Marco Antonio Miguel Miranda

Radar Meteorológico com Antenas Fixas: Proposta, Modelagem e Análise de Desempenho

Campinas
2013

Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Marco Antonio Miguel Miranda

Radar Meteorológico com Antenas Fixas: Proposta, Modelagem e Análise de Desempenho

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computacão da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Orientador: José Cândido Silveira Santos Filho

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Marco Antonio Miguel Miranda, e orientada pelo Prof. Dr. José Cândido Silveira Santos Filho

Campinas
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

M672r

Miranda, Marco Antonio Miguel, 1987-
Radar meteorológico com antenas fixas: proposta, modelagem e análise de desempenho / Marco Antonio Miguel Miranda. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: José Cândido Silveira Santos Filho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Radar meteorológico. 2. Correlação (Estatística). 3. Detecção de sinais. I. Santos Filho, José Cândido Silveira,1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Meteorological radar based on fixed Antennas: proposal, modeling and performance analysis
Palavras-chave em inglês:
Meteorological radar
Correlation
Signal detection
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática
Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica
Banca examinadora:
José Cândido Silveira Santos Filho [Orientador]
David Fernandes
Renato da Rocha Lopes
Data de defesa: 29-05-2013
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Marco Antonio Miguel Miranda

Data da Defesa: 29 de maio de 2013

Título da Tese: "Radar Meteorológico com Antenas Fixas: Proposta, Modelagem e Análise de Desempenho"

Prof. Dr. José Cândido Silveira Santos Filho (Presidente): ______________________

Prof. Dr. David Fernandes: David Fernandes ______________________

Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes: Renato Lopes ______________________

À minha esposa Lorraine.

Agradecimentos

Agradeço,

a Deus pela força nos momentos mais difíceis.

a toda a minha família pelo suporte. Especialmente à minha esposa Lorraine, pela paciência e carinho. Aos meus pais, Antônio e Sirlei, pelos bons conselhos e pela dedicação em todos os anos de minha vida.

à Orbisat Indústria S.A, na pessoa do Dr. João Moreira, pela confiança e oportunidade de participação em um trabalho tão desafiador.

aos professores Dr. Gustavo Fraidenraich, Dr. Michel Yacoub e, principalmente, ao meu orientador Dr. José Cândido, pela dedicação e entusiasmo na orientação desse trabalho.

a todos os meus colegas de trabalho da Orbisat. Especialmente ao Dr. Yusef Cáceres e Higor Cioqueta, pelas discussões técnicas.

aos meus amigos.

Guia-me na tua verdade, e ensina-me, pois tu és o Deus da minha salvação; por ti estou esperando todo o dia.

Salmos 25:5

Resumo

Este trabalho analisa a viabilidade de uma nova proposta de radar meteorológico utilizando duas antenas fixas e idênticas, destinado a detectar e localizar fenômenos meteorológicos como chuva e nuvem. Uma das antenas transmite o sinal e recebe os ecos provenientes dos alvos de interesse, caracterizando um radar monoestático, enquanto que a segunda antena apenas recebe os ecos, caracterizando um radar biestático. Para o desenvolvimento de um modelo realístico, medidas de campo utilizando este radar são realizadas, para que o sinal recebido seja caracterizado estatisticamente. Com o modelo estabelecido, é então deduzida uma expressão analítica e geral para o coeficiente de correlação entre os sinais recebidos pelas duas antenas, em função de parâmetros físicos relevantes, tais como a distância entre as antenas (linha de base), a banda do sinal transmitido e a diretividade da antena. Essa análise serve como base para o projeto de um detector para o radar, sob o critério de razão de verossimilhança, em que se procura maximizar a probabilidade de detecção a partir de uma dada probabilidade de falso alarme. No projeto, são evidenciadas a variável e a regra de decisão em função de uma série de amostras dos sinais recebidos. Por fim, apresenta-se uma análise do desempenho do detector projetado para diferentes valores de coeficiente de correlação entre os sinais.

Palavras-chave: radar meteorológico, coeficiente de correlação, detector por razão de verossimilhança.

Abstract

This work analyzes the feasibility of a new proposal for meteorological radars using two identical fixed spaced antennas, aimed at detecting and locating meteorological phenomena such as rain and clouds. One of the antennas transmits the signal and receives its echoes from the scatterers, characterizing a monostatic radar, whereas the other antenna only receives these echoes, characterizing a bistatic radar. In order to develop a realistic model, field measurements using this setup are carried out, so that the received signal can be statistically characterized. From this model, it is then derived a general analytical expression for the correlation coefficient of the signals received by the two antennas, as a function of relevant physical parameters, namely distance between antennas (baseline distance), signal bandwidth, and antenna directivity. This analysis is used for the design of a detector for the proposed radar, based on the likelihood ratio method, which intends to maximize the detection probability for a given false-alarm probability. In the design process, the decision variable and the decision rule are properly defined in terms of the set of signals samples. Finally, the performance analysis of the detector is presented for different values of the correlation coefficient between the signals.

Key-words: meteorological radar, correlation coefficient, likelihood-ratio detector.

Lista de Figuras

Lista de Acrônimos e Símbolos

CAD	Conversão Analógica-Digital
CDA	Conversão Digital-Analógica
CFAR	*Constant False Alarm Rate*
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FRP	Frequência de Repetição de Pulsos
IEEE	*Institute of Electric and Electronic Engineers*
IRP	Intervalo de Repetição de Pulsos
LNA	*Low Noise Amplifier*
RADAR	Radio Detection and Ranging
v.a.	variável aleatória
Δf	Largura de banda do sinal de transmissão
$D(\theta)$	Função diretividade da antena
$U(\theta)$	Potência irradiada em uma determinada direção
U_0	Potência média irradiada em todas as direções
$G(\theta)$	Função ganho da antena
G_0	Ganho máximo da antena
f_{efic}	fator de eficiência de uma antena
Θ_1	Abertura da antena em azimute
Θ_2	Abertura da antena em elevação
θ_{beam}	Largura de feixe de uma antena em uma determinada direção
N_e	Número de elementos de um arranjo de antenas
β	constante de propagação
d	distância entre as antenas de um arranjo de antenas
ϵ	diferença de fase entre elementos adjacentes de um arranho de antenas
θ	Direção de azimute
$u(\cdot)$	função degrau
$S(t)$	Sinal contínuo no tempo
$S^*(t)$	Sinal conjugado
$s_e(t)$	Sinal de entrada
$s_s(t)$	Sinal de saída
$S_p(t)$	Pulso de transmissão
f_0	frequência de referência
$S[k]$	Sinal discreto no tempo

K_f	Taxa de variação da frequência do pulso ao longo do tempo
$A(t)$	Função amplitude pelo tempo contínuo
$A[k]$	Função amplitude pelo tempo discreto
$Z[k]$	Representação complexa da reflexão de uma única partícula
$\Phi[k]$	Função fase pelo tempo discreto
τ_p	Comprimento do pulso
c	Velocidade da luz
Δs	Distância da zona cega do radar
f_s	Frequência de amostragem
D	Tamanho da antena
λ	Comprimento de onda
j	$\sqrt{-1}$
$R[k]$	Representação discreta temporal da distância de uma partícula com relação ao radar
k	Tempo discreto
T	Intervalo de tempo entre amostras
V	Velocidade de uma partícula
N_a	Número de amostras de um sinal
Z_l	Representação complexa de uma partícula
A_l	Representação da amplitude de uma partícula
Φ_l	Representação da fase total de uma partícula
R_l	Distância de uma partícula com relação ao radar
Υ_l	Fase associada à característica intrínseca de cada partícula
N_p	Número de partículas
f_r	Frequência recebida
f_t	Frequência transmitida
f_d	Frequência doppler
v_r	Velocidade relativa do alvo com relação ao radar
λ_t	Comprimento de onda do sinal de transmissão
$n_e(t)$	Ruído aditivo gaussiano branco na entrada
$h(t)$	Resposta ao impulso
$n_s(t)$	Ruído aditivo gaussiano branco na saída
δt	Resolução temporal
δ	Resolução em alcance
t_0	Instante inicial de recepção do sinal refletido por um alvo
B_a	Comprimento da linha de base entre duas antenas em azimute
B_e	Comprimento da linha de base entre duas antenas em elevação
Tx	Rransmissão
Rx	Recepção
θ_{res}	Resolução angular unilateral
B	Comprimento da linha de base entre duas antenas quaisquer
b	Comprimento da linha de base entre duas antenas quaisquer normalizado pelo comprimento de onda
f_0	Frequência central de operação (portadora)
θ	Posição angular de uma partícula

R	Distância em alcance de uma partícula com relação ao centro de coordenadas do sistema
R_1	Distância em alcance de uma partícula com relação a antena 1
R_2	Distância em alcance de uma partícula com relação a antena 2
Δr	Diferença de alcance de uma partícula percebida duas antenas
$\Delta\phi$	Diferença de fase de uma partícula percebida duas antenas
ρ	Coeficiente de correlação
Z_i	Representação complexa de uma partícula na região de intersecção
Θ_i	Posição em azimute de uma partícula na região de intersecção
Z_{1k}	Representação complexa de uma partícula fora da região de intersecção mas percebida pela antena 1
Θ_{1k}	Posição em azimute de uma partícula fora da região de intersecção mas percebida pela antena 1
Z_{2k}	Representação complexa de uma partícula fora da região de intersecção mas percebida pela antena 2
Θ_{2k}	Posição em azimute de uma partícula fora da região de intersecção mas percebida pela antena 2
S_1	Sinal complexo recebido pela antena 1
S_2	Sinal complexo recebido pela antena 2
$N_\cap$	Número de partículas dentro da região de intersecção
N_1	Número de partículas fora da região de intersecção mas percebidas pela antena 1
N_2	Número de partículas fora da região de intersecção mas percebidas pela antena 2
$\mathrm{E}\{\cdot\}$	Operador esperança
$\mathrm{VAR}\{\cdot\}$	Operador variância
$\mathrm{COV}\{\cdot\}$	Operador covariância
$\mathrm{P}\{\cdot\}$	Probabilidade de um certo evento ocorrer
S_{qp}	Sinal complexo recebido pela antena p no instante q
X_{qp}	Parte real do sinal complexo recebido pela antena p no instante q
Y_{qp}	Parte imaginária do sinal complexo recebido pela antena p no instante q
I	Espaço amostral que representa a região de intersecção
$\Theta_{\cup 1}$	Posição em azimute de uma partícula percebida pela antena 1
$\Theta_{\cup 2}$	Posição em azimute de uma partícula percebida pela antena 2
P_D	Probabilidade de Detecção
P_{FA}	Probabilidade de Falso Alarme
γ	Limiar de decisão
$\underline{x}$	Vetor conjunto de amostras
$\Lambda(\underline{s})$	Função razão de verossimilhança
$\overline{s}_n$	Variável de decisão
K	Coeficiente de correlação conhecido a ser detectado
n	Número de amostras utilizadas para a detecção
σ_v	Desvio padrão da velocidade de um fenômeno
τ	Tempo de correlação de um determinado fenômeno

Lista de Publicações e Submissões

Publicações

M. A. M. Miranda, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, M. D.Yacoub, J. R. Moreira Neto e Y. C. Zuñiga, "A Novel Meteorological Radar Scheme based on the Correlation between Fixed Antennas: a First Look", em *Proc. XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2012*, Brasília, Distrito Federal, Brasil.

M. A. M. Miranda, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, J. R. Moreira Neto e Y. C. Zuñiga, "On the Feasibility of Meteorological Radars Using Static Antennas", em *Proc. IEEE 23rd International Symposium on Personal Indoor and Mobile Radio Communications - PIMRC,2012*, pp 1751-1756, Sydney, Austrália.

Submissões

M. A. M. Miranda, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, J. R. Moreira Neto e Y. C. Zuñiga, "Correlation of Signals at Spaced Antennas in Fixed Meteorological Radars", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 2012, aceito para publicação.

M. A. M. Miranda, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, M. D.Yacoub, J. R. Moreira Neto e Y. C. Zuñiga, "Radar Meteorológico com Antenas Fixas: Projeto e Análise de Detector Ótimo", em *Proc. XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT 2013*, Fortaleza, Brasil, submetido para publicação.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, as aplicações na área de radares têm avançado consideravelmente, e grande parte desse esforço tem se manifestado em um crescente desenvolvimento tecnológico na área das ciências meteorológicas [1]. A observação de fenômenos atmosféricos utilizando equipamentos baseados na emissão e recepção de ecos de sinal eletromagnético teve seu início na década de 40 [1], embora esse tipo de tecnologia para a detecção, rastreamento e identificação de aeronaves na área de defesa remonte a décadas anteriores [2]. Desde então, a busca por qualidade e precisão das medidas e processamento destas para previsão e identificação de fenômenos, que incluem desde chuvas fracas até tempestades severas, se tornou uma necessidade.

O conhecimento e a observação dos fenômenos atmosféricos são bastante úteis para a criação e o aprimoramento de sistemas de predição. Por exemplo, tais sistemas podem ser utilizados na prevenção de desastres naturais, em benefício do controle de tráfego aéreo, no estudo de fenômenos macro como o aquecimento global, dentre outros. Quanto maior a quantidade de dados adquiridos pelos instrumentos de análise, melhores e mais eficientes se tornam os modelos numéricos de predição. Nesse sentido, os radares meteorológicos integram as observações da atmosfera do ponto de vista do solo e são muito importantes para o aperfeiçoamento dos modelos chamados de curto prazo [3, 4], nos quais, a partir de observações de curta distância (máximo de 100km a 400km), se torna possível determinar o desenvolvimento de fenômenos meteorológicos nos próximos minutos ou horas, tendo como referência registros de análises anteriores [5].

O termo RADAR é um acrônimo do inglês para *Radio Detection and Ranging* e denota uma técnica em que uma onda eletromagnética é emitido por um sistema transmissor e as reflexões dessa mesma onda são recebidas por um sistema receptor. Essas reflexões podem ser resultado da interação da onda eletromagnética com objetos, seres e fenômenos a serem caracterizados. A princípio, o conhecimento da posição das antenas transmissora e receptora, da potência e fase do sinal transmitido, combinados à amplitude e fase do feixe recebido, após o devido processamento, são suficientes para determinar a posição, o formato, o tamanho e até a velocidade de uma superfície refletora ou um alvo qualquer [6].

1.1 Objetivos e Contribuições

Os radares meteorológicos disponíveis no mercado possuem um custo elevado, inviabilizando em certos casos a aquisição desses dispositivos por prefeituras de pequenas cidades, por exemplo. Diante disso, a principal motivação dessa dissertação é propor um radar de baixo custo utilizando duas antenas estáticas para detecção de fenômenos como nuvem e chuva, e investigar a viabilidade desse sistema. O radar é proposto com determinados requisitos e testes preliminares são realizados em diferentes cenários atmosféricos. A observação dos dados brutos obtidos desses testes fornece as estatísticas necessárias para a elaboração de um modelo probabilístico genérico para o sistema proposto, o qual é utilizado como base para todo o restante do trabalho.

A partir do modelo proposto são determinados os principais parâmetros do radar: resolução em alcance e resolução angular. Para esta última é encontrada uma expressão baseada na geometria do sistema. Além disso, é investigado como os principais parâmetros físicos do radar, como a distância entre as antenas, a largura de banda do sinal transmitido, e a largura e formato do feixe da antena, influenciam no coeficiente de correlação entre os sinais recebidos por duas antenas estáticas. Como detalhado no capítulo 3, tal coeficiente é crucial para o desempenho do radar proposto. Para este caso foi deduzida uma expressão analítica geral, inédita na literatura, para o coeficiente de correlação em função dos principais parâmetros físicos já citados e também da função densidade de probabilidade de posição das partículas de nuvem ou chuva, bem como da distribuição de potência dessas partículas ao longo da região observada.

Os sinais recebidos pelas duas antenas são ecos causados por uma grande quantidade de partículas que compõem um fenômeno meteorológico. Como as duas antenas sempre observam uma região comum, a tarefa é projetar um algoritmo que possa determinar, a partir dos sinais recebidos, se há ou não nuvem ou chuva nessa região. Tal algoritmo deve cumprir dois requisitos básicos: (i) garantir uma probabilidade mínima de detectar um alvo existente (probabilidade de detecção) e (ii) uma probabilidade máxima de detectar indevidamente um alvo inexistente (probabilidade de falso alarme). Para tanto, utiliza-se a teoria de teste de hipóteses através do critério por razão de verossimilhança. Assim, com base no modelo probabilístico desenvolvido anteriormente, definem-se as hipóteses a serem testadas, bem como se determinam a variável de decisão e a regra de decisão. A partir do teste de hipóteses é então verificado o desempenho do sistema proposto, em termos de probabilidade de detecção e de falso alarme. Mostra-se que tal desempenho depende essencialmente do coeficiente de correlação já obtido para os sinais das duas antenas. Determina-se então o número de amostras de sinal necessárias para alcançar certas probabilidades de detecção e falso alarme especificadas. O projeto e análise desse detector para o modelo de radar proposto é também inédito na literatura.

1.2 Estrutura da Dissertação

Essa dissertação está estruturada da seguinte forma:

Capítulo 2 Apresentação dos conceitos básicos de radar, incluindo classificações e técnicas de processamento. São detalhados os métodos de compressão de pulso, detecção e filtragem. Além disso são revisitados alguns dos principais tipos de radar meteorológico encontrados na literatura atualmente.

Capítulo 3 Proposta de um radar meteorológico utilizando duas antenas estáticas e análise de dados reais obtidos a partir desse radar. Essa caracterização envolve a identificação das funções densidade de probabilidade das componentes em fase e quadratura dos sinais recebidos ou, equivalentemente de sua amplitude e fase, observadas em ecos originados de regiões com ou sem nuvens. Baseado nessa análise, é elaborado e apresentado um modelo probabilístico para os sinais recebidos pelas duas antenas, na presença e na ausência de nuvens.

Capítulo 4 Análise do coeficiente de correlação entre os sinais recebidos pelas duas antenas do radar proposto, baseado no modelo elaborado no capítulo anterior. Tal análise é feita em função dos parâmetros físicos do sistema, isto é, distância entre as duas antenas, largura de banda do sinal, largura e formato do feixe da antena e conhecimento da estatística de distribuição das partículas de nuvem (ou chuva) no espaço.

Capítulo 5 Projeto e análise do detector ótimo para o radar proposto, por meio de teste de hipóteses com uso de Razão de Verossimilhança. São definidos o teste de hipóteses, a variável de decisão (em termos dos sinais recebidos) e a regra de decisão. Com base nisso, determinam-se as probabilidades de detecção e falso alarme do radar.

Capítulo 6 Considerações finais e perspectivas de novos trabalhos.

Capítulo 2

Fundamentos de Radar

Avanços tecnológicos e melhorias das técnicas e algoritmos utilizados em radares tornaram esse dispositivo um importante recurso para observação, detecção, imageamento, rastreamento, identificação e classificação de alvos. Seu uso é empregado em atividades tanto militares como civis. Alguns exemplos são as aplicações em controle de tráfego aéreo, sensoriamento remoto, defesa antiaérea, defesa terrestre e para a meteorologia, com previsões a curto e longo prazo [5].

Um radar pode ser projetado para ser coerente ou não coerente. Para que o radar seja coerente, é necessário que as características de fase relativas ao pulso transmitido sejam conhecidas. Por outro lado, em um radar não coerente, essa fase é desconhecida [7].

Quanto à configuração das antenas, um radar pode ser classificado como monoestático, biestático ou multiestático. Um radar é monoestático quando a transmissão e recepção são realizadas utilizando uma única antena ou duas antenas localizadas uma ao lado da outra [6]. Já o radar biestático utiliza diferentes antenas para transmissão e recepção e, além disso, elas são separadas por uma distância muito maior que o comprimento da antena [6]. Nesse caso, os alcances e ângulos do alvo relativos a cada antena são substancialmente diferentes. O radar multiestático é uma generalização do segundo caso, e ocorre quando há duas ou mais antenas de transmissão ou recepção separadas por uma distância muito grande.

Um tipo específico de radar biestático são os chamados radares passivos, em que um dispositivo sem transmissor é capaz de receber sinais refletidos de outras fontes emissoras. Com o conhecimento da posição da fonte emissora, é possível calcular a posição, a velocidade e o ângulo de chegada dos alvos. Essa classificação pode ser aplicada de maneira semelhante a determinadas configurações de radares multiestáticos.

A Figura 2.1 mostra as principais operações envolvidas na transmissão e recepção de um radar. As seções deste capítulo têm como principal objetivo apresentar os conceitos envolvidos em cada um dos blocos representados, fornecendo uma base teórica para as discussões dos próximos capítulos. Como pode ser observado na figura, o pulso de transmissão é criado ainda em sua forma digital e em banda base. Em seguida, esse pulso é convertido para a forma analógica, onde é modulado e filtrado para a banda de operação do radar (banda passante), e então amplificado com o ganho desejado. O sinal resultante é transmitido através da antena e modificado pelo canal. O canal aqui é representado por tudo que modifica o sinal a partir das antenas, ou seja, o meio onde se propagou o sinal de ida e volta e o alvo de interesse, seja ele um

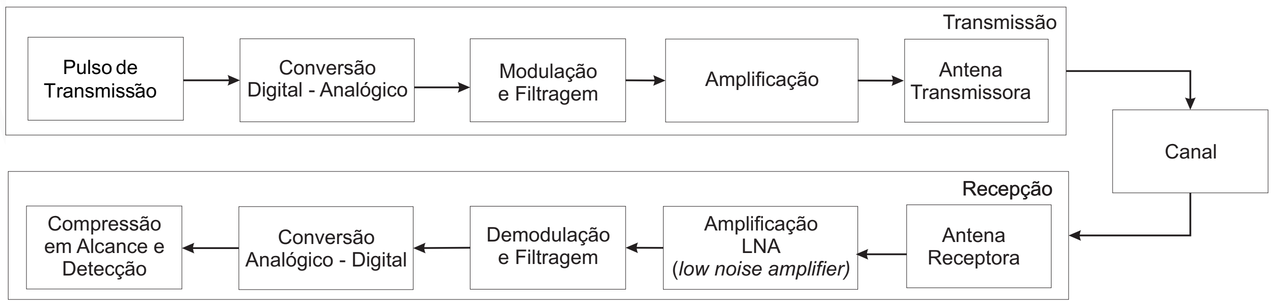


Figura 2.1: Diagrama de bloco de um radar.

avião, uma nuvem, uma montanha, etc. No bloco de recepção, o sinal, após ser modificado pelo canal, é captado pela antena receptora onde é amplificado por um dispositivo de baixo ruído, demodulado da frequência central de operação para a banda base e filtrado logo em seguida. Em banda base, o sinal é digitalizado através de um conversor analógico-digital e desse ponto em diante são aplicados os algoritmos de detecção e de determinação de informação dos alvos. No diagrama em questão, aplica-se a técnica de compressão de pulso em alcance, que é uma correlação com filtro casado e, em seguida, aplica-se um algoritmo de detecção, que é objeto de estudo desse trabalho.

Na última seção, 2.8, são apresentados alguns dos radares meteorológicos encontrados na literatura. Essa seção serve como base para o entendimento básico das tecnologias utilizadas nessa aplicação e fornece principalmente, como parâmetros de comparação, os requisitos que o novo radar proposto deve ter para suprir as necessidades de uso dessa aplicação para previsões de curto prazo.

2.1 Pulso de Transmissão

Radares podem ser classificados, segundo o tipo de sinal de transmissão, como sendo de onda contínua ou pulsados. O radar de onda contínua caracteriza-se por transmitir o sinal a todo instante e por ser biestático, nele as operações de transmissão e recepção são simultâneas. Entretanto, mesmo que o transmissor e o receptor estejam suficientemente separados, ainda pode haver interferência direta do sinal transmitido no receptor. Já os radares pulsados transmitem o sinal por um curto período e permitem, por exemplo, que as antenas de transmissão e recepção sejam a mesma. Nesse caso, o uso compartilhado dessa única antena é realizado através de um componente conhecido como circulador, que pode ser inserido entre a antena e os estágios de amplificação. O circulador garante que o sinal transmitido seja encaminhado diretamente à antena isolando eletricamente o circuito de recepção da passagem desse sinal, da mesma forma, quando o sinal é recebido na antena, ele garante a passagem do sinal para o circuito de recepção isolando o circuito de transmissão.

