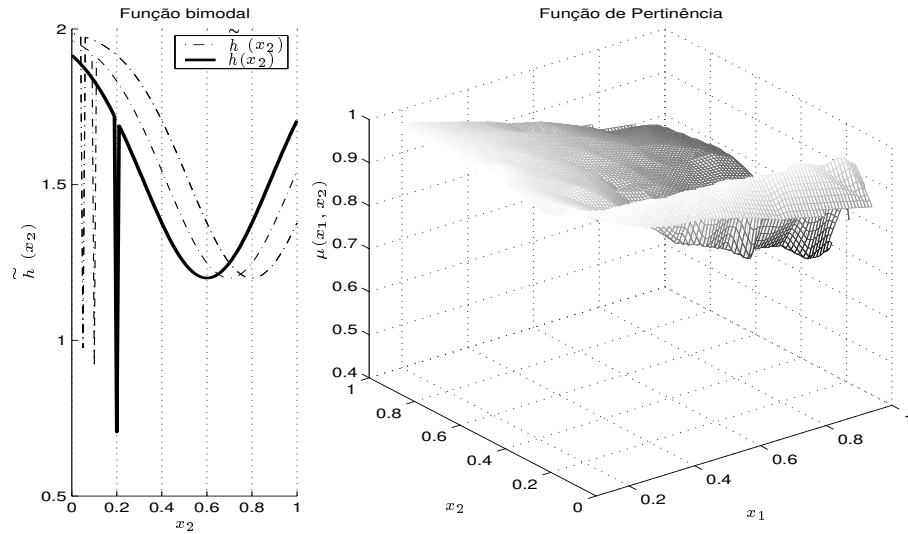


Figura 5.13: Esboço da função de pertinência ($\tilde{c}_1 = [0, 0.2, 0.2]$ e $\tilde{c}_2 = [0.6, 0.6, 1]$).

Os resultados apresentados foram obtidos utilizando a mesma configuração de parâmetros usada no Experimento 3 do capítulo anterior.

Capítulo 6

Conclusões

Desenvolveu-se um algoritmo genético para problemas de otimização multiobjetivo com restrições fuzzy e/ou coeficientes fuzzy nas funções objetivo e restrições. O algoritmo foi elaborado a fim de caracterizar pontos do conjunto *Pareto fuzzy*, permitindo que um decisor escolha uma solução de compromisso entre as alternativas encontradas.

O algoritmo foi baseado em uma estrutura composta por duas populações, de forma a solucionar a dificuldade ocasionada pela relatividade da medida de *fitness* e a impossibilidade de sua direta associação com o nível de pertinência no conjunto *Pareto fuzzy*. A população convencional é evoluída através de mecanismos tradicionais dos algoritmos genéticos e a externa, avaliada e atualizada a cada geração, mantém um grupo estável de soluções.

A precisão escolhida na representação das soluções exerce um papel semelhante a um raio de nicho, definindo o espalhamento dos pontos no conjunto *Pareto fuzzy* (os gráficos das Figuras 4.9 e 5.6 confirmam essa aplicação). De forma semelhante, o limite de indivíduos na população externa define a pressão de seleção nos indivíduos candidatos à essa população. Perceba que nos Problemas 2 e 3 (Experimento 2 do Capítulo 4) e Experimento 2 (Capítulo 5), utilizam-se limites baixos de indivíduos a fim de gerar um grupo reduzido de pontos com elevada pertinência. Nos demais experimentos, o limite de indivíduos na população externa é bem maior a fim de possibilitar a admissão de soluções com menores *fitness*, e consequentemente, permitir o esboço da função de pertinência do conjunto *Pareto fuzzy*.

Assim, como ilustrado pelos experimentos dos Capítulos 4 e 5, é possível a obtenção de diferentes resultados em função da configuração da precisão das soluções e do limite de indivíduos na população externa:

(i) *Caracterização do conjunto Pareto fuzzy e esboço da função de pertinência* : obtidos com a diminuição da precisão das soluções e aumento do número máximo de indivíduos na população externa, forçando a baixa incidência de pontos em um mesmo intervalo.

(ii) *Indicação dos pontos com maior nível de pertinência* : obtido, em oposição a (i), com o aumento da precisão das soluções e/ou diminuição do limite de indivíduos na população externa.

Dependendo das características do problema, os resultados obtidos tendem à pontos do conjunto *Pareto-ótimo*.

