

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA/ELETRÔNICA

ESTUDO DO DESEMPENHO DE MÉTODOS
DE FILTRAGEM SEQUENCIAL APLICA-
DOS A SISTEMAS NÃO LINEARES COM
APROXIMAÇÃO ATÉ SEGUNDA ORDEM.

Paulo de Tarso Martins Bruno

Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus Mendes

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Tese de Mestrado apresentada
à Faculdade de Engenharia de
Campinas da Universidade Es-
tadual de Campinas.

Fevereiro-1976

A meus pais

Dr. Sebastião Bruno

Profa. Esther Martins Bruno

À memória do amigo

Eng. José Luiz Cavedal

RESUMO

O problema da estimação do estado de um sistema dinâmico estocásticos, a partir de observações na saída, é de grande importância em engenharia.

A partir de 1960 grande impulso tem sido dado na solução das mais diferentes situações, encontrando-se atualmente grande série de algoritmos de filtragem sequencial.

No presente trabalho estudam-se os quatro filtros de segunda ordem citados na literatura, analisando suas vantagens e desvantagens na aplicação a um sistema escalar; um desses algoritmos é aplicado a um problema prático e os resultados são comentados.

Í N D I C E

Capítulo 1 - Preliminares	
Capítulo 2 - Desenvolvimento das Equações dos Filtros de Segunda Ordem	
2.1 - Introdução	
2.2 - Filtro Linear de Kalman	
2.3 - Dedução dos Filtros "Gaussiano Modificado" e Truncado Modificado" de segunda ordem	
2.4 - Filtros escalares "Gaussiano Modificado" e "Truncado Modificado".....	
2.5 - Dedução dos filtros escalares "Gaussiano" e "Truncado" de segunda ordem.....	
Capítulo 3 - Estudo dos Filtros de Segunda Ordem.....	
3.1 - Introdução	
3.2 - Análise das Equações	
3.2.1 - Filtro Truncado Modificado	
3.2.2 - Filtro Gaussiano Modificado.....	
3.3 - Resultados das Simulações	
3.3.1 - Filtros Gaussiano e Gaussiano do Jaswinsky	
3.3.2 - Filtros Gaussiano e Truncado.....	
3.3.3 - Filtros Gaussiano e Gaussiano Modificado	
3.3.4 - Filtros Gaussiano Modificado e Truncado Modificado.....	
3.4 - Conclusões	

Capítulo 4 - Aspectos Computacionais dos Filtros de Segunda Ordem	
4.1 - Introdução	
4.2 - Cálculo dos tempos de computação para os filtros de segunda ordem	
4.2.1 - Filtro Gaussiano Modificado	
4.2.2 - Filtro Truncado Modificado	
4.3 - Comparação dos tempos com os filtros de primeira ordem.....	
4.4 - Memória Requerida	
4.5 - Comparação da memória com os filtros de primeira ordem.....	
Capítulo 5 - Aplicação dos Filtros de Segunda Ordem	
5.1 - Introdução	
5.2 - Equações do Reator	
5.2.1 - Descrição das Variáveis.....	
5.2.2 - Balanços de Matéria e Energia....	
5.2.3 - Estabelecimento de um modelo adimensional.....	
5.2.4 - Discussão das Equações	
5.3 - Aplicação da Filtragem	
5.3.1 - Discretização das equações.....	
5.3.2 - Resultados da Filtragem	
5.3.3 - Conclusões	
Apêndice	
Referências	

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

O problema da estimação do estado de um sistema dinâmico estocástico, a partir de observações da saída, é de grande importância em engenharia.

Os primeiros trabalhos neste campo foram feitos há mais de dois séculos por Gauss, com interesse na determinação de órbitas de corpos celestes. Gauss desenvolveu a técnica hoje conhecida pelo nome de "least squares" (mínimos quadrados).

Recentemente, novos impulsos foram dados partindo de um trabalho clássico de Wiener em 1942 (1), seguindo-se Kalman - em 1960 (2) e Kalman - Bucy em 1961 (3), desenvolvendo os métodos de Filtragem Linear Sequencial.

A possibilidade de aplicação do filtro de Kalman - Bucy à navegação espacial foi primeiramente reconhecida em 1962 por Smith, Schmidt e McGee (4) e publicada sob a forma de livro em 1964 por Battin (5). Também em 1962, Joseph verificou a aplicação em correção de trajetórias de mísseis (6). O filtro de Kalman Bucy foi usado para guiar os satélites artificiais Rangers VI e VII em 1964 (7). Desde então o filtro de Kalman-Bucy tem encontrado aplicações, tendo sido usado no projeto Apollo, navegação autônoma, estimação do potencial gravitacional terrestre, navegação aérea, defesas anti-submarina, calibração de sistemas inerciais, controle de processos industriais, estimação de estado em redes elétricas, etc.

A simplificação do filtro de Kalman-Bucy para ser usado em aplicações práticas foi discutida em 1963 por Joseph (8), sendo chamado problema da filtragem sub-optimal. O filtro foi estendido depois para sistemas contínuos por Meditch (9). A utilização da programação dinâmica para o problema da estimação foi desenvolvida por Henry Cox em 1964 (10).

A fim de abranger uma classe mais ampla de problemas, partiu-se para os métodos da filtragem não linear, procurando-se evitar grandes tempos de computação. Smith, Schimidt e McGee em 1962 (4) já fazem algumas linearizações, porém foi Bucy em

1965 (11) que sugeriu a aproximação em séries de Taylor para o filtro ótimo não linear com expansão até 2ª ordem. Seguem-se os trabalhos de Jaswinsky em 1966 (12, 13, 14), Kushner em 1967 (15, 16, 17), Athans (18, 19), Neal (20), Schwartz (21, 22, 23) e inúmeros outros. Num dos trabalhos de Schwartz (23) fazem-se comparações entre diversos algoritmos de filtragem.

Linearizando-se as funções envolvidas até primeira ordem, surgiu o filtro "extended" de Kalman e suas derivações: o "extended smoothing" e o "extended iterado" (24). Com as expansões até segunda ordem surgiram o filtro "gaussiano", o filtro "truncado" e suas aproximações: "gaussiano modificado" e "truncado modificado".

Desenvolvendo as funções envolvidas em série de Taylor, desprezando os momentos de 3ª ordem e superior e desenvolvendo o estado filtrado e a variância do filtro em série de potências, chega-se ao filtro "truncado" de segunda ordem, considerado independentemente por Jaswinsky (14, 25) e Bass et al (22).

Se no caso acima citado não forem desprezados os momentos pares (supondo densidades gaussianas), chega-se ao filtro "gaussiano" de segunda ordem desenvolvido independentemente por Schwartz (21), Jaswinsky (25) e Fisher (26).

Fazendo-se algumas aproximações nos filtros acima, chegam-se aos filtros "truncado modificado" e "gaussiano modificado", que ocupam bem menos tempo de computação (19).

No presente trabalho estudam-se os quatro filtros de segunda ordem citados, analisando suas vantagens e desvantagens na aplicação a um sistema escalar. O filtro "gaussiano modificado" é aplicado a um problema prático e os resultados são comentados.

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DOS FILTROS DE SEGUNDA ORDEM

2.1 - Introdução

Considere-se o seguinte sistema dinâmico estocástico descrito por suas equações vetoriais de estado :

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}[\underline{x}(k), k] + \underline{g}[\underline{u}(k), k] + \underline{\gamma}(k) \underline{w}(k) \quad (2.1)$$

onde \underline{f} representa o vetor $n \times 1$ de função de transição do estado $\underline{x}(k)$ para $\underline{x}(k+1)$; \underline{g} o vetor $n \times 1$ de funções de entrada; $\underline{\gamma}$ a matriz de ruído de estado, de dimensão $n \times s$ e \underline{w} um vetor de ruído gaussiano branco de dimensão s , tal que :

$$\begin{aligned} p(\underline{w}(k)) &= N(\underline{0}, \underline{W}(k)) \\ E\{\underline{w}(k) \underline{w}^T(j)\} &= \underline{W}(k) \delta_{k,j} \\ E\{\underline{x}(k) \underline{w}^T(k)\} &= \underline{0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo E o operador esperança matemática e $\delta_{k,j}$ o delta de Kronecker.

Toma-se como conhecida a densidade do valor inicial $\underline{x}(0)$, onde : $p(\underline{x}(0)) = N(\underline{\bar{x}}(0), X(0))$ e assume-se $\underline{x}(0)$ independente de $\underline{w}(k)$. Facilmente se demonstra que o processo assim definido é de Markov (27).

Seja agora $\underline{y}(k+1)$ de dimensão r , um vetor de observações dado por :

$$\underline{y}(k+1) = \underline{h}[\underline{x}(k+1), k+1] + \underline{v}(k+1) \quad (2.3)$$

onde \underline{h} representa o vetor de dimensão r ligando o estado e a saída e \underline{v} , também de dimensão r , o ruído gaussiano branco de leitura, com :

$$\begin{aligned}
 p(\underline{v}(k)) &= N(\underline{0}, \underline{V}(k)) \\
 E\{\underline{v}(k) \underline{v}^T(j)\} &= \underline{V}(k) \delta_{k,j} \\
 E\{\underline{v}(k) \underline{v}^T(k)\} &= \underline{0}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Para simplicidade de tratamento supõe-se \underline{v} e \underline{w} independentes, ou seja :

$$E\{\underline{v}(k) \underline{w}^T(k)\} = \underline{0} \tag{2.5}$$

Toma-se a seguir a sequência de observações

$$\underline{y}(L) = \{\underline{y}(1), \underline{y}(2), \dots, \underline{y}(L)\} \tag{2.6}$$

O problema da estimação discreta consiste em estimar um determinado $\underline{x}(k)$, baseando-se no conjunto das observações $\underline{y}(L)$.

Se $k < L$, o problema é denominado alisagem ou smoothing; se $k > L$, o problema é chamado predição e se $k = L$ tem-se o caso de filtragem.

Os problemas de filtragem e predição são em geral associados a operações em tempo real, onde os valores estimados são fornecidos logo após os valores observados.

2.2 - Filtro linear de Kalman

Parte-se inicialmente das equações do filtro linear de Kalman (2,3) desenvolvido em 1960/61.

Considere-se o sistema discreto linear com equações vectoriais de estado :

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\phi}(k) \underline{x}(k) + \underline{\gamma}(k) \underline{w}(k) \tag{2.7}$$

e com observações lineares discretas dadas por :

$$\underline{y}(k+1) = \underline{H}(k+1) \underline{x}(k+1) + \underline{v}(k+1) \tag{2.8}$$

onde :

\underline{x} - Vetor de estado de dimensão n .

$\underline{\phi}$ - Matriz de transição de t_k para t_{k+1} , de dimensão $n \times n$

$\underline{\gamma}$ - Matriz dos coeficientes do ruído de estado, de dimensão $n \times s$

\underline{H} - Matriz de medidas, de dimensão $r \times n$

\underline{y} - Vetor de medidas em t_{k+1} , de dimensão r .

\underline{w} - Vetor de ruídos aleatórios gaussianos de estado, de dimensão s .

\underline{v} - Vetor de ruídos aleatórios gaussianos de medida, de dimensão r .

e com:

$$\begin{aligned} E \{ \underline{w}(k) \} &= \underline{0} & E \{ \underline{w}(k) \underline{w}^T(j) \} &= \underline{W}(k) \delta_{k,j} \\ E \{ \underline{v}(k) \} &= \underline{0} & E \{ \underline{v}(k) \underline{v}^T(j) \} &= \underline{V}(k) \delta_{k,j} \\ E \{ \underline{w}(k) \underline{v}^T(j) \} &= \underline{0} \\ E \{ \underline{x}(k) \underline{w}^T(k) \} &= \underline{0} \\ E \{ \underline{y}(k) \underline{v}^T(k) \} &= \underline{0} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aplicando-o filtro de Kalman ao sistema tem-se, como resultado, tres conjuntos de equações :

- equações de predição do estado :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1/k) &= \underline{\phi}(k) \hat{\underline{x}}(k/k) \\ \underline{X}(k+1/k) &= E \{ \underline{[x(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1/k)] \underline{[x(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1/k)]}^T / \\ &\quad \underline{Y}(k) \} = \underline{\phi}(k) \underline{X}(k/k) \underline{\phi}^T(k) + \underline{\gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\gamma}^T(k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde :

$\hat{\underline{x}}(k+1/k)$ - estado predito em t_{k+1} , dadas as medidas até t_k

$\underline{X}(k+1/k)$ - matriz de covariância do erro $\underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1/k)$

- equações de predição da saída

$$\begin{aligned}\hat{\underline{y}}(k+1/k) &= \underline{H}(k+1) \hat{\underline{x}}(k+1/k) \\ \underline{Y}(k+1/k) &= E\{[\underline{y}(k+1) - \hat{\underline{y}}(k+1/k)] [\underline{y}(k+1) - \hat{\underline{y}}(k+1/k)]^T / \\ & / \underline{Y}(k)\} = \underline{H}(k+1) \underline{X}(k+1/k) \underline{H}^T(k+1) + \underline{V}(k+1)\end{aligned}\quad (2.11)$$

onde :

$\hat{\underline{y}}(k+1/k)$ - valor predito da leitura em t_{k+1} , das medidas até t_k

$\underline{Y}(k+1/k)$ - matriz de covariância do erro entre o valor lido em t_{k+1} e sua estimação - com as informações até t_k

- equações de correção ou filtragem

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) &= \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) [\underline{y}(k+1) - \hat{\underline{y}}(k+1/k)] \\ \underline{X}(k+1/k+1) &= [\underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{H}(k+1)] \underline{X}(k+1/k)\end{aligned}\quad (2.12)$$

onde :

$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1)$ - estado estimado em t_{k+1} , das medidas até t_{k+1}

$\underline{X}(k+1/k+1)$ - matriz de covariância do erro $\underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1/k+1)$

$\underline{K}(k+1)$ - ganho do filtro para t_{k+1} , calculado de modo a minimizar a matriz de covariância $\underline{X}(k+1/k+1)$.

O ganho $\underline{K}(k+1)$ é dado por :

$$\underline{K}(k+1) = \underline{X}(k+1/k) \underline{H}^T(k+1) \underline{Y}^{-1}(k+1/k) \quad (2.13)$$

Para inicialização do filtro toma-se como conhecido um valor predito médio $\hat{\underline{x}}(0/-1)$ e sua respectiva variância $\underline{X}(0/-1)$.

2.3 - Dedução dos Filtros "Gaussiano Modificado" e "Truncado Modificado" de segunda ordem

O esquema utilizado na dedução destes filtros consiste em tomar o mesmo modelo de equações introduzido por Kalman para o filtro ótimo linear e expandir as matrizes envolvidas em série de Taylor até a segunda ordem.

O mesmo esquema também foi usado por Meier na dedução do filtro de terceira ordem [28].

Considere-se o sistema não linear descrito pelas equações vetoriais de estado e leitura :

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= \underline{f}[\underline{x}(k), k] + \underline{g}[\underline{u}(k), k] + \underline{y}(k) \underline{w}(k) \\ \underline{y}(k+1) &= \underline{h}[\underline{x}(k+1), k+1] + \underline{v}(k+1)\end{aligned}\quad (2.14)$$

- equações de predição do estado

Expandindo $\underline{f}[\underline{x}(k), k]$ em série de Taylor até a segunda ordem em torno de uma trajetória de referência $\underline{x}^r(k)$ e tomando o erro de linearização e sua respectiva variância como:

$$\begin{aligned}\Delta \underline{x}(k) &= \underline{x}(k) - \underline{x}^r(k) \\ \underline{X}(k/k) &= E \{ \Delta \underline{x}(k) \Delta \underline{x}^T(k) \}\end{aligned}\quad (2.15)$$

resulta :

$$\begin{aligned}\underline{f}[\underline{x}(k), k] &= \underline{f}[\underline{x}^r(k), k] + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}^r} \Delta \underline{x}(k) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\Delta \underline{x}(k) \cdot \Delta \underline{x}^T(k) \frac{\partial^2}{\partial \underline{x}^2})^T \left(\left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}^r} \right)^T \right]^T + \dots\end{aligned}\quad (2.16)$$

desenvolvendo as matrizes acima e chamando :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = F_{x_{ij}} \quad (2.17)$$

e :

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = F_{xx_{ijk}} \quad (2.18)$$

pode-se ainda escrever (2.16) como [25, 29] :

$$\begin{aligned} \underline{f} | \underline{x}(k), k | &= \underline{f} | \underline{x}^r(k), k | + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Big|_{\underline{x}^r} \Delta \underline{x}(k) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \Delta x(k)_i \Delta x(k)_j \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{vmatrix} F_{xx_{1ij}} & F_{xx_{2ij}} & \dots & F_{xx_{nij}} \end{vmatrix}^T \quad (2.20)$$

O valor predito do estado com as observações até t_k , $\hat{\underline{x}}(k+1/k)$, é dado por :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1/k) &= E \{ \underline{x}(k+1) / \underline{y}(k) \} \\ &= E \{ \underline{f} | \underline{x}(k), k | + \underline{g} | \underline{u}(k), k | + \underline{y}(k) \underline{w}(k) / \underline{y}(k) \} = \\ &= \underline{f} | \underline{x}^r(k), k | + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N X(k/k)_{ij} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} + \underline{g} | \underline{u}(k), k | \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde :

$$X(k/k)_{ij} = E \{ \Delta x(k)_i \Delta x(k)_j \} \quad (2.22)$$

Tomando-se como trajetória nominal, a trajetoria dos valores estimados $\hat{\underline{x}}(k/k)$ e expandindo as equações de estado em torno deste valor, grande melhoria pode ser introduzida no desempenho do filtro uma vez que a informação contida nas medidas é introduzida sequencialmente na trajetória nominal, além de não haver necessidade do cálculo de $\underline{x}^T(k)$. Logo, tem-se :

$$\Delta \underline{x}(k/k) = \underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k/k) \quad (2.23)$$

$$\underline{X}_{\Delta}(k/k) = E \{ \Delta \underline{x}(k/k) \Delta \underline{x}^T(k/k) \}$$

donde :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1/k) = & \underline{f} | \hat{\underline{x}}(k/k), k | + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N X_{\Delta}(k/k)_{ij} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} + \\ & + \underline{g} | \underline{u}(k), k | \end{aligned} \quad (2.24)$$

O erro cometido ao se fazer a previsão é dado por :

$$\Delta \underline{x}(k+1/k) = \underline{x}(k+1) - \hat{\underline{x}}(k+1/k) \quad (2.25)$$

ou ainda :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x}(k+1/k) = & \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \right|_{\hat{\underline{x}}} \Delta \underline{x}(k/k) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\Delta \underline{x}(k/k)_i \Delta \underline{x}(k/k)_j - X_{\Delta}(k/k)_{ij}) \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} + \underline{\gamma}(k) \underline{w}(k) \end{aligned} \quad (2.26)$$

A variância de $\Delta \underline{x}(k+1/k)$ associada ao valor predito em t_{k+1} com as observações até t_k é, então :

$$\underline{X}_{\Delta}(k+1/k) = E \{ \Delta \underline{x}(k+1/k) \cdot \Delta \underline{x}^T(k+1/k) \} =$$

$$\begin{aligned}
&= E \left\{ \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} (k/k) \right) \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} (k/k) \right)^T \right\} + \\
&+ E \left\{ \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} (k/k) \right) \cdot \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^N (\Delta x(k/k)_i \Delta x(k/k)_j - X_{\Delta}(k/k)_{ij}) \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \right|^T \right\} + \\
&+ E \left\{ \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} (k/k) \cdot (\underline{\gamma} (k) \underline{w} (k))^T \right\} + \\
&+ E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\Delta x(k/k)_i \Delta x(k/k)_j - X_{\Delta}(k/k)_{ij}) \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} (k/k) \right)^T \right\} + \\
&+ E \left\{ \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^N (\Delta x(k/k)_i \Delta x(k/k)_j - X_{\Delta}(k/k)_{ij}) \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \right| \cdot \frac{1}{2} \right| \\
&\left| \sum_{k,l=1}^N (\Delta x(k/k)_k \Delta x(k/k)_l - X_{\Delta}(k/k)_{kl}) \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_k \partial x_l} \right|^T \right\} + \\
&+ E \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\Delta x(k/k)_i \Delta x(k/k)_j - X_{\Delta}(k/k)_{ij}) \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (\underline{\gamma} (k) \underline{w} (k))^T \right\} + \\
&+ E \left\{ \underline{\gamma} (k) \underline{w} (k) \cdot \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} (k/k) \right)^T \right\} + \\
&+ E \left\{ \underline{\gamma} (k) \underline{w} (k) \cdot \frac{1}{2} \left| \sum_{i,j=1}^N (\Delta x(k/k)_i \Delta x(k/k)_j - X_{\Delta}(k/k)_{ij}) \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \right|^T \right\} + \\
&+ E \left\{ \underline{\gamma} (k) \underline{w} (k) (\underline{\gamma} (k) \underline{w} (k))^T \right\} \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Eliminando-se os termos de ordem ímpar e tendo em vista que o ruído $w(k)$ não é correlado com o estado e o ruído de saída $v(k)$ não correlado com a leitura, segue-se :

$$\begin{aligned}
 X_{\Delta} (k+1/k) &= E \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x (k/k) \Delta x^T (k/k) \frac{\partial f^T}{\partial x} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{4} E \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^N (\Delta x(k/k)_i \Delta x(k/k)_j - X_{\Delta}(k/k)_{ij}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \right. \\
 &\cdot \left. \left| \sum_{k,l=1}^N (\Delta x(k/k)_k \Delta x(k/k)_l - X_{\Delta}(k/k)_{k,l}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right|^T \right\} + \\
 &+ E \left\{ \underline{y}(k) \underline{w}(k) \underline{w}^T(k) \underline{y}^T(k) \right\} \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

Neste ponto, considera-se a primeira diferença entre o filtro gaussiano e o truncado. Para o filtro truncado, o termo quadrático acima é anulado devido ao fato de representar parcela de quarta ordem, ou seja :

$$E \left\{ \Delta x(k/k)_i \Delta x(k/k)_j \Delta x(k/k)_k \Delta x(k/k)_l \right\} = 0 \tag{2.29}$$

e a variância $X_{\Delta}^t(k+1/k)$ para o filtro truncado fica :

$$\begin{aligned}
 X_{\Delta}^t (k+1/k) &= \frac{\partial f}{\partial x} X_{\Delta} (k/k) \frac{\partial f^T}{\partial x} - \\
 &- \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^N X_{\Delta} (k/k)_{i,j} X_{\Delta} (k/k)_{k,l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} + \underline{y}(k) \underline{w}(k) \underline{y}^T(k) \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Para o filtro gaussiano, o termo de quarta ordem de (2.28) é escrito em função de termos de segunda ordem (30) pois supõem-se distribuições gaussianas :

$$\begin{aligned}
 E \{ \Delta x(k/k)_i \Delta x(k/k)_j \Delta x(k/k)_k \Delta x(k/k)_l \} &= \\
 &= X_{\Delta}(k/k)_{ij} X_{\Delta}(k/k)_{kl} + X_{\Delta}(k/k)_{ik} X_{\Delta}(k/k)_{jl} + X_{\Delta}(k/k)_{il} X_{\Delta}(k/k)_{jk}
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

A variância $\underline{X}_{\Delta}^g(k+1/k)$ para o filtro gaussiano resulta :

$$\begin{aligned}
 \underline{X}_{\Delta}^g(k+1/k) &= \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \underline{X}_{\Delta}(k/k) \frac{\partial \underline{f}^T}{\partial \underline{x}} + \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^N (X_{\Delta}(k/k)_{ik} X_{\Delta}(k/k)_{jl} + X_{\Delta}(k/k)_{il} X_{\Delta}(k/k)_{jk}) \cdot \\
 &\cdot \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \underline{f}^T}{\partial x_k \partial x_l} + \underline{\gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\gamma}^T(k)
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

- equações de previsão da saída

Parte-se da equação de leitura do sistema e expande-se a matriz $\underline{h} | \underline{x}(k+1), k+1 |$ em torno do estado predito $\underline{\hat{x}}(k+1/k)$ até a segunda ordem. As razões de se expandir \underline{h} em torno do valor predito são as mesmas já citadas no caso anterior.

$$\begin{aligned}
 \underline{h} | \underline{x} (k+1), k+1 | &= \underline{h} | \hat{\underline{x}} (k+1/k), k+1 | + \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} \bigg|_{\hat{\underline{x}}} \Delta \underline{x} (k+1/k) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \Delta x(k+1/k)_i \Delta x(k+1/k)_j \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

O valor predito para a saída no instante t_{k+1} , com as observações até t_k , $\hat{y}(k+1/k)$, é dado por :

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(k+1/k) &= E \{ \underline{y} (k+1) / \underline{y} (k) \} = \\
 &= E \{ \underline{h} | \underline{x} (k+1), k+1 | + \underline{v} (k+1) \} = \\
 &= \underline{h} | \hat{\underline{x}} (k+1/k), k+1 | + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N X_{\Delta}(k+1/k)_{ij} \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

onde :

$$X_{\Delta}(k+1/k)_{ij} = E \{ \Delta x (k+1/k)_i \Delta x (k+1/k)_j \} \quad (2.35)$$

O erro cometido na estimação de $\hat{y}(k+1/k)$ é :

$$\begin{aligned}
 \Delta \underline{y} (k+1/k) &= \underline{y}(k+1) - \hat{y}(k+1/k) = \\
 &= \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} (k+1/k) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\Delta x(k+1/k)_i \Delta x(k+1/k)_j - X_{\Delta}(k+1/k)_{ij}) \\
 &\frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} + \underline{v} (k+1) \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

A covariância entre o valor lido e o valor estimado $\underline{y}_\Delta(k+1/k)$ é então :

$$\underline{y}_\Delta(k+1/k) = E \{ \Delta \underline{y}(k+1/k) \Delta \underline{y}^T(k+1/k) \} \quad (2.37)$$

Substituindo (2.36) em (2.37) resulta :

$$\begin{aligned} \underline{y}_\Delta(k+1/k) &= E \left\{ \left(\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x}(k+1/k) \right) \left(\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x}(k+1/k) \right)^T \right\} + \\ &+ \frac{1}{4} E \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^N (\Delta x(k+1/k)_i \Delta x(k+1/k)_j - X_\Delta(k+1/k)_{ij}) \cdot \frac{d^2 \underline{h}}{dx_i dx_j} \right| \right. \\ &\left. \left| \sum_{k,l=1}^N (\Delta x(k+1/k)_k \Delta x(k+1/k)_l - X_\Delta(k+1/k)_{k,l}) \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_k \partial x_l} \right|^T \right\} + \\ &+ E \{ \underline{v}(k+1) \underline{v}^T(k+1) \} . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Os termos não escritos anulam-se no cálculo da esperança matemática.

