UNICAMP

ROGER LEONARDO GARAY AVENDAÑO

# FORMULAÇÃO ANALÍTICA EXATA DE FEIXES ELETROMAGNÉTICOS NÃO PARAXIAIS

CAMPINAS
2013

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

ROGER LEONARDO GARAY AVENDAÑO

# FORMULAÇÃO ANALÍTICA EXATA DE FEIXES ELETROMAGNÉTICOS NÃO PARAXIAIS

**Orientador: Prof. Dr. Michel Zamboni Rached**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Concentração de Telecomunicações e Telemática.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Roger Leonardo Garay Avendaño, e orientada pelo Prof. Dr. Michel Zamboni Rached

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

G162f Garay Avendaño, Roger Leonardo, 1984-
Formulação analítica exata de feixes eletromagnéticos não paraxiais / Roger Leonardo Garay Avendaño. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Michel Zamboni Rached.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Ótica de feixes. 2. Bessel, Funções de. 3. Fourier, Transformações de. I. Rached, Michel Zamboni. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Exact analytic formulation of electromagnetic nonparaxial beams
**Palavras-chave em inglês:**
Optics beams
Bessel's functions
Fourier's Transforms
**Área de concentração:** Telecomunicações e Telemática
**Titulação:** Mestre em Engenharia Elétrica
**Banca examinadora:**
Michel Zamboni Rached [Orientador]
Erasmo Recami
Hugo Enrique Hernandez Figueroa
**Data de defesa:** 25-02-2013
**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Roger Leonardo Garay Avendaño

**Data da Defesa:** 25 de fevereiro de 2013

**Título da Tese:** "Formulação Analítica Exata de Feixes Eletromagnéticos não paraxiais"

Prof. Dr. Michel Zamboni Rached (Presidente): ______________________

Prof. Dr. Erasmo Recami: ______________________

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa: ______________________

A Yuliana, meu amor

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por toda a minha vida, pois sei que tudo o que ocorreu de bom em minha vida foi Ele que me presenteou.

À minha família, em especial meus pais, Leonardo e Reneé, e a minha irmã Katherine que nunca hesitaram em me apoiar, tanto financeiramente como afetivamente. Sempre os amarei.

À minha noiva, Yuliana, que sem sua paciência e compreensão esse trabalho não ficaria pronto. Agradeço pelo incentivo através de palavras e exemplo, que sempre me deu. Agradeço por estar comigo por todo esse tempo, e ainda rezo para que possamos continuar juntos por toda as nossas vidas. Te amo muito!

Ao meu orientador, Prof. Dr. Michel Zamboni Rached, sou grato pela orientação prestada, pela virtuosa compreensão em tudo, pelo seu incentivo, disponibilidade e apoio que sempre demonstrou.

Aos amigos, brasileiros, cubanos, argentinos e peruanos da Sala 3 e Sala 4, sou grato pelas horas de descontração em meio a tanto trabalho. Em especial ao Iury - pela paciência em ensinar-me ”engenheirês”, a Ruthy e Yuri - pelo grande apoio no decorrer deste mestrado, e a Mariana e Aleixo - pela companhia ao trilharmos o mesmo caminho.

Ao grande amigo Prof. Dr. Hugo E. H. Figueroa, pelo recebimento e a oportunidade a este grande mundo da pós graduação.

Á grande amiga Prof. Dra. Carmen Eyzaguirre, a qual me iniciou na vida acadêmica com muita paciência em repetitivas explicações. Obrigado pelos ensinamentos.

Sou grato também ao CAPES pelo financiamento.

A todos o meu sincero e profundo **Muito Obrigado!**

Quem sabe concentrar-se numa coisa e insistir nela como único objetivo, obtém, ao fim e ao cabo, a capacidade de fazer qualquer coisa.

Mahatma Gandhi

# Resumo

Embora a propagação de feixes ópticos seja um tema muito investigado, existe ainda uma grande variedade de estudos a se efetuar, principalmente no desenvolvimento de métodos que permitam, de forma analítica, a descrição exata da enorme diversidade de feixes com propriedades distintas.

A principal contribuição desta dissertação é a proposta de uma metodologia matemática para a obtenção de feixes escalares e eletromagnéticos não paraxiais puramente propagantes como soluções analíticas exatas da equação de onda e das equações de Maxwell. Tal método baseia-se em uma solução analítica para as integrais que descrevem superposições de feixes de Bessel de ordem zero (não evanescentes) com qualquer tipo de função espectral. Exemplos de feixes não paraxiais são apresentados para a validação do método proposto neste trabalho, os quais provam a grande eficiência em termos do pouco esforço computacional quando são comparados com os métodos de outros autores.

Palavras-chave: Feixes ópticos não paraxiais. Aproximação paraxial. Feixes de Bessel. Transformada de Fourier. Equação de onda. Equações de Maxwell. Polarização linear, azimutal e radial.

# Abstract

Although the propagation of optical beams has been vastly studied, there is still a huge amount of research topics to be exploited, mainly regarding the developing of exact analytic methods.

The main contribution of this work is the development of a mathematical methodology to obtain nonparaxial propagating scalar and electromagnetic beams as exact analytic solutions of the wave equation and Maxwell's equations, respectively. This method is based on an very general solution to the continuous superposition of zero order Bessel beams (non-evanescent) with any kind of spectral function. Examples of non paraxial beams are shown to validate the method proposed in this work, which proves to be very efficient, based on low computational effort when compared to other author's methods.

Key-words: Nonparaxial optical beam. Paraxial approximation. Bessel beams. Fourier transform. Wave equation. Maxwell's equations. Linear, azimuthal and radial polarization.

# Lista de Figuras

# Lista de Acrônimos e Notação

| | |
|---|---|
| TE | Transversal Elétrico |
| TM | Transversal Magnético |

| | |
|---|---|
| $1D, 2D, 3D$ | indica dimensão espacial |
| $x, y, z$ | variáveis espaciais cartesianas |
| $\rho, \phi, z$ | variáveis espaciais cilíndricas |
| $\lambda$ | comprimento de onda no vácuo |
| $\omega$ | frequência angular de onda no vácuo |
| $c$ | velocidade da luz no vácuo |
| $J_0$ | função de Bessel de ordem zero |
| $J_\nu$ | função de Bessel de ordem$-\nu$ |
| $R_n$ | n-ésimo coeficientes de Fourier |
| $2N+1$ | número de coeficientes de Fourier |
| $k_\rho$ | componente transversal do vetor de onda |
| $k_z$ | componente longitudinal do vetor de onda |
| $S(k_z)$ | espectro em $k_z$ |
| $\Delta k_z$ | largura de banda do espectro $S(k_z)$ |
| $\bar{k}_z$ | posição do centro do espectro $S(k_z)$ |
| $\Re e$ | parte real |
| $E_m$ | componentes do campo elétrico do modo $TM$ |
| $B_m$ | componentes do campo magnético do modo $TM$ |
| $E_e$ | componentes do campo elétrico do modo $TE$ |
| $B_e$ | componentes do campo magnético do modo $TE$ |

# Sumário

Capítulo 1

# Introdução Geral

Neste capitulo propomos fazer, de forma introdutória, um enquadramento do tema na atualidade, indicando as motivações que levaram a sua realização e os objetivos que pretendemos atingir, mostrando também a sua estrutura e o que de original esta dissertação apresenta.

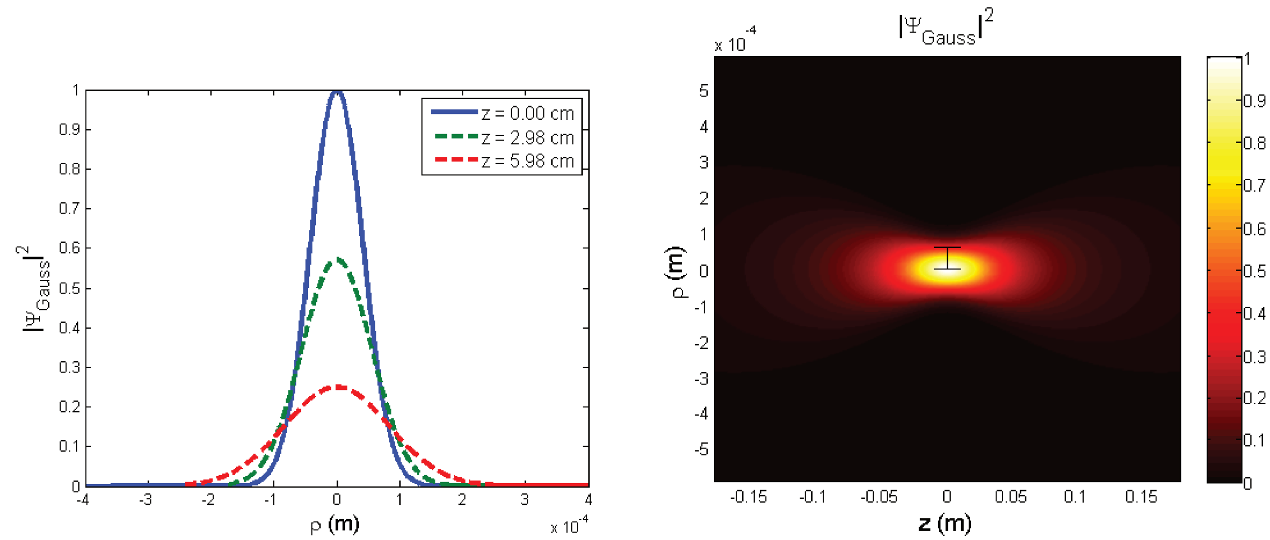
## 1.1 Enquadramento

Com o constante avanço tecnológico, torna-se indispensável que as áreas de ciências como a Matemática e a Física acompanhem esta evolução, melhorando assim a resolução dos problemas propostos diariamente. Por exemplo, na atualidade, problemas envolvidos em complexos fenômenos físicos podem ser resolvidos através de aproximações numéricas ou de forma exata mediante interessantes novos métodos matemáticos. Como não poderia deixar de ser, também o âmbito da Óptica tem sido alvo de constantes alterações e atualizações no acompanhamento do progresso tecnológico e científico. Desde seus inícios até hoje, a óptica, vem sendo um campo de estudo fascinante. De maneira geral, podemos dizer que ela estuda a propagação da luz e sua interação com a matéria. A diferença de outras ciências muitos conceitos da óptica podem ser visualizados com uso de um laser. O laser emite uma luz coerente, monocromática e colimada; o qual permite a observação dos principais fenômenos ondulatórios da luz tais como difração e interferência. Entretanto, para se chegar ao desenvolvimento deste dispositivo, e de vários outros que são importantes no nosso cotidiano, um grande avanço na elaboração da formulação matemática foi desenvolvido.

A presente dissertação aborda o desenvolvimento de um método totalmente analítico e exato para descrever feixes escalares e eletromagnéticos não paraxiais e puramente propagantes. Um feixe óptico pode ser definido como uma onda monocromática que possui concentração transversal de campo. Um fenômeno sempre presente na propagação de um feixe em meios no guiados é a difração, que lhe causa um alargamento transversal gradativo, que depende da magnitude do seu confinamento transversal em comparação ao comprimento de onda usado.

Iniciamos o estudo do feixe óptico através da análise da propagação do feixe mais conhecido e simples de estudar, o chamado feixe gaussiano. Sua distribuição de intensidade no plano transversal é uma função gaussiana centrado nesse mesmo eixo. A análise da propagação do feixe gaussiano em meios lineares pode ser efetuada com a aproximação paraxial.

Na Figura 1.1 representamos, de uma forma geral, os resultados normalmente obtidos na propagação de feixes de perfil gaussiano em meios lineares homogêneos, onde se verifica o alargamento do feixe, e por consequência a diminuição da sua amplitude, devido ao fenômeno da difração. Na Figura 1.1(b) é importante notar que o raio da cintura do feixe, o *spot*, aproximadamente $60\mu$m é muito maior que o comprimento de onda usado neste exemplo de $0.63\mu$m. Esta é uma característica dos feixes paraxiais, a qual permite aproximações que simplificam muito sua descrição matemática.




(a) (b)

Figura 1.1: Feixe Gaussiano: (a) Diagrama de propagação $2D$ no sistema de coordenadas cilíndricas. (b) Projeção ortogonal no sistema de coordenadas $(\rho, z)$. O Comprimento de onda usado $0.63\mu$m. O *spot* do feixe é $60\mu$m aproximadamente.

Vamos agora falar de uma classe de feixes muito interessantes, com propriedades não vistas nos feixes gaussianos. Depois de conseguir que a luz, através da forma de feixe, possa concentrar-se se propagando distancias pequenas no espaço livre mantendo seu perfil transversal de intensidade constante, houve o interesse de se criar novos tipos de feixes que pudessem se propagar por distâncias muito maiores comparadas com os feixes gaussianos com o mesmo tamanho do *spot* central.

As ondas localizadas (ou *Localized Waves - LW*), também conhecidas como ondas não difrativas, surgem com uma tentativa de obter feixes e pulsos capazes de resistir os efeitos da difração por longas distâncias através do espaço livre, chamadas de "ondas progressivas sem distorções" por Courant and Hilbert [17].

Os feixes não difrativos mais simples são os chamados feixes de Bessel e as soluções matemáticas que os descrevem foram obtidas (provavelmente) no final do século $XIX$. Tais soluções foram retomadas por Stratton [49], porém nunca receberam a devida atenção pois possuem fluxo de potência infinito através do plano perpendicular à direção de propagação. Seriam necessárias algumas décadas até que se percebesse que a versão truncada desses feixes também possuía características não difrativas. Pode-se dizer que os primeiros estudos teóricos relacionados com ondas não difrativas surgiram em [9] e os primeiros experimentos em [38, 37].

No entanto, todas as atenções foram chamadas de forma contundente com os artigos de Durnin [27, 26, 28], que mostrou alguns os aspectos teóricos interessantes sobre essas ondas, gerando feixes de Bessel truncados e os interpretando corretamente, mostrando que realmente possuíam resistência aos efeitos da difração por longas distâncias quando comparados aos feixes usuais.

O que em um início, era difícil de conceber pela natureza ondulatória da luz, na atualidade já é uma realidade. Incluso, este tipo de feixe, pode ser aplicado em meios não lineares, onde ainda é capaz de resistir aos efeitos da difração [58]. Depois do descobrimento destes feixes surgiu um grande interesse nesta área da óptica, trazendo com ele o estudo de surpreendentes novos tipos de feixes: Por exemplo, o feixe Airy [48, 59], o qual dá a aparência de curvatura à medida que viaja, o feixe de Mathieu [20] tratado nas coordenas elípticas cilíndricas, o feixe Bessel-Gauss [31], o feixe Laguerre-Gauss [25], entre outros. Assim como novas e interessantes aplicações ópticas: Como em comunicações ópticas do espaço livre [56, 57], onde se torna mais apropriado e simples que o uso de cabos de fibras ópticas, captações de imagens ópticas [36, 5] e cirurgia a laser na medicina, litografia óptica [32], pinças ópticas [8, 19, 3] capazes de aprisionar ou mover pequenas partículas, alinhamento óptico a longa distância [53], guiamento óptico de átomos [42, 6], etc.

No caso escalar, o feixe ópticos é definido como uma solução monocromática da equação de onda. Em diversas situações é difícil, do ponto de vista matemático, encontrar soluções analíticas exatas para esta equação e portanto a forma usual de obter essas soluções é através do uso da aproximação paraxial. Através do uso de essa aproximação matemática, os feixes são chamados de feixes paraxiais.

Todo feixe óptico pode ser construído a partir de uma superposição de ondas planas, por definição, estaremos dentro do regime paraxial, quando a maior contribuição de intensidades este dado por as ondas planas que se propagam próximos ao eixo de propagação do feixe óptico.

Embora em diversas áreas de Física o entendimento de determinados fenômenos ópticos seja baseado em aproximações matemáticas, como a paraxial, o uso desta aproximação matemáticas limita o estudo físico envolvido, onde as soluções encontradas são validas só para certas condições físicas. Quando o fenômeno físico se torna mais completo essas aproximações matemáticas não podem ser mais usadas. Isto faz que o problema vire mais complexo do ponto de vista matemático principalmente pela dificuldade de encontrar novas soluções sem o uso de aproximações.

O estudo de feixes ópticos não paraxiais vem sendo um tema de grande relevância para a descrição dos campos ópticos que são bem focalizado e para feixes ópticos com diâmetro da ordem de alguns comprimentos de onda de propagação. Na década passadas o estudo vetorial do feixe gaussiano foi analisado no regime não paraxial, onde o tamanho da cintura do feixe gaussiano era da ordem do comprimento de onda do feixe [2]. Com o desenvolvimento da ciência e tecnologia, na atualidade os feixes fortemente não paraxiais podem ser amplamente utilizados em diversas áreas da Física, por exemplo, na realização de captura e manipulação óptica [7] ou em tomografia de difração óptica, onde um feixe altamente focalizado permite reduzir o domínio de investigação [10]. Aplicações em microscopia de alta resolução, aprisionamento de partículas, tomografia de alta densidade e nanolasers ópticos são algumas das aplicações mais recentes onde não é mais valida a aproximação paraxial, portanto um tratamento não paraxial é necessário.

Embora a equação de onda paraxial descreva de maneira precisa a propagação de feixes ópticos com tamanhos de *spot* muito maiores que o comprimento, existe muitas fontes de luz como os lasers de estado sólido ou lasers semicondutores que geram feixes bem localizados, para o qual, a aproximação paraxial não pode ser aplicável e algumas correções são necessárias. A propagação de feixes eletromagnéticos não paraxiais tem atraído muita atenção no estudo teórico de feixes ópticos.

Os primeiros estudos de feixes ópticos analisados fora do regime paraxial foram abordados através de soluções paraxiais com adequadas correções. Em 1975, Lax desenvolveu um dos primeiros abordagens baseado em termos de perturbações do numero de onda [34]. Depois deste trabalho pioneiro, muitos autores fizeram uso de vários métodos para estudar soluções paraxiais com aproximadas correções. Agrawal e colegas, através de expansões de series de potência para o campo transversal, obtiveram a correção da primeira ordem para o feixe gaussiano [2, 1]. Nesse estudo as ondas evanescentes não foram consideradas. Davis [21] usando o método de potencial vetor linearmente polarizado obteve correções de primeiro ordem para este tipo de feixes. Usando o procedimento de expansão de perturbação, Couture e Belanger [18] deram a conhecer correções de ordem superior para a solução paraxial e mostraram que somando todas estas correções é obtida uma fonte pontal complexa de ondas esféricas [24, 47]. Aplicando uma abordagem escalar, correções para feixes gaussianos de ordem superior foram obtidos por Takenaka et al. [50] e Zauderer [61]. Wünsche [52] introduziu dois operadores de transição para transformar soluções arbitrária da equação de onda paraxial em soluções exatas da equação de onda de Helmholtz sobre diferentes condições. Empregando o método da transformada de Fourier, Cao e Deng [14] estudaram em forma geral o problema de propagação de um feixe de luz não paraxial. Em 2002, Seshadri [45] apresentou algumas explicações e observações em termos de série de correções não paraxiais para o feixe gaussiano fundamental com referência à análise dado por Wünsche [52].

Todos estes métodos são muito eficazes para a construção de soluções a partir de uma aproximação analítica para a propagação não paraxial dos campos ópticos. Infelizmente, eles são adequados para lidar com feixes fracamente não paraxiais, com pequenos parâmetros de perturbação. Quando o parâmetro de perturbação torna-se maior, isto é, para feixes fortemente não paraxial, as soluções obtidas através de termos de correção, como os obtidos por todos os métodos mencionados acima, se tornam divergentes, portanto estes métodos deixam de funcionar.

Em 2003, Borghi e Santariero [12], mostraram que o método proposto por Lax poderiam ser aproveitado e empregado, mesmo no caso de feixes extremamente não paraxial, para um esquema diferente, introduzida pelo Weniger [55]. Os termos de correção obtidos por Borghi e Santarsiero [12] permanecem convergentes, mesmo no caso de feixes extremamente não paraxiais. Recentemente, Sepke e Umstadter [44, 43] derivaram uma solução analítica exata para o campo eletromagnético vetorial da gaussiana, da gaussiana achatada, e dos modos de laser Gaussiano anular usando o método de espectro angular. As soluções obtidas por Borghi e Santarsiero [12] e por Sepke e Umstadter [44, 43] são adequados para feixes linearmente polarizado. Chaumet [15], baseado em representações do espectro angular, tomou em conta as contribuições das ondas propagantes evanescentes fora do uso da aproximação paraxial e usando as séries de Taylor expressou o campo elétrico em forma analítica para pontos de observação localizados perto da cintura do feixe. Em 2007, Deng [23], usando o método de perturbações de multiescala, estudou a propagação de feixe simétricos não paraxial no espaço livre, logrando feixes com polarizações lineares, radiais e azimutais.

Porém, todos esses métodos são voltados na descrição de feixes específicos e/ou são consideravelmente complexos do ponto de vista matemático.

## 1.2 Motivação e Objetivo

A crescente avanço tecnológico permite aplicações, novas e interessantes, de feixes ópticos não paraxiais em incontáveis áreas e tecnologias da ciência moderna, isto apresenta uma grande motivação para que o estudo destes feixes seja continuamente abordado. Sendo demonstrado que ao longo do tempo sua importância foi e é imensa.

A construção de novos tipos de feixes ópticos, os quais possuem propriedades muito mais interessantes que os já conhecidos feixes gaussianos abre um campo com grande aplicações óptica, como em fibra óptica, guiamento óptico de átomos, alinhamento óptico, aplicações médicas, comunicações ópticas no espaço livre, aplicações em óptica não linear, pinças ópticas, etc. Estritamente, no caso escalar, um feixe óptico é definido como uma solução da equação de onda. Embora o estudo da propagação destes feixes seja um tema que tem vindo a ser abordado desde tempos muito antigos, existem poucas soluções analíticas exatas da equação de onda descrevendo estes feixes, na maioria das vezes as soluções são dadas para o regime de aproximação paraxial [11, 33], ou obtidas através de métodos numéricos [53].

Vários dos métodos analíticos encima já foram propostos para a descrição de feixes não paraxiais, tanto para casos escalares como para casos vetoriais, porém na maioria das vezes esses métodos são voltados para feixes específicos, como dirigidos a feixes gasussianos [54, 39], a feixes Bessel-Gauss não paraxiais [13, 4], a feixes de Airy [22, 51], a feixes Hermite-Gauss [29, 35], estão limitados para feixes fracamente não paraxiais tratados através de correções paraxiais [30, 12] ou são consideravelmente complexos do ponto de vista matemático [46, 15, 16, 40, 41]. Neste sentido o presente projeto, baseado no interessante trabalho do professor Zamboni [60], tem como principal objetivo mostrar um método de fácil manejo matemático, para fornecer qualquer tipo de feixe escalar e eletromagnético não paraxial propagantes como soluções analíticas exatas da equação de onda e das equações de Maxwell respectivamente. Como tal, aborda-se o estudo da propagação de vários feixes escalares e vetoriais não paraxiais, através de diferentes funções espectrais não paraxiais.

Os objetivos desta dissertação foram ligados a cada um dos capítulos apresentados.

O primeiro objetivo consiste numa introdução à propagação de feixes ópticos, baseada no estudo da evolução de vários tipos de feixes escalares e eletromagnéticos como soluções da equação de onda e das equações de Maxwell respectivamente. Inicialmente aborda-se a obtenção de feixes com simetria azimutal obtidos a partir de superposições de funções de Bessel de ordem zero através de uma integração na componente transversal do vetor de onda $k_\rho$ com uma função espectral $S(k_\rho)$. Um feixe de grande simplicidade, como é o caso do feixe gaussiano, é obtido escolhendo um adequado espectro $S(k_\rho)$. Usando o vínculo que relaciona as componentes do vetor de onda $(k_\rho, k_z)$ com a frequência de propagação do feixe pretende-se analisar os tipos de feixes resultantes obtidos através da integração na componente longitudinal do vetor de onda $k_z$ para distintos espectros não paraxiais $S(k_z)$.

No segundo objetivo pretende-se analisar o método matemático proposto em [60] para a obter feixes escalares propagantes não paraxiais, tanto com e sem simetria azimutal. Aqui o objetivo é estudar o efeito dos diferentes espectros não paraxiais na obtenção destes feixes e, posteriormente, comprovar a eficácia do método quando o feixe tende a ser não paraxial.

Por fim, o terceiro objetivo é estudar dois métodos matemáticos para a obtenção de feixes eletromagnéticos não paraxiais como soluções analíticas exatas das equações de Maxwell. O ponto mais importante deste sub-objetivo corresponde à investigação, e análise vetorial da propagação de feixes eletromagnéticos não paraxiais para interessantes polarizações em coordenadas cartesianas e cilíndricas.

