

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO  
INDUSTRIAL

**TESE DE DOUTORADO**

**MODELAGEM E DETERMINAÇÃO DE  
PARÂMETROS DE DESEMPENHO DE REDES DE  
COMUNICAÇÕES ATRAVÉS DA  
ÁLGEBRA DE DIÓIDES**

**Autora:** Mábia Daniel Cavalcante

**Orientador:** Prof. Dr. Rafael Santos Mendes

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutora em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação.

**Banca examinadora:**

|                                         |                |
|-----------------------------------------|----------------|
| Prof. Dr. Rafael Santos Mendes          | (FEEC/UNICAMP) |
| Profa. Dra. Ana Cristina Vieira de Melo | (IME/USP)      |
| Prof. Dr. Ricardo Lüders                | (DAINF/UTFPR)  |
| Prof. Dr. Fernando José Von Zuben       | (FEEC/Unicamp) |
| Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral     | (FEEC/Unicamp) |
| Prof. Dr. Maurício Ferreira Magalhães   | (FEEC/Unicamp) |

**Campinas, SP  
Abril de 2008**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C314m Cavalcante, Mábia Daniel  
Modelagem e determinação de parâmetros de  
desempenho de redes de comunicações através da álgebra de  
dióides / Mábia Daniel Cavalcante. --Campinas, SP: [s.n.],  
2008.

Orientador: Rafael Santos Mendes  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Redes de computação. 2. Sistemas de tempo discreto.  
3. Teoria da fila. 4. Análise de sistemas. 5. Sistemas de  
telecomunicações. I. Mendes, Rafael Santos. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Modeling and determination of performance parameters of  
communication networks using dioid algebra

Palavras-chave em Inglês: Network calculus, Quality of service, Discrete event  
dynamic systems, Dioid algebra

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Ana Cristina Vieira de Melo, Ricardo Lüders, Fernando José Von  
Zuben, Wagner Caradori do Amaral, Maurício Ferreira Magalhães

Data da defesa: 29/02/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

**Candidata:** Mábia Daniel Cavalcante

**Data da Defesa:** 29 de fevereiro de 2008

**Título da Tese:** "Modelagem e Determinação de Parâmetros de Desempenho de Redes de Comunicações Através da Álgebra de Dióides"

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes (Presidente): Rafael Santos Mendes  
Prof. Dr. Ricardo Luders: Ricardo Luders  
Profa. Dra. Ana Cristina Vieira de Melo: Ana Melo  
Prof. Dr. Fernando José Von Zuben: Fernando José Von Zuben  
Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral: Wagner Caradori do Amaral  
Prof. Dr. Maurício Ferreira Magalhães: Maurício Ferreira Magalhães

# Resumo

*Network Calculus* (NC) é um conjunto de regras e resultados para calcular parâmetros de desempenho de redes de comunicações. As redes de comunicações são exemplos de Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos (DEDS), ou seja, sistemas cujas mudanças de estado são comandadas por eventos que ocorrem em instantes discretos. As restrições matemáticas de alguns DEDS podem ser descritas mais adequadamente usando a álgebra de dióides. Existe, portanto, uma relação entre NC e álgebra de dióides. No entanto, trabalhar em uma plataforma completamente baseada na álgebra de dióides é uma abordagem nova para o NC. Nesse contexto, as contribuições deste trabalho podem ser consideradas sob dois aspectos. Por um lado, no uso sistemático da álgebra de dióides e na definição de métodos, baseados nessa álgebra, para a modelagem e análise de desempenho de redes de comunicações. Por outro lado, nas análises desenvolvidas e resultados alcançados para alguns sistemas específicos. Como uma forma de ilustrar os métodos propostos, analisam-se componentes comuns a modelos de redes de comunicações, tais como: enlaces conservativos, reguladores de tráfegos, *buffers* de recepção e multiplexadores. Alguns resultados alcançados para esses sistemas são inovadores e menos conservativos do que os encontrados na literatura.

**Palavras-chave:** *Network Calculus*, Qualidade de Serviço, Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos, álgebra de dióides.

