

ANÁLISE DA DISPERSÃO EM FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS
COM PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO EM DEGRAU
SEM O USO DE EXPRESSÕES ASSINTÓTICAS

PAULO SÉRGIO DA MOTTA PIRES

Orientador: DAVID ANTHONY ROGERS

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP - para obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

AGOSTO 1980

À minha esposa,
Matilde;
Aos meus filhos,
Lucianna e Paulo Roberto

AGRADECIMENTOS:

- Ao Prof. David Anthony Rogers, nosso Orientador, pelo interesse demonstrado em nosso trabalho e pelas valiosas discussões que mantivemos no decorrer do mesmo. O prof. D.A.Rogers estimulou nosso interesse no campo de fibras ópticas;
- Ao Prof. Dr. Erik Johannes Bochave, nosso Co-orientador, pela proposição do tema que analisamos. O Prof. E.J.Bochave ajudou-nos a elucidar algumas questões teóricas que se apresentaram e suas sugestões foram extramamente importantes;
- Ao Prof. Dr. Rui Fragassi Souza, pelas sugestões que tornaram mais abrangente o nosso estudo;
- À Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, que, através do seu Departamento de Engenharia Elétrica, nos proporcionou a oportunidade e o suporte financeiro necessários à realização desta pesquisa;
- À Telecomunicações Brasileiras S/A - TELEBRÁS, pelo patrocínio dos trabalhos gráficos e pelo suporte técnico colocado à nossa disposição;
- À Sra. Maria Júlia Dini Fray, pelo excelente trabalho de datilografia;
- Ao Sr. Edison Pedro de Lima, pela competência demonstrada na confecção das Figuras que aparecem neste texto.
- Aos nossos familiares, pelo apoio que sempre recebemos;
- Aos nossos colegas.

ÍNDICE

RESUMO

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	001
CAPÍTULO II - CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS GERAIS	010
II.1 - AS EQUAÇÕES DE ONDA	011
II.2 - SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BESSEL	017
II.3 - AS CONDIÇÕES DE CONTORNO	020
II.4 - COEFICIENTES DE DISPERSÃO	022
CAPÍTULO III - FIBRAS ÓPTICAS COM PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO EM DEGRAU - CARACTERÍSTICAS DE PROPAGAÇÃO NECESSÁRIAS AO ESTUDO DA DISPERSÃO	030
III.1 - A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA EXATA	031
III.2 - AS EQUAÇÕES DE CORTE	042
III.3 - SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA EXATA - DIAGRAMAS DE PROPAGAÇÃO	048
CAPÍTULO IV - DISPERSÃO DO MATERIAL	055
IV.1 - REPRESENTAÇÃO DO ÍNDICE DE FASE - A EQUAÇÃO DOS TRÊS TERMOS DE SELLMEIER	056
IV.2 - VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE GRUPO COM O COMPRIMENTO DE ONDA	060
IV.3 - DISPERSÃO DO MATERIAL MÍNIMA E DISPERSÃO RESIDUAL	060
CAPÍTULO V - DISPERSÃO DO GUIA DE ONDA	068
V.1 - EQUAÇÕES EXATAS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO DO GUIA DE ONDA	069
V.2 - CURVAS DE DISPERSÃO DO GUIA DE ONDA ...	071

CAPÍTULO VI - DISPERSÃO TOTAL	077
VI.1 - EQUAÇÕES EXATAS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO TOTAL	078
VI.2 - PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PARA O CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE ONDA DE DISPERSÃO TOTAL MÍNIMA E PARA O CÁLCULO DA DISPERSÃO RESIDUAL - ANÁLISE EXATA	082
VI.3 - UM PARÂMETRO FUNDAMENTAL DA ANÁLISE DE DISPERSÃO TOTAL ATRAVÉS DE FORMULAÇÕES ASSINTÓTICAS - DEDUÇÃO DE du/dv	085
VI.4 - MÉTODOS ASSINTÓTICOS PARA A ANÁLISE DE DISPERSÃO QUE NÃO SÃO BASEADOS EM PARÂMETROS OBTIDOS ATRAVÉS DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA APROXIMADA	091
VI.5 - MÉTODOS ASSINTÓTICOS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO QUE SÃO BASEADOS EM PARÂMETROS OBTIDOS ATRAVÉS DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA APROXIMADA	095
VI.6 - EQUAÇÕES APROXIMADAS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO DO GUIA DE ONDA	105
VI.7 - COMPARAÇÃO ENTRE AS PROPOSIÇÕES DE CÁLCULO DA CONSTANTE DE PROPAGAÇÃO NORMALIZADA E SUAS DERIVADAS OBTIDAS A PARTIR DE FÓRMULAS ASSINTÓTICAS	106
 CAPÍTULO VII - COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO EXATO DE ANÁLISE DA DISPERSÃO EM FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS COM PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO EM DEGRAU E AQUELES DESENVOLVIDOS POR CHANG, MARCUSE E SOUTH.	114
VII.1 - DISPERSÃO TOTAL MÍNIMA E DISPERSÃO RESIDUAL - COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO EXATO E O MÉTODO ASSINTÓTICO DE C.T.CHANG ...	115
VII.2 - DISPERSÃO TOTAL MÍNIMA E DISPERSÃO RESIDUAL - COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO EXATO E OS MÉTODOS ASSINTÓTICOS DE D. MARCUSE E C.R.SOUTH	128
 CONCLUSÕES	140

APÊNDICE A - DESCRIÇÃO DA ANÁLISE ASSINTÓTICA DA DISPERSÃO PROPOSTA POR C.R.SOUTH 10	142
APÊNDICE B - VALORES OBTIDOS ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DO PROGRA MA DE COMPUTADOR BASEADO EM C.T.CHANG 6 - COM PARAÇÃO COM RESULTADOS PUBLICADOS	147
APÊNDICE C - A NÃO-ADITIVIDADE DAS DISPERSÕES DO MATERIAL E DO GUIA DE ONDA	150
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	153

RESUMO

A dispersão de pulsos em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau vem sendo analisada através de formalismos assintóticos. Um destes formalismos baseia-se na equação característica aproximada do modo dominante de propagação destas estruturas, obtida através da condição de "guiamento fraco", enquanto que outros formalismos são estabelecidos a partir de aproximações para parâmetros desta equação.

Utilizando técnicas numéricas de diferenciação e interpolação, desenvolvemos um método de análise da dispersão de pulsos nestas fibras que baseia-se em soluções da equação característica exata. Fórmulas exatas de parâmetros necessários a este estudo são estabelecidas até o ponto em que deduções subsequentes, que envolvem um enorme esforço analítico, possam ser substituídas por procedimentos computacionais.

Efetuamos comparações entre o nosso método e aqueles que, baseados em expressões assintóticas, apresentam as melhores características teóricas. As divergências encontradas são discutidas.

ABSTRACT

Pulse dispersion in single-mode optical fibers with step-index profiles has been analysed using asymptotic methods. One of these methods is based on the approximate characteristic equation for the dominant mode of propagation in these structures obtained using the "weakly-guided" condition. Other methods are established starting with approximations for the parameters of this equation.

Utilizing numerical methods of differentiation and interpolation, we have developed a method for the analysis of pulse dispersion in these fibers that is based on solutions of the exact characteristic equation. Exact formulas for the parameters necessary for this study were established and developed to the point where the steps that would follow, involving extensive analytical effort, have been replaced by computational procedures.

We make comparisons between our method and those that, although based on asymptotic expressions, present the best theoretical characteristics. The differences found are discussed.

LISTA DE QUADROS

QUADRO	Pag.
II.1 - Significado e unidade das entidades envolvidas nas equações de Maxwell para propagação em meios isotrópicos, lineares, não condutores e não magnéticos	013
III.1 - Equações de corte para os modos guiados em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau ...	047
III.2 - Valores de corte, U_c , para os modos $TE_{0\mu}$, $TM_{0\mu}$, $HE_{\nu\mu}$ e $EH_{\nu\mu}$; $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2 = 1,7$	047
III.3 - Valores de corte $(a/\lambda)_c$ e U_c para os modos representados nos diagramas de propagação (ver Fig.III.6 e III.7). $n_1 = 1,8$; $n_2 = 1,5$	054
IV.1 - Coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier * - Amostra fundida ** - Amostra resfriada	059
IV.2 - Comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, para dispersão do material mínima e dispersão residual, \hat{D}_2 , para as amostras em análise * - Amostra fundida ** - Amostra resfriada	067
V.1 - Características das fibras ópticas, teóricas, utilizadas na análise da dispersão do guia de onda. O material da casca é constituído pela amostra 01, Quadro IV.1, Capítulo IV	073
V.2 - Diferença relativa, Δ em percentagem, para as fibras ópticas do Quadro V.1	073
VI.1 - Expressões para o cálculo de b , db/dV e d^2b/dV^2 baseadas em fórmulas propostas por Snyder, Gloge, Miyagi-Nishida e Rudolph-Neumann	107

QUADRO	Pag.
VI.2 - Expressões para o cálculo de b , db/dV e d^2b/dV^2 baseadas em fórmulas propostas por C.T.Chang	108
VII.1 - Comprimento de onda, λ , de dispersão total nula, dispersão residual, D_2 , e frequência normalizada, V . Comparação entre os resultados obtidos com o nosso método (valores superiores) e aqueles obtidos por C.T.Chang {6}, {7} (valores inferiores)	117
VII.2 - Deslocamento no comprimento de onda, λ , comparado àquele obtido considerando-se apenas a dispersão material - Método exato	118
VII.3 - Diâmetros dos núcleos, Z_a em μm , e diferenças relativas, Δ , usadas na construção das curvas de dispersão apresentadas na Fig.VII.1. As fibras são construídas segundo o modelo adotado por Chang {6},{7}	118
VII.4 - Diâmetro do núcleo, Z_a , diferença relativa, Δ , dispersão residual, \hat{D}_2 e frequência normalizada, V , publicados por C.T.Chang {7}. Fibra óptica construída com a amostra 02	126
VII.5 - Comprimento de onda de dispersão total nula, λ , dispersão residual, \hat{D}_2 , e frequência normalizada, V , obtidos com o método exato, valores superiores, e com o método adotado por Chang {6}, valores inferiores usando Z_a e Δ do Quadro VII.4. Fibra óptica construída com a amostra 02 (modelo de Chang)	126
VII.6 - Valores de λ , D_2 e V obtidos através do método exato (E), do método de Marcuse (M) e do método de South (S) para fibras construídas com diferentes dopagens de GeO_2 em SiO_2 como material de núcleo e SiO_2 fundido como material de casca	132
VII.7 - Erros relativos, em percentagem, para alguns parâmetros obtidos (a) pelo método de D.Marcuse e (b) pelo método de C.R.South	138

QUADRO

- B.1 - Comparações entre valores calculados através do programa de computador baseado em {6} e os resultados publicados por C.T.Chang {6}, {7} 149
- C.1 - Composição química e raios dos núcleos das fibras ópticas utilizadas na confecção das curvas da Fig. C.1. Material da casca: SiO₂ fundido 151

LISTA DE FIGURAS

FIGURA

II.1 - Variação das funções de Bessel, J_0 , J_1 , Y_0 e Y_1 , com o argumento x ; $\alpha = 1$	018
II.2 - Variação das funções de Bessel modificadas, I_0 , I_1 , K_0 e K_1 , com o argumento x ; $\alpha = 1$	019
II.3 - Caminho de integração para a dedução das condições de contorno em uma interface entre dois meios dielétricos diferentes	021
III.1 - Fibra óptica com perfil de índice de refração em de grau - seção transversal. O eixo z , positivo, do sistema de coordenadas associado, aponta para fora da página	032
III.2 - Fibra óptica com perfil de índice de refração em de grau - seção longitudinal. O eixo y , positivo, aponta para fora da página	032
III.3 - Fibra dielétrica simples. A direção positiva de propagação dos campos, o eixo z , aponta para fora da página; ϵ_1 e ϵ_2 são, respectivamente, as permissividades elétricas do núcleo e da casca da fibra	033
III.4 - Componentes longitudinais (a) e transversais (b) dos campos elétrico e magnético no contorno da fibra dielétrica simples da Fig. III.3. Os sub-índices I e II indicam tratar-se das componentes no núcleo e na casca da fibra, respectivamente	038
III.5 - Variação do valor de corte, U_c , com a permissividade elétrica relativa, ϵ , para os modos de mais baixa ordem em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau	049

FIGURA	Pag.
III.6 - Variação da relação β/k_0 em função do raio do núcleo normalizado, a/λ , para os modos de mais baixa ordem em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau; $n_1=1,8$, $n_2=1,5$. Faixa monomodal de operação: $0 < (a/\lambda) < 0,3847$	051
III.7 - Constante de propagação normalizada, b , em função da frequência normalizada, V , para os modos de mais baixa ordem em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau; $n_1=1,8$, $n_2=1,5$. Faixa monomodal de operação: $0 < V < 2,4048$	053
IV.1 - Variação do índice de fase, n , com o comprimento de onda, λ , para os materiais apresentados no Quadro IV.1	058
IV.2a- Variação do índice de grupo, N , para amostras do Quadro IV.1	061
IV.2b- Variação do índice de grupo, N , para as amostras 2,4, 7,13,15 do Quadro IV.1	062
IV.3a- Dispersão do material para as amostras 2,6,7,11 e 14 do Quadro IV.1	064
IV.3b- Dispersão do material para as amostras 1,3,4,5 e 13 do Quadro IV.1	065
IV.3c- Dispersão do material para as amostras 8,9,10,12 e 15 do Quadro IV.1	066
V.1 - Curvas de dispersão do guia de onda, D_g , em função do comprimento de onda, λ , para as fibras apresentadas no Quadro V.1	075
VI.1 - Interação entre o programa principal e suas subrotinas, usada no cálculo do comprimento de onda de dispersão total mínima e da dispersão residual. Análise exata	086

- VI.2 - Interação entre o programa principal e suas subrotinas, usada no cálculo do comprimento de onda de dispersão total mínima e de dispersão residual - Análise de C.T.Chang {6} 102
- VI.3 - Interação entre o programa principal e suas subrotinas, usado no cálculo do comprimento de onda de dispersão total mínima e da dispersão residual - Análise de D.Marcuse {9} modificada 104
- VI.4 - Diagrama UxV obtido através de fórmulas assintóticas (ver Quadro VI.1) e através de soluções da equação característica aproximada (ver Quadro VI.2) 110
- VI.5 - Diagrama bxV obtido através de fórmulas assintóticas (ver Quadro VI.1) e através de soluções da equação característica aproximada (ver Quadro VI.2) 111
- VI.6 - Diagrama $db/dV \times V$ obtido através de fórmulas assintóticas (ver Quadro VI.1) e através de soluções da equação característica aproximada (ver Quadro VI.2) 112
- VI.7 - Diagrama $d^2b/dV^2 \times V$ obtido através de fórmulas assintóticas (ver Quadro VI.1) e através de soluções da equação característica aproximada (ver Quadro VI.2) .. 113
- VII.1 - Curvas de dispersão para as fibras ópticas apresentadas no Quadro VII.3; D_m - dispersão do material, D_T - dispersão total e D_g - dispersão do guia de onda 119
- VII.2 - Variação do comprimento de onda de dispersão total nula, λ , em função da diferença relativa Δ . Diâmetro do núcleo da fibra: $2a = 5,3\mu m$. Fibra construída com a amostra 02 (modelo de Chang) 122
- VII.3 - Variação do comprimento de onda de dispersão total nula, λ , em função do raio do núcleo da fibra, a . Diferença relativa: $\Delta=0,6\%$. Fibra construída com a amostra 02 (modelo de Chang) 123

VII.4 - Variação da dispersão residual, \hat{D}_2 , em função do raio do núcleo da fibra, a. Diferença relativa: $\Delta=0,6\%$... 124

VII.5 - Curvas de dispersão para uma fibra óptica construída com a amostra 02, modelo de Chang, com diâmetro do núcleo, $2a=5,3 \mu\text{m}$, e diferença relativa $\Delta=2,15\%$; D_m - dispersão do material, D_T - dispersão total e D_g - dispersão do guia 129

VII.6 - Variação do comprimento de onda de dispersão total λ , em função do raio do núcleo, a. Diferença relativa: $\Delta=2,15\%$. Fibra construída com a amostra 02 (modelo de Chang) 130

VII.7 - Variação da dispersão residual, \hat{D}_2 , em função do raio do núcleo da fibra, a. Diferença relativa: $\Delta=2,15\%$. Fibra construída com a amostra 02 (modelo de Chang) ... 131

VII.8 - Curvas de dispersão para uma fibra óptica construída com 13,5% GeO_2 - 76,5% SiO_2 (núcleo) e SiO_2 fundido (casca); D_m - dispersão do material, D_T - dispersão total e D_g - dispersão do guia de onda..... 135
 Raio do núcleo da fibra: $a = 1,75 \mu\text{m}$ 135

VII.9 - Variação do comprimento de onda de dispersão total λ , em função do raio do núcleo da fibra, a. Material do núcleo: 13,5% GeO_2 - 86,5% SiO_2 . Material da casca: SiO_2 fundido 136

VII.10 - Variação da dispersão residual, \hat{D}_2 , em função do raio do núcleo, a. Material do núcleo: 13,5% GeO_2 - 86,5% SiO_2 . Material da casca: SiO_2 fundido 137

C.1 - Curvas das diferenças $D_T - D_m$, linhas cheias, e da dispersão do guia de onda, D_g , para as fibras ópticas apresentadas no Quadro C.1. Evidência da não-aditividade dos efeitos dispersivos D_m e D_g em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau. O parâmetro a é o raio do núcleo da fibra 152

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

As fibras ópticas são, sem dúvida, a maior inovação ocorrida, na década passada, dentro da tecnologia das comunicações. Elas são estruturas dielétricas, de aparência filamentar, que servem para confinar e guiar ondas eletromagnéticas cuja frequência situa-se na faixa óptica do espectro.

Por apresentarem baixo peso, pequeno diâmetro, imunidade a radiações eletromagnéticas espúrias, perfeito isolamento elétrico, baixas perdas por atenuação, abundância de matéria prima para sua construção, custos reduzindo-se à medida em que a tecnologia associada se desenvolve e, principalmente, devido à alta frequência na qual operam, as fibras ópticas têm um enorme potencial de aplicação em sistemas de comunicações a longa distância que manipulem grandes quantidades de informações.

De maneira geral, uma fibra óptica é constituída por um núcleo cilíndrico de vidro circundado por uma casca cilíndrica também de vidro.

A variação radial dos índices de refração dos materiais que são utilizados na construção destas estruturas permite, para efeito de estudos, a classificação delas em dois grupos principais. O primeiro deles é constituído pelas fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau para os quais a dependência radial do índice de refração dos materiais constituintes é estabelecida através da relação:

$$n(r) = \begin{cases} n_1 & , \quad r < a \\ n_2 & , \quad r > a \end{cases} ; \quad n_1 > n_2 \quad (I.1)$$

onde a é o raio do núcleo da fibra (ver Capítulo III.Figs.III.1, III.3) e n_1 e n_2 são, respectivamente, os índices de refração dos materiais usados na confecção do núcleo e da casca da fibra. Nestes guias ópticos, a propagação das ondas eletromagnéticas, ao longo de sua direção longitudinal, processa-se através de reflexões internas totais na interface núcleo-casca. O segundo grupo é constituído pelas fibras ópticas com perfil de índice de refração graduado, também chamadas de fibras ópticas de perfil α , para as quais é válida a relação:

$$n(r) = \begin{cases} n_1 [1 - 2(r/a)^\alpha \delta] & , \quad r < a \\ n_2 = n_1 (1 - 2\delta)^{1/2} & , \quad r > a \end{cases} \quad (I.2)$$

onde a é o raio do núcleo da fibra e $\delta = (n_1^2 - n_2^2) / (2n_1^2)$ é a diferença relativa entre os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra em $r=0$ {1}. As fibras de perfil de índice de refração graduado mais comuns são aquelas para as quais $\alpha=2$. (ver equação (I.2)). Tais fibras são denominadas de fibras ópticas de perfil de índice de refração parabólico {2}. Diferente das fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau, nas estruturas com perfil de índice de refração graduado a propagação das ondas eletromagnéticas faz-se através de caminhos aproximadamente senoidais {3}.

De acordo com a frequência de operação, raio do núcleo da fibra e diferença relativa entre os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca, as fibras podem ser monomodais ou multimodais. As fibras ópticas monomodais são aquelas que permitem apenas a propagação do seu modo fundamental enquanto que as fibras ópticas multimodais permitem a propagação de até algumas centenas de modos. Os modos de propagação são determinadas distribuições do vetor campo elétrico em uma seção transversal da estrutura. Diferentes modos propagam-se com velocidades de grupo diferentes e sofrem, também, atenuações diferentes {3}.

Como dissemos anteriormente, a mais promissora aplicação das fibras ópticas está em sistemas de comunicações que utilizem grandes taxas de informações. Sistemas de comunicações que manipulam grandes quantidades de informações são, normalmente, sistemas de comunicações digitais. Nestes sistemas, as informações modulam, em forma de pulsos, a portadora óptica. Entretanto, a dispersão sofrida por estes pulsos é um fator limitante da faixa de passagem do sistema óptico de comunicações pois a dispersão é responsável por um alargamento dos pulsos dentro da fibra. Este alargamento requer um aumento no espaçamento temporal dos pulsos na entrada do sistema para que eles possam ser identificados, à contento, na saída, pelo receptor óptico. Em vista deste fato, é importante projetar-se uma fibra óptica de modo a fazê-la operar na frequência que torna nula

sua dispersão.

Nosso trabalho consiste em analisar as características dispersivas das fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau através de formalismos exatos e técnicas computacionais, comparando os resultados obtidos com alguns trabalhos existentes que são, todos, baseados em técnicas assintóticas.

A escolha destas estruturas deveu-se ao fato da sua tecnologia de fabricação ter se desenvolvido de tal forma que, atualmente, fibras com perdas de 0,2dB/Km, em 1,55 μ m {4}, permitem enlaces teóricos de comunicações em percursos de 100 Km, à taxa de 1Gb/s, sem o uso de estações repetidoras {5}. Isto torna-as viáveis, comercialmente, em futuro bastante próximo.

O alargamento dos pulsos nestes tipos de fibras deve-se a dois fatores dispersivos:

- (a) Dispersão do material - que é provocada pela dependência dos índices de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra óptica com o comprimento de onda, e
- (b) Dispersão do guia de onda - que é provocada pela dependência da velocidade de grupo, do modo único de propagação, com o comprimento de onda.

Enquanto o tipo de dispersão descrito no item (a) depende, exclusivamente, dos materiais com os quais a fibra é construída, o efeito dispersivo descrito no item (b) depende do raio do núcleo da fibra, da constante de propagação do seu modo dominante e algumas de suas derivadas e da diferença relativa, Δ , entre os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca, n_1 e n_2 respectivamente, definido a seguir:

$$\Delta \equiv (n_1 - n_2) / n_2 \quad (I.3)$$

A dispersão total, que desejamos minimizar com o intuito de aumentarmos a capacidade de transmissão de informação de sistemas digitais que utilizem-se da estrutura em questão, é resultante da combinação dos efeitos dispersivos descritos nos itens (a) e (b) do parágrafo anterior.

Na análise da dispersão total, os cálculos da constante de propagação do modo dominante e de algumas de suas derivadas são de importância fundamental. Estes parâmetros são obtidos através da solução da equação característica, também chamada de equação secular ou equação dos autovalores, da fibra óptica (ver Capítulo III).

Em situações práticas, a diferença relativa entre os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra óptica (ver equação (I.3)) é pequena e são possíveis simplificações substanciais na equação característica (comparar, por exemplo, as equações (VI.28) do Capítulo VI com a equação (III.20) do Capítulo III). Isto facilita o cálculo da constante de propagação do modo único e de suas derivadas a partir do conhecimento de valores de parâmetros obtidos como solução desta equação simplificada. É possível também, nestas situações, encontrar-se expressões para a constante de propagação do modo fundamental e, conseqüentemente, de suas derivadas, que não dependem de valores de parâmetros obtidos a partir da solução da equação característica aproximada.

Algumas dezenas de trabalhos sobre dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau são disponíveis na literatura. Os mais significativos são aqueles apresentados nas referências {6} - {17}, {20}. Todos estes trabalhos, teóricos, utilizam, ou propõem, formalismos assintóticos para o cálculo do comprimento de onda, λ , de dispersão total mínima que são enquadrados numa das duas situações expostas no parágrafo precedente. R.A.Sammur {15} demonstra que "nenhuma" das aproximações existentes para o cálculo da constante de propagação do modo dominante é satisfatória quando este cálculo é realizado a partir de formalismos assintóticos que não utilizam diretamente valores obtidos como solução da equação característica aproximada. Neste caso, além do erro inerente à aproximação efetuada para o cálculo da constante de propagação, o erro cometido em sua diferenciação sucessiva vai aumentando. Para Sammur {15}, as melhores aproximações obtidas são aquelas propostas por Gloge {9}, Miyagi e Nishida {14} e Rudolph e Neumann {17}. A utilização da equação característica aproximada para a obtenção de valores necessários ao cálculo da constante de propagação ou a utilização

desta equação para a dedução de expressões para as derivadas deste parâmetro são bem recentes nesta área de pesquisa. Estes procedimentos foram empregados por D.Marcuse {8} e C.T.Chang {6},{7}.

Marcuse {8}, usando a equação dos autovalores em sua forma aproximada, demonstra que a simples soma dos dois efeitos dispersivos descritos nos itens (a) e (b) anteriores não dá, como resultado, a dispersão total. Isto contraria o que prevêem as deduções analíticas aproximadas de Gloge {9} e que estão tendo, ainda, larga aceitação. Marcuse mostra, em seu trabalho {8}, que o erro cometido ao assumir o proposto em {9} aumenta com a diminuição do raio do núcleo da fibra óptica. Chang {6}, {7}, analisa a dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau baseando-se, também, na forma aproximada da equação característica. A partir desta equação, este autor apresenta fórmulas analíticas para as derivadas sucessivas da constante de propagação do modo fundamental. Através da comparação de seus resultados com aqueles obtidos por dois outros métodos assintóticos ({9},{17}), Chang mostra que suas deduções são bastante precisas. Seu formalismo é, todavia, bastante complexo.

Nosso trabalho baseia-se na filosofia daquele desenvolvido por Chang {6}. Porém, no cálculo do comprimento de onda, λ , de dispersão total mínima, partimos da fórmula exata da equação característica. As derivadas da constante de propagação do modo dominante, necessárias a esse cálculo, são obtidas através de uma técnica numérica de diferenciação usada na confecção de uma subrotina padrão de computador {18}. Este procedimento foi por nós adotado devido ao enorme trabalho que seria dispendido na dedução analítica destas derivadas a partir da equação dos autovalores em sua forma exata e às facilidades computacionais disponíveis. Em nossa análise, deduzimos também o coeficiente de dispersão de primeira ordem em sua forma exata, enquanto que o valor do coeficiente de dispersão de segunda ordem é calculado usando a técnica de diferenciação numérica já mencionada e uma subrotina de interpolação baseada no método de Lagrange {19} por nós implementada (ver item II.4, Capítulo II, para a definição dos coeficientes de dispersão; no item VI.1, Capítulo VI, apresentamos a forma exata do coeficiente de dispersão de primeira ordem; o procedimento computacional que utilizamos é detalhado no item VI.

2 do Capítulo VI). Estes coeficientes de dispersão apresentam fórmulas bem diferentes daquelas utilizadas tanto por Chang{6} quanto por Marcuse {8}(ver item VI.4, Capítulo VI).

Com o objetivo de comparar nosso método de análise com aqueles propostos em {8} e {6}, implementamos programas de computador semelhantes àqueles utilizados por Marcuse e Chang. Todos os programas foram confeccionados em linguagem FORTRAN-IV, com dupla precisão, e o sistema de computação utilizado baseia-se no computador PDP-10, da Digital Equipment Corporation, do Centro de Computação da UNICAMP.

Na confecção do programa baseado na análise efetuada por D.Marcuse {8}, nós modificamos suas equações utilizando fórmulas analíticas propostas por A.W.Snyder {20}. O problema passou a ser, então, totalmente formal, ao contrário de como se apresenta em {8}. O programa baseado no método de Chang foi confeccionado a partir das informações contidas em {6}.

Dissemos, em parágrafo anterior, que alguns métodos assintóticos usados na análise da dispersão em fibras ópticas modais com perfil de índice de refração em degrau, não utilizam diretamente valores de parâmetros obtidos através de soluções da equação característica para o cálculo da constante de propagação do modo fundamental e de algumas de suas derivadas. Estes métodos permitem a implementação de programas computacionais em computadores de pequeno porte. Um destes métodos, bastante poderoso pela sua simplicidade, não só na análise da dispersão nas estruturas ópticas em questão mas também no estudo de outras características de propagação do modo fundamental nestes tipos de fibras, é aquele proposto por Rudolph e Neumann {17} e que foi utilizado por C.R.South {10}. Também fizemos um programa de computador, implementado desta feita na calculadora HP-9820-A, baseado em {10}, para compararmos com os nossos resultados.

O método de análise desenvolvido por C.T.Chang {6}, apesar de ter excelente fundamentação teórica, não leva em conta as diferentes dispersões dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra óptica {11.b}. Este autor, em seus trabalhos {6},{7}, considera o parâmetro Δ , definido pela equação (I.3), fixo com o comprimento de onda em toda a faixa de análise. Já os trabalhos desenvolvidos por D.Marcuse {8} e South {10} levam em conta a de

pendência do parâmetro Δ com o comprimento de onda. Nos programas de computador que implementamos, baseados nos trabalhos desenvolvidos por estes autores, conservamos as características de seus métodos de análise. O nosso programa, utilizando formalismo exato, suporta os dois tipos de estudo da dispersão citados acima (ver item VI.2, Capítulo VI).

Além da visão geral do problema da dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau, dos métodos assintóticos comumente utilizados em sua análise e das características gerais do nosso trabalho, que pretendemos dar através deste Capítulo introdutório, nosso estudo compõe-se de mais seis Capítulos.

No Capítulo II, a fundamentação matemática do nosso trabalho e a conceituação de parâmetros de larga utilização no decorrer de nossa análise são estabelecidas com o objetivo de facilitar a referência nos Capítulos posteriores.

No Capítulo III, a equação característica exata para os modos guiados em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau é estabelecida. As equações de corte para os possíveis modos de propagação nestas estruturas são apresentadas e enfatizamos a região de operação monomodal destas fibras através da construção de diagramas padrões.

No Capítulo IV, a dispersão do material é analisada tomando como base a representação não-linear para a dependência do índice de refração do material com o comprimento de onda proposta por Sellmeier [21].

No Capítulo V, analisamos a dispersão do guia de onda. Curvas deste efeito dispersivo são traçadas para fibras ópticas com núcleo constituído de diferentes proporções do composto GeO_2 - SiO_2 e casca de óxido de silício fundido.

No Capítulo VI, analisamos a dispersão total. O formalismo exato é estabelecido e a metodologia do nosso programa de computador é apresentada. A partir de fórmulas assintóticas propostas por alguns pesquisadores, deduzimos as expressões necessárias à análise da dispersão nas estruturas ópticas em questão tomando por base a equação da dispersão total em sua forma exata. Os trabalhos desenvolvidos por Chang [6] e D. Marcuse [8] são tam

bém estudado, sendo que para este último, apresentamos um modelo diferente daquele utilizado em {8}. As expressões para a dispersão do guia de onda são deduzidas a partir das equações propostas por {6} e {8} e as várias propostas assintóticas são comparadas em seus parâmetros fundamentais. Os três melhores métodos de análise da dispersão, por fórmulas aproximadas, são escolhidos para comparação com o nosso método.

No Capítulo VII, concluímos o nosso trabalho procedendo a comparação entre nosso método e aqueles que utilizam aproximações assintóticas {6}, {8}, {10}, que possuem melhor desempenho.

Pelas suas características peculiares, o método de análise da dispersão proposto por C.R.South {10}, baseado em parâmetros que não necessitam de soluções da equação característica para serem determinados, tem suas equações estabelecidas no Apêndice A.

No Apêndice B, apresentamos alguns resultados que obtivemos utilizando nosso programa de computador implementado segundo indicações constantes na referência {6}.

No Apêndice C, a partir do formalismo exato da análise da dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau que desenvolvemos, algumas curvas que evidenciam a não-aditividade dos efeitos de dispersão do material e do guia de onda.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS GERAIS

Neste Capítulo apresentamos os requisitos matemáticos necessários à dedução, no Capítulo seguinte, da equação característica exata para os modos guiados em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau.

Mostramos as condições de contorno que as componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético devem satisfazer sobre uma interface entre dois meios dielétricos diferentes e demonstramos serem estas condições necessárias e suficientes para bem definirem as soluções das equações de Maxwell no caso de problemas com campos variantes no tempo.

Apresentamos, também, os conceitos de velocidade de fase e de grupo, índices de fase e de grupo, atraso de grupo, tempo de trânsito e deduzimos as expressões para os coeficientes de dispersão de primeira ordem e de dispersão residual. Todos estes conceitos serão aplicados a partir do Capítulo IV.

1 - AS EQUAÇÕES DE ONDA

Um conhecimento detalhado das características de propagação de ondas eletromagnéticas em um meio qualquer somente pode ser obtido através de soluções apropriadas das equações de Maxwell. Estas equações são apresentadas nas formas diferencial e integral. A forma diferencial, entretanto, é mais conveniente à análise que nos propomos a fazer neste item. Assim, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Dependendo das peculiaridades elétricas e magnéticas dos meios, as equações acima podem ou não ser modificadas e, a

combinação delas, nos levará a duas equações, também diferenciais, que são chamadas de equações de onda. Uma destas equações se aplicará ao campo elétrico e a outra equação se aplicará ao campo magnético.

As equações de onda são bem gerais, isto é, elas caracterizam a propagação de ondas eletromagnéticas em uma infinidade de meios com propriedades elétricas e magnéticas semelhantes. A adequação destas equações à estrutura em estudo, surge, porém, quando tomamos condições iniciais para resolvê-las, condições estas que serão bem específicas. As soluções destas equações nos dará as características matemáticas dos campos na estrutura. A estrutura fornecerá, então, as condições que os campos deverão satisfazer nos seus contornos. As soluções das equações de onda aliadas às condições de contorno do sistema determinarão os seus possíveis modos de propagação.

Nós estamos interessados em descrever as características de propagação de ondas eletromagnéticas em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau. Em nossa análise, estas estruturas serão constituídas de materiais isotrópicos, lineares, não condutores e não magnéticos. Para estes materiais, as densidades de corrente de condução, \vec{J} , e de carga, ρ , são nulas e o conjunto de equações dado por (II.1) será escrito na forma:

$$\nabla \times \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} -\vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} \tag{II.2}$$

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} \vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} = 0 \tag{II.3}$$

As grandezas vetoriais \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} e \vec{D} , em meios lineares, estão relacionadas através das equações

$$\begin{bmatrix} \vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \tag{II.4}$$

que são chamadas de relações constitutivas.

O significado e a unidade no Sistema Internacional, SI, das entidades envolvidas nas equações (II.2) - (II.4) são apresentadas no Quadro II.1.

ENTIDADE	SIGNIFICADO	UNIDADE (SI)
\vec{E}	Vetor Campo Elétrico	V/m
\vec{D}	Vetor Densidade de Fluxo Elétrico	C/m ²
\vec{H}	Vetor Campo Magnético	A/m
\vec{B}	Vetor Densidade de Fluxo Magnético	T
ϵ	Permissividade Elétrica do Meio	F/m
μ	Permeabilidade Magnética do Meio	H/m

Quadro II.1 - Significado e unidade das entidades envolvidas nas equações de Maxwell para propagação em meios isotrópicos, lineares, não condutores e não magnéticos.

É conveniente lembrarmos o significado dos operadores matemáticos que surgem nas equações (II.2) e (II.3):

$\nabla \times$ - é o operador rotacional;

$\nabla \cdot$ - é o operador divergente, e

$\frac{\partial}{\partial t}$ - é o operador derivada parcial com relação ao tempo.

A letra grega ∇ (nabla), sem nenhum sinal acompanhando-a, significa operador gradiente enquanto que o símbolo ∇^2 significa operador laplaciano (ver abaixo).

Aplicando o operador rotacional em ambos os membros da relação (II.2), teremos:

$$\nabla \times \nabla \times \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} -\vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.5})$$

Recordando a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A},$$

onde \vec{A} é um campo vetorial qualquer, e lembrando que os operadores $\nabla \times$ e $\partial/\partial t$ operam em espaços distintos podendo, portanto, se rem intercambiados, a relação (II.5) torna-se:

$$\nabla \left(\nabla \cdot \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \right) - \nabla^2 \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \begin{bmatrix} -\vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.6})$$

Um erro muito pequeno é introduzido na equação (II.6) se desprezarmos o termo

$$\nabla \left(\nabla \cdot \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \right);$$

em geral, isto é justificável quando a variação da permissividade elétrica ϵ do meio considerado é pequena se comparada com o comprimento de onda da radiação eletromagnética que sobre ele incide [22].

Desta forma, a equação (II.6) torna-se:

$$-\nabla^2 \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \begin{bmatrix} -\vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.7})$$

Substituindo a equação (II.4) em (II.7), obtivemos:

$$-\nabla^2 \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.8})$$

Usando as equações (II.2) e (II.4) no segundo membro da equação (II.8), encontramos:

$$-\nabla^2 \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

e, efetuando o produto de matrizes indicado, temos:

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

As equações (II.10) representam, em forma vetorial, as equações de onda para os campos elétrico e magnético em meios isotrôpicos, lineares, não condutores, não magnéticos e que apresentam uma variação de permissividade elétrica com a distância muito pequena comparada ao comprimento de onda da radiação que neles se propaga.

Na forma escalar, a equação (II.10) é escrita como:

$$\nabla^2 \psi = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{II.11})$$

onde a função escalar ψ representa as componentes escalares dos campos \vec{E} e \vec{H} em coordenadas retangulares.

O guia de ondas óptico que iremos analisar, no próximo Capítulo, apresenta simetria cilíndrica. É conveniente, então, associarmos a esta estrutura um sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) com o eixo z paralelo ao eixo do guia. Assumindo que os campos elétrico e magnético têm uma dependência harmônica com o tempo, t , e com a coordenada z deste sistema, podemos expressá-los na forma:

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}(r, \phi) \\ \vec{H}(r, \phi) \end{bmatrix} \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (\text{II.12})$$

onde:

$\omega = 2\pi f$ é a frequência angular, em rad/s, de oscilação e f é a frequência, em Hz, dos campos, e

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ é a constante de fase, em rad/s, dos campos na direção positiva do eixo z sendo λ o comprimento de onda da radiação eletromagnética no meio considerado.

A atenuação sofrida por estes campos é considerada nula e, assim, a constante de fase β coincide com a constante de propagação. Desta forma, usaremos, indistintamente, as duas denominações para o parâmetro β .

A partir das equações (II.2), (II.3) e (II.12), podemos escrever as componentes transversais dos campos \vec{E} e \vec{H} (E_r, E_ϕ, H_r, H_ϕ) em termos de suas componentes longitudinais (E_z, H_z). Após algumas manipulações algébricas, teremos:

$$\begin{bmatrix} E_r \\ H_\phi \\ H_r \\ E_\phi \end{bmatrix} = \frac{-i}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2} \begin{bmatrix} \omega \mu / r & \beta & 0 & 0 \\ \beta / r & \omega \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -\omega \epsilon / r \\ 0 & 0 & -\omega \mu & \beta / r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial H_z / \partial \phi \\ \partial E_z / \partial r \\ \partial H_z / \partial r \\ \partial E_z / \partial \phi \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

As componentes longitudinais dos campos \vec{E} e \vec{H} são calculadas através da equação de onda escalar (II.11) com:

$$\psi = \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix};$$

assim:
$$\nabla^2 \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Escrevendo o operador laplaciano no sistema de coordenadas cilíndricas, a equação (II.14) torna-se:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.15})$$

ou, levando em conta a dependência harmônica dos campos explicitada em (II.12), obtemos:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) \right] \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.16})$$

A equação (II.16) é uma equação diferencial parcial em r e ϕ e pode ser resolvida através do método de separação de variáveis {3} ou através do método de Frobenius {23}. Assumiremos que

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} F(r) \exp[i\nu\phi] \quad (\text{II.17})$$

com ν inteiro, positivo ou negativo, de tal forma a garantir aos campos uma periodicidade em ϕ de 2π {22}. Em (II.17), por simplicidade, foi omitida a dependência harmônica das componentes E_z e H_z com o tempo e com a coordenada z dada por $\exp[i(\omega t - \beta z)]$, com forme a equação (II.12). As constantes, A e B , que surgem nesta equação podem ser obtidas a partir das condições impostas às compontes E_z e H_z .

Substituindo a equação (II.17) na equação (II.16), teremos:

$$\left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + ([\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2] r^2 - \nu^2) \right] F(r) = 0 \quad (\text{II.18})$$

Esta equação diferencial é conhecida como equação diferencial de Bessel e será, sumariamente, analisada no item seguinte. Uma análise bem detalhada desta equação pode ser encontrada, por exemplo, em {23}.

2 - SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BESSEL

A equação diferencial (II.18) pode ser escrita na forma padrão:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (\text{II.19})$$

Esta equação tem como solução geral:

$$y = c_1 J_\nu(\alpha x) + c_2 Y_\nu(\alpha x) \quad (\text{II.20})$$

onde: c_1 e c_2 - são constantes determináveis a partir das condições de contorno.

dições iniciais impostas a y ;

$J_\nu(\alpha x)$ - é a função de Bessel de primeira espécie, ordem ν e argumento αx , α constante, e

$Y_\nu(\alpha x)$ - é a função de Bessel de segunda espécie, ordem ν e argumento αx .

As funções $J_\nu(\alpha x)$ e $Y_\nu(\alpha x)$ têm um comportamento como mostrado na Fig.II.1.

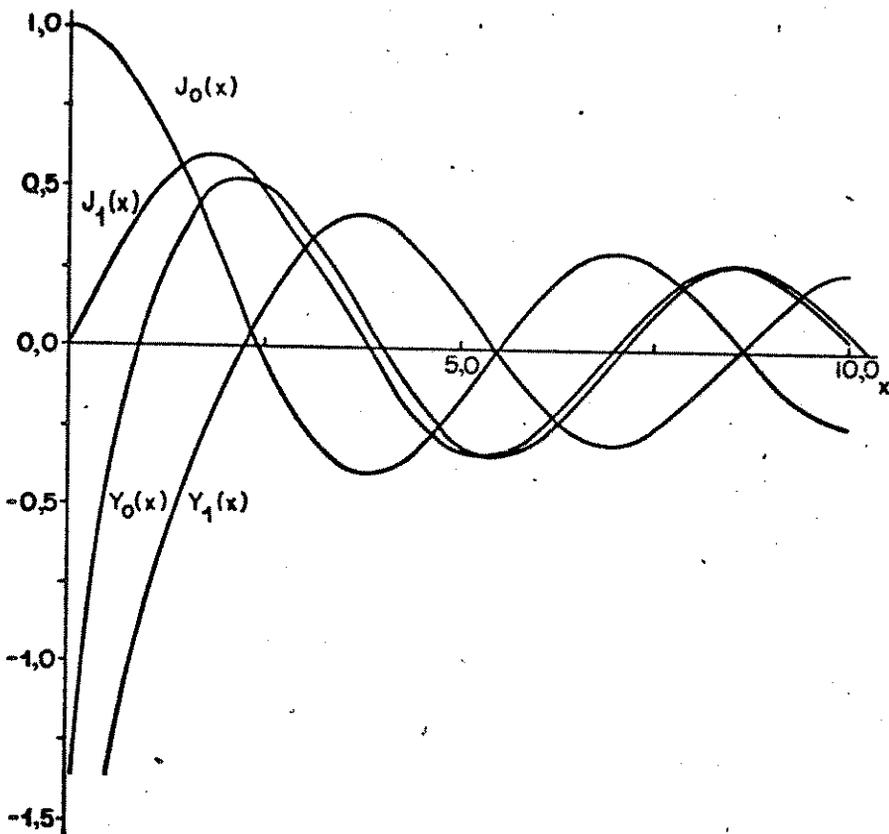


Fig.II.1 - Variação das funções de Bessel, J_0, J_1, Y_0 e Y_1 , com o argumento x ; $\alpha = 1$.