Com relação à versatilidade do algoritmo, os experimentos foram escolhidos de forma a explorar diferentes classes de problemas, algumas delas com grande complexidade. Assim, o algoritmo foi testado em problemas não convexos (Seções 4.3.2 e 5.3.2), problemas inteiros (Seção 4.3.1), com variáveis binárias (Seção 4.3.2), problemas de grande porte (Seção 4.3.2) e com falso conjunto eficiente (Seções 4.3.3 e 5.3.3). Em todas as situações testadas o algoritmo mostrou-se capaz de encontrar as soluções procuradas, comprovando sua generalidade e eficiência.

No Experimento 2 do Capítulo 5 verificou-se a utilização de desvios nas restrições como um método de obtenção de soluções factíveis. Como o *fitness* de um indivíduo é proporcional ao seu nível de factibilidade, a técnica é equivalente a um método de penalização ponderada pela distância à região factível original. A grande vantagem, como ilustrado pelo experimento, é que o algoritmo pode ser utilizado para esse fim sem modificações em sua estrutura.

Basicamente, dependendo do tipo de resultado desejado, o algoritmo necessita da configuração de três parâmetros: precisão das soluções, limite de indivíduos na população externa e o número de gerações utilizado como critério de parada. Os dois primeiros exercem influência no espalhamento das soluções e o terceiro, na qualidade dos valores de *fitness* utilizados como níveis de pertinência. Neste estudo, a configuração desses parâmetros foi realizada de forma empírica. Assim, uma boa idéia de implementação futura é a criação de procedimentos de configuração automática desses parâmetros, o que deve ser feita de forma a não comprometer o tempo computacional de resolução.

Como o algoritmo mostrou-se bastante versátil nos testes extraídos da literatura, uma perspectiva futura é a sua utilização na resolução de problemas provenientes da modelagem de processos reais.

Referências

(Arslan & Kaya [2001]) Arslan A., Kaya M., “*Determination of Fuzzy Logic Membership Functions using Genetic Algorithms*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 118, 297-306, 2001.

(Bellman & Zadeh [1970]) Bellman R., Zadeh L.A., “*Decision Making in a Fuzzy Environment*”, management Sciences, Vol. 17, 141-164, 1970.

(Benayoun, Montgolfier & Tergny [1971]) Benayoun R., Montgolfier J., Tergny J., “*Linear Programming with Multiple Objective Functions: STEP Method (STEM)*”, Mathematical Programming, Vol. 1, 366-375, 1971.

(Bilgiç & Türksen [1999]) Bilgiç T., Türksen I.B., “*Measurement of Membership Functions: Theoretical and Empirical Work*”, Handbook of Fuzzy Sets and Systems Vol. 1, D.Dubois and H.Prade (eds), Kluwer, 195-232, 1999.

(Buckley & Feuring [2000]) Buckley J.J., Feuring T., “*Evolutionary Algorithm Solution to Fuzzy Problems: Fuzzy Linear Programming*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 109, 35-53, 2000.

(Cadenas & Jimenez [1995]) Cadenas J.M., Jimenez F., “*Genetic Search in Fuzzy Multi-objective Programming*”, Proc. Sixth International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSAs'95), Vol. 2, 25-28, 1995, São Paulo.

(Chankong [1977]) Chankong V., “*Multiobjective decision making analysis: the Interactive Surrogate Worth Trade-off Method*”, Dissertação PhD, Case Western Reserve University, 1977.

(Chankong & Haimes [1982]) Chankong V., Haimes Y.Y., “*On the Characterization of Non-inferior Solutions of the Vector Optimization Problem*”, Automatica, Vol. 18 (6), 697-707, 1982.

(Chankong & Haimes [1983]) Chankong V., Haimes Y.Y., “*Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*”, Elsevier-North Holland, New York, 1983.

(Coello [1999]) Coello C.A.C., “*An Updated Survey of Evolutionary Multiobjective Optimization Techniques: State of the Art and Future Trends*”, Proceedings of 1999 Congress on Evolutionary Computation, Washington D.C., IEEE Press, 3-13, 1999.

