

Nicolau Leal Werneck

## **Análise da distorção musical de guitarras elétricas**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: AC — Eletrônica, Microeletrônica e Optoeletrônica.

Orientador: Furio Damiani

Campinas, SP  
2007

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

W49a Werneck, Nicolau Leal  
Análise da distorção musical de guitarras elétricas /  
Nicolau Leal Werneck. --Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Furio Damiani  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

1. Instrumentos de corda. 2. Instrumentos musicais. 3.  
Música – Acústica e física. 4. Vibração. 5. Processamento  
de sinais. 6. Estimativa de parâmetro. I. Damiani, Furio. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em inglês: Analysis of the musical distortion of electric guitars

Palavras-chave em Inglês: Electric guitar, Physics of music, Overdrive, Musical distortion,  
String vibration, Signal processing, Parameter estimation,  
Hammerstein model, Timbre space

Área de concentração: Eletrônica, Microeletrônica e Optoeletrônica

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Adolfo Maia Júnior, Peter Jürgen Tatsch e Fabiano Fruett

Dada da defesa: 31/08/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Nicolau Leal Werneck

**Data da Defesa:** 31 de agosto de 2007

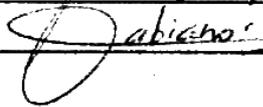
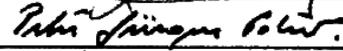
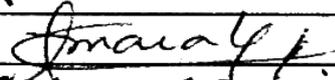
**Título da Tese:** "Análise da Distorção Musical de Guitarras Elétricas"

Prof. Dr. Furio Damiani (Presidente): \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Adolfo Maia Júnior: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Peter Jürgen Tatsch: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Fabiano Fruett: \_\_\_\_\_



# Resumo

Existem diversos problemas ligados à análise de sinais musicais que podem se beneficiar de um conhecimento mais detalhado da estrutura dos sinais gerados pelos diferentes instrumentos. Entre eles se destaca a compressão de sinais baseada em áudio estruturado, onde o codificador determina a partir de um sinal parâmetros para reproduzi-lo com um sintetizador inspirado em modelos físicos dos instrumentos. Para realizar este tipo de análise e síntese é necessário conhecermos as características físicas dos instrumentos e dos sinais produzidos. Este conhecimento é ainda útil para auxiliar no desenvolvimento de instrumentos e outros equipamentos utilizados por músicos para obter o timbre desejado. Esta dissertação apresenta experimentos realizados com uma guitarra elétrica para revelar a dinâmica não-linear de suas cordas e seu filtro linear associado, comparação de sinais gravados com resultados esperados por modelos matemáticos da forma de onda, e ainda uma proposta de uma potencial técnica para a medição de parâmetros para um modelo matemático de um circuito de distorção musical, além de uma maneira de se mapear um par destes parâmetros para um espaço de maior significado psicoacústico.

**Palavras-chave:** guitarra elétrica, física da música, overdrive, distorção musical, vibração de cordas, processamento de sinais, estimação de parâmetros, modelo de Hammerstein, espaço timbrístico.

# Abstract

There are many problems related to the analysis of music which can benefit from a better knowledge of the structure of the signals generated by different instruments. One of them is the compression of signals based in structured audio, where the encoder analyzes a signal to determine parameters for a physically inspired synthesizer to reproduce it. We must know the physical characteristics of the instruments and signals to perform this kind of analysis and synthesis. This knowledge is also helpful in the development of instruments and other equipment used by musicians to get the desired timbre. This dissertation presents experiments performed with an electric guitar to show the non-linear dynamics of the strings, the effect of the guitar filter, a comparison of the recorded signals and the theoretical waveform, and also a proposal for a potential technique to measure the parameters of a model of a distortion circuit and a way to map a couple of those parameters to a space with more psychoacoustical significance.

**Keywords:** electric guitar, physics of music, overdrive, musical distortion, string vibration, signal processing, parameter estimation, Hammerstein model, timbre space.

# Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Furio Damiani.

Ao Prof. Hani Yehia e todos colegas, professores e funcionários da UFMG e UNICAMP.

À minha mãe, meu pai e meu irmão, por todas influências que constam neste trabalho.

A toda minha família, amigos *und meiner geliebten Hexchen*, Carina.

Ao Café com Arte, Confeitaria Bangalô, Restaurante Pier 4, Pão de Açúcar, “seu” Mário da moradia, e “seu” Walter da oficina da Física.

À FUNCAMP e CAPES, pelo investimento.

*Dedicado a Faraday, Tesla e Theremin,  
pioneiros de tecnologias antigas que  
nunca deixarão de ser admiráveis.*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Glossário</b>	<b>xv</b>
<b>Trabalhos Publicados Pelo Autor</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	1
1.2 Motivações . . . . .	2
1.2.1 Interdisciplinaridade . . . . .	2
1.2.2 Engenharia, ciência e música . . . . .	3
1.2.3 Filosofia, Ciência Cognitiva e Inteligência Artificial . . . . .	5
1.3 Trabalhos anteriores . . . . .	6
1.3.1 Modelagem física em geral . . . . .	6
1.3.2 Modelagem física de guitarra elétricas . . . . .	7
<b>2 Cordas em vibração livre</b>	<b>9</b>
2.1 Estudos da “velha guarda” . . . . .	9
2.1.1 Solução periódica . . . . .	9
2.1.2 Soluções não-harmônicas . . . . .	10
2.1.3 Amortecimentos . . . . .	11
2.1.4 Resposta a impulso . . . . .	11
2.1.5 Formas de excitação . . . . .	12
2.1.6 Projeto de filtro . . . . .	14
2.2 Estudos da “nova onda” . . . . .	17
2.2.1 Acoplamento . . . . .	19
2.2.2 Acoplamento paramétrico não-linear aproximado . . . . .	22
2.2.3 Funcionamento da guitarra elétrica . . . . .	25
2.2.4 Vantagens da guitarra elétrica para a pesquisa . . . . .	26
2.2.5 Indução nas cordas . . . . .	26
2.3 Experimentos . . . . .	27
2.3.1 Início da nota . . . . .	28

2.3.2	Observação de acoplamentos e meio da nota . . . . .	30
2.4	Conclusões . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Cordas em vibração forçada</b>	<b>39</b>
3.1	Modelos matemáticos . . . . .	39
3.1.1	A corda como oscilador não-linear . . . . .	39
3.1.2	Equação diferencial . . . . .	41
3.1.3	Oscilador de Duffing . . . . .	42
3.2	Experimento com a resposta forçada . . . . .	45
3.2.1	Montagem do experimento . . . . .	45
3.2.2	Testes para o projeto do atuador . . . . .	46
3.2.3	Projeto do atuador . . . . .	47
3.2.4	Programa para gerar senóides . . . . .	47
3.2.5	Resultados . . . . .	48
3.2.6	Análise dos resultados . . . . .	50
3.3	Conclusões . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Filtro Elétrico Passivo</b>	<b>53</b>
4.1	Experimento Proposto . . . . .	53
4.2	Determinação de grandezas elétricas . . . . .	58
4.3	Projeto de filtro digital . . . . .	58
4.4	Conclusão . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Distorções Musicais</b>	<b>63</b>
5.1	História . . . . .	63
5.2	Circuito construído . . . . .	64
5.3	Estimação de parâmetros . . . . .	65
5.3.1	Método para distorções sem filtro . . . . .	67
5.3.2	Método para distorções com filtro . . . . .	69
5.3.3	Testes . . . . .	71
5.4	Distorções em sinais de guitarra . . . . .	71
5.4.1	Função de distorção utilizada . . . . .	71
5.4.2	Distorção de ruído branco filtrado . . . . .	73
5.4.3	Distorção de sinais periódicos . . . . .	74
5.4.4	Distorção de sinais quasi-periódicos . . . . .	75
5.4.5	Sinais mais complexos . . . . .	76
5.5	Transformação de parâmetros de distorção . . . . .	78
5.6	Conclusões . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Tensão e extensão</b>	<b>85</b>
<b>B</b>	<b>Síntese de guitarras elétricas</b>	<b>87</b>

**C Algoritmo SNTLN****89****Referências bibliográficas****91**

# Lista de Figuras

2.1	Resposta a impulso com $P = 0,7$ em $x = 0,5$ . . . . .	12
2.2	Ondas amostradas, e formato da corda tocada com $P = 0,7$ . . . . .	13
2.3	Outra visão do gráfico anterior . . . . .	14
2.4	Harmônicos obtidos com $P = 0,208$ e $C = 0,888$ . . . . .	16
2.5	Harmônicos obtidos com $P = 0,172$ e $C = 0,244$ . . . . .	17
2.6	Formas de onda de dois osciladores lineares acoplados. . . . .	22
2.7	Formas de onda dos osciladores acoplados de forma não-linear . . . . .	23
2.8	Espaço de fases de um oscilador linear usual, e o que aproxima o acoplamento não-linear. . . . .	24
2.9	Ilustração das variáveis relevantes. . . . .	27
2.10	Trecho inicial de uma nota de uma guitarra. . . . .	29
2.11	Onda original e ondas sintéticas. $P \simeq C \simeq 0,25$ . . . . .	29
2.12	Espectro do princípio da onda gravada, e filtro teórico, ajustado manualmente (amplitude em decibéis). . . . .	30
2.13	Onda original, e erro de modelagem utilizando componentes não moduladas. . . . .	31
2.14	Esquema da montagem do experimento. . . . .	32
2.15	Terceiro pico do espectro do sinal obtido. . . . .	32
2.16	Componentes moduladas do princípio de uma nota. . . . .	34
2.17	Componentes moduladas a mais de 10 segundos do princípio de uma nota. . . . .	35
2.18	Trechos da trajetória no espaço de fases obtida para o terceiro modo. . . . .	36
2.19	Medições de frequência e amplitude para o primeiro modo no início de uma nota. . . . .	37
3.1	Corda real vibrando em um modo de ressonância, e modelo com massa concentrada. . . . .	40
3.2	Construção das curvas de resposta em frequência. . . . .	43
3.3	Respostas em frequência do oscilador de Duffing com $\beta > 0$ . . . . .	44
3.4	Montagem do experimento para estudo da vibração da corda forçada por uma senóide. . . . .	46
3.5	Interface do sintetizador. A foto de ЛЕВ ТЕРМЕИ (Theremin) atrai boas vibrações. . . . .	48
3.6	Resultados de dois processos de medição da amplitude e frequência. . . . .	49
4.1	Circuito para determinação da função de transferência. . . . .	54
4.2	Modelo do filtro da guitarra, destacando o captador. . . . .	54
4.3	Resposta a impulso de um dos filtros estudados, em valores absolutos. . . . .	56
4.4	Função de transferência da placa de som. . . . .	57
4.5	Curvas medidas e seus modelos. . . . .	57

4.6	Filtros obtidos com $L_c = 10\text{H}$ , $R_c = 5,3\text{k}\Omega$ , $C_c = 1\text{nF}$ , $R_v = 500\text{k}\Omega$ , $C_t = 33\text{nF}$ e $R_t = \{0,1, 5, 15, 37,49, 70, 140, 500\}\text{k}\Omega$ . . . . .	59
4.7	Caminho dos pólos e zeros conforme a variação do controle de “tom” de uma guitarra. . . . .	60
4.8	Continuação do caminho dos pólos e zeros. Aqui, os pólos terminam se afastando do eixo real, ao contrário da figura anterior. . . . .	60
5.1	Circuito para distorção musical. . . . .	65
5.2	Resultados da simulação: operação sem distorção, com saturação em $Q_2$ , corte em $Q_2$ , e com corte e saturação em $Q_2$ . . . . .	66
5.3	Saídas do circuito de distorção para diferentes amplitudes de entrada, sem filtro, e com filtro passa-altas. Os níveis DC foram adicionados para visualização. . . . .	67
5.4	Polinômio de quinta ordem (esquerda), e parcelas separadas e soma final (direita). . . . .	68
5.5	Curva original, e aproximada pelo método. . . . .	69
5.6	Ocorrência de <i>aliasing</i> na distorção de um sinal amostrado de alta frequência. . . . .	72
5.7	Exemplo de ruído branco filtrado e subsequentemente distorcido (no topo à esquerda), e espectros do sinal original e distorcido para diferentes frequências de corte. . . . .	73
5.8	Espectros de uma onda triangular distorcida com diversas intensidades. . . . .	74
5.9	Espectros de uma onda distorcida com sub-harmônicos. . . . .	75
5.10	Espectrograma de uma onda quasi-periódica distorcida, apresentando batimentos lentos. . . . .	77
5.11	Espectrograma obtido de uma nota sintetizada. . . . .	77
5.12	Espectrograma da segunda nota de uma gravação da música <i>Satisfaction</i> . . . . .	78
5.13	Resultado de uma iteração da amostragem. A referência está em $x = 0,2$ e $y = 0,8$ (esquerda). Campos vetoriais encontrados (direita). . . . .	79
5.14	Curvas de nível de $p$ e $q$ . . . . .	80

# Lista de Tabelas

4.1	Valores estimados dos componentes e ganho. . . . .	58
-----	--	----

# Glossário

ADSR Attack, Decay, Sustain, Release

CD Compact Disc

DC Direct Current (corrente contínua)

DFT Discrete Fourier Transform

FM Frequência Modulada

IIR Infinite Impulse Response

MPEG-4 SA - Moving Picture Experts Group, Structured Audio

RLS Recursive Least Squares

SNTLN Structured Nonlinear Total Least Norm

TSP Time Stretched Pulse

UIUC University of Illinois at Urbana-Champaign

VST Virtual Studio Technology

# Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. N. Werneck, F. Damiani. “Espaços homogêneos de parâmetros para controle de efeitos musicais.” In: *2º seminário Música Ciência e tecnologia (SMCT 2005)*, Campinas, Brasil. 6-8 de Outubro 2005.
2. N. Werneck, F. Damiani. “Observação de acoplamentos entre modos de vibração ortogonais em uma guitarra elétrica.” Aceito para publicação no *11o Simpósio Brasileiro de Computação Musical (SBCM 2007)*.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Objetivos

O objetivo desta dissertação é o estudo objetivo da guitarra elétrica e seus acessórios, como os amplificadores e pedais de efeito. Deste grande objetivo genérico, podemos entretanto destacar dois mais específicos e mais importantes para nós:

- Compreender cientificamente como a distorção contribui para o timbre da guitarra elétrica;
- Contribuir para sistemas de codificação de áudio compatíveis com o padrão MPEG-4 SA, onde sinais são analisados para a extração de parâmetros de controle que alimentam programas de síntese definidos pelo próprio codificador [1].

Foi o estudo da distorção musical que nos levou à necessidade de estudar mais detalhadamente a forma de onda gerada pela guitarra. Este segundo tema constitui a maior parte desta dissertação.

Abordamos aqui os seguintes problemas relacionados a análises que podem ser feitas nos sinais de guitarras, e medições que podem ser realizadas no instrumento.

- Estimativa da posição dos dedos do guitarrista a partir do sinal gravado de uma nota.
- Demonstração da ocorrência de regimes de movimento da corda decorridos de fenômenos não-lineares.
- Observação do movimento da corda da guitarra em regimes forçados.
- Medição do filtro linear elétrico da guitarra.
- Medição de parâmetros para um modelo de um pedal de distorção.

- Criação de um mapeamento de parâmetros de um modelo de distorção para um espaço onde suas variações causam efeitos de intensidade similar.

Todas gerações e gravações de sinais foram realizadas utilizando um microcomputador convencional equipado com uma placa de som ligada a amplificadores eletrônicos. Os experimentos estão portanto ao alcance de qualquer interessado em reproduzi-los, sem demandar equipamentos muito sofisticados.

Estes estudos buscam cobrir todo o caminho da produção do sinal da guitarra, desde a vibração da corda até o processamento do sinal por mecanismos controlados pelo músico, ou por imperfeições em equipamentos intermediários.

As análises são de dois tipos: medições de características do instrumento que só podem ser feitas com acesso a eles, em experimentos de laboratório, e análises do sinal gravado que podem ser feitas até mesmo a partir de gravações antigas em discos vendidos por artistas.

## 1.2 Motivações

Podemos citar três motivações principais para a realização deste trabalho, apresentadas a seguir.

### 1.2.1 Interdisciplinaridade

É impossível escrever este trabalho sem falar de sua interdisciplinaridade. Ainda se encontra nas universidades engenheiros que podem considerar exóticos estudos envolvendo música. Por outro lado, ainda existem estudiosos da música que se espantam ao ver engenheiros interessados por fenômenos ligados à produção cultural.

Cientistas mais antigos talvez pudessem até estranhar essa segregação. Mas ao longo da história da ciência fundaram-se as disciplinas conforme novas descobertas foram feitas. Os cientistas começaram a se tornar especialistas, e as universidades se tornaram cada vez mais organizadas em departamentos de interesse pretensamente disjuntos [2, 3].

É inegável que existe hoje um esforço pela interdisciplinaridade, contra o isolamento dos departamentos. No século XX houve diversas situações onde áreas de estudo se uniram por um entendimento científico maior. Na ciência cognitiva, por exemplo, é comum ver pesquisadores serem influenciados por outras disciplinas [4]. Alguns dos livros mais importantes da ciência contemporânea buscaram justamente unir diferentes áreas [5].

O debate aberto sobre a compartimentação da ciência já ocorre desde o século XVIII. Uma obra controversa sobre este assunto é uma palestra de C. P. Snow de 1959, que ecoa um debate entre Thomas Huxley e Matthew Arnold [6].

Nossa intenção porém não é tomar qualquer atitude em nome da interdisciplinaridade. Ela é pra nós uma motivação, e não um objetivo. Nós simplesmente pesquisamos aqui questões de interesse e ao alcance de qualquer engenheiro electricista. Se ajudarmos a unir diferentes áreas de estudo, ou mesmo aproximar diferentes ramos da engenharia elétrica, será uma boa consequência mas não propositadamente procurada.

Acreditamos que a interdisciplinaridade deve ocorrer naturalmente. Pesquisadores devem apenas selecionar um fenômeno de interesse, e investigá-lo com as ferramentas disponíveis, sem se preocupar com disciplinas e competências. Não consideramos necessário lutar pela interdisciplinaridade, mas sim parar de lutar pela disciplinaridade.

Aqui neste caso em particular não estamos falando precisamente da motivação causada, por exemplo, por um problema em aberto citado em algum trabalho anterior. Aqui se trata de uma motivação suplementar, que reforça o desejo em desenvolver um certo trabalho uma vez que começa a ficar claro que estaremos indiretamente tratando de outras questões de nosso interesse, que não são o objetivo central do trabalho. Isto também acontece quando encontramos uma boa oportunidade de aplicar uma certa ferramenta de que gostamos a algum problema, por exemplo. O ato por si só poderia não ser completamente justificável, mas havendo outras motivações fortes, estas características suplementares do trabalho reforçam o desejo de sua realização.

### 1.2.2 Engenharia, ciência e música

O estudo da acústica é antiqüíssimo, e seus fenômenos de interesse estão entre os primeiros estudados na história da ciência [7].

Até o surgimento da ciência moderna, instrumentos musicais e auditórios eram construídos com base apenas em conhecimento empírico. O surgimento da mecânica no século XVIII permitiu o início da formalização deste conhecimento.

A partir da acústica e da fisiologia dos sentidos um engenheiro pode projetar um auditório ou um sistema de comunicações para obter características desejadas. Há muito tempo já se busca a melhor compreensão da fala e o conforto acústico em obras arquitetônicas [8, 9], e técnicas para o projeto de salas estão em constante desenvolvimento.

O uso da física para entender o que torna um instrumento musical melhor do que outro é entretanto algo relativamente recente [10]. O estudo de alguns instrumentos pode até levar a alguns sistemas dinâmicos não-lineares relativamente complexos. Estes sistemas exigem um pouco mais de conhecimento de física do que o empregado nas atividades mais rotineiras de engenharia.

Vários dos problemas mais interessantes da engenharia atual estão na área de processamento de sinais, e podem se relacionar ao estudo da música. É o caso da codificação digital de sinais, equalização cega, separação de fontes e remoção de ruído. Outros problemas envolvem ainda a inteligência

computacional, como o reconhecimento de instrumentos, transcrição de músicas e composição automática. Estes três problemas encontram bons paralelos no já mais bem-estabelecido estudo da fala.

Estudar a música é portanto uma boa chance para estudar problemas contemporâneos de engenharia. Músicos e ouvintes também podem se beneficiar com aplicações criadas a partir de todos estes estudos, ou ainda com as conclusões teóricas mais profundas trazidas por eles.

Entre estas conclusões teóricas podemos citar a contribuição científica para tentar formalizar disputas históricas entre entusiastas de diferentes marcas de equipamentos, ou de diferentes tecnologias de fabricação de circuitos. Nestas disputas os defensores de cada equipamento afirmam que aquele possui certas características que tornam seu funcionamento inerentemente melhor do que os similares. Argumenta-se, por exemplo, que amplificadores com circuitos valvulados soam de um jeito, transistorizados de outro, e ainda que circuitos com amplificadores operacionais e circuitos integrados também soam de outra forma.

Algumas outras disputas históricas são entre as guitarras de marcas Fender *versus* Gibson, e a contenda entre o CD e o vinil, sem contar a disputa inicial entre o fonógrafo e a própria fonte original do sinal. Não é raro encontrar nestes debates argumentações baseadas de fato em conceitos técnicos precisos, como a existência de pequenas curvas de distorção e filtros no caminho do sinal, e diferentes formas de surgimento de ruído no sistema. Mas é difícil encontrar afinal medições precisas destas características e comparações entre os efeitos causados por estas diferenças.

Todas estas polêmicas do mundo da música precisam da visão de cientistas para que possamos elevar o nível das discussões. É preciso entender quais são de fato as características dos sons e o que realmente pode ser percebido e faz a diferença. A ciência jamais irá acabar com estas disputas, mas podemos tentar determinar exatamente quando entra em cena a estética de cada um no julgamento da qualidade de instrumentos e equipamentos.

Devemos deixar claro que não se trata de encontrar um equipamento “vencedor” nestas disputas. Não se trata de uma disputa de fato, mas simplesmente do diálogo entre diferentes gostos e estéticas que sempre esteve presente na história da humanidade. É preciso compreender exatamente o lugar da ciência: ela deve ser utilizada para entender as diferenças entre as várias preferências, e não justificar uma pretensa superioridade de uma sobre a outra.

Até aqui demos ênfase apenas a contribuições da ciência e engenharia à solução de problemas percebidos por músicos em suas atividades. Mas tecnologias novas podem oferecer muito mais à música. É possível não somente melhorar instrumentos e criar sistemas de alta fidelidade para reprodução de sinais tradicionais, mas também inventar sistemas de síntese bastante inovadores, oferecendo timbres bem diferentes do que se obtém com instrumentos tradicionais.

Computadores permitem a criação de uma grande variedade de novos timbres. A criação de novos sistemas para síntese de sons é a definição de restrições e parâmetros de controle que permitem o mú-

sico trabalhar dentro destas inúmeras possibilidades. Modelos de síntese inspirados em instrumentos reais não precisam portanto se limitar a isso. É possível realizar extensões para explorar novas possibilidades. Esperamos que nossos estudos não sejam portanto úteis apenas para a análise de sinais reais, mas também que inspirem músicos e engenheiros buscando ferramentas para a criação de novos sistemas artificiais de síntese.

### 1.2.3 Filosofia, Ciência Cognitiva e Inteligência Artificial

Este trabalho também foi motivado por problemas filosóficos como os que surgem no estudo da epistemologia e ciência cognitiva.

Por exemplo, o determinismo da física nos faz questionar: Até que ponto podemos codificar um sinal gravado ou substituir um instrumento real por um sintetizador? Esta questão se relaciona com a da medição da complexidade de sistemas [11].

Já no âmbito da ciência cognitiva e inteligência artificial, temos o problema de tentar fazer um computador compor uma música que seja avaliada como tão boa quanto uma música composta por um humano. Isto pode ser visto como um teste de Turing musical. Os sistemas de composição mais simples utilizam modelos de Markov [12], ruídos e fractais [13, 14]. Resultados mais interessantes são obtidos com estruturas mais complexas. O programa EMI, por exemplo, já levou alguns cientistas da cognição a se questionarem a respeito da arte e da natureza humana [15].

Uma das motivações de nosso trabalho veio da percepção da importância que a interação do compositor com seu instrumento pode ter no processo criativo [16]. O estudo desta interação no contexto da composição automática de música estaria relacionado com a utilização de robôs humanóides em estudos de ciência cognitiva [17].

Os programas atuais de composição geralmente trabalham somente lendo e escrevendo partituras. Queremos contribuir para a criação de uma nova geração de programas compositores que compo-nham enquanto tocam em instrumentos. Para isto podemos utilizar modelos físicos de instrumentos implementados em computadores. Com um modelo destes, os programas de composição poderão interagir com instrumentos simulados, evitando a construção de robôs. Estes programas ainda vão precisar “ouvir” música, e para isto serão necessários estudos sobre o timbre dos instrumentos e a sua percepção.

## 1.3 Trabalhos anteriores

### 1.3.1 Modelagem física em geral

Esta dissertação foi influenciada antes de mais nada pelos inúmeros trabalhos existentes sobre análise física de instrumentos musicais, mais especificamente de instrumentos de corda. Este assunto é abordado no início do capítulo 2.

Um dos objetivos mencionados acima é contribuir para o desenvolvimento do padrão MPEG-4 SA (*Structured Audio*) [1]. Esta forma de codificação é fundamentada na teoria da complexidade de КОЛМОГОРОВ (Kolmogorov), e este padrão é sua primeira tentativa de implementação prática. O decodificador em um sistema deste tipo recebe um programa, e dados para servir de insumo a ele. O sinal portanto é gerado por um sintetizador determinado pelo codificador [18].

Uma forma de utilizar esta arquitetura de codificação é primeiro determinar um programa sintetizador que seja genérico o suficiente para reproduzir os sinais de uma certa família que se deseja codificar. O usuário então executa o codificador para uma dada gravação que se deseja codificar, e o programa busca por parâmetros que reproduzam da melhor forma possível o sinal original.

Ao procurar por estes parâmetros, o programa pode ou não permitir grandes erros na comparação do sinal decodificado com o original. É possível, por exemplo, introduzir muitos erros na forma de onda, mas ainda assim criar um bom resultado, explorando conhecimentos da psicoacústica. Isto acontece numa popular família de codificadores para áudio [19].

Outra alternativa é a que mais nos interessa. É tentar reproduzir a forma de onda original minimizando alguma medida de erro. Uma forma de obter este resultado é utilizar um modelo simples, como a predição linear, e simplesmente transmitir o erro da codificação a ser compensado na decodificação.

Podemos ainda tentar utilizar análises mais sofisticadas, realmente direcionadas a famílias específicas de sinais. Para criar programas para este tipo de síntese mais específica, é comum buscar inspiração nos modelos matemáticos que a física fornece para os sistemas que originam os sinais de interesse. Isto foi feito com grande sucesso no século XX, na codificação de sinais voz, onde buscamos inspiração para o trabalho apresentado aqui.

Ao projetar estes sistemas de codificação de voz, seus criadores utilizaram o conhecimento do funcionamento do sistema fonador humano para determinar as características do sinal a serem detectadas, e então transmitidas para que um sinal similar seja reproduzido no decodificador [20, 21, 22]. Estas características são geralmente a frequência de um sinal de excitação, e as frequências chamadas de formantes, que são picos no filtro determinado pelo formato do trato vocal humano.

Esta estrutura é toda prevista pela teoria física. Os próprios valores esperados das frequências de excitação e formantes podem ainda ser restringidos se utilizarmos mais conhecimentos extraídos de experimentos para a determinação de detalhes da estrutura típica de um trato vocal humano [23, 24].

As técnicas de análise e síntese inspiradas por teorias físicas não se limitam entretanto a elas. O filtro de um sistema de codificação com predição linear (LPC), por exemplo, modela na prática um filtro com características que muitas vezes nem foram previstas pelo seu programador [25, pg. 137]. O filtro pode ter sido inspirado simplesmente pelo trato vocal humano, mas na prática ele acaba modelando ainda outros fenômenos que poderiam nem ter sido previstos.

Ou seja, a inspiração da física pode simplesmente levar a um sistema que não obedece completamente a leis da física, mas que modela o sinal a contento. Uma vez que possuímos um modelo satisfatório, podemos a seguir aplicar técnicas de estatística, estimação de parâmetros e processamento de sinais que podem não possuir um significado físico claro, mas que atendem às necessidades do engenheiro.

Por exemplo, ainda no caso da codificação da fala, existem diversas técnicas para a estimação da frequência de excitação, algumas tentam utilizar critérios estatísticos rigorosos, outras utilizam heurísticas sem significado físico claro. O uso de uma ou outra técnica vai depender das necessidades da aplicação.

Em geral, ao projetar uma técnica de análise para sinais de áudio é preciso optar por beneficiar uma das seguintes aplicações: qualidade satisfatória na reprodução do sinal, bom desempenho em testes de reconhecimento de padrões, que podem depender de valores sem significado físico claro, ou finalmente uma boa precisão na medição de parâmetros físicos específicos.

As técnicas que apresentaremos podem vir a ser úteis em qualquer destas aplicações, sendo ainda necessárias medições mais rigorosas da precisão e custo operacional de cada uma delas.

Apresentaremos nesta dissertação experimentos que podem ser realizados por qualquer engenheiro, ou interessados em geral, necessitando apenas de uma guitarra elétrica, circuitos eletrônicos simples e um microcomputador. Muitos experimentos na literatura requerem equipamentos de difícil acesso, como sensores de precisão, salas anecóicas e mesmo equipamento de áudio de alta qualidade. Desejávamos demonstrar a possibilidade de se realizar estudos com equipamentos mais simples.

Também foi nossa intenção divulgar resultados do estudo de instrumentos musicais que precisam ser melhor conhecidos pela comunidade, assim como divulgar algoritmos e técnicas de análise que podem ser muito úteis a outros pesquisadores da área, mas não são ainda muito bem conhecidas.

### 1.3.2 Modelagem física de guitarra elétricas

O uso de modelos físicos na síntese de instrumentos musicais, em especial de violões e guitarras, é na verdade algo que sempre ocorreu, mesmo que de forma inicialmente obscura. Uma revisão da história da síntese de guitarras é o assunto do apêndice B.

Vale notar aqui apenas que hoje já são feitas pesquisas que buscam sintetizar o som de cordas utilizando técnicas de elementos finitos, inclusive com modelos relativamente detalhados [26].

Existem também muitos programas comerciais que realizam sínteses sofisticadas, e oferecem filtros digitais que processam o sinal gravado de uma guitarra ligada diretamente à placa de som para simular com ótimos resultados equipamentos consagrados como outras guitarras, pedais de distorção e amplificadores antigos. Algumas das empresas mais populares a oferecerem estes sistemas são a Line 6, Native Instruments e Behringer.

Alguns destes sistemas são implementados em dispositivos digitais autônomos, onde se liga a guitarra da mesma forma que se faz com um pedal de efeito convencional. Outros são apenas programas que são executados em microcomputadores, geralmente sendo capazes de operação em tempo-real. Além destes sistemas comerciais existem ainda programas gratuitos, ou mesmo de código aberto, que realizam este tipo de processamento em tempo real. Muitos deles são construídos sob a forma de VSTs, que são bibliotecas com pequenos algoritmos para processamento de sinais, geralmente controlados por pequenas interfaces gráficas próprias. Estas bibliotecas são compiladas seguindo um padrão criado pela empresa Steinberg [27].

Infelizmente as tecnologias utilizadas por todas estas empresas são usualmente protegidas devido a interesses comerciais, e não são de conhecimento geral. Só se pode especular a respeito do que realmente todos estes programas e sistemas fechados fazem, e de como foram feitas as medições de características dos equipamentos consagrados que são simulados.

A seguir, nos capítulos 2 e 3 falaremos sobre a dinâmica de vibração de cordas vibrando livremente, e em resposta a uma força estacionária senoidal. No capítulo 4 falaremos sobre o filtro linear constituído por elementos passivos que é inerente às guitarras elétricas. O capítulo 5 traz enfim análises sobre o funcionamento de circuitos elétricos para a distorção de sinais.

# Capítulo 2

## Cordas em vibração livre

Vibrações são fenômenos frequentemente observados nas mais diferentes áreas de estudo. A vibração de cordas, mais especificamente, foi um tema importante no desenvolvimento da ciência, e foram justamente as cordas de instrumentos musicais que atraíram em primeiro lugar a atenção dos cientistas para este problema.

Pitágoras interessava-se pelas relações entre comprimento de cordas, a altura de suas notas e a harmonia. Galileu estudou problemas como a oscilação de pêndulos, resistência e elasticidade de fios, vibração de cordas, ressonância e harmonia [28]. Seu pai era compositor, e estudava teoria musical. Alguns creditam a ele a descoberta da primeira lei física não-linear da história, que seria a relação quadrática entre a tensão e frequência de vibração de uma corda [29].

O estudo deste fenômeno ainda foi muito relevante na física do século XVIII, e foi depois abordado no século XX como fenômeno não-linear. A seguir detalharemos estes estudos.

### 2.1 Estudos da “velha guarda”

#### 2.1.1 Solução periódica

Um grande marco da história da física foi a solução da equação da corda unidimensional por d’Alembert. Ela modela no tempo  $t$  o deslocamento vertical da corda  $y$  em função da posição horizontal  $x$  daquele ponto, dependendo dos valores da densidade linear  $\mu$  e tensão  $T$  da corda:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Esta equação foi uma das primeiras aplicações de derivadas parciais, e d’Alembert apresentou sua integração em uma dissertação em 1747. Foi ele quem desenvolveu o uso da derivada parcial e a

introduziu na física. A importância desta ferramenta é reconhecida por qualquer um, mas raramente o devido crédito é dado a d'Alembert [30]. Outros cientistas iluministas a contribuírem para o tema foram Euler, Lagrange e os Bernoulli [31].