Os sinais transmitidos através de pulsos podem ser do tipo senóide, um ruído pseudo-

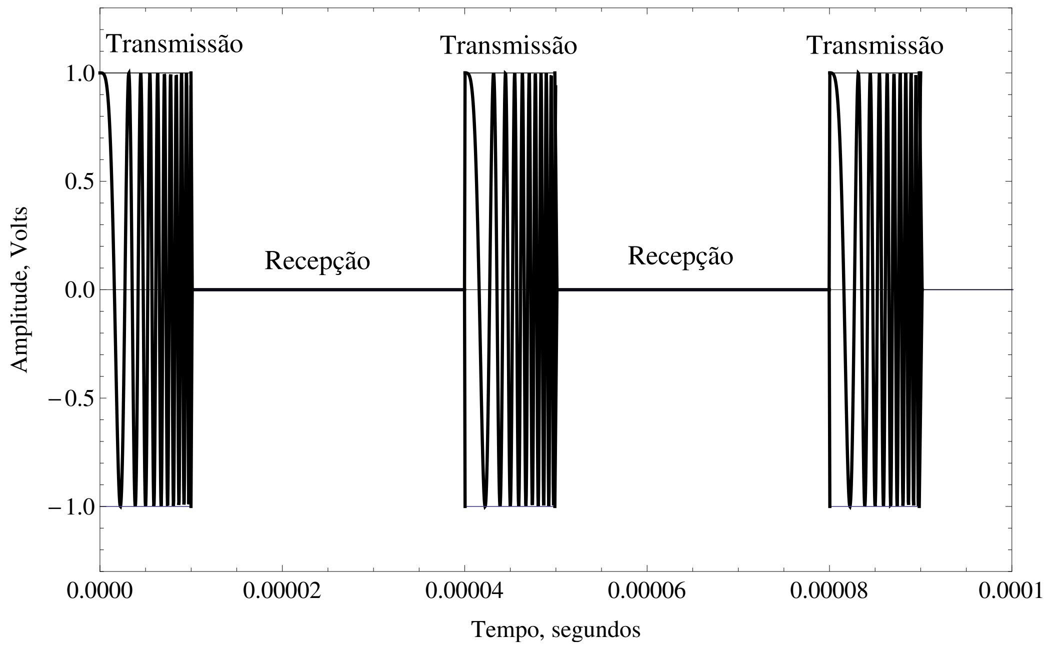


Figura 2.2: Exemplo de pulsos de transmissão. Nesse caso, foi utilizada uma largura de pulso de $10\mu s$ e IRP de $40\mu s$.

aleatório [8], um sinal linearmente modulado em frequência, dentre outros. Cada um desses sinais possui uma característica específica e seu uso depende da exigência da aplicação.

O radar utilizado nesse trabalho é do tipo pulsado, transmitindo um pulso de comprimento τ_p, linearmente modulado em frequência, com uma determinada banda Δf, que pode ser representado em banda base como,

$$S_p(t) = A(t)e^{jK_f \pi t^2}, \tag{2.1}$$

em que $K_f = \Delta f/\tau_p$ é a taxa de variação da frequência do pulso e $A(t)$ representa a amplitude de amplificação. O formato da componente real desse pulso pode ser observado na Figura 2.2. Note que a frequência do sinal transmitido é variável no decorrer da duração do pulso. O pulso de transmissão é então convertido de digital para analógico, onde é modulado para a frequência da portadora.

Um radar pulsado geralmente opera na forma monostática, emitindo um pulso a cada determinado intervalo de tempo, chamado IRP (sigla para Intervalo de Repetição de Pulsos), e cujo inverso é chamado FRP (sigla para Frequência de Repetição de Pulsos). Dessa forma, enquanto o transmissor opera, geralmente o receptor está desabilitado, e vice-versa. Assim, os ecos recebidos enquanto o radar está no modo transmissão não são percebidos, conforme pode ser observado no esquema de temporização da Figura 2.2.

O tempo necessário para a transmissão é exatamente o comprimento do pulso, τ_p, acrescido do tempo de configuração de chaves internas, que é da ordem de alguns microssegundos. Usualmente, como observado na Figura 2.2, enquanto o transmissor opera, o receptor se encontra inoperante. Isso significa que o radar não será capaz de perceber ecos oriundos de alvos a uma distância equivalente a

$$\Delta s = \frac{c\tau_p}{4}, \tag{2.2}$$

conhecida como zona cega.

2.2 Conversão Digital-Analógica e Analógico-Digital

As conversões de sinal, digital-analógica (CDA) e analógico-digital (CAD), são de extrema importância para o processamento digital de sinais. Elas permitem uma certa flexibilidade na criação e manipulação dos sinais que não podem ser realizadas na forma analógica.

A conversão do sinal digital para analógico é relativamente simples e é definida como sendo a transformação do sinal representado por um número finito de *bits* para uma representação física em tensão ou corrente elétrica. Há diversas maneiras de se realizar essa conversão, e é importante ressaltar que essas operações sempre introduzem erros, que aparecem como ruído no sinal reconstruído. Após essa conversão, o sinal passa à etapa de modulação.

Por outro lado, o processo de conversão analógico-digital, também conhecido como digitalização consiste em se obter valores provenientes de um sinal elétrico contínuo em intervalos de tempo regulares, correspondente a uma determinada frequência de amostragem, f_s. O resultado desse processo é um sinal representado por uma sequência de números reais, dado por:

$$S[k] = S\left(k \cdot \frac{1}{f_s}\right), \tag{2.3}$$

com k inteiro.

Pelo Teorema de Nyquist-Shannon [9], sabe-se que um sinal real em banda base que possui uma determinada largura de banda, Δf pode ser reconstruído a partir de sua sequência de amostras se a taxa de amostragem, f_s, for superior a $2\Delta f$. Para tanto, é importante ressaltar que a frequência de amostragem do conversor digital-analógico deve cumprir essa regra.

Com o sinal amostrado em uma taxa adequada, é necessária a atribuição de valores discretos para que o sinal seja utilizado digitalmente. Esse processo é conhecido como quantização. Entretanto, como a onda original é contínua em amplitude, existem infinitos valores para a representação de cada número da sequência, sendo a princípio necessária uma quantidade infinita de *bits*. Para que a quantização seja feita com uma quantidade finita de *bits*, é necessário que se conheça quais os valores máximos e mínimos que a sequência pode assumir. Com isso, um eventual valor acima do valor máximo será representado como máximo apenas, caso em que se diz que o conversor está saturado. Após a escolha dos valores máximo e mínimo, basta então escolher a quantidade de bits utilizados para a representação. Se n *bits* são utilizados, então um determinado número da sequência situado entre o máximo e mínimo, poderá ser representado por 2^n valores distintos.

Após a quantização, o sinal, que ainda é real, é então submetido à transformada de Hilbert discreta, tendo como resultado um sinal discreto cuja amplitude e fase são dadas por

$$S[k] = A[k]e^{j\Phi[k]}. \tag{2.4}$$

Comparando com (2.1), observe que $A[k]$ é a representação discreta de $A(t)$ e $\Phi[k]$ é a representação discreta da fase. Esse sinal, que agora possui representação complexa, é então encaminhado à unidade de processamento, onde os algoritmos de detecção e extração de informações do alvo de interesse são aplicados.

2.3 Modulação, Demodulação e Filtragem

O sinal em sua forma analógica, ainda em banda base, é modulado através de um misturador, como na Figura 2.3. Existem algumas vantagens para se operar em uma determinada frequência superior à banda base, dentre as quais se pode citar:

- a alocação de espectros. Nesse caso, algumas faixas de frequência são reservadas para determinados tipos de sinais e suas finalidades;
- melhor propagação do sinal no meio;
- a diminuição do tamanho das antenas.

O funcionamento do misturador pode ser explicado através da Figura 2.3, em que um sinal de entrada $s_e(t)$ é multiplicado por um outro sinal senoidal com uma determinada frequência de referência f_0, conhecida como frequência da portadora. O resultado é um sinal $s_s(t)$. Esse sinal é adequadamente filtrado e então transmitido através do meio de propagação.

Após ser transmitido através da antena, o sinal é modificado pelo canal e recebido novamente através da mesma, ou de outra antena. Na recepção, o processo inverso é realizado e o sinal é demodulado através do mesmo mecanismo pelo qual foi previamente modulado. Em *hardware*, essa modulação/demodulação é feita em alguns estágios - em geral, dois estágios, um intermediário e outro final - até alcançar a frequência da portadora desejada.

A frequência central da portadora de um radar pode ser classificada conforme a nomenclatura a seguir [2]:

- Banda L - 1 a 2GHz
- Banda S - 2 a 4GHz
- Banda C - 4 a 8GHz
- Banda X - 8 a 12.5GHz
- Banda K - 12.5 a 40GHz

Em frequências acima da banda X, a atenuação do sinal eletromagnético pela atmosfera se eleva substancialmente, isso ocorre porque o tamanho das partículas do meio começa a se aproximar do comprimento de onda do sinal propagante. A opção por radares que operam em frequências inferiores corresponde à necessidade de monitoramento a longo alcance, possível pelo fato de, em tais frequências, a atenuação atmosférica ser mais baixa e ser maior a disponibilidade de amplificadores de alta potência [10]. Se a aplicação demanda monitoramentos a curto alcance, frequências superiores oferecem melhorias na resolução, assim como diminuição do tamanho físico das antenas para uma dada largura de feixe. No caso da meteorologia, por exemplo, os sistemas mais eficientes são aqueles compostos por radares na banda X (curto alcance) e na banda S (longo alcance).

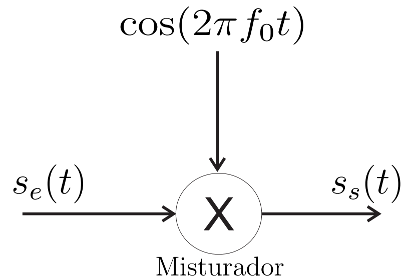


Figura 2.3: Modulação e demodulação do sinal.

2.4 Amplificação

É conhecido que a detecção de um alvo só é possível se o sinal emitido pelo radar - ao se propagar pelo meio e interagir com o alvo - refletir energia suficiente para ultrapassar o limiar de detecção [7]. Diversas técnicas podem ser utilizadas para inserir ganho no sinal recebido, uma das quais é a amplificação do sinal. A função do amplificador é aumentar a amplitude do sinal de entrada, gerando na saída um sinal de potência superior.

No circuito de transmissão, ainda em baixa potência, após o sinal ser modulado, este é submetido a um amplificador de potência onde é inserido um ganho desejado. Esse ganho é um parâmetro de projeto e depende diretamente das características do radar, do alvo de interesse e do alcance desejado. Na recepção, o sinal que chega à antena pode ter uma amplitude bastante reduzida, e sempre é recebido na presença do ruído térmico do sistema. O sinal eco, que usualmente é muito fraco, é amplificado por um amplificador de baixo ruído, LNA (do inglês, *Low-Noise Amplifier*), com o intuito de aumentar nível desse sinal recebido.

2.5 Antena

Além das perdas do sinal provocadas pela atmosfera e da quantidade de energia refletida pelo alvo, a amplitude do sinal recebido depende também da diretividade e do ganho da antena, que por sua vez dependem do padrão de radiação. O padrão de radiação de uma antena é definido pelo IEEE [11] como uma função matemática que evidencia as características de campo eletromagnéticas em função das coordenadas espaciais.

As regiões do espaço de radiação de uma antena são essencialmente divididas em campo próximo e em campo distante. Para uma antena de comprimento D muito maior que o comprimento de onda, λ, a região de campo distante é definida como sendo o espaço entre $2D^2/\lambda$ e o infinito [12], na qual a distribuição angular de campo independe da distância até a antena. A intensidade de radiação é um parâmetro definido apenas para campo distante, como sendo a potência irradiada por uma determinada antena por unidade de ângulo sólido [12]. Em um determinado padrão de radiação, é possível definir seu lóbulo principal, identificado como sendo o lóbulo de radiação contendo a direção de radiação máxima, bem como seus lóbulos secundários, identificados geralmente como sendo os lóbulos adjacentes ao lóbulo principal. É possível medir sua largura de feixe a meia potência (3dB), θ_{beam}, definida como sendo, em torno do máximo do lóbulo principal, a diferença angular entre dois pontos onde a intensidade de radiação é metade desse valor máximo.

A função diretividade de uma antena, $D(\theta)$, é dada pela razão entre a potência irradiada $U(\theta)$ em uma determinada direção θ e a média da potência irradiada em todas as direções, U_0 ou seja,

$$D(\theta) = \frac{U(\theta)}{U_0}. \tag{2.5}$$

Na análise que se segue, é conveniente representar a função diretividade normalizada pela diretividade máxima.

Outro parâmetro importante para a análise de desempenho de uma antena é o seu ganho, dado por

$$G(\theta) = f_{\text{efic}} D(\theta), \tag{2.6}$$

em que f_{efic} é o fator de eficiência de uma antena, com valores entre zero e um - desconsiderando perdas por condução e perdas dielétricas, f_{efic} é igual a um. De acordo com [12], na prática, toda vez que o termo ganho é citado, este se refere ao ganho máximo, que pode ser em geral aproximado por

$$G_0 \simeq \frac{30000}{\Theta_1 \Theta_2}, \tag{2.7}$$

em que Θ_1 e Θ_2 são as larguras de feixe nas direções de elevação [1] e azimute da antena [2].

Considerando regiões em campo distante e uma antena com eficiência unitária, duas funções de diretividade se mostram importantes, como observado na Figura 2.4. A primeira diretividade apresentada é uma função porta, também conhecida como diretividade ideal, e a segunda, conhecida como diretividade prática.

A função diretividade ideal pode ser representada por

$$D(\theta) = \frac{1}{2\theta_{beam}} \left[u\left(\theta + \frac{\theta_{beam}}{2}\right) - u\left(\theta - \frac{\theta_{beam}}{2}\right) \right], \tag{2.8}$$

em que $u(\cdot)$ é a função degrau. Tal diretividade implica que o sinal refletido por objetos localizados em $[-\theta_{beam}/2, \theta_{beam}/2]$ contribuirá para a recepção com um peso unitário, enquanto que o sinal fora desse intervalo, contribuirá com peso zero.

Em implementações práticas, é comum o uso de um arranjo de antenas com o propósito de se obter um determinado padrão de radiação desejado. Para tanto, alguns efeitos contribuem para a definição do formato do padrão resultante, sendo eles a disposição dos elementos, a distância entre eles, o padrão de radiação de cada um, fase e amplitude de excitação. Em [13] e [12] é mostrado que o padrão de radiação em potência de um arranjo de elementos de antena omnidirecionais uniformemente espaçados é dado por

$$D(\theta) = \frac{1}{N_e} \left| \frac{1-e^{jN_e\Psi(\theta)}}{1-e^{j\Psi(\theta)}} \right|^2 = \frac{1}{N_e} \left| \frac{\sin(N_e\Psi(\theta)/2)}{\sin(\Psi(\theta)/2)} \right|^2, \tag{2.9}$$

[1] Ângulo entre uma direção horizontal de referência (geralmente o norte) e a projeção horizontal de uma direção de interesse, medida na direção horária.

[2] Ângulo entre a linha de visada na direção de interesse e o plano de referência horizontal, medido de baixo para cima.

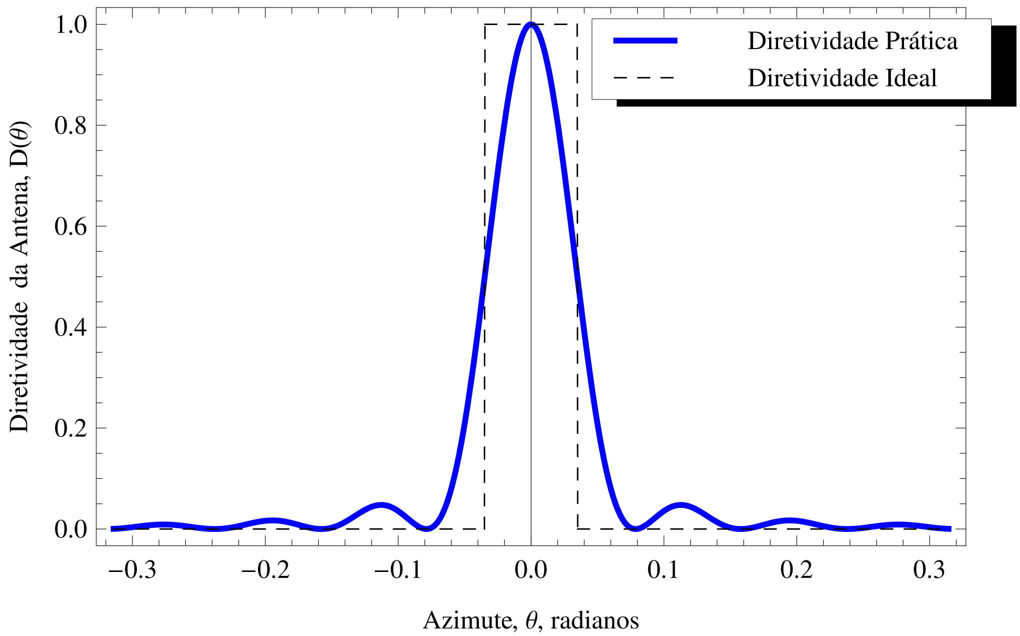


Figura 2.4: Função diretividade da antena com N_e =25, o que corresponde a uma abertura de 4º.

em que N_e é o número de elementos do arranjo e

$$\Psi(\theta) = \beta d \cos\theta + \epsilon, \tag{2.10}$$

sendo $\beta = 2\pi/\lambda$ a constante de propagação, d a distância entre os elementos do arranjo, e ϵ a diferença de fase de um determinado elemento em relação ao seu adjacente. Dessa forma, assumindo propagação em campo distante, na qual ϵ pode ser considerado nulo e um espaçamento de $\lambda/2$ entre os elementos no intuito de evitar lóbulos indesejados, a diretividade resultante pode ser representada por

$$D(\theta) = \left(\frac{1}{N_e} \frac{\sin(N_e \frac{\pi}{2} \sin\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}\sin\theta)} \right)^2. \tag{2.11}$$

2.6 Canal

O sinal transmitido pelo radar, ao se propagar, é modificado por tudo que encontra em seu caminho. A energia irradiada pela antena se espalha pelo meio, interagindo com a atmosfera e com a matéria que compõe os alvos, que absorvem e irradiam parte da energia em várias direções. O sinal recebido pelo radar, portanto, representa apenas uma parte da energia do sinal transmitido, e a quantidade dessa energia depende do formato, das dimensões e da matéria que constitui o alvo. Essa propriedade de refletir uma certa quantidade de energia é conhecida como seção reta radar. Um alvo metálico de grandes dimensões, por exemplo, em presença de pulsos emitidos por um radar que opera na banda X ($\lambda \approx 3cm$), será facilmente detectado. Por outro lado, nuvens esparsas podem passar despercebidas e não serem detectadas.

Para a melhor compreensão da propagação do sinal e de como ele é detectado no receptor, é importante distinguir alguns efeitos que se manifestam na onda eletromagnética. O primeiro deles, a atenuação, é caracterizada por uma perda gradual de intensidade do sinal através do meio, representado pela diminuição de sua amplitude com a distância. Outros efeitos, como a dispersão e a difração, possuem características bastante semelhantes entre si, pois ambos são responsáveis pelo alargamento do sinal, sendo que a dispersão representa esse alargamento no domínio temporal, e a difração no domínio espacial. A dispersão está relacionada com o índice de refração do meio, que não é constante. Dessa forma, as diversas componentes de frequência do sinal transmitido não se propagam com uma mesma velocidade de fase, e então o sinal se dispersa [14]. Já a difração, por sua vez, é um fenômeno que afeta ondas propagantes em duas ou mais dimensões em meios não guiados. Isso acontece pois as várias componentes desse sinal se propagam em diferentes direções, ou seja, os vetores de número de onda resultante apontam para várias direções, causando assim uma "dispersão" espacial [14].

Ao interagir com a partícula, conhecida como espalhador, parte do sinal é absorvida, parte é refletida em várias direções, parte atravessa a partícula e continua sua propagação pelo meio, e apenas uma parcela de tal energia retorna para o radar [15]. A contribuição de cada um desses fenômenos depende em grande parte da frequência central do sinal e da largura de banda do pulso de transmissão. Por exemplo, um radar na banda K (18 a 26.5GHz), em presença de precipitação, sofre mais espalhamento e absorção de energia do que um radar na banda X (8 a 12GHz), e assim por diante. Radares de curta distância utilizam frequências de operação maiores, o que reduz o seu alcance devido à absorção e ao espalhamento (Banda K), enquanto que radares de longa distância utilizam frequências mais baixas (Banda S - 2 a 4GHz). Entretanto, quanto maior o comprimento de onda do sinal, menos sensível a pequenas partículas se torna o radar.

2.6.1 Alvos Determinísticos

Alvos determinísticos, de forma geral, possuem características de amplitude e fase bem definidas. Dessa forma a fase depende apenas da velocidade do alvo em relação ao radar, ou vice-versa. Portanto, sua reflexão pode ser representada como

$$Z[k] = A[k]e^{j\Phi[k]}, \tag{2.12}$$

em que $k = 0, 1, 2, ..., N_a$ representa as amostras desse sinal em diferentes instantes regulares de tempo, kT. Assim, se um determinado alvo possui movimento retilíneo uniforme, de velocidade radial constante e igual a V, sua fase pode ser escrita como sendo

$$\Phi[k] = \frac{-4\pi}{\lambda}R[k] = \frac{-4\pi}{\lambda}(R[0] + VkT). \tag{2.13}$$

Por definição, tudo que não é de interesse mas que pode ser detectado por um radar é conhecido como *clutter* [16, 17]. Um outro exemplo de alvo que pode ser considerado determinístico é o *clutter* de alvo parado ($V = 0$), como no caso de construções humanas (prédios, torres, etc.) ou montanhas, bem como o próprio solo. Esse tipo de alvo tem como principal característica um valor de fase dominante e constante ao longo do tempo.

2.6.2 Alvos Distribuídos

Ao contrário dos alvos pontuais, os alvos distribuídos se caracterizam por várias partículas ocupando um mesmo volume de resolução [3] , com características de intensidade e fase seguindo uma determinada distribuição estatística. Assim, a contribuição da l-ésima partícula pode ser representada de forma complexa como

$$Z_l[k] = A_l[k]e^{j\Phi_l[k]}, \tag{2.14}$$

em que $A_l[k]$ é a amplitude, que depende da seção reta da partícula e de sua localização no volume, e Φ_l representa a fase total

$$\Phi_l[k] = \frac{-4\pi R_l[k]}{\lambda} + \Upsilon_l[k], \tag{2.15}$$

em que $\Upsilon_l[k]$ é a fase associada à característica intrínseca de cada partícula. O sinal recebido em um determinado instante k é a soma vetorial das ondas eletromagnéticas refletidas por cada uma das N_p partículas em um dado volume de resolução. O valor resultante é dado por

$$S[k] = \sum_{l=1}^{N_p} Z_l[k] = \sum_{l=1}^{N_p} A_l[k]e^{j\Phi_l[k]} = A[k]e^{j\Phi[k]}. \tag{2.16}$$

As partículas se movem umas em relação às outras, principalmente devido à turbulência presente nesses fenômenos. Além disso, cada partícula possui um formato próprio e reflete de forma distinta a onda eletromagnética incidente. Assim, os valores de R_l, A_l e Φ_l possuem uma distribuição aleatória. Quanto maior o volume de resolução em relação ao comprimento de onda, mais espalhada se torna a fase Φ_l das partículas. Um modelo para Φ_l é uma distribuição uniforme no intervalo entre 0 e 2π.

2.6.3 Velocidade *Doppler*

Se existe uma diferença de velocidade entre o alvo e o radar, então a frequência do sinal recebido, f_r, será diferente da frequência do sinal transmitido, f_t, em função do efeito *Doppler*. Considere um radar monostático em que o transmissor e o receptor ocupam o mesmo lugar no espaço e não se movem entre si. Considere ainda um alvo com uma velocidade radial média v_r na direção do radar, sendo $v_r > 0$ para o alvo se aproximando. A frequência percebida no receptor é dada por

$$f_r = \left(\frac{1 + v_r/c}{1 - v_r/c}\right) f_t. \tag{2.17}$$

Dessa forma, um alvo se aproximando (ou afastando) faz com que a frequência percebida pelo receptor seja maior (ou menor) que a transmitida. Ao se expandir a equação (2.17) em uma série binomial e desconsiderar os termos de alto grau, tem-se que

[3] Região tridimensional (alcance, azimute e elevação) relacionada à capacidade do radar em distinguir múltiplos alvos.

$$f_r = \left(1 + \frac{2v_r}{c}\right) f_t. \tag{2.18}$$

A diferença f_d entre a frequência transmitida e a frequência recebida é chamada de frequência *Doppler* ou deslocamento *Doppler*, que é dada por

$$f_d = \frac{2v_r}{c} f_t = \frac{2v_r}{\lambda_t}. \tag{2.19}$$

Para a determinação da velocidade radial de um alvo, são utilizados radares do tipo Doppler, que utilizam o efeito *doppler* como princípio de funcionamento. Em suma, um radar, ao transmitir um sinal com determinada frequência percebe em seu receptor esse mesmo sinal com uma frequência que se modifica de acordo com a velocidade radial do alvo. De posse da diferença entre essas frequências, pode-se usar (2.19) para determinar f_r.

