

Síntese de Fibras Ópticas Monomodais no Comprimento
de Onda de Dispersão Total Nula

*Este exemplar corresponde à redação
final da Tese defendida por PAULO
SÉRGIO DA MOTTA PIRES e aprovada
pela Comissão Julgadora em 28/05/86*


ATTÍLIO JOSÉ GIAROLA
- ORIENTADOR -

Paulo Sérgio da Motta Pires

Orientador : Prof. Dr. Atílio José Giarola

Tese apresentada à Faculdade
de Engenharia de Campinas da
Universidade Estadual de
Campinas, UNICAMP, para a
obtenção do título de DOUTOR
EM ENGENHARIA ELÉTRICA na área
de Eletrônica e Comunicações

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia de Campinas
Departamento de Engenharia Elétrica
Maio de 1986

U N I C A M P
BIBLIOTECA CENTRAL

A minha esposa, Matilde;
Aos meus filhos,
Lucianna,
Paulo Roberto e
Lianne

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Attílio José Giarola, pelo interesse demonstrado neste trabalho, pela orientação e pela confiança em mim depositada;

Ao Prof. Dr. Rui Fragassi Souza pela leitura atenta da versão inicial deste trabalho e pela amizade;

Ao Prof. Dr. David Anthony Rogers, da Universidade de Dakota do Norte, por ter estimulado meu interesse em teoria da dispersão em fibras monomodais;

Ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, pela oportunidade proporcionada;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo apoio financeiro parcial em termos de Bolsa de Pós-Graduação;

Aos meus familiares, pelo apoio que sempre recebemos;

A Sra. Maria Júlia Dini Fray pela competência demonstrada na datilografia dos símbolos e equações deste trabalho;

Aos meus colegas;

Ao Centro de Pesquisas e Desenvolvimento, CPqD, da Telebrás pelo suporte inicialmente colocado à minha disposição através do Convênio UNICAMP/TELEBRAS 024a-83

INDICE

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
LISTA DE TABELAS	iii
LISTA DE FIGURAS	v
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	001
CAPÍTULO II - CONSIDERAÇÕES GERAIS	007
II.1 - INTRODUÇÃO	008
II.2 - AS EQUAÇÕES DE MAXWELL	008
II.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO	012
II.4 - EQUAÇÕES BÁSICAS	015
II.5 - MODOS DE PROPAGAÇÃO EM FIBRAS ÓPTICAS NÃO-HOMOGÊNEAS	021
II.5.1 - MODOS TM	024
II.5.2 - MODOS TE	026
II.5.3 - MODOS HÍBRIDOS : EH E HE	027
II.6 - COEFICIENTES DE DISPERSÃO	031
II.7 - DISPERSÃO MATERIAL	035
II.8 - DISPERSÃO DE GUIA DE ONDA	036
II.9 - DISPERSÃO TOTAL	039
CAPÍTULO III - DISPERSÃO TOTAL EM FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS HOMOGÊNEAS	041
III.1 - INTRODUÇÃO	042

III.2 - ANÁLISE EXATA	043
III.3 - APROXIMAÇÃO POR GUIAMENTO FRACO	050
III.4 - RESULTADOS	054
 CAPÍTULO IV - DISPERSÃO TOTAL EM FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS NÃO-HOMOGÊNEAS	 058
IV.1 - INTRODUÇÃO	059
IV.2 - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	060
IV.3 - PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS	069
IV.4 - RESULTADOS	076
 CAPÍTULO V - SÍNTESE DE FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS HOMOGÊNEAS	 080
V.1 - INTRODUÇÃO	081
V.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	081
V.3 - SÍNTESE COM APROXIMAÇÃO DE AUTOVALOR	083
V.4 - SÍNTESE COM APROXIMAÇÃO POR GUIAMENTO FRACO	093
 CAPÍTULO VI - SÍNTESE DE FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS NÃO-HOMOGÊNEAS	 104
VI.1 - INTRODUÇÃO	105
VI.2 - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	106
VI.3 - PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS	110
VI.4 - RESULTADOS	113
 CONCLUSÕES	 118
 REFERÊNCIAS	 121

RESUMO

Partindo do valor do comprimento de onda de operação, da composição química dos materiais que deverão constituir o núcleo e a casca e do perfil de índice de refração de uma fibra óptica, implementamos procedimentos que permitem a obtenção de valores de raios de núcleos que possibilitam a operação do guia óptico, na região monomodal, com dispersão total nula. Tipicamente, implementamos processos que possibilitam a síntese destas estruturas na região monomodal.

O fenômeno da dispersão total é analisado em fibras ópticas homogêneas e não-homogêneas. O objetivo deste estudo é o de gerar resultados que possam ser comprovados quando a síntese destas fibras forem realizadas. No caso das fibras ópticas monomodais homogêneas, adotamos a aproximação por guiamento fraco. No caso das fibras ópticas monomodais não-homogêneas, utilizamos o método do elemento finito combinado com uma técnica de aproximação polinomial baseada em L-splines cúbicas.

A síntese de fibras monomodais homogêneas é feita através de dois métodos: um baseado em uma aproximação assintótica para o parâmetro normalizado do núcleo da fibra e outro baseado na equação característica aproximada. As diferenças entre os dois procedimentos são analisadas. Na síntese de fibras ópticas monomodais não-homogêneas, adotamos um procedimento de integração numérica da equação escalar de onda. Neste caso, apresentamos resultados para vários guias com funções típicas de perfil de índice de refração. Apesar de, em todos os casos, considerarmos funções de perfil de índice descritas por fórmulas analíticas, os métodos apresentados são facilmente adaptáveis a situações práticas.

Os procedimentos implementados são importantes em vista do fato de se possuir conhecimento prévio, a nível de preforma, do perfil de índice de refração a ser tomado pela fibra óptica em seu processo de construção.

ABSTRACT

Procedures for the calculation of the values of core radii that will allow the operation of the optical waveguide in the monomode region with minimum total dispersion were developed. This was done starting from the value of the operating wavelength, the chemical composition of the core and cladding materials and the index profile of an optical fiber. Typically, the processes that will allow the synthesis of these structures in the monomode region were implemented.

The total dispersion is analyzed in both homogeneous and inhomogeneous monomode optical fibers. The objective of this study is to generate results that may be confirmed when these fibers are synthesized. For homogeneous optical waveguides the weakly guiding approximation is adopted. For inhomogeneous fibers the finite element method, combined with a polynomial approximation based on the cubic L-splines were used.

The synthesis of homogeneous optical fibers, in the monomode region, is done by means of two methods: one of them is based on an asymptotic approximation for the normalized parameter of the fiber core and the other is based on the approximate characteristic equation. The differences between the two procedures are analyzed. For the synthesis of the inhomogeneous optical waveguides a numerical integration of the scalar wave equation is used. In this case, we present results for fibers with typical arbitrary index profiles. While the cases presented here were for index profiles described by analytical functions, the methods are easily adaptable to practical situations.

The implemented procedures are of particular importance since a previous knowledge of the index profile, at the preform level, is possible in the construction process of an optical fiber.

LISTA DE TABELAS

TABELA	PAG.
II.1 - Associação entre modos LP e modos tradicionais ..	031
II.2 - Coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier [20, 21] e valores do comprimento de onda de dispersão material nula [8] para alguns materiais utilizados na construção de fibras ópticas. Amostra 01 - SiO ₂ fundido.	037
III.1 - Equações de corte para modos guiados em fibras ópticas homogêneas. $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2$	048
III.2 - Valores de corte, V _c , para modos guiados em fibras ópticas homogêneas. $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2 = 1,7$	049
III.3 - Equações características aproximadas para modos em fibras homogêneas	052
III.4 - Comparação entre valores de obtidos pelo método exato [8] e pelo método aproximado para alguns valores de raios de núcleo de fibras monomodais homogêneas. Os erros apresentados são erros relativos. Material do núcleo : 13,5 % GeO ₂ - 86,5 % SiO ₂ Material da casca : 100 % SiO ₂ fundido.	056
IV.1 - Função de perfil, f(R), para as fibras da Figura IV.5. Os parâmetros p e d representam, respectivamente, fatores que definem a profundidade e a largura da reentrância no perfil de índice	079
V.1 - Valores de $\tilde{A}$ (em μm) e V($\tilde{A}$) para valores fixos do comprimento de onda, λ , para fibras com núcleo composto de diferentes concentrações de GeO ₂ e SiO ₂ . A - 13,5 % GeO ₂ - 86,5 % SiO ₂ B - 7,0 % GeO ₂ - 93,0 % SiO ₂	

TABELA

PAG.

C - 4,1 % GeO_2 - 95,9 % SiO_2
 Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 088

- V.2 - Valores de $\tilde{\alpha}$ (em μm) e $V(\tilde{\alpha})$ para valores fixos do comprimento de onda, λ , para fibras com núcleo composto de diferentes concentrações de GeO_2 e SiO_2 . Resultado obtidos com a equação característica aproximada.

A - 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 B - 7,0 % GeO_2 - 93,0 % SiO_2
 C - 4,1 % GeO_2 - 95,9 % SiO_2
 Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 095

- V.3 - Comparação entre valores de raio de dispersão total nula obtidos por aproximação assintótica [ver Tabela V.1] e por aproximação do guiamento fraco [ver valores maiores de raio de núcleo, Tabela V.2]

A - 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 B - 7,0 % GeO_2 - 93,0 % SiO_2
 C - 4,1 % GeO_2 - 95,9 % SiO_2
 Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 096

- VI.1 - Valores de raios de núcleo para transmissão com dispersão total nula, $\tilde{\alpha}$, e frequência normalizada, $V(\tilde{\alpha})$, em função do comprimento de onda de operação, λ , e frequência de corte do modo LP_{11} , V_c , para fibras ópticas monomodais com perfis de índices típicos. A maioria dos valores foi obtida com N variando entre 10 e 15 [ver descrição do procedimento utilizado no texto do trabalho]. Os valores de $\tilde{\alpha}$ são dados em micrometros.

Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2

Material da casca : 100 % SiO_2 fundido.

Perfis de índices :

- (a) - degrau
- (b) - degrau com reentrância gaussiana
- (c) - triangular
- (d) - parabólico
- (e) - parabólico com reentrância gaussiana

Nas fibras com reentrância gaussiana, utilizamos

$p = d = 0,4$ 116

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PAG.
II.1 - Caminho de integração para a dedução das condições de contorno em uma interface entre dois meios dielétricos diferentes.	013
III.1 - Diagrama de blocos dos procedimentos utilizados na resolução da equação da dispersão total usando a equação característica aproximada.	055
III.2 - Curvas de dispersão total, D_T , em função do comprimento de onda, λ , para algumas fibras monomodais homogêneas. Os resultados foram obtidos utilizando a aproximação do guiamento fraco para alguns valores de raios de núcleo da fibra. Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 Material da casca : 100 % SiO_2 fundido	057
IV.1 - Representação esquemática da função $R(r)$ para uso com o método do elemento finito	063
IV.2 - A função $\psi_1(r)$	064
IV.3 - Diagrama de blocos dos procedimentos utilizados para calcular valores da dispersão total em função do comprimento de onda e do valor do comprimento de onda de dispersão total nula em fibras ópticas monomodais não-homogêneas.	075
IV.4 - Valores de D_T x λ e $\hat{\lambda}$ fornecidos pelo programa para calcular dispersão total em fibras ópticas não-homogêneas pelo método do elemento finito e L-splines cúbicas. Raio do núcleo : $a = 2,50 \text{ } \mu\text{m}$ Divisões do intervalo $[0,a]$, $N = 25$ Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5% SiO_2 Material da casca : 100 % SiO_2 fundido Fibra óptica com perfil triangular	077
IV.5 - Dispersão total em fibras monomodais com perfis arbitrários de índice de refração.	

FIGURA

PAG.

Perfil das fibras :

(a) Triangular ($\hat{\lambda} = 1,6943 \mu\text{m}$)

(b) Parabólico ($\hat{\lambda} = 1,6630 \mu\text{m}$)

(c) Parabólico com reentrância gaussiana
($\hat{\lambda} = 1,5705 \mu\text{m}$)

Para a fibra (c), usamos $p = d = 0,4$ [Ver Tabela IV.1]

078

- V.1 - Diagrama de blocos dos procedimentos utilizados para resolver a equação (V.4) 086
- V.2 - Síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas utilizando a aproximação proposta por Miyagi e Nishida [10]. Exemplo de saída impressa do programa implementado.
Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 089
- V.3 - Dispersão total, D_T , em função do raio do núcleo da fibra, a , para diferentes concentrações de GeO_2 em SiO_2 para o comprimento de onda de operação fixado em $1,50 \mu\text{m}$.
Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 090
- V.4 - Dispersão de guia de onda em função do raio do núcleo da fibra para valores específicos do comprimento de onda de operação.
Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 092
- V.5 - Síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas utilizando a equação característica aproximada. Exemplo de saída impressa do programa implementado.
Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 094
- V.6 - Curvas da constante de propagação normalizada, b , em função do raio do núcleo, a , em diferentes valores do comprimento de onda de operação, obtidas através da aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida (Curvas MN) e da aproximação do guiamento fraco (Curvas GF) 097
- V.7 - Curvas da derivada primeira da constante de

FIGURA

PAG.

propagação normalizada do modo dominante em função do raio do núcleo da fibra para diferentes valores do comprimento de onda de operação. Curvas MN, obtidas através da aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida. Curvas GF, obtidas através da utilização da equação característica aproximada.

Mesma fibra da Figura V.6 098

- V.8 - Curvas da derivada segunda da constante de propagação normalizada do modo dominante em função do raio do núcleo da fibra para diferentes valores do comprimento de onda de operação. Curvas MN, obtidas através da aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida. Curvas GF, obtidas através da utilização da equação característica aproximada.
Mesma fibra da Figura V.6 099

- V.9 - Dispersão total em função do raio do núcleo para diferentes valores do comprimento de onda de operação. Síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas utilizando a aproximação do guiamento fraco.
Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 101

- V.10 - Dispersão de guia de onda em função do raio do núcleo da fibra para valores específicos do comprimento de onda de operação. Curvas obtidas a partir da utilização da equação característica aproximada.
Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
Material da casca : 100 % SiO_2 fundido 102

- VI.1 - Valores obtidos com a utilização do programa para síntese de fibras monomodais.
Função de perfil de índice : $f(R) = R^2$
N é o número de divisões do intervalo de integração para o qual atinge-se uma precisão de 10^{-5} nos resultados apresentados.
B, BL, B2L representam, respectivamente, a constante de propagação normalizada e suas derivadas primeira e segunda com relação ao comprimento de onda 114

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

As fibras ópticas podem ser enquadradas em dois grandes grupos se observarmos as características dos seus perfis de índice de refração. No primeiro destes grupos, encontram-se as fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau ou fibras ópticas homogêneas. Para estes tipos de fibras, a dependência radial dos índices de refração de seus materiais constituintes é estabelecida através da relação :

$$n(R) = \begin{cases} n_1 & ; R \leq 1 \\ n_2 & ; R > 1 \end{cases} \quad ; \quad n_1 > n_2 , \quad R = \frac{r}{a} \quad (I.1)$$

onde a é o raio do núcleo e n_1 e n_2 são, respectivamente, os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra e r representa a coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas. Nestes tipos de estruturas, a propagação das ondas eletromagnéticas, ao longo de sua direção longitudinal, dá-se através de reflexões internas totais na interface núcleo-casca. O segundo grupo é constituído pelas fibras ópticas com perfil arbitrário de índice de refração ou fibras ópticas não-homogêneas. Para estas fibras, a dependência radial dos índices de refração de seus materiais constituintes é representada pela relação :

$$n^2(R) = \begin{cases} n_1^2 - (n_1^2 - n_2^2) \delta f(R) & ; R \leq 1 \\ n_2^2 & ; R > 1 \end{cases} \quad (I.2)$$

onde n_1 é o valor do índice de refração do material constituinte do núcleo da fibra, n_2 é o índice de refração do material constituinte da casca da fibra, $f(R)$ é a função que representa a forma do perfil de índice de refração da fibra e δ é a diferença relativa entre os índices de refração n_1 e n_2 . Para fibras com perfil de índice representado pela equação (I.2), a propagação das ondas eletromagnéticas, ao longo de sua direção longitudinal, segue caminhos aproximadamente senoidais.

As fibras ópticas podem ser classificadas também em fibras monomodais e fibras multimodais. Esta classificação é dependente da frequência de operação, raio do núcleo e da diferença relativa entre os valores dos índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra. São estes fatores que, em última análise, determinam o valor da frequência de corte do modo de propagação imediatamente superior ao modo, ou modos, de propagação que se deseja manter na fibra. Nas fibras monomodais, é permitida apenas a propagação do seu modo fundamental enquanto que nas fibras multimodais é permitida a

propagação de algumas centenas de modos. Pelas suas características, possuem grande interesse entre as fibras multimodais aquelas que permitem a propagação de apenas dois modos. Estas fibras comportam-se, aproximadamente, como fibras monomodais em determinadas circunstâncias [1]. Os modos de propagação são diferentes configurações do campo eletromagnético em uma seção transversal da fibra.

Ao considerarmos a utilização de fibras ópticas monomodais como um meio conveniente para transmitir sinais de comunicações, devemos levar em conta dois aspectos fenomenológicos envolvidos em sua caracterização que possuem importância fundamental.

O primeiro aspecto é, talvez, o mais óbvio é a atenuação que o sinal sofre ao se propagar ao longo da fibra. Considerados os efeitos associados a mecanismos causadores de perdas adicionais, como curvaturas, microcurvaturas, junções, é importante que esforços sejam feitos no sentido de minimizar também as perdas básicas que surgem devido a absorções e espalhamentos ocasionados pelas características intrínsecas dos materiais dielétricos que constituem o guia óptico. É fato que as fibras ópticas podem ser construídas com baixíssimas perdas em duas regiões espectrais importantes. Estas regiões espectrais situam-se nas proximidades dos comprimentos de onda $1,3 \mu\text{m}$ e $1,55 \mu\text{m}$. É fato também que continuam as pesquisas visando a obtenção de novos materiais, ou novas combinações com materiais já utilizados, com características de perdas ainda mais baixas. Enquanto estes desenvolvimentos sugerem que comunicação óptica a longa distância seja perfeitamente possível, a praticabilidade do uso de fibras ópticas monomodais em aplicações digitais de alta velocidade sobre longas distâncias depende, adicionalmente, de como a transmissão pode ser conseguida sem distorção séria da informação carregada pelos pulsos.

O segundo aspecto a ser considerado é, então, a distorção da informação carregada pelos pulsos lançados na fibra. A distorção é ocasionada pela dispersão total. A dispersão total é um fenômeno que surge em virtude da variação, com o comprimento de onda ou frequência de lançamento, da velocidade de grupo (ou da velocidade de fase) da radiação eletromagnética colocada na fibra óptica e é resultante da combinação, não da soma [2, 3], de dois fatores principais: a dispersão material e a dispersão de guia de onda. A dispersão material ocorre em virtude da dependência que os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca possuem com o comprimento de onda. A dispersão de guia de onda ocorre em virtude da influência que a geometria da estrutura guiadora, a fibra óptica, tem sobre a radiação eletromagnética lançada.

A dispersão total é responsável pelo alargamento dos pulsos que propagam-se na fibra. Este alargamento será percebido através da diminuição da faixa de passagem útil pois exigirá que os pulsos sejam colocados na entrada do sistema com um maior espaçamento temporal para que possam ser reconhecidos satisfatoriamente pelo receptor óptico. Do exposto, para se conseguir transmissão ótima, deve-se fazer com que a fibra óptica opere em comprimento de onda de mais baixa atenuação possível e que este comprimento de onda coincida com o comprimento de onda de dispersão total mínima.

Diversos métodos têm sido propostos para a abordagem do problema apresentado no parágrafo precedente. Inevitavelmente, em virtude da complexidade das equações envolvidas, todos os métodos requerem a utilização de algum tipo de aproximação numérica. Problemas numéricos sérios decorrem da forma como é deduzida a expressão para a constante de propagação do modo dominante. Quanto mais simples for esta equação, que deverá ser derivada duas vezes, mais simples será o método numérico a ser empregado, mais simples será o programa de computador a ser desenvolvido e, como consequência imediata, menor será o tempo necessário para se obter a caracterização de uma fibra óptica.

Em se tratando de fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau, estes métodos baseiam-se, fundamentalmente, em três procedimentos distintos :

1. Utilização da equação característica aproximada [2, 4, 5];
2. Utilização de aproximações assintóticas para autovalores da equação característica aproximada [6, 7], e
3. Utilização da equação característica exata [8, 9].

No cálculo do valor do comprimento de onda de dispersão total mínima tomando como base a equação característica exata, a quantidade de dados que devem ser manipulados, devido aos complexos algoritmos que são utilizados [8], requer o uso de computadores com uma boa capacidade de memória. Neste tipo de abordagem, são utilizadas técnicas de diferenciação e interpolação numéricas a partir da obtenção de soluções da equação característica exata. Fórmulas analíticas de parâmetros necessários à solução do problema são deduzidas até o ponto em que deduções subsequentes, que envolvem um enorme esforço, possam ser substituídas por procedimentos computacionais. Quando é utilizada a equação característica aproximada, a quantidade de dados a ser manipulada diminui sensivelmente em virtude da

relativa simplicidade das equações e dos algoritmos empregados. A grande maioria das equações pode ser desenvolvida analiticamente diminuindo bastante a utilização de procedimentos numéricos que requerem grande quantidade de memória de computador. No caso da utilização de aproximações assintóticas, os procedimentos computacionais simplificam-se de tal forma que podem ser implementados em pequenas calculadoras programáveis. As equações utilizadas não possuem funções especiais e o procedimento se restringe ao cálculo de raízes de equações utilizando métodos tradicionais. A escolha de qualquer um dos procedimentos citados depende, então, do sistema computacional disponível e da precisão requerida nos resultados.

No caso das fibras ópticas monomodais com perfil arbitrário de índice de refração, a quantidade de métodos disponíveis para a resolução do problema é maior. Entre estes métodos podemos citar, como exemplos significativos, o Método de Rayleigh-Ritz, o Método da Expansão em Série de Potências, o Método do Elemento Finito, o Método da Aproximação por Degrau, o Método da Integração Direta.

Em todos os métodos, tanto os que tratam com fibras monomodais com perfil de índice de refração em degrau como aqueles que são aplicáveis a fibras ópticas com perfil arbitrário de índice de refração, o ponto de partida é um só: conhecida a fibra óptica (perfil de índice, materiais constituintes do núcleo e da casca e raio do núcleo) procura-se o valor do comprimento de onda para o qual a operação da fibra dá-se com dispersão total mínima. Isto significa, no presente caso, que possuímos um completo conhecimento da fibra óptica e desejamos encontrar a fonte óptica melhor adequada, sob o ponto de vista da dispersão, para sua operação. Fundamentalmente, este é um método típico de abordagem de problemas de análise de uma estrutura. Conhecida a estrutura, coloca-se seu ponto de operação ótimo em um valor qualquer conhecido.

Em contra-partida ao método de abordagem descrito anteriormente, temos o problema da síntese. Neste caso, partimos do conhecimento do comprimento de onda de operação desejado (que coincide com o comprimento de onda de dispersão total mínima e que, por questões já apresentadas, deve coincidir também com o comprimento de onda de atenuação mínima), do perfil de índice de refração da fibra e de seus materiais constituintes e calculamos o valor do raio do núcleo da fibra. Estará caracterizado, desta forma, o guia óptico ótimo para operação com a fonte óptica disponível.

Nosso trabalho baseia-se na síntese de fibras ópticas monomodais à luz do exposto no parágrafo anterior. Partindo do conhecimento do comprimento de onda da fonte óptica disponível, dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra e do

seu perfil de índice de refração, calculamos o valor do raio do núcleo que possibilita a transmissão com dispersão total nula.

Esta forma de tratamento do problema da dispersão total em fibras monomodais advém da constatação de que, durante o processo de construção, a forma do perfil de índice de refração da preforma é preservada na fase de puxamento e transfere-se para o núcleo da fibra, a menos de uma transformação de escala ao longo da coordenada radial. Através de medidas realizadas na preforma, obtendo-se a função de perfil de índice de refração da fibra, pode-se construir o guia com um raio de núcleo tal que a dispersão total será nula no comprimento de onda da fonte óptica disponível.

Além da visão geral do problema da dispersão em fibras ópticas monomodais, em suas formas de análise e síntese, que pretendemos dar neste Capítulo introdutório, nosso trabalho constitui-se de mais cinco Capítulos.

No Capítulo II, a fundamentação teórica é apresentada juntamente com a conceituação de parâmetros, expressões e tabelas que são largamente utilizadas nos Capítulos subsequentes. Partimos das equações de Maxwell para meios livres de cargas e correntes e apresentamos as equações de onda para cada um dos possíveis conjuntos de modos que se propagam em uma fibra óptica não-homogênea. Estas equações reduzem-se a uma única equação através da aplicação dos conceitos de guiamento fraco e pequeno gradiente de índice. Aplicar estes conceitos significa, fisicamente, considerar os modos na fibra como sendo modos TEM, aproximadamente, e desprezar os possíveis efeitos da estrutura guiadora sobre a polarização dos modos. Estas aproximações são completamente válidas na grande maioria dos casos práticos. Apresentamos, ainda, os conceitos de velocidade de fase, velocidade de grupo, tempo de trânsito e deduzimos, a partir deles, os coeficientes de dispersão. Com o coeficiente de dispersão de primeira ordem, único a ser utilizado no nosso trabalho, apresentamos as equações para a dispersão material, para a dispersão de guia de onda e para a dispersão total. A consideração fundamental feita baseia-se na descrição da variação não-linear com o comprimento de onda que os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra possuem. Esta variação é descrita pela equação dos três termos de Sellmeier cujos coeficientes levam em consideração as características intrínsecas dos materiais. Os materiais que utilizamos, em nossas apresentações teóricas, possuem os coeficientes colocados em uma Tabela [ver Tabela II.2]. Visamos, com isto, facilitar referências posteriores.

No Capítulo III, fazemos uma breve revisão do problema da análise da dispersão total em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau. Apresentamos os tipos de

procedimentos que são usualmente utilizados no tratamento do problema da dispersão total nestes tipos de estruturas. Valores de comprimentos de onda de dispersão total nula para estas fibras são obtidos através do uso da equação característica aproximada e são comparados com valores anteriormente obtidos usando a equação característica exata. A adoção da equação característica aproximada, além de possibilitar a obtenção de resultados com precisão satisfatória, permite que sejam feitas simplificações substanciais nos procedimentos analíticos e computacionais principalmente no que se refere ao cálculo de valores da constante de propagação normalizada do modo dominante e algumas de suas derivadas com relação ao comprimento de onda.

No Capítulo IV, voltamos a tratar da análise da dispersão total. Desta feita, utilizamos fibras ópticas monomodais com perfil arbitrário de índice de refração. Estas fibras são analisadas através do método do elemento finito. Para obter valores da constante de propagação do modo fundamental, e suas derivadas, utilizamos uma técnica de aproximação polinomial, chamada de splines cúbicas com condições de contorno obtidas por polinômios de Lagrange. Algumas fibras com perfis analíticos são analisadas.

No Capítulo V, abordamos o problema da síntese de fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau. Apresentamos dois métodos de cálculo: um baseado na equação característica aproximada e outro considerando a aproximação assintótica para o parâmetro radial normalizado no núcleo, U , proposta por Miyagi-Nishida [10]. Valores ótimos de raios de núcleo de fibras são apresentados para alguns comprimentos de onda de operação. Uma análise da precisão do método que utiliza a aproximação para U é feita verificando-se a influência que a constante de propagação normalizada e suas derivadas possuem nos resultados obtidos.

No Capítulo VI, concluímos nosso trabalho apresentando a síntese de fibras ópticas monomodais com perfil arbitrário de índice de refração baseada em um método de integração direta da equação escalar de onda. O valor de corte do modo imediatamente superior ao modo fundamental é calculado e serve como aproximação inicial para os processamentos subsequentes.

Todos os programas que utilizamos foram escritos na linguagem FORTRAN IV, precisão simples, e implementados em um microcomputador de 8-bits, Sysdata Modelo IV, operando sob o Sistema Operacional CP/M.

CAPÍTULO II
CONSIDERAÇÕES GERAIS

II.1 - INTRODUÇÃO

Neste Capítulo, apresentamos a fundamentação teórica do nosso trabalho. Partindo das equações de Maxwell para meios livres de corrente e cargas e de equações para os campos elétrico e magnético, deduzimos as equações de onda para cada um dos conjuntos de modos que se propagam em uma fibra óptica não-homogênea. Verificamos que é possível, através da adoção de aproximações bastante utilizadas, apresentar uma equação de onda unificada. Esta única equação de onda possibilita o conhecimento das características de todos os possíveis modos que propagam-se nas fibras em questão. As aproximações são chamadas de aproximação por pequeno gradiente de índice e aproximação por guiamento fraco. A aproximação por pequeno gradiente de índice pressupõe que a mudança espacial relativa do índice de refração seja pequena sobre distâncias da ordem de um comprimento de onda enquanto que a aproximação por guiamento fraco parte do princípio que é pequena a diferença relativa entre os valores dos índices de refração dos materiais envolvidos. Além de simplificar sobremaneira as equações que teremos que lidar, estas aproximações enquadram a grande maioria dos casos reais sem causar grandes prejuízos na precisão dos resultados obtidos.

Mostramos, também, as condições de contorno que as componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético devem satisfazer sobre uma interface entre dois meios dielétricos diferentes. Estas condições são necessárias e suficientes para bem definirem as soluções das equações de Maxwell nos problemas que iremos tratar.

Apresentamos, ainda, os conceitos de velocidade de fase, velocidade de grupo, atraso de grupo, tempo de trânsito e deduzimos, a partir destes conceitos, os coeficientes de dispersão. Utilizamos o coeficiente de dispersão de primeira ordem, que descreve o único tipo de dispersão em que estamos interessados neste trabalho, para deduzir as equações para a dispersão material, para a dispersão de guia de onda e para a dispersão total. Todos estes conceitos serão largamente utilizados a partir do Capítulo III.

II.2 - AS EQUAÇÕES DE MAXWELL [11]

Soluções adequadas das equações de Maxwell permitem

determinar as características relativas à propagação de ondas eletromagnéticas em meios quaisquer. Na forma diferencial estas equações são dadas pelas seguintes relações :

$$\nabla \times \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} -\vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} \vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.2})$$

onde :

- $\vec{E}$ - é o vetor que representa o campo elétrico (V/m);
- $\vec{H}$ - é o vetor que representa o campo magnético (A/m);
- $\vec{D}$ - é o vetor que representa a densidade de fluxo elétrico (C/m²), e
- $\vec{B}$ - é o vetor que representa a densidade de fluxo magnético (T);

Todas as unidades das quantidades relacionadas acima são dadas no Sistema Internacional de unidades (SI) e as equações apresentadas são válidas para meios livres de cargas e correntes.

Nas equações (II.1) e (II.2), $\nabla \times$ e $\nabla \cdot$ indicam, respectivamente, os operadores rotacional e divergente enquanto $\partial/\partial t$ indica a derivada parcial com relação ao tempo da quantidade à qual o operador está sendo aplicado.

Os campos vetoriais apresentadas nas equações anteriores representam quantidades instantâneas sendo, portanto, quantidades que dependem das coordenadas espaciais nas quais o fenômeno eletromagnético está sendo analisado e do tempo no qual esta análise está sendo efetuada. São, por estes motivos, entidades que possuem existência física real. Ao longo deste trabalho assumiremos que as entidades em questão possuem uma dependência harmônica com o tempo.