# Abstract

*Network Calculus* (NC) is a set of rules and results regarding performance parameters of communication networks. Communication networks are examples of Discrete Event Dynamic Systems (DEDS), i.e., systems whose state transitions are triggered by events that occur at discrete instants. The mathematical constraints of some DEDS can be described more adequately using the dioid algebra. Therefore, there is a relationship between NC and the dioid algebra. However, working on a framework completely based on the dioid algebra is a new approach to the NC. In this context, the contributions of this work can be considered under two aspects. On one hand, in the systematic use of the dioid algebra and the definition of methods based on this algebra to model and analyze performance of communication networks. On the other hand, in the analysis developed and results achieved for some specific systems. To illustrate the introduced methods, some systems that are commonly found in models of communication networks were analyzed. Among them: conservative links, traffic regulators, receive buffers (or packetizers) and multiplexers. Some of the results obtained for these systems are new and less conservative than those in the literature.

**Keywords:** Network Calculus, Quality of Service, Discrete Event Dynamic Systems, dioid algebra.

*Ao Mario,  
à minha mãe, Avani, e  
ao meu irmão, “França”*

# Agradecimentos

Gostaria de expressar a minha gratidão a todos que me ajudaram na confecção deste trabalho. Em especial, agradeço:

Ao Rafael, pela orientação e positividade e pela oportunidade concedida.

À minha mãe e ao Mario, pelo apoio, carinho e incentivo.

Ao Maurício, pelas inúmeras conversas produtivas e pela ajuda em relação ao levantamento bibliográfico.

Aos colegas de laboratório, que por vezes me ajudaram, Rossano, Pasquini, Luciano, Zuliani, Nicola, Prado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao DCA/FEEC/UNICAMP, pela infra-estrutura concedida.

Às funcionárias Carmen (secretária do DCA) e Noêmia (secretária da pós-graduação/FEEC), pela atenção.

Aos demais colegas que, no mínimo, tornaram o ambiente de trabalho mais agradável.

# Sumário

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Lista de Tabelas                                                       | xi        |
| Lista de Figuras                                                       | xii       |
| Lista de Símbolos                                                      | xv        |
| Lista de Acrônimos                                                     | xix       |
| Trabalhos Publicados pelo Autor                                        | xx        |
| <b>1 Introdução</b>                                                    | <b>1</b>  |
| <b>2 <i>Network Calculus</i></b>                                       | <b>5</b>  |
| 2.1 Curvas de regulação . . . . .                                      | 7         |
| 2.2 Curvas de serviço . . . . .                                        | 9         |
| 2.3 Resultados da literatura . . . . .                                 | 14        |
| <b>3 Álgebra de dióides</b>                                            | <b>17</b> |
| 3.1 Definições e propriedades gerais de dióides . . . . .              | 17        |
| 3.2 Dióide proposto: $\mathcal{C}$ . . . . .                           | 23        |
| 3.3 Elementos e mapeamentos úteis do dióide $\mathcal{C}$ . . . . .    | 30        |
| 3.4 Conclusão . . . . .                                                | 37        |
| <b>4 Restrições matemáticas básicas e elementos básicos associados</b> | <b>39</b> |
| 4.1 Restrições de fluxo . . . . .                                      | 40        |
| 4.2 Restrições de acoplamento . . . . .                                | 40        |
| 4.3 Restrições de regulação . . . . .                                  | 41        |
| 4.4 Restrições de serviço . . . . .                                    | 43        |
| 4.5 Restrições de <i>backlog</i> . . . . .                             | 43        |
| 4.6 Restrições de atraso máximo . . . . .                              | 44        |
| 4.7 Elementos básicos . . . . .                                        | 45        |
| 4.8 Método para a resolução de problemas em $\mathcal{C}$ . . . . .    | 48        |
| 4.9 Conclusão . . . . .                                                | 49        |
| <b>5 Determinação de limitantes de parâmetros de QoS</b>               | <b>51</b> |
| 5.1 Método . . . . .                                                   | 52        |
| 5.2 Atraso virtual máximo . . . . .                                    | 53        |