2.7 Compressão em Alcance e Detecção

Um radar deve ser capaz de detectar alvos em meio a uma série de interferências, dentre as quais o ruído térmico do próprio sistema e por reflexões de alvos que não são de interesse do radar (o chamado *clutter*). Além disso, a detecção ainda pode ser influenciada por interferências originadas de outras fontes eletromagnéticas, sejam elas já existentes no meio ou criadas especificamente com a intenção de interferir na detecção do radar.

Em aplicações de radar, geralmente se usa o sinal de transmissão para a detecção de uma reflexão proveniente de um alvo. A probabilidade de detecção [4] depende da relação sinal-ruído e não da forma de onda do sinal recebido. Nesse caso, o objetivo está mais em maximizar a relação sinal-ruído do que em preservar o formato do sinal [18]. Considere o diagrama de bloco da Figura 2.5, em que o sinal recebido é aquele proveniente da reflexão de um determinado alvo, $s_e(t)$, em presença de um ruído aditivo gaussiano branco, $n_e(t)$. Ao passar por um filtro, representado pela sua resposta ao impulso, $h(t)$, pretende-se que, na saída, a potência do sinal $s_s(t)$ seja maximizada em relação ao ruído, $n_s(t)$ no instante t_0. Seguindo esse raciocínio, mostra-se em [18] que a resposta ao impulso do filtro é dada por

$$h(t) = s_e^*(t_0 - t), \tag{2.20}$$

em que t_0 representa o instante inicial do sinal refletido pelo alvo. Este é conhecido como filtro casado.

Como observado, o filtro casado é exatamente o complexo conjugado do espelho do sinal transmitido. Então, para determinar a distância de um alvo, basta efetuar uma operação de correlação entre o sinal recebido e uma cópia do sinal transmitido, chamada *réplica*. Se o resultado exceder um certo limiar, conclui-se com alta probabilidade que o sinal recebido é a resposta de um alvo. Em radar, quando o produto entre largura de banda do sinal transmitido e o comprimento do pulso é muito maior que 1, a operação de filtro casado fica conhecida como compressão de pulso [6].

[4] Probabilidade de um sinal presente no receptor ser corretamente declarado como originado de um alvo, depois do devido processamento.

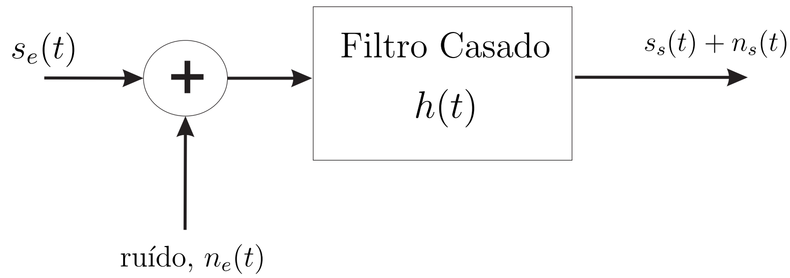


Figura 2.5: Diagrama de bloco do filtro casado.

Ao se aplicar a compressão de pulso no sinal recebido considerando o sinal transmitido na forma de (2.1), sendo $A(t)$ um pulso retangular, tem-se como resultado a função *sinc*, e a distância do pico máximo até o primeiro nulo da função é conhecida como resolução Rayleigh [7]. Dessa forma, a resolução temporal δt é dada por

$$\delta t = \frac{1}{\Delta f}, \tag{2.21}$$

em que Δf é a banda do pulso transmitido. Esse resultado define o atraso mínimo entre dois alvos para que sejam distinguíveis pelo radar. Tomando-se em conta o caminho de ida e volta do sinal, pode-se definir a resolução em alcance do radar por

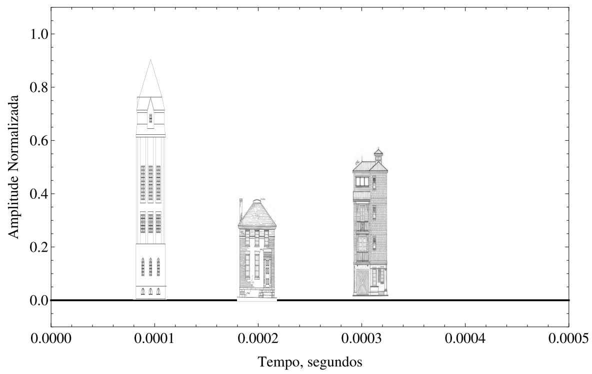
$$\delta = \frac{c}{2\Delta f}, \tag{2.22}$$

em que c é a velocidade da luz e δ representa a resolução em alcance. Por exemplo, se um radar opera com uma banda de 50 MHz, a resolução em alcance será de 3 m. Isso significa que se dois alvos estão a uma distância inferior a 3 metros um do outro, então o radar os perceberá como sendo apenas um alvo. Na prática, devido às ponderações de janelamento, ao ruído e a outros fatores inerentes aos sistemas, essa resolução acaba sendo um pouco maior do que aquela em (2.22).

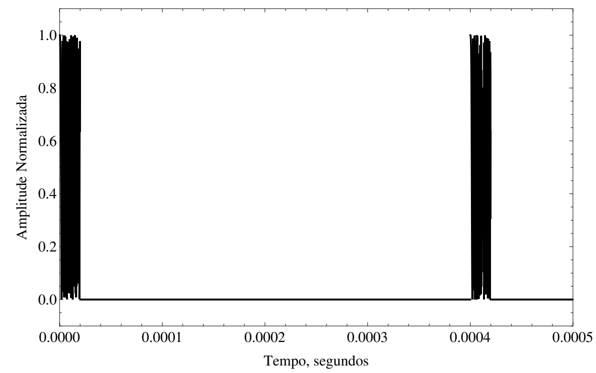
Na Figura 2.6 é exemplificado o funcionamento do filtro casado em um radar que compartilha a mesma antena para transmissão e recepção. Assim, em 2.6.a, é possível observar um cenário de alvos genéricos para os quais o radar está apontando, e em 2.6.b, a sequência de pulsos transmitidos. Posteriormente, em 2.6.c, mostram-se os ecos provenientes dos alvos, e nota-se que o sinal sofre atenuações de acordo com a natureza do alvo. Com o sinal amostrado, é então aplicada a técnica de compressão em alcance, e o resultado é apresentado em 2.6.d, onde fica evidente a melhoria da resolução na resposta. Todas as figuras estão normalizadas em termos de amplitude de sinal.

Após a compressão em alcance, os sinais de alvos que refletiram uma certa energia ao radar possuem uma relação sinal-ruído maximizada e uma melhor resolução. Após esses passos, os sinais já estão preparados para a aplicação dos algoritmos de detecção, que garantem uma certa probabilidade de detecção e falso alarme [5]. Existem vários desses algoritmos na literatura,

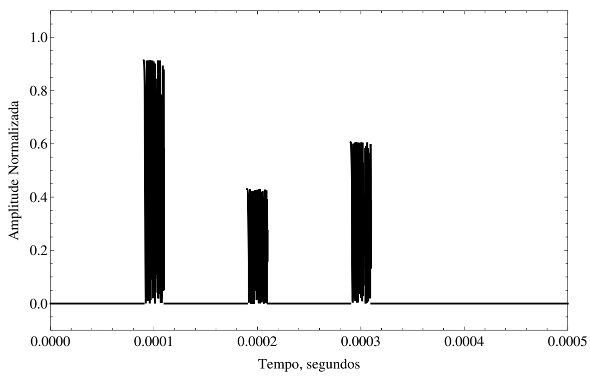
[5]Probabilidade de que o ruído ou outro sinal de interferência qualquer ser de forma errônea apontado como sendo originado de um alvo.



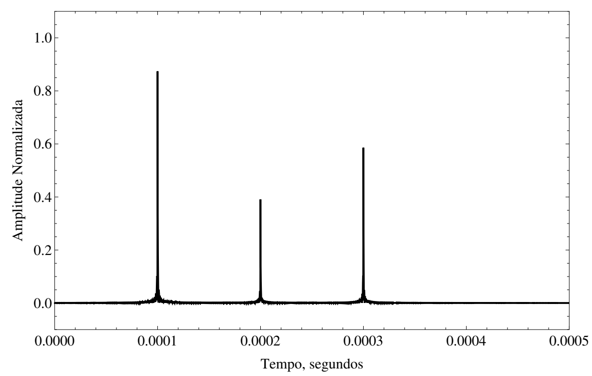
(a) Cenário



(b) Transmissão



(c) Recepção



(d) Compressão de Pulso em Alcance

Figura 2.6: Exemplo do funcionamento de filtro casado.

como, por exemplo, o CFAR [7], do inglês *Constant False Alarm Rate*, que se adapta ao nível de ruído do circuito durante a detecção, garantindo uma probabilidade de falso alarme constante. O presente trabalho tem por objetivo projetar um detector ótimo para o caso específico de antenas estáticas, bem como analisar seu desempenho.

2.8 Radares e sua Aplicação na Meteorologia

Algumas das propriedades mais importantes do fenômeno meteorológico que os radares devem ser capazes de determinar são: posição, refletividade, velocidade e espalhamento espectral. A refletividade é descrita pela quantidade de energia retornada devido ao espalhamento gerado pelas partículas atmosféricas como resultado da sua interação com as ondas eletromagnéticas [15]. Apenas parte dessa energia espalhada é refletida na direção do radar e detectada. Uma segunda parcela é absorvida pelas partículas, e ainda parte dela que não é refletida ultrapassa as partículas e é perdida. Essa quantidade de energia refletida é importante na caracterização dos fenômenos meteorológicos e com ela é possível distinguir, por exemplo, um céu nublado de chuvas fracas a tempestades de grandes proporções.

Com a detecção das partículas em diferentes momentos, é possível, através de filtragem apropriada, calcular a velocidade de um determinado fenômeno. Por exemplo, com base na equação 2.18 é possível determinar a velocidade radial de um alvo pontual, diretamente a partir do espectro de frequência, bem como calcular a velocidade média de um alvo distribuído, como uma nuvem. No caso distribuído, como o alvo é composto de várias partículas se movendo a velocidades diferentes, seu espectro de frequência se apresenta com certo espalhamento, que é uma consequência das turbulências e variações do movimento das partículas no interior da nuvem, o que pode impor dificuldades no processamento desse tipo de sinal. Para os radares pulsados, dedicados em determinar a frequência Doppler e o espalhamento espectral, um fator muito importante é a frequência de repetição dos pulsos (FRP), responsável por delimitar a velocidade máxima detectável sem ambiguidade, em consistência com o critério de Nyquist [7].

Para radares meteorológicos, a reflexão do próprio solo, montanhas, prédios, árvores, e *clutter*, pode prejudicar enormemente sua visibilidade. Sabe-se que não é possível excluir completamente a manifestação do sinal refletido pelo *clutter* na recepção. Dentre as técnicas implementadas para amenizar o efeito do *clutter* sobre o sinal recebido, destaca-se a implementação de filtros no processamento, que anulam as componentes de baixa frequência, nas quais, por natureza, se localizam o *clutter*, pois alvos parados possuem velocidade Doppler zero. Esses filtros podem ser implementados tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. No entanto, os filtros no domínio da frequência são mais utilizados [2].

Os principais tipos de radar e tecnologia utilizados na área da meteorologia são apresentados a seguir.

2.8.1 Radar Girante de Feixe Estreito

Dentre as várias tecnologias desenvolvidas para a aquisição de medidas atmosféricas utilizando ondas eletromagnéticas, a mais comum é a do radar girante de feixe estreito [19], como na Figura 2.7. Esse tipo de radar emite uma determinada quantidade de energia através de uma antena no formato de uma corneta incidindo em um grande refletor parabólico, confinada em um feixe bastante estreito com valor em torno de 0.5 a 3 graus. Quanto maior o tamanho da antena, maior a diretividade do feixe obtido. A varredura de 360º na direção de azimute é possível através de um motor, e a varredura na direção de elevação é feita mudando-se o ângulo de inclinação da antena, a cada volta. Como o feixe é bastante estreito e a antena pesada, a varredura de todo o céu leva em geral cerca de 15 a 25 minutos, dependendo das configurações do radar.

A antena é envolta por uma estrutura esférica responsável pela proteção do radar contra fenômenos externos e corrosão, conhecida como *radome*. Essa estrutura pode alterar o feixe da antena, diminuindo seu ganho e aumentando os lóbulos secundários, o que afeta diretamente a capacidade de detecção do dispositivo. Com o conhecimento prévio desse tipo de perda, a potência de transmissão e o projeto da antena em si precisam ser adequados de forma a compensar as perdas.

A maior parte dos radares meteorológicos explora a diversidade na polarização da onda eletromagnética, definida pela orientação do vetor campo elétrico transmitido e recebido pela antena. Sabe-se que a maior parte das gotículas de chuva em queda livre não são esféricas, tendo um formato achatado em função da resistência do ar. Assim, a polarização que possui um retorno maior de energia é a horizontal. Entretanto, a polarização vertical pode ser também utilizada no mesmo radar e, assim, caracterizar de forma mais precisa diferentes fenômenos meteorológicos.

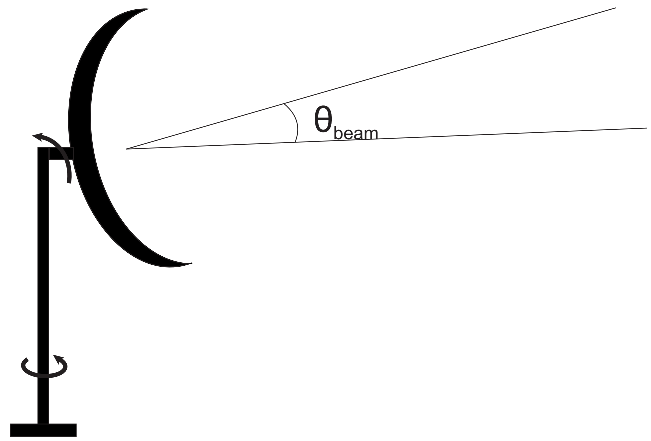


Figura 2.7: Radar Convencional.

No projeto da antena para o radar de feixe estreito, a faixa de frequência em que esse radar opera e a abertura angular determinam o tamanho da antena. Quanto maior a antena, maior a exigência de robustez da montagem mecânica e mais restrições são impostas no tempo de varredura em azimute e elevação. Esses fatores combinados influenciam no custo do projeto, que compreende a construção do radar e preparação da infra-estrutura para sua instalação.

2.8.2 Arranjo de Antenas

Com o aparecimento de dispositivos eletrônicos de alta velocidade capazes de realizar mudanças controladas de fase no sinal, assim como módulos mais eficientes de transmissão e recepção, foi viabilizada uma forma mais eficaz de detectar alvos utilizando várias antenas em conjunto para a transmissão e recepção do pulso [20, 21]. Ao invés de usar um refletor parabólico e fazer a varredura de azimute e elevação mecanicamente, tornou-se viável executar tal varredura eletronicamente, de maneira muito mais rápida. A varredura eletrônica pode ser realizada mudando-se a fase e amplitude de cada elemento transmissor, de acordo com o esquema da Figura 2.8 explorando-se os efeitos construtivos e destrutivos do sinal emitido por cada elemento. Sabe-se pela teoria de antenas que o lóbulo principal do arranjo se localiza na normal da frente de onda emitida [12]. Assim, uma mudança adequada da fase no sinal transmitido faz com que o feixe se incline. Como a varredura é executada numa velocidade muito alta, além de previsões de curto prazo, esse tipo de radar pode, por exemplo, ser utilizado para observar fenômenos específicos ao mesmo tempo em que realiza a varredura completa do céu.

Utilizando-se elementos devidamente espaçados de $\lambda/2$, com o intuito de evitar o aparecimento de lóbulos ambíguos indesejados, e ainda fazendo-se com que o acoplamento entre os receptores seja mínimo, o arranjo de antenas tem sua abertura composta por uma gama considerável de elementos irradiantes, sendo que cada elemento pode ser controlado individualmente em fase e amplitude. Assim a posição do feixe e a quantidade de energia lançada podem ser determinadas de forma bastante precisa. Uma outra forma de realizar o deslocamento do feixe é mudando a frequência de entrada da antena, ao invés de mudar a fase. Dependendo da frequência central aplicada no vetor de antenas, a fase de cada elemento é alterada, e o feixe se posiciona em diferentes direções.

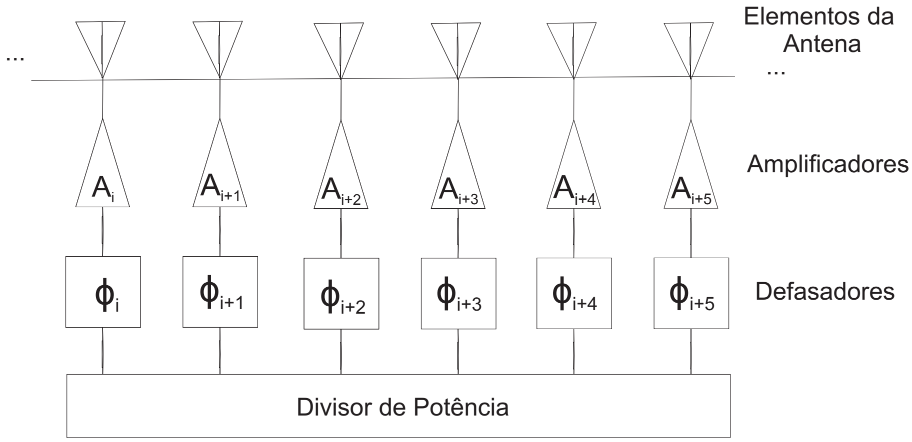


Figura 2.8: Arranjo de Antenas.

Em geral, o sistema radar que utiliza arranjo de antenas com controle de feixe possui um custo de implementação que depende principalmente da quantidade de elementos irradiantes, da largura do feixe resultante e da faixa de frequência de operação do radar. Com esse sistema é possível fazer uma varredura em azimute e elevação mais rápida, se comparada ao radar girante de feixe estreito. Entretanto, esse sistema tende a ter um alto custo de projeto e implementação.

2.8.3 Antenas Espaçadas

Uma particularidade do arranjo de antenas é que, ao se utilizar apenas alguns de seus elementos, é possível com um feixe de antena bastante amplo medir, por interferometria, as componentes de velocidade do vento em diversas direções. Dessa forma, determina-se com facilidade não apenas a componente radial, mas também a horizontal e a vertical. Os pesquisadores chamam esse aparato de antenas espaçadas [22, 23]. Esse tipo de cálculo é feito ao se utilizarem vários receptores para processar a diferença de fase e amplitude do retorno recebido em duas antenas adjacentes, com o intuito de estimar as componentes horizontal e transversal do vento. Essa técnica é bastante utilizada quando são necessárias informações com alto grau de resolução espacial e temporal na estimação detalhada dos parâmetros de turbulência de um tornado ou de um furacão [22, 23], por exemplo.

2.8.4 Outros métodos

Um outro modelo de observação encontrado na literatura é uma rede de detectores composta por um radar transmissor e receptor de feixe estreito e um ou vários sensores apenas receptores de baixo ganho dispostos de forma estratégica [24]. Com esse sistema é possível adquirir vetores de velocidade de fenômenos meteorológicos. Para que um sistema assim funcione é necessário, no entanto, que sincronizações de tempo e frequência sejam realizadas. O sistema provou ser uma opção de custo relativamente baixo para a determinação de vetores de velocidade nas três dimensões de interesse.

Esses receptores localizados em diferentes regiões proporcionam a observação de um mesmo volume em diferentes ângulos e direções, levando assim à determinação das diferentes componentes de velocidade do vento. Como o sistema possui vários sensores passivos, ou seja, apenas receptores, o custo de cada unidade cai consideravelmente.

Capítulo 3

Proposta de Radar, Testes de Campo e Modelagem do Sistema

Os radares meteorológicos convencionais são compostos por antenas de feixe estreito que, a depender da frequência central de operação, podem ser muito grandes. Nesses radares, a resolução angular é dada diretamente pela largura do feixe da antena. Para que a varredura completa do céu seja realizada, o feixe da antena precisa se deslocar, tanto na direção de elevação quanto na de azimute. Se o movimento for realizado de forma mecânica, então o sistema deve ser robusto o suficiente para suportar o peso da antena sem comprometer a varredura, e isso pode aumentar o custo do radar consideravelmente. Além disso, em previsões de curto prazo, é necessário que o radar possua uma varredura rápida, da ordem de minutos, e na maior parte dos casos isso se mostra inviável. Para contornar esse problema, como já mencionado, a varredura pode ser realizada de forma eletrônica, utilizando um arranjo de antenas. Todavia, essa é uma alternativa de custo muito elevado.

Em aplicações com previsão de curto prazo, a fim de atender ao requisito de varredura rápida, seria interessante o uso de antenas fixas, como nos arranjos de antenas, mas com uma quantidade reduzida de elementos, de forma que o sistema tivesse um custo reduzido. A varredura angular em elevação e azimute, a detecção e a determinação da posição dos fenômenos meteorológicos seriam todas implementadas em *software*. Nesse sentido, com o propósito de projetar um radar meteorológico de baixo custo, que a Orbisat Indústria S.A., empresa do grupo Embraer Defesa e Segurança, idealizou em 2010 um novo princípio de operação para esse tipo de radar, com base no uso de poucas antenas fixas de feixe largo, na banda X. Este trabalho de dissertação, realizado em parceria com a Orbisat, desenvolve essa ideia, e inclui as seguintes contribuições: (i) caracterizar a resolução da nova proposta de radar; (ii) definir seus parâmetros de funcionamento; (iii) detalhar e refinar seu princípio de operação; (iv) realizar testes de campo preliminares; (v) elaborar, a partir desses testes, um modelo estocástico apropriado para o sistema; (vi) avaliar, a partir desse modelo, o potencial da nova proposta, em função de parâmetros físicos como distância entre antenas, largura de banda e diretividade das antenas; e finalmente (vii) projetar um detector ótimo para o radar, bem como avaliar seu desempenho. Os itens (i) a (v) são desenvolvidos neste capítulo. Os itens (vi) e (vii) são desenvolvidos nos capítulos 4 e 5, respectivamente.

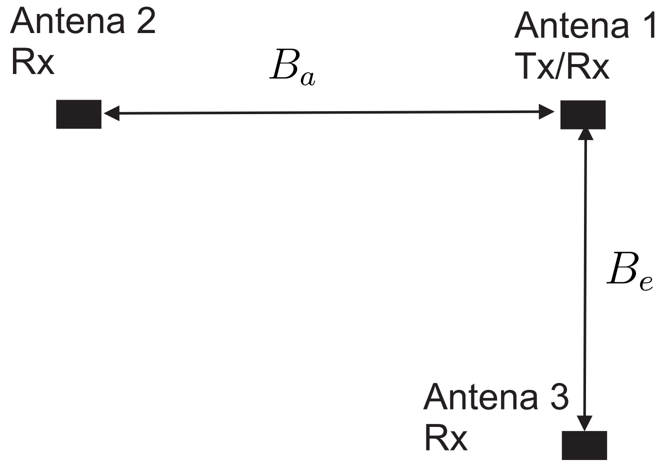


Figura 3.1: Vista frontal das antenas.

3.1 Proposta de Radar

Antes da apresentação dos dados obtidos em campo, é importante conhecer a geometria da solução proposta, bem como alguns efeitos associados a ela. Um parâmetro que surge naturalmente a partir dessa geometria é a resolução angular, que é definida como sendo a mínima distância angular entre dois alvos a uma mesma distância para que o processamento dos dados possa distinguí-los. Outra característica, agora do sinal, é o surgimento de uma diferença de fase entre os sinais recebidos pelas antenas, em função da posição angular (azimute) dos alvos em relação ao centro de coordenadas do radar. Estabelecidos esses fundamentos, são então apresentados os parâmetros de configuração do radar, que oferecem as condições de contorno para o entendimento e a caracterização dos dados de campo obtidos.

3.1.1 Geometria da Solução

Considere um sistema radar dotado de três antenas receptoras, sendo uma delas também transmissora, como mostrado (em vista frontal) na Figura 3.1. As antenas são separadas por uma determinada linha de base na direção de azimute, B_a, e uma outra linha de base na direção de elevação, B_e. Do ponto de vista da Antena 1, o radar é monoestático compartilhando a mesma antena tanto para a transmissão como para a recepção. Por outro lado, as Antenas 2 e 3 são passivas e ficam suficientemente afastadas da antena de transmissão, tornando o radar biestático do ponto de vista dessas antenas. Visto como um todo, portanto, o radar é dito multiestático.