É importante observarmos, na Fig.II.1, que as funções J de Bessel têm valor finito quando $x \rightarrow 0$, enquanto que as funções Y de Bessel apresentam descontinuidade neste ponto. Estas observações são também válidas para valores superiores da ordem ν .

Uma outra representação para a equação diferencial de Bessel é:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (\alpha^2 x^2 + \nu^2) y = 0 \quad (\text{II.21})$$

Neste caso, a solução geral é dada por:

$$y = c_1 I_\nu(\alpha x) + c_2 K_\nu(\alpha x) \quad (\text{II.22})$$

onde:

c_1 e c_2 - são constantes determináveis a partir das condições iniciais impostas a y ;

$I_\nu(\alpha x)$ e $K_\nu(\alpha x)$ - são funções de Bessel modificadas, de ordem ν e argumento αx , α constante.

O comportamento das funções de Bessel modificadas é a apresentado na Fig.II.2.

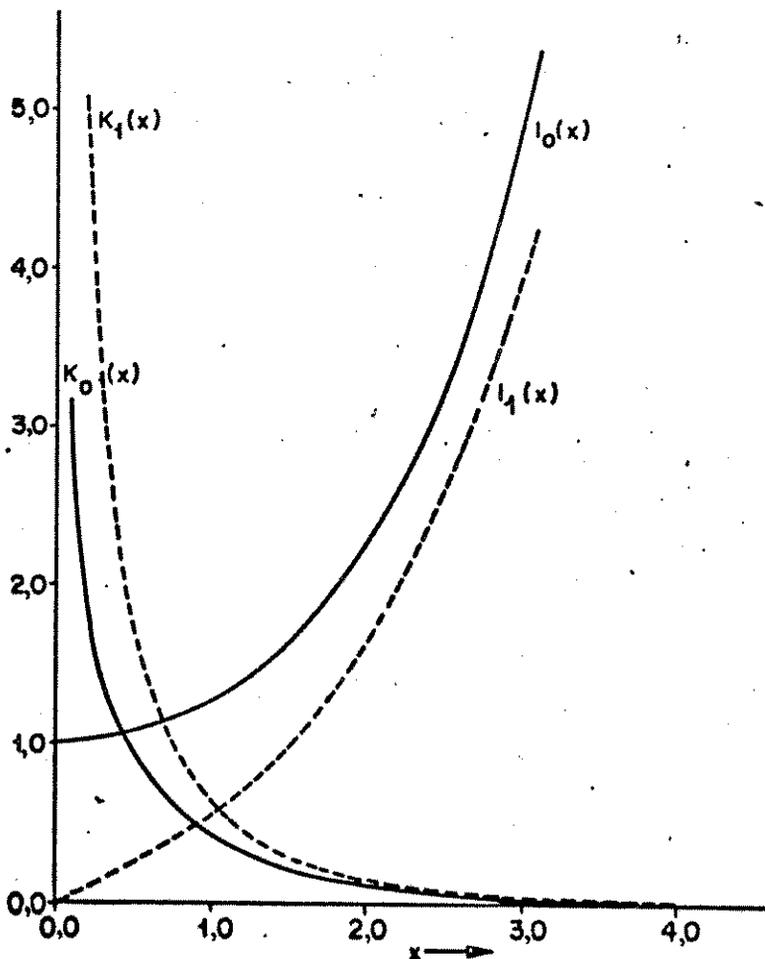


Fig.II.2 - Variação das funções de Bessel modificadas, I_0 , I_1 , K_0 e K_1 , com o argumento x ; $\alpha = 1$.

É, também, importante observarmos, na Fig.II.1, que a função de Bessel modificada K tende para zero quando $x \rightarrow \infty$, enquanto que a função de Bessel modificada I tende para o infinito quando isto ocorre. Estas observações são válidas, também, para valores superiores da ordem ν .

As equações diferenciais de Bessel apresentadas, com suas soluções gerais, serão importantes para a escolha da dependência radial (ver expressão (II.17)) das componentes dos campos elétrico e magnético na direção de propagação z . É do comportamento que esperamos que estas componentes tenham no núcleo e na casca da fibra óptica que escolheremos as melhores representações para $F(r)$ (ver Capítulo III, item III.1).

3 - AS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Além das equações de onda, os campos elétrico e magnético devem satisfazer as condições de contorno da estrutura em análise. Estas condições são obtidas através das equações de Maxwell que, por conveniência, são escritas agora na forma integral. Estas equações podem ser deduzidas integrando-se as equações (II.2) em uma área arbitrária. A aplicação do Teorema da Integral de Stokes [22] dá o seguinte conjunto de equações:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \tag{II.23}$$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \tag{II.24}$$

O vetor unitário \hat{n} é perpendicular ao elemento de superfície dA e o vetor $d\vec{s}$ aponta na direção tangencial à curva S , que envolve a superfície A . Como a forma e a disposição da curva fechada S são arbitrárias, tomamos a configuração mostrada na Fig.II.3. A semelhança da estrutura que iremos analisar no Capítulo III, é considerada a interface entre dois meios dielétricos diferentes.

O caminho fechado de integração S é colocado infinite

similmente próximo da interface. Uma parte deste caminho é localizada no meio 1, com permissividade elétrica ϵ_1 , e a outra é localizada no meio 2, com permissividade elétrica ϵ_2 . As seções da curva S que são paralelas à interface dielétrica são muito pequenas quando comparadas ao comprimento da onda de radiação eletromagnética, mas são grandes quando comparadas às seções que cruzam perpendicularmente a interface. Podemos dizer que o comprimento da seção perpendicular aproxima-se de zero. Neste caso, $h \rightarrow 0$ (ver Fig.II.3), a área envolvida pela curva S torna-se muito pequena e, assim, podemos escrever as equações (II.23) e (II.24) como se segue:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{II.25}$$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{II.26}$$

ou

$$E_{1T} = E_{2T} \tag{II.27}$$

$$H_{1T} = H_{2T}$$

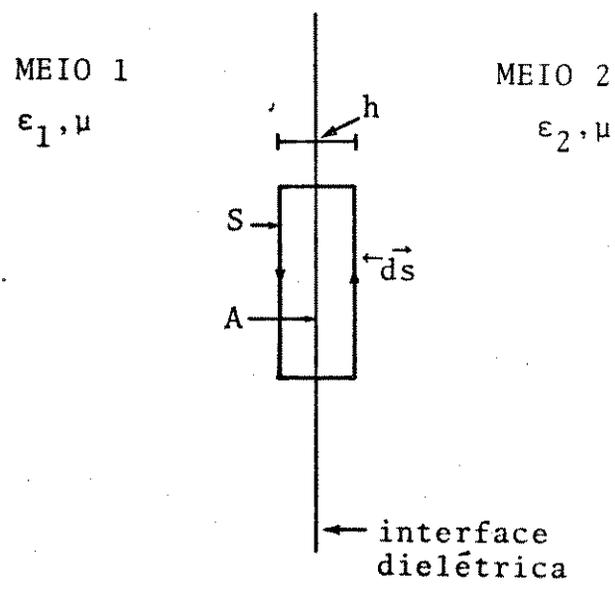


Fig.II.3 - Caminho de integração para a dedução das condições de contorno em uma interface entre dois meios dielétricos diferentes.

As equações (II.27) representam, então, as condições que as componentes tangenciais (subscrito T) dos campos elétrico e magnético devem satisfazer sobre uma superfície entre dois meios dielétricos diferentes. Em outras palavras, as equações (II.27) impõem a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético sobre uma interface dielétrica.

Existem, ainda, {22} condições de contorno que devem ser satisfeitas pelos vetores \vec{D} e \vec{B} . Estas condições indicam que as componentes destes vetores que são normais à interface entre dois meios dielétricos diferentes devem, também, ser contínuas. No caso que estamos analisando, podemos mostrar que as relações dadas em (II.3) são oriundas das equações (II.2).

Se tomarmos o divergente em ambos os membros de (II.2), lembrando que o divergente do rotacional de um vetor é igual a zero, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \nabla \cdot \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{D} \end{bmatrix} = 0 \tag{II.28}$$

A derivada com relação ao tempo de quantidades que variam com o tempo só é nula se estas próprias quantidades forem nulas. Então, de (II.28), obtemos as relações estabelecidas em (II.3). Deste modo, as condições para as componentes normais dos vetores \vec{D} e \vec{B} são automaticamente satisfeitas se a equação (II.27) for verdadeira. Assim as equações (II.27) são as únicas condições de contorno em meios dielétricos que iremos considerar.

4 - COEFICIENTES DE DISPERSÃO

As ondas eletromagnéticas caracterizadas pela equação (II.10) propagam-se através de um meio, de permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ , com uma velocidade de fase V_f , em m/s, definida por:

$$V_f = (\mu\epsilon)^{-1/2} = \omega/\beta \tag{II.29}$$

onde:

$\omega = 2\pi c / \lambda = k_0 c$ - é a frequência angular, em rad/s, de excitação da onda; c é uma constante, definida pela equação (II.31) a seguir, chamada de velocidade de fase, em m/s, da onda no espaço livre; λ é o comprimento de onda, em m, da radiação eletromagnética no espaço livre e k_0 é a constante de fase, em rad/m, da onda no espaço livre. Ocasionalmente, este parâmetro é chamado de número de onda no espaço livre;

$\beta = 2\pi / \lambda_m$ - é a constante de fase, em rad/s, da onda no meio considerado sendo λ_m o comprimento de onda, em m, no referido meio.

O índice de fase, n , ou índice de refração, de um meio é definido pela relação entre as velocidades de fase da onda no espaço livre e no meio considerado. Assim:

$$n = c / V_f \quad (\text{II.30})$$

com: $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ (II.31)

e onde μ_0 e ϵ_0 representam, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do espaço livre:

$$\mu_0 = 400\pi \text{ nH/m}$$

$$\epsilon_0 \sim 8,85 \text{ pF/m}$$

Em termos da permissividade elétrica relativa, $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$, e da permeabilidade magnética relativa, $\mu_r = \mu / \mu_0$, podemos escrever o índice de fase, a partir das equações (II.29) e (II.30), na forma:

$$n = (\mu_r \epsilon_r)^{1/2} \quad (\text{II.32})$$

Em meios não magnéticos, $\mu_r = 1$ e, então:

$$n = \epsilon_r^{1/2} \quad (\text{II.33})$$

Meios dispersivos são aqueles para os quais o índice

de fase, n , é função da frequência, f , ou do comprimento de onda, $\lambda=c/f$, de oscilação da onda incidente sobre eles. Nestes meios, a velocidade de fase não é constante (ver equação (II.30)). Esta dependência do índice de fase com o comprimento de onda, é, em geral, uma dependência não-linear. Uma equação que bem exprime esta dependência, e que será por nós utilizada com frequência neste trabalho, é a equação dos três termos de Sellmeier (ver item IV.1, Capítulo IV).

A detecção direta de sinais ópticos modulados em intensidade reconhece efeitos dispersivos apenas na envoltória deste sinal {9}. Esta envoltória propaga-se com uma velocidade, chamada de velocidade de grupo, V_g , em m/s, definida através da expressão:

$$V_g = \frac{d\omega}{d\beta} \tag{II.34}$$

sendo os parâmetros ω e β já definidos quando do estabelecimento da equação (II.29). Em meios dispersivos, as velocidades de grupo e de fase estão relacionadas através da equação:

$$V_g = V_f - \lambda_m \frac{dV_f}{d\lambda_m} \tag{II.35}$$

onde, devemos enfatizar, λ_m é o comprimento de onda da radiação eletromagnética no meio dispersivo. Partindo da relação

$$\lambda = n\lambda_m \tag{II.36}$$

obtida a partir das relações (II.29) e (II.30), a equação (II.35) pode ser escrita na forma:

$$V_g = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}} = \frac{c}{N} \tag{II.37}$$

O fator

$$N = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \tag{II.38}$$

que surge no denominador da equação (II.37), é chamado de índice

de grupo do meio no qual a onda se propaga.

Gloge {9} define atraso de grupo, τ , em s/m, como sendo o inverso da velocidade de grupo. Assim, utilizando as equações (II.34) e (II.37). teremos:

$$\tau = \frac{1}{V_g} = \frac{N}{c} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d\beta}{dk_0} \tag{II.39}$$

O parâmetro τ tem o significado físico de atraso de envoltória da portadora óptica por unidade de comprimento.

Uma promissora aplicação das fibras ópticas será em sistemas de comunicações que utilizem modulação pulsada da portadora óptica. Define-se, então, tempo de atraso ou tempo de trânsito, T , em s, como sendo o tempo necessário para que um pulso percorra o comprimento L de uma fibra {12}. Assim, se λ_1 é o comprimento de onda da portadora óptica, um pulso sofrerá um atraso $T(\lambda_1)$ ao propagar-se na fibra de comprimento L , definido por:

$$T(\lambda_1) = L\tau = \frac{LN(\lambda_1)}{c} \tag{II.40}$$

Considera-se {12} a largura espectral, $\Delta\lambda$, de uma fonte óptica como sendo constituída de uma série contínua de comprimentos de onda portadoras; cada uma destas parcelas pode ser considerada como um pulso que se propaga ao longo da fibra com tempos de trânsito diferentes chegando, portanto, no receptor óptico em instantes diferentes. Isto acarretará um alargamento no sinal original.

Vamos analisar a diferença entre os tempos de trânsito dos dois pulsos que possuem comprimentos de onda portadora situadas nas bordas da faixa espectral da fonte óptica. Uma das portadoras terá um comprimento de onda λ e a outra terá um comprimento de onda $\lambda + \Delta\lambda$. A diferença entre os tempos de trânsito dos dois pulsos, nesta situação, será (ver equação (II.40)):

$$T(\lambda, \lambda + \Delta\lambda) \equiv T(\lambda + \Delta\lambda) - T(\lambda) = \frac{L}{c} [N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)] \tag{II.41}$$

ou, usando o desenvolvimento de Taylor para o termo $N(\lambda + \Delta\lambda)$,

então:

$$T(\lambda, \lambda + \Delta\lambda) = L \sum_{m=1}^{\infty} D_m (\Delta\lambda)^m \quad (\text{II.42})$$

Os termos:

$$D_m = \frac{1}{m!c} \frac{d^m N}{d\lambda^m} \quad (\text{II.43})$$

são, por definição {12}, chamados de coeficientes de dispersão, Então:

$$D_1 = \frac{1}{c} \frac{dN}{d\lambda} \quad (\text{II.44})$$

é o coeficiente de dispersão de primeira ordem, o termo

$$D_2 = \frac{1}{2c} \frac{d^2 N}{d\lambda^2} \quad (\text{II.45})$$

é o coeficiente de dispersão de segunda ordem, e assim por diante. Para fontes com larguras espectrais estreitas, $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$, os termos de ordem $m > 2$ trazem pequena contribuição à equação (II.42) e podem ser desprezados {13}.

Se escolhermos uma fonte com largura espectral $\Delta\lambda$ centrada em um comprimento de onda específico, $\hat{\lambda}$, de tal forma que o coeficiente de dispersão de primeira ordem seja nulo, isto é:

$$D_1 = \frac{1}{c} \frac{dN}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \quad (\text{II.46})$$

os dois pulsos das bordas da faixa espectral da fonte óptica terão comprimentos de onda portadora dadas por $\hat{\lambda} - \Delta\lambda/2$ e $\hat{\lambda} + \Delta\lambda/2$. A diferença entre os tempos de trânsito destes dois pulsos será:

$$\begin{aligned} T\left(\hat{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{2}, \hat{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) &= \frac{L}{c} \left| N\left(\hat{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) - N\left(\hat{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{2}\right) \right| = \\ &= \frac{L}{c} \left| N(\hat{\lambda}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 N}{d\lambda^2} \right)_{\hat{\lambda}} \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2 - \left[N(\hat{\lambda}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 N}{d\lambda^2} \right)_{\hat{\lambda}} \left(-\frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2 \right] \right| \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Em (II.47), o desenvolvimento de Taylor dos termos

$N(\hat{\lambda} + \Delta\lambda/2)$ e $N(\hat{\lambda} - \Delta\lambda/2)$ foi truncado em $m=2$ por motivos anteriormente expostos. O resultado obtido em (II.47) significa que os dois pulsos em questão possuem a mesma velocidade de grupo, isto é, eles serão reconhecidos pelo receptor ao mesmo tempo. Considerando válida a equação (II.46), podemos verificar que a máxima diferença entre os tempos de trânsito dos pulsos, \hat{T}_{\max} , com comprimentos de onda portadora na faixa:

$$\hat{\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{2} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2} \quad (\text{II.48})$$

ocorrerá se escolhermos aqueles pulsos que modulam portadoras com comprimentos de onda $\hat{\lambda} + \Delta\lambda/2$, ou $\hat{\lambda} - \Delta\lambda/2$, e $\hat{\lambda}$. Isto posto, desprezando os termos de ordem $m > 2$ no desenvolvimento de Taylor, encontramos:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\max} &= T\left(\hat{\lambda}, \hat{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) = \frac{L}{c} \left| N\left(\hat{\lambda} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) - N(\hat{\lambda}) \right| = \\ &= \frac{L}{c} \left| N(\hat{\lambda}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 N}{d\lambda^2} \right)_{\hat{\lambda}} \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2 - N(\hat{\lambda}) \right| = \\ &= \frac{L}{2c} \left(\frac{d^2 N}{d\lambda^2} \right)_{\hat{\lambda}} \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2 = L \hat{D}_2 \left(\frac{\Delta\lambda}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

onde, pela equação (II.45):

$$\hat{D}_2 = \frac{D_2}{4} = \frac{1}{8c} \left. \frac{d^2 N}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} \quad (\text{II.50})$$

O coeficiente de dispersão de primeira ordem D_1 , dado pelo equação (II.46), é chamada apenas de dispersão (conforme o caso, dispersão do material (Capítulo IV), dispersão de guia de onda (Capítulo V) ou dispersão total (Capítulo VI)). O comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, que anula D_1 , é o comprimento de onda de dispersão nula. O coeficiente de dispersão de segunda ordem \hat{D}_2 é chamado de dispersão residual e é válido apenas em $\lambda = \hat{\lambda}$, isto é, é válido apenas no comprimento de onda dispersão nula (ver equação II.

.50)). A dispersão D_1 é dada, geralmente, em ps/(Km.nm) enquanto que a dispersão residual, \hat{D}_2 , tem unidades de ps/(Km.nm²).

No próximo Capítulo utilizaremos os fundamentos matemáticos desenvolvidos nos ítems II.1, II.2 e II.3 para deduzir a equação característica exata das fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau. A teoria estabelecida no item II.4 só será aplicada a partir do Capítulo IV.

CAPÍTULO III

FIBRAS ÓPTICAS COM PERFIL DE ÍNDICE DE
REFRAÇÃO EM DEGRAU:
CARACTERÍSTICAS DE PROPAGAÇÃO NECESSÁRIAS
À ANÁLISE DA DISPERSÃO

Neste Capítulo, a partir do desenvolvimento teórico a apresentado nos ítems II.1, II.2 e II.3 do Capítulo anterior, de duzimos a equação característica exata para as fibras ópticas di elétricas simples. A permeabilidade magnética é a mesma para to dos os meios envolvidos nesta análise.

As equações de corte para os modos guiados nestas estru turas são estabelecidas baseadas no trabalho desenvolvido por Sch les inger e outros {24}. É, também, estabelecida a região de opera ção monomodal destas fibras.

Os diagramas de propagação β/k_0 - a/λ e b - V são constru ído a partir de soluções da equação característica exata.

.1 - A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA EXATA

Uma fibra óptica com perfil de índice de refração em degrau apresenta a geometria dada na Fig. III.1. Ela é constitu ída de dois cilindros dielétricos concêntricos. O cilindro inter no chama-se núcleo e o externo é denominado de casca. Cada uma destas duas regiões, mais a região externa na qual toda a estru tura encontra-se imersa, são consideradas homogêneas, isotrópicas, lineares, não condutoras e não magnéticas em nossa análise. As regiões envolvidas apresentam índices de refração n_1 , n_2 e n_0 (ver Fig. III.1), de tal forma que:

$$n_1 > n_2 \geq n_0 \tag{III.1}$$

A relação (III:1) possibilita a propagação dos campos eletromagnéticos no núcleo por reflexões internas totais na in terface núcleo-casca. Por questões geométricas, associado ao con junto está um sistema de coordenadas cilíndricas sendo o sentido positivo do eixo z , Fig. III.2, considerado como a direção de pro pagação dos campos.

Vamos assumir, ao longo deste trabalho, que a razão en tre os raios da casca, b , e do núcleo, a , da fibra (ver Fig. III. 1) seja infinita, isto é;

$$\frac{b}{a} \rightarrow \infty \tag{III.2}$$

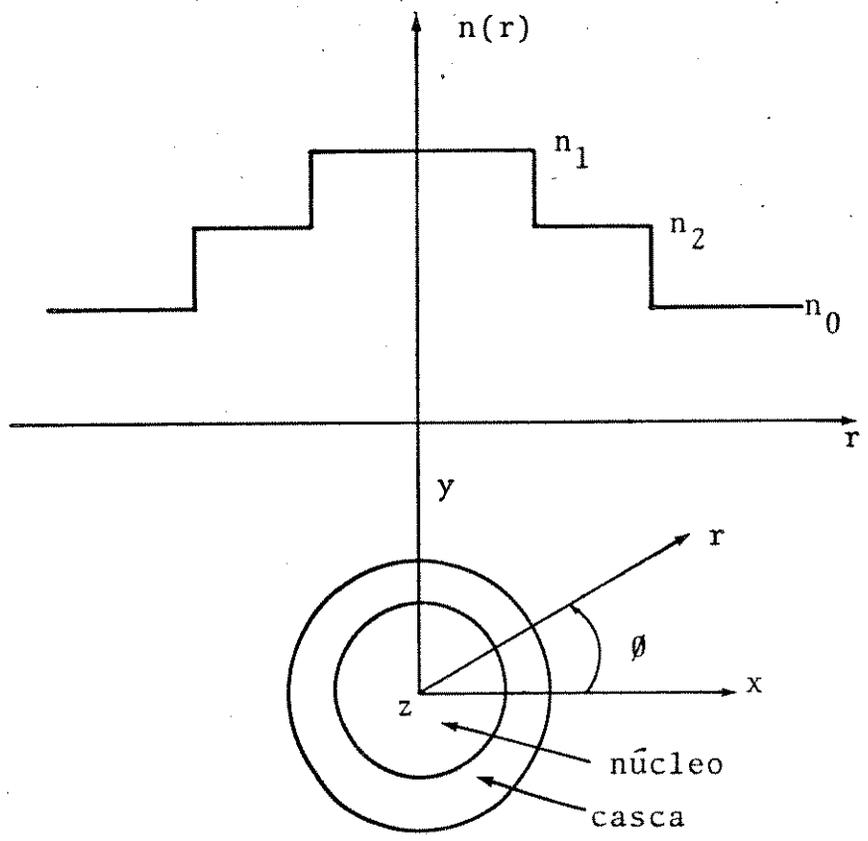


Fig.III.1 - Fibra óptica com perfil de índice de refração em de grau - seção transversal. O eixo z , positivo, do sistema de coordenadas associado, aponta para fora da página.

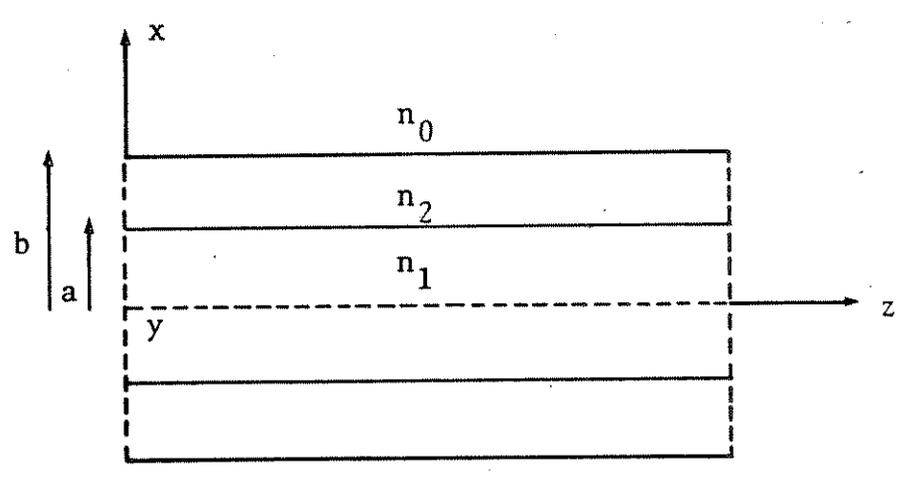
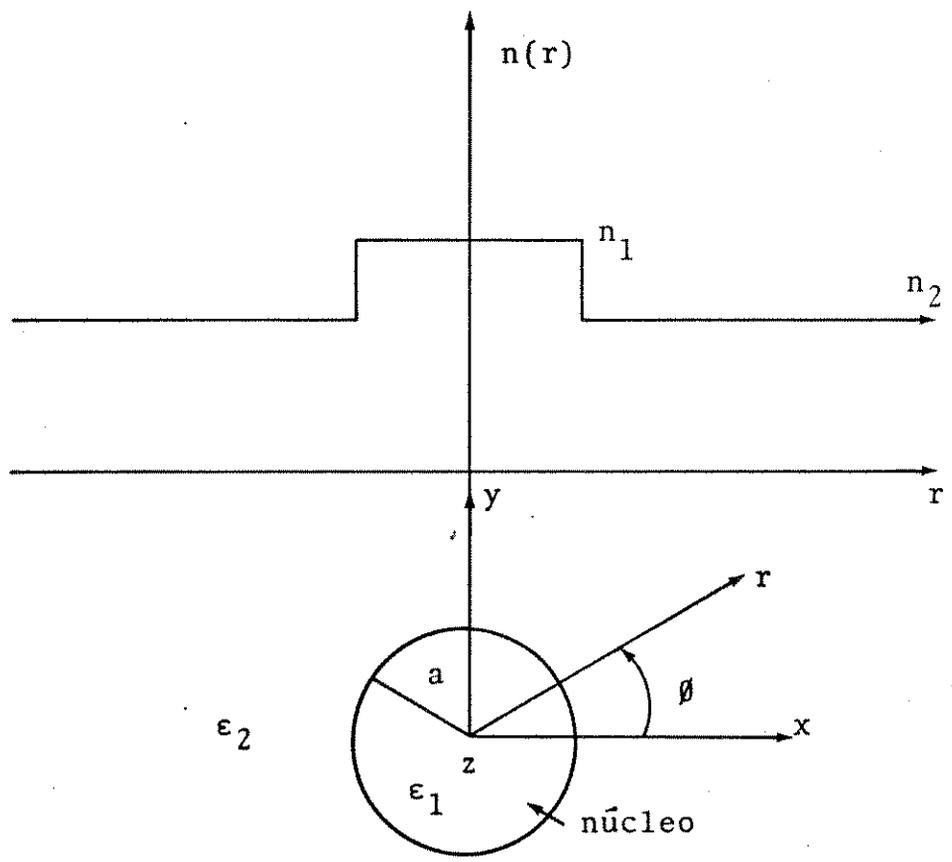


Fig.III.2 - Fibra óptica com perfil de índice de refração em de grau - seção longitudinal. O eixo y , positivo, aponta para fora da página.

Isto significa supor que, sendo a região que constitui a casca muito maior que aquela que constitui o núcleo da fibra, os campos na interface entre a casca e o meio externo são inexistentes. Esta aproximação é denominada "aproximação de modos no núcleo" [25] e é bastante usual no tratamento matemático destes tipos de estruturas ópticas. Uma fibra para a qual a relação (II.2) é válida é denominada fibra dielétrica simples. Sua configuração geométrica, com o respectivo perfil do índice de refração, é apresentada na Fig. III.3. Nesta figura, n_1 e n_2 são os índices de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca, respectivamente, a é o raio do núcleo da fibra e o eixo z , apontando para fora da página, é a direção positiva de propagação dos campos. O sistema de coordenadas associado é o sistema de coordenadas cilíndricas.



CASCA INFINITA

Fig. III.3 - Fibra dielétrica simples. A direção positiva de propagação dos campos, o eixo z , aponta para fora da página; ϵ_1 e ϵ_2 são, respectivamente, as permissividades elétricas do núcleo e da casca da fibra.

No item II.1, Capítulo II, vimos que as componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético, em coordenadas cilíndricas, eram dadas por:

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} F(r) \exp[i\nu\theta] \quad (\text{II.17})$$

sendo a função $F(r)$ uma solução da equação diferencial de Bessel (ver item II.2, Capítulo II). Na equação (II.17), está subentendida a variação harmônica das componentes E_z e H_z , com o tempo t e com a coordenada z dada por $\exp[i(\omega t - \beta z)]$ onde ω é a frequência de oscilação, em rad/s, e β é a constante de propagação dos campos, em rad/s, na direção positiva do eixo z . Dissemos, ainda, que a escolha adequada da forma matemática da função $F(r)$ seria baseada no comportamento esperado das componentes E_z e H_z , para valores críticos segundo o eixo r (ver Fig.III.3), no núcleo e na casca da fibra óptica.

Para que a fibra óptica desempenhe o papel de guia de ondas eletromagnéticas, as componentes E_z e H_z devem ter valores finitos quando $r \rightarrow 0$ e devem ser, rapidamente, amortecidas quando $r \rightarrow \infty$ (ver Fig.III.3). Estas duas imposições, quando obedecidas, farão com que o campo eletromagnético seja totalmente confinado no núcleo da fibra eliminando, praticamente, as radiações eletromagnéticas espúrias (chamadas, no caso, de campo eletromagnético evanescente) que tendem a propagar-se na casca da estrutura. Partindo destas considerações, iremos encontrar, em seguida, as formas matemáticas da função $F(r)$ adequadas à fibra da Fig.III.3.

Como vimos, no item II.2 do Capítulo II, são duas as formas gerais da equação diferencial de Bessel:

$$\left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + (u^2 r^2 - \nu^2) \right] F(r) = 0 \quad (\text{III.3})$$

com solução geral da forma:

$$F(r) = c_1 J_\nu(ur) + c_2 Y_\nu(ur) \quad (\text{III.4})$$

e

$$\left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - (w^2 r^2 + \nu^2) \right] F(r) = 0 \quad (\text{III.5})$$

cujas soluções tem a forma:

$$F(r) = c_3 I_\nu(wr) + c_4 K_\nu(wr) \tag{III.6}$$

Os parâmetros c_i , $i=1, \dots, 4$, são constantes obtidas a partir das condições iniciais impostas a $F(r)$ e u e w são constantes, no nosso caso, não negativas. As funções de Bessel J_ν , Y_ν , I_ν e K_ν são apresentadas nas Figs. II.1 e II.2 do Capítulo II.

Do comportamento das funções de Bessel, para $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$, e por comparações com a equação (II.18) do Capítulo II, teremos:

- (a) quando $r \rightarrow 0$, devemos ter $\omega^2 \mu \epsilon > \beta^2$ para a solução da equação (II.18) seja da forma (compare (II.18) com (III.3)):

$$F(r) = c_1 J_\nu(r) \tag{III.7}$$

com

$$r^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \tag{III.8}$$

A função $Y_\nu(ur)$, contida na solução geral da equação (III.3), não satisfaz as condições requeridas pois apresenta descontinuidade em $r \rightarrow 0$.

- (b) quando $r \rightarrow \infty$, devemos ter $\omega^2 \mu \epsilon < \beta^2$ para que a solução da equação (II.18) seja da forma (compare (II.18) com (III.5)):

$$F(r) = c_4 K_\nu(wr) \tag{III.9}$$

com

$$w^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu \epsilon \tag{III.10}$$

A função $I_\nu(wr)$, pertencente à solução geral da equação (III.5), não satisfaz as condições requeridas pois é infinita em $r \rightarrow \infty$.

Adaptando as soluções (III.7), com (III.8), à fibra da

Fig.III.3, teremos as componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético dados por (ver equação (II.17)):

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} J_\nu(ur) \exp[i\nu\theta] \quad 0 < r < a \quad \text{(III.11)}$$

com: $u^2 = \omega^2 \mu \epsilon_1 - \beta^2 = k_1^2 - \beta^2$ (III.12)

Procedendo de maneira análoga, a partir das soluções (III.9), com (III.10), obtemos:

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} K_\nu(wr) \exp[i\nu\theta] \quad a < r < \infty \quad \text{(III.13)}$$

com $w^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu \epsilon_2 = \beta^2 - k_2^2$ (III.14)

As constantes A,B,C e D, em (III.11) e (III.13), são determinadas a partir das condições de contorno impostas às componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético na interface dielétrica núcleo-casca da fibra óptica da Fig.III.3 (ver, também, item II.3, Capítulo II). Os parâmetros k_1 e k_2 são constantes de fase, ou constantes de propagação, de ondas planas propagando-se em meios infinitos, sem perda, com permissividade elétricas ϵ_1 e ϵ_2 , respectivamente, e β é a constante de propagação dos campos, no sentido +z, na estrutura apresentada na Fig.III.3.

Lembrando que os parâmetros u e w são não negativos, a partir das equações (III.12) e (III.14), podemos observar que a constante de propagação β obedece a seguinte relação:

$$k_0^2 n_2^2 < \beta^2 < k_0^2 n_1^2 \quad \text{(III.15)}$$

onde:

$n_i^2 = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}$; $i=1,2$ - são os índices de refração, ou índices de fase, dos meios envolvidos na análise (ver Fig.III.3), e

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ - é o número de onda no espaço livre; λ é o comprimento de onda no espaço livre.

A substituição das equações (III.11) e (III.13) nas equações para as componentes transversais dos campos elétrico e magnético deduzidas no item II.2 do Capítulo II (ver equação(II.13)), nos levará às seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\phi \\ H_r \\ H_\phi \end{bmatrix} = - \frac{i}{u^2} \begin{bmatrix} A\beta u J'_\nu(ur) + B i \frac{\omega \mu \nu}{r} J_\nu(ur) \\ A i \frac{\nu \beta}{r} J_\nu(ur) - B \omega \mu u J'_\nu(ur) \\ B \beta u J'_\nu(ur) - A i \frac{\omega \epsilon_1 \nu}{r} J_\nu(ur) \\ B i \frac{\nu \beta}{r} J_\nu(ur) + A \omega \epsilon_1 u J'_\nu(ur) \end{bmatrix} \quad (III.16)$$

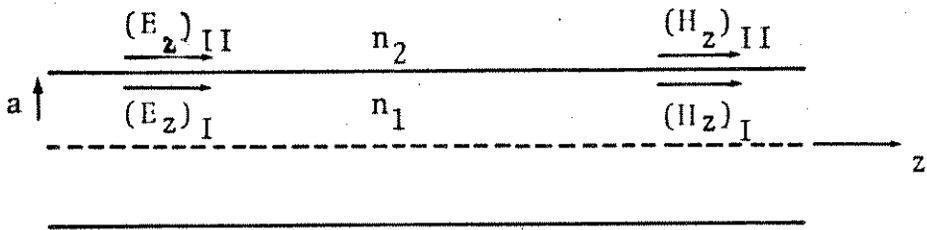
$0 \leq r < a$

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_\phi \\ H_r \\ H_\phi \end{bmatrix} = \frac{i}{w^2} \begin{bmatrix} D i \frac{\nu \omega \mu}{r} K_\nu(wr) + C w \beta K'_\nu(wr) \\ C i \frac{\nu \beta}{r} K_\nu(wr) - D \omega \mu w K'_\nu(wr) \\ D w \beta K'_\nu(wr) - C i \frac{\omega \epsilon_2 \nu}{r} K_\nu(wr) \\ D i \frac{\nu \beta}{r} K_\nu(wr) + C \omega \epsilon_2 w K'_\nu(wr) \end{bmatrix} \quad (III.17)$$

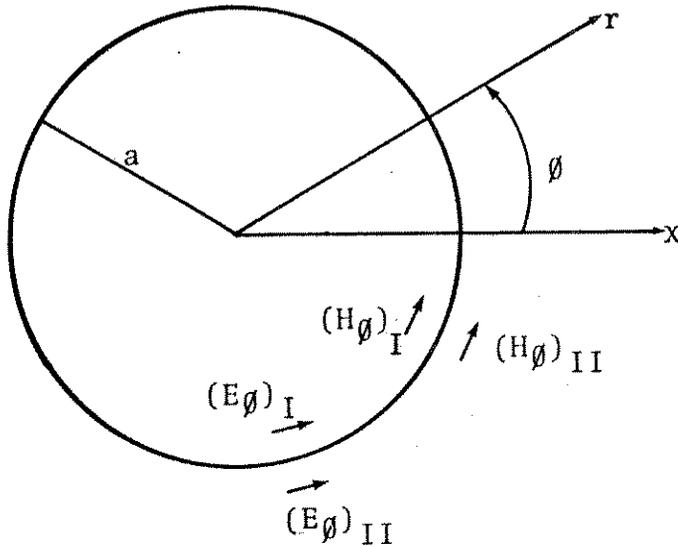
$a < r < \infty$

A linha ('), acima dos símbolos J_ν e K_ν denota diferenciação com relação aos argumentos ur e wr , respectivamente.

Vimos, no item II.3 do Capítulo II, que as soluções das equações de Maxwell devem satisfazer determinadas condições, chamados de condições de contorno, para que o campo eletromagnético em uma estrutura específica seja único. Mostramos também que, sobre uma interface separando dois meios dielétricos diferentes, as únicas condições de contorno eram impostas pela obrigatoriedade de continuidade dos campos elétrico e magnético tangenciais à esta interface (ver equações (II.27)). A Fig. III.4 mostra, de maneira esquemática, os campos elétrico e magnético tangenciais do contorno da fibra em análise.



(a)



(b)

Fig.III.4 - Componentes longitudinais (a) e transversais (b) dos campos elétrico e magnético no contorno da fibra dielétrica simples da Fig.III.3. Os sub-índices I e II indicam tratar-se das componentes no núcleo e na casca da fibra, respectivamente.

Do exposto no parágrafo anterior, impondo a condição de continuidade dos campos em $r=a$ (ver Fig.III.4), teremos o conjunto de equações:

$$AJ_v(ua) \qquad \qquad \qquad -CK_v(wa) \qquad \qquad \qquad = 0$$

$$BJ_v(ua) \qquad \qquad \qquad -DK_v(wa) = 0$$

$$A \frac{i\nu\beta}{u^2 a} J_v(ua) - B \frac{\omega\mu}{u} J'_v(ua) + C \frac{i\nu\beta}{w^2 a} K_v(wa) - D \frac{\omega\mu}{w} K'_v(wa) = 0$$

.../.

$$A \frac{\omega \epsilon_1}{u} J'_\nu(ua) + B \frac{i\nu\beta}{u^2 a} J_\nu(ua) - C \frac{\omega^2 \epsilon_2}{w} K'_\nu(wa) + D \frac{i\nu\beta}{w^2 a} K_\nu(wa) = 0 \quad (\text{III.18})$$

O sistema de equações homogêneas, representado pelas equações (III.18), terá solução não trivial se:

$$\begin{vmatrix} J_\nu(ua) & 0 & -K_\nu(wa) & 0 \\ 0 & J_\nu(ua) & 0 & -K_\nu(wa) \\ \frac{i\nu\beta}{u^2 a} J_\nu(ua) & -\frac{\omega\mu}{u} J'_\nu(ua) & \frac{i\nu\beta}{w^2 a} K_\nu(wa) & -\frac{\omega\mu}{w} K'_\nu(wa) \\ \frac{\omega\epsilon_1}{u} J'_\nu(ua) & \frac{i\nu\beta}{u^2 a} J_\nu(ua) & -\frac{\omega^2 \epsilon_2}{w} K'_\nu(wa) & \frac{i\nu\beta}{w^2 a} K_\nu(wa) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.19})$$

Após muita álgebra, o determinante em (III.19) dá origem a uma equação para as constantes de propagação β :

$$(ef+g)(f+g) - \nu^2 \left(\frac{\epsilon}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) = 0 \quad (\text{III.20})$$

onde:

$$f = \frac{J'_\nu(U)}{UJ_\nu(U)} \quad ; \quad g = \frac{K'_\nu(W)}{WK_\nu(W)} \quad (\text{III.21})$$

$$U^2 = (ua)^2 = (k_1 a)^2 - (\beta a)^2 \quad (\text{III.22})$$

$$W^2 = (wa)^2 = (\beta a)^2 - (k_2 a)^2 \quad (\text{III.23})$$

e

$$\epsilon = \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad ; \quad k_i = \omega^2 \mu \epsilon_i = k_0^2 n_i \quad ; \quad i=1,2 \quad (\text{III.24})$$

$$J'_\nu(U) = \frac{1}{2} \left[J_{\nu-1}(u) - J_{\nu+1}(U) \right] \quad (\text{III.25})$$

$$K'_\nu(W) = -\frac{1}{2} \left[K_{\nu-1}(W) + K_{\nu+1}(W) \right] \quad (\text{III.26})$$

A equação (III.20) é chamada de equação secular {26}, equação dos autovalores {22} ou equação característica {3} das fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau. As soluções desta equação, para uma fibra específica, nos dará os valores das constantes de propagação β (ver equação (III.22) e (III.23)) dos possíveis modos que podem propagar-se na estrutura. Tais modos são chamados, por D.Marcuse {22}, de modos guiados e não apresentam perda por radiação.

Na dedução da equação característica (III.20), o parâmetro ν foi considerado positivo. Entretanto, nenhuma modificação seria introduzida nesta equação se houvessemos trabalhado com ν negativo. Apenas haveria uma inversão no sentido de rotação dos campos constituintes dos modos de propagação {22}, o que é irrelevante para os nossos propósitos. No que se seguirá, então, continuaremos a trabalhar com valores inteiros positivos de ν .

A princípio, é bastante razoável supormos, baseados apenas na complexa forma matemática da equação característica, que os modos guiados apresentem todas as suas componentes dos campos elétrico e magnético ($E_r, E_\phi, E_z, H_r, H_\phi, H_z$). Isto é realmente o que ocorre, com apenas uma única exceção a ser discutida mais adiante, ainda neste item. Por apresentarem todas as seis componentes, os modos são chamados de modos híbridos e não é possível, resguardada a exceção já referida, separá-los em modos elétricos e modos magnéticos transversais {22}.

