

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

Departamento de Automação

MODELAMENTOS DE MOTORES DE INDUÇÃO: UMA
CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO CONTROLE
DE TORQUE E VELOCIDADE

MAURO SERGIO MISKULIN

Orientador: YARO BURIAN JUNIOR

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção do título de "MESTRE EM CIÊNCIAS".

dezembro - 1974

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meu agradecimento a todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram na realização deste trabalho. Em particular sou grato a :

Dr. Yaro Burian Junior, meu orientador, pela sua assistência, estímulo e inúmeras sugestões em todas as fases deste trabalho.

Srtas. Edelweis e Eliana Fussako - pela paciência e boa vontade no trabalho de datilografia.

SUMÁRIO

O modelo normal do motor de indução é constituído de seis equações diferenciais a seis incógnitas, com os coeficientes variáveis com o tempo.

Em regime permanente, supondo-se velocidade angular do rotor constante e, em operação balanceada elas podem ser resolvidas analiticamente.

Modelos tem sido apresentados para soluções em computadores porém, envolvendo dificuldades no cálculo numérico e tempo de computação grande.

O presente trabalho procurou um modelo de ordem menos elevada que possibilita um tratamento analítico mais simples, e que, se tratado digitalmente reduz o tempo de computação.

ÍNDICE

I. Introdução.....	1
1.1 - Do Motor.....	1
1.2 - Do Modelo Normal.....	1
1.3 - Do Controle de Velocidade.....	6
1.4 - Dos Modelos Transformados.....	8
1.4.1 - Modelo de Kron.....	8
1.4.2 - Modelo de Robertson.....	11
1.5 - Objetivo.....	14
II. Desenvolvimento de Modelos Analíticos Simplificados... 15	15
2.1 - Redução da Ordem do Modelo.....	15
2.1.1 - Modelo.....	15
2.1.2 - Equação Característica.....	17
2.1.2.1 - Três Fases Conduzindo.....	17
2.1.2.2 - Fase a Bloqueada.....	19
2.1.2.3 - Fases a e c Bloqueadas.....	21
2.1.2.4 - Conclusão.....	22
2.2 - Resposta ao Degrau.....	23
2.2.1 - Ilustração.....	23
2.2.2 - Aplicação ao Nosso Caso.....	25
2.2.3 - Resposta ao Degrau.....	26
2.3 - Solução em Regime Permanente Senoidal.....	29
2.4 - Circuitos Equivalentes para a Máquina em Regime Senoidal.....	32
2.4.1 - Máquina Parada.....	32
2.4.2 - Máquina girando com Velocidade Constante e balanceada.....	35
2.5 - Cálculo do Torque em Regime Permanente Senoidal.....	38
III. Conclusões.....	43
Referências.....	44

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - DO MOTOR

De todos os tipos conhecidos de motores, os de indução são os que adquiriram maior aplicação na indústria. Sua difusão deveu-se a algumas qualidades, tais como: baixo custo, segurança de operação, fácil manutenção e alto rendimento.

Há dois tipos principais de motores de indução: o de rotor enrolado e o de rotor em gaiola de esquilo. A diferença principal entre eles está nos enrolamentos do rotor. O primeiro tem um enrolamento polifásico simétrico no rotor, idêntico ao de estator, sendo seus terminais acessíveis através de anéis coletores e em operação normal estes terminais são ligados a impedâncias passivas balanceadas. No segundo tipo o enrolamento consiste de barras (usualmente de cobre ou alumínio) fundidas nas ranhuras do rotor, e ligadas entre si em cada uma das extremidades por anéis de remate. Ambos tem o mesmo princípio de operação, sendo as correntes de rotor induzidas pelo estator.

Os motores de indução mais utilizados são os trifásicos, onde os enrolamentos das tres fases do estator são dispostos de uma maneira simétrica, tal que haja uma defasagem de 120 graus elétricos entre os eixos de duas fases.

No presente trabalho consideraremos motores de indução trifásico com dois polos (figura 1.1) .

1.2 - DO MODELO NORMAL (*)

(*) Em Inglês referido como Coupled-Circuit Model (1) .

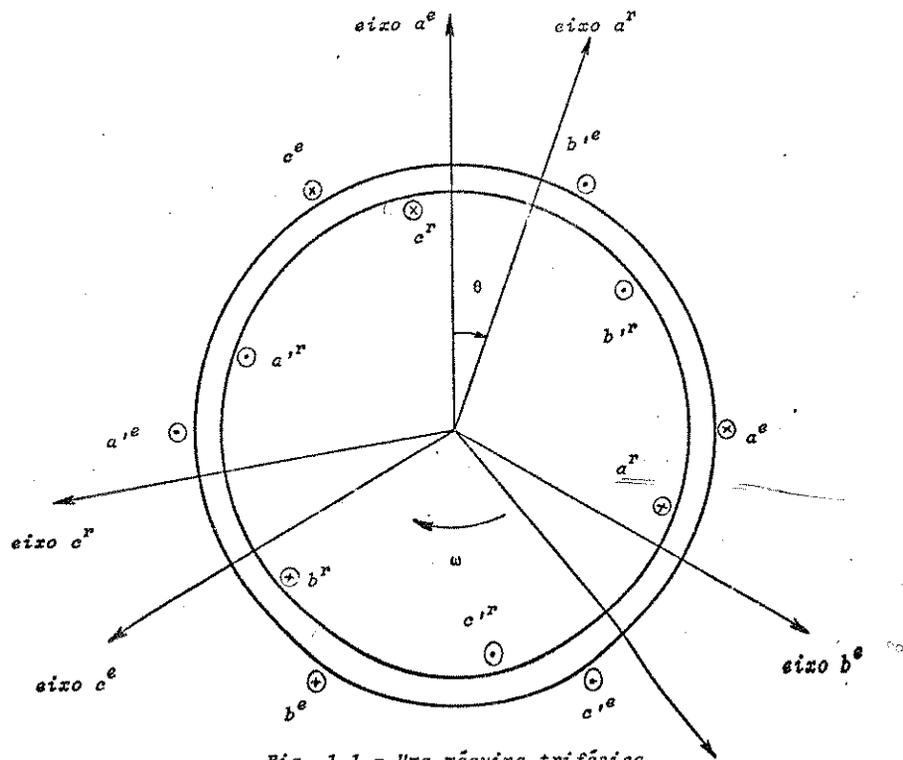


Fig. 1.1 - Uma máquina trifásica simétrica com 2 polos

Com a finalidade de se tornarem mais simples os modelos matemáticos de motores de indução, certas hipóteses são apresentadas, sem alterarem significativamente a precisão. Assim admitem-se:

- a) Entreferro uniforme
- b) Circuito magnético linear
- c) Parâmetros constantes
- d) Enrolamentos de estator idênticos, distribuídos de modo a produzir força-magnetomotriz espacial senoidal
- e) Enrolamentos de rotor distribuídos de modo que a força-magnetomotriz do rotor seja também uma senóide com o mesmo número de polos do estator.

Consideraremos ainda:

- a) Fluxo de dispersão nulo
- b) Relação de espiras fase do estator/fase do rotor unitária.

