

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Este exemplar corresponde à redação final  
da tese defendida por Paulo de Barros Correia e  
aprovada pela Comissão Julgadora em 29/11/1984

Hermano de Medeiros Ferreira Tz

ALOCAÇÃO HORÁRIA DA DEMANDA ENERGÉTICA NO SISTEMA  
HIDRELÉTRICO DO MÉDIO SÃO FRANCISCO

PAULO DE BARROS CORREIA

Orientador: HERMANO DE MEDEIROS FERREIRA TAVARES

100/84

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas - UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS

- Novembro/1984 -

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

λ

ANA LÚCIA, JULIANA, TIAGO e EVA

## AGRADECIMENTOS

ao Hermano pela orientação;

ao Christiano e Marcos por várias contribuições;

aos amigos da FEC, Anilton, Ana, Paulo, Jura, Dino, Raul, Akebo, Taka, Flávio, Carlão e Naka, pela convivência agradável e apoio;

ã Elza Aoki pelo trabalho de datilografia.

Este trabalho contou com suporte financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

## INDICE

### CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA .....	3
1.1 INTRODUÇÃO .....	3
1.2 ASPECTOS GERAIS DO PLANEJAMENTO OPERACIONAL .....	5
1.3 O SISTEMA ENERGÉTICO DO MÉDIO SÃO FRANCISCO .....	12
1.4 ESTRATÉGIA PARA O PLANEJAMENTO OPERACIONAL A CURTO PRAZO .....	15

### CAPÍTULO 2

O MÉTODO DO GRADIENTE REDUZIDO .....	18
2.1 INTRODUÇÃO .....	18
2.2 DESCRIÇÃO DO MÉTODO .....	19
2.2.1 Estabelecimento do Problema .....	19
2.2.2 Redução do Problema .....	20
2.2.3 Direção de Pesquisa .....	23
2.2.4 Critério de Otimalidade .....	24
2.2.5 Determinação do Passo .....	27
2.2.6 Atualização da Base .....	28
2.3 ALGORÍTMO .....	29
2.4 PROGRAMA COMPUTACIONAL .....	32
2.4.1 Comentários .....	33
2.4.2 Diagrama de Blocos .....	35
2.5 DIREÇÃO CONJUGADA REDUZIDA .....	35

## CAPÍTULO 3

0 MODELO DE ALOCAÇÃO HORÁRIA DA DEMANDA ENERGÉTICA .....	42
3.1 INTRODUÇÃO .....	42
3.2 CONSIDERAÇÕES GERAIS .....	42
3.3 NOMENCLATURA .....	45
3.4 RESTRIÇÕES DO PROBLEMA .....	47
3.4.1 Sobradinho .....	47
3.4.2 Moxotô e Paulo Afonso IV .....	48
3.4.3 Paulo Afonso I-III .....	49
3.4.4 Intercâmbio Energético .....	50
3.4.5 Corte de Carga .....	51
3.5 FUNÇÃO OBJETIVO .....	51
3.6 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....	53
3.7 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA .....	57
3.8 HIDROGERAÇÃO DO SISTEMA .....	60
3.9 O GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO .....	61

## CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES COMPUTACIONAIS .....	65
4.1 INTRODUÇÃO .....	65
4.2 CURVAS TÍPICAS DE DEMANDA HORÁRIA .....	65
4.3 PARÂMETROS DAS USINAS HIDRELÉTRICAS .....	66
4.4 ESTRUTURA DE DADOS DE UM EXEMPLO .....	69
4.5 SOLUÇÃO INICIAL FACTÍVEL .....	72
4.6 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA .....	75
4.7 EXEMPLO: DIA ÚTIL .....	76
4.8 COMENTÁRIOS .....	88

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE .....	92
APÊNDICE A : NOTAÇÃO MATRICIAL .....	95
APÊNDICE B : FORMULAÇÃO ALTERNATIVA POR GRAFOS .....	97
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	104

## APRESENTAÇÃO

Neste trabalho desenvolve-se um modelo matemático para o pré-despacho energético de um sistema hidrelétrico. O modelo é tratado por técnicas de otimização a partir da formulação de um problema de minimização de uma função objetivo não linear - o desvio quadrático obtido do balanço energético entre geração e demanda - sujeito a um sistema de restrições lineares que representa os balanços hidráulicos nas usinas, o intercâmbio energético com um outro sistema e o atendimento a um mercado de carga interruptíveis (corte de carga), além dos limites físicos e operativos do próprio sistema. A formulação desenvolvida é adaptada a um sistema real, o do médio São Francisco (CHESF).

O capítulo 1 introduz o problema. O pré-despacho é situado numa visão de planejamento operacional com horizontes de tempo mais longos. Apresenta-se uma descrição do sistema hidrelétrico do médio São Francisco. Comenta-se estratégias de abordagem do planejamento operacional a curto prazo apresentadas na literatura.

O capítulo 2 apresenta o método do Gradiente Reduzido que é a técnica de otimização usada na resolução do problema formulado. Após uma descrição detalhada do método, apresenta-se o diagrama de blocos do programa computacional desenvolvido.

O capítulo 3 trata da formulação do problema. O conjunto de restrições é montado e, a seguir, apresentado em forma matricial. A função objetivo é definida e o seu gradiente determinado.

O capítulo 4 mostra as aplicações computacionais realizadas.

Os parâmetros específicos de cada aproveitamento hidrelétrico do sistema e a estrutura de dados necessários para a montagem de um exemplo são mostrados. A alocação horária da demanda energética é realizada sobre um dia - um dia útil é usado para exemplo - e os resultados são apresentados e comentados.

O capítulo 5 conclui os trabalhos e propõe sugestões de continuidade. Dã-se especial atenção a uma formulação alternativa para o problema usando grafos que é apresentada em detalhes no apêndice B.

## CAPÍTULO 1

### APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

#### 1.1. INTRODUÇÃO

A alocação conveniente de recursos no desempenho de atividades produtivas vem crescendo em importância nos últimos anos. Frequentemente, estes recursos tornam-se escassos, ou mesmo insuficientes, para o atendimento da demanda.

No caso particular de recursos energéticos, a situação tomou rumo dramático ao longo da última década, quando o incremento vertiginoso dos preços do petróleo forçou uma reavaliação profunda na utilização de seus derivados com reflexo em toda matriz energética.

Pode-se considerar o problema de alocação como constituído por duas diferentes etapas. O estabelecimento de uma alocação factível dos recursos, capaz de assegurar o atendimento à demanda, seria a primeira destas etapas. Ela estaria diretamente relacionada com a exequibilidade da atividade em foco. Numa segunda etapa, admitida a hipótese de existência de várias soluções factíveis, explora-se a formulação de critérios de mérito que permitam comparar soluções obtidas e escolher dentre elas a que se apresentar mais atrativa.

O estabelecimento e desenvolvimento de metodologias adequadas a resolução de problemas de alocação, capazes de fornecer soluções factíveis otimizadas mediante um critério pré-estabelecido, vem sendo objeto da atenção de inúmeros pesquisadores.

O problema de estabelecer uma política para o pré-despacho de um sistema produtor de energia elétrica inclui-se nestas considerações. Nele um mercado consumidor de energia elétrica, caracterizado por uma curva de demanda horária, deve ser atendido pela geração das usinas que compõem o sistema produtor, lançando-se mão dos recursos energéticos disponíveis.

Quando se trata de sistemas hidrotérmicos, a geração, quanto à origem, pode ser distinguida em duas formas: a geração hidráulica e a geração térmica. Estas duas componentes energéticas complementam-se na finalidade de atender à demanda do mercado consumidor, porém possuem alguns aspectos antagônicos que devem ser considerados na realização do pré-despacho energético.

A geração hidráulica pressupõe a existência local de recursos naturais economicamente exploráveis. A implantação de um parque de geração hidráulico absorve investimentos que em geral atingem proporções consideravelmente elevadas, aos quais deve-se acrescentar os investimentos necessários à implantação de linhas de transmissão de energia, pois a maioria dos grandes aproveitamentos hidroenergéticos situam-se a distâncias consideráveis dos grandes centros consumidores de energia elétrica. Porém, uma vez implantado, um aproveitamento hidroenergético produz energia a custo marginal praticamente nulo.

A geração térmica pode prescindir da existência local de recursos naturais quando a aquisição e o transporte do combustível admitir soluções econômicas. Os investimentos requeridos para a implantação de um parque de geração térmico são relativamente inferiores aos necessários para a implantação de um parque de geração hidráulico. Os investimentos realizados com linhas de transmissão de energia também são inferiores, pois as usinas térmicas podem ser construídas próximas aos grandes centros consumidores. Porém, a energia produzida por uma usina térmica terá custo marginal elevado e crescente.

Convém lembrar que em ambos os parques geradores a estocagem de energia somente é possível na sua forma primária, armazenando-se combustível no parque térmico e água no hidráulico. A energia elétrica produzida no sistema terá que ser integralmente consumida.

A caracterização de um sistema produtor de energia elétrica, além das considerações sobre o seu parque gerador e do mercado consumidor de atendimento garantido, pode ser complementada pela consideração de intercâmbios energéticos com outros sistemas e pela existência de um mercado consumidor de cargas interruptíveis.

Sobre estes aspectos característicos do sistema, procura-se estabelecer critérios de mérito a serem otimizados na política do pré-despacho energético. Por exemplo, em um sistema hidrotérmico a minimização da geração térmica complementar poderia ser um critério adotado na operação energética em períodos secos, nos quais os recursos hidroenergéticos do sistema são escassos. Por outro lado, a maximização da energia hidráulica fornecida ao mercado de cargas interruptíveis poderia ser o critério adotado para períodos úmidos, nos quais os recursos hidroenergéticos seriam abundantes.

Uma caracterização precisa do sistema em estudo envolvendo seus mercados consumidores, intercâmbios energéticos, funções de geração das usinas, juntamente com a definição de critérios de operação, constituem subsídios necessários à pesquisa de metodologias e ao desenvolvimento de técnicas capazes de alocar convenientemente blocos de geração horária entre usinas de um sistema produtor, visando atender a sua curva de demanda.

## 1.2. ASPECTOS GERAIS DO PLANEJAMENTO OPERACIONAL

Para sua completa compreensão o problema do pré-despacho ener

gético deve ser considerado como etapa de uma política operacional mais ampla, onde pode-se estender o planejamento desde estudos a longo prazo, com horizontes plurianuais discretizados mensalmente, até estudos a curto prazo, nos quais pode-se ter horizontes semanais com discretização horária. Estas etapas admitem enfoques diferenciados, seja em consequência de características particulares do sistema abordado, seja em consequência do horizonte de planejamento adotado.

Em estudos a longo prazo decide-se sobre o movimento de grandes blocos de energia, dispondo-se de uma margem de manobra para decisões que será tanto mais larga, quanto maior a capacidade de armazenamento dos grandes reservatórios do sistema. Note, que na operação em horizontes plurianuais somente os reservatórios com capacidade de regularização plurianual contribuirão de forma ativa.

Os modelos de planejamento da operação a longo prazo admitem com frequência o objetivo de maximizar a energia (volume de água) armazenada no sistema ao final do horizonte de estudo, procurando-se, com este critério minimizar a geração térmica futura, ou mesmo evitar interrupções futuras no fornecimento de energia ao mercado de atendimento garantido. Em estudo de longo prazo a formulação de modelos para previsões de demanda energética e vazões afluentes, ambas aleatórias, é de fundamental importância. Os volumes máximos armazenados nos reservatórios do sistema poderiam sofrer limitações superiores adicionais durante o período úmido de modo a assegurar-se os volumes de espera necessários ao controle de cheias; estas limitações poderiam ser relaxadas durante o período seco.

Em estudos a curto prazo, decide-se sobre o movimento de pequenos blocos de energia, e tanto a demanda energética quanto as vazões afluentes admitem tratamento determinístico. Entretanto, nestes horizontes torna-se necessário abordar de maneira mais detalhada a operação de cada

aproveitamento e considerar com maior precisão as funções de geração das usinas do sistema. Na operação a curto prazo poderia ser considerado, a título de exemplo, como objetivo a minimização da geração térmica complementar em períodos secos, ou a maximização do fornecimento de energia ao mercado de cargas interruptíveis durante os períodos úmidos, utilizando-se os recursos energéticos postos a disposição do planejamento a curto prazo pelo planejamento situado a nível hierárquico imediatamente superior.

Os estudos em ambos os horizontes são interdependentes. O planejamento a longo prazo, a partir das condições atuais e das previsões futuras, processa um escalonamento dos recursos sobre o horizonte de estudo de modo a estabelecer o melhor compromisso entre as necessidades, e os recursos, atuais e futuros. Por outro lado, o planejamento a curto prazo atende às necessidades imediatas recorrendo aos recursos que lhe são postos à disposição, confrontando as previsões realizadas a longo prazo com resultados reais verificados. Deste confronto surgem elementos para a realimentação do planejamento a longo prazo.

Na abordagem de problemas de planejamento hidroenergético a longo prazo tem-se difundido bastante o modelo de representação por reservatório equivalente proposto por Arvanitidis e Rosing [1]. Nele todo o sistema hidráulico é representado por um único reservatório hipotético com energia potencial armazenada equivalente à armazenada em todo o sistema tomando-se cada reservatório individualmente.

A energia potencial armazenada num reservatório é representada por uma função linear do seu volume. O modelo global de representação por reservatório equivalente é caracterizado pela energia potencial do sistema, por um modelo estatístico de previsão da energia afluenta e por uma função de geração que relaciona a energia potencial liberada pelo sistema com a energia elétrica produzida.

A representação por reservatório equivalente tem na operação por curva-limite uma de suas mais frequentes aplicações. Esta forma de operação prioriza a confiabilidade do sistema; adota-se como critério de operação a manutenção da energia armazenada no sistema, representada pela energia potencial do reservatório equivalente, em níveis tais que seja assegurado o fornecimento de energia ao mercado de atendimento garantido, sob quaisquer condições hidrológicas de ocorrência provável, por mais desfavorável que sejam. Na operação por curva-limite não se desenvolve uma política de otimização de um critério de mérito.

Na realidade, são estabelecidas metas mínimas de armazenamento; estas metas configuram a curva-limite e correspondem à energia mínima necessária para se enfrentar uma sequência de períodos críticos de afluência - entendendo-se por período crítico o de menores vazões afluentes historicamente registrado. Esta energia mínima armazenada deve ser suficiente para assegurar o fornecimento de energia ao mercado de atendimento garantido, durante uma sequência de períodos críticos, considerando-se o parque gerador térmico funcionado a plena carga. Obtém-se então, a regra básica de operação para o sistema, que consiste no acionamento pleno da geração térmica sempre que se verifique uma energia potencial (volume) armazenada inferior ao valor que lhe corresponderia na curva-limite. Para maiores esclarecimentos, consultar [1], [3].

Pode-se indicar como pontos de fragilidade deste tipo de operação o fato de que, uma vez assegurada a confiabilidade do sistema, não se procure tirar proveito de qualquer outro critério de mérito que torne a operação do sistema mais atrativa. Outra fragilidade é o acionamento desnecessário da geração térmica sob condições hidrológicas pseudo desfavoráveis; esta fragilidade acentua-se em sistemas de forte predominância da geração hidráulica sobre a geração térmica - neles a recuperação da energia (volu-

me) armazenado, pelo acionamento do parque gerador térmico, ocorrerá com menor efetividade.

Outra aplicação frequente da representação por reservatório equivalente, em problemas de planejamento a longo prazo, dá-se por sua utilização em modelos de otimização usando programação dinâmica. O emprego desta técnica é atrativo em virtude da substancial redução do número de variáveis do problema decorrente da representação por reservatório equivalente e devido à facilidade em tratar afluências aleatórias com programação dinâmica. Este procedimento é usado em [2], [4].

A representação por reservatório equivalente reduz de forma substancial a informação disponível sobre o parque gerador hidráulico. Isto pode se tornar indesejável se o sistema em estudo possui uma forte predominância da geração hidráulica, pois neste caso é de se esperar que o conteúdo da política operacional incida também de forma predominante sobre a operação do parque gerador hidráulico. Maneiras de evitar este tipo de "empobrecimento" do modelo são apresentadas em [3] e [5], onde representa-se as usinas hidráulicas do sistema de forma individualizadas e contorna-se as dificuldades decorrentes da dimensão que o problema pode atingir por meio de técnicas de decomposição.

Em problemas de planejamento a curto prazo da operação energética de sistemas reais convém mencionar que: a) verifica-se que eles são determinísticos, pois neste horizonte as vazões afluentes e as demandas energéticas do sistema são geralmente previsíveis; b) a idéia dominante de estabelecer uma política detalhada e individualizada para cada usina do sistema impõe modelos com elevado número de variáveis; c) apesar destes modelos serem na realidade não lineares muitas vezes admitem formulação através de modelos lineares com desvios reduzidos.

Os aspectos acima mencionados indicam a possibilidade da utilização de técnicas de programação linear, que são de comprovada eficiência e robustez. E de fato observa-se na literatura publicada que esta é uma tendência em ascensão. Deste modo, pode-se tratar com eficiência e relativa facilidade problemas de grande porte, seja por métodos específicos de decomposição (Dantzig-Wolfe, Benders etc.) [6], aplicáveis a problemas com estruturas particulares, seja métodos gerais, onde pode-se mencionar o método simplex revisado na forma produto da inversa associado à decomposição L.U. da base e a técnicas de armazenamento esparsas [7].

Observando o problema com respeito à filosofia adotada para o pré-despacho energético distingue-se duas linhas de pesquisa frequentemente explorada. Na primeira delas realiza-se o pré-despacho energético levando-se em conta tanto as restrições relativas ao sistema produtor, quanto outras relativas à rede elétrica de transmissão de energia. Neste caso considera-se a hipótese de que um pré-despacho energeticamente factível possa verificar-se eletricamente infactível. Na segunda linha de pesquisa considera-se apenas as restrições inerentes ao sistema produtor, admitindo-se em consequência que um pré-despacho energeticamente factível não sofrerá restrições adicionais oriundas da rede elétrica. Observe que, se o sistema em estudo tiver características tais que se enquadre na segunda linha de pesquisa indicada, obtêm-se uma redução considerável na dimensão do problema formulado.

Na primeira linha citada tem-se formulado com frequência modelos lineares usando o princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe, onde os subproblemas correspondem a áreas, reais ou fictícias, definidas sobre o sistema em foco. Mencionam-se os trabalhos de Romano e outros [8], Veiga e outros [9], nos quais desenvolve-se a idéia central de minimizar o custo de geração térmica, representado para cada usina por uma função linear por

partes, e estabelece-se restrições para que os limites de geração das usinas e limites de transmissão das linhas sejam atendidos e obtenha-se um fluxo de carga linearizado (potência ativa) factível sobre a rede de transmissão do sistema.

Seguindo a linha de considerar apenas o sistema produtor de energia, Machado e outros [10] formularam um modelo linear para gestão a curto prazo de um sistema hidrotérmico, tendo como objetivo a minimização do custo (linearizado) de geração térmica e submetido a restrições de balanço energético, acoplamento hidráulico entre usinas em cascata e aos limites de operação dos aproveitamentos do sistema. A matriz de restrições obtidas nesta formulação possui uma estrutura particular pois o bloco correspondente às restrições de acoplamento hidráulico constitui uma matriz típica de um problema de transporte. Esta particularidade permite, em parte, a utilização de técnicas de otimização em grafos e possibilitam reduções substanciais no esforço computacional dispendido a cada iteração, quando compara-se ao método simplex clássico.

Sob a ótica desta segunda linha, e de modo um pouco mais generalizado, Gagnon e outros [11] estabeleceram um modelo não linear de otimização para a operação de um sistema hidrotérmico, tendo como objetivo a minimização dos desvios observados no balanço energético. Na função objetivo acrescentou-se um termo de penalização das restrições "fracas" do modelo - entendendo-se por restrições "fracas" aquelas que se permite violar. As demais restrições (fortes) apresentam-se em forma linear e são utilizadas para reduzir a dimensão do problema original. Este método pode ser considerado uma variante do método do gradiente reduzido de Wolfe [12], sendo que a cada iteração pesquisa-se numa direção conjugada obtida pelo método Fletcher-Reeves [13]. A matriz de restrições obtida nesta formulação é triangular (problema de transporte). Então não se necessita recorrer à matriz

inversa da base para se obter as variáveis dependentes a partir das independentes.