Nesse caso, a largura do feixe de cada antena, a distância do alvo em relação ao centro de coordenadas, e a resolução em alcance definem uma região de intersecção que possui uma determinada abertura angular, $2\theta_{res}$, como mostrado na Figura 3.2. Para fins de simplificação da análise, será considerado neste trabalho um sistema bidimensional, ou seja, todo o desdobramento será aplicado para o uso de somente duas antenas. A mesma teoria pode ser aplicada diretamente à outra dimensão do radar. Nesse caso, a direção de azimute foi escolhida para a análise e, desse ponto em diante, o comprimento da linha de base B_a será denotado apenas

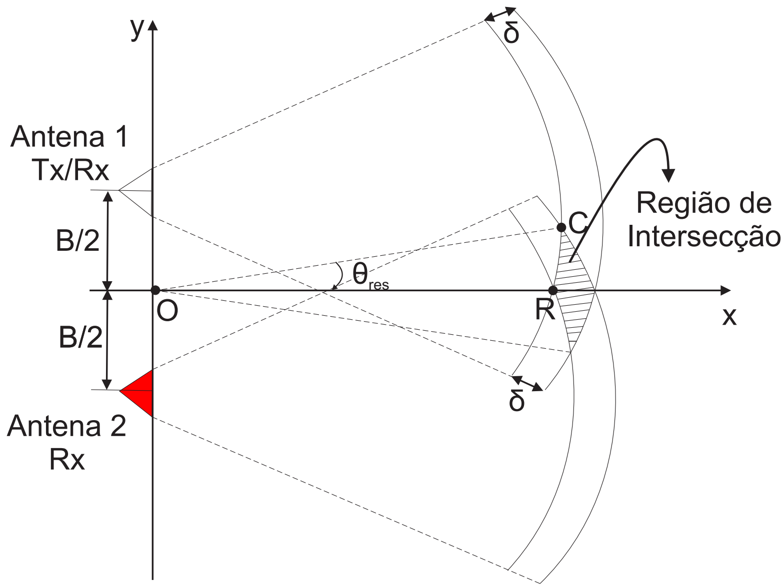


Figura 3.2: Vista superior do sistema, com ênfase na região de intersecção (região hachurada) e nas dimensões da célula de resolução.

por B. Todo sistema radar possui a chamada célula de resolução que é a distância mínima entre dois alvos para que eles sejam distinguíveis pelo radar. Para o caso explorado nesse trabalho a célula de resolução possui as seguintes dimensões, δ dado pela equação (2.22) por $2\theta_{res}$, caracterizado na seção a seguir. Essa célula de resolução pode ser melhor identificada pela região hachurada da Figura 3.2.

3.1.2 Resolução Angular

Com base na geometria da Figura 3.2, é importante determinar o valor do ângulo θ_{res}, pois este define a própria resolução angular em azimute do radar. Para tanto, considere a região de intersecção (hachurada). Note que, neste caso, as células de resolução em alcance de ambas as antenas cruzam o eixo x por uma região de comprimento δ. Para facilitar os cálculos, define-se o início dessa região como sendo R. Pela geometria do problema, é possível escrever as seguintes equações para o ponto marcado como C:

$$\begin{cases} x^2 + (y - \frac{B}{2})^2 = R^2 \\ x^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = (R + \delta)^2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Resolvendo-se esse sistema de equações para x e y positivos, tem-se que

$$y_0 = \frac{\delta(2R + \delta)}{2B}, \tag{3.2}$$

e

$$x_0 = \frac{(2R + \delta)B}{2B} \sqrt{\left(1 - \frac{\delta^2}{B^2}\right) \left[1 - \left(\frac{B}{2R + \delta}\right)^2\right]}. \tag{3.3}$$

Com essa solução, é possível formular a resolução angular do radar como sendo

$$\theta_{res} = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right). \tag{3.4}$$

Substituindo-se as equações (3.2) e (3.3) em (3.4), e considerando que $R \gg \delta$, é possível calcular a resolução angular como

$$\theta_{res} \approx \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\delta}{B}}{\sqrt{1-\frac{\delta^2}{B^2}}}\right). \tag{3.5}$$

Note que, pela geometria, se $B \leq \delta$, então a resolução angular é $\pi/2$. Por esse motivo, é necessário corrigir a expressão (3.5) para

$$\theta_{res} \approx \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\delta}{B}}{\sqrt{1-\min\left[\frac{\delta^2}{B^2}, 1\right]}}\right), \tag{3.6}$$

em que $\min[\cdot, \cdot]$ é o operador que retorna o mínimo entre dois números. Um caso especial pode ser obtido se $B \gg \delta$, em que (3.6) simplifica para

$$\theta_{res} \approx \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{B}\right). \tag{3.7}$$

Substituindo-se a equação (2.22) em (3.6) e usando-se $c = \lambda f_0$ é possível reescrever (3.6) como

$$\theta_{res} \approx \tan^{-1}\left(\frac{\frac{f_0\lambda}{2B\Delta f}}{\sqrt{1-\min\left[\left(\frac{f_0\lambda}{2B\Delta f}\right)^2, 1\right]}}\right). \tag{3.8}$$

Definindo-se $b \triangleq B/\lambda$ como sendo a linha de base normalizada pelo comprimento de onda, tem-se finalmente que

$$\theta_{res} \approx \tan^{-1}\left(\frac{\frac{f_0}{2b\Delta f}}{\sqrt{1-\min\left[\left(\frac{f_0}{2b\Delta f}\right)^2, 1\right]}}\right). \tag{3.9}$$

O resultado apresentado em (3.9) é crucial para o dimensionamento correto do radar meteorológico proposto, e mostra que a resolução angular pode ser determinada conhecendo-se o valor da frequência da portadora, a largura de banda do sinal e a linha de base normalizada.

3.1.3 Diferença de Fase entre os Sinais das Antenas

Pela disposição dos alvos em relação às antenas, é natural utilizar o sistema de coordenadas polares, com azimute (θ) e alcance (R) determinados a partir do centro entre as duas antenas, como pode ser observado na Figura 3.3. Observe ainda que uma dada posição em azimute

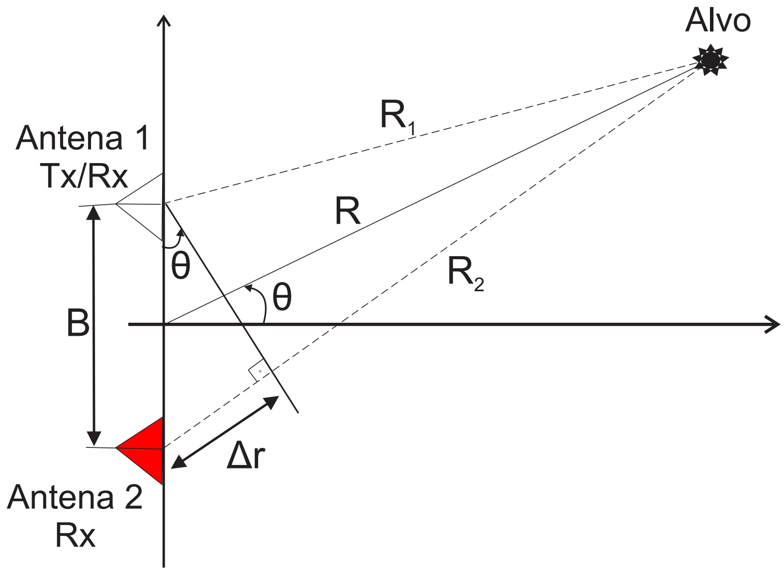


Figura 3.3: Posição do alvo em coordenadas polares.

implica diretamente em uma diferença de distância entre o alvo e as duas antenas, Δr que, por sua vez, provoca uma diferença de fase no sinal recebido pelas duas antenas, $\Delta\phi$. Observe que, se for considerado que o alvo está a uma distância muito maior que a linha de base, $R \gg B$, pode-se então aproximar como paralelas as duas retas representadas na Figura 3.3 pelas distâncias R_1 e R_2 [25]. Assim, a diferença de fase pode ser calculada como

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r \approx \frac{2\pi}{\lambda}B\sin\theta = 2\pi b\sin\theta, \tag{3.10}$$

em que $\Delta r = R_1 - R_2$.

Tal diferença de fase é determinística e só depende do ângulo das partículas em relação às antenas. Outros fatores internos ao sistema também influenciam na fase, mas não serão considerados neste trabalho, como por exemplo, a diferença de fase inserida pelos componentes de *hardware* do radar, que pode ser corrigida através de calibração. Há ainda outros fatores intrínsecos às partículas que influenciam na fase como, por exemplo, seu formato e orientação em relação à onda eletromagnética. Ainda neste capítulo, a expressão (3.10) será utilizada como parte da modelagem estocástica para o radar proposto.

3.1.4 Especificações do Radar

O sistema utilizado para os testes experimentais foi um radar multiestático, coerente e pulsado, com as características descritas na Tabela 3.1. O radar opera na banda X (frequência central em torno de 9.4 GHz) e utiliza três antenas na forma de corneta, com padrão de radiação idênticos. O sinal transmitido é um *chirp*, um sinal linearmente modulado em frequência com largura de banda de aproximadamente 50 MHz.

Como é possível observar na Figura 3.4, as três antenas são separadas por uma determinada linha de base, sendo apenas uma das antenas transmissora, e todas receptoras. A distância entre

Tabela 3.1: Configuração de operação do radar.

Frequência da Portadora (GHz)	9.4
Comprimento de Onda (cm)	3.1
Comprimento do Pulso (μs)	5
Largura de Banda do Pulso (MHz)	50
Resolução em Alcance (m)	3
Potência de Pico (KW)	2.5
Potência Média (W)	5.2
PRF (Hz)	416.67
Frequência de Amostragem (MHz)	100
Linha de Base em Azimute (m)	10
Largura do Feixe de Antenas em Azimute (graus)	8
Linha de Base em Elevação (m)	7.8
Largura do Feixe de Antenas em Elevação (graus)	17

(a) Configuração de testes.

(b) Cenário observado

Figura 3.4: Radar e cenário de teste (as antenas estão evidenciadas em vermelho).

as duas antenas na horizontal é de 10m, e a distância entre as duas antenas na vertical é de 7.8m. Com essa distância entre as antenas, espera-se uma resolução angular nas duas direções (azimute e elevação) suficiente para localizar um fenômeno meteorológico se aproximando ou se afastando com relação à posição do radar.

O diferencial desse radar é utilizar antenas de pequena dimensão e baixa potência de transmissão, o que o torna de baixo custo. Por consequência, é um radar de fácil instalação e manutenção. Seu principal requisito é realizar a completa varredura do céu em algumas dezenas de segundos, para que ele seja útil na aplicação de previsão meteorológica a curto prazo.

3.1.5 Princípio de Operação

O objetivo e a necessidade do radar proposto ficam, portanto, evidentes: detectar fenômenos meteorológicos a partir de sua ocorrência em uma dada região de intersecção de células de resolução em alcance entre duas antenas. A detecção deve ser eficaz em cenários variados, com

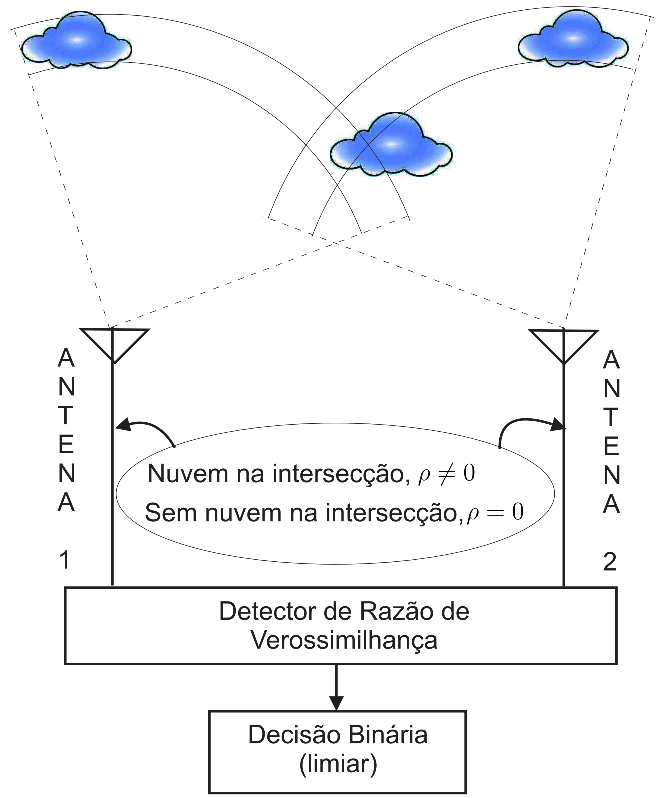


Figura 3.5: Princípio de operação do radar.

presença ou ausência de diferentes intensidades e tipos de nuvem e precipitação. Isto é, garantir certas probabilidades de falso alarme e de detecção, fazendo a varredura do céu num intervalo curto de tempo, da ordem de dezenas de segundos.

Como mostrado na Figura 3.5, após ser recebido e amostrado, o sinal de cada antena é comprimido em alcance (filtro casado), a fim de melhorar a resolução e aumentar a relação sinal-ruído. Em seguida, são realizados os cálculos para a detecção, que consistem em compor uma variável de decisão a partir de um determinado número de amostras dos sinais e aplicar uma decisão binária baseada em um limiar previamente calculado. Isto é, se o valor da variável de decisão for maior que o limiar, decide-se por alvo na intersecção; caso contrário, decide-se por nenhum alvo na intersecção.

Para que a variável de decisão e o limiar sejam determinados, será efetuado neste trabalho o projeto de um detector utilizando o método de teste de hipóteses que utiliza a razão de verossimilhança. Esse projeto será apresentado em maiores detalhes no Capítulo 5. Em linhas gerais, consiste em, a partir do modelo proposto, realizar um teste de hipótese em que é questionado se há alvo (coeficiente de correlação nulo, $\rho \neq 0$) ou não há alvo (coeficiente de correlação diferente de zero e constante, $\rho = 0$) na região de intersecção entre as células de resolução em alcance das duas antenas. Note que o coeficiente de correlação mencionado é aquele entre os sinais provenientes de ecos originados de partículas recebidos pelas antenas 1 e 2. Para esse projeto, é necessário informar qual a probabilidade de falso alarme e de detecção desejadas em que se deve detectar um alvo (nuvem, por exemplo) com um dado coeficiente de correlação mínimo. Após a realização dos cálculos para o projeto desse detector, obtêm-se a variável de decisão, o

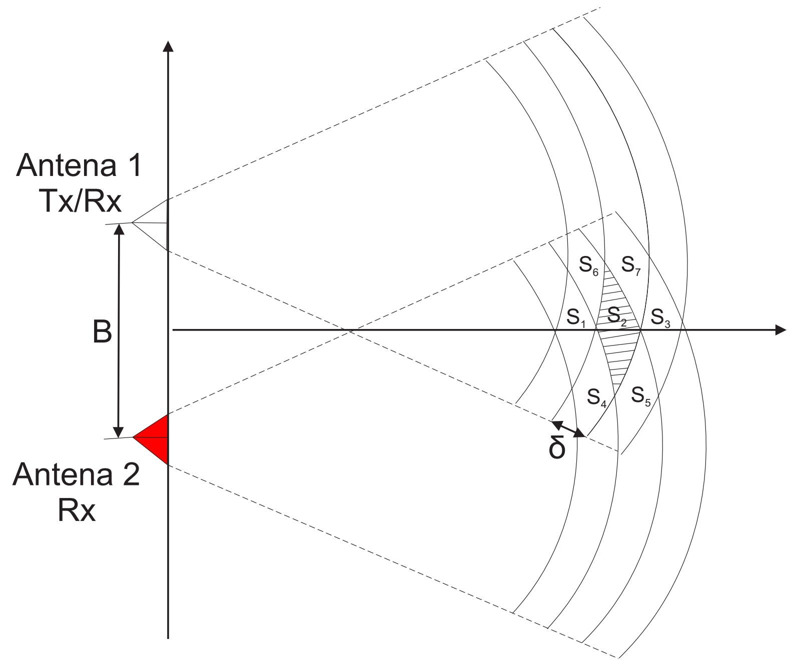


Figura 3.6: Determinação da posição após a detecção.

limiar a ser aplicado e o número de amostras independentes de sinal que devem ser utilizadas para cumprir os requisitos de detecção e falso alarme.

Conforme poderá ser notado mais adiante, os sinais recebidos pelas duas antenas, por construção, possuem um certo coeficiente de correlação entre eles que depende de uma série de fatores, além, é claro, da existência de partículas de nuvem na intersecção: função diretividade e largura do feixe da antena, tamanho da célula de resolução em alcance, linha de base entre as antenas, dentre outros. Como o coeficiente de correlação entre os sinais recebidos é determinante para o desempenho do detector, torna-se necessário avaliar como este coeficiente é afetado por cada um dos fatores citados, assunto a ser discutido no Capítulo 4. O projeto e a análise do detector, por sua vez, são apresentados no Capítulo 5.

Além da detecção, existe a necessidade de determinar a posição dos alvos em azimute. Nesse sentido, é realizada uma varredura através de um processamento em *software* bastante simples e intuitivo. A fim de esclarecer melhor essa idéia, observe a Figura 3.6, em que ficam evidenciadas várias regiões de intersecção, além da central (região S_2 hachurada). Para que seja possível determinar se existe nuvem ou não em cada uma dessas regiões, é necessário executar o algoritmo de detecção várias vezes, variando-se as posições em alcance nos sinais de cada uma das antenas e obtendo-se, assim, diferentes valores de azimute. Isso pode ser melhor representado através da equação a seguir:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{R_1 - R_2}{B}\right), \tag{3.11}$$

em que R_1 é a posição em alcance da região de intersecção para a antena 1 e R_2 é a posição em alcance da região de intersecção para a antena 2 conforme mostrado na Figura 3.6. Assim, por exemplo, para valores iguais de posição em alcance das duas antenas, sempre é possível determinar as regiões de intersecção no azimute zero (regiões S_1, S_2 e S_3), e os azimutes positivos,

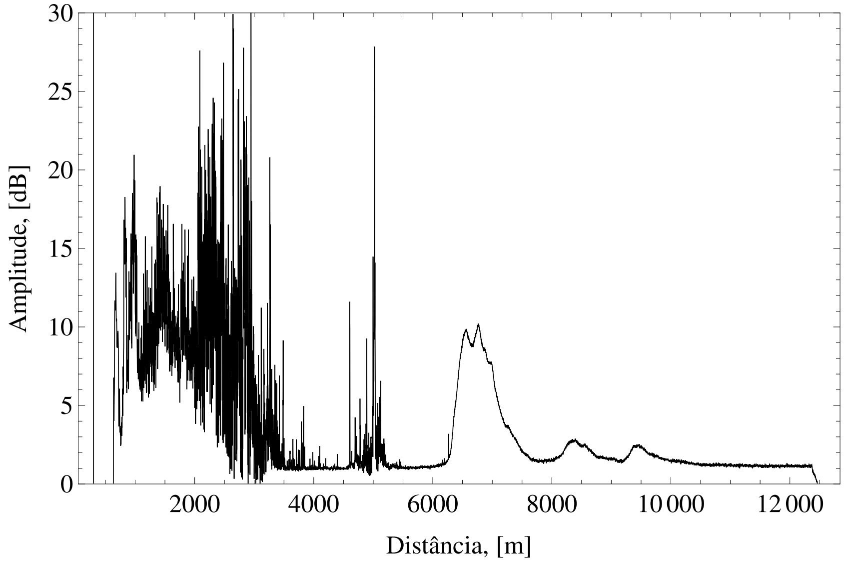


Figura 3.7: Exemplo de perfil médio do sinal medido por uma das antenas (média de 8192 janelas de recepção, cada uma delas iluminando 12Km, em alcance).

ao se escolher $R_1 > R_2$ (regiões S_4 e S_5), e os azimutes negativos, ao se escolher $R_1 < R_2$ (regiões S_6 e S_7). Sabe-se que, diferentes alcances podem ser obtidos ao se escolher, na recepção proveniente de cada antena, diferentes instantes de tempo. Para cada caso, é executado o algoritmo de detecção e, se a variável de decisão exceder o limiar, o alvo é então detectado, referente ao alcance e azimute correspondentes.

Como cada par de antenas ilumina um setor equivalente à sua largura de feixe, esse sistema requer pelo menos $2\pi/\theta_{beam}$ pares de antenas (um par por setor) para varrer todos os azimutes possíveis (360 graus). Por exemplo, com 90 graus de feixe de antena, são necessários no mínimo 4 pares de antenas.

3.2 Testes de Campo

Com o radar proposto devidamente especificado foi então realizado um ensaio em dezembro de 2010 na cidade de São José dos Campos. Como pode ser observado na Figura 3.4, referente a esse ensaio o céu estava nublado e havia nuvens em praticamente todas as direções, formando uma espécie de "teto"no céu.

Nas Figuras 3.7 e 3.8, é possível observar a amplitude média do sinal recebido por uma das antenas em diversas (8192) janelas de recepção, cada uma delas iluminando 12Km em alcance. Em particular, na Figura 3.7, é possível observar que o radar começa a receber ecos provenientes de nuvens a partir de uma distância de 6000 metros. Em distâncias inferiores nota-se a ocorrência de ecos de alta potência, sendo eles provenientes de *clutter*, como terreno, árvores, construções e torres de comunicação. Já na Figura 3.8, observa-se um gráfico de intensidade dos pulsos recebidos, a partir da distância de 4500 metros em função da distância e do tempo de observação. É possível observar como a nuvem se desloca ao longo do tempo. Além disso, observa-se um alvo fixo a uma distância de 4750 metros, que permanece nessa posição durante

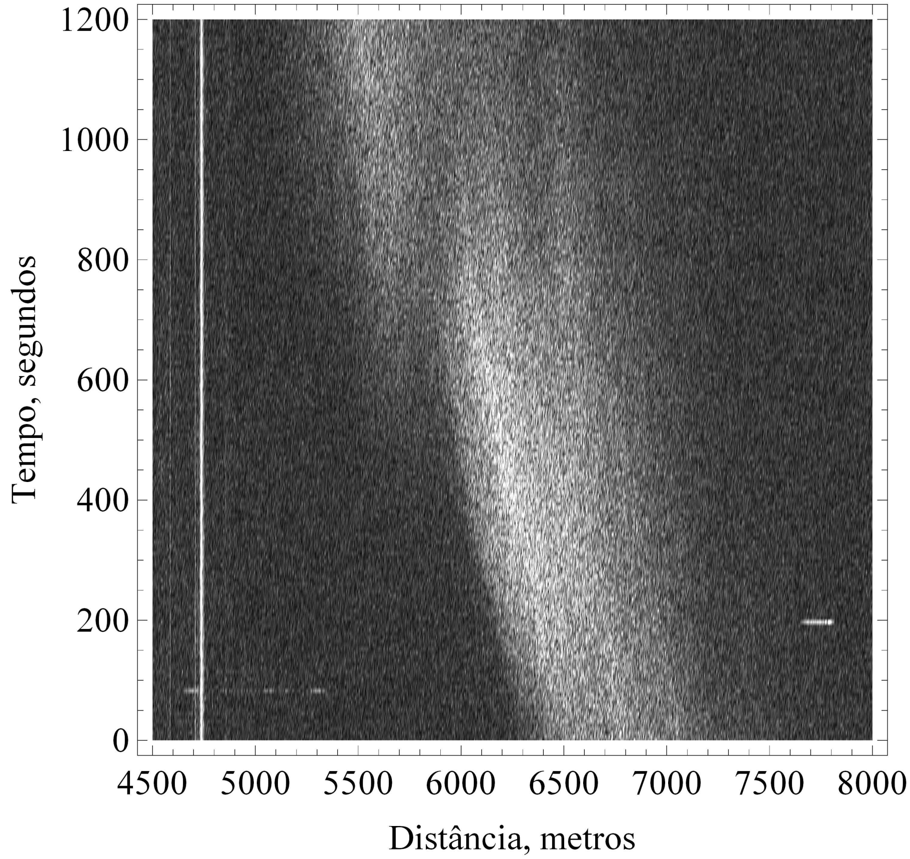
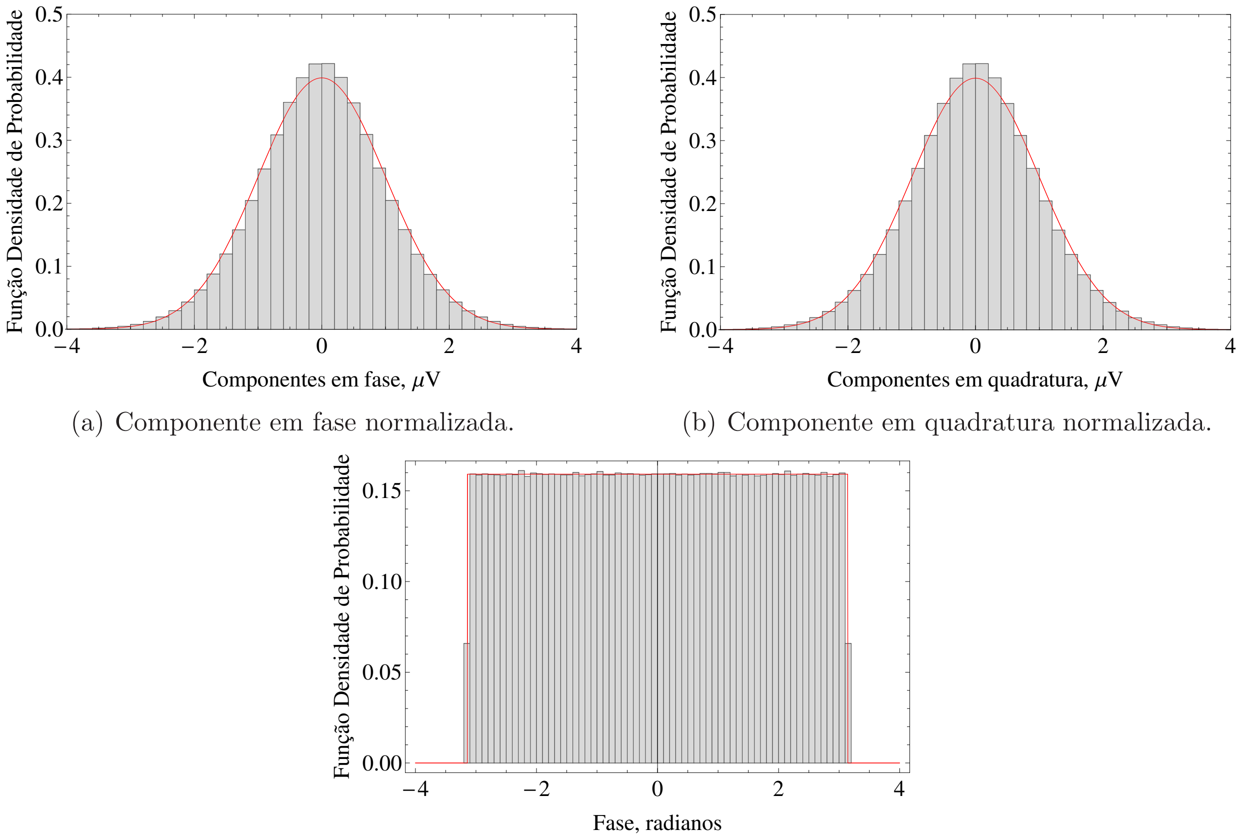


Figura 3.8: Intensidade de amplitude do sinal em função da distância e através do tempo.

toda a captura dos dados. Esse ponto é o eco de resposta da torre de controle do Aeroporto de São José dos Campos. Os demais pontos com intensidade mais acentuada são ecos provenientes de nuvens e/ou precipitação. É importante notar que tais nuvens vão se espalhando em alcance e se dissipando durante o transcorrer do tempo, isto é, sua intensidade começa a cair ao longo do tempo.