Com as hipóteses acima, os parâmetros (indutâncias e resistências) do motor serão:

$$L_{aa}^{ee} = L_{bb}^{ee} = L_{cc}^{ee} = L$$

$$L_{ab}^{ee} = L_{bc}^{ee} = L_{ca}^{ee} = \frac{1}{2} L$$

$$L_{aa}^{er} = L_{bb}^{er} = L_{cc}^{er} = \eta L \cos \theta$$

$$L_{ab}^{er} = L_{bc}^{er} = L_{ca}^{er} = \eta L \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$L_{ac}^{er} = L_{ba}^{er} = L_{cb}^{er} = \eta L \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$L_{aa}^{rr} = L_{bb}^{rr} = L_{cc}^{rr} = L$$

$$L_{ab}^{rr} = L_{bc}^{rr} = L_{ca}^{rr} = \frac{1}{2} L$$

$$R_a^e = R_b^e = R_c^e = R$$

$$R_a^r = R_b^r = R_c^r = r$$

onde representamos:

L = indutância

R = resistência

a, b, c = fases

e = estator

r = rotor (como índice)

η = coeficiente de acoplamento estator/rotor

θ = deslocamento entre os eixos das fases a do estator e do rotor

Com a notação proposta, em forma matricial, as equações volt-ampère para o motor podem ser escritas como (2):

$$\underline{v} = (R) \underline{i} + p \underline{\lambda} \quad (1.1)$$

onde

$$\underline{v} = (v_a^e \ v_b^e \ v_c^e \ v_a^r \ v_b^r \ v_c^r)^T \quad (1.2)$$

$$\underline{i} = (i_a^e \ i_b^e \ i_c^e \ i_a^r \ i_b^r \ i_c^r)^T$$

$$\underline{\lambda} = (\lambda_a^e \quad \lambda_b^e \quad \lambda_c^e \quad \lambda_a^r \quad \lambda_b^r \quad \lambda_c^r)^T$$

p = operador de diferenciação em relação ao tempo

$$(R) = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{r} \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda}$ é a matriz de fluxos ligados e pode ser escrita :

$$\underline{\lambda} = (L) \underline{i} \quad (1.3)$$

onde (L) é descrita na equação (1.7)

Em operação normal

$$v_a^r = v_b^r = v_c^r = 0$$

e portanto (1.2) será escrita como:

$$\underline{v} = (v_a^e \quad v_b^e \quad v_c^e \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \quad (1.4)$$

Levando (1.4) e (1.3) em (1.1) teremos :

$$\underline{v} = (R) \underline{i} + p (L) \underline{i} \quad (1.5)$$

ou

$$\underline{v} = (Z) \underline{i} \quad (1.6)$$

com

$$(Z) = (R + p L)$$

$$\begin{aligned}
 (7) &= \begin{bmatrix}
 L & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & nL \cos \theta & nL \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & nL \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\
 -\frac{L}{2} & L & L & nL \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & nL \cos \theta & nL \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\
 -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & L & nL \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & nL \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & nL \cos \theta \\
 nL \cos \theta & nL \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & nL \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & L & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} \\
 nL \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & nL \cos \theta & nL \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\frac{L}{2} & L & -\frac{L}{2} \\
 nL \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & nL \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & nL \cos \theta & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & L
 \end{bmatrix} \\
 & \quad \quad \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

O comportamento dinâmico da máquina pode ser estudado pela equação abaixo, que descreve a mudança na velocidade.

$$J \ddot{\theta} + D \dot{\theta} + T_c = T_e \quad (1.8)$$

onde

T_e = torque eletromagnético

T_c = torque de carga

D = coeficiente de amortecimento

Com $\dot{\theta} = p\theta = \omega =$ velocidade angular do rotor, (1.8) pode ser escrita como:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} (T_e - T_c - D\omega) \quad (1.9)$$

As equações (1.5) e (1.9) compõem o que chamamos modelo normal da máquina de indução (3).

1.3 - DO CONTROLE DE VELOCIDADE

O problema do controle de velocidade de motores de indução é um dos mais difíceis que tem preocupado os engenheiros.

Muitos métodos tem sido propostos e experimentados. Uns alteram a velocidade síncrona, outros o escorregamento. Como o rendimento ideal é igual a $(1 - s)$ por unidade, onde s é o escorregamento, vemos que os mais eficientes são os que alteram a frequência.

A utilização do tiristores possibilita a obtenção de fontes de tensão de frequência variável. Tem sido estudadas algumas realizações do tipo inversor de frequência variável, que fornece uma tensão não senoidal, porém de frequência variável, a partir de uma tensão contínua (4). Uma possibilidade de realização consideravelmente mais simples se tem fornecendo apenas frequências discretas; seria a utilização de meios ciclos de diferentes fases ,

como indicado na figura 1.2.

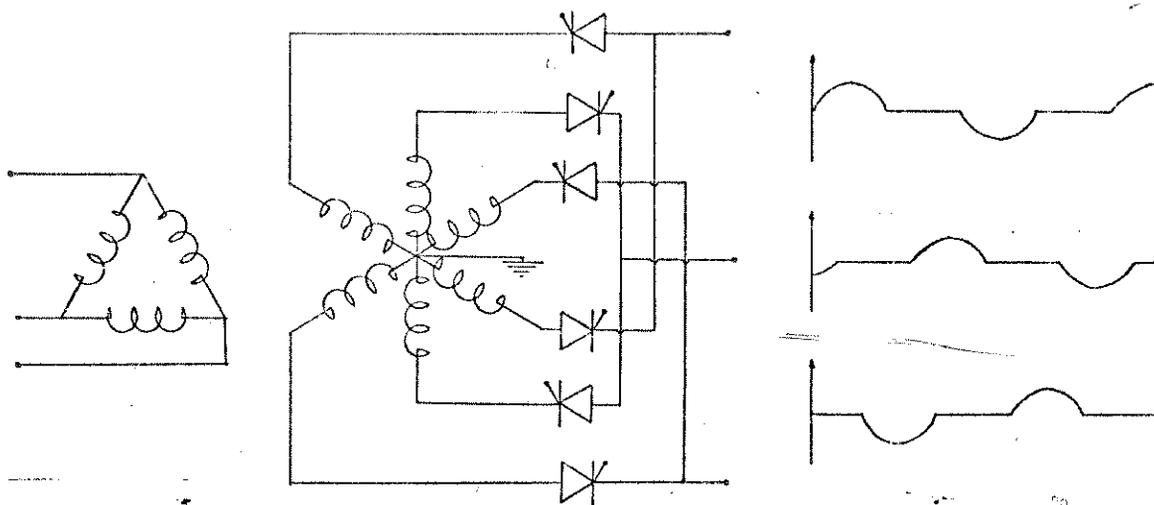


Fig. 1.2 - Esquema para obtenção de uma fonte de tensão com frequência $f/2$.

Com o propósito de alterar o escorregamento, um método - largamento usado consiste na colocação de um par de tiristores ligados "back-to-back" em cada linha de um motor ligado em Y. À propósito deste método, já foi demonstrado em (5) ser esta conexão superior às outras possíveis.

A análise transitória e em regime permanente do motor de indução em tais condições dão origem a novos problemas. Os problemas surgem principalmente pelo fato dos tiristores introduzirem - correntes limitadas e o período de conduções geralmente ser desconhecido. Certos modos de operação são possíveis, onde as fases são colocadas em circuito aberto ciclicamente durante os períodos de bloqueio dos tiristores.

Se a análise for feita digitalmente a partir do modelo - normal (1.5), será interessante reescrevê-lo como :

$$p\underline{i} = [L]^{-1} \underline{v} - [L]^{-1} [R]\underline{i} \quad (1.10)$$

Como a equação acima é descrita em termos dos parâmetros reais da máquina, as limitações nas correntes podem ser aplicadas facilmente mas, a dependência da matriz indutância $[L]$ da posição do rotor torna necessária sua inversão em cada etapa dos cálculos,

fazendo com que o método seja lento.

Um problema adicional é ser muito pequeno o determinante da matriz $[L]$, com o que as matrizes $[L]^{-1}$ e $[L]^{-1} [R]$ apresentam valores numéricos elevados para seus termos. Aliás, o determinante da matriz $[L]$ depende dos fluxos de dispersão no motor e, não só estes fluxos são procurados serem pequenos, como a diferença entre seus valores em máquinas idênticas não ser desprezível.

A fim de superarmos estes inconvenientes, modelos modificados tem sido propostos a partir dos trabalhos desenvolvidos por Blondel, Park, Kron e outros. São obtidos aplicando-se certas transformações no modelo normal (1.5) e nos levam a novos sistemas de equações diferenciais mais simples de serem simulados e que em operação à velocidade constante tornam-se modelos com equações diferenciais lineares a coeficientes constantes.

Eliminamos nesses modelos a necessidade da inversão da matriz indutância $[L]$ a cada etapa, no entanto os determinantes das matrizes indutâncias continuam evidentemente pequenos.

1.4 - DOS MODELOS TRANSFORMADOS

1.4.1 - Modelo de Kron

Este modelo consiste em fazermos uma mudança de variáveis usando um sistema de referência com dois eixos em quadratura. Estes eixos representados por d e q e denominados direto e em quadratura podem ser de três tipos:

- a) Estar girando com a mesma velocidade angular da força-magnetomotriz produzida pelas correntes de estator, ou seja, com a velocidade síncrona.
- b) Estar no rotor, portanto, girando com a velocidade angular do rotor.
- c) Estar fixo no estator

Este último tipo é o mais conveniente quando se faz controle de velocidade pelo estator. É o desenvolvido por Park e modificado por Kron.

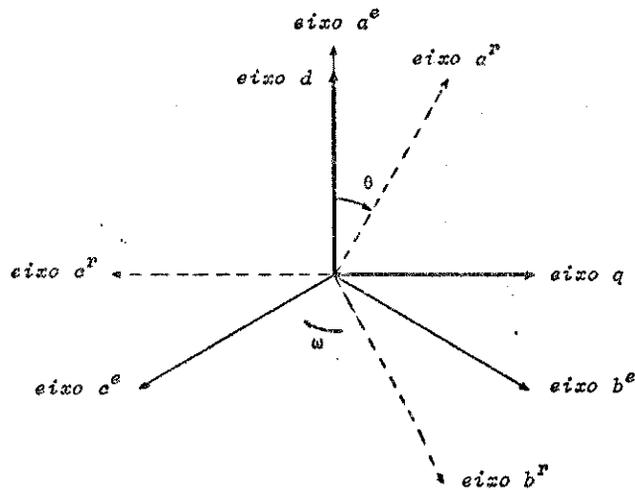


Fig. 1.3 - Eixo das fases do estator e do rotor com o equivalente dq estacionário.

As correntes transformadas segundo estes novos eixos serão :

$$i_d^e = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i_a^e + i_b^e \cos \frac{2\pi}{3} + i_c^e \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (1.11)$$

$$i_q^e = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i_a^e \cos \frac{\pi}{2} + i_b^e \cos \frac{\pi}{6} - i_c^e \cos \frac{\pi}{6} \right] \quad (1.12)$$

$$i_0^e = \sqrt{\frac{1}{3}} \left[i_a^e + i_b^e + i_c^e \right] \quad (1.13)$$

$$i_d^r = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i_a^r \cos \theta + i_b^r \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + i_c^r \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (1.14)$$

$$i_q^r = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[i_a^r \sin \theta + i_b^r \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + i_c^r \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (1.15)$$

$$i_0^r = \sqrt{\frac{1}{3}} \left[i_a^r + i_b^r + i_c^r \right] \quad (1.16)$$

As equações (1.10), (1.11), (1.13) e (1.14) podem ser obtidas por inspeção da figura 1.3 e representam as composições das correntes de estator e de rotor segundo os eixos d e q a partir das correntes originais.

As equações (1.13) a (1.16) definem as correntes de sequência zero para o estator e rotor respectivamente. Elas completam o sistema de equações.

As correntes transformadas ou "correntes fictícias" estão ligadas às correntes reais pela matriz de transformação $[T]$ abaixo que podemos tirar das equações (1.11) a (1.16) :

$$[T] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Portanto

$$[T] \underline{idq} = \underline{i}$$

onde

$$\underline{idq} = \begin{bmatrix} i_d^e & i_q^e & i_0^e & i_d^r & i_q^r & i_0^r \end{bmatrix}^T$$

Para mantermos a invariância na potência, e portanto no torque, definimos :

$$\underline{v}_{dq} = [T]^T \underline{v}$$

onde

$$\underline{v}_{dq} = [v_d^e \quad v_q^e \quad v_0^e \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Este modelo apresenta a matriz de indutância $[L]$ independente da posição do rotor mas, a necessidade de conhecermos as variáveis reais em cada etapa dos cálculos exigem transformações das "variáveis fictícias" em variáveis reais, o que envolve um certo número de cálculos e tempo de computação.

1.4.2 - Modelo de Robertson

Este modelo proposto em (6) por Robertson-Hebbar procura manter as correntes de estator o mais próximo possível das reais, enquanto que as de rotor são expressas em função de duas fixas no estator, segundo eixos defasados de 120° , eliminando como no modelo anterior na matriz indutância $[L]$, a dependência da posição do rotor.

As correntes de estator são transformadas em :

$$i_a^e = i_0^e + i_\alpha^e \quad (1.17)$$

$$i_b^e = i_0^e + i_\beta^e = i_0^e - i_\alpha^e - i_\gamma^e \quad (1.18)$$

$$i_c^e = i_0^e + i_\gamma^e$$

onde

i_0^e = é a componente de seqüência zero

i_{α}^e e i_{γ}^e são componentes de estator em fase com as correntes reais

Desde que podemos assumir que não há corrente de seqüência zero no rotor de motor de indução, e como:

$$i_b^r = -i_a^r - i_c^r$$

teremos

$$\begin{bmatrix} i_a^r \\ i_c^r \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha}^r \\ i_{\gamma}^r \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

A equação (1.20) pode ser obtida por inspeção da figura 1.3.

Em operações com neutro isolado as equações (1.17), (1.18) e (1.19) expressam as correntes reais de estator, o que reduz consideravelmente os cálculos na simulação.

Então:

$$[C] \underline{i}' = \underline{i}$$

com

$$\underline{i}' = \begin{bmatrix} i_0^e & i_{\alpha}^e & i_{\gamma}^e & i_{\alpha}^r & i_{\gamma}^r \end{bmatrix}^T$$

e

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) & -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) + \sin\theta \right| & \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \sin\theta - \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) \right| \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\theta & \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) \end{bmatrix}$$

O modelo assim transformado fica:

$$\underline{v}' = [R'] \underline{i}' + [L'] p \underline{i}' \quad (1.22)$$

com

$$\underline{v}' = [C]^T \underline{v}$$

$$[R'] = \begin{bmatrix} 3R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2R & R & 0 & 0 \\ 0 & R & -2R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} \eta L \omega & 2r & r - \frac{3\sqrt{3}}{2} L \omega \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} \eta L \omega & 0 & r + \frac{3\sqrt{3}}{2} L \omega & 2r \end{bmatrix}$$

e

$$[L'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & \frac{3}{2}L & 3\eta L & \frac{3}{2}\eta L \\ 0 & \frac{3}{2}L & 3L & \frac{3}{2}\eta L & 3\eta L \\ 0 & 3\eta L & \frac{3}{2}\eta L & 3L & \frac{3}{2}L \\ 0 & \frac{3}{2}\eta L & 3\eta L & \frac{3}{2}L & 3L \end{bmatrix}$$

Este modelo é o que melhor se aplica em simulações onde necessitamos um contínuo conhecimento das correntes reais, que é o caso de controle de velocidade pelo estator.

1.5 - OBJETIVO

Como os problemas de cálculo numérico decorrem em parte da "quase singularidade" da matriz indutância $[L]$, é possível tentar uma solução diferente e que a nosso conhecimento, é nova. Se a matriz indutância for admitida singular a ordem do sistema será reduzida e eventualmente será possível um tratamento analítico.

CAPÍTULO II

DESENVOLVIMENTO DE MODELOS ANALÍTICOS SIMPLIFICADOS

2.1 - REDUÇÃO DA ORDEM DO MODELO

2.1.1 - Modelo

Robertson e Hebbbar em seus trabalhos passam do "modelo normal (1.5) para um modelo com as "correntes fictícias" e chegam em (1.22) onde as correntes do rotor são expressas em função de duas correntes segundo eixos fixos no estator, eliminando assim na matriz de indutância a dependência da posição do rotor.

Vamos introduzir uma modificação neste modelo para chegarmos a um novo onde as correntes de estator sejam as correntes reais, conservando porém as "correntes fictícias" do rotor, ou seja:

$$\underline{i}_{\text{nov}} = [i_a^e \quad i_b^e \quad i_c^e \quad i_\alpha^r \quad i_\gamma^r]^T \quad (2.1)$$

Façamos portanto a transformação :

$$[C] \underline{i}_{\text{nov}} = i'$$

com i' definido em (1.21) e

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No novo modelo, mantida a velocidade angular do rotor constante e lembrando das hipóteses já consideradas, ou seja :

- relação de espiras unitária
- acoplamento perfeito entre as fases do estator e entre as fases do rotor
- acoplamento η entre estator e rotor

teremos:

$$\underline{v}_{novo} = [R_{novo} + L_{novo} p] \underline{i}_{novo} \quad (2.2)$$

com

$$[R_{novo}] = [C]^T [R'] [C] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & \frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & \sqrt{3}\eta L\omega & 2r & r - \frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega \\ \sqrt{3}\eta L\omega & -\frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & -\frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & r + \frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega & 2r \end{bmatrix}$$

e

$$[\underline{L}_{novo}] = [C]^T [L'] [C] = \begin{bmatrix} L & -\frac{L}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\eta L & 0 \\ -\frac{L}{2} & L & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\eta L & -\frac{3}{2}\eta L \\ -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & L & 0 & \frac{3}{2}\eta L \\ \frac{3}{2}\eta L & -\frac{3}{2}\eta L & 0 & 3L & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2}\eta L & \frac{3}{2}\eta L & \frac{3}{2}L & 3L \end{bmatrix}$$

A fim de mantermos a invariância na potência, e portanto no torque eletromagnético produzido, façamos:

$$\underline{v}_{novo} = [C]^T \underline{v}' = [v_a^e \ v_b^e \ v_c^e \ 0 \ 0]^T \quad (2.3)$$

$[R']$ e $[L']$ e \underline{v}' foram definidos em (1.22)

Com $\eta \neq 1$ a matriz de indutância $[L]$ tem característica quatro. Se $\eta = 1$ esta característica torna-se dois, como é de se esperar fisicamente.

2.1.2 - Equação Característica

2.1.2.1 - Três fases conduzindo

No caso de três fases conduzindo o sistema é descrito - por (2.1). Sua equação característica $\phi_{abc}(\lambda) = 0$, obtida do desenvolvimento do determinante:

$$\left| \lambda [C]^T [L] [C] + [C]^T [R] [C] \right| = 0$$

é no caso geral de quarto grau.

Com os cálculos feitos, obtemos:

$$\begin{aligned} \phi_{abc}(\lambda) = & (1-\eta^2)^2 \frac{81}{16} L^4 \lambda^4 + (1-\eta^2) \frac{54}{8} (r+R) L^3 \lambda^3 \\ & + \left\{ (1-\eta^2)^2 \frac{81}{4} \omega^2 L^2 + 9 \left[r^2 + 2rR(2-\eta^2) + R^2 \right] \right\} \frac{1}{4} L^2 \lambda^2 \\ & + \left[(1-\eta^2) \frac{27}{2} \omega^2 L^2 R^2 + 6rR(R+r) \right] \frac{1}{2} L \lambda \\ & + \left[\frac{9}{4} \omega^2 L^2 R^2 + r^2 R^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Observamos que ao se fazer $\eta=1$ os termos de terceiro e quarto grau desaparecem, como era de se esperar.

As raízes desta equação são aproximadamente, no caso de η próximo de 1* :

* Ilustrações do Método:

Seja $\mu x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

(I)

onde μ é muito pequeno.

Fazendo-se a substituição de variáveis

$$x = \frac{y}{\mu}$$

vem $ay^3 + by^2 + \mu cy + \mu^2 d = 0$

Para μ muito pequeno esta equação tem soluções aproximadas:

$$y_1 \approx -\frac{b}{a}$$

y_2, y_3 muito pequenos

Então as soluções da equação original serão

$$x_1 \approx -\frac{b}{\mu a}$$

x_2, x_3 ainda indeterminados

Entretanto consideremos a equação

$$x^2 + \frac{cx}{b} + \frac{d}{b} = 0$$

(II)

Para μ muito pequeno, a equação (I) é aproximadamente o produto de (II)

por $\mu x + b$:

$$\left(x^2 + \frac{cx}{b} + \frac{d}{b}\right) (\mu x + b) = \mu x^3 + \left(b + \frac{\mu ac}{b}\right) x^2 + \left(c + \frac{\mu ad}{b}\right) x + d \approx \mu x^3 + bx^2 + cx + d$$

Então as duas soluções que faltam são aproximadamente as soluções de (II).

$$\lambda_{1,2} = -\frac{2}{3} \frac{rR}{(r+R)L} \pm j\omega \frac{R}{r+R}$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{2}{3} \frac{r+R}{(1-\eta^2)L} \quad (\text{raiz dupla})$$

Como as raízes λ_3 e λ_4 tendem para $-\infty$ quando η tende a 1, a aproximação do modelo por um de ordem reduzida com $\eta=1$ deve ser razoável.

No caso da indutância ser muito grande a parte real das raízes λ_1 e λ_2 se tornam desprezíveis e, no plano s elas tendem a $\pm j\omega \frac{R}{r+R}$, no eixo imaginário, pela esquerda, como mostrado no lugar das raízes abaixo

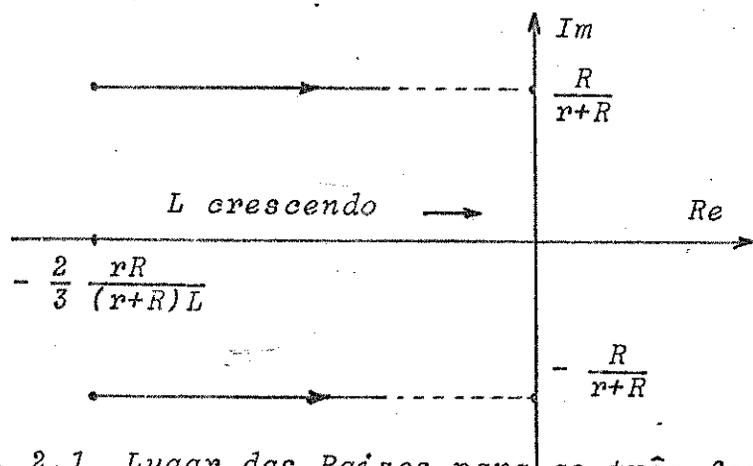


Fig. 2.1 Lugar das Raízes para as três fases conduzindo

2.1.2.2 - Fase a bloqueada

No caso da fase a bloqueada, no estator somente as fases b e c conduzem e o sistema passa a ser descrito por:

$$\begin{bmatrix} v_b^e \\ v_c^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & -\sqrt{3}\eta L\omega & 2r & r - \frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & \frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & r + \frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega & 2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b^e \\ i_c^e \\ i_\alpha^r \\ i_\gamma^r \end{bmatrix}$$

$$+ p \begin{bmatrix} L & -\frac{L}{2} & -\frac{3}{2}\eta L & -\frac{3}{2}\eta L \\ -\frac{L}{2} & L & 0 & \frac{3}{2}\eta L \\ -\frac{3}{2}\eta L & 0 & 3L & \frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}\eta L & \frac{3}{2}\eta L & \frac{3}{2}L & 3L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b^e \\ i_c^e \\ i_\alpha^r \\ i_\gamma^r \end{bmatrix}$$

Neste caso obtemos a seguinte equação característica

$$\phi_{bc}(\lambda) = 0 :$$

$$\begin{aligned} \phi_{bc}(\lambda) &= (1-\eta^2)^2 \frac{81}{16} L^4 \lambda^4 + (1-\eta^2) \frac{54}{8} (r+2R) L^3 \lambda^3 \\ &+ \left\{ (1-\eta^2)^2 \frac{81}{4} \omega^2 L^2 + 9 \left| r^2 + 4rR(2-\eta^2) + 2R^2 \right| \right\} \frac{1}{4} L^2 \lambda^2 \\ &+ \left| (1-\eta^2) 9 \omega^2 L^2 R + 6rR(2r+3R) \right| \frac{1}{2} L \lambda \\ &+ \left| \frac{27}{4} \omega^2 L^2 R^2 + 3r^2 R^2 \right| = 0 \end{aligned}$$

Esta equação também é de quarto grau e com $\eta=1$ ela se reduz a uma de segundo grau. Suas raízes, no caso de η próximo de 1 são obtidas aproximadamente iguais a:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2rR(2r+3R) \pm \sqrt{4r^4R^4 - L^2\omega^2R^2(27r^2+108rR+81R^2)}}{3L(r^2+4rR+3R^2)}$$

$$\lambda_3 = \frac{2r+3R}{3(1-\eta^2)L}$$

$$\lambda_4 = \frac{2(r+R)}{3(1-\eta^2)L}$$

λ_3 e λ_4 tendem a $-\infty$ para η tendendo a 1 e no caso da indutância ser grande, λ_1 e λ_2 tendem a

$$+ \frac{j\omega R \sqrt{3}}{\sqrt{r^2+4rR+3R^2}}$$

no eixo imaginário do plano s , pela esquerda.

2.1.2.3 - Fases a e c bloqueadas

Neste caso, no estator somente a fase b conduz e, o sistema é descrito por :

$$\begin{bmatrix} v_b^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & 2r & r - \frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\eta L\omega & r + \frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega & 2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b^e \\ i_a^r \\ i_\gamma^r \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} L & -\frac{3}{2}\eta L & -\frac{3}{2}\eta L \\ -\frac{3}{2}\eta L & 3L & \frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}\eta L & \frac{3}{2}L & 3L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i e_b \\ i r_\alpha \\ i r_\gamma \end{bmatrix}$$

A equação característica $\phi_b(\lambda)$ será:

$$\begin{aligned} \phi_b(\lambda) = & (1-\eta^2) \frac{54}{8} L^3 \lambda^3 + \frac{9}{4} \left| (2-\eta^2) 2r+3R \right| L^2 \lambda^2 \\ & + \left| (1-\eta^2) \frac{27}{4} \omega^2 L^2 + 3r(r+3R) \right| L \lambda \\ & + \left| \frac{27}{4} \omega^2 L^2 R^2 + 3r^2 R \right| = 0 \end{aligned}$$

Esta equação é de terceiro grau mas também se reduz ao segundo grau com $\eta=1$. Suas raízes aproximadas para η próximo de 1 são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2r(r+3R) \pm \sqrt{4r^4 - L^2 \omega^2 (54rR + 81R^2)}}{3L(2r+3R)}$$

$$\lambda_3 = -\frac{2r+3R}{3(1-\eta^2)L}$$

λ_3 tende a $-\infty$ para η tendendo a 1 e, no caso da indutância ser grande λ_1 e λ_2 tendem a

$$+ \frac{j\omega \sqrt{3R}}{\sqrt{2r+3R}}$$

no eixo imaginário do plano s , pela esquerda.

2.1.2.4 - Conclusões

Em cada um dos tres casos de operação estudados, o sistema que é degenerado pode ser representado por um de ordem menos elevada que nos dá a possibilidade de um tratamento analítico - mais simples.

2.2 - RESPOSTA AO DEGRAU

2.2.1 - Ilustração

Neste parágrafo consideraremos apenas o modelo degenerado da máquina, isto é, o caso $\eta = 1$, com três fases conduzindo. Por esta razão há certas particularidades a serem levadas em conta.

Inicialmente trataremos do cálculo da resposta à entrada nula (zero input solution). Uma mudança de variáveis adequada reduz a este caso a resposta ao degrau.

As equações de um sistema degenerado autônomo são da forma:

$$(p[L] + [R]) \underline{x} = 0 \quad (2.4)$$

onde $[L]$ e $[R]$ são matrizes $n \times n$, porém tendo $[L]$ uma característica $m < n$. Consideramos que este fato ocorreu por uma passagem ao limite na qual as $n - m$ raízes que desapareceram da equação característica tenderam a $-\infty$.

As soluções de (2.4) evoluem num sub-espço de dimensão m do espaço original de dimensão n , das variáveis x .

Dada uma condição inicial arbitrária no espaço de dimensão n , o sistema evolui rapidamente para cair naquele sub-espço [?].

O problema inicial a ser estudado é então a relação entre a condição inicial arbitrária e a condição subsequente no sub-espço de dimensão m .

O sub-espço de dimensão m será definido no espaço das variáveis x por $n - m$ equações algébricas entre as variáveis.

Notando-se que há $n - m$ combinações lineares diferentes das linhas da matriz $[L]$ que são identicamente nulas, podemos escrever:

$$[q] [L] = [0]$$

onde $[q]$ é uma matriz $(n-m) \times n$, de característica $n-m$ e $[0]$ é uma matriz nula $(n-m) \times n$.

Nestas condições multiplicando-se a equação (2.4) à esquerda por $[q]$, vem:

$$[q] [R] \underline{x} = \underline{0} \quad (2.5)$$

que define o sub-espço das soluções "lentas" de (2.4).

Por outro lado, as evoluções rápidas das soluções de (2.4) a partir de um ponto externo ao sub-espço (2.5) podem ser consideradas no limite como descontinuidades nas soluções, levando então ao aparecimento de impulsos δ na equação (2.4). As amplitudes destes impulsos devem satisfazer [8]:

$$[L] \delta = \underline{0}$$

ou, chamando de $x(0^-)$ e $x(0^+)$ as condições iniciais fora e dentro do sub-espço definido por (2.5), vem:

$$[L] \underline{x}(0^+) = [L] \underline{x}(0^-) \quad (2.6)$$

Entretanto as x equações definidas por (2.6) - são compreendidas na realidade m equações linearmente independentes. O conjunto das equações (2.5) e $n-m$ equações linearmente independentes de (2.6) define a condição inicial dentro do sub-espço (2.5).

Para comodidade dos cálculos pode ser interessante obtermos os valores das derivadas \dot{x} , \ddot{x} , ... no instante inicial.

Novamente isto não será possível diretamente de (2.4), na forma:

$$\dot{\underline{x}}|_0 = - [L]^{-1} [R] \underline{x}|_0$$

$$\ddot{\underline{x}}|_0 = - [L]^{-1} [R] \dot{\underline{x}}|_0$$

porque não existe $[L]^{-1}$. Entretanto, as $n-m$ equações (2.5) fornecem:

$$[q] [R] \dot{\underline{x}}|_0 = 0$$

que juntamente com m equações obtidas de (2.4) permitem obter $\dot{\underline{x}}|_0$.

Para as derivadas superiores o procedimento é análogo.

2.2.2 - Aplicação ao nosso caso

A partir de

$$[L] = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$[q] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto as equações (2.5) se escrevem:

$$i_a^e + i_b^e + i_c^e = 0$$

$$(R - \frac{\sqrt{3}}{2} L\omega) i_a^e - (R + \frac{\sqrt{3}}{2} L\omega) i_b^e + \sqrt{3} L\omega i_c^e - 2r i_\alpha^e + \left| -r + \frac{\sqrt{3}}{2} L\omega \right| i_\gamma^e = 0 \tag{2.7}$$

$$\sqrt{3} L\omega i_a^e + (R - \frac{\sqrt{3}}{2} L\omega) i_b^e - (R + \frac{\sqrt{3}}{2} L\omega) i_c^e + (r + \frac{3\sqrt{3}}{2} L\omega) i_\alpha^e + 2r i_\gamma^e = 0$$

Das equações (2.6), duas quaisquer são linearmente independentes. Escolhemos por exemplo as seguintes:

$$i_a^e(0^+) - \frac{1}{2} i_b^e(0^+) - \frac{1}{2} i_c^e(0^+) + \frac{3}{2} i_\alpha^e(0^+) = i_a^e(0^-) - \frac{1}{2} i_b^e(0^-) - \frac{1}{2} i_c^e(0^-) + \frac{3}{2} i_\alpha^e(0^-)$$

$$-\frac{1}{2} i_a^e(0^+) - \frac{1}{2} i_b^e(0^+) + i_c^e(0^+) + \frac{3}{2} i_\gamma^e(0^+) = -\frac{1}{2} i_a^e(0^-) - \frac{1}{2} i_b^e(0^-) + i_c^e(0^-) + \frac{3}{2} i_\gamma^e(0^-) \tag{2.8}$$

As equações (2.7) no instante 0^+ , em conjunto com as equações (2.8) permitem acharmos as correntes em 0^+ , a partir das correntes em 0^- .

2.2.3 - Resposta ao degrau

Em 0^- todas as correntes são nulas, mas a velocidade da máquina é ω .

Em 0^+ aplicamos uma tensão V à fase a , estando as demais curto-circuitadas.

A solução permanente será:

$$i_a^e = \frac{V}{R}$$

$$i_b^e = i_c^e = i_\alpha^e = i_\gamma^e = 0$$

Façamos uma mudança de variáveis que:

$$\hat{i}_a = i_a^e - \frac{V}{R} \quad (2.9)$$

$$\hat{i}_b = i_b^e$$

.....

Então a condição em 0^- será:

$$\hat{i}_a(0^-) = -\frac{V}{R}$$

$$\hat{i}_b(0^-) = 0$$

.....

Substituindo nas equações, teremos:

$$\hat{i}_a(0^+) = -\frac{2Vr}{3R(r+R)}$$

$$\hat{i}_b(0^+) = \frac{(\frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega + r)V}{3R(r+R)}$$

$$\hat{i}_c(0^+) = \frac{(-\frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega + r)V}{3R(r+R)}$$

$$\hat{i}_\alpha(0^+) = -\frac{2V}{3(r+R)}$$

$$\hat{i}_\gamma(0^+) = \frac{(3\sqrt{3}L\omega + 2R)V}{6R(r+R)}$$

Para as derivadas obteremos:

$$p\hat{i}_a(0^+) = -\frac{2V}{9L(r+R)^2} \left| \frac{9}{2}L^2\omega^2 + 2r^2 \right|$$

$$p\hat{i}_b(0^+) = \frac{2V}{9L(r+R)^2} \left| \frac{27}{4}L^2\omega^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2}rL\omega - 2r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}RL\omega + rR \right|$$

$$p\tilde{i}_e(0^+) = \frac{2V}{9L(r+R)^2} \left| \frac{9}{4} L^2 \omega^2 + 3\sqrt{3} rL\omega - r^2 \right|$$

$$p\tilde{i}_\alpha(0^+) = \frac{2V}{9L(r+R)^2} \left| \frac{9}{2} L^2 \omega^2 + 2rR \right|$$

$$p\tilde{i}_\gamma(0^+) = \frac{2V}{9L(r+R)^2} \left| -\frac{9}{4} L^2 \omega^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} rL\omega + \frac{3\sqrt{3}}{2} RL\omega - rR \right|$$

As correntes para o caso tratado, onde as três fases do estator conduzem, serão

$$\tilde{i}_a(t) = A \exp(-\alpha t) \cos(\Omega t) + B \exp(-\alpha t) \sin(\Omega t)$$

$$\tilde{i}_b(t) = C \exp(-\alpha t) \cos(\Omega t) + D \exp(-\alpha t) \sin(\Omega t)$$

$$\tilde{i}_c(t) = E \exp(-\alpha t) \cos(\Omega t) + F \exp(-\alpha t) \sin(\Omega t)$$

$$\tilde{i}_\alpha(t) = G \exp(-\alpha t) \cos(\Omega t) + H \exp(-\alpha t) \sin(\Omega t)$$

$$\tilde{i}_\gamma(t) = I \exp(-\alpha t) \cos(\Omega t) + J \exp(-\alpha t) \sin(\Omega t)$$

onde:

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{rR}{(r+R)L}$$

$$\Omega = \frac{\omega R}{r+R}$$

$$A = \tilde{i}_a(0^+)$$

$$C = \tilde{i}_b(0^+)$$

$$E = \tilde{i}_c(0^+)$$

$$G = \tilde{i}_\alpha(0^+)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \tilde{i}_Y(0^+) \\
 B &= \frac{p\tilde{i}_a(0^+)}{\Omega} + \frac{\alpha}{\Omega} \tilde{i}_a(0^+) \\
 D &= \frac{p\tilde{i}_b(0^+)}{\Omega} + \frac{\alpha}{\Omega} \tilde{i}_b(0^+) \\
 F &= \frac{p\tilde{i}_c(0^+)}{\Omega} + \frac{\alpha}{\Omega} \tilde{i}_c(0^+) \\
 H &= \frac{p\tilde{i}_\alpha(0^+)}{\Omega} + \frac{\alpha}{\Omega} \tilde{i}_\alpha(0^+) \\
 J &= \frac{p\tilde{i}_\gamma(0^+)}{\Omega} + \frac{\alpha}{\Omega} \tilde{i}_\gamma(0^+)
 \end{aligned}$$

Lembrando que estas correntes foram obtidas aplicando-se a transformação (2.9), as correntes do modelo serão:

$$i_a^e(t) = \frac{V}{R} + \tilde{i}_a(t)$$

$$i_b^e(t) = \tilde{i}_b(t)$$

$$i_c^e(t) = \tilde{i}_c(t)$$

$$i_\alpha^x(t) = \tilde{i}_\alpha(t)$$

$$i_\gamma^x(t) = \tilde{i}_\gamma(t)$$

2.3 - SOLUÇÃO EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL

Em regime permanente senoidal valem as equações fasoriais:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} L\omega & \frac{\sqrt{3}}{2} L\omega & -\sqrt{3} L\omega & 2r & r - \frac{3\sqrt{3}}{2} L\omega \\ \sqrt{3} L\omega & -\frac{\sqrt{3}}{2} L\omega & -\frac{\sqrt{3}}{2} L\omega & r + \frac{3\sqrt{3}}{2} L\omega & 2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_\alpha \\ I_\gamma \end{bmatrix}$$

932

$$+ j\omega_s \begin{bmatrix} L & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & \frac{3}{2}L & 0 \\ -\frac{L}{2} & L & -\frac{L}{2} & -\frac{3}{2}L & -\frac{3}{2}L \\ -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & L & 0 & \frac{3}{2}L \\ \frac{3}{2}L & -\frac{3}{2}L & 0 & 3L & \frac{3}{2}L \\ 0 & -\frac{3}{2}L & \frac{3}{2}L & \frac{3}{2}L & 3L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_\alpha \\ I_\gamma \end{bmatrix}$$

onde $V_a, V_b, V_c, I_a, I_b, I_c$ são fasores* representativos das tensões v_a^e, v_b^e, v_c^e e das correntes i_a^e, i_b^e, i_c^e respectivamente, e I_α, I_γ das correntes i_a^r, i_γ^r .

Eliminando I_α e I_γ destas equações obtemos:

* Usaremos

$$|V| = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$$

que corresponde ao valor rms da função no tempo.

$$\left| \frac{g}{2} (-\omega_s^2 + \omega^2) L^2 + 6j\omega_s Lr + 2r^2 \right| \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \\
 \left\{ j\omega_s L (3j\omega_s Lr + 2r^2) \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right. \\
 \left. + \left| \frac{g}{2} (-\omega_s^2 + \omega^2) L^2 + 6j\omega_s Lr + 2r^2 \right| R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \\
 \left. - \frac{3\sqrt{3}}{2} j\omega_s L^2 \omega r \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

É interessante observarmos como estas equações se simplificamos se L for suposto muito grande:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \left\{ R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \frac{\omega_s^2 r}{(-\omega_s^2 + \omega^2)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right. \\
 \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{j\omega_s \omega r}{(-\omega_s^2 + \omega^2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

A inversão da matriz coeficiente, cujo determinante deverá ser não nulo, nos permitiria explicitarmos as correntes.

2.4 - CIRCUITOS EQUIVALENTES PARA A MÁQUINA EM REGIME SENOIDAL

2.4.1 - Máquina parada

Na dedução do circuito equivalente consideremos apenas os casos limites $\eta = 1$ e L muito grande. Nestas condições, a equação em regime senoidal, ligando tensões de fase a correntes de fase é a dada em (2.10) por:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \left\{ R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2\omega_s^2 r}{3(\omega^2 - \omega_s^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}}{3(\omega^2 - \omega_s^2)} j\omega\omega_s r \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

que é da forma :

$$\underline{V} = [Z] \underline{I}$$

Como a matriz [Z] não é simétrica, normalmente não é possível construir um circuito equivalente geral para a máquina.

No caso particular em que $\omega=0$, que corresponde à máquina parada, a matriz [Z] se torna simétrica:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \left\{ R \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}r \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

podendo ser construído o circuito da figura abaixo :

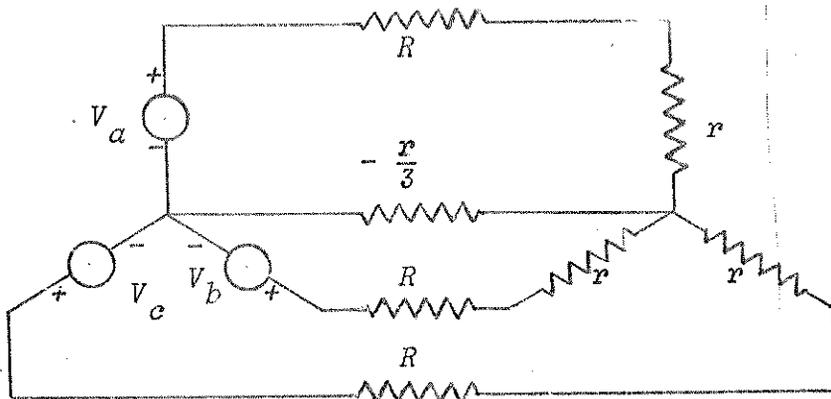


Fig. 2.2 Circuito Equivalente da máquina parada

Notamos por inspeção do circuito acima a resistência $-\frac{r}{3}$ na linha do neutro, a qual pode ser desprezada se o sistema estiver balanceado.

Observemos por exemplo que o circuito equivalente por fase, em regime balanceado será:

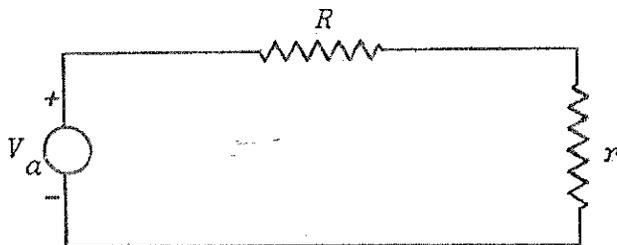


Fig. 2.3 Circuito Equivalente para a fase a em regime balanceado

Em particular, quando duas fases estiverem abertas, o circuito se torna :

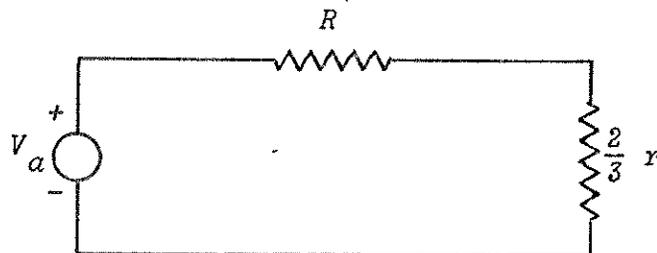


Fig. 2.4 Circuito Equivalente para a fase a com uma das outras duas abertas.

2.4.2 - Máquina girando com velocidade constante, e balanceada

Em regime balanceado notamos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = -j\sqrt{3} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Nestas condições é possível escrevermos (2.9) como:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \left| R - \frac{\omega_s^2 r}{(\omega^2 - \omega_s^2)} - \frac{\omega \omega_s r}{(\omega^2 - \omega_s^2)} \right| \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \left| R + \frac{\omega_s r}{\omega_s - \omega} \right| \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Sendo o escorregamento definido como:

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s}$$

a equação acima se escreve como:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \left| R + \frac{r}{s} \right| \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

que corresponde ao circuito equivalente usual da máquina :

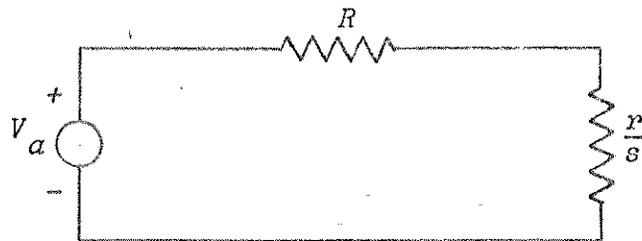


Fig. 2.5 Circuito Equivalente para a fase a com a máquina girando.

O resultado acima, expresso em (2.11) e representado na figura 2.5 para uma fase, é muito particular. Por exemplo no caso de duas fases abertas $I_b = I_c = 0$ e a equação (2.10) fica

$$V_a = \left| R + \frac{2}{3} \frac{\omega_s^2 r}{(\omega_s^2 - \omega^2)} \right| I_a$$

ou em termos de

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \quad (\text{escorregamento})$$

e

$$s' = \frac{\omega_s + \omega}{\omega_s} \quad (\text{escorregamento no sentido oposto})$$

vem

$$V_a = \left(R + \frac{2}{3} \frac{r}{ss'} \right) I_a$$

É interessante compararmos a parte independente de R desta expressão com a de (2.11)

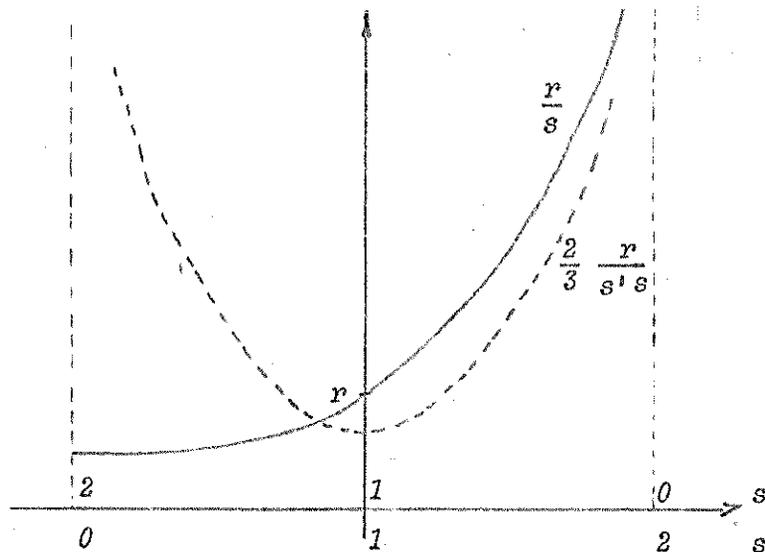


Fig. 2.6 Variação da resistência do rotor com s .

No caso de duas fases conduzindo, não é possível obtermos um circuito equivalente, pois a equação (2.10), no caso da fase c aberta, se escreve :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + \frac{2\omega_s r}{3(\omega_s^2 - \omega^2)} & - \frac{\omega_s (\omega_s - j\sqrt{3}\omega) r}{3(\omega_s^2 - \omega^2)} \\ - \frac{\omega_s (\omega_s + j\sqrt{3}\omega) r}{3(\omega_s^2 - \omega^2)} & R + \frac{2\omega_s^2 r}{3(\omega_s^2 - \omega^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix}$$

2.5 - CÁLCULO DO TORQUE EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL

Vamos calcular o torque eletromagnético desenvolvido pelo motor, considerando a parte não dissipada da potência fornecida à máquina.

Para maior simplicidade, consideremos apenas o caso da indutância L muito grande.

A potência elétrica P_{el} fornecida à máquina pode ser dada por (2) :

$$P_{el} = R_e \left| (\underline{I}^*)^T \underline{V} \right|$$

onde

$$\underline{I} = [I_a \quad I_b \quad I_c \quad I_\alpha \quad I_\gamma]^T$$

$$\underline{V} = [V_a \quad V_b \quad V_c \quad 0 \quad 0]^T$$

e pelo asterístico representamos o conjugado.

Como

$$\underline{V} = [j\omega_s \quad [L] + [R]] \underline{I}$$

esta potência se escreve:

$$P_{el} = \left| (\underline{I}^*)^T [R] \underline{I} \right|$$

pois sendo reais todos os termos da matriz indutância $[L]$, eles não contribuem na potência ativa.

É possível aplicarmos uma transformação que mantém a potência invariante e com a qual eliminamos as correntes de rotor:

$$[K] [I_a \ I_b \ I_c]^T = [I_a \ I_b \ I_c \ I_\alpha \ I_\gamma]^T$$

Esta técnica já foi utilizada nos cálculos do parágrafo 2.3 para chegarmos na equação (2.10).

A potência será dada por:

$$P_{el} = \begin{bmatrix} I_a^* \\ I_b^* \\ I_c^* \end{bmatrix} [K]^T [R] [K] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Desta potência, será dissipada a parte correspondente aos termos resistivos da matriz $[R]$, e portanto a potência mecânica correspondem os termos não resistivos. Considerando somente estes últimos, teremos a seguinte matriz resistência modificada:

$$[R_m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}L\omega}{2} & \frac{\sqrt{3}L\omega}{2} & -\sqrt{3}L\omega & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega \\ \sqrt{3}L\omega & -\frac{\sqrt{3}}{2}L\omega & -\frac{\sqrt{3}}{2}L\omega & \frac{3\sqrt{3}}{2}L\omega & 0 \end{bmatrix}$$

O torque eletromagnético será:

$$T = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} I_a^* \\ I_b^* \\ I_c^* \end{bmatrix} [K]^T [R_m] [K] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Do fato da matriz $[R_m]$ conter L em fator, é necessário considerarmos em $[K]$ termos que contenham até L^{-1} teremos então:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{4 j \omega_s r}{9 (\omega^2 - \omega_s^2) L} & \frac{1}{3} - \frac{2r (j\omega_s + \sqrt{3} \omega)}{9 (\omega^2 - \omega_s^2) L} & \frac{1}{3} - \frac{2r (j\omega_s - \sqrt{3} \omega)}{9 (\omega^2 - \omega_s^2) L} \\ \frac{1}{3} - \frac{2r (j\omega_s + \sqrt{3} \omega)}{9 (\omega^2 - \omega_s^2) L} & \frac{1}{3} - \frac{2r (j\omega_s - \sqrt{3} \omega)}{9 (\omega^2 - \omega_s^2) L} & \frac{2}{3} + \frac{4j\omega_s r}{9 (\omega^2 - \omega_s^2) L} \end{bmatrix}$$

Fazendo os cálculos por etapas, teremos:

$$\frac{[K]^T [R_m] [K]}{\omega} = \frac{r}{-\omega^2 + \omega_s^2} \left\{ \frac{2}{3} \omega \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{3} j\omega_s \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

levando em conta que

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

vem:

$$\begin{bmatrix} I_a^* & I_b^* & I_c^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \left| I_a^* I_a + I_b^* I_b + I_c^* I_c \right|$$

e como

$$I_c - I_b = -j\sqrt{3} I_a$$

$$I_a - I_c = -j\sqrt{3} I_b$$

$$I_b - I_a = -j\sqrt{3} I_c$$

teremos

$$-\begin{bmatrix} I_a^* & I_b^* & I_c^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = j\sqrt{3} \left| I_a^* I_a + I_b^* I_b + I_c^* I_c \right|$$

Por outro lado, em regime senoidal

$$I_a = \frac{V_a}{R + \frac{r}{s}}$$

e levando em conta o fato do sistema ser balanceado, o torque será dado por:

$$T = \frac{3 |V_a|^2}{\omega_s (R + \frac{r}{s})^2} \cdot \frac{r}{s}$$

CAPÍTULO III

CONCLUSÕES

O motor de indução em seu modelo normal é descrito por um sistema de seis equações diferenciais a seis incógnitas, onde os coeficientes dependem do tempo.

A fim de simplificar-se sua solução, são empregadas transformações e em regime permanente consegue-se um sistema de equações linear, porém de solução analítica trabalhosa. Quando dispõem-se de computador, a solução numérica é possível, porém a "quase singularidade" da matriz de indutância introduz problemas na computação e se estivermos fazendo controle de velocidade, a necessidade do conhecimento dos valores reais das variáveis tornam a solução lenta, mas realizável.

Atualmente o uso de computadores está bastante difundido mas quando não podemos contar com ele, teremos que voltar às soluções analíticas e motivado por este fato, procuramos um modelo para o motor de indução que nos permite um tratamento analítico bastante simples, se comparado com o normal.

Infelizmente o presente trabalho não pode ser acompanhado da parte experimental, mas acreditamos termos obtido em nossos resultados uma precisão razoável, à custa da simplicidade, que justifica seu emprego.

Sugestões:

A utilização do modelo:

- Resposta ao degrau pode ser utilizada para obtermos a resposta a ondas quadradas (inversores DC-AC). Neste caso a resposta a degrau será uma senoide amortecida, da qual se considerará apenas parte de um ciclo.
- Combinada com a resposta a regime senoidal pode ser utilizada para resposta às ondas sugeridas no Capítulo I.

REFERÊNCIAS

- (1) H. MAJMUDAR, *Electromechanical Energy Converters*, Allyn and Bacon, Inc - Boston - 1965.
- (2) P. C. WHITE and H. H. WOODSON. *Electromechanical Energy Conversion*, New York, Wiley - 1959.
- (3) E. RUPPERT F9, *Modelamento de Motor de Indução. Uma Contribuição ao Estudo de Chaveamento das Correntes de Rotor de Motor de Indução de Rotor Enrolado*, UNICAMP, novembro - de 1974.
- (4) THE INSTITUTION OF ELECTRICAL ENGINEERS, *Power Thyristors and their Applications*, Conference, London, May 1969.
- (5) D. A. PAICE, *Induction Motor Speed Control by Stator Voltage Control*, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol. 87, pp 585 - 590, February 1968.
- (6) S.D.T. ROBERTSON and K.M. HEBBAR, *A Digital Model for Three - Phase Induction Machines*, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, vol 88, pp 1624 - 1634, november 1969
- (7) A.A. ANDRONOV, A.A. VITT and S.E. KHAIKIN, *Theory of Oscillators*, Addison-Wesley, 1966.
- (8) C.A. DESOER and E.S. KUH, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill - 1969.