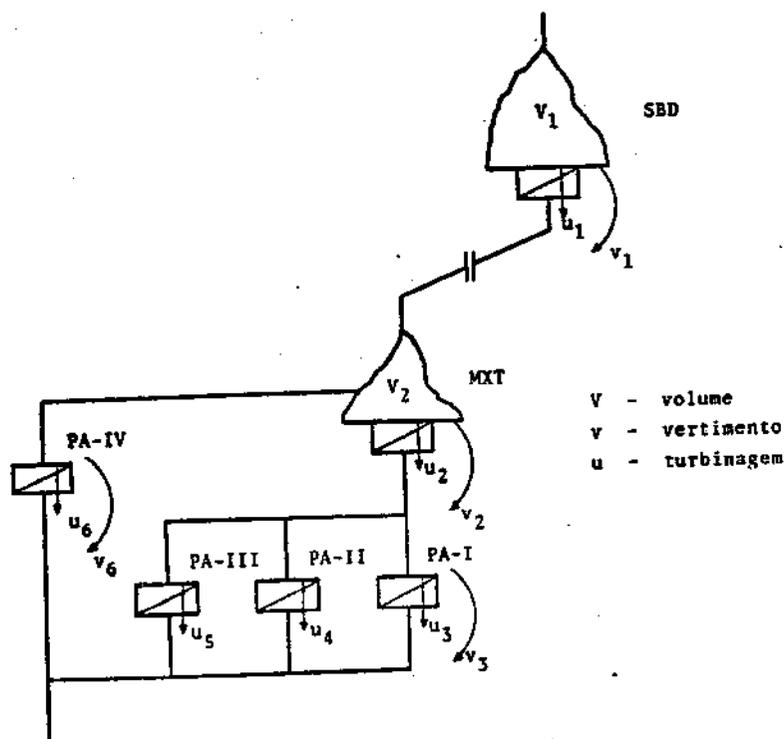
Ainda nesta linha, Lyra e outros [14] apresentaram um modelo para a coordenação energética de um sistema hidrotérmico gerador, onde se minimiza o custo da geração térmica acrescido de um termo que penalize a realização de cortes de carga, que juntos compõem uma função objetivo não linear. O problema está submetido a restrições do balanço energético, balanço hidráulico dos reservatórios, e limites de operação para usinas e reservatórios. Utiliza-se como ferramenta matemática o método do gradiente reduzido numa formulação em que, associado com técnicas de penalização, permite-se fixar o conjunto das variáveis dependentes (básicas). Deste modo, o método evolui sem que haja atualizações da base.

O presente trabalho, de estabelecer um modelo para a alocação horária da demanda energética sobre um horizonte de curto prazo no sistema hidroelétrico do médio São Francisco, segue a última linha de pesquisa mencionada. Trata-se o problema energético, não se considerando a rede elétrica de transmissão de energia.

### 1.3. O SISTEMA ENERGÉTICO DO MÉDIO SÃO FRANCISCO

A cascata do médio São Francisco formada pelos aproveitamentos de Sobradinho, Moxotó e Paulo Afonso I-IV, com uma capacidade instalada de 5.470 MW, constitui o núcleo central do sistema produtor de energia elétrica da região Nordeste (CHESF). Estes aproveitamentos estão acoplados hidráulicamente segundo o esquema indicado na fig. 1.1.

## Sistema Hidrelétrico do Médio São Francisco (CHESF)



(fig. 1.1)

O aproveitamento de Sobradinho consta de um reservatório com capacidade plurianual de regularização - seu volume útil de operação é da ordem de  $29 \times 10^9 \text{ m}^3$ , sendo o principal armazenador de energia do sistema - e por uma usina hidráulica com uma capacidade instalada de 1050 MW. Sua operação a curto prazo deverá atender a três aspectos:

- observar a política de armazenamento de água (energia) estabelecida pelo planejamento a nível hierárquico superior
- contribuir com uma parcela da hidrogeração do sistema

- c) liberar água (energia) em suficiência para assegurar a operação, dentro de uma política estabelecida, do complexo Moxotô /Paulo Afonso

Aproximadamente a 400 km a jusante de Sobradinho situa-se o aproveitamento de Moxotô, formado por um reservatório com capacidade diária de regularização, correspondente a um volume útil de operação da ordem de  $0,5 \times 10^9 \text{ m}^3$ , e por uma usina hidráulica com uma capacidade instalada de 440 MW. Na sua operação considera-se os seguintes aspectos:

- a) contribuir com uma parcela da hidrogeração do sistema
- b) liberar água (energia) para a operação das usinas de Paulo Afonso I-III

Localizadas 4 km a jusante do aproveitamento de Moxotô situam-se as usinas de Paulo Afonso I-III; são três usinas fio-de-água em paralelo alimentadas por uma mesma bacia de adução (Delmiro Gouveia) e com uma capacidade total instalada de 1.524 MW.

Finalmente, em paralelo com a cascata Moxotô /Paulo Afonso I-III, e alimentada diretamente do reservatório de Moxotô por um canal artificial com 5 km de extensão, situa-se a usina de Paulo Afonso IV, com uma capacidade instalada de 2460 MW; é a usina de maior rendimento energético do sistema.

É interessante notar que na operação da cascata, Sobradinho e o complexo Moxotô /Paulo Afonso estão acoplados de duas formas distintas.

Há um acoplamento elétrico, instantâneo, que se dá através do balanço energético do sistema, e um acoplamento hidráulico com retardo, uma vez que Sobradinho deve ser operado tendo em conta as necessidades de água (energia) que o complexo Moxotô / Paulo Afonso terá aproximadamente três dias após, sendo este o tempo médio estimado de viagem da onda d'água naquele percurso.

#### 1.4. ESTRATÉGIA PARA O PLANEJAMENTO OPERACIONAL A CURTO PRAZO

O planejamento da operação energética do sistema do médio São Francisco será tratado por dois modelos de otimização hierarquicamente acoplados.

A nível hierárquico superior, o modelo denominado "Modelo de Otimização para a Operação Hidroenergética na Cascata do São Francisco" programa a operação energética do sistema sobre um horizonte semanal, fornecendo como resultados valores médios de turbinagens e vertimentos discretizados em três intervalos diários. Os intervalos de discretização correspondem a períodos de carga leve, média e pesada, e podem ser desiguais. Como técnica de otimização usa-se o método simplex revisado, na forma explícita da inversa, com duas FASES.

A FASE I (fase térmica) objetiva minimizar o déficit energético, este déficit também poderia ser interpretado como a geração térmica complementar do sistema. Obter uma função objetivo nula no final desta fase equivale a se atender toda a demanda do sistema com geração hidráulica. Caso isto ocorra o modelo processa a fase seguinte.

A FASE II (fase hidráulica), considerando que a hidrogeração é suficiente para atender à demanda do sistema, objetiva maximizar o volume

armazenado no reservatório de Sobradinho ao final do horizonte de estudo, o que equivale a maximizar a reserva energética do sistema.

O problema está submetido às restrições do balanço hidráulico nos reservatórios de Sobradinho, Moxotó e na bacia de adução de Delmiro Gouveia. Também considera-se restrições que assegurem o atendimento ao intercâmbio energético, ao mercado de cargas interruptíveis e que resguardem a operação do porto fluvial de Juazeiro, localizado 30 km a jusante de Sobradinho.

As funções de geração das usinas hidráulicas são linearizadas.

Para esclarecimento sobre este modelo consultar [15].

A nível hierarquicamente inferior, o modelo de "Alocação Horária da Demanda Energética no Sistema Hidroelétrico do Médio São Francisco" detalha em valores horários as turbinagens e vertimentos médios fornecidos pelo modelo anteriormente referido.

Na formulação proposta, minimiza-se o desvio quadrático médio observado no balanço energético, onde se considera de um lado a curva de demanda horária (dado conhecido) e do outro as hidrogerações, o intercâmbio energético e o mercado de cargas interruptíveis (variáveis de decisão). A hidrogeração de cada usina é uma função não linear dada por:

$$hg(V, u, d) = k \cdot u \cdot q(V, d) \quad (1.1)$$

k constante de proporcionalidade

u vazão turbinada

q(V, d) altura de queda líquida, função do volume armazenado e da vazão defluente

A factibilidade do problema é mantida por um conjunto de restrições (lineares) onde se assegura a observação dos limites de operação do sistema e da política operacional definida a nível hierárquico superior.

Obtém-se um problema do seguinte tipo:

$$\text{Min. } f(x) \quad (1.2)$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$$

onde  $f(x)$  é uma função não linear continuamente diferenciável. Como técnica de otimização utiliza-se o método do gradiente reduzido.

## CAPÍTULO 2

### O MÉTODO DO GRADIENTE REDUZIDO

#### 2.1. INTRODUÇÃO

O problema do planejamento ótimo da operação de um sistema produtor de energia possui, em geral, características não lineares. E isto decorre da própria natureza não linear de várias das leis físicas utilizadas no modelamento do problema.

Técnicas de Programação Linear têm sido aplicadas com sucesso a alguns destes problemas, nos quais a não linearidade aparece de forma tênue, possibilitando assim uma representação aproximada do problema por modelos lineares.

Em geral os desvios decorrentes de linearizações, verificados nos problemas de planejamento em horizontes de médio e longo prazo, podem ser considerados aceitáveis. Nestes problemas as incertezas provenientes da natureza aleatória de alguns dos seus dados poderão vir a absorver completamente aqueles desvios. Mais, as soluções obtidas naqueles horizontes possuem caráter indicativo. Neste caso o emprego de técnicas lineares de otimização, por suas características de eficiência, robustez e facilidades de implantação, pode se tornar atrativo.

Entretanto para problemas em horizonte de curto prazo, nos quais as soluções deverão traduzir metas operativas a serem atingidas, e os dados do problema sob condições normais de operação do sistema podem ser considerados determinísticos, desvios daquela natureza poderão tornar-se indesejáveis. Neste caso é interessante verificar a possibilidade de empre-

gar técnicas de Programação Não Linear.

Dentre estes problemas uma classe particular é constituída por aqueles que objetivam otimizar uma função não linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. A esta classe de problemas, quando a função objetivo é continuamente diferenciável, pode ser aplicado o método do Gradiente Reduzido desenvolvido originalmente por Wolfe [12]. Este método tem sido aplicado com sucesso a problemas reais de grande porte [16].

Neste capítulo será descrito o Método do Gradiente Reduzido; trata-se de um método primal no qual se evolui para a otimalidade através de soluções factíveis. A idéia central do método consiste em reduzir o problema original, não linear e sujeito a restrições lineares generalizadas, a um problema equivalente não linear, sujeito unicamente a restrições de canalização.

Nesta apresentação serão usados vários dos conceitos da Programação Linear tais como, conjunto de índices básicos, conjunto de índices não básicos, solução factível, solução básica, degenerescência, atualização da base etc., além da notação desenvolvida por Sakarovitch [17] (ver apêndice A).

## 2.2. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

### 2.2.1. Estabelecimento do Problema

O método do Gradiente Reduzido em sua forma original é aplicável a problemas do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} \text{Min. } & f(x) \\ \text{s.a. } & Ax = b \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \end{aligned} \quad (2.1)$$

sendo :

- x um vetor (n x 1) de variáveis
- f(x) uma função real de classe  $C^1$
- A uma matriz (m x n) de coeficientes constantes
- b um vetor (m x 1) constantes

O problema é resolvido admitindo-se conhecida uma solução inicial factível, não degenerada, porém não necessariamente básica. Na realidade a suposição de não degenerescência é feita com o intuito de simplificar a apresentação do método. Degenerescências na solução inicial poderiam ser eliminadas por uma sucessão de trocas de bases.

### 2.2.2. Redução do Problema

Usando o mesmo procedimento do método Simplex pode-se realizar a seguinte partição sobre o problema original :

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_I \\ x_J \end{pmatrix} \\ A &= (A^I, A^J) \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

I conjunto de índices básicos (variáveis dependentes)

J conjunto de índices não básicos (variáveis independentes)

de modo a que se verifique,

$$A^I x_I + A^J x_J = b \quad (2.3)$$

e a existência de  $(A^I)^{-1}$ .

Admite-se que o sistema de restrições não é redundante, e denota-se :

$x_I$  vetor das variáveis dependentes (básicas)

$x_J$  vetor das variáveis independentes (não básicas)

A existência de  $(A^I)^{-1}$  torna possível explicitar-se as variáveis dependentes  $x_I$  em função das variáveis independentes  $x_J$ . Obtendo-se :

$$x_I = \bar{b} - \bar{A}^J x_J \quad (2.4)$$

onde,

$$\bar{b} = (A^I)^{-1} b$$

$$\bar{A}^J = (A^I)^{-1} A^J .$$

O passo seguinte será exprimir a função objetivo, denotada por  $F(x_J)$ , em termos das variáveis independentes  $x_J$ . Sendo

$$F(x_J) = f(\bar{b} - \bar{A}^J x_J, x_J) . \quad (2.5)$$

Então o problema (2.1) originalmente estabelecido equivale ao seguinte problema :

$$\text{Min. } F(x_J) \quad (2.6)$$

$$\text{s.a. } \underline{x}_J \leq x_J \leq \bar{x}_J$$

desde que as variáveis dependentes não se tornem inactiváveis. Ou seja

$$\underline{x}_I \leq \bar{b} - \bar{A}^J x_J \leq \bar{x}_I$$

Na realidade o problema original (2.1) foi reduzido a um problema equivalente (2.6) de menor dimensão, pois este é expresso unicamente em termos das variáveis independentes  $x_J$ , e sujeito apenas a restrições de canalização. O problema (2.6) pode ser considerado numa posição intermediária entre um problema irrestrito e um problema sujeito a restrições lineares generalizadas. É possível resolvê-lo por técnicas de otimização irrestrita desde que se introduza uma estrutura de bloqueio adicional que mantenha factíveis tanto as variáveis independentes como as dependentes. Em particular ele poderá ser resolvido pelo método do Gradiente Ótimo (Steepest Descent), Luenberger [18], ligeiramente modificado de modo a contemplar as restrições de canalização.

### 2.2.3. Direção de Pesquisa

O método do Gradiente é aplicado ao problema reduzido (2.6) calculando-se, a cada iteração, a direção factível de máximo decréscimo de  $F(x_j)$  a partir da determinação do seu gradiente em relação às variáveis independentes  $x_j$ , chamado gradiente reduzido. O gradiente reduzido indica a direção de máximo crescimento de  $F(x_j)$ , sendo calculado a partir da função objetivo original  $f(x)$  pela seguinte expressão :

$$r = \nabla_J F(x_j) = \nabla_J f(x) - \nabla_I f(x) \bar{A}^J \quad (2.7)$$

onde,

$\nabla_J f(x)$  - componentes de  $\nabla f(x)$  em relação a  $x_j$

$\nabla_I f(x)$  - componentes de  $\nabla f(x)$  em relação a  $x_I$

A direção de pesquisa do problema (2.6)  $d_j$  será obtida pela projeção do negativo do gradiente reduzido sobre as restrições de canalização. Ela será a direção factível de máximo decréscimo de  $F(x_j)$ , sendo obtida por :

$$d_j = -r_j \quad \text{se} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_j < x_j < \bar{x}_j \quad \text{ou} \\ x_j = \underline{x}_j \quad \text{e} \quad r_j < 0 \quad \text{ou} \\ x_j = \bar{x}_j \quad \text{e} \quad r_j > 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$d_j = 0$  de outro modo. Para todo  $j \in J$ .

Note entretanto que as variações das variáveis independentes  $x_J$  deverão ser compensadas por variações das variáveis dependentes  $x_I$  de modo que as restrições do problema (2.1) continuem verificadas na igualdade. O que equivale a satisfazer

$$x_I = \bar{b} - \bar{A}^J x_J . \quad (2.9)$$

Em consequência, determina-se a direção de pesquisa das variáveis dependentes  $x_I$ , denotada por  $d_I$ . É fácil verificar que

$$d_I = -\bar{A}^J d_J . \quad (2.10)$$

Deste modo será estabelecida a direção de pesquisa  $d$  do problema original (2.1), dada por

$$d = \begin{pmatrix} d_I \\ d_J \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

As direções  $d_I$  e  $d_J$  são também utilizadas na determinação do bloqueio das variáveis dependentes e independentes respectivamente.

#### 2.2.4. Critério de Otimalidade

Caso se verifique, após o cálculo de  $d_j$ , que

$$d_j = 0 \quad ; \quad \text{para todo } j \in J$$

a solução atual satisfará as condições de Kuhn-Tucker de otimalidade.

Note que existem três casos onde  $d_j = 0$  pode ser obtido :

a) se  $\underline{x}_j < x_j < \bar{x}_j$  ;  $x_j$  é um ponto interior.

$$d_j = 0 \quad \text{se} \quad r_j = 0$$

b) se  $x_j = \underline{x}_j$  ;  $x_j$  está no limite inferior.

$$d_j = 0 \quad \text{se} \quad r_j \geq 0$$

c) se  $x_j = \bar{x}_j$  ;  $x_j$  está no limite superior.

$$d_j = 0 \quad \text{se} \quad r_j \leq 0$$

Uma solução  $\bar{x}$  satisfará as condições de Kuhn-Tucker para o problema (I) se existirem vetores  $\lambda_1$  irrestrito,  $\lambda_2 \geq 0$ ,  $\lambda_3 \geq 0$  tais que :

$$\nabla f(\bar{x}) + \lambda_1 A - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_2(\bar{x} - \underline{x}) = 0$$

$$\lambda_3(\bar{x} - \bar{x}) = 0$$

Reescrevendo estas condições numa notação que admita a partição anteriormente proposta para o problema (2.1), tem-se :

$$\nabla_I f(\bar{x}) + \lambda_1 A^I - \lambda_2^I + \lambda_3^I = 0$$

$$\nabla_J f(\bar{x}) + \lambda_1 A^J - \lambda_2^J + \lambda_3^J = 0$$

$$\lambda_2^I (\bar{x}_I - \underline{x}_I) = 0$$

(2.12)

$$\lambda_3^I (\bar{x}_I - \bar{x}_I) = 0$$

$$\lambda_2^J (\bar{x}_J - \underline{x}_J) = 0$$

$$\lambda_3^J (\bar{x}_J - \bar{x}_J) = 0 .$$

Admitida a hipótese de não degenerescência, obtêm-se

$$(\bar{x}_I - \underline{x}_I) > 0 \rightarrow \lambda_2^I = 0$$

(2.13)

$$(\bar{x}_I - \bar{x}_I) < 0 \rightarrow \lambda_3^I = 0$$

Logo,  $\lambda_1 = -\nabla_I f(\bar{x}) (A^I)^{-1}$  .

Daí obtêm-se :

$$\nabla_J f(\bar{x}) - \nabla_I f(\bar{x}) (A^I)^{-1} A^J - \lambda_2^J + \lambda_3^J = 0 \quad (2.14)$$

$$r - \lambda_2^J + \lambda_3^J = 0 .$$

As condições de Kuhn-Tucker serão reduzidas a :

$$\begin{aligned}
 r - \lambda_2^j + \lambda_3^j &= 0 \\
 \lambda_2^j (\bar{x}_j - x_j) &= 0 \quad ; \quad \lambda_2^j \geq 0 \\
 \lambda_3^j (\bar{x}_j - \bar{x}_j) &= 0 \quad ; \quad \lambda_3^j \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Podemos agora verificar que os três casos onde  $d_j = 0$  satisfazem as condições de Kuhn-Tucker.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \quad \underline{x}_j < \bar{x}_j < \bar{\bar{x}}_j &\rightarrow \lambda_2^j = \lambda_3^j = 0 \\
 \text{logo, } r_j &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \quad \bar{x}_j = \underline{x}_j &\rightarrow \lambda_3^j = 0 \\
 \text{logo, } r_j = \lambda_2^j &\quad (r_j > 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \quad \bar{x}_j = \bar{\bar{x}}_j &\rightarrow \lambda_2^j = 0 \\
 \text{logo, } r_j = -\lambda_3^j &\quad (r_j < 0)
 \end{aligned}$$

Para maior esclarecimento consultar Bazaraa [19].

### 2.2.5. Determinação do Passo

O passo  $\alpha$  a ser dado na direção de pesquisa  $d$  será determinado a partir dos três seguintes parâmetros.