Além das quatro equações apresentadas anteriormente, existem relações que são utilizadas com o objetivo de caracterizar o meio no qual a radiação eletromagnética se

propaga. Estas relações são dadas, em forma genérica, pelas equações :

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{D}(\vec{E}, \vec{H}) \\ \vec{B} &= \vec{B}(\vec{E}, \vec{H})\end{aligned}\quad (\text{II.3})$$

As equações (II.3) são denominadas de relações constitutivas em alusão ao fato delas estarem relacionadas com as características dos materiais que constituem o meio no qual a onda eletromagnética se propaga. Fórmulas explícitas estabelecendo o relacionamento dos vetores $\vec{D}$ e $\vec{B}$ com os campos vetoriais $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são obtidas de experimentos ou deduzidas a partir de considerações sobre a natureza atômica dos materiais envolvidos.

No caso da onda eletromagnética se propagar em meios isotrópicos e lineares, as equações (II.3) tornam-se simples relações de proporcionalidade. Neste caso, as equações (II.3) passam a ser escritas na forma :

$$\begin{bmatrix} \vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}\quad (\text{II.4})$$

onde os parâmetros ϵ e μ são, respectivamente, a permissividade elétrica (F/m) e a permeabilidade magnética (H/m) do meio considerado. Lembramos que os meios lineares são aqueles meios nos quais os valores da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética independem dos valores das intensidades dos campos elétrico e magnético.

O exemplo típico de um meio linear é o vácuo. Para este meio, as equações (II.4) tornam-se :

$$\begin{bmatrix} \vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_0 \\ \epsilon_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}\quad (\text{II.5})$$

onde :

$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m é a permissividade elétrica do vácuo, e

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m é a permeabilidade magnética do vácuo.

Quando tratamos com entidades que variam harmonicamente com o tempo, podemos simplificar o formalismo matemático utilizando quantidades complexas associadas. A base para a transformação de um tipo de quantidade em outra é estabelecida pela identidade de Euler,

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

onde $j = \sqrt{-1}$. Podemos facilmente verificar que a quantidade instantânea v está relacionada com a quantidade complexa V através da relação

$$v = |V| \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(Ve^{j\omega t})$$

onde $V = |V|e^{j\alpha}$ e a notação $\text{Re}()$ significa que apenas a parte real do produto $Ve^{j\omega t}$ deve ser levada em consideração. Algumas das propriedades principais do operador $\text{Re}()$ são estabelecidas pelas identidades :

$$\text{Re}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{Re}(\vec{A}) + \text{Re}(\vec{B})$$

$$\text{Re}(a \vec{A}) = a \text{Re}(\vec{A}) \quad (\text{II.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Re}(\vec{A}) = \text{Re} \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{A} \right)$$

onde $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são quantidades vetoriais complexas e a é uma quantidade escalar real. Uma propriedade bastante importante do operador $\text{Re}()$ é estabelecida pelo seguinte enunciado :

"Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são quantidades complexas e se $\text{Re}(Ae^{j\omega t}) = \text{Re}(Be^{j\omega t})$, para todo tempo t , então $\vec{A} = \vec{B}$ "

Partindo do exposto nos parágrafos precedentes podemos, então, transformar as equações (II.1) e (II.2), dadas em termos de quantidades instantâneas, em equações envolvendo apenas quantidades complexas. Assim procedendo, as equações de Maxwell passam a ser escritas na forma :

$$\nabla \times \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} -\vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} \vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.8})$$

As relações constitutivas, indicadas pelas equações (II.4) passam a ser dadas, na forma complexa, pelas relações :

$$\begin{bmatrix} \vec{B} \\ \vec{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

As equações (II.7) - (II.9) são válidas para estruturas constituídas de materiais isotrópicos, lineares, não-condutores e não-magnéticos.

II.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Como sabemos, as equações de onda são bem gerais. Elas caracterizam a propagação de ondas eletromagnéticas em uma infinidade de meios com propriedades elétricas e magnéticas quaisquer. A adequação destas equações à estrutura que desejamos analisar surge quando as condições de contorno convenientes são obtidas. Das soluções das equações de onda, sujeitas a essas condições, surgirão as características dos campos na estrutura que está sendo estudada. Estas condições são obtidas através das equações de Maxwell que, por conveniência, são escritas agora na sua forma integral. Estas equações podem ser deduzidas integrando-se as equações (II.1) em uma área arbitrária. Com a aplicação do Teorema da Integral de Stokes [12], temos o seguinte conjunto de equações :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \quad (\text{II.10})$$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} dA \quad (\text{II.11})$$

O vetor unitário $\hat{n}$ é perpendicular ao elemento de superfície dA enquanto o vetor $d\vec{s}$ aponta na direção tangencial à trajetória S , que envolve a superfície A . Como a forma e a disposição da trajetória fechada S são arbitrárias, tomamos uma configuração simples como a mostrada na Figura II.1. Para manter a semelhança com as estruturas que iremos analisar, é considerada a interface entre dois meios dielétricos diferentes.

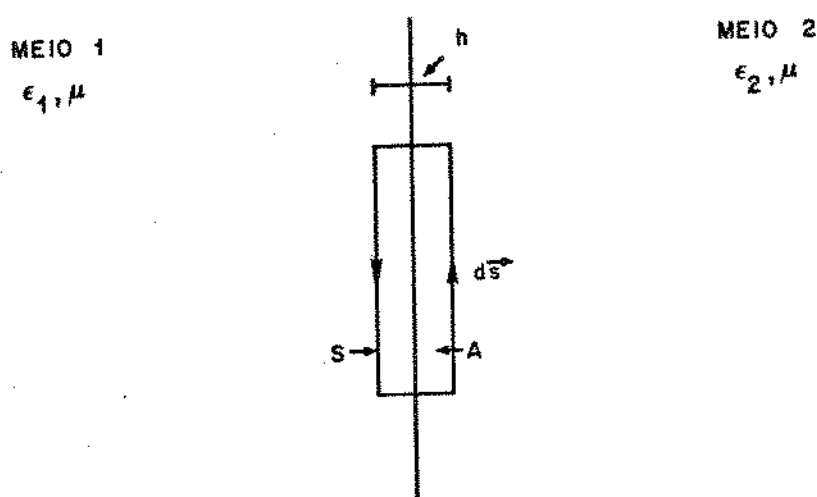


Fig. II.1 - Caminho de integração para a dedução das condições de contorno em uma interface entre dois meios dielétricos diferentes.

O caminho fechado S é colocado bastante próximo da interface entre os dois meios sendo que uma parte deste caminho encontra-se localizada no meio 1, com permissividade elétrica ϵ_1 , e a outra parte encontra-se localizada no meio 2, com permissividade elétrica ϵ_2 . Assumiremos que os meios considerados possuem a mesma permeabilidade magnética. As seções da trajetória S que são paralelas à interface são muito pequenas quando comparadas ao comprimento de onda da radiação eletromagnética, mas grandes quando comparadas às seções que cruzam perpendicularmente a interface. Para todos os efeitos, podemos considerar que o comprimento da seção perpendicular é próximo de zero. Assim sendo, a área envolvida pela trajetória S torna-se muito pequena e podemos escrever as equações (II.10) e (II.11) como segue :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{II.12})$$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{II.13})$$

ou

$$E_{1T} = E_{2T} \quad (\text{II.14})$$

$$H_{1T} = H_{2T}$$

As equações (II.14) representam, então, as condições que as componentes tangenciais (subscrito T) dos campos elétrico e magnético devem satisfazer sobre uma superfície de separação colocada entre dois meios dielétricos diferentes. Em outras palavras, as equações (II.14) impõem a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético sobre uma interface dielétrica.

Existem ainda condições de contorno que devem ser satisfeitas pelos vetores $\vec{D}$ e $\vec{B}$. Estas condições obrigam que sejam contínuas, também, as componentes destes vetores que são normais à interface dielétrica entre dois meios dielétricos diferentes. Nos casos que estaremos analisando, podemos mostrar que as relações dadas em (II.2) são originárias das equações (II.1). Esta demonstração é descrita no próximo parágrafo [12].

Se tomarmos o divergente em ambos os membros das equações (II.1), lembrando que o divergente do rotacional de um vetor é igual a zero, teremos :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \nabla \cdot \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{D} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.15})$$

A derivada com relação ao tempo de quantidades que variam com o tempo só é nula se estas próprias quantidades forem nulas. Então,

de (II.15) obtemos as equações (II.2). Deste modo, as condições de contorno para as componentes normais dos vetores $\vec{D}$ e $\vec{B}$ são automaticamente satisfeitas se a equação (II.15) for verdadeira. Assim, as expressões apresentadas na equação (II.14) são as únicas condições de contorno em meios dielétricos que iremos considerar.

II.4 - EQUAÇÕES BÁSICAS [13]

Vamos assumir que os campos elétrico ($\vec{E}$) e magnético ($\vec{H}$) instantâneos que propagam-se na fibra sejam dados, no sistema de coordenadas cilíndricas, pelas equações :

$$\vec{E}(r, \phi, z; t) = \text{Re}[\vec{E}(r, \phi, z)e^{j\omega t}] \quad (\text{II.16})$$

$$\vec{H}(r, \phi, z; t) = \text{Re}[\vec{H}(r, \phi, z)e^{j\omega t}]$$

onde os campos complexos $\vec{E}(r, \phi, z)$ e $\vec{H}(r, \phi, z)$ são dados pelas equações :

$$\vec{E}(r, \phi, z) = [\vec{E}_t(r, \phi) + \hat{z} E_z(r, \phi)]e^{-j\beta z} \quad (\text{II.17})$$

$$\vec{H}(r, \phi, z) = [\vec{H}_t(r, \phi) + \hat{z} H_z(r, \phi)]e^{-j\beta z}$$

onde $\hat{z}$ é o vetor unitário na direção z .

Os diversos parâmetros envolvidos nas equações (II.16) e (II.17) possuem os seguintes significados :

$\vec{E}_t(r, \phi), \vec{H}_t(r, \phi)$ - representam, respectivamente, as componentes vetoriais dos vetores campo elétrico e campo magnético que estão contidas no plano (r, ϕ) . Este plano é um plano transversal à direção de propagação da onda eletromagnética (eixo z);

$E_z(r, \phi), H_z(r, \phi)$ - representam, respectivamente, as componentes escalares dos campo elétrico e campo magnético complexos segundo a direção axial;

- ω - representa a frequência angular (em rad/s) da fonte óptica, e
- β - representa a constante de fase (em rad/m) da onda eletromagnética na direção de propagação.

Na presente análise, desprezamos os efeitos de atenuação provocados pelo guia óptico. Neste caso, a constante de fase β coincide com a constante de propagação da onda eletromagnética. Usaremos, então, indistintamente, as duas denominações para o parâmetro β .

As equações de Maxwell (II.7) e (II.8) são utilizadas considerando, por enquanto, que a não-homogeneidade dos materiais constituintes da fibra óptica seja representada pelas funções :

$$\mu = \mu(r)$$

(II.18)

$$\epsilon = \epsilon(r)$$

Os parâmetros μ e ϵ representam, respectivamente, a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica dos materiais envolvidos e são quantidades que variam apenas com a coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas.

Substituindo as equações (II.17) nas equações (II.7) e considerando as relações dadas pelas equações (II.8) e (II.18), obtemos :

$$-\mu \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}_t) + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) \vec{E}_t + \nabla [\epsilon^{-1} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}_t)] = 0 \quad (II.19)$$

$$-\epsilon \nabla \times (\epsilon^{-1} \nabla \times \vec{H}_t) + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) \vec{H}_t + \nabla [\mu^{-1} \nabla \cdot (\mu \vec{H}_t)] = 0 \quad (II.20)$$

$$\frac{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2}{\epsilon} \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon \nabla E_z}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2} \right) - \nabla \cdot \left(\mu \epsilon \frac{\omega \mu}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2} \right) \cdot \left(\hat{z} \times \frac{\omega \mu}{\beta} \nabla H_z \right) + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) E_z = 0 \quad (II.21)$$

$$\frac{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2}{\mu} \nabla \cdot \left(\frac{\mu \nabla H_z}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2} \right) + \nabla \left(\ln \frac{\mu \epsilon}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2} \right) \cdot \left(\hat{z} \times \frac{\omega \epsilon}{\beta} \nabla E_z \right) +$$

$$+ (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) H_z = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\vec{E}_t = -j \frac{\beta}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2} \left[\nabla E_z - \frac{\omega \mu}{\beta} \hat{z} \times \nabla H_z \right] \quad (\text{II.23})$$

$$\vec{H}_t = -j \frac{\beta}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2} \left[\nabla H_z + \frac{\omega \epsilon}{\beta} \hat{z} \times \nabla E_z \right] \quad (\text{II.24})$$

As equações (II.19) e (II.20) são equações diferenciais vetoriais para as componentes transversais do campo eletromagnético, $\vec{E}_t$ e $\vec{H}_t$, respectivamente. As equações (II.21) e (II.22) são equações diferenciais escalares para as componentes axiais do campo eletromagnético, E_z e H_z , respectivamente. As equações (II.23) e (II.24) indicam as relações entre as componentes transversais e as componentes axiais do campo eletromagnético.

O valor da permeabilidade magnética dos materiais utilizados na construção de fibras ópticas reais é aproximadamente igual ao valor da permeabilidade magnética do vácuo. Assim, consideraremos que :

$$\mu = \mu_0 \quad (\text{II.25})$$

Desta forma, a não-homogeneidade dos materiais utilizados na construção das fibras será representada apenas pela dependência que a permissividade elétrica ϵ possui com a coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas conforme estabelecido pela equação (II.18). A partir destas considerações, as equações vetoriais para as componentes transversais do campo eletromagnético dadas por (II.23) e (II.24) passam a ser escritas na forma :

$$\nabla^2 \vec{E}_t + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] \vec{E}_t + \nabla \left[\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \vec{E}_t \right] = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$\nabla^2 \vec{H}_t + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] \vec{H}_t + \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times (\nabla \times \vec{H}_t) = 0 \quad (\text{II.27})$$

É conveniente observar que, por questões de simplificação de notação, omitimos das equações (II.19) - (II.24) e de (II.26) - (II.27) a dependência explícita dos campos com as coordenadas (r, ϕ) . A menos da aproximação representada pela equação (II.25), que é uma aproximação bastante realista, as equações (II.21) - (II.24) e as equações (II.26) e (II.27) são equações exatas.

As equações (II.26) e (II.27) representam as equações vetoriais de onda para uma fibra óptica não-homogênea. Elas englobam, simultaneamente, as duas componentes dos campos elétrico e magnético transversais $[E_r \text{ e } E_\phi \text{ na equação (II.26) e } H_r \text{ e } H_\phi \text{ na equação (II.27)}]$. Este fato deve-se à presença do termo contendo o fator $\nabla \epsilon / \epsilon$.

Em situações práticas, a não-homogeneidade representada pela dependência da permissividade elétrica com a coordenada radial permite que o fator $\nabla \epsilon / \epsilon$ seja omitido cometendo-se erros desprezíveis [14] mesmo considerando-se a análise da dispersão em fibras não-homogêneas. Desta forma, considerando-se desprezíveis os efeitos causados por este termo as equações (II.26) e (II.27) tornam-se :

$$\nabla^2 \vec{E}_t + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] \vec{E}_t = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$\nabla^2 \vec{H}_t + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] \vec{H}_t = 0 \quad (\text{II.29})$$

Utilizando as equações vetoriais de onda representadas pelas equações (II.28) e (II.29) na análise das características de propagação de ondas eletromagnéticas em fibras ópticas não-homogêneas, estaremos trabalhando com equações aproximadas. A aproximação feita é conhecida como aproximação por pequeno gradiente de índice [já que a permissividade elétrica de um material está relacionada com o seu índice de refração conforme representado pela equação (II.82)]. Devemos observar, entretanto, que as equações (II.28) e (II.29) são equações vetoriais de onda rigorosamente exatas no caso de fibras ópticas homogêneas (ϵ constante).

No sistema de coordenadas retangulares, em virtude das propriedades matemáticas do operador de Laplace, cada uma das componentes escalares dos campos elétrico e magnético transversais satisfaz a uma equação diferencial escalar dada na forma :

$$\nabla^2 E_a + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] E_a = 0 ; E_a = E_x, E_y \quad (\text{II.30})$$

$$\nabla^2 H_a + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] H_a = 0 ; H_a = H_x, H_y \quad (\text{II.31})$$

As equações (II.30) e (II.31) são chamadas de equações escalares de onda no sistema de coordenadas retangulares (equações exatas no caso de fibras ópticas homogêneas e aproximadas no caso de fibras ópticas não-homogêneas) e foram obtidas através da substituição dos vetores $\vec{E}_t = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y$ e $\vec{H}_t = \hat{x}H_x + \hat{y}H_y$ nas equações vetoriais correspondentes.

Os fatos descritos nos dois parágrafos anteriores não são verdadeiros quando tratamos com as componentes escalares dos campos elétrico e magnético transversais escritos em coordenadas cilíndricas. Neste sistema de coordenadas, a variação da direção dos vetores unitários radial e angular ($\hat{r}$ e $\hat{\phi}$, respectivamente) impede que a propriedade do operador de Laplace empregada na dedução das equações (II.30) e (II.31) seja utilizada. Desta forma, no sistema de coordenadas cilíndricas, que é o sistema de coordenadas mais conveniente no presente caso, as equações escalares dos campos elétrico e magnético transversais são dadas pelas equações :

$$\nabla^2 E_r - \frac{1}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] E_r = 0 \quad (\text{II.32.a})$$

$$\nabla^2 E_\phi - \frac{1}{r^2} E_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] E_\phi = 0 \quad (\text{II.32.b})$$

$$\nabla^2 H_r - \frac{1}{r^2} H_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] H_r = 0 \quad (\text{II.33.a})$$

$$\nabla^2 H_\phi - \frac{1}{r^2} H_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2] H_\phi = 0 \quad (\text{II.33.b})$$

As equações diferenciais (II.32) e (II.33) são equações nas quais as componentes escalares E_r , E_ϕ e H_r , H_ϕ não são separáveis. Estas equações são chamadas, por este motivo, de equações diferenciais acopladas.

No que se segue, consideraremos apenas as equações escalares de onda para as componentes E_r e E_ϕ e, por questões de simetria, apenas a equação (II.32.a). Assim, fazendo com que as componentes envolvidas possuam uma variação com as coordenadas radial e angular (azimutal) dada por [15] :

$$\begin{aligned} E_r^{(i)} &= \pm j R^{(i)}(r) e^{-jn\phi} \\ E_\phi^{(i)} &= R^{(i)}(r) e^{-jn\phi} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

temos :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR^{(i)}(r)}{dr} \right] + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2}] R^{(i)}(r) = 0 \quad (\text{II.35})$$

onde :

$$m = n \mp 1 \quad (\text{II.36})$$

As duas componentes, $i = 1, 2$, na equação (II.34) correspondem a duas ondas circularmente polarizadas em direções opostas e são duas possíveis soluções, linearmente independentes, da equação (II.32.a). Na equação (II.36), o sinal superior (-) corresponde ao valor $i = 1$ enquanto que o sinal inferior (+) corresponde ao valor $i = 2$.

A equação (II.35) é a equação escalar de onda, em forma generalizada, no sistema de coordenadas cilíndricas. Sua resolução, permitindo encontrar a função $R^{(i)}(r)$, leva-nos ao conhecimento das componentes transversais do campo elétrico [equações (II.34)].

II.5 - MODOS DE PROPAGAÇÃO EM FIBRAS NÃO-HOMOGÊNEAS [13]

Na análise que efetuaremos nesta Seção, assumiremos que são válidas as seguintes observações :

- 1 - A permissividade elétrica dos materiais utilizados na construção da fibra óptica varia apenas com a coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas, isto é,

$$\begin{aligned} \epsilon(r) &= \epsilon_1 [1 - h(r)] ; 0 < r \leq a \\ &= \epsilon_2 ; r > a \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

onde a é o raio do núcleo da fibra, ϵ_1 é o valor máximo da permissividade elétrica do material do núcleo da fibra, ϵ_2 é o valor da permissividade elétrica do material da casca da fibra e a função $h(r)$ satisfaz as condições :

$$h(0) = 0 \quad (\text{II.38})$$

$$0 \leq h(r) < 1$$

Os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra, n_1 e n_2 , respectivamente, são dados pelas equações :

$$n_1^2 = \epsilon_1 / \epsilon_0 \quad (\text{II.39})$$

$$n_2^2 = \epsilon_2 / \epsilon_0$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do espaço livre. Os parâmetros n_1 e n_2 expressam apenas a dependência que os índices de refração dos materiais possuem com o comprimento de onda.

- 2 - As permeabilidades magnéticas dos materiais envolvidos são iguais à permeabilidade magnética do espaço livre, isto é, obedecem a relação dada pela equação (II.25), e

- 3 - As componentes axiais dos campos elétrico e magnético são dadas por produtos de funções das coordenadas r e ϕ conforme as equações :

$$E_z = \frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1}{\beta} \phi(r) \cos(n\phi + \xi_n) \quad (\text{II.40})$$

$$H_z = \omega \epsilon_1 \psi(r) \sin(n\phi + \xi_n)$$

onde n é um número inteiro, β é a constante de propagação na direção axial e a fase ξ_n assume os valores 0 ou $\pi/2$. As funções $\phi(r)$ e $\psi(r)$ são adimensionais.

Substituindo as equações (II.40) nas equações (II.21) e (II.22), obtemos o seguinte par de equações diferenciais escalares simultâneas :

$$\begin{aligned} & (\chi-h) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{\chi-h} \frac{d\phi}{dr} \right] + [(\chi-h) \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \frac{n^2}{r^2}] \phi + \\ & + \frac{n}{r} (\chi-h) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi-h} \right) \psi + \frac{1}{1-h} \frac{d(1-h)}{dr} \left[\frac{d\phi}{dr} + \frac{n}{r} \psi \right] = 0 \quad (\text{II.41}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\chi-h) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{\chi-h} \frac{d\psi}{dr} \right] + [(\chi-h) \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \frac{n^2}{r^2}] \psi + \\ & + \frac{n}{r} (\chi-h) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi-h} \right) \phi = 0 \quad (\text{II.42}) \end{aligned}$$

Nas equações (II.41) e (II.42), o parâmetro χ é definido pela equação :

$$\chi = 1 - \frac{\beta^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1} \quad (\text{II.43})$$

As componentes transversais dos campos elétrico e magnético são obtidas pela substituição das equações (II.40) nas equações (II.23) e (II.24) e são dadas por :

$$E_r = -j \frac{1}{\chi-h} \left[\frac{d\phi}{dr} + \frac{n}{r} \psi \right] \cos(n\phi + \xi n) \quad (\text{II.44})$$

$$E_\phi = j \frac{1}{\chi-h} \left[\frac{d\psi}{dr} + \frac{n}{r} \phi \right] \sin(n\phi + \xi n) \quad (\text{II.45})$$

$$H_r = -j \frac{\beta}{\omega\mu_0} \frac{1}{\chi-h} \left[\frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{1-h}{\chi-h} \right) \frac{n}{r} \phi \right] \sin(n\phi + \xi n) \quad (\text{II.46})$$

$$H_\phi = -j \frac{\beta}{\omega\mu_0} \frac{1}{\chi-h} \left[\left(\frac{1-h}{\chi-h} \right) \frac{d\phi}{dr} + \frac{n}{r} \psi \right] \cos(n\phi + \xi n) \quad (\text{II.47})$$

Podemos observar que a resolução das equações diferenciais escalares dadas pelas equações (II.41) e (II.42) permite o conhecimento de todas as componentes dos campos elétrico e magnético que propagam-se na fibra não-homogênea [ver equações (II.40) e (II.44) - (II.47)]. As diferentes distribuições espaciais destes campos são os modos de propagação da onda eletromagnética na fibra. Os possíveis modos de propagação em uma fibra não-homogênea serão analisados em seguida.

Vamos considerar, inicialmente, o caso em que o parâmetro n é igual a zero. O caso $n \neq 0$, que dá origem aos chamados modos híbridos, será discutido posteriormente. Estes modos são nomeados na forma tradicional seguindo a conceituação inicialmente proposta por Snitzer [16].

Quando $n = 0$, as equações (II.41) e (II.42) tornam-se duas equações diferenciais escalares independentes em termos das funções $\phi(r)$ e $\psi(r)$. Assumir $n = 0$ também significa considerar que as soluções das equações (II.41) e (II.42) são soluções que possuem simetria em relação ao eixo geométrico da fibra. Assim temos, a partir das equações (II.41) e (II.42), as seguintes equações diferenciais independentes :

$$\frac{\chi-h}{1-h} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1-h}{\chi-h} r \frac{d\phi(r)}{dr} \right] + (\chi-h)\omega^2\mu_0\epsilon_1 \phi(r) = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$(\chi-h) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1-h}{\chi-h} r \frac{d\psi(r)}{dr} \right] + (\chi-h) \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \psi(r) = 0 \quad (\text{II.49})$$

Temos dois possíveis conjuntos de casos passíveis de análise :

- . Caso A : quando assumimos que $\phi(r) \neq 0$ e $\psi(r) = 0$,
- . Caso B : quando assumimos que $\phi(r) = 0$ e $\psi(r) \neq 0$.

Podemos facilmente verificar, pelas equações (II.40), que o Caso A corresponde a ondas eletromagnéticas que possuem as componentes axiais dadas pelas equações :

$$E_z \neq 0 \quad (\text{II.50})$$

$$H_z = 0$$

caracterizando, portanto, um modo (ou uma onda) TM. O Caso B corresponde a ondas eletromagnéticas que possuem as componentes axiais dadas pelas equações :

$$E_z = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$H_z \neq 0$$

caracterizando, portanto, um modo (ou uma onda) TE. A equação escalar de onda, a função escalar de onda e as equações que definem os modos TM e TE são apresentadas em seguida.

II.5.1 - MODOS TM

De conformidade com o que apresentamos em parágrafo precedente, os modos TM são caracterizados a partir do momento que assumimos $n = 0$, $\psi(r) = 0$ e $\phi(r) \neq 0$ na equação (II.41). Pelas equações (II.40) e (II.44) - (II.47), podemos verificar que estes modos possuem algumas componentes do campo elétrico e campo magnético que são nulas. Estas componentes são :

$$H_z = E_\phi = H_r = 0 \quad (\text{II.52})$$

Definindo a função escalar de onda $R(r)$ pela equação :

$$R(r) = -j \frac{1}{\chi - h} \frac{d\phi(r)}{dr} \quad (\text{II.53})$$

obtemos, através da equação (II.48),

$$\phi(r) = -j \frac{1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r} R \right] \quad (\text{II.54})$$

Substituindo a equação (II.54) na equação (II.53), temos :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + [(\chi - h) \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \frac{1}{r^2}] R = 0 \quad (\text{II.55})$$

Em termos da função escalar de onda, as componentes não-nulas dos campos elétrico e magnético para os modos TM são dadas pelas equações :

$$E_r = R(r)$$

$$E_z = -j \frac{1}{\beta} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r} R \right] \quad (\text{II.56})$$

$$H_\phi = \frac{\beta}{\omega \mu_0} R(r)$$

Na dedução das equações (II.54) e (II.55), assumimos que $|r h'(r)| \ll 1$ onde a linha apostada ao parâmetro $h(r)$ indica diferenciação com relação à coordenada radial. Esta aproximação corresponde à mesma aproximação utilizada quando da dedução das equações (II.28) e (II.29), isto é, consideramos, novamente, a aproximação por pequeno gradiente de índice.

II.5.2 - MODOS TE

Para os modos TE, podemos utilizar um procedimento semelhante ao anterior. Vimos que estes tipos de modos são caracterizados por $n = 0$, $\phi(r) = 0$ e $\psi(r) \neq 0$. Pelas equações (II.40) e (II.44) - (II.47), podemos verificar que :

$$E_z = E_r = H_\phi = 0 \quad (\text{II.57})$$

Definindo a função escalar de onda $R(r)$ através da equação

$$R(r) = j \frac{1}{\chi - h} \frac{d\psi(r)}{dr} \quad (\text{II.58})$$

obtemos, a partir da equação (II.49),

$$\psi(r) = j \frac{1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r} R \right] \quad (\text{II.59})$$

Substituindo a equação (II.59) na equação (II.58), temos :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + [(\chi - h) \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \frac{1}{r^2}] R = 0 \quad (\text{II.60})$$

Em termos de $R(r)$, as componentes não-nulas dos campos elétrico e magnético para os modos TE são dadas pelas equações :

$$E_\phi = R(r)$$

$$H_r = - \frac{\beta}{\omega \mu_0} R(r) \quad (\text{II.61})$$

$$H_z = j \frac{1}{\omega \mu_0} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r} R \right]$$

Pelo apresentado, podemos verificar que as equações diferenciais obtidas a partir de diferentes funções de onda são idênticas para os modos TM e TE. Isto ocorre em virtude de termos utilizado a aproximação por pequeno gradiente de índice quando da dedução da equação (II.55).

II.5.3 - MODOS HÍBRIDOS : MODOS EH E HE

Vamos considerar o caso em que $n \neq 0$. Para isso, assumiremos que a diferença entre os valores dos índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra seja pequena. Esta aproximação, chamada de aproximação por guiamento fraco, foi inicialmente proposta por Gloge [17]. Isto nos leva às seguintes aproximações :

$$1 - h \approx 1$$

$$1 - \chi = \frac{\beta^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1} \approx 1 \quad (\text{II.62})$$

É conveniente observar que nenhuma aproximação pode ser feita com relação ao termo $(\chi - h)$ pois seus componentes possuem ordens de grandeza comparáveis.

Isto posto, as equações (II.41)-(II.42) e (II.46) - (II.47) passam a ser escritas nas formas :

$$(\chi - h) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{\chi - h} \frac{d\phi}{dr} \right] + [(\chi - h) \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \frac{n^2}{r^2}] \phi + \frac{n}{r} (\chi - h) \psi \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi - h} \right) = 0 \quad (\text{II.63})$$

$$(\chi - h) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{\chi - h} \frac{d\psi}{dr} \right] + [(\chi - h) \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \frac{n^2}{r^2}] \psi + \frac{n}{r} (\chi - h) \phi \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi - h} \right) = 0 \quad (\text{II.64})$$

$$H_r = -j \frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{1}{\chi - h} \left[\frac{d\psi}{dr} + \frac{n}{r} \phi \right] \sin(n\phi + \xi n) \quad (\text{II.65})$$

$$H_\phi = -j \frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{1}{\chi - h} \left[\frac{d\phi}{dr} + \frac{n}{r} \psi \right] \cos(n\phi + \xi n) \quad (\text{II.66})$$

Introduzindo as variáveis [18] :

$$G_1(r) = \frac{\phi(r) + \psi(r)}{2} \quad (\text{II.67})$$

$$G_2(r) = \frac{\phi(r) - \psi(r)}{2} \quad (\text{II.68})$$

as equações (II.63) e (II.64) passam a ser escritas nas formas :

$$\begin{aligned} (\chi-h) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\chi-h} \frac{dG_2}{dr} \right) + [(\chi-h)\omega^2\mu_0\epsilon_1 - \frac{n^2}{r^2}]G_2 - \\ - \frac{n}{r} (\chi-h)G_2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi-h} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

$$\begin{aligned} (\chi-h) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\chi-h} \frac{dG_1}{dr} \right) + [(\chi-h)\omega^2\mu_0\epsilon_1 - \frac{n^2}{r^2}]G_1 + \\ + \frac{n}{r} (\chi-h)G_1 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\chi-h} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

Podemos observar que as equações (II.69) e (II.70) são duas equações diferenciais independentes em termos das variáveis $G_1(r)$ e $G_2(r)$ anteriormente definidas. Usando os mesmos procedimentos utilizados quando das deduções das equações para os modos TM e TE, podemos identificar, novamente, dois casos passíveis de análise. São eles :

- . Caso A, quando $G_1 = 0$ e $G_2 \neq 0$,
- . Caso B, quando $G_1 \neq 0$ e $G_2 = 0$.