A exceção apontada acima, surge, todavia, quando fazemos o parâmetro ν da equação (III.20) igual a zero. Neste caso, teremos duas equações características. São elas:

$$ef+g = 0 \quad (III.27)$$

$$f+g = 0 \quad (III.28)$$

com (ver equação (III.21)):

$$f = \frac{J'_0(U)}{UJ_0(U)} \quad ; \quad g = \frac{K'_0(W)}{WK_0(W)} \quad (III.29)$$

e, por (III.25) e (III.26):

$$J'_0(U) = -J_1(U) \quad (III.30a)$$

$$K'_0(W) = -K_1(W)$$

onde usamos o fato de que:

$$J_{-\nu}(U) = (-1)^\nu J_\nu(U) \quad (III.30b)$$

$$K_{-\nu}(W) = K_\nu(W)$$

A equação (III.27) é a equação característica para os modos TM, isto é, para os modos que possuem apenas componentes magnética transversal à direção de propagação ($H_z=0$, portanto) enquanto que a equação (III.28) é a equação característica para os modos TE, isto é, para os modos que possuem apenas componente elétrica transversal à direção de propagação ($E_z=0$, portanto). Nos demais casos, $\nu > 1$, como já frizamos, os modos serão chamados de modos híbridos. É comum designá-los através dos símbolos HE e EH.

Schlesinger e outros {24} apresentam esta designação para os modos híbridos baseados na sequência de soluções da equação característica (III.20). Neste caso, para $\nu > 1$ e fixo, a primeira raiz da equação (III.20), isto é, o primeiro valor da constante de propagação β , está associado aos modos HE, o segundo valor de β está associado aos modos EH, o terceiro valor de β está associado aos modos HE novamente e, assim, o processo se sucede. Este critério de nomeação dos modos híbridos é bastante simples e é adotado universalmente.

Fazendo:

$$J^- = \frac{J_{\nu-1}(U)}{UJ_\nu(U)} \quad ; \quad J^+ = \frac{J_{\nu+1}(U)}{UJ_\nu(U) \quad (III.31)$$

e

$$K^- = \frac{K_{\nu-1}(W)}{WK_\nu(W)} \quad ; \quad K^+ = \frac{K_{\nu+1}(W)}{WK_\nu(W) \quad (III.32)$$

podemos escrever a equação característica (III.20) em uma forma mais conveniente à computação de suas raízes. Esta forma, proposta inicialmente por Schlesinger e outros {24}, é apresentada a seguir:

$$(J^+ + K^+) (\epsilon J^- - K^-) + (J^- - K^-) (\epsilon J^+ + K^+) = 0 \quad (\text{III.33})$$

São válidas para a equação (III.33) as relações apresentadas em (III.22)-(III.24). Esta equação será utilizada, no próximo item deste Capítulo, para a dedução das equações de corte dos modos guiados em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau.

I.2- AS EQUAÇÕES DE CORTE

Um parâmetro muito importante para cada modo é a sua frequência de corte. Um modo é dito estar cortado quando seu campo não cai fora do núcleo da fibra. Num sentido geométrico {27}, isto significa dizer que o raio característico associado à este modo não sofre as reflexões internas totais na interface núcleo-casca da fibra, necessárias à sua propagação, tudo se passando como se o modo não tomasse conhecimento da estrutura guiadora.

Vimos, no item III.1 anterior, que o comportamento dos campos fora do núcleo da fibra é regido pela função de Bessel modificada $K_\nu(W)$ e que, quando $W \rightarrow \infty$, esta função decai rapidamente (ver Fig. II.3, Capítulo II). Neste caso, isto é, para W muito grande, o modo é completamente confinado no núcleo da fibra, o que, segundo {27}, num sentido geométrico, significa dizer que o seu raio característico é paralelo ao eixo de simetria da fibra. Por outro lado, quando $W \rightarrow 0$ a função de Bessel $K_\nu(W)$ tende para infinito, isto é, o campo fora do núcleo da fibra cresce rapidamente. Pelas considerações do parágrafo anterior, $W \rightarrow 0$ é a condição de corte do modo.

Os valores de U , na equação característica, associados ao parâmetro $W \rightarrow 0$, são chamados de valores de corte U_c . A frequência de corte, f_c , e o valor de corte, U_c , de um modo estão relacionados através da equação (ver equações (III.22) e (III.23) com $W=0$):

$$f_c = \frac{c U_c}{2\pi a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}} \quad (\text{III.34})$$

onde a é o raio do núcleo da fibra, n_1 e n_2 são, respectivamente, os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo

e da casca e $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$.

Um dos primeiros estudos no sentido de calcular os valores de corte dos modos em estruturas dielétricas, como aquela apresentada na Fig.III.3, foi desenvolvido por Schlesinger e outros {24} usando a equação característica na forma apresentada em (III.33). Estes autores substituíram as relações (III.31) na quela equação e, para evitar indeterminações matemáticas no limite $W \rightarrow 0$, multiplicaram o resultado pelo fator $[UWJ_\nu(U)]^2$. Este procedimento nos leva à seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \left[W^2 J_{\nu+1}(U) + UJ_\nu(U)W^2 K^+ \right] \left[\epsilon J_{\nu-1}(U) - UJ_\nu(U)K^- \right] + \\ & + \left[J_{\nu-1}(U) - UJ_\nu(U)K^- \right] \left[\epsilon W^2 J_{\nu+1}(U) + UJ_\nu(U)W^2 K^+ \right] = 0 \end{aligned} \tag{III.35}$$

Os significados dos símbolos K^+ e K^- , que aparecem em (III.35), foram estabelecidos através das relações em (III.32).

Para valores pequenos de seu argumento, as funções de Bessel modificadas $K_\nu(W)$ têm as seguintes representações assintóticas {3}:

$$K_0(W) \sim -\ln W \tag{III.36}$$

$$K_\nu(W) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{2}{W} \right)^\nu ; \quad \nu \geq 1 \tag{III.37}$$

onde $\Gamma(\nu)$, em (III.37), é a função gama que, para valores inteiros e positivos do seu argumento ν , pode ser escrita na forma fatorial:

$$\Gamma(\nu) = (\nu-1)! \tag{III.38}$$

Usando as aproximações para $W \rightarrow 0$ estabelecidas por (III.36) e (III.37) e usando (III.38), as equações apresentadas em (III.32) são escritas na forma:

$$K^- = -\ln W \quad ; \quad \nu = 1 \tag{III.39}$$

$$K^- = \frac{1}{2(\nu-1)} \quad ; \quad \nu > 1 \tag{III.40}$$

e

$$K^+ = \frac{2\nu}{W^2} \quad ; \quad \text{para todo } \nu \neq 0 \tag{III.41}$$

Devido às formas assumidas pelo fator K^- (ver equações (III.39) e (III.40)), podemos distinguir, para os modos híbridos, os casos $\nu = 1$ e $\nu > 1$.

Começando com $\nu = 1$, temos dois casos:

(a) $W \rightarrow 0$ com $U \neq 0$, e

(b) $W \rightarrow 0$ com $U \rightarrow 0$.

No caso (a), nós obtemos a partir das equações (III.35), (III.39) e (III.41) a seguinte relação:

$$\left[2U_c J_1(U_c) \right]^2 \ln W = 0 \quad (\text{III.42})$$

cuja solução é:

$$J_1(U_c) = 0 \quad ; \quad U_c \neq 0 \quad (\text{III.43})$$

No caso (b), substituindo a expressão assintótica para as funções $J_\nu(U)$, com $U \rightarrow 0$, dada por (III.50), nas equações para J^- e J^+ em (III.31) e, substituindo estas na equação (III.33), obtemos:

$$\frac{(\epsilon+1)}{U_c^2} - \ln \left(\frac{1}{W} \right) = 0 \quad (\text{III.44})$$

que possui solução apenas quando

$$U_c = 0 \quad (\text{III.45})$$

A solução (III.45), todavia, está implícita em (III.43) conforme podemos observar pela Fig.II.1, Capítulo II. Esta observação será relevante à designação dos modos híbridos de ordem $\nu = 1$ que faremos no parágrafo a seguir.

Como frizamos, no item anterior, estamos adotando a nomenclatura, utilizada por Schlesinger e outros {24}, que denomina os modos híbridos a partir das soluções da equação característica. Ora, pelo exposto no parágrafo precedente, a equação característica (III.33), para $\nu = 1$ e $W \rightarrow 0$, reduz-se às equações (III.43) ou (III.45) conforme a restrição que se faça ao parâmetro U (ver itens (a) e (b) do parágrafo anterior). Convencionamos {24}, então, adotar (III.45) como sendo o valor de cor

te do modo HE_{11} e, para os outros modos com mesma ordem $\nu = 1$, caracterizá-los a partir das soluções da equação (III.43). Desta maneira, a primeira raiz, não nula, de (III.43) está associada ao valor de corte do modo EH_{11} , a segunda raiz de (III.43) está associada ao valor de corte do modo HE_{12} , a terceira raiz ao valor de corte do modo EH_{12} e, assim, sucessivamente. Com a observação que fizemos no final do parágrafo anterior, podemos, sem levarmos em conta o rigorismo matemático lá empregado, nos fixar apenas nas raízes (a raiz nula e os outras positivas) da função de Bessel.

$$J_1(U_c) = 0 \quad (III.46)$$

e nomearemos os modos como anteriormente, isto é, a primeira raiz (que é igual a zero conforme Fig.II.1, Capítulo II) de (III.46) está associada ao valor de corte do modo HE_{11} , a segunda, ao valor de corte do modo EH_{11} , a terceira ao valor de corte do modo HE_{12} e assim sucessivamente. Podemos observar, então, que o primeiro índice associado aos símbolos HE e EH refere-se à ordem da função J de Bessel (ver equação (III.46)) enquanto que o segundo índice é associado à sequência de raízes encontradas sendo estas raízes ora associadas aos modos HE ora aos modos EH.

Para o caso $\nu > 1$ nós obtemos, a partir das equações (III.35), (III.40) e (III.41), para $W \rightarrow 0$, a seguinte equação:

$$J_\nu(U_c) \left[(\epsilon+1)J_{\nu-1}(U_c) - \frac{U_c}{\nu-1} J_\nu(U_c) \right] = 0 \quad (III.47)$$

cujas soluções são:

$$(\epsilon+1)J_{\nu-1}(U_c) - \frac{U_c}{\nu-1} J_\nu(U_c) = 0 \quad (III.48)$$

$$e \quad J_\nu(U_c) = 0 \quad ; \quad U_c \neq 0 \quad (III.49)$$

As raízes da equação (III.48) estão, conforme {24}, associadas aos valores de corte, U_c , dos modos $HE_{\nu\mu}$ enquanto que as raízes da equação (III.49) estão associadas aos valores de corte, U_c , dos modos $EH_{\nu\mu}$ (notar a coerência com a equação (III.43)). Os significados dos índices que acompanham os símbolos HE e EH fo

ram estabelecidos no parágrafo anterior. A exclusão do valor de corte $U_c=0$ como solução da equação (III.49), deve-se ao fato da função J de Bessel apresentar, para pequenos valores de seu argumento, a seguinte representação assintótica:

$$J_\nu(U) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{U}{2}\right)^\nu ; \text{ para todo } \nu \quad (\text{III.50})$$

Isto faz com que a condição $U \rightarrow 0$ e $W \rightarrow 0$, simultaneamente, não satisfaça a equação (III.35) para $\nu > 1$.

Para o caso $\nu = 0$, a condição de corte $W \rightarrow 0$ é analisada diretamente através da equação (III.27) (ou da equação (III.28)). Então, usando também as equações (III.36) e (III.37), obtemos:

$$J_0(U_c) = 0 \quad (\text{III.51})$$

Isto significa que os modos $TE_{0\mu}$ e $TM_{0\mu}$ tem os mesmos valores de corte.

As equações de corte obtidas, através da análise desenvolvida neste item, são sumarizadas no Quadro III.1. A partir destas equações, fizemos um programa de computador para calcular os valores de corte, U_c , para alguns modos. Estes cálculos, cujos resultados estão colocados no Quadro III.2, foram efetuados para o valor da permissividade elétrica relativa $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2 = 1,7$, que ocorre na equação de corte dos modos $HE_{\nu\mu}$, $\nu > 1$.

É importante observarmos que há um modo que possui valor de corte $U_c=0$ e, conseqüentemente, frequência de corte igual a zero (ver equação (III.34)). Este modo é o modo HE_{11} , que é chamado de modo fundamental ou modo dominante. As fibras ópticas que permitem apenas a propagação deste modo são chamadas de fibras ópticas monomodais. Este modo é excitado se trabalharmos com a fibra na faixa de frequências:

$$0 < f < \frac{2,4048c}{2\pi a(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}} \quad (\text{III.52})$$

onde o valor 2,4048 é o valor de corte dos modos imediatamente superiores ao modo HE_{11} (modos TE_{01} e TM_{02} , conforme

ν	EQUAÇÕES DE CORTE	MODOS
1	$J_1(U_c) = 0$	$HE_{1\mu}$
>1	$J_\nu(U_c) = 0 ; U_c \neq 0$	$EH_{\nu\mu}$
>1	$(\epsilon+1) J_{\nu-1}(U_c) - \frac{U_c}{\nu-1} J_\nu(U_c) = 0$	$HE_{\nu\mu}$
0	$J_0(U_c) = 0$	$TE_{0\mu}, TM_{0\mu}$

Quadro III.1 - Equações de corte para os modos guiados em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau

$\nu \backslash \mu$	1	2	3	4	5	MODOS
0	2,4048	5,5201	8,6537	11,792	14,931	TE, TM
1	0,0000	3,8317	7,0156	10,173	13,324	HE
2	2,6511	5,6422	8,7333	11,850	14,978	HE
3	4,1255	7,2004	10,306	13,426	16,554	HE
4	5,4533	8,6407	11,790	14,933	18,074	HE
1	3,8317	7,0156	10,173	13,324	16,471	EH
2	5,1356	8,4172	11,620	14,796	17,960	EH
3	6,3802	9,7610	13,015	16,223	19,409	EH
4	7,5883	11,065	14,372	17,616	20,827	EH
5	8,7715	12,339	15,700	18,980	22,218	EH

Quadro III.2 - Valores de corte, U_c , para os modos $TE_{0\mu}, TM_{0\mu}, HE_{\nu\mu}$ e $EH_{\nu\mu}$; $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2 = 1,7$.

Quadro III.2. Por (III.52), observamos também que tanto o raio do núcleo quanto os índices de refração dos materiais do núcleo e da casca da fibra são extremamente importantes na determinação da frequência de operação de uma fibra óptica em regime monomodal.

As fibras que permitem a propagação de vários modos são chamados de fibras ópticas multimodais e não serão objeto de nossa análise.

Ainda usando as equações do Quadro III.1, traçamos as curvas da dependência do parâmetro U_c com a permissividade elétrica relativa $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2$. Estas curvas estão apresentadas na Fig. III.5. Por esta figura, observamos que a região de operação monomodal é, relativamente, grande ($0 \leq U_c \leq 2.4048$) e que, à medida em que o valor de corte cresce, mais "congestionada" de modos de propagação ficará a estrutura óptica, para um determinado valor da permissividade relativa ϵ .

II.3- SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA EXATA - DIAGRAMAS DE PROPAGAÇÃO

Além dos valores de corte, para caracterizarmos os modos de propagação em fibras ópticas é necessário conhecermos a constante de propagação β destes modos. Este parâmetro é obtido através da solução da equação característica (equação (III.20) ou (III.33)). Por razões óbvias, esta equação só pode ser resolvido através de métodos numéricos.

Para resolvermos a equação característica, torna-se conveniente definirmos um parâmetro auxiliar V . Este parâmetro é chamado de frequência normalizada ou V -número e é definido através da relação:

$$V^2 = U^2 + W^2 \quad (\text{III.53})$$

onde U e W fazem parte da equação característica. Assim, com as equações (III.53) e (III.33) (ou (III.20)) podemos encontrar os valores da constante de propagação β para os modos que são permitidos pela fibra em análise. No cálculo dos parâmetros U e W usamos subrotinas padrão de um pacote de subrotinas disponíveis no nosso Centro de Computação [18]. Usamos o método de Müller para resolver (III.53) e (III.33), subrotina DRTMI [18], e subro

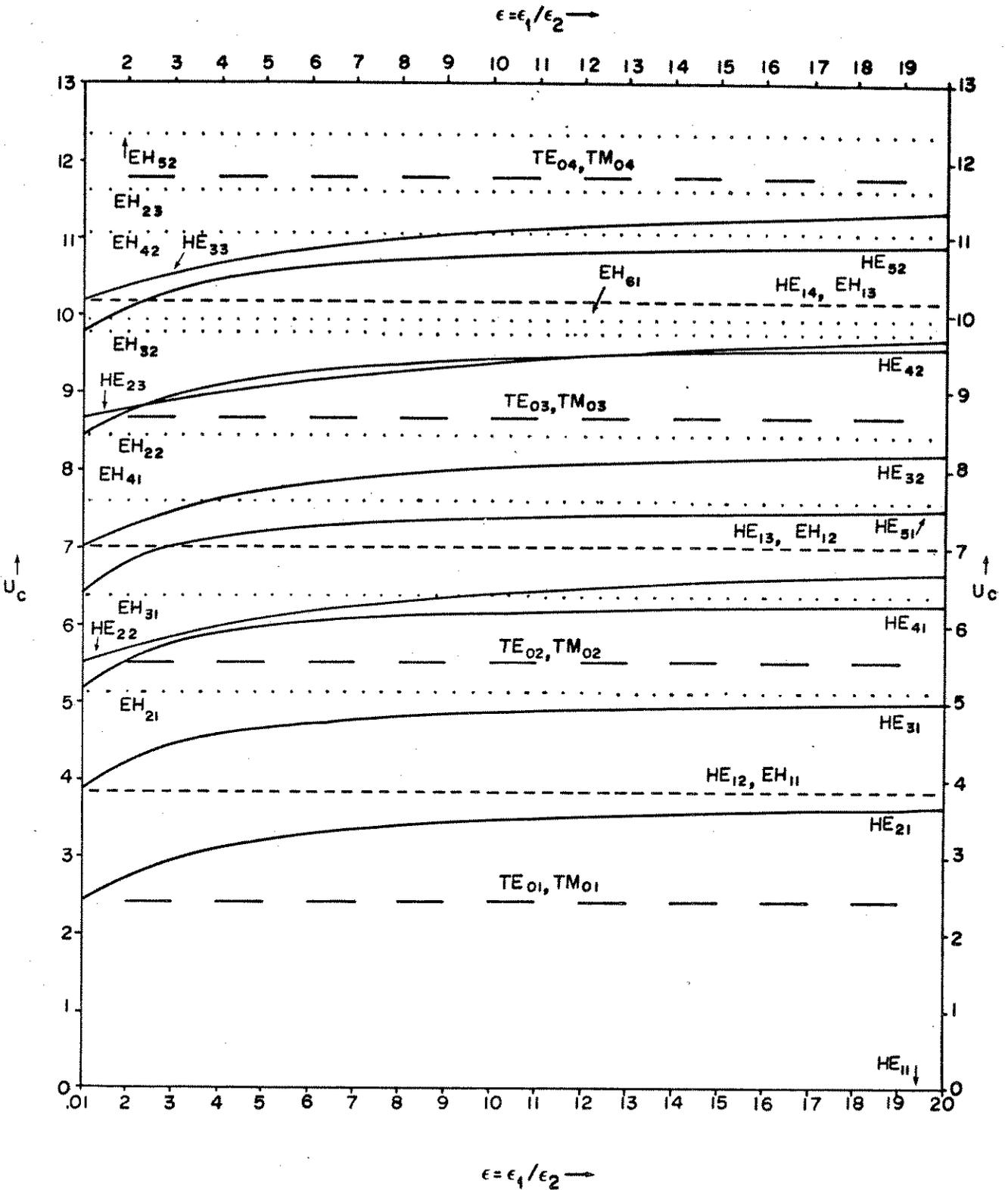


Fig.III.5 - Variação do valor de corte, U_c , com a permissividade elétrica relativa, ϵ , para os modos de mais baixa ordem em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau.

tinhas das funções de Bessel, BESJ e BESK {18}. O programa está escrito em FORTRAN-IV, com dupla precisão.

Usando as equações (III.22) e (III.23), por (III.53) podemos escrever a frequência normalizada na forma:

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \tag{III.54}$$

Conhecendo os valores dos índices de refração dos materiais do núcleo e da casca, n_1 e n_2 , traçamos as curvas da constante de propagação β normalizada em relação à constante de propagação no espaço livre, k_0 , para os modos de mais baixa ordem em uma fibra óptica com perfil de índice de refração em degrau. A razão β/k_0 é dada através da equação:

$$\frac{\beta}{k_0} = \frac{1}{V} \left[n_2^2 U^2 + n_1^2 W^2 \right]^{1/2} \tag{III.55}$$

e as curvas, mostradas na Fig.III.6, foram traçadas em função da razão a/λ , para λ fixo. Os valores adotados para n_1 e n_2 foram, respectivamente, 1,8 e 1,5. A partir dessa figura, podemos observar a validade da equação (III.15). Observamos, também, que à medida em que cresce o raio do núcleo da fibra, um número maior de modos é guiado pela estrutura. Os valores de corte $(a/\lambda)_c$ dos modos são dados pelos pontos onde a curva β/k_0 , do modo particular, intercepta o eixo a/λ . Estes valores são apresentados no Quadro III.3. A região de operação monomodal desta fibra situa-se na faixa:

$$0 < a/\lambda < 0,3847 \tag{III.56}$$

A modificação dos índices de refração, n_1 e n_2 , alterará apenas a escala vertical do diagrama β/k_0 - a/λ e os valores de corte dos modos $HE_{\nu\mu}$, $\nu > 1$ (ver Fig.III.5).

Um outro diagrama de propagação, semelhante ao apresentado na Fig.III.6, foi proposto por D.Gloge {16}. Este autor define um parâmetro, b , que ele chama de constante de propagação normalizada. Este parâmetro é definido por:

$$b = 1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{W^2}{V^2} \tag{III.57}$$

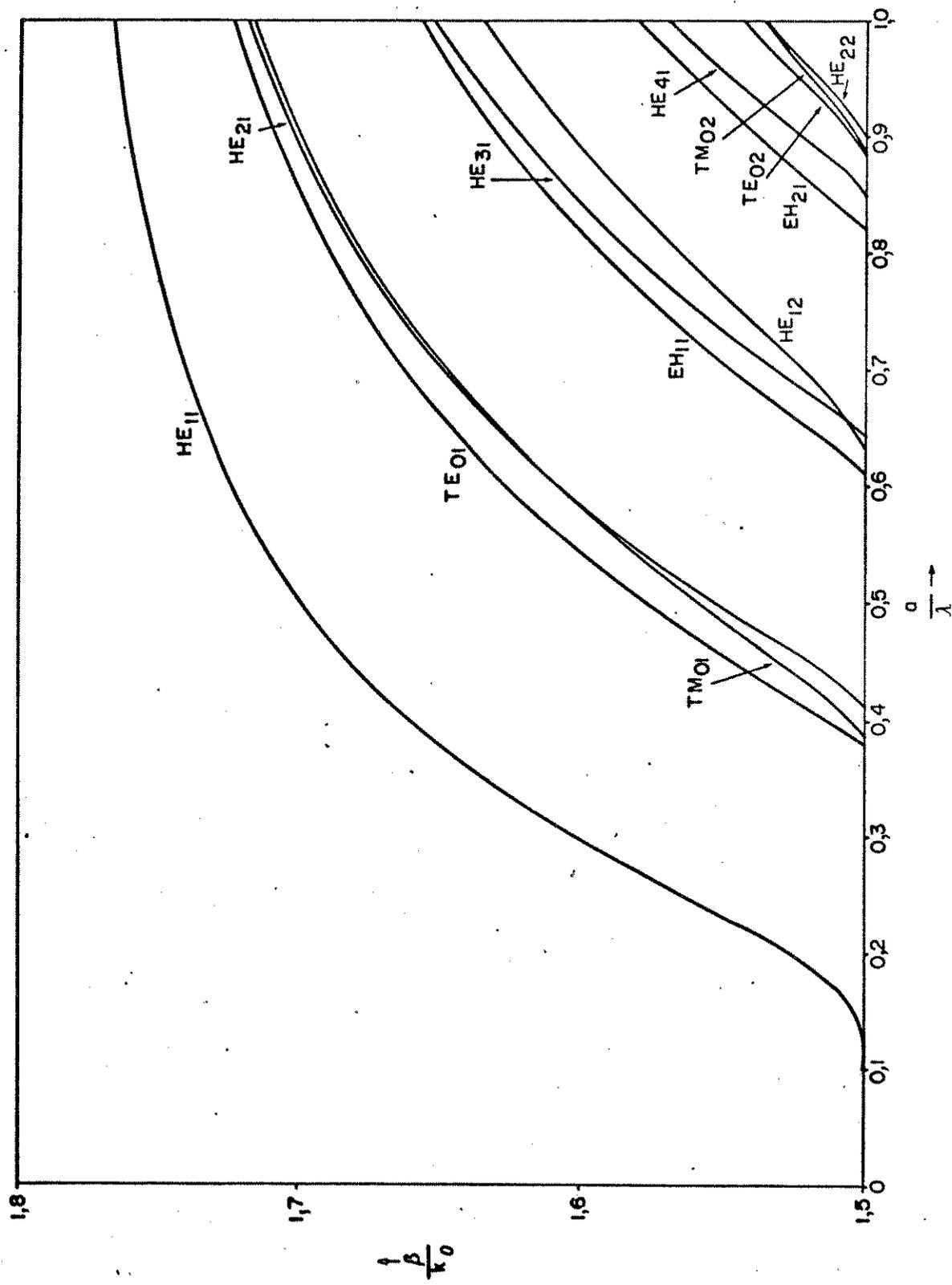


Fig. III.6 - Variação da relação β/k_0 em função do raio do núcleo normalizado, a/λ , para os modos de mais baixa ordem em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau; $n_1=1,8$, $n_2=1,5$. Faixa monomodal de operação: $0 < (a/\lambda) < 0,3847$

Esta definição é bastante apropriada quando se analisa as características de propagação das fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau a partir da sua equação característica na forma aproximada (ver Capítulo VI, item VI.3). Neste caso, a equação característica não depende dos índices de refração da fibra o que, para qualquer estrutura óptica analisada, dará origem a um mesmo diagrama envolvendo a equação (III.57). Entretanto, no caso da análise ser efetuada através da equação característica em sua forma exata (ver equação (III.20) ou (III.33)), que depende diretamente dos índices de refração do núcleo e da casca da fibra (ver equação (III.24)), teremos diagramas diferentes com b quando usarmos fibras ópticas diferentes. O parâmetro b , porém, é bastante útil em nossa análise sobre dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau, usando a equação característica exata, por simplificar a apresentação das equações que utilizamos.

Por (III.57), usando valores limites de W , podemos verificar que:

$$0 < b < 1 \quad (\text{III.58})$$

sendo que o limite inferior corresponde ao valor de corte do modo ($W \rightarrow 0$) enquanto que o limite superior indica que o modo propaga-se quase paralelo ao eixo de simetria da fibra ($W \rightarrow \infty$).

A Fig. III.7 mostra a variação do parâmetro b em função da frequência normalizada V para os modos de mais baixa ordem em uma fibra óptica com perfil do índice de refração em degrau tendo $n_1=1,8$ e $n_2=1,5$. Os valores de corte para o modo particular são encontrados pela interseção da curva b específica com o eixo V e são mostrados no Quadro III.3. A região de operação monomodal situa-se na faixa:

$$0 < V < 2,4048 \quad (\text{III.59})$$

A equação característica exata e a fixação do intervalo monomodal de operação das fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau, estabelecidas neste Capítulo, serão utilizados, a partir do Capítulo V, na análise da dispersão nestas estruturas.

No próximo Capítulo, utilizaremos os conceitos defini

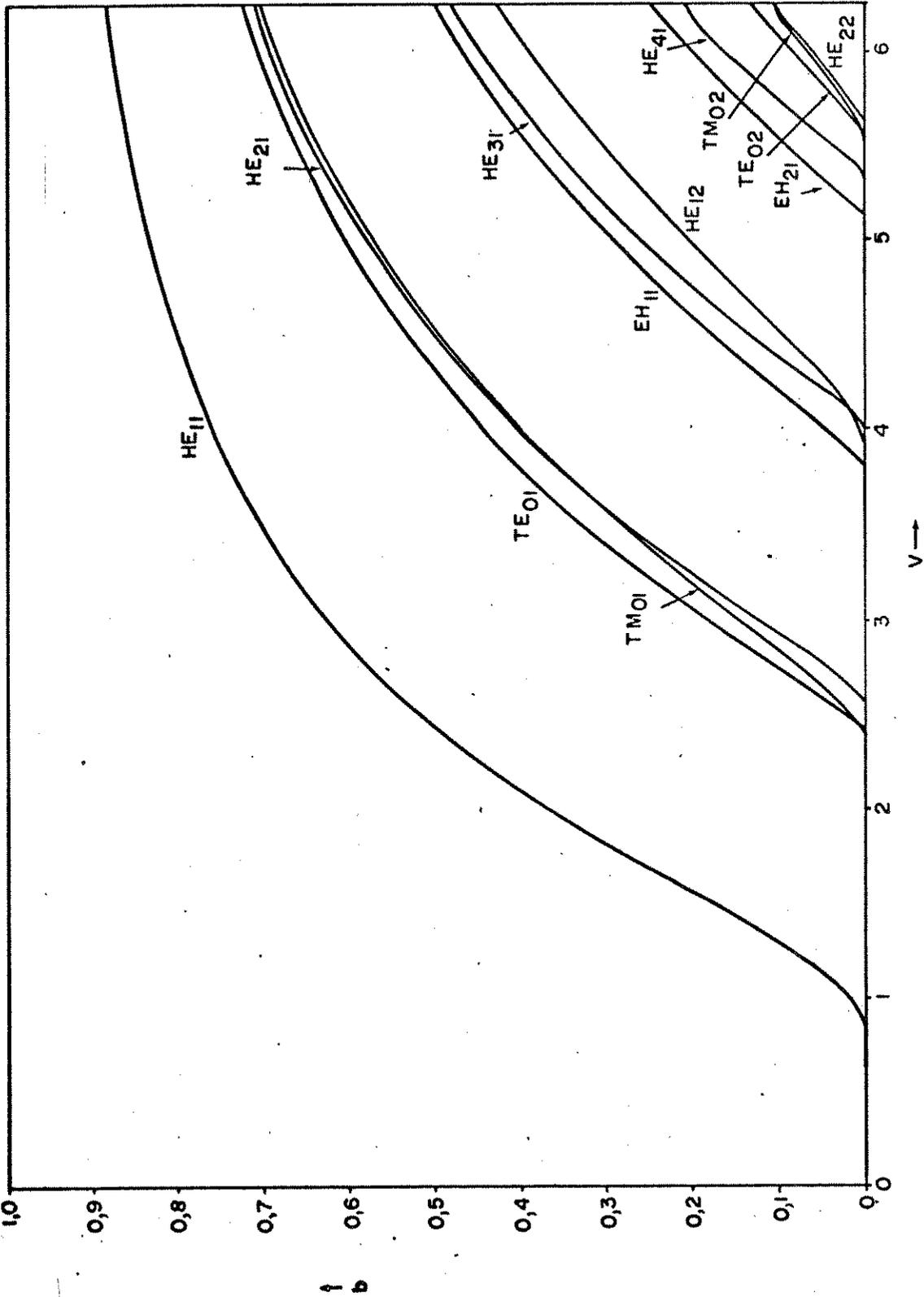


Fig.III.7 - Constante de propagação normalizada, b , em função da frequência normalizada, V , para os modos de mais baixa ordem em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau: $n_1=1,8$, $n_2=1,5$. Faixa monomodal de operação: $0 < V < 2,4048$

dos no item II.4 do Capítulo II, para analisar as características de dispersão dos materiais que são, comumente, utilizados na confecção de fibras ópticas.

MODOS	$(a/\lambda)_c$	$V_c = U_c$
HE ₁₁	0,0000	0,0000
TE ₀₁ , TM ₀₁	0,3847	2,4048
HE ₂₁	0,4109	2,5690
EH ₁₁ , HE ₁₂	0,6129	3,8317
HE ₃₁	0,6448	4,0311
EH ₂₁	0,8215	5,1356
HE ₄₁	0,8564	5,3537
TE ₀₂ , TM ₀₂	0,8829	5,5201
HE ₂₂	0,8954	5,5979

Quadro III.3 - Valores de corte $(a/\lambda)_c$ e U_c para os modos representados nos diagramas de propagação (ver Figs. III.6 e III.7).

$$n_1 = 1,8 \quad ; \quad n_2 = 1,5$$

CAPÍTULO IV

DISPERSÃO DO MATERIAL

Neste Capítulo calculamos os valores dos comprimentos de onda que tornam nula a dispersão do material e, a partir do conhecimento destes valores, calculamos a dispersão residual para alguns materiais comumente utilizados na confecção de fibras ópticas.

Todos os cálculos efetuados são baseados na escolha da equação dos três termos de Sellmeier que representa a dependência não-linear do índice de fase do material com o comprimento de onda da radiação eletromagnética que sobre ele incide.

4.1 - REPRESENTAÇÃO DO ÍNDICE DE FASE - A EQUAÇÃO DOS TRÊS TERMOS DE SELLMEIER

A dispersão do material, também conhecida como dispersão cromática, surge em consequência da dependência do índice de fase do material com o comprimento de onda da radiação eletromagnética que sobre ele incide. É uma propriedade intrínseca dos materiais ópticos e pode ser minimizada através da escolha adequada do comprimento de onda no qual a fonte irá operar.

O índice de fase dos materiais ópticos é sempre medido em valores discretos do comprimento de onda para os quais é necessária uma trabalhosa calibração da fonte. Os valores do índice de fase para comprimentos de onda específicos são, então, interpolados a partir destes valores medidos. Desta maneira, torna-se necessária uma equação que represente, com a melhor exatidão possível, a variação do índice de fase com o comprimento de onda. A equação que melhor adapta-se a esse interpolação de dados, seja pelas suas características teóricas ou pela sua concordância com resultados práticos de medidas, é a equação dos três termos de Sellmeier. Sua dedução, que foge às características deste trabalho, pode ser encontrada em {28}. Esta equação é escrita na forma:

$$n^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \tag{IV.1}$$

onde:

- n - é o índice de fase do material;
- λ - é o comprimento de onda da fonte (em μm);

- A_i - são constantes relacionadas com a largura da banda de absorção do material, e
- λ_i - são os comprimentos de onda (em μm), para os quais ocorre absorção máxima.

Para a obtenção dos valores dos parâmetros A_i e λ_i , a apresentados na equação (IV.1), para um dado material, o índice de fase é medido em vários comprimentos de onda e em seguida a justados a esta equação através de técnicas numéricas {29} - {30}. Convém salientar que, em todas as medidas, os comprimentos de onda λ são dados em micrometros (μm).

No Quadro IV.1 apresentamos os coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier para os materiais mais utilizados na construção de fibras ópticas {31} - {34} e que serão analisa dos por nós, no decorrer deste Capítulo, com relação às suas pro priedades dispersivas. Podemos observar que todas as amostras têm, como composto fundamental o óxido de silício (SiO_2).

A variação do índice de fase n (ver equação (IV.1)) com o comprimento de onda, λ , para os materiais do Quadro IV.1, é a presentada na Fig.IV.1. Nesta figura, podemos observar que os ín dices de fase das amostras tendem para valores grandes à medida em que o comprimento de onda, λ , aproxima-se do valor 0,1. Este valor é próximo do comprimento de onda, λ_2 (ver Quadro IV.1), pa ra o qual as amostras apresentam absorção máxima. Os outros dois comprimentos de onda de absorção máxima, λ_1 e λ_3 , encontram - se bastante afastados da escala da Fig.IV.1. Como iremos verificar no item IV.3, os comprimentos de onda, λ , de dispersão material mínima situam-se próximos à 1,3 μm . Isto significa dizer que es taremos sempre operando as fontes fora das regiões de absorção máxima dos materiais. Esta observação é importante para efeitos de cálculos computacionais.

De grande utilidade no estudo da dispersão do mate rial e no estudo da dispersão total, a ser efetuada no Capítulo VI, são as três primeiras derivadas do índice de fase com relação ao comprimento de onda. Elas são dadas através das equações:

$$\frac{dn}{d\lambda} = - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \lambda_i^2 \lambda}{(\lambda^2 - \lambda_i^2)^2} \tag{IV.2}$$

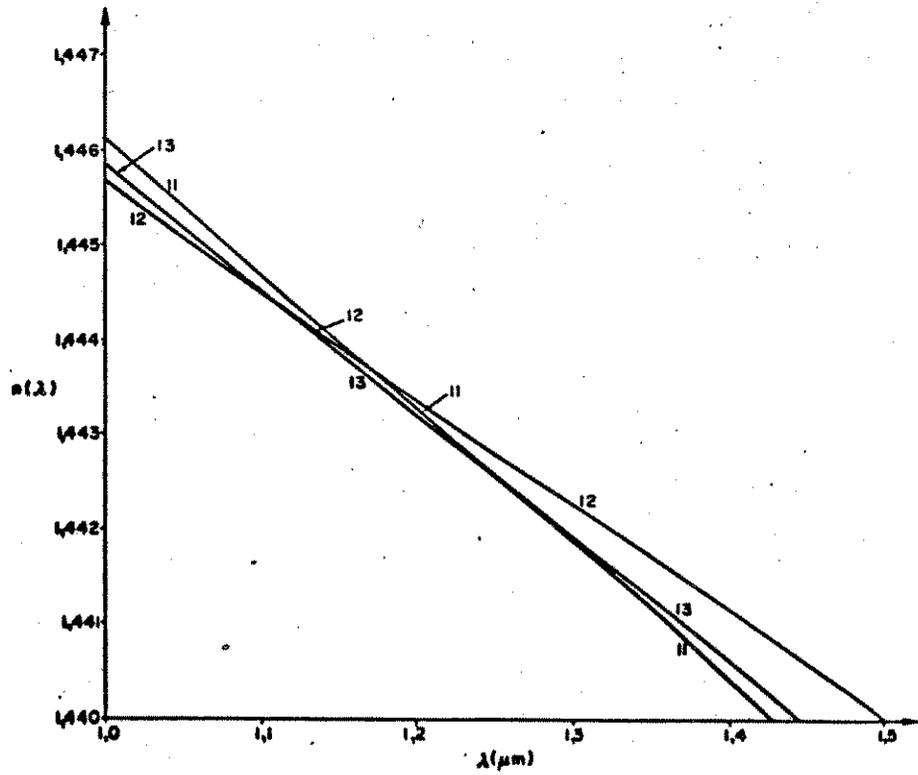
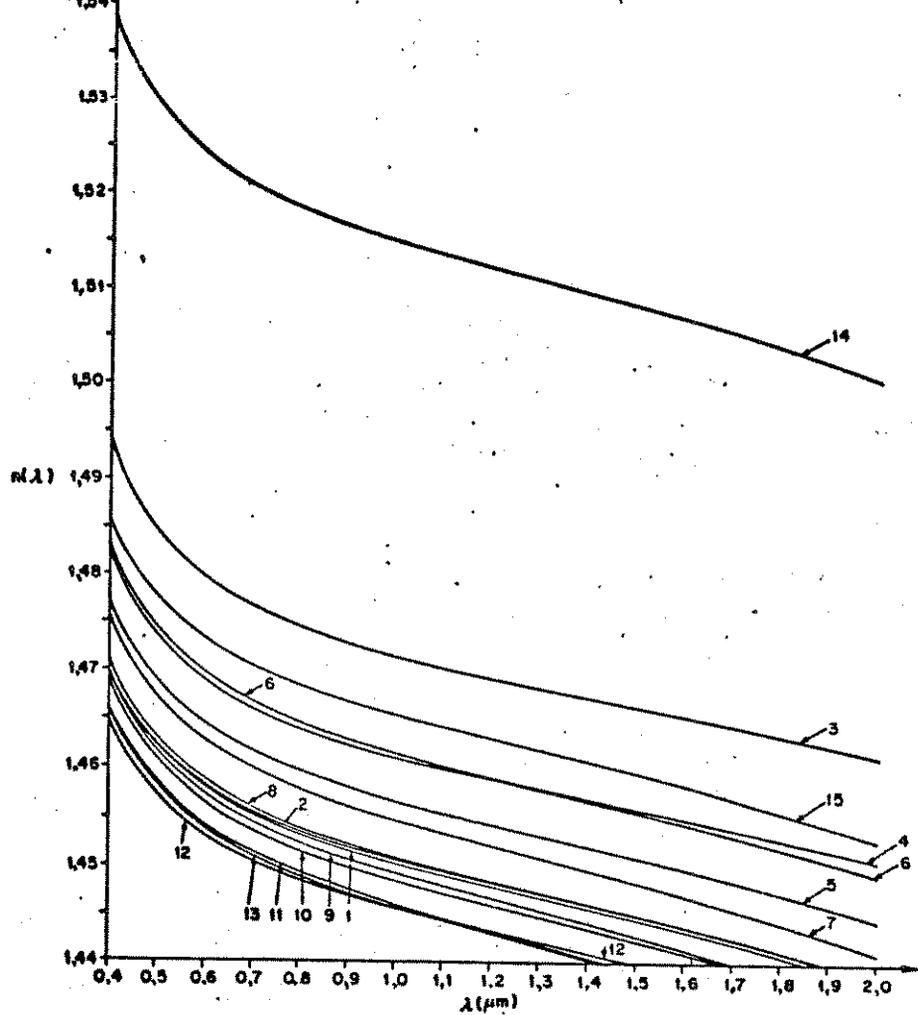


Fig.IV.1 - Variação do índice de fase, n , com o comprimento de onda, λ , para os materiais apresentados no Quadro IV.1.

AMOSTRA	COMPOSIÇÃO (em MOL%)						COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DOS TRÊS TERMOS DE SELLMEIER					
	GeO ₂	B ₂ O ₃	F	NaO ₂	P ₂ O ₅	SiO ₂	A ₁	k ₁	A ₂	k ₂	A ₃	k ₃
01*	-	-	-	-	-	100	0,6961663	0,0684043	0,4079426	0,1162414	0,8974794	9,896161
02**	-	-	-	-	-	100	0,69675	0,069066	0,408218	0,115662	0,890815	9,900559
03	13,5	-	-	-	-	86,5	0,73454395	0,08697693	0,42710828	0,11195191	0,82103399	10,84654
04	7,0	-	-	-	-	93,0	0,6869829	0,078087582	0,44479505	0,1155184	0,79073512	10,436628
05	4,1	-	-	-	-	95,9	0,68671749	0,072675189	0,43481505	0,11514351	0,89656582	10,002398
06	9,1	7,7	-	-	-	83,2	0,72393884	0,085826532	0,41129541	0,1070526	0,79292034	9,3772959
07	4,03	9,7	-	-	-	86,27	0,7042042	0,067974973	0,41289413	0,12147738	0,95238253	9,6436219
08	0,1	5,4	-	-	-	94,5	0,69681388	0,070555513	0,40865177	0,1176566	0,89374039	9,8754801
09	-	13,5	-	-	-	86,5	0,70724622	0,080478054	0,39412616	0,10925792	0,63301929	7,8908063
10**	-	13,5	-	-	-	86,5	0,67626834	0,076053015	0,42213113	0,11329618	0,5833977	7,8486094
11	-	7,0	-	-	-	93,0	0,69200948	0,065669958	0,40329419	0,11628286	0,94625695	8,7506878
12	-	-	1,0	-	-	99,0	0,691116	0,068227	0,399166	0,11646	0,890423	9,993707
13	-	13,3	-	-	-	86,7	0,690618	0,0619	0,401996	0,123662	0,898817	9,09896
14	-	32,5	-	16,9	-	50,6	0,796468	0,094359	0,497614	0,093386	0,358924	5,999652
15	-	-	-	-	9,1	90,9	0,695790	0,061568	0,452497	0,119921	0,712513	8,656641

Quadro IV.1 - Coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier

* - Amostra fundida

** - Amostra resfriada

$$\frac{d^2 n}{d\lambda^2} = \frac{1}{n} \left[- \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 (3\lambda^2 + \ell_i^2)}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^3} \right] \quad (\text{IV.3})$$

$$\frac{d^3 n}{d\lambda^3} = \frac{-3}{n} \left[\frac{dn}{d\lambda} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} + 4 \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 \lambda (\lambda^2 + \ell_i^2)}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^4} \right] \quad (\text{IV.4})$$

A equação (IV.2) será utilizada, no próximo item, para o cálculo do índice de grupo de cada material enquanto que as duas outras equações (IV.3) e (IV.4), serão utilizadas no item IV.3 para o cálculo da dispersão do material e da dispersão residual.