- (DaCunha & Polak [1967]) DaCunha N.O., Polak E., “*Constraint Minimization under Vector-Valued Optimization*”, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 19, 103-124, 1967.
- (Deb [1999]) Deb K., “*Multi-Objective Genetic Algorithms: Problem Difficulties and Construction of Test Problems*”, Evolutionary Computation Journal, Vol. 7(3), 205-230, 1999.
- (Deb [2001]) Deb K., “*Evolutionary Multiobjective Optimization Algorithms*”, John Wiley & Sons, 2001.
- (Delgado, Verdegay & Vila [1989]) Delgado M., Verdegay J.L., Vila M.A., “*A General Model for Fuzzy Linear Programming*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 29, 21-29, 1989.
- (Fonseca & Fleming [1993]) Fonseca C.M., Fleming P.J., “*Genetic Algorithms for Multi-objective optimization: Formulation, Discussion and Generalization*”, Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, San Mateo, California, Morgan Kaufman, 416-423, 1993.
- (Fonseca & Fleming [1995]) Fonseca C.M., Fleming P.J., “*An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization*”, Evolutionary Computation, Vol. 3 (1), 1-16, 1995.
- (Geoffrion [1968]) Geoffrion A.M., “*Proper Efficiency and Theory of Vector Maximization*”, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 22 (3), 618-630, 1968.
- (Geoffrion, Dyer & Feinberg [1972]) Geoffrion A.M., Dyer J.S., Feinberg A., “*An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department*”, Management Science, Vol. 19 (4), 357-368, 1972.
- (Goldberg [1989]) Goldberg D.E., “*Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*”, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.
- (Goldberg & Richardson [1987]) Goldberg D.E., Richardson J., “*Genetic Algorithms with Sharing for Multimodal Function Optimization*”, Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms, Lawrence Erlbaum, 41-49, 1987.
- (Hajela & Lin [1992]) Hajela P., Lin C.-Y., “*Genetic Search Strategies in Multicriterion Optimal Design*”, Structural Optimization, Vol. 4, 99-107, 1992.
- (Herrera & Lozano [1998]) Herrera F., Lozano M., “*Fuzzy Genetic Algorithms: Issues and Models*”, T.R. DECSAI-98116, Dept. of Computer Science and A.I., University of Granada, 1998.

- (Herrera, Lozano & Verdegay [1994]) Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L., “*Applying Genetic Algorithms to Fuzzy Optimization Problems*”, Fuzzy Systems and A.I. - Reports and Letters, Vol 3, 39-52, 1994.
- (Holland [1975]) Holland J.H., “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*”, Ann Arbor, MIT Press, 1975.
- (Homaifar, Lai & Qi [1994]) Homaifar A., Lai S.H., Qi X., “*Constrained Optimization via Genetic Algorithms*”, Simulation, Vol. 62(4), 242-254, 1994.
- (Horn & Nafpliotis [1993]) Horn J., Nafpliotis N., “*Multiobjective Optimization using the Niche Pareto Genetic Algorithm*”, IlliGAL Report 93005, Illinois Genetic Algorithms Laboratory, University of Illinois, Urbana, Champaign, 1993.
- (Inuiguchi, Ichihashi & Tanaka [1990]) Inuiguchi M., Ichihashi H., Tanaka H., “*Fuzzy Programming: A Survey of Recent Developments*”, Slowinski & Teghem (eds.), “*Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*”, Kluwer Academic Publishers, 45-68, 1990.
- (Kim & Park [1990]) Kim K., Park K.S., “*Ranking Fuzzy Numbers with Index of Optimism*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 35, 143-150 (1990).
- (Kuhn & Tucker [1951]) Kuhn H.W., Tucker A.W., “*Nonlinear Programming*”, Proc. Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, California, 481-492, 1951.
- (Li, Ida & Gen [1997]) Li Y., Ida K., Gen M., “*Improved Genetic Algorithm for Solving Multiobjective Solid Transportation Problem with Fuzzy Numbers*”, Computers Ind. Engng., Vol. 33(3), 589-592, 1997.
- (Liu [1999]) Liu B., “*Uncertain Programming*”, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- (Lu & Fang [2000]) Lu J., Fang S.C., “*Solving Nonlinear Optimization Problems with Fuzzy Relation Equation Constraints*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 119, 1-20, 2000.
- (Michalewicz [1995]) Michalewicz Z., “*Genetic Algorithms, Numerical Optimization and Constraints*”, Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms, Pittsburgh, 151-158, 1995.
- (Michalewicz [1995]) Michalewicz Z., “*A Survey of Constraint Handling Techniques in Evolutionary Computation Methods*”, Proc. Fourth Annual Conference on Evolutionary Programming, MIT Press, Cambridge, 1995.

(Michalewicz [1996]) Michalewicz Z., “*Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*”, Springer-Verlag, 3 ed., 1996.