A solução de d'Alembert prevê que a posição da corda pode ser escrita como a soma de duas funções se deslocando no espaço em direções opostas, a uma certa velocidade constante  $c$ , obtida a partir da tensão e da densidade.

$$y(x,y) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (2.2)$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (2.3)$$

Cada ponto da corda pode se mover em três dimensões. Um deslocamento na direção da corda em repouso é chamado movimento *longitudinal*. Deslocamentos ortogonais à direção da corda em repouso são chamados *transversais*, ou ainda *latitudinais*. Movimentos transversais genéricos podem ser modelados como uma soma de movimentos transversais em duas direções ortogonais. Se o movimento se dá em apenas uma direção, a onda é dita *planar*.

Diversas condições podem ser impostas ao problema, resultando em mais restrições na forma da solução [32]. Se as duas extremidades da corda estiverem perfeitamente presas, a solução será periódica, com frequência angular fundamental  $\omega_0$ . A solução que se encontra afinal é uma superposição de modos de vibração no espaço, cada um vibrando de acordo com uma senóide de amplitude  $C_n$ , fase  $\phi_n$  e com frequências múltiplas inteiras da fundamental.

$$y(x,t) = \sum_n C_n \text{sen}(\omega_n t + \phi_n) \text{sen} \frac{\omega_n x}{c} \quad (2.4)$$

$$\omega_n = \omega_0 n \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Soluções não-harmônicas

Se as terminações não forem completamente rígidas, como acontece em instrumentos acústicos, as condições de contorno devem ser modificadas. Por exemplo, se ao invés de uma corda fixa de comprimento  $L$ , onde  $y(L,t) = 0$ , considerarmos a corda ligada a uma massa, teremos:

$$-T(\partial y / \partial x)_{x=L} = m(\partial^2 y / \partial t^2)_{x=L}. \quad (2.6)$$

Esta restrição faz com que as frequências de oscilação do sistema não sejam mais harmônicas, ou seja:  $\omega_n \neq \omega_0 n$  [32].

Outra modificação importante que pode ser feita ao problema original, é considerar a rigidez da

corda a dobra. Isto é feito com a inserção de uma derivada de quarta ordem na equação diferencial, resultando em

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ESK^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \quad (2.7)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade de Young,  $S$  é a área de seção da corda, e  $K$  é o raio de giro [33]. O termo  $SK^2$  resulta no momento de inércia à dobra. Thomas Young aplicou o seu conceito de módulo de elasticidade a diversos problemas, mas o primeiro experimento relatado por ele foi justamente uma medição do valor a partir de vibrações [34].

### 2.1.3 Amortecimentos

Existem diversas formas de se considerar perdas de energia neste sistema. Ela pode escapar pelos suportes da corda, pelo contato com o ar, ou pelo atrito interno à deformação, por exemplo. Estes diferentes fatores podem contribuir simultaneamente para o amortecimento dos modos de vibração, mas cada um deles pode variar de forma diferente de acordo com a frequência. Assim, podemos ter taxas de decaimento proporcionais a  $f$ ,  $\sqrt{f}$  ou  $f^2$  [32].

Considerando os diferentes efeitos mencionados acima, o modelo matemático para uma corda vibrando passa a ser então

$$y(x,t) = \sum_n A_n e^{(\alpha_n + i\omega_n)t}, \quad (2.8)$$

uma soma de exponenciais complexas com valores arbitrários para as frequências  $\omega_n$ , amplitudes  $A_n$  e taxas de decaimento  $\alpha_n$ . As condições iniciais determinam o valor das amplitudes. Como a função é real, é preciso que existam frequências conjugadas, com amplitudes tais que não haja uma componente imaginária ao final da soma. As taxas de decaimento possuem valores negativos, devido à perda de energia.

Todas as modificações apresentadas até aqui resultam ainda em modelos lineares. Uma corda vibrando em duas dimensões é modelada simplesmente como uma superposição de modos ortogonais com as mesmas frequências. Cada modo, de frequência e direção próprias, funciona isoladamente de forma semelhante a um oscilador de uma partícula unidimensional.

### 2.1.4 Resposta a impulso

No caso ideal, com modos de vibração harmônicos, a resposta a impulso  $h(P,x,t)$  pode ser calculada fazendo

$$y(x,0) = \delta(x - P) \quad \dot{y}(x,0) = 0,$$



As cordas de uma guitarra elétrica podem ser excitadas de várias formas. É possível dar pancadas, como acontece no piano, por exemplo. Mas forma mais usual de se tocar este instrumento é puxando a corda com um dedo ou uma palheta, e soltando-a. Portanto o sistema seria forçado apenas por um certo período, e depois mantido livre.

Quando puxamos a corda em algum ponto  $P$ , após algum tempo ela atinge uma configuração estável em forma de “V”. Esta configuração atende à equação (2.1), porque

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x \neq P} = 0, \quad (2.10)$$

ou seja, a corda só está dobrada no ponto  $P$ , onde a força aplicada pelo guitarrista e a tensão se equilibram. Em  $x = P$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  é uma delta de Dirac.

As figuras 2.2 e 2.3 apresentam a superfície determinada pela deformação da corda ao longo do tempo. Na figura 2.2 podemos ver as diferentes formas de onda do movimento da corda em diferentes pontos. Em geral, trata-se de uma onda com simetria especular, composta por quatro segmentos de reta. Em dois momentos a corda fica completamente parada, e nos outros dois a corda se desloca com velocidade constante, ora numa direção, ora em outra. No ponto onde a corda foi tocada, um dos períodos de repouso se extingue, formando um triângulo seguido de uma planície.

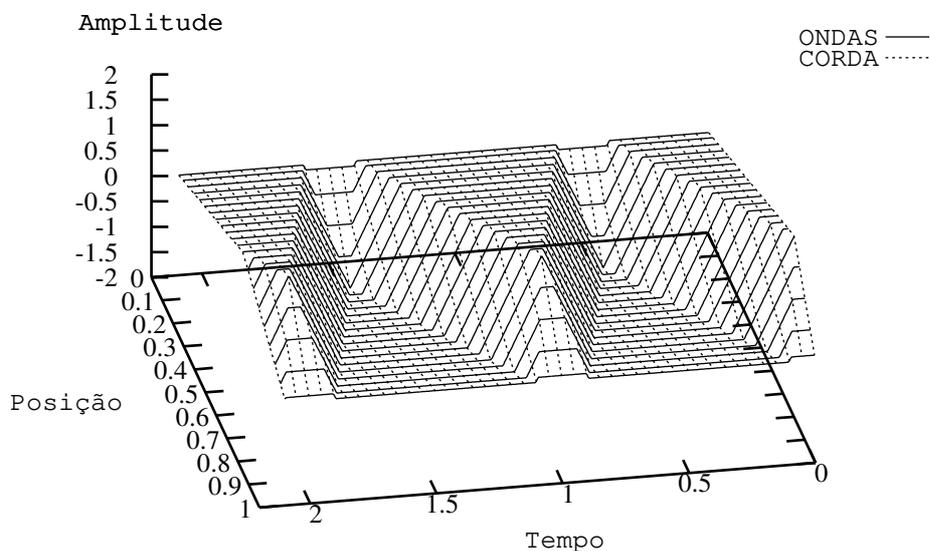


Fig. 2.2: Ondas amostradas, e formato da corda tocada com  $P = 0,7$

Se a corda for tocada em seu ponto médio, forma-se ali uma onda triangular. Já próximo às extremidades, a corda tende a ficar mais tempo parada. Isso faz com que a forma de onda se aproxime de um sinal de dois níveis. Com  $P = 0,5$ , estas ondas ficam quase quadradas.

Outra característica importante são as simetrias do sistema. Trocando-se  $P$  por  $L - P$  ou  $x$  por  $L - x$ , obtemos uma mesma forma de onda. Isto é óbvio para uma troca simultânea, equivalente a uma mudança de referencial. Ao trocar apenas uma das variáveis, podemos ver a simetria ao perceber que em um semi-ciclo a corda adquire um estado radialmente simétrico ao inicial. Outra simetria menos óbvia é que também podemos trocar  $P$  por  $x$ , como mostraremos na próxima seção.

Na figura 2.3 podemos apreciar melhor o formato da corda enquanto ela vibra. Ela parte do formato de “V”, e logo a seguir o vértice dá lugar a outros dois, com um segmento de reta entre eles. Este segmento caminha todo com a mesma velocidade. Eventualmente a corda adquire novamente o formato de “V”, mas desta vez ela não está parada. O segmento continua a se movimentar, desta vez com comprimento constante, até atingir a outra extremidade da corda. Por fim os dois vértices se encontram em  $x = L - P$ , fechando o semi-ciclo.

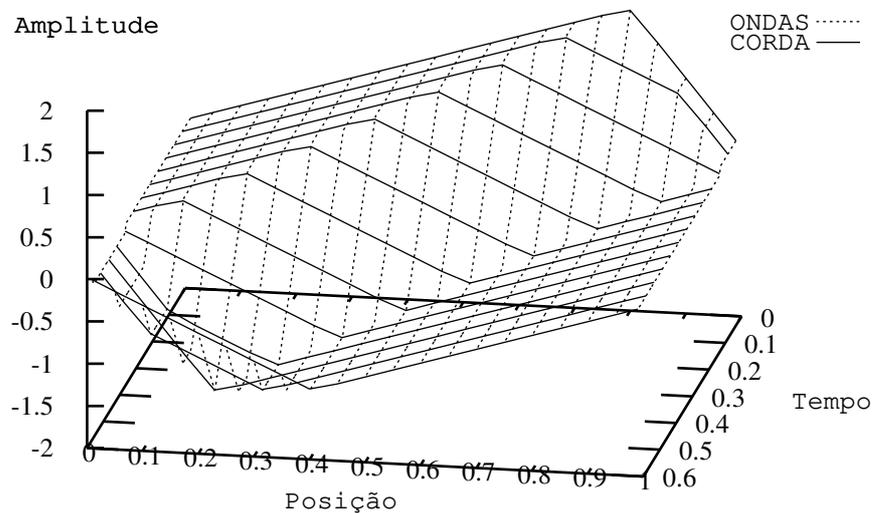


Fig. 2.3: Outra visão do gráfico anterior

Como pudemos ver, ao selecionar o ponto da corda a ser amostrado, e o ponto em que toca a corda, o guitarrista determina a forma da onda obtida. A seguir apresentaremos este processo como um caso da atividade mais cotidiana da engenharia elétrica: o projeto de um filtro linear.

### 2.1.6 Projeto de filtro

O estado inicial da corda palhetada é equivalente à integração dupla de um único impulso, levando-se em consideração a extensão periódica da corda para  $x \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow -\infty$ . Podemos verificar que a forma de onda apresentada anteriormente também é a integração dupla da resposta a impulso descrita pela equação (2.9).

Este sinal gerado pela guitarra pode ser visto como a integração dupla de um trem de impulsos, sem a componente DC, convoluído por dois filtros. Nas equações a seguir substituímos o nome da variável  $x$  por  $C$  para dar uma idéia melhor de que trata-se de um parâmetro constante que caracteriza o sinal obtido, assim como  $P$ . Enquanto a posição em que corda que foi puxada é  $P$ , a posição em que estamos observando-a é  $C$ . A variável  $x$  aparece nas equações diferenciais, e não pode ser interpretada como um valor que se pode tornar constante no sistema.

$$a_{PC}(t) = \iint \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k - (P - C)/2) * h_P(t) * h_C(t) \quad (2.11)$$

$$h_P(t) = \delta(t) - \delta(t - (1 - P)) \quad (2.12)$$

$$h_C(t) = \delta(t) - \delta(t - C). \quad (2.13)$$

Estes dois filtros são senóides na frequência:

$$H_P(\omega) = e^{j\omega} - e^{j\omega(1-P)} \quad H_C(\omega) = e^{j\omega} - e^{j\omega C} \quad (2.14)$$

$$H_P(\omega)H_C(\omega) = e^{j\omega(1-\frac{P}{2})} \left( e^{j\omega\frac{P}{2}} - e^{-j\omega\frac{P}{2}} \right) e^{j\omega\frac{1+C}{2}} \left( e^{j\omega\frac{1-C}{2}} - e^{-j\omega\frac{1-C}{2}} \right) \quad (2.15)$$

$$H_P(\omega)H_C(\omega) = e^{j\omega(1-\frac{P}{2}+\frac{1+C}{2})} \left[ 2j\text{sen} \left( \omega \frac{P}{2} \right) \right] \left[ 2j\text{sen} \left( \omega \frac{1-C}{2} \right) \right] \quad (2.16)$$

$$H_P(\omega)H_C(\omega) = -4e^{j\omega(\frac{3}{2})} e^{j\omega(\frac{C-P}{2})} \text{sen} \left( \omega \frac{P}{2} \right) \text{sen} \left( \omega \frac{1-C}{2} \right). \quad (2.17)$$

Como estamos trabalhando com a frequência normalizada, o espectro possuirá impulsos apenas nos valores  $k\omega_0$ , onde  $\omega_0 = 2\pi$ . Assim, desconsiderando o ganho constante e a distorção de fase, o espectro do sinal final será dado por

$$\|A_{PC}(j\omega)\| = \frac{1}{(j\omega)^2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \right) \text{sen} \left( \omega \frac{P}{2} \right) \text{sen} \left( \omega \frac{1-C}{2} \right). \quad (2.18)$$

Este espectro é formado por um trem de impulsos modulado por duas senóides, cujas frequências são determinadas por  $P$  e  $C$ . O fator relativo a  $h_P$ , dependente apenas de  $P$ , está relacionado com as amplitude dos modos de vibração presentes na corda. Se  $P$  for um nodo de um modo, a amplitude dele será zerada. Da mesma forma, o posicionamento de  $C$  pode causar a anulação de componentes no sinal. O primeiro fator vem da integração dupla.

Se passarmos as senóides para dentro do somatório, e substituirmos  $\omega$  e  $\omega_0$  teremos

$$\|A_{PC}(j\omega)\| = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \operatorname{sen}\left(k\omega_0 \frac{P}{2}\right) \operatorname{sen}\left(k\omega_0 \frac{1-C}{2}\right) \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \delta(\omega - k2\pi) \operatorname{sen}(k\pi P) \left( \begin{array}{l} \operatorname{sen}(k2\pi) \cos(-k\pi C) \\ + \cos(k2\pi) \operatorname{sen}(-k\pi C) \end{array} \right) \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \delta(\omega - k2\pi) \operatorname{sen}(k\pi P) \operatorname{sen}(k\pi C). \quad (2.21)$$

Esta substituição prova a simetria de  $P$  e  $C$  com relação ao meio da corda, e entre si.

No gráfico da figura 2.4 podemos ver os harmônicos de um sinal gerado com  $P = 0,208$  e  $C = 0,888$ . A amplitude do gráfico foi normalizada de acordo com a intensidade da primeira parcial. As curvas são o filtro total que é aplicado ao trem de impulsos, e os fatores relativos a  $P$  e a  $C$ . Cada uma das senóides foi dividida por  $\omega$ , criando duas funções sinc. O fator relativo a  $P$  quase zero o quinto harmônico, o que ocorreria com  $P = 0,2$ . Como  $C > 0,5$ , sua senóide possui um período bastante curto. Uma melhor visualização é proporcionada pela curva relativa a  $1 - C$ , que cruza com a de  $C$  acima dos harmônicos. Esta equivalência das duas curvas é análoga ao fenômeno de *aliasing* na reconstrução de sinais digitais amostrados inadequadamente.

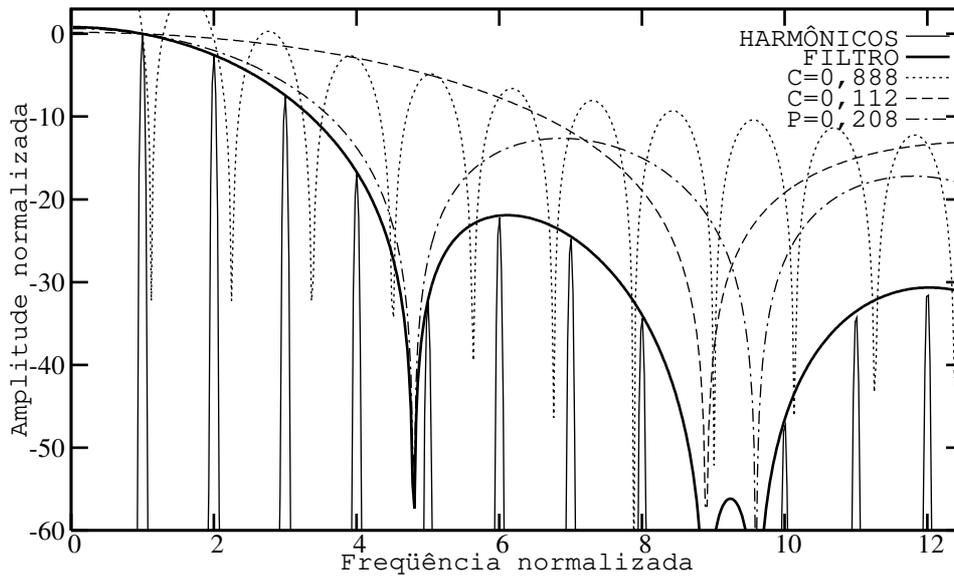


Fig. 2.4: Harmônicos obtidos com  $P = 0,208$  e  $C = 0,888$

A multiplicação de senos pode ser substituída por uma soma de cossenos, resultando em:

$$\frac{\cos\left(\omega \frac{P+C}{2}\right) - \cos\left(\omega \frac{P-C}{2}\right)}{2}. \quad (2.22)$$

As curvas relativas a estes dois cossenos estão no gráfico da figura 2.5, assim como o filtro final. Para facilitar a visualização, o gráfico não é logarítmico, e as amplitudes opostas também foram plotadas. Os valores também foram multiplicados por  $\omega^2$ .

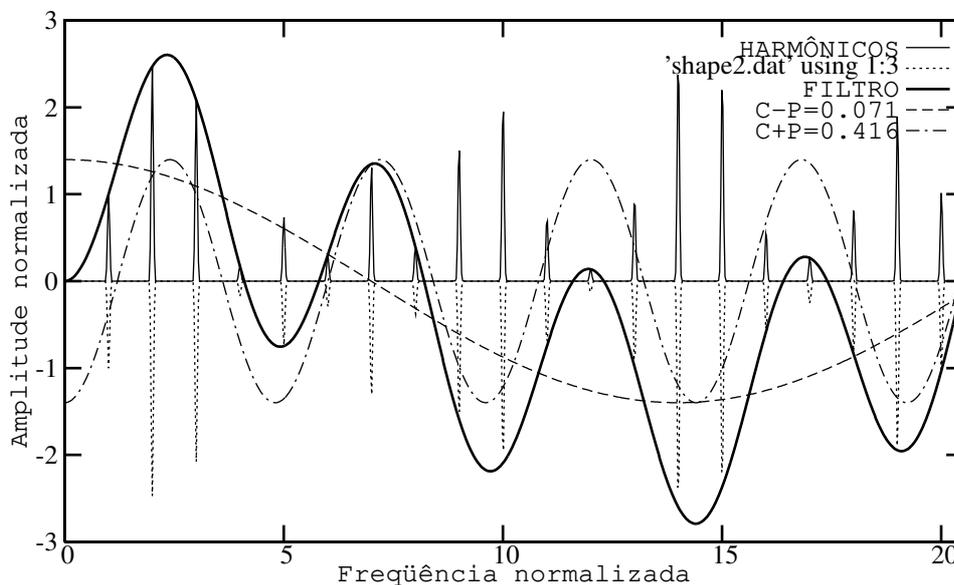


Fig. 2.5: Harmônicos obtidos com  $P = 0,172$  e  $C = 0,244$

Um interessante tópico de pesquisa sendo abordado por alguns autores é a estimação do ponto da corda em que o guitarrista a puxou a partir da análise de uma gravação. O problema pode ser bem difícil para gravações de instrumentos acústicos, e no passado alguns pesquisadores já até expressaram pessimismo quanto a esta possibilidade [36]. Mas existe ao menos um trabalho mais recente que apresenta resultados positivos [37]. Na guitarra elétrica deve ser possível realizar o mesmo tipo de análise, mas será necessário levar em consideração também a posição dos captadores, o que é desprezado no caso do violão.

## 2.2 Estudos da “nova onda”

Muitas vezes o fenômeno real da vibração não é explicado totalmente pelo modelo linear com exponenciais complexas. As principais diferenças observadas em relação aos modelos lineares são:

- Variação das frequências naturais de vibração de acordo com a energia no sistema.
- Presença de harmônicos em respostas forçadas com excitação senoidal.
- Saltos e histerese na variação gradual da frequência nesta forma de excitação.

- Decaimentos diferentes do esperado.
- Acoplamento entre modos transversais, longitudinais e de diferentes frequências.

Alguns destes fenômenos podem ser investigados de forma independente, e apenas recentemente a sua ocorrência em cordas começou a ser estudada em maior detalhe. Foi apenas a partir da metade do século XX que medições rigorosas de características físicas de instrumentos musicais começaram a ser realizadas [38, 39, 40, 41]. Um artigo de 1947 relatando medições de tempos de decaimento do sinal de pianos até menciona a insuficiência de trabalhos semelhantes [42]. Neste artigo não há menção a efeitos causados por não-linearidades. O decaimento do som do piano em dois estágios é explicado pela diferença de amortecimento de acordo com a frequência, o que também é oferecido como explicação para a variação do timbre com o tempo. Modulações lentas da amplitude são explicadas como podendo decorrer apenas da tênue desafinação entre as cordas compondo o tom específico no piano.

Um dos primeiros artigos a utilizar equações não-lineares foi o de Shankland, que investigou a variação da frequência com a amplitude da vibração. Ele apresenta um modelo teórico e resultados experimentais [43]. Um outro artigo utiliza um método perturbativo para deduzir equações que também prevêm o aumento da frequência com a amplitude da vibração [44].

Estes artigos estudam a não-linearidade decorrente da variação da tensão da corda conforme o seu comprimento muda devido a sua deformação. Na equação de d'Alembert a tensão da corda é considerada constante, o que significaria ausência de rigidez a extensão. A equação diferencial para a corda com extremidades fixas e com rigidez a extensão é dada por

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[ T_0 + \frac{\sigma E}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2.23)$$

Onde a tensão constante foi substituída por uma função que depende do comprimento da corda. Este problema fora estudado por Kirchhoff no final do século XIX, mas os artigos do começo do século XX não costumam citar o seu trabalho [45].

Estes primeiros estudos se concentraram apenas em vibrações planares, em especial no valor das frequências, e na dependência à amplitude da oscilação. Um artigo de 1948 se destaca por relatar a observação de outro fenômeno não-linear: o surgimento de vibrações na direção ortogonal à de excitação, originando um movimento classificado como *tubular* [46]. Tanto neste artigo quanto no de Shankland o experimento foi baseado em fios metálicos forçados por eletromagnetismo.

Os três primeiros fenômenos mencionados acima são as características que mais usualmente se associa a osciladores não-lineares. A resposta forçada do oscilador de Duffing apresenta tanto os saltos em frequência na resposta forçada quanto o surgimento de componentes harmônicas. A solução livre também apresenta a variação da frequência com a amplitude da oscilação. Este oscilador é um

modelo muito útil para o estudo de vibrações não-lineares [47, 48], e será apresentado no capítulo 3.

A pesquisa em vibrações planares continuou recebendo especial atenção por muitos anos [49, 50] até que o modelo não-linear e não-planar fosse apropriadamente atacado [51, 52]. Estes estudos finalmente fizeram com que se procurasse caracterizar melhor o fenômeno. Artigos começaram a surgir buscando medir as condições para o surgimento de vibrações ortogonais à excitação [53, 54, 55, 56, 57].

Bem no espírito da época, nos anos 1980 ainda buscou-se observar regimes caóticos na vibração de cordas [58, 59, 60, 61].

Nestes artigos sobre experimentos relacionados a vibrações não-lineares e não-planares existem algumas polêmicas sobre existência ou não de limiares de frequência próxima à ressonância para o início da excitação dos modos ortogonais, bem como da necessidade de grandes amplitudes para que as não-linearidades aflorem.

### 2.2.1 Acoplamento

Acoplamento entre osciladores é um fenômeno relevante em diversos instrumentos musicais [62]. Uma característica muito importante do movimento de cordas não-lineares em duas dimensões, é justamente a possibilidade do surgimento de acoplamentos entre modos de vibração ortogonais da mesma frequência. Este regime de movimento foi apresentado por Anand [54] e por Elliot [63, 48], e pode ser modelado como um regime típico de um sistema linear. Podemos considerar como uma aproximação linear de um sistema não-linear, apesar de ser um sistema linear diferente daquele que um modelo físico linear tradicional pode realizar.

#### Acoplamento linear fraco

Um sistema massa-mola sem perdas, com  $N$  massas, é caracterizado por  $N$  equações

$$m_n \ddot{x}_n = \sum_{k=1}^N c_{nk} x_k \quad \ddot{x}_n = \sum_{k=1}^N d_{nk} x_k \quad (2.24)$$

onde  $m_n$  e  $x_n$  são as massas e deslocamentos [64, p. 118]. Os  $c_{nk}$  são constantes de elasticidade, e os  $d_{nk}$  são os valores normalizados.

Ao substituírmos pela forma de solução conhecida  $x_n = A_n e^{j\omega t}$ , temos

$$-\omega^2 A_n e^{j\omega t} = \sum_{k=1}^N d_{nk} A_k e^{j\omega t} \quad (2.25)$$

$$(\omega^2 + d_{nn})A_n + \sum_{k \neq n} d_{nk} A_k = 0. \quad (2.26)$$

Estas equações formam um sistema de equações homogêneo determinado por

$$(\mathbf{d} + \omega^2 \mathbf{I})\vec{A} = \vec{0}. \quad (2.27)$$

Os valores de  $\omega$  podem ser obtidos por uma decomposição de auto-valores. Estes valores serão as frequências naturais de vibração dos sistema. Os auto-vetores  $\vec{A}_k$  correspondentes a cada  $\omega_k$  constituem uma matriz  $\mathbf{A}$  (de elementos  $A_{nk}$ ) que nos permite escrever a solução como

$$\vec{x} = \mathbf{A}\vec{p} \quad x_n = A_{nk} p_k e^{\omega_k t}. \quad (2.28)$$

Note que estes valores de  $x_n$  são complexos. Nossa solução com valores reais pode ser obtida com o uso de frequências conjugadas, ou simplesmente pegando a parte real de uma solução com frequências positivas:

$$x_n = \Re \{ A_{nk} p_k e^{\omega_k t} \}. \quad (2.29)$$

Esta solução pode ser interpretada como sendo uma transformação do problema para um espaço onde temos osciladores independentes com amplitudes e fases determinadas por  $p_k$ . Estes valores podem ser determinados a partir das condições iniciais de  $\vec{x}$  e  $\dot{\vec{x}}$  por exemplo.

No caso de haverem apenas duas massas, com  $d_{11} = d_{22}$ , temos

$$\begin{bmatrix} d_{11} + \omega^2 & d_{12} \\ d_{12} & d_{11} + \omega^2 \end{bmatrix} \vec{A} = \vec{0} \quad (2.30)$$

$$\omega^2 + 2d_{11}\omega^2 + d_{11}^2 - d_{12}^2 = 0 \quad (2.31)$$

$$\omega = \sqrt{-d_{11} \pm d_{12}}. \quad (2.32)$$

Podemos agora substituir os valores de  $d_{kn}$  usando os valores físicos do sistema, que são a massa  $m$ , e as constantes de elasticidade  $c_{11} = c_{22} = -(k + k_a)$  e  $c_{12} = c_{21} = k_a$ . Esta última se refere à mola entre as duas massas, realizando o acoplamento entre elas. Se fizermos  $k_a = 0$ , teremos dois osciladores independentes.

Os valores dos  $d_{kn}$  e as frequências naturais do sistema são portanto dadas por

$$d_{11} = -\frac{k + k_a}{m} \quad d_{12} = \frac{k_a}{m} \quad (2.33)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_a}{m}}. \quad (2.34)$$

Já os auto-vetores formarão neste caso a matriz proporcional a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

que são usualmente chamados de modo diferencial e modo comum de vibração.

Os movimentos de cada massa serão a soma dos modos em um caso e a subtração no outro. Podemos transformar isto em modulações de senóides. Por exemplo:

$$x_1 = \text{sen}(\omega_1 t) + \text{sen}(\omega_2 t) \quad x_2 = \text{sen}(\omega_1 t) - \text{sen}(\omega_2 t) \quad (2.36)$$

$$x_1 = \text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) + \text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad x_2 = \dots \quad (2.37)$$

$$x_1 = 2 \text{sen}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad x_2 = 2 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \quad (2.38)$$

Como podemos ver na equação (2.34), o valor de  $k_a$  (relativo a  $k$ ) é o que determina a diferença entre as duas frequências de oscilação. Para valores próximos de  $k$  e  $k_a$ , teremos duas frequências bastante diferentes, mas de ordens de grandeza próximas. Se  $k_a \gg k$ , ou  $k \rightarrow 0$ , apenas o modo diferencial será relevante, e o modo comum tenderá a um movimento retilíneo uniforme.

O terceiro caso é finalmente o que nos interessa aqui. Se  $k_a \rightarrow 0$ , dizemos que o sistema possui um acoplamento fraco. Segundo a equação (2.34), as frequências naturais serão muito próximas. Em (2.38) podemos ver que o resultado será uma onda de alta frequência modulada por uma de baixa.

A figura 2.6 mostra um caso de acoplamento linear fraco. As duas massas se alternam em sua quantidade de energia total. Quanto mais fraco o acoplamento, maior o período para que haja a máxima transferência possível de energia duma massa para a outra. Dependendo das condições do sistema, pode ocorrer até mesmo uma transferência total, que seria o caso da equação (2.38).

É possível perceber neste gráfico que no momento em que as duas massas têm quantidades próximas de energia, a que está perdendo se desloca adiantada em aproximadamente um quarto de período da que está ganhando. É costume se dizer que primeira está “puxando” ou “empurrando” a outra, apesar de não ser uma descrição acurada.

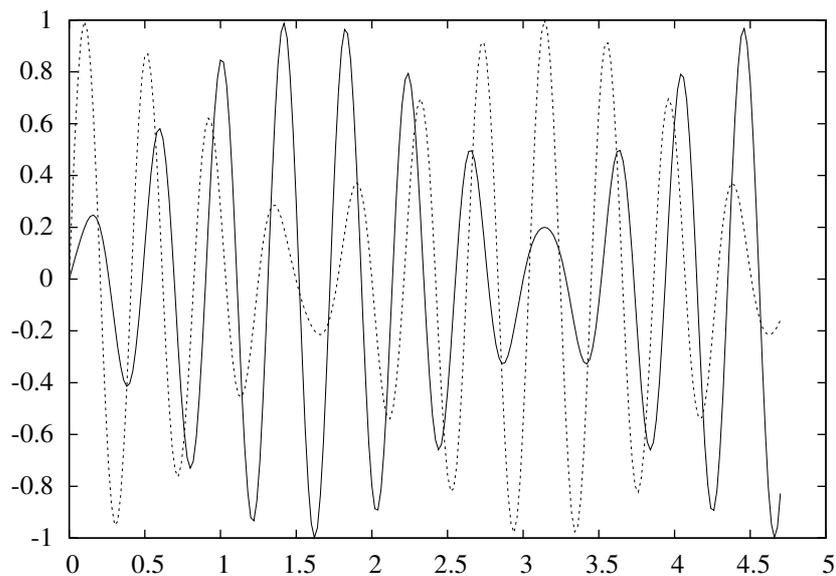


Fig. 2.6: Formas de onda de dois osciladores lineares acoplados.

A seguir mostraremos um outro exemplo de acoplamento linear fraco, e vamos compará-lo com este exemplo.

### 2.2.2 Acoplamento paramétrico não-linear aproximado

No artigo mencionado acima [63], Elliot apresenta uma fórmula para a tensão em função do comprimento da corda deformada, depois uma fórmula aproximada para a energia da corda em função da extensão, e por fim deriva equações do movimento utilizando mecânica analítica. Estas equações são novamente aproximadas para fornecer fórmulas para o movimento da corda. Nosso interesse é em identificar se o sinal obtido de guitarras elétricas possui o formato previsto por elas.

Naquele artigo existe um pequeno erro, sem importância aos desenvolvimentos teóricos, entretanto. O apêndice A trata desta questão.

O modelo apresentado naquele artigo prevê frequências não-harmônicas e ligeiramente mais altas do que o previsto pelo modelo mais simples. Mas o mais importante é que o modelo ainda prevê que o movimento de cada modo de vibração terá a forma de uma elipse com uma precessão negativa. As

fórmulas seriam portanto

$$\begin{aligned} u(t) &= a \cos(pt) \\ v(t) &= b \sin(pt) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \cos(\Omega t) - v(t) \sin(\Omega t) \\ y(t) &= u(t) \sin(\Omega t) + v(t) \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(pt) \cos(\Omega t) - b \sin(pt) \sin(\Omega t) \\ y(t) &= a \cos(pt) \sin(\Omega t) + b \sin(pt) \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a+b}{2} \cos[(p+\Omega)t] + \frac{a-b}{2} \cos[(p-\Omega)t] \\ y(t) &= \frac{a+b}{2} \sin[(p+\Omega)t] - \frac{a-b}{2} \sin[(p-\Omega)t]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Onde  $u$  e  $v$  são dois osciladores que descrevem uma elipse em um espaço de fases e  $\Omega$  é a velocidade da precessão, com valor negativo. A formulação do sistema em (2.40) explicita a interpretação como um oscilador elíptico em um referencial em rotação.

As equações em (2.42) apresentam o sistema como uma simples soma de duas componentes senoidais, assim como ocorreu no exemplo do par de osciladores acoplados mostrado previamente. A figura 2.7 apresenta as formas de onda deste sistema. Assim como na figura anterior, as duas curvas são facilmente vistas como senóides moduladas, e podemos perceber ainda que há uma oscilação regular da energia de um oscilador para o outro.