Novamente salienta-se a diferença entre os filtros gaussiano e truncado. Da mesma maneira que anteriormente, para o filtro truncado, o termo quadrático de (2.38) é anulado por representar parcela de quarta ordem, ou seja :

$$E \{ \Delta x(k+1/k)_i \Delta x(k+1/k)_j \Delta x(k+1/k)_k \Delta x(k+1/k)_l \} = 0 \quad (2.39)$$

Calculando o valor de $\underline{y}_\Delta(k+1/k)$ para o filtro trun-

cado, vem :

$$\underline{Y}_{\Delta}^t(k+1/k) = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} X_{\Delta}^t(k+1/k) \frac{\partial \underline{h}^T}{\partial \underline{x}} -$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^N X_{\Delta}^t(k+1/k)_{ij} X_{\Delta}^t(k+1/k)_{kl} \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \underline{h}^T}{\partial x_k \partial x_l} + \underline{V}(k+1).$$

(2.40)

Para o filtro gaussiano, o termo quadrático de (2.38) é escrito em função de termos de segunda ordem (30), supondo distribuições gaussianas, do mesmo modo como foi feito para o caso anterior .

$$E \{ \Delta x(k+1/k)_i \Delta x(k+1/k)_j \Delta x(k+1/k)_k \Delta x(k+1/k)_l \} =$$

$$= X_{\Delta}(k+1/k)_{i,j} X_{\Delta}(k+1/k)_{k,l} + X_{\Delta}(k+1/k)_{i,k} X_{\Delta}(k+1/k)_{j,l} +$$

$$+ X_{\Delta}(k+1/k)_{i,l} X_{\Delta}(k+1/k)_{j,k} \quad (2.41)$$

O valor de $\underline{Y}_{\Delta}(k+1/k)$ para o filtro gaussiano é, então:

$$\underline{Y}_{\Delta}^g(k+1/k) = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} X_{\Delta}^g(k+1/k) \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^N (X_{\Delta}(k+1/k)_{ik} X_{\Delta}(k+1/k)_{jl} + X_{\Delta}(k+1/k)_{il} X_{\Delta}(k+1/k)_{jk})$$

$$\frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \underline{h}^T}{\partial x_k \partial x_l} + \underline{V}(k+1) \quad (2.42)$$

- equações de correção ou filtragem

Para este conjunto de equações, conserva-se o mesmo modelo desenvolvido por Kalman, ou seja :

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) [\underline{y}(k+1) - \hat{\underline{y}}(k+1/k)] \quad (2.43)$$

$$\underline{X}_{\Delta}(k+1/k+1) = \left[\underline{I} - \underline{K}(k+1) \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} \right] \underline{X}_{\Delta}(k+1/k) \quad (2.44)$$

onde o ganho do filtro vem de :

$$\underline{K}(k+1) = \underline{X}_{\Delta}(k+1/k) \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}}^T \underline{Y}_{\Delta}^{-1}(k+1/k) \quad (2.45)$$

2.4 - Filtros escalares "gaussiano modificado" e "truncado modificado"

A partir das equações vetoriais dos filtros, torna-se bastante simples escrever as equações dos filtros escalares.

- equações de predição do estado.

A equação do estado predito é igual para ambos os filtros :

$$\hat{x}(k+1/k) = f[\hat{x}(k/k), k] + \frac{1}{2} X_{\Delta}(k/k) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g[u(k), k] \quad (2.46)$$

Para a variância predita, há pequena diferença nas equações dos filtros. Para o filtro truncado:

$$X_{\Delta}^t(k+1/k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 X_{\Delta}(k/k) - \frac{1}{4} (X_{\Delta}(k/k) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})^2 + \gamma^2(k) W(k) \quad (2.47)$$

Para o filtro gaussiano :

$$x_{\Delta}^g(k+1/k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 x_{\Delta}(k/k) + \frac{1}{2} (x_{\Delta}(k/k) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})^2 + \gamma^2(k)W(k) \quad (2.48)$$

- equações de predição da saída.

Idem ao caso anterior, o valor predito da saída é igual para ambos os filtros, porém a variância difere. Logo vem :

$$\tilde{y}(k+1/k) = h|\tilde{x}(k+1/k), k+1| + \frac{1}{2} x_{\Delta}(k+1/k) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2.49)$$

A variância para o filtro truncado :

$$y_{\Delta}^t(k+1/k) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 x_{\Delta}^t(k+1/k) - \frac{1}{4} (x_{\Delta}^t(k+1/k) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2})^2 + v(k+1) \quad (2.50)$$

Para o filtro gaussiano :

$$y_{\Delta}^g(k+1/k) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 x_{\Delta}^g(k+1/k) + \frac{1}{2} (x_{\Delta}^g(k+1/k) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2})^2 + v(k+1) \quad (2.51)$$

- equações de filtragem.

As equações de filtragem são idênticas para ambos os filtros :

$$K(k+1) = \frac{\partial h}{\partial x} x_{\Delta}(k+1/k) y_{\Delta}^{-1}(k+1/k) \quad (2.52)$$

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K(k+1) [y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)] \quad (2.53)$$

$$X_{\Delta}(k+1/k+1) = X_{\Delta}(k+1/k) \left[1 - K(k+1) \frac{\partial h}{\partial x} \right] \quad (2.54)$$

2.5 - Dedução dos filtros escalares "gaussiano" e "truncado" de segunda ordem

Para a dedução das equações dos filtros gaussiano e truncado, optou-se pelas formulas escalares que proporcionam melhor visualização no desenvolvimento matemático e além disso, a partir dos resultados, fica bastante simples a obtenção dos filtros vetoriais.

As equações (2.53) e (2.54) podem ser escritas como :

$$\hat{x}(k+1/k+1) = a_0 + a_1 [y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)] \quad (2.55)$$

$$X_{\Delta}(k+1/k+1) = b_0 \quad (2.56)$$

A diferença $y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)$ contém a nova informação (inovação) fornecida por $y(k+1)$ e ainda não contida no conjunto das medidas $Y(k)$; logo, seria razoável supor também a presença de um termo de inovação na expressão da variância; portanto tem-se:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = a_0 + a_1 [y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)] \quad (2.57)$$

$$X_{\Delta}(k+1/k+1) = b_0 + b_1 [y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)] \quad (2.58)$$

A determinação dos valores a_0 , a_1 , b_0 e b_1 , gera os filtros gaussiano ou truncado, dependendo da aproximação utilizada.

De uma maneira geral, os valores filtrados do estado e

respectiva variância poderiam ser obtidos como :

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \sum_{i=0}^N a_i |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^i \quad (2.59)$$

$$x_{\Delta}(k+1/k+1) = \sum_{i=0}^N b_i |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^i \quad (2.60)$$

onde $|y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|$ é denominada a série de inovações, tendo sido tomada como base no estudo de Kailath (31).

Utilizando a equação (9.21), pg 342 do livro do -
Jaswinsky (27) tem-se :

$$\begin{aligned} E \{s|x(k+1)| \mid u |g(k+1)| / Y(k)\} &= \\ &= E \{E\{s|x(k+1)| / Y(k+1)\} \mid u |y(k+1)| / Y(k)\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Chame-se :

$$s |x(k+1)| = x(k+1) \quad (2.62)$$

e

$$u |y(k+1)| = |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^i \quad (2.63)$$

Considere-se (2.59) com $N=1$:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = a_0 + a_1 |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)| \quad (2.64)$$

Substituindo os valores de $s|x(k+1)|$ e $u |y(k+1)|$ de (2.62) e (2.63) em (2.61), para $i=0$, vem:

$$E \{x(k+1)/Y(k)\} = E \{E\{x(k+1)/Y(k+1)\} / Y(k)\} \quad (2.65)$$

Calculando-se os valores das esperanças matemáticas acima :

$$\hat{x}(k+1/k) = E \{ \hat{x}(k+1/k+1) / Y(k) \} \quad (2.66)$$

Substituindo $\hat{x}(k+1/k+1)$ pelo seu valor em (2.64), vem :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1/k) &= E \{ [a_0 + a_1 |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|] / Y(k) \} = \\ &= a_0 + a_1 E \{ |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)| / Y(k) \} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Disto resulta :

$$a_0 = \hat{x}(k+1/k) \quad (2.68)$$

Novamente substituindo $s|x(k+1)|$ e $u|y(k+1)|$ de (2.62) e (2.63) em (2.61), para $i = 1$, vem :

$$\begin{aligned} E \{ x(k+1) |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)| / Y(k) \} &= \\ &= E \{ E \{ x(k+1) / Y(k+1) \} |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)| / Y(k) \} = \\ &= E \{ \hat{x}(k+1/k+1) |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)| / Y(k) \} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Substituindo $\hat{x}(k+1/k+1)$ pelo seu valor em (2.64), segue-se :

$$\begin{aligned} E \{ x(k+1) |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)| / Y(k) \} &= \\ &= E \{ [a_0 + a_1 |y(k+1/k) - \hat{y}(k+1/k)|] |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)| / Y(k) \} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Passando o termo $a_0 |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|$ para o lado esquerdo da igualdade e substituindo a_0 pelo seu valor dado em (2.68), tem-se :

$$E \{ |x(k+1) - \hat{x}(k+1/k)| |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)| / Y(k) \} = \\ = E \{ a_1 |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^2 / Y(k) \} \quad (2.71)$$

De (2.25), segue-se :

$$\Delta x(k+1/k) \equiv x(k+1) - \hat{x}(k+1/k) \quad (2.72)$$

e de (2.36) vem:

$$y(k+1) - \hat{y}(k+1/k) = \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x(k+1/k) + \\ + \frac{1}{2} |\Delta x(k+1/k)|^2 - X_{\Delta}(k+1/k) \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + v(k+1) \right| \quad (2.73)$$

Substituindo (2.72) e (2.73) em (2.71) resulta :

$$E \left\{ \Delta x(k+1/k) \left| \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x(k+1/k) + \frac{1}{2} |\Delta x(k+1/k)|^2 - X_{\Delta}(k+1/k) \right| \right\} .$$

$$\cdot \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + v(k+1) \right| / Y(k) \} = a_1 E \{ |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^2 / Y(k) \} \quad (2.74)$$

donde se tira o valor de a_1

$$a_1 = \frac{\partial h}{\partial x} X_{\Delta}(k+1/k) E^{-1} \{ |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^2 / Y(k) \} \quad (2.75)$$

Usando (2.37), a expressão acima torna-se :

$$a_1 = \frac{\partial h}{\partial x} X_{\Delta} (k+1/k) Y^{-1} (k+1/k) \quad (2.76)$$

Comparando com (2.45) segue-se que a_1 é justamente o valor do ganho de Kalman :

$$a_1 = K(k+1) \quad (2.77)$$

Logo, para o filtro truncado, a_1 vale :

$$a_1^t = \frac{Hx X_{\Delta} (k+1/k)}{X_{\Delta} (k+1/k) Hx^2 - \frac{1}{4} |X_{\Delta} (k+1/k) Hxx|^2 + V(k+1)} \quad (2.78)$$

e para o filtro gaussiano.

$$a_1^g = \frac{Hx X_{\Delta} (k+1/k)}{X_{\Delta} (k+1/k) Hx^2 + \frac{1}{2} |X_{\Delta} (k+1/k) Hxx|^2 + V(k+1)} \quad (2.79)$$

onde :

$$Hx = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.80)$$

e

$$Hxx = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Considere-se agora (2.60) com $N = 1$:

$$X_{\Delta} (k+1/k+1) = b_0 + b_1 |y(k+1) - \hat{y} (k+1/k)| \quad (2.81)$$

Para o cálculo de b_0 e b_1 , toma-se novamente a equação (2.61) fazendo :

$$s \quad |x(k+1)| = |x(k+1) - \hat{x}(k+1/k+1)|^2 \quad (2.82)$$

$$u \quad |y(k+1)| = |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^2 \quad (2.83)$$

Fazendo $i = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} E \{ |x(k+1) - \hat{x}(k+1/k+1)|^2 / Y(k) \} &= \\ &= E \{ E \{ |x(k+1) - \hat{x}(k+1/k+1)|^2 / Y(k+1) \} / Y(k) \} = \\ &= E \{ X_{\Delta}(k+1/k+1) / Y(k) \} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Substituindo $\hat{x}(k+1/k+1)$ pelo seu valor em (2.64), vem:

$$\begin{aligned} E \{ X_{\Delta}(k+1/k+1) / Y(k) \} &= E \{ b_0 / Y(k) \} = b_0 = \\ &= E \{ | |x(k+1) - \hat{x}(k+1/k) - a_1 |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k) | |^2 / Y(k) \} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Calculando a esperança matemática chega-se a :

$$\begin{aligned} b_0 &= X_{\Delta}(k+1/k) - 2a_1 X_{\Delta}(k+1/k) Hx + \\ &+ a_1^2 E \{ |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^2 / Y(k) \} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Para o filtro truncado, substitui-se o valor de a_1 dado em (2.78) :

$$b_0^t = X_{\Delta}(k+1/k) - \frac{|X_{\Delta}(k+1/k) \cdot Hx|^2}{Hx^2 X_{\Delta}(k+1/k) - \frac{1}{4} |X_{\Delta}(k+1/k) Hxx|^2 + V(k+1)} \quad (2.87)$$

Para o filtro gaussiano, substitui-se o valor de a_1 de (2.79).

$$b_0^g = x_{\Delta}(k+1/k) - \frac{|x_{\Delta}(k+1/k) \cdot Hx|^2}{x_{\Delta}(k+1/k) \cdot Hx^2 + \frac{1}{2} |x_{\Delta}(k+1/k) \cdot Hxx|^2 + v(k+1)} \quad (2.88)$$

O cálculo de b_1 , é feito independentemente para ambos os filtros.

Para facilidade de notação, toma-se :

$$y - \hat{y} = y(k+1) - \hat{y}(k+1/k) \quad (2.89)$$

$$x - \hat{x} = x(k+1) - \hat{x}(k+1/k) \quad (2.90)$$

$$x = x_{\Delta}(k+1/k) \quad (2.91)$$

$$|\cdot| = E\{|y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^2 / Y(k)\} \quad (2.92)$$

Para o filtro gaussiano, deve-se lembrar que (30) :

$$E\{|x - \bar{x}|^2\} = X \quad (2.93)$$

$$E\{|x - \bar{x}|^4\} = 3X^2 \quad (2.94)$$

$$E\{|x - \bar{x}|^6\} = 15X^3 \quad (2.95)$$

Fazendo $i = 1$ e substituindo (2.82) e (2.83) em (2.61), vem :

$$\begin{aligned} E\{|x(k+1) - \hat{x}(k+1/k+1)|^2 | y - \hat{y} / Y(k)\} &= \\ = E\{E\{|x(k+1) - \hat{x}(k+1/k+1)|^2 / Y(k+1)\} | y - \hat{y} / Y(k)\} &= \\ = E\{x_{\Delta}(k+1/k+1) | y - \hat{y} / Y(k)\} & \quad (2.96) \end{aligned}$$

Substituindo $\hat{x}(k+1/k+1)$ e $X_{\Delta}(k+1/k+1)$, respectivamente por (2.64) e (2.81), chega-se a :

$$\begin{aligned} E \{ |x - a_0 - a_1 (y - \hat{y})|^2 | y - \hat{y} | Y(k) \} &= \\ = E \{ |b_0 + b_1 (y - \hat{y})|^2 | y - \hat{y} | Y(k) \} & \quad (2.97) \end{aligned}$$

Substituindo a_0 pelo seu valor e trabalhando em (2.97), tem-se :

$$\begin{aligned} E \{ (x - \hat{x})^2 (y - \hat{y}) - 2a_1 (x - \hat{x}) (y - \hat{y})^2 + a_1^2 (y - \hat{y})^3 / Y(k) \} &= \\ = E \{ b_0 (y - \hat{y}) + b_1 (y - \hat{y})^2 / Y(k) \} = b_1 | \cdot | & \quad (2.98) \end{aligned}$$

Calculando separadamente (2.98), segue-se :

$$\begin{aligned} \text{a) } E \{ (x - \hat{x})^2 (y - \hat{y}) / Y(k) \} &= \\ = E \{ (x - \hat{x})^2 | H_x (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} H_{xx} | (x - \hat{x})^2 - x | + v | / Y(k) \} &= \\ = \frac{1}{2} E \{ | (x - \hat{x})^4 - x (x - \hat{x})^2 | H_{xx} / Y(k) \} = x^2 H_{xx} & \quad (2.99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } E \{ 2a_1 (x - \hat{x}) (y - \hat{y})^2 / Y(k) \} &= \\ = \frac{2x H_x}{| \cdot |} E \{ (x - \hat{x}) | H_x (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} | (x - \hat{x})^2 - x | H_{xx} + v |^2 / Y(k) \} &= \\ = \frac{2 x H_x}{| \cdot |} E \{ H_x H_{xx} | (x - \hat{x})^4 - x (x - \hat{x})^2 | / Y(k) \} = & \\ = \frac{-4x^3 H_x^2 H_{xx}}{| \cdot |} = x^2 H_{xx} \left| \frac{-4x H_x^2}{| \cdot |} \right| & \quad (2.100) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) E \{ a_1^2 (Y - \hat{Y})^3 / Y(k) \} &= \\
&= \frac{X^2 H_X^2}{| \cdot |^2} E \{ | H_X(x - \hat{x}) + \frac{1}{2} | (x - \hat{x})^2 - X | H_{XX} + V |^3 / Y(k) \} = \\
&= \frac{X^2 H_X^2}{| \cdot |^2} E \{ \frac{3}{2} H_X^2 | (x - \hat{x})^4 - X(x - \hat{x})^2 | H_{XX} + \frac{1}{8} H_{XX}^3 | (x - \hat{x})^2 - X |^3 / Y(k) \} = \\
&= \frac{X^2 H_X^2}{| \cdot |^2} | 3H_X^2 X^2 H_{XX} + H_{XX}^3 X^3 | = \\
&= X^2 H_{XX} \left| \frac{3 H_X^4 X^2}{| \cdot |^2} + \frac{H_X^2 H_{XX}^2 X^3}{| \cdot |^2} \right| \quad (2.101)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores calculados em (2.98) e isolando b_1^g , chega-se a :

$$b_1^g = \frac{X^2 H_{XX}}{| \cdot |} \left| 1 - \frac{\frac{9}{2} X H_X^2}{| \cdot |} + \frac{\frac{1}{2} X H_X^2 | V + 7X H_X^2 |}{| \cdot |} + \frac{\frac{5}{4} X^3 H_X^2 H_{XX}^2}{| \cdot |} \right| \quad (2.102)$$

O termo de coeficiente $\frac{5}{4}$, calculado no desenvolvimento acima está em contradição com o livro do Jaswinsky (27), onde o mesmo não é considerado na expressão encontrada.

Para o filtro truncado, parte-se de (2.98) e calcula-se separadamente a esperança matemática, porém lembrando que :

$$\begin{aligned}
E \{ (x - \hat{x})^n \} &= X \quad \text{para } n = 2 \\
&= 0 \quad \text{para } n \neq 2
\end{aligned} \quad (2.103)$$

logo, tem-se :

$$\begin{aligned}
\text{a) } E \{ (x - \hat{x})^2 (y - \hat{y}) / Y(k) \} &= \\
&= E \{ (x - \hat{x})^2 \left[H_{xx} (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \left| (x - \hat{x})^2 - X \right| H_{xxx} + v \right] / Y(k) \} = \\
&= \frac{1}{2} E \{ \left| (x - \hat{x})^4 - X(x - \hat{x})^2 \right| H_{xxx} / Y(k) \} = - \frac{X^2 H_{xxx}}{2}
\end{aligned}
\tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } E \{ 2a_1 (x - \hat{x}) (y - \hat{y})^2 / Y(k) \} &= \\
&= \frac{2X H_{xx}}{|. |} E \{ (x - \hat{x}) \left[H_{xx}(x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \left| (x - \hat{x})^2 - X \right| H_{xxx} + v \right]^2 / Y(k) \} = \\
&= \frac{2X H_{xx}}{|. |} E \{ H_{xx} H_{xxx} \left| (x - \hat{x})^4 - X(x - \hat{x})^2 \right| / Y(k) \} = \\
&= \frac{-2X^3 H_{xx}^3 H_{xxx}}{|. |} = \frac{-X^2 H_{xxx}}{2} \left| \frac{4 X H_{xx}^2}{|. |} \right|
\end{aligned}
\tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } E \{ a_1^2 (y - \hat{y})^3 / Y(k) \} &= \\
&= \frac{X^2 H_{xx}^2}{|. |^2} E \{ \left[H_{xx}(x - \hat{x}) + \frac{1}{2} \left| (x - \hat{x})^2 - X \right| H_{xxx} + v \right]^3 / Y(k) \} = \\
&= \frac{X^2 H_{xx}^2}{|. |^2} \left| -\frac{3}{2} H_{xx}^2 H_{xxx} X^2 + \frac{1}{4} H_{xxx}^3 X^3 \right|
\end{aligned}
\tag{2.106}$$

Substituindo os valores calculados em (2.98) e isolando b_1 chega-se a :

$$b_1^t = \frac{\frac{-X^2 H_{xxx}}{2}}{|. |} \left| 1 - \frac{3X H_{xx}^2}{|. |} - \frac{X H_{xx}^2 \left| v + \frac{1}{4} X^2 H_{xxx}^2 \right|}{|. |^2} + \frac{2X^2 H_{xx}^4}{|. |^2} \right|
\tag{2.107}$$

Com os valores calculados de a_0 , a_1 , b_0 e b_1 , chegam-se aos filtros truncado e gaussiano.