As ondas eletromagnéticas que satisfazem as condições explicitadas no Caso A são chamadas de modos EH enquanto que aquelas que satisfazem as condições expostas no Caso B são chamadas de modos HE. Este modos, como mostraremos em seguida, são modos híbridos em alusão ao fato de que as componentes dos campos elétrico e magnético na direção axial são diferentes de zero.

Para os modos EH, obtemos $G_2 = \phi = -\psi$. Então, definindo a função escalar de onda $R(r)$ através da equação :

$$R(r) = -j \frac{1}{\chi-h} \left[\frac{dG_2}{dr} - \frac{n}{r} G_2 \right] \quad (\text{II.71})$$

e substituindo na equação (II.69), obtemos :

$$G_2 = -j \frac{1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{n+1}{r} R \right] \quad (\text{II.72})$$

Substituindo (II.72) em (II.71), temos a seguinte equação diferencial :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[(\chi-h) \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \frac{(n+1)^2}{r^2} \right] R = 0 \quad (\text{II.73})$$

que é a equação de onda para os modos EH.

As componentes dos campos elétrico e magnético para estes modos são dadas, então, pelas equações :

$$\begin{aligned} E_r &= R(r) \cos(n\phi + \xi n) \\ E_\phi &= R(r) \sin(n\phi + \xi n) \\ E_z &= -j \frac{1}{\beta} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{n+1}{r} R \right] \cos(n\phi + \xi n) \\ H_r &= -\frac{\beta}{\omega \mu_0} R(r) \sin(n\phi + \xi n) \\ H_\phi &= \frac{\beta}{\omega \mu_0} R(r) \cos(n\phi + \xi n) \\ H_z &= j \frac{1}{\omega \mu_0} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{n+1}{r} R \right] \sin(n\phi + \xi n) \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Para os modos HE, obtemos $G_1 = \Phi = \Psi$. Definindo a função escalar de onda pela equação :

$$R(r) = -j \frac{1}{\chi-h} \left[\frac{dG_1}{dr} + \frac{n}{r} G_1 \right] \quad (\text{II.75})$$

e substituindo na equação (II.70), obtemos :

$$G_1 = -j \frac{1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1} \left[\frac{dR}{dr} - \frac{n-1}{r} R \right] \quad (\text{II.76})$$

Substituindo (II.76) em (II.75), temos :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + [(\chi-h)\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \frac{(n-1)^2}{r^2}] R = 0 \quad (\text{II.77})$$

que é a equação escalar de onda para os modos HE. As equações para as componentes dos campos elétrico e magnético para estes modos são dadas pelas equações :

$$E_r = R(r) \cos(n\phi + \xi n)$$

$$E_\phi = R(r) \sin(n\phi + \xi n)$$

$$E_z = -j \frac{1}{\beta} \left[\frac{dR}{dr} + \frac{n-1}{r} R \right] \cos(n\phi + \xi n) \quad (\text{II.78})$$

$$H_z = \frac{\beta}{\omega \mu_0} R(r) \sin(n\phi + \xi n)$$

$$H_\phi = \frac{\beta}{\omega \mu_0} R(r) \cos(n\phi + \xi n)$$

$$H_z = -j \frac{1}{\omega \mu_0} \left[\frac{dR}{dr} - \frac{n-1}{r} R \right] \sin(n\phi + \xi n)$$

Por comparação, podemos escrever as equações (II.55), (II.60), (II.73) e (II.77) na forma :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2}] R = 0 \quad (\text{II.79})$$

com :

$$m = \begin{cases} 1, & \text{para os modos TM e TE;} \\ n + 1, & \text{para os modos EH, e} \\ n - 1, & \text{para os modos HE.} \end{cases}$$

A equação (II.79) é chamada de equação escalar de onda

para fibras não-homogêneas sob condições de guiamento fraco. Ela permite que os vários modos de propagação nestes tipos de estruturas sejam analisados de maneira unificada sendo esta análise baseada nos valores assumidos por m . O parâmetro m é chamado de número circular do modo. Podemos associar, desta forma, o conceito de modos linearmente polarizados, modos LP, proposto por Gloge [17] aos modos que se propagam em uma fibra não-homogênea. Esta associação está mostrada na Tabela II.1.

Denominação do modo	
LP	Tradicional
$LP_{0\ell} \ (m = 0)$	$HE_{1\ell}$
$LP_{1\ell} \ (m = 1)$	$TE_{0\ell}$
	$TM_{0\ell}$
	$HE_{2\ell}$
$LP_{m\ell} \ (m \geq 2)$	$EH_{m-1,\ell}$
	$HE_{m+1,\ell}$

Tabela II.1 - Associação entre modos LP e modos tradicionais.

O parâmetro ℓ , que surge na Tabela II.1 como sub-índice, é chamado de número radial do modo.

II.6 - COEFICIENTES DE DISPERSÃO [8, 19]

Tivemos oportunidade de mencionar, no Capítulo I, que pulsos propagando-se através de fibras ópticas sofrem deformações. Estas deformações são ocasionadas pela não-monocromaticidade das fontes ópticas, que possuem largura espectral finita, e pelo alargamento do espectro do pulso em virtude da modulação que ele sofre. Estes fatores combinados fazem com que apareçam as características dispersivas da estrutura guiadora.

Mencionamos, também, que a dispersão é constituída pela combinação de dois fatores : a dispersão material e a dispersão de guia de onda. O primeiro ocorre em virtude da dependência não-linear que os índices de refração dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra possuem com o comprimento de onda. Este fator será analisado na próxima Seção. O segundo fator ocorre em virtude da influência que a geometria da fibra óptica tem sobre a radiação eletromagnética lançada em seu interior. Analisaremos este fator na Seção II.8. As equações necessárias à análise da dispersão total serão apresentadas na Seção II.9.

Nesta Seção, apresentaremos as equações básicas para a análise da dispersão, seja ela de que tipo for.

É sabido que ondas eletromagnéticas planas, monocromáticas, propagam-se através de um meio homogêneo, caracterizado pela permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ , com uma velocidade, denominada de velocidade de fase, V_f em m/s, definida pela equação :

$$V_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\omega}{k_0 n} \quad (\text{II.80})$$

onde $\omega = k_0 c$ é a frequência angular da fonte, c é a velocidade de fase de uma onda no espaço livre (velocidade da luz), n é o índice de refração do material que constitui o meio considerado e o parâmetro k_0 é o número de onda no espaço livre. Em termos dos parâmetros c e V_f , o índice de refração de um material é dado pela equação :

$$n = \frac{c}{V_f} \quad (\text{II.81})$$

ou, em termos da permissividade elétrica relativa $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, em meios não-magnéticos ($\mu = 1$) :

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (\text{II.82})$$

Em meios dispersivos, como fibras ópticas, o índice de refração (ou permissividade elétrica) varia com o comprimento de onda da onda guiada. Esta variação com o comprimento de onda é, na grande maioria dos casos, uma variação não-linear.

A detecção direta de sinais ópticos modulados em intensidade reconhece efeitos dispersivos apenas na envoltória

deste sinal [17]. Esta envoltória propaga-se com uma velocidade, chamada de velocidade de grupo, V_g em m/s, calculada através da equação :

$$V_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} \quad (\text{II.83})$$

Em meios dispersivos, a velocidade de fase e a velocidade de grupo estão relacionadas através da equação :

$$V_g = V_f - \lambda_m \frac{dV_f}{d\lambda_m} \quad (\text{II.84})$$

onde, devemos salientar, λ_m é o comprimento de onda da radiação eletromagnética no meio dispersivo. Considerando a relação :

$$\lambda = n \lambda_m \quad (\text{II.85})$$

obtida a partir das equações (II.80) e (II.81), a equação (II.84) pode ser escrita na forma :

$$V_g = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}} = \frac{c}{N} \quad (\text{II.86})$$

O fator

$$N = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad (\text{II.87})$$

que surge no denominador da equação (II.86), é chamado de índice de grupo do meio no qual a onda se propaga.

Gloge [17] define atraso de grupo, τ em s/m, como sendo o inverso da velocidade de grupo. Assim, usando as equações (II.83) e (II.86), temos :

$$\tau = \frac{1}{V_g} = \frac{N}{c} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d\beta}{dk_0} \quad (\text{II.88})$$

Fisicamente, o parâmetro τ indica o atraso da envoltória da portadora óptica por unidade de comprimento.

Define-se tempo de atraso ou tempo de trânsito [17], T em s, como sendo o tempo necessário para que um pulso percorra o comprimento L , em m, de uma fibra óptica. Assim, sendo λ o

comprimento de onda da portadora óptica, o pulso sofrerá um atraso $T(\lambda)$ ao propagar-se na fibra de comprimento L , definido por :

$$T(\lambda) = L\tau = \frac{LN(\lambda)}{c} \quad (\text{II.89})$$

Considera-se a largura espectral, $\Delta\lambda$, de uma fonte óptica [17] como sendo constituída de uma série contínua de comprimentos de onda portadoras. Cada uma destas parcelas pode ser considerada como um pulso que se propaga ao longo da fibra com tempos de trânsito diferentes chegando, portanto, no receptor óptico em instantes diferentes. Obviamente, este fato acarretará um alargamento do sinal comparado ao sinal originalmente lançado. Esta diferença entre os tempos de trânsito é dada pela equação :

$$\begin{aligned} T(\lambda, \lambda + \Delta\lambda) &\equiv T(\lambda + \Delta\lambda) - T(\lambda) = \\ &= \frac{L}{c} [N(\lambda + \Delta\lambda) - N(\lambda)] \end{aligned} \quad (\text{II.90})$$

Expandindo $N(\lambda + \Delta\lambda)$ em uma série de Taylor, obtemos :

$$\Delta T(\lambda, \lambda + \Delta\lambda) = L \sum_{m=1}^{\infty} D_m (\Delta\lambda)^m \quad (\text{II.91})$$

Os termos

$$D_m = \frac{1}{m!c} \frac{d^m N}{d\lambda^m} \quad (\text{II.92})$$

são, por definição [17], chamados de coeficientes de dispersão. Então,

$$D_1 = \frac{1}{c} \frac{dN}{d\lambda} \quad (\text{II.93})$$

é o coeficiente de dispersão de primeira ordem,

$$D_2 = \frac{1}{2c} \frac{d^2 N}{d\lambda^2} \quad (\text{II.94})$$

é o coeficiente de dispersão de segunda ordem, e assim por

diante. No nosso trabalho, estaremos interessados apenas no coeficiente de dispersão de primeira ordem, dado pela equação (II.93). Um estudo detalhado envolvendo o coeficiente de dispersão de segunda ordem pode ser encontrado em [8].

O coeficiente de dispersão de primeira ordem, D_1 , é chamado apenas de dispersão. Dependendo do caso, dispersão total, dispersão material ou dispersão de guia de onda. O comprimento de onda $\hat{\lambda}$ que anula D_1 , isto é, o comprimento de onda para o qual ocorre

$$D_1 = \frac{1}{c} \frac{dN}{d\lambda} \bigg|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \quad (\text{II.95})$$

é chamado de comprimento de onda de dispersão total nula.

II.7 - DISPERSÃO MATERIAL

A dispersão material, como já tivemos oportunidade de frisar, surge em consequência da dependência do índice de refração dos materiais com o comprimento de onda. É uma característica intrínseca dos materiais que pode ser minimizada através da escolha conveniente do comprimento de onda no qual a fonte irá operar. No nosso trabalho, usaremos a equação dos três termos de Sellmeier para caracterizar esta dependência. Esta equação é dada na forma :

$$n^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \quad (\text{II.96})$$

onde :

n - é o índice de refração do material;

λ - é o comprimento de onda da fonte (em μm) ;

A_i - são constantes relacionadas com a largura da banda de absorção do material, e

λ_i - são comprimentos de onda para os quais ocorre absorção máxima (são dados em μm).

O cálculo do comprimento de onda que torna nula a dispersão material é feito através da equação (II.95). A partir da expressão para o índice de grupo, dada pela equação (II.87), temos :

$$D_m = - \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (\text{II.97})$$

onde

$$\frac{d^2 n}{d\lambda^2} = \frac{1}{n} \left[- \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 (3\lambda^2 + \ell_i^2)}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^3} \right] \quad (\text{II.98})$$

com

$$\frac{dn}{d\lambda} = - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 \lambda}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^2} \quad (\text{II.99})$$

Na Tabela II.2, apresentamos valores para os coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier para alguns materiais utilizados na construção de fibras ópticas. Nesta Tabela são, também, apresentados os valores de comprimentos de onda de dispersão material nula para estes materiais.

II.8 - DISPERSÃO DE GUIA DE ONDA

Vimos, na Seção II.6, que o índice de grupo N pode ser escrito na forma [ver equação (II.88)] :

$$N = \frac{d\beta}{dk_0} \quad (\text{II.100})$$

onde β é a constante de propagação do modo de interesse e o parâmetro k_0 é o número de onda no espaço livre.

A constante de propagação β pode ser escrita em função dos índices de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra, n_1 e n_2 , respectivamente, do parâmetro k_0 e da constante de propagação normalizada b através da equação :

COEFICIENTES DA EQUAÇÃO DOS TRÊS TERMOS DE SELLMIEIER

COMPOSIÇÃO
(MOL %)

AMOSTRA	GeO ₂	SiO ₂	A ₁	ℓ_1	A ₂	ℓ_2	A ₃	ℓ_3
01 *	-	100	0,6961663	0,0684043	0,4079426	0,1162414	0,8974794	9,896161
02	13,5	86,5	0,73454395	0,08687693	0,42710828	0,11195191	0,82103399	10,84654
03	7,0	93,0	0,6869829	0,078087582	0,44479505	0,1155184	0,79073512	10,436628
04	4,1	95,9	0,68671749	0,072675189	0,43481505	0,11514351	0,89656582	10,002398

* Amostra fundida

AMOSTRA λ (μ m)

01	1,27275
02	1,43533
03	1,39479
04	1,30091

Tabela II.2 - Coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier [20, 21] e valores do comprimento de onda de dispersão material nula [8] para alguns materiais utilizados na construção de fibras ópticas.

Amostra 01 - SiO₂ fundido.

$$\beta = k_0 [n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)b]^{1/2} \quad (\text{II.101})$$

O termo

$$[n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)b]^{1/2} = n_e \quad (\text{II.102})$$

é chamado de índice de fase efetivo [6]. Considerando que todos os fatores incluídos na equação (II.101) são funções do comprimento de onda, encontramos :

$$N = \frac{1}{n_e} [n_2 N_2 + (V/2 \, db/dV + b)\theta] \quad (\text{II.103})$$

onde :

$$\theta = n_1 N_1 - n_2 N_2 \quad (\text{II.104})$$

$$N_i = n_i - \lambda \frac{dn_i}{d\lambda} ; i = 1, 2$$

e

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (\text{II.105})$$

Os parâmetros N_1 e N_2 na equação (II.103) são, respectivamente, os índices de grupo dos materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra enquanto V representa a frequência normalizada do modo na fibra.

Define-se dispersão de guia de onda [2] como sendo o efeito provocado pela variação do atraso de grupo [ver equação (II.88)] com o comprimento de onda mantendo-se independentes desta variação os índices de refração dos materiais do núcleo e da casca da fibra. Assim, temos :

$$D_g = - \frac{(n_1^2 - n_2^2)V}{2\lambda_c n_e} \left[V \frac{d^2 b}{dV^2} + \left(3 - \frac{N_g}{n_e} \right) \frac{db}{dV} \right] \quad (\text{II.106})$$

$$N_g = \frac{1}{n_e} \left[n_2^2 + \left(\frac{V}{2} \frac{db}{dV} + b \right) \theta \right]$$

onde D_g é dada, geralmente, em unidades de ps/(km.nm) e N_g é o índice de grupo do guia.

II.9 - DISPERSÃO TOTAL

No item anterior, definimos o índice de fase efetivo para uma fibra óptica [ver equação (II.102)]. Partindo desta equação, podemos definir também um índice de grupo efetivo dado por :

$$N_e = n_e - \lambda \frac{dn_e}{d\lambda} \quad (\text{II.107})$$

Usando a equação para o coeficiente de dispersão de primeira ordem, equação (II.93), temos :

$$D = - \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_e}{d\lambda^2} \quad (\text{II.108})$$

De (II.102) e (II.108), calculamos a equação da dispersão total [6] :

$$D_T = - \frac{\lambda}{cn_e} [(1-b)v_2 + bv_1 + 2b'\phi + 1/2 b''\theta - \frac{1}{n_e^2} (n_2 n_2' + b\phi + 1/2 b'\theta)^2] \quad (\text{II.109})$$

onde :

$$v_j = n_j n_j'' + (n_j')^2 \quad ; \quad j = 1, 2$$

$$\phi = n_1 n_1' - n_2 n_2' \quad (\text{II.110})$$

$$\theta = n_1^2 - n_2^2$$

A(s) linha(s), ('), apostas aos parâmetros das equações (II.109) e (II.110) indicam diferenciação do respectivo parâmetro com relação ao comprimento de onda. Na equação (II.110), $j = 1$ significa que estamos tratando com o material constituinte do núcleo da fibra enquanto que $j = 2$ que o material constituinte da

casca do guia deve ser considerado. Portanto, os coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier a serem utilizados devem ser os correspondentes a cada material.

Nos próximos Capítulos, utilizaremos as equações aqui estabelecidas para analisar a dispersão total em fibras monomodais homogêneas e não-homogêneas.

CAPÍTULO III

DISPERSÃO TOTAL EM FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS HOMOGÊNEAS

III.1 - INTRODUÇÃO

A maior dificuldade teórica que surge na análise da dispersão total em fibras ópticas monomodais, sejam elas homogêneas ou não-homogêneas, está no cálculo da constante de propagação do modo dominante e de algumas de suas derivadas com relação ao comprimento de onda [ver equação (II.109)].

Trabalhando com fibras ópticas monomodais homogêneas, ou fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau, temos três procedimentos diferentes que permitem a obtenção dos parâmetros referidos no parágrafo precedente. Dois destes procedimentos são descritos neste Capítulo e um deles é utilizado no cálculo de valores de comprimentos de onda de dispersão total nula. O terceiro é descrito e utilizado no Capítulo V.

Inicialmente, usando equações apresentadas no Capítulo anterior, encontramos a equação característica exata para os possíveis modos nas fibras em análise. Esta equação, quando resolvida, possibilita o conhecimento da constante de propagação de qualquer modo específico que seja de nosso interesse. Após a caracterização dos diversos tipos de modos cuja propagação é possível nestas fibras, estabelecemos suas equações de corte. Estas equações possibilitam a identificação da região de operação monomodal do guia óptico.

Depois, com a utilização da aproximação por guiamento fraco, reduzimos a equação característica exata, que possui uma forma analítica complexa, a uma equação característica que é válida na grande maioria dos casos reais. O uso desta aproximação permite a simplificação de procedimentos computacionais e possibilita a obtenção de expressões analíticas para as derivadas da constante de propagação do modo dominante. Estas equações analíticas são de difícil obtenção, pela enorme quantidade de manipulações algébricas necessárias, utilizando a equação característica exata.

Terminamos o Capítulo apresentando valores de comprimentos de onda de dispersão total nula, usando a equação característica aproximada como base, para algumas fibras monomodais com perfil de índice de refração em degrau. Estes valores servirão como valores de referências quando estivermos tratando da síntese destas estruturas.

III.2 - ANÁLISE EXATA

A partir das equações (II.23) e (II.24), podemos obter o relacionamento existente entre as componentes transversais e axiais dos campos elétrico e magnético que propagam-se em uma fibra óptica homogênea. Temos, então :

$$\begin{bmatrix} E_r \\ H_\phi \\ H_r \\ E_\phi \end{bmatrix} = - \frac{j}{\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2} \begin{bmatrix} \omega \mu_0 / r & \beta & 0 & 0 \\ \beta / r & \omega \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -\omega \epsilon / r \\ 0 & 0 & -\omega \mu_0 & \beta / r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial H_z / \partial \phi \\ \partial E_z / \partial r \\ \partial H_z / \partial r \\ \partial E_z / \partial \phi \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

As componentes axiais E_z e H_z podem ser obtidas através da resolução das equações :

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} + (\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2) \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III.2})$$

que resultam das equações (II.21) e (II.22) fazendo constante a permissividade elétrica.

Assumindo que as componentes axiais sejam dadas por um produto de funções das coordenadas r e ϕ ,

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} = R(r) \Theta(\phi) \quad (\text{III.3})$$

obtemos, por substituição na equação (III.2),

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \phi^2} + n^2 \Theta = 0 \quad (\text{III.4})$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2 - \frac{n^2}{r^2}) R = 0 \quad (\text{III.5})$$

A equação (III.5) é conhecida como equação diferencial de Bessel.

As equações (III.4) e (III.5) possuem as seguintes soluções :

$$\theta(\phi) = \begin{cases} \cos(n\phi + \xi) \\ \sin(n\phi + \xi) \end{cases} ; \xi = \text{constante} \quad (\text{III.6})$$

$$R(r) = \begin{cases} A J_n(\beta_t r) + A' N_n(\beta_t r) & \beta_t \text{ real} \\ C K_n(|\beta_t| r) + C' I_n(|\beta_t| r) & \beta_t \text{ imaginário} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

onde

$$\beta_t = \omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2 \quad (\text{III.8})$$

e n é o número azimutal do modo, A , A' , C e C' são constantes arbitrárias. As funções J_n e N_n são funções de Bessel, de ordem n , de primeira e segunda espécies, respectivamente. As funções K_n e I_n são funções de Bessel modificadas, de ordem n , de primeira e segunda espécies, respectivamente. Os demais parâmetros das equações apresentadas foram definidos em Seções anteriores.

Para que uma fibra óptica desempenhe o papel de guia de ondas eletromagnéticas, as componentes E_z e H_z devem ter valores finitos quando $r \rightarrow 0$ e devem ser, rapidamente, amortecidas quando $r \rightarrow \infty$.

Levando em consideração as ponderações do parágrafo precedente, a forma das funções de Bessel e das funções modificadas de Bessel e o valor da permissividade elétrica em cada um dos diferentes meios que constituem a fibra óptica, temos as seguintes equações :

. No núcleo da fibra ($0 \leq r < a$) :

$$E_z = A J_n(Ur/a) \sin n\phi$$

$$E_r = \left[-Aj \frac{\beta}{U/a} J'_n(Ur/a) + Bj \frac{\omega\mu_0}{(U/a)^2} \frac{n}{r} J_n(Ur/a) \right] \sin n\phi \quad (\text{III.9})$$

$$E_\phi = \left[-Aj \frac{\beta}{(U/a)^2} \frac{n}{r} J_n(Ur/a) + Bj \frac{\omega\mu_0}{U/a} J'_n(Ur/a) \right] \cos n\phi$$

$$H_z = B J_n(Ur/a) \cos n\phi$$

$$H_r = \left[A j \frac{\omega\epsilon_1}{(U/a)^2} \frac{n}{r} J_n(Ur/a) - Bj \frac{\beta}{U/a} J'_n(Ur/a) \right] \cos n\phi$$

$$H_\phi = \left[-Aj \frac{\omega\epsilon_1}{U/a} J'_n(Ur/a) + B j \frac{\beta}{(U/a)^2} \frac{n}{r} J_n(Ur/a) \right] \sin n\phi$$

onde

$$U = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \beta^2)^{1/2} a \quad (\text{III.10})$$

. Na casca da fibra ($r \geq a$) :

$$E_z = CK_n(Wr/a) \sin n\phi$$

$$E_r = \left[Cj \frac{\beta}{W/a} K'_n(Wr/a) - Dj \frac{\omega\mu_0}{(W/a)^2} \frac{n}{r} K_n(Wr/a) \right] \sin n\phi$$

$$E_\phi = \left[Cj \frac{\beta}{(W/a)^2} \frac{n}{r} K_n(Wr/a) - Dj \frac{\omega\mu_0}{W/a} K'_n(Wr/a) \right] \cos n\phi$$

$$H_z = D K_n(W/a) \cos n\phi \quad (\text{III.11})$$

$$H_r = \left[-Cj \frac{\omega\epsilon_2}{(W/a)^2} \frac{n}{r} K_n(Wr/a) + Dj \frac{\beta}{W/a} K'_n(Wr/a) \right] \cos n\phi$$

$$H_\phi = \left[Cj \frac{\omega\epsilon_2}{W/a} K'_n(Wr/a) - Dj \frac{\beta}{(W/a)^2} \frac{n}{r} K_n(Wr/a) \right] \sin n\phi$$

onde

$$W = (\beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2)^{1/2} a \quad (\text{III.12})$$

A linha (') aposta aos símbolos J_n e K_n indica diferenciação da função com relação aos argumentos U e W , respectivamente.

Fazendo $r = a$ e utilizando as condições de contorno apresentadas no Capítulo II, Seção II.3, obtemos :

$$AJ_n(U) - CK_n(W) = 0$$

$$BJ_n(U) - DK_n(W) = 0$$

$$A_j \frac{\beta}{(U/a)^2} \frac{n}{a} J_n(U) - B_j \frac{\omega \mu_0}{U/a} J'_n(U) + C_j \frac{\beta}{(W/a)^2} \frac{n}{a} K_n(W) - D_j \frac{\omega \mu_0}{W/a} K'_n(W) = 0$$

$$A_j \frac{\omega \epsilon_1}{U/a} J'_n(U) - B_j \frac{\beta}{(U/a)^2} \frac{n}{a} J_n(U) + C_j \frac{\omega \epsilon_2}{W/a} K'_n(W) - D_j \frac{\beta}{(W/a)^2} \frac{n}{a} K_n(W) = 0 \quad (\text{III.13})$$

que pode ser escrita na forma matricial :

$$[M] \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{III.14})$$

Para que a equação (III.14) possua soluções não triviais é necessário que :

$$\det[M] = 0 \quad (\text{III.15})$$

que, junto com as equações (III.10) e (III.12), transformam-se na equação :

$$\left[\frac{J'_n(U)}{U J_n(U)} + \frac{K'_n(W)}{W K_n(W)} \right] \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{J'_n(U)}{U J_n(U)} + \frac{K'_n(W)}{W K_n(W)} \right] =$$

$$= n^2 \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (\text{III.16})$$

A equação (III.16) é a equação característica exata para os possíveis modos em uma fibra óptica homogênea. Contém, simultaneamente, os parâmetros U e W . Assim, o problema do cálculo dos valores da constante de propagação para cada um dos modos na fibra reduz-se à resolução de (III.16) com a condição :

$$U^2 + W^2 = V^2 \quad (\text{III.17})$$

onde V é a frequência normalizada definida pela equação (II.105). Calculados U e W , a constante de propagação normalizada b [ver equação (II.101)], para qualquer modo específico, pode ser obtida pela seguinte equação :

$$b = 1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{W^2}{V^2} \quad (\text{III.18})$$

Quando o parâmetro n na equação (III.16) é igual a zero, temos duas equações :

$$\epsilon f + g = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$f + g = 0 \quad (\text{III.20})$$

onde :

$$f = \frac{J'_0(U)}{U J_0(U)} ; \quad g = \frac{K'_0(W)}{W K_0(W)} \quad (\text{III.21})$$

e

$$\begin{aligned} J'_0(U) &= -J_1(U) \\ K'_0(W) &= -K_1(W) \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

A equação (III.19) é a equação característica para os modos TM, isto é, para os modos que possuem componentes magnéticas transversais à direção de propagação ($H_z \neq 0$, portanto) enquanto que a equação (III.20) é a equação característica para os modos TE, isto é, para os modos que possuem componentes elétricas transversais à direção de propagação ($E_z \neq 0$, portanto). Nos demais casos, $n \geq 1$, os modos apresentam todas as componentes elétricas e magnéticas não-nulas

e são, por este motivo, chamados de modos híbridos.

A denominação dos modos híbridos em modos HE e EH é baseada na sequência de soluções apresentadas pela equação (III.16). Para $n \geq 1$ e fixo, a primeira raiz da equação (III.16) é associada ao modo HE, a segunda raiz é associada ao modo EH, a terceira raiz é associada ao modo HE novamente e assim sucessivamente. Este critério de nomeação dos modos híbridos é bastante simples e é universalmente adotado [16].

Um parâmetro muito importante para cada modo é a sua frequência de corte. As equações de corte para os modos que se propagam em uma fibra óptica, neste caso, são obtidas fazendo-se o parâmetro $W=0$ na equação (III.16), nos casos em que $n \geq 1$, e nas equações (III.19) e (III.20). Os detalhes da dedução destas equações são dados em [8]. Na Tabela III.1, apresentamos apenas as equações de corte em suas formas finais. Na Tabela III.2, apresentamos alguns valores do parâmetro V_c , chamado de valor de corte, para alguns modos propagando-se em uma fibra homogênea com permissividade elétrica relativa, $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2$, igual a 1,7.

n	Equações de Corte	Modos
1	$J_1(V_c)=0$	HE _{1μ}
≥ 1	$J_n(V_c)=0 ; V_c \neq 0$	EH _{nμ}
> 1	$(\epsilon+1)J_{n-1}(V_c) - \frac{V_c}{n-1} J_n(V_c)=0$	HE _{nμ}
		TE _{0μ}
0	$J_0(V_c)=0$	TM _{0μ}

Tabela III.1 - Equações de corte para modos guiados em fibras ópticas homogêneas. $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2$

Observando os valores apresentados na Tabela III.2, verificamos que um dos modos possui um valor de corte igual a zero. Este modo, o modo HE₁₁, é chamado, por este motivo, de modo fundamental ou modo dominante da fibra homogênea. Uma fibra que permite apenas a propagação deste modo é chamada de fibra de modo único ou uma fibra monomodal. Este modo é excitado quando trabalhamos com a fibra em uma frequência, f , dentro da faixa especificada por :

$$0 < f < \frac{2,4048c}{2\pi a(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}} \quad (\text{III.23})$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo, a é o raio do núcleo da fibra, n_1 é o valor do índice de refração do material constituinte do núcleo e n_2 é o índice de refração do material constituinte da casca da fibra e 2,4048 é o valor de corte dos modos imediatamente superiores ao modo HE_{11} (os modos TM_{01} e TE_{01} , conforme resultados apresentados na Tabela III.2).

n/μ	1	2	3	MODOS
0	2,4048	5,5201	8,6537	TE, TM
1	0,0000	3,8317	7,0156	HE
2	2,6511	5,6422	8,7333	HE
3	4,1255	7,2004	10,306	HE
1	3,8317	7,0156	10,173	EH
2	5,1356	8,4172	11,620	EH
3	6,3802	9,7610	13,015	EH

Tabela III.2 - Valores de corte, V_c , para modos guiados em fibras ópticas homogêneas. $\epsilon = \epsilon_1/\epsilon_2 = 1,7$.

Partindo de equações estabelecidas nesta Seção e usando a aproximação do guiamento fraco, apresentamos na Seção III.3 a equação característica aproximada para modos que propagam-se em fibras ópticas homogêneas. Esta equação possibilita a obtenção de fórmulas analíticas para as derivadas, com relação ao comprimento de onda, da constante de propagação do modo dominante facilitando o esforço necessário ao cálculo de valores de comprimentos de onda de dispersão total nula.

III.3 - APROXIMAÇÃO POR GUIAMENTO FRACO

Sob a condição de guiamento fraco, a equação característica para os modos TM [ver equação (III.19)] degenera-se e torna-se, aproximadamente, a mesma equação para os modos TE [ver equação (III.20)]. Assim, usando (III.20), (III.21) e (III.22), obtemos :

$$\frac{J_1(U)}{UJ_0(U)} = - \frac{K_1(W)}{WK_0(W)} \quad (\text{III.24})$$

que passa a ser a equação característica para os modos TM e TE sob condições de guiamento fraco.