Com a integridade dos dados validada e identificada a posição das nuvens em alcance, resta agora apenas uma tarefa: determinar sua posição angular (azimute). Para que tal tarefa seja realizada com êxito, é importante conhecer as características estocásticas do sinal proveniente das nuvens. Para tanto, foram tomadas pouco mais de quatro milhões de amostras da região de nuvem e normalizadas em relação à sua média e variância, de tal forma que, depois dessa operação, o conjunto das amostras tivesse média nula e variância unitária. Assim, com o sinal complexo normalizado, foram levantados os histogramas da parte real (em fase), da parte complexa (quadratura) e da fase correspondente. Esse resultado pode ser observado na Figura 3.9, em que é possível observar, em cinza, o histograma originado dos dados coletados e, em vermelho, a função densidade de probabilidade teórica ajustada.

Nota-se, portanto, que as componentes em fase e quadratura do sinal complexo normalizado ajustam-se a gaussianas de média nula e variância unitária, e que, correspondentemente, a fase é distribuída de forma uniforme entre 0 e 2π. Por consequência, a envoltória terá uma distribuição de probabilidade do tipo Rayleigh [26]. Essa conclusão é de extrema importância



(a) Componente em fase normalizada.

(b) Componente em quadratura normalizada.

(c) Fase

Figura 3.9: Histogramas de medidas referentes às nuvens.

para a elaboração de um modelo estatístico adequado de como as antenas do radar proposto percebem os fenômenos meteorológicos a serem detectados o qual irá servir de base para o cálculo do coeficiente de correlação entre os sinais das antenas, no Capítulo 4, bem como para o projeto e a análise de um detector ótimo para o radar, no Capítulo 5.

3.3 Modelagem Estocástica do Sistema

Os sinais recebidos pelas antenas 1 e 2 são somas de sinais refletidos por uma grande quantidade de partículas dentro de uma determinada célula de resolução em alcance. Essas partículas representam um possível alvo que o radar deve detectar, como, por exemplo, uma nuvem ou precipitação. Como já visto, a contribuição da l-ésima partícula pode ser representada na forma complexa como

$$Z_l = A_l e^{j\Phi_l}, \tag{3.12}$$

em Z_l é uma variável aleatória (v.a.) gaussiana circularmente simétrica de média zero e variância $2\sigma^2$, a envoltória A_l é uma v.a. do tipo Rayleigh e a fase $-\pi \leq \Phi_l < \pi$ é distribuída uniformemente. Para antenas diretivas, a posição azimutal de cada partícula influenciará no modo como ela é percebida por cada antena. Dessa forma, além de Z_l, cada partícula terá a ela associada uma nova variável aleatória, correspondente ao seu azimute, Θ_l. Essa variável influ-

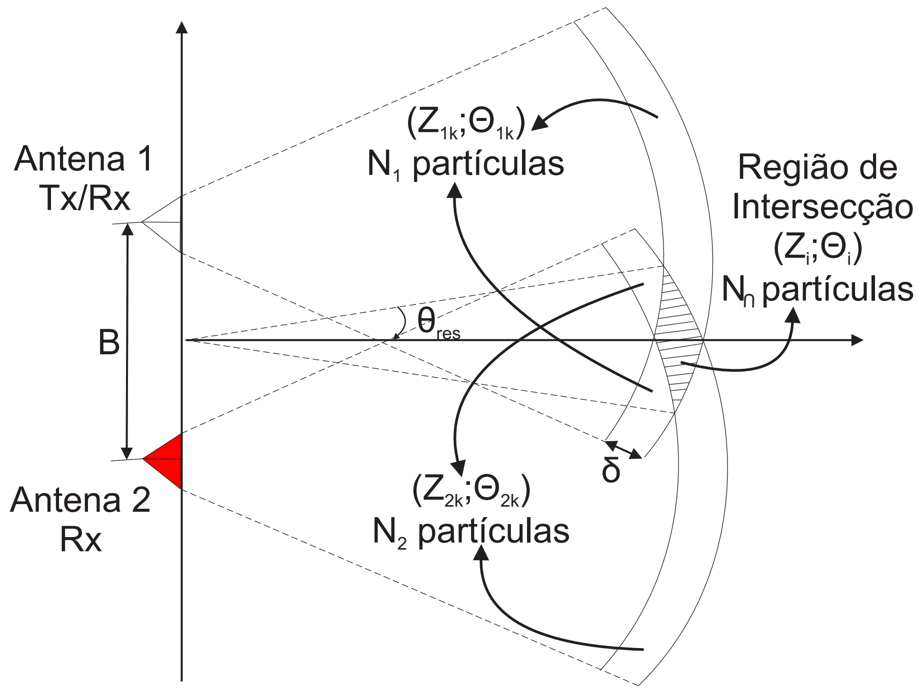


Figura 3.10: Vista superior do sistema, com ênfase na região de intersecção (região hachurada) e na posição das partículas.

enciará tanto na amplitude quanto também na fase do sinal recebido. O par aleatório $(Z_l;\Theta_l)$ descreve completamente a l-ésima partícula. Para cada partícula, considera-se que Z_l é independente de Θ_l. Além disso, considera-se que, as várias partículas são também independentes entre si.

Para facilitar a análise, é conveniente distinguir as partículas dentro e fora da região de intersecção das antenas. Partículas dentro da região de intersecção serão denotadas por $(Z_i = A_i e^{\Phi_i};\Theta_i)$, com um único subíndice. Partículas fora da área de intersecção serão denotadas por $(Z_{1k} = A_{1k}e^{\Phi_{1k}};\Theta_{1k})$ para a antena 1 e por $(Z_{2k} = A_{2k}e^{\Phi_{2k}};\Theta_{2k})$ para a antena 2. Além disso, considera-se que existam $N_\cap$ partículas no interior da área de intersecção, N_1 partículas fora dessa região mas ainda dentro da célula de resolução em alcance da antena 1, e N_2 partículas fora da área de intersecção mas ainda dentro da célula de resolução em alcance da antena 2. De forma sintetizada, essa notação pode ser melhor observada na Figura 3.10.

Com essas considerações, os sinais recebidos pela antena 1 (S_1) e pela antena 2 (S_2) em um determinado instante podem ser modelados como

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N_\cap} Z_i D(\Theta_i) + \sum_{k=1}^{N_1} Z_{1k} D(\Theta_{1k}) \quad (3.13)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N_\cap} Z_i D(\Theta_i) e^{j2\pi b \sin\Theta_i} + \sum_{k=1}^{N_2} Z_{2k} D(\Theta_{2k}). \quad (3.14)$$

Note que, pelo Teorema Central do Limite [27] devido à infinidade de partículas na célula de resolução em alcance das antenas, S_1 e S_2 são caracterizados por possuírem média zero e por serem processos gaussianos complexos. A seguir, apresenta-se em resumo as principais características estocásticas desse modelo:

(3.i) Z_i, Θ_i, Z_j, Θ_j, Z_{1k}, Θ_{1l}, Z_{1m}, Θ_{1n}, Z_{2o}, Θ_{2p}, Z_{2q}, Θ_{2r} são mutuamente independentes, $\forall i \neq j$, $\forall k \neq m$, $\forall l \neq n$, $\forall o \neq q$, $\forall p \neq r$;

(3.ii) Z_i, Z_j, Z_{1k}, Z_{1l}, Z_{2m}, Z_{2n} são identicamente distribuídas, $\forall i, j, k, l, m, n$;

(3.iii) Θ_i, Θ_j são identicamente distribuídas, $\forall i, j$;

(3.iv) Θ_{1i}, Θ_{1j} são identicamente distribuídas, $\forall i, j$;

(3.v) Θ_{2i}, Θ_{2j} são identicamente distribuídas, $\forall i, j$;

(3.vi) $\mathrm{E}\{S_1\} = \mathrm{E}\{S_2\} = \mathrm{E}\{Z_i\} = \mathrm{E}\{Z_{1j}\} = \mathrm{E}\{Z_{2k}\} = 0$, $\forall i, j$.

Em que $\mathrm{E}\{\cdot\}$ representa a esperança e $D(\Theta)$ é a função diretividade da antena.

Aglutinando-se as contribuições das várias partículas, o modelo em (3.13) e (3.14) pode ser reescrito, de forma mais compacta, e incluindo as várias amostras de observação, como

$$S_{1i} = X_{1i} + jY_{1i} \tag{3.15}$$

$$S_{2i} = X_{2i} + jY_{2i}. \tag{3.16}$$

em que i denota tempo discreto, $i = 1, 2, ..., n$, sendo n o número de amostras observadas, e S_{1i} e S_{2i} são variáveis conjuntamente gaussianas circularmente simétricas, de média nula e variância $2\sigma^2$. Essas variáveis têm certo grau de correlação quando há partículas na região de intersecção, e são independentes caso contrário.

Capítulo 4

Caracterização do Modelo em termos de Parâmetros Físicos

Com o conhecimento do comportamento, formato e distribuição estatística das partículas que formam o alvo de interesse, se torna importante a busca por um detector ótimo capaz de, utilizando o radar proposto, localizar e rastrear fenômenos atmosféricos diversos, como nuvem, precipitação, névoa, etc. Pelas equações (3.13) e (3.14), é possível observar que os sinais de ambas as antenas possuem informações sobre todas as partículas $(Z_i; \Theta_i)$ no interior da região de intersecção, $i = 1, 2, ...N_\cap$, e que cada uma dessas partículas são percebidas pela antena 2 com uma determinada diferença de fase $2\pi b \sin \Theta_i$ em relação à antena 1. Portanto, utilizando essa informação comum às duas antenas, é possível determinar a posição angular de um determinado conjunto de partículas e com isso, a posição de um fenômeno atmosférico.

Uma boa métrica para avaliar o potencial dessa estratégia, na detecção de alvos é o coeficiente de correlação ρ entre S_1 e S_2 quando da presença de partículas na intersecção, definido como

$$\rho \triangleq \frac{\mathrm{COV}\{S_1, S_2\}}{\sqrt{\mathrm{VAR}\{S_1\}\mathrm{VAR}\{S_2\}}}, \tag{4.1}$$

em que $\mathrm{VAR}\{\cdot\}$ representa a variância e $\mathrm{COV}\{\cdot,\cdot\}$, a covariância. A seguir, ρ é calculado em termos dos parâmetros físicos do sistema, como distância entre antenas, largura de banda, diretividade das antenas e distribuição das partículas no espaço.

4.1 Covariância

A covariância de S_1 e S_2 é definida como:

$$\mathrm{COV}\{S_1, S_2\} \triangleq \mathrm{E}\{S_1 S_2^*\} - \mathrm{E}\{S_1\}\mathrm{E}\{S_2^*\}. \tag{4.2}$$

Aplicando-se (3.13) e (3.14) em (4.2), e usando-se o fato de que S_1 e S_2 possuem média nula, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{COV}\{S_1,S_2\} &= \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_\cap}\sum_{k=1}^{N_\cap} Z_i Z_k^* D(\Theta_i) D(\Theta_k) e^{-j2\pi b\sin\Theta_k}\right\} + \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_\cap}\sum_{k=1}^{N_1} Z_i Z_{1k}^* D(\Theta_i) D(\Theta_{1k})\right\} \\ &+ \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_\cap} Z_{1i} Z_k^* D(\Theta_{1i}) D(\Theta_k) e^{-j2\pi b\sin\Theta_k}\right\} \\ &+ \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_2} Z_{1i} Z_{2k}^* D(\Theta_{1i}) D(\Theta_{2k})\right\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Usando-se o fato de que as partículas são mutuamente independentes e identicamente distribuídas, (4.3) se reduz a

$$\mathrm{COV}\{S_1,S_2\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=k=1}^{N_\cap} Z_i Z_k^* D(\Theta_i) D(\Theta_k) e^{-j2\pi b\sin\Theta_k}\right\}. \tag{4.4}$$

Simplificando-se (4.4), chega-se a

$$\mathrm{COV}\{S_1,S_2\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_\cap} |Z_i|^2\ D(\Theta_i)^2 e^{-j2\pi b\sin\Theta_i}\right\}. \tag{4.5}$$

E, finalmente, utilizando-se as características do modelo apresentadas na Seção 3.3, (3.i), (3.ii), e (3.iii) em (4.5), obtém-se

$$\mathrm{COV}\{S_1,S_2\} = N_\cap \mathrm{E}\{|Z_i|^2\}\mathrm{E}\{D(\Theta_i)^2 e^{-j2\pi b\sin\Theta_i}\}. \tag{4.6}$$

4.2 Variância

A variância de S_1 é definida como

$$\mathrm{VAR}\{S_1\} \triangleq \mathrm{E}\{S_1 S_1^*\} - \mathrm{E}\{S_1\}\mathrm{E}\{S_1^*\}. \tag{4.7}$$

Aplicando-se (3.13) e (3.14) em (4.7), e usando-se o fato de que S_1 e S_2 possuem média nula, tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}\{S_1\} &= \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_\cap}\sum_{k=1}^{N_\cap} Z_i Z_k^* D(\Theta_i) D(\Theta_k)\right\} + \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_\cap}\sum_{k=1}^{N_1} Z_i Z_{1k}^* D(\Theta_i) D(\Theta_{1k})\right\} \\ &+ \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_\cap} Z_{1i} Z_k D(\Theta_{1i}) D(\Theta_k)\right\} + \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1} Z_{1i} Z_{1k} D(\Theta_{1i}) D(\Theta_{1k})\right\}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando-se o fato de que as partículas são mutuamente independentes e identicamente distribuídas, (4.8) reduz a

$$\mathrm{VAR}\{S_1\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=k=1}^{N_\cap} Z_i Z_k^* D(\Theta_i) D(\Theta_k)\right\} + \mathrm{E}\left\{\sum_{i=k=1}^{N_1} Z_{1i} Z_{1k} D(\Theta_{1i}) D(\Theta_{1k})\right\}. \tag{4.9}$$

Simplificando-se (4.9), chega-se a

$$\mathrm{VAR}\{S_1\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{N_\cap} |Z_i|^2 D(\Theta_i)^2\right\} + \mathrm{E}\left\{\sum_{k=1}^{N_1} |Z_{1k}|^2 D(\Theta_{1k})^2\right\}. \tag{4.10}$$

Então, utilizando-se novamente (3.i), (3.ii), e (3.iii) em (4.10), obtém-se

$$\mathrm{VAR}\{S_1\} = \mathrm{E}\{|Z_i|^2\}\left[N_\cap \mathrm{E}\{D(\Theta_i)^2\} + N_1 \mathrm{E}\{D(\Theta_{1k})^2\}\right]. \tag{4.11}$$

Observe que Θ_i e Θ_{1k} não são variáveis identicamente distribuídas, de modo que $\mathrm{E}\{D(\Theta_i)^2\}$ e $\mathrm{E}\{D(\Theta_{1k})^2\}$ não podem ser diretamente somados. Por outro lado, utilizando-se a regra de Bayes para a esperança condicional, é possível reescrever os momentos das partículas fora e dentro da região de intersecção em termos do momento-união $\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2\}$, em que $\Theta_{\cup 1}$ é uma variável aleatória que representa o azimute da união de partículas dentro de toda a célula de resolução em alcance da antena 1, tanto dentro quanto fora da região de intersecção. De acordo com isso, tem-se que

$$\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2\} = \mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2 \mid \Theta_{\cup 1} \in \mathrm{I}\}\mathrm{P}\{\Theta_{\cup 1} \in \mathrm{I}\} + \mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2 \mid \Theta_{\cup 1} \notin \mathrm{I}\}\mathrm{P}\{\Theta_{\cup 1} \notin \mathrm{I}\}, \tag{4.12}$$

em que I representa a região de intersecção e $\mathrm{P}\{\cdot\}$ denota a probabilidade de um determinado evento ocorrer. A partir da geometria descrita no capítulo anterior, tem-se que

$$\mathrm{P}\{\Theta_{\cup 1} \in \mathrm{I}\} = \frac{N_\cap}{N_\cap + N_1} \triangleq k_1, \tag{4.13}$$

e que

$$\mathrm{P}\{\Theta_{\cup 1} \notin \mathrm{I}\} = \frac{N_1}{N_\cap + N_1} \triangleq 1 - k_1. \tag{4.14}$$

Inserindo-se (4.13) e (4.14) em (4.12), obtem-se então

$$(N_\cap + N_1)\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2\} = N_\cap \mathrm{E}\{D(\Theta_i)^2\} + N_1 \mathrm{E}\{D(\Theta_{1k})^2\}. \tag{4.15}$$

Finalmente, a partir de (4.15), é possível reescrever a equação (4.11) como

$$\mathrm{VAR}\{S_1\} = (N_\cap + N_1)\mathrm{E}\{|Z_i|^2\}\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2\}. \tag{4.16}$$

O mesmo raciocínio pode ser usado para calcular a variância de S_2, usando-se $\Theta_{\cup 2}$ como variável aleatória que representa o azimute da união de partículas dentro de toda a célula de resolução em alcance da antena 2. Assim,

$$\mathrm{VAR}\{S_2\} = (N_\cap + N_2)\mathrm{E}\{|Z_i|^2\}\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 2})^2\}. \tag{4.17}$$

E, correspondentemente,

$$\mathrm{P}\{\Theta_{\cup 2} \in \mathrm{I}\} = \frac{N_\cap}{N_\cap + N_2} \triangleq k_2 \tag{4.18}$$

$$\mathrm{P}\{\Theta_{\cup 2} \notin \mathrm{I}\} = \frac{N_2}{N_\cap + N_2} \triangleq 1 - k_2. \tag{4.19}$$

4.3 Coeficiente de Correlação

Com a covariância e as variâncias já calculadas, pode-se agora determinar uma equação geral para o coeficiente de correlação ρ. Substituindo-se (4.6), (4.16) e (4.17) em (4.1), tem-se

$$\rho = \frac{N_\cap \mathrm{E}\{|Z_i|^2\}\mathrm{E}\{D(\Theta_i)^2 e^{-j2\pi b \sin\Theta_i}\}}{\sqrt{(N_\cap + N_1)\mathrm{E}\{|Z_i|^2\}\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2\}(N_\cap + N_2)\mathrm{E}\{|Z_i|^2\}\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 2})^2\}}}. \tag{4.20}$$

Reorganizando-se a expressão (4.20), chega-se a

$$\rho = \sqrt{\frac{N_\cap}{N_1 + N_\cap}}\sqrt{\frac{N_\cap}{N_2 + N_\cap}}\frac{\mathrm{E}\{D(\Theta_i)^2 e^{-j2\pi b \sin\Theta_i}\}}{\sqrt{\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2\}\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 2})^2\}}}. \tag{4.21}$$

Empregando-se as definições (4.13) e (4.18) em (4.21), obtém-se então

$$\rho = \sqrt{k_1 k_2}\frac{\mathrm{E}\{D(\Theta_i)^2 e^{-j2\pi b \sin\Theta_i}\}}{\sqrt{\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 1})^2\}\mathrm{E}\{D(\Theta_{\cup 2})^2\}}}. \tag{4.22}$$

É possível escrever as três esperanças acima em termos das FDPs de Θ_i, $f_{\Theta_i}(\cdot)$, de $\Theta_{\cup 1}$, $f_{\Theta_{\cup 1}}(\cdot)$, e de $\Theta_{\cup 2}$, $f_{\Theta_{\cup 2}}(\cdot)$, obtendo-se finalmente

$$\rho = \frac{\sqrt{k_1 k_2}\int_{-\theta_{res}(b,\Delta f)}^{\theta_{res}(b,\Delta f)} D(\theta_i)^2 e^{-j2\pi b \sin\theta_i} f_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i}{\sqrt{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(\theta_{\cup 1})^2 f_{\Theta_{\cup 1}}(\theta_{\cup 1}) d\theta_{\cup 1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(\theta_{\cup 2})^2 f_{\Theta_{\cup 2}}(\theta_{\cup 2}) d\theta_{\cup 2}}}. \tag{4.23}$$

Note que a integração de θ_i compreende o intervalo entre $-\theta_{res}$ e θ_{res} (o comprimento angular de toda a região de intersecção), enquanto que a integração em $\theta_{\cup 1}$ e $\theta_{\cup 2}$ vai de $-\pi/2$ até $\pi/2$ (o comprimento angular da célula de resolução em alcance para as antenas 1 e 2). Observe também que optou-se pela notação $\theta_{res}(b, \Delta f)$ em lugar de apenas θ_{res}. Isso foi feito para reforçar a dependência de θ_{res} com a linha de base normalizada b e com a largura de banda do sinal, como mostrado em (3.9).

Pelo Teorema da Probabilidade Total, é possível escrever a FDP de $\Theta_{\cup 1}$, necessária em (4.23) em termos de k_1, $f_{\Theta_i}(\cdot)$ e $f_{\Theta_{1k}}(\cdot)$, como

$$f_{\Theta_{\cup 1}}(\theta) = k_1 f_{\Theta_i}(\theta) + (1 - k_1) f_{\Theta_{1k}}(\theta). \tag{4.24}$$

O mesmo pode ser feito para $\Theta_{\cup 2}$, levando a

$$f_{\Theta_{\cup 2}}(\theta) = k_2 f_{\Theta_i}(\theta) + (1 - k_2) f_{\Theta_{2k}}(\theta). \tag{4.25}$$

O resultado (4.23) é geral e inédito na literatura. Ele pode ser aplicado a qualquer distribuição de partículas. Observe que o modelo utilizado neste trabalho considera que todas as partículas possuem a mesma seção reta. Entretanto, é útil, em uma análise prática, que a distribuição de energia possa não ser uniforme. Nesse caso, as próprias constantes k_1 e k_2 podem ser ajustadas para descrever o desbalanceamento de potência desejado, sem perda de generalidade.