|          |                                                                                                     |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.3      | <i>Backlog</i> máximo . . . . .                                                                     | 56         |
| 5.4      | Taxa de saída de dados máxima . . . . .                                                             | 59         |
| 5.5      | Curva de serviço de uma junção regulador $\sigma$ - rede $\beta$ . . . . .                          | 61         |
| 5.6      | Simplificação de modelos e análise de equivalências . . . . .                                       | 62         |
| 5.7      | Conclusão . . . . .                                                                                 | 72         |
| <b>6</b> | <b>Desacoplamento de curvas de serviço para tráfegos multiplexados</b>                              | <b>73</b>  |
| 6.1      | Resultados anteriores . . . . .                                                                     | 74         |
| 6.2      | Formalização do problema . . . . .                                                                  | 77         |
| 6.3      | Atraso virtual máximo por fluxo . . . . .                                                           | 81         |
| 6.4      | Atraso virtual instantâneo em relação ao fluxo de saída . . . . .                                   | 88         |
| 6.5      | Conclusão . . . . .                                                                                 | 98         |
| <b>7</b> | <b>Sistemas de pequena complexidade: elementos de redes isolados</b>                                | <b>101</b> |
| 7.1      | Enlace conservativo com capacidade variável e regulador “guloso” ( <i>greedy shaper</i> ) . . . . . | 102        |
| 7.2      | Canal com atraso máximo $D$ . . . . .                                                               | 104        |
| 7.3      | <i>Buffer</i> de recepção . . . . .                                                                 | 109        |
| 7.4      | Reordenador de bits . . . . .                                                                       | 118        |
| 7.5      | Multiplexador com duas entradas . . . . .                                                           | 123        |
| 7.5.1    | Situação 1: Fluxos de mesma prioridade e disciplina de filas FIFO . . . . .                         | 127        |
| 7.5.2    | Situação 2: Fluxo de interesse com um fluxo de maior prioridade . . . . .                           | 132        |
| 7.5.3    | Situação 3: Fluxo de interesse com um fluxo de menor prioridade . . . . .                           | 134        |
| 7.5.4    | Situação 4: Fluxos sem garantia de ordem de serviço . . . . .                                       | 135        |
| 7.6      | Multiplexador com $M$ fluxos de entradas . . . . .                                                  | 138        |
| 7.7      | Elementos com perdas . . . . .                                                                      | 142        |
| 7.8      | Conclusão . . . . .                                                                                 | 145        |
| <b>8</b> | <b>Conclusão</b>                                                                                    | <b>147</b> |
| 8.1      | Contribuições do trabalho . . . . .                                                                 | 147        |
| 8.2      | Trabalhos futuros . . . . .                                                                         | 149        |
|          | <b>Bibliografia</b>                                                                                 | <b>152</b> |
| <b>A</b> | <b>Tabelas de resultados</b>                                                                        | <b>159</b> |
| <b>B</b> | <b>Demonstrações referentes ao Capítulo 3</b>                                                       | <b>167</b> |
| B.1      | Propriedades da Tabela 3.4 . . . . .                                                                | 167        |
| B.2      | Propriedades da Tabela 3.5 . . . . .                                                                | 168        |
| B.3      | Propriedades da Tabela 3.7 . . . . .                                                                | 175        |
| B.4      | Proposição 6 . . . . .                                                                              | 179        |
| B.5      | Propriedades da Tabela 3.8 . . . . .                                                                | 179        |
| B.6      | Propriedades da Tabela 3.10 . . . . .                                                               | 180        |
| <b>C</b> | <b>Demonstrações referentes ao Capítulo 4</b>                                                       | <b>185</b> |
| <b>D</b> | <b>Demonstrações referentes ao Capítulo 6</b>                                                       | <b>187</b> |
| <b>E</b> | <b>Demonstrações referentes ao Capítulo 7</b>                                                       | <b>203</b> |

|                                                 |            |
|-------------------------------------------------|------------|
| <b>F Resultados conhecidos</b>                  | <b>213</b> |
| <b>G Demonstrações e proposições adicionais</b> | <b>215</b> |