- $\alpha_1$  passo máximo possível até que uma variável dependente atinja um dos seus limites.
- $\alpha_2$  passo máximo possível até que uma das variáveis independentes atinja um dos seus limites.
- $\alpha_3$  passo que minimiza  $f(x)$  na direção de pesquisa  $d$ , obtido por busca unidimensional.

Sendo

$$\alpha = \text{Min. } \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \quad (2.16)$$

A nova solução  $\bar{x}$  será determinada por :

$$\bar{x} = x + \alpha d \quad (2.17)$$

#### 2.2.6. Atualização da Base

Se durante a determinação do passo  $\alpha$  verificou-se

$$\alpha < \alpha_1$$

Então nenhuma variável dependente atingiu um dos seus limites. Os conjuntos  $I$  e  $J$  e a matriz inversa  $(A^I)^{-1}$  serão mantidos e se dará início a uma nova iteração.

Caso contrário, sendo verificado

$$\alpha = \alpha_1$$

então uma variável dependente atingiu um dos seus limites. Esta variável deverá deixar a base. E neste caso os conjuntos I e J e a matriz inversa  $(A^I)^{-1}$  deverão ser atualizados, e em seguida uma nova iteração será iniciada.

A atualização da base é realizada de maneira idêntica à do método Simplex.

### 2.3. ALGORITMO

#### Inicialização

O algoritmo é inicializado com uma solução factível, uma partição caracterizada pelos conjuntos I e J, e uma matriz inversa  $(A^I)^{-1}$  conhecidos.

No caso de não se dispor de uma solução factível inicial o procedimento clássico da FASE I (método Simplex) poderá ser utilizado.

#### Iteração k

- a) Seja  $x^k$  a solução factível atual, com os conjuntos I e J, e a matriz inversa  $(A^I)^{-1}$  conhecidos. Determine o gradiente reduzido dado por :

$$r^k = \nabla_J f(x^k) - \nabla_I f(x^k) \bar{A}^J$$

b) Calcule as componentes independentes  $d_j$  da direção de pesquisa.

$$d_j = -r_j^k \quad \text{se} \quad \begin{cases} \underline{x}_j < x_j^k < \bar{x}_j \\ x_j^k = \underline{x}_j & \text{e} & r_j^k < 0 \\ x_j^k = \bar{x}_j & \text{e} & r_j^k > 0 \end{cases}$$

$$d_j = 0 \quad \text{de outro modo}$$

c) Se  $d_j = 0$ , para todo  $j \in J$ , declare o ótimo e pare. Caso contrário continue.

d) Determine as componentes dependentes  $d_I$  da direção de pesquisa.

$$d_I = -\bar{A}^J d_J$$

e) Verifique se alguma variável dependente está inadequada e suficientemente próxima de algum dos seus limites, atualizando a base imediatamente.

Se existir  $x_i$ ;  $i \in I$  tal que para  $0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon}$

$$(\bar{x}_i - x_i) = \epsilon \quad \text{e} \quad d_i > 0$$

ou

$$(x_i - \underline{x}_i) = \epsilon \quad \text{e} \quad d_i < 0$$

siga para h). Senão continue.

Vale notar que o item e) processa uma troca de base sempre que alguma variável dependente esteja na iminência de atingir um limite

bloqueando assim a ocorrência de zig-zag. Porém permite que uma variável dependente esteja em um dos seus limites desde que sua componente da direção de pesquisa a encaminhe para a região de factibilidade.

f) Determine os seguintes parâmetros :

$$\alpha_1 = \text{Min.} \left\{ \frac{x_i^k - x_i^k}{d_i} \text{ se } d_i > 0 ; \frac{x_i^k - x_i^k}{d_i} \text{ se } d_i < 0 \right\} \quad i \in I$$

$$\alpha_2 = \text{Min.} \left\{ \frac{x_j^k - x_j^k}{d_j} \text{ se } d_j > 0 ; \frac{x_j^k - x_j^k}{d_j} \text{ se } d_j < 0 \right\} \quad j \in J$$

$$\alpha_3 > 0 \quad ; \quad \text{tal que } \text{Min. } f(x^k + \alpha_3 d)$$

g) Determine o passo

$$\alpha = \text{Min.} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$$

e estabeleça a nova solução

$$x^{k+1} = x^k + \alpha d$$

Se  $\alpha < \alpha_1$  retorne para a). Caso contrário, se  $\alpha = \alpha_1$  continue.

h) Escolha para entrar na base, dentre as variáveis independentes que possuem bons pivôs, aquela que se encontre mais imersa na região de factibilidade. Proceda a troca de base atualizando os conjuntos I e J e a matriz inversa  $(A^I)^{-1}$ . A seguir retorne para a).

## 2.4. PROGRAMA COMPUTACIONAL

A seguir será discutido um programa desenvolvido para implementação computacional do algoritmo do Gradiente Reduzido.

O programa utiliza subrotinas e procedimentos computacionais idênticos aos do método Simplex Revisado (Forma Explícita da Inversa) para determinação dos vetores  $\bar{A}^j$ , que constituem a matriz  $\bar{A}^j$ , e na atualização dos conjuntos de índices básicos  $I$ , índices não básicos  $J$ , e da matriz inversa  $(A^I)^{-1}$ .

A utilização de uma forma Revisada do método do Gradiente Reduzido permite ao programa ser utilizado em sistemas computacionais com menores requisitos de capacidade de memória, pois a matriz inversa será a única armazenada na memória de acesso rápido do sistema.

Na realidade a matriz  $A$  original foi armazenada implicitamente na forma de uma subrotina geradora de colunas de  $A$ . Sendo gerada a cada chamada desta subrotina apenas a coluna  $A^k$  desejada.

A opção armazenamento explícito da matriz de restrições  $A$  versus armazenamento implícito, na forma de uma subrotina geradora de colunas, pressupõe a existência de compromissos entre requisitos de capacidade de memória versus esforço computacional. Na decisão tomada considerou-se ser os requisitos de capacidade de memória mais severos e frequentes.

Além do programa principal, no qual está embutida a estrutura central do algoritmo, são usadas as seguintes subrotinas :

- leitura de dados
- cálculo do desvio energético

- cálculo da função objetivo
- cálculo do gradiente da função objetivo
- gerador das colunas da matriz A
- produto de uma matriz por um vetor
- busca unidimensional
- armazenamento da solução atual
- cálculo da nova solução
- escolha da variável candidata a básica

#### 2.4.1. Comentários :

##### - Programa principal

Define os parâmetros e executa o algoritmo do Gradiente Reduzido coordenando a chamada das subrotinas que complementam o programa. Admite implicitamente que o problema é limitado e tem como critério de parada ter-se atingido uma solução ótima, atingir-se o número máximo de iterações admissíveis sem que a solução convirja, ou não se poder atualizar a base por inexistência de um bom pivô.

##### - Subrotina de leitura de dados

Lê o arquivo de dados de entrada e estrutura o problema original construindo os vetores, os indicadores e a matriz inversa da solução inicial.

- Subrotina que calcula o desvio energético

Calcula o vetor desvio energético correspondente à solução atual do problema.

- Subrotina que calcula a função objetivo

Calcula o valor da função objetivo a partir do vetor desvio energético calculada pela subrotina anterior.

- Subrotina que determina o gradiente da função objetivo

Determina as componentes do gradiente da função objetivo para a solução atual, utilizando a subrotina que calcula o vetor desvio energético.

- Subrotina que gera as colunas da matriz A

Gera uma coluna da matriz de restrições A solicitada pelo programa principal. Ela substitui o armazenamento explícito da matrix.

- Subrotina de busca unidimensional

Realiza uma busca unidimensional com interpolação quadrática na direção de pesquisa fornecida pelo programa principal.

- Subrotina que armazena a solução atual

Armazena a solução de uma dada iteração copiando-a em um vetor auxiliar.

- Subrotina que calcula uma nova solução

Estabelece uma nova solução a partir da solução anterior, da direção de pesquisa e do passo máximo permitido.

- Subrotina que escolhe uma variável candidata a básica

Escolhe uma variável para ser candidata a entrar na base. Esta variável será escolhida dentre as variáveis independentes, não básicas, que apresentem um bom pivô.

- Subrotina que realiza o produto de uma matriz por um vetor

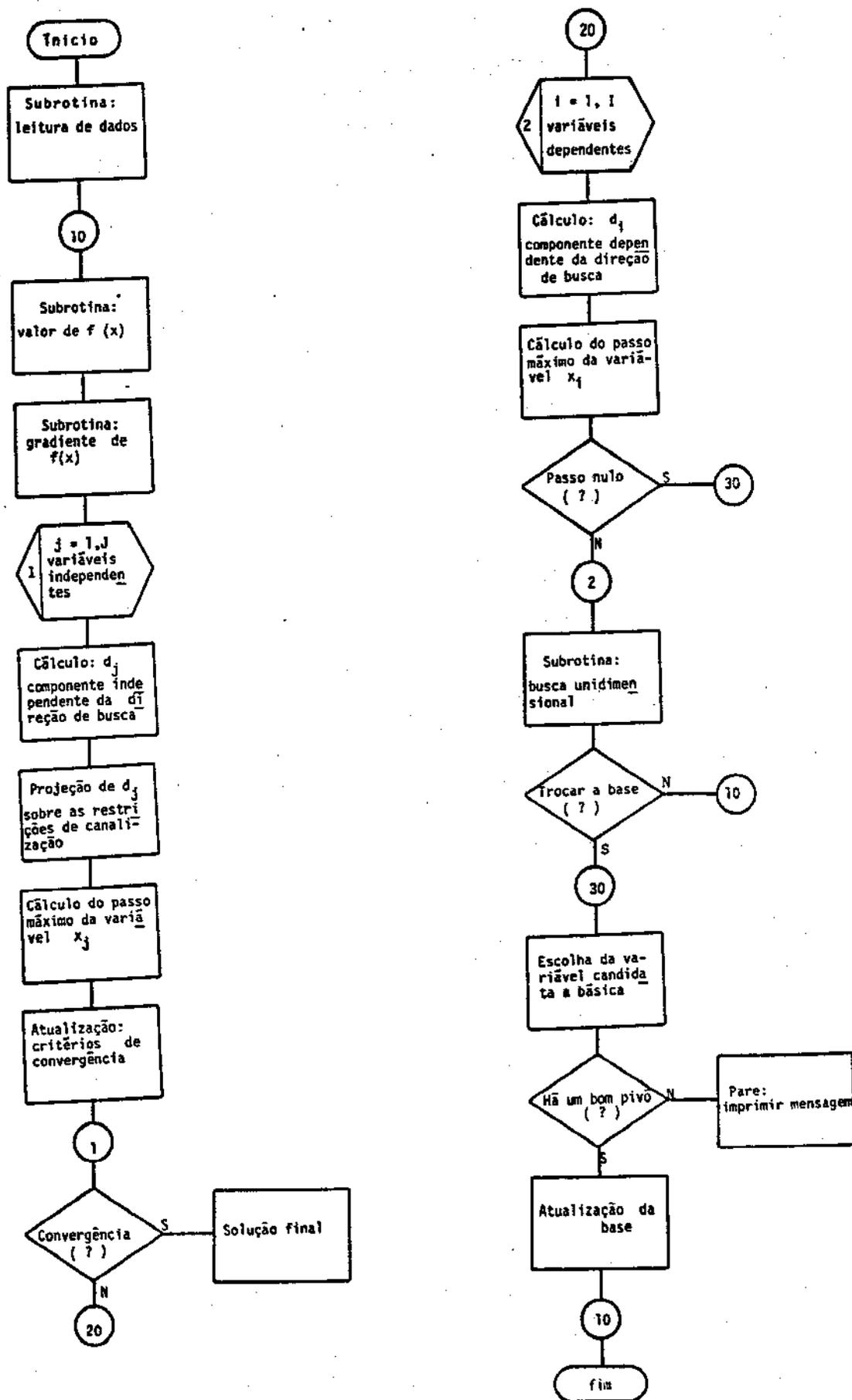
2.4.2. Diagrama de Blocos (fig. 2.1.)

2.5. DIREÇÃO CONJUGADA REDUZIDA

A idéia central do método do gradiente reduzido, quando aplicado a um problema de minimização, consiste, a cada iteração, em estabelecer uma direção descendente que é particionada em componentes independentes e dependentes. Finalmente, realiza-se uma busca unidimensional na direção do gradiente reduzido de modo a obter um mínimo local da função objetivo.

Na formulação clássica do método (2.2) toma-se o negativo do gradiente da função objetivo como a direção descendente de busca. Sem dúvida, esta seria a melhor direção de busca para um passo de amplitude suficientemente pequeno. Entretanto, sua utilização pode acarretar uma longa se

## DIAGRAMA DE BLOCOS



(fig. 2.1)

quência de passos com amplitudes extremamente reduzidas, num fenômeno clássico conhecido por "zig-zag" [18]. A ocorrência de "zig-zag" pode acontecer por mau condicionamento da função objetivo ou pela existência de faixas longas e estreitas de soluções factíveis. Em ambos os casos, sua ocorrência pode comprometer irremediavelmente a convergência do método. Uma forma de atenuar este fenômeno, para problemas irrestritos, é tomar como direção descendente o gradiente conjugado proposto por Fletcher-Reeves [13].

Aqui trata-se um problema com restrições, e para atenuar a ocorrência de "zig-zag" apresenta-se dois esquemas que podem ser considerados como uma fusão dos métodos do Gradiente Reduzido e do Gradiente Conjugado de Fletcher-Reeves. No primeiro esquema obtém-se uma "direção conjugada reduzida" através da seguinte sequência de procedimentos:

- a) conjugação dos gradientes da função objetivo de duas iterações sucessivas.
- b) tomar, no método do Gradiente Reduzido, a direção descendente obtida em a).

No segundo, determina-se uma "direção reduzida conjugada" usando a sequência inversa de procedimentos:

- c) redução do gradiente da função objetivo.
- d) conjugação do gradiente reduzido determinado em c) para duas iterações sucessivas.

Os dois esquemas apresentados produzem resultados próximos.

Considere o problema (2.2) e a seguinte notação:

$\nabla$	gradiente da função objetivo
$c$	gradiente conjugado
$r$	gradiente reduzido
$cr$	direção conjugada reduzida
$rc$	direção reduzida conjugada
$d$	direção de pesquisa

Esquema 1 (direção conjugada reduzida):

- Iteração  $k$

1. Se  $k=1$ , então  $c^k = \nabla^k$ .

De outro modo  $c^k = \nabla^k + \alpha^k \nabla^{k-1}$  ;  $\alpha^k = \frac{\|\nabla^k\|^2}{\|\nabla^{k-1}\|^2}$

2. Fazer  $cr^k = c_j^k - c_I^k (\bar{A}^J)^k$

3. Fazer:  $d_j^k = -cr_j^k$  se  $\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_j < x_j^k < \bar{x}_j \\ x_j^k = \underline{x}_j \text{ e } cr_j^k < 0 \\ x_j^k = \bar{x}_j \text{ e } cr_j^k > 0 \end{array} \right.$

$d_j^k = 0$  de outro modo

4. Fazer  $d_I^k = (-\tilde{A}^J)^k d_J^k$

Esquema 2 (direção reduzida conjugada):

- Iteração k

1. Fazer  $r^k = \nabla_J^k - \nabla_I^k (A^J)^k$

2. Se  $k=1$ , então  $rc^k = r^k$ .

De outro modo  $rc^k = r^k + \beta^k r^{k-1}$  ;  $\beta^k = \frac{\|r^k\|^2}{\|r^{k-1}\|^2}$

3. Fazer  $d_j^k = -rc_j^k$  se  $\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_j < x_j^k < \bar{x}_j \\ x_j^k = \underline{x}_j \text{ e } rc_j^k < 0 \\ x_j^k = \bar{x}_j \text{ e } rc_j^k > 0 \end{array} \right.$

$d_j^k = 0$  de outro modo

4. Fazer  $d_I^k = (-\tilde{A}^J)^k d_J^k$

Note, que do esquema 1 tem-se

$$c^k = \nabla^k + \alpha^k \nabla^{k-1}$$

levando a partição (I, J) a  $c^k$  e  $\nabla^k$  obtém-se

$$c^k = (c_I^k, c_J^k)$$

$$\nabla^k = (\nabla_I^k, \nabla_J^k)$$

daí,

$$c_J^k = \nabla_J^k + \alpha^k \nabla_J^k$$

$$c_I^k = \nabla_I^k + \alpha^k \nabla_I^k$$

como

$$cr^k = c_J^k - c_I^k (\bar{A}^J)^k$$

$$cr^k = (\nabla_J^k + \alpha^k \nabla_J^{k-1}) - (\nabla_I^k + \alpha^k \nabla_I^{k-1}) (\bar{A}^J)^k$$

$$cr^k = (\nabla_J^k - \nabla_I^k (\bar{A}^J)^k) + \alpha^k (\nabla_J^{k-1} - \nabla_I^{k-1} (\bar{A}^J)^k)$$

admitindo a hipótese de não haver troca da base entre as iterações  $k-1$  e  $k$ , isto é,  $(\bar{A}^J)^{k-1} = (\bar{A}^J)^k$ , obtém-se

$$cr^k = r^k + \alpha^k r^{k-1}$$

Porém, do esquema 2 tem-se

$$rc^k = r^k + \beta^k r^{k-1}$$

Ou seja, os dois esquemas diferem apenas quanto a constante que multiplica a direção da iteração anterior. O esquema 2 é usado em [11], porém ele re-

quer uma nova inicialização no processo de conjugação sempre que houver uma troca de base. No modelo desenvolvido, utilizou-se o esquema 1, pois ele prescinde duma nova reinicialização do processo da conjugação em virtude duma troca de base. Convém lembrar que o método do gradiente conjugado de Fletcher-Reeves [13] foi desenvolvido para problemas irrestritos com função objetivo quadrática - aí a convergência é assegurada em "n" iterações. Entretanto no problema tratado neste trabalho ele é usado apenas como método de aceleração. Uma outra alternativa possível seria usar o método Partan [21].

## CAPÍTULO 3

### O MODELO DE ALOCAÇÃO HORÁRIA DA DEMANDA ENERGÉTICA

#### 3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo desenvolve-se um modelo que realiza a alocação horária da demanda energética de um sistema produtor de energia elétrica; ele é resolvido usando uma técnica de otimização. O modelo desenvolvido é particularizado para o sistema hidroelétrico do médio S. Francisco (sistema CHESF). Entretanto, o procedimento adotado pode ser adaptado para outros sistemas produtores de energia elétrica sem grandes dificuldades.

O capítulo é iniciado com algumas considerações gerais sobre o sistema CHESF. A seguir se caracteriza o conjunto de restrições a que o problema se submete e a função objetivo a ser otimizada. Finalmente apresenta-se a função de geração das usinas hidráulicas do sistema e a determinação do gradiente da função objetivo.

#### 3.2. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O modelo aqui desenvolvido tem por finalidade realizar a alocação horária da demanda energética do sistema entre suas usinas hidráulicas atendendo a critérios de factibilidade expressos por um conjunto de restrições. Na realidade pretende-se obter um modelo de factibilização da alo-

cação horária, pois admite-se que a maximização da energia armazenada no sistema tenha sido obtida pelo modelo hierárquico imediatamente superior. Entretanto a possibilidade de explorar-se algum outro critério de mérito entre as soluções factíveis estabelecidas sugere a utilização de técnicas de otimização no modelamento do problema. Este critério é representado por uma função objetivo a ser otimizada.

Na formulação utilizada, minimiza-se uma função de penalização quadrática do desvio horário de energia, onde este desvio é calculado por uma equação de balanço energético que considera de um lado a demanda e do outro a geração hidráulica, o intercâmbio energético e o corte de cargas. Este procedimento equivale a relaxar o atendimento à demanda do sistema, porém se penalizando os desvios verificados.

Algumas das restrições a que o problema sujeita-se são de caráter operativo e atendem a especificações de equipamentos e órgão de operação. Outras, estabelecidas pelo modelo hierarquicamente superior, asseguram a coerência global do planejamento operacional, compatibilizando a alocação horária da demanda energética com os demais níveis de planejamento da operação do sistema.

Note que o sistema modelado é de geração predominantemente hidráulica e dispõe atualmente de considerável reserva de potência instalada. Mais, a demanda energética do sistema cresce a taxa reduzida em consequência dos efeitos da recessão. De modo que, para um horizonte no qual mantenha-se a atual configuração do sistema, a necessidade de geração térmica complementar pode ser considerada não somente improvável como também extremamente indesejável. A salientar que a predominância acentuada da geração hidráulica sobre a geração térmica é uma característica observada na grande maioria dos sistemas brasileiros produtores de energia elétrica.

