



**Universidade Estadual de Campinas**

**LCSI**

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes  
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

**Identificação e Controle Estocásticos  
Descentralizados de Sistemas Interconectados  
Multivariáveis no Espaço de Estado**

**Autor: Angel Fernando Torrico Cáceres**

Mestre em Engenharia Elétrica - UNICAMP

**Orientador: Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura**

LCSI/DMCSI/FEEC/UNICAMP

**Tese de Doutorado** apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Automação**.

Banca Examinadora

Celso Pascoli Bottura, Dr. .... UNICAMP  
Luis Antonio Aguirre, Dr. .... UFMG  
Luiz Carlos Sandoval Góes, Dr. .... ITA  
Dalton Soares Arantes, Dr. .... UNICAMP  
Gilmar Barreto, Dr. .... UNICAMP  
Pedro Luis Dias Peres, Dr. .... UNICAMP

**Campinas, S.P.**

**Julho 2005**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

T637i      Torrico Cáceres, Angel Fernando  
Identificação e controle estocásticos descentralizados de  
sistemas interconectados multivariáveis no espaço de estado  
/ Angel Fernando Torrico Cáceres. – Campinas, SP: [s.n.],  
2005.

Orientador: Celso Pascoli Bottura.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Identificação de sistemas. 2. Sistemas de comando e  
controle. 3. Sistemas estocásticos. 4. Água - Controle de  
qualidade. 5. Séries temporais. 6. Espaço de estado. I. Bottura,  
Celso Pascoli. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade  
de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Stochastic Identification and decentralized control of multivariable  
interconnected systems in the state space

Palavras-chave em Inglês: System identification, Control Systems, Stochastic systems,  
Water quality management, Time series and State space

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Luis Antonio Aguirre, Luiz Carlos Sandoval Góes, Dalton Soares  
Arantes, Gilmar Barreto, Pedro Luis Dias Peres

Data da defesa: 26/07/2005

## Desiderata

*Vá placidamente por entre o barulho e a pressa e lembre-se da paz que pode haver no silêncio. Tanto quanto possível, sem capitular, esteja de bem com todas as pessoas. Fale a sua verdade calma e claramente; e escute os outros, mesmo os estúpidos e ignorantes; também eles têm sua história. Evite pessoas barulhentas e agressivas. Elas são tormento para o espírito. Se você se comparar a outros, pode tornar-se vaidoso e amargo; porque sempre haverá pessoas superiores e inferiores a você. Desfrute suas conquistas assim como seus planos. Mantenha-se interessado em sua própria carreira, mesmo que humilde; é o que realmente se possui na sorte incerta dos tempos. Exercite a cautela nos negócios; porque o mundo é cheio de artifícios. Mas não deixe que isso o torne cego à virtude que existe; muitas pessoas lutam por altos ideais; e por toda parte a vida é cheia de heroísmo.*

*Seja você mesmo. Principalmente não finja afeição, nem seja cínico sobre o amor; porque em face de toda aridez e desencantamento ele é perene como a grama. Aceite gentilmente o conselho dos anos, renunciando com benevolência às coisas da juventude. Cultive a força do espírito para proteger-se num infortúnio inesperado. Mas não se desgaste com temores imaginários. Muitos medos nascem da fadiga e da solidão. Acima de uma benéfica disciplina, seja bondoso consigo mesmo. Você é filho do Universo, não menos que as árvores e as estrelas. Você tem o direito de estar aqui. E, quer seja claro ou não para você, sem dúvida o Universo se desenrola como deveria. Portanto, esteja em paz com Deus, qualquer que seja sua forma de concebê-lo e seja qual for a sua lida e suas aspirações, na barulhenta confusão da vida, mantenha-se em paz com a sua alma. Com todos os enganos, penas e sonhos desfeitos, este é ainda um mundo maravilhoso. Esteja atento. Empenhe-se em ser feliz.*

(Encontrado na velha Igreja de Saint Paul, Baltimore, 1692)

# Resumo

Nesta Tese, uma metodologia descentralizada de identificação linear no espaço de estado para sistemas multivariáveis estocásticos, discretos no tempo e serialmente interconectados, é proposta. A identificação do sistema global pode ser feita por meio da identificação individual dos seus subsistemas usando-se algum método de identificação de sistemas e de séries temporais multivariáveis no espaço de estado, dentre os aqui discutidos: Identificação no Espaço de Estado do Erro de Saída de Sistemas Multivariáveis (MOESP), Algoritmos Numéricos para a Identificação nos Subespaços de Sistemas no Espaço de Estado (N4SID), realização estocástica com entradas exógenas utilizando mínimos quadrados restrito, (CLS-SSI) e MOESP-AOKI. Com base nos modelos obtidos para os subsistemas, uma metodologia de controle ótimo descentralizado que explora a estrutura Bloco Triangular Inferior das matrizes do sistema é utilizada. A metodologia combinada de identificação e de controle estocásticos descentralizados, estruturada neste estudo, é aplicada a sistema interconectado de qualidade de água de rio, que motivou este trabalho.

**Palavras-chave:** Sistemas multivariáveis interconectados, Identificação de sistemas no espaço de estado, Controle descentralizado, Qualidade de sistema de água de rio, Identificação e controle estocásticos.

# Abstract

In this thesis a decentralized methodology for linear state space identification of discrete time, serially interconnected multivariable stochastic systems is proposed. The global system identification is achieved by means of the individual identification of its subsystems through some state space methods for identification of multivariable systems and time series, among the ones here discussed: Multivariable Output-Error State Space Identification (MOESP), Numerical Algorithms for Subspace State Space Systems Identification (N4SID), Constrained Least-Squares State Space Identification (CLS-SSI), MOESP-AOKI. Based on the obtained subsystems models a methodology of optimal decentralized control systems that explores the matrices Lower Block Triangular structure is utilized. The combined decentralized stochastic identification and control methodology structured in this study is applied to an interconnected river water quality system, that motivated this work.

**Keywords:** Interconnected multivariable systems, State Space systems identification, Decentralized Control, River water quality system, Stochastic identification and control.

*À minha esposa, Vaneide e  
Aos meus filhos, Pedro Enrique e Gabriel.*



# Agradecimentos

Ao Prof. Celso Pascoli Bottura, pela sábia orientação, amizade, paciência, e sobretudo pelo constante estímulo e por acreditar no meu trabalho ao longo destes anos;

Ao Prof. Gilmar Barreto, pelo estímulo, disposição e ajuda irrestrita no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Luiz Carlos Kretly pelo apoio quando necessário.

Aos amigos do LCSi: Maurício José Bordon, Paulo James de Oliveira, Annabell Del Real Tamariz, Rogério Bastos Quirino, Sérgio Antonio Augusto Filho, José Tarcísio Costa Filho, Celso José Munaro, Ginalber Luiz de Oliveira Serra, Felipe, Amilcar, Andre e Lorena, pela amizade, troca de informações e/ou críticas e sugestões.

Aos Professores e amigos do DEEE/UFMA: Osvaldo Ronald Saavedra Mendez, João Viana da Fonseca Neto e Maria da Guia da Silva, por sempre me incentivarem e darem apoio para a conclusão desta tese.

À Universidade Federal do Maranhão, em especial aos colegas e amigos do Departamento de Engenharia de Eletricidade da UFMA, pelo apoio.

Aos meus amigos Bienvenido, Shirley, Afonso, Nana, ..., pelos bons momentos de amizade e descontração.

Aos programas CNPq, CAPES-PICDT, pelo apoio financeiro.



# Sumário

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>xiii</b> |
| <b>Glossário</b>   | <b>xv</b>   |
| <b>Lista de Símbolos</b>   | <b>xv</b>   |
| <b>Trabalhos Publicados Pelo Autor</b>   | <b>xvii</b> |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>1</b>    |
| <b>2 Projeções Ortogonais e Espaços de Hilbert de Variáveis Aleatórias</b>                                     | <b>5</b>    |
| 2.1 Introdução . . . . .   | 5           |
| 2.2 Espaços vetoriais e Espaços de Hilbert . . . . .   | 6           |
| 2.2.1 Espaços métricos . . . . .   | 8           |
| 2.3 Interpretações geométricas de algumas<br>propriedades das variáveis aleatórias . . . . .                   | 14          |
| 2.4 Espaços de Hilbert de Variáveis Aleatórias . . . . .   | 20          |
| 2.5 A decomposição de Wold e o teorema de Kolmogorov - Wiener - Masani . . . . .                               | 22          |
| <b>3 Representação de Estado e Propriedades de Sistemas Lineares Estocásticos</b>                              | <b>27</b>   |
| 3.1 Introdução . . . . .   | 27          |
| 3.2 Representação de Sistemas Dinâmicos Discretos no Espaço de estado . . . . .                                | 28          |
| 3.2.1 Sistemas lineares determinísticos . . . . .  | 28          |
| 3.2.2 Sistemas lineares estocásticos . . . . .   | 29          |
| 3.3 Propriedades de sistemas lineares estocásticos . . . . .   | 31          |
| 3.3.1 Sistemas Lineares Determinísticos Excitados por Processos Estocásticos . . . . .                         | 35          |
| 3.4 Sistemas Dissipativos . . . . .  | 38          |
| 3.4.1 Sistemas Passivos . . . . .  | 42          |
| 3.4.2 Sistemas discretos dissipativos . . . . .  | 44          |
| 3.4.3 A passividade em Sistemas de Tempo Discreto . . . . .  | 45          |
| 3.4.4 Caracterização da passividade por meio de uma condição analítica da função<br>de transferência . . . . . | 46          |
| 3.4.5 Método algébrico para a caracterização da positividade por meio do Lema<br>Positivo Real . . . . .       | 51          |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>4</b> | <b>Realização de Processos Estocásticos Estacionários</b>  | <b>59</b>  |
| 4.1      | Introdução . . . . .   | 59         |
| 4.2      | Representação de processos estocásticos estacionários . . . . .  | 60         |
| 4.2.1    | Representação de processos estocásticos markovianos . . . . .  | 60         |
| 4.2.2    | Representação de processos estocásticos estacionários . . . . .  | 65         |
| 4.3      | Realização de processos estocásticos estacionários . . . . .   | 68         |
| 4.3.1    | Realizações markovianas e fatorações espectrais . . . . .  | 69         |
| 4.4      | Espaço preditor e o estado da representação markoviana . . . . .   | 75         |
| 4.4.1    | Bases dos espaços preditor e corretor . . . . .  | 79         |
| 4.5      | Variáveis canônicas como interface de informação . . . . .   | 81         |
| <b>5</b> | <b>Métodos de Subespaço para Identificação</b>   | <b>89</b>  |
| 5.1      | Introdução . . . . .   | 89         |
| 5.2      | Métodos de Identificação Baseados na Teoria da Realização . . . . .  | 90         |
| 5.3      | Identificação pelo método MOESP . . . . .  | 93         |
| 5.4      | Realização estocástica com entradas exógenas e métodos de subespaço para identificação de sistemas e de sinais . . . . . | 100        |
| 5.4.1    | Introdução . . . . .   | 100        |
| 5.4.2    | Construção do Espaço Preditor . . . . .  | 102        |
| 5.4.3    | Projeções ortogonais e oblíquas . . . . .  | 104        |
| 5.4.4    | O preditor ótimo . . . . .   | 106        |
| 5.4.5    | Análise das correlações canônicas e o vetor de estado . . . . .  | 108        |
| 5.4.6    | O modelo estacionário inovativo . . . . .  | 109        |
| 5.4.7    | Estimação das projeções Oblíquas . . . . .   | 110        |
| 5.4.8    | Identificação no espaço de estados pelo método dos Mínimos-Quadrados Restrito (CLS-SSI) . . . . .                        | 113        |
| 5.4.9    | O algoritmo MOESP_AOKI . . . . .   | 116        |
| <b>6</b> | <b>Identificação e Controle Ótimo Descentralizados de Sistemas Interconectados</b>                                       | <b>121</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .   | 121        |
| 6.2      | Sistemas serialmente interconectados . . . . .   | 122        |
| 6.3      | Identificação descentralizada de sistemas interconectados . . . . .  | 126        |
| 6.4      | Identificação descentralizada de sistemas seriamente interconectados via métodos subespaço . . . . .                     | 126        |
| 6.4.1    | Modelo de um sistema serialmente interconectado . . . . .  | 127        |
| 6.4.2    | Comparação de resultados . . . . .   | 129        |
| 6.5      | Controle Estocástico Descentralizado de Sistemas Serialmente Interconectados . . . . .                                   | 131        |
| 6.5.1    | Sistemas com estrutura Bloco Triangular Inferior (BTI) . . . . .   | 132        |
| <b>7</b> | <b>Identificação e Controle Descentralizados de Sistema de Qualidade da Água de Rio</b>                                  | <b>141</b> |
| 7.1      | Sistema de qualidade da água de rio . . . . .  | 141        |
| 7.1.1    | Balanço de oxigênio nos rios . . . . .   | 144        |
| 7.1.2    | Modelagem do OD e do DBO nos rios . . . . .  | 146        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 7.2      | Modelagem de séries temporais multivariáveis de sistema de qualidade da água de rio   | 150        |
| 7.2.1    | O rio como um sistema serialmente interconectado . . . . .                            | 151        |
| 7.2.2    | Modelagem descentralizada da qualidade da água de rios . . . . .                      | 154        |
| 7.3      | Modelagem da qualidade de água de um rio composto de três segmentos . . . . .         | 157        |
| 7.3.1    | Resultados e comentários . . . . .  | 159        |
| 7.4      | Identificação estocástica descentralizada de Sistemas de Qualidade de água de rio . . | 163        |
| 7.4.1    | Resultados . . . . .  | 164        |
| 7.5      | Controle descentralizado de sistema de qualidade da água de rio . . . . .             | 166        |
| 7.5.1    | Identificação dos Subsistemas . . . . .   | 170        |
| 7.5.2    | Controle descentralizado . . . . .  | 170        |
| 7.5.3    | Conclusões . . . . .  | 173        |
| <b>8</b> | <b>Conclusões</b>   | <b>175</b> |
|          | <b>Referências bibliográficas</b>   | <b>177</b> |
| <b>A</b> | <b>Análise das Correlações Canônicas de Processos Estocásticos</b>                    | <b>185</b> |
| A.1      | Decomposição em Valores Singulares . . . . .  | 185        |
| A.2      | Correlações Canônicas de variáveis multivariadas . . . . .                            | 188        |
| <b>B</b> | <b>Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos</b>                                  | <b>193</b> |
| B.1      | Probabilidades . . . . .  | 193        |
| B.1.1    | Espaço Amostral . . . . .   | 193        |
| B.1.2    | Classes de eventos . . . . .  | 194        |
| B.1.3    | Probabilidades como medida . . . . .  | 195        |
| B.2      | Variáveis Aleatórias . . . . .  | 197        |
| B.3      | Processos Estocásticos . . . . .  | 197        |
| <b>C</b> | <b>Alguns programas desenvolvidos na Tese</b>   | <b>199</b> |
| C.1      | Algoritmo CLS-SSI . . . . .   | 199        |
| C.2      | Algoritmo AOKI . . . . .  | 206        |



# Lista de Figuras

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Projeção Ortogonal. . . . .   | 12  |
| 2.2 | Representação do espaço gerado por duas variáveis aleatórias por meio de duas variáveis aleatórias independentes. . . . .   | 15  |
| 2.3 | Projeção ortogonal de uma variável aleatória num espaço gerado por duas variáveis aleatórias independentes. . . . .   | 19  |
| 2.4 | Esperança condicional de $x$ dadas as variáveis aleatórias $u$ e $v$ , não necessariamente independentes. . . . .   | 20  |
| 2.5 | Interpretação geométrica da projeção de $x$ sobre $y$ como a esperança condicional. . .   | 20  |
| 2.6 | Decomposição de Wold. . . . .   | 26  |
| 3.1 | Circuito passivo RLC . . . . .  | 39  |
| 4.1 | Espaço preditor. . . . .  | 78  |
| 5.1 | Projeção ortogonal . . . . .  | 103 |
| 5.2 | Projeções Oblíquas . . . . .  | 104 |
| 5.3 | Espaço Preditor como Projeções Oblíquas . . . . .   | 107 |
| 6.1 | Sistema serialmente interconectado . . . . .  | 122 |
| 6.2 | Dois subsistemas do sistema global. . . . .   | 123 |
| 6.3 | Subsistema Isolado . . . . .  | 123 |
| 6.4 | Sinais binários aleatórios de entrada dos subsistemas S1, S2 e S3, respectivamente. .   | 129 |
| 6.5 | Erros de predição para o primeiro subsistema, onde +, $\circ$ e $\times$ são os erros de predição obtidos pela aplicação da metodologia de identificação baseados nos métodos N4SID, MOESP e CLS-SS, respectivamente. . . . . | 130 |
| 6.6 | Erros de predição para o segundo subsistema, onde +, $\circ$ e $\times$ são os erros de predição obtidos pela aplicação da metodologia de identificação baseados nos métodos N4SID, MOESP e CLS-SS, respectivamente. . . . .  | 130 |
| 6.7 | Erros de predição para o terceiro subsistema, onde +, $\circ$ e $\times$ são os erros de predição obtidos pela aplicação da metodologia de identificação baseados nos métodos N4SID, MOESP e CLS-SS, respectivamente. . . . . | 131 |
| 7.1 | Processos Anaeróbios. . . . .   | 147 |
| 7.2 | O rio como uma cascata de reatores. . . . .   | 148 |
| 7.3 | Misturador. . . . .   | 148 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 7.4  | Concentrações e vazões no reator com todas as reações envolvidas. . . . .   | 149 |
| 7.5  | Trecho de um rio dividido em segmentos. . . . .   | 151 |
| 7.6  | Segmentos de rio como subsistemas interconectados. . . . .  | 152 |
| 7.7  | Concentração de DBO do segundo segmento. A linha contínua representa os dados medidos e a tracejada os dados estimados (valores entorno do regime). . . . .                   | 156 |
| 7.8  | Concentração de OD de segundo segmento. A linha contínua representa os dados medidos e a tracejada os dados estimados (valores entorno das concentrações de regime). . . . .  | 157 |
| 7.9  | Segmentos de rio. . . . .   | 158 |
| 7.10 | Concentrações de DBO e OD do primeiro segmento. A linha sólida representa os dados medidos e a pontilhada os estimados (valores entorno das concentrações de regime). . . . . | 162 |
| 7.11 | Concentrações de DBO e OD do segundo segmento. A linha sólida representa os dados medidos e a pontilhada os estimados (valores entorno das concentrações de regime). . . . .  | 162 |
| 7.12 | Concentrações de DBO e OD do terceiro segmento. A linha sólida representa os dados medidos e a pontilhada os estimados (valores entorno das concentrações de regime). . . . . | 162 |
| 7.13 | Concentrações binárias aleatórias de DBO para cada segmento. . . . .  | 164 |
| 7.14 | Concentrações de DBO e OD do primeiro segmento. A linha sólida são os dados “medidos” e a tracejada os estimados (concentrações entorno do regime). . . . .                   | 165 |
| 7.15 | Concentrações de DBO e OD do segundo segmento. A linha sólida são os dados “medidos” e a tracejada os estimados (concentrações entorno do regime). . . . .                    | 166 |
| 7.16 | Concentrações de DBO e OD do terceiro segmento. A linha sólida são os dados “medidos” e a tracejada os estimados (concentrações entorno do regime). . . . .                   | 166 |
| 7.17 | Segmentos de rio com efluentes de controle. . . . .   | 167 |
| 7.18 | Entradas aleatórias binárias de concentração de DBO, para cada segmento. . . . .  | 168 |
| 7.19 | As concentrações da DBO do OD do primeiro segmento. A linha contínua representa os dados medidos e a pontilhada os estimados. . . . .   | 168 |
| 7.20 | As concentrações da DBO e do OD do segundo segmento. A linha contínua representa os dados "medidos" e a pontilhada os estimados (entorno dos valores de regime). . . . .      | 169 |
| 7.21 | As concentrações da DBO do OD do terceiro segmento. A linha contínua representa os dados “medidos” e a pontilhada os estimados (entorno dos valores de regime). . . . .       | 169 |
| 7.22 | Concentrações de DBO e OD do primeiro segmento. A linha contínua é a resposta do sistema com controle e a pontilhada sem controle. . . . .                                    | 173 |
| 7.23 | Concentrações de DBO e OD do segundo segmento. A linha contínua é a resposta do sistema com controle e a pontilhada sem controle. . . . .                                     | 174 |
| A.1  | Relação entre as variáveis canônicas . . . . .  | 191 |

# Lista de Símbolos

- $\delta_{ij}$  - Função Delta de Kroneker,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$
- $x'$  - Transposta de  $x$
- $E(\cdot)$  - Esperança Matemática
- $\mathcal{Y}$  - Espaço gerado pela combinação linear finita dos elementos do processo  $(y_t)$
- $(y_t)$  - Processo estocástico discreto,  $t \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}$  - O espaço dos números reais
- $\mathbb{R}^n$  - Espaço dos vetores reais de dimensão  $n$
- $\mathbb{Z}$  - Conjunto dos números inteiros
- $\mathbb{Z}^+$  - Conjunto dos números inteiros positivos
- $\mathcal{Y}_t^-$  - Espaço gerado pela combinação linear finita dos elementos  $y_{t_i}$  do processo  $(y_t)$ , com  $t_i \leq t$



# Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. C. P. Bottura, A. F. Torrico Cáceres. "Decentralized Multivariate Identification of Interconnected Systems by a Stochastic Subspace Method". *Proceedings of the 41st. IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002, pp.4499-4504.
2. C. P. Bottura, A. F. Torrico Cáceres. "Decentralized Subspace Method for Multivariate System Identification". *Proceedings of the 10th. IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisboa, Portugal, July 2002
3. C. P. Bottura, A. D. R. Tamariz, G. Barreto e A. F. Torrico Cáceres. "Parallel and Distributed MOESP Computational System's Modelling". *Proceedings of the 10th. IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisboa, Portugal, July 2002.
4. C. P. Bottura, A. F. Torrico Cáceres. "Decentralized Control of Serial Interconnected Systems for River Water Quality via Subspace Identification". *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, (ACC 2002), May 8-10, Anchorage, Alaska, 3337-3342.
5. C. P. Bottura, A. F. Torrico Cáceres. "Método de Identificação nos Subespaços para Sistemas Multivariáveis com Estrutura Interconectada". *XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM 2001)*, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, pp. 445-453, novembro de 2001.
6. C. P. Bottura, Gilmar Barreto e A. F. Torrico Cáceres. "River water Quality Modeling via Verhaegen and Dewilde Method". *Proceedings of the IFAC International Conference on Modelling and Control in Agriculture, Horticulture and Post-Harvest Processing* (Agricontrol 2000), pp. 333-338, Wageningen, the Netherlands, July 2000.



# Capítulo 1

## Introdução

Para o desenvolvimento desta Tese muitos autores realizaram contribuições importantes e procuramos evidenciar isto na mesma. Contudo é necessário ressaltar que as contribuições mais fundamentais e influenciadores desta tese são devidas a Rudolph E. Kalman (1960a, 1963); Ho e Kalman (1966) e Masanao Aoki (1983, 1987, 1990). Contribuições também muito importantes são as de Pierre Faurre (1973, 1970, 1976); Faurre et al. (1979), orientado de doutorado de Kalman e de Hirotogu Akaike (1975, 1976, 1974), que também foi influenciado por Kalman, conforme evidenciado por seus agradecimentos em muitos de seus brilhantes trabalhos. Parece-nos que Kalman enxergou de forma única e oportuna o problema de Realização no Espaço de Estado, tanto determinística como estocástica, e com isto iluminou a Teoria de Sistemas de maneira ímpar, Kalman (1971, 1980); Ho e Kalman (1966); Kalman (1965a, 1967); Kalman e Bertram (1959); Kalman (1965b, 1960a,b). Masanao Aoki conseguiu dar ao problema de modelagem de Séries Temporais no Espaço de Estado um impulso muito importante sobretudo em seu livro de 1983.

Como durante o desenvolvimento desta Tese também foram desenvolvidas as teses de Barreto (2002) e de Tamariz (2005), que mutuamente se influenciaram, alguns temas foram mais enfatizados em uma delas. Por exemplo o problema da realização determinística foi tratado em Barreto (2002), enquanto que nesta tese priorizamos o tratamento do problema de realização estocástica.

Nesta tese, um objetivo muito importante é o desenvolvimento de uma fundamentação teórica para modelagem computacional de dados em contexto estocástico, no espaço de estado, a partir da teoria de sistemas lineares multivariáveis discretos no tempo. Para tanto, no Capítulo 4, a teoria da realização estocástica, essencial para tal desenvolvimento, é revisitada de uma forma que consideramos não apenas essencial para esta tese, mas também como uma contribuição importante deste estudo, que para ser bem estruturado, exigiu que antes fizéssemos os Capítulos 2 e 3, que se apóiam em estudos que se aproximam dos mais tradicionais nos estudos de graduação e pós-graduação em engenharia elétrica, porém com ênfase em conhecimentos que permitam construir, sem enfatizar o

rigor matemático, um arcabouço para a adequada aplicação da matemática aos problemas de modelagem de sistemas e de séries temporais multivariáveis, priorizando aspectos estocásticos e formulações teóricas com uma visão particularmente voltada ao engenheiro de sistemas. Numa primeira etapa estudamos os processos estocásticos, em especial buscando aprofundar o entendimento de noções de projeção em subespaços formados por variáveis aleatórias, que é de fundamental importância para o entendimento, o desenvolvimento e a aplicação dos métodos de subespaço para identificação, no contexto estocástico. No Capítulo 2 desta tese alguns resultados desse estudo são apresentados, seguindo principalmente as referências Astrom (1970); Caines (1988). No Capítulo 3, apresentamos um estudo de sistemas lineares estocásticos com o objetivo de formar uma base teórica para as suas representações no espaço de estado. Fazemos um estudo das propriedades de sistemas estocásticos discretos no tempo; em especial enunciamos e provamos o Lema Positivo Real discreto, Anderson et al. (1974), de uma forma que consideramos ser contribuição desta tese. Os conceitos de passividade, dissipatividade e de sistemas positivos reais, para sistemas discretos no tempo, são estudados de uma maneira simples e que consideramos didática. No Capítulo 4 estudamos a realização de processos estocásticos estacionários no espaço de estado; nele tratamos da modelagem de um processo estocástico discreto multivariável por meio de um sistema linear no espaço de estado excitado por um processo estocástico ruído branco, tal que o processo de saída apresente algumas propriedades estatísticas semelhantes às do processo modelado. Nesta parte da tese temos como referências importantes: Akaike (1974, 1975, 1976), Faurre (1970, 1973, 1976); Caines (1988), dentre outras. O Lema Positivo Real discreto no contexto estocástico, também é enunciado e provado. Numa segunda parte, iniciada no capítulo 5, estudamos alguns métodos de subespaço para identificação, que são utilizados nos Capítulos seguintes e servem de ferramentas importantes para a implementação da metodologia de identificação proposta. São vários os trabalhos que nos auxiliam nesta parte da tese, em especial podemos citar os trabalhos de Verhaegen e Dewilde (1992a,b), com o algoritmo MOESP (Multivariable Output-Error State Space identification), e Viberg (1995); os trabalhos de Overschee e De Moor (1994, 1996), com o desenvolvimento do algoritmo N4SID (Numerical algorithm for Subspace State Space Systems Identification); bem como os métodos de identificação estocástica e/ou de modelagem multivariável de séries temporais no espaço de estado, Aoki (1990, 1983, 1987), Lindquist e Picci (1996), Katayama e Picci (1999), dentre outros. Nesta parte da tese o algoritmo de modelagem de séries temporais de Aoki, bem como o algoritmo de realização estocástica com entradas exógenas utilizando mínimos quadrados restrito (CLS-SSI) (Constrained Least-Squares - State Space Identification), foram implementados. Em particular, o método MOESP-AOKI proposto em Tamariz (2005), porém grandemente influenciado pelos estudos conduzidos nesta Tese e em Barreto (2002), todas realizadas no LCSi, enfatizando modelagem computacional de dados multivariáveis no espaço de estado, e, de forma direta ou indireta, o controle de sistemas multivariáveis, é estudado

---

neste Capítulo. No Capítulo 6, uma metodologia descentralizada de identificação linear no espaço de estado para sistemas multivariáveis estocásticos discretos no tempo é proposta, Bottura e Cáceres (2001, 2002b). Com base nos modelos determinados para os subsistemas obtidos, uma metodologia de controle ótimo descentralizado que explora a estrutura Bloco Triangular Inferior das matrizes do sistema é utilizada, Siljak (1991); Stankovic e Siljak (1989). Comparamos os resultados da aplicação descentralizada de identificação utilizando os métodos de subespaço de identificação N4SID, MOESP e de Identificação Estocástica nos Subespaços com Mínimos Quadrados Restrito de Katayama e Picci (CLS-SSI), Bottura e Cáceres (2002c). No Capítulo 7, aplicamos a metodologia descentralizada de identificação proposta a sistema de qualidade da água de rio, bem como a aplicação de controle ótimo descentralizada é feita. Para tal objetivo, nesse Capítulo fazemos um estudo sistemático de sistema de qualidade da água de rio, propondo uma estrutura descentralizada de modelagem, como feito em Young e Beck (1974); Cáceres (1992) e Tamura (1976). Baseados nessa modelagem, montamos uma plataforma de simulação para a geração de dados de qualidade de água de rio. Num primeiro estágio a modelagem descentralizada de séries temporais de tais sistemas é feito, Bottura et al. (2000). Posteriormente, utilizamos a metodologia descentralizada de identificação para, com base em dados gerados na nossa plataforma, identificar modelo de sistema de qualidade da água de rio, Bottura e Cáceres (2001, 2002a). Com base no modelo identificado, projetamos controladores ótimos descentralizados utilizando os algoritmos estudados e implementados no Capítulo 6. Os resultados de tais aplicações são também apresentados e comentados. No Capítulo 8 são apresentadas conclusões e comentários, bem como são apontados possíveis trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.



## Capítulo 2

# Projeções Ortogonais e Espaços de Hilbert de Variáveis Aleatórias

### 2.1 Introdução

Atualmente, ferramentas de análise e úteis interpretações geométricas para espaços vetoriais euclidianos são bem conhecidas em álgebra linear, assim como também as ferramentas computacionais para o tratamento dos mesmos. Os espaços de Hilbert, em sentido geral, podem ser analisados e interpretados de forma similar aos espaços euclidianos. Nos últimos tempos têm surgido métodos de identificação que exploram as propriedades destes espaços para desenvolver sofisticados algoritmos de identificação de sistemas como os métodos de identificação nos subespaços, Overschee e De Moor (1996) e Verhaegen (1994). A decomposição em valores singulares (SVD) possibilita a implementação destes algoritmos de forma mais robusta e confiável. Os Espaços de Hilbert de seqüências de variáveis aleatórias (processos estocásticos) permitem explorar muitas propriedades dos espaços vetoriais euclidianos de dimensão finita. Neste Capítulo analisamos, de forma breve, as propriedades desses espaços.

Este Capítulo tem por finalidade a introdução de alguns fundamentos essenciais para o decorrer da tese. Revisamos alguns conceitos gerais de espaços e subespaços de Hilbert, que são definidas por meio de funções: Produto Interno, Norma e Distância para variáveis aleatórias. Definimos a projeção ortogonal de variáveis aleatórias em espaços formados por processos estocásticos. Fazemos interpretações geométricas das propriedades envolvidas nessas projeções. Definimos Espaços de Hilbert para variáveis aleatórias, construímos espaços e subespaços de Hilbert de um dado processo estocástico estacionário no sentido amplo, e estudamos a decomposição de Wold de um processo estocástico.

## 2.2 Espaços vetoriais e Espaços de Hilbert

**Definição 2.2.1** *Seja  $\mathcal{F}$  um conjunto de elementos chamados escalares. Dizemos que  $\mathcal{F}$  é um corpo, se definidas as operações de multiplicação e adição sobre  $\mathcal{F}$ , são satisfeitos os seguintes axiomas:*

**Axioma 2.2.2** *A todo par de escalares  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\mathcal{F}$  corresponde um escalar  $\alpha + \beta$  em  $\mathcal{F}$  chamado soma de  $\alpha$  e  $\beta$  tal que:*

1.  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  para todo  $\alpha$  e  $\beta \in \mathcal{F}$  (propriedade comutativa da adição);
2.  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  para todo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma \in \mathcal{F}$ ;
3. existe um único elemento em  $\mathcal{F}$  chamado de zero e denotado por  $0$  tal que  $\alpha + 0 = \alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathcal{F}$ ;
4. para todo  $\alpha \in \mathcal{F}$  existe um único elemento  $\beta = -\alpha \in \mathcal{F}$  tal que  $\alpha + \beta = 0$ .

**Axioma 2.2.3** *A qualquer par de escalares  $\alpha$  e  $\beta \in \mathcal{F}$  corresponde um escalar  $\alpha\beta \in \mathcal{F}$ , chamado produto de  $\alpha$  e  $\beta$ , tal que*

1.  $\alpha\beta = \beta\alpha$ ;
2.  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$  para todo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma \in \mathcal{F}$ ;
3.  $\mathcal{F}$  contém um único elemento não nulo  $1$  tal que  $1\alpha = \alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{F}$ ;
4. Para todo  $\alpha \in \mathcal{F}$  diferente de zero, existe um único elemento  $\beta = \alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} \in \mathcal{F}$  tal que  $\alpha\beta = 1$ ;
5.  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$  para todo  $\alpha, \beta$  e  $\gamma \in \mathcal{F}$ .

**Definição 2.2.4** *Seja  $\mathcal{V}$  um conjunto de vetores com elementos no corpo  $\mathcal{F}$ .  $\mathcal{V}$  é chamado de espaço vetorial sobre  $\mathcal{F}$  se, quando definidas as operações de adição de vetores e multiplicação por um escalar, são satisfeitas as seguintes propriedades.*

1.  $x + y \in \mathcal{V}$  para todo  $x, y \in \mathcal{V}$ . Esta é chamada a propriedade de fechamento para a adição de vetores; .
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  para todo  $x, y, z \in \mathcal{V}$ ;
3.  $x + y = y + x$  para todo  $x, y \in \mathcal{V}$ ;
4. Existe um elemento  $0 \in \mathcal{V}$  tal que  $x + 0 = x$  para todo  $x \in \mathcal{V}$ ;

5. Para cada  $x \in \mathcal{V}$ , existe um elemento  $(-x) \in \mathcal{V}$  tal que  $x + (-x) = 0$ ;
6.  $\alpha x \in \mathcal{V}$  para todo  $\alpha \in \mathcal{F}$  e  $x \in \mathcal{V}$ . Esta é a propriedade de fechamento para a multiplicação por um escalar;
7.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$  e cada  $x \in \mathcal{V}$ ;
8.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  para cada  $\alpha \in \mathcal{F}$  e todo  $x, y \in \mathcal{V}$ ;
9.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$  e cada  $x \in \mathcal{V}$ ;
10.  $1x = x$  para cada  $x \in \mathcal{V}$ .

**Definição 2.2.5** Seja  $\mathcal{S}$  um subconjunto não vazio do espaço vetorial  $\mathcal{V}$  sobre  $\mathcal{F}$ . Se  $\mathcal{S}$  é também um espaço vetorial sobre  $\mathcal{F}$  utilizando as mesmas operações de adição e multiplicação por um escalar, então  $\mathcal{S}$  é dito ser um subespaço de  $\mathcal{V}$ .

**Teorema 2.2.6** Um subconjunto  $\mathcal{S}$  não vazio do espaço vetorial  $\mathcal{V}$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$  se e somente se são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. Para todo  $x, y \in \mathcal{S}$ ,  $x + y \in \mathcal{S}$ ;
2.  $\alpha x \in \mathcal{S}$ , para todo  $x \in \mathcal{S}$  e todo  $\alpha \in \mathcal{F}$ .

■

As duas propriedades acima são satisfeitas se e somente se  $\alpha x + \beta y \in \mathcal{S}$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$  e todo  $x, y \in \mathcal{S}$ .

Para um conjunto de vetores  $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  de um espaço vetorial  $\mathcal{V}$ , o conjunto de todas as combinações lineares possíveis dos elementos de  $\mathcal{S}$  será denotado por:

$$\text{Span}(\mathcal{S}) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r \mid \alpha_i \in \mathcal{F}\}. \quad (2.1)$$

Notemos que  $\text{Span}(\mathcal{S})$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$  devido a que as duas propriedades de fechamento 1 e 6 são satisfeitas. Isto é, se  $x = \sum_i \alpha_i v_i$  e  $y = \sum_i \beta_i v_i$  são dois elementos de  $\text{Span}(\mathcal{S})$ , então a soma  $x + y = \sum_i (\alpha_i + \beta_i) v_i$  também pertence a  $\text{Span}(\mathcal{S})$ , e para qualquer escalar  $\gamma \in \mathcal{F}$ ,  $\gamma x = \sum_i (\gamma \alpha_i) v_i \in \text{Span}(\mathcal{S})$ .

Um conjunto de vetores  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  linearmente independentes de um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  é uma **base** dele se ele gera o espaço vetorial  $\mathcal{V}$ , isto é  $\mathcal{V} = \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ . Pode-se demonstrar que qualquer base de um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  possui o mesmo número de vetores. Chamamos de **dimensão de um espaço vetorial**  $\mathcal{V}$  ao número de vetores de uma base.

Definimos a operação **produto interno** sobre um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  a uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$  que satisfaz às seguintes propriedades:

1.  $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ ;
2.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  e  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
3.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ;

para todo  $x, y, z \in \mathcal{V}$ , e  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ .

**Definição 2.2.7** *Um Espaço Pré-Hilbert real é um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  na qual é definida uma função produto interno.*

A **norma** de  $x \in \mathcal{V}$  é uma função  $\|\cdot\|: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$  definida como  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Claramente  $\|x\| \geq 0$ , sendo igual a zero se e somente se  $x = 0$ .

As seguintes proposições serão úteis para os resultados posteriores.

**Proposição 2.2.8** *Para qualquer  $x, y \in \mathcal{V}$  temos:*

1.  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  (*desigualdade de Cauchy-Schwarz*)
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (*desigualdade triangular*)
3.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$  (*propriedade do paralelogramo*)

■

Podemos utilizar o produto interno para definir uma noção de convergência em  $\mathcal{V}$ .

### 2.2.1 Espaços métricos

**Definição 2.2.9** *Sejam  $x, y$  e  $z \in \mathcal{V}$ . Uma função  $d(\cdot, \cdot): \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$  (onde  $\mathbb{R}^+$  é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a zero) é chamada de métrica se:*

1.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Esta função dá uma noção de **distância** entre dois pontos  $x, y \in \mathcal{V}$ . Claramente a função definida como:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad (2.2)$$

é uma métrica sobre  $\mathcal{V}$ .

Um **espaço métrico** é um espaço vetorial sobre o qual é definida uma métrica.

**Definição 2.2.10** *Uma seqüência  $\{x_n\}$  num espaço métrico  $\mathcal{V}$  converge a um ponto  $x \in \mathcal{V}$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $N \geq 0$  tal que  $d(x_n, x) < \epsilon$  para todo  $n \geq N$ . Isto é equivalente à condição  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , no sentido usual de convergência para os números reais.*

Em outras palavras, uma seqüência  $\{x_n\}$  em  $\mathcal{V}$  converge a  $x \in \mathcal{V}$  (isto é  $x_n \rightarrow x$  quando  $n \rightarrow \infty$ ) se  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Todas as formulações envolvendo convergência em  $\mathcal{V}$  serão interpretadas neste sentido.

**Teorema 2.2.11** *O produto interno é uma função contínua de  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  em  $\mathbb{R}$ , isto é, se  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Em particular  $x_n \rightarrow x$  implica que  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Prova:** Se  $\{x_n\}$  é uma seqüência convergente, então ela é limitada, isto é existe um  $k < \infty$  tal que  $\|x_n\| < k$  para todo  $n$ .

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle (x - x_n) + x_n, (y - y_n) + y_n \rangle \\ &= \langle (x - x_n), (y - y_n) \rangle + \langle (x - x_n), y_n \rangle + \langle x_n, (y - y_n) \rangle + \langle x_n, y_n \rangle, \end{aligned}$$

se  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ , os três primeiros termos convergem para zero, dado que, por exemplo:

$$|\langle x_n, (y - y_n) \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \leq k \|y - y_n\| \quad (2.3)$$

dai segue o resultado. ■

Se  $\{x_n\}$  é uma seqüência convergente com limite  $x$ , então pela desigualdade triangular tem-se

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x), \quad (2.4)$$

para qualquer  $n, m$ . Assim, quando  $n, m \rightarrow \infty$  temos  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ . Qualquer seqüência em  $\mathcal{V}$  tendo esta propriedade é chamada de **seqüência de Cauchy**.  $\mathcal{V}$  é dita ser **completa** se o inverso está assegurado, isto é, se para cada seqüência de Cauchy  $\{x_n\}$  existe algum  $x \in \mathcal{V}$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

**Definição 2.2.12** *Um espaço de Hilbert  $\mathcal{V}$  é um espaço Pré-Hilbert que é completo com relação à métrica  $d(x, y) = \|x - y\|$ ,  $x, y \in \mathcal{V}$ .*

A razão fundamental para trabalhar com espaços de Hilbert está no fato que os conceitos bem conhecidos para os espaços de dimensão finita podem ser estendidos para os espaços de dimensão infinita. Normalmente é mais simples provar que um espaço é Pré-Hilbert, do que mostrar que ele é completo. As propriedades de ortogonalidade e de projeção para espaços de dimensão finita são igualmente aplicadas para os espaços de Hilbert.

Nesta Tese consideraremos somente os subespaços fechados de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , isto é, os subespaços que contêm todos os limites das seqüências dos seus elementos.

**Teorema 2.2.13** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Um subconjunto  $\mathcal{M}$  é um subespaço de  $\mathcal{H}$  se e somente se  $\mathcal{M}$  é um subconjunto de  $\mathcal{H}$  e satisfaz as seguintes condições*

1. Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $x, y \in \mathcal{M}$ ,  $\alpha x + \beta y \in \mathcal{M}$ , isto é,  $\mathcal{M}$  é um espaço linear
2. se  $\{x_n | n \in \mathbb{Z}\}$  é uma seqüência de Cauchy em  $\mathcal{M}$ , então o  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathcal{M}$ .

■

Para obter um subespaço fechado  $\mathcal{M}$  de um subespaço  $\mathcal{M}_0$  num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , é necessário incluir em  $\mathcal{M}_0$  todos os pontos que são limites na norma topológica de seqüências em  $\mathcal{M}_0$ . Os subespaços de  $\mathbb{R}^n$  são automaticamente fechados, porém isto não é necessariamente verdadeiro para todo espaço de Hilbert.

Como feito para o espaço euclideano, a noção do produto interno nos dá uma formulação abstrata do conceito de ângulo entre dois elementos do espaço; sendo assim podemos dar uma definição generalizada de perpendicularidade como:

**Definição 2.2.14**  *$x, y \in \mathcal{H}$  são chamados de **ortogonais** se  $\langle x, y \rangle = 0$ , e podemos escrever  $x \perp y$ . Se  $S \subset \mathcal{H}$  é um subconjunto qualquer (em particular, se  $S$  é um subespaço) de  $\mathcal{H}$ , então  $x \perp S$  significa que  $x \perp s$  para todo  $s \in S$ ; similarmente, a notação  $S \perp T$  para dois subconjuntos  $S$  e  $T$  de  $\mathcal{H}$ , indica que todos os elementos de  $S$  são ortogonais a todos os elementos de  $T$ .*

Sejam  $A$  e  $B$  dois subespaços de  $\mathcal{H}$  tal que  $\mathcal{H} = A + B$ , isto é para cada  $h \in \mathcal{H}$  existe um  $a \in A$  e um  $b \in B$  tal que  $h = a + b$ . Se  $A \perp B$  podemos escrever  $\mathcal{H} = A \oplus B$  e dizemos que  $\mathcal{H}$  é a soma direta de  $A$  e  $B$ .

O complemento de um subespaço  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{V}$ , é definido como:

$$\mathcal{M}^\perp = \{v \in \mathcal{V} \mid v \perp \mathcal{M}\}. \quad (2.5)$$

Podemos provar que  $\mathcal{M}^\perp$  é também um subespaço de  $\mathcal{V}$ .

Um dos resultados mais importantes da geometria dos espaços de Hilbert, é o chamado de teorema da projeção que, em espaços de dimensão finita simplesmente formula que o caminho mais curto de um ponto ao plano está localizado numa reta perpendicular ao plano que une o ponto ao plano. O teorema da projeção generaliza este resultado aos espaços de Hilbert.

**Teorema 2.2.15** *Seja  $\mathcal{M}$  um subespaço próprio do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , e seja  $x$  elemento de  $\mathcal{H}$ . Então  $x$  pode ser decomposto de forma única como*

$$x = y + z \quad (2.6)$$

onde  $y \in \mathcal{M}$  e  $z \in \mathcal{M}^\perp$ . Mais ainda para todo  $v \in \mathcal{M}$ , temos

$$\|x - y\| \leq \|x - v\|, \quad (2.7)$$

com igualdade somente quando  $v = y$ . Isto está representado na Figura 2.1.

**Prova:** Caines (1988) Dado que  $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^\perp = \mathcal{H}$ ,  $x$  pode ser representado como em (2.6). Suponhamos que  $x$  tenha mais de uma representação; sejam duas delas dadas por

$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \quad (2.8)$$

onde  $y_1, y_2 \in \mathcal{M}$  e  $z_1, z_2 \in \mathcal{M}^\perp$ . De (2.8) temos

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \quad (2.9)$$

onde  $y_1 - y_2 \in \mathcal{M}$  e  $z_2 - z_1 \in \mathcal{M}^\perp$ ; de (2.9) temos

$$\langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle = \langle y_1 - y_2, z_2 - z_1 \rangle = 0 \quad (2.10)$$

ou

$$\|y_1 - y_2\| = 0 \quad (2.11)$$

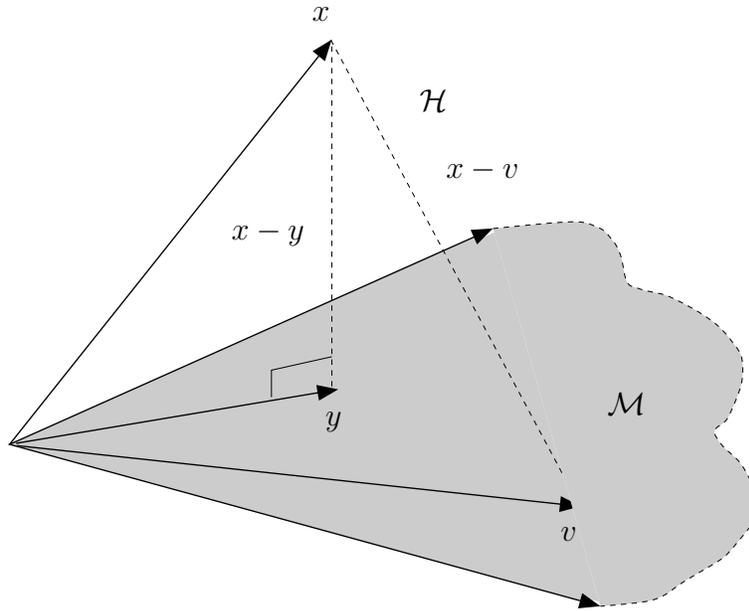


Fig. 2.1: Projeção Ortogonal.

portanto  $y_1 = y_2$ . Seguindo um procedimento similar concluímos que  $z_1 = z_2$ , que é uma contradição. Para provar que  $\|x - y\| = \min_{v \in \mathcal{M}} \|x - v\|$  definimos:

$$h = \min_{v \in \mathcal{M}} \|x - v\| > 0. \quad (2.12)$$

Pela igualdade do paralelogramo temos:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad (2.13)$$

e se  $u = y_n - x$ , e  $v = y_m - x$ , temos:

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2. \quad (2.14)$$

Analisando o primeiro termo da equação acima temos:

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 = 4 \left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \right\|^2 \geq 4h^2 \quad (2.15)$$

dado que  $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in \mathcal{M}$ , de (2.14) e (2.15) temos:

$$4 \left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) - x \right\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n - y_m\|^2 \geq 4h^2 \quad (2.16)$$

ou

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4h^2 \quad (2.17)$$

dado que  $\|y_n - x\|^2 \geq h^2$  e  $\|y_m - x\|^2 \geq h^2$ , podemos escrever

$$\|y_n - x\|^2 = h^2 + \epsilon_1, \quad \|y_m - x\|^2 = h^2 + \epsilon_2, \quad (2.18)$$

para algum  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ . De (2.18) em (2.17) temos:

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(2h^2 + \epsilon_1 + \epsilon_2) - 4h^2 = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad (2.19)$$

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq \epsilon \quad (2.20)$$

onde  $\epsilon = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ . Assim  $y_n$  é uma seqüência de Cauchy e existe um  $y \in \mathcal{H}$  tal que  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ . Dado que  $\mathcal{M}$  é fechado,  $y \in \mathcal{M}$ , e  $\|y_n - x\| = h$  pela continuidade do produto interno. Mostraremos agora que  $(x - y) \perp \mathcal{M}$ . Suponhamos que  $x - y$  não é ortogonal a  $\mathcal{M}$ . Então existe um  $w \in \mathcal{M}$  tal que

$$\langle x - y, w \rangle = r > 0. \quad (2.21)$$

Agora para qualquer  $c$ ,  $y + cw \in \mathcal{M}$  assim de (2.12) temos:

$$\|x - (y + cw)\| \geq h = \|x - y\| \quad (2.22)$$

dai

$$0 \leq \|x - (y + cw)\|^2 - \|x - y\|^2 = \|x - y\|^2 - 2c \langle x - y, w \rangle + c^2 \|w\|^2 - \|x - y\|^2 \quad (2.23)$$

$$-2c \langle x - y, w \rangle + c^2 \|w\|^2 \geq 0 \quad (2.24)$$

ou

$$c^2 \|w\|^2 \geq 2c \langle x - y, w \rangle = 2cr \quad (2.25)$$

$$c \|w\|^2 \geq 2r \quad (2.26)$$

como  $c$  é arbitrário podemos tomar por exemplo  $c = \frac{r}{\|w\|^2}$ ; temos então

$$r \geq 2r, \quad (2.27)$$

que é uma contradição. Assim  $z = x - y$  deve pertencer a  $\mathcal{M}^\perp$ . Isto completa a prova. ■

A componente  $y \in \mathcal{M}$  da decomposição anterior é chamada de projeção ortogonal de  $x$  em  $\mathcal{M}$ , que é denotada por

$$y = (x|\mathcal{M}). \quad (2.28)$$

Seja  $\mathcal{M}$  um subespaço de  $\mathcal{H}$  e  $x \in \mathcal{H}$ . O (único) elemento  $y \in \mathcal{M}$  tal que  $x = y + z$  com  $z \perp \mathcal{M}$  é chamado de projeção ortogonal de  $x$  em  $\mathcal{M}$ , e é denotado por  $(x|\mathcal{M})$ .

No caso em que  $\mathcal{M}$  não seja um subespaço próprio de  $\mathcal{H}$ , obtemos simplesmente que  $z = 0$  e  $x = (x|\mathcal{M})$ .

O teorema anterior mostra que a projeção ortogonal de  $x$  em  $\mathcal{M}$  está caracterizada pela propriedade de que  $\|x - w\|$ , com  $w \in \mathcal{M}$ , é minimizada em  $w = (x|\mathcal{M})$ .

A seguir são provadas e interpretadas geometricamente algumas propriedades das variáveis aleatórias.

## 2.3 Interpretações geométricas de algumas propriedades das variáveis aleatórias

Nesta Seção resultados básicos de processos estocásticos estacionários gaussianos são revistos de um ponto de vista geométrico. Esperanças condicionais são vistas como projeções ortogonais.

**Teorema 2.3.1** *Sejam  $x$  e  $y$  dois vetores aleatórios de dimensões  $n \times 1$  e  $p \times 1$  com médias zero, e seja  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  o vetor aleatório com média  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e covariância  $\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix}$ . Então o vetor*

$$z = x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}y \quad (2.29)$$

*é independente de  $y$ , tem média zero e autocovariância*

$$\Sigma_{zz} = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} \quad (2.30)$$

**Prova:**  $E(z) = E(x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}y) = E(x) - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}E(y) = 0$ .

$$Cov(z, y) = E(zy') = E((x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}y)y') = E(xy') - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}E(yy') = 0.$$

$$\Sigma_{zz} = E(zz') = E((x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}y)(x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}y)') = E((x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}y)(x' - y'\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx}))$$

$$= E((xx' - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}yx' - xy'\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}yy'\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx})) =$$

$$= \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx}.$$



Sejam a função de densidade conjunta de  $x$  e  $y$  dada por:

$$p(x, y) = (2\pi)^{-\frac{n+p}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right), \quad (2.34)$$

onde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

e a densidade de  $y$  dada por:

$$p(y) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\det \Sigma_{yy})^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} y' \Sigma_{yy}^{-1} y \right). \quad (2.36)$$

Seja

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

então de 2.35 e 2.37 temos:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

dai temos

- 1)  $A\Sigma_{xx} + B\Sigma_{yx} = I$
- 2)  $A\Sigma_{xy} + B\Sigma_{yy} = 0$
- 3)  $B'\Sigma_{xx} + C\Sigma_{yx} = 0$
- 4)  $B'\Sigma_{xy} + C\Sigma_{yy} = I$

onde

$$\begin{aligned} A &= (\Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} \\ B &= -\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}C = -A\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1} \\ C &= (\Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy})^{-1} \end{aligned}$$

Analisando o expoente da equação (2.34) e tendo em conta as equações para  $A, B,$  e  $C$  temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A & B \\ \underbrace{\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx}A + B'}_0 & \Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx}B + C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A & \underbrace{0}_{A\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1} + B} \\ 0 & \Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx}B + C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \underbrace{\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx}B + C}_{\Sigma_{yy}^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \underbrace{\Sigma_{zz}^{-1}}_{(\Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx})^{-1}} & 0 \\ 0 & \Sigma_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Sigma_{zz}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \tag{2.38}
 \end{aligned}$$

A função densidade de probabilidades condicional  $p(x|y)$  é dada por:

$$\begin{aligned}
 p(x|y) &= \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n+p}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Sigma_{zz}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} \right)}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\det \Sigma_{yy})^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} y' \Sigma_{yy}^{-1} y \right)} \\
 p(x|y) &= \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n+p}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (z' \Sigma_{zz}^{-1} z + y' \Sigma_{yy}^{-1} y) \right)}{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\det \Sigma_{yy})^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} y' \Sigma_{yy}^{-1} y \right)}
 \end{aligned}$$

$$p(x|y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma_{zz})^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} z' \Sigma_{zz}^{-1} z \right)$$

pois

$$\frac{\det \Sigma}{\det \Sigma_{yy}} = \frac{\det(\Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx}) \det \Sigma_{yy}}{\det \Sigma_{yy}} = \det \Sigma_{zz}$$

Concluimos então que a probabilidade condicional  $p(x|y)$  é gaussiana de média  $E(x|y) = \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} y$  e covariância  $\Sigma_{(x|y)} = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx}$ . A independência de  $y$  e  $x - E(x|y)$  decorre do teorema anterior. ■

A interpretação geométrica deste resultado é idêntica à mostrada na Figura 2.2.

**Teorema 2.3.3** *Sejam  $x, u$  e  $v$  vetores aleatórios com médias zero e distribuição conjunta gaussiana, com  $u$  e  $v$  independentes. Então*

$$E(x|u, v) = E(x|u) + E(x|v).$$

**Prova:** Seja  $y = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ , então a sua autocovariância é  $Cov(y) = \Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \Sigma_{uu} & 0 \\ 0 & \Sigma_{vv} \end{bmatrix}$ . A covariância entre  $x$  e  $y$  é dada por:

$$Cov(x, y) = \Sigma_{xy} = E \left( x \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' \right) = E \left( \begin{bmatrix} xu' & xv' \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} E(xu') & E(xv') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xu} & \Sigma_{xv} \end{bmatrix},$$

dai temos

$$E(x|y) = E(x|u, v) = \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} y =$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xu} & \Sigma_{xv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{uu}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{vv}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \Sigma_{xu} \Sigma_{uu}^{-1} u + \Sigma_{xv} \Sigma_{vv}^{-1} v = E(x|u) + E(x|v).$$
■

Este resultado é interpretado geometricamente na Figura 2.3.

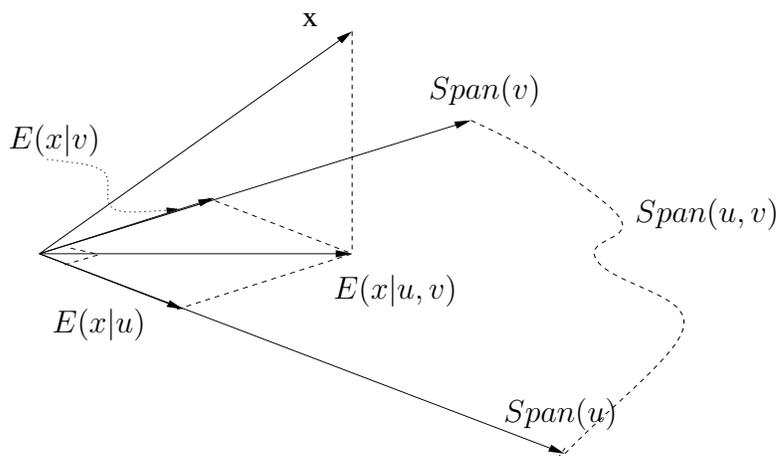


Fig. 2.3: Projeção ortogonal de uma variável aleatória num espaço gerado por duas variáveis aleatórias independentes.

**Teorema 2.3.4** *Sejam  $x, u$  e  $v$  vetores aleatórios gaussianos com médias zero, não necessariamente independentes entre si. Então*

$$E(x|u, v) = E(x|u, \tilde{v}) = E(x|u) + E(x|\tilde{v}),$$

onde  $\tilde{v} = v - E(v|u)$ .

**Prova:** Ver Astrom (1970). ■

A interpretação geométrica deste teorema está dada na Figura 2.4 .

As interpretações geométricas dos teoremas anteriores são intuitivamente iguais às feitas para os espaços euclidianos. Para ilustrar este fato consideremos duas variáveis aleatórias  $x$  e  $y$  de médias zero. Definimos seu produto interno como  $\langle x, y \rangle = cov(x, y) = E(xy)$ ; a norma é dada por  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = E(x^2)$ ; sejam  $l_x = Span(x)$  e  $l_y = Span(y)$  os espaços gerados pelas variáveis  $x$  e  $y$ . O cosseno do ângulo entre os espaços é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

A variável estocástica  $x$  é representada como um vetor ao longo de  $l_x$ , com seu comprimento dado por  $\|x\| = \sqrt{E(x^2)}$  e a variável aleatória  $y$  é representado por um vetor ao longo de  $l_y$  com comprimento  $\|y\| = \sqrt{E(y^2)}$ . A projeção de  $x$  no espaço  $l_y$  é igual à esperança condicional  $E(x|y) = \sum_{xy} \sum_{yy}^{-1} y$ , como visto anteriormente. Ilustramos este fato na figura 2.5.

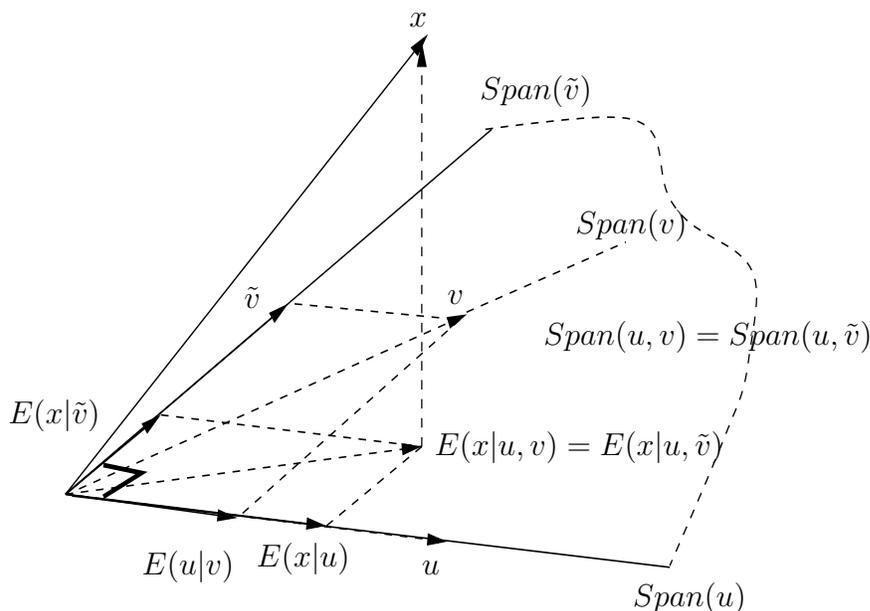


Fig. 2.4: Esperança condicional de  $x$  dadas as variáveis aleatórias  $u$  e  $v$ , não necessariamente independentes.

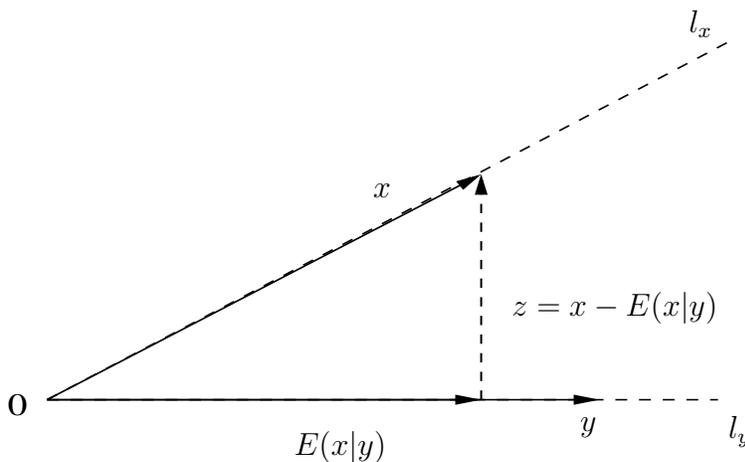


Fig. 2.5: Interpretação geométrica da projeção de  $x$  sobre  $y$  como a esperança condicional.