7.2- VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE GRUPO COM O COMPRIMENTO DE ONDA

Vimos, no Capítulo II, item II.4, que o índice de grupo de um material é dado, em função do seu índice de fase (ver equação (II.38)), através da equação:

$$N = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad (\text{IV.5})$$

Utilizando as expressões (IV.1) e (IV.2), a variação do índice de grupo, N , com o comprimento de onda, λ , para os materiais apresentados no Quadro IV.1, é mostrada na Fig. IV.2 ((a) e (b)). Observamos que as curvas dos índices de grupo, têm, todas, um ponto de mínimo no intervalo dos gráficos. Este ponto corresponde ao comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, de dispersão mínima e será calculado no item a seguir.

7.3- DISPERSÃO DO MATERIAL MÍNIMA E DISPERSÃO RESIDUAL

O comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, que torna nula a dispersão do material é calculado através da equação (II.46):

$$D_m = D_1 = \frac{1}{c} \frac{dN}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

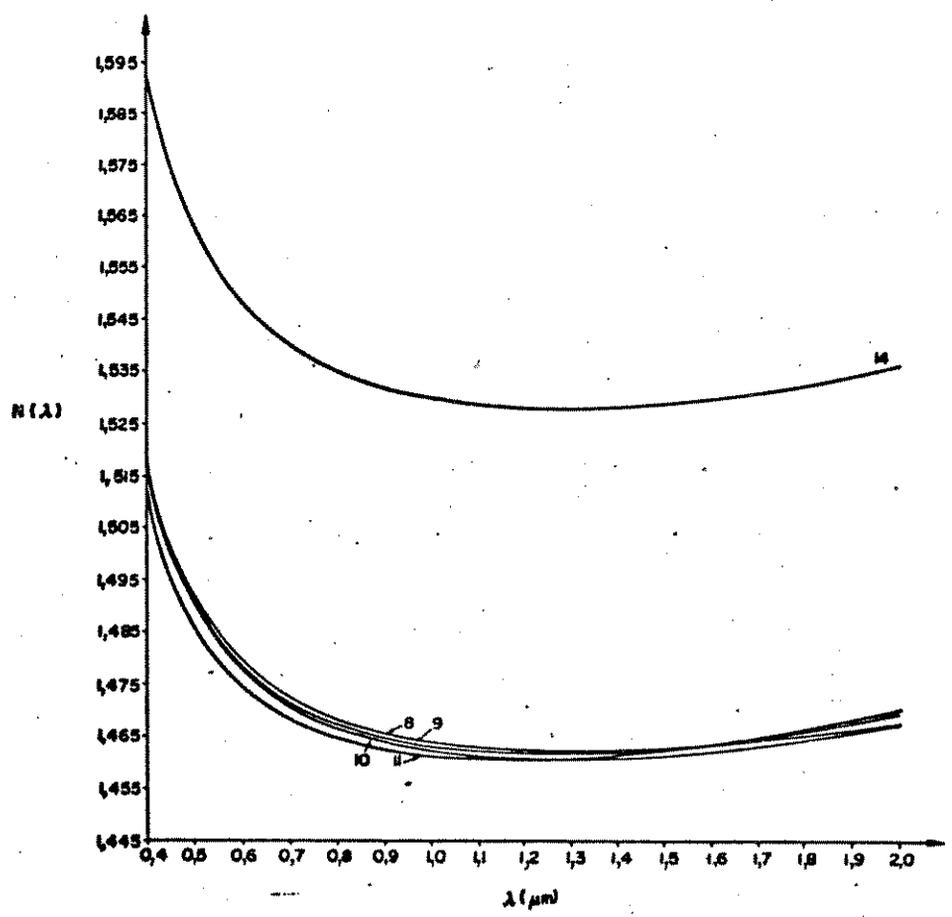
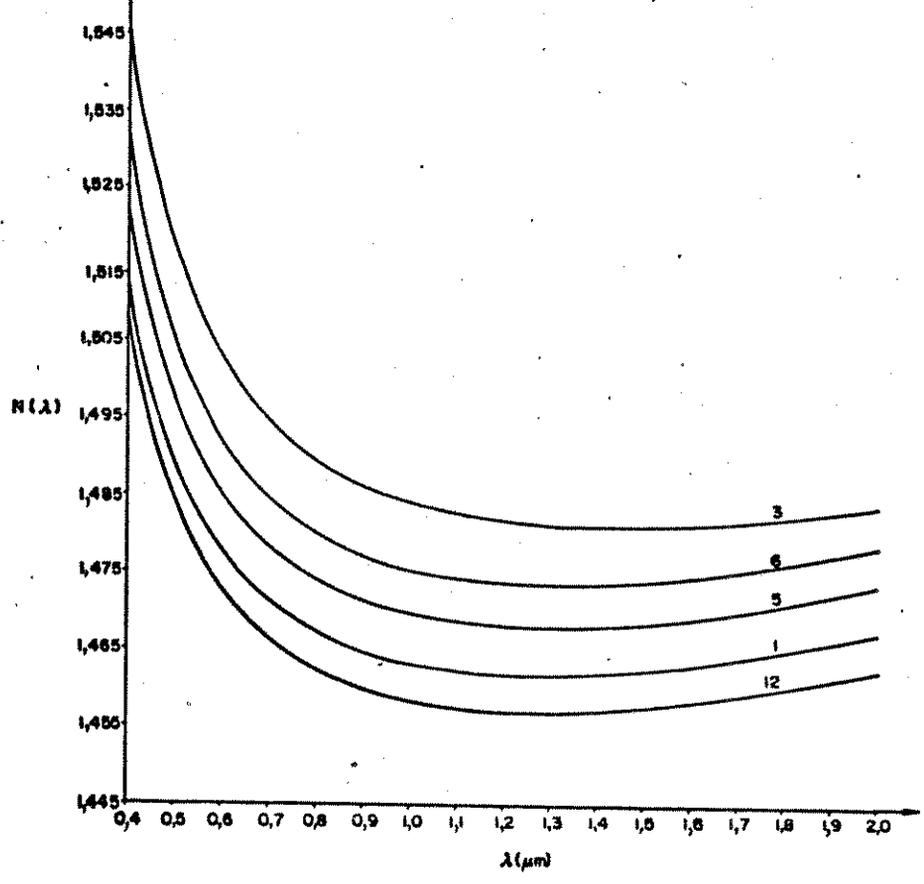


Fig.IV.2.a - Variação do índice de grupo, N , para amostras do Quadro IV.1.

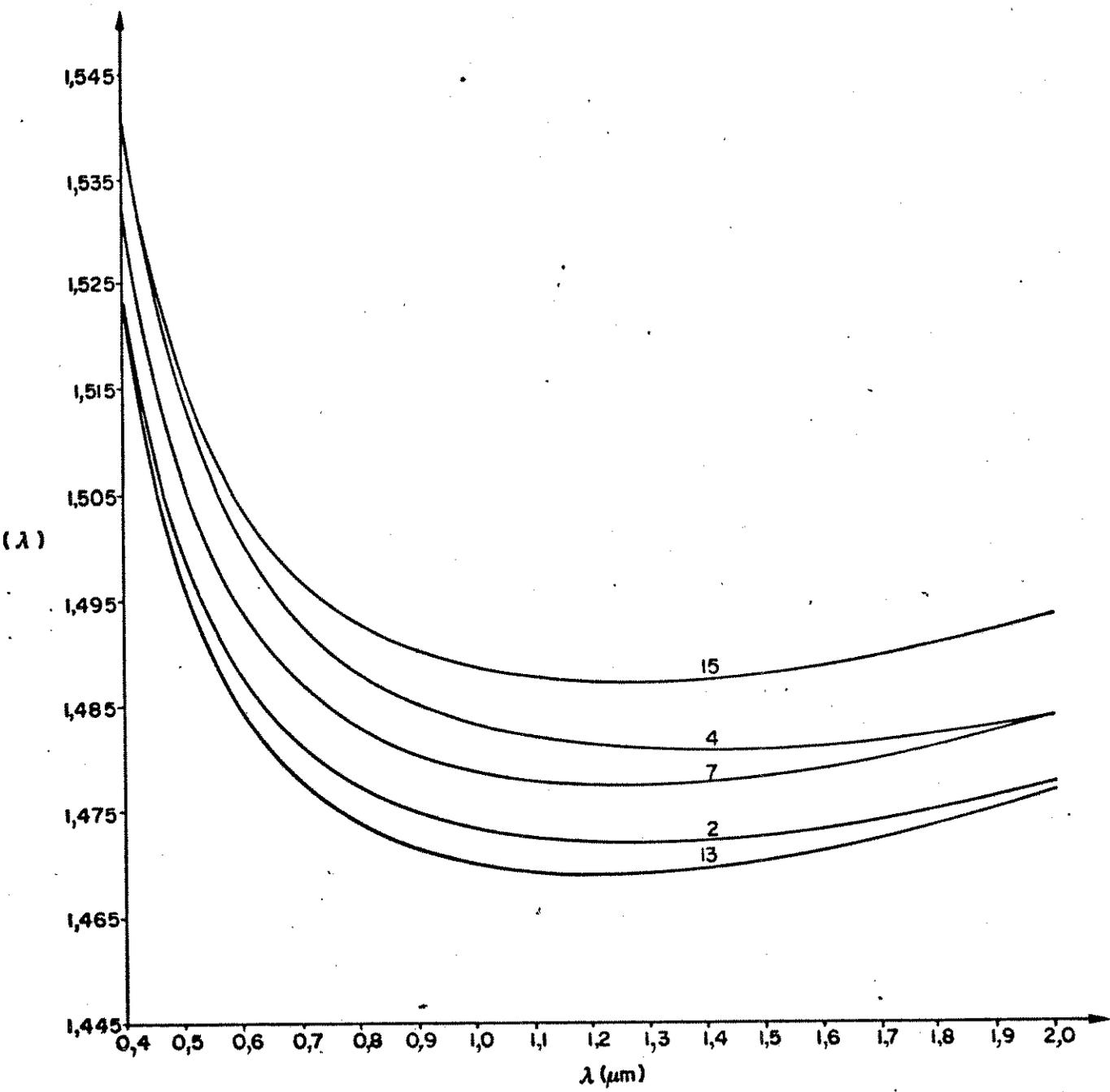


Fig. IV.2.b - Variação do índice de grupo, N , para as amostras 2, 4, 7, 13, 15 do Quadro IV.1.

onde:

c - é a velocidade de fase da onda no espaço livre, e
 N - é o índice de grupo do material em análise.

A partir da expressão para o índice de grupo, dada por (IV.5), podemos escrever a dispersão do material, em função do seu índice de fase, na forma:

$$D_m = - \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad \text{s}/(\text{Km}.\mu\text{m}) \quad (\text{IV.7})$$

ou, na forma mais usual:

$$D_m = -3333,3333 \lambda \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad \text{ps}/(\text{Km}.\text{nm}) \quad (\text{IV.8})$$

Com o auxílio da equação (IV.3), e utilizando os coeficientes de Sellmeier dados no Quadro IV.1, nós traçamos as curvas de dispersão para as várias amostras. Estas curvas são apresentadas nas Figs, IV.3 ((a),(b),(c)). Observamos, a partir destas curvas, que a maioria dos materiais analisados apresenta dispersão mínima na faixa:

$$1,2 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1,35 \mu\text{m} \quad (\text{IV.9})$$

Fizemos um programa de computador, baseado na equação (IV.8), para calcular o comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, para cada uma das amostras do Quadro IV.1. Os resultados obtidos estão colocados no Quadro IV.2.

A partir do conhecimento de $\hat{\lambda}$, a dispersão residual \hat{D}_2 (ver equação (II.50)), em unidades de $\text{ps}/(\text{Km}.\text{nm}^2)$, é calculada através da expressão:

$$\hat{D}_2 = 0,416666667 \lambda \left. \frac{d^3 n}{d\lambda^3} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} \quad (\text{IV.10})$$

onde $d^3 n/d\lambda^3$ é dado pela equação (IV.4). Os resultados obtidos para cada amostra do Quadro IV.1 são, também, colocados no Quadro IV.2.

Tendo analisado um dos efeitos dispersivos, aquele que é provocado pela dependência do índice de fase dos materiais com o comprimento de onda, que contribui para provocar o alargamento

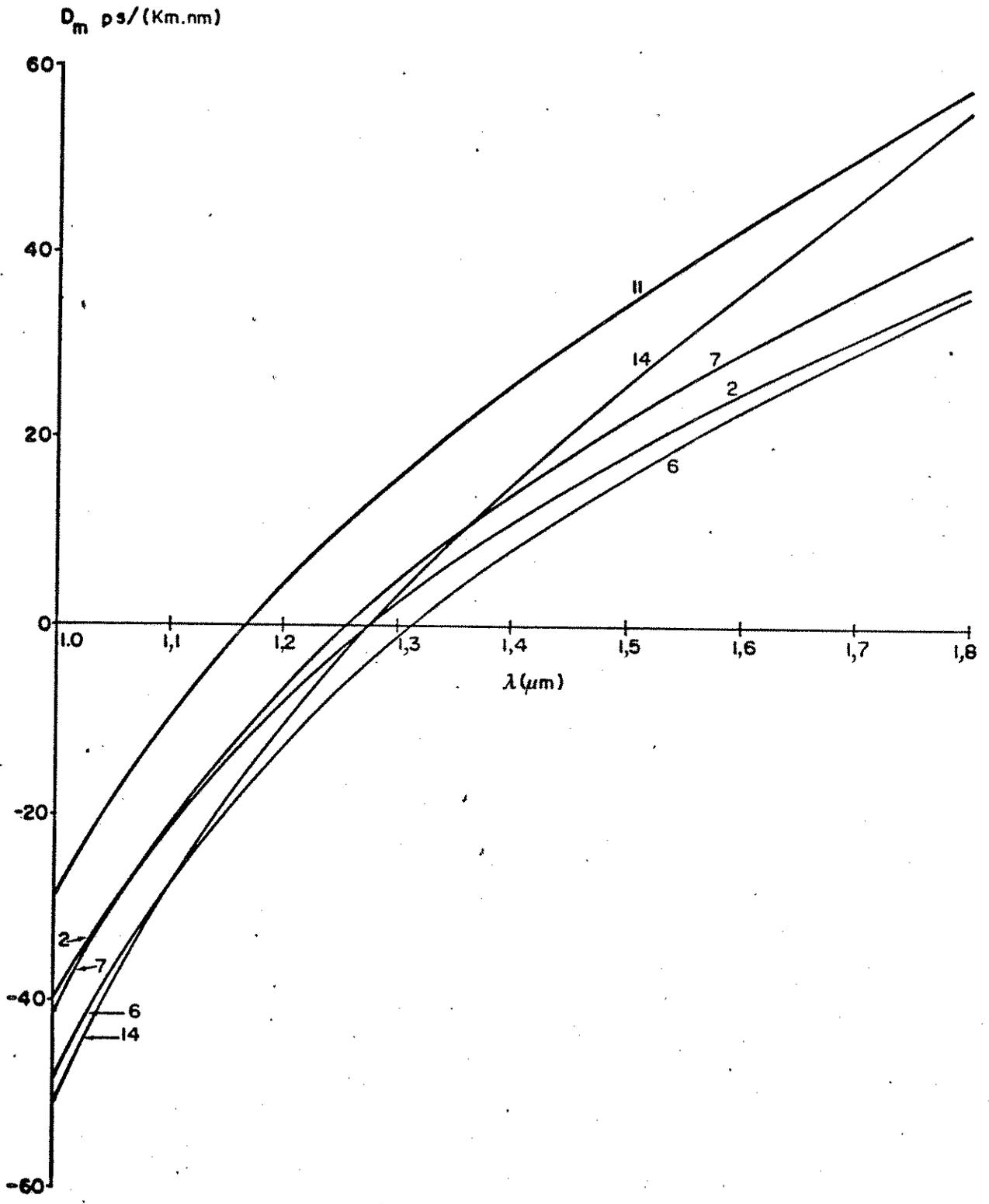


Fig. IV.3.a - Dispersão do material para as amostras 2,6,7,11 e 14 do Quadro IV.1.

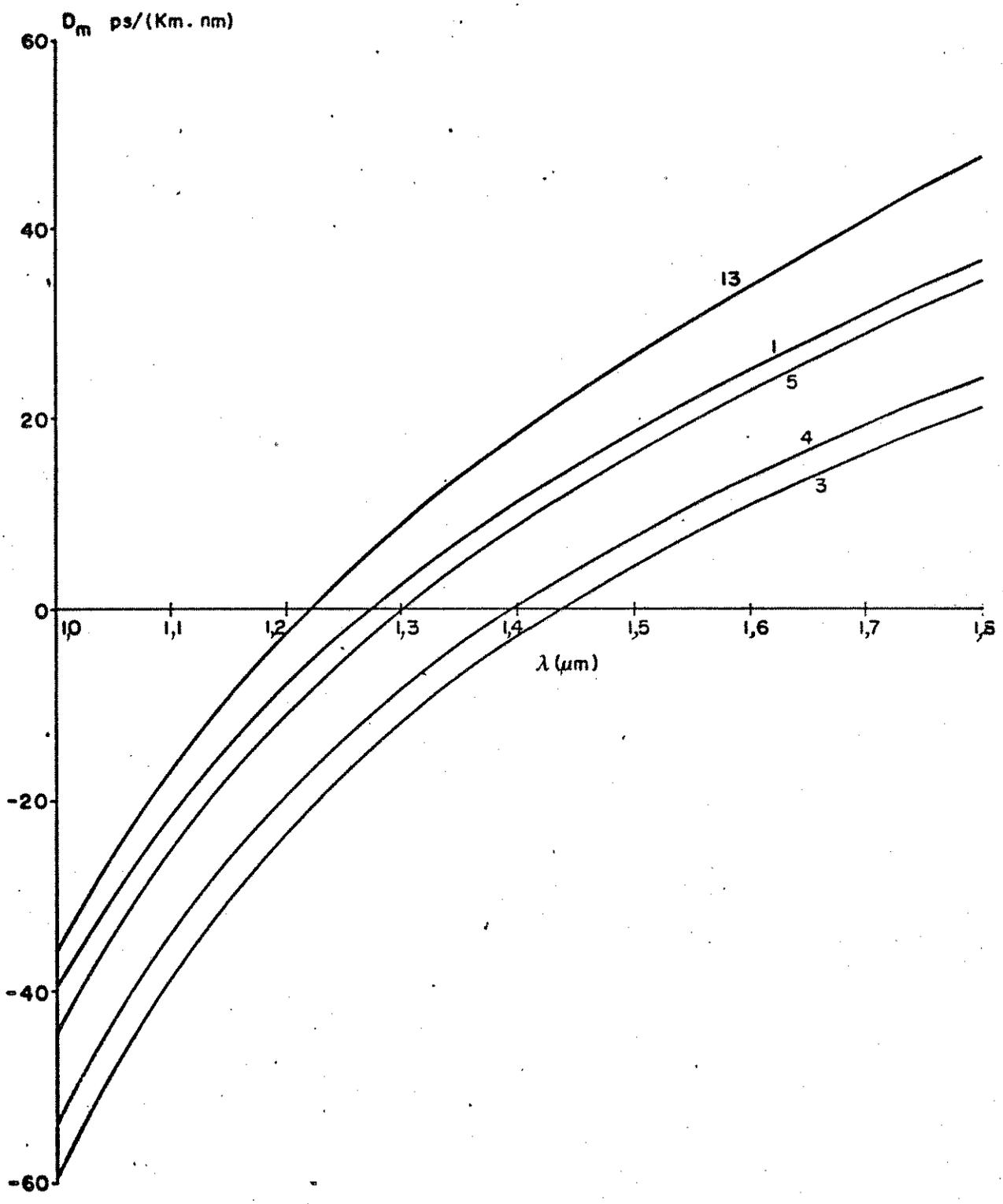


Fig. IV.3.b - Dispersão do material para as amostras 1,3,4,5 e 13 do Quadro IV.1.

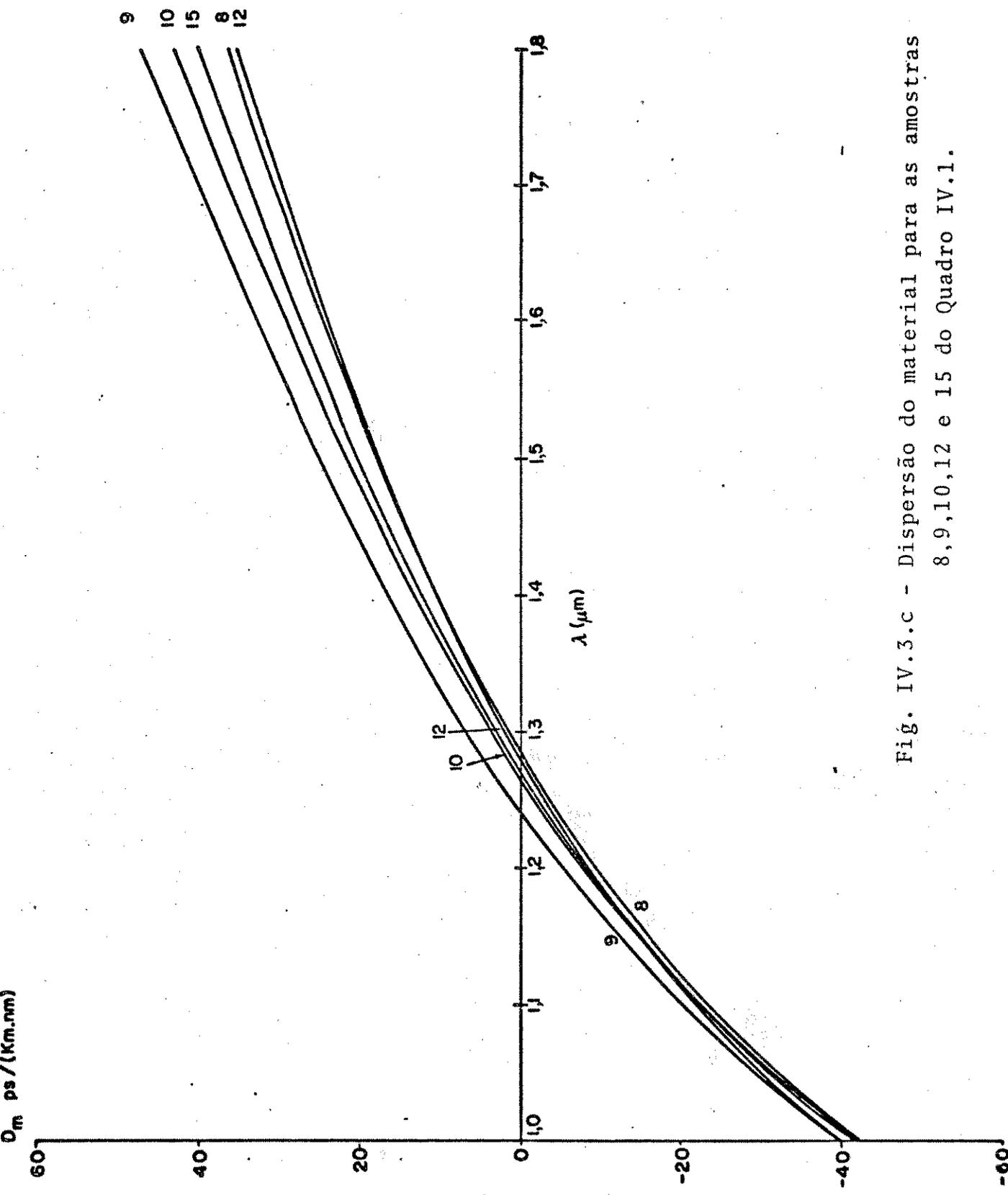


Fig. IV.3.c - Dispersão do material para as amostras 8, 9, 10, 12 e 15 do Quadro IV.1.

de pulsos que propagam-se através de fibras ópticas e encontrado o comprimento de onda que torna nulo esse efeito, no próximo Capítulo iremos analisar o outro efeito dispersivo que é provocado pela dependência da constante de propagação do modo único, em fibras monomodais, com o comprimento de onda.

AMOSTRA	COMPOSIÇÃO (EM MOL%)						$\hat{\lambda}$ (μm)	\hat{D}_2 ps/(Km.nm ²)
	GeO ₂	B ₂ O ₃	F	NaO ₂	P ₂ O ₅	SiO ₂		
01*	-	-	-	-	-	100	1,272754	0,012488
02**	-	-	-	-	-	100	1,275747	0,012385
03	13,5	-	-	-	-	86,5	1,435329	0,009431
04	7,0	-	-	-	-	93,0	1,394790	0,009916
05	4,1	-	-	-	-	95,9	1,300906	0,012197
06	9,1	7,7	-	-	-	83,2	1,314799	0,012516
07	4,03	9,7	-	-	-	86,27	1,254728	0,014002
08	0,1	5,4	-	-	-	94,5	1,284713	0,012529
09	-	13,5	-	-	-	86,5	1,242238	0,014880
10**	-	13,5	-	-	-	86,5	1,264170	0,014005
11	-	7,0	-	-	-	93,0	1,168215	0,017129
12	-	-	1,0	-	-	99,0	1,276872	0,012163
13	-	13,5	-	-	-	86,7	1,219567	0,015077
14	-	32,5	-	16,9	-	50,6	1,275889	0,016540
15	-	-	-	-	9,1	90,9	1,266061	0,013384

Quadro IV.2 - Comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, para dispersão do material mínima e dispersão residual, \hat{D}_2 , para as amostras em análise.

* - Amostra fundida

** - Amostra resfriada

CAPÍTULO V

DISPERSÃO DO GUIA DE ONDA

Neste Capítulo, a partir da definição de índice de grupo total, apresentamos as equações exatas para a análise da dispersão do guia de onda em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau.

Curvas deste efeito dispersivo são traçadas para fibras ópticas com núcleo constituído de diferentes proporções do composto $\text{GeO}_2 \cdot \text{SiO}_2$ e casca de silício fundido. As observações que efetuamos sobre estas curvas estão em perfeito acordo com aquelas que são feitas a partir de formalismos assintóticos, visto que, para as fibras que analisamos, a diferença relativa entre os índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca da estrutura óptica é pequena.

1 - EQUAÇÕES EXATAS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO DO GUIA DE ONDA

Além da dispersão do material, analisada no Capítulo anterior, um outro fator importante no estudo da dispersão de pulsos em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau é a dispersão do guia de onda. Neste item iremos encontrar as equações necessárias à análise deste efeito dispersivo a partir da expressão exata para o índice de grupo total.

Vimos no Capítulo II, item II.4, que o índice de grupo, N , pode ser escrito na forma (ver equação (II.39)):

$$N = \frac{d\beta}{dk_0} \quad (\text{V.1})$$

onde β é a constante de propagação do modo de interesse e k_0 é o número de onda no espaço livre. Utilizando as equações (III.22), (III.23) e (III.57), podemos expressar a constante de propagação, β , em função do parâmetro k_0 , dos índices de fase dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra óptica, n_1 e n_2 respectivamente, e da constante de propagação normalizada, b , na forma:

$$\beta = k_0 \left[n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)b \right]^{1/2} \quad (\text{V.2})$$

O termo

$$\left[n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)b \right]^{1/2} = n_e \quad (\text{V.3})$$

é chamado de índice de fase efetivo {10}, isto é, é o índice de fase "visto" pelo modo ao propagar-se na estrutura óptica.

Como visto no Capítulo anterior, o índice de fase dos materiais ópticos varia conforme o comprimento de onda da radiação eletromagnética que sobre eles incide (ver equação (IV.1), Capítulo IV). Assim sendo, usando a equação (V.2) e efetuando a diferenciação indicada em (V.1), encontramos a expressão para o índice de grupo total:

$$N = \frac{1}{n_e} \left[n_2 N_2 + \left(\frac{V}{2} \frac{db}{dV} + b \right) \theta \right] \quad (\text{V.4})$$

onde:

$$\theta = n_1 N_1 - n_2 N_2 \quad (\text{V.5})$$

e

$$N_i = n_i - \lambda \frac{dn_i}{d\lambda} \quad ; \quad i=1,2 \quad (\text{V.6})$$

Os parâmetros N_1 e N_2 na equação (V.6) são, respectivamente, os índices de grupo dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra óptica.

Define-se {8} dispersão do guia de onda como sendo o efeito provocado pela variação do atraso de grupo (ver equação (II.39)) com o comprimento de onda, mantendo-se os índices de fase dos materiais com os quais é constituída a fibra, independentes desta variação. Isto posto podemos, a partir das equações (V.4)-(V.6), definir uma grandeza, que chamamos de índice de grupo do guia, N_g , através da expressão:

$$N_g = \frac{1}{n_e} \left[n_2^2 + \left(\frac{V}{2} \frac{db}{dV} + b \right) (n_1^2 - n_2^2) \right] \quad (\text{V.7})$$

e, a partir desta definição e da equação (II.39), encontrar a expressão para a dispersão do guia de onda, D_g . Teremos então:

$$D_g = \frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{1}{c} \frac{dN_g}{d\lambda} \quad (\text{V.8})$$

Mantendo por definição os índices de fase n_1 e n_2 constantes com relação ao comprimento de onda e usando (V.7) em (V.8), encontramos:

$$D_g = - \frac{(n_1^2 - n_2^2)V}{2c\lambda n_e} \left[V \frac{d^2 b}{dV^2} + \left(3 - \frac{N_g}{n_e} \right) \frac{db}{dV} \right] \quad (V.9)$$

Em unidades de ps/(Km.nm), a equação (V.9) é escrita na forma:

$$D_g = - \frac{1666,6667(n_1^2 - n_2^2)V}{\lambda n_e} \left[V \frac{d^2 b}{dV^2} + \left(3 - \frac{N_g}{n_e} \right) \frac{db}{dV} \right] \quad (V.10)$$

que é a expressão que usamos nos nossos cálculos computacionais.

No próximo item, iremos construir curvas de dispersão do guia de onda para algumas fibras hipotéticas (ver Quadro V.1).

2 - CURVAS DE DISPERSÃO DO GUIA DE ONDA

Vimos no Capítulo III, item III.2, que todos os modos guiados em fibras ópticas com perfil de índice de refração em de grau possuem uma frequência de corte, exceto teoricamente o modo fundamental HE_{11} , cuja frequência de corte é igual a zero. Vimos também naquele Capítulo, item III.3, que é possível operar com estas estruturas ópticas na região monomodal, bastando que para isso ocorra, reduzirmos o diâmetro do núcleo (ver Fig.III.6).

Nas condições de operação monomodal, uma parte significativa da potência modal propaga-se através da casca da fibra óptica {35}. De maneira aproximada, cerca de 20% da potência associada ao modo fundamental propaga-se através da casca da fibra quando esta opera no limiar superior da sua região monomodal ($V=2,4048$; ver Fig. 5 da referência {16}), sendo que esta percentagem vai aumentando à medida em que nos aproximamos do limiar inferior da região monomodal ($V=0$); neste valor da frequência normalizada, o modo fundamental é dito estar cortado, isto é, toda a sua potência associada propaga-se perpendicular ao eixo geométrico da fibra, como estabelecido no item III.2 do Capítulo III.

No estudo da dispersão do guia de onda, pelo exposto acima, é então conveniente eliminarmos o efeito dispersivo causado pelo material com o qual é construída a casca da fibra {8}. Isto se consegue, segundo o que foi analisado no Capítulo IV, escolhendo-se a frequência de operação da fibra óptica (consequentemente, o comprimento de onda) como sendo aquela que torna nula a dispersão do material da casca (observar que, desde que fixamos a frequência de operação do guia óptico, fixamos também os valores dos índices de fase de seus materiais constituintes).

Seguindo as considerações estabelecidas neste item, usando a equação (V.10), traçamos algumas curvas de dispersão do guia de onda para as fibras apresentadas no Quadro V.1. Estas curvas são apresentadas na Fig.V.1. As fibras são, teoricamente, construídas com diferentes dopagens do óxido de Germânio, GeO_2 , em óxido de Silício, SiO_2 , como material do núcleo (ver amostras 03, 04 e 5, Quadro IV.1, Capítulo IV) e de óxido de Silício fundido como material constituinte da casca (ver amostra 01, Quadro IV.1, Capítulo IV). Pelo exposto no parágrafo precedente, o comprimento de onda de operação de todas as fibras do Quadro V.1 é $\lambda = 1,272754 \mu\text{m}$ (ver amostra 01, Quadro IV.2, Capítulo IV). Para este valor do comprimento de onda de operação, utilizando a equação dos três termos de Sellmeier, equação (IV.1) do Capítulo IV e os respectivos coeficientes A_i e λ_i para cada amostra, encontramos os valores dos índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca das fibras ópticas do Quadro V.1. A partir destes valores dos índices de fase, calculamos a diferença relativa, Δ , dada pela equação (I.3) do Capítulo I, para cada conjunto de fibras apresentadas no Quadro V.1. Os resultados obtidos estão apresentados no Quadro V.2.

Sabemos que quanto maior o valor do comprimento de onda, menor será o valor da frequência normalizada V (ver equação (III.54), Capítulo III). Com isto em mente, algumas considerações podem ser obtidas a partir das curvas de dispersão do guia de onda apresentadas na Fig.V.1.

Em primeiro lugar, observamos que duas curvas de dispersão do guia de onda, aquelas curvas para as fibras B e I, apresentam valor nulo para um determinado comprimento de onda. Este valor, $D_g = 0$, para ambas as estruturas, ocorre próximo ao valor da fre

MATERIAL DO NÚCLEO	DIÂMETRO DO NÚCLEO (μm)	CURVA (Fig.V.1)
13,5% GeO_2 86,5% SiO_2	3,5	A
	4,5	B
	11,0	C
7,0% GeO_2 93,7% SiO_2	3,5	D
	4,5	E
	11,0	F
4,1% GeO_2 95,9% SiO_2	3,5	G
	4,5	H
	11,0	I

Quadro V.1 - Características das fibras ópticas, teóricas, utilizadas na análise da dispersão do guia de onda. O material da casca é constituído pela amostra 01, Quadro IV.1, Capítulo IV.

FIBRAS	Δ (%)
A,B,C	1,48
D,E,F	0,75
G,H,I	0,43

Quadro V.2 - Diferença relativa, Δ em percentagem, para as fibras ópticas do Quadro V.1.

quência normalizada $V \sim 2,9$. Tal fato já era por nós esperado, visto que para valores pequenos da diferença relativa, Δ , nossa equação exata para a análise da dispersão do guia de onda, equação (V.10) aproxima-se daquelas que são utilizadas para o estudo deste efeito dispersivo através de fórmulas assintóticas (ver equação (VI.100)), por exemplo. A equação aproximada (VI.100), utilizada na análise da dispersão do guia de onda por C.T.Chang {6}, apresenta uma forte dependência com a derivada segunda do produto bV com relação ao parâmetro V ; b é a constante de propagação normalizada do modo dominante e V é a frequência normalizada. Esta derivada, $d^2(bV)/dV^2$, tem valor nulo próximo a $V \sim 3,0$, conforme podemos verificar observando a Fig.4 da referência {6}. Adiantamos ainda que o mesmo fenômeno observado para as fibras B e I, ocorre também para as demais fibras do Quadro V.1. Isto não é visível a partir da Fig.V.1, pois as demais estruturas (A,C,D,E,F, G e H) ou possuem uma faixa menor (caso das fibras A,D,E,G e H) ou apresentam uma faixa de variação do parâmetro V maior (caso das fibras C e F) do que seria necessária para que observássemos ocorrer $D_g = 0$ para todas elas. O fato da dispersão do guia de onda apresentar um zero em um valor da frequência normalizada maior do que aquele valor do limiar superior da faixa de operação monomodal de uma fibra óptica com perfil de índice de refração em grau levou W.A.Gambling e outros {36} e A.W.Snyder-R.A.Sammut{37} a proporem uma região de operação "quase-monomodal", um pouco maior do que aquela região monomodal teórica (ver relação (III.59), Capítulo III). A proposição destes autores é baseada na análise desenvolvida por Gloge {16} e que leva em consideração a potência associada ao modo imediatamente superior ao modo fundamental (modo LP_{11} da análise efetuada por Gloge; ver Figs. 2,3 e 5 em {16}).

Ainda com relação às curvas apresentadas na Fig. V.1, podemos observar que, para um mesmo conjunto de fibras, a dispersão do guia de onda é tanto maior, em termos absolutos, quanto menor for o diâmetro do núcleo da estrutura (este fato é perfeitamente claro para os conjuntos de fibras (A,B,C) e (D,E,F) do Quadro V.1). Uma inversão desta afirmativa ocorre para o conjunto de fibras (G,H,I), entre as fibras G e H, quando o valor do comprimento de onda, λ , é superior a $1,5\mu m$. Isto deve-se ao fato de que, para a estrutura G, os valores da frequência normalizada, V , vão aproximando-se do valor zero, mais rápido do que

os valores de V associados à fibra H, à medida em que λ aproxima-se do limite superior da escala da Fig.V.1. A partir da equação (V.10), observamos que $D_g \rightarrow 0$ quando $V \rightarrow 0$; daí a forma assumida pela curva G para $\lambda > 1,5 \mu\text{m}$.

Para traçar as curvas de dispersão do guia de onda apresentadas na Fig.V.1, nós utilizamos um procedimento semelhante àquele que foi usado na construção do programa de computador para a análise da dispersão total a partir de fórmulas exatas (ver item VI.2, Capítulo VI). É óbvio, pelo exposto nos parágrafos precedentes e no item V.1, que os procedimentos computacionais apresentados na Fig.VI.1 do Capítulo VI utilizados para o cálculo das derivadas dos índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra, bem como dos respectivos índices de grupo, são desnecessários ao cálculo da dispersão do guia (ver equação (V.10)). Também neste programa para a análise da dispersão do guia, desprezamos os cálculos do comprimento de onda de dispersão do guia de onda nula e da dispersão residual de guia de onda.

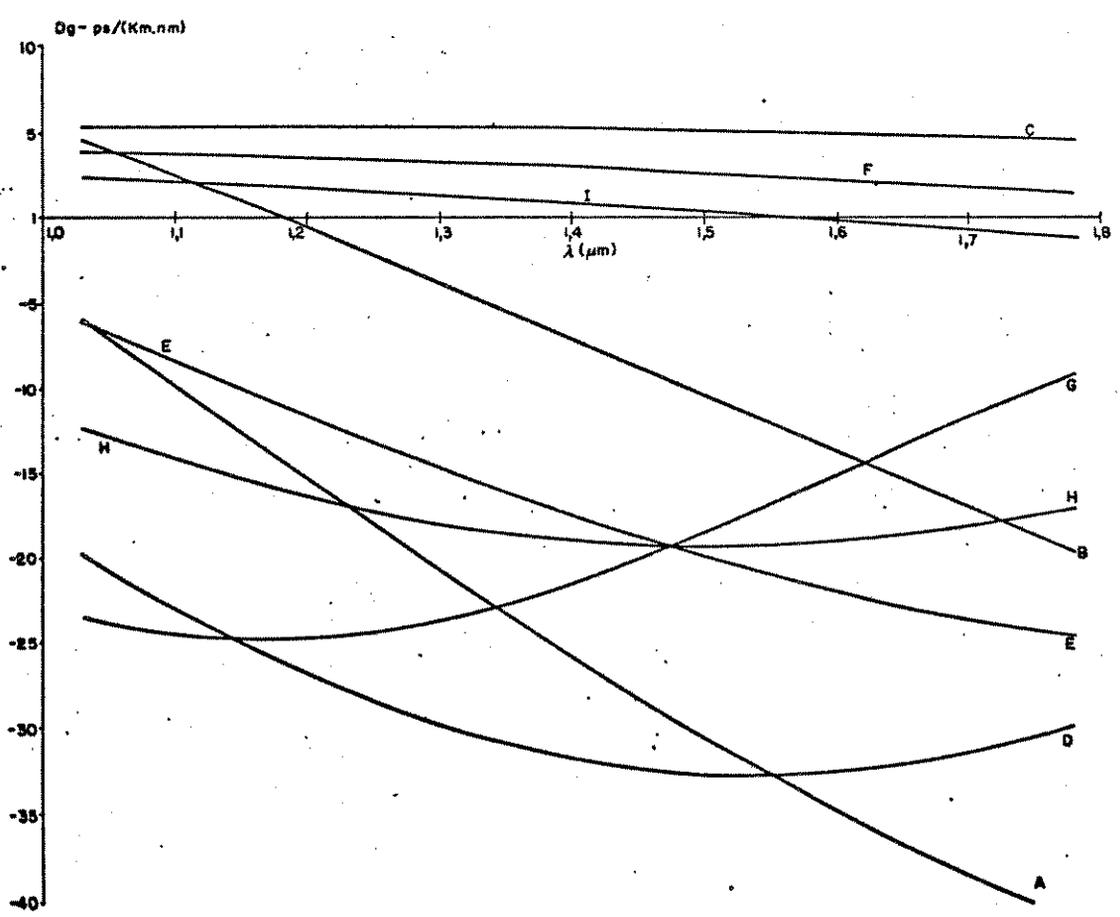


Fig.V.1 - Curvas de dispersão de guia de onda, D_g , em função do comprimento de onda, λ , para as fibras apresentadas no Quadro V.1.

No próximo Capítulo, apresentaremos as equações exatas necessárias à análise da dispersão total em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau, Apresentaremos ainda os formalismos assintóticos que são comumente utilizados neste estudo.

CAPÍTULO VI

DISPERSÃO TOTAL

Iniciamos este Capítulo com a apresentação detalhada das equações exatas que utilizamos para analisar a dispersão total em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau. Apresentamos, também, o procedimento computacional que empregamos para calcular o comprimento de onda de dispersão total nula nestas estruturas e, a partir deste valor, a dispersão residual.

Deduzimos a expressão de um parâmetro fundamental na análise da dispersão quando esta análise é efetuada através de formalismos assintóticos. A partir de fórmulas propostas por alguns pesquisadores, apresentamos algumas relações simples que podem ser usadas no cálculo da dispersão através da fórmula exata.

Os processos analíticos empregados por C.T.Chang {6} e D.Marcuse {8} são apresentados, sendo que para este último encontramos expressões que modificam o procedimento computacional empregado por este autor.

As equações para a análise da dispersão do guia de onda baseadas em {6} e {8} são apresentadas e fazemos uma comparação entre alguns parâmetros obtidos através dos métodos assintóticos investigados. Os três melhores métodos aproximados de análise serão utilizados, para confronto com o nosso método, no Capítulo VII.

