

Bernardo Vieira Teixeira

PROJETO E ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SIMULADOR PARA
CANALIS DE DESVANECIMENTO NAKAGAMI- m

Campinas
2013

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Bernardo Vieira Teixeira

PROJETO E ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SIMULADOR PARA CANAIS DE
DESVANECIMENTO NAKAGAMI-*m*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Prof. Dr. José Cândido Silveira Santos Filho

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Bernardo Vieira Teixeira, e orientada pelo Prof. Dr. José Cândido Silveira Santos Filho

Campinas
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

T235p Teixeira, Bernardo Vieira, 1988-
Projeto e análise de desempenho de simulador para canais de
desvanecimento Nakagami-m / Bernardo Vieira Teixeira. – Campinas, SP : [s.n.],
2013.

Orientador: José Cândido Silveira Santos Filho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Rádio - Transmissores e transmissão - Desvanecimento. 2. Simulação. 3.
Modelos estatísticos. 4. Ajuste de curva. I. Silveira Santos Filho, José
Cândido, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Design and performance analysis of Nakagami-m fading channel simulator

Palavras-chave em inglês:

Radio - Transmitters and transmission - Fading

Simulation

Statistical models

Curve fitting

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

José Cândido Silveira Santos Filho [Orientador]

Gustavo Fraidenaich

Daniel Benevides da Costa

Data de defesa: 02-04-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Bernardo Vieira Teixeira

Data da Defesa: 2 de abril de 2013

Título da Tese: "Projeto e Análise de Desempenho de Simulador para Canais de Desvanecimento Nakagami-m"

Prof. Dr. José Candido Silveira Santos Filho (Presidente):

Prof. Dr. Daniel Benevides da Costa:

Prof. Dr. Gustavo Fraidenraich:

Agradecimentos

Agradeço,

a todos que me ajudaram a tornar esse trabalho possível, em especial ao meu orientador professor Dr. José Cândido Silveira Santos Filho pela preciosa orientação prestada.

aos meus queridos pais, Joaquim e Lourdes, pelo afeto e por sempre me apoiarem em minhas decisões.

aos meus irmãos, Fábio, Bruno e João, por todo apoio e suporte prestados.

aos meus colegas de laboratório por valiosas críticas e sugestões na elaboração desta dissertação.

aos meus amigos, por todos os momentos de convivência no dia-a-dia.

à Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação/Universidade Estadual de Campinas (FEEC/UNICAMP), pela excelente infra-estrutura fornecida.

a todos os outros professores que ajudaram em minha formação.

ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Em comunicações sem fio, o fenômeno de desvanecimento por múltiplos percursos é modelado por meio de várias distribuições estatísticas, como por exemplo Rayleigh, Rice, Hoyt e Nakagami- m . Este trabalho propõe e analisa um novo esquema de simulação fase-envoltória para canais de desvanecimento do tipo Nakagami- m . As principais vantagens do esquema proposto são (i) permitir valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento, (ii) corresponder às estatísticas de primeira ordem exatas do modelo Nakagami- m e (iii) fornecer uma excelente aproximação às estatísticas de segunda ordem associadas tradicionalmente ao modelo Nakagami- m . A análise do simulador proposto é feita com base na obtenção de expressões exatas e em forma fechada para estatísticas importantes de segunda ordem, a saber: (i) funções densidade de probabilidade conjuntas envolvendo a envoltória, a fase e suas derivadas temporais, (ii) função densidade de probabilidade de segunda ordem da envoltória, (iii) taxa de cruzamento de nível, (iv) duração média de desvanecimento e (v) taxa de cruzamento de fase. Como subproduto, são também obtidas expressões exatas em forma fechada para a função de distribuição acumulada da fase Nakagami- m e sua inversa. O esquema proposto é baseado na combinação em cascata de dois simuladores existentes para canais Nakagami- m , *random – mixture* e *rank – matching*, superando ambos em desempenho. Para efeito de comparação, algumas estatísticas de segunda ordem desconhecidas para estes dois simuladores são também obtidas de forma exata e fechada.

Palavras-chave: Canais de desvanecimento; desvanecimento Nakagami- m ; simulação.

Abstract

In wireless communications, the multipath fading phenomenon is modeled by various statistical distributions such as Rayleigh, Rice, Hoyt, and Nakagami- m . This work proposes and analyzes a new phase-envelope simulation scheme for Nakagami- m fading channels. The main advantages of the proposed scheme are (i) to allow for arbitrary real values of the fading parameter, (ii) to exactly match the Nakagami- m first order statistics, and (iii) to closely match the second-order statistics classically assigned to Nakagami- m fading. The analysis of the proposed simulator is performed by deriving exact closed-form expressions for important second-order statistics, namely (i) joint probability density functions involving the envelope, the phase, and their time derivatives, (ii) second-order probability density function of the envelope, (iii) level crossing rate, (iv) average fade duration, and (v) phase crossing rate. As a byproduct, we also obtain exact closed-form expressions for the cumulative distribution function of the Nakagami- m phase and its inverse. The proposed scheme is based on a cascade combination of two existing Nakagami- m fading channel simulators, *random – mixture* and *rank – matching*, outperforming the both. For comparison, some unknown second-order statistics of these two simulators are also obtained in exact closed form.

Key-words: Fading channels; Nakagami- m fading; simulation.

Lista de Figuras

2.1	O simulador Nakagami- m clássico.	7
2.2	O simulador Nakagami- m <i>rank – matching</i>	13
2.3	O simulador Nakagami- m <i>random – mixture</i>	18
3.1	O simulador Nakagami- m RM^2 proposto.	22
4.1	Taxa de cruzamento de nível para o simulador <i>rank – matching</i>	30
4.2	Duração média de desvanecimento para o simulador <i>rank – matching</i>	30
4.3	Taxa de cruzamento de fase para o simulador <i>rank – matching</i>	31
4.4	Taxa de cruzamento de nível para o simulador <i>random – mixture</i>	32
4.5	Duração média de desvanecimento para o simulador <i>random – mixture</i>	32
4.6	Taxa de cruzamento de fase para o simulador <i>random – mixture</i>	33
4.7	Taxa de cruzamento de nível para o simulador RM^2	35
4.8	Duração média de desvanecimento para o simulador RM^2	35
4.9	Taxa de cruzamento de fase para o simulador RM^2	36
4.10	Taxa de cruzamento de fase para o simulador clássico.	37

Lista de Acrônimos

PDF	Probability Density Function (função densidade probabilidade)
CDF	Cumulative Distribution Function (função distribuição acumulada)
LCR	Level Crossing Rate (taxa de cruzamento de nível)
AFD	Average Fading During (duração média de desvanecimento)
PCR	Phase Crossing Rate (taxa de cruzamento de fase)
i.i.d.	Independentes e identicamente distribuídos
NLoS	Propagação sem linha de visada

Lista de Símbolos

m	Parâmetro de desvanecimento de Nakagami- m
$f_R(r)$	Função densidade de probabilidade da variável Aleatória R
$f_\Theta(\theta)$	Função densidade de probabilidade da variável aleatória Θ
R	Envoltória Nakagami- m
\dot{R}	Derivada temporal da envoltória Nakagami- m
R_{Ray}	Envoltória Rayleigh
\dot{R}_{Ray}	Derivada temporal da envoltória Rayleigh
Θ	Fase Nakagami
$\dot{\Theta}$	Derivada temporal da fase Nakagami- m
Θ_{Ray}	Fase Rayleigh
$\dot{\Theta}_{Ray}$	Derivada temporal da fase Rayleigh
G_i	i -ésimo processo Gaussiano
$f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r})$	Função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias R e \dot{R}
$f_{R(t),R(t+\tau)}(r_1, r_2)$	Função densidade de probabilidade de segunda ordem do processo aleatório $R(t)$
$N_R(r)$	Taxa de cruzamento de nível da envoltória Nakagami- m
$T_R(r)$	Duração média de desvanecimento da envoltória Nakagami- m
$F_R(r)$	Função distribuição acumulada da envoltória Nakagami- m
$F_R^{-1}(r)$	Função distribuição acumulada inversa da envoltória Nakagami- m
$F_\Theta(\theta)$	Função distribuição acumulada da fase Nakagami- m
$F_\Theta^{-1}(\theta)$	Função distribuição acumulada inversa da fase Nakagami- m
$f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta})$	Função Densidade de Probabilidade Conjunta das Variáveis Aleatórias Θ e $\dot{\Theta}$
$N_\Theta(\theta)$	Taxa de cruzamento de fase Nakagami- m
$f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$	Função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias R, \dot{R}, Θ e $\dot{\Theta}$
$h_R(r)$	Função de transformação de envoltória
$h'_R(r)$	Derivada da função de transformação de envoltória
$h_\Theta(\theta)$	Função de transformação de fase
$h'_\Theta(\theta)$	Derivada da função de transformação de fase
$h'_W(w)$	Derivada da função de transformação de W
$N_{\Theta Ray}(\theta_{Ray})$	Taxa de cruzamento de fase Rayleigh
$f_{\Theta Ray}(\theta)$	Função densidade de probabilidade da fase Rayleigh
$F_{\Theta Ray}(\theta)$	Função distribuição acumulada da fase Rayleigh
$F_{\Theta Ray}^{-1}(\theta)$	Função distribuição acumulada inversa da fase Rayleigh

p	Parâmetro de fase
m_L	Maior múltiplo de $1/2$ menor ou igual ao parâmetro m
m_U	Menor múltiplo de $1/2$ maior que o parâmetro m
$p(m)$	Probabilidade de selecionar m_L
$1 - p(m)$	Probabilidade de selecionar m_U
$E(\cdot)$	Média de uma Variável Aleatória
$V(\cdot)$	Variância de uma Variável Aleatória

Publicações

1. J. C. S. Santos Filho, B. V. Teixeira, M. D. Yacoub, G. T. F. de Abreu, “The RM^2 Nakagami Fading Channel Simulator,” aceito na *IEEE Trans. Wireless Commun.*, Jan. 2013.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O Canal Rádio Móvel	1
1.2	O Modelo de Desvanecimento Nakagami- m	2
1.3	Objetivos e Estrutura da Dissertação	2
2	Simuladores Existentes: Clássico, Rank-matching e Random-mixture	5
2.1	Introdução	5
2.2	Simulador Clássico	6
2.3	Simulador Rank-matching	12
2.4	Simulador Random-mixture	17
2.5	Conclusão	19
3	Simulador Proposto (RM^2)	21
3.1	Introdução	21
3.2	Simulador RM^2	21
3.2.1	Preliminares	22
3.2.2	Esquema de simulação e estatísticas resultantes	24
3.2.3	Reprojeto de $p(m)$	27
3.3	Conclusão	28
4	Resultados Numéricos e Comparações de Desempenho	29
4.1	Introdução	29
4.2	Rank-matching	29
4.2.1	Envoltória	29
4.2.2	Fase	31
4.3	Random-mixture	31
4.3.1	Envoltória	31
4.3.2	Fase	33
4.4	RM^2	34
4.4.1	Envoltória	34
4.4.2	Fase	34

4.5	Conclusão	37
5	Conclusões e Perspectivas	38
5.1	Perspectivas	39
	Bibliografia	40
	Apêndice A Solução Exata em Forma Fechada para a Função Distribuição Acumulada da Fase Nakagami-m e sua Inversa	45
A.1	CDF da fase Nakagami- m	45
A.2	Inversa da CDF da fase Nakagami- m	46

Introdução

1.1 O Canal Rádio Móvel

Nas últimas décadas, o avanço acelerado dos sistemas de comunicações sem fio tem sido um dos fatores mais importantes na grande revolução que vem ocorrendo no cenário mundial das telecomunicações. Tecnologias e serviços cada vez mais sofisticados se tornam cada vez mais acessíveis, devido ao barateamento dos custos de fabricação e à comercialização em larga escala. Todo este avanço é fortemente impulsionado por uma característica peculiar e muito atrativa das comunicações sem fio: a mobilidade. Entretanto, tal mobilidade tem seu preço, de modo que alguns aspectos tornam as comunicações sem fio um problema interessante e desafiador, dentre os quais dois se destacam: perda de percurso e desvanecimento. Ao incluirmos a questão do reuso de frequência, um aspecto adicional deve ser levado em conta: interferência. A perda de percurso corresponde à atenuação do nível médio de sinal devido ao aumento da distância entre transmissor e receptor, tendo sido estudada há muitos anos [1], [2]. Novos algoritmos de predição de perda vêm sendo propostos à medida que o uso de frequências avança no espectro [2–14]. O desvanecimento, por sua vez, se refere às flutuações aleatórias do nível de sinal no receptor, e ocorre por meio de dois mecanismos: sombreamento e multipercurso. O sombreamento está associado ao chamado desvanecimento de longo prazo, provocado por obstáculos de grande porte, como relevo e prédios. É normalmente combatido por meio de diversidade macroscópica, a exemplo da cooperação de várias estações rádio-base [15]. Já o multipercurso está associado ao chamado desvanecimento de curto prazo. Este é provocado pela sobreposição de uma infinidade de ondas de rádio no receptor, oriundas de múltiplas reflexões, difrações e espalhamentos ao longo do percurso aéreo entre transmissor e receptor [1]. Esses múltiplos percursos resultam em componentes de onda com amplitudes, fase e atrasos distintos, que se somam no receptor de modo ora construtivo (em fase) e ora destrutivo (em oposição de fase). Daí a flutuação aleatória no nível do sinal recebido. Flutuações de dezenas de decibéis abaixo do nível médio do sinal são comuns. O multipercurso pode ser combatido por meio de diversidade microscópica, como por exemplo o uso de múltiplas antenas nos terminais móveis [16], [17], [18]. Por fim, a interferência ocorre por conta do compartilhamento do espectro de frequência, em sendo este um recurso relativamente escasso para atender ao crescente e exigente número de usuários. As frequências são reutilizadas em localizações diferentes para aumentar a eficiência espectral. A

interferência ocorre tanto em sistemas de banda estreita quanto de banda larga. Nos primeiros, a interferência se dá entre um pequeno número de sinais de alta potência; nos segundos, entre um grande número de sinais de baixa potência. A interferência pode ser combatida, por exemplo, com uso de antenas direcionais, alocação dinâmica de canais e técnicas de detecção multiusuário, o que aumenta a complexidade do sistema de comunicações. Em particular, o uso de técnicas de espalhamento espectral constitui uma forma de combate à interferência de banda estreita. [19].

1.2 O Modelo de Desvanecimento Nakagami- m

Devido à infinidade de fatores envolvidos, quase sempre imprevisíveis, o fenômeno de multipercurso é tratado de forma probabilística. Em outras palavras, utilizam-se modelos estatísticos para descrever as flutuações aleatórias do canal sob efeito do desvanecimento. Em especial, o modelo Nakagami- m tem conquistado vasta aplicação e grande popularidade nos últimos anos. A distribuição Nakagami- m [20] é extremamente versátil, podendo modelar, através de seu parâmetro m , ambientes com diferentes graus de desvanecimento. Para $m = 1/2$ e $m=1$, ela se reduz para as distribuições semigaussiana positiva e Rayleigh, respectivamente. Condições de desvanecimento mais severas que Rayleigh e menos severas que semigaussiana positiva surgem para $1/2 < m < 1$, em cuja faixa a distribuição Nakagami- m aproxima a distribuição Hoyt [21]. De forma análoga, condições de desvanecimento menos severas que Rayleigh ocorrem com $m > 1$, quando a distribuição Nakagami- m aproxima a distribuição Rice [22]. Além de versátil, a distribuição Nakagami- m é muito simples, de fácil tratamento matemático, envolvendo potências e exponenciais. Em contraste, as distribuições Rice e Hoyt envolvem funções de Bessel, bem menos tratáveis, além de serem menos versáteis que a Nakagami- m . Um terceiro - e talvez mais importante - motivo para a popularidade da distribuição Nakagami- m é seu excelente ajuste a medidas experimentais [23], [24], [25].

Por outro lado, quando Nakagami propôs originalmente sua distribuição para modelar a envoltória do canal de desvanecimento, ele não propôs nenhuma distribuição correspondente para a fase do canal, muito menos um modelo dinâmico para especificar a evolução temporal do canal fase-envoltória e de suas estatísticas de ordem superior, como por exemplo a função de autocorrelação. Desde então, diferentes pesquisadores da área tem sugerido diferentes métodos para simular processos de desvanecimento Nakagami- m autocorrelacionados, incluindo os métodos em [26–36]. Cada método utiliza de diferentes artifícios a fim de lidar com as incertezas associadas à fase e à autocorrelação do canal Nakagami- m . A maior parte deles está baseada em simuladores existentes para o canal Rayleigh, provavelmente porque o desvanecimento Rayleigh é um caso especial do desvanecimento Nakagami- m ($m=1$) e tem propriedades de fase e autocorrelação já consolidadas na literatura.

1.3 Objetivos e Estrutura da Dissertação

É importante ressaltar que um simulador realista e eficiente para o canal de desvanecimento constitui uma ferramenta indispensável para o projeto e a otimização adequados de sistemas de comunicação sem fio. Todavia, como será detalhado no capítulo seguinte, nenhum dos si-

muladores existentes para o canal Nakagami- m provê simultaneamente (i) uma aplicabilidade para valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento, (ii) um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem Nakagami- m , (iii) um ajuste satisfatório para as estatísticas de segunda ordem Nakagami- m . Por exemplo, ao avaliarmos alguns dos mais importantes simuladores Nakagami- m disponíveis na literatura, verificamos que:

- O simulador clássico [26], [37] provê um ajuste exato para as estatísticas tanto de primeira quanto de segunda ordem do canal Nakagami- m , mas só é aplicável a valores múltiplos de $1/2$ do parâmetro de desvanecimento;
- O simulador *rank – matching* [33], [34] e o simulador por inversão [27] (estatisticamente equivalentes à medida que o tamanho da sequência tende a infinito) são aplicáveis a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento e proveem um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem do canal Nakagami- m , mas proveem um ajuste pobre para as estatísticas de segunda ordem;
- O simulador *random – mixture* [36] também é aplicável a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento além de prover um bom ajuste para as estatísticas de segunda ordem do canal Nakagami- m , mas apenas aproxima as estatísticas de primeira ordem.

Em vista do exposto, o objetivo desta dissertação de mestrado é projetar e analisar um novo esquema de simulação fase-envoltória para canais de desvanecimento Nakagami- m , com as seguintes características:

- i) Ser aplicável a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento;
- ii) Prover um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem do canal Nakagami- m ;
- iii) Prover um bom ajuste às estatísticas de segunda ordem do canal Nakagami- m .

A análise do simulador proposto é feita com base na obtenção de expressões exatas e em forma fechada para estatísticas importantes de segunda ordem, a saber:

- (i) Funções densidade de probabilidade conjuntas envolvendo a envoltória, a fase e suas derivadas temporais;
- (ii) Função densidade de probabilidade de segunda ordem da envoltória;
- (iii) Taxa de cruzamento de nível;
- (iv) Duração média de desvanecimento;
- (v) Taxa de cruzamento de fase.

Como subproduto, são também obtidas expressões exatas em forma fechada para a

- (vi) função distribuição acumulada da fase Nakagami- m e sua inversa.

O esquema proposto é baseado na combinação em cascata dos simuladores *random–mixture* e *rank – matching*, superando ambos em desempenho. Para efeito de comparação, algumas estatísticas de segunda ordem desconhecidas para estes dois simuladores são também obtidas de forma exata e fechada.

O restante da dissertação está estruturada da seguinte forma:

Capítulo 2 Revisão da estrutura e das estatísticas de primeira e segunda ordens dos simuladores Nakagami- m clássico, *rank – matching* e *random – mixture*. Para os dois últimos simuladores, algumas estatísticas de segunda ordem ainda desconhecidas são obtidas de forma exata e fechada.

Capítulo 3 Proposta de um novo esquema de simulação fase-envoltória para canais Nakagami- m , e análise de suas estatísticas de primeira e segunda ordens. Por ser baseado na combinação em cascata dos simuladores *random – mixture* e *rank – matching*, o novo esquema é denominado RM^2 .