A observação das distâncias entre as usinas da cascata (cerca de 400 km entre SBD e MXT, e cerca de 4 km entre MXT e PA I-II-III) do tempo médio que a onda de água leva para percorrê-las (cerca de 3 dias e 15 minutos respectivamente) e do horizonte e intervalo de discretização (8 horas e 1 hora respectivamente) permitem desacoplar hidráulicamente SBD do complexo de Paulo Afonso e adotar uma propagação instantânea para a onda de água entre MXT e PA I-II-III.

Por outro lado, seguindo a linha de aumentar o nível de detalhamento do problema a medida em que se diminui o horizonte de estudo, desagrega-se as usinas PA-I, PA-II e PA-III, de modo a se ter individualizadas todas as usinas da cascata.

A geração de energia em cada usina é caracterizada por uma função não linear, continuamente diferenciável, a partir dos polinômios  $p_1$  (cota montante x volume) e  $p_2$  (cota jusante x defluência).

O problema encontra-se restrito pelo balanço hidráulico para os reservatórios de SBD e MXT, e pelo balanço energético para o intercâmbio e o corte de carga, totalizados sobre todo o horizonte de estudo. Estas restrições acoplam a alocação horária com o modelo hierarquicamente superior. O problema sujeita-se ainda ao balanço hidráulico horário na bacia de Delmiro Gouveia (reservatório a fio d'água) e às máximas variações horárias de turbinagem em SBD e PA I-II-III, além dos limites máximos e mínimos das variáveis do modelo. Todas estas restrições são lineares. Na realidade a turbinagem máxima depende da altura de queda, porém, como as variações destas são reduzidas, as turbinagens máximas foram consideradas constantes.

O problema consiste em minimizar uma função objetivo não linear, continuamente diferenciável, sujeitando-se a um sistema de restrições lineares. As características de não linearidade e suavidade da função objetivo, associadas à linearidade do sistema de restrições, sugeriram a uti

lização do método do Gradiente Reduzido, pois este método é uma ferramenta adequada à abordagem desta classe de problemas.

Hã três aspectos interessantes a considerar : (a) o método evita a ocorrência de desvios decorrentes de linearizações; (b) utiliza subrotinas e procedimentos computacionais de comprovada eficiência desenvolvidos para o método Simplex Revisado; (c) pode ser inicializado com uma solução factível não necessariamente básica. Esta última característica o torna atrativo para avaliar soluções factíveis já implementadas ou provenientes de outras metodologias de planejamento. Entretanto convém lembrar que caso não se disponha de uma solução inicial factível pode-se recorrer ao procedimento clássico da FASE I (Método Simplex). Esta FASE I também poderá ser resolvido pelo algoritmo do Gradiente Reduzido, desde que se acrescente ao problema original variáveis de folga e se construa uma função objetivo artificial, que no caso será linear.

### 3.3. NOMENCLATURA

h	Índice horário	; h = 1 a H
H	nº de horas do horizonte	
j	Índice de usina	
J	nº de usinas	
u	turbinagem	
v	vertimento	
d	defluência	

t	variação de turbinagem
k	constante que relaciona a máxima variação de turbinagem com a máxima turbinagem
i	intercâmbio energético
c	corte de carga
e	demanda energética
D	defluência total
IT	intercâmbio energético total
CT	corte de carga total
E	demanda energética total
V	volume médio do reservatório
hg	hidrogeração
$\eta$	rendimento
$\rho$	densidade da água
g	aceleração da gravidade
q	altura de queda
$p_1 = p_1(V)$	polinômio (cota montante x volume)
$p_2 = p_2(d)$	polinômio (cota jusante x defluência)

### 3.4. RESTRIÇÕES DO PROBLEMA

#### 3.4.1. Sobradinho ( $j = 1$ )

A defluência total do reservatório de SBD, para o horizonte em estudo, estabelecida pelo planejamento operacional hierarquicamente superior, deve ser satisfeita. Este bloco defluente atenderá às necessidades de água (energia) do complexo Moxotô / Paulo Afonso três dias após. Obtém-se então

$$\sum_{h=1}^H d_1^h = D_1 \quad (3.1)$$

A característica principal do reservatório de SBD é regularizar as vazões do rio São Francisco; ele não se destina exclusivamente à geração de energia elétrica, mas atende também, entre outros objetivos, a requisitos de irrigação e navegabilidade no médio São Francisco. Portanto, a defluência horária de SBD será canalizada. Obtém-se então

$$\underline{d}_1 \leq d_1^h \leq \bar{d}_1 \quad (3.2)$$

As turbinagens são limitadas entre um valor mínimo não necessariamente nulo e o máximo engolimento da usina. Vertimentos negativos não podem ocorrer. Então

$$\underline{u}_1 \leq u_1^h \leq \bar{u}_1 \quad ; \quad 0 \leq v_1^h \quad (3.3)$$

Define-se 
$$u_1^h + v_1^h = d_1^h$$

Por questões operativas considera-se restrita a máxima variação de turbinagem entre as horas consecutivas na usina de SBD. Então

$$u_1^h - u_1^{h-1} = t_1^h \quad (3.4)$$

$$-k_1 \bar{u}_1 \leq t_1^h \leq k_1 \bar{u}_1$$

### 3.4.2. Moxotó (j = 2) e Paulo Afonso IV (j = 6)

A defluência total do reservatório de MXT, para o horizonte em estudo, estabelecido pelo planejamento operacional hierarquicamente superior também deve ser atendida. Obtêm-se então

$$\sum_{h=1}^H (u_2^h + v_2^h + u_6^h + v_6^h) = D_2 \quad (3.5)$$

As turbinagens são limitadas entre um valor mínimo não necessariamente nulo e o máximo engolimento da usina. Vertimentos negativos não podem ocorrer. Obtêm-se então:

$$\underline{u}_2 \leq u_2^h \leq \bar{u}_2$$

$$\underline{u}_6 \leq u_6^h \leq \bar{u}_6$$

$$0 \leq v_2^h$$

$$0 \leq v_6^h$$

(3.6)

### 3.4.3. Paulo Afonso I (j = 3) , II (j = 4) , III (j = 5)

As usinas de PA I-II-III, alimentadas pela bacia de adução de Delmiro Gouveia, são usinas a fio d'água; é claro que o balanço hidráulico horário em Delmiro Gouveia deve ser respeitado. Considera-se desprezível o tempo de viagem da onda de água de MXT a PA I-II-III. Então:

$$u_2^h + v_2^h = u_3^h + u_4^h + u_5^h + v_3^h \quad (3.7)$$

Também por razões operativas considera-se restrita a máxima variação de turbinagem entre duas horas consecutivas em PA I-II-III. Então:

$$u_3^h - u_3^{h-1} = t_3^h$$

$$-k_3 \bar{u}_3 \leq t_3^h \leq k_3 \bar{u}_3$$

$$u_4^h - u_4^{h-1} = t_4^h$$

$$-k_4 \bar{u}_4 \leq t_4^h \leq k_4 \bar{u}_4$$

$$u_5^h - u_5^{h-1} = t_5^h$$

$$-k_5 \bar{u}_5 \leq t_5^h \leq k_5 \bar{u}_5$$

(3.8)

As turbinagens são limitadas entre um valor mínimo não necessariamente nulo e o máximo engolimento das usinas. Vertimentos negativos não podem ocorrer. Obtém-se então:

$$\underline{u}_3 \leq u_3^h \leq \bar{u}_3$$

$$\underline{u}_4 \leq u_4^h \leq \bar{u}_4$$

$$\underline{u}_5 \leq u_5^h \leq \bar{u}_5$$

$$0 \leq v_3^h$$

(3.9)

#### 3.4.4. Intercâmbio Energético

O bloco energético total de intercâmbio estabelecido para o horizonte em estudo pelo planejamento operacional hierarquicamente superior deve ser atendido. Obtêm-se então:

$$\sum_{h=1}^H i^h = IT \quad (3.10)$$

O intercâmbio energético é limitada entre valores inferior e superior, podendo ter ambos sinais positivos ou negativos.

Os limites do intercâmbio energético poderão corresponder a interesses econômicos, sendo fixados na negociação do contrato de intercâmbio, e variar com o tipo de intervalo em estudo, seja ele de carga leve, média ou pesada. Ou poderão ser decorrentes das características físicas e operacionais das linhas de interligação com os demais sistemas intercambiáveis. Então obtêm-se:

$$\underline{i} \leq i^h \leq \bar{i} \quad (3.11)$$

### 3.4.5. Corte de Carga

Tanto o corte de carga total para o horizonte em estudo como, o corte de carga horário são limitados superiormente. Obtêm-se então:

$$\sum_{h=1}^H c^h \leq CT \quad (3.12)$$

$$0 \leq c^h \leq \bar{c}$$

### 3.5. FUNÇÃO OBJETIVO

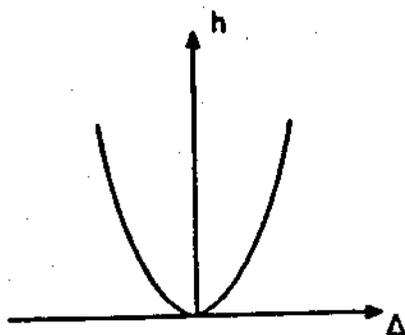
A finalidade original de se alocar a demanda energética horária do sistema é traduzida, no modelo de otimização formulado, pela minimização de uma função de penalização quadrática do desvio horário de energia. Considere-se então:

$$f = \sum_{h=1}^H \Delta^h \quad (3.13)$$

onde 
$$\Delta^h = (e^h - i^h - c^h - hg^h)^2 .$$

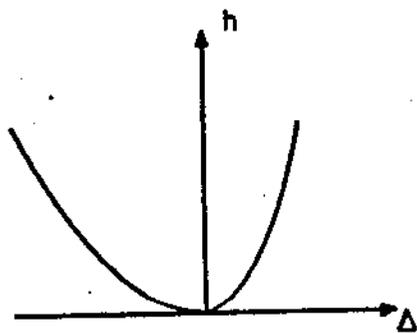
Isto equivale a relaxar o atendimento à demanda energética, porém penalizando o desvio decorrente do seu não atendimento. A função objetivo poderia ser interpretada como um custo a dispender por complementação térmica, mas na realidade ela está igualmente penalizando o excesso de energia produzido, uma vez que  $\Delta^h$  pode possuir sinal positivo ou negativo. A função objeti

vo  $f$  será então dada por um somatório de funções do tipo indicado na fig. 3.1.



(fig. 3.1)

Seria razoável supor que o excesso de energia fosse penalizado com menor intensidade do que o déficit, uma vez que ele poderia ser convertido em vertimentos. Obtendo-se então uma função objetivo dada pelo somatório de funções semelhantes às indicadas na fig. 3.2.



(fig. 3.2)

Pode-se mostrar que a solução ótima não poderia ocorrer com desvio negativo, pois a conversão deste desvio em vertimento não sofreria restrições e melhoraria o valor da função objetivo. Ainda no caso extremo de não se penalizar o excesso de energia, e neste caso seria possível ter uma solução ótima com desvio negativo, existiria também uma outra solução, igualmente ótima, com desvio nulo. De modo que se optou pela primeira forma da função objetivo por ser a que apresentava maiores facilidades de representação e implementação computacional.

### 3.6. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A seguir, apresenta-se a formulação matemática do problema, comenta-se a natureza das restrições a que ele se submete e as implicações decorrentes de violações destas restrições.

$$\text{Min. } f = \sum_{h=1}^H (e^h - i^h - c^h - hg^h)^2$$

Sujeito a :

$$u_1^h - u_1^{h-1} = t_1^h$$

$$u_3^h - u_3^{h-1} = t_3^h$$

$$u_4^h - u_4^{h-1} = t_4^h$$

(3.14)

$$u_5^h - u_5^{h-1} = t_5^h$$

$$u_1^h + v_1^h = d_1^h$$

As restrições (3.14) foram definidas por conveniência no modelamento do problema. Elas são intrínsecas ao modelo e não se permitirá que sejam violadas.

$$u_2^h + v_2^h = u_3^h + u_4^h + u_5^h + v_3^h \quad (3.15)$$

Esta restrição indica que a bacia de Delmiro Gouvêia não tem qualquer capacidade de armazenamento. Entretanto seria possível se admitir pequenas violações no problema a curto prazo. Estas teriam que ser atenciosamente analisadas pelo operador pois se refletiriam de modo acentuado no nível a montante das usinas de PA I-II-III.

$$\sum_{h=1}^H (u_2^h + v_2^h + u_6^h + v_6^h) = D_2$$

$$\sum_{h=1}^H (d_1^h) = D_1$$

(3.16)

$$\sum_{h=1}^H (i^h) = IT$$

$$\sum_{h=1}^H (c^h) \leq CT$$

As restrições (3.16) submetem o modelo de alocação horária à política de operação estabelecida a nível hierárquico superior. Violá-las seria possível, porém representaria um comprometimento do futuro, e o operador antes de tal decisão deverá analisar seus reflexos sobre a política de operação hierarquicamente superior.

$$\begin{aligned}
 -k_1 \bar{u}_1 &\leq t_1^h \leq k_1 \bar{u}_1 \\
 -k_3 \bar{u}_3 &\leq t_3^h \leq k_3 \bar{u}_3 \\
 -k_4 \bar{u}_4 &\leq t_4^h \leq k_4 \bar{u}_4 \\
 -k_5 \bar{u}_5 &\leq t_5^h \leq k_5 \bar{u}_5
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

As restrições (3.17) foram incorporadas ao modelo para atender a conveniências operativas dos grupos geradores das usinas de SBD, PA I-II-III. Entretanto elas poderiam ser relaxadas em alguma eventualidade.

$$\begin{aligned}
 |u_1| &\leq u_1^h \leq \bar{u}_1 \\
 |u_2| &\leq u_2^h \leq \bar{u}_2 \\
 |u_3| &\leq u_3^h \leq \bar{u}_3 \\
 |u_4| &\leq u_4^h \leq \bar{u}_4 \\
 |u_5| &\leq u_5^h \leq \bar{u}_5 \\
 |u_6| &\leq u_6^h \leq \bar{u}_6 \\
 0 &\leq v_1^h \\
 0 &\leq v_2^h \\
 0 &\leq v_3^h \\
 0 &\leq v_6^h
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

As restrições (3.18) são de natureza física. Indicam a impossibilidade de vertimentos negativos e o intervalo de vazões que uma usina é capaz de turbinar. Não se permitirá sua violação.

$$\underline{d}_1 \leq d_1^h \leq \bar{d}_1 \quad (3.19)$$

Esta restrição contempla outras finalidades do aproveitamento de SBD tais como, navegabilidade e limites de inundação das margens do rio São Francisco a jusante de SBD. Deve-se considerar possível pequenas violações desde que criteriosamente analisadas. Os limites dela poderão ser atualizados de acordo com as condições hidrológicas do período em estudo.

$$\underline{i} \leq i_1^h \leq \bar{i} \quad (3.20)$$

Atende a condições estipuladas no contrato de intercâmbio ou a limites físicos das linhas de interligação do sistema. No primeiro caso a violação deve sofrer penalização, porém será possível. No segundo caso violações não devem ser permitidas.

$$0 \leq c^h \leq \bar{c} \quad (3.21)$$

Define, de certo modo, um critério de confiabilidade do sistema. Violá-lo sob condições normais de operação significa diminuir a qualidade do atendimento. Entretanto deve-se permitir violações desde que submetidas a uma análise criteriosa.

### 3.7. REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA

O problema pode ser formulado na seguinte representação matricial onde foi adicionada uma variável de folga  $\bar{a}$  restrição do balanço energético do corte de carga (3.12) :

$$\text{Min. } f(x)$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$$

O vetor  $x$  possui a estrutura abaixo indicada

$$x^T = [u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6 | t_1 | t_3 | t_4 | t_5 | v_1 | v_2 | v_3 | v_6 | d_1 | i | c | y]$$

$$u_1^T = [u_1^L, \dots, u_1^H] \quad \text{turbinagens em SBD}$$

$$u_2^T = [u_2^L, \dots, u_2^H] \quad \text{turbinagens em MXT}$$

$$u_3^T = [u_3^L, \dots, u_3^H] \quad \text{turbinagens em PA I}$$

$$u_4^T = [u_4^L, \dots, u_4^H] \quad \text{turbinagens em PA II}$$

$$u_5^T = [u_5^L, \dots, u_5^H] \quad \text{turbinagens em PA III}$$

$$u_6^T = [u_6^L, \dots, u_6^H] \quad \text{turbinagens em PA IV}$$

$$t_1^T = [t_1^1, \dots, t_1^H] \quad \text{variações de turbinagem em SBD}$$

$$t_3^T = [t_3^1, \dots, t_3^H] \quad \text{variações de turbinagem em PA I}$$

$$t_4^T = [t_4^1, \dots, t_4^H] \quad \text{variações de turbinagem em PA II}$$

$$t_5^T = [t_5^1, \dots, t_5^H] \quad \text{variações de turbinagem em PA III}$$

$$v_1^T = [v_1^1, \dots, v_1^H] \quad \text{vertimentos em SBD}$$

$$v_2^T = [v_2^1, \dots, v_2^H] \quad \text{vertimentos em MXT}$$

$$v_3^T = [v_3^1, \dots, v_3^H] \quad \text{vertimentos em Delmiro Gouvêia}$$

$$v_6^T = [v_6^1, \dots, v_6^H] \quad \text{vertimentos em PA IV}$$

$$d_1^T = [d_1^1, \dots, d_1^H] \quad \text{defluência em SBD}$$

$$i^T = [i^1, \dots, i^H] \quad \text{intercâmbios energético}$$

$$c^T = [c^1, \dots, c^H] \quad \text{cortes de carga}$$

$y$  = variável de folga do corte de carga



E finalmente o vetor  $b$ , de termos constantes, do lado direito da equação possui a estrutura abaixo indicada :

$$b = [b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid b_4 \mid b_5 \mid b_6 \mid b_7]^T$$

$$b_1 = [u_1^0, 0, \dots, 0]^T$$

$$b_2 = [u_3^0, 0, \dots, 0]^T$$

$$b_3 = [u_4^0, 0, \dots, 0]^T$$

$$b_4 = [u_5^0, 0, \dots, 0]^T$$

$$b_5 = [0, 0, \dots, 0]^T$$

$$b_6 = [0, 0, \dots, 0]^T$$

$$b_7 = [D_2, D_1, IT, CT]^T$$

### 3.8. HIDROGERAÇÃO DO SISTEMA

O modelo desenvolvido considera a geração das usinas hidráulicas, expressa em termos de potência média e obtida a partir do rendimento da usina, da densidade da água, da aceleração da gravidade, da vazão turbi-

nada e da altura de queda da usina, como uma função não linear dada pela seguinte equação :

$$hg^h(x) = \sum_{j=1}^J \eta_j \rho g u_j^h q_j^h(x) \quad (3.22)$$

onde  $q_j^h(x)$  representa a altura de queda da usina  $j$  na hora  $h$ , e é dada por

$$q_j^h(x) = p_{1j}(V_j) - p_{2j}(d_j^h) \quad (3.23)$$

note que  $p_1$  é um polinômio (cota montante x volume) e  $p_2$  é um polinômio (cota jusante x defluência).