No caso em que $n \geq 1$, a equação característica para os modos híbridos, equação (III.16), passa a ser escrita na forma :

$$\frac{J'_n(U)}{UJ_n(U)} + \frac{K'_n(W)}{WK_n(W)} = \pm n \left(\frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (\text{III.25})$$

Quando o sinal é positivo, em (III.25), obtemos :

$$- \frac{J_{n+1}(U)}{UJ_n(U)} = \frac{K_{n+1}(W)}{WK_n(W)} \quad (\text{III.26})$$

que é a equação válida para os modos EH. Quando o sinal é negativo, obtemos :

$$\frac{J_{n-1}(U)}{UJ_n(U)} = \frac{K_{n-1}(W)}{WK_n(W)} \quad (\text{III.27})$$

que é a equação válida para os modos HE. Na transformação das equações (III.25) nas equações (III.26) e (III.27), usamos as fórmulas de recorrência para as funções de Bessel e de Bessel modificadas [22] :

$$J_{n+1}(U) + J_{n-1}(U) = \frac{2n}{U} J_n(U)$$

$$K_{n+1}(W) - K_{n-1}(W) = \frac{2n}{W} K_n(W)$$

$$J_{-n}(U) = (-1)^n J_n(U) ; K_{-n}(W) = K_n(W) \quad (\text{III.28})$$

$$2J'_n(U) = J_{n-1}(U) - J_{n+1}(U)$$

$$-2K'_n(W) = K_{n-1}(W) + K_{n+1}(W)$$

Usando as relações apresentadas em (III.28), podemos escrever a equação (III.27) na forma :

$$\begin{aligned} \frac{U}{J_{n-1}(U)} \left[\frac{n-1}{U} 2J_{n-1}(U) - J_{n-2}(U) \right] &= \\ &= \frac{W}{K_{n-1}(W)} \left[\frac{n-1}{W} 2K_{n-1}(W) - K_{n-2}(W) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

ou

$$\frac{U J_{n-2}(U)}{J_{n-1}(U)} = - \frac{W K_{n-2}(W)}{K_{n-1}(W)} \quad (\text{III.30})$$

Por comparação, podemos verificar que a equação (III.30) representa, de maneira unificada, as equações (III.24), (III.26) e (III.27). Para tanto, basta definir :

$$m = \begin{cases} 1 & (\text{para modos TM e TE}) \\ n + 1 & (\text{para modos EH}) \\ n - 1 & (\text{para modos HE}) \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

e expressar (III.30) na forma :

$$\frac{U J_{m-1}(U)}{J_m(U)} = \frac{W K_{m-1}(W)}{K_m(W)} \quad (\text{III.32})$$

onde as relações $J_{-i} = -J_i$ e $K_{-i} = K_i$ devem ser utilizadas quando as respectivas funções apresentarem valores de ordem negativos. A equação (III.32) é a equação característica aproximada, obtida através da imposição da condição do guiamento fraco, para modos em uma fibra óptica homogênea. Com o uso desta equação, os modos passam a ter a denominação de modos LP conforme descrito no Capítulo II, Seção II.8, Tabela II.1. Suas equações características são dadas na Tabela III.3.

MODO LP	Equação Característica
$LP_{0\ell} \quad (m = 0)$	$\frac{UJ_1(U)}{J_0(U)} = \frac{WK_1(W)}{K_0(W)}$
$LP_{1\ell} \quad (m = 1)$	$\frac{UJ_0(U)}{J_1(U)} = \frac{WK_0(W)}{K_1(W)}$
$LP_{m\ell} \quad (m \geq 2)$	$\frac{UJ_{m-1}(U)}{J_m(U)} = \frac{WK_{m-1}(W)}{K_m(W)}$

Tabela III.3 - Equações características aproximadas para os modos em fibras homogêneas.

Considerando os modos $LP_{m\ell}$, os valores de corte para cada modo são obtidos a partir da relação :

$$V_C = j_{(m-1)\ell} \quad (III.33)$$

onde $j_{(m-1)\ell}$ indica a ℓ -ésima raiz de $J_{m-1}(x) = 0$. Exemplificando, para o modo LP_{01} ($m = 0$ e $\ell = 1$), temos

$$V_C = j_{11}$$

onde j_{11} indica a primeira raiz da equação $J_1(x) = 0$. A primeira raiz de $J_1(x) = 0$ é igual a zero indicando que o modo LP_{01} (correspondente, pela Tabela II.1, ao modo HE_{11}) é o modo fundamental. Para o modo LP_{11} ($m = 1$ e $\ell = 1$), temos

$$V_C = j_{01}$$

onde j_{01} indica a primeira raiz da equação $J(x) = 0$. Esta raiz é igual a 2,4048 e o modo LP_{11} (correspondente, pela Tabela II.1, aos modos TM_{01} , TE_{01} e HE_{21}) é o modo imediatamente superior.

Como estaremos apenas interessados no modo dominante, modo LP_{01} , teremos que encontrar apenas a primeira raiz da equação :

$$\frac{U J_1(U)}{J_0(U)} = \frac{WK_1(W)}{K_0(W)} \quad (\text{III.34})$$

sujeita à condição imposta pela equação (III.17) no intervalo de operação monomodal $0 < V \leq 2,4048$.

Encontrados U e W , a constante de propagação normalizada para o modo LP_{01} pode ser calculada através da equação (III.18). Fórmulas analíticas para as derivadas da constante de propagação normalizada, com relação ao comprimento de onda, são obtidas através das equações (III.18) e (III.34) e são dadas pelas equações :

$$b' = -2 \frac{U^2}{V^2} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} A \quad (\text{III.35})$$

$$b'' = 2 \frac{U^2}{V^2} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} B + (UA)^2 \left[\frac{4U^2}{V^2} \left(-\frac{K_0(W)}{K_1(W)} \pm \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} + \frac{K_0^3(W)}{K_1^3(W)} \right) \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{W}{V} + \frac{U^2}{WV} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) - \frac{2U^2}{V^2} \left(1 + \frac{2 K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right] \quad (\text{III.36})$$

onde

$$A = \frac{1}{\lambda} - \frac{\phi}{\theta} \quad (\text{III.37})$$

$$B = \frac{v_1 - v_2}{\theta} - \left(\frac{\phi}{\theta} \right)^2 + \frac{2A}{\lambda} \quad (\text{III.38})$$

com os parâmetros ϕ , θ , v_1 e v_2 sendo dados pelas equações

(II.110).

Observando a equação característica exata, equação (III.16), podemos verificar que fórmulas analíticas, como as dadas pelas equações (III.35) e (III.36), são difíceis de se obter. Fundamentalmente, quando utilizamos a equação característica exata, o cálculo de b' e b'' é feito por meio de métodos numéricos de diferenciação e interpolação [8].

Na próxima Seção, apresentamos os procedimentos necessários ao cálculo do comprimento de onda de dispersão total nula para fibras monomodais com perfil de índice de refração em degrau usando as equações do guiamento fraco. Os resultados são comparados com os resultados obtidos com a utilização de equações exatas [8].

III.4 - RESULTADOS

Uma das etapas mais importantes na obtenção de soluções para problemas de propagação em fibras ópticas com perfil de índice de refração em degrau é a que envolve o cálculo dos autovalores U e W a partir da equação característica. No caso da condição de guiamento fraco prevalecer, como uma aproximação considerada adequada para o problema tratado, estes autovalores são obtidos a partir de soluções da equação característica aproximada, apresentada na Seção anterior.

Partindo dos conceitos e equações estabelecidas na Seção III.3, desenvolvemos um programa de computador, escrito em linguagem FORTRAN e implementado em um microcomputador, para resolver a equação da dispersão total

$$D_T \Big|_{\lambda=\tilde{\lambda}} = 0 \quad (III.39)$$

onde a expressão para D_T é dada pela equação (II.109), Seção II.9, Capítulo II. O diagrama de blocos dos procedimentos que utilizamos é apresentado na Figura III.1.

O programa requer, como dados de entrada, o valor do raio do núcleo da fibra (em micrometros) e os valores dos coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier para os materiais constituintes do núcleo e da casca do guia óptico.

Devemos salientar que, em todos os procedimentos que utilizamos, consideramos sempre os índices de refração dos materiais variantes com o comprimento de onda. Esta consideração é realista e diferente da adotada por Chang [4, 5] na resolução de problema semelhante.

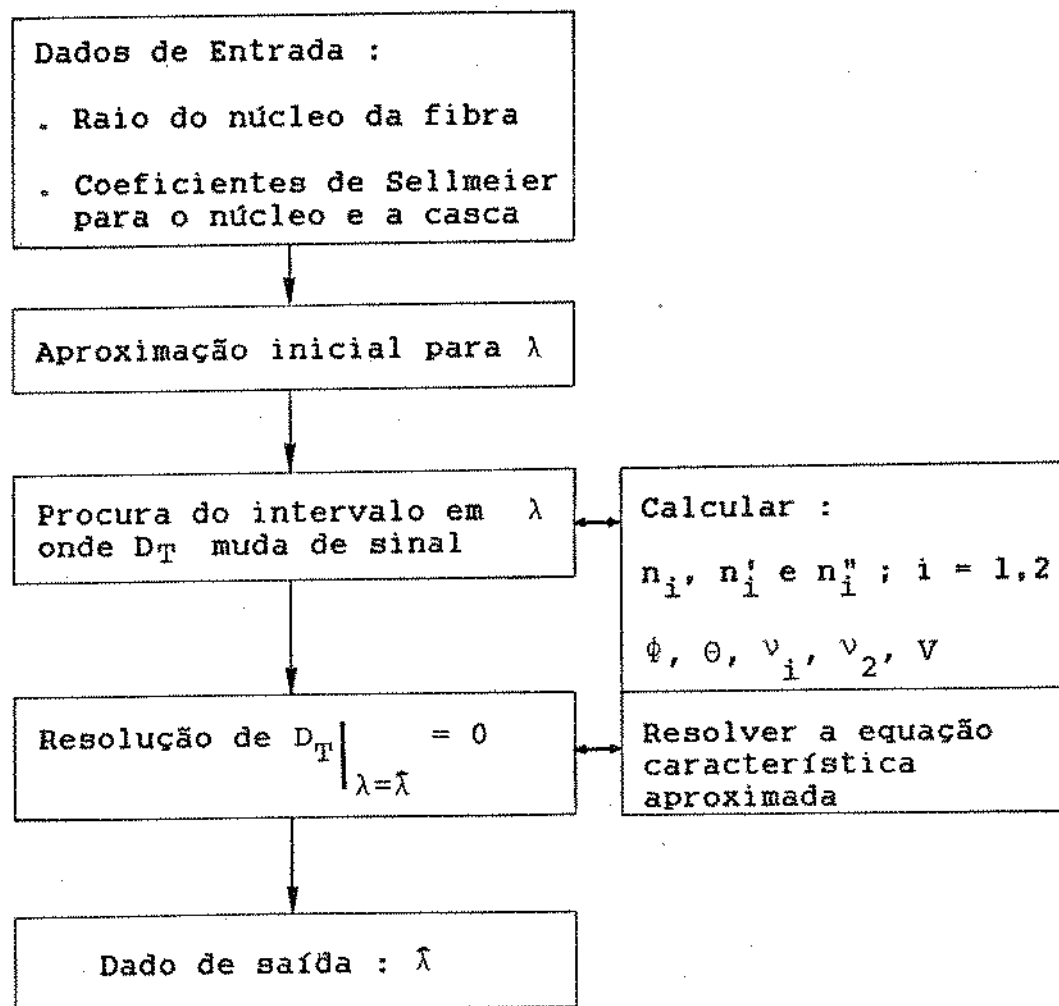


Figura III.1 - Diagrama de blocos dos procedimentos utilizados na resolução da equação da dispersão total usando a equação característica aproximada.

A partir de um valor inicial para o comprimento de onda, procura-se o intervalo em λ onde a equação (III.39) muda de sinal. Neste processo, são calculados os parâmetros que dependem do comprimento de onda. Ainda, a equação característica aproximada é resolvida através da subrotina RTMI, que é uma subrotina baseada no método de Muller para resolução de equações transcendentais, usando aproximações polinomiais [22] para calcular valores das funções J e K, respectivamente. A subrotina RTMI faz parte de um pacote padrão de subrotinas FORTRAN [23]. Encontrado o intervalo onde D_T muda de sinal parte-se, efetivamente, para o cálculo do valor do comprimento de onda de dispersão total nula. Também, com uma pequena modificação, o programa descrito pode ser utilizado para calcular valores para o traçado de curvas $D_T \times \lambda$.

Na Tabela III.4, apresentamos alguns valores de comprimentos de onda de dispersão total nula obtidos com o programa descrito em parágrafos anteriores. Os materiais utilizados para o núcleo e a casca da fibras possuem coeficientes de Sellmeier dados pela Tabela II.2, amostras 02 e 01, respectivamente. Estes resultados são comparados com resultados obtidos anteriormente utilizando a equação característica exata como base [8]. Podemos observar que os erros cometidos (erros relativos) são perfeitamente toleráveis o que, considerando o esforço necessário para a obtenção dos valores de λ usando o método da equação característica exata, credencia o método do guiamento fraco como um método adequado a este tipo de problema.

Raio do núcleo a em μm	Valor exato [8] λ	Valor obtido em μm	Erro em (%)
1,10	1,8531	1,8577	-0,25
1,20	1,9063	1,9087	-0,13
1,50	1,9242	1,9155	0,45
1,75	1,7689	1,7542	0,83
2,10	1,5071	1,5032	0,26

Tabela III.4 - Comparação entre valores de λ obtidos pelo método exato [8] e pelo método aproximado para alguns valores de raios de núcleos de fibras monomodais homogêneas. Os erros apresentados são erros relativos.

Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
Material da casca : 100,0 % SiO_2 fundido.

Na Figura III.2, apresentamos algumas curvas da

dispersão total em função do comprimento de onda para algumas fibras monomodais homogêneas idealizadas. Os materiais são os mesmos utilizados quando dos cálculos apresentados na Tabela III.4.

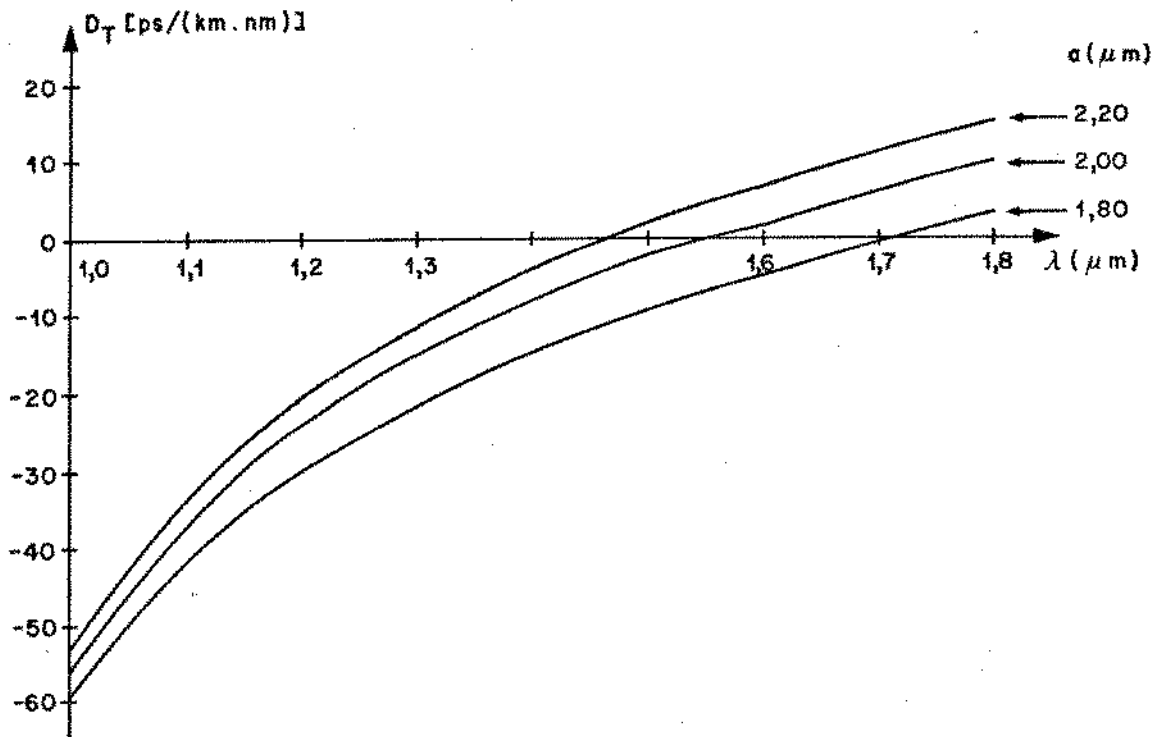


Figura III.2 - Curvas de dispersão total, D_T , em função do comprimento de onda, λ , para algumas fibras monomodais homogêneas. Os resultados foram obtidos utilizando a aproximação do guiamento fraco para alguns valores de raios de núcleo da fibra.

Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 Material da casca : 100,0 % SiO_2 fundido.

As curvas apresentadas na Figura III.2, representam o tipo de variação que sofre a curva da dispersão total com a mudança do valor do raio do núcleo de uma fibra óptica.

No próximo Capítulo, apresentamos um método de análise da dispersão total em fibras ópticas monomodais não-homogêneas.

CAPÍTULO IV

DISPERSÃO TOTAL EM FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS NÃO-HOMOGÊNEAS

IV.1 - INTRODUÇÃO

No Capítulo anterior, apresentamos os procedimentos necessários à obtenção do valor do comprimento de onda de dispersão total nula para fibras ópticas homogêneas. Observamos que uma das etapas mais importantes para a obtenção deste parâmetro é a que envolve o cálculo dos autovalores U e W a partir de uma equação característica. Verificamos também que, no caso da aproximação por guiamento fraco ser adotada, os autovalores são obtidos a partir de soluções da equação característica aproximada que possui uma forma bastante simples. Foi a forma simples da equação característica aproximada que possibilitou a obtenção de expressões analíticas para dois parâmetros fundamentais no cálculo da dispersão total : as derivadas primeira e segunda, com relação ao comprimento de onda, da constante de propagação do modo fundamental.

Neste Capítulo, ao analisar o problema da dispersão total em fibras ópticas monomodais não-homogêneas, iremos verificar que as simplificações descritas no parágrafo anterior não são factíveis. Isto nos obriga a adotar métodos numéricos no ponto em que deduzimos, no caso das fibras homogêneas, uma expressão analítica como equação característica e, em seguida, continuar utilizando métodos numéricos no cálculo das derivadas da constante de propagação do modo dominante. Tudo isso se deve ao fato de termos a permissividade elétrica como um fator variável com a coordenada radial como componente da equação escalar de onda.

Por apresentar excelentes condições de aplicabilidade em casos práticos, utilizamos a teoria desenvolvida por K. Okamoto [24, 25, 26] para analisar a dispersão em fibras ópticas não-homogêneas. Okamoto emprega o método do elemento finito em um problema variacional para obter uma equação matricial que possibilita o cálculo de valores da constante de propagação do modo dominante. Partindo de uma expressão variacional para a constante de propagação, considerada estacionária com relação a pequenas variações do campo elétrico na fibra, Okamoto obtém uma equação para a dispersão total como uma função de matrizes.

O nosso procedimento de cálculo da dispersão total em fibras monomodais não-homogêneas baseia-se na utilização de uma técnica de interpolação, chamada de splines cúbicas com condições de contorno dadas por polinômios de Lagrange, para a obtenção das derivadas da constante de propagação do modo dominante. Esta técnica, além de ser bastante precisa e utilizada em diversas áreas de conhecimento, não foi, segundo nossas pesquisas, empregada na análise de fibras ópticas [27].

Iniciamos o Capítulo apresentando a metodologia que utilizamos para o cálculo da dispersão total nas fibras em análise. Descrevemos os procedimentos computacionais que adotamos e finalizamos apresentando curvas de dispersão total para algumas fibras com perfis típicos.

IV.2 - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Quando desejamos resolver uma equação diferencial usando o método variacional devemos encontrar, inicialmente, um funcional cuja equação de Euler coincida com a equação diferencial que desejamos resolver. A equação de Euler para um dado funcional é uma equação que torna o funcional estacionário sob determinadas condições. Encontradas estas condições, resolvemos a equação diferencial de interesse.

Podemos verificar [28] que a equação escalar de onda para os modos em fibras não-homogêneas, apresentada no Capítulo II, Seção II.5, equação (II.79),

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + [\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2 - m^2/r^2] r R = 0 \quad (\text{IV.1})$$

é uma equação de Euler para o funcional :

$$I[R] = \int_0^a \left[r \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 - \left(\omega^2 \mu_0 \epsilon(r) - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) r R^2 \right] dr + \\ + [h_1 R^2]_{r=0} - [h_0 R^2]_{r=a} \quad (\text{IV.2})$$

com

$$\left[r \frac{dR}{dr} + h_0 R \right]_{r=0} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$\left[r \frac{dR}{dr} + h_1 R \right]_{r=a} = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Nas equações (IV.2) e (IV.4), o parâmetro a é o raio do núcleo da fibra óptica. Os demais parâmetros foram definidos em Seções

anteriores. Então, tudo o que temos que fazer para resolver a equação (IV.1) é encontrar as condições para as quais a estacionariedade do funcional (IV.2), sujeito às condições (IV.3) e (IV.4), seja garantida.

Da equação (IV.3), obtemos :

$$[h_0 R^2]_{r=0} = 0 \quad (\text{IV.5})$$

e com a equação (IV.4), encontramos :

$$h_1 = - \frac{a}{R(a)} \left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=a} \quad (\text{IV.6})$$

Como

$$R(a) = R_{\text{casca}}(a) \quad (\text{IV.7})$$

a equação (IV.6) passa a ser escrita na forma :

$$h_1 = - \frac{a}{R_{\text{casca}}(a)} \left. \frac{d R_{\text{casca}}(r)}{dr} \right|_{r=a} \quad (\text{IV.8})$$

onde R_{casca} é a função de onda na casca da fibra. Esta função obedece à equação (IV.1), com $\epsilon(r) = \epsilon_2$, e possui, conforme discutido no Capítulo III, Seção III.1, a forma :

$$R_{\text{casca}}(r) = B_m K_m \left(\frac{Wr}{a} \right) \quad (\text{IV.9})$$

onde B_m é uma constante e K_m é a função modificada de Bessel de primeira espécie, ordem m e argumento Wr/a . Efetuando a diferenciação indicada em (IV.8), temos :

$$h_1 = - \frac{W K'_m(W)}{K_m(W)} \quad (\text{IV.10})$$

Usando as equações (IV.5) e (IV.10), o funcional

representado, pela equação (IV.2) passa a ser escrito na forma :

$$I[R] = \int_0^a \left[\left(\frac{dR}{dr} \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} R^2 \right] r dr - \int_0^a [\kappa^2 n^2(r) - \beta^2] r R^2 dr - \Omega_\beta R^2(a) \quad (\text{IV.11})$$

com

$$\Omega_\beta = -h_1 = \frac{W K'_m(W)}{K_m(W)} \quad (\text{IV.12})$$

e

$$\kappa^2 n^2(r) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(r) \quad (\text{IV.13})$$

onde $n(r)$ é uma função que descreve a variação, com a coordenada radial, do índice de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra óptica. Os demais parâmetros foram identificados em Seções anteriores.

Uma das formas tradicionais de resolução do problema estabelecido em (IV.11) baseia-se na aplicação do método de Rayleigh-Ritz [28]. Este método consiste em assumir uma pequena perturbação em $R(r)$,

$$R_\delta(r) = R_0(r) + \delta \eta(r) \quad ; \quad \eta(r) \text{ arbitrária}$$

substituindo a função resultante no funcional (IV.11) para obter a condição de estacionariedade fazendo o parâmetro $\delta \rightarrow 0$. Este procedimento está descrito em detalhes na referência [13] e leva a equações bastante complicadas, dificultando procedimentos computacionais, restringindo a aplicabilidade do método em casos práticos.

Uma outra maneira de resolver (IV.11) é adotando o método do elemento finito [24]. As equações resultantes possuem uma forma relativamente simples e sua aplicação prática é imediata : os valores dos índices de refração são valores discretos que podem ser obtidos diretamente através de um microscópio de interferência. Estes valores podem servir como dados de entrada em um programa de computador desenvolvido para auxiliar, por exemplo, no cálculo da dispersão total em fibras monomodais não-homogêneas.

No método do elemento finito, em uma dimensão, dividimos a região entre $r = 0$ e $r = a$ em N elementos e expressamos os valores de $R(r)$ nos pontos $r = r_i$ na forma [ver Figura IV.1] :

$$R_i = R(r_i) \quad ; i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{IV.14})$$

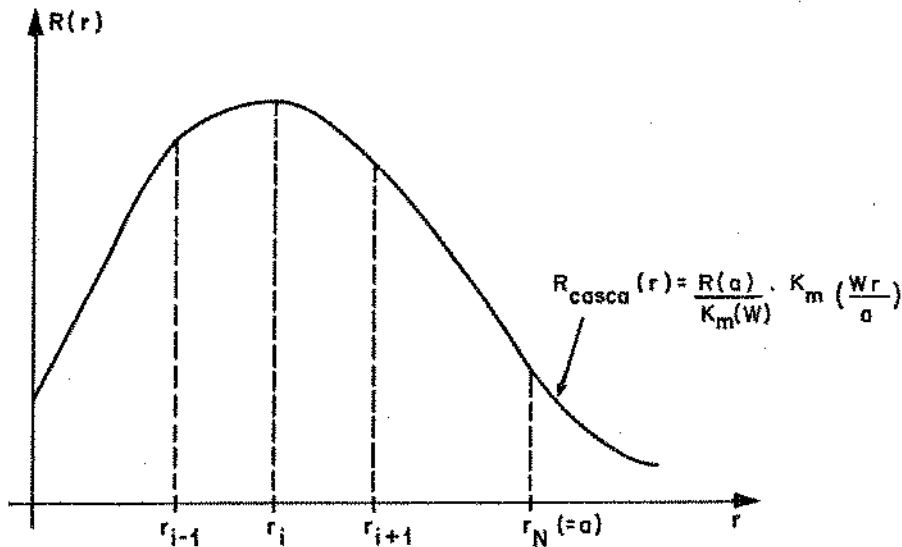


Figura IV.1 - Representação esquemática da função $R(r)$ para uso com o método do elemento finito.

Em cada elemento, a função $R(r)$ é dada na forma :

$$R(r) = \sum_{i=0}^N R_i \psi_i(r) \quad (\text{IV.15})$$

onde a função $\psi_i(r)$ é uma função linear de r que satisfaz as seguintes condições [ver Figura IV.2] :

$$\psi_i(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq r_{i-1} \\ (r-r_{i-1})/(r_i-r_{i-1}) & r_{i-1} \leq r \leq r_i \\ (r_{i+1}-r)/(r_{i+1}-r_i) & r_i \leq r \leq r_{i+1} \\ 0 & r_{i+1} \leq r \leq r_N \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

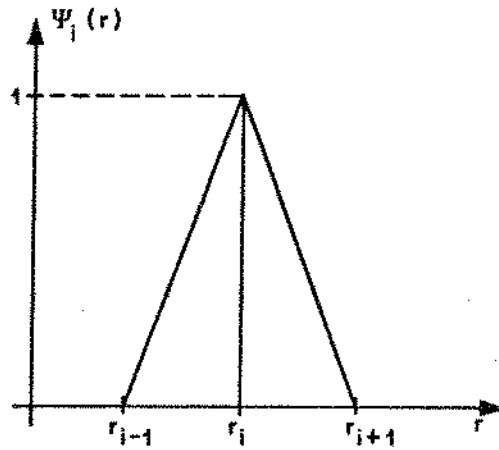


Figura IV.2 - A função $\psi_i(r)$.

Para que o funcional $I[R]$ dado por (IV.2) seja estacionário com relação a todos os parâmetros R_i , devemos impor as seguintes condições :

$$\int_0^{r_1} \left(\frac{dR}{dr} \cdot \frac{d\psi_0}{dr} + \frac{m^2}{r^2} R \psi_0 \right) r dr - \int_0^{r_1} (\kappa^2 n^2(r) - \beta^2) r \psi_0 R dr = 0$$

...

$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} \left(\frac{dR}{dr} \cdot \frac{d\psi_i}{dr} + \frac{m^2}{r^2} R \psi_i \right) r dr - \int_{r_{i-1}}^{r_i} (\kappa^2 n^2(r) - \beta^2) r \psi_i R dr = 0$$

(IV.17)

...

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\int_{r_{N-1}}^{r_N} \left(\frac{dR}{dr} \cdot \frac{d\psi_N}{dr} + \frac{m^2}{r^2} R \psi_N \right) r dr - \int_{r_{N-1}}^{r_N} (\kappa^2 n^2(r) - \beta^2) r \psi_N R dr = 0$$

O índice de refração $n(r)$ pode ser discretizado com a utilização da função $\psi_i(r)$ definida pela equação (IV. 16). Assim,

$$n^2(r) = \sum_{i=0}^N n_i^2 \psi_i(r) \quad (IV.18)$$

onde $n_i = n(r_i)$. Substituindo as equações (IV.15) e (IV.18) nas equações (IV.17) temos, após uma grande quantidade de manipulações algébricas, o seguinte sistema de equações :

$$\begin{aligned}
 S_{0,0} R_0 + S_{0,1} R_1 &= 0 \\
 \dots & \\
 S_{i,i-1} R_{i-1} + S_{i,i} R_i + S_{i,i+1} R_{i+1} &= 0 ; i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (\text{IV.19}) \\
 \dots & \\
 S_{N,N-1} R_{N-1} + S_{N,N} R_N &= 0
 \end{aligned}$$

Nas equações (IV.19), os elementos $S_{i,j}$ são componentes de uma matriz de ordem $(N+1)$ e são dados, para $m = 0$ [pois estamos interessados nos modos $LP_{0\ell}$, especificamente, no modo fundamental LP_{01}], pelas equações :

$$\begin{aligned}
 S_{0,0} &= \frac{1}{2} - \frac{V^2(1-b)}{12N^2} + (5 - 3q_0 - 2q_1) \frac{V^2}{120N^2\Delta} \\
 S_{0,1} &= - \left(\frac{1}{2} + \frac{V^2(1-b)}{12N^2} \right) + (5 - 2q_0 - 3q_1) \frac{V^2}{120N^2\Delta} \\
 S_{0,1} &= S_{1,0} \\
 S_{1,1} &= 2 - \frac{2V^2(1-b)}{3N^2} + (40 - 3q_0 - 30q_1 - 7q_2) \frac{V^2}{120N^2\Delta} \\
 S_{1,2} &= - \left(\frac{3}{2} + \frac{V^2(1-b)}{4N^2} \right) + (15 - 7q_1 - 8q_2) \frac{V^2}{120N^2\Delta} \\
 S_{i,i-1} &= - \left(i - \frac{1}{2} + \frac{(2i-1)V^2(1-b)}{12N^2} \right) + [5(2i-1) - (5i-3)q_{i-1} - (5i-2)q_i] \frac{V^2}{120N^2\Delta} \\
 S_{i,i} &= 2i - \frac{2iV^2(1-b)}{3N^2} + [40i - (5i-2)q_{i-1} - 30iq_i - (5i+1)q_{i+1}] \frac{V^2}{120N^2\Delta} \\
 S_{i,i+1} &= - \left(i + \frac{1}{2} + \frac{(2i+1)V^2(1-b)}{12N^2} \right) + [5(2i+1) - (5i+2)q_i - (5i+3)q_{i+1}] \frac{V^2}{120N^2\Delta} \\
 i &= 2, 3, \dots, N-1 \quad (\text{cont.})
 \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

$$S_{N,N-1} = - \left(N - \frac{1}{2} + \frac{(2N-1)V^2(1-b)}{12N^2} \right) + [5(2N-1) - (5N-3)q_{N-1} - (5N-2)q_N] \frac{V^2}{120N^2\Delta}$$

$$S_{N,N} = N - \frac{1}{2} + \frac{W K_1(W)}{K_0(W)} - \frac{(4N-1)V^2(1-b)}{12N^2} + [5(4N-1) - (5N-2)q_{N-1} - 3(5N-1)q_N] \frac{V^2}{120N^2\Delta}$$

Os termos que aparecem nas equações (IV.20) são definidos através das equações :

$$q_i = \frac{n_i^2}{n_{\text{núcleo}}^2} \quad ; \quad ; i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{IV.21})$$

$$n_{\text{núcleo}} = \text{Max}[n(r)] \quad (\text{IV.22})$$

$$\Delta = \frac{n_{\text{núcleo}}^2 - n_{\text{casca}}^2}{2 n_{\text{casca}}^2} \quad (\text{IV.23})$$

$$V^2 = U^2 + W^2 = \kappa^2 a^2 n_{\text{núcleo}}^2 2\Delta \quad (\text{IV.24})$$

$$b = 1 - \frac{U^2}{W^2} = \frac{W^2}{V^2} = \frac{\beta^2/\kappa^2 - n_{\text{casca}}^2}{n_{\text{núcleo}}^2 - n_{\text{casca}}^2} \quad (\text{IV.25})$$

onde :

Δ - é a diferença relativa entre os índices de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra;

n_{casca} - é o valor do índice de refração do material da casca da fibra;

V - é a frequência normalizada, conforme definido no Capítulo II, equação (II.105);

b - é a constante de propagação normalizada;

U - é o parâmetro radial normalizado do núcleo, e

W - é o parâmetro radial normalizado da casca.

Para obtermos uma solução não-trivial para o sistema de equações apresentado anteriormente, devemos impor :

$$\det[S_{i,j}] = 0 \quad (\text{IV.26})$$

A equação (IV.26) permite a obtenção de valores da constante de propagação para a família de modos LP (já que fizemos $m = 0$ nas deduções anteriores). Estamos interessados, apenas, na primeira raiz de (IV.26) pois esta raiz é o valor da constante de propagação para o modo dominante nos tipos de estruturas em análise.

Obtido o valor da constante de propagação normalizada através da resolução da equação (IV.26), temos que calcular também os valores das derivadas deste parâmetro com relação ao comprimento de onda para que a equação da dispersão total possa ser utilizada. Diversos procedimentos foram implementados com o objetivo de obter valores de b' e b'' (ou de parâmetros equivalentes).

Okamoto [24, 25, 26] utiliza uma expressão variacional simplificada para a constante de propagação. Ele obtém, inicialmente, uma expressão para o tempo de atraso (dado em termos da derivada primeira da constante de propagação, conforme equação (II.88), Capítulo II) e, após, a expressão para a dispersão total (dada em termos da derivada segunda da constante de propagação, conforme equações (II.108) e (II.101) ou (II.102), Capítulo II). Utilizando estes procedimentos, a equação da dispersão total é estabelecida em termos de matrizes que incluem diferenciação, com relação ao comprimento de onda, da distribuição do campo elétrico. Explicitamente, Okamoto utiliza a expressão :

$$\sigma = \tau \left[\left(1 - \frac{\omega}{\beta} \tau \right) + 2\kappa \frac{R^T U R^*}{R^T U R} \right] + \tau \frac{R^T M R}{R^T U R}$$

para calcular a dispersão total. Nesta expressão, σ é a dispersão total, τ é o atraso de grupo do modo, R é um vetor linha constituído pelos elementos R_i definidos em parágrafos anteriores, R^* é a derivada de R com relação ao número de onda, $\kappa = 2\pi/\lambda$, U é uma matriz com elementos dados em termos de índices de refração, n_i , e índices de grupo, N_i , para os materiais do núcleo ($i = 1$) e casca ($i = 2$) da fibra e M é uma matriz com elementos dados em termos de derivadas segunda, com

relação ao comprimento de onda, dos índices de refração n_i ($i = 1, 2$). Obviamente, a equação anterior, utilizada por Okamoto, requer um tratamento analítico/computacional muito maior para a obtenção de seus termos do que a equação da dispersão total que estamos utilizando [ver equação (II.109), Capítulo II].

Lenahan [29] utiliza um procedimento de cálculo da dispersão total em fibras ópticas não-homogêneas que é baseado em um complexo tratamento analítico/numérico de um problema de perturbação de autovalores e autovetores. Esta forma de abordagem só é possível devido à forma particular das matrizes obtidas através da aplicação do método do elemento finito (as matrizes, como podemos observar pelos parágrafos anteriores, são tri-diagonais e simétricas). O tratamento adotado por Lenahan é voltado para a aplicação do pacote EISPACK [30] e requer a disponibilidade de computadores de grande porte.

Peterson e outros [31] resolvem diretamente as equações de Maxwell para obter valores da constante de propagação. Estes valores são ajustados, pelo método dos mínimos quadrados, a uma equação de Sellmeier modificada. As derivadas da constante de propagação, necessárias à análise da dispersão são obtidas, então, analiticamente. Neste tipo de procedimento, a equação de Sellmeier modificada teve, previamente, seus coeficientes (no caso, comprimentos de onda de máxima absorção dos materiais utilizados) ajustados a pontos de uma tabela de valores obtidos experimentalmente.

Um outro procedimento [32] utiliza soluções recorrentes de equações diferenciais obtidas pela aplicação da transformação de Ricatti à equação de onda. Esta técnica foi utilizada para verificar a validade do método das perturbações [33] e do método das equações de diferenças [34] utilizados na análise da dispersão total em fibras não-homogêneas. Uma descrição mais detalhada deste procedimento será apresentada no Capítulo VI, quando trataremos do problema da síntese de fibras não-homogêneas.

Para calcular b' e b'' , utilizamos um método de interpolação baseado em splines cúbicas. Uma função spline cúbica é um polinômio cúbico por partes e, como tal, é duas vezes diferenciável. Tais funções superam em precisão as aproximações polinomiais baseadas em polinômios de Lagrange ou Hermite, são facilmente implementáveis em computador e constitui-se em ferramenta bastante popular na obtenção de derivadas numéricas [35]. O nosso método, juntamente com um diagrama do programa implementado, será apresentado na próxima Seção.

IV.3 - PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS

Calculando apenas a primeira raiz da equação (IV.26), podemos construir uma tabela de valores da constante de propagação normalizada, b , do modo dominante LP_{01} em função do comprimento de onda λ . Estes valores podem ser ajustados a uma curva polinomial dada por [36] :

$$S(\lambda) = \sum_{i=-1}^{n+1} x_i B_i(\lambda) \quad (IV.27)$$

onde :

$$B_i(\lambda) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (\lambda - \lambda_{i-2})^3 & ; \lambda \in [\lambda_{i-2}, \lambda_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(\lambda - \lambda_{i-1}) + 3h(\lambda - \lambda_{i-1})^2 - 3(\lambda - \lambda_{i-1})^3 ; \lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i] \\ h^3 + 3h^2(\lambda_{i+1} - \lambda) + 3h(\lambda_{i+1} - \lambda)^2 - 3(\lambda_{i+1} - \lambda)^3 ; \lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}] \\ (\lambda_{i+2} - \lambda)^3 & ; \lambda \in [\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}] \\ 0 & ; \text{fora dos intervalos especificados.} \end{cases} \quad (IV.28)$$

O fator h que surge em (IV.28) é uma constante e representa o espaçamento uniforme entre dois valores consecutivos do comprimento de onda λ .

Por inspeção, observamos que os termos $B_i(\lambda)$ são polinômios cúbicos definidos em partes específicas do intervalo em λ de interesse. A equação (IV.27) representa, desta forma, uma função polinomial cúbica por partes também chamada de função spline cúbica.

A existência de uma única função spline cúbica que se ajusta ao conjunto de valores (b, λ) , gerado resolvendo-se a equação (IV.26), é garantida quando as seguintes condições são satisfeitas :

$$S'(\lambda_0) = b'(\lambda_0)$$

$$S(\lambda_i) = b(\lambda_i) \quad ; i = 0, 1, \dots, n \quad (\text{IV.29})$$

$$S'(\lambda_n) = b'(\lambda_n)$$

onde $b'(\lambda_0)$ e $b'(\lambda_n)$ representam, respectivamente, os valores das derivadas, com relação ao comprimento de onda λ , da constante de propagação normalizada do modo LP nos pontos extremos, λ_0 e λ_n , do intervalo em λ no qual a equação (IV.26) foi resolvida. Os valores $b(\lambda_i)$ indicam os valores da constante de propagação normalizada do modo LP₀₁ obtidos como solução da equação (IV.26) em cada um dos valores utilizados para λ .

Por não serem conhecidos, os valores das derivadas representadas por $b'(\lambda_0)$ e $b'(\lambda_n)$ podem ser aproximados através da utilização da derivada de um polinômio cúbico de Lagrange dado por [37, 38] :

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^3 L_k(\lambda) b_k \quad (\text{IV.30})$$

com

$$L_k(\lambda) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^3 (\lambda - \lambda_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^3 (\lambda_k - \lambda_j)} \quad (\text{IV.31})$$

onde b_k , $k = 0, \dots, 3$, são valores da constante de propagação normalizada em quatro valores de λ próximos ao início (λ_0) e ao final (λ_n) do intervalo em λ no qual a equação (IV.26) foi resolvida.

Adotando o polinômio de Lagrange para calcular as derivadas requeridas pelas equações (IV.29), a spline cúbica gerada pelas equações (IV.27)-(IV.28) passa a ser chamada de L-spline cúbica.

Podemos notar que as condições dadas em (IV.29) permitem calcular os coeficientes x_i , $i = -1, 0, 1, \dots, n+1$, requeridos por (IV.27), através da resolução de um sistema de equações escrito na forma :

$$Ax = c \quad (IV.32)$$

Na equação (IV.32), A é uma matriz de ordem $(n+3)$, chamada de matriz spline, diagonalmente dominante e não-singular. Ela é constituída por elementos que são iguais aos valores de $B_i(\lambda)$, equação (IV.28), calculados em cada um dos comprimentos de onda utilizados para resolver (IV.26) excetuando-se a primeira e a última linhas que possuem elementos com valores que são obtidos a partir das relações :

$$B_i'(\lambda) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} 3(\lambda - \lambda_{i-2})^2 & ; \lambda \in [\lambda_{i-2}, \lambda_{i-1}] \\ 3h^2 + 6h(\lambda - \lambda_{i-1}) - 9(\lambda - \lambda_{i-1})^2 & ; \lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i] \\ -3h^2 - 6h(\lambda_{i+1} - \lambda) + 9(\lambda_{i+1} - \lambda)^2 & ; \lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}] \\ -3(\lambda_{i+2} - \lambda)^2 & ; \lambda \in [\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}] \\ 0 & ; \text{fora dos intervalos especificados.} \end{cases} \quad (IV.33)$$

O termo x é um vetor composto pelos coeficientes da equação (IV.27) e c é um vetor constituído pelos valores $b'(\lambda_0)$, $b(\lambda_i)$, onde $i = 0, 1, \dots, n$, e $b'(\lambda_n)$.

Resolvendo a equação (IV.32), e com as relações dadas em (IV.28), temos a equação (IV.27) completamente definida, isto é, temos uma função $S(\lambda) = b(\lambda)$ que permite calcular valores da constante de propagação normalizada do modo dominante em qualquer valor do comprimento de onda dentro do intervalo definido por $[\lambda_0, \lambda_n]$ sem a necessidade de resolver, novamente, a equação (IV.26). A função assim gerada, quando derivada com relação ao comprimento de onda, nos permite calcular os valores da derivada primeira da constante de propagação, b' , através da equação :

$$S'(\lambda) = \sum_{i=-1}^{n+1} x_i B_i'(\lambda) \quad (IV.34)$$

Com a equação (IV.34) é possível calcular uma tabela de valores da derivada primeira da constante de propagação normalizada do modo LP_{01} em função do comprimento de onda, λ , no intervalo $[\lambda_0, \lambda_n]$. Esta tabela de valores pode, obviamente, ser ajustada por uma equação do tipo dado em (IV.28). Isto significa que, tanto b quanto b' podem ter suas tabelas de valores em função do comprimento de onda λ ajustadas por uma curva polinomial cúbica por partes, aumentando a precisão dos valores que venham a ser calculados posteriormente.

Usando a equação (IV.34), com as restrições [36] :

$$\begin{aligned} S''(\lambda_0) &= b''(\lambda_0) \\ S'(\lambda_i) &= b'(\lambda_i) ; & i = 0, 1, \dots, n \quad (IV.35) \\ S''(\lambda_n) &= b''(\lambda_n) \end{aligned}$$

onde $b''(\lambda_0)$ e $b''(\lambda_n)$ são calculados usando polinômios cúbicos de Lagrange a partir de valores convenientes de b' , encontramos, através de uma equação matricial de forma semelhante à dada pela equação (IV.32), os coeficientes necessários à uma curva do tipo (IV.34) ajustando os valores de b . Isto significa que valores de b serão obtidos a partir da derivada primeira de uma L-spline cúbica, novamente, melhorando a precisão dos valores calculados.

A dupla aplicação da equação (IV.27), com (IV.28) e (IV.29), isto é, a dupla aplicação da L-spline cúbica a tabelas de valores de b e b' e a aplicação de (IV.34), com coeficientes modificados, e (IV.35) em valores de uma tabela $b' \times \lambda$ para calcular b'' , melhora a precisão do nosso processo e evita os ajustes quadrático, em b' , e linear, em b'' .

Definidas as maneiras de calcular os valores de b , b' e b'' , a dispersão total pode ser conhecida através das equações (II.109)-(II.110) do Capítulo II.

Na Figura IV.3, apresentamos um diagrama de blocos dos procedimentos computacionais que utilizamos para calcular valores da dispersão total e do comprimento de onda de dispersão total nula, $\hat{\lambda}$, em fibras ópticas monomodais não-homogêneas usando o método do elemento finito e aproximações por L-splines cúbicas. O programa, escrito na linguagem FORTRAN, foi desenvolvido e implementado em um microcomputador.

O programa aceita, como dados de entrada, o valor do

raio do núcleo da fibra, a em micrometros, o número de divisões, N , do intervalo $[0, a]$, necessário à aplicação do método do elemento finito, e os valores dos coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier para os materiais que constituem o núcleo e a casca do guia. É conveniente salientar que, na nossa implementação, consideramos que os índices de refração dos materiais envolvidos sejam representados pela equação (I.2) do Capítulo I. Esta equação, explicitando as dependências dos índices com a coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas e com o comprimento de onda, pode ser escrita na forma :

$$\begin{aligned} n^2(R, \lambda) &= n_1^2(\lambda) - [n_1^2(\lambda) - n_2^2(\lambda)] \delta f(R) & ; R \leq 1 \\ &= n_2^2(\lambda) & ; R > 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

onde $R = r/a$. O parâmetro δ especifica a graduação do perfil de índice de refração na interface núcleo/casca (o perfil é contínuo para $\delta = 1$) enquanto que $f(R)$ é uma função que descreve a forma assumida pelo perfil de índice de refração da fibra óptica. Os termos n_1 e n_2 representam a dependência não-linear, com o comprimento de onda, dos índices de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra. Esta dependência é dada pela equação dos três termos de Sellmeier [equação (II.96), Capítulo II].

Adotar a equação (IV.37) significa que, no intervalo definido por $[0, a]$, o índice de refração será calculado N vezes ficando, assim, de acordo com a fórmula de discretização dada pela equação (IV.28). Em casos práticos, onde os valores dos índices de refração já são obtidos em forma discreta, a utilização da equação (IV.37) é desnecessária. Os valores discretos mencionados serão, também, dados de entrada para o programa.

O programa passa, então, à fase de resolução da equação (IV.26). O objetivo, nesta fase, é a obtenção de uma tabela de valores relacionando a constante de propagação normalizada do modo dominante com o comprimento de onda em uma faixa de valores pré-determinada.

Os procedimentos necessários à resolução da equação (IV.26) iniciam-se com o cálculo de valores de termos que dependem do raio do núcleo da fibra e dos índices de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca do guia, dados pelas

equações (IV-21) - (IV.24). Para um comprimento de onda fixo e para uma aproximação inicial para o valor da constante de propagação normalizada do modo dominante, é construída a matriz $[S_{i,j}]$ com elementos dados pelas equações (IV.20). O determinante desta matriz é calculado através de um processo de triangularização de matrizes pelo método de eliminação gaussiana utilizando uma rotina específica [39]. O processo de variação do valor da constante de propagação normalizada e o cálculo do determinante de $[S_{i,j}]$, para um valor fixo do comprimento de onda, é repetido até que se determine um intervalo, pequeno, onde o valor do determinante muda de sinal, garantindo a existência de um valor de constante de propagação do modo LP_{01} que satisfaz a equação (IV.26). O valor de b é calculado, usando o método da bisseção [37], com uma precisão de 10^{-5} . Neste processo, os valores das funções modificadas de Bessel são obtidos através de rotinas que utilizam fórmulas polinomiais descritas em [22]. O valor do comprimento de onda é incrementado e o processo se repete até que λ tenha atingido um valor final previamente definido. Os valores de b calculados, com os valores de comprimentos de onda associados, são armazenados em vetores, com dimensões convenientes, para serem utilizados pelo método da L-spline cúbica descrito em parágrafos precedentes.

Usando polinômios cúbicos de Lagrange, os valores de $b'(\lambda_0)$ e $b'(\lambda_n)$ são calculados. A matriz spline A é construída e a equação (IV.32) é resolvida gerando os coeficientes da equação (IV.27). Neste processo, usamos novamente a rotina baseada no algoritmo de triangularização de matrizes pelo método da eliminação gaussiana e uma rotina para resolver equações do tipo dado por (IV.27) (ver referência [39]). Nesta altura do processamento, temos definida a equação (IV.27), isto é, temos um polinômio que define $b(\lambda)$ para qualquer valor de λ dentro da faixa de interesse. Os valores de $b'(\lambda)$ são, então, calculados através da equação (IV.34), usando a equação (IV.33). Os valores de $b''(\lambda)$ são obtidos ajustando a tabela de valores $b' \times \lambda$ pela equação (IV.34), com novos coeficientes calculados, usando a equação (IV.35). Os valores do raio do núcleo, dos termos dependentes dos índices de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra e os valores da constante de propagação normalizada do modo dominante, e de suas derivadas com relação ao comprimento de onda, permitem calcular valores da dispersão total e o valor do comprimento de onda de dispersão total nula. Estes valores ($D_T \times \lambda$ e λ) são os dados de saída do programa que implementamos.

Na próxima Seção, apresentamos uma listagem de resultados obtidos com o programa que desenvolvemos e, também, algumas curvas de dispersão total, em função do comprimento de onda, para fibras com perfis de índice típicos. São dados para cada uma destas fibras os valores do comprimento de onda de dispersão total nula.

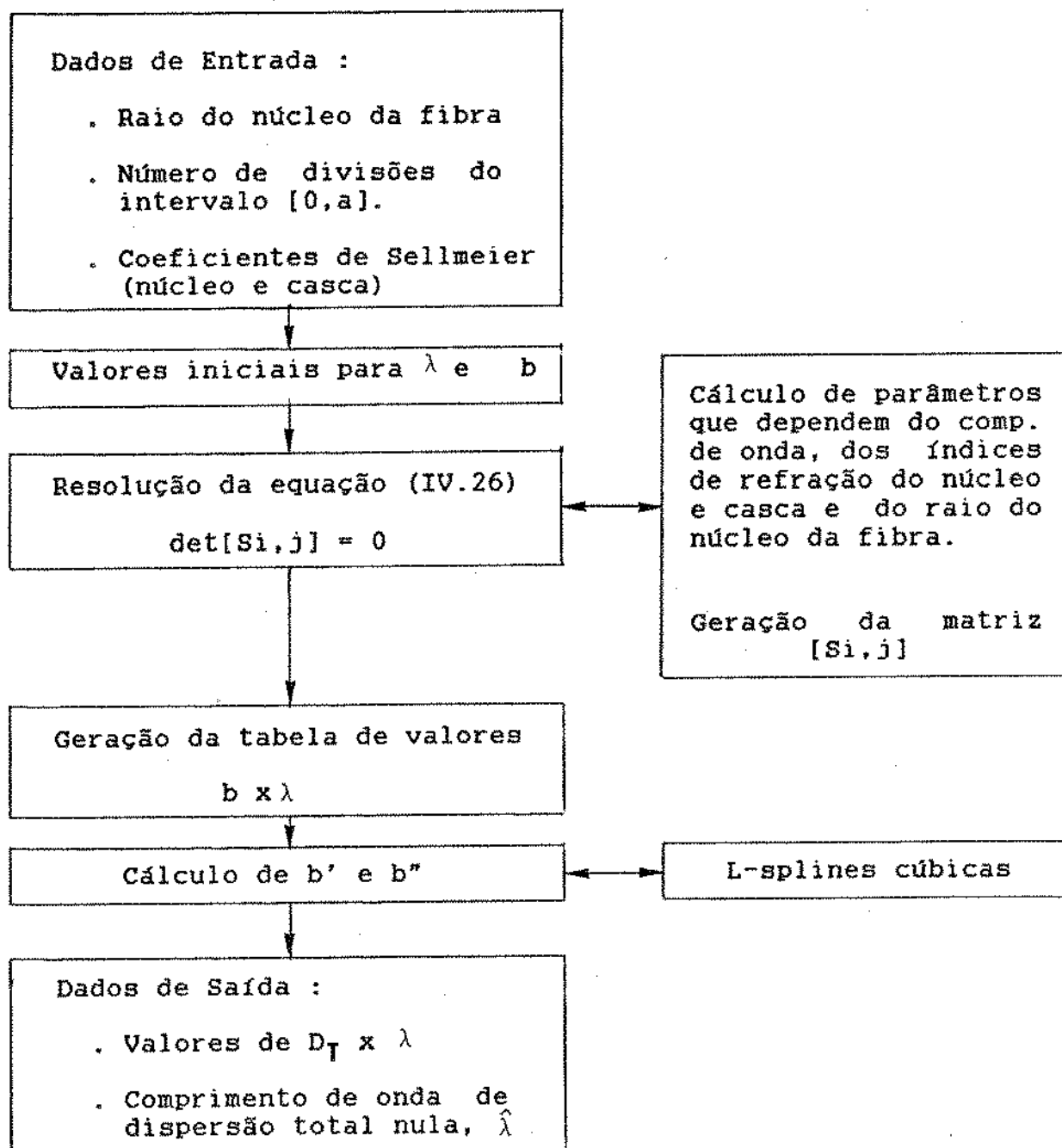


Figura IV.3 - Diagrama de blocos dos procedimentos utilizados para calcular valores da dispersão total em função do comprimento de onda e do valor do comprimento de onda de dispersão total nula em fibras ópticas monomodais não-homogêneas.

IV.4 - RESULTADOS

Na dedução das equações para fibras monomodais homogêneas, realizada no Capítulo anterior, partimos da equação de onda de uma fibra óptica não-homogênea e usamos o fato do índice de refração do material constituinte do núcleo ser constante com a coordenada radial. O procedimento analítico utilizado, naquela oportunidade, pode ser realizado numericamente, isto é, podemos utilizar o programa implementado para analisar fibras não-homogêneas na análise de fibras ópticas homogêneas. Isto é conseguido fazendo-se, na equação (IV.37), a função de perfil $f(R) = 0$.

Com o objetivo de verificar a precisão dos resultados obtidos com a utilização do método descrito na Seção anterior, calculamos o valor do comprimento de onda, λ , de dispersão total nula para uma fibra óptica monomodal com perfil de índice de refração em degrau. Os materiais do núcleo e da casca são os mesmos utilizados na confecção da Tabela III.4 do Capítulo III. Para o número de divisões $N = 25$ e raio do núcleo da fibra $a = 1,75 \mu\text{m}$, o valor do comprimento de onda de dispersão total mínima é igual a $1,7679 \mu\text{m}$. Este valor dá um erro relativo no comprimento de onda de dispersão total nula da ordem de $0,06 \%$. Devemos, entretanto, ressaltar o fato de que, à medida em que aumentarmos o valor de N , consequentemente melhorando a precisão na aproximação da função contínua $R(r)$, iremos obter resultados mais precisos tanto no valor de D_T quanto no valor de λ . Mas a ordem de grandeza dos raios de núcleos de fibras ópticas monomodais limita, em termos práticos, o número de medições discretas realizáveis em $n(r)$.

Na Figura IV.4, apresentamos uma amostra típica da saída impressa proporcionada pelo programa que desenvolvemos. No exemplo, a fibra possui um raio de núcleo, a , igual a $2,50 \mu\text{m}$ e é constituída de $13,5 \% \text{ GeO}_2 - 86,5 \% \text{ SiO}_2$ como material do núcleo e de $100 \% \text{ SiO}_2$ fundido como material da casca (amostras 02 e 01 da Tabela III.2, respectivamente). O intervalo $[0, a]$ foi dividido em 25 partes iguais ($N = 25$) para aplicação do método do elemento finito conforme descrito na Seção IV.2. São mostrados os valores da dispersão total em função do comprimento de onda para uma fibra óptica com perfil de índice triangular. É mostrado, também, o valor do comprimento de onda de dispersão total nula para a fibra utilizada.

Na Figura IV.5, apresentamos curvas de dispersão total para fibras ópticas cuja função de perfil, $f(R)$, é dada na Tabela IV.1. Todas as curvas foram obtidas considerando o número de divisões do intervalo $[0, a]$ igual a 25 e $a = 2,50 \mu\text{m}$. Para

todas as fibras, são mostrados os valores do comprimento de onda de dispersão total nula.

DISPERSAO TOTAL EM FIBRAS MONOMODAIS UTILIZANDO O METODO DO ELEMENTO FINITO
E APROXIMACOES POR L-SPLINES CUBICAS

RAIO DO NUCLEO DA FIBRA 2.50 (MICROMETROS)

NUMERO DE DIVISOES DO INTERVALO [0,A] : 25

C. ONDA DISP. TOTAL [PS/(KM*NM)]

1.00	-73.4509
1.05	-62.4337
1.10	-53.3295
1.15	-45.9519
1.20	-39.6155
1.25	-34.1082
1.30	-29.1736
1.35	-24.5405
1.40	-20.8508
1.45	-16.9727
1.50	-12.8711
1.55	-9.7636
1.60	-6.1708
1.65	-2.7356
1.70	.4819
1.75	4.0307
1.80	7.1787
1.85	10.9883
1.90	14.0916
1.95	17.4833
2.00	21.5958
2.05	25.2154
2.10	27.6705

COMP. DE ONDA DE DISPERSAO TOTAL NULA = 1.6943 (MICROMETROS)

Figura IV.4 - Valores de $D_T \times \lambda$ e $\hat{\lambda}$ fornecidos pelo programa para calcular dispersão total em fibras ópticas não-homogêneas pelo método do elemento finito e L-splines cúbicas.

Raio do núcleo da fibra : $a = 2,50 \mu\text{m}$.
Divisões do intervalo $[0,a]$, $N = 25$.
Material do núcleo : $13,5 \% \text{ GeO}_2 - 86,5 \% \text{ SiO}_2$
Material da casca : $100 \% \text{ SiO}_2$ fundido.
Fibra óptica com perfil triangular.

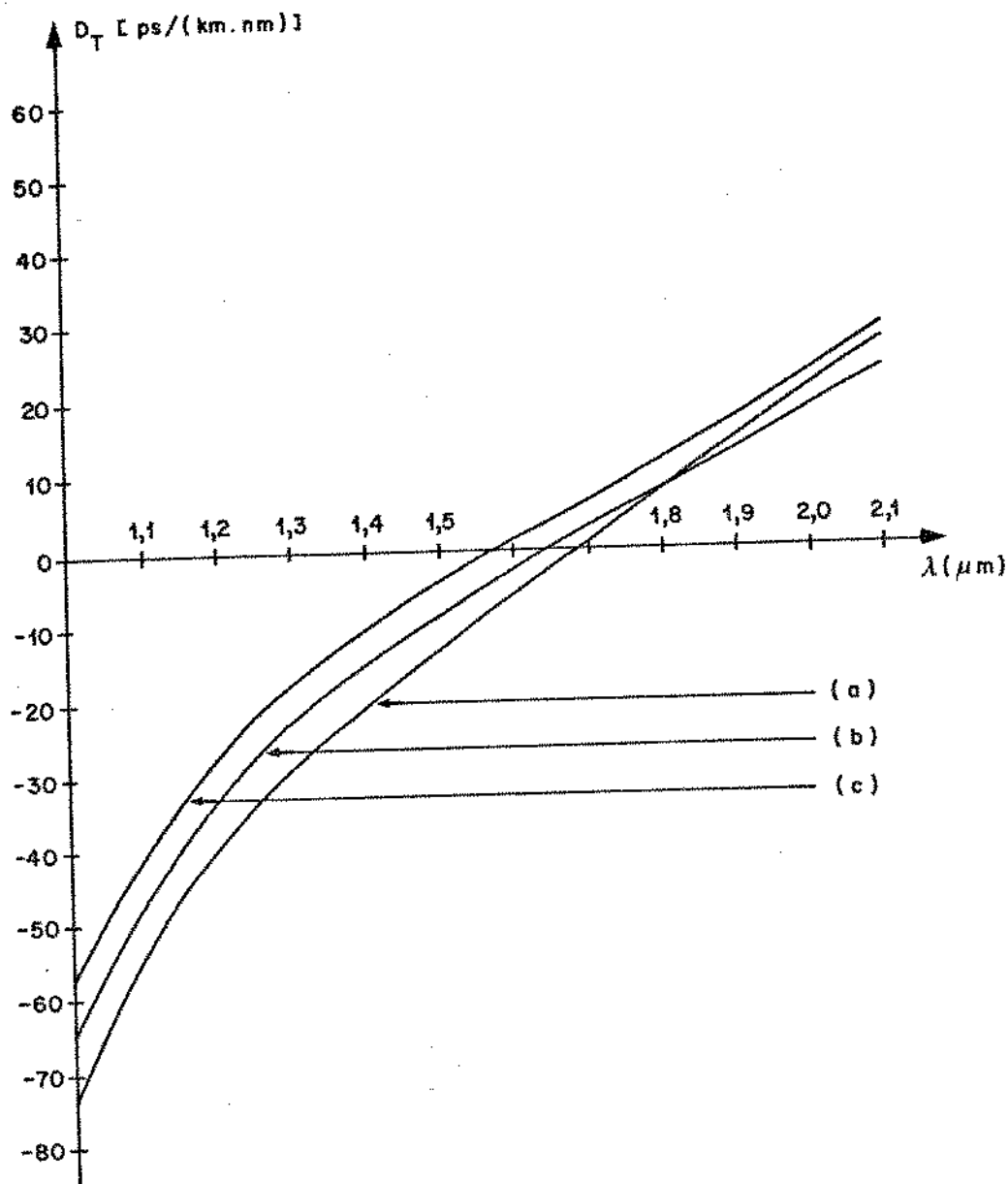


Figura IV.5 - Dispersão total em fibras monomodais com perfis arbitrários de índice de refração.

Perfil das fibras :

- (a) Triangular ($\hat{\lambda} = 1,6943 \mu\text{m}$)
- (b) Parabólico ($\hat{\lambda} = 1,6630 \mu\text{m}$)
- (c) Parabólico com reentrância gaussiana ($\hat{\lambda} = 1,5705 \mu\text{m}$)

Para a fibra (c), usamos $p = d = 0,4$ [ver Tabela IV.1].

Perfil de índice	$f(R)$
Triangular	R
Parabólico	R^2
Parabólico com reentrância gaussiana	$R^2 + p(e^{-R^2/d^2} - e^{-1/d^2})$

Tabela IV.1 - Função de perfil, $f(R)$, para as fibras da Figura IV.5. Os parâmetros p e d representam, respectivamente, fatores que definem a profundidade e a largura da reentrância no perfil de índice.

Nos próximos Capítulos, utilizaremos as teorias desenvolvidas especificamente para analisar dispersão em fibras ópticas monomodais, homogêneas ou não-homogêneas, para efetuar a síntese destas estruturas no comprimento de onda de dispersão total nula.