## 2.4 Espaços de Hilbert de Variáveis Aleatórias

Seja  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  um espaço de probabilidades. Consideremos o espaço vetorial de todas as variáveis aleatórias reais de valor escalar quadraticamente integráveis sobre  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Isto é, todas as variáveis aleatórias tais que  $E(x^2) < \infty$ . Definimos o produto interno como  $\langle x, y \rangle = E(xy)$  e a distância como  $d(x, y) = \|x - y\| = E[(x - y)^2]$ . Se  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , dizemos que  $\{x_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$  converge em média quadrática; e escrevemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Agora fazemos o artifício de utilizar uma variável aleatória  $x$  para denotar a classe de equivalências das variáveis aleatórias

sobre  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , onde  $y$  é equivalente a  $x$  se  $E[(x - y)^2] = 0$ , isto é,  $x$  denota o conjunto de variáveis aleatórias que são idênticas a  $y$  com probabilidade um. Então obtemos a desejada propriedade (ii) do produto interno, isto é  $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$ ; as propriedades (i) e (iii) estão também garantidas, e assim o espaço das variáveis aleatórias forma um espaço Pré-Hilbert que denominaremos por  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ . Em Caines (1988) é provado que este espaço é completo, portanto  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$  é um espaço de Hilbert.

Para um dado processo estocástico escalar  $\{x_t; t \in T\}$  sob  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ , consideremos o conjunto de todas as combinações lineares finitas  $\sum_{i=0}^N \alpha_i x_{t_i}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  satisfazendo a condição  $E(\sum_{i=0}^N \alpha_i x_{t_i}) < \infty$ . Denotamos este espaço por  $\mathcal{H}$ . Definindo o produto interno como  $\langle x, y \rangle = E(xy)$  para todo  $x$  e  $y \in \mathcal{H}$ , este espaço é Pré-Hilbert. Porém como  $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$  é um espaço de Hilbert, o limite em média quadrática de uma seqüência de variáveis aleatórias é uma variável quadraticamente integrável; incluindo todos os limites em  $\mathcal{H}$  obtemos um espaço de Hilbert gerado pelo processo  $x$  que denotaremos por  $\mathcal{H}^x$ . Este processo é também descrito como o espaço gerado por  $x$ , frequentemente escrito como  $Span\{x_t; t \in T\}$ .

Os resultados acima podem ser estendidos para processos estocásticos multivariados. Seja  $x \in \mathbb{R}^p$  um processo estocástico, então o conjunto de todas as combinações lineares finitas do processo estocástico multivariado é definido como

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} x_{t_{i,j}}$$

sempre que

$$E \left[ \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^N \alpha_{i,j} x_{t_{i,j}} \right]^2 < \infty,$$

onde  $x_{t_{i,j}}$  é a  $j$ -ésima componente de  $x_{t_i}$ ,  $N$  é o número de variáveis aleatórias envolvida na combinação linear finita e  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ . Mais ainda, se  $x$  for tal processo e se  $\mathcal{H}_t^x$  denota o espaço de Hilbert gerado por  $\{x_s; s \leq t \text{ com } s, t \in T\}$ , temos

$$\mathcal{H}_t^x \subset \mathcal{H}_{t'}^x \subset \mathcal{H}^x \subset L^2(\Omega, \mathcal{B}, P), \quad t \leq t'; \quad \text{com } t, t' \in T.$$

Notemos que para  $t \in T$ ,  $\mathcal{H}_t^x$  é um espaço de funções escalares e que cada uma das  $n$  componentes da variável aleatória  $y$  de dimensão  $n$ , está contida em  $\mathcal{H}_t^x$ , isto é,  $y_i \in \mathcal{H}_t^x$ ,  $1 \leq i \leq n$ , se e somente se  $y \in \{\mathcal{H}_t^x, \mathcal{H}_t^x, \dots, \mathcal{H}_t^x\}'$ , onde  $\{\mathcal{H}_t^x, \mathcal{H}_t^x, \dots, \mathcal{H}_t^x\}'$  denota o conjunto de variáveis aleatórias de dimensão  $n$ , tal que cada uma das suas componentes estejam contidas em  $\mathcal{H}_t^x$ . Neste caso escreveremos somente  $y \in \mathcal{H}_t^x$  e diremos que  $y$  está em  $\mathcal{H}_t^x$ . Esta é a notação padrão usual que porém pode causar

confusão.

Seja  $\mathcal{H}$  o espaço de Hilbert gerado por algum conjunto de variáveis aleatórias, e seja  $v$  um vetor composto por  $n$  variáveis aleatórias contidas em  $\mathcal{H}$ . Seja  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  um subespaço de  $\mathcal{H}$ . Denotando por  $(v|\mathcal{M})$  ao vetor de  $n$  componentes composto pelo conjunto de projeções ortogonais  $(v_i|\mathcal{M})$ ,  $1 \leq i \leq n$  (projeção ortogonal de  $v_i$  em  $\mathcal{M}$ ), então  $(v|\mathcal{M})$  é dado por

$$(v|\mathcal{M}) = \left[ (v_1|\mathcal{M}) \quad (v_2|\mathcal{M}) \quad \cdots \quad (v_n|\mathcal{M}) \right]'$$

Sejam  $x \in \mathbb{R}^p$  e  $y \in \mathbb{R}^q$  duas variáveis aleatórias vetoriais com componentes em  $\mathcal{H}$ . Definimos seu produto externo como

$$E(xy') = \begin{bmatrix} E(x^1 y^1) & \cdots & E(x^1 y^q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(x^p y^1) & \cdots & E(x^p y^q) \end{bmatrix},$$

onde  $x^i$  e  $y^j$ , com  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq q$ , são componentes das respectivas variáveis aleatórias.

No caso de  $p = q$  a norma da variável aleatória vetorial  $x$  é dada por

$$\|x\|_H^2 = \text{Traço} \{E(xx')\} = \sum_{i=1}^p E[(x^i)^2].$$

## 2.5 A decomposição de Wold e o teorema de Kolmogorov - Wiener - Masani

A decomposição de Wold nos permite ver a parte puramente não determinística de qualquer processo estocástico estacionário como a saída de um sistema linear invariante no tempo excitado por um processo estocástico estacionário ortogonal no sentido amplo. As referências importantes desta Seção são Wiener e Masani (1957, 1958), cujas fontes originais estão no livro de Wold (1938) e nos trabalhos Kolmogorov (1939, 1941); aqui seguimos o livro de Caines (1988) para a exposição desta Seção. A idéia básica é a seguinte: suponhamos que uma variável aleatória escalar  $x_n$  esteja contida no espaço  $\mathcal{H}_n$ , e que não esteja num subespaço próprio  $\mathcal{H}_{n-1}$  de  $\mathcal{H}_n$ . Pelo teorema da projeção temos

$$x_n = (x_n|\mathcal{H}_{n-1}) + e_n^x$$

onde  $e_n^x \perp \mathcal{H}_{n-1}$  e  $\hat{x}_{n-1} = (x_n|\mathcal{H}_{n-1})$  é a projeção de  $x_n$  em  $\mathcal{H}_{n-1}$ . Seja  $\mathcal{H}_{n-2}$  um subespaço de  $\mathcal{H}_{n-1}$ , então podemos decompor  $\hat{x}_{n-1}$  como

$$\hat{x}_{n-1} = (\hat{x}_{n-1} | \mathcal{H}_{n-2}) + e_{n-1}^x,$$

onde  $e_{n-1}^x \perp \mathcal{H}_{n-2}$ ; então podemos escrever  $x_n = (\hat{x}_{n-1} | \mathcal{H}_{n-2}) + e_n^x + e_{n-1}^x$ . Repetindo sucessivamente este procedimento produzimos um conjunto de vetores ortogonais  $\{e_k^x; k \leq n\}$ . A decomposição de Wold de  $x_n$  é justamente a representação de  $x_n \in \mathcal{H}_n$  utilizando esse conjunto de vetores ortogonais juntamente com o espaço  $\cap_{n \in Z} \mathcal{H}_n$ .

Podemos construir uma seqüência de espaços associados a um processo estocástico  $x$  de  $p$  componentes, onde  $E(\sum_{i=1}^p x_{t,i}^2) < \infty$  para todo  $t \in Z$ , como segue:

Seja  $\mathcal{H}_n = \text{Span}(x_n, x_{n-1}, \dots)$ . O espaço definido como  $\mathcal{H}_{-\infty} = \cap_{n \in Z} \mathcal{H}_n$  é chamado de espaço passado remoto de  $x$ . O espaço gerado pelo processo estocástico  $x$  é então definido como  $\mathcal{H}_{\infty} = \cup_{n \in Z} \mathcal{H}_n = \text{Span}(\dots, x_1, x_0, x_{-1}, \dots)$ . Dizemos que um processo  $x$  é determinístico se e somente se para todo  $n$  temos  $x_n \in \mathcal{H}_{n-1}$ , caso contrário é não determinístico. Mais ainda, dizemos que um processo  $x$ , diferente de zero, é puramente não determinístico se  $\mathcal{H}_{-\infty} = \{0\}$ . Pode ser verificado que isto implica que  $x$  é não determinístico.

**Lema 2.5.1** *Sejam  $\mathcal{M}_n$  os subespaços aninhados de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , isto é  $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}_{n+1}$  para todo  $n \in Z$ . Seja  $\mathcal{M}_{-\infty} = \cap_{n \in Z} \mathcal{M}_n$ , então*

1. para todo  $h \in \mathcal{H}$  temos

$$(h | \mathcal{M}_{-\infty}) = \lim_{n \rightarrow -\infty} (h | \mathcal{M}_n),$$

2. Seja  $\mathcal{M}_{\infty} = \bar{\cup}_{n \in Z} \mathcal{M}_n$ , então

$$(h | \mathcal{M}_{\infty}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (h | \mathcal{M}_n).$$

3. Seja  $\{e_k; k \in Z_+\}$  um processo estocástico ortogonal estacionário no sentido amplo, de  $p$  componentes, no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Seja  $E(e_s e_t') = \Sigma \delta_{s,t}$  a matriz de covariâncias de  $(e_k)$ , e seja  $\mathcal{E}_{\infty} = \bar{\cup}_{n \in Z_+} \mathcal{E}_n$ , onde  $\mathcal{E}_n = \text{Span}(e_k; 0 \leq k \leq n)$ . Seja  $h$  um vetor de  $q$  componentes em  $\mathcal{H}$ . Então  $(h | \mathcal{E}_{\infty})$  tem uma representação dada por

$$(h | \mathcal{E}_{\infty}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e_k,$$

onde  $A_k$  é uma matriz  $q \times p$  que satisfaz

$$A_k \Sigma = E(h e_k').$$

A representação é única se  $\Sigma > 0$ .

**Prova:** Ver Caines (1988). ■

**Definição 2.5.2** O processo  $e$ , definido por

$$e_n = x_n - (x_n | \mathcal{H}_{n-1}), \quad n \in Z,$$

é chamado de processo inovação (linear) do processo  $x$ . Se  $E(e_n e'_n) > 0$  para todo  $n \in Z$ , o processo é dito ser de posto completo.

**Lema 2.5.3** Seja  $\mathcal{N}_n = \text{Span}(e_n, e_{n-1}, \dots)$  o subespaço gerado pelas inovações de  $x$  até  $n$ ,  $\mathcal{N}_{-\infty} = \bigcap_{n \in Z} \mathcal{N}_n$  e  $\mathcal{N}_{\infty} = \bigcup_{n \in Z} \mathcal{N}_n$ , então

1.  $\mathcal{H}_n = \text{Span}(e_n, e_{n-1}, \dots, e_{m+1}) + \mathcal{H}_m$  para todo  $n$  e  $m$  tal  $m < n$ .
2.  $\mathcal{H}_m \perp \text{Span}(e_n, e_{n-1}, \dots, e_{m+1})$
3.  $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{-\infty} + \mathcal{N}_n$ ,  $\mathcal{H}_{-\infty} \perp \mathcal{N}_{-\infty}$  e  $\mathcal{N}_{-\infty} = \{0\}$ , para todo  $n \in Z$ .

**Prova:** Ver Caines (1988). ■

**Teorema 2.5.4** (Teorema da decomposição de Wold).

Seja  $x$  um processo estocástico estacionário no sentido amplo, multivariado de dimensão  $p$  e seja  $e$  o processo inovação de  $x$ . Então

1.  $x_n = u_n + v_n$ , onde  $u_n = (x_n | \mathcal{N}_n)$ ,  $v_n = (x_n | \mathcal{H}_{-\infty})$ , onde  $u_n \perp v_n$  para todo  $n \in Z$ .
2.  $u$  é um processo estacionário no sentido amplo e tem uma representação

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e_{n-k}, \quad \forall n \in Z, \quad (2.39)$$

onde  $e$  é um processo inovação do processo  $x$  que satisfaz

$$E(e_s e'_t) = \Sigma \delta_{s,t}$$

para todo  $s, t \in Z$ . Mais ainda

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} A_k \Sigma A'_k < \infty,$$

$$E(x_0 e'_{-k}) = E(u_0 e'_{-k}) = A_k \Sigma,$$

para todo  $k \in Z_+$ , e

$$A_0 \Sigma = \Sigma = \Sigma A'_0.$$

se o processo  $x$  é de posto completo, a seqüência  $\{A_k; k \in Z_+\}$  é única e  $A_0 = I$ .

3.  $v$  é um processo estacionário no sentido amplo linearmente determinístico e

$$\text{Span}(v_n, v_{n-1}, \dots) = \mathcal{H}_{-\infty}$$

para todo  $n \in Z$ .

**Prova:** Ver Caines (1988). ■

Uma importante implicação do teorema anterior é que  $x$  pode ser escrito como a decomposição de Wold (dada na Figura 2.6)

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e_{n-k} + v_n, \quad \forall n \in Z,$$

onde  $e$  é um processo ortogonal estacionário no sentido amplo que é ortogonal ao processo determinístico  $v$ . Se  $x$  é puramente não determinístico, isto é se  $\mathcal{H}_{-\infty} = \{0\}$ , então  $v_n = 0$  para todo  $n \in Z$  e assim temos

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e_{n-k} \quad \forall n \in Z,$$

representação esta que é freqüentemente chamada de representação infinita média móvel (MA). Observamos que esta relação pode ser interpretada como a saída de um sistema linear invariante no tempo, tendo como entrada o processo inovação  $e$  e como a sua saída o processo  $x$ . Interpretamos as matrizes  $A_k$  como matrizes resposta ao impulso do sistema.

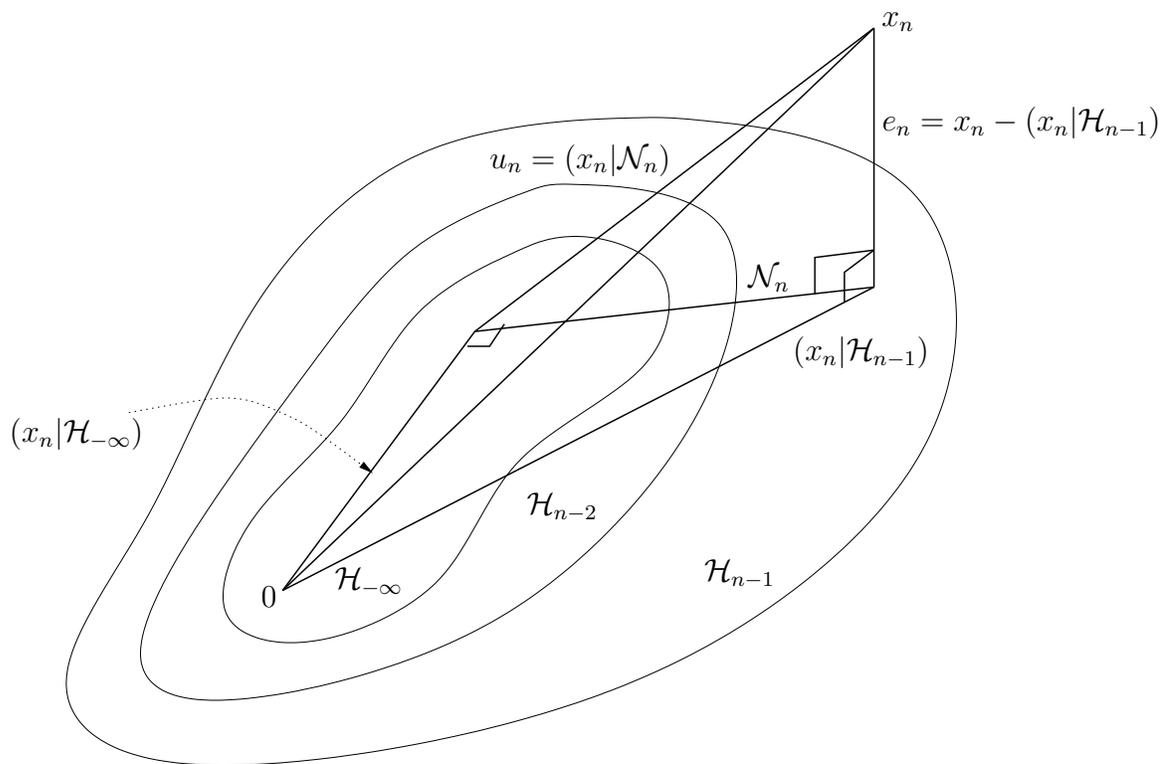


Fig. 2.6: Decomposição de Wold.

## Capítulo 3

# Representação de Estado e Propriedades de Sistemas Lineares Estocásticos

### 3.1 Introdução

Uma boa parte desta Tese trata de sistemas dinâmicos de tempo discreto, tanto no contexto determinístico quanto no estocástico, por esta razão trataremos quase que exclusivamente deles neste Capítulo. Não estamos interessados num tratamento geral deste assunto. Existem várias formas de representar um sistema dinâmico, mas não pretendemos abordar todas elas, senão aquelas que utilizaremos na Tese; também o grau de abstração e/ou de formalismo serão as menores possíveis; se o leitor quiser se aprofundar pode recorrer à vasta literatura existente nesta área; sempre que possível daremos algumas referências no ponto adequado. Tratando especificamente de sistemas lineares estocásticos, podemos nos perguntar porque estudar este tipo de sistemas, pois, geralmente, os sistemas reais não são lineares. Acontece que, para alguns casos, os modelos lineares têm-se mostrado eficazes, seja para a identificação do sistema, seja para o controle do mesmo, dentro de um intervalo de estudo. Outra vantagem é a excelente teoria existente no campo dos sistemas lineares, tanto do ponto de vista teórico como do prático, pois existem poderosas e robustas ferramentas computacionais que auxiliam o projeto de controles para estes sistemas. Para um sistema real, o seu modelo dinâmico linear nos fornece somente um comportamento aproximado do real, sendo assim, existe uma incerteza quanto ao comportamento verdadeiro do sistema. Os modelos estocásticos permitem, de certa forma, contabilizar esta incerteza, bem como consideram as perturbações aleatórias internas do sistema real. Os modelos no espaço de estado de sistemas estocásticos consideram as incertezas de modelagem e de perturbação por meio sinais aleatórios (processos estocásticos) colocados nas suas equações de estado e de saída. Para facilidade de estudo e de projeto, os processos estocásticos adicionados devem ser os mais simples possíveis. Nesta Tese as consideramos processos aleatórios ruído branco gaussianos.

Neste Capítulo estudamos algumas representações e as propriedades dos sistemas dinâmicos lineares estocásticos estacionários. Damos ênfase à representação no espaço de estado, assim como estudamos algumas de suas propriedades importantes. Para sistemas discretos fazemos um estudo de passividade e positividade real com aspectos que consideramos contribuições desta Tese, parte vista neste Capítulo e parte no Capítulo 4. Abordamos alguns conceitos de Sistemas Dissipativos e suas propriedades, visando sua aplicação nos sistemas estocásticos.

## 3.2 Representação de Sistemas Dinâmicos Discretos no Espaço de estado

Entende-se por um sistema dinâmico um objeto matemático (modelo abstrato) ou físico (concreto) que, no transcurso do tempo recebe informação, guarda-a na memória e somente a restitui em função da que foi recebida (causalidade). As noções de entrada, estado e saída correspondem respectivamente ao que foi recebido, memorizado e restituído. Um sistema dinâmico pode ser concebido como uma transformação dinâmica das entradas nas saídas. Tal transformação é qualificada de dinâmica no sentido que é uma transformação de função em função (e não de valor instantâneo em valor instantâneo, como no caso dos sistemas estáticos ou sem memória), e é uma transformação causal porque somente as entradas passadas são suscetíveis de agir sobre as saídas presente e futura.

Estudamos duas formas de representação matemática de sistemas dinâmicos: a representação entrada-saída e a representação no espaço de estado. Apresentaremos estas representações de forma construtiva, assim começaremos pela representação de um sistema determinístico.

### 3.2.1 Sistemas lineares determinísticos

Seja  $S$  um sistema discreto linear multivariável invariante no tempo, e sejam  $u_t \in \mathbb{R}^m$  a sua entrada no instante  $t \in \mathbb{Z}$  e  $y_t \in \mathbb{R}^p$  a sua saída no instante  $t \in \mathbb{Z}$ . É bem conhecido, ver Chen (1999), que este sistema possui uma representação entrada-saída definida a partir das matrizes resposta ao impulso denotadas por  $h_t$ ,  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . A saída do sistema no instante  $t$  é dada por:

$$y_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h_{t-\tau} u_{\tau}, \quad (3.1)$$

isto é, a resposta do sistema é a convolução discreta entre  $h_t$  e  $u_t$ . As matrizes  $h_t$  são também conhecidas como matrizes de ponderação e desempenham um papel importante na realização de sistemas no espaço de estado, assim como também na identificação dos mesmos. Uma representação do sistema no espaço de estado tem a forma:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \quad (3.2)$$

$$y_t = Cx_t + Du_t, \quad (3.3)$$

onde  $x_t \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado e as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas. Aplicando a transformada  $Z$  à equação (3.1), considerando as condições iniciais nulas, obtemos a seguinte representação entrada-saída no domínio da frequência:

$$Y(z) = H(z)U(z),$$

onde  $Y(z) = \mathcal{Z}(y_t) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_t z^{-t}$ ;  $H(z)$  e  $U(z)$  são definidos de forma equivalente. A função  $H(z)$  é conhecida como a função de transferência do sistema e é única. Aplicando a transformada  $\mathcal{Z}$  às equações de estados tem-se

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

isto é, pode-se obter a função de transferência do sistema a partir das matrizes de estado do sistema. Uma parte da teoria de sistemas lineares está relacionada com a realização de uma função de transferência, que consiste em: encontrar uma ou mais representações no espaço de estado a partir da função de transferência do sistema. Quando tratamos de sistemas discretos existem muitos algoritmos computacionais que calculam estas matrizes; posteriormente veremos que é possível, através de dados de entrada e saída medidos do sistema, construir e/ou calcular as matrizes de ponderação do sistema, sendo assim, ao encontrarmos as matrizes do sistema estaremos resolvendo o problema da identificação de sistemas lineares. A tendência atual tanto na identificação como na síntese de controladores para sistemas lineares envolve uma interação entre estas formas de representação.

### 3.2.2 Sistemas lineares estocásticos

Vamos definir os Sistemas Lineares Estocásticos no espaço de estado construtivamente, definições mais gerais e com mais rigor matemático podem ser encontradas em Caines (1988); R. E. Kalman e Arbib (1969); Willems (1986); Kumar e Varaiya (1986). Para contabilizar a incerteza na modelagem e/ou as perturbações externas do sistema, agregamos um termo na equação de estado que pode ser considerado como uma entrada sobre a qual não se tem nenhum controle:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t. \quad (3.4)$$

O vetor de perturbação  $w_t \in \mathbb{R}^n$  é uma variável aleatória de média nula e dimensão  $n$ , e a seqüência  $(w_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  é um processo estocástico ruído branco gaussiano. Uma definição mais formal é dada em Kumar e Varaiya (1986). Quando é feita a coleta de dados de saída de um sistema real, pode existir algum erro na medida deles, seja pelos dispositivos de medida utilizados, influências externas na hora da medição, ou mesmo pelas falhas humanas. Sejam  $y_t$  o valor medido da saída e  $z_t$  o seu valor exato; definindo o erro de medida no instante  $t$  como  $v_t = y_t - z_t$ , então a equação de saída com erro de medida é  $y_t = z_t + v_t$ . Se a medida exata é dada por  $z_t = Cx_t$ , então podemos escrever

$$y_t = Cx_t + v_t. \quad (3.5)$$

Sem perda de generalidade a componente da transmissão direta  $Du_t$  é omitida. O vetor  $v_t$  é uma variável aleatória de média nula e dimensão  $n$ ,  $v_t \in \mathbb{R}^n$ , e a seqüência  $(v_t)$  é um processo estocástico ruído branco gaussiano. Definimos o vetor de erro e perturbação como  $e_t = \begin{bmatrix} w_t \\ v_t \end{bmatrix}$ , sendo que  $E[e_t] = 0$ , para todo  $t$  e

$$E[e_s e_t'] = E \left\{ \begin{bmatrix} w_s \\ v_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t' & v_t' \end{bmatrix} \right\} = \delta_{st} \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

onde  $\delta_{st}$  é a função delta de Kroneker. Definido desta maneira,  $e_t$  é um processo estocástico ruído branco gaussiano de média nula e covariância dada por (3.6). Também supomos que

$$E[u_s w_t'] = 0 \quad E[u_t v_t'] = 0,$$

para todo  $t, s \in \mathbb{Z}$ . A importância dos modelos no espaço de estado é reconhecida em muitos trabalhos e em diferentes áreas de conhecimento, ver R. E. Kalman e Arbib (1969); Caines (1988); Kumar e Varaiya (1986); Siljak (1991), por exemplo. Estes modelos nos possibilitam enxergar as características internas e externas do sistema. O estado contém todas as informações das entradas passadas do sistema que são relevantes para as saídas futuras.

A partir da representação (3.4) e (3.5), pode-se encontrar outra representação no espaço de estado da forma

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + K\varepsilon_t \quad (3.7)$$

$$y_t = Cx_t + \varepsilon_t, \quad (3.8)$$

onde  $\varepsilon_t$  é um processo ruído branco. A representação (3.7) e (3.8) é denominada representação

inovativa ou modelo inovativo do sistema, onde  $\varepsilon_t$  é a inovação, ver Caines (1988); ela é muito usada nesta Tese. Na próxima Seção estudaremos algumas propriedades de sistemas estocásticos representados por modelos lineares no espaço de estado.

### 3.3 Propriedades de sistemas lineares estocásticos

Para facilidade de estudo, nesta Seção supomos que as variáveis aleatórias são gaussianas. Se  $z \in \mathbb{R}^n$  é uma delas, então está perfeitamente caracterizada se conhecemos sua média e a sua covariância. Ela será denotada por  $z \sim N(\bar{z}, \Sigma)$  ou  $p(z) \sim N(\bar{z}, \Sigma)$ , onde  $\bar{z}$  é a sua média e  $\Sigma$  a sua covariância. Sua função densidade de probabilidades é dada por:

$$p(z) = \frac{1}{[(2\pi)^n |\Sigma|]^{-1/2}} \exp^{-\frac{1}{2}(z-\bar{z})' \Sigma^{-1} (z-\bar{z})}$$

onde  $|\Sigma| = \det(\Sigma)$ .

Seja o sistema linear estocástico dado pelas equações (3.4) e (3.5), onde supomos que  $w_t \sim N(0, Q)$  e  $v_t \sim N(0, R)$ , supomos também que a condição inicial é  $x_0 \sim N(m_0, \Sigma_0)$ , e é independente de  $w_t$  e  $v_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$ . Supondo que em  $t = 0$  o vetor de estado seja  $x_0$ , de (3.4) e (3.5) o estado do sistema, no instante  $t$ , para a seqüência de entrada conhecida ( $u_t$ ,  $t > 0$ ) e para o processo estocástico ruído branco ( $w_t$ ,  $t > 0$ ), é dado por:

$$x_t = A^t x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} (B u_i + w_i). \quad (3.9)$$

Se a média do estado  $x_t$  é definida como  $m_t = E[x_t]$ ; de (3.4) a seqüência dos valores médios é

$$m_{t+1} = A m_t + B u_t.$$

De (3.9) a solução explicita para a média é dada por

$$m_t = A^t m_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} B u_i, \quad (3.10)$$

Definindo a covariância do estado  $x_t$  como  $E\{(x_t - m_t)(x_t - m_t)'\} = \Sigma_t$ , a equação recursiva das covariâncias do estado pode ser calculada como:

$$\Sigma_{t+1} = E\{(x_{t+1} - m_{t+1})(x_{t+1} - m_{t+1})'\} = E\{[A(x_t - m_t) + w_t][A(x_t - m_t) + w_t]'\} =$$

$$\begin{aligned}
&= E\{A(x_t - m_t)(x_t - m_t)'A' + A(x_t - m_t)w_t' + w_t(x_t - m_t)'A' + w_t w_t'\} \\
&= AE\{(x_t - m_t)(x_t - m_t)'\}A' + E\{w_t w_t'\} = A\Sigma_t A' + Q \\
&\Sigma_{t+1} = A\Sigma_t A' + Q,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

com a condição inicial  $\Sigma_0 = Cov(x_0)$ . A solução explícita da equação acima pode ser obtida de (3.9) e (3.10), e é dada por

$$\Sigma_t = A^t \Sigma_0 (A')^t + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} Q (A')^{t-i-1}, \tag{3.12}$$

Definindo  $l = t - i - 1$ , e considerando que  $l = t - 1$  para  $i = 0$ , e que  $l = 0$  para  $i = t - 1$ , a equação (3.12) pode ser escrita como

$$\Sigma_t = A^t \Sigma_0 (A')^t + \sum_{l=0}^{t-1} A^l Q (A')^l. \tag{3.13}$$

Observemos que a solução explícita (3.13) envolve a avaliação de  $A^t$ . Suponhamos que  $A$  possa ser diagonalizada por meio de uma transformação de similaridade da forma

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

onde, sem perda de generalidade, supomos que os autovalores de  $A$ ,  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são distintos; sendo assim  $A^t$  pode ser escrita como

$$A^t = T \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{bmatrix} T^{-1},$$

logo, quando  $t \rightarrow +\infty$ , a primeira componente de (3.13) se anula; portanto podemos escrever

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_t = \Sigma_\infty = \sum_{l=0}^{\infty} A^l Q (A')^l, \tag{3.14}$$

que é uma matriz semidefinida positiva; (3.14) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\Sigma_\infty &= Q + \sum_{l=1}^{\infty} A^l Q (A')^l = Q + \sum_{j=0}^{\infty} A^{j+1} Q (A')^{j+1} = \\ \Sigma_\infty &= Q + A \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} A^j Q (A')^j \right\} A' = A \Sigma_\infty A' + Q,\end{aligned}\quad (3.15)$$

a equação (3.15) é a chamada equação discreta de Lyapunov; esta equação possui solução única desde que a matriz  $A$  seja estável; a solução encontrada é uma matriz semidefinida positiva, ver Kumar e Varaiya (1986).

Sem perda de generalidade vamos supor que  $E(x_t) = 0$ , para todo  $t$ ; então podemos calcular a covariância de saída do sistema como:

$$\begin{aligned}E\{y_t y'_{t-j}\} &= E\{(Cx_t + v_t)(Cx_{t-j} + v_{t-j})'\} = \\ &E\{Cx_t x'_{t-j} C' + Cx_t v'_{t-j} + v_t x'_{t-j} C' + v_t v'_{t-j}\} = \\ &= CE[x_t x'_{t-j}]C' + CE[x_t v'_{t-j}] + E[v_t x'_{t-j}]C' + E[v_t v'_{t-j}].\end{aligned}$$

Analisemos esta expressão para  $j \geq 0$ . Para  $j = 0$ , temos

$$\begin{aligned}E\{y_t y'_t\} &= CE[x_t x_t]C' + CE[x_t v_t] + E[v_t x'_t]C' + E[v_t v_t] = \\ &= C\Sigma_t C' + R,\end{aligned}$$

para  $j > 0$  temos

$$E\{y_t y'_{t-j}\} = CE[x_t x'_{t-j}]C' + CE[x_t v'_{t-j}] + E[v_t x'_{t-j}]C' + E[v_t v'_{t-j}], \quad (3.16)$$

o terceiro termo desta expressão é zero, pois  $v_t$  não está correlacionado com os estados passados; o quarto termo é também nulo, pois  $(v_t)$  é um processo ruído branco. Primeiramente encontraremos uma expressão para  $x_{t-j}$ . Seja

$$\begin{aligned}x_t &= Ax_{t-1} + Bu_{t-1} + w_{t-1} = \\ &= A(Ax_{t-2} + Bu_{t-2} + w_{t-2}) + Bu_{t-1} + w_{t-1} = \\ &= A^2 x_{t-2} + Bu_{t-1} + ABu_{t-2} + w_{t-1} + Aw_{t-2} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^2(Ax_{t-3} + Bu_{t-3} + w_{t-3}) + Bu_{t-1} + \dots = \\
&= A^3x_{t-3} + Bu_{t-1} + ABu_{t-2} + A^2Bu_{t-3} + w_{t-1} + Aw_{t-2} + A^2w_{t-3} \\
&= A^3x_{t-3} + \sum_{l=0}^2 A^l Bu_{t-1-l} + \sum_{l=0}^2 A^l w_{t-1-l} = \dots \\
&x_t = A^j x_{t-j} + \sum_{l=0}^{j-1} A^l Bu_{t-1-l} + \sum_{l=0}^{j-1} A^l w_{t-1-l}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
E(x_t x'_{t-j}) &= E \left\{ \left( A^j x_{t-j} + \sum_{l=0}^{j-1} A^l Bu_{t-1-l} + \sum_{l=0}^{j-2} A^l w_{t-1-l} \right) x'_{t-1} \right\} = \\
&A^j E[x_{t-j} x'_{t-j}] + \sum_{l=0}^{j-1} A^l Bu_{t-1-l} E[x_{t-j}]' + \sum_{l=0}^{j-1} A^l E[w_{t-1-l} x'_{t-j}] = \\
&E(x_t x'_{t-j}) = A^j \Sigma_{t-j}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

o segundo e o terceiro elementos da equação são nulos, devido a que  $E(x_{t-j}) = 0$ , e que os ruídos estão sempre à frente dos estados, portanto não estão correlacionados. Logo o primeiro termo de (3.16) é  $CA^j \Sigma_{t-j} C'$ . Calculamos o terceiro elemento de (3.16) como:

$$\begin{aligned}
E[x_t v_{t-j}] &= E \left\{ \left( Ax_{t-j} + \sum_{l=0}^{j-1} A^l Bu_{t-1-l} + \sum_{l=0}^{j-1} A^l w_{t-1-l} \right) v'_{t-j} \right\} = \\
E[x_t v_{t-j}] &= AE[x_{t-j} v'_{t-j}] + \sum_{l=0}^{j-1} A^l Bu_{t-1-l} E[v_{t-j}]' + \sum_{l=0}^{j-1} A^l E[w_{t-1-l} v'_{t-j}].
\end{aligned}$$

O primeiro termo desta equação é nulo, pois o ruído de perturbação não está correlacionado com o estado no mesmo instante; o segundo termo é nulo, pois  $E[v_{t-j}] = 0$  para todo  $t$  e  $j$ . O terceiro termo será diferente de zero quando  $t - 1 - l = t - j$ , isto é quando  $l = j - 1$ ; assim  $E[x_t v_{t-j}] = A^{j-1} E[w_{t-j} v'_{t-j}] = A^{j-1} S$ . Portanto (3.16) fica como

$$E\{y_t y'_{t-j}\} = CA^j \Sigma_{t-j} C' + CA^{j-1} S, \quad j > 0,$$

resumindo:

$$E[y_t y'_{t-1}] = \begin{cases} C \Sigma_t C' + R, & j = 0 \\ CA^j \Sigma_{t-j} C' + CA^{j-1} S & j > 0 \end{cases}.$$

Procedimento similar pode ser realizado para  $j < 0$ .

### 3.3.1 Sistemas Lineares Determinísticos Excitados por Processos Estocásticos

Consideremos um sistema linear invariante no tempo descrito pelas funções respostas impulsivas,  $h_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$ . Consideremos que  $h_t$  seja limitada, isto é  $\sum_{t=0}^{\infty} |h_t| < \infty$ , logo o sistema é BIBO-estável, ver Chen (1999). Portanto os pólos da sua função de transferência, denotada por  $H(z)$ , estão dentro do círculo unitário no plano complexo  $z$ , isto é se  $\xi$  é um polo,  $|\xi| < 1$ . Vamos supor que a entrada deste sistema ( $w_t$ ) seja um processo estocástico estacionário com propriedades probabilísticas conhecidas. O objetivo é estudar quais são as propriedades probabilísticas que caracterizam o processo de saída ( $y_t$ ).

Dado um processo estocástico ( $w_t$ ) define-se a **função valor médio**, ou média do processo, como  $m_t^w = E[w_t]$ , e a sua **função de covariâncias ou covariância do processo** como  $R_{s,t}^w = E[(w_s - m_s^w)(w_t - m_t^w)']$ . Sem perda de generalidade supõe-se que ( $w_t$ ) é estacionário de média nula, isto é,  $m_t^w = 0$ . A sua covariância dependerá somente da diferença entre  $s$  e  $t$ , isto é,  $R_{s,t}^w = E[w_s w_t'] = R_{s-t}^w \triangleq R_l^w$ , onde  $l = s - t$ . O processo estocástico de saída ( $y_t$ ), gerado pelo processo ( $w_t$ ) é dado por

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_{t-j} w_j = \sum_{j=0}^{\infty} h_j w_{t-j}$$

portanto a sua média será

$$m_t^y = E(y_t) = E \left[ \sum_{j=0}^{\infty} h_{t-j} w_j \right] = \sum_{j=0}^{\infty} h_{t-j} E[w_j] = \sum_{j=0}^{\infty} h_{t-j} m_j^w. \quad (3.18)$$

Notemos que o segundo membro de (3.18) é constante, e que para ( $w_t$ ) com média nula temos  $m_t^y = 0$ . A covariância da saída é calculada como:

$$\begin{aligned} E[y_{t+l} y_t'] &= E \left[ \sum_{n=0}^{\infty} h_n w_{t+l-n} \sum_{j=0}^{\infty} w'_{t-j} h'_j \right] = \\ &= E \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} h_n w_{t+l-n} \right) w'_{t-j} h'_j \right] = \\ &= E \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n w_{t+l-n} w'_{t-j} h'_j \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n E[w_{t+l-n} w'_{t-j}] h'_j = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n E[w_{t+l-n} w'_{t-j}] h'_j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n R_{l-n+j}^w h'_j. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Observamos que a covariância é função somente de  $l$ , a diferença entre  $t + l$  e  $t$ , portanto o processo de saída  $(y_t)$  também é estacionário.

**Definição 3.3.1** Uma função  $R : T \times T \rightarrow \mathbf{C}^{p^2}$  é positiva se

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_i' R(t_i, t_j) \alpha_j \geq 0$$

para todo  $t_1, t_2, \dots, t_N \in T$ , para todos os vetores  $\alpha_1^N = \{\alpha_i; \alpha_i \in \mathbf{C}^p, 1 \leq i \leq N\} \in \mathbf{C}^{Np}$ , e para todo  $N \in \mathbf{Z}_1$ .  $R$  é estritamente positiva se a expressão acima é estritamente positiva para todo  $\alpha_1^N \neq 0$ .  $R(\cdot, \cdot)$  é simétrica se  $R(s, t) = R(t, s)'$  para todo  $t, s \in T$ .

**Teorema 3.3.2** Quando ela existe, a covariância de um processo estocástico, de posto completo, é simétrica e estritamente positiva. Reversamente, para uma dada função  $R(\cdot, \cdot)$ , simétrica e estritamente positiva, existe um processo estocástico de posto completo com covariância  $R(\cdot, \cdot)$ .

**Prova** Ver Caines (1988). ■

Seja  $(x_t)$  um processo estocástico estacionário com covariância  $R_\tau^x$ ; do teorema anterior esta função possui as propriedades

$$R_\tau^x = (R_{-\tau}^x)'$$

e

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_i' R_{t_i-t_j}^x \alpha_j \geq 0.$$

Uma função com essas propriedades pode ser representada como

$$R_\tau^x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega),$$

onde  $F(\omega)$  é uma função não decrescente chamada função distribuição espectral de  $(x_t)$ ; esta função pode ser decomposta em três componentes

$$F(\omega) = F_a(\omega) + F_d(\omega) + F_s(\omega)$$

onde,  $F_a$  é absolutamente contínua, isto é, ela possui derivadas e corresponde a um espectro contínuo.  $F_d$  é uma função constante por partes e corresponde ao espectro discreto.  $F_s$  é contínua e constante para todo  $\omega$ .

Para um processo com espectro contínuo seja  $\phi(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$ , então

$$\Phi_x(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} R_t^x,$$

onde  $\Phi$  é a densidade espectral do processo  $x$ .

Fazendo  $z = e^{i\omega}$  temos

$$\Phi_x(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} z^{-t} R_t^x,$$

onde  $\Phi_x(z)$  é transformada  $\mathcal{Z}$  da função de covariâncias de  $x$ .

Consideremos um sistema discreto linear e invariante no tempo; seja  $(u_t)$  um processo estocástico estacionário de entrada com densidade espectral  $\phi_u(\omega)$  absolutamente contínua. A dinâmica do sistema está caracterizada pela função de transferência

$$H(z) = \sum_{t=0}^{\infty} h_t z^{-t},$$

onde  $h_t$  são as matrizes impulsivas do sistema. De (3.19) a transformada  $\mathcal{Z}$  da saída é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(R_t^y) &= \mathcal{Z} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n R_{t-n+j}^u h_j' \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n \mathcal{Z}(R_{t-n+j}^u) h_j', \end{aligned}$$

utilizando a propriedade  $\mathcal{Z}(x_{t-n}) = z^{-n} \mathcal{Z}(x_t)$ , para condições iniciais nulas, tem-se

$$\mathcal{Z}(R_t^y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-(n-j)} \mathcal{Z}(R_t^u) h_j'$$

ou

$$\Phi_y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-(n-j)} \Phi_u(z) h_j' = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} \Phi_u(z) h_j' z^j$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} \right) \Phi_u(z) h'_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} H(z) \Phi_u(z) h'_j z^{-j} \\
&= H(z) \Phi_u(z) \left( \sum_{j=0}^{\infty} h_j (z^{-1})^{-j} \right)' \\
\Phi_y(z) &= H(z) \Phi_u(z) H(z^{-1})', \tag{3.20}
\end{aligned}$$

dividindo ambos os termos por  $2\pi$  e fazendo  $e^{j\omega} = z$ , temos

$$\phi_y(\omega) = H(e^{j\omega}) \phi_u(\omega) H(e^{-j\omega})' \tag{3.21}$$

Em muitas ocasiões tanto (3.20) como (3.21) são interpretadas como funções de densidade espectral, ver Astrom (1970) e Caines (1988).

Se consideramos um sistema SISO com a entrada ( $u_t$ ) sendo um processo estocástico ruído branco com covariância unitária,  $\Phi_u(e^{j\omega}) = 1$ , temos

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2. \tag{3.22}$$

Supondo que a função de transferência seja  $H(z) = \frac{N(z)}{M(z)}$ , (3.22) pode ser escrita como

$$\Phi_y(z) = \frac{N(z)N(z^{-1})}{M(z)M(z^{-1})},$$

logo todas as raízes de  $M(z)$ , (pólos de  $H(z)$ ) devem estar no interior do círculo unitário,  $|z| < 1$  e todas as raízes de  $N(z)$ , (zeros de  $H(z)$ ) devem estar no interior ou sobre o círculo unitário  $|z| \leq 1$ . Todo processo estocástico estacionário pode ser representado como a saída de um sistema linear invariante no tempo com entrada ruído branco. Veremos no próximo Capítulo como podemos realizar um processo estocástico por meio de um sistema linear no espaço de estado.

### 3.4 Sistemas Dissipativos

O conceito de dissipatividade, que tem como caso particular o conceito de passividade, vem da observação da conduta de sistemas físicos e é uma formalização para os processos energéticos que acontecem nestes sistemas. As idéias da dissipatividade surgem no campo da teoria de circuitos quando do estudo da dissipação de energia nos resistores. Sistemas dissipativos são definidos em função da trajetória entrada-saída, do comportamento das variáveis internas do sistema, e da abstração de “funções de energia” associadas às variáveis internas (variáveis de estado) do sistema.

O conceito de energia é muito útil na análise de sistemas físicos. Muitos sistemas podem ser estudados pelas suas fontes e perdas de energia. Tendo idéia de ganho e perda de energia, intuitivamente, um sistema dissipativo será aquele que consome energia e não a produz, portanto, qualquer incremento da sua energia armazenada decorre de fontes externas. Esta definição implica a existência de três tipos de “funções de energia”: a “**função de armazenamento**”, que representa a energia armazenada no sistema, a função “**Taxa de Suprimento**”, que representa a taxa de energia instantânea injetada no sistema por fontes externas, e a “**função de dissipação**”. A taxa de suprimento é interpretada como uma potência de entrada, denominação herdada da teoria de circuitos.

Consideremos o circuito RLC da figura (3.1)

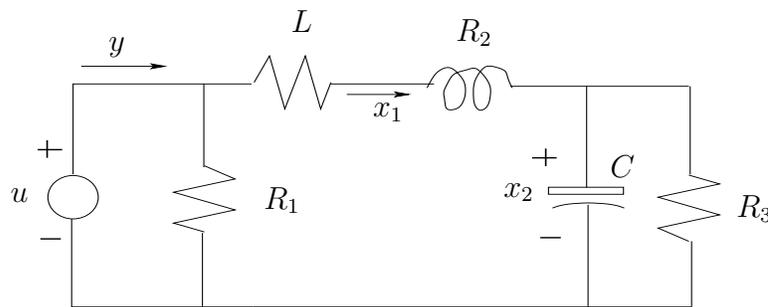


Fig. 3.1: Circuito passivo RLC

Sejam  $u(t)$  a tensão de entrada e  $y(t)$  a corrente resultante. Assim a potência instantânea de entrada no sistema é dada pelo produto  $u(t)y(t)$ . Definimos como as variáveis de estado a corrente no indutor,  $x_1$ , e a tensão no capacitor,  $x_2$ . A representação no espaço de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{R_3 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{R_1} u(t).$$

A energia armazenada no sistema é dada por:

$$\mathbf{V}(x(t)) = \frac{1}{2} L x_1^2(t) + \frac{1}{2} C x_2^2(t). \quad (3.23)$$

Como não existem outras fontes de energia dentro do sistema, a energia que entra no circuito, num intervalo  $[0, T]$ , será sempre maior ou igual à energia armazenada no sistema, nesse intervalo. Mate-

maticamente podemos escrever:

$$\int_0^T u(t)y(t)dt \geq \mathbf{V}(x(T)) - \mathbf{V}(x(0)), \quad (3.24)$$

onde  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  é o estado do sistema. Se a desigualdade é estrita teremos uma energia dissipada dada pela diferença entre a energia de entrada ou de suprimento e a variação da energia de armazenamento. Em termos variacionais a equação (3.24) pode ser escrita como:

$$u(t)y(t) \geq \dot{\mathbf{V}}(x(t)). \quad (3.25)$$

Podemos chegar a este resultado derivando (3.23) e substituindo os valores da equação de estado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(x) &= \frac{1}{2}L2x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{2}C2x_2\dot{x}_2 \\ &= Lx_1\left(-\frac{R_2}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u\right) + Cx_2\left(\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_3C}x_2\right) \\ &= -R_2x_1^2 - \frac{1}{R_3}x_2^2 + x_1u \\ &= -R_2x_1^2 - \frac{1}{R_3}x_2^2 + \left(y - \frac{1}{R_1}u\right)u \end{aligned}$$

daí tem-se

$$uy - \dot{\mathbf{V}}(x) = R_2x_1^2 + \frac{1}{R_3}x_2^2 + \frac{1}{R_1}u^2 \geq 0.$$

A equação (3.25) é satisfeita. A diferença acima é denominada **taxa de dissipação**. A seguir enunciaremos as definições básicas dadas em Willems (1972) e Byrnes et al. (1991), para sistemas dissipativos, assim como alguns teoremas que nos fornecem condições necessárias e suficientes para que um sistema dinâmico seja dissipativo.

Consideremos um sistema dinâmico  $S$ , dadas a sua entrada  $u(t)$  e a sua saída  $y(t)$ , definimos uma função denominada de taxa de suprimento,  $w(t) = w(u(t), y(t))$  que satisfaz  $\int_{t_0}^{t_1} |w(t)|dt < \infty$ , para todo  $t_1$  e  $t_0$  com  $t_1 \geq t_0$ , isto é  $w$  é localmente integrável; esta função pode ser interpretada como a potência instantânea num circuito elétrico. Então a “energia” entregue, no intervalo  $[t_0, t_1]$  será  $\int_{t_0}^{t_1} w(t)dt$ . Seja  $\mathbf{V}(x(t))$  uma função que representa a energia armazenada no sistema no instante  $t$ ,

chamada de “**função de armazenamento**”; se o sistema é dissipativo, teremos

$$\int_{t_0}^{t_1} w(t)dt \geq \mathbf{V}(x(t_1)) - \mathbf{V}(x(t_0)). \quad (3.26)$$

A desigualdade acima poder ser interpretada da seguinte forma: num sistema dissipativo, a variação de energia armazenada no sistema, num intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$ , com  $t_0 \leq t_1$ , não pode ser maior que a energia fornecida pela entrada  $u(t)$ , no mesmo intervalo. (3.26) é denominada de “**Desigualdade Dissipativa**”, ver Willems (1972). A abordagem a seguir decorre do conhecimento e de considerações físicas, de que o sistema é dissipativo e assim a função de armazenamento existe. O fato de a função de armazenamento ser definida via uma desigualdade requer uma análise posterior. A questão central nesta análise é: “Como é definida  $\mathbf{V}$  pela desigualdade dissipativa?” (A questão não é se a função de armazenamento existe e sim como ela é). Dado que muitas aplicações de dissipatividade estão relacionadas a sistemas não lineares, a seguir damos algumas definições pertinentes; as definições mais formais podem ser encontradas em Willems (1972) e Byrnes et al. (1991).

Seja um sistema contínuo dado pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad (3.27)$$

$$y = h(x, u), \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad (3.28)$$

O conjunto  $\mathcal{U}$  de todas as entradas admissíveis consiste de todas as funções vetoriais em  $\mathbb{R}^m$  contínuas por partes. As funções  $f$  e  $h$  são mapeamentos suaves dos seus argumentos. Denotemos por  $w(y(t), u(t)) = w(t)$  à função **taxa de suprimento** associada com o sistema (3.27)-(3.28).

**Definição 3.4.1** *Willems (1972) O sistema (3.27)-(3.28) com a taxa de suprimento  $w(t)$  é dito dissipativo se existe uma função não negativa  $\mathbf{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ , chamada função de armazenamento, tal que*

$$\mathbf{V}(x(t_f)) - \mathbf{V}(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_f} w(y(\tau), u(\tau))d\tau,$$

para todo  $t_0$  e  $t_f$  tal que  $t_f \geq t_0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que a função  $\mathbf{V}$  seja tal que  $\mathbf{V}(0) = 0$ . Se a desigualdade for estrita ( $<$ ) o sistema é dito ser **estritamente dissipativo**.

Por definição o **armazenamento disponível** é a quantidade máxima de armazenamento que a qualquer momento pode ser extraído do sistema físico. A noção de armazenamento disponível é uma generalização do conceito de energia disponível encontrada na teoria da viscoelasticidade, por exemplo.

**Definição 3.4.2** O armazenamento disponível  $V_a$ , de um sistema físico  $S$  com taxa de suprimento  $w$  é definido como

$$V_a(x) = \sup_{\substack{x \rightarrow \\ t_1 \geq 0}} - \int_0^{t_1} w(t) dt$$

onde a notação  $x \rightarrow$  denota o supremo sobre todos os movimentos começando no estado  $x$  no instante 0 e onde o supremo é tomado sobre todas as entradas  $u \in \mathcal{U}$ .

O armazenamento disponível é uma função essencial para determinar de se um sistema é, ou não é, dissipativo. Isto é mostrado no seguinte teorema.

**Teorema 3.4.3** Se um sistema  $S$  com taxa de suprimento  $w$  é dissipativo, o armazenamento disponível,  $V_a$ , é finito para cada  $x \in X$ . Além disso, qualquer possível função de armazenamento  $V$  satisfaz,  $0 \leq V_a \leq V$ , para cada  $x \in \mathcal{X}$ , e se  $V_a$  é  $C^0$ , então ela mesma será uma possível função de armazenamento. Reversamente, se  $V_a(x)$  é finita para cada  $x \in \mathcal{X}$  e é  $C^0$ , então o sistema é dissipativo.

**Prova.** ver Willems (1972)

### 3.4.1 Sistemas Passivos

Do jeito como está sendo contada a história, pode-nos parecer que primeiro surgiu o conceito de dissipatividade e que a passividade foi uma conseqüência, ou caso particular dela. O fato é que primeiro surgiu o conceito de passividade, com a observação da energia dissipada pelos resistores nos circuitos elétricos, sendo a dissipatividade uma generalização deste conceito. Podemos definir a passividade de um sistema por meio da notação e definições da dissipatividade.

Seja um sistema dinâmico  $S$ . Denotamos o produto interno da entrada  $u$  pela saída  $y$  como  $\langle y, u \rangle = \int_0^{+\infty} u(t)'y(t)dt$ . Definimos a função taxa de suprimento associado como  $w(t) = u(t)'y(t)$ . Um sistema é **passivo** se ele é dissipativo com taxa de suprimento  $w(t)$  e função de armazenamento  $V$ , satisfazendo  $V(0) = 0$ . Em outras palavras, o sistema é passivo, se existe uma função não negativa  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , que satisfaz

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t y(\tau)'u(\tau) d\tau. \quad (3.29)$$

Podemos fazer alguns comentários em relação a esta desigualdade. Se o sistema é livre,  $u(t) = 0$ , no intervalo  $[0, t]$ , a função  $V$  é decrescente; segue-se que sistema passivo tendo função de armazena-

mento positiva é estável no sentido de Lyapunov. Algumas vezes, é necessário distinguir os sistemas passivos particulares, este é o caso dos sistemas denominados de **sem perda** (lossless), que como o nome indica, são sistemas sem perda de energia. Neste caso a equação (3.29) se converte numa igualdade:

$$\mathbf{V}(x(t)) - \mathbf{V}(x(0)) = \int_0^t y(\tau)'u(\tau)d\tau. \quad (3.30)$$

Existem outras definições de sistemas passivos; por exemplo: um sistema é **estritamente passivo com relação à saída** se existe um  $\epsilon > 0$  tal que

$$\langle y, u \rangle \geq \epsilon \|y\|^2.$$

Um sistema é **estritamente passivo com relação à entrada** se existe um escalar  $\delta > 0$  tal que

$$\langle y, u \rangle \geq \delta \|u\|^2.$$

Estes sistemas são dissipativos com relação às taxas de suprimento  $w = u'y - \epsilon \|y\|^2$  e  $w = u'y - \delta \|u\|^2$ , respectivamente.

Como podemos observar, um sistema é passivo se:

$$\int_{\tau=0}^{\infty} u(\tau)'y(\tau)d\tau \geq 0$$

sempre que  $x(0) = 0$ . A partir desta relação definimos os **sistemas positivo reais**. O nome deve-se ao fato a definição se dar em função das características deste sistema na sua representação no domínio da frequência. Utilizando a identidade de Parseval podemos escrever:

$$\begin{aligned} \langle y, u \rangle &= \int_0^{+\infty} y(t)u(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)U(-j\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)U(j\omega)U(-j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re}(G(j\omega))\|U(j\omega)\|^2d\omega, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde  $H(j\omega)$  é a função de transferência do sistema no domínio da frequência. Logo para que um **sistema seja passivo**, a equação (3.31) deve ser positiva; isto acontecerá sempre que a parte real da função de transferência for positiva ou nula, isto é,  $\text{Re}(G(j\omega)) \geq 0$  para todo  $\omega$ . Devido a este fato estes sistemas são também denominados de **sistemas positivo reais**.

### 3.4.2 Sistemas discretos dissipativos

Os conceitos, definições e resultados de dissipatividade podem ser formalizados para o caso dos sistemas discretos no tempo. A taxa de suprimento  $w$  também aparece associada com o sistema, mas agora com a dinâmica discreta no tempo. Adicionalmente, consideramos que para qualquer  $u \in \mathcal{U}$ , e para qualquer condição inicial  $x_0$ ,  $w(y_t, u_t) \in \mathbb{R}$  para todo  $t \geq 0$ . Consideremos o sistema

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \quad x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U} \quad (3.32)$$

$$y_t = h(x_t, u_t), \quad y \in \mathcal{Y}. \quad (3.33)$$

onde  $f$  e  $h$  são mapeamentos suaves com  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{U}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$ . Associamos a este sistema uma função denominada de **taxa suprimento**  $w(y_t, u_t)$ . Este sistema é **dissipativo** com relação à **taxa de suprimento**  $w$ , se existe uma função positiva definida  $\mathbf{V}$ , com  $\mathbf{V} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , e  $\mathbf{V}(\mathbf{0}) = 0$ , chamada de **função armazenamento**, tal que a seguinte desigualdade seja satisfeita

$$\mathbf{V}(x_{t+1}) - \mathbf{V}(x_t) \leq w(y_t, u_t), \quad (3.34)$$

para todo  $t$ . Podemos escrever as desigualdades (3.34) para  $t = 0, 1, 2, \dots, t$ , como:

$$\mathbf{V}(x_1) - \mathbf{V}(x_0) \leq w(y_0, u_0)$$

$$\mathbf{V}(x_2) - \mathbf{V}(x_1) \leq w(y_1, u_1)$$

$$\mathbf{V}(x_3) - \mathbf{V}(x_2) \leq w(y_2, u_2)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{V}(x_{t+1}) - \mathbf{V}(x_t) \leq w(y_t, u_t)$$

somando as partes direita e esquerda dessas desigualdades temos:

$$\mathbf{V}(x_{t+1}) - \mathbf{V}(x_0) \leq \sum_{i=0}^t w(y_i, u_i). \quad (3.35)$$

Qualquer uma das expressões, (3.34) ou (3.35) pode ser entendida como a **desigualdade de dissipação** no domínio do tempo discreto. Definições similares às do tempo contínuo podem ser feitas.

### 3.4.3 A passividade em Sistemas de Tempo Discreto

Seja um sistema dinâmico  $S$ , denotamos o produto interno da entrada  $u$  com a saída  $y$  como  $\langle y, u \rangle = \sum_{t=0}^{+\infty} u'_t y_t$ . Definimos a função taxa de suprimento associado como  $w_t = u'_t y_t$ . Um sistema discreto é dito ser **passivo** se ele é dissipativo com a taxa de suprimento  $w_t$  e a função de armazenamento  $V$ , satisfazendo  $V(0) = 0$ . Em outras palavras, o sistema é passivo, se existe uma função não negativa  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , que satisfaz

$$V(x_{t+1}) - V(x_0) \leq \sum_{i=0}^t u'_i y_i \quad (3.36)$$

Podemos fazer alguns comentários em relação a esta desigualdade. Se o sistema é não forçado,  $u_t = 0$ , no intervalo  $[0, t]$ , a função  $V$  é decrescente, segue-se que sistemas passivos tendo função de armazenamento positivo são estáveis no sentido de Lyapunov. Algumas vezes, é necessário distinguir os sistemas passivos particulares, este é o caso dos sistemas denominados de **sem perda**, (Lossless), que como o nome indica, são sistemas sem perda de energia, isto é a equação (3.36) se converte numa igualdade, isto é

$$V(x_{t+1}) - V(x_0) = \sum_{i=0}^t u'_i y_i. \quad (3.37)$$

Resumindo um sistema discreto é passivo se

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} u'_t y_t \geq 0 \quad (3.38)$$

A partir desta relação definimos **sistema positivo real**, para o caso discreto; por analogia ao caso discreto, o nome deve-se ao fato de ele ser definido em função das características deste tipo de sistemas na sua representação no domínio da frequência no caso contínuo.

A função de transferência de todo sistema linear discreto invariante no tempo está composta por funções racionais polinomiais. Veremos a seguir como caracterizar um sistema passivo nas suas diversas representações e estudar a relação entre eles. O lema da positividade real discreto, também conhecido como o lema de Kalman-Yakubovich-Popov discreto, constitui o resultado central para a caracterização de um sistema passivo (positivo real). Para expor de forma simples as diversas abordagens possíveis da noção de passividade nos limitaremos a sistemas simples com uma entrada e uma saída; em Faure et al. (1979) um estudo similar para o caso de sistemas estocásticos contínuos, é feito. Sempre que oportuno a abordagem multivariável também será feita.

### 3.4.4 Caracterização da passividade por meio de uma condição analítica da função de transferência

Seja o sistema discreto linear e invariante no tempo

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

$$y_t = Cx_t + Du_t$$

onde  $y_t$  e  $u_t$  pertencem a  $\mathbb{R}^p$ , e  $x_t \in \mathbb{R}^n$ . Denotemos por  $h_t$  a matriz resposta impulsiva do sistema.

Sejam  $U(z)$ ,  $Y(z)$  e  $H(z)$  as transformadas  $\mathcal{Z}$  da entrada, da saída e da resposta impulsiva do sistema dadas por:

$$U(z) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} u_t z^{-t}, \quad Y(z) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} y_t z^{-t}, \quad H(z) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} h_t z^{-t},$$

Definimos uma variável auxiliar,  $g_{n-t} = y_t$ , logo a equação (3.38) pode ser escrita como

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} u'_t y_t = \sum_{t=-\infty}^{\infty} u'_t g_{n-t} = u_n * g_n = \psi_n,$$

onde (\*) denota a operação convolução. Se  $\Psi(z)$  é a transformada  $\mathcal{Z}$  de  $\psi_n$ , então podemos escrever

$$\psi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

como  $\psi_n = u_n * g_n$ , temos  $\Psi(z) = U(z)G(z)$ , logo

$$\psi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\omega}) G(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

como  $g_{n-t} = y_t$ , temos  $G(z) = z^{-n} Y(z^{-1})$ , logo teremos

$$\psi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} Y(e^{-j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\omega}) Y(e^{-j\omega}) d\omega.$$

Como  $y_t$  é a saída do sistema, temos  $Y(z) = H(z)U(z)$ , logo teremos

$$\psi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) U(e^{-j\omega}) d\omega$$

Podemos decompor  $H(e^{j\omega})$  como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{H(e^{j\omega}) + H(e^{-j\omega})}{2} + j \frac{H(e^{j\omega}) - H(e^{-j\omega})}{2j}$$

logo

$$\psi_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\omega}) \left[ \frac{H(e^{j\omega}) + H(e^{-j\omega})}{2} - j \frac{H(e^{j\omega}) - H(e^{-j\omega})}{2j} \right] U(e^{-j\omega}) d\omega$$

A parte imaginária desta integral se anula, pois  $U(e^{j\omega})H(e^{j\omega})U(e^{-j\omega}) = U(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})U(e^{-j\omega})$  ou

$$Y(e^{j\omega})U(e^{-j\omega}) = U(e^{j\omega})Y(e^{-j\omega}),$$

assim temos

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\omega}) \left[ \frac{H(e^{j\omega}) + H(e^{-j\omega})}{2} \right] U(e^{-j\omega}) d\omega = \\ \psi_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} \|U(e^{j\omega})\|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^{\pi} \operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} \|U(e^{j\omega})\|^2 d\omega, \end{aligned}$$

logo

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} u'_t y_t = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^{\pi} \operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} \|U(e^{j\omega})\|^2 d\omega \geq 0 \quad (3.39)$$

Da expressão (3.39), concluímos que uma condição para que o sistema seja passivo é que a parte real da função de transferência seja sempre maior ou igual a zero. Esta condição imposta no domínio da frequência é muito conhecida no contexto de síntese de circuitos; os sistemas com estas características são chamados de **sistemas positivo reais**.

### Sistemas Positivo Reais discretos

**Definição 3.4.4** *Uma função complexa  $f(z)$  de uma variável complexa  $z$  é positiva real se:*

1.  $z$  é real  $\Rightarrow f(z)$  é real
2. para todo  $z$ , tal que  $|z| \geq 0$ ,  $\operatorname{Re}\{f(z)\} \geq 0$ .

No nosso contexto,  $f(z)$  é uma função racional constituída de polinômios de grau finito, onde cada um deles pode representar um sistema linear invariante no tempo. Utilizamos a convenção de que os sistemas estáveis de fase mínima são sistemas analíticos e não nulos para valores de  $z$  tais que  $|z| > 1$ , isto é fora do disco unitário no plano complexo  $z$ . A primeira condição implica que os coeficientes dos polinômios devem ser reais, e que os pólos e zeros devem ocorrer em pares complexos conjugados.

**Definição 3.4.5** *Dizemos que um sistema discreto linear invariante no tempo é positivo real se a sua função de transferência  $H(z)$  é uma função positiva real.*

**Teorema 3.4.6** *Uma função racional real  $H(z)$  é positiva real (PR) se e somente se para todo  $|z| \geq 1$  temos  $|\angle H(z)| \leq \frac{\pi}{2}$ .*

**Prova** É quase que direta, pois a parte real de  $H(z)$  e

$$\operatorname{Re}\{H(z)\} = \operatorname{Re}\{|H(z)|e^{j\angle H(z)}\} = |H(z)| \cos(\angle H(z)) \geq 0,$$

logo

$$\operatorname{Re}\{H(z)\} \geq 0, \quad \text{sempre que } |\angle H(z)| \leq \frac{\pi}{2}.$$

**Teorema 3.4.7**  *$H(z)$  é positiva real se e somente se  $H(z)^{-1}$  também é.*

**Prova** Se  $H(z)$  é positiva real, pelo teorema anterior temos

$$|\angle H(z)^{-1}| = |-\angle H(z)| = |\angle H(z)| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |z| \geq 1.$$

**Teorema 3.4.8** *Uma função positiva real  $H(z)$ , é analítica e não nula fora do disco unitário,  $|z| > 1$  e portanto, é uma função de fase mínima.*

**Prova:** Ver Smith (1983).

**Teorema 3.4.9** *Todo pólo sobre o círculo unitário de um sistema positivo real deve ser simples com um resíduo real e positivo*

**Prova:** Ver Smith (1983).

**Teorema 3.4.10**  *$H(z)$  é positiva real se e somente se:*

1. Ela é analítica em  $|z| > 0$ ,
2. Os pólos no círculo unitário são simples com resíduos reais e positivos
3.  $\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} \geq 0$ , para todo  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

**Prova** Ver Smith (1983).

Podemos concluir que um sistema linear invariante no tempo passivo é um sistema positivo real.

### Passividade e fatoração no domínio espectral

Seja  $H(z)$  uma função de transferência associada a um sistema linear discreto invariante no tempo. Definimos a função de **densidade espectral** do sistema como:

$$\Phi(z) = H(z) + H(z^{-1})' \quad (3.40)$$

Mostraremos, (caso SISO), que o sistema é positivo real (passivo) se e somente se a função de densidade espectral puder ser fatorada como:

$$\Phi(z) = \mathbf{W}(z^{-1})' \mathbf{W}(z). \quad (3.41)$$

Seja  $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ , onde  $A(z)$  e  $B(z)$  são polinômios, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} &= \left[ \frac{H(e^{j\omega}) + H(e^{-j\omega})}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{A(e^{j\omega})}{B(e^{j\omega})} + \frac{A(e^{-j\omega})}{B(e^{-j\omega})} \right] = \\ \operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} &= \frac{1}{2} \frac{A(e^{j\omega})B(e^{-j\omega}) + A(e^{-j\omega})B(e^{j\omega})}{|B(e^{j\omega})|^2} \end{aligned}$$

podemos associar um polinômio  $p(\omega)$  à expressão  $A(e^{j\omega})B(e^{-j\omega}) + A(e^{-j\omega})B(e^{j\omega})$ , dado por

$$p(\omega) \triangleq p(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})B(e^{-j\omega}) + A(e^{-j\omega})B(e^{j\omega}) \quad (3.42)$$

Este polinômio é simétrico, pois  $p(-\omega) = p(\omega)$ , e tem coeficientes reais de potências pares em  $\omega$ . Associamos o seguinte polinômio à expressão (3.42)

$$p(z) = A(z)B(z^{-1}) + A(z^{-1})B(z)$$

se for possível fatorá-lo como

$$p(z) = K(z^{-1})' K(z),$$

onde  $K(z)$  é um polinômio de coeficientes reais, teremos:

$$\Phi(z) = \frac{A(z)}{B(z)} + \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{K(z^{-1})K(z)}{B(z^{-1})B(z)},$$

isto é  $\Phi(z) = \mathbf{W}(z^{-1})' \mathbf{W}(z)$ , onde  $\mathbf{W}(z) = \frac{K(z)}{B(z)}$ . Sendo possível fatorar (3.40) como (3.41) o sistema será positivo real, pois  $\Phi(e^{j\omega}) = \mathbf{W}(e^{j\omega}) \mathbf{W}(e^{-j\omega})' = \|\mathbf{W}(e^{j\omega})\|^2 \geq 0$ , portanto

$$\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2} \frac{|K(e^{j\omega})|^2}{|B(e^{j\omega})|^2} \geq 0.$$

Este resultado foi generalizado para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) por Hitz e Anderson (1969); Caines (1988). Para o caso passivo existe a restrição de que a dimensão do vetor de entrada deve ser igual à da saída. Para sistemas mais gerais podemos utilizar a definição e os conceitos de dissipatividade. Definimos uma **Matriz Positiva Real** a seguir:

**Definição 3.4.11** (Hitz e Anderson (1969)) *Seja  $H(z)$  uma matriz quadrada de funções racionais da variável complexa  $z$ . Então  $H(z)$  é chamada de Matriz **Positiva Real Discreta** se as seguintes condições são satisfeitas:*

- i) Todos os elementos de  $H(z)$  são analíticos em  $|z| > 1$ , isto é,  $H(z)$  é estável, todos os pólos estão em  $|z| \leq 1$ .*
- ii)  $H(z) + H(z^{-1})' \geq 0$  para todo  $|z| > 0$ .*

$H(z)$  pode ser interpretada como a transformada  $\mathcal{Z}$  da matriz resposta ao impulso de um sistema linear discreto e invariante no tempo, com representação no espaço de estado dada por

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \quad (3.43)$$

$$y_t = Cx_t + Du_t, \quad (3.44)$$

onde  $u_t$  e  $y_t$  têm a mesma dimensão. A função de transferência pode ser escrita como:  $H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ . Muitas propriedades para matrizes positiva reais contínuas, Anderson (1967c), podem ser aplicadas ao caso discreto.

**Lema 3.4.12** *Seja  $H(z)$  uma matriz quadrada composta por funções racionais em  $z$ , e onde todos os seus elementos são analíticos em  $|z| > 1$ . Então,  $H(z)$  é uma matriz positiva real discreta se e somente se são satisfeitas as seguintes condições:*

- i) Todos os pólos de cada elemento de  $H(z)$  que estão no círculo unitário ( $|z| = 1$ ) são simples.*
- ii)  $H(e^{j\omega}) + H(e^{-j\omega})' \geq 0$  para todo  $\omega$  real na qual  $H(e^{j\omega})$  existe.*
- iii) se  $z_0 = e^{j\omega_0}$ , com  $\omega_0$  real, é um pólo de algum elemento em  $H(z)$ , e se  $K_0$  é a matriz residual em  $z = z_0$ , então  $e^{-j\omega_0} K_0$  é uma matriz hermiteana semidefnida positiva.*

**Prova** Ver Hitz e Anderson (1969).

Notemos a similaridade com o caso SISO. Novamente podemos obter uma caracterização da positividade real de uma matriz por meio da existência de uma fatoração da matriz de densidade espectral racional  $\Phi(z) = H(z) + H(z^{-1})'$ , ver Youla (1961).

### 3.4.5 Método algébrico para a caracterização da positividade por meio do Lema Positivo Real

Vimos anteriormente que é possível caracterizar a positividade real de uma função através da definição de uma matriz de densidade espectral definida como a soma de dois fatores obtidos da função a caracterizar, (3.40). Nesta Seção vamos supor que a função de transferência,  $H(z)$ , possua uma realização mínima dada por (3.43) e (3.44) e que simplesmente denotaremos como  $\{A, B, C, D\}$ . O método algébrico para caracterizar a positividade de uma função consiste em resolver um sistema de equações algébricas (onde somente estão envolvidas matrizes constantes). Se encontrada uma solução deste sistema de equações, a positividade real estará estabelecida. Para tal objetivo definimos o seguinte problema a ser resolvido

#### Fatoração de uma matriz de densidade espectral racional

Consideramos o seguinte problema: dada uma matriz de densidade espectral racional, na forma

$$\Phi(z) = H(z) + H(z^{-1})',$$

onde  $H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ , achar uma fatoração na forma

$$\Phi(z) = \mathbf{W}(z^{-1})'\mathbf{W}(z), \quad (3.45)$$

onde  $\mathbf{W}(z) = L(zI - A)^{-1}B + N$ . Na realidade pode existir uma infinidade de fatores que satisfaçam (3.45), porém em Anderson (1967a) foi provado que se existe fatoração podemos utilizar as matrizes  $A$  e  $B$  de  $H(z)$ . Logo o problema se resume em encontrar as matrizes  $L$  e  $N$ , se existirem. Para tal objetivo precisamos provar algumas identidades, que são:

$$z(zI - A)^{-1} = A(zI - A)^{-1} + I = (zI - A)^{-1}A + I \quad (3.46)$$

**prova**

$$A(zI - A)^{-1} + I = A(zI - A)^{-1} + (zI - A)(zI - A)^{-1} = (A + (zI - A))(zI - A)^{-1} = z(zI - A)^{-1}$$

$$(zI - A)^{-1}A + I = (zI - A)^{-1}A + (zI - A)^{-1}(zI - A) = (zI - A)^{-1}\{A + (zI - A)\} = (zI - A)^{-1}z.$$

**Lema 3.4.13** Para uma matriz não singular  $n \times n$   $A$ , definindo  $(A')^{-1} = A^*$ , temos

$$(z^{-1}I - A')^{-1} = -A^*[I + (zI - A^*)^{-1}A^*].$$

**Prova**

$$\begin{aligned}
I &= -(z^{-1}I - A')(A')^{-1}[I + (zI - (A')^{-1})^{-1}(A')^{-1}] \\
&= -(z^{-1}A^* - I)[I + (zI - A^*)^{-1}A^*] = -(z^{-1}A^* - I)[I + (zI - A^*)^{-1}A^*] = -(z^{-1}A^* - I)[z(zI - A^*)^{-1}] \\
&= -(z^{-1}A^* - I)[z(zI - A^*)^{-1}] = -\frac{(A^* - zI)}{z}[z(zI - A^*)^{-1}] = I.
\end{aligned}$$

A solução da fatoração espectral está contida na prova do seguinte lema.

**Lema 3.4.14 [Lema Positivo Real Discreto]** *Seja  $H(z)$  uma matriz quadrada de funções racionais em  $z$ , e que não têm pólos em  $|z| > 0$  e que tem pólos simples somente em  $|z| = 1$ , e seja  $\{A, B, C, D\}$  uma realização mínima de  $H(z)$ . Se para  $\{A, B, C, D\}$  existem uma matriz simétrica real positiva definida  $P$  e matrizes reais  $L$  e  $N$  tais que*

$$A'PA - P = -L'L \quad (3.47)$$

$$A'PB = C' - L'N \quad (3.48)$$

$$N'N = (D + D') - B'PB \quad (3.49)$$

então a função de transferência  $H(z)$  é positiva real discreta.

**Prova**

Seja o sistema

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$$

$$y_t = Cx_t + Du_t,$$

A função de transferência para este sistema é dada por

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D.$$

Utilizando a notação para a função de transferência em termos de sua realização de estado pela quádrupla  $\{A, B, C, D\}$  :

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \equiv \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]. \quad (3.50)$$

Para encontrar  $H(z^{-1})'$ , temos:

$$H(z^{-1}) = C(z^{-1}I - A)^{-1}B + D = C[(z^{-1}A^{-1}A - A)^{-1}]B + D$$

$$\begin{aligned}
&= C[(A^{-1} - Iz)A]^{-1}zB + D = CA^{-1}(A^{-1} - Iz)^{-1}zB + D \\
&= (-CA^{-1})(zI - A^{-1})^{-1}zB + D.
\end{aligned}$$

Pela identidade (3.46) resulta

$$\begin{aligned}
H(z^{-1}) &= (-CA^{-1})[(zI - A^{-1})^{-1}A^{-1} + I]B + D \\
H(z^{-1}) &= (-CA^{-1})(zI - A^{-1})^{-1}A^{-1}B - CA^{-1}B + D,
\end{aligned}$$

logo

$$H(z^{-1})' = B'(A')^{-1}[zI - (A')^{-1}]^{-1}[-(A')^{-1}C' + D' - B'(A')^{-1}C'].$$

Para facilidade de notação definimos  $(A')^{-1} = A^*$ , então na notação definida em (3.50) temos:

$$H(z^{-1})' = \left[ \begin{array}{c|c} A^* & -A^*C' \\ \hline B'A^* & D' - B'A^*C' \end{array} \right]. \quad (3.51)$$

Sejam as funções de transferência de dois sistemas:  $H_1(z) = C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$  e  $H_2(z) = C_2(zI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$ . A função de transferência para a conexão em paralelo é

$$H_p(z) = H_1(z) + H_2(z),$$

que na notação adotada escreve-se:

$$H_p(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right]$$

logo

$$\Phi(z) = H(z) + H(z^{-1})' = \left[ \begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A^* & -A^*C' \\ \hline C & B'A^* & D + D' - B'A^*C' \end{array} \right].$$

Aplicando a transformação de similaridade

$$T = \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ P & I \end{array} \right]$$

temos:

$$A_T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ PA - A^*P & A^* \end{bmatrix}$$

$$B_T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ -A^*C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ PB - A^*C' \end{bmatrix}$$

$$C_T = \begin{bmatrix} C & B'A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C - B'A^*P & B'A^* \end{bmatrix},$$

como a transformação de similaridade não afeta a função de transferência, podemos escrever

$$\Phi(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ PA - A^*P & A^* & PB - A^*C' \\ \hline C - B'A^*P & B'A^* & D + D' - B'A^*C' \end{array} \right]. \quad (3.52)$$

Supondo que  $\Phi(z)$  possa ser fatorada na forma  $\Phi(z) = \mathbf{W}(z^{-1})'\mathbf{W}(z)$ , onde a matriz  $\mathbf{W}(z)$  é definida como  $\mathbf{W}(z) = L(zI - A)^{-1}B + N$ , notando que as matrizes  $A$  e  $B$  são idênticas às do sistema, ver Anderson (1967c), temos:

$$\Phi(z) = \mathbf{W}(z^{-1})'\mathbf{W}(z) = [L(z^{-1}I - A)^{-1}B + N]'[L(zI - A)^{-1}B + N],$$

Dados dois sistemas representados por  $H_1(z) = C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$  e  $H_2(z) = C_2(zI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$ , para a representação no espaço de estado, assim como para a função de transferência dos dois sistemas em cascata temos:

$$H_c(z) = H_1(z)H_2(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ B_1C_2 & A_1 & B_1D_2 \\ \hline D_1C_2 & C_1 & D_1D_2 \end{array} \right].$$

De forma similar a (3.51), temos

$$\mathbf{W}(z^{-1})' = \left[ \begin{array}{c|c} (A')^{-1} & -(A')^{-1}L' \\ \hline B'(A')^{-1} & N' - B'(A')^{-1}L' \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A^* & -A^*L' \\ \hline B'A^* & N' - B'A^*L' \end{array} \right].$$

Portanto

$$\Phi(z) = \mathbf{W}(z^{-1})'\mathbf{W}(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ -A^*L'L & A^* & -A^*L'N \\ \hline (N' - B'A^*L')L & B'A^* & (N' - B'A^*L')N \end{array} \right], \quad (3.53)$$

igualando (3.52) e (3.53) temos

$$PA - A^*P = -A^*L'L$$

ou

$$PA - (A')^{-1}P = -(A')^{-1}L'L,$$

multiplicando por  $A'$  ambos membros da equação acima obtemos a (3.47):

$$A'PA - P = -L'L.$$

Igualando os outros termos de (3.52) e (3.53) obtemos

$$PB - A^*C' = -A^*L'N$$

ou

$$PB - (A')^{-1}C' = -(A')^{-1}L'N$$

ou seja obtemos a (3.48),

$$A'PB - C' = -L'N.$$

A outra expressão é

$$C - B'(A')^{-1}P = N'L - B'(A')^{-1}L'L$$

de (3.47) e (3.49), temos

$$C - B'(A')^{-1}P = (C - B'PA) - B'(A')^{-1}(P - A'PA) =$$

$$C - B'PA - B'(A')^{-1}P + B'(A')^{-1}A'PA = C - B'PA - B'(A')^{-1}P + B'PA$$

notamos que se verifica a igualdade

$$C - B'(A')^{-1}P = C - B'(A')^{-1}P.$$

Por último

$$D + D' - B'(A')^{-1}C' = N'N - B'(A')^{-1}L'N = N'N - B'(A')^{-1}(C' - A'PB)$$

$$D + D' - B'(A')^{-1}C' = N'N - B'(A')^{-1}C' + B'(A')^{-1}A'PB$$

logo

$$N'N = (D + D') - B'PB.$$



O conjunto de equações algébricas obtidas no lema positivo real pode ser resolvido por meio da solução de uma equação algébrica de Riccati.

Para noções probabilísticas de passividade ver Caines (1988). No Capítulo 4 o Lema Positivo em um contexto estocástico é enunciado e provado de forma que consideramos ser também contribuição desta Tese.

### Aplicação à fatoração de matrizes de densidade espectral

Uma ampla aplicação desta teoria ocorre nas áreas de identificação de sistemas, de modelagem de séries temporais e de modelagem de sinais estocásticos. Como vimos na Seção 3 deste Capítulo, a matriz de densidade espectral de um processo estacionário é dada por

$$\Phi_y(z) = \mathbf{G}(z)\Phi_u(z)\mathbf{G}(z^{-1})', \quad (3.54)$$

onde  $\Phi_y(z)$  é matriz de densidade espectral do processo  $(y_t)$ . Para modelar este processo, ele pode ser entendido como a saída de um sistema linear invariante no tempo, com função de transferência  $G(z)$ , ativado por um processo aleatório ruído branco,  $(u_t)$ , onde a matriz de densidade espectral do ruído é  $\Phi_u(z)$ . Se consideramos que  $(u_t)$  é unitário, isto é  $\Phi_u(z) = I$ , temos:

$$\Phi_y(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{G}(z^{-1})'. \quad (3.55)$$

Geralmente, num processo estocástico, temos somente acesso às covariâncias, que podem ser calculadas através de dados amostrados; supondo que estas covariâncias sejam  $\{\dots, \Lambda_{-2}, \Lambda_{-1}\Lambda_0, \Lambda_1\Lambda_2, \dots\}$ , então a matriz de densidade espectral é dada por

$$\Phi_y(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Lambda_i z^{-i}.$$

Podemos escrever

$$\Phi_y(z) = \left[ \frac{\Lambda_0}{2} + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Lambda_i z^{-i} \right] + \left[ \frac{\Lambda_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i z^{-i} \right],$$

sob certas considerações, que serão estudadas no próximo Capítulo, ver Aoki (1990); Caines (1988).

Os somatórios acima podem ser fatorados como

$$G(z) = \frac{\Lambda_0}{2} + \sum_{i=-1}^{\infty} \Lambda_i z^{-i} = C(zI - A)M + \frac{\Lambda_0}{2}$$

e

$$G(z^{-1})' = \left[ C(z^{-1}I - A)M + \frac{\Lambda_0}{2} \right]' = \left[ \frac{\Lambda_0}{2} + \sum_{i=-\infty}^{-1} \Lambda_i z^{-i} \right].$$

Com os dados acima é possível efetuar uma fatoração da matriz densidade espectral através da solução de uma equação de Riccati. Notemos que neste caso a fatoração deve ser da forma  $\Phi_y(z) = G(z)G(z^{-1})'$ , e a solução é parecida à obtida no lema positivo real e será abordada no próximo Capítulo.



# Capítulo 4

## Realização de Processos Estocásticos Estacionários

### 4.1 Introdução

Neste Capítulo tratamos da realização de processos estocásticos estacionários no espaço de estado. Anteriormente vimos que um sistema linear invariante no tempo excitado por um processo estocástico define um sistema estocástico, neste Capítulo estamos interessados no caminho inverso, isto é, dado um processo estocástico, qual ou quais são os sistemas estocásticos que representam e/ou geram algumas características estatísticas importantes dele. Portanto, realizar um processo estocástico para nós é encontrar um conjunto de matrizes no espaço de estado tal que uma entrada estocástica de características estatísticas conhecidas num sistema com tal representação de estado gera uma saída com as características do processo modelado. Para tal objetivo, num primeiro instante, abordamos alguns conceitos teóricos que explicam o porque uma representação no espaço de estado modela naturalmente um processo estocástico. Neste ponto seguimos as referências Faurre (1970, 1973) e Kumar e Varaiya (1986). Posteriormente, seguindo Akaike (1975, 1974), abordamos os conceitos teóricos básicos que mostram como uma base do espaço preditor pode definir uma realização mínima do processo, e que qualquer outra realização, no espaço de estado, corresponde a uma outra base do mesmo espaço preditor. Posteriormente apresentamos como por meio da fatoração espectral e do Lema Positivo Real, constituído por um conjunto de equações algébricas que podem ser resolvidas via equação de Riccati, caracterizamos o conjunto das realizações no espaço de estado de um processo estacionário no sentido amplo. Nesta parte nos fundamentamos nas referências Faurre (1973); Faurre et al. (1979); Lindquist e Picci (1994); Caines (1988). A parte computacional e prática da realização estocástica e a identificação de sistemas estocásticos são apresentadas nos próximos Capítulos.

## 4.2 Representação de processos estocásticos estacionários

Mediante a decomposição de Wold foi provado que todo processo estacionário puramente não determinístico pode ser entendido como a saída de um sistema linear invariante no tempo excitada por um processo estocástico ruído branco. Nesta Seção, seguindo Faurre (1973), a representação de um processo estocástico estacionário no sentido amplo é definida por meio da representação de um processo gaussiano-markoviano no espaço de estado, que é obtida de forma natural pelas suas propriedades.

### 4.2.1 Representação de processos estocásticos markovianos

Os processos estocásticos markovianos possuem propriedades estatísticas interessantes, a principal estando relacionada com a esperança condicional. O seguinte teorema foi provado em Faurre (1973).

**Teorema 4.2.1** *Um processo estocástico gaussiano multivariável de média nula  $(x_t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , é markoviano se e somente se qualquer uma das equivalências seguintes é verificada:*

- i)  $E(x_{t+k}|x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = E(x_{t+k}|x_t)$ , para todo  $k \geq 0$
- ii)  $E(x_t|x_{t_2}, x_{t_1}) = E(x_t|x_{t_2})$ , para todo  $t, t_2$  e  $t_1$  tal que  $t > t_2 > t_1$ .
- iii)  $\Phi_{t,t_2} = \Phi_{t,t_1} \Phi_{t_1,t_2}$  para todo  $t, t_2$  e  $t_1$  tal que  $t > t_1 > t_2$

■

onde o operador  $\Phi_{t,t_2}$  é a matriz que projeta a variável  $x_t$  no espaço gerado por  $x_{t_2}$ , que é definida pelo teorema das projeções ortogonais do Capítulo 2 como:

$$E(x_t|x_{t_2}) = E(x_t x_t') E(x_{t_2} x_{t_2}')^{-1} x_{t_2} = \Pi_{t,t_2} \Pi_{t_2,t_2}^{-1} x_{t_2} = \Phi(t, t_2) x_{t_2},$$

onde  $\Pi_{t,s} = E(x_t x_s')$  denota a matriz de covariância do processo  $(x_t)$ , e a matriz de projeção é

$$\Phi_{t,t_2} = \Pi_{t,t_2} \Pi_{t_2,t_2}^{-1}.$$

Do teorema anterior temos que a predição de um passo de um processo markoviano é dada por:

$$\hat{x}_{t+1} = E(x_{t+1}|x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = E(x_{t+1}|x_t) = \Pi_{t+1,t} \Pi_{t,t}^{-1} x_t = \Phi_{t+1,t} x_t, \quad (4.1)$$

logo podemos concluir que num processo markoviano toda a informação estatística necessária para a predição é dada pela matriz de projeção e pela variável de estado antecessora. De (4.1) podemos escrever

$$x_{t+1} = \Phi_{t+1,t}x_t + v_t, \quad (4.2)$$

onde  $v_t$  é uma variável aleatória independente de  $x_t$ , isto  $v_t$  é ortogonal a  $x_t$ . Se chamamos  $A_t = \Phi_{t+1,t}$  a equação (4.2) se transforma numa equação de estado linear com entrada  $v_t$ . No caso de termos um processo estocástico markoviano **estacionário**, temos

$$A_t = \Phi_{t+1,t} = E(x_{t+1}x_t')E(x_tx_t')^{-1} = \Pi_1\Pi_0^{-1} = A,$$

onde  $E(x_{t+1}x_t')E(x_tx_t')^{-1} = E(x_1x_0')E(x_0x_0')^{-1} = \Pi_1\Pi_0^{-1}$ . Então para o caso estacionário (4.2) pode ser escrita como

$$x_{t+1} = Ax_t + v_t.$$

Mostraremos a seguir que  $v_t$  é um processo ortogonal

**Teorema 4.2.2** *Faurre (1973) Um processo estocástico gaussiano estacionário  $(x_t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{Z}$ , de média nula e covariância definida positiva, é um processo markoviano se e somente se é verificada a seguinte equação linear estocástica a diferenças:*

$$x_{t+1} = Ax_t + v_t, \quad (4.3)$$

onde  $A = \Pi_1\Pi_0^{-1}$  e  $v_t$  é um processo ruído branco de covariância dada por:

$$E[v_tv_s'] = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq s \\ Q = \Pi_0 - A\Pi_0A' & \text{se } t = s \end{cases} \quad (4.4)$$

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Foi vista anteriormente; falta saber se  $v_t$  é um processo ortogonal (ruído branco).

$$\begin{aligned} E(v_t|x_t, x_{t-1}, x_{t-2} \dots) &= E\{(x_{t+1} - Ax_t)|x_t, x_{t-1}, x_{t-2} \dots\} = \\ &= E(x_{t+1}|x_t, x_{t-1}, x_{t-2} \dots) - AE(x_t|x_t, x_{t-1}, x_{t-2} \dots) \end{aligned}$$

como  $(x_t)$  é markoviano e da equação (4.1) para o caso estacionário temos

$$E(v_t|x_t, x_{t-1}, x_{t-2} \dots) = E(x_{t+1}|x_t) - Ax_t = Ax_t - Ax_t = 0$$

logo  $v_t$  é ortogonal a todos os vetores  $x_t, x_{t-1}, x_{t-2} \dots$ ; como

$$v_{t-1} = x_t - Ax_{t-1},$$

$v_t$  é ortogonal a  $v_{t-1}$ , e assim sucessivamente demonstramos, por indução, que o processo  $(v_t)$  é um processo ortogonal ou ruído branco. Para calcular a sua covariância fazemos:

$$\begin{aligned}
 E[v_t v_t'] &= E[(x_{t+1} - Ax_t)(x_{t+1} - Ax_t)'] \\
 &= E[x_{t+1} x_{t+1}'] - E[x_{t+1} x_t'] A' - AE[x_t x_{t+1}'] + AE[x_t x_t'] A' \\
 &= E[x_{t+1} x_{t+1}'] - E[(Ax_t + v_t) x_t'] A' - AE[x_t (Ax_t + v_t)'] + AE[x_t x_t'] A' \\
 &= E[x_{t+1} x_{t+1}'] - AE[x_t x_t'] A' - AE[x_t x_t'] A' + AE[x_t x_t'] A' \\
 E[v_t v_t'] &= E[x_{t+1} x_{t+1}'] - AE[x_t x_t'] A'
 \end{aligned}$$

utilizando a notação anterior obtemos

$$E[v_t v_t'] = \Pi_0 - A\Pi_0 A' = Q,$$

isto é, a covariância do ruído pode ser calculada uma vez conhecido  $\Pi_0 = E(x_t x_t')$ .

( $\Leftarrow$ )  $E(Ax_t + v_t | x_t, x_{t-1}, \dots) = Ax_t = E(x_{t+1} | x_t)$ , pelo teorema anterior  $(x_t)$  é um processo gaussiano markoviano. ■

A matriz de covariâncias do estado da representação do processo estocástico markoviano, é:

$$\Pi_k = E[x_{t+k} x_t'] \quad (4.5)$$

Consideremos primeiramente  $k > 0$ . Utilizando recursivamente a equação (4.3) podemos escrever

$$x_{t+k} = A^k x_t + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} v_{t+i} \quad (4.6)$$

de (4.6) em (4.5) temos

$$\Pi_k = E[x_{t+k} x_t'] = A^k E[x_t x_t'] + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} E[v_{t+i} x_t']$$

como  $E[v_{t+i} x_t'] = 0$ , temos

$$\Pi_k = A^k E[x_t x_t'] = A^k \Pi_0, \text{ para } k > 0. \quad (4.7)$$

Para valores negativos de  $k$  definimos  $l = -k$ , com  $l > 0$ , então temos

$$\Pi_k = E[x_{t+k}x_t'] = \Pi_{-l} = E[x_{t-l}x_t']$$

podemos escrever  $x_t$  como

$$\begin{aligned} x_t &= Ax_{t-1} + v_{t-1} = A(Ax_{t-2} + v_{t-2}) + v_{t-1} = A^2x_{t-2} + Av_{t-2} + v_{t-1} \\ &= A^2(Ax_{t-3} + v_{t-3}) + Av_{t-2} + v_{t-1} \\ &= A^3x_{t-3} + A^2v_{t-3} + Av_{t-2} + A^0v_{t-1} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$x_t = A^l x_{t-l} + \sum_{i=0}^{l-1} A^i v_{t-1-i} \quad (4.8)$$

portanto

$$\Pi_{-l} = E[x_{t-l}x_t'] = E \left[ x_{t-l} \left( A^l x_{t-l} + \sum_{i=0}^{l-1} A^i v_{t-1-i} \right)' \right] =$$

$$E[x_{t-l}x_t'] = E \left[ x_{t-l} \left( x_{t-l}'(A^l)' + \sum_{i=0}^{l-1} v_{t-1-i}'(A^i)' \right) \right]$$

$$E[x_{t-l}x_t'] = E[x_{t-l}x_{t-l}'](A^l)' + \sum_{i=0}^{l-1} E[x_{t-l}v_{t-1-i}'](A^i)'$$

como  $x_{t-1}$  é independente dos ruídos passados  $v_{t-1-i}$  temos

$$E[x_{t-l}x_t'] = E[x_{t-l}x_{t-l}'](A^l)'$$

$$\Pi_{-l} = \Pi_0(A^l)'$$

como  $l = -k$  temos

$$\Pi_k = \Pi_0(A^{-k})' = \Pi_0(A^l)^{-k}, \quad \text{para } k < 0 \quad (4.9)$$

De (4.7) e (4.9) temos o resultado geral

$$\Pi_k = E[x_{t+k}x_t'] = \begin{cases} A^k \Pi_0, & \text{para } k \geq 0 \\ \Pi_0 (A')^{-k}, & \text{para } k < 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

onde  $\Pi_0$  é uma matriz definida positiva que satisfaz a equação de Lyapunov

$$\Pi_0 = A \Pi_0 A' + Q, \quad (4.11)$$

sendo  $Q$  a covariância do ruído  $v_t$ .

O resultado anterior pode ser enunciado de uma forma diferente dizendo que qualquer processo estocástico markoviano estacionário  $(x_t)$  é o estado de um sistema linear invariante no tempo excitado por um processo ruído branco  $(v_t)$ .

Os processos gaussiano-markovianos podem ser decompostos de forma similar aos sistemas determinísticos. Em Faurre (1973) foi provado o seguinte teorema:

**Teorema 4.2.3** *Todo processo gaussiano-markoviano estacionário  $(x_t)$  pode ser considerado, após uma mudança de base, como gerado pela seguinte equação linear recorrente:*

$$x_{t+1} = Fx_t + v_t$$

com  $E(v_k v_j') = Q \delta_{k,j}$ , e  $E(x_t x_t') = \Pi_0 = P$ , onde

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_{13} \\ 0 & F_2 & F_{23} \\ 0 & 0 & F_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com  $F_1$  uma matriz assintoticamente estável,  $F_2$  uma matriz oscilatória (similar a uma matriz diagonal onde seus autovalores estão no círculo unitário), o par  $(F_1, L_1)$  completamente controlável, onde  $Q_1 = L_1 L_1'$ . As matrizes  $F_{13}, F_{23}$  e  $F_3$  são quaisquer,  $P_1$  é uma matriz definida positiva solução da equação

$$P_1 - F_1 P_1 F_1' = Q_1.$$

$P_2$  é uma matriz positiva definida que verifica a equação

$$P_2 - F_2 P_2 F_2' = 0.$$

**Prova:** Ver Faurre (1973). ■

Esta decomposição canônica é semelhante à decomposição de sistemas lineares dinâmicos em partes completamente controlável e não controlável. Assim como esta decomposição estende-se ao caso dos sistemas variantes no tempo, seria possível estender este resultado ao caso dos processos gaussiano-markovianos não estacionários.

#### 4.2.2 Representação de processos estocásticos estacionários

Um processo estocástico gaussiano estacionário ( $y_t$ ) de média nula admite uma realização markoviana se existem um processo markoviano ( $x_t$ ), (não necessariamente da mesma dimensão) e um processo ruído branco ( $w_t$ ) tal que

$$y_t = Cx_t + w_t. \quad (4.12)$$

Seja ( $x_t$ ) representado por

$$x_{t+1} = Ax_t + v_t, \quad (4.13)$$

como tanto a equação de estado como a de saída possuem entradas aleatórias ruído branco, formamos o vetor destas entradas como  $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$  que é um processo vetorial ruído branco gaussiano de média nula com covariância dada por:

$$E \left( \begin{bmatrix} v_t \\ w_t \end{bmatrix} [v'_s, w'_s] \right) = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \delta_{t,s}. \quad (4.14)$$

onde as matrizes  $A$  e  $C$  satisfazem as seguintes hipóteses, ver Faurre (1973):

- $A$  é uma matriz assintoticamente estável
- O par  $(A, L)$  é completamente controlável, onde  $Q = LL'$
- O par  $(A, C)$  é completamente observável.

A dedução da covariância do processo  $(y_t)$  é feita de forma semelhante à do processo markoviano. Seja a matriz de covariância dada por

$$\Lambda_k = E [y_{t+k}y_t'], \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

para  $k = 0$  temos:

$$\Lambda_0 = E [y_t y_t'] = E [y_{t+k} y_{t+k}']$$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= E[(Cx_t + w_t)(Cx_t + w_t)'] \\ &= CE [x_t x_t'] C' + E [w_t w_t'] , \\ &= C\Pi_0 C' + R \end{aligned}$$

fazendo  $\Pi_0 = P$  podemos escrever

$$\Lambda_0 = CPC' + P \quad (4.16)$$

Para  $k > 0$  temos

$$\begin{aligned} E [y_{t+k} y_t'] &= E [(Cx_{t+k} + w_{t+k})(Cx_t + w_t)'] \\ E [y_{t+k} y_t'] &= CE [x_{t+k} x_t'] C' + CE [x_{t+k} w_t'] + E [w_{t+k} x_t'] C' + E [w_{t+k} w_t'] , \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\Lambda_k = CE [x_{t+k} x_t'] C' + CE [x_{t+k} w_t'] + E [w_{t+k} x_t'] C' , \quad (4.18)$$

(4.6) no segundo termo de (4.18) dá

$$E [x_{t+k} w_t'] = E \left[ \left( A^k x_t + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} v_{t+i} \right) w_t' \right]$$

$$E [x_{t+k} w_t'] = A^k E [x_t w_t'] + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} E [v_{t+i} w_t']$$

$$E [x_{t+k} w_t'] = A^{k-1} S.$$

(4.8) no terceiro termo de (4.18) fornece

$$E[w_{t+k}x'_t] = E \left[ w_{t+k} \left( A^l x_{t-l} + \sum_{i=0}^{l-1} A^i v_{t-1-i} \right)' \right]$$

$$E[w_{t+k}x'_t] = E \left[ w_{t+k} \left( x'_{t-l}(A^l)' + \sum_{i=0}^{l-1} v'_{t-1-i}(A^i)' \right) \right]$$

$$E(w_{t+k}x'_t) = E[w_{t+k}x'_{t-l}](A^l)' + \sum_{i=0}^{l-1} E[w_{t+k}v'_{t-1-i}](A^i)' = 0$$

Então para  $k > 0$  temos

$$\Lambda_k = C\Pi_k C' + CA^{k-1}S$$

como para  $k > 0$   $\Pi_k = A^k P$  temos

$$\Lambda_k = CA^k PC' + CA^{k-1}S = CA^{k-1}(APC' + S).$$

De modo similar podemos provar que para  $k < 0$ ,  $\Lambda_k$  é dado por

$$\Lambda_k = (APC' + S)'(A')^{-k-1}C'.$$

Se definimos

$$M = APC' + S \tag{4.19}$$

temos

$$\Lambda_k = \begin{cases} M'(A')^{-k-1}C', & \text{para } k < 0 \\ \Lambda_0, & \text{para } k = 0 \\ CA^{k-1}M, & \text{para } k > 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Como

$$E \left( \begin{bmatrix} v_t \\ w_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_t & w'_t \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(v_t v'_t) & E(v_t w'_t) \\ E(v_t w'_t)' & E(w_t w'_t) \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

De (4.11), com  $\Pi_0 = P$ , temos  $Q = P - APA'$ . De (4.19), temos  $S = M - APC'$ , e de (4.16) temos  $R = \Lambda_0 - CPC'$ , assim a matriz do vetor de ruídos é

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P - APA' & M - APC' \\ (M - APC')' & \Lambda_0 - CPC' \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.22)$$

como (4.22) é uma matriz de covariância, ela deve ser sempre semidefinida positiva. Como veremos posteriormente, esta restrição será fundamental para estabelecer a existência de uma solução  $P$  em termos de LMI's (Linear Matrix Inequalities).

### 4.3 Realização de processos estocásticos estacionários

O problema da realização de um processo estocástico estacionário  $(y_t)$ , nesta Tese, consiste em encontrar um ou mais conjuntos de matrizes que representam o processo a partir do conhecimento da função de covariância. Isto é, dada a seqüência de matrizes de covariância  $\Lambda_k \triangleq E(y_{t+k}y_t')$ ,  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , encontrar as matrizes das equações (4.13) e (4.12), assim como a matriz de covariância do vetor de ruídos (4.14). Isto pode ser parcialmente resolvido se for possível fatorar a covariância como na equação (4.20), ou seja, obtidas as matrizes  $A, C$  e  $M$ . Para achar a matriz de covariância dos ruídos a LMI (4.22) deve ser resolvida, isto é, deve-se achar o valor de  $P$ . Geralmente o valor de  $\Lambda_0$  é calculado a partir dos dados observados.

A semelhança existente entre a seqüência de matrizes resposta ao impulso de um sistema linear invariante no tempo e a seqüência das matrizes de covariância com representação markoviana, fez com que se explorassem vários métodos para resolver o problema da realização de uma função de transferência, para fatorar as matrizes de covariância, ver Akaike (1975, 1974, 1976). Em Aoki (1990, 1983, 1987) foi desenvolvido um método, baseado na realização de sistemas determinísticos e na decomposição em valores singulares das matrizes de Hankel, construídas pelas covariâncias estimadas a partir dos dados observados (série temporal), para o cálculo das matrizes  $A, C$  e  $M$ . Este método será descrito e comentado posteriormente. Aoki utiliza o modelo inovativo dado por:

$$x_{t+1} = Ax_t + Ke_t$$

$$y_t = Cx_t + e_t,$$

onde  $(e_t)$  é o processo inovativo (ver Capítulo 2). Se a covariância deste processo é dada por

$$E(e_t, e_s') = \Delta\delta_{t,s},$$

então o vetor de perturbação é  $\begin{bmatrix} Ke_t \\ e_t \end{bmatrix}$  e a sua covariância é

$$E \left\{ \begin{bmatrix} Ke_t \\ e_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t K' & e_t' \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} KE(e_t e_t') K' & KE(e_t e_t') \\ E(e_t e_t') K' & E(e_t e_t') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \Delta K' & K \Delta \\ \Delta K' & \Delta \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Igualando as matrizes (4.22) e (4.23) temos

$$\begin{aligned} K \Delta K' &= P - A P A' \\ K \Delta &= M - A P C' \\ \Delta &= \Lambda_0 - C P C' \end{aligned} \quad (4.24)$$

Supondo que  $\Delta$  seja uma matriz simétrica definida positiva de (4.24) temos

$$K = (M - A P C') \Delta^{-1},$$

logo

$$(M - A P C') \Delta^{-1} \Delta \Delta^{-1} (M - A P C')' = P - A P A'$$

ou

$$P = A P A' + (M - A P C') (\Lambda_0 - C P C')^{-1} (M - A P C')'. \quad (4.25)$$

que é uma equação algébrica de Riccati. Uma vez que  $K$  e  $\Delta$  são únicos para uma dada matriz de covariância, existe uma correspondência direta entre a solução de (4.25) e todas as possíveis realizações no espaço de estado do modelo inovativo.

### 4.3.1 Realizações markovianas e fatorações espectrais

A função densidade espectral de um processo estocástico  $(y_t)$  é definida como a transformada de Fourier da covariância  $\Lambda_k$  do processo. Isto é

$$\Phi(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda_k e^{-j\omega k}. \quad (4.26)$$

A densidade espectral de um processo estocástico estacionário no sentido amplo, com representação markoviana (4.12), (4.13) e covariância do ruído (4.14), com densidade espectral dada por (4.20), pode ser calculada da seguinte forma:

$$\Phi(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \Lambda_k e^{-j\omega k} + \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \Lambda_k e^{-j\omega k} \quad (4.27)$$

substituindo (4.20) em (4.27) temos

$$\Phi(e^{j\omega}) = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} CA^{k-1} M e^{-j\omega k} + \sum_{k=1}^{\infty} M'(A')^{k-1} C' e^{+j\omega k}$$

se  $l = k - 1$  temos

$$\Phi(e^{j\omega}) = \Lambda_0 + \sum_{l=0}^{\infty} CA^l M e^{-j\omega(l+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} M'(A')^l C' e^{+j\omega(l+1)}. \quad (4.28)$$

Analisemos o segundo termo de (4.28)

$$\sum_{l=0}^{\infty} CA^l M e^{-j\omega(l+1)} = C \left[ \sum_{l=0}^{\infty} (e^{-j\omega} A)^l \right] M e^{-j\omega}, \quad (4.29)$$

se chamamos  $\tilde{A} = e^{-j\omega} A$ , e  $M e^{-j\omega} = \tilde{B}$  a somatória (4.29) fica como

$$\sum_{l=0}^{\infty} CA^l M e^{-j\omega(l+1)} = \sum_{l=0}^{\infty} C \tilde{A}^l \tilde{B}.$$

Podemos escrever esta relação como

$$C \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{A}^l \right] \tilde{B} = C (I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = C (I - e^{-j\omega} A)^{-1} M e^{-j\omega}.$$

Seguindo um procedimento similar encontramos o terceiro termo de (4.28) dado por

$$\sum_{l=0}^{\infty} M'(A')^l C' e^{+j\omega(l+1)} = M'(I - e^{+j\omega} A')^{-1} C' e^{+j\omega},$$

ou seja temos

$$\Phi(e^{j\omega}) = \Lambda_0 + C (I - e^{-j\omega} A)^{-1} M e^{-j\omega} + M'(I - e^{+j\omega} A')^{-1} C' e^{+j\omega}$$

$$\Phi(e^{j\omega}) = \Lambda_0 + C (e^{+j\omega} I - A)^{-1} M + M'(e^{-j\omega} I - A')^{-1} C'$$

se definimos  $z = e^{j\omega}$ , temos

$$\Phi(z) = \Lambda_0 + C(zI - A)^{-1}M + M'(z^{-1}I - A')^{-1}C' \quad (4.30)$$

se chamamos

$$H(z) = \frac{1}{2}\Lambda_0 + C(zI - A)^{-1}M, \quad (4.31)$$

temos

$$\Phi(z) = H(z) + H(z^{-1})'. \quad (4.32)$$

Como tanto (4.26) como (4.32) em muitas outras referências são chamadas de matriz de densidade espectral, nós também as chamaremos assim. Podemos utilizar a fatoração espectral para definir e/ou encontrar modelos no espaço de estado que resolvam o problema de realização estocástica. Vimos no Capítulo anterior que se for possível fatorar a matriz de densidade espectral como

$$\Phi(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{W}(z^{-1})',$$

o sistema dinâmico linear invariante no tempo, representado pela função de transferência  $\mathbf{W}(z)$ , será uma realização do processo estocástico, onde o processo estocástico de entrada é um ruído branco de covariância unitária. Se o processo de entrada não é unitário, e sim de covariância  $Q$ , por exemplo, a matriz de densidade espectral pode ser escrita como

$$\Phi(z) = \mathbf{W}(z)Q\mathbf{W}(z^{-1})'.$$

Nesta parte da Tese, podemos fazer menção aos resultados estudados no Capítulo anterior, isto é, aplicar o lema positivo real para poder caracterizar o conjunto de matrizes de cada representação que modela o processo estacionário. O problema aqui abordado é conhecido como o problema inverso da geração de covariâncias estacionárias, ver Anderson (1969, 1967b). Existem vasta teoria e prática neste assunto e não pretendemos fazer uma abordagem extensa mas apenas resgatar os resultados principais e necessários para esta Tese. Na resolução do problema de realização estocástica estamos interessados nos modelos estáveis e de menor dimensão possível, isto é em uma realização mínima; sendo assim, temos que utilizar algoritmos de realização que nos dêem (se possível) este tipo de matrizes.

Seja  $\Phi(z)$  a matriz de densidade espectral de um processo  $(y_t)$ , e seja  $\{A, M, C, \frac{1}{2}\Lambda_0\}$  uma realização mínima de  $H(z)$ , com  $A$  estável e onde  $H(z) = C(zI - A)^{-1}M + \frac{1}{2}\Lambda_0$  é um **fator de soma**

da matriz de densidade espectral, isto é

$$\Phi(z) = H(z) + H(z^{-1})'. \quad (4.33)$$

Podemos definir uma matriz, **fator multiplicador**,  $W(z)$ , como

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}L + J. \quad (4.34)$$

Notemos que as matrizes  $A$  e  $C$  são iguais para os dois fatores, ver Anderson (1969, 1967a). Seguindo um procedimento similar ao do Lema positivo real, as equações de Kalman-Yakubovich podem ser reestruturadas de tal forma que as matrizes  $L$  e  $J$  sejam determinadas pela solução de uma inequação matricial.

**Lema 4.3.1** *Seja  $H(z)$  uma matriz positiva real derivada da densidade espectral  $\Phi(z)$ , obtida mediante os procedimentos utilizados na equação (4.31), e seja  $\{A, M, C, \frac{1}{2}\Lambda_0\}$  uma realização mínima de  $H(z)$ , tal que (4.33) seja satisfeita. Então a quádrupla  $\{A, L, C, J\}$  definida em (4.34) é uma realização estocástica do processo  $(y_t)$ , com densidade espectral  $\Phi(z)$  se e somente se existe uma matriz simétrica  $P$  positiva definida tal que as seguintes equações são satisfeitas:*

i)  $P - APA' = LL'$

ii)  $M - APC' = LJ'$

iii)  $\Lambda_0 - CPC' = JJ'$

**Prova** Podemos (ver prova do lema positivo real de Cap.2) escrever  $H(z)$  e  $H(z^{-1})'$  como

$$H(z) = \left[ \begin{array}{c|c} A & M \\ \hline C & \frac{1}{2}\Lambda_0 \end{array} \right] \quad H(z^{-1})' = \left[ \begin{array}{c|c} A^* & -A^*C' \\ \hline M'A^* & \frac{1}{2}\Lambda_0' - M'A^*C' \end{array} \right]$$

onde  $(A')^{-1} = A^*$ , e então podemos escrever

$$\Phi(z) = H(z) + H(z^{-1})' = H(z^{-1})' + H(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A^* & 0 & -A^*C' \\ 0 & A & M \\ \hline M'A^* & C & \Lambda_0 - M'A^*C' \end{array} \right]$$

Aplicando a transformação de similaridade

$$T = \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ P & I \end{array} \right], \quad T^{-1} = T = \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ -P & I \end{array} \right]$$

temos:

$$A_T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ PA^* - AP & A \end{bmatrix}$$

$$B_T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A^*C' \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^*C' \\ M - PA^*C' \end{bmatrix}$$

$$C_T = [M'A^* \ C] \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{bmatrix} = [M'A^* - CP \ C].$$

Como a transformação de similaridade não afeta a função de transferência, podemos escrever

$$\Phi(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A^* & 0 & -A^*C' \\ PA^* - AP & A & M - PA^*C' \\ \hline M'A^* - CP & C & \Lambda_0 - M'A^*C' \end{array} \right]. \quad (4.35)$$

Seja  $\Phi(z)$  fatorada na forma  $\Phi(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{W}(z^{-1})'$ , onde a matriz  $\mathbf{W}(z)$  é definida como  $\mathbf{W}(z) = C(zI - A)^{-1}L + J$ , ou na notação adotada,  $\mathbf{W}(z) = \left[ \begin{array}{c|c} A & L \\ \hline C & J \end{array} \right]$ . Notemos que as matrizes  $A$  e  $C$  são idênticas às do **fator soma** da função espectral, ver Anderson (1967c), logo temos:

$$\Phi(z) = [C(zI - A)^{-1}L + J][C(z^{-1}I - A)^{-1}L + J]'$$

De forma similar à (3.51, Cap. 3), temos

$$\mathbf{W}(z^{-1})' = \left[ \begin{array}{c|c} A^* & -A^*C' \\ \hline L'A^* & J' - L'A^*C' \end{array} \right].$$

Para dois sistemas  $H_1(z) = C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$  e  $H_2(z) = C_2(zI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$  a representação no espaço de estado, assim como a função de transferência dos dois sistemas em cascata é

$$H_c(z) = H_1(z)H_2(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ B_1C_2 & A_1 & B_1D_2 \\ \hline D_1C_2 & C_1 & D_1D_2 \end{array} \right].$$

Logo, com abuso da notação, escrevemos

$$\Phi(z) = \left[ \begin{array}{c|c} A & L \\ \hline C & J \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} A^* & -A^*C' \\ \hline L'A^* & J' - L'A^*C' \end{array} \right]$$

$$\Phi(z) = \left[ \begin{array}{cc|c} A^* & 0 & -A^*C' \\ LL'A^* & A & L(J' - L'A^*C') \\ \hline JL'A^* & C & J(J' - L'A^*C') \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A^* & 0 & -A^*C' \\ LL'A^* & A & LJ' - LL'A^*C' \\ \hline JL'A^* & C & JJ' - JL'A^*C' \end{array} \right], \quad (4.36)$$

igualando (4.35) e (4.36) obtemos

$$PA^* - AP = LL'A^*$$

ou

$$P(A^{-1})' - AP = LL'(A^{-1})'$$

ou multiplicando por  $A'$  a ambos membros da equação acima obtemos

$$P - APA' = LL' \quad (4.37)$$

Igualando os outros termos de (4.35) e (4.36) obtemos

$$LJ' - LL'A^*C' = M - PA^*C'$$

$$LJ' - (P - APA')A^*C' = M - PA^*C'$$

$$LJ' + APC' = M$$

ou

$$M - APC' = LJ' \quad (4.38)$$

Por último de (4.38) e da igualdade de (4.35) e (4.36),

$$\Lambda_0 - M'A^*C' = JJ' - JL'A^*C',$$

temos

$$\Lambda_0 - (LJ' + APC')'A^*C' = JJ' - JL'A^*C'$$

$$\Lambda_0 - JL'A^*C' - CPA'A^*C' = JJ' - JL'A^*C'$$

ou

$$\Lambda_0 - CPC' = JJ' \quad (4.39)$$

■

Novamente o conjunto de equações algébricas obtidas do lema pode ser resolvido por meio da solução de uma equação algébrica discreta de Riccati, ver a equação (4.25). A realização obtida pres-

supõe que a entrada é um processo estocástico ruído branco de covariância unitária. Comparando a função de covariância (4.22) da representação markoviana com as equações i), ii) e iii) do lema observamos que elas são semelhantes, por não dizer idênticas, sempre que as matrizes da representação sejam iguais às do fator soma  $H(z)$ , com as condições:

$$Q = LL', S = LJ' e R = JJ'.$$

Podemos notar que as matrizes  $L$  e  $J$  dependem de  $P$ , ou vice-versa. Pode ser que a solução do sistema de equações não seja única, isto é, podem existir várias matrizes  $P$  que as satisfaçam. Em Faurre (1973) foi provado que o conjunto de soluções é um conjunto convexo e que por isso têm  $P^*$  (Max) e um  $P_*$  (min), tal que todas as soluções estejam em

$$P_* \leq P \leq P^*.$$

A matriz  $P$  está relacionada com o estado da realização markoviana, isto é  $P = E(x_t x_t') = \Pi_0$ , portanto para os diversos valores de  $P$  teremos um estado particular associado. Em Akaike (1975, 1974) é demonstrado que o espaço de estado de uma representação markoviana é o espaço preditor, e que uma base qualquer deste espaço é o estado de uma realização mínima do processo. Estudaremos este fato a seguir.

## 4.4 Espaço preditor e o estado da representação markoviana

Nesta Seção mostramos que o espaço de estado da representação de um processo estocástico estacionário está dado pelo espaço preditor, o espaço linear gerado pelos preditores quando o sistema é excitado por uma entrada ruído branco gaussiana com matriz do covariância unitária. Uma realização mínima corresponde à seleção de uma base deste espaço preditor. A estrutura da interface de informação entre o passado e o futuro de um processo estocástico discreto no tempo é analisada utilizando o conceito de análise das correlações canônicas. Duas representações markovianas extremas podem ser obtidas com o estado definido pelo conjunto de variáveis canônicas que representam a informação passada projetada no futuro e a informação futura projetada no passado, respectivamente. Este resultado esclarece a estrutura probabilística do algoritmo de realização de sistemas estocásticos de Faurre, Faurre (1976).

O conceito de preditor está intimamente ligado à predição da saída de um sistema com base no conhecimento adquirido a partir das saídas e entradas presentes e passadas do sistema. Para um processo estocástico, onde não há entrada e temos somente o conhecimento de um trajetória amostral (série temporal), uma vez eleito um parâmetro de tempo  $t \in \mathbb{Z}$ , onde o tempo real está implícito

no parâmetro, ele é dito ser o tempo **presente**; o conjunto de instantes de tempo anteriores a  $t$ , denominado **passado**, é o conjunto de parâmetros  $\{t-1, t-2, \dots\}$ ; o conjunto de instantes de tempo posteriores a  $t$ ,  $\{t+1, t+2, \dots\}$  é denominado **futuro**. Seguindo essa notação teremos: a saída presente é  $y_t$ , as saídas passadas são  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$ , e as saídas futuras  $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots$ . Estes dois últimos conjuntos podem também ser denominados de passado e futuro, respectivamente, sempre que estejam claros no contexto. No nosso caso as previsões são dadas por esperanças condicionais, isto é, se queremos encontrar a previsão de um passo de um processo estocástico ( $y_t$ ), no instante  $t$ , ela é dada e denotada por

$$y_{t+1|t^-} = E(y_{t+1}|y_t, y_{t-1}, \dots),$$

Analogamente a de dois passos é

$$y_{t+2|t^-} = E(y_{t+2}|y_t, y_{t-1}, \dots),$$

e assim sucessivamente para  $l$  passos.

Se definimos os vetores infinitos passado e futuro como:

$$\mathbf{y}_{t-1}^- = \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ y_{t-3} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{t+1}^+ = \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_{t+2} \\ y_{t+3} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

as previsões podem ser reescritas como

$$y_{t+1|t^-} = E(y_{t+1}|y_t, \mathbf{y}_{t-1}^-), \quad y_{t+2|t^-} = E(y_{t+2}|y_t, \mathbf{y}_{t-1}^-), \dots \quad (4.41)$$

Associados ao processo podemos definir alguns espaços gerados por estes conjuntos; assim denotemos por  $\mathcal{Y}$  ao espaço total gerado por todas as combinações lineares finitas do processo ( $y_t$ ). Para um melhor entendimento vamos supor que as variáveis aleatórias são unidimensionais. Para sistemas com mais dimensões os resultados são semelhantes, porém deve-se ter cuidado na interpretação de certas definições. Assim podemos definir o **espaço passado** em  $t$ , como o espaço gerado pela combinação linear finita das variáveis aleatórias passadas. Assim para o caso escalar:

$$\mathcal{Y}_t^p = \{z \in \mathbb{R} \mid z = \sum_i \alpha_i y_i, y_i \subset \mathbf{y}_{t-1}^-, \alpha_i \in \mathbb{R}\}, \quad (4.42)$$

porém se o processo é multivariado de dimensão  $m$ , então o espaço passado será denotado por:

$$\mathcal{Y}_t^p = \{z \in \mathbb{R}^m \mid z^k = \sum_i \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} y_i^j, k \in [1, 2, \dots, m], y_i \subset \mathbf{y}_{t-1}^-, \alpha_{i,j} \in \mathbb{R}\}. \quad (4.43)$$

Em outras palavras o conjunto esta composto por variáveis aleatórias  $z$  de dimensão  $m$ , tal que cada componente da variável,  $z^k$ , seja uma combinação linear finita de todos os elementos das variáveis aleatórias envolvidas pertencentes a  $\mathbf{y}_{t-1}^-$ . De forma similar definimos o **espaço futuro** em  $t$ , como

$$\mathcal{Y}_t^f = \{z \in \mathbb{R} \mid z = \sum_i \alpha_i y_i, y_i \subset \mathbf{y}_{t+1}^+, \alpha_i \in \mathbb{R}\}. \quad (4.44)$$

O espaço presente é definido somente pela variável aleatória  $y_t$ , isto é:

$$\mathcal{Y}_t = \{z \in \mathbb{R}^m \mid z^k = \sum_i \alpha_i y_t^i, i \in [1, 2, \dots, m], k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Podemos definir também o espaço inovação de uma variável aleatória Estes espaços são fechados em relação à norma quadrática média, como definido no Capítulo 2; sendo assim eles são espaços de Hilbert . A partir destes espaços podemos definir os espaços condicionais ou espaços projetados da seguinte forma: Seja  $\mathcal{Y}_t^{f|p}$  o espaço futuro projetado nos espaços presente e passado definido como:

$$\mathcal{Y}_t^{f|p} = \{z \in \mathcal{Y}_t^p \cup \mathcal{Y}_t, \text{ tais } z = E(y^f | \mathcal{Y}_t^p, \mathcal{Y}_t), \text{ para algum } y^f \in \mathcal{Y}_t^f\}$$

Observemos que o espaço  $\mathcal{Y}_t^{f|p}$  está contido no espaço  $\mathcal{Y}_t^p \cup \mathcal{Y}_t$ . Este espaço é gerado pelos preditores; na figura (4.1) mostramos a interpretação geométrica de um elemento deste espaço.

Para o caso unidimensional a seguir demonstramos o dito anteriormente. Seja  $z_{t+l}$ , com  $l > 0$ , um elemento do espaço futuro, isto é  $z_{t+l} = \sum_i \alpha_i y_i$ , com  $y_i \in \mathcal{Y}_t^f$ . Logo sua projeção nos espaços presente e passado é

$$\hat{z}_{t+l} = E(z_{t+l} | y_t, y_{t-1}, y_{t-2} \dots) = \sum_i \alpha_i E(y_i | y_t, y_{t-1}, \dots),$$

como o  $i$  pertence ao conjunto dos instantes do tempo futuro, concluímos que o espaço é gerado pelos preditores. Da mesma forma podemos definir o espaço passado projetado nos espaços presente e futuro. Notemos que intencionalmente o espaço passado também é projetado no espaço presente, veremos mais adiante que isto nos permitirá definir diferentes tipos de realizações. Então o espaço passado projetado nos espaços presente e futuro é dado por:

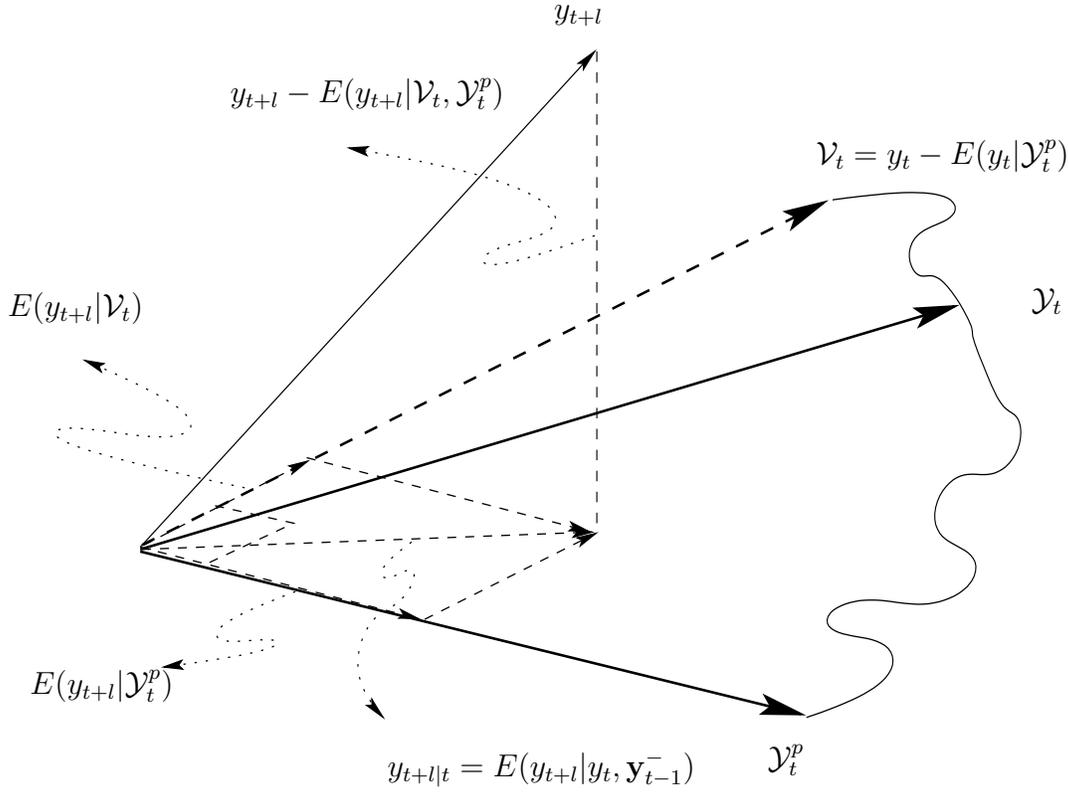


Fig. 4.1: Espaço predictor.

$$\mathcal{Y}_t^{p|f} = \{z \in \mathcal{Y}_t^f \cup \mathcal{Y}_t, \text{ tais } z = E(y^p | \mathcal{Y}_t^f, \mathcal{Y}_t), \text{ para algum } y^p \in \mathcal{Y}_t^p\}.$$

Seguindo um desenvolvimento similar, podemos concluir, para o caso SISO, que os geradores do espaço passado projetados nos espaços presente e futuro, estão dados pelos corretores

$$E(y_t | y_t, y_{t+1}, \dots), E(y_{t-1} | y_t, y_{t+1}, \dots), E(y_{t-2} | y_t, y_{t+1}, \dots), \dots$$

Podemos encontrar relações importantes para os espaços gerados. Para ilustrar o desenvolvimento, considerando a figura (4.1), podemos observar que o vetor  $y_{t+l} - E(y_{t+l} | y_t, \mathcal{Y}_{t-1}^-)$  é ortogonal ao espaço gerado por  $y_t, y_{t-1}, \dots$  (espaços passados e presente), logo temos

$$E\{[y_{t+l} - E(y_{t+l} | y_t, \mathcal{Y}_{t-1}^-)]y'_{t-i}\} = 0, \text{ onde } i \geq 0, l \geq 0,$$

daí temos

$$E(y_{t+l}y'_{t-i}) = E\{E(y_{t+l} | y_t, \mathcal{Y}_{t-1}^-)y'_{t-i}\} \quad (4.45)$$

sem perda de generalidade podemos fazer  $t = 0$ , e simplificar a notação para:

$$E(y_t y'_{-i}) = E\{y_t |_{\text{passado}_0} y'_{-i}\}, \quad (4.46)$$

onde  $\text{passado}_t \triangleq y_t, y_{t-1}, \dots$ .

De forma similar podemos demonstrar que

$$E(y_{-i} y'_j) = E(y_{-i} |_{\text{futuro}_0} y'_j), \quad \text{onde } i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

onde  $\text{futuro}_t \triangleq y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots$ .

#### 4.4.1 Bases dos espaços preditor e corretor

Supondo que o processo estocástico  $(y_t)$  seja estacionário, vimos na subseção 4.2.2 que a covariância,  $\{\Lambda_k = E(y_{t+k} y'_t); \quad k = 0, 1, \dots\}$  possui uma fatoração do tipo (4.20), para  $k > 0$ , dada por:

$$\Lambda_k = C A^{k-1} M, \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

onde  $A$  é de dimensão finita. Seja o seu polinômio característico dado por

$$\lambda^r + \sum_{i=1}^r a_i \lambda^{r-i} = 0 \quad (4.48)$$

Pelo teorema de Cayley Hamilton temos

$$A^r + \sum_{i=1}^r a_i A^{r-i} = 0, \quad \text{ou} \quad A^r = - \sum_{i=1}^r a_i A^{r-i} \quad (4.49)$$

Das equações 4.47 e 4.49 temos

$$\begin{aligned} \Lambda_{r+1} &= C A^r M \\ \Lambda_{r+1} &= C \left( - \sum_{i=1}^r a_i A^{r-i} \right) M = - \sum_{i=1}^r a_i C A^{(r+1-i)-1} M = - \sum_{i=1}^r a_i \Lambda_{r+1-i} \end{aligned}$$

para um  $j > 0$  temos

$$\Lambda_{r+j} = - \sum_{i=1}^r a_i \Lambda_{r+j-i}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.50)$$

Podemos escrever estas relações como

$$E[y_{t+r}y'_{t-j}] = - \sum_{i=1}^r a_i E[y_{t+r-i}y'_{t-j}], \quad t = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3, \dots$$

ou

$$E \left[ \left( y_{t+r} + \sum_{i=1}^r a_i y_{t+r-i} \right) y'_{t-j} \right] = 0$$

podemos escrever (4.50) como:

$$\Lambda_{r+(m+j)} = - \sum_{i=1}^r a_i \Lambda_{r+(m+j)-i}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, \dots \quad (4.51)$$

ou

$$E[y_{t+r+m}y'_{t-j}] = - \sum_{i=1}^r a_i E[y_{t+r+m-i}y'_{t-j}], \quad m = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.52)$$

pela relação(4.51) para um  $t \neq 0$  e  $j = i$  temos

$$E(y_{t+l}y'_{t-j}) = E\{E(y_{t+l}|y_t, \mathbf{y}_{t-1}^-)y'_{t-j}\} = E(y_{t+l|t^-}y'_{t-j}), \quad (4.53)$$

onde  $y_{t+l|t^-} = E(y_{t+l}|y_t, \mathbf{y}_{t-1}^-)$ . Fazendo  $l = r + m$  em (4.52) temos

$$E[y_{t+r+m|t^-}y'_{t-j}] = - \sum_{i=1}^r a_i E[y_{t+r+m-i|t^-}y'_{t-j}] \quad (4.54)$$

ou

$$E \left[ \left( y_{t+r+m|t^-} + \sum_{i=1}^r a_i y_{t+r+m-i|t^-} \right) y'_{t-j} \right] = 0. \quad (4.55)$$

Como  $y_{t+r+m|t-1} + \sum_{i=1}^r a_i y_{t+r+m-i|t-1}$  é um elemento que pertence ao espaço  $\mathcal{Y}_t \cup \mathcal{Y}_{t-1}^-$ , para que (4.55) seja verdade, temos

$$y_{t+r+m|t-1} + \sum_{i=1}^r a_i y_{t+r+m-i|t-1} = 0$$

ou

$$y_{t+r+m|t-1} = - \sum_{i=1}^r a_i y_{t+r+m-i|t-1}. \quad (4.56)$$

Esta expressão mostra claramente que existe um número finito de preditores que geram o espaço preditor. De forma similar podemos concluir para o espaço corretor. A expressão análoga à (4.56) é:

$$y_{t-(r+m)|t+} = - \sum_{i=1}^r a_i y_{t-(r+m)+i|t+} \quad (4.57)$$

Estes resultados mostram que os espaços  $\mathcal{Y}_t^{f|p}$  e  $\mathcal{Y}_t^{p|f}$  são de dimensão finita.

Para construir uma base do espaço preditor, que constitui o estado de uma representação markoviana, utilizaremos a análise das correlações canônicas, que é bem conhecida na área de estatística, e da qual fazemos uma pequena revisão no apêndice B.

## 4.5 Variáveis canônicas como interface de informação

Consideremos dois vetores compostos por variáveis aleatórias gaussianas de média zero:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Se eles compartilham qualquer informação estatística em comum, esta deve estar refletida em qualquer uma das suas distribuições simultâneas que devem ser diferentes das distribuições independentes de  $u$  e  $v$ . Da definição de função característica é claro que a distribuição simultânea de  $u$  e  $v$  é determinada pela distribuição de cada combinação linear possível dos elementos de  $u$  e  $v$ . Assim, a análise da dependência entre  $u$  e  $v$  é a análise do espaço interseção dos espaços das duas variáveis aleatórias que são definidas como os conjuntos de todas as combinações lineares possíveis dos elementos de  $u$  e de  $v$ , respectivamente. Denotemos estes espaços por  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , respectivamente, onde

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{R} \mid z = \sum_{i=1}^l \alpha_i u_i, \text{ com } \alpha_i \in \mathbb{R}\},$$

$\mathcal{V}$  é definido de forma similar.

A teoria das variáveis e correlações canônicas iniciada por Hotelling (1936), ver Kshirsagar (1972), diz que os espaços  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  têm bases ortonormais

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_r \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_s \end{bmatrix},$$

tal que

$$\begin{aligned} E(\bar{u}_i) &= E(\bar{v}_j) = 0, & i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\ E(\bar{u}_i \bar{u}_j) &= \delta_{ij} & i, j = 1, 2, \dots, r \\ E(\bar{v}_i \bar{v}_j) &= \delta_{ij} & i, j = 1, 2, \dots, s \\ E(\bar{u}_i \bar{v}_j) &= \rho_{ij} & i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

onde  $\rho_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  e  $0 \leq \rho_{ij} \leq 1$

Os  $\rho_{ii}$  estão organizados em forma decrescente (magnitude), isto é:

$$\rho_{ii} \geq \rho_{i+1, i+1}.$$

$r$  e  $s$  são os postos das matrizes de covariâncias de  $u$  e  $v$ , respectivamente, com ( $r \leq l$ ) e ( $s \leq m$ ). As variáveis  $\bar{u}_i$  e  $\bar{v}_i$  são as variáveis canônicas e  $\rho_{ii}$  é o coeficiente de correlação canônica para o par  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ , sendo  $i = 1, 2, \dots, \min(r, s)$ . Se somente os primeiros  $k$  componentes de  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  têm coeficientes de correlação canônica não nula, a informação compartilhada e/ou a causa de dependência entre  $u$  e  $v$ , está completamente contida nos componentes dos vetores:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_k \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Portanto  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  ou os espaços  $\bar{\mathcal{U}} = \text{Span}(\mathbf{U})$  e  $\bar{\mathcal{V}} = \text{Span}(\mathbf{V})$  podem ser considerados como a interface de informação entre os espaços  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ .

Deve estar claro, pela estrutura de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ , que os espaços  $\bar{\mathcal{U}}$  e  $\bar{\mathcal{V}}$  são as projeções de  $\mathcal{V}$  em  $\mathcal{U}$  e de  $\mathcal{U}$  em  $\mathcal{V}$ , respectivamente. Como somente consideramos as variáveis aleatórias com momentos de segunda ordem finitos, as projeções podem ser entendidas seja no sentido das esperanças condicionais ou simplesmente no sentido da otimização do erro quadrático médio, ver Astrom (1970). Para os pares de variáveis aleatórias  $\bar{u}_i$  e  $\bar{v}_i$  positivamente correlacionados, resultados essencialmente idênticos aos

originais  $u$  e  $v$  são obtidos. As observações da estrutura de  $\bar{U}$  e  $\bar{V}$  são muito úteis quando a análise das correlações canônicas é expandida para tratar a análise da dependência de processos estocásticos. A seguir utilizamos este conceito para obter bases do espaço preditor e portanto definir o estado de uma realização de um processo estocástico.

Seja  $(y_t)$  um processo estocástico estacionário no sentido amplo; podemos definir os seguintes vetores:

$$\text{passado}_t = \mathbf{y}_t^- = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{passado}_{t+1} = \mathbf{y}_{t+1}^- = \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$\text{futuro}_t = \mathbf{y}_t^+ = \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t+1} \\ y_{t+2} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{futuro}_{t+1} = \mathbf{y}_{t+1}^+ = \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_{t+2} \\ y_{t+3} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Observamos claramente que  $\mathbf{y}_t^- \subset \mathbf{y}_{t+1}^-$ ; seja  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t^+ \\ \mathbf{y}_t^- \end{bmatrix}$ , isto é, o processo estocástico entendido como um vetor de dimensão infinita. Logo

$$\text{Cov}(\mathbf{y}) = E(\mathbf{y}\mathbf{y}') = \begin{bmatrix} E\{\mathbf{y}_t^+(\mathbf{y}_t^+)'\} & E\{\mathbf{y}_t^+(\mathbf{y}_t^-)'\} \\ E\{\mathbf{y}_t^-(\mathbf{y}_t^+)'\} & E\{\mathbf{y}_t^-(\mathbf{y}_t^-)'\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_y^+ & H_t \\ (H_t)' & \Sigma_y^- \end{bmatrix},$$

como o processo é estacionário, as matrizes que compõem a matriz de covariâncias acima podem ser calculadas como:

$$\Sigma_y^+ = E \left\{ \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t+1} \\ y_{t+2} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_t)' & (y_{t+1})' & (y_{t+2})' & \cdots \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \Lambda_{-1} & \Lambda_{-2} & \cdots \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & \Lambda_{-1} & \cdots \\ \Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{H}_t = E \left\{ \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t+1} \\ y_{t+2} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_t)' & (y_{t-1})' & (y_{t-2})' & \cdots \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 & \cdots \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 & \cdots \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$\Sigma_y^- = E \left\{ \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_t)' & (y_{t-1})' & (y_{t-2})' & \cdots \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 & \cdots \\ \Lambda_{-1} & \Lambda_0 & \Lambda_1 & \cdots \\ \Lambda_{-2} & \Lambda_{-1} & \Lambda_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Pelo teorema da projeção, considerando uma interpretação com abuso de notação, o espaço preditor está gerado por:

$$E(\mathbf{y}_t^+ | \mathbf{y}_t^-) = E\{\mathbf{y}_t^+(\mathbf{y}_t^-)'\} E\{\mathbf{y}_t^-(\mathbf{y}_t^-)'\}^{-1} \mathbf{y}_t^-. \quad (4.64)$$

Notemos que a expressão acima trabalha com covariâncias infinitas; por enquanto estamos interessados na compreensão teórica de alguns resultados, por isso os tomamos como se fossem vetores finitos. Um tratamento mais detalhado está em Lindquist e Picci (1996). Substituindo (4.62) e (4.63) em (4.64) obtemos

$$E(\mathbf{y}_t^+ | \mathbf{y}_t^-) = \mathbf{H}_t (\Sigma_y^-)^{-1} \mathbf{y}_t^- \quad (4.65)$$

Pela análise das correlações canônicas entre  $\mathbf{y}_t^+$  e  $\mathbf{y}_t^-$ , ver Apêndice A, Teorema A.2.1, é possível encontrar matrizes  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{M}$  tal que

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{L} \mathbf{y}_t^+, \quad \mathbf{V}_t = \mathbf{M} \mathbf{y}_t^-.$$

Demonstraremos isto aplicando o Teorema A.2.1. do Apêndice A. Para tal propósito fazemos as seguintes substituições; onde  $\mathbf{y}_t^+ \equiv x$  e  $\mathbf{y}_t^- \equiv y$ :

$$\Sigma_y^+ = \Sigma_{xx} = \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Sigma_y^- = \Sigma_{yy} = (\Sigma_{yy})^{\frac{1}{2}} (\Sigma_{yy})^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\mathbf{H}_t = \Sigma_{xy}$$

Assim para a expressão (4.65) obtemos

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}_t^+ | \mathbf{y}_t^-) &= \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \mathbf{y}_t^- = \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_t^- \\ &= \Sigma_{xx} \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_t^- = \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_t^- \end{aligned}$$

$$= \Sigma_{xx}^{\frac{1}{2}} (\Sigma_{xx}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}}) \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_t^- \quad (4.66)$$

Definindo a matriz normalizada de Hankel como

$$\hat{\mathbf{H}}_t = \Sigma_{xx}^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} = \Sigma_{xx}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_t \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.67)$$

e fazendo sua decomposição em valores singulares temos

$$\hat{\mathbf{H}}_t = USV'$$

que substituindo em (4.66) dá

$$E(\mathbf{y}_t^+ | \mathbf{y}_t^-) = \Sigma_{xx}^{\frac{1}{2}} USV' \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_t^- \quad (4.68)$$

$U$ ,  $V$  e  $S$  são matrizes de dimensões infinitas e têm os seguintes formatos, ver Apêndice A.

$$S = \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } S_r = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \rho_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_r \end{bmatrix}$$

onde os  $\rho_i$  são os coeficientes das correlações canônicas entre  $\mathbf{y}_t^+$  e  $\mathbf{y}_t^-$ . As matrizes  $U$  e  $V$  podem ser decompostas como:

$$U = \begin{bmatrix} U_r & U_\infty \end{bmatrix} \text{ e } V = \begin{bmatrix} V_r & V_\infty \end{bmatrix}.$$

Logo podemos escrever  $\hat{\mathbf{H}}_t = USV' = U_r S_r V_r'$ , pois

$$\hat{\mathbf{H}}_t = \begin{bmatrix} U_r & U_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_r & 0_{r \times \infty} \\ 0_{\infty \times r} & 0_{\infty \times \infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r' \\ V_\infty' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r S_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r' \\ V_\infty' \end{bmatrix} = U_r S_r V_r'.$$

Portanto (4.68) pode ser escrito como:

$$E(\mathbf{y}_t^+ | \mathbf{y}_t^-) = \Sigma_{xx}^{\frac{1}{2}} U_r S_r V_r' \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_t^-.$$

Assim, uma base para o espaço preditor, isto é, para o espaço  $\mathcal{Y}_t^{f|p}$ , pode ser definida como

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{M} \mathbf{y}_t^-,$$

onde  $\mathbf{M} = V_r' \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}}$ , e  $V_r' \in \mathbb{R}^{r \times \infty}$ , com  $\mathbf{V}_t$  de dimensão  $r$  finita. Então para o preditor  $E(y_t | y_t, \mathbf{y}_{t-1}^-)$

existe uma matriz  $C$  tal que

$$E(y_t | y_t, \mathbf{y}_{t-1}^-) = C\mathbf{V}_t$$

ou

$$y_t = C\mathbf{V}_t + w_t$$

onde  $w_t$  é independente dos elementos  $y_t$  e  $\mathbf{y}_{t-1}^-$ . Na verdade, neste caso,  $w_t$  é nulo, pois  $y_t$  está contido no espaço preditor, por definição.

Seguindo o mesmo raciocínio encontramos que a base do espaço corretor, isto é, do espaço  $\mathcal{Y}_t^{p|f}$ , é dada pelo vetor

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{L}\mathbf{y}_t^+,$$

onde  $\mathbf{L} = U_r' \Sigma_{xx}^{-\frac{1}{2}}$ .

De forma semelhante, agora definindo os espaços *passado* $_{t+1}$  e *futuro* $_{t+1}$  como em (4.59) e (4.60), podemos obter as bases

$$\mathbf{U}_{t+1} \text{ e } \mathbf{V}_{t+1}$$

com  $\mathbf{V}_{t+1}$  sendo uma base ortonormal do espaço  $\mathcal{Y}_{t+1}^{f|p}$  e  $\mathbf{U}_{t+1}$  sendo uma base ortonormal de  $\mathcal{Y}_{t+1}^{p|f}$ .

Como  $\mathbf{V}_{t+1}$  é uma base de  $\mathcal{Y}_{t+1}^{f|p} \subset \mathcal{Y}_{t+1}^-$  e  $\mathbf{V}_t$  é uma base de  $\mathcal{Y}_t^{f|p} \subset \mathcal{Y}_t^-$  e  $\mathcal{Y}_t^- \subset \mathcal{Y}_{t+1}^-$ , existe uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$  tal que

$$\mathbf{V}_{t+1} = A\mathbf{V}_t + v_t$$

onde  $v_t$  é independente de  $\mathbf{V}_t$ . A matriz  $A$  pode ser obtida por meio de regressão.

Notemos que para encontrar a base  $\mathbf{V}_{t+1}$ , os vetores

$$\mathbf{y}_{t+1}^- = \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{y}_{t+1}^+ = \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_{t+2} \\ y_{t+3} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

definem o vetor trasladado  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t+1}^+ \\ \mathbf{y}_{t+1}^- \end{bmatrix}$ . Logo

$$\text{Cov}(\mathbf{y}) = E(\mathbf{y}\mathbf{y}') = \begin{bmatrix} E\{\mathbf{y}_{t+1}^+(\mathbf{y}_{t+1}^+)' \} & E\{\mathbf{y}_{t+1}^+(\mathbf{y}_{t+1}^-)' \} \\ E\{\mathbf{y}_{t+1}^-(\mathbf{y}_{t+1}^+)' \} & E\{\mathbf{y}_{t+1}^-(\mathbf{y}_{t+1}^-)' \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_y^+ & H_t \\ (H_t)' & \Sigma_y^- \end{bmatrix},$$

As matrizes  $\Sigma_y^+$ ,  $\Sigma_y^-$  e  $H_t$ , são idênticas às encontradas em (4.61), (4.62) e (4.63), pois por exemplo:

$$\Sigma_y^+ = E \left\{ \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ y_{t+2} \\ y_{t+3} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_{t+1})' & (y_{t+2})' & (y_{t+3})' & \cdots \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \Lambda_{-1} & \Lambda_{-2} & \cdots \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & \Lambda_{-1} & \cdots \\ \Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

Assim devemos encontrar matrizes semelhantes às deduzidas anteriormente, logo uma base do espaço preditor  $\mathcal{Y}_{t+1}^{f|p}$  no instante  $t + 1$  será

$$\mathbf{V}_{t+1} = V_r' \Sigma_{yy}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{t+1}^-.$$

Tanto  $\mathbf{U}_t$  como  $\mathbf{V}_t$  podem ser eleitos para encontrar uma realização do processo estocástico. A dinâmica do sistema está refletida no efeito das translações de  $\mathbf{U}_t$  e  $\mathbf{V}_t$ , pois como  $\mathbf{U}_t$  é uma base do espaço  $\mathcal{Y}_t^{p|f}$  e  $\mathbf{U}_{t+1}$  é um vetor composto por elementos de  $\mathcal{Y}_t^f$ , existe uma única representação

$$\mathbf{U}_{t+1} = F\mathbf{U}_t + w_t \quad (4.70)$$

onde  $F$  é uma matriz  $r \times r$  de coeficientes de regressão de  $\mathbf{U}_{t+1}$  sobre  $\mathbf{U}_t$ ,  $w_t$  é um vetor aleatório de dimensão  $r$  que é independente ou não correlacionado com  $\mathbf{U}_t$ . Pode ser demonstrado, ver Akaike (1975), que  $w_t$  é um processo ruído branco. Como  $y_t = y_{t|t+} = E(y_t|y_t, \mathbf{y}_{t+1}^+)$ , ver eq. (4.40),  $y_t \in \mathcal{Y}_t^{p|f}$ , então existe uma matriz  $H \in \mathbb{R}^{m \times r}$  tal que

$$y_t = H\mathbf{U}_t. \quad (4.71)$$

Assim, definindo  $x_t \triangleq \mathbf{U}_t$ , temos a representação

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Fx_t + w_t \\ y_t &= Hx_t \end{aligned}, \quad (4.72)$$

sendo  $P = E(x_t x_t') = I$ , pois  $\mathbf{U}_t$  é uma base ortonormal, e então  $Q = E(w_t w_t') = I - FF'$ .

Se consideramos a projeção de (4.70) no espaço  $\mathcal{Y}_{t+1}^-$ , obtemos

$$S_r \mathbf{V}_{t+1} = F S_r \mathbf{V}_t + w_t$$

onde  $S_r$  é uma matriz diagonal ( $r \times r$ ) dos coeficientes das correlações canônicas entre  $\mathbf{U}_t$  e  $\mathbf{V}_t$ , e  $w_t$  é a projeção de  $F\mathbf{U}_t + w_t$  no espaço gerado pelas componentes da inovação  $y_{t+1} - y_{(t+1)|t^-}$ . Como

$y_t$  é um elemento de  $\mathcal{Y}_t^-$ , (4.71) pode ser escrito como

$$y_t = HS_r\mathbf{V}_t.$$

Portanto definindo  $x_t \triangleq S_r\mathbf{V}_t$  temos uma representação idêntica a (4.72), mas a matriz de covariância de estado é dada por

$$P = E(x_t x_t') = E\{S_r\mathbf{V}_t(S_r\mathbf{V}_t)'\} = S_r E(\mathbf{V}_t\mathbf{V}_t') S_r' = S_r S_r' = S_r^2,$$

pois  $S_r$  é uma matriz diagonal. Logo a matriz de covariância do ruído é

$$Q = S_r^2 - FS_r^2F'.$$

Em Akaike (1975) é provado que as duas representações acima dadas dão a mínima e a máxima matrizes de covariância do estado  $x_t$  correspondente à matriz  $F$ , isto é  $P^* = I$  e  $P_* = S_r^2$ .

Seguindo as idéias de Akaike (1975, 1974), Lindquist e Picci (1996) elaboraram e propuseram uma teoria para a identificação de séries temporais no espaço de estado; em Aoki (1983, 1987, 1990) a modelagem de séries temporais seguindo um procedimento similar é feito. No próximo Capítulo tratamos estes aspectos, assim como a identificação de sistemas estocásticos no espaço de estado, dado um conjunto finito de informações de entrada e saída do sistema.

# Capítulo 5

## Métodos de Subespaço para Identificação

### 5.1 Introdução

A identificação de sistemas trata o problema da construção de modelos de sistemas dinâmicos baseada em dados de entrada e saída. O conceito de sistema tem um papel importante em muitas áreas do conhecimento, como por exemplo, na predição de níveis de altitude da água de tanques ou reservatórios, de níveis de poluição do ar, sistemas de qualidade da água de rio, Bottura et al. (2000); Bottura e Cáceres (2002a), etc. Projetos convencionais de sistemas de controle para sistemas dinâmicos, como por exemplo motores elétricos, aeroplanos e processos químicos, dependem da disponibilidade de modelos, de preferência lineares, que representam e descrevem os fenômenos dinâmicos envolvidos. Com a ajuda dos modelos podemos prever a conduta do sistema e/ou tomar decisões de controle. O modelo pode ser desde um simples desenho mental que nos dê alguma intuição da descrição do sistema ou pode ser uma descrição matemática que descreva fielmente todos os aspectos da conduta do sistema.

Muitos sistemas da vida real são complexos e não podem ser perfeitamente modelados. Assim como os dados colhidos são usualmente medidos com erros, isto faz com que seja quase impossível encontrar modelos que descrevam fielmente o sistema. Por outra parte, para muitas aplicações, somente um modelo aproximado é suficiente. Como por exemplo, o projeto de controle realimentado, com bom desempenho em malha fechada, pode ser muito mais fácil de se obter utilizando modelos suficientemente precisos.

Neste Capítulo estudamos várias técnicas para a identificação de Sistemas Lineares Discretos invariantes no tempo, baseadas em métodos de subespaços. Existe uma vasta literatura a respeito, nós seguimos principalmente as referências Verhaegen e Dewilde (1992a); Verhaegen (1994); Kattayama e Picci (1999), entre outras. Os métodos de subespaço para identificação de sistemas nos fornecem algoritmos eficazes para alguns tipos de problemas e principalmente são muito adequados

para tratar sistemas multivariáveis (MIMO). Estes métodos estão baseados nos trabalhos pioneiros de Kalman (1960a, 1963), Ho e Kalman (1966); R. E. Kalman e Arbib (1969), nos anos 60 e 70. Após o seu sucesso inicial em 1964, Kalman propôs uma teoria fundamental para a representação de Sistemas Estocásticos. A teoria da realização estocástica de sistemas gaussianos foi principalmente desenvolvida por Faurre (1973, 1970), Lindquist e Picci (1994). Posteriormente a identificação de sistemas estocásticos, com entradas exógenas foi abordada em Katayama e Picci (1999). Nos anos 90 Bart de Moor e Van Overschee exploram propriedades algébricas e geométricas, desenvolveram contribuições teóricas importantes e o algoritmo N4SID Overschee e De Moor (1994). Pouco antes, Verhaegen e Dewilde propuseram o excelente algoritmo de subespaço para identificação MOESP Verhaegen e Dewilde (1992a); Verhaegen (1994). Recentemente Tamariz (2005) propôs o algoritmo MOESP-AOKI. Este Capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 5.2 a teoria de realização no contexto determinístico é apresentado. Na Seção 5.3 a identificação pelo método de subespaço MOESP é apresentado. Na Seção 5.4 a teoria de realização estocástica com entradas exógenas e a identificação no espaço de estado pelo método de subespaço utilizando mínimos-quadrados restrito, proposta por Katayama e Picci (1999), bem como importantes e simples resultados teóricos e/ou algoritmo MOESP-AOKI proposto em Tamariz (2005) e aqui re-elaborados, são apresentados. Na Seção 5.5 as conclusões e comentários do Capítulo são feitos.

## 5.2 Métodos de Identificação Baseados na Teoria da Realização

A teoria da realização de sistemas no contexto determinístico pretendia, em primeira instância, resolver o seguinte problema: dada uma função de transferência como encontrar um ou mais modelos no espaço de estado que representem tal sistema. Existem algumas técnicas que fazem isso trabalhando diretamente com a função de transferência, especialmente para o caso SISO. Como a generalização para sistemas MIMO não é trivial, uma alternativa foi trabalhar com as matrizes resposta ao impulso. Na verdade não é fácil obter estas matrizes na prática. Mas dada uma função de transferência é possível obtê-las. Em resumo: o problema da realização de sistemas determinísticos consiste em determinar uma representação no espaço de estado, a partir de uma seqüência de matrizes resposta ao impulso perfeitamente conhecidas. São muitas as técnicas conhecidas para este propósito, porém a realização utilizando decomposição em valores singulares tornou-se predominante por ser computacionalmente robusta.

Seja um sistema linear invariante no tempo dado por:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \\ y_t &= Cx_t + Du_t \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $x_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_t \in \mathbb{R}^m$  e  $u_t \in \mathbb{R}^p$ ,  $A, B, C$  e  $D$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas. Para uma entrada impulso unitário, com condições iniciais nulas a resposta do sistema é dada por:

$$h_t = \begin{cases} D, & t = 0 \\ CA^{t-1}B, & t > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

O problema da realização de sistemas no contexto determinístico, consiste em: dadas as respostas ao impulso unitário,  $h_k$ , encontrar as matrizes  $A, B, C$  e  $D$ , tal que a fatoração (5.2) seja satisfeita. Sabemos que existem muitas quádruplas de matrizes que satisfazem (5.2). É bem conhecido, ver Chen (1999), que para cada par de quádruplas,  $\{A, B, C, D\}$ , que representam uma realização mínima do sistema existe uma matriz  $T$  que as relaciona por meio de uma transformação de similaridade. A resposta do sistema para uma entrada,  $u_t$  é dada pela sua convolução discreta com a resposta ao impulso, ver Bottura (1982). Então temos:

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k}. \quad (5.3)$$

Suponhamos que o sistema foi excitado por uma entrada  $u$  tal que

$$u = \{\dots, u_{t-2}, u_{t-1}, 0, 0, \dots\}, \quad (5.4)$$

estando em repouso em  $t = -\infty$ . De (5.3), a resposta do sistema para  $t \geq 0$ , é:

$$y_t = h_0 u_t + h_1 u_{t-1} + h_2 u_{t-2} + h_3 u_{t-3} + \dots, \quad (5.5)$$

para  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  temos

$$\begin{aligned} y_0 &= h_0 0 + h_1 u_{-1} + h_2 u_{-2} + h_3 u_{-3} + \dots \\ y_1 &= h_0 0 + h_1 0 + h_2 u_{-1} + h_3 u_{-2} + \dots \\ y_2 &= h_0 0 + h_1 0 + h_2 0 + h_3 u_{-1} + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.6)$$

que podemos escrever na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{-1} \\ u_{-2} \\ u_{-3} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Definimos a matriz infinita de Hankel do sistema como

$$\mathcal{H}_\infty = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \cdots \\ h_3 & h_4 & h_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Sejam

$$\mathcal{O}_\infty = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_\infty = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

as matrizes infinitas de observabilidade e controlabilidade respectivamente; por simples inspeção, observamos que

$$\mathcal{H}_\infty = \mathcal{O}_\infty \mathcal{C}_\infty \quad (5.10)$$

Se for possível fatorar a matriz  $\mathcal{H}$  como em (5.10), as matrizes  $C$  e  $B$  poderão ser obtidas utilizando simplesmente os primeiros bloco-matrizes das matrizes de observabilidade e controlabilidade respectivamente.

Na realidade a matriz de Hankel é de posto finito, isto é, um número limitado de matrizes impulsivas bloco-linhas e bloco-colunas definem o posto da matriz. Sabe-se da teoria de sistemas, que o posto da matriz de controlabilidade e o da matriz de observabilidade são iguais à dimensão do vetor de estado mínimo. Sendo assim não é necessário ter uma matriz de Hankel infinita. Ao invés disso seleciona-se uma matriz de Hankel composta por um número finito de bloco-matrizes linha e coluna. Observa-se também que para qualquer matriz não singular  $T$  ( $n \times n$ ), as matrizes  $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}T^{-1}$  e  $\tilde{\mathcal{C}} = T\mathcal{C}$  produzem a mesma fatoração (5.10). De fato a qualquer transformação de similaridade  $T$  corresponde uma escolha particular da tripla de matrizes  $\{A, B, C\}$  do sistema. Pode-se encontrar uma fatoração de  $\mathcal{H}$  por meio da decomposição em valores singulares (SVD), da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = USV' = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix},$$

onde  $S_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $S_{22} = 0$ , e definir as matrizes  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$  como:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= (U_1 S_{11}^{\frac{1}{2}}) T^{-1} \\ \mathcal{C} &= T (S_{11}^{\frac{1}{2}} V_1') \end{aligned} .$$

Seja a matriz de Hankel deslocada  $\vec{\mathcal{H}}_\infty$  definida como

$$\vec{\mathcal{H}}_\infty = \begin{bmatrix} h_2 & h_3 & h_4 & \cdots \\ h_3 & h_4 & h_5 & \cdots \\ h_4 & h_5 & h_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

de (5.2) em (5.11) podemos demonstrar que  $\vec{\mathcal{H}}_\infty = \mathcal{O}AC$ , e determina a tripla de matrizes por:

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{O}^\dagger \vec{\mathcal{H}}_\infty \mathcal{C}^\dagger \\ B &= \mathcal{O}^\dagger \mathcal{H}^{-1} \\ C &= \mathcal{H}^{-1} \mathcal{C}^\dagger \end{aligned}$$

Onde  $\mathcal{O}^\dagger$  e  $\mathcal{C}^\dagger$  são as matrizes pseudo-inversas de  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$ , respectivamente.

Um estudo mais aprofundado pode ser encontrado em Barreto (2002), onde são fornecidos fundamentos básicos para a identificação multivariável no espaço de estado para métodos de subespaço.

### 5.3 Identificação pelo método MOESP

Nesta Seção, o método MOESP, Verhaegen e Dewilde (1992a,b), muito bem explicado em Viberg (1995), é apresentado, para o método N4SID, ver Overschee e De Moor (1996). Seja um sistema linear estocástico discreto no tempo:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t \quad (5.12)$$

$$y_t = Cx_t + Du_t + v_t, \quad (5.13)$$

onde  $w_t$  e  $v_t$  são processos aleatórios ruído branco de covariância

$$E \left[ \begin{pmatrix} w_s \\ v_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_t & v'_t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S \\ S' & R \end{pmatrix} \delta_{st} \geq 0. \quad (5.14)$$

Os vetores  $u_t \in R^{m \times 1}$  e  $y_t \in R^{l \times 1}$  são respectivamente as medidas das  $m$  entradas e das  $l$  saídas do processo no instante  $t$ . Podemos escrever as equações (5.12) e (5.13) na seguinte forma inovativa Viberg (1995):

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + Ke_t \\ y_t &= Cx_t + Du_t + e_t \end{aligned}, \quad (5.15)$$

onde  $e_t$  é um processo inovação,  $K$  é o ganho do filtro de Kalman.

O problema da identificação de um sistema estocástico consiste em encontrar as matrizes que compõem as equações (5.15) a partir de dados de entrada e saída medidos. Para este objetivo, definimos o vetor empilhado com os vetores de saída, começando desde um instante  $t$  até o instante  $t + \alpha - 1$ , como:

$$\mathbf{y}(t) = [y'_t \ y'_{t+1} \ \cdots \ y'_{t+\alpha-1}]', \quad (5.16)$$

onde  $\alpha > n$  ( $n$  é a ordem do sistema). De (5.15), supondo  $e_t = 0$  para efeitos de compreensão, temos:

$$y_{t+1} = C(Ax_t + Bu_t) + Du_{t+1} = CAx_t + CBu_t + Du_{t+1}$$

$$x_{t+2} = Ax_{t+1} + Bu_{t+1} = A^2x_t + ABu_t + Bu_{t+1},$$

$$y_{t+2} = C(A^2x_t + ABu_t + Bu_{t+1}) + Du_{t+2} = CA^2x_t + CABu_t + CBu_{t+1} + Du_{t+2}$$

$$= CA^2x_t + [CAB \ CB \ D] \begin{bmatrix} u_t \\ u_{t+1} \\ u_{t+2} \end{bmatrix}$$

$$= CA^2x_t + \begin{bmatrix} CAB & CB & D & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ u_{t+1} \\ u_{t+2} \\ u_{t+3} \\ \vdots \\ u_{t+\alpha-1} \end{bmatrix},$$

segundo o mesmo procedimento temos

$$y_{t+\alpha-1} = CA^{\alpha-1}x_t + \begin{bmatrix} CA^{\alpha-2}B & CA^{\alpha-3}B & CA^{\alpha-4}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ u_{t+1} \\ u_{t+2} \\ \vdots \\ u_{t+\alpha-2} \\ u_{t+\alpha-1} \end{bmatrix}.$$

Das relações acima obtidas temos

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t+1} \\ y_{t+2} \\ \vdots \\ y_{t+\alpha-2} \\ y_{t+\alpha-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{\alpha-2} \\ CA^{\alpha-1} \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ CA^{\alpha-3}B & CA^{\alpha-4}B & CA^{\alpha-5}B & \cdots & D & 0 \\ CA^{\alpha-2}B & CA^{\alpha-3}B & CA^{\alpha-4}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ u_{t+1} \\ u_{t+2} \\ \vdots \\ u_{t+\alpha-2} \\ u_{t+\alpha-1} \end{bmatrix},$$

que podemos escrever como

$$\mathbf{y}(t) = \Gamma_\alpha x_t + \Phi_\alpha \mathbf{u}(t), \quad (5.17)$$

onde  $\mathbf{u}(t)$  é definido de forma similar a (5.16), e as matrizes  $\Gamma_\alpha$  e  $\Phi_\alpha$  são definidas como:

$$\Gamma_\alpha = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{\alpha-2} \\ CA^{\alpha-1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_\alpha = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ CA^{\alpha-3}B & CA^{\alpha-4}B & CA^{\alpha-5}B & \cdots & D & 0 \\ CA^{\alpha-2}B & CA^{\alpha-3}B & CA^{\alpha-4}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

se o erro  $e_t$  for considerado, temos uma expressão semelhante à (5.17), e podemos escrever como:

$$\mathbf{y}(t) = \Gamma_\alpha x_t + \Phi_\alpha \mathbf{u}(t) + \Psi_\alpha \mathbf{e}(t) \quad (5.19)$$

onde

$$\Psi_\alpha = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CK & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CAK & CK & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ CA^{\alpha-3}K & CA^{\alpha-4}K & CA^{\alpha-5}K & \cdots & I & 0 \\ CA^{\alpha-2}K & CA^{\alpha-3}K & CA^{\alpha-4}K & \cdots & CK & I \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

onde  $\mathbf{e}(t)$  é definido de forma similar a (5.16). A matriz  $\Gamma_\alpha$  é denominada de matriz estendida de observabilidade. As matrizes  $\Phi_\alpha$  e  $\Psi_\alpha$  são matrizes Toeplitz.

Suponhamos que temos observações de  $y_t$  e  $u_t$ , para  $t = 1, 2, \dots, N + \alpha - 1$ ; utilizando a relação

(5.19) podemos definir a seguinte e formar a partir dos dados de entrada a seguinte matriz de Hankel

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1) \cdots \mathbf{y}(N)], \quad (5.21)$$

de (5.19), para  $e_t = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [\Gamma_\alpha x_1 + \Phi_\alpha \mathbf{u}(1) : \Gamma_\alpha x_2 + \Phi_\alpha \mathbf{u}(2) : \cdots : \Gamma_\alpha x_N + \Phi_\alpha \mathbf{u}(N)] \\ &= [\Gamma_\alpha x_1 : \Gamma_\alpha x_2 : \cdots : \Gamma_\alpha x_N] + [\Phi_\alpha \mathbf{u}(1) : \Phi_\alpha \mathbf{u}(2) : \cdots : \Phi_\alpha \mathbf{u}(N)] \\ &= \Gamma_\alpha [x_1 : x_2 : \cdots : x_N] + \Phi_\alpha [\mathbf{u}(1) : \mathbf{u}(2) : \cdots : \mathbf{u}(N)] = \Gamma_\alpha \mathbf{X} + \Phi_\alpha \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde  $\mathbf{X} = [x_1 : x_2 : \cdots : x_N]$  e  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}(1) : \mathbf{u}(2) : \cdots : \mathbf{u}(N)]$ . Considerando a entrada de ruído  $e_t$ , (5.21) pode ser escrito como:

$$\mathbf{Y} = \Gamma_\alpha \mathbf{X} + \Phi_\alpha \mathbf{U} + \Psi_\alpha \mathbf{E}, \quad (5.23)$$

onde  $\mathbf{E} = [e(1) e(2) \cdots e(N)]$  é a matriz de Hankel dos ruídos. A equação (5.23) é fundamental para os métodos de subespaço. Se matriz de observabilidade (5.20) for conhecida, podemos determinar a matriz  $C$  empregando somente o primeiro bloco linha de  $\Gamma_\alpha$ . A matriz  $A$  pode ser encontrada da relação

$$\Gamma_{2:\alpha+1} = \begin{bmatrix} CA \\ \vdots \\ CA^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{\alpha-1} \end{bmatrix} A \quad (5.24)$$

com  $A = \Gamma_\alpha^\dagger \Gamma_{2:\alpha+1}$ , onde  $(\cdot)^\dagger$  denota a pseudoinversa de Moore-Penrose. A obtenção da matriz de observabilidade é feita por meio de projeções ortogonais dentro de subespaço gerados pelos vetores da matriz  $\mathbf{U}$ . Suponhamos que o sistema não tenha a parte estocástica, isto é  $e_t = 0$ , então temos

$$\mathbf{Y} = \Gamma_\alpha \mathbf{X} + \Phi_\alpha \mathbf{U}, \quad (5.25)$$

como  $\Phi_\alpha$  é desconhecido; podemos estimá-lo de forma a satisfazer o seguinte problema de mínimos quadrados não estruturado:

$$\min_{\Phi_\alpha} \|\mathbf{Y} - \Phi_\alpha \mathbf{U}\|_F^2, \quad (5.26)$$

onde  $\|\cdot\|_F$  denota a norma de Frobenius. A matriz  $\hat{\Phi}_\alpha$  solução deste problema obedece a seguinte equação:

$$\mathbf{Y} - \hat{\Phi}_\alpha \mathbf{U} = \mathbf{Y} \Pi_{\mathbf{U}'}^\perp, \quad (5.27)$$

onde  $\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp$  é o operador projeção ortogonal no espaço nulo de  $\mathbf{U}$ , dada por

$$\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{U}')^{-1}\mathbf{U}.$$

como  $\mathbf{U}\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp = 0$  temos de (5.25)

$$\mathbf{Y}\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp = \Gamma_\alpha \mathbf{X}\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp. \quad (5.28)$$

Se o posto de  $\mathbf{X}\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp$  for completo e igual a  $n$ , poderemos recuperar  $\Gamma_\alpha$  através de uma decomposição em valores singulares truncada da matriz  $\mathbf{Y}\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp$ :

$$\mathbf{Y}\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s \hat{\mathbf{V}}_s' + \hat{\mathbf{Q}}_n \hat{\mathbf{S}}_n \hat{\mathbf{V}}_n', \quad (5.29)$$

onde  $\hat{\mathbf{Q}}_s$  contém os  $n$  vetores correspondentes aos valores singulares mais significativos. Na ausência de ruído teremos  $\hat{\mathbf{S}}_n = 0$ . A estimativa da matriz de observabilidade pode ser considerada como  $\hat{\Gamma}_\alpha = \hat{\mathbf{Q}}_s$ . Uma implementação mais eficiente é proposta em Verhaegen (1994), que calcula a matriz  $\mathbf{Y}\Pi_{\mathbf{U}'}^\perp$  por meio de uma fatoração QR.

#### Operador projeção ortogonal via fatoração QR

Seja  $\mathcal{V}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^p$  gerado pelo conjunto de vetores ortonormais  $\mathbf{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$  é seja  $v \in \mathbb{R}^p$ ; A projeção ortogonal de  $v$  em  $\mathcal{V}$  é um vetor  $\hat{v} \in \mathcal{V}$ , tal que existam  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  tal que

$$\hat{v} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_q v_q,$$

e que vetor  $e = v - \hat{v}$  é ortogonal ao espaço  $\mathcal{V}$ . É bem conhecido que os  $\alpha_i$  podem ser calculados, pelo processo de ortogonalização como:

$$\alpha_i = \frac{\langle v_i, v \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \langle v_i, v \rangle = v_i' v. \quad (5.30)$$

Podemos escrever a projeção como:

$$\hat{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_q] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\alpha, \quad (5.31)$$

onde  $\mathbf{Q} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_q]$  e  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_q]'$ . De (5.30) temos:

$$\alpha = \begin{bmatrix} v_1'v \\ v_2'v \\ \vdots \\ v_q'v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_q' \end{bmatrix} v = \mathbf{Q}'v,$$

logo (5.31) pode ser escrito como

$$\hat{v} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}'v = \Pi_{\mathcal{V}}v,$$

Definimos o operador projetor ortogonal no espaço  $\mathcal{V}$  à matriz  $\Pi_{\mathcal{V}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}'$ . Notemos que qualquer vetor multiplicado pelo operador é projeção ortogonal do vetor no subespaço  $\mathcal{V}$ . Notemos também que  $\mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \mathbf{I}_q$ . Este tipo de operadores obtido através de uma fatoração QR e as propriedades das matrizes resultantes são exploradas a seguir. Efetuando uma fatoração RQ à matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}$ , temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & 0 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_1 \\ \mathbf{Q}'_2 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

que podemos escrever como

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{R}_{11}\mathbf{Q}'_1 \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{R}_{21}\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{R}_{22}\mathbf{Q}'_2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

as matrizes  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{Q}_2$  são matrizes ortonormais que possuem as seguintes propriedades

$$\mathbf{Q}'_1\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}'_2\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$$

e

$$\mathbf{Q}'_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}'_2\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}$$

pois o vetor  $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2]$  é uma matriz ortonormal. Multiplicando  $\mathbf{Y}$  pela matriz  $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}'_2$  temos

$$\mathbf{Y}\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}'_2 = (\mathbf{R}_{21}\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{R}_{22}\mathbf{Q}'_2)\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}'_2 = \mathbf{R}_{22}\mathbf{Q}'_2$$

Podemos observar que  $\mathbf{Q}_2$  gera a parte do espaço nulo de  $\mathbf{U}$  que não é compartilhada por  $\mathbf{Y}$ , pois

$$\mathbf{U}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_{11}\mathbf{Q}'_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$$

Sabendo que  $\mathbf{Q}'_2\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$ , os vetores singulares  $\mathbf{R}_{22}$  que estão à esquerda, são aqueles de  $\mathbf{R}_{22}\mathbf{Q}'_2$ ,

assim como também os vetores singulares de  $\mathbf{Y}\Pi_{U'}^\perp$ . O método de Verhaegen e Dewilde calcula  $\mathbf{R}_{22}$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}_{22} = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s (\hat{\mathbf{V}}_s^T \mathbf{Q}_2) + \hat{\mathbf{Q}}_n \hat{\mathbf{S}}_n (\hat{\mathbf{V}}_n^T \mathbf{Q}_2). \quad (5.34)$$

Observe que (5.34) é compatível com (5.29). Somente a parte determinística pode ser identificada desta maneira; qualquer dinâmica adicional causada por perturbação que não seja ruído branco não é considerada.

Em Verhaegen (1994) a organização estrutural dos dados permite (no limite quando  $N \rightarrow \infty$ ) eliminar a parte estocástica de (5.23). Isto é feito como segue: os dados da saída são divididos em termos passado e futuro, como

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_p(t) \\ \mathbf{y}_f(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma particionamos as entradas e os ruídos. A equação de dados para a saída futura é dada por:

$$\mathbf{Y}_f = \Gamma_\gamma \mathbf{X}_f + \Phi_\gamma \mathbf{U}_f + \Psi_\gamma \mathbf{E}_f, \quad (5.35)$$

onde  $\mathbf{X}_f = [x_{\beta+1} \cdots x_{\beta+N}]$ ,  $\gamma = \alpha - \beta > n$ , e  $\beta$ , é o número de bloco-linhas em  $\mathbf{Y}_p$ . Podemos escolher agora  $\mathbf{u}_p(t)$  como uma variável instrumental de modo a remover o termo  $\mathbf{U}_f$  de (5.35) e des-correlacionar o ruído. Verhaegen considera a seguinte projeção ortogonal

$$\mathbf{Y}_f \Pi_{U_f^T}^\perp \mathbf{U}_p^T = \Gamma_\gamma \mathbf{X}_f \Pi_{U_f^T}^\perp \mathbf{U}_p^T + \Psi_\gamma \mathbf{E}_f \Pi_{U_f^T}^\perp \mathbf{U}_p^T,$$

onde  $\Pi_{U_f^T}^\perp$  é a projeção ortogonal do espaço nulo de  $\mathbf{U}_f$ . Pode-se provar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{E}_f \Pi_{U_f^T}^\perp \mathbf{U}_p^T = 0,$$

O algoritmo de Verhaegen calcula a seguinte fatoração QR:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} & 0 \\ \mathbf{R}_{41} & \mathbf{R}_{42} & \mathbf{R}_{43} & \mathbf{R}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_1 \\ \mathbf{Q}'_2 \\ \mathbf{Q}'_3 \\ \mathbf{Q}'_4 \end{bmatrix},$$

onde  $\mathbf{R}_{ii}$  é uma matriz triangular superior.

No próximo passo do algoritmo é calculada a seguinte SVD

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Q}}_s \hat{\mathbf{S}}_s \hat{\mathbf{V}}_s' + \hat{\mathbf{Q}}_n \hat{\mathbf{S}}_n \hat{\mathbf{V}}_n'$$

A matriz de observabilidade é estimada como  $\hat{\mathbf{Q}}_s$ , e as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  podem ser extraídas, como em (5.24). Para encontrar  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  uma solução do problema de mínimos quadrados

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{42} \end{bmatrix} \approx \Phi_\gamma \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix},$$

dá uma estimação consistente de  $\Phi_\gamma$ . Com esta estimação,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  podem ser calculados.

Este algoritmo foi implementado no LCSII, e utilizado nos trabalhos Bottura et al. (2000, 2002).

## 5.4 Realização estocástica com entradas exógenas e métodos de subespaço para identificação de sistemas e de sinais

### 5.4.1 Introdução

Nesta Seção estudamos o problema da realização estocástica para sistemas estacionários com entradas exógenas e apresentamos dois algoritmos para identificação neste caso. Primeiramente fazemos um estudo influenciado sobretudo pelos trabalhos de Akaike, de Aoki, de Picci e de seus co-autores, posteriormente fazemos um estudo baseado em Tamariz (2005), com resultados que consideramos importantes.

Akaike em seus trabalhos pioneiros, Akaike (1974), Akaike (1975) e Akaike (1976), desenvolveu uma teoria da realização estocástica mínima baseada na análise das correlações canônicas (CCA) entre o “futuro” e o “passado” de um processo estocástico. Nesta abordagem, o espaço do estado está definido como o espaço linear gerado pelos melhores preditores do futuro baseado no passado, e uma base deste espaço é fornecida naturalmente pelas variáveis canônicas. A computação associada com a técnica das CCA é feita pela decomposição em valores singulares (SVD) de uma matriz bloco Hankel normalizada formada pelas matrizes de covariância retardadas do processo. Akaike também deu uma interpretação estocástica ao método básico da realização de Ho-Kalman, Ho e Kalman (1966) e de outros algoritmos relacionados com realizações.

Posteriormente, Desai, Pal e Kirkpatrick Desai e Pal (1984), utilizaram as técnicas das correlações canônicas para modelar e reduzir modelos de sistemas estocásticos no espaço de estado. Aoki em Aoki (1983, 1987, 1990) também propôs a modelagem de séries temporais econômicas utilizando

técnicas SVD similares. Uma teoria geométrica geral para resolver o problema da realização estocástica de séries temporais foi desenvolvida por Lindquist e Picci (1996).

Podemos dizer que a relação entre a teoria da realização estocástica e a identificação de séries temporais estacionárias pelos métodos de identificação em subespaços está razoavelmente compreendida. Por outro lado, não há nenhuma teoria completa disponível até agora para a realização de sistemas estocásticos excitados por uma entrada exógena. Em Katayama e Picci (1996) o sinal de saída é separado em componentes determinística e estocástica. Eles mostram uma possível aplicação para a identificação em subespaço de sistemas no espaço de estado com entradas exógenas. Porém existe ainda insuficiente experiência numérica com relação à eficácia desta decomposição.

Praticamente, todos os métodos da identificação em subespaço para sistemas com entradas exógenas, relatados na literatura, utilizam, de uma forma ou outra, abordagens com variáveis instrumentais. Às vezes os detalhes computacionais tendem a obscurecer a idéia principal. O procedimento conceitual de construir primeiro o espaço do estado pela projeção do futuro no passado e então escolher uma base bem-condicionada para computar as matrizes  $A$ ,  $C$ ,  $M$ , etc., que é transparente no importante trabalho sobre os métodos de subespaço, Overschee e De Moor (1993), para séries temporais, não fica tão transparente quando aplicado ao problema da identificação de sistemas com entradas exógenas. As idéias básicas da teoria da realização começam a perder-se nas computações (às vezes complicadas) resultantes de uma variedade de escolhas possíveis dos instrumentos para computar a matriz de observabilidade. Pode-se atribuir este estado de coisas ao fato de que a realização estocástica com entradas exógenas ainda é pouco entendida.

Motivados pelos argumentos acima citados, Katayama e Picci (1999), consideram o problema da realização de sistemas estocásticos estacionários lineares com entradas exógenas. O método da realização estocástica está baseado nas em projeções oblíquas e na análise das correlações canônicas (CCA) condicionais que generalizam de uma maneira natural o procedimento utilizado na realização de séries temporais. Eles propõem alguns métodos de identificação em subespaço baseados nos procedimentos das realizações que são também significativos para o entendimento dos princípios básicos subjacentes a alguns trabalhos bem conhecidos de identificação em subespaço (Larimore, 1990; Van Overschee e De Moor, 1994, 1996; Verhaegen e Dewilde, 1992; Verhaegen, 1994) e para permitir comparações.

A construção de um modelo no espaço de estado envolve um preditor linear da saída futura baseado nas entradas futuras e nas observações passadas. Ela é resolvida usando resultados da representação para dois operadores de projeção oblíquos. Estes últimos são ingredientes básicos deste problema desde que, como observado por Larimore (1990), o efeito das entradas futuras seja removido das saídas futuras ao construir sistemas no espaço de estados com entradas exógenas. Na seguinte Seção ficará claro como as projeções oblíquas servem para esta finalidade.

A projeção oblíqua das saídas futuras no espaço das observações passadas ao longo do espaço das entradas futuras é fatorada como o produto da matriz de observabilidade estendida pelo vetor de estado. O vetor de estado é escolhido pela utilização da análise de correlações canônicas (CCA) do passado e do futuro condicionados às entradas futuras. Derivamos equações de estado do preditor ótimo das saídas futuras em termos do vetor de estado e entradas futuras. Essas equações conduzem a um modelo inovativo “forward” do processo de saída na presença de entradas exógenas. O passo básico do procedimento de realização é a fatoração da matriz de covariância condicional das saídas futuras e passadas dadas as entradas futuras. Esta fatoração é baseada no CCA e pode ser adaptada facilmente a dados de entrada-saída finitos.

Neste Capítulo, finalmente com base nas discussões citadas acima e nas Teses de Barreto (2002) e Tamariz (2005) também realizadas no LCSi, fazemos uma análise da realização linear de sistemas estocásticos com entradas exógenas efetivamente utilizando o princípio da superposição, e resultados desta e das duas Teses acima citadas sobre o algoritmo MOESP-AOKI, realizações estocásticas, realizações determinísticas e realizações combinadas para a modelagem computacional de dados ruídos.

### 5.4.2 Construção do Espaço Preditor

Consideremos um sistema estocástico linear discreto no tempo com  $u_t \in R^m$  o vetor de entrada e  $y_t \in R^p$  o vetor de saída. Também consideramos que  $\{u_t, y_t, t = 0, \pm 1, \pm \dots\}$  é um processo conjunto estacionário no sentido amplo, com média nula e matrizes de covariância finitas. Seja  $t$  o tempo presente e  $k$  um inteiro positivo, definimos, respectivamente, os vetores de entradas-passadas e entradas-futuras empilhadas como:

$$u_t^- \triangleq \begin{bmatrix} u_{t-1} \\ u_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix}, u_{[t,k]}^+ \triangleq \begin{bmatrix} u_t \\ u_{t+1} \\ \vdots \\ u_{t+k-1} \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Similarmente definimos, para as saídas do sistema, os vetores saídas-passadas  $y_t^-$  e saídas-futuras  $y_{[t,k]}^+$  empilhadas como:

$$y_t^- \triangleq \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix}, y_{[t,k]}^+ \triangleq \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t+1} \\ \vdots \\ y_{t+k-1} \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Definimos os vetores passado do sistema e futuro do sistema, como os vetores empilhados:

$$p_t \triangleq \begin{bmatrix} u_t^- \\ y_t^- \end{bmatrix}, f_t \triangleq y_{[t,k]}^+ \quad (5.38)$$

a dimensão de  $p_t$  é infinita enquanto que as de  $f_t$  e  $u_{[t,k]}^+$  são finitas.

Denotaremos a soma vetorial (fechada) de subespaços por  $\vee$ . Sejam  $\mathcal{P}_t$ ,  $\mathcal{Y}_t^-$  e  $\mathcal{U}_{[t,k]}^+$  os espaços lineares das variáveis aleatórias de segunda ordem geradas pelos vetores passado do sistema  $p_t$ , saídas-passadas  $y_t^-$  e entradas-futuras  $u_{[t,k]}^+$ , respectivamente. Consideramos que os espaços são fechados em relação à norma quadrática média usual

$$\|\xi\| \triangleq \sqrt{E\{\xi^2\}}, \quad (5.39)$$

Assim  $\mathcal{P}_t$ ,  $\mathcal{Y}_t^-$  e  $\mathcal{U}_t^+$  podem ser tratados como subespaços de Hilbert de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{Y} \vee \mathcal{U}$  contendo todos os funcionais lineares do processo conjunto  $(u, y)$ .

Suponhamos que  $\mathcal{A}$  é um subespaço de  $\mathcal{H}$ . A projeção ortogonal de  $b \in \mathcal{H}$  no subespaço  $\mathcal{A}$  é denotada por  $E\{b|\mathcal{A}\}$  ou por  $b|\mathcal{A}$  para resumir. Seja  $\mathcal{A}^\perp$  o complemento ortogonal de  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ . Então a projeção ortogonal de  $b$  em  $\mathcal{A}^\perp$  é

$$b|\mathcal{A}^\perp = b - (b|\mathcal{A}). \quad (5.40)$$

A figura 5.1 mostra representação geométrica destes resultados.

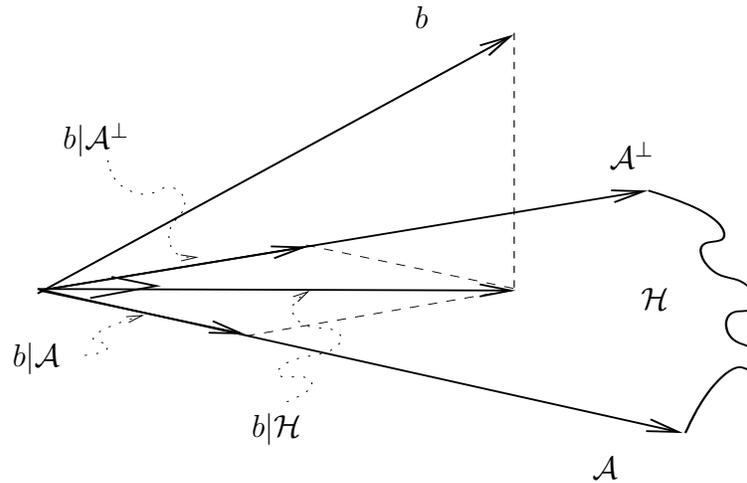


Fig. 5.1: Projeção ortogonal

Mais ainda suponhamos que  $\mathcal{A}$  é gerada pela variável aleatória vetorial  $a$ ; então a projeção ortogonal de  $b \in \mathcal{H}$  em  $\mathcal{A}$  pode ser expressa em termos de  $a$  pela bem conhecida relação

$$b|\mathcal{A} = E\{ba'\}E\{aa'\}^\dagger a = \Sigma_{ab}\Sigma_{aa}^\dagger a = b|a \quad (5.41)$$

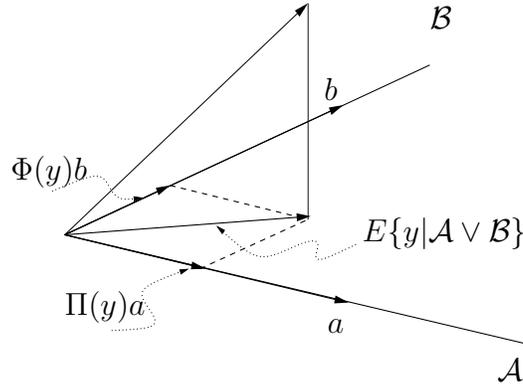


Fig. 5.2: Projeções Oblíquas

onde  $\Sigma_{ab} = E\{ab'\}$  é a matriz de covariância das variáveis aleatórias vetoriais  $a$  e  $b$ ,  $(\cdot)^\dagger$  é a pseudo-inversa, Golub e Loan (1989). A projeção ortogonal de  $b$  em  $\mathcal{A}^\perp$  também pode ser expressa em termos de  $a$  e  $a$  denotamos por  $b|a^\perp$ .

### 5.4.3 Projeções ortogonais e oblíquas

Em Katayama e Picci (1999) o seguinte lema é provado:

**Lema 5.4.1** *Sejam  $y$  e  $b$  dois vetores aleatórios com componentes em  $\mathcal{H}$ , seja  $\mathcal{A} = \text{span}\{a\}$ ,  $\mathcal{B} = \text{span}\{b\}$  e suponhamos que  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ . Então os vetores  $\Pi(y)a$  e  $\Phi(y)b$  na projeção ortogonal*

$$E\{y|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}\} = \begin{bmatrix} \Sigma_{ya} & \Sigma_{yb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{aa} & \Sigma_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \triangleq \Pi(y)a + \Phi(y)b, \quad (5.42)$$

são as projeções oblíquas de  $y$  em  $\mathcal{A}$  ao longo de  $\mathcal{B}$  e de  $y$  em  $\mathcal{B}$  ao longo de  $\mathcal{A}$ , respectivamente. Além disso, se definimos as seguintes matrizes de covariância condicionais:

$$\begin{aligned} \Sigma_{aa|b} &\triangleq E\{(a|b^\perp)(a|b^\perp)'\} & \Sigma_{ya|b} &\triangleq E\{(y|b^\perp)(a|b^\perp)'\} \\ \Sigma_{yb|a} &\triangleq E\{(y|a^\perp)(b|a^\perp)'\} & \Sigma_{bb|a} &\triangleq E\{(b|a^\perp)(a|b^\perp)'\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Então as matrizes  $\Pi(y)$  e  $\Phi(y)$  satisfazem as equações discretas de Wiener-Hopf

$$\Pi(y)\Sigma_{aa|b} \triangleq \Sigma_{ya|b} \quad \Phi(y)\Sigma_{bb|a} \triangleq \Sigma_{yb|a} \quad (5.44)$$

Onde  $\Sigma_{aa|b}$ ,  $\Sigma_{bb|a}$  são não singulares se  $\Sigma_{aa}$ ,  $\Sigma_{bb}$  também são.

Estas projeções são ilustradas na figura 5.2.

**Prova** Utilizaremos o seguinte resultado

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & -\Delta^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C\Delta^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C\Delta^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

onde  $\Delta = A - BD^{-1}C$  é o complemento de Schur.

Sabemos que

$$E\{y|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}\} = E\left\{y \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right\} \quad (5.46)$$

$$= E\left\{y \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}'\right\} E\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}'\right\}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} ya' & yb' \end{bmatrix}\right\} E\left\{\begin{bmatrix} aa' & ab' \\ ba' & bb' \end{bmatrix}\right\}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$= \begin{bmatrix} E(ya') & E(yb') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(aa') & E(ab') \\ E(ba') & E(bb') \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

sejam  $A = E(aa') = \Sigma_{aa}$ ,  $B = E(ab') = \Sigma_{ab} = C' = E(ba')' = \Sigma'_{ba}$  e  $D = E(bb') = \Sigma_{bb}$ , então  $\Delta = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma'_{ab}$ , Então temos:

$$\Delta^{-1} = (\Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma'_{ab})^{-1} = \Sigma_{aa|b}^{-1} = \alpha, \quad (5.50)$$

$$-\Delta^{-1}BD^{-1} = -\Sigma_{aa|b}^{-1}\Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1} = (-D^{-1}C\Delta^{-1})' = \beta \quad (5.51)$$

e

$$\begin{aligned} D^{-1} + D^{-1}C\Delta^{-1}BD^{-1} &= \Sigma_{bb}^{-1} + \Sigma_{bb}^{-1}\Sigma'_{ab}\Sigma_{aa|b}^{-1}\Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1} \\ &= \Sigma_{bb}^{-1}(\Sigma_{bb} + \Sigma'_{ab}\Sigma_{aa|b}^{-1}\Sigma_{ab})\Sigma_{bb}^{-1} = \gamma \end{aligned} \quad (5.52)$$

Substituindo 5.50, 5.51 e 5.52 em 5.49 temos

$$\begin{aligned} &[\Sigma_{ya} \ \Sigma_{yb}] \begin{bmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma'_{ab} & \Sigma_{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [\Sigma_{ya} \ \Sigma_{yb}] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= [\Sigma_{ya} \ \Sigma_{yb}] \begin{bmatrix} \alpha a + \beta b \\ \beta' a + \gamma b \end{bmatrix} = \Sigma_{ya}(\alpha a + \beta b) + \Sigma_{yb}(\beta' a + \gamma b) \\ &= (\Sigma_{ya}\alpha + \Sigma_{yb}\beta')a + (\Sigma_{ya}\beta + \Sigma_{yb}\gamma)b, \end{aligned} \quad (5.53)$$

comparando (5.42) e (5.53), temos:

$$\Pi(y) = \Sigma_{ya} \Sigma_{aa|b}^{-1} - \Sigma_{yb} \Sigma_{bb}^{-1} \Sigma'_{ab} \Sigma_{aa|b}^{-1} = (\Sigma_{ya} - \Sigma_{yb} \Sigma_{bb}^{-1} \Sigma'_{ab}) \Sigma_{aa|b}^{-1}$$

portanto

$$\Pi(y) \Sigma_{aa|b} = \Sigma_{ya} - \Sigma_{yb} \Sigma_{bb}^{-1} \Sigma'_{ab} = \Sigma_{ya|b}.$$

Similarmente podemos provar para  $\Phi(y) = \Sigma_{yb|a} \Sigma_{bb|a}^{-1}$ . Dado que  $\Pi(y)a = \Sigma_{ya|b} \Sigma_{bb|a}^{-1} a$ , então para  $v = \alpha' a$ , e  $z = \beta' b$  com  $\alpha \in R^{n_a}$ ,  $\beta \in R^{n_b}$ , vemos que  $\Pi(v)a = \alpha' I a = v$  e  $\Pi(z)a = 0$ . Assim  $\Pi(\cdot)a$  é idempotente sob  $\mathcal{A} = \text{span}\{a\}$  e o espaço nulo é exatamente  $\mathcal{B} = \text{span}\{b\}$ . Isto mostra que  $\Pi(y)a$  é a projeção oblíqua de  $y$  em  $\mathcal{A}$  ao longo de  $\mathcal{B}$ . Argumentos similares mostram que  $\Phi(y)b = 0$  dado que  $\Sigma_{vb|a}$  é zero, etc. e  $\Phi(y)b$  é a projeção oblíqua complementar. ■

#### 5.4.4 O preditor ótimo

Nesta Seção são encontrados preditores lineares ótimos do vetor futuro do sistema  $f_t$  dados os vetores entradas-futuras  $u_t^+$  e passadas do sistema  $p_t$ . Uma condição técnica necessária ao processo de entrada de forma a excitar todos os modos possíveis do sistema é que não exista correlação entre as entradas futuras e passadas, isto é

$$\mathcal{U}_t^- \cap \mathcal{U}_t^+ = \{0\}, \quad (5.54)$$

onde  $\mathcal{U}_t^- = \text{span}\{u_t^-\}$ . Esta condição implica que o processo de entrada é puramente não determinística e que admite uma matriz densidade espectral sem zeros sobre o círculo unitário. Esta condição é bastante restritiva em muitas situações práticas e podemos considerar uma condição menos restritiva, como uma entrada de excitação persistente, Overschee e De Moor (1996).

Outra hipótese fundamental: não há realimentação da saída para a entrada.

Generalizando o lema anterior temos o seguinte teorema.

**Teorema 5.4.2** *Considerando (5.54) e supondo que não existe realimentação da saída para a entrada, então o preditor ótimo  $\hat{f}_t$  do vetor de futuro do sistema  $f_t$  baseado em  $\mathcal{P}_t \vee \mathcal{U}_{[t,k]}^+$ , o espaço gerado (span) por  $p_t$  e  $u_{[t,k]}^+$ , é dado por:*

$$\hat{f}_t = E \left\{ f_t | \mathcal{P}_t \vee \mathcal{U}_{[t,k]}^+ \right\} = \Pi p_t + \Phi u_{[t,k]}^+, \quad (5.55)$$

onde  $\Pi p_t$  é a projeção oblíqua do futuro do sistema  $f_t$  no subespaço passado do sistema  $\mathcal{P}_t$  ao longo do subespaço futuro das entradas  $\mathcal{U}_{[t,k]}^+$ , e  $\Phi u_{[t,k]}^+$  é a projeção oblíqua do futuro do sistema  $f_t$  no

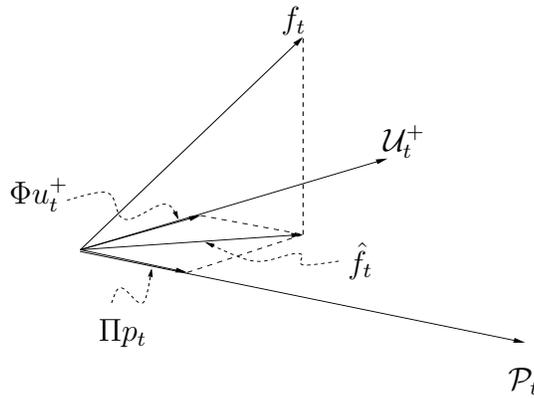


Fig. 5.3: Espaço Preditor como Projeções Oblíquas

subespaço das entradas futuras  $\mathcal{U}_{[t,k]}^+$  ao longo do subespaço passado de sistema  $\mathcal{P}_t$ . Este preditor é mostrado na figura 5.3.  $\Pi$  e  $\Phi$  satisfazem as equações discretas de Wiener-Hopf

$$\Pi \Sigma_{pp|u} = \Sigma_{fp|u}, \quad \text{e} \quad \Phi \Sigma_{uu|p} = \Sigma_{fu|p}, \quad (5.56)$$

onde  $\Sigma_{pp|u}$ ,  $\Sigma_{uu|p}$  são as covariâncias condicionais do vetor passado  $p_t$  dado o futuro  $u_{[t,k]}^+$  e do vetor de entrada futuro  $u_{[t,k]}^+$  dado o passado  $p_t$ .

**Prova** Ver Katayama e Picci (1999). ■

**Lema 5.4.3** Supondo que não exista realimentação de  $y$  para  $u$ , então para todo  $h \geq 0$ ,

$$E\{y_{t+h} | \mathcal{P}_t \vee \mathcal{U}_t^+\} = E\{y_{t+h} | \mathcal{P}_t \vee \mathcal{U}_t^{t+h}\}, \quad (5.57)$$

onde  $\mathcal{U}_t^{t+h} = \text{span}\{u_t, \dots, u_{t+h}\}$ . Conseqüentemente,  $\Phi$  tem uma estrutura Toeplitz bloco triangular inferior

$$\Phi = \begin{bmatrix} G_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_1 & G_0 & 0 & \cdots & 0 \\ G_2 & G_1 & G_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{k-1} & G_{k-2} & G_{k-3} & \cdots & G_0 \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

onde  $\{G_0, G_1, \dots\}$  podem ser interpretados como matrizes resposta ao impulso de algum sistema causal com entrada  $u$ . Em outras palavras,  $\Phi$  é operador causal.

**Prova** Ver Katayama e Picci (1999). ■

### 5.4.5 Análise das correlações canônicas e o vetor de estado

Nesta Seção definimos o vetor de estado para um processo  $y$  pela generalização do método das correlações canônicas (Akaike (1975)), (Akaike (1976)) e (Lindquist e Picci (1996)), aplicado entre às saídas futuras e observações passadas, com o efeito das entradas futuras removido.

No que segue, fazemos uma consideração explícita da dimensão finita. Devido à estacionariedade  $\Sigma_{fp|u}$  é uma matriz bloco Hankel semi infinita cujo posto é uma função não decrescente de  $k$  (o horizonte futuro). Se o posto de  $\Sigma_{fp|u}$  permanece constante mesmo a partir da adição de mais blocos-linhas, então argumentos padrões sobre Matriz de Hankel mostram que o posto permanecerá constante, mesmo adicionando qualquer número de bloco-linhas. Neste caso dizemos que  $\Sigma_{fp|u}$  têm posto finito.

Sejam o posto de  $\Sigma_{fp|u} = n$ , e  $k$  escolhido o suficientemente grande tal que  $k > n$ . Consideremos as seguintes fatorações de Cholesky:  $\Sigma_{pp|u} = L_p L_p'$  e  $\Sigma_{ff|u} = L_f L_f'$ . Definimos  $\epsilon_+(t) = L_f^{-1}(f|u_+^\perp)(t)$ ,  $\epsilon_-(t) = L_p^{-1}(p|u_+^\perp)(t)$ . Então segue-se que  $E\{\epsilon_+(t)\epsilon_-(t)'\} = L_f^{-1}\Sigma_{fu|p}(L_p^{-1})'$ . Suponhamos que a decomposição em valores singulares (SVD) da matriz bloco Hankel normalizada  $L_f^{-1}\Sigma_{fu|p}(L_p^{-1})'$  é dada por

$$L_f^{-1}\Sigma_{fu|p}(L_p^{-1})' = U\tilde{\Sigma}V' \quad (5.59)$$

onde  $U'U = I_n$ ,  $V'V = I_n$  e  $\tilde{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , com  $1 \geq \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ . Os  $\sigma_i$ 's são os coeficientes das correlações canônicas entre os vetores aleatórios condicionais  $(f|u_+^\perp)(t)$  e  $(p|u_+^\perp)(t)$ .

Definimos agora os vetores

$$\alpha_t = V'L_p^{-1}(p|u_+^\perp)(t), \quad \beta_t = U'L_f^{-1}(f|u_+^\perp)(t) . \quad (5.60)$$

Notemos que  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  têm dimensão  $n$ . Como  $E\{\alpha_t\alpha_t'\} = E\{\beta_t\beta_t'\} = I_n$ , e  $E\{\beta_t\alpha_t'\} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ ,  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  são as variáveis canônicas e os valores singulares são os coeficientes de correlação canônica entre as variáveis aleatórias  $(f|u_+^\perp)(t)$  e  $(p|u_+^\perp)(t)$ . Em outras palavras,  $\alpha_t$  e  $\beta_t$  são as variáveis canônicas condicionais entre o passado  $p_t$  e o futuro  $f_t$  dadas as entradas futuras  $u_t^+$ .

Para a SVD de (5.59), definimos as matrizes estendidas de observabilidade e atingibilidade como:

$$\mathcal{O} = L_f U \tilde{\Sigma}^{1/2}, \quad \mathcal{C} = \tilde{\Sigma}^{1/2} V' L_p' \quad (5.61)$$

onde  $\text{posto}(\mathcal{O}) = \text{posto}(\mathcal{C}) = n$ . Então a matriz bloco Hankel  $\Sigma_{fu|p}$  têm uma decomposição  $\Sigma_{fu|p} = \mathcal{O}\mathcal{C}$ . Dado que  $\Pi = \Sigma_{fp|u}\Sigma_{pp|u}^{-1}$ , a projeção oblíqua pode ser expressa como

$$\Pi p_t = \mathcal{O}x_t \quad (5.62)$$

onde o vetor de estado é agora definido como o vetor  $n \times 1$ :

$$x_t = \mathcal{C}\Sigma_{pp|u}^{-1}p_t = \tilde{\Sigma}^{1/2}V'L_p^{-1}p_t. \quad (5.63)$$

Em termos de  $x_t$ , o preditor ótimo  $\hat{f}_t$  de (5.55) têm a forma:

$$\hat{f}_t = \mathcal{O}x_t + \Phi u_t^+, \quad (5.64)$$

onde  $\Phi$  é um operador causal. Podemos ver que  $x_t$  é uma estatística condicional mínima que carrega exatamente toda a informação contida em  $p_t$  necessária para estimar as saídas futuras dadas as entradas futuras depois do instante  $t$ .

### 5.4.6 O modelo estacionário inovativo

Derivamos o modelo inovativo para a frente no espaço de estado para a saída  $y$  utilizando o vetor de estado  $x_t$  dado por (5.63) e o preditor ótimo  $\hat{f}_t$  dado por (5.64).

Seja  $\mathcal{U}_t$  o subespaço gerado somente pela entrada presente  $u_t$ . Dado que as primeiras  $p$  linhas de (5.64) correspondem ao preditor de um passo de  $y_t$  dado o espaço  $\mathcal{P}_t \vee \mathcal{U}_t$ , podemos escrever

$$\hat{y}_t = E(y_t | \mathcal{P}_t \vee \mathcal{U}_t) = Cx_t + Du_t,$$

onde  $C$  e  $D$  são matrizes constantes de dimensões  $p \times n$  e  $p \times m$ , respectivamente. Definimos o erro de predição como:

$$e_t = y_t - E(y_t | \mathcal{P}_t \vee \mathcal{U}_t). \quad (5.65)$$

Desta definição, a equação da saída é escrita como

$$y_t = Cx_t + Du_t + e_t. \quad (5.66)$$

Notemos que o erro de predição  $e_t$  é estacionário devido à estacionaridade conjunta de  $\{u_t, y_t\}$  e que a projeção  $E(y_t | \mathcal{P}_t \vee \mathcal{U}_t)$  está baseada nas observações do passado infinito.  $e_t$  é um processo ruído branco não correlacionado com as saídas passadas  $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$  e as entradas presente e passadas  $\{u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots\}$ , e que podemos denotar por  $e_t \perp \mathcal{Y}_t^- \vee \mathcal{U}_{t+1}^-$ , pois a ortogonalidade ocorre da definição (5.65).

Agora consideramos a dinâmica do vetor de estado  $x_t$ . Seja :

$$\hat{x}_{t+1} = x_{t+1} - E\{x_{t+1} | \mathcal{X}_t \vee \mathcal{U}_t\} \quad (5.67)$$

onde  $\mathcal{X}_t$  é o espaço gerado por  $x_t$ . O último termo do lado direito é uma soma de projeções oblíquas em espaços de dimensão finita. Assim, existem matrizes constantes  $A$  e  $B$  de dimensões  $n \times n$  e  $n \times m$  tal que na base escolhida temos

$$E\{x_{t+1} | \mathcal{X}_t \vee \mathcal{U}_t\} = Ax_t + Bu_t.$$

Assim a equação de estado é dada por

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + \hat{x}_{t+1}. \quad (5.68)$$

**Lema 5.4.4** *O erro de predição  $\hat{x}_{t+1}$  é uma função de  $e_t$ , e assim existe uma matriz  $K$  tal que*

$$\hat{x}_{t+1} = Ke_t. \quad (5.69)$$

**Prova** Ver Katayama e Picci (1999). ■

**Teorema 5.4.5** *Supondo que não exista realimentação da saída  $y_t$  para a entrada  $u_t$ , e considerando que o posto de  $\Sigma_{fp|u}$  é  $n$ , de (5.68), (5.69) e (5.66), a realização estocástica em termos do vetor de estado  $x_t$  é dada por:*

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Ke_t \quad (5.70)$$

$$y_t = Cx_t + Du_t + e_t$$

**Prova** Ver Katayama e Picci (1999). ■

### 5.4.7 Estimação das projeções Oblíquas

Seguindo Katayama e Picci (1999), nesta Seção, baseado em dados de entrada-saída finitos, apresentamos e implementamos dois métodos para calcular as matrizes  $\Pi$  e  $\Phi$ , componentes das projeções oblíquas. Um deles resolve as equações do Wiener-Hopf (5.44) utilizando uma fatoração LQ. Dado que, para o caso de dados finitos, o  $\Phi$  estimado geralmente não é uma matriz triangular inferior. Outro método estima  $\Pi$  e  $\Phi$  utilizando técnicas de Mínimos-Quadrados que consideram a restrição para  $\Phi$ , isto é, todos os elementos da parte direita superior de  $\Phi$  são fixados em zero. Uma vez estimadas  $\Pi$  e

$\Phi$ , podemos utilizar Métodos de Subespaço de Identificação para estimar os parâmetros A, B, C, D e K do sistema. Estes métodos e os seus respectivos algoritmos serão discutidos a seguir.

Suponhamos que são dados um número finito de dados de entrada-saída,  $\{u_t, y_t\}$ , para  $t = 0, 1, \dots, N + 2k - 2$  com  $k > 0$  e  $N$  suficientemente grande para serem modelados linearmente no espaço de estado. Supomos que a série temporal  $\{u_t, y_t\}$  está composta de valores amostrais de dois processos conjuntamente estacionários  $(u, y)$ , satisfazendo as suposições das seções precedentes, em particular as condições da dimensionalidade finita e da não realimentação da saída. Também suporemos, durante toda esta Seção, que as médias amostrais convergem aos valores verdadeiros previstos quando  $N \rightarrow \infty$  e que a entrada é persistentemente excitante.

Com os dados entrada-saída, definimos as seguintes matrizes bloco Hankel,  $km \times N$  e  $kp \times N$  :

$$U_{0|k-1} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{N-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k-1} & u_k & \cdots & u_{N-k-2} \end{bmatrix}, \quad (5.71)$$

$$Y_{0|k-1} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{N-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k-1} & y_k & \cdots & y_{N-k-2} \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

Definimos o intervalo passado como  $[0, k - 1]$ , e o intervalo futuro como  $[k, 2k - 1]$ . Similarmente definimos as correspondentes matrizes bloco Hankel para as entradas e saídas futuras como  $U_{k|2k-1}$  e  $Y_{k|2k-1}$ , respectivamente. Assim a matriz das entradas e saídas passadas é definida como

$$P_{0|k-1} = \begin{bmatrix} U_{0|k-1} \\ Y_{0|k-1} \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

### Método da fatoração das covariâncias

Nesta seção consideramos que a entrada excita o sistema persistentemente, assim o posto linha de  $U_{0|2k-1}$  é  $2km$ . Consideremos a seguinte fatoração LQ, Verhaegen e Dewilde (1992a); Overschee e De Moor (1994)

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} U_{k|2k-1} \\ P_{0|k-1} \\ Y_{k|2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ Q'_3 \end{bmatrix} = LQ'. \quad (5.74)$$

onde  $L_{11}$ ,  $L_{22}$  e  $L_{33}$  são matrizes triangulares inferiores  $km \times km$ ,  $k(p+m) \times k(p+m)$  e  $kp \times kp$ , respectivamente. Pelas propriedades da fatoração LQ as matrizes  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são ortogonais com  $Q_i'Q_j = I\delta_{ij}$ . Segue-se de 5.74 que a matriz de covariância amostral é dado por

$$\Sigma_{upf} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} U_{k|2k-1} \\ P_{0|k-1} \\ Y_{k|2k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{k|2k-1} \\ P_{0|k-1} \\ Y_{k|2k-1} \end{bmatrix}', \quad (5.75)$$

definindo

$$\Sigma_{upf} \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_{uu} & \Sigma_{up} & \Sigma_{uf} \\ \Sigma_{pu} & \Sigma_{pp} & \Sigma_{pf} \\ \Sigma_{fu} & \Sigma_{fp} & \Sigma_{ff} \end{bmatrix}, \quad (5.76)$$

de (5.75) e (5.74) temos

$$\begin{aligned} \Sigma_{upf} &= \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{21} & L'_{31} \\ 0 & L'_{22} & L'_{32} \\ 0 & 0 & L'_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{11}L'_{11} & L_{11}L'_{21} & L_{11}L'_{31} \\ L_{22}L'_{11} & L_{21}L'_{21} + L_{22}L'_{22} & L_{21}L'_{31} + L_{22}L'_{32} \\ L_{31}L'_{11} & L_{31}L'_{21} + L_{32}L'_{22} & L_{31}L'_{31} + L_{32}L'_{32} + L_{33}L'_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.77)$$

do Teorema 2.3.2 do Capítulo 2 e de (5.76) e (5.77), temos

$$\begin{aligned} \Sigma_{ff|u} &= \Sigma_{ff} - \Sigma_{fu}\Sigma_{uu}^{-1}\Sigma_{uf} = L_{31}L'_{31} + L_{32}L'_{32} + L_{33}L'_{33} - L_{31}L'_{11}(L_{11}L'_{11})^{-1}L_{11}L'_{31} = \\ &= L_{32}L'_{32} + L_{33}L'_{33}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Similarmente temos

$$\Sigma_{pp|u} = L_{22}L'_{22}, \text{ e } \Sigma_{fp} = L_{32}L'_{22}. \quad (5.79)$$

De (5.56), (5.78) e (5.79), temos

$$\Pi = \Sigma_{fp|u}(\Sigma_{pp|u})^\dagger = L_{32}L'_{22}.$$

De forma similar podemos obter  $\Phi$ , rearranjando as matrizes de covariâncias como:

$$\Sigma_{puf} \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_{pp} & \Sigma_{pu} & \Sigma_{pf} \\ \Sigma_{up} & \Sigma_{uu} & \Sigma_{uf} \\ \Sigma_{fp} & \Sigma_{fu} & \Sigma_{ff} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R'_{11} & R'_{21} & R'_{31} \\ 0 & R'_{22} & R'_{32} \\ 0 & 0 & R'_{33} \end{bmatrix}.$$

Similarmente temos

$$\Sigma_{ff|p} = R_{32}R'_{32} + R_{33}R'_{33}, \Sigma_{uu|p} = R_{22}R'_{22}, \text{ e } \Sigma_{fu|p} = R_{32}R'_{22}.$$

De (5.56) e as equações acima temos

$$\Phi = \Sigma_{fp|u}(\Sigma_{uu|p})^\dagger = R_{32}R'_{22}.$$

A solução acima não considera a estrutura bloco triangular inferior de  $\Phi$ . O problema é resolvido considerando a estrutura de  $\Phi$  no seguinte algoritmo.

### 5.4.8 Identificação no espaço de estados pelo método dos Mínimos-Quadrados Restrito (CLS-SSI)

O método do mínimos quadrados restrito estima as matrizes  $\Pi$  e  $\Phi$  sob a restrição (5.58). Esta idéia é inspirada no trabalho de Peternell et al. (1996). Podemos escrever a relação (5.55) como a seguinte equação de regressão

$$f_t = \begin{bmatrix} \Pi & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ u_t^+ \end{bmatrix} + v_t,$$

onde  $v_t$  é o erro de predição. Para o caso de dados finitos, esta relação pode ser escrita como:

$$Y_{k|2k-1} = \Theta \begin{bmatrix} P_{0|k-1} \\ U_{k|2k-1} \end{bmatrix} + V_{k|2k-1},$$

onde  $\Theta = \begin{bmatrix} \Pi & \Phi \end{bmatrix}$ . Então utilizando (5.74), encontramos que

$$\frac{1}{\sqrt{N}}Y_{k|2k-1} = L_y Q', \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} P_{0|k-1} \\ U_{k|2k-1} \end{bmatrix} = L_{pu} Q',$$

onde

$$L_y = \begin{bmatrix} L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}, \quad L_{pu} = \begin{bmatrix} L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

assim a equação de regressão é reduzida a

$$L_y = \Theta L_{pu} + V_Q, \tag{5.80}$$

onde  $V_Q = \frac{1}{\sqrt{N}} V_{k|2k-1} Q$ . Vetorializando (5.80) obtemos

$$\text{vec}(L_y) = Z \text{vec}(\Theta) + \text{vec}(V_Q),$$

onde  $Z = L'_{pu} \otimes I_{kp} \in R^{2k^2 p(p+m) \times k^2 p(p+2m)}$  e onde  $\otimes$  denota o produto de Kronecker. Então os elementos das matrizes são obtidos pela solução de um problema de mínimos quadrados restrito onde é considerada a estrutura da matriz  $\Phi$ .

Uma vez estimadas as matrizes  $\Pi$  e  $\Phi$  e as covariâncias condicionais  $\Sigma_{ff|u}$ ,  $\Sigma_{pp|u}$ , etc., podemos utilizar métodos de subespaço para estimar as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $K$ . Nesta tese implementamos o algoritmo CLS-SSI conforme apresentado no Apêndice C. Basicamente o algoritmo segue os seguintes passos:

**Passo 1** A partir das expressões (5.78) e (5.79), computar a decomposição em valores singulares da matriz de covariância normalizada

$$\Sigma_{ff|u}^{-1/2} \Sigma_{fp|u} (\Sigma_{pp|u}^{-1/2})' = USV' \simeq \hat{U} \hat{S} \hat{V}'$$

para conseguir uma aproximação mais enxuta de

$$\Sigma_{fp|u} \simeq \Sigma_{ff|u}^{1/2} \hat{U} \hat{S} \hat{V}' (\Sigma_{pp|u}^{1/2})',$$

onde  $\hat{S}$  é obtido desprezando os valores singulares menos significativos (aproximadamente zero), de tal forma que a dimensão do vetor de estado seja igual à dimensão de  $\hat{S}$ .

**Passo 2** Definir as matrizes extendidas de observabilidade e de controlabilidade como:

$$\mathcal{O}_k = \Sigma_{ff|u}^{1/2} \hat{U} \hat{S}^{1/2}, \quad \mathcal{C}_k = \hat{S}^{1/2} \hat{V}' (\Sigma_{pp|u}^{1/2})'$$

**Passo 3** Computar as matrizes  $C$  e  $A$  pelo método de Verhaegen e Dewilde como segue

$$C = \mathcal{O}_k(1 : p, 1 : n),$$

$$A = \mathcal{O}_k(p+1 : kp, 1 : n)^\dagger \mathcal{O}_k(1 : (k-1)p, 1 : n).$$

**Passo 4** Dadas as matrizes  $A$  e  $C$ , e comparando a matriz obtida  $\Phi$  com a expressão (5.18), podemos obter as matrizes  $D$  e  $B$ . A matriz  $D$  é obtida pegando a primeira bloco matriz  $G_0$  de  $\Phi$ .

Para o cálculo da matriz  $B$ , notemos que

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{\alpha-2} \\ CA^{\alpha-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ CA^2B \\ \vdots \\ CA^{\alpha-2}B \\ CA^{\alpha-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ \vdots \\ G_{\alpha-1} \\ G_\alpha \end{bmatrix},$$

a matriz  $B$  é obtida por meio de uma regressão utilizando a equação acima.

**Passo 5** Com as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  dadas, consideramos a seguinte equação de estado

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + w_t \\ y_t &= Cx_t + Du_t + e_t \end{aligned}, \quad (5.81)$$

Então podemos calcular os resíduos: por exemplo para  $(y_0, u_0, x_0)$ , o resíduo é  $e_0 = y_0 - Du_0 - Cx_0$ . Ou através do vetor estimado dado por

$$\hat{X}_k = C_k \Sigma_{pp|u}^{-1} P_{0|k-1} = \hat{S}^{1/2} \hat{V}' \Sigma_{pp|u}^{-1/2} P_{0|k-1}$$

formando a equação

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ Y_{k|k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ U_{k|k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_k \\ E_k \end{bmatrix}$$

e calculando as matrizes  $W_k$  e  $E_k$ .

**Passo 6** Calcular as matrizes de covariância residuais como

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{ww} & \Sigma_{we} \\ \Sigma_{ew} & \Sigma_{ee} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W_k W_k' & W_k E_k' \\ E_k W_k' & E_k E_k' \end{bmatrix},$$

e resolver a equação discreta de Riccati

$$P = APA' - (APC' + \Sigma_{we})(CPC' + \Sigma_{ee})^{-1}(APC' + \Sigma_{we})' + \Sigma_{ww}. \quad (5.82)$$

Uma vez calculado  $P \geq 0$ , (matriz simétrica semidefinida positiva) calculamos o ganho de Kalman como

$$K = (APC' + \Sigma_{we})(CPC' + \Sigma_{ee})^{-1}.$$

### 5.4.9 O algoritmo MOESP\_AOKI

O algoritmo MOESP\_AOKI foi proposto em Tamariz (2005). Alguns fundamentos básicos para o entendimento dele podem ser encontrados em Barreto (2002) e nos Capítulos 3 e 4 desta Tese. O algoritmo identifica sistemas lineares estocásticos multivariáveis no espaço de estado combinando dois excelentes algoritmos: o algoritmo MOESP, Verhaegen e Dewilde (1992a,b), que modela a parte determinística do sistema, e o algoritmo de modelagem de séries temporais multivariadas desenvolvida por Aoki (1983, 1987, 1990), que modela a parte puramente estocástica. O algoritmo MOESP\_AOKI se fundamenta no princípio da superposição, e na decomposição do sinal ruidoso como a saída de um subsistema puramente estocástico e um subsistema determinístico.

A seguir propomos 2 teoremas sobre decomposição por superposição, que são de fundamental importância no algoritmo MOESP-AOKI desenvolvido em Tamariz (2005) e utilizado neste trabalho.

**Teorema 5.4.6** *Por superposição o modelo linear ruidoso na forma inovativa de um sistema  $S$ , dado por*

$$S : \begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Ke_t \\ y_t = Cx_t + Du_t + e_t \end{cases},$$

pode ser decomposto nos dois submodelos seguintes:

$$S_d : \begin{cases} x_{t+1}^d = Ax_t^d + Bu_t \\ y_t^d = Cx_t^d + Du_t \end{cases}$$

e

$$S_e : \begin{cases} x_{t+1}^e = Ax_t^e + Ke_t \\ y_t^e = Cx_t^e + e_t \end{cases},$$

onde os sobrescritos  $d$  e  $e$  referem-se às partes determinística e estocástica, respectivamente. A saída é dada por:

$$y_t = y_t^d + y_t^e \quad (5.83)$$

e o estado é dado por:

$$x_t = x_t^d + x_t^e. \quad (5.84)$$

**Prova** Podemos interpretar a entrada do modelo ruidoso como sendo o vetor  $\begin{bmatrix} u_t \\ e_t \end{bmatrix}$ , assim tem-se

$$x_{t+1} = Ax_t + [B \ K] \begin{bmatrix} u_t \\ e_t \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

$$y_t = Cx_t + [D \ I] \begin{bmatrix} u_t \\ e_t \end{bmatrix}, \quad (5.86)$$

se consideramos o vetor de entrada como a soma independente dos sinais determinístico e estocástico dada por

$$\begin{bmatrix} u_t \\ e_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e_t \end{bmatrix},$$

por superposição as respostas do sistema quando  $e_t$  é zero e quando  $u_t$  é zero são  $y_t^d$  e  $y_t^e$ , respectivamente. As equações de estado para  $e_t$  nulo são

$$\begin{aligned} x_{t+1}^d &= Ax_t^d + Bu_t \\ y_t^d &= Cx_t^d + Du_t, \end{aligned} \quad (5.87)$$

e as equações de estado para  $u_t = 0$ , são

$$\begin{aligned} x_{t+1}^e &= Ax_t^e + Ke_t \\ y_t^e &= Cx_t^e + e_t \end{aligned} \quad (5.88)$$

Onde as matrizes  $A$  e  $C$  são as mesmas para ambos os modelos. Substituindo (5.87) e (5.88) em (5.83) temos

$$y_t = Cx_t^d + Du_t + Cx_t^e + e_t = C(x_t^d + x_t^e) + Du_t + e_t,$$

logo o estado está dado por (5.84). ■

Observe que nesta decomposição as matrizes  $A$  e  $B$  são as mesmas para os dois subsistemas. Overschee na sua tese de doutorado, bem como Overschee e De Moor Overschee e De Moor (1996) usam esta decomposição.

Por outro lado, em muitos casos, podemos supor que um sinal ruidoso  $y$  possa ser modelado no espaço de estado por um modelo que pode ser decomposto em dois subsistemas, onde um subsistema modela a parte estocástica do sinal e o outro modela a parte determinística do sinal, com um processo estocástico ruído branco excitando o subsistema puramente estocástico enquanto que a entrada conhecida excita o sistema determinístico, e o sinal de saída ruidoso é a soma das saídas dos dois subsistemas. Considerando esta estrutura podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 5.4.7** *Seja o modelo linear de um sinal ruídooso  $y$  dado por um sistema estocástico no espaço de estado:*

$$\mathbf{S} : \begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Ke_t \\ y_t = Cx_t + Du_t + e_t \end{cases} \quad (5.89)$$

*Por superposição, o sinal ruídooso  $y_t$  é a soma das saídas  $y_t^d$  e  $y_t^e$  dos subsistemas  $\mathbf{S}^d$  e  $\mathbf{S}^e$ , definidos como:*

$$\mathbf{S}^d : \begin{cases} x_{t+1}^d = A^d x_t^d + B^d u_t \\ y_t^d = C^d x_t^d + D^d u_t \end{cases} \quad (5.90)$$

e

$$\mathbf{S}^e : \begin{cases} x_{t+1}^e = A^e x_t^e + K^e e_t \\ y_t^e = C^e x_t^e + e_t \end{cases} \quad (5.91)$$

*Onde o sobrescrito  $d$  refere-se a determinístico e o sobrescrito  $e$  refere-se a estocástico. Então o vetor de estado do sinal  $y_t$  é dado por :  $x_t = \begin{bmatrix} x_t^d \\ x_t^e \end{bmatrix}$ , e as matrizes do seu modelo no espaço de estado são dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ 0 & A^e \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B^d \\ 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 \\ K^e \end{bmatrix}, C = [C^d \ C^e], \text{ e } D = D^d.$$

**Prova** Como a saída  $y_t$  é a soma das saídas dos subsistemas, de (5.90) e (5.91) temos:

$$y_t = y_t^d + y_t^e = C^d x_t^d + C^e x_t^e + D^d u_t + e_t$$

$$y_t = [C^d \ C^e] \begin{bmatrix} x_t^d \\ x_t^e \end{bmatrix} + D^d u_t + e_t, \quad (5.92)$$

logo de (5.89) e (5.92) temos que  $x_t = \begin{bmatrix} x_t^d \\ x_t^e \end{bmatrix}$ ,  $C = [C^d \ C^e]$  e  $D = D^e$ . De (5.90) e (5.91) temos

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^d \\ x_{t+1}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d x_t^d + B^d u_t \\ A^e x_t^e + K^e e_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ 0 & A^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^d \\ x_t^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^d \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ K^e \end{bmatrix} e_t$$

■

Com base na estrutura de modelagem de dados ruídoosos dada neste teorema o algoritmo MOESP-AOKI proposto em Tamariz (2005) é tratado nesta tese.

O algoritmo MOESP\_AOKI é realizado em dois passos: num primeiro passo o método MOESP é utilizado para modelar a parte determinística, obtendo o subsistema determinístico:

$$\begin{aligned}x_{t+1}^d &= A^d x_t^d + B^d u_t \\ y_t^d &= C^d x_t^d + D^d u_t.\end{aligned}\tag{5.93}$$

Para tanto, a partir de dados de entrada e saída medidos, as matrizes  $U_p, U_f, Y_p, Y_f$  são formadas como:

$$\begin{aligned}U_p &= \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{N-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_N \\ u_2 & u_3 & u_4 & \dots & u_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{j-1} & u_j & u_{j+1} & \dots & u_{N+j-2} \end{bmatrix}; \quad U_f = \begin{bmatrix} u_j & u_{j+1} & u_{j+2} & \dots & u_{N+j-1} \\ u_{j+1} & u_{j+2} & u_{j+3} & \dots & u_{N+j} \\ u_{j+2} & u_{j+3} & u_{j+4} & \dots & u_{N+j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{2j-1} & u_{2j} & u_{2j+1} & \dots & u_{N+2j-2} \end{bmatrix} \\ Y_p &= \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{N-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_N \\ y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{j-1} & y_j & y_{j+1} & \dots & y_{N+j-2} \end{bmatrix}; \quad Y_f = \begin{bmatrix} y_j & y_{j+1} & y_{j+2} & \dots & y_{N+j-1} \\ y_{j+1} & y_{j+2} & y_{j+3} & \dots & y_{N+j} \\ y_{j+2} & y_{j+3} & y_{j+4} & \dots & y_{N+j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{2j-1} & y_{2j} & y_{2j+1} & \dots & y_{N+2j-2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Através do MOESP é obtida a quádrupla de matrizes  $A^d, B^d, C^d, D^d$ , bem como  $y_t^d$ . A seguir o sinal  $y_t^e$ , é determinado utilizando superposição. Na segunda parte do algoritmo MOESP-AOKI aplica-se o algoritmo AOKI a  $y_t^e$  para obtenção do subsistema puramente estocástico com a seguinte representação no espaço de estado:

$$\begin{aligned}x_{t+1}^e &= A^e x_t^e + K^e e_t \\ y_t^e &= C^e x_t^e + e_t.\end{aligned}$$

Assim o modelo resultante de  $y_t$  no espaço de estado obtido pelo algoritmo MOESP-AOKI será:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^d \\ x_{t+1}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ 0 & A^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^d \\ x_t^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^d \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ K^e \end{bmatrix} e_t$$

e

$$y_t = [C^d \ C^e] \begin{bmatrix} x_t^d \\ x_t^e \end{bmatrix} + D^d u_t + e_t$$

com vetor de estado  $\begin{bmatrix} x_t^d \\ x_t^e \end{bmatrix}$ .

A aplicação deste algoritmo teve bons resultados, Tamariz (2005). No Apêndice C é apresentado o algoritmo de AOKI.

## Capítulo 6

# Identificação e Controle Ótimo Descentralizados de Sistemas Interconectados

### 6.1 Introdução

Os sistemas dinâmicos interconectados acontecem de forma natural em muitas áreas do conhecimento, tais como em sistemas de potência, sistemas ecológicos, redes de tráfego urbano, sistemas econômicos, etc. A identificação destes sistemas pode ser complexa em muitos casos. Para o projeto de um controle descentralizado, uma identificação de modelos com estrutura centralizada não é de muita utilidade, e também não aproveita convenientemente os dados de entrada e saída e a estrutura do sistema. Sendo assim, nesta Tese abordamos este problema e propomos a identificação e o controle descentralizado para tais sistemas. Em Bottura e Cáceres (2002b, 2001) uma metodologia descentralizada de identificação baseada nos métodos nos subespaços para sistemas serialmente interconectados é proposta. Os modelos obtidos pela metodologia possuem uma estrutura bloco triangular inferior. Em Bottura e Cáceres (2002a), com base nos modelos identificados, propomos a otimização sequencial LQG para sistemas hierarquicamente estruturados, ver Siljak (1991); Stankovic e Siljak (1989), para o controle descentralizado de sistemas serialmente interconectados. Aproveitando a estrutura bloco triangular inferior do sistema identificado. Este Capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 apresentamos um sistema serial interconectado e fornecemos a estrutura dele; na Seção 3 apresentamos a metodologia descentralizada de identificação proposta; na Seção 4 apresentamos a metodologia descentralizada de identificação baseada em métodos de subespaço; para este propósito comparamos e apresentamos, por meio de um exemplo, os resultados da aplicação descentralizada de dois métodos de subespaço para identificação. Na Seção 5 apresentamos um controle descentralizado

de sistemas estocásticos que aproveita a estrutura bloco triangular inferior dos modelos obtidos na metodologia descentralizada de identificação; na Seção 6 são feitos comentários sobre este Capítulo.

## 6.2 Sistemas serialmente interconectados

Um sistema serialmente interconectado, composto por  $N$  subsistemas, está ilustrado na Figura 6.1,

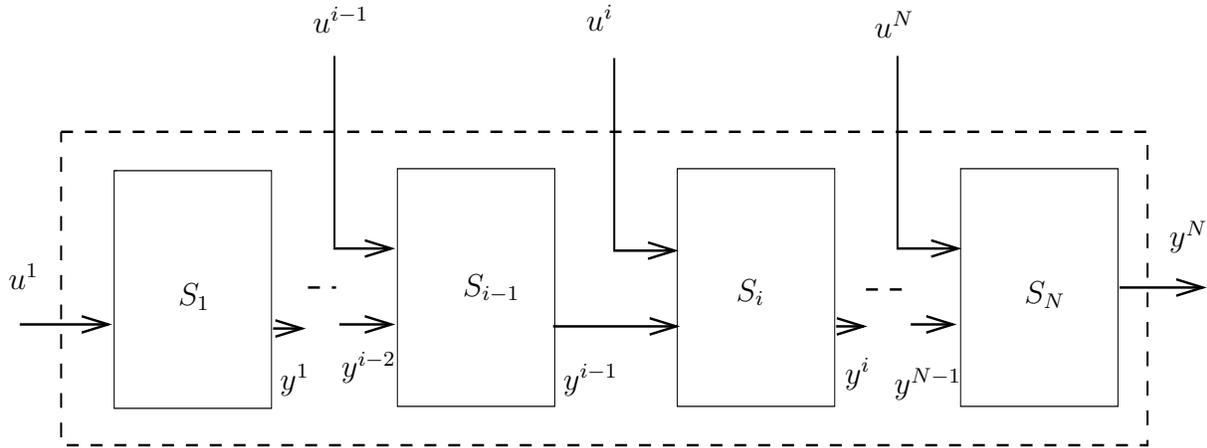


Fig. 6.1: Sistema serialmente interconectado

onde  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , denota o  $i$ -ésimo subsistema,  $u^i$  e  $y^i$  são a entrada e a saída próprias do subsistema. Observamos que há uma relação de dependência, em cascata entre os subsistemas, isto é, existem ligações seriais diretas entre os subsistemas por meio das suas saídas tal que a saída de um subsistema influi diretamente no comportamento do subsistema seguinte. Na Figura 6.2 mostramos dois subsistemas,  $S_{i-1}$  e  $S_i$ , onde consideramos as incertezas nas modelagens internas dos subsistemas e as saídas com erros de medição, individualizadas para cada subsistema.

Denotamos as saídas medidas por  $z^{i-1}$  e  $z^i$ ; as saídas verdadeiras  $y^{i-1}$  e  $y^i$  são perturbadas pelos processos aleatórios ruído branco  $v^{i-1}$  e  $v^i$ , respectivamente. As incertezas de modelagem e/ou as perturbações internas estão caracterizadas por meio das entradas  $w^{i-1}$  e  $w^i$ , considerados processos aleatórios ruído branco. Para a identificação de cada subsistema, consideramos o "subsistema isolado" mostrado na Figura 6.3, onde  $u^i$  e  $y^{i-1}$  são consideradas entradas conhecidas sem erro, e  $z^i$  é a sua saída medida.

A natureza serial do sistema permite estabelecer uma metodologia de identificação do sistema global por meio da identificação individual dos seus subsistemas. O comportamento de um subsistema é devido à entrada própria do subsistema e à saída do subsistema anterior, portanto os dados de saída do subsistema anterior são essenciais e devem ser utilizados para a identificação isolada do subsistema. Existem vários casos onde esta metodologia pode ser aplicada como por exemplo, um

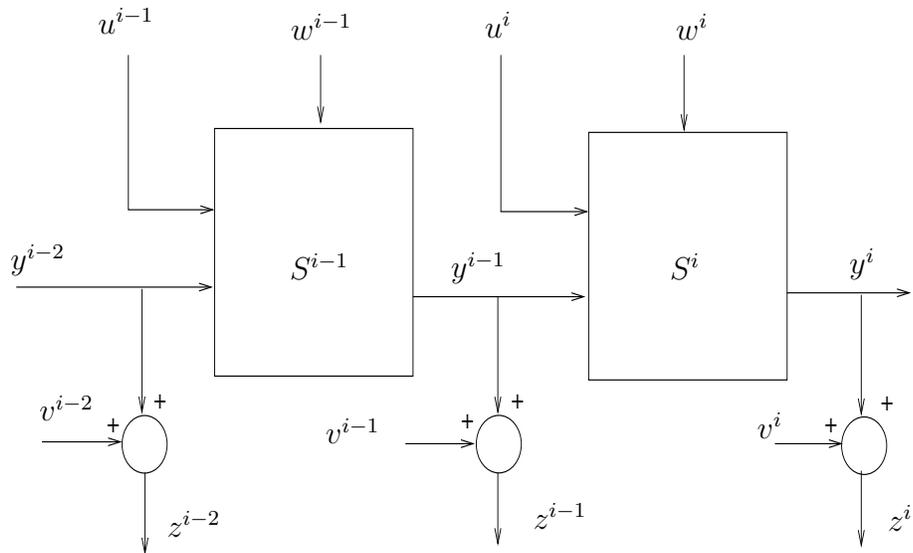


Fig. 6.2: Dois subsistemas do sistema global.

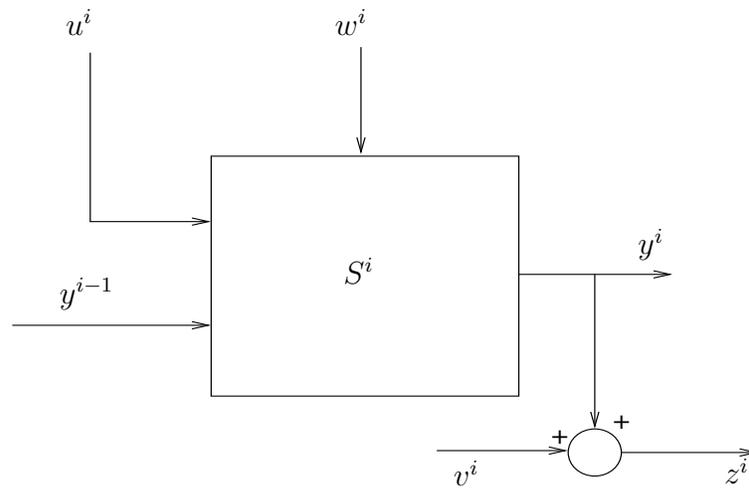


Fig. 6.3: Subsistema Isolado

sistema de reservatórios em cascata; nesta Tese aplicamos a metodologia para a modelagem de um sistema de qualidade da água de rio.

Propomos a representação no espaço de estado do subsistema isolado  $S_i$ , como:

$$x_{t+1}^i = A_i x_t^i + B_i u_t^i + M_i y_t^{i-1} + w_t^i \quad (6.1)$$

$$y_t^i = C_i x_t^i + D_i u_t^i + N_i y_t^{i-1} \quad (6.2)$$

$$z_t^i = y_t^i + v_t^i, \quad (6.3)$$

onde  $y_t^i$ ,  $u_t^i$  e  $x_t^i$  são os vetores de entrada, saída e estado do subsistema  $i$ , respectivamente. Rearranjamos esta representação, para efeitos de identificação, como:

$$x_{t+1}^i = A_i x_t^i + \begin{bmatrix} B_i & M_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^i \\ y_t^{i-1} \end{bmatrix} + w_t^i \quad (6.4)$$

$$z_t^i = C_i x_t^i + \begin{bmatrix} D_i & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^i \\ y_t^{i-1} \end{bmatrix} + v_t^i. \quad (6.5)$$

O problema da identificação do sistema serialmente interconectado consiste em encontrar para  $S_i$ , a partir dos dados de entrada-saída medidos dos subsistemas, as matrizes  $A_i, B_i, C_i, D_i, M_i$  e  $N_i$  das equações (6.4) e (6.5), e as covariâncias  $Q_i, R_i$  e  $S_i$  dos ruídos  $w_t^i$  e  $v_t^i$ , definidos como:

$$E \left[ \begin{pmatrix} w_s^i \\ v_s^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_t^i)' & (v_t^i)' \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q_i & S_i \\ S_i' & R_i \end{pmatrix} \delta_{st} \geq 0. \quad (6.6)$$

Uma vez identificadas as matrizes de estado e de saída de cada subsistema, o modelo global, sem considerar o erro de leitura, de um sistema serialmente interconectado composto de 3 subsistemas é determinado sequencialmente como segue:

Para o primeiro subsistema temos

$$x_{t+1}^1 = A_1 x_t^1 + B_1 u_t^1 + w_t^1 \quad (6.7)$$

$$y_t^1 = C_1 x_t^1 + D_1 u_t^1 \quad (6.8)$$

$$z_t^1 = y_t^1 + v_t^1.$$

Para o segundo

$$x_{t+1}^2 = A_2 x_t^2 + B_2 u_t^2 + M_2 y_t^1 + w_t^2 \quad (6.9)$$

$$y_t^2 = C_2 x_t^2 + D_2 u_t^2 + N_2 y_t^1, \quad (6.10)$$

substituindo (6.7) e (6.8) em (6.9) e (6.10) temos

$$x_{t+1}^2 = A_2 x_t^2 + B_2 u_t^2 + M_2 C_1 x_t^1 + M_2 D_1 u_t^1 + w_t^2$$

$$y_t^2 = C_2 x_t^2 + D_2 u_t^2 + N_2 C_1 x_t^1 + N_2 D_1 u_t^1$$

ou

$$x_{t+1}^2 = M_2 C_1 x_t^1 + A_2 x_t^2 + M_2 D_1 u_t^1 + B_2 u_t^2 + w_t^2 \quad (6.11)$$

$$y_t^2 = N_2 C_1 x_t^1 + C_2 x_t^2 + N_2 D_1 u_t^1 + D_2 u_t^2 \quad (6.12)$$

Para o terceiro subsistema temos

$$x_{t+1}^3 = A_3x_t^3 + B_3u_t^3 + M_3y_t^2 + w_t^3 \quad (6.13)$$

$$y_t^3 = C_3x_t^3 + D_3u_t^3 + N_3y_t^2, \quad (6.14)$$

substituindo 6.11 e 6.12 em 6.13 e 6.14 temos

$$x_{t+1}^3 = M_3N_2C_1x_t^1 + M_3C_2x_t^2 + A_3x_t^3 + M_3N_2D_1u_t^1 + M_3D_2u_t^2 + B_3u_t^3 + w_t^3$$

$$y_t^3 = N_3N_2C_1x_t^1 + N_3C_2x_t^2 + C_3x_t^3 + N_3N_2D_1u_t^1 + N_3D_2u_t^2 + D_3u_t^3.$$

Para um sistema serialmente interconectado com N subsistemas, as equações de estado e de saída são encontradas de forma similar. Para um sistema com 3 subsistemas definimos os vetores de estado, de entrada e de saída globais como

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ x_t^3 \end{bmatrix}, \quad u_t = \begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \\ u_t^3 \end{bmatrix}, \quad y_t = \begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ y_t^3 \end{bmatrix},$$

logo, pelas relações acima encontradas, a representação global no espaço de estados é:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ x_{t+1}^2 \\ x_{t+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ M_2C_1 & A_2 & 0 \\ M_3N_2C_1 & M_3C_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ x_t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ M_2D_1 & B_2 & 0 \\ M_3N_2D_1 & M_3D_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \\ u_t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_t^1 \\ w_t^2 \\ w_t^3 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ y_t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ N_2C_1 & C_2 & 0 \\ N_3N_2C_1 & N_3C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ x_t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ N_2D_1 & D_2 & 0 \\ N_3N_2D_1 & N_3D_2 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \\ u_t^3 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

A equação dos dados de saída com erro de medida pode ser encontrada facilmente como:

$$\begin{bmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \\ z_t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ N_2C_1 & C_2 & 0 \\ N_3N_2C_1 & N_3C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ x_t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ N_2D_1 & D_2 & 0 \\ N_3N_2D_1 & N_3D_2 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^1 \\ u_t^2 \\ u_t^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_t^1 \\ v_t^2 \\ v_t^3 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

As matrizes das equações de estado (6.15), (6.16) e (6.17) possuem uma estrutura Bloco Triangular Inferior (BTI). Existem várias técnicas de controle descentralizado que tratam de sistemas com este tipo de estrutura, o que será explorado nas seções seguintes. Na próxima Seção propomos uma metodologia descentralizada de identificação baseada nos métodos de subespaço para a identificação descentralizada de sistemas serialmente interconectados.

### 6.3 Identificação descentralizada de sistemas interconectados

Na Figura 6.3 consideramos um subsistema isolado, onde para fins de identificação, consideramos como dados exatamente conhecidos à entrada própria do subsistema  $u^i$  e a saída do subsistema anterior  $y^{i-1}$ .  $w^i$  representa o erros de modelagem e/ou perturbações externas no subsistema,  $z^i$  é a saída medida com erro de observação.

A identificação descentralizada de sistemas serialmente interconectados é realizada por meio da identificação isolada de cada subsistema, isto é, começamos identificando o primeiro subsistema da forma padrão, isto é, a entrada dele é  $u^1$  e a saída  $y^1$ . Para a identificação do segundo subsistema aproveitamos os dados de saída obtidos do primeiro subsistema, isto é, supomos como vetor de dados de entrada do segundo subsistema ao composto pela entrada própria e pela saída do subsistema 1. Assim sucessivamente vamos identificando cada subsistema isolado, isto é, tratamos cada subsistema isolado como se fosse um sistema que tem como vetor de entrada o vetor composto pela entrada própria do subsistema e a saída do subsistema anterior, isto é,  $\begin{bmatrix} u_t^i \\ y_t^{i-1} \end{bmatrix}$ , e  $z_t^i$  como a medida da sua saída. Como o vetor  $y_t^{i-1}$  não está diretamente disponível para leitura, consideramos a estimativa dele,  $\hat{y}_t^{i-1}$ , que pode ser obtida, por exemplo, por meio de um filtro de Kalman aplicado no subsistema anterior. Esta metodologia pode ser aplicada a sistemas serialmente interconectados devido a que a saída do subsistema anterior não está correlacionada com a saída do subsistema seguinte, embora a recíproca não seja verdadeira.

### 6.4 Identificação descentralizada de sistemas seriamente interconectados via métodos subespaço

Nesta Tese, desenvolvemos e aplicamos a metodologia descentralizada de identificação ou melhor dizendo a identificação descentralizada de sistemas serialmente interconectados utilizando métodos de subespaço de identificação. Como existem vários destes métodos de identificação, escolhemos os métodos N4SID, Overschee e De Moor (1996), MOESP, Verhaegen e Dewilde (1992a) e identificação estocástica nos subespaços via mínimos quadrados restrito, Katayama e Picci (1999), para a aplicação

da nossa metodologia. Posteriormente fazemos uma comparação da aplicação destes métodos através desta nossa proposta.

Recentemente tem recebido interesse crescente os métodos de subespaço de identificação; isto deve-se a vários fatores como, por exemplo, pode-se aplicá-los a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) de forma natural; a implementação destes algoritmos utiliza eficientes e robustos métodos para a decomposição em valores singulares de matrizes, Overschee e De Moor (1996); Verhaegen e Dewilde (1992a); Katayama e Picci (1999). Nesta Seção, utilizamos a metodologia descentralizada baseada na identificação em subespaço para sistemas serialmente interconectados, Bottura e Cáceres (2001, 2002b). Comparamos os resultados da aplicação descentralizada dos métodos de subespaço de identificação N4SID, MOESP e de Identificação Estocástica nos Subespaços com Mínimos Quadrados Restrito de Katayama e Picci (CLS-SSI). Apresentamos e comentamos os resultados da aplicação da metodologia descentralizada para um exemplo de um sistema serialmente interconectado.

### **6.4.1 Modelo de um sistema serialmente interconectado**

Com o propósito de simular, testar e comparar resultados da nossa metodologia descentralizada de identificação, geramos aleatoriamente um sistema “benchmark” serialmente interconectado com três subsistemas; as matrizes dos subsistemas são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5987 & 0.1449 & -0.0104 \\ 0.1449 & -0.3033 & -0.1387 \\ -0.0104 & -0.1387 & -0.5963 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.6614 & 0.2490 & -0.3835 \end{bmatrix}'$$

$$C_1 = [-0.5285 \quad 0.05540], \quad D_1 = [-2.5200]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.0119 & -0.3854 & 0.0357 & -0.2309 & 0.1310 & -0.0023 \\ -0.3858 & -0.1775 & -0.2811 & 0.0648 & 0.1025 & -0.3769 \\ 0.0804 & 0.2481 & -0.0045 & -0.1972 & 0.0110 & -0.3159 \\ -0.1921 & 0.0936 & -0.2066 & 0.0073 & 0.1915 & 0.1330 \\ 0.1671 & 0.1297 & -0.0488 & 0.1472 & -0.1889 & 0.2426 \\ -0.0142 & -0.3860 & -0.2853 & 0.1570 & 0.2514 & -0.0096 \end{bmatrix}$$

$$[B_2 \quad M_2]' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9443 & -2.4240 & -0.2238 & 0.0581 \\ -0.4246 & -0.2029 & 0 & -1.1264 & -0.8150 & 0.3666 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [-0.58611.53740 \quad -1.8628 \quad -0.4542 \quad -0.6521],$$

$$[D_2 \quad N_2] = [0.1033 \quad 0.0],$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.4408 & 0.1111 & -0.1368 & -0.1386 & -0.1948 & 0.1943 \\ 0.0488 & 0.4188 & -0.1450 & -0.2382 & 0.2376 & 0.1202 \\ -0.1318 & -0.1146 & 0.4120 & 0.0308 & -0.1660 & 0.0158 \\ -0.3241 & -0.0378 & -0.0761 & 0.4016 & 0.0122 & -0.0994 \\ -0.0304 & 0.1254 & -0.0767 & 0.2065 & 0.5171 & 0.2389 \\ 0.0152 & 0.3293 & -0.0886 & -0.0527 & 0.0099 & 0.2993 \end{bmatrix}$$

$$[B_3 \quad M_3] = \begin{bmatrix} -0.2790 & -0.7337 & -0.0645 & 0 & 0.6123 & -1.3235 \\ -0.6616 & -0.1461 & 0.2481 & -0.0766 & 0 & 1.6220 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = [00.0918 \quad -0.8076 \quad 0 \quad -1.4060 \quad -0.3745],$$

$$[D_3 \quad N_3] = [0 \quad 1.7513].$$

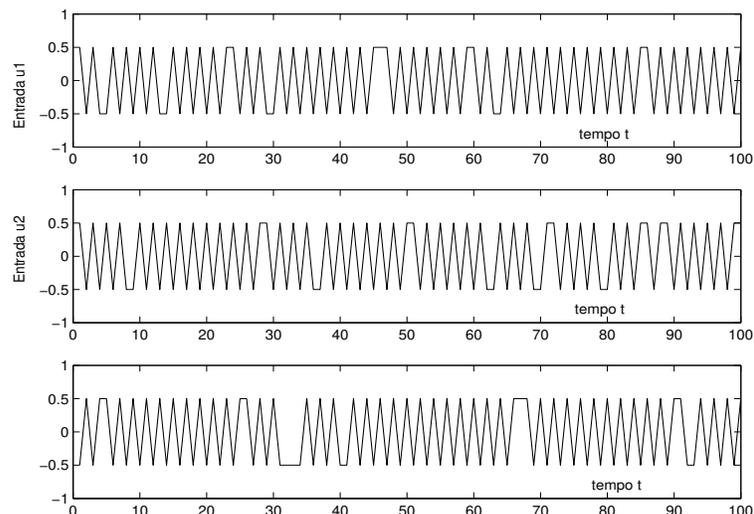


Fig. 6.4: Sinais binários aleatórios de entrada dos subsistemas S1, S2 e S3, respectivamente.

Nas equações de estado dos subsistemas incluímos os processos aleatórios ruído branco  $w_i$  e  $v_i$ . Para cada subsistema, 100 sinais binários aleatórios são gerados e aplicados na entrada de cada subsistema; na Figura 6.4 mostramos estas entradas. Então, para cada subsistema, as suas respectivas 100 amostras da saída foram armazenadas (saídas observadas). De posse desses dados, aplicamos a nossa metodologia descentralizada de identificação utilizando os três métodos de identificação em subespaço, acima citados.