### 3.9. O GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO

Relembrando que no método do Gradiente Reduzido a direção de busca pesquisada a cada iteração é obtida a partir do gradiente da função objetivo calculado para a solução atualizada, torna-se então necessário obter expressões para o cálculo do gradiente da função objetivo, sendo a componente  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$  dada por :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \sum_{h=1}^H 2(e^h - i^h - c^h - hg^h(x)) \left( \frac{\partial e^h}{\partial x_j} - \frac{\partial i^h}{\partial x_j} - \frac{\partial c^h}{\partial x_j} - \frac{\partial hg^h(x)}{\partial x_j} \right) \quad (3.24)$$

Considerando que o vetor  $x$  possui componentes horárias independentes, que a demanda horária  $e^h$  é um dado constante e que  $i^h$  e  $c^h$  são componentes do próprio vetor  $x$ , pode-se deduzir que :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial i^h} = -2(e^h - i^h - c^h - hg^h(x)) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial c^h} = -2(e^h - i^h - c^h - hg^h(x))$$

Por outro lado, tem-se que

$$\frac{\partial hg^h(x)}{\partial x^h} = \sum_{j=1}^J \eta_j \rho g \left( u_j^h \frac{\partial q_j^h(x)}{\partial x^h} + \frac{\partial u_j^h}{\partial x^h} q_j^h(x) \right) \quad (3.26)$$

Considerando que o vetor  $x$  também possui componentes independentes para cada uma das usinas, pode-se deduzir que :

se  $x_j^h = u_j^h$ , obtêm-se

$$\frac{\partial hg^h(x)}{\partial u_j^h} = \eta_j \rho g \left( u_j^h \frac{\partial q_j^h(x)}{\partial u_j^h} + q_j^h(x) \right)$$

sendo

$$\frac{\partial q_j^h(x)}{\partial u_j^h} = - \frac{\partial p_{2j}(d_j^h)}{\partial u_j^h}$$

se  $x_j^h = v_j^h$ , obtêm-se

$$\frac{\partial hg^h}{\partial v_j^h} = \eta_j \rho g \left( u_j^h \frac{\partial q_j^h(x)}{\partial v_j^h} \right) \quad (3.27)$$

sendo

$$\frac{\partial q_j^h(x)}{\partial v_j^h} = - \frac{\partial p_{2j}(d_j^h)}{\partial v_j^h}$$

Em consequência obtêm-se as seguintes equações para o cálculo das componentes do gradiente da função objetivo :

$$\frac{\partial f}{\partial u_j^h} = -2(e^h - i^h - c^h - hg^h)\eta_j \cdot \rho \cdot g \left( q_j^h - u_j^h \frac{\partial p_{2j}(d_j^h)}{\partial u_j^h} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_j^h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_j^h} = 2(e^h - i^h - c^h - hg^h)\eta_j \cdot \rho \cdot g \left( u_j^h \frac{\partial p_{2j}(d_j^h)}{\partial v_j^h} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial d_j^h} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial i^h} = -2(e^h - i^h - c^h - hg^h)$$

$$\frac{\partial f}{\partial c^h} = -2(e^h - i^h - c^h - hg^h)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

## CAPÍTULO 4

### APLICAÇÃO COMPUTACIONAL

#### 4.1. INTRODUÇÃO

Trata-se das aplicações computacionais realizadas, para efeito de testes, com o modelo desenvolvido nos capítulos precedentes. De início, comenta-se as curvas típicas de demanda horária do sistema, estabelecidas para dia útil, sábado e domingo (feriado) a partir do histórico de dados disponíveis. A seguir, apresenta-se os parâmetros específicos das usinas hidrelétricas do sistema. Prosseguindo, descreve-se a estrutura de dados tratada pelo modelo - dados de entrada e saída - comentando a natureza das hipóteses admitidas na montagem de um exemplo e como se dá a articulação com o planejamento operacional realizado a nível hierárquico superior. Dando continuidade, mostra-se o procedimento empregado para obtenção de uma solução factível inicial, apresentando, finalmente, um exemplo resolvido, seguido dos comentários gerais.

#### 4.2. CURVAS TÍPICAS DE DEMANDA HORÁRIA

As curvas típicas de demanda horária, caracterizadas para dia útil, sábado e domingo (feriado), permitem estimar a curva diária de demandas horárias do sistema a partir da previsão da demanda energética agregada diária. Obtendo-se, desse modo,

$$e^h = \alpha^h E$$

onde

- h      Índice horário (h = 1 até H)
- e      demanda energética horária
- E      demanda energética agregada diária
- $\alpha$     coeficiente da curva típica .

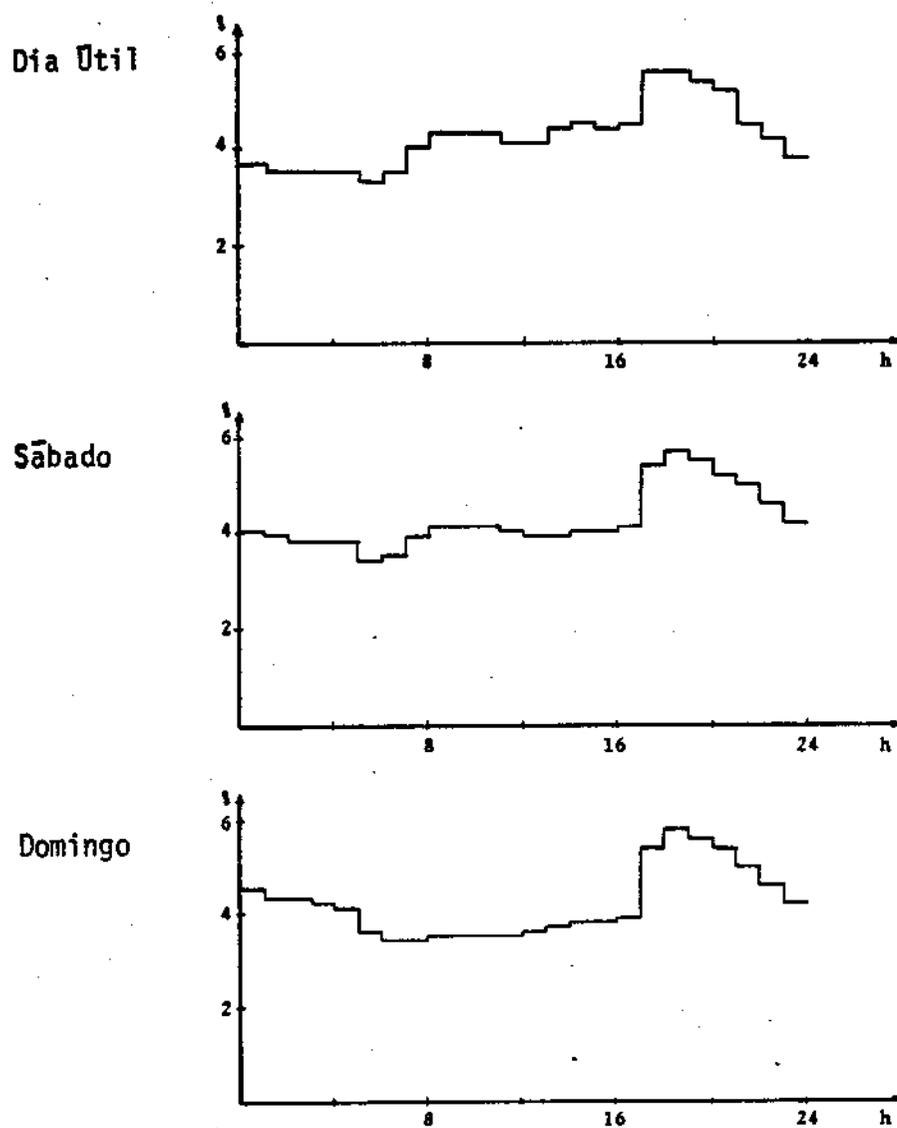
Os coeficientes  $\alpha^h$  são avaliados estatisticamente, e mantidos atualizados, a partir do histórico de demandas do sistema. Admitindo que as atualizações desses coeficientes se façam em períodos de tempo superiores ao intervalo de estudo, o que é absolutamente provável, este procedimento permite alimentar o modelo com um conjunto mais agregado de informações, uma vez que os coeficientes  $\alpha^h$  passam a ser um parâmetro interno, e o modelo passa a ser alimentado com a demanda energética agregada diária.

Para o sistema hidrelétrico do médio São Francisco, as curvas típicas (normalizadas) de demanda horária são apresentadas na fig. 4.1.

#### 4.3. PARÂMETROS DAS USINAS HIDRELÉTRICAS

Lembrando, da seção (3.8), que a função de geração de uma usina hidrelétrica é representada por

$$hg(u, V, d) = \eta \cdot \rho \cdot g \cdot u \cdot q(V, d)$$



(fig. 4.1)

Nota : as curvas foram traçadas em termos de valores percentuais da demanda agregada diária.

sendo  $q(V, d)$ , a altura de queda da usina, uma função do volume armazenado ( $V$ ) e da defluência ( $d$ ), dada por

$$q(V, d) = p_1(V) - p_2(d)$$

onde :

$$p_1(V) = \text{polinômio (cota montante x volume)}$$

$$p_2(d) = \text{polinômio (cota jusante x defluência)} .$$

Então, considerando que a turbinagem  $u$  e a defluência  $d$  são variáveis de decisão, e que o volume  $V$  é um dado admitido constante ao longo do intervalo de estudo, admitindo, ainda, que a aceleração da gravidade  $g$  e a densidade da água  $\rho$  são respectivamente iguais a  $9,81 \text{ m/s}^2$  e  $10^3 \text{ Kg/m}^3$ , resta especificar, para cada hidrelétrica do sistema, o rendimento  $\eta$  e os coeficientes dos polinômios  $p_1(V)$  e  $p_2(d)$  - polinômios obtidos a partir de dados da Eletrobrás [22] e ajustados de modo a possuírem o menor grau desde que não se verificassem desvios superiores a  $0,10\%$  - para que a função  $hg$  fique completamente definida. Estes valores são indicados na tabela 4.1.

rendimento :  $\eta$

turbinagem máxima ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) :  $\bar{u}$

$$p_1(V) = a_0 + a_1V + a_2V^2 + a_3V^3$$

$$p_2(d) = b_0 + b_1 d$$

Os coeficientes são tais que para a defluência ( $d$ ) expressa em  $\text{m}^3/\text{s}$  e os volumes ( $V$ ) em  $\text{hm}^3$  as cotas  $p_1$  e  $p_2$  serão obtidas em  $\text{m}$ .

	SBD	MXT	PA I	PA II	PA III	PA IV
$\eta$	0,90	0,92	0,85	0,85	0,85	0,88
$\bar{u}$	4565	2270	260	710	1290	2450
$a_0$	$3,750 \cdot 10^2$	$2,394 \cdot 10^2$	$2,303 \cdot 10^2$	$2,303 \cdot 10^2$	$2,303 \cdot 10^2$	$2,394 \cdot 10^2$
$a_1$	$1,162 \cdot 10^{-3}$	$1,109 \cdot 10^{-2}$	-	-	-	$1,109 \cdot 10^{-2}$
$a_2$	$-3,234 \cdot 10^{-8}$	-	-	-	-	-
$a_3$	$3,907 \cdot 10^{-13}$	-	-	-	-	-
$b_0$	$3,615 \cdot 10^2$	$2,303 \cdot 10^2$	$1,343 \cdot 10^2$	$1,343 \cdot 10^2$	$1,343 \cdot 10^2$	$1,250 \cdot 10^2$
$b_1$	$9,845 \cdot 10^{-4}$	-	$3,367 \cdot 10^{-3}$	$3,367 \cdot 10^{-3}$	$3,367 \cdot 10^{-3}$	$2,900 \cdot 10^{-3}$

(tab. 4.1)

#### 4.4. ESTRUTURA DE DADOS DE UM EXEMPLO

A montagem de um exemplo, a ser tratado pelo modelo de alocação horária da demanda energética, é realizada a partir de um conjunto de dados que o condiciona: a demanda do sistema, às metas estabelecidas pelo planejamento operacional hierarquicamente superior, aos volumes médios dos reservatórios no intervalo de planejamento e aos limites operacionais do sistema.

Note que se resolve um problema do tipo:

$$\text{Min. } f(x)$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$$

onde  $A$  é uma matriz e  $x$ ,  $b$  são vetores, com estruturas respectivas indicadas na seção (3.7).

Para o cálculo de  $f(\bar{x})$  (3.8), onde  $\bar{x}$  é uma solução conhecida, deve-se acrescentar apenas os volumes médios dos reservatórios, admitidos constantes no intervalo de planejamento, estando o restante das informações contido na "subrotina que calcula a função objetivo". A matriz de coeficientes  $A$  está armazenada implicitamente na "subrotina que gera as colunas de  $A$ ". Então, para cada exemplo a resolver, torna-se necessário agregar dados que permitam construir: o vetor solução inicial factível  $x^0$ , os vetores dos limites operacionais  $\underline{x}$  (inferior) e  $\bar{x}$  (superior) e, finalmente, o vetor de recursos  $b$  (metas, balanço hidráulico, etc.).

### Arquivo de Entrada

O arquivo de entrada é constituído dos seguintes dados:

- número de horas ( $H$ ) do intervalo de planejamento; permite adequar o problema a diferentes intervalos de planejamento
- números de linhas e de colunas da matriz  $A$
- valores médios, obtidos das metas agregadas, das componentes do vetor  $x = [u_1, u_2, \dots, y]^T$

- vetores de limites operacionais:

$$\underline{x} = [\underline{u}_1, u_2, \dots, \underline{y}]^T \text{ e } \bar{x} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{y}]^T$$

- vetor de indicadores do tipo de variável; indica a natureza das variáveis com relação aos limites que possui (inferior, superior ou ambos) e possui significado especificamente pertinente ao procedimento computacional utilizado
- valores iniciais e finais dos reservatórios do sistema; utilizados no cálculo dos volumes médios
- demanda diária agregada e coeficientes da curva típica de demanda horária.

### Arquivo da Saída

Executado um exemplo, o programa fornece:

- . a demanda horária estimada
- . a solução final  $x^*$  que permite observar a evolução das variáveis de decisão ao longo do intervalo de planejamento.

A solução final  $x^*$  obtida deve ser avaliada em termos do critério de convergência, acionado durante a execução do programa, que lhe deu origem. Estes critérios de convergência serão comentados em (4.6).

#### 4.5. SOLUÇÃO INICIAL FACTÍVEL

O método do Gradiente Reduzido deve ser inicializado com uma solução factível  $x^0$  e um conjunto de índices básicos conhecidos. Isto é, deve-se ter  $x^0$  e  $I$  tais que :  $Ax^0 = b$  ,  $\underline{x} \leq x^0 \leq \bar{x}$  e  $(A^I)^{-1}$  exista. É interessante, notar que  $x^0$  não deve ser necessariamente uma solução básica. Este fato, associado à estrutura particular da matriz  $A$ , permite a adoção de uma regra heurística de inicialização que, na nossa opinião, possui as seguintes vantagens:

- esforço computacional reduzido, se comparado ao procedimento clássico da FASE I (método Simplex); a base inicial é óbvia e uma solução factível é facilmente implementável
- o método pode ser inicializado com uma solução factível conhecida, permitindo avaliá-la em termos do critério de mérito adotado.

#### Regra de Inicialização

1) Base inicial; por inspeção, define-se a seguinte base a partir da matriz  $A$  (3.7)

$$A^I = \left[ A^{t_1}, A^{t_3}, A^{t_4}, A^{t_5}, A^{v_1}, A^{v_2}, A^{d_1}, A^{i_1}, A^y \right]$$

onde, por exemplo, nota-se por  $A^{t_1}$  o bloco de colunas de  $A$  correspondente às variáveis  $t_1$  e por  $A^{d_1}$  a primeira coluna do bloco correspondente às variáveis  $d_1$ . A base  $A^I$ , obtida deste modo, pode ser convertida numa matriz

identidade por umas poucas operações de pivoteamentos realizados unicamente sobre as colunas  $A^2$  e  $A^1$ . Na realidade, a "subrotina que gera as colunas de A" contempla implicitamente estes pivoteamentos. Então, a obtenção da base inicial resume-se à geração do conjunto de índices básicos, sendo a inversa da base inicial  $(A^I)^{-1}$  uma matriz identidade  $m \times m$  ( $m$  é o número de linhas de A). Por exemplo, considerando a disposição das colunas de A e um horizonte de planejamento de oito horas, obtem-se o seguinte conjunto de índices básicos:

$$I = \{49, 50, \dots, 96, 105, 113, 121, 137\}$$

2) Solução factível inicial; se uma solução factível é conhecida o método será inicializado. Caso contrário, apresenta-se a seguir uma maneira simples de obter uma solução factível inicial.

As turbinagens, os vertimentos e os intercâmbios energéticos são "despachados" em valores médios que atendam às metas agregadas fornecidas pelo planejamento operacional a nível hierárquico superior. Isto é,

$$u^h = \frac{1}{H} UT \quad ; \quad UT \text{ meta agregada de turbinagem}$$

$$v^h = \frac{1}{H} VT \quad ; \quad VT \text{ meta agregada de vertimento}$$

$$i^h = \frac{1}{H} IT \quad ; \quad IT \text{ meta agregada de intercâmbio energético}$$

Uma vez que as metas agregadas são factíveis, em termos dos limites opera-

cionais, a solução gerada desta forma também será factível, a menos das variáveis  $t_j^1$  que poderiam apresentar infactibilidade em virtude da solução obtida no exemplo imediatamente anterior. Neste caso, deve-se buscar remover esta infactibilidade pelo ajuste conveniente de turbinagens e vertimentos. Na pior das hipóteses, os limites de variações de turbinagens da primeira hora poderiam ser relaxados. Em consequência, as variáveis restantes são de finidas assim:

$$t_j^1 = u_j^0 - u_j^1 \quad ; \quad t_j^h = 0 \quad (h = 2 \text{ até } H)$$

$$d_j^h = u_j^h + v_j^h$$

$$c^h = 0$$

$$y = CT$$

onde  $y$  é a variável de folga da restrição

$$\sum_{h=1}^H c^h \leq CT$$

Note que a regra de inicialização é de extrema simplicidade. Evidentemente, esta regra poderia ser mais refinada, de modo a se obter uma solução inicial substancialmente mais rica em troca de um acréscimo reduzido no esforço computacional. As modificações na regra de inicialização devem ser orientados pelo conhecimento do sistema e dos resultados obtidos pelo uso do método. No exemplo que será apresentado na próxima seção foi realizada a seguinte modificação: a turbinagem de Paulo Afonso IV, anteriormente "despachada" em um valor médio constante, foi modulada pela curva típica da deman

da horária (normalizada no intervalo de planejamento). Isto é,

$$u_6^h = UT_6 \alpha^h$$

como

$$\sum_{h=1}^H \alpha^h = 1$$

obtem-se

$$\sum_{h=1}^H u_6^h = UT_6 \sum_{h=1}^H \alpha^h = UT_6$$

ou seja, essa modificação não compromete a meta agregada de turbinagem de Paulo Afonso IV. Isto corresponde a manter as outras usinas do sistema na base e despachar Paulo Afonso IV na ponta e para isto foi considerado o facto dela ser a usina de maior produtividade do sistema e não sofrer restrições quanto à variação de turbinagem entre horas consecutivas.

#### 4.6. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

O método do Gradiente Reduzido, por não ser de convergência finita, requer atenção especial quanto aos critérios de convergência a serem adotados na sua programação. Para o problema aqui tratado, considerou-se os três critérios de convergência que serão comentados a seguir:

- 1)  $d_j < \epsilon_1$ , para todo  $j \in J$ . Este é o critério de otimalidade (2.2.4), ele indica que se está suficiente próximo de um ponto estacionário, onde as condições de Kuhn-Tucker são satisfeitas.
- 2)  $f(x) < \epsilon_2$ . Este critério indica que, embora não se esteja na proximidade de um ponto estacionário, o valor da função objetivo - considere, por exemplo, o déficit energético - é tão reduzido que não fará sentido prático dar continuidade à busca da otimalidade.
- 3) nº iterações  $< N$ . Este é uma mera proteção contra a ocorrência de "zig-zag" ou a possibilidade de ciclagem. Ele indica que a convergência para uma solução aceitável (critérios 1 e 2) poderia dar-se com um esforço computacional proibitivo. Neste caso, deve-se tentar, após uma análise criteriosa dos dados e resultados, uma nova inicialização.

No programa desenvolvido, foram adotados os seguintes valores:

- 1)  $\epsilon_1 = 10^{-20}$ ; representação usada para o "zero real".
- 2)  $\epsilon_2 = 100 \text{ (MW)}^2$ ; que, para um intervalo de oito horas, corresponderia a um desvio máximo de 10 MW, num sistema com uma capacidade instalada de 5.470 MW (0,18%).
- 3)  $N = 100$ ; número máximo de iterações.

#### 4.7. EXEMPLOS: DIA ÚTIL

Os resultados da alocação horária da demanda energética do

sistema, para um dia útil, são apresentados a seguir. Estes resultados foram obtidos a partir da resolução de três exemplos, correspondentes aos intervalos de carga leve, média e pesada, tratando cada um deles um horizonte de planejamento de oito horas. A escolha de um dia útil como exemplificação permite que se observe o modelo numa faixa relativamente ampla de condições de carregamento do sistema. E, de fato, um aspecto interessante, a ser comentado posteriormente, foi o incremento no esforço computacional dispendido que se verificou com o crescimento da demanda.