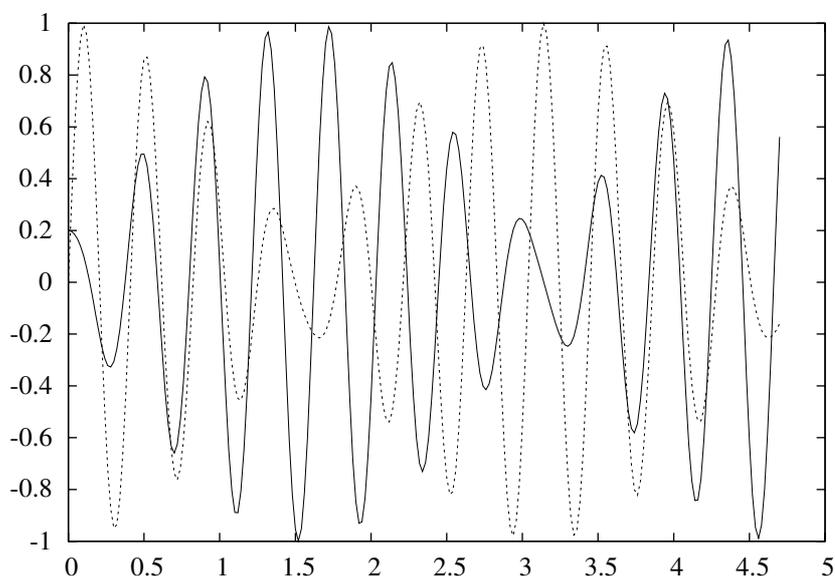


Fig. 2.7: Formas de onda dos osciladores acoplados de forma não-linear

A diferença entre este caso e o anterior é que não podemos ver uma relação de fases tão simples como antes. Se analisarmos a defasagem local no momento em que as energias dos dois osciladores

se igualam, vamos ver que ora os osciladores estão em fase, e ora em fase invertida, ao contrário do outro caso em que a cada instante o defasamento era de apenas um quarto de período.

Estudar a trajetória no espaço de fases dos dois sistemas ajuda muito a compreender a natureza de ambos. No primeiro caso, do gráfico à esquerda na figura 2.8, temos o sistema convencional. O sistema está inicialmente vibrando principalmente na direção de uma das massas, com uma leve vibração em fase na outra massa. Gradualmente a trajetória se transforma em uma elipse, que se fecha até que a trajetória se aproxima apenas da direção da outra massa. Depois disso a trajetória se abre novamente em uma elipse, mas girando no sentido oposto da outra ocasião. Quando inicialmente uma das massas está parada, a elipse se torna um círculo entre os dois momentos em que a trajetória se concentra em apenas uma das massas.

A trajetória no espaço de fases do oscilador acoplado não-linearmente mencionado aqui está à direita na figura 2.8. Esta trajetória é limitada internamente e externamente por círculos, ao contrário da outra que é limitada por um quadrilátero. A oscilação possui uma direção de maior importância que começa alinhada com um dos eixos, depois aponta para a diagonal principal, para o outro eixo, diagonal secundária, e enfim aponta novamente para a direção do eixo inicial.

A curva obtida por uma oscilação elíptica em precessão positiva pode ser mais familiar para alguns. É uma curva geralmente comparada com uma margarida. Já esta curva do nosso gráfico é de construção similar à de quando se desenha um pentagrama manualmente, com um traço contínuo.

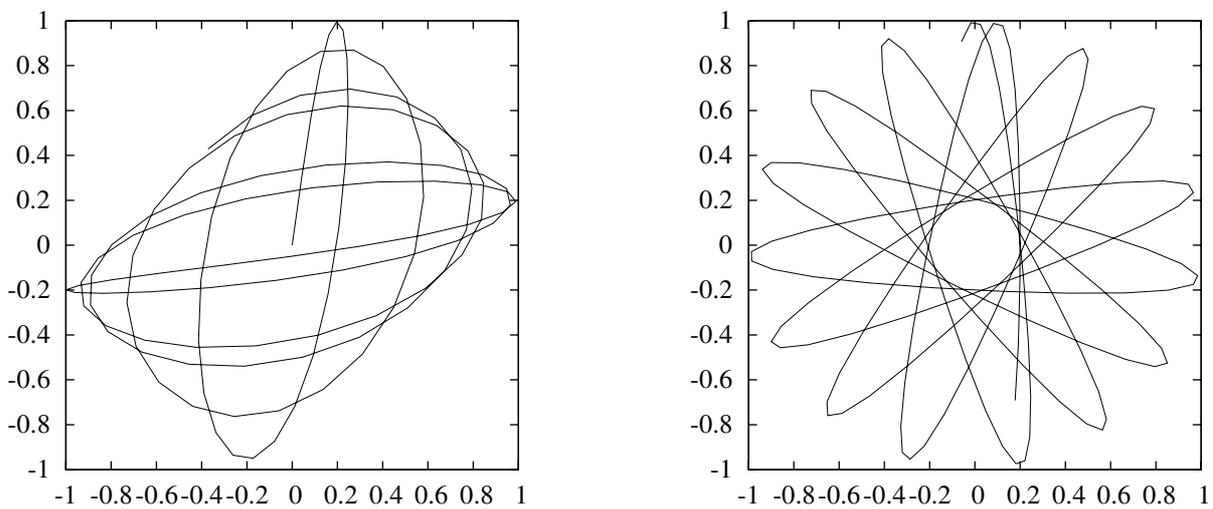


Fig. 2.8: Espaço de fases de um oscilador linear usual, e o que aproxima o acoplamento não-linear.

Apesar de ter sido deduzida a partir de um sistema dinâmico com equações diferenciais não-lineares, esta solução pode ser obtida com um sistema linear. A forma da solução sugere isto, sendo

constituída por diferentes somas de senóides de duas frequências. Por outro lado, a relação entre as curvas e a trajetória no espaço de fases não parecem nada familiares, como pudemos observar ao comparar este modelo com o exemplo de acoplamento linear apresentado na subseção anterior.

A explicação para isto é que apesar das duas trajetórias calculadas serem reais, um sistema desta forma precisa ser baseado em auto-vetores imaginários. Se considerarmos o formato das equações (2.42), os auto-valores precisariam ser proporcionais a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Se tentarmos encontrar as grandezas físicas de um sistema de massas e molas com estes auto-vetores, vamos encontrar valores complexos. Portanto trata-se de um sistema complexo que possui soluções reais.

### 2.2.3 Funcionamento da guitarra elétrica

As guitarras elétricas surgiram junto do desenvolvimento da eletrônica, buscando atender ao desejo de violonistas em tocar para audiências maiores. Desta busca resultaram inventos como os violões metálicos de Dopyera e Beauchamp [65]. Este último mais tarde iniciou a fabricação de instrumentos como a chamada *frying pan*, de 1931, e sua empresa posteriormente tornou-se a notória Rickenbacker. As guitarras de Les Paul e Leo Fender vieram pouco depois.

É importante ainda citarmos o trabalho pioneiro dos brasileiros Dodô e Osmar. A dupla foi inspirada pelo violão amplificado que viram em uma apresentação de Benedito Chaves. Dodô era técnico em eletrônica, e juntos eles fabricaram o chamado *pau elétrico* em 1942. O famoso trio-elétrico decorreu deste trabalho [66].

O movimento das cordas da guitarra é amostrado pelo dispositivo conhecido como *captador*, que gera o sinal que é então amplificado para a criação de ondas acústicas. O captador é composto por um ímã permanente com uma bobina enrolada em volta. O ímã serve para formar um pequeno dipolo magnético em cada corda, na região logo acima do captador. Para que uma guitarra funcione, é necessário que suas cordas sejam feitas de material ferromagnético.

A bobina atua como uma antena. Quando a corda se desloca na direção perpendicular ao plano do corpo da guitarra, o campo devido à magnetização da corda varia na região onde se encontra a bobina, provocando uma variação de fluxo magnético, e uma conseqüente indução elétrica. O sinal gerado pelos captadores é portanto proporcional à velocidade com que a corda está se deslocando na direção perpendicular ao captador [67, 68, 69].

O captador possui uma função de transferência imperfeita. Muitas guitarras contém ainda um

filtro passivo variável, além de um potenciômetro para controlar a intensidade do sinal gerado. Estes elementos, além do amplificador, influenciam significativamente no som da guitarra [70, p. 105-107][71, 72]. Algumas guitarras possuem ainda os chamados *captadores ativos*, baseados em eletro-ímãs, podendo ainda possuir pré-amplificadores internos.

Existe muito pouca literatura acadêmica a respeito de guitarras elétricas e de seus captadores. Apenas um dos livros sobre a física da música e acústica consultados por nós dedicou-se bem ao assunto [70]. As outras referências são geralmente trabalhos para disciplinas universitárias e patentes [73, 74].

#### 2.2.4 Vantagens da guitarra elétrica para a pesquisa

Instrumentos acústicos geralmente possuem fortes acoplamentos entre a corda e o corpo do instrumento, além de complicados filtros lineares entre o ponto onde o sinal é transmitido pela corda até os ouvidos dos espectadores. Isto pode dificultar muito a análise de sinais de instrumentos de corda para se tentar, por exemplo, determinar a maneira exata com que a corda foi colocada em movimento. Um artigo até demonstra pessimismo quanto à possibilidade de se poder determinar de uma gravação de violão a informação do ponto exato onde o dedo de um violonista puxou a corda [36].

A reverberação pode ser muito relevante em uma gravação de instrumentos clássicos feita com microfones. Ela pode ser muito difícil de lidar em análises físicas, não apenas por ser um filtro linear muito complicado. A reverberação de uma sala muitas vezes varia sutilmente no tempo, o que pode arruinar mesmo uma tentativa de lidar com ela de maneira estocástica, realizando-se muitas amostragens de um mesmo sinal [75]. Devido a esta dificuldade, é comum estudar-se instrumentos acústicos em salas anecóicas.

A guitarra elétrica não possui nenhum destes problemas relativos a instrumentos tradicionais. Seu sinal já vem naturalmente de um transdutor eletro-mecânico, que poderia ser a solução para superar alguns daqueles problemas citados. Assim são dispensados os microfones e o uso de salas especiais.

A maior rigidez na fixação das cordas significa também que o sinal captado deve ser mais próximo do teorizado, com menos acoplamentos mecânicos, e menos filtragens. Isto implica em um sinal menos distorcido, com menos parâmetros livres a serem regulados para ajustar o sinal gravado a um modelo teórico.

#### 2.2.5 Indução nas cordas

Além da captação normal que é feita na guitarra, é possível extrair um sinal elétrico de outro ponto. Quando a corda se desloca pelo campo dos ímãs dos captadores, na direção paralela ao plano do corpo da guitarra, uma tensão é induzida nas extremidades das cordas. Este sinal pode ser amplificado e

utilizado se os ímãs forem suficientemente fortes.

Este fenômeno é relativamente bem-conhecido, apesar de pouco explorado [70]. Neste trabalho mostramos como ele pode ser extremamente útil na captação do movimento da corda da guitarra na direção ortogonal àquela que é relevante para os captadores. Isto nos permite estudar a guitarra em um nível de detalhe maior, sem precisar recorrer ao uso de complicados sensores de posição. Nos três artigos encontrados por nós que relatam experimentos com vibração de cordas, um utilizou uma ponte eletro-mecânica [43], e outros dois utilizaram sensores opto-eletrônicos [61][57].

A figura 2.9 ilustra afinal todas as variáveis relevantes em nosso trabalho: A posição em que a corda foi tocada, a posição do captador, as tensões induzidas pelos movimentos nas duas direções, e o campo magnético aplicado na corda, que mais rigorosamente deveria ser desenhado como um dipolo.

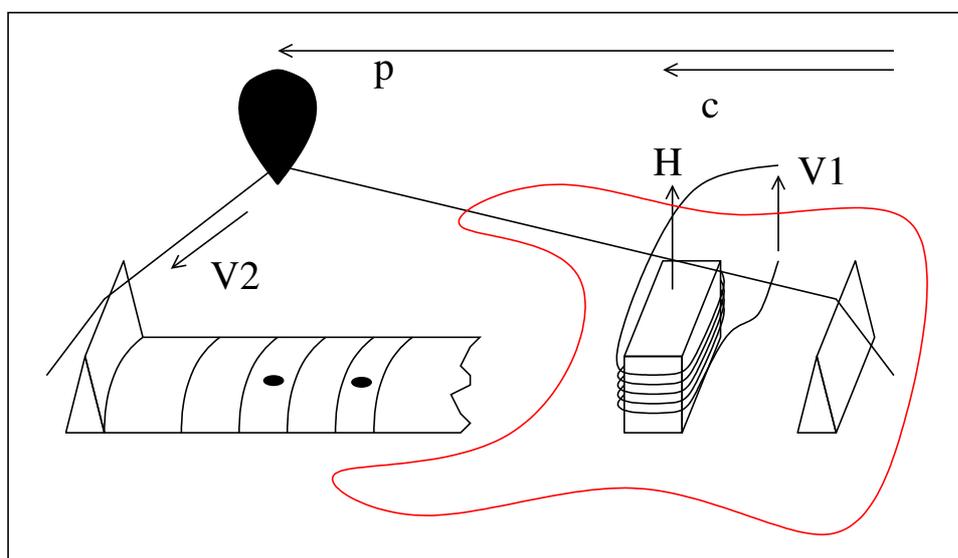


Fig. 2.9: Ilustração das variáveis relevantes.

## 2.3 Experimentos

Os experimentos realizados foram duas análises de diferentes partes do sinal adquirido da guitarra elétrica. No começo há uma boa aproximação do sinal ao modelo linear. Depois disso ocorrem transitórios ainda não muito bem explicados. Há enfim um período mais tardio da vibração onde é possível detectar modulações como as descritas na seção 2.2.2.

### 2.3.1 Início da nota

A análise de um trecho curto e inicial de uma nota é importante por ser muitas vezes tudo a que se tem acesso em gravações de músicas convencionais.

O princípio de uma nota tocada por um músico é geralmente chamado de “ataque”. No modelo ADSR (ver apêndice B) a amplitude é elevada gradualmente até atingir um pico, de onde o sinal decai. Não pudemos observar algo como um ataque gradual nas notas que gravamos. Isto era esperado, já que o modelo matemático prevê simplesmente que ao soltar a corda ela deve entrar em movimento periódico imediatamente, já no período da nota que se chamaria de *sustentação*, ou talvez já o *decaimento*. Os períodos de *ataque* graduais observados em instrumentos acústicos surgem devido à passagem de um sinal de entrada de início brusco por um filtro linear com resposta a impulso ampla, o que atenua o início da nota.

Só deveríamos esperar algo como um ataque se houvessem filtros com respostas a impulso longas no caminho do sinal. Não é o caso de uma guitarra ligada diretamente à placa de som adquirindo o sinal. A figura 2.10 traz a forma de onda obtida de uma gravação como esta. Podemos ver que a onda apenas surge bruscamente. Vemos também que o formato do período varia lentamente, indicando que existem ou freqüências levemente não-harmônicas, ou modulações. Neste gráfico, e nos outros onde formas de onda são apresentadas, a amplitude está relacionada à velocidade da corda no ponto analisado por uma constante de ganho que depende de fatores como o momento magnético da corda, o acoplamento com o captador e o ganho do amplificador. Este ganho não foi determinado nos experimentos.

O formato teórico da onda deveria possuir apenas impulsos retangulares de amplitudes opostas e mesma duração, separados por momentos de intensidade nula. O processamento deste sinal teórico por um filtro passa-altas de baixa freqüência de corte se aproxima do formato gravado, como podemos ver na figura 2.11.

O espectro das primeiras 8.192 amostras desta nota está na figura 2.12. Foi utilizada uma janela de Hamming [76], e a taxa de amostragem era de 48 kHz. A qualidade da gravação foi muito boa: para 32.768 amostras é possível distinguir até cerca de 30 componentes espectrais no gráfico. Apenas a partir dos 4 kHz parece haver um ruído branco sobrepujando o sinal. A figura mostra ainda um envelope espectral teórico, ajustado manualmente. Os parâmetros encontrados foram próximos dos valores das distâncias da posição do captador e do ponto em que a corda foi puxada.

Mesmo nesse nível de resolução espectral não foi possível verificar picos duplos, o que indicaria haver modulação das freqüências componentes. Para este número de pontos, a resolução é de 1,46 Hz, o que significa que só conseguiríamos detectar com clareza modulações de ao menos cerca de 3 Hz ou 4,5 Hz. Na seção 2.3.2 veremos que há de fato modulações de menor freqüência.

Para medir as freqüências e amplitudes das componentes desta gravação, ao invés de realizar

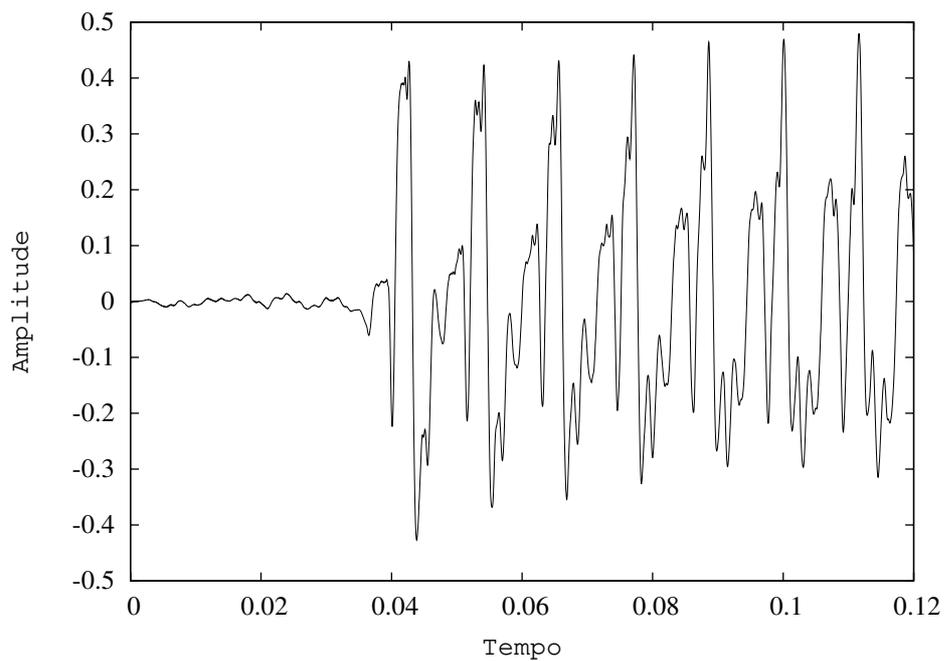


Fig. 2.10: Trecho inicial de uma nota de uma guitarra.

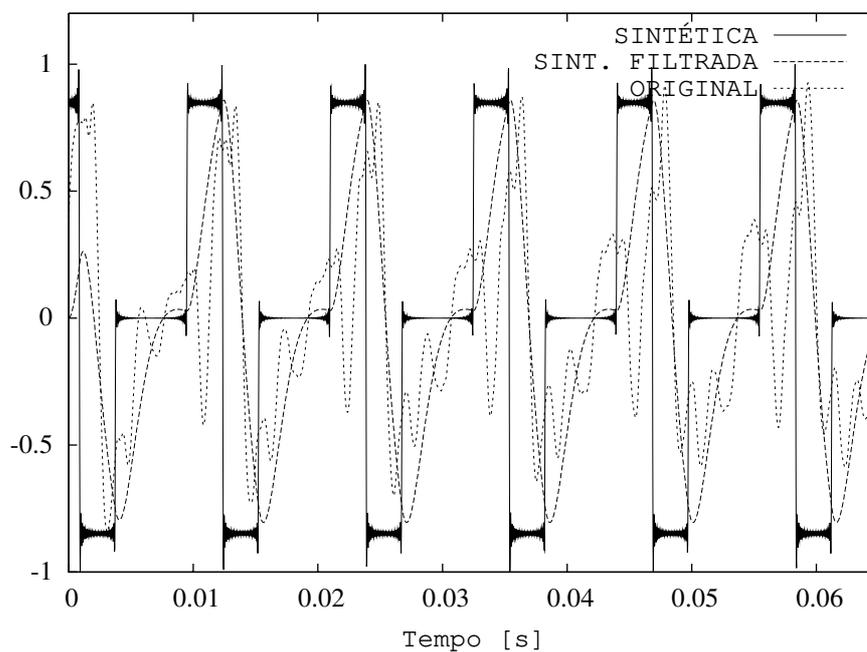


Fig. 2.11: Onda original e ondas sintéticas.  $P \simeq C \simeq 0,25$ .

uma DFT e selecionar picos, utilizamos o algoritmo SNTLN (apêndice C). O trecho utilizado para a modelagem foi de 200 amostras (0,1 s, aproximadamente 8 períodos da onda). Ao reconstruir a onda

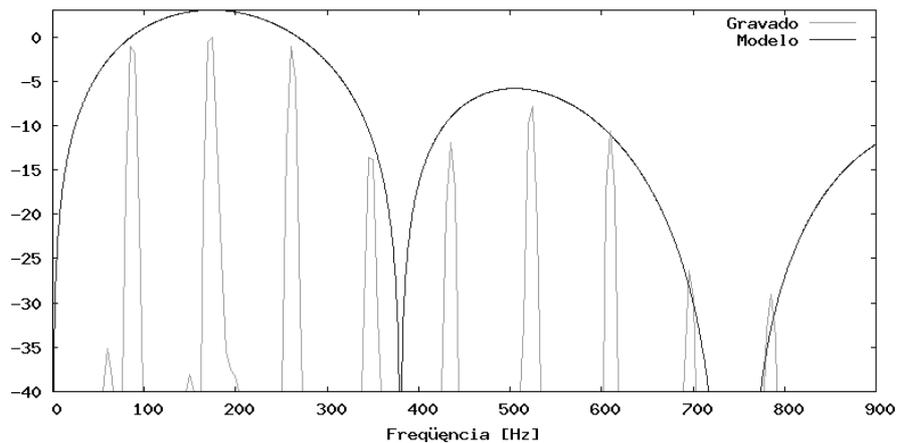


Fig. 2.12: Espectro do princípio da onda gravada, e filtro teórico, ajustado manualmente (amplitude em decibéis).

a partir das frequências e amplitudes encontradas, obtivemos uma SNR de 14dB neste trecho.

A figura 2.13 mostra a onda original, e o erro em relação à onda estipulada, extrapolada para mais amostras. Podemos ver um aumento gradual deste ruído, o que sugere que o ruído possui componentes senoidais próximas das componentes do modelo. Na região do treinamento o erro é naturalmente pequeno, e é possível observar que não se trata de um ruído branco, mas de componentes harmônicas que não foram levadas em conta. Na seção a seguir vamos demonstrar melhor que o sinal é de fato composto por senóides com modulações lentas.

### 2.3.2 Observação de acoplamentos e meio da nota

Nas gravações realizadas amostramos os dois sinais da guitarra, o dos captadores, e a indução na ponta das cordas mencionada acima. Para amostrar o sinal dos captadores foi utilizado um circuito com um amplificador operacional OPA134 [77]. Para o sinal da extremidade da corda, utilizamos ainda um amplificador INA114 com um ganho de 34dB (50 vezes). Consideramos utilizar a entrada diferencial do amplificador, mas isto não foi possível porque as cordas são aterradas à ponte da guitarra.

A figura 2.14 ilustra a montagem do experimento. A linha mais grossa acima é a corda da guitarra. Abaixo se localiza o captador, com seu ímã interno. Um outro ímã mais forte cria um campo em outra parte da corda. Uma das extremidades da corda está aterrada, e a outra é ligada ao amplificador diferencial, em série com outro de ganho máximo de 100 vezes. Este é ligado enfim à placa de som do computador para a gravação dos sinais. O captador também possui um terminal aterrado, e o outro ligado a um outro amplificador similar ao secundário já mencionado.

Na figura 2.15 podemos ver a região do espectro relativa ao terceiro modo de vibração de um dos

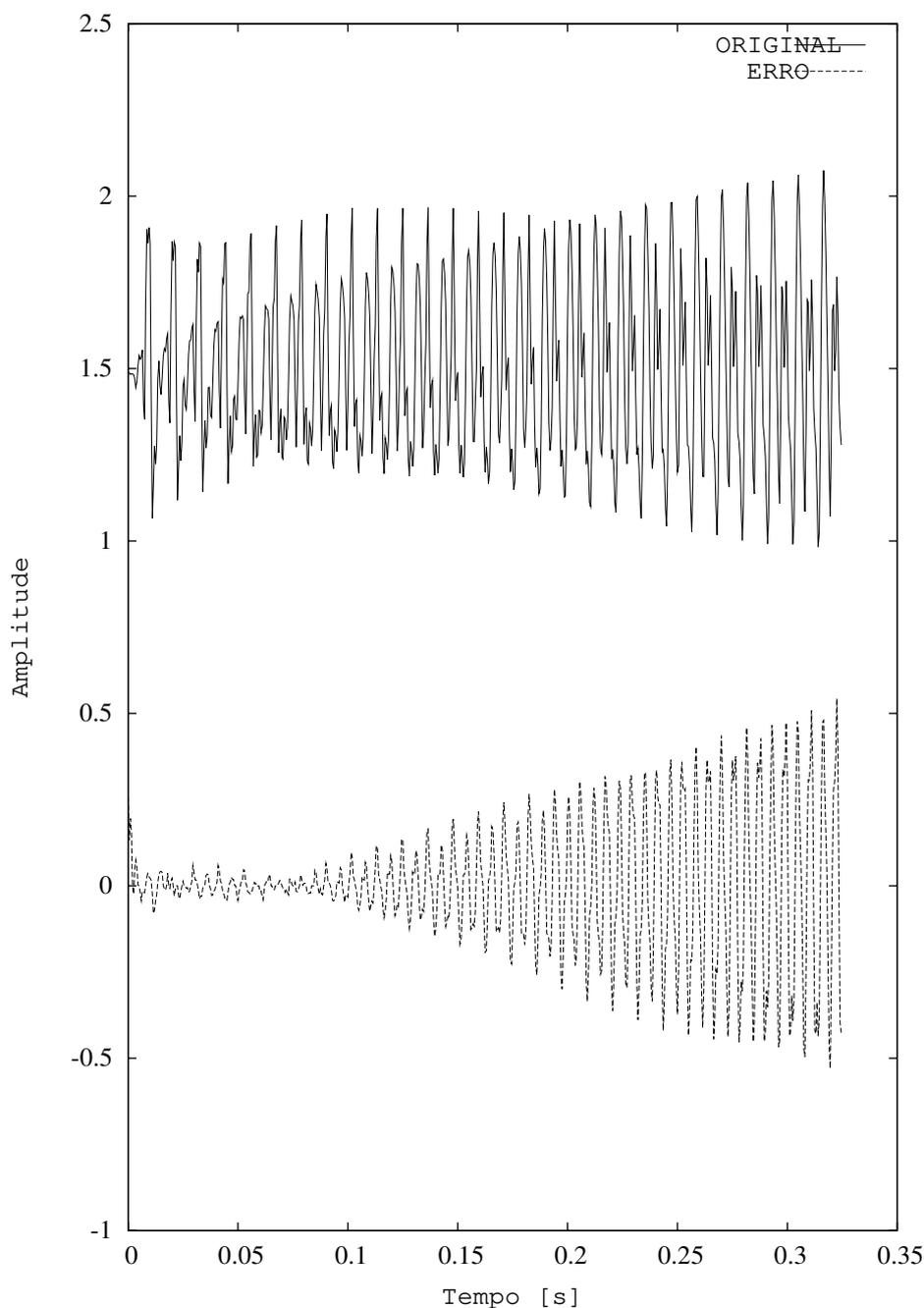


Fig. 2.13: Onda original, e erro de modelagem utilizando componentes não moduladas.

sinais obtidos, mais de dez segundos depois do início da nota, e num período de dez segundos. Nesta gravação mais longa, e num regime de vibração mais regular, é possível observar a existência de dois picos muito próximos, a aproximadamente 0,4Hz de distância.

Foi realizada uma medição das frequências componentes desta região do espectro utilizando o algoritmo SNTLN. Primeiro aplicamos um filtro ao sinal para selecionar apenas esta faixa de frequên-

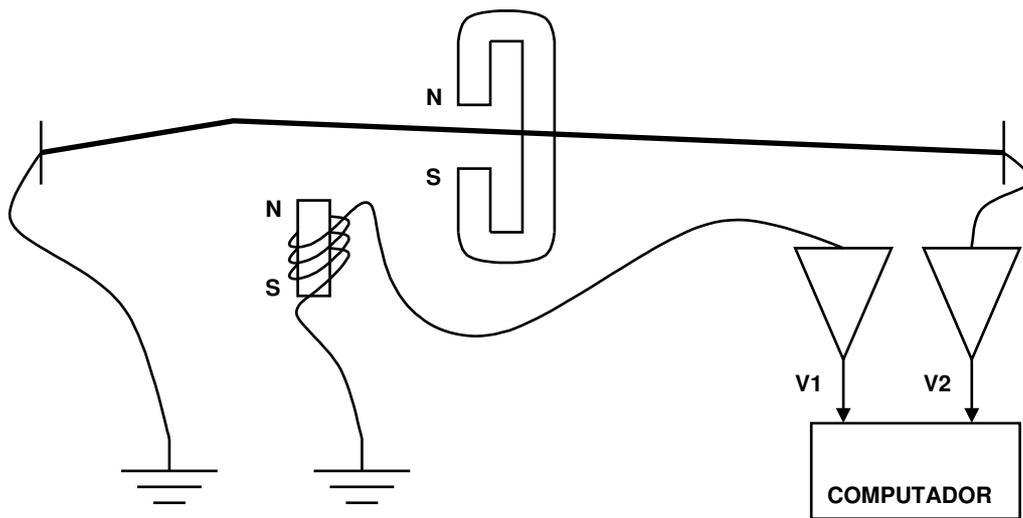


Fig. 2.14: Esquema da montagem do experimento.

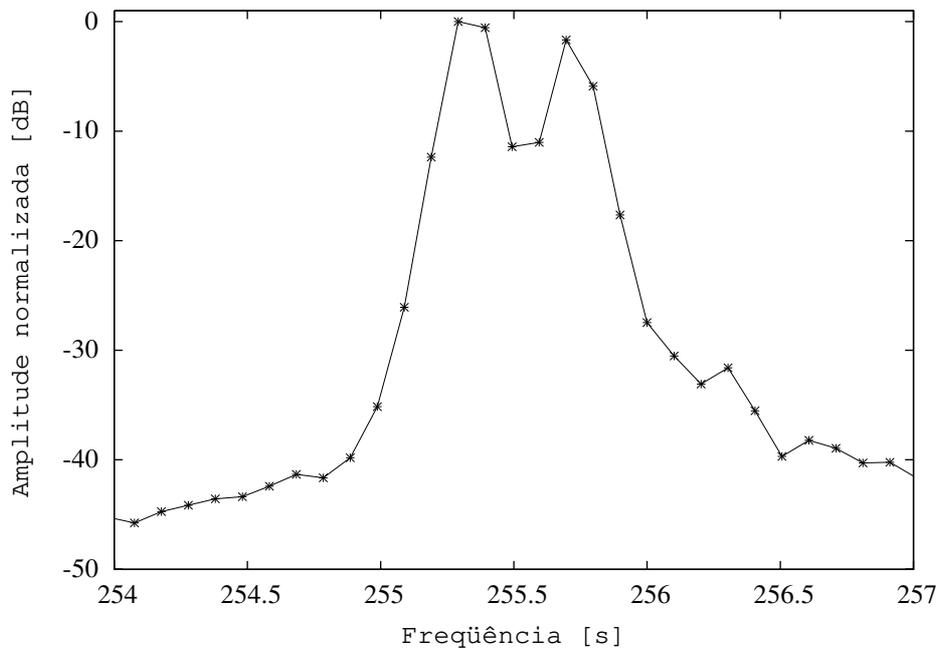


Fig. 2.15: Terceiro pico do espectro do sinal obtido.

cias, utilizando um filtro que será descrito adiante. Para reduzir o volume de dados sendo processados, realizamos uma modulação do sinal por uma senóide de 240 Hz, para realizar uma translação do sinal no espectro, e a seguir utilizamos a DFT para criar um sinal mantendo apenas a faixa de 0 – 30 Hz. As frequências dos picos encontradas com o SNTLN, considerando-se as transformações necessárias, foram de 255,31Hz e 255,73Hz.

Utilizando o método de Prony [78], utilizamos estas frequências medidas para realizar uma re-

construção no domínio do tempo da forma de onda desta terceira componente filtrada. A relação sinal-ruído conseguida foi de apenas aproximadamente 10dB. O resíduo desta modelagem não foi um ruído branco, mas sim componentes senoidais não modeladas adequadamente.

Uma boa forma de enxergar a modulação dos modos é realizar uma decomposição do sinal no domínio do tempo utilizando um banco de filtros projetado para isolar cada uma das frequências componentes, assim como já realizamos com esta única componente [79, pg. 44]. Esta técnica emula o funcionamento de equipamentos antigos como sismógrafos. O banco utilizado aqui foi composto por filtros FIR projetados com funções sinc moduladas, e com suavização de Lánzos [76]. Cada filtro foi centrado na frequência estimada dos harmônicos do sinal.

A figura 2.16 mostra as saídas do banco para o princípio da nota analisada. Aqui finalmente vemos uma comparação entre o sinal obtido do captador e das extremidades da corda. O eixo horizontal é o tempo, e o vertical é simplesmente a amplitude dos sinais. As saídas do banco para cada fonte estão umas sobre as outras: as curvas mais claras, as superiores para cada frequência, são as obtidas do captador. As inferiores, mas escuras, são do sinal da extremidade da corda. Os sinais foram deslocados para permitir uma boa visualização de forma que cada par de sinais relativo a cada frequência ficou em torno do número daquela parcial. As amplitudes de cada sinal foram normalizadas para tomar toda a faixa disponível.

A figura 2.17 é similar à anterior, mas o trecho analisado foi de dez segundos tomados a partir de mais de dez segundos do início da nota. Neste gráfico o mesmo ganho foi aplicado a todos sinais, ajustando o sinal com a maior amplitude (o inferior do terceiro modo) para o intervalo máximo.

Na figura 2.18 podemos ver o espaço de fases desenhado pelos dois sinais obtidos. Foram selecionados pequenos trechos ao longo de dois segundos com o objetivo de avaliar a evolução da trajetória elíptica local no espaço de fases. Cada trecho foi colocado seqüencialmente, em ordem de leitura. O ponto indica o final da trajetória para aquele trecho. Os dois sinais foram normalizados, o que não influencia na avaliação da dinâmica. Como podemos ver, existe decaimento da amplitude, inversão do sentido de rotação, variação da razão de aspecto da elipse, e ainda uma precessão de sentido constante.