Capítulo 4 Resultados numéricos e comparações de desempenho entre os simuladores existentes abordados na dissertação (clássico, *rank – matching* e *random – mixture*) e o novo simulador RM^2 proposto.

Capítulo 5 Considerações finais e perspectivas de trabalhos futuros.

Simuladores Existentes: Clássico, Rank-matching e Random-mixture

2.1 Introdução

Em [20], Nakagami relatou que as variações da envoltória das ondas de rádio devido ao desvanecimento por multipercurso podem ser descritas pela PDF

$$f_R(r; m, \Omega) = \frac{2m^m r^{2m-1} e^{-\frac{mr^2}{\Omega}}}{\Gamma(m)\Omega^m}, \quad (2.1)$$

onde R denota envoltória, $\Omega = E[R^2]$ é a potência média, $m = E^2[R^2]/V[R^2]$ é o parâmetro de desvanecimento Nakagami- m e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama, definida por $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ [38, Eq. 6.1.1]. ($E[\cdot]$ denota esperança, $V[\cdot]$ variância.). Por outro lado, como mencionado no capítulo anterior, Nakagami não especificou nenhuma distribuição correspondente para a fase do canal, muito menos um modelo dinâmico para especificar a evolução temporal do canal fase-envoltória e de suas estatísticas de ordem superior, como por exemplo a função de autocorrelação. Desde então, diferentes pesquisadores da área têm sugerido diferentes métodos para simular processos de desvanecimento Nakagami- m autocorrelacionados, incluindo os métodos em [26–36]. Cada método faz uso de diferentes artifícios a fim de lidar com as incertezas associadas à fase e à autocorrelação do canal Nakagami- m . A maior parte deles está baseada em simuladores existentes para o canal Rayleigh, provavelmente porque o desvanecimento Rayleigh é um caso especial do desvanecimento Nakagami- m ($m=1$) e tem propriedades de fase e autocorrelação já consolidadas na literatura. Neste capítulo, revisitamos a estrutura e algumas estatísticas importantes de primeira e segunda ordens de três dos principais simuladores existentes para canais Nakagami- m : clássico [26], [37], *rank – matching* [33], [34] e *random – mixture* [36]. As estatísticas de segunda ordem investigadas incluem (i) funções densidade de probabilidade conjuntas envolvendo a envoltória, a fase e suas derivadas temporais, (ii) função densidade de probabilidade de segunda ordem da envoltória, (iii) taxa de cruzamento de nível, (iv) duração média de desvanecimento e (v) taxa de cruzamento de fase. Algumas destas estatísticas são ainda desconhecidas para os simuladores *rank – matching* e *random – mixture*, e serão obtidas aqui. Como ficará evidente, nenhum dos simuladores revisitados a seguir (de fato, nenhum simulador existente)

para o canal Nakagami- m provê simultaneamente (i) valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento, (ii) um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem Nakagami- m e (iii) um ajuste satisfatório para as estatísticas de segunda ordem Nakagami- m .

2.2 Simulador Clássico

O método clássico [26] para simulação de desvanecimento Nakagami- m foi sugerido pelo próprio Nakagami [20]. Nesse método, a envoltória Nakagami- m é construída a partir de processos gaussianos independentes, usando o fato de que a raiz quadrada da soma de $2m$ variáveis gaussianas ao quadrado independentes e igualmente distribuídas (i.i.d.) de média nula e variância $\Omega/(2m)$ é uma envoltória Nakagami- m variando com potência média Ω e parâmetro de desvanecimento m . Esse método somente funciona quando $2m$ é um número inteiro ou, equivalentemente, quando m é múltiplo de $1/2$. Isso é uma limitação relevante pelo fato de m na prática ser um número real. Por outro lado, o método clássico permitiu a obtenção de expressões analíticas para muitas estatísticas de segunda ordem importantes, tais como função de autocorrelação (ACF), taxa de cruzamento de nível (LCR), e duração média de desvanecimento (AFD); sem quaisquer restrições para serem usadas para valores reais arbitrários de m . Além disso, essas expressões mostraram produzir ajustes muito bons para dados experimentais de desvanecimento [40], [41], tornando-se assim bem aceitas como modelo apropriado para o desvanecimento Nakagami- m e vem sendo amplamente adotadas na literatura. Doravante, essas expressões serão chamadas de estatísticas de segunda ordem do modelo clássico Nakagami- m .

Em [37], o método clássico para a envoltória Nakagami- m foi estendido para incluir a fase do canal, dividindo-se a soma de $2m$ processos gaussianos para a envoltória em duas somas separadas de m processos gaussianos para as componentes em fase e quadratura. A PDF resultante da fase Nakagami- m é dada por [37].

$$f_{\Theta}(\theta; m) = \frac{\Gamma(m)|\sin(2\theta)|^{m-1}}{2^m \Gamma(\frac{m}{2})^2}. \quad (2.2)$$

Apesar da limitação inicial de m ser múltiplo de $1/2$, aqui novamente o método clássico permitiu a obtenção de expressões analíticas para importantes estatísticas de segunda ordem da fase Nakagami- m sem restrições de uso para valores reais arbitrários de m [42]. Uma importante estatística de segunda ordem da fase do canal é a sua LCR, também chamada de taxa de cruzamento de fase (PCR). Na análise que segue, será incluída a PCR nas comparações de desempenho dos vários simuladores Nakagami- m apresentados.

Seja o canal complexo de desvanecimento Nakagami- m representado por

$$X + jY = R \exp(j\Theta), \quad (2.3)$$

em que X é a componente em fase, Y a componente em quadratura, R a envoltória e Θ a fase. No método clássico [20], [26], R é gerado como a raiz quadrada da soma de $2m$ processos gaussianos i.i.d. G_i ao quadrado ($i = 1, \dots, 2m$) de média nula e variância $\Omega/(2m)$, ou seja,

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{2m} G_i^2}. \quad (2.4)$$

Em [37], esse método foi expandido para incluir a fase Θ , dividindo-se a soma para R em duas somas que produzem X e Y separadamente. O simulador fase-envoltória clássico é ilustrado na Fig. 2.1, e as equações subjacentes são sumarizadas como [26], [37]

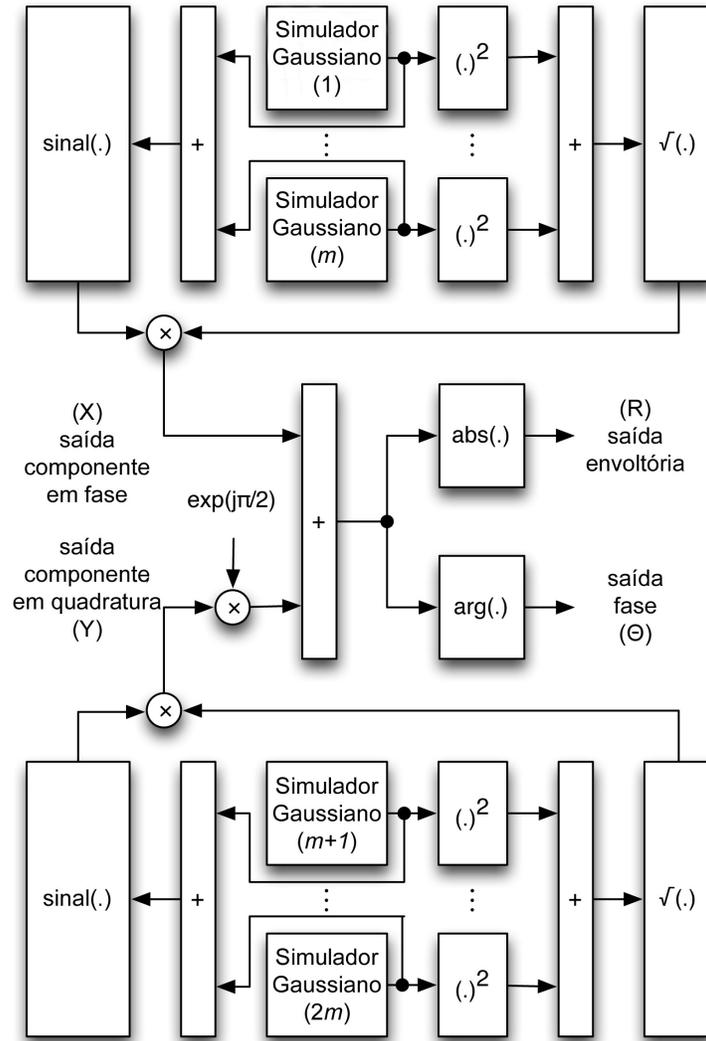


Figura 2.1: O simulador Nakagami- m clássico.

$$X = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^m G_i \right) \sqrt{\sum_{i=1}^m G_i^2}, \quad (2.5)$$

$$Y = \text{sign} \left(\sum_{i=m+1}^{2m} G_i \right) \sqrt{\sum_{i=m+1}^{2m} G_i^2}, \quad (2.6)$$

$$R = \text{abs}(X + jY), \quad (2.7)$$

$$\Theta = \text{arg}(X + jY), \quad (2.8)$$

em que $\text{sign}(\cdot)$ é a função sinal, $\text{abs}(\cdot)$ indica valor absoluto, e $\text{arg}(\cdot)$ indica argumento. É importante notar que X e Y contêm m processos gaussianos cada, portanto, em princípio, este esquema só funciona para m inteiro. Por outro lado, o esquema pode ser facilmente relaxado a fim de acomodar valores múltiplos de $1/2$ para m , ao se incluir um termo gaussiano extra em X ou Y [26], [43]. Porém, este é um cenário mais geral que [37], pois X e Y não são mais identicamente distribuídos, e a PDF de Θ não é mais dada por (2.2). Este caso será comentado à frente nesta dissertação.

A seguir, reproduz-se uma série de estatísticas conhecidas importantes de primeira e segunda ordens para o simulador clássico. As estatísticas de segunda ordem apresentadas pressupõem um cenário com espalhamento isotrópico e recepção omnidirecional.

Para espalhamento isotrópico e recepção omnidirecional, a derivada temporal da envoltória Nakagami- m \dot{R} de R é gaussiana com média nula e variância $\dot{\sigma}^2 = \pi^2 f_D^2 \Omega / m$, onde f_D é a frequência de Doppler máxima dada em Hz. Além disso, em tal cenário, R e \dot{R} são variáveis aleatórias independentes [26]. Usando isso, a PDF conjunta de $R(t)$ e $\dot{R}(t)$ é obtida como [26, Eq. 13]

$$f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}; m, \Omega) = \frac{\sqrt{2} m^{m+\frac{1}{2}} r^{2m-1} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega} - \frac{m\dot{r}^2}{2\pi^2 f_D^2 \Omega}\right)}{\pi^{\frac{3}{2}} f_D \Omega^{m+\frac{1}{2}} \Gamma(m)}. \quad (2.9)$$

A PDF de segunda ordem da envoltória $R(t)$, avaliada nos instantes de tempo t e $t + \tau$, é dada por [20, Eq. 126]

$$f_{R(t),R(t+\tau)}(r_1, r_2; m, \Omega) = \frac{4m^{m+1} (r_1 r_2)^m \exp\left(-\frac{m(r_1^2 + r_2^2)}{\Omega(1-\rho_2(\tau))}\right) I_{m-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho_2(\tau)} m r_1 r_2}{\Omega(1-\rho_2(\tau))}\right)}{\Omega^{m+1} \rho_2(\tau)^{\frac{m-1}{2}} (1-\rho_2(\tau)) \Gamma(m)}, \quad (2.10)$$

na qual τ é um intervalo de tempo, $I_v(\cdot)$ é a função de Bessel modificada do primeiro tipo e v -ésima ordem definida em [44, Eq. 8.406] e $\rho_2(\tau)$ é o coeficiente de autocorrelação do quadrado de cada componente Rayleigh subjacente. Através de [20, Eq. 127], é possível mostrar que $\rho_2(\tau)$ é também o coeficiente de autocorrelação do quadrado da envoltória Nakagami- m $R(t)$ [20, Eq. 127]. A forma funcional de $\rho_2(\tau)$ depende das condições de espalhamento [45]. Para espalhamento isotrópico e recepção omnidirecional, $\rho_2(\tau) = J_0^2(2\pi f_D \tau)$, sendo $J_0(\cdot)$ a função de Bessel do primeiro tipo e ordem zero definida em [44, Eq. 8.411].

Outra estatística de segunda ordem importante de $R(t)$ é a LCR, definida como o número médio de cruzamentos por segundo para cima (ou para baixo) a um dado nível r de envoltória. A LCR de R é fornecida por [22]

$$N_R(r) = \int_0^\infty \dot{r} f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}) d\dot{r}, \quad (2.11)$$

na qual $f_{R,\dot{R}}(\cdot, \cdot)$ é a PDF conjunta de R e sua derivada temporal \dot{R} . Substituindo-se (2.9) em (2.11), é possível calcular a LCR de R sob condições de espalhamento isotrópico e recepção omnidirecional como

$$N_R(r; m, \Omega) = \frac{\sqrt{2\pi} f_D m^{m-\frac{1}{2}} r^{2m-1} e^{-\frac{mr^2}{\Omega}}}{\Gamma(m) \Omega^{m-\frac{1}{2}}}. \quad (2.12)$$

A AFD é definida como o tempo médio que um sinal aleatório permanece abaixo de um dado nível após cruzá-lo. Neste caso, a AFD de R no nível r é dada por [22]

$$T_R(r; m, \Omega) = \frac{F_R(r; m, \Omega)}{N_R(r; m, \Omega)}, \quad (2.13)$$

na qual $F_R(r)$ é a CDF da envoltória Nakagami- m dada por [20]

$$F_R(r; m, \Omega) = 1 - \frac{\Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)}, \quad (2.14)$$

sendo $\Gamma(\cdot, \cdot)$ é a função gama incompleta definida como: $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ [38, Eq. 6.5.1]. Assim, substituindo-se (2.12) e (2.14) em (2.13), a AFD do método clássico pode ser calculada como [26]

$$T_R(r; m, \Omega) = \frac{\Omega^{m-\frac{1}{2}} \left[\Gamma(m) - \Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right) \right]}{\sqrt{2\pi} f_D m^{m-\frac{1}{2}} r^{2m-1} e^{-\frac{mr^2}{\Omega}}}. \quad (2.15)$$

Em [37], as PDFs das componentes em fase (X) e em quadratura (Y) do sinal Nakagami- m foram obtidas. Tais componentes são identicamente distribuídas, com PDFs dadas por

$$f_Z(z; m, \Omega) = \frac{m^{\frac{m}{2}} |z|^{m-1}}{\Omega^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} e^{-\frac{mz^2}{\Omega}}, \quad -\infty < z < \infty, \quad (2.16)$$

em que Z denota X ou Y . Além disso, mostra-se em [42] que Z (X ou Y) é independente de sua derivada temporal \dot{Z} (\dot{X} ou \dot{Y}), e que tal derivada é uma variável gaussiana de média nula e variância $\sigma^2 = \pi^2 f_D^2 \Omega / m$. Na verdade, como X e Y são processos independentes, resulta que X , \dot{X} , Y e \dot{Y} são mutuamente independentes. Usando esses resultados e (2.16), então a PDF conjunta de X , \dot{X} , Y e \dot{Y} é obtida como [42, Eq. 3].

$$f_{X,\dot{X},Y,\dot{Y}}(x, \dot{x}, y, \dot{y}; m, \Omega) =$$

$$f_X(x; m, \Omega) f_{\dot{X}}(\dot{x}; m, \Omega) f_Y(y; m, \Omega) f_{\dot{Y}}(\dot{y}; m, \Omega) = \frac{m^{m+1} |x|^{m-1} |y|^{m-1}}{\Omega^{m+1} \Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right) 2\pi^3 f_d^2} e^{-\frac{m}{\Omega} \left(x^2 + y^2 + \frac{\dot{x}^2}{2\pi^2 f_d^2} + \frac{\dot{y}^2}{2\pi^2 f_d^2} \right)}. \quad (2.17)$$

A partir de (2.17), e usando-se as relações $X = R \cos \Theta$, $Y = R \sin \Theta$, $\dot{X} = \dot{R} \cos \Theta - R \dot{\Theta} \sin \Theta$ e $\dot{Y} = \dot{R} \sin \Theta + R \dot{\Theta} \cos \Theta$, é possível obter, pelo procedimento padrão de transformação de variáveis a PDF conjunta $f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m, \Omega)$ da envoltória, da fase e de suas respectivas derivadas no tempo como [42]

$$f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m, \Omega) = \frac{m^{m+1} r^{2m} |\sin(2\theta)|^{m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} \left(r^2 + \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{2\pi^2 f_D^2}\right)\right)}{\Omega^{m+1} \Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right) 2^m \pi^3 f_D^2}. \quad (2.18)$$

Integrando-se (2.18) em \dot{R} e em R , é possível obter a PDF conjunta $f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m)$ da fase Θ e de sua derivada temporal $\dot{\Theta}$ como segue

$$f_{\Theta,\dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m) = \frac{|\sin(2\theta)|^{m-1} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{2^{m+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\dot{\theta}^2}{2\pi^2 f_D^2}\right)^{m+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^2 f_D \pi^{3/2}}. \quad (2.19)$$

Finalmente, utilizando-se (2.19) dentro da mesma estrutura geral fornecida em (2.11), agora com Θ em lugar de R e $\dot{\Theta}$ em lugar de \dot{R} , é possível calcular a taxa de cruzamento de nível da fase, chamada também de taxa de cruzamento de fase (PCR) e dada por [42]

$$N_{\Theta}(\theta; m) = \frac{\sqrt{\pi} f_D |\sin(2\theta)|^{m-1} \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^2}. \quad (2.20)$$

Para $m = 1$, (2.20) reduz para o caso Rayleigh, no qual a PCR é constante e igual a $f_D/(2\sqrt{2})$.

As estatísticas de fase, de componente em fase e de componente em quadratura apresentadas até aqui se referem ao caso em que o parâmetro m é inteiro e em que X e Y são identicamente distribuídos, cada qual contendo m componentes gaussianas. É possível relaxar essa condição, permitindo-se que o total de $2m$ gaussianas do processo Nakagami- m se distribua de forma desigual entre X e Y . Isso foi feito em [43]. Como resultado, X e Y deixam de ser identicamente distribuídos, e a PDF da fase Θ deixa de ser dada por (2.2). Apresentamos a seguir as alterações correspondentes nas estatísticas de primeira e segunda ordens de X , Y e Θ para este cenário geral. Tal cenário será aqui explorado para contemplar o caso do simulador clássico em que m é múltiplo de $1/2$.

Em [43], considera-se que X e Y são compostas de m_X e m_Y gaussianas, respectivamente, com m_X possivelmente diferente de m_Y , mas totalizando $2m$ gaussianas, ou seja

$$m_X + m_Y = 2m. \quad (2.21)$$

Note que a condição $m_X \neq m_Y$ equivale a dizer que existe um desbalanceamento de potência entre X e Y . Há diversas combinações de m_X e m_Y capazes de contemplar os casos em que m é múltiplo de $1/2$. Nesta dissertação, optamos por explorar a combinação mais simples, em que X apresenta uma gaussiana a mais do que Y , isto é,

$$m_X = m_Y + 1. \quad (2.22)$$

Foi definido em [43] um parâmetro de fase ($-1 \leq p \leq 1$), tal que, se $p = 0$, tem-se a condição de X e Y balanceados. O parâmetro de fase é definido como [43, Eq. 5]

$$p \triangleq \frac{m_X - m_Y}{m_X + m_Y}. \quad (2.23)$$

Em nosso caso particular de interesse com m múltiplo de $1/2$, a partir de (2.21) e (2.22), é possível obter o parâmetro de potência p em termos do parâmetro de desvanecimento m , de modo que $p = \frac{1}{2m}$.