Os dados referentes aos limites horários, máximos e mínimos, de turbinagens, vertimentos, intercâmbio energético e corte de carga são comuns aos três exemplos. Seus valores são os seguintes:

Limites	Turbinagens e Vertimentos (m <sup>3</sup> /s)									
	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	u <sub>4</sub>	u <sub>5</sub>	u <sub>6</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>6</sub>
máximo	4.565	2.270	260	710	1.290	2.450	-	-	-	-
mínimo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(tab. 4.2)

Limites	Intercâmbio Energético (MW)	Corte de Carga (MW)
máximo	110	50
mínimo	0	0

(tab. 4.3)

Exemplo 4.1 (carga leve : 01 - 08 h)

Dados de entrada :

Demanda energética	15.288 MWh
Intercâmbio energético	800 MWh
Corte de carga	50 MWh

(tab. 4.4)

Turbinagens e Vertimentos Médios (m <sup>3</sup> /s)									
u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	u <sub>4</sub>	u <sub>5</sub>	u <sub>6</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>6</sub>
1.439	100	0	100	100	1.288	0	100	0	0

(tab. 4.5)

	Volumes (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> )	
	inicial	final
Sobradinho	19.446,3	19.440,6
Moxotô	1.150,0	1.150,0

(tab. 4.6)

Coeficientes da Curva Típica de Demanda							
α <sup>1</sup>	α <sup>2</sup>	α <sup>3</sup>	α <sup>4</sup>	α <sup>5</sup>	α <sup>6</sup>	α <sup>7</sup>	α <sup>8</sup>
0,1265	0,1248	0,1237	0,1227	0,1216	0,1146	0,1244	0,1417

(tab. 4.7)

Exemplo 4.2 (carga média : 09 - 16 h)

Dados de entrada :

Demanda energética	18.520 MWh
Intercâmbio energético	800 MWh
Corte de carga	50 MWh

(tab. 4.8)

Turbinagens e Vertimentos Médios (m <sup>3</sup> /s)									
u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	u <sub>4</sub>	u <sub>5</sub>	u <sub>6</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>6</sub>
1.440	300	0	101	101	1.406	285	100	198	0

(tab. 4.9)

	Volumes (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> /s)	
	inicial	final
Sobradinho	19.440,6	19.428,8
Moxotó	1.150,0	1.150,0

(tab. 4.10)

Coeficientes da Curva Típica de Demanda							
$\alpha^9$	$\alpha^{10}$	$\alpha^{11}$	$\alpha^{12}$	$\alpha^{13}$	$\alpha^{14}$	$\alpha^{15}$	$\alpha^{16}$
0,1254	0,1254	0,1254	0,1184	0,1190	0,1283	0,1295	0,1286

(tab. 4.11)

Exemplo 4.3 (carga pesada : 17 - 24 h)

Dados de entrada :

Demanda energética	20.832 MWh
Intercâmbio energético	800 MWh
Corte de carga	50 MWh

(tab. 4.12)

Turbinagens e Vertimentos Médios (m <sup>3</sup> /s)									
u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	u <sub>4</sub>	u <sub>5</sub>	u <sub>6</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>6</sub>
1.500	300	38	138	138	1.633	440	100	86	0

(tab. 4.13)

	Volumes (10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> )	
	inicial	final
Sobradinho	19.428,8	19.422,9
Moxotō	1.150,0	1.146,9

(tab. 4.14)

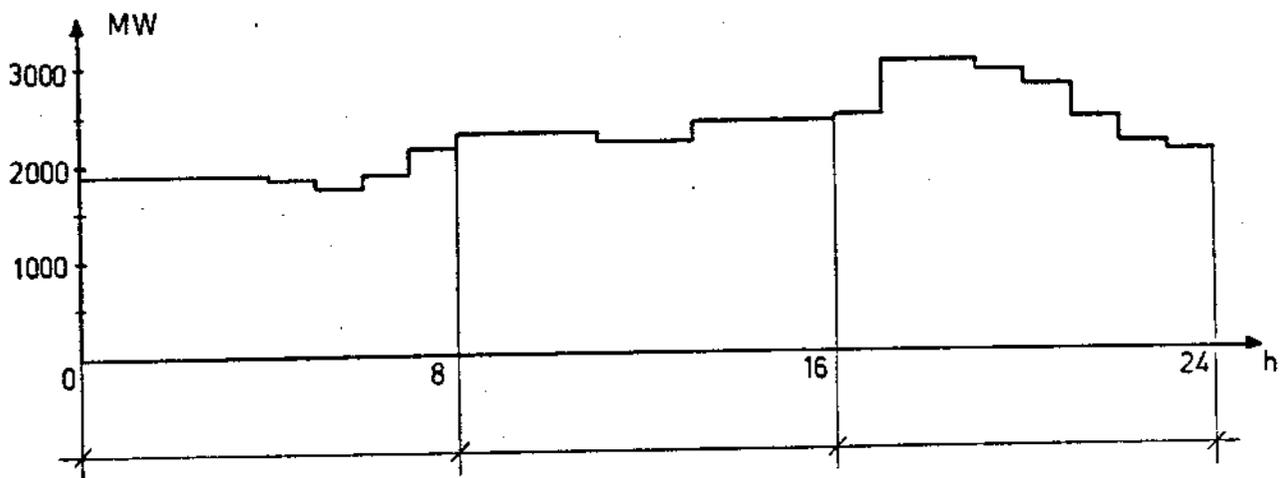
Coeficientes da Curva Típica de Demanda							
$\alpha^{17}$	$\alpha^{18}$	$\alpha^{19}$	$\alpha^{20}$	$\alpha^{21}$	$\alpha^{22}$	$\alpha^{23}$	$\alpha^{24}$
0,1175	0,1439	0,1446	0,1392	0,1332	0,1157	0,1079	0,0981

(tab. 4.15)

## Resultados

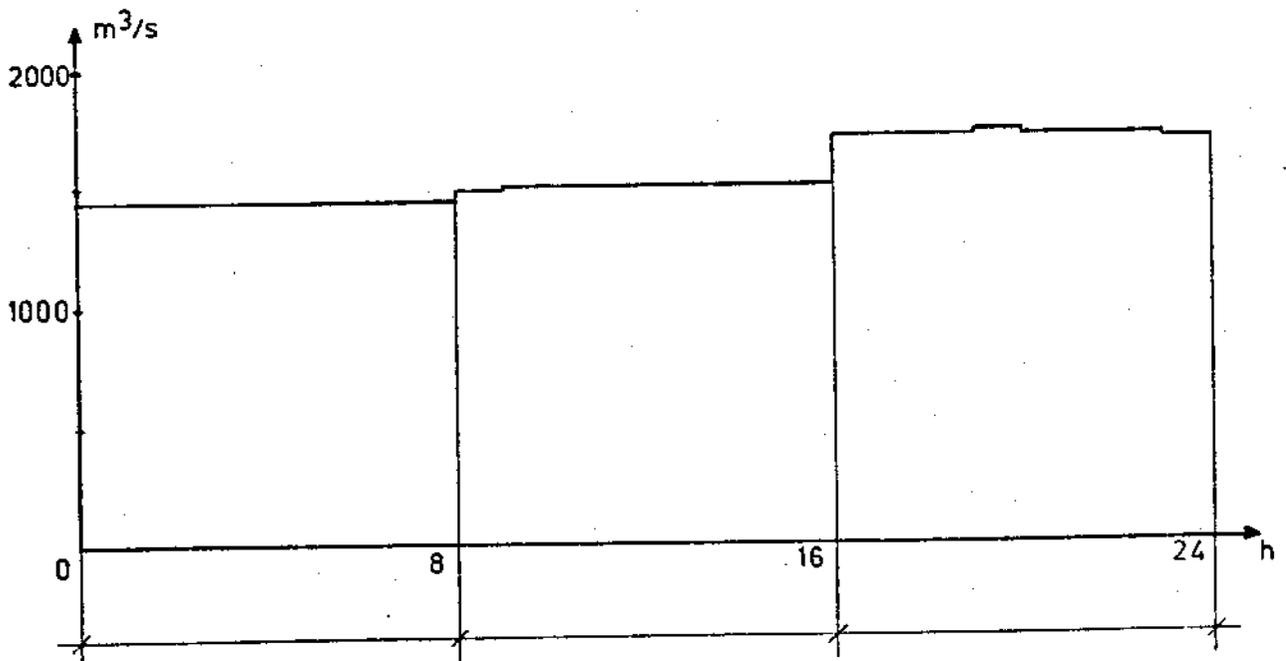
Os resultados obtidos estão indicados no conjunto de curvas que se seguem. Cada curva contempla um horizonte diário, o que corresponde a aglutinar os resultados dos três exemplos resolvidos.

### Demanda horária



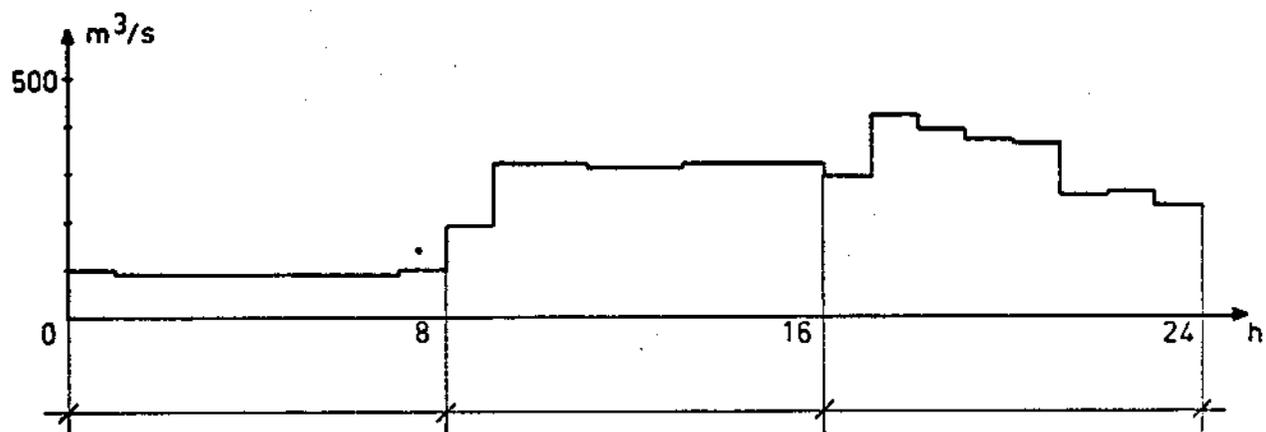
(fig. 4.2)

### Turbinagem : SBD



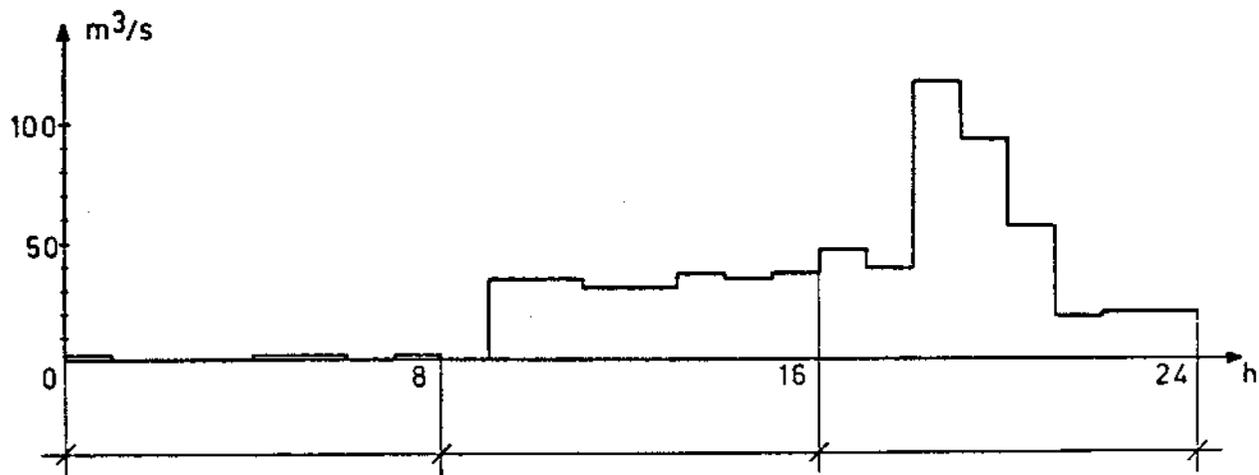
(fig. 4.3)

Turbinagem : MXT



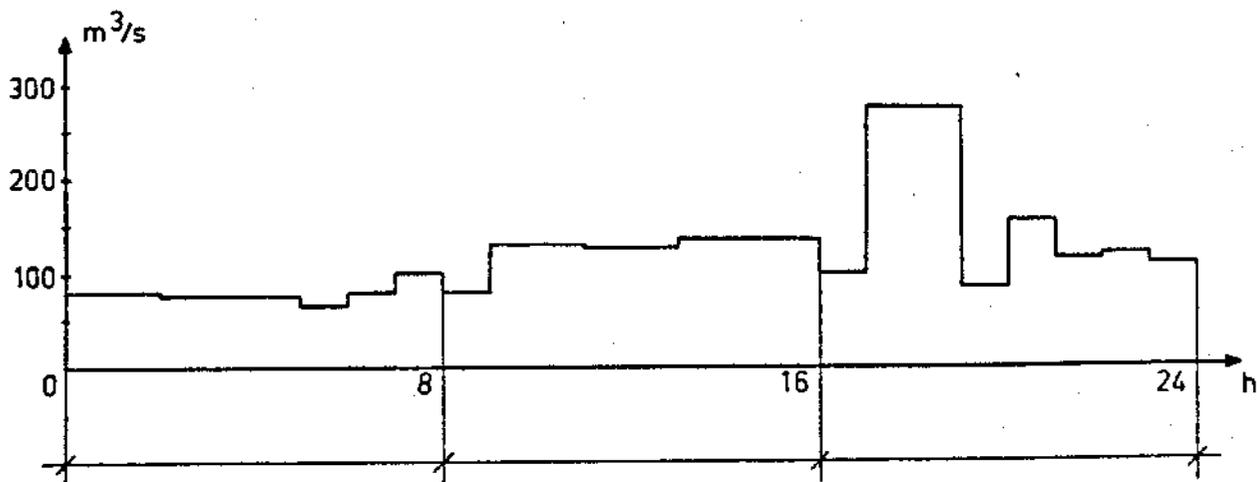
(fig. 4.4)

Turbinagem : PA-I



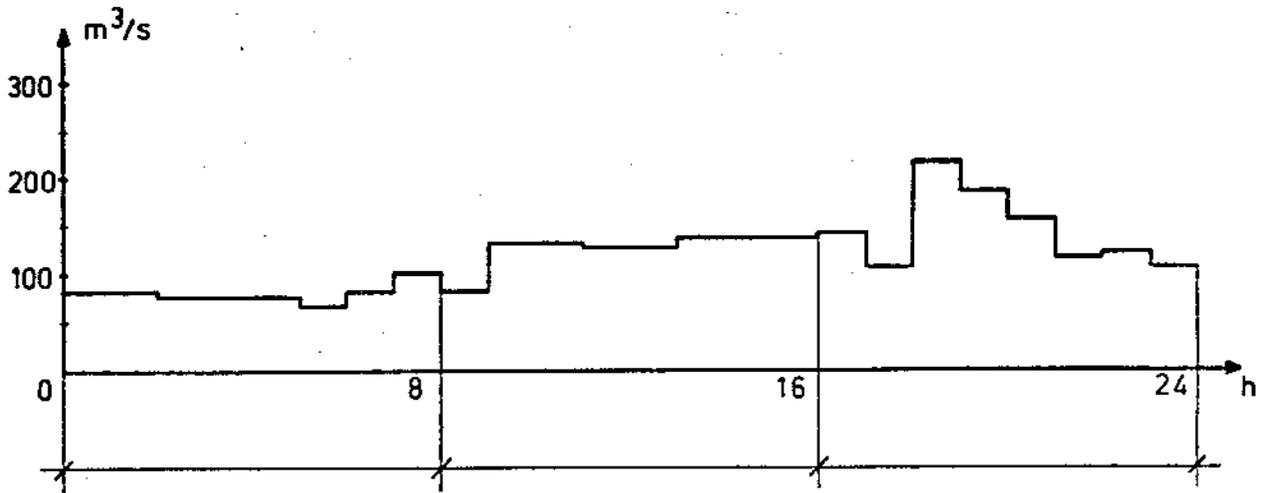
(fig. 4.5)

Turbinagem : PA-II



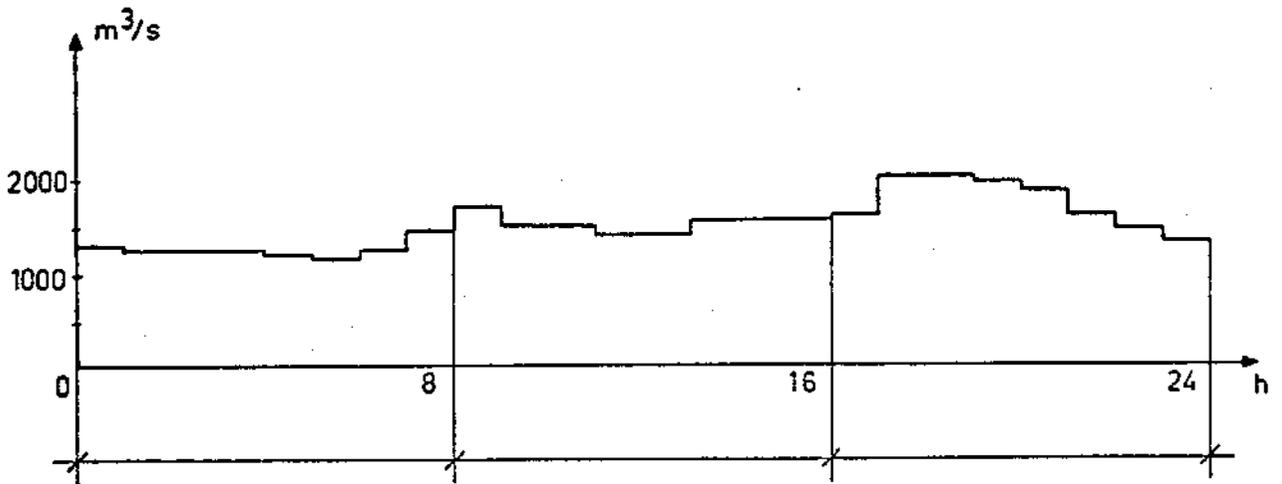
(fig. 4.6)

Turbinagem : PA-III



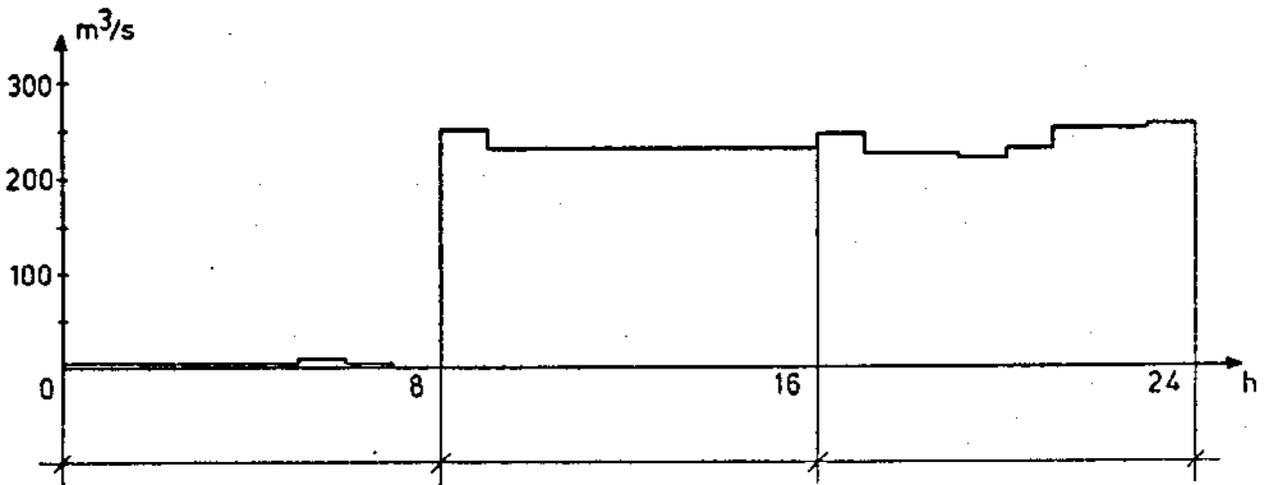
(fig. 4.7)

