
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

Este exemplar é referente à defesa final da tese
defendida por Leonardo Silva Resende
apresentada pela Comissão
Julgadora em 06 / 09 / 91.

 Orientador

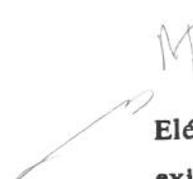
**FILTRAGEM ADAPTATIVA COM RESTRIÇÕES LINEARES
POR MÍNIMOS QUADRADOS**

por: Leonardo Silva Resende 

orientador: **Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano**

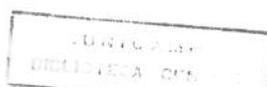
Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano - UNICAMP (*Presidente*)
Prof. Dr. Jacques Szczupak - PUC/RJ
Prof. Dr. Amauri Lopes - UNICAMP
Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral - UNICAMP

 Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
Elétrica - FEE/UNICAMP como parte dos requisitos
exigidos para a obtenção do título de *Mestre em*
Engenharia Elétrica.

Setembro/1991 

BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA
UNICAMP



"... existe uma grande verdade ...: seja você quem for ou o que faça, quando quer com vontade alguma coisa, é porque este desejo nasceu na alma do universo. ... e quando você quer alguma coisa, todo o universo conspira para que você realize seu desejo."

Melquisedec, o Rei de Salém.

"O Alquimista", Paulo Coelho.

Rocco, Rio de Janeiro, 1990.

Aos meus pais, Oswaldo e Dinéia.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, minhas irmãs e a minha afilhada Carolina "Carol" por todo apoio, amizade e amor que nunca me faltaram.

A Adriana "Princesa" pelo amor e compreensão nos momentos difíceis.

Ao Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano pela dedicação, amizade, paciência, confiança e pela oportunidade.

Ao Prof. Dr. Amauri Lopes por sua confiança, seu incentivo e seus conselhos.

Aos Profs. Drs. Hélio Waldman, Dalton Arantes, Reginaldo Palazzo, Ivanil Bonatti, Fábio Violaro, Michel Yacoub, Celso de Almeida e José Augusto pela motivação que me deram.

Ao Prof. Dr. Maurice G. Ballanger pelos seus comentários.

Aos amigos Jayme, Maurílio, Suhel, João Batista, Luciano, Francisco, Fernando, Vicente, João Bosco, Coradine, Rogério, Adrián, Jônio, Carlos, Vitor, Paulo, Ernesto, Cláudio "Careca", Renê, Walmiral "Lau", Aristides "Padrinho" e todos os outros pela ajuda, companheirismo e bons momentos.

À Universidade Estadual de Campinas pela oportunidade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

The basic problem of linear constrained filtering consists in searching an optimal filter whose parameters are subject to a set of linear equations. For transversal structures, the optimal coefficients in the mean-square sense are given by the Wiener-Hopf equations. The introduction of constraints leads to a modified solution, obtained by means of the Lagrange multipliers method.

In many cases, it is interesting to obtain the constrained filter by an adaptive procedure in order to provide useful methods for real-time operations and for non-stationary environment. In this sense, we propose in this work a new recursive algorithm which updates the constrained filter by least-squares techniques. The algorithm is exact, stable and accurate, with a computational complexity proportional to NK ; N being the number of parameters and K the number of constraints.

The technique may be applied in several problems of signal processing, as: spatial filtering, adaptive arrays, spectral analysis and channel equalization. Finally, we employ the proposed algorithm in order to implement an adaptive filter with linear-phase property.

O problema de filtragem com restrições aparece quando se trata de obter um filtro ótimo, segundo um certo critério, sendo que seus parâmetros estão sujeitos a um conjunto de equações lineares. No caso de estrutura transversal, as equações de Wiener-Hopf fornecem os coeficientes que minimizam um critério de erro quadrático. A introdução de restrições conduzem à uma solução modificada, em relação à de Wiener, obtida pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

Em diversos casos, é conveniente encontrar os coeficientes do filtro por técnicas adaptativas visando uma operação em tempo real ou num contexto não-estacionário. Nesse sentido, propõe-se neste trabalho um novo algoritmo recursivo que adapta o filtro com restrições por mínimos quadrados. O algoritmo é exato, estável e preciso, com uma complexidade proporcional a NK ; sendo N o número de parâmetros e K o de restrições.

A técnica estudada possui aplicações em diversos problemas de processamento de sinais, tais como: processamento espacial, antenas adaptativas, análise espectral e equalização de um canal de transmissão. Finalmente, utilizamos o algoritmo proposto para implementar um filtro adaptativo mantendo a propriedade de fase linear.

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - FILTRAGEM ÓTIMA COM RESTRIÇÕES LINEARES	3
2.1 - Filtragem Ótima	3
2.1.1 - O Filtro de Wiener	4
2.1.2 - O Método dos Mínimos Quadrados	5
2.1.3 - Predição Linear	6
2.2 - O Filtro Ótimo com Restrições Lineares	8
2.2.1 - O Método dos Multiplicadores de Lagrange	9
2.2.2 - O Filtro de Wiener com Restrições Lineares	10
2.2.3 - Predição Linear com Restrições	12
2.2.4 - O Método dos Mínimos Quadrados com Restrições Lineares	14
2.3 - Conclusões	15
3 - FILTRAGEM ADAPTATIVA COM RESTRIÇÕES LINEARES	16
3.1 - Filtragem Adaptativa por Mínimos Quadrados	16
3.1.1 - Lema de Inversão de Matrizes	17
3.1.2 - O Algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo	18
3.1.3 - O Algoritmo dos Mínimos Quadrados Rápido	21
3.2 - O Filtro Adaptativo com Restrições Lineares	22
3.2.1 - O Algoritmo dos Mínimos Quadrados Proposto	22
3.3 - Conclusões	32
4 - APLICAÇÕES	33
4.1 - Recuperação e Anulação de Raias Espectrais	33

4.2 - O Estimador Espectral de Variância Mínima	38
4.3 - O Filtro de Fase Linear	46
4.4 - Conclusões	52
5 - CONCLUSÕES E EXTENSÕES	53
REFERÊNCIAS	55

Restrições lineares são incorporadas a um processo de filtragem quando, na otimização de um determinado critério, os valores dos coeficientes do filtro estão sujeitos a um conjunto de equações lineares.

As restrições permitem pré-estabelecer um determinado comportamento para a resposta do filtro, tornando-o adequado a diversas aplicações. Filtros com restrições são empregados, por exemplo, em processamento espacial [14] e aplicações de telecomunicações tais como equalização, recuperação de portadora [16,17] e, principalmente, antenas adaptativas [7,9]. Além disso, o princípio de filtragem ótima com restrições é básico para análise espectral pelo método da variância mínima [4]. Em muitas destas aplicações as restrições são utilizadas para seleccionar e eliminar raias espectrais em meio ao ruído. Para aplicações em tempo real ou nos casos não-estacionários é desejável, ou mesmo necessário, obter o filtro com restrições por técnicas adaptativas. Neste sentido, os algoritmos com restrições já apresentados na literatura se baseiam no método do gradiente (LMS¹) [1]. Conseqüentemente, apresentam limitações no que diz respeito à taxa de convergência e à natureza do sinal processado.

Visando superar estas limitações e melhorar significativamente o desempenho dos filtros adaptativos com restrições, desenvolvemos neste trabalho um algoritmo recursivo baseado no método dos mínimos quadrados. Este algoritmo é exato e preserva as propriedades de alta taxa de convergência e precisão próprias dos algoritmos dos mínimos quadrados, recursivo (RLS²) e rápido (FLS³), empregados classicamente em filtragem adaptativa sem restrições.

O algoritmo é desenvolvido a partir da solução ótima obtida pelo método dos multiplicadores de Lagrange associado ao critério de mínimos quadrados.

¹"Least-Mean Square".

²"Recursive Least-Square".

³"Fast Least-Square".

A utilização do lema de inversão de matrizes e de recursões decorrentes do próprio algoritmo RLS permitem desenvolver um procedimento recursivo para o cálculo dos coeficientes ótimos no caso em que lhes é imposto um conjunto de restrições.

Antes de apresentar o procedimento adaptativo, abordamos no Capítulo 2 o problema de filtragem ótima e o estendemos ao caso com restrições lineares. Deste modo, é revista neste capítulo a teoria de Wiener e o método dos mínimos quadrados assim como as modificações devidas à incorporação de restrições.

Tendo visto os métodos de obtenção do filtro ótimo, passamos no Capítulo 3 ao problema de filtragem adaptativa propriamente dito. Inicialmente, apresentamos uma revisão dos algoritmos dos mínimos quadrados recursivo e rápido para filtragem sem restrições. Em seguida, tendo estabelecido a base teórica necessária, desenvolvemos um algoritmo para filtros com restrições lineares baseado no método dos mínimos quadrados. Este algoritmo constitui a principal contribuição do trabalho.

O Capítulo 4 verifica o desempenho do algoritmo proposto aplicando-o ao problema de recuperação e anulação de raias espectrais. Também traz outras duas contribuições:

- A implementação adaptativa do método de análise espectral por variância mínima;
- A proposta do filtro adaptativo com fase linear, utilizando restrições.

Estas abordagens mostram todo o interesse da filtragem com restrições, uma vez que ela permite conferir aos sinais e sistemas envolvidos certas propriedades importantes em diversas aplicações.

FILTRAGEM ÓTIMA COM RESTRIÇÕES LINEARES

Um filtro adaptativo é um sistema cujos parâmetros se alteram no tempo, visando atingir um conjunto de valores, ditos ótimos, que obedecem a um dado critério. Esse processo de otimização ocorre na medida em que os sinais envolvidos são recebidos e tratados ("on line"). Assim, antes de entrar no contexto adaptativo, é conveniente estudar soluções analíticas para o filtro ótimo que se quer obter. Estas soluções apresentam uma formulação bastante simples quando se trata de um filtro a resposta impulsional finita e de estrutura transversal, cujos parâmetros são otimizados segundo um critério do tipo quadrático.

Nesse sentido é que apresentamos, neste capítulo, uma revisão sobre a teoria de filtragem de Wiener e sobre o método de mínimos quadrados. Nosso objetivo é, uma vez estabelecidas as soluções destes métodos, estendê-los ao caso onde um conjunto de restrições são impostas ao problema. Dessa forma, chegamos à solução analítica para a filtragem ótima com restrições, que constitui a base teórica necessária para a posterior proposta de um algoritmo adaptativo.

2.1 FILTRAGEM ÓTIMA

O problema da filtragem ótima se caracteriza pela obtenção de um filtro (h) que forneça, a partir de um dado sinal de entrada (x), uma estimativa (\hat{d}) de um determinado sinal desejado (d) ou de referência. A solução deste problema, representado na Figura 2.1, passa pela minimização de um erro de estimação (e) dado por:

$$e(i) = d(i) - \hat{d}(i) \quad (2.1)$$

O filtro que fornece o menor erro, segundo o critério de minimização adotado, é dito *ótimo*. Neste contexto, é especialmente importante o chamado filtro de Wiener, que associa um critério do tipo quadrático à uma estrutura transversal do filtro, conforme iremos ver a seguir.

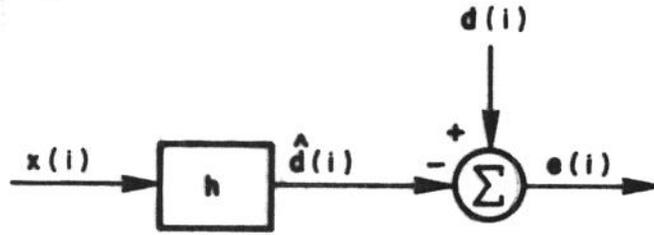


Figura 2.1: Formulação do problema de filtragem ótima.

2.1.1 O FILTRO DE WIENER

O filtro de Wiener, mostrado na Figura 2.2, minimiza um índice de desempenho $\mathcal{J}(h)$, definido como o valor médio quadrático do sinal de erro:

$$\mathcal{J}(h) = E \left\{ [e(i)]^2 \right\} \quad (2.2)$$

Sendo o sinal de saída dado por

$$\hat{d}(i) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(i-k) \quad (2.3)$$

a Eq. (2.1) é reescrita como

$$e(i) = d(i) - \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(i-k) \quad (2.4)$$

Em notação vetorial,

$$e(i) = d(i) - \mathbf{x}^t(i)\mathbf{h} \quad (2.5)$$

onde

$$\mathbf{x}^t(i) = \left[x(i) \ x(i-1) \ \dots \ x(i-N+1) \right] \quad (2.6)$$

é formado pelas N amostras de entrada do instante $i-N+1$ a i e

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

é formado pelos coeficientes do filtro.

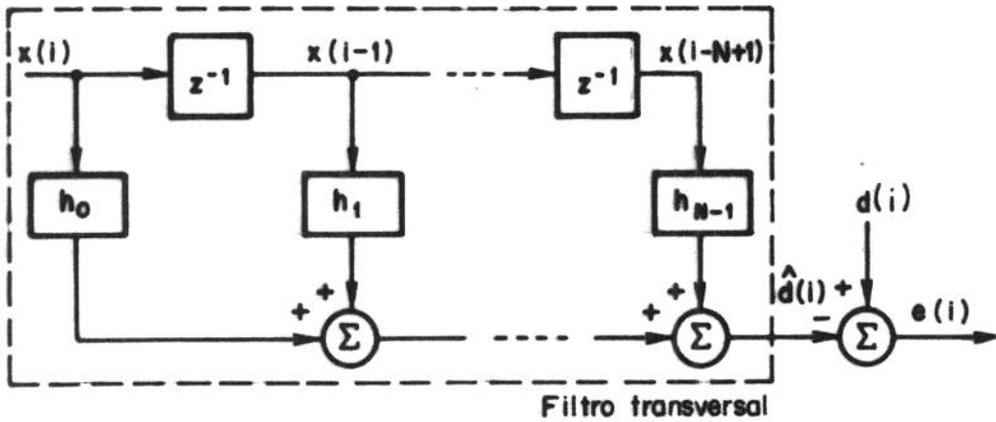


Figura 2.2: Filtro de Wiener.

Sejam o vetor $\mathbf{x}(i)$ e o escalar $d(i)$ modelados como processos estocásticos estacionários e supostos com média zero. O vetor de coeficientes, ótimo no sentido médio quadrático, é [2]

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{R}_{xx} = E \left\{ \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^t(i) \right\} \quad (2.9)$$

é a matriz de autocorrelação de $\mathbf{x}(i)$ e

$$\mathbf{p}_{xd} = E \left\{ \mathbf{x}(i)d(i) \right\} \quad (2.10)$$

é o vetor de correlação cruzada entre $\mathbf{x}(i)$ e $d(i)$.

O filtro de Wiener fornece, na média, a melhor estimativa do sinal desejado para todas realizações do processo de entrada. A solução dada por (2.8) é única e requer o conhecimento "a priori" das estatísticas dos sinais envolvidos, definidas nas Eqs. (2.9) e (2.10).

2.1.2 O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Geralmente, na prática, não se dispõe de \mathbf{R}_{xx} e \mathbf{p}_{xd} , mas apenas de um conjunto de dados provenientes de uma realização de cada processo envolvido. Para contornar esta dificuldade empregamos médias temporais.

Sejam $\mathbf{x}(i)$ e $d(i)$ dois conjuntos de n dados. Ao invés de se efetuar médias estatísticas, utiliza-se como índice de desempenho a soma dos erros

quadrados, para obter os coeficientes do filtro:

$$\mathcal{J}[h(n)] = \sum_{l=1}^n [e(l)]^2 \quad (2.11)$$

O método é conhecido como *mínimos quadrados* e a solução ótima para $h(n)$ é [2]

$$h(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{p}_{xd}(n) \quad (2.12)$$

onde

$$\mathbf{R}_{xx}(n) = \sum_{l=1}^n \mathbf{x}(l)\mathbf{x}^t(l) \quad (2.13)$$

e

$$\mathbf{p}_{xd}(n) = \sum_{l=1}^n \mathbf{x}(l)d(l) \quad (2.14)$$

A menos de uma divisão por um fator n , as Eqs. (2.13) e (2.14) nada mais são que estimativas temporais das grandezas estatísticas definidas nas Eqs. (2.9) e (2.10). Isto é, o método dos mínimos quadrados é a contrapartida determinística da filtragem de Wiener. Entretanto, diferentes filtros são obtidos para diferentes coleções de dados, a não ser que os processos $\mathbf{x}(l)$ e $d(l)$ sejam ergódicos e se disponha de infinitos dados ($n \rightarrow \infty$). Neste caso, para qualquer realização dos processos, a solução equivale à de Wiener.