Foram realizadas ainda medições da frequência de vibração em pequenos trechos do sinal ao longo do tempo, utilizando novamente o algoritmo SNTLN. Este processo foi similar ao da criação de um espectrograma [80]. A figura 2.19 mostra a variação da frequência e amplitude dos dois modos transversais para a primeira frequência, a partir do princípio de uma nota gravada. Podemos observar o decaimento gradual da frequência com o tempo. A variação constatada, de 87Hz a 86,2Hz, é menor do que o intervalo de um quinto de um semitom ( $2^{\frac{0,2}{12}}$  vezes).

Esta variação de frequência encontrada é coerente com uma outra medição relatada na literatura [81]. Também pudemos observar o decaimento da frequência do terceiro modo. O segundo

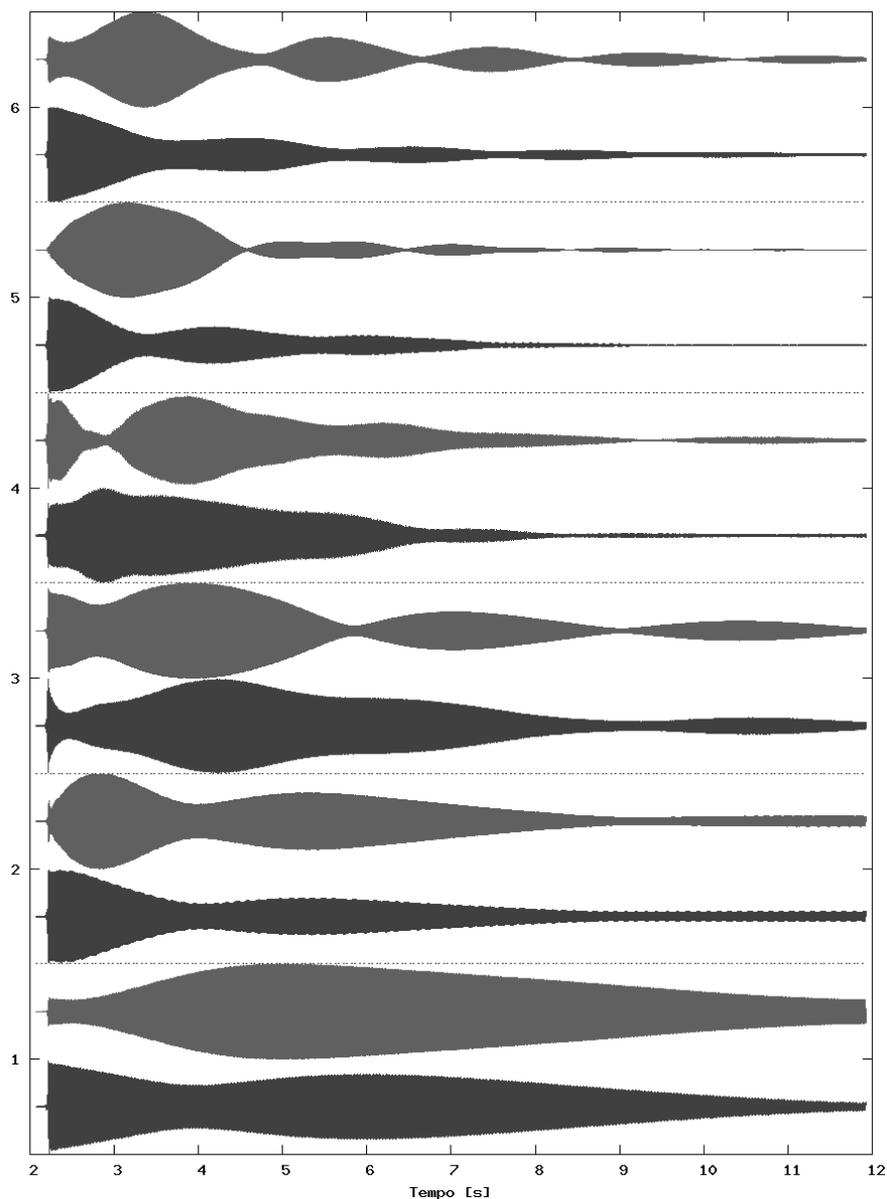


Fig. 2.16: Componentes moduladas do princípio de uma nota.

modo entretanto não apresentou variação significativa de frequência.

## 2.4 Conclusões

Em primeiro lugar demonstramos a possibilidade de se estudar vibrações de cordas com uma guitarra elétrica apenas adquirindo os sinais gerados por ela com amplificadores simples e um microcomputador. Isto contrasta com os experimentos realizados com instrumentos acústicos, onde a

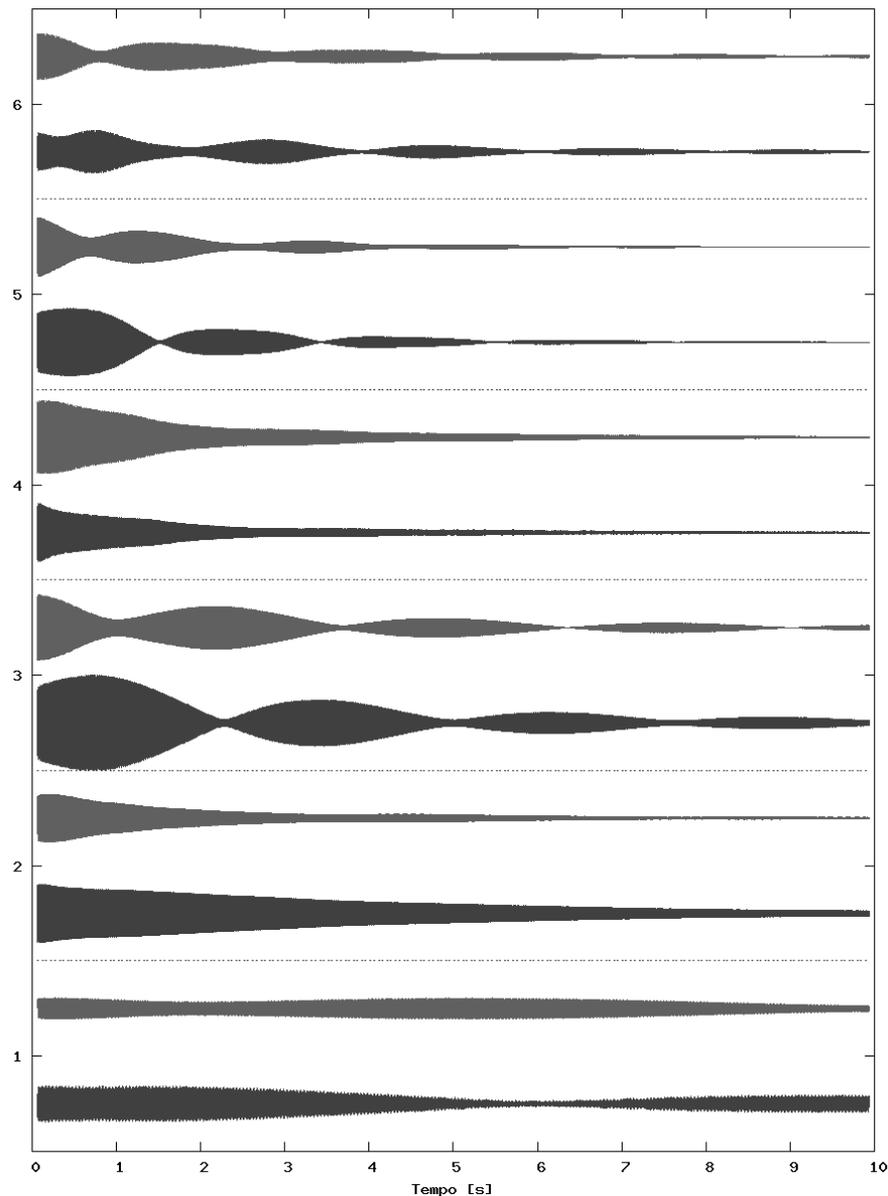


Fig. 2.17: Componentes moduladas a mais de 10 segundos do princípio de uma nota.

instalação adequada de sensores e o uso de uma sala adequada para as gravações são muito importantes.

A análise da forma de onda e espectro do trecho inicial de uma gravação de uma nota apresentou características próximas ao previsto pelo modelo teórico mais simples, entretanto não foram realizados testes numéricos rigorosos da acuracidade do modelo. Pudemos verificar apenas a variação das intensidades dos modos de vibração no tempo, o que invalida este modelo mais simples para períodos longos. A aplicabilidade do modelo de d'Alembert, mesmo que para um curto trecho do sinal, tornará

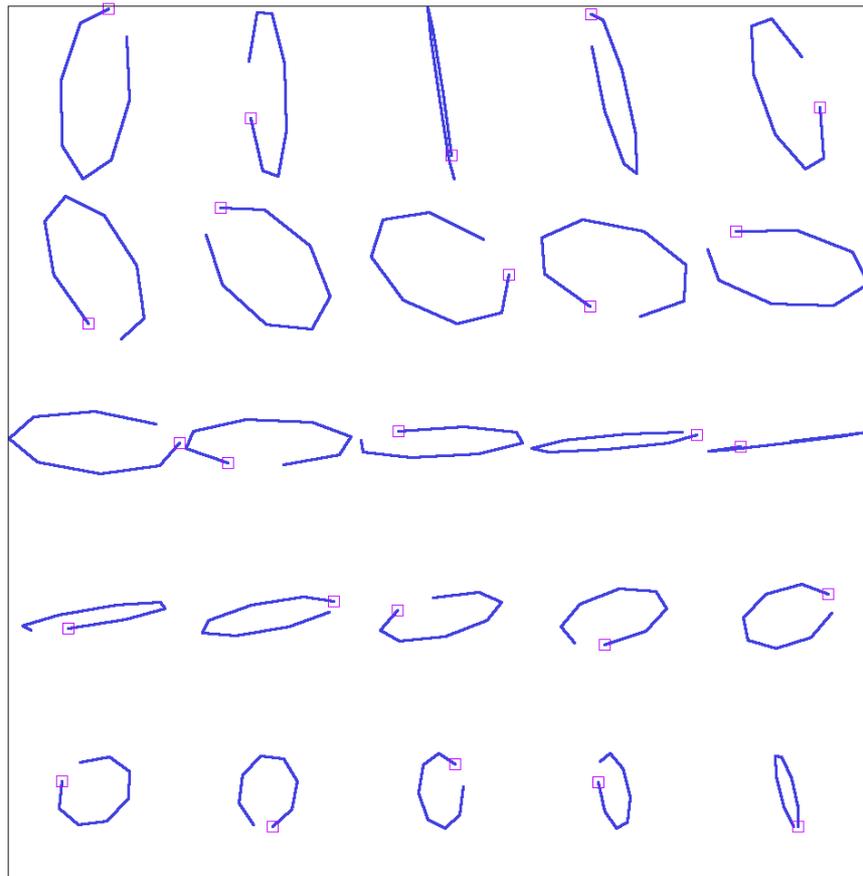


Fig. 2.18: Trechos da trajetória no espaço de fases obtida para o terceiro modo.

possível a determinação de variáveis relacionadas à estrutura do sistema, como a posição do captador utilizado, e dos pontos da corda em que o guitarrista a prendeu e excitou. Esta análise seria similar a uma existente na literatura, feita com um violão [37], e é razoável esperar que o sinal de guitarra ofereça melhores condições.

Pudemos constatar que algumas das componentes senoidais dos sinais gravados sofrem modulações lentas com o tempo, e ainda ocorre uma diminuição da frequência com o tempo, mais acentuada no início da nota. São estas características do sinal que se pretende um dia poder medir com precisão para servir de parâmetros para sintetizadores de sons de guitarras [36, 81]. As modulações lentas das componentes senoidais, além dos decaimentos exponenciais, são uma característica pouco explorada em sintetizadores. Acreditamos que a importância dos efeitos destas variações de frequência e modulações na percepção do timbre precisam ser melhor avaliadas.

Por último, demonstramos com sucesso que com um simples procedimento de amostrar a tensão induzida nas pontas de uma corda de guitarra em movimento com um ímã adequadamente posicionado, além da tensão induzida no captador, podemos obter sinais relacionados à vibração da corda

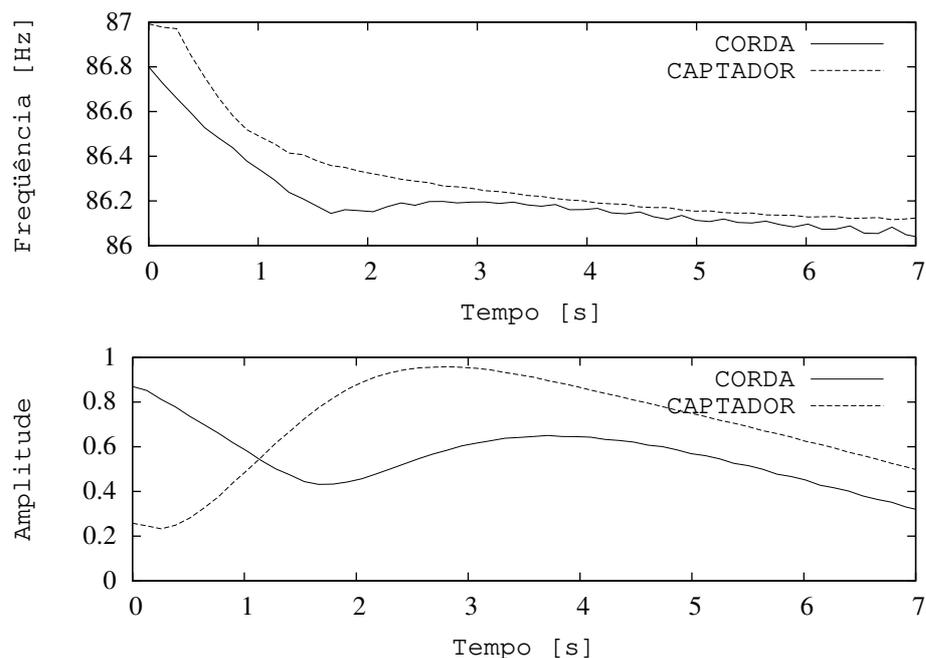


Fig. 2.19: Medições de freqüência e amplitude para o primeiro modo no início de uma nota.

em duas dimensões.

Este par de sinais pode ser futuramente estudado para compreendermos melhor o fenômeno da vibração da corda, nos permitindo modelar melhor efeitos como as modulações e variações de freqüência. Os sinais amostrados por nós não seguem exatamente as fórmulas previstas pela teoria [63], onde a área da elipse formada no espaço de fases seria proporcional à sua velocidade de precessão. É necessário encontrar um modelo mais detalhado que possa explicar a incoerência entre nossas gravações e a teoria. Em especial, é preciso realizar uma medição adequada da rigidez com que são fixadas as extremidades da corda da guitarra, e sua relação com o movimento. É necessário também desenvolver uma maneira de modelar com mais precisão o sinal gravado como uma soma de senóides para testarmos efetivamente a aplicabilidade deste modelo.

# Capítulo 3

## Cordas em vibração forçada

Além de estudar o comportamento de um sistema agindo livremente a partir de um certo estado inicial, como fizemos no capítulo anterior, uma outra forma de obter informações sobre um sistema é estudar sua resposta quando certas variáveis possuem valores ditos *de entrada* que são determinados por fontes externas ao sistema.

Em sistemas lineares as respostas forçadas são sempre somas ponderadas de convoluções dos sinais de entrada por funções ditas *respostas a impulso*. Se uma onda senoidal for aplicada a um sistema linear, todos sinais mensuráveis do sistema serão senóides de mesma frequência, com defasamentos e amplitudes relativas únicas e fixas para aquela frequência específica, determinados pelas chamadas funções de transferência [82].

No capítulo anterior já pudemos observar que o comportamento de uma corda vibrante se desvia do previsto por um modelo linear. Isto não é evidente se considerarmos apenas as modulações lentas constatadas, mas é inegável ao considerarmos o decaimento das frequências de oscilação com o tempo.

Neste capítulo relataremos um experimento onde observamos o comportamento de uma corda vibrando em regime forçado. O objetivo é observar que nosso sistema em estudo pode de fato apresentar características que claramente não são coerentes com modelos lineares.

### 3.1 Modelos matemáticos

#### 3.1.1 A corda como oscilador não-linear

Como já pudemos mencionar no capítulo 2, a variação da tensão mecânica na corda devido à variação de seu comprimento quando é deformada torna o sistema não-linear. A consideração do problema completo leva a expressões matemáticas complicadas, como a equação (2.23).

Ao analisarmos o modelo linear de uma corda vibrando em um de seus modos de ressonância, é útil estudar um sistema correlato onde uma massa concentrada proporcional à massa da corda é ligada a dois suportes rígidos através de duas cordas idealizadas, sem massa e com tensão constante. Inspirado por este processo, podemos realizar uma simplificação semelhante do modelo não-linear completo de uma corda, e considerar a sua vibração em um modo de ressonância como similar a uma massa presa por duas cordas de tensão variável. As características deste sistema simplificado devem ser semelhantes ao que se observará em uma corda real.

A figura 3.1 ilustra o processo de simplificação que estamos utilizando. No caso da corda linear é possível demonstrar que cada modo funciona como um oscilador independente cujos parâmetros podem ser obtidos de parâmetros do sistema real (massa e constantes de elasticidade e atrito). O que estamos assumindo é que de forma semelhante podemos estudar cada frequência de ressonância de uma corda não-linear como possuindo o comportamento de um oscilador não-linear, com uma massa concentrada e função de elasticidade similar a o que se observa em cordas.

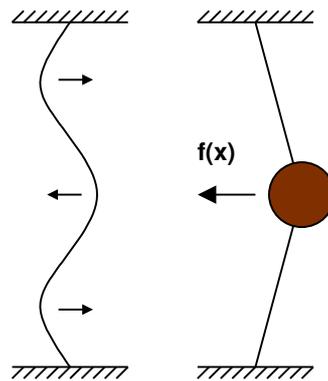


Fig. 3.1: Corda real vibrando em um modo de ressonância, e modelo com massa concentrada.

O que se faz durante o estudo do modelo linear da corda é considerar este sistema com uma massa concentrada e tensão constante, e aproximar a função da força atuando sobre a massa como um polinômio de primeira ordem.

No caso da tensão constante, a força  $f(x)$  exercida na massa pelas cordas elásticas em função do deslocamento  $x$  em uma direção transversal depende apenas da inclinação entre os vetores de força sobre a massa. Se a tensão for variável, a função fica um pouco mais complicada. Considerando a elasticidade proporcional à deformação relativa à extensão a partir da corda não-tensionada, encontramos a fórmula

$$f(x) = -2kx + kl_r \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{l_0^2}{4}}}, \quad (3.1)$$

onde  $l_r$  é o comprimento original da corda,  $l_0$  é o comprimento da corda tensionada (distância entre os suportes) e  $k = 2AE/l_r$ , onde  $A$  é a área de seção da corda e  $E$  o módulo de elasticidade de Young. A aproximação por série de Taylor desta função será

$$f(x) = -2 \left[ T_0 \left( \frac{x}{a} \right) + AE \left( \frac{x}{a} \right)^3 - \frac{3}{8} AE \left( \frac{x}{a} \right)^5 + \dots \right] \quad (3.2)$$

$$a = \frac{l_0}{2} \quad T_0 = AE \frac{l_0 - l_r}{l_r}. \quad (3.3)$$

Os termos de maior potência serão relevantes apenas se  $x$  for suficientemente grande em comparação a  $l_0$ . A intensidade da parte não-linear da fórmula (termos de ordem  $\leq 3$ ) também é tão relevante quanto  $T_0$  for pequena. Isto ocorre quando  $l_0$  é muito próximo de  $l_r$ . Note que quando  $l_0 = l_r$  temos  $T_0 = 0$ , obtendo uma função de força muito não-linear.

A diminuição das imperfeições na vibração de cordas com o aumento da tensão é algo já bem conhecido. Pianos com cordas mais longas podem ser afinados com maiores tensões, o que melhora a harmonia entre as parciais, geralmente pela amenização dos efeitos da rigidez à dobra [83].

Um fato importante sobre a equação (3.2) é que a função de força não-linear é do tipo “dura”, aumentando além da aproximação linear para valores grandes de  $x$ . Muitas vezes em cursos de física, ao se apresentar a equação de d’Alembert, a tensão é considerada constante e uma função trigonométrica que aparece na fórmula da força é aproximada por um polinômio de primeira ordem. Este modelo seria muito errado para grandes amplitudes, porque esta aproximação consideraria uma força de retorno “mole”. Esta característica é encontrada por exemplo no clássico problema do pêndulo, onde o período da oscilação aumenta com a amplitude.

No limite deste modelo onde a tensão é constante e a função trigonométrica é tomada como fonte da não-linearidade em grandes amplitudes,  $f(x) \rightarrow 2T_0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , enquanto que no modelo correto a fórmula tende a se aproximar de um polinômio de primeira ordem.

### 3.1.2 Equação diferencial

Estabelecida a função de força de restauração não-linear de nosso sistema, podemos agora escrever a sua equação diferencial:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x) = F \cos \omega t. \quad (3.4)$$

A força elástica é única não-linearidade deste sistema. Uma outra modificação que se realiza em alguns casos é a consideração de um fator de decaimento  $\gamma$  dependente de  $x$  [47]. A excitação considerada aqui é simplesmente uma força senoidal de amplitude  $F$  e frequência angular  $\omega$ .

Por serem intrinsecamente mais difíceis de analisar, sistemas não-lineares como o desta equação levaram mais tempo para serem melhor compreendidos do que se levou para sistemas lineares. Além

das dificuldades algébricas, sistemas não-lineares são mais diversos, e as descobertas feitas em um caso nem sempre ajudam na pesquisa de outros.

A descoberta de atratores estranhos e regimes caóticos em sistemas dinâmicos não-lineares atraiu a atenção de muitos cientistas para o campo. Como resultado, muitos associam regimes caóticos com sistemas não-lineares, e regimes quasi-periódicos apenas com sistemas lineares, deixando um pouco sem atenção o caso de sistemas não-lineares em regimes semi-periódicos. É este tipo de regime que estudaremos aqui.

Se comparado ao modelo mais preciso que poderíamos utilizar, já realizamos até aqui as seguintes simplificações:

- Estamos considerando apenas um modo de vibração, sem acoplamentos com outros modos.
- Estamos considerando uma força de retorno que não é exatamente a que ocorre em uma corda durante uma vibração normal. Entretanto, ela ainda é uma força “dura”, e depende de fatores físicos sabidamente relacionados ao surgimento de fenômenos não-lineares, como a tensão inicial da corda e amplitude relativa ao comprimento da corda.
- Estamos considerando apenas uma excitação senoidal de frequência próxima ao modo de vibração em estudo. Este sinal não nos permitirá avaliar toda a realidade da dinâmica da corda de uma guitarra. Nosso objetivo, porém, é apenas realizar um experimento que revele a necessidade de se considerar fenômenos não-lineares. Apesar de ser saidamente uma simplificação de um modelo mais detalhado, nosso modelo ainda é mais detalhado do que o linear.

Nosso objetivo é considerar o modelo não-linear mais simples possível para nosso sistema, e tentar detectar fenômenos previstos por ele que não sejam explicados por modelos lineares.

### 3.1.3 Oscilador de Duffing

Como já mencionamos, ao estudarmos osciladores com forças de recuperação não-lineares vibrando em amplitudes pequenas podemos fazer uma aproximação da função da força como uma série de Taylor, e considerar apenas uma aproximação linear, por exemplo. Também podemos considerar uma aproximação polinomial de baixa ordem. No caso de uma força simétrica a menor ordem é 3, o que resulta em uma fórmula  $f(x) = \alpha x + \beta x^3$ , com  $\alpha > 0$ .<sup>†</sup> Quando  $\beta > 0$ , temos uma mola “dura”, que fica mais forte para grandes extensões, e para  $\beta < 0$ , a mola é “mole”, tornando-se mais fraca.

Este sistema com força de retorno simétrica polinomial de ordem 3 foi investigado por Duffing, que fez a primeira contribuição significativa para seu estudo [47, cap. 4]. Ele desenvolveu um método

---

<sup>†</sup>Existem sistemas com  $\alpha < 0$ , mas isto não nos interessa aqui.

iterativo para buscar a solução da equação diferencial, construindo uma equação onde o lado direito se assemelha a um simples filtro linear de primeira ordem (aqui sem perdas), e as parcelas restantes vão para junto da força externa:

$$\ddot{x}_{n+1} + \omega^2 x_{n+1} = (\omega^2 - \alpha)x_n - \beta x_n^3 + F \cos \omega t \quad (3.5)$$

$$x_1 = A \cos(\omega t). \quad (3.6)$$

A primeira aproximação é uma senóide com amplitude  $A$ . Cada resultado intermediário possui mais harmônicos, gerados pelo termo cúbico. Pode ser provado que o resultado terá apenas cossenos.

Não vamos entrar em maiores detalhes sobre o processo. A conclusão apresentada por Duffing leva a equações onde a amplitude de cada termo depende de  $A$  e de  $\omega$  de maneiras não-lineares. Utilizando um artifício matemático sem significado físico direto, a frequência também é colocada em função desta amplitude. Isto permite interpretar melhor o resultado.

É possível determinar para este oscilador uma função similar às funções de transferência de sistemas lineares. Esta função pode ser obtida a partir do que seria a relação entre  $A$  e  $\omega$  no caso linear, deformando-a. A partir da seguinte a relação encontrada por Duffing:

$$\omega^2 = \alpha + \frac{3}{4}\beta A^2 - \frac{F}{A}, \quad (3.7)$$

plotamos no primeiro gráfico da figura 3.2 a relação entre  $A$  e  $\omega^2$  considerando só as duas primeiras parcelas de (3.7), e a relação considerando só a última parcela. A primeira curva é a parábola à direita. As outras curvas são hipérbolas, devido a  $\omega^2 = -F/A$ , para diferentes valores de  $F$ .

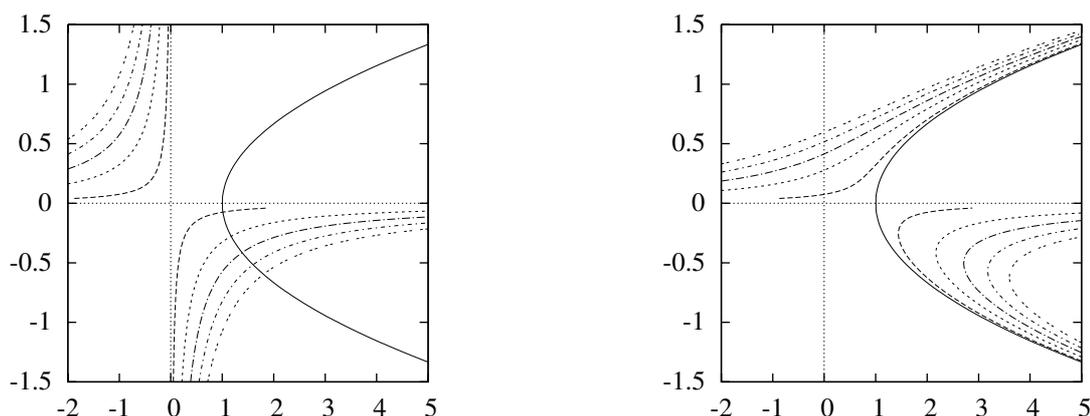


Fig. 3.2: Construção das curvas de resposta em frequência.

O gráfico à direita da figura 3.2 é simplesmente a soma da parábola com as outras curvas, considerando  $A$  como a abscissa. O resultado são curvas que atendem à relação (3.7). Por fim, se agora

tomarmos o módulo da amplitude, e plotarmos o gráfico em função de  $\omega$  ao invés de  $\omega^2$ , teremos como resultado a figura 3.3.

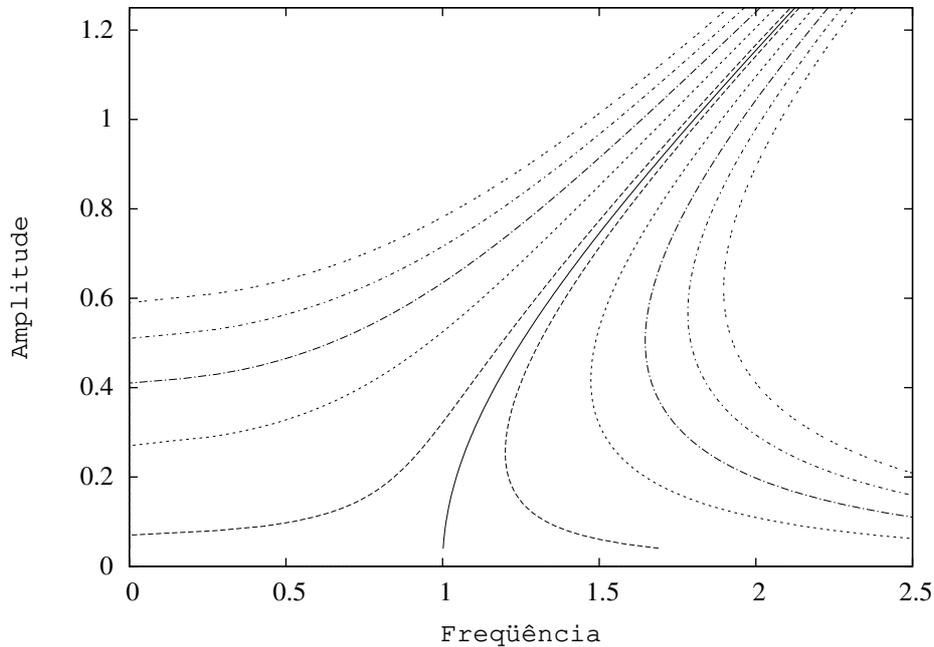


Fig. 3.3: Respostas em freqüência do oscilador de Duffing com  $\beta > 0$ .

Este gráfico se assemelha com o que se esperaria num oscilador linear, porém com o pico de ressonância entortado para a direita. No caso  $\beta < 0$  a distorção seria para a esquerda. Podemos imediatamente observar as diferenças com relação ao caso linear. Numa função de transferência convencional temos apenas um valor possível de  $A$  para cada  $\omega$ , e a variação de  $F$  apenas altera a escala. O que observamos aqui é, em primeiro lugar, que mudar  $F$  nos fornece curvas diferentes. Em segundo lugar, para  $\omega$  suficientemente grande nós temos até três valores de  $A$  que deveriam ser válidos. Isto imediatamente nos impede de poder dizer de imediato qual será a amplitude registrada uma vez que saibamos a força e a freqüência aplicadas.

Na prática, a curva com valores intermediários de  $A$  não representa estados estáveis. Ou seja, feita a excitação com uma freqüência suficientemente alta, existirão dois modos de vibração em que o sistema poderá operar.

Se considerarmos uma parcela de perdas na equação diferencial, não teremos mais a extensão ao infinito que representa o caso de ressonância. A curva cruzaria continuamente a região da ressonância, formando ainda uma concavidade. Isto impõe um limite de freqüência superior para a região com dois modos de vibração possíveis. Assim tanto para baixas quanto para altas freqüências teremos apenas um modo possível, como no caso linear. A diferença surgirá apenas ao cruzarmos uma das duas freqüências limiares próximas ao pico de amplitude.

A transição de um modo de vibração para o outro, quando é possível, está relacionada com uma área de estudos dentro da teoria geral de sistemas dinâmicos, chamada teoria das catástrofes.

Uma boa forma de interpretar a construção desta curva de resposta em frequência é reescrever a equação (3.7) como

$$A^3 \left( \frac{3}{4} \beta \right) + A (\alpha - \omega^2) - F = 0. \quad (3.8)$$

A curva é desenhada pela posição das raízes de um polinômio em  $A$  para diferentes valores de  $\omega$ . As regiões com solução única são aquelas em que um par das raízes se tornam complexas.

O experimento que realizamos é tradicionalmente feito com esse tipo de sistema. Trata-se de medir a amplitude enquanto se varia lentamente a frequência de oscilação pela região da ressonância. Desta forma se pode observar a passagem de um modo de vibração para o outro quando o sistema passa de ter duas soluções possível para apenas uma. Se fizermos isto ciclicamente, cruzando os limites, vamos observar uma histerese no processo. Quando diminuirmos a frequência, observaremos amplitudes de valores menores do que quando utilizamos a mesma frequência anteriormente [51, fig. 1].

## 3.2 Experimento com a resposta forçada

### 3.2.1 Montagem do experimento

Ao considerarmos estudar a resposta forçada em uma corda de guitarra elétrica, procuramos por uma forma simples de atuador para excitar o sistema, e decidimos testar a força provocada por uma corrente elétrica passando sobre um fio metálico em um campo magnético. Este fenômeno é hoje entendido através da força de Lorentz, mas é conhecido desde o século XVIII [84, Art. 489].

Este método para a excitação de cordas é bastante comum na literatura, sendo utilizado pela maioria dos artigos estudados por nós [57, 60, 43]. A única exceção utilizou um atuador colado à corda [61]. Todos estes artigos investigam entretanto a vibração de cordas de maneira genérica, em aparatos construídos para isto. Não encontramos na literatura relatos de um experimento como o nosso, medindo a resposta forçada nas cordas de uma guitarra.

A figura 3.4 traz um esquema da montagem do experimento. O computador gera um sinal senoidal que é ligado a um amplificador de potência cuja saída é ligada à extremidade da corda presa ao braço da guitarra. A outra extremidade é aterrada, fazendo passar uma corrente elétrica pela corda. O ímã cria um campo que faz com que o trecho da corda sob o campo seja forçado em movimento transversal. O captador funciona normalmente, e seu sinal é adquirido pelo mesmo computador utilizado na geração do sinal de excitação.

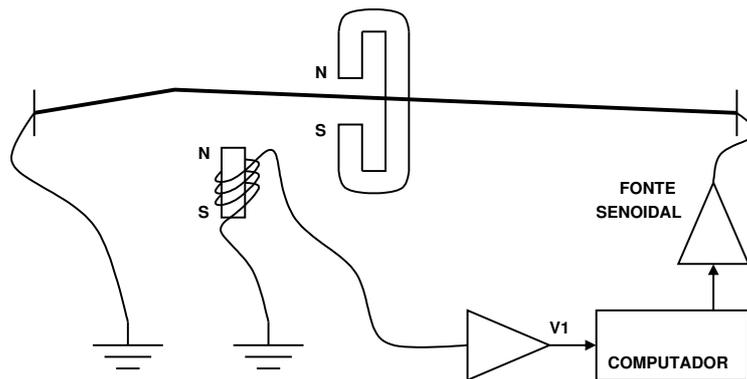


Fig. 3.4: Montagem do experimento para estudo da vibração da corda forçada por uma senóide.

### 3.2.2 Testes para o projeto do atuador

Para utilizar este método foram feitos antes testes para determinar a intensidade de corrente que seria necessária. Antes de mais nada, medimos as resistências elétricas das cordas, e o valor encontrado para cada uma delas foi de aproximadamente  $1,4 \Omega$ , apesar da variação de diâmetro.

Testamos então aplicar pequenos pulsos de corrente, ligando as duas extremidades de uma corda a baterias de  $9 \text{ V}$  e a fontes com limitação de corrente de  $1,5 \text{ A}$ . Nenhum efeito foi observado nestes casos. Até então, contávamos apenas com os campos magnéticos dos ímãs dos captadores, que além de terem se provado muito fracos para esta aplicação, possuem a desvantagem de serem geralmente mais de um em cada corda, criando um campo complicado sobre elas. É possível que captadores ativos sejam capazes de criar campos fortes o suficiente para esta técnica.

Provou-se vantajoso afinal o uso de um forte ímã de neodímio para criar o campo magnético. O ímã utilizado por nós possuía formato de ferradura, e ainda prendemos a ele uma pequena chapa de metal ferromagnético, formando uma fenda de aproximadamente  $6,4 \text{ mm}$  com campo supostamente uniforme, onde pudemos posicionar a corda. Além de produzir um campo forte e concentrado, este ímã pode ainda ser colocado em diferentes posições sobre a corda. A seção do ímã possuía  $6,6 \text{ mm}$  de largura ao longo da corda, e  $11,0 \text{ mm}$  na direção ortogonal.

Com este ímã é possível sentir com os dedos um leve empurrão da corda ao aplicar uma fonte de tensão apropriada. Baterias de  $9 \text{ V}$  parecem possuir uma resistência de saída alta demais para isso.

Decidimos a seguir testar o uso de uma fonte senoidal para forçar a corda, com esperança de que ao menos algum modo de vibração ressoante pudesse ser excitado, mesmo que lentamente.

Para este teste recorreremos a uma simples tomada da rede elétrica como fonte de sinal senoidal de  $60 \text{ Hz}$  capaz de suportar altas correntes. Utilizamos um transformador para reduzir o nível de tensão até  $3,46 \text{ V}_{rms}$  e o ligamos à tomada através de um *dimmer* para lâmpadas elétricas convencional, baseado em um tiristor. As extremidades da corda foram ligadas ao secundário. A corda utilizada

neste experimento, assim como em praticamente todos outros deste trabalho, foi a mais grossa de todas, que é geralmente afinada em  $\sim 82$  Hz. Por isso reduzimos um pouco a tensão (mecânica) da corda para que o primeiro modo de vibração fosse de aproximadamente 60 Hz.

Ao ativar o *dimmer* e permitir a transmissão de potência pudemos verificar uma vibração na corda, chegando visivelmente a quase um centímetro de amplitude pico-a-pico. Detectamos ainda com um multímetro que uma tensão (elétrica) em torno  $1,5 V_{rms}$  bastou para conseguir vibrações satisfatórias.

### 3.2.3 Projeto do atuador

Conhecendo o nível da corrente necessária para causar vibrações amplas na corda, iniciamos o projeto de um amplificador que suportasse a tarefa. Consideramos uma carga de  $4\ \Omega$  no projeto porque é um valor usual em projetos de amplificador de potência para áudio, e ainda porque previmos a possibilidade de utilizar um resistor em série à corda para medir indiretamente a corrente.

Considerando esta carga, e uma corrente relativamente elevada de  $2,5 A_{rms}$ , necessitaríamos portanto de um amplificador que pudesse suportar até 25 W. Decidimos construir um amplificador baseado no microchip TDA2050 [85], que se reputa suportar até 35 W.

O amplificador contou com uma fonte de potência simétrica, construída com dois transformadores de  $15 V_{rms}$  e  $2 A_{rms}$ , retificadores de onda dupla e reguladores de tensão variáveis LM150 [86]. O circuito construído com o amplificador foi muito similar ao sugerido pelo fabricante, com apenas pequenas modificações. O equipamento foi por fim montado dentro de uma caixa metálica.

O projeto como um todo está bem ao alcance de qualquer entusiasta de eletrônica, e é uma boa sugestão de construção para qualquer um que busque criar um sistema similar ao descrito aqui.

Esse amplificador foi afinal ligado à saída de uma placa de som de um computador pessoal, utilizado para sintetizar os sinais para excitar a corda, e ainda para gravar o sinal induzido no computador.

### 3.2.4 Programa para gerar senóides

Tanto este experimento quanto outros presentes neste trabalho necessitaram de um gerador de ondas senoidais, como é usual em laboratórios de eletrônica. Decidimos implementar um gerador destes em um computador, com um programa com interface gráfica.

A interface, na figura 3.5, foi feita com GTKmm [87], e conta com um controle deslizante de frequência e um de amplitude, que podem se controladas também digitando-se os valores ao lado. Outras duas caixas permitem modificar os limites do controle de frequência, e o último elemento da interface controla um filtro IIR de primeira ordem para suavizar a variação dos parâmetros.

O programa funciona com o sistema JACK [88]. A síntese da senóide é feita utilizando variáveis tipo ponto-flutuante, a partir de rotação de vetores.

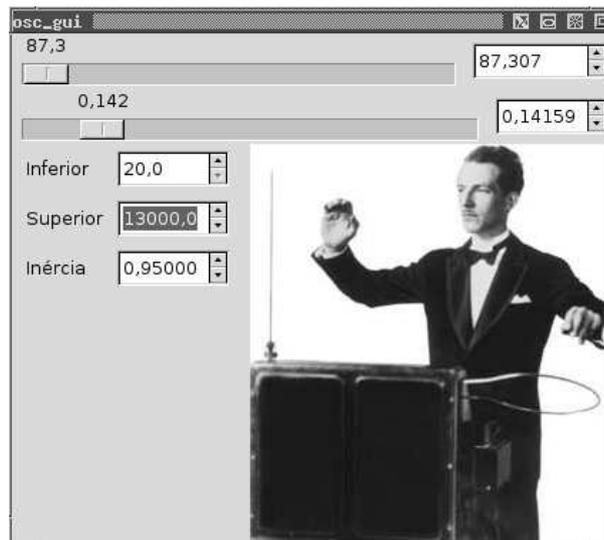


Fig. 3.5: Interface do sintetizador. A foto de Лев Термен (Theremin) atrai boas vibrações. . .

### 3.2.5 Resultados

Realizamos com uma corda em uma guitarra o experimento descrito acima: passamos uma corrente senoidal pela corda, com um ímã provocando o seu deslocamento, e gravamos o sinal obtido convencionalmente através de um dos captadores do instrumento.

A corda foi afinada para uma nota mais baixa, para intensificar a não-linearidade e permitir uma melhor observação do fenômeno. O segundo modo de vibração foi o que se revelou o mais fácil de investigar. Outros modos requeriam mais força e precisão para uma observação clara da ressonância. Dada uma amplitude razoável, é fácil notar os nodos se formando na corda, o que nos dá a certeza de qual é o modo de vibração em questão.

Não pudemos obter em nossos experimentos a ocorrência do chamado modo de vibração tubular. A corda quase sempre parecia se deslocar apenas no plano perpendicular ao campo do ímã. Notamos inclusive que parece haver uma tendência da corda se posicionar neste plano mesmo quando ela não está sendo forçada, totalmente livre. Por exemplo, ao colocar o campo enquanto a corda vibra em regime não-forçado, pudemos observar que ela se alinha ao plano ortogonal ao campo. Não sabemos ainda explicar o motivo disso. Mas enquanto o ímã parece visivelmente restringir os movimentos da corda, não pudemos notar qualquer influência deste alinhamento no sinal obtido. O experimento foi realizado tanto com este plano paralelo aos captadores, e ortogonal, e não observamos nenhuma diferença nos resultados.

Analisando as gravações, foi constatado que conseguimos de fato reproduzir o fenômeno esperado, dos saltos ou colapsos do sistema passando de um modo de vibração para o outro. Constatamos ainda uma histerese na resposta à variação cíclica da frequência.

Repetimos por 8 vezes a passagem da frequência pelo ponto de ressonância. A frequência foi variada em incrementos de 0,1 Hz. Pudemos ouvir nitidamente transitórios ao ultrapassar a região tanto aumentando quanto reduzindo a frequência. A frequência superior em que isto ocorreu, ao se elevar a frequência foi em média 98,8 Hz, com desvio padrão de 0,35. Mais medições seriam necessárias para se determinar melhor a distribuição estatística das frequências dos saltos, mas 3 de nossos 8 casos foram no valor maior registrado, de 99,1 Hz. O previsto pela teoria seria justamente uma distribuição muito concentrada no valor máximo, com um número gradualmente menor de casos de saltos em frequências menores. Os saltos prematuros se devem a ruídos no sistema, ou a variações muito bruscas, por exemplo.

O valor encontrado para a frequência inferior de saltos foi de 92,2 Hz, com desvio padrão de 0,59. Neste caso a tendência de concentração nos valores menores foi menos clara, mas lembramos que esta transição é bem mais difícil de se perceber acusticamente, sendo mais lenta e sutil.

Estas medições dependeram apenas da percepção auditiva do experimentador, e sua capacidade em julgar a ocorrência de transição e diferença no timbre do sinal amostrado. Entretanto, foram ainda realizadas medições numéricas nos sinais para obter resultados mais rigorosos.

O sinal gravado foi tomado a partir da saída usual da guitarra, amplificado por um circuito baseado em um OPA134 [77] na configuração não-inversora. A frequência foi variada em torno da região do segundo modo de ressonância até ouvir-se a transição no timbre, quando então mudou-se a direção de variação após a amostragem de uma margem. O resultado se encontra na figura 3.6.

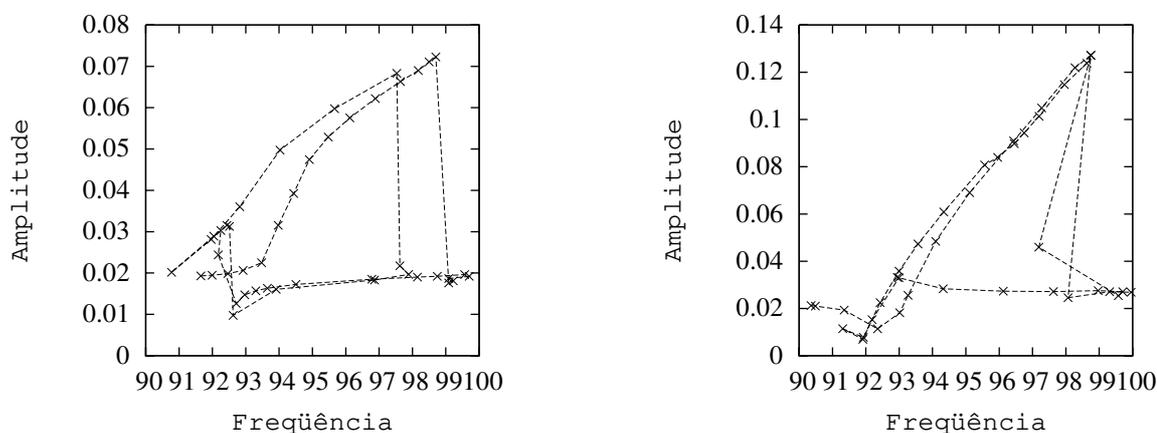


Fig. 3.6: Resultados de dois processos de medição da amplitude e frequência.

Ambos gráficos são resultados deste processo, tomados em diferentes ocasiões. O ganho do amplificador foi variado entre estas medições. Para produzir estes gráficos, os sinais gravados foram reamostrados para uma taxa de 2.000 amostras por segundo e janelados em trechos de 128 amostras (64 ms). Foram selecionadas uma a cada 100 janelas para se analisar. Cada um desses trechos do

sinal foi modelado como uma senóide pura, com amplitude, frequência e fase obtidas pelo algoritmo SNTLN. Por fim, os módulos e frequências encontradas para o segundo modo de vibração foram plotados na ordem em que foram encontrados no sinal, dando origem a uma curva similar à prevista para um oscilador de Duffing.

No primeiro gráfico foram removidos dois pontos *outliers*, que adquiriram valores estranhos por se tratarem de trechos do sinal amostrados logo após o salto mais intenso. Estes trechos possuem um batimento muito intenso, e o algoritmo não estava ajustado para procurar uma onda desta forma.

Além deste modo de vibração foram feitas análises superficiais de outros modos, onde foram observados comportamentos similares. Fizemos uma gravação da guitarra submetida a uma varredura lenta na frequência, e é possível ouvir transitórios conforme as diferentes frequências de ressonância são ultrapassadas. É possível perceber mais de 5 modos. Esta mesma análise foi feita ainda com a corda tensionada em um nível usual de operação, e ainda é possível ouvir os transitórios, o que indica que o aumento de tensão ainda não é suficiente para eliminar os efeitos da não-linearidade.

### 3.2.6 Análise dos resultados

Podemos observar nos gráficos obtidos uma histerese no sentido horário, o que implica em um valor positivo para o  $\beta$  ao modelarmos o sistema como um oscilador de Duffing. Este resultado está de acordo com o decaimento na frequência de vibração no começo da nota constatado no capítulo anterior. A amplitude de vibração da corda tende a cair com o tempo devido à perda de energia, e o  $\beta$  positivo implica exatamente em uma diminuição da frequência de vibração natural com a redução da amplitude. Um  $\beta$  negativo provocaria um aumento da frequência.

Seria interessante obter estimativas para os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $F$ , e mesmo para a constante de amortecimento  $\gamma$ . Uma forma de tentar fazer isso seria, por exemplo, buscar ajustar valores encontrados na curva medida à equação (3.8).

No ponto onde ocorre a transição durante a redução de frequência este polinômio deveria apresentar uma raiz dupla, localizada sobre a menor amplitude. Um polinômio do terceiro grau com uma raiz dupla possui a forma

$$(A - a)(A - b)^2 = 0 \quad (3.9)$$

$$A^3 - A^2(a + 2b) + Ab(b + 2a) - ab^2 = 0, \quad (3.10)$$

onde  $a$  é uma raiz, e  $b$  é a raiz dupla. Se aplicarmos esta equação para nosso modelo, teremos

$$\begin{cases} a = -2b \\ (\alpha - \omega^2)/\frac{3}{4}\beta = b(b + 2a) \\ F/\frac{3}{4}\beta = ab^2 \end{cases} . \quad (3.11)$$

Deve ser possível partir de relações como estas e ajustar a curva encontrada ao modelo de Duffing. Em nosso caso podemos imediatamente constatar que os valores encontrados para  $a$  e  $b$  no primeiro gráfico da figura 3.6 não parecem seguir a restrição  $|a| = 2|b|$ . Este erro pode ser devido à necessidade de se considerar o modelo com perdas. Já no segundo gráfico os valores de  $a$  e  $b$  nem mesmo puderam ser observados, indicando ou uma falha na realização do experimento, ou a necessidade de se considerar um modelo mais rico.

Para realizarmos uma análise deste tipo utilizando os valores medidos na segunda transição seria definitivamente necessário utilizar um modelo com perdas. Isto também nos permitiria utilizar a medição da diferença entre as frequências de transição para encontrar os parâmetros.

Não pudemos encontrar uma fórmula parecida com a da equação (3.8) que levasse em consideração o fator de atrito  $\gamma$ , impedindo que realizássemos afinal um ajuste de parâmetros que pudesse nos fornecer por exemplo uma estimativa dos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  com relação a  $F$ .

### 3.3 Conclusões

Demonstramos com sucesso a possibilidade de se detectar fenômenos de natureza não-linear em uma guitarra elétrica. Os resultados são coerentes com fenômenos observados no capítulo anterior, e ainda com relatos disponíveis na literatura [52, 51, 48, 57] que utilizam o modelo de Duffing para a corda em ressonância. Não estudamos entretanto o fenômeno do acoplamento entre o modo de vibração excitado com o modo de vibração perpendicular, ou entre modos de diferentes frequências.

Nossa medição foi realizada em uma guitarra elétrica convencional, necessitando apenas do uso de um ímã, um computador pessoal e amplificadores de sinal e de potência. Acreditamos que este experimento apresentado pode ser estendido para se medir características da guitarra como a flexibilidade dos suportes das cordas, e as constantes de rigidez à dobra e a extensão. Pode ser possível encontrar alguma relação entre valores mensuráveis pelo experimento, como a diferença entre as duas frequências de transição, e características relevantes para o timbre durante a execução do instrumento, como a inarmonicidade e a taxa de decaimento do valor das frequências.

Experimentos similares podem ser realizados em instrumentos como pianos, que possuem cordas metálicas. Para tornar os resultados mais rigorosos, seria ainda necessário considerar o aumento da temperatura da corda durante o experimento, além da influência dos ímãs no movimento da corda.

# Capítulo 4

## Filtro Elétrico Passivo

O sinal elétrico gerado pelo captador a partir do movimento das cordas passa por um filtro elétrico passivo antes de ser recebido por qualquer aparelho em que se ligue uma guitarra. Estes filtros podem ser relevantes para o timbre obtido por uma guitarra. Basta que as raízes se encontrem na faixa espectral do sinal gerado pelas cordas.

Existem poucos relatos de medições das características destes filtros. O professor Steven Errede da UIUC dá cursos sobre a física de instrumentos musicais, e já fez medições de captadores como parte destas aulas [72, 67, 71]. Existem ainda pequenos fabricantes de guitarras que publicam independentemente artigos sobre o assunto [89].

### 4.1 Experimento Proposto

Para medir as características dos captadores, projetamos um circuito para realizar uma amostragem da função de transferência entre uma tensão aplicada na saída de sinal da guitarra, e a corrente resultante. Este processo seria uma medição da impedância de saída da guitarra se o circuito possuísse apenas componentes em série.

O circuito do amplificador utilizado no processo (figura 4.2) é baseado em um amplificador operacional ligado em configuração não-inversora. A guitarra é ligada através de um cabo, como num amplificador comum, e é representada pelo bloco  $H(s)$  na figura. As tensões de entrada e saída,  $v_e$  e  $v_s$ , são gerada e gravada pela placa de som do computador.

Analisando a função de transferência deste circuito podemos determinar as características do filtro da guitarra, e encontrar indiretamente o filtro que atua sobre o sinal durante o uso normal do instrumento. O modelo elétrico utilizado para representar o captador foi o modelo convencional para um indutor baseado em um fio enrolado (figura 4.2). As imperfeições inseridas são uma resistência em série à indutância, e um capacitor em paralelo. O resistor variável em série a um capacitor é um

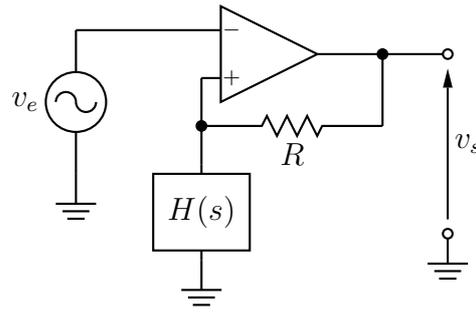


Fig. 4.1: Circuito para determinação da função de transferência.

filtro criado com componentes discretos, usualmente colocado nas guitarras em paralelo ao captador. Por último há um potenciômetro que permite regular a amplitude do sinal de saída.

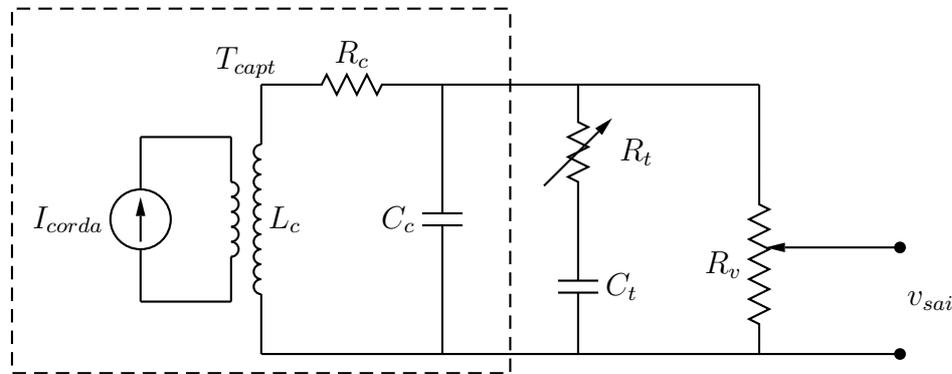


Fig. 4.2: Modelo do filtro da guitarra, destacando o captador.

O transformador  $T_{capt}$  e a corrente  $I_{corda}$  são os correlatos elétricos do verdadeiro processo que ocorre, que é o deslocamento da corda magnetizada causando uma variação de fluxo magnético dentro do indutor. A corrente modela a posição da corda, e a tensão na entrada do transformador representa a sua velocidade. Este modelo elétrico de um fenômeno mecânico é usual no estudo de transdutores [90]. Poderíamos explorar mais essa técnica, construindo um modelo elétrico para toda a corda, por exemplo [91]. Mas aqui queremos apenas indicar a fonte do sinal da guitarra quando ela é tocada.

Em nossas medições o resistor do filtro foi colocado em seu valor máximo (500 k $\Omega$ ), assim como o resistor de volume (500 k $\Omega$ ). O capacitor  $C_t$  foi considerado como um curto nas medições a seguir.

O valor da resistência dos captadores pode ser facilmente obtido com uso direto de um multímetro. No instrumento que analisamos, o valor obtido para o captador perto da ponte foi de 5,15k $\Omega$ , e para o captador perto do braço obtivemos 5,32k $\Omega$ . Ativando a chave da guitarra na posição intermediária obtivemos 2,63k $\Omega$ , próximo do valor esperado considerando que os captadores são ligados em paralelo.

A função de transferência do circuito completo, considerando este modelo para a guitarra, omitindo-

se o controle de tom, é

$$\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = k \left[1 + \frac{R}{H(s)}\right] \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = kRC \left[ \frac{s^2 + s \left( \frac{R_c}{L_c} + \frac{1}{C_c} \left( \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R} \right) \right) + \frac{R_c}{L_c} \frac{1}{C_c} \left( \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_c} \right)}{s + \frac{R_c}{L_c}} \right], \quad (4.2)$$

onde  $k$  é um ganho inserido pela placa de som, e as outras variáveis são todas valores de componentes dos modelos. Se considerarmos o filtro RC, são inseridos um novo pólo e um zero, resultando em

$$\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = kRC \frac{s^3 + s^2 \left[ \left( \frac{R_c}{L_c} + \frac{1}{R_t C_t} \right) + \frac{1}{C_c} \left( \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R} \right) \right] + \frac{R_c}{L_c C_c} \frac{1}{R_t C_t} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_c} \right) + s \left[ \frac{R_c}{L_c} \frac{1}{C_c} \left( \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_t} \right) + \frac{1}{C_t R_t C_t} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_v} + \frac{R_c}{L_c} \right) \right]}{\left( s + \frac{R_c}{L_c} \right) \left( s + \frac{1}{R_t C_t} \right)}. \quad (4.3)$$

Um primeira forma que experimentamos para a medir a função de transferência foi jogar um ruído branco no sistema e utilizar o algoritmo RLS [92] para obter a resposta a impulso. O programa criado foi feito em C++, com as bibliotecas JACK [88] e GTKmm [87], e opera em “tempo real”. Este programa não trouxe benefícios para nós já que visávamos precisão de medição, e não operação em “tempo real”.

A função de transferência foi amostrada enfim da seguinte forma: Tanto a entrada quanto a saída do circuito foram ligados a um computador. Um sinal de excitação foi calculado, armazenado, e então executado pela placa de som. O sinal de saída foi gravado simultaneamente a esta execução.

Realizada a gravação, calculamos então a DFT dos sinais original e gravado. A divisão do espectro do sinal gravado pelo do original fornece um vetor com o valor estimado da função de transferência em diferentes frequências.

O sinal de excitação utilizado foi uma variação do *time-stretched pulse* de Aoshima [93][94], com 16.384 amostras, executadas a 48 kHz. Foram executados três pulsos seguidos, e depois selecionamos 16,384 pontos intermediários da gravação para análise.

Como medida de redução de ruído, foi feita uma operação no domínio do tempo. Cada filtro obtido foi transformado, originado sua resposta a impulso no tempo. Ao visualizarmos uma destas funções num gráfico logarítmico (figura 4.3), é possível perceber que a partir de um certo momento existe um sinal de amplitude constante que se superpõe a um sinal de decaimento exponencial.

A análise deste sinal leva à suposição de que o sinal constante é o ruído a ser removido, e que o sinal com decaimento é a resposta a impulso desejada. Então simplesmente selecionamos o ponto aproximado em que a amplitude do ruído supera a do sinal, e zeramos os valores a partir daquele ponto. Manter muitas amostras resulta em um espectro aparentemente mais ruidoso. Manter muito

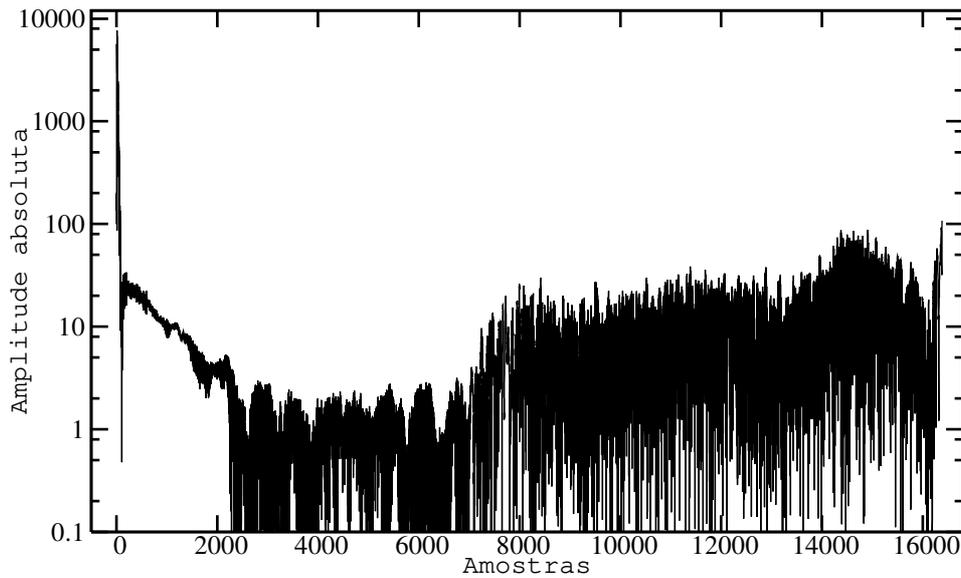


Fig. 4.3: Resposta a impulso de um dos filtros estudados, em valores absolutos.

poucas faz surgir um *ripple* acentuado no espectro. Esta operação busca um equilíbrio entre estas imperfeições.

Depois de modificar a resposta a impulso, realizamos a DFT novamente, obtendo os valores finais das medições. Estes espectros foram ainda posteriormente divididos pela função de transferência da placa de som, obtida ligando-se a sua entrada diretamente à saída, e realizando-se a medição. Esta função está apresentada na figura 4.4. Neste caso o filtro era bastante plano na faixa de interesse, mas este passo pode ser útil em outras aplicações semelhantes.

Os módulos das duas funções de transferência estimadas ao final do processo estão na figura 4.5. Cada função é o resultado do processo para cada um dos dois captadores da guitarra analisada.

Obtidas as funções de transferência, foi então utilizado o algoritmo de otimização de Nelder-Mead (simplex) para encontrar os coeficientes dos polinômios da equação

$$\left(\frac{V_s}{V_e}\right) = K \frac{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0}, \quad (4.4)$$

da mesma ordem que a equação (4.4), de forma a ajustar a função de transferência teórica à medida. O ganho  $K$  não foi considerado, mas apenas os valores dos pólos e zeros.

O erro minimizado foi a diferença absoluta entre os módulos das funções em decibéis, ponderando os valores de forma a dar mais importância a frequências mais baixas. Assim, o desvio considerado foi aproximadamente o percebido em um gráfico log-log, e não simplesmente a soma dos erros quadráticos de amplitude em cada frequência harmônica medida.

O erro de amplitude máximo obtido após esta minimização foi de aproximadamente 1dB nos dois

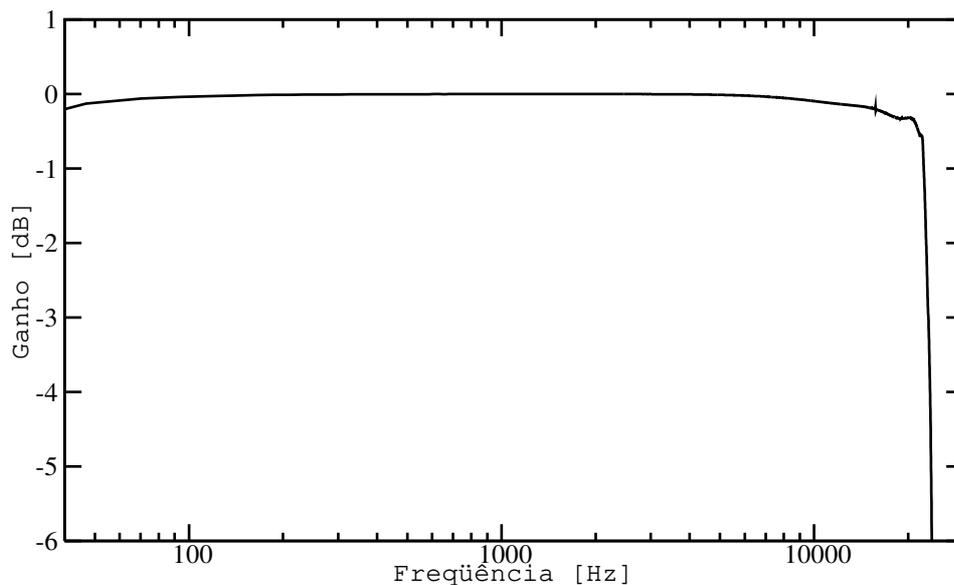


Fig. 4.4: Função de transferência da placa de som.

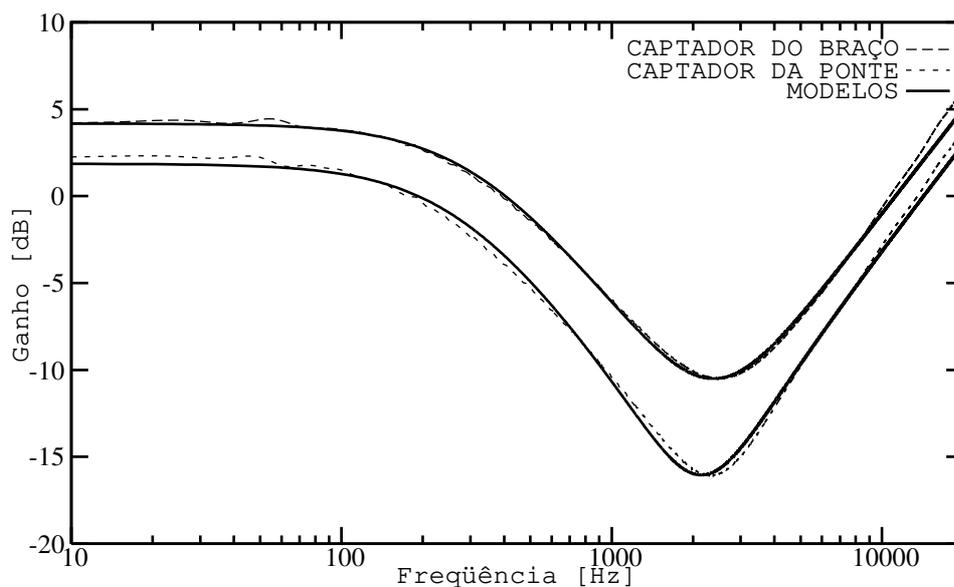


Fig. 4.5: Curvas medidas e seus modelos.

casos estudados. Na fase das funções houveram erros mais evidentes. Em frequências mais altas, o filtro residual obtido pela divisão entre o filtro medido e o calculado apresenta um crescimento acentuado da fase a partir de dos 10 kHz. Isto poderia ser explicado pela existência de zeros de alta ordem logo acima de 20 kHz. A fonte deste erro não é clara, pode ser de erros no procedimento de medição em si, uma má estimativa da função de transferência da placa de som, ou mesmo necessidade de se complementar o modelo utilizado.

## 4.2 Determinação de grandezas elétricas

A partir dos coeficientes medidos é possível fazer uma estimativa do valor das impedâncias do circuito. Os valores encontrados se encontraram na faixa esperada, mas seria desejável uma precisão maior. Se utilizarmos os valores medidos das resistências, existe mais de uma maneira de calcularmos a indutância, capacitância e ganho. Para obter os resultados apresentados na tabela 4.1 foram utilizados primeiro os três coeficientes dos polinômios obtidos, e mais os valores medidos de  $R_v$ ,  $R_t$  e  $R$ . A seguir foram utilizados apenas dois dos coeficientes, junto do valor medido de  $R_c$  para cada captador.

Variável	Captador do braço		Captador da ponte	
	3 coefs.	2 coefs. e $R_c$	3 coefs.	2 coefs. e $R_c$
$C_c$	0,718nF	3,42nF	1,13nF	3,46nF
$L_c$	15,6H	2,71H	11,4H	3,36H
$\frac{1}{L_c C_c}$	$89,6 \times 10^6$	$108 \times 10^6$	$77,6 \times 10^6$	$86,0 \times 10^6$
$k$	0,97	0,20	0,45	0,15

Tab. 4.1: Valores estimados dos componentes e ganho.

Esta técnica de obtenção dos parâmetros ainda precisa ser melhorada. Mas nosso objetivo era apenas ilustrar como este tipo de experimento pode ser realizado com equipamentos simples. Note que apesar da grande variação dos valores de  $L_c$  e  $C_c$  individualmente, o valor de  $\frac{1}{L_c C_c}$  não foi muito modificado entre as duas formas de cálculo.

## 4.3 Projeto de filtro digital

Dados os valores dos componentes do filtro da guitarra podemos projetar um filtro digital que simule uma função de transferência aproximada. Este filtro digital pode ser aplicado posteriormente em um sintetizador digital de sinais de guitarra.

Para obter os coeficientes do filtro digital foi utilizada a transformação bilinear. A figura 4.6 mostra o filtro obtido para diferentes valores de  $R_t$ . Note que o filtro apresentado não possui o zero na origem, formando assim um passa-baixas convencional, facilitando a interpretação do resultado.

O sinal sintetizado final será obtido pela aplicação deste filtro ao sinal proporcional à velocidade da corda no ponto captado. Portanto, se for sintetizada previamente a posição da corda, a aplicação de uma derivada ainda é necessária. O filtro resultante neste caso é um pico com inclinações de 20dB por década dos dois lados.

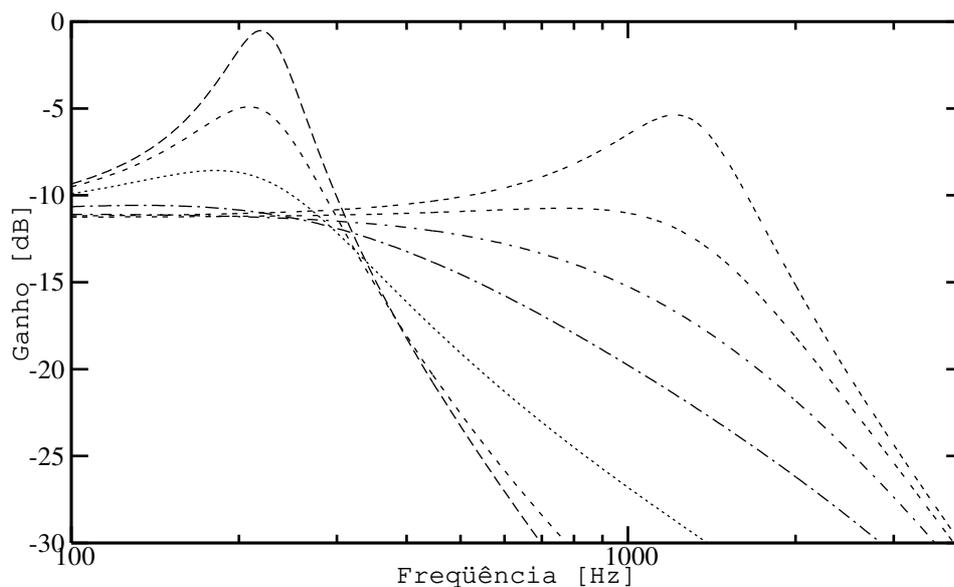


Fig. 4.6: Filtros obtidos com  $L_c = 10\text{H}$ ,  $R_c = 5,3\text{k}\Omega$ ,  $C_c = 1\text{nF}$ ,  $R_v = 500\text{k}\Omega$ ,  $C_t = 33\text{nF}$  e  $R_t = \{0,1, 5, 15, 37,49, 70, 140, 500\}\text{k}\Omega$ .

A resistência de entrada do circuito em que a guitarra é ligada pode afetar bastante o formato do filtro. Alguns circuitos pouco sofisticados, mas muito populares, possuem resistências de entrada de apenas dezenas de  $\text{k}\Omega$ . Nestas condições, mantendo as outras variáveis do caso em estudo, o filtro se torna um passa-baixas de primeira ordem bastante suave com  $R_t$  alto. Com  $R_t$  baixo, o filtro se torna um passa-baixas de segunda ordem com uma elevação de apenas pouco mais de um dB antes da frequência de corte.

As figuras 4.7 e 4.8 mostram o caminho dos zeros e pólos conforme variamos  $R_t$  de um valor baixo para um alto. Na figura 4.7, no início da variação, com  $R_t = 100\ \Omega$ , existem um pólo e um zero em  $S = -\infty$ , e um par de pólos perto do plano complexo. Conforme  $R_t$  aumenta, o zero se aproxima rapidamente do eixo imaginário, e os dois pólos se afastam. O zero cruza os pólos antes deles se tocarem. Por volta de  $R_t = 37\ \text{k}\Omega$  os pólos se encontram no eixo real, e começam a se afastar na direção ortogonal. Neste momento a função de transferência aparenta um filtro de primeira ordem.

Na figura 4.8 um dos pólos começa a se aproximar bastante do eixo imaginário, enquanto que o pólo que estava mais afastado também começa a ficar perto do terceiro. Estes dois pólos mais afastados acabam se encontrando ao redor de  $S = -8.000$  com  $R_t \simeq 71\ \text{k}\Omega$ . Eles então começam a se afastar, indo em direção ao eixo imaginário, até se aproximarem de suas posições limite. Enquanto isso, terceiro pólo e o zero vão se aproximando de  $S = -60$ . O caminho da figura 4.7 também está visível na figura 4.8.

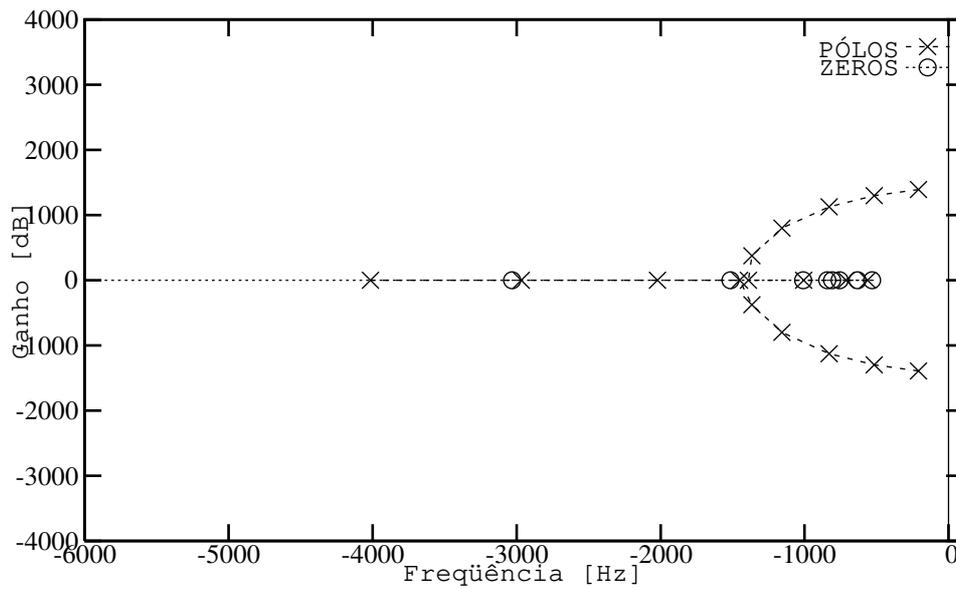


Fig. 4.7: Caminho dos pólos e zeros conforme a variação do controle de “tom” de uma guitarra.

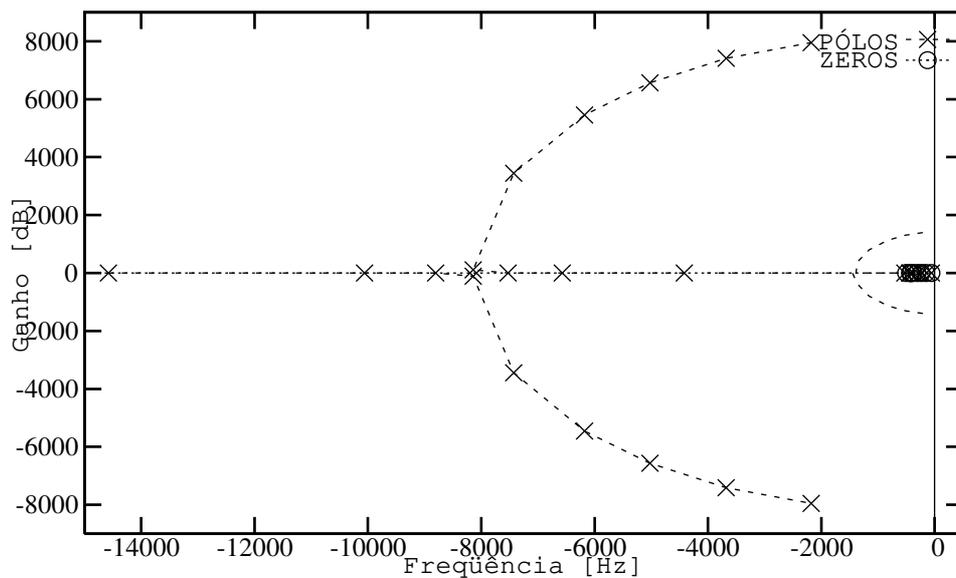


Fig. 4.8: Continuação do caminho dos pólos e zeros. Aqui, os pólos terminam se afastando do eixo real, ao contrário da figura anterior.

## 4.4 Conclusão

Nos capítulos anteriores estudamos o movimento de uma corda vibrante e a forma de onda criada por indução em captadores. Neste capítulo obtivemos o filtro linear que modela a distorção do sinal pelo caminho do transdutor até a entrada de algum circuito eletrônico. Se desejarmos sintetizar o sinal de uma guitarra “limpa”, basta aplicarmos ainda o filtro linear de um amplificador, ou ainda

um filtro de ambientação que modele a reverberação de uma sala e a localização de um ouvinte, por exemplo, e assim teremos assim o sinal final.

Nosso processo de medição é bastante simples, e útil. Ele pode ser aproveitado em outras aplicações, como na obtenção de funções de transferência de salas. É necessário ainda fazer uma avaliação do desempenho de sinais TSP, e testar sinais semelhantes mais modernos.

Além de filtros lineares, a guitarra é geralmente utilizada com circuitos de distorção que inserem não-linearidades no sistema, distorcendo o sinal entre a guitarra e a emissão do sinal pelas caixas acústicas de amplificadores. Este é o tema do capítulo 5.

# Capítulo 5

## Distorções Musicais

### 5.1 História

Praticamente todos fenômenos físicos do cotidiano possuem algum limite de operação onde um modelo simplificado de seu funcionamento deixa de valer devido a alguma não-linearidade desconsiderada previamente. A lei de Hooke é um modelo linear para a elasticidade de objetos que é quase sempre válida para pequenas distorções. Quando estas distorções se tornam muito grandes, geralmente encontramos algum tipo de não-linearidade, como endurecimento da constante de elasticidade, ou rompimento.

Já pudemos observar uma elasticidade não-linear nas cordas da guitarra. Muitos objetos relacionados à acústica podem apresentar características não-lineares quando vibrados em amplitude elevada, dando origem a componentes senoidais com frequências ausentes dos sinais de excitação. Funções de reprodução não-lineares estão presentes até mesmo no próprio ouvido humano [79, cap. 8].

Não é surpreendente portanto que funções de reprodução de sinais não-lineares tenham sido encontradas em amplificadores e caixas de som. Amplificadores eletrônicos sempre possuíram distorções que se revelam para sinais de grandes amplitudes. Caixas de som também podem começar a distorcer os sinais a partir de um certo nível de entrada.

O resultado é que na história da música moderna sempre existiu a possibilidade de se tocar uma guitarra elétrica utilizando um amplificador e obter algum tipo de distorção no sinal. O som da guitarra distorcida foi com o tempo ganhando o gosto de alguns músicos, especialmente tocadores de *blues*.

Um músico importante na história da guitarra elétrica foi Link Wray, que muitos consideram ter feito um uso pioneiro da distorção [95]. Ele ainda introduziu o uso indiscriminado de *power chords*, o que faz parte hoje do estilo de muitos guitarristas. Wray influenciou muitos músicos, em especial alguns conhecidos por seus usos da distorção, como Jimi Hendrix e Neil Young.

A distorção de guitarras já era algo considerado importante para alguns estilos de música nos anos 1960. Em 1964 a música *You Really Got Me* da banda The Kinks ganhou muita notoriedade, e foi o primeiro grande sucesso a trazer o som de uma guitarra distorcida.

A partir desta época alguns fabricantes de amplificadores e guitarras começaram a dar maior atenção à distorção, e surgiu o conceito do pedal de distorção: um dispositivo colocado entre a guitarra e o amplificador com o objetivo de distorcer o sinal, com um interruptor acionado pelos pés [96]. Os pedais também podiam ter o intuito de dar mais ganho ao sinal, ou possibilitar algum tipo de filtragem, mas com o tempo o objetivo de se utilizar um pedal destes passou a ser exclusivamente a produção do timbre característico da guitarra distorcida.

Uma das primeiras músicas famosas que utilizaram um pedal de distorção foi *(I Can't Get No) Satisfaction* dos The Rolling Stones, de 1965. Nesta obra foi utilizado um pedal Maestro Fuzz-Tone FZ-1 da Gibson.

Um pedal de distorção muito famoso é o Fuzz Face, notoriamente utilizado por Jimi Hendrix. Este músico ainda teve certa influência no desenvolvimento de outro pedal muito conhecido, utilizado ainda hoje por inúmeros músicos, o Big Muff  $\pi$  da empresa Electro-Harmonix.

## 5.2 Circuito construído

Pedais de distorção podem ser projetos eletrônicos de fácil construção. Muitos circuitos conseguem resultados satisfatórios mesmo com grande simplicidade. É muito fácil encontrar na Internet diagramas esquemáticos para a fabricação de circuitos de distorção, havendo várias comunidades dedicadas a isto [97, 98].

Construímos em nossos estudos um pedal de distorção baseado no circuito do Fuzz-Face, que utiliza apenas dois transistores. Na saída do circuito original ligamos ainda um estágio de filtragem inspirado no projeto do Big Muff  $\pi$ . O circuito resultante está na figura 5.1.

Os transistores  $Q1$  e  $Q2$  formam o circuito do Fuzz Face. A análise do ponto de funcionamento não é muito trivial. Esta configuração é conhecida por alguns como *voltage feedback*. Os resistores na base e emissor de  $Q2$  determinam a corrente contínua neste transistor. Pode-se utilizar o conceito de reflexão de impedâncias para fazer o projeto dos valores. O resistor na base de  $Q1$  determina a corrente DC nele, dada a tensão no emissor de  $Q2$ .

A distorção ocorre devido à saturação e corte no segundo transistor. Pode haver saturação no primeiro estágio, mas antes disso ocorrer o segundo já entra em corte. O ajuste dos ganhos e tensão dos coletores determinam os pontos da onda a serem cortados. Como são parâmetros independentes é possível (e até fácil) criar distorções assimétricas. Para níveis de tensão suficientemente baixos, ocorre corte apenas em metade da onda, na porção negativa ou positiva dependendo da configuração

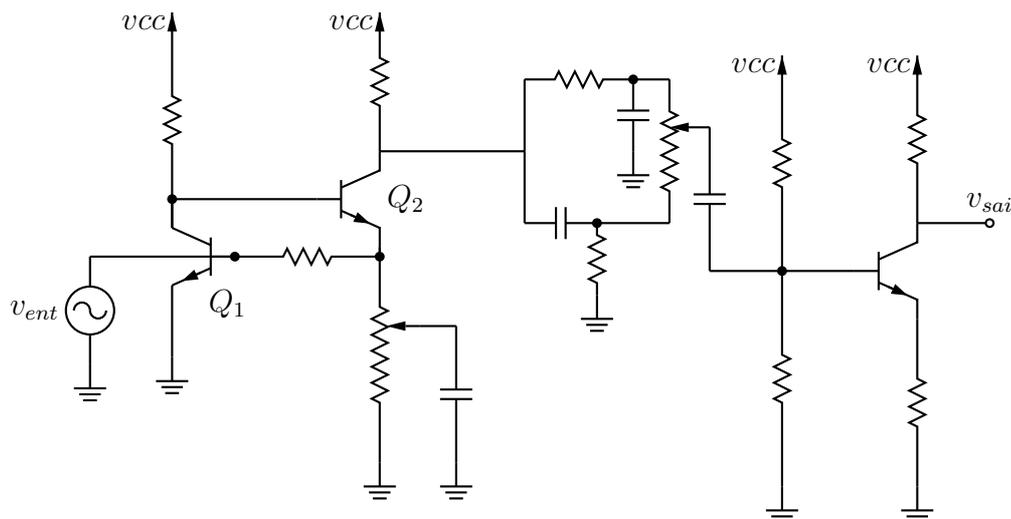


Fig. 5.1: Circuito para distorção musical.

do circuito. O ganho do segundo estágio é controlado através do resistor variável no emissor de  $Q_2$ . Este é o potenciômetro de controle de quantidade de distorção acessível pelo músico.

A figura 5.2 mostra resultados da simulação do circuito no programa SPICE. As curvas são a forma de onda em diferentes pontos do circuito para uma entrada senoidal de 100Hz. Na legenda,  $V_{c1}$  e  $V_{b1}$  são as tensões no coletor e base do primeiro transistor, cujo emissor é aterrado. A base do segundo é ligada ao coletor do primeiro, e seu coletor e emissor são  $V_{c2}$  e  $V_{e2}$ .

A saída do circuito de distorção, no coletor de  $Q_2$ , entra então em dois filtros, um passa-altas e um passa-baixas. Estes filtros são projetados com frequências de corte próximas. O potenciômetro colocado entre as saídas destes filtros possui uma impedância relativamente alta. Apesar de rudimentar, o resultado é uma soma ponderada dos sinais dos filtros. Este sinal filtrado passa por fim por um último estágio de amplificação onde não se espera que ocorram distorções.

A figura 5.3 mostra formas de onda obtidas para um entrada senoidal com diferentes amplitudes, e com um certo ganho fixo no controle do pedal. No gráfico de cima os sinais foram tomados diretamente da saída do estágio de distorção. No de baixo, utilizamos o filtro de saída regulado para passa-altas. Cada curva é a saída para uma amplitude diferente, sendo que as mais abaixo são as de menor amplitude. Foram somados níveis DC para auxiliar na visualização.

### 5.3 Estimação de parâmetros

Era nosso desejo encontrar uma forma de medir os parâmetros de um pedal de distorção para tentar reproduzir seu funcionamento em um computador. O modelo digital seria composto por alguma função de distorção, seguida de um filtro linear.

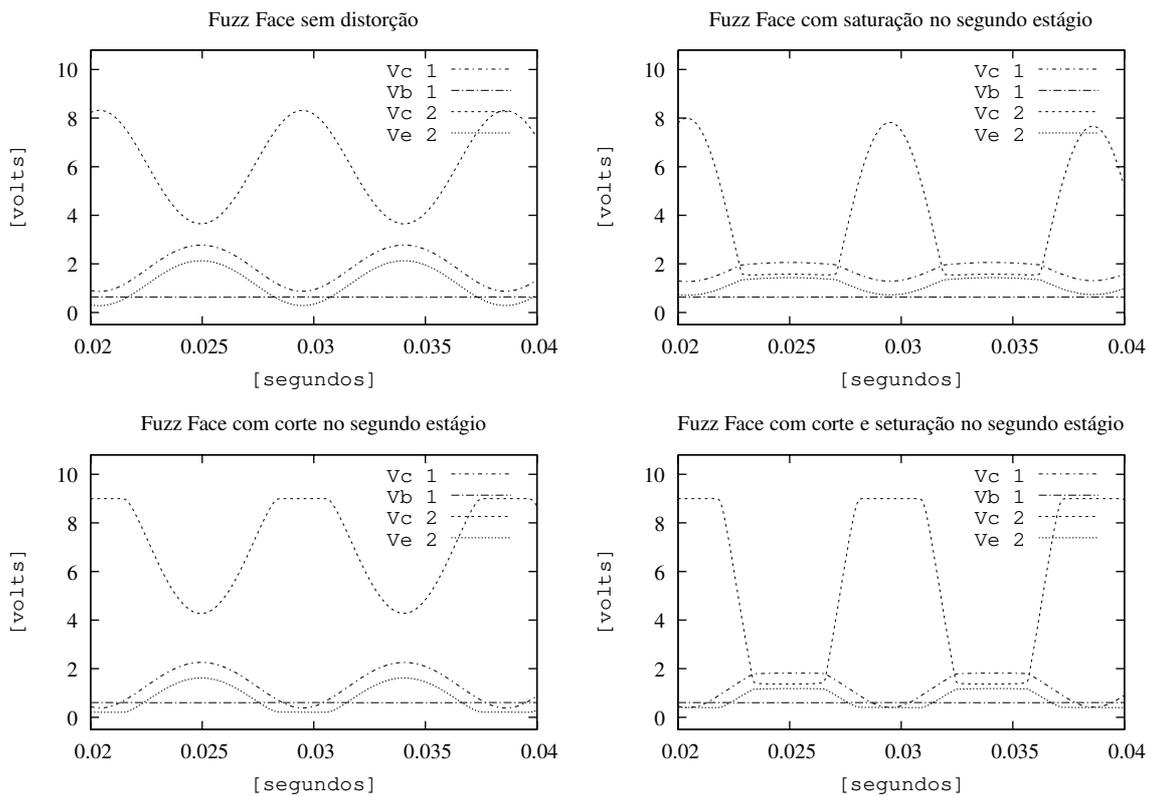


Fig. 5.2: Resultados da simulação: operação sem distorção, com saturação em  $Q_2$ , corte em  $Q_2$ , e com corte e saturação em  $Q_2$

Uma possibilidade é utilizar um osciloscópio e medir cuidadosamente a parte não-linear do circuito com uma onda triangular, por exemplo, e estimar o filtro inserindo um sinal senoidal no ponto apropriado e realizar medições. Nossa intenção entretanto era encontrar uma maneira de realizar esta medição apenas a partir da análise do sinal de saída, com um sinal de entrada conhecido.

No estudo de sistemas dinâmicos o chamado modelo de Hammerstein é justamente o que estamos procurando: uma distorção sem memória seguida de um filtro. Ele se contrapõe ao modelo de Wiener, onde o filtro fica antes da distorção.

A estimação dos parâmetros de modelos como o de Hammerstein é uma ativa área de pesquisa. Existem métodos de diversos paradigmas para abordar o problema [99, 100]. Um dos primeiros algoritmos propostos utiliza um método iterativo para a minimização do erro a partir de uma entrada conhecida [101]. Outras formas de otimização iterativa, como algoritmos genéticos, também já foram exploradas [102].

Muitos métodos, cegos ou não, costumam se basear principalmente em ruídos brancos gaussianos na entrada. Alguns métodos já foram estudados também para sinais senoidais [103, 104].

Ao escolher um método para tentar aplicar, procuramos por algum que não se baseasse em otimi-

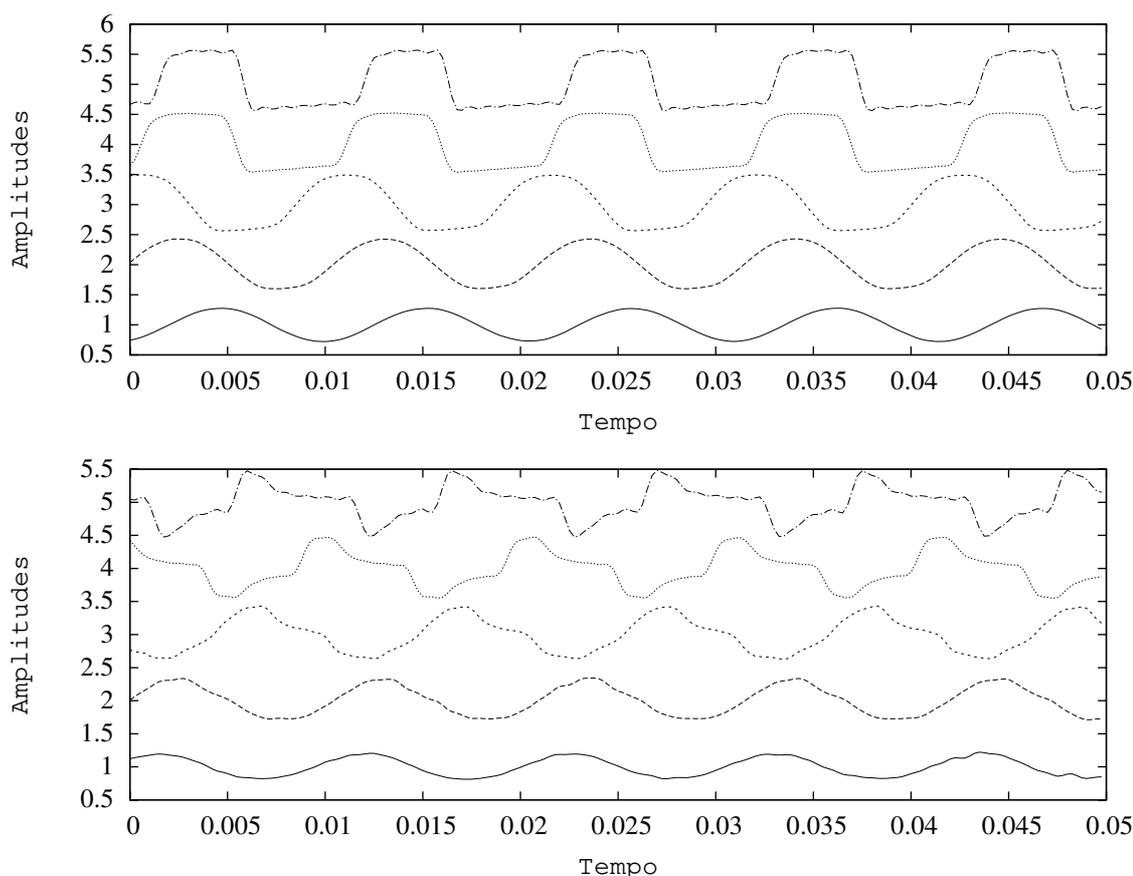


Fig. 5.3: Saídas do circuito de distorção para diferentes amplitudes de entrada, sem filtro, e com filtro passa-altas. Os níveis DC foram adicionados para visualização.

zações iterativas ou análises fortemente estocásticas. Por fim, inspirados por um trabalho do NICS onde polinômios de Чебышев (Chebyshev) são utilizados para modelar uma função de distorção implementada em um computador, procuramos tentar desenvolver um método que fosse baseado nessa família de polinômios, e em sinais de entrada senoidais e análise harmônica. Uma das motivações para isto foi a expectativa de que um sinal de entrada senoidal possa facilitar a aplicação do método em um sistema mais complexo, onde também existe um filtro linear na entrada da distorção. Isto é esperado em alguns pedais e no sistema completo da guitarra elétrica.

### 5.3.1 Método para distorções sem filtro

Polinômios de Чебышев possuem a seguinte propriedade: Se passarmos pelo polinômio de  $N$ -ésima ordem uma senóide de amplitude 1, e frequência  $\omega$ , a saída é uma senóide de amplitude 1 e frequência  $N\omega$ . Logo:

$$T_N(\sin(\omega t)) = \sin(N\omega t) \quad (5.1)$$

Por exemplo,

$$2 \operatorname{sen}^2(\omega t) - 1 = \operatorname{sen}(2\omega t) \quad (5.2)$$

$$16 \operatorname{sen}^5(\omega t) - 20 \operatorname{sen}^3(\omega t) + 5 \operatorname{sen}(\omega t) = \operatorname{sen}(5\omega t) \quad (5.3)$$

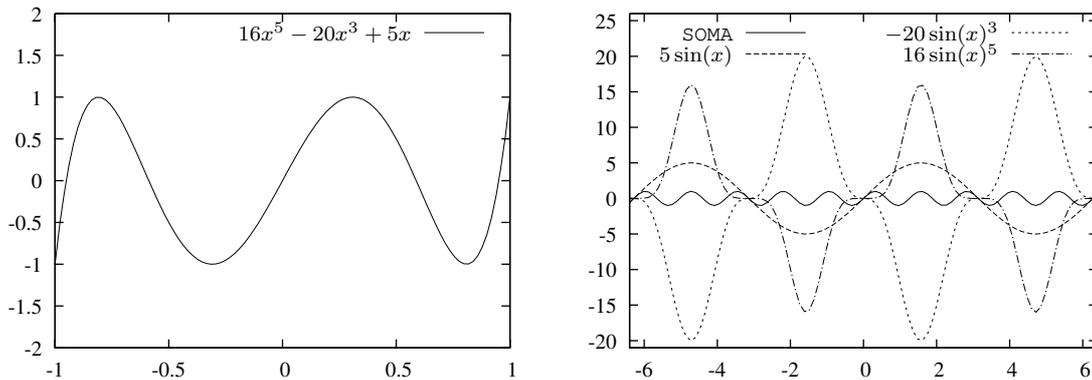


Fig. 5.4: Polinômio de quinta ordem (esquerda), e parcelas separadas e soma final (direita).

Uma função de distorção sem memória  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  pode ser representada como um polinômio (série de Taylor):

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \quad (5.4)$$

Se jogarmos uma senóide nesta função, obteremos na saída um sinal periódico da mesma frequência, que pode ser decomposto em senóides de frequências harmônicas.

$$f(\operatorname{sen}(\omega t)) = p_0 + p_1\operatorname{sen}(\omega t) + p_2\operatorname{sen}(2\omega t) + \dots \quad (5.5)$$

Podemos substituir cada uma destas senóides pela aplicação da senóide da entrada ao polinômio de Чебышёв da ordem apropriada.

$$f(\operatorname{sen}(\omega t)) = p_0 + p_1T_1(\operatorname{sen}(\omega t)) + p_2T_2(\operatorname{sen}(\omega t)) + \dots \quad (5.6)$$

Daí podemos ver que é possível calcular os coeficientes do polinômio a partir das amplitudes dos harmônicos, e reciprocamente. Os coeficientes dos polinômios de Чебышёв definem uma matriz de transformação

$$\vec{c} = \mathbf{T} \vec{p}. \quad (5.7)$$

Esta relação sugere imediatamente a possibilidade de utilizarmos senóides para medir funções não-

lineares como diodos e transistores em eletrônica. Encontramos na literatura apenas uma menção a este método de medição de funções, em um artigo bastante recente [105].

Aplicamos este método ao circuito que construímos. Obtivemos como resultado um polinômio de 9ª ordem que ao menos apresentou um formato sigmoidal na região próxima de 0, com uma leve assimetria.

Aplicamos este método para o circuito que construímos. Havia apenas uma leve filtragem de baixas frequências, que se pode notar pela inclinação da crista da onda, que devia ser reta. O resultado está na figura 5.5.

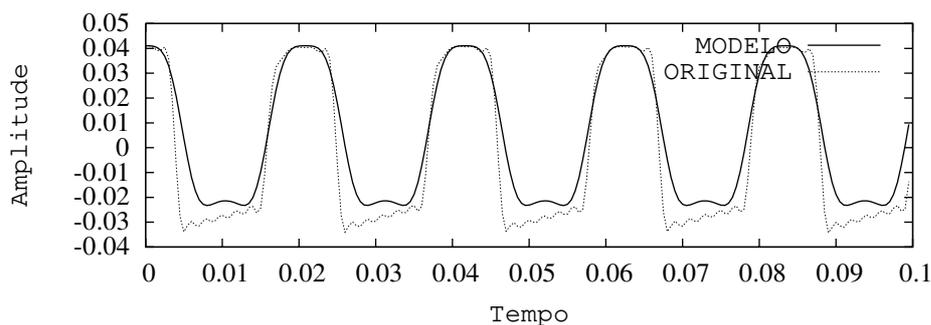


Fig. 5.5: Curva original, e aproximada pelo método.

### 5.3.2 Método para distorções com filtro

Investigando as propriedades destes polinômios, encontramos um critério que pode vir a ser útil em um método de medição de parâmetros que considera o filtro.

Se aplicarmos no sistema uma senóide de amplitude relativa  $A$ , isto seria equivalente a medirmos uma nova função de distorção cujo polinômio é dado por

$$f_A(x) = f(Ax) = c_0 + c_1(Ax) + c_2(A^2x^2) + \dots \quad (5.8)$$

Os novos coeficientes podem ser obtidos multiplicando-se cada coeficiente:  $c_n^A = c_n A^n$ . Esta operação é equivalente a multiplicarmos o vetor de coeficientes originais por uma matriz diagonal

$$\vec{c}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & A & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & A^2 & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \times \vec{c} \quad (5.9)$$

$$\vec{c}_A = \mathbf{D}_A \vec{c}. \quad (5.10)$$

Se substituirmos  $\vec{c}$  segundo (5.7) teremos a relação entre as amplitudes originais e as obtidas com a nova amplitude:

$$\mathbf{T}\vec{p}_A = \mathbf{D}_A\mathbf{T}\vec{p}. \quad (5.11)$$

Entretanto  $\vec{p}$  não é acessível, mas apenas  $\vec{q}$ , que são as amplitudes na saída do filtro. Como cada frequência é atenuada por um valor constante, determinado pela função de transferência, podemos definir outra relação linear:

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & h_2 \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \times \vec{p} \quad (5.12)$$

$$\vec{q} = \mathbf{H}\vec{p}, \quad (5.13)$$

onde os  $h_n$  são os módulos da função de transferência em cada frequência harmônica. As fases são desprezadas. Note que a saída da distorção é um sinal simétrico. As fases do sinal final são devido apenas ao filtro na saída.