Turbinagem : PA-IV



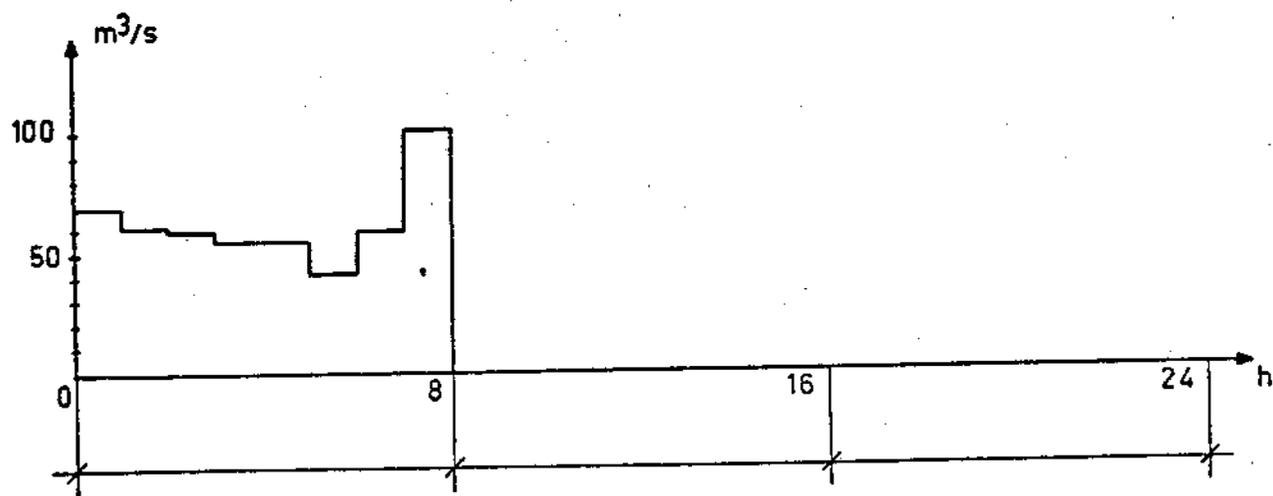
(fig. 4.8)

Vertimento : SBD



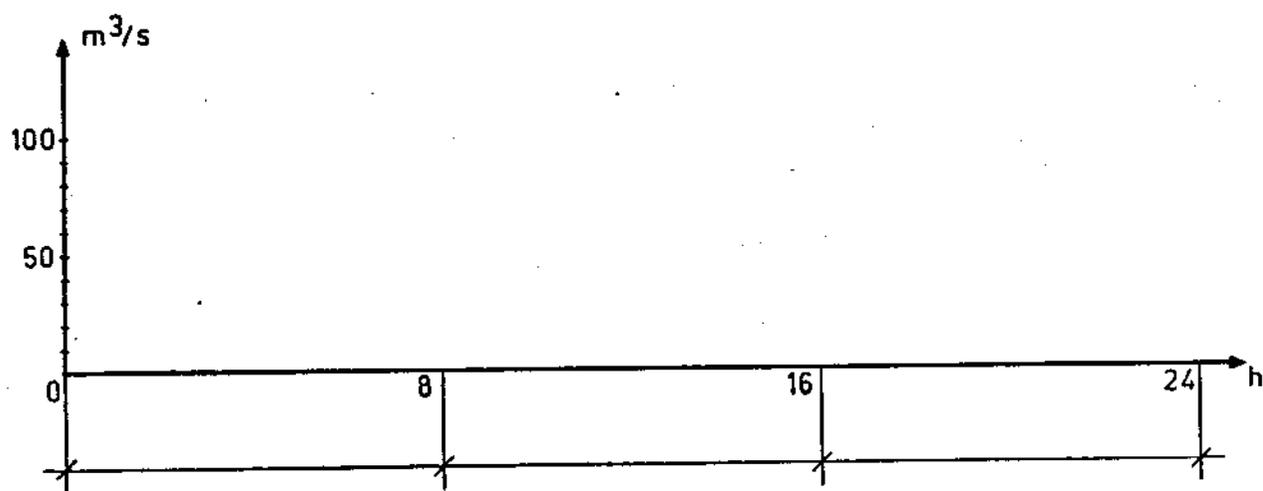
(fig. 4.9)

Vertimento : MXT



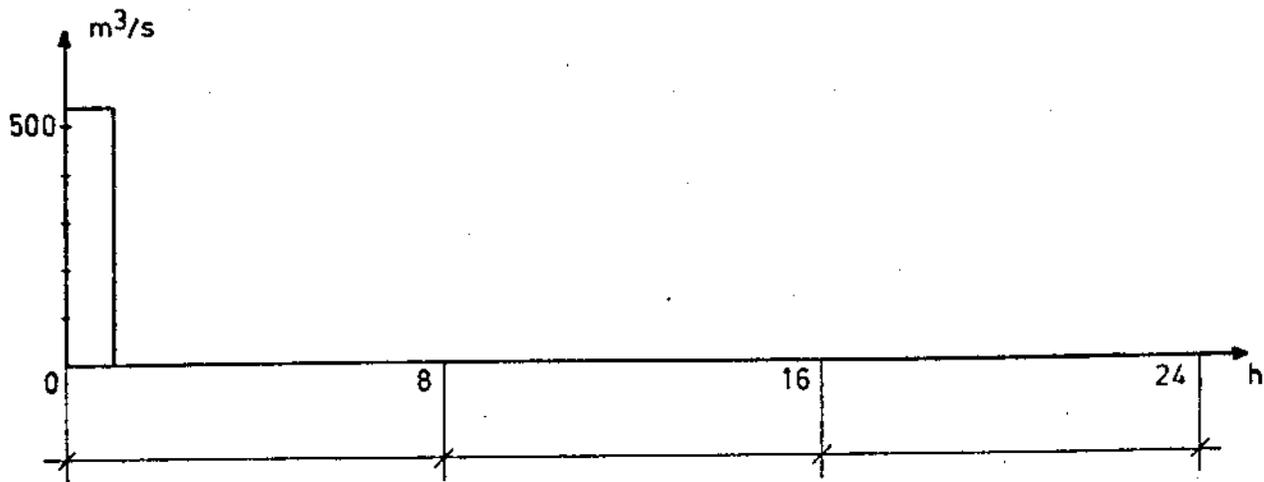
(fig. 4.10)

Vertimento : Delmiro Gouveia



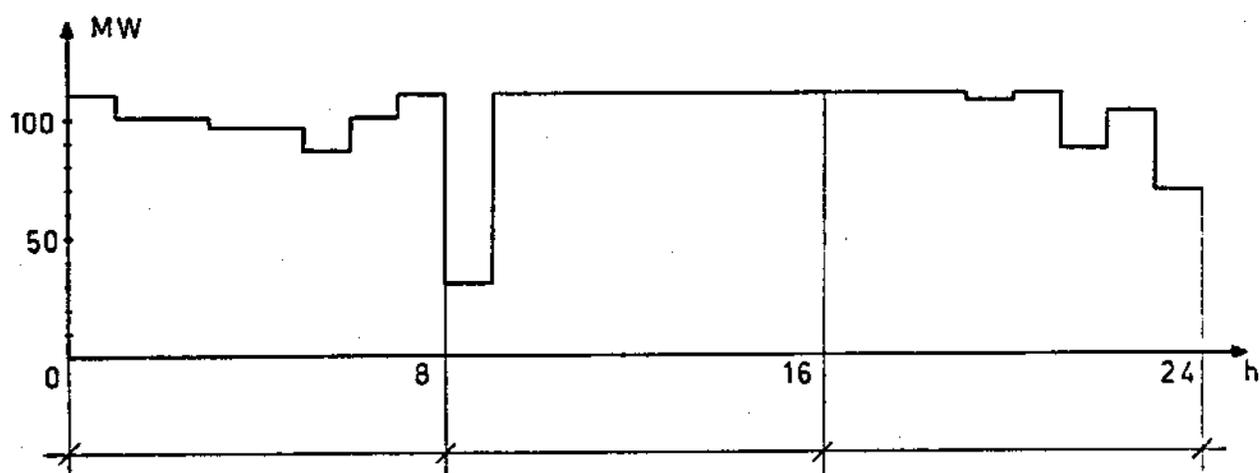
(fig. 4.11)

Vertimento : PA-IV



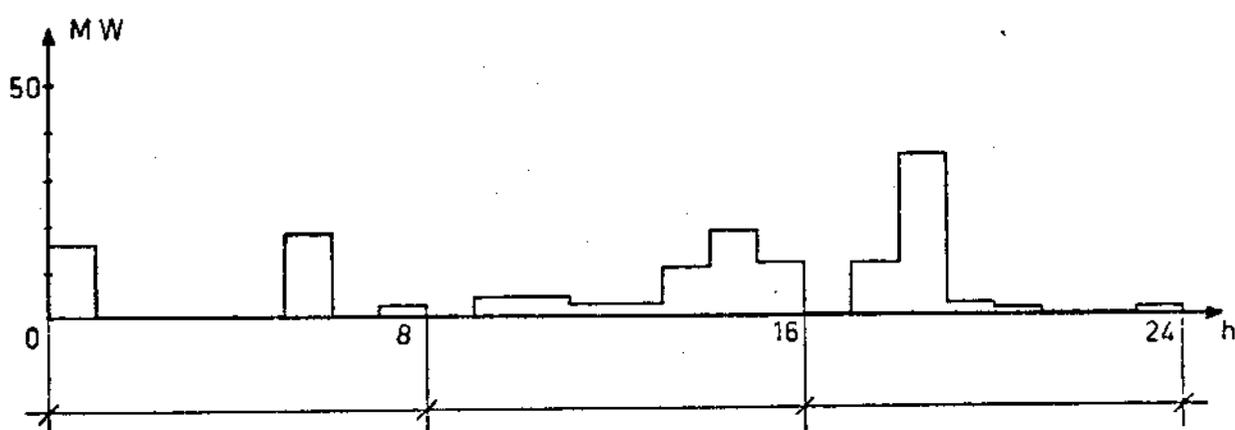
(fig. 4.12)

## Intercâmbio energético



(fig. 4.13)

## Corte de carga

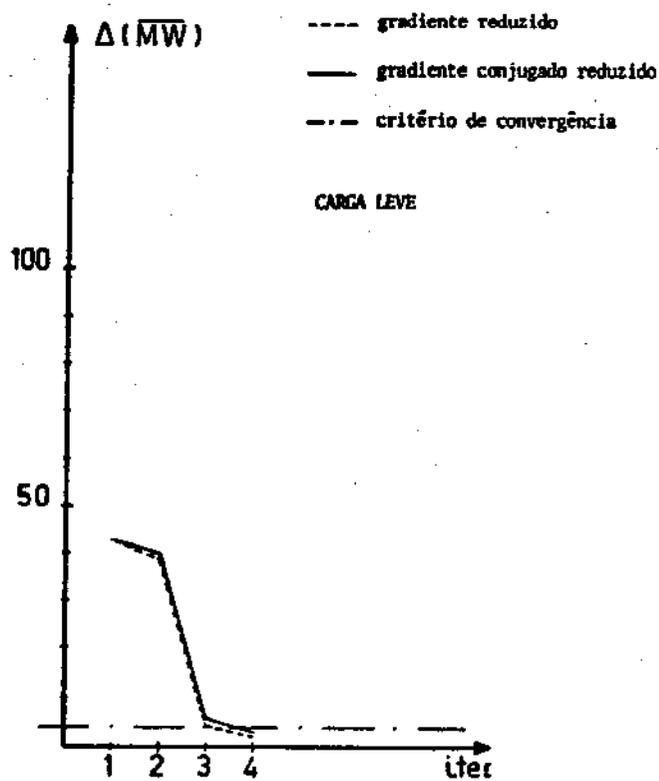


(fig. 4.14)

## Resultados Computacionais

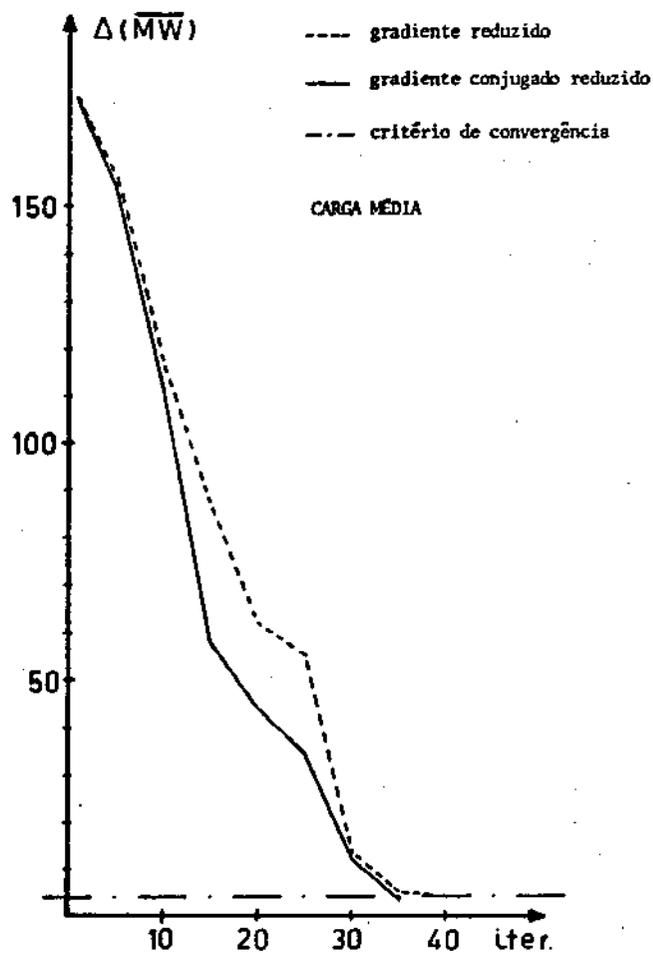
Os resultados computacionais obtidos estão sintetizados nas figuras seguintes, onde mostra-se a evolução do desvio energético médio em função do número de iterações realizadas; na tabela (4.16) apresenta-se os tempos de CPU (FORTRAN 10 / PDP-10) dispendidos em cada exemplo.

## Carga leve (01 - 08 horas)



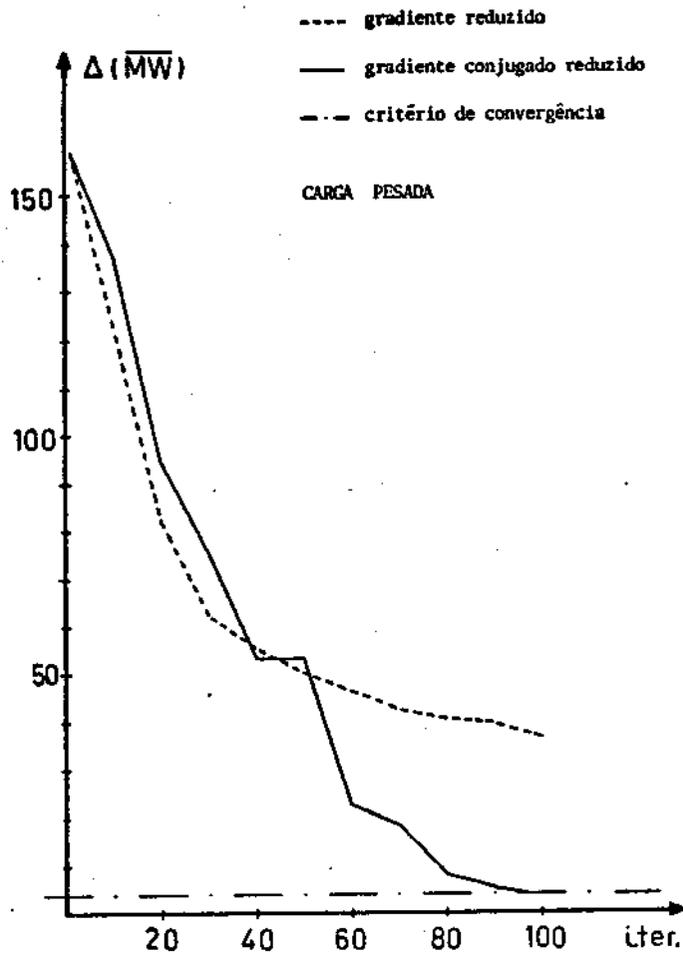
(fig. 4.15)

## Carga média (09 - 16 horas)



(fig. 4.16)

## Carga pesada (17 - 24 horas)



(fig. 4.17)

	carga leve	carga média	carga pesada
grad. reduzido:			
tempo de CPU (seg.)	34	291	806
Nº de iterações	4	36	100
função objetivo	21	96	10342 *
grad. conjugado reduzido:			
tempo de CPU (seg.)	36	260	725
Nº de iterações	4	35	96
função objetivo	55	64	96

(tab. 4.16)

\* Nota : Esta solução não é aceitável, pois foi acionado o critério de convergência 3) (Nº iterações > 100).

Estes resultados permitem uma primeira avaliação comparativa da performance do modelo tanto em função das condições de carregamento (carga leve, média e pesada) quanto pela direção de pesquisa usada (gradiente reduzido e gradiente reduzido conjugado).

#### 4.8. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos na alocação horária da demanda energética dos exemplos apresentados indicam a exequibilidade da formulação proposta e do método de resolução utilizado. Ter-se tomado um dia útil para exemplificação permitiu observar a performance do modelo sob condições de carregamento relativamente diversificada, o que será discutido mais adiante.

De início, será comentada a solução encontrada para o pré-despacho diário que foi apresentada na seção (4.7).

Demanda Horária. A curva de demanda horária (fig. 4.2) corresponde a uma demanda diária agregada de 54.640 MWh que foi modulado pela curva típica de demanda de dia útil. A ponta (demanda máxima) é de 3.012 MW e situa-se no intervalo de carga pesada das 18 às 19 horas.

Despacho das Turbinagens (Geração). A turbinagem de SBD (fig. 4.3) foi despachada literalmente na "base". Distingue-se três patamares nítidos, cada um deles relativo a um dos intervalos de estudo. As turbinagens das outras usinas, MXT, PA I-IV (fig. 4.4 a 4.8) sofreram modulações que as assemelham, em forma, à curva de demanda horária do sistema. De maneira mais clara, isto pode ser observado no intervalo de carga pesada onde as curvas apresen

tam variações mais acentuadas.

Despacho dos Vertimentos. O vertimento de SBD (fig. 4.9) apresenta um aspecto curioso, há uma grande disparidade entre os vertimentos no intervalo de carga leve, praticamente nulos, e os vertimentos dos outros dois intervalos. Isto é consequência das metas de defluências estabelecidas pelo planejamento operacional hierarquicamente superior, e reflete implicitamente a rigidez do acoplamento hidráulico entre Sobradinho e o complexo Moxotô - Paulo Afonso. De fato, considerou-se na formulação do exemplo resultados fornecidos pelo "Modelo de Otimização para a Operação Hidroenergética da Cascata do São Francisco" [15] numa versão onde ainda não se considerava a difusão da onda d'água neste acoplamento. Em versões mais recentes esta difusão já pode ser considerada. O vertimento MXT (fig. 4.10) concentra-se exclusivamente no intervalo de carga leve, e tem por objetivo suprir as necessidades de água (energia) das usinas situada a jusante (PA I-III). Note que não há vertimentos na bacia de adução de Delmiro Gouveia (fig. 4.11). O vertimento de PA IV (fig. 4.12) ocorre apenas no intervalo de carga leve, ela visa exclusivamente o atendimento às metas de defluência do reservatório de Moxotô.

Despacho do Intercâmbio Energético e Corte de Carga. O intercâmbio energético (fig. 4.13) apresenta uma tênue modulação pela curva de demanda. Porém o limite máximo (110 MW) imposto ao intercâmbio horário é muito próximo ao valor médio (100 MW) que atende à sua meta agregada. Isto tornou seu despacho pouco flexível, o que se traduz num certo achatamento dessa curva. Quanto ao corte de carga (fig. 4.14), algumas inconveniências são detetadas. Ele funciona como uma usina fictícia com capacidade de geração limitada tanto para a geração horária quanto para o total agregado para o intervalo.