Os limites do somatório nas Eqs. (2.13) e (2.14) definem um método de estimação conhecido como *pré-janelamento*. Sem perda de generalidade, outros métodos são utilizados desde que a matriz de autocorrelação estimada, $\mathbf{R}_{xx}(n)$, seja não-singular. A literatura traz também os métodos conhecidos como: *pós-janelamento*, *autocorrelação* e *covariância* [2,4].

2.1.3 PREDIÇÃO LINEAR

Um caso particular do filtro de Wiener diz respeito à estimativa da própria sequência de entrada a partir de um conjunto de amostras conhecidas. Esta operação é chamada *predição linear*, sendo classificada como *progressiva* ("forward") quando se estimam amostras futuras, ou *regressiva* ("backward") no caso de amostras passadas.

A Figura 2.3 mostra o caso progressivo. A estimativa da próxima amostra $\hat{x}(l+1)$ é

$$\hat{x}(l+1) = \sum_{k=1}^N a_k x(l-k+1) \quad (2.15)$$

O sinal de erro:

$$e_a(i+1) = x(i+1) - \mathbf{x}^t(i)\mathbf{a} \quad (2.16)$$

é chamado *erro de predição progressiva* onde \mathbf{a} é o vetor que contém os parâmetros a_k . O filtro que fornece diretamente este erro a partir da entrada $x(i)$ é dito *filtro de erro de predição progressiva*.

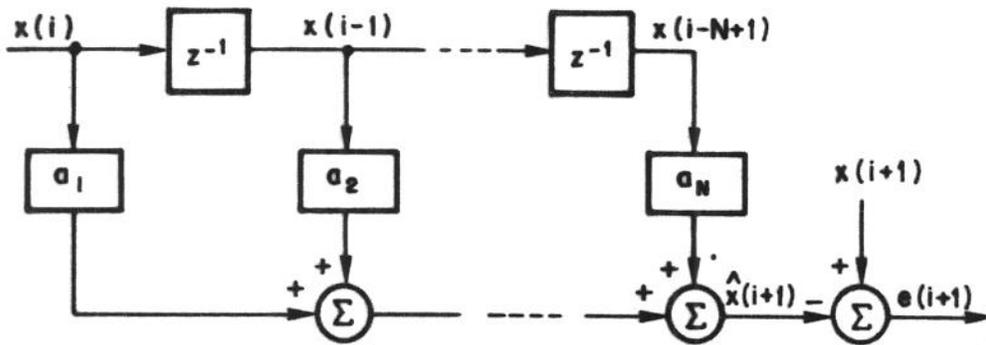


Figura 2.3: Predição linear progressiva.

Utilizando-se a solução de Wiener para este caso, chega-se aos coeficientes ótimos de predição, dados por:

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xx} \quad (2.17)$$

onde

$$\mathbf{r}_{xx} = E \left\{ \mathbf{x}(i)\mathbf{x}(i+1) \right\} \quad (2.18)$$

é o vetor dos elementos de autocorrelação do sinal $\mathbf{x}(i)$.

Os coeficientes ótimos b_k do preditor regressivo são aqueles que minimizam o erro dado por:

$$e_b(i) = x(i-N) - \sum_{k=1}^N b_k x(i-k+1) \quad (2.19)$$

ou seja, trata-se de estimar, a partir das amostras contidas no filtro, a imediatamente anterior.

A solução, obtida de maneira similar ao preditor progressivo, é dada por:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xx}^B \quad (2.20)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{xx}^B &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{xx} \\ &= \mathbf{J} \mathbf{r}_{xx} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Verifica-se ainda que, para sinais estacionários:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}^B = \mathbf{J} \mathbf{a} \quad (2.22)$$

Da mesma forma com que foi feito no caso geral da filtragem de Wiener, os preditores ótimos podem também ser estimados pelo método dos mínimos quadrados quando se dispõe de uma coleção de dados $x(t)$.

A solução é obtida por um procedimento semelhante, mudando apenas o critério que passa a envolver médias temporais. Temos então, para n dados considerados:

$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{r}_{xx}(n) \quad (2.23)$$

e

$$\mathbf{b}(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{r}_{xx}^B(n) \quad (2.24)$$

onde

$$\mathbf{r}_{xx}(n) = \sum_{t=1}^n \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+1) \quad (2.25)$$

Tendo estabelecido as relações fundamentais para a filtragem ótima, podemos ver agora o efeito da incorporação de restrições lineares ao problema.

2.2 O FILTRO ÓTIMO COM RESTRIÇÕES LINEARES

O problema de filtragem ótima com restrições lineares consiste em minimizar o índice de desempenho $\mathcal{J}(\mathbf{h})$ adotado, sendo que os coeficientes do filtro devem satisfazer um conjunto de equações lineares. Assim, chega-se à seguinte formulação:

$$\underset{\mathbf{h}}{\text{Minimizar } \mathcal{J}(\mathbf{h})} \text{ sujeito a } \mathbf{c}_k^t \mathbf{h} = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \text{ e } K < N \quad (2.26)$$

O conjunto de K restrições pode ser incorporado na seguinte relação matricial:

$$\mathbf{C}^t \mathbf{h} = \mathbf{f} \quad (2.27)$$

onde \mathbf{C} é uma matriz $N \times K$ dada por:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_K \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

e

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Se $K=1$ a restrição é denominada vetorial, senão é dita matricial.

Assumimos que C tem "rank" cheio e $K < N$, o que implica em "rank" igual a K . Assim, as K restrições são linearmente independentes e a Eq. (2.27) possui, obviamente, mais de uma solução em h . A solução desejada é aquela que minimiza o índice de desempenho e sua solução é apresentada a seguir.

2.2.1 O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE [2]

Inicialmente, redefinimos o conjunto de restrições por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(h) &= c_k^t h + h^t c_k - 2f_k \\ &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \text{ e } K < N \end{aligned} \quad (2.30)$$

O sistema de $N+K$ equações simultâneas

$$\frac{\partial \mathcal{J}(h)}{\partial h} - \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{\partial \mathcal{F}_k(h)}{\partial h} = 0 \quad (2.31a)$$

$$\mathcal{F}_k(h) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \text{ e } K < N \quad (2.31b)$$

define a solução ótima para h e para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$. Tais escalares são chamados *multiplicadores de Lagrange*.

Quando somente uma restrição linear

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h) &= c^t h + h^t c - 2f \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

é incorporada à otimização de $\mathcal{J}(h)$, a solução é dada pelo sistema de $N+1$ equações simultâneas

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} - \lambda \frac{\partial \mathcal{S}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0} \quad (2.33a)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{h}) = 0 \quad (2.33b)$$

2.2.2 O FILTRO DE WIENER COM RESTRIÇÕES LINEARES

O filtro de Wiener com restrições lineares minimiza o valor quadrático médio do sinal de erro, sendo que o vetor de coeficientes está sujeito às condições dadas em (2.27). A partir da definição do critério de Wiener e da Eq. (2.5), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{h}) = E \left\{ [d(t)]^2 \right\} - E \left\{ d(t)\mathbf{x}^t(t) \right\} \mathbf{h} - \mathbf{h}^t E \left\{ \mathbf{x}(t)d(t) \right\} + \\ + \mathbf{h}^t E \left\{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^t(t) \right\} \mathbf{h} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Reconhecemos, na equação acima, que a primeira esperança é igual à variância do sinal desejado. As restantes foram definidas nas Eqs. (2.9) e (2.10). Assim, a Eq. (2.34) pode ser reescrita como

$$\mathcal{J}(\mathbf{h}) = \sigma_d^2 - \mathbf{p}_{xd}^t \mathbf{h} - \mathbf{h}^t \mathbf{p}_{xd} + \mathbf{h}^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} \quad (2.35)$$

Derivando $\mathcal{J}(\mathbf{h})$ e $\mathcal{S}_k(\mathbf{h})$ [Eq. (2.30)] em relação ao vetor de coeficientes, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = -2\mathbf{p}_{xd} + 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} \quad (2.36)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{S}_k(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{c}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \text{ e } K < N \quad (2.37)$$

Substituindo as Eqs. (2.36) e (2.37) na Eq. (2.31a), temos

$$-2\mathbf{p}_{xd} + 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} - 2 \sum_{k=1}^K \lambda_k \mathbf{c}_k = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

ou

$$-\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} - \mathbf{CA} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

onde o vetor:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_K \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

é formado pelos multiplicadores de Lagrange. Da Eq. (2.39) deduzimos

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} = \mathbf{p}_{xd} + \mathbf{C}\Lambda \quad (2.41)$$

Portanto,

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} [\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{C}\Lambda] \quad (2.42)$$

Da substituição da Eq. (2.42) na Eq. (2.27), decorre

$$\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} [\mathbf{p}_{xd} + \mathbf{C}\Lambda] = \mathbf{f} \quad (2.43)$$

A partir da Eq. (2.43), temos

$$\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} + \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}\Lambda = \mathbf{f} \quad (2.44)$$

Daf obtemos

$$\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}\Lambda = \mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} \quad (2.45)$$

Da Eq. (2.45), chega-se então à solução de Λ :

$$\Lambda = \left[\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \left[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} \right] \quad (2.46)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (2.46) na Eq. (2.42), o vetor ótimo do filtro com restrições lineares é

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} + \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \left\{ \left[\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{f} - \left[\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} \right\} + \left\{ \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \left[\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \right\} \left[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

O termo delimitado pelo primeiro par de chaves é a solução do filtro de Wiener sem restrições. O fator delimitado pelo último par de colchetes é a correção, no espaço \mathcal{R}^K , necessária para que aquela solução possa atender às restrições de C . Uma vez que a matriz C^t é de dimensão $K \times N$ e tem "rank" K , pode-se afirmar que C^t possui inversas à direita [5]. As constatações acima permitem concluir que o fator delimitado pelo segundo par de chaves na Eq. (2.47) é um operador linear, do espaço \mathcal{R}^K em \mathcal{R}^N , que corresponde a uma matriz inversa à direita de C^t , isto é:

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1} C \left[C^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} C \right]^{-1} = \left[C^t \right]^{-1d} \quad (2.48)$$

onde $^{-1d}$ denota inversão à direita, ou seja, a pré-multiplicação de $[C^t]^{-1d}$ por C^t resulta na identidade. Além disso, a pré-multiplicação da Eq. (2.47) por C^t resulta em f , provando que h atende as restrições.

De fato, existem obviamente diferentes matrizes inversas à direita de C^t que satisfazem a Eq. (2.27), uma vez que o número de restrições é menor do que o de coeficientes do filtro. Entretanto a expressão dada em (2.48) é a única solução que, obedecendo as restrições, minimiza também o critério do erro quadrático.

Caso haja uma única restrição, a solução é dada por:

$$\begin{aligned} h &= \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} + \mathbf{R}_{xx}^{-1} \left\{ \frac{f - \mathbf{c}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd}}{\mathbf{c}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{c}} \right\} \mathbf{c} \\ &= \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} + \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{c}}{\mathbf{c}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{c}} \left[f - \mathbf{c}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Como se podia esperar, tal resultado corresponde à substituição da matriz C , na Eq. (2.47), pelo vetor c que representa a restrição única.

2.2.3 PREDIÇÃO LINEAR COM RESTRIÇÕES

Conforme definido na Secção 2.1.3, o filtro de erro de predição fornece na saída o sinal de erro que queremos minimizar. Neste caso, não há propriamente uma referência $d(i)$ mas o erro é obtido diretamente como uma combinação linear das amostras do sinal de entrada. Este problema, com a incorporação das

restrições, é formulado a seguir:

$$\underset{\mathbf{h}}{\text{minimizar}} E \left\{ [e(t)]^2 \right\} \text{ sujeito às restrições } \mathbf{c}_k^t \mathbf{h}(n) = f_k, \\ k = 1, 2, \dots, K \text{ e } K < N \quad (2.50)$$

A solução do problema começa com a expansão do índice de desempenho que, neste caso, é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{h}) &= E \left\{ [e(t)]^2 \right\} \\ &= E \left\{ [\mathbf{x}^t(t)\mathbf{h}]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \mathbf{h}^t \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^t(t)\mathbf{h} \right\} \\ &= \mathbf{h}^t E \left\{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^t(t) \right\} \mathbf{h} \\ &= \mathbf{h}^t \mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Derivando-se o critério em relação aos parâmetros do filtro, obtemos:

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} \quad (2.52)$$

De modo similar ao procedimento anterior, aplicamos o método dos multiplicadores de Lagrange obtendo o vetor de coeficientes ótimos

$$\mathbf{h} = \left\{ \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \left[\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1} \right\} \mathbf{f} \quad (2.53)$$

É interessante deter-se um pouco no significado da equação acima. De fato, uma vez que estamos minimizando a variância do sinal de saída e sendo este sinal obtido por:

$$e(t) = \mathbf{x}^t(t)\mathbf{h} \quad (2.54)$$

é evidente que a solução elementar $\mathbf{h}=\mathbf{0}$ é ótima. Em outras palavras, o ponto de mínimo da superfície de erro quadrático $\mathcal{J}(\mathbf{h})$ encontra-se na origem. Assim, é a própria imposição das restrições que nos leva a um filtro ótimo não-elementar; ou seja, o filtro ótimo é dado pelo vetor \mathbf{h} que satisfaz (2.27). Deste modo,

conclue-se que

$$\mathbf{h} = \left[\mathbf{C}^t \right]^{-1d} \mathbf{f} \quad (2.55)$$

onde $\left[\mathbf{C}^t \right]^{-1d}$ é dada por (2.48), o que nos leva a (2.53).

Outra maneira ainda de interpretar o problema é encarar o filtro de erro de predição como um filtro de Wiener com sinal de referência nulo. Desta forma, chega-se de (2.47) a (2.53) pela simples observação de que $\mathbf{p}_{xd} = 0$.

Para o caso particular onde impomos somente uma restrição ao filtro, chega-se à solução ótima:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{c}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{c}} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{c} \quad (2.56)$$

2.2.4 O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS COM RESTRIÇÕES LINEARES

Da mesma forma que na filtragem de Wiener, podemos acrescentar restrições ao método dos mínimos quadrados, formulando o problema da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{h}(n)}{\text{minimizar}} \sum_{l=1}^n [e(l)]^2 \text{ sujeito às restrições } \mathbf{c}_k^t \mathbf{h}(n) = f_k, \\ k = 1, 2, \dots, K \text{ e } K < N \end{aligned} \quad (2.57)$$

Considerando primeiramente um erro de estimação dado por:

$$e(l) = d(l) - \sum_{k=0}^{N-1} h_k x(l-k) \quad (2.58)$$

a solução ótima é

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{p}_{xd}(n) + \left\{ \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{C} \left[\mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{C} \right]^{-1} \right\} \left[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{p}_{xd}(n) \right] \quad (2.59)$$

Esta solução é obtida de maneira exatamente análoga ao caso do filtro de Wiener, mudando-se apenas o critério de (2.2) para (2.11). Em lugar de \mathbf{R}_{xx} e

p_{xd} , empregamos as estimativas temporais $R_{xx}(n)$ e $p_{xd}(n)$. Temos aqui, então, a contrapartida determinística da teoria de Wiener com restrições lineares.

Finalmente, no caso da predição com restrições, onde minimizamos o sinal de saída, temos:

$$h(n) = R_{xx}^{-1}(n)C \left[C^T R_{xx}^{-1}(n)C \right]^{-1} f \quad (2.60)$$

Quando a restrição é vetorial basta substituir C por c nas Eqs. (2.59) e (2.60).

2.3 CONCLUSÕES

Neste capítulo revimos a teoria de Wiener, bem como a aplicação do método dos mínimos quadrados, para o problema de filtragem ótima. Em seguida, mostramos como estender esses métodos ao caso onde um conjunto de restrições lineares é imposto aos parâmetros que queremos otimizar. Assim, procuramos oferecer uma visão unificada do problema, explicitando algumas relações entre os casos com e sem restrições.

As formulações derivadas neste capítulo constituem a base fundamental para o seguinte, onde procuraremos obter o filtro ótimo com restrições através de técnicas adaptativas. Em particular será proposto um algoritmo com base no método dos mínimos quadrados.

 FILTRAGEM ADAPTATIVA COM RESTRIÇÕES LINEARES

O objetivo deste capítulo é estudar o problema da filtragem com restrições num contexto adaptativo. Neste sentido, iniciamos com uma revisão dos algoritmos clássicos de mínimos quadrados, sobre os quais iremos nos basear. Em seguida, propomos um novo algoritmo para o caso em que restrições lineares são impostas ao filtro.

É demonstrado que os coeficientes ótimos são obtidos, sem aproximações e de forma recursiva, a partir de dois vetores de ganho de adaptação. O primeiro independe das restrições e é obtido pelo já conhecido algoritmo FLS; o segundo se calcula a partir do lema de inversão de matrizes e leva em conta as restrições impostas.

O algoritmo proposto preserva as propriedades de alta taxa de convergência, precisão e robustez quanto ao sinal processado, próprias dos algoritmos clássicos.

3.1 FILTRAGEM ADAPTATIVA POR MÍNIMOS QUADRADOS

Os algoritmos adaptativos que iremos apresentar baseiam-se no critério dos mínimos quadrados, já apresentado no capítulo anterior. Com a finalidade de seguir as não estacionaridades de um processo, um fator de esquecimento exponencial é introduzido no critério; assim:

$$J[h(n)] = \sum_{i=1}^n W^{n-i} [d(i) - \mathbf{x}^t(i)h(n)]^2 \quad (3.1)$$

sendo $0 \ll W < 1$.

A solução ótima no instante n é

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{p}_{xd}(n) \quad (3.2)$$

onde

$$\mathbf{R}_{xx}(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^t(i) \quad (3.3)$$

e

$$p_{xd}(n) = \sum_{l=1}^n W^{n-l} x(l)d(l) \quad (3.4)$$

O objetivo do algoritmo é então obter diretamente o vetor $h(n+1)$, de forma recursiva, a partir de $h(n)$.

A partir das definições acima, vemos que a matriz de autocorrelação pode ser obtida recursivamente por

$$R_{xx}(n+1) = W R_{xx}(n) + x(n+1)x^t(n+1) \quad (3.5)$$

enquanto temos para o vetor de correlação cruzada:

$$p_{xd}(n+1) = W p_{xd}(n) + x(n+1)d(n+1) \quad (3.6)$$

Das Eqs. (3.5) e (3.6), poder-se-iam obter os coeficientes ótimos no instante $(n+1)$ que são, obviamente, dados por

$$h(n+1) = R_{xx}^{-1}(n+1) p_{xd}(n+1) \quad (3.7)$$

Neste caso, faz-se necessário efetuar uma inversão de matriz a cada iteração no tempo. Entretanto, é possível desenvolver uma fórmula recursiva para o vetor $h(n+1)$, utilizando um resultado de álgebra matricial conhecido como *lema de inversão de matrizes*. Este lema, apresentado a seguir, nos permite uma recursão sobre a matriz de autocorrelação já invertida, necessária para obtenção dos coeficientes ótimos.

3.1.1 LEMA DE INVERSÃO DE MATRIZES

Sejam Z e S matrizes não singulares $M \times M$, Q uma matriz não singular $I \times I$, U uma matriz $M \times I$, e V uma matriz $I \times M$, tais que satisfaçam a equação

$$Z = S + UQV \quad (3.8)$$

Então a inversa da matriz Z , se existir, é dada por:

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= (S + UQV)^{-1} \\ &= S^{-1} - S^{-1}U \left(VS^{-1}U + Q^{-1} \right)^{-1} VS^{-1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se $U = V^t$, por substituição na Eq. (3.9),

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}\left(\mathbf{U}^t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{Q}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{U}^t\mathbf{S}^{-1} \quad (3.10)$$

Para o caso particular onde \mathbf{Q} é um escalar, \mathbf{U} um vetor $M \times 1$, denotado por \mathbf{u} , e \mathbf{V} um vetor $1 \times M$, denotado por \mathbf{v}^t , temos

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \mathbf{u}\mathbf{v}^t \quad (3.11)$$

e

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} - \frac{\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{v}^t\mathbf{S}^{-1}\right)}{1 + \mathbf{v}^t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}} \quad (3.12)$$

Ainda, neste caso, se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \mathbf{u}\mathbf{u}^t \quad (3.13)$$

e

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} - \frac{\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{u}^t\mathbf{S}^{-1}\right)}{1 + \mathbf{u}^t\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}} \quad (3.14)$$

3.1.2 O ALGORITMO DOS MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO (RLS)

Um procedimento recursivo de atualização dos coeficientes, sem inversão matricial, é conhecido como *O Algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo*.

De modo a utilizar o lema para efetuar a inversão da matriz $\mathbf{R}_{xx}(n)$, vamos considerar a Eq. (3.13), supondo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{R}_{xx}(n+1) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{W} \mathbf{R}_{xx}(n) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{x}(n+1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

temos então pela Eq. (3.14) que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) &= \frac{1}{\mathbf{W}} \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \frac{\frac{1}{\mathbf{W}} \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{x}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \frac{1}{\mathbf{W}} \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)}{1 + \mathbf{x}^t(n+1) \frac{1}{\mathbf{W}} \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{x}(n+1)} \\ &= \frac{1}{\mathbf{W}} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{x}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)}{\mathbf{W} + \mathbf{x}^t(n+1) \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{x}(n+1)} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde, definindo

$$\mathbf{g}(n+1) = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{x}(n+1)}{W + \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{x}(n+1)} \quad (3.17)$$

obtemos a recursão para $\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1)$

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) = \frac{1}{W} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \right] \quad (3.18)$$

Reorganizando a Eq. (3.17) de maneira que

$$\mathbf{g}(n+1) = \left\{ \frac{1}{W} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \right] \right\} \mathbf{x}(n+1) \quad (3.19)$$

e reconhecendo que o termo entre chaves da Eq. (3.19) é $\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1)$, dada em (3.18), temos

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1)\mathbf{x}(n+1) \quad (3.20)$$

A Eq. (3.20) é utilizada na obtenção recursiva dos coeficientes do filtro, dada a seguir.

Substituindo as Eqs. (3.6) e (3.18) na Eq. (3.7), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \frac{1}{W} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \right] \left[W \mathbf{p}_{xd}(n) + \mathbf{x}(n+1)d(n+1) \right] \\ &= \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{p}_{xd}(n) + \frac{1}{W} \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{x}(n+1)d(n+1) + \\ &\quad - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{p}_{xd}(n) + \\ &\quad - \frac{1}{W} \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{x}(n+1)d(n+1) \\ &= \mathbf{h}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n) + \\ &\quad + \frac{1}{W} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \right] \mathbf{x}(n+1)d(n+1) \\ &= \mathbf{h}(n) - \mathbf{g}(n+1)\hat{d}(n+1) + \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1)\mathbf{x}(n+1)d(n+1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

A partir da Eq. (3.20), temos

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)[d(n+1) - \hat{d}(n+1)] \quad (3.22)$$

onde, reconhecendo que

$$d(n+1) - \hat{d}(n+1) = e(n+1) \quad (3.23)$$

é o erro de estimação "a priori", obtemos a recursão:

$$h(n+1) = h(n) + g(n+1)e(n+1) \quad (3.24)$$

O vetor $g(n+1)$ é conhecido como *ganho de adaptação*. A Figura 3.1 ilustra este procedimento adaptativo.

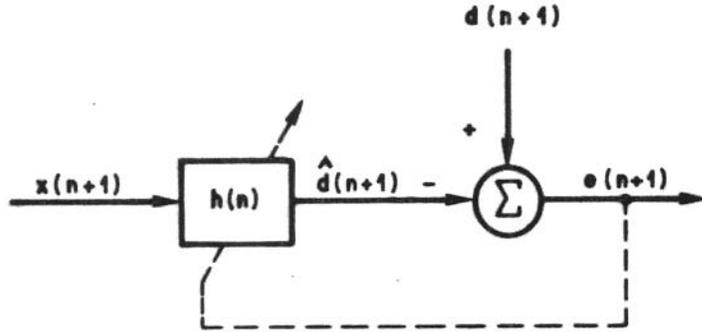


Figura 3.1: Filtro adaptativo.

O algoritmo dos mínimos quadrados recursivo reúne as Eqs. (3.17), (3.23), (3.24) e (3.18), nesta ordem. Uma vez que, no algoritmo RLS, a inversa da matriz de autocorrelação é obtida de maneira recursiva, ela deve ser inicializada com um valor diferente de zero. Uma inicialização recomendada [3] é

$$R_{xx}^{-1}(0) = \frac{1}{E_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & W^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

que corresponde à inversa da matriz de autocorrelação de uma seqüência

$$x(i) = \begin{cases} \left(W^{-N} E_0 \right)^{1/2} & , \text{ para } i = -N \\ 0 & , \text{ para } i \leq 0, i \neq -N \end{cases} \quad (3.26)$$

onde W e E_0 são constantes.

A seqüência de passos a cada iteração do algoritmo dos mínimos quadrados recursivo bem como sua inicialização é mostrada na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: O Algoritmo RLS.

► [Inicialização]

- (1) $\mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)$, de acordo com a Eq. (3.25).
- (2) $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$

► [Atualização]

- Ganho de adaptação:
 - (1)
$$\mathbf{g}(n+1) = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{x}(n+1)}{W + \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{x}(n+1)}$$
- Erro de estimação "a priori":
 - (2) $e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}^t(n)\mathbf{x}(n+1)$
- Coeficientes do filtro:
 - (3) $\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1)$
- Matriz inversa de autocorrelação:
 - (4)
$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) = \frac{1}{W} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \right]$$

Um total de $4N^2+4N$ multiplicações e 1 divisão são realizadas a cada iteração. A complexidade pode ser ainda reduzida se aproveitarmos as propriedades de simetria inerentes à matriz de autocorrelação.

Para diminuir mais significativamente o número de multiplicações, diferentes autores propuseram, há alguns anos, o algoritmo apresentado a seguir [8,12,13]. Este algoritmo obtém o vetor ganho de adaptação sem utilizar os cálculos matriciais contidos nas Eqs. (1) e (4) da Tabela 3.1.

3.1.3 O ALGORITMO DOS MÍNIMOS QUADRADOS RÁPIDO (FLS)

Os algoritmos rápidos são fundamentados na propriedade do deslocamento de $\mathbf{x}(n)$, isto é, o novo vetor $\mathbf{x}(n+1)$ é composto a partir de $\mathbf{x}(n)$, bastando para

isto o deslocamento de seus elementos, a introdução da nova amostra $x(n+1)$ e a remoção da amostra $x(n-N+1)$.

A primeira versão do algoritmo dos mínimos quadrados rápido é baseada nesta propriedade. Intuitivamente, o desenvolvimento do algoritmo fundamenta-se no fato de que toda a informação contida na matriz de autocorrelação, que intervém no cálculo do ganho de adaptação, pode ser obtida através dos erros e dos coeficientes de predição linear. Assim, é mais simples calcular esses parâmetros do que a matriz inversa, e, a partir deles, obter o ganho de adaptação.

A seqüência de operações do algoritmo rápido [3], que emprega apenas os erros de predição "a priori", é mostrada na Tabela 3.2, onde sua inicialização decorre da Eq. (3.25).

Um total de $10N+4$ multiplicações e 2 divisões são requeridas a cada iteração por esse algoritmo. A outra versão do algoritmo rápido [3], que emprega os erros de predição "a priori" e "a posteriori", requer $8N+10$ multiplicações e 3 divisões.

3.2 O FILTRO ADAPTATIVO COM RESTRIÇÕES LINEARES

A filtragem adaptativa com restrições já foi objeto de diversos trabalhos, a maioria relacionados com o problema de tratamento espacial e antenas adaptativas ("array processing"). Entretanto todos os algoritmos propostos são baseados em variações sobre o LMS [1,7,9] e, portanto, sujeitos às limitações deste algoritmo no que se refere à convergência e à dependência do sinal processado. De nosso conhecimento, não existe nenhum algoritmo derivado do RLS aplicado a este problema.

Visando superar as limitações dos algoritmos existentes e melhorar o desempenho da filtragem, desenvolvemos um algoritmo baseado no método dos mínimos quadrados, exposto a seguir.

3.2.1 O ALGORITMO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PROPOSTO

Como apresentado na Eq. (2.59), para cada conjunto de dados, a solução que minimiza a diferença entre o sinal desejado (ou de referência) e sua estimativa, quando obtida pelo critério dos mínimos quadrados, é

Tabela 3.2: O Algoritmo FLS.

► [Inicialização]

$$(1) \quad \mathbf{a}(0) = \mathbf{b}(0) = \mathbf{g}(0) = \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$$

$$(2) \quad E_a = E_0$$

► [Atualização]

- Erro de predição progressiva "a priori":

$$(1) \quad e_a(n+1) = \mathbf{x}(n+1) - \mathbf{a}^t(n)\mathbf{x}(n)$$

- Coeficientes de predição progressiva:

$$(2) \quad \mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) + \mathbf{g}(n)e_a(n+1)$$

- Erro de predição progressiva "a posteriori":

$$(3) \quad \varepsilon_a(n+1) = \mathbf{x}(n+1) - \mathbf{a}^t(n+1)\mathbf{x}(n)$$

- Energia do erro de predição progressiva:

$$(4) \quad E_a(n+1) = W E_a(n) + e_a(n+1)\varepsilon_a(n+1)$$

- Ganho de adaptação aumentado:

$$(5) \quad \mathbf{g}_1(n+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g}(n) \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon_a(n+1)}{E_a(n+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{a}(n+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p(n+1) \\ p(n+1) \end{bmatrix}$$

- Erro de predição regressiva "a priori":

$$(6) \quad e_b(n+1) = \mathbf{x}(n+1-N) - \mathbf{b}^t(n)\mathbf{x}(n+1)$$

- Ganho de adaptação:

$$(7) \quad \mathbf{g}(n+1) = \frac{1}{1 - p(n+1)e_b(n+1)} \begin{bmatrix} p(n+1) + p(n+1)\mathbf{b}(n) \end{bmatrix}$$

- Coeficientes de predição regressiva:

$$(8) \quad \mathbf{b}(n+1) = \mathbf{b}(n) + \mathbf{g}(n+1)e_b(n+1)$$

- Erro de estimação "a priori":

$$(9) \quad e(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}^t(n)\mathbf{x}(n+1)$$

- Atualização dos coeficientes do filtro:

$$(10) \quad \mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)e(n+1)$$

$$h(n) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{p}_{xd}(n) + \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{C}\left[\mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{C}\right]^{-1}\left[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n)\mathbf{p}_{xd}(n)\right] \quad (3.27)$$

Para atualizar os coeficientes de um filtro no instante seguinte, quando uma nova amostra torna-se disponível, temos

$$h(n+1) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1)\mathbf{p}_{xd}(n+1) + \Gamma(n+1)\left[\mathbf{C}^t\Gamma(n+1)\right]^{-1}\left[\mathbf{f} - \mathbf{C}^t\mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1)\mathbf{p}_{xd}(n+1)\right] \quad (3.28)$$

onde

$$\Gamma(n+1) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1)\mathbf{C} \quad (3.29)$$

Analogamente ao caso sem restrições, empregamos um fator de esquecimento em $\mathbf{R}_{xx}(n+1)$ e $\mathbf{p}_{xd}(n+1)$ para o acompanhamento de processos não-estacionários. Demonstraremos que, mesmo com a incorporação de restrições, ainda é possível obter de forma exata os coeficientes ótimos por cálculos recursivos.

Utilizando a definição (3.29) e a Eq. (4) do algoritmo RLS (Tabela 3.1), temos que $\Gamma(n+1)$ pode ser obtido por:

$$\Gamma(n+1) = \frac{1}{W} \left[\Gamma(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n) \right] \quad (3.30)$$

sendo $\mathbf{g}(n+1)$ dado pela Eq. (1) da Tabela 3.1. Uma maneira eficiente de efetuar esta recursão é calcular o vetor $\mathbf{g}(n+1)$ através do algoritmo FLS (Tabela 3.2).

Podemos ainda mostrar que na Eq. (3.28) a inversa de $\mathbf{C}^t\Gamma(n+1)$ pode também ser obtida recursivamente. Pré-multiplicando a Eq. (3.30) por \mathbf{C}^t obtemos

$$\mathbf{C}^t\Gamma(n+1) = \frac{1}{W} \left[\mathbf{C}^t\Gamma(n) - \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n) \right] \quad (3.31)$$

Identificando na equação os termos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{C}^t\Gamma(n+1) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{C}^t\Gamma(n) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1) \\ \mathbf{v}^t &= \mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ela pode ser reescrita como

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{W} \left[\mathbf{S} + \mathbf{u}\mathbf{v}^t \right] \quad (3.33)$$

A partir da Eq. (3.12), sua inversa é

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= W \left[S + uv^t \right]^{-1} \\ &= W \left[S^{-1} - \frac{(S^{-1}u)(v^t S^{-1})}{1 + v^t S^{-1}u} \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Temos, então, que

$$\left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} = W \left\{ \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} + \frac{\left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t g(n+1) x^t(n+1) \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1}}{1 - x^t(n+1) \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t g(n+1)} \right\} \quad (3.35)$$

Definindo na equação acima o vetor $l(n+1)$ por

$$l(n+1) = \frac{\left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t g(n+1)}{1 - x^t(n+1) \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t g(n+1)} \quad (3.36)$$

a Eq. (3.35) pode ser rescrita como

$$\left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} = W \left\{ \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} + l(n+1) x^t(n+1) \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} \right\} \quad (3.37)$$

A Eq. (3.37) nos dá diretamente uma recursão sobre a matriz já invertida $\left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1}$, onde também evitamos a pré-multiplicação de $\Gamma(n+1)$ por C^t .

Com a intenção de obter finalmente uma expressão recursiva para $h(n+1)$, substituiremos as Eqs. (3.6), (3.18), (3.30) e (3.37) na Eq. (3.28). Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} h(n+1) &= R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) - g(n+1) x^t(n+1) R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) + \\ &+ R_{xx}^{-1}(n+1) x(n+1) d(n+1) + \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} f + \\ &- g(n+1) x^t(n+1) \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} f + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + W \Gamma(n+1)l(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} f + \\
 & - \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) + \\
 & + g(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) + \\
 & - W \Gamma(n)l(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) + \\
 & - \Gamma(n+1) \left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n+1)x(n+1)d(n+1) + \\
 & + \Gamma(n+1) \left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} C^t g(n+1)x^t(n+1)R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Reagrupando alguns termos, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 h(n+1) = & \left\{ R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) + \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} f - \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) \right\} + \\
 & - g(n+1)x^t(n+1) \left\{ R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) + \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} f + \right. \\
 & \left. - \Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) \right\} + R_{xx}^{-1}(n+1)x(n+1)d(n+1) + \\
 & + W \Gamma(n+1)l(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} f + \\
 & - W \Gamma(n)l(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n) + \\
 & - \Gamma(n+1) \left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n+1)x(n+1)d(n+1) + \\
 & + \Gamma(n+1) \left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} C^t g(n+1)x^t(n+1)R_{xx}^{-1}(n) p_{xd}(n)
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Reconhecendo na Eq. (3.39) a solução ótima correspondente ao instante anterior, temos

$$\begin{aligned}
 h(n+1) = & h(n) - g(n+1)x^t(n+1)h(n) + R_{xx}^{-1}(n+1)x(n+1)d(n+1) + \\
 & + W \Gamma(n+1)l(n+1)x^t(n+1)\Gamma(n) \left[C^t \Gamma(n) \right]^{-1} f +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - W \Gamma(n) l(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{p}_{xd}(n) + \\
 & - \Gamma(n+1) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) \mathbf{x}(n+1) d(n+1) + \\
 & + \Gamma(n+1) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{p}_{xd}(n)
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Podemos identificar o vetor $l(n+1)$ no último termo da Eq. (3.40), para isto, vamos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 l(n+1) &= \frac{\left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)}{1 - \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)} \\
 &= \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1) + l(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1) \\
 &= \left\{ \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} + l(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \right\} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Assim, a partir da Eq. (3.37), obtemos que

$$l(n+1) = \frac{1}{W} \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{g}(n+1) \tag{3.42}$$

Pela Eq. (3.42) podemos reescrever a Eq. (3.40) como

$$\begin{aligned}
 h(n+1) &= h(n) - \mathbf{g}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) h(n) + \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) \mathbf{x}(n+1) d(n+1) + \\
 & + W \Gamma(n+1) l(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) \left\{ \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{p}_{xd}(n) + \right. \\
 & + \Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{f} - \Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n) \mathbf{p}_{xd}(n) \left. \right\} + \\
 & - \Gamma(n+1) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) \mathbf{x}(n+1) d(n+1)
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Novamente, reconhecendo $h(n)$ na equação acima, temos

$$\begin{aligned}
 h(n+1) &= h(n) - \mathbf{g}(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) h(n) + \mathbf{R}_{xx}^{-1}(n+1) \mathbf{x}(n+1) d(n+1) + \\
 & + W \Gamma(n+1) l(n+1) \mathbf{x}^t(n+1) h(n) +
 \end{aligned}$$

$$- \Gamma(n+1) \left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} C^t R_{xx}^{-1}(n+1) x(n+1) d(n+1) \quad (3.44)$$

A partir da Eq. (3.20), também reconhecemos na Eq. (3.44) $g(n+1)$, o que permite reescrevê-la como

$$\begin{aligned} h(n+1) &= h(n) - g(n+1) x^t(n+1) h(n) + g(n+1) d(n+1) + \\ &\quad + W \Gamma(n+1) l(n+1) x^t(n+1) h(n) + \\ &\quad - \Gamma(n+1) \left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} C^t g(n+1) d(n+1) \\ &= h(n) - g(n+1) x^t(n+1) h(n) + g(n+1) d(n+1) + \\ &\quad + W \Gamma(n+1) l(n+1) x^t(n+1) h(n) - W \Gamma(n+1) l(n+1) d(n+1) \\ &= h(n) + g(n+1) \left[d(n+1) - x^t(n+1) h(n) \right] + \\ &\quad - W \Gamma(n+1) l(n+1) \left[d(n+1) - x^t(n+1) h(n) \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Reconhecendo que o fator entre chaves na Eq. (3.45) é $e(n+1)$, obtemos o resultado final:

$$h(n+1) = h(n) + g(n+1) e(n+1) - W \Gamma(n+1) l(n+1) e(n+1) \quad (3.46)$$

É interessante notar que os coeficientes ótimos são determinados por dois vetores de ganho de adaptação $g(n)$ e $l(n)$. O primeiro, definido pela Eq. (3.17), independe das restrições e pode ser obtido pelo algoritmo FLS; o segundo, decorrente da incorporação das restrições e portanto dependente delas, é calculado através das Eqs. (3.36) e (3.37).

A obtenção pelo algoritmo dos mínimos quadrados rápido de $g(n+1)$, e as Eq. (3.36), (3.37), (3.30) e (3.46), nesta ordem, constituem o algoritmo proposto que é apresentado na Tabela 3.3. A inicialização do algoritmo garante que $h(0)$ atende às restrições. Também que $C^t \Gamma(0)$ é inversível.

As seguintes operações são requeridas a cada iteração pelo algoritmo:

1. $8N + 4$ multiplicações e 2 divisões para obter $g(n+1)$;
2. $2NK + K^2 + 2K$ multiplicações e 1 divisão para obter $l(n+1)$;

Tabela 3.3: Algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivos com Restrições Lineares (MQR-RL).

• Minimização do Sinal de Erro: $d(n+1) - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n)$

► [Inicialização]

(1) $\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{C}$, onde são atribuídos a $\mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)$ os valores da Eq. (3.25).

(2) Obter $[\mathbf{C}^t\Gamma(0)]^{-1}$.

(3) $\mathbf{h}(0) = \Gamma(0)[\mathbf{C}^t\Gamma(0)]^{-1}\mathbf{f}$

► [Atualização]

• Ganho de adaptação independente das restrições:

(1) Obter $\mathbf{g}(n+1)$ através do algoritmo FLS.

• Ganho de adaptação dependente das restrições:

(2)
$$\mathbf{l}(n+1) = \frac{[\mathbf{C}^t\Gamma(n)]^{-1}\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)}{1 - \mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n)[\mathbf{C}^t\Gamma(n)]^{-1}\mathbf{C}^t\mathbf{g}(n+1)}$$

• Atualização de $[\mathbf{C}^t\Gamma(n+1)]^{-1}$:

(3)
$$[\mathbf{C}^t\Gamma(n+1)]^{-1} = \mathbf{W} \left\{ [\mathbf{C}^t\Gamma(n)]^{-1} + \mathbf{l}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n)[\mathbf{C}^t\Gamma(n)]^{-1} \right\}$$

• Atualização de $\Gamma(n+1)$:

(4)
$$\Gamma(n+1) = \frac{1}{\mathbf{W}} \left[\Gamma(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n) \right]$$

• Erro de estimação "a priori":

(5)
$$\mathbf{e}(n+1) = d(n+1) - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n)$$

• Coeficientes ótimos:

(6)
$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mathbf{g}(n+1)\mathbf{e}(n+1) - \mathbf{W} \Gamma(n+1)\mathbf{l}(n+1)\mathbf{e}(n+1)$$

3. $3K^2$ multiplicações para atualizar $\left[C^t \Gamma(n+1) \right]^{-1}$;
4. $2NK$ multiplicações para atualizar $\Gamma(n+1)$;
5. N multiplicações para obter $e(n+1)$;
6. $NK + 2N + 1$ multiplicações para atualizar o vetor de coeficientes do filtro.

Este algoritmo requer portanto $5NK + 4K^2 + 11N + 2K + 5$ multiplicações e 3 divisões, ou seja, uma complexidade proporcional a NK .

Quando apenas uma restrição é imposta aos coeficientes, é conveniente alterarmos parte deste algoritmo para diminuirmos um pouco mais o número de multiplicações. A partir da Eq. (3.28), obtemos que

$$h(n+1) = R_{xx}^{-1}(n+1) p_{xd}(n+1) + \frac{\Gamma(n+1)}{c_1^t \Gamma(n+1)} \left[f_1 - c_1^t R_{xx}^{-1}(n+1) p_{xd}(n+1) \right] \quad (3.47)$$

sendo, agora, $\Gamma(n+1)$ um vetor. A primeira parcela do termo à direita identifica-se como a solução ótima para o caso em que não há restrições impostas [Eq. (2.12)]. Pode-se então definir:

$$h_{IR} = R_{xx}^{-1}(n+1) p_{xd}(n+1) \quad (3.48)$$

Uma vez que a Eq. (3.47) envolve somente operações de vetores e escalares, é conveniente utilizá-la para atualizar os coeficientes do filtro. O algoritmo reduz-se então ao esquema dado na Tabela 3.4.

As operações requeridas a cada iteração por este algoritmo são relacionadas a seguir:

1. $10N + 4$ multiplicações e 2 divisões para obter $g(n+1)$ e $h_{IR}(n+1)$;
2. $3N$ multiplicações para atualizar $\Gamma(n+1)$;
3. $3N$ multiplicações e 1 divisão para obter o vetor de coeficientes do filtro.

Portanto, um total de $16N + 4$ multiplicações e 3 divisões são requeridas.

Passemos agora a considerar o caso particular [18] do filtro com restrições que minimiza o sinal de saída dado por

Tabela 3.4: Algoritmo dos Mínimos Quadrados com Restrição Vetorial (MQ-RV)

• Minimização do Sinal de Erro: $d(n+1) - \mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n)$

► [Inicialização]

(1) $\Gamma(0) = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)\mathbf{c}_1$, onde são atribuídos a $\mathbf{R}_{xx}^{-1}(0)$ os valores da Eq. (3.25)

► [Atualização]

• Ganho de adaptação independente das restrições e coeficientes ótimos irrestritos \mathbf{h}_{IR} :

(1) Obter $\mathbf{g}(n+1)$ e \mathbf{h}_{IR} através do algoritmo FLS.

• Atualização de $\Gamma(n+1)$:

(2) $\Gamma(n+1) = \frac{1}{W} \left[\Gamma(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n) \right]$

• Coeficientes ótimos:

(3) $\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}_{IR}(n+1) + \frac{\Gamma(n+1)}{\mathbf{c}_1^t \Gamma(n+1)} \left[\mathbf{f}_1 - \mathbf{c}_1^t \mathbf{h}_{IR} \right]$

$$e(i) = \mathbf{x}^t(i)\mathbf{h}(n) \quad (3.49)$$

ou seja, o preditor linear com restrições. Do método dos mínimos quadrados, a solução ótima no instante que segue a chegada de uma nova amostra é dada por

$$\mathbf{h}(n+1) = \Gamma(n+1) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n+1) \right]^{-1} \mathbf{f} \quad (3.50)$$

Substituindo na Eq. (3.50) as Eqs. (3.30) e (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(n+1) &= \Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{f} - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{f} + \\ &\quad + W \Gamma(n+1)\mathbf{l}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\Gamma(n) \left[\mathbf{C}^t \Gamma(n) \right]^{-1} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{h}(n) - \mathbf{g}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n) + W \Gamma(n+1)\mathbf{l}(n+1)\mathbf{x}^t(n+1)\mathbf{h}(n) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Reconhecendo na Eq. (3.51) que $\mathbf{x}^t(n+1)h(n)$ é $e(n+1)$, esta é reescrita como

$$h(n+1) = h(n) - g(n+1)e(n+1) + W \Gamma(n+1)l(n+1)e(n+1) \quad (3.52)$$

Desta forma, a menos de uma diferença de sinal e do cálculo de $e(n+1)$, o algoritmo para o preditor linear consiste nos mesmos passos do algoritmo MQR-RL. A mudança de sinal é justificada pelo fato de estarmos, nessa formulação, minimizando um índice de desempenho que é função de $\mathbf{x}^t(i)h(n)$ e não de $-\mathbf{x}^t(i)h(n)$, como na formulação anterior.

Novamente observamos que no caso de restrição vetorial é computacionalmente mais econômico obter os coeficientes ótimos através da Eq. (3.50), o que requer um total de $13N + 4$ multiplicações e 3 divisões.

3.3 CONCLUSÕES

Neste capítulo propomos um novo algoritmo para o caso de filtragem adaptativa com restrições lineares. O algoritmo é exato e apresenta as vantagens próprias do método de mínimos quadrados, no que diz respeito à taxa de convergência, precisão, e independência das características dos sinais processados. Neste sentido, ele constitui um importante avanço em relação aos algoritmos, baseados no gradiente, apresentados na literatura para filtros com restrições.

O desempenho do algoritmo, avaliado por simulações é ilustrado no capítulo seguinte. Além disso, aplicamos a técnica proposta em dois outros problemas interessantes de processamento de sinais, proporcionando-lhes uma abordagem original e eficiente.

Neste capítulo, verificamos o desempenho do algoritmo proposto anteriormente, através de resultados obtidos por simulação. Numa primeira avaliação, utilizamos a técnica no problema de recuperação e anulação de raias espectrais em meio ao ruído, importante em diversas aplicações.

Verificamos ainda que, associando o algoritmo MOR-RL a restrições apropriadamente formuladas, obtemos alguns resultados inéditos e de interesse em processamento de sinais e análise espectral. Assim, apresentamos ainda neste capítulo duas propostas:

- Implementar adaptativamente o método de análise espectral por variância mínima;
- Adaptar e otimizar um filtro mantendo a propriedade de fase linear.

Estas duas propostas também são ilustradas por simulações que confirmam o bom desempenho do método.

4.1 RECUPERAÇÃO E ANULAÇÃO DE RAIAS ESPECTRAIS

A filtragem adaptativa com restrições lineares pode ser aplicada para recuperar e anular componentes espectrais de um sinal corrompido por ruído. Para isto, basta incorporar um conjunto de restrições adequadas do tipo:

$$c_k^t(w)h(n) = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.1)$$

sendo

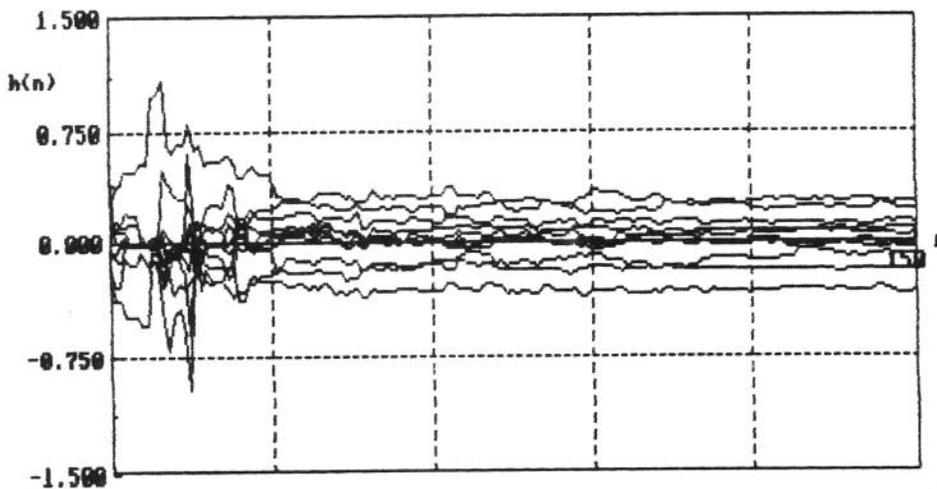
$$c_k^t(w) = \left[1 \quad \cos w_k \quad \cos 2w_k \quad \dots \quad \cos [(N-1)w_k] \right] \quad (4.2)$$

e $f_k=1$. Desta forma, pode ser demonstrado que a magnitude da resposta do filtro em cada frequência w_k é forçada a ter valor um. Conseqüentemente, cada componente espectral com frequência w_k é filtrada com ganho unitário. As

demais são atenuadas ao minimizarmos a potência de saída. Este é o princípio utilizado nas diversas aplicações dos filtros com restrições lineares objetivando a melhoria da relação sinal-ruído, uma vez que asseguramos que a potência do ruído é reduzida, sem distorção do sinal de interesse.

A primeira simulação emprega um sinal de entrada, contaminado por ruído branco, composto por senóides reais com frequências normalizadas $w_1=\pi/4$, $w_2=7\pi/16$, e $w_3=11\pi/16$. A relação sinal-ruído (SNR) é de 3dB. Um filtro de ordem 10 ($N=11$) é utilizado, sendo que duas restrições ($K=2$) associadas às frequências w_2 e w_3 são impostas aos coeficientes, conforme descrito em (4.2) e assumindo $f_2=f_3=1$.

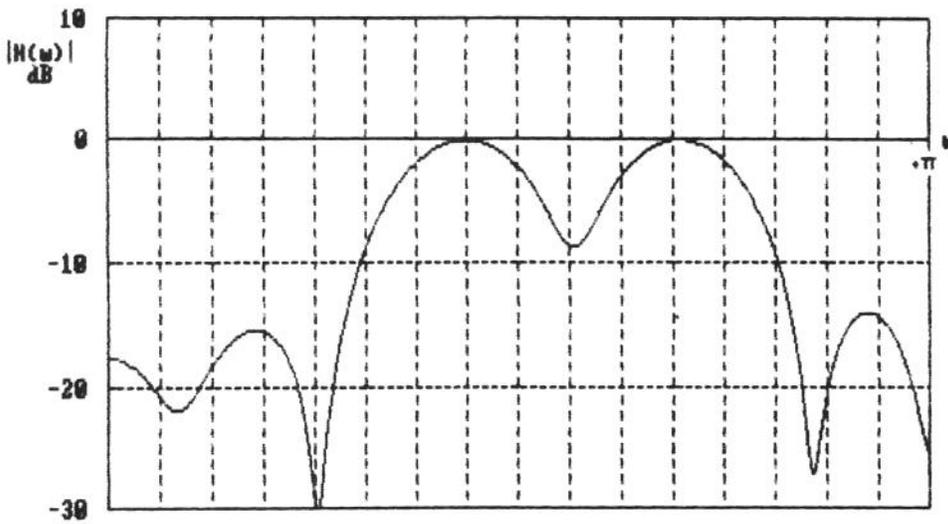
A Figura 4.1(a) mostra a evolução dos coeficientes. Podemos observar a rápida convergência uma vez que o regime permanente é atingido após 30 iterações. A magnitude da resposta em frequência do filtro obtido está mostrada na Figura 4.1(b). Vemos que nas frequências w_2 e w_3 a resposta é unitária (0dB), tal como imposto pelas restrições, sendo que o filtro também procura um compromisso entre a minimização do elevado nível de ruído e da outra componente do sinal.



(a)

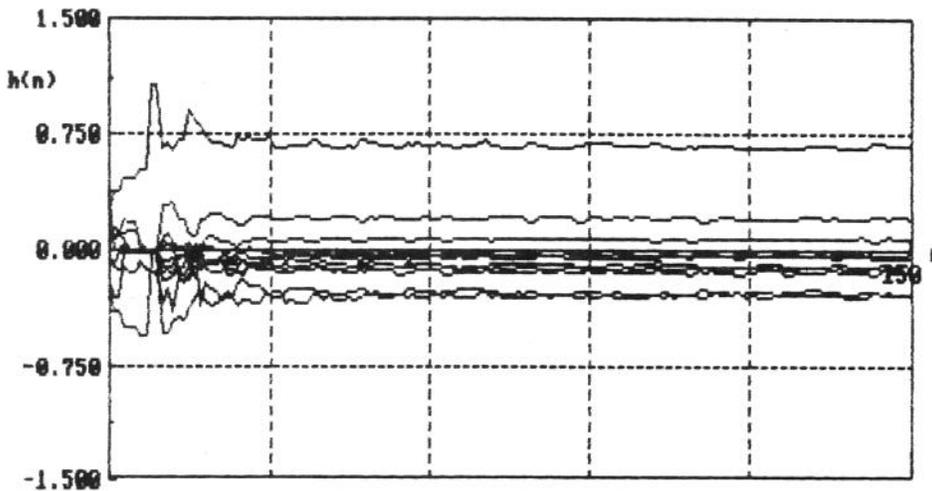
Figura 4.1: Senóides contaminadas por ruído branco (SNR=3dB):

- (a) Evolução dos coeficientes;
- (b) Magnitude da resposta em frequência.



(b)

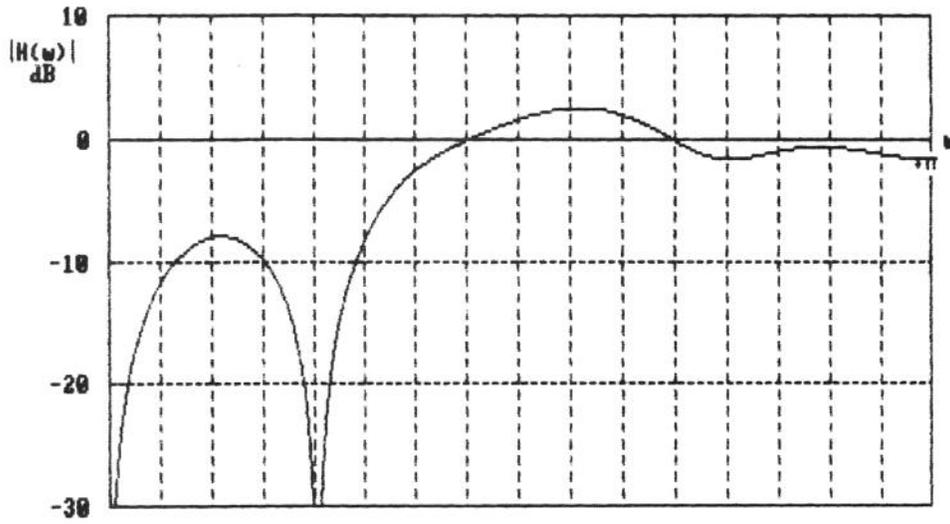
A Figura 4.2 ilustra os resultados para o mesmo caso anterior, mas com uma relação sinal-ruído de 40dB. A atenuação é drástica na frequência $\pi/4$ e menos importante fora dessa faixa, como decorrência da quase ausência de ruído. Nas Figuras 4.2(c) e 4.2(d) são mostrados os sinais de entrada $x(n)$ e saída $e(n)$, respectivamente. Confrontando esses sinais podemos constatar a eliminação da componente senoidal de frequência mais baixa ($\pi/4$) no sinal de entrada.



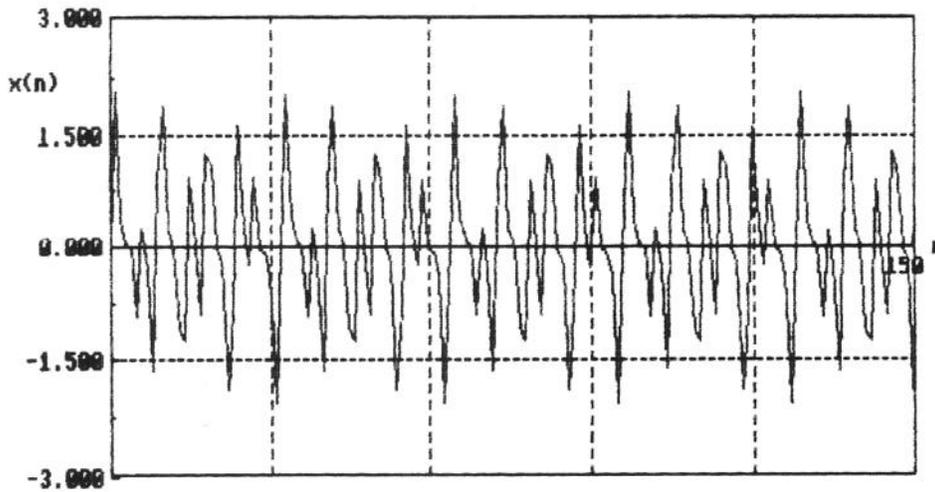
(a)

Figura 4.2: Senóides contaminadas por ruído branco (SNR=40dB):

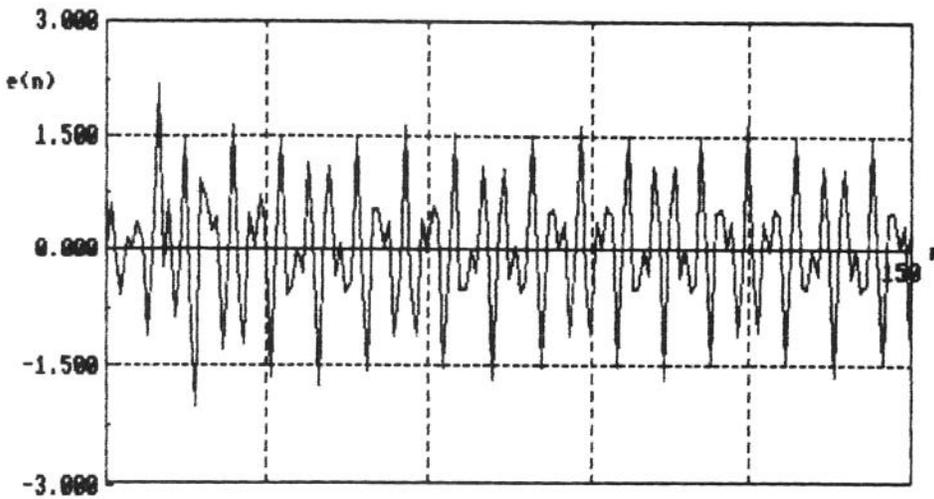
- (a) Evolução dos coeficientes;
- (b) Magnitude da resposta em frequência;
- (c) Sinal de entrada;
- (d) Sinal de saída.



(b)

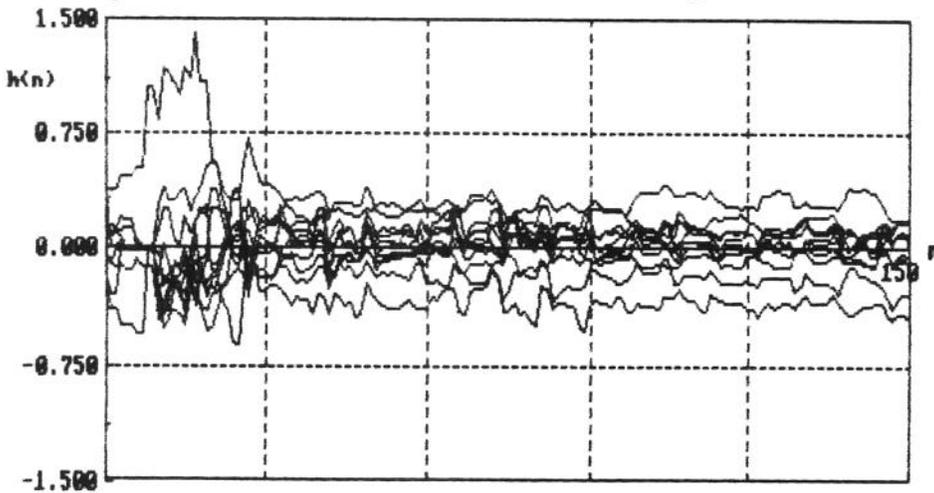


(c)



(d)

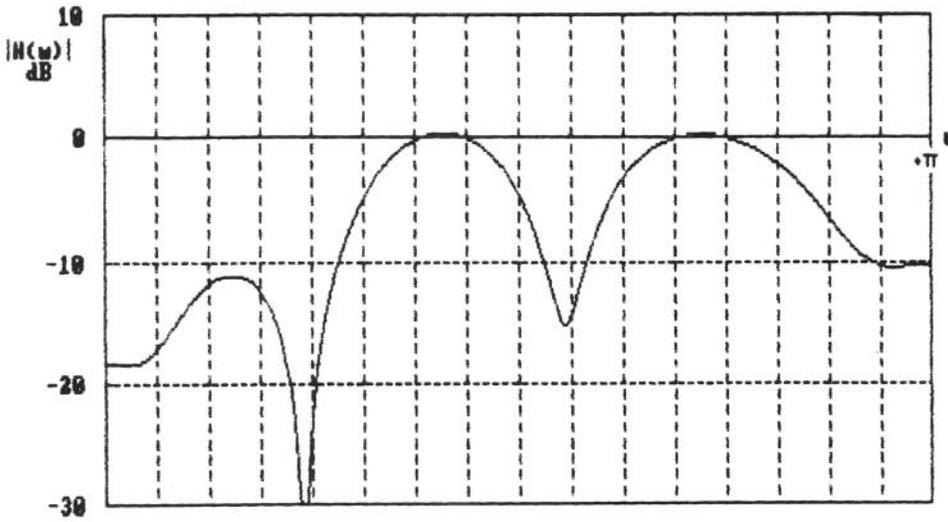
Finalmente, consideremos o mesmo sinal de entrada contaminado desta vez por um ruído colorido, dado por um processo auto-regressivo (AR) de ordem 2. Os polos deste processo são dados por $0,9e^{\pm j9\pi/16}$ e a relação sinal-ruído é de 6dB. A evolução dos coeficientes é representada na Figura 4.3(a). A Figura 4.3(b) mostra que o filtro atende às restrições e, além de atenuar a senóide de frequência $\pi/4$, também procura "branquear" o ruído colorido, direcionando zeros para os polos do processo AR. Comparando-a com a Figura 4.1(b) podemos observar que a atenuação na frequência $9\pi/16$ é mais acentuada. O posicionamento dos zeros é mostrado na Figura 4.3(c).



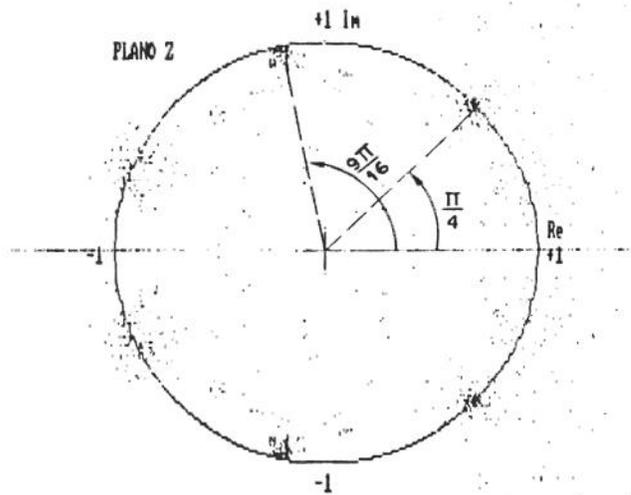
(a)

Figura 4.3: Senóides contaminadas por um processo AR(2) (SNR=6dB):

- (a) Evolução dos coeficientes;
- (b) Magnitude da resposta em frequência;
- (c) Posicionamento dos zeros.



(b)



(c)

4.2 O ESTIMADOR ESPECTRAL DE VARIÂNCIA MÍNIMA

O método de análise espectral por variância mínima [4] tem como princípio minimizar o sinal de saída de um filtro sujeito à restrição de que a magnitude da resposta, para uma determinada frequência, seja um. Assim, a variância do sinal de saída indica a potência desta componente do sinal de entrada. A partir daí, um estimador de densidade espectral é obtido por

$$\mathcal{P}(w) = \frac{1}{\mathbf{c}^t(w) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{c}(w)} \quad (4.3)$$

onde $-\pi < w \leq \pi$. Levando em conta os diferentes valores de w na Eq. (4.3), podemos levantar a curva de densidade espectral de potência.

Este método pode ser implementado adaptativamente, através de uma recursão que compõe o algoritmo MQR-RL, afim de possibilitar o acompanhamento das variações do espectro de processos não-estacionários bem como aplicações em tempo real. Para isto, consideremos a estimativa da variância do sinal de saída dada por:

$$\sigma_e^2(n) = \frac{\sum_{i=1}^n W^{n-i} [e(i)]^2}{\sum_{i=1}^n W^{n-i}} \quad (4.4)$$

Desenvolvendo a expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \sigma_e^2(n) &= \frac{\sum_{i=1}^n W^{n-i} [h^t(n) x(i) x^t(i) h(n)]}{\sum_{i=1}^n W^{n-i}} \\ &= \frac{h^t(n) R_{xx}(n) h(n)}{q(n)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde

$$R_{xx}(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} [x(i) x^t(i)] \quad (4.6)$$

e

$$q(n) = \sum_{i=1}^n W^{n-i} = W q(n-1) + 1 \quad (4.7)$$

Substituindo a Eq. (2.60) na Eq. (4.5), obtemos depois de algumas manipulações algébricas:

$$\sigma_e^2(n) = \frac{1}{q(n) c^t \Gamma(n)} \quad (4.8)$$

Neste caso, um estimador de densidade espectral de potência, para n dados disponíveis, é dado por

$$\mathcal{P}(w, n) = \frac{1}{q(n) c^t(w) \Gamma(w, n)} \quad (4.9)$$

Desta forma, a densidade espectral de um sinal pode ser estimada adaptativamente. Para cada uma das frequências no espectro, o vetor $\Gamma(w,n)$ é calculado recursivamente através da Eq. (3.30). O ganho de adaptação utilizado nesta recursão é o mesmo para todos os valores de w , sendo obtido pelo algoritmo rápido (FLS).

Este método pode ser visualizado através de um banco de filtros adaptativos com restrições vetoriais, esquematizado na Figura 4.4. De fato não é necessário realizar a filtragem do sinal para obter a estimativa dada na Eq. (4.9); porém, o esquema da Figura 4.4 ilustra como um mesmo vetor $g(n)$ é usado no cálculo de $\Gamma(w,n)$, para todos valores de w .

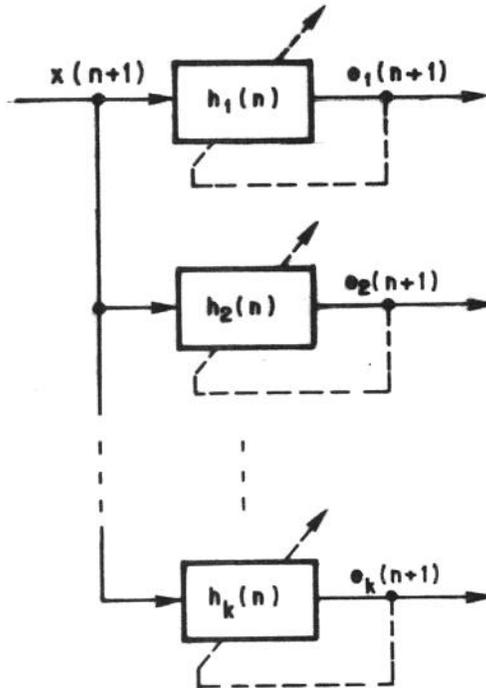
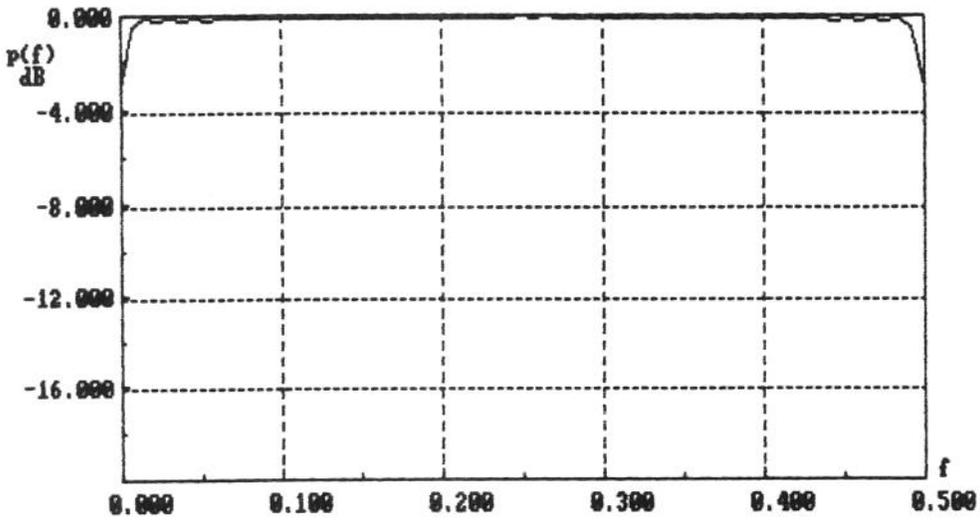


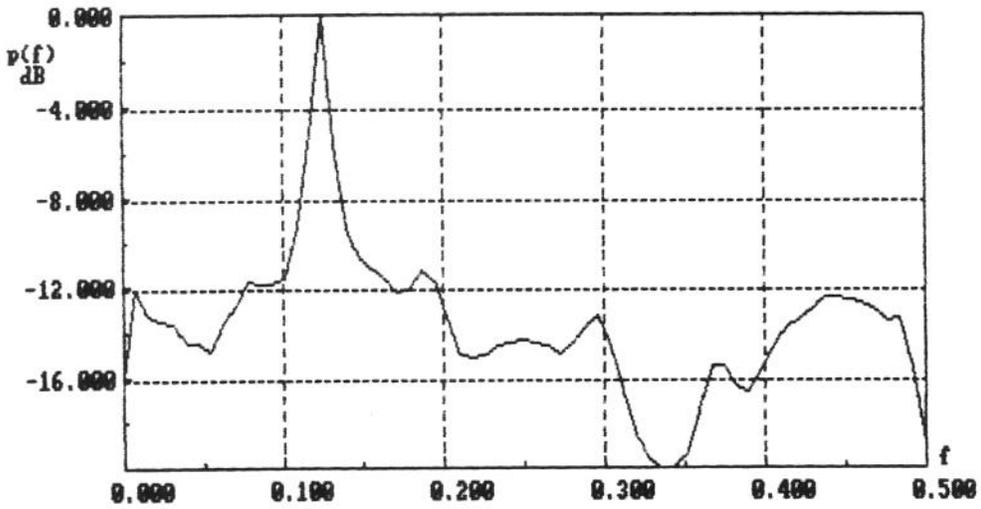
Figura 4.4: Banco de filtros adaptativos com restrição vetorial.

Para ilustrar a adaptação das estimativas de densidade de potência, consideramos uma senóide de frequência $\pi/4$ contaminada com ruído branco sendo $SNR=3dB$. Impomos as restrições para 65 frequências igualmente espaçadas entre 0 e π , utilizando $N=32$ na Eq. (4.2). A inicialização de $\Gamma(w,0)$, correspondente a de um sinal impulsivo, dado na Eq. (3.26), é a mesma utilizada no algoritmo MOR-RL para $W=0,99$. A evolução da estimativa da densidade espectral do sinal considerado (senóide+ruído) é mostrada pelas Figuras 4.5. Foram feitas 500 iterações e a estimativa é traçada de 100 em 100, a partir do instante inicial.

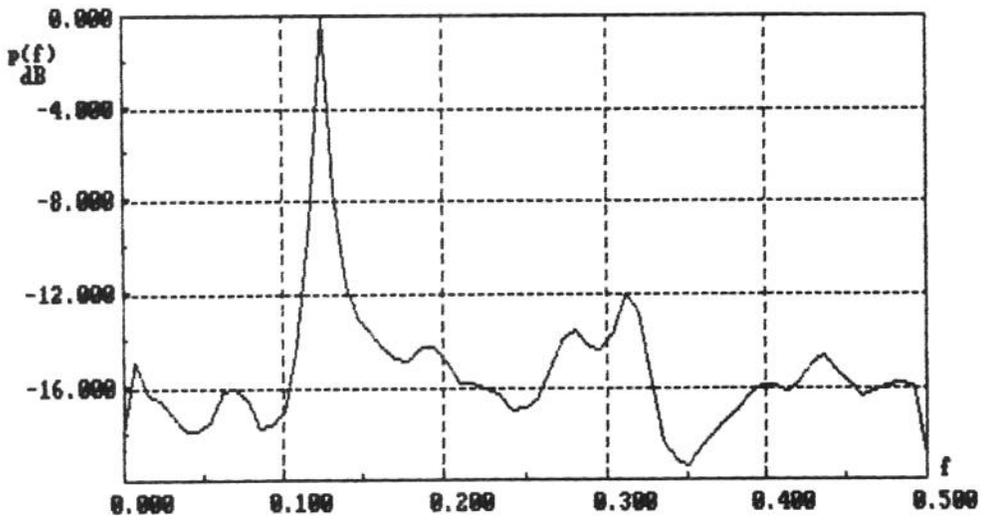


(a)

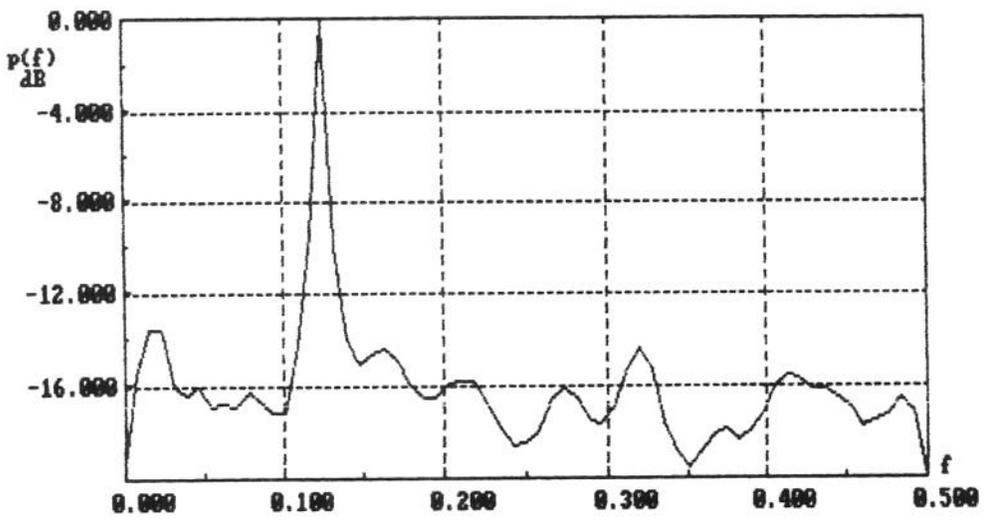
Figura 4.5: Senóide contaminada por ruído branco (SNR=3dB): (a) $n=0$; (b) $n=100$; (c) $n=200$; (d) $n=300$; (e) $n=400$; (f) $n=500$.



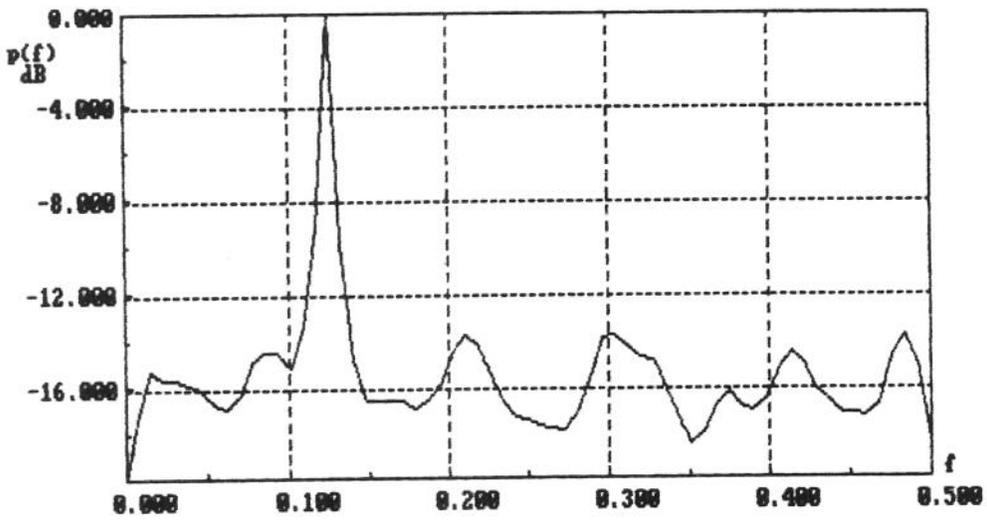
(b)



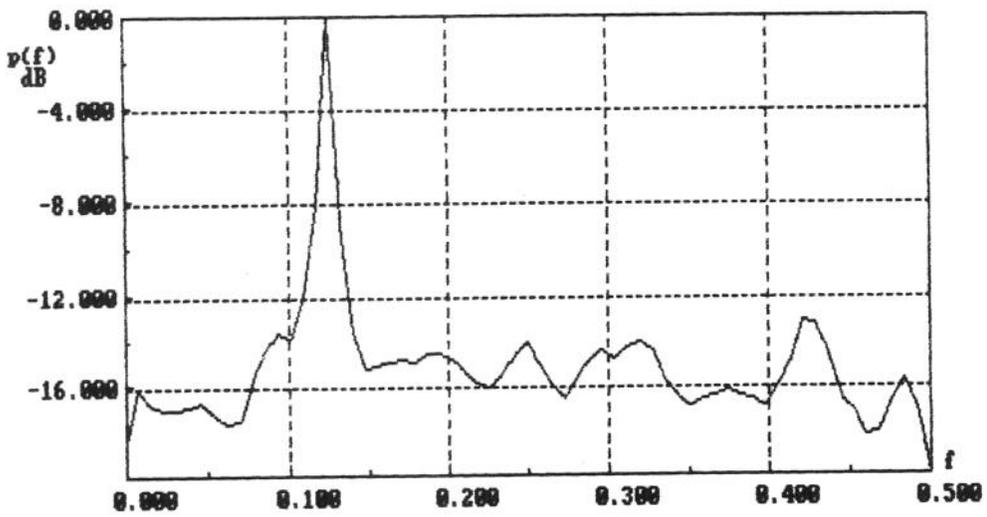
(c)



(d)

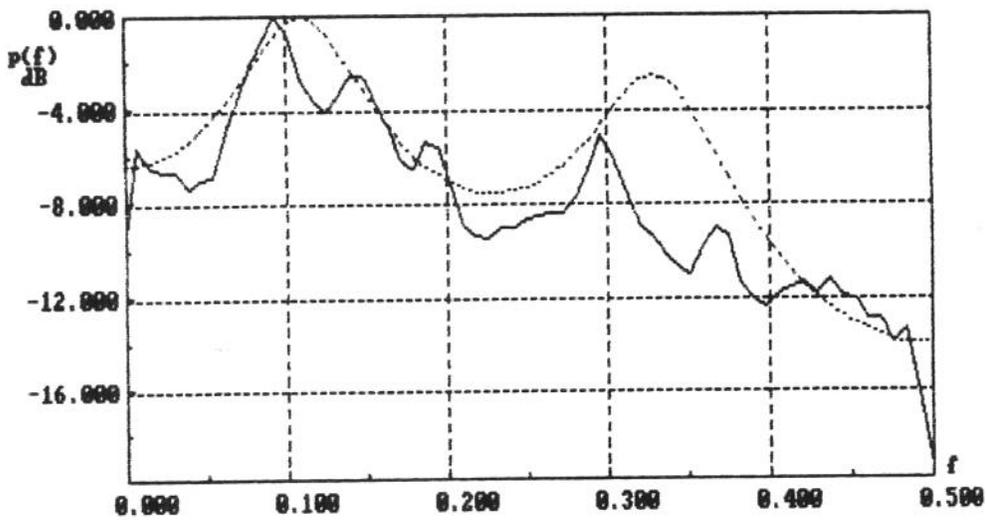


(e)



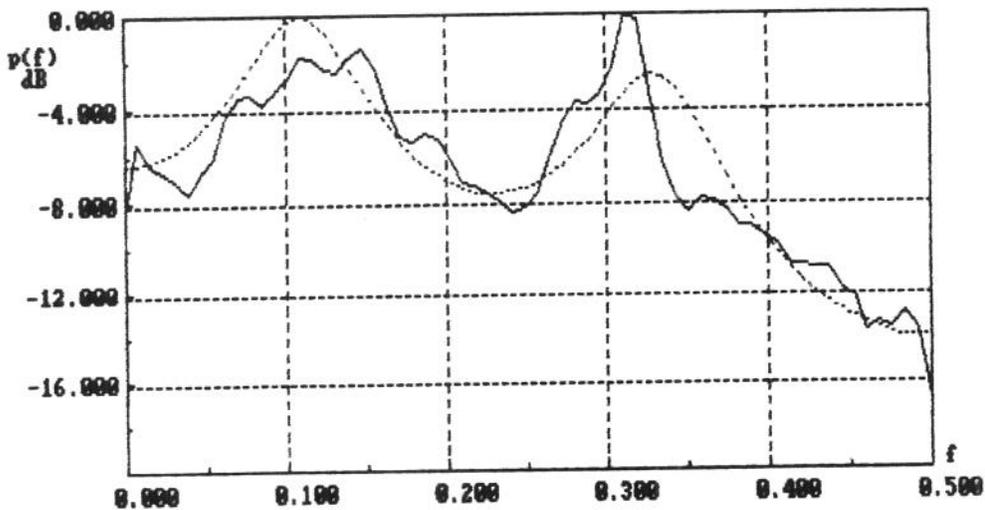
(f)

Outra simulação considera um processo AR(4) com parâmetros $a_1=-0,43$; $a_2=0,296$; $a_3=-0,2752$ e $a_4=0,4096$; cuja evolução da densidade espectral estimada, ao longo também de 500 amostras, é exibida pelas Figuras 4.6. Os valores de K e N são os mesmo do exemplo anterior. Para fins de comparação, traçamos também nas Figuras 4.6 o espectro obtido a partir deste modelo AR, tirado da referência [3,cap.2].

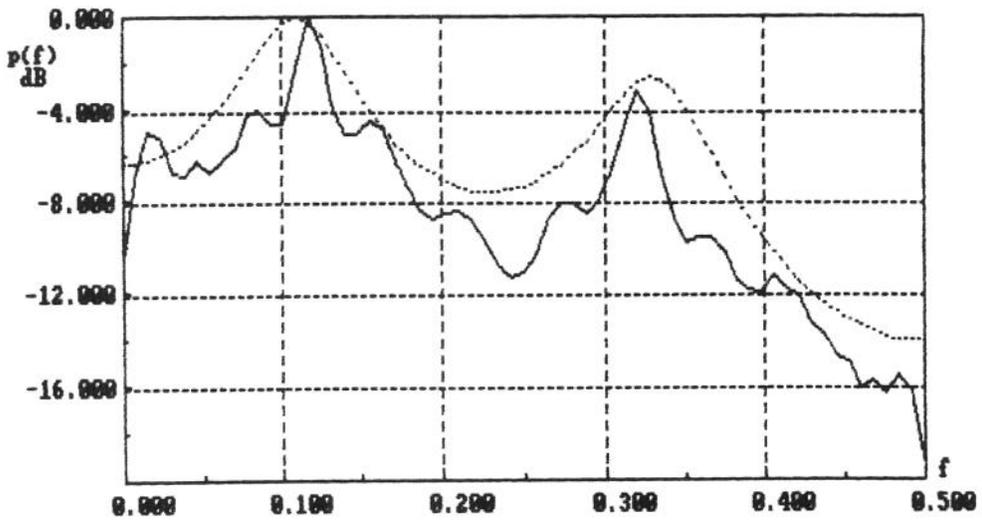


(a)

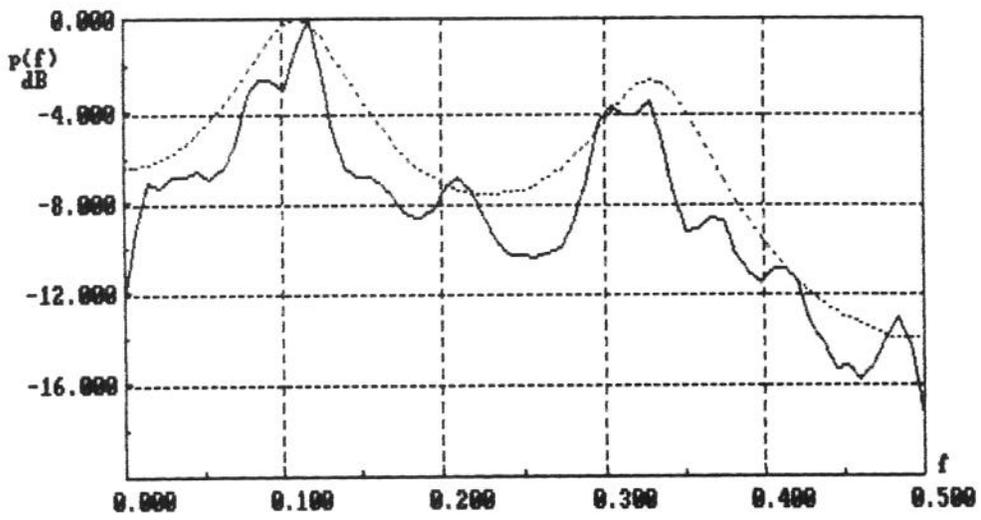
Figura 4.6: Processo AR(4): (a) $n=100$; (b) $n=200$; (c) $n=300$; (d) $n=400$; (e) $n=500$.



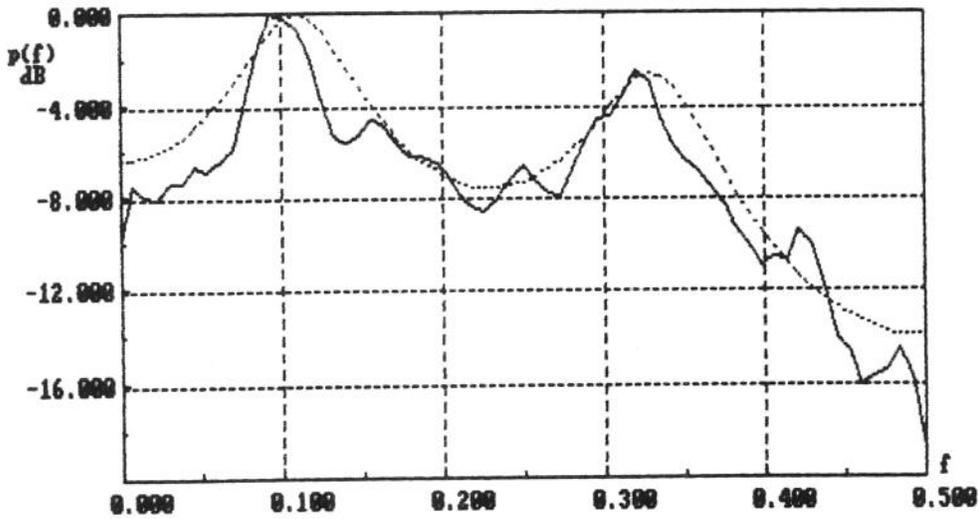
(b)



(c)



(d)



(e)

Os dois exemplos comprovam que, apesar das limitações de resolução próprias do método de análise espectral por variância mínima, os resultados da sua versão adaptativa conseguem delinear razoavelmente a configuração do espectro.

4.3 O FILTRO DE FASE LINEAR

Em várias aplicações de filtragem digital, é interessante manter a propriedade de fase linear afim de impedir uma distorção de fase do sinal na banda passante do filtro. Diversos trabalhos já foram propostos na literatura visando implementar um filtro adaptativo que, durante o processo de adaptação, mantenha esta importante propriedade [10,11]. Nosso objetivo é impor a característica de fase linear através do uso de restrições, utilizando em decorrência o algoritmo MQR-RL para a adaptação.

Uma condição suficiente para que o filtro possua esta propriedade é a simetria de sua resposta impulsional [6]. Isto implica em:

$$h_i = h_{N-i-1}, \quad i = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (4.10)$$

para N par, ou ainda:

$$h_i = h_{N-i-1}, \quad i = 0, 1, \dots, (N-1)/2 - 1 \quad (4.11)$$

para N ímpar.

Mostramos a seguir como a condição acima pode ser imposta pelo uso de restrições lineares apropriadas. Seja um filtro de ordem $N-1$, onde N é ímpar, sujeito a $K=(N-1)/2$ restrições lineares dadas pela matriz C $K \times N$ da seguinte forma:

$$C^t h = f \tag{4.12}$$

onde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ \hline 0^t \\ \hline -J \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

e

$$f = 0 \tag{4.14}$$

sendo que I é a matriz identidade $K \times K$, 0 denota o vetor nulo e J a matriz reflexão $K \times K$. Quando N é par, $K=N/2$ e a matriz C correspondente é dada por

$$C = \begin{bmatrix} I \\ \hline -J \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Podemos observar que estas restrições [Eqs. (4.13) e (4.15)] correspondem fielmente às igualdades das Eqs. (4.10) e (4.11) e, uma vez sendo impostas a um filtro, lhe conferem a propriedade de fase linear.

Para exemplificar o uso de restrições na obtenção adaptativa de um filtro de fase linear, empregamos primeiramente um filtro de ordem 2 como filtro de erro de predição progressiva. A restrição é

$$c^t h(n) = f \tag{4.16}$$

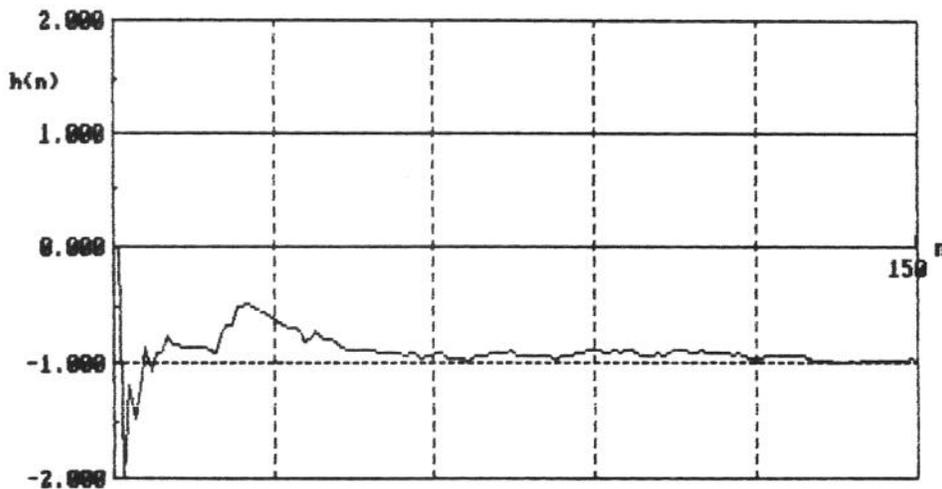
onde

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

e $f=0$. Óbviamente, deve-se também incorporar ao filtro a restrição $h_0=1$ para torná-lo um filtro de erro de predição. Do contrário, obteríamos a solução elementar $h=0$.

Uma senóide real com frequência normalizada de $\pi/4$ constituiu o sinal de entrada, contaminado por ruído branco para uma relação sinal-ruído de 3 dB.

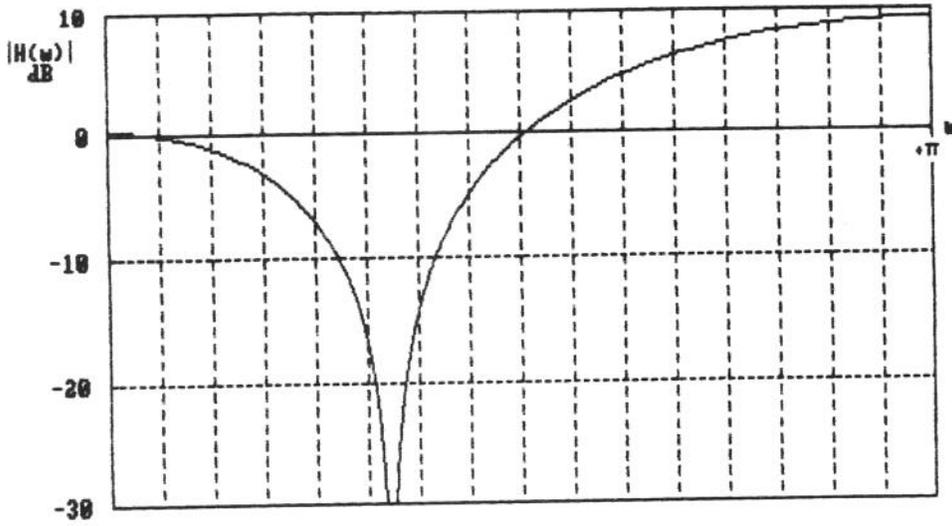
A evolução dos coeficientes é mostrada na Figura 4.7(a). Verificamos novamente a rápida convergência, característica do algoritmo proposto. A Figura 4.7(b) mostra a magnitude da resposta em frequência do filtro, onde se constata uma forte atenuação em uma frequência próxima à da senóide. Este resultado é coerente com o posicionamento do par de zeros conjugados complexos sobre a circunferência de raio unitário e decorre da imposição de resposta de fase linear. O posicionamento dos zeros do filtro ao longo da adaptação é mostrado na Figura 4.7(c), onde o traçado da circunferência é omitido para permitir a observação da trajetória dos zeros. Ainda notamos uma polarização na frequência da senóide devido à elevada potência do ruído. A Figura 4.7(d) mostra a resposta de fase do filtro onde constatamos sua característica linear.



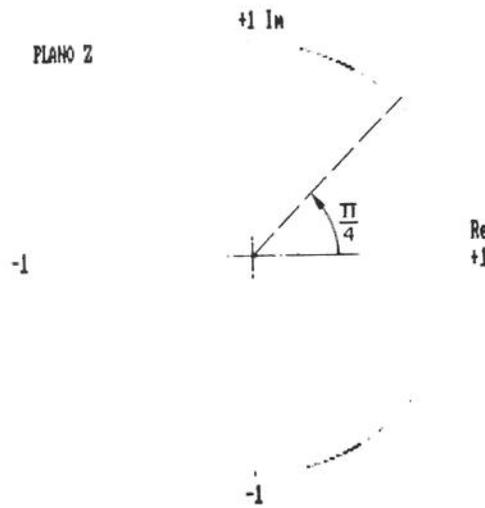
(a)

Figura 4.7: Predição Linear: Senóide contaminada por ruído branco (SNR=3dB):

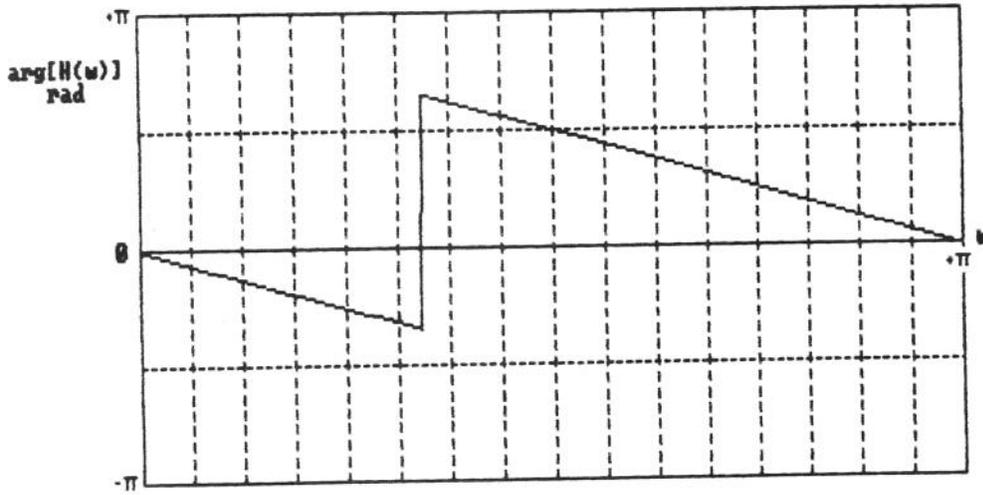
- (a) Evolução dos coeficientes;
- (b) Magnitude da resposta em frequência;
- (c) Posicionamento dos zeros;
- (d) Resposta de fase.



(b)

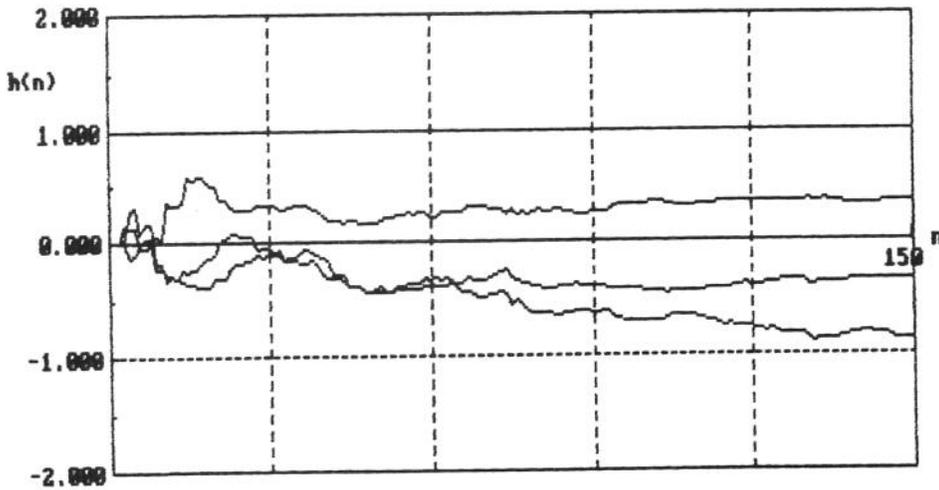


(c)



(d)

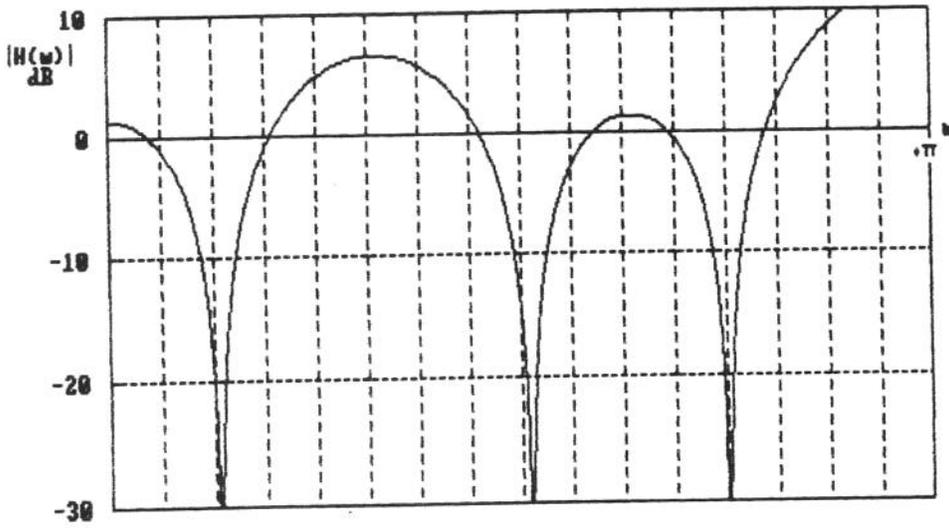
Como segundo exemplo, predizemos um sinal AR(6) com polos em $0,9e^{\pm j\pi/8}$, $0,9e^{\pm j\pi/2}$ e $0,9e^{\pm j3\pi/4}$. Para este caso empregamos um filtro de erro de predição de ordem 6 sujeito à restrição dada na Eq. (4.13), sendo $K=3$. Os resultados são mostrados nas Figuras 4.8.



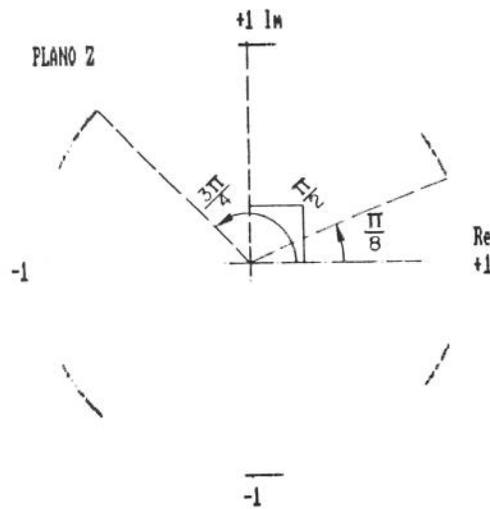
(a)

Figura 4.8: Predição Linear: Processo AR(6):

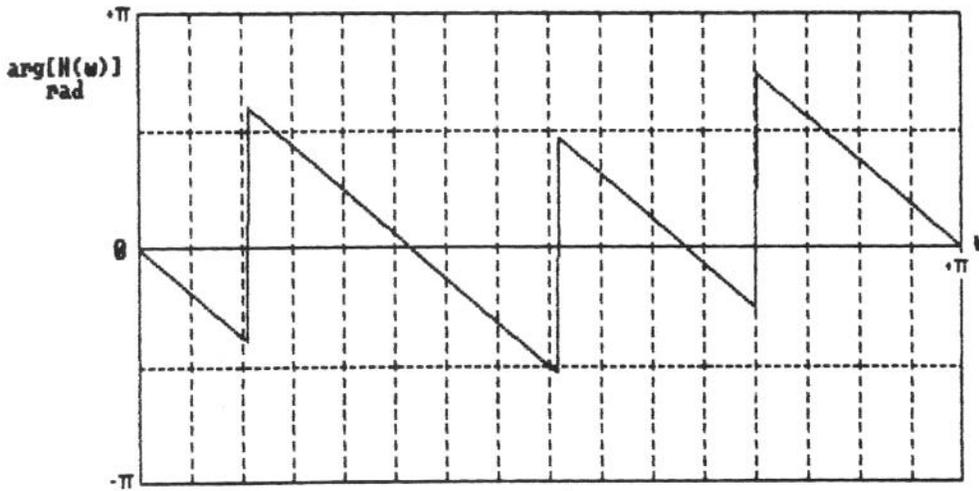
- (a) Evolução dos coeficientes;
- (b) Magnitude da resposta em frequência;
- (c) Posicionamento dos zeros;
- (d) Resposta de fase;



(b)



(c)



(d)

4.4 CONCLUSÕES

Os resultados de simulação apresentados neste capítulo permitem verificar o excelente desempenho do algoritmo MQR-RL. Além de preservar as já citadas qualidades inerentes ao método dos mínimos quadrados, o algoritmo mantém o filtro adaptativo sujeito às restrições estabelecidas sem que isto provoque problemas de convergência nem exija nenhum tipo de monitoramento durante a adaptação. Estas características foram constatadas em inúmeros casos de recuperação e anulação de raias espectrais, dentre os quais selecionamos algumas curvas para ilustrar este capítulo. Mas uma atenção especial deve ser dada também às duas extensões propostas aqui.

O algoritmo MQR-RL mostrou-se uma ferramenta eficiente para a implementação adaptativa do método de variância mínima, proporcionando o desempenho esperado, dadas as características do próprio método, para a análise espectral de um sinal.

Finalmente, através da imposição de restrições adequadas e do conseqüente uso do algoritmo MQR-RL, propomos uma maneira simples de realizar filtros adaptativos com fase linear. O algoritmo é eficiente e fornece uma complexidade competitiva em relação a outras técnicas propostas na literatura para este fim.

Em várias aplicações, a imposição de restrições lineares aos coeficientes de um filtro possibilita conferir aos sistemas e sinais envolvidos propriedades específicas desejadas. É conveniente implementar este filtro adaptativamente, tendo em vista sua aplicação em tempo real ou em situações envolvendo processamento de sinais cujas características não são estacionárias. Neste sentido, muitos trabalhos têm se dedicado à formulação de algoritmos para atualização dos coeficientes sob-restrições. Isto é particularmente freqüente em estudos direcionados a aplicações em antenas adaptativas. De todos estes algoritmos, aqueles que são de nosso conhecimento se baseiam na técnica do gradiente estocástico (LMS). Conseqüentemente, apesar de sua robustez, apresentam os inconvenientes da taxa de convergência ser baixa e dependente da natureza do sinal processado. Além disto as tentativas que procuram superar tais limitações estão restritas por relações de compromisso que envolvem rapidez e precisão.

Na procura de algoritmos mais eficientes, estendemos a teoria de Wiener, associada ao critério dos mínimos quadrados, através da incorporação de restrições lineares. De posse da solução ótima obtida para o filtro, desenvolvemos um algoritmo para filtragem adaptativa com restrições, que pode ser visto como o dual do algoritmo RLS clássico. Deste modo, preservamos as características desejáveis do método dos mínimos quadrados, que superam significativamente os problemas relacionados ao método do gradiente. Observando o desempenho do algoritmo proposto nos exemplos apresentados no capítulo anterior, constatamos que ele constitui uma ferramenta útil e cria uma nova alternativa para a realização da filtragem adaptativa sujeita a restrições lineares. Também apresentamos uma forma original de formulação de restrições que, quando associada ao algoritmo proposto, permite conferir a um filtro a propriedade de fase linear. Este resultado constitui uma das principais contribuições da tese, juntamente com o algoritmo propriamente dito.

Verificando que o método de análise espectral por variância mínima tem

como princípio a incorporação de uma restrição linear a um filtro, e também que a técnica dos mínimos quadrados permite determinar seus coeficientes, idealizamos uma implementação adaptativa deste método. Isto é um resultado de significativa relevância na medida em que possibilita ao método acompanhar as não-estacionaridades de um sinal assim como seu emprego em tempo real.

Verificamos que a complexidade do algoritmo MQR-RL é maior do que a do gradiente. Entretanto, a existência de um dual do algoritmo RLS clássico sugere que exista também um dual, com restrições, do algoritmo FLS. Está em curso a investigação de tal algoritmo, que possibilitaria uma complexidade mais próxima à do gradiente.

Ao longo do desenvolvimento realizado neste trabalho, podemos constatar a diversidade de linhas de estudo vinculadas ao largo campo da filtragem com restrições por mínimos quadrados. Entre estas, também é de nosso interesse investigar a incorporação de desigualdades lineares, restrições não-lineares, ou até mesmo de restrições ajustáveis [15].

No que diz respeito ao algoritmo MQR-RL, é natural que apresente as dificuldades em termos de estabilidade próprias do algoritmo FLS clássico. Cabe então, um estudo analítico aprofundado de seu comportamento em diversas situações envolvendo filtragem com restrições lineares.

REFERÊNCIAS

- [1] B. Widrow and S. D. Stearns; "Adaptive Signal Processing". Prentice-Hall; New Jersey; 1985.
- [2] S. Haykin; "Adaptive Filter Theory". Prentice-Hall; New Jersey; 1986.
- [3] M. G. Bellanger; "Adaptive Digital Filters and Signal Analysis". Marcel Dekker, Inc.; New York and Basel; 1987.
- [4] S. L. Marple Jr.; "Digital Spectral Analysis with Applications". Prentice-Hall; New Jersey; 1988.
- [5] B. Noble and J. W. Daniel; "Applied Linear Algebra". Prentice-Hall; New Jersey; 1988.
- [6] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer; "Discrete-Time Signal Processing". Prentice-Hall; New Jersey; 1989.
- [7] K. Takao, M. Fujita and T. Nishi; "An Adaptive Antenna Array under Directional Constraint", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-24, pp. 662-669, Sep. 1976.
- [8] L. Ljung, M. Morf and D. Falconer; "Fast Calculation of Gain Matrices for Recursive Estimation Schemes", Int. J. Control, vol. 27, pp. 1-19, no. 1, 1978.
- [9] L. J. Griffiths and C. W. Jim; "An Alternative Approach to Linearly Constrained Adaptive Beamforming", IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-30, pp. 27-34, Jan. 1982.
- [10] B. Friedlander and M. Morf; "Least Squares Algorithms for Adaptive Linear-Phase Filtering", IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-30, pp. 381-390, Jun. 1982.
- [11] S. L. Marple Jr.; "Fast Algorithms for Linear Prediction and System Identification Filters with Linear Phase", IEEE Trans. Acoust., Speech,

- and Signal Processing, vol. ASSP-30, pp. 942-953, Dec. 1982.
- [12] G. Carayannis, D. G. Manolakis and N. Kalouptsidis; "A Fast Sequential Algorithm for Least-Squares Filtering and Prediction", IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-31, pp. 1394-1402, Dec. 1983.
- [13] J. M. Cioffi and T. Kallath; "Fast, Recursive-Least-Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering", IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-32, pp. 304-337, Apr. 1987.
- [14] K. M. Buckley; "Spatial/Spectral Filtering with Linearly Constrained Minimum Variance Beamformers", IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-35, pp. 249-266, Mar. 1987.
- [15] C. Y. Tseng; "Adaptive Linearly-Constrained Filtering: Principles and Implementations", PhD Thesis, University of Southern California, 1989.
- [16] L. J. Griffiths; "New Results in Constrained Beamforming: Non-Linear Constraints and Constant Modulus Output", Proceedings EUSIPCO-90, Sep. 1990.
- [17] F. Castro, J. Castells, J. Sánchez and G. Vázquez; "Linear Phase Adaptive Line Enhancer for improving the performance of Phase Synchronizers", EUSIPCO-90, Sep. 1990.
- [18] L. S. Resende, J. M. T. Romano and M. G. Bellanger; "Un Algorithme de Moindres Carrés Rapide pour Filtrage Adaptatif avec Contraintes", 13^e Colloque GRETSI, Sep. 1991.