# Lista de Tabelas

|      |                                                                                            |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1  | Axiomas de um dióide. . . . .                                                              | 18  |
| 3.2  | Propriedades da residuação . . . . .                                                       | 22  |
| 3.3  | Operações definidas em $\mathcal{C}$ . . . . .                                             | 28  |
| 3.4  | Propriedades da função de deslocamento vertical: $\lambda_B \in \mathcal{C}$ . . . . .     | 32  |
| 3.5  | Propriedades da função de atraso constante: $\delta_D \in \mathcal{C}$ . . . . .           | 33  |
| 3.6  | Equivalências entre restrições na álgebra convencional e no dióide $\mathcal{C}$ . . . . . | 34  |
| 3.7  | Propriedades do mapeamento $\hat{x}$ . . . . .                                             | 34  |
| 3.8  | Propriedades das projeções de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}_t$ . . . . .                   | 36  |
| 3.9  | Mapeamentos de projeção e mapeamentos F e G. . . . .                                       | 37  |
| 3.10 | Propriedades dos mapeamentos F e G. . . . .                                                | 37  |
| 4.1  | Elementos básicos e suas restrições matemáticas em $\mathcal{C}$ . . . . .                 | 47  |
| 5.1  | Parâmetros de QoS obtidos para um sistema regulador $\sigma$ - rede $\beta$ . . . . .      | 63  |
| 5.2  | Sistemas equivalentes e parâmetros para equivalência total. . . . .                        | 71  |
| 5.3  | Parâmetros de QoS para um sistema regulador $\sigma$ e redes $\beta$ em paralelo. . . . .  | 71  |
| 6.1  | Propriedades da função de atraso variável $\delta_a \in \mathcal{C}$ . . . . .             | 89  |
| 7.1  | Propriedades da função de atraso variável $\partial_D \in \mathcal{C}$ . . . . .           | 104 |
| 7.2  | Parâmetros de atraso obtidos para um sistema regulador $\sigma$ - rede $\beta$ . . . . .   | 107 |
| 7.3  | Elementos básicos adicionais e suas restrições em $\mathcal{C}$ . . . . .                  | 108 |
| 7.4  | Curvas de serviço obtidas para quatro configurações de tráfegos multiplexados. . . . .     | 137 |
| 7.5  | Parâmetros das fontes do exemplo da Figura 7.25. . . . .                                   | 141 |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                     |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Rede com fluxo de entrada sujeito a um filtro regulador. . . . .                                                    | 6  |
| 2.2  | Exemplo de curva de entrada $\sigma(t)$ . . . . .                                                                   | 7  |
| 2.3  | Exemplo de curva de serviço $\beta(t)$ . . . . .                                                                    | 11 |
| 2.4  | Circuito RC. . . . .                                                                                                | 12 |
| 3.1  | Elemento nulo em $\mathcal{C}$ . . . . .                                                                            | 24 |
| 3.2  | Elemento identidade em $\mathcal{C}$ . . . . .                                                                      | 24 |
| 3.3  | Função de deslocamento vertical: $\lambda_B \in \mathcal{C}$ . . . . .                                              | 31 |