### 6.4.2 Comparação de resultados

Aplicamos a metodologia descentralizada de identificação utilizando os métodos N4SID, MOESP e CLS-SSI. Na Figura 6.5 mostramos os erros de predição do primeiro subsistema. Para este subsistema, assim com também para os outros subsistemas, observamos que a metodologia baseada no método CLS-SSI apresenta o melhor desempenho, como mostram as Figuras 6.5, 6.6 e 6.7, onde são comparados os erros de predição dos subsistemas baseados nos métodos N4SID, MOESP and CLS-SSI.

As ordens das matrizes dos modelos identificados pelos métodos N4SID, MOESP e CLS-SSI para o primeiro subsistema foram 7, 6 e 4, respectivamente. Para o segundo e terceiro subsistemas as ordens das matrizes foram 3, 5, 4 e 5, 4, 6, respectivamente.

Pelos resultados obtidos pela aplicação da metodologia descentralizada de identificação para sistemas serialmente interconectados, utilizando os métodos N4SID, MOESP e CLS-SSI, podemos con-

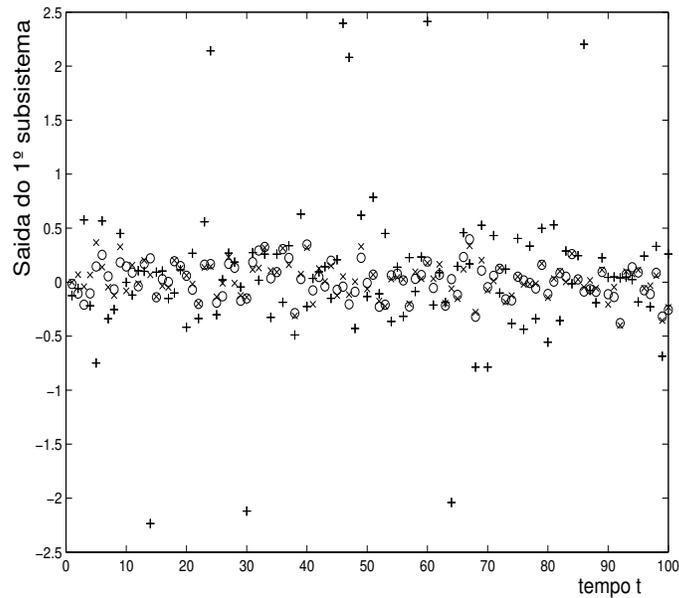


Fig. 6.5: Erros de predição para o primeiro subsistema, onde +, o e x são os erros de predição obtidos pela aplicação da metodologia de identificação baseados nos métodos N4SID, MOESP e CLS-SS, respectivamente.

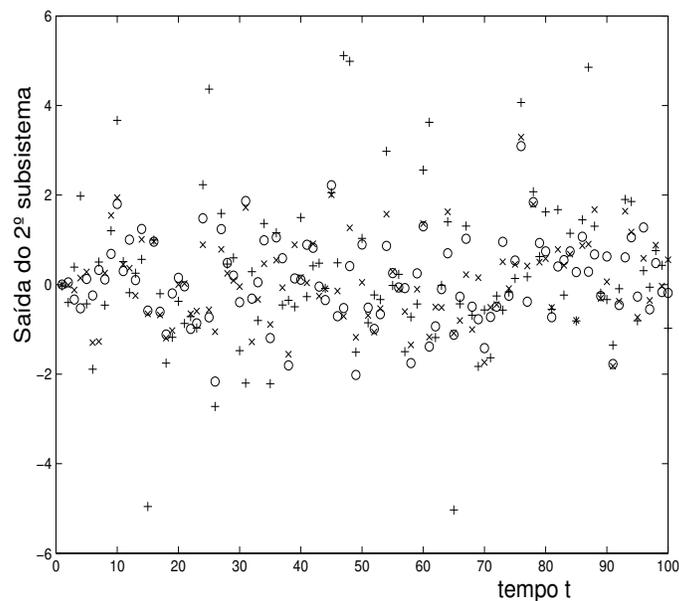


Fig. 6.6: Erros de predição para o segundo subsistema, onde +, o e x são os erros de predição obtidos pela aplicação da metodologia de identificação baseados nos métodos N4SID, MOESP e CLS-SS, respectivamente.

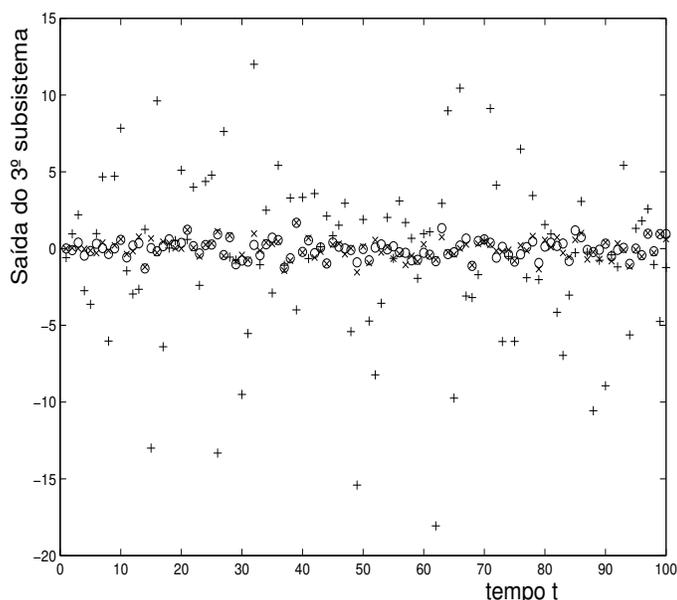


Fig. 6.7: Erros de predição para o terceiro subsistema, onde +, o e × são os erros de predição obtidos pela aplicação da metodologia de identificação baseados nos métodos N4SID, MOESP e CLS-SS, respectivamente.

cluir que o método CLS-SSI é que se apresenta como o mais eficiente, do ponto de vista dos erros de predição, mas o tempo de processamento deste método é maior que os requeridos nos métodos N4SID e MOESP, principalmente devido a que mais operações de SVD são necessárias para a solução com algoritmo CLS-SSI. Não foi possível encontrar um ponto de comparação do ponto de vista da ordem determinada pelos métodos.

## 6.5 Controle Estocástico Descentralizado de Sistemas Serialmente Interconectados

Os modelos dos sistemas dinâmicos interconectados obtidos via a metodologia descentralizada de identificação nos subespaço são sistemas lineares estocásticos, portanto, um controle estocástico é factível de projetar, mais ainda podemos aproveitar a estrutura do sistema para projetar um controle estocástico descentralizado. Nesta Seção estudamos o controle estocástico descentralizado de sistemas interconectados multivariáveis no espaço de estados. Devido à natureza serial do problema, e à estrutura bloco triangular inferior das matrizes de estado do sistema global consideramos o controle estocástico descentralizado via a otimização sequencial de sistemas hierarquicamente estruturados, ver Stankovic e Siljak (1989); Siljak (1991). Em Bottura e Cáceres (2002a) aplicamos este controle descentralizado para o controle de sistemas da qualidade da água de rios.

### 6.5.1 Sistemas com estrutura Bloco Triangular Inferior (BTI)

Os sistemas lineares discretos estocásticos com estrutura bloco triangular inferior são descritos como:

$$\mathbf{S} : \begin{aligned} x_{t+1}^1 &= A_{11}x_t^1 + B_{11}u_t^1 + w_t^1, \\ y_t^1 &= C_{11}x_t^1 + v_t^1, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$x_{t+1}^i = A_{ii}x_t^i + B_{ii}u_t^i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_t^j + \sum_{j=1}^{i-1} B_{ij}u_t^j + w_t^i \quad (6.19)$$

$$y_t^i = C_{ii}x_t^i + \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}x_t^j + v_t^i, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (6.20)$$

onde  $x_t^i \in R^{n_i}$ ,  $u_t^i \in R^{m_i}$  e  $y_t^i \in R^{l_i}$  são o estado, entrada e saída do subsistema  $S_i$ , e  $t = 0, 1, 2, \dots$ .

As equações de estado do  $i$ -ésimo subsistema isolado são:

$$\mathbf{S}_i : \begin{aligned} x_{t+1}^i &= A_{ii}x_t^i + B_{ii}u_t^i + w_t^i, \\ y_t^i &= C_{ii}x_t^i + v_t^i, \quad i \in N, \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde  $w_t^i \in R^{n_i}$  e  $v_t^i \in R^{l_i}$  são os ruídos brancos de perturbação e de medida que atuam no subsistema; podemos considerá-las como sendo processos gaussianos ruído branco de médias zero e covariâncias  $R_w^{ii}$  e  $R_v^{ii}$ , respectivamente.  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $C_{ij}$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas. O sistema global  $\mathbf{S}$  pode ser descrito na seguinte forma compacta:

$$\mathbf{S} : \begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + w_t, \\ y_t &= Cx_t + v_t, \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde  $x_t = [(x_t^1)', (x_t^2)', \dots, (x_t^N)']' \in R^n$ ,  $u_t = [(u_t^1)', (u_t^2)', \dots, (u_t^N)']' \in R^m$  e

$$y_t = [(y_t^1)', (y_t^2)', \dots, (y_t^N)']' \in R^l$$

são o estado, entrada e saída do sistema global, respectivamente,  $w_t = [(w_t^1)', (w_t^2)', \dots, (w_t^N)']'$  e  $v_t = [(v_t^1)', (v_t^2)', \dots, (v_t^N)']'$  são os processos ruídos brancos globais de perturbação e de medida, respectivamente; As matrizes do sistema global são:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NN} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

Sistemas de controle descentralizado utilizando processos hierárquicos de otimização podem ser feitos de várias maneiras, dependendo principalmente da distribuição da informação entre os subsistemas. Nesta Seção apresentamos uma metodologia seqüencial de otimização.

### Otimização seqüencial

Para cada subsistema, associamos o seguinte critério de desempenho:

$$EJ_i = E\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (x_t^i)' Q_i x_t^i + (u_t^i)' R_i u_t^i \right\}, \quad (6.24)$$

onde  $Q_i$  e  $R_i$  são matrizes semidefinidas positivas e definidas positivas, respectivamente. Consideramos também que cada par  $[A_{ii}, Q_i^{1/2}]$  é detectável. A otimização do sistema global  $S$  é feita seqüencialmente obedecendo a hierarquia dos subsistemas, isto é de cima para baixo. Assim, primeiramente uma lei de controle ótimo é determinada e implementada para o primeiro subsistema  $S_1$ ; a seguir determinamos a lei de controle do segundo subsistema  $S_2$ , considerando implementado o controle do subsistema anterior  $S_1$ . Implementado o controle para o segundo sistema, é encontrada a lei de controle para o terceiro subsistema  $S_3$ . O processo de otimização é feito sucessivamente até o último subsistema da hierarquia. Desta forma o processo de otimização sequencial explora a natureza bloco triangular inferior do sistema. A lei de controle ótima do subsistema  $S_i$  depende especificamente das restrições na estrutura de informação disponível no sistema global. Denotemos como  $\mathcal{Y}_{t-1}^i = \{y_0^i, y_1^i, \dots, y_{t-1}^i\}$  o conjunto de informações disponíveis do subsistema  $S_i$  no instante  $t$ . Para calcular a lei de controle do subsistema  $S_i$  consideramos o conjunto de informações disponíveis dos demais subsistemas, Em Siljak (1991) estas estrutura de informação são denominadas de sequencial, local e global. A estrutura de informação sequencial considera disponível os conjuntos de informações  $\{\mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2, \dots, \mathcal{Y}_{t-1}^i\}$ ; a estrutura local considera somente o conjunto  $\mathcal{Y}_{t-1}^i$ ; e a estrutura global que considera todos os dados dos subsistemas. A seguir descrevemos como calcular o controle descentralizado segundo estas estruturas.

### Estrutura de informação sequencial

Neste caso as saídas disponíveis para o subsistema  $S_i$  são  $\mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2, \dots, \mathcal{Y}_{t-1}^i$ . O algoritmo sequencial segue os seguintes passos:

**Primeiro passo** - Calculamos a lei de controle do primeiro subsistema. Primeiramente encontramos  $u_t^{1*}$  tal que  $E(J_1)$  seja minimizado, considerando somente  $\mathcal{Y}_{t-1}^1$ . Dado que o subsistema  $S_1$  é o primeiro, não existe nenhuma influência de um subsistema anterior, então podemos considerar neste passo uma solução LQG padrão:

$$u_t^{1*} = -K_1 \hat{x}_{t|1}^1, \quad (6.25)$$

onde  $\hat{x}_{t|1}^1 = E\{x_t^1 | \mathcal{Y}_{t-1}^1\}$  e  $K_1 = M_{11}^{-1} B_{11} P_1 A_{11}$ , onde  $P_1$  é a solução da equação de Riccati

$$P_1 = A'_{11} P_1 A_{11} + Q_1 - A'_{11} P_1 B_{11} M_{11}^{-1} B'_{11} P_1 A_{11},$$

onde  $M_{11} = B'_{11} P_1 B_{11} + R_1$  e  $\hat{x}_{t|1}^1$  é o estado estimado pelo seguinte filtro de Kalman:

$$\hat{S}_1 : \hat{x}_{(t+1)|1}^1 = A_{11} \hat{x}_{t|1}^1 + B_{11} u_t^{1*} + L_1 [y_t^1 - C_{11} \hat{x}_{t|1}^1], \quad (6.26)$$

onde  $L_1$  é o ganho ótimo de regime do filtro. Sob condições padrões de estabilidade e detectabilidade, o sistema em malha fechada com a lei de controle ótima dada por (6.25) é assintoticamente estável, ver Astrom (1970).

**Segundo passo** - Consideramos implementada a lei de controle ótima no subsistema  $S_1$  e otimizamos  $S_2$  considerando disponíveis os conjuntos de informações  $\mathcal{Y}_{t-1}^1$  e  $\mathcal{Y}_{t-1}^2$ . Neste estágio precisamos de um modelo para  $S_2$  que contabilize essas considerações. É importante notar que devido à implementação de  $u_t^{1*}$  consideramos o estado aumentado  $X_t^2 = [\hat{x}_{t|1}^1, x_t^1, x_t^2]'$  como estado do modelo de subsistema  $S_2$ . Assim temos de (6.26)

$$\hat{x}_{(t+1)|1}^1 = A_{11} \hat{x}_{t|1}^1 + B_{11} (-K_1 \hat{x}_{t|1}^1) + L_1 [C_{11} x_t^1 + v_t^1 - C_{11} \hat{x}_{t|1}^1]$$

$$\hat{x}_{(t+1)|1}^1 = (A_{11} - B_{11} K_1 - L_1 C_{11}) \hat{x}_{t|1}^1 + L_1 C_{11} x_t^1 + L_1 v_t^1,$$

de (6.21) e (6.25) temos

$$x_{t+1}^1 = -B_{11} K_1 \hat{x}_{t|1}^1 + A_{11} x_t^1 + w_t^1,$$

de 6.19 para  $i = 2$  temos

$$x_{t+1}^2 = A_{22} x_t^2 + B_{22} u_t^2 + A_{21} x_t^1 + B_{21} u_t^1 + w_t^2$$

$$x_{t+1}^2 = -B_{21}K_1\hat{x}_{t|1}^1 + A_{21}x_t^1 + A_{22}x_t^2 + B_{22}u_t^2 + w_t^2.$$

Assim a equação de estado aumentada do subsistema  $S_2$  é:

$$M_2 : X_{t+1}^2 = \bar{A}^2 X_t^2 + \bar{B}^2 u_t^2 + N_t^2,$$

onde

$$\bar{A}^2 = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11}K_1 - L_1C_{11} & L_1C_1 & 0 \\ -B_{11}K_1 & A_{11} & 0 \\ -B_{21}K_1 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$\bar{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad N_t^2 = \begin{bmatrix} L_1v_t^1 \\ w_t^1 \\ w_t^2 \end{bmatrix}.$$

Podemos ver que a definição deste estado mantém a estrutura bloco triangular inferior. Podemos decompor as matrizes do sistema como:

$$\bar{A}^2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^2 & 0 \\ \bar{A}_{21}^2 & \bar{A}_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{22} \end{bmatrix},$$

onde

$$\bar{A}_{11}^2 = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11}K_1 - L_1C_{11} & L_1C_1 \\ -B_{11}K_1 & A_{11} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22}^2 = A_{22}, \quad \bar{A}_{21}^2 = \begin{bmatrix} -B_{21}K_1 & A_{21} \end{bmatrix}.$$

Notamos também que  $N_t^2$  é um processo multivariado de média nula e independente de  $X_t^2$ . A equação da saída, que é compatível com a estrutura de informação considerada é:

$$Y_t^2 = \bar{C}^2 X_t^2 + V_t^2, \quad (6.28)$$

onde  $Y_t^2 = \begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{C}^2 = \begin{bmatrix} 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$  e  $V_t^2 = \begin{bmatrix} v_t^1 \\ v_t^2 \end{bmatrix}$ . O critério  $E\{J_2\}$  é definido como

$$E\{J_2\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{T-1} (X_t^2)' \bar{Q}^2 X_t^2 + (u_t^2)' R_2 u_t^2,$$

onde  $\bar{Q}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ . O problema de encontrar uma lei de controle ótima  $u_t^{2*}$ , como formulado

acima é reduzido à resolução do problema LQG padrão. A solução é:

$$u_t^{2*} = -K_2 \hat{X}_{t|2}^2,$$

onde  $\hat{X}_{t|2}^2 = E\{X_t^2 | \mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2\}$ , e  $K_2 = M_{22}^{-1}(\bar{B}^2)'P^2\bar{A}^2$ , onde  $P^2$  é solução da equação de Riccati:

$$P^2 = (\bar{A}^2)'P^2\bar{A}^2 - (\bar{A}^2)'P^2\bar{B}^2\{(\bar{B}^2)'P^2\bar{B}^2 + R_2\}^{-1}(\bar{B}^2)'P^2\bar{A}^2 + \bar{Q}^2, \quad (6.29)$$

e

$$M_{22} = (\bar{B}^2)'P^2\bar{B}^2 + R_2.$$

Analisemos a estrutura da lei de controle  $u_t^{2*}$ . Para este propósito decompomos  $P^2$  como:

$$P^2 = \begin{bmatrix} P_{11}^2 & P_{12}^2 \\ P_{21}^2 & P_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

onde as bloco-matrizes são compatíveis com as bloco-matrizes de  $\bar{A}^2$  em (6.27). Então temos:

$$u_t^{2*} = -M_{22}^{-1}B'_{22} \left[ \sum_{j=1}^2 P_{2j}^2 \bar{A}_{j1}^2, P_{22}^2 A_{22} \right] \hat{X}_{t|2}^2.$$

onde  $M_{22} = B'_{22}P_{22}^2B_{22} + R_2$ . Vemos que o cálculo de  $u_t^{2*}$  precisamos somente das primeiras linhas de  $P^2$ ; de (6.29) e (6.30) temos

$$P_{22}^2 = A'_{22}P_{22}^2A_{22} - A'_{22}P_{22}^2B_{22}(B'_{22}P_{22}^2B_{22} + R_2)^{-1}B'_{22}P_{22}^2A_{22} + Q_2 \quad (6.31)$$

e

$$P_{21}^2 = \tilde{A}'P_{21}^2\bar{A}_{22}^2 + \tilde{A}'P_{22}^2\bar{A}_{22}^2, \quad (6.32)$$

onde  $\tilde{A} = A_{22} - B_{22}M_{22}^{-1}B'_{22}P_{22}^2\bar{A}_{22}^2$ .

A equação de Riccati (6.31) corresponde à solução do problema de otimização local de  $S_2$  quando as interconexões são desprezadas (nulas). A solução de  $P_{22}^2$  existe devido às considerações de estabilidade local de  $S_2$ . A equação (6.32) tem solução única sempre que

$$1 - \lambda_p(\tilde{A}_{22})\lambda_q(\bar{A}_{22}^2) \neq 0, \quad p = 1, 2, \dots, 2n_1; \quad q = 1, 2, \dots, n_2,$$

onde  $\lambda_p(\tilde{A}_{22})$  e  $\lambda_q(\bar{A}_{22}^2)$  são os autovalores das matrizes indicadas, ver Gantmacher (1959). O vetor estimado  $\hat{X}_{t|2}^2$  pode ser expresso como:

$$\hat{X}_{t|2}^2 = \begin{bmatrix} E\{\hat{x}_{t|1}^1 | \mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2\} \\ E\{x_t^1 | \mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2\} \\ E\{x_t^2 | \mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t|1}^1 \\ E\{x_t^1 | \mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2\} \\ E\{x_t^2 | \mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2\} \end{bmatrix},$$

pois o conjunto de informação  $\mathcal{Y}_{t-1}^1$  está contido em  $\{\mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2\}$ . Assim somente precisamos de um filtro de Kalman para estimar o vetor de estado  $\xi_t^2 = \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix}$  dado  $\{\mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2\}$ . Assim de (6.18) e (6.19) temos:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ x_{t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x_t^1 + B_{11}u_t^{1*} + w_t^1 \\ A_{21}x_t^1 + A_{22}x_t^2 + B_{21}u_t^{1*} + B_{22}u_t^{2*} + w_t^2 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_{t+1}^1 \\ x_{t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^{1*} \\ u_t^{2*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_t^1 \\ w_t^2 \end{bmatrix};$$

a equação de saída considerada é:

$$\begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_t^1 \\ v_t^2 \end{bmatrix}.$$

O filtro de Kalman é dado por

$$\mathbf{S}_2 : \hat{\xi}_{(t+1)|2} = A^2 \hat{\xi}_{t|2} + \hat{B}^2 U_t^{2*} + L_2 [Y_t^2 - C^2 \hat{\xi}_{t|2}^2],$$

onde  $U_t^{2*} = \begin{bmatrix} u_t^{1*} \\ u_t^{2*} \end{bmatrix}$ , e

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

$L_2$  é o ganho do filtro no regime, e produz um  $\hat{\mathbf{S}}_2$  estável sob as condições de estabilizabilidade e detectabilidade, devido à estrutura BTI das matrizes (6.33).

Da análise da estrutura da lei de controle ótima  $u_t^{2*}$ , segue-se que ela pode ser quebrada em dois componentes. O primeiro componente é a lei de controle ótimo local de  $\mathbf{S}_2$  em relação a  $E\{J_2\}$  quando as interconexões são desprezadas. O segundo componente é um controle feedforward de  $\mathbf{S}_1$  para o  $\mathbf{S}_2$ , que considera as interconexões. É importante observar que as leis de controle ótimo

sequencial estabilizam o sistema interconectado  $(S_1, S_2)$  por causa que o par tem uma estrutura hierárquica, cada subsistema em malha fechada é estável, e o ganho feedforward é limitado.

**Terceiro até o N-ésimo passo** - A otimização dos demais subsistemas,  $S_3, S_4 \dots, S_N$ , pode se calculada de forma análoga. O vetor de estado relevante para a otimização de  $S_i$ , que considera implementadas as leis de controle ótimo para  $S_1, S_2 \dots, S_{i-1}$  é:

$$X_t^i = [\hat{x}_{t|1}^{1'}, \hat{x}_{t|2}^{2'}, \dots, \hat{x}_{t|i-1}^{(i-1)'}, x_t^{1'}, \dots, x_t^{(i-1)'}, \hat{x}_t^{i'}],$$

onde  $\hat{x}_{t|q}^p = E\{x_t^p | \mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2, \dots, \mathcal{Y}_{t-1}^q\}$ . Seguindo o mesmo procedimento para o caso do subsistema  $S_2$ , é possível construir um modelo de estado para  $X_t^i$  como:

$$X_{t+1}^i = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^i & 0 \\ \bar{A}_{21}^i & \bar{A}_{22}^i \end{bmatrix} X_t^i + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{ii} \end{bmatrix} u_t^i + N_t^i,$$

onde as matrizes  $\bar{A}_{11}^i$  e  $\bar{A}_{21}^i$  têm as dimensões  $[in_1 + (i-1)n_2 + \dots, 2n_{i-1}] \times [in_1 + (i-1)n_2 + \dots, 2n_{i-1}]$  e  $n_i \times [in_1 + (i-1)n_2 + \dots, 2n_{i-1}]$ , respectivamente, enquanto que  $\bar{A}_{22}^i = A_{ii}$ .  $N_t^i$  é um vetor ruído branco. A equação da saída correspondente é

$$Y_t^i = C^i \xi_t^i + V_t^i,$$

que tem a mesma forma que (6.28).

Depois de expressar  $E\{J_i\}$  em termos de  $X_t^i$ , da mesma forma que foi expresso  $E\{J_2\}$  em termos  $X_t^2$ , podemos demonstrar que a lei de controle ótima no  $i$ -ésimo nível é dada como:

$$u_t^{i*} = -K_i \hat{x}_{t|i}^i,$$

onde

$$K_i = M_{ii}^{-1} B_{ii}' \left[ \sum_{j=1}^2 P_{2j}^i A_{2j}^i, P_{22}^i A_{ii} \right],$$

e  $\hat{X}_{t|i}^i = E\{X_t^i | \mathcal{Y}_{t-1}^1, \mathcal{Y}_{t-1}^2, \dots, \mathcal{Y}_{t-1}^i\}$ . As matrizes  $P_{21}^i$  e  $P_{22}^i$  são soluções das equações (6.32) e (6.31), respectivamente, depois de substituir  $A_{22}$  por  $A_{ii}$  e  $\bar{A}_{21}^2$  por  $\bar{A}_{21}^i$ . A lei de controle tem a mesma estrutura: uma correspondente à realimentação local e a outra ao controle feedforward. Os estados estimados  $\hat{x}_{t|1}^i, \dots, \hat{x}_{t|i-1}^i, \dots, \hat{x}_{t|i-1}^{i-1}, \hat{x}_{t|i}^1, \dots, \hat{x}_{t|i}^i$ , são gerados por um banco de filtros de Kalman.

### Estrutura de informação local

Somente a informação  $\mathcal{Y}_{t-1}^i$  é considerada disponível para o subsistema  $S_i$ . A otimização sequencial segue os seguintes passos:

**Primeiro passo** - é idêntico ao primeiro passo do caso anterior, pois não existe influência de um subsistema anterior.

**Segundo passo** - A lei de controle ótima do segundo subsistema é obtida considerando implementada a lei de controle ótima no subsistema  $S_1$ . Definimos o estado do subsistema  $S_2$  como  $X_t^2 = [\hat{x}_{t1}^1, x_t^1, x_{2t}^2]'$ , então de (6.26), (6.25), (6.18) e (6.19), a equação de estado do subsistema  $S_2$  é:

$$\mathbf{M}_2 : X_{t+1}^2 = A_2 X_t^2 + B_2 u_t^2 + N_t^2, \quad (6.34)$$

onde

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11}K_1 - L_1C_{11} & L_1C_{11} & 0 \\ -B_{11}K_1 & A_{11} & 0 \\ -B_{21}K_1 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad N_2(t) = \begin{bmatrix} L_1 v_t^1 \\ w_t^1 \\ w_t^2 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

onde  $N_2$  é um ruído branco independente de  $X_t^2$ . A equação de saída é compatível com a estrutura de informação local,

$$y_t^2 = \begin{bmatrix} 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} X_t^2 + v_t^2. \quad (6.37)$$

O critério de desempenho é modificado como:

$$EJ_2 = E\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} X_t^{2'} \bar{Q}_2 X_t^2 + u_t^{2'} R_2 u_t^2 \right\}, \quad (6.38)$$

onde  $\bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ . A lei de controle ótima é  $u_t^{2*} = -K_2 E\{X_t^2 | \mathcal{Y}_{t-1}^2\}$ , onde  $K_2 = M_{22}^{-1} (B_2)' P_2 A_2$ , onde  $P_2$  é a solução da equação de Riccati:

$$P_2 = (A_2)' P_2 A_2 + \bar{Q}_2 - (A_2)' P_2 B_2 M_{22}^{-1} (B_2)' P_2 A_2,$$

e  $M_{22} = B_2 M_{22}^{-1} (B_2)' + R_2$ . O estado estimado ótimo é  $\hat{X}_{t|2}^{2*} = E\{X_t^2 | \mathcal{Y}_{t-1}^2\}$  e é condicionado às medidas (informações) disponíveis, isto é,  $E\{\hat{x}_{t|1}^1 | \mathcal{Y}_{t-1}^2\}$ ,  $E\{x_t^1 | \mathcal{Y}_{t-1}^2\}$  e  $E\{x_t^2 | \mathcal{Y}_{t-1}^2\}$ ; eles são obtidas pelo seguinte filtro de Kalman:

$$\hat{X}_{(t+1)|2}^{2*} = A_2 \hat{X}_{t|2}^{2*} + B_2 u_t^{2*} + L_2 \{y_t^2 - [0 \quad C_{21} \quad C_{22}] \hat{X}_{t|2}^{2*}\} \quad (6.39)$$

onde  $L_2$  é o ganho de regime do filtro de Kalman.

**Terceiro Passo** - O terceiro e os subseqüentes passos são um pouco diferentes daqueles do algoritmo sequencial anterior. O modelo de estado, que é relevante para o terceiro passo define a evolução dos três subsistemas nos quais as leis de controle ótimas  $u_t^{1*}$  e  $u_t^{2*}$  já foram implementadas. O vetor de estado aumentado é definido como:

$$X_t^{3*} = [\hat{x}_{t|1}^{1'}, \hat{X}_{t|2}^{2*'}, x_t^{1'}, x_t^{2'} x_t^{3'}]'$$

e o correspondente modelo  $M_3$  é obtido juntando (6.18), (6.26) e (6.39). A lei de controle ótima é dada por:

$$u_t^{2*} = -K_3 \hat{X}_{t|3}^3,$$

onde  $\hat{X}_{t|3}^3 = E\{X_t^{3*} | \mathcal{Y}_{t-1}^3\}$ .

Os seguintes passos de otimização são similares ao feito acima. Devido a que os filtros de Kalman aumentam consideravelmente com o número de subsistemas, para sistemas inter-conectados com muitos subsistemas, a análise de propagação de erros deve ser feita bem como a análise da estrutura das interconexões, podendo então utilizar sistemas de controle descentralizado mais simples.

## Capítulo 7

# Identificação e Controle Descentralizados de Sistema de Qualidade da Água de Rio

Neste Capítulo aplicamos o método de identificação descentralizada em subespaço a sistema da qualidade da água de rio. A organização deste Capítulo procura seguir a organização geral do enfoque dado a este tipo de problema durante a realização desta Tese. Um sistema de qualidade da água de rios é estudado na Seção 7.1; nela são brevemente discutidas as causas da poluição do rio e descrevemos algumas reações químicas envolvidas no processo; devido à complexidade do problema, dividimos o comprimento total do rio em segmentos menores e os consideramos como subsistemas de um sistema global. Este processo de modelagem somente envolve reações físico-químicas que acontecem num rio. Num primeiro estágio nosso objetivo é a modelagem de séries temporais multivariadas deste tipo de sistema, por esta razão, nas Seções 7.2 e 7.3, propomos metodologias descentralizadas de modelagem de séries temporais para tal tipo de sistema. Na Seção 7.4 propomos uma metodologia descentralizada de identificação para sistema de qualidade da água de rio, aproveitando a idéia da Seção anterior. Na Seção 7.5 propomos a utilização de um sistema de controle descentralizado para os sistemas identificados com a metodologia descentralizada desenvolvida. Em cada Seção mostramos e comentamos os resultados das aplicações neste tipo de sistema.

### 7.1 Sistema de qualidade da água de rio

Existem várias formas de perturbar o equilíbrio ecológico da água de um rio, quase sempre feita por nós humanos; entre elas podemos citar o esgoto sem tratamento fornecido pelas grandes cidades, os afluentes sem tratamento adequado, os agrotóxicos dos campos agrícolas carregados pelas chuvas, etc. Os impactos destas perturbações no rio podem ser vistos em muitos exemplos, como a morte da vida aquática no rio (peixes, algas, bactérias, ...), ou nos problemas de saúde causados tanto para o

ser humano como para os demais seres vivos dependentes direta ou indiretamente da qualidade da água. Estes problemas muitas vezes, até recentemente, foram julgados como consequência inevitável do desenvolvimento em uma comunidade; somente depois de reconhecer sérios impactos ambientais na saúde das pessoas, como resultado de descargas de esgoto sem controle nos rios, é que começaram a ser feitos grandes avanços no tratamento das águas residuais, principalmente na água para consumo humano; porém esta e outras perturbações afetam também o equilíbrio ecológico do habitat e dos seres vivos dependentes dessas águas.

São vários os fatores que causam poluição nos rios; na verdade o significado da palavra “poluição” no que concerne aos rios, é um pouco controvertido; podemos interpretá-la, como um estado indesejável da água; em Lamb (1985) a poluição é definida como “materiais na água que interferem de forma irracional com um ou mais usos benéficos da água”. Esta definição, pode ser interpretada de várias maneiras, se analisada especificamente; por exemplo, a água dos rios utilizados para satisfazer propósitos municipais de água potável pode não ser satisfatória para a vida dos peixes. Então precisamos estabelecer metas e objetivos de forma a satisfazer cada tipo de necessidade de forma pertinente.

Do ponto de vista de administração e controle da poluição dos rios, existe uma política (nos Estados Unidos por exemplo) de preservação das águas nos rios dentro de níveis de qualidade aceitáveis, para manter pelo menos a vida aquática de algumas espécies de peixes. Neste sentido faz-se necessária a avaliação de normas e especificações de qualidade das águas nos rios, entrando em jogo municípios e indústrias que descarregam esgotos nos rios.

Nesta fase a dificuldade de ter estações de tratamento que satisfaçam todas as especificações dos parâmetros, de forma a ter uma qualidade de água ideal, e como os recursos dos municípios e de algumas indústrias são limitados, nas normas e especificações para a qualidade da água, são selecionados somente alguns “parâmetros” importantes; este é o caso da concentração das matérias que demandam oxigênio (Demanda Bioquímica de Oxigênio - DBO), e o Oxigênio Dissolvido (OD) nos rios. A seguir são citadas algumas formas e/ou elementos que causam poluição Lamb (1985) nos rios:

- Agentes infecciosos e tóxicos
- substâncias que demandam oxigênio
- substâncias químicas persistentes
- plantas nutrientes
- substâncias minerais e químicas causando problemas específicos

- materiais suspensos
- substâncias radiativas
- temperatura

Comentaremos brevemente os dois primeiros tipos de poluição, por serem os mais freqüentes e importantes nos rios que passam por comunidades grandes.

### **Agentes infecciosos e tóxicos**

Causam impactos na saúde das pessoas quando bebem tal água, ou servem como veículo de enfermidades: cólera, disenteria, febre tifóide, etc. A melhoria das águas potáveis, o tratamento das águas residuais e o tratamento sanitário em geral têm contribuído para o decréscimo desses impactos na saúde, em muitos países desenvolvidos, que até os têm erradicado, porém eles permanecem endêmicos em alguns países subdesenvolvidos. Agentes tóxicos como o mercúrio, arsênico, pesticidas, afetam também a saúde humana e a dos peixes; neste caso é necessário controlar as fontes desses agentes ou mesmo suprimir-las.

### **Substâncias que demandam oxigênio**

Muitas substâncias químicas e orgânicas, são utilizadas por microorganismos nos cursos d'água, como fontes de energia e como substâncias químicas necessárias para o seu crescimento. Esses microorganismos precisam do oxigênio dissolvido na água; portanto um crescimento indiscriminado leva à diminuição do Oxigênio Dissolvido (OD), podendo causar sérios problemas às outras formas de vida aquática, como aos peixes e algas. A adição de materiais que demandam oxigênio nos cursos d'água pode causar uma total diminuição do OD, causando a morte de todos os peixes, e o crescimento indiscriminado de microorganismos pode causar mau cheiro na água e nos arredores.

Por muito tempo, a diminuição do OD e o controle de materiais que Demandam Bioquimicamente o Oxigênio (DBO) nas descargas de águas residuais receberam uma atenção prioritária de agências reguladoras. Por esta razão, o teste de DBO permanece como uma medida importante para a avaliação das características das águas residuais nos cursos d'água. Este teste é um método prático e direto, porém demorado, de medida de oxigênio consumido durante a estabilização bioquímica da matéria orgânica. A atenção devotada ao DBO e ao DO não está motivada pelos impactos na saúde pública, porém à saúde da vida aquática. Precisamos, então, conhecer os fenômenos e comportamentos que ocorrem dentro dos rios, em especial do OD; a seguir faremos um pequeno estudo neste sentido.

### 7.1.1 Balanço de oxigênio nos rios

Uma vez esclarecidos os motivos pelos quais o OD é de suma importância no controle da qualidade da água, precisamos estudar os fenômenos e reações que envolvam o OD de forma direta ou indireta.

#### Decomposição de oxigênio nos rios

Nas águas não poluídas dos rios, a comunidade biológica é altamente diversa, isto é, existe diversidade de organismos vivos, porém relativamente poucos de cada. Cada espécie tem seu próprio metabolismo, formando uma cadeia alimentar equilibrada. Quando é adicionada uma matéria orgânica, microorganismos fazem uso dela, recebendo energia e consumindo elementos químicos necessários para seu crescimento. O resultado final dessas reações bio-químicas é a reprodução e o crescimento de novas células (síntese), redução na concentração de elementos químicos utilizados por eles (bio-degradação), e o despejo de derivados secundários; alguns derivados podem ser compostos orgânicos simples que servem como fonte de alimento para outros organismos, os quais conduzem a outras reações similares, produzindo mais células e depois a bio-degradação das substâncias orgânicas.

A repetição do processo freqüentemente é acompanhada por passos sucessivos, satisfazendo às necessidades metabólicas de muitas espécies, degradando substâncias orgânicas complexas em outras simples, e liberando na água produtos secundários e substâncias químicas. Nesta cadeia de reações bio-químicas, cada espécie, extrai seu suprimento alimentício dos membros precedentes da cadeia, e liberta produtos secundários para o uso dos que a seguem.

#### Demanda de oxigênio nos rios

Nas reações bioquímicas, para satisfazer o metabolismo dos microorganismos, são utilizadas algumas substâncias químicas dissolvidas na água, sendo um dos mais importantes o oxigênio dissolvido OD. Podemos colocar o metabolismo dos microorganismos como dois processos que se desenvolvem concomitantemente, Silva e Mara (1979):

1. Síntese: Alimento + microorganismos + energia  $\Rightarrow$  maior número de microorganismos + resíduos nitrogenados
2. Respiração: Carboidratos + Oxigênio  $\Rightarrow$  dióxido de carbono + água + energia.

A energia requerida por 1. é suprida por 2. : assim um aumento de 1. corresponde a um aumento de 2. ; combinados os processos metabólicos, podemos escrever a seguinte relação:

Alimento + microorganismos + Oxigênio  $\Rightarrow$  maior número de microorganismos + resíduos nitrogenados + dióxido de carbono + água.

Esta relação expressa o princípio básico de todos os processos de estabilização da matéria orgânica, incluindo não só aqueles devidos aos organismos aeróbios como aos devidos aos anaeróbios.

Para o balanço do oxigênio, temos que levar em consideração as reações e/ou fenômenos que incrementam ou diminuem o OD; as reações que utilizam o oxigênio são denominadas reações de desoxigenação (aeração).

### Desoxigenação devida ao DBO

Os processos metabólicos de cada organismo são bastante variados; portanto, uma relação matemática que expresse a demanda de oxigênio desses fenômenos de forma global e exata é complicada (se obtida); então os modelos das reações de desoxigenação resultantes das atividades de compostos orgânicos, ainda até hoje são empíricos.

Muitos tipos de relações empíricas foram propostos para descrever estes fenômenos; uma relação amplamente utilizada até hoje é a proposta por Streeter e Phelps (1925). Eles descobriram que a taxa do DBO pode ser descrita, com uma razoável aproximação, pela aplicação de uma relação matemática relativamente simples, porém flexível:

$$\frac{dL}{dt} = -k_1 L \quad (7.1)$$

onde  $L$  = DBO remanescente no instante  $t$  [mg/l] e  $k_1$  = constante de decaimento do DBO [ $dia^{-1}$ ].

### Reoxigenação (aeração atmosférica)

Este processo de adição de oxigênio nos rios é baseado na transferência de ar para dentro da água, através da superfície de interface água-ar; este é um processo físico-químico que ocorre continuamente na interface líquido-gás. Moléculas de oxigênio a alta velocidade penetram na interface, transferindo gás do ar para dentro da água. Simultaneamente, algumas moléculas do OD na água, escapam através da superfície para a atmosfera. Movimentos em ambas direções têm lugar com taxas que são dependentes da pressão, temperatura e outras variáveis. Quando não existe demanda de oxigênio, este processo alcança um equilíbrio dinâmico, no qual as taxas de transferência são iguais. É então alcançada uma concentração de oxigênio de regime, cujo valor é denominado de “nível de saturação”.

Quando a concentração do OD é diminuída abaixo do nível de saturação, ocorre uma redução na taxa de escape do oxigênio (da água para o ar). Por outra parte, a taxa de oxigênio que entra na água, continua a mesma; somente a concentração na água é modificada, produzindo uma adição resultante de oxigênio, substituindo em parte ou totalmente a perda devida à desoxigenação.

O modelo mais utilizado para descrever este processo é:

$$\frac{dq}{dt} = k_l \frac{A}{V} (q^s - q) \quad (7.2)$$

onde  $q$  = concentração do OD na água,  $q^s$  = concentração de saturação do OD,  $k_l$  = coeficiente de transferência,  $A$  = área da interface (superfície do rio) e  $V$  = volume do líquido.

### Reoxigenação por fotossíntese

Refere-se à adição de oxigênio por meio da ação biológica das plantas verdes, especialmente das algas. Estas plantas verdes contêm clorofila, sendo possível, através da energia da luz solar, produzir novas células utilizando o dióxido de carbono, como uma fonte de carbono, e liberando o oxigênio na água. As algas também consomem oxigênio para respirar, porém a quantidade de oxigênio produzido é de aproximadamente 1,5 vezes a taxa de oxigênio que utilizam para respirar. Como o oxigênio é produzido durante a luz do dia e elas utilizam oxigênio para respirar a todo instante, existe uma variação diurna do OD. Esta forma de produção de oxigênio é de natureza bioquímica e não segue o mesmo modelo da aeração atmosférica. Os modelos propostos até hoje não são muito aceitos e nós não a levaremos em conta em nosso trabalho atual.

### Desoxigenação devida ao lodo depositado

O lodo depositado no fundo do rio pode exercer uma significativa demanda de oxigênio. O oxigênio é introduzido por difusão para uma camada fina na interface lodo-água, dando lugar a reações aeróbias, com uma conseqüente diminuição de oxigênio, como ilustrado na Figura 7.1; ocorre também uma difusão de matéria orgânica, produto da biodegradação anaeróbia que acontece no lodo, que incrementa a matéria orgânica no rio. Para estes fenômenos, modelos de ordem zero, para a taxa de consumo de oxigênio, são freqüentemente adotados.

## 7.1.2 Modelagem do OD e do DBO nos rios

Na Seção anterior estudamos de forma separada os fenômenos e reações que acontecem nos rios e cursos de água; nesta Seção serão encontradas relações matemáticas (equações diferenciais) que descrevem o balanço de DBO e OD, levando em consideração os efeitos de reoxigenação e desoxigenação. Muitos modelos para o DBO e OD nos rios seguem os modelos clássicos de Streeter-Phelps, os quais têm sido modificados por outros, Young e Beck (1974); Cáceres (1992); aqui seguiremos o mesmo raciocínio.

Existem modelos que descrevem o comportamento das concentrações de OD e DBO para um ponto de descarga de DBO no rio; porém, um rio têm vários pontos de descarga de poluição na

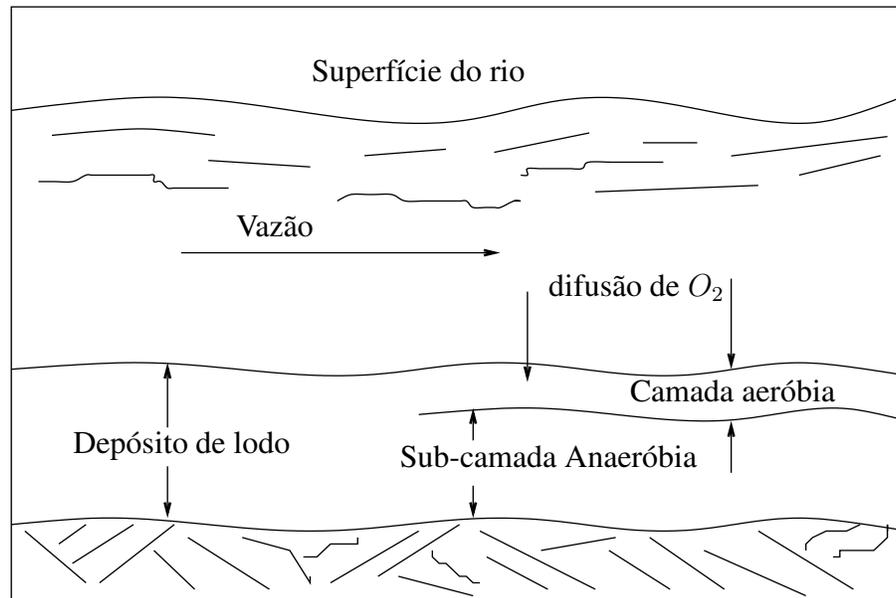


Fig. 7.1: Processos Anaeróbios.

sua total extensão; nestas circunstâncias, um modelo operacional que descreva de forma razoável os fenômenos e/ou reações envolvidas neste problema, pode ser construído pela divisão do rio em segmentos de comprimento adequado, e que para os nossos propósitos de identificação e controle, incluam variáveis de controle (pode ser o afluente de uma estação de tratamento, por exemplo), como feito em Young e Beck (1974); Cáceres (1992); Mahmoud et al. (1985); a Figura 7.5 ilustra esta divisão.

Consideramos cada segmento de rio, como um reservatório reator agitado de fluxo contínuo, ou "Continuous-Flow Stirred-Tank Reactor" (CFTSR); então o rio será descrito como uma cascata de reatores (CFTSRs) Tchobanoglous e Schroeder (1985); como ilustrado na Figura 7.2.

Antes de continuar daremos os principais resultados e suposições sobre um reservatório reator de mistura contínua.

### Reservatório reator agitado de fluxo contínuo

Neste reator não existem gradientes de concentração dentro do sistema. A matéria que entra é instantânea e uniformemente dispersa em todo o reator. Portanto, a concentração do material é exatamente a mesma em qualquer ponto dentro do reator; um estudo mais detalhado pode ser encontrado em Bottura (1982) e em Tchobanoglous e Schroeder (1985).

O balanço de matéria para uma matéria  $q$ , para o reator mostrado na Figura 7.3, é dado por;

$$\frac{dC_q}{dt}V = QC_{qi} - QC_q + r_qV \quad (7.3)$$

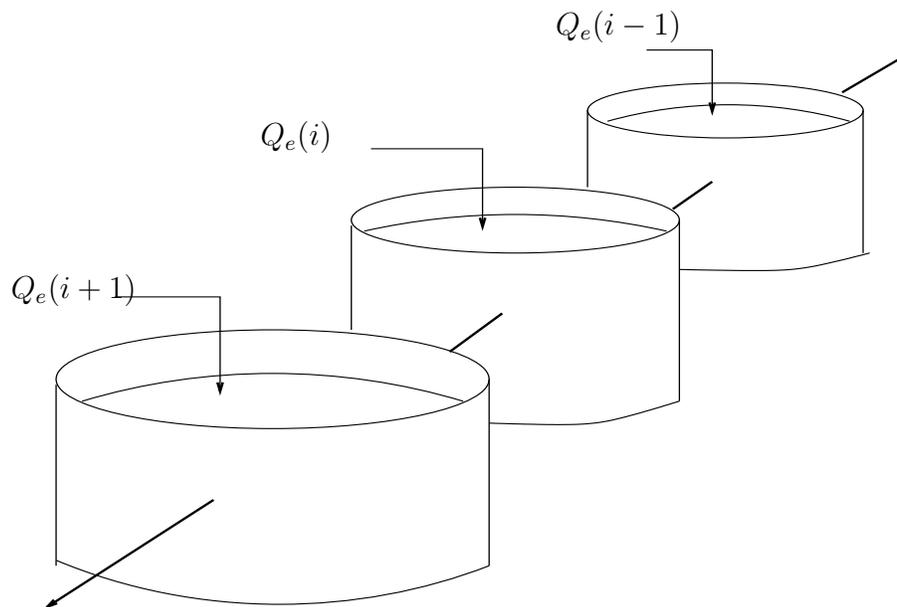


Fig. 7.2: O rio como uma cascata de reatores.

onde,  $C_q$  é a concentração da matéria  $q$  no reator, [mg/l],  $V$  é o volume do reator, [l],  $Q$  é vazão [l/dia],  $C_{qi}$  é a concentração de entrada da matéria  $q$ , [mg/l],  $r_q$  é a taxa de reação da matéria  $q$ , [mg/l × dia]

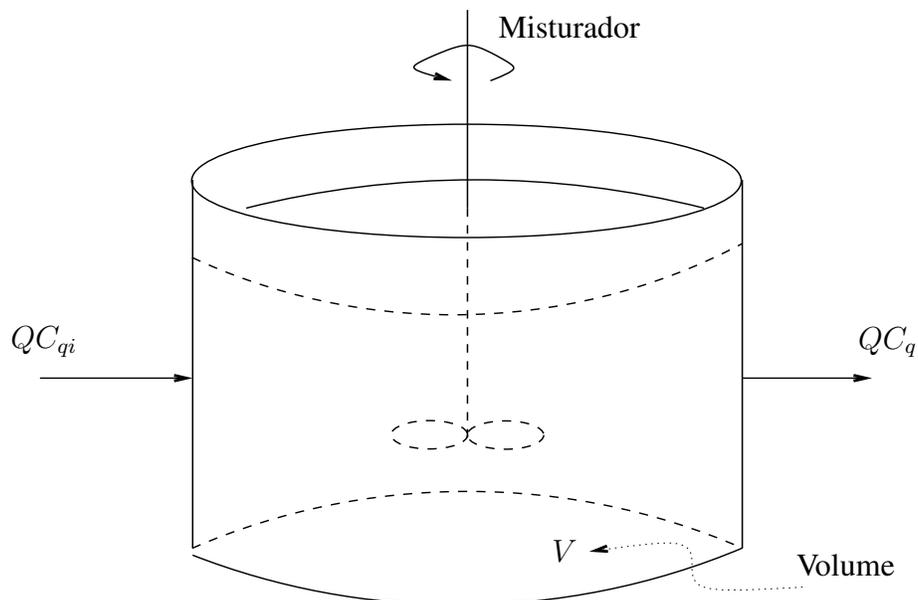


Fig. 7.3: Misturador.

A suposição de mistura imediata no reator, não é real para o caso do segmento de rio. Esta suposição será contornada pela utilização de modelos com atraso de transporte como feito em Tamura (1976).

### Modelos de DBO e OD para cada segmento

Como cada segmento é considerado ser um reservatório reator agitado de fluxo contínuo, pode ser feito um estudo de forma separada para ele.

Na Figura 7.4 são mostradas todas as entradas e saídas das concentrações do DBO e OD, assim como as reações envolvidas, onde

$Q_{i-1}$  e  $Q_i$  são as vazões nos segmentos  $i - 1$  e  $i$  respectivamente,  $Q_{ei}$  é a vazão de entrada do afluente de controle no segmento  $i$ ,  $K_{Li}$  é a taxa de remoção do DBO por biodegradação no segmento  $i$ ,  $L_{i-1}$  e  $L_i$  são as concentrações de DBO nos segmentos  $i - 1$  e  $i$ , respectivamente,  $m_i$  é a concentração de controle que entra no segmento  $i$  pelo afluente de controle,  $q_{i-1}$  e  $q_i$  são as concentrações de OD nos segmentos  $i - 1$  e  $i$  respectivamente,  $K_{ri}$  é a taxa de aeração atmosférica do segmento  $i$ ,  $V_i$  é o volume do segmento,  $n_i$  é a taxa de variação na concentração de OD devida ao lodo no segmento  $i$ .

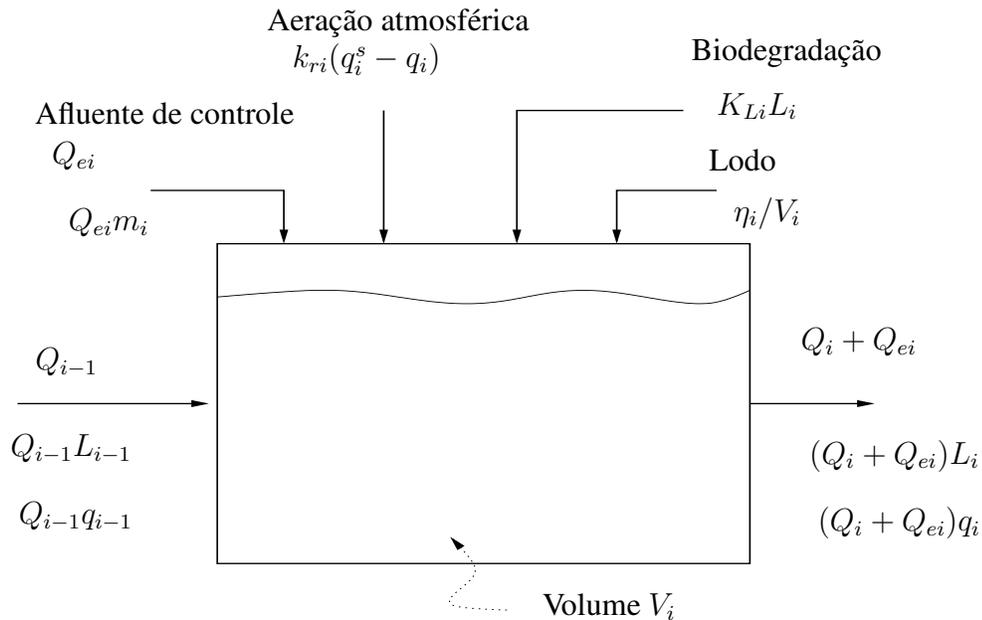


Fig. 7.4: Concentrações e vazões no reator com todas as reações envolvidas.

Primeiro analisamos o caso de não haver o afluente de controle  $Q_e$ , e também, supomos não haver reações de reoxigenação e desoxigenação. Então os balanços de matéria para o DBO e OD ficam:

$$\frac{dL_i}{dt} V_i = Q_{i-1} L_{i-1} - Q_i L_i \quad (7.4)$$

$$\frac{dq_i}{dt} V_i = Q_{i-1} q_{i-1} - Q_i q_i. \quad (7.5)$$

Considerando agora o afluente de controle  $Q_{ei}$ , e supondo ainda que não há reações de reoxigenação e desoxigenação, os balanços de matéria ficam:

$$\frac{dL_i}{dt}V_i = (Q_{i-1}L_{i-1} + Q_{ei}m_i) - (Q_i + Q_{ei})L_i \quad (7.6)$$

$$\frac{dq_i}{dt}V_i = Q_{i-1}q_{i-1} - (Q_i + Q_{ei})q_i. \quad (7.7)$$

Dividindo as equações (7.6) e (7.7) por  $V_i$ , e adicionando os termos referentes aos efeitos da: biodegradação da matéria orgânica (DBO), aeração atmosférica, e a demanda de oxigênio requerida pelo lodo, obtemos as equações diferenciais que descrevem as variações das concentrações do DBO e OD com o tempo.

Os balanços de matéria do DBO e OD do  $i$ -ésimo segmento ficam então como:

**DBO:**

$$\frac{dL_i}{dt} = -k_{Li}L_i + \frac{Q_{i-1}}{V_i}L_{i-1} - \frac{Q_i + Q_{ei}}{V_i}L_i + \frac{m_iQ_{ei}}{V_i} \quad (7.8)$$

**OD:**

$$\frac{dq_i}{dt} = k_{ri}(q_i^s - q_i) + \frac{Q_{i-1}}{V_i}q_{i-1} - \frac{Q_i + Q_{ei}}{V_i}q_i - k_{Li}L_i - \frac{\eta_i}{V_i} \quad (7.9)$$

## 7.2 Modelagem de séries temporais multivariáveis de sistema de qualidade da água de rio

Nesta Seção propomos a modelagem de séries temporais multivariadas no espaço de estado para sistema de qualidade da água de rio utilizando nossa proposta de metodologia descentralizada de identificação para sistemas serialmente interconectados, e aqui empregando o método de subespaço de identificação (MOESP), desenvolvido por Verhaegen e Dewilde (1992a). Exploramos as tradicionais estruturas de amostragem de parâmetros da qualidade da água de rios, feitas por regiões, utilizadas para o monitoramento e/ou controle do rio como um todo.

Com o objetivo de prever, monitorar e/ou controlar a qualidade da água de um rio geralmente são utilizados modelos funcionais que representem o estado dele num determinado instante. Geralmente um sistema de qualidade da água de um rio importante para uma região é um sistema complexo de grande porte. Sendo assim, como feito em Young e Beck (1974), Reda (1996) e Cáceres (1992), podemos tratar este rio como um sistema interconectado, isto é, como um sistema serialmente interconectado de subsistemas. Neste estudo, portanto o rio é subdividido em vários segmentos, considerados como subsistemas de um sistema global serialmente interconectado. Cada subsistema de rio tem conduta própria que depende do lugar por onde ele passa e do comportamento do subsistema

anterior. Assim, um modelo para cada subsistema pode ser necessário. Modelos funcionais baseados em fundamentos físico-químicos e biológicos são propostos em Young e Beck (1974) and Mahmoud et al. (1985). Utilizando as relações (7.8) e (7.9) construímos uma plataforma de simulação de um sistema de qualidade da água de rio, como feito na Seção 7.1. Para este sistema interconectado geramos dados considerando os parâmetros, com medidas reais como feito em Young e Beck (1974) e Cáceres (1992). Para os dados amostrados, aplicamos a metodologia descentralizada de identificação, via métodos de subespaço de identificação, Bottura et al. (2000). A aplicação prática desta metodologia pode ser de grande importância para a administração, monitoramento e/ou controle em geral, assim como também para aplicações agrícolas específicas. Os resultados desta seção foram publicados nos anais dos congressos Agricontrol 2000, Bottura et al. (2000) e COBEM 2001, Bottura e Cáceres (2001).

### 7.2.1 O rio como um sistema serialmente interconectado

Na Figura 7.5 é ilustrada a divisão de um trecho de um rio em vários segmentos. Supomos que em cada segmento existam dispositivos de medida de alguns parâmetros da qualidade de água de rio. Supomos ainda que as medidas de tais parâmetros possam ser feitas com uma frequência constante. Temos então bases de dados e podemos considerá-las como séries temporais da qualidade da água de cada segmento. Sendo assim o trecho do rio pode ser considerado como um sistema serialmente interconectado, onde cada subsistema não possui entrada própria. Isto é, a única entrada no subsistema é a saída do subsistema anterior. Na verdade são muitos parâmetros que servem para avaliar a qualidade da água de rios, nesta Tese, para propósitos de simulação, desenvolvimento e/ou teste de metodologias e por simplicidade, sem perda de generalidade, consideraremos somente dois parâmetros como importantes: o Oxigênio Dissolvido (OD) e a Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO). Modelos mais sofisticados e que consideram mais parâmetros podem ser encontrados em Beck e Finney (1987), por exemplo a Figura 7.6 mostra a interconexão de três segmentos de rio.

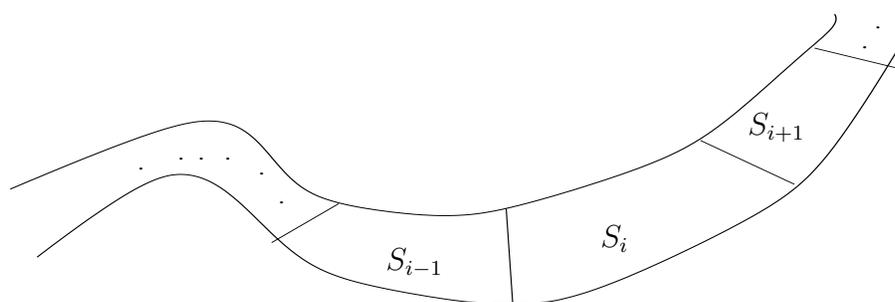


Fig. 7.5: Trecho de um rio dividido em segmentos.

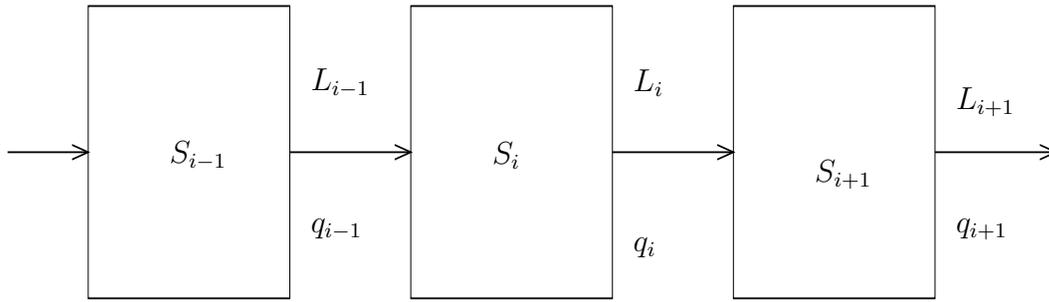


Fig. 7.6: Segmentos de rio como subsistemas interconectados.

## Modelo benchmark

Para efeitos de simulação utilizamos as relações (7.8) e (7.9) como benchmark, considerando a vazão  $Q_{ei}$  e a concentração  $m_i$  constantes; a estas relações adicionamos perturbações ruído branco gaussiano, representando incerteza e/ou perturbação no sistema. Os parâmetros modelados são a Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO) e o Oxigênio Dissolvido (OD). Cada segmento de rio (subsistema) é considerado ser um tanque reator de fluxo contínuo (Continuous-Flow Stirred-Tank, (CFSTR)). Para melhor acompanhamento e compreensão as relações dos parâmetros são novamente dadas assim como detalhamos cada componente delas.

### DBO

$$\frac{dL_i}{dt} = -k_{Li}L_i + \frac{Q_{i-1}}{V_i}L_{i-1} - \frac{Q_i + Q_{ei}}{V_i}L_i + \frac{m_i Q_{ei}}{V_i}$$

### OD

$$\frac{dq_i}{dt} = k_{ri}(q_i^s - q_i) + \frac{Q_{i-1}}{V_i}q_{i-1} - \frac{Q_i + Q_{ei}}{V_i}q_i - k_{Li}L_i - \frac{\eta_i}{V_i}$$

onde

$Q_{i-1}$  e  $Q_i$  são as vazões dos segmentos  $(i - 1)$  e  $i$ , respectivamente.