Comparando os filtros obtidos, se o valor de b_1 for tomado igual a zero, os resultados são os filtros modificados gaussiano e truncado.

CAPÍTULO 3

ESTUDO DOS FILTROS DE SEGUNDA ORDEM

3.1 - Introdução

No capítulo anterior desenvolveram-se as equações dos quatro filtros de segunda ordem contidos na literatura, - Filtro Gaussiano (FG), Truncado (FT), Gaussiano Modificado (FGM) e Truncado Modificado (FTM), cada um possuindo características próprias devido aos diferentes tipos de aproximação empregados na dedução.

No presente capítulo estudam-se estes algoritmos - procurando ressaltar tanto suas vantagens quanto desvantagens; além disso é feita uma comparação entre o Filtro Gaussiano deduzido neste trabalho (FG) e o que se encontra desenvolvido - no livro do Jaswinsky (27) (FGJ).

Vários sistemas, tanto escalares quanto vetoriais foram simulados e filtrados, estabelecendo-se diversos fatores como base na comparação de resultados, dentre os quais - ressaltam-se :

- influencia das não-linearidades no estado e medida.
- influência dos ruídos de estado e medida
- influência das condições iniciais e tempo de estabilização
- possíveis erros sistemáticos entre valores reais e filtrados
- possíveis casos de divergência

Para maior facilidade de visualização, conjugado a uma redução no esforço computacional, são apresentados apenas resultados das simulações escalares e as conclusões obtidas podem facilmente ser generalizadas aos casos vetoriais.

A seguir são reescritas as equações dos filtros escalares :

- equações de predição do estado :

$$\hat{x}(k+1/k) = f \left[\hat{x}(k/k), k \right] + \frac{1}{2} X_{\Delta}(k/k) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + g \left[u(k), k \right] \quad (3.1)$$

$$X_{\Delta}(k+1/k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 X_{\Delta}(k/k) + \alpha \left[X_{\Delta}(k/k) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]^2 + \gamma^2(k) W(k) \quad (3.2)$$

- equações de predição da saída

$$\hat{y}(k+1/k) = h \left[\hat{x}(k+1/k), k+1 \right] + \frac{1}{2} X_{\Delta}(k+1/k) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

$$Y_{\Delta}(k+1/k) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 X_{\Delta}(k+1/k) + \alpha \left[X_{\Delta}(k+1/k) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]^2 + v(k+1) \quad (3.4)$$

onde $\alpha = \frac{1}{2}$ para os Filtros Gaussiano e Gaussiano Modificado e $\alpha = \frac{1}{4}$ para os Filtros Truncado e Truncado Modificado.

- equações de filtragem :

$$K(k+1) = \frac{\partial h}{\partial x} X_{\Delta}(k+1/k) \cdot Y_{\Delta}^{-1}(k+1/k) \quad (3.5)$$

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K(k+1) \left[y(k+1) - \hat{y}(k+1/k) \right] \quad (3.6)$$

$$X_{\Delta}(k+1/k+1) = X_{\Delta}(k+1/k) \left[1 - K(k+1) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \beta \left[y(k+1) - \hat{y}(k+1/k) \right] \quad (3.7)$$

onde $\beta = 0$ para os Filtros Gaussiano Modificado e Truncado Modificado.

Para o filtro truncado, β vale :

$$\beta = \frac{-X^2 H_{xx}}{2} \left| 1 - \frac{3X Hx^2}{(\cdot)} - \frac{X Hx^2 (V + \frac{1}{4} X^2 H_{xx}^2)}{(\cdot)} + \frac{2X^2 Hx^4}{(\cdot)} \right| \quad (3.8)$$

e para o Filtro Gaussiano, o valor de β é :

$$\beta = \frac{X^2 H_{xx}}{(\cdot)} \left| 1 - \frac{\frac{9}{2} X Hx^2}{(\cdot)} + \frac{\frac{1}{2} X Hx^2 (V + 7 X Hx^2)}{(\cdot)} + \frac{\frac{5}{4} X^3 Hx^2 H_{xx}^2}{(\cdot)} \right| \quad (3.9)$$

onde $(\cdot) = \epsilon \{ |y(k+1) - \hat{y}(k+1/k)|^2 / Y(k) \}$

Observe-se que o termo de coeficiente $\frac{5}{4}$, contido na equação 3.9 não é considerado pelo Jaswinsky (27) na expressão do Filtro Gaussiano (FGJ).

3.2 - Análise das Equações

Uma inspeção nas equações do filtro revela que os efeitos de não linearidade dependem dos produtos $X_{\Delta}(k/k)$, F_{xx} e $X_{\Delta}(k+1/k)$, H_{xx} , onde F_{xx} e H_{xx} são as segundas derivadas de $f |x(k/k), k|$ e $h |x(k+1/k), k+1|$, obtidas da expansão em série de Taylor e $X_{\Delta}(k/k)$ e $X_{\Delta}(k+1/k)$ respectivamente as variancias dos erros de filtragem e estimação.

Se estes termos são significativos e os valores absolutos das segundas derivadas são maiores que o das variancias, dá-se o nome de não linearidade real e se os valores absolutos das variancias é que são maiores, chama-se de não linearidade induzida; no caso das segundas derivadas e variancias serem grandes, tem-se a não linearidade mista. Note-se que pode ser induzida uma não linearidade no filtro, se a variância inicial fornecida ao mesmo, $X_{\Delta}(0/-1)$, for suficientemente grande.

3.2.1 - Filtro Truncado Modificado

Um detalhe a ser observado é quanto a variancia

$X_{\Delta}(k+1/k+1)$ do filtro truncado modificado, a qual pode assumir valores negativos.

Em primeiro lugar, tome-se a equação da variância predita do filtro truncado modificado :

$$X_{\Delta}(k+1/k) = -\frac{F_{xx}^2}{4} \cdot X_{\Delta}(k/k)^2 + Fx^2 X_{\Delta}(k/k) + \gamma^2(k) W(k) \quad (3.10)$$

Facilmente se nota que a variância predita é função quadrática da variância filtrada no instante anterior, admitindo um ponto máximo em :

$$X_{\Delta}(k/k) = \frac{2 Fx^2}{F_{xx}^2} \quad (3.11)$$

e duas raízes de sinais trocados :

$$X_{\Delta+} = \frac{2 Fx^2}{F_{xx}^2} + \frac{2}{F_{xx}^2} \sqrt{Fx^4 + F_{xx}^2 \gamma(k)^2 W(k)} \quad (3.12)$$

$$X_{\Delta-} = \frac{2 Fx^2}{F_{xx}^2} - \frac{2}{F_{xx}^2} \sqrt{Fx^4 + F_{xx}^2 \gamma(k)^2 W(k)}$$

Graficamente tem-se uma parábola voltada para baixo (Fig. 3.1).

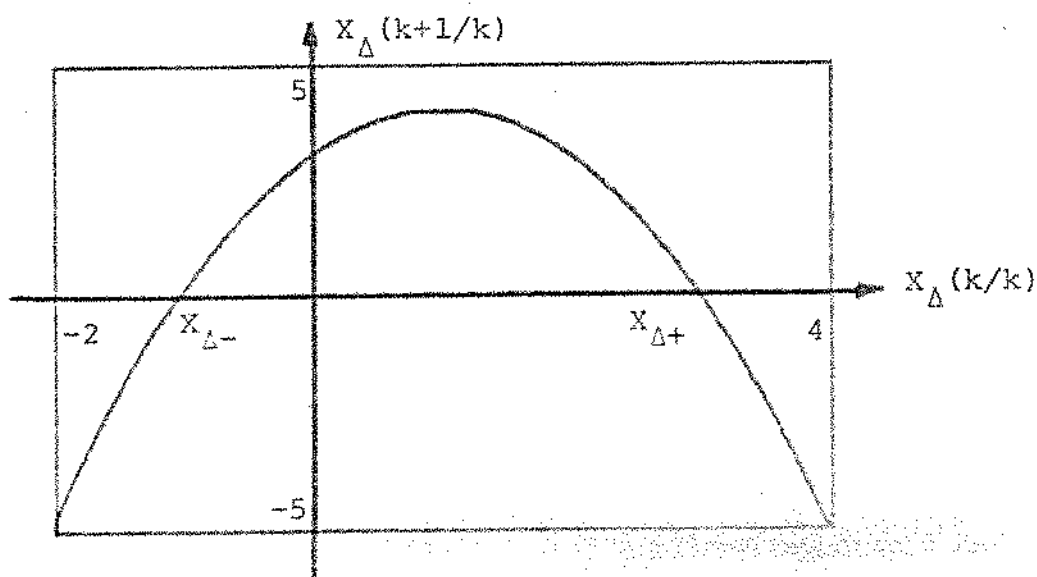


Fig. 3.1 - PTM - $X_{\Delta}(k+1/k)$ em função de $X_{\Delta}(k/k)$.

Logo, se $X_{\Delta-} < X_{\Delta}(k/k) < X_{\Delta+}$, a variancia predita assume valores positivos e em caso contrario, admite valores negativos; para tal, basta que o sistema atravesse uma não linearidade - a variancia filtrada aumenta e consequentemente a variancia predita se torna negativa.

Tome-se agora a equação da variancia filtrada do filtro truncado modificado :

$$X_{\Delta}(k+1/k+1) = X_{\Delta}(k+1/k) |1 - K(k+1) \cdot Hx| \quad (3.13)$$

Supondo $X_{\Delta}(k+1/k)$ positivo, a variancia do filtro truncado pode ser negativa se :

$$1 - K(k+1) Hx < 0 \quad (3.14)$$

ou ainda, substituindo $K(k+1)$:

$$X_{\Delta}(k+1/k) \cdot Hx \cdot Y_{\Delta}^{-1}(k+1/k) \cdot Hx > 1 \quad (3.15)$$

Substituindo agora $Y_{\Delta}(k+1/k)$, segue-se :

$$\frac{Hx^2 X_{\Delta}(k+1/k)}{Hx^2 X_{\Delta}(k+1/k) - \frac{1}{4} |Hxx X_{\Delta}(k+1/k)|^2 + V(k+1)} > 1 \quad (3.16)$$

ou seja :

$$V(k+1) < \frac{Hxx^2 X_{\Delta}^2(k+1/k)}{4} \quad (3.17)$$

A condição acima é obedecida nos casos seguintes :

- inicialização errada do filtro; $X_{\Delta}(0/-1)$ muito grande.
- Hxx muito grande; não linearidade grande de leitura

- $V(k+1)$ pequeno; baixo ruído de leitura.

A terceira conclusão é bastante crítica, pois medidas - muito boas são prejudiciais ao filtro truncado modificado.

Voltando a equação da variancia do filtro, substituindo $K(k+1)$ e subseqüente $Y_{\Delta}(k+1/k)$, pode-se escrever 3.13 da maneira seguinte :

$$X_{\Delta}(k+1/k+1) = \frac{X_{\Delta}(k+1/k) \left[V(k+1) - \frac{Hxx^2 X_{\Delta}(k+1/k)^2}{4} \right]}{\frac{-Hxx^2 X_{\Delta}(k+1/k)^2}{4} + Hx^2 X_{\Delta}(k+1/k) + V(k+1)} \quad (3.18)$$

Observe-se que o denominador de 3.18 é uma função quadrática da variancia predita admitindo duas raízes reais de sinais trocados e portanto anula-se quando $X_{\Delta}(k+1/k)$ assume o valor de uma das raízes; isto faz com que a variancia do filtro $X_{\Delta}(k+1/k+1)$ atinja valores extremamente elevados ocasionando a divergencia do filtro.

Na figura 3.2 é feito um esboço da equação 3.18.

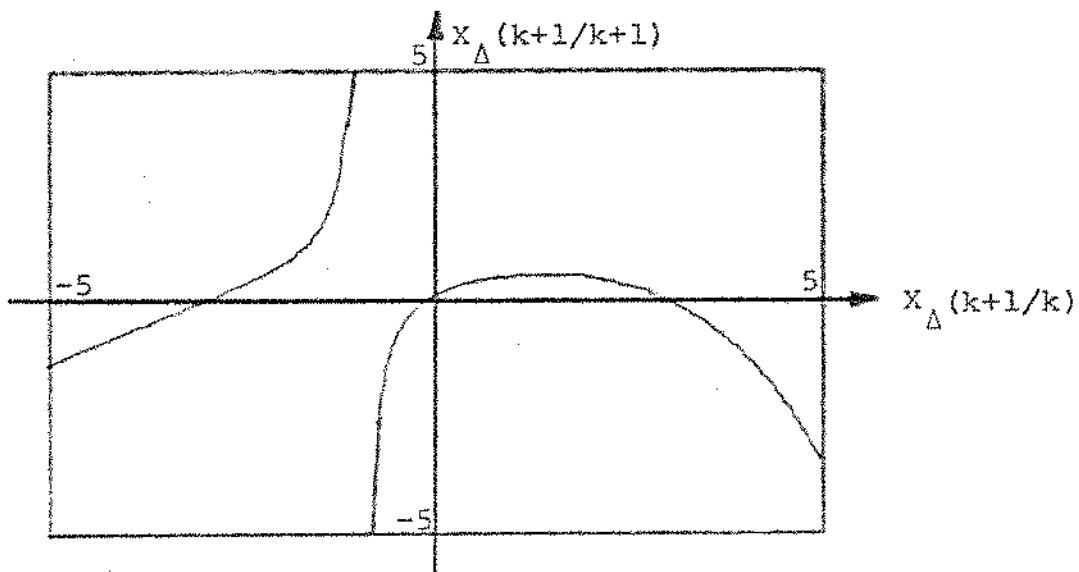


Fig. 3.2 - FTM - $X_{\Delta}(k+1/k+1)$ em função de $X_{\Delta}(k+1/k)$

Observe-se no gráfico acima os pontos de divergencia.

3.2.2 - Filtro Gaussiano Modificado

Idêntica análise foi feita para o filtro Gaussiano Modificado.

Tomando-se inicialmente a equação da variância predita:

$$X_{\Delta}(k+1/k) = \frac{F_{XX}^2}{2} X_{\Delta}(k/k)^2 + F_X^2 X_{\Delta}(k/k) + \gamma^2(k)W(k) \quad (3.19)$$

De fato, a variância predita do filtro gaussiano modificado é função quadrática da variância filtrada no instante anterior, admitindo um ponto de mínimo em :

$$X_{\Delta}(k/k) = \frac{-F_{XX}^2}{F_X^2} \quad (3.20)$$

e duas raízes reais e negativas :

$$X_{\Delta 1,2} = \frac{-F_X^2}{F_{XX}^2} \pm \frac{1}{F_{XX}^2} \sqrt{F_X^4 - 2 F_{XX}^2 \gamma^2(k) W(k)} \quad (3.21)$$

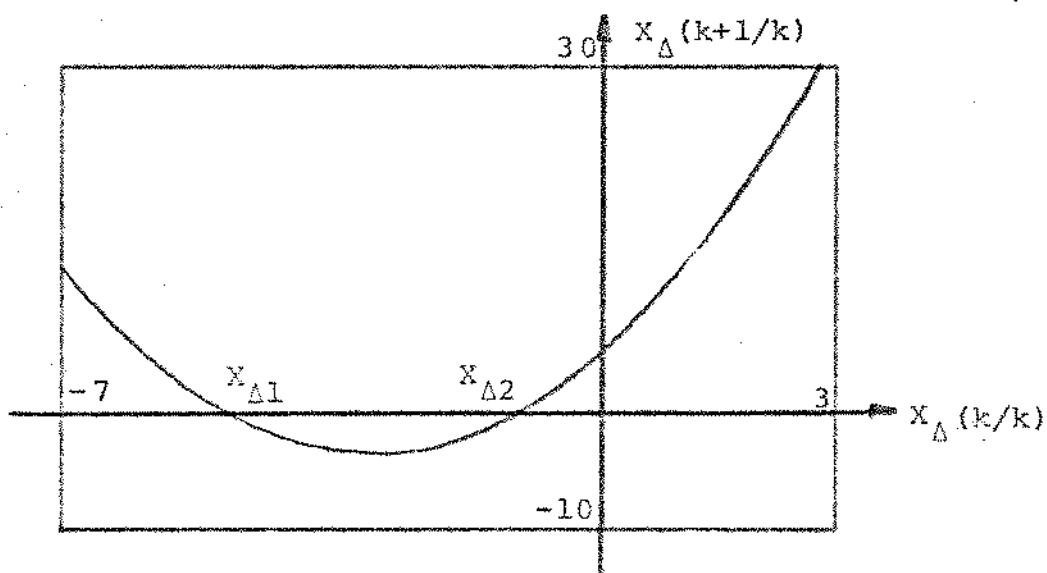


Fig. 3.3 - FGM - $X_{\Delta}(k+1/k)$ em função de $X_{\Delta}(k/k)$

Logo, partindo-se de um valor positivo de $X_{\Delta}(k/k)$, chega-se a um valor igualmente positivo de $X_{\Delta}(k+1/k)$, cujo gráfico de 3.19 é uma parábola voltada para cima (Fig. 3.3)

Examinando a equação da variância filtrada do filtro gaussiano :

$$X_{\Delta}(k+1/k+1) = X_{\Delta}(k+1/k) |1 - K(k+1) \cdot Hx| \quad (3.22)$$

Para que $X_{\Delta}(k+1/k+1)$ se torne negativo é necessário que :

$$1 - K(k+1) Hx < 0 \quad (3.23)$$

Substituindo $K(k+1)$ e subsequente $Y_{\Delta}(k+1/k)$, vem :

$$\frac{Hx^2 X_{\Delta}(k+1/k)}{Hx^2 X_{\Delta}(k+1/k) + \frac{1}{2} |Hxx X_{\Delta}(k+1/k)|^2 + V(k+1)} > 1 \quad (3.24)$$

ou melhor :

$$\frac{1}{2} |Hxx X_{\Delta}(k+1/k)|^2 + V(k+1) < 0 \quad (3.25)$$

o que realmente é impossível.

Tomando novamente a equação (3.22) e substituindo $K(k+1)$ e em seguida $Y_{\Delta}(k+1/k)$, chega-se a :

$$X_{\Delta}(k+1/k+1) = \frac{X_{\Delta}(k+1/k) \left[V(k+1) + \frac{Hxx^2 X_{\Delta}(k+1/k)^2}{2} \right]}{\frac{Hxx^2 X_{\Delta}(k+1/k)^2}{2} + Hx^2 X_{\Delta}(k+1/k) + V(k+1)} \quad (3.26)$$

Como de fato $X_{\Delta}(k+1/k)$ não assume valores negativos, não há possibilidade alguma da variância do filtro atingir valores negativos. (Fig. 3.4)

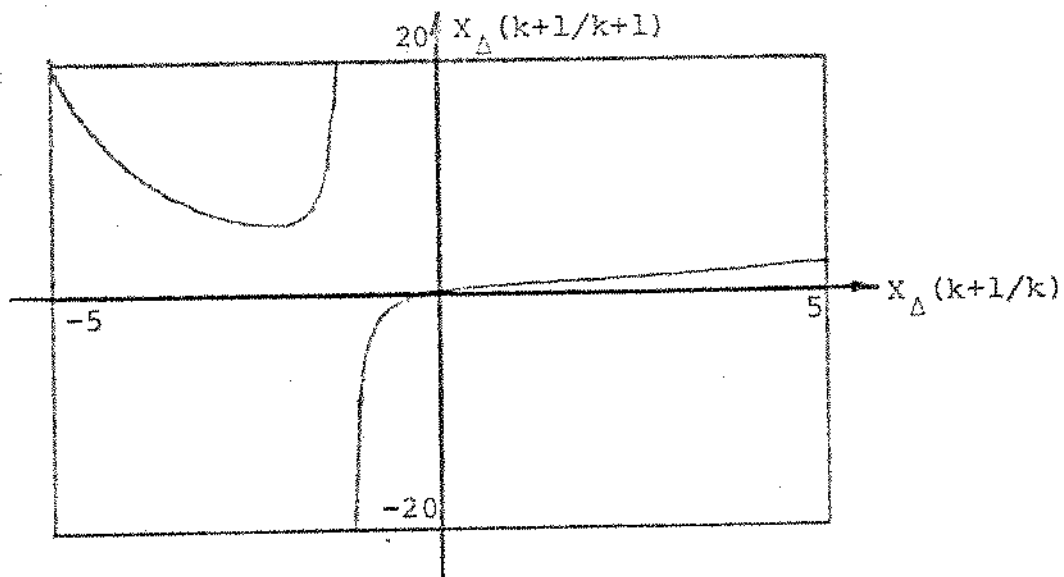


Fig. 3.4 - FGM - $X_{\Delta}(k+1/k+1)$ em função de $X_{\Delta}(k+1/k)$

3.3 - Resultados das Simulações

Devido ao fato dos algoritmos tratados neste trabalho - terem sido obtidos por aproximação utilizando série de Taylor no desenvolvimento das funções envolvidas e desprezando termos de ordem superior a segunda, é natural que erros sejam introduzidos e que tais erros estejam em função das não linearidades envolvidas.

Para uma análise da ocorrência desses erros, apresentam-se aqui os resultados de um dos casos simulados; tal caso foi escolhido por apresentar tanto regiões lineares quanto não lineares.

Os resultados a seguir provêm de simulações de Monte Carlo (32) com média de 1000 valores procurando-se evitar deste modo, erros devido a particulares sequências de ruído.

Considere-se o seguinte sistema escalar discreto e não linear, com equações de estado dadas por :

$$x(k+1) = Ax(k) + \frac{Bx(k)}{1 + x(k)^2} + Gu(k) + w(k)$$

(3.27)

e medidas, também não lineares :

$$y(k+1) = D|x(k+1)+E| + \frac{F}{1 + |x(k+1) + E|^2} + v(k+1)$$

(3.28)

onde :

$$\begin{aligned} A &= 0,9 & B &= -10,0 & G &= -0,1 & u(k) &= k \\ D &= 0,5 & E &= 20,00 & F &= -10,0 & x(0) &= 20,0 \end{aligned}$$

e ainda :

$$w(k) = N(0;1) ; v(k+1) = N(0;1) ; \bar{x}(0) = N(15;10)$$

O estado do sistema apresenta uma não linearidade próxima a origem (fig. 3.5) e as medidas apresentam idêntica não linearidade - próxima ao ponto 20.

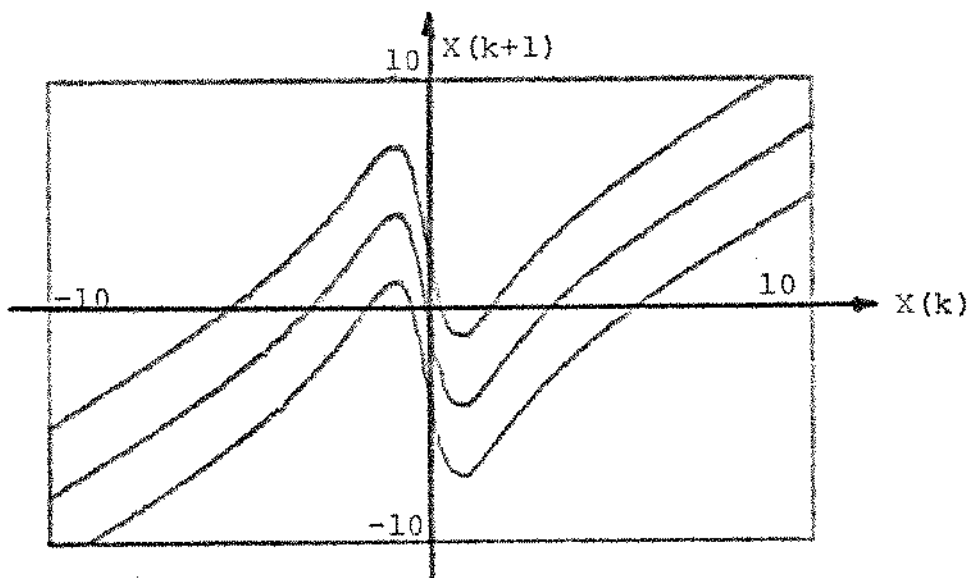


Fig. 3.5 - $x(k+1)$ em função de $x(k)$ contendo a faixa de ruído de $3\sigma_{w(k)}$

Partindo de uma condição inicial $x(0) = 20$, traçou-se a evolução de $x(k)$ com o tempo (fig. 3.6). Observe-se que o sistema atravessa uma faixa extremamente não linear na origem, delimitada por duas faixas praticamente lineares.

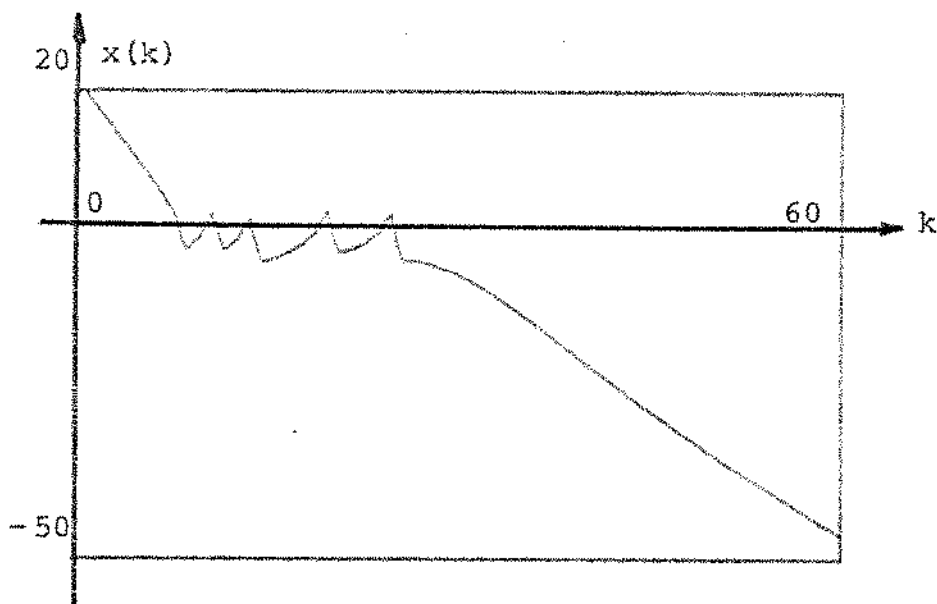


Fig. 3.6 - Evolução do estado $x(k)$ com o tempo

Em seguida aplicam-se os filtros estudados ao sistema descrito por 3.27 e 3.28 e os resultados obtidos são comparados dois a dois.

Para efeito de comparação são traçados os gráficos de:

- desvios padrões médios :

$$\sigma_{X_{\Delta}}(k/k) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N X_{\Delta}(k/k) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- erros médios :

$$Er(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |x(k) - \hat{x}(k)|$$

- relação entre erro quadrático e variancia, sugerida por Mendes et al (33) :

$$A(k) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{|x(k) - \hat{x}(k)|^2}{X_{\Delta}(k/k)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

3.3.1 - Filtros Gaussiano e Gaussiano do Jaswinsky

A figura 3.7 apresenta a evolução no tempo dos desvios padrões médios dos filtros Gaussiano e Gaussiano deduzido pelo Jaswinsky. Observe-se que os valores obtidos pelo Filtro Gaussiano são bem mais precisos que os do Gaussiano do Jaswinsky.

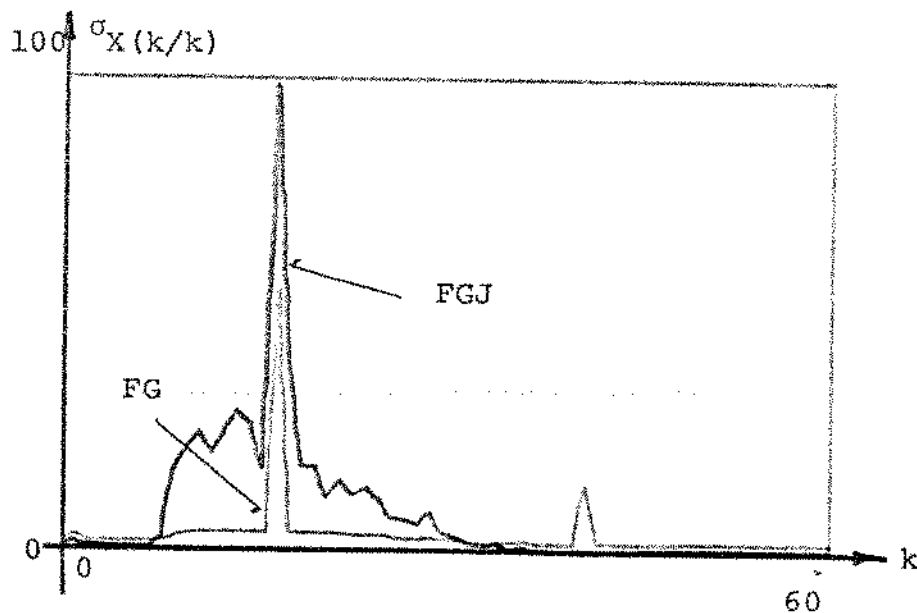


Fig. 3.7 - Desvios padrões médios - FG e FGJ

Na figura 3.8 são apresentados os erros médios de ambos os filtros; o filtro gaussiano novamente supera admitindo erros menores.

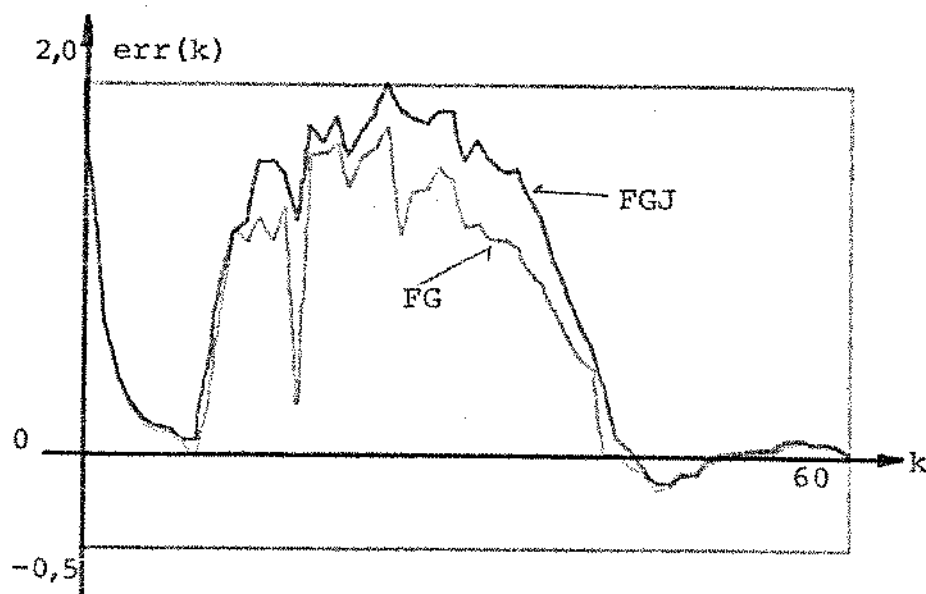


Fig. 3.8 - Erros médios - FG e FGJ

A relação erro quadrático/variancia também é mais favorável para o filtro gaussiano, que apresenta valores mais próximos da unidade (fig. 3.9)

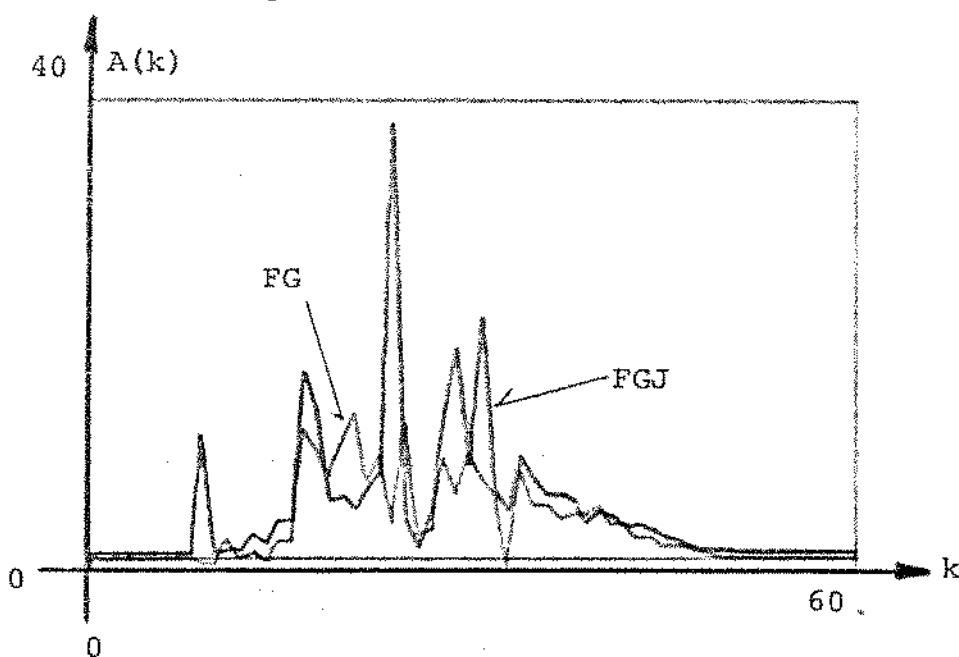


Fig. 3.9 - Relação erro-quadrático/variancia FG e FGJ

3.3.2 - Filtros Gaussiano e Truncado

A figura 3.10 apresenta a comparação entre os desvios padrões médios dos Filtros Gaussiano e Truncado; o filtro truncado, além de admitir valores maiores ainda tem serios problemas de divergencia.

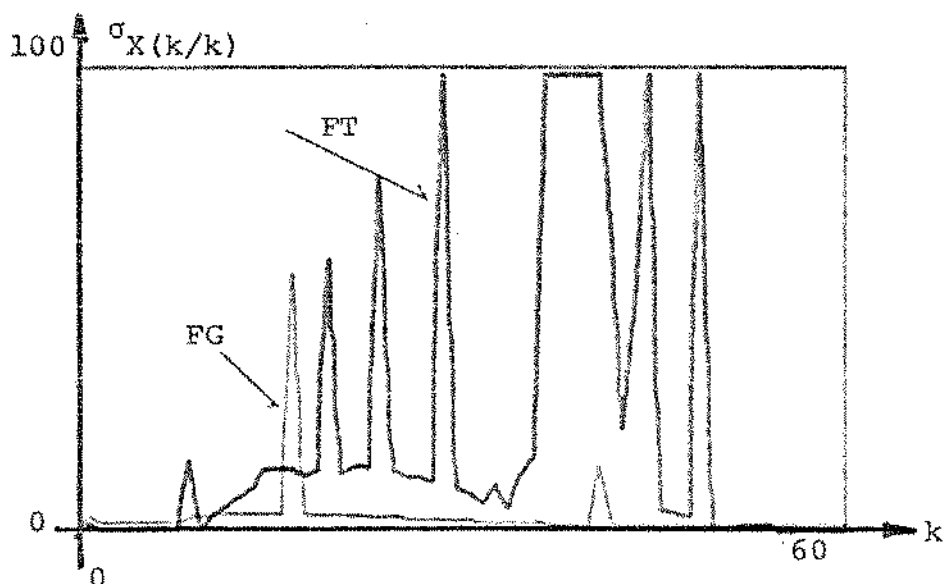


Fig. 3.10 - Desvios padrões médios - FG e FT

Quanto aos erros médios, o filtro truncado apresenta valores muito elevados comparativamente com o filtro gaussiano (fig. 3.11).

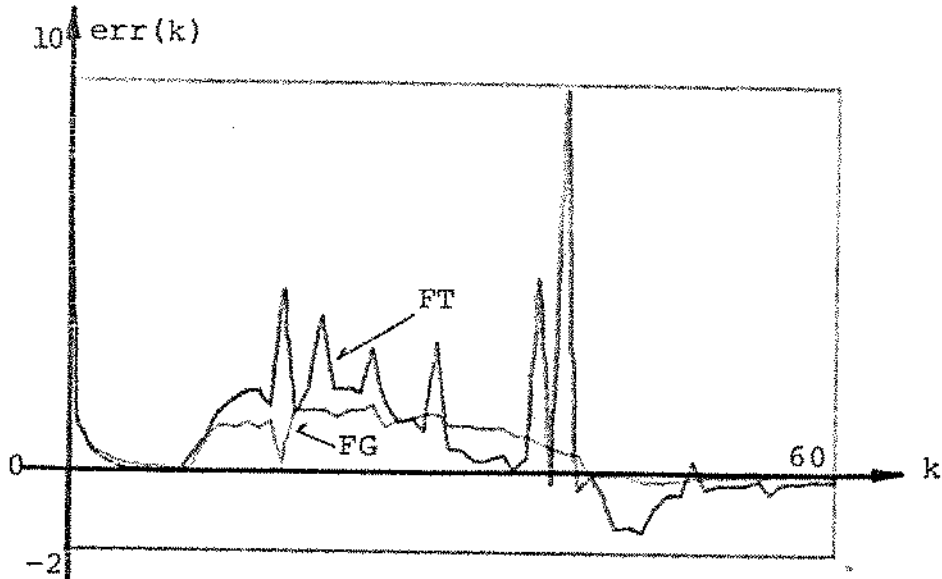


Fig. 3.11 - Erros médios - FG e FT

Na figura 3.12 encontram-se os resultados da relação erro quadrático/variancia entre os filtros citados, também neste caso o filtro truncado apresentou resultados bastante dispersos.

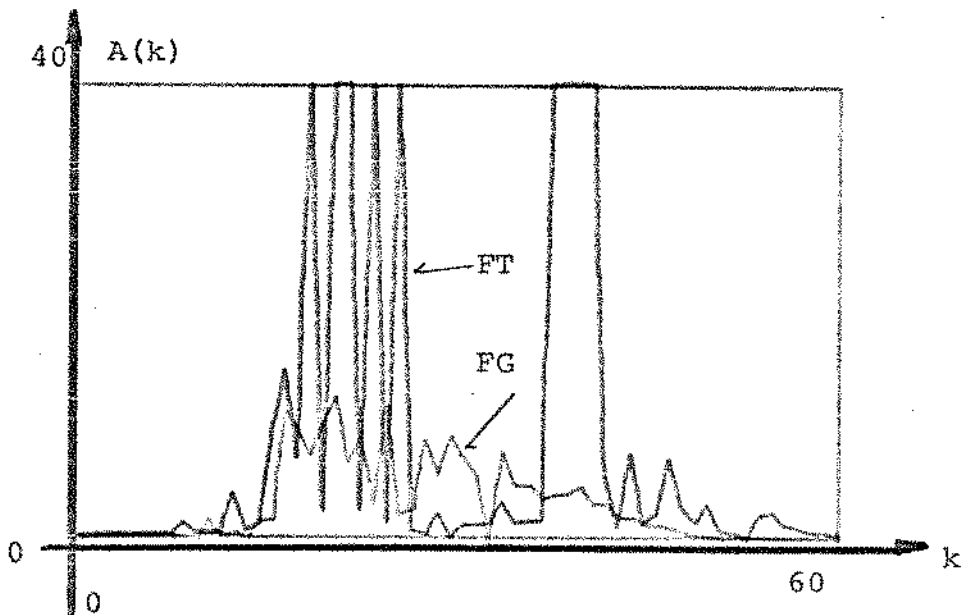


Fig. 3.12 - Relação erro quadrático/variancia - FG e FT

3.3.3 - Filtros Gaussiano e Gaussiano Modificado

Na figura 3.13 comparam-se os desvios padrões médios - dos filtros gaussiano e gaussiano modificado. De fato, o filtro gaussiano apresenta valores menores de desvios padrões, como já era de se esperar, pois o mesmo sofre correções na variancia.

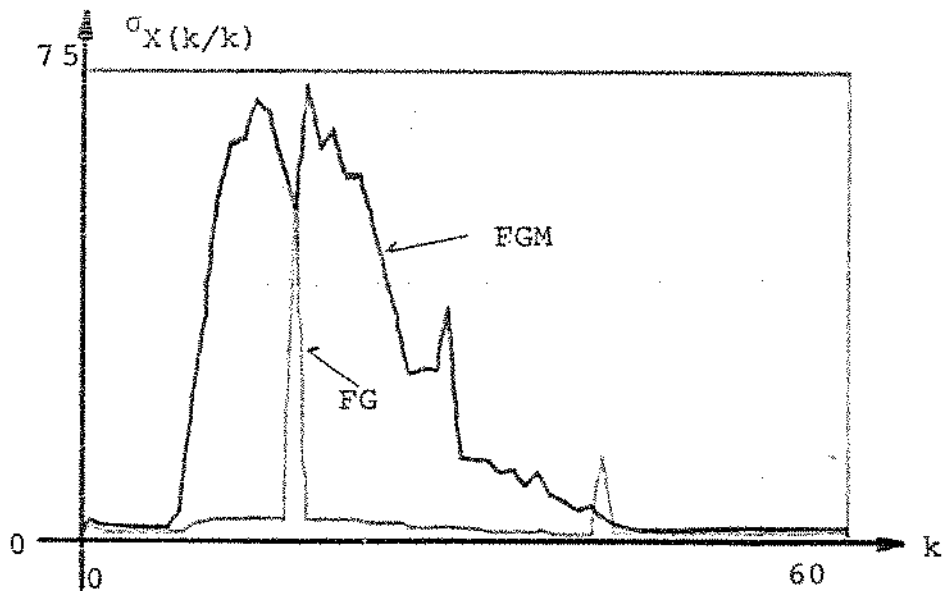


Fig. 3.13 - Desvios padrões médios - FG e FGM

Quanto aos erros médios, a diferença entre ambos os filtros já não é tão evidente, sendo que o filtro gaussiano modificado apresenta erros médios ligeiramente maiores (fig. 3.14)

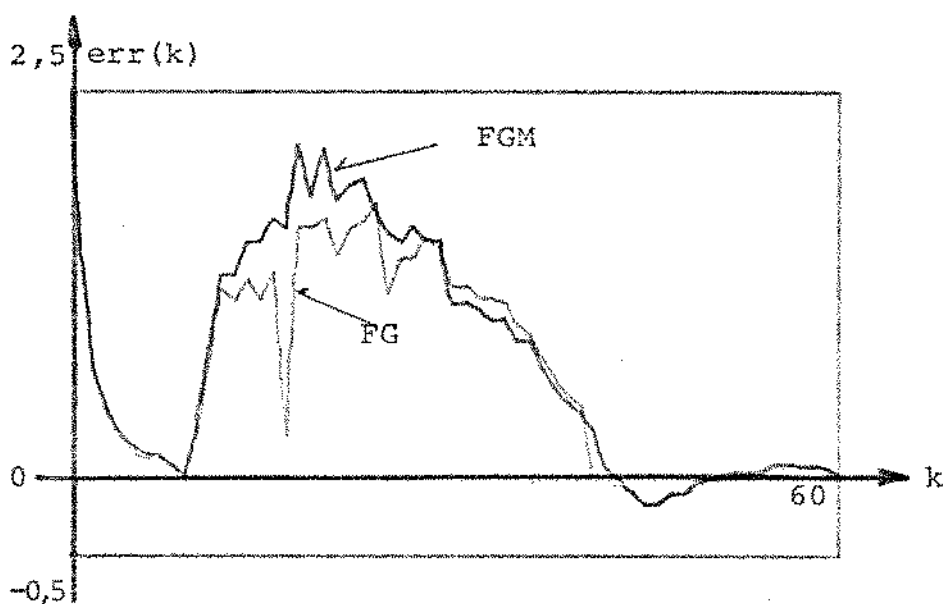


Fig. 3.14 - Erros médios - FG e FGM

A relação erro quadrático/variancia apresenta-se muito mais favorável ao filtro gaussiano modificado, tendo este, valores bem menores e mais homogeneamente distribuídos (fig. 3.15).

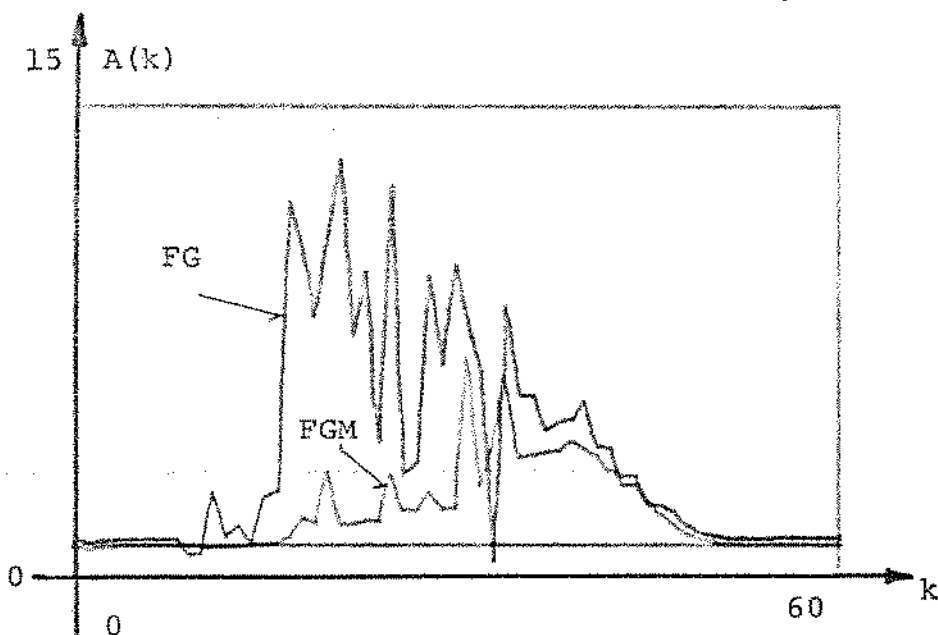


Fig. 3.15 - Relação erro quadrático/variancia - FG e FGM

3.3.4 - Filtros Gaussiano Modificado e Truncado Modificado

A figura 3.16 apresenta a evolução no tempo dos desvios padrões médios de ambos os filtros modificados. Como já visto no item 3.2.1, realmente o filtro truncado modificado tem grande facilidade em assumir valores negativos de variancia; na região linear, no entanto, este filtro comporta-se bem.

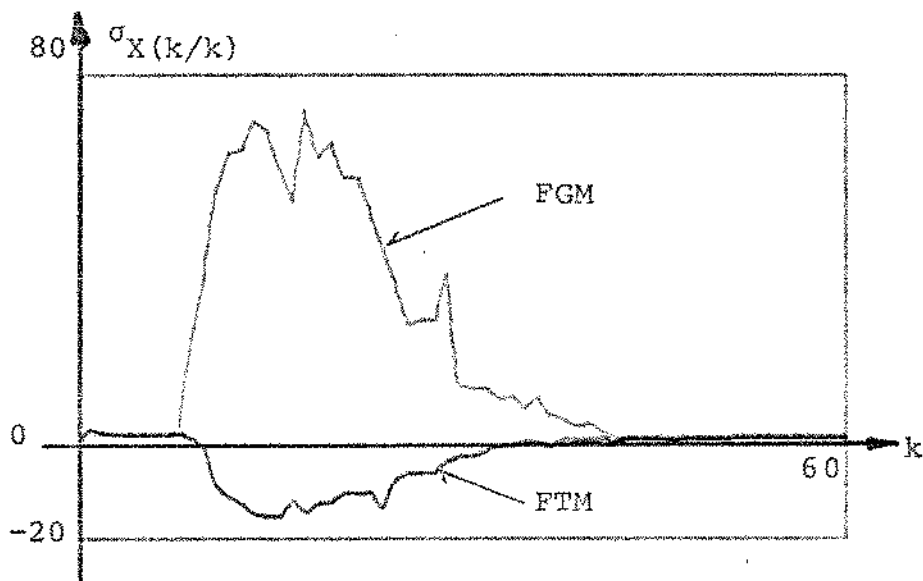


Fig. 3.16 - Desvios padrões médios - FGM e FTM

Quanto aos erros médios, os admitidos pelo filtro truncado modificado são maiores que os admitidos pelo filtro gaussiano modificado (fig. 3.17)

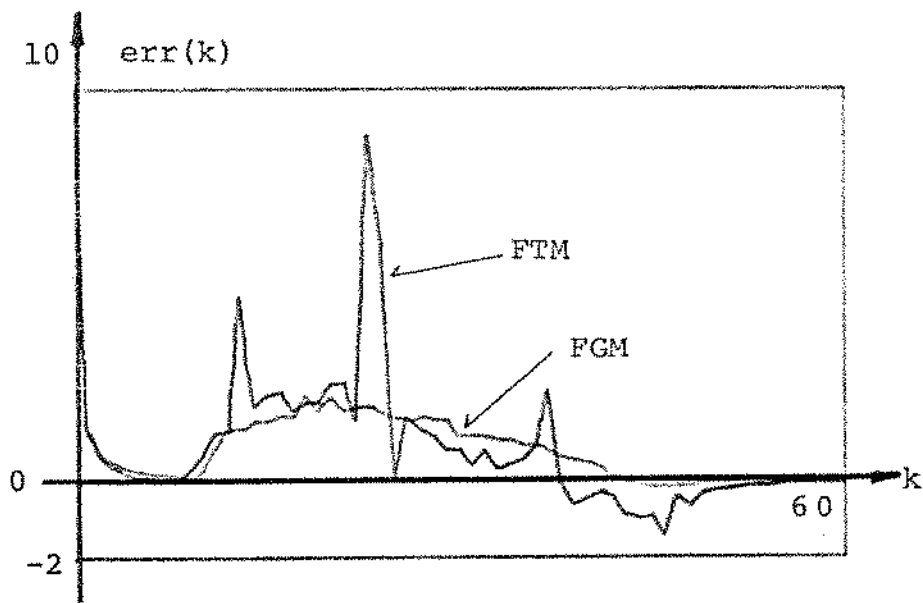


Fig. 3.17 - Erros Médios - FGM e FTM

Na figura 3.18 comparam-se as relações erro quadrático/variancia para ambos os filtros; o filtro Gaussiano modificado apresentou valores bem mais próximos aos verdadeiros.

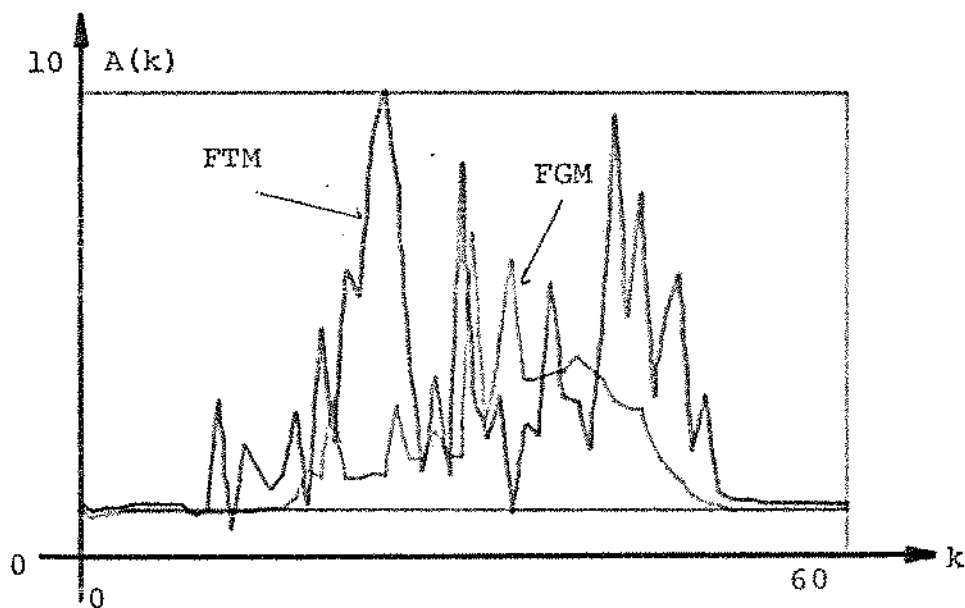


Fig. 3.18 - Relação erro quadrático/variancia FGM e FTM

3.4.- Conclusões

No presente capítulo analisaram-se as equações de ambos os filtros modificados de segunda ordem, onde se verificou que o filtro truncado modificado apresenta grande facilidade de assumir valores negativos de variância e, em certos casos, podendo causar inclusive divergência do filtro.

A seguir, comparando os diferentes resultados das simulações efetuadas, verificou-se que o filtro gaussiano desenvolvido neste trabalho apresenta melhores resultados que o deduzido pelo Jaswinsky.

Observou-se também que há sérios problemas na aplicação do filtro truncado que, além de bastante complexo, é completamente instável, apresentando inúmeros pontos de divergência.

Em comparação direta com ambos os filtros gaussiano, verificou-se que, apesar do filtro gaussiano modificado apresentar valores maiores de variância, os erros médios entre valores reais e estimados são baixos e a relação erro quadrático/variância é bastante favorável.

Em suma, dentre os cinco algoritmos testados, o filtro gaussiano modificado, aparentemente, é o que melhor se comporta, apresentando erros baixos e não sendo tão otimista na variância, além de ser razoavelmente fácil a sua implementação; de fato, realmente o filtro gaussiano modificado é o mais usado na prática dentre os algoritmos de segunda ordem.

Capítulo 4

ASPECTOS COMPUTACIONAIS DOS FILTROS

DE SEGUNDA ORDEM

4.1 - Introdução

São diversas as aplicações de controle que decorrem em tempo real, onde o problema de filtragem está presente. Logo, os fatores mais importantes no estudo da viabilidade do algoritmo de filtragem são justamente o tempo necessário para a computação de um ciclo completo e o tamanho de memória requerida para o armazenamento do programa e dos dados.

Os algoritmos de filtragem contêm um conjunto de operações matriciais, tais como : adição, subtração, transposição, multiplicação, inversão e multiplicação por escalar, as quais, por sua vez, são realizadas a partir de um conjunto de instruções básicas, cujos tempos de execução são conhecidos. O tempo total de computação de um algoritmo pode ser representado em função das dimensões das matrizes envolvidas, já que o tempo de execução de operações matriciais depende diretamente de sua ordem.

J.M. Mendel (34) descreveu subrotinas em linguagem de máquinas para a execução de operações básicas, aplicando-as ao filtro linear de Kalman; C.L. Tozzi (24) aplicou as subrotinas de Mendel nos filtros "extended" e seus derivados. Estas subrotinas utilizam o conjunto de instruções da tabela 4.1, cujos tempos de execução são também fornecidos nesta tabela de forma aproximada - em unidades de tempo de Computador (variável para cada tipo). Os tempos de execução das operações matriciais, calculados em função das dimensões das matrizes, são postos na tabela 4.2.

Tabela 4.1

Instruções e tempo de execução

<u>Instrução</u>	<u>Tempo de execução (uc)*</u>
Add to A	2
Sub from B	2
Load A or B	2
Store A or B	2
Mul A with memory	MUL
Div. A by memory	DIV
Mark place and transfer	2
Return branch	2
Transfer on zero or minus	1
Transfer unconditional	1
Transfer on plus	1
Increment A	1
Increment index register Ri	1
Decrement index register Ri	1
Add to index register Ri	1
Sub to index register Ri	1
Increment B register	1
Skip on index register zero	1

O tempo de execução das instruções de multiplicação e divisão é variável, para cada tipo de computador e depende do modo como tais instruções foram implementadas. Tempos médios para estas instruções são :

$$\text{MUL} = 6 \quad \text{DIV} = 12$$

Por exemplo, para o computador PDP-10 utilizado neste trabalho, os tempos médios de soma, multiplicação e divisão são da ordem de 2µs para soma, 4,5 µs para multiplicação e 8,3 µs para divisão (Apendice 1).

* (uc) - unidade de tempo de computador

Tabela 4.2

Operações Matriciais e tempo de Computação

<u>Operação</u>	<u>Tempo de computação</u>
Soma de Matrizes $C_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$	MUL + 27 + 7mn
Subtração de Matrizes $C_{mn} = A_{mn} - B_{mn}$	MUL + 27 + 7mn
Produto de Matrizes $C_{m\ell} = A_{mn} B_{n\ell}$	10+8mnℓ+19mℓ+16m+MULmnℓ
Produto pela Transposta $C_{m\ell} = A_{mn} B_{\ell n}^T$	10+8mnℓ+19mℓ+16m+MULmnℓ
Inversão de Matrizes A_{nn}^{-1}	10+7,5n ⁴ +43n ³ +139,5n ² +92n+ +DIV(2n ² +n)+MUL(n ³ +0,5n ² +2,5n)
Produto de Matriz por escalar $C_{mn} = \mu A_{mn}$	8mn + MULmn

4.2 - Cálculo dos Tempos de Computação para os Filtros de Segunda Ordem

A seguir estimam-se os tempos de computação para um ciclo completo dos filtros modificados de segunda ordem. Os tempos de execução para os filtros gaussiano e truncado não foram estimados no presente trabalho, visto que o uso destes filtros é bastante limitado

4.2.1. Filtro Gaussiano Modificado

Partindo-se das equações do filtro gaussiano modificado :

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k) = \underline{f} | \hat{\underline{x}}(k/k), k | + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \underline{x}(k/k)_{ij} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} + \underline{g} | \underline{u}(k), k | \quad (4.1)$$

$$\underline{X}(k+1/k) = \underline{f}_x \underline{X}(k/k) \underline{f}_x^T + \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}^T(k) + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^N | \underline{x}(k/k)_{ik} \underline{x}(k/k)_{jl} + \underline{x}(k/k)_{il} \underline{x}(k/k)_{jk} | \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \underline{f}^T}{\partial x_k \partial x_l} \quad (4.2)$$

$$\hat{\underline{y}}(k+1/k) = \underline{h} | \hat{\underline{x}}(k+1/k), k+1 | + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \underline{x}(k+1/k)_{ij} \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.3)$$

$$\underline{Y}(k+1/k) = \underline{h}_x \underline{X}(k+1/k) \underline{h}_x^T + \underline{V}(k+1) + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l}^N | \underline{x}(k+1/k)_{ik} \underline{x}(k+1/k)_{jl} + \underline{x}(k+1/k)_{il} \underline{x}(k+1/k)_{jk} | \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \underline{h}^T}{\partial x_k \partial x_l} \quad (4.4)$$

$$\underline{K}(k+1) = \underline{X}(k+1/k) \underline{h}_x^T \underline{Y}^{-1}(k+1/k) \quad (4.5)$$

$$\hat{\underline{x}}(k+1/k+1) = \hat{\underline{x}}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) | \underline{y}(k+1) - \hat{\underline{y}}(k+1/k) | \quad (4.6)$$

$$\underline{X}(k+1/k+1) = | \underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{h}_x | \underline{X}(k+1/k) \quad (4.7)$$

As dimensões e a memória requerida para o armazenamento das matrizes do filtro gaussiano modificado são fornecidas na tabela 4.3.

Tabela 4.3

Dimensões das matrizes e memória requerida

<u>Matriz</u>	<u>Dimensão</u>	<u>Memória requerida</u>
$\hat{x}(k/k)$	$n \times 1$	n
$X(k/k)$	$n \times n$	n^2
$\hat{x}(k+1/k)$	$n \times 1$	n
$X(k+1/k)$	$n \times n$	n^2
$f[\hat{x}(k/k), k]$	$n \times 1$	n
f_x	$n \times n$	n^2
f_{xx}	$n \times n \times n$	n^3
$g[u(k), k]$	$n \times 1$	n
$I(k)$	$n \times s$	ns
$W(k)$	$s \times s$	s^2
$y(k+1)$	$r \times 1$	r
$\hat{y}(k+1/k)$	$r \times 1$	r
$Y(k+1/k)$	$r \times r$	r^2
$h[\hat{x}(k+1/k), k+1]$	$r \times 1$	r
h_x	$r \times n$	rn
h_{xx}	$r \times n \times n$	rn^2
$V(k+1)$	$r \times r$	r^2
$K(k+1)$	$r \times n$	rn

Os valores de $f[\hat{x}(k/k), k]$, f_x , f_{xx} , $h[\hat{x}(k+1/k), k+1]$, h_x , h_{xx} e $g[u(k), k]$ são recalculados em cada passo de execução do algoritmo; para tanto, considera-se um fator IC, expresso em unidades de tempo (uc), como sendo o tempo de computação necessário para a geração desses valores. Toma-se para IC um valor típico igual a 10. Na tabela 4.4 a seguir são fornecidos os tempos de execução estimados para um ciclo do filtro gaussiano modificado.

Tabela 4.4

Tempos de execução para um ciclo do
filtro gaussiano modificado

<u>equação</u>		<u>tempo de computação</u>
$\hat{\underline{x}}(k+1/k)$	\underline{f}	ICn
	\underline{f}_{xx}	ICn ³
	\underline{Xf}_{xx}	MULn
	Σ	(MULn)n ² +2n ² (n-1)
	$\frac{1}{2}\Sigma$	(8+MUL)n
	\underline{g}	ICn
	soma	2(MUL+27+7n ²)
$\underline{X}(k+1/k)$	\underline{f}_x	ICn ²
	\underline{Xf}_x^T	10+(8+MUL)n ³ +19n ² +16n
	$\underline{f}_x(\underline{X} \underline{f}_x^T)$	10+(8+MUL)n ³ +19n ² +16n
	$\underline{X}\Gamma^T$	10+(8+MUL)rs ² +19ns+16s
	$\frac{\Gamma \underline{W} \Gamma^T}{2\underline{X}^2}$	10+(8+MUL)n ² s+19n ² +16n
	$\frac{\underline{f}_{xx} \underline{f}_{xx}^T}{2\underline{X}^2}$	— 2MUL+2
	$\frac{\underline{f}_{xx} \underline{f}_{xx}^T}{2\underline{X}^2}$	— MULn ²
	$\frac{\underline{f}_{xx} \underline{f}_{xx}^T}{2\underline{X}^2}$	— MULn ²
	Σ	(2MUL+2+2MULn ²)n ⁴ +2n ⁵ (n-1)
	$\frac{1}{4}\Sigma$	(8+MUL)n ²
	soma	2(MUL+27+7n ²)
		+
$\underline{y}(k+1/k)$	\underline{h}	ICr
	\underline{h}_{xx}	ICn ² r
	\underline{Xh}_{xx}	—MULr
	Σ	MULnr ² +2r ² (n-1)
	$\frac{1}{2}\Sigma$	(8+MUL)r
	soma	MUL+27+7r ²

$\underline{Y}(k+1/k)$	$\underline{h}x$ $\underline{X}h x^T$ $\underline{h}x \underline{X} \underline{h}x^T$ $2x^2$ $\underline{h}xx \underline{h}xx^T$ $2x^2 \underline{h}xx^2$ Σ $\frac{1}{4} \Sigma$ soma	ICnr $10+(8+MUL)n^2r+19nr+16n$ $10+(8+MUL)nr^2+19r^2+16r$ — 2MUL+2 — MULr ² — MULr ² $(2MUL+2+2MULr^2) n^4+2r^2n^3(n-1)$ $(8+MUL) r^2$ $2(MUL+27+7r^2)$
$\underline{K}(k+1)$	\underline{Y}^{-1} $\underline{X} \underline{h}x^T \underline{Y}^{-1}$	$10+7,5r^4+43r^3+139,5r^2+92r+$ +DIV($2r^2+r$)+MUL($r^3+0,5r^2+$ 2,5r) $10+(8+MUL)nr^2+19nr+16n$
$\hat{x}(k+1/k+1)$	$\underline{y} - \hat{\underline{y}}$ $\underline{K} (\underline{y} - \hat{\underline{y}})$ $\hat{x} + \underline{k} (\underline{y} - \hat{\underline{y}})$	MUL + 27 + 7r $10+(8+MUL)nr+35n$ MUL+27+7n
$\underline{X}(k+1/k+1)$	$\underline{K} \underline{h}x$ $\underline{I} - \underline{K} \underline{h}x$ $\underline{X} (\underline{I} - \underline{K} \underline{h}x)$	$10+(8+MUL)n^2r+19n^2+16n$ MUL+27+7n ² $10+(8+MUL)n^3+19n^2+16n$

O tempo total de computação $t(n,r,s)$, por ciclo é obtido, somando-se os tempos da tabela 4.4 e substituindo os valores de IC, MUL e DIV.

Para facilidade de representação gráfica, a expressão $t(n, r, s)$ foi decomposta em duas outras:

$$t(n,r,s) = t(n,r,0) + t(n,0,s)$$

e os resultados obtidos são mostrados nas figuras 4.1 e 4.2.

Verifica-se pelos gráficos que $t(n,r,s)$ não é sensível a variações em r , porém bastante afetado por n . Para valores de n superiores a 9, o tempo de computação aumenta bastante.

Tomando-se a unidade de tempo de computador igual a 1 μ s, para $n = 14$ e $r = 6$, o tempo de computação de um ciclo com

pleto do filtro chega a ser da ordem de 2 min.

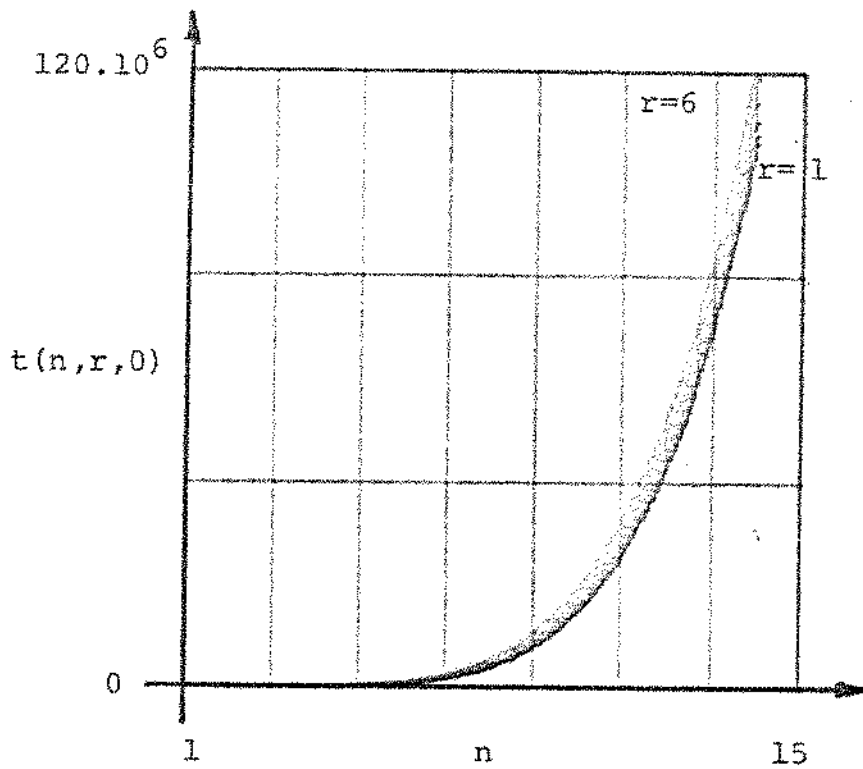


Fig. 4.1 - $t(n,r,0)$ x n para os filtros modificados de segunda ordem

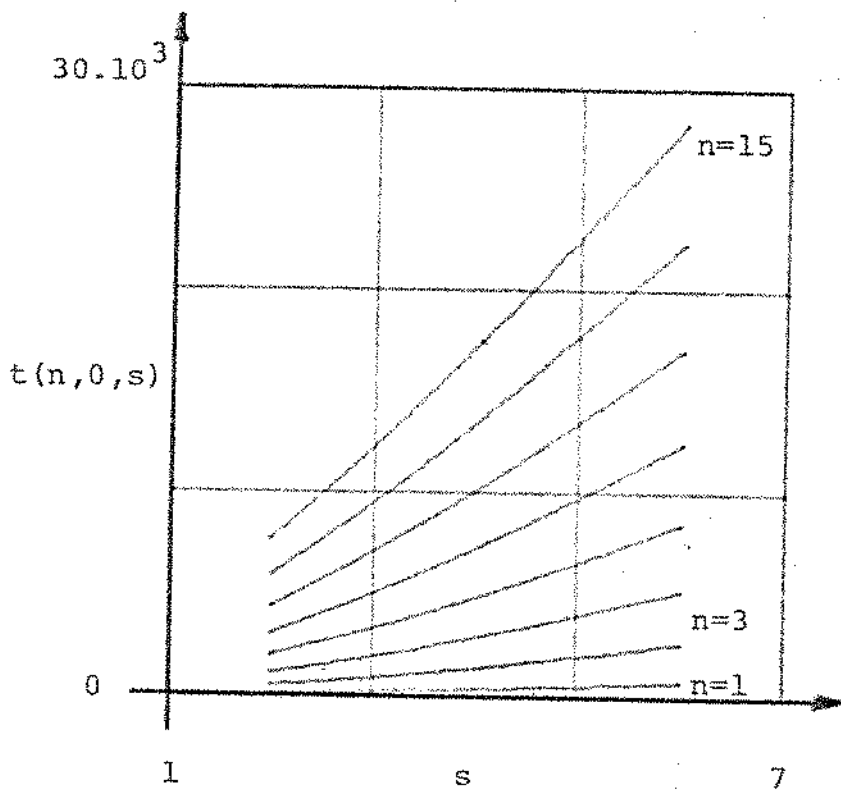


Fig. 4.2 - $t(n,0,s)$ x s para os filtros modificados de segunda ordem

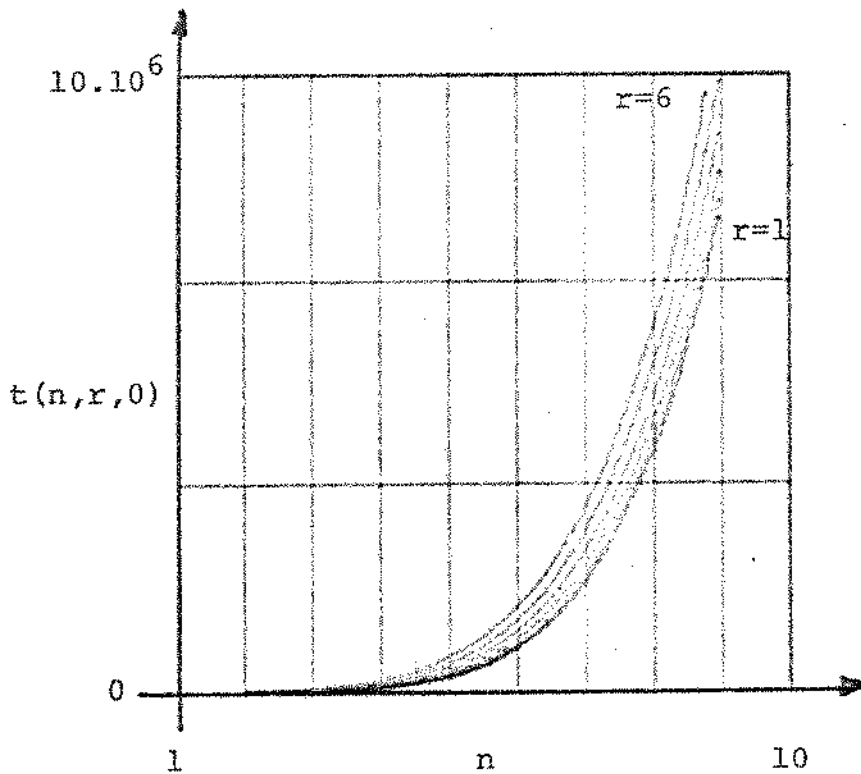


Fig. 4.3 - $t(n,r,0)$ x n para os filtros modificados de segunda ordem.

Na figura 4.3 verifica-se melhor a influência de r , porém mesmo assim nota-se a predominância de n sobre as demais variáveis.