| 3.4  | Função de atraso constante: $\delta_D \in \mathcal{C}$ . . . . .                                                    | 32 |
| 3.5  | Projeções de uma função $x(s, t)$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}_t$ , para um certo valor de $s$ . . . . .        | 35 |
| 4.1  | Elemento genérico com fluxo de entrada $x$ e fluxo de saída $y$ . . . . .                                           | 39 |
| 4.2  | Sistema formado pelo acoplamento de $M$ fluxos de entrada. . . . .                                                  | 42 |
| 4.3  | Fluxos de entrada e saída para um sistema com atraso máximo $\bar{D}$ . . . . .                                     | 45 |
| 4.4  | Acoplador com $M$ fluxos de entrada. . . . .                                                                        | 46 |
| 4.5  | Regulador sem perdas, com curva característica $\sigma \in \mathcal{C}$ . . . . .                                   | 46 |
| 4.6  | Elemento com curva de serviço $\beta \in \mathcal{C}$ . . . . .                                                     | 47 |
| 4.7  | Fila sem perdas, com <i>backlog</i> máximo limitado pela função $W(t)$ . . . . .                                    | 47 |
| 4.8  | Duas restrições de serviço entre os mesmos fluxos $x$ e $y$ . . . . .                                               | 48 |
| 4.9  | Método para a resolução de problemas em $\mathcal{C}$ . . . . .                                                     | 49 |
| 5.1  | Sistema genérico de interesse. . . . .                                                                              | 51 |
| 5.2  | Método para a determinação de limitantes de parâmetros de QoS. . . . .                                              | 52 |
| 5.3  | Rede com curva de serviço $\beta$ conectada a um regulador $\sigma$ . . . . .                                       | 53 |
| 5.4  | Rede $\delta_d$ em paralelo à rede $\beta$ da Figura 5.3. . . . .                                                   | 54 |
| 5.5  | Exemplo: Funções $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ e respectiva função $(\sigma^* \delta_{\bar{D}})(t)$ . . . . .            | 56 |
| 5.6  | Fila $w$ conectada em paralelo à rede $\beta$ da Figura 5.3. . . . .                                                | 56 |
| 5.7  | Exemplo: Funções $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ e respectiva função $W(t) = [\beta \bowtie \sigma^*](t, t)$ . . . . .     | 59 |
| 5.8  | Regulador $\sigma_y$ em paralelo ao sistema regulador $\sigma$ - rede $\beta$ da Figura 5.3. . . . .                | 60 |
| 5.9  | Exemplo: Funções $\sigma(t)$ e $\beta(t)$ e respectiva função $\sigma_y(t) = [\beta \bowtie \sigma^*](t)$ . . . . . | 61 |
| 5.10 | Rede $\beta'$ em paralelo ao sistema regulador $\sigma$ - rede $\beta$ da Figura 5.3. . . . .                       | 62 |
| 5.11 | Rede $\beta_1$ conectada entre $u$ e $x$ , para indicar uma restrição de serviço. . . . .                           | 64 |
| 5.12 | Exemplo de representação simplificada de um sistema. . . . .                                                        | 64 |
| 5.13 | Análise de equivalência: reguladores em série. . . . .                                                              | 65 |
| 5.14 | Análise de equivalência: reguladores em paralelo. . . . .                                                           | 66 |
| 5.15 | Análise de equivalência: redes $\beta$ em série. . . . .                                                            | 67 |