I.1- EQUAÇÕES EXATAS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO TOTAL

Pulsos transmitidos através de fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau alargam-se em consequência da combinação dos efeitos dispersivos provocados pela dependência dos índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca do guia óptico com o comprimento de onda (dispersão do material) e pela dependência do atraso de grupo do modo único de propagação com o comprimento de onda (dispersão do guia de onda). Esta combinação de efeitos dispersivos recebe a denominação genérica de dispersão total e é definida através da equação (II.46):

$$D_T = D_1 = \frac{1}{c} \frac{dN}{d\lambda} \quad (\text{VI.1})$$

sendo o índice de grupo total N dado pela relação (V.4):

$$N = \frac{1}{n_e} \left[n_2 N_2 + \left(\frac{V}{2} \frac{db}{dV} + b \right) \theta \right] \tag{VI.2}$$

com:

$$\theta = n_1 N_1 - n_2 N_2 \tag{VI.3}$$

$$N_i = n_i - \lambda \frac{dn_i}{d\lambda} \quad ; \quad i=1,2 \tag{VI.4}$$

e onde:

$$n_e = \left[n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)b \right]^{1/2} \tag{VI.5}$$

é o índice de fase efetivo, como estabelecido no item V.1 do Capítulo V. Nas equações (VI.2)-(VI.5), n_1 e n_2 são os índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra óptica; N_i , $i=1,2$ são os índices de grupo do núcleo e da casca e b é a constante de propagação normalizada do modo fundamental, HE_{11} , definida através da relação (III.57):

$$b = 1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{W^2}{V^2} \tag{VI.6}$$

A frequência normalizada V é, por definição, apresentada pela equação (III.54):

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \tag{VI.7}$$

onde a é o raio do núcleo da fibra óptica. Os índices de fase, n_1 e n_2 , têm uma dependência não-linear com o comprimento de onda no espaço livre, λ , estabelecida através da equação dos três termos de Sellmeier (ver equação (IV.1), Capítulo IV):

$$n_j^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad ; \quad j=1,2 \tag{VI.8}$$

com as constantes A_i e λ_i definidas conforme item IV.1 do Capítulo IV.

Os parâmetros U e W , necessários ao cálculo da constante de propagação normalizada, b , em (VI.6) são obtidos através

da solução da equação característica (III.33):

$$(J^+ + K^+) (\epsilon J^- - K^-) + (J^- - K^-) (\epsilon J^+ + K^+) = 0 \quad (\text{VI.9})$$

com

$$J^+ = \frac{J_{\nu+1}(U)}{UJ_{\nu}(U)} \quad ; \quad J^- = \frac{J_{\nu-1}(U)}{UJ_{\nu}(U)} \quad (\text{VI.10})$$

$$K^+ = \frac{K_{\nu+1}(W)}{WK_{\nu}(W)} \quad ; \quad K^- = \frac{K_{\nu-1}(W)}{WK_{\nu}(W)}$$

fazendo-se o índice ν das funções de Bessel, em (VI.10), igual à unidade e sendo

$$\epsilon = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad (\text{VI.11})$$

a permissividade elétrica relativa entre os materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra óptica.

Levando em conta a dependência com o comprimento de onda dos parâmetros que definem o índice de grupo total N (ver equações (VI.2)-(VI.5)) e efetuando a diferenciação indicada em (VI.1), encontramos:

$$D_T = \frac{1}{c} \left[\frac{A_1 \cdot A_2 - A_3 \cdot A_4}{A_5} \right] \quad (\text{VI.12})$$

onde:

$$A_1 = n_e \quad (\text{VI.13})$$

$$A_2 = \phi_2 + (\phi_1 - \phi_2) \left(\frac{V}{2} \frac{db}{dV} + b \right) - \frac{V\theta^2}{2\lambda(n_1^2 - n_2^2)} \left[V \frac{d^2b}{dV^2} + 3 \frac{db}{dV} \right] \quad (\text{VI.14})$$

$$A_3 = n_2 N_2 + \left(\frac{V}{2} \frac{db}{dV} + b \right) \theta \quad (\text{VI.15})$$

$$A_4 = \frac{1}{n_e} \left[(1-b)n_2 n_2' - \frac{V\theta}{2\lambda} \frac{db}{dV} + n_1 n_1' b \right] \quad (\text{VI.16})$$

$$A_5 = n_e^2 \tag{VI.17}$$

com:

$$\left. \begin{aligned} \phi_j &= N_j n_j' - \lambda n_j n_j'' \\ n_j' &= \frac{dn_j}{d\lambda} \quad ; \quad n_j'' = \frac{d^2 n_j}{d\lambda^2} \end{aligned} \right\} ; j=1,2 \tag{VI.18}$$

com θ e n_e dados, respectivamente, pelas equações (VI.3) e (VI.5). As equações para as derivadas n_j' e n_j'' foram apresentadas no Capítulo IV, item IV.1, e são reapresentadas abaixo:

$$n_j' = - \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 \lambda}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^2} \tag{VI.19}$$

$$n_j'' = \frac{1}{n_j} \left[-(n_j')^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 (3\lambda^2 + \ell_i^2)}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^3} \right] \tag{VI.20}$$

Em unidades de ps/(Km.nm), a equação (VI.12) é escrita na forma:

$$D_1 = 3333,3333 \left[\frac{A_1 \cdot A_2 - A_3 \cdot A_4}{A_5} \right] \tag{VI.21}$$

com A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 definidos anteriormente (ver equações (VI.13)-(VI.17)).

Para operar a fibra em condições de máxima transmissão de informações, correspondente à condição de dispersão total mínima, devemos encontrar o comprimento de onda, λ , que torne a equação (VI.21) nula, isto é,

$$D_T \Big|_{\lambda=\lambda} = 0 \tag{VI.22}$$

O procedimento computacional que utilizamos para efetuar este cálculo é descrito no item VI.2, a seguir.

1.2- PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL PARA O CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE ONDA DE DISPERSÃO TOTAL MÍNIMA E PARA O CÁLCULO DA DISPERSÃO RESIDUAL-

-ANÁLISE EXATA

Implementamos um programa de computador, escrito em linguagem FORTRAN-IV, com dupla precisão, para o cálculo do comprimento de onda de dispersão total mínima, λ , que satisfaz a equação (VI.22).

Nosso programa aceita como dados iniciais os seguintes conjuntos de parâmetros:

- 1 - O raio do núcleo da fibra, a , em micrometros, a diferença relativa entre os índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca, Δ , definido conforme a equação (I.3) e os coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier (A_i, λ_i) do material com o qual é feito o conjunto núcleo-casca, ou
- 2 - O raio do núcleo da fibra, a , em micrometros e os coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier para os materiais que constituem o núcleo (A_i, λ_i-N) e a casca (A_i, λ_i-C) da fibra (ver Fig.VI.1).

No caso descrito no item 1 acima, os coeficientes de Sellmeier conhecidos são considerados como definidores da dependência não-linear com o comprimento de onda do índice de fase do material da casca da fibra. O conhecimento da diferença relativa entre os índices de fase dos materiais do núcleo e da casca, Δ , possibilita o cálculo do índice de fase do material do núcleo da fibra através da relação (ver equação (I.3)):

$$n_1 = (1 + \Delta)n_2 \tag{VI.23}$$

No caso descrito no item 2, os índices de fase dos materiais do núcleo e da casca da fibra são estabelecidos "a priori" através do conhecimento dos coeficientes de Sellmeier para os respectivos materiais. Fica claro que, no caso 1, o parâmetro Δ é fixo, enquanto que, no caso 2, este parâmetro varia com o

comprimento de onda. Convém salientar que considerar o parâmetro Δ fixo com o comprimento de onda constitui-se uma abstração teórica e nosso programa considera este fato apenas para comparação de nossos resultados com aqueles publicados por C.T.Chang{6},{7}.

Com o raio do núcleo da fibra e com os valores dos índices de fase dos materiais do núcleo e da casca em um comprimento de onda determinado e conhecendo também a faixa de operação monomodal da estrutura óptica

$$V_{\min} < V < V_{\max} , \quad (\text{VI.24})$$

podemos encontrar os comprimentos de onda λ_{\min} (associado a V_{\max}) e λ_{\max} (associado a V_{\min}) correspondentes a esta faixa de operação. O valor V_{\max} , na relação (VI.24), corresponde ao valor de corte dos modos imediatamente superiores ao modo HE_{11} , isto é,

$$V_{\max} = 2,4048 \quad (\text{VI.25})$$

onde o valor 2,4048 é o valor de corte dos modos TE_{01} e TM_{01} (ver Quadro III.2, Capítulo III). O valor V_{\min} em (VI.24) é escolhido como sendo igual à unidade, isto é,

$$V_{\min} = 1,0 \quad (\text{VI.26})$$

sendo esta escolha baseada simplesmente em estudos de tempos de execução do nosso programa.

A partir do valor λ_{\max} até o valor λ_{\min} , com decrementos constantes no comprimento de onda, são calculados os valores da constante de propagação normalizada, b (ver equação (VI.6)), para o modo fundamental, HE_{11} , através da equação característica representada pelas equações (VI.3) e (VI.10) com os índices de fase dos materiais do núcleo e da casca da fibra tendo a dependência não-linear com o comprimento de onda estabelecida pela equação dos três termos de Sellmeier (ver equação (VI.8)); os índices de fase dos materiais do núcleo e da casca da fibra devem ser calculados devido à equação (VI.11). Devemos observar que no processamento que utilizamos para o cálculo da constante de propagação normalizada, b , embora partamos do comprimento de onda λ_{\max} e, com decrementos constantes, chegamos ao comprimento de onda λ_{\min} , estamos fazendo o inverso com relação à frequência nor

malizada, isto é, partimos de V_{\min} e atingimos V_{\max} (ver equação (VI.7)). No cálculo das raízes da equação característica, (VI.9), utilizamos as subrotinas BESJ, BESK e DRTMI, todas as SSP [18]. As duas primeiras subrotinas calculam valores para as funções J e K de Bessel, respectivamente, enquanto que a subrotina DRTMI é uma subrotina baseada no método de Mueller [18] para solução de equações transcendentais. Os valores da constante de propagação normalizada, da frequência normalizada e os comprimentos de onda na faixa

$$\lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\max} \quad (\text{VI.27})$$

são então armazenados em vetores indexados.

Devido às dificuldades analíticas de dedução das derivadas, com relação à frequência normalizada V , da constante de propagação normalizada, b , do modo único, a partir da equação característica em sua forma exata, os vetores indexados contendo os valores dos parâmetros b e V calculados previamente são transferidos a uma subrotina padrão de diferenciação numérica, subrotina DDGT3 da SSP [18], que fornece os valores da derivada db/dV . Estes valores, após serem armazenados em um vetor indexado, são transferidos, juntamente com o vetor contendo os valores de frequência normalizada, à subrotina DDGT3. Desta feita, obtemos os valores da derivada d^2b/dV^2 . Estas duas derivadas do parâmetro b são necessários ao cálculo da dispersão total D_T (ver equações (VI.14)-(VI.16)).

Com o processamento desenvolvido até o presente, obtemos vetores indexados contendo os valores dos parâmetros b , V , λ , db/dV e d^2b/dV^2 . Torna-se assim bastante simples o cálculo da dispersão total, D_T (ver equação (VI.21)), que é também armazenado em um vetor indexado. O próximo passo é então o cálculo do comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, de dispersão total nula conforme a equação (VI.22).

O comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, que satisfaz a equação (VI.22) é calculado utilizando a tabela de valores de D_T e λ . A partir desta tabela, usando a subrotina DRTMI [18] e uma subrotina de interpolação baseada no método de Lagrange [19], por nós implementada, o comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, é calculado.

Sendo conhecido o valor do comprimento de onda de dis

persão mínima, a dispersão residual, \hat{D}_2 , dada por (ver equação (II.50)):

$$\hat{D}_2 = \frac{1}{8c} \left. \frac{d^2 N}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} \quad (\text{VI.28})$$

pode ser calculada. Para isto, é necessário o cômputo da deriva da segunda do índice de grupo total N , com relação ao comprimento de onda, o que é analiticamente bastante trabalhoso. Utilizando o processamento desenvolvido para o cálculo da dispersão total D_T , onde parte do programa calcula, através das equações exatas (ver equações (VI.13)-(VI.20)), os valores da derivada $dN/d\lambda$ e armazena-os em uma variável indexada, calculamos os valores de $d^2 N/d\lambda^2$, necessários à equação (VI.28), através do uso da subrotina de diferenciação numérica DDGT3 já citada. Por interpolação, com o uso da subrotina baseada no método de Lagrange já mencionada, e colocando a dispersão residual em unidades de ps/(Km.nm²), o valor de \hat{D}_2 é calculado através da expressão:

$$\hat{D}_2 = 0,416666667 \left. \frac{d^2 N}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} \quad (\text{VI.29})$$

O fluxograma da interação entre o programa principal e as várias subrotinas envolvidas no cálculo de $\hat{\lambda}$ e \hat{D}_2 , através do procedimento computacional aqui exposto, por nós desenvolvido, é apresentado na Fig.VI.1.

Nos próximos itens deste Capítulo, iremos desenvolver os formalismos assintóticos que são comumente adotados na análise da dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau. Estes formalismos serão comparados entre si no item VI.7 e aqueles que melhor desempenho apresentarem serão confrontados com o nosso método de análise, no Capítulo VII.

6.3- UM PARÂMETRO FUNDAMENTAL NA ANÁLISE DA DISPERSÃO TOTAL ATRAVÉS DE FORMULAÇÕES ASSINTÓTICAS - DEDUÇÃO DE du/dv

A equação característica exata, representada pela equação (VI.9), é bastante simplificada quando a diferença relativa

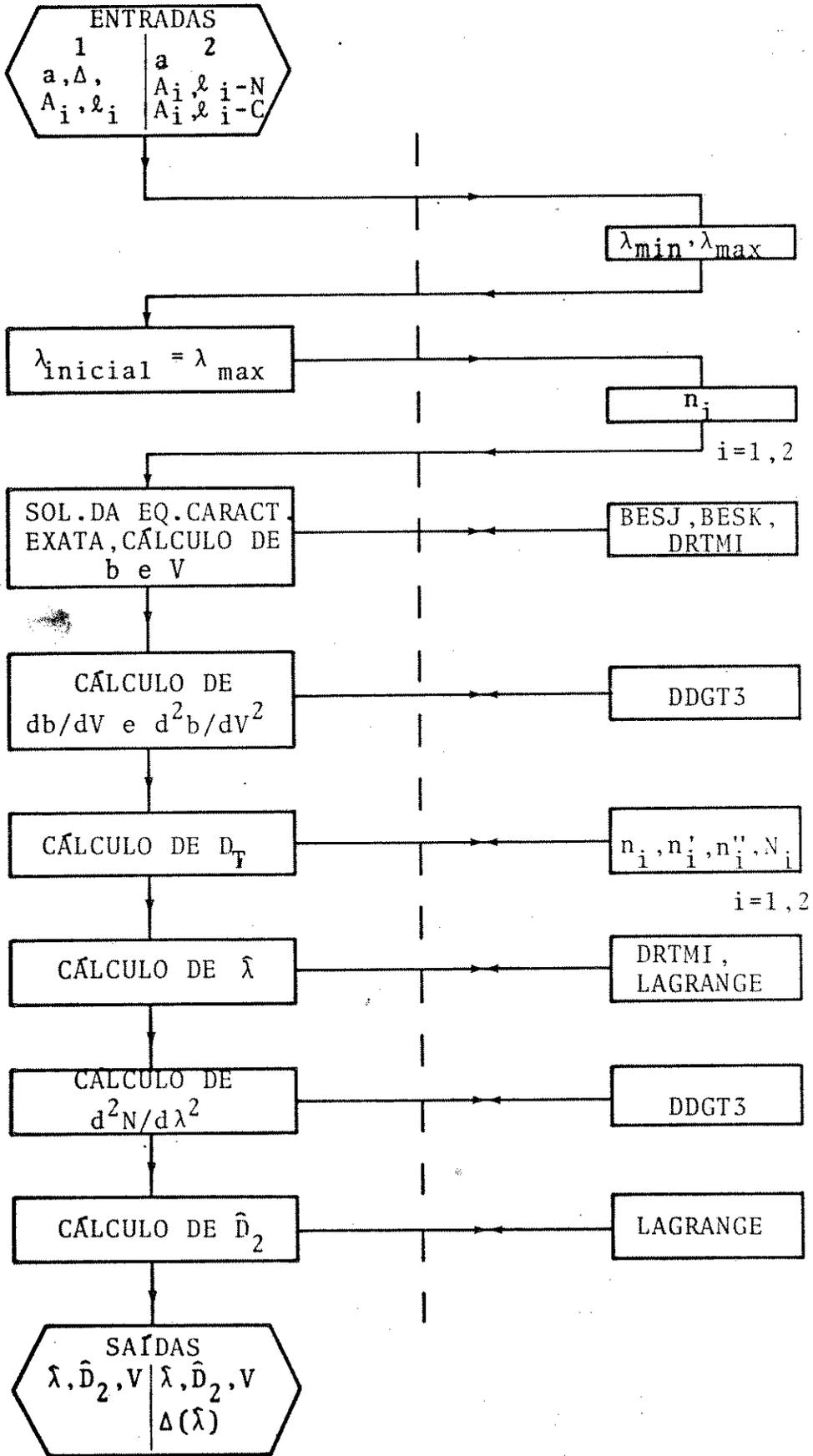


Fig.VI.1 - Interação entre o programa principal e suas subrotinas, usada no cálculo do comprimento de onda de dispersão total mínima e da dispersão residual. Análise exata.

entre os índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra óptica com perfil de índice de refração em de grau é pequena. Sua forma geral, neste caso, proposta inicialmente por A.W.Snyder {20} e comprovada posteriormente por Gloge {16}, é dada pela expressão:

$$\frac{UJ_{\nu}(U)}{J_{\nu+1}(U)} = + \frac{WK_{\nu}(W)}{K_{\nu+1}(W)} \quad (\text{VI.30})$$

onde J_{ν} e K_{ν} representam as funções de Bessel e as funções de Bessel modificadas, respectivamente (ver item (II.2), Capítulo II). Os parâmetros U e W que surgem em (VI.30) como argumento das funções de Bessel são idênticos àqueles da equação característica em sua forma exata, isto é,

$$\begin{aligned} U^2 &= (k_1^2 - \beta^2) a^2 \\ W^2 &= (\beta^2 - k_2^2) a^2 \end{aligned} \quad (\text{VI.31})$$

onde a é o raio do núcleo da fibra, β é a constante de propagação do modo, dada pelo equação (III.55), e

$$k_i^2 = k_0^2 n_i^2 \quad ; \quad i=1,2 \quad (\text{VI.32})$$

sendo k_0 o número de onda no espaço livre e n_i , $i=1,2$, os índices de fase dos materiais constituintes do núcleo, $i=1$, e da casca, $i=2$, da fibra.

Os modos híbridos são catalogados, a partir das soluções da equação (VI.30), como sendo modos $HE_{\nu\mu}$ quando usamos o sinal superior e modos $EH_{\nu\mu}$ quando o sinal inferior é usado {20}. Os subscritos ν e μ foram definidos no item III.2 do Capítulo III. Para fixar idéias, a equação característica aproximada para a família de modos híbridos $HE_{1\mu}$ é escrita, a partir da equação (VI.30), na forma:

$$\frac{UJ_1(U)}{J_0(U)} = + \frac{WK_1(W)}{K_0(W)} \quad (\text{VI.33})$$

As primeiras raízes desta equação, U e W , são associadas ao modo HE_{11} , as raízes seguintes são associadas ao modo HE_{12} e assim su

cessivamente, à semelhança do que ocorre com as raízes da equação característica exata.

Um parâmetro que surge frequentemente na análise das características de propagação dos modos guiados em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau, é a derivada, U' , do parâmetro U com relação à frequência normalizada V , isto é:

$$U' = \frac{dU}{dV} \quad (\text{VI.34})$$

com

$$V^2 = U^2 + W^2 \quad (\text{VI.35})$$

A dedução da derivada apresentada em (VI.34) é impraticável, pelo esforço analítico que seria dispendido, se, para esta dedução, utilizarmos a equação característica em sua forma exata. Snyder {20} obteve a fórmula analítica para U' em (VI.34) a partir da equação característica aproximada (VI.30). Nós, neste item, repetimos seus cálculos apenas para alertar contra os erros tipográficos encontrados em {20} e pela grande importância que U' tem no estudo da dispersão em fibras ópticas com perfil e índice de refração em degrau a partir de fórmulas assintóticas. As equações que apresentam erros tipográficos são assinalados em nosso texto com um asterisco (*) sendo estes erros facilmente identificáveis através de simples comparação das equações assinalados com aquelas dispostas em {20}. No que se segue, neste item, a linha, ('), acima das variáveis U e W indica que tomamos a derivada da quantidade em questão com relação ao parâmetro V ; acima das funções J_ν e K_ν de Bessel indica que a derivada é tomada em relação ao argumento da respectiva função.

A partir da equação característica aproximada (ver equação (IV.30)) encontramos:

$$U' = \frac{1}{J_\nu K_{\nu+1}} \left[\frac{d}{dV} (W K_\nu J_{\nu+1}) + \frac{d}{dV} (J_\nu K_{\nu+1}) \right] \quad (\text{VI.36})$$

onde os argumentos das funções J_ν e K_ν estão subentendidos. A próxima etapa é o desenvolvimento das derivadas apresentadas na equação (VI.36). A aplicação da regra da derivada do produto de fun

ções mostra que necessitamos do cálculo da derivada do parâmetro W com relação a V, em função do parâmetro U', para desenvolvermos as derivadas dos termos entre parênteses na equação (VI.36). O cálculo de W' é efetuado a partir da relação (VI.35). Temos, então:

$$W' = \frac{V-UU'}{W} \tag{VI.37}$$

Efetuando a diferenciação

$$\frac{d}{dV} \left[WK_{\nu} J_{\nu+1} \right] \tag{VI.38}$$

teremos, seguindo a notação adotada por Snyder {20}:

$$\frac{d}{dV} \left[WK_{\nu} J_{\nu+1} \right] = N_1 U' + N_2 \tag{VI.39}$$

com

$$N_1 = WK_{\nu} J'_{\nu+1} - U(WK'_{\nu} + K_{\nu}) J_{\nu+1} / W \tag{VI.40}^*$$

e

$$N_2 = V \left[WK'_{\nu} + K_{\nu} \right] J_{\nu+1} / W \tag{VI.41}$$

Da mesma maneira, efetuando a diferenciação indicada por

$$\frac{d}{dV} \left[J_{\nu} K_{\nu+1} \right] \tag{VI.42}$$

encontramos:

$$\frac{d}{dV} \left[J_{\nu} K_{\nu+1} \right] = N_3 U' + N_4 \tag{VI.43}$$

onde

$$N_3 = K_{\nu+1} J'_{\nu} - U J_{\nu} K'_{\nu+1} / W \tag{VI.44}$$

e

$$N_4 = V J_{\nu} K'_{\nu+1} / W \tag{VI.45}$$

Substituindo as equações (VI.39) e (VI.43) na equação (VI.36) teremos, conforme notação adotado por {20}:

$$U' = \frac{N_T}{N_b} \tag{VI.46}$$

onde:

$$N_T = N_2 + UN_4 \tag{VI.47}$$

e

$$N_b = -N_1 + N_3 + J_\nu K_{\nu+1} \tag{VI.48}$$

A substituição das equações (VI.41) e (VI.45) na equação (VI.47) e o uso de relações de recorrência para as funções de Bessel modificadas, apresentadas em Apêndice por Snyder, nos dá:

$$N_T = \frac{VJ_\nu}{W} \left[+UK_\nu \left(\frac{(\nu+1)J_{\nu+1}}{UJ_\nu} - 1 + \frac{(\nu+1)K_{\nu+1}}{WK_\nu} \right) - \frac{WK_{\nu+1}J_{\nu+1}}{J_\nu} \right] \tag{VI.49}^*$$

Substituindo o termo $J_{\nu+1}/(UJ_\nu)$, obtido da equação característica (VI.30), na equação (VI.49) e usando novamente as relações de recorrência apresentadas, em Apêndice, por {20}, encontraremos:

$$N_T = + \frac{VUJ_\nu}{W} \left[K_{\nu+2} - \frac{K_{\nu+1}^2}{K_\nu} \right] \tag{VI.50}^*$$

O procedimento efetuado para a obtenção do termo N_T pode ser usado para o termo N_b dado por (VI.48). Isto posto, teremos:

$$N_b = + \frac{V^2 J_\nu}{W} K_{\nu+2} \tag{VI.51}$$

A partir das equações (VI.50) e (VI.51), escrevemos a expressão final para U' (ver equação (VI.46)) na forma:

$$U' = \frac{U}{V} \left[1 - \frac{1}{\xi} \right] \tag{VI.52}$$

com

$$\xi = \frac{K_\nu K_{\nu+2}}{K_{\nu+1}^2} \tag{VI.53}$$

Os principais métodos assintóticos para análise da dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau serão apresentados nos itens VI.4 e VI.5 a seguir. No item VI.4 apresentaremos aqueles métodos que não utili

zam soluções da equação característica aproximada e no item VI.5 mostraremos aqueles que as utilizam.

4- MÉTODOS ASSINTÓTICOS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO QUE NÃO SÃO BASEADOS EM PARÂMETROS OBTIDOS ATRAVÉS DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA APROXIMADA

Os diferentes graus de complexidade envolvidos no cálculo de soluções da equação dos autovalores, tanto em sua forma exata quanto em sua forma aproximada, para a obtenção de parâmetros necessários à análise das características de propagação dos modos guiados em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau, levaram alguns pesquisadores à procura de expressões assintóticas tanto para o parâmetro U quanto para o parâmetro W . Fórmulas analíticas aproximadas para U foram obtidas por Snyder {20}, Gloge {16} e recentemente por Miyagi e Nishida {14} enquanto que para o parâmetro W , e apenas na região de operação monomodal da fibra óptica, é significativo o trabalho desenvolvido por Rudolph e Neumann {17}. Os três primeiros autores utilizam aproximações diferentes para resolver a equação (VI.52) enquanto que Rudolph e Neumann encontraram uma expressão que relaciona linearmente os parâmetros W e V .

Apresentamos neste item as aproximações obtidas por estes autores e as utilizamos para deduzir expressões para a constante de propagação normalizada, b , e suas derivadas primeira e segunda com relação a V , db/dV e d^2b/dV^2 , que são necessárias ao cálculo da dispersão em fibras com perfil de índice de refração em degrau em sua formulação exata (ver equações (VI.12)-(VI.20)).

Em continuação ao seu trabalho, que em parte apresentamos no item anterior, Snyder {20} encontra como solução da equação (VI.52) a seguinte equação:

$$U = U_{\infty} \exp[-1/V] \quad (\text{VI.54})$$

onde U_{∞} representa valores das raízes da função de Bessel $J_{\nu+1}$, isto é:

$$U_{\infty} = 2,4048, \text{ para o modo HE}_{11} \quad (\text{VI.55})$$

$$= 3,832 \text{ , para os modos } TE_{01}, TM_{01} \text{ e } HE_{21} \quad (VI.56)$$

e assim sucessivamente {20}.

Usando a definição da constante de propagação normalizada, b , apresentada na equação (VI.6) e a equação (VI.54), encontraremos:

$$b = 1 - \frac{U_{\infty}^2 \exp[-2/V]}{V^2} \quad (VI.57)$$

A partir da equação (VI.57), obtemos:

$$\frac{db}{dV} = \frac{2U^2}{V^3} \left[1 - \frac{1}{V} \right] \quad (VI.58)$$

e

$$\frac{d^2b}{dV^2} = \frac{2U^2}{V^5} + \left[\frac{2}{V^2} - \frac{3}{V} \right] \frac{db}{dV} \quad (VI.59)$$

Gloge {16} encontrou também uma expressão assintótica para o parâmetro U , apresentada pela equação abaixo

$$U = \frac{(1+\sqrt{2})V}{1 + (4+V^4)^{1/4}} \quad (VI.60)$$

que nós utilizamos para deduzir expressões analíticas para os parâmetros b , db/dV e d^2b/dV^2 que são necessários ao cálculo da dispersão total através de sua fórmula exata. Então, usando (VI.6) e (VI.60), encontramos:

$$b = 1 - \frac{(1+\sqrt{2})^2 V^2}{[1 + (4+V^4)^{1/4}]^2} \quad (VI.61)$$

e

$$\frac{db}{dV} = \frac{2V^3}{(4+V^4)^{3/4}} \frac{(1+\sqrt{2})^2}{[1+(4+V^4)^{1/4}]^3} \quad (VI.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2b}{dV^2} = & \frac{3}{V} \left[1 - \frac{V^4}{4+V^4} \right] \frac{db}{dV} - \\ & - \frac{3}{2} \frac{[1+(4+V^4)^{1/4}]^2}{(1+\sqrt{2})^2} \left(\frac{db}{dV} \right)^2 \end{aligned} \quad (VI.63)$$

Miyagi e Nishida {14} encontraram a seguinte expressão para o parâmetro U:

$$U = \frac{U_\infty V}{(V+1)} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{U_\infty^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{20} \frac{U_\infty^4}{(V+1)^5} \right] \quad (VI.64)$$

onde U_∞ tem o significado já estabelecido no item IV.3. Procedendo como anteriormente, encontramos:

$$b = 1 - \frac{U_\infty^2}{(V+1)^2} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{U_\infty^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{20} \frac{U_\infty^4}{(V+1)^5} \right]^2 \quad (VI.65)$$

$$\frac{db}{dV} = \frac{2U^2}{V^2(V+1)} - \frac{U_\infty U}{V(V+1)} \left[\frac{U_\infty^2}{(V+1)^4} + \frac{1}{2} \frac{U_\infty^4}{(V+1)^6} \right] \quad (VI.66)$$

$$e \quad \frac{d^2 b}{dV^2} = - \frac{3}{V+1} \frac{db}{dV} + \frac{U_\infty^2}{(V+1)^3} \left\{ \left[2 - \frac{U_\infty^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{2} \frac{U_\infty^2}{(V+1)^5} \right] \left[\frac{1}{2} \frac{U_\infty^2}{(V+1)^4} + \frac{1}{4} \frac{U_\infty^4}{(V+1)^6} \right] - \left[1 - \frac{1}{2} \frac{U_\infty^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{20} \frac{U_\infty^4}{(V+1)^5} \right] \left[3 \frac{U_\infty^2}{(V+1)^4} + \frac{5}{2} \frac{U_\infty^4}{(V+1)^6} \right] \right\} \quad (VI.67)$$

sendo U_∞ dado, para o modo HE_{11} , pela equação (VI.55).

A relação linear entre os parâmetros W e V encontrada por Rudolph e Neumann {17} é da forma:

$$W = cV + d \quad (VI.68)$$

onde: $c = 1,1428$ (VI.69)
 $d = -0,996$

sendo que a equação (VI.68) tem validade limitada à região:

$$1,5 < V < 2,5 \tag{VI.70}$$

Com as equações (VI.6) e (VI.68), encontramos:

$$b = \left[\frac{cV+d}{V} \right]^2 \tag{VI.71}$$

e, a partir de (VI.71), obtemos:

$$\frac{db}{dV} = - \frac{2d}{V^3} [cV+d] \tag{VI.72}$$

e

$$\frac{d^2b}{dV^2} = \frac{2d}{V^4} [2cV+3d] \tag{VI.73}$$

Como já frisamos, um fato importante com relação aos parâmetros b , db/dV e d^2b/dV^2 , necessários à equação exata da dispersão total (ver equações (VI.14)-(VI.16)), deduzidos, neste item, a partir de expressões assintóticas obtidas por Snyder {20}, Gloge {16}, Miyagi e Nishida {17} e por Rudolph e Neumann {17}, reside na facilidade de implementação destes formalismos em computadores de pequeno porte pois tais expressões, para serem utilizadas, não necessitam de valores previamente obtidos resolvendo-se a equação característica. Os quatro métodos aqui apresentados serão comparados, no item VI.7, com o método assintótico desenvolvido por C.T.Chang {6}, que é baseado na equação característica aproximada (VI.33). Desta comparação, e por apresentar uma formulação analítica simples, escolhemos o método de análise da dispersão proposto por C.R.South {10}, baseado em {17}, como representativo dos métodos que não usam a equação característica, para confrontarmos seus resultados com aqueles por nós obtidos. As expressões desenvolvidas em {10} são apresentadas no Apêndice A.

Os dois métodos que utilizam a equação característica (VI.33), que usaremos para comparação com nossos resultados, por apresentarem características semelhantes, serão discutidos no próximo item.

I.5- MÉTODOS ASSINTÓTICOS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO QUE SÃO BASEADOS EM PARÂMETROS OBTIDOS ATRAVÉS DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA APROXIMADA

Os principais métodos assintóticos, baseados em valores dos parâmetros U e W obtidos como solução da equação característica aproximada (VI.33), para a análise da dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau, são aqueles métodos desenvolvidos por Chang {6} e Marcuse {8}. Neste item analisaremos os trabalhos destes dois autores e apontamos suas diferenças fundamentais em relação ao método por nós desenvolvido cujas equações estão colocadas no item VI.1 e cuja metodologia computacional está descrita no item VI.2. Apresentamos inicialmente o método utilizado por Chang e em seguida aquele desenvolvido por Marcuse {8}, por nós modificado.

A análise da dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau efetuada por C.T.Chang baseia-se na solução da equação característica aproximada (ver equação (VI.33)) para o cálculo da constante de propagação normalizada, b , do modo fundamental e em deduções analíticas de algumas das derivadas deste parâmetro, com relação à frequência normalizada V , a partir daquela equação. Este autor utiliza-se também da equação aproximada para o índice de grupo total, N , para deduzir as derivadas $dN/d\lambda$ e $d^2N/d\lambda^2$ que são necessárias, como já frisamos nos itens VI.1 e VI.2, ao cálculo do comprimento de onda, λ , de dispersão total mínima e ao cálculo da dispersão residual.

No caso aproximado, o índice de grupo total, N , é escrito na forma {6}:

$$N = N_2 \left[1 + \Delta \frac{d(bV)}{dV} \right] \quad (\text{VI.74})$$

onde N_2 é o índice de grupo do material que constitui a casca da fibra óptica, isto é:

$$N_2 = n_2 - \lambda \frac{dn_2}{d\lambda} \quad (\text{VI.75})$$

O parâmetro Δ (ver equação (I.3)) é a diferença relativa entre os índices de fase dos materiais com os quais são construídos o

núcleo e a casca da fibra, n_1 e n_2 respectivamente, b é a constante de propagação normalizada do modo fundamental e V é a frequência normalizada que, no caso aproximado {6}, tem a forma:

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} n_2 (2\Delta)^{1/2} \quad (\text{VI.76})$$

sendo a o raio do núcleo da fibra e λ o comprimento de onda da radiação eletromagnética no espaço livre.

As derivadas $dN/d\lambda$ e $d^2N/d\lambda^2$ são obtidas a partir da equação (VI.74) e são dadas por:

$$\frac{dN}{d\lambda} = -\lambda \frac{d^2 n_2}{d\lambda^2} \left[1 + \Delta \frac{d(bV)}{dV} \right] - \pi a \left(\frac{N_2}{\lambda} \right)^2 (2\Delta)^{1,5} \frac{d^2(bV)}{dV^2} \quad (\text{VI.77})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{d\lambda^2} = & - \left(\lambda \frac{d^3 n_2}{d\lambda^3} + \frac{d^2 n_2}{d\lambda^2} \right) \left[1 + \Delta \frac{d(bV)}{dV} \right] + \\ & + 3\pi a (2\Delta)^{1,5} \frac{N_2}{\lambda} \frac{d^2 n_2}{d\lambda^2} \frac{d^2(bV)}{dV^2} + \\ & + 2\pi a (2\Delta)^{1,5} \frac{N_2^2}{\lambda^3} \frac{d^2(bV)}{dV^2} + \\ & + 2\pi^2 a^2 (2\Delta)^2 \frac{N_2^3}{\lambda^4} \frac{d^3(bV)}{dV^3} \end{aligned} \quad (\text{VI.78})$$

A derivada $d^2 n_2/d\lambda^2$ do índice de fase do material da casca da fibra óptica é obtida através da equação (VI.20), com $j=2$, enquanto que $d^3 n_2/d\lambda^3$ é dada por:

$$n_2''' = \frac{1}{n_2} \left[3 \frac{dn_2}{d\lambda} \frac{d^2 n_2}{d\lambda^2} - 12 \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 \lambda (\lambda^2 + \ell_i^2)}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^4} \right] \quad (\text{VI.79})$$

po que n_i e n_2 são representados pela equação dos três

termos de Sellmeier (VI.8).

Observando as equações (VI.77) e (VI.78) vemos que, para calcularmos o comprimento de onda, λ , de dispersão mínima e, a partir deste valor, conhecermos o valor da dispersão residual, é necessário o cálculo das derivadas

$$\frac{d(bV)}{dV}, \frac{d^2(bV)}{dV^2} \text{ e } \frac{d^3(bV)}{dV^3} \tag{VI.80}$$

A partir da definição da constante de propagação normalizada b (ver equação (VI.6)) e derivando este parâmetro em relação à frequência normalizada V , obtemos:

$$\frac{db}{dV} = -2 \left(\frac{U}{V} \right)^2 \left[\frac{U'}{U} - \frac{1}{V} \right] \tag{VI.81}$$

a linha, ($'$), acima da variável U tem o significado já descrito no item VI.3.

Fazendo $v=1$, na equação (VI.53), U' , dado por (VI.52) torna-se

$$U' = \left(\frac{U}{V} \right) \left[1 - \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] \tag{VI.82}$$

que, substituído na equação (VI.81), nos dá:

$$\frac{db}{dV} = 2 \frac{U^2}{V^3} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \tag{VI.83}$$

A partir das equações (VI.6) e (VI.83), podemos calcular:

$$\frac{d(bV)}{dV} = b + V \frac{db}{dV} \tag{VI.84}$$

facilmente. Obtemos:

$$\frac{d(bV)}{dV} = 1 - \left(\frac{U}{V} \right)^2 \left[1 - 2 \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] \tag{VI.85}$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado na dedução da

equação (VI.85), isto é, calculando d^3b/dV^3 a partir de (VI.83) e, a partir deste parâmetro, calculando d^2b/dV^2 , podemos encontrar as derivadas requeridas (ver relação (VI.80)) utilizando:

$$\frac{d^2(bV)}{dV^2} = 2 \frac{db}{dV} + V \frac{d^2b}{dV^2} \quad (\text{VI.86})$$

e

$$\frac{d^3(bV)}{dV^3} = 3 \frac{d^3b}{dV^2} + V \frac{d^3b}{dV^3} \quad (\text{VI.87})$$

Indicaremos aqui apenas os resultados finais:

$$\begin{aligned} \frac{d^2b}{dV^2} &= \frac{2U^2}{V^3} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{dW}{dV} - \\ &- \frac{2U^2}{V^4} \left(1 + 2 \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \end{aligned} \quad (\text{VI.88})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^3b}{dV^3} &= \frac{2U^2}{V^3} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{d^2W}{dV^2} + \frac{2U^2}{V^3} \frac{d^2}{dW^2} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \left(\frac{dW}{dV} \right)^2 + \\ &+ \frac{2}{V^2} \left[1 - \frac{d(bV)}{dV} \right] \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{dW}{dV} - 6 \frac{U^2}{V^4} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{dW}{dV} - \\ &- \frac{8U^2}{V^4} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{dW}{dV} + 8 \frac{U^2}{V^5} \left[1 + 2 \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} - \\ &- 4 \frac{U^2}{V^5} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \left[1 - \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] \left[1 + 2 \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.89})$$

com

$$\frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) = -2 \frac{K_0(W)}{K_1(W)} + 2 \frac{K_0^2(W)}{WK_1^2(W)} + 2 \frac{K_0^3(W)}{K_1^3(W)} \quad (\text{VI.90})$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{W}{V} + \frac{U^2}{WV} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} = \frac{W}{2V} + \frac{V}{2W} \frac{d(bV)}{dV} \quad (\text{VI.91})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dV^2} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) = & \left[-2 + \frac{4}{W} \frac{K_0(W)}{K_1(W)} + 6 \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] \left[-1 + \right. \\ & \left. + \frac{K_0(W)}{WK_1(W)} + \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] - \frac{2}{W^2} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \end{aligned} \quad (\text{VI.92})$$

Usando (VI.83) e (VI.88) na equação (VI.86), encontramos:

$$\frac{d^2(bV)}{dV^2} = \frac{2}{V} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \left[1 - \frac{d(bV)}{dV} \right] + \frac{2U^2}{V^2} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{dW}{dV} \quad (\text{VI.93})$$

e, a partir desta equação, podemos expressar d^2W/dV^2 , que surge em (VI.89), na forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{dV^2} = & -\frac{W}{2V^2} + \frac{1}{2V} \frac{dW}{dV} + \left(\frac{1}{2W} - \frac{V}{2W^2} \frac{dW}{dV} \right) \frac{d(bV)}{dV} + \\ & + \frac{V}{2W} \frac{d^2(bV)}{dV^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.94})^*$$

O asterisco na equação (VI.94) indica que há, entre ela e aquela apresentada por Chang em {6}, uma diferença que atribuímos a erro tipográfico.

Para completar o conjunto de equações necessário ao cálculo de $dN/d\lambda$ e $d^2N/d\lambda^2$, substituímos as equações (VI.88) e (VI.89) na equação (VI.87) e encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{d^3(bV)}{dV^3} = & -\frac{2}{V} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \frac{d^2(bV)}{dV^2} + \\ & + \left[\frac{2}{V} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{dW}{dV} - \frac{2}{V^2} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] \left[1 - \frac{d(bV)}{dV} \right] - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{4U^2}{V^3} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{dW}{dV} + 2 \frac{U^2}{V^2} \frac{d^2}{dW^2} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \\
 & \cdot \left(\frac{dW}{dV} \right)^2 + \frac{2U^2}{V^2} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{d^2W}{dV^2} \quad (VI.95)
 \end{aligned}$$

As equações (VI.6), (VI.85), (VI.93) e (VI.95), juntamente com aquelas apresentadas por (VI.90)-(VI.92), (VI.94) e a equação característica na forma aproximada dada por (VI.33) definem, com (VI.77) e (VI.78), as expressões para a análise da dispersão total e dispersão residual segundo Chang {6}.

Para podermos comparar resultados obtidos através do nosso método e através do método apresentado por Chang em {6}, descrito em parágrafos anteriores, implementamos um programa de computador à semelhança daquele confeccionado por aquele autor. O fluxograma da interação entre o programa principal e suas subrotinas, neste caso, é apresentado na Fig.VI.2. O método de solução de equações transcendentais de Newton-Raphson {19} é utilizado tanto no cálculo dos parâmetros U e W a partir da equação característica aproximada (VI.33) quanto para o cálculo do comprimento de onda, λ , de dispersão total mínima. As aproximações iniciais para o parâmetro W são aquelas propostas por Gloge {16} e Marcuse {22} e que foram utilizadas por Chang {6}. Para o cálculo das funções J_ν e K_ν de Bessel (ver equação (VI.33)), as subrotinas BESJ e BESK da SSP {18} foram utilizadas.