## 1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação, baseada em estudos sobre feixes ópticos não paraxiais, está dividida da seguinte forma:

- No segundo capítulo, apresentamos uma pequena revisão teórica de feixes ópticos, por simplicidade a revisão é dada para feixes escalares com simetria azimutal obtidas como soluções analíticas da equação de onda, construídas como superposições de feixes de Bessel de ordem zero através de uma integração na componente longitudinal do vetor de onda $k_z$ com uma dada função espectral $S(k_z)$. Como exemplo de aplicação e ajudados da aproximação paraxial, escolhendo uma adequado espectro $S(k_z)$ e mostramos a obtenção do feixe óptico que apresenta uma maior simplicidade, o feixe gaussiano. Neste capítulo mostramos, também, a importância da forma do espectro $S(k_z)$ e como ele define o tipo de feixe resultante, paraxial ou não paraxial. Dentro da classe de feixes não paraxiais são analisados os espectros $S(k_z)$ que originam feixes fortemente não. paraxiais. Neste capitulo também apresentamos a importância de um estudo vetorial de feixes eletromagnético não paraxiais como soluções analíticas exatas das equações de Maxwell. A diferencia do caso escalar, neste caso não podemos supor feixes eletromagnéticos com componentes de campo longitudinal (ao longo da direção de propagação) insignificantes, pois a componente longitudinal e transversal do campo elétrico são do mesmo ordem.

- No terceiro capítulo, baseados no interessante trabalho do professor Zamboni, aplicado para obter pulsos de forma analítica exata [60], fornecemos um método capaz de fornecer feixes escalares não paraxiais como soluções exatas da equação de onda. Tal método baseia-se em uma solução analítica para as integrais que descrevem superposições de feixes de Bessel de ordem zero (não evanescentes) com qualquer tipo de função espectral.

- O quarto capítulo, engloba dois métodos vetoriais capazes de fornecer feixes eletromagnéticos propagantes não paraxiais como soluções analíticas exatas das equações de Maxwell. Embora no caso escalar seja considerado ao feixes ópticos com componentes longitudinalis insignificantes para fornecer uma simplificação considerável tanto no calculo como na sua caracterização desde tipo de feixe, no caso vetorial não é mais valida um tratamento paraxial, portanto a polarização do feixe joga um papel importante na obtenção de feixes eletromagnéticos não paraxiais. Neste sentido abalizamos distintas importantes polarizações.

- por fim, apresentamos nossas conclusões gerais finais.

## 1.4 Contribuições Originais

No âmbito da óptica, a obtenção de feixes ópticos com interessantes propriedades de propagação, que têm surgido nas últimas décadas, tem despertado um enorme interesse na comunidade de cientistas, que realizam o seu trabalho na referida área, sendo, consequentemente, um tema que tem sido alvo de uma abordagem constante e intensa ao longo do tempo. A diversidade dos estudos elaborados até ao momento é muita ampla, porém esses estudos são baseados, em muitos casos, no regime paraxial ou são realizados focado em casos muito específicos. Desta forma, embora os estudos realizados se localizem na mesma área da Física, pode considerar-se que os métodos matemáticos obtidos para certo tipo de feixe óptico não pode ser estendido para qualquer tipo de feixe. Além das suas soluções ser obtidas de forma complexas, desde o ponto de vista matemático, elas não podem ser usadas para descrever feixes fortemente não paraxiais [34, 2, 21, 18, 50, 23, 45, 45].

A originalidade da presente dissertação encontra-se:

- Na abordagem de um estudo teórico para a descrição analítica de qualquer tipo de feixe escalar propagante no vácuo obtidos a partir de diferentes tipos de espectros não paraxiais, os quais são colocados num só trabalho.

- Na distinção de nosso método, com os outros, por apresentar uma forte convergência das soluções para feixes altamente não paraxiais.

- Na simplicidade do método, do ponto de vista matemático, para a obtenção de feixes ópticos propagantes não paraxiais, sendo estendida para a obtenção de distintos tipos de feixes ópticos.

- Na abordagem de um estudo analítico vetorial simples para a propagação de feixes eletromagnéticos não paraxiais com interessantes polarizações que, até à presente data, são abordados em casos muito específicos ou envoltos em complexos cálculos matemáticos.

Desta forma, os resultados obtidos são importantes para futuras investigações tanto na parte experimental e teórica.

# Referências do capítulo 1


[1] G. P. Agrawal and M. Lax. Free-space wave propagation beyond the paraxial approximation. *Phys. Rev. A*, 27:1693–1695, Mar 1983.

[2] G. P. Agrawal and D. N. Pattanayak. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 69:575–578, 1979.

[3] Leonardo André Ambrosio. Feixes localizados em pinças opticas com particulas convencionasi e metamateriais. *Universidade Estadual de Campinas*, 2009 - Tese de doutorado.

[4] Alexandre April. Bessel–gauss beams as rigorous solutions of the helmholtz equation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 28(10):2100–2107, Oct 2011.

[5] J. Arlt, V. Garces-Chavez, W. Sibbett, and K. Dholakia. Optical micromanipulation using a bessel light beam. *Optics Communications*, 197:239 – 245, 2001.

[6] J. Arlt, T. Hitomi, and K. Dholakia. Atom guiding along laguerre-gaussian and bessel light beams. *Applied Physics B*, 71:549–554, 2000.

[7] A. Ashkin. Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers. *Opt. Photon. News*, 10(5):41, May 1999.

[8] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and Steven Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Opt. Lett.*, 11(5):288–290, May 1986.

[9] Harry Bateman. *The Mathematical Analysis Of Electrical And Optical Wave-Motion On The Basis Of Maxwell'S Equations*. Cambridge, 1915.

[10] Kamal Belkebir, Patrick C. Chaumet, and Anne Sentenac. Influence of multiple scattering on three-dimensional imaging with optical diffraction tomography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23(3):586–595, Mar 2006.

[11] Ioannis Besieris and Amr Shaarawi. Paraxial localized waves in free space. *Opt. Express*, 12(16):3848–3864, Aug 2004.

[12] Riccardo Borghi and Massimo Santarsiero. Summing lax series for nonparaxial beam propagation. *Opt. Lett.*, 28(10):774–776, May 2003.

[13] Riccardo Borghi, Massimo Santarsiero, and Miguel A. Porras. Nonparaxial bessel-gauss beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(7):1618–1626, Jul 2001.

[14] Qing Cao and Ximing Deng. Corrections to the paraxial approximation of an arbitrary free-propagation beam. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15(5):1144–1148, May 1998.

[15] Patrick C. Chaumet. Fully vectorial highly nonparaxial beam close to the waist. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23(12):3197–3202, Dec 2006.

[16] Alessandro Ciattoni, Bruno Crosignani, and Paolo Di Porto. Vectorial analytical description of propagation of a highly nonparaxial beam. *Optics Communications*, 202:17 – 20, 2002.

[17] R. Courant and D. Hilbert, editors. *Methods of Mathematical Physical, Volume 2*. Wiley, New York, 1976 p. 760.

[18] Marc Couture and Pierre-A. Belanger. From gaussian beam to complex-source-point spherical wave. *Phys. Rev. A*, 24:355–359, Jul 1981.

[19] Jennifer E. Curtis, Brian A. Koss, and David G. Grier. Dynamic holographic optical tweezers. *Optics Communications*, 207:169 – 175, 2002.

[20] Cesar Augusto Dartora. Estudo de ondas localizadas do tipo mathieu. *Universidade Estadual de Campinas*, 2002 - Tese de doutorado.

[21] L. W. Davis. Theory of electromagnetic beams. *Phys. Rev. A*, 19:1177–1179, Mar 1979.

[22] Dongmei Deng, Shunli Du, and Qi Guo. Energy flow and angular momentum density of nonparaxial airy beams. *Optics Communications*, 289(0):6 – 9, 2013.

[23] Dongmei Deng, Qi Guo, Sheng Lan, and Xiangbo Yang. Application of the multiscale singular perturbation method to nonparaxial beam propagations in free space. *J. Opt. Soc. Am. A*, 24(10):3317–3325, Oct 2007.

[24] G.A. Deschamps. Gaussian beam as a bundle of complex rays. *Electronics Letters*, 7(23):684 –685, 18 1971.

[25] Kailiang Duan, Beizhan Wang, and Baida Lü. Propagation of hermite-gaussian and laguerre-gaussian beams beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(9):1976–1980, Sep 2005.

[26] J. Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(4):651–654, Apr 1987.

[27] J. Durnin, J. J. Miceli Jr., and J. H. Eberly. Comparison of bessel and gaussian beams. *Opt. Lett.*, 13(2):79–80, Feb 1988.

[28] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 58:1499–1501, Apr 1987.

[29] Zenghui Gao and Baida La. Partially coherent nonparaxial hermite-gaussian beams and their propagation properties. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 118(7):307 – 314, 2007.

[30] Omar El Gawhary and Sergio Severini. On the nonparaxial corrections of bessel-gauss beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27(3):458–460, Mar 2010.

[31] F. Gori, G. Guattari, and C. Padovani. Bessel-gauss beams. *Optics Communications*, 64(6):491 – 49, 1987.

[32] Takashi Ito and Shinji Okazaki. Pushing the limits of lithography. *Nature*, 406(6799):1027–1031, 2000.

[33] Rebecca H. Jordan and Dennis G. Hall. Free-space azimuthal paraxial wave equation: the azimuthal bessel-gauss beam solution. *Opt. Lett.*, 19:427–429, 1994.

[34] Melvin Lax, William H. Louisell, and William B. McKnight. From maxwell to paraxial wave optics. *Phys. Rev. A*, 11:1365–1370, Apr 1975.

[35] Yamei Luo and Baida Lü. Composite polarization singularities in superimposed laguerre-gaussian beams beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27(3):578–584, Mar 2010.

[36] M. P. MacDonald, L. Paterson, K. Volke-Sepulveda, W. Sibbett J. Arlt, and K. Dholakia. Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures. *Science*, 296(5570):1101–1103, 2002.

[37] John H. Mcleod. The axicon: A new type of optical element. *J. Opt. Soc. Am.*, 44(8):592–592, Aug 1954.

[38] John H. Mcleod. Axicons and their uses. *J. Opt. Soc. Am.*, 50(2):166–166, Feb 1960.

[39] Shojiro Nemoto. Nonparaxial gaussian beams. *Appl. Opt.*, 29(13):1940–1946, May 1990.

[40] Miguel A. Porras. The best quality optical beam beyond the paraxial approximation. *Optics Communications*, 111:338 – 349, 1994.

[41] Miguel A Porras. Non-paraxial vectorial moment theory of light beam propagation. *Optics Communications*, 127:79–95, 1996.

[42] D. P. Rhodes, G. P. T. Lancaster, J. Livesay, G. P. T. McGloin, J. Arlt, and K. Dholakia. Guiding a cold atomic beam along a co-propagating and oblique hollow light guide. *Optics Communications*, pages 247 – 254, 2002.

[43] Scott M. Sepke and Donald P. Umstadter. Analytical solutions for the electromagnetic fields of tightly focused laser beams of arbitrary pulse length. *Opt. Lett.*, 31(17):2589–2591, Sep 2006.

[44] Scott M. Sepke and Donald P. Umstadter. Exact analytical solution for the vector electromagnetic field of gaussian, flattened gaussian, and annular gaussian laser modes. *Opt. Lett.*, 31(10):1447–1449, May 2006.

[45] S. R. Seshadri. Nonparaxial corrections for the fundamental gaussian beam. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(10):2134–2141, Oct 2002.

[46] Anurag Sharma and Arti Agrawal. New method for nonparaxial beam propagation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(6):1082–1087, Jun 2004.

[47] S. Y. Shin and L. B. Felsen. Gaussian beam modes by multipoles with complex source points. *J. Opt. Soc. Am.*, 67(5):699–700, May 1977.

[48] Georgios A. Siviloglou and Demetrios N. Christodoulides. Accelerating finite energy airy beams. *Opt. Lett.*, 32(8):979–981, Apr 2007.

[49] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic Theory (Pure and Applied Physics).* Mcgraw-Hill College, New York, 1st edition, 1941 p. 356.

[50] Takashi Takenaka, Mitsuhiro Yokota, and Otozo Fukumitsu. Propagation of light beams beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2(6):826–829, Jun 1985.

[51] A. Torre. Airy beams beyond the paraxial approximation. *Optics Communications*, 283(21):4146 – 4165, 2010.

[52] A. W ünsche. Transition from the paraxial approximation to exact solutions of the wave equation and application to gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(5):765–774, May 1992.

[53] Antti Vasara, Jari Turunen, and Ari T. Friberg. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 6(11):1748–1754, Nov 1989.

[54] A.V. Volyar. Nonparaxial gaussian beams: 1. vector fields. *Technical Physics Letters*, 26:573–575, 2000.

[55] Ernst Joachim Weniger. Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series. *Computer Physics Reports*, 10:189–371, 1989.

[56] H.A. Willebrand and B.S. Ghuman. Fiber optics without fiber. *Spectrum, IEEE*, 38(8):40 –45, aug 2001.

[57] Jian yu Lu and He Shiping. Optical x wave communications. *Optics Communications*, 161:187 – 192, 1999.

[58] Michel Zamboni-Rached. Ondas localizadas aplicadas aos meios difrativos e dispersivos. *Universidade Estadual de Campinas*, 2004 - Tese de doutorado.

[59] Michel Zamboni-Rached, K. Z. Nóbrega, and C. A. Dartora. Analytic description of airy-type beams when truncated by finite apertures. *Opt. Express*, 20(18):19972–19977, Aug 2012.

[60] Michel Zamboni-Rached and Erasmo Recami. Subluminal wave bullets: Exact localized subluminal solutions to the wave equations. *Phys. Rev. A*, 77:033824, Mar 2008.

[61] Erich Zauderer. Complex argument hermite-gaussian and laguerre-gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 3(4):465–469, Apr 1986.

Capítulo 2

# Feixes ópticos

## 2.1 Introdução

O feixe óptico surge com a necessidade de poder confinar e transportar a luz através do espaço livre sem que ela sofra os efeitos difrativos. Apesar da natureza da luz impedir a existência de tal idealização, o feixe é a forma mais próxima que a luz pode tomar para localizar-se espacialmente propagando-se distâncias finitas sem sofrer os efeitos de difração.

O estudo da propagação de feixes ópticos pode ser baseado através de um estudo escalar, chamado de aproximação escalar, ou através de um estudo vetorial. No estudo escalar os feixes ópticos são soluções monocromáticas da equação de onda caracterizados por possuirem concentração transversal do campo. Nesse estudo, cada solução representa uma componente do campo eletromagnético do feixe óptico, suposto linearmente polarizado. No segundo caso, a natureza vetorial do feixe óptico é considerada, portanto os feixes ópticos são obtidos como soluções monocromáticas das equações de Maxwell. Nesse último caso, são obtidas as expressões para cada componente do campo eletromagnético do feixe óptico polarizado arbitrariamente. É importante notar que quando as soluções são analiticamente exatas, isto é, obtidas sem a necessidade de usar a aproximação paraxial, os resultados dessas equações fornecem os chamados feixes não paraxiais, tanto para o caso escalar como vetorial.

O feixe mais conhecido é o feixe gaussiano, cujo padrão transversal é dado por uma função gaussiana. Existem outros tipos feixes que apresentam propriedades muito mais interessantes que os já conhecidos feixes gaussianos. Um desses, é o feixe de Bessel. O feixe de Bessel é uma outra solução da equação de onda, proposta por Stratton [20] e redescoberta por Durnin [11], o qual possui a interessante propriedade de não sofrer os efeitos da difração. Para isso, ele mantém seu perfil de intensidade transversal constante ao longo da direção de propagação.

A partir de uma superposição adequada de ondas planas podemos obter qualquer tipo de feixe. Por exemplo, os feixes de Bessel podem ser entendidos como uma superposição de ondas planas, em que os vetores de ondas se encontram na superfície de um cone fazendo um ângulo com respeito ao eixo de propagação. Do mesmo modo, pode-se obter qualquer tipo de feixe a partir de uma superposição adequada de feixes de Bessel.

Em geral, um feixe escalar com simetria azimutal pode ser escrito como uma superposição de feixes de Bessel de ordem zero ($J_0$) através de uma integração na componente transversal do vetor de onda com uma dada função espectral dependente da componente transversal do vetor de onda $k_\rho$. Nesse caso, obter soluções analíticas reduz-se a resolver a integral envolvida. Dependendo do espectro escolhido as integrais tornam-se mais ou menos complexas. Por exemplo, para obter feixes gaussianos o única forma de resolver analiticamente a integral envolvida é através de aproximações matemáticas, as quais são chamadas de aproximações paraxiais. Aqui a expressão resultante não é uma solução analítica exata da equação de onda e o feixe resultante é conhecido como feixe paraxial.

Os feixes paraxiais são caracterizados por possuir a componente transversal do vetor de onda $k_\rho$ muito menores que a relação entre a frequência angular e a velocidade de propagação, fazendo com que o *spot* do feixe seja muito maior que o comprimento de onda. Os feixes não paraxiais são caracterizados principalmente por possuir seu *spot* da ordem do comprimento de onda e, portanto, por possuir o $k_\rho$ da mesma ordem da relação da frequência angular e a velocidade de propagação.

Outra forma interessante de obter feixes com simetria azimutal é mediante a superposição de feixes de Bessel de ordem zero através de uma integração na componente longitudinal do vetor de onda, $k_z$ com uma dada função espectral dependente do $k_z$. Nesse caso, o problema, de novo, se reduz a resolver a integral envolta.

Quando consideramos a natureza eletromagnética dos campos ópticos a teoria escalar não é suficiente para estudar de forma adequada a propagação de feixes não paraxiais. Em geral, os componentes longitudinais dos campos elétrico e magnéticos podem ter amplitudes significativas, como é o caso dos feixes eletromagnéticos não paraxiais. Portanto, o estudo eletromagnético desses feixes é baseado nas equações de Maxwell, sendo um requisito necessário a obtenção de soluções analíticas exatas das equações de Maxwell.

A importância da obtenção de feixes eletromagnéticos não paraxiais se encontra principalmente no entendimento teórico para seu aproveitamento na tecnologia atual fora do regime paraxial, no qual suas principais características, forte concentração do campo e tamanho do *spot* da ordem do comprimento de onda apresentam grandes aplicações, como em feixes de laser fortemente focalizados [18, 19]ou na dispersão direta de laser de elétrons [8]. Essa propriedade é também aproveitada em diversas áreas, incluindo imagem de alta resolução [10], manipulação de partículas [24], eletrodinâmica quântica [22], óptica não-linear [4] e máquinas laser [17], assim como aplicações na propagação de feixes através da atmosfera com turbulência [6], entre outros.

Neste capítulo, mostraremos todas essas abordagens, assim como as importantes diferenças entre feixes paraxiais e não paraxiais. Mostraremos a obtenção de feixes escalares simétricos a partir de uma interessante construção baseada em integrais, através de uma determinada função espectral. Na Seção 2.1 apresentamos os feixes escalares obtidos a partir da equação de onda escalar no sistema de coordenadas cilíndricas. Na Subseção 2.2.1 mostramos as importantes diferenças entre feixes escalares paraxiais e não paraxiais. Na Subseção 2.2.2 mostramos a obtenção de feixes escalares a partir de espectros em $S(k_\rho)$. O feixe mais conhecido, o feixe gaussiano, é mostrado na Subseção 2.2.2.1 e o feixe de Bessel, o qual é um feixe não difrativo, é mostrado na Subseção 2.2.2.2. Na Subseção 2.2.3 apresentamos uma nova e interessante expressão para a obtenção de feixes paraxiais e não paraxiais a partir do espectro $S(k_z)$. Além de isso, apresentamos a importância do tipo de espectro escolhido, pois ele determinará o tipo de feixe resultante mostrando como é possível obter feixes fortemente não paraxiais. Na última Seção apresentamos as definições de feixes eletromagnéticos não paraxiais e importância do seu estudo vetorial.

## 2.2 A equação de onda: Feixes Escalares

A equação de onda é de suma importância na descrição de fenômenos físicos, como acústica, eletromagnetismo, dinâmica fluidos, física de partículas, entre outros. Ela descreve a propagação de uma variedade de ondas, como ondas de som e luz.

A equação de onda homogênea é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,y,z,t)=0 \tag{2.1}$$

Por simplicidade, vamos escrever a equação de onda (2.1) em coordenadas cilíndricas $(\rho, \phi, z)$, e vamos supor, que a solução $\psi(\rho, \phi, z, t)$ possui simetria azimutal. Portanto reescrevemos (2.1) como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\rho,z,t)=0 \tag{2.2}$$

Considerando que o meio de propagação é o espaço livre, escrevemos a solução $\psi(\rho, z, t)$ em termos de uma transformada de Fourier-Bessel na variável $\rho$ e duas transformadas de Fourier nas variáveis z e t:

$$\psi(\rho,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}J_0(k_\rho\rho)e^{\mathrm{i}k_z z}e^{-\mathrm{i}\omega t}\bar{\psi}(k_\rho,k_z,\omega)k_\rho dk_\rho dk_z d\omega \tag{2.3}$$

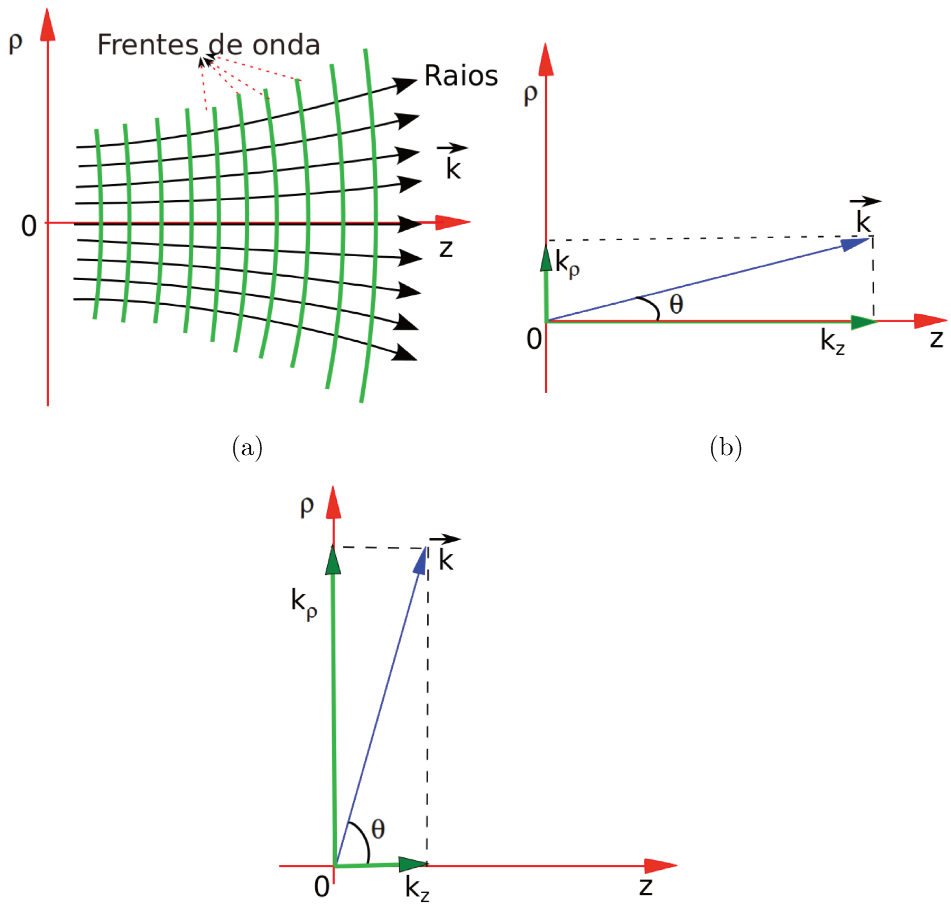
onde $J_0(.)$ é a função de Bessel ordinária de ordem zero, $\bar{\psi}(k_\rho, k_z, \omega)$ é a transformada de Fourier de $\psi(\rho, z, t)$, $k_\rho$ e $k_z$ são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda; e $\omega$ é a freqüência angular da onda.