$Q_{ei}$  é a vazão do afluente  $i$  em  $m^3/dia$

$k_{Li}$  é a taxa de decaimento do DBO e a taxa de desoxigenação (1/dia), no segmento  $i$ .

$L_{i-1}$  e  $L_i$  são as concentrações de DBO nos segmentos  $(i - 1)$  and  $i$ , respectivamente.

$m_i$  é a concentração de DBO que entra no segmento  $i$ .

$q_{i-1}$  e  $q_i$  são as concentrações de OD nos segmentos  $(i - 1)$  e  $i$ , respectivamente.

$q_i^s$  é a concentração de saturação do OD.

$k_{ri}$  = taxa de reoxigenação no segmento  $i$ .

$V_i$  = volume do segmento  $i$  ( $m^3$ )

$\eta_i/V_i$  é o OD devido aos requerimentos do lodo no segmento  $i$ .

Neste modelo não consideramos os efeitos devidos: à fotossíntese das algas nos rios, adição de matéria orgânica devida às chuvas e à matéria orgânica sedimentada no fundo do rio. Também não consideramos o atraso de transporte entre os subsistemas. Para efeitos de simulação, consideramos os parâmetros reais de um segmento de 4,7 km do rio Cam (Inglaterra), e que podem ser encontrados em Young e Beck (1974), eles são:  $k_{ri} = 0,2$  [ $dia^{-1}$ ],  $k_{Li} = 0,32$  [ $dia^{-1}$ ],  $\frac{\eta_i}{V_i} = 0,1$  [ $\frac{mg}{litro}$ ] [ $dia^{-1}$ ],  $q_i^s = 10$  [ $mg/litro$ ],  $\frac{Q_{ei}}{V_i} = 0,1$ ,  $\frac{Q_i}{V_i} = \frac{Q_{i-1}}{V_i} = 0,9$ . Sinais aleatórios ruído branco gaussianos:  $\delta L_i$  e  $\delta q_i$ , de média zero e covariâncias  $\Delta L$  e  $\Delta q$  são adicionados aos subsistemas, e representam a perturbação e/ou incerteza no modelo. Entradas determinísticas e constantes,  $m_i$ , quantidades fixas de DBO, são fornecidas por estações de tratamento de água. Para estes valores, o modelo de cada segmento é:

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + u_{i-1}(t) + \omega_i(t) \quad (7.10)$$

$$\text{onde } A_i = \begin{bmatrix} -1,32 & 0 \\ -0,32 & -1,2 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$u_{i-1}(t) = \begin{bmatrix} 0,9L_{i-1} \\ 0,9q_{i-1} + 1,9 \end{bmatrix}, \quad \omega_i(t) = \begin{bmatrix} \delta L_i \\ \delta q_i \end{bmatrix}$$

$$u_i(t) = m_i \text{ e } x_i(t) = \begin{bmatrix} L_i \\ q_i \end{bmatrix}.$$

Se definimos

$$v_i(t) = B_i u_i(t) + u_{i-1}(t) + \omega_i(t), \quad (7.11)$$

O modelo discretizado, com taxa de amostragem  $T$ , pode ser calculado como:

$$x_i(nT + T) = e^{A_i T} x_i(nT) + \int_{nT}^{nT+T} e^{A_i(nT+T-\tau)} v_i(\tau) d\tau.$$

Uma consideração comum é

$$v_i(\tau) = v_i(nT), \quad nT \leq \tau < nT + T$$

isto é um segurador de ordem zero, sem atraso. Seja  $\eta = nT + T - \tau$ , então

$$x_i(nT + T) = \Phi_i x_i(nT) + \Gamma_i v_i(nT), \quad (7.12)$$

onde  $\Phi_i = e^{A_i T}$ ,  $\Gamma_i = \int_0^T e^{A_i \eta} d\eta I$ . (7.12) é simplificada para

$$x_i(n+1) = \Phi_i x_i(n) + \Gamma_i (B_i u_i(n) + u_{i-1}(n) + \omega_i(n))$$

A saída medida é

$$y_i(n) = x_i(n) + \nu_i(n), \quad (7.13)$$

onde  $\nu_i$  é um processo estocástico ruído branco gaussiano de média zero.

### “Medida” dos dados amostrais

Para a implementação da metodologia descentralizada de modelagem computacional de dados, supomos que exista uma rede integrada de “medição” de dados do benchmark. A taxa de amostragem deve ser tal que seja possível a identificação de um modelo do subsistema para seu uso num eventual caso de supervisão e/ou controle em tempo real. Na nossa simulação são utilizadas diferentes condições de regime permanente para cada subsistema e a taxa de 1 amostragem por dia.

#### 7.2.2 Modelagem descentralizada da qualidade da água de rios

Parâmetros de qualidade da água de rio, geralmente, apresentam tendências e sazonalidades, requerendo uma análise diferenciada para cada caso. No nosso trabalho supomos que não existem sazonalidades e as tendências, que são constantes, são eliminadas fazendo uma primeira diferença, ver Aoki (1990). Com estas considerações, as séries temporais dos dados podem ser consideradas como amostras de processos estocásticos estacionários de média zero. A utilização dos métodos de subespaço de identificação, requer que as entradas sejam processos estocásticos (ou que sejam entradas de excitem todos os modos do sistema). Estes métodos de identificação fornecem modelos no espaço de estado. Então, para a modelagem de cada subsistema podemos utilizar os dados das séries temporais como segue: Se a série temporal a ser modelada é a do sistema  $S_i$ , os dados de saída do subsistema  $S_{i-1}$  são interpretados como dados de entrada do subsistema  $S_i$  e os dados de saída de  $S_i$  são os dados de entrada do subsistema  $S_{i+1}$ , e assim por diante.

#### Monitoramento e Controle

Os modelos obtidos pela metodologia proposta possibilitam o seu uso para a aplicação de métodos de monitoramento e/ou controle da qualidade de água de rio. Para cada subsistema, podem ser feitas simulações que permitam avaliar o efeito de eventuais perturbações que possam acontecer no subsis-

tema anterior. Na simulação, cada segmento possui uma estação de tratamento de água que fornece uma vazão com uma quantidade específica de DBO. É também necessário que a estação de controle de cada subsistema forneça num primeiro estagio vazões de água com diferentes concentrações de DBO, de forma a excitar todos os modos do subsistema, satisfazendo as condições de excitação persistente, Verhaegen e Dewilde (1992a).

## Resultados

Para efeitos de simulação somente consideramos dois segmentos de rio. Aos dados gerados aplicamos a nossa metodologia de modelagem de séries temporais multivariáveis, ver Bottura et al. (2000), baseados no método de identificação MOESP, Verhaegen e Dewilde (1992a).

A partir do modelo analítico que constitui o benchmark para testar a metodologia de identificação proposta, geramos 100 amostras de “medidas” para cada subsistema. As matrizes obtidas pela aplicação da metodologia estão dadas a seguir para o segundo subsistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0.7029 & 0.4222 & -0.4535 & 0.2451 \\ -0.5148 & 0.4000 & 0.1131 & 0.6895 \\ -0.0584 & -0.1416 & -0.0635 & -0.0433 \\ -0.0464 & -0.2241 & -0.2654 & 0.0521 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.2645 & 0.1109 \\ -0.1370 & 0.2866 \\ -0.0484 & 0.1432 \\ -0.1778 & 0.0126 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.4480 & 0.5067 & -0.5887 & -0.3975 \\ 0.1814 & 0.6455 & 0.5548 & -0.0962 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.0350 & 0.1011 \\ -0.1461 & 0.1372 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.1001 & 0.4181 \\ 0.2214 & 0.2707 \\ -0.3982 & -0.0274 \\ 0.0146 & -0.0745 \end{bmatrix}$$

As predições de um passo a frente, para o segundo subsistema, são calculadas pelo Filtro de Kalman:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} &= A\hat{x}_t + Bu_t + K(y_t - C\hat{x}_t) \\ \hat{y}_t &= C\hat{x}_t + Du_t \end{aligned}, \quad (7.14)$$

onde  $u_t$  é a saída do subsistema  $S_1$  e  $y_t$  é a saída do subsistema  $S_2$ .

Nas Figuras (7.7) e (7.8) apresentamos os valores preditos versus os valores “medidos” para o segundo subsistema. Observamos que os valores preditos pelo modelo seguem as “medidas” do subsistema.

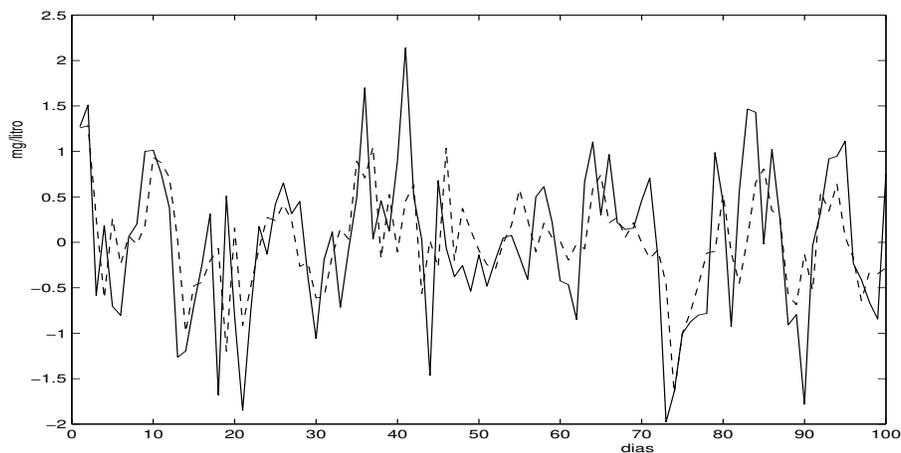


Fig. 7.7: Concentração de DBO do segundo segmento. A linha contínua representa os dados medidos e a tracejada os dados estimados (valores entorno do regime).

### Comentários e conclusões

Nesta Seção apresentamos uma proposta para a modelagem de séries temporais multivariadas associadas à qualidade da água de rio. Construímos uma plataforma de simulação considerando um trecho de um rio como sistema serialmente interconectado. O método MOESP desenvolvido por Verhaegen and Dewilde, Verhaegen e Dewilde (1992a,b) foi utilizada na modelagem isolada de cada subsistema. Esta metodologia pode ser aplicada para sistema de qualidade da água de rio que possua uma estrutura convencional de amostragem de dados. Somente consideramos um modelo clássico e relativamente

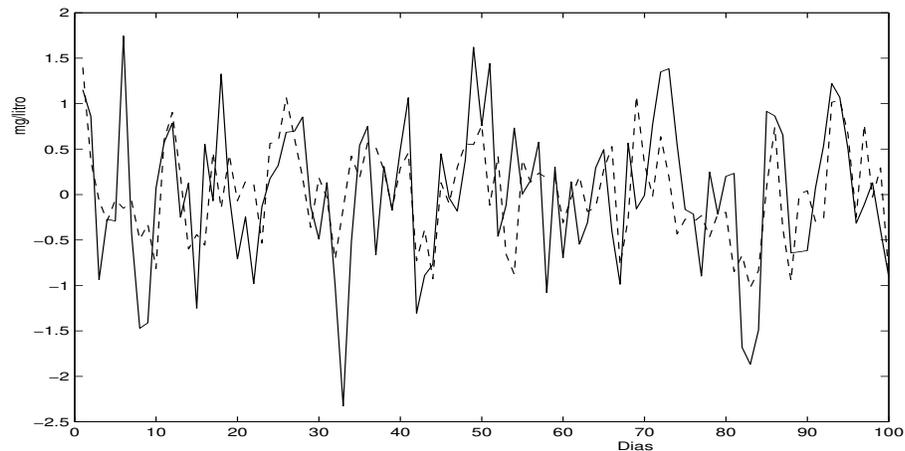


Fig. 7.8: Concentração de OD de segundo segmento. A linha contínua representa os dados medidos e a tracejada os dados estimados (valores entorno das concentrações de regime).

simplificado de qualidade dá água de rio, com o objetivo principal de testar a metodologia proposta. Dos resultados obtidos concluímos que os modelos obtidos são adequados para este tipo de aplicações. Uma questão de passo seguinte é considerar modelos mais sofisticados, Whitehead et al. (1997), que envolvam mais parâmetros na avaliação da qualidade da água de rio. Também, se possível, formar ou obter um benchmark oficial com dados reais para testar a metodologia proposta.

### 7.3 Modelagem da qualidade de água de um rio composto de três segmentos

Nesta seção, a modelagem de séries temporais de sistemas de qualidade de água de três segmentos de rio utilizando a metodologia descentralizada de identificação é feita. A diferença com a modelagem anterior é que agora supomos que os dados dos parâmetros DBO e OD são medidos com erro. Para diminuir o erro na modelagem das séries temporais do subsistema seguinte, consideramos os dados de saída do subsistema anterior filtrados. Devido à natureza complexa do problema, dividimos em segmentos o comprimento total do rio, como mostrado na Figura 7.9. Cada um deles constitui um subsistema do sistema global, com entradas e saídas próprias. As séries modeladas são dos parâmetros de qualidade da água de rio, nesta Tese: a concentração da Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO) e a concentração do Oxigênio Dissolvido (OD).

Para efeitos de simulação, novamente utilizamos as relações (7.8) e (7.9), isto é, modelamos o comportamento da demanda bioquímica de oxigênio e o oxigênio dissolvido de cada segmento de rio (subsistema). Consideramos cada subsistema como um tanque reator agitado de fluxo contínuo (CFSTR). No modelo não consideramos os efeitos da fotossíntese devida às algas, da adição de maté-

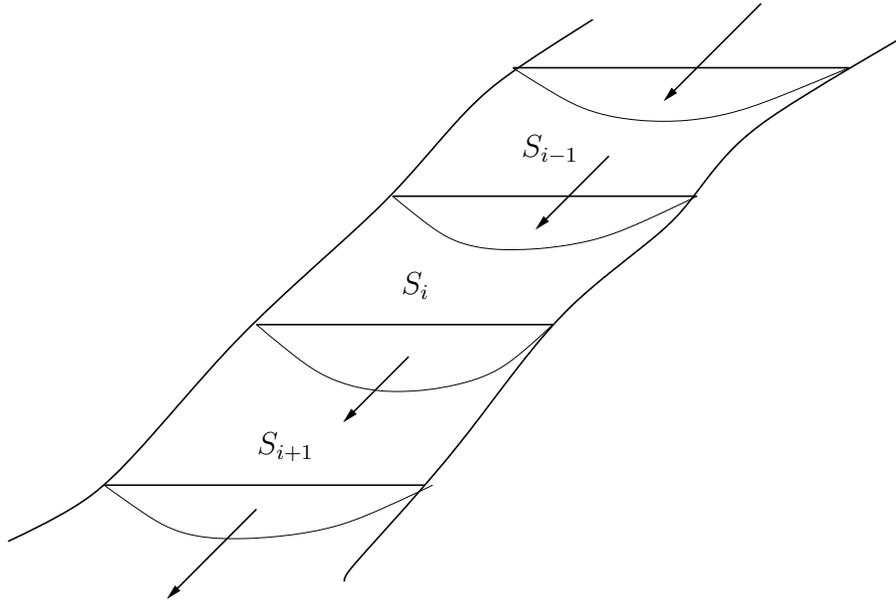


Fig. 7.9: Segmentos de rio.

ria orgânica devida às chuvas e da matéria orgânica depositada no fundo do rio. Também supomos que não há atraso de transporte entre os subsistemas. Para a simulação utilizamos dados de um segmento de 4,7km do rio Cam da Inglaterra, cujos dados estão em Young e Beck (1974) e Cáceres (1992). Eles são:  $k_{ri} = 0.2$  [dia<sup>-1</sup>],  $k_{Li} = 0.32$ [dia<sup>-1</sup>],  $\frac{\eta_i}{V_i} = 0.1$ [ $\frac{mg}{litro}$ ][dia<sup>-1</sup>],  $q_i^s = 10$ [mg/litro],  $\frac{Q_{ei}}{V_i} = 0.1$ ,  $\frac{Q_i}{V_i} = \frac{Q_{i-1}}{V_i} = 0.9$ . Processos ruído branco gaussianos  $\delta L_i$  e  $\delta q_i$  de média zero e covariâncias  $\Delta L$  e  $\Delta q$  foram aplicados aos subsistemas. As concentrações de DBO de entrada,  $m_i$ , são constantes. Novamente o modelo de simulação é:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_{i-1}(t) + \omega_i(t) \quad (7.15)$$

$$\text{onde } \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{i-1}(t) = \begin{bmatrix} 0.9L_{i-1} \\ 0.9q_{i-1} + 1.9 \end{bmatrix}, \quad \omega_i(t) = \begin{bmatrix} \delta L_i \\ \delta q_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i(t) = m_i \text{ and } \mathbf{x}_i(t) = \begin{bmatrix} L_i \\ q_i \end{bmatrix}.$$

Com as equações acima que constituem nosso benchmark construímos uma plataforma de simulação que considera um sistema global formado por três segmentos de rio. Por simplicidade, os parâmetros das equações são iguais para os três subsistemas, mas com diferentes valores de regime permanente. Considerando as concentrações  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  fixas, as saídas dos correspondentes subsistemas são séries temporais dos parâmetros da qualidade da água DBO e OD. Aplicamos a

metodologia previamente exposta a estas séries de dados.

Os valores  $m_i$  de entrada fixos são:  $m_1^* = 53,5\text{mg/l}$ ,  $m_2^* = 41,9\text{mg/l}$  e  $m_3^* = 15,51\text{mg/l}$ . Os valores das concentrações  $DBO$  e  $OD$  de regime, para os respectivos subsistemas são:  $L_1^* = 4,06\text{mg/l}$ ,  $q_1^* = 8,0\text{mg/l}$  para o 1º subsistema,  $L_2^* = 5,94\text{mg/l}$ ,  $q_2^* = 6,0\text{mg/l}$  para 2º subsistema e  $L_3^* = 5,22\text{mg/l}$ ,  $q_3^* = 4,69\text{mg/l}$  para o terceiro, respectivamente.

### 7.3.1 Resultados e comentários

Foram geradas na simulação 100 amostras de medidas para cada subsistema. As tendências devido às respostas de regime foram tratados e eliminadas por meio de uma primeira diferença. Utilizamos o método de Verhaegen, Verhaegen (1994), na modelagem das séries temporais de cada segmento. As Figuras 7.10, 7.11 e 7.12 mostram os valores “medidos” versus os valores estimados em torno aos valores de regime de  $DBO$  e  $OD$  do primeiro, segundo e terceiro segmentos, respectivamente. Devido a que as trajetórias estão em torno dos valores de regime, os valores de concentração negativa ou não devem ser interpretadas como somadas a ditos valores de regime. Observamos que os valores estimados seguem razoavelmente os valores medidos. As dimensões dos modelos no espaço de estado são: 6 para o primeiro, 6 para o segundo e 7 para o terceiro segmentos. Observamos que foram necessários modelos com maior número de estados que os utilizados na simulação. Isto é devido principalmente às perturbações inseridas na simulação.

Os valores estimados foram encontrados utilizando o seguinte filtro de Kalman:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t} + 1) &= \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t}) + \mathbf{M}_i \hat{\mathbf{y}}_{i-1}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}_i [\mathbf{y}_i(\mathbf{t}) - \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t})] \\ \hat{\mathbf{y}}_i(\mathbf{t}) &= \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_i \hat{\mathbf{y}}_{i-1}(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (7.16)$$

onde  $\mathbf{A}_i, \mathbf{M}_i, \mathbf{D}_i$  e  $\mathbf{K}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são as matrizes dos subsistemas obtidas pela metodologia de identificação. Como modelamos somente as séries temporais dos segmentos a matriz  $\mathbf{B}_i$  é nula.  $\hat{\mathbf{y}}_{i-1}$  é o vetor de saída estimado do subsistema  $i - 1$ . As matrizes abaixo são modelos de espaço de estado obtidos para os 3 subsistemas que constituem o trecho de rio, cuja qualidade é modelada por esta proposta.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.6285 & 0.3269 & -0.2807 & -0.0572 & -0.0008 & 0.2800 \\ -0.0708 & 0.6635 & -0.2498 & 0.4078 & 0.3772 & -0.8251 \\ -0.1935 & 0.2544 & 0.4427 & 0.6958 & -0.1131 & 0.2417 \\ -0.6336 & -0.3038 & -0.3744 & -0.1538 & -0.2622 & 0.2866 \\ -0.3205 & 0.2897 & 0.6623 & -0.3410 & 0.5333 & -0.1190 \\ 0.0100 & 0.2595 & -0.0957 & 0.0258 & 0.0016 & 0.9896 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0085 & 0.1626 \\ 0.1878 & 0.3836 \\ -0.0064 & 0.1490 \\ -0.1050 & 0.0281 \\ 0.1428 & -0.0738 \\ 0.0636 & -0.0752 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.8785 & 1.0493 & -1.1512 & -0.4299 & 0.5639 & 1.9624 \\ -2.5241 & 1.0865 & 0.6654 & 2.0324 & -0.2483 & 0.4207 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.5202 & -0.4052 & 0.6514 & 0.0762 & -0.0857 & -0.1513 \\ 0.3486 & 0.5738 & 0.3644 & 0.1640 & 0.2888 & 0.4224 \\ 0.1496 & -0.1314 & 0.1677 & 0.1452 & 0.1934 & 0.6684 \\ 0.0507 & -0.5159 & -0.1944 & -0.3830 & 0.7416 & 0.0867 \\ -0.0392 & 0.2357 & -0.1386 & -0.4390 & -0.0239 & 0.1867 \\ 0.1868 & -0.2305 & -0.1873 & -0.0842 & -0.5959 & 0.5975 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.2873 & -0.7123 \\ 0.0638 & 0.5145 \\ 0.5566 & 0.2486 \\ -0.2192 & 0.3349 \\ 0.0064 & -0.2930 \\ 0.0884 & 0.0783 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.1213 & 0.2021 & 0.3597 & -0.7437 & -0.0942 & -0.0867 \\ -0.7445 & -0.0795 & 0.4635 & 0.0942 & 0.0459 & 0.1762 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0.0334 & 0.0728 \\ -0.3485 & 0.0963 \end{bmatrix}$$

$$K_2^T = \begin{bmatrix} 0.1347 & 0.3854 & 0.1931 & -0.2721 & 0.1355 & -0.0469 \\ 0.1974 & -0.0759 & 0.2479 & 0.0934 & 0.1720 & -0.1105 \end{bmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.7223 & -0.2689 & -0.2610 & -0.1061 & -0.3884 & 0.0242 & -0.4267 \\ 0.4971 & 0.5500 & 0.1773 & 0.2553 & 0.1389 & -0.4834 & -0.2295 \\ 0.1687 & -0.4508 & 0.7625 & -0.0330 & 0.3635 & 0.1577 & 0.1049 \\ -0.0099 & 0.2808 & 0.1389 & 0.6981 & -0.1024 & 0.5036 & 0.0265 \\ 0.3728 & -0.0632 & -0.4117 & 0.0378 & 0.2875 & 0.3512 & 0.6035 \\ -0.0474 & 0.1833 & 0.1602 & -0.2568 & -0.3782 & -0.1994 & 0.3166 \\ 0.1132 & 0.0131 & -0.2092 & -0.0278 & 0.5465 & -0.3468 & -0.1268 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0.3369 & -0.4269 \\ -0.7249 & -0.0248 \\ 0.0043 & -0.0065 \\ 0.2658 & -0.0361 \\ -0.1591 & 0.4391 \\ 0.5044 & 0.1037 \\ 0.0294 & -0.2786 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 0.0247 & -0.3439 \\ -0.0030 & -0.2566 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} -0.2328 & -0.3635 & -0.3999 & 0.4349 & 0.0740 & -0.3497 & -0.2346 \\ -0.1094 & 0.4279 & -0.2960 & -0.3756 & 0.2405 & 0.1778 & -0.1404 \end{bmatrix}$$

$$K_3^T = \begin{bmatrix} 0.0795 & -0.1835 & -0.1768 & -0.0450 & -0.0990 & -0.0399 & 0.0641 \\ -0.2812 & 0.2779 & 0.1060 & -0.1336 & 0.0562 & -0.0094 & 0.1234 \end{bmatrix}$$

Os resultados da modelagem descentralizada de séries temporais multivariadas no espaço de estado obtidos pela aplicação da metodologia descentralizada de identificação a sistema de qualidade da água de rio foram bons. Na próxima Seção a identificação estocástica descentralizado de sistemas de qualidade de água de rio, utilizando a metodologia descentralizada de identificação via métodos de subespaço de identificação, é feita.

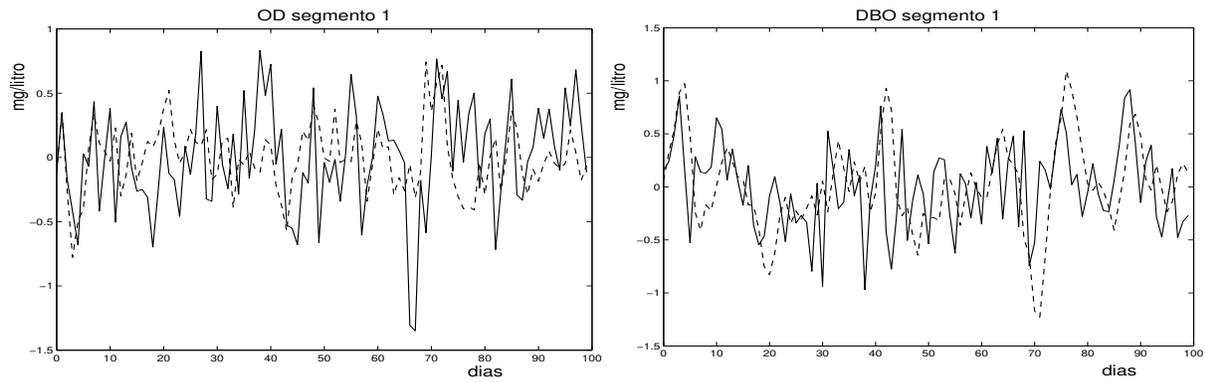


Fig. 7.10: Concentrações de DBO e OD do primeiro segmento. A linha sólida representa os dados medidos e a pontilhada os estimados (valores entorno das concentrações de regime).

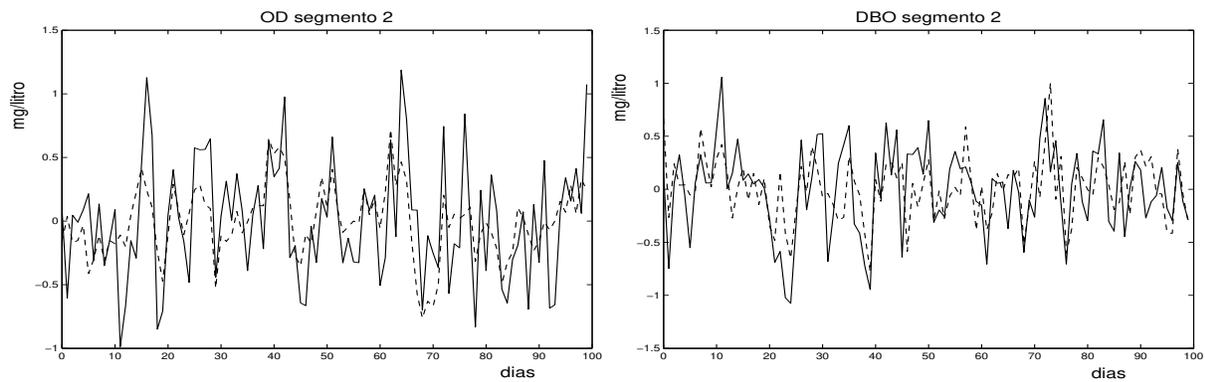


Fig. 7.11: Concentrações de DBO e OD do segundo segmento. A linha sólida representa os dados medidos e a pontilhada os estimados (valores entorno das concentrações de regime).

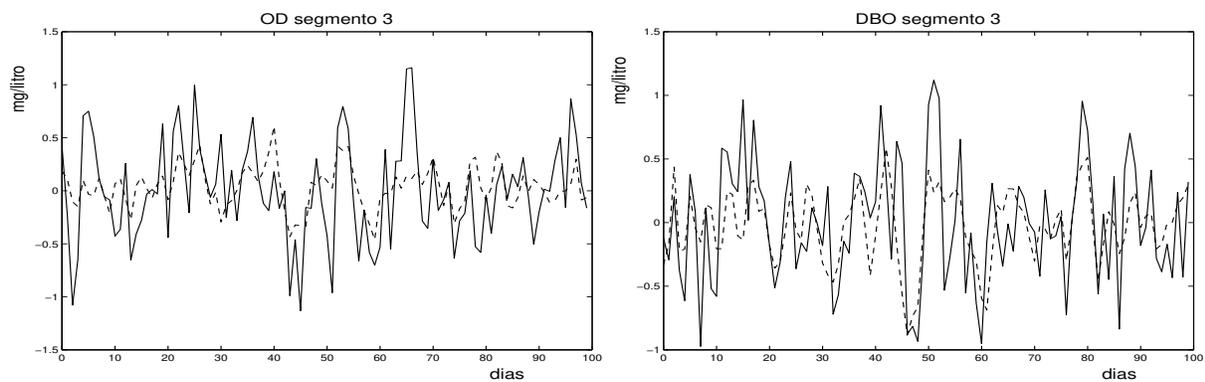


Fig. 7.12: Concentrações de DBO e OD do terceiro segmento. A linha sólida representa os dados medidos e a pontilhada os estimados (valores entorno das concentrações de regime).

## 7.4 Identificação estocástica descentralizada de Sistemas de Qualidade de água de rio

Nesta seção, a metodologia descentralizada de identificação para sistemas serialmente interconectados proposta, utilizando métodos de identificação estocástica nos subespaços, é utilizada na identificação de sistemas de qualidade de água de rio. O método de subespaço estocástico de identificação CLS-SSI (Constrained Least-Squares Stochastic Subspace Identification) de Katayama e Picci (1999) é utilizado como ferramenta para a identificação dos subsistemas. Esta parte da Tese baseia-se no trabalho apresentado na CDC 2002, Bottura e Cáceres (2002b).

Novamente o modelo de simulação para o sistema de qualidade da água de rio é semelhante ao feito anteriormente, Young e Beck (1974); Mahmoud et al. (1985); Cáceres (1992), mas agora, para efeitos de identificação dos subsistemas, as concentrações de DBO de controle,  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  não são constantes. Consideramos que essas entradas excitam persistentemente os subsistemas, para tanto, nós geramos entradas binárias aleatórias. Outras formas de entrada também podem ser consideradas, desde que excitem os subsistemas persistentemente. A figura 7.17 ilustra como o rio é dividido em subsistemas, tendo cada subsistema uma entrada própria. Com esta divisão o rio pode ser considerado como sistema serialmente interconectado. Para propósitos de simulação consideramos somente a dinâmica das concentrações de DBO e OD nos subsistemas. As equações são dadas por (7.8) e (7.9), onde cada subsistema é considerado como se fosse um reator agitado de fluxo contínuo. Novamente, para o benchmark, os valores dos parâmetros de simulação para os subsistemas são os dados reais de um segmento de 4,7km do rio Cam da Inglaterra:

$k_{ri} = 0,2$  [dia<sup>-1</sup>],  $k_{Li} = 0,32$ [dia<sup>-1</sup>],  $\frac{\eta_i}{V_i} = 0,1$ [ $\frac{mg}{litro}$ ][dia<sup>-1</sup>],  $q_i^s = 10$ [mg/litro],  $\frac{Q_{ei}}{V_i} = 0,1$ ,  $\frac{Q_i}{V_i} = \frac{Q_{i-1}}{V_i} = 0,9$ . Perturbações ruído branco gaussianas  $\delta L_i$  e  $\delta q_i$ , com média zero e covariâncias  $\Delta L$  e  $\Delta q$ , são adicionadas nos modelos dos subsistemas. As concentrações (DBO)  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são as variáveis de controle dos subsistemas. No nosso caso, para propósitos de excitação persistente, supomos que sejam sinais aleatórios binários, com uma tendência fixa. Elas podem ser fornecidas por estações de tratamento de água, por exemplo. Com essas considerações, os subsistemas benchmark são dados por:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_{i-1}(t) + \omega_i(t) \quad (7.17)$$

$$\text{where } \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{i-1}(t) = \begin{bmatrix} 0.9L_{i-1} \\ 0.9q_{i-1} + 1.9 \end{bmatrix}, \quad \omega_i(t) = \begin{bmatrix} \delta L_i \\ \delta q_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i(t) = m_i \text{ and } \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) = \begin{bmatrix} L_i \\ q_i \end{bmatrix}.$$

Com esse benchmark geramos dados discretos no tempo das saídas dos subsistemas, sendo as entradas as dadas na figura 7.13. Novamente consideramos valores de regime idênticos aos do caso anterior, isto é, os valores  $m_i$  de entrada são:  $m_i = m_i^* + \delta m_i$ , onde  $m_1^* = 53,5\text{mg/l}$ ,  $m_2^* = 41,9\text{mg/l}$  e  $m_3^* = 15,51\text{mg/l}$ , e as  $\delta m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são concentrações binárias aleatórias de DBO. Os valores das concentrações *DBO* e *OD* de regime, para os respectivos subsistemas são:  $L_1^* = 4,06\text{mg/l}$ ,  $q_1^* = 8,0\text{mg/l}$  para o 1º subsistema,  $L_2^* = 5,94\text{mg/l}$ ,  $q_2^* = 6,0\text{mg/l}$  para o 2º subsistema e  $L_3^* = 5,22\text{mg/l}$ ,  $q_3^* = 4,69\text{mg/l}$  para o terceiro, respectivamente.

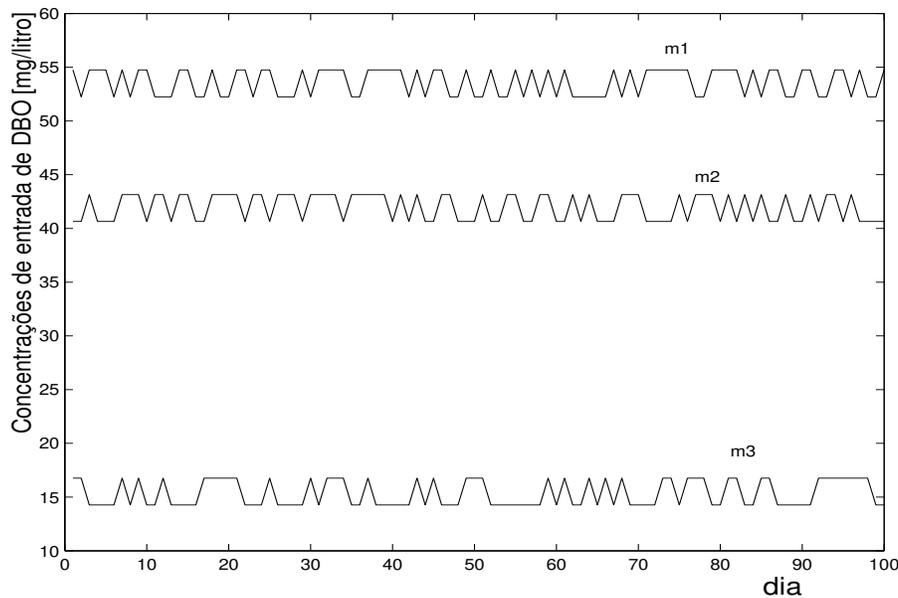


Fig. 7.13: Concentrações binárias aleatórias de DBO para cada segmento.

### 7.4.1 Resultados

Para propósitos de identificação, foram gerados 100 sinais aleatórios binários como entradas de concentração de DBO para cada subsistema, como mostrado na Figura 7.13. As tendências das amostras de entrada/saída foram eliminadas por meio de uma primeira diferença. Para os dados tratados e para cada subsistema, a identificação descentralizada utilizando a nossa metodologia, foi feita. O método de subespaço estocástico CLS-SSI foi utilizado na implementação da metodologia. As figuras 7.14, 7.15 and 7.16, mostram os dados “medidos” versus os estimados das concentrações de DBO e OD nos segmentos 1º, 2º e 3º, respectivamente. Elas representam as variações no entorno dos seus respectivos valores de regime. As linhas sólidas são os dados “medidos” e as linhas tracejadas os

estimados. As dimensões obtidas para os subsistemas foram 6 para o primeiro, 6 para o segundo e 7 para o terceiro subsistema, respectivamente, com base nos valores singulares. Observamos que as ordens dos subsistemas são maiores que as utilizadas no benchmark, isto deve-se ao fato de também estarmos modelando os ruídos dos subsistemas com este algoritmo, como proposto pelos autores. Os valores de saída estimados foram gerados pelo seguinte filtro de Kalman:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t} + 1) &= \mathbf{A}_i\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t}) + \mathbf{M}_i\hat{\mathbf{y}}_{i-1}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}_i[\mathbf{y}_i(\mathbf{t}) - \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t})], \\ \hat{\mathbf{y}}_i(\mathbf{t}) &= \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_i\hat{\mathbf{y}}_{i-1}(\mathbf{t}),\end{aligned}\quad (7.18)$$

onde  $\mathbf{A}_i, \mathbf{M}_i, \mathbf{D}_i$  e  $\mathbf{K}_i, i = 1, 2, 3$  são as matrizes dos subsistemas obtidas pela aplicação da metodologia descentralizada de identificação. Para avaliar e comparar os dados medidos e os estimados, utilizamos o erro de predição, como feito em Favorel et al. (2000):

$$\epsilon = 100 \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left[ \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^N [(y_l)_j - (y_l^P)_j]^2}{\sum_{l=1}^N [(y_l)_j]^2}} \right] \%,$$

onde  $N$  é o número de dados de saída e  $P$  denota os dados preditos. Os erros de predição para o primeiro, segundo e terceiro subsistemas são 26%, 23% e 24%, respectivamente, em decorrência dos efeitos do ruído na modelagem por este algoritmo. Sugerimos comparações com os resultados de outros algoritmos, bem como revisão da aplicação desta metodologia.

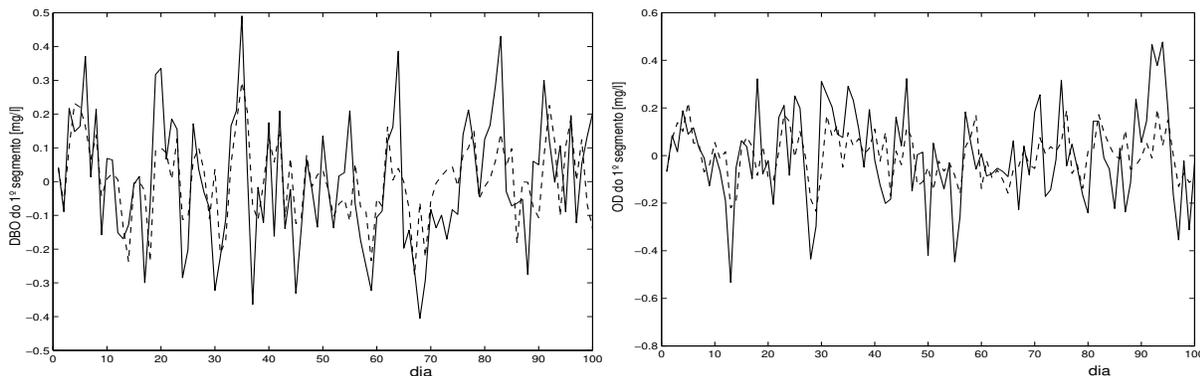


Fig. 7.14: Concentrações de DBO e OD do primeiro segmento. A linha sólida são os dados “medidos” e a tracejada os estimados (concentrações entorno do regime).

Contudo, consideramos esta aplicação da metodologia descentralizada de identificação estocástica, baseada no método de subespaço estocástico de identificação (CLS-SSI), Katayama e Picci (1999) satisfatória e merecedora de revisão e aperfeiçoamento. Os modelos no espaço de estado, para o sistema da qualidade de água de rio, identificados pela metodologia proposta, uma vez aperfeiçoada, certamente terão muita utilidade para o controle e/ou monitoramento de tal tipo de sistema.

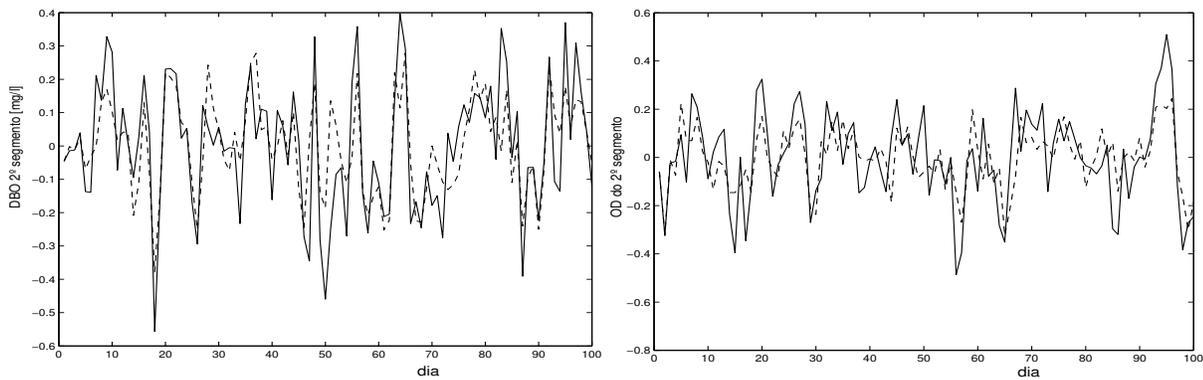


Fig. 7.15: Concentrações de DBO e OD do segundo segmento. A linha sólida são os dados “medidos” e a tracejada os estimados (concentrações entorno do regime).

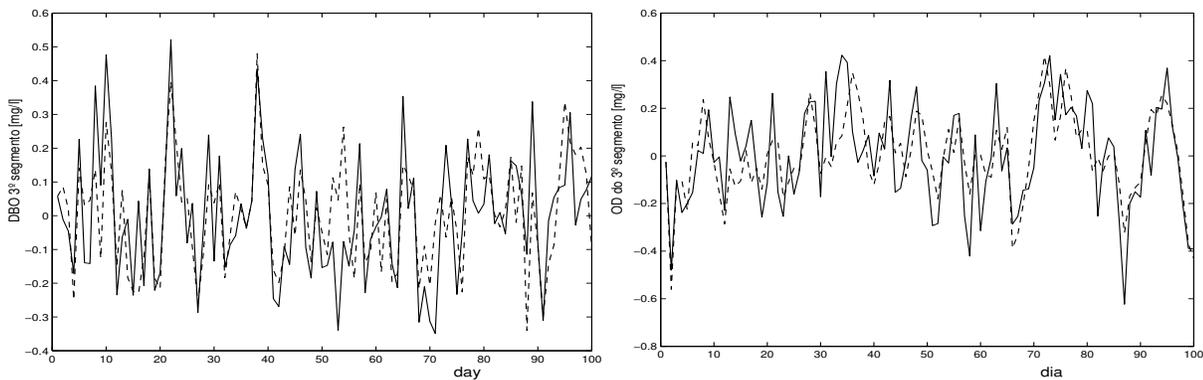


Fig. 7.16: Concentrações de DBO e OD do terceiro segmento. A linha sólida são os dados “medidos” e a tracejada os estimados (concentrações entorno do regime).

Na próxima Seção o controle estocástico descentralizado, de sistemas de qualidade de água de rio, baseado nos modelos obtidos na metodologia descentralizada de identificação via métodos de subespaço de identificação, é feito.

## 7.5 Controle descentralizado de sistema de qualidade da água de rio

Como vimos na Seção anterior, sistema da qualidade da água de rio pode ser modelado e/ou identificado por meio da metodologia descentralizada de identificação para sistemas serialmente interconectados, proposta em Bottura e Cáceres (2002b, 2001). Nesta Seção propomos o controle estocástico descentralizado de sistemas de qualidade da água do rio, Bottura e Cáceres (2002a), modelados por tal metodologia. A estrutura hierárquica Bloco Triangular Inferior (BTI) dos sistemas identificados

pela metodologia permite a utilização de métodos de controle descentralizado especialmente desenvolvidos para estes sistemas, ver Stankovic e Siljak (1989); Siljak (1991), isto é, de algoritmos de controle estocástico descentralizado obtidos sequencialmente, como visto no Capítulo anterior. O modelo de simulação está baseado nos trabalhos de Young e Beck (1974), Mahmoud et al. (1985) e Cáceres (1992), onde um trecho de rio é subdividido em segmentos de comprimentos convenientes, cada segmento é considerado como um subsistema de um sistema serialmente interconectado, como ilustrado na Figura 7.17. Para propósitos de simulação identificação e de controle descentralizado, consideramos somente os parâmetros de qualidade da água de rio: demanda bioquímica de oxigênio DBO e oxigênio dissolvido OD.

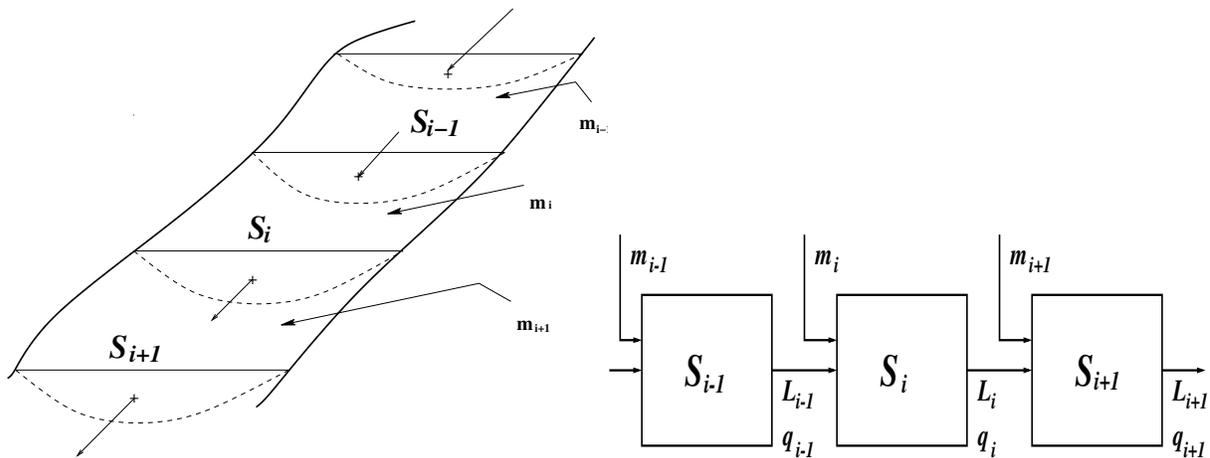


Fig. 7.17: Segmentos de rio com efluentes de controle.

## Modelo de simulação e geração de dados

Consideramos que o sistema de qualidade da água de rio está dado por (7.8) e (7.9), onde, por simplicidade, na modelagem dos subsistemas supomos que os segmentos de rio têm os mesmos parâmetros. Os dados usados se referem a um trecho do Rio Cam da Inglaterra, ver Young e Beck (1974); Cáceres (1992), porém com diferentes condições de regime e objetivos. Também utilizamos este modelo para a geração de dados amostrados para fins de identificação descentralizada. Aplicamos a metodologia descentralizada de identificação para obter as matrizes no espaço de estado de cada subsistema, ver Seção 7.4. As entradas dos subsistemas, assim como as saídas dos subsistemas estão dadas nas Figuras 7.18, 7.19, 7.20 e 7.21, respectivamente.

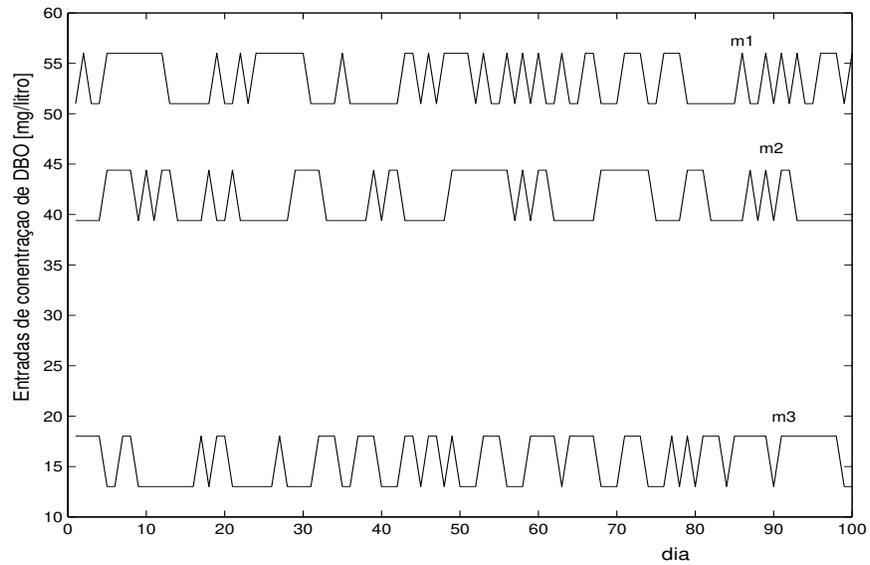


Fig. 7.18: Entradas aleatórias binárias de concentração de DBO, para cada segmento.

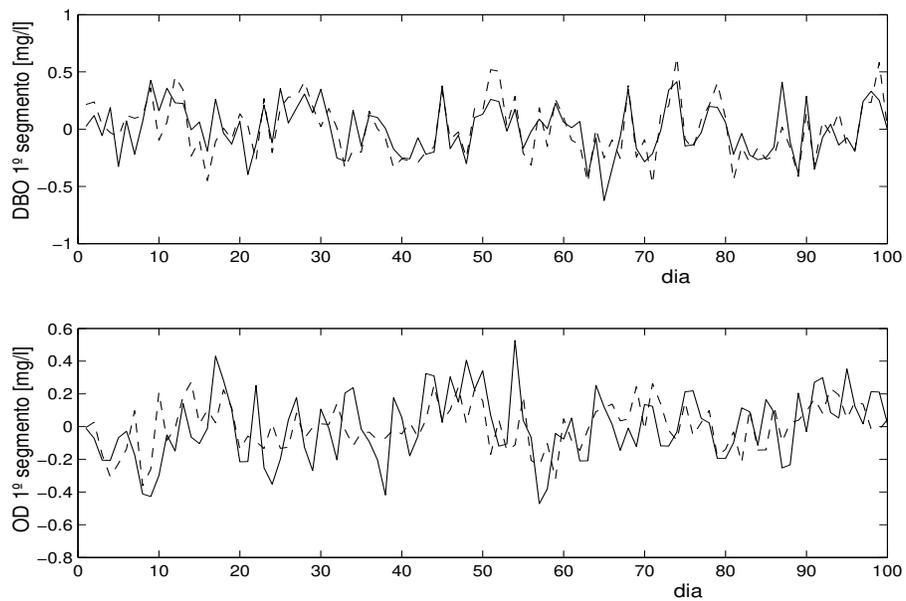


Fig. 7.19: As concentrações da DBO do OD do primeiro segmento. A linha contínua representa os dados medidos e a pontilhada os estimados.

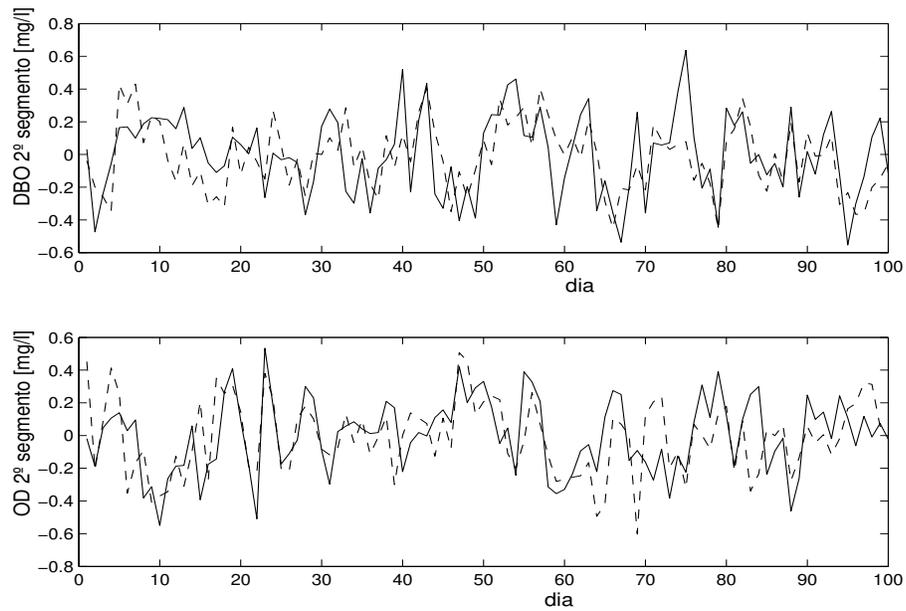


Fig. 7.20: As concentrações da DBO e do OD do segundo segmento. A linha contínua representa os dados "medidos" e a pontilhada os estimados (entorno dos valores de regime).

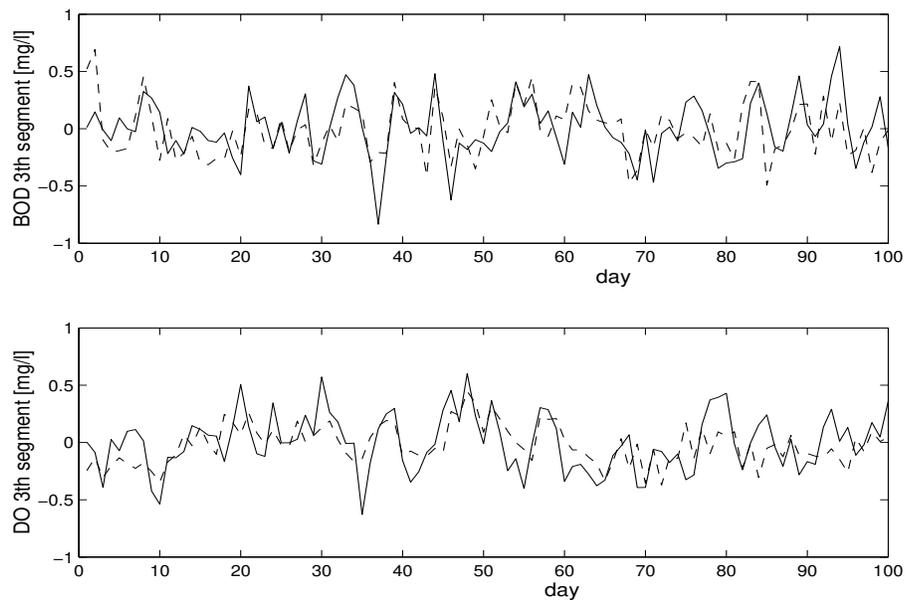


Fig. 7.21: As concentrações da DBO do OD do terceiro segmento. A linha contínua representa os dados "medidos" e a pontilhada os estimados (entorno dos valores de regime).

### 7.5.1 Identificação dos Subsistemas

Para cada segmento foram geradas 100 amostras, variáveis aleatórias binárias, como concentrações de entrada de DBO. Da aplicação destas entradas resultam as saídas medidas para os respectivos subsistemas. Fizemos uma manipulação de dados para eliminar as tendências. Com os dados já tratados utilizamos a metodologia de identificação descentralizada baseada no método de identificação nos subespaços N4SID, Overschee e De Moor (1994). Os modelos obtidos são discretos no tempo. As entradas dos subsistemas são dadas na Figura 7.18. As Figuras 7.19 e 7.20 mostram o resultado da aplicação da modelagem descentralizada que previamente desenvolvemos, Bottura e Cáceres (2001). As dimensões para os subsistemas são 11 para o primeiro, 10 para o segundo e 10 para o terceiro. Notemos que as ordens obtidas para os subsistemas foram maiores que as utilizados na simulação; isto deve-se principalmente às incertezas introduzidas no modelo de simulação. Observamos que os dados estimados seguem satisfatoriamente os dados reais.

### 7.5.2 Controle descentralizado

Para o projeto do controle descentralizado utilizamos os modelos discretos de qualidade da água de rio, de cada segmento, encontrados pela aplicação da metodologia descentralizada de identificação. Devido a estrutura do sistema global (sistema serialmente interconectado) foi possível utilizar o algoritmo seqüencial de projeto de controle descentralizado para sistemas BTI, restrito somente à informação local. As funções de custo adotadas para a otimização dos subsistemas são:

$$E\{\mathbf{J}_i\} = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (4(L_i(t) - L_i^*)^2 + 2(q_i(t) - q_i^*)^2 + 2(m_i - m_i^*)^2) \right\}$$

onde  $i = 1, 2, 3$ ,  $m_1^* = 53,5 \text{ mg/l}$ ,  $m_2^* = 41,9 \text{ mg/l}$  e  $m_3^* = 15,51 \text{ mg/l}$ . Os valores das concentrações DBO e OD de regime, para os respectivos subsistemas são:  $L_1^* = 4,06 \text{ mg/l}$ ,  $q_1^* = 8,0 \text{ mg/l}$  para o 1º subsistema,  $L_2^* = 5,94 \text{ mg/l}$ ,  $q_2^* = 6,0 \text{ mg/l}$  para 2º subsistema e  $L_3^* = 5,22 \text{ mg/l}$ ,  $q_3^* = 4,69 \text{ mg/l}$  para o terceiro, respectivamente. Seja  $Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , então as matrizes de ponderação para cada subsistema são:

$$Q_i = C_i' Q C_i, \quad R_i = 2,$$

onde  $C_i$  é a matriz de saída do  $i$ -ésimo segmento encontrada na aplicação da metodologia.

Os ganhos dos controladores e os ganhos dos filtros de Kalman para os primeiros dois subsistemas são:

$$K'_1 = \begin{bmatrix} 0.0894 \\ 0.1590 \\ -0.0321 \\ 0.1577 \\ -0.2748 \\ -0.2687 \\ 0.2193 \\ 0.2170 \\ -0.6636 \\ -0.2730 \\ -0.4967 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0.0682 & 0.0545 \\ -0.0151 & -0.0577 \\ 0.0349 & -0.1562 \\ -0.1742 & 0.0570 \\ 0.0958 & 0.0836 \\ 0.1267 & -0.0357 \\ -0.2096 & 0.0405 \\ -0.547 & -0.0255 \\ 0.0409 & -0.0371 \\ 0.0374 & 0.0675 \\ -0.0926 & -0.07566 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

$$K'_2 = \begin{bmatrix} -0.0092 \\ -0.0035 \\ -0.0120 \\ -0.0064 \\ -0.0012 \\ -0.0011 \\ 0.0042 \\ -0.0117 \\ 0.0351 \\ 0.0018 \\ 0.0211 \\ -0.1411 \\ 0.0626 \\ -0.2058 \\ -0.4132 \\ -0.3743 \\ 0.6551 \\ -0.7447 \\ -0.1992 \\ -0.3468 \\ 0.8535 \\ 0.5230 \\ 0.4826 \\ 0.7426 \\ 0.0217 \\ -0.7086 \\ 0.4110 \\ 0.5994 \\ 0.0292 \\ 0.0646 \\ 0.0191 \\ -0.0298 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -0.0308 & 0.0052 \\ -0.0173 & -0.0164 \\ 0.0027 & -0.0164 \\ 0.0297 & 0.0174 \\ -0.0216 & 0.0068 \\ -0.0163 & 0.0010 \\ 0.0258 & -0.0231 \\ 0.0353 & -0.0321 \\ -0.0282 & 0.0067 \\ -0.0182 & -0.0149 \\ 0.0076 & -0.0114 \\ -0.0308 & -0.1622 \\ -0.0173 & -0.1294 \\ 0.0027 & -0.0615 \\ 0.0297 & -0.0174 \\ -0.0216 & 0.0068 \\ -0.0163 & 0.0068 \\ 0.0258 & -0.0231 \\ 0.0353 & -0.0321 \\ -0.0282 & 0.0067 \\ -0.0182 & -0.0149 \\ 0.0076 & -0.0114 \\ -0.1091 & -0.1622 \\ -0.0388 & -0.1294 \\ 0.0472 & -0.0615 \\ -0.1148 & -0.0884 \\ 0.0611 & 0.0331 \\ -0.1597 & -0.2012 \\ 0.0078 & 0.0245 \\ -0.0097 & -0.0753 \\ 0.0204 & 0.0292 \\ -0.0334 & 0.0295 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

O desempenho do controle descentralizado da qualidade da água de rio é mostrado nas Figuras 7.17 e 7.18, onde comparamos as respostas dos subsistemas quando é aplicado o controle e quando

ele não é aplicado.

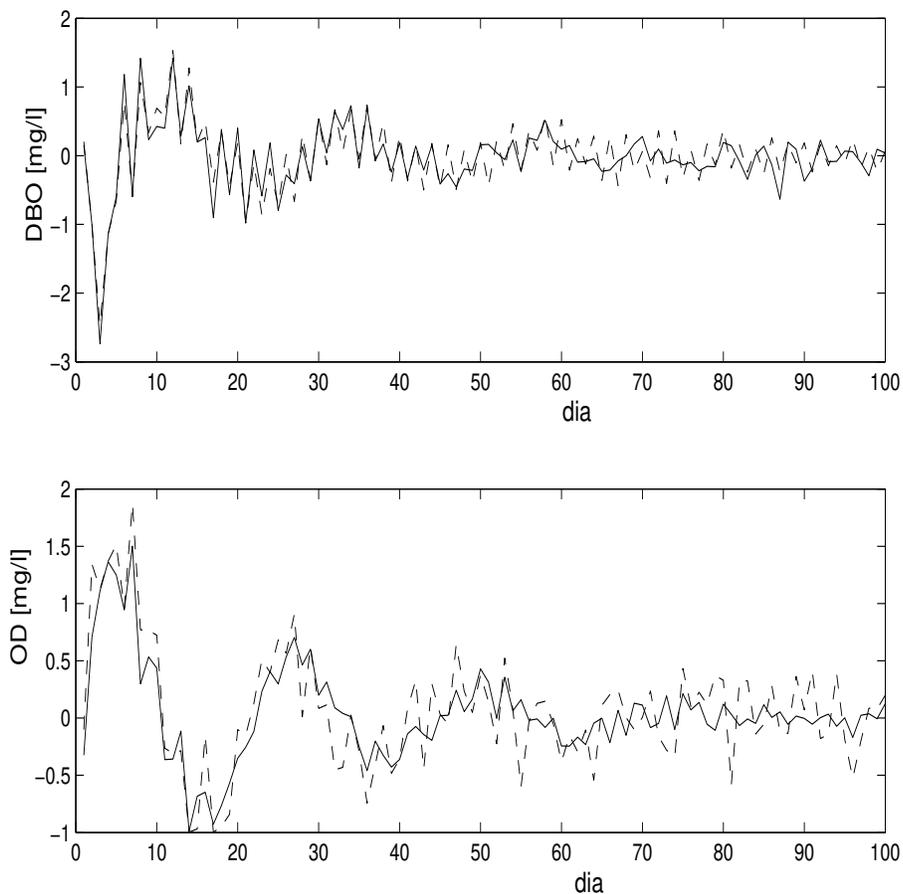


Fig. 7.22: Concentrações de DBO e OD do primeiro segmento. A linha contínua é a resposta do sistema com controle e a pontilhada sem controle.

Devido à complexidade na estimação do vetor de estado, a implementação do algoritmo de controle pode ser proibitiva para sistemas de grande porte; neste caso, podemos fazer um estudo das conexões entre os subsistemas, e desconsiderar aqueles onde houver conexão fraca. Nesta Tese, o atraso de transporte entre os subsistemas não é considerado. O estudo e a aplicação desta metodologia considerando atraso de transporte é uma sugestão de tema de futura pesquisa.

### 7.5.3 Conclusões

Neste Capítulo analisamos, no espaço de estado, sistema de qualidade da água de rio como sistema de subsistemas serialmente interconectados, assim como aplicamos uma metodologia para o seu controle descentralizado a partir de modelo obtido pela utilização de metodologia descentralizada de identificação proposta. A aplicação da metodologia nos permitiu atingir o objetivo de viabilizar um

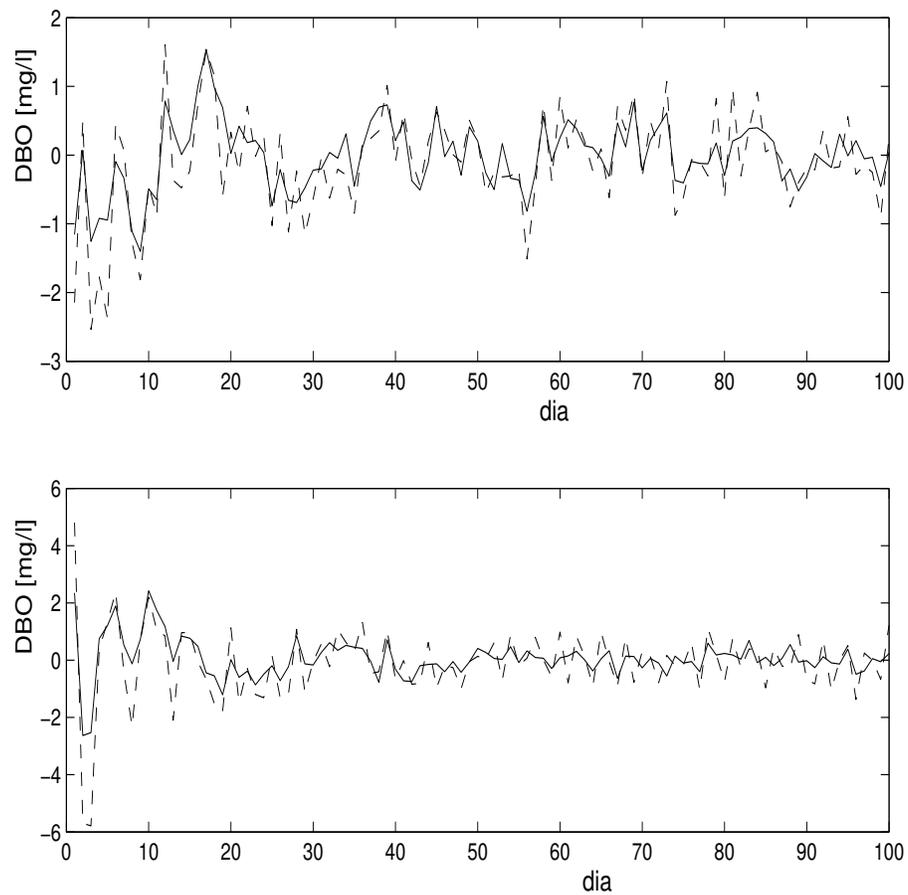


Fig. 7.23: Concentrações de DBO e OD do segundo segmento. A linha contínua é a resposta do sistema com controle e a pontilhada sem controle.

projeto de controle descentralizado para um sistema de qualidade da água de rio.

# Capítulo 8

## Conclusões

Os objetivos principais desta tese são: a modelagem computacional de dados ruidosos multivariáveis e o controle de sistemas serialmente interconectados, com aplicações à modelagem e ao controle descentralizados de sistemas de qualidade de água de rio. Este problema é complexo. Modelos determinísticos geralmente não refletem todos os fenômenos envolvidos num sistema real. Os modelos de sistemas estocásticos contabilizam, de certa forma, estatisticamente, as incertezas de modelagem e de medida que ocorrem num sistema real. Por esta razão achamos que a abordagem estocástica dada nesta tese foi uma boa escolha. Os Capítulos iniciais mostraram a preocupação e o cuidado que tivemos em estudar e entender este tipo de sistemas de forma adequada aos nossos propósitos. Muitos tópicos poderiam até ser bem conhecidos, contudo achamos importante colocá-los, da forma que o fizemos, para uma melhor compreensão da tese dada a importância de tais estudos nesta área. É importante ressaltar que não há muitas referências que tratem especificamente de sistemas estocásticos discretos no tempo no espaço de estado; geralmente os resultados do caso contínuo são reportados e os resultados no caso discreto nem sempre. Por esta razão, apresentamos, no Capítulo 3, uma versão discreta das propriedades de sistemas lineares estocásticos, de certa forma original. No Capítulo 4 foram tratadas as bases teóricas essenciais para a realização de processos estocásticos estacionários no espaço de estado. O lema positivo real discreto, no contexto estocástico, foi enunciado e provado. No Capítulo 5 os métodos de subespaço para identificação, que utilizamos na tese foram apresentados; e alguns algoritmos como o método de identificação em subespaços via mínimos quadrados restrito de Katayama e Picci e o algoritmo de Aoki foram abordados. Os resultados mais importantes da tese estão nos Capítulos 6 e 7, pois neles apresentamos a nossa proposta de metodologia descentralizada de identificação baseada nos métodos de identificação em subespaço, aplicada a sistemas serialmente interconectados. Os resultados obtidos pela aplicação da metodologia mostraram que ela é adequada para a identificação de sistemas serialmente interconectados, embora ainda precise ser aperfeiçoada, e mais ainda, que os modelos obtidos pela metodologia são de muita utilidade para o projeto de sis-

temas de controle descentralizado para tal estrutura. Por esta razão, aproveitando a estrutura bloco triangular inferior dos modelos obtidos, propomos a utilização de um método de controle ótimo descentralizado que aproveita esta estrutura. Finalmente a metodologia e o controle descentralizado são aplicados a sistema de qualidade de água de rio. Para realizar tal objetivo, uma plataforma de simulação baseada na modelagem de sistema de qualidade da água de rios, que considera o rio como uma sistema serialmente interconectado, foi desenvolvida. Os resultados da aplicação da metodologia de identificação e controle estocásticos descentralizados a um modelo de um sistema de qualidade da água de rio, foram muito bons. A aplicação da metodologia considerando dados de sistemas reais de qualidade de água de rios, de sistemas de reservatórios em cascata, e vias expressas de transporte, de telecomunicações e de energia bem como de sistemas químicos com sistemas com colunas de destilação, por exemplo, podem ser temas de pesquisas futuras. Outro tema de pesquisa é a aplicação da metodologia para outros tipos de sistemas não necessariamente serialmente interconectados. Um estudo detalhado dos modelos obtidos para sistemas e sinais e das suas propriedades são necessários. A metodologia desenvolvida utilizando o algoritmo MOESP-AOKI deveria ser bastante investigada, por parecer-nos muito promissora.

# Referências Bibliográficas

- H. Akaike. Markovian representation of stochastic processes by canonical variables. In *SIAM J. Control*, 13, 162-173, 1975.
- H. Akaike. Canonical correlation analysis of time series and the use of an information criterion. In *System Identification: Advances and Cases Studies*, R. K. Mehra and D. G. Lainiotis, Eds., Academic Press, New York, 1976.
- H. Akaike. Stochastic theory of minimal realization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19:667–674, 1974.
- B. D. O. Anderson. The inverse problem of stationary covariance generation. *Journal of Statistical Physics*, 1:133–147, 1969.
- B. D. O. Anderson. A system theory criterion for positive real matrices. *Journal SIAM Control*, 5(2): 171–182, 1967a.
- B. D. O. Anderson. An algebraic solution to the spectral factorization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-12(4):410–414, 1967b.
- B.D. O. Anderson. A system theory criterion for positive real matrices. *Journal SIAM on Control*, 5 (2):171–182, 1967c.
- B.D.O. Anderson, K.L. Hitz, and N.D. Diem. Recursive algorithm for spectral factorization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-21(6):742–750, 1974.
- M. Aoki. *Notes on Economic Time Series Analysis: System theoretic Perspectives*. Springer Verlag, 1983.
- M. Aoki. *State Space Modelling of Time Series*. Springer Verlag, first edition, 1987.
- M. Aoki. *State Space Modelling of Time Series*. Springer Verlag, second edition, 1990.
- Karl J. Astrom. *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, Inc., 1970.

- Gilmar Barreto. *Modelagem Computacional Distribuída e Paralela de Sistemas e de Séries Temporais Multivariáveis no Espaço de Estados*. Tese Doutorado, LCS/FEEC/UNICAMP, Campinas SP, Brasil, 2002.
- M.B. Beck and B.A. Finney. Operational water quality management: Problem context and evaluation of a model for river quality. *Water Resources Research*, 23:2030–2042, 1987.
- C. P. Bottura. *Análise Linear de Sistemas*. Editora Guanabara dois, 1982.
- C. P. Bottura and A. F. Torrico Cáceres. Método de identificação nos subespaços para sistemas multivariáveis com estrutura interconectada. In *Anais do XXVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM 2001)*, pages 445 – 453, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, 2001.
- C. P. Bottura and A. F. Torrico Cáceres. Decentralized control of serial interconnected systems for river water quality via subspace identification. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, pages 3337–3342, Anchorage, Alaska, USA, 2002a.
- C. P. Bottura and A. F. Torrico Cáceres. Decentralized multivariate identification of interconnected systems by a stochastic subspace method. In *Proceedings of the 41st. IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4499–4504, Las Vegas, Nevada, USA, 2002b.
- C. P. Bottura and A. F. Torrico Cáceres. Decentralized subspace method for multivariate systems identification. In *Proceedings of the 10th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisboa, Portugal, 2002c.
- C. P. Bottura, G. Barreto, and A. F. Torrico Cáceres. River water quality modeling via verhaegen and dewilde’s method. In *Proceedings of the IFAC International Conference on Modelling and Control in Agriculture, Horticulture and Post-Harvest Processing (Agricontrol 2000)*, pages 333–338, Wageningen, the Netherlands, 2000.
- C. P. Bottura, A. D. R. Tamariz, and A. F. Torrico Cáceres. Parallel and distributed moesp computational system’s modelling. In *Proceedings of the 10th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisboa, Portugal, 2002.
- C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 36(11): 1228–1240, 1991.
- A. F. Torrico Cáceres. *Controle descentralizado: Técnicas e Aplicação ao Controle da Qualidade da Água de Rios*. Tese de Mestrado FEE-UNICAMP, 1992.

- P. L. Caines. *Linear Stochastic Systems*. John Wiley and Sons, New York, 1988.
- C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York, 1999.
- U. B. Desai and D. Pal. A transformation approach to stochastic model reduction. In *IEEE Transactions Automatic Control, AC-29*, pp 1097-1100, 1984.
- P. Faurre. Identification par minimisation d'une représentation markovienne de processus aleatoire. In *Lectures Notes in Mathematics*, volume 132, Springer, Berlin, 1970.
- P. Faurre. *Réalisations Markoviennes de Processus Stationnaires*. IRIA Rapport de Recherche, no 13, March 1973, 1973.
- P. Faurre. Stochastic realizations algorithms. In *System Identification: Advances and Cases Studies*, R. K. Mehra and D. G. Lainiotis, Eds., Academic Press, New York, 1976.
- P. Faurre, M. Clerget, and F. Germain. *Operateurs Rationnels Positifs*. dunod -publie Avec Concours de L'I.R.I.A, 1979.
- W. Favorel, B. De Moor, and P. V. Overschee. Subspace state space system identification for industrial processes. *Journal of Process Control*, 10:149–155, 2000.
- F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea, New York, 1959.
- G. H. Golub and C. R. Van Loan. *Matrix Computations (2nd ed.)*. Baltimore, MD: The John Hopkins Univ. Press., 1989.
- L. Hitz and B. D. O. Anderson. Discrete positive-real functions and their application to system stability. *Proceedings of IEE*, 116(1):153–155, 1969.
- B. Ho and R. E. Kalman. Efficient construction of linear state variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*, 14:545–548, 1966.
- H. Hotelling. Relations between two sets of variables. *Biometrika*, 28:321–377, 1936.
- R. E. Kalman. On minimal partial realizations of a input/output map. In R. E. Kalman and N. DeClaris, editors, *Aspects of Networks and Systems Theory (Note: a collection of papers in honor of the E. A. Guillemin)*, pages 385–407, New York, 1971. Holt, Rinehart and Winston.
- R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, pages 102–119, 1980.

- R. E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM Control, Series A*, 1(2): 152–192, 1963.
- R. E. Kalman. Irreducible realizations and the degree of a rational matrix. *SIAM*, 13(2):520–544, June 1965a.
- R. E. Kalman. Algebraic structure of linear dynamical systems, i. the module  $\Sigma$ . In *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, volume 54, pages 1503–1508, December 1965b.
- R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME, J. Basic Eng. Series 82D*, pages 35–45, March 1960a.
- R. E. Kalman. On the general theory of control systems. *IFAC, International and Remote Control*, 1: 481–492, 1960b.
- R. E. Kalman. Algebraic aspects of the theory of dynamical systems: Differential equations and dynamical systems. In Jack K. Hale and Joseph P. LaSalle, editors, *Proceedings of the International Symposium held at the University of Puerto Rico*, pages 133–146. Academic Press, December 1967.
- R. E. Kalman and J. E. Bertram. A unified approach to the theory of sampling systems. *Journal of the Franklin Institute*, 267:405–436, 1959.
- T. Katayama and G. Picci. Realization of stochastic systems with exogenous inputs and subspace identification methods. *Automatica*, 35:1635–1652, 1999.
- T. Katayama and G. Picci. Stochastic realization with exogenous inputs and subspace-methods identification. *Signal Processing*, 52:145–160, 1996.
- A. N. Kolmogorov. Sur l'interpolation et extrapolations des suites stationnaires. In *CR Acad. Sc. English translation in Linear Least Squares Estimation, T Kailath, Ed., Benchmark Papers in Electrical Engineering and Computer Science, Vol. 17 New York, 1997*, volume 32, pages 2043–2045, Paris, 1939.
- A. N. Kolmogorov. Stationary sequences in hilbert spaces (in russian). In *Bull. Math. Univ. Moscow; English translation in Linear Least Squares Estimation, T Kailath, Ed., Benchmark Papers in Electrical Engineering and Computer Science, Vol. 17 New York, 1997*, volume 2, Moscow, 1941.
- A. M. Kshirsagar. *Multivariate Analysis*. Marcel Dekker, Inc., 1972.

- P. R. Kumar and P. Varaiya. *Stochastic Systems: Estimation, Identification and Adaptive Control*. Prentice Hall, 1986.
- J. C. Lamb. *Water quality and its control*. John Wiley and Sons, inc., 1985.
- A. Lindquist and G. Picci. Canonical correlation analysis, approximate covariance extension, and identification of stationary time series. *Automatica*, 32(5):709–733, 1996.
- A. Lindquist and G. Picci. Geometric methods for state space identification. In S. Bittanti and G. Picci, editors, *Identification, Adaptation, Learning*, Italy, 1994. Springer.
- M.S. Mahmoud, M.F. Hassan, and M.G. Darwish. Stream quality modeling and control. In *Large-Scale Control Systems*, Marcel Dekker, New York, 1985.
- P. Van Overschee and B. De Moor. *Subspace Identification for Linear Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- P. Van Overschee and B. De Moor. N4sid : Subspace algorithms for the combined deterministic - stochastic systems. *Automatica*, 30:75–93, 1994.
- P. Van Overschee and B. De Moor. Subspace algorithms for the stochastic identification problem. *Automatica*, 29:649–660, 1993.
- K. Peternell, W. Scherrer, and M. Deistler. Statistical analysis of novel subspace identification methods. *Signal Processing*, 52:161–177, 1996.
- P. L. Falb R. E. Kalman and M. A. Arbib. *Topics in Mathematical System Theory*. McGraw-Hill, New York., 1969.
- A. L. Lima Reda. *Simulation and Control of Stormwater Impacts on River Water Quality*. Phd thesis - Imperial College of Science - London, 1996.
- D. D. Siljak. *Decentralized Control of Complex Systems*. Academic Press, 1991.
- S. A. Silva and D. D. Mara. *Tratamentos biológicos de águas residuárias: Lagoas de estabilização*. ABES, 1979.
- J. O. Smith. *Techniques for Digital Filter Design and System Identification, with Application to the Violin, "Properties of Positive Real Functions", Appendix C*. Ph.D. Dissertation, CCRMA, Department of Electrical Engineering, Stanford University, 1983.

- S. S Stankovic and D. D. Siljak. Sequential lqg optimization of hierarchically structured systems. *Automatica*, 25:545–559, 1989.
- H. W. Streeter and E. B. Phelps. A study of the pollution and natural purification of the ohio river. In *US Public Health Bull. US Public Health Service, Washington, DC.*, volume III(146), 1925.
- Annabell Del Real Tamariz. *Modelagem Computacional de Dados e Controle Inteligente no Espaço de Estados*. Tese Doutorado, LCSI/FEEC/UNICAMP, Campinas SP, Brasil, 2005.
- H. Tamura. A discrete dynamic model with distributed transport delays and its hierarquical optimisation for preserving stream quality. In *IEEE, trans. sys. man. cybern. SMC*, volume 5, 1976.
- G. Tchobanoglous and E. D. Schroeder. *Water quality, series on water quality*, volume 1. Addison Wesley, 1985.
- Alle-Jean Van Der Veen, Ed F. Deprettere, and A. L. Swindlehurst. Subspace-based signal analysis using singular value decomposition. *Proceedings of the IEEE*, 81(9), September 1993.
- M. Verhaegen. Identification of the deterministic part of *mimo* state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*, 30(1):61–74, 1994.
- M. Verhaegen and P. Dewilde. Subspace model identification - part i : The output-error state space model identification class algorithms. *International Journal of Control*, 56(5):1187–1210, 1992a.
- M. Verhaegen and P. Dewilde. Subspace model identification - part ii : Analysis of the elementary output-error state-space model identification algorithm. *International Journal of Control*, 56(5): 1211–1241, 1992b.
- M. Viberg. Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems. *Automatica*, 31(12):1835–1851, 1995.
- P.G. Whitehead, R. J. Williams, and D. R. Lewis. Quality simulation along river systems (quasar): model theory and development. *The Science of the Total Environment*, 194:447–456, 1997.
- N. Wiener and P. Masani. The prediction theory of multivariate stochastic processes, part i the regularity condition. In *Acta Math.*, volume 98, pages 111–150, 1957.
- N. Wiener and P. Masani. The prediction theory of multivariate stochastic processes, part ii the linear predictor. In *Acta Math.*, volume 99, pages 93–137, 1958.
- J. C. Willems. Dissipative dynamical systems part i: General theory. *Rational Mechanics and Analysis*, 45(5):321–351, 1972.

J. C. Willems. From time series to linear system. *Automatica*, 22:561–580, 1986.

H.O.A. Wold. *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Uppsala, Almqvist and Wiksell, 2nd. ed., 1938.

D. C. Youla. On the factorization of rational matrices. *IRE, Trans. Information Theory*, IT-7:172–189, 1961.

P. Young and B. Beck. The modelling and control of water quality in a river system. *Automatica*, 10: 455–468, 1974.



# Apêndice A

## Análise das Correlações Canônicas de Processos Estocásticos

Neste apêndice estudamos e comentamos a análise das correlações canônicas, via a decomposição SVD. Seguimos principalmente Kshirsagar (1972).

### A.1 Decomposição em Valores Singulares

**Teorema A.1.1** *Seja  $A$  uma matriz  $p \times q$  ( $p \leq q$ ) de posto  $k$ . Podemos escrever esta matriz como*

$$A = U\Sigma V', \quad (\text{A.1})$$

onde  $U$  e  $V$  são matrizes ortonormais de dimensões  $p \times p$  e  $q \times q$  respectivamente, e  $\Sigma$  é uma matriz  $p \times q$  dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde os  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , são positivos, e  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ , são autovalores não nulos de  $AA'$  ou  $A'A$ .

**Prova:** Como o  $\text{posto}(A) = \text{posto}(AA') = k \leq p \leq q$ , existem (ver Chen (1999)) autovalores não nulos de  $AA'$ ,  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$  e uma matriz ortonormal  $U$  tal que

$$AA' = U \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2, 0, \dots, 0) U' \quad (\text{A.3})$$

seja a matriz  $U = [U_k : U_{p-k}]$  então de (A.3) temos

$$AA'U_k = U_k \Sigma_k^2. \quad (\text{A.4})$$

onde  $\Sigma_k = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ . Notemos que  $\Sigma_k^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_k^{-1})$ . Multiplicando (A.4) pela esquerda por  $A'$  e por  $\Sigma_k^{-1}$  pela direita e considerando que  $\Sigma_k^{-1} \Sigma_k = I$ , temos

$$A'AA'U_k \Sigma_k^{-1} = A'U_k (\Sigma_k^{-1} \Sigma_k) \Sigma_k$$

$$A'A(A'U_k \Sigma_k^{-1}) = (A'U_k \Sigma_k^{-1}) \Sigma_k^2,$$

definindo  $V_k = A'U_k \Sigma_k^{-1}$ , podemos escrever

$$A'AV_k = V_k \Sigma_k^2.$$

Claramente observamos que  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$  são os autovalores de  $A'A$ . Observemos que

$$\begin{aligned} V_k' V_k &= \Sigma_k^{-1} U_k' A A' U_k \Sigma_k^{-1} \\ &= \Sigma_k^{-1} U_k' U_k \Sigma_k^2 \Sigma_k^{-1} = \Sigma_k^{-1} \Sigma_k^2 \Sigma_k^{-1} = I_k. \end{aligned}$$

Como somente  $k$  das  $q$  colunas de  $A$  são linearmente independentes, podemos encontrar uma matriz  $V_{q-k}$  de dimensão  $q \times (q - k)$  tal que

$$AV_{q-k} = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde

$$V_{q-k}' V_{q-k} = I_{q-k}.$$

Observemos de (A.5) e  $V_k$  que

$$V_k' V_{q-k} = \Sigma_k^{-1} U_k' A V_{q-k} = 0.$$

Definimos a matriz  $V = [V_k : V_{q-k}]$ , notemos que

$$V'V = \begin{bmatrix} V_k' V_k & V_k' V_{q-k} \\ V_{q-k}' V_k & V_{q-k}' V_{q-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{q-k} \end{bmatrix} = I_q,$$

de (A.4) temos

$$A(A'U_k\Sigma_k^{-1}) = U_k\Sigma_k\Sigma_k\Sigma_k^{-1}$$

$$AV_k = U_k\Sigma_k$$

logo

$$AV_kV_k' = U_k\Sigma_kV_k', \quad (\text{A.6})$$

como

$$VV' = \begin{bmatrix} V_k & V_{q-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k' \\ V_{q-k}' \end{bmatrix} = [V_kV_k' + V_{q-k}V_{q-k}'] = I_q,$$

temos

$$V_kV_k' = I_q - V_{q-k}V_{q-k}', \quad (\text{A.7})$$

(A.7) em (A.6)

$$A(I_q - V_{q-k}V_{q-k}') = U_k\Sigma_kV_k'$$

$$AI_q - \underbrace{AV_{q-k}V_{q-k}'}_{=0} = U_k\Sigma_kV_k'$$

$$A = U_k\Sigma_kV_k' \quad (\text{A.8})$$

e que pode ser escrito como

$$A = \begin{bmatrix} U_k & U_{p-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k' \\ V_{q-k}' \end{bmatrix}$$

ou

$$A = U\Sigma V', \quad (\text{A.9})$$

onde  $\Sigma$  é dado por (A.2)

■

Seja  $V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & v_{k+1} & \cdots & v_q \end{bmatrix}$ , onde os  $v_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $V$ , e

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_k & u_{k+1} & \cdots & u_p \end{bmatrix},$$

onde os  $u_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $U$ . Então (A.9) pode ser escrito como

$$A = \sigma_1 u_1 v_1' + \sigma_2 u_2 v_2' + \cdots + \sigma_k u_k v_k' \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Correlações Canônicas de variáveis multivariadas

Sejam  $x$  e  $y$  dois vetores aleatórios multivariados de dimensões  $p$  e  $q$  respectivamente, com  $p \leq q$ .

Seja o vetor aleatório  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  de dimensão  $p + q$ , e covariância dada por

$$\text{Cov}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = E\left\{\begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' - \bar{x}' & y' - \bar{y}' \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

**Teorema A.2.1** *Existem as transformações*

$$u = Lx, \quad v = My$$

de  $x, y$  para  $u, v$ , tal que

$$\text{Cov}\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} I_p & P \\ P' & I_q \end{bmatrix},$$

de dimensão  $(p + q) \times (p + q)$ , onde

$$P = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

e  $r$  é o posto de  $\Sigma_{xy}$ .  $\Sigma_{xx}$  e  $\Sigma_{yy}$  são matrizes não singulares.

**Prova** Definimos a matriz  $C$  ( $p \times q$ ) como

$$C = \Sigma_{xx}^{-1/2} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1/2} \quad (\text{A.12})$$

onde  $\Sigma_{xx}^{1/2}$  e  $\Sigma_{yy}^{1/2}$  são matrizes raízes quadradas de  $\Sigma_{xx}$  e  $\Sigma_{yy}$  respectivamente, isto é  $\Sigma_{xx}^{1/2} \Sigma_{xx}^{1/2} = \Sigma_{xx}$ ,  $\Sigma_{yy}^{1/2} \Sigma_{yy}^{1/2} = \Sigma_{yy}$ . Estas fatorações existem devido a que as matrizes são simétricas e definidas positivas. Dado que o posto de uma matriz é inalterado, seja pela pré ou pela pós multiplicação de uma matriz não singular, o posto de  $C$  é o mesmo que o posto de  $\Sigma_{xy}$ , que supomos ser  $r$ . Assim, pelo teorema da (SVD), existem duas matrizes ortogonais  $A$  e  $B$  de ordem  $p$  e  $q$  respectivamente tal que

$$C = APB' \quad (\text{A.13})$$

onde  $P$  é definido na formulação do teorema e  $\rho_1, \dots, \rho_r$  são autovalores não nulos de

$$CC' = \Sigma_{xx}^{-1/2} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1/2}$$

ou

$$C'C = \Sigma_{yy}^{-1/2} \Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1/2}$$

isto é os  $\rho_i$ 's são as raízes não nulas do determinante  $|CC' - \rho^2 I| = 0$  ou  $|C'C - \rho^2 I| = 0$ . Então temos

$$\begin{aligned} (\Sigma_{xx}^{-1/2} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1/2} - \rho^2 I) x &= 0, \quad x \neq 0 \\ \Sigma_{xx}^{-1/2} (\Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} - \rho^2 \Sigma_{xx}) \Sigma_{xx}^{-1/2} x &= 0 \\ |\Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} - \rho^2 \Sigma_{xx}| &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

similarmente

$$|-\rho^2 \Sigma_{yy} + \Sigma_{yx} \Sigma_{xx}^{-1} \Sigma_{xy}| = 0. \quad (\text{A.15})$$

Definimos

$$L = A' \Sigma_{xx}^{-1/2}, \quad M = B' \Sigma_{yy}^{-1/2}, \quad (\text{A.16})$$

então de (A.12) e (A.13) temos

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx}^{-1/2} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1/2} &= APB' \\ A' \Sigma_{xx}^{-1/2} \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1/2} B &= A' APB' B \end{aligned}$$

dado que  $A$  e  $B$  são ortonormais temos  $A'A = I$  e  $B'B = I$

$$L \Sigma_{xy} M = P \quad (\text{A.17})$$

e

$$A'A = L\Sigma_{xx}^{1/2}\Sigma_{xx}^{1/2}L' = L\Sigma_{xx}L' = I_p \quad (\text{A.18})$$

similarmente

$$M\Sigma_{yy}M' = I_q. \quad (\text{A.19})$$

Por outra parte de (A.18), (A.19) e (A.17) temos

$$\begin{aligned} \text{Cov} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \text{Cov} \begin{bmatrix} Lx \\ My \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\Sigma_{xx}L' & L\Sigma_{xy}M' \\ M\Sigma_{yx}L' & M\Sigma_{yy}M' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_p & P \\ P' & I_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

■

Observamos que  $u$  é uma combinação linear de  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , elementos de  $x$  e que  $v$  é uma combinação linear de  $y_1, y_2, \dots, y_q$ , elementos de  $y$ .  $u$  é chamado de variável canônica do espaço  $x$  e  $v$  é chamado de variável canônica do espaço  $y$ . As colunas de  $L'$  e  $M'$  são chamados de vetores canônicos. Se  $\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_r^2$  são arranjados tal que

$$\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \dots \geq \rho_r^2.$$

$u_1$  é chamado de primeira variável canônica do espaço  $x$  e  $v_1$  a primeira variável canônica do espaço  $y$ ;  $u_2$  será a segunda variável, e assim por diante. O relacionamento inteiro entre as  $p$  variáveis de  $x$  e as  $q$  variáveis de  $y$  somente está expresso em termos dos  $r$  parâmetros  $\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_r^2$ . Daí o nome de variáveis canônicas. Dado que, de (A.20), observamos que a autocovariância de cada par  $u_i$ , bem com a de cada  $v_i$ , é 1, e as covariâncias são suas correlações. De (A.20) encontramos que

$$\text{corr}(u_i, v_j) = \begin{cases} \rho_i & \text{somente se } i = j \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}.$$

Também de (A.20) observamos que

$$\text{corr}(u_i, u_j) = 0, \quad \text{corr}(v_i, v_j) = 0, \quad \text{para } i \neq j.$$

Em outras palavras, a primeira variável canônica do espaço  $x$  somente está correlacionada com a primeira variável canônica do espaço  $y$ , a segunda com a segunda, e assim por diante. Essas cor-

relações são  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ . Como  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ , são as raízes quadradas positivas de  $\rho_1^2, \rho_2^2, \dots, \rho_r^2$ , as raízes de (A.14) e (A.15), são conhecidas como as correlações canônicas. A figura A.2 mostra o relacionamento entre as variáveis  $u$  e  $v$ .

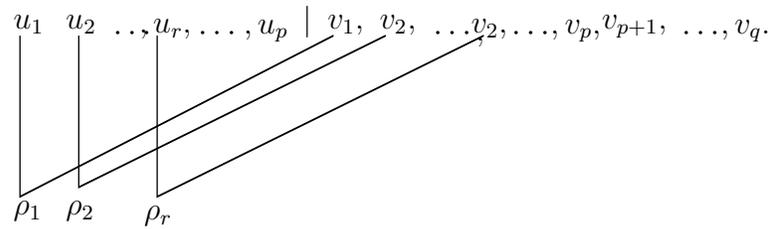


Fig. A.1: Relação entre as variáveis canônicas



# Apêndice B

## Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos

### B.1 Probabilidades

Queremos encontrar soluções de problemas que surgem em situações reais, cujas respostas envolvam incertezas não desprezíveis. A teoria das probabilidades nos ajudará para este fim, construindo modelos matemáticos probabilísticos; para isto apresentamos os conceitos básicos da teoria das probabilidades, desenvolvidos a partir destes modelos. O modelo probabilístico a que nos referimos, será construído com os 3 elementos seguintes

1. Espaço de amostras ( que representaremos por  $\Omega$ ),
2. Classe de eventos (que representaremos por  $\mathbb{A}$ ),
3. Medida de probabilidades (que a representaremos por  $P$ ).

A seguir serão explicitados os elementos  $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ . Eles formam o que denominamos “Sistema de Probabilidades ou ainda um modelo Probabilístico associado ao problema real.

#### B.1.1 Espaço Amostral

O espaço amostral  $\Omega$  corresponde ao conjunto de pontos que representam os resultados da experiência que estamos interessados em observar, isto é,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ , (cada elemento  $\omega_k \in \Omega$  recebe a denominação de ponto-amostral). Para usarmos a teoria de probabilidades na solução de problemas, é de extrema importância saber caracterizar o espaço amostral. Os exemplos seguintes descrevem experimentos e destacam os respectivos espaços amostrais.

**Exemplo B.1.1** *Considere um jogo em que um dado é lançado e o resultado do lançamento é observado. Quais são os possíveis resultados deste experimento, ou, em outras palavras, qual é o correspondente espaço de amostras?. Neste caso podemos representar o espaço amostral como*

$$\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}.$$

Observamos que este conjunto é finito.

**Exemplo B.1.2** *Imagine um programa que produz um número inteiro não-negativo e o imprime. Temos neste caso um experimento cujo espaço amostral é o conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$ , isto é,  $\Omega = \mathbb{N}$ .*

Assim  $\Omega$  é um conjunto não enumerável.

**Exemplo B.1.3** *Uma régua de 12cm é quebrada aleatoriamente num ponto qualquer, Estamos interessados em observar o comprimento do menor pedaço. O resultado do experimento, o comprimento  $L$  do menor pedaço, idealmente tem valor pertencente ao conjunto  $[0, 6] \in \mathbb{R}$ . Neste caso  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}; 0 \leq \omega \leq 6\}$ . Que é um conjunto não enumerável.*

## B.1.2 Classes de eventos

Uma coleção  $\mathbb{A} = \{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots\}$  de subconjuntos de  $\Omega$  que obedeça às propriedades a seguir pode ser considerado uma classe de eventos .

1. Se o subconjunto  $\mathbb{A}_i$  pertence a  $\mathbb{A}$ , então o seu complemento  $\bar{\mathbb{A}}_i$  também pertence a  $\mathbb{A}$ ;
2. Se um conjunto finito de subconjuntos  $\mathbb{A}_{i_1}, \mathbb{A}_{i_2}, \dots, \mathbb{A}_{i_k}$  pertence a  $\mathbb{A}$ , então a união destes subconjuntos  $\bigcup_{k=1}^k \mathbb{A}_{i_k}$  também pertence a  $\mathbb{A}$ .

Em geral todos os subconjuntos de  $\Omega$  são membros da família de eventos mas rigorosamente, temos que excluir, em algumas situações, certos subconjuntos de  $\Omega$ , muito específicos que não podem pertencer a  $\mathbb{A}$ . Por questão de rigor, somos obrigados a definir evento como sendo qualquer  $A \subseteq \Omega$  tal que  $A \in \mathbb{A}$  é uma classe que obedece às duas propriedades apresentadas no início (na linguagem matemática, a classe  $\mathbb{A}$  constitui um corpo ou uma álgebra). O seguinte exemplo ilustra o conceito de eventos.

No experimento em que um dado é lançado e o resultado do lançamento é observado, o espaço amostral é  $\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ . Os 64 subconjuntos de  $\Omega$  listados a seguir formam a classe de eventos.

$$A = \{\Omega, \emptyset, \{f_1\}, \{f_2\}, \dots, \{f_6\}, \{f_1, f_2\}, \dots, \{f_1, f_6\}, \{f_2, f_3\}, \dots, \{f_2, f_6\}, \{f_3, f_4\}, \dots, \{f_3, f_6\}, \{f_4, f_5\}, \{f_4, f_6\}, \{f_5, f_6\}, \{f_1, f_2, f_3\}, \dots, \{f_1, f_2, f_6\}, \{f_2, f_3, f_4\}, \dots, \{f_2, f_3, f_6\}, \dots\}$$

No exemplo do programa que produz e observa um número inteiro não-negativo e o imprime, temos um experimento cujo espaço amostral é  $\Omega = \mathbb{N}$ . Considere um subconjunto qualquer finito  $A \subset \mathbb{A}$ . Este subconjunto é um evento. A classe de eventos, neste caso, é imensa, formada por todos os subconjuntos finitos distintos formados com os elementos de  $\mathbb{N}$ .

No exemplo de quebrar uma régua de 12 cm, e o resultado observado é o comprimento do menor pedaço. O espaço amostral é  $\Omega = [0, 6]$ , conjunto não enumerável, e a classe de eventos consiste de todas as uniões e interseções de intervalos do tipo  $[a, b]$  com  $a \leq b \leq 6$ . Um fato importante a ser aqui observado é que os eventos são conjuntos e como tais podem ser manipulados, isto é, podemos falar da união e interseção de eventos, etc. da mesma maneira como falamos da união e interseção de conjuntos. Na realidade, a união de eventos é um evento, assim como a interseção ou o complemento de um evento. Dois subconjuntos de  $\Omega$  são eventos destacados e por isso recebem uma denominação especial. O evento certo que é o próprio  $\Omega$  e o evento nulo que pode ser representado como  $\emptyset = \bar{\Omega}$ .

No caso do lançamento de um dado, cada subconjunto representando um evento foi descrito listando-se todos os elementos do subconjunto. Existem formas alternativas, mais compactas, para descrever um evento. Por exemplo, a notação

$$A = \{\omega : \text{a condição } C \text{ ocorre} \},$$

descreve o conjunto de pontos amostrais  $\omega \in \Omega$  para os quais a condição  $C$  é verdadeira. Quando lanço um dado e afirmo que ocorreu o evento  $A = \{f_2, f_4, f_6\}$  corresponde ao conjunto das faces pares, posso, usando esta notação, posso referir-me ao evento como

$$A = \{\omega : \text{face é par}\}.$$

Para completar este modelo, é preciso definir a medida de probabilidade  $P$ .

### B.1.3 Probabilidades como medida

A probabilidade como medida  $P$  é caracterizada por uma função  $P(\cdot)$ , cujo domínio é o conjunto  $\Omega$ , que associa um valor (número) a cada evento  $A \subseteq \Omega$ . Tomemos como exemplo o lançamento de um dado (conjunto enumerável); uma medida simples associada a este conjunto é a sua cardinalidade, representada por  $|A|$ , sendo por exemplo para  $A = \{\omega : \text{face é par}\}$ ,  $|A| = 3$ . É fácil observar no caso da cardinalidade os seguintes fatos: 1)  $|A| \geq 0$ , para qualquer  $A \subseteq \Omega$ , 2)  $|\Omega| = 6$ , e 3) para todo  $(A, B) \subseteq \Omega \times \Omega$  tal que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $|A \cup B| = |A| + |B|$ . Outra medida bastante familiar, associada

a subconjuntos dos números reais  $\mathbb{R}$  (não enumerável) é o comprimento. Sendo  $L \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo qualquer dos números reais, podemos representar o seu comprimento por  $\mathcal{L}(L)$ . Também para esta medida observamos os fatos: 1)  $\mathcal{L}(L) \geq 0$  para qualquer  $L \subseteq \mathbb{R}$ , 2)  $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \infty$ , e 3) para todo  $(L_1, L_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tal que  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ,  $\mathcal{L}(L_1 \cup L_2) = \mathcal{L}(L_1) + \mathcal{L}(L_2)$ . Quando  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$  é fácil de ver que  $\mathcal{L}(L_1 \cup L_2) = \mathcal{L}(L_1) + \mathcal{L}(L_2) - \mathcal{L}(L_1 \cap L_2)$ .

**Axioma B.1.4** A função  $P(\cdot)$  que mede a probabilidade de um evento  $A$ , deve obedecer aos seguintes axiomas (conhecidos como axiomas da probabilidade):

1.  $P(A) \geq 0$ ,

2.  $P(\Omega) = 1$ ,

3. a)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , se  $A \cap B = \emptyset$  b) se  $A_{i_k} \cap A_{j_k} = \emptyset$ , para todo  $(i_k, j_k) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ , então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_{i_k}).$$

Estamos acostumados com funções convencionais  $y = f(x)$  que mapeiam através de  $f(\cdot)$ , valores  $x \in \mathbb{R}$  em valores  $y \in \mathbb{R}$ . Agora estamos lidando com uma função um pouco diferente, observe que  $P(\cdot)$  é uma função de conjunto, isto é mapeia um subconjunto  $A$  em um número  $P(A)$  e tem domínio  $\Omega$  e contradomínio  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

Seja o exemplo do lançamento de um dado. Pede-se: 1) qual a probabilidade de ocorrer o evento  $A = \{2, 4\}$ ?, 2) qual a probabilidade de ocorrer um número par?, 3) qual a probabilidade de ocorrer um número ímpar?. Considerando que o dado é honesto, temos que  $P(\omega) = \frac{1}{6}$  para todo  $\omega \in \Omega$ . Com a medida de probabilidade especificada desta forma, o cálculo da probabilidade de qualquer evento é fácil, basta utilizar os axiomas das probabilidades. Vejamos:

1) Como os eventos  $A = \{2\}$  e  $A = \{4\}$  são disjuntos podemos utilizar o axioma 3 e obter

$$P(A) = P(A_2 \cup A_4) = P(A_2) + P(A_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

2) denominemos por  $B$  à ocorrência do evento ser um número par, isto é  $B = \{2, 4, 6\}$ , como os eventos  $A_2 = \{2\}$ ,  $A_4 = \{4\}$  e  $A_6 = \{6\}$  são disjuntos, então

$$P(B) = P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

3) O evento  $C = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ é ímpar}\}$  é o complemento de  $B$ , temos  $\Omega = B \cup C$ , logo

$$P(\Omega) = P(B) + P(C) = 1,$$

daí temos que  $P(C) = \frac{1}{2}$ .

## B.2 Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória real é definida como sendo a função de conjunto  $x(\cdot)$  que mapeia cada ponto amostral  $\omega \in \Omega$  em um ponto  $x(\omega \in \Omega)$ . Esta definição permite falar no evento  $A_\alpha$  correspondente aos pontos amostrais  $\omega$  tal que  $\{x(\omega) \leq \alpha\}$ . Ou seja, o subconjunto de  $\Omega$  (evento)

$$A_\alpha = \{\omega \in \Omega : x(\omega) \leq \alpha\},$$

fica naturalmente associado ao subconjunto dos reais  $\{x(\omega) \leq \alpha\} \subseteq \mathbb{R}$ . Uma vez introduzido o evento  $A_\alpha$ , passa-se a falar na probabilidade do evento; neste caso temos

$$P(A_\alpha) = P(\{\omega \in \Omega : x(\omega) \leq \alpha\}).$$

Na verdade, o interesse em introduzir as variáveis aleatórias esta em poder-mos referir aos eventos (subconjuntos de  $\Omega$ ) falando da sua imagem em  $\mathbb{R}$ . Por conta disto passamos, quando nos queremos referir a uma probabilidade como em 1 usando a notação seguinte mais simplificada

$$P(x \leq \alpha).$$

(A rigor não podemos escrever  $P(x \leq \alpha)$ , pois  $(x \leq \alpha)$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  e portanto não é um evento. Mas se enfatizou que  $P(x \leq \alpha)$  é uma notação simplificada para  $P(\{\omega \in \Omega : x(\omega) \leq \alpha\})$ , nada irregular ocorre pois estamos falando em probabilidades bem definidas - probabilidades de eventos.

## B.3 Processos Estocásticos

Para descrever o desenvolvimento temporal de um fenômeno estocástico no transcurso de um período de tempo O conceito de processos estocásticos é complexo, portanto somente serão apresentados alguns conceitos da forma mais simples possível e que serão utilizados nos capítulos da tese.

**Definição B.3.1** *Um processo estocástico  $x$  de dimensão  $p$  é uma família de variáveis aleatórias  $\{x(t), t \in T\}$  definida num espaço de probabilidades  $(\Omega, \beta, P)$  e indexado pelo parâmetro tempo  $t \in T$ , onde  $T$  é um conjunto de números reais ou inteiros. Para cada  $\omega \in \Omega$ , o conjunto  $\{x(t, \omega), t \in T\}$  é chamado de trajetória amostral do processo indexado por  $\omega$ .*

*A sequência de covariâncias  $R \doteq \{R_x(s, t) \doteq cov[x(s), x(t); s, t \in T\}$  de um processo estocástico  $x$  de dimensão  $p$  tal que  $E \|x(t)\| < \infty$  para todo  $t \in T$  é chamado de **função de covariâncias***

(ou sequência) do processo, onde  $\text{cov}[x(s), x(t)] = E\{[x(s) - m(s)][x(t) - m(t)]'\}$ ,  $m(s)$  e  $m(t)$  são as esperanças de  $x(s)$  e  $x(t)$  respectivamente.

Um processo estocástico é **estacionário (no sentido estrito)** se a distribuição de probabilidades de dimensão finita de  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$  é idêntica à distribuição de  $x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)$  para todo  $\tau$  e  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Um processo estocástico  $x$  é **estacionário no sentido amplo** se são obedecidos os seguintes itens:

- i)  $E \|x(t)\| < \infty$ , para todo  $t \in T$ ,
- ii)  $\mu = E[x(t)] = cte$ , para todo  $t \in T$ ,
- iii)  $R(\tau) = E\{[x(t + \tau) - \mu][x(t) - \mu]'\}$ , para todo  $t, \tau \in T$ , isto é, a média é constante e a covariância depende somente de  $\tau$ .

Por facilidade de notação denotaremos os elementos de um processo estocástico discreto no tempo  $x$  como  $x_t \equiv x(t)$ .

Um processo estocástico estacionário (no sentido amplo) e discreto no tempo  $w$  é **ortogonal** se

- i)  $\mu = E[w_t] = cte$ , para todo  $t \in Z$ ,
- ii)  $R(\tau) = E\{[w_{t+\tau} - \mu][w_t - \mu]'\} = \begin{cases} \Sigma & \text{para } \tau = 0, \\ 0 & \text{para } \tau \neq 0, \end{cases} \quad t, \tau \in Z$ , e  $\Sigma$  é necessariamente uma matriz definida positiva.

A função densidade espectral de um processo estocástico estacionário é definida como a transformada de Fourier da função de covariância, isto é

$$\Phi(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_x(n) e^{-in\theta}$$

# Apêndice C

## Alguns programas desenvolvidos na Tese

Neste apêndice os algoritmos CLS-SSI e AOKI que implementamos em MATLAB, são apresentados. As referências importantes são Katayama e Picci (1999) , Veen et al. (1993) e Aoki (1990).

### C.1 Algoritmo CLS-SSI

```
%Este programa identifica modelos no espaco de estados pelo metodo de
%realizacao do trabalho:
%"Realization of stochastic systems with exogenous input and subspace
%identification methods"
%Tohru Katayama and Giorgio Picci, Automatica, 35, (1999), 1635-1652.
%
clear
load dadosG %carrega todos os dados
save dG Yg U %salva somente Yg e U e dg
clear
load dG %carrega Yg e U
yt=Yg(:,1);
ut=U(:,1);
k=4;% e' o numero de bloco filas das matrizes de Hankel
N_y=size(yt,1); %numero de dados de entrada tem que ser um numero par
p=size(yt,2); %dimenssao do vetor de dados da saida
N_u=size(ut,1);%numero de dados do vetor de entrada
m=size(ut,2);%dimenssao dos dados da entrada
% construcao das matrizes de Hankel
```

```

[Yt,Yp,Yf]=m_hankel(yt,k); %constroi as matrizes de Hankel com os dados de saída
[Ut,Up,Uf]=m_hankel(ut,k); %constroi as matrizes de Hankel com os dados de entrada
N=N_y-2*k+1;%numero de colunas das matrizes de Hankel
%Calculo das matrizes L e Q e formacao das Lij
if N >= 2*k*(m+p)
Pass=[Up;Yp];
LQ=(1/sqrt(N))*[Uf;Pass;Yf];
[Q,R]=qr(LQ');
L=R(1:2*k*(m+p),:);
Q1=Q(:,1:2*k*(m+p));
else
error('Diminua o valor de k, ou aumente o numero de dados');
end
L11=L(1:k*m,1:k*m);
L21=L((k*m+1):(2*k*m+k*p),1:k*m);
L22=L((k*m+1):(2*k*m+k*p),(k*m+1):(2*k*m+k*p));
L31=L((2*k*m+k*p+1):2*k*(m+p),1:k*m);
L32=L((2*k*m+k*p+1):2*k*(m+p),(k*m+1):(2*k*m+k*p));
L33=L((2*k*m+k*p+1):2*k*(m+p),(2*k*m+k*p+1):2*k*(m+p));
%Formacao das matrizes da regressao Ly=[II,phi]Lpu+Vq
Ly=[L31,L32,L33];
Lpu=[L21,L22,zeros(k*(p+m),k*p);L11,zeros(k*m,k*(p+m)),zeros(k*m,k*p)];
%Vetoricacao da equacao de regressao
%Formacao da matriz Z
Z=kron(Lpu',eye(k*p));
%formacao da matriz F22
Ikp=eye(k*p);
F22=kron(eye(m),Ikp);
for i=2:k
Ikp=[zeros(p,k*p);Ikp];
Ikp=Ikp(1:k*p,1:k*p);
F22=[F22;kron(eye(m),Ikp)];
end
%Formacao da matriz F
%II e kp x k(p+m) ==> I e kpk(p+m)

```

```

aux=k*p*k*(p+m);
[nn,mm]=size(F22);
F=[eye(aux),zeros(aux,mm);zeros(nn,aux),F22];
%Resolvendo o problema de minimos quadrados
% Vec(Ly)=ZFTheta+Vec(Vq)
A=Z*F;
[u,s,v]=svd(A);
d=diag(s);
n=size(d,1);
for i=1:n
if d(i)>=0.001
St(i)=d(i);
end
end
S=diag(St);
[dim,dim]=size(S);
U=u(:,1:dim);
V=v(:,1:dim);
M=V*inv(S)*U';
Theta=V*inv(S)*U'*vec(Ly);
%Formacao de II
vecII=Theta(1:k*p*k*(p+m),:);
II=vecII(1:k*p,:);
for i=2:k*(p+m)
II=[II,vecII((i-1)*k*p+1:i*k*p,:)];
end
%Formacao de Phi
vec_phi=Theta((k*p*k*(p+m)+1):(k*p*k*(p+m)+k*p*m),:);
m_phi=vec_phi(1:k*p,:);
for i=2:m
m_phi=[m_phi,vec_phi((i-1)*k*p+1:i*k*p,:)];
end
PHI=m_phi;
aux=m_phi;;
for i=2:k

```

```

aux=[zeros(p,m);aux];
PHI=[PHI,aux(1:k*p,:)];
end
%Passo 1
Mff_u=L32*L32'+L33*L33;
Mpp_u=L22*L22';
Mfp_u=L32*L22';
aux1=real(sqrtm(Mff_u));
aux2=real(sqrtm(Mpp_u));
Mt=inv(aux1)*Mfp_u*inv(aux2)';
[U_Mt,S_Mt,V_Mt]=svd(Mt);
d=diag(S_Mt);
l=size(d,1);
for i=1:l
if d(i)>=0.001%Colocar a tolerancia aqui !!!!!!!
Sc(i)=d(i);
end
end
Sc=diag(Sc);
[dim_est,dim_est]=size(Sc);
Uc=U_Mt(:,1:dim_est);
Vc=V_Mt(:,1:dim_est);
%Passo 2
Ok=sqrtm(Mff_u)*Uc*sqrtm(Sc);
Ok=real(Ok);
Ck=sqrtm(Sc)*Vc'*sqrtm(Mpp_u)';
Ck=real(Ck);
%Passo 3
C=Ok(1:p,1:dim_est);
O1k=Ok(1:(k-1)*p,1:dim_est);
O2k=Ok((p+1):k*p,1:dim_est);
A=pinv(O1k)*O2k;
%*****
%Resolucao dos minimos quadrados totais
% O1k*A=O2k

```

```

%Ver "Subspace-Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition"
% A. Van Der Veen, Ed F. Deprettere and A.Lee Swindlehurst.
%Proceedings of the IEEE, Vol. 81, No. 9, September 1993., page 1291.
%  $X1=Asis*X2+N$  ( $N=ruido$ ) $\implies X1'=X2'*Asis'+N'\implies Y=XAs+N'$ 
M=[O1k,O2k];
[n01,m01]=size(O1k);
[n02,m02]=size(O2k);
[Us,Ss,Vs]=svd(M);
d=diag(Ss);
n=size(d,1);
for i=1:n
if d(i)>=0.001 %Tolerancia !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
auxS(i)=d(i);
end
end
Ssc=diag(auxS);
[l,l]=size(Ssc);
Usc=Us(:,1:l);
Vsc=Vs(:,1:l);
Vaux=Vsc';
[n1,m1]=size(Vaux);
V1c=Vaux(:,1:m01);
Xc=Usc*Ssc*V1c;
V2c=Vaux(:,(m01+1):m1);
Yc=Usc*Ssc*V2c;
As=pinv(Xc)*Yc;
%*****
D=PHI(1:p,1:m);
[nok,mok]=size(Ok);
Okb=Ok(1:(nok-p),:);
[np1,mp1]=size(PHI);
Gb=PHI((p+1):np1,1:m);
%*****
%Resolucao dos minimos quadrados totais
% Okb*B=[G1;G2;...;Gk] do PHI!!

```

```

%Ver "Subspace-Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition"
% A. Van Der Veen, Ed F. Deprettere and A.Lee Swindlehurst.
%Proceedings of the IEEE, Vol. 81, No. 9, September 1993., page 1291.
%  $X1=Asis*X2+N$  ( $N=ruido$ ) $\implies X1'=X2'*Asis'+N'\implies Y=XAs+N'$ 
M=[Okb,Gb];
[n01,m01]=size(Okb);
[n02,m02]=size(Gb);
[Us,Ss,Vs]=svd(M);
d=diag(Ss);
n=size(d,1);
for i=1:n
if d(i)>=0.001 % Tolerancia !!!!!!!!!!!!!!!
auxS(i)=d(i);
end
end
Ssc=diag(auxS);
[l,l]=size(Ssc);
Usc=Us(:,1:l);
Vsc=Vs(:,1:l);
Vaux=Vsc';
[n1,m1]=size(Vaux);
V1c=Vaux(:,1:m01);
Xc=Usc*Ssc*V1c;
V2c=Vaux(:,(m01+1):m1);
Yc=Usc*Ssc*V2c;
B=pinv(Xc)*Yc;
%Calculo dos estados do sistema
X_k=Ck*inv(Mpp_u)*Pass;
%Formacao da matriz P1|k=[U1|k
% Y1|k]
Pass1=[Ut((m+1):m*(k+1),:);Yt((p+1):p*(k+1),:)];
%Calculo de X_k+1
X_k1=sqrtm(Sc)*Vc'*inv(sqrtm(Mpp_u))*Pass1;
%Formacao Yk|k e Uk|k
Yk=Yf(1:p,:);

```

```

Uk=Uf(1:m,:);
%Calculo dos residuos
Wk=X_k1-A*X_k-B*Uk;
Ek=Yk-C*X_k-D*Uk;
%calculo das covariancias dos ruidos
Sww=(1/N)*Wk*Wk';
Swe=(1/N)*Wk*Ek';
See=(1/N)*Ek*Ek';
%solucao da equacao de riccati
P=dare(A',C',Sww,See,Swe);
K=(A*P*C'+Swe)*inv(C*P*C'+See);
%simulacao do sistema
%Calculo do X0
x0=dinit(A,B,C,D,ut,yt)
As=A-K*C;
Bs=[B-K*D,K];
Cs=C;
Ds=[D,0];
[Ys,Xs]=dlsim(As,Bs,Cs,Ds,[ut,yt],x0);
yp1=Ys;
save yp1 yp1;
plot([yt,Ys])
Subrotina m_hank.m
function [Yg,Ug,Yf,Yp]=m_hank(y,u,k);
[N_dados,p]=size(y);
m=size(u,2);
N=N_dados-2*k+1;
% Construcão da matriz de Hankel geral da entrada
Yg=vec(y(1:2*k,:))';
for i=2:N
Yg=[Yg,vec(y(i:(i+2*k-1),:))'];
end
%construcão da matriz de Hankel geral da saída
Ug=vec(u(1:2*k,:))';
for i=2:N

```

```

Ug=[Ug,vec(u(i:(i+2*k-1),:))'];
end
Yp=Yg(1:k*p,:);
Yf=Yg((k*p+1):2*k*p,:);
Up=Ug(1:k*m,:);
Uf=Ug((k*m+1):2*k*m,:);
Subrotina vec.m
function y=vec(A);
[n,m]=size(A);
y=A(:,1);
for i=2:m
y=[y;A(:,i)];
end

```

## C.2 Algoritmo AOKI

```

clear all;
OB = 130;
N = 128;
J = 2;
K = 2;
n = 2;
%VERIFICAR SE OS VALORES DE N, J E K SAO ADEQUADOS.
if N - J - K <= 1,
disp('CORRIJA OS VALORES DE J,K,N');
end;
%DEFINIR AS MATRIZES DO SISTEMA PARA TESTE.
A = [ 0.873847 0.166155; -0.166155 0.426153];
B = [ 1.231862; 0.719364 ];
C = [ 1.231862 -0.719364 ];
%DEFINIR UM ESTADO INICIAL ALEATORIO.
x(:,1) = randn(2,1);
%GERAR A SEQUENCIA DE RUIDOS PARA A ENTRADA.
e = randn(1, N+J);
m = mean(e);

```

```
e = e - m * ones(size(e));
%SIMULAR O SISTEMA E GERAR AS N+J OBSERVACOES.
y(1) = C * x(:,1) + e(1);
for i = 1 : N+J,
x(:,i+1) = A * x(:,i) + B * e(i);
y(i) = C * x(:,i) + e(i);
end;
%MONTAR A MATRIZ Y- PARA A MATRIZ DE HANKEL AUMENTADA.
for i = 1 : K,
a=0;
for k = 1 : N-1,
if k<i,
yme(i,k)=0;
else
yme(i,k)=y(a+1);
a=a+1;
end;
end;
end;
%MONTAR A MATRIZ Y+ PARA A MATRIZ DE HANKEL AUMENTADA.
for i = 1 : J+1,
for k = 1 : N-1,
if k+i > N,
yma(i,k)=0;
else
yma(i,k)=y(k+i);
end;
end;
end;
%CALCULAR A MATRIZ DE HANKEL AUMENTADA.
HT = yma * yme';
HT = HT / N;
%SEPARAR A MATRIZ DE HANKEL.
H = HT(1:J,:);
%SEPARAR A MATRIZ HA.
```

```

HA = HT(2:J+1,:);
%SEPARAR A MATRIZ HM.
HM = HT(1:J,1);
%SEPARAR A MATRIZ HC.
HC = HT(1,:);
%CALCULAR A SVD DA MATRIZ DE HANKEL.
[U, S, V] = svd(H);
R = sqrtm(S);
R_inv = inv(R);
%CALCULAR AS MATRIZES SISTEMICAS (EXCETO B !).
Ac = R_inv * U' * HA * V * R_inv;
Mc = R_inv * U' * HM;
Cc = HC * V * R_inv;
%CALCULAR A AUTOCOVARIANCIA DE y.
lmbdz = 0.0;
for i = 1 : N,
lmbdz = lmbdz + y(i) * y(i);
end;
lmbdz = lmbdz / N;
%CALCULAR AS MATRIZES AUXILIARES PARA A SOLUCAO DA
%EQUACAO DE RICCATI, A SABER: PSI, QHAT E D.
PSI = Ac' - Cc' * inv(lmbdz) * Mc';
QHAT = Cc' * inv(lmbdz) * Cc;
D = Mc * inv(lmbdz) * Mc';
%CALCULAR A MATRIZ FI.
PSI_ti = inv(PSI');
FI = [PSI - QHAT * PSI_ti * D, QHAT * PSI_ti;
-1.0 * PSI_ti * D, PSI_ti];
%CALCULAR A DECOMPOSICAO DE SCHUR DA MATRIZ FI.
[W,Tf] = schur(FI);
%EXTRAIR A MATRIZ DE COVARIANCIA DO ESTADO DA MATRIZ
%UNITARIA W (SOLUCAO DA EQUACAO DE RICCATI).
W_21 = W(n+1:2*n,1:n);
W_11i = inv(W(1:n,1:n));
PI = W_21 * W_11i;

```

```
%CALCULAR A MATRIZ DE AUTOCOVARIANCIA DO RUIDO.
DELTA = lmbdz - Cc * PI * Cc';
%CALCULAR A MATRIZ B.
Bc = Mc - Ac * PI * Cc';
Bc = Bc / DELTA;
B;
%SIMULAR O SISTEMA CALCULADO E GERAR AS N+J
%OBSERVACOES.
xc(:,1) = x(:,1);
yc(1) = Cc * xc(:,1) + e(1);
for i = 1 : N+J,
xc(:,i+1) = Ac * xc(:,i) + Bc * e(i);
yc(i) = Cc * xc(:,i) + e(i);
end;
%GERAR O GRAFICO DE y, DE yc E DO ERRO ENTRE ELES.
figure(1);
subplot(3,1,1),
plot(y,'w-');
title('y');
subplot(3,1,2),
plot(yc,'w-');
title('yc');
erro = y-yc;
subplot(3,1,3),
plot(erro,'w-');
title('y-yc');
%GERAR A RESPOSTA IMPULSIVA PARA CADA SISTEMA.
figure(2);
[ty,tx] = dimpulse(A,B,C,[1],1,OB);
[cy,cx] = dimpulse(Ac,Bc,Cc,[1],1,OB);
subplot(3,1,1),
plot(ty,'w-');
title('sistema teste');
subplot(3,1,2),
plot(cy,'w-');
```

```
title('sistema calculado');
erro = ty-cy;
subplot(3,1,3),
plot(erro,'w-');
title('y-yc');
%GERAR A RESPOSTA AO DEGRAU UNITARIO PARA CADA SISTEMA.
figure(3);
[ty,tx] = dstep(A,B,C,[1],1,OB);
[cy,cx] = dstep(Ac,Bc,Cc,[1],1,OB);
subplot(3,1,1),
plot(ty,'w-');
title('sistema teste');
subplot(3,1,2),
plot(cy,'w-');
title('sistema calculado');
erro = ty-cy;
subplot(3,1,3),
plot(erro,'w-');
title('y-yc');
[Atc,Btc,Ctc,Dtc]=d2cm(A,B,C,[1],1,'zoh');
[Acc,Bcc,Ccc,Dcc]=d2cm(Ac,Bc,Cc,[1],1,'zoh');
[numtc,denc] = ss2tf(Atc,Btc,Ctc,Dtc,1)
[numcc,dencc]=ss2tf(Acc,Bcc,Ccc,Dcc,1)
```