A partir da definição geral de p , a PDF da fase Nakagami- m pode ser obtida como [43, Eq. 15]

$$f_{\Theta}(\theta; m, \Omega) = \frac{\Gamma(m)}{2^m \Gamma(\frac{1+p}{2}m) \Gamma(\frac{1-p}{2}m)} \frac{|\sin(2\theta)|^{m-1}}{|\tan(\theta)|^{pm}}, \quad (2.24)$$

o que para o caso particular com m múltiplo de $1/2$ ($p = \frac{1}{2m}$) reduz para

$$f_{\Theta}(\theta; m, \Omega) = \frac{\Gamma(m)}{2^m \Gamma(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}) \Gamma(\frac{m}{2} - \frac{1}{4})} \frac{|\sin(2\theta)|^{m-1}}{|\tan(\theta)|^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.25)$$

Obviamente, (2.24) reduz para (2.2) quando o parâmetro de fase p é igual a zero.

Em [43], foram também obtidas expressões analíticas para estatísticas importantes de ordem superior, em termos do parâmetro de potência p . A seguir, reproduzimos esses resultados, bem como seus casos especiais quando m é múltiplo de $1/2$, ou seja, com $p = \frac{1}{2m}$. Primeiramente, foi calculada a PDF conjunta para as componentes em fase e quadratura X e Y e suas derivadas. Esta é dada por [43, Eq. 24]

$$f_{X, \dot{X}, Y, \dot{Y}}(x, \dot{x}, y, \dot{y}; m, \Omega, p) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^{m+1} \frac{|x|^{(1+p)m-1} |y|^{(1-p)m-1}}{2\pi^3 f_D^2 \Gamma(\frac{1+p}{2}m) \Gamma(\frac{1-p}{2}m)} e^{-\frac{m}{\Omega} \left(x^2 + y^2 + \frac{\dot{x}^2}{2\pi^2 f_D^2} + \frac{\dot{y}^2}{2\pi^2 f_D^2}\right)}, \quad (2.26)$$

o que para o caso específico com m múltiplo de $1/2$ ($p = \frac{1}{2m}$) reduz para

$$f_{X, \dot{X}, Y, \dot{Y}}(x, \dot{x}, y, \dot{y}; m, \Omega) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^{m+1} \frac{|x|^{(\frac{2m+1}{2})m-1} |y|^{(\frac{2m-1}{2})m-1}}{2\pi^3 f_D^2 \Gamma(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}) \Gamma(\frac{m}{2} - \frac{1}{4})} e^{-\frac{m}{\Omega} \left(x^2 + y^2 + \frac{\dot{x}^2}{2\pi^2 f_D^2} + \frac{\dot{y}^2}{2\pi^2 f_D^2}\right)}. \quad (2.27)$$

Através de (2.26), utilizando-se transformação de variáveis pode-se obter a PDF conjunta de $f_{R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$, dada por [43, Eq. 25]

$$f_{R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m, \Omega, p) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^{m+1} \frac{r^{2m} |\sin(2\theta)|^{m-1} |\tan(\theta)|^{-pm}}{2^m \pi^3 f_D^2 \Gamma(\frac{1+p}{2}m) \Gamma(\frac{1-p}{2}m)} e^{-\frac{m}{\Omega} \left(\left(1 + \frac{\dot{\theta}^2}{2\pi^2 f_D^2}\right) r^2 + \frac{\dot{r}^2}{2\pi^2 f_D^2}\right)}. \quad (2.28)$$

o que para o caso específico com m múltiplo de $1/2$ ($p = \frac{1}{2m}$) reduz para

$$f_{R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m, \Omega) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^{m+1} \frac{r^{2m} |\sin(2\theta)|^{m-1} |\tan(\theta)|^{-\frac{1}{2}}}{2^m \pi^3 f_D^2 \Gamma(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}) \Gamma(\frac{m}{2} - \frac{1}{4})} e^{-\frac{m}{\Omega} \left(\left(1 + \frac{\dot{\theta}^2}{2\pi^2 f_D^2}\right) r^2 + \frac{\dot{r}^2}{2\pi^2 f_D^2}\right)}. \quad (2.29)$$

A partir da PDF conjunta em (2.28), é possível obter a PDF conjunta $f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta})$ através da integração em R e \dot{R} em seus limites apropriados. A PDF é dada por [43]

$$f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m, p) = \frac{|\sin(2\theta)|^{m-1} |\tan(\theta)|^{-pm} \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\pi^{3/2} f_D \Gamma(\frac{1+p}{2}m) \Gamma(\frac{1-p}{2}m) \left(2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\pi^2 f_D^2}\right)^{m + \frac{1}{2}}}, \quad (2.30)$$

o que para o caso específico com m múltiplo de $1/2$ ($p = \frac{1}{2m}$) reduz para

$$f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m) = \frac{|\sin(2\theta)|^{m-1} |\tan(\theta)|^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\pi^{3/2} f_D \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right) \left(2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\pi^2 f_D^2}\right)^{m+\frac{1}{2}}}. \quad (2.31)$$

Obtida a PDF conjunta em (2.30), calcula-se a PCR, definida como

$$N_{\Theta}(\theta) = \int_0^{\infty} \dot{\theta} f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}) d\dot{\theta}, \quad (2.32)$$

obtendo-se [43]

$$N_{\Theta}(\theta; m, p) = \frac{\sqrt{\pi} f_D |\sin(2\theta)|^{m-1} |\tan(\theta)|^{-pm} \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1+p}{2} m\right) \Gamma\left(\frac{1-p}{2} m\right)}, \quad (2.33)$$

o que para o caso específico com m múltiplo de $1/2$ ($p = \frac{1}{2m}$) reduz para

$$N_{\Theta}(\theta; m) = \frac{\sqrt{\pi} f_D |\sin(2\theta)|^{m-1} |\tan(\theta)|^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)}. \quad (2.34)$$

Quando $p = 0$, a expressão em (2.33) reduz para o caso balanceado em (2.20).

De fato, a expressão dada em (2.34) é válida para valores de m múltiplos de $1/2$ maiores que 1, ou seja, excetuando-se o caso $m = 1/2$. Para $m = 1/2$, a partir do modelo físico do simulador clássico de Nakagami- m , é possível concluir que a PCR é nula, já que o sinal só apresenta componente em fase, tendo portanto uma fase limitada aos valores 0 ou π .

Pode-se concluir que a PCR do modelo clássico de Nakagami- m , ora é dada por (2.20), quando m for inteiro, ora é dada por (2.34), quando m for múltiplo de $1/2$.

As expressões estatísticas de segunda ordem aqui apresentadas produzem bons ajustes para dados de desvanecimento empíricos [40], [41], tornando-se bem aceitas e largamente utilizadas como modelo apropriado para o desvanecimento Nakagami- m . Por conta disso, as estatísticas do método clássico serão utilizadas nessa dissertação como meta de desempenho para os outros métodos apresentados. Vale lembrar que, apesar de o modelo e simulador clássicos de Nakagami- m serem limitados a valores de m inteiros ou múltiplos de $1/2$, as expressões estatísticas resultantes não apresentam qualquer restrição para serem usadas com valores reais arbitrários de m .

2.3 Simulador Rank-matching

O método *rank-matching* [33], [34] para simulação de canais de desvanecimento Nakagami- m está ilustrado na Fig. 2.2. Nesse método, a sequência da envoltória Nakagami- m é obtida a partir de sequências de envoltórias Rayleigh de referência e um conjunto de amostras de envoltórias Nakagami- m geradas independentemente¹. A sequência de saída é um rearranjo destas amostras Nakagami- m de uma maneira que as amostras na sequência de saída correspondem

¹Amostras de envoltória Nakagami- m podem ser geradas como a raiz quadrada de amostras gama. Amostras gama, por sua vez, podem ser geradas a partir de rotinas disponíveis em pacotes computacionais como Matlab e Mathematica [34].

exatamente ao *rank* das amostras na sequência de Rayleigh, ou seja, os mínimos ocorrem na mesma posição, os segundos mínimos ocorrem na mesma posição, e assim por diante. A operação é chamada *rank – matching*. O mesmo procedimento é usado para obter a sequência de fase Nakagami-*m* a partir de uma sequência de fase Rayleigh de referência e um conjunto de amostras de fase Nakagami-*m* geradas independentemente ². As sequências de referência podem ser obtidas a partir de qualquer simulador Rayleigh disponível na literatura. O simulador *rank – matching* se aplica a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento *m* e provê um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem do canal fase-envoltória Nakagami-*m*.

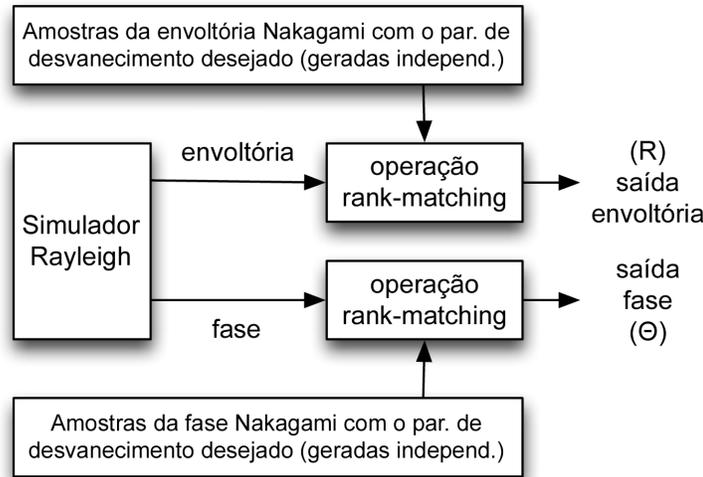


Figura 2.2: O simulador Nakagami-*m* *rank – matching*.

Em [46], provou-se que gerar um processo aleatório *B* a partir de um processo de entrada de referência *A*, através do método *rank – matching*, é equivalente a gerar um processo *B* a partir de *A* através do tradicional método de inversão [47, Eq. 7-157]

$$B = F_B^{-1}(F_A(A)), \quad (2.35)$$

em que $F_B^{-1}(\cdot)$ é a CDF inversa de *B* e $F_A(\cdot)$ é a CDF de *A*. A seguir, usaremos essa equivalência para analisar as estatísticas de segunda ordem do simulador *rank – matching* tomando como base as relações analíticas do método de inversão. Por exemplo, mostra-se em [48] que a LCR $N_B(b)$ e AFD $T_B(b)$ de *B* podem ser obtidas diretamente em termos da LCR $N_A(a)$ e AFD $T_A(a)$ de *A* como

$$N_B(b) = N_A(h(b)), \quad (2.36)$$

$$T_B(b) = T_A(h(b)), \quad (2.37)$$

em que

²Amostras de fase Nakagami-*m* podem ser obtidas a partir de amostras de envoltória Nakagami-*m* e amostras do tipo Bernoulli, como detalhado em [34].

$$h(b) \triangleq F_A^{-1}(F_B(b)), \quad (2.38)$$

$F_A^{-1}(\cdot)$ é a CDF inversa de A, e $F_B(\cdot)$ é a CDF de B. A função de transformação $h(\cdot)$ é crucial para a análise que segue. Em particular, a aplicação direta de (2.36) e (2.37) com $B = R$ e $A = R_{Ray}$, fornece, a partir da LCR e AFD de Rayleigh (dadas por (2.12) e (2.15) com $m = 1$), a LCR e AFD de Nakagami- m como sendo [48, Eqs. 15 e 16]

$$N_{Rank}(r; m, \Omega) = \frac{\sqrt{2\pi} f_D \Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right) \sqrt{-\ln\left(\frac{\Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)}\right)}}{\Gamma(m)}, \quad (2.39)$$

$$T_{Rank}(r; m, \Omega) = \frac{\Gamma(m) - \Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)}{\sqrt{2\pi} f_D \Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right) \sqrt{-\ln\left(\frac{\Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)}\right)}}. \quad (2.40)$$

Mostra-se em [48] que a PDF conjunta da envoltória $f_{R,\dot{R}}(\cdot, \cdot)$ para o método *rank-matching* pode ser calculada a partir da PDF conjunta correspondente de Rayleigh (dada pela Eq.(2.9) com $m = 1$) e da transformação de variáveis definida pela função $h(\cdot)$ em (2.38) com $A = R_{Ray}$ e $B = R$. O resultado é dado por [48, Eq. 12]

$$f_{R,\dot{R}rank}(r, \dot{r}; m, \Omega) = \frac{\sqrt{2} m^{2m} r^{4m-2} \exp\left(-\frac{2mr^2}{\Omega} + \frac{m^{2m} r^{4m-2} \exp\left(-\frac{2mr^2}{\Omega}\right) \dot{r}^2}{2\pi^2 f_D^2 \Omega^{2m} \Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)^2 \ln\left(\frac{\Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)}\right)}\right)}{\pi^{3/2} f_D \Omega^{2m} \Gamma(m) \Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right) \sqrt{-\ln\left(\frac{\Gamma\left(m, \frac{mr^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)}\right)}}. \quad (2.41)$$

De forma similar, a PDF de segunda ordem de R pode ser obtida a partir da PDF de segunda ordem da envoltória Rayleigh (dada pela Eq.(2.10) com $m = 1$) e da transformação de variáveis definida pela função $h(\cdot)$ em (2.38) com $A = R_{Ray}$ e $B = R$, sendo dada por [48, Eq. 13]

$$\begin{aligned} f_{R(t),R(t+\tau)rank}(r_1, r_2; m, \Omega) &= \frac{4m^{2m} (r_1 r_2)^{2m-1}}{\Omega^{2m} (1 - \rho_2(\tau)) \Gamma(m)^{\frac{2}{1-\rho_2(\tau)}}} \\ &\times \exp\left(-\frac{m(r_1^2 + r_2^2)}{\Omega}\right) \left[\Gamma\left(m, \frac{mr_1^2}{\Omega}\right) \Gamma\left(m, \frac{mr_2^2}{\Omega}\right)\right]^{\frac{\rho_2(\tau)}{1-\rho_2(\tau)}} \\ &\times I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho_2(\tau)}}{1 - \rho_2(\tau)} \sqrt{\ln\left(\frac{\Gamma\left(m, \frac{mr_1^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)}\right) \ln\left(\frac{\Gamma\left(m, \frac{mr_2^2}{\Omega}\right)}{\Gamma(m)}\right)}\right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Como contribuição desta dissertação, o procedimento usado para envoltória em [48] será estendido a seguir para a análise das estatísticas superiores da fase. Por exemplo, a PCR da

fase Nakagami- m Θ gerada a partir de uma fase Rayleigh Θ_{Ray} via *rank – matching* pode ser obtida usando-se $A = \Theta_{Ray}$ e $B = \Theta$ em (2.38) resultando em

$$N_{\Theta}(\theta) = N_{\Theta_{Ray}}(h_{\Theta}(\theta)), \quad (2.43)$$

em que

$$h_{\Theta}(\theta) \triangleq F_{\Theta_{Ray}}^{-1}(F_{\Theta}(\theta)), \quad (2.44)$$

na qual $F_{\Theta_{Ray}}^{-1}(\cdot)$ é a inversa da CDF de Θ_{Ray} e $F_{\Theta}(\cdot)$ é a CDF de Θ . A função de transformação de fase $h_{\Theta}(\theta)$ é crucial para a análise que segue. Assim, faz-se necessário encontrar as duas CDFs envolvidas em sua definição.

Todavia, em se tratando da PCR em particular, a análise é de fato mais simples, e acaba por não depender da função $h_{\Theta}(\cdot)$, como segue. Em (2.43), é possível notar que a PCR Nakagami- m do método *rank – matching* é uma versão transformada em domínio da PCR de Rayleigh, sendo a transformação definida pela função $h(\cdot)$ em (2.44). Por outro lado, sabe-se que a PCR de Rayleigh é uma função constante dada por $f_D/(2\sqrt{2})$ para qualquer nível de fase [42]. Como resultado, neste caso, a transformação de domínio não tem qualquer impacto sobre a PCR Nakagami- m , sendo então que a PCR Nakagami- m para o método *rank – matching* de simulação é constante e idêntica à PCR para canais de desvanecimento Rayleigh, independentemente do parâmetro de desvanecimento m e do nível de fase, ou seja,

$$N_{\Theta_{rank}}(\theta; m) = \frac{f_D}{2\sqrt{2}}. \quad (2.45)$$

Voltemos agora à determinação de $h_{\Theta}(\cdot)$ em (2.44). A PDF da fase Rayleigh é uniforme, ou seja,

$$f_{\Theta_{Ray}}(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad (2.46)$$

cuja integral fornece a CDF de Θ_{Ray} como

$$F_{\Theta_{Ray}}(\theta) = \frac{\pi + \theta}{2\pi}, \quad 0 < \theta \leq 2\pi. \quad (2.47)$$

A partir de (2.47), é possível obter a inversa da CDF de Θ_{Ray} como

$$F_{\Theta_{Ray}}^{-1}(\theta) = \left(\theta - \frac{1}{2}\right) 2\pi. \quad (2.48)$$

Quanto à CDF da fase Nakagami- m , esta é ainda desconhecida e se encontra deduzida no apêndice desta dissertação como contribuição original. O resultado é

$$F_{\Theta}(\theta; m) = \frac{1}{8} \left(5 + 2 \left[\frac{2\theta}{\pi} \right] - \Pi \left(\frac{2\theta}{\pi} \right) I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) \right), \quad (2.49)$$

em que $I_z(a, b)$ é a função beta regularizada incompleta, definida como $I_z(a, b) = \frac{B_Z(a, b)}{B(a, b)}$ [38, Eq. 6.6.2], sendo que a função no numerador é a função beta incompleta, dada por $B_Z(a, b) = \int_0^Z t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ [38, Eq. 6.6.1], e a função no denominador é a função beta, dada por $B(a, b) =$

$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ [38, Eq. 6.2.1]. Além disso, $\Pi(\cdot)$ uma onda quadrada que alterna entre -1 e +1 com período unitário (computável no Mathematica por meio de `SquareWave[.]`).

Através de (2.48) e (2.49) é possível determinar $h(\theta; m)$ como

$$h_{\Theta}(\theta; m) = \frac{\pi}{4} \left(1 + 2 \left\lfloor \frac{2\theta}{\pi} \right\rfloor - \Pi \left(\frac{2\theta}{\pi} \right) I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) \right). \quad (2.50)$$

A primeira derivada de $h_{\Theta}(\theta)$, $h'_{\Theta}(\theta)$, também será útil para a análise que segue, sendo obtida como

$$h'_{\Theta}(\theta; m) = \frac{2\pi \cos(2\theta) \csc(4\theta) (\sin^2(2\theta))^{\frac{m}{2}} \Pi \left(\frac{2\theta}{\pi} \right)}{B \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)}. \quad (2.51)$$

Determinadas a função de transformação de fase $h_{\Theta}(\theta)$ e a sua primeira derivada $h'_{\Theta}(\theta)$, podemos agora proceder com a análise das estatísticas de segunda ordem envolvendo a fase Θ .

A PDF conjunta de Θ e sua derivada temporal $\dot{\Theta}$ pode ser obtida a partir da PDF conjunta correspondente de Rayleigh (dada pela Eq. (2.19) com $m = 1$) e da transformação de variáveis definida por $\Theta_{Ray} = h_{\Theta}(\Theta)$ e sua derivada temporal

$$\dot{\Theta}_{Ray} = h'_{\Theta}(\Theta)\dot{\Theta}. \quad (2.52)$$

O resultado é

$$f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m) = h_{\Theta}^{\prime 2}(\theta) f_{\Theta, \dot{\Theta}}(h_{\Theta}(\theta), h'_{\Theta}(\theta)\dot{\theta}), \quad (2.53)$$

em que $h_{\Theta}^{\prime 2}(\theta)$ é o Jacobiano da transformação. Substituindo-se (2.50), (2.51) e (2.19) para $m=1$ em (2.53), tem-se então

$$f_{\Theta, \dot{\Theta}_{rank}}(\theta, \dot{\theta}; m) = \frac{\csc^2(2\theta) (\sin^2(2\theta))^m}{2 f_D B^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) \left(2 + \frac{\dot{\theta}^2 (\sin^2(2\theta))^{m-1}}{f_D^2 B^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.54)$$

Outra estatística relevante é a PDF conjunta $f_{R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$. Esta pode ser obtida a partir da PDF conjunta correspondente de Rayleigh (dada pela Eq.(2.18) com $m = 1$) e da transformação de variáveis definida pelas seguintes relações:

$$R_{Ray} = F_{Ray}^{-1}(F_R(R)) \triangleq h_R(R), \quad (2.55)$$

$$\dot{R}_{Ray} = h'_R(R)\dot{R}, \quad (2.56)$$

$$\Theta_{Ray} = h_{\Theta}(\Theta), \quad (2.57)$$

$$\dot{\Theta}_{Ray} = h'_{\Theta}(\Theta)\dot{\Theta}, \quad (2.58)$$

sendo $F_R(\cdot)$ a CDF da envoltória Nakagami- m dada em (2.14), e $F_{Ray}^{-1}(\cdot)$ é a CDF inversa da envoltória Rayleigh que, por conveniência, R_{Ray} é normalizada com potência unitária, tal que

$F_{Ray}^{-1}(r) = \sqrt{-\ln(1-r)}$. As funções de transformação de envoltória $h_R(r)$ e $h'_R(r)$ foram obtidas em [48, como Eqs. (9) e (10)]

$$h_R(r; m, \Omega) = \sqrt{\ln \left(\frac{\Gamma(m)}{\Gamma \left(m, \frac{mr^2}{\Omega} \right)} \right)} \quad (2.59)$$

e

$$h'_R(r; m, \Omega) = \frac{m^m r^{2m-1} \exp \left(-\frac{mr^2}{\Omega} \right)}{\Omega^m \Gamma \left(m, \frac{mr^2}{\Omega} \right) \sqrt{\ln \left(\frac{\Gamma(m)}{\Gamma \left(m, \frac{mr^2}{\Omega} \right)} \right)}}. \quad (2.60)$$

Quanto à função de transformação de fase $h_\Theta(\theta)$ e sua primeira derivada $h'_\Theta(\theta)$, são dadas por (2.50) e (2.51), respectivamente. Com as expressões obtidas, é possível efetuar-se a transformação de variáveis de R_{Ray} , \dot{R}_{Ray} , Θ_{Ray} e $\dot{\Theta}_{Ray}$ para R , \dot{R} , Θ e $\dot{\Theta}$ obtendo-se

$$f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m, \Omega) = h'_R(r) h'_\Theta(\theta) f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(h_R(r), h'_R(r)\dot{r}, h_\Theta(\theta), h'_\Theta(\theta)\dot{\theta}; m = 1), \quad (2.61)$$

na qual $h'_R(r)h'_\Theta(\theta)$ é o Jacobiano da transformação e a função $f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m = 1)$ é a PDF conjunta correspondente de Rayleigh, dada por (2.18) com $m = 1$. Assim a PDF conjunta em questão para o método *rank – matching* de simulação é finalmente obtida como

$$f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}_{rank}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m, \Omega) = \frac{m^{2m} r^{4m-2} \csc^2(2\theta) (\sin^2(2\theta))^m \left(\frac{\Gamma \left(m, \frac{mr^2}{\Omega} \right)}{\Gamma(m)} \right)^{-1 + \frac{\theta^2 (\sin^2(2\theta))^{m+1}}{2 f_D^2 B \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)^2}}{2 \Omega^{2m} f_D^2 \pi^2 \Gamma^2(m) B \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)^2} \times \exp \left(-\frac{2mr^2}{\Omega} + \frac{\exp \left(-\frac{2mr^2}{\Omega} \right) m^{2m} r^{4m-2} \dot{r}^2}{2 \Omega^{2m} f_D^2 \pi^2 \Gamma \left(m, \frac{mr^2}{\Omega} \right) \ln \left(\frac{\Gamma \left(m, \frac{mr^2}{\Omega} \right)}{\Gamma(m)} \right)} \right). \quad (2.62)$$

2.4 Simulador Random-mixture

O método *random–mixture* [36], [49] para simulação de canais de desvanecimento Nakagami- m está ilustrado na Fig. 2.3. Nesse método, o processo Nakagami- m é obtido a partir do sorteio dentre um par de diferentes processos Nakagami- m com valores inteiro e múltiplo de 1/2 do parâmetro de desvanecimento sendo imediatamente menor ou igual (m_L) e imediatamente maior (m_U) do que o parâmetro de desvanecimento m desejado, ou seja,

$$m_L = \frac{\lfloor 2m \rfloor}{2}, \quad (2.63)$$

$$m_U = \frac{\lfloor 2m \rfloor}{2} + \frac{1}{2}, \quad (2.64)$$

no qual $\lfloor \cdot \rfloor$ é a função *floor*. Por exemplo, se o parâmetro de desvanecimento desejado for $m = 1.3$, então $m_L = 1$ e $m_U = 1.5$. Note que $m_L \leq m < m_U$. Os processos Nakagami- m com parâmetros de desvanecimento m_L e m_U podem ser gerados por qualquer método de simulação disponível, incluindo o método clássico. Nesta dissertação, considera-se que o método clássico é usado para gerar os processos Nakagami- m de entrada. Assim como o método de simulação *rank – matching*, o método *random – mixture* também é válido para valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento m . Por outro lado, uma desvantagem do método *random – mixture* em relação ao *rank – matching* é que suas PDFs não correspondem exatamente às PDFs de fase e envoltória de Nakagami- m dadas em (2.1) e (2.2).

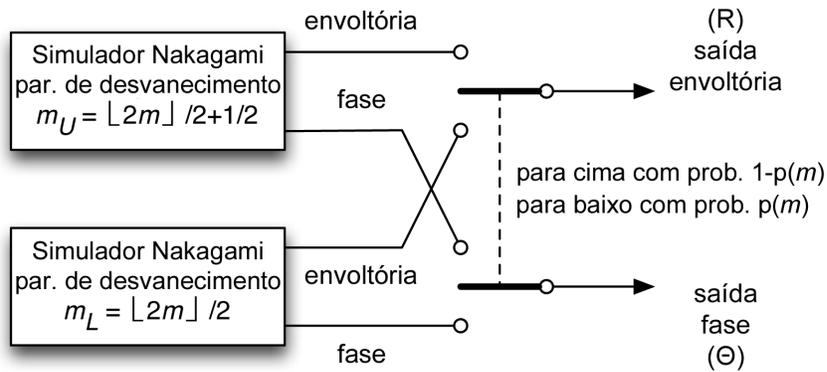


Figura 2.3: O simulador Nakagami- m *random – mixture*.

Na Fig. 2.3, é possível notar que o processo Nakagami- m com menor parâmetro de desvanecimento m_L é sorteado com probabilidade $p(m)$, e o processo com maior parâmetro de desvanecimento m_U é sorteado com probabilidade $[1 - p(m)]$, em que $p(m)$ e $[1 - p(m)]$ são denominadas probabilidades de mistura, definidas portanto no intervalo $[0,1]$. Assim, a principal tarefa é definir um valor apropriado para $p(m)$ que renda ao sistema de simulação uma boa aproximação para as PDFs de fase e envoltória de Nakagami- m . Em [36] essa tarefa foi desenvolvida usando uma abordagem baseada em momentos para a envoltória, levando a

$$p(m) = \frac{2m_L(m_U - m)}{m}. \quad (2.65)$$

Prosseguiremos agora com a determinação das estatísticas de segunda ordem para o método *random – mixture* para simulação de canais de desvanecimento Nakagami- m . Ao que nos consta, tais estatísticas ainda não haviam sido analisadas na literatura, sendo pois contribuição desta dissertação. A análise é de fato simples. No esquema *random – mixture*, o processo de saída é ora o processo de entrada Nakagami- m com parâmetro de desvanecimento m_L - com probabilidade $p(m)$ - e ora o processo de entrada Nakagami- m com parâmetro de desvanecimento m_U - com probabilidade $[1 - p(m)]$. Portanto, qualquer estatística do processo Nakagami- m de saída pode ser escrita como a soma ponderada das estatísticas correspondentes dos processos Nakagami- m de entrada, os pesos sendo dados pelas probabilidades de mistura $p(m)$ e $1 - p(m)$.

Por exemplo a PDF conjunta $f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r})$ do método *random – mixture* é dada por

$$f_{R,\dot{R}_{rm}}(r, \dot{r}; m, \Omega) = p(m)f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}; m_L, \Omega) + [1 - p(m)]f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}; m_U, \Omega). \quad (2.66)$$

A PDF de segunda ordem da envoltória Nakagami- m $f_{R(t),R(t+\tau)}(r_1, r_2; m, \Omega)$ por

$$f_{R(t),R(t+\tau)}(r_1, r_2; m, \Omega) = p(m)f_{R(t),R(t+\tau)}(r_1, r_2; m_L, \Omega) + [1 - p(m)]f_{R(t),R(t+\tau)}(r_1, r_2; m_U, \Omega). \quad (2.67)$$

E a LCR e a AFD por

$$N_{R_{rm}}(r; m, \Omega) = p(m)N_R(r; m_L, \Omega) + [1 - p(m)]N_R(r; m_U, \Omega) \quad (2.68)$$

$$T_{R_{rm}}(r; m, \Omega) = p(m)T_R(r; m_L, \Omega) + [1 - p(m)]T_R(r; m_U, \Omega). \quad (2.69)$$

Note em (2.66), (2.67), (2.68) e (2.69) que as estatísticas que aparecem do lado direito da igualdade (PDF conjunta, PDF de segunda ordem, LCR e AFD) se referem aos processos de entrada Nakagami- m e, portanto, dependem da forma com que estes processos são implementados. Aqui, consideramos que os processos de entrada são gerados pelo simulador clássico de Nakagami- m , de modo que as funções estatísticas em questão são dadas em (2.9), (2.10), (2.12) e (2.15), respectivamente.

O mesmo princípio se aplica para as estatísticas de fase e de fase-envoltória. Assim, a PDF conjunta $f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\cdot, \cdot)$ é dada por

$$f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m) = p(m)f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m_L) + [1 - p(m)]f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m_U), \quad (2.70)$$

a PCR por

$$N_{\Theta_{rm}}(\theta; m) = p(m)N_{\Theta}(\theta; m_L) + [1 - p(m)]N_{\Theta}(\theta; m_U), \quad (2.71)$$

e a PDF conjunta $f_{R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ por

$$f_{R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m, \Omega) = p(m)f_{R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m_L, \Omega) + [1 - p(m)]f_{R, \dot{R}, \Theta, \dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m_U, \Omega). \quad (2.72)$$

Em (2.70), (2.71) e (2.72), novamente as funções estatísticas que aparecem do lado direito da igualdade se referem aos processos Nakagami- m de entrada, aqui sendo gerados pelo método clássico. Há uma sutileza adicional nestes casos, porém. Como visto na seção sobre o simulador Nakagami- m clássico, as estatísticas que envolvem fase diferem a depender do fato de o parâmetro de desvanecimento ser inteiro ou múltiplo de $1/2$. Assim, se m_L (ou m_U) for inteiro, a PDF conjunta em (2.70), a PCR em (2.71) e a PDF conjunta em (2.72) são dadas por (2.19), (2.20) e (2.18), respectivamente. Da mesma forma, se m_L (ou m_U) for múltiplo de $1/2$, a PDF conjunta em (2.70), a PCR em (2.71) e a PDF conjunta em (2.72) são dadas por (2.31), (2.34) e (2.29), respectivamente.

2.5 Conclusão

Este capítulo revisita a estrutura e as estatísticas de primeira e segunda ordens de três simuladores importantes para o canal de desvanecimento Nakagami- m : clássico, *rank – matching* e *random – mixture*. Cada simulador tem seus prós e contras:

- O simulador clássico [26], [37] provê um ajuste exato para as estatísticas tanto de primeira quanto de segunda ordem do canal Nakagami- m , mas só é aplicável a valores inteiros e múltiplos de $1/2$ do parâmetro de desvanecimento;
- O simulador *rank – matching* [33], [34] e o simulador por inversão [27] (estatisticamente equivalentes à medida que o tamanho da sequência tende a infinito) são aplicáveis a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento e proveem um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem do canal Nakagami- m , mas proveem um ajuste pobre para as estatísticas de segunda ordem;
- O simulador *random – mixture* [36] também é aplicável a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento, além de prover um bom ajuste para as estatísticas de segunda ordem do canal Nakagami- m , mas apenas aproxima as estatísticas de primeira ordem. Os ajustes para as estatísticas de ordem superior serão analisadas através de gráficos nos próximos capítulos desta dissertação.

As estatísticas de segunda ordem analisadas incluem

- (i) Funções densidade de probabilidade conjuntas envolvendo a envoltória, a fase e suas derivadas temporais;
- (ii) Função densidade de probabilidade de segunda ordem da envoltória;
- (iii) Taxa de cruzamento de nível;
- (iv) Duração média de desvanecimento;
- (v) Taxa de cruzamento de fase.

No caso dos simuladores *rank – matching* e *random – mixture*, algumas estatísticas de segunda ordem ainda desconhecidas foram obtidas aqui em forma exata e fechada. Além disso, como subproduto da análise, foi obtida uma expressão exata para a CDF da fase Nakagami- m .

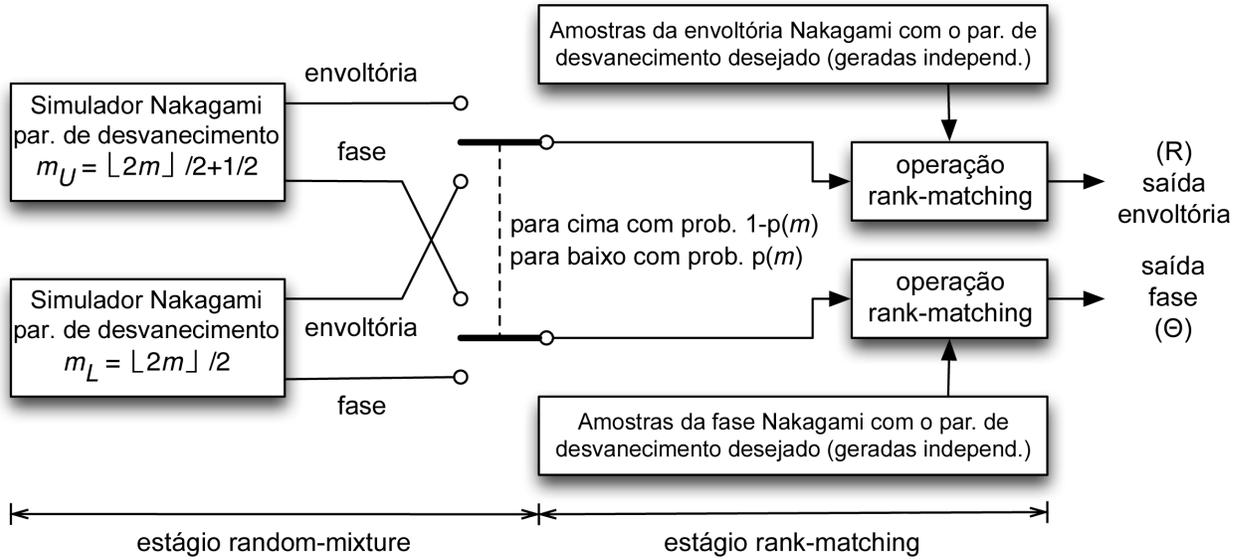
Simulador Proposto (RM^2)

3.1 Introdução

Como detalhado no capítulo anterior, nenhum dos simuladores apresentados (nenhum existente, na verdade) para o canal Nakagami- m provê simultaneamente, (i) valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento, (ii) um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem Nakagami- m (iii) bem como um ajuste satisfatório para as estatísticas de segunda ordem Nakagami- m . Nesse contexto, o objetivo principal desta dissertação é projetar e analisar um novo simulador de canais de desvanecimento fase-envoltória Nakagami- m que (i) permita o uso de valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento m (ii) que corresponda às estatísticas exatas de primeira ordem Nakagami- m e (iii) que forneça uma excelente aproximação para as estatísticas de segunda ordem do modelo clássico de Nakagami- m . O simulador proposto está baseado na combinação em cascata dos simuladores *random – mixture* e *rank – matching*, sendo então, chamado de simulador *random – mixture – rank – matching* (RM^2). A ideia é agregar os pontos fortes dos dois simuladores combinados a fim de melhorar as aproximações das estatísticas de ordem superiores em relação ao método clássico de simulação Nakagami- m (por meio da etapa *random – mixture*), enquanto se preserva as PDFs exatas de fase e envoltória Nakagami- m (por meio da etapa *rank – matching*). Como será visto, o método de simulação proposto supera os métodos *rank – matching* [33], [34] e *random – mixture* [36] separadamente.

3.2 Simulador RM^2

O novo método proposto RM^2 para simulação de canais de desvanecimento Nakagami- m está ilustrado na Fig. 3.1. A ideia central é cascatear um estágio *random – mixture* seguido de um estágio *rank – matching*. Deste modo, o processo de entrada de referência do estágio *rank – matching* não é mais a saída de um simulador Rayleigh, mas a saída do estágio *random – mixture*. O simulador RM^2 (i) se aplica a valores arbitrários do parâmetro de desvanecimento m , (ii) provê um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem Nakagami- m e (iii) provê uma excelente aproximação para as estatísticas de segunda ordem Nakagami- m . A seguir, apresentamos a motivação para o novo simulador proposto, bem como analisamos suas principais estatísticas de primeira e segunda ordens.


 Figura 3.1: O simulador Nakagami- m RM^2 proposto.

3.2.1 Preliminares

A fim de compreender a lógica e motivação por trás do simulador aqui proposto, relaxemos a estrutura do simulador *rank – matching* apresentado na seção 2.3, permitindo que o processo de entrada de referência possa ser um processo Nakagami- m arbitrário com parâmetro de desvanecimento inteiro ou múltiplo de meio $m_{ref} \geq 1/2$. Tal processo de referência pode ser gerado através do método clássico de simulação. Claramente, o método *rank – matching* original é um caso especial com parâmetro de desvanecimento $m_{ref} = 1$, ou seja, com referência de entrada Rayleigh.

Agora, usando (2.36), (2.37) e (2.38) - com A sendo a fase ou envoltória (conforme necessário) do processo de referência Nakagami com parâmetro de desvanecimento m_{ref} , e B sendo a fase ou a envoltória (conforme necessário) do processo de saída Nakagami- m com o parâmetro de desvanecimento m desejado - a LCR, a AFD e PCR do processo de saída Nakagami- m podem ser obtidos como

$$N_R(r; m, \Omega) = N_R(h_R(r; m_{ref}, m, \Omega); m_{ref}, \Omega), \quad (3.1)$$

$$T_R(r; m, \Omega) = T_R(h_R(r; m_{ref}, m, \Omega); m_{ref}, \Omega), \quad (3.2)$$

$$N_\Theta(\theta; m) = N_\Theta(h_\Theta(\theta; m_{ref}, m); m_{ref}), \quad (3.3)$$

nas quais a LCR, AFD e PCR à direita da igualdade se referem ao processo de entrada Nakagami- m (implementado por hipótese via simulador clássico), sendo portanto dadas em (2.12), (2.15) e (2.20) / (2.42) (m_{ref} inteiro, caso balanceado / m_{ref} múltiplo de $1/2$, caso desbalanceado com $p = \frac{1}{2m}$) respectivamente, e as funções de transformação correspondentes são dadas por

$$h_R(r; m_{ref}, m, \Omega) \triangleq F_R^{-1}(F_R(r; m, \Omega); m_{ref}, \Omega), \quad (3.4)$$

$$h_{\Theta}(\theta; m_{ref}, m) \triangleq F_{\Theta}^{-1}(F_{\Theta}(\theta; m); m_{ref}). \quad (3.5)$$

Note que a função de transformação de envoltória em (3.4) é dada em termos da CDF da envoltória Nakagami- m $F_R(r; m, \Omega)$ (2.14) e de sua inversa $F_R^{-1}(u; m, \Omega)$. Da mesma forma, a função de transformação de fase em (3.5) é dada em termos da CDF da fase Nakagami- m $F_{\Theta}(\theta; m)$ (2.49) e de sua inversa $F_{\Theta}^{-1}(u; m)$. A CDF da envoltória Nakagami- m é dada por (2.14), e sua inversa pode ser obtida como

$$F_R^{-1}(u; m, \Omega) = \sqrt{\frac{\Omega}{m} Q^{-1}(m, 1 - u)}, \quad (3.6)$$

na qual $Q^{-1}(m, u)$ é a inversa da função gama incompleta regularizada, ou seja, fornece a solução para z em $u = \Gamma(m, z)/\Gamma(m)$ e pode ser calculada no Mathematica via `InverseGammaRegularized[m, u]`. Por outro lado, em relação à CDF da fase Nakagami- m e sua inversa, como já mencionado no capítulo anterior, há dois casos a serem aqui considerados para o simulador clássico que produz o processo de entrada: o caso com m_{ref} inteiro e componentes em fase e quadratura balanceados (doravante chamado simplesmente de caso balanceado), e o caso com m_{ref} múltiplo de $1/2$ e componente em fase tendo uma gaussiana a mais do que a componente em quadratura, ou seja, com parâmetro de desbalanceamento de potência $p = \frac{1}{2m_{ref}}$ (doravante chamado simplesmente de caso desbalanceado). A determinação da CDF da fase Nakagami- m para o caso balanceado e de sua inversa são contribuições desta dissertações. A dedução é apresentada no apêndice. A CDF da fase para o caso balanceado é dada por (2.49), e sua inversa é obtida como

$$F_{\Theta}^{-1}(u; m) = \pi \left(\frac{1}{2} \left\lfloor 4u + \frac{1}{2} \right\rfloor - 1 \right) + \frac{1}{2} \Pi(4u) \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{\frac{1}{2}[\Lambda(4u + \frac{1}{4}) + 1]}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right), \quad (3.7)$$

em que $I_u^{-1}(a, b)$ é a inversa da função beta regularizada incompleta, ou seja, fornece a solução para z em $u = I_z(a, b)$ e pode ser calculada no Mathematica via `InverseBetaRegularized[z, a, b]`, e $\Lambda(\cdot)$ indica uma onda triangular que alterna entre -1 e +1 com período unitário (computável no Mathematica por meio de `TriangleWave[.]`).

A CDF da fase Nakagami- m para o caso desbalanceado geral foi obtida em [50] como

$$F_{\Theta}(\theta; m, p) = \frac{2 + \text{sign}(\theta)}{4} - \frac{1}{4} \Pi \left(\frac{\theta}{\pi} \right) I_{\cos^2(\Pi(\frac{\theta}{\pi}) \times \theta)} \left(\frac{1}{2} m(p + 1), \frac{1}{2} m(1 - p) \right), \quad (3.8)$$

o que para $p = 0$ reduz para (2.49), e para $p = \frac{1}{2m}$ reduz para

$$F_{\Theta}(\theta; m) = \frac{2 + \text{sign}(\theta)}{4} - \frac{1}{4} \Pi \left(\frac{\theta}{\pi} \right) I_{\cos^2(\Pi(\frac{\theta}{\pi}) \times \theta)} \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}, \frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right). \quad (3.9)$$

E a CDF inversa de fase de Nakagami desbalanceada é dada por [50]

$$F_{\Theta}^{-1}(u; m, p) = \pi \left[-\frac{1}{2} + 2u \right] + \Pi(2u) \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{\frac{1}{2} + \frac{2 \sin^{-1}(\sin(\frac{\pi}{2} + 4u\pi))}{\pi}}^{-1} \left(\frac{1}{2} m(1 + p), \frac{1}{2} m(1 - p) \right)} \right), \quad (3.10)$$

o que para $p = 0$ reduz para (3.7), e para $p = \frac{1}{2m}$ reduz para

$$F_{\Theta}^{-1}(u; m) = \pi \left[-\frac{1}{2} + 2u \right] + \Pi(2u) \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{\frac{1}{2} + \frac{2 \sin^{-1}(\sin(\frac{\pi}{2} + 4u\pi))}{\pi}}^{-1} \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}, \frac{m}{2} - \frac{1}{4} \right)} \right). \quad (3.11)$$

Note que para $m_{ref} = 1$ as expressões em (3.1), (3.2) e (3.3) reduzem para as expressões correspondentes do método *rank – matching* original, dadas em (2.39), (2.40) e (2.45).

Na análise que segue, faz-se também necessário o uso das derivadas primeiras das funções de transformação de fase e envoltória definidas em (3.4) e (3.5). Tais derivadas podem ser obtidas em termos das PDFs, CDFs e CDFs inversas já apresentadas para fase e envoltória, por meio da aplicação da regra da cadeia e da relação conhecida entre a derivada de uma função e a derivada de sua inversa, como segue:

$$h'_W(w; m, m_{ref}) = F_W'^{-1}(F_W(w; m); m_{ref}) \times F'_W(w; m) = \frac{f_W(w; m)}{f_W(F_W^{-1}(F_W(w; m); m_{ref}); m_{ref})} \quad (3.12)$$

na qual $W = R$ ou $W = \Theta$, como desejado.

3.2.2 Esquema de simulação e estatísticas resultantes

A principal questão agora é como escolher, para cada valor desejado m do parâmetro de desvanecimento, um valor apropriado de m_{ref} tal que (3.1), (3.2) e (3.3) produzam uma boa aproximação para as estatísticas correspondentes (2.12), (2.15) e (2.20) do método clássico de simulação. Para ganhar intuição, considere que o valor de m desejado é um valor inteiro ou múltiplo de $1/2$ (obviamente, há pouco apelo em se resolver esses casos pelo fato de eles já estarem resolvidos no simulador clássico). Em tais casos, a melhor escolha é $m_{ref} = m$, pelo fato de essa escolha levar a $h_R(r; m, m, \Omega) = r$ em (3.4) e a $h_{\Theta}(\theta; m, m) = \theta$ em (3.5), e assim às exatas LCR, AFD e PCR clássicas em (3.1), (3.2) e (3.3). Em outras palavras, quando $m = 0.5$, a melhor escolha é $m_{ref} = 0.5$, quando $m = 1$, a melhor escolha é $m_{ref} = 1$ (Rayleigh), quando $m = 1.5$, a melhor escolha é $m_{ref} = 1.5$, e assim por diante. Isto é, há casos em que o processo de referência Rayleigh não é a melhor escolha. De fato, estes casos extremos sugerem que quando o parâmetro de desvanecimento desejado é, digamos $m = 2.3$, então $m_{ref} = m_L = 2$ ou $m_{ref} = m_U = 2.5$, ou, mais genericamente, uma mistura aleatória de ambos deveria ser a melhor escolha do que $m_{ref} = 1$. Essa é a essência do método RM^2 proposto nesta dissertação.

No esquema proposto, o processo de entrada de referência é ora um processo Nakagami- m com parâmetro de desvanecimento m_L , com probabilidade $p(m)$, ora um processo Nakagami- m com parâmetro de desvanecimento m_U , com probabilidade $[1 - p(m)]$. No primeiro caso, as estatísticas LCR, AFD e PCR são dadas a partir de (3.1), (3.2) e (3.3) com $m_{ref} = m_L$; no segundo, com $m_{ref} = m_U$. Por causa do processo de mistura aleatória ("*random – mixture*") a LCR, AFD e PCR globais para o método proposto são dadas pela soma ponderada das métricas individuais para $m_{ref} = m_L$ e $m_{ref} = m_U$, as ponderações sendo dadas pelas probabilidades de mistura, ou seja,

$$N_{Rrm^2}(r; m, \Omega) = p(m)N_R(h_R(r; m_L, m, \Omega); m_L, \Omega) + [1 - p(m)]N_R(h_R(r; m_U, m, \Omega); m_U, \Omega), \quad (3.13)$$

$$T_{Rrm^2}(r; m, \Omega) = p(m)T_R(h_R(r; m_L, m, \Omega); m_L, \Omega) + [1 - p(m)]T_R(h_R(r; m_U, m, \Omega); m_U, \Omega), \quad (3.14)$$

$$N_{\Theta rm^2}(\theta; m) = p(m)N_{\Theta}(h_{\Theta}(\theta; m_L, m); m_L) + [1 - p(m)]N_{\Theta}(h_{\Theta}(\theta; m_U, m); m_U), \quad (3.15)$$

nas quais as LCRs, AFDs e PCRs à direita da igualdade são aquelas do método clássico de simulação Nakagami- m . A LCR e AFD são dadas por (2.12) e (2.15), respectivamente; a PCR por (2.20) quando m_L ou m_U for inteiro e por (2.34) quando m_L ou m_U múltiplo de $1/2$.

A seguir, a exemplo do que foi apresentado para os simuladores do capítulo anterior, obtêm-se para o simulador RM^2 estatísticas conjuntas importantes envolvendo a envoltória, a fase e suas derivadas temporais.

Considere novamente o uso de um único processo de entrada Nakagami- m com parâmetro de desvanecimento m_{ref} . Neste caso, a PDF conjunta da envoltória Nakagami- m R e sua derivada temporal \dot{R} na saída do simulador pode ser obtida a partir da PDF conjunta correspondente da envoltória R_{ref} e sua derivada temporal \dot{R}_{ref} no processo Nakagami- m clássico de entrada e da transformação de variáveis definida por

$$R_{ref} = h_R(R; m_{ref}, m, \Omega) \quad (3.16)$$

$$\dot{R}_{ref} = h'_R(R; m_{ref}, m, \Omega)\dot{R}. \quad (3.17)$$

O resultado é

$$f_{R, \dot{R}}(r, \dot{r}; m, \Omega) = h_R^2(r; m_{ref}, m, \Omega) f_{R, \dot{R}}(h_R(r; m_{ref}, m, \Omega), h'_R(r; m_{ref}, m, \Omega)\dot{r}; m_{ref}, \Omega), \quad (3.18)$$

no qual a PDF conjunta à direita da igualdade corresponde ao processo Nakagami- m clássico de entrada, sendo dada por (2.9).

A mesma abordagem pode ser usada para se obter a PDF conjunta da fase Nakagami- m Θ e sua derivada temporal $\dot{\Theta}$ na saída do simulador a partir da PDF conjunta da fase Θ_{ref} e sua derivada temporal $\dot{\Theta}_{ref}$ no processo Nakagami- m clássico de entrada, com a transformação de variáveis sendo agora definida por

$$\Theta_{ref} = h_{\Theta}(\Theta; m_{ref}, m) \quad (3.19)$$

$$\dot{\Theta}_{ref} = h'_{\Theta}(\Theta; m_{ref}, m)\dot{\Theta}. \quad (3.20)$$

O resultado é

$$f_{\Theta, \dot{\Theta}}(\theta, \dot{\theta}; m) = h_{\Theta}^2(\theta; m_{ref}, m) f_{\Theta, \dot{\Theta}}(h_{\Theta}(\theta; m_{ref}, m), h'_{\Theta}(\theta; m_{ref}, m)\dot{\theta}; m_{ref}), \quad (3.21)$$

no qual a PDF conjunta à direita da igualdade corresponde ao processo Nakagami- m clássico de entrada, sendo dada por (2.20) quando m_{ref} for inteiro e por (2.34) quando m_{ref} for múltiplo de $1/2$. Como no método *random – mixture* toda estatística de saída é uma soma ponderada das estatísticas individuais para $m_{ref} = m_L$ (com peso $p(m)$) e $m_{ref} = m_U$ (com peso $1 - p(m)$), então

$$f_{R, \dot{R}, m^2}(r, \dot{r}; m, \Omega) = p(m) h_R^2(r; m_L, m, \Omega) f_{R, \dot{R}}(h_R(r; m_L, m, \Omega), h'_R(r; m_L, m, \Omega)\dot{r}; m_L, \Omega) + [1 - p(m)] h_R^2(r; m_U, m, \Omega) f_{R, \dot{R}}(h_R(r; m_U, m, \Omega), h'_R(r; m_U, m, \Omega)\dot{r}; m_U, \Omega), \quad (3.22)$$

$$f_{\Theta, \dot{\Theta}, m^2}(\theta, \dot{\theta}; m) = p(m) h_{\Theta}^2(\theta; m_L, m) f_{\Theta, \dot{\Theta}}(h_{\Theta}(\theta; m_L, m), h'_{\Theta}(\theta; m_L, m)\dot{\theta}; m_L) + [1 - p(m)] h_{\Theta}^2(\theta; m_U, m) f_{\Theta, \dot{\Theta}}(h_{\Theta}(\theta; m_U, m), h'_{\Theta}(\theta; m_U, m)\dot{\theta}; m_U), \quad (3.23)$$

aplicando-se aqui as mesmas observações feitas em (3.18) e (3.21) para as PDFs conjuntas à direita da igualdade.

Analogamente, A PDF de segunda ordem da envoltória pode ser obtida a partir da PDF correspondente da envoltória dos processos clássicos de entrada, a partir da transformação de variáveis definida por

$$R_{ref}(t) = h_R(R(t); m_{ref}, m, \Omega) \quad (3.24)$$

$$R_{ref}(t + \tau) = h_R(R(t + \tau); m_{ref}, m, \Omega). \quad (3.25)$$

O resultado é

$$f_{R(t), R(t+\tau), m^2}(r_1, r_2; m, \Omega) = p(m) h'_R(r_1; m_L, m, \Omega) h'_R(r_2; m_L, m, \Omega) \times f_{R(t), R(t+\tau)}(h_R(r_1; m_L, m, \Omega), h_R(r_2; m_L, m, \Omega); m_L, \Omega) + [1 - p(m)] h'_R(r_1; m_U, m, \Omega) h'_R(r_2; m_U, m, \Omega) \times f_{R(t), R(t+\tau)}(h_R(r_1; m_U, m, \Omega), h_R(r_2; m_U, m, \Omega); m_U, \Omega), \quad (3.26)$$

em que as PDFs de segunda ordem à direita da igualdade correspondem aos processos Nakagami- m clássicos de entrada, sendo dadas por (2.10).

Finalmente, a PDF conjunta de R , Θ e suas derivadas temporais \dot{R} e $\dot{\Theta}$ na saída do simulador pode ser obtida a partir da PDF correspondente dos processos Nakagami- m clássicos de entrada e da transformação de variáveis definida por (3.16), (3.17), (3.19) e (3.20).

O resultado é

$$\begin{aligned}
& f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}; m, \Omega) = p(m) h_R'^2(r; m_L, m, \Omega) h_\Theta'^2(\theta; m_L, m) \times \\
& f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(h_R(r; m_L, m, \Omega), h_R'(r; m_L, m, \Omega)\dot{r}, h_\Theta(\theta; m_L, m), h_\Theta'(\theta; m_L, m)\dot{\theta}; m_L, \Omega) + [1-p(m)] h_R'^2(r; m_U, m, \Omega) \\
& \times h_\Theta'^2(\theta; m_U, m) f_{R,\dot{R},\Theta,\dot{\Theta}}(h_R(r; m_U, m, \Omega), h_R'(r; m_U, m, \Omega)\dot{r}, h_\Theta(\theta; m_U, m), h_\Theta'(\theta; m_U, m)\dot{\theta}; m_U, \Omega),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

em que as PDFs conjuntas à direita da igualdade correspondem aos processos Nakagami- m clássicos de entrada, sendo dadas por (2.18) quando m_L ou m_U for inteiro e por (2.29) quando m_L ou m_U for múltiplo de $1/2$.

Vale ressaltar que, por envolver uma operação de *rank – matching* em seu estágio final, o simulador RM^2 proposto corresponde às estatísticas exatas de primeira ordem do canal Nakagami- m .

3.2.3 Reprojeto de $p(m)$

A probabilidade de mistura $p(m)$ dada em (2.65) foi originalmente projetada no contexto do simulador *random – mixture* [36], tendo como objetivo prover um bom ajuste para a PDF da envoltória Nakagami- m . Por outro lado, no esquema de simulação proposto aqui (RM^2), ambas as PDFs de envoltória e fase são atendidas de forma exata por construção, independentemente das probabilidades de mistura utilizadas no estágio *random – mixture*. Por outro lado, como foi mostrado em (3.13)-(3.15), estas mesmas probabilidades $p(m)$ têm forte impacto sobre a LCR, AFD e PCR do método de simulação proposto. Assim, em vez de simplesmente adotar o uso de $p(m)$ como em (2.65), pode-se reprojeter esse parâmetro a fim de melhorar o ajuste do método proposto à LCR, AFD e PCR do método de simulação clássico. De fato, para qualquer uma dessas estatísticas, um valor apropriado de $p(m)$ pode ser selecionado tal que resulte num valor desejado LCR, AFD ou PCR para um dado nível desejado da envoltória r_t (LCR e AFD) ou de fase θ_t (PCR). Isso é produzido resolvendo-se (3.13), (3.14) ou (3.15) para $p(m)$, obtendo-se

$$p(m) = \frac{N_r(r_t, m, \Omega) - N_R(h_R(r_t; m_U, m, \Omega); m_U, \Omega)}{N_R(h_R(r_t; m_L, m, \Omega); m_L, \Omega) - N_R(h_R(r_t; m_U, m, \Omega); m_U, \Omega)} \tag{3.28}$$

para um valor desejado de LCR ou

$$p(m) = \frac{T_r(r_t, m, \Omega) - T_R(h_R(r_t; m_U, m, \Omega); m_U, \Omega)}{T_R(h_R(r_t; m_L, m, \Omega); m_L, \Omega) - T_R(h_R(r_t; m_U, m, \Omega); m_U, \Omega)}, \tag{3.29}$$

para um valor desejado de AFD ou

$$p(m) = \frac{N_\Theta(\theta_t, m) - N_\Theta(h_\Theta(\theta_t; m_U, m); m_U)}{N_\Theta(h_\Theta(\theta_t; m_L, m); m_L) - N_\Theta(h_\Theta(\theta_t; m_U, m); m_U)}, \tag{3.30}$$

para um valor desejado de PCR. As LCRs, AFDs e PCRs dadas à direita da igualdade de (3.28)-(3.30) correspondem ao simulador clássico. A LCR e AFD dadas por (2.12) e (2.15), respectivamente; a PCR por (2.20) quando m_L ou m_U for inteiro e por (2.34) quando m_L ou m_U for múltiplo de $1/2$.

A princípio, pode-se escolher em (3.28)-(3.30) qualquer nível de envoltória ou fase para se alcançar um valor desejado de LCR, AFD ou PCR. Para se obter indicativos sobre escolhas adequadas de r_t e θ_t para o esquema proposto, foi inicialmente utilizada a probabilidade de mistura original $p(m)$ como em (2.65). Mesmo para esse caso, observou-se que o desempenho geral do simulador é muito melhor do que o dos simuladores *random – mixture* e *rank – matching* separadamente. Além disso, observou-se que o desempenho é ligeiramente pior em baixos níveis de envoltória e praticamente insensível ao nível de fase. Com base nisso, um valor de r_t que proporciona um bom compromisso é o nível mais baixo de envoltória sob interesse. Para os exemplos citados nesta dissertação, foram escolhidos $r_t = -30dB$ e $\theta_t = \pi/4$.

Vale lembrar que $p(m)$ é um valor de probabilidade, portanto válido dentro do intervalo $[0, 1]$. Assim, no caso de a solução de (3.28), (3.29) ou (3.30) resultar em valor negativo de $p(m)$, devemos adotar o valor mais próximo dentro do intervalo permitido $[0, 1]$, ou seja, 0. Da mesma forma, no caso de a solução resultar em valor maior que 1, devemos adotar $p(m) = 1$.

3.3 Conclusão

A respeito do método de simulação proposto, é possível dizer (e isto será ilustrado no capítulo seguinte) que essa nova concepção proporciona uma correspondência exata com as estatísticas de primeira ordem e um resultado excelente para as estatísticas de segunda ordem, para valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento m . Nenhum simulador na literatura fornece esses recursos combinados. Neste sentido, o simulador proposto é de grande valor para o projeto e a otimização adequadas de sistemas de comunicação sem fio.

Além da concepção em si do novo simulador, foram obtidas expressões exatas em forma fechada para diversas estatísticas importantes de segunda ordem do simulador proposto, a saber:

- (i) PDFs conjuntas envolvendo a envoltória, a fase e suas derivadas temporais;
- (ii) PDF de segunda ordem da envoltória;
- (iii) LCR;
- (iv) AFD;
- (v) PCR.

Como subproduto desta análise, foram também obtidas expressões exatas em forma fechada para a CDF da fase Nakagami- m e sua inversa.

Resultados Numéricos e Comparações de Desempenho

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma série de exemplos numéricos que ilustram o comportamento de três estatísticas de segunda ordem representativas (LCR, AFD e PCR) para os simuladores revisitados no capítulo 2 (clássico, *rank-matching*, *random-mixture*) e para o simulador proposto no capítulo 3 (RM^2). As expressões analíticas associadas à LCR e à AFD do simulador clássico são adotadas como meta de desempenho para os demais simuladores. Por outro lado, como já discutido no capítulo 2, o simulador clássico apresenta duas expressões analíticas diferentes para a PCR, uma para valores de m inteiros (caso balanceado) e outra para valores de m múltiplos de $1/2$ (caso desbalanceado). Deste modo, para cada valor real desejado de m , qualquer das duas expressões de PCR do simulador clássico poderia a princípio ser aplicada como meta de desempenho para os demais simuladores. Mas a adoção de uma ou outra expressão haveria de ser um tanto quanto arbitrária. Assim, nesta dissertação, optou-se por simplesmente comparar o comportamento da PCR para os diferentes simuladores, sem confrontá-la a meta alguma de desempenho. Nos vários exemplos apresentados aqui para LCR, AFD e PCR, simulação Monte Carlo é empregada para confirmar os resultados analíticos.

4.2 Rank-matching

4.2.1 Envoltória

As Figs. 4.1 e 4.2, apresentam a LCR e a AFD do método de simulação clássico (expressões analíticas, linhas sólidas) e do método *rank-matching* (expressão analítica, linhas tracejadas; simulação, pontos). É possível notar o quanto esses simuladores diferem em comportamento, principalmente para baixos níveis de envoltória, e como essa diferença cresce à medida que o parâmetro de desvanecimento m aumenta. Isso se justifica pelo fato de que, como o método *rank-matching* utiliza sequências Rayleigh de referência, o comportamento do simulador piora à medida que os valores do parâmetro de desvanecimento se afastam de $m=1$.

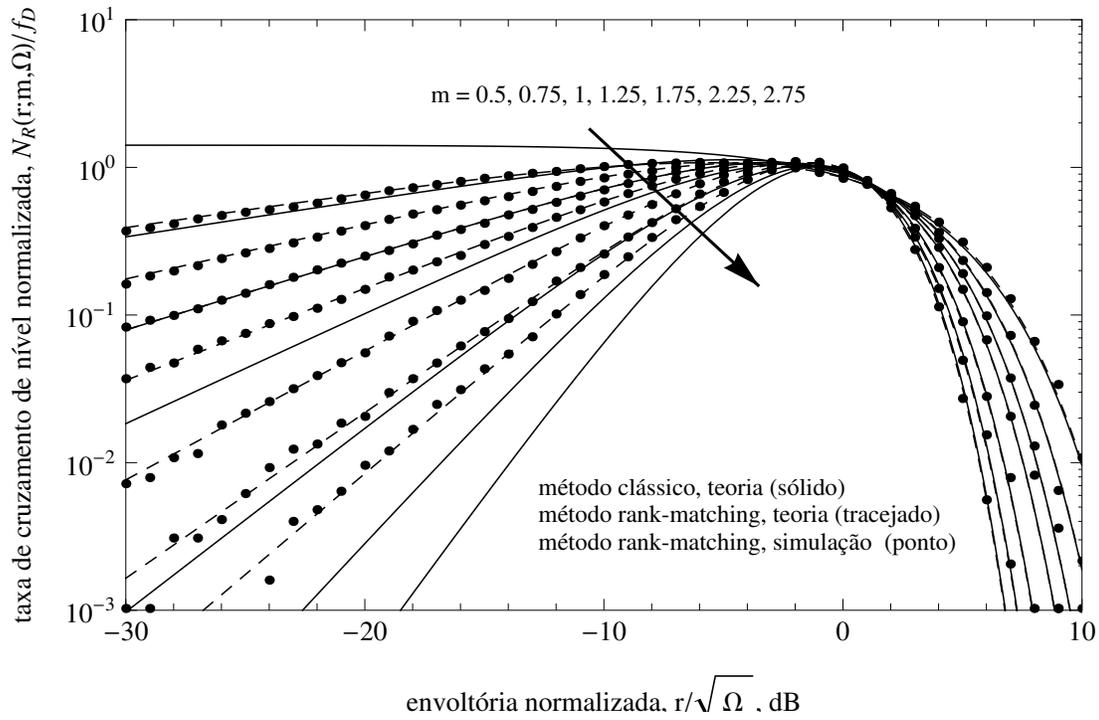


Figura 4.1: Taxa de cruzamento de nível para o simulador *rank – matching*.

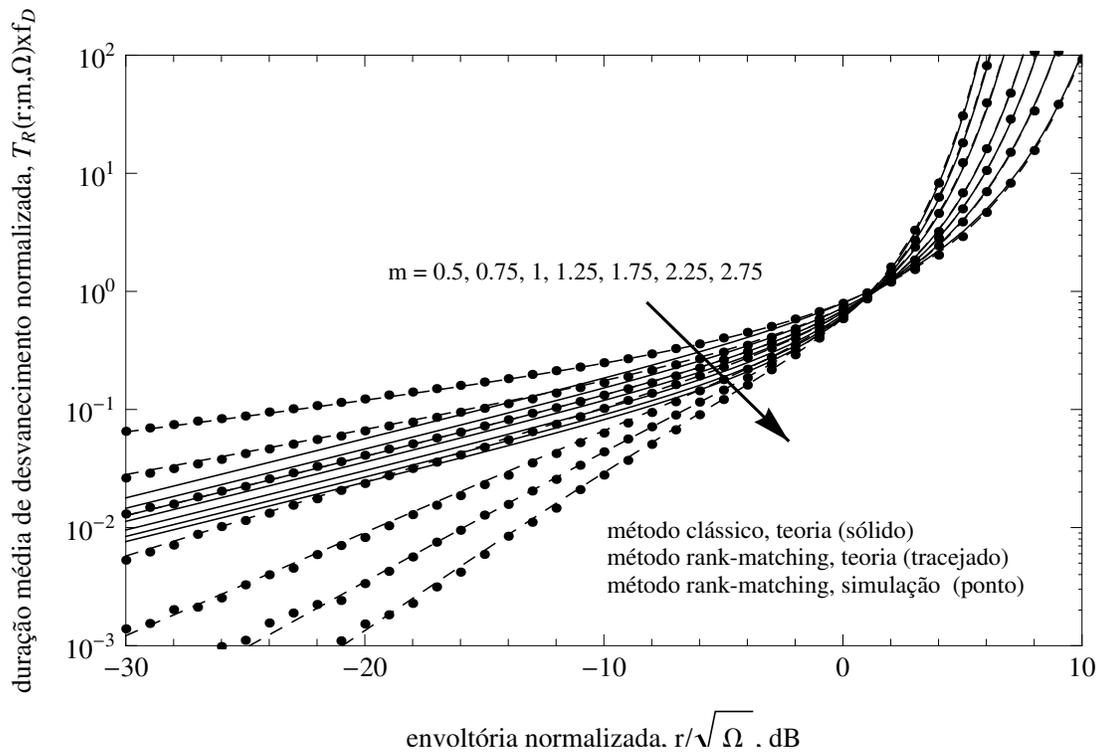


Figura 4.2: Duração média de desvanecimento para o simulador *rank – matching*.

4.2.2 Fase

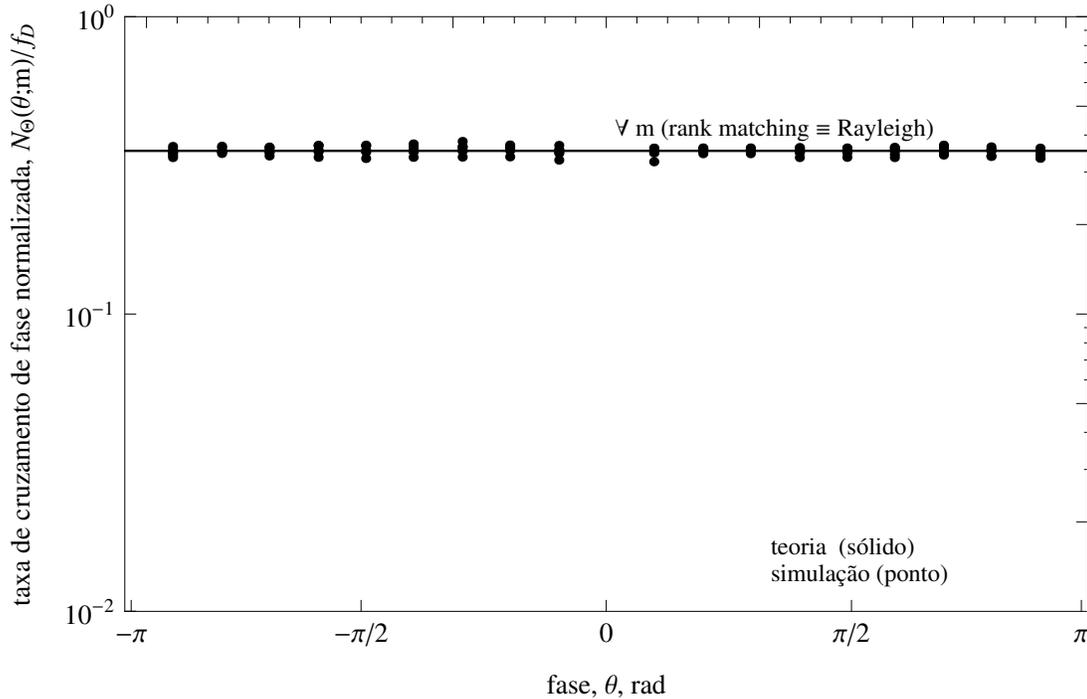


Figura 4.3: Taxa de cruzamento de fase para o simulador *rank – matching*.

A Fig. 4.3 apresenta a PCR analítica (linhas sólidas) e simulada (pontos) do método *rank – matching*. Pode-se notar que a PCR do método *rank – matching* é constante e idêntica à PCR de Rayleigh, independentemente do parâmetro de desvanecimento e do nível de fase.

4.3 Random-mixture

4.3.1 Envoltória

As Figs. 4.4 e 4.5 apresentam a LCR e AFD do simulador *random – mixture* (linhas tracejadas, expressão analítica; pontos, simulação) e do simulador clássico (linhas cheias, expressão analítica). Na Fig. 4.4, observa-se que a LCR do simulador *random – mixture* ainda se distancia em certo grau da LCR do simulador clássico, mas é bem mais próxima desta do que a LCR do simulador *rank – matching*, apresentada na Fig. 4.1. Na Fig. 4.5, observa-se que a AFD do simulador *random – mixture* é praticamente indistinguível da AFD do simulador clássico, sobretudo para baixos níveis de envoltória. Em contraste, como apresentado na Fig. 4.2, a AFD do simulador *rank – matching* se distancia consideravelmente da AFD do simulador clássico, deteriorando à medida que o parâmetro m aumenta.

À primeira vista, pode parecer estranho que o simulador *random – mixture* e o simulador clássico discordem em certo grau em termos de LCR (Fig. 4.4) ao mesmo tempo em que sejam praticamente indistinguíveis em termos de AFD (Fig. 4.5). No entanto, há uma interpretação simples para isso. No simulador *random – mixture*, para um dado valor desejado do parâmetro

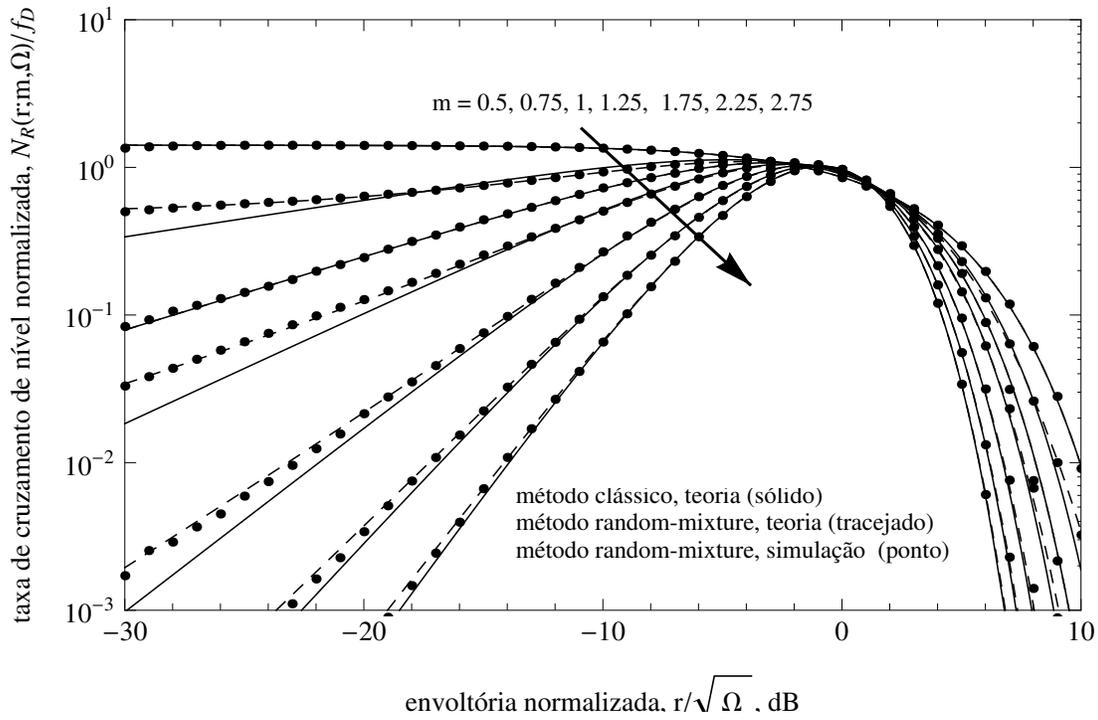


Figura 4.4: Taxa de cruzamento de nível para o simulador *random – mixture*.

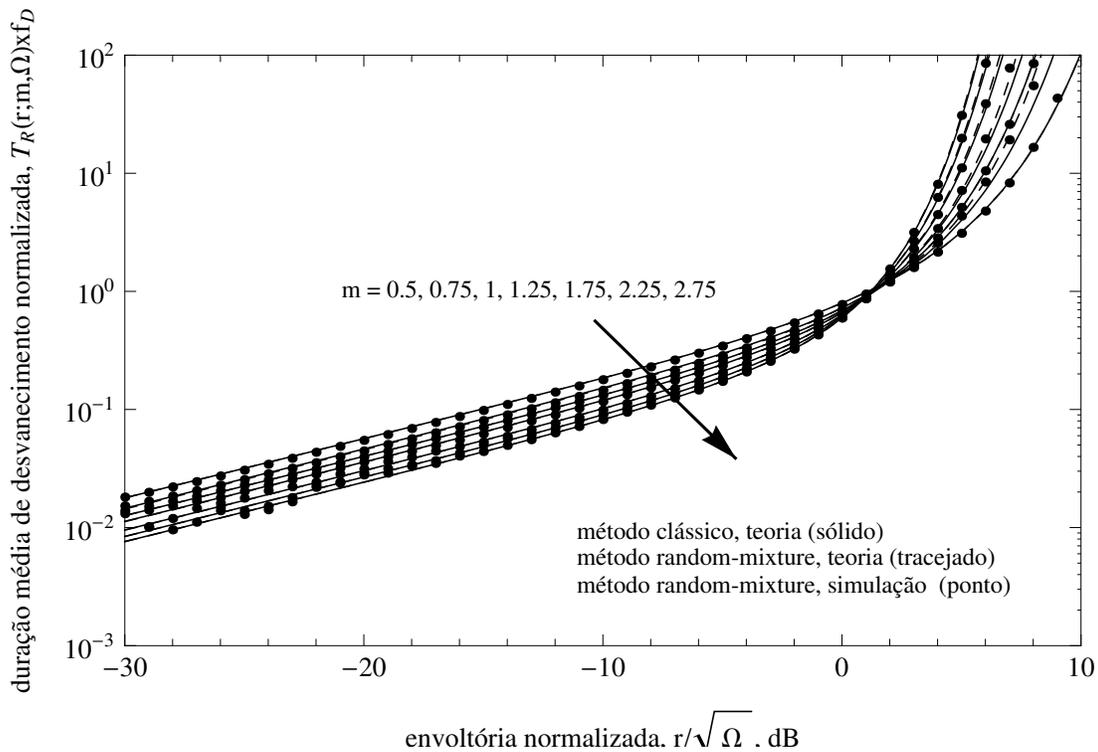


Figura 4.5: Duração média de desvanecimento para o simulador *random – mixture*.

de desvanecimento m , qualquer estatística do processo de saída é obtida como uma combinação linear das estatísticas correspondentes dos processos de entrada (gerados aqui via simulador clássico) com parâmetros de desvanecimento m_L e m_U . A LCR, AFD e PCR, por exemplo, são obtidas como em (2.68), (2.69) e (2.71), respectivamente. Como resultado, o potencial do simulador *random – mixture* em se ajustar bem a uma dada estatística do simulador clássico depende do quanto tal estatística se aproxima, para cada valor de m , de uma soma ponderada das estatísticas correspondentes para m_L e m_U . Em outras palavras, o melhor ajuste observado para o simulador *random – mixture* em termos de AFD (comparada à LCR) é meramente uma indicação de que a expressão analítica da AFD clássica melhor se aproxima, para cada valor de m , de uma soma ponderada das AFDs clássicas para m_U e m_L .

4.3.2 Fase

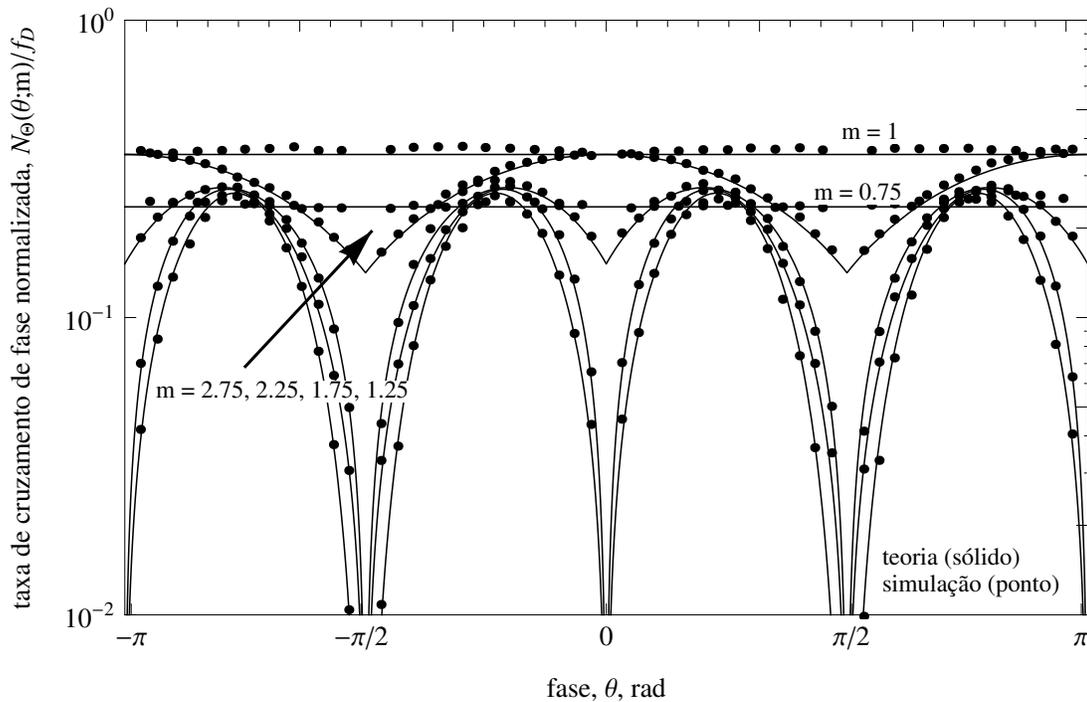


Figura 4.6: Taxa de cruzamento de fase para o simulador *random – mixture*.

A Fig. 4.6 apresenta a PCR analítica (linhas cheias) e simulada (pontos) do simulador *random – mixture*. Nota-se que, diferentemente do simulador *rank – matching* (Fig. 4.3), a PCR varia com o parâmetro de desvanecimento m e, para $m > 1$, varia também com o nível de fase.

Na verdade, assim como ocorre para LCR e AFD, a PCR do simulador *random – mixture* é uma soma ponderada das PCRs do simulador clássico com parâmetros de desvanecimento m_L e m_U , os pesos sendo dados pelas probabilidades de mistura $p(m)$ e $1 - p(m)$, respectivamente. Por exemplo, para $m < 1$, tem-se que $m_L = 0.5$ e $m_U = 1$. A PCR clássica para $m_L = 0.5$ (caso desbalanceado) é igual a zero, como já discutido no capítulo 2. A PCR clássica para $m_L = 1$ (caso balanceado) é constante e igual a $f_D/(2\sqrt{2})$ (PCR Rayleigh). Deste modo, para $m < 1$, a

PCR resultante é dada por $(1 - p(m)) \times f_D/(2\sqrt{2})$, o que é necessariamente menor ou igual à PCR Rayleigh $f_D/(2\sqrt{2})$. Quanto mais próximo de 0,5 o valor de m , menor o valor de $1 - p(m)$ e mais próxima de zero a PCR resultante. Quanto mais próximo de 1 o valor de m , maior o valor de $1 - p(m)$, e mais próxima de Rayleigh a PCR resultante. O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao caso $m > 1$, mas nesse caso o valor da PCR clássica varia com o nível de fase, de modo que a PCR resultante apresenta o comportamento multimodal descrito na Fig. 4.6.

Embora a PCR do simulador clássico não tenha sido usada nesta dissertação como meta de desempenho para os demais simuladores (por conta de existirem duas versões, a balanceada e a desbalanceada), a Fig. 4.10 apresenta, como termo de comparação, as PCRs balanceada (m inteiro, componentes em fase e quadratura com mesmo número de gaussianas) e desbalanceada (m múltiplo de $1/2$, componente em fase com uma gaussiana a mais que a componente em quadratura) do simulador clássico. Nota-se que a PCR balanceada é composta de quatro lóbulos simétricos para $m > 1$, é constante para $m = 1$ (caso Rayleigh, como esperado) e é composta de quatro vales simétricos para $m < 1$. Em contraste, nota-se que a PCR desbalanceada é composta de quatro lóbulos assimétricos para $m > 1$ (a assimetria se deve ao desbalanceamento de potência entre as componentes em fase e em quadratura), não é constante para $m = 1$ (o que é esperado, já que a condição Rayleigh não corresponde às premissas do caso desbalanceado), nem apresenta vales para $m < 1$. Comparando-se as Figs. 4.6 e 4.10, nota-se ainda que a PCR do simulador *random - mixture* corresponde a um misto (uma soma ponderada, como esperado) do padrão de comportamento das PCRs clássicas balanceada e desbalanceada.

4.4 RM^2

4.4.1 Envoltória

As Figs. 4.7 e 4.8 apresentam a LCR e AFD do simulador proposto RM^2 (linhas tracejadas, expressão analítica; pontos, simulação) e do simulador clássico (linhas cheias, expressão analítica). Na Fig. 4.7, observa-se que a LCR do simulador RM^2 tem um excelente ajuste à LCR do simulador clássico, tornado-se praticamente indistinguível desta última à medida que m aumenta, e claramente superando em desempenho a LCR dos simuladores *rank - matching* (Fig. 4.1) e *random - mixture* (Fig. 4.4). Em particular, note como o uso de $r_t = -30\text{dB}$ na calibração de $p(m)$ em (3.28) garante o ajuste exato para esse nível de envoltória. Na Fig. 4.8, observa-se que a AFD do simulador RM^2 tem também um excelente ajuste à AFD do simulador clássico, ligeiramente melhor do que a AFD do simulador *random - mixture* (Fig. 4.5) para altos níveis de envoltória, e ligeiramente pior do que esta para baixos níveis de envoltória e baixos valores do parâmetro m (vide caso $m = 0,75$).

4.4.2 Fase

A Fig. 4.9 apresenta a PCR analítica (linhas cheias) e simulada (pontos) do simulador RM^2 . Para $m > 1$, nota-se que a PCR do simulador RM^2 se assemelha em comportamento a PCR do simulador *random - mixture* (Fig. 4.6), variando portanto com m e com o nível de fase. Por outro lado, para $m < 1$, nota-se que a PCR do simulador RM^2 é idêntica à do simulador

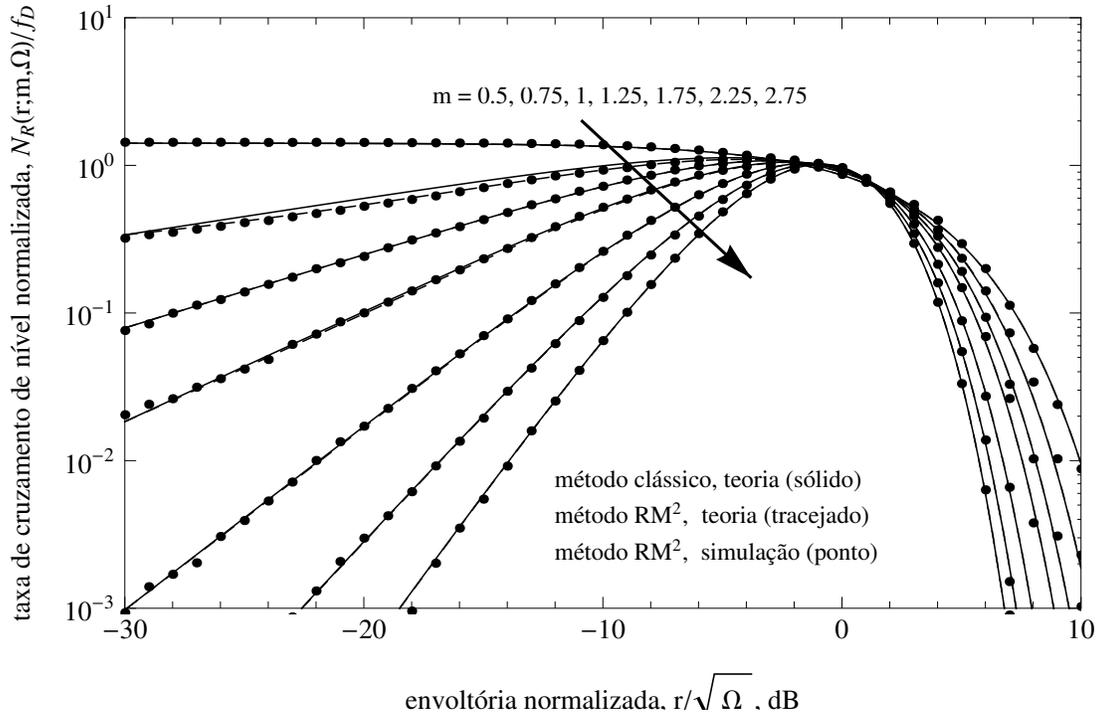


Figura 4.7: Taxa de cruzamento de nível para o simulador RM^2 .

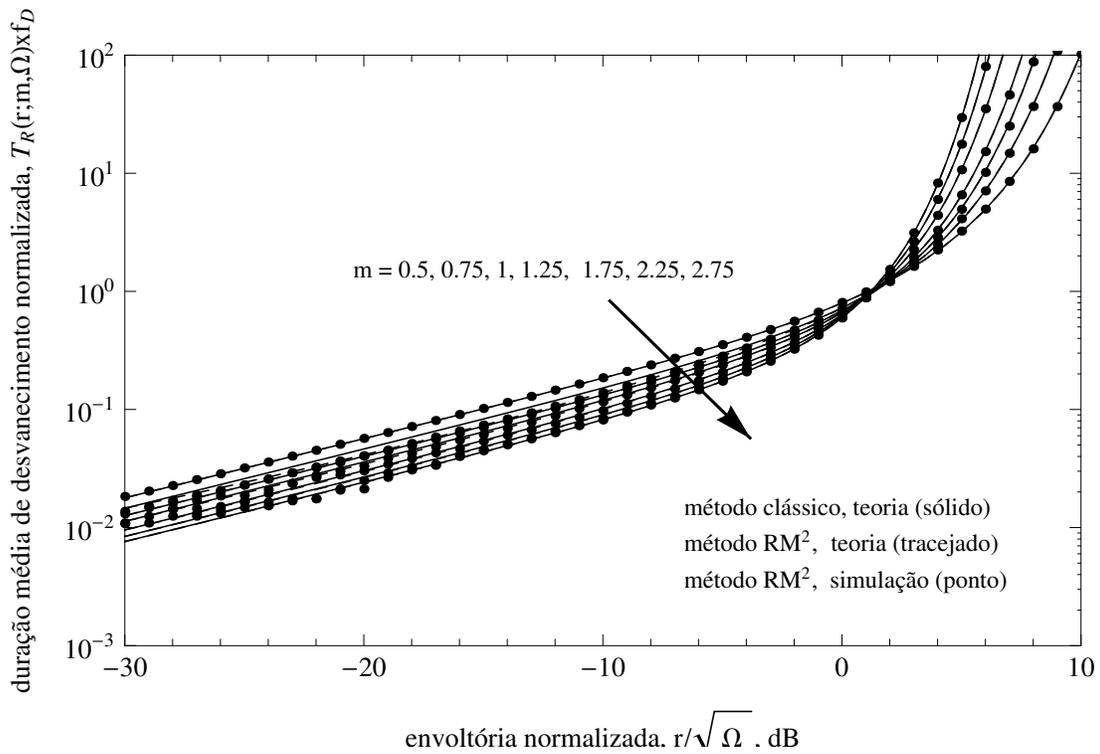


Figura 4.8: Duração média de desvanecimento para o simulador RM^2 .

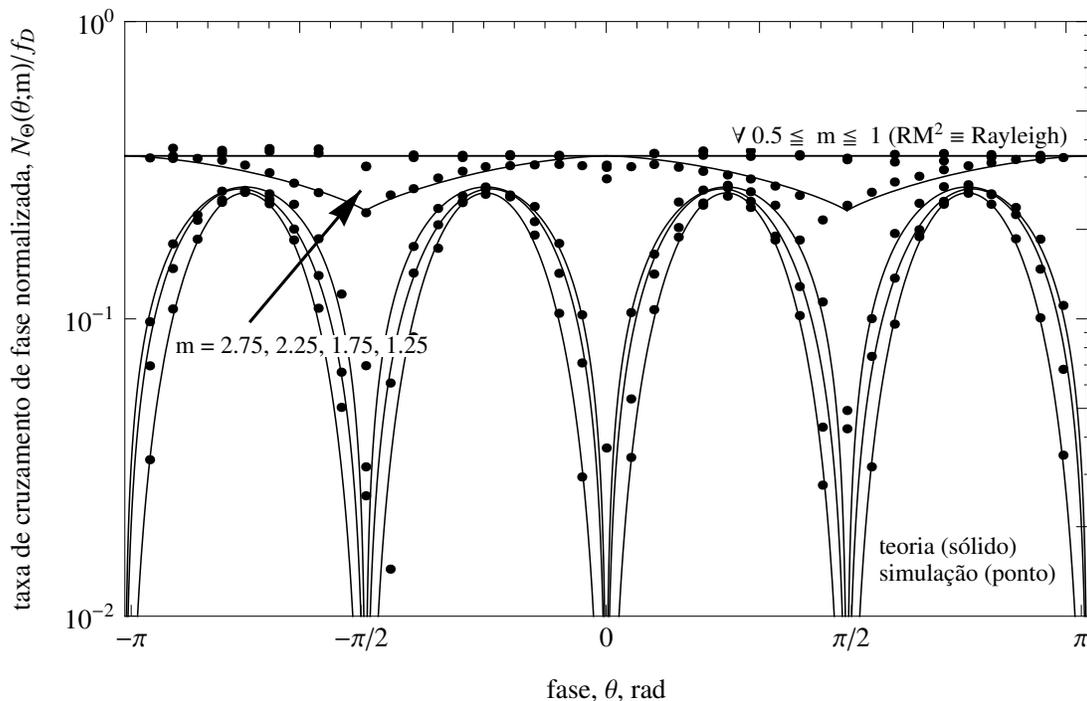


Figura 4.9: Taxa de cruzamento de fase para o simulador RM^2 .

rank – matching (Fig. 4.3), se igualando portanto à PCR de Rayleigh, independentemente de m e do nível de fase. Há uma explicação para esse comportamento, como segue.

Primeiramente, é importante lembrar que o simulador RM^2 é composto de um estágio *random – mixture* seguido de um estágio *rank – matching*, e que o efeito do estágio *rank – matching* é provocar alguma alteração monotônica no domínio de cada função estatística do estágio *random – mixture*. Por exemplo, comparando-se a PCR do simulador *random – mixture* em (2.71) com a PCR do simulador RM^2 em (3.15), verifica-se que a diferença entre elas é que, na segunda, há uma função de transformação monótona $h_{\Theta}(\cdot)$ que altera o domínio das PCRs clássicas avaliadas em m_L e m_U . Assim, é natural que a PCR do simulador RM^2 se assemelhe em comportamento à PCR do simulador *random – mixture*, como evidenciado na Fig. 4.9 para $m > 1$.

Por outro lado, para $m < 1$, a PCR do simulador RM^2 é invariante com m e com o nível de fase, equivalente à PCR Rayleigh, enquanto que a PCR do simulador *random – mixture*, apesar de invariante com o nível de fase, varia com m . Essa diferença de comportamento se deve ao fato de, com o uso do nível de fase escolhido $\theta_t = \pi/4$ na calibração de $p(m)$ em (3.30), ter sido obtido um valor negativo de $p(m)$. Na verdade, o valor negativo obtido significa que, para esse nível de fase escolhido e $m < 1$, é impossível se obter um ajuste exato em relação à PCR clássica (nesta dissertação, adotou-se a PCR clássica balanceada como valor de ajuste). Nesse caso, como mencionado no capítulo anterior, o melhor que se pode fazer é usar $p(m) = 0$. Ou seja, não se usar o processo de entrada com parâmetro $m_L = 0.5$, mas apenas o processo de entrada com parâmetro $m_U = 1$ (Rayleigh). Obviamente, isso equivale a se usar o simulador *rank – matching*, com seu único processo Rayleigh de entrada, produzindo portanto a mesma PCR desse simulador (PCR Rayleigh).

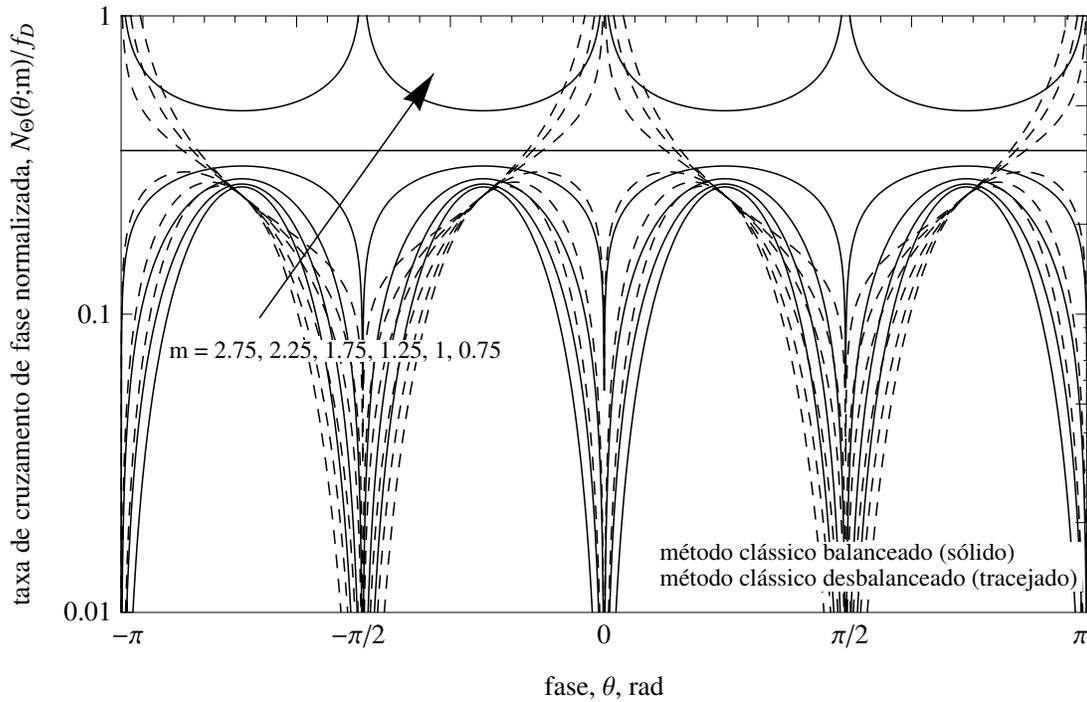


Figura 4.10: Taxa de cruzamento de fase para o simulador clássico.

4.5 Conclusão

Os exemplos numéricos apresentados neste capítulo a fim de ilustrar o comportamento da LCR, AFD e PCR dos simuladores clássico, *rank – matching*, *random – mixture* e RM^2 confirmam que este último é o único que atende, simultaneamente, a três requisitos importantes:

- ser aplicável a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento;
- prover um ajuste exato às estatísticas de primeira ordem do canal Nakagami- m ;
- prover um bom ajuste às estatísticas de segunda ordem do canal Nakagami- m .

O cumprimento desses três requisitos torna o simulador proposto nesta dissertação mais eficaz e realista para o projeto adequado de sistemas sem fio.

Conclusões e Perspectivas

Nenhum dos simuladores existentes para o canal Nakagami- m provê simultaneamente, (i) para valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento, (ii) um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem Nakagami- m (iii) bem como um ajuste satisfatório para as estatísticas de segunda ordem Nakagami- m . Por exemplo, ao avaliarmos alguns simuladores Nakagami- m importantes disponíveis na literatura, verificamos que:

- O simulador clássico [26], [37] provê um ajuste exato para as estatísticas tanto de primeira quanto de segunda ordem do canal Nakagami- m , mas só é aplicável a valores múltiplos de $1/2$ do parâmetro de desvanecimento;
- O simulador *rank – matching* [33], [34] e o simulador por inversão [27] (estatisticamente equivalentes à medida que o tamanho da sequência tende a infinito) são aplicáveis a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento e proveem um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem do canal Nakagami- m , mas proveem um ajuste pobre para as estatísticas de segunda ordem;
- O simulador *random – mixture* [36] também é aplicável a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento, além de prover um bom ajuste para as estatísticas de segunda ordem do canal Nakagami- m , mas apenas aproxima as estatísticas de primeira ordem.

Neste contexto, esta dissertação trouxe as seguintes contribuições:

- Projeto de um novo simulador fase-envoltória para canais de desvanecimento Nakagami- m com as seguintes características: i) se aplica a valores reais arbitrários do parâmetro de desvanecimento, ii) provê um ajuste exato para as estatísticas de primeira ordem do canal Nakagami- m e (iii) provê um bom ajuste às estatísticas de segunda ordem do canal Nakagami- m ;
- Análise do simulador proposto, com a obtenção de expressões exatas e em forma fechada para estatísticas importantes de segunda ordem, a saber: (i) funções densidade de probabilidade conjuntas envolvendo a envoltória, a fase e suas derivadas temporais;(ii) função densidade

- de probabilidade de segunda ordem da envoltória; (iii) taxa de cruzamento de nível; (iv) duração média de desvanecimento; (v) taxa de cruzamento de fase;
- Análise dos demais simuladores apresentados (clássico, *rank-matching* e *random-mixture*), com a obtenção de expressões exatas e em forma fechada para estatísticas de segunda ordem até então desconhecidas para os simuladores *rank-matching* (fase) e *random-mixture* (fase e envoltória); - Como subproduto, mas não menos importante, obtenção de expressões exatas e em forma fechada para (i) a função distribuição acumulada da fase Nakagami- m e (ii) sua inversa.

5.1 Perspectivas

Ao longo deste trabalho, foram identificados alguns pontos importantes a serem resolvidos e também ideias de trabalhos futuros de grande contribuição para área, dentre os quais se destacam os seguintes:

- Determinação da PDF de segunda ordem para a fase dos simuladores Nakagami- m abordados;
- Aplicação do novo paradigma de simulação introduzido nesta dissertação (estágio *random-mixture* + estágio *rank-matching*) para os canais de desvanecimento generalizados $\kappa - \mu$ [51], [52], $\eta - \mu$ [52] e $\alpha - \mu$ [53].

Bibliografia

- [1] M. D. Yacoub, *Foundations of mobile radio engineering*. CRC Press, Inc., 1993.
- [2] T. S. Rappaport, *Wireless Communications, Principles and Practice*. Prentice Hall PTR, 2000.
- [3] E. Damosso, L. M. Correia. Digital Mobile Radio Towards Future Generation Systems, *COST 231 Final Report*. COST Telecom Secretariat, European Commission, Brussels, Belgium, 1999.
- [4] M. Hatay, “Empirical formula for propagation loss in land mobile radio services,” *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 29, no. 3, pp. 317–325, 1980.
- [5] P. Mogensen, P. Eggers, C. Jensen, and J. Andersen, “Urban area radio propagation measurements at 955 and 1845 mhz for small and micro cells,” in *Global Telecommunications Conference, 1991. GLOBECOM '91. 'Countdown to the New Millennium. Featuring a Mini-Theme on: Personal Communications Services*, vol.2, pp. 1297-1302. Dec. 1991.
- [6] H. Xia, “A simplified analytical model for predicting path loss in urban and suburban environments,” *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 4, pp. 1040–1046, 1997.
- [7] J. Walfisch and H. L. Bertoni, “A theoretical model of uhf propagation in urban environments,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 36, no. 12, pp. 1788–1796, 1988.
- [8] F. Ikegami and S. Yoshida, “Analysis of multipath propagation structure in urban mobile radio environments,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 28, no. 4, pp. 531–537, 1980.
- [9] L. Maciel, H. L. Bertoni, and H. Xia, “Unified approach to prediction of propagation over buildings for all ranges of base station antenna height,” *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 42, no. 1, pp. 41–45, 1993.
- [10] G. L. Stuber, *Principles of Mobile Communication*. 2nd ed., Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 2001.

-
- [11] J. S. Seybold, *Introduction to RF propagation*. John Willey and Sons, 2005.
- [12] S. R. Saunders, A. Aragon-Zavala, *Antennas and Propagation for Wireless Communication System*. 2nd ed., John Willey and Sons, 2007.
- [13] V. Erceg, L. Greenstein, S. Tjandra, S. Parkoff, A. Gupta, B. Kulic, A. Julius, and R. Jastrzab, "An empirically-based path loss model for wireless channels in suburban environments," in *Global Telecommunications Conference, 1998. GLOBECOM 1998. The Bridge to Global Integration. IEEE*, vol. 2, pp. 922–927, 1998.
- [14] V. Abhayawardhana, I. Wassell, D. Crosby, M. Sellars, and M. Brown, "Comparison of empirical propagation path loss models for fixed wireless access systems," in *Vehicular Technology Conference, 2005. VTC 2005-Spring. 2005 IEEE 61st*, vol. 1, pp. 73–77, 2005.
- [15] P. Gupta, A. Vishwanath, S. Kalyanaraman, and Y. H. Lin, "Unlocking wireless performance with co-operation in co-located base station pools," in *Communication Systems and Networks (COMSNETS), 2010 Second International Conference on*, pp. 1–8, 2010.
- [16] M. Andersson, C. Orlenius, M. Franzen, "Measuring the Impact of Multiple Terminal Antennas on the Bit Rate of Mobile Broadband Systems Using Reverberation Chambers," *Antenna Technology: Small and Smart Antennas Metamaterials and Applications, 2007. IWAT '07. International Workshop on*, pp. 368–371, Mar. 2007.
- [17] P. Vainikainen, M. Mustonen, M. Kyro, T. Laitinen, C. Icheln, J. Villanen, and P. Suvikunnas, "Recent development of mimo antennas and their evaluation for small mobile terminals," in *Microwaves, Radar and Wireless Communications, 2008. MIKON 2008. 17th International Conference on*, pp. 1–10, 2008.
- [18] M. Jeppesen, S. Jensen, and G. Pedersen, "Prediction based multi-antenna single-receiver mobile terminal," in *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2001 12th IEEE International Symposium on*, vol. 1, pp. A-120-A-124, 2001.
- [19] M. D. Yacoub, *Wireless Technology: Protocols, Standards, and Techniques*. CRC Press, Inc., 2002.
- [20] M. Nakagami, "The m -distribution: a general formula of intensity distribution of rapid fading", in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. C. Hoffman, Oxford, England ed. Pergamon, 1960.
- [21] R. S. Hoyt, "Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 26, pp. 318–359, Apr. 1947.
- [22] S. O. Rice, "Statistical properties of a sine wave plus noise," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 109–157, Jan. 1948.
- [23] T. Aulin, "Characteristics of a digital mobile radio channel," *IEEE Trans. Veh. Tech.*, vol. 30, no. 2, pp. 45 – 53, May 1981.

-
- [24] U. Charash, "Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 27, no. 4, pp. 657 – 670, Apr. 1979.
- [25] H. Suzuki, "A statistical model for urban radio propagation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 25, no. 7, pp. 673 – 680, Jul. 1977.
- [26] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista, and L. G. de Rezende Guedes, "On higher order statistics of the Nakagami- m distribution," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, no. 3, pp. 790 – 794, May 1999.
- [27] N.C. Beaulieu and C. Cheng, "Efficient Nakagami- m fading channel simulation," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 54, no. 2, pp. 413 – 424, Mar. 2005.
- [28] K. W. Yip and T. S. Ng, "A simulation model for Nakagami- m fading channels, $m < 1$," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, no. 2, pp. 214 – 221, Feb. 2000.
- [29] Q.T. Zhang, "A decomposition technique for efficient generation of correlated Nakagami fading channels," *IEEE Journal Select. Areas Commun. on*, vol. 18, no. 11, pp. 2385 – 2392, Nov. 2000.
- [30] N. Youssef, C.-X. Wang, and M. Patzold, "A study on the second Order statistics of Nakagami-Hoyt mobile fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 54, no. 4, pp. 1259 – 1265, Jul. 2005.
- [31] G. K. Karagiannidis, N. C. Sagias, and P. T. Mathiopoulos, "N*Nakagami: A Novel stochastic model for cascaded fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 55, no. 8, pp. 1453 – 1458, Aug. 2007.
- [32] S. Cotton and W. Scanlon, "Higher order statistics for the $\kappa - \mu$ distribution," *Electronics Letters*, vol. 43 (22), pp. 1215–1217, 2007.
- [33] J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, "A simple accurate method for generating autocorrelated Nakagami- m envelope sequences," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 11, no. 3, pp. 231 – 233, Mar. 2007.
- [34] J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub, "On the simulation and correlation properties of phase-envelope Nakagami fading processes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 57, no. 4, pp. 906 – 909, Apr. 2009.
- [35] Y. Ma and D. Zhang, "A method for simulating complex Nakagami fading time series with nonuniform phase and prescribed autocorrelation characteristics," *IEEE Trans. Veh. Tech.*, vol. 59, no. 1, pp. 29 – 35, Jan. 2010.
- [36] G. T. F. de Abreu, "On the moment-determinance and random mixture of Nakagami- m variates," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 9, pp. 2561 – 2575, Sep. 2010.
- [37] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, and J. C. S. Santos Filho, "Nakagami- m phase-envelope joint distribution," *Elect. Lett.*, vol. 41, no. 5, pp. 259 – 261, Mar. 2005.

- [38] M. Abramowitz, and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1964.
- [39] J. C. S. Santos Filho, B. V. Teixeira, M. D. Yacoub, G. T. F. de Abreu, “The RM^2 Nakagami Fading Channel Simulator,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 12, no. 5, pp. 2323–2333, 2013.
- [40] M. D. Yacoub, M. V. Barbin, M. S. de Castro, and J. E. Vargas B., “Level crossing rate of Nakagami-m fading signal: field trials and validation,” *Electron. Lett.*, vol. 36, no. 4, pp. 355–357, Feb. 2000.
- [41] A. Abdi, K. Wills, H. A. Barger, M.-S. Alouini, and M. Kaveh, “Comparison of the level crossing rate and average fade duration of Rayleigh, Rice and Nakagami fading models with mobile channel data,” in *Proc. Veh. Tech. Conf.*, pp. 1850–1857 vol.4, Sep. 2000.
- [42] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho, G. Fraidenraich, and J. R. Mendes, “Generalized Nakagami-m phase crossing rate,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 1, pp. 13–15, Jan. 2006.
- [43] M. D. Yacoub, “Nakagami-m Phase-Envelope Joint Distribution: A New Model,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [44] I. S. Gradshteyn, and I. M. Ryzhik, *Table of Integral, Series, and Products*. 6th ed., Academic Press, 2000.
- [45] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. IEEE Computer Society Press, New York: Wiley, 1974.
- [46] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, “Coloring non-Gaussian sequences,” *IEEE Trans. Signal Proces.*, vol. 56, no. 12, pp. 5817–5822, Dec. 2008.
- [47] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2002.
- [48] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, “On the second-order statistics of Nakagami fading simulators,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 57, no. 12, pp. 3543–3546, Dec. 2009.
- [49] G. T. F. de Abreu, “Accurate simulation of piecewise continuous arbitrary Nakagami-m phasor processes,” in *IEEE Global Telecom. Conf.*, pp. 1–6, Dec. 2006.
- [50] I. B. G. Porto, M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho, S. L. Cotton, and W. G. Scanlon, “Nakagami-m Phase Model: Further Results and Validation,” *IEEE Wireless Commun. Lett.*, submitted Mar. 2013.
- [51] M. D. Yacoub, “The κ - μ distribution: a general fading distribution,” in *Proc. Veh. Tech. Conf.*, pp. 1427–1431 vol.3, 2001.

-
- [52] M. D. Yacoub, "The κ - μ Distribution and the η - μ Distribution," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 49, Feb. 2007.
- [53] M. D. Yacoub, "The α - μ Distribution: A Physical Fading Model for the Stacy Distribution," *IEEE Tran. Veh. Tech.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.

Solução Exata em Forma Fechada para a Função Distribuição Acumulada da Fase Nakagami- m e sua Inversa

A seguir, apresentamos a dedução da CDF da fase Nakagami- m e de sua inversa, dadas por (2.49) e (3.7), respectivamente. As expressões obtidas correspondem ao modelo clássico balanceado de Nakagami- m [26], no qual as componentes em fase e em quadratura apresentam a mesma potência média.

A.1 CDF da fase Nakagami- m

Por definição, a CDF da fase Nakagami- m é escrita como

$$F_{\Theta}(\theta; m) \triangleq \int_{-\pi}^{\theta} f_{\Theta}(u; m) du, \quad -\pi \leq \theta < \pi, \quad (\text{A.1})$$

na qual $f_{\Theta}(\theta; m)$ é a PDF da fase Nakagami- m dada em (2.2). Aparentemente, é inviável obter uma solução em forma fechada para (A.1) via integração direta sobre todo o intervalo de fase $-\pi \leq \theta < \pi$. Por outro lado, o integrando $f_{\Theta}(\theta; m)$ apresenta propriedades particulares que podem ser exploradas para driblar o problema. Mais especificamente, nota-se em (2.2) que $f_{\Theta}(\theta; m)$ é uma função par e periódica, com período $\pi/2$, de modo que sua integração sobre qualquer intervalo pode ser representada em termos da integração sobre um único período, por exemplo de 0 a $\pi/4$. Com esta finalidade, seja definida a função auxiliar

$$\text{aux}(\theta) \triangleq \int_0^{\theta} f_{\Theta}(u; m) du, \quad 0 \leq \theta < \pi/4, \quad (\text{A.2})$$

a qual pode ser calculada em forma fechada como

$$\text{aux}(\theta) = \frac{1}{8} \left[1 - I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) \right], \quad 0 \leq \theta < \pi/4. \quad (\text{A.3})$$

Então, explorando-se a simetria e a periodicidade mencionadas de $f_{\Theta}(\theta; m)$, pode-se agora representar $F_{\Theta}(\theta; m)$ em termos de $\text{aux}(\theta)$, para cada meio período, de $-\pi \leq \theta < -3\pi/4$ a

$3\pi/4 \leq \theta < \pi$. Fazendo-se isso, obtém-se

$$F_{\Theta}(\theta; m) = \begin{cases} \text{aux}(\theta + \pi) & -\pi \leq \theta < -\frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{4} - \text{aux}(-\theta - \frac{\pi}{2}) & -\frac{3\pi}{4} \leq \theta < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{4} + \text{aux}(\theta + \frac{\pi}{2}) & -\frac{\pi}{2} \leq \theta < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} - \text{aux}(-\theta) & -\frac{\pi}{4} \leq \theta < 0 \\ \frac{1}{2} + \text{aux}(\theta) & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3}{4} - \text{aux}(\frac{\pi}{2} - \theta) & \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{4} + \text{aux}(\theta - \frac{\pi}{2}) & \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{4} \\ 1 - \text{aux}(\pi - \theta) & \frac{3\pi}{4} \leq \theta < \pi \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, substituindo-se (A.3) em (A.4), obtém-se

$$F_{\Theta}(\theta; m) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left[1 - I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) \right] & -\pi \leq \theta < -\frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{8} \left[1 + I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) \right] & -\frac{3\pi}{4} \leq \theta < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{8} - I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) & -\frac{\pi}{2} \leq \theta < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{3}{8} + I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) & -\frac{\pi}{4} \leq \theta < 0 \\ \frac{5}{8} - I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \\ \frac{5}{8} + I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) & \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{7}{8} - I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) & \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{4} \\ \frac{7}{8} + I_{\cos^2(2\theta)} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right) & \frac{3\pi}{4} \leq \theta < \pi \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

O resultado em (A.5) é uma representação por trechos nova, exata e em forma fechada para a CDF da fase Nakagami- m . Ao que nos consta, até então, nenhuma expressão fechada para a CDF da fase Nakagami- m havia sido publicada na literatura.

Pode ser útil rescrever (A.5) como uma expressão única e compacta que possa ser implementada diretamente em pacotes computacionais disponíveis no mercado, como Mathematica e Matlab. Com esta finalidade, considere em (A.5) o primeiro termo dentro dos colchetes. Esse termo vale 1 para $-\pi \leq \theta < -3\pi/4$ e $-3\pi/4 \leq \theta < -\pi/2$, 3 para $-\pi/2 \leq \theta < -\pi/4$ e $-\pi/4 \leq \theta < 0$, 5 para $0 \leq \theta < \pi/4$ e $\pi/4 \leq \theta < \pi/2$, e 7 para $\pi/2 \leq \theta < 3\pi/4$ e $3\pi/4 \leq \theta < \pi$. Pode-se verificar facilmente que o termo pode ser reescrito de forma compacta como $5 + 2\lfloor 2\theta/\pi \rfloor$, sendo $\lfloor \cdot \rfloor$ a função *floor*. A mesma abordagem pode ser usada para reescrever o sinal alternado $(-, +, -, +, -, +, -, +)$ imediatamente anterior à função beta incompleta regularizada como $\Pi(\frac{2x}{\pi})$, com $\Pi(\cdot)$ denotando uma onda quadrada que alterna entre -1 e $+1$ com período unitário (no Mathematica, por exemplo, implementa-se $\Pi(\cdot)$ via `SquareWave[.]`). Fazendo-se essas substituições em (A.5), obtém-se a expressão compacta para a CDF da fase Nakagami- m como apresentada em (2.56).

A.2 Inversa da CDF da fase Nakagami- m

A inversa da CDF da fase Nakagami- m pode agora ser obtida por trechos, invertendo-se (A.5). No procedimento, deve-se dar uma atenção especial à inversão de $\cos^2(2\theta)$, porque esse termo não é bijetor. De fato, por conta disso, para cada intervalo em (A.5), deve-se introduzir apropriadamente um termo de correção de fase específico, conforme a faixa de valor esperada para a função inversa. Esse é um procedimento extenso e tedioso, omitido aqui por

simplicidade. O resultado final é este:

$$F_{\Theta}^{-1}(u; m) = \begin{cases} -(1) \cdot \pi - (0) \cdot \frac{3\pi}{4} + (0) \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{(1) \cdot 1 - 8(u - \frac{0}{8})}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right) & 0 \leq u < \frac{1}{8} \\ -(0) \cdot \pi - (1) \cdot \frac{3\pi}{4} + (1) \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{(0) \cdot 1 - 8(u - \frac{1}{8})}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right) & \frac{1}{8} \leq u < \frac{2}{8} \\ -(1) \cdot \pi - (0) \cdot \frac{3\pi}{4} + (2) \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{(1) \cdot 1 - 8(u - \frac{2}{8})}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right) & \frac{2}{8} \leq u < \frac{3}{8} \\ -(0) \cdot \pi - (1) \cdot \frac{3\pi}{4} + (3) \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{(0) \cdot 1 - 8(u - \frac{3}{8})}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right) & \frac{3}{8} \leq u < \frac{4}{8} \\ -(1) \cdot \pi - (0) \cdot \frac{3\pi}{4} + (4) \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{(1) \cdot 1 - 8(u - \frac{4}{8})}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right) & \frac{4}{8} \leq u < \frac{5}{8} \\ -(0) \cdot \pi - (1) \cdot \frac{3\pi}{4} + (5) \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{(0) \cdot 1 - 8(u - \frac{5}{8})}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right) & \frac{5}{8} \leq u < \frac{6}{8} \\ -(1) \cdot \pi - (0) \cdot \frac{3\pi}{4} + (6) \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{(1) \cdot 1 - 8(u - \frac{6}{8})}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right) & \frac{6}{8} \leq u < \frac{7}{8} \\ -(0) \cdot \pi - (1) \cdot \frac{3\pi}{4} + (7) \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\sqrt{I_{(0) \cdot 1 - 8(u - \frac{7}{8})}^{-1} \left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2} \right)} \right) & \frac{7}{8} \leq u < 1 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Note em (A.6) que, em vez de se fazer uma mera simplificação da expressão, foram mantidos explícitos certos padrões de comportamento de alguns termos, propositadamente. Por exemplo, o termo que multiplica o π à extrema direita alterna entre -1 e 0 à medida que a função varre os diferentes intervalos. Como no caso da CDF, identificar tais padrões se mostra muito útil para reescrever a expressão por trechos original como uma expressão única e compacta. De fato, seguindo-se a mesma abordagem descrita para a CDF, todos os padrões identificados em (A.6) podem ser reescritos como fórmulas compactas, em termos de funções simples. Fazendo-se isso, obtém-se finalmente a inversa da CDF da fase Nakagami- m como apresentada em (3.7). Nesse caso, além das funções $[\cdot]$ e $\Pi(\cdot)$, utilizou-se também a função $\Lambda(\cdot)$, que denota uma onda triangular variando entre -1 e $+1$ com período unitário. Essa função pode ser implementada no Mathematica via `TriangleWave[.]`.