4.2.2 - Filtro Truncado Modificado

Sejam as equações do filtro truncado Modificado :

$$\hat{x}(k+1/k) = \underline{f} [\hat{x}(k/k), k] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N x(k/k)_{ij} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} + \underline{g} [u(k), k] \quad (4.8)$$

$$\underline{X}(k+1/k) = \underline{f}_x \underline{X}(k/k) \underline{f}_x^T + \underline{\Gamma}(k) \underline{W}(k) \underline{\Gamma}^T(k) - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^N |x(k/k)_{ij} x(k/k)_{kl}| \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \underline{f}^T}{\partial x_k \partial x_l} \quad (4.9)$$

$$\hat{y}(k+1/k) = \underline{h} | \hat{x}(k+1/k), k+1 | + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N X(k+1/k)_{ij} \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.10)$$

$$\underline{Y}(k+1/k) = \underline{h} \underline{X}(k+1/k) \underline{h}^T + \underline{V}(k+1) - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^N | X(k+1/k)_{ij} X(k+1/k)_{kl} | \frac{\partial^2 \underline{h}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \underline{h}^T}{\partial x_k \partial x_l} \quad (4.11)$$

$$\underline{K}(k+1) = \underline{X}(k+1/k) \underline{h}^T \underline{Y}^{-1}(k+1/k) \quad (4.12)$$

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + \underline{K}(k+1) | \underline{y}(k+1) - \hat{y}(k+1/k) | \quad (4.13)$$

$$\underline{X}(k+1/k+1) = [\underline{I} - \underline{K}(k+1) \underline{h}] \underline{X}(k+1/k) \quad (4.14)$$

Comparando com o filtro gaussiano modificado, as únicas diferenças que se notam são nas equações das variâncias do erro na predição do estado e do erro na predição da saída, o que evidentemente não altera o tempo de computação.

4.3 - Comparação dos tempos com os filtros de primeira ordem

Expoem-se a seguir os gráficos obtidos por C.L. Tozzi - [24] no cálculo dos tempos de computação dos filtros de primeira ordem. As figuras 4.4 e 4.5 referem-se ao filtro de Kalman generalizado; as 4.6 e 4.7 referem-se ao filtro com iterações locais e as 4.8 e 4.9 ao filtro iterado "smoothing".

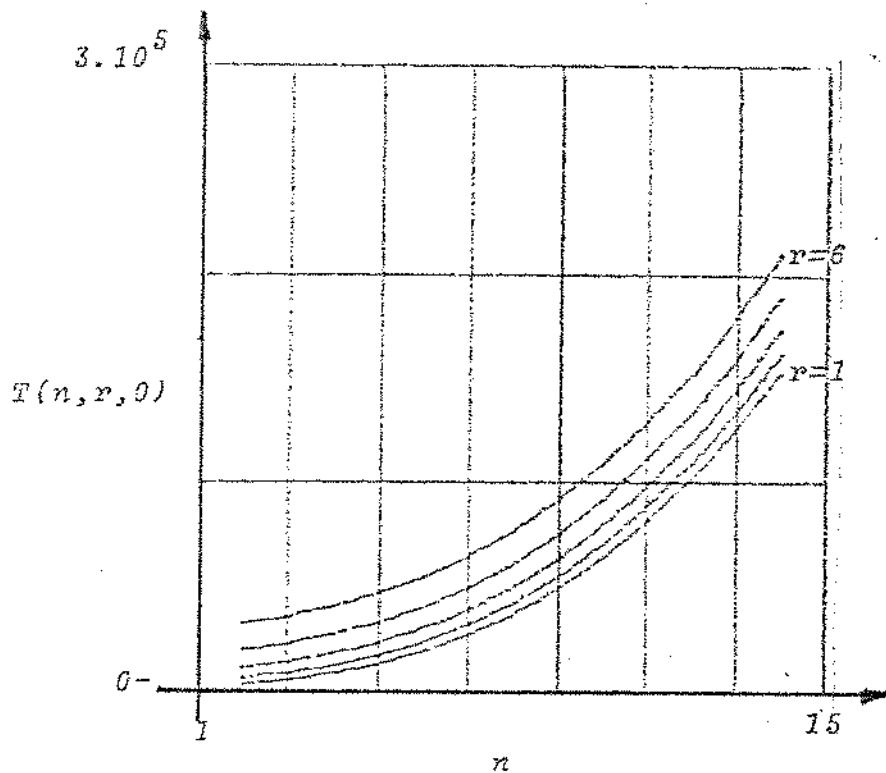


Fig. 4.4 - $t(n, r, 0)$ x n para o filtro de Kalman generalizado

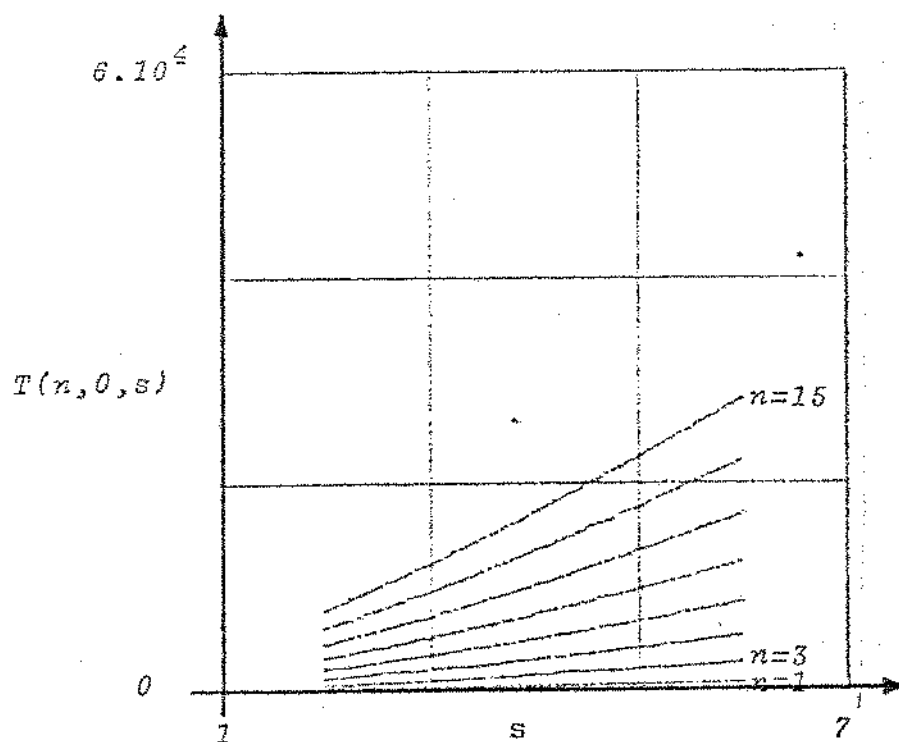


Fig. 4.5 - $t(n, 0, s)$ x s para o filtro de Kalman generalizado

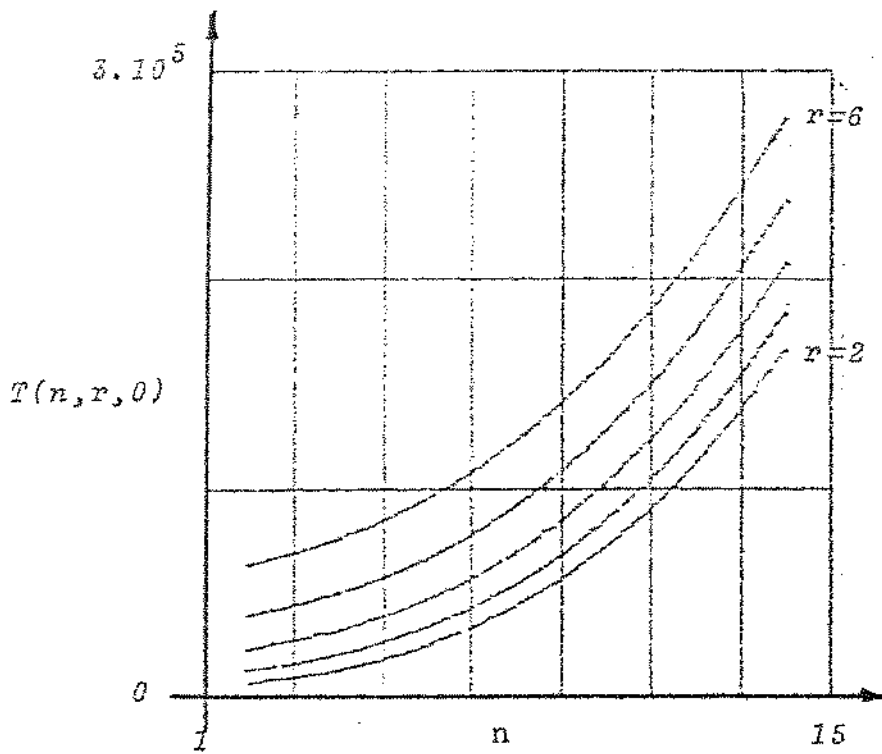


Fig. 4.6 - $t(n, r, 0) \times n$ para o filtro com iterações locais

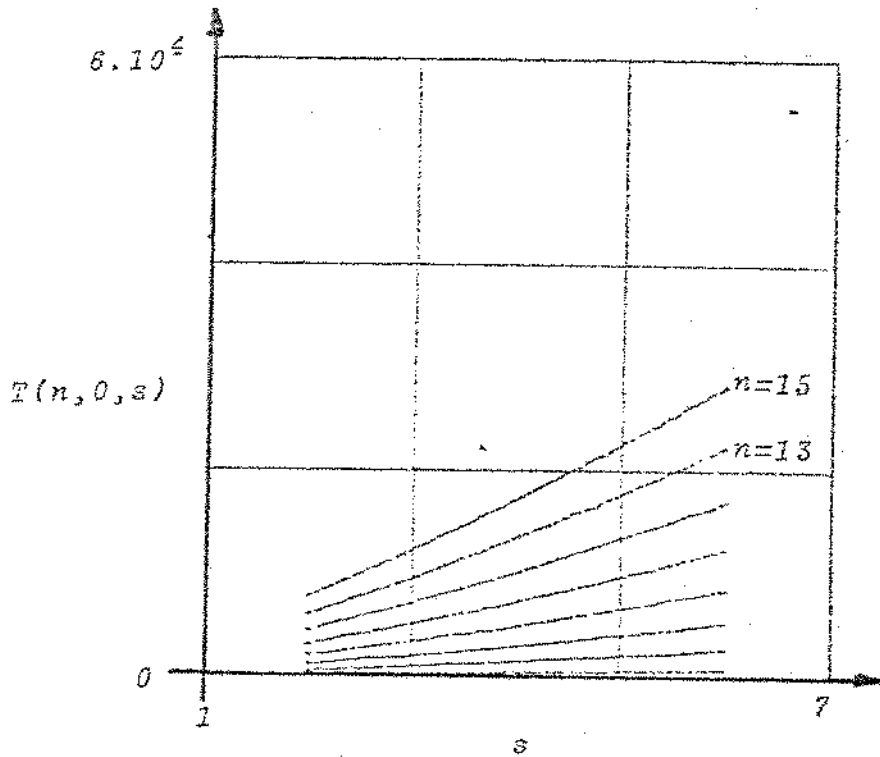


Fig. 4.7 - $t(n, 0, s) \times s$ para o filtro com iterações locais

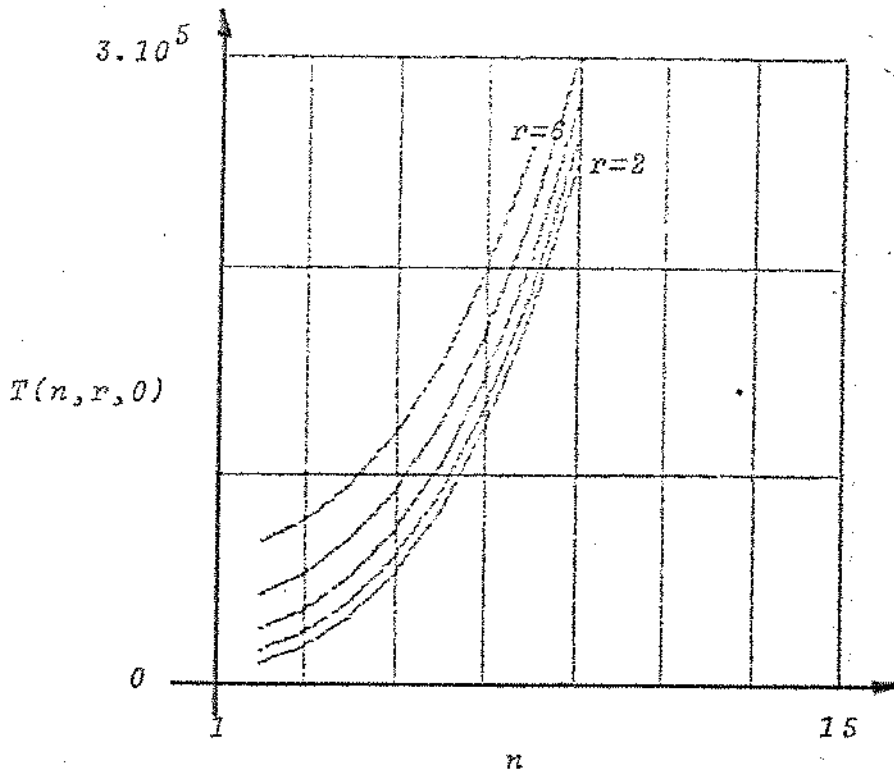


Fig. 4.8 - $t(n, r, 0) \times n$ para o filtro iterado "smoothing"

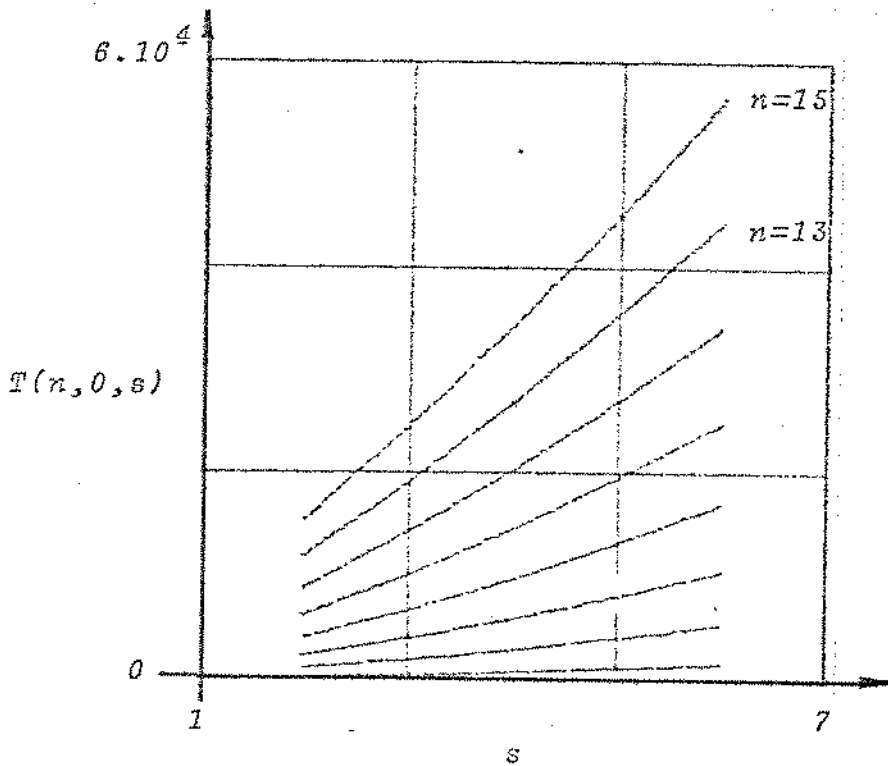


Fig. 4.9 - $t(n, 0, s) \times s$ para o filtro iterado "smoothing"

Pela análise das figuras 4.1 a 4.9, verifica-se que o tempo necessário para a computação de um ciclo completo dos filtros de segunda ordem é bem maior do que para os filtros de primeira ordem, o que justamente restringe a sua aplicação.

4.4 - Memória Requerida

A memória requerida para o armazenamento das variáveis dos filtros de segunda ordem é também função das dimensões das matrizes envolvidas.

Como já visto, os dois filtros modificados utilizam o mesmo conjunto de matrizes, cujas dimensões e memória requerida encontram-se na tabela 4.3.

Além das variáveis do filtro, a memória deve conter as subrotinas para a operação com matrizes, espaço para o programa principal e uma certa porção necessária ao trabalho.

A tabela 4.5 fornece a quantidade de memória ocupada pelas subrotinas de operação com matrizes (34) .

Tabela 4.5

Subrotinas e quantidade de palavras de memória ocupada

<u>Subrotinas</u>	<u>palavras de memória</u>
Soma de Matrizes	18
Subtração de Matrizes	18
Produto de Matrizes	36
Produto pela Transposta	36
Inversão de Matrizes	232
Produto por escalas	<u>8</u>
Total	348

Admitindo que o programa principal ocupe 500 palavras de memória e que $2n^2$ palavras sejam reservadas para o trabalho, a quantidade total de memória necessária será :

$$M(n,r,s) = n^3 + 5n^2 + 4n + n^2 r + 2nr + 2r^2 + 3r + ns + s^2 + 848$$

Idem aos casos anteriores, a expressão da quantidade de memória foi decomposta em duas outras :

$$M(n,r,s) = M(n,r,0) + M(n,0,s)$$

e os resultados encontram-se nas figuras 4.10 e 4.11.

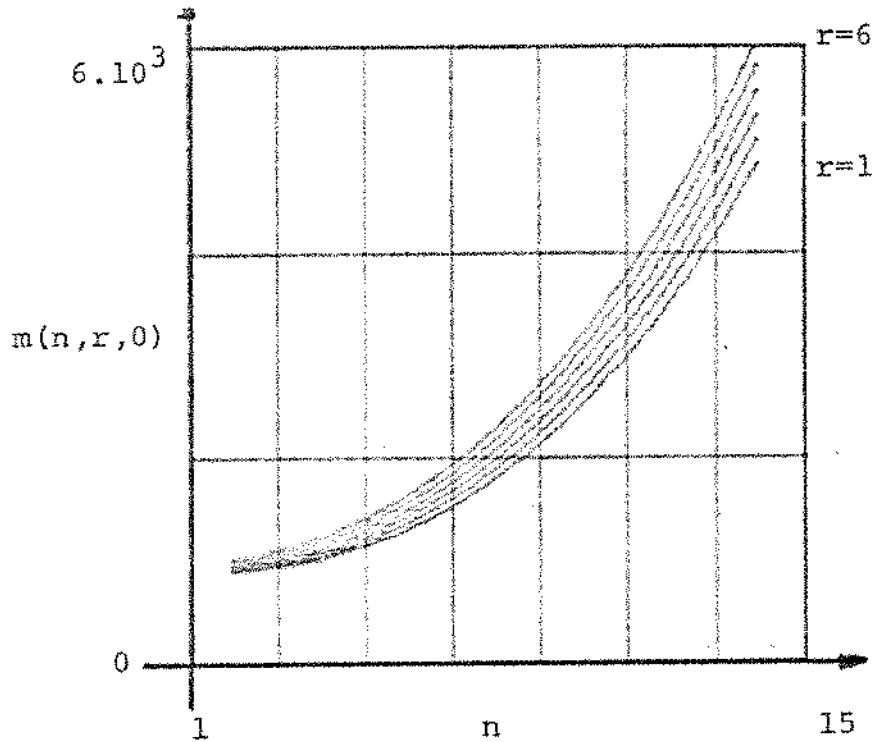


Fig. 4.10 - $m(n,r,0) \times n$ para os filtros modificados de segunda ordem

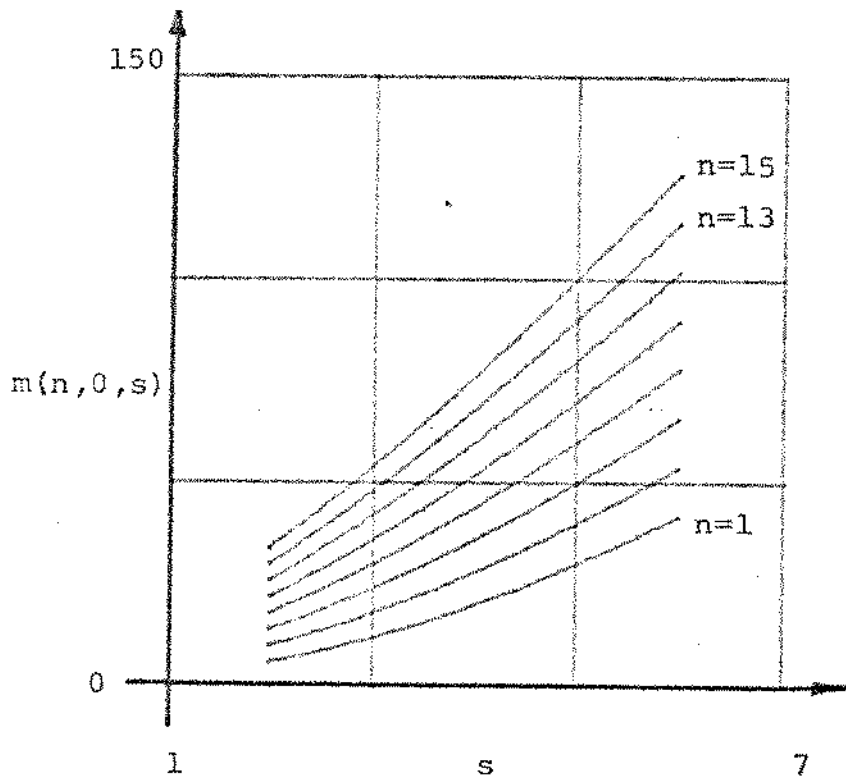


Fig. 4.11 - $m(n,0,s) \times s$ para os filtros modificados de segunda ordem

4.5 - Comparação da memória com os filtros de primeira ordem.

Nas figuras 4.12 e 4.13 são mostrados os resultados obtidos por C.L. Tozzi (24) no cálculo da memória requerida para o armazenamento das variáveis dos filtros de primeira ordem.