### 2.2.1 Feixes paraxiais e não paraxiais

Considerando (2.3), podemos dizer que uma onda escalar é chamada paraxial se as normais às suas frentes de ondas são raios paraxiais, é dizer, se os raios fazem pequenos ângulos com o eixo de propagação, ver Figura 2.1(a). Nessas condições, os feixes paraxiais são caracterizados por possuir componentes transversais do vetor de onda $(k_\rho)$ de ordem muito menores que o módulo do vetor de onda $(k)$, $k_\rho \ll k$, portando o ângulo $\theta$, na Figura 2.1(b), toma valores muito pequenos e a componente longitudinal do vetor de onda é aproximadamente igual ao valor do vetor de onda, $k_z \approx k = \omega/c$, sendo muito maior que a componente transversal $k_\rho \ll k_z \approx k = \omega/c$, então:

$$\begin{cases} k_\rho/k_z & \ll & 1 \\ k_\rho & \ll & \omega/c = 2\pi/\lambda \\ \Delta k_\rho & \ll & \omega/c = 2\pi/\lambda \end{cases} \tag{2.4}$$

A relação (2.4) é de grande importância para o reconhecimento de feixes paraxiais através do tamanho do *spot* do feixe. Feixes paraxiais possuem tamanhos de *spot* muito maiores que o comprimento de onda. Por exemplo, como veremos, para o caso do feixe de Bessel na aproximação paraxial, o raio do *spot* do feixe é dado por $\Delta\rho_0 = 2.4/k_\rho \gg \lambda$.




(c)

Figura 2.1: (a) Diagrama de raios, onde as normais às frentes de ondas são raios paraxiais. (b-c) Relação entre as componentes do vetor de onda $(k_\rho, k_z)$. (*b*) Na aproximação paraxial. (c) Fora da aproximação paraxial.

Os feixes não paraxiais são caracterizados por possuir campos ópticos bem focalizados onde seu *spot* é da ordem do comprimento de onda ($\lambda$). Os feixes não paraxiais são caracterizados principalmente por possuir o *spot* da ordem do comprimento de onda. Onde o $k_\rho$ é da ordem de grandeza da relação $\omega/c$ (ver Figura 2.1).

### 2.2.2 Feixes obtidos em função de espectros $S(k_\rho)$

Substituindo (2.3) na equação de onda (2.2). Encontramos a relação entre $\omega$, $k_\rho$ e $k_z$ que deve ser satisfeita para garantir que a expressão (2.3) seja solução de (2.2):

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_\rho^2 + k_z^2 \tag{2.5}$$

Portanto usando a condição (2.5) na equação (2.3), temos que as soluções (2.3) da equação de onda (2.2) podem ser escritas como:

$$\psi(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\omega/c} J_0(k_\rho \rho) e^{\pm \mathrm{i}\sqrt{\omega^2/c^2 - k_\rho^2}z} e^{-\mathrm{i}\omega t} \bar{S}_\pm(k_\rho, \omega) k_\rho dk_\rho d\omega \tag{2.6}$$

onde a função $\bar{S}_\pm(k_z, \omega)$, aqui representa o espectro espaço-temporal de $\psi(\rho, z, t)$. Através de adequados espectros $\bar{S}(k_z, \omega)$, a expressão (2.6) fornece interessantes e conhecidas soluções, como feixes e pulsos gaussianos. Observar que (2.6) possui tanto componentes propagantes como contrapropagantes (ondas que se propagam em sentido oposto).

Nosso foco de interesse nesta dissertação são os feixes ópticos, os quais se propagam mantendo sua frequência angular fixa. Para obter soluções monocromáticas de frequência angular $\omega$, escrevemos (2.6) como:

$$\psi(\rho, z, t) = e^{-\mathrm{i}\omega t} \int_{0}^{\omega/c} J_0(k_\rho \rho) e^{\pm \mathrm{i}z\sqrt{\omega^2/c^2 - k_\rho^2}} \bar{S}_\pm(k_\rho) k_\rho dk_\rho \tag{2.7}$$

Além disso, nosso interesse é analisar feixes puramente propagantes (feixes propagantes na direção +), portanto reescrevemos (2.7) como:

$$\psi(\rho, z, t) = e^{-\mathrm{i}\omega t} \int_{0}^{\omega/c} J_0(k_\rho \rho) e^{\mathrm{i}z\sqrt{\omega^2/c^2 - k_\rho^2}} \bar{S}(k_\rho) k_\rho dk_\rho \tag{2.8}$$

A solução (2.8) representa um feixe com simetria azimutal, o qual é escrito como superposição de feixes de Bessel de ordem zero $J_0(.)$ através de uma integração na componente transversal do vetor de onda $k_\rho$ com uma função espectral $\bar{S}(k_\rho)$. Esses feixes possuem componentes puramente propagantes, pois a integral em $0 \leq k_\rho \leq \omega/c$ evita que o $k_z$ seja imaginário, portanto evita a aparição de componentes evanescentes.

### O feixe gaussiano

O mais comum dos feixes usado é o feixe gaussiano. Este pode ser obtido usando (2.8), para isso escolhemos a seguinte função espectral:

$$\bar{S}(k_\rho) = 2a^2 e^{-a^2 k_\rho^2} \tag{2.9}$$

onde $a$ é uma constante positiva relacionada com a largura do espectro $\Delta k_\rho = 1/a$ e como veremos, esta também relacionada com a abertura transversal inicial do feixe, o *spot*.

A interpretação física da solução (2.6), com o espectro (2.9) é a formação do feixe através de uma superposição de ondas planas, todas de mesma freqüência angular ($\omega$) propagando-se em todas direções (com $0 \leq k_z$), sendo que o maior aporte é dado pela componente longitudinal do vetor de onda $\vec{k_z}$ (ver Figura 2.2).

Substituindo (2.9) em (2.8), notamos que a única forma de resolver a integral é mediante o uso da aproximação paraxial. Considerando que a largura de banda espacial do espectro $\Delta k_\rho = 1/a \ll \omega/c$, então $c/\omega \ll a$. Usando esta aproximação em (2.7), expansão binomial, obtemos:

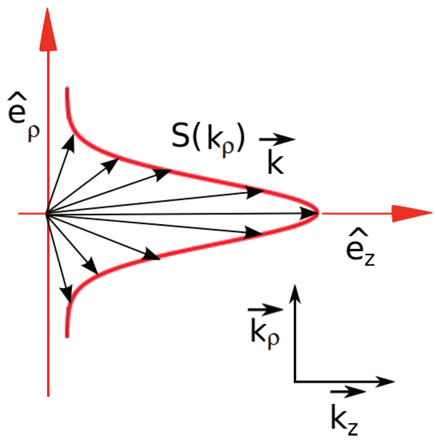



Figura 2.2: Interpretação da solução (2.8) com o espectro (2.9) em termos de uma superposição de ondas planas.

$$\psi_{\text{Gauss}}(\rho, z, t) = e^{-\mathrm{i}\omega t} 2a^2 \int_0^{\omega/c} J_0(k_\rho \rho) e^{\mathrm{i}z\sqrt{\omega^2/c^2 - k_\rho^2}} e^{-a^2 k_\rho^2} k_\rho dk_\rho \tag{2.10}$$

onde $k = \omega/c$. A integral (2.10) não possui solução. Porém ela pode ser resolvida através de aproximações.

Na aproximação paraxial temos $\Delta k_\rho \ll \omega/c \to a \gg c/\omega$. Portanto o espectro $S(k_\rho)$ será muito concentrado em $k_\rho \approx 0$ e podemos fazer:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_\rho^2} &= \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{k_\rho^2}{\omega^2/c^2}} \\ &\approx \frac{\omega}{c}\left[1 - \frac{k_\rho^2}{2\omega^2/c^2}\right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Usando (2.11) em (2.10) temos:

$$\psi_{\text{Gauss}}(\rho, z, t) = e^{-\mathrm{i}\omega t} 2a^2 \int_0^{\omega/c} J_0(k_\rho \rho) e^{\mathrm{i}z\omega/c} e^{-\mathrm{i}z k_\rho^2/(2\omega/c)} e^{-a^2 k_\rho^2} k_\rho dk_\rho \tag{2.12}$$

Fazendo $\omega \to \infty$ e usando [12] resolvemos (2.12):

$$\psi_{\text{Gauss}}(\rho, z, t) = \frac{2a^2}{2\left(a^2 + \mathrm{i}z/2k\right)} \exp\left[\frac{-\rho^2}{4a^2 + 4\mathrm{i}z/2k}\right] e^{\mathrm{i}k(z-ct)} \tag{2.13}$$

Para obter o tamanho do *spot* do feixe gaussiano inicial, substituímos $z = t = 0$ na expressão (2.13):

$$|\ \psi_{\text{Gauss}}(\rho, z = 0, t = 0)\ |^2 = e^{-\frac{1}{2}(\rho^2/a^2)} \tag{2.14}$$

Definimos o raio do *spot* do feixe como sendo a distância transversal ($\rho = \Delta\rho_0$) na qual o valor máximo de $|\ \psi\ |^2$ cai a $1/e$. Para isso, na expressão (2.14), igualamos $-(\Delta\rho_0/a\sqrt{2})^2 = -1$

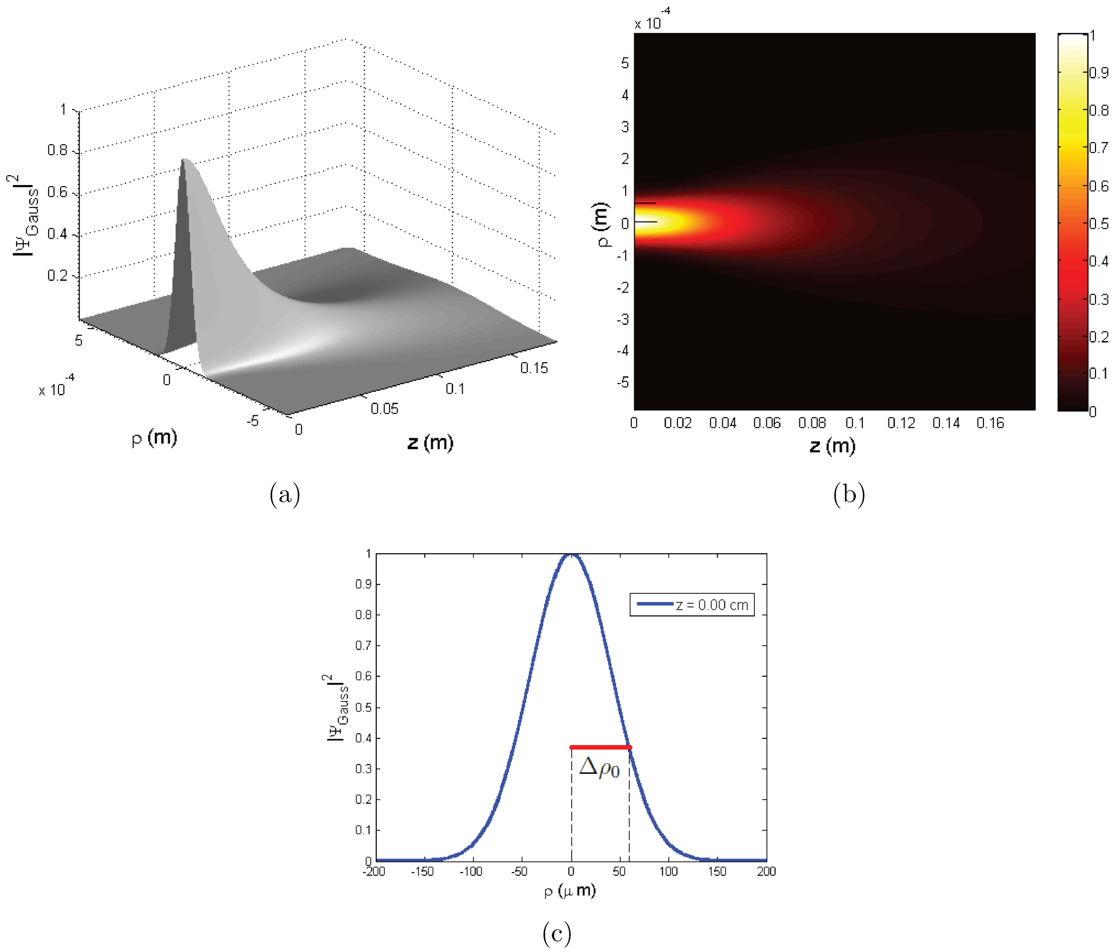



Figura 2.3: Feixe paraxial gaussiano com comprimento de onda de $\lambda = 0.63\mu$m e com raio do *spot* central inicial $\Delta\rho = 60\mu$m.

e obtemos $\Delta\rho_0 = a\sqrt{2}$. O gráfico do gaussiano inicial (2.14) com o raio do seu *spot* é mostrado na Figura 2.3(c).

Repare que $a$ está relacionado com a largura do espectro gaussiano $S(k_\rho)$ (2.9), através de $\Delta k_\rho = 1/a$, portanto quanto mais largo é o espectro $S(k_\rho)$, menor é o tamanho do *spot* do feixe e vice-versa.

Notamos que o feixe gaussiano resultante obtido em (2.13) é uma solução analítica da equação de onda, mas obtido através de uma aproximação paraxial. Este tipos de feixes são chamados de feixes paraxiais e não são soluções analíticas exatas da equação de onda.

### O feixe de Bessel

O feixe de Bessel é uma onda localizada (chamada também de não difrativa) e, como tal, ocorre quando existe um acoplamento espaço-temporal linear entre $\omega$ e $k_\rho$ [14]. Para obter este tipo de feixe consideramos o seguinte espectro:

$$\bar{S}(k_\rho) = \frac{\delta(k_\rho - \frac{\omega}{c}\sin\theta)}{k_\rho} \tag{2.15}$$

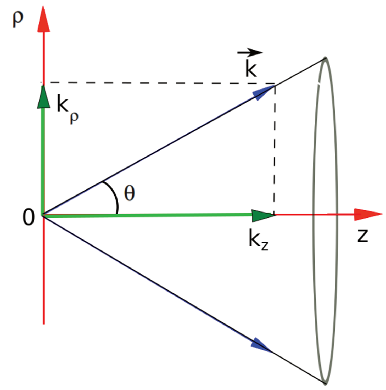



Figura 2.4: Interpretação da solução (2.8) com o espectro (2.9) em termos de uma superposição de ondas planas cujos vetores de onda se localizam na superfície de um cone de ângulo de vértice igual a $\theta$, que é o ângulo de áxicon.

De (2.5), temos imediatamente que $k_z = (\omega/c)\cos\theta$ e $k_\rho = (\omega/c)\sin\theta$ com $0 \leq \theta \leq \pi/2$

A interpretação da solução (2.8), com o espectro (2.15), em termos de uma superposição de ondas planas, pode ser visualizada na Figura 2.4. Nessa figura vemos que o feixe de Bessel é gerado por uma superposição de ondas planas cujos vetores de onda se localizam na superfície de um cone de ângulo de vértice igual a $\theta$,o qual é chamado de ângulo de áxicon.

Substituindo (2.15) em (2.8) obtemos o feixe de Bessel ordinário:

$$\psi(\rho, z, t) = J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sin\theta\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega_0}{c}\cos\theta(z - \frac{c}{\cos\theta}t)\right) \tag{2.16}$$

o qual possui velocidade de fase $v_{fase} = c/\cos\theta$ e um padrão transversal de campo, independente da componentes longitudinal $z$, dada por uma função de Bessel de ordem zero e, por isso, possui concentração de campo ao redor do eixo de propagação $z$. O raio do seu *spot* central corresponde ao raio para o qual ocorre o primeiro zero desta função de Bessel: $\Delta\rho_0 = 2.405c/(\omega\sin\theta)$, ver Figura 2.6(a).

Usando $k_z = (\omega/c)\cos\theta$ e $k_\rho = (\omega/c)\sin\theta$, podemos expressar (2.16) na sua forma mais conhecida:

$$\psi(\rho, z, t) = J_0\left(k_\rho\rho\right)\exp\left(\mathrm{i}k_z z\right)\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{2.17}$$

Obviamente, (2.17) não é quadraticamente integrável e por isso representa uma solução ideal, sendo que na prática, como já o dissemos, tais feixes são gerados por aberturas finitas e calculados através das integrais de difração de Kirchhoff ou Rayleigh-Sommerfeld (ver Figura 2.5). Nestes casos os feixes de Bessel (truncados) possuem ainda uma grande profundidade de campo, ou seja, são capazes de se propagar por longas distâncias mantendo seu padrão transversal aproximadamente inalterado. A profundidade de propagação maxima de um feixe de Bessel, gerado por uma abertura finita de raio $R$, é dada por:

$$Z_{max} = \frac{R}{\tan\theta} \tag{2.18}$$

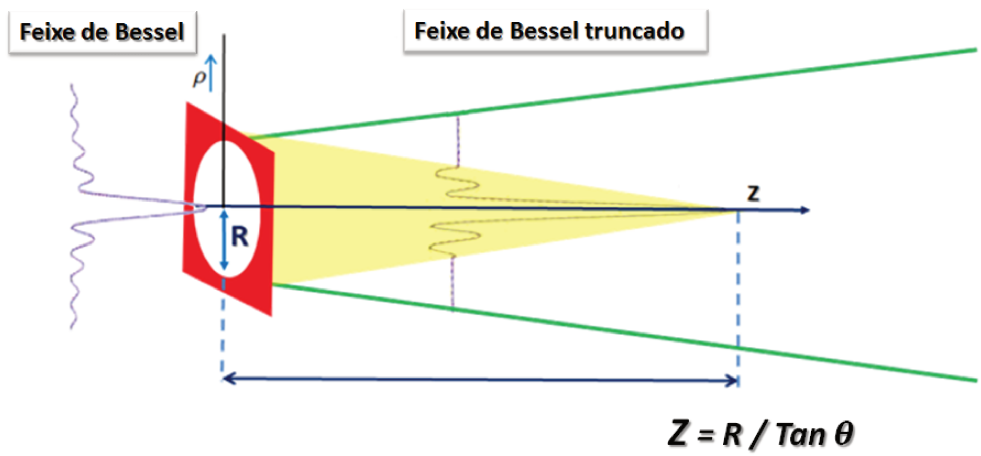



Figura 2.5: Esquema experimental para a geração de feixes de Bessel truncados.

Embora (2.16) represente uma solução ideal, ela pode ser usada para representar a geração experimental de um feixe de Bessel truncado, ao menos nas vizinhanças de $\rho = 0$; mais especificamente quando $\rho \ll R$.

Através de uma comparação dos feixes gaussiano e Bessel, nas mesmas condições de frequência (comprimento de onda $\lambda = 0.063\mu$m) e o raio do *spot* central $\Delta = 60\mu m$. Isso implica que o feixe de Bessel terá um ângulo de áxicon $\theta = \arcsin(2.405c/(\omega\Delta\rho_0)) = 0.004$rad, ver Figura 2.6(b). O truncamento do feixe é dado através de uma abertura circular finita de raio $R = 3.5$mm. Na Figura 2.6(b) são mostrados os dois feixes baixo as mesmas condições.

Na Figura 2.6(b) podemos ver que o feixe de Bessel tem uma profundidade de campo de $Z_{max} = R/\tan\theta = 85$cm. Onde mantém-se rigidamente por uma distância 14 vezes maior que o feixe gaussiano, depois da qual ele sofre um forte decaimento devido ao abrupto truncamento feito na abertura, o qual também é responsável pelas oscilações de intensidade que ocorrem no feixe.

Esses dois exemplos de feixes são uma pequena mostra da enorme quantidade de feixes ópticos que existem na atualidade. Feixes de Bessel de ordem mais alta, os quais não possuem simetria azimutal são também muito interessantes, além de outros, como os feixes de Mathieu [9], entre outros [25, 23, 26].

### 2.2.3 Feixes obtidos em função de espectros $S(k_z)$

Outra forma de expressar (2.7), e portanto, de obter uma nova solução da equação de onda é mediante superposições de feixes de Bessel de ordem zero através de uma integração em $k_z$, em vez de em $k_\rho$.

Para isso, usamos o vínculo (2.5) e mediate a derivação obtemos:

$$dk_\rho = -\frac{k_z dk_z}{\sqrt{(\omega/c)^2 - k_z^2}} \tag{2.19}$$

Substituímos (2.19) em (2.7) e temos:

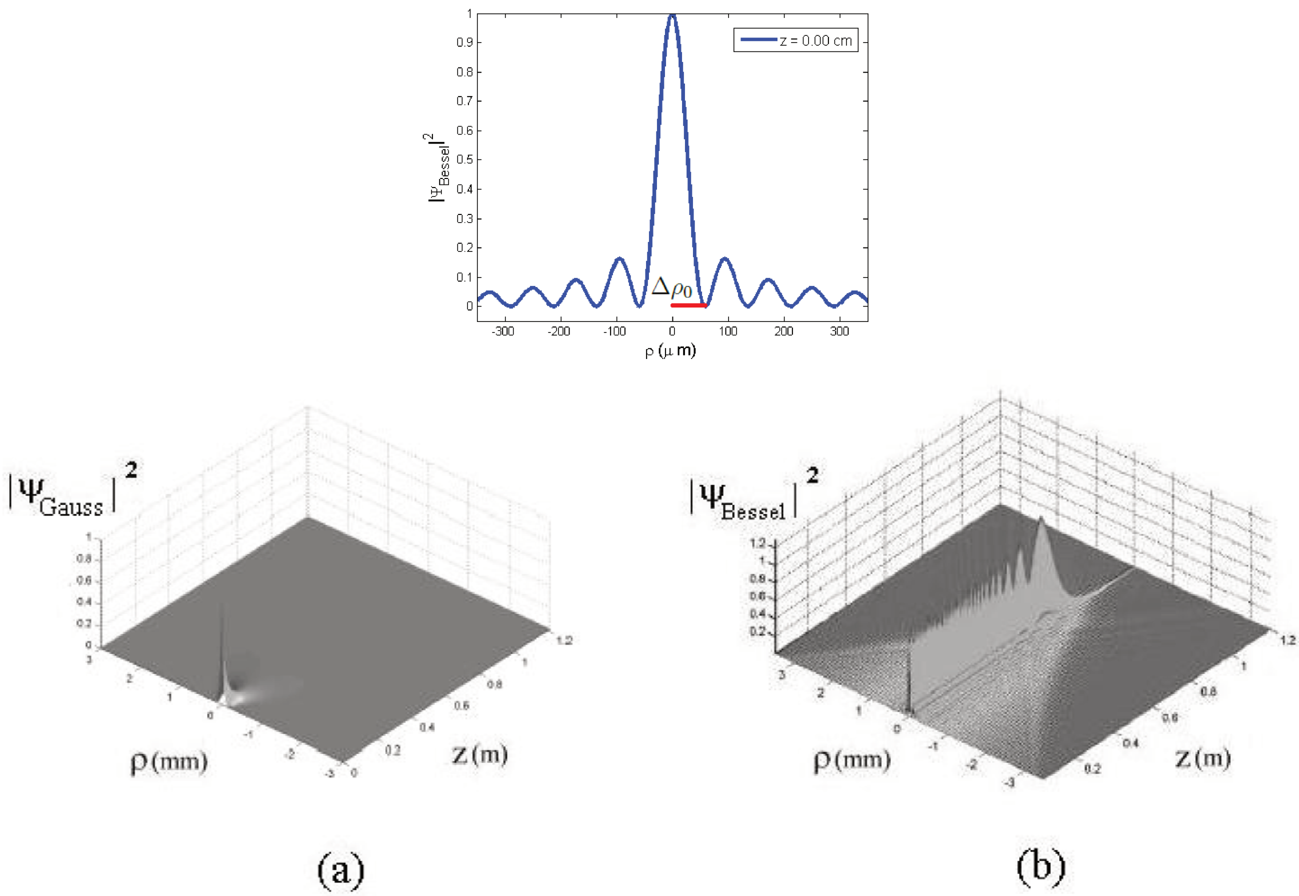



Figura 2.6: Diagrama transversal do feixes de Bessel obtido em . Comparação entre os diagramas de propagação dos feixes gaussiano (a) e do Bessel (b). Fonte: Livro: *Localized Waves* [14].

$$\psi(\rho, z, t) = e^{-i\omega t} \int_{-\omega/c}^{\omega/c} J_0(\sqrt{\omega^2/c^2 - k_z^2}\rho) e^{ik_z z} \bar{S}(k_z) k_z dk_z \tag{2.20}$$

Redefinimos o espectro $S(k_z) = \bar{S}(k_z)k_z$ e substituindo em (2.20) obtemos:

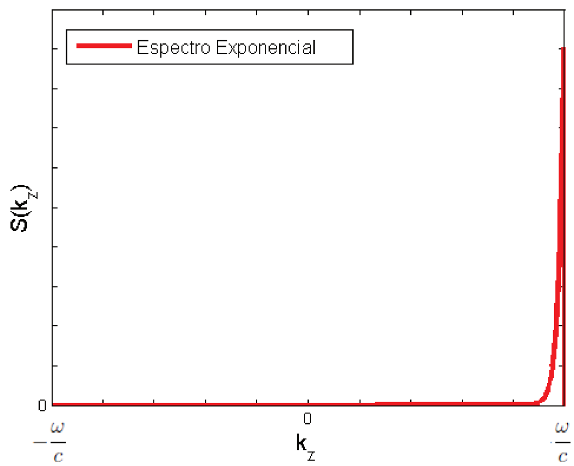
$$\psi(\rho, z, t) = e^{-i\omega t} \int_{-\omega/c}^{\omega/c} J_0(\sqrt{\omega^2/c^2 - k_z^2}\rho) e^{ik_z z} S(k_z) dk_z \tag{2.21}$$

onde $k_\rho$ e $k_z$ são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda.