Substituindo novamente, temos no sistema total:

$$\mathbf{TH}^{-1}\vec{q}_A = \mathbf{D}_A\mathbf{TH}^{-1}\vec{q}. \quad (5.14)$$

Podemos substituir  $\mathbf{H}^{-1}\vec{q}$  por  $\mathbf{Q}\vec{g}$ , onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz diagonal com os valores das amplitudes medidas, e  $\vec{g}$  são os inversos dos ganhos do filtro. Assim temos

$$\mathbf{TQ}_A\vec{g} = \mathbf{D}_A\mathbf{TQ}\vec{g}. \quad (5.15)$$

As matrizes nesta equação ( $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}, \mathbf{T}, \mathbf{D}_A$ ) ou são conhecidas *a priori*, ou podem ser medidas, nos fornecendo a matriz  $\mathbf{M}_A$  que satisfaz:

$$\vec{g} = \mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}_A\mathbf{TQ}\vec{g} \quad (5.16)$$

$$\vec{g} = \mathbf{M}_A\vec{g} \quad (5.17)$$

Logo, um vetor com os inversos dos ganhos do filtro poderia ser calculado encontrando-se o auto-vetor de auto-valor unitário da matriz  $\mathbf{M}_A$ .

### 5.3.3 Testes

Tentamos aplicar o método em sinais gerados em um computador. A função de distorção utilizada nos testes foi a exponencial, por ser assimétrica. Isto seria desejável por desconhecermos o efeito de amplitudes nulas no desempenho do algoritmo. Os filtros testados foram suaves, de primeira ordem, tanto de resposta finita quanto infinita [76]. Foram também aplicados diferentes níveis de ruído.

O método não deu certo porque não foi possível encontrar um auto-valor que fosse claramente um candidato ao valor unitário procurado. Sempre haviam dois ou três auto-valores próximo de 1,5, por exemplo.

Testamos ainda uma outra forma de obter o vetor de interesse. É possível reescrever a equação (5.15) e obter

$$(\mathbf{TQ}_A - \mathbf{D}_A \mathbf{TQ}) \vec{g} = \vec{0}. \quad (5.18)$$

Segundo esta equação, nosso vetor seria o espaço nulo desta matriz. Tentamos portanto utilizar a decomposição em valores singulares, tomando como resposta uma soma dos vetores relativos aos menores valores singulares. O formato das soluções obtidas não se aproximaram nem um pouco do esperado.

Será necessário uma investigação maior para descobrir se há algo de fundamentalmente errado no método proposto. Nossas contas não sugerem isto, mas pode ser que nosso método ofereça na realidade uma solução sub-determinada, com parâmetros livres sendo inadvertidamente ajustados. Seria necessário portanto utilizar mais informações para encontrar a solução desejada.

Seria interessante buscar uma forma de aproveitar no algoritmo medições obtidas em mais de dois níveis de amplitude. Também pode ser possível aproveitar nossas contas apenas para determinar um critério a ser utilizado em um algoritmo iterativo de otimização.

## 5.4 Distorções em sinais de guitarra

Nesta seção apresentaremos por fim características que se podem observar na aplicação de um sinal como o de uma guitarra em uma função de distorção.

### 5.4.1 Função de distorção utilizada

Como já pudemos mencionar, existe uma grande variedade de formatos de função de distorção. Existem funções simétricas e assimétricas, suaves e descontínuas. Apresentaremos aqui apenas análises feitas em uma única função selecionada. Nosso interesse é apenas ilustrar certas características

do sinal distorcido que são freqüentemente omitidas em debates acerca de distorção musical.

Utilizamos a função arco-tangente para distorcer os sinais por ser uma função de simetria ímpar, estritamente crescente e de imagem limitada. Esta é uma das mais populares funções denominadas *sigmoidais*, como a função *erf* e a tangente hiperbólica. Elas são freqüentemente utilizadas em alguns sistemas de processamento que requerem não-linearidades desta forma, como em equalização cega, análise de componentes principais não-linear [106] e redes neurais artificiais [107]. Muitas vezes suas propriedade analíticas contribuem para o estudo do funcionamento dos sistemas, mas o formato preciso delas nem sempre é crítico.

A fórmula de nossa função de distorção foi

$$f(x) = \frac{\text{atan}(k_d x)}{k_d \pi}, \quad (5.19)$$

onde o fator  $k_d$  controla o nível de distorção, variando de uma suave atenuação dos picos da onda de entrada, até a distorção mais forte possível, onde  $f(x) = +1$  para  $x > 0$  e  $-1$  para  $x < 0$ .

Uma característica fundamental e bem-conhecida da realização de operações não-lineares é que os sinais resultantes podem possuir componentes senoidais que não estavam presentes no sinal original. Em especial, pode ser que componentes de alta freqüência sejam geradas, e pode ser que em sinais amostrados no tempo elas ultrapassem o limite de Nyquist [82], causando um *aliasing*, ou *falseamento*. Portanto é sempre necessário trabalhar com sinais super-amostrados.

A figura 5.6 mostra a ocorrência de *aliasing* após a distorção. Uma senóide com a freqüência ligeiramente superior a um quarto da freqüência de Nyquist foi distorcida com  $k_d = 10.000$ . O resultado esperado deveria possuir apenas uma nova componente com o triplo da freqüência.

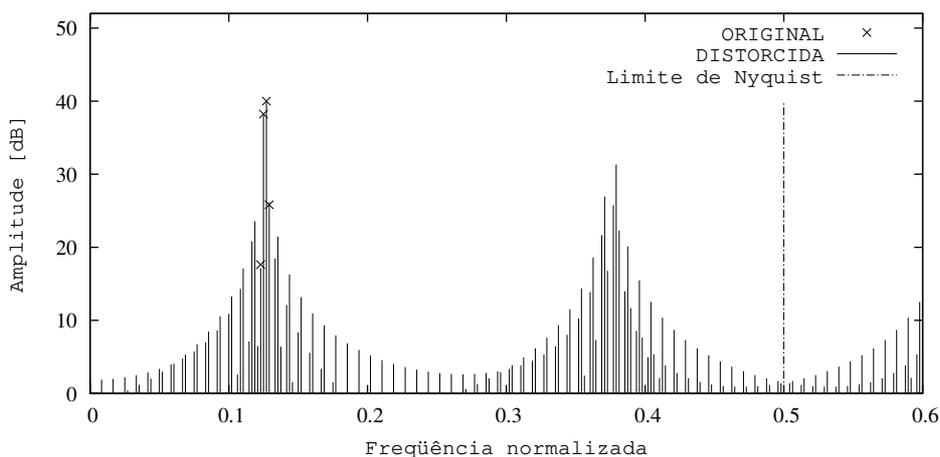


Fig. 5.6: Ocorrência de *aliasing* na distorção de um sinal amostrado de alta freqüência.

### 5.4.2 Distorção de ruído branco filtrado

Aplicamos ruído branco gaussiano à função mencionada acima com  $k_d = 1000$ . O resultado está na figura 5.7. Podemos observar que a distorção afeta a forma de onda tornando-a concentrada em apenas dois níveis. Histogramas desta onda distorcida para diferentes valores de  $k_d$  irão se afastar gradualmente da forma gaussiana, se aproximando de uma distribuição com dois picos em estreitas faixas de valores.

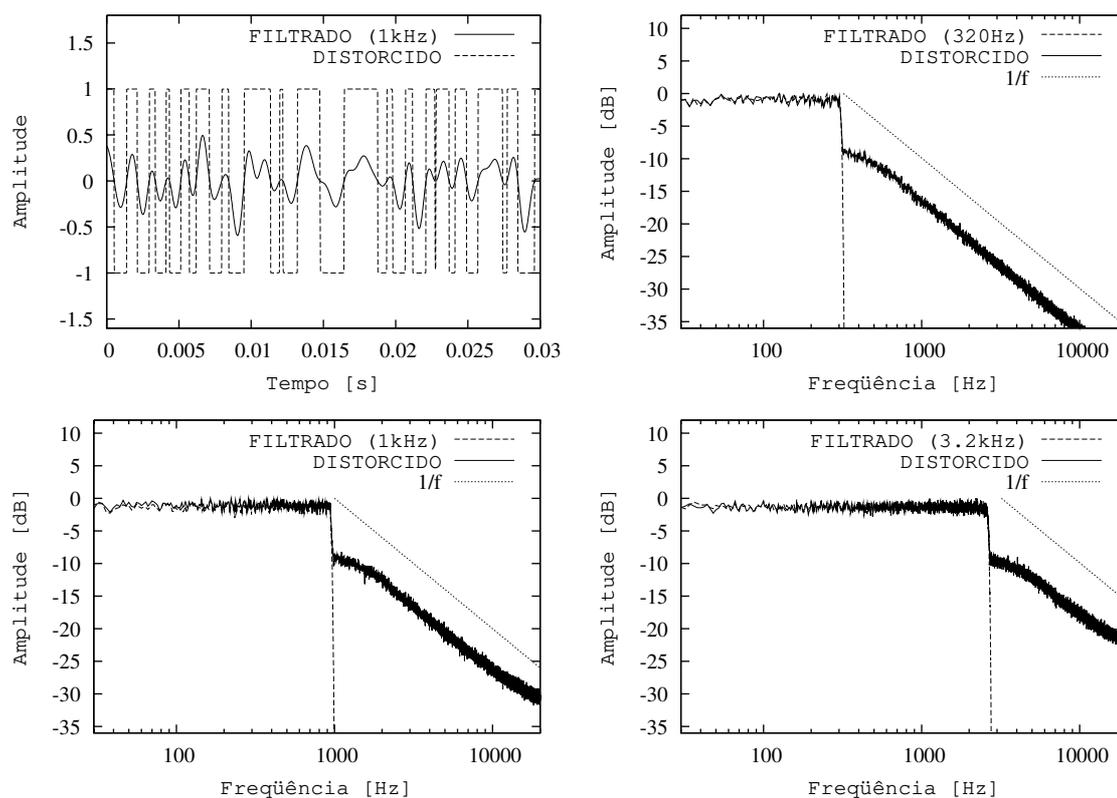


Fig. 5.7: Exemplo de ruído branco filtrado e subsequentemente distorcido (no topo à esquerda), e espectros do sinal original e distorcido para diferentes frequências de corte.

Para cada diferente frequência de corte utilizada foram geradas 100 instâncias do sinal. Obtivemos o espectro de cada sinal gerado, e os somamos para obter uma estimativa da média do valor da densidade espectral de potência do sinal distorcido para cada frequência de corte utilizada. Podemos observar o surgimento de um ruído em altas frequências, com a amplitude decaindo de acordo com o inverso da frequência. Esta taxa de decaimento é comum de se encontrar em outros sinais que possuem descontinuidades seguidas de regiões suaves, como a onda quadrada.

### 5.4.3 Distorção de sinais periódicos

Como já discutimos, uma senóide pura distorcida gera uma onda periódica. As amplitudes das componentes harmônicas deste sinal distorcido dependem da forma da função de distorção, e os polinômios de Чебышёв podem ser utilizados para estudar esta relação.

Além dos sinais senoidais, qualquer sinal periódico dá origem a novos sinais periódicos de frequência igual ou múltipla ao ser distorcido, havendo modificações apenas nas amplitudes dos harmônicos. Na figura 5.8 apresentamos os valores das amplitudes de um sinal triangular distorcido para diferentes valores de  $k_d$ . Com a distorção fraca, podemos constatar o decaimento com  $1/f^2$  característico de ondas triangulares. No caso da distorção mais forte, é possível perceber que as menores frequências começam a apresentar um decaimento com  $1/f$ , coerente com a aproximação do sinal a uma onda quadrada.

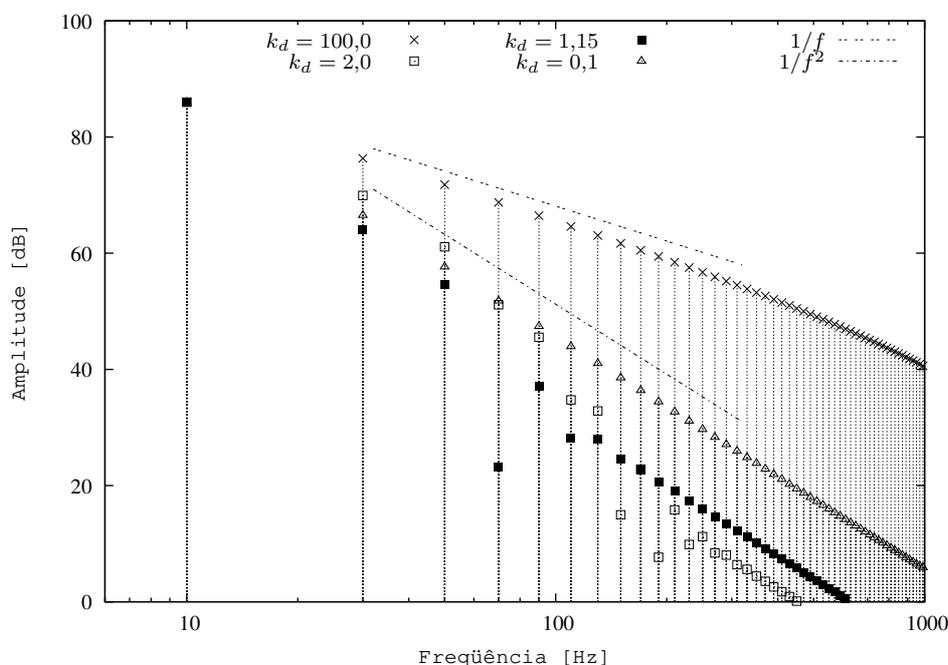


Fig. 5.8: Espectros de uma onda triangular distorcida com diversas intensidades.

É interessante notar ainda que existe uma região de valores intermediários de  $k_d$  em que há um forte decréscimo das amplitudes de alguns harmônicos. No gráfico apresentado podemos ver que o sétimo harmônico para  $k_d = 0,15$  é cerca de 60dB mais fraco do que o harmônico fundamental. O que ocorre é que a distorção atenua os picos da onda triangular, tornando-a mais próxima de uma senóide, para posteriormente começar a formar uma onda quadrada. Este é um bom exemplo das pequenas dificuldades no estudo de sistemas não-lineares, mostrando que não se pode afirmar que distorções sempre elevam a potência dos harmônicos.

É importante considerarmos também o que acontece quando temos sinais periódicos sem a frequência fundamental. A figura 5.9 mostra o resultado da distorção de uma soma de um sinal composto por uma senóide somada a outra com  $6/5$  da frequência. O resultado é que surgem harmônicos com a frequência do máximo divisor comum das duas componentes. Em especial podem surgir componentes de baixa frequência, chamadas por alguns de *sub-harmônicos* [47].

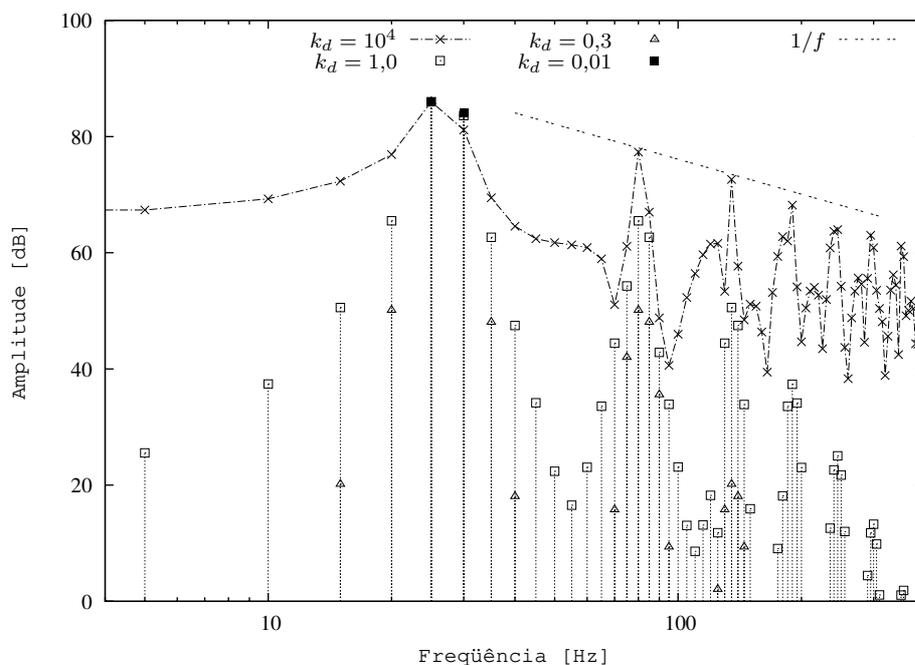


Fig. 5.9: Espectros de uma onda distorcida com sub-harmônicos.

#### 5.4.4 Distorção de sinais quasi-periódicos

Se o sinal sendo distorcido não for uma soma de senóides harmônicas, ou de proporções racionais, podem surgir componentes senoidais na saída com valores de frequência que não se relacionam de forma simples com as frequências originais.

Freqüentemente surgem os chamados “tons de diferença” no sinal distorcido [79]. É fácil entender o motivo do surgimento destas componentes se encararmos a função de distorção como um polinômio. Ao multiplicar o sinal por ele mesmo realizamos no domínio da frequência uma convolução do sinal por ele mesmo. Assim surgem componentes com valores de frequências obtidos por somas e subtrações dos valores das componentes originais.

Um efeito interessante que se pode observar é que quando as componentes originais não são múltiplas inteiras de algum divisor comum podem surgir tons de diferença próximos uns dos outros, dando origem a componentes senoidais com modulações de baixa frequência (batimentos).

Somas de senóides com relações racionais entre as frequências são cruciais em toda a música, sendo que é nisso que se baseia a harmonia e a construção de todas escalas musicas tradicionais. Escalas mais modernas, como a temperada de 12 semitons [108], também buscam oferecer notas com frequências de relações aproximadamente racionais.

Ao se tocar instrumentos, principalmente os de corda, é fácil perceber que alguns pares de notas possuem componentes de frequências muito próximas, outras são muito pouco coincidentes, e outros pares ainda possuem componentes próximas, mas suficientemente afastadas para causar batimentos de períodos longos o bastante para serem ouvidos.

Por exemplo, se pegarmos uma determinada nota na escala temperada, o quinto semitom acima dela possui uma frequência  $2^{\frac{5}{12}} \simeq 1,3348$  vezes maior, o que é muito próximo de  $4/3$ . Para o sétimo semitom temos  $2^{\frac{7}{12}} \simeq 1,4983$ , próximo de  $3/2$ . A diferença entre os valores exatos e as aproximações racionais nestes casos são de 1,96 e  $-1,96$  centésimos de semitom [109]. A frequência do sexto semitom, entretanto, é  $2^{\frac{6}{12}} = \sqrt{2} \simeq 1.4142$  maior que a referência. Este valor pode ser aproximado pela razão  $7/5$ , que já não é uma razão muito atraente por possuir fatores muito grandes, mas ainda por cima é uma aproximação muito ruim, com 17,49 centésimos de semitom de distância. (A razão  $99/70$  se aproxima mais, mas possui fatores ainda piores.)

A soma de uma nota com a localizada seis semitons acima dela criaria portanto uma onda com uma frequência cinco vezes menor, caso a aproximação  $7/5$  fosse razoável. Isto significa que para uma nota de 82,4Hz poderíamos gerar uma componente inaudível de 16,5Hz ao distorcer a soma destas notas.

Entretanto, como esta aproximação de proporção racional é ruim, não ocorre esta geração de uma componente senoidal pura. Surgem componentes próximas, dando origem a componentes aproximadamente harmônicas moduladas em baixa frequência. A figura 5.10 traz um espectrograma da distorção da soma de uma senóide de 100Hz com uma seis semitons acima. É possível ver claramente que alguns dos harmônicos gerados possuem uma modulação de aproximadamente 6Hz.

### 5.4.5 Sinais mais complexos

A figura 5.11 mostra o espectrograma de um sinal sintetizado. O sinal limpo foi criado com uma soma de 20 senóides com amplitudes dadas pelo modelo do capítulo 2, com parâmetros  $P = 0,1$  e  $C = 0,35$ . As frequências das parciais de cada nota foram elevadas ligeiramente, de acordo com  $1 + 0,025f^{1,2}$ , para criar sinais que não fossem perfeitamente harmônicos, assim como os observados em nossas gravações. Foram somadas uma nota fundamental com frequência de 100 Hz e uma nota sete semitons acima (o chamado *power chord*, sem a oitava).

A figura 5.12 mostra um espectrograma da segunda nota de uma gravação da música *Satisfaction* dos Rolling Stones. É possível observar que o sinal é composto por componentes aproximadamente

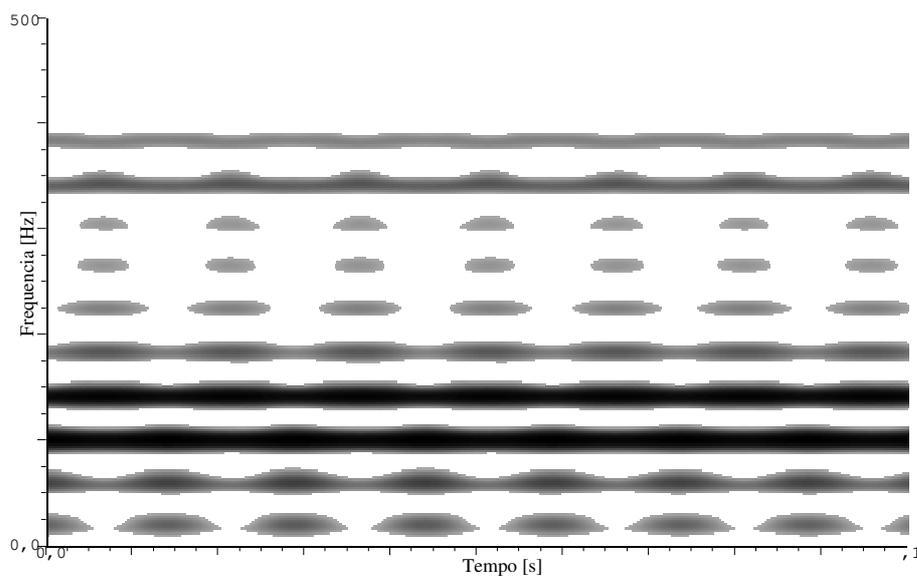


Fig. 5.10: Espectrograma de uma onda quasi-periódica distorcida, apresentando batimentos lentos.

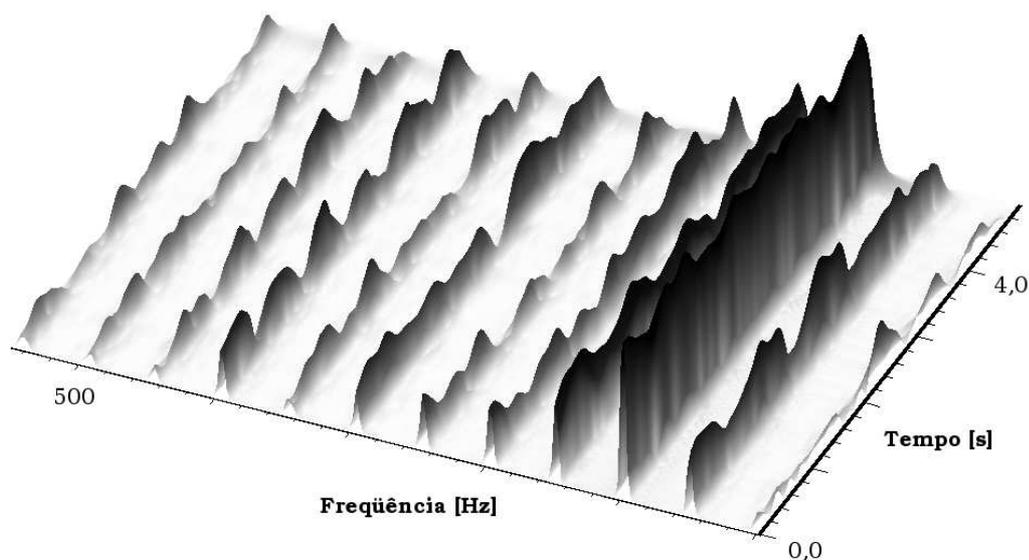


Fig. 5.11: Espectrograma obtido de uma nota sintetizada.

harmônicas moduladas no tempo por envoltórias lentas.

Como podemos portanto observar, o processamento de um sinal suficientemente complexo por uma não-linearidade sem memória faz surgir componentes senoidais com modulações lentas, o que é justamente a característica do sinal da guitarra limpa que mais procuramos ressaltar no primeiro capítulo. Isto demonstra a necessidade de buscarmos formas de análise que nos permitam lidar melhor com sinais com estas características, já que elas ocorrem tanto em sinais limpos quanto em distorcidos.

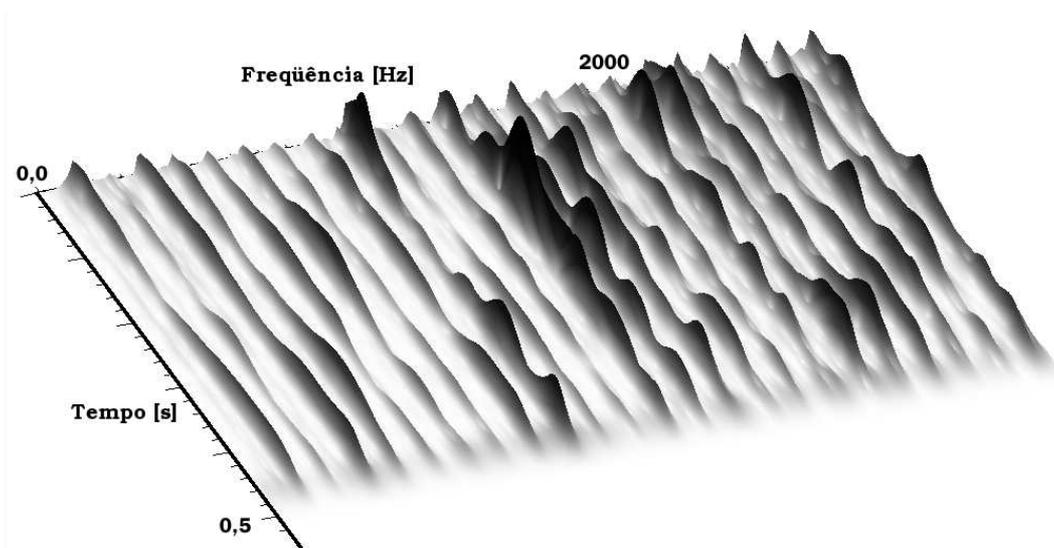


Fig. 5.12: Espectrograma da segunda nota de uma gravação da música *Satisfaction*.

## 5.5 Transformação de parâmetros de distorção

Em um artigo já publicado em um congresso [110] apresentamos uma técnica para auxiliar o uso de distorções musicais como as apresentadas aqui.

O modelo de função de distorção utilizado neste estudo foi simétrico, baseado em uma curva composta por segmentos de reta. Este modelo aproxima o comportamento de circuitos para distorção baseados em limitadores construídos com amplificadores operacionais e diodos.

Os parâmetros ditos “físicos” que regem este modelo são o nível  $x$  de intensidade do sinal a partir de onde começa a haver o corte, e o nível  $y$  aonde este limiar é mapeado. O modelo é normalizado de tal forma que o nível de entrada 1,0 se mantém com este valor.

A escolha destes dois valores no uso prático do modelo não é confortável ao músico. É fácil notar em primeiro lugar que a região onde  $x \simeq y$  não é muito interessante, assim como valores grandes de  $x$  não possuem muita importância. É fácil entender o motivo destas duas características: No primeiro caso não ocorre muita distorção porque o mapeamento não é muito significativo. No segundo, trata-se do fato de que o sinal raramente atinge amplitudes muito altas. Encontramos valores de amplitude RMS de aproximadamente 0,2 para sinais gravados de instrumentos de corda normalizados para sua amplitude máxima valer 1,0.

O nosso objetivo foi então buscar um mapeamento destes dois parâmetros para um novo par  $p$  e  $q$  que definem um espaço onde buscamos fazer com que variações de mesma distância causem efeitos de igual significância perceptiva. Uma de nossas motivações foi tentar ver de que forma o domínio de  $x$  e  $y$  seria mapeado para um espaço timbrístico [111, 112].

Nossa idéia inicial era realizar um experimento psicoacústico pedindo que ouvintes comparassem amostras sintetizadas com diferentes pares de parâmetros. A partir dos dados obtidos poderíamos construir um espaço timbrístico utilizando uma técnica de escalamento multidimensional [113].

Para facilitar a realização de um experimento como este seria útil antes já criar um mapeamento baseado em algum critério de avaliação físico. Este critério agiria como uma forma de modelo psicoacústico ingênuo, e nos permitiria evitar fazer no experimento com humanos um número excessivo de amostragens em regiões claramente pouco interessantes. O critério utilizado afinal foi simplesmente a energia do ruído da diferença entre os sinais relativos às duas amostras.

O processo de medição se deu iterativamente sobre pares de parâmetros numa grade. A cada passo um deles foi definindo como uma referência. Então novas amostras foram sorteadas aleatoriamente em torno desta referência, e comparadas de acordo com o critério. O resultado de um destes passos está na figura 5.13.

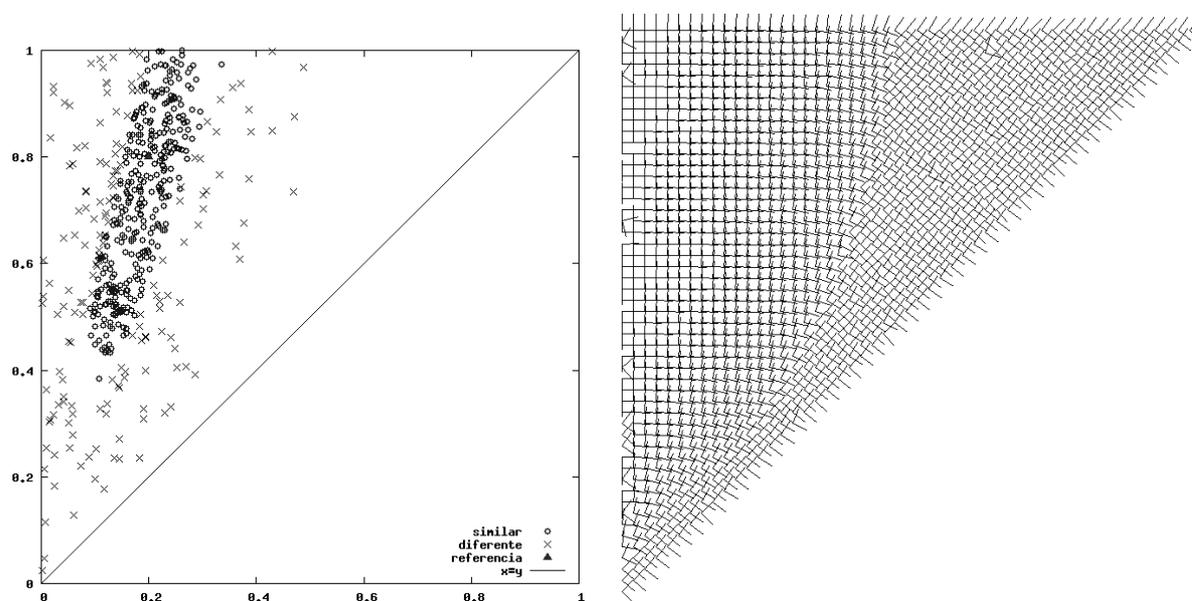


Fig. 5.13: Resultado de uma iteração da amostragem. A referência está em  $x = 0,2$  e  $y = 0,8$  (esquerda). Campos vetoriais encontrados (direita).

A partir da localização das amostras similares e dissimilares modelamos uma região de limiar, com formato elipsoidal. O sorteio das amostras foi feito de forma adaptativa para que metade delas caísse dentro da região.

Ao final do processo obtivemos para cada ponto da grade dois valores relativos às dimensões da região elipsoidal ao redor da referência. Para encontrar nosso mapeamento, definimos que as derivadas parciais de  $x$  e  $y$  com relação a  $p$  e  $q$  seriam vetores ortogonais sobre cada referência, com magnitudes e ângulos relacionados com as dimensões da elipse naquele ponto. O resultado é gráfico

à direita na figura 5.13.

Este gráfico apresenta dois campos vectoriais. Note que os módulos foram normalizados para facilitar a visualização. Os vetores na direção mais vertical são geralmente muito mais extensos do que o na outra direção. Estes campos são as derivadas de  $x$  e  $y$  com relação a cada variável  $p$  e  $q$ .

Para determinar o mapeamento é necessário tomar cada um destes valores de derivadas parciais e montar uma matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  que, invertida, nos fornece os valores das derivadas parciais de  $p$  e  $q$  em relação a  $x$  e  $y$ . Estas derivadas definem por sua vez dois campos que se supõe serem gradientes das duas funções que dão  $p$  e  $q$  a partir de  $(x,y)$ .

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\nabla}P(x,y)^\top \\ \vec{\nabla}Q(x,y)^\top \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Estas funções definem afinal dois campos que podemos integrar para encontrar os valores de  $p$  e  $q$  a que devemos mapear cada par de parâmetros. A integração foi realizada por diferenças finitas, montando um sistema esparso de centenas de variáveis que foi resolvido pelo método de resíduos mínimos generalizado [114]. Este processo de integração envolve um passo importante, realizado implicitamente, que é a imposição de integrabilidade nos campos de vetores.

A figura 5.14 mostra as curvas de nível de  $p$  e  $q$  em função de  $(x,y)$ . A figura mostra exatamente qual é o aspecto de uma grade em  $(p,q)$  quando projetada em  $(x,y)$ . Entretanto, a amostragem de valores da função  $p$  foi feita de forma exponencial, em potências de 2, o que significa que na região mais próxima de  $x = 0$  haveria muito mais curvas relativas a níveis de  $p$  se fosse feita uma amostragem a intervalos regulares.

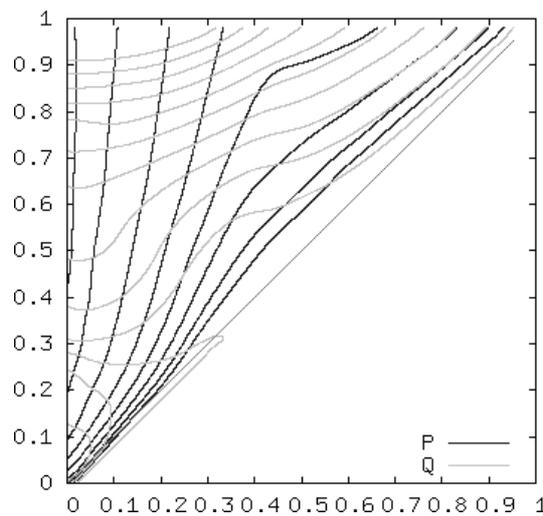


Fig. 5.14: Curvas de nível de  $p$  e  $q$ .