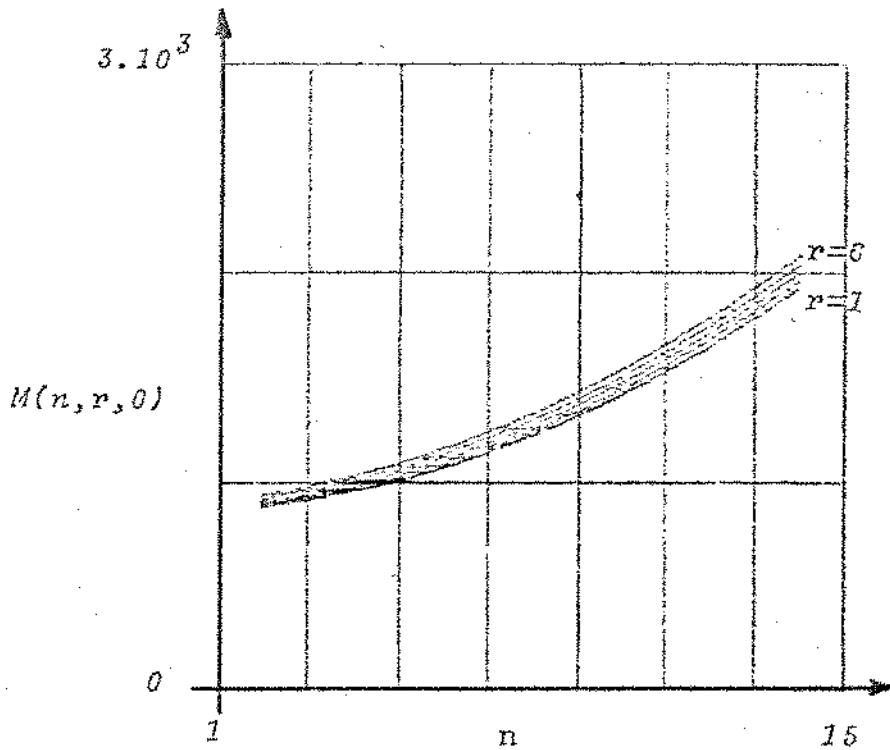


Fig. 4.12 - $m(n, r, 0) \times n$ para os filtros de primeira ordem

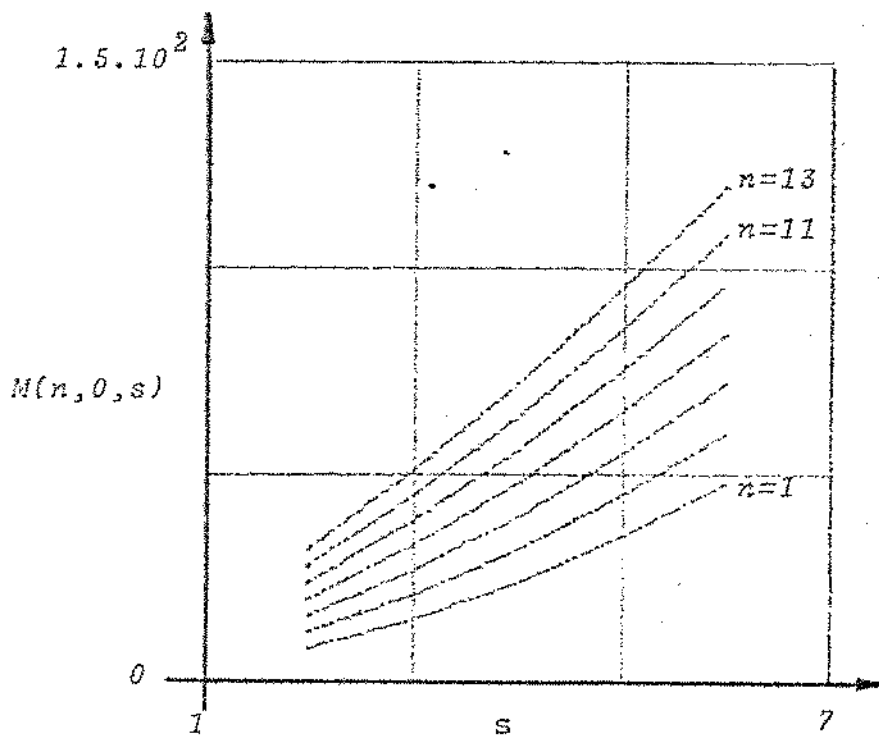


Fig. 4.13 - $m(n, 0, s) \times s$ para os filtros de primeira ordem

Comparando as figuras 4.10 a 4.13, verifica-se que : apesar dos filtros de segunda ordem ocupar maior espaço de memória, esta diferença não é significativa e por tanto em relação a quantidade de memoria requerida, não há restrição quanto ao uso de um ou outro algoritmo.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO DOS FILTROS DE SEGUNDA ORDEM

5.1 - Introdução

Para a aplicação dos filtros de segunda ordem escolheu-se um problema proposto por R. Aris (35) no estudo da aplicação de controles clássicos comparativamente com o controle ótimo. O sistema consiste de uma reação química irreversível não linear de segunda ordem realizada sob condições não isotérmicas em um reator químico contínuo e perfeitamente agitado (CSTR - Continuous Stirred Tank Reactor) cujo ponto de operação, dado pelo par Concentração do Reagente X Temperatura da Reação (C,T), depende da vazão de fluido em uma serpentina de refrigeração (fig. 5.1)

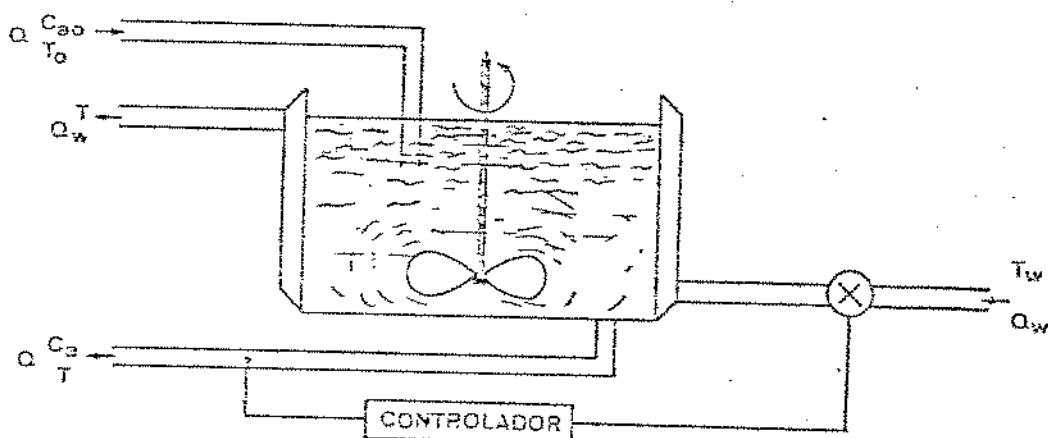


Fig. 5.1 - CSTR - Reator Químico Contínuo e Perfeitamente Agitado

5.2 - Equações do Reator

5.2.1 - Descrição das variáveis

Define-se inicialmente as variáveis envolvidas em uma reação do tipo A - B no reator :

Q - vazão dos reagentes na entrada, igual à vazão de saída -

(litros/hora)

- C_{AO} - - concentração da substância A na entrada do reator (moles de A/litro)
- C_A - - concentração de A na saída, igual a concentração de A no reator (hipótese do reator perfeitamente agitado) - (moles de A/litro)
- σ - - velocidade da reação (moles de A que reagem/litro . hora)
- V - - volume do reator mantido constante (litros)
- T_0 - - temperatura na entrada do reator ($^{\circ}C$)
- T - - temperatura da saída, igual à temperatura do reator (hipótese do reator perfeitamente agitado) ($^{\circ}C$)
- ρ - - densidade da mistura (supõe-se que a reação química não altera sensivelmente a densidade) (kg/litro)
- C_p - - calor específico (kcal/kg . $^{\circ}C$)
- q - - calor acrescentado desde o exterior (supõe-se que todo o calor acrescentado provenha da serpentina de refrigeração) (Kcal/hora)
- Q_w - - vazão do líquido de refrigeração
- T_w - - temperatura do fluido de refrigeração na entrada
- ΔH - - calor gerado durante a reação (reação exotérmica, $\Delta H < 0$; reação endotérmica, $\Delta H > 0$) (Kcal/moles de A que reagem)
- U^* - - transferência de calor devido ao resfriamento pela serpentina do refrigerador (Kcal/hora . litro)

5.2.2 - Balanços de Matéria e energia

O balanço de matéria ou massa dinâmica é dado por :

$$(\text{entrada}) = (\text{saída}) + (\text{acúmulo}) + (\text{transferência})$$

(5.1)

onde :

$$(\text{entrada}) = Q C_{AO}$$

$$\begin{aligned} \text{(saída)} &= Q C_A \\ \text{(acúmulo)} &= V \frac{dC_A}{dt} \\ \text{(transferência)} &= \sigma V \end{aligned}$$

logo, segue-se :

$$q C_{A0} = q C_A + V \frac{dC_A}{dt} + \sigma V \quad (5.2)$$

ou

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{q}{V} C_{A0} - \frac{q}{V} C_A + \sigma \quad (5.3)$$

onde :

$$q = h Q_w (T_w - T) \quad (5.4)$$

O balanço de energia ou calor é dado por :

$$\text{(entrada)} = \text{(saída)} + \text{(acúmulo)} + \text{(transferência)} + \text{(calor gerado)} \quad (5.5)$$

com :

$$\begin{aligned} \text{(entrada)} &= \rho q C_p T_o \\ \text{(saída)} &= \rho q C_p T \\ \text{(acúmulo)} &= V \rho C_p \frac{dT}{dt} \\ \text{(transferência)} &= V U^* \\ \text{(calor gerado)} &= V(-\Delta H) \end{aligned}$$

substituindo em (5.5), segue-se :

$$q \rho C_p T_o = q \rho C_p T + V \rho C_p \frac{dT}{dt} + V U^* + V (-\Delta H) \sigma \quad (5.6)$$

supondo reação exotérmica, $\Delta H < 0$.

Esta equação pode ainda ser escrita :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{V} (T_0 - T) + \frac{U^*}{\rho C_p} - \frac{\Delta H}{\rho C_p} \sigma \quad (5.7)$$

admitindo que a velocidade da reação é expressa como :

$$\sigma = K_0 e^{\frac{-E}{RT}} C_A \quad (5.8)$$

segue-se o seguinte conjunto de equações de estado :

$$\begin{aligned} \frac{d C_A}{dt} &= \frac{q}{V} C_{A0} - \left(\frac{q}{V} - K_0 e^{\frac{-E}{RT}} \right) C_A \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{q}{V} T_0 - \frac{q}{V} T + \frac{U^*}{\rho C_p} - \frac{\Delta H}{\rho C_p} K_0 e^{\frac{-E}{RT}} C_A \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.2.3 - Estabelecimento de um Modelo Adimensional

Para facilidade, trata-se o problema com equações cujos termos são Adimensionais.

Fazendo-se inicialmente a mudança na escala de tempo:

$$\theta = \frac{q}{V} t, \quad d\theta = \frac{q}{V} dt \quad (5.10)$$

substituindo nas equações anteriores vem :

$$\begin{aligned} \frac{d C_A}{d\theta} &= C_{A0} - C_A + \frac{V K_0}{q} C_A e^{\frac{-E}{RT}} \\ \frac{dT}{d\theta} &= T_0 - T + \frac{V U^*}{q \rho C_p} - \frac{V \Delta H K_0 C_A}{q \rho C_p} e^{\frac{-E}{RT}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

chamando :

$$\xi = \frac{C_A}{C_{AO}} \quad (5.12)$$

$$\eta = \frac{\rho C_p T}{-\Delta H C_{AO}}$$

e substituindo em 5.11 chega-se a :

$$\frac{d\xi}{d\theta} = 1 - \xi + \frac{V K_o}{q} \xi e^{-\frac{E}{RT}} \quad (5.13)$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \eta_o - \eta - \frac{V U^*}{\Delta H C_{AO} q} - \frac{V K_o}{q} \xi e^{-\frac{E}{RT}}$$

chamando ainda :

$$P(\xi, \eta) = -\frac{V K_o}{q} \xi e^{-\frac{E}{RT}} \quad (5.14)$$

e

$$\frac{V U^*}{\Delta H C_{AO} q} = u(\eta) \quad (5.15)$$

segue-se :

$$\frac{d\xi}{d\theta} = 1 - \xi - P(\xi, \eta) \quad (5.16)$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \eta_o - \eta - u(\eta) + P(\xi, \eta)$$

Se considerarmos que o termo de transferência de calor é regulado em função da abertura e fechamento da válvula do regulador, pode-se mostrar que :

$$u(\eta) = u_1 (\eta - \eta_c), \text{ onde } u_1 \text{ é o controle.}$$

$$(5.17)$$

Se u_1 é um controle proporcional, temos :

$$u_1 = \begin{cases} U_s + K\eta_r & (\eta > \eta_s + \eta_r) \\ U_s + K(\eta - \eta_s) & (|\eta - \eta_s| < \eta_r) \\ 0 & (\eta < \eta_s - \eta_r) \end{cases} \quad (5.18)$$

onde :

U_s - termo Adimensional de transferência de calor, correspondendo ao estado estacionário com $K = 0$.

η_s - temperatura Adimensional do reator, correspondente ao estado estacionário com $k = 0$.

η_c - temperatura Adimensional da água de resfriamento.

η_r - meia variação da temperatura Adimensional causada pela água de resfriamento através do movimento da válvula.

K - constante de controle proporcional.

Um típico conjunto de parâmetros é dado por :

$$P(\xi, \eta) = \xi \exp\left(50\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\eta}\right)\right) \quad (5.19)$$

com :

$$\eta_o = \eta_c = 1.75$$

$$U_s = 1.0$$

$$K\eta_r = 1.0$$

$$\eta_s = 2.0$$

Usando estes parâmetros numéricos, as equações de balanço de matéria e balanço de energia ficam :

$$\dot{\xi} = 1 - \xi - \xi \exp\left|50\left(0,5 - \frac{1}{\eta}\right)\right| \quad (5.20)$$

$$\dot{\eta} = -(\eta - 1.75) + \xi \exp\left|50\left(0,5 - \frac{1}{\eta}\right)\right| - u_1(\eta - 1.75)$$

O valor de u_1 , se tomado como sendo um controle proporcional, será dado por :

$$u_1 = \begin{cases} 2 & (\eta > 2 + \frac{1}{K}) \\ 1 + K(\eta - 2) & (|\eta - 2| < \frac{1}{K}) \\ 0 & (\eta < 2 - \frac{1}{K}) \end{cases} \quad (5.21)$$

Vamos agora fazer uma transformação de coordenadas, onde na origem do novo sistema teremos : $\xi = \frac{1}{2}$ e $\eta = 2$. Para tanto, vamos definir novas variáveis :

$$\begin{aligned} C &= \xi - 0.5 \\ T &= \eta - 2.0 \\ \dot{C} &= \dot{\xi} \\ \dot{T} &= \dot{\eta} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ficamos então com as equações :

$$\begin{aligned} \dot{C} &= 0.5 - C - (C + 0.5) \exp |25T/(T+2)| \\ \dot{T} &= - (T + 0.25) + (C + 0.5) \exp |25T/(T+2)| - u_1(T+0,25) \end{aligned} \quad (5.23)$$

O valor de u_1 , tomado como constrôle proporcional, fica então :

$$u_1 = \begin{cases} 2 & T > \frac{1}{K} \\ 1 + KT & |T| < \frac{1}{K} \\ 0 & T < -\frac{1}{K} \end{cases} \quad (5.24)$$

5.2.4.- Discussão das equações

De (5.23), fazendo $\dot{C} = 0$, obtêm-se :

$$(C+0,5) \exp |25T/CT+2)| = 0,5 - C \quad (5.25)$$

Isolando C , chega-se a equação dos pontos de equilíbrio :

$$C = \frac{1}{1 + \exp |25T/(T+2)|} \quad (5.26)$$

Tomando-se agora $\dot{T} = 0$ em (5.23), determinam-se os pontos de operação do reator, para diferentes valores de u_1 :

$$-(T+0,25) + (C+0,5) \exp |25T/(T+2)| - u_1 (T+0,25) = 0 \quad (5.27)$$

Substituindo (5.25) em (5.27), vem :

$$-(T+0,25) + 0,5 - C - u_1 (T+0,25) = 0 \quad (5.28)$$

donde :

$$C = 0,5 - (1+u_1) (T+0,25) \quad (5.29)$$

Substituindo diversos valores de u_1 :

a) válvula fechada, $u_1 = 0$
 $c = 0,25 - T \quad (5.30)$

b) válvula aberta, $u_1 = 2$
 $C = - 3T - 0,25 \quad (5.31)$

c) válvula semiaberta, $u_1 = 1$
 $C = - 2T \quad (5.32)$

A intersecção de (5.29) com a curva dos pontos de equilíbrio (5.26) fornece os pontos de operação do reator para diferentes valores de u_1 (fig 5.2)

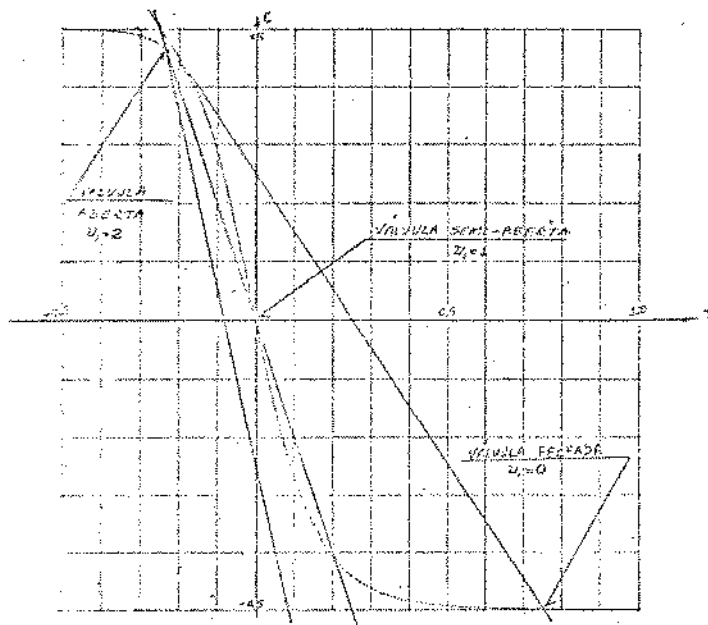


Fig. 5.2 - Curva de condições iniciais e pontos de operação

Em particular, o ponto de operação do sistema, quando se emprega controle proporcional é $(C,T) = (0,0)$ e portanto, a partir de uma condição inicial (C,T) qualquer, este controle deve comandar o sistema de tal modo a colocá-lo no equilíbrio.

Na figura (5.3) observa-se a trajetória do sistema com controle proporcional $K = 17$ e condições iniciais $C(0) = 0$ e $T(0) = 0,05$ (36)

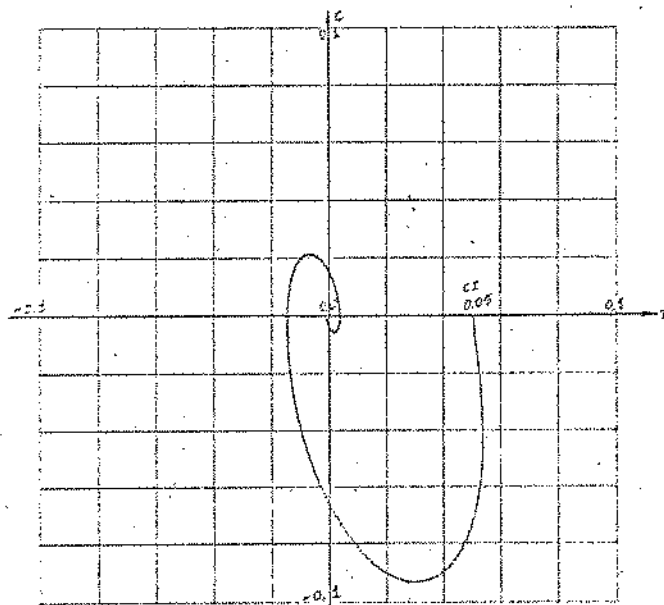


Fig. 5.3 - Plano de fase $C*T$ - Trajetória do sistema com controle proporcional $K = 17$

5.3 - Aplicação da filtragem

5.3.1 - Discretização das Equações

Para a aplicação da Filtragem, as equações de estado do reator foram discretizadas, pelo Método de Euler, com um passo $\Delta = 0,01$; logo:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C(t_{k+\Delta}) - C(t_k)}{\Delta} \quad (5.33)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T(t_{k+\Delta}) - T(t_k)}{\Delta}$$

ou melhor :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{C(k+1) - C(k)}{\Delta} \quad (5.34)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T(k+1) - T(k)}{\Delta}$$

substituindo em 5.23, vem :

$$C(k+1) = C(k) + \Delta \{ 0,5 - C(k) - (C(k) + 0,5) \exp[25T(k)/(T(k)+2)] \} \quad (5.35)$$

$$T(k+1) = T(k) + \Delta \{ - (T(k) + 0,25) (1 + u_1) + \\ + |C(k) + 0,5| \exp[25 T(k)/(T(k) + 2)] \} \quad (5.36)$$

A figura 5.4 mostra a evolução no tempo do sistema descrito pelas equações (5.35) e (5.36) a partir da condição inicial $C(0) = -0,50$ e $T(0) = 0,45$.

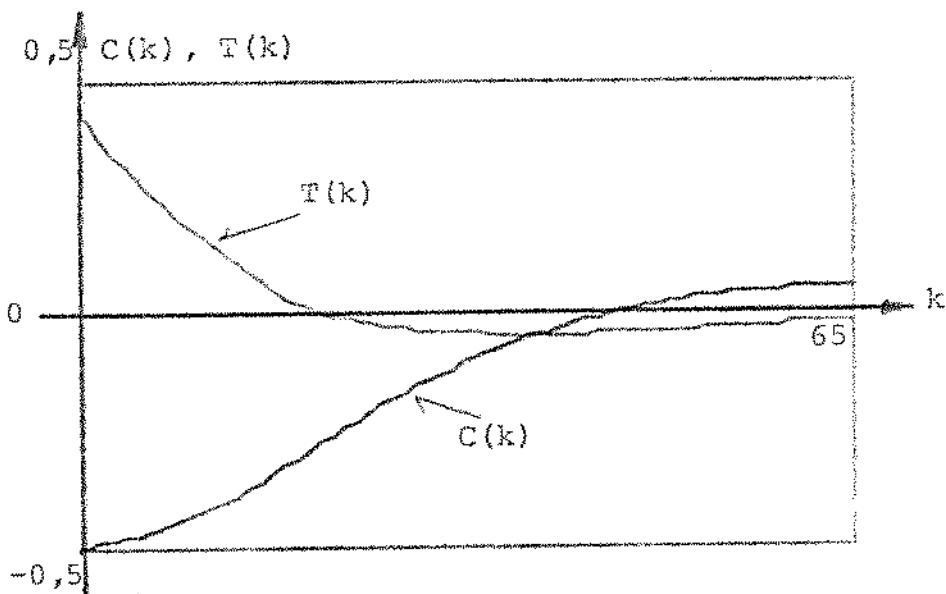


Fig. 5.4 - Evolução no tempo - Sistema sem ruído

Admitindo uma imprecisão na determinação do estado, injetam-se ruídos branco $w_C(k)$ e $w_T(k)$ em ambas as equações. Dis-
to resultam :

$$C(k+1) = C(k) + \Delta \{ 0,5 - C(k) - |C(k) + 0,5| \exp [25 T(k) / (T(k) + 2)] \} + w_C(k) \quad (5.37)$$

$$T(k+1) = T(k) + \Delta \{ |C(k) + 0,5| \exp [25 T(k) / (T(k) + 2)] - (T(k) + 0,25) (1 + u_1) \} + w_T(k) \quad (5.38)$$

Na figura 5.5 observa-se a evolução no tempo do siste-
ma com ruídos $w_C(k) = w_T(k) = N(0; 0,0001)$ e condições ini-
ciais $C(0) = -0,50$ e $T(0) = 0,45$.