As diferenças entre o trabalho desenvolvido por Chang {6} e o nosso trabalho são bastante evidentes. Tais diferenças principiam pela equação característica utilizada para o modo HE_{11} (comparar as equações (VI.9)-(VI.10) com a equação (VI.33)) e continuam através das definições para o índice de grupo total (comparar as equações (VI.2) e (VI.74)), das expressões utilizadas para a frequência normalizada V (comparar as equações (VI.7) com (VI.76)), dos métodos de cálculo das derivadas da constante de propagação normalizada b e através do cálculo da dispersão residual \hat{D}_2 (Chang deduz uma expressão para a derivada segunda do índice de grupo total N, $d^2N/d\lambda^2$, enquanto que em nosso método o cálculo desta derivada é feito através de um processamento numérico).

Todas estas diferenças são evidenciadas nos procedimentos computacionais apresentados para o nosso método na Fig.VI.1, e para o método desenvolvido por Chang {6}, na Fig.VI.2.

O trabalho desenvolvido por C.T.Chang, no que diz respeito ao cálculo das derivadas em (VI.80), poderia ser adaptado à equação característica exata. Entretanto, pelo que foi apresentado até o momento, podemos avaliar o enorme trabalho que seria dispendido no cálculo das derivadas em questão partindo da equação dos autovalores na forma exata, principalmente, por termos que deduzir uma expressão para o parâmetro U' (ver item VI.3).

Um outro método que baseia-se na obtenção de parâmetros a partir de solução da equação característica aproximada para o cálculo do comprimento de onda, $\hat{\lambda}$, de dispersão total mínima é a quele apresentado por D.Marcuse em {8}. Adaptando a notação utilizada por este autor à adotada em nosso trabalho ou seja, fazendo:

$$\kappa \text{ (em {8})} = \frac{U}{a} \text{ (em nosso trabalho);} \quad \text{(VI.96)}$$

onde a é o raio do núcleo da fibra óptica, encontramos a equação para a derivada do índice de grupo total N , $dN/d\lambda$, necessária ao cálculo da dispersão total D_T (ver equação (VI.1)). Temos, então:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\lambda} = & \frac{k_0}{\lambda a^2 \beta^3} \left[\lambda^2 \beta^2 \left(\frac{U}{k_0^2} \frac{d^2 U}{d\lambda^2} - n_1^2 a^2 \frac{d^2 n_1}{d\lambda^2} \right) + U^2 N_1^2 + \right. \\ & \left. + \lambda \frac{dU}{d\lambda} \left(2 n_1 U N_1 + \frac{2U\beta^2}{k_0^2} + n_1^2 \lambda \frac{dU}{d\lambda} \right) \right] \quad \text{(VI.97)} \end{aligned}$$

onde:

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ é o número de onda no espaço livre ;}$$

$$\beta = \left[\frac{n_2^2 U^2 + n_1^2 W^2}{a^2 (n_1^2 - n_2^2)} \right]^{1/2}$$

é a constante de propagação do modo dominante; n_1 e n_2 são, respectivamente, os índices de fase dos materiais do núcleo e da casca da fibra; U e W são parâmetros obtidos através da solução da equação característica aproximada (VI.33), e

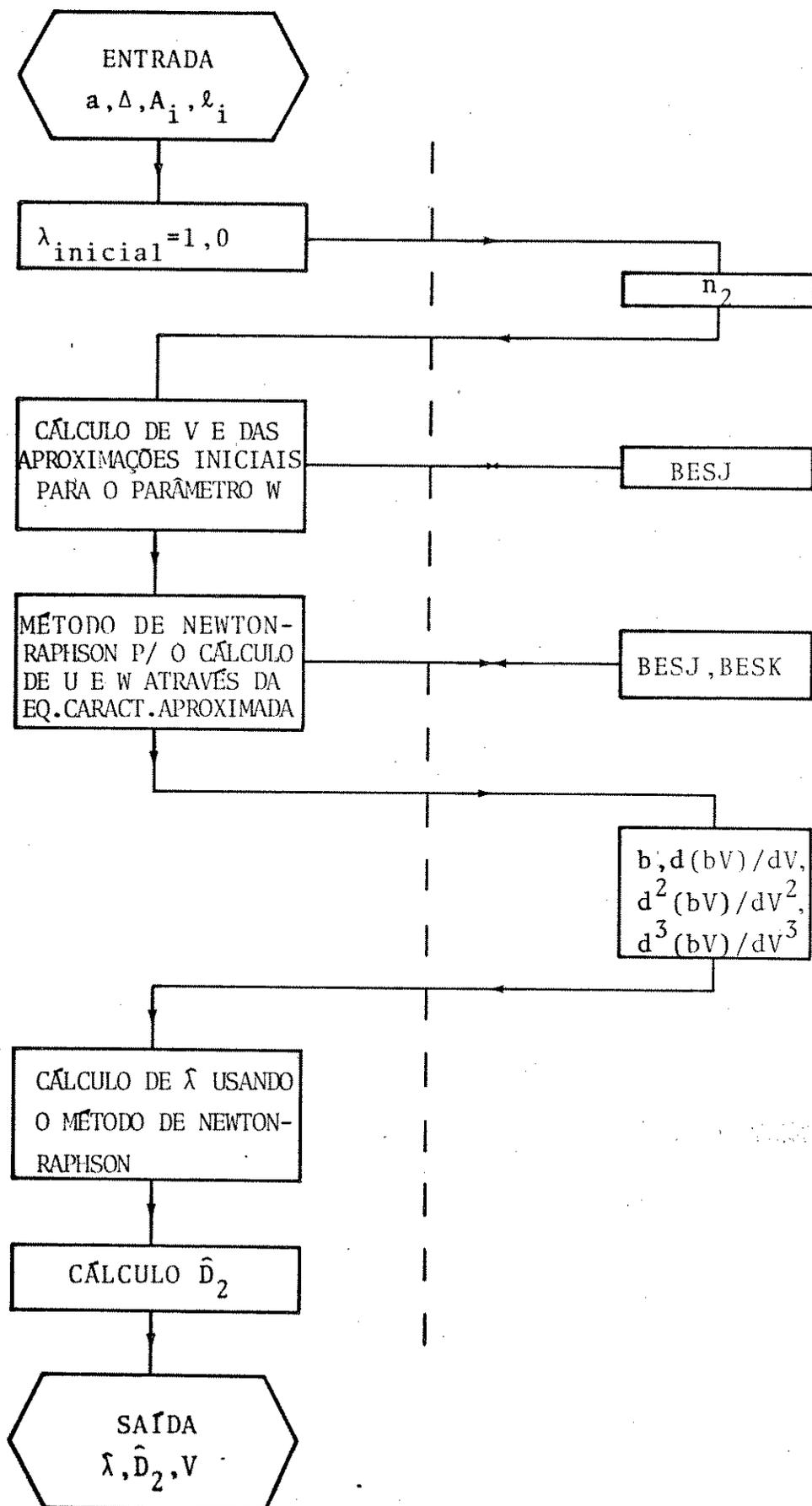


Fig.VI.2 - Interação entre o programa principal e suas subrotinas, usada no cálculo do comprimento de onda de dispersão total mínima e da dispersão residual. Análise de C.T.Chang {6}.

$N_1 = n_1 - \frac{dn_1}{d\lambda}$ é o índice de grupo do material com o qual é feito o núcleo da fibra.

A adequação do formalismo utilizado por Marcuse em 8 ao nosso permite-nos usar fórmulas analíticas ao invés do processo adotada por este autor. Podemos assim usar a fórmula para dU/dV (ver equação (VI.82)) para deduzir as derivadas $dU/d\lambda$ e $d^2U/d\lambda^2$ necessárias à equação (VI.97) utilizando as relações:

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (\text{VI.7})$$

e

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dU}{dV} \frac{dV}{d\lambda} \quad (\text{VI.98})$$

$$\frac{d^2U}{d\lambda^2} = \frac{dU}{dV} \frac{d^2V}{d\lambda^2} + \frac{d^2U}{dV^2} \left(\frac{dV}{d\lambda} \right)^2 \quad (\text{VI.99})$$

Nós utilizamos as equações (VI.97)-(VI.99) e (VI.7) para confeccionar um programa de computador para o cálculo de $\hat{\lambda}$ e da dispersão residual \hat{D}_2 . A derivada segunda do índice de grupo total N , $d^2N/d\lambda^2$, necessária ao conhecimento da dispersão residual, como no nosso método (ver ítem VI.2), é calculada através da subrotina de diferenciação numérica DDGT3 da SSP [18].

O fluxograma da interação entre o programa principal e suas subrotinas, para o caso do método de análise proposto por Marcuse e por nós modificado, é apresentado na Fig. VI.3. Neste programa, preterimos o método de solução da equação característica (VI.33) adotado quando da confecção do programa baseado em Chang (o método de Newton-Raphson), em favor do método de Mueller (subrotina DRTMI da SSP [18]). O método de Mueller mostrou-se mais eficiente em termos de tempos de execução. Para o cálculo do comprimento de onda $\hat{\lambda}$ usamos também a subrotina DRTMI pois não deduzimos uma expressão analítica para a derivada segunda do índice de grupo total N , $d^2N/d\lambda^2$, que é necessária quando utilizamos, como na confecção do programa de Chang, o método de Newton-Raphson. Estas diferenças são entretanto inconsequentes em termos de rigorismo numérico.

PROGRAMA PRINCIPAL

SUBROTINAS

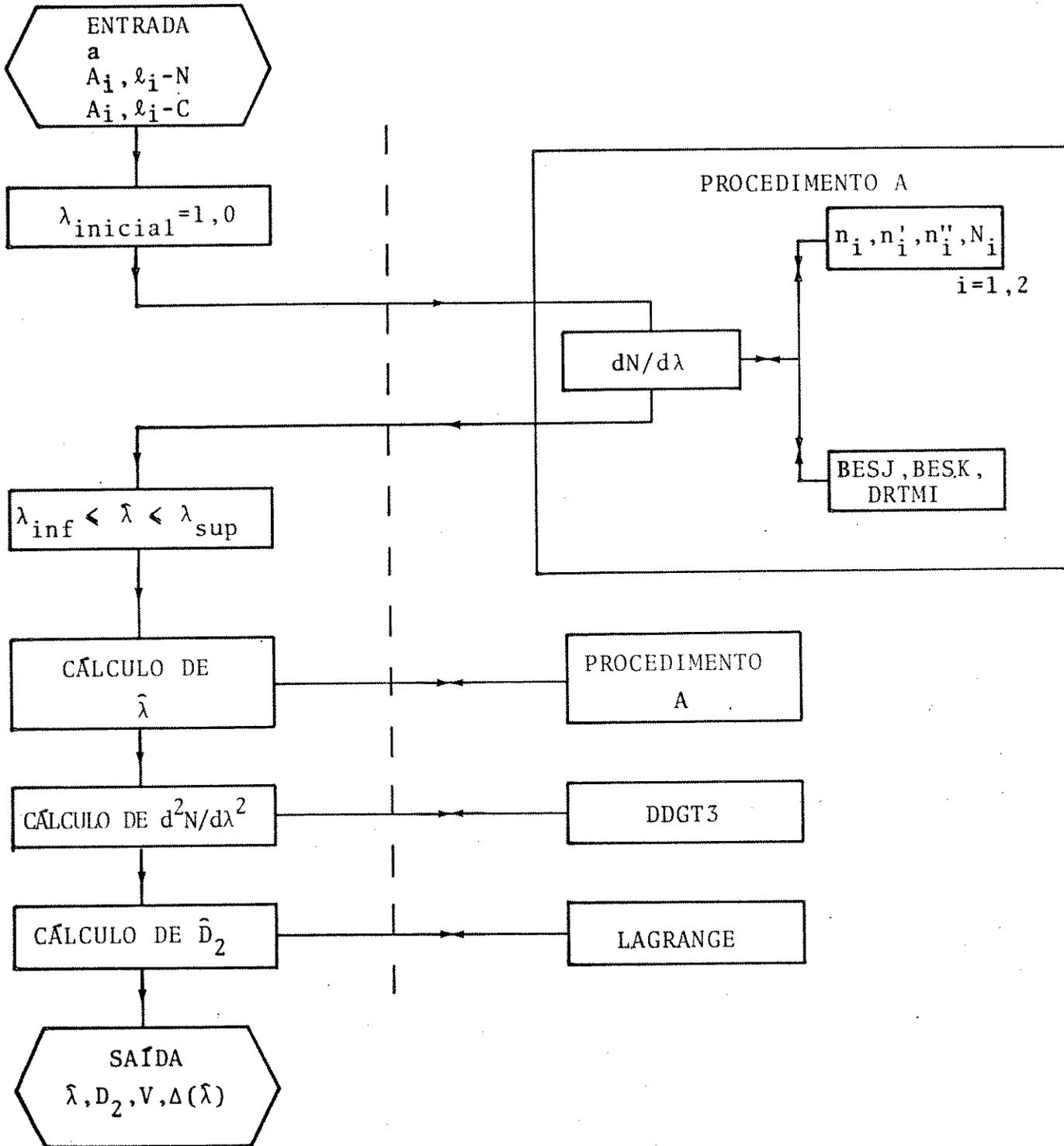


Fig.VI.3 - Interação entre o programa principal e suas subrotinas, usada no cálculo do comprimento de onda de dispersão total mínima e da dispersão residual. Análise de D.Marcuse {8} modificada.

A equação para $dN/d\lambda$ apresentada em (VI.97) é uma equação exata {8}, apesar de sua flagrante diferença com aquela mostrada pelas expressões (VI.13)-(VI.18) (comparar também com a equação (VI.77) proposta por Chang, que foi deduzida a partir de uma equação aproximada para o índice de grupo total, N , equação (VI.74)). Na equação (VI.97) nenhum cálculo de derivadas da constante de propagação é necessário, nisto residindo também a diferença entre nosso método, aquele de Chang {6} e este de Marcuse {8}, que modificamos.

No próximo item deste Capítulo apresentaremos as equações necessárias para o método da dispersão do guia de ondas que são deduzidas a partir das equações para $dN/d\lambda$ propostas por Chang, (VI.77) e Marcuse modificado (VI.97).

1.6- EQUAÇÕES APROXIMADAS PARA A ANÁLISE DA DISPERSÃO DO GUIA DE ONDA

A partir da conceituação de dispersão do guia de onda, apresentada no item V.1 do Capítulo V, podemos encontrar as expressões para este efeito dispersivo em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau tanto pelo método de análise proposto por Chang quanto pelo proposto por Marcuse.

Pelo método de C.T.Chang encontramos, a partir das equações (V.8) e (VI.77), a seguinte expressão para a dispersão do guia de onda:

$$D_g = - \frac{V n_2 \Delta}{c \lambda} \frac{d^2(bV)}{dV^2} \tag{VI.100}$$

com a frequência normalizada V dada pela expressão (VI.76).

Pelo método de D.Marcuse encontramos, a partir das equações (V.16) e (VI.97), a seguinte expressão para a dispersão do guia de onda:

$$D_g = \frac{k_0}{c \lambda a^2 \beta^2} \left[\frac{\lambda^2 \beta^2 U}{k_0^2} \frac{d^2 U}{d\lambda^2} + U^2 n_1^2 + \lambda \frac{dU}{d\lambda} \left(2 n_1^2 U + \frac{2U\beta^2}{k_0^2} + n_1^2 \lambda \frac{dU}{d\lambda} \right) \right] \tag{VI.101}$$

onde todos os parâmetros na equação (VI.101) foram definidos no item VI.5 anterior.

Podemos observar, como no caso da dispersão total, que as equações (VI.100), obtida a partir da análise efetuada em {6}, e (VI.101), encontrada a partir da proposição de Marcuse, são bastante diferentes daquela obtida pelo nosso método de análise e que foi apresentada no item V.1, Capítulo V.

7- COMPARAÇÃO ENTRE AS PROPOSIÇÕES DE CÁLCULO DA CONSTANTE DE PROPAGAÇÃO NORMALIZADA E SUAS DERIVADAS OBTIDAS A PARTIR DE FÓRMULAS ASSINTÓTICAS

Neste item, a partir das fórmulas assintóticas apresentadas nos itens VI.4 e VI.5, faremos uma comparação entre os parâmetros b , db/dV e d^2b/dV^2 que são necessários ao cálculo do comprimento de onda, λ , de dispersão mínima em sua fórmula exata (ver equação (VI.14)). Com o objetivo de facilitar o acesso, as equações necessárias a esta comparação são colocadas nos Quadros VI.1 e VI.2. No Quadro VI.1 estão colocadas as equações obtidas por métodos assintóticos que não necessitam de soluções da equação característica para serem determinadas. Estas equações foram estabelecidas no item VI.4. No Quadro VI.2 colocamos as expressões por nós obtidas seguindo a análise apresentada por Chang em {6}. O método de Marcuse {8}, por nós modificado, apesar de não necessitar diretamente dos parâmetros b , db/dV e d^2b/dV^2 em sua análise, poderia ser usado para calcular estes valores seguindo {6}.

Pela sua origem teórica, aqueles valores obtidos por Chang são consideradas como base de comparação.

Na Fig. VI.6 comparamos as curvas do parâmetro U obtidas através das equações assintóticas, apresentadas no Quadro VI.1, com a curva obtida através da solução da equação característica aproximada, conforme C.T.Chang (ver Quadro VI.1). Observamos, a partir dessa figura, que a aproximação proposta por Snyder não é conveniente pois todas as demais aproximações que não utilizam a equação característica aproximada, tendem a confundir-se com a

PARÂMETRO	SNYDER {20}	GLOGE {16}	MIYAGI E NISHIDA {14}	RUDOLPH E NEUMANN {17}
U	$U_{\infty} \exp[-1/V]$	$\frac{(1+\sqrt{2})V}{1+(4+V^4)^{1/4}}$	$\frac{U_{\infty} V}{(V+1)} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{20} \frac{U_{\infty}^4}{(V+1)^5} \right]$	$[V^2 - (cV+d)^2]^{1/2}$
b	$1 - \frac{U_{\infty}^2 \exp[-2/V]}{V^2}$	$1 - \frac{(1+\sqrt{2})V^2}{[1+(4+V^4)^{1/4}]^2}$	$1 - \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^2} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{20} \frac{U_{\infty}^4}{(V+1)^5} \right]^2$	$\left[\frac{cV+d}{V} \right]^2$
$\frac{db}{dV}$	$\frac{2U_{\infty}^2}{V^3} \left[1 - \frac{1}{V} \right]$	$\frac{2V^3}{(4+V^4)^{3/4}} \frac{(1+\sqrt{2})^2}{[1+(4V^4)^{1/4}]^3}$	$\frac{2U_{\infty}^2}{V^2(V+1)} - \frac{U_{\infty} U_{\infty}}{V(V+1)} \left[\frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^4} + \frac{1}{2} \frac{U_{\infty}^4}{(V+1)^6} \right]$	$-\frac{2d}{V^3} [cV+d]$
$\frac{d^2b}{dV^2}$	$\frac{2V^2}{V^5} + \left[\frac{2}{V^2} - \frac{3}{V} \right] \frac{db}{dV}$	$\frac{3}{V} \left[1 - \frac{V^4}{4+V^4} \right] \frac{db}{dV} - \frac{3}{2} \frac{[1+(4+V^4)^{1/4}]^2}{(1+\sqrt{2})^3} \left(\frac{db}{dV} \right)^2$	$-\frac{3}{V+1} \frac{db}{dV} + \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^3} \left\{ 2 - \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{2} \frac{U_{\infty}^4}{(V+1)^5} \right\} \left[\frac{1}{2} \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^4} + \frac{1}{4} \frac{U_{\infty}^4}{(V+1)^6} \right] - \left[1 - \frac{1}{6} \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{20} \frac{U_{\infty}^4}{(V+1)^5} \right] \left[\frac{3}{(V+1)^4} + \frac{5}{2} \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^6} \right]$	$\frac{2d}{V^4} [2cV+3d]$
NOTA	$U_{\infty} = 2,4048$	-	$U_{\infty} = 2,4048$	$c = 1,1428$ $d = -0,996$ $1,5 \leq V \leq 2,5$

Quadro VI.1 - Expressões para o cálculo de b, db/dV e d²b/dV² baseadas em fórmulas propostas por Snyder, Gloge, Miyagi-Nishida e Rudolph-Neumann.

PARÂMETROS	C.T.CHANG {6}
U, W	CALCULADOS A PARTIR DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA APROXIMADA
b	$1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{W^2}{V^2}$
V	$\frac{2\pi a}{\lambda} n_2 (2\Delta)^{1/2}$
$\frac{db}{dV}$	$2 \frac{U^2}{V^3} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)}$
$\frac{d^2b}{dV^2}$	$\frac{2U^2}{V^3} \frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{dW}{dV} + \frac{2U^2}{V^4} \left(1 + 2 \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)}$
$\frac{d}{dW} \left(\frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right)$	$- 2 \frac{K_0(W)}{K_1(W)} + 2 \frac{K_0^2(W)}{WK_1^2(W)} + 2 \frac{K_0^3(W)}{K_1^3(W)}$
$\frac{dW}{dV}$	$\frac{W}{V} + \frac{U^2}{WV} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} = \frac{W}{2V} + \frac{V}{2W} \frac{d(bV)}{dV}$
$\frac{d(bV)}{dV}$	$1 - \left(\frac{U}{V} \right)^2 \left[1 - 2 \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right]$

Quadro VI.2 - Expressões para o cálculo de b, db/dV e d²b/dV² baseadas em fórmulas propostas por C.T.Chang.

curva obtida, resolvendo-se esta equação, em uma grande parte do intervalo da frequência normalizada V apresentado. O método proposto por Snyder continuará a apresentar discrepâncias, com relação aos outros, em todos os demais parâmetros que comparamos (ver Figs. VI.5, VI.6 e VI.7). Os métodos de Rudolph e Neumann, Miyagi e Nishida e o de Chang confundem-se no intervalo de validade do primeiro. O mesmo fenômeno pode ser observado no diagrama $b \times V$ apresentado na Fig. VI.5. As diferenças entre os métodos assintóticos de análise da dispersão tornam-se evidentes a partir do diagrama $db/dV \times V$ e acentuam-se no diagrama $d^2b/dV^2 \times V$ apresentados, respectivamente, nas Figs. VI.6 e VI.7. A região onde estes métodos apresentam maiores desigualdades é aquela para a qual $V < 1,5$.

A partir destas considerações, escolhemos o método de C.T.Chang e o de D.Marcuse, que são baseados em soluções da equação característica aproximada, para comparar seus resultados com aqueles obtidos com o nosso programa. Pela sua facilidade de implementação em computadores pequenos e pelo comportamento demonstrado, escolhemos também para essa comparação um método baseado nas equações propostas por Rudolph e Neumann. Este método foi adotado por C.R.South [10] e o reproduzimos, com maior profundidade, no Apêndice A. Os resultados desta comparação de métodos são apresentados a seguir, no Capítulo VII.

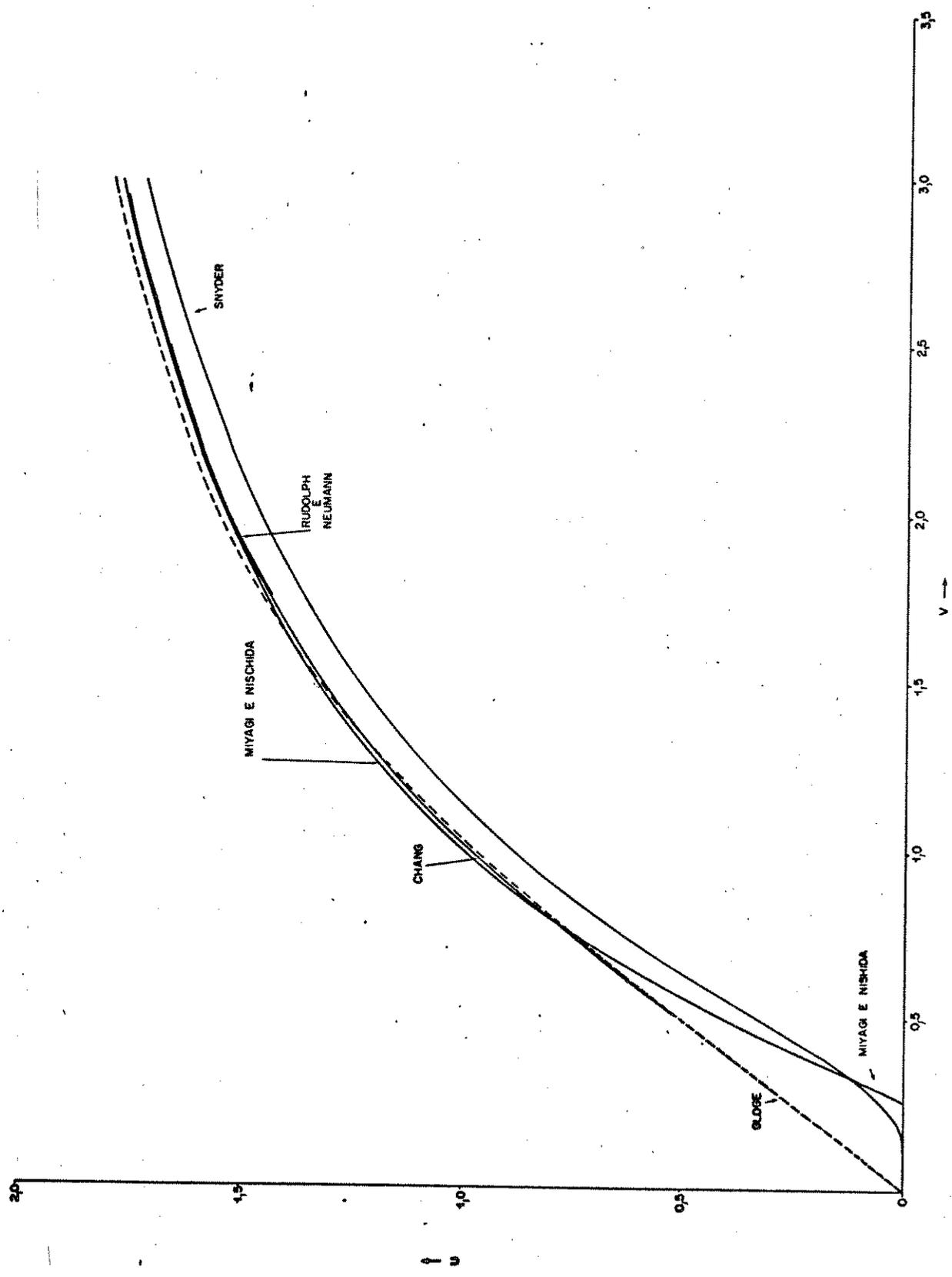


Fig.VI.4 - Diagrama UxV obtido através de fórmulas assintóticas (ver Quadro VI.1) e através de soluções da equação característica aproximada (ver Quadro VI.2).

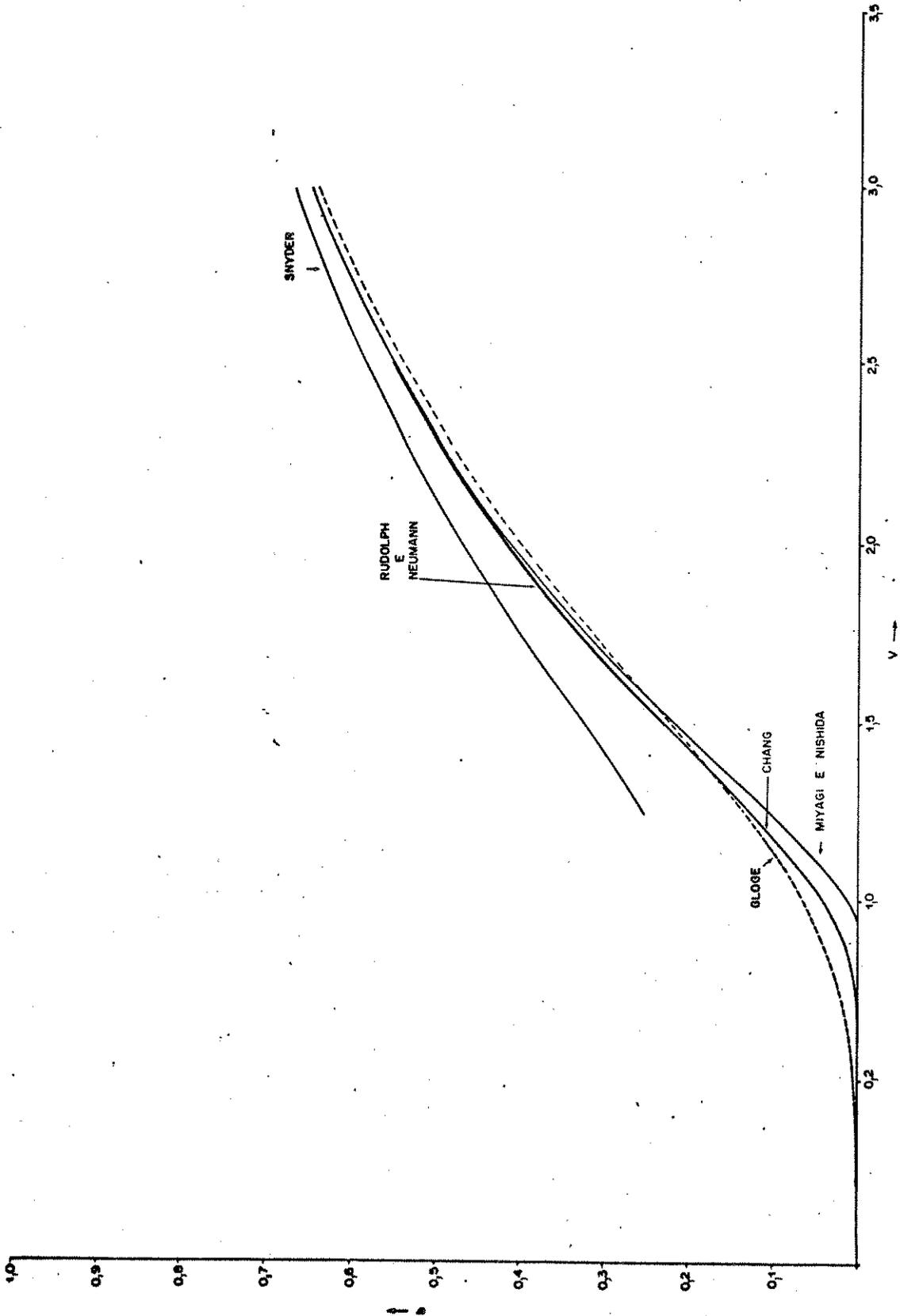


Fig.VI.5 - Diagrama $b \times V$ obtido através de fórmulas assintóticas (ver Quadro VI.1) e através de soluções da equação característica aproximada (ver Quadro VI.2).

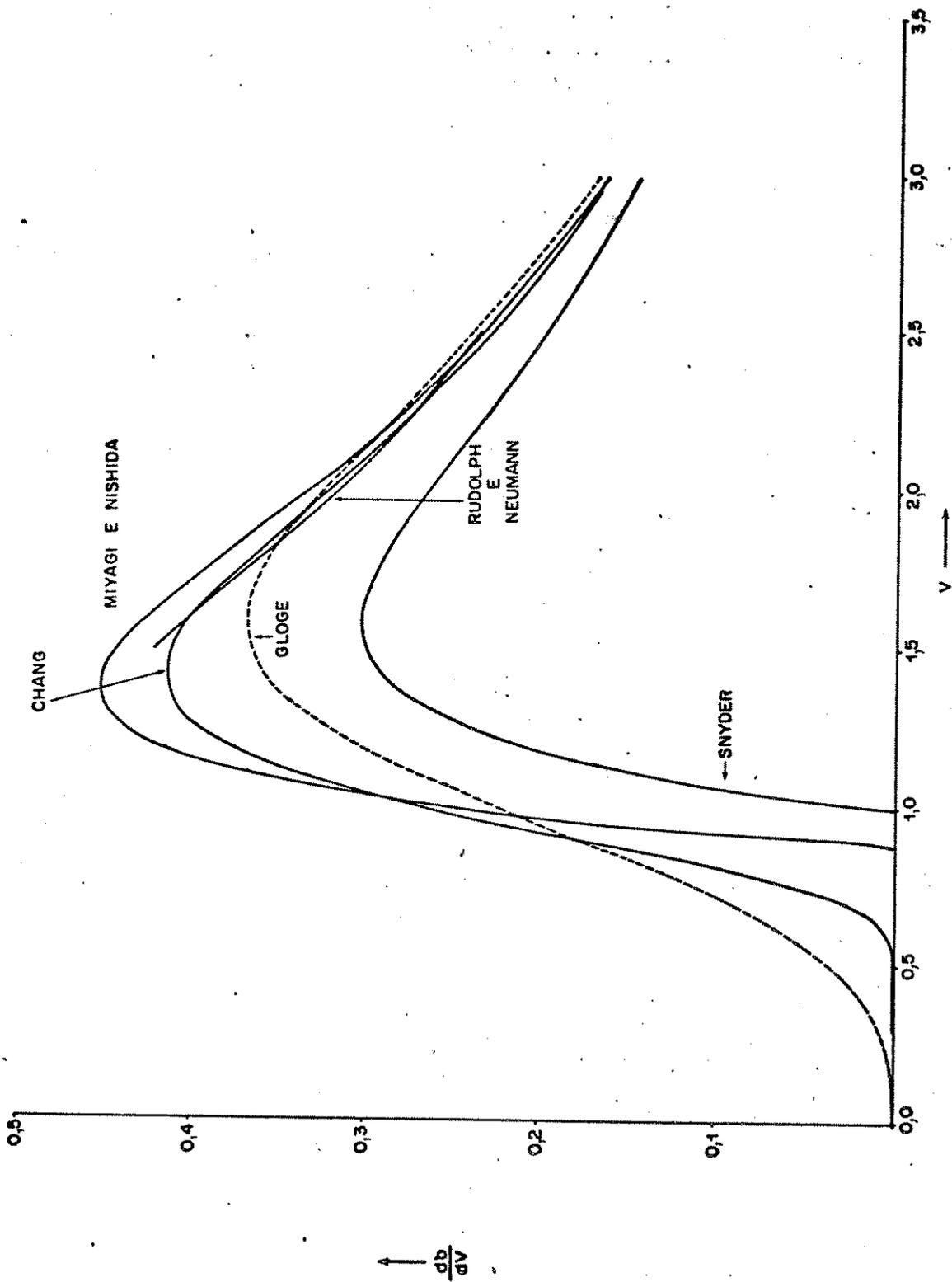


Fig.VI.6 - Diagrama db/dV x V obtido através de fórmulas assintóticas (ver Quadro VI.1) e através de soluções da equação característica aproximada (ver Quadro VI.2).

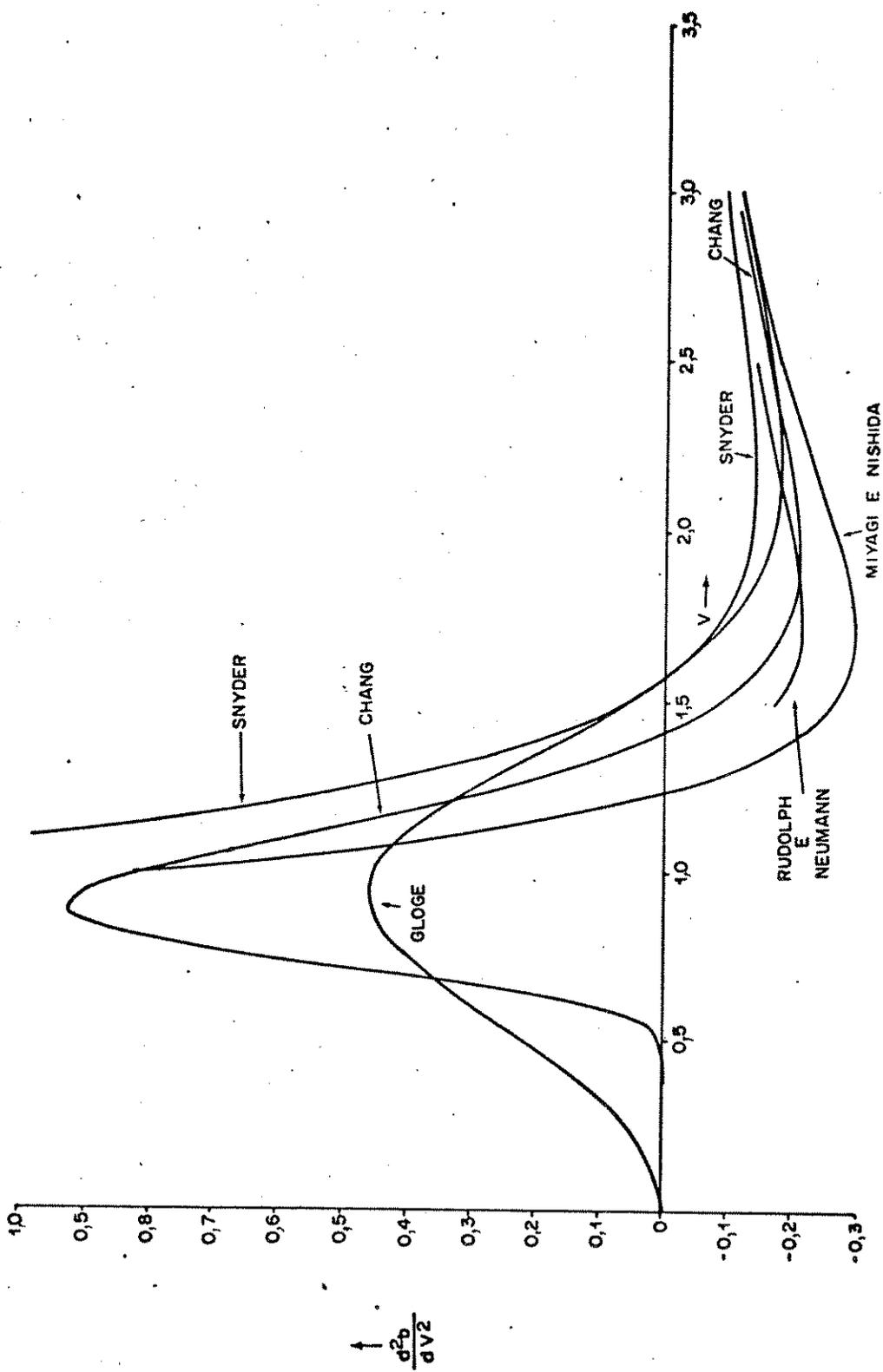


Fig.VI.7 - Diagrama d^2b/dV^2 x V obtido através de fórmulas assintóticas (ver Quadro VI.1) e através de soluções da equação característica aproximada (ver Quadro VI.2).

CAPÍTULO VII

COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO EXATO DE
ANÁLISE DA DISPERSÃO EM FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS
COM PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO EM DEGRAU
E AQUELES DESENVOLVIDOS POR CHANG, MARCUSE E SOUTH

Neste Capítulo utilizamos todo o formalismo desenvolvido a partir do Capítulo II para efetuar comparações entre o método de análise da dispersão de pulsos em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau por nós desenvolvido, e aqueles baseados em expressões assintóticas, propostos por C.T. Chang {6}, {7}, D. Marcuse {8} e C.R.South {10}. Estes três métodos assintóticos, segundo as considerações efetuadas no item VI.7 do Capítulo anterior, são os que apresentam as melhores características teóricas.

Comparamos inicialmente nosso procedimento com aquele adotado por Chang, por ter este autor uma maneira peculiar de caracterização das fibras ópticas. Em seguida, nosso método é confrontado com o método adotado por D.Marcuse, que nós modificamos, e com aquele utilizado por South que é baseado em fórmulas propostas por Rudolph e Neumann {17}.

1 - DISPERSÃO TOTAL MÍNIMA E DISPERSÃO RESIDUAL - COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO EXATO E O MÉTODO ASSINTÓTICO DE C.T.CHANG

O método assintótico de análise da dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau desenvolvido por C.T.Chang {6}, {7} apresenta, além das diferenças básicas em termos do formalismo empregado (ver itens VI.4-VI.7, Capítulo VI), uma peculiaridade que o diferencia dos demais procedimentos assintóticos utilizados na análise da dispersão de pulsos nestas estruturas. Este autor, ao longo de suas pesquisas, mantém a diferença relativa entre os índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra, Δ (ver equação (I.3)), constante com o comprimento de onda. Esta consideração, que constitui-se em uma abstração teórica, despreza as diferentes contribuições das dispersões dos materiais que formam o núcleo e a casca do guia óptico {11b}. Entretanto, em situações práticas, a diferença de constituição dos materiais utilizados na construção das fibras é tal que seus respectivos índices de fase, na faixa de comprimentos de onda de interesse, têm valores bastante próximos, isto é, apresentam uma diferença relativa, Δ , pequena. Estudos desenvolvidos por Jürgensen {12} mostram que a dife

rença no comprimento de onda, λ , de dispersão total nula obtida considerando-se $d\Delta/d\lambda \neq 0$ (que é a situação real) e $d\Delta/d\lambda = 0$ (que é o que ocorre no modelo adotado por Chang) é da ordem de 10nm.

Utilizando o procedimento computacional indicado no item VI.2 do Capítulo VI, calculamos os valores dos comprimentos de onda de dispersão nula e, a partir destes valores, a dispersão residual para as fibras ópticas analisadas por Chang {6},{7}. Neste caso, e pelo exposto no parágrafo precedente, nosso programa de computador, baseado em fórmulas exatas e em métodos numéricos de diferenciação e interpolação, acerta como dados de entrada o conjunto 1 de parâmetros descritos no item VI.2 do Capítulo VI.

Os resultados que obtivemos, representados através dos valores superiores apresentados no Quadro VII.1, estão em perfeito acordo com aqueles que foram publicados por Chang {6}, {7} e que estão indicados, no mesmo Quadro, através dos valores inferiores. A concordância entre os valores apresentados neste Quadro, calculados através de procedimentos analíticos e computacionais totalmente distintos vem demonstrar que ambos os métodos de análise são semelhantes para pequenos valores da diferença relativa Δ (ver Quadro VII.1). Comparando os valores dos comprimentos de onda de dispersão total nula com aqueles obtidos quando apenas a dispersão do material era considerada (ver Quadro IV.2, Capítulo IV, amostras 01, 02 e 13), observamos que estes últimos valores são menores. O deslocamento havido no comprimento de onda, $\delta\lambda$ em nm, é atribuído à presença da dispersão do guia de onda. Os valores de $\delta\lambda$ são mostrados, para o caso exato, no Quadro VII.2.