Acontece que em todas as soluções a possibilidade de corte de carga foi usada integralmente, mesmo quando havia meios de evitá-lo. Cortes de carga poderiam ser evitados ou minimizados sempre que ocorram simultaneamente com vertimentos em aproveitamentos onde as turbinagens não tenham atingido seus limites superiores. Tal inconveniência é decorrente da função objetivo escolhida, o que será discutido a seguir.

Função Objetivo. A função objetivo usada

$$\text{Min. } f = \sum_{h=1}^H (e_h - i_h - c_h - hg_h)^2$$

admite a utilização do corte de carga, dentro de limites estabelecidos, sem qualquer penalização. Duas alternativas poderiam ser usadas para melhor caracterizar um mercado de cargas interruptíveis onde o seu corte é permitido apenas quando necessário. A primeira seria excluir o corte de carga da função objetivo, obtendo

$$\text{Min. } f = \sum_{h=1}^H (e_h - i_h - hg_h)^2$$

Daí, para uma solução com a função objetivo não nula, o corte de carga seria alocado sobre a curva do desvio observado. A segunda alternativa seria incluir um termo de penalização do corte de carga na função objetivo

$$\text{Min. } f = \sum_{h=1}^H ((e_h - i_h - c_h - hg_h)^2 + w_h(c_h)^2)$$

O coeficiente  $w$  do termo de penalização deve ser definido de modo a não com

prometer a convergência do método usado.

Aspectos Computacionais. Em termos computacionais, é interessante observar a performance do modelo em relação ao carregamento do sistema. O esforço computacional, dado em tempo de CPU, cresceu de forma significativa com o aumento da demanda energética correspondente. Este resultado sugere a possibilidade da ocorrência de "zig-zag"; o aumento na demanda acarretaria uma evolução das soluções intermediárias mais próxima da fronteira de factibilidade. Em consequência, os passos dados a cada iteração teriam amplitudes reduzidas, pois a evolução de alguma variável seria bloqueada. Daí segue a necessidade de um maior número de iterações na resolução do exemplo. A suspeita de ocorrência de "zig-zag" originou o experimento de utilizar-se uma direção conjugada dada pelo método de Fletcher-Reeves. E os resultados obtidos, que são bastantes significativos no intervalo de carga pesada, parecem comprovar esta suspeita.

Critérios de Convergência. Acredita-se que os critérios de convergência 1) e 2) definidos na seção (4.6) são excessivamente rigorosos. Um valor de função objetivo igual a  $100 \text{ (MW)}^2$  corresponde a um desvio médio em energia de  $3,5 \overline{\text{MW}}$  distribuído uniformemente sobre todo o intervalo, ou a um desvio máximo em ponta de 10 MW se concentrado numa única hora. O exemplo resolvido possui uma demanda energética média de  $2.280 \overline{\text{MW}}$  e o sistema possui uma capacidade instalada de 5.470 MW. Então os respectivos desvios relativos seriam de 0,15 % em energia e 0,18 % em ponta. Considera-se que a utilização desses critérios na fase de desenvolvimento e primeiros testes foi pertinente, porém poderiam ser um tanto relaxados em fases posteriores de aplicações. Isto trará reduções significativas no esforço computacional requerido.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

Os resultados apresentados indicam a exequibilidade de uma formulação abrangente de um modelo de alocação horária da demanda energética no sistema hidrelétrico do médio São Francisco. Um conjunto de restrições lineares garantem o atendimento às metas estabelecidas pelo planejamento operacional a nível superior, o respeito à natureza conservativa do fluxo de água e a observação dos limites operacionais do sistema, sejam de natureza física ou impostos por conveniência operativa. Uma representação não linear das funções de hidrogeração das usinas do sistema, onde a altura de queda é estabelecida a partir dos polinômios de cota montante em função do volume e cota jusante em função da defluência, assegura uma formulação precisa do problema.

A utilização de técnicas de otimização mostrou-se adequada, apesar do objetivo central do problema ser a obtenção de soluções factíveis. A extrema flexibilidade de inicialização do método do Gradiente Reduzido indica vias interessantes para o estudo do problema. Seu "interfaceamento" com técnicas de simulação permitiria tanto agregar em sua solução inicial parte substancial do conhecimento empírico disponível acerca do comportamento operacional do sistema, como avaliar a qualidade de soluções realizadas ou propostas. Por ser um método primal, torna-se possível a implementação de soluções intermediárias (não ótimas) desde que julgadas aceitáveis. Isto é crucial, pois a convergência finita não é assegurada para o problema for-

mulado.

A utilização de uma direção descendente conjugada, gerada pelo método de Fletcher-Reeves, produziu resultados atrativos. Isto ficou muito claro no intervalo de carga pesada, que se mostrou bastante mais severo quando avaliado em termos do esforço computacional dispendido.

Alguns testes exploratórios realizados indicaram que o modelo desenvolvido é bastante sensível à amplitude do horizonte de estudo. Isto ocorre devido a relação existente entre a dimensão do problema e o esforço computacional requerido na sua resolução. Em particular, tentativas de resolver um único exemplo sobre um horizonte diário (24 horas) mostraram-se inviáveis quando comparados com o esforço conjunto requerido na resolução dos três exemplos separados. O aspecto interessante deste resultado é que ele sugere o uso de intervalos desiguais para os intervalos de carga leve, média e pesada. O exemplo apresentado mostrou que a condição de carregamento do sistema é também um fator determinante do esforço computacional requerido. Então, por exemplo, o intervalo de carga leve poderia ser expandido e o de carga pesada reduzido, de modo a se estabelecer um melhor compromisso entre a amplitude do horizonte de estudo e as condições de carregamento do sistema.

Em sequência a este trabalho, considera-se duas linhas que poderiam ser exploradas. Elas são complementares e serão comentadas em separado apenas para se enfatizar o aspecto considerado dominante em cada uma. Na primeira delas, o ferramental metodológico aqui utilizado seria considerado satisfatório. A partir daí, a formulação do problema seria tratada com maior detalhe e refinamento, de modo a se estabelecer uma representação matemática mais rica para o problema da alocação horária da demanda energética. A consideração de faixas de cavitação, das atividades de manutenção e da reserva girante do sistema, seriam alguns dos aspectos a serem tratados

com rigor. A exploração de funções objetivos que se adequassem às condições de hidraulicidade ocorridas, às características do sistema e do mercado consumidor, e às estruturas tarifárias vigentes, seriam aplicações de fundamental importância. Outro aspecto interessante ainda relacionado com a função objetivo - admite-se que a otimização de natureza energética foi alcançada pelo modelo a nível hierarquicamente superior - seria a introdução de critérios operacionais, por exemplo, a minimização das atuações nos equipamentos hidromecânicos (comportas) do sistema. Os trabalhos nessa linha deveriam contar necessariamente com a participação técnica de profundos conhecedores do sistema a ser modelado e poderiam ter como objetivo final a implantação de um "pacote" computacional para utilização efetiva no gerenciamento da operação energética do sistema. Na segunda linha, a caracterização básica do problema seria considerada satisfatória e suficientemente rica para suportar estudos que, através de refinamentos metodológicos, atingissem uma melhor performance na resolução do problema. Nesta direção, sugere-se a incorporação de recentes contribuições de Lyra [20] ao problema da alocação horária da demanda energética. Em particular, deve-se dar uma atenção especial à extensão do método do Gradiente Reduzido ao problema de fluxo de custo mínimo em redes de transporte. Na formulação desenvolvida, as restrições (3.4), correspondentes às variações de turbinagens de Sobradinho e Paulo Afonso I-III, foram incorporadas para atenuar o efeito de "bang-bang" no pré-despacho dessas usinas. Os resultados obtidos foram satisfatórios, entretanto a troca de limites de turbinagem de uma usina hidráulica, num intervalo de tempo de uma hora, seria melhor caracterizado por uma inconveniência operacional, do que por uma impossibilidade. Ou seja, as restrições (3.4) seriam descartadas e incorporadas, como um termo de penalização, na função objetivo. As restrições restantes são de balanços de fluxos (água, intercâmbio energético e cargas interruptíveis), podendo o

problema de alocação horária da demanda energética no sistema hidrelétrico do médio São Francisco ser formulado como um problema de fluxo de custo mínimo numa rede de transportes, com função de custo não linear (apêndice B). Possivelmente isto trará grandes reduções nos tempos computacionais [20].

APÊNDICE ANOTAÇÃO MATRICIAL

Neste trabalho utiliza-se a notação matricial desenvolvida por Sakarovitch [17] que será apresentada, de forma sumária, neste apêndice.

Matrizes serão denotadas por letras latinas maiúsculas (A, B etc.) e vetores por letras latinas minúsculas (x, y etc.).

Admitindo que :

A	matriz (m x n)
x	vetor linha de n colunas
d	vetor coluna de m linhas
I	conjunto de índices ordenados, I {1, 2, ..., n}
J	conjunto de índices ordenados, J {1, 2, ..., m}

define-se a seguinte notação:

$x_I$	vetor linha de componentes $x_i, i \in I$
$d^J$	vetor coluna de componentes $d^j, j \in J$
$A_i^j$	elemento de A pertencente à coluna j e linha i $i \in I, j \in J$

$A_i$  linha  $i$  de  $A$ ,  $i \in I$

$A^j$  coluna  $j$  de  $A$ ,  $j \in J$

$A_I$  matriz obtida pela união das linhas  $A_i$ ,  $i \in I$

$A^J$  matriz obtida pela união das colunas  $A^j$ ,  $j \in J$

APÊNDICE BFORMULAÇÃO ALTERNATIVA POR GRAFOS

Aqui apresenta-se uma formulação alternativa para o problema de alocação horária da demanda energética no sistema do médio São Francisco como um Problema de Fluxo de Custo Mínimo (PFCM) com função objetivo não linear e arcos capacitados.

A partir da formulação apresentada na seção (3.6), relaxando as restrições (3.4) e incorporando-as na função objetivo como um termo de penalização das variações de turbinagens, obtém-se:

$$\text{Min. } f = \sum_{h=1}^H ((e^h - i^h - c^h - hg^h)^2 + \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell} (u_{\ell}^h - u_{\ell}^{h-1})^2)$$

$$\text{s.a. } u_1^h + v_1^h = d_1^h$$

$$u_2^h + v_2^h = u_3^h + u_4^h + u_5^h + v_3^h$$

$$\sum_{h=1}^H d_1^h = D1$$

$$\sum_{h=1}^H u_2^h + v_2^h + u_6^h + v_6^h = D2$$

$$\sum_{h=1}^H i^h = IT$$

$$\sum_{h=1}^H c^h \leq CT$$

$$l_j \leq u_j^h \leq \bar{u}_j$$

$$l_d \leq d_1^h \leq \bar{d}_1$$

$$l_i \leq i^h \leq \bar{i}$$

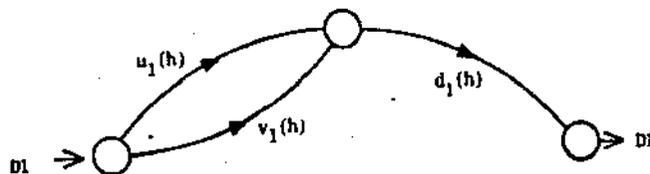
$$0 \leq c^h \leq \bar{c}$$

$$0 \leq v_j^h$$

onde :  $h=1$  a  $H$  é o índice horário;  $j=1$  a  $6$  é o índice de usina do sistema;  $l=3$  a  $5$  é o índice das usinas com variações de turbinagens penalizadas;  $\omega_2$  é um parâmetro que pondera o termo de penalização das variações de turbinagens.

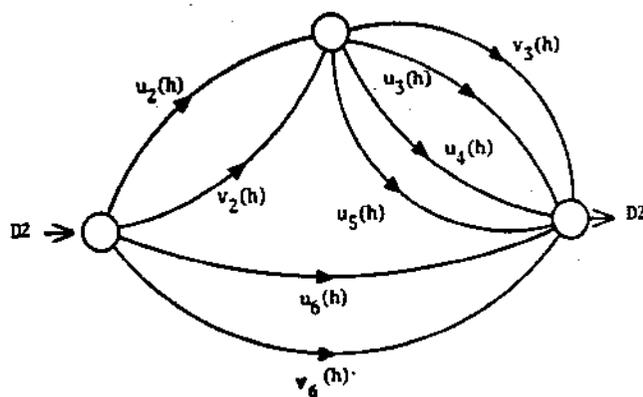
A representação por grafo do conjunto de restrições do problema é apresentado em detalhe a seguir:

Balanco hidráulico : Sobradinho



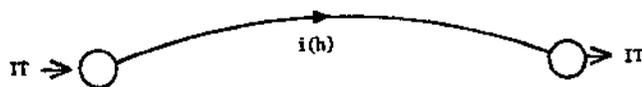
(fig. B.1)

Balço hidráulico : complexo Paulo Afonso - Moxotó



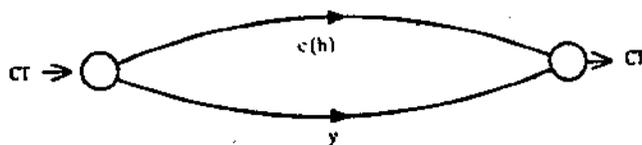
(fig. B.2)

Intercâmbio energético :



(fig. B.3)

Corte de cargas interruptíveis :



(fig. B.4)

Representação das matrizes de incidência em uma formulação não-arco.

Balanco hidráulico : Sobradinho

bloco de variáveis  $\begin{bmatrix} x_1^h \end{bmatrix}$  :  $\begin{bmatrix} u_1^h \\ v_1^h \\ d_1^h \end{bmatrix}$  ( $h = 1$  até  $H$ )

bloco A : 

		-1
1	1	

bloco B : 

-1	-1	1
----	----	---

sistema de restrições :

A	A	...	A
B			
	B		
		...	
			B

 $\times$ 

1
$x_2$
2
$x_2$
$\vdots$
$H$
$x_2$

 $=$ 

D1
0
0
$\vdots$
0

Balanço hidráulico : complexo Paulo Afonso - Moxotó

bloco de variáveis

$$\left[ x_2^h \right]^T :$$

$$\begin{bmatrix} u_2^h \\ u_3^h \\ u_4^h \\ u_5^h \\ u_6^h \\ v_2^h \\ v_3^h \\ v_4^h \end{bmatrix}$$

(h = 1 até H)

bloco C :

$$\begin{bmatrix} -1 & & -1 & -1 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

bloco D :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sistema de restrições :

$$\begin{bmatrix} C & C & \dots & C \\ D & & & \\ & D & & \\ & & \dots & \\ & & & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_2^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D2 \\ -D2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Intercâmbio energético :

bloco de variáveis :  $[i^h]^T$  (h = 1 a H)

bloco E : 

-1
1

sistema de restrições :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & E & \dots & E \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline i^1 \\ \hline i^2 \\ \hline \vdots \\ \hline i^H \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline IT \\ \hline -IT \\ \hline \end{array}$$

Corte de cargas interruptíveis :

bloco de variáveis :  $[c^h]^T$  (h = 1 a H)

bloco F : 

-1
1

sistema de restrições :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline F & F & \dots & F \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline c^1 \\ \hline c^2 \\ \hline \vdots \\ \hline c^H \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline CT \\ \hline -CT \\ \hline \end{array}$$

É interessante ter em conta a estrutura do conjunto de restrições que é constituído por quatro blocos independentes que se acoplam através da função objetivo. Isto permite uma partição de variáveis dependentes e independentes para cada bloco, reduzindo substancialmente o cálculo das componentes da direção de evolução das variáveis dependentes e as trocas de base.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] N.V. ARVANITIDIS e J. ROSING; "Composite Representation of a Multi-reservoir Hydroelectric Power System".  
IEEE; vol. PAS-89; Nº 2; pp. 319-326; FEV./1970.
- [2] N.V. ARVANITIDIS e J. ROSING; "Optimal Operation of Multireservoir Systems Using Composite Representation".  
IEEE; vol. PAS-89; Nº 2; pp. 327-335; FEV./1970.
- [3] C. LYRA Fº; "Otimização da escala de geração em sistemas de potência hidrotérmicos".  
Tese de Mestrado FEC - 20/79  
Deptº de Eng. Elétrica; FEC/UNICAMP; Jul./1979.
- [4] R. PRONOVOST, M. BOUCHER e J. BOUVA; "Optimal Operating Policy for the Long-Term Energy Planning in a Hydro-Thermal System".  
Comunicação interna: IREQ; Varennes/Canadá.
- [5] S. SOARES, C. LYRA e H. TAVARES; "Optimal Generation Scheduling of Hydro-Thermal Power Systems".  
IEEE; vol. PAS-99; pp. 1107-1115; Jun/1980.
- [6] L.S. LASDON; "Optimization Theory for Large Systems".  
MacMillan: series in operational research. New York, 1970.

- [7] E.M. PISSOLATO; "Método para Resolver um Problema de Programação Linear Dinâmica".  
Tese de Mestrado FEC - 55/82  
Deptº de Eng. Elétrica; FEC/UNICAMP; Set./1982.
- [8] R. ROMANO, V.H. QUINTANA, R. LOPEZ e V. VALADEZ; "Constrained Economic Dispatch of Multi-Area Systems Using the Dantzig-Wolfe Decomposition Principle".  
IEEE; vol. PAS-100; Nº 4; pp. 2127-2137; Abr./1981.
- [9] M. VEIGA e L.M. PINTO; "A Decomposition Approach to the Economic Dispatch of Hydrothermal Systems".  
IEEE - PES; 1982 Winter Meeting; New York; Feb./1982.
- [10] J.F. MAURRAS, L.J.B. MACHADO e C. SHAPROTH; "Description du Modele Lineaire a Cout Terme de Gestion d'un Systeme de Production Hydraulique-Thermique, Comprenant un Grand Nombre de Vallees, et Premiers Resultates".  
Comunicação interna: EDF-DER, HR32-0095; Avr./1975.
- [11] C.R. GAGNON, R.H. HICKS, S.L.S. JACOBY e J.S. KOWALIK; "A Nonlinear Programming Approach to a Very Large Hydroelectric System Optimization".  
Mathematical Programming; Nº 6 (1974); pp. 28-41.
- [12] P. WOLFE; "Recent Developments in Nonlinear Programming".  
Relatório: R-401-PR; Rand Corporation; May/1962.

- [13] R. FLETCHER e C.M. REEVES; "Function Minimization by Conjugate Gradients".  
Brith. Computer J.; vol. 7; pp. 149-154; 1964.
- [14] C. LYRA F9, A. FRIEDLANDER e J.C. GEROMEL; "Coordenação da Operação Energética no Médio São Francisco por um Método de Gradiente Reduzido".  
Matemática Aplicada e Computacional; vol. 1; Nº 2; 1982.
- [15] M. CARNEIRO DA SILVA; "Modelo de Otimização para a Operação Hidroenergética da Cascata do São Francisco".  
Tese de Mestrado FEC - 07/84  
Deptº de Eng. Elétrica; FEC/UNICAMP; Mar./1984.
- [16] P. HUARD; "Convergence of the Reduced Gradient Method".  
Nonlinear Programming - 2 (Eds. O.L. MANGASARIA e outros); pp. 29-54  
Academic Press, Inc. - 1974.
- [17] M. SAKAROVITCH; "Notes on Linear Programming".  
Van Nostrand Reinhold Company - 1971.
- [18] D.G. LUENBERGER; "Introduction to Linear and Nonlinear Programming".  
Addison-Wesley Publishing Company - 1973.
- [19] M.S. BAZARAA, C.M. SHETTY; "Nonlinear Programming; Theory and Algorithms".  
John Wiley e Sons, Inc. - 1979.

- [20] C. LYRA Fº; "Contribuição ao Planejamento da Produção de Energia em Sistemas de Potência".  
Tese de Doutorado FEC - 040/84  
Deptº de Eng. Elétrica; FEC/UNICAMP; Mai./1984.
- [21] M. AOKI; "Introduction to Optimization Techniques : Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming".  
The Macmillan Company, New York - 1971.
- [22] ELETROBRÁS - Dept. de Estudos Energéticos; "Modelo de Simulação de Usinas Individualizadas - MSUI"  
Setembro 1975.