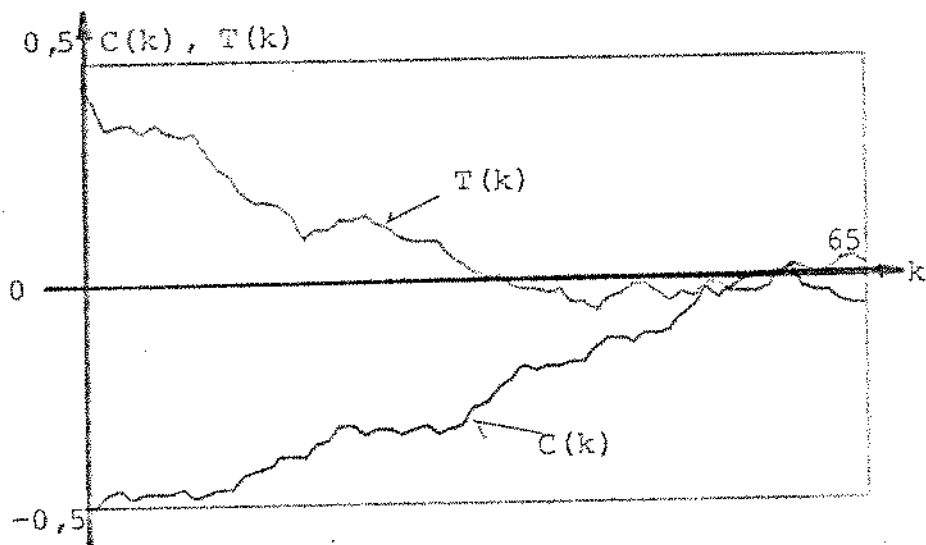


Fig. 5.5 - Evolução no tempo - sistema com ruídos

Traçam-se a seguir os planos de fase $C \times T$ para o sistema com e sem ruídos (fig. 5.6)

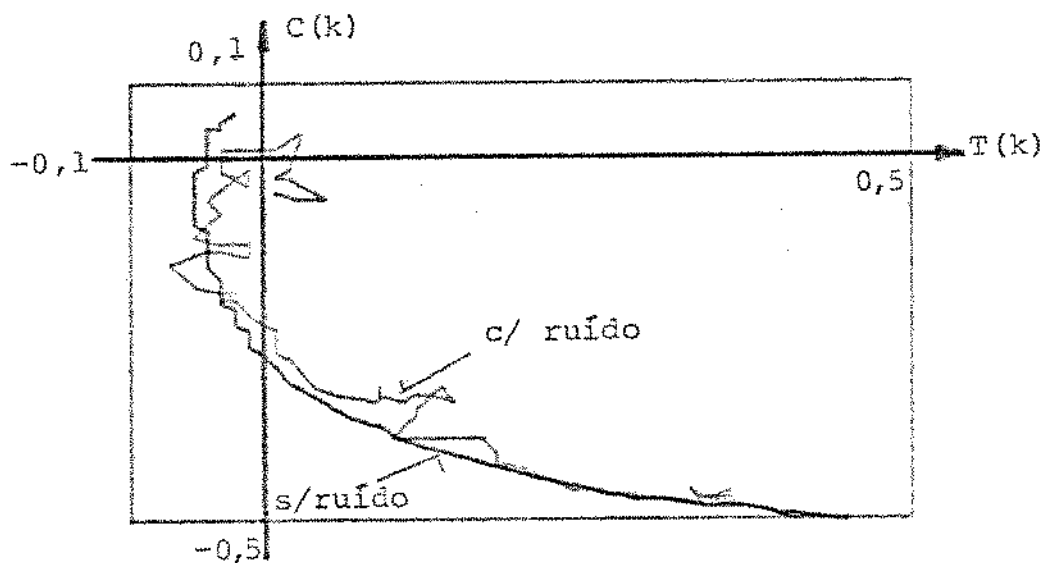


Fig. 5.6 - Plano de Fase $C \times T$ - Sistema com e sem ruídos

5.3.2 - Resultados da Filtragem

Apresentam-se os resultados obtidos pela aplicação do Filtro Gaussiano Modificado ao reator químico dado pelas equações 5.37 e 5.38. Tal filtro foi aplicado por ser justamente o

que apresenta melhores características dentre os algoritmos estudados neste trabalho. Dois casos são analisados.

Caso a) - Medidas tanto da concentração quanto da temperatura, dadas por :

$$\begin{aligned} y_C(k+1) &= C(k+1) + v_C(k+1) \\ y_T(k+1) &= T(k+1) + v_T(k+1) \end{aligned} \tag{5.39}$$

com $v_C(k+1) = v_T(k+1) = N(0; 0,0001)$

Apresentam-se a seguir os valores reais e filtrados da concentração (fig. 5.7) e temperatura (fig. 5.8). Observe-se que o filtro acompanha muito bem o sistema.

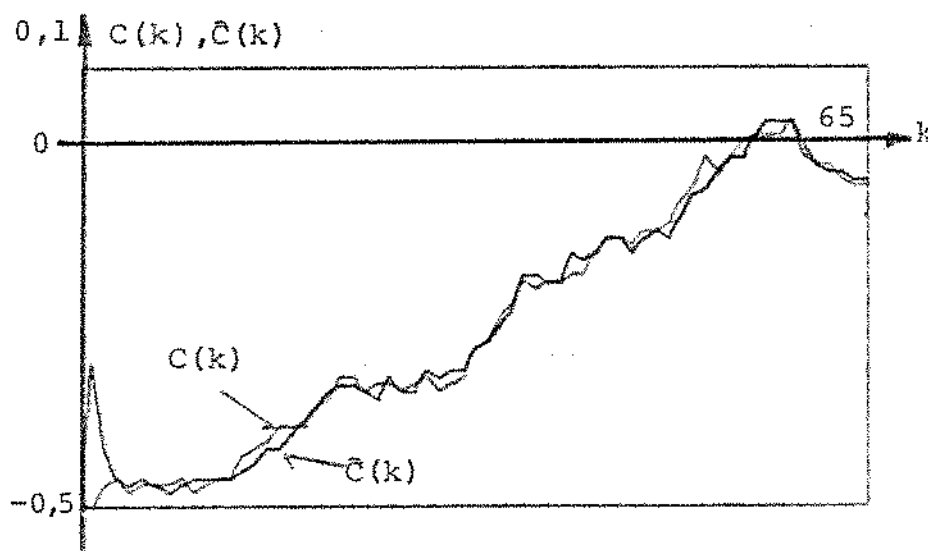


Fig. 5.7 - Concentração - valores reais e filtrados casos a)

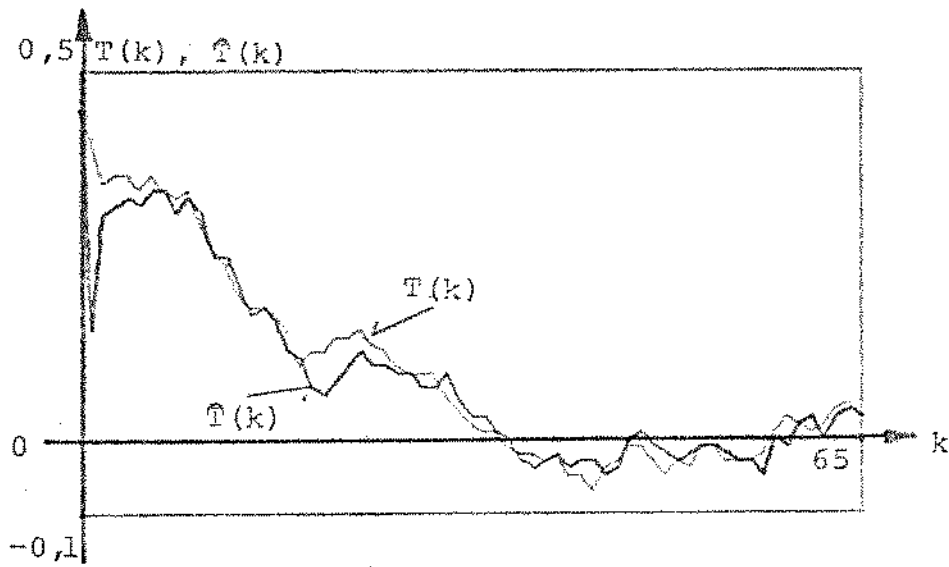


Fig. 5.8 - Temperatura - valores reais e filtrados - caso a)

Na figura 5.9 são postos os valores da diagonal principal da matriz de covariância - $\text{var}_{C(k)}$ e $\text{var}_{T(k)}$. Observe-se - que tais valores praticamente se mantêm constantes e iguais a 3×10^{-6} .

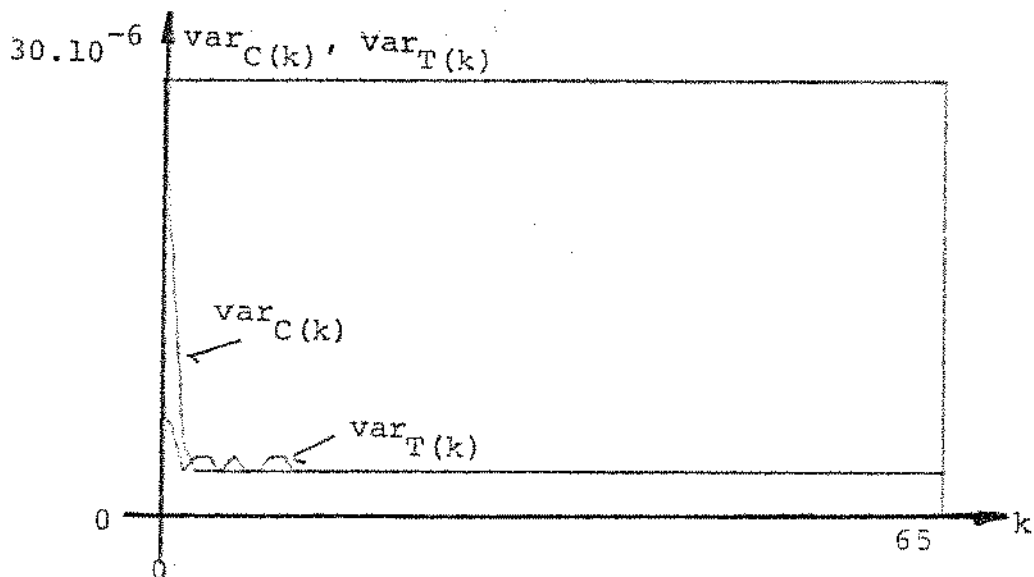


Fig. 5.9 - Variâncias - caso a)

Caso b) - Medidas apenas da temperatura, dadas por :

$$y(k+1) = T(k+1) + \epsilon(k+1) \quad (5.40)$$

onde $\epsilon(k+1) = N(0; 0,0001)$.

Da aplicação do Filtro Gaussiano Modificado resultam os valores estimados da concentração (fig. 5.10) e temperatura (fig. 5.11).

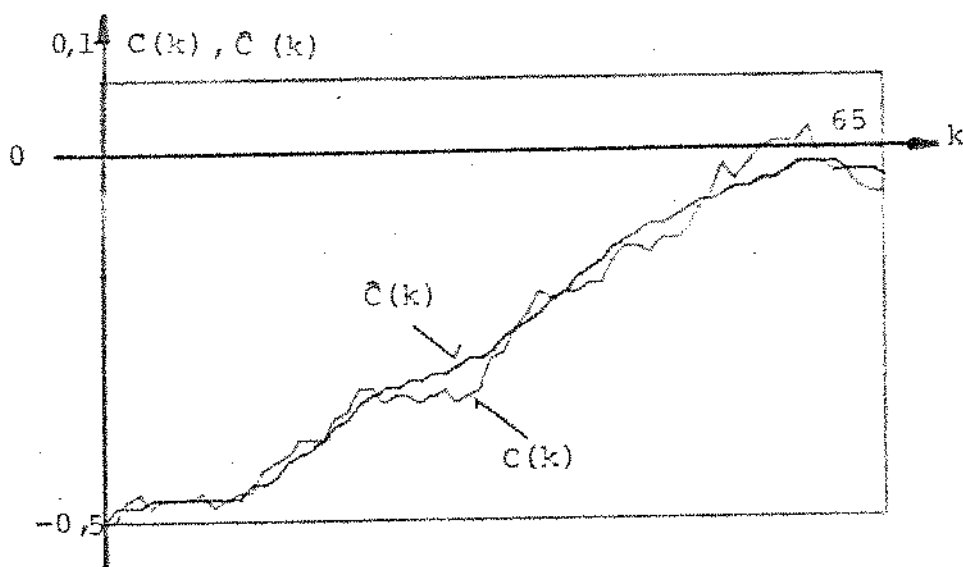


Fig. 5.10 - Concentração - valores reais e estimados - Caso b)

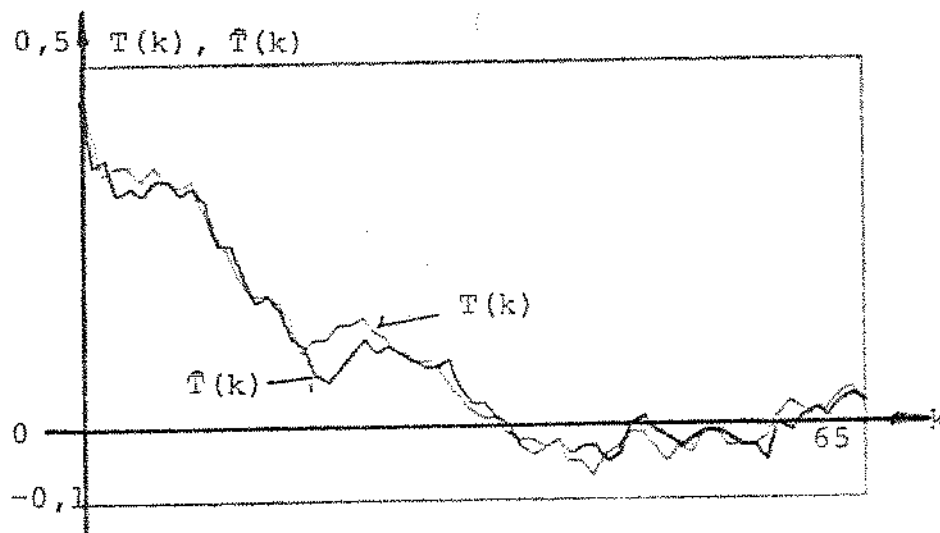


Fig. 5.11 - Temperatura - valores reais e filtrados - caso b)

A figura 5.12 apresenta valores das variâncias - $\text{var}_{C(k)}$, retirados da diagonal principal da matriz de covariância. Observe-se que os valores são bem maiores que os encontrados no item anterior.

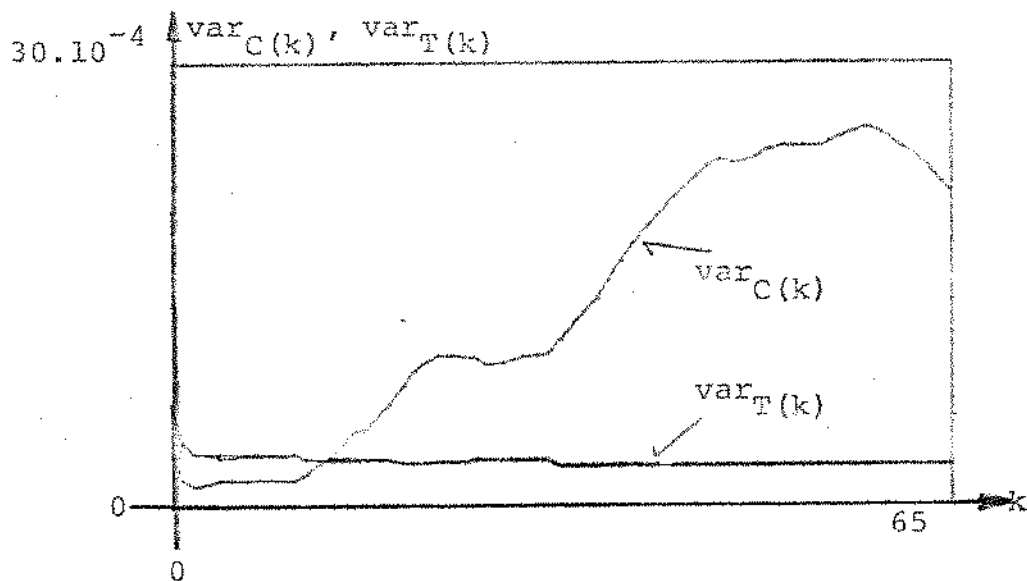


Fig. 5.12 - Variâncias - caso b)

5.3.3 - Conclusões

Comparando as figuras 5.7, 5.8 e 5.10, 5.11 (valores reais e filtrados da concentração e temperatura) verifica-se que os erros entre valores reais e filtrados são bem menores quando se faz também medidas da concentração.

Identica observação se faz na análise das figuras 5.9 e 5.12 onde são plotados os valores das variâncias. Na figura 5.12 verifica-se que a variância da concentração assume valores bem maiores que os da temperatura; isto realmente era de se esperar visto que no caso b) a concentração não é observada.

O fato da variância tomar valores maiores no decorrer do tempo é devido a relação sinal/ruído tornar-se desfavorável. Aumentando-se o ruído de leitura pode-se ocasionar divergência do filtro na faixa onde a concentração tende a zero logo, um dos requisitos básicos na instalação de um sistema de filtragem é que o aparelho de medida seja de boa qualidade.

APENDICE 1

TEMPOS DE EXECUÇÃO DE INSTRUÇÕES NO PDP 10

PDP-10 KI10 INSTRUCTION TIMING TEST (DKRFB)
VERSION 000.001

PROCESSOR SERIAL NUMBER = 574
POWER LINE CLOCK FREQ. EQUALS 60 MZ.

- 1 - BASIC CLOCK CYCLE IS 110 NSEC.
- 2 - ADD TIME IS 172 NSEC.
- 3 - DOUBLE FLOATING ADD TIME IS 195 NSEC.
- 4 - MAXIMUM CLOCK DELAY IS 232 NSEC.
- 5 - INDEXING TAKES 60 NSEC.
- 6 - INDIRECT TAKES 180 NSEC.
- 7 - INDEXING AND INDIRECT TAKES 748 NSEC.
- 8 - MOVE1 TAKES 1.21 USEC.
- 9 - MOVE FROM AC TAKES 1.37 USEC.
- 10 - MOVE FROM MEMORY TAKES 2.08 USEC.
- 11 - HRR FROM MEMORY TAKES 2.08 USEC.
- 12 - SETON 0 TAKES 1.75 USEC.
- 13 - JST TAKES 1.10 USEC.
- 14 - OR TAKES 2.08 USEC.
- 15 - PUSHJ TAKES 2.25 USEC.
- 16 - ADD FROM MEMORY TAKES 2.08 USEC.
- 17 - MUL (9 ADD/SUB - 10 SHIFTS) TAKES 4.49 USEC.
- 18 - DIV TAKES 8.31 USEC.
- 19 - FIX A FLOATING POINT ONE TAKES 3.87 USEC.
- 20 - FLTR AN INTERGER ONE TAKES 4.24 USEC.
- 21 - FRD (1 RIGHT SHIFT) TAKES 2.89 USEC.
- 22 - FRD (8 SHIFT RIGHT - 3 LEFT) TAKES 3.26 USEC.
- 23 - FRP (7 ADD/SUB - 14 SHIFTS) TAKES 4.39 USEC.
- 24 - FDV TAKES 7.34 USEC.
- 25 - DMOVE FROM MEMORY TAKES 3.17 USEC.
- 26 - DFAD (1 RIGHT SHIFT) TAKES 3.27 USEC.
- 27 - DFAD (8 SHIFT RIGHT - 1 LEFT) TAKES 4.31 USEC.
- 28 - DFMP (7 ADD/SUB - 32 SHIFTS) TAKES 7.88 USEC.
- 29 - DFDW TAKES 16.27 USEC.
- 30 - REPEATED 1/0 INSTRUCTIONS TAKE 3.98 USEC.

TEST COMPLETED

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. WIENER, N. - Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications. New York, Technology Press and Wiley, 1949. (Originally issued in Febr. 1942, as a classified Nat. Defense Res. Council Rep.)
2. KALMAN, R.E. - "A new approach to linear filtering and prediction problems". Trans. ASME Journal Basic Engineering, New York, v.82:34-45, Mar., 1960.
3. KALMAN, R.E. & BUCY, R.S. - "New results in linear filtering and prediction theory". Trans. ASME Journal Basic Engineering, New York, v.83:95-108, Mar., 1961.
4. SMITH, G.L.; SCHMIDT, S.F.; MCGEE, L.A. - "Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on-board a circumlunar vehicle". NASA Tech. Rep., R-135, 1962.
5. BATTIN, R.H. - Astronautical guidance. New York, McGraw-Hill, 1964.
6. JOSEPH, P.D. - "Filtering of the G.E. mod. III radar data". Space Technology Laboratories, IOC 9321.4-251, Apr., 1962.
7. JOSEPH, P.D. - "Guidance equations for ranger VI". TRW-Space Technology Laboratories, IOC 9321.4-655, Dec., 1963.
8. JOSEPH, P.D. - "Sub-optimal linear filtering". TRW-Space Technology Laboratories, IOC 9321.4-653, Dec., 1963.
9. MEDITCH, J.S. - "Sub-optimal filtering for continuous dynamic process". Aerospace Rept., TDR 469(5107-31)-2, Jul., 1964.

10. COX, H. "On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 9(1):5-12, Jan., 1964.
11. BUCY, R.S. - "Nonlinear filtering theory". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 10(2):198, Apr., 1965.
12. JASWINSKY, A.H. - "Nonlinear filtering with discrete observations". AIAA Aerospace Sci. Meeting, 3, New York, Paper N° 66-38, Jan., 1966.
13. JASWINSKY, A.H. - "Nonlinear filtering-numerical experiments". NASA Goddard Astrodynamics Conf., Greenbelt, Maryland, Apr., 1966.
14. JASWINSKY, A.H. - "Filtering for nonlinear dynamical systems". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 11(5): 765-66, Oct., 1966.
15. KUSHNER, H.J. - "Approximations to optimal nonlinear filters". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 12(5): 546-56, Oct., 1967.
16. KUSHNER, H.J. - "Dynamical equations for optimal nonlinear filtering". Journal Differential Equations. 3(3):179-190, Apr., 1967.
17. KUSHNER, H.J. - "Nonlinear filtering: the exact dynamical equations satisfied by the conditional mode". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 12(3):262-67, Jun., 1967.
18. WISHNER, R.P.; TABACZYNSKI, J.A.; ATHANS, M. - "On the estimation of the state of noisy nonlinear multivariable systems". IFAC Symposium Multivariable Control Systems, West Germany, Dusseldorf, Oct., 1968.
19. ATHANS, M.; WISHNER, R.P.; BERTOLINI, A. - "Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noisy measurements". Joint Automatic Control Con-

- trol Conference, Ann Arbor, Michigan, p.364-382, Jun., -
1968.
20. NEAL, R.S. - "Nonlinear estimation techniques". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 13(6):705-708, Dec., 1968.
21. SCHWARTZ, L. & STEAR, E.B. - "A valid mathematical model for approximate nonlinear minimal -variance filtering". Journal of Mathematical Analysis Applications, v.21:1-6, 1968.
22. BASS, R.W.; NORUM, V.D.; SCHWARTZ, L. - "Optimal multichannel nonlinear filtering". Journal of Mathematical Analysis Applications, v.16:152-164, 1966.
23. SCHWARTZ, L. & STEAR, E.B. - "A computational comparison of several nonlinear filters". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 13(1):83-86, Febr., 1968.
24. TOZZI, C.L. - Estudo do desempenho de métodos de sequenciais de filtragem não linear usando aproximações iteradas de primeira ordem. Campinas, Faculdade de Engenharia de Campinas, 1975. 65p. Tese (Mest. Cien.) - Fac. Eng^a de Campinas, UNICAMP.
25. JASWINSKY, A.H. - Stochastic processes with applications to filtering theory. Seabrook, Maryland, 1966. (Analytical Mechanics Associates, Rept. NQ 66-6)
26. FISHER, J.R. - "Optimal nonlinear filtering". In: LEONDES, C.T. ed. - Advances in control systems, theory and applications. New York, Academic Press, 1967, v.5, p.198-300.
27. JASWINSKY, A.H. - Stochastic processes and filtering theory. New York, Academic Press, 1970. (Mathematics in science and engineering, v. 64)
28. MEIER, L. - "The third order extended Kalman filter". In : SYMPOSIUM ON NONLINEAR ESTIMATION THEORY AND ITS APPLICA-

TIONS, 3, Proceedings. San Diego, California, Sept., 1972.
p.213-216.

29. SAGE, A.P. & MELSA J.L. - Estimation theory with applications to communications and control. New York, McGraw-Hill, 1971.
30. LATHI, B.P. - An introduction to random signals and communication theory. Scranton, International Textbook, 1968.
(International textbooks in electrical engineering)
31. KAILTH, T. - "The innovations approach to detection and estimation theory". Proceedings IEEE, New York, 58(5):680-695, May, 1970.
32. SCHWEPPE, F.C. - Uncertain dynamic systems. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1973. (Prentice-Hall in electrical engineering series)
33. MENDES, M.J.; GIMENO, L; ANDRADE NETO, M.L. - "Nonlinear filtering of discrete time systems". In: Identification and systems parameter estimation. Moscow, USSR, 1975.
(IFAC Symposium, 4)
34. MENDEL, J.M. - "Computational requirements for a discrete Kalman filter". IEEE Trans. Automatic Control, New York, 16(6): 748-759, Dec., 1971
35. ARIS, R. - The optimal design of chemical reactors. New York, Academic Press, 1961.
36. BRUNO, P.T.M. & PALHARES, A.G.B. - "Aplicação do controle ótimo ao estudo de um reator químico não linear". In : Reunião Anual da SBPC, 27. Belo Horizonte, MG, julho, 1975.