|      |                                                                                                 |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.16 | Análise de equivalência: redes $\beta$ em paralelo. . . . .                                     | 67  |
| 5.17 | Redes $\beta$ em paralelo: determinação de uma curva de regulação. . . . .                      | 69  |
| 5.18 | Análise de equivalência: filas $W$ em série. . . . .                                            | 69  |
| 5.19 | Análise de equivalência: filas $W$ em paralelo. . . . .                                         | 70  |
| 6.1  | Enlace com curva de serviço estrita $\beta$ , fluxo de entrada $x$ e fluxo de saída $y$ . . . . | 73  |
| 6.2  | Determinação de curvas de serviço para tráfegos multiplexados (Parte 1). . . . .                | 75  |
| 6.3  | Diferentes representações de um sistema com $M$ fluxos de entrada regulados. . .                | 78  |
| 6.4  | Determinação de curvas de serviço para tráfegos multiplexados (Parte 2). . . . .                | 84  |
| 6.5  | Restrições de serviço entre os fluxos $x_i$ e $y_i$ na Figura 6.3(c). . . . .                   | 86  |
| 6.6  | Determinação de curvas de serviço para tráfegos multiplexados (Parte 3). . . . .                | 87  |
| 6.7  | Rede com curva de serviço $\beta$ conectada a um regulador $\sigma$ . . . . .                   | 90  |
| 6.8  | Determinação de curvas de serviço para tráfegos multiplexados (Parte 4). . . . .                | 95  |
| 6.9  | Determinação de curvas de serviço para tráfegos multiplexados (Parte 5). . . . .                | 97  |
| 7.1  | Enlace conservativo com capacidade de transmissão variável. . . . .                             | 103 |
| 7.2  | Correspondência entre as funções de atraso $a(t)$ e $D(t')$ . . . . .                           | 105 |
| 7.3  | Linha de atraso máximo limitado pela função $D(t)$ . . . . .                                    | 105 |
| 7.4  | Rede com curva de serviço $\beta$ conectada a um regulador $\sigma$ . . . . .                   | 106 |
| 7.5  | Linha de atraso constante $D$ . . . . .                                                         | 107 |
| 7.6  | Enlace não-conservativo com latência $V(s)$ e capacidade $C$ . . . . .                          | 108 |
| 7.7  | Buffer de recepção com tamanho máximo de pacote $L$ . . . . .                                   | 109 |
| 7.8  | Exemplo de curvas de entrada e de saída de um buffer de recepção. . . . .                       | 110 |
| 7.9  | Buffer de recepção de tamanho $L$ e entrada regulada. . . . .                                   | 111 |
| 7.10 | Buffer de recepção de tamanho $L$ conectado a uma rede $\beta$ . . . . .                        | 112 |
| 7.11 | Buffer de recepção de tamanho $L$ conectado a uma rede $\beta$ e um regulador $\sigma$ . . .    | 113 |
| 7.12 | Buffer de recepção de tamanho $L$ conectado a um enlace conservativo. . . . .                   | 114 |
| 7.13 | Buffer de recepção conectado a um regulador $\sigma$ , uma rede $\beta$ e um canal $D$ . . . .  | 115 |
| 7.14 | Conexão em série de um regulador $\sigma$ e $M$ sistemas iguais ao da Figura 7.10(a). .         | 117 |
| 7.15 | Reordenador de bits com fluxo de entrada regulado. . . . .                                      | 119 |
| 7.16 | Inversor de pacotes com enlace de entrada conservativo. . . . .                                 | 121 |
| 7.17 | Inversor de pacotes com enlace de entrada conservativo sujeito a um regulador. .                | 121 |
| 7.18 | Reordenador de bits genérico e buffer de recepção correspondente. . . . .                       | 123 |
| 7.19 | Multiplexador geral com duas entradas. . . . .                                                  | 123 |
| 7.20 | Multiplexador com duas entradas: primeira configuração de tráfegos. . . . .                     | 128 |
| 7.21 | Multiplexador FIFO com enlaces de entrada conservativos. . . . .                                | 130 |
| 7.22 | Multiplexador FIFO com enlaces conservativos sujeitos a reguladores. . . . .                    | 131 |
| 7.23 | Multiplexador com duas entradas: segunda configuração de tráfegos. . . . .                      | 133 |
| 7.24 | Multiplexador com duas entradas: quarta configuração de tráfegos. . . . .                       | 136 |
| 7.25 | Exemplo: Curva de serviço de um tráfego de prioridade mediana. . . . .                          | 141 |
| 7.26 | Elemento $S$ com perdas . . . . .                                                               | 142 |
| 7.27 | Regulador com perdas . . . . .                                                                  | 143 |
| D.1  | Rede com curva de serviço $\beta$ conectada a um regulador $\sigma$ . . . . .                   | 192 |
| D.2  | Rede $\delta_\alpha$ em paralelo à rede $\beta$ da Figura 6.7. . . . .                          | 193 |
| E.1  | Rede com curva de serviço $\beta$ conectada a um regulador $\sigma$ . . . . .                   | 203 |
| E.2  | Sistema com atraso máximo $d(t)$ em paralelo à rede $\beta$ da Figura E.1. . . . .              | 204 |