A integração (2.21) dada em $k_z$ é feita de $-\omega/c$ até $\omega/c$, ou seja, $-\omega/c \leq k_z \leq \omega/c$. Isto significa que estão sendo considerando feixes de Bessel que se propagam na direção negativa $(-z)$, isso não é desejável, pois desejamos obter feixes puramente propagantes. Para isso, escolhemos espectros apropriados definidos em $0 \leq k_z \leq \omega/c$, onde igualamos a zero o espectro no intervalo $-\omega/c \leq k_z \leq 0$. Fazendo isso podemos minimizar ou até mesmo zerar a contribuição desses feixes de Bessel contrapropagantes.

É importante notar que a solução (2.21) engloba tanto feixes paraxiais e não paraxiais, portanto a função espectral $S(k_z)$ é de grande importância, pois ela define o tipo de feixe resultante. Feixes paraxiais provém de espectros paraxiais e feixes não paraxiais provém de espectros não paraxiais.

Na solução (2.21) o espectro de $S(k_z)$ define o tipo de feixe resultante. Feixes paraxiais são aqueles onde os espectros $S(k_z)$ são paraxiais. O espectro é paraxial, quando ele é concentrado ao redor de $k_z = \omega/c$, com $\Delta k_z \ll \omega/c$. Na Figura 2.7 mostramos um exemplo de espectro paraxial, neste caso a função espectral corresponde a uma função exponencial bem concentrada ao redor de $\omega/c$.




(a)

Figura 2.7: Exemplo de espectro exponencial de tipo paraxial

Feixes não paraxiais (puramente propagantes) são caracterizados por possuir espectros $S(k_z)$, não paraxiais. O espectro pode ser não paraxial, quando ele possui uma grande largura de banda espacial ($\Delta k_z \sim \omega/c$), os quais são chamados de espectros fortemente não paraxiais.Estos espectros dão origem aos chamado feixes fortemente não paraxiais. O espectro pode também ser não paraxial, quando ele é mesmo estreito, porém concentrado em valores de $\bar{k}_z$ bem afastados do valor $k_z = \omega/c$.

Na Figura 2.8 mostramos alguns exemplos de espectros $S(k_z)$ de natureza não paraxial. Figura 2.8(a) Espectro quadrado fortemente não paraxial, Figura 2.8(b) espectro gaussiano fortemente não paraxial, Figura 2.8(c) espectro exponencial fortemente não paraxial, Figura 2.8(d) espectro quadrado não paraxial.

Obter soluções analíticas exatas para feixes não paraxiais é um desafio devido à complexidade da integral (2.21). No seguinte capitulo iremos expor o método capaz de solucionar (2.2) para qualquer espectro $S(k_z)$ e, portanto, capaz de fornecer soluções analíticas exatas descrevendo feixes não paraxiais puramente propagantes.

## 2.3 As equações de Maxwell: Feixes Eletromagnéticos

Nos últimos anos, o estudo de feixes ópticos vem apresentando uma grande demanda tanto na teoria como na prática. Esta demanda, impulsionada pelo avanço óptico tecnológico, criou a necessidade de encontrar novos tipos de feixes ópticos que possam satisfazer os requisitos atuais.

Feixes ópticos fortemente concentrados ou focalizados com tamanho de *spot* da ordem do comprimento de onda têm apresentando uma grande importância nas últimas décadas, principal-

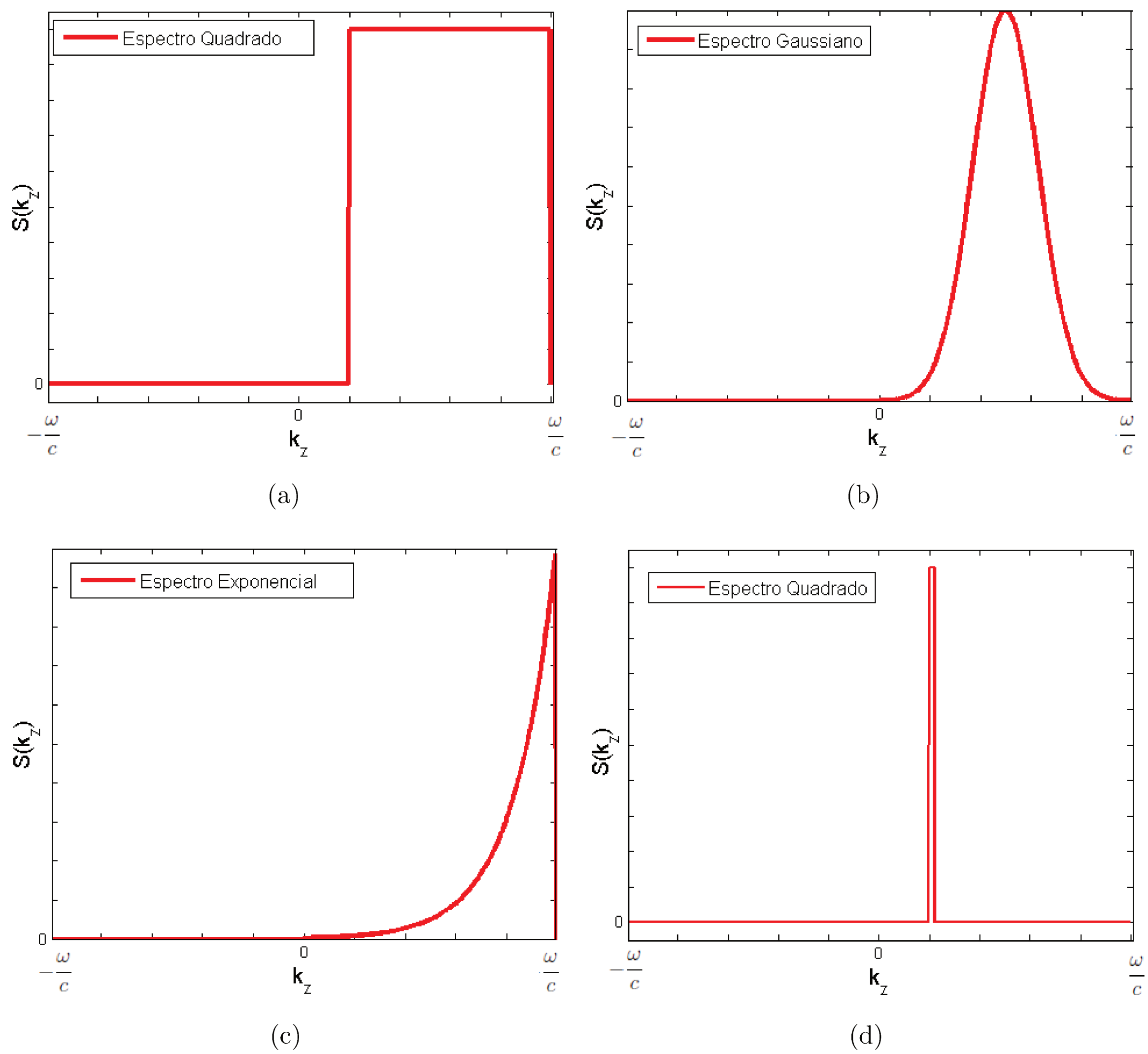



Figura 2.8: Alguns exemplos de espectros $S(k_z)$ de natureza não paraxial. (a) Espectro quadrado fortemente não paraxial. (b) Espectro gaussiano fortemente não paraxial. ($c$) Espectro exponencial fortemente não paraxial. Espectro quadrado não paraxial.

mente em aplicações ópticas. Por exemplo, na realização experimental de captura e manipulação óptica [1, 2], em tomografia de difração óptica, na qual um feixe altamente focalizado permite poder reduzir o domínio de investigação [3], em óptica de nanolaser [21], entre outras.

Porém, no caso de feixes ópticos fortemente focalizados com tamanhos de *spot* da ordem do comprimento de onda, o estudo vetorial não pode ser mais descrito através da aproximação escalar nem no regime paraxial. É preciso, portanto, levar em conta a natureza vetorial do campo eletromagnético. Tudo isto, cria a necessidade de se encontrar respostas teóricas que descrevam com precisão a propagação de feixes eletromagnéticos não paraxiais [7, 5, 13, 16, 15].

Ainda que os resultados obtidos para feixes escalares sejam expressões analíticas exatas da equação de onda, é claro que essas soluções não podem ser usadas como soluções das equações de Maxwell. A equação de onda pode ser derivada a partir das equações de Maxwell para o espaço homogêneo, assim, qualquer solução das equações de Maxwell para o espaço homogêneo satisfaz a equação de onda. Porém, as equações de Maxwell não podem ser derivadas a partir da forma vetorial ou escalar da equação de onda, daí qualquer solução particular da equação de onda não necessariamente satisfaz as equações de Maxwell. Portanto, a análise de feixes ópticos é baseada na obtenção de soluções analíticas exatas das equações de Maxwell.

Na teoria escalar, nós consideramos o feixe eletromagnético com componente longitudinal de campo (ao longo do eixo de propagação) igual a zero, isto é, muito menor quando comparada com a componente transversal de campo e, portanto, o vetor de campo elétrico foi considerado perpendicular ao eixo de propagação (ver Figura 2.9(a)). Essa aproximação nos ajudou no desenvolvimento do estudo de feixes escalares. Entretanto, é importante notar que na obtenção de feixes eletromagnéticos não paraxiais a natureza eletromagnética dos campos ópticos apresenta uma grande importância e, dessa forma, deve ser considerada, pois a teoria escalar é razoavelmente precisa somente no domínio da aproximação paraxial. Nota-se que, em geral, as componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético podem ter amplitudes significativas, como é o caso da teoria de ondas eletromagnéticas focalizadas.

Quando feixes ópticos não paraxiais são descritos pela teoria de onda escalar, é geralmente assumido que o feixe pode ser transversalmente polarizado, com o campo elétrico variando como uma função de Bessel na direção transversal. Contudo, uma variação transversal do campo elétrico é consistente com uma polarização transversal linear de um feixe eletromagnético, uma vez que tal campo não satisfaz a lei de Gauss $\nabla \cdot E = 0$, para um meio sem cargas nem densidade de corrente. Assim, um feixe com uma distribuição de campo segundo uma função de Bessel no sentido transversal não pode ser polarizado linearmente ao longo dessa direção. Para deixar isto mais claro, analisamos o feixe de Bessel eletromagnético de ordem zero, dado por (2.16).

No estudo escalar os feixes ópticos são considerado linearmente polarizados (digamos na direção "$y$"), sendo o campo elétrico transversal ao eixo de propagação, "$z$". A rigor, esse campo não pode ser totalmente transverso e uma componente axial deve existir.

Consideremos um feixe polarizado com:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_y + \vec{E}_z \\ &= E_y(\vec{r},t)\hat{y} + E_z(\vec{r},t)\hat{z} \end{aligned} \tag{2.22}$$

com $E_y$ dada por (2.16):

$$E_y(\vec{r},t) = J_0\left(k_\rho \rho\right) e^{\mathrm{i}k_z z} e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{2.23}$$

Para que (2.23) seja uma solução das equações de Maxwell, ela tem que satisfazer a lei de Gauss, portanto:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0 \\ E_z(\vec{r},t) &= -\int \frac{\partial}{\partial y} E_y dz \end{aligned} \tag{2.24}$$

Substituindo (2.23) em (2.24) temos:

$$
\begin{aligned}
E_z(\vec{r},t) &= -\int \frac{\partial}{\partial y}\left(J_0\left(k_\rho \rho\right) e^{\mathrm{i}k_z z} e^{-\mathrm{i}\omega t}\right) dz \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\left(J_0(k_\rho \rho) e^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\int e^{\mathrm{i}k_z z} dz \\
&= \frac{\mathrm{i}}{k_z} e^{-\mathrm{i}\omega t} e^{\mathrm{i}k_z z}\frac{\partial}{\partial y}\left(J_0(k_\rho \rho)\right) \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

mas:

$$
\frac{\partial}{\partial y} = \sin\phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (2.26)
$$

Usando (2.26) e $J_0^{'}(x) = -J_1(x)$ em (2.25) temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(J_0(k_\rho \rho)\right) &= \left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\phi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\left(J_0(k_\rho \rho)\right) \\
&= \sin\phi \frac{\partial}{\partial \rho}\left(J_0(k_\rho \rho)\right) \\
&= -k_\rho \sin\phi J_1(k_\rho \rho) \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Finalmente substituindo (2.27) em (2.25) obtemos a componente axial dada por:

$$
E_z(\vec{r},t) = -\mathrm{i}(k_\rho/k_z)\sin\phi J_1(k_\rho \rho) e^{\mathrm{i}k_z z} e^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad (2.28)
$$

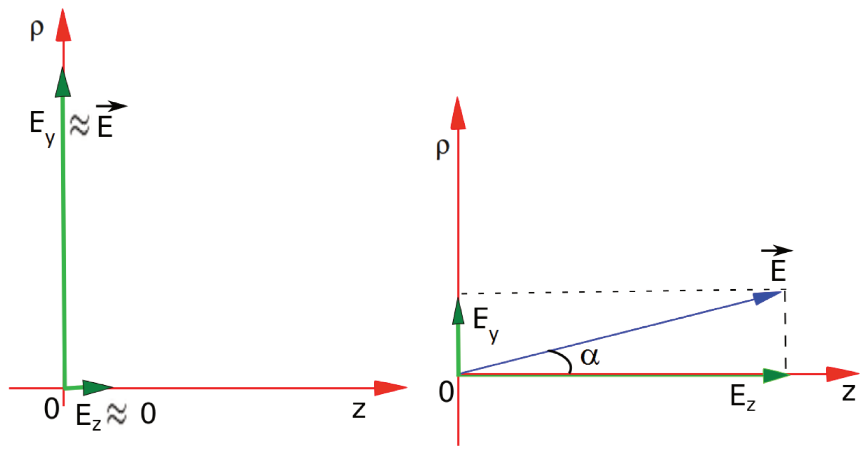
Repare que nesse caso a componente axial possui uma amplitude proporcional à razão $(k_\rho/k_z)$. No caso de feixes paraxiais, temos $k_z \approx \omega/c \rightarrow k_z \gg k_\rho \rightarrow k_\rho/k_z \ll 1$.

Con isso, a intensidade da componente axial, que é proporcional a $(k_\rho/k_z)^2$, fica sendo muito menor do que a intensidade da componente transversal para a situação paraxial. Podemos dizer que nesses casos a componente transversal possui intensidade média cerca de $(k_\rho/k_z)^2$ vezes maior do que a intensidade da componente axial.

Muitas vezes desconsideramos a componente axial, pois $k_\rho/k_z \ll 1$ ocorre com frequência. No entanto, a componente axial existe e, pelo exposto encima, pode ser estimada, sempre que possa ser encontrada.

Portanto, um feixe eletromagnético pode ser considerado paraxial quando além de cumprir as propriedades de paraxialidade do caso escalar, possua uma componente transversal maior que a componente longitudinal do campo (ver Figura 2.9(b)). Isto faz, que o caso do feixe eletromagnético não paraxial seja mais complexo, porque além de possuir as dificuldades do caso escalar, apresenta também o problema de polarização do feixe. Por outro lado, no caso dos feixes eletromagnéticos não paraxial, a componente transversal do campo é da ordem de grandeza (talvez até menores) da componente longitudinal. Assim, no caso vetorial, uma dificuldade adicional está relacionada com a polarização do campo.

Nosso estudo da propagação de feixes eletromagnéticos não paraxiais se inicia com as equações de Maxwell para o campo elétrico ou magnético. O objetivo é generalizar um método capaz de fornecer feixes eletromagnéticos com componentes elétricas como soluções exatas das




(a) (b)

Figura 2.9: Componentes de campo elétrico. (a) Caso paraxial: Polarização linear $\vec{E} = E_y\hat{y}$. (b) Polarização do campo $\vec{E} = E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$.

equações de Maxwell, onde as componentes são feixes escalares não paraxiais originalmente analisados na teoria de aproximação escalar como soluções exatas da equação de onda. Neste sentido, apresentamos aqui uma teoria vetorial baseada em dois métodos matemáticos para obter soluções das equações de Maxwell descrevendo a evolução de feixes eletromagnéticos não paraxiais. Em particular, nós obtemos expressões para as componentes do campo elétrico e magnético, os quais satisfazem as equações de Maxwell.

# Referências do capítulo 2


[1] A. Ashkin. Trapping of atoms by resonance radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 40:729–732, Mar 1978.

[2] A. Ashkin. Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers. *Opt. Photon. News*, 10(5):41, May 1999.

[3] Kamal Belkebir, Patrick C. Chaumet, and Anne Sentenac. Influence of multiple scattering on three-dimensional imaging with optical diffraction tomography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23(3):586–595, Mar 2006.

[4] D. P. Biss and T. G. Brown. Polarization-vortex-driven second-harmonic generation. *Opt. Lett.*, 28(11):923–925, Jun 2003.

[5] Riccardo Borghi, Massimo Santarsiero, and Miguel A. Alonso. Highly focused spirally polarized beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(7):1420–1431, Jul 2005.

[6] Yangjian Cai, Qiang Lin, Halil T. Eyyuboglu, and Yahya Baykal. Average irradiance and polarization propertiesof a radially or azimuthally polarized beam in aturbulent atmosphere. *Opt. Express*, 16(11):7665–7673, May 2008.

[7] Patrick C. Chaumet. Fully vectorial highly nonparaxial beam close to the waist. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23(12):3197–3202, Dec 2006.

[8] Lorenzo Cicchitelli, H. Hora, and R. Postle. Longitudinal field components for laser beams in vacuum. *Phys. Rev. A*, 41:3727–3732, Apr 1990.

[9] Cesar Augusto Dartora. Estudo de ondas localizadas do tipo mathieu. *Universidade Estadual de Campinas*, 2002 - Tese de doutorado.

[10] R. Dorn, S. Quabis, and G. Leuchs. Sharper focus for a radially polarized light beam. *Phys. Rev. Lett.*, 91:233901, Dec 2003.

[11] J. Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(4):651–654, Apr 1987.

[12] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Alan Jeffrey, and Daniel Zwillinger. *Table of Integrals, Series, and Products, Sixth Edition*. Academic Press, 6th edition, 8 2000.

[13] Bing Gu and Yiping Cui. Nonparaxial and paraxial focusing of azimuthal-variant vector beams. *Opt. Express*, 20(16):17684–17694, Jul 2012.

[14] Hugo E. Hernández-Figueroa, Michel Zamboni-Rached, and Erasmo Recami, editors. *Localized Waves (Wiley Series in Microwave and Optical Engineering)*. Wiley-Interscience, 1 edition, 2 2008.

[15] Rosario Martínez-Herrero, Pedro M. Mejías, Salvador Bosch, and Arturo Carnicer. Vectorial structure of nonparaxial electromagnetic beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(7):1678–1680, Jul 2001.

[16] Rosario Martínez-Herrero and Andrés Ferrer Moreu. On the polarization of non-paraxial transverse fields. *Optics Communications*, 267(1):20 – 23, 2006.

[17] M. Meier, V. Romano, and T. Feurer. Material processing with pulsed radially and azimuthally polarized laser radiation. *Applied Physics A*, 86:329–334, 2007.

[18] Scott M. Sepke and Donald P. Umstadter. Analytical solutions for the electromagnetic fields of tightly focused laser beams of arbitrary pulse length. *Opt. Lett.*, 31(17):2589–2591, Sep 2006.

[19] Scott M. Sepke and Donald P. Umstadter. Exact analytical solution for the vector electromagnetic field of gaussian, flattened gaussian, and annular gaussian laser modes. *Opt. Lett.*, 31(10):1447–1449, May 2006.

[20] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic Theory (Pure and Applied Physics)*. Mcgraw-Hill College, New York, 1st edition, 1941 p. 356.

[21] Jae Yong Suh, Chul Hoon Kim, Wei Zhou, Mark D. Huntington, Dick T. Co, Michael R. Wasielewski, and Teri W. Odom. Plasmonic bowtie nanolaser arrays. *Nano Letters*, 12(11):5769–5774, 2012.

[22] S. J. van Enk and H. J. Kimble. Strongly focused light beams interacting with single atoms in free space. *Phys. Rev. A*, 63:023809, Jan 2001.

[23] Tarcio A. Vieira, Marcos R. R. Gesualdi, and Michel Zamboni-Rached. Frozen waves: experimental generation. *Opt. Lett.*, 37(11):2034–2036, Jun 2012.

[24] Haifeng Wang, Luping Shi, Boris Lukyanchuk, Colin Sheppard, and Chong Tow Chong. Creation of a needle of longitudinally polarized light in vacuum using binary optics. *Nat Photon*, 2:233901, Ago 2008.

[25] M. Zamboni-Rached, Erasmo, E. Recami, and Hugo E. Hernández-Figueroa. Theory of "frozen waves": modeling the shape of stationary wave fields. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22:2465–2475, 2005.

[26] Michel Zamboni-Rached, Erasmo Recami, and Massimo Balma. Simple and effective method for the analytic description of important optical beams when truncated by finite apertures. *Appl. Opt.*, 51(16):3370–3379, Jun 2012.

Capítulo 3

# Metodologia matemática para a obtenção de feixes escalares não paraxiais

Neste capítulo desenvolvemos um método teórico [2] capaz de resolver mediante uma expressão analítica as integrais que descrevem superposições de feixes de Bessel de ordem zero (não evanescentes) com qualquer tipo de função espectral na componente longitudinal do vetor de onda.

O método será aplicado também para obter feixes escalares não paraxiais sem simetria azimutal caracterizado por envolver funções de Bessel de ordem maiores nas integrais que descrevem a superposição de feixes e Bessel de ordem maiores.

A demonstração da metodologia matemática proposta, capaz de fornecer soluções analíticas exatas da equação de onda para qualquer espectro $S(k_z)$, é dividida em três passos.

## 3.1 Passo 1

Primeiro consideramos um espectro constante:

$$S(k_z) = \frac{1}{2}\frac{c}{\omega} \tag{3.1}$$

O fato de escolhemos o espectro constante igual ao valor $c/2\omega$ deve-se apenas a motivos de dimensionalidade e motivos estéticos na solução final. Substituindo (3.1) em (2.21) obtemos:

$$\psi(\rho, z, t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t] \int_{-\omega/c}^{\omega/c} J_0\left(\rho\sqrt{\omega^2/c^2 - k_z^2}\right) \exp[\mathrm{i}k_z z]\frac{1}{2}\frac{c}{\omega}dk_z \tag{3.2}$$

Fazemos a mudança de variável $k_z = (\omega/c)s$, então $dk_z = (\omega/c)ds$. Substituindo em (3.2)

$$\psi(\rho, z, t) = \frac{1}{2}\exp[-\mathrm{i}\omega t] \int_{-1}^{1} J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\sqrt{1 - s^2}\right) \exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega}{c}zs\right] ds \tag{3.3}$$

A integral pode ser escrita como:

$$\psi(\rho,z,t)=\frac{1}{2}\exp[-\mathrm{i}\omega t]\left[\int_{-1}^{1}J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\sqrt{1-s^2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}zs\right)ds+\mathrm{i}\int_{-1}^{1}J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\sqrt{1-s^2}\right)\sin(\frac{\omega}{c}zs)ds\right] \tag{3.4}$$

A segunda integral se anula pois o integrando é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico. Assim:

$$\psi(\rho,z,t)=\exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{0}^{1}J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\sqrt{1-s^2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}zs\right)ds \tag{3.5}$$

Usando as tabelas de integrais de [1], obtemos:

$$\psi(\rho,z,t)=\exp[-\mathrm{i}\omega t]\frac{\sin\left(\sqrt{(\frac{\omega}{c}\rho)^2+(\frac{\omega}{c}z)^2}\right)}{\sqrt{(\frac{\omega}{c}\rho)^2+(\frac{\omega}{c}z)^2}}=\exp[-\mathrm{i}\omega t]\mathrm{sinc}\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2+\frac{\omega^2}{c^2}z^2}\right] \tag{3.6}$$

onde a função sinc[.] é definida como:

$$\mathrm{sinc}[x]=\frac{\sin(x)}{x}$$

A solução (3.6) é altamente não paraxial, obtida a partir de um espectro não paraxial, pela superposição de feixes de Bessel propagantes e contra-propagantes de mesma amplitude. A solução (3.6) do espectro analisado não possui interesse prático devido à forte presença de componentes contra-propagantes (feixes de Bessel propagando-se na direção negativa).