Na Fig.VII.1 mostramos a variação com o comprimento de onda, λ em μm , dos efeitos de dispersão do material, D_m , de dispersão total, D_T , e de dispersão de guia de onda, D_g . Estes efeitos têm unidades de $\text{ps}/(\text{Km.nm})$ e foram calculados para as fibras ópticas construídas, segundo o modelo adotado por Chang {6}, {7}, com a amostra 02 (SiO_2 resfriada; ver Quadro IV.1, Capítulo IV). Os diâmetros dos núcleos, Z_a em μm , e as diferenças relativas, Δ , utilizadas são apresentadas no Quadro VII.3. As curvas da dispersão total, D_T , e da dispersão do guia de onda, D_g , apresentadas nesta figura, foram traçadas a partir dos resultados obtidos com os programas desenvolvidos para a análise do respectivo efeito dispersivo a partir de suas fórmulas exatas; o programa para a

AMOSTRA	DIÂMETRO DO NÚCLEO (μm)	DIFERENÇA RELATIVA Δ	DISPERSÃO TOTAL				REFERÊNCIAS PARA OS VALORES INFERIORES
			λ (μm)	\hat{D}_2 ps/Km.nm ²	V		
02	5,3	0,006	1,4201	0,006952	1,8599	{6}	
			1,419	0,00699	1,858		
02	5,3	0,00484	1,4442	0,007198	1,6418		
			1,443	0,00723	1,641		
02	10,0	0,00104	1,3147	0,010953	1,5775		
			1,315	0,01095	1,575		
13	5,3	0,006	1,3136	0,009703	2,0049		
			1,313	0,00974	2,0		
13	5,3	0,00242	1,3358	0,012152	1,2507		
			1,336	0,01215	1,250		
13	10,0	0,00055	1,2462	0,014361	1,2064		
			1,245	0,01465	1,172		
01	5,3	0,006	1,4144	0,007044	1,8669		
			1,414	0,00708	1,865		
01	5,3	0,00484	1,4386	0,007279	1,6478		
			1,438	0,00732	1,647		
01	10,0	0,00104	1,3112	0,011052	1,5813		
			1,311	0,0111	1,578		
02	9,4	0,0019	1,3094	0,010677	2,0128		
			1,31	0,0107	2,0		

Quadro VII.1 - Comprimento de onda, λ , de dispersão total nula, dispersão residual, \hat{D}_2 , e frequência normalizada, V. Comparação entre os resultados obtidos com o nosso método (valores superiores) e aqueles obtidos por C.T.Chang {6}, {7}, (valores inferiores)

AMOSTRA	Δ	$\delta\lambda$ (nm)
02	0,006	144
02	0,00484	168
02	0,00104	39
13	0,006	94
13	0,00242	116
13	0,00055	27
01	0,006	142
01	0,00484	166
01	0,00104	38
02	0,0019	34

Quadro VII.2 - Deslocamento no comprimento de onda, $\delta\lambda$, comparado àquele obtido considerando-se apenas a dispersão do material - Método exato

AMOSTRA	$2a$ (μm)	Δ	
02	5,3	0,006	A
	5,3	0,00484	B
	10,0	0,00104	C

Quadro VII.3 - Diâmetros dos núcleos, $2a$ em μm , e diferenças relativas, , usadas na construção das curvas de dispersão apresentadas na Fig.VII.1. As fibras são construídas segundo o modelo adotado por Chang {6} ,{7}

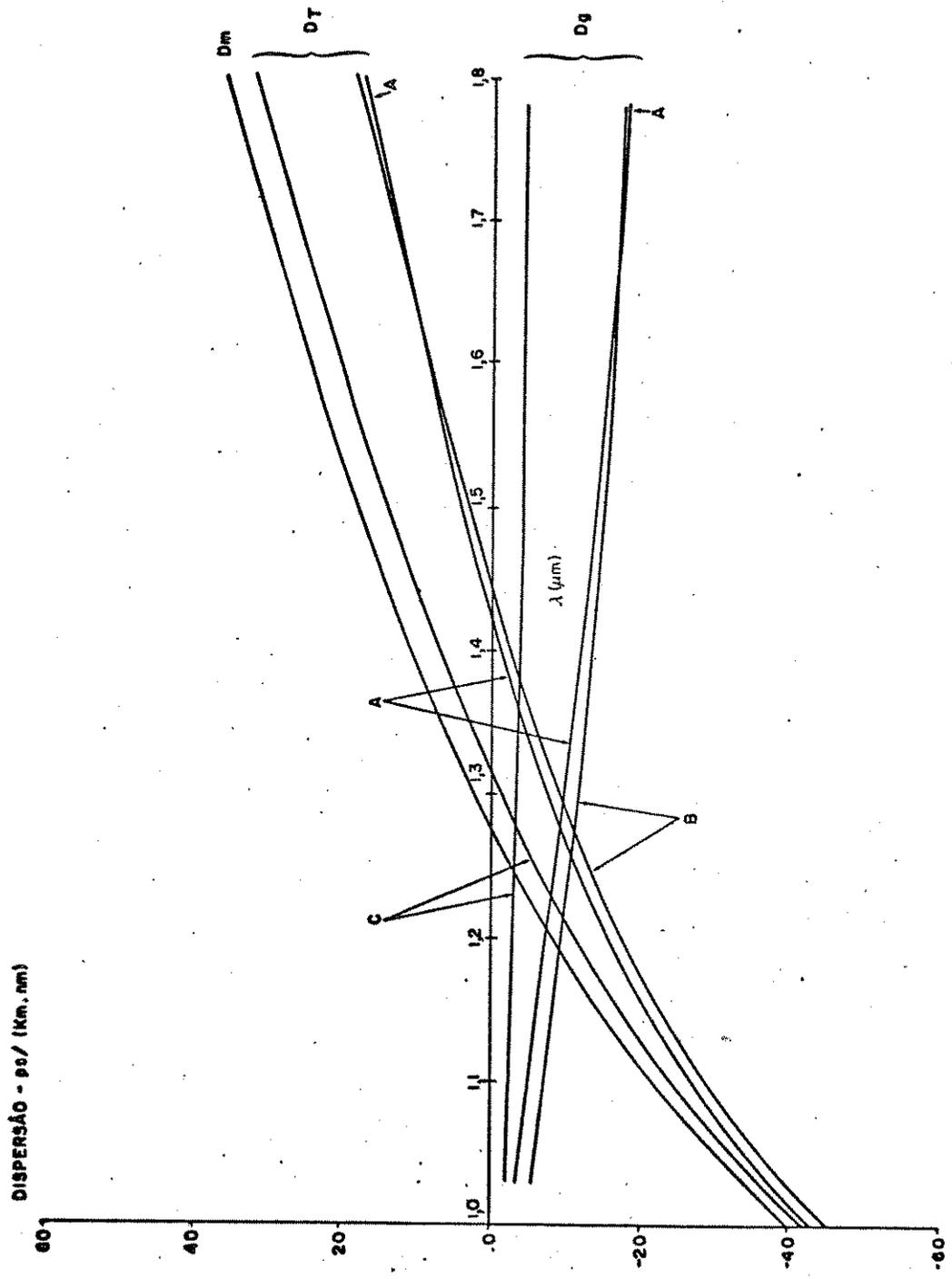


Fig.VII.1 - Curvas de dispersão para as fibras ópticas apresentadas no Quadro VIII.3;
 D_m - dispersão do material, D_T - dispersão total e D_g - dispersão do guia de onda

análise da dispersão total foi apresentado no item VI.2 do Capítulo VI enquanto que aquele utilizado na análise da dispersão do guia de onda foi mencionado no Capítulo V, item V.2. As curvas destes efeitos dispersivos obtidos através do formalismo assintótico proposto por Chang confundem-se, na escala da figura, com as curvas exatas apresentadas. A curva de dispersão do material, D_m , foi obtida, conforme estudos efetuados no Capítulo IV, a partir das equações (IV.8), (IV.3) e (IV.1).

Podemos fazer alguns comentários com relação às curvas de dispersão apresentadas na Fig.VII.1. Em primeiro lugar, observamos que as curvas de dispersão total, D_T , apresentam formas semelhantes àquela apresentada pela curva de dispersão do material, D_m . Observamos também que o afastamento da curva de dispersão total da curva de dispersão do material é tanto maior quanto maior for, em termos absolutos, a variação da curva de dispersão do guia de onda, D_g , correspondente. Com relação às curvas de dispersão do guia de onda, são válidas as mesmas observações efetuadas quando da análise deste efeito dispersivo feita no item V.2 do Capítulo V; estas curvas têm um zero próximo ao valor da frequência normalizada $V \sim 3,0$ (além de terem, é claro, valor nulo em $V=0$).

Além das curvas de dispersão apresentadas na Fig. VII.1, utilizamos nosso programa de computador baseado em fórmulas exatas, descrito no item VI.2 do Capítulo VI, e o programa que implementamos seguindo as considerações estabelecidas em {6}, descrito no item VI.5 do Capítulo VI, para traçar algumas curvas comparativas. Todas estas curvas, apresentadas nas Figs. VII.2-VII.4, foram traçadas considerando-se uma fibra óptica construída com a amostra 02, segundo o modelo adotado por C.T.Chang {6}. As curvas obtidas utilizando nosso procedimento são chamadas "EXATA" e apenas obtidas através do programa baseado em {6} são designadas "CHANG".

Na Fig.VII.2 apresentamos a variação do comprimento de onda de dispersão total nula, λ em μm , em função da diferença relativa, Δ . Para a construção das curvas apresentadas, considerando o diâmetro do núcleo da fibra, Z_a , fixo e igual a $5,3\mu\text{m}$. Observamos que existem duas regiões de valores da diferença relativa para as quais as curvas "EXATA" e "CHANG" apresentam pequenas

diferenças. Para valores de Δ compreendidos entre 0,4%-0,5% aproximadamente, teremos erros relativos, entre o comprimento de onda λ calculado pelo nosso método e aquele calculado seguindo {6}, da ordem de 0,06%, aproximadamente. Para valores da diferença relativa, Δ , maiores que 0,9%, observamos que as curvas "EXATA" e "CHANG" tendem a se separar. Em $\Delta = 0,96\%$, limite da escala da Fig. VII.2, o erro relativo entre os comprimentos de onda é de -0,13% ($\lambda = 1,3287\mu\text{m}$, método exato; $\lambda = 1,3304\mu\text{m}$, método de Chang).

Na Fig. VII.3 apresentamos a variação do comprimento de onda de dispersão total nula, λ em μm , em função do raio do núcleo da fibra, a em μm . Na construção das curvas apresentadas, consideramos o parâmetro Δ fixo e igual a 0,6%. Como na figura anterior, notamos que há, também nesta figura, um intervalo de valores do raio do núcleo da fibra para o qual há diferenças entre os valores de λ obtidos através do nosso método, curva "EXATA", e aquele adotado por C.T.Chang, curva "CHANG". Estas diferenças são visíveis, na escala da Fig. VII.3, para valores dos raios do núcleo compreendidos entre $1,75\mu\text{m}$ - $2,7\mu\text{m}$, aproximadamente. Por exemplo, o erro relativo entre os valores de λ calculados pelo método exato e pelo método de C.T.Chang para o raio do núcleo igual a $2,0\mu\text{m}$ é igual a 0,12% enquanto que para o raio do núcleo igual a $2,7\mu\text{m}$ este erro cai para 0,04% (Para o raio $a = 2,0\mu\text{m}$: $\lambda = 1,6221\mu\text{m}$, método exato, e $\lambda = 1,6201\mu\text{m}$, método de Chang. Para o raio $a = 2,7\mu\text{m}$: $\lambda = 1,4965\mu\text{m}$, método exato, e $\lambda = 1,4060\mu\text{m}$, método de Chang.)

Na Fig. VII.4 apresentamos a variação da dispersão residual, \hat{D}_2 em $\text{ps}/(\text{Km}.\text{nm}^2)$, em função do raio do núcleo da fibra, a em μm . Na confecção das curvas apresentadas nesta figura, consideramos o parâmetro Δ fixo e igual a 0,6%. Há um intervalo de valores do raio do núcleo da fibra para o qual as curvas "EXATA" e "CHANG" apresentam diferenças. Um erro relativo, praticamente constante, ocorre entre os valores da dispersão residual obtidos pelo nosso método e pelo método proposto por Chang para valores do raio do núcleo na faixa $1,4\mu\text{m} < a < 1,9\mu\text{m}$, aproximadamente. Este erro é da ordem de 0,04%.

Pelas curvas apresentadas, observamos que, escolhendo-se um material (modelo adotado por Chang), tanto através da variação do parâmetro Δ (para o raio do núcleo da fibra fixo, ver Fig. VII) quanto através da variação do raio do núcleo da fibra

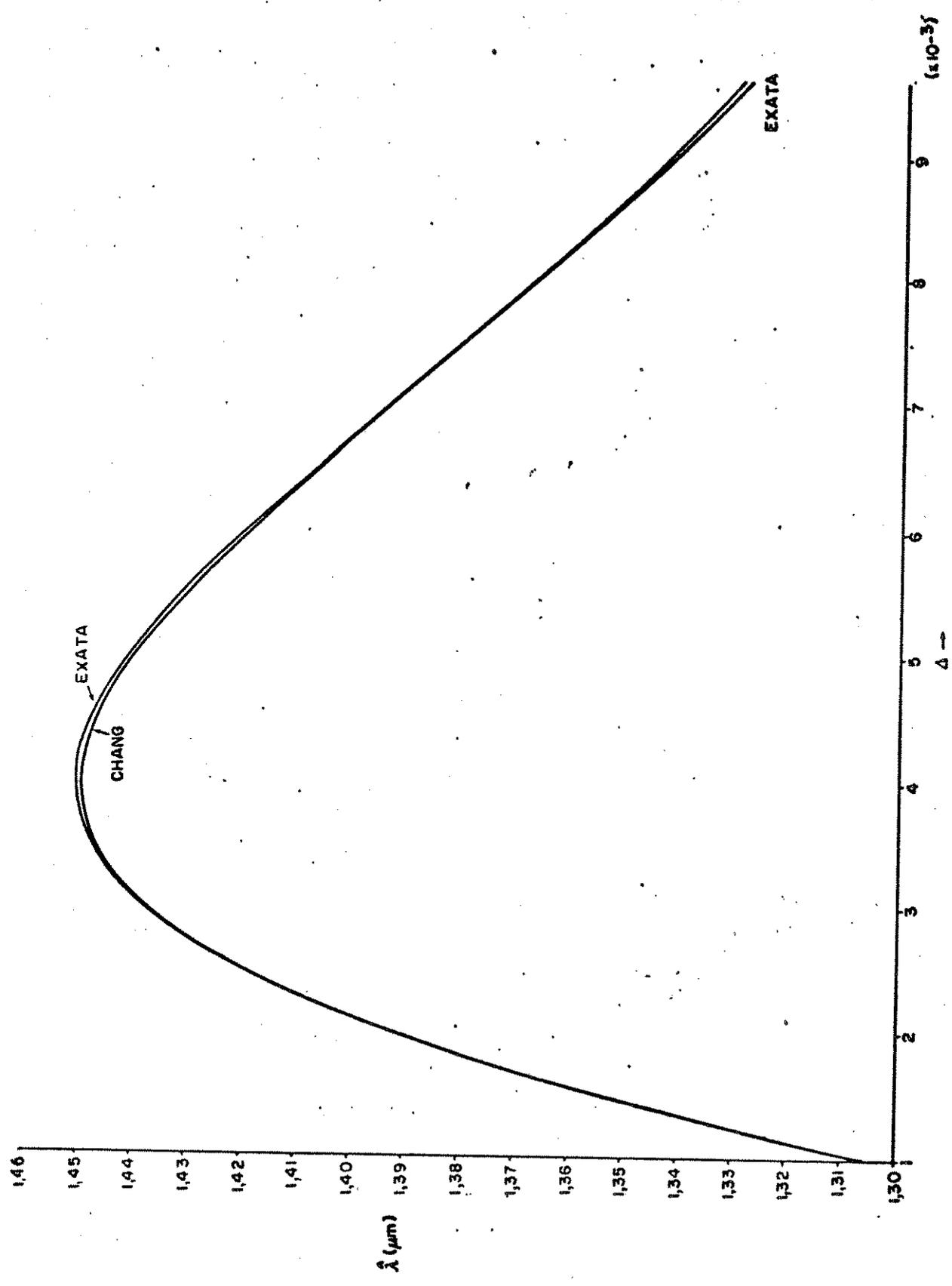


Fig.VII.2 - Variação do comprimento de onda de dispersão total nula, λ , em função da diferença relativa, Δ . Diâmetro do núcleo da fibra: $2a = 5,3$ m. Fibra construída com a amostra 02 (mó delo de Chang)

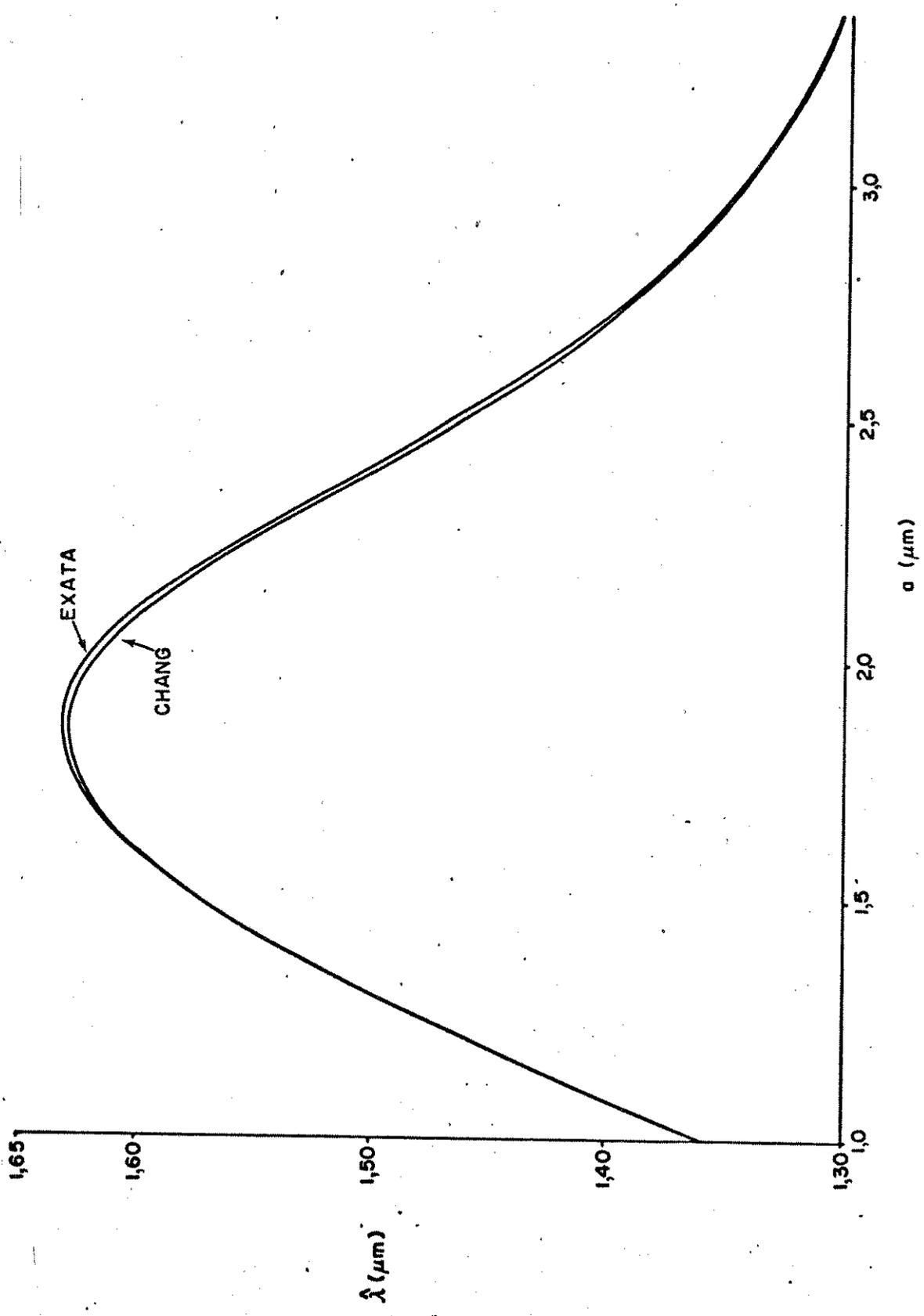


Fig.VII.3 - Variação do comprimento da onda de dispersão total nula, $\hat{\lambda}$, em função do raio do núcleo da fibra, a .
Diferença relativa: $\Delta = 0,6\%$
Fibra construída com a amostra 02 (modelo de Chang)

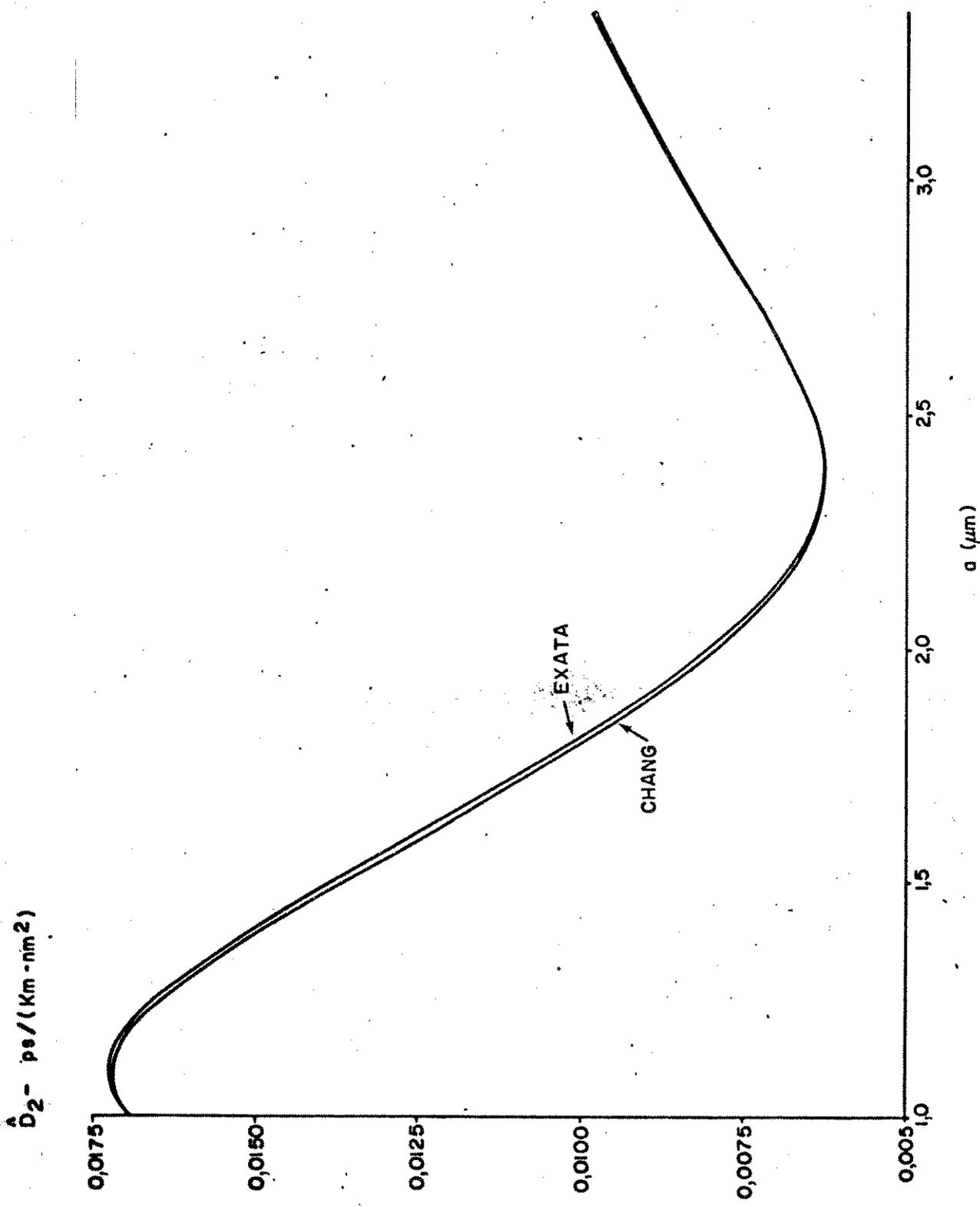


Fig.VII.4 - Variação da dispersão residual, \hat{D}_2 , em função do raio do núcleo da fibra, a .
Diferença relativa: $\Delta = 0,6\%$
Fibra construída com a amostra 02 (modelo de Chang)

(para Δ fixo; ver Fig. VII.3), podemos projetar uma fibra óptica monomodal com perfil de índice de refração em degrau com um comprimento de onda de operação igual ao comprimento de onda de dispersão total nula que seja compatível com a fonte óptica que dispomos. Também, por estas curvas, vimos que um pequeno erro será cometido se tal projeto for realizado com a utilização do formalismo assintótico proposto por C.T.Chang.

Baseado nos fatos apresentados no parágrafo precedente, C.T.Chang {7} projetou uma fibra óptica monomodal com perfil de índice de refração em degrau para operar no comprimento de onda de dispersão total nula, λ , igual a $1,55\mu\text{m}$. Este valor, $1,55\mu\text{m}$, é o valor do comprimento de onda para o qual foi encontrada a menor perda por atenuação nestas estruturas ópticas {4}.

Ao contrário dos materiais usados para a construção da fibra de baixa atenuação utilizados por {4}, Chang usou a amostra 02 (SiO_2 resfriado). Isto deveu-se ao fato da inexistência dos coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier (ver Cap. IV) para um dos materiais usados em {4}. Chang {7} publicou os valores do diâmetro do núcleo, Z_a em μm , e da diferença relativa, Δ , que possibilitam, segundo seus cálculos, dispersão total mínima em $1,55\mu\text{m}$. Reproduzimos estes resultados no Quadro VII.4. Mostramos também os valores da dispersão residual, \hat{D}_2 , e da frequência normalizada, V , publicados por este autor (ver Tabela I, amostra B, da referência {7}).

Usamos nosso programa de computador, baseado em fórmulas exatas e aquele que implementamos seguindo as indicações constantes na referência {6} para comprovar os resultados apresentados no Quadro VII.4. Os valores que obtivemos são mostrados no Quadro VII.5. Os valores superiores foram obtidos com o método exato e os inferiores foram obtidos com o programa baseado em {6}.

Pelos resultados apresentados no Quadro VII.5 notamos que além das diferenças existentes entre os valores obtidos com o nosso método e aqueles obtidos com o programa de computador baseado em {6}, há também diferenças entre os valores que Chang publicou (ver Quadro VII.4) e aqueles que obtivemos usando seu procedimento (ver valores inferiores, Quadro VII.5). Pela concordância entre os resultados que Chang apresenta {6}, {7}, para as dez

DIÂMETRO DO NÚCLEO $2a(\mu\text{m})$	DIFERENÇA RELATIVA Δ	$\hat{\lambda}$ (μm)	\hat{D}_2 ps/(Km.nm ²)	V
3,63	0,0215	1,55	0,0015	2,2

Quadro VII.4 - Diâmetro do núcleo, $2a$, diferença relativa, dispersão residual, \hat{D}_2 , e frequência normalizada, V , publicados por C.T.Chang [7].

Fibra óptica construída com a amostra 02.

DIÂMETRO DO NÚCLEO $2a(\mu\text{m})$	DIFERENÇA RELATIVA Δ	$\hat{\lambda}$ (μm)	\hat{D}_2 ps/(Km.nm ²)	V
3,63	0,0215	1,4691	0,002344	2,3389
3,63	0,0215	1,4877	0,002363	2,2972

Quadro VII.5 - Comprimento de onda de dispersão total nula, $\hat{\lambda}$, dispersão residual, \hat{D}_2 , e frequência normalizada, V , obtido com o método exato, valores superiores, e com o método adotado por Chang [6], valores inferiores, usando Za e Δ do Quadro VII.4. Fibra óptica construída com a amostra 02 (modelo de Chang).

fibras do Quadro VII.1 e aqueles que obtivemos com o programa que implementamos baseados em seu método para estas mesmas amostras (ver Apêndice B), concluímos que houve um erro de apresentação quando da publicação dos resultados apresentados no Quadro VII.4.

As diferenças observadas entre nossos resultados e aqueles que encontramos utilizando o programa de computador que fizemos seguindo as indicações constantes na referência {6}, (ver Quadro VII.5), já eram esperadas, tendo em vista que para este caso, a diferença relativa, Δ , é igual a 2,15% e, pelos comentários efetuados sobre as curvas da Fig. VII.2, as diferenças entre as curvas "EXATA" e "CHANG", para o raio do núcleo fixo, aumentam quando Δ aumenta.

Com o valor do parâmetro $\Delta = 2,15\%$ e para o diâmetro do núcleo da fibra $2a = 3,63\mu\text{m}$, traçamos as curvas de dispersão apresentadas na Fig. VII.5. A curva de dispersão do material (amostra 02) foi construída seguindo os estudos efetuados no Capítulo IV. As curvas da dispersão total, D_T , e da dispersão do guia de onda, D_g , foram construídas utilizando os nossos programas baseados nas fórmulas exatas, curvas "EXATA", e aqueles que implementamos a partir das explicações em {6}. Ao contrário do apresentado na Fig. VII.1, onde as curvas obtidas a partir do nosso procedimento e aquelas obtidas utilizando o exposto em {6} são coincidentes, na Fig. VII.5 são coincidentes, na Fig. VII.5 observamos que as curvas D_T e D_g traçadas com a utilização dos dois métodos em questão apresentam diferenças visíveis, na escala da figura, para comprimentos de onda, λ , menores que $1,6\mu\text{m}$ aproximadamente. O erro relativo entre os valores do comprimento de onda de dispersão total nula, $\hat{\lambda}$, calculados através do nosso método e através do método de Chang é igual a $-1,25\%$ (ver Quadro VII.5).

Na Fig. VII.6 mostramos a variação do comprimento de onda de dispersão total nula, $\hat{\lambda}$ em μm , em função do raio do núcleo da fibra, a em μm . Consideramos uma fibra construída, segundo o modelo de Chang, com a amostra 02 e também o parâmetro Δ fixo e igual a 2,15%. Observamos diferenças entre as duas curvas apresentadas. Por exemplo, para o valor do raio do núcleo da fibra igual a $1,70\mu\text{m}$, o erro relativo encontrado entre os valores do comprimento de onde $\hat{\lambda}$ é igual a 2,2% ($\hat{\lambda} = 2,1542\mu\text{m}$, método exa

to; $\lambda=2,107\mu\text{m}$, método de Chang). Já para o valor do raio do núcleo igual a $1,75\mu\text{m}$, este erro passa para 3,7% ($\hat{\lambda}=1,9514\mu\text{m}$, método exato; $\hat{\lambda}=1,8817\mu\text{m}$, método de Chang).

Na Fig.VII.7, para a diferença relativa $\Delta=2,15\%$ e para uma fibra construída, segundo o modelo de Chang, com a amostra 02, apresentamos a variação da dispersão residual, \hat{D}_2 em $\text{ps}/(\text{Km} \cdot \text{nm}^2)$, em função do raio do núcleo da fibra, a em μm . Novamente observamos diferenças entre as curvas apresentadas. Notamos também que o ponto de mínima dispersão residual obtido através do nosso método de análise ocorre para um valor do raio do núcleo da fibra, a , um pouco maior do que o valor do raio necessário à dispersão residual mínima pela análise de Chang.

Tendo em vista que os procedimentos analíticos e computacionais utilizados são totalmente diferentes, observamos que o método de análise da dispersão de pulsos em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau proposto por Chang {6}, {7} possui uma excelente concordância com o método de análise que desenvolvemos principalmente quando a diferença relativa, Δ , é pequena (ver Quadro VII.1 e Figs. VII.1-VII.4). Quando a diferença relativa Δ é aumentada, uma pequena diferença entre os valores obtidos com o nosso método e o proposto por Chang é encontrada (ver Quadro VII.5 e Figs. VII.5-VII.7).

No próximo item, compararemos alguns resultados obtidos com a utilização do nosso método e alguns obtidos usando as análises propostas por D.Marcuse {8} e C.R.South {10}.

2- DISPERSÃO TOTAL MÍNIMA E DISPERSÃO RESIDUAL - COMPARAÇÕES ENTRE O MÉTODO EXATO E OS MÉTODOS ASSINTÓTICOS DE D.MARCUSE E C.R.SOUTH

Os métodos assintóticos de análise da dispersão de pulsos em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau propostos por D.Marcuse {8} e C.R.South {10} têm em comum apenas o fato de considerarem a variação com o comprimento de onda diferença relativa entre os índices de fase dos materiais que constituem o núcleo e a casca da estrutura óptica. Estes dois métodos levam em conta, então, que $d\lambda/d\lambda \neq 0$ que é o que ocorre

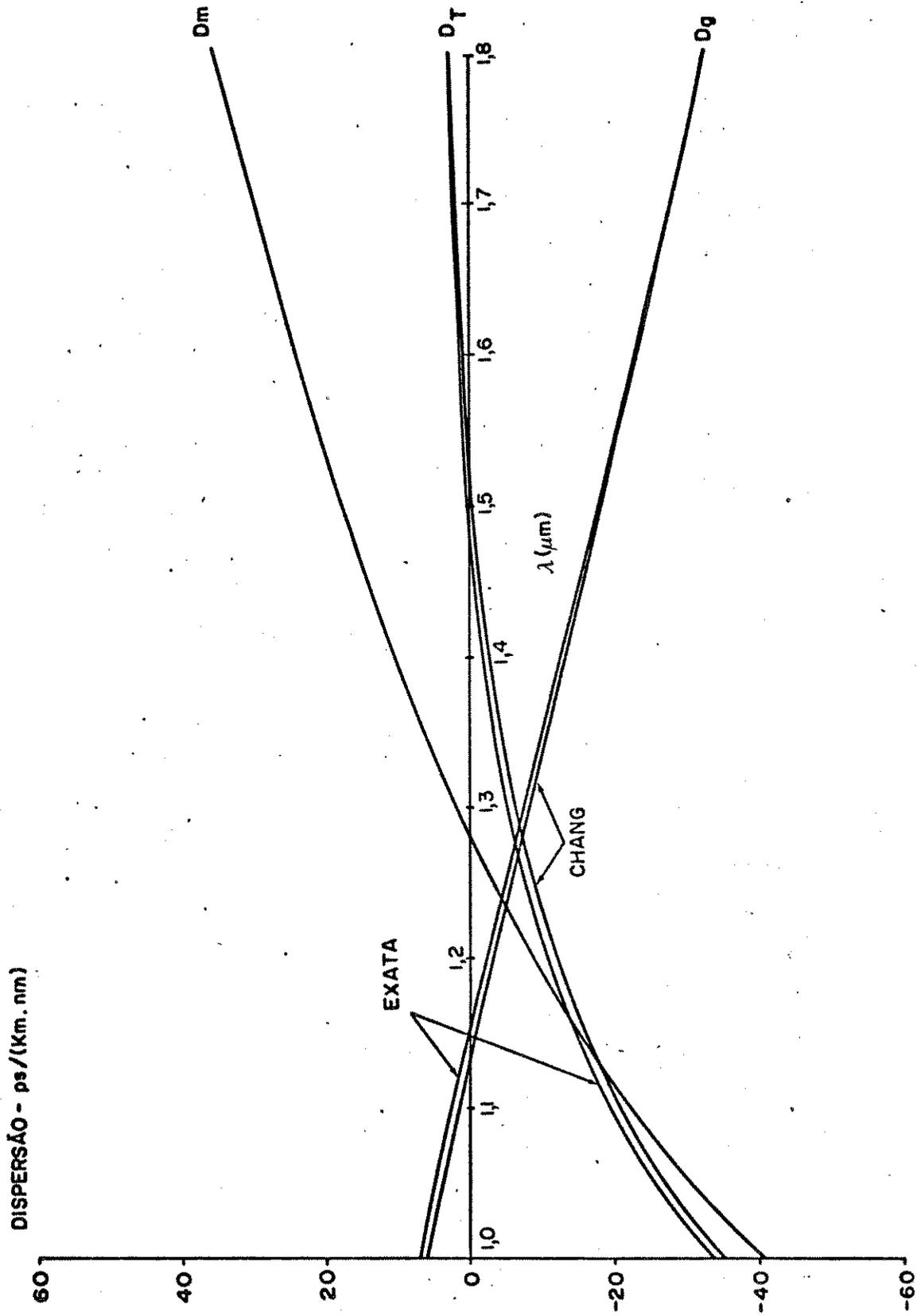


Fig. VII.5 - Curvas de dispersão para uma fibra óptica construída com a amostra 02, modelo de Chang, com diâmetro do núcleo $2a=3,63\mu\text{m}$ e diferença relativa $\Delta=2,15\%$; D_m - dispersão do material, D_g - dispersão total, D_t - dispersão do guia de onda

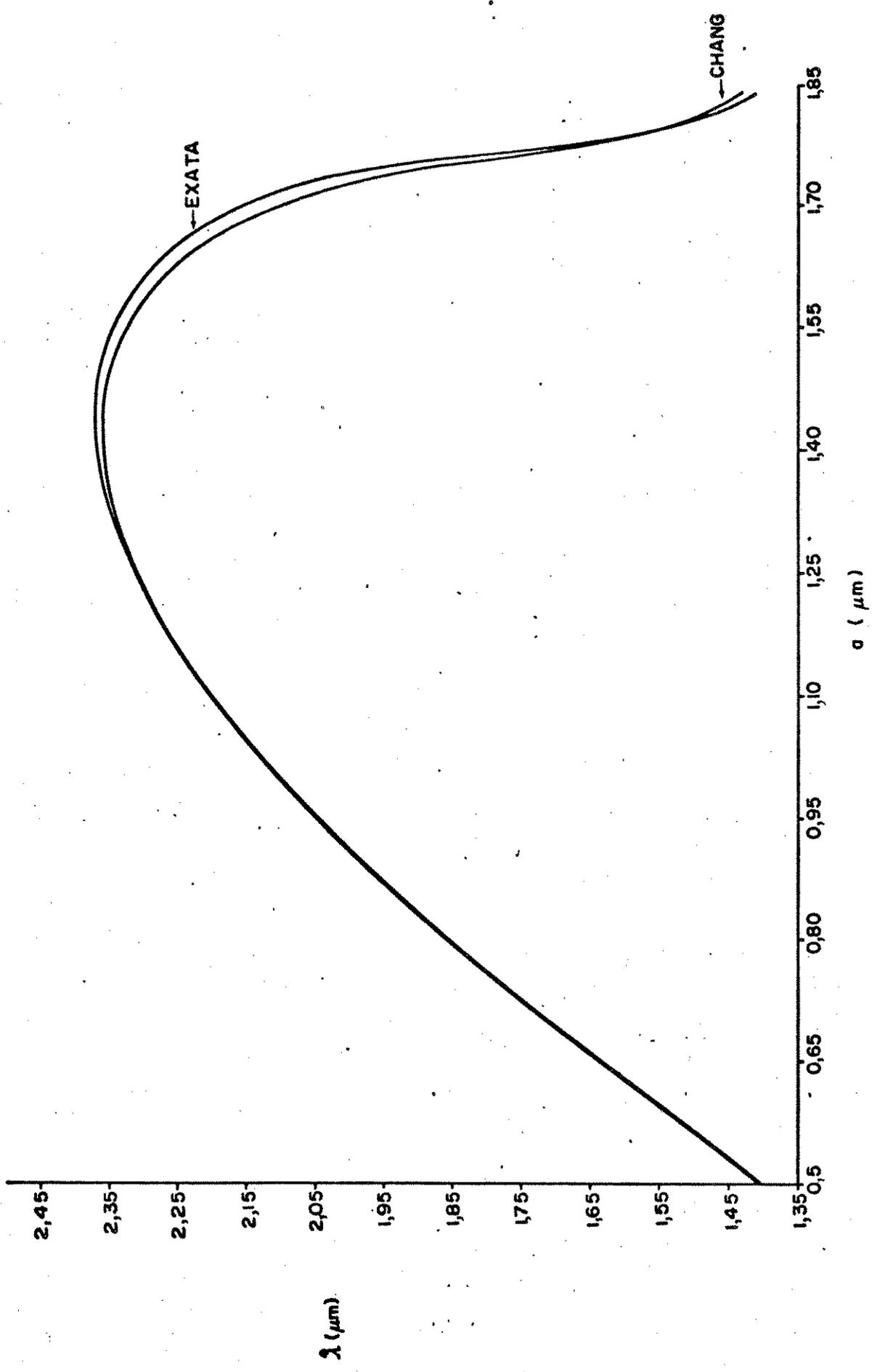


Fig.VII.6 - Variação do comprimento de onda dispersão total nula, λ , em função do raio do núcleo da fibra, a .
Diferença relativa: $\Delta = 2,15\%$
Fibra construída com a amostra 02 (modelo de Chang)

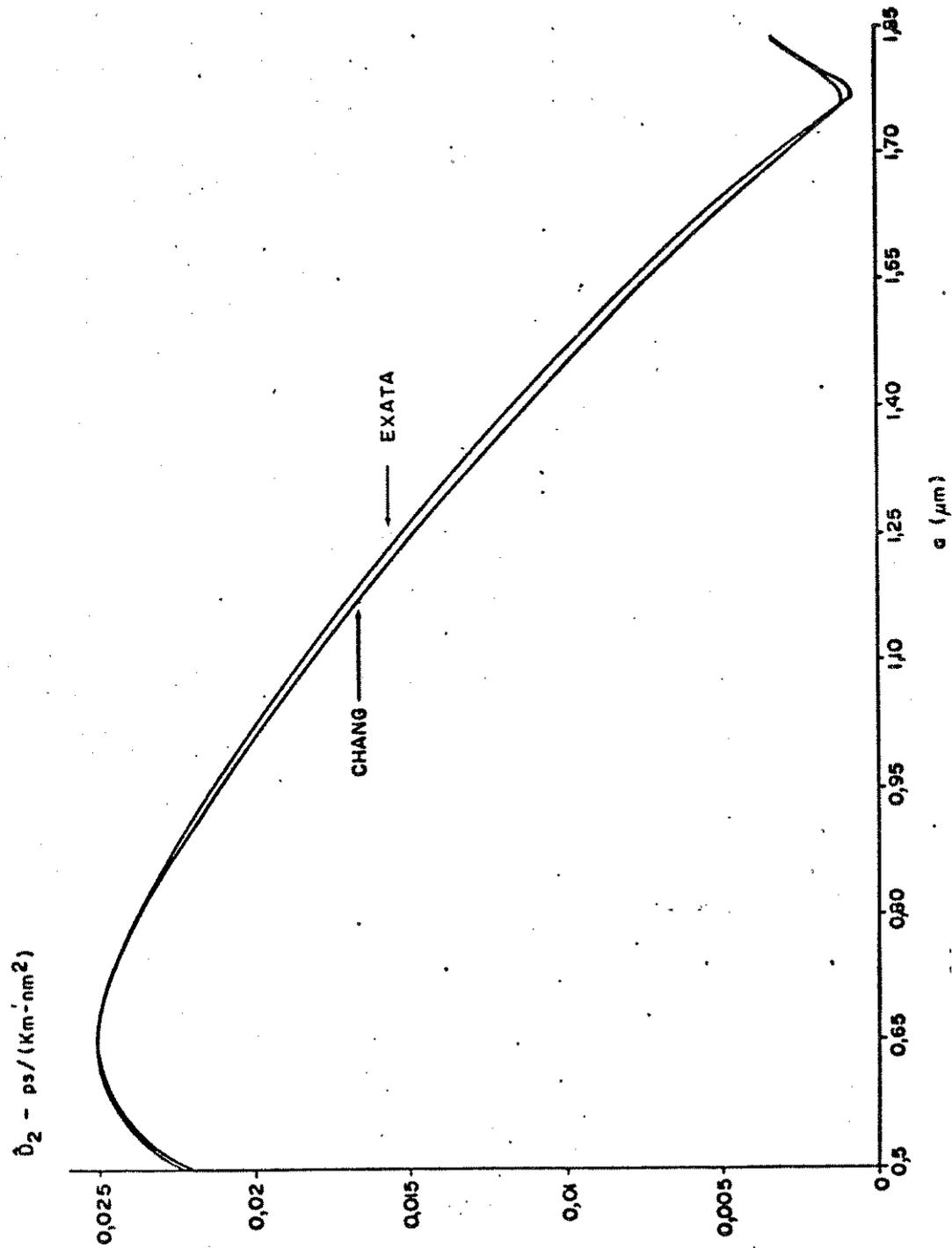


Fig. VII.7 - Variação da dispersão residual, \hat{D}_2 , em função do raio do núcleo da fibra, a. Diferença relativa: $\Delta = 2,15\%$
Fibra construída com a amostra 02 (modelo de Chang)

em situações reais.