|     |                                                                       |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| E.3 | Rede $\beta$ em série com um <i>buffer</i> de recepção. . . . .       | 207 |
| E.4 | <i>Buffer</i> de recepção conectado a um enlace conservativo. . . . . | 208 |

# Lista de Símbolos

| Símbolo                     | Significado                                                                                                                                 |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x(t)$                      | Função que representa a quantidade de dados que passam em um determinado ponto de uma rede de comunicações no intervalo de tempo $(0, t]$ . |
| $l_k$                       | $k$ -ésimo enlace da rota de um dado fluxo de interesse.                                                                                    |
| $\mu_i^m(t)$                | Curva de serviço universal do fluxo $i$ ao passar pelos enlaces $l_1, \dots, l_m$ .                                                         |
| $x_i^m$                     | Função que representa um fluxo $i$ ao entrar no enlace $l_m$ .                                                                              |
| $y_i^m$                     | Função que representa um fluxo $i$ ao deixar o enlace $l_m$ .                                                                               |
| $\beta_{i,m}$               | Curva de serviço estrita do fluxo $i$ ao percorrer o enlace $l_m$ .                                                                         |
| $\beta_i^{\text{NET}}(t)$   | Curva de serviço estrita do fluxo $i$ ao passar pelo seu percurso total, formado pelos enlaces $l_1, \dots, l_M$ .                          |
| $h(t)$                      | Resposta ao impulso de um circuito RC.                                                                                                      |
| $\mathcal{B}, \mathcal{D}$  | Conjuntos definidos nos dióides $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ , respectivamente.                                                            |
| $\oplus$                    | Operação de soma definida em um dióide.                                                                                                     |
| $\otimes$                   | Operação de multiplicação definida em um dióide.                                                                                            |
| $\mathcal{B}, \mathcal{D}$  | Dióides quaisquer. Notação: $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \oplus, \otimes)$ ; $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ .               |
| $\mathbf{e}$                | Elemento identidade de um dióide.                                                                                                           |
| $\varepsilon$               | Elemento nulo de um dióide.                                                                                                                 |
| “ $\preceq$ ” e “ $\succ$ ” | Relações de ordenamento parcial em um dióide qualquer.                                                                                      |
| $\top$                      | Máximo elemento de um dióide completo.                                                                                                      |

|                  |                                                                                                                      |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\wedge$         | Máximo limitante inferior entre dois elementos de um conjunto munido de um ordenamento parcial.                      |
| $f^\#(b)$        | Resíduo do mapeamento isotônico $f$ aplicado em $b$ .                                                                |
| $f^\flat(b)$     | Resíduo dual do mapeamento isotônico $f$ aplicado em $b$ .                                                           |
| $l_a(x)$         | Função de multiplicação à esquerda por $a$ .                                                                         |
| $r_a(x)$         | Função de multiplicação à direita por $a$ .                                                                          |
| $a \backslash y$ | Resíduo da função $l_a(x)$ .                                                                                         |
| $y \not\phi a$   | Resíduo da função $r_a(x)$ .                                                                                         |
| $a^*$            | Fechamento de Kleene do elemento $a$ de um dióide.                                                                   |
| $a^i$            | $i$ -ésima potência de $a$ , ou seja, $a^i = a \otimes \dots \otimes a$ ( $i$ vezes).                                |
| $\mathcal{C}$    | Conjunto de trabalho para o dióide proposto.                                                                         |
| $\mathcal{C}$    | Dióide completo proposto. Notação: $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ .                                  |
| $s, t, \tau$     | Números inteiros que representam instantes de tempo.                                                                 |
| $x(s, t)$        | Quantidade de dados que passam em um determinado ponto de uma rede de comunicações, no intervalo de tempo $(s, t]$ . |
| $x^+$            | Máximo entre $x$ e zero, ou seja, $x^+ = \max\{0, x\}$ .                                                             |
| $\mathcal{C}_t$  | Sub-conjunto das funções de $\mathcal{C}$ não-decrescentes em $t$ .                                                  |
| $\lambda_B$      | Função de deslocamento vertical.                                                                                     |
| $\delta_D$       | Função de atraso $D$ .                                                                                               |
| $\mathcal{C}_s$  | Conjunto dos elementos de $\mathcal{C}$ não-crescentes em $s$ .                                                      |
| $\widehat{x}$    | Mapeamento de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ , responsável por representar restrições no intervalo $(0, t]$ .        |
| $x_\flat$        | Limitante $\mathcal{C}$ -inferior da função $x$ .                                                                    |
| $x_\sharp$       | Limitante $\mathcal{C}$ -superior da função $x$ .                                                                    |
| $\mathcal{C}'_t$ | Subconjunto dos $x \in \mathcal{C}_t$ , tais que $x(t, t) \leq x(t+1, t+1)$ , $\forall t$ .                          |

|                                |                                                                                                                                           |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $F\{\cdot\}$                   | Mapeamento de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ , útil para representