



MAYK VIEIRA COELHO

**RELAXAÇÃO VIA BARREIRA LOGARÍTMICA
MODIFICADA APLICADA AO PROBLEMA DE FLUXO DE
POTÊNCIA ÓTIMO CC COM SOBRECARGAS**

**CAMPINAS
2013**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO**

MAYK VIEIRA COELHO

**RELAXAÇÃO VIA BARREIRA LOGARÍTMICA MODIFICADA
APLICADA AO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO CC COM
SOBRECARGAS**

Tese de Doutorado apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Energia Elétrica.

Orientador: Anésio dos Santos Júnior

Co-orientador: Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DE TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO MAYK VIEIRA COELHO
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANÉSIO DOS SANTOS JÚNIOR.

CAMPINAS

2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

C65r Coelho, Mayk Vieira, 1981-
Relaxação via barreira logarítmica modificada aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo CC com sobrecargas. / Mayk Vieira Coelho. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Anésio dos Santos Júnior.
Coorientador: Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas de potência. 2. Métodos de pontos interiores. 3. Programação linear. 4. Barreiras. 5. Algoritmos. I. Santos Júnior, Anésio dos, 1952-. II. Oliveira, Aurélio Ribeiro Leite de, 1962-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Relaxation via modified logarithmic barrier applied to the optimal power flow problem with DC overload.

Palavras-chave em inglês:

Power systems

Methods of integer points

Linear programming

Barriers

Algorithms

Área de concentração: Energia Elétrica

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Anésio dos Santos Júnior [Orientador]

Leonardo Nepomuceno

Vanusa Alves Sousa

Christiano Lyra Filho

Akebo Yamakami

Data de defesa: 24-05-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

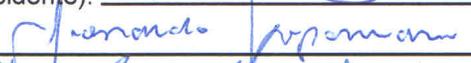
COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

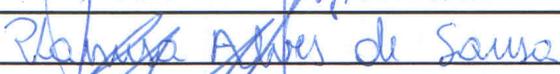
Candidato: Mayk Vieira Coelho

Data da Defesa: 24 de maio de 2013

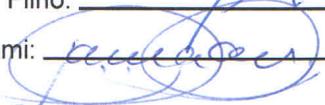
Título da Tese: "Relaxação via Barreira Logarítmica Modificada Aplicada ao Problema de Fluxo de Potência Ótimo CC com Sobrecargas"

Prof. Dr. Anésio dos Santos Júnior (Presidente): 

Prof. Dr. Leonardo Nepomuceno: 

Profa. Dra. Vanusa Alves de Sousa: 

Prof. Dr. Christiano Lyra Filho: 

Prof. Dr. Akebo Yamakami: 

Agradecimentos

Aos meus Pais Delsuito e Neuza, pelo apoio e por tudo que me ensinaram até hoje, sem os quais não seria possível chegar aonde cheguei. Amo muito vocês.

Ao Professor e Orientador Anésio dos Santos Júnior, pela sua paciência e presteza ao me orientar. Em cada reunião que tínhamos eu saia modificado, com várias ideias e também dúvidas que me ajudaram a crescer não somente como profissional, mas também como pessoa. Duas palavras o define: sabedoria e inspiração.

Ao Professor, Co-orientador e Amigo Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira que, assim como professor Anésio, teve grande importância na elaboração deste trabalho. Por diversas vezes, quando não acreditava nos resultados, me abria os olhos com relação ao significado e a importância do que havia sido feito, me dando forças para continuar. Também são necessárias duas palavras para defini-lo: sabedoria e amizade.

Aos Professores membros da banca examinadora pela ajuda na revisão deste trabalho.

À minha esposa Ingrid, por sua paciência e compreensão no período de elaboração deste trabalho. Pelos incentivos nos momentos de cansaço e de dificuldades, pelas horas e horas que me ouviu comentar sobre os resultados obtidos, sem possivelmente entende-los, mas que só por ouvir já me ajudava e esclarecer as ideias que borbulhavam desordenadas. Te amo sem sombra de dúvidas.

As minhas irmãs Ninny e Silvia, por me escutarem, mesmo reclamando. Principalmente Silvia, que de tanto escutar minhas ideias se diz minha co-orientadora neste trabalho, me dando até broncas por falhas no texto.

À Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC). Onde o conhecimento emana de todas as partes. Neste lugar pude conviver com pessoas de ampla sabedoria.

Aos colegas de trabalho da Universidade Federal de Alfenas, principalmente aos do Instituto de Ciências e Tecnologia do Campus de Poços de Caldas, pelo incentivo à conclusão deste trabalho.

Ao italiano *Achille Gaggia*, inventor da máquina de café expresso, pois a cafelina do cafezinho tradicional já não era mais suficiente.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio financeiro do projeto.

Muito obrigado a todos

Mayk Vieira Coelho

*Dedico este trabalho aos meus pais Debuito e Neixa, que me ensinam, a cada dia,
de diversas maneiras, um pouco de tudo, com muito carinho.*

Resumo

Os métodos de pontos interiores apresentam bons resultados na resolução de problemas de fluxo de potência ótimo CC, porém, podem sofrer problemas numéricos quando variáveis de decisão permanecem, por diversas iterações, próximas a valores de fronteira, influenciando na convergência do método, aumentando o número de iterações, ou mesmo não convergindo.

Estes erros numéricos podem ocorrer com mais frequência quando há sobrecargas de geração e/ou transmissão no sistema, pois variáveis de decisão atingem seus limites rapidamente. Além disso, tais sobrecargas podem ocasionar *blackouts* devido a incapacidade de satisfazer a demanda ou mesmo de transmitir a carga gerada.

A fim de eliminar estas dificuldades destes métodos, é proposta uma troca de função barreira, substituindo a barreira logarítmica clássica pela barreira logarítmica modificada. Esta mudança, além de sanar as dificuldades com variáveis próximas a valores de fronteira, permite que haja violações controladas em algumas restrições de desigualdade, podendo ser utilizada na resolução de problemas como os de fluxo de potência ótimo com sobrecargas.

Deste modo, são feitos estudos sobre as mudanças provocadas pelo uso da função barreira logarítmica modificada em problemas de programação linear e em problemas cuja função objetivo seja quadrática e separável.

Em seguida é apresentada uma formulação deste método para problemas de fluxo de potência ótimo via fluxo em redes. Estudos de casos são feitos simulando sobrecargas em sistemas da base *IEEE*, e em sistemas brasileiros *SSE810*, *SSE1654*, *SSE1732* e *BRASIL*.

Palavras-chave: Barreira Logarítmica Modificada; Pontos Interiores; Fluxo de Potência Ótimo; Sobrecarga;

Abstract

The interior point methods have good results in solving problems DC optimal power flow, however, may suffer from numerical problems when the decision variables remain, for several iterations, near the boundary value, influencing the convergence of the method by increasing the number of iterations, or even not converging.

These numerical errors may occur when there are overloads of generation and/or transmission in the system, because decision variables reach their limits quickly. Moreover, such overloads may cause blackouts due to the failure to meet the demand or to forward the generated load.

In order to eliminate these difficulties these methods, we propose an change of classical barrier function by modified logarithmic barrier. This change, in addition to remedy the difficulties with variable near the boundary, allows for controlled violations in some inequality constraints. This idea can be used in solving problems such as optimal power flow with overloads.

Thus, studies about changes caused by the use of modified logarithmic barrier function are made in linear programming problems and problems whose objective function is quadratic and separable.

Then we present a formulation of this method to problems of optimal power flow via network flow. Case studies are done by simulating overload in systems *IEEE*, and Brazilian systems *SSE810*, *SSE1654*, *SSE1732* and *BRAZIL*.

Keywords: Modified Logarithmic Barrier, Interior Points Methods, Power Flow, Overload.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xii
1 Introdução	1
2 Método de Pontos Interiores Primal-Dual	4
2.1 Um Breve Histórico dos Métodos de Pontos Interiores	4
2.2 Problemas Quadráticos com Variáveis Canalizadas	6
2.3 Controle de Passos	11
2.4 Inicializações e Critérios de Convergência	12
2.5 Aplicação em Fluxo de Potência Ótimo Linearizado via Fluxo em Redes	15
2.5.1 Situações Normais de Operação	19
2.5.2 Situações de Sobrecarga	23
2.6 Discussões sobre Resultados do Capítulo	26
3 Relaxação via Barreira Logarítmica Modificada	27
3.1 Introdução	27
3.2 O Método de Barreira Modificada	29
3.3 Relaxando um Problema Linear e Suas Consequências	32
3.4 Controle de Passos e Atualização de Variáveis	37
3.5 Inicializações e Critérios de Convergência	39

3.6	Estudos de Casos	41
3.7	Relaxando Problemas Quadráticos Convexos com Variáveis Canalizadas	44
3.8	Estudos de Casos - Visualização Geométrica	49
3.9	Discussões sobre Resultados do Capítulo	51
4	Aplicação da Relaxação no Problema de Fluxo de Potência Ótimo CC	52
4.1	Introdução	52
4.2	Aplicando a Relaxação via Barreira Logarítmica Modificada	54
4.3	Aplicações no sistema IEEE 30	56
4.3.1	Situações Normais de Operação	56
4.3.2	Situações de Sobrecarga na Geração	59
4.3.3	Situações de Sobrecarga na Transmissão	61
4.4	Aplicações em Outros Sistemas	64
4.4.1	Situações Normais de Operação	64
4.4.2	Situações de Sobrecarga na Geração	66
4.4.3	Situações de Sobrecarga na Transmissão	67
4.5	Discussões sobre Resultados do Capítulo	70
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	71
5.1	Conclusões	71
5.2	Perspectivas Futuras	72
	Referências Bibliográficas	73
A	Um outro Enfoque	79
B	Posto Completo da Matriz Justaposta $[A - E]$	81

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama Unifilar IEEE 30	19
2.2	Multiplicadores de Lagrange w_f - Contingências na linha 27-28.	25
3.1	Exemplo com soluções múltiplas e caminhos diferenciados.	49
3.2	Exemplo com solução degenerada	50

LISTA DE TABELAS

2.1	Despachos factíveis com custos iguais e sem limites de geração.	20
2.2	Custos de geração.	20
2.3	Despachos factíveis com custos diferenciados.	21
2.4	Limites de geração.	21
2.5	Despachos factíveis com custo e limites de geração e de transmissão	21
2.6	Sensibilidade da função objetivo com relação a geração.	22
2.7	Despacho e Multiplicadores de Lagrange em Situações de Sobrecarga	24
3.1	Aplicação dos métodos MPI e MPIBLM em problemas lineares de Pequeno Porte. . .	41
3.2	Aplicação dos métodos MPI e MPIBLM em problemas NETLIB de Médio Porte . .	42
3.3	Aplicação dos métodos MPI e MPIBLM em problemas NETLIB de Grande Porte . .	43
4.1	Despachos factíveis com custos iguais e sem limites de geração	56
4.2	Despachos factíveis com custos diferenciados.	57
4.3	Despachos factíveis com custo e limites de geração e de transmissão	57
4.4	Sensibilidade da função objetivo com relação a geração	59
4.5	Despachos factíveis para o sistema com sobrecarga na geração.	60
4.6	Despacho com violação máxima de 10% na geração.	60
4.7	Sensibilidade da função objetivo com relação à geração.	61
4.8	Despachos com queda da linha 27-28	62
4.9	Sensibilidade da função objetivo com relação à geração.	62
4.10	Despachos com redução de capacidade da linha 2-5	63
4.11	Sensibilidade da função objetivo com relação à geração.	64

4.12	Situações Normais de Operação - Otimizando a Transmissão.	65
4.13	Situações Normais de Operação - Otimizando a Geração.	65
4.14	Situações Normais de Operação - Otimizando Geração e Transmissão.	65
4.15	Situação de Sobrecarga na Geração - Otimizando Geração - MPI.	66
4.16	Sobrecarga na Geração - Otimizando Geração - MPIBLM	66
4.17	Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda total - Otimizando a Transmissão.	67
4.18	Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda total - Otimizando a Geração	68
4.19	Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda total - Otimizando a Geração e a Transmissão	68
4.20	Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda parcial - Otimizando a Transmissão	68
4.21	Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda parcial - Otimizando a Geração	69
4.22	Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda parcial - Otimizando a Geração e a Transmissão	69

Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. COELHO, M. V., SANTOS JUNIOR, A, OLIVEIRA, A. R. L "Optimal Power Flow DC with Overload Relaxation by Modified Logarithmic Barrier", *26th European Conference on Operational Research* 2013, Roma.
2. COELHO, M. V., SANTOS JUNIOR, A, OLIVEIRA, A. R. L "Uma Formulação Para Métodos de Pontos Interiores Com Barreira Logarítmica Modificada Aplicada no Fluxo de Potencia Otimo CC". *IEEE PES TD LA 2012 - Renewable Energies in a Developing Continent*, 2012, Montevideo.
3. COELHO, M. V., OLIVEIRA, A. R. L, SANTOS JUNIOR, A "Interior point methods with modified logarithmic barrier for linear programming". *Optimization 2011*, 2011, Lisboa.
4. COELHO, M. V., SANTOS JUNIOR, A, OLIVEIRA, A. R. L "A new aproach using interior point method with relaxation based upon modified logarithmic barrier"*24th European Conference on Operational Research*, 2010, Lisboa.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O modelo de fluxo de potência ótimo tem aplicações em diversos problemas de análise e operação de sistemas de potência, tais como despacho econômico, análise de confiabilidade do sistema, análise de segurança, programação da geração em curto prazo e planejamento de expansão do sistema geração/transmissão.

Em uma boa parte das aplicações tem sido adotada a representação linearizada (CC) devido à maior simplicidade e ao grau de precisão satisfatório de seus resultados [5].

Considerando o despacho ótimo de potência ativa através de modelo CC, pode-se formulá-lo como um modelo de fluxo em redes com restrições adicionais [11, 54, 45, 3], ao invés da abordagem clássica baseada na formulação nodal, tendo aplicações em diversos problemas como o estudo de confiabilidade [58], capacidade de atendimento da carga [19], despacho econômico [30, 11, 45, 3] e análise de contingências [25].

Uma alternativa viável para resolução de problemas de otimização em engenharia de potência são os métodos de pontos interiores. Uma variedade destes métodos têm sido aplicados a um grande número de problemas de sistemas de potência, incluindo estimação de estado [27, 64], fluxo de potência ótimo em geral [8, 68], colapso de tensão e avaliação de confiabilidade [35, 37, 63], gerenciamento de multi-reservatórios [48] e planejamento à longo prazo de combustível [53].

Estes métodos são numericamente robustos e independem de ajustes de parâmetros para cada problema. Além disso, resultados baseados em redes de potência com tamanhos entre 9 e 2423 barras em [66] e 1832 e 3467 barras [24] mostram que o número de iterações necessárias para a convergência do método primal-dual com barreira logarítmica clássica não é sensível ao tamanho do problema.

Entretanto, estes métodos podem apresentar erros numéricos quando variáveis de decisão ficam muito próximas de valores de fronteira por diversas iterações.

Em se tratando de problemas de fluxo de potência ótimo, estes erros numéricos podem ocorrer com mais frequência quando há sobrecargas de geração e/ou transmissão no sistema, pois variáveis de decisão atingem seus limites rapidamente. Além disso, tais sobrecargas podem ocasionar *blackouts* devido a incapacidade de satisfazer a demanda ou mesmo de transmitir a carga gerada, o que para o método representa a não convergência.

Sobrecargas implicam em operar com algumas restrições operacionais no limite, ou seja, em aumento de riscos operativos, devido a desligamentos de elementos da rede, como também de riscos de responsabilidade civil, no caso de acidentes. Isso reflete em perda econômica, pois há desgastes antecipados de equipamentos ou necessidade de indenizações.

Em algumas situações, pode não ser possível evitar a ocorrência de sobrecargas no sistema, por exemplo, quando há contingências nas linhas de transmissão ou em unidades geradoras. Assim, são necessárias ações que visam operar com o sistema sobrecarregado por um curto período de tempo, até que operações corretivas aliviem as sobrecargas o mais rápido possível.

Além de riscos, operar nos limites operacionais pode incorrer em violações de capacidade de transmissão e/ou geração, impedindo o uso dos métodos de pontos interiores, visto que tais violações acarretam em pontos não interiores.

Nestes casos de violações de limites operacionais em um curto período de tempo, podem-se relaxar algumas restrições de modo que estes pontos operacionais se tornem interiores. Esta relaxação pode ser feita através da troca da função barreira logarítmica clássica pela função barreira logarítmica modificada, introduzida por Polyak em [47].

O método descrito por Polyak é uma extensão do método de barreira clássica, mas que aceita pontos ineficazes, pois consiste em uma relaxação no conjunto das restrições.

Inserindo um fator de deslocamento na função logarítmica, Polyak combinou as melhores propriedades da função lagrangeana com a de barreira clássica, mas eliminando suas deficiências, como por exemplo, o mau condicionamento da matriz Hessiana quando seu fator de barreira tende a zero e a não existência de derivada na solução.

Esta proposta de Polyak desperta a atenção para problemas ineficazes que, com a relaxação, podem se tornar eficazes, visto que a relaxação aumenta a região factível do problema original.

Deste modo, este trabalho propõe a aplicação da função barreira logarítmica modificada proposta por Polyak, para o estudo de viabilidade operacional de um problema de fluxo de potência ótimo CC com sobrecargas, tanto nas linhas de transmissão, quanto em unidades geradoras, visando manter o sistema operando de forma segura, sem a ocorrência de *blackouts*.

Esta proposta abre caminhos para eliminar dificuldades dos métodos de pontos interiores primal-dual seguidor de caminhos no tratamento de variáveis ao se aproximarem de valores de fronteira.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

Capítulo 2: Apresentação do método de pontos interiores primal-dual com barreira logarítmica clássica e sua aplicação no modelo de fluxo de potência ótimo CC via fluxos em rede, para o despacho de potência ativa, primeiramente para situações normais de operação, nos quais obtém ótimos resultados, e depois para situações de sobrecarga no sistema, nas quais o método não obtém solução.

Capítulo 3: Apresentação de uma alternativa para obter uma solução para os problemas não resolvidos apresentados no Capítulo 2. Esta alternativa é formulada de forma semelhante a do método seguidor de caminhos, mas utilizando a função barreira logarítmica modificada proposta por Polyak.

Esta alternativa, não visa apenas obter uma solução para os problemas de fluxo de potência ótimo com sobrecargas, mas também sanar as dificuldades encontradas pelo método seguidor de caminhos quando, no decorrer do processo iterativo, se depara com componentes de suas variáveis muito próximas de valores de fronteira. Neste Capítulo são feitos alguns testes computacionais com problemas de programação linear da base de dados NETLIB, e com problemas de programação quadrática convexa com variáveis canalizadas.

Capítulo 4: O método proposto é aplicado no modelo de fluxo de potência ótimo cc via fluxo em redes. Testes computacionais são feitos em situações normais e de sobrecarga, primeiramente no sistema *IEEE30* e posteriormente nos sistemas *IEEE14*, *IEEE57*, *IEEE118*, *IEEE145*, *IEEE162*. Testes também são feitos nos sistemas *SSE810*, *SSE1654* e *SSE1732* representantes do sistema elétrico sul-sudeste brasileiro, além do sistema *BRASIL*, correspondente ao sistema elétrico brasileiro.

Capítulo 5: São destacadas as principais conclusões obtidas no decorrer deste trabalho através dos testes feitos. Além disso, são dadas algumas perspectivas futuras com relação ao método proposto, tanto para sua melhoria, quanto para suas aplicações.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE PONTOS INTERIORES PRIMAL-DUAL

2.1 Um Breve Histórico dos Métodos de Pontos Interiores

Uma classe de métodos de otimização muito explorada hoje em dia é a dos métodos de pontos interiores. Estes têm sido amplamente investigados e utilizados, principalmente na resolução de problemas de programação linear e, mais recentemente, de programação quadrática e não linear, com bom desempenho em problemas de grande porte.

A estratégia de pontos interiores foi introduzida por Frisch em [18] e por Carrol em [9], mas ainda não tinha esta denominação.

Anos mais tarde, através da utilização da função barreira para problemas não lineares, Fiacco e McCormick em [17], popularizaram estas ideias, porém, o entusiasmo com o uso da função barreira reduz durante a década de 1970 devido a alguns problemas apresentados por esta, tais como: o mal condicionamento da matriz Hessiana quando seu fator de barreira tende a zero; as dificuldades nas escolhas tanto de uma solução inicial, quanto de um fator de barreira; a não-diferenciabilidade na solução e o aumento ilimitado da função barreira na vizinhança da fronteira da região factível.

Em 1967, Dikin em [14] publicou seu trabalho intitulado "Iterative Solution of Problems of Linear and Quadratic Programming" sendo base para muitos outros nesta área.

Somente em 1984, com o trabalho de Karmarkar [28], intitulado "*A new polynomial-time algorithm for linear programming*", volta-se o interesse pelo método da função barreira. Uma característica do algoritmo apresentado é o fato de obter uma solução ótima para o problema através de pontos

interiores da região viável em sucessivas transformações projetivas que levam a um bom comportamento do processo, dando início a um novo campo chamado de Métodos de Pontos Interiores.

O método de Karmarkar se destaca pela sua complexidade polinomial (em comparação com a complexidade exponencial do método simplex) e, sua robustez no tratamento de problemas de grande porte. Segundo Gonzaga em [23], o maior mérito do trabalho de Karmarkar foi ter mostrado que um problema de programação linear é na verdade um caso particular da programação não-linear, sendo tratado por técnicas da mesma área.

A partir da ideia teórica de passos interiores e transformações, podem-se construir diversos algoritmos diferenciados, por exemplo, quanto ao tipo de transformação (projetiva, afim, etc), ao tratamento das restrições e às direções de busca.

Além das diferenças conceituais, existem ainda inúmeras alternativas quanto ao perfil tecnológico da implementação, envolvendo aspectos como tipo de decomposição para solução de sistemas lineares (Cholesky, LU, QR, etc.) e estrutura de dados para tratamento de esparsidade [43].

Dentre as variações destes métodos, destacam-se: o algoritmo Primal-Afim - utilizado na resolução de problemas de programação linear com restrições de igualdade [7, 31, 51]; o algoritmo Dual-Afim - utilizado para resolver problemas de programação linear na forma de desigualdade [1];

Em 1987, Megiddo [33] propõe aplicar o método de barreira logarítmica aos problemas primal e dual simultaneamente. Suas ideias influenciaram o algoritmo de Kojima, Mizuno e Yoshine em [29], obtendo o melhor desempenho dos algoritmos de pontos interiores até então, juntamente com a técnica de preditor-corretor de Mehrotra [34], que a cada iteração é dado um passo preditor e um passo corretor, determinando direções de busca melhores.

O algoritmo de Mehrotra é atualmente, em termos computacionais, o mais efetivo dos métodos de pontos interiores.

Os métodos primal-dual, inclusive o seguidor de caminhos [40], também conhecido como pontos interiores com barreira logarítmica clássica, e o de redução potencial [38, 59, 20], mostraram o relacionamento entre métodos primal-dual e o algoritmo de Karmarkar.

O ponto de vista primal-dual mostrou ser extremamente produtivo, levando a novas propostas teóricas, formando uma base para algoritmos melhores, e extensões para programação convexa e complementariedade linear.

Embora estes métodos tenham sido desenvolvidos para problemas gerais de programação linear, estudos mostram excelente desempenho para problemas de programação não linear [34, 16, 52, 67].

Os trabalhos em torno dos métodos de pontos interiores tiveram um maior ímpeto após o reconhecimento de soluções de alguns problemas NP-difícil em tempo polinomial. Os métodos que têm sido propostos possuem vários ingredientes, incluindo passos do primal-dual, funções com barreira e escalonamento de regiões de confiança.

Diversos autores têm sugerido os métodos de pontos interiores para a resolução de problemas de fluxo de potência ótimo [10, 4, 49], obtendo excelente desempenho tanto em termos de eficiência como de robustez [24, 39, 50], quando há uma solução factível.

Na seção seguinte, o foco inicial é entorno do método de pontos interiores primal-dual com barreira logarítmica clássica, suas vantagens e seus problemas.

2.2 Problemas Quadráticos com Variáveis Canalizadas

Neste trabalho, estamos interessados em resolver um problema de fluxo de potência ótimo, este possui função objetivo quadrática e convexa, além disso, suas restrições são lineares e as variáveis de decisão são canalizadas. Deste modo, serão feitos estudos apenas para a classe de problemas de programação quadrática convexa com variáveis canalizadas.