(Michalewicz & Attia [1994]) Michalewicz Z., Attia N., “*Evolutionary Optimization of Constrained Problems*”, Proc. Third Annual Conference on Evolutionary Programming, World Scientific, 98-108, 1994.

(Pedrycz & Gomide [1998]) Pedrycz W., Gomide F.A.C., “*An Introduction to Fuzzy Sets : Analysis and Design*”, MIT Press, 1998.

(Peneva & Popchev [1998]) Peneva V., Popchev I., “*Comparison of Clusters from Fuzzy Numbers*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 97, 75-81, 1998.

(Sakawa & Kubota [2000]) Sakawa M., Kubota R., “*Fuzzy Programming for Multiobjective Job Shop Scheduling with Fuzzy Processing Time and Fuzzy Due date through Genetic Algorithms*”, European Journal of Operational Research, Vol. 120, 393-407, 2000.

(Sakawa & Nishizaki [2002]) Sakawa M., Nishizaki I., “*Interactive Fuzzy Programming for Two-Level Nonconvex Programming Problems with Fuzzy Parameters through Genetic Algorithms*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 127, 185-197, 2002.

(Sakawa & Yauchi [2000]) Sakawa M., Yauchi K., “*Interactive Decision Making for Multiobjective Nonconvex Programming Problems with Fuzzy Numbers through Coevolutionary Genetic Algorithms*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 114, 151-165, 2000.

(Schaffer [1984]) Schaffer J.D., “*Some Experiments in Machine Learning using Vector Evaluated Genetic Algorithms*”, Tese de Doutorado, Vanderbilt University, 1984.

(Schaffer [1985]) Schaffer J.D., “*Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms*”, Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms, Lawrence Erlbaum, 93-100, 1985.

(Schoenauer & Xanthakis [1993]) Schoenauer M., Xanthakis S., “*Constrained GA Optimization*”, Proc. Fifth ICGA, Morgan Kaufmann, 573-580, 1993.

(Srinivas & Deb [1994]) Srinivas N., Deb K., “*Multi-Objective Function Optimization using Non-Dominated Sorting Genetic Algorithms*”, Evolutionary Computation, Vol. 2 (3), 221-248, 1994.

(Syswerda [1989]) Syswerda G., “*Uniform Crossover in Genetic Algorithms*”, Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms, Morgan Kaufmann Publishers, 2-9, 1989.

- (Tanaka, Ichihashi & Asai [1984]) Tanaka H., Ichihashi H., Asai K., “*A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems based on Comparison of Fuzzy Numbers*”, Control and Cybernet, Vol. 13, 185-194, 1984.
- (Tanaka, Okuda & Asai [1974]) Tanaka H., Okuda T., Asai K., “*On Fuzzy Mathematical Programming*”, Journal of Cybernetics, Vol. 3 (4), 37-46, 1974.
- (Türksen [1991]) Türksen I.B., “*Measurement of Membership Functions and their Acquisition*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 40, 5-38, 1991.
- (Valente [1999]) Valente P.A., “IA-527 Programação Multiobjetivo”, Notas de aula, 1999.
- (Verdegay [1982]) Verdegay J.L., “*Fuzzy Mathematical Programming*”, Gupta & Sanchez (eds.), “*Fuzzy Information and Decision Processes*”, 231-237, 1982.
- (Yager [1981]) Yager R.R., “*A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval*”, Information Sciences, Vol. 24, 143-161, 1981.
- (Zadeh [1963]) Zadeh L.A., “*Optimality and Nonscalar-Valued Performance Criteria*”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-8 (1), 59-60, 1963.
- (Zadeh [1965]) Zadeh L.A., “*Fuzzy Sets*”, Information and Control, Vol. 8, 338-353, 1965.
- (Zeleny [1974]) Zeleny M., “*Linear multiobjective programming*”, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin, Vol.95, 1974.
- (Zimmerman [1976]) Zimmerman H.J., “*Description and Optimization of Fuzzy Systems*”, International Journal of General Systems, Vol. 2, 209-215, 1976.
- (Zimmerman [1978]) Zimmerman H.J., “*Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions*”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 3, 45-55, 1978.
- (Zitzler, Deb & Thiele [2000]) Zitzler E., Deb K., Thiele L., “*Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results*”, Evolutionary Computation, Vol. 8 (2), 173-195, 2000.
- (Zitzler & Thiele [1998]) Zitzler E., Thiele L., “*An Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization : The Strength Pareto Approach*”, Technical Report 43, Computer Engineering and Networks Laboratory, Zurich, Switzerland, 1998.