## 3.2 Passo 2

Agora consideramos um segundo tipo de espectro $S(k_z)$:

$$S(k_z)=\frac{1}{2}\frac{c}{\omega}\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{K}k_z\right] \tag{3.7}$$

onde

$$K=k_{z\max}-k_{z\min}=\frac{\omega}{c}-(-\frac{\omega}{c})=2\frac{\omega}{c}. \tag{3.8}$$

Substituindo (3.7) em (2.21)

$$\psi(\rho,z,t)=\frac{1}{2}\frac{c}{\omega}\exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-\omega/c}^{\omega/c}J_0\left(\rho\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2}\right)\exp\left[\mathrm{i}(z+\frac{2\pi n}{K})k_z\right]dk_z \tag{3.9}$$

e fazendo novamente a mudança de variável $k_z=(\omega/c)s$

$$\psi(\rho,z,t)=\frac{1}{2}\exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-1}^{1}J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\sqrt{1-s^2}\right)\exp\left[\mathrm{i}(z\frac{\omega}{c}+\frac{2\pi n}{K}\frac{\omega}{c})s\right]ds \tag{3.10}$$

onde de (3.8), temos:

$$\frac{2\pi n}{K}\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi n}{2\omega/c}\frac{\omega}{c} = \pi n \tag{3.11}$$

e portanto (3.10):

$$\psi(\rho, z, t) = \frac{1}{2}\exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-1}^{1} J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\sqrt{1-s^2}\right)\exp\left[\mathrm{i}(z\frac{\omega}{c}+\pi n)s\right] ds \tag{3.12}$$

Usando o resultado (3.6) obtemos

$$\psi(\rho, z, t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\mathrm{sinc}\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2 + (z\frac{\omega}{c}+\pi n)^2}\right] \tag{3.13}$$

## 3.3 Passo 3

No passo final, reparamos que as soluções obtidas em (3.13) provem do cálculo de uma integral em $-\omega/c \leq k_z \leq \omega/c$. Isso significa que o espectro $S(k_z)$ encontra-se definido nesse intervalo finito, e pode portanto ser escrito como uma série de Fourier:

$$S(k_z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{K}nk_z\right] \tag{3.14}$$

onde $K = 2\omega/c$, para $-\omega/c \leq k_z \leq \omega/c$ e os coeficientes de Fourier são dados por:

$$R_n = \frac{1}{K}\int_{-\omega/c}^{\omega/c} S(k_z)\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{K}nk_z\right] dk_z \tag{3.15}$$

Dessa forma, substituindo (3.14) em (2.21) e usando (3.13) obtemos a solução exata de (2.2) para qualquer espectro $S(k_z)$, dada por:

$$\psi(\rho, z, t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n\mathrm{sinc}\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2 + (z\frac{\omega}{c}+\pi n)^2}\right] \tag{3.16}$$

com $R_n$ dado por (3.15).

Portanto, nesse método, o problema se reduz ao cálculo dos coeficientes de Fourier $R_n$ de $S(k_z)$ usando (3.15).

O feixe dado em (3.16) com (3.15) é uma solução exata da equação de onda, válida para qualquer espectro $S(k_z)$, com $-\omega/c \leq k_z \leq \omega/c$. Essa formulação fornece feixes não paraxiais de forma exata mediante um adequado espectro. No apêndice A, mostramos outra forma de comprovar que a expressão (3.16) é solução exata da equação de onda (2.2).

Também é interessante notar que a obtenção dos coeficientes de Fourier $R_n$ pode ser feita mediante qualquer aproximação cabível, e ainda assim (3.16) será uma solução exata da equação de onda. Obviamente, não consideramos infinitos termos em (3.15). Consideraremos um número finito de termos (com o somatório indo de $-N$ até $N$), tanto em (3.14) quanto em (3.15), sendo que esse número deve permitir uma boa representação de $S(k_z)$ através da série de Fourier.

## 3.4 Exemplos de feixes escalares simétricos puramente propagantes

Com o objetivo de validar a metodologia proposta, foram estudados três tipos de espectros: exponencial, quadrado e gaussiano. Os resultados obtidos foram feitos no software Matlab.

Consideramos feixes de comprimento de onda $\lambda = 0.632 \times 10^{-6}$m (isto é, com $\omega = 2.98 \times 10^{15}$Hz) propagando-se no vácuo ($c = 3 \times 10^{8}$m/s).

Para o espectro exponencial foram analisados dois tipos de espectros: o primeiro, um espectro do tipo paraxial, é dizer um espectro concentrado ($\Delta k_z \ll \omega/c$) ao redor de $\bar{k}_z = k_z = \omega/c$ ($\Delta k_z/\bar{k}_z \ll 1$) e o segundo, um espectro do tipo não paraxial com uma largura de banda espacial maior que a primeiro espectro ($\Delta k_z/\bar{k}_z \sim 1$).

Para cada espectro quadrado e gaussiano foram analisados os dois tipos possíveis de espectro não paraxial: o primeiro, quando o espectros $S(k_z)$ possui grande largura de banda espacial ($\Delta k_z$) e o segundo quando o espectro concentrado é bem afastado do valor $\omega/c$.

### 3.4.1 Espectro exponencial

Definimos um espectro exponencial dado por:

$$S(k_z) = \begin{cases} (1/K)\exp[-a(\omega/c - k_z)]; & , \quad 0 \leq k_z \leq \omega/c \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.17}$$

onde $K = 2\omega/c$. A largura de banda espacial $\Delta k_z$ do espectro é diretamente proporcional ao valor de $1/a$, o qual determina se o espectro exponencial é do tipo paraxial ou não paraxial. Notamos que nesse caso a solução sai diretamente, sem a necessidade de expandir $S(k_z)$ em séries de Fourier.

Substituindo (3.17) na solução (2.21) obtemos:

$$\psi(\rho, z, t) = \frac{c}{2\omega}\exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-\omega/c}^{\omega/c} J_0\left(\rho\sqrt{\omega^2/c^2 - k_z^2}\right)\exp\left[\mathrm{i}k_z z\right]\exp\left[-a(\omega/c - k_z)\right]dk_z \tag{3.18}$$

Seja $k_z = (\omega/c)s$, então $dk_z = (\omega/c)ds$. Substituindo em (3.18):

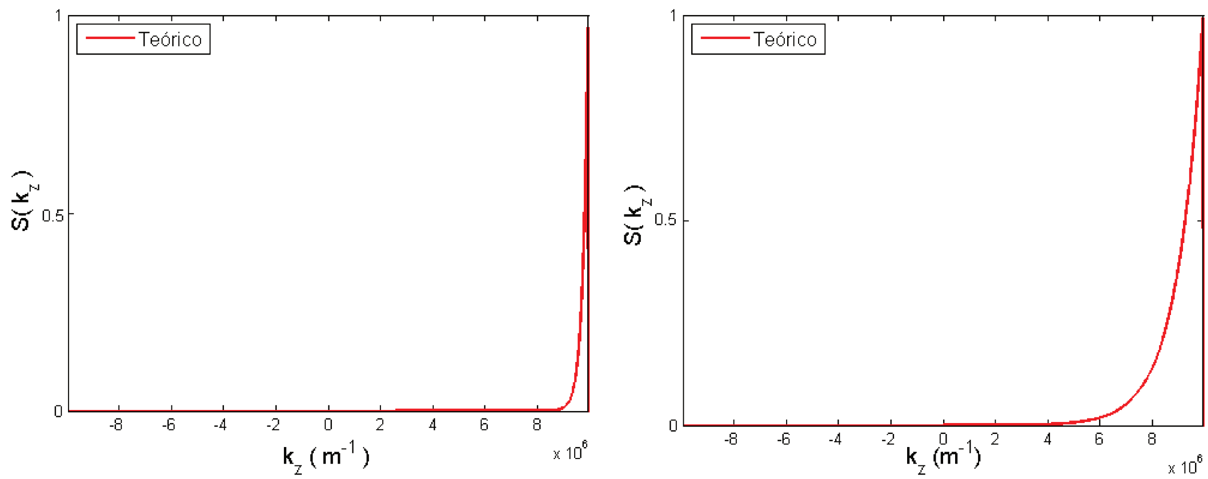
$$\begin{aligned} \psi(\rho, z, t) &= \frac{c}{2\omega}\exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-1}^{1} J_0\left(\rho\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2}s^2}\right)\exp[\mathrm{i}\frac{\omega}{c}sz]\exp[-a(\omega/c - \omega s/c)]\frac{\omega}{c}ds \\ &= \frac{c}{2\omega}\frac{\omega}{c}\exp[-\mathrm{i}\omega t - a\omega/c]\int_{-1}^{1} J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\sqrt{1-s^2}\right)\exp\left[\mathrm{i}(z - \mathrm{i}a)\frac{\omega}{c}s\right]ds; \end{aligned} \tag{3.19}$$

expandindo o termino $\exp[\mathrm{i}(z - \mathrm{i}a)(\omega/c)s]$ na forma trigonométrica, temos:

$$\psi(\rho, z, t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t - a\omega/c]\mathrm{sinc}\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(z - \mathrm{i}a)^2}\right] \tag{3.20}$$

Reparar que os feixes dados em (3.20) são soluções analíticas exatas da equação de onda, onde não surgiu a necessidade de obter as soluções mediante os coeficientes de Fourier dados em (3.16) com (3.15).

Na Figura (3.1) mostramos os dois tipos de espectros exponenciais teóricos analisados. Na Figura 3.1(a) mostramos um espectro do tipo paraxial, concentrado ao redor de $\bar{k}_z = \omega/c = 9.97 \times 10^6 \text{m}^{-1}$, com $\Delta k_z = 1/a = K/100 = 0.199 \times 10^6 \text{m}^{-1} \ll \omega/c$ e onde $\Delta k_z/\bar{k}_z = 0.02 \ll 1$. Na Figura 3.1(b) mostramos o segundo espectro, o qual é do tipo não paraxial, com uma largura de banda espacial maior que a primeira $\Delta k_z = 1/a = K/20 = 0.997 \times 10^6 \text{m}^{-1}$ e com $\Delta k_z/\bar{k}_z = 0.1$.




(a) (b)

Figura 3.1: Gráficos do espectro exponencial (3.17) para o caso paraxial (a) e não paraxial (b). A largura de banda espacial em (a) é $\Delta k_z = 0.199 \times 10^6 \text{m}^{-1}$ e em (b) é $\Delta K_z = 0.997 \times 10^6 \text{m}^{-1}$.

As soluções analíticas exatas da equação de onda dadas pela expressão (3.20), para cada tipo de espectro exponencial, são mostradas nas Figuras 3.2. Nas figuras 3.2(a)-(c) são apresentados os padrões de intensidade normalizados em $3D$ correspondentes as soluções dadas por (3.20).

A solução (3.20) dada para o espectro paraxial obtido da Figura 3.1(a) corresponde a um feixe paraxial com raio do *spot* igual a aproximadamente $1.0 \times 10^{-6}$m, mostrado na Figura 3.2(a). A solução (3.20) dada para o espectro não paraxial obtido da Figura 3.1(b) corresponde a um feixe não paraxial com raio de *spot* igual a aproximadamente $0.46 \times 10^{-6}$m, mostrado na Figura 3.2(a), mostrado na 3.2(b).

Nas Figuras 3.2(c)-(d) são apresentadas as projeções ortogonais das intensidades dos feixes 3.2(a)-(b) no plano $(\rho, z)$. Podemos observar que os feixes produzidos são propagantes e possuem simetria azimutal.

Notar também que o raio dos *spot* do feixe não paraxial produzido é da ordem do comprimento de onda ($\lambda = 0.632 \times 10^6$m) (Figuras 3.2(b)-(d)), sendo esta uma das principais características do feixe não paraxial.

### 3.4.2 Espectro quadrado

Como segundo exemplo escolhemos um espectro quadrado dado por:

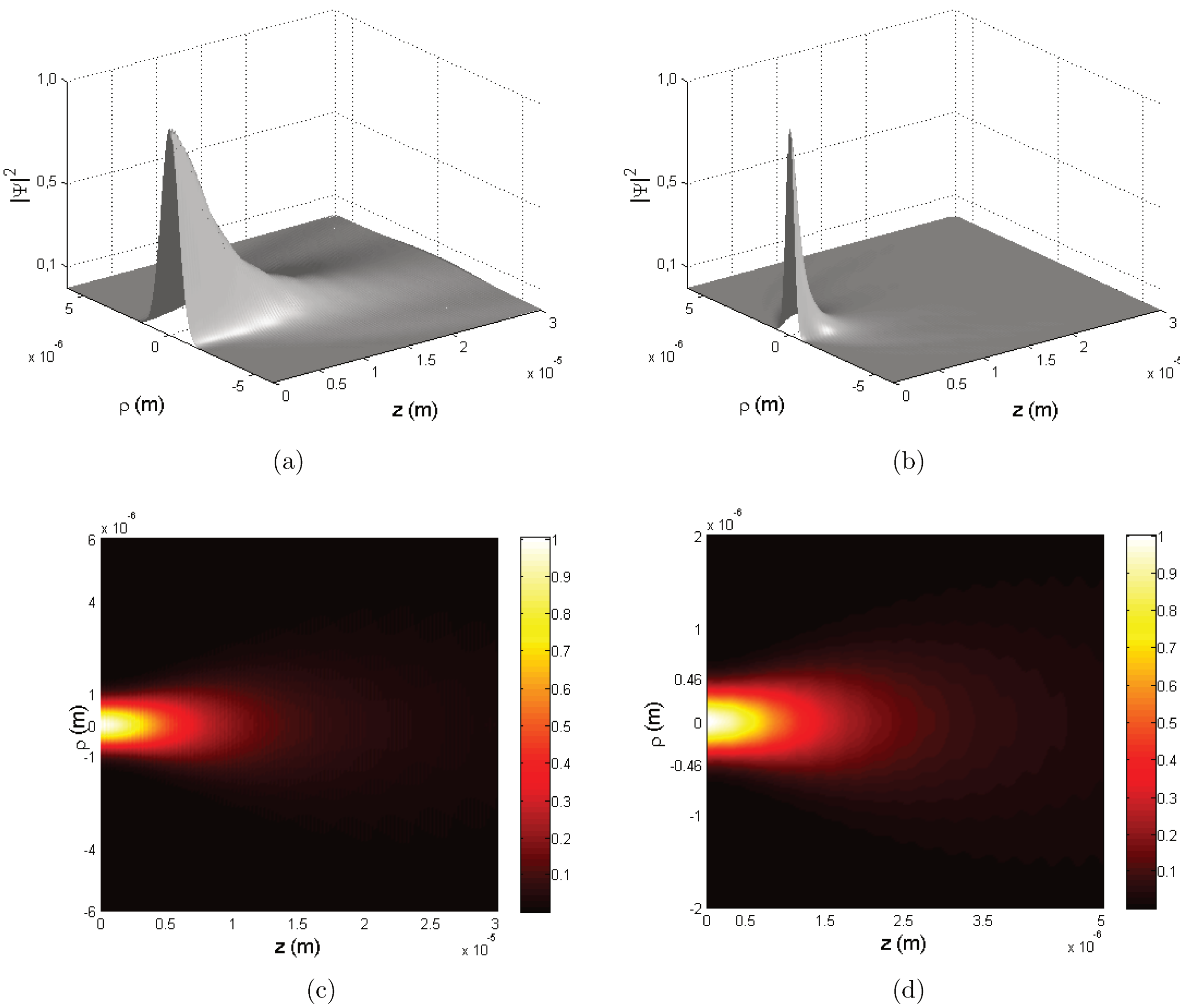



Figura 3.2: (a)-(b) Padrões de intensidade $3D$, soluções exatas da equação de onda dos feixes paraxial e não paraxial respectivamente dados pela expressão(3.20). (c)-(d) Projeção ortogonal da intensidade do feixe exponencial no plano $(\rho, z)$.

$$S(k_z) = \begin{cases} K = 2\omega/c & , \quad k_{zmin} \leq k_z \leq k_{zmax} \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.21}$$

onde $0 \leq k_{z\min} \leq k_{z\max} \leq \omega/c$. A posição do espectro $\bar{k}_z$ e a largura de banda espacial $\Delta k_z = k_{z\max} - k_{z\min}$, determinarão se o espectro quadrado é do tipo paraxial ou não paraxial.

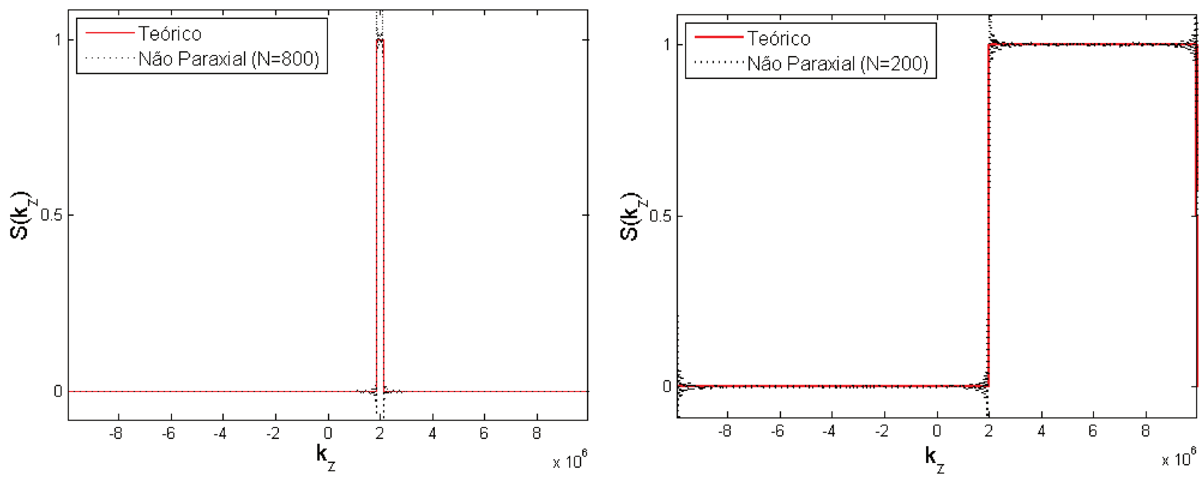
Substituindo (3.21) em (3.14), foram obtidos os coeficientes de Fourier $R_n$ do espectro quadrado $S(k_z)$. Para achar as soluções analíticas exatas correspondentes ao espectro quadrado foram substituídos os valores de $R_n$ em (3.16).

Foram analisados dois tipos de espectros quadrados não paraxiais:

**O primeiro** foi um espectro concentrado em $\bar{k}_z = 1.99 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$ com largura de banda espacial de $\Delta k_z = 0.25 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$, com $k_{z\min} = 1.87 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$ e $k_{z\max} = 2.41 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$ e com $\Delta k_z/\bar{k}_z = 0.13$. O gráfico do espectro (3.21), no primeiro caso, é mostrado na Figura 3.3(a) em cor vermelha, sendo a sua representação através da série de Fourier (3.14) e mostrada em cor preta. O número total de coeficientes de Fourier usado foi de 1601, ou seja para $N = 800$.

**O segundo** espectro analisado foi um espectro fortemente não paraxial com largura de banda espacial maior que a primeira $\Delta k_z = 7.98 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$ ($\Delta k_z \sim \omega/c$) concentrado em $\bar{k}_z = 5.99 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$, com $k_{zmin} = 1.99 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$ e $k_{z\max} = 9.98 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$, e com $\Delta k_z / \bar{k}_z = 1.33$. O gráfico do espectro (3.21) desse segundo caso é mostrado na Figura 3.3($b$) em cor vermelha, sendo a sua representação através da série de Fourier (3.14) mostrada em cor preta. O número total de coeficientes de Fourier usado para este último espectro foi de 401, ou seja $N = 200$.

Notar que o número de coeficientes de Fourier ($2N + 1$) necessários para reproduzir o espectro (3.21) é menor para o caso do espectro fortemente não paraxial (ver Figura 3.3($b$ ), por conseguinte, neste caso, o método proposto convergirá com maior facilidade. A medida que o $N$ seja menor a facilidade do método de convergir mais rápido sera maior.




(a) (b)

Figura 3.3: Gráficos do espectro quadrado não paraxial. Os traços em vermelhos representam o espectro teórico dado pela eq. (3.21). Os traços em cor preta representam (3.21) através da série de Fourier dada por (3.15). O número de termos de coeficientes de Fourier, para os gráficos foi de 1601 e 401 respectivamente.

Nas Figuras 3.4(a)-(b) apresentamos os padrões de intensidade normalizados em $3D$. A Figura 3.4(c) corresponde ao espectro não paraxial obtido da Figura 3.3(a) e a Figura 3.4(b) corresponde ao espectro fortemente não paraxial, obtido da Figura 3.3(b). Os feixes obtidos provem de espectros não paraxiais e são soluções analíticas exatas da equação de onda (2.2.)

Nas Figuras 3.4(c)-(d) apresentamos as projeções ortogonais das intensidades dos feixes no plano $(\rho, z)$.

O espectro de largura de banda espacial de $\Delta k_z = 0.25 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$ produz um feixe não paraxial de raio de *spot* inicial igual a $0.25 \times 10^6$m aproximadamente e uma profundidade de campo de $20.0 \times 10^{-6}$m (Figura 3.4(c)).

O espectro fortemente não paraxial com uma largura de banda espacial maior de $\Delta k_z = 7.98 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$ produz um feixe fortemente não paraxial com raio do *spot* igual a $0.3 \times 10^6$m e uma profundidade do campo de $1.0 \times 10^{-6}$m (ver Figura 3.4(d) ). Portanto, o feixes com espectro

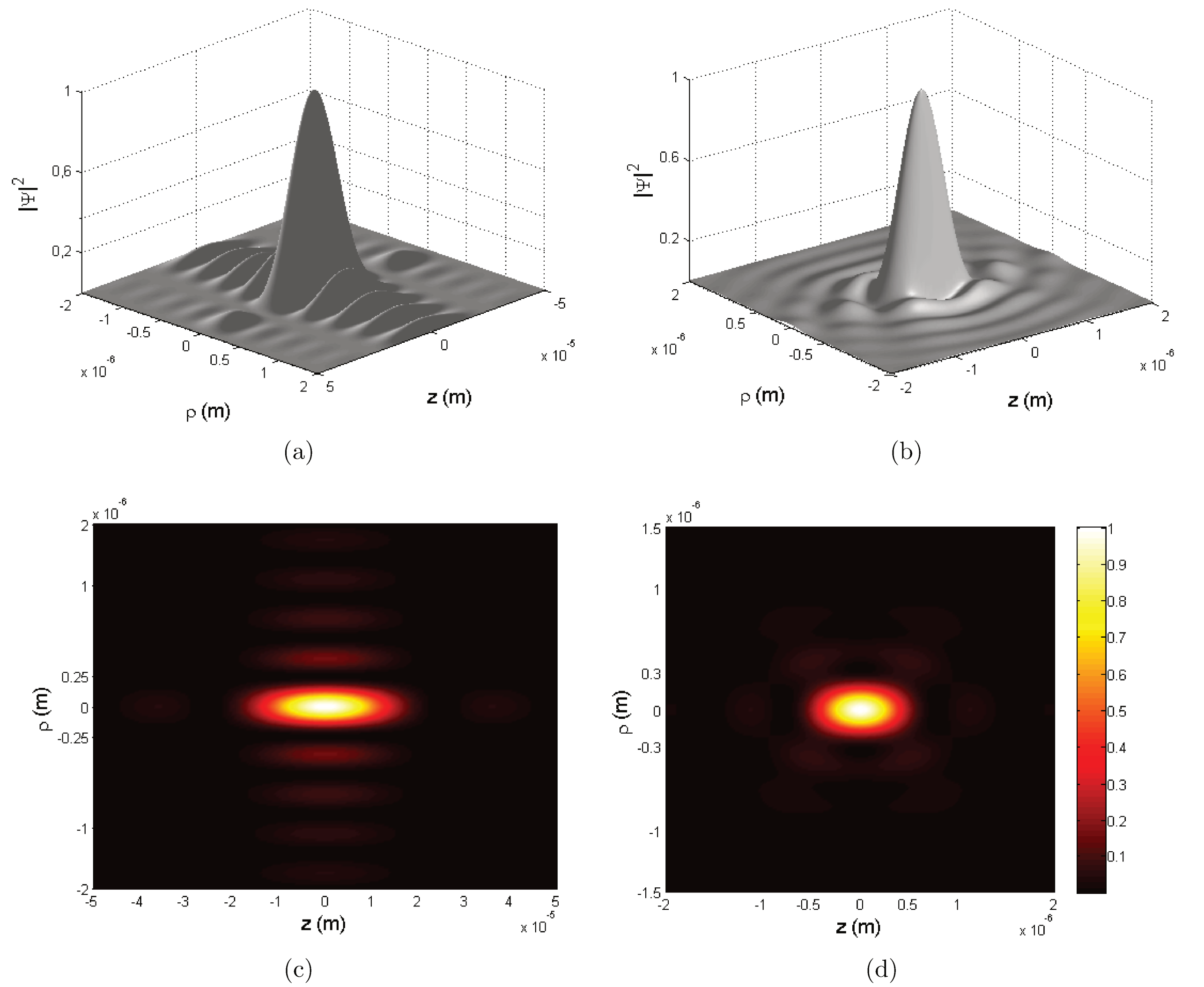



Figura 3.4: Padrões de intensidade $3D$, soluções exatas da equação de onda dos feixes paraxial e não paraxial respectivamente dados pela expressão(3.20). (e)-(f) Projeção ortogonal da intensidade do feixe exponencial no plano $(\rho, z)$.

mais concentrado (Figura 3.2(a) ), menor largura de banda espacial, possui uma profundidade maior em relação ao feixe menos concentrado (Figura 3.2(b) ). Repare também que os raios dos *spots* dos feixes produzidos são da ordem do comprimento de onda ($\lambda = 0.632 \times 10^6$m), sendo esta uma das características do feixe não paraxial.

### 3.4.3 Espectro gaussiano

Como último exemplo na obtenção de feixes escalares não paraxiais escolhemos um espectro gaussiano definido por:

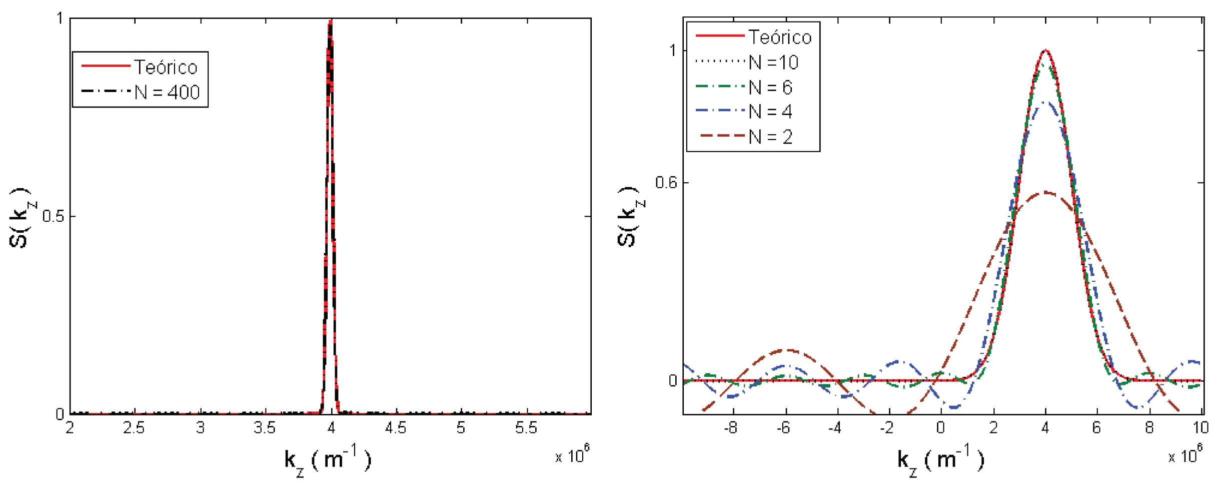
$$S(k_z) = \begin{cases} 2(\omega/c)\exp(-a(k_z - \bar{k}_z)^2) & , \quad 0 \le k_z \le \omega/c \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.22}$$

Onde $\bar{k}_z$ indica a posição do centro do espectro. A largura de banda espacial $\Delta k_z$ do espectro é diretamente proporcional ao valor do desvio padrão $1/\sqrt{(2a)}$, o qual determina se o espectro gaussiano é do tipo paraxial ou não paraxial, sendo $a$ uma constante.

Substituindo (3.22) em (3.15), foram obtidos os coeficientes de Fourier $R_n$ do espectro gaussiano $S(k_z)$. Para obter as soluções analíticas exatas correspondentes ao espectro gaussiano foram substituídos os valores de $R_n$ em (3.16).

Da mesma forma do exemplo anterior foram analisados dois tipos de espectros não paraxiais:

**O primeiro**, um espectro $S(k_z)$ concentrado ao redor de $\bar{k}_z = 0.4\omega/c = 3.97 \times 10^6 \text{m}^{-1}$, com o desvio padrão $1.99 \times 10^4 \text{m}^{-1}$ ($a = 5.0 \times 10^5/K^2$) e com $\Delta k_z/\bar{k}_z = 0.005$. O gráfico do espectro (3.22), no primeiro caso, é mostrado na Figura 3.5(a) em cor vermelha, sendo a sua representação através da série de Fourier (3.14) e mostrada em cor preta. O número total de coeficientes de Fourier usado foi de 801, ou seja $N = 400$.

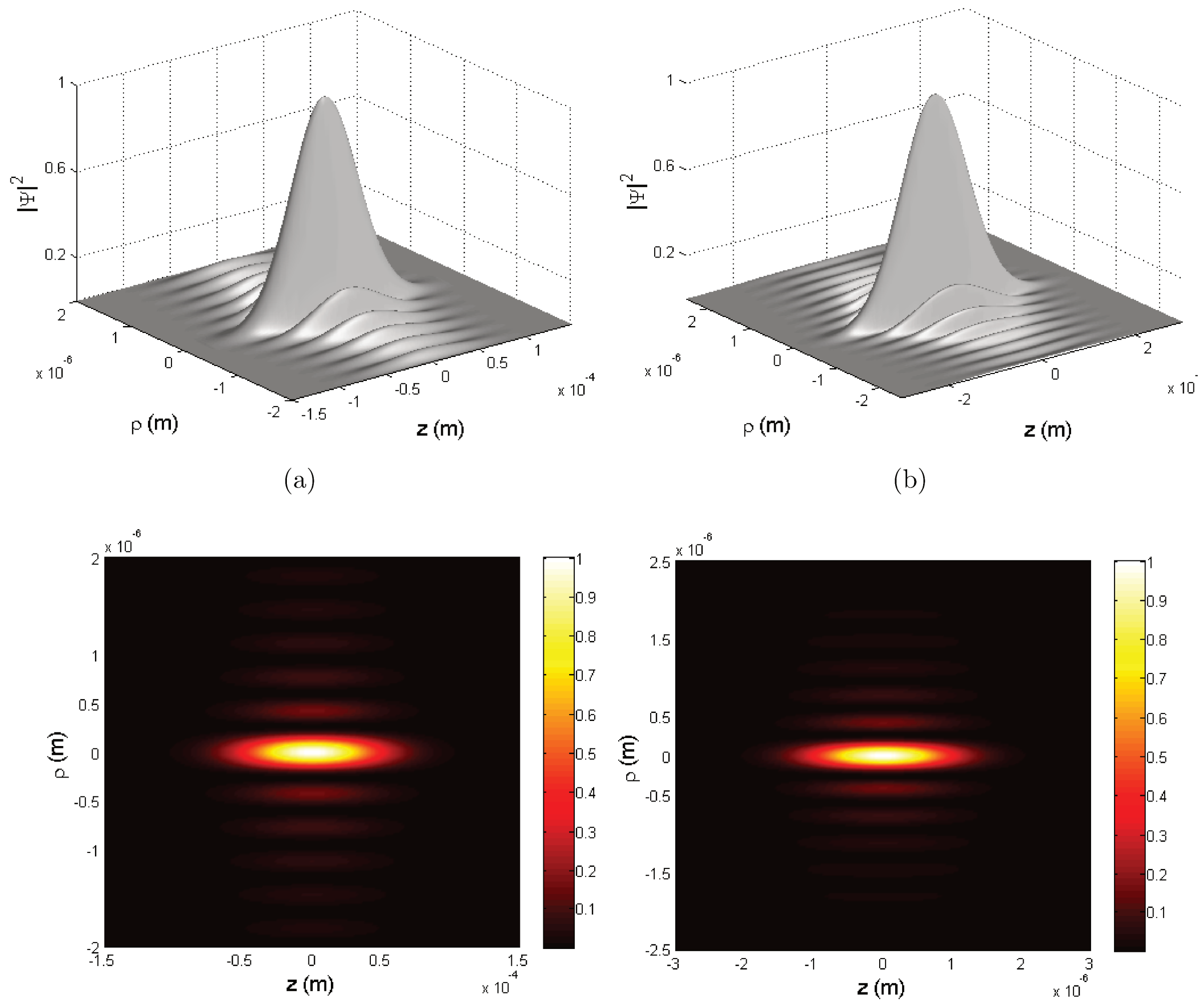



(a) (b)

Figura 3.5: Gráficos dos espectros gaussianos não paraxial. Os traços em vermelhos representam o espectro teórico dado pela eq. (3.21). Os traços em cor preta representam (3.21) através da série de Fourier dada por (3.15). O número de termos de coeficientes de Fourier, para os gráficos foi de 1601 e 401 respectivamente.

**O segundo** espectro foi para uma largura de banda espacial maior que a primeira $9.93 \times 10^5 \text{m}^{-1}$ ($a = 200/K^2$) e com $\Delta k_z/\bar{k}_z = 0.250$. O gráfico do espectro (3.22) desse segundo caso é mostrado na Figura 3.5(b) em cor vermelha, sendo a sua representação através da série de Fourier (3.14) mostrada em cor preta. Neste gráfico também mostramos a variação do espectro com o numero de coeficientes de Fourier ($2N + 1$), onde notamos que o número mínimo de coeficientes de Fourier adequado para representar (3.22) é 21, ou seja $N = 10$. Este gráfico representa um espectro fortemente não paraxial ($\Delta k_z \sim \omega/c$).

Na Figura 3.6(a)-(b)apresentamos os padrões de intensidade em $3D$. A Figura 3.6(a) corresponde ao espectro não paraxial concentrado obtido da Figura 3.5(a) e a Figura 3.6(b) corresponde a um espectro não paraxial não muito concentrado, obtido da Figura 3.5(b). Pode-se observar que quanto mais estreito e o espectro, maior será a profundidade de campo do feixe resultante.




(a) (b) (c) (d)

Figura 3.6: Padrões de intensidade $3D$, soluções exatas da equação de onda dos feixes paraxial e não paraxial respectivamente dados pela expressão(3.20). (e)-(f) Projeção ortogonal da intensidade do feixe exponencial no plano $(\rho, z)$.

Na Figura 3.6(c)-(d) apresentamos as projeções ortogonais das intensidades dos feixes no plano $(\rho, z)$. Os feixes obtidos provem de espectros não paraxiais e são soluções analíticas exatas da equação de onda.

O espectro maior concentrado $1.99 \times 10^4 \mathrm{m}^{-1}$ produz um feixe não paraxial com alcance de campo de $1.0 \times 10^{-4}$m (Figura 3.6(a)). Para um espectro menos concentrado $9.93 \times 10^5 \mathrm{m}^{-1}$, o alcance do feixe é de $2.0 \times 10^{-6}$m (Figura 3.6(b)). Portanto, o feixe com espectro mais concentrado (Figura 3.5(a)), menor largura de banda espacial, possui uma profundidade maior em relação ao feixe menos concentrado (Figura 3.5(b)).

Notar que se fizemos a largura de nossa gaussiana tender a zero, teremos como resultado um feixe de Bessel, que possui concentração do campo transversal e profundidade de campo infinita, portanto fluxo de potência infinito.

## 3.5 Feixes Escalares não paraxiais puramente propagantes sem simetria azimutal

Outro analise interessante é a obtenção de de feixes não paraxiais sem simetria azimutal (com dependência em $\phi$) como soluções analíticas exatas da equação de onda.

Feixes sem simetria azimutal podem ser construídos como superposições de feixes de Bessel de $\nu-$ordem $J_\nu(k_\rho\rho)\exp[\mathrm{i}\phi]\exp[\mathrm{i}k_z z]\exp[-\mathrm{i}\omega t]$, onde $\nu$ e um inteiro positivo através da integral em $k_z$.

$$\bar{\psi}_\nu(\rho,\phi,z,t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-\omega/c}^{\omega/c} J_\nu(k_\rho\rho)\exp[\mathrm{i}\nu\phi]\exp[\mathrm{i}k_z z]S(k_z)(-k_\rho)^\nu dk_z \tag{3.23}$$

Em (3.23) redefinimos o espectro $S^{'}(k_z) = S(k_z)(-k_\rho)^\nu$ e obtemos um novo feixe depende do $\phi$:

$$\bar{\psi}_\nu(\rho,\phi,z,t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-\omega/c}^{\omega/c} J_\nu(k_\rho\rho)\exp[\mathrm{i}\nu\phi]\exp[\mathrm{i}k_z z]S^{'}(k_z)dk_z \tag{3.24}$$

Da mesma forma que na obtenção de feixes escalares não paraxiais com simetria azimutal, os feixes sem simetria azimutal são complicados de obter devido à complexidade da integral neste caso, a integral em (3.24). A seguir usaremos o mesmo método matemático usado anteriormente na obtenção de feixes não paraxiais para solucionar (3.24) e, portanto, fornecer soluções analíticas exatas descrevendo feixes não paraxiais sem simetria azimutal puramente propagantes.

### 3.5.1 Metodologia matemática

Seja $\psi(\rho,\phi,z,t)$ solução da equação de onda, portanto $\frac{\partial}{\partial x}\psi$ e $\frac{\partial}{\partial y}\psi$ também são soluções da equação de onda. Aplicando a regra da cadeia temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{3.26}$$

para simplificar (3.25) e (3.26) lembramos que $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\phi = \arctan(y/x)$ e fazendo as respetivas derivadas obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\cos\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\sin\phi \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\sin\phi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\cos\phi \tag{3.28}$$

Somando (3.27) + i(3.28) e agrupando, obtemos uma nova solução $\bar{\psi}$, a qual continua sendo solução da equação de onda:

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}(\rho, \phi, z, t) &= (\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\psi + \frac{\mathrm{i}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\psi\right) \\
\bar{\psi}(\rho, \phi, z, t) &= \exp[\mathrm{i}\phi]\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\psi + \frac{\mathrm{i}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\psi\right)
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Seja $\psi$ igual a solução da equação de onda do tipo Bessel de ordem zero:

$$\psi = J_0(k_\rho \rho)\exp[\mathrm{i}k_z z]\exp[-\mathrm{i}\omega t] \tag{3.30}$$

substituindo (3.30) em (3.29) temos uma nova solução dependente de $\phi$, porém sem simetria azimutal:

$$\bar{\psi} = -k_\rho J_1(k_\rho \rho)\exp[\mathrm{i}\phi]\exp[\mathrm{i}k_z z]\exp[-\mathrm{i}\omega t] \tag{3.31}$$

Comparando (3.30) e (3.31), notamos que aplicando (3.30) em (3.29) $\nu-$vezes, obtemos uma nova solução da equação de onda dependente do $\phi$ através de $\nu$:

$$\bar{\psi}_\nu(\rho, \phi, z, t) = (-k_\rho)^\nu J_\nu(k_\rho \rho)\exp[\mathrm{i}\nu\phi]\exp[\mathrm{i}k_z z]\exp[-\mathrm{i}\omega t] \tag{3.32}$$

Agora supomos $\psi$ igual aos feixes expressados mediante superposição em $k_z$ dados em (3.16). Aplicando indução no dois lados $\nu-$vezes em (3.16) e usando (3.32), notamos que no interior da integral a parte $J_0(k_\rho\rho)\exp[\mathrm{i}k_z z]$ vira $(-k_\rho)^\nu J_\nu(k_\rho\rho)\exp[\mathrm{i}\nu\phi]\exp[\mathrm{i}k_z z]$ depois de aplicar a indução. Finalmente obtemos a nova solução $\bar{\psi}_\nu(\rho, \phi, z, t)$. Aqui, os feixes resultantes são de ordem maior (para $\nu \neq 0$):

$$\bar{\psi}_\nu(\rho, \phi, z, t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-\omega/c}^{\omega/c} J_\nu(k_\rho\rho)\exp[\mathrm{i}\nu\phi]\exp[\mathrm{i}k_z z]S(k_z)(-k_\rho)^\nu dk_z \tag{3.33}$$

Em (3.33) redefinimos o espectro $S^{'}(k_z) = S(k_z)(-k_\rho)^\nu$ e obtemos um novo feixe depende do $\phi$:

$$\bar{\psi}_\nu(\rho, \phi, z, t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\int_{-\omega/c}^{\omega/c} J_\nu(k_\rho\rho)\exp[\mathrm{i}\nu\phi]\exp[\mathrm{i}k_z z]S^{'}(k_z)dk_z \tag{3.34}$$

A equação (3.34) é a mesma que (3.24). Portanto na prática nós não vamos usar(3.34) para obter as soluções $\bar{\psi}_\nu(\rho, \phi, z, t)$, em vez disso, nós vamos usar o operador antissimétrico $L$ definido por:

$$L = \left\{\exp[\mathrm{i}\phi]\left[\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\mathrm{i}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\right\}^\nu \tag{3.35}$$

usando como:

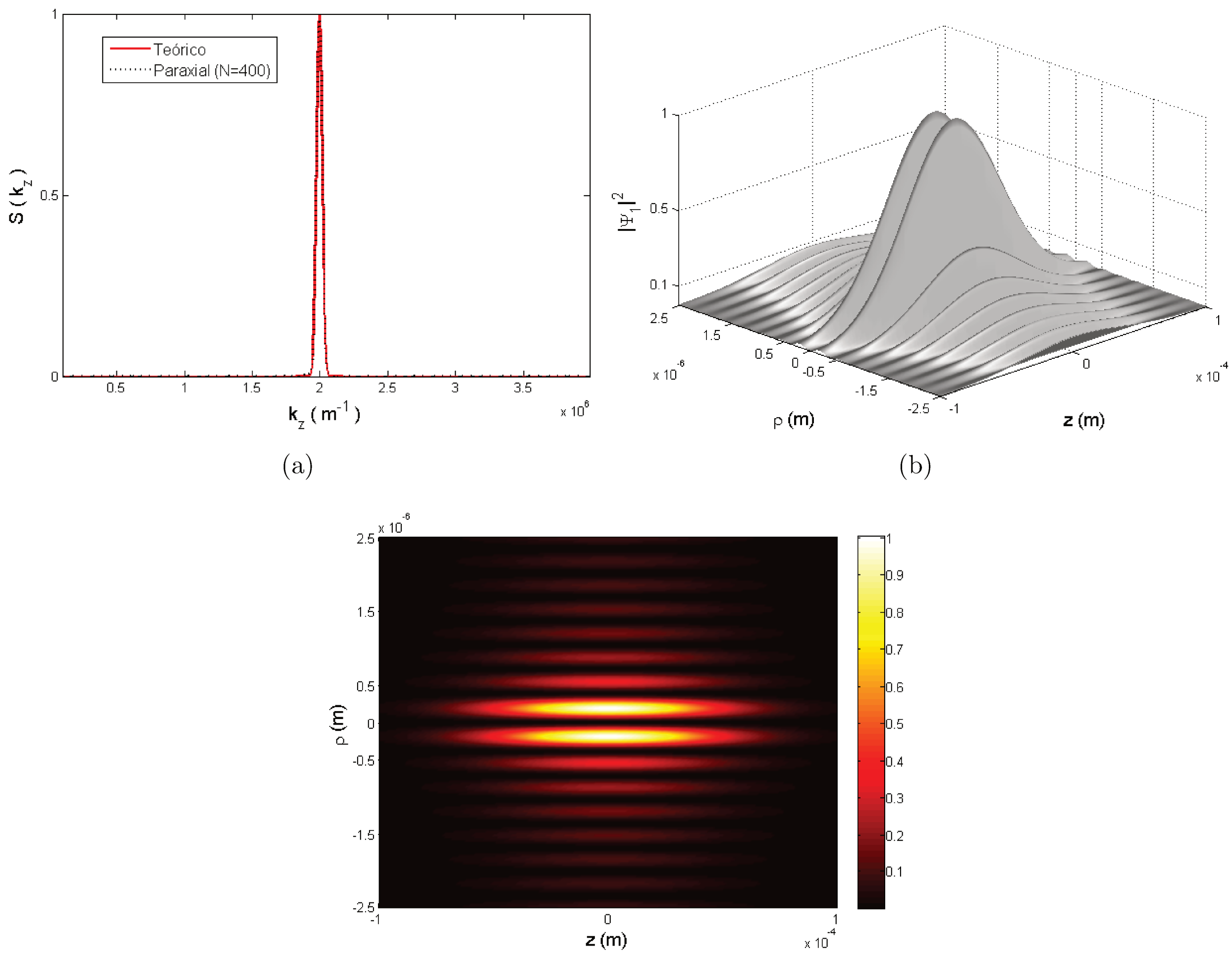
$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}_\nu(\rho, \phi, z, t) &= L\psi \\
&= \left\{\exp[\mathrm{i}\phi]\left[\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\mathrm{i}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\right\}^\nu \psi
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

onde $\psi$ é dado por (3.16):

$$\psi(\rho,z,t) = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \mathrm{sinc}\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2 + \left(z\frac{\omega}{c} + \pi n\right)^2}\right]$$

com $R_n$ dado por (3.15).

Portanto, nesse método, o problema de novo se reduz ao cálculo dos coeficientes de Fourier $R_n$ de $S(k_z)$ usando (3.15).




(a) (b) (c)

Figura 3.7: (a) Gráfico do espectro gaussiano não paraxial concentrado em $1.99 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$. Os traços em vermelhos representam o espectro dado pela eq. (3.22) e os traços em cor preta representam (3.22) através da série de Fourier dada por (3.14). O número de termos de coeficientes de Fourier foi de 801. (b) Padrão de intensidade $3D$ do feixe não paraxial $|\psi_1(\rho,\phi,z)|^2$ como solução exatas de (2.2). (c) Projeção ortogonal da intensidade do feixe no plano $(\rho,z)$.

### 3.5.2 Exemplos de feixes escalares não paraxiais sem simetria azimutal

Partimos do feixe com simetria azimutal $\psi(\rho,z,t)$ dado em (3.16), com espectro gaussiano $S(k_z)$ dado em (3.22). Usando o operador $L$ definido em (3.35) através de (3.36) temos:

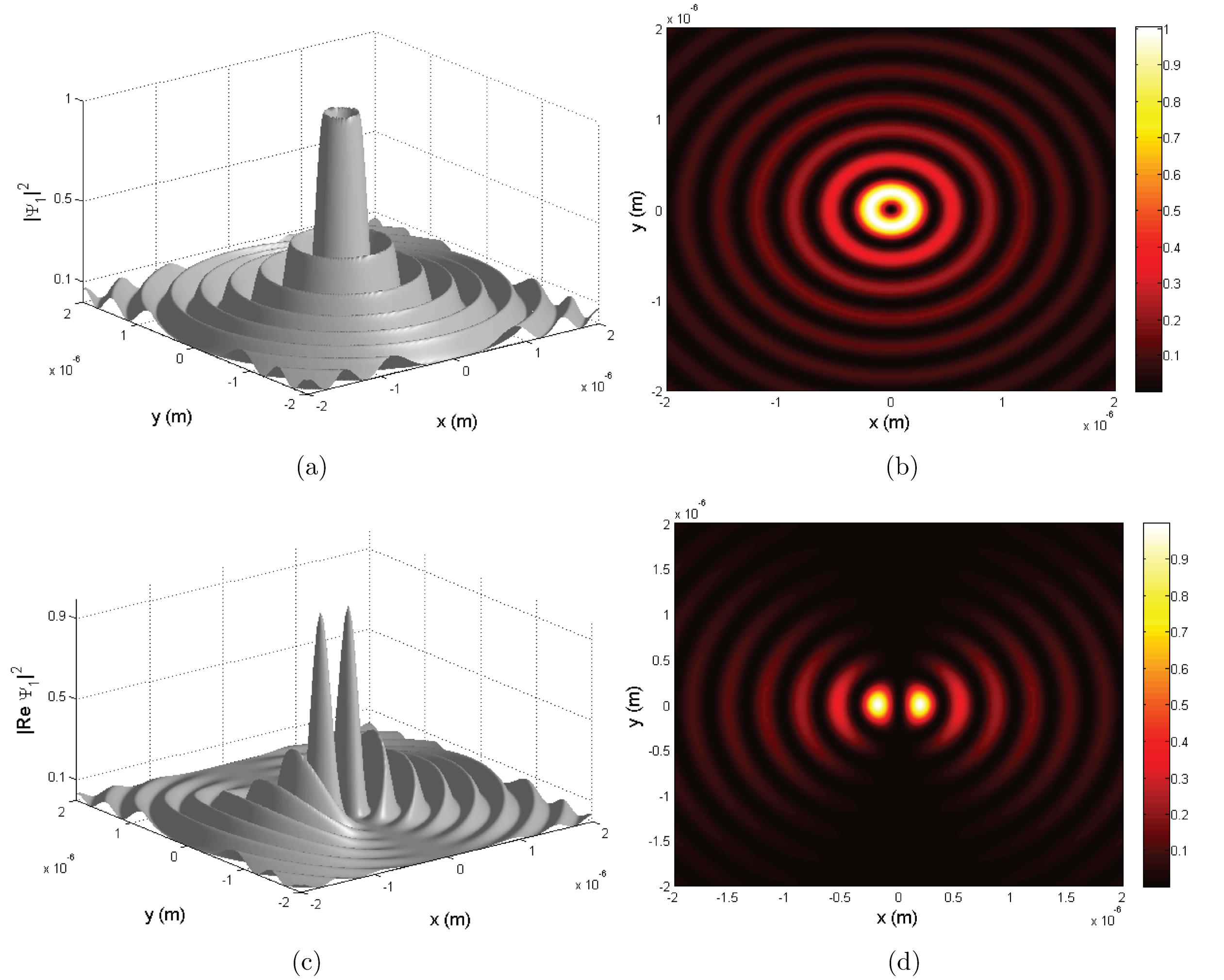



Figura 3.8: (a) Padrão de intensidade $3D$ do feixe não paraxial sem simetria azimutal do espectro gaussiano (3.22) para $\nu = 1$ $|\psi_1(x, y, z = 0)|^2$. (b) Projeção ortogonal da intensidade do feixe no plano $(x, y)$. (c) Padrão de intensidade $3D$ do quadrado da parte real do feixe $|\mathrm{Re}\psi_1(x, y, z = 0)|^2$. (d) Projeção ortogonal do quadrado da parte real do feixe no plano $(x, y)$ para $z = 0$.

$$
\begin{aligned}
\psi_1(\rho, \phi, z, t) &= \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \exp[\mathrm{i}\phi] \\
\psi_1(\rho, \phi, z, t) &= \exp[-\mathrm{i}\omega t] \exp[\mathrm{i}\phi] \left(\frac{w^2}{c^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \rho \left(\frac{\cos h}{h^2} - \frac{\sin h}{h^3}\right) \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

onde

$$
R_n = \frac{1}{K} \int_{-\omega/c}^{\omega/c} S(k_z) \exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{K} n k_z\right] dk_z \qquad (3.38)
$$

$$
h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2 + \left(z\frac{\omega}{c} + \pi n\right)^2} \qquad (3.39)
$$

em (3.37)obtemos um novo feixe sem simetria azimutal $\psi_1(\rho, \phi, z, t)$, o qual é uma solução exata da equação de onda(2.2).

Reparamos que a solução exata (3.37) corresponde à superposição dada em (3.34), com $S^{'}(k_z) = S(k_z)(-k_\rho)$, onde $S(k_z)$ esta dado por (3.14).

Foi analisado o espectro gaussiano do tipo não paraxial $S(k_z)$, concentrado ao redor de $1.99 \times 10^6$ e com uma largura de banda espacial $\Delta k_z = 1.99 \times 10^4 \mathrm{m}^{-1}$.

O gráfico do espectro gaussiano (3.22) desse caso é mostrado na Figura 3.7(a) em cor vermelha, sendo a sua representação através da serie de Fourier (3.14) e mostrada em cor preta. O número total de coeficientes de Fourier usado foi de 801, ou seja $N = 400$.

Na figura 3.7(b) apresentamos o padrão de intensidade normalizados em 3D $|\psi(\rho, \phi, z)|^2$. Notar que a Figura 3.7(b) corresponde ao espectro não paraxial $S^{'}(k_z) = S(k_z)(-k_\rho)$, onde $S(k_z)$ é obtido da Figura 3.7(a).

O feixe obtido provê do espectro não paraxial e é solução analítica exata da equação de onda. Podemos observar que o feixe produzido é propagante e não possui simetria azimutal ($\nu = 1$).

Na Figura 3.7(c) apresentamos a projeção ortogonal da intensidade do feixe 3.7(b) no plano $(\rho, z)$.

Na solução (3.37) notamos que a intensidade do modulo quadrado do feixe $|\psi(\rho, \phi, z)|^2$ conserva os efeitos de simetria, o qual é mostrado na Figura 3.8. Na Figura 3.8(a) apresentamos o padrão de intensidade normalizados em $3D$, mas agora nas coordenadas cartesianas $|\psi(x, y, z = 0)|^2$ e onde podemos apreciar a conservação da simetria. Na Figura 3.8(c) apresentamos a projeção ortogonal da intensidade do feixe 3.8(a) no plano $(x, y)$.

Na Figura 3.8(c) apresentamos o padrão da parte real do feixe normalizados em $3D$ $|\mathrm{Re}\psi(x, y, z = 0)|^2$ e onde podemos apreciar um feixe escalar não paraxial sem simetria azimutal. Na Figura 3.8(d) mostramos a projeção ortogonal no plano $(x, y)$, com $z = 0$ deste último gráfico ( Figura 3.8(c) ).

O fato de trabalhar com funções de Bessel de ordem maiores, neste exemplo $J_1$, garante mediante (3.24) a obtenção de feixes escalares não paraxiais sem simetria azimutal.

## 3.6 Conclusões

Neste trabalho apresentamos um método teórico simples, do ponto de vista matemático, que fornece feixes escalares não paraxiais como soluções analíticas exatas da equação de onda para qualquer tipo de espectro $S(k_z)$. Devido a interesses práticos, as soluções encontradas correspondem a feixes escalares puramente propagantes com e sem simetria azimutal.

O método matemático baseia-se em uma solução analítica para as integrais que descrevem superposições de feixes de Bessel de ordem zero (não evanescentes) com qualquer tipo de função espectral na componente longitudinal do vetor de onda. O método distingue-se dos outros métodos principalmente pela facilidade de convergência, à medida que o espectro $S(k_z)$ tende a ser mais não paraxial.

Baseados neste método, podemos obter feixes escalares não paraxiais com funções de Bessel de ordens maiores, caracterizados por não possuir simetria azimutal. O tamanho do *spot* dos feixes escalares encontrados é da ordem do comprimento de onda, característica própria dos feixes não paraxiais.

Os resultados deste trabalho são importantes, pois além de fornecerem soluções analíticas exatas, evitam demoradas simulações numéricas. Na atualidade, soluções analíticas exatas da equação da onda no regime não paraxial são muito raras, pois elas são obtidas mediante a teoria de perturbações ou mediante simulações numéricas.

# Referências do capítulo 3

[1] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Alan Jeffrey, and Daniel Zwillinger. *Table of Integrals, Series, and Products, Sixth Edition*. Academic Press, 6th edition, 8 2000.

[2] Michel Zamboni-Rached and Erasmo Recami. Subluminal wave bullets: Exact localized subluminal solutions to the wave equations. *Phys. Rev. A*, 77:033824, Mar 2008.

Capítulo 4

# Metodologia matemática para a construção de feixes eletromagnéticos não paraxiais

Neste capítulo desenvolvemos dois métodos teóricos capazes de fornecer feixes eletromagnéticos não paraxiais. O primeiro, é o método chamado das derivadas parciais e o segundo é o método do vetor potencial.

Como todo estudo eletromagnético iniciamos com as equações de Maxwell. No espaço livre sem cargas nem densidade de corrente ($\rho = \vec{J} = 0$) as equações de Maxwell são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{4.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{4.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \tag{4.4}$$

onde $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ e $\varepsilon_0$, $\mu_0$ são a permissividade e a permeabilidade no vácuo respectivamente.

## 4.1 Método das derivadas parciais

Vamos supor que desejamos um feixe eletromagnético com polarização linear:

$$\vec{E} = E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \tag{4.5}$$

Substituindo (4.5) em (4.1) temos:

$$\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) = 0$$

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial y}\int E_y dz \tag{4.6}$$

Agora, seja $\psi$ solução da equação de onda, então suas derivadas também são soluções da equação de onda. Seja:

$$\psi = \int E_y dz \tag{4.7}$$

então

$$E_y = \frac{\partial}{\partial z}\psi \tag{4.8}$$

usando (4.7) em (4.6) obtemos:

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial y}\psi \tag{4.9}$$

Seja $\psi$ igual à solução da equação de onda dada por (3.16). Porém por (4.8) e (4.9) as componentes do campo elétrico $E_y$ e $E_z$ também são soluções da equação de onda. Substituindo (3.16) em (4.8) e (4.9) temos:

$$E_x = 0 \tag{4.10}$$

$$E_y = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\left(\frac{\omega}{c}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(n\pi + \frac{\omega}{c}z)\left(\frac{\cos h}{h^2} - \frac{\sin h}{h^3}\right) \tag{4.11}$$

$$E_z = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n y\left(\frac{\sin h}{h^3} - \frac{\cos h}{h^2}\right) \tag{4.12}$$

onde $h$ é:

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2 + \left(z\frac{\omega}{c} + \pi n\right)^2} \tag{4.13}$$

e onde $R_n$ são os coeficientes de Fourier do espectro $S(k_z)$ dados em (3.15).

As equações (4.10-4.12) são soluções analíticas exatas das equações de Maxwell e representam as componentes transversais $(E_x, E_y)$ e longitudinal $(E_z)$ do campo elétrico.

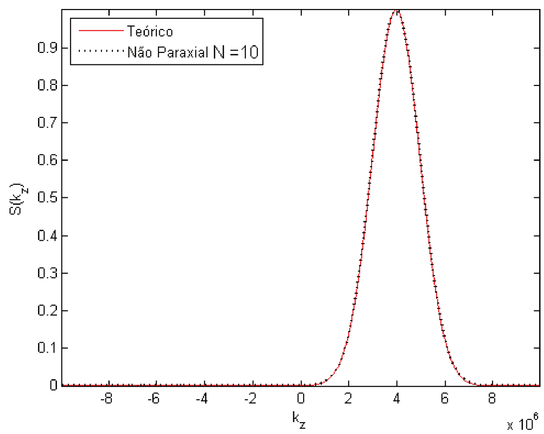
### 4.1.1 Feixe eletromagnético não paraxial com polarização linear

Com o objetivo de avaliar a metodologia proposta, foi estudado um feixe eletromagnético com polarização linear (4.5), onde suas componentes são dadas por (4.11) e (4.12).

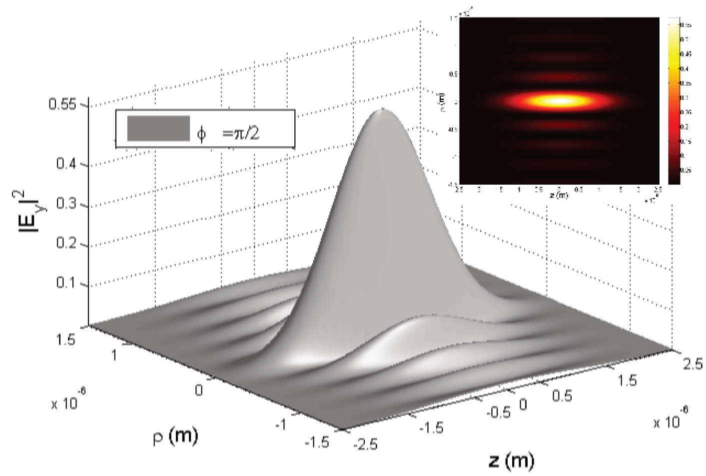
O espectro $S(k_z)$ foi o mesmo usado em (3.22), ou seja, um espectro gaussiano do tipo não paraxial concentrado ao redor de $\bar{k}_z = 3.97 \times 10^6\mathrm{m}^{-1}$, com uma largura de banda espacial de $9.93 \times 10^5\mathrm{m}^{-1}$ e com $\Delta k_z/\bar{k}_z = 0.25$. O gráfico do espectro (3.22) obtido anteriormente é mostrado novamente na Figura 4.1(a).

Nas Figuras 4.1(b) apresentamos, em coordenadas cilíndricas, para $t = 0$, o padrão de intensidade $3D$ da componente transversal do campo elétrico $|E_y|^2$ com sua projeção ortogonal no plano $(\rho, z)$. Na Figura 4.1(c) apresentamos o padrão de intensidade $3D$ no sistema cartesiano e sua projeção ortogonal no plano $(x, y, z = 0)$, aqui apreciamos sua simetria azimutal. Os gráficos obtidos são soluções analíticas exatas das equações de Maxwell obtidos de (4.11). Na

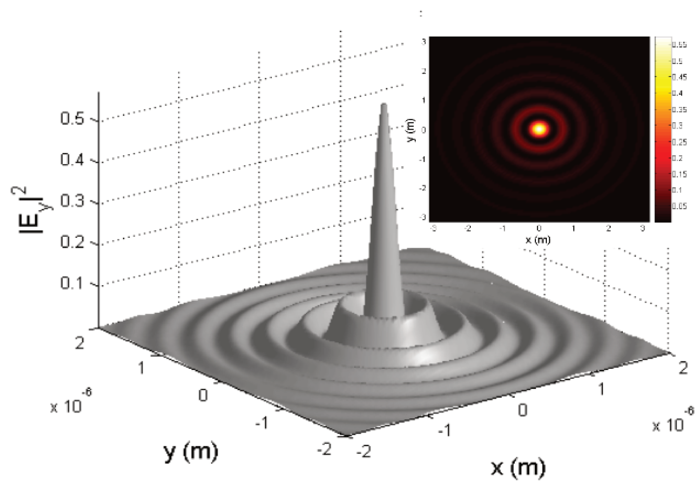
Figura 4.1(d) apresentamos o diagrama vetorial correspondente à polarização linear da componente transversal do campo elétrico $E_y$ superposto a uma ampliação do seu *spot* central obtido na Figura 4.1(c). Notar que nesta figura, o tamanho do *spot* é aproximadamente da ordem do comprimento de onda.



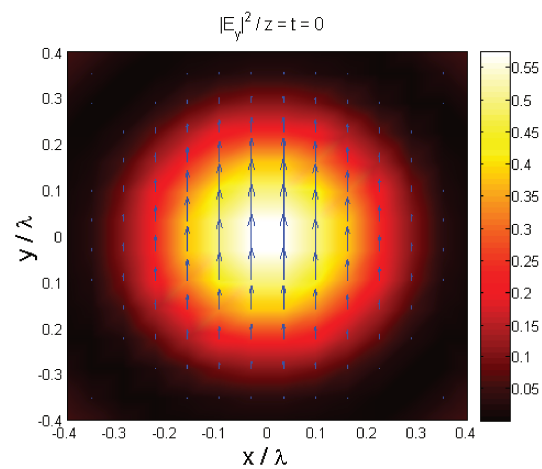

(a)




(b)




(c)




(d)

Figura 4.1: Polarização linear: (a) Gráfico do espectro gaussiano de tipo não paraxial ($N = 10$). Gráficos dos padrões de intensidade da componente transversal do campo elétrico $|E_y|^2$ e sua projeção ortogonal, (b) no plano$(\rho, z)$ e (c) no plano $(x, y, z = 0)$. (c) Diagrama vetorial de $E_y$.

Nas Figuras 4.2(a)(c) apresentamos, em coordenadas cilíndricas, para $t = 0$ e $y = \sin\phi$ com $\phi = \pi/2$, os padrões de intensidades $3D$ da componente longitudinal do campo elétrico $|E_z|^2$ e do campo elétrico total ($|E_z|^2 + |E_y|^2$) com suas projeções ortogonais no plano $(\rho, z)$. Nas Figuras 4.2(b)(d) apresentamos os padrões de intensidades $3D$ no sistema cartesiano e suas projeções ortogonais no plano $(x, y, z = 0)$, onde notamos que não possuem simetria azimutal. Os gráficos obtidos são soluções analíticas exatas das equações de Maxwell obtidos de (4.12).

Das Figuras 4.1(a-b) e Figuras 4.2(c-d) apreciamos que o feixe eletromagnético resultante obtido de um espectro gaussiano de tipo não paraxial possui componentes de campo $E_y$ e $E_z$

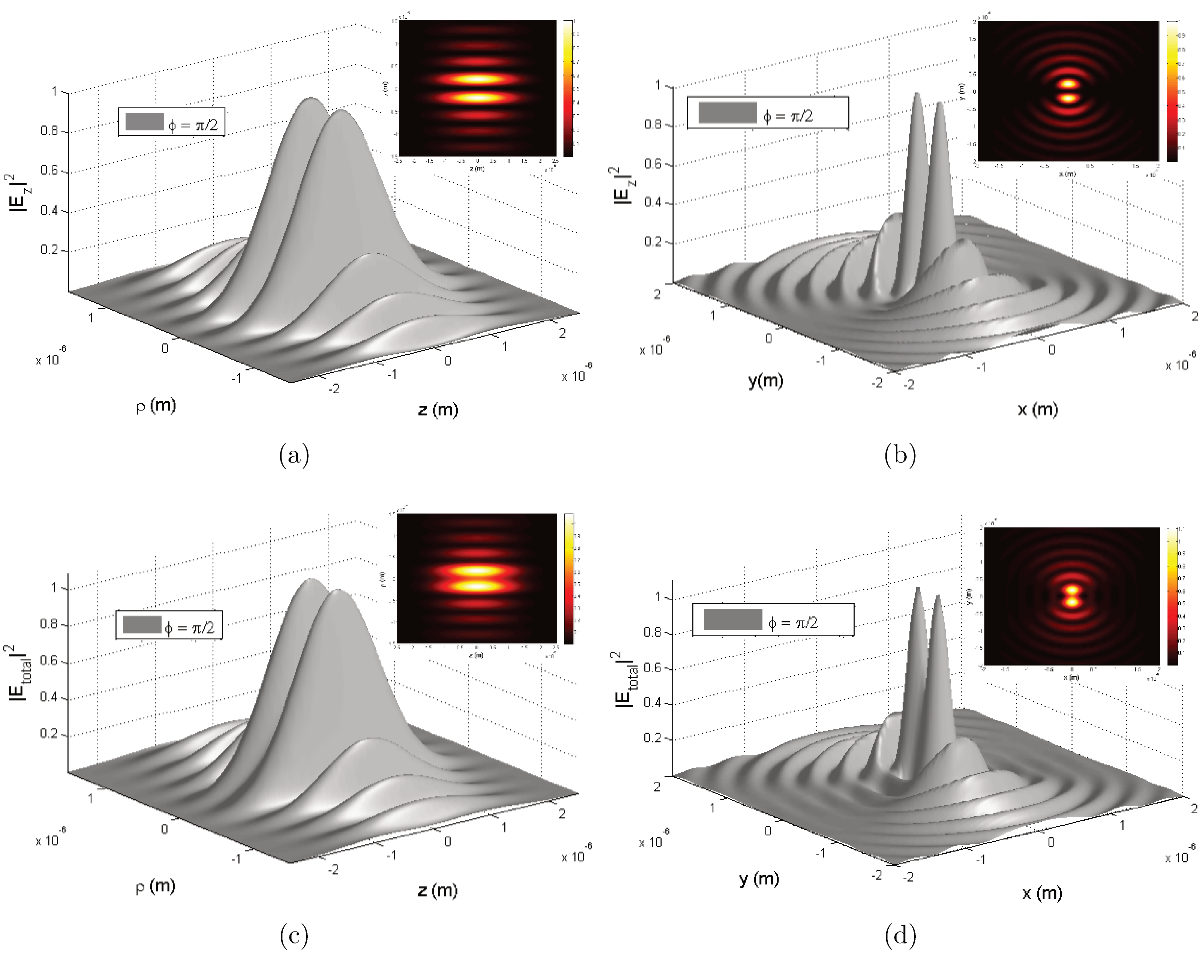



Figura 4.2: Padrões de intensidade $3D$ com suas projeções ortogonais para componente longitudinal do campo elétrico $|E_z|^2$ e do campo elétrico total ($|E_{\text{total}}|^2 = |E_y|^2 + |E_z|^2$), (a) e (c) no plano $(\rho, z)$ e (b) e (d) no plano $(x, y, z = 0)$ com $\phi = \pi/2$.

com mesma ordem de grandeza, sendo sua relação de máximas intensidades $|E_y|^2/|E_z|^2 = 0.5$. Além de possuir tamanhos de *spot* da ordem do cumprimento de onda $\lambda = 0.63\mu$m, as quais são propriedades caracterizas dos feixes eletromagnéticos não paraxiais.

## 4.2 Método do vetor potencial

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (4.3), então existe um vetor $\vec{A}$, chamado de vetor potencial [3], tal que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) em (4.2) e operando obtemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) = 0 \tag{4.15}$$

de (4.15) deduzimos que o campo vetorial $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t$ é um campo conservativo. Portanto existe uma função escalar $V$, tal que:

$$\begin{aligned}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} &= -\nabla V \\ \vec{E} &= -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Em (4.16) o número de soluções para $\vec{A}$ e $V$ são infinitos, portanto vamos obter as equações que $\vec{A}$ e $V$ devem atender.

Usando (4.16) em (4.1) temos:

$$\vec{\nabla}^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = 0 \tag{4.17}$$

Substituindo (4.16) e (4.14) em (4.4), temos:

$$0 = -\nabla[\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}V] + \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} \tag{4.18}$$

escolhemos o calibre de Lorentz [2] igual a:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}V \tag{4.19}$$

Finalmente usando (4.19) em (4.18) e em (4.17) obtemos o sistema de equações que envolvem a $\vec{A}$ e $V$:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0 \tag{4.20}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = 0 \tag{4.21}$$

Para obter um feixe com polarização $\vec{E} = E_\rho\hat{\rho} + E_z\hat{z}$, escolhemos:

$$\vec{A}(\rho,z,t) = \hat{z}A_z(\rho,z,t) = \hat{z}A(\rho,z)\exp[-\mathrm{i}\omega t] \tag{4.22}$$

onde $A_z(\rho,z,t)$ é solução da equação de onda (4.20).

O $V$ pode ser obtido a partir do $\vec{A}$. Substituindo (4.22) em (4.19), temos:

$$V(\rho,z,t) = -\mathrm{i}\frac{c^2}{\omega}\left[\frac{\partial}{\partial z}A_z(\rho,z,t)\right] \tag{4.23}$$

Substituindo (4.23) em (4.16) obtemos o campo elétrico com componentes:

$$E_\rho = \mathrm{i}\frac{c^2}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}A_z(\rho,z,t) \tag{4.24}$$

$$E_\phi = 0 \tag{4.25}$$

$$E_z = \mathrm{i}\frac{c^2}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}A_z(\rho,z,t) + \mathrm{i}\omega A_z \tag{4.26}$$

Substituindo (4.22) em (4.14) obtemos o campo magnético com componentes:

$$
\begin{aligned}
B_\rho &= 0 && (4.27)\\
B_\phi &= -\frac{\partial}{\partial\rho}A_z(\rho,z,t) && (4.28)\\
B_z &= 0 && (4.29)
\end{aligned}
$$

as expressões (4.24-4.26) e (4.27-4.29) representam as componentes do campo elétrico e magnético do feixe respectivamente. Em (4.24-4.26) as componentes transversais do campo elétrico possuem parte radial $E_\phi = 0$, portanto o feixe possui polarização radial. De (4.29) $B_z = 0$, assim (4.24-4.26) e (4.27-4.29) representam também as componentes do campo elétrico e magnético do modo $TM$ do feixe, denotadas nesta dissertação, por $E_m$ e $B_m$ respectivamente.