Em particular, tomando-se partículas uniformemente distribuídas no interior das células de resolução em alcance, então $\Theta_{\cup 1}$ e $\Theta_{\cup 2}$ se tornam uniformes no intervalo $(-\pi/2, \pi/2]$, ou seja,

$$f_{\Theta_{\cup 2}}(\theta_{\cup 2}) = f_{\Theta_{\cup 1}}(\theta_{\cup 1}) = \frac{1}{\pi}. \tag{4.26}$$

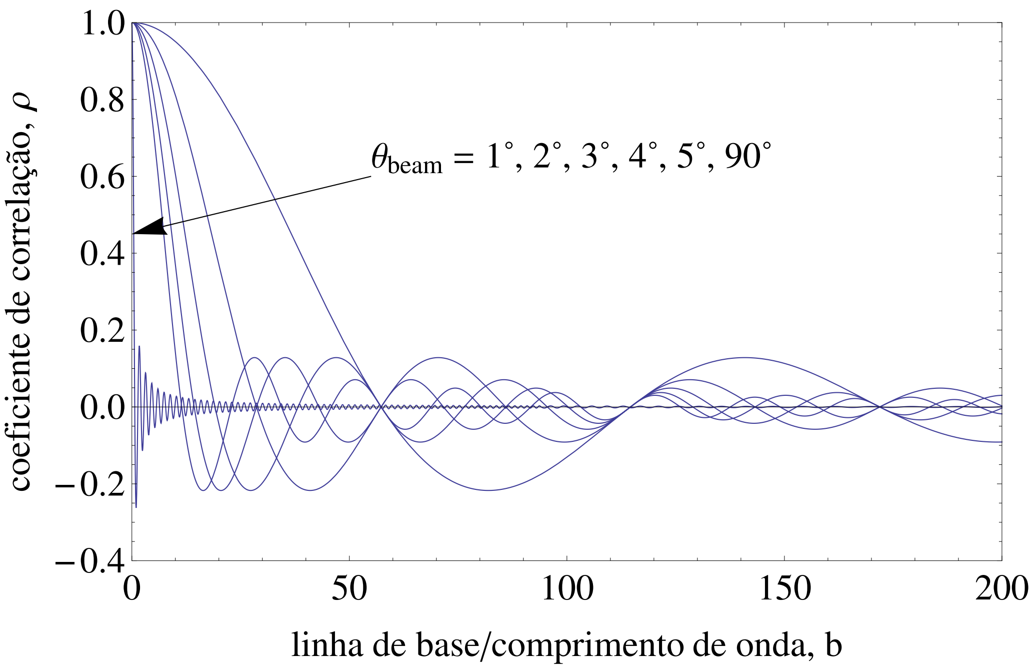


Figura 4.1: Coeficiente de correlação em função de θ_{beam} ($\Delta f = 50$MHz).

Da mesma forma, Θ_i se torna uniforme no intervalo $[-\theta_{res}, \theta_{res}]$, e Θ_{1k} e Θ_{2k} se tornam uniformes em $(-\pi/2, -\theta_{res})$ e $(\theta_{res}, \pi/2)$. Correspondentemente, os parâmetros k_1 e k_2 se tornam proporcionais à geometria do problema, de modo que

$$k_1 = k_2 = \frac{2\theta_{res}(b, \Delta f)}{\pi}. \tag{4.27}$$

Levando-se isso em consideração, (4.23) reduz, no caso uniforme, para

$$\rho = \frac{\int_{-\theta_{res}(b,\Delta f)}^{\theta_{res}(b,\Delta f)} D(\theta_i)^2 e^{-j2\pi b \sin\theta_i} d\theta_i}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(\theta_{\cup 1})^2 d\theta_{\cup 1}}. \tag{4.28}$$

Portanto, em um cenário uniforme, o coeficiente de correlação depende da função diretividade da antena $D(\cdot)$ (e, portanto, da largura de feixe da antena, θ_{beam}), da largura de banda do sinal, Δf, e da linha de base normalizada b.

4.4 Resultados Numéricos

A seguir, a expressão obtida para o coeficiente de correlação é avaliada para um radar cuja frequência central de operação é $f_0 = 9.4$ GHz (Banda X). Por simplicidade, é considerado um cenário uniforme, no qual o coeficiente de correlação é dado por (4.28). Os cálculos foram efetuados numericamente, utilizando o *software* Mathematica.

A Figura 4.1 mostra o efeito de diferentes larguras do feixe da antena θ_{beam} no coeficiente de correlação. É considerada uma antena ideal, com padrão de diretividade dado por (2.8), e

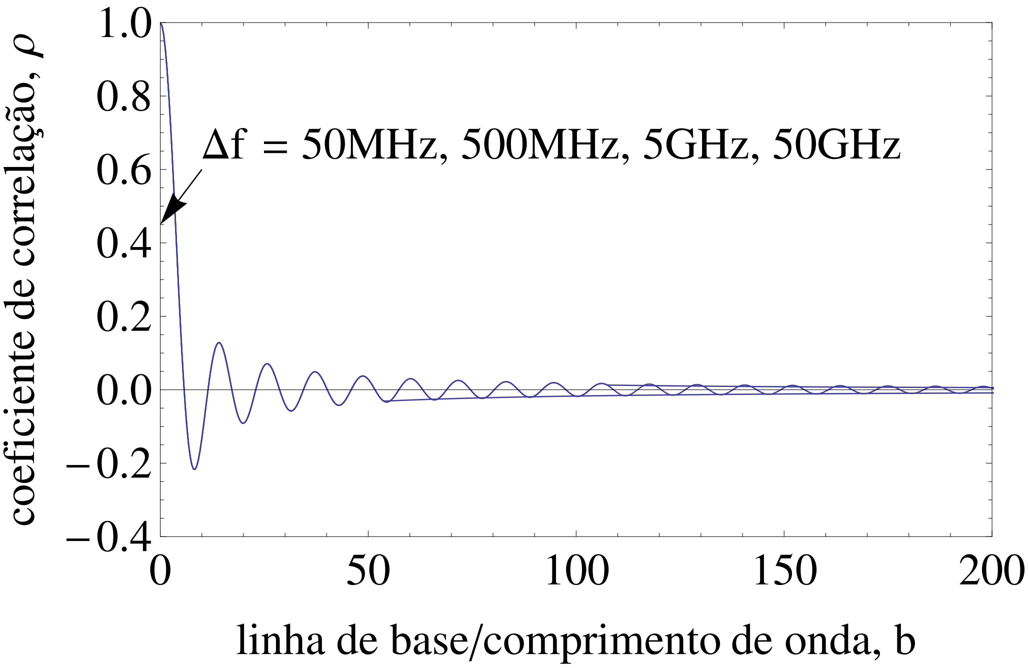


Figura 4.2: Coeficiente de correlação em função de Δf ($\theta_{beam} = 10^o$).

uma largura de banda do sinal de $\Delta f = 50$ MHz. Como resultado geral, para qualquer valor de largura de feixe da antena, observa-se que o coeficiente de correlação oscila em torno do zero e tende a diminuir à medida que a linha de base aumenta. Isso já era esperado, pois, como visto em (3.9), a extensão da região de intersecção reduz com o aumento da linha de base. Além disso, observa-se também que o coeficiente de correlação diminui à medida que a largura do feixe aumenta. Isso também era esperado, porque quanto maior a largura de feixe da antena, mais partículas são "percebidas" fora da região de intersecção, o que significa que há mais termos não comuns entre S_1 e S_2 e, consequentemente, menos correlação.

A Figura 4.2 mostra a influência da largura de banda do sinal, Δf, no coeficiente de correlação. Considera-se uma antena ideal, com padrão de radiação dado por (2.8), e uma largura de feixe da antena de $\theta_{beam} = 10^o$. Novamente, para qualquer valor de largura de banda do sinal, observa-se que o coeficiente de correlação tende a diminuir à medida que a linha de base aumenta. Além disso, é possível observar que a largura de banda tem pouco impacto na correlação, já que as curvas coincidem em grande parte. Em particular, a função de correlação se torna menos oscilatória quando

$$\theta_{beam} = 2\theta_{res}. \tag{4.29}$$

Observe que para $b\lambda \gg \delta$, substituindo-se a equação (2.22) em (3.7) e usando-se $c = \lambda f_0$, tem-se

$$\theta_{res} \approx \tan^{-1}\left(\frac{f_0}{2b\Delta f}\right). \tag{4.30}$$

Dessa forma, substituindo (4.30) em (4.29), tem-se que a igualdade se verifica quando

$$b = \frac{f_0}{2\tan(\theta_{beam}/2)\Delta f} \tag{4.31}$$

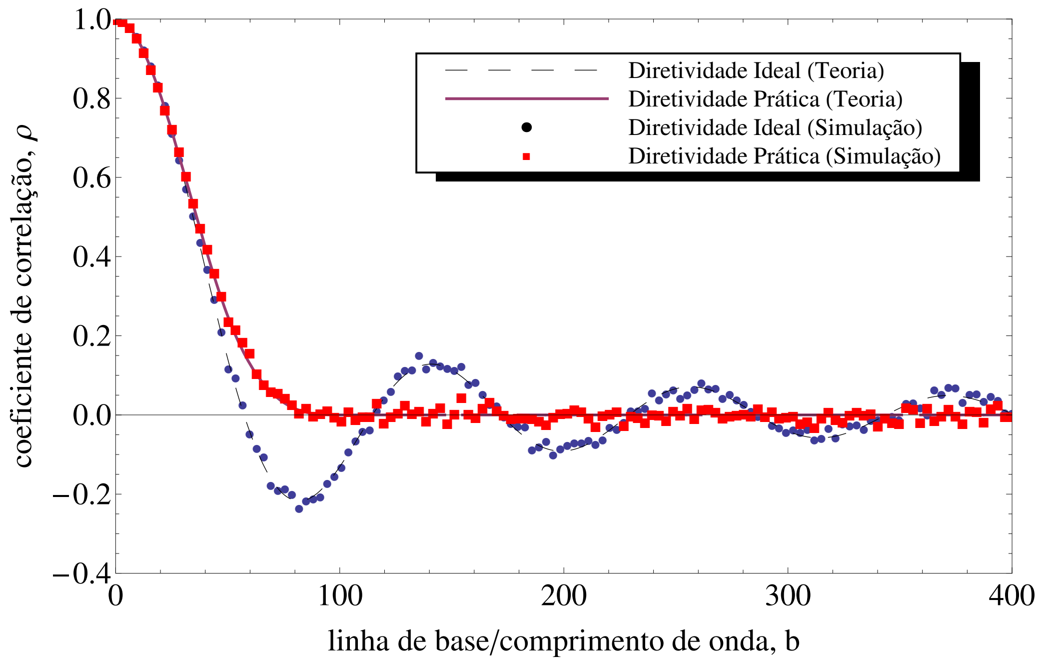


Figura 4.3: Coeficiente de correlação em função da diretividade da antena, ideal e prática (Δf = 50MHz, $\theta_{beam} = 1^o$), avaliada na teoria e em simulação.

como pode ser observado na Figura 4.2.

Finalmente, a Figura 4.3 mostra a influência do padrão de radiação, comparando uma antena ideal, de padrão de diretividade dado por (2.8), com um arranjo linear de antenas (prático), de padrão de diretividade dado por (2.11). Considera-se um sinal de largura de banda de $\Delta f = 50$ MHz e uma largura de feixe da antena de $\theta_{beam} = 1^o$. Observa-se que, no caso prático, o coeficiente de correlação diminui mais rapidamente à medida que a linha de base aumenta, e não apresenta o comportamento oscilatório. Nota-se que o coeficiente de correlação para a antena prática só chega a zero próximo ao comprimento de linha de base para o qual o coeficiente de correlação para a antena ideal cruza o zero pela segunda vez. E além disso, depois dessa distância, o coeficiente de correlação para a antena prática se mantém em zero, enquanto que para a antena ideal continua oscilando. Note na Figura 4.3 que resultados de simulação foram incluídos, e eles validam as expressões analíticas apresentadas neste capítulo para o coeficiente de correlação. As simulações foram realizadas no *software* MATLAB. Foi simulado as partículas com as características estocásticas de refletividade e de posição conforme o modelo apresentado no Capítulo 3, bem como a composição dos sinais recebidos pelas antenas 1 e 2, e em seguida realizado o cálculo do coeficiente de correlação entre estes sinais para diferentes valores de linha de base utilizando cada uma das funções de diretividade da antena (ideal e prática).

Capítulo 5

Detector e Análise de Desempenho

Neste capítulo, apresenta-se o projeto de um algoritmo ótimo de detecção para o radar proposto. O detector é projetado segundo o critério de Neyman-Pearson, que faz uso da razão de verossimilhança dos sinais recebidos pelas antenas [28]. Tal critério, como se sabe, maximiza a probabilidade de detecção para uma dada probabilidade de falso alarme. Essas probabilidades são obtidas de forma exata e fechada para o detector projetado, bem como seu desempenho é ilustrado com exemplos numéricos. Mais especificamente, o projeto apresentado envolve os seguintes passos:

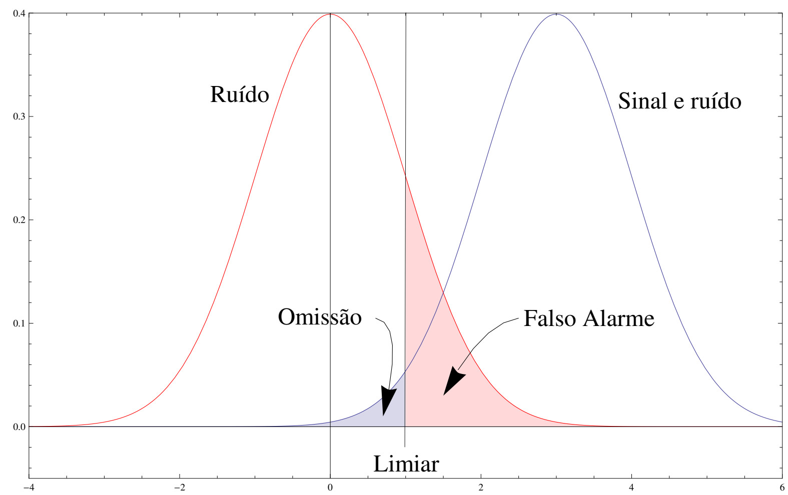
- elaboração das hipóteses;
- determinação da variável de decisão;
- determinação da regra de decisão;
- caracterização da variável de decisão;
- análise de desempenho do detector.

O projeto é otimizado considerando-se que, no cenário com presença de alvo (nuvem ou chuva), o coeficiente de correlação entre os sinais das antenas é conhecido, valendo $\rho = K \neq 0$. Por outro lado, avalia-se também o impacto sobre o desempenho do detector de, na prática, o coeficiente de correlação diferir do valor $\rho = K \neq 0$ adotado no projeto. Discute-se ainda uma forma de melhorar o desempenho do detector projetado, através do uso de diversidade.

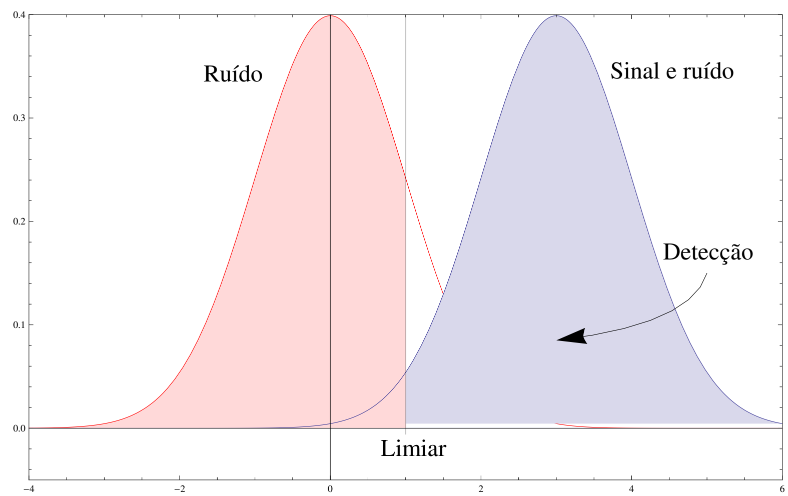
5.1 Detector por Razão de Verossimilhança

Num teste entre hipóteses $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1$, o critério de Neyman-Pearson maximiza a probabilidade de detecção (P_D) para uma dada probabilidade de falso alarme (P_{FA}), ao decidir pela hipótese $\mathcal{H}_1$ se [28]

$$\Lambda(\underline{s}) \triangleq \frac{f(\underline{s}|\mathcal{H}_1)}{f(\underline{s}|\mathcal{H}_0)} > \gamma', \tag{5.1}$$



(a) Probabilidade de falso alarme e omissão.



(b) Probabilidade de detecção.

Figura 5.1: Teste de hipóteses, detecção e falso alarme.

em que $\underline{s}$ é o vetor de amostras observado, $\Lambda(\underline{s})$ é a chamada razão de verossimilhança de $\underline{s}$, $f(\cdot)$ denota função densidade de probabilidade (FDP) em cada uma das hipóteses e γ' é o limiar de decisão, determinado por

$$P_{FA} = \int_{\{\underline{s}:\Lambda(\underline{s})>\gamma'\}} f(\underline{s}|\mathcal{H}_0)d\underline{s}. \tag{5.2}$$

Em muitos casos, incluindo o deste trabalho, a observação $\underline{s}$ é do tipo gaussiana, com médias e variâncias que podem ser determinadas com base nas hipóteses definidas. Normalmente, define-se como hipótese $\mathcal{H}_0$ o cenário em que não há sinal desejado, mas apenas ruído, e como hipótese $\mathcal{H}_1$ o cenário com sinal e ruído. A Figura 5.1 ilustra esse processo. Nela ficam evidentes os erros que podem ser cometidos: decidir-se por $\mathcal{H}_0$ quando ocorre $\mathcal{H}_1$, a chamada *omissão*, ou decidir-se por $\mathcal{H}_1$ quando ocorre $\mathcal{H}_0$, o chamado *falso alarme*.

5.2 Projeto do Detector para $\rho = K \neq 0$ Conhecido

O detector a ser projetado recebe, como informação de entrada, os sinais recebidos pelas antenas 1 e 2. O modelo estocástico para esses sinais foi apresentado em (3.15) e (3.16), e é aqui reproduzido por conveniência:

$$S_{1i} = X_{1i} + jY_{1i} \tag{5.3}$$

$$S_{2i} = X_{2i} + jY_{2i}. \tag{5.4}$$

em que i denota tempo discreto, $i = 1, 2, ..., n$, sendo n o número de amostras observadas, e S_{1i} e S_{2i} são variáveis conjuntamente gaussianas circularmente simétricas, de média nula e variância $2\sigma^2$. Essas variáveis têm certo coeficiente de correlação $\rho = K \neq 0$ (conhecido, por hipótese) quando há partículas na região de intersecção, e são independentes caso contrário. Note que X_{1i} e Y_{1i} são independentes entre si, bem como X_{2i} e Y_{2i}. E, S_{1i} e S_{2i} são independentes de S_{1j} e S_{2j}, $\forall i \neq j$.

5.2.1 Hipóteses

Em vista do exposto, estas são as hipóteses de interesse:

- $\mathcal{H}_0$: não existe alvo na intersecção, isto é, $\rho = 0$.
- $\mathcal{H}_1$: existe alvo na intersecção, isto é, $\rho = K \neq 0$ conhecido.

Definidas as hipóteses, é importante caracterizar a FDP do vetor de amostras $\underline{s}$ em cada caso, como segue.

- $\mathcal{H}_0$: X_{1i} e X_{2i} são gaussianas de média nula, variância σ^2 e independentes ($\rho = 0$), ou seja, com FDP [28]

$$f_{X_{1i},X_{2i}}(x_1, x_2|\mathcal{H}_0) = \frac{\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right]}{2\pi\sigma^2}. \tag{5.5}$$

O mesmo vale para as variáveis da parte imaginária, de modo que

$$f_{X_{1i},X_{2i}}(u_1, u_2|\mathcal{H}_0) = f_{Y_{1i},Y_{2i}}(u_1, u_2|\mathcal{H}_0). \tag{5.6}$$

Sabendo-se que a parte real é independente da parte imaginária, a FDP conjunta pode ser representada como

$$f_{X_{1i},X_{2i},Y_{1i},Y_{2i}}(x_1, x_2, y_1, y_2|\mathcal{H}_0) = f_{X_{1i},X_{2i}}(x_1, x_2|\mathcal{H}_0) \cdot f_{Y_{1i},Y_{2i}}(y_1, y_2|\mathcal{H}_0). \tag{5.7}$$

Finalmente, levando-se em conta (5.5), (5.6) e (5.7), tem-se finalmente que

$$f_{X_{1i},X_{2i},Y_{1i},Y_{2i}}(x_1, x_2, y_1, y_2|\mathcal{H}_0) = \frac{\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2}{2\sigma^2}\right]}{(2\pi)^2\sigma^4}. \tag{5.8}$$

- $\mathcal{H}_1$: X_{1i} e X_{2i} são gaussianas de média nula, variância σ^2 e coeficiente de correlação $\rho = K \neq 0$, ou seja, com FDP [28]

$$f_{X_{1i},X_{2i}}(x_1, x_2|\mathcal{H}_1) = \frac{\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2-2Kx_1x_2}{2\sigma^2(1-K^2)}\right]}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-K^2}}. \tag{5.9}$$

O mesmo vale para as variáveis da parte imaginária, de modo que

$$f_{X_{1i},X_{2i}}(u_1, u_2|\mathcal{H}_1) = f_{Y_{1i},Y_{2i}}(u_1, u_2|\mathcal{H}_1). \tag{5.10}$$

Sabendo-se que a parte real é independente da parte imaginária, a FDP conjunta pode ser representada como

$$f_{X_{1i},X_{2i},Y_{1i},Y_{2i}}(x_1, x_2, y_1, y_2|\mathcal{H}_1) = f_{X_{1i},X_{2i}}(x_1, x_2|\mathcal{H}_1) \cdot f_{Y_{1i},Y_{2i}}(y_1, y_2|\mathcal{H}_1). \tag{5.11}$$

Levando-se em conta (5.9), (5.10) e (5.11), tem-se finalmente

$$f_{X_{1i},X_{2i},Y_{1i},Y_{2i}}(x_1, x_2, y_1, y_2|\mathcal{H}_1) = \frac{\exp\left[-\frac{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2K(x_1x_2+y_1y_2)}{2\sigma^2(1-K^2)}\right]}{(2\pi)^2\sigma^4(1-K^2)}. \tag{5.12}$$

5.2.2 Variável de Decisão

Considere a observação de n amostras dos sinais das antenas, agrupadas em vetores de componentes em fase, $\underline{X}$, e quadratura, $\underline{Y}$. Assim, tem-se que

$$\underline{X} \triangleq [X_{11}, X_{21}, X_{12}, X_{22}, ..., X_{1n}, X_{2n}] \tag{5.13}$$

$$\underline{Y} \triangleq [Y_{11}, Y_{21}, Y_{12}, Y_{22}, ..., Y_{1n}, Y_{2n}]\,. \tag{5.14}$$

Levando-se em conta que as amostras são independentes para instantes distintos, a FDP conjunta de $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ é então dada por

$$f_{\underline{X},\underline{Y}}(x_{11}, x_{21}, y_{11}, y_{21}, ..., x_{1n}, x_{2n}, y_{1n}, y_{2n}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_{1i},X_{2i},Y_{1i},Y_{2i}}(x_{1i}, x_{2i}, y_{1i}, y_{2i}). \tag{5.15}$$

Para encontrar a variável de decisão, é necessário determinar as FDPs para cada hipótese, $f_{\underline{XY}}(\underline{x}, \underline{y}|\mathcal{H}_0)$ e $f_{\underline{XY}}(\underline{x}, \underline{y}|\mathcal{H}_1)$. Substituindo-se (5.8) em (5.15), chega-se a

$$f_{\underline{XY}}(\underline{x}, \underline{y}|\mathcal{H}_0) = \frac{\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}^2+x_{2i}^2+y_{1i}^2+y_{2i}^2)}{2\sigma^2}\right]}{[(2\pi)^2\sigma^4]^n}. \tag{5.16}$$

Da mesma forma, substituindo-se (5.12) em (5.15), chega-se a

$$f_{\underline{XY}}(\underline{x}, \underline{y}|\mathcal{H}_1) = \frac{\exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}^2+x_{2i}^2+y_{1i}^2+y_{2i}^2)-2K\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}x_{2i}+y_{1i}y_{2i})}{2\sigma^2(1-K^2)}\right]}{[(2\pi)^2\sigma^4]^n(1-K^2)^n}. \tag{5.17}$$

Agora, substituindo-se (5.16) e (5.17) na razão de verossimilhança dada por (5.1), tem-se

$$\Lambda(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{f_{\underline{XY}}(\underline{x}, \underline{y}|\mathcal{H}_1)}{f_{\underline{XY}}(\underline{x}, \underline{y}|\mathcal{H}_0)}, \tag{5.18}$$

que, após as devidas simplificações, fornece

$$\Lambda(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\exp\left[\frac{2K\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}x_{2i}+y_{1i}y_{2i})-K^2\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}^2+x_{2i}^2+y_{1i}^2+y_{2i}^2)}{2(1-K^2)\sigma^2}\right]}{(1-K^2)^n}. \tag{5.19}$$

Isolando-se os termos que dependem apenas das amostras do sinal, é possível definir então a variável de decisão como

$$\overline{s}_n \triangleq 2\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}x_{2i}+y_{1i}y_{2i})}{n} - K\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}^2+x_{2i}^2+y_{1i}^2+y_{2i}^2)}{n}. \tag{5.20}$$

Observe que $\overline{s}_n$ possui um dos termos sendo ponderado pelo valor K (conhecido, por hipótese) do coeficiente de correlação. Finalmente, reescrevendo-se (5.20) de forma mais compacta, obtém-se a variável de decisão como

$$\overline{s}_n = 2\frac{\sum_{i=1}^{n}\Re e\left[s_{1i}s_{2i}^*\right]}{n} - K\frac{\sum_{i=1}^{n}(|s_{1i}|^2+|s_{1i}|^2)}{n}. \tag{5.21}$$

5.2.3 Regra de Decisão

Definida a variável de decisão, é importante relacionar o limiar de decisão γ' em (5.1) para a função de verrossimilhança com um limiar γ correspondente para a variável de decisão. Substituindo-se (5.20) em (5.19), é possível escrever $\Lambda(\underline{x}, \underline{y})$ em termos de $\overline{s}_n$, obtendo-se

$$\Lambda(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\exp\left[\frac{Kn\overline{s}_n}{2(1-K^2)\sigma^2}\right]}{(1-K^2)^n}. \tag{5.22}$$

Por (5.1), tem-se que regra de decisão é representada por

$$\Lambda(\underline{x}, \underline{y}) \gtrless \gamma'. \tag{5.23}$$

Substituindo-se (5.22) em (5.23) e aplicando-se o logaritmo natural em ambos os lados,

$$\frac{Kn\overline{s_n}}{2(1-K^2)\sigma^2} - \ln(1-K^2)^n \gtrless \ln\gamma'. \tag{5.24}$$

Fazendo-se as devidas simplificações na equação acima, tem-se

$$\overline{s}_n \gtrless \frac{2(1-K^2)\sigma^2}{Kn}\left(\ln\gamma' + \ln(1-K^2)^n\right) \triangleq \gamma, \tag{5.25}$$

em que γ é o limiar de decisão para $\overline{s}_n$ correspondente a γ' para $\Lambda(\underline{x}, \underline{y})$. Ou seja, decide-se pela hipótese $\mathcal{H}_0$ se $\overline{s}_n < \gamma$, e pela hipótese $\mathcal{H}_1$ se $\overline{s}_n > \gamma$. Resta ainda especificar o valor de γ para determinadas probabilidades desejadas de detecção e falso alarme. Para tanto, faz-se necessário caracterizar a variável de decisão em cada hipótese.