## 5.6 Conclusões

Neste capítulo apresentamos o problema do estudo do funcionamento de circuitos para distorção musical. Tradicionalmente, o estudo da distorção em circuitos eletrônicos de áudio só é realizado porque se deseja evitá-las. Em nosso caso, entretanto, distorções são bem-vindas, por modificarem o timbre do instrumento.

Ao realizar um projeto de um amplificador ideal só existe uma meta possível: distorções nulas e função de transferência com a faixa de passagem mais plana e larga o possível. Já no projeto de um circuito para distorção musical surge o problema de que existem inúmeras formas de se deformar o sinal, e não existem muitas recomendações formais sobre o que deve ser feito.

Em nossos estudos procuramos por princípios básicos que pudessem auxiliar no estudo do funcionamento de distorções musicais e do timbre de guitarras elétricas. Estes conceitos ainda podem ser úteis no desenvolvimento de sistemas para a análise específica de sinais de guitarras elétricas.

Engenheiros e outras pessoas interessadas no tema costumam abordá-lo inicialmente através de conceitos trazidos de análise de sistemas lineares e de estatística. Por isso freqüentemente se ouve falar apenas que circuitos de distorção causariam um reforço de harmônicos superiores, como ocorre em filtros passa-alta, ou ainda simplesmente a adição de ruído branco.

O que pudemos observar entretanto é que os sinais envolvidos são de uma família específica. Não é correto afirmar que a distorção torna o sinal parecido com um ruído branco. Os sinais produzidos na distorção da guitarra são na verdade semelhantes aos próprios sinais esperados em uma guitarra limpa, se utilizarmos um modelo mais detalhado do que o tradicional. Tratam-se de somas de componentes senoidais aproximadamente harmônicas moduladas lentamente no tempo, causando batimentos.

Precisamos portanto direcionar nossas análises para determinarmos precisamente o formato destas modulações. Muita atenção já foi dada à questão da desafinação, do decaimento simples, e das amplitudes no início da onda. É preciso agora saber até que ponto não seria mais importante conhecermos as modulações das componentes. Talvez um sintetizador que leve isto em consideração, modulando apropriadamente senóides perfeitamente harmônicas, possa criar sinais tão ou mais satisfatórios quanto sintetizadores que geram ondas não-harmônicas mas sem modulações, como é comum de se ver.

É preciso ainda determinar quanto de informação é possível extrair de um sinal de uma guitarra distorcida. Pode ser que não seja possível determinar todas características físicas dos sistemas como gostaríamos. Mas pode ser ainda que um sistema de codificação baseado na representação do sinal como somas de componentes aproximadamente harmônicas moduladas no tempo ofereça uma boa alternativa para a codificação digital de sinais. É preciso encontrar relações entre as modulações das parciais, como os acoplamentos que mencionamos no capítulo 2, e como as variações simultâneas que pudemos observar em alguns dos sinais apresentados neste capítulo.

# Capítulo 6

## Conclusões

Os resultados apresentados nesta dissertação foram mais de caráter qualitativo do que quantitativo. Procuramos revelar quais são as imperfeições previstas pela física em sinais gravados de uma corda de um instrumento musical. Então fizemos experimentos onde é possível observar estes fenômenos.

Foi uma preocupação nossa criar experimentos simples, de fácil reprodução, e principalmente que não exigissem equipamentos sofisticados. Para isto buscamos explorar o máximo possível as funcionalidades oferecidas por um computador pessoal equipado com uma placa de som. Apesar destes equipamentos serem hoje muito populares e acessíveis, acreditamos que ainda é possível explorar melhor as possibilidades oferecidas por eles em atividades como as descritas aqui.

Em nossas análises buscamos também encontrar ferramentas alternativas à realização de análise harmônica e subsequente busca por picos no espectro. Os algoritmos como os descritos no apêndice C nos permitiram isso ao automatizar a seleção de frequências e amplitudes sem recorrer a análises harmônicas. Mas ainda não nos é claro o quão vantajoso é a aplicação destas técnicas no lugar das mais tradicionais utilizando DFT.

No futuro pensamos em fazer melhores avaliações do desempenho destas técnicas de análise aplicadas a sinais de instrumentos musicais. Também pretendemos melhorar nossos experimentos físicos para finalmente obter boas medições de grandezas físicas da guitarra elétrica.

Quanto à análise da distorção, cumprimos nossa meta de abordar o assunto em um ambiente acadêmico, na esperança de um dia podermos ver resolvidas as grandes controvérsias que existem entre os entusiastas do assunto. Acreditamos que ainda existe muito trabalho a ser feito na análise de sinais de guitarra distorcidos.

Tivemos a oportunidade aqui apenas de ver algumas das características mais fundamentais dos sinais de guitarra distorcidos. Foi procurando estudar isso que voltamos nossa atenção para a forma de onda da guitarra limpa, pois percebemos ao enfrentar o problema o quão crucial este estudo seria para o seguinte. Só agora, conhecendo a fundo as características de um sinal limpo e dos sistemas de

distorção, é que podemos começar a buscar por descrições analíticas de sinais de guitarra distorcidos.

Acreditamos ainda que a consideração da existência de distorções na criação do sinal de uma guitarra pode levar a vantagens em certos tipos de análises. A distorção afeta diretamente o formato do histograma do sinal, o que é algo relevante em certas técnicas para separação de fontes que utilizam estatística de ordem superior. O uso de distorção pode vir a ser também um fator que contribui para a análise de sinais gravados. Ela pode vir a possibilitar por exemplo que se estime a função de transferência entre a corda e o pedal, e entre o pedal e a aquisição do sinal. Ao remover esta não-linearidade estes filtros se misturam, e deve ser mais difícil tentar separar ambos.

Se estas expectativas forem satisfeitas, demonstraremos que em certos aspectos a música criada com guitarras e baixos elétricos distorcidos, em bandas com poucos membros, é algo que se adequa muito mais facilmente a análises técnicas do que a música dita “acústica” criada por orquestras com muitos membros tocando instrumentos similares, ou simplesmente as músicas onde se busca reduzir ao máximo a existência de distorções na produção do sinal.

# Apêndice A

## Tensão e extensão

A fórmula que alguns autores apresentam para a tensão de cordas esticadas não é correta [63][47, p.16]. Mas o erro se refere apenas ao significado físico de um coeficiente, o que não afeta a álgebra.

Ambos autores acima afirmam que a tensão varia com o comprimento da seguinte forma:

$$T(l) = T_0 + Y A \frac{l - l_0}{l_0}, \quad (\text{A.1})$$

ou seja, proporcional à variação relativa do comprimento da corda com  $T(0) = T_0$ , onde  $Y$  é a constante de elasticidade,  $l_0$  é o comprimento da corda tensionada, e  $A$  seria a área de seção da corda.

Acontece que se considerarmos a tensão a partir da corda não-tensionada ( $T_0 = 0$ ), teríamos

$$T(l) = Y A_r \frac{l - l_r}{l_r}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $l_r$  é o comprimento “de repouso”, com a corda não-tensionada, e  $A_r$  é a área neste estado. A tensão  $T_0$  seria portanto

$$T_0 = Y A_r \frac{l_0 - l_r}{l_r}. \quad (\text{A.3})$$

A fórmula utilizando  $l_0$  como referencial deveria portanto ser

$$T(l) = T_0 - Y A_r \frac{l_0 - l_r}{l_r} + Y A_r \frac{l - l_r}{l_r} \quad (\text{A.4})$$

$$T(l) = T_0 - Y \left( A_r \frac{l_0}{l_r} \right) \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (\text{A.5})$$

Ou seja, a área  $A$  que os autores dizem ser a seção da corda vale na verdade  $A = A_r \frac{l_0}{l_r}$ . Este valor não é nem a área de seção original  $A_r$ , nem a área predita pela conservação de volume, dada por  $A_r \frac{l_r}{l_0}$ . A área utilizada por eles é  $\left(\frac{l_r}{l_0}\right)^2$  vezes a área da corda, ou  $\frac{l_r}{l_0}$  a área da corda parada e tensionada.

# Apêndice B

## Síntese de guitarras elétricas

Um dos primeiros sintetizadores computacional de sinais de instrumentos de corda é o de Hiller e Ruiz [115], apresentado em um artigo de 1971. O programa descrito por eles é relativamente sofisticado, e utiliza uma aproximação de elementos finitos das equações diferenciais lineares da corda com rigidez à dobra. Ainda são levadas em consideração as terminações e condições iniciais.

Como podemos ver, o uso de modelagem física não é portanto algo novo no mundo da síntese de sinais musicais. Sintetizadores que não usam modelagem física estavam buscando eficiência computacional e velocidade suficiente para operar em “tempo real”. Por outro lado, os modelos físicos utilizados e suas implementações também foram aperfeiçoando-se com o tempo.

Uma forma de síntese muito popular, que não deixa de ter inspiração na física, é a aditiva. Ela utiliza somas de senóides para criar sinais, mas em geral são utilizados poucos parâmetros. Sintetizadores deste tipo raramente consideram decaimentos desiguais. Muitas vezes o sinal criado é simplesmente usado como entrada para um modulador tipo ADSR.

O ADSR molda uma onda criando um chamado “envelope”. Isto visa tornar as ondas mais parecidas com o que se vê na prática. Entretanto, a visão de uma onda de um instrumento complexo como um grupo de portadoras moduladas por um mesmo sinal é bastante longe da realidade, como pudemos ver nesta dissertação.

Muita pessoas tentam utilizar o conceito de envelope e modulação de portadoras para tentar interpretar sinais reais gravados, mas isto nem sempre traz bons resultados. Uma das motivações de nosso trabalho foi justamente tentar amadurecer um pouco a idéia de que todo sinal possui algum “envelope” que possa ser medido. Na prática é muito difícil encontrar transitórios tão bem-comportados.

Quando frequências harmônicas são utilizadas na síntese aditiva, obtemos uma forma de onda estritamente periódica. Isto é a base da chamada síntese por *wavetable*, onde um período da onda é armazenado e executado ciclicamente.

A chamada síntese subtrativa parte de sinais relativamente complexos e realiza filtragens para

obter os timbres desejados. algumas fontes para esse tipo de processo são ruídos, a síntese FM, ou talvez sinais de síntese aditiva processados pelo chamado *waveshaping*.

No processo de *waveshaping* uma onda é processada por uma função de distorção, como as estudadas em nosso trabalho. O uso de uma simples senóide gera uma onda periódica, como em uma síntese aditiva, ou por *wavetable*. Mas um sinal ligeiramente mais complexo, com duas senóides não-harmônicas, já dá lugar a novas parciais que podem ser nada triviais, como os chamados tons de diferença.

Existe um algoritmo de síntese de sinais sonoros utilizado freqüentemente para criar sons como os de um violão que possui um formato simples para a implementação digital. Trata-se do algoritmo de Karplus-Strong [116]. Apesar da simplicidade de construção considerada por muitos impressionantemente grande para a qualidade dos resultados, é possível mostrar que a estrutura deste sistema de síntese pode ser deduzida a partir de princípios físicos [117].

A pesquisa em síntese hoje busca tanto explorar sistemas dinâmicos sem conexão explícita com modelos físicos [118, 119], quanto implementar modelos físicos mais detalhados, quase sempre buscando a maior eficiência computacional possível [120, 26].

# Apêndice C

## Algoritmo SNTLN

O problema de se modelar um sinal mostrado como uma soma de exponenciais complexas está presente em muitas áreas de estudo. Além de ser algo fundamental na teoria de processamento de sinais, uma aplicação onde este problema se mostra particularmente importante é na estimação de direção de chegada de sinais em *arrays* de antenas.

Uma vez que se saiba as frequências, a obtenção das amplitudes das exponenciais complexas pode ser facilmente feita através do método de Prony, de 1795 [78].

O difícil é, portanto, descobrir as frequências quando necessário. Uma maneira é encontrar os coeficientes de predição linear. As raízes do polinômio formado por eles deveria ser exatamente estas frequências. Entretanto, os métodos que só cotidianamente utilizados para isto em problemas como análise da fala, por exemplo, não fornecem resultados bons o suficiente. Os resultados freqüentemente servem para outras aplicações, mas não para uma predição linear extremamente precisa.

O método LS (*least squares*), por exemplo, utiliza uma pseudo inversão numa matriz construída com cópias atrasadas do sinal sendo modelado, e multiplicada pelo próprio sinal.

Existe um motivo estatístico claro para esta técnica não dar bons resultados. Acontece que só estão sendo considerados erros no vetor do sinal que se encontra do lado direito do sistema montado. Para considerar também erros no lado esquerdo, é preciso utilizar uma técnica conhecida por alguns como “erros-nas-variáveis”, ou ainda por TLS (*total least squares*).

Mesmo essa técnica pode ainda fornecer resultados ruins, e novamente existe um motivo. Os erros são introduzidos na matriz e no vetor do sistema de forma indiscriminada, quando na verdade existem valores ali que representam uma mesma grandeza. Existe portanto uma estrutura na matriz que deve ser obedecida também na matriz de erros. Uma técnica que alcança isto é a STLS (*structured total least squares*) [121]. Existe ainda outro critério mais sofisticado que leva em consideração a estrutura da matriz, e origina o algoritmo IQML (*iterative quadratic maximum-likelihood*) [122].

Enquanto o STLS utiliza norma quadrática, é possível utilizar a norma  $L_1$ , ou outras, para obter

melhores resultados em certas situações. Isto pode tornar o sistema mais robusto a ruídos provocados por *outliers*, por exemplo.

Um último desenvolvimento relevante foi uma extensão do STLN pra resolver problemas não-lineares, como a própria estimação da frequência. No caso da estimação das frequências, esta técnica busca seus valores diretamente, e não indiretamente através de coeficientes de predição. No caso de norma quadrática, o sistema é uma forma de otimização de Gauß-Newton, mas é possível implementar norma  $L_1$ , por exemplo. A solução do problema de otimização envolvido com norma  $L_1$  utiliza um programa linear [123].

Estes algoritmos geralmente precisam ainda de uma estimativa razoável da solução, além do número de senóides no sinal. Existem critérios que tentam estimar este último [124].

Em algumas análises desta dissertação nós buscamos utilizar o SNTLN pra a obtenção dos valores de frequência e amplitude das componentes. Métodos como os mencionados aqui já foram utilizados na criação de codificadores experimentais de sinais de áudio [125].

Nós constatamos que o algoritmo SNTLN com norma  $L_1$  de fato possui um excelente desempenho. Fizemos alguns testes com o IQLM também, que não se mostrou tão útil em nossos problemas.

Constatamos que às vezes o SNTLN não consegue pegar algumas componentes de intensidade pequena em sinais como os da guitarra elétrica. Ainda estamos realizando testes para averiguar o desempenho deste algoritmo em sinais como nosso. Pretendemos encontrar a dependência da qualidade das respostas do algoritmo em função do número de pontos utilizado, ruído, e características do sinal considerando apenas sinais de guitarra. Por exemplo, queremos saber como o algoritmo se comporta quando um filtro de formato senoidal vai reduzindo a amplitude de uma parcial até anulá-la.

# Referências Bibliográficas

- [1] John Lazzaro and John Wawrzynek. The MPEG-4 structured audio book. [Internet; <http://www.cs.berkeley.edu/lazzaro/sa/book/index.html>], 1999.
- [2] Peter Burke. O paraíso perdido do conhecimento. publicado na Folha de São Paulo, Caderno MAIS!, 11/05/2003, 5 2003. disponível em <http://www.angelfire.com/sk/holgonsi/conhecimento.html> em 12/04/2006.
- [3] Nick Bostrom. Predictions from philosophy? how philosophers could make themselves useful. disponível em <http://www.nickbostrom.com/old/predict.html> em 25/07/2007, 1997.
- [4] Howard Gardner. *A Nova Ciência da Mente: Uma História da Revolução Cognitiva*. Edusp — Editora da Universidade de São Paulo, 3 edition, 2003.
- [5] Leah Ceccarelli. *Shaping Science with Rhetoric*. The University of Chicago Press, 2001.
- [6] Roger Kimball. “The two cultures” today. *The New Criterion*, 12(6), 1994. disponível em <http://newcriterion.com:81/archive/12/feb94/cultures.htm> em 25/07/2007.
- [7] Robert Bruce Lindsay. *The Theory of Sound*, chapter Historical Introduction, pages v–xxxii. Dover Publications, Inc., 1945.
- [8] Leo L. Beranek. *Acoustics*. Acoustical Society of America, 1993.
- [9] Barry Blesser. An interdisciplinary synthesis of reverberation viewpoints. *Journal of the Audio Engineering Society*, 49(10):867–903, October 2001.
- [10] Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*, chapter Preface, pages v–vii. Springer-Verlag, December 1988.
- [11] D. L. Stein and H. Bohr. Discussion of complexity measures. In Henrik Bohr, editor, *Characterising Complex Systems*, pages 3–13. World Scientific, June 1989.

- [12] Wikipedia. Hidden Markov model — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 8-September-2007].
- [13] Richard F. Voss and John Clarke. "1/f noise" in music: Music from 1/f noise. *Journal of the Acoustic Society of America*, 63(1):258–263, January 1978.
- [14] Martin Gardner. Mathematical games: White and brown music, fractal curves and 1/f fluctuations. *Scientific American*, 238(4):16–32, April 1978.
- [15] David Cope. Computer modeling of musical intelligence in emi. *Computer Music Journal*, 16(2):69–83, Summer 1992.
- [16] David Cope, editor. *Virtual Music: Computer Synthesis of Musical Style*, chapter Looking EMI Straight in the Eye — And Doing My Best Not to Flinch, pages 33–82. The MIT Press, 2001. chapter by Douglas Hofstadter.
- [17] Wikipedia. Cog (project) — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 25-July-2007].
- [18] Eric D. Scheirer. Structured audio, kolmogorov complexity, and generalized audio coding. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 9(8):914–931, 2001.
- [19] T. Painter and A. Spanias. Perceptual coding of digital audio. *Proceedings of the IEEE*, 88(4), 2000.
- [20] F. Itakura and S. Saito. Analysis synthesis telephony based on the maximum likelihood method. In Y. Kohasi, editor, *Rep. 6th Int. Congr. Acoustics*, pages C17–C20, 1968.
- [21] J. L. Flanagan and R. M. Golden. Phase vocoder. *The Bell System Technical Journal*, pages 1493–1509, November 1966.
- [22] Ronald W. Schafer and Lawrence R. Rabiner. System for automatic formant analysis of voiced speech. *Journal of the Acoustic Society of America*, 47(2 (part 2)):634–648, 1970.
- [23] Hani Yehia, Masaaki Honda, and Fumitada Itakura. Acoustic measurements of the vocal-tract area function: sensitivity and experiments. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1995. ICASSP-95., 1995 International Conference on*, volume 1, pages 652–655, May 1995.
- [24] X. Pelorson, K. Motoki, and R. Laboissière. Contribution à l'analyse acoustique du conduit vocal. In *XXIIIèmes Journées d'Etude sur la Parole*, pages 129–132, 2000.
- [25] John G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 4th edition, 2001.

- [26] Tero Tolonen, Vesa Välimäki, and Matti Karjalainen. Modeling of tension modulation nonlinearity in plucked strings. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 8(3):300–310, May 2000.
- [27] Wikipedia. Virtual Studio Technology — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 8-September-2007].
- [28] Galileo Galilei. *Dialogues Concerning Two New Sciences*, chapter First Day, pages 138–150. Dover, 1638. Translated by H. Crew, A. de Salvio. Published in 1954.
- [29] Wikipedia. Vincenzo Galilei — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 14-June-2007].
- [30] Michel Paty. *D'Alembert*, chapter 7, page 124. Editora Estação Liberdade Ltda., 1996.
- [31] Robert B. Lindsay. *The Theory of Sound*, chapter Historical Introduction, pages xi–xxv. Dover Publications, Inc., unabridged second revised edition, 1945. Prefácio ao livro de Lord Rayleigh.
- [32] Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*, chapter 2. Springer-Verlag, 1991.
- [33] J. W. S. Rayleigh. *The Theory of Sound*, chapter VIII. Dover Publications, Inc., unabridged second revised edition, 1894.
- [34] M L Cooper. Early contributions to the problems of elasticity. *Physics Education*, 13:384–387, 1978. doi:10.1088/0031-9120/13/6/008.
- [35] Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer-Verlag, 1991.
- [36] Vesa Välimäki, Jyri Huopaniemi, Matti Karjalainen, and Zoltán Jánosy. Physical modeling of plucked string instruments with application to real-time sound synthesis. *Journal of the Audio Engineering Society*, 44(5):331–352, May 1996.
- [37] Caroline Traube and Julius O. Smith III. Extracting the fingering and the plucking points on a guitar string from a recording. In *IEEE Workshop on the Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, pages 7–10, 2001.
- [38] Robert W. Young. Inharmonicity of plain wire piano strings. *Journal of the Acoustic Society of America*, 24(3):267–273, May 1952.

- [39] Harvey Fletcher. 1964. *Journal of the Acoustic Society of America*, 36(1):203–209, January 1964.
- [40] Carleen Maley Hutchins. The physics of violins. *Scientific American*, 207(5):78–93, November 1962.
- [41] E. Donnell Blackham. The physics of the piano. *Scientific American*, 213(6):88–99, December 1965.
- [42] Daniel W. Martin. Decay rates of piano tones. *Journal of the Acoustic Society of America*, 19(4):535, July 1947.
- [43] R. S. Shankland and J. W. Coltman. The departure of the overtones of a vibrating wire from a true harmonic series. *Journal of the Acoustic Society of America*, 10(3):161–166, January 1939.
- [44] G. F. Carrier. On the non-linear vibration problem of the elastic string. *Quarterly of Applied Mathematics*, 3(2):157, 1945.
- [45] S. B. Menezes L. A. Medeiros, J. Limaco. Vibrations of elastic strings: Mathematical aspects, part one. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 4(2):91–127, April 2002.
- [46] Henry Harrison. Plane and circular motion of a string. *Journal of the Acoustic Society of America*, 20(6):874, November 1948.
- [47] J. J. Stoker. *Nonlinear Vibrations*. Interscience Publishers, 1950.
- [48] John A. Elliot. Nonlinear resonance in vibrating strings. *American Journal of Physics*, 50(12):1148–1150, December 1982.
- [49] Joseph B. Keller. Large amplitude motion of a string. *American Journal of Physics*, 27(8):584–586, 1959.
- [50] Donalds W. Oplinger. Frequency response of a nonlinear stretched string. *Journal of the Acoustic Society of America*, 32:1529–1538, 1960.
- [51] G. S. Srimvasa Murthy and B. S. Ramakrishna. Nonlinear character of resonance in stretched strings. *Journal of the Acoustic Society of America*, 38:461–471, November 1965.
- [52] John W. Miles. Stability of forced oscillations of a vibrating string. *Journal of the Acoustic Society of America*, 38:855–861, 1965.

- [53] G. V. Anand. Nonlinear resonance in stretched strings with viscous damping. *Journal of the Acoustic Society of America*, 40(6):1517–1528, 1966.
- [54] G. V. Anand. Stability of nonlinear oscillations of stretched strings. *Journal of the Acoustic Society of America*, 46(3):667–677, 1969.
- [55] Anthony I. Eller. Driven nonlinear oscillations of a string. *Journal of the Acoustic Society of America*, 51(3):960–966, 1972.
- [56] K. A. Legge and N. H. Fletcher. Nonlinear generation of missing modes on a vibrating string. *Journal of the Acoustic Society of America*, 76(1):5–12, July 1984.
- [57] Roger J. Hanson, James M. Anderson, and H. Kent Macomber. Measurements of nonlinear effects in a driven vibrating wire. *Journal of the Acoustic Society of America*, 96(3):1549–1556, September 1994.
- [58] John Miles. Resonant, nonplanar motion of a stretched string. *Journal of the Acoustic Society of America*, 75(5):1505–1510, 1984.
- [59] J. M. Johnson and A. K. Bajaj. Amplitude modulated and chaotic dynamics in resonant motion of strings. *Journal of Sound and Vibration*, 128(1):87–107, 1989.
- [60] T. C. A. Molteno and N. B. Tuffillaro. Torus doubling and chaotic string vibrations: Experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 137(2):327–330, 1990.
- [61] O. O'Reilly and P. J. Holmes. Non-linear, non-planar and non-periodic vibrations of a string. *Journal of Sound and Vibration*, 153(3):413–435, 1992.
- [62] Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*, chapter 4. Springer-Verlag, 1991.
- [63] John Elliot. Intrinsic nonlinear effects in vibrating strings. *American Journal of Physics*, 48(6):478, June 1980.
- [64] Л. Д. Ландау (L. D. Landau) and Е. М. Лифшиц (E. M. Lifshitz). *Механика (Mechanics). Теоретическая физика (Física teórica)*, vol. 1. Издательство Мир (Editora Mir), 1978 (edição original de 1957).
- [65] Wikipedia. Resonator guitar — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 15-June-2007].

- [66] Wikipédia. Guitarra baiana — Wikipédia, a enciclopédia livre, 2006. [Online; accessed 15-June-2007].
- [67] Thomas Withee. Study of the electric guitar pickup. Individual study, University of Illinois at Urbana-Chapign, 2002. [Avaiaible on the Internet].
- [68] Timothy Keith Prideaux. Electric guitar pickups: Towards a dictionary of sonic signatures. Thesis for the degree of bachelor of engineering, The University of Queensland, October 2004.
- [69] Steven Errede. Waves ii. Lecture notes for the course physics of music and musical instruments, University of Illinois at Urbana-Chapign, 2000. [Avaiaible on the Internet].
- [70] Arthur H. Benade. *Fundamentals of musical acoustics*. Oxford University Press, 1976.
- [71] Amy Trent. A study of the physical properties of electric guitar pickups on a 1998 peavey raptor guitar. Study for the course on physics of music, University of Illinois at Urbana-Chapign, May 2003. [Avaiaible on the Internet].
- [72] Steven Errede. Measurement of the electromagnetic properties of electric guitar pickups. Material from the course on physics of music, University of Illinois at Urbana-Chapign, 2000. [Avaiaible on the Internet].
- [73] Daniel K. Armstrong. 43.755.tv magnetic pickup for electric guitars. *Journal of the Acoustic Society of America*, 73(2):720, 1983.
- [74] Norris Nyack. 43.75.gh electric guitar. *Journal of the Acoustic Society of America*, 81(6):2006, 1987.
- [75] Barry Blesser. An interdisciplinary synthesis of reverberation viewpoints. *Jounral of the Audio Engineering Society*, 49(10):867–903, October 2001.
- [76] R. W. Hamming. *Digital Filters*. Dover Publications, Inc., third, 1998 edition, 1989.
- [77] Burr-Brown. Opa134/opa2134/opa4134 — high performance audio operational amplifiers. Datasheet, December 1997.
- [78] Wikipedia. Prony's method — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 2-August-2007].
- [79] Fritz Winckel. *Music, sound and sensation*. Dover Publications Inc., 1967 (tradução do original de 1960).

- [80] Wikipedia. Spectrogram — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 9-September-2007].
- [81] Vesa Välimäki, Tero Tolonen, and Matti Karjalainen. Plucked-string synthesis algorithms with tension modulation nonlinearity. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, March 1999.
- [82] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and S. Hamid Nawab. *Signals and Systems*. Prentice Hall, 2nd edition, 1996.
- [83] Ricardo Goldemberg. Aspectos acústicos da afinação de pianos. In *II Seminário de Música, Ciência e Tecnologia*, 2005.
- [84] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*. Dover Publications, 1954 (republication of the 1891 edition).
- [85] SGS-Thomson Microelectronics. Tda2050 — 32w hi-fi audio power amplifier. Datasheet, March 1995.
- [86] National Semiconductor. Lm150/lm350a/lm350 — 3-amp adjustable regulators. Datasheet, May 1998.
- [87] Gtkmm documentation. Disponível em <http://www.gtkmm.org/documentation.shtml> em 27/07/2007.
- [88] Jack documentation. Disponível em <http://jackaudio.org/> em 27/07/2007.
- [89] Helmuth E. W. Lemme. The secrets of electric guitar pickups. Internet, July 2003.
- [90] J. R. Barker. *Mechanical and Electrical Vibrations*, chapter 10. Methuen & co. ltd., 1964.
- [91] Winston E. Kock. The vibrating string considered as an electrical transmission line. *Journal of the Acoustic Society of America*, 8:227, April 1937.
- [92] Wikipedia. Recursive least squares filter — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 2-August-2007].
- [93] Nobuharu Aoshima. Computer-generated pulse signal applied for sound measurement. *Journal of the Acoustic Society of America*, 69(5):1484–1488, May 1981.
- [94] Yôiti Suzuki, Futoshi Asano, Hack-Yoon Kim, and Toshio Sone. An optimum computer-generated pulse signal suitable for the measurement of very long impulse responses. *Journal of the Acoustic Society of America*, 97(2):1119–1123, February 1995.

- [95] Wikipedia. Link Wray — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 1-August-2007].
- [96] Wikipedia. Fuzzbox — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 1-August-2007].
- [97] The guitar effects oriented webpage. [Online; accessed 1-August-2007].
- [98] diyaudio.com. [Online; accessed 1-August-2007].
- [99] Luis Antonio Aguirre. *Introdução À Identificação de Sistemas — Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora da UFMG, 3rd edition, 2007.
- [100] Er-Wei Bai and Minyune Fu. A blind approach to hammerstein model identification. *IEEE Transactions on Signal Processing*, pages 1610–1619, July 2002.
- [101] K. S. Narendra and P. G. Gallman. An iterative method for the identification of nonlinear systems using a hammerstein model. *IEEE transactions on automatic control*, pages 546–550, July 1966.
- [102] Ali Akramizadeh, Ali Akbar Farjami, and Hamid Khaloozadeh. Nonlinear hammerstein model identification using genetic algorithm. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Artificial Intelligence Systems (ICAIS'02)*, 2002.
- [103] Stephen L. Baumgartner and Wilson J. Rugh. Complete identification of a class of nonlinear systems from steady-state frequency response. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-22(9):753–759, September 1975.
- [104] Er-Wei Bai. Frequency domain identification of hammerstein models. *IEEE transactions on automatic control*, 48(4):530–542, April 2003.
- [105] V. A. Kazakov. A method of measuring current-voltage characteristics based on the hammerstein-chebyshev model. *Measurement Techniques*, 47(5):495–499, 2004.
- [106] Wikipedia. Nonlinear dimensionality reduction — wikipedia, the free encyclopedia, 2007. [Online; accessed 12-September-2007].
- [107] Marvin Minsky and Seymour Papert. *Perceptrons*. The MIT Press, 3rd edition, 1988.
- [108] Wikipedia. Equal temperament — wikipedia, the free encyclopedia, 2007. [Online; accessed 14-September-2007].

- [109] Wikipedia. Cent (music) — wikipedia, the free encyclopedia, 2007. [Online; accessed 14-September-2007].
- [110] N. Werneck and F. Damiani. Espaços homogêneos de parâmetros para controle de efeitos musicais. In *2o seminário Música Ciência e tecnologia (SMCT 2005)*, Outubro 2005. Disponível em World Wide Web: [http://www.proceedings.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=MSC0000000102005000100002&lng=pt&nrm=iso](http://www.proceedings.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=MSC0000000102005000100002&lng=pt&nrm=iso).
- [111] S. McAdams, W. Winsberg, S. Donnadieu, G. De Soete, and J. Krimphoff. Perceptual scaling of synthesized musical timbres: Common dimensions, specificities, and latent subject classes. *Psychological Research*, 58:177–192, 1995.
- [112] Stephen McAdams. Perspectives of the contribution of timbre to musical structure. *Computer Music Journal*, 23(3):85–102, Fall 1999.
- [113] I. Kaminskyj. Multidimensional scaling analysis of musical instrument sounds' spectra. *Mikropolyphonie WWW Journal*, 5, 2001.
- [114] Wikipedia. Generalized minimal residual method — Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2007. [Online; accessed 15-September-2007].
- [115] Lejaren Hiller and Pierre Ruiz. Synthesizing musical sounds by solving the wave equation for vibrating objects: Part i. *Journal of the Audio Engineering Society*, 19(6), 1971.
- [116] Kevin Karplus and Alex Strong. Digital synthesis of plucked-string and drum timbres. *Computer Music Journal*, 7(2):43–55, 1983.
- [117] David A. Jaffe and Julius O. Smith. Extensions of the karplus-strong plucked-string algorithm. *Computer Music Journal*, 7(2):56–69, 1983.
- [118] Cristophe Hourdin, Gérard Charbonneau, and Tarek Moussa. A sound-synthesis technique based on multidimensional scaling of spectra. *Computer Music Journal*, 21(2):56–68, 1997.
- [119] Axel Röbel. Synthesizing natural sounds using dynamic models of sound attractors. *Computer Music Journal*, 25(2):46–60, 2001.
- [120] Antoine Chaigne. Numerical simulations of piano strings. i. a physical model for a struck string using finite difference methods. *Journal of the Acoustic Society of America*, 92(2):1112–1118, 1994.

- [121] Philippe Lemmerling, Bart De Moor, and Sabine Van Huffel. On the equivalence of constrained total least squares and structured total least squares. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(11):2908–2911, 1996.
- [122] Yoram Bresler and Albert Macovski. Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise. *IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing*, ASSP-34(5), 1986.
- [123] J. B. Rosen, Haesun Park, and John Glick. Structured total least norm. *SIAM Journal of Matrix Analysis Applications*, 20(1):14–30, 1998.
- [124] Lei Zhang, Haesun Park, and J. Ben Rosen. Exponential modeling with unknown model order using structured nonlinear total least norm. *Advances in Computational Mathematics*, 19:307–322, 2003.
- [125] Philippe Lemmerling, Nicola Mastronardi, and Sabine Van Huffel. Efficient implementation of a structured total least squares based speech compression. *Linear Algebra and its Applications*, 366:295–315, 2003.