Escolhendo $A_z(\rho,z,t)$ igual a solução analítica da equação de onda mostrada em (3.16) e substituindo em (4.24-4.26) e (4.27-4.29), obtemos finalmente as componentes do campo elétrico $E_m$ e magnético $B_m$

$$
\begin{aligned}
E_{\rho m} &= \mathrm{i}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)\exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n(cn\pi+\omega z)\rho\left(3\frac{\sin h}{h^5}\right.\\
&\quad\left.-3\frac{\cos h}{h^4}-\frac{\sin h}{h^3}\right) && (4.30)\\
E_{\phi m} &= 0 && (4.31)\\
E_{zm} &= \mathrm{i}\omega\exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n\left[-\frac{\cos h}{h^2}+\frac{\sin h}{h^3}-\right.\\
&\quad\left.\rho^2\frac{\omega^2}{c^2}\left(3\frac{\sin h}{h^5}-3\frac{\cos h}{h^4}-\frac{\sin h}{h^3}\right)\right] && (4.32)\\
B_{\rho m} &= 0 && (4.33)\\
B_{\phi m} &= -\frac{\omega^2}{c^2}\exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n\rho\left(\frac{\sin h}{h^3}-\frac{\cos h}{h^2}\right) && (4.34)\\
B_{zm} &= 0 && (4.35)
\end{aligned}
$$

Aplicando o teorema da dualidade [1] em (4.30−4.35), obtemos as componentes do campo elétrico e magnético para o modo $TE$ denotado por $E_e$ e $B_e$ respectivamente:

$$
\begin{aligned}
E_{\rho e} &= 0 && (4.36)\\
E_{\phi e} &= \frac{\omega^2}{c^2}\exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n\rho\left(\frac{\sin h}{h^3}-\frac{\cos h}{h^2}\right) && (4.37)\\
E_{ze} &= 0 && (4.38)\\
B_{\rho e} &= \mathrm{i}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)\exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(cn\pi+\omega z)\rho\left(3\frac{\sin h}{h^5}\right.\\
&\quad \left.-3\frac{\cos h}{h^4}-\frac{\sin h}{h^3}\right) && (4.39)\\
B_{\phi e} &= 0 && (4.40)\\
B_{ze} &= \mathrm{i}\omega\exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n\left[-\frac{\cos h}{h^2}+\frac{\sin h}{h^3}-\rho^2\frac{\omega^2}{c^2}\right.\\
&\quad \left.(3\frac{\sin h}{h^5}-3\frac{\cos h}{h^4}-\frac{\sin h}{h^3})\right] && (4.41)
\end{aligned}
$$

onde $R_n$ são os coeficientes dado em (3.15), os quais dependem do tipo de espectro escolhido, onde $h$ foi definido em (4.13). Em (3.36) as componentes transversais do campo elétrico possuem parte azimutal $E_\rho = E_z = 0$, portanto o feixe resultante possui polarização azimutal.

A distribuições de intensidade dos campos eletromagnéticos para os feixes com polarização azimutal e radial podem ser obtida facilmente usando (4.30-4.35) e (4.36-4.41) respectivamente.

### 4.2.1 Feixes eletromagnéticos não paraxiais com polarização azimutal e radial

Para a avaliação deste último método matemático, analisamos o espectro quadrado de tipo não paraxial (3.21), concentrado em $\bar{k}_z = 5.24 \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}$, com uma largura de banda espacial menor ao exemplo do caso escalar de $\Delta k_z = 4.99 \times 10^5 \mathrm{m}^{-1}$. O qual apresenta um $\Delta k_z/\bar{k}_z = 0.095$. Na Figura 4.3(a) mostramos o gráfico do espectro quadrado em cor vermelha, sendo a sua representação através da série de Fourier (3.14) e mostrada em cor preta. O número total de coeficientes de Fourier usado foi de 1601, ou seja $N = 800$. Para obter as soluções analíticas exatas correspondentes às componentes do campo elétrico para o modo $TE$ e $TM$ substituímos os valores de $R_n$ em (4.30-4.35) e (4.36-4.41).

#### Polarização azimutal

Usando as expressões (4.30-4.35) obtemos as distribuições de intensidades dos campos elétricos e magnético para o feixe não paraxial com polarização azimutal. Na Figura 4.3(d) mostramos um exemplo deste tipo de feixe, cujo diagrama vetorial da componente transversal $E_\phi$ representa um feixe com polarização azimutal.

Nas Figuras 4.3(b) apresentamos, em coordenadas cilíndricas, para $t = 0$, o padrão de intensidade $3D$ da componente transversal do campo elétrico $|E_\phi|^2$ com sua projeção ortogonal no plano $(\rho, z)$. Na Figura 4.3(c) apresentamos o padrão de intensidade $3D$ no sistema cartesiano

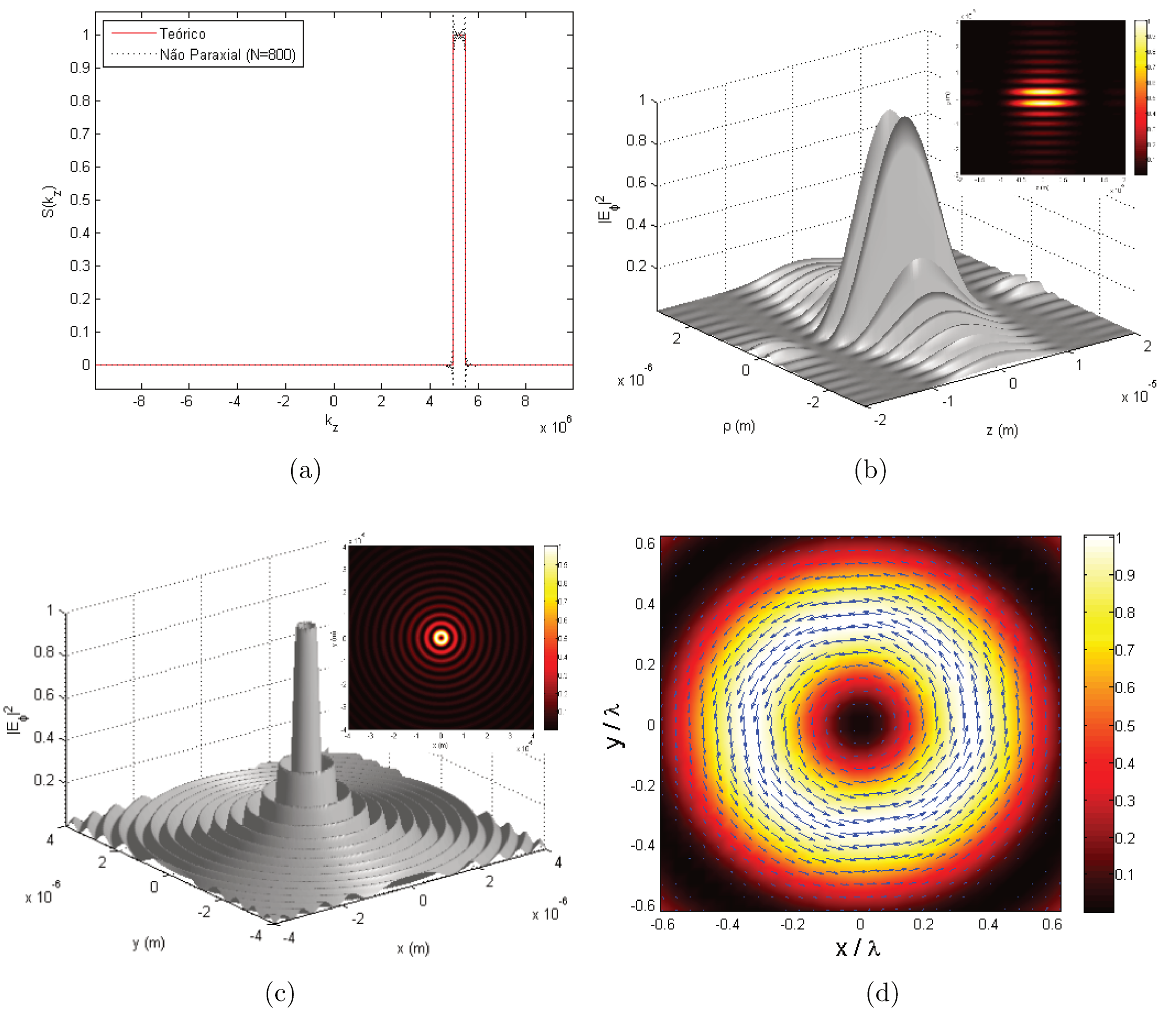



Figura 4.3: Polarização azimutal: (a) Gráfico do espectro quadrado de tipo não paraxial ($N = 800$). Gráficos dos padrões de intensidade da componente transversal do campo elétrico $|E_\phi|^2$ e sua projeção ortogonal, (b) no plano$(\rho, z)$ e (c) no plano $(x, y, z = 0)$. (d) Diagrama vetorial de $E_\phi$.

e sua projeção ortogonal no plano $(x, y, z = 0)$, aqui apreciamos sua simetria azimutal. Notar que os gráficos obtidos representam soluções analíticas exatas das equações de Maxwell, obtidos de (4.37).

Na Figura 4.1(d) apresentamos o diagrama vetorial correspondente à polarização azimutal da componente transversal do campo elétrico $E_\phi$ superposto a uma ampliação do seu *spot* central obtido na Figura 4.3(c). Notar que nesta figura, o tamanho do *spot* é aproximadamente da ordem de grandeza do comprimento de onda.

### Polarização radial

Nas Figuras 4.4(a)(c) apresentamos, em coordenadas cilíndricas, para $t = 0$, os padrões de intensidades $3D$ das componentes transversal $|E_\rho|^2$ e longitudinal $|E_z|^2$ do campo elétrico e também o campo elétrico total $(|E_z|^2 + |E_\rho|^2)$ com suas projeções ortogonais no plano $(\rho, z)$. Apresentamos seus padrões de intensidades $3D$ no sistema cartesiano com suas projeções or-

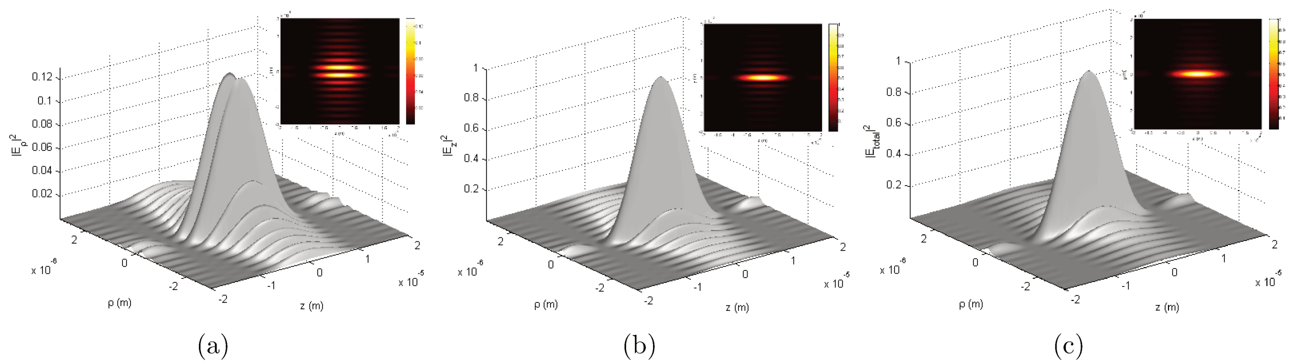


Figura 4.4: (a)-(c) Padrões de intensidade $3D$ das componentes transversal e longitudinal do campo elétrico $|E_\rho|^2$, $|E_z|^2$ e do campo total $(|E_\rho|^2 + |E_z^2)$ respectivamente nas coordenadas cilíndricas. $(\rho, z)$.

togonais no plano $(x, y, z = 0)$ nas Figuras 4.5(a)-(c), onde notamos que possuem simetria azimutal. Notar que os gráficos obtidos representam são soluções analíticas exatas das equações de Maxwell obtidos de (4.39).

Das Figuras 4.4 e 4.5 apreciamos que o feixe eletromagnético resultante obtido de um espectro quadrado de tipo não paraxial possui componentes $E_\rho$ e $E_z$ da mesma ordem de grandeza, incluso a componente longitudinal possui uma intensidade máxima maior que da componente transversal $|E_y|^2 \ll |E_z|^2$. Eles também possuem tamanhos de *spot* da ordem do cumprimento de onda $\lambda = 0.63\mu$m. Essas são características dos feixes eletromagnéticos não paraxiais.

Na Figura 4.5(d) apresentamos o diagrama vetorial correspondente à polarização radial da componente transversal do campo elétrico $E_\rho$ superposto a uma ampliação do seu *spot* central obtido na Figura 4.5(c). Notar que nesta figura, o tamanho do *spot* é aproximadamente da ordem do comprimento de onda.

## 4.3 Conclusões

Nesta seção apresentamos dois métodos matemáticos capazes de fornecer feixes eletromagnéticos não paraxiais puramente propagantes, com interessantes polarizações -radial e azimutal-, como soluções analíticas exatas das equações de Maxwell.

Os métodos são deduzidos a partir das equações de Maxwell, portanto as expressões resultantes encontradas representam componentes do campo elétrico e magnético do feixe eletromagnético não paraxial. Os cálculos matemáticos envolvem apenas simples derivadas e não são necessários cálculos numéricos para resolver complexas integrais. Sendo, portanto, muito mais rápido e simples de se aplicar e mais eficiente do que outros métodos.

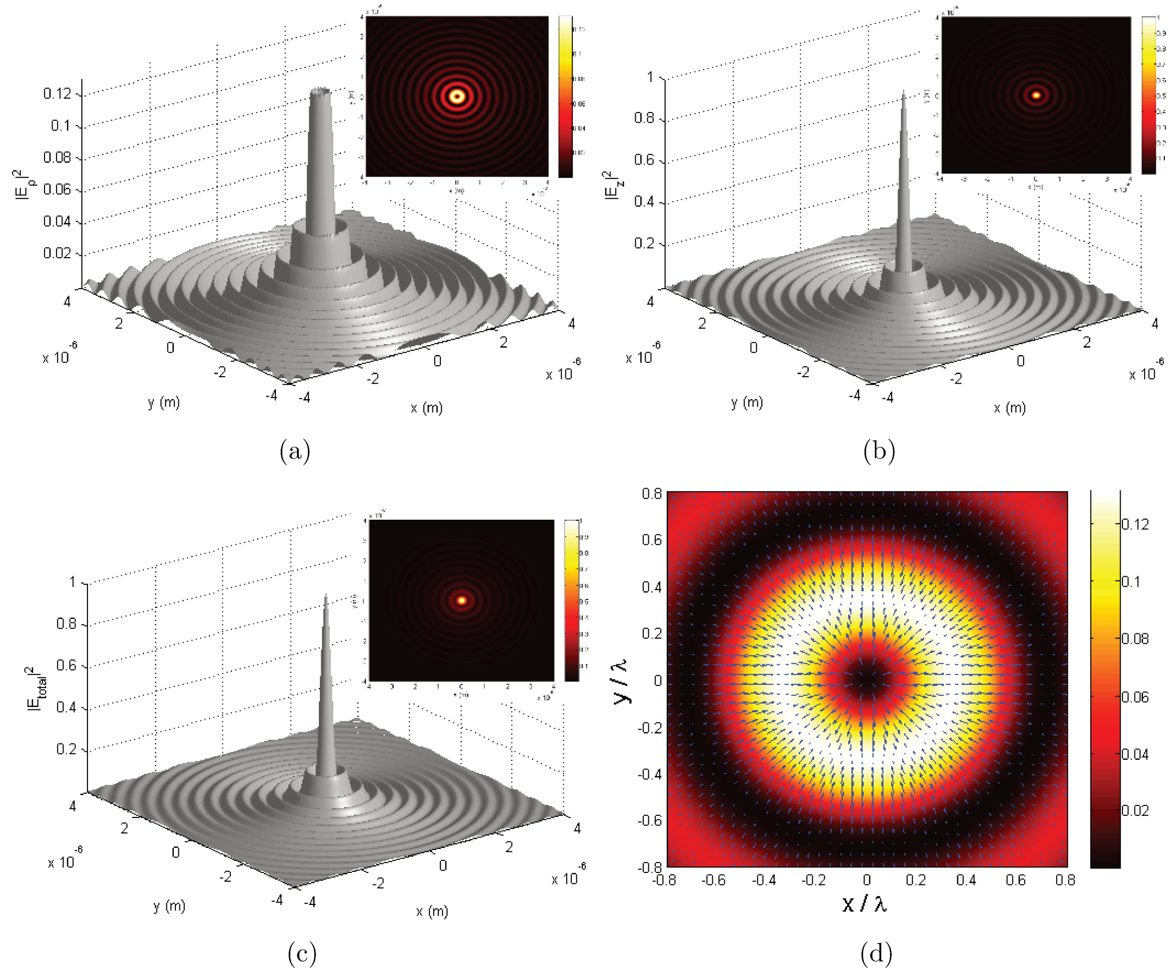



Figura 4.5: Polarização radial: (a)-(c) Padrões de intensidade $3D$ com suas projeções ortogonais das componentes transversal $|E_\rho|^2$ e longitudinal $|E_z|^2$ e do campo elétrico total $|E_\rho|^2 + |E_z|^2$ nas coordenadas cartesianas com $(x, y, z = 0)$. (d) Diagrama vetorial de $E_\rho$.

# Referências do capítulo 4


[1] Constantine A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, 2 edition, 1 2012.

[2] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics (3rd Edition)*. Addison Wesley, 3rd edition, 1 1999.

[3] John David Jackson. *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 3 edition, 8 1998.

Capítulo 5

# Conclusões Gerais

Neste trabalho apresentamos um método teórico simples, do ponto de vista matemático, que fornece feixes escalares não paraxiais como soluções analíticas exatas da equação de onda para qualquer tipo de espectro $S(k_z)$. Devido a interesses práticos, as soluções encontradas correspondem a feixes escalares puramente propagantes com e sem simetria azimutal.

O método matemático baseia-se em uma solução analítica para as integrais que descrevem superposições de feixes de Bessel de ordem zero (não evanescentes) com qualquer tipo de função espectral na componente longitudinal do vetor de onda. O método distingue-se dos outros métodos principalmente pela facilidade de convergência, à medida que o espectro $S(k_z)$ tende a ser mais não paraxial.

Baseados neste método, podemos obter feixes escalares não paraxiais com funções de Bessel de ordens maiores, caracterizados por não possuir simetria azimutal. O tamanho do *spot* dos feixes escalares encontrados são de igual ordem do comprimento de onda, característica própria dos feixes não paraxiais.

Os resultados deste trabalho são relevantes, pois além de fornecerem soluções analíticas exatas, evitam demoradas simulações numéricas. Na atualidade, soluções analíticas exatas da equação da onda no regime não paraxial são muito raras, elas são obtidas mediante teoria de perturbações ou mediante simulações numéricas.

Cabe ressaltar que o método desenvolvido é exato, e portanto pode também ser aplicado aos feixes paraxiais.

Nós apresentamos também um estudo vetorial dos feixes ópticos não paraxiais, através de dois distintos métodos vetoriais capazes de fornecer feixes eletromagnéticos não paraxiais puramente propagantes, com interessantes polarizações -radial e azimutal- , como soluções analíticas exatas das equações de Maxwell.

Os métodos são deduzidos a partir das equações de Maxwell, portanto as expressões resultantes encontradas representam componentes do campo elétrico e magnético do feixe eletromagnético não paraxial. Os cálculos matemáticos envolvem apenas simples derivadas e não são necessários cálculos numéricos para resolver complexas integrais. Sendo, portanto, muito mais rápido e simples de se aplicar e mais eficiente do que outros métodos.

# Trabalhos Futuros

Como sugestão para trabalhos futuros fica a aplicação do método a outras situações especificas, como por exemplo na obtenção de soluções analíticas descrevendo feixes truncados por aberturas finitas ou ao estudo das pinças ópticas, onde o analise das forças envolvidas precisa de expressões analíticas exatas na descrição do feixe óptico.

Também seria muito interessante poder reproduzir experimentalmente os feixes eletromagnéticos não paraxiais encontrados em laboratório, principalmente os feixes ópticos fortemente concentrados com tamanhos de *spot* do ordem do comprimento de onda. Como vimos, estes possuem modernas aplicações. As fontes dependentes do espectros poderiam ser geradas a partir de hologramas gerados por computador, reproduzidos por um modulador espacial de luz, o SLM, cuja sigla em inglês corresponde a *Spatial Light Modulators*.

Para complementação do trabalho, seria interessante encontrar expressões para fluxos de potência através do vetor de Poynting usando os resultados concluídos neste trabalho, bem como encontrar novas polarizações partindo da superposição de polarizações já encontradas.

## Publicações

R. L. Garay-Avendaño, M. Rached-Zamboni. ”Feixes não paraxiais: Uma formulação analítica exata. I A teoria escalar”. 15$^o$ SBMO−Simpósio Brasileiro de Micro−ondas e Optoeletrônica, 10$^o$ CBMag−Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, João Pessoa, PA, Brasil (2012).

Apêndice A

# Apêndice: Solução da equação de onda

Para a validar que a expressão (3.16):

$$\psi(\rho,z,t)=\exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n sinc[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2+(z\frac{\omega}{c}+\pi n)^2}] \tag{A.1}$$

onde $K=2\omega/c$ e $R_n$ são os coeficientes de Fourier dados em (3.15) representa uma solução exata da equação de onda (2.2):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\rho,z,t)=0 \tag{A.2}$$

substituímos (A.1) em (A.2):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\rho,z,t) &= 0\\ \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi(\rho,z,t)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\psi(\rho,z,t)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(\rho,z,t)+\frac{\omega^2}{c^2}\psi(\rho,z,t) &= 0\end{aligned} \tag{A.3}$$

Derivando temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi(\rho,z,t) &= \exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n\left[\frac{\omega^4}{c^4}\rho^2\left(\frac{3\sin[h]}{h^5}-\frac{3\cos[h]}{h^4}-\frac{\sin[h]}{h^3}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\cos[h]}{h^2}\right.\right.\\ &\quad\left.\left.-\frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right] \qquad (A.4)\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\psi(\rho,z,t) &= \exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\cos[h]}{h^2}-\frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right] \qquad (A.5)\\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(\rho,z,t) &= \exp[-\mathrm{i}\omega t]\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n\left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(n\pi+\frac{\omega z}{c}\right)^2\left(\frac{3\sin[h]}{h^5}-\frac{3\cos[h]}{h^4}-\frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\cos[h]}{h^2}-\frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right] \qquad (A.6)\end{aligned}$$

onde

$$h=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\rho^2+(z\frac{\omega}{c}+\pi n)^2} \tag{A.7}$$

de (A.7) usando $(\pi n + z\frac{\omega}{c})^2 = h^2 - \omega^2\rho^2/c^2$ em (A.6) temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(\rho, z, t) &= \exp[-\mathrm{i}\omega t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(h^2 - \rho^2\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\frac{3\sin[h]}{h^5} - \frac{3\cos[h]}{h^4} - \frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right. \\
&\left. \qquad + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\cos[h]}{h^2} - \frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right] \\
&= \exp[-\mathrm{i}\omega t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \left[-\frac{\omega^4}{c^4}\rho^2\left(\frac{3\sin[h]}{h^5} - \frac{3\cos[h]}{h^4} - \frac{\sin[h]}{h^3}\right) - 2\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\cos[h]}{h^2} - \frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right. \\
&\left. \qquad - \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\sin[h]}{h}\right)\right] \\
&= \exp[-\mathrm{i}\omega t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \left[-\frac{\omega^4}{c^4}\rho^2\left(\frac{3\sin[h]}{h^5} - \frac{3\cos[h]}{h^4} - \frac{\sin[h]}{h^3}\right) - 2\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\cos[h]}{h^2} - \frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right] \\
&\qquad - \frac{\omega^2}{c^2}\left(\exp[-\mathrm{i}\omega t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \frac{\sin[h]}{h}\right) \\
&= \exp[-\mathrm{i}\omega t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \left[-\frac{\omega^4}{c^4}\rho^2\left(\frac{3\sin[h]}{h^5} - \frac{3\cos[h]}{h^4} - \frac{\sin[h]}{h^3}\right) - 2\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\cos[h]}{h^2} - \frac{\sin[h]}{h^3}\right)\right] \\
&\qquad - \frac{\omega^2}{c^2}\psi(\rho, z, t) \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

Substituindo (A.4), (A.5) e (A.8) em (A.3) notamos que (3.16) é afetivamente uma solução exata da equação de onda (2.2) com os coeficientes de Fourier $R_n$ dado por (3.15):

$$R_n = \frac{1}{K}\int_{-\omega/c}^{\omega/c} S(k_z)\exp[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{K}nk_z]dk_z \qquad \text{(A.9)}$$

para o espectro:

$$S(k_z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\left[\mathrm{i}\frac{2\pi}{K}nk_z\right] \qquad \text{(A.10)}$$