5.2.4 Caracterização da Variável de Decisão

Considerando-se que o número n de amostras é muito grande, tem-se, pelo Teorema Central do Limite, que a variável de decisão $\overline{s}_n$ definida em (5.20) pode ser considerada do tipo gaussiana. Assim, caracterizá-la requer apenas a determinação de dois de seus parâmetros: média e variância. Esses parâmetros são determinados a seguir, para cada uma das hipóteses.

Definindo-se as variáveis auxiliares

$$A_n \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i})}{n} \tag{5.26}$$

$$B_n \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}^2 + y_{1i}^2)}{n} \tag{5.27}$$

$$C_n \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}^2 + y_{2i}^2)}{n}, \tag{5.28}$$

é possível reescrever $\overline{s}_n$ como

$$\overline{s}_n = 2A_n - K(B_n + C_n). \tag{5.29}$$

Novamente, pelo Teorema Central do Limite, A_n, B_n e C_n podem ser consideradas gaussianas e, para caracterizá-las, é necessário calcular o vetor de média, $\underline{m}$, e a matriz de covariância, $\underline{\Sigma}$. A dedução completa de $\underline{m}$ e $\underline{\Sigma}$ são apresentadas no Apêndice A. Os resultados são

$$\underline{m} \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{A_n\} \\ \mathrm{E}\{B_n\} \\ \mathrm{E}\{C_n\} \end{bmatrix} = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} \rho \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

$$\underline{\Sigma} \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{VAR}\{A_n\} & \mathrm{COV}\{A_n, B_n\} & \mathrm{COV}\{A_n, C_n\} \\ \mathrm{COV}\{B_n, A_n\} & \mathrm{VAR}\{B_n\} & \mathrm{COV}\{B_n, C_n\} \\ \mathrm{COV}\{C_n, A_n\} & \mathrm{COV}\{C_n, B_n\} & \mathrm{VAR}\{C_n\} \end{bmatrix} = \frac{4\sigma^4}{n} \begin{bmatrix} (1+\rho^2)/2 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho^2 \\ \rho & \rho^2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.31}$$

É importante observar que o vetor média e a matriz de covariância dependem diretamente do coeficiente de correlação ρ entre os sinais recebidos pelas duas antenas. E mais que isso, como proposto, ρ possui valores diferentes para cada uma das hipóteses. Com esses resultados, é possível calcular a média e a variância de $\overline{s}_n$, como segue. A partir de (5.29), tem-se que

$$\mathrm{E}\{\overline{s}_n\} = \mathrm{E}\{2A_n - K(B_n + C_n)\}. \tag{5.32}$$

Substituindo-se os valores de (5.30) em (5.32), obtém-se

$$\mathrm{E}\{\overline{s}_n\} = 2(2\rho\sigma^2) - K(2\sigma^2 + 2\sigma^2), \tag{5.33}$$

o que, após simplificações, fornece

$$\mathrm{E}\{\overline{s}_n\} = 4(\rho - K)\sigma^2. \tag{5.34}$$

A variância de $\overline{s}_n$, por definição, é dada por

$$\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n\} = \mathrm{E}\{\overline{s}_n^2\} - \mathrm{E}\{\overline{s}_n\}^2. \tag{5.35}$$

Substituindo (5.29) em (5.35), obtém-se

$$\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n\} = \mathrm{E}\{(2A_n - K(B_n + C_n))^2\} - \mathrm{E}\{(2A_n - K(B_n + C_n))\}^2, \tag{5.36}$$

o que, após as devidas expansões, fornece

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n\} \;=\; & 4\mathrm{E}\{A_n^2\} - 4K(\mathrm{E}\{A_nB_n\} + \mathrm{E}\{A_nC_n\}) + K^2\left(\mathrm{E}\{B_n^2\} + 2\mathrm{E}\{B_nC_n\} + \mathrm{E}\{C_n^2\}\right)\\ & -4\mathrm{E}\{A_n\}^2 + 4K\mathrm{E}\{A_n\}(\mathrm{E}\{B_n\} + \mathrm{E}\{C_n\}) - K^2(\mathrm{E}\{B_n\}^2\\ & +2\mathrm{E}\{B_n\}\mathrm{E}\{C_n\} + \mathrm{E}\{C_n\}^2).\end{aligned} \tag{5.37}$$

Rearranjando-se os termos de (5.38), é possível escrever a variância de $\overline{s}_n$ em termos de elementos da matriz de covariância $\underline{\Sigma}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n\} \;=\; & 4\mathrm{VAR}\{A_n\} - 4K(\mathrm{COV}\{A_n, B_n\} + \mathrm{COV}\{A_n, C_n\})\\ & +K^2(\mathrm{VAR}\{B_n\} + 2\mathrm{COV}\{B_n, C_n\} + \mathrm{VAR}\{C_n\}).\end{aligned} \tag{5.38}$$

Finalmente, substituindo-se (5.31) em (5.38), obtém-se, após as devidas simplificações, a variância de $\overline{s}_n$:

$$\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n\} = \frac{8\left(1 - 4K\rho + \rho^2 + K^2\left(1 + \rho^2\right)\right)\sigma^4}{n}. \tag{5.39}$$

As expressões (5.34) e (5.39) apresentam a média e variância de $\overline{s}_n$ em função da correlação ρ entre os sinais das duas antenas quando da presença de nuvem. É possível agora especializar essas expressões para cada uma das hipóteses testadas. Para a hipótese $\mathcal{H}_0$, tem-se que $\rho = 0$, de modo que

$$\mathrm{E}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_0\} = -4K\sigma^2 \tag{5.40}$$

$$\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_0\} = \frac{8(1 + K^2)\sigma^4}{n}. \tag{5.41}$$

Por outro lado, para a hipótese $\mathcal{H}_1$, tem-se que $\rho = K \neq 0$, de modo que

$$\mathrm{E}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_1\} = 0 \tag{5.42}$$

$$\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\left(-1 + K^2\right)^2\sigma^4}{n}. \tag{5.43}$$

Note que as estatísticas acima dependem do coeficiente de correlação $\rho = K$ na condição de alvo presente, bem como do número n de amostras observadas. Assim, para um dado valor de K, é importante especificar não apenas o limiar γ, mas também valor de n necessário para atingir determinadas probabilidades desejadas de detecção e falso alarme. Isso é feito a seguir.

5.2.5 Desempenho do Detector

Considerando que a variável de decisão é gaussiana, mostra-se que as probabilidades de falso alarme e detecção do detector por razão de verossimilhança (Neyman-Pearson) são dadas respectivamente por [28]

$$P_{FA} = Q\left(\frac{\gamma - \mathrm{E}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_0\}}{\sqrt{\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_0\}}}\right) \tag{5.44}$$

$$P_D = Q\left(\frac{\gamma - \mathrm{E}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_1\}}{\sqrt{\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_1\}}}\right), \tag{5.45}$$

em que $Q(\cdot)$ é o complemento da função de distribuição acumulada de uma variável gaussiana padrão (média zero e variância unitária), dado por

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt. \tag{5.46}$$

Substituindo-se (5.40) e (5.41) em (5.44), bem como (5.42) e (5.43) em (5.45), chega-se aos valores de P_{FA} e P_D em função dos parâmetros do sistema:

$$P_{FA} = Q\left(\frac{\gamma + 4K\sigma^2}{\sqrt{\frac{8(1+K^2)\sigma^4}{n}}}\right) \tag{5.47}$$

$$P_D = Q\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\frac{8(-1+K^2)^2\sigma^4}{n}}}\right). \tag{5.48}$$

Finalmente, com valores conhecidos de K e σ, resolvendo-se o sistema de equações (5.47) e (5.48) para γ e n, obtém-se

$$\gamma = -\frac{4K\sigma^2 Q^{-1}(P_D)}{Q^{-1}(P_D) - \frac{\sqrt{(1+K^2)}Q^{-1}(P_{FA})}{(-1+K^2)}} \tag{5.49}$$

$$n = \frac{\left[(-1+K^2)\, Q^{-1}(P_D) - \sqrt{(1+K^2)}Q^{-1}(P_{FA})\right]^2}{2K^2}, \tag{5.50}$$

em que $Q^{-1}(\cdot)$ denota a inversa da função $Q(\cdot)$.

As expressões (5.49) e (5.50) constituem uma contribuição importante deste trabalho. Com base nelas, é possível dimensionar os valores do limiar de decisão e do número de amostras necessárias para garantir determinadas probabilidades de detecção e falso alarme desejadas.

5.3 Impacto de $\rho \neq K$

Em um sistema como este, que deve funcionar em tempo real, é importante que a operação matemática esteja claramente definida, bem como o número de amostras a serem obtidas e o limiar a ser utilizado. Obtêm-se esses parâmetros ao se especificar uma probabilidade de detecção e uma probabilidade de falso alarme, assim como um valor para o coeficiente correlação, $K \neq 0$, que se deseja detectar. É certo que para valores de probabilidade de detecção e falso alarme fixos e diferentes valores de K, obtêm-se diferentes valores de limiar e número de amostras necessárias. Como a estimação do parâmetro de correlação entre as amostras é um processo custoso de ser implementado, e o recálculo do limiar e do número de amostras em tempo real é uma tarefa desafiadora em função de limitações computacionais, seria desejável calcular apenas uma vez os parâmetros de detecção. Nesse caso, surge um questionamento: como ficariam as probabilidades de falso alarme e detecção se o fenômeno meteorológico, sendo ele qualquer, resultasse num coeficiente de correlação diferente do valor K para o qual o detector foi projetado?

Os resultados das equações (5.34) e (5.39) podem ser prontamente utilizados para caracterizar a variável de decisão nas hipóteses já propostas. Para a hipótese $\mathcal{H}_0$, tem-se, como antes, que o coeficiente de correlação é nulo, assim

$$\mathrm{E}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_0\} = -4K\sigma^2 \tag{5.51}$$

$$\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_0\} = \frac{8(1+K^2)\sigma^4}{n}. \tag{5.52}$$

Já para a hipótese $\mathcal{H}_1$, em que ρ pode assumir qualquer valor, inclusive K, tem-se que

$$\mathrm{E}\{\overline{s}_n|\mathcal{H}_1\} = 4\,(\rho-K)\,\sigma^2 \tag{5.53}$$

$$\mathrm{VAR}\{\overline{s}_n\;|\mathcal{H}_1\} = \frac{8\,(1-4K\rho+\rho^2+K^2\,(1+\rho^2))\,\sigma^4}{n}. \tag{5.54}$$

Como as variáveis para essas duas hipóteses foram perfeitamente caracterizadas em termos de média e variância, é possível agora avaliar a probabilidade de falso alarme e de detecção para o caso em que o fenômeno apresente um ρ, qualquer. Usando-se (5.44), a probabilidade de falso alarme é calculada como

$$P_{FA} = Q\left(\frac{\gamma+4K\sigma^2}{\sqrt{\frac{8(1+K^2)\sigma^4}{n}}}\right). \tag{5.55}$$

Note que a probabilidade de falso alarme, nesse caso, não depende do coeficiente de correlação do fenômeno. Dessa forma, conclui-se que essa probabilidade não é alterada mesmo que o coeficiente de correlação seja outro. Já a probabilidade de detecção fica determinada como em (5.45), ou seja,

$$P_D = Q\left(\frac{\gamma-4\,(\rho-K)\,\sigma^2}{\sqrt{\frac{8(1-4K\rho+\rho^2+K^2(1+\rho^2))\sigma^4}{n}}}\right). \tag{5.56}$$

Note que a probabilidade de detecção não se mantém se o coeficiente de correlação for diferente daquele para o qual foi projetado o detector. Será verificado a seguir, por meio de exemplos numéricos, como se dá essa variação da probabilidade de detecção. É de se esperar que, para valores de ρ maiores que K, a probabilidade de detecção seja igual ou superior àquela com $\rho = K$, uma vez que a existência de correlação é a premissa maior para o funcionamento do radar proposto.

5.4 Resultados Numéricos

O desempenho do detector projetado é agora ilustrado avaliando-se, com (5.50), a quantidade de amostras necessárias para atingir certas probabilidades desejadas de detecção e falso alarme. Tal requisito, como visto, irá depender também do coeficiente de correlação entre os sinais

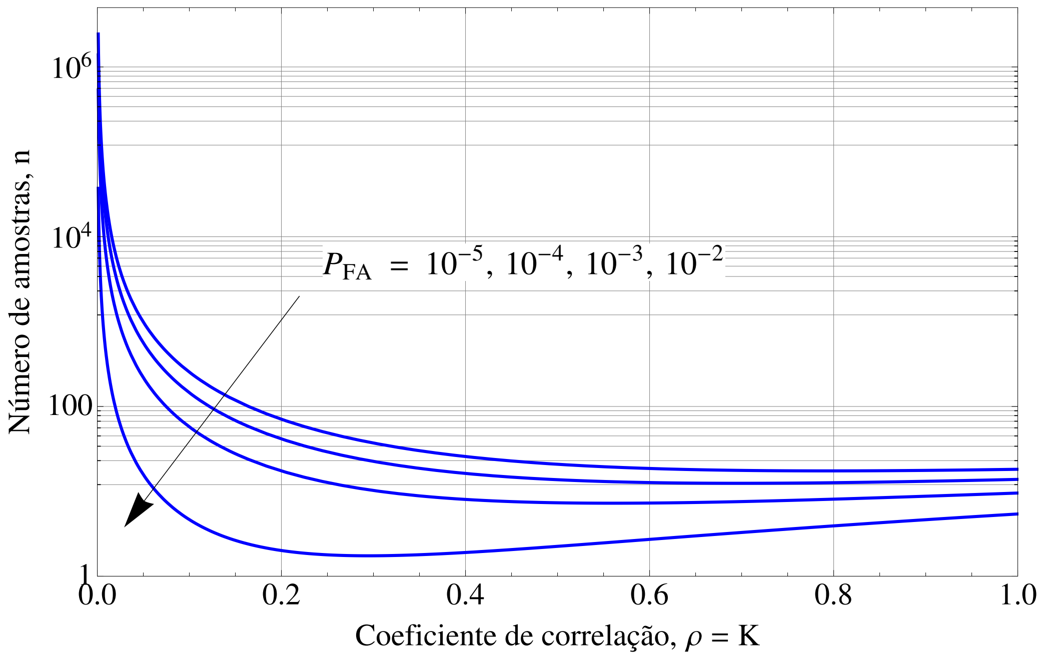


Figura 5.2: Desempenho para $P_D = 0.98$ e $\sigma = 1$.

quando da existência de alvo (nuvem). Os cálculos foram efetuados numericamente, utilizando o *software* Mathematica.

A Figura 5.2 mostra uma família de curvas para diferentes valores de P_{FA}, com $P_D = 0.98$ e $\sigma = 1$. Observe que, para todos os casos, quanto menor o coeficiente de correlação, mais amostras são necessárias para garantir a probabilidade de detecção. Observe ainda que, para um dado coeficiente de correlação, quanto maior a probabilidade de falso alarme, menos amostras são necessárias.

A Figura 5.3 mostra uma família de curvas para diferentes valores de P_D, com $P_{FA} = 0.0001$ e $\sigma = 1$. Observe que, para todos os casos, quanto menor o coeficiente de correlação, mais amostras são necessárias para garantir a probabilidade de detecção. Observe ainda que, para um dado coeficiente de correlação, quanto menor a probabilidade de detecção, menos amostras são necessárias.

Observe que em alguns casos, para um coeficiente de correlação baixo, são necessárias milhões de amostras para que se consiga garantir uma determinada probabilidade de detecção e falso alarme. Nesses casos, considerando que o tempo decorrido entre amostras para (tal que elas sejam independentes) é da ordem de 10 ms [1], seria necessário aguardar um tempo equivalente a 10 000 segundos, tempo este que se torna inviável do ponto de vista da previsão, pois a tela de tal radar precisa ser atualizada no intervalo de algumas dezenas de segundos, para a aplicações que necessitam de previsões de curto prazo. Uma forma de contornar esse problema é utilizar meios de produzir amostras independentes explorando outras fontes de diversidade além da temporal, tema da Seção 5.5.

Para avaliar o desempenho do sistema em presença de um coeficiente de correlação $\rho \neq K$ qualquer, considere que se queira calcular os parâmetros de um detector de fenômenos meteoro-

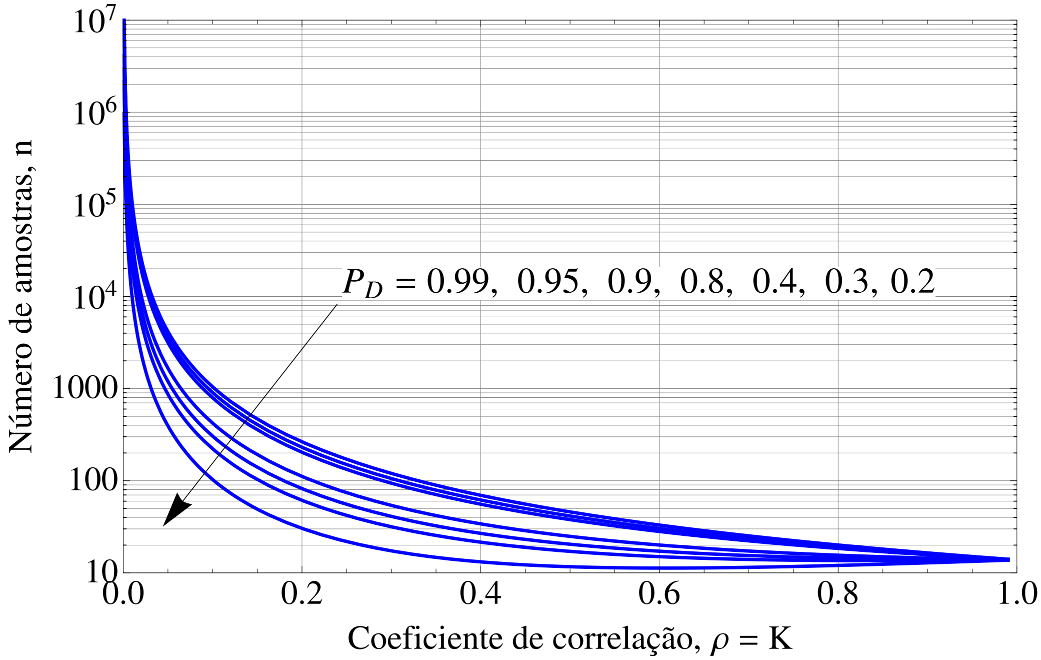


Figura 5.3: Cálculos realizados para $P_{FA} = 0.0001$ e $\sigma = 1$.

lógicos de $K = 0.1$ que possua uma probabilidade de detecção de 0.98 e uma probabilidade de falso alarme de 0.01. Substituindo-se esses valores nas expressões (5.49) e (5.50), tem-se que o limiar vale $\gamma = -0.186$ e o número de amostras vale $n = 956$. Substituindo-se então os valores de γ, n e K na expressão (5.56), obtém-se o gráfico da Figura 5.4. Observe na figura que quanto maior o coeficiente de correlação da nuvem, maior a probabilidade de detecção, até se alcançar o valor unitário, que garante a detecção em 100% dos casos. Assim, basta projetar o detector para um determinado K mínimo que se deseja detectar; para valores de K correlação superiores, a probabilidade de detecção é maior e a probabilidade de falso alarme é constante.

Por fim, a Figura 5.5 ilustra uma realização temporal (simulação) do processo de detecção para um caso com $K = 0.05$, $P_D = 0.99$ e $P_{FA} = 10^{-5}$, que resulta num limiar de -0.07041 e num mínimo necessário de 8691 amostras. Observe a presença do alvo a zero grau de azimute, devidamente detectado neste exemplo. A simulação foi realizada em MATLAB.

5.5 Diversidades

Como notado anteriormente, para um K muito pequeno, são necessárias, em alguns casos, milhões de amostras independentes de modo a garantir um desempenho satisfatório do detector. Para tanto, utilizando apenas duas antenas, seria necessário um intervalo de tempo muito grande, o que pode inviabilizar o uso do detector em previsões meteorológicas de curto prazo. Para contornar esse problema, é importante analisar alternativas de se produzir amostras independentes. Nesse sentido, podem ser utilizadas outras fontes de diversidade, no intuito de diminuir o tempo de aquisição das n amostras independentes. As principais fontes de diversidade são: temporal, espacial, de frequência e de polarização [29].

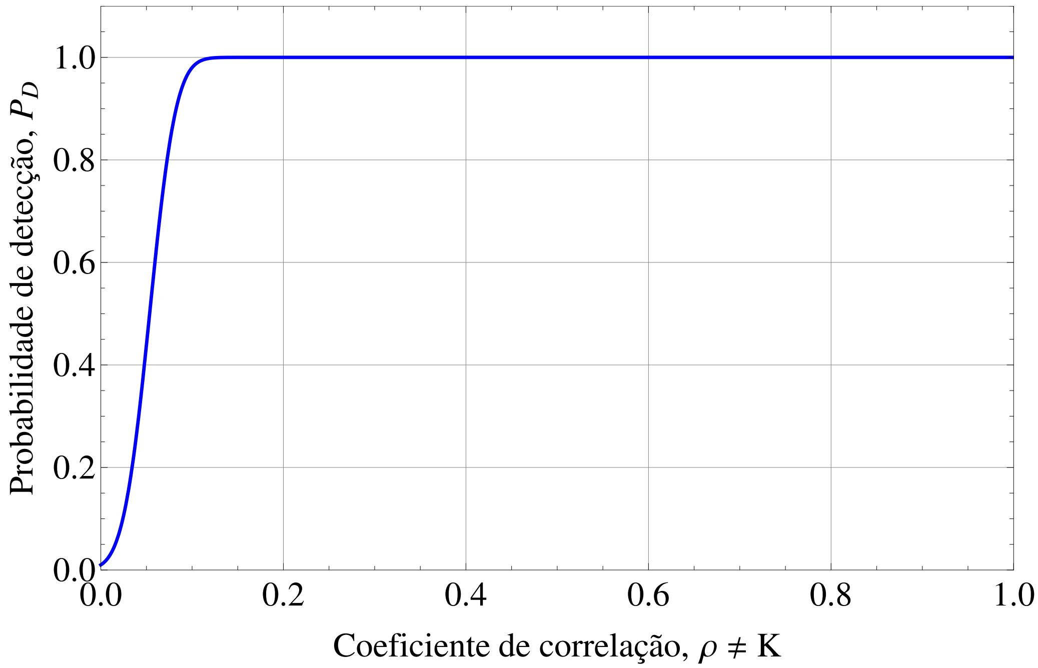


Figura 5.4: Probabilidade de detecção para $\rho \neq K$, com $\gamma = -0.186$, $n = 956$ e $K = 0.1$.