CAPÍTULO V

SÍNTESE DE FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS HOMOGÊNEAS

V.1 - INTRODUÇÃO

Nos Capítulos III e IV, apresentamos os procedimentos necessários ao cálculo do valor do comprimento de onda, λ , de dispersão total nula em fibras ópticas homogêneas e não-homogêneas, respectivamente. Em ambos os Capítulos, partimos do conhecimento da fibra, expressado pelo valor do raio do seu núcleo e pela composição química dos materiais constituintes do núcleo e da casca, e encontramos o valor do comprimento de onda que permite a transmissão de sinais sem distorção dentro da máxima largura de faixa permissível.

Utilizando a equação da dispersão total, que foi deduzida por South [6] explicitamente para calcular o valor do comprimento de onda λ , desenvolvemos um método que permite a síntese de fibras monomodais. Com a utilização deste método, obtemos o valor do raio do núcleo de uma fibra, dentro de sua região de operação monomodal, para qualquer valor de comprimento de onda de operação que seja considerado como comprimento de onda de dispersão total nula. Em outras palavras, partimos do conhecimento dos materiais que constituirão o núcleo e a casca da fibra e do valor do comprimento de onda de operação e calculamos o valor do raio do núcleo, a , que permitirá a fibra operar com dispersão total nula. Caracteriza-se, desta forma, a fibra ideal a ser utilizada com a fonte óptica disponível.

Trataremos, neste Capítulo, apenas da síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas reservando o tratamento das fibras não-homogêneas, mais gerais, para o Capítulo seguinte. Utilizamos duas metodologias: uma, baseada em uma aproximação assintótica para um autovalor da equação característica aproximada; outra, baseada na própria equação característica aproximada. Apresentamos as equações necessárias, os procedimentos computacionais que desenvolvemos e comparamos os resultados obtidos.

V.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Como tivemos oportunidade de verificar, o valor do comprimento de onda de dispersão total mínima em fibras ópticas monomodais homogêneas depende, basicamente, de três fatores. O

primeiro está ligado à composição química dos materiais que constituem o núcleo e a casca do guia. A composição química dos materiais utilizados fixa certas características que possuem uma variação não-linear com o comprimento de onda que, no nosso trabalho, é representada pela equação dos três termos de Sellmeier. O segundo fator está relacionado ao raio do núcleo da fibra, que é um fator predominante na determinação de sua condição de fibra monomodal. O terceiro diz respeito à constante de propagação do modo dominante, LP_{01} , e suas derivadas. Apesar de identificáveis, estes fatores estão interrelacionados de forma complicada através da equação :

$$D_T(a) = -\frac{\lambda}{cn_e} \left[(1-b) v_2 + b v_1 + 2b' \phi + \frac{1}{2} b'' \theta - \frac{1}{n_e^2} (n_2 n_2' + b \phi + \frac{1}{2} b' \theta)^2 \right] \bigg|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0 \quad (V.1)$$

que é a equação da dispersão total. A simbologia $D_T(a)$ caracteriza, de maneira explícita, o conhecimento antecipado que se deve ter do valor do raio do núcleo da fibra para que o comprimento de onda $\bar{\lambda}$ seja calculado. Os demais parâmetros da equação (V.1) foram apresentados no Capítulo II e são reproduzidos abaixo para facilitar referências :

$$\begin{aligned} v_j &= n_j n_j'' + (n_j')^2 \quad ; j=1,2 \\ \phi &= n_1 n_1' - n_2 n_2' \\ \theta &= n_1^2 - n_2^2 \\ n_e^2 &= n_2^2 + b\theta \end{aligned} \quad (V.2)$$

com

$$\begin{aligned} n_j^2 &= 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \ell_i^2} \\ n_j' &= -\frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 \lambda}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^2} \quad ; j = 1,2 \end{aligned} \quad (V.3)$$

$$n_j'' = \frac{1}{n_j} \left[(-n_j')^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 (3\lambda^2 + \ell_i^2)}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^3} \right]$$

Nas equações (V.2) e (V.3), $j=1$ indica que se deve tomar, na Tabela II.2, os coeficientes de Sellmeier para o material constituinte do núcleo da fibra enquanto que $j=2$ indica que o mesmo deve ser feito com relação ao material constituinte da

casca do guia.

Os valores da constante de propagação, b , e de suas derivadas com relação ao comprimento de onda, b' e b'' , são obtidos a partir do momento em que se define o tipo de abordagem a ser utilizada na resolução do problema.

Ao invés de resolver a equação (V.1) para obter o valor do comprimento de onda de dispersão total nula, λ , assumimos que um determinado comprimento de onda seja conhecido (por hipótese, este comprimento de onda é o comprimento de onda da fonte óptica disponível) e resolvemos (V.1) para $a = \hat{a}$ onde $\hat{a}$ é o valor do raio do núcleo da fibra para o qual ocorrerá dispersão total nula naquele comprimento de onda escolhido. Pelo exposto, devemos resolver :

$$D_T(\lambda) \Big|_{a=\hat{a}} = 0 \quad (V.4)$$

Inicialmente, abordamos o problema representado pela equação (V.4) considerando uma aproximação assintótica para um dos autovalores da equação característica aproximada. Depois, utilizamos a equação característica aproximada com o mesmo objetivo e comparamos os resultados obtidos.

V.3 - SÍNTESE COM APROXIMAÇÃO DE AUTOVALOR

A constante de propagação normalizada, b , é definida pela equação (III.18), Capítulo III, na forma :

$$b = 1 - \frac{U^2}{V^2} = \frac{W^2}{V^2} \quad (V.5)$$

com

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \Theta^{1/2} = U^2 + W^2$$

No Capítulo III, vimos que os autovalores U e W podem ser obtidos a partir da resolução da equação característica exata

ou da resolução da equação característica aproximada que é obtida através da aplicação da aproximação por guiamento fraco. Ambos os procedimentos exigem o cálculo de funções especiais (funções de Bessel e de Bessel modificada) e a resolução de uma equação transcendental (a equação característica que está sendo utilizada) antes de se partir, efetivamente, para o cálculo de parâmetros de interesse. Estes fatos acabam requerendo a utilização de ferramentas computacionais mais sofisticadas, quer pela quantidade de cálculos que devem ser realizados quer pelo tempo necessário para realizá-los.

Algumas aproximações assintóticas para os autovalores U e W foram propostas na literatura. Dentre elas, destacam-se as aproximações de D. Marcuse [12], Rudolph e Neumann [40] e a aproximação de Miyagi e Nishida [10]. Estas aproximações assintóticas foram desenvolvidas com o objetivo de se obter resultados com precisão aceitável com o menor esforço possível em termos de tempo de computação e, ao mesmo tempo, permitir uma melhor avaliação física dos fenômenos de interesse. Em se tratando da análise da dispersão em fibras ópticas monomodais homogêneas e tendo em vista as ponderações colocadas anteriormente, a aproximação proposta por Marcuse não é amplamente utilizada por requerer conhecimento de valores de funções especiais mencionadas no parágrafo precedente. A aproximação de Rudolph e Neumann possui boa precisão quando utilizada com o objetivo de calcular apenas o valor da constante de propagação normalizada do modo fundamental. Quando é utilizada no cálculo de derivadas da constante de propagação a precisão é perdida [7]. Apenas a aproximação proposta por Miyagi e Nishida apresenta boas características de precisão tanto no cálculo da constante de propagação quanto no cálculo de suas derivadas [7].

A aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida [10], para o autovalor U , é dada pela equação :

$$U = \frac{U_{\infty} V}{V+1} \left[1 - \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{20} \frac{U_{\infty}^4}{(V+1)^5} \right] \quad (V.6)$$

onde $U_{\infty} = 2,4048$ (que é o valor de corte do modo LP_{11} conforme estabelecido na Seção III.3, Capítulo III). Esta equação permite simplificações tão expressivas que é possível implementar os procedimentos de síntese de uma fibra óptica monomodal homogênea em uma calculadora programável de médio porte [41].

Substituindo a equação (V.6) na expressão para a constante de propagação normalizada, obtemos :

$$b = 1 - \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^2} \left[1 - \frac{1}{6} \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^3} - \frac{1}{20} \frac{U_{\infty}^2}{(V+1)^5} \right]^2 \quad (V.7)$$

Usando a equação (V.7), as derivadas de b com relação ao comprimento de onda são dadas pelas equações [41] :

$$b' = - \frac{V(1-b)(2-\gamma)A}{V+1} \quad (V.8)$$

$$b'' = b' \left[\frac{b'}{(1-b)(2-\gamma)^2} \left(4\gamma + \frac{U_{\infty}^5}{(1-b)^{1/2}(V+1)^6} \right) - \left(\frac{1}{A} \left[\frac{V_1 - V_2}{\theta} - \left(\frac{\phi}{\theta} \right)^2 \right] + \frac{2}{\lambda} + \frac{VA(\gamma-6)}{2(V+1)} \right) \right] \quad (V.9)$$

onde :

$$\gamma = \frac{1}{U(1-b)^{1/2}} \left[\left(\frac{U}{V+1} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{U}{V+1} \right)^6 \right] \quad (V.10)$$

e

$$A = \frac{1}{\lambda} - \frac{\phi}{\theta} \quad (V.11)$$

O método de síntese que descrevemos é limitado, devido à aproximação adotada para o parâmetro U , ao intervalo

$$1,0 \leq V \leq 2,5 \quad (V.12)$$

A equação (V.6) restringe o intervalo de validade da constante de propagação normalizada para o modo dominante [equação (V.7)] e, consequentemente, suas derivadas com relação ao comprimento de onda [equações [(V.8)-(V.9)], conforme pode ser observado em estudos anteriormente realizados [8].

Com as equações (V.7) - (V.11) e as equações (V.2) e (V.3) podemos resolver o problema de síntese representado pela equação (V.4).

Os principais procedimentos necessários à resolução da equação (V.4) são apresentados na Figura V.1.

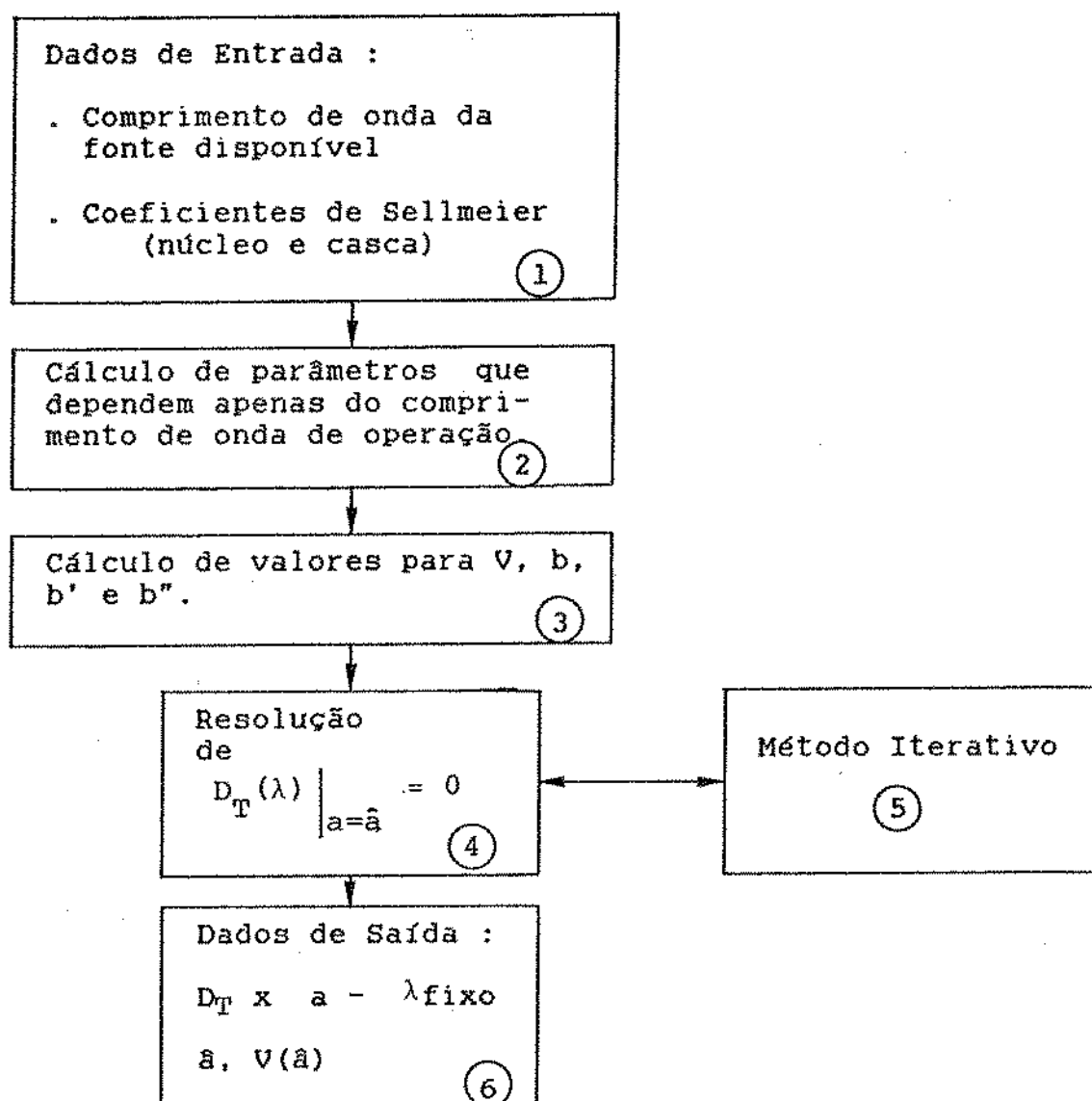


Figura V.1 - Diagrama de blocos dos procedimentos utilizados para resolver a equação (V.4).

É conveniente salientar que os procedimentos apresentados na Figura V.1 são sempre válidos e independem do método adotado para o cálculo de b, b' e b''.

Como podemos observar, o programa aceita, como dados de entrada, o valor do comprimento de onda da fonte óptica disponível e os coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier para os materiais que constituirão o núcleo e a casca da fibra que estamos interessados em sintetizar. É importante ressaltar um fato: o comprimento de onda da fonte disponível é considerado igual ao valor do comprimento de onda para o qual ocorrerá a dispersão total nula na fibra que será construída.

O valor do comprimento de onda, juntamente com os coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier, permitirá que sejam calculados alguns parâmetros que permanecerão fixos durante toda a execução do programa. Estes parâmetros são dados pelas equações (V.2) e (V.3) à exceção do índice de fase efetivo, n , na equação (V.2).

A partir do limite inferior do intervalo de validade do método proposto, especificado pela relação dada por (V.12), o programa calcula o valor do raio do núcleo da fibra que servirá como uma aproximação inicial. Esta aproximação tem o objetivo de inicializar os processamentos seguintes. Este valor é calculado, através da utilização da equação que define a frequência normalizada V , através da relação:

$$a_{\text{inicial}} = \frac{\lambda}{2\pi \theta^{1/2}} \quad ; V = 1,0 \quad (\text{V.13})$$

Os processos descritos nos parágrafos precedentes permitem a obtenção de valores de b , b' e b'' através das equações (V.7), (V.8) e (V.9), com o auxílio das equações (V.10) e (V.11), respectivamente e, conseqüentemente, de D_T . Incrementando o valor do raio do núcleo, até que a frequência normalizada alcance o limite superior do intervalo de validade do método e calculando novamente b , b' , b'' e D_T , podemos obter uma tabela de valores relacionando D_T com a (ou V) tendo o comprimento de onda de operação como parâmetro. Os cálculos mencionados permitem determinar um pequeno intervalo em a onde a equação para D_T muda de sinal. A utilização de um método iterativo, no caso empregamos o método da bisseção, permite o cálculo do valor do raio do núcleo que fará com que a fibra desejada opere com a sua máxima capacidade de transmissão de sinais sem distorção. Do exposto, fica claro que o processo necessário ao cálculo do comprimento de onda de dispersão total nula, a partir do conhecimento do valor do raio do núcleo da fibra e de valores dos coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier, conforme descrevemos nos Capítulos anteriores, é semelhante ao processo que implementamos, em termos de metodologia, para sintetizar fibras homogêneas. Obviamente a conceituação envolvida é, fundamentalmente, diferente.

Na Tabela V.1, apresentamos alguns valores de $\tilde{a}$ e $V(\tilde{a})$, em valores fixos do comprimento de onda de operação, para fibras constituídas de 100 % SiO_2 fundido como material da casca (amostra 01, Tabela II.2, Capítulo II) e diversas concentrações de GeO_2 em SiO_2 (amostras 02, 03 e 04, Tabela II.2, Capítulo II).

=====						
MATERIAL DO NÚCLEO						
λ (μm)	A		B		C	
	$\tilde{a}$ (μm)	$V(\tilde{a})$	$\tilde{a}$ (μm)	$V(\tilde{a})$	$\tilde{a}$ (μm)	$V(\tilde{a})$
1,45	2,1661	2,3618	2,3444	1,1898	2,5889	1,5120
1,50	2,0361	2,1507	2,1320	1,6149	2,3661	1,3363
1,55	1,9428	1,9907	1,9665	1,4475	2,1622	1,1823

Tabela V.1 - Valores de $\tilde{a}$ (em μm) e $V(\tilde{a})$ para valores fixos do comprimento de onda, λ , para fibras com núcleo composto de diferentes concentrações de GeO_2 em SiO_2 .

A - 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 B - 7,0 % GeO_2 - 93,0 % SiO_2
 C - 4,1 % GeO_2 - 95,9 % SiO_2

Material da casca : 100 % SiO_2 fundido.

Na Figura V.2, apresentamos um exemplo de listagem fornecida, como saída, pelo programa que implementamos. O programa, escrito na Linguagem FORTRAN e implementado em um microcomputador, difere estruturalmente do implementado em trabalho anterior [41]. No exemplo apresentado, consideramos que o comprimento de onda da fonte disponível é igual a 1,55 μm e que os materiais disponíveis para a confecção da fibra sejam constituídos de 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 como material do núcleo e 100 % SiO_2 fundido como material da casca [amostras 02 e 01 da Tabela II.2, respectivamente]. A precisão adotada é de 10^{-5} . O valor obtido como raio do núcleo de dispersão total nula, $\tilde{a} = 1,9428 \mu\text{m}$ corresponde a uma frequência normalizada $V(\tilde{a}) = 1,9907$.

SINTESE DE FIBRAS MONOMODAIS HOMOGENEAS
APROXIMACAO DE MIYAGI-NISHIDA

COMPRIMENTO DE ONDA : 1.5500 MICROMETROS

V	A	DT [PS/(KM*NM)]
1.0246	1.00	-58.2909
1.0759	1.05	-54.2590
1.1271	1.10	-50.0112
1.1783	1.15	-45.6975
1.2296	1.20	-41.4244
1.2808	1.25	-37.2658
1.3320	1.30	-33.2711
1.3833	1.35	-29.4715
1.4345	1.40	-25.8848
1.4857	1.45	-22.5190
1.5370	1.50	-19.3754
1.5882	1.55	-16.4501
1.6394	1.60	-13.7362
1.6907	1.65	-11.2245
1.7419	1.70	-8.9046
1.7931	1.75	-6.7652
1.8444	1.80	-4.7949
1.8956	1.85	-2.9825
1.9468	1.90	-1.3167
1.9981	1.95	.2130
2.0493	2.00	1.6169
2.1005	2.05	2.9044
2.1517	2.10	4.0846
2.2030	2.15	5.1659
2.2542	2.20	6.1560
2.3054	2.25	7.0623
2.3567	2.30	7.8913
2.4079	2.35	8.6494
2.4591	2.40	9.3422

RAIO PARA DISPERSAO MINIMA : 1.9428 MICROMETROS

FREQUENCIA NORMALIZADA : 1.9907

Figura V.2 - Síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas utilizando a aproximação proposta por Miyagi - Nishida [10]. Exemplo de saída impressa do programa implementado.

Material do núcleo : 13,5 % GeO₂ - 86,5 % SiO₂
Material da casca : 100 % SiO₂ fundido.

Na Figura V.3, apresentamos curvas de dispersão total, em função do raio do núcleo da fibra, para o comprimento de onda de operação fixado em $1,50 \mu\text{m}$. As fibras possuem casca composta de $100\% \text{ SiO}_2$ fundido (amostra 01, Tabela II.2) e diferentes concentrações de GeO_2 em SiO_2 como material do núcleo (amostras 02, 03 e 04, Tabela II.2). Na Figura, o valor inicial do raio do núcleo, a , para cada uma das curvas apresentadas corresponde ao valor $v \approx 1,0$. O valor final do raio do núcleo corresponde ao valor $v \approx 2,5$ apenas para a curva cujo núcleo é composto de $13,5\% \text{ GeO}_2 - 86,5\% \text{ SiO}_2$, curva A.

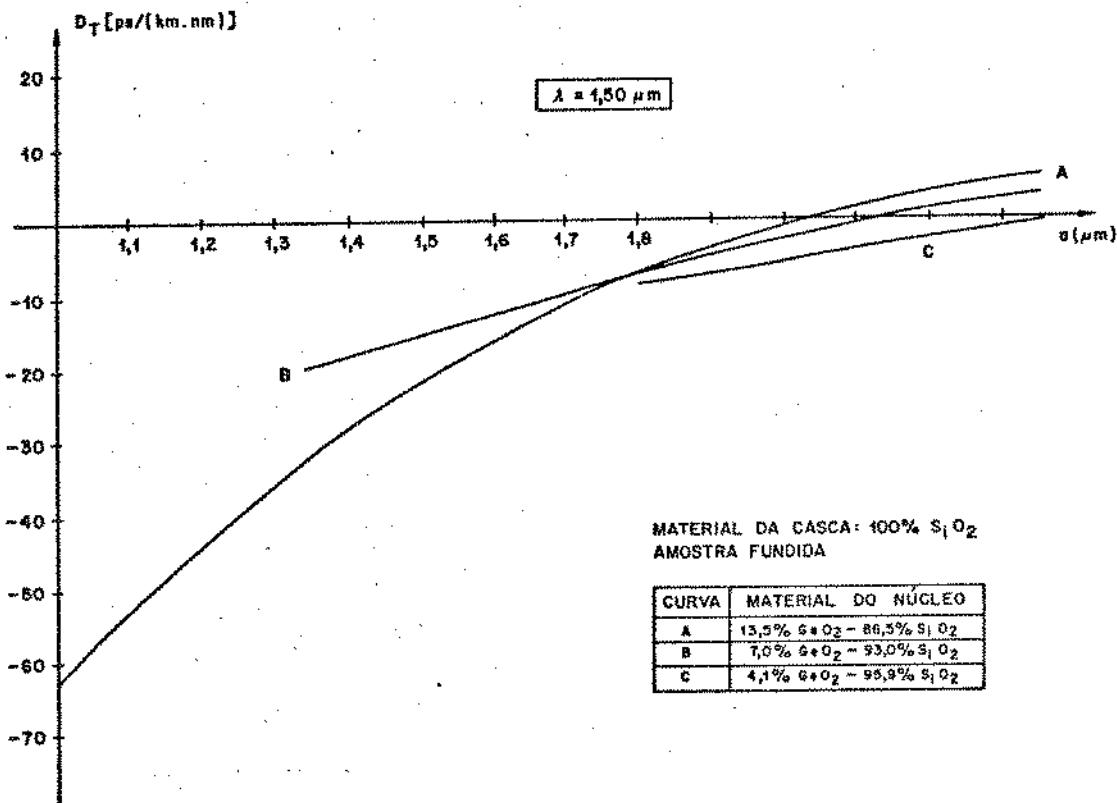


Figura V.3 - Dispersão total, D_T , em função do raio do núcleo da fibra, a , para diferentes concentrações de GeO_2 em SiO_2 para o comprimento de onda de operação fixado em $1,50 \mu\text{m}$.

Além do processo que desenvolvemos para calcular o valor de $\tilde{a}$, que permite transmissão com dispersão total nula no comprimento de onda de operação, implementamos um programa que permite o cálculo da dispersão de guia de onda sob o prisma da teoria de síntese discutida em parágrafos precedentes.

Segundo Marcuse [2], a dispersão de guia de onda é calculada eliminando-se os efeitos dispersivos causados pelos

materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra. Pelo que já apresentamos, fica claro que os efeitos dispersivos referidos são devidos à dependência, com o comprimento de onda, que os índices de refração possuem conforme explicitado pela equação dos três termos de Sellmeier. Então, se eliminamos a primeira e segunda derivadas dos índices de refração n_1 e n_2 que aparecem na equação da dispersão total, teremos a equação que descreve a dispersão de guia de onda. Assim procedendo, obtemos :

$$D_g = - \frac{\lambda}{cn_e} \left[\frac{1}{2} b''\theta - \frac{1}{n_e^2} \left(\frac{1}{2} b'\theta \right)^2 \right] \quad (V.14)$$

com

$$\theta = n_1^2 - n_2^2 \quad ; \quad n_e^2 = n_2^2 + b\theta \quad (V.15)$$

A equação para D_g apresentada é idêntica à equação (II.106), apresentada no Capítulo II. A expressão para a constante de propagação normalizada, como não possui explicitamente termos envolvendo derivadas de n_1 e n_2 , continua sendo dada pela equação (V.5). Usando as equações para b' e b'' , (V.8) e (V.9), respectivamente, e eliminando as derivadas de n_1 e n_2 , obtemos :

$$b' = - \frac{V(1-b)(2-\gamma)}{\lambda(V+1)} \quad (V.16)$$

e

$$b'' = b' \left[\frac{b'}{(1-b)(2-\gamma)^2} \left(4\gamma - \frac{U_\infty^5}{(1-b)^{1/2}(V+1)^6} \right) - \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{V(\gamma-6)}{2\lambda(V+1)} \right) \right] \quad (V.17)$$

O parâmetro γ continua sendo descrito pela equação (V.10).

Como uma parte significativa da potência associada ao modo dominante em uma fibra monomodal propaga-se através da casca da fibra óptica, no cálculo da dispersão de guia de onda devemos escolher os valores de n_1 e n_2 calculados no comprimento de onda, λ_{mc} , de dispersão material nula para o material da casca da fibra. É importante notar que o valor de λ_{mc} não torna o valor da dispersão total nula (a menos que o raio do núcleo seja infinito e que o material do núcleo seja o mesmo material que foi

utilizado na confecção da casca da estrutura, o que não é o caso em todas as nossas considerações).

Havendo feito estas ponderações apresentamos, na Figura V.4, curvas de dispersão de guia de onda para uma fibra constituída de 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 como material do núcleo e 100 % SiO_2 fundido como material da casca. As curvas para a dispersão de guia de onda, D_g , são em função do raio do núcleo, a , para alguns valores do comprimento de onda, λ , de operação. Os valores de n_1 e n_2 são calculados em $\lambda = 1,27275 \mu\text{m}$ (que é o valor do comprimento de onda de dispersão material nula para o material da casca da fibra, conforme Tabela II.2) e são, respectivamente, iguais a 1,46866 e 1,44723. O programa gerador das curvas apresentadas na Figura V.4 requer, como dados de entrada, os valores dos coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier para os materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra, o valor do comprimento de onda de dispersão material nula para o material constituinte da casca do guia e o valor do comprimento de onda de operação desejado.

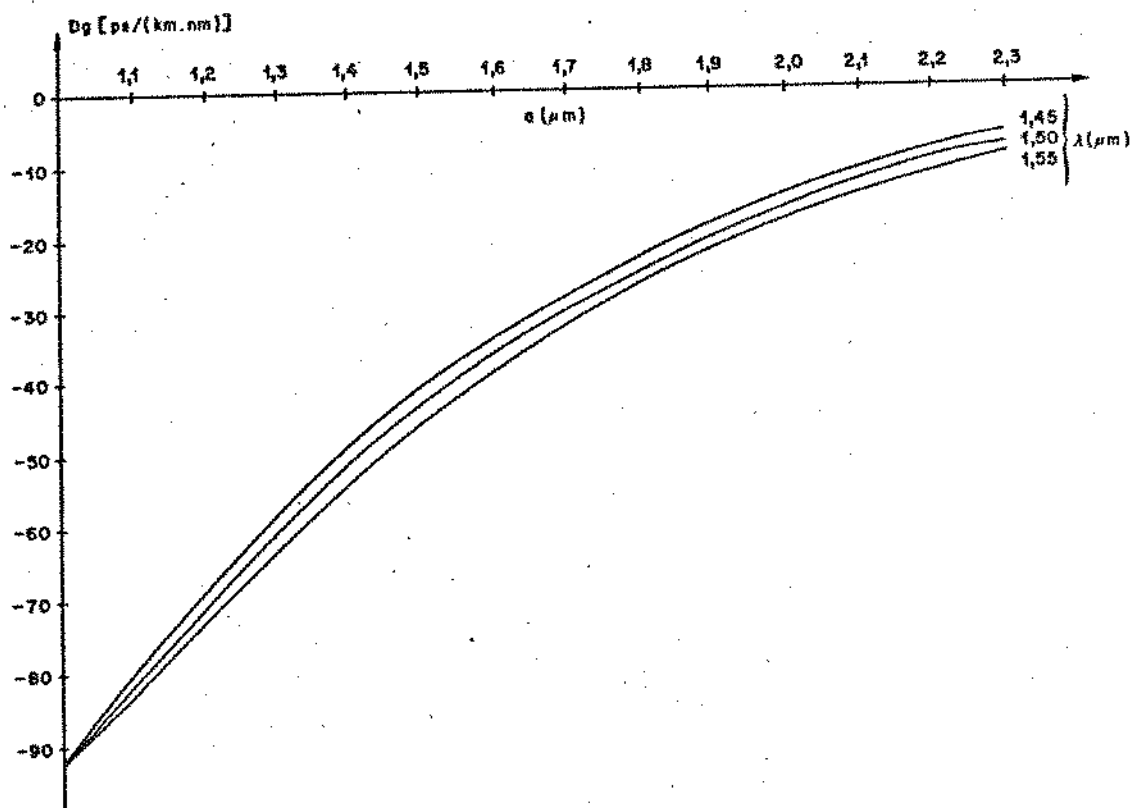


Figura V.4 - Dispersão de guia de onda em função do raio do núcleo da fibra para valores específicos de comprimentos de onda de operação.

Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 Material da casca : 100 % SiO_2 fundido

Na próxima Seção, apresentamos a metodologia que adotamos para sintetizar fibras ópticas monomodais homogêneas utilizando a equação característica aproximada, obtida com a aplicação da aproximação por guiamento fraco. Iremos verificar que, ao invés da obtenção de um único raio de núcleo que possibilita a transmissão com dispersão total nula, o método de síntese, usando a equação do guiamento fraco, permite encontrar, na grande maioria dos casos, dois raios de núcleo, com as mesmas propriedades, para cada valor de comprimento de onda de operação.

V.4 - SÍNTESE COM APROXIMAÇÃO POR GUIAMENTO FRACO

Apesar de sua simplicidade, o método de síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas que apresentamos na Seção V.3, baseado na aproximação assintótica para o autovalor U proposta por Miyagi e Nishida [10], pela limitação que possui em termos de intervalo de validade, permite calcular apenas um único valor de raio de núcleo para cada valor de comprimento de onda de operação. A existência de dois valores de raio de núcleo de dispersão total nula, para cada valor de comprimento de onda de operação, foi inicialmente prevista em um trabalho que desenvolvemos em análise de dispersão total nestes tipos de guias, utilizando as equações características em suas formas exata e aproximada [8].