Com problemas desta classe, os métodos de pontos interiores se comportam como na programação linear. Em particular, o esforço por iteração é semelhante em ambas as situações [60, 65].

O problema primal de fluxo de potência ótimo pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & q^t v + \frac{1}{2} v^t Q v \\ \text{s.a} \quad & A v = p \\ & v_l \leq v \leq v_u \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $q, v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}_{m \times n}$ de posto completo m , com $m < n$ e $Q \in \mathbb{R}_{n \times n}$ matriz diagonal definida positiva.

A função objetiva do problema (2.1), além de ser quadrática e convexa, é também separável.

A canalização da variável v no problema (2.1) pode ser reescrita como uma igualdade através de uma mudança de variável $x = v - v_l$ e o acréscimo da variável de folga $s \in \mathbb{R}^n$, resultando no seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x \\ \text{s.a} \quad & A x = b \\ & x + s = x_u \\ & (x, s) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde $c = q + Q v_l$, $b = p - A v_l$ e $x_u = v_u - v_l$.

Observe que para $x > 0$ em (2.2), pode-se aplicar a técnica da função barreira logarítmica e considerar a seguinte família de problemas de programação não-linear P_μ .

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x - \mu (\sum \ln(x_i) + \sum \ln(s_i)) \\
\text{s.a} \quad & Ax = b \\
& x + s = x_u
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\mu > 0$ é um parâmetro de barreira.

Assim, conforme $\mu \rightarrow 0$, as soluções ótimas da família de problemas P_μ convergem a uma solução do problema original (2.2).

Deste modo, o problema modificado (2.3), associa-se a função lagrangeana:

$$\mathcal{L}(x, s, y, w) = c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x - \mu \left(\sum \ln(x_i) + \sum \ln(s_i) \right) - y^t (Ax - b) + w^t (x + s - x_u) \tag{2.4}$$

onde $y \in \mathbb{R}^m$ e $w > 0 \in \mathbb{R}^n$ são multiplicadores de lagrange.

A teoria de programação convexa indica que o mínimo global, se existir, está caracterizado pelas condições de Karush-Kuhn-Tucher (KKT) da função lagrangeana (2.4), que podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\nabla \mathcal{L}(x, s, y, w) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_x = c + Qx - \mu X^{-1}e - A^t y + w^t = 0 \\ \mathcal{L}_s = -\mu S^{-1}e + w = 0 \\ \mathcal{L}_y = Ax - b = 0 \\ \mathcal{L}_w = x + s - x_u = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ e $e = (1, \dots, 1)^t$.

Assim como feito em [16], na equação \mathcal{L}_x em (2.5), é feita a seguinte mudança de variável:

$$z = \mu X^{-1}e. \tag{2.6}$$

A mudança em (2.6) faz com as condições de KKT do problema com barreira sejam equivalentes as condições de KKT do problema (2.2), com uma perturbação μ na condição de complementaridade, ou seja, expressa a relação não-linear:

$$ZXe = \mu e. \tag{2.7}$$

Considerando ainda que $\mathcal{L}_s = 0$ pode ser reescrita como:

$$SWe = \mu e, \tag{2.8}$$

as condições de KKT em (2.5) seguem da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{Factibilidade Primal} & \begin{cases} Ax = b \\ x + s = x_u ; \\ (x, s) > 0 \end{cases} \\
\text{Factibilidade Dual} & \begin{cases} A^t y - w + z - Qx = c \\ (z, w) > 0 \end{cases} ; \\
\text{Condição de Complementaridade} & \begin{cases} XZe = \mu e \\ SWe = \mu e \end{cases} .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

As matrizes X, Z, S e W são matrizes diagonais compostas pelas variáveis x, z, s e w respectivamente em sua diagonal.

As equações em (2.9) devem ser resolvidas por algum método iterativo para obter as direções de busca. Neste trabalho é utilizado o método de Newton.

Estas direções são obtidas através da resolução do seguinte sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 \\ -Q & 0 & A^t & I & -I \\ Z & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & Z \end{bmatrix}}_{J_{\mathcal{L}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_x \\ d_s \\ d_y \\ d_z \\ d_w \end{bmatrix}}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} r_p \\ r_u \\ r_d \\ r_a \\ r_b \end{bmatrix}}_r . \tag{2.10}$$

onde $J_{\mathcal{L}}$ é a matriz Jacobiana de (2.5), d é o vetor de direções e r é o vetor de resíduos dedinado por:

$$\begin{bmatrix} r_p \\ r_u \\ r_d \\ r_a \\ r_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax \\ x_u - x - s \\ c - A^t d_y + w - z + Qx \\ \mu e - XZe \\ \mu e - SWe \end{bmatrix} . \tag{2.11}$$

Como A tem posto completo e $(x, s, z, w) > 0$, segue que $J_{\mathcal{L}}$ é inversível, assim tem-se:

$$d = J_{\mathcal{L}}^{-1} r \tag{2.12}$$

Assim, partindo de $(x, s, z, w) > 0$ e escolhendo α tal que na próxima iteração (x, s, z, w) continue sendo interior, obtêm-se o método primal-dual seguidor de caminhos com $\mu \rightarrow 0$.

Observando as entradas da matriz jacobiana $J_{\mathcal{L}}$, é possível concluir que sua inversa pode se tornar mal condicionada caso alguma componente das variáveis x , s , z ou w fiquem muito próximas de zero, porém, com um eficiente controle de passos, em muitos casos, é possível evitar estas situações.

Em particular, para as variáveis x e s , tem-se que:

$$s_i \rightarrow 0 \Rightarrow x_i \rightarrow x_{u_i} \quad (2.13)$$

$$x_i \rightarrow 0 \Rightarrow s_i \rightarrow x_{u_i}. \quad (2.14)$$

ou seja, quando alguma restrição de canalização se torna ativa inferiormente ou superiormente, a matriz $J_{\mathcal{L}}^{-1}$ se torna mal condicionada.

Há casos em que não é possível evitar que componentes destas variáveis fiquem próximas de zero durante várias iterações, podendo ocorrer erros numéricos que influenciem na convergência do método. Para exemplificar, em um problema de despacho de potência ativa, esta situação pode ocorrer caso tenham-se geradores e/ou linhas de transmissão operando em seus limites, ocasionando a situação descrita em (2.13) e (2.14). Casos como este serão estudados mais adiante.

O sistema (2.10) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} Ad_x & = r_p \\ d_x + d_v & = r_u \\ A^t d_y - d_w + d_z - Qd_x & = r_d \\ Zd_x + Xd_z & = r_a \\ Sd_w + Wd_s & = r_b \end{cases} \quad (2.15)$$

Tradicionalmente a resolução do sistema (2.15) é feita por redução, primeiramente isolando-se as direções referentes às variáveis de folga primal e dual s e w respectivamente, obtendo:

$$\begin{aligned} d_s &= r_u - d_x \\ d_w &= S^{-1}(r_b - Wd_s) \Rightarrow d_w = S^{-1}(r_b - Wr_u + Wd_x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Observe que na segunda equação em (2.16) há a inversão da matriz S . Por ser uma matriz diagonal, o cálculo de sua inversa é muito simples, com custo computacional igual à de inversões de escalares. Deste modo, a única preocupação no cálculo de S^{-1} fica por conta de alguma componente $v_i \rightarrow 0$, conforme mencionado acima.

Substituindo as equações em (2.16) no sistema (2.15) tem-se o seguinte sistema reduzido:

$$\begin{cases} Ad_x & = r_p \\ A^t d_y - (S^{-1}W + Q)d_w + d_z & = \bar{r}_d \\ Zd_x + Xd_z & = r_a \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $\bar{r}_d = r_d + S^{-1}(r_b - Wr_u)$.

Agora, isolando a variável d_z tem-se o seguinte:

$$d_z = X^{-1}(r_a - Zd_x). \quad (2.18)$$

Observe agora que na equação (2.18) há o mesmo problema numérico apontado na segunda equação em (2.16), mas neste caso, envolvendo a variável de decisão x .

As equações (2.16) e (2.18) reforçam a informação anterior de que podem ocorrer problemas numéricos durante o processo iterativo dos métodos de pontos interiores quando alguma componente x_i da variável de decisão se aproxima de seus limites.

Voltando à resolução do sistema, substitui-se (2.18) no sistema (2.17) resultando-se em:

$$\begin{cases} Ad_x & = r_p \\ A^t d_y - Dd_w + d_z & = \tilde{r}_d \end{cases} \quad (2.19)$$

onde $D = (S^{-1}W + X^{-1}Z + Q)$ e $\tilde{r}_d = \bar{r}_d - X^{-1}r_a$.

Note que D é formada por soma de matrizes diagonais, portanto D é uma matriz diagonal e sua inversa é facilmente obtida, porém, herda os possíveis problemas numéricos citados anteriormente, visto que contém as matrizes S^{-1} e X^{-1} em sua formação.

Na segunda equação do sistema reduzido (2.19) pode-se isolar a variável d_x da seguinte maneira:

$$d_x = -D^{-1}(\tilde{r}_d - A^t d_y), \quad (2.20)$$

e substituir na primeira equação do mesmo sistema, obtendo:

$$AD^{-1}A^t d_y = \bar{r}_p \quad (2.21)$$

onde $\bar{r}_p = r_p + AD^{-1}\tilde{r}_d$.

O sistema (2.21) pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$d_y = (AD^{-1}A^t)^{-1}\bar{r}_p \quad (2.22)$$

A matriz $AD^{-1}A^t$ em (2.22) é simétrica definida positiva, podendo assim fazer uso da fatoração de Cholesky, reduzindo ainda mais o custo computacional da resolução deste sistema.

Observe que todo esforço computacional do método está na resolução do sistema reduzido (2.22), visto que os demais sistemas dependem desta resolução e além disto envolvem apenas a inversão de matrizes diagonais.

Durante o processo iterativo usam-se técnicas de controle de passos para evitar que componentes

das variáveis x e s fiquem em seus limites, reduzindo erros numéricos, mas há casos em que este controle gera um número maior de iterações, principalmente quando componentes destas variáveis se aproximam de valores de fronteira antes da convergência do método.

A seção seguinte é dedicada ao controle de passos para o método de pontos interiores primal-dual.

2.3 Controle de Passos

Uma forma de obter um controle de passos que impeça que as variáveis x, s, z e w deixem de ser interiores é multiplicando o vetor de direções por um escalar $0 < \alpha \leq 1$.

O valor de $\alpha = 1$ indica que será dado o passo de Newton. Quanto mais passos com $\alpha = 1$, mais rápida será a convergência para o ótimo do problema [40, 41].

Deste modo, considerando a variável x , pode-se tomar α como:

$$\alpha = \min \{ -x_i^k / dx_i^k, dx_i^k < 0 \}. \quad (2.23)$$

Porém, (2.23) não garante $x \neq 0$ ou, que se dê um passo maior que o passo de Newton. Assim, o controle de passos pode ser feito da seguinte maneira:

$$\alpha_0 = \tau \min \{ \alpha, 1 \} \quad \tau \approx 1. \quad (2.24)$$

A multiplicação por τ e a escolha por um valor menor ou igual a 1 em (2.24) é simplesmente para garantir que as componentes fiquem maiores que 0 e que se tenha $0 < \alpha_0 \leq 1$ respectivamente.

Na prática, utiliza-se um valor empírico de τ entre 0.995 e 0.99995.

Como o método é o primal-dual, é preciso controlar os passos das variáveis primais com um α_p , e o das duais com um α_d definidos da seguinte maneira:

$$\alpha_p = \min \{ \tau \min \{ -u_i^k / du_i^k, du_i^k < 0 \mid u \in \{x, s\} \}, 1 \} \quad (2.25)$$

$$\alpha_d = \min \{ \tau \min \{ -v_i^k / dv_i^k, dv_i^k < 0 \mid v \in \{z, w\} \}, 1 \}. \quad (2.26)$$

Pode-se ainda usar como controle de passos $\alpha = \min \{ \alpha_p, \alpha_d \}$ para todas as variáveis, porém, pode aumentar o número de iterações.

Com as direções obtidas pelo método de Newton e o controle de passos definido, é feita a atualização das variáveis conforme abaixo:

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k + \alpha_p d_x \\
s^{k+1} &= s^k + \alpha_p d_s \\
z^{k+1} &= z^k + \alpha_d d_z \\
w^{k+1} &= w^k + \alpha_d d_w \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha_d d_y
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Como a variável y é livre, ou seja, não precisa ser interior, esta não participa da escolha de α_d , mas também faz uso deste controle para que todas as variáveis duais tenham passos proporcionais.

A seção seguinte estabelece a inicialização do método e os critérios de convergência.

2.4 Inicializações e Critérios de Convergência

A inicialização do parâmetro de barreira μ , ou parâmetro de perturbação, poderia ser a média $\frac{\gamma}{n}$, com $\gamma = x^t z + s^t w$, porém, esta perturbação deve diminuir a cada iteração, assim define-se:

$$\mu^k = \sigma \frac{\gamma}{n}, \tag{2.28}$$

onde $\sigma \in (0, 1)$.

Assim, a sequência $\{\mu\} \rightarrow 0$, obtendo a solução do problema original.

Na prática usa-se $\sigma = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{para problemas pequenos} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{para problemas grandes} \end{cases}$

Se $\gamma < 1$ utiliza-se $\sigma_k = \frac{\gamma_k}{n}$, ou seja, $\mu_k = \left(\frac{\gamma_k}{n}\right)^2$ e o método converge mais rapidamente (1 ou 2 iterações a menos).

Existem razões teóricas que mostram que quando se está próximo de uma solução, o método converge mais rápido se $\{\mu_k\} \rightarrow 0$ mais rápido.

Para a inicialização das variáveis de decisão, um fator importante desse método é que não é necessário um ponto inicial factível, basta que sejam interiores e que x_i e z_i não sejam "pequenos". Assim, podem-se considerar pontos iniciais conforme em [34] da seguinte forma:

- Ponto Inicial Primal:

Sejam $\tilde{x} = A^t(AA^t)^{-1}b$, $\epsilon_1 = 100$ e $\epsilon_2 = \max \left\{ -\min\{\tilde{x}_i\}, \epsilon_1, \frac{\|b\|_1}{\epsilon_1 \|A\|_1} \right\}$, como $A\tilde{x} = b$, tome

$$x_i^0 = \max\{\tilde{x}_i, \epsilon_2\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \tag{2.29}$$

$$s^0 = x_u - x^0. \tag{2.30}$$

- Ponto Inicial Dual:

Seja $\epsilon_3 = 1 + \|c\|_1$ então tome $y^0 = 0$ e $w^0 = z^0$ onde:

$$z_i^0 = \begin{cases} c_i + \epsilon_3 & \text{se } c_i \geq 0 \\ -c_i & \text{se } c_i \leq -\epsilon_3 \\ \epsilon_3 & \text{se } -\epsilon \leq c_i \leq 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Estes pontos iniciais costumam diminuir o número de iterações necessárias para a convergência do método.

O critério de convergência que será baseado nas condições de otimalidade, deste modo, sejam as seguintes desigualdades para algum $\epsilon > 0$:

- i Primal Factível

$$\frac{\|b - Ax\| + \|x_u - x - s\|}{\|b\| + \|x_u\| + 1} < \epsilon$$

- ii Dual Factível

$$\frac{\|c + Qx - A^t y + w - z\|}{\|c\| + 1} < \epsilon$$

- iii Complementaridade

$$\frac{\|c^t x - b^t y - s^t w\|}{\|c^t x\| + \|b^t y\| + 1} < \epsilon$$

Deste modo, se as desigualdades acima forem satisfeitas, diz-se que o método convergiu.

Assim, com todos os critérios estabelecidos, segue abaixo um pseudo-algoritmo do método se-guidor de caminhos para problemas quadráticos canalizados:

```

input :  $(x_0, s_0, y_0, w_0, z_0)$  com  $(x_0, s_0, z_0, w_0) > 0, \sigma$  e  $\tau \in (0, 1)$ 
output:  $(x^*, s^*, y^*, w^*, z^*)$ 

1  $k=0$ ;
2 while Não satisfaz as condições de convergência do
3   if  $k > max$  then
4     return Máximo de iterações;
5   end
6    $k = k + 1$ ;
7    $r_p = b - Ax$ ;
8    $r_u = x_u - x - s$ ;
9    $r_d = c - A^t y + w - z + Qx$ ;
10   $\mu = \sigma \frac{\gamma}{n}$ ;
11   $r_a = \mu e - XZe$ ;
12   $r_b = \mu e - SWe$ ;
13   $D = (S^{-1}W + X^{-1}Z + Q)$ ;
14   $\tilde{r}_d = r_d + S^{-1}(r_b - Wr_u) - X^{-1}r_a$ 
15   $d_y = (AD^{-1}A^t)^{-1}(r_p + AD^{-1}\tilde{r}_d)$ ;
16   $d_x = -D^{-1}(\tilde{r}_d - A^t d_y)$ ;
17   $d_z = X^{-1}(r_a - Zd_x)$ ;
18   $d_s = r_u - d_x$ ;
19   $d_w = S^{-1}(r_b - Wd_s)$ ;
20   $\alpha_p = \min \{ \tau \min \{ -u_i^k / du_i^k, dv_i^k < 0 \mid u \in \{x, s\} \}, 1 \}$ ;
21   $\alpha_d = \min \{ \tau \min \{ -v_i^k / dv_i^k, du_i^k < 0 \mid v \in \{z, w\} \}, 1 \}$ ;
22   $x = x + \alpha_p d_x$ ;
23   $s = s + \alpha_p d_s$ ;
24   $y = y + \alpha_d d_y$ ;
25   $z = z + \alpha_d d_z$ ;
26   $w = w + \alpha_d d_w$ ;
27 end

```

Algoritmo 1: Pseudo-Algoritmo do Método de Pontos Interiores Primal-Dual Para Problemas Quadráticos Canalizados

Na seção seguinte é feita uma aplicação deste método em um problema de fluxo de potência ótimo para o despacho de potência ativa e feito alguns estudos de casos.

2.5 Aplicação em Fluxo de Potência Ótimo Linearizado via Fluxo em Redes

O problema de fluxo de potência ótimo tem aplicação em diversos segmentos de análise e operação de sistemas de potência, tais como despacho econômico, análise de confiabilidade de geração e transmissão, análise de segurança, programação da geração em curto prazo e planejamento da expansão da geração e transmissão.

O despacho ótimo de potência ativa através de modelo CC pode ser formulado como um modelo de fluxo em redes com restrições adicionais [11, 44].

Uma vantagem dessa abordagem é que, com a representação independente das leis de Kirchhoff, os fluxos de potência se tornam explícitos, permitindo a consideração direta dos limites de transmissão como restrições e das perdas de transmissão como um critério de desempenho.

Por sua vez, técnicas de pontos interiores têm sido estudadas e utilizadas em diversas áreas de aplicação, entre elas sistemas de potência. Em particular, para a resolução de problemas de fluxo de potência ótimo com representação CC [24], obtendo excelente desempenho tanto em termos de eficiência como de robustez [39, 50].

A abordagem utilizada combina as vantagens da formulação do modelo CC por fluxo em redes com a eficiência e robustez dos métodos de pontos interiores. Será explorada também a estrutura matricial do problema, reduzindo o sistema linear a ser resolvido à dimensão do número de barras do sistema [10, 4, 49].

O modelo em interesse é o de despacho de potência ativa com critério quadrático separável cuja formulação CC é feita via fluxo em redes, como em [11, 54, 45] da seguinte forma:

$$\min \quad \frac{\alpha}{2} f^t R f + \frac{\beta}{2} (p^t Q p + c^t p)$$

$$\text{s.a} \quad A f = E p - l \quad (2.32)$$

$$X f = 0 \quad (2.33)$$

$$f_l \leq f \leq f_u \quad (2.34)$$

$$p_l \leq p \leq p_u \quad (2.35)$$

onde:

- m, n e g são os números de barras, linhas de transmissão e de geradores respectivamente;
- Q : Matriz diagonal $g \times g$ da componente quadrática do custo de geração;
- R : Matriz diagonal $n \times n$ de resistência das linhas;

- c : Vetor $g \times 1$ da componente linear do custo de geração;
- A : Matriz $m \times n$ de incidência da rede de transmissão;
- X : Matriz $(n - m + 1) \times n$ de reatância das linhas;
- f : Vetor $n \times 1$ de fluxo de potência ativa;
- p : Vetor $g \times 1$ de geração de potência ativa;
- l : Vetor $m \times 1$ de demanda de potência ativa;
- E : matriz de ordem $m \times g$ cuja j -ésima coluna contém exatamente um elemento igual a 1 na linha correspondente à j -ésima barra de geração, e os demais elementos nulos;
- f_l, f_u, p_l e p_u : limites mínimo e máximos de fluxo e de geração de potência ativa, respectivamente;
- α e β : ponderações dos objetivos a minimizar.

O sistema de transmissão é representado por um modelo de fluxo de carga CC com limites no fluxo das linhas. Para que as variáveis de geração e transmissão possam ser expressas simultaneamente no modelo, as leis de Kirchhoff para nós e ramos (2.32) e (2.33) são apresentadas separadamente [11].

O conjunto de restrições para este problema é linear onde, as equações (2.32) e (2.33) representam a rede de geração/transmissão e as equações (2.34) e (2.35) representam as capacidades de transmissão e de geração do sistema.

No modelo utilizado, as duas componentes da função objetivo são quadráticas com variáveis separáveis, a primeira representando o valor econômico das perdas de transmissão e a segunda representando o custo de geração das usinas, tanto térmicas quanto hidrelétricas [54].

A função de perdas na geração hidráulica ($p^t Q p + c^t p$), com Q matriz diagonal [54], modela as três formas mais importantes de perdas: as provocadas pelas variações na cota de jusante; as provocadas pela tubulação de adução da unidade geradora; perdas de eficiência do par turbina-gerador.

O custo de geração associado às termoeletricas também é uma função quadrática independente para cada gerador. Utilizando o modelo descrito para minimizar as perdas na geração hidráulica e custos na geração térmica, as duas componentes da função objetivo são quadráticas com variáveis separáveis, uma vez que a matriz R também é diagonal.

Como o problema de fluxo de potência ótimo apresentado não está na forma padrão, são feitas mudanças de variáveis, afim de que os limites inferiores sejam iguais a zero da seguinte forma:

$$\tilde{f} = f - f_l \quad , \quad \tilde{p} = p - p_l.$$

Estas substituições resultam na seguinte formulação:

$$\min \quad \alpha \left(\frac{1}{2} \tilde{f}^t R \tilde{f} + c_f^t \tilde{f} \right) + \beta \left(\frac{1}{2} \tilde{p}^t Q \tilde{p} + c_p^t \tilde{p} \right)$$

s.a

$$\begin{aligned} A \tilde{f} - E \tilde{p} &= l^a \\ X \tilde{f} &= l^b \\ 0 &\leq \tilde{f} \leq \tilde{f}_u \\ 0 &\leq \tilde{p} \leq \tilde{p}_u \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} l^a &= E p_l - A f_l - l & c_p &= c + Q p_l \\ l^b &= -X f_l & \tilde{f}_u &= f_u - f_l \\ c_f &= R f_l & \tilde{p}_u &= p_u - p_l. \end{aligned}$$

A Matriz $[A| - E]$, formada pela justaposição das matrizes A e E , tem posto linha completo m , visto que E tem suas colunas formadas por vetores canônicos e A tem posto $m - 1$, onde m é o número de barras do sistema. A demonstração deste posto pode ser vista no Apêndice B.

Agora, acrescentam-se as variáveis de folga s_f e s_p e, para melhor leitura, eliminam-se os "tils", tendo assim a seguinte formulação primal na forma padrão:

$$\min \quad \alpha \left(\frac{1}{2} f^t R f + c_f^t f \right) + \beta \left(\frac{1}{2} p^t Q p + c_p^t p \right)$$

s.a

$$\begin{aligned} B f - \hat{E} p &= \hat{l} \\ f + s_f &= f_u \\ p + s_p &= p_u \\ (f, p, s_f, s_p) &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} A \\ X \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{l} = \begin{bmatrix} l^a \\ l^b \end{bmatrix}$$

Deste modo, pode-se aplicar o método primal-dual apresentado neste capítulo no problema (2.36).

Seguindo como proposto, usa-se barreira clássica nas variáveis primais, $\mathcal{P} = \{f, p, s_f, s_p\}$, obtendo assim a seguinte função lagrangeana associada ao problema:

$$\mathcal{L} = \varphi(f, p, s_f, s_p) - \mu \sum_{x \in \mathcal{P}} \ln(x_i) - y^t (\hat{l} - B f + \hat{E} p) - w_f^t (f_u - f - s_f) - w_p^t (p_u - p - s_p) \tag{2.37}$$

onde $\varphi(f, p, s_f, s_p) = \alpha(\frac{1}{2}f^t R f + c_f^t f) + \beta(\frac{1}{2}p^t Q p + c_p^t p)$

As condições de primeira ordem da função lagrangeana (2.37) nos fornecem as condições de otimalidade para o problema modificado como segue:

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Factibilidade Primal: } & \begin{cases} Bf - \widehat{E}p = \widehat{l} \\ f + s_f = f_u ; \\ p + s_p = p_u \end{cases} \\
 \bullet \text{ Factibilidade Dual: } & \begin{cases} B^t y - w_f + z_f - \alpha R f = \alpha c_f ; \\ -\widehat{E}^t y - w_p + z_p - \beta Q p = \beta c_p ; \end{cases} \\
 \bullet \text{ Complementaridade: } & \begin{cases} F Z_f e_f = \mu e_f \\ P Z_p e_p = \mu e_p \\ S_f W_f e_f = \mu e_f \\ S_p W_p e_p = \mu e_p \end{cases}
 \end{aligned}$$

onde $z_f = \mu F^{-1} e_f$, $z_p = \mu P^{-1} e_p$, e_f e e_p são vetores de uns de tamanhos apropriados, e F , P , S_f , S_p , Z_f , Z_p , W_f e W_p são matrizes diagonais da forma $X = \text{diag}(x)$.

Agora basta aplicar o método de Newton a estas condições de otimalidade da forma como é proposta na seção anterior, obtendo o sistema $J.d = r$, onde:

$$J = \begin{bmatrix} B & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha R & 0 & 0 & 0 & -B^t & I & 0 & -I & 0 \\ 0 & \beta Q & 0 & 0 & -E^t & 0 & I & 0 & -I \\ Z_f & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_p & 0 & 0 & 0 & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_f & 0 & 0 & 0 & 0 & S_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_p & 0 & 0 & 0 & 0 & S_p \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Observe que o jacobiano (2.38) pode se tornar mal condicionado caso alguma variável de decisão fique muito próxima de valores de fronteira por diversas iterações, ocasionando erros numéricos na obtenção das direções de Newton.

Porém, obtêm-se bons resultados para este modelo quando há uma solução factível, ou seja, quando a soma dos limites de geração é maior ou igual à demanda e não há congestionamento nas linhas de transmissão.

A aplicação deste método ao Fluxo de Potência Ótimo CC é limitada às situações normais de operação dos sistemas elétricos. Em situações de emergência nas quais os recursos de geração e de capacidade de transmissão são comprometidos pela não existência de pontos viáveis o método falha.

Um estudo ilustrativo pode ser feito utilizando o sistema IEEE 30 com 6 unidades geradoras, com potência instalada de $300MW$ e uma carga de $283,4MW$.

A Figura 2.1 mostra o diagrama unifilar deste sistema.

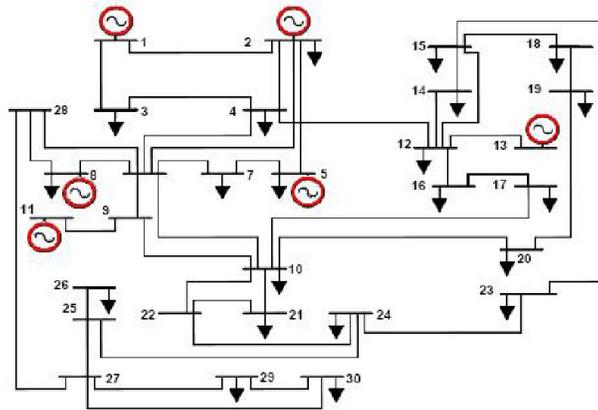


Fig. 2.1: Diagrama Unifilar IEEE 30

A configuração do computador utilizado para os testes deste trabalho foram as seguintes: Sistema Operacional Ubuntu 12.4, 8GB de memória RAM com processadores *Intel® Core™ i7-2670QM* CPU 2.20GHz de 8 núcleos, utilizando o software Matlab R2012b.

Como na função objetivo do problema (2.36) há as ponderações α para transmissão e β para geração, fazendo-se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ otimiza-se apenas as perdas na transmissão (**Pt**), fazendo-se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ otimiza-se apenas o custo na geração (**Cg**) e qualquer outro par de combinações positivas otimiza-se uma ponderação entre as perdas na transmissão e o custo na geração (**Pt & Cg**).

Neste trabalho, as ponderações são dadas por $\alpha = c.m$ e $\beta = 1$, onde *c.m* representa o custo marginal dos geradores obtidos com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ que é o mesmo para todas as unidades geradoras, pois nenhuma restrição de capacidade fica ativa, e as perdas não são levadas em consideração no balanço de potência.

2.5.1 Situações Normais de Operação

As situações normais de operação são aquelas em que o sistema opera sem contingência, com todas as grandezas dentro de seus limites operacionais.

Inicialmente considera-se que todas as unidades geradoras tenham custos de geração iguais, e que os limites operacionais, tanto de geração quanto de transmissão, sejam suficientemente grandes.

Assim, a Tabela 2.1 mostra os despachos com algumas ponderações.

Gerador	Objetivos de Otimização		
	Pt (MW)	Cg (MW)	Pt & Cg (MW)
1	8,81	47,23	46,90
2	52,03	47,23	47,49
5	113,15	47,23	48,33
8	62,79	47,23	47,58
11	17,25	47,23	46,41
13	29,37	47,23	46,69
	7 iterações	6 iterações	6 iterações

Tab. 2.1: Despachos factíveis com custos iguais e sem limites de geração.

Estes despachos são coerentes pois, ao otimizar apenas as perdas na transmissão (Pt), o método aloca maior geração nas unidades mais próximas às cargas do sistema, as unidades 5, 8 e 2.

Ao otimizar apenas o custo na geração (Cg), por terem o mesmo custo, o despacho é distribuído uniformemente entre as unidades de geração do sistema.

Ao fazer uma ponderação entre perdas na transmissão e o custo na geração (Pt & Cg), o método distribui a geração quase que uniformemente, mas concedendo uma pequena prioridade às unidades mais próximas das cargas.

Agora, é feita uma modificação de cenário, considerando os custos de geração diferentes conforme a Tabela 2.2 mas ainda sem limites de geração.

Gerador	1	2	5	8	11	13
Custo (U\$)	1	1	4	4	2	2

Tab. 2.2: Custos de geração.

Com este novo cenário, e ponderações anteriores, obtém-se os despachos exibidos na Tabela 2.3.

Note que para o despacho (Pt) se manteve o mesmo do cenário anterior, o que era de se esperar, já que este despreza os custos na geração.

O despacho (Cg) se mostra coerente, pois as unidades 5 e 8 geram 1/4 do gerado pelas unidades 1 e 2 e metade do gerado pelas 11 e 13, por serem quatro e duas vezes mais baratos respectivamente.

Já a ponderação (Pt & Cg), dentre as de mesmo custo, aloca um pouco mais de geração na unidade mais próximo às cargas, mantendo o esperado.

Para o próximo cenário, são mantidos os custos da Tabela 2.2, mas agora impondo limites de geração conforme a Tabela 2.4. Os limites de cada linha de transmissão são fixados em $50MW$.

Gerador	Objetivos de Otimização		
	Pt (MW)	Cg (MW)	Pt & Cg (MW)
1	8,81	80,97	80,23
2	52,03	80,97	81,21
5	113,15	20,24	20,64
8	62,79	20,24	20,51
11	17,25	40,49	40,36
13	29,37	40,49	40,44
	7 iterações	6 iterações	6 iterações

Tab. 2.3: Despachos factíveis com custos diferenciados.

Gerador	1	2	5	8	11	13
Capacidade (MW)	30	50	70	70	40	40

Tab. 2.4: Limites de geração.

Com este novo cenário, o sistema ainda se encontra em situação normal de operação, ou seja, carga de 283,4 MW sendo satisfeita. A Tabela 2.5 mostra os novos despachos obtidos:

Gerador	Objetivos de Otimização		
	Pt (MW)	Cg (MW)	Pt & Cg (MW)
1	30,00	30,00	30,00
2	50,00	50,00	50,00
5	70,00	61,70	61,80
8	70,00	61,70	61,60
11	26,15	40,00	40,00
13	37,25	40,00	40,00
	8 iterações $F_{obj} = 71,18U\$$	8 iterações $F_{obj} = 20127,57U\$$	8 iterações $F_{obj} = 20212,65U\$$

Tab. 2.5: Despachos factíveis com custo e limites de geração e de transmissão

Comparando o despacho (Pt) deste cenário com os anteriores, pode-se notar que, pelo fato de as unidades geradoras 2, 5 e 8 serem impedidas de gerar mais por conta do novo limite de geração, o método faz com que as demais assumam a carga faltante, sendo redistribuído conforme a proximidade das cargas do sistema. Com este despacho, a função objetivo não considera os custos de geração.

O despacho (Cg) tenta manter a uniformidade de geração dentre as unidades de mesmo custo, mas estes atingem seus limites de produção, fazendo com que os mais caros, 5 e 8, gerem mais que nos cenários anteriores por haver ainda capacidade de produção.

Já o despacho (Pt & Cg) segue a mesma linha do despacho (Cg) mas aloca um pouco mais de geração na unidade 5 por esta estar mais próximo às cargas que a 8.

Nestes estudos não houveram linhas congestionadas, ou seja, nenhuma linha atingiu seu limite máximo de transmissão, sendo que as linhas 11-9 e 13-12 foram as mais carregadas, 40MW cada uma, visto que, conforme a Figura (2.1), estas são as únicas linhas que conectam os geradores 11 e 13 respectivamente ao sistema.

Observe que em todos os cenários de otimização, o método converge em menos de 10 iterações, obtendo os despachos desejados mesmo tendo algumas unidades geradoras em seus limites máximos de produção, o que para o método implica que as variáveis de folga referentes a estas unidades são nulas ou muito próximas de zero.

Como visto anteriormente, a proximidade de valores nulos pode ocasionar dificuldades numéricas, influenciando no número de iterações necessárias para convergência do método, mas como em todos os casos estudados o número de iterações foi baixo, está influência quase não é percebida, causando apenas uma iteração a mais no despacho (Pt) do último cenário.

Deste modo o método de pontos interiores seguidor de caminhos obtém bons resultados no despacho de potência do problema de fluxo de potência ótimo quando há capacidade de geração e de transmissão para satisfazer a demanda do sistema.

Nestes casos de situações normais de operação, é possível ainda fazer uma análise de sensibilidade através dos multiplicadores de Lagrange w_f e w_p . Estes fornecem a variação da função objetivo caso as variáveis de fluxo ou de geração respectivamente tiverem seus limites variados em uma unidade.

A fim de exemplificar, a Tabela 2.6, mostra os valores de w_p referentes aos despachos do último cenário mostrado na Tabela 2.5.

Gerador	Multiplicadores de Lagrange w_p		
	Pt (US\$/MW)	Cg (US\$/MW)	Pt & Cg (US\$/MW)
1	$7,92 \times 10^{-2}$	$2,17 \times 10^2$	$2,16 \times 10^2$
2	$4,11 \times 10^{-1}$	$1,97 \times 10^2$	$1,97 \times 10^2$
5	$9,53 \times 10^{-1}$	$2,65 \times 10^{-4}$	$2,61 \times 10^{-4}$
8	$2,10 \times 10^{-1}$	$2,65 \times 10^{-4}$	$2,55 \times 10^{-4}$
11	$3,47 \times 10^{-8}$	168×10^2	$1,66 \times 10^2$
13	$2,53 \times 10^{-7}$	$1,68 \times 10^2$	$1,66 \times 10^2$

Tab. 2.6: Sensibilidade da função objetivo com relação a geração.

Vejamos inicialmente os valores referentes ao despacho (Pt), por este despacho desprezar os custos de geração, a influência de uma variação de 1MW na produção de uma unidade geradora é quase nula na função objetivo e isto é visto na coluna referente a este despacho na Tabela 2.6.

Já com relação aos despachos (Cg) e (Pt & Cg), com base na Tabela 2.5, observe que as unidades 2, 11, 13 e 1 estão em seus limites máximos de produção. A análise para os multiplicadores de Lagrange referentes a estas unidades indica que, caso algum deles pudesse ter sua capacidade de produção aumentada, a função objetivo teria uma redução na ordem de 10^2 para cada $1MW$ de acréscimo na geração. Estes valores indicam também que cada redução de $1MW$ em algum destes geradores acarreta em um aumento na ordem de 10^2 na função objetivo.

Este tipo de análise mostra um caminho para investimentos nestas unidades geradoras. Caso tivéssemos que escolher apenas uma unidade geradora para ter sua capacidade aumentada, poderíamos escolher a unidade 1, visto que seu multiplicador de Lagrange apresenta maior valor, ou seja, acarretaria em uma maior redução de custos.

Observe também que a Tabela 2.6 mostra que os multiplicadores de Lagrange referentes as unidades 5 e 8 são da ordem de 10^{-4} , isto se dá pois estas unidades não estão em seus limites de produção, logo aumentar ou diminuir sua capacidade de geração até um certo ponto não acarreta influências na função objetivo, ou seja, não há necessidade de investimento nestas unidades.

Outro fato interessante a se destacar nos dados fornecidos pela tabela 2.6 para os despachos (Cg) e (Pt & Cg) é que unidades geradoras com mesmo custo e mesma capacidade de geração apresentam multiplicadores de Lagrange iguais.

O mesmo tipo de estudo pode ser feito para o multiplicador de Lagrange w_f .

Assim, o método também pode ser útil para fins de planejamento de expansão do sistema, indicando onde investir de modo a reduzir custos.

Mas como o método se comporta caso haja contingências como quedas de unidades geradoras e/ou de linhas de transmissão? E se com essas quedas não for possível gerar o suficiente para satisfazer a demanda, ou mesmo não for possível transmitir o que é gerado? E os multiplicadores de Lagrange w_f e w_p nestas ocasiões podem dar alguma informação?

Na próxima seção são feitos estudos de casos destas contingências a fim de verificar o comportamento do método e as informações disponíveis por ele.

2.5.2 Situações de Sobrecarga

Na resolução do problema (2.36) pode haver casos em que não existe uma solução que satisfaça simultaneamente as restrições operativas. Nestes casos, fazendo uso do método de pontos interiores apresentado, algumas matrizes relacionadas às condições de otimalidade tornam-se singulares no decorrer do processo iterativo.

Quando o suprimento de carga sobre condições operacionais é inviável, pelo menos um dos multiplicadores de Lagrange tende a infinito.

O uso do modelo (2.36) facilita a identificação de unidades geradoras e de linhas de transmissão

que estejam em seus limites operativos, permitindo a identificação do porque da não convergência dos métodos de pontos interiores.

Para exemplificar, alterando o último cenário da seção anterior, a capacidade de geração da unidade 1 é reduzida de $30MW$ para $10MW$, reduzindo a capacidade de geração do sistema para $280MW$, ou seja, faltando $3,4MW$ para satisfazer a demanda. Este estudo pode representar tanto queda de geradores, quanto um aumento de demanda que supere a capacidade instalada.

Este novo cenário é de um problema infactível, visto que a restrição de demanda não consegue ser satisfeita, pois para isto, teria que violar algumas restrições limitantes de geração, fazendo com que algumas componentes da variável de folga s_p se tornassem negativas, deixando de serem interiores, o que não é permitido pelos métodos de pontos interiores devido ao controle de passos aplicado.

Não satisfazendo a demanda, o método para após um número máximo de iterações, exibindo o mesmo despacho nas 3 situações de otimização (Pt), (Cg) e (Pt & Cg). A Tabela 2.7 traz este despacho, juntamente com os multiplicadores de Lagrange em cada situação.

Gerador	Despacho (MW)	Multiplicadores de Lagrange w_p		
		Pt (U\$)	Cg (U\$)	Pt & Cg (U\$)
1	10,00	$1,06 \times 10^{15}$	$3,79 \times 10^{11}$	$8,40 \times 10^{14}$
2	50,00	$1,06 \times 10^{15}$	$3,79 \times 10^{11}$	$8,40 \times 10^{14}$
5	70,00	$1,06 \times 10^{15}$	$3,79 \times 10^{11}$	$8,40 \times 10^{14}$
8	70,00	$1,06 \times 10^{15}$	$3,79 \times 10^{11}$	$8,40 \times 10^{14}$
11	40,00	$1,06 \times 10^{15}$	$3,79 \times 10^{11}$	$8,40 \times 10^{14}$
13	40,00	$1,06 \times 10^{15}$	$3,79 \times 10^{11}$	$8,40 \times 10^{14}$

Tab. 2.7: Despacho e Multiplicadores de Lagrange em Situações de Sobrecarga

Observe que a Tabela 2.7 indica que, mesmo o método despachando todas as unidades geradoras em seus limites de produção, causa um *blackout* em algum setor do sistema, pois nem toda a demanda é satisfeita. Os multiplicadores de Lagrange w_p indicam apenas há a necessidade de aumentar a capacidade de geração, sugerindo um investimento em qualquer unidade.

O método segue com o mesmo comportamento em qualquer outro tipo de queda de geradores, ou de demanda acima da carga do sistema, deixando todas as unidades geradoras em seu máximo de produção, minimizando a área de *blackout*.

Quando algum limite na capacidade da rede é violado, diz-se que o sistema de transmissão está congestionado. Este congestionamento tem sido algo frequente, podendo ser causado por sobrecargas em algumas linhas de transmissão do sistema devido a variações súbitas de demanda, falhas de equipamentos ou contingências.

Muitos trabalhos tratam o problema de congestionamento através de corte de cargas e de re-

alocação de geração [15] [32]. Pode-se propor ainda reconfiguração do sistema de transmissão e cancelamentos de transações de energia.

Estas ações resultam no aumento do custo operacional, mas um impacto maior pode ser causado se for permitido que o congestionamento do sistema cause sobrecargas ou violem outras restrições de segurança [13]. Porém, com a reestruturação do mercado de energia, as empresas transmissoras evitam ao máximo atuar nos níveis máximos de carga e/ou de geração [2].

Uma contingência mais comum talvez seja a queda de linhas de transmissão, podendo configurar uma incapacidade de transmitir a potência que satisfaça a demanda. Nestes casos, o cenário também pode ser de um problema infactível.

Um exemplo que pode ser considerado é a queda, total ou parcial, da linha 27-28 (vide Figura 2.1). Em testes feitos, considerando-se a capacidade dos geradores como na Tabela 2.4, tanto com uma queda parcial da linha 27-28, reduzindo sua capacidade de transmissão de $50MW$ para $15MW$, quanto a queda total desta, o método não consegue obter uma solução que evite *blackouts* no sistema.

Neste exemplo, considerando a queda total, as componentes do vetor de multiplicador de Lagrange w_f indicam que investimentos em qualquer linha de transmissão poderiam ser feitos. Observe na Figura 2.2-(a) que, como a linha 27-28 foi retirada, a componente w_p referente a esta linha é nula e as demais não ultrapassam o valor de $0,5U\$/MW$.

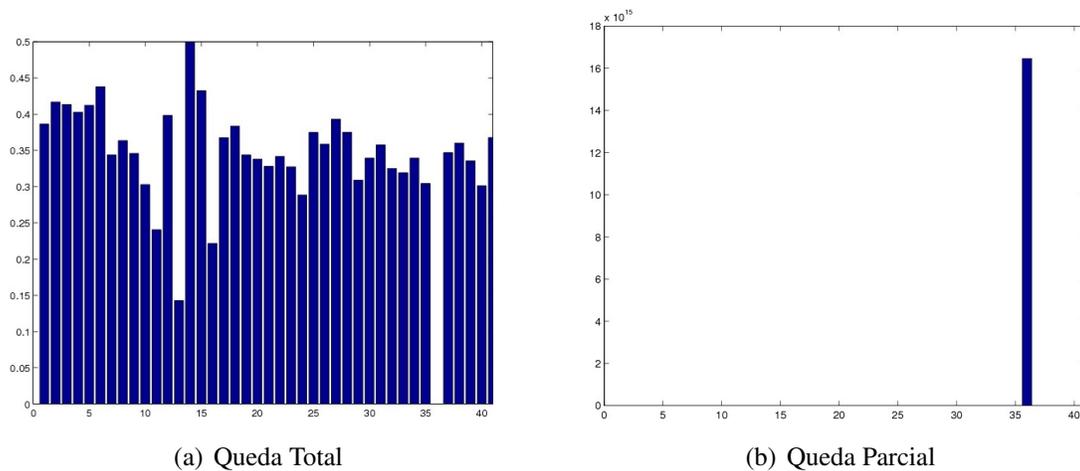


Fig. 2.2: Multiplicadores de Lagrange w_f - Contingências na linha 27-28.

Considerando a queda parcial, como a linha 27-29 não foi retirada, apenas a componente de w_f referente a esta linha tende ao infinito, indicando sua importância para o sistema. Este resultado pode ser observado na Figura 2.2-(b).

O congestionamento das linhas de transmissão indica que há variáveis de folga muito próximas de zero em várias iterações, levando a erros numéricos que podem influenciar no processo de obtenção das direções a serem seguidas, principalmente com relação às variáveis de fluxo.

Tanto para geração quanto para transmissão, caso o método permitisse violações de algumas restrições de capacidade do sistema muitos destes casos poderiam ser resolvidos. Na prática esta violação de capacidade é possível em um curto período de tempo, logo esta solução seria viável.

Uma ideia para contornar as dificuldades do método diante dessas situações é dada no capítulo seguinte, onde se propõe uma relaxação das variáveis via função barreira logarítmica modificada.

2.6 Discussões sobre Resultados do Capítulo

O método de pontos interiores primal-dual, pode apresentar alguns problemas numéricos caso variáveis de decisão fiquem próximas de seus limites por várias iterações. Esta permanência nas proximidades de valores de fronteira pode ocasionar o aumento do número de iterações necessárias para alcançar algum valor ótimo do problema, ou em alguns casos pode até mesmo não convergir.

A possibilidade de erros numéricos ocorre durante o processo iterativo, no qual há inversões de algumas matrizes diagonais, formadas pelas variáveis de decisão em sua diagonal. Estas matrizes são utilizadas na obtenção das direções do método de Newton, logo podem ocorrer desvios, interferindo no desempenho do método.

Mesmo com a possibilidade de erros numéricos, estes métodos obtêm ótimos resultados quando aplicados a problemas de programação linear ou quadrática.

Os multiplicadores de Lagrange podem ser utilizados para extrair diversas informações importantes para análise de sensibilidade do problema.

Uma aplicação importante consiste no problema de fluxo de potência ótimo linearizado para o despacho de potência ativa. O método de pontos interiores primal-dual obtêm sucesso em grande maioria dos casos e situações. Nestes problemas, o método não converge quando limites operacionais impedem que se obtenha um despacho que satisfaça a demanda do sistema.

Casos em que os limites operacionais impedem que se obtenha um despacho ótimo são relacionados a sobrecargas no sistema. Estas sobrecargas podem ser ocasionadas devido a quedas de algumas linhas de transmissão, quedas de geradores, ou mesmo aumento de demanda acima da potência instalada ou da capacidade de transmissão do sistema.

Quando o sistema está sobrecarregado, na prática é possível, por um curto período de tempo, permitir que algumas restrições operacionais sejam violadas, como por exemplo, que uma unidade de geração trabalhe acima de sua capacidade máxima de produção ou que uma linha de transmissão transporte além de sua capacidade.

Situações de sobrecarga não são previstas pelo método primal-dual por violarem restrições operativas. Os multiplicadores de Lagrange apenas indicando a necessidade de expansão do sistema de geração e/ou transmissão, mas não onde devem ser feitos os investimentos para melhoria do sistema.

CAPÍTULO 3

RELAXAÇÃO VIA BARREIRA LOGARÍTMICA MODIFICADA

3.1 Introdução

No Capítulo 2 foi analisado o método de pontos interiores primal-dual seguidor de caminhos. Este método, apesar de muito eficiente, pode apresentar dificuldades numéricas ao tratar variáveis cujas componentes estejam muito próximas de zero devido à inversão de matrizes diagonais composta pelas componentes destas variáveis.

Soluções degeneradas podem nunca ser alcançadas, em alguns casos, valores próximos a estas soluções são encontrados, em outros o método pode até mesmo não convergir, mesmo com o controle eficiente de passos que foi definido.

Foi discutido também que quando o problema não é factível, os multiplicadores de Lagrange tendem ao infinito, reduzindo muito as informações obtidas.

Considerando o problema de fluxo de potência ótimo para o despacho de potência ativa, há situações operacionais de sobrecarga nas quais não é possível o atendimento de todas as restrições do problema formulado em (2.36). Nestes casos são interessantes soluções que, na prática, possam ser despachadas por um curto período de tempo, não colocando o sistema geração/transmissão em risco.

Para estas situações de emergência, pode-se reformular o problema (2.36), relaxando algumas de suas restrições, expressando permissão de violações de limites operacionais. Estas violações podem ser modeladas matematicamente como uma relaxação das variáveis de folga s_p e s_f da forma:

$$\begin{aligned} s_p &\geq -\delta_p^{-1} \\ s_f &\geq -\delta_f^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\delta_p > 0$ e $\delta_f > 0$ sejam suficientes para que $p > p_u$ e $f > f_u$ quando necessário.

Observe que a relaxação (3.1) possibilita que componentes das variáveis s_p e s_f se tornem negativas, fazendo com que estas deixem de ser interiores, o que era de se esperar, visto que a solução do problema não está no interior da região factível.

Mesmo com esta relaxação, o método seguidor de caminhos não pode ser utilizado, visto que faz uso de barreira logarítmica clássica nas variáveis de decisão, na qual a condição de existência se concentra na positividade destas variáveis.

A relaxação em (3.1) não satisfaz esta condição de existência. Uma forma de superar isto é mudar a função barreira de modo que sua condição de existência contemple a relaxação (3.1).

Uma candidata a substituir a barreira logarítmica clássica está nos trabalhos de Polyak [46, 47]. Nestes trabalhos, Polyak propõe o uso de outras funções de barreira, uma delas é a função barreira logarítmica modificada para as programações linear e quadrática.

Para um problema da forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \quad \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\Omega = \{x \in R^n | g_i(x) \geq 0\}$, a função barreira proposta é a seguinte:

Função Barreira Logarítmica Modificada (BLM)

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(x, \pi) = \begin{cases} f(x) - \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^m \pi_i \ln(\delta g_i(x) + 1) & , \text{ se } x \in \Omega_{\delta} \\ \infty & , \text{ se } x \notin \Omega_{\delta}. \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\Omega_{\delta} = \{x | \delta g_i(x) + 1 \geq 0\}$.

Esta função barreira se encaixa perfeitamente no desejado, visto que a condição de existência do logaritmo é $g_i(x) \geq -\delta^{-1}$ e, trabalhando com o conjunto relaxado Ω_{δ} , é possível gerar pontos infactíveis em relação ao conjunto Ω , mas nunca fora de Ω_{δ} . Observe ainda que quanto maior for o parâmetro δ , menor é a expansão do conjunto Ω .

Deste modo, com o objetivo de sanar as dificuldades citadas no Capítulo 2, e principalmente resolver o problema de despacho de potência em situações de sobrecarga citados na seção 2.5.2, este trabalho propõe uma relaxação nas variáveis primais de decisão utilizando a função barreira logarítmica modificada proposta por Polyak ao invés da função barreira clássica como usualmente.

A proposta deste trabalho traz modificações, como por exemplo, permitir que componentes das variáveis assumam valores nulos e também negativos no decorrer do processo iterativo. Deste modo, há a possibilidade destas variáveis serem interiores apenas ao atingir o ótimo do problema original, ou nem serem interiores, caso esta solução ótima não seja factível para o problema sem relaxação.

Em [57, 55, 56] é proposta uma estratégia similar de relaxação, onde a barreira logarítmica modificada é aplicada apenas nas variáveis de folga e de excesso.

Antes de aplicar esta mudança para as soluções do problema de fluxo de potência ótimo com sobrecargas, é apresentado o método de barreira modificada proposto por Polyak. Em seguida, são feitos alguns estudos em problemas de programação linear utilizando barreira logarítmica modificada para destacar as particularidades e mudanças provocadas.

3.2 O Método de Barreira Modificada

As funções citadas por Polyak [46, 47], são modificações das funções de barreira de Carrol [9] e de Frisch [18]. A desvantagem de usar tais funções é que tanto elas quanto suas derivadas não estão definidas na solução ótima x^* , além de crescerem infinitamente quando $x \rightarrow x^*$.

Polyak propôs uma solução para isto, relaxando o conjunto das restrições factíveis Ω .

Considere o problema (3.2) com as funções envolvidas de classe C^2 . Com a adição de um fator de deslocamento (de valor 1) dentro do termo logarítmico em (3.3), a convergência finita nos métodos do tipo barreira é alcançada.

Outra propriedade do método de barreira modificada é que o parâmetro de barreira δ não precisa crescer tanto para alcançar a solução, desde que os multiplicadores de Lagrange corretos, π_i , sejam obtidos, melhorando fortemente o condicionamento da Hessiana. Isto acontece se estes multiplicadores estiverem convergindo para a solução dual ótima do problema.

O método trabalha no conjunto relaxado Ω_δ , permitindo gerar pontos infactíveis em relação ao conjunto Ω , mas nunca fora de Ω_δ . Assim, Polyak combina as melhores propriedades da função Lagrangeana e da de barreira clássica, porém elimina suas deficiências.

Algumas propriedades importantes são:

- A matriz Hessiana não sofre problemas numéricos quando variáveis se aproximam da fronteira;
- Sua convergência é finita enquanto que a de barreira clássica é assintótica;
- Permite que a solução gerada possa estar na fronteira da região factível (no método da barreira clássica a solução pode estar próxima à fronteira, mas nunca alcançá-la).
- Representação explícita dos multiplicadores de Lagrange.

- Não há necessidade de um ponto inicial factível como nos métodos da barreira clássica.

Este método trata apenas de restrições de desigualdades, mas há extensões dele que podem ser aplicadas a problemas com restrições de igualdade e desigualdade, como é o caso do método primal-dual barreira modificada em [57, 55, 56, 6].

Este método é uma extensão do método de barreira clássica, mas diferentemente deste, aceita pontos inactíveis, fato que pode ser explorado para obter maiores informações sobre estes problemas.

Dentro desta classe de problemas inactíveis, há problemas que, se sua região factível for suficientemente expandida, este novo problema passa a ser factível. Para tais problemas diz-se que existe uma região viável Ω_δ que contém a região factível Ω . Estes problemas são chamados de Problemas Factíveis por Relaxação (PFR).

Muitos problemas de fluxo de potência ótimo com sobrecargas se encaixam muito bem nesta classe de problemas PFR, visto que se pudessem ter seus limites operacionais expandidos, seria possível obter um despacho, de curto prazo, capaz de satisfazer a demanda do sistema.

A seguir é apresentado o desenvolvimento da função BLM 3.3:

1. Multiplica-se por $\delta > 0$ as desigualdades do problema 3.2, obtendo-se:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } \delta g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. Adicina-se uma unidade a essas restrições;

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } \delta g_i(x) + 1 \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3. Aplica-se a função logarítmica e divide-se as desigualdades por δ :

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } \frac{1}{\delta} \ln(\delta g_i(x) + 1) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. Ao problema 3.6 associa-se uma função Lagrangeana

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(x, \pi) = f(x) - \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^m \pi_i \ln(\delta g_i(x) + 1) \quad (3.7)$$

Obtendo assim a função Barreira Logarítmica Modificada (BLM) em (3.3).

No problema 3.6 a condição de existência para a função logarítmica é:

$$\delta g_i(x) + 1 \geq 0 \implies g_i(x) \geq -\delta^{-1}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

Sejam x^* e π^* , respectivamente, a solução primal e dual do problema (3.2). A função BLM tem as seguintes propriedades para $\delta > 0$:

P1. $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(x^*, \pi^*) = f(x^*);$

P2. $\nabla \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(x^*, \pi^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \pi_i \nabla g_i(x) = 0.$

Segundo Polyak [47], mantendo o parâmetro de barreira δ constante, obtém-se raio de convergência linear, já aumentando este parâmetro passo a passo, obtém-se raio de convergência superlinear.

O Algoritmo 2 ilustra o Método de Polyak para problemas de programação convexa:

input: x^0 factível em Ω_δ , $\pi^0 = (1, 1, \dots, 1)^t \in (R)^m$, $\delta > 0$ e $k = 0$

1 **repeat**

2 $x^{k+1} \in \operatorname{argmin}_{x \in \Omega_\delta} \{ \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(x^k, \pi^k) \};$

3 Atualizar π^{k+1} ;

4 $k = k + 1;$

5 **until** Até as condições de KKT serem satisfeitas ;

Algoritmo 2: Método de Barreira Modificada.

A minimização de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(x^k, \pi^k)$ ocorre no espaço primal, enquanto as atualizações em π^k ocorrem no espaço dual. Para isso, se x^{k+1} é solução deste subproblema para um dado π^k e δ^k , então:

$$\nabla_x \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(x^{k+1}, \pi^k, \delta^k) = 0 \implies \nabla f(x^{k+1}) - \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i^k}{\delta^k g_i(x^{k+1}) + 1} \nabla g_i(x^{k+1}) = 0. \quad (3.9)$$

Comparando (3.9) com o gradiente da função Lagrangeana do problema (3.2) dado por:

$$\nabla(L)(x, \pi) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^m \pi_i \nabla g_i(x) \quad (3.10)$$

obtém-se a atualização dos multiplicadores de Lagrange:

$$\pi_i^{k+1} = \frac{\pi_i^k}{\delta^k g_i(x^{k+1}) + 1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Já a atualização do parâmetro de penalidade δ^k é a seguinte:

$$\delta^{k+1} = \beta\delta^k, \beta > 1. \quad (3.12)$$

esta regra é apresentada em trabalhos como [6, 12, 62, 61].

Vale salientar que apesar de o método de barreira modificada permitir pontos inactiváveis, estes pontos devem pertencer ao conjunto Ω_δ . Assim há a necessidade de controlar as soluções geradas.

3.3 Relaxando um Problema Linear e Suas Consequências

Nesta seção, aplica-se a mesma estratégia do método seguidor de caminhos, que usa barreira logarítmica clássica para impedir que as variáveis se tornem negativas, porém, é utilizada a função Barreira Logarítmica Modificada (BLM), afim de expandir a região factível do problema original.

Primeiramente considere o problema de programação linear na forma padrão (3.13).

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Conforme a condição de existência (3.8), relaxar a restrição $x \geq 0$ usando o parâmetro de barreira $\delta > 0$ é equivalente a ter o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq -\delta^{-1}e. \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $e = (1, \dots, 1)^t$ de dimensão apropriada.

Tratando a restrição a ser relaxada $x \geq 0$ do problema (3.13) como proposto em [47, 46, 42] e feito em (3.6), obtêm-se o seguinte problema modificado:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & \delta^{-1} \ln(\delta x_i + 1) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ao problema (3.15) associa-se a seguinte função BLM:

$$\mathcal{L}(x, y) = c^t x - \delta^{-1} \sum_{i=1}^n \pi_i \ln(\delta x_i + 1) - y^t (Ax - b) \quad (3.16)$$

sendo π e y vetores de multiplicadores de Lagrange.

A solução para o problema (3.14) é encontrada por meio da resolução de uma sequência de problemas irrestritos utilizando (3.16), aplicando sobre ela as condições necessárias de primeira-ordem, gerando um sistema de equações não lineares, como segue:

$$\nabla \mathcal{L}(x, y) = 0 \implies \begin{cases} c - (\delta X + I)^{-1} \pi - A^t y = 0 \\ Ax - b = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

onde $X = \text{diag}(x)$.

No sistema em (3.17) é introduzida a variável auxiliar z , como feito em [16, 22] mas para barreira clássica, através da seguinte substituição:

$$z_i = \frac{\pi_i}{\delta x_i + 1}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.18)$$

A substituição (3.18) deixa explícita a condição de complementaridade a ser satisfeita. Esta condição pode ser reescrita como:

$$\delta Z X e + z = \pi, \quad (3.19)$$

Assim, reescrevendo o sistema (3.17), tem-se as condições de otimalidade do Lagrangeano (3.16):

$$\begin{cases} Ax = b, x \geq -\delta \longrightarrow \text{(Factibilidade Primal)} \\ A^t y + z = c, z \geq 0 \longrightarrow \text{(Factibilidade Dual)} \\ \delta Z X e + z = \pi \longrightarrow \text{(Condição de Complementaridade)}. \end{cases} \quad (3.20)$$

O sistema (3.20) revela uma alteração importante na formulação com BLM. A condição de complementaridade do problema sofre uma perturbação diferente da usual, sendo agora um vetor de multiplicadores de Lagrange π e não mais um vetor com todas as componentes iguais (μe).

Esta alteração permite uma perturbação diferenciada para cada componente da condição complementar, em outras palavras, uma perturbação "personalizada".

Outro fato revelado por este sistema é que esta perturbação não tende ao vetor nulo como tradicionalmente, mas sim $\pi \longrightarrow z$. Esta convergência pode ser observada reescrevendo a condição complementar (3.19) da seguinte forma:

$$ZXe = \delta^{-1}(\pi - z). \quad (3.21)$$

Deste modo, com base em (3.21), pode-se entender a restrição complementar em (3.20) como sendo a condição complementar do problema original, perturbada de forma diferenciada:

$$\varphi = \delta^{-1}(\pi - z). \quad (3.22)$$

Assim, as condições de otimalidade do problema (3.15) podem ser escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Ax = b, x \geq -\delta & \longrightarrow \text{(Factibilidade Primal)} \\ A^t y + z = c, z \geq 0 & \longrightarrow \text{(Factibilidade Dual)} \\ ZXe = \varphi & \longrightarrow \text{(Condição de Complementaridade)}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Logo, com exceção a permissão de valores negativos, a única mudança está nas condições de otimalidade, mais precisamente no parâmetro de perturbação φ .

Com esta perturbação no sistema (3.23), a comparação com o método seguidor de caminhos, visto no Capítulo 2 é imediata.

A sequência μ^k de perturbações gerada no método seguidor de caminhos é tal que $\{\mu^k\} \rightarrow 0$ ao se aproximar do valor ótimo do problema original, satisfazendo a restrição $ZXe = 0$, Ou seja, a condição de complementaridade do problema original.

Analogamente para isso tem-se que ter a sequência $\{\varphi^k\} \rightarrow 0$ para que o valor ótimo do problema original seja atingido, em outras palavras, segundo (3.22) tem-se:

$$\{\varphi^k\} \rightarrow 0 \implies \{\delta^k\} \rightarrow \infty \text{ ou } \{\pi^k\} \rightarrow z^*, \quad (3.24)$$

onde z^* é o valor ótimo para a variável dual z .

Na prática, o parâmetro de barreira δ pode permanecer constante, ou mesmo crescer a cada iteração, mas sem permitir que $\delta^k \rightarrow \infty$, ou seja, impondo um limitante superior δ_{max} suficientemente grande, logo para atingir o valor ótimo do problema original, basta a convergência $\{\pi^k\} \rightarrow z^*$.

Esta convergência é assegurada devido à definição da variável z em (3.18), juntamente com a forma com que é atualizado o multiplicador π , que tem atualização dual [47, 46, 21] definida por:

$$\pi_i^{k+1} = \frac{\pi_i^k}{\delta^k x_i^{k+1} + 1}. \quad (3.25)$$

Observe que as expressões do lado direito de (3.18) e (3.25) são quase idênticas, mas, apesar disto, a variável z , assim como feito em [16, 22], não sofre este tipo de atualização. Esta, por sua vez, é atualizada conforme as demais variáveis, ou seja, através das direções de Newton, sendo igual à π apenas ao obter o valor ótimo do problema original.

Voltando aos sistemas (3.20) e (3.23), apesar de equivalentes, levam a enfoques diferenciados no modo de resolução. Em outras palavras, no sistema (3.20), para o termo z somado no lado esquerdo da terceira equação, ao se aplicar o método de Newton, este pode ser considerando como variável.

Para o sistema (3.23), este mesmo termo z pode ser visto como um "parâmetro". Esse olhar diferenciado sobre estes sistemas equivalentes acaba gerando consequências distintas no que se refere a obtenção das direções de Newton.

O enfoque no sistema (3.23) deixa clara a perturbação no sistema original, e possibilita concluir que o multiplicador de Lagrange π tende à variável dual z quando um ótimo é alcançado.

Apesar das informações obtidas com o sistema (3.23), este não é apropriado para nossos objetivos, pois ao aplicar o método de Newton, continua-se com problemas numéricos ao se aproximar de valores nulos, conforme pode ser observado no Jacobiano obtido em (3.26).

$$J = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Como a principal mudança aparente nas condições (3.23) é o parâmetro de perturbação φ , é imediato perceber que o vetor de resíduos sofra apenas mudanças na variável r_c , ou seja:

$$r_c = \varphi^k - Z^k X^k e$$

Assim, o sistema a ser resolvido é o seguinte:

$$\begin{cases} Adx = r_p \\ A^t dy + dz = r_d \\ Zdx + Xdz = r_c. \end{cases} \quad (3.27)$$

Isolando a variável d_z na última equação do sistema (3.27), obtêm-se:

$$d_z = X^{-1}[r_c - Z d_x], \quad (3.28)$$

como a matriz X é composta pelas componentes da variável x em sua diagonal e há a possibilidade de algumas destas se aproximarem muito de zero, ou mesmo serem nulas, a inversão desta matriz

se torna problemática, pois nestas condições apresentaria valores tendendo ao infinito, por X^{-1} ser diagonal é fácil perceber que isso a tornaria mal condicionada.

Além disso, no Apêndice A mostra-se que não é possível garantir que a matriz M do sistema final a ser resolvido seja definida positiva, gerando mais uma dificuldade.

Já o enfoque sobre o sistema (3.20) é mais promissor com relação a este objetivo, pois aplicando o Método de Newton, tem-se o seguinte Jacobiano:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ \delta Z & 0 & (\delta X + I) \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Este Jacobiano já trás uma modificação em relação ao Jacobiano obtido em (3.26), na linha referente a condição complementar, onde anteriormente encontrava-se o problema.

Novamente, o vetor de resíduos sofre alterações apenas na componente r_c :

$$r_c = \pi^k - \delta Z^k X^k e - z^k$$

Obtidos o vetor de resíduos e o Jacobiano, o sistema a ser resolvido é o seguinte:

$$\begin{cases} Adx = r_p \\ A^t dy + dz = r_d \\ \delta Z dx + \delta X dz + dz = r_c. \end{cases} \quad (3.30)$$

No sistema (3.30), isola-se a variável d_z na última equação, obtendo:

$$d_z = D_{\delta x}^{-1}[r_c - \delta Z d_x], \quad (3.31)$$

onde $D_{\delta x} = (\delta X + I)$.

Observe agora que, diferentemente de (3.28), no qual havia problemas quando alguma componente de x se aproximava de zero, em (3.31) este problema é transladado apenas para a barreira, ou seja, deve-se evitar apenas que os valores das componentes de x se aproximem de $-\delta^{-1}$, o que pode ser feito facilmente através de um controle de passos eficiente.

Note que, agora soluções degeneradas podem ser alcançadas sem causar problemas de mau condicionamento das matrizes envolvidas.

Com a preocupação com valores próximos à zero posta de lado, e a relaxação permitindo que componentes da variável de decisão assumam valores maiores que $-\delta^{-1}$, obtêm-se uma maior liberdade para caminhar, possibilitando que um valor ótimo obtido esteja realmente sobre a fronteira da

região factível original, ou mesmo soluções degeneradas sejam atingidas realmente, fato que pode não acontecer com a método seguidor de caminhos.

Continuando com a resolução do sistema (3.30), substitui-se (3.31) na segunda equação, obtendo o sistema equivalente:

$$\begin{cases} Adx = r_p \\ A^t dy - \delta D_{\delta x}^{-1} Z dx = r_d - D_{\delta x}^{-1} r_c. \end{cases} \quad (3.32)$$

Agora, isolando dx na segunda equação do sistema (3.32) obtêm-se:

$$dx = -D^{-1}[r_d - D_{\delta x}^{-1} r_c - A^t dy], \quad (3.33)$$

onde $D = \delta D_{\delta x}^{-1} Z$.

Por fim, substituindo (3.33) na primeira equação do sistema (3.32), obtêm-se a variável dy :

$$dy = M^{-1}[r_p + AD^{-1}(r_d - D_{\delta x}^{-1} r_c)], \quad (3.34)$$

onde $M = AD^{-1}A^t$.

A matriz M envolvida em (3.34), além de simétrica, é também definida positiva, visto que os elementos da diagonal da matriz $D_{\delta x}$ são positivos e Z , por (3.18), também apresenta diagonal positiva, implicando D simétrica definida positiva. Deste modo, é possível utilizar a fatoração de Cholesky e reduzir o custo computacional da resolução do sistema (3.34).

O problema com valores próximos a zero pode ser contornado, mas é preciso evitar que as componentes de x se aproximem da barreira, isto é feito na seção seguinte.

3.4 Controle de Passos e Atualização de Variáveis

Um ponto importante a ser analisado é o controle dos passos do método de Newton. Este controle não deve ser o mesmo utilizado no método seguidor de caminhos, visto que estes impedem que as variáveis se tornem negativas ou nulas.

No método de Newton a atualização das variáveis é feita pela equação:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + dx_i^k.$$

De modo análogo ao feito no Capítulo 2, Seção 2.3, pode-se definir um controle de passos eficiente

para a abordagem com BLM que permita que as componentes das variáveis com relaxação possam assumir valores negativos, mais precisamente valores no intervalo $(-\delta^{-1}, 0]$. A atualização deve ser da seguinte maneira:

$$x_i^k + \alpha dx_i^k \geq -\delta^{-1}.$$

Logo, pode-se assumir $\alpha \geq -(x_i^k + \delta^{-1})/dx_i^k$ para algum i .

Como x^k é factível para o problema relaxado da iteração k , ou seja, $x_i^k \geq -\delta^{-1}$ segue que $x_i^k + \delta^{-1} \geq 0$. Portanto, assim como antes, deve-se preocupar apenas com as componentes $dx_i^k < 0$. Deste modo, tem-se a seguinte expressão:

$$\alpha = \min\{-(x_i^k + \delta^{-1})/dx_i^k, dx_i^k < 0\}. \quad (3.35)$$

O valor de α obtido em (3.35) não pode ser maior que 1, e para que não se tenham componentes x_i iguais a $-\delta^{-1}$ toma-se α_p da seguinte forma:

$$\alpha_p = \min(\tau\alpha, 1), \quad \tau \approx 1. \quad (3.36)$$

O controle de passo obtido em (3.36) evita apenas que as componentes da variável x se tornem menores ou iguais a $-\delta^{-1}$, não impedindo que se tornem nulas, já que esta condição é agora permitida.

Para as demais variáveis em questão, y e z , como são variável livre e interior respectivamente, o controle de passos segue no modo tradicional.

Mas ainda há um pequeno problema, o parâmetro de barreira δ pode ser mantido fixo ou mesmo aumentado a cada iteração. Caso decida-se por seu aumento, esta atualização pode gerar uma sequência $\delta^k \rightarrow \infty$, ou seja, $(\delta^k)^{-1} \rightarrow 0$.

Dependendo de como for feita, esta atualização pode deixar pontos infactíveis para o problema relaxado da iteração $k + 1$, já que a cada iteração, δ^{k+1} gera um novo problema a ser resolvido. Esta não factibilidade acontece quando há componentes x_i^k muito próximas de $-(\delta^{-1})^k$, de modo que $-(\delta^k)^{-1} \leq x_i^k \leq -(\delta^{k+1})^{-1}$ para algum i .

Para contornar/evitar esta não factibilidade basta primeiramente atualizar a variável $x^{k+1} = x^k + \alpha_p dx$ e depois o parâmetro δ^{k+1} da seguinte forma:

$$\delta^{k+1} = \begin{cases} \rho\delta^k & , \text{ se } x_i^{k+1} \geq -(\rho\delta)^{-1} \\ \delta^k & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (3.37)$$

onde $\rho > 1$ é um fator de correção.

Lembrando que δ não precisa crescer infinitamente, na prática esta atualização pode ser feita até

um $\delta_{max} > 0$ suficientemente grande. Assim o número de condição da Hessiana da função barreira modificada permanece limitado conforme se aproxima da solução, ao contrário do caso clássico [42].

Contornado os possíveis problemas de infactibilidade pelo controle de passos, focamos na atualização do parâmetro de barreira, visto que este influencia nas variáveis de decisão.

Em [36] este parâmetro é atualizado da seguinte maneira:

$$\delta^{k+1} = \delta^k \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{\tau}} \right)^{-1}. \quad (3.38)$$

onde $\eta = \min\{\delta x_i + 1\}$ e τ é o número de restrições de desigualdade do problema.

A atualização do vetor de multiplicadores de Lagrange π pode ser feita como apresentado em (3.25), ou de forma equivalente, como feito em [47], da seguinte forma:

$$\pi_i^{k+1} = \frac{\pi_i^k (\delta^{k+1})^{-1}}{x_i^{k+1} + (\delta^{k+1})^{-1}}. \quad (3.39)$$

É importante salientar que os valores tanto para δ quanto para ρ exercem forte influência no comportamento do método, principalmente quanto ao número de passos de Newton necessários para atingir o valor ótimo do problema original.

3.5 Inicializações e Critérios de Convergência

Para o método primal-dual seguidor de caminhos, a inicialização das variáveis deve ser de forma que estas sejam interiores, ou seja, com componentes maiores que zero. Uma maneira pode ser tomando-se pontos no interior da região factível, conforme feito no Capítulo 2, na Seção 2.4.

Esta nova abordagem não tem a obrigatoriedade de que os pontos sejam factíveis, mas a inicialização das variáveis pode ser feita da mesma forma, já que o interior da região factível original está contido no interior da região factível relaxada.

Para o parâmetro de barreira δ , caso se queira obter a solução do problema original sem relaxação, melhores resultados são obtidos quando este parâmetro é inicializado com um valor relativamente grande [42] se mantido fixo, ou atualizado com ρ suficientemente grande. Mas caso o problema não tenha uma solução factível e se deseja obter uma solução viável, pode-se mantê-lo fixo de modo a fazer com que a região relaxada contenha tal solução.

O critério de convergência também é o mesmo apresentado no Capítulo 2 quando se deseja a solução do problema original.

Quando o objetivo é uma solução do problema relaxado, fora da região original, basta verificar as condições de otimalidade primal e dual, desconsiderando a complementaridade, uma vez que esta só

seria satisfeita caso houvesse um valor ótimo para o problema original.

Com todos os critérios estabelecidos, abaixo segue um pseudo-algoritmo do método proposto para programação linear:

<p>input : $\pi > 0, 0 < \rho \leq 1, (x_0, y_0, z_0)$ com $x_0 \geq -\delta^{-1}, z_0 \geq 0, \tau \in (0, 1)$</p> <p>output: (x^*, y^*, z^*)</p> <p>1 $k=0$;</p> <p>2 while Não satisfaz as condições de KKT e $k < max$ do</p> <p>3</p> <p>4 $k = k + 1$;</p> <p>5 $\varphi = \pi - z$;</p> <p>6 $r_p = b - Ax^k$;</p> <p>7 $r_d = c - A^t y^k - z^k$;</p> <p>8 $r_c = \varphi - \delta Z^k X^k e$;</p> <p>9 $D_{\delta x} = (\delta X^k + 1)$;</p> <p>10 $D = \delta D_{\delta x}^{-1} Z$;</p> <p>11 $d_y = (AD^{-1}A^t)^{-1}[r_p + AD^{-1}(r_d - D_{\delta x}^{-1}r_c)]$;</p> <p>12 $d_x = -D^{-1}(r_d - D_{\delta x}^{-1}(r_c - A^t d_y))$;</p> <p>13 $d_z = D_{\delta x}^{-1}(r_c - \delta Z^k d_x)$;</p> <p>14 $\alpha_p = \min(1, \tau \min_{dx_i < 0} \{-\frac{x_i^k + (\delta^k)^{-1}}{dx_i}\})$;</p> <p>15 $\alpha_d = \min(1, \tau \min_{dz_i < 0} \{-\frac{z_i^k}{dz_i}\})$;</p> <p>16 $x^{k+1} = x^k + \alpha_p dx$;</p> <p>17 $y^{k+1} = y^k + \alpha_d dy$;</p> <p>18 $z^{k+1} = z^k + \alpha_d dz$;</p> <p>19 $\pi_i = \frac{\pi_i (\delta^k)^{-1}}{x_i^k + (\delta^k)^{-1}}$;</p> <p>20 $\delta^{k+1} = \begin{cases} \rho \delta^k & , \text{ se } x_i^{k+1} \geq -(\rho \delta)^{-1} \\ \delta^k & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$</p> <p>21 end</p>
--

Algoritmo 3: Pseudo-Algoritmo para implementação do método com relaxação para um problema linear

Na seção seguinte são feitos estudos de casos com alguns problemas lineares visando verificar o comportamento do método com a mudança da função barreira e o novo controle de passos.

3.6 Estudos de Casos

Para os estudos, são utilizadas as mesmas configurações apresentadas no Capítulo 2, Seção 2.5.

A fim de testar o método proposto na Seção anterior, foram escolhidos alguns problemas lineares de pequeno porte, com várias características distintas, tais como com solução degenerada, múltiplas soluções, problemas ilimitados, com matrizes A esparsas, e até mesmo problemas sem pontos interiores. Estes problemas foram criados a fim de calibrar o parâmetro δ para uso nos demais, e podem ser encontrados em <https://sites.google.com/site/maykcoelho/otimizacao/pl-pequeno-porte>.

Os 13 primeiros problemas são nomeados conforme a forma e/ou tipo de solução, por exemplo, o problema RETANG1DEG possui região factível retangular e solução degenerada, já a problema TRIANG2ILIM tem uma região triangular e ilimitada. O PROBLEMA-10 possui solução degenerada e os demais problemas apresentam matriz A esparsa.

Na Tabela 3.1 a coluna MPI refere-se aos resultados com o método de pontos interiores primal-dual, e a coluna MPIBLM aos resultados do método proposto. Como o objetivo a princípio é resolver os problemas em questão, primeiramente utilizou-se $\delta = 1000$ fixo em todas as iterações, depois se fez δ variando de 10 até o máximo de 10000. Como os resultados obtidos foram bem semelhantes, são exibidos os estudos com parâmetro de barreira fixo $\delta = 1000$.

Problema	$A_{m \times n}$	MPI			MPIBLM		
		It.	Tempo(s)	F. Objetivo	It.	Tempo(s)	F. Objetivo
RETANG1DEG	$A_{4 \times 6}$	9	0,004	0,00	8	0,006	0,00
POLIG1DEG	$A_{6 \times 8}$	9	0,004	1,50	9	0,006	1,50
POLIG2DEG	$A_{6 \times 8}$	10	0,003	0,67	10	0,004	0,67
POLIG22	$A_{2 \times 4}$	10	0,002	0,00	6	0,002	0,00
POLIG2	$A_{5 \times 7}$	10	0,003	0,67	8	0,002	0,67
POLIG4	$A_{5 \times 7}$	10	0,002	8,00	8	0,002	8,00
POLIGDUAL	$A_{6 \times 8}$	9	0,002	-3,00	9	0,003	-3,00
TRIANG1ADEG	$A_{4 \times 6}$	12	0,003	3,00	6	0,002	3,00
TRIANG1BDEG	$A_{4 \times 6}$	12	0,003	3,00	8	0,006	3,00
TRIANG1C	$A_{3 \times 5}$	9	0,002	-6,00	8	0,003	-6,00
TRIANG2ILIM	$A_{2 \times 4}$	11	0,002	10,00	6	0,002	10,00
TRIANG3DUAL	$A_{3 \times 5}$	10	0,002	0,00	7	0,003	0,00
QUADRADO1DUAL	$A_{4 \times 6}$	8	0,002	11,00	8	0,003	11,00
PROBLEMA-10	$A_{2 \times 4}$	10	0,002	0,00	5	0,001	0,00
PROBLEMA-11	$A_{77 \times 760}$	15	0,103	8,67	12	0,084	8,67
PROBLEMA-12	$A_{397 \times 2750}$	14	0,796	905,38	14	0,874	905,38

Tab. 3.1: Aplicação dos métodos MPI e MPIBLM em problemas lineares de Pequeno Porte.

Note que, para os problemas da Tabela 3.1 os números de iterações do MPI são sempre maiores

ou iguais ao do método proposto, porém, é possível perceber também que os tempos por iteração são sempre menores ou iguais aos obtidos pelo MPIBLM.

Com o parâmetro $\delta = 1000$ parcialmente calibrado, e fixado o número máximo de iterações em 100, são feitos testes em problemas de porte maior.

A seguir são apresentados resultados com problemas da base de dados NETLIB, encontrados no formato ASCII em <http://www.numerical.rl.ac.uk/cute/netlib.html>. Estes problemas são de minimização e foram separados em duas classes: Médio Porte (Tabela 3.2) e Grande Porte (Tabela 3.3).

Problema	$A_{m \times n}$	MPI			MPIBLM		
		It.	Tempo(s)	F. Objetivo	It.	Tempo(s)	F. Objetivo
AFIRO	$A_{27 \times 51}$	10	0,005	-464,74	11	0,005	-464,75
AGG	$A_{488 \times 615}$	24	0,241	-35990365,41	21	0,228	-36127182,06
AGG2	$A_{516 \times 758}$	33	0,472	-20238979,55	55	1,237	-15186664,18
AGG3	$A_{516 \times 758}$	32	0,464	10313644,16	25	0,477	10583381,43
BANDM	$A_{305 \times 472}$	42	0,211	-158,55	32	0,195	-160,99
BEACONFD	$A_{173 \times 295}$	16	0,050	33594,03	11	0,042	34472,72
BLEND	$A_{74 \times 114}$	18	0,017	-30,81	20	0,025	-30,81
BRANDY	$A_{220 \times 303}$	22	0,205	1519,27	23	0,181	1522,73
DEGEN2	$A_{444 \times 757}$	22	0,348	-1433,27	19	0,345	-1429,06
E226	$A_{223 \times 472}$	42	0,197	-18,74	29	0,139	-18,80
FORPLAN	$A_{161 \times 492}$	45	0,210	-1360,22	60	0,381	-1093,81
ISRAEL	$A_{174 \times 316}$	44	0,112	-895883,13	52	0,273	-833602,85
LOTFI	$A_{153 \times 366}$	24	0,062	-25,25	24	0,066	-25,26
SC50A	$A_{50 \times 78}$	14	0,014	-64,53	13	0,013	-64,58
SC50B	$A_{50 \times 78}$	8	0,007	-69,96	9	0,006	-70,00
SC105	$A_{105 \times 163}$	12	0,011	-52,16	12	0,021	-52,20
SC205	$A_{205 \times 317}$	14	0,035	-52,20	14	0,034	-52,20
SCAGR7	$A_{129 \times 185}$	13	0,019	-2330243,41	16	0,023	-2330125,37
SCAGR25	$A_{471 \times 671}$	29	0,215	-14745874,75	28	0,196	-14739515,02
SCFXM1	$A_{330 \times 600}$	32	0,238	18420,98	32	0,252	18663,92
SCSD1	$A_{77 \times 760}$	15	0,123	8,67	12	0,085	8,67
SHARE1B	$A_{117 \times 253}$	45	0,077	-76523,55	33	0,100	-75192,75
SHARE2B	$A_{96 \times 162}$	15	0,022	-415,46	13	0,017	-412,17
TUFF	$A_{333 \times 630}$	100	1,397	0,00	34	0,482	0,00

Tab. 3.2: Aplicação dos métodos MPI e MPIBLM em problemas NETLIB de Médio Porte

Note na Tabela 3.2 que alguns valores obtidos nas colunas de função objetivo não são iguais. Para os dois primeiros problemas, *AFIRO* e *AGG*, por exemplo, os valores obtidos pelo método proposto são menores que o obtido pelo MPI. Isto ocorre devido a maior aproximação de valores de fronteira obtidos pelo método MPIBLM.

Para os problemas seguintes, *AGG2* e *AGG3*, o método proposto obtém valor de função objetivo maior que o MPI. Isto ocorre devido ao parâmetro δ , que mantido fixo e igual para todos os problemas, influencia no critério de convergência, parando antes do valor ótimo do problema.

Assim, manter o mesmo parâmetro $\delta = 1000$ para todos os problemas não é uma escolha eficiente. Variando o parâmetro δ é possível obter valores melhores para estes problemas.

O mesmo pode ser observado para os dados da Tabela 3.3.

Problema	$A_{m \times n}$	MPI			MPIBLM		
		It.	Tempo(s)	F. Objetivo	It.	Tempo(s)	F. Objetivo
25FV47	$A_{821 \times 1876}$	52	3,487	5506,58	41	2,907	5530,00
BNL1	$A_{643 \times 1586}$	54	2,158	1979,99	42	1,807	2026,16
BNL2	$A_{2324 \times 4486}$	79	14,487	1812,35	37	7,546	1815,98
CZPROB	$A_{929 \times 3562}$	86	8,514	2186015,16	77	8,747	2245074,39
DEGEN3	$A_{1503 \times 2604}$	44	5,073	-986,88	21	2,594	-967,06
FFFFF800	$A_{524 \times 1028}$	36	0,789	555702,09	37	0,786	555750,09
FIT1P	$A_{627 \times 1677}$	23	1,172	9150,67	24	1,319	9149,47
GANGES	$A_{1309 \times 1706}$	24	0,990	-257940,02	23	1,036	-257838,32
NESM	$A_{662 \times 3105}$	16	1,366	0,00	14	1,382	0,00
PEROLD	$A_{625 \times 1594}$	100	3,839	-1830845,12	31	1,424	-8386,49
QAP8	$A_{912 \times 1632}$	14	1,149	203,68	3	0,273	307,92
QAP12	$A_{3192 \times 8856}$	22	27,606	523,44	6	4,033	511,97
QAP15	$A_{6330 \times 22275}$	33	218,148	1042,25	5	19,523	1083,98
SCFXM2	$A_{660 \times 1200}$	40	0,917	36667,79	43	0,951	36726,01
SCFXM3	$A_{990 \times 1800}$	41	1,909	54912,50	42	1,862	55029,81
SCSD6	$A_{147 \times 1350}$	14	0,303	50,57	13	0,265	50,53
SCSD8	$A_{397 \times 2750}$	14	0,888	905,38	14	0,920	905,08
SEBA	$A_{515 \times 1036}$	90	3,654	15261,45	50	2,422	21825,83
SHIP08L	$A_{778 \times 4363}$	51	7,305	1912392,24	17	2,546	2089032,16
SHIP08S	$A_{778 \times 2467}$	41	2,076	1923021,80	16	0,814	2067035,66
SHIP12L	$A_{1164 \times 5533}$	81	18,409	1473009,18	40	9,645	1466629,72
SHIP12S	$A_{1151 \times 2869}$	48	3,216	1491877,66	39	2,855	1490713,22
TRUSS	$A_{1000 \times 8806}$	19	10,829	459293,51	18	10,133	459279,25
WOOD1P	$A_{244 \times 2595}$	16	1,064	1,44	16	1,195	1,44
WOODW	$A_{1098 \times 8418}$	41	21,540	1,31	24	12,974	1,32

Tab. 3.3: Aplicação dos métodos MPI e MPIBLM em problemas NETLIB de Grande Porte

Os resultados obtidos até então são satisfatórios. O objetivo não é competir com o método de pontos interiores primal-dual, mas sim resolver problemas PFR, como por exemplo, problemas de fluxo de potência ótimo com sobrecarga que, se relaxados, possuem solução.

3.7 Relaxando Problemas Quadráticos Convexos com Variáveis Canalizadas

Assim como feito no Capítulo 2, amplia-se o olhar a problemas com funções quadráticas e restrições lineares com variáveis canalizadas. Considerando o problema (3.13), adicionam-se o termo quadrático $\frac{1}{2}x'Qx$ à função objetivo e a canalização na variável x às restrições obtendo assim o problema quadrático com variáveis canalizadas (2.1).

A forma com que foi obtido o problema (2.2) teve como objetivo anular o limitante inferior da canalização original, evitando também um aumento no número de variáveis do problema, mas a forma padrão do problema (2.1) pode também ser obtida de outra maneira, reescrevendo a restrição de canalização como duas outras e acrescentando variáveis de folga e de excesso, ou seja:

$$l \leq x \leq u \longrightarrow \begin{cases} x \leq u \\ x \geq l \end{cases} \implies \begin{cases} x + s_u = x_u \\ x - s_l = x_l \\ s_u \geq 0 \\ s_l \geq 0. \end{cases}$$

Esta maneira resulta em um aumento no número de variáveis do problema.

Aparentemente esta maneira parece ser menos eficaz que a forma obtida anteriormente, mas quando se trata de relaxação de variáveis, a forma (3.7) faz com que a relaxação possa ser aplicada apenas nas variáveis de folga e de excesso do problema, deixando a variável de decisão x sem nenhum tipo de barreira, enquanto que a forma padrão em (2.2) faz com que a relaxação seja feita em todas as variáveis primais.

Por critério de comparação com a formulação apresentada no Capítulo 2, é utilizado o problema padrão em (2.2). Deste modo, tem-se o seguinte problema equivalente à relaxação na variável de decisão x e na variável de folga s :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x + \frac{1}{2}x^t Q x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x + s = x_u \\ & x \geq -\delta^{-1}e \\ & s \geq -\delta^{-1}e. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Onde $e = (1, \dots, 1)^t$ de dimensão adequadas.

Observe que a relaxação acima ao permitir que s se torne negativa, implica na possibilidade de violação do limite superior de x . Esta pequena liberdade alcançada permite que se caminhe por soluções fora da região Ω , porém factíveis à região Ω_δ .

Deste ponto em diante o procedimento é feito como na Seção 3.3. Para o problema (3.40) gera-se o seguinte problema com BLM:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x - \delta^{-1} (\pi_{x_i} \sum \ln(\delta x_i + 1) + \pi_{s_i} \sum \ln(\delta s_i + 1)) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x + s = x_u. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sendo $\psi(x, s, \pi_x, \pi_s) = \pi_{x_i} \sum \ln(\delta x_i + 1) + \pi_{s_i} \sum \ln(\delta s_i + 1)$, o problema (3.41) nos fornece a seguinte função Lagrangeana barreira modificada:

$$\mathcal{L}(x, s, y, w) = c^t x + \frac{1}{2} x^t Q x - \delta^{-1} \psi(x, s, \pi_x, \pi_s) - y^t (Ax - b) + w^t (x + v - x_u). \quad (3.42)$$

Com isto obtêm-se facilmente as seguintes condições de KKT do problema modificado (3.40):

$$\nabla \mathcal{L}(x, s, y, w) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} c + Qx - (\delta X + I)^{-1} \pi_x + A^t y + w = 0 \\ \quad \quad \quad -(\delta S + I)^{-t} \pi_s + w = 0 \\ \quad \quad \quad Ax - b = 0 \\ \quad \quad \quad x + s - x_u = 0 \\ \quad \quad \quad (x, s) \geq -\delta \\ \quad \quad \quad (w, z) \geq 0 \\ \quad \quad \quad y \quad \text{livre.} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Fazendo o mesmo tipo de substituição de variável feito em (3.18):

$$z_i = \frac{\pi_{x_i}}{\delta x_i + 1}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.44)$$

Pode-se reescrever as condições (3.43) como:

$$\nabla \mathcal{L}(x, s, y, w) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x + s = x_u \\ -Qx + A^t y - w + z = c \\ \delta Z X e + z = \pi_x \\ \delta W S e + w = \pi_s. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Assim, tem-se que resolver o seguinte sistema para obter as direções de Newton a serem seguidas:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 \\ -Q & 0 & A^t & I & -I \\ \delta Z & 0 & 0 & (\delta X + I) & 0 \\ 0 & \delta W & 0 & 0 & (\delta S + I) \end{bmatrix}}_{J_{\mathcal{L}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_x \\ d_s \\ d_y \\ d_z \\ d_w \end{bmatrix}}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} r_x \\ r_s \\ r_y \\ r_z \\ r_w \end{bmatrix}}_r. \quad (3.46)$$

onde $J_{\mathcal{L}}$ é a matriz Jacobiana de (3.45), d é o vetor de direções e r é o vetor de resíduos definido por:

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_s \\ r_y \\ r_z \\ r_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax \\ x_u - x - s \\ c + Qx - A^t y + w - z \\ \pi_z - z - \delta Z X e \\ \pi_w - w - \delta W S e. \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Observe que a matriz Jacobiana em (3.46) apresenta mudanças com relação a matriz Jacobiana em (2.10). Estas mudanças estão concentradas exclusivamente das duas últimas linhas, se referindo apenas às condições de complementaridade. É possível observar também que, o sistema $J_{\mathcal{L}}^{-1}$ não se torna mal condicionada conforme a variável x se aproxima de valores de fronteira da região Ω .

O sistema (3.46) pode ser reescrito como:

$$\Rightarrow \begin{cases} Adx = r_x \\ dx + ds = r_s \\ -Qdx + A^t dy - dw + dz = r_y \\ \delta Z dx + D_x dz = r_z \\ \delta W ds + D_s dw = r_w. \end{cases} \quad (3.48)$$

onde $D_x = (\delta X + I)$ e $D_s = (\delta S + I)$ são matrizes diagonais.

No sistema (3.48) pode-se isolar as variáveis ds , dz e dw da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} ds &= r_s - d_x \\ dz &= D_x^{-1}(r_z - \delta Z dx) \\ dw &= D_s^{-1}(r_w - \delta W ds), \end{aligned} \quad (3.49)$$

Substituindo-as na terceira equação de (3.45) obtêm-se o sistema equivalente abaixo:

$$\begin{cases} Adx = r_x \\ -Ddx + A^t dy = \tilde{r}_y, \end{cases} \quad (3.50)$$

Onde:

$$D = Q + \mu^{-1}D_x^{-1}Z + \mu^{-1}D_s^{-1}W$$

$$\tilde{r}_y = r_y - D_x^{-1}r_z + D_s^{-1}(r_w - \mu^{-1}Wr_s).$$

Observe que D_x^{-1} e D_s^{-1} não apresentam problemas numéricos conforme x e s se aproximam de valores nulos, podendo assim, obter soluções no qual x apresente componente nula e também soluções que estejam na fronteira da região factível, ou seja, quando s apresentar componente nula.

Na segunda equação de (3.50) pode-se isolar d_x como segue:

$$d_x = D^{-1}(\tilde{r}_y - A^t dy). \quad (3.51)$$

Substituindo d_x na equação restante, isola-se d_y da seguinte forma:

$$d_y = M^{-1}\tilde{r}_x, \quad (3.52)$$

onde

$$M = AD^{-1}A^t$$

$$\tilde{r}_x = r_x + AD^{-1}\tilde{r}_y.$$

Como em (2.22), é possível verificar que a matriz M é simétrica definida positiva e para resolução deste sistema pode-se usar a fatoração de Cholesky.

A troca da barreira logarítmica clássica pela barreira logarítmica modificada traz benefícios interessantes não apenas para a resolução do problema de fluxo de potência ótimo no despacho de potência ativa em casos de sobrecarga, mas também para outros problemas cuja solução possa estar fora da região factível Ω do problema original, mas dentro na região com relaxação Ω_δ .

Esta troca de função barreira permite alcançar soluções degeneradas ou mesmo na fronteira da região Ω sem gerar problemas numéricos como no método de pontos interiores seguidor de caminhos, expandindo ainda mais sua aplicabilidade a problemas antes deixados sem solução.

O controle de passos para as variáveis na relaxação é o mesmo que o deduzido na Seção 3.4 e para as demais o controle é feito como usualmente.

Assim, com todos os critérios e parâmetros estabelecidos, segue abaixo um pseudo-algoritmo do método proposto para problemas quadráticos com variáveis canalizadas:

input : $\delta > 0$, (x_0, y_0, z_0) com $x_0, s_0 > -\delta^{-1}$, $z_0 > 0$, $(\pi_x, \pi_s) > 0$, $\tau \in (0, 1)$
output: (x^*, y^*, z^*)

- 1 $k=0$;
- 2 **while** *Não satisfaz as condições de KKT* **do**
- 3 **if** $k > \max$ **then**
- 4 **return** Máximo de iterações;
- 5 **end**
- 6 $k = k + 1$;
- 7 $\varphi_z = \pi_z - z$;
- 8 $\varphi_w = \pi_w - w$;
- 9 $r_x = b - Ax$;
- 10 $r_s = u - x - s$;
- 11 $r_y = c + Qx - A^t y + w - z$;
- 12 $r_z = \varphi_z - \delta ZXe$;
- 13 $r_w = \varphi_w - \delta WSe$;
- 14 $D_{\delta x} = (\delta X + I)$;
- 15 $D_{\delta s} = (\delta S + I)$;
- 16 $D = Q + \delta D_{\delta x}^{-1} Z + \delta D_{\delta s}^{-1} W$;
- 17 $d_y = (AD^{-1}A^t)^{-1}[r_x + AD^{-1}(r_y - D_{\delta x}^{-1}r_z + D_{\delta s}^{-1}(r_w - \delta W r_s))]$;
- 18 $d_x = -D^{-1}[r_y - D_{\delta x}^{-1}r_z + D_{\delta s}^{-1}(r_w - \delta W r_s) - A^t d_y]$;
- 19 $d_s = r_s - d_x$;
- 20 $d_z = D_{\delta x}^{-1}[r_z - \delta Z d_x]$;
- 21 $d_w = D_{\delta s}^{-1}[r_w - \delta W d_s]$;
- 22 $\alpha_p = \min(1, \tau \min_{dx_i < 0} \{-\frac{x_i + \delta^{-1}}{dx_i}\}, \tau \min_{ds_i < 0} \{-\frac{s_i + \delta^{-1}}{ds_i}\})$;
- 23 $\alpha_d = \min(1, \tau \min_{dz_i < 0} \{-\frac{z_i}{dz_i}\}, \tau \min_{dw_i < 0} \{-\frac{w_i}{dw_i}\})$;
- 24 $x = x + \alpha_p d_x$;
- 25 $s = s + \alpha_p d_s$;
- 26 $y = y + \alpha_d d_y$;
- 27 $z = z + \alpha_d d_z$;
- 28 $w = w + \alpha_d d_w$;
- 29 $\pi_{xi} = \frac{\pi_{xi} \delta^{-1}}{x_i + \delta^{-1}}$;
- 30 $\pi_{si} = \frac{\pi_{si} \delta^{-1}}{s_i + \delta^{-1}}$;
- 31 $\delta = \delta(1 - \frac{\mu}{\sqrt{r}})^{-1}$, $\mu = \min(D_{\delta x}, D_{\delta s})$;
- 32 **end**

Algoritmo 4: Pseudo-Algoritmo do Método Proposto para um Problema Quadrático com Variáveis Canalizadas

Na seção seguinte, são feitos testes em dois problemas pequenos, visando destacar algumas particularidades do método proposto.

3.8 Estudos de Casos - Visualização Geométrica

Destaca-se a visualização geométrica das regiões factíveis de dois exemplos, ilustrando o caminho percorrido para cada método.

O primeiro exemplo é descrito logo abaixo:

$$\begin{aligned} \min \quad & -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2 \leq x_1 \leq 4 \\ & 1 \leq x_2 \leq 3. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Este problema possui duas soluções ótimas $S_1 = (2, 1)$ e $S_2 = (4, 1)$.

Os métodos são inicializados em $P_0 = (1, 1)$, mais próximo da solução $S_1 = (2, 1)$ do que da solução $S_2 = (4, 1)$. Repare na Figura 3.1 que o método proposto (MPIBLM) segue uma trajetória em direção à S_1 e o MPI tradicional segue uma trajetória em direção à S_2 , percorrendo um caminho mais longo, além de obter a solução com um número maior de iterações.

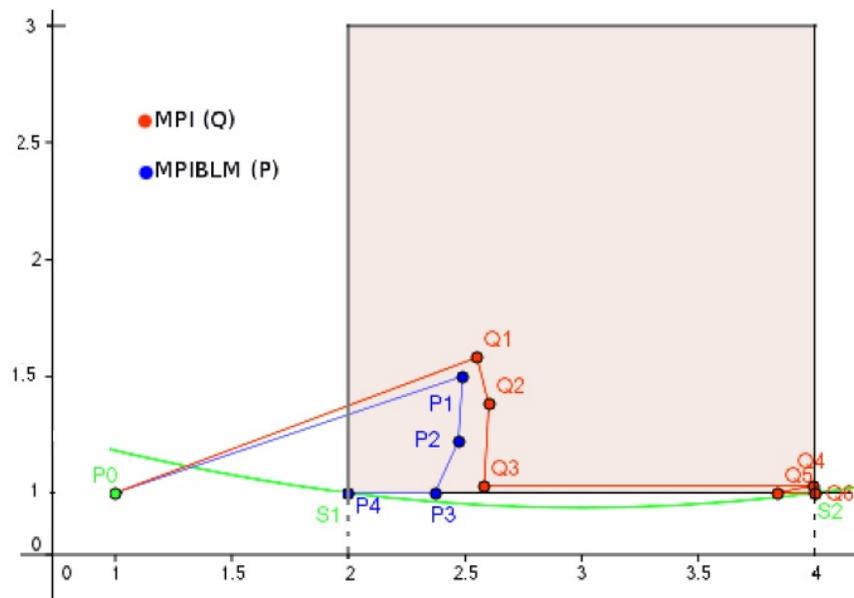


Fig. 3.1: Exemplo com soluções múltiplas e caminhos diferenciados.

Neste exemplo, no passo P_3 , a variável de folga s_2 referente a variável x_2 , se torna negativa.

O segundo exemplo possui solução degenerada $S = (0, 0.6667)$, este problema é escrito a seguir:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_1 + 1x_2 \\
 \text{s.a} \quad & -5x_1 - 3x_2 \leq -2 \\
 & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 2 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 2.
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

No problema (3.54), ambos métodos apresentam o mesmo número de iterações, mas ao olhar mais próximo da solução obtida, percebe-se que o método proposto realmente alcança o ótimo do problema, já o método tradicional evita esta proximidade, ou seja, evita uma componente nula, terminando antes, o que pode ser visto na Figura 3.2.

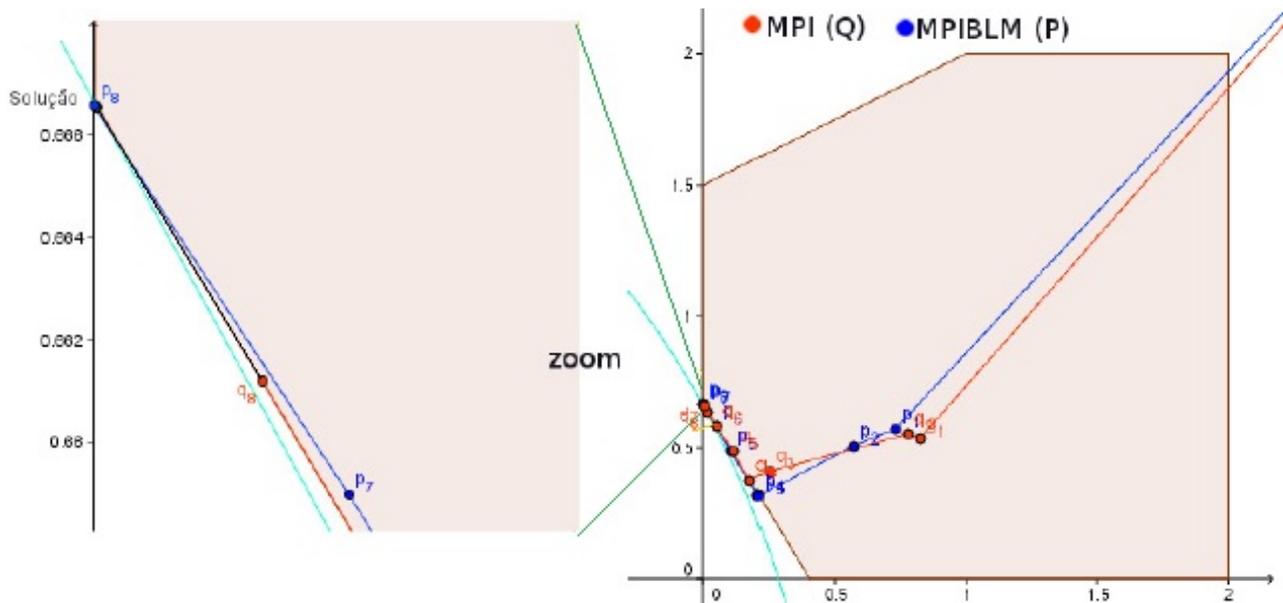


Fig. 3.2: Exemplo com solução degenerada

Os exemplos acima foram destacados por apresentarem particularidades interessantes no comportamento do método proposto. Foi utilizado δ fixo suficientemente grande.

Claramente, o uso de barreira logarítmica modificada também influencia no caminho percorrido para a solução ótima do problema original. Em caso de problemas com soluções múltiplas, pode até obter uma solução diferente da encontrada pelo método de pontos interiores seguidor de caminhos.

3.9 Discussões sobre Resultados do Capítulo

O método proposto traz algumas vantagens, permite que variáveis de decisão assumam, não apenas valores nulos, mas também valores negativos. Ou seja, a troca da função de barreira, além de permitir que restrições sejam violadas, faz com que a proximidade de valores nulos não recorra em erros numéricos na obtenção de direções de Newton.

O método proposto modifica o problema original relaxando as variáveis de decisão. Caso o parâmetro de barreira seja aumentado a cada iteração, a solução ótima encontrada será a solução ótima do problema original. Mantendo este parâmetro fixo, uma solução ótima do problema modificado pode não ser ótima para o problema original.

Neste trabalho, este tipo de solução é utilizado no próximo Capítulo, na resolução de problemas de fluxo de potência ótimo, com sobrecargas, para o despacho de potência ativa.

Apesar de sensível à escolha e atualização do parâmetro de barreira, em problemas cujo método seguidor de caminhos domina, o método proposto obtém bom desempenho.

Além de se comportar como o esperado, o método proposto é capaz de obter soluções diferentes das encontradas pelo seguidor de caminhos quando o problema possui múltiplas soluções. Isto se dá pelo fato de permitir que suas variáveis de decisão assumam componentes negativas durante o processo iterativo, resultando em caminhos diferentes de otimização.

Em problemas nos quais não há variáveis próximas de fronteira por várias iterações, o método seguidor de caminhos leva vantagens, pois a função Lagrangeana associada ao problema é mais simples que a do método proposto.

Mesmo com número maior de iterações em alguns casos, o desempenho do MPIBLM pode ser considerado bom para problemas factíveis sem relaxação. Caso as variáveis de decisão se aproximam de valores de fronteira apenas na última iteração, melhores resultados podem ser obtidos mantendo o parâmetro de barreira fixo e suficientemente grande.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DA RELAXAÇÃO NO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO CC

4.1 Introdução

Há momentos em que pode ser necessária mais potência do que a instalada no sistema. Dependendo da necessidade, é possível forçar o equipamento para fornecê-la, porém esse processo desgasta o equipamento gerando riscos de sobrecarga ou colapso de tensão.

Em [2], são estabelecidos procedimentos para a determinação da capacidade operativa das instalações de transmissão e de geração. No Art. 2º desta resolução, são descritos os diversos tipos de capacidades operativas, dentre elas destaca-se a de curta duração, tanto para linhas, quanto para unidades geradoras, utilizadas em condições de emergência.

Por exemplo, para as linhas de transmissão, sua capacidade pode sofrer uma violação entre 12% e 42% dependendo da temperatura especificada no projeto. Quanto maior a temperatura, menor será a possibilidade de violação.

É nesta capacidade operativa de curta duração que se concentra este trabalho, podendo ser vista como uma relaxação nos limites operacionais. Esta capacidade temporária não é utilizada pelos métodos de pontos interiores, pois é vista como ineficaz pelo método por violar restrições.

Fazendo uso do método apresentado no Capítulo 3, o objetivo a princípio não é a eliminação de sobrecargas, mas sim prever onde ocorrerão, suas intensidades em condições de emergência e

também poder operar em um curto espaço de tempo com algumas restrições violadas de forma segura. Além disto, é possível também utilizar estas informações para o planejamento de reestruturação e/ou expansão do sistema.

Se algum momento a demanda for maior que a capacidade operativa de longa duração do sistema, todos os geradores estariam trabalhando em seus limites operativos e não teriam condições de satisfazer esta nova demanda, estando em uma situação de emergência.

Se a demanda de energia for tal que as linhas de transmissão se congestionem, ou seja, que determinadas linhas já estão em seus limites operativos, impossibilitando o fluxo de energia. Outra possibilidade seriam contingências no sistema geração/transmissão, tais como queda de linhas e/ou geradores, impossibilitando novamente uma solução factível.

O cenário pode ser pior, podem ocorrer todas as situações mencionadas acima ao mesmo tempo. Nestas situações, pode haver *blackouts* em alguns setores e devido ao tamanho do sistema, estes casos podem ocorrer com uma frequência considerável, trazendo transtornos para a população e para o operador do sistema.

Nas condições citadas acima os métodos de pontos interiores não oferecem uma solução factível, deixando as variáveis de geração em seus extremos superiores a partir de determinada iteração, ou inviabilizando a transmissão em algumas linhas, de modo a não ser possível uma solução factível.

Em outros casos, devido a erros numéricos causados por valores muito próximos de zero em diversas iterações, o método também não obtém sucesso.

Estas condições, quando muito extremas e/ou duradouras, exigem um aumento de geração e/ou transmissão, seja por instalação de mais unidades geradoras e/ou linhas de transmissão, ou por substituição por outros de maiores capacidades operativas.

Quando esta violação de limites de geração e/ou transmissão é relativamente baixa, ou seja, está dentro dos limites operativos de curto prazo, pode-se, por alguns instantes, sobrecarregar algum componente do sistema geração/transmissão.

Considerando o modelo matemático (2.36), esta violação consiste em permitir que as variáveis de decisão p e/ou f violem seus limites operativos, ou seja, permitir $p \geq p_u$ e/ou $f \geq f_u$. Para que isto ocorra as variáveis de folga s_p e/ou s_f devem ser negativas para que as restrições de igualdades operacionais sejam verificadas.

Esta situação pode ser modelada como uma relaxação nas variáveis primais do problema (2.36), ou seja, permitir que estas se tornem negativas, possibilitando que as variáveis de decisão violem seus limites operativos.

Um exemplo prático desta situação é no verão, quando há picos de demandas e são comuns sobrecargas de 5% a 10%. A fim de manter a continuidade de fornecimento de energia para todos os consumidores, algumas restrições podem ser relaxadas [26].

Deste modo, $\delta_f^{-1} \geq 0$ e $\delta_p^{-1} \geq 0$ podem ser consideradas com sendo as violações permitidas na transmissão e na geração respectivamente, ou seja, a diferença entre os limites operacionais de curto e de longo prazo.

Estas relaxações δ_f^{-1} e δ_p^{-1} devem respeitar alguns critérios, como por exemplo o quanto se pode transmitir acima dos limites das linhas sem que estas caiam, ou mesmo o quanto se pode exigir de potência acima dos limites de geração sem que os danos parem o sistema [2]. Deste modo, ter conhecimento sobre estes parâmetros é de extrema importância, visto que estes estão diretamente relacionados à integridade do sistema.

Na literatura sobre métodos de barreira logarítmica modificada sugere-se que estes parâmetros de barreira sejam mantidos fixos ou aumentados a cada iteração. Porém, para este problema, aumentá-los a cada iteração levaria a uma redução das relaxações durante o processo iterativo.

Assim sendo, deve-se ter um limitante para esse aumento de modo a respeitar a relaxação permitida, ou deixá-lo fixo, caso contrário, o problema em questão não será resolvido.

4.2 Aplicando a Relaxação via Barreira Logarítmica Modificada

Seguindo como proposto no Capítulo 3, deve-se relaxar as variáveis primais $\mathcal{P} = \{f, p, s_f, s_p\}$ do problema (2.36). Esta relaxação significa permitir que f, p, s_f e s_p se tornem negativas. A negatividade de p não faz sentido em uma solução ótima, mas permitir $s_p < 0$ é o mesmo que permitir que $p > p_{max}$, ou seja, permitir uma sobrecarga na geração. Um raciocínio análogo pode ser feito com relação a f e s_f .

Como a violação temporária permitida para geradores é percentualmente inferior a permitida para linhas, tem-se que ter relaxações diferentes para as variáveis relacionadas a geradores e a linhas de transmissão. Neste caso usa-se δ_f para as variáveis f e s_f , e δ_p para as variáveis p e s_p , obtendo o seguinte problema relaxado equivalente:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha(\frac{1}{2}f^t R f + c_f^t f) + \beta(\frac{1}{2}p^t Q p + c_p^t p) \\
 \text{s.a} \quad & Bf - \widehat{E}p = \widehat{l} \\
 & f + s_f = f_u \\
 & p + s_p = p_u \\
 & (f, s_f) \geq -\delta_f^{-1} e_f \\
 & (p, s_p) \geq -\delta_p^{-1} e_p.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Onde e_f e e_p são vetores de uns, de dimensões apropriadas.

Deste modo, como proposta no Capítulo 3, tem-se a seguinte função Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \varphi(f, p, s_f, s_p) - \delta_x^{-1} \sum_{x \in \mathcal{P}} \phi(x, \pi_x, \delta_x) - y^t (\hat{l} - Bf + \hat{E}p) - w_{sf}^t (f_u - f - s_f) - w_{sp}^t (p_u - p - s_p) \quad (4.2)$$

onde

$$\varphi(f, p, s_f, s_p) = \alpha(\frac{1}{2}f^t Rf + c_f^t f) + \beta(\frac{1}{2}p^t Qp + c_p^t p)$$

$$\phi(x, \pi_x, \delta_x) = \sum_{i \in I} \pi_{x_i} \ln(\delta_x x_i + 1)$$

O que resulta nas condições de otimalidade para o problema modificado:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Factibilidade Primal: } & \begin{cases} Bf - \hat{E}p = \hat{l} \\ f + s_f = f_u \\ p + s_p = p_u \ ; \\ (f, s_f) \geq -\delta_f \\ (p, s_p) \geq -\delta_p \end{cases} \\ \bullet \text{ Factibilidade Dual: } & \begin{cases} -\alpha Rf + B^t y + z_f - w_{sf} = \alpha c_f \\ -\beta Qp - \hat{E}^t y + z_p - w_{sp} = \beta c_p \ ; \\ (z_f, z_p, w_f, w_p) \geq 0 \\ y \text{ livre} \end{cases} \\ \bullet \text{ Complementaridade: } & \begin{cases} \delta_f Z_f F e + z_f = \pi_f \\ \delta_p Z_p P e + z_p = \pi_p \\ \delta_f W_{sf} S_f e + w_{sf} = \pi_{sf} \\ \delta_p W_{sp} S_p e + w_{sp} = \pi_{sp} \end{cases} \end{aligned}$$

onde $z_{xi} = \frac{\pi_{xi}}{(\delta_x x_i + 1)}$, $x \in \{f, p\}$ e $i \in I$.

Agora basta aplicar o método de Newton nestas condições de otimalidade da forma como é proposta no Capítulo 3, obtendo o sistema $J_{\mathcal{L}}.d = r$, onde:

$$J_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} B & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha R & 0 & 0 & 0 & -B^t & I & 0 & 0 & -I \\ 0 & \beta Q & 0 & 0 & -E^t & 0 & I & 0 & -I \\ \delta Z_f & 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta F + I) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta Z_p & 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta P + I) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta W_f & 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta S_f + I) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta W_p & 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta S_p + I) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Observe que o jacobiano (4.3) não apresenta o mesmo problema de mal condicionamento visto no jacobiano (2.38), quando as variáveis de decisão ficam próximas de valores de fronteira.

O problema relaxado (4.1) permite que haja violações no sistema geração/transmissão devido às relaxações feitas nas variáveis. Este modelo resolvido desta maneira obtém bons resultados não apenas quando há uma solução factível viável, mas também quando a soma dos limites de geração é menor que a demanda ou quando há congestionamento nas linhas de transmissão.

4.3 Aplicações no sistema IEEE 30

Os testes a seguir são realizados no sistema IEEE-30 de modo similar aos realizados na Seção 2.5, com os parâmetros de barreira α_p e α_f fixos. Para situações normais de operação, estes são definidos com valores muito grandes, para que a relaxação seja a menor possível, e para os casos de contingências, estes são definidos conforme as porcentagens de violações permitidas.

Os testes com sistemas maiores são deixados para a próxima seção, sendo que as análises feitas para o sistema IEEE 30 podem ser facilmente transferidas para os demais sistemas.

4.3.1 Situações Normais de Operação

Assim como na Seção 2.5.1, consideram-se os limites operacionais tão grandes quanto necessários, e custos de geração iguais. Com este cenário, a Tabela 4.1 exhibe os despachos obtidos:

Gerador	Objetivos de Otimização		
	Pt (MW)	Cg (MW)	Pt & Cg (MW)
1	8,81	47,23	46,90
2	52,03	47,23	47,49
5	113,15	47,23	48,33
8	62,79	47,23	47,58
11	17,25	47,23	46,41
13	29,37	47,23	46,69
	5 iterações	5 iterações	4 iterações

Tab. 4.1: Despachos factíveis com custos iguais e sem limites de geração

Ao comparar os valores exibidos na Tabela 4.1 com os da Tabela 2.1, é possível notar que os despachos obtidos são iguais, mas que há uma redução no número de iterações necessárias para a convergência do método.

Agora, é feita uma modificação de cenário, considerando os custos de geração diferentes conforme a Tabela 2.2, mas ainda sem limites de geração.

Gerador	Objetivos de Otimização		
	Pt (MW)	Cg (MW)	Pt & Cg (MW)
1	8,81	80,97	80,23
2	52,03	80,97	81,21
5	113,15	20,24	20,64
8	62,79	20,24	20,51
11	17,25	40,49	40,36
13	29,37	40,49	40,44
	5 iterações	4 iterações	4 iterações

Tab. 4.2: Despachos factíveis com custos diferenciados.

Ao comparar os valores exibidos nas Tabelas 4.2 com os da Tabela 2.3, tem-se o mesmo observado anteriormente, os despachos são iguais mas há uma redução no número de iterações.

Para o próximo cenário são mantidos os custos da Tabela 2.2, mas agora impondo limites de geração conforme a Tabela 2.4, e os limites de cada linha de transmissão sendo de $50MW$.

Com este novo cenário, o sistema ainda se encontra em situação normal de operação, ou seja, carga de $283.4MW$ sendo satisfeita. A Tabela 4.3 mostra os novos despachos obtidos:

Gerador	Objetivos de Otimização		
	Pt (MW)	Cg (MW)	Pt & Cg (MW)
1	30,00	30,00	30,00
2	50,00	50,00	50,00
5	70,00	61,70	61,80
8	70,00	61,70	61,60
11	26,15	40,00	40,00
13	37,25	40,00	40,00
	8 iterações $F_{obj} = 71.18U\$$	11 iterações $F_{obj} = 20127.55U\$$	11 iterações $F_{obj} = 20212.60U\$$

Tab. 4.3: Despachos factíveis com custo e limites de geração e de transmissão

Ao comparar os valores exibidos nas Tabelas 4.3 com os da Tabela 2.5, os despachos continuam sendo iguais, mas agora há um aumento no número de iterações, porém, uma leve redução no valor da função objetivo causados por valores após a terceira casa decimal.

Observe que em todos os cenários de otimização, o método converge em poucas iterações, obtendo os despachos desejados mesmo tendo algumas unidades geradoras em seus limites máximos de produção, o que para o método implica que as variáveis de folga referentes a estas unidades são nulas ou muito próximas de zero.

Nestes estudos não ocorrem linhas congestionadas, ou seja, nenhuma linha atingiu seu limite máximo de transmissão, sendo que as linhas 11-9 e 13-12 foram as mais carregadas, transportando $40MW$ cada uma, visto que, conforme a Figura 2.1, estas são as únicas linhas que conectam os geradores 11 e 13 respectivamente ao sistema.

Assim, tratando-se de número de iterações, em situações normais de operação o método proposto se mostra competitivo, realizando um caminho de otimização interessante, em alguns casos obtendo passos maiores em direção a um ponto ótimo do problema.

Deste modo, o método proposto obtém bons resultados no despacho de potência do problema de fluxo de potência ótimo em situações normais de operação.

Nestes casos, assim como nos métodos de pontos interiores seguidores de caminho, é possível fazer uma análise de sensibilidade através dos multiplicadores de Lagrange w_f e w_p . Estes fornecem o quanto variaria o valor da função objetivo caso as variáveis de fluxo ou de geração respectivamente tiverem seus limites variados em uma unidade.

A fim de exemplificar, a Tabela 4.4 mostra os valores de w_p referentes aos despachos do último cenário mostrado na Tabela 4.3. Inicialmente os valores referentes ao despacho (Pt), por desprezar os custos de geração, a influência de uma variação de $1MW$ na produção de uma unidade geradora é quase nula na função objetivo e isto é visto na coluna referente a este despacho na Tabela 4.4.

Com relação aos despachos (Cg) e (Pt & Cg), com base na Tabela 4.3, observe que as unidades 2, 11, 13 e 1 estão em seus limites máximos de produção. Analisando os multiplicadores referentes a estas unidades, caso algum destes pudesse ter sua produção aumentada, o valor da função objetivo teria uma redução na ordem de 10^2 para cada $1MW$ de acréscimo na geração (vide Tabela 4.4).

Estes valores indicam também que cada redução de $1MW$ em algum destes geradores acarreta em um aumento na ordem de 10^2 no valor da função objetivo.

Este tipo análise mostra um caminho para investimentos nestas unidades geradoras. Caso tivéssemos que escolher apenas uma unidade geradora para ter sua capacidade aumentada, poderíamos escolher a unidade 1, visto que seu multiplicador de Lagrange apresenta maior valor, ou seja, acarretaria em uma maior redução de custos.

Observe também que, para estes despachos, a Tabela 4.4 mostra que os multiplicadores de Lagrange referentes às unidades 5 e 8 são da ordem de 10^{-8} . Isto se dá, pois estas unidades estão abaixo de seus limites de produção, logo aumentar ou reduzir sua capacidade de geração não tem influência significativa no valor da função objetivo, não havendo necessidade de investimento nestas unidades.

Comparando os valores da Tabela 4.4 com os da Tabela 2.6, nota-se que para cada despacho, os multiplicadores de Lagrange apresentam o mesmo valor para as unidades geradoras que estão em seus limites máximos de produção, mas para os que ainda há uma folga, o método proposto exhibe valores muito menores, indicando com mais veemência a não necessidade de investimento nestas unidades.

Gerador	Multiplicador de Lagrange w_p		
	Pt (US\$/MW)	Cg (US\$/MW)	Pt & Cg (US\$/MW)
1	$7,92 \times 10^{-2}$	$2,17 \times 10^2$	$2,16 \times 10^2$
2	$4,11 \times 10^{-1}$	$1,97 \times 10^2$	$1,97 \times 10^2$
5	$9,53 \times 10^{-1}$	$4,61 \times 10^{-8}$	$4,81 \times 10^{-8}$
8	$2,10 \times 10^{-1}$	$4,61 \times 10^{-8}$	$4,48 \times 10^{-8}$
11	$2,39 \times 10^{-15}$	$1,68 \times 10^2$	$1,66 \times 10^2$
13	$5,70 \times 10^{-10}$	$1,68 \times 10^2$	$1,66 \times 10^2$

Tab. 4.4: Sensibilidade da função objetivo com relação a geração

Outro fato interessante a se destacar nos dados fornecidos pela Tabela 4.4, para os despachos (Cg) e (Pt & Cg), é que unidades geradoras com mesmo custo e mesma capacidade de geração apresentam multiplicadores de Lagrange iguais.

O mesmo tipo de estudo pode ser feito para o multiplicador de Lagrange w_f .

Assim, o método também pode ser útil para fins de planejamento de expansão do sistema, auxiliando na escolha de onde investir, de modo a reduzir custos.

4.3.2 Situações de Sobrecarga na Geração

Assim como feito na Seção 2.5.2, a capacidade de geração da unidade 1 é reduzida de $30MW$ para $10MW$, reduzindo a capacidade de geração do sistema para $280MW$, ou seja, faltando $3,4MW$ para satisfazer a demanda.

Com as configurações acima, a Tabela 4.5 mostra os despacho obtidos utilizando a formulação com relaxação em (4.1), com no máximo 10% de violação permitida em cada gerador. Para a transmissão, a relaxação é de no máximo 30% para cada linha. Estas relaxações são mantidas fixas em todo o processo iterativo.

Durante este estudo houve apenas violação com relação à geração, visto que esta não era suficiente para satisfazer toda a demanda do sistema.

Observe na Tabela 4.5 que, para o despacho (Pt) que despreza o custo na geração, todas as unidades geram acima de suas capacidades, mas havendo no máximo 6.86% de violação, justamente na unidade geradora 1 que havia perdido capacidade.

Para o despacho (Cg), por serem mais caras, as unidades 5 e 8 não sofreram violações, mas as unidades 11 e 13, mesmo sendo mais baratas que as unidades 1 e 2, sofrem maior violação.

Para o despacho (Cg & Pt), apenas as unidades 5, 8 e 11 geram acima de seus limites, sendo o despacho que menos viola restrições, mas mesmo tendo metade da porcentagem de violações do despacho (Cg), seu custo é maior por priorizar as unidades 5 e 4.

Gerador	Objetivos de Otimização					
	Pt (MW)	Violação(%)	Cg (MW)	Violação(%)	Pt & Cg (MW)	Violação(%)
1	10,69	6,86	10,02	0,17	10,00	0,00
2	50,45	0,91	50,02	0,03	50,00	0,00
5	70,27	0,38	69,77	0,00	71,80	2,57
8	70,73	1,05	69,77	0,00	71,59	2,28
11	40,36	0,91	41,82	4,55	40,01	0,01
13	40,90	2,24	42,00	5,00	40,00	0,00
8 iterações			23 iterações		21 iterações	
$F_{obj} = 79,15(U\$)$			$F_{obj} = 24286,55(U\$)$		$F_{obj} = 25140,24(U\$)$	

Tab. 4.5: Despachos factíveis para o sistema com sobrecarga na geração.

Vale lembrar que estes despachos não são únicos, dependendo dos parâmetros de relaxação iniciais, estes podem variar. Por exemplo, deixando os limites de transmissão tão grandes quanto necessário, e δ_p relativo a 50% de violação permitida, considerando apenas o custo da geração, tem-se o despacho da Tabela 4.6:

Gerador	Cg (MW)
1	11,00
2	55,00
5	64,70
8	64,70
11	44,00
13	44,00
44 iterações	
$F_{obj} = 22189,36(U\$)$	

Tab. 4.6: Despacho com violação máxima de 10% na geração.

Observe que, apesar de o parâmetro δ_p ser referente a uma violação de 50%, que na prática não pode acontecer, este despacho obtém uma violação de 10% em cada barra, exceto nas barras 5 e 8 por serem mais caras, reduzindo bem o valor da função objetivo se comparado com a coluna referente a este tipo de despacho na Tabela 4.5.

Analisando os multiplicadores de Lagrange referentes aos despachos da Tabela 4.5, os dados da Tabela 4.7 indicam que estes despachos podem ser melhorados, principalmente se tratando dos despachos (Cg) e (Cg & Pt), indicando uma direção ao despacho da Tabela 4.6.

Estes multiplicadores tendem a zero conforme o despacho obtido se aproxima do despacho da Tabela 4.6, onde seus multiplicadores são da ordem de 10^{-15} .

Gerador	Multiplicadores de Lagrange w_p		
	Pt (U\$/MW)	Cg (U\$/MW)	Pt & Cg (U\$/MW)
1	4,69	$1,69 \times 10^2$	$2,77 \times 10^2$
2	4,78	$2,29 \times 10^2$	$2,37 \times 10^2$
5	5,27	$2,61 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-3}$
8	4,43	$2,97 \times 10^{-4}$	$2,79 \times 10^{-4}$
11	3,74	$1,95 \times 10^2$	$2,06 \times 10^2$
13	4,09	$1,95 \times 10^2$	$2,06 \times 10^2$

Tab. 4.7: Sensibilidade da função objetivo com relação à geração.

Nestas situações, o método proposto leva extrema vantagem sobre o método MPI, pois pode obter não apenas uma, mas diversas soluções viáveis dentro dos limites operacionais de curto prazo. Com uma boa escolha de parâmetros de barreira, é possível obter a melhor solução dentro do espaço das violações permitidas, conforme visto na Tabela 4.6.

4.3.3 Situações de Sobrecarga na Transmissão

Nos casos da seção anterior, não houve violação de limites de transmissão, não sendo possível observar o comportamento do método quanto a sobrecargas na transmissão.

No próximo estudo de casos, assim como na Seção 2.5.2, é forçada uma contingência nas linhas de transmissão, configurando uma incapacidade para transmitir a potência necessária para satisfazer a demanda, resultando em um congestionamento.

Um exemplo que pode ser considerando é a queda, total ou parcial, da linha 27-28 (vide Figura 2.1). Para simular sua saída, seu fluxo máximo é reduzido para $10^{-15} MW$.

Considerando que não haja violações nas unidades geradoras, mas que para as linhas de transmissão sejam permitidas 50% de violação, obtiveram-se os seguintes despachos:

Observe que os despachos da Tabela 4.8 são todos factíveis, ou seja, não há geradores nem linhas de transmissão sobrecarregados. Se comparados com os despachos das Tabelas 4.3 e 2.5, é possível ver que apenas o custo do despacho (Cg) não reduziu, e que apesar de os despachos (Pt & Cg) serem iguais, como não há a linha 27-29 para transmitir, outro caminho é encontrado. Além disso, em todos os casos houve um aumento no número de iterações.

Então ficam duas perguntas:

1) Se estas soluções são mais baratas, porque o método de pontos interiores seguidor de caminhos não obteve esta solução?

2) Se não houve violações nos limites operacionais, por que o método de pontos interiores seguidor de caminhos não obteve esta solução?

Gerador	Objetivos de Otimização		
	Pt (MW)	Cg (MW)	Pt & Cg (MW)
1	30,00	30,00	30,00
2	50,00	50,00	50,00
5	70,00	61,70	61,80
8	69,95	61,70	61,60
11	23,45	40,00	40,00
13	40,00	40,00	40,00
	17 iterações $F_{obj} = 67,64(U\$)$	14 iterações $F_{obj} = 20127,55(U\$)$	15 iterações $F_{obj} = 20209,29(U\$)$

Tab. 4.8: Despachos com queda da linha 27-28

Há uma resposta para estas perguntas: durante o processo iterativo para os despachos da Tabela 4.8, o método proposto torna algumas componentes das variáveis s_f negativas, possibilitando caminhos que o método seguidor de caminhos não permite. Este simples fato faz com que o método proposto tome outra direção, obtendo uma solução possível.

Os multiplicadores de Lagrange w_p associados a estes despachos são exibidos na Tabela 4.9.

Gerador	Multiplicadores de Lagrange w_p		
	Pt (U\$/MW)	Cg (U\$/MW)	Pt & Cg (U\$/MW)
1	$2,31 \times 10^{-2}$	$2,17 \times 10^2$	$2,16 \times 10^2$
2	$3,46 \times 10^{-1}$	$1,97 \times 10^2$	$1,97 \times 10^2$
5	$8,81 \times 10^{-1}$	$5,57 \times 10^{-17}$	$1,07 \times 10^{-19}$
8	$4,45 \times 10^{-25}$	$7,53 \times 10^{-17}$	$1,22 \times 10^{-19}$
11	$7,12 \times 10^{-14}$	$1,67 \times 10^2$	$1,66 \times 10^2$
13	$7,18 \times 10^{-3}$	$1,67 \times 10^2$	$1,66 \times 10^2$

Tab. 4.9: Sensibilidade da função objetivo com relação à geração.

Observe que os valores da Tabela 4.9 são bem semelhantes aos da Tabela 4.4.

Já os multiplicadores de Lagrange w_f , para o despacho (Pt) da Tabela 4.8, são todos muito próximos de zero, com exceção ao referente a linha 27-28, pois por ter seu fluxo reduzido, teve seu multiplicador de Lagrange muito próximo de $2U\$/MW$. Este valor indica uma leve necessidade desta linha para este despacho.

Para os demais despachos não houve valor superior a 10^{-3} , indicando que é possível deixar o sistema sem a linha 27-28.

Façamos agora outro teste, retornando a linha 27-28 para o sistema e simulando uma queda parcial da linha de transmissão que liga as unidades geradoras 2 e 5. Esta linha apresenta um fluxo alto,

reduzindo o limite de transmissão para $23MW$, o método de pontos interiores também não consegue obter uma solução factível, devido a incapacidade de transmissão da linha 2-5.

Nesta situação, o método proposto fornece informações valiosas, provocando violação na linha 2-5. Os despachos do método proposto podem ser vistos na Tabela 4.10.

Gerador	Objetivos de Otimização		
	Pt (MW)	Cg (MW)	Pt & Cg (MW)
1	30,00	30,00	30,00
2	33,51	50,00	50,00
5	70,00	70,00	70,00
8	70,00	53,40	53,40
11	39,89	40,00	40,00
13	40,00	40,00	40,00
	18 iterações $F_{obj} = 82,37(U\$)$	17 iterações $F_{obj} = 20404,15(U\$)$	17 iterações $F_{obj} = 20484,50(U\$)$

Tab. 4.10: Despachos com redução de capacidade da linha 2-5

Observe que a unidade geradora 2 teve sua geração reduzida no despacho (Pt) devido a incapacidade de uma de suas linhas, ocasionando um aumento no valor da função objetivo e uma violação de 6,93% na linha 2-5. A componente do multiplicador de Lagrange w_f referente a esta linha ficou próximo de $30U\$/MW$, os demais permaneceram próximos de zero.

Os despachos (Cg) e (Cg & Pt) foram iguais, diferenciando apenas na distribuição dos fluxos nas linhas, o que pode ser notado pelo custo diferente destes despachos. Em ambos os despachos, a violação na linha 2-5 foi de 18,7% levando o multiplicador de Lagrange associado a esta linha muito próximo de $600U\$/MW$.

Em todos os despachos, nota-se a importância desta linha para o sistema, visto que é a única a sofrer violação e a única que apresenta o multiplicador de Lagrange associado distante de zero.

Como a unidade geradora 5 é o que está mais próxima às cargas do sistema e, além disso, possui uma carga interna, esta é a mais prejudicada com a redução da linha 2-5, pois tendo que satisfazer uma demanda interna, pouco é transmitido pelas linhas que o conecta.

Através do multiplicador de Lagrange w_p associado a unidade geradora 5 na Tabela 4.11, é possível afirmar que, com a queda parcial da linha 2-5, um investimento nesta unidade seria relevante.

Deste modo, o método proposto consegue obter um despacho que satisfaz a carga do sistema, mesmo sobrecarregado, mas dentro dos limites de segurança.

As análises feitas para o sistema IEEE 30 podem ser estendidas para demais sistemas.

Gerador	Multiplicador de Lagrange w_p		
	Pt (U\$/MW)	Cg (U\$/MW)	Pt & Cg (U\$/MW)
1	$3,44 \times 10^{-1}$	$1,08 \times 10^2$	$1,08 \times 10^2$
2	$6,87 \times 10^{-37}$	$7,20 \times 10^1$	$7,29 \times 10^1$
5	$1,88 \times 10^{+01}$	$2,45 \times 10^2$	$2,42 \times 10^2$
8	$3,81 \times 10^{00}$	$6,66 \times 10^{-29}$	$1,02 \times 10^{-28}$
11	$3,01 \times 10^{00}$	$1,30 \times 10^2$	$1,30 \times 10^2$
13	$2,22 \times 10^{00}$	$1,05 \times 10^2$	$1,05 \times 10^2$

Tab. 4.11: Sensibilidade da função objetivo com relação à geração.

4.4 Aplicações em Outros Sistemas

Os testes são feitos nos sistemas *IEEE 14*, *IEEE 57*, *IEEE 118*, *IEEE 145* e *IEEE 162* da base de dados IEEE, acessada pelo endereço <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>. Estes sistemas representam uma porção do sistema elétrico americano na década de 1960, mas não há dados sobre limites de transmissão.

Outros testes são feitos também nos sistemas Sul-Sudeste Brasileiro *SSE 810*, *SSE 1654* e *SSE 1732*, e também no Sistema Brasileiro.

4.4.1 Situações Normais de Operação

Mantendo o parâmetro de barreira fixo e suficientemente grande, o método proposto obtém solução para os problemas em um número maior ou igual de iterações do método MPI, podendo também ser usado para a busca de uma solução ótima do problema original.

O tempo por iteração é aparentemente maior em todos os casos devido a atualização de um número maior de variáveis, mas este acréscimo no tempo não chega a ser tão relevante.

Estas observações podem ser vistas nas Tabelas 4.12, 4.13 e 4.14.

Em todos os casos, as demandas dos sistemas são sempre satisfeitas. Sempre que o MPI precisou de mais iterações que o MPIBLM para a convergência, foi identificado que, em alguma iteração antes da convergência, houve variáveis próximas de valores de fronteira no MPI. Quando não identificado esta ocorrência, o MPI converge em menos iterações.

Assim, com base nos testes feitos, o método MPIBLM converge em menos iterações que o método MPI quando variáveis se aproximam de valores nulos antes da última iteração.

Problema	Carga(MW)	MPI			MPIBLM		
		It.	Tempo(s)	F. Objetivo (U\$)	It.	Tempo(s)	F. Objetivo (U\$)
IEEE14	259,00	8	0,02	4572,32	10	0,01	4572,32
IEEE57	1250,80	5	0,00	29487,37	5	0,00	29486,84
IEEE118	3668,00	7	0,01	38298,87	3	0,01	38294,57
IEEE145	283051,15	14	0,09	6414294,65	16	0,10	6413934,05
IEEE162	15387,36	3	0,01	16174095,75	3	0,01	16174090,46
SSE810	36166,80	9	0,25	587293287,87	11	0,46	587302211,94
SSE1654	32326,27	7	0,50	246560205,78	9	0,98	246450781,23
SSE1732	35658,11	6	0,45	117296102,14	9	1,05	117299860,46
BRASIL	40155,20	10	0,97	224471003,77	12	2,02	224475239,33

Tab. 4.12: Situações Normais de Operação - Otimizando a Transmissão.

Problema	Carga(MW)	MPI			MPIBLM		
		It.	Tempo(s)	F. Objetivo (U\$)	It.	Tempo(s)	F. Objetivo (U\$)
IEEE14	259,00	7	0,004	6708,1	5	0,003	6708,1
IEEE57	1250,80	6	0,004	111750,046	4	0,005	111750,046
IEEE118	3668,00	6	0,008	124576,148	5	0,012	124576,148
IEEE145	283051,15	5	0,025	801179535,2	5	0,042	801179535,2
IEEE162	15387,36	5	0,014	9865451,99	4	0,013	9865451,99
SSE810	36166,80	5	0,147	5737006,238	5	0,205	5737006,238
SSE1654	32326,27	5	0,347	4213660,21	5	0,58	4213660,21
SSE1732	35658,11	5	0,38	5528264,386	5	0,594	5528264,386
BRASIL	40155,20	5	0,485	5339205,586	5	0,854	5339205,586

Tab. 4.13: Situações Normais de Operação - Otimizando a Geração.

Problema	Carga(MW)	MPI			MPIBLM		
		It.	Tempo(s)	F. Objetivo (U\$)	It.	Tempo(s)	F. Objetivo (U\$)
IEEE14	259,00	8	0,003	12311,22	6	0,003	12311,22
IEEE57	1250,80	5	0,003	175225,33	4	0,004	175225,33
IEEE118	3668,00	4	0,008	217772,47	4	0,010	217772,46
IEEE145	283051,15	3	0,016	2587866040	5	0,037	2587865969
IEEE162	15387,36	3	0,009	42214423,35	4	0,013	42214421,93
SSE810	36166,80	3	0,089	244965529,10	4	0,159	244966408,30
SSE1654	32326,27	4	0,284	149327429,10	4	0,450	149327429,70
SSE1732	35658,11	3	0,226	120687117,60	4	0,482	120687876,30
BRASIL	40155,20	3	0,292	190548731,90	10	1,755	190627752,30

Tab. 4.14: Situações Normais de Operação - Otimizando Geração e Transmissão.

4.4.2 Situações de Sobrecarga na Geração

Considere que haja um aumento de demanda na qual, em cada um dos sistemas, a capacidade instalada seja insuficientes. Esta situação é simulada reduzindo a capacidade de geração de algumas unidades geradoras.

O MPI não obtém uma solução sem que hajam *Blackouts*, como pode ser visto na Tabela 4.15, comparando as colunas "Carga (MW)" e "Despacho (MW)".

Problema	Carga(MW)	MPI	
		Despacho(MW)	F. Objetivo(U\$)
IEEE14	259,00	258,75	6695,16
IEEE57	1250,80	1248,45	111687,51
IEEE118	3668,00	3665,30	124392,82
IEEE145	283051,15	283048,65	801165382,58
IEEE162	15387,36	15386,76	9864682,64
SSE810	36166,80	36161,10	5735198,04
SSE1654	32326,27	32320,07	4212044,05
SSE1732	35658,11	35652,36	5526481,62
BRASIL	40155,20	40147,65	5337198,02

Tab. 4.15: Situação de Sobrecarga na Geração - Otimizando Geração - MPI.

A mesma situação simulada com o método proposto, assim como com o sistema IEEE 30, obtém um despacho que satisfaz o novo cenário, causando sobrecargas em algumas unidades geradoras. Em todos os sistemas, esta violação não ultrapassa 7,75% da capacidade de geração da unidade geradora. Os dados para estas observações estão na Tabela 4.16.

Problema	MPIBLM			
	It.	Tempo(s)	Função Objetivo(U\$)	Sobrecarga(%).
IEEE14	3	0,00	6708,20	0,38
IEEE57	3	0,00	111751,02	0,36
IEEE118	3	0,01	124794,71	5,45
IEEE145	4	0,03	801714650,06	2,55
IEEE162	3	0,01	9897227,66	2,46
SSE810	23	0,87	5751244,04	0,49
SSE1654	11	1,16	4219482,00	3,85
SSE1732	17	1,90	5530185,66	3,41
BRASIL	16	2,55	5350864,50	7,75

Tab. 4.16: Sobrecarga na Geração - Otimizando Geração - MPIBLM

Observe também que em alguns casos, por permitir sobrecargas nas unidades geradoras, o método pode convergir em menos iterações do que em situações normais de operação.

4.4.3 Situações de Sobrecarga na Transmissão

Considere que haja uma queda total de alguma linha de transmissão, de modo que cause um congestionamento nas linhas. Esta situação impede que o MPI obtenha uma solução ótima, como observado com o sistema IEEE 30.

Esta situação de queda de linha é simulada reduzindo o fluxo máximo da linha de transmissão que sofre a contingência para $0MW$, considerando que sejam permitidas violações apenas nas restrições referentes às capacidades de transmissão das linhas.

Foram feitos testes com 30% de permissão de sobrecarga nas linhas. Estes dados podem ser observados nas Tabelas 4.17, 4.18 e 4.19. Os dados das colunas "Sobrecarga (%)" indicam a sobrecarga máxima ocorrida nas linhas de transmissão ao término do processo iterativo.

Problema	Linha	It.	Tempo(s)	F. Objetivo(U\$)	Sobrecarga(%)
IEEE14	1-5	28	0,017	6134,1	0,0
IEEE57	4-5	11	0,008	41413,3	0,0
IEEE118	8-5	80	0,156	129082,3	0,0
IEEE145	51-57	80	0,524	121674968	0,0
IEEE162	5-129	20	0,063	28206338,4	0,0
SSE810	413-414	80	3,413	453284523,5	0,0
SSE1654	61-1106	49	5,206	224203511,6	30,0
SSE1732	61-1106	44	5,122	204865525,4	0,0
BRASIL	207-269	53	8,52	535079514,7	0,0

Tab. 4.17: Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda total - Otimizando a Transmissão.

Nos testes das tabelas 4.17, 4.18 e 4.19, sempre que há 0,0% de sobrecarga, houve violações nas restrições de limites das linhas apenas durante o processo iterativo, ou seja, o método proposto obteve um caminho diferente para chegar a um valor ótimo do problema original, sendo factível a este apenas na última iteração.

Agora, são feitos testes supondo uma queda parcial de linha de transmissão, no qual o limite da linha contingente cai para 20% de sua capacidade de transmissão original. Os resultados destes testes podem ser vistos nas Tabelas 4.20, 4.21 e 4.22.

Como pode ser observado, o método converge com violações nos limites das linhas de transmissão, mas estas não ultrapassam os 30% estabelecidos.

Problema	Linha	It.	Tempo(s)	F. Objetivo(U\$)	Sobrecarga(%)
IEEE14	1-5	14	0,011	7152,3	0,0
IEEE57	4-5	13	0,013	133345,2	0,0
IEEE118	8-5	15	0,025	153911,2	0,0
IEEE145	51-57	34	0,216	2983626453	0,0
IEEE162	5-129	15	0,058	42747787	0,0
SSE810	413-414	36	1,492	21741669,9	0,0
SSE1654	61-1106	29	3,319	30135835,8	30,0
SSE1732	61-1106	31	3,564	16075963,3	0,0
BRASIL	207-269	32	5,202	21214542,5	0,0

Tab. 4.18: Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda total - Otimizando a Geração

Problema	Linha	It.	Tempo(s)	F. Objetivo(U\$)	Sobrecarga(%)
IEEE14	1-5	54	0,022	16228,5	0,0
IEEE57	4-5	12	0,012	190943,2	0,0
IEEE118	8-5	19	0,041	343736	0,0
IEEE145	51-57	41	0,271	3251585318	0,0
IEEE162	5-129	19	0,056	82479620,8	0,0
SSE810	413-414	95	4,713	2034504129,2	30,0
SSE1654	61-1106	38	4,089	318294200,4	0,0
SSE1732	61-1106	90	9,627	2475881750,2	30,0
BRASIL	207-269	85	13,282	4047906653,7	29,3

Tab. 4.19: Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda total - Otimizando a Geração e a Transmissão

Problema	Linha	It.	Tempo(s)	F. Objetivo(U\$)	Sobrecarga(%)
IEEE14	1-5	20	0,014	6222	17,8
IEEE57	4-5	9	0,007	41780,8	19,2
IEEE118	8-5	15	0,031	126073,8	28,3
IEEE145	51-57	83	0,462	128144804,5	30,0
IEEE162	5-129	18	0,062	28212888,8	29,7
SSE810	413-414	80	3,301	171609974,8	30,0
SSE1654	61-1106	50	5,337	224203533,1	30,0
SSE1732	61-1106	44	5,057	204865672,5	0,2
BRASIL	207-269	53	8,506	535077039,8	0,5

Tab. 4.20: Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda parcial - Otimizando a Transmissão

Problema	Linha	It.	Tempo(s)	F. Objetivo(U\$)	Sobrecarga(%)
IEEE14	1-5	13	0,006	7149,4	17,8
IEEE57	4-5	13	0,009	133345,2	30,0
IEEE118	8-5	12	0,028	153911,2	30,0
IEEE145	51-57	35	0,280	2983625154,3	30,0
IEEE162	5-129	20	0,090	42747788,2	30,0
SSE810	413-414	100	4,012	17461878,6	30,0
SSE1654	61-1106	39	4,190	30135836,4	30,0
SSE1732	61-1106	31	3,713	16076115,8	0,2
BRASIL	207-269	32	5,465	21215626,1	0,5

Tab. 4.21: Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda parcial - Otimizando a Geração

Problema	Linha	It.	Tempo(s)	F. Objetivo(U\$)	Sobrecarga(%)
IEEE14	1-5	21	0,01	13090,8	17,0
IEEE57	4-5	12	0,013	191230,8	17,0
IEEE118	8-5	16	0,028	344747,6	30,0
IEEE145	51-57	41	0,277	32568407,3	30,0
IEEE162	5-129	21	0,090	82486173,2	28,7
SSE810	413-414	87	3,727	1825408513,8	30,0
SSE1654	61-1106	38	4,115	318282529,2	0,2
SSE1732	61-1106	40	4,671	228318774,6	0,2
BRASIL	207-269	80	13,650	4889283734,8	30,0

Tab. 4.22: Até 30% de sobrecarga permitida nas linhas de transmissão, com queda parcial - Otimizando a Geração e a Transmissão

A quantidade de linhas com sobrecarga não ultrapassou 10% do total, sendo que as linhas contingentes foram as mais sobrecarregadas, pois como estas não foram retiradas do sistema, o método tenta transmitir o máximo que puder por elas, e quando não possível, outra linha é sobrecarregada.

4.5 Discussões sobre Resultados do Capítulo

Os testes feitos com o método MPIBLM para problemas de fluxo de potência ótimo com sobrecargas foram bem promissores, tanto na geração quanto na transmissão, obtendo despachos que satisfazem as demandas, não ocasionando *blackouts* no sistema.

O método proposto fornece informações sobre possíveis melhorias no sistema, mesmo quando há sobrecargas no sistema, através do estudo de seus multiplicadores de Lagrange, que não tendem ao infinito como ocorre nos métodos de pontos interiores, indicando onde devem ser feitos investimentos e sua influência no valor da função objetivo.

Como o método pode seguir uma trajetória que viole restrições durante o processo iterativo, podem-se obter soluções ainda melhores. Além disso, conforme a escolha do parâmetro de barreira pode-se obter soluções diferentes.

O método pode ser melhorado com estudos mais aprofundados sobre os critérios de parada em casos em que não há solução factível para o problema original, mas há para o problema relaxado.

A não convergência do método esteve ligada a escolha do parâmetro de barreira e sua atualização, ou ao ajuste de passos primais e duais.

O método é promissor, sendo muito útil quando aplicado em problemas de fluxo de potência ótimo com sobrecargas, obtendo uma solução viável sem gerar *blackouts* no sistema.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

5.1 Conclusões

Os métodos de pontos interiores apresentam dificuldades no tratamento de problemas de fluxo de potência ótimo com sobrecargas, seja de geração, ou de transmissão, no despacho de potência ativa.

Estas dificuldades variam desde ao surgimento de erros numéricos, causando aumento do número de iterações, até mesmo a não convergência do método.

A motivação para o método proposto se deu devido a estas dificuldades, pois há a necessidade de manter o sistema em operação, e para isso é preciso obter um ponto operativo que satisfaça a demanda exigida pelo sistema.

O uso de barreira logarítmica modificada, ao invés de barreira clássica, na formulação do método seguidor de caminhos, expande a região factível do problema original, permitindo que variáveis de folga se tornem negativas, ou seja, que variáveis de decisão violem seus limites operacionais.

Esta expansão da região factível pode transformar um problema antes infactível, em outro, agora factível. Este fato possibilita obter uma solução na região relaxada de um problema de fluxo de potência ótimo com sobrecargas, possibilitando ainda operar de modo seguro e sem a ocorrência de *blackouts*.

As violações de limites operacionais devem ser controladas, pois podem causar danos tanto nas linhas de transmissão, quanto nas unidades geradoras. Este controle é feito através dos parâmetros de barreira, que devem respeitar as especificações de cada componente, limitando as violações, ou seja,

permitindo uma sobrecarga segura.

Além de promissor para operação de sistemas com sobrecarga, o método fornece informações mais precisas sobre possíveis investimentos no sistema geração/transmissão através do estudo dos multiplicadores de Lagrange, que não tendem mais para o infinito como ocorre com os métodos de pontos interiores nestas situações.

O método não é limitado apenas ao uso no problema motivacional. Pode ser usado em qualquer problema de programação quadrática convexa, obtendo melhores resultados em problemas nos quais o método seguidor de caminhos se aproxima muito de valores de fronteira. Além disso, pode ser utilizado para o estudo de mínima expansão da região factível.

De modo geral, o método proposto elimina os problemas numéricos encontrados no método seguir de caminhos quando variáveis se aproximam de valores na fronteira do problema original. Além disso, pode seguir trajetória diferenciada, obtendo soluções diferentes quando estas existem.

5.2 Perspectivas Futuras

Serão feitos estudos sobre o aperfeiçoamento dos critérios de parada e, da escolha do parâmetro de barreira, visto que influenciam na convergência e na solução obtida.

Como o método proposto obteve resultados promissores, para os testes feitos, em problemas de fluxo de potência ótimo com sobrecargas, a expansão deste conceito de relaxação de restrições operacionais em problemas de pré-despacho segue naturalmente.

É possível também inserir manobras de linhas e restrições de rampa, deixando o modelo ainda mais próximo da realidade, visto que estas operações podem ocasionar em sobrecargas no sistema.

Para o problema apresentado, pode-se inserir, na função objetivo, custos de violações para cada restrição operativa. Esta mudança faria com que o método pudesse selecionar linhas e/ou unidades geradoras com custos de violação mais baratos, mas também respeitando a topologia do sistema.

O método proposto é uma modificação do método seguidor de caminhos. Assim, uma alternativa para melhoria dos resultados é o uso desta relaxação no método de pontos interiores barreira logarítmica preditor-corretor.

BIBLIOGRAFIA

- [1] I. Adler, M. G. C. Resende, G. Veiga, and N. Karmarkar. An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 44:297–335, 1989.
- [2] ANEEL - Agência Nacional de Energia Elétrica. *Resolução Normativa N° 191, de 12 de Dezembro de 2005*, 2005.
- [3] A. Azevedo, C. Castro, A. Oliveira, and S. Soares. Security constrained optimal active power flow via network model and interior point method. *SBA Controle & Automacao*, 20(2):206–216, 2009.
- [4] A. T. Azevedo. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados em Sistemas de Potência Modelados por Fluxo em Redes*. PhD thesis, FEEC – UNICAMP, Campinas SP, Março, 2006. <http://libdigi.unicamp.br/document/?view=vtls000377599>.
- [5] A. T. Azevedo, M. F. Carvalho, A. R. L. Oliveira, and S. Soares. Problema de fluxo de potência Ótimo dc com grafo generalizado via método de pontos interiores com restrições adicionais. *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, em CD-ROM, Campos do Jordão, SP*, pages 1454–1462, 2001.
- [6] V. A. G. R. M. Costa Baptista, E. C. Sousa. A função barreira modificada e o problema de fluxo de potência Ótimo. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 7(1), 2006.
- [7] E.R. Barnes. A variation on karmarkar's algorithm for solving linear programming problems. *Mathematical Programming*, 36:174–182, 1986.

- [8] G. Blancha, J.C. Dodu, A. Renaud, and M. Bouhtou. Implementation of a primal-dual interior point method applied to the planning of reactive power compensation devices. *Proc. of the 12th Power Systems Computation Conference - Dresden - Germany.*, pages 827–836, 1996.
- [9] C. W. Carrol. The created response surface thecnique for optimizing nonlinear restrained systems. *Operations Research*, v.9, 1961.
- [10] L. M. R. Carvalho. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados Pré-Despacho de um Sistema Hidroelétrico Usando o Princípio de Mínimo Esforço – Comparação com o Modelo de Fluxo em Redes.* PhD thesis, ICMC – USP, São Carlos SP, Novembro, 2005. <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-06072006-153856/>.
- [11] M. F. Carvalho, S. Soares, and T. Ohishi. Optimal active power dispatch by network flow approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(3):1640–1647, 1988.
- [12] T.W.C. Chen and V.S Vassiliadis. Solution of general nonlinear optimization problems using the penalty/modified barrier method with the use of exact hessians. *Computers Chem. Eng.*, 27, 2003.
- [13] F. I. Denny and D. E Dismukes. Power systems operations and electricity markets. *CRC Press*, 2002.
- [14] I. I. Dikin. Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Soviets Math. Doklady*, 8:674–675, 1967.
- [15] C. B Effiong and J. A. Momoh. Power systems preventive control using artificial neural networks based generation rescheduling method. *Proceedings os the 40th Midwest Symposium on Circuits and Syatems*, 2:1438 – 1439, 1997.
- [16] A. S. El-Bakry, R. A. Tapia, T. Tsuchiya, and Y. Zhang. On the formulation and the theory of the Newton interior-point method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89:507–541, 1996.
- [17] A.V. Fiacco and G.P. McCormick. *Nonlinear Programming - Sequential Unconstrained Minimization Techniques.* Wiley, New York, 1968.
- [18] K. R. Frisch. The logarithmic potential method of convex programming. *Memorandum, University Institute of Economics, Oslo, Norway*, 1955.
- [19] L.L. Garver, P.R.V. Horner, and K.A. Wirgan. Load supplying capability of generation - transmission systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS98:957–962, 1979.

- [20] P. E. Gill and W. Murray. On projected newton barrier methods for linear programming and an equivalence to karmarkar's projective method. *Mathematical Programming*, 36:183–209, 1986.
- [21] D. Goldfarb, R. Polyak, and Yuzefovich. A modified barrier-augmented lagrangian method for constrained minimization. *Computational Optimization and Applications*, 14, 1999.
- [22] J. Gondzio. Interior point methods 25 years later. *European Journal of Operational Research*, 218(3):587 – 601, 2012.
- [23] C.C. Gonzaga. Algoritmos de pontos interiores para programação linear. *I EBO - Escola Brasileira de Otimização*, 1989.
- [24] S. Granville. Optimal reactive power dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1):136–146, 1994.
- [25] E. Hobson, D.L. Fletcher, and W.O. Stadlin. Network flow linear programming and their application to fuel scheduling and contingency analysis. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS109:1684–1691, 1984.
- [26] Y. Y Hsu and H. C Kuo. A heuristic based fuzzy reasoning approach for distribution system service restoration. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 9(2), 1994.
- [27] P. Davis K. Clements and K.D. Frey. An interior point algorithm for weighted least absolute value power system state estimation. *IEEE/PES Winter Meeting*, 1991.
- [28] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4):373–395, 1984.
- [29] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshine. A primal-dual interior-point method for linear programming. *Progress in Mathematical Programming, Interior-Point and Related Methods*, pages 29–47, 1989.
- [30] T.H Lee, D.H Thorne, and E.F. Hill. A transportation method for economic dispatching - applications and comparison. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS99:2373–2385, 1980.
- [31] R.E. Marsten and M.J. Saltzman. Implementation of dual affine interior point algorithm for linear programming. *ORSA Journal on Computing*, 1:287–297, 1989.
- [32] T. K. P. Medicherla, R. Billinton, and M. S. Sachdev. Generation rescheduling and load shedding to alleviate line overloads - analysis. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 98(6):1876 – 1884, 1979.

- [33] N. Megiddo. Pathways to the optimal set in linear programming. *Progress in Mathematical Programming: Interior-Point and Related Methods - Springer-Verlag, New York*, 1987.
- [34] S. Mehrotra. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2(4):575–601, 1992.
- [35] J.C.O. Mello, A.C.G. Melo, and S. Granville. Simultaneous transfer capability assessment by combining interior point methods and monte carlo simulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12:736–742, 1997.
- [36] A. Melman and R. Polyak. The newton modified barrier method for qp problems. *Annals of Operations Research*, 54:465–519, 1996.
- [37] A.C.G. Melo, J.C.O. Mello, and S. Granville. The effects of voltage collapse problems in the reliability evaluation of composite systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12:480–488, 1997.
- [38] S. Mizuno and A. Nagasawa. A primal–dual affine–scaling potential reduction algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 62:119–131, 1993.
- [39] J. A. Momoh, M. E. El-Hawary, and R. Adapa. A review of selected optimal power flow literature to 1993, part II newton, linear programming and interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(1):105–111, 1999.
- [40] R. D. C. Monteiro and I. Adler. Interior path following primal-dual algorithms - part I: Linear programming. *Mathematical Programming*, 44(1):27–41, 1989.
- [41] R. D. C. Monteiro and I. Adler. Interior path following primal-dual algorithms - part II: Convex quadratic programming. *Mathematical Programming*, 44(1):43–66, 1989.
- [42] S.G. Nash, R. Polyak, and A. Sofer. A numerical comparison of barrier and modified-barrier methods for large-scale bound-constrained optimization. *Large Scale Optimization - Kluwer Academic Publishers B.V.*, pages 319–338, 1994.
- [43] A. R. L Oliveira. *Algoritmos de Pontos Interiores para Programação Linear - Estudo e Implementação*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computacional - FEEC - UNICAMP, Campinas SP, 1989.
- [44] A. R. L Oliveira and S. Soares. Métodos de pontos interiores para problema de fluxo de potência ótimo DC. *SBA: Controle & Automação*, 14(3):278–285, 2003.

- [45] A. R. L. Oliveira, S. Soares, and L. Nepomuceno. Optimal active power dispatch combining network flow and interior point approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(4):1235–1240, November 2003.
- [46] R. Polyak. Modified barrier functions (theory and methods). *Department of Mathematical Sciences - IBM T.J. Watson Research Center* -, 1990.
- [47] R. Polyak. Modified barrier functions in linear programming. *Department of Mathematical Sciences - IBM T.J. Watson Research Center*, 1992.
- [48] K. Ponnambalam, V. H. Quintana, and A. Vanneli. A fast algorithm for power system optimization problems using an interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(3):892–899, 1992.
- [49] R. W. Probst. *Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Problema e Pré-despacho de um Sistema Hidrotérmico*. PhD thesis, IMECC – UNICAMP, Março 2006. <http://libdigi.unicamp.br/document/?view=vtls000378249>.
- [50] V. H. Quintana, G. L. Torres, and J. Medina-Palomo. Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(1):170–176, 2000.
- [51] R. Saigal. Linear programming: A modern integrated analysis. *Kluwer Academic Publishers*, 1995.
- [52] D.F. Shanno, M.G. Breinfeld, and E.M. Simantiraki. Implementing barrier methods for nonlinear programming. Technical report, Rutgers University, 1995.
- [53] V.R. Sherkat and Y. Ikura. Experience with interior point optimization software for a fuel planning application. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):833–840, 1994.
- [54] S. Soares and Clóvis T. Salmazo. Minimum loss predispatch model for hydroelectric systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(3):1220–1228, 1997.
- [55] V. A. Sousa, E. C. Baptista, and G. R. M Costa. A resolução do problema de despacho Ótimo de reativos pelo método da função lagrangeana-barreira relaxada. *Pesquisa Operacional*, 28 (2), 2008.
- [56] V. A. Sousa, E. C. Baptista, and G. R. M Costa. Loss minimization by predictor-corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research*, 79, 2009.

- [57] V. A. Sousa, E.C. Batista, and G.R.M. da Costa. A função barreira modificada e o problema de fluxo de potência Ótimo. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 7(2), 2006.
- [58] R.L. Sullivan. *Power System Planning*. McGraw-Hill, 1977.
- [59] M. Todd. Potential reduction methods in mathematical programming. Technical report, Cornell University, 1995.
- [60] R. J. Vanderbei. *Linear Programming – Foundations and Extensions*. Kluwer Academics Publishers, Boston, USA, 1996.
- [61] V.S. Vassiliadis and S.A Brooks. Application of modified barrier method in large-scale quadratic programming problems. *Computers Chem. Eng*, 22(9), 1998.
- [62] V.S. Vassiliadis and C.A Floudas. The modified barrier function approach for large-scale optimization. *Computers Cem. Eng*, 21(9), 1997.
- [63] X. Wang, G.C. Ejebe, J. Tong, and J.G. Waight. Preventive/corrective control for voltage stability using direct interior point method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13:878–883, 1998.
- [64] H. Wei, H. Sasaki, J. Kubokewa, and R. Yokoyama. An interior point nonlinear programming for optimal power flow problems with a novel data structure. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(3):870–877, 1998.
- [65] S. J. Wright. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1996.
- [66] Y. Q. Wu, A. S. Debs, and R. E. Mastern. A direct nonlinear predictor-corrector prima-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):876–883, 1994.
- [67] H. Yamashita and H. Yabe. Superlinear and quadratic convergence of some primal–dual interior point methods for constraints optimization. *Mathematical Programming*, 75:377–397, 1996.
- [68] X. Yan and V. H. Quintana. An efficient predictor-corrector interior point algorithm for security-constrained economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12:803–810, 1997.

APÊNDICE A

UM OUTRO ENFOQUE

No Capítulo 3 foi visto que o enfoque no sistema (??) não impede a ocorrência de problemas numéricos ao se aproximar de valores nulos.

O estudo com enfoque no sistema 3.23 é continuado apenas pela verificação de possíveis ocorrências de problemas numéricos. Assim, continuando a isolar as variáveis, substitui-se (3.28) na segunda equação do sistema (3.27) obtendo o sistema equivalente:

$$\begin{cases} Adx = r_p \\ -Ddx + A^t dy = r_d - X^{-1}r_c, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde $D = X^{-1}Z$.

Agora, isolando d_x na segunda equação do sistema equivalente (A.1) obtêm-se:

$$dx = -D^{-1}[r_d - X^{-1}r_c - Ad_y]. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.2) na primeira equação do sistema (3.32) enfim obtêm-se a variável d_y :

$$d_y = M^{-1}[r_p + AD^{-1}(r_d - X^{-1}r_c)], \quad (\text{A.3})$$

onde $M = AD^{-1}A^t$.

É fácil observar que M é simétrica, mas por haver a possibilidade de valores menores que zero em x , não há como garantir que M seja definida positiva, diferentemente do que acontece na metodologia tradicional, ou seja, não deve-se fazer uso da decomposição de Cholesky, mas pode-se usar a fatoração

LU para resolver o sistema em questão.

O custo computacional está na resolução do sistema (A.3) porém, por M não ser definida positiva é maior que o da abordagem tradicional do método seguidor de caminhos, onde se resolve um sistema equivalente mas com matriz definida positiva.

Observe ainda que, com este enfoque praticamente não se nota a presença do parâmetro de barreira δ , ignorando sua importância no método.

Conclusão, apesar de equivalente ao sistema 3.20, trabalhar com o sistema 3.23 não traz vantagem alguma, exceto verificar que $\{\pi^k\} \rightarrow z^*$.

APÊNDICE B

POSTO COMPLETO DA MATRIZ JUSTAPOSTA $[A | -E]$

Objetivo: Mostrar que se $A_{m \times n}$ for uma matriz de incidência de um Grafo G com $m > 2$ nós e n ramos e $e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um vetor canônico então a matriz $B = [A|e_m]$ tem posto m .

Demonstração:

As seguintes afirmações são verdadeiras:

- Como A é uma matriz de incidência, A tem posto $m - 1$.
- Sabe-se que se T é uma árvore geradora de G então existe uma submatriz de A que representa a matriz de incidência de $[A_T]_{m \times (m-1)}$ com posto $m - 1$ (a recíproca também é verdadeira).

Assim, para mostrar que a matriz $B = [A|e_m]$ tem posto m basta mostrar que existe uma submatriz de B que tem posto m , ou seja, basta mostrar que a matriz $C = [A_T|e_m]_{m \times m}$ tem posto m .

Sejam L_1, L_2, \dots, L_m as linhas de C , deve-se mostrar que $\{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ é um conjunto linearmente independente, ou seja:

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \dots + \alpha_m L_m = \vec{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$

Logo tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 L_{11} + \alpha_2 L_{21} + \cdots + \alpha_m L_{m1} & = 0 \\ \alpha_1 L_{12} + \alpha_2 L_{22} + \cdots + \alpha_m L_{m2} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_1 L_{1m} + \alpha_2 L_{2m} + \cdots + \alpha_m L_{mm} & = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Pela construção de $C = [A_T|e_m]_{m \times m}$ tem-se que os últimos elementos de cada L_s , $s < m$ são nulos ($L_{sm} = 0$). Logo, pela última equação do sistema (B.1), tem-se que $\alpha_m = 0$.

Como A é uma matriz de incidência e A_T de uma árvore geradora de G , tem-se que cada coluna de ambas tem apenas 2 elementos não nulos 1 e -1. Assim cada coluna está representada no sistema (B.1), logo este é formado por equações da forma:

$$\alpha_i L_{is} - \alpha_j L_{js} = 0.$$

Sem perda de generalidade pode-se supor que para a última linha de A_T , L_m contém apenas um elemento não nulo -1 (já que em uma árvore existem pelo menos dois nós com grau 1, traduzindo em linguagem matricial, existem pelo menos duas linhas com apenas um elemento não nulo em A_T).

Seja este elemento não nulo L_{ms} , $s < m$. Logo existe $i \neq m | L_{is} = 1$ e $L_{js} = 0$ se $j \neq i$ e $j \neq m$, ou seja, no sistema (B.1) há a equação:

$$\alpha_i - \alpha_m = 0. \quad (\text{B.2})$$

Como $\alpha_m = 0$ a equação (B.2) resulta que $\alpha_i = 0$.

Mas $m > 2$, assim o nó i se conecta a algum outro nó, já que o nó m é um nó extremo. Logo pelo mesmo raciocínio anterior, existe algum $t < m$ e $t \neq i$ tal que:

$$\alpha_i - \alpha_t = 0 \text{ ou } \alpha_t - \alpha_i = 0$$

faz parte do sistema (B.1).

Como $\alpha_i = 0$, ambas resultariam que $\alpha_t = 0$. Seguindo novamente este raciocínio, tem-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$.

Logo as linhas $\{L_1, L_2, \cdots, L_m\}$ formam um conjunto linearmente indepêndente, o que mostra que o posto de $C = [A_T|e_m]_{m \times m}$ é m .

□