O método de análise da dispersão proposto por D. Marcuse que apresentamos no item VI.5 do Capítulo VI, com algumas modificações em termos do formalismo e das técnicas computacionais empregadas por este autor {8}, baseia-se na solução da equação característica aproximada (ver equação (VI.33)) enquanto que o método desenvolvido por C.R.South {10}, que descrevemos em detalhes no Apêndice A, é baseado em uma aproximação assintótica para o parâmetro W, obtida a partir da equação característica aproximada, proposta por Rudolph e Neumann {17}.

Utilizamos nosso programa de computador, baseado em fórmulas exatas e em técnicas numéricas de diferenciação e interpolação, e os programas que implementamos baseados nos formalismos apresentados em {8} e {10} para efetuar algumas comparações. Neste caso, como dados de entrada, nosso programa aceita o conjunto de parâmetros descrito no item VI.2 do Capítulo VI. Os valores do comprimento de onda de dispersão total nula, λ em μm , da dispersão residual, \hat{D}_2 em $\text{ps}/(\text{Km}.\text{nm}^2)$, e da frequência normalizada, V, obtidos através do nosso método (E), do método de Marcuse (M) e do método de South (S) são mostrados no Quadro VII.6.

MATERIAL DO NÚCLEO	RAIO DO NÚCLEO (μm)	λ (μm)	\hat{D}_2 ($\text{ps}/(\text{Km}.\text{nm}^2)$)	V	MÉTODO
13,5% GeO_2 86,5% SiO_2	1,75	1,7689	0,005783	1,5898	E
		1,7542	0,005759	1,6017	M
		1,6661	0,007241	1,6781	S
13,5% GeO_2 86,5% SiO_2	2,00	1,5646	0,005782	2,0316	E
		1,5576	0,005891	2,0399	M
		1,5878	0,008006	2,0042	S
7,0% GeO_2 93,0% SiO_2	2,00	1,5562	0,008363	1,4671	E
		1,5533	0,008368	1,4694	M
		1,5026	0,008939	1,5126	S
7,0% GeO_2 93,0% SiO_2	2,25	1,4923	0,008205	1,7120	E
		1,4901	0,008236	1,7142	M
		1,4662	0,009499	1,7389	S

Quadro VII.6 - Valores de λ , \hat{D}_2 e V obtidos através do método exato (E), do método de Marcuse (M) e do método de South (S) para fibras construídas com diferentes dopagens de GeO_2 em SiO_2 como material do núcleo e SiO_2 fundido como material da casca.

Escolhemos como materiais para os núcleos das fibras analisadas diferentes dopagens de GeO_2 em SiO_2 e para a casca das fibras foi escolhida a amostra 01 do Quadro IV.1, Capítulo IV (SiO_2 fundido).

Pelos resultados apresentados no Quadro VII.6, observamos que o método de análise proposto por D. Marcuse {8} apresenta resultados bastante próximos daqueles que obtivemos a partir do formalismo exato (comparar valores (E) com valores (M)). Já o procedimento adotado por C.R. South (ver valores (S)) apresenta valores afastados daqueles obtidos usando o método exato e o proposto por Marcuse. Este fato é plenamente justificável, pois os métodos em comparação, apesar de serem fundamentados em equações exatas para o coeficiente de dispersão total embora estas equações estejam apresentadas em formas diferentes, têm procedimentos de cálculo dos valores de λ diferentes (na implementação dos programas de computador baseados em {8} e {10}, utilizamos a subrotina DDGT3, de diferenciação numérica {18}, e uma subrotina de interpolação pelo método de Lagrange que confeccionamos, para o cálculo do valor da dispersão residual, \hat{D}_2). Procuramos investigar, através da construção de algumas curvas comparativas, as origens das divergências entre os valores apresentados no Quadro VII.6.

Na Fig. VII.8 mostramos a variação com o comprimento de onda, λ em μm , dos efeitos de dispersão do material, D_m , de dispersão total, D_T , e de dispersão do guia de onda, D_g , calculados para uma fibra óptica construída com 13,5% GeO_2 - 86,5% SiO_2 como material do núcleo e SiO_2 fundido como material da casca. Estes efeitos têm unidades de $\text{ps}/(\text{Km} \cdot \text{nm}^2)$ e foram calculados para uma fibra óptica com raio do núcleo, a , igual a $1,75 \mu\text{m}$. As curvas de dispersão total, D_T , e de dispersão do guia de onda, D_g , no caso do método que desenvolvemos (curvas "EXATA") e no caso do proposto por Marcuse (curvas "MARCUSE"), foram traçadas a partir dos resultados obtidos com os programas que implementamos no computador PDP-10. As curvas destes dois efeitos dispersivos para o caso do método proposto por C.R. South {10}, foram traçadas a partir do programa que implementamos na calculadora HP-9820-A (curvas "SOUTH"). As curvas de dispersão do material, para os materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra em análise, foram obtidas através do formalismo desenvolvido no Capítulo IV. Através desta figura, podemos observar que as curvas construídas

a partir do método adotado por Marcuse são bastante próximas daquelas obtidas usando o nosso procedimento. Um erro relativo igual a 0,81% ocorre entre os comprimentos de onda de dispersão total nula calculadas pelo processo exato e pelo proposto por Marcuse (ver Quadro VII.6). Já o erro relativo nos comprimentos de onda de dispersão total nula obtidos através do nosso método e através do método desenvolvido por South é de 6,1% (ver Quadro VII.6). As curvas construídas usando o método descrito no Apêndice A são bastante afastadas das outras curvas apresentadas (comparar as curvas "SOUTH/" com as curvas "EXATA" e "MARCUSE").

Na Fig.VII.9 mostramos a variação dos comprimentos de onda de dispersão total nula, λ em μm , em função do raio do núcleo da fibra, a em μm , obtidos através dos três procedimentos em comparação. Os materiais utilizados na confecção do núcleo e da casca da fibra são os mesmos do parágrafo anterior.

Na Fig.VII.10 apresentamos a variação da dispersão residual, \hat{D}_2 em $\text{ps}/(\text{Km.nm}^2)$, em função do raio do núcleo da fibra, a em μm . Observamos que, em todas estas figuras, as curvas obtidas a partir do formalismo adotado por Marcuse e aquelas que obtivemos usando nosso método são bem próximas. As curvas obtidas do desenvolvimento proposto por South são bastante afastadas das demais e estão restritas à região $1,5 \leq V \leq 2,5$.

Nos Quadros VII.7(a) e (b) apresentamos alguns valores dos erros relativos cometidos em alguns parâmetros obtidos a partir dos dois formalismos assintóticos que estamos comparando com o nosso procedimento baseado em fórmulas exatas.

Das análises comparativas efetuadas, observamos que o método de C.R.South [10] apresenta-se fora dos padrões dos outros dois métodos. Erros relativos grandes, em comparação com os erros relativos apresentados pelo método de D.Marcuse, são cometidos tanto no comprimento de onda de dispersão total nula quanto, e principalmente, nos valores da dispersão residual. Estes fatos são atribuídos ao formalismo assintótico empregado por South (ver Apêndice A) no cálculo da constante de propagação normalizado do modo fundamental e de algumas de suas derivadas.

O procedimento proposto por Marcuse, que nós modificamos, apresenta resultados bem próximos aos que encontramos usand

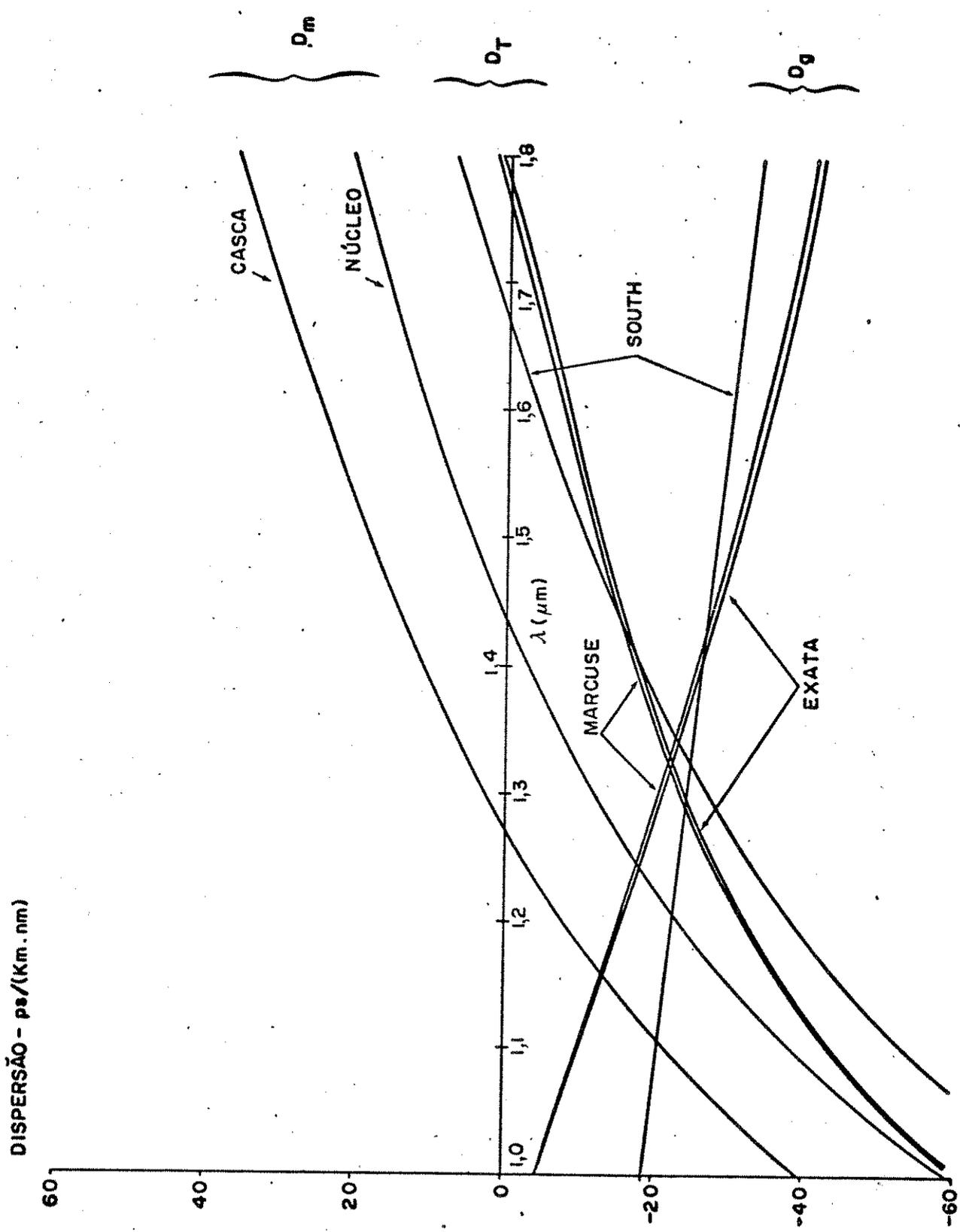


Fig. VII.8 - Curvas de dispersão para uma fibra óptica construída com 13,5% GeO_2 -86,5% SiO_2 (núcleo) e 100% SiO_2 (casca); D_m - dispersão do material, D_T - dispersão total e D_g - dispersão do guia de onda.
 Raio do núcleo da fibra: $a = 1,75\mu\text{m}$

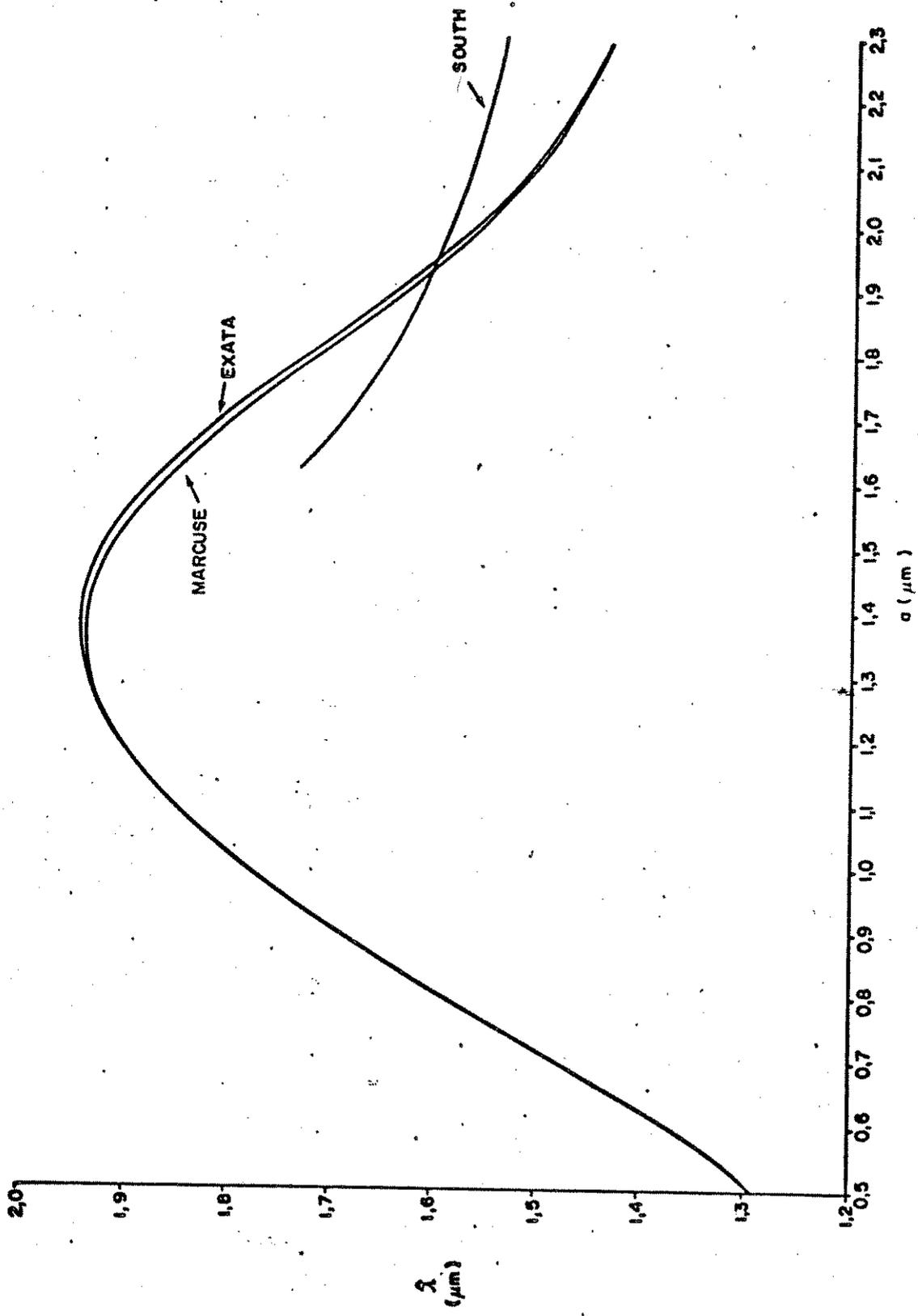


Fig. VII.9 - Variação do comprimento de onda de dispersão total nula, λ , em função do raio do núcleo da fibra, a .
 Material do núcleo: 13,5% GeO₂ - 86,5% SiO₂
 Material da casca: SiO₂ fundido

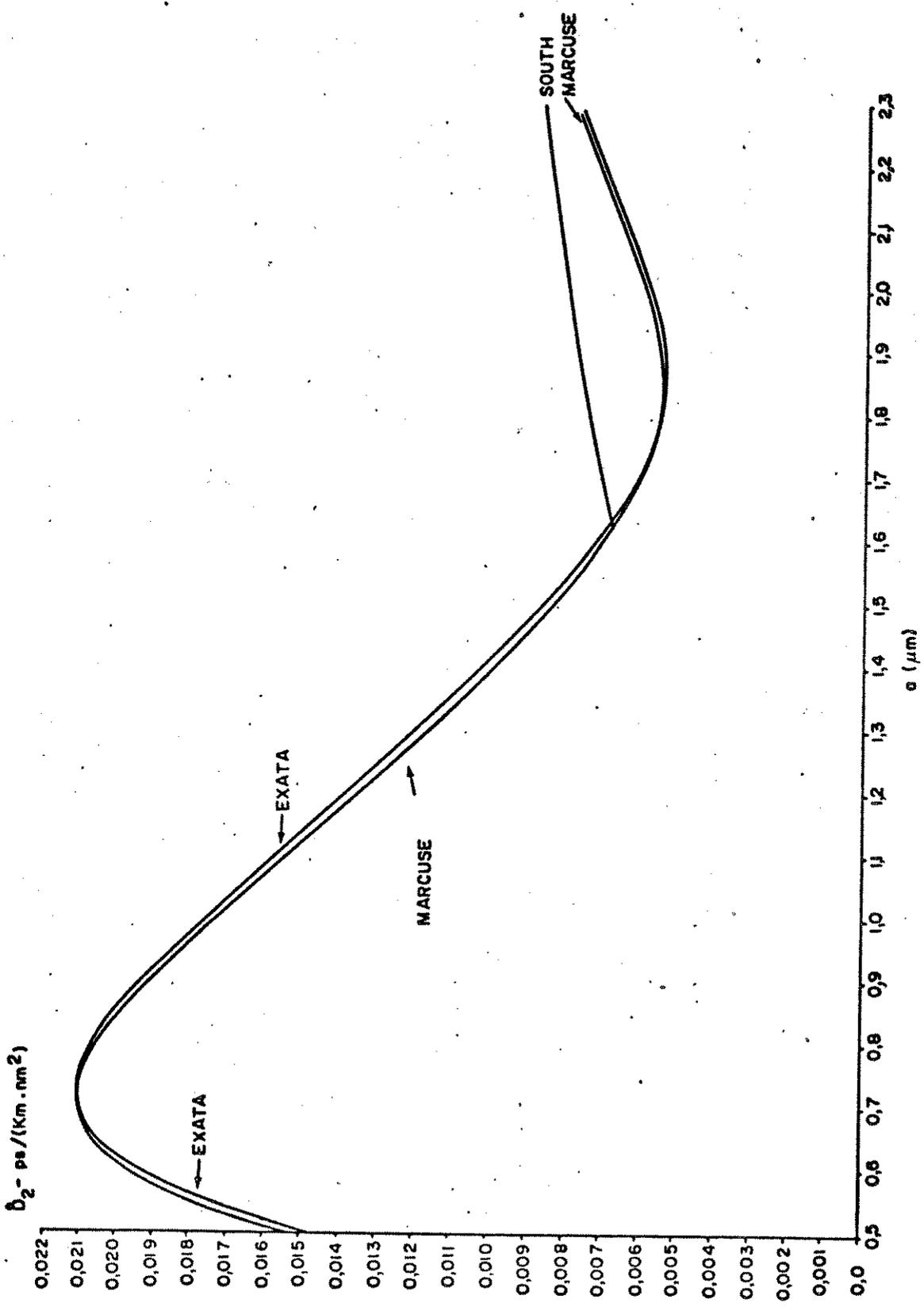


Fig. VII.10 - Variação da dispersão residual, \tilde{D}_2 , em função do raio do núcleo da fibra, a.
Material do núcleo: 13,5+ GeO₂ - 86,5% SiO₂
Material da casca : SiO₂ fundido

RAIO DO NÚCLEO $a(\mu\text{m})$	PARÂMETROS	
	$\hat{\lambda}$	\hat{D}_2
1,10	-0,25	1,47
1,40	0,24	2,46
1,60	0,66	2,15
1,75	0,84	0,42
2,10	0,25	-1,67
2,25	0,06	-0,74

(a)

RAIO DO NÚCLEO $a(\mu\text{m})$	PARÂMETROS	
	$\hat{\lambda}$	\hat{D}_2
1,65	7,73	- 2,85
1,75	6,17	-20,15
2,10	-3,83	-22,76
2,25	-6,20	-13,53

(b)

Quadro VII.7 - Erros relativos, em percentagem, para alguns parâmetros obtidos:

(a) pelo método de D.Marcuse e

(b) pelo método de C.R.South

do fórmulas exatas. As pequenas diferenças observadas são atribuídas ao uso da equação característica aproximada para o cálculo de valores da constante de propagação, β , do modo fundamental e também à utilização da fórmula assintótica para o parâmetro dU/dV .

CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolvemos um método analítico-computacional para o estudo das características de dispersão de pulsos em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau. Nosso procedimento fundamentou-se na equação exata dos autovalores do modo dominante de propagação nestes estruturas.

As principais técnicas de análise da dispersão de pulsos nestas fibras, que são todas baseadas em expressões assintóticas, foram apresentadas. Um confronto entre os parâmetros fundamentais necessários ao estabelecimento da equação exata da dispersão, a partir dos métodos aproximados, foi realizado e os métodos assintóticos que melhores desempenhos apresentaram foram escolhidos para terem seus resultados comparados aos resultados obtidos a partir do nosso procedimento.

As diferenças encontradas no comprimento de onda de dispersão total nula e na dispersão residual foram atribuídas ao aumento da diferença relativa entre os índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra e aos diferentes processos assintóticos usados no cálculo da constante de propagação do modo dominante e de algumas de suas derivadas.

Nosso método, além de ter apresentado excelentes resultados no limite assintótico, permite estender a análise da dispersão de pulsos em fibras deste tipo, resguardada a realizabilidade física das mesmas.

Os resultados que obtivemos ensejam a continuação da pesquisa efetuada na tentativa de se estabelecer o limite de validade dos formalismos assintóticos utilizados para este tipo de análise.

APÊNDICE A

DESCRIÇÃO DA ANÁLISE ASSINTÓTICA DA
DISPERSÃO PROPOSTA POR C.R.SOUTH{10}

I - INTRODUÇÃO

Fórmulas assintóticas que não necessitam de parâmetros obtidos como solução da equação característica das fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau são instrumentos poderosos na análise das características de propagação destas estruturas, pois podem ser implementados com facilidade em computadores de pequeno porte.

Por ser muito semelhante, em termos de equações para o coeficiente de dispersão total e por usar um formalismo aproximado bastante simplificado, implementamos em uma calculadora HP-9820-A o método de análise da dispersão proposto por C.R.South [10]. Implementamos também no computador PDP-10 um programa, em FORTRAN-IV, para o cálculo do comprimento de onda, λ , de dispersão total nula e da dispersão residual. A quantidade de memória requerida nestes cálculos é maior que a capacidade da calculadora mencionada.

Neste Apêndice apresentamos as equações necessárias à esta análise.

I - APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

No Capítulo V, item V.1, definimos o índice de fase efetivo de uma fibra óptica (ver equação (V.3)) através da expressão:

$$n_e = \left[n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)b \right]^{1/2} \tag{A.1}$$

onde n_1 e n_2 são, respectivamente, os índices de fase dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra óptica e b é a constante de propagação normalizada do modo em análise.

Partindo da definição de índice de grupo (ver equação (II.38), Capítulo II), podemos definir também o índice de grupo efetivo, N_e , em função do índice de fase efetivo, n_e , na forma:

$$N_e = n_e - \lambda \frac{dn_e}{d\lambda} \tag{A.2}$$

Usando a equação para o coeficiente de dispersão de pri

meira ordem (ver equação (II.44), Capítulo II) e a equação (A.2), podemos verificar que:

$$D_1 = - \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_e}{d\lambda^2} \quad (\text{A.3})$$

Por (A.3) e (A.1) calculamos então a dispersão total em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau. Sem entrar em detalhes, obtemos:

$$D_T = - \frac{\lambda}{c n_e} \left[(1-b) v_2 + b v_1 + 2b' \phi + \frac{1}{2} b'' \theta - \frac{1}{n_e^2} (n_2 n_2' + b \phi + \frac{1}{2} b' \theta)^2 \right] \quad (\text{A.4})^*$$

$$\text{onde: } v_i = n_i n_i'' + (n_i')^2 \quad ; \quad i=1,2$$

$$\phi = n_1 n_1' - n_2 n_2' \quad (\text{A.5})^*$$

$$\theta = n_1^2 - n_2^2$$

e a(s) linha(s), ('), acima dos parâmetros em (A.4) e (A.5) indicam diferenciação do respectivo parâmetro com relação ao comprimento de onda. O asterisco nas equações indica a existência de erro tipográfico nas equações correspondentes, apresentadas em {10}.

Com algum esforço analítico, podemos mostrar que a equação para a dispersão total apresentada em (A.4) é idêntica àquela deduzida por nós no item (VI.1) do Capítulo VI. É portanto uma equação exata.

Como citamos inúmeras vezes no decorrer do nosso trabalho, o parâmetro fundamental ao conhecimento dos efeitos dispersivos nas fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau é a constante de propagação normalizada do modo fundamental, b , e algumas de suas derivadas. Analisamos no Capítulo VI os métodos assintóticos propostos por C.T.Chang {6} e D. Marcuse {8}, cuja característica em comum era o cálculo destes fatores a partir da obtenção de raízes da equação característica aproximada. Estes dois procedimentos e o nosso, que é baseado em soluções da equação dos autovalores em sua forma exata, requerem considerável esforço computacional, além de exigirem computadores com capacidade de memória razoável, para que sejam implementados.

C.R.South {10}, entretanto, em sua análise, utiliza-se da relação linear, encontrada por Rudolph e Neumann {17}, que une os parâmetros W e V (ver equações (VI.68) e (VI.69)). Segundo {17}, temos:

$$W = cV + d \quad (A.6)$$

com:

$$c = 1,1428 \quad (A.7)$$

$$d = -0,996$$

sendo que a equação (A.6) é válida apenas no intervalo:

$$1,5 < V < 2,5 \quad (A.8)$$

Usando então a equação (A.6) e a definição para a constante de propagação normalizada, b, representada por:

$$b = \frac{W^2}{V^2} \quad (A.9)$$

encontramos:

$$b = \left(\frac{cV+d}{V} \right)^2 \quad (A.10)$$

e a partir desta, as equações para as derivadas b' e b'' necessárias à equação (A.4). São elas:

$$b' = \frac{2d}{V^2} (cV+d) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\phi}{\theta} \right) \quad (A.11)$$

e

$$b'' = \frac{2d}{V^2} \left[(2cV+3d) \left(\frac{\phi}{\theta} - \frac{1}{\lambda} \right)^2 - (cV+d) \left(\frac{v_1 - v_2}{\theta} \left(\frac{\phi}{\theta} \right)^2 - \frac{2\phi}{\lambda\theta} + \frac{2}{\lambda^2} \right) \right] \quad (A.12)^*$$

sendo válidas para as equações (A.11) e (A.12), aquelas relações apresentadas em (A.5).

Ficam estabelecidas desta maneira, as equações utilizadas por C.R.South em {10}.

Nós utilizamos o método de South e deduzimos as equações necessárias à análise da dispersão do guia de onda. Elas são facilmente dedutíveis a partir das equações (A.4)-(A.5) e (A.10) (A.12), fazendo-se os índices de fase dos materiais do núcleo e da casca da fibra óptica constantes com o comprimento de onda,

conforme procedimento estabelecido no Capítulo V. Deste modo, te remos:

$$D_g = - \frac{\lambda}{cn_e} \left[\frac{1}{2} b''\theta - \frac{1}{n_e^2} \left(\frac{1}{2} b'\theta \right)^2 \right] \quad (A.13)$$

com $\theta = n_1^2 - n_2^2$, como em (A.5). Podemos mostrar também, após uma ra zoável manipulação algébrica, que a equação (A.13) é idêntica ã quela que utilizamos para analisar o efeito dispersivo em ques tção e que é apresentada no item V.1 do Capítulo V.

Os parâmetros b' e b'' , necessários ao cálculo da dispersão do guia de onda no caso assintótico em análise, são obtidas a partir das equações (A.11) e (A.12). Assim:

$$b' = \frac{2d}{V^2\lambda} (cV+d) \quad (A.14)$$

e

$$b'' = \frac{2d^2}{V^2\lambda^2} \quad (A.15)$$

Utilizamos as equações para a dispersão total e dispersão do guia de onda, aqui apresentados, na implementação de pro gramas computacionais na máquina HP-9820-A. Quando necessários, as derivadas dos índices de fase dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra óptica são calculadas a partir das e quações apresentadas no item IV.1, do Capítulo IV. Este programa traça apenas as curvas dos dois efeitos dispersivos discutidos. O cálculo do comprimento de onda para dispersão total nula, λ , por requerer uma quantidade de memória acima da disponível naquela calculadora, foi efetuado através de um programa, escrito em FOR TRAN-IV com dupla precisão, implementado no nosso sistema de com putação baseado no computador PDP-10.

Os resultados obtidos, bem como sua avaliação em ter mos do método de análise exato, são apresentados no Capítulo VII, item VII.2.

APÊNDICE B

VALORES OBTIDOS ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DO
PROGRAMA DE COMPUTADOR BASEADO EM C.T.CHANG {6}
COMPARAÇÃO COM RESULTADOS PUBLICADOS

Neste Apêndice, apresentamos os resultados que obtivemos com a utilização do programa de computador que implementamos a partir de considerações apresentadas em {6}. Estes resultados ser vem para reforçar as conclusões a que chegamos baseados nas discrepâncias entre os valores apresentados nos Quadros VII.4 e VII.5 do Capítulo VII. Estes resultados são mostrados no Quadro B.1 sendo os valores inferiores aqueles publicados por Chang {6}, {7}. Usamos as amostras apresentadas no Quadro VII.1, do Capítulo VII.

AMOSTRA	DIÂMETRO DO NÚCLEO (μm)	DIFERENÇA RELATIVA Δ	DISPERSÃO TOTAL			REFERÊNCIAS PARA OS VALORES INFERIORES
			$\hat{\lambda}$ (μm)	\hat{D}_2 ps/(Km.nm ²)	V	
02	5,3	0,006	1,41937	0,0069905	1,85806	{6}
			1,419	0,00699	1,858	
02	5,3	0,00484	1,44317	0,0072247	1,64098	
			1,443	0,007223	1,641	
02	10,0	0,00104	1,31465	0,0109535	1,57713	
			1,315	0,01095	1,575	
13	5,3	0,006	1,31342	0,0097385	2,00216	
			1,313	0,00974	2,0	
13	5,3	0,00242	1,33556	0,0121467	1,25022	
			1,336	0,012115	1,250	
13	10,0	0,00055	1,24614	0,014358	1,20622	
			1,245	0,01465	1,172	
01	5,3	0,006	1,41370	0,0070880	1,86515	
			1,414	0,00708	1,865	
01	5,3	0,00484	1,43757	0,0073069	1,64705	
			1,438	0,00732	1,647	
01	10,0	0,00104	1,31119	0,011051	1,58095	
			1,311	0,0111	1,578	
02	9,4	0,0019	1,30942	0,010681	2,01190	{7}
			1,31	0,0107	2,0	

Quadro B.1 - Comparações entre valores calculados através do programa de computador baseado em {6} e os resultados publicados por C.T.Chang {6}, {7}.

APÊNDICE C

A NÃO-ADITIVIDADE DAS
DISPERSÕES DO MATERIAL E DO GUIA DE ONDA

Todos os trabalhos teóricos sobre dispersão em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau as sumem que a dispersão do guia de onda, D_g , e a dispersão do material que constitui o núcleo da fibra, D_m , quando somados dão como resultado a dispersão total, D_T . A contestação deste fato foi efetuada, pela primeira vez, por D.Marcuse {8} usando fórmulas as sintóticas.

Neste Apêndice apresentamos algumas curvas, obtidas a partir do formalismo exato da análise da dispersão que desenvolvemos, que ratificam o trabalho apresentado em {8}.

As fibras ópticas teóricas usadas em nossa investigação são apresentadas no Quadro C.1. Todas as fibras são construídas com o composto 13,5% GeO_2 - 86,5% SiO_2 como material do núcleo e 100% SiO_2 como material da casca.

MATERIAL DO NÚCLEO	RAIO DO NÚCLEO a (μm)
13,5% GeO_2 86,5% SiO_2	1,00
	1,75
	2,00

Quadro C.1 - Composição química e raios dos núcleos das fibras ópticas utilizadas na confecção das curvas da Fig. C.1.

Material da casca: 100% SiO_2 fundido

Na Fig. C.1 apresentamos as curvas da diferença $D_T - D_m$, linhas cheias, e da dispersão do guia de onda, D_g , para as fibras ópticas apresentadas no Quadro C.1. Obviamente, se os efeitos de dispersão do material do núcleo, D_m , e de dispersão do guia de onda, D_g , derem como resultados a dispersão total, as linhas tracejadas e cheias, para cada uma das fibras apresentadas, seriam coincidentes.

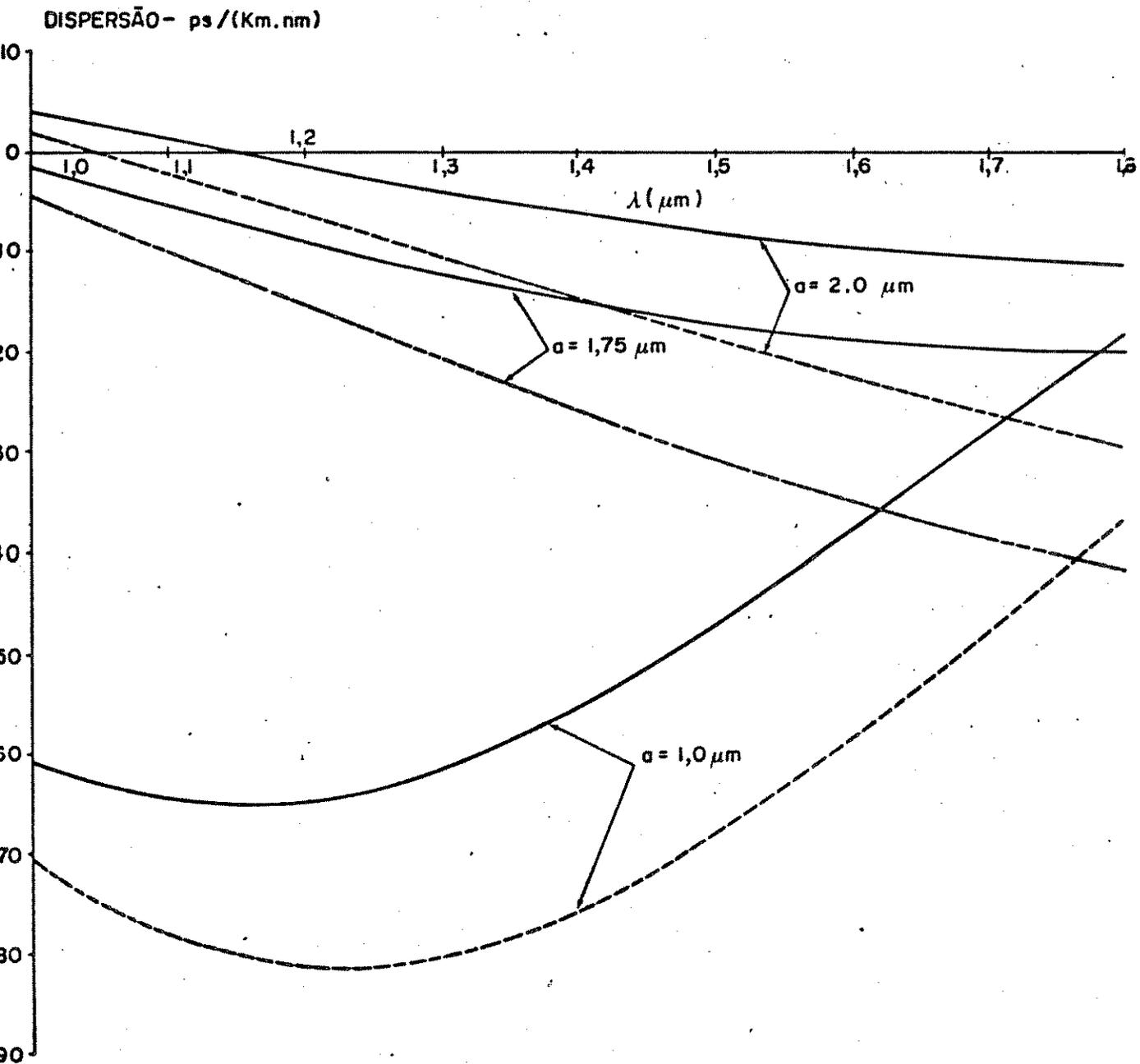


Fig.C.1 - Curvas das diferenças $D_T - D_m$, linhas cheias, e da dispersão do guia de onda, D_g , para as fibras ópticas apresentadas no Quadro C.1. Evidência da não-aditividade dos efeitos dispersivos D_m e D_g em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau. O parâmetro a é o raio do núcleo da fibra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- {1} - D.Marcuse , "Multimode Fiber with z-dependent α -value" , Applied Optics, Vol.18, No.13, July/79, pp.2229-2231.
- {2} - S.E.Miller, E.A.J.Marcatili, T.Li , "Research Toward Optical-Fiber Transmission Systems - Part I : The Transmission Medium", Proc. IEEE, Vol.61, No.12,Dec./73,pp.1703-1726.
- {3} - M.S.Sodha, A.K.Gathak, "Inhomogeneous Optical Waveguides" , Plenum Press, New York, 1977, Ch. 1,4.
- {4} - T.Miya, Y.Tesunuma, T.Hosaka, T.Miyashita, "Ultimate Low-Loss Single Mode Fibre at 1.55 μ m", Electronics Letters, Vol.15, No.4, 15th.Feb./79, pp.106-108.
- {5} - K.Nakagawa, T.Ito, "Detailed Evaluation of an Attainable Repeater Spacing for Fibre Transmission at 1.3 μ m and 1.55 μ m Wavelengths", Electronics Letters, Vol.15, No.24, 22nd.Nov./79, pp. 776-777.
- {6} - C.T.Chang, "Minimum Dispersion in a Single-Mode Step- Index Optical Fiber", Applied Optics, Vol.18, No.4, July/79 , pp.2516-2522.
- {7} - C.T.Chang, "Minimum Dispersion at 1.55 μ m for Single - Mode Step-Index Fibers", Electronics Letters, Vol.15, No.23, Nov./79,pp.765-767.
- {8} - D.Marcuse, "Interdependence of Waveguide and Material Dispersion", Applied Optics, Vol.18, No.7,Sept./79, pp. 2930-2932.
- {9} - D.Gloge, "Dispersion in Weakly Guiding Fibers", Applied Optics, Vol.10, No.11,Nov./71, pp. 2442-2445.
- {10} - C.R.South, "Total Dispersion in Step-Index Monomode Fibres", Electronics Letters, Vol.15, No.13, June/79,pp. 394-395.

- {11} - K.I.White, B.P.Nelson, "Zero Total Dispersion in Step - Index Monomode Fibres at 1.30 and 1.55 μ m", Elect. Letters, Vol.15, No.13, June/79, pp.396-397.

- {11b}- K.I.White, B.P.Nelson - Reply (ã ref.{7}), Elect. Letters, Vol.15, No.23,Nov./79, pp.767.

- {12} - K.Jürgensen, "Dispersion Minimum of Monomode Fibers", Applied Optics, Vol.18, No.8, April/79, pp. 1259-1261.

- {13} - F.P.Kapron, "Maximum Information Capacity of Fibre - Optic Waveguides", Electronics Letters, Vol.13, No.4, Feb./77, pp. 96-97.

- {14} - M.Miyagi, S.Nishida, "An Approximate Formula for Describing Dispersion Properties of Optical Dielectric Slab and Fiber Wideguides", JOSA, Vol.69, No.2, Feb./79, pp.291-293.

- {15} - R.A.Sammut, "Analysis of Approximation for the Mode Dispersion in Monomode Fibres", Electronics Letters, Vol.15, No.19, Sept./79, pp. 590-591.

- {16} - D.Gloge, "Weakly Guiding Fibers", Applied Optics, Vol.10, Oct./71, pp. 2252-2258.

- {17} - H.D.Rudolph, E.G.Neumann, "Approximations for the Engenvalues of the Fundamental Mode of a Step Index Glass Fiber Waveguide", Nachrichtentechn,Z., Vol.4, 1976, pp. 328-329.

- {18} - Scientific Subroutine Package (SSP), IBM Application Program, H20-0205-3, System/360, Programmer's Manual, 1968.

- {19} - S.D.Conte, "Elementos de Análise Numérica", Editora Globo, Porto Alegre, 1971, Cap. 2-3.

- {20} - A.W.Snyder, "Asymptotic Expressions for Eigenfunctions and Eigenvalues of a Dielectric or Optical Waveguide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-17, No.12, Dec., 69, pp.1130-1138.

- {21} - F.A.Jenkis, H.E.White, "Fundamentals of Optics", 4th.Edition, McGraw-Hill, Kogakusha, LTD, Tokio, 1976, Ch. 23.
- {22} - D.Marcuse, "Light Transmission Optics", Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1972, Ch. 1,8.
- {23} - W.W.Bell, "Special Functions for Scientists and Engineers", D.Van Nostrand Co. LTD, London, 1968, Ch. 1,3.
- {24} - S.P.Schilesinger, P.Diament, A.Vigants, "On Higher Order Hybrid Modes of Dielectric Cylinders", IEEE Transc. Microwave Theory Tech., Vol.MMT-8, No.2, March/60, pp. 252 - 253.
- {25} - P.J.B.Clarricoats, K.B.Chan, "Propagation Behaviour of Cylindrical-Dielectric-Rod Waveguides", Proc.IEEE, Vol. 120, No.11,Nov./73, pp. 1371-1378.
- {26} - W.M.Elsasser, "Attenuation in a Dielectric Circular Rod", Journal of Applied Physics, Vol.20, No.12,Dec./49, pp. 1193-1196.
- {27} - A.L.Jones, "Coupling of Optical Fibers and Scattering in Fibers", JOSA, Vol.55, No.3, March/65, pp. 261-271.
- {28} - R.W.Ditchburn, "Light", 3rd. Edition, Academic Press,London, 1976, Ch. 15.
- {29} - L.E.Sutton, O.N.Stavroudis, "Fitting Refractive Index Data by Least Squares", JOSA, Vol.51, No.8,Aug./61, pp. 901-905.
- {30} - B.W.Morrissey, C.J.Powell, "Interpolation of Refraction Index Data", Applied Optics, Vol.12, No.7, July/73, pp. 1588-1591.
- {31} - J.A.Arno., "Beam and Fiber Optics", Academic Press,N.York, 1976, Ch. V.

- {32} - J.W.Fleming, "Material and Mode Dispersion in $\text{GeO}_2 \cdot \text{B}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$ Glasses", Journal of the American Ceramic Society, Vol.59, Nos. 11-12, Nov.-Dec./76, pp. 503-507.
- {33} - J.W.Fleming, "Material Dispersion in Lightguide Glasses" , Electronics Letters, Vol.14, No.11, May/78,pp.326-328.
- {34} - J.H.Malitson, "Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica", JOSA, Vol.55, No.10, Oct./65 , pp. 1205-1209.
- {35} - K.C.Koo, G.A.Hockhan, "Dielectric Fiber Surface Waveguides for Optical Frequencies", Proc.IEEE, Vol.113, No. 7 , July/66, pp.1151-1158.
- {36} - W.A.Gambling, H.Matsumura, C.M.Ragdale, "Zero-Mode Dispersion in Single-Mode Fibres", Electronics Letters, Vol. 14, No.19,Sept./78, pp. 618-620.
- {37} - A.W.Snyder, R.A.Sammut, "Dispersion in Graded Single- Mode Fibres", Electronics Letters, Vol.15, No.10, May/79 , pp. 269-271.