Nesta Seção, abordaremos o problema de síntese de fibras monomodais homogêneas tendo como base a equação característica aproximada, obtida pela aplicação, na equação exata, da aproximação do guiamento fraco [42]. A diferença fundamental entre este método e o apresentado na Seção anterior está na forma de obtenção de valores para a constante de propagação normalizada do modo dominante e de suas derivadas com relação ao comprimento de onda, b , b' e b'' . Na aproximação por guiamento fraco, conforme verificamos no Capítulo III, a equação característica aproximada é dada por :

$$\frac{U J_0(U)}{J_1(U)} = \frac{WK_0(W)}{K_1(W)} \quad (V.18)$$

Os autovalores U e W estão sujeitos à condição

$$0 < V = (U^2 + W^2)^{1/2} \leq 2,4048 \quad (V.19)$$

que é a condição que força a fibra óptica a operar em sua região monomodal. Resolvendo (V.18), com a restrição (V.19), obtemos os

valores de b [equação (V.5)], b' e b'' [equações (III.35) e (III.36), respectivamente]. A partir daí, os dois possíveis raios de núcleo de dispersão total nula são obtidos através da equação (V.4) para o valor do comprimento de onda de operação especificado.

No programa que desenvolvemos, escrito em linguagem FORTRAN e implementado em um microcomputador, o limite superior do intervalo de operação monomodal da fibra [ver equação (V.19)] é utilizado para obter a aproximação do raio do núcleo que inicializa os processos subsequentes. Isto significa que ao invés de utilizarmos a equação (V.13), usamos a equação :

$$a_{\text{inicial}} = \frac{2,4048\lambda}{2\pi\theta^{1/2}} \quad ; \quad V = 2,4048 \quad (\text{V.20})$$

Na Figura V.5, apresentamos um exemplo de saída impressa fornecida pelo programa que desenvolvemos. Consideramos o comprimento de onda de operação igual a $1,55 \mu\text{m}$ para uma fibra constituída de 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 como material do núcleo e 100 % SiO_2 fundido como material da casca. Os resultados apresentados, calculados com uma precisão de 10^{-5} (inicialmente, o raio de maior valor e, após, o raio de menor valor), demonstram a técnica de busca de valores de raios de núcleo que possibilitam a transmissão com dispersão total nula implementada a partir da equação (V.20) restrita à faixa especificada pela equação (V.19).

SINTESE DE FIBRAS OPTICAS MONOMODAIS HOMOGENEAS METODO DA APROXIMACAO POR GUIAMENTO FRACO

COMPRIMENTO DE ONDA DE OPERACAO : 1.5500 MICROMETROS

RAIO DE DISPERSAO TOTAL NULA MICROMETROS	FREQUENCIA NORMALIZADA
2.0125	2.0621
.7598	.7785

Figura V.5 - Síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas utilizando a equação característica aproximada. Exemplo de saída impressa do programa implementado.

Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
Material da casca : 100 % SiO_2 fundido

Devemos salientar que, neste caso, o diagrama de blocos dos procedimentos necessários à resolução da equação (V.4) é idêntico ao apresentado na Figura V.1 considerando, porém, que os processos constantes dos blocos 3,4 e 5 são realizados duas vezes.

Na Tabela V.2, apresentamos alguns valores de $\tilde{a}$ e $V(\tilde{a})$, em valores fixos do comprimento de onda de operação, para fibras constituídas de 100 % SiO_2 fundido como material da casca (amostra 01, Tabela II.2, Capítulo II) e diversas concentrações de GeO_2 em SiO_2 como material do núcleo (amostras 02, 03 e 04, Tabela II.2, Capítulo II).

=====						
MATERIAL DO NÚCLEO						
λ (μm)	A		B		C	
	$\tilde{a}$ (μm)	$V(\tilde{a})$	$\tilde{a}$ (μm)	$V(\tilde{a})$	$\tilde{a}$ (μm)	$V(\tilde{a})$
1,45	-	-	2,4368	1,9020	2,6464	1,5456
	0,6702	0,7308	1,0537	0,8224	1,5368	0,8975
1,50	2,1069	2,2255	2,2090	1,6732	2,3348	1,3186
	0,7150	0,7552	1,1522	0,8727	1,7714	1,0004
1,55	2,0125	2,0621	2,0131	1,4818	-	-
	1,7598	0,7785	1,2696	0,9345	-	-
=====						

Tabela V.2 - Valores de $\tilde{a}$ (em μm) e $V(\tilde{a})$ para valores fixos do comprimento de onda, λ , para fibras com núcleo composto de diferentes concentrações de GeO_2 em SiO_2 . Resultados obtidos com a utilização da equação característica aproximada.

A - 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 B - 7,0 % GeO_2 - 93,0 % SiO_2
 C - 4,1 % GeO_2 - 95,9 % SiO_2

Material da casca : 100 % SiO_2 fundido.

Como podemos observar na Tabela V.2, no caso da fibra constituída de 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 como material do núcleo e 100 % SiO_2 fundido como material da casca, para o comprimento de onda de operação igual a 1,45 μm , apenas um valor de raio de núcleo que permite a transmissão com dispersão total nula foi encontrado no intervalo de operação monomodal especificado pela

equação (V.19). O outro possível valor de raio de núcleo está fora da região de operação descrita pela equação (V.19). Outro fato a ser notado, ainda na Tabela V.2, refere-se à fibra constituída de 4,1 % GeO_2 - 95,9 % SiO_2 como material do núcleo e 100 % SiO_2 fundido como material da casca : não há valores de raio de dispersão total nula para esta fibra, no intervalo de operação monomodal, quando o comprimento de onda de operação é igual a 1,55 μm .

Observando a Tabela V.1, com valores obtidos utilizando a aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida [10], podemos verificar que, para todos os valores do comprimento de onda de operação utilizados, foi possível obter uma raiz para a equação (V.4). Entretanto, usando uma equação com melhores características de precisão, como é o caso da equação característica obtida a partir da condição de guiamento fraco, com resultados apresentados na Tabela V.2, observamos que há caso em que não há raiz possível para a equação (V.4) no intervalo de operação monomodal, há caso de existência de apenas uma raiz e há uma maioria de casos em que obtemos duas possíveis soluções. Para fixar idéias, apresentamos na Tabela V.3 os erros relativos, e (em percentagem), entre os maiores valores de raio de núcleo obtidos com o método da Seção anterior e os maiores valores de raio de núcleo obtidos usando a equação característica aproximada.

=====			
MATERIAL DO NÚCLEO			
λ (μm)	A	B	C
	e_r (%)	e_r (%)	e_r (%)
1,45	-	3,79	2,17
1,50	3,36	3,48	-1,37
1,55	3,46	2,31	-
=====			

Tabela V.3 - Comparação entre valores de raio de dispersão total nula obtidos por aproximação assintótica [ver Tabela V.1] e por aproximação do guiamento fraco [ver valores maiores de raio de núcleo, Tabela V.2].

A - 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 B - 7,0 % GeO_2 - 93,0 % SiO_2
 C - 4,1 % GeO_2 - 95,9 % SiO_2

Material da casca : 100 % SiO_2 fundido.

A divergência entre os resultados obtidos, tanto numérica quanto quantitativamente, é fortemente atribuída à maneira utilizada para calcular valores da constante de propagação normalizada para o modo dominante, b , e suas derivadas com relação ao comprimento de onda, b' e b'' .

Na Figura V.6, apresentamos curvas da constante de propagação normalizada do modo dominante, b , obtidas através da utilização da teoria apresentada na Seção anterior e através da utilização da aproximação do guiamento fraco. Utilizamos uma fibra composta de 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 como material do núcleo e 100 % SiO_2 fundido como material da casca para alguns valores do comprimento de onda de operação.

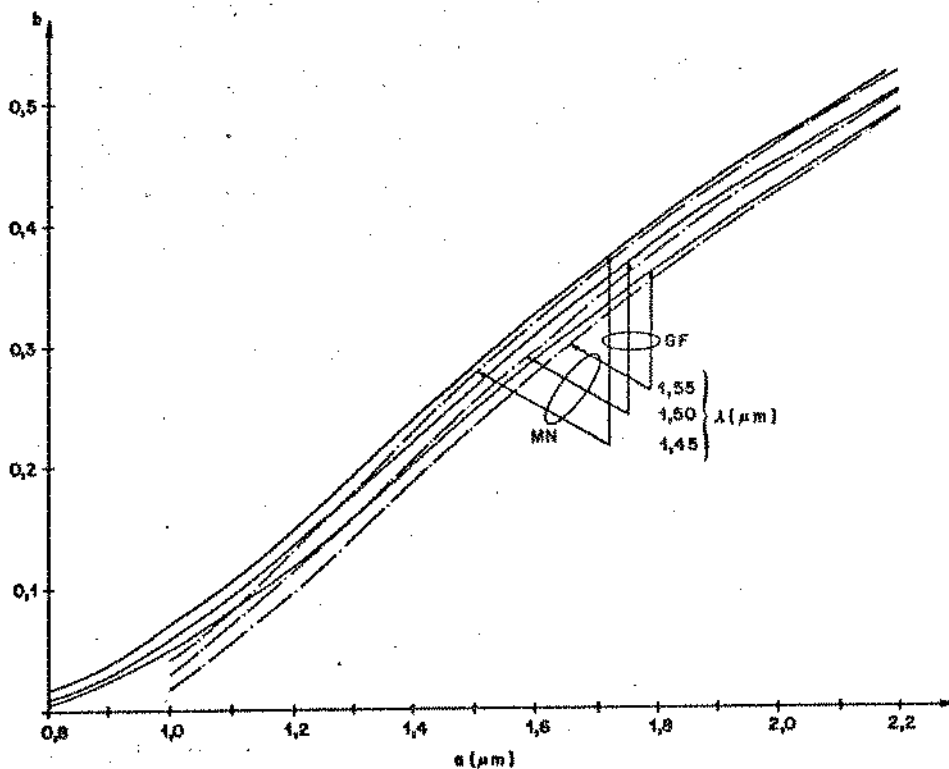


Figura V.6 - Curvas da constante de propagação normalizada do modo fundamental, b , em função do raio do núcleo, em diferentes valores do comprimento de onda de operação, obtidas através da aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida (Curvas MN) e da aproximação do guiamento fraco (Curvas GF).

Na Figura V.7, apresentamos algumas curvas da derivada primeira da constante de propagação normalizada, b' , em função do raio do núcleo da fibra, para alguns valores de comprimentos de onda de operação. As curvas foram traçadas considerando-se a mesma fibra da Figura V.6.

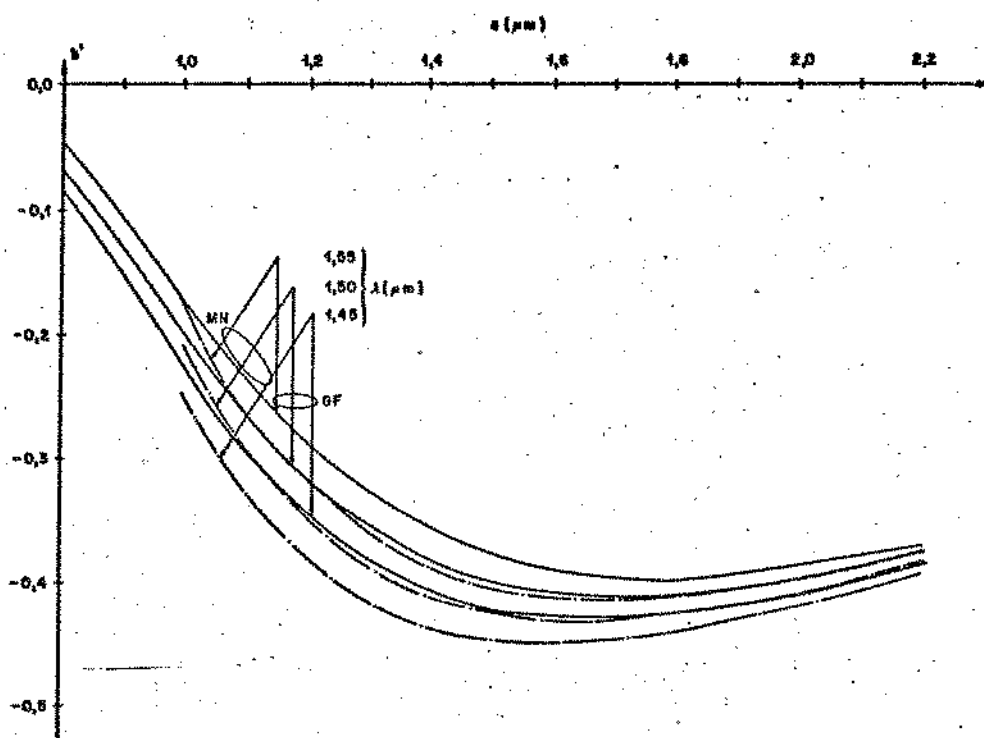


Figura V.7 - Curvas da derivada primeira da constante de propagação normalizada do modo dominante em função do raio do núcleo da fibra para diferentes valores do comprimento de onda de operação. Curvas MN, obtidas através da aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida. Curvas GF obtidas através da utilização da equação característica aproximada. Mesma fibra da Figura V.6.

Na Figura V.8, apresentamos curvas da derivada segunda, com relação ao comprimento de onda, da constante de propagação normalizada do modo dominante, b'' . Utilizada a mesma fibra da Figura V.6.

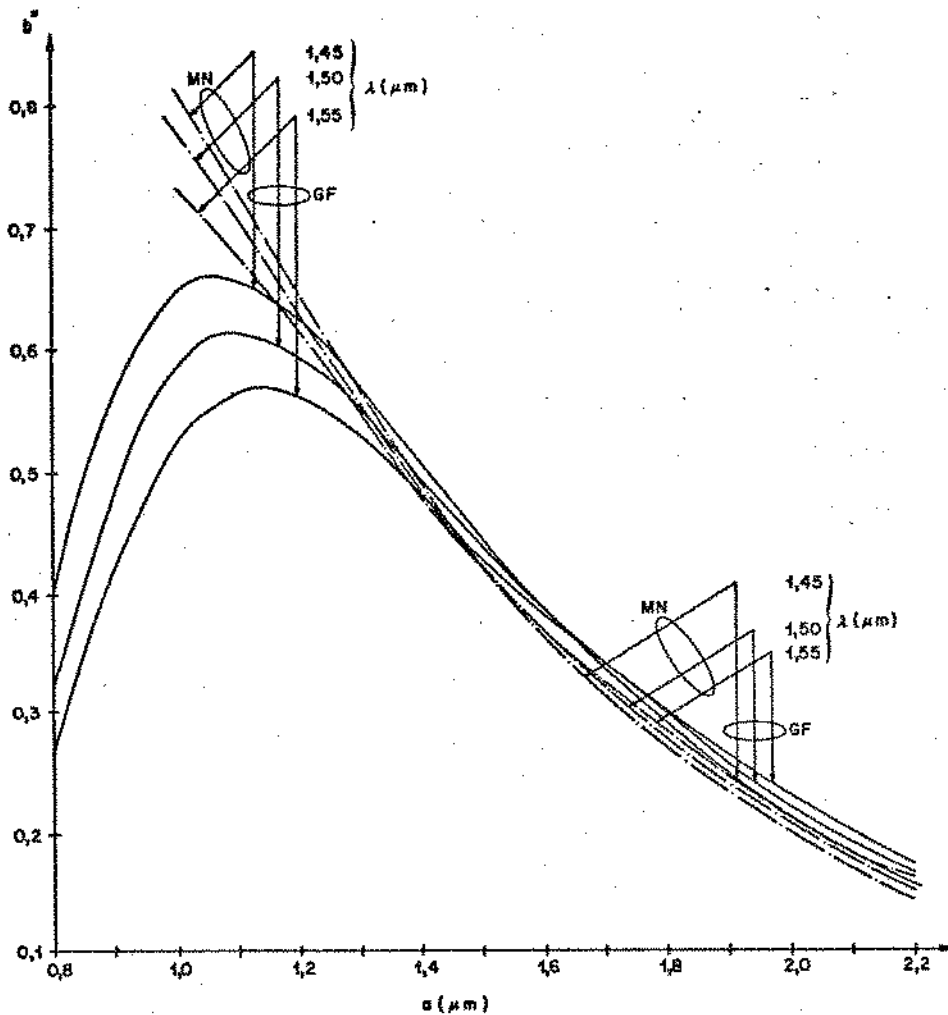


Figura V.8 - Curvas da derivada segunda da constante de propagação normalizada do modo dominante em função do raio do núcleo da fibra para diferentes valores do comprimento de onda de operação. Curvas MN, obtidas através da aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida. Curvas GF obtidas através da utilização da equação característica aproximada. Mesma fibra da Figura V.6.

Nas Figuras V.6 - V.8, as curvas rotuladas de MN possuem ponto inicial em $V = 1,0$, aproximadamente. Nestas Figuras, podemos observar que as diferenças entre as curvas obtidas através da utilização da equação característica aproximada e as curvas obtidas utilizando a aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida são bastante evidentes no início do intervalo em a apresentado. Estas diferenças permanecem visíveis, embora em menor grau, ao longo do intervalo em a . Como, em ambos os métodos, os efeitos dispersivos provocados pelos materiais constituintes do núcleo e da casca são idênticos (já que estamos tratando da mesma fibra), a metodologia empregada na obtenção de valores de b , b' e b'' é a responsável pelas diferenças apresentadas nos valores dos raios de núcleo de dispersão total nula [ver Tabela V.3].

Na Figura V.9, apresentamos algumas curvas de dispersão total em função do raio do núcleo da fibra para alguns valores de comprimento de onda de operação. A fibra é constituída de 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 como material do núcleo e 100 % SiO_2 fundido como material da casca. Podemos observar que à medida em que o valor do comprimento de onda de operação diminui, o menor valor do raio de dispersão total nula também diminui enquanto que o maior valor para o raio de dispersão total nula aumenta.

Na Figura V.10, apresentamos curvas representativas do comportamento da dispersão de guia, em função do raio do núcleo da fibra para alguns valores do comprimento de onda de operação. Os materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra são os mesmos que foram utilizados na confecção das curvas apresentadas na Figura V.6. Neste caso, as equações para as derivadas, com relação ao comprimento de onda, da constante de propagação do modo dominante, b' e b'' , são dadas pelas equações :

$$b' = - \frac{2}{\lambda} \frac{U^2}{V^2} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \quad (\text{V.21})$$

$$b'' = \frac{4}{\lambda^2} \frac{U^2}{V^2} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} + \left(\frac{U}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{4U^2}{V^2} \left(- \frac{K_0(W)}{K_1(W)} + \frac{K_0^2(W)}{WK_1^2(W)} + \frac{K_0^3(W)}{K_1^3(W)} \right) \right. \\ \left. \cdot \left(\frac{W}{V} + \frac{U^2}{\omega V} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) - \frac{2U^2}{V^2} \left(1 + \frac{2}{K_1^2(W)} \frac{K_0^2(W)}{K_1^2(W)} \right) \right] \quad (\text{V.22})$$

que foram obtidas a partir das equações (III.35)-(III.38), do Capítulo III, eliminando as derivadas de n_1 e n_2 com relação ao comprimento de onda. Como no caso das curvas da Figura V.4, o programa gerador das curvas apresentadas na Figura V.7 requer, como dados de entrada, os valores dos coeficientes da equação dos

três termos de Sellmeier para os materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra, o valor do comprimento de onda de dispersão material nula para o material constituinte da casca do guia e o comprimento de onda no qual a fibra irá trabalhar.

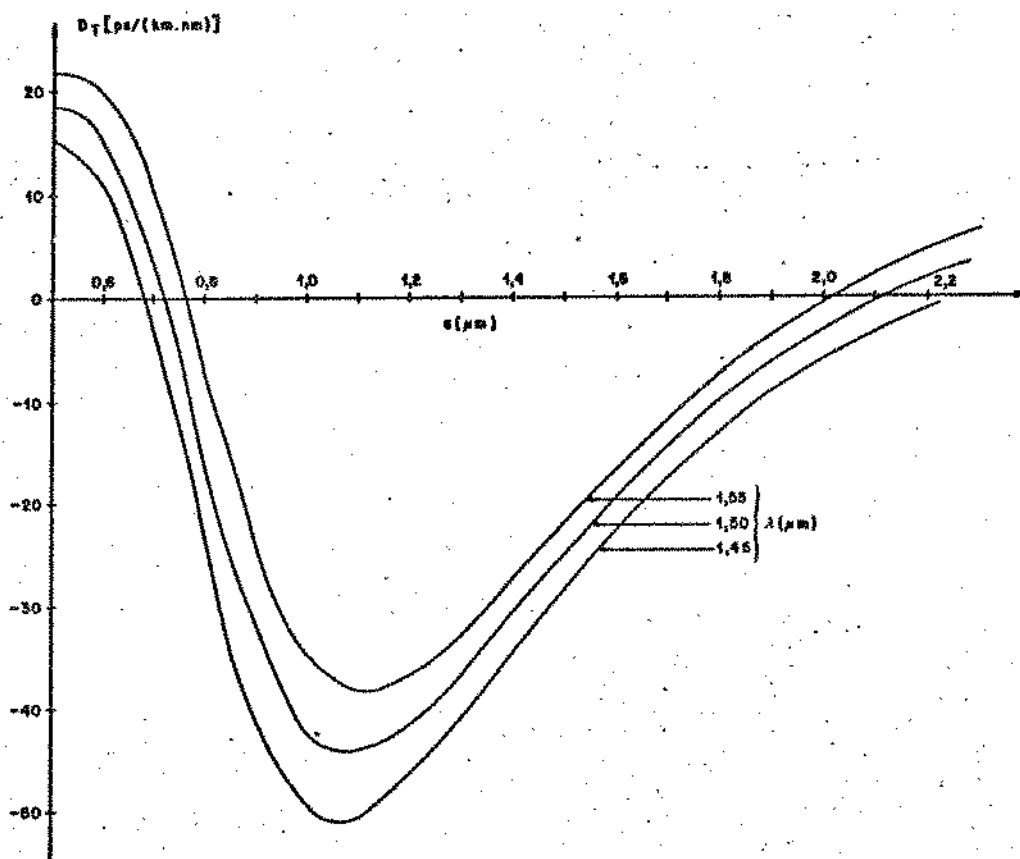


Figura V.9 - Dispersão total em função do raio do núcleo para diferentes valores do comprimento de onda de operação. Síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas utilizando a aproximação do guiamento fraco.

Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 Material da casca : 100 % SiO_2 fundido.

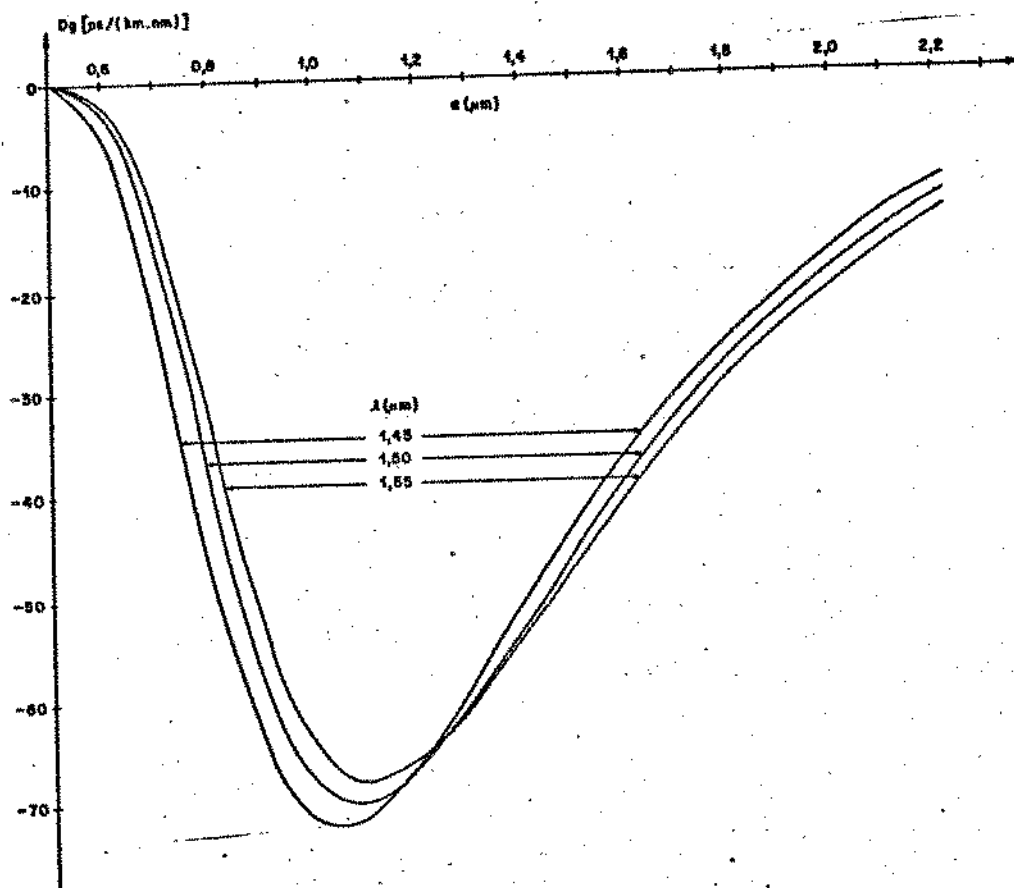


Figura V.10 - Dispersão de guia de onda em função do raio do núcleo da fibra para valores específicos do comprimento de onda de operação. Curvas obtidas a partir da utilização da equação característica aproximada.

Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2
 Material da casca : 100 % SiO_2 fundido.

Apesar das características apresentadas, o método de síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas baseado na aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida [10] pode ser empregado, pela sua extrema simplicidade, em situações onde se requer apenas um conhecimento antecipado de resultados observando-se, com cuidado, as características de precisão que possui e que foram analisadas neste Capítulo. Ao se considerar implementações práticas é recomendável o uso do método de síntese baseado na equação característica aproximada que, pelas suas características teóricas e relativa facilidade de implementação computacional, enquadra a grande maioria dos casos encontrados em situações reais.

No próximo Capítulo, trataremos da síntese de fibras ópticas monomodais não-homogêneas. O formalismo apresentado e os procedimentos computacionais implementados, por serem de características mais genéricas, permitem tratar também de fibras monomodais homogêneas, agora consideradas como um caso especial.

CAPÍTULO VI

SÍNTESE DE FIBRAS ÓPTICAS MONOMODAIS NÃO-HOMOGENEAS

VI.1 - INTRODUÇÃO

No Capítulo anterior, apresentamos a teoria de síntese de fibras ópticas monomodais homogêneas. Fundamentamos as nossas análises nos procedimentos baseados na aproximação assintótica proposta por Miyagi e Nishida [10] e na equação característica aproximada obtida através da aplicação da condição do guiamento fraco à equação característica exata.

Partindo da equação da dispersão total e do conhecimento da composição química dos materiais que constituirão o núcleo e a casca do guia óptico, fixando o comprimento de onda de operação, calculamos valores do raio do núcleo de fibras. O comprimento de onda fixado é, por hipótese, o comprimento de onda que permite a transmissão com dispersão total nula. Pelas características teóricas do método desenvolvido, os valores calculados são tais que a fibra a ser construída operará, também, na região monomodal.

No processo de síntese, dois procedimentos possuem importância fundamental. O primeiro diz respeito ao cálculo do valor inicial do raio do núcleo da fibra que inicializa processos iterativos subsequentes. Há que se garantir que os processamentos efetuados sejam limitados à região de operação monomodal do guia tendo em vista que, ao longo do processo, podem ser obtidos valores que não correspondem ao modo fundamental mas sim ao modo imediatamente superior ou mesmo a modos de ordem mais elevada. Este risco é verdadeiro no caso da utilização da equação característica aproximada e inexiste no caso da utilização da aproximação assintótica adotada no Capítulo anterior devido à limitação da sua região de validade. O segundo procedimento importante diz respeito ao cuidado que se deve ter com a precisão da equação utilizada no cálculo de valores da constante de propagação do modo dominante e, conseqüentemente, de suas derivadas. A escolha de uma equação menos precisa pode levar a resultados não condizentes, conforme verificamos no Capítulo precedente.

Neste Capítulo, apresentamos os procedimentos necessários à síntese de fibras ópticas monomodais não-homogêneas. No nosso trabalho, e a exemplo do que foi aplicado no Capítulo IV, utilizaremos apenas fibras que possuem perfis de índice de refração descritos por funções de perfis analíticas embora o método adotado permita, com pequenas modificações, a utilização de valores discretos de índices de refração obtidos a partir de medições. Para obter o valor inicial do raio do núcleo da fibra que inicializa todos os processamentos, adotamos um método de cálculo do valor da frequência de corte do modo

imediatamente superior, LP_{11} , baseado na resolução de um problema de autovalor [43]. Para calcular valores da constante de propagação normalizada do modo fundamental, e de suas derivadas com relação ao comprimento de onda, adotamos um procedimento baseado na aplicação da transformação de Ricatti à equação escalar de onda. As equações resultantes são, então, resolvidas através de integração numérica [32]. Para comprovar a precisão do método, os resultados são comparados com aqueles obtidos nos Capítulos IV e V.

VI.2 - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

A equação escalar de onda para modos guiados em fibras ópticas não-homogêneas, representada pela equação (II.79) ou (IV.1), pode ser escrita, para o modo fundamental ($m = 0$), na forma :

$$\frac{d^2\psi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR} + V^2[1-b - \delta f(R)]\psi = 0 \quad (\text{VI.1})$$

onde :

V - é a frequência normalizada, definida pela equação (II.105);

$R=r/a$ - r é a coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas e a é o raio do núcleo da fibra ;

$\psi(R)$ - é a função escalar de onda;

b - é a constante de propagação normalizada, definida pela equação (III.18);

δ - é um parâmetro que especifica a graduação do perfil de índice de refração na interface núcleo/casca, e

$f(R)$ - é a função de perfil de índice de refração da fibra.

Como fizemos no Capítulo IV, assumiremos que o índice

de refração é descrito pelas relações :

$$\begin{aligned} n^2(R) &= n_1^2 - (n_1^2 - n_2^2) \delta f(R) & ; R \leq 1 \\ &= n_2^2 & ; R > 1 \end{aligned} \quad (\text{VI.2})$$

onde os símbolos n_1 e n_2 representam a dependência não-linear, com o comprimento de onda, λ , dos índices de refração dos materiais que constituem o núcleo e a casca da fibra óptica. Novamente, esta dependência é caracterizada pela equação dos três termos de Sellmeier [equação (II.96), Capítulo II].

A função de onda $\psi(R)$ deve satisfazer as seguintes condições de contorno :

$$\left. \frac{d\psi}{dR} \right|_{R=0} = 0 \quad (\text{VI.3})$$

e

$$\left. \frac{1}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{dR} \right|_{R=1} = - \frac{W K_1(W)}{K_0(W)} \quad (\text{VI.4})$$

estabelecidas pelas equações (IV.3), (IV.4) e (IV.10) com o parâmetro $m = 0$. Na equação (VI.4), $K_0(W)$ e $K_1(W)$ representam as funções modificadas de Bessel e W é o parâmetro radial normalizado da casca.