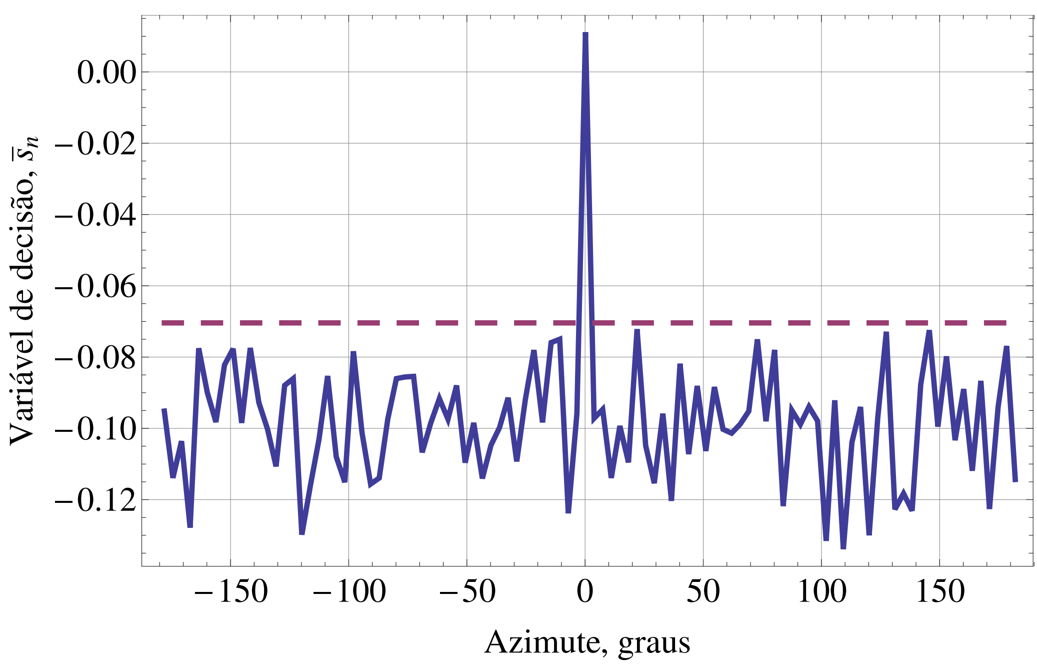


Figura 5.5: Aplicação do algoritmo de detecção projetado para K=0.05, com $\gamma = -0.07041$ e $n = 8691$, utilizando dados gerados em simulação.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um ferramental matemático para a investigação da viabilidade de um novo tipo de radar meteorológico utilizando antenas paradas, de feixe largo, distanciadas entre si por uma determinada linha de base. Essa proposta surge como alternativa ao radar convencional, que utiliza apenas uma antena de feixe estreito em movimento (nas direções de azimute e elevação). O radar proposto se caracteriza por dividir o céu em vários segmentos, cada um deles coberto por uma determinada quantidade de antenas. A ideia central é, mesmo utilizando antenas de feixe largo, conseguir obter uma resolução angular apropriada para aplicações meteorológicas ($< 2^o$), por meio do uso da correlação entre os sinais recebidos pelas várias antenas, proveniente de regiões de intersecção entre as células de resolução. Essa varredura pode ser implementada em *software*. Como pôde ser notado, quanto maior a correlação entre os sinais, melhor a capacidade de detecção do radar.

No trabalho, foi deduzida uma expressão analítica para o coeficiente de correlação entre os sinais recebidos por duas antenas espaçadas, em função do comprimento da linha de base, da largura de banda do sinal de transmissão e da diretividade das antenas. Além disso, foi obtida um expressão analítica em forma fechada para a resolução angular do radar proposto, um parâmetro crítico para a detecção apropriada de nuvens e chuva. Como se observa em (3.9), para uma dada frequência de operação, um certo requisito de resolução angular implica num valor mínimo para o produto entre a linha de base normalizada e a largura de banda do sinal. Por outro lado, como se observa a partir de (4.23), quanto maior a linha de base, menor o coeficiente de correlação entre os sinais recebidos pelas antenas e, portanto, mais fraca é a premissa para o funcionamento da nova proposta. Este dilema pode ser parcialmente contornado utilizando-se antenas com largura de feixe menores. Como mostrado nesse trabalho, quanto menor a largura de feixe, maior a correlação. Entretanto, larguras de feixe menores implicam na necessidade de mais antenas para cobrir todo o céu, aumentando o custo de implementação do radar.

É claro que outros parâmetros físicos mais refinados também influenciam nos sinais recebidos, como, por exemplo, intensidade de chuva, velocidade, turbulência, etc. Observe que, no modelo proposto, diferentes perfis de intensidade de chuva ou de densidade de nuvens podem, a princípio, ser mapeados em diferentes distribuições de probabilidade para o azimute das partículas. Este recurso de mapeamento é de grande relevância para a aplicabilidade do modelo proposto, mas o modo apropriado de fazê-lo está fora do escopo deste trabalho, por sua maior complexidade. Por outro lado, a velocidade e turbulência certamente têm impacto nas propriedades de correlação temporal de cada sinal recebido, mas não influenciam a correlação espacial entre os sinais recebidos por duas ou mais antenas paradas e, consequentemente, não afetam o projeto do detector utilizado neste radar.

Quanto ao projeto do detector, foram determinadas a variável de decisão, a regra de decisão e expressões analíticas em forma fechada para o cálculo das probabilidades de detecção e falso alarme. O projeto se baseou no método de razão de verossimilhança (critério de Neyman-Pearson), que maximiza a probabilidade de detecção para uma dada probabilidade de falso alarme. Com a formulação desenvolvida, é possível determinar o limiar e a quantidade mínima de amostras necessárias para se detectar um alvo com coeficiente de correlação conhecido, observando certas probabilidades de detecção e falso alarme. Foi observado que, para um dado coeficiente de correlação e probabilidade de falso alarme fixos, quanto maior a probabilidade de detecção buscada, mais amostras são necessárias. Da mesma forma, para um dado coeficiente de correlação e probabilidade de detecção fixos, quanto menor a probabilidade de falso alarme buscada, mais amostras são necessárias.

Um radar meteorológico, para que seja eficiente, deve possuir alguns requisitos básicos. Inicialmente, é especificada a frequência central de operação (banda X, por exemplo) e, para tal frequência, é então necessário que o sistema possua uma determinada resolução angular. Essa, como já citado, deve ser inferior a 2º em aplicações meteorológicas. Para que o sistema seja de baixo custo, é necessário utilizar antenas com largura de feixe grande; quanto maior a largura de feixe, menos conjuntos de antenas são necessários para cobrir todos os setores em azimute. Por outro lado, para se ter uma resolução angular da ordem de 2º, é necessário que se use uma linha de base grande, como mostrado. Mas, como também mostrado, o coeficiente de correlação cai rapidamente para zero com o aumento da linha de base. Isso exige então que sejam utilizadas antenas de feixe mais estreito, para se ter uma correlação aceitável, e nesse caso é necessário o uso de mais conjuntos de antenas para cobrir todos os setores, elevando o custo.

O ferramental matemático e as discussões apresentadas neste trabalho auxiliaram, recentemente, no projeto de radares meteorológicos na empresa Orbisat Indústria S.A., parte do grupo Embraer Defesa e Segurança.

Perspectivas

Como primeiro desdobramento deste trabalho de mestrado, pode-se citar o projeto do detector de razão de verossimilhança estendido para várias antenas, ao se explorar o coeficiente de correlação entre os sinais recebidos por todas elas, tomadas duas a duas. Isso inclui o cálculo exato de quantas antenas seriam minimamente necessárias para se obter uma resolução angular próxima à dos radares convencionais de feixe estreito.

Um segundo desdobramento seria avaliar qual o espaçamento em frequência entre os sinais das antenas, tal que suas amostras sejam consideradas independentes no tempo, ou seja, investigar as condições para uso de diversidade em frequência. A mesma análise pode ser realizada para diversidade de polarização, ao se calcular a rejeição que a antena deve ter à polarização cruzada. Adicionalmente, é necessária uma análise completa de um sistema que combine essas várias fontes de diversidade, e uma verificação se tal sistema é viável economicamente.

Apêndice A

Caracterização das variáveis A_n, B_n e C_n

Como apresentado no Capítulo 5, as variáveis A_n, B_n e C_n são definidas como

$$A_n \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i})}{n} \tag{A.1}$$

$$B_n \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}^2 + y_{1i}^2)}{n} \tag{A.2}$$

$$C_n \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}^2 + y_{2i}^2)}{n}, \tag{A.3}$$

em que x_{1i} e y_{1i} são variáveis aleatórias gaussianas independentes de média nula e variância σ^2, o mesmo valendo para x_{2i} e y_{2i}. Além disso, x_{1i}, y_{1i}, x_{2i} e y_{2i} são independentes de x_{1j}, y_{1j}, x_{2j} e y_{2j}, $\forall i \neq j$, ou seja, as amostras são independentes para tempos distintos. Por outro lado, x_{1i} e x_{2i} são correlacionadas, com coeficiente de correlação ρ, da mesma forma que y_{1i} e y_{2i}. O objetivo aqui é obter o vetor de média e a matriz de covariância para A_n, B_n e C_n, em função de σ^2 e ρ.

A.1 Vetor de Média

O vetor de média $\underline{m}$ para A_n, B_n e C_n é definido como

$$\underline{m} \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{A_n\} \\ \mathrm{E}\{B_n\} \\ \mathrm{E}\{C_n\} \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

A.1.1 Média de A_n

Aplicando-se a média em (A.1), tem-se que

$$\mathrm{E}\{A_n\} = \mathrm{E}\{x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i}\}, \tag{A.5}$$

o que, com o uso do modelo estocástico para x_{1i}, y_{1i}, x_{2i} e y_{2i}, resulta em

$$\mathrm{E}\{A_n\} = 2\rho\sigma^2. \tag{A.6}$$

A.1.2 Médias de B_n e C_n

Da mesma forma, aplicando-se a média em (A.2), tem-se que

$$\mathrm{E}\{B_n\} = \mathrm{E}\{x_{1i}^2 + y_{1i}^2\}, \tag{A.7}$$

o que, com o uso do modelo estocástico para x_{1i} e y_{1i}, resulta em

$$\mathrm{E}\{B_n\} = 2\sigma^2. \tag{A.8}$$

Note, de (A.2) e (A.3), que B_n e C_n são identicamente distribuídos. Assim,

$$\mathrm{E}\{C_n\} = \mathrm{E}\{B_n\} = 2\sigma^2. \tag{A.9}$$

A.1.3 Vetor de Média

Usando-se (A.6), (A.8) e (A.9) em (A.4), o vetor de média é então obtido como

$$\underline{m} = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} \rho \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{A.10}$$

A.2 Matriz de Covariância

A matriz de covariância $\underline{\Sigma}$ de A_n, B_n e C_n é definida como

$$\underline{\Sigma} \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{VAR}\{A_n\} & \mathrm{COV}\{A_n, B_n\} & \mathrm{COV}\{A_n, C_n\} \\ \mathrm{COV}\{B_n, A_n\} & \mathrm{VAR}\{B_n\} & \mathrm{COV}\{B_n, C_n\} \\ \mathrm{COV}\{C_n, A_n\} & \mathrm{COV}\{C_n, B_n\} & \mathrm{VAR}\{C_n\} \end{bmatrix}. \tag{A.11}$$

A.2.1 Variância de A_n

Aplicando-se a variância em (A.1), e sabendo-se que a variância da soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) é n vezes a variância de uma das variáveis, tem-se que

$$\mathrm{VAR}\{A_n\} = n\mathrm{VAR}\left\{\frac{x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i}}{n}\right\} = \frac{1}{n}\mathrm{VAR}\left\{x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i}\right\}. \tag{A.12}$$

Utilizando-se a definição de variância,

$$\mathrm{VAR}\{A_n\} = \frac{1}{n}\left[\mathrm{E}\left\{(x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i})^2\right\} - \mathrm{E}\left\{x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i}\right\}^2\right]. \tag{A.13}$$

Substituindo-se (A.6) em (A.13),

$$\mathrm{VAR}\{A_n\} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\{(x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i})^2\} - (2\rho\sigma^2)^2]. \tag{A.14}$$

Expandindo-se os termos em (A.14) com uso da independência entre (x_{1i}, x_{2i}) e (y_{1i}, y_{2i}),

$$\mathrm{VAR}\{A_n\} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\{(x_{1i}x_{2i})^2\} + 2\mathrm{E}\{x_{1i}x_{2i}\}\mathrm{E}\{y_{1i}y_{2i}\} + \mathrm{E}\{(y_{1i}y_{2i})^2\} - (2\rho\sigma^2)^2]. \tag{A.15}$$

Finalmente, com o uso do modelo estocástico para x_{1i}, y_{1i}, x_{2i} e y_{2i}, calculam-se os termos faltantes, obtendo-se

$$\mathrm{VAR}\{A_n\} = \frac{1}{n}[\sigma^4\left(1+2\rho^2\right) + 2\left(\rho\sigma^2\right)^2 + \sigma^4\left(1+2\rho^2\right) - (2\rho\sigma^2)^2], \tag{A.16}$$

o que reduz para

$$\mathrm{VAR}\{A_n\} = \frac{2\left(1+\rho^2\right)\sigma^4}{n}. \tag{A.17}$$

A.2.2 Variância de B_n e C_n

Da mesma forma, aplicando-se a variância em (A.2), e sabendo-se que a variância da soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) é n vezes a variância de uma das variáveis, tem-se que

$$\mathrm{VAR}\{B_n\} = n\mathrm{VAR}\left\{\frac{x_{1i}^2 + y_{1i}^2}{n}\right\} = \frac{1}{n}\mathrm{VAR}\left\{x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right\}. \tag{A.18}$$

Utilizando-se a definição de variância,

$$\mathrm{VAR}\{B_n\} = \frac{1}{n}\left[\mathrm{E}\left\{\left(x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right)^2\right\} - \mathrm{E}\left\{x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right\}^2\right]. \tag{A.19}$$

Substituindo-se (A.8) em (A.19),

$$\mathrm{VAR}\{B_n\} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\{(x_{1i}^2 + y_{1i}^2)^2\} - (2\sigma^2)^2]. \tag{A.20}$$

Expandindo-se o primeiro termos em (A.20) com uso da independência entre x_{1i} e y_{1i},

$$\mathrm{VAR}\{B_n\} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\{x_{1i}^4\} + 2\mathrm{E}\{x_{1i}^2\}\mathrm{E}\{y_{1i}^2\} + \mathrm{VAR}\{y_{1i}^4\} - (2\sigma^2)^2] \tag{A.21}$$

Finalmente, com o uso do modelo estocástico para x_{1i} e y_{1i}, calculam-se os termos faltantes, obtendo-se

$$\mathrm{VAR}\{B_n\} = \frac{1}{n}[3\sigma^4 + 2\sigma^4 + 3\sigma^4 - (2\sigma^2)^2], \tag{A.22}$$

o que reduz para

$$\mathrm{VAR}\{B_n\} = \frac{4\sigma^4}{n}. \tag{A.23}$$

Como B_n e C_n são identicamente distribuídos, tem-se que

$$\mathrm{VAR}\{C_n\} = \mathrm{VAR}\{B_n\} = \frac{4\sigma^4}{n}. \tag{A.24}$$

A.2.3 COV$\{A_n, B_n\}$ e COV$\{A_n, C_n\}$

Aplicando-se a covariância em (A.1) e (A.2), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\mathrm{COV}\{A_n, B_n\} = \frac{1}{n}\mathrm{COV}\{x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i}, x_{1i}^2 + y_{1i}^2\}. \tag{A.25}$$

Utilizando-se a definição de covariância,

$$\mathrm{COV}\{A_n, B_n\} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\{(x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i})\left(x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right)\} - \mathrm{E}\{x_{1i}x_{2i} + y_{1i}y_{2i}\}\mathrm{E}\{x_{1i}^2 + y_{1i}^2\}]. \quad (A.26)$$

Substituindo-se (A.6) e (A.8) em (A.26) e expandindo-se os termos restantes,

$$\mathrm{COV}\{A_n, B_n\} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\{x_{1i}^3x_{2i} + x_{1i}x_{2i}y_{1i}^2 + y_{1i}y_{2i}x_{1i}^2 + y_{1i}^3y_{2i}\} - 4\rho\sigma^4]. \quad (A.27)$$

Usando-se a independência entre (x_{1i}, x_{2i}) e (y_{1i}, y_{2i}),

$$\mathrm{COV}\{A_n, B_n\} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\{x_{1i}^3x_{2i}\} + \mathrm{E}\{x_{1i}x_{2i}\}\mathrm{E}\{y_{1i}^2\} + \mathrm{E}\{y_{1i}y_{2i}\}\mathrm{E}\{x_{1i}^2\} + \mathrm{E}\{y_{1i}^3y_{2i}\} - 4\rho\sigma^4]. \quad (A.28)$$

Finalmente, com o uso do modelo estocástico para x_{1i}, y_{1i}, x_{2i} e y_{2i}, calculam-se os termos faltantes, obtendo-se

$$\mathrm{COV}\{A_n, B_n\} = \frac{1}{n}[3\rho\sigma^4 + \rho\sigma^2\sigma^2 + \rho\sigma^2\sigma^2 + 3\rho\sigma^4 - 4\rho\sigma^4], \quad (A.29)$$

o que reduz para

$$\mathrm{COV}\{A_n, B_n\} = \frac{4\rho\sigma^4}{n}. \quad (A.30)$$

Como B_n e C_n são identicamente distribuídos, tem-se que

$$\mathrm{COV}\{A_n, B_n\} = \mathrm{COV}\{B_n, A_n\} = \mathrm{COV}\{A_n, C_n\} = \mathrm{COV}\{C_n, A_n\} = \frac{4\rho\sigma^4}{n}. \quad (A.31)$$

A.2.4 COV$\{B_n, C_n\}$

Aplicando-se a covariância em (A.2) e (A.3), e sabendo-se que a covariância entre duas somas de n variáveis aleatórias i.i.d. é n vezes a covariância entre dois termos de cada soma, tem-se que

$$\mathrm{COV}\{B_n, C_n\} = \frac{1}{n}\mathrm{COV}\left\{x_{2i}^2 + y_{2i}^2, x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right\}. \quad (A.32)$$

Utilizando-se a definição de covariância,

$$\mathrm{COV}\{B_n, C_n\} = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\left\{\left(x_{2i}^2 + y_{2i}^2\right)\left(x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right)\right\} - \mathrm{E}\{\left(x_{2i}^2 + y_{2i}^2\right)\}\mathrm{E}\{\left(x_{1i}^2 + y_{1i}^2\right)\}]. \quad (A.33)$$

Substituindo-se (A.8) e (A.9) em (A.33) e expandindo-se os termos restantes, com uso da independência entre (x_{1i}, x_{2i}) e (y_{1i}, y_{2i}),

$$\mathrm{COV}\{B_n, C_n\} = \frac{1}{n}[E\left\{{x_{2i}}^2{x_{1i}}^2\right\} + E\left\{{x_{2i}}^2\right\}E\left\{{y_{1i}}^2\right\} + E\left\{{y_{2i}}^2\right\}E\left\{{x_{1i}}^2\right\} + E\left\{{y_{2i}}^2{y_{1i}}^2\right\} - 4\sigma^4]. \quad (A.34)$$

Finalmente, com o uso do modelo estocástico para x_{1i}, y_{1i}, x_{2i} e y_{2i}, calculam-se os termos faltantes, obtendo-se

$$\mathrm{COV}\{B_n, C_n\} = \frac{1}{n}[\sigma^4\left(1 + 2\rho^2\right) + \sigma^4 + \sigma^4 + \sigma^4\left(1 + 2\rho^2\right) = 4\left(1 + \rho^2\right)\sigma^4 - 4\sigma^4], \quad (A.35)$$

o que reduz para

$$\mathrm{COV}\{B_n, C_n\} = \frac{4\rho^2\sigma^4}{n}. \quad (A.36)$$

Como B_n e C_n são identicamente distribuídos, tem-se que

$$\mathrm{COV}\{C_n, B_n\} = \mathrm{COV}\{B_n, C_n\} = \frac{4\rho^2\sigma^4}{n}. \quad (A.37)$$

A.2.5 Matriz de Covariância

Usando-se (A.17), (A.24), (A.31) e (A.37) em (A.11), a matriz de covariância é então obtida como

$$\underline{\Sigma} = \frac{4\sigma^4}{n} \begin{bmatrix} \left(1+\rho^2\right)/2 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho^2 \\ \rho & \rho^2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.38}$$

Bibliografia

[1] H. Sauvageot, *Radar Meteorology.* Artech House, 1992.

[2] M. Skolnik, *Radar Handbook.* Mcgraw Hill, 2008.

[3] G. Xu and V. Chandrasekar, “Statistical modeling for spatiotemporal radar observations and its applications to nowcasting,” in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2006. IEEE International Conference on*, pp. 2635–2638, IEEE, 2006.

[4] C. Lin, S. Vasić, A. Kilambi, B. Turner, and I. Zawadzki, “Precipitation forecast skill of numerical weather prediction models and radar nowcasts,” *Geophysical research letters*, vol. 32, no. 14, 2005.

[5] P. Meishchner, *Weather Radar, Principles and Advanced Applications.* Springer, 1973.

[6] IEEE Aerospace & Electronic Systems Society, “IEEE standard radar definitions,” 2003.

[7] M. Richards, J. Scheer, and W. Holm, *Principles of modern radar: Basic principles.* SciTech Pub., 2010.

[8] S. R. Axelsson, “Noise radar using random phase and frequency modulation,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 42, no. 11, pp. 2370–2384, 2004.

[9] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, *Digital signal processing.* Prentice-Hall, 1975.

[10] M. A. Richards, *Fundamentals of radar signal processing.* Tata McGraw-Hill Education, 2005.

[11] Antenna Standards Committee of the IEEE Antennas and Propagation Society, “IEEE standard definitions of terms for antennas,” 1993.

[12] C. Balanis, *Antenna theory: analysis and design.* New York: J. Wiley, 3rd ed., 1982.

[13] D. Cheng, *Field and wave electromagnetics.* Addison-wesley Boston, MA, 2 ed., 1983.

[14] H. E. Hernández-Figueroa, Zamboni-Rached, M., and E. Recami, eds., *Localized Waves.* Wiley and Sons, 2008.

[15] V. N. Bringi and V. Chandrasekar, eds., *Polarimetric Doppler Weather Radar, principles and applications.* Cambridge University Press, 2001.

[16] D. Shnidman, “Radar detection in clutter,” *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 41, pp. 1056 – 1067, july 2005.

[17] Y. Xu, W. Feng, J. Y. Hao, and H. Hwang, “Adaptive radar clutter suppression,” in *MTS/IEEE Conference and Exhibition OCEANS*, vol. 2, pp. 762 –768 vol.2, 2001.

[18] E. M. N. Levanon, *Radar Signals.* Wiley-Interscience, 2004.

[19] M. Wada and F. Horikomi, Junichi e Mizutani, “Development of solid-state weather radar,” in *IEEE Radar Conference*, pp. 1–4, IEEE, 2009.

[20] C. M. Nguyen and V. Chandrasekar, “A space-time model for electronic scan for phase array weather radar,” in *IEEE Radar Conference*, pp. 1086–1090, IEEE, 2011.

[21] D. Zrnic, J. Kimpel, D. Forsyth, A. Shapiro, G. Crain, R. Ferek, J. Heimmer, W. Benner, T. McNellis, and R. Vogt, “Agile-beam phased array radar for weather observations,” *Bulletin of the American Meteorological Society*, vol. 88, no. 11, pp. 1753–1766, 2007.

[22] G. Zhang and R. J. Doviak, “Spaced-antenna interferometry to detect and locate subvolume inhomogeneities of reflectivity: An analogy with monopulse radar.,” *J. Atmos. Oceanic Technol.*, vol. 25, no. 11, pp. 1921 – 1938, 2008.

[23] G. Zhang and R. J. Doviak, “Spaced-antenna interferometry to measure crossbeam wind, shear and turbulence: Theory and formulation.,” *J. Atmos. Oceanic Technol.*, vol. 24, no. 5, pp. 791 – 805, 2007.

[24] J. Wurman, M. Randall, C. Frush, E. Loew, and C. Holloway, “Design of a bistatic dual-doppler radar for retrieving vector winds using one transmitter and a remote low-gain passive receiver,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 12, pp. 1861–1872, 1994.

[25] P. A. Rosen, S. Hensley, I. R. Joughin, F. K. Li, S. N. Madsen, E. Rodriguez, and R. M. Goldstein, “Synthetic aperture radar interferometry,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, no. 3, pp. 333–382, 2000.

[26] G. Franceschetti and R. Lanari, *Synthetic aperture radar processing.* CRC PressI Llc, 1999.

[27] A. Leon-Garcia, *Probability and Random Processes for Electrical Engineering.* Addison Wesley Longman, 1994.

[28] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, random variables and stochastic processes.* Tata McGraw-Hill Education, 2002.

[29] M. D. Yacoub, *Foundations of mobile radio engineering.* CRC PressI Llc, 1993.