A equação diferencial de segunda ordem dada pela equação (VI.1) pode ser reduzida, através de uma transformação devida a Ricatti, a uma equação diferencial de primeira ordem dada na forma :

$$\frac{dG}{dR} = V^2 \delta f(R) - V^2(1-b) - \frac{G}{R} - G^2 \quad (\text{VI.5})$$

com

$$G = \frac{1}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{dR} \quad (\text{VI.6})$$

A função $G(R)$ impõe-se as seguintes condições de contorno :

$$G(R = 0) = 0$$

$$G(R = 1) = - \frac{W K_1(W)}{K_0(W)} \quad (\text{VI.7})$$

$$\left. \frac{dG}{dR} \right|_{R=0} = [V^2 \delta f(0) - V^2(1-b)]/2$$

Podemos observar que as equações (VI.5) - (VI.7) permitem que seja calculado o valor da constante de propagação normalizada b . Para usarmos a equação da dispersão total, como tivemos oportunidade de verificar nos Capítulos precedentes, necessitamos do conhecimento das derivadas primeira e segunda da constante de propagação normalizada com relação ao comprimento de onda. Estas derivadas podem ser obtidas a partir da resolução das equações :

$$\frac{d\dot{G}}{dR} = -2G\dot{G} - \frac{\dot{G}}{R} - 2V[1-b - \delta f(R)] + V^2\dot{b} \quad (\text{VI.8})$$

com :

$$\dot{G}(R=0) = 0$$

$$\dot{G}(R=1) = \left[Vb + \frac{V^2\dot{b}}{2} \right] \cdot \left[1 - \frac{K_1^2(W)}{K_0^2(W)} \right] \quad (\text{VI.9})$$

$$\left(\frac{d\dot{G}}{dR} \right)_{R=0} = \frac{V^2\dot{b}}{2} - V[1-b - \delta f(0)]$$

e

$$\frac{d\ddot{G}}{dR} = -2\dot{G}^2 - 2G\ddot{G} - \frac{\ddot{G}}{R} - 2[1-b - \delta f(R)] + 4V\dot{b} + V^2\ddot{b} \quad (\text{VI.10})$$

com :

$$\ddot{G}(R=0) = 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{G}(R=1) = & \frac{W}{2b} (2b + v\dot{b})^2 \frac{K_1(W)}{K_0(W)} \left[1 - \frac{K_1^2(W)}{K_0^2(W)} + \frac{K_1(W)}{WK_0(W)} \right] \\ & + \left[1 - \frac{K_1(W)}{K_0(W)} \right] \left[b + 2v\dot{b} + \frac{v^2\ddot{b}}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

$$\left(\frac{d\ddot{G}}{dR} \right)_{R=0} = \frac{v^2\ddot{b}}{2} + 2v\dot{b} - [1-b - \delta f(0)]$$

As equações (VI.8) - (VI.11) foram obtidas das equações (VI.5) e (VI.7). O(s) ponto(s) acima dos parâmetros que surgem nas equações (VI.8) - (VI.11) indicam diferenciação do respectivo parâmetro com relação à frequência normalizada. Calculados os valores de $\dot{b}$ e $\ddot{b}$, através das equações pertinentes, podemos obter os valores das derivadas de b com relação ao comprimento de onda através das equações :

$$b' = \dot{b} v \frac{\phi}{\theta} - \frac{1}{\lambda} \quad (\text{VI.12})$$

e

$$b'' = \ddot{b} v \left(\frac{v_1 - v_2}{\theta} - \frac{\phi^2}{\theta^2} - \frac{2\phi}{\theta\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \right) + b v^2 \left(\frac{\phi}{\theta} - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{VI.13})$$

De posse de b , b' e b'' , podemos calcular valores da dispersão total, utilizando-a na síntese dos tipos de fibras que estamos analisando. Para isto, basta resolver a equação

$$D_T(\lambda) \Big|_{a=\hat{a}} = 0 \quad (\text{VI.14})$$

na região de operação monomodal.

Na próxima Seção, apresentamos os procedimentos computacionais que implementamos para resolver a equação (VI.14) no caso de fibras monomodais não-homogêneas.

VI.3 - PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAIS

Basicamente, o diagrama de blocos do programa de computador para resolver a equação (VI.14), no presente caso, é o mesmo apresentado na Figura V.1, Capítulo V.

O programa que desenvolvemos, escrito em linguagem FORTRAN e implementado em um microcomputador, aceita como dados de entrada o valor do comprimento de onda da fonte óptica disponível e os valores dos coeficientes da equação dos três termos de Sellmeier para os materiais constituintes do núcleo e da casca da fibra.

O valor do comprimento de onda, com os coeficientes de Sellmeier, permite calcular os parâmetros

$$\begin{aligned} v_j &= n_j n_j'' + (n_j')^2 & ; j = 1,2 \\ \phi &= n_1 n_1' - n_2 n_2' & (VI.15) \\ \theta &= n_1^2 - n_2^2 \end{aligned}$$

onde :

$$\begin{aligned} n_j^2 &= 1 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - \ell_i^2} \\ n_j' &= - \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 \lambda}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^2} & ; j = 1,2 & (VI.16) \\ n_j'' &= \frac{1}{n_j} \left[(-n_j')^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \ell_i^2 (3\lambda^2 + \ell_i^2)}{(\lambda^2 - \ell_i^2)^3} \right] \end{aligned}$$

Estes parâmetros permanecerão fixos durante toda a execução do programa. É importante salientar que, nas equações (VI.15) e (VI.16), $j = 1$ indica que os coeficientes de Sellmeier devem ser os que correspondem ao material constituinte do núcleo da fibra enquanto que $j = 2$ indica que os coeficientes de Sellmeier devem ser os correspondentes ao material constituinte da casca do guia.

Para inicializar o processo iterativo, o programa calcula o valor inicial do raio do núcleo da fibra através da

equação :

$$a_{\text{inicial}} = \frac{\lambda V_c}{2\pi\theta^{1/2}} \quad (\text{VI.17})$$

onde V_c é o valor de corte do modo LP_{11} , que é o modo imediatamente superior ao modo dominante. O valor inicial calculado pela equação (VI.17) é o maior valor possível de raio de núcleo que permite a fibra operar na região monomodal.

Devemos, neste ponto, fazer algumas ponderações com relação ao cálculo do valor de corte do modo LP_{11} considerando-o como a etapa preliminar a ser cumprida em um processo onde o resultado final desejado não é, especificamente, o valor de V_c . A importância que o cálculo deste parâmetro possui, principalmente em se tratando de estudos envolvendo fibras ópticas monomodais não-homogêneas, é atestada pelos diversos métodos propostos na literatura. Dentre eles, podemos destacar um que é baseado na aplicação de técnicas envolvendo matrizes [44], um que utiliza-se de procedimentos baseados na análise variacional [45], outro que usa o método da ressonância transversa [46] e, por fim, um método que é baseado na técnica de expansão em série de potências [47]. Todos os procedimentos descritos nos trabalhos referenciados são procedimentos complicados, tanto do ponto de vista analítico quanto do ponto de vista de implementação em computador, ora requerendo manipulações com matrizes de ordem elevada, ora exigindo extensiva utilização de cálculos iterativos. Estes fatos limitam a aplicabilidade destes métodos em processos onde o valor que eles geram, no caso, o valor da frequência de corte do modo LP_{11} , é apenas utilizado como uma mera aproximação requerida como inicializadora de processos subsequentes.

Para obter o valor de a_{inicial} , adotamos um procedimento de cálculo de V_c do modo LP_{11} proposto por Meunier e outros [43]. Este procedimento combina as técnicas de Ritz-Garlekin com a utilização de aproximações polinomiais. As técnicas são empregadas na resolução de um problema de autovalores que são, eles próprios, os valores de corte da família de modos $LP_{m\ell}$ que está sendo alvo de interesse. Escolhendo-se convenientemente os valores dos números azimutal e radial do modo, m e ℓ , respectivamente, obtém-se o valor de V_c para o modo LP_{μ} . Além de ser bastante preciso e facilmente implementável em computador, este procedimento requer um tempo de computação extremamente pequeno, comparados aos métodos citados em parágrafos precedentes.

Calculado o valor inicial do raio do núcleo da fibra o programa parte, efetivamente, para a obtenção de valores da constante de propagação normalizada do modo fundamental, b , e de

suas derivadas com relação ao comprimento de onda, b' e b'' , necessários à resolução da equação (VI.14).

Para encontrar valores de b , b' e b'' , é necessário resolver, na ordem indicada, as equações diferenciais (VI.5), (VI.8) e (VI.10), respectivamente, impondo a cada uma delas as correspondentes condições estabelecidas pelas equações (VI.7), (VI.9) e (VI.11). Neste processo, utilizamos o método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem [48].

Colocando em linhas gerais, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é empregado na resolução de equações diferenciais do tipo :

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (\text{VI.18})$$

com condições iniciais especificadas por $x = x_0$ e $y = y_0$. A equação (VI.18) é resolvida através de uma fórmula de recorrência dada, no caso, por

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \quad (\text{VI.19})$$

com :

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2) \\ k_3 &= h f(x_i + h/2, y_i + k_2/2) \\ k_4 &= h f(x_i + h, y_i + k_3) \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

e $h = 1/N$. O parâmetro N é o número de divisões do intervalo de integração.

Para conhecer valores da constante de propagação normalizada do modo LP_{01} , parte-se de aproximações iniciais para b e para N e resolve-se a equação (VI.5) :

$$\frac{dG}{dR} = V^2 \delta f(R) - V^2(1-b) - \frac{G}{R} - G^2$$

com condições iniciais especificadas por :

$$G(R=0) = 0$$

e

$$\left. \frac{dG}{dR} \right|_{R=0} = [V^2 \delta f(0) - V^2(1-b)]/2$$

aplicando-se as fórmulas (VI.19) - (VI.20) no intervalo de integração $0 \leq R \leq 1$. Em $R = 1$, a função $G(R)$ deve satisfazer a condição :

$$G(R=1) = - \frac{W K_1(W)}{K_0(W)}$$

onde $W = V\sqrt{b}$ [ver equação (V.5)]. Se a aproximação inicial para b for tal que em $R = 1$ a condição não seja satisfeita para a precisão especificada, modifica-se o valor de N e repete-se o processo. Obtido um conjunto de valores de b , parte-se para o cálculo de um conjunto de valores de b' utilizando, nas equações (VI.8) e (VI.), procedimentos semelhantes aos já descritos. Conhecendo valores de b e b' , calcula-se b'' usando as equações (VI.10) - (VI.11). Na resolução das equações transcendentais envolvendo $G(R=1)$, $\dot{G}(R=1)$ e $\ddot{G}(R=1)$ e no cálculo de valores de $\hat{a}$ por (VI.14), utilizamos o método de Muller [23]. Em geral, obtemos uma precisão de 10^{-5} em todos os parâmetros calculados para valores de N variando entre 10 e 15.

Na próxima Seção, apresentamos resultados obtidos com o método utilizado.

VI.4 - RESULTADOS

Na Figura VI.1, apresentamos a listagem de uma saída típica do programa implementado. Os resultados são para uma fibra óptica com perfil parabólico de índice de refração constituída de 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 (núcleo) e 100 % SiO_2 fundido (casca) para o comprimento de onda de operação igual a 1,55 μm . São mostrados os valores do raio do núcleo da fibra, da frequência normalizada, do número de divisões do intervalo de integração, da constante de propagação normalizada, e suas derivadas primeira e segunda com relação ao comprimento de onda, e da dispersão total.

SINTESE DE FIBRAS OPTICAS MONOMODAIS NAO-HOMOGENEAS
METODO DA INTEGRACAO NUMERICA DA EQUACAO ESCALAR DE ONDA

COMPRIMENTO DE ONDA DE OPERACAO : 1.5500 MICROMETROS

VALOR DE CORTE, V_c , DO MODO LP(11) : 3.51870

RAIO NUCLEO	FREQ. NORM.	N	B	BL	B2L	DT[PS/(KM*NM)]
3.43	3.51870	11	.445534	-.297633	.141434	6.685774
3.33	3.41624	11	.430688	-.302125	.151212	5.894882
3.23	3.31377	11	.415166	-.306409	.161922	5.002352
3.13	3.21131	11	.398938	-.310410	.173653	3.996430
3.03	3.10884	11	.381971	-.314029	.186460	2.868777
2.93	3.00638	11	.364253	-.317186	.200541	1.594892
2.83	2.90392	11	.345753	-.319699	.215875	.173075
2.73	2.80145	11	.326456	-.321467	.232617	-1.416924
2.63	2.69899	11	.306364	-.322266	.250820	-3.186979
2.53	2.59652	11	.285476	-.321883	.270512	-5.145645
2.43	2.49406	11	.263823	-.320041	.291677	-7.298871
2.33	2.39159	11	.241451	-.316436	.314227	-9.645115
2.23	2.28913	11	.218439	-.310705	.337941	-12.169372
2.13	2.18667	11	.194907	-.302433	.362393	-14.835278
2.03	2.08420	11	.171029	-.291178	.386907	-17.579374
1.93	1.98174	11	.147043	-.276452	.410344	-20.286880
1.83	1.87927	11	.123266	-.257798	.431017	-22.780451
1.73	1.77681	11	.100109	-.234838	.446433	-24.789700
1.63	1.67434	11	.078086	-.207400	.453115	-25.927292
1.53	1.57188	12	.057807	-.175710	.446546	-25.678062
1.43	1.46942	11	.039946	-.140641	.421462	-23.426023
1.33	1.36695	13	.025159	-.104008	.373114	-18.590700
1.23	1.26449	12	.013950	-.068745	.300071	-10.943129
1.13	1.16202	12	.006466	-.038612	.208603	-1.111674
1.03	1.05956	13	.002314	-.017046	.115974	9.015923
.93	.95709	12	.000565	-.005230	.045594	16.802151
.83	.85463	12	.000077	-.000912	.010378	20.731098
.73	.75217	14	.000004	-.000060	.000922	21.792610

Figura VI.1 - Valores obtidos com a utilização do programa para síntese de fibras monomodais.

Função de perfil de índice : $f(R) = R^2$

N é o número de divisões do intervalo de integração para o qual atinge-se uma precisão de 10^{-5} nos resultados apresentados.

B, BL, B2L representam, respectivamente, a constante de propagação normalizada e suas derivadas primeira e segunda com relação ao comprimento de onda.

Na Tabela VI.1, apresentamos alguns valores de raios de núcleo de dispersão total nula em comprimentos de onda de operação específicos. Consideramos que o perfil de índice de refração das fibras ópticas seja descrito por funções analíticas típicas. Na inicialização de todos os procedimentos computacionais, utilizamos os valores de corte do modo LP_{11} , V_c , calculado pelo método descrito em [43] e apresentado, também, na Tabela VI.1. Consideramos fibras ópticas com núcleo constituído por 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2 e com casca constituída por 100 % SiO_2 fundido. No caso de fibras com perfil de índice apresentando reentrância gaussiana, utilizamos para os parâmetros p e d , respectivamente, largura e profundidade da reentrância, o valor 0,4.

No caso das fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau, valores para a fibra (a) da Tabela VI.1, podemos observar que os resultados obtidos são idênticos aos encontrados utilizando a equação característica aproximada, conforme pode ser verificado pela Tabela V.2. Este fato, por si, comprova a exatidão dos procedimentos utilizados no Capítulo V. Novamente observamos que, para um comprimento de onda de operação igual a $1,45 \mu m$, apenas um valor de raio de núcleo de dispersão total nula foi obtido.

Quando consideramos o perfil de índice em degrau com uma reentrância gaussiana, valores para a fibra (b) da Tabela VI.1, houve o surgimento de dois valores de raio de núcleo de dispersão total nula para todos os valores de comprimentos de onda de operação utilizados. Este fato deveu-se ao pequeno incremento obtido no valor de corte do modo LP_{11} (passou de $V_c = 2,40483$ na fibra degrau para $V_c = 2,44679$ na fibra degrau com reentrância gaussiana). Este fato demonstra a importância que o cálculo do valor de corte do modo imediatamente superior ao modo LP_{01} possui no processo que implementamos.

Os mesmos comentários do parágrafo precedente permanecem válidos para as fibras (d) e (e), respectivamente, fibras com perfil de índice parabólico e parabólico com reentrância gaussiana.

A fibra com perfil triangular, fibra (c), foi a que apresentou, para os comprimentos de onda de operação utilizados, valores de raios mais elevados. Isto é devido ao fato de seu modo de ordem imediatamente superior ao modo LP_{01} possuir um valor de corte elevado. Valores elevados de raio de dispersão total nula tornam estes tipos de fibras preferenciais por apresentarem maior estabilidade do ponto de vista mecânico.

Utilizamos, ainda, o método de síntese descrito neste Capítulo para comprovar a precisão dos resultados obtidos através

	(a)		(b)		(c)		(d)		(e)	
	$\hat{a}$	$V(\hat{a})$	$\hat{a}$	$V(\hat{a})$	$\hat{a}$	$V(\hat{a})$	$\hat{a}$	$V(\hat{a})$	$\hat{a}$	$V(\hat{a})$
1,45	-	-	2,2001	2,3989	-	-	-	-	2,9720	3,2406
	0,6702	0,7308	0,7022	0,7656	1,2525	1,3656	0,9807	1,0693	1,0839	1,1819
1,50	2,1070	2,2257	2,0674	2,1839	3,5759	3,7773	3,0447	3,2162	2,7534	2,9085
	0,7150	0,7552	0,7506	0,7929	1,3531	1,4293	1,0513	1,1105	1,1692	1,2351
1,55	2,0125	2,0621	1,9716	2,0201	3,2141	3,2933	2,8227	2,8922	2,5843	2,6480
	0,7598	0,7785	0,7995	0,8192	1,4601	1,4960	1,1234	1,1511	1,2593	1,2903
V_c	2,40483		2,44679		4,38351		3,51870		3,69891	

Tabela VI.1 - Valores de raios de núcleo para transmissão com dispersão total nula, $\hat{a}$, e frequência normalizada, $V(\hat{a})$, em função do comprimento de onda de operação, λ , e frequência de corte do modo LP_{11} , V_c , para fibras ópticas monomodais com perfis de índices típicos. A maioria dos valores foi obtida com N variando entre 10 e 15 [ver descrição do procedimento utilizado no texto do trabalho]. Os valores de $\hat{a}$ são dados em micrometros.

Material do núcleo : 13,5 % GeO_2 - 86,5 % SiO_2

Material da casca : 100 % SiO_2 fundido.

Perfis de índices :

- (a) - degrau
- (b) - degrau com reentrância gaussiana
- (c) - triangular
- (d) - parabólico
- (e) - parabólico com reentrância gaussiana

Nas fibras com reentrância gaussiana, utilizamos
 $p = d = 0,4$.

da aplicação do método do elemento finito e de L-splines cúbicas, Capítulo IV, Figura IV.5. Para o comprimento de onda de operação igual a $1,6943 \mu\text{m}$, a fibra com perfil triangular apresentou dois valores de raio de núcleo : $a = 2,4839 \mu\text{m}$ [$V(a) = 2,3459$] e $a = 1,9006 \mu\text{m}$ [$V(a) = 1,7950$]. Para o comprimento de onda de operação igual a $1,6630 \mu\text{m}$, a fibra com perfil parabólico apresentou $a = 2,4844 \mu\text{m}$ [$V(a) = 2,3864$] e $a = 1,3029 \mu\text{m}$ [$V(a) = 1,2515$]. Em $1,5705 \mu\text{m}$, a fibra com perfil parabólico com reentrância gaussiana apresentou $a = 2,5222 \mu\text{m}$ [$V(a) = 2,5532$] e $a = 1,2985 \mu\text{m}$ [$V(a) = 1,3145$]. Podemos observar que, tomando os maiores valores de raios apresentados com arredondamento na segunda casa decimal, teremos os mesmos valores de raio de núcleo utilizado na construção da Figura IV.5. Este fato demonstra a precisão dos dois métodos, o de análise e o de síntese, que implementamos.

Os procedimentos apresentados, tanto o de análise quanto o de síntese, são gerais. Isto significa que qualquer tipo de perfil de índice e qualquer combinação de composição química dos materiais que constituirão o núcleo e a casca da fibra podem ser utilizados. Esta flexibilidade permite que se faça, a nível de projeto, exaustivas investigações, do ponto de vista da dispersão total, das características de propagação da fibra que se quer construir. A operação do guia construído se dará na região monomodal, com dispersão total nula, no comprimento de onda da fonte óptica disponível.

CONCLUSÕES

Fibras ópticas monomodais, tipicamente utilizadas em comunicações digitais sobre longas distâncias, devem operar no comprimento de onda de dispersão total nula. Esta exigência, quando cumprida, permitirá que a fibra trabalhe com sua capacidade máxima e fará com que os pulsos que propagam-se no seu interior não sofram distorções degradando a qualidade do sinal transmitido. A dispersão é um fenômeno que depende da composição química dos materiais que constituem o núcleo e a casca, do perfil de índice de refração e da geometria da fibra óptica.

No decorrer do nosso trabalho, apresentamos dois procedimentos capazes de caracterizar uma fibra óptica monomodal sob o ponto de vista da dispersão total nula. O primeiro, parte do conhecimento do guia óptico e estabelece em qual comprimento de onda ele deve operar. Desta maneira, resolve-se, caracteristicamente, um problema de análise: conhecida a fibra, encontra-se a fonte ótima para a sua operação. O segundo, inverso ao descrito anteriormente, parte do conhecimento da fonte óptica disponível e, para uma fibra com função de perfil de índice pré-estabelecida, calcula valores de raio de núcleo. Estes valores de raios são tais que, no comprimento de onda da fonte disponível, permite a fibra operar na região monomodal com dispersão total nula. Este é um processo típico de síntese de uma estrutura.

No caso da análise de fibras homogêneas, adotamos um método baseado na equação característica aproximada. Esta equação é obtida da equação característica exata através da aplicação da aproximação do guiamento fraco. Adotamos esta equação devido à facilidade de tratamento analítico, pela rapidez de seus processos e pela precisão de seus resultados. No caso das fibras ópticas não-homogêneas, adotamos o método do elemento finito, aplicado a um problema variacional, combinado com uma técnica de aproximação polinomial baseado em L-splines cúbicas. A técnica das L-splines cúbicas foi utilizada com o objetivo de diminuir o esforço analítico/computacional até então empregado no cálculo de valores das derivadas primeira e segunda da constante de propagação do modo fundamental nestas estruturas. Este cálculo é fundamental na teoria de dispersão em fibras ópticas. Os procedimentos de análise foram implementados com o objetivo de terem seus resultados comparados com os procedimentos de síntese desenvolvidos.

No caso da síntese de fibras monomodais homogêneas, empregamos dois procedimentos. Um deles, baseado em uma aproximação assintótica para o parâmetro radial normalizado do núcleo da fibra. Este procedimento, apesar de ser extremamente simples, pois não utiliza funções matemáticas especiais, pode

levar a resultados não condizentes. O outro procedimento, baseado na equação característica aproximada apresentou resultados bastante satisfatórios. No caso da síntese de fibras ópticas monomodais não-homogêneas, adotamos um método de integração numérica da equação escalar de onda. Este método é preciso e facilmente implementável em computadores.

Apesar de termos utilizado fibras com perfis descritos por funções analíticas típicas, todos os métodos apresentados podem ser utilizados em casos práticos com pequenas modificações pois pode-se ter conhecimento dos perfis de índice de refração das fibras a partir de medidas efetuadas na preforma que lhe dará origem.

Os resultados que obtivemos ensejam a extensão dos trabalhos desenvolvidos para levar em consideração outros efeitos. Dentre eles, podemos citar a retirada da restrição de guiamento fraco, que leva a tratamento do problema através da equação vetorial de onda, a inclusão de não-homogeneidades generalizadas, e a consideração de possíveis modificações da geometria da fibra por tensões, acarretando problemas de polarização.

REFERÊNCIAS

- [1] - S.I. Hosain, E.K. Sharma, A. Sharma, A.K. Ghatak, "Analytical approximations for propagation characteristics of dual-mode fibers", *IEEE Journal of Quantum Elect.*, Vol. 19, No.1, pp. 15-21, Janeiro de 1983.
- [2] - D. Marcuse, "Interdependence of waveguide and material dispersion", *Appl. Optics*, Vol. 18, No. 7, pp. 2930-2932, Setembro de 1979.
- [3] - P.S.M. Pires, D.A. Rogers, "Non-additivity of waveguide and material dispersion in single-mode step-index optical fibers : exact analysis", *URSI - National Radio Science Meeting*, pp. 22, Maio de 1982.
- [4] - C.T. Chang, "Minimum dispersion in single-mode step-index optical fibers", *Appl. Optics*, Vol. 18, No.4, pp. 2516-2522, Julho de 1979.
- [5] - C.T. Chang, "Minimum dispersion at 1.55 μm for single-mode step-index fibres", *Elect. Letters*, Vol. 15, No. 23, pp. 765-767, Novembro de 1979.
- [6] - C.R. South, "Total dispersion in step-index monomode fibres", *Elect. Letters*, Vol. 15, No. 13, pp. 394-395, Junho de 1979.
- [7] - R.A. Sammut, "Analysis of approximation for the mode dispersion in monomode fibres", *Elect. Letters*, Vol. 15, No. 19, pp. 590-591, Setembro de 1979.
- [8] - P.S.M. Pires, Análise da dispersão total em fibras ópticas monomodais com perfil de índice de refração em degrau sem o uso de aproximações assintóticas, *Tese de Mestrado, DEE - FEC - UNICAMP*, Agosto de 1980.
- [9] - P.S.M. Pires, D.A. Rogers, E.J. Bochove, R.F. Souza, "Prediction of laser wavelength for minimum total dispersion in single-mode step-index fibers", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, Vol. 30, No. 2, pp. 121-140, Fevereiro de 1982.
- [10] - M. Miyagi, S. Nishida, "An approximate formula for describing dispersion properties of optical dielectric slab and fiber waveguides", *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 69, No. 2, pp. 291-293, Fevereiro de 1979.
- [11] - R.F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Company, Capítulo 1, 1961.
- [12] - D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Van Nostrand Reinhold Co., Capítulos 1 e 8, 1972.
- [13] - T. Okoshi, *Optical Fibers*, Academic Press, Inc., Capítulo 5, 1982.

- [14] - D. Marcuse, "The effect of the V_n term on the modes of an optical square-law medium", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, pp. 958-960, Setembro de 1973.
- [15] - C.N. Kurtz, W. Streifer, "Guided waves in inhomogeneous focusing media - Part I : Formulation, solution for quadratic inhomogeneity", *IEEE Transaction on Microwave Theory and Tech.*, Vol. 17, No. 1, pp. 11-15, Janeiro de 1969.
- [16] - E. Snitzer, "Cylindrical dielectric waveguide modes", *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 51, pp. 491-498, 1961.
- [17] - D. Gloge, "Weakly guiding fibers", *Appl. Optics*, Vol. 10, pp. 2252-2258, Outubro de 1971.
- [18] - Y. Kokubun, K. Iga, "Mode analysis of graded-index optical fibers using a scalar wave equation including gradient-index terms and direct numerical integration", *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 70, No. 4, pp. 388-394, Abril de 1980.
- [19] - R.G. Olsen, D.A. Rogers, *Propagation in Optical Fibers, Fiber Optics*, James C. Daly (editor), Capítulo 3, CRC Press, Inc., 1984.
- [20] - J.W. Fleming, "Material and mode dispersion in GeO_2 , B_2O_3 , SiO_2 glasses", *J. Am. Cer. Soc.*, Nos. 11-12, pp. 503-507, Novembro-Dezembro de 1976.
- [21] - J.W. Fleming, "Material dispersion in lightguide glasses", *Elect. Letters*, Vol. 14, No. 11, pp. 326-328, Maio de 1978.
- [22] - M. Abramowitz e I.A. Stegun (Eds.) *Handbook of Mathematical Functions*, AMS 55, National Bureau of Standards, USA, Dezembro de 1972.
- [23] - IBM Application Program, *Scientific Subroutine Package (SSP)*, H20-0205-3, System/360, Programmer's Manual, 1968.
- [24] - K. Okamoto, "Comparison of calculated and measured impulse response of optical fibers", *Appl. Optics*, Vol. 18, No. 13, pp. 2199 - 2206, Julho de 1979.
- [25] - K. Okamoto, T. Edahiro, A. Kawana, T. Miya, "Dispersion minimization in single-mode fibres over a wide spectral range", *Elect. Letters*, Vol. 15, No. 22, pp. 729 - 731, Outubro de 1979.
- [26] - K. Okamoto, T. Miya, "Zero total dispersion in single-mode optical fibres over an extended spectral range", *Radio Science*, Vol. 17, No. 1, pp. 31 - 36, Janeiro - Fevereiro de 1982.
- [27] - P.S.M. Pires, A.J. Giarola, R.F. Souza, *Dispersão total em*

fibras ópticas monomodais com perfil arbitrário de índice de refração utilizando o método do elemento finito e aproximações por L-splines cúbicas, Relatório Técnico RT-125, Contrato TELEBRAS 024A/83, Fevereiro de 1985.

- [28] - L.V. Kantorovich, V.I. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience Pub. Inc., Capítulo IV, 1964.
- [29] - T.A. Lenahan, "Calculation of modes in an optical fiber using the finite element method and EISPACK", *Bell Syst. Tech. Journal*, Vol. 62, pp. 2663 - 2694, Novembro de 1983.
- [30] - B.T. Smith, J.M. Boyle, e outros, *Matrix Eigensystem Routines - EISPACK guide*, Springer-Verlag, Vol. 6, 1976.
- [31] - G.E. Peterson, A. Carnevale, U.C. Paack, D.W. Barreman, "An exact solution to Maxwell's equations for lightguides", *Bell Syst. Tech. Journal*, Vol. 59, No. 7, pp. 1175 - 1196, Setembro de 1980.
- [32] - E.K. Sharma, A. Sharma, I.C. Goyal, "Propagation characteristics of single mode optical fibers with arbitrary index profiles : a simple numerical approach", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, Vol. MTT-30, No. 10, pp. 1472 - 1477, Outubro de 1982.
- [33] - B.P. Pal, A. Kumar, A.K. Ghatak, "Effect of the refractive index dip on zero total dispersion wavelength in a single mode fibre", *Elect. Letters*, Vol. 16, pp. 505 - 507, Junho de 1980.
- [34] - R.A. Sammut, C. Pask, "Simplified numerical analysis of optical fibres and planar waveguides", *Elect. Letters*, Vol. 17, pp. 105-106, Fevereiro de 1980.
- [35] - C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, 1978.
- [36] - P.M. Prenter, *Splines and Variational Methods*, John Wiley & Sons, Capítulo 4, 1975.
- [37] - S.D. Conte, *Elementos de Análise Numérica*, Editora Globo, Porto Alegre, Capítulos 2 e 3, 1971.
- [38] - W.E. Milne, *Cálculo Numérico*, 2a Edição, Editora Polígono, São Paulo, Capítulo IV, 1968.
- [39] - C.B. Moler, *Linear Equation Solver, Algoritmo 423 em Collected ACM Algorithms*, Association for Computing Machinery, 1975.
- [40] - H.D. Rudolph, E.G. Neumann, "Approximations for the eigenvalues of the fundamental mode of a step index glass fiber waveguide", *Nachrichtentechn. Z.*, Vol. 4, pp. 328 -

329, 1976.

- [41] - P.S.M. Pires, D.A. Rogers, "Single-mode fiber design for minimum dispersion", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, Vol. 31, No. 11, pp. 959 - 962, Novembro de 1983.
- [42] - P.S.M. Pires, A.J. Giarola, R.F. Souza, "Two core radii for minimum total dispersion in single-mode step-index optical fibers", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, Vol. MTT-34, No. 4, pp. 453 - 457, Abril de 1986
- [43] - J.P. Meunier, J. Pigeon, J.N. Massot, "LP₁₁ mode cutoff : a simplified numerical approach", *Opt. Quantum Electronics*, Vol. 16, pp. 327 - 330, 1984.
- [44] - E.K. Sharma, I.C. Goyal, A.K. Ghatak, " Calculation of cutoff frequencies in optical fibers for arbitrary profiles using the matrix method", *IEEE J. Quantum Electronics*, Vol. 17, No. 12, pp. 2317 - 2321, Dezembro de 1981.
- [45] - K. Hotate, T. Okoshi, "A formula giving cutoff frequencies of modes in a optical fiber having arbitrary refractive-index profile", *IECE Japan*, Vol. 62, No. 1, pp. 1 - 6, Janeiro de 1979.
- [46] - N. Shibamura, H. Onodera, I. Arai, M. Nakajima, J. Ikenoue, "Analysis of graded-index fibers by means of the transverse resonance method", *Journal of Opt. Soc. America*, Vol 72, pp. 1502 - 1505, Novembro de 1982.
- [47] - K. Oyamada, T. Okoshi, "High-accuracy numerical data on propagation characteristics of α -power graded-core fibers", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, Vol. 28, pp. 1113 - 1118, Outubro de 1980.
- [48] - A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill Co., Capítulo 5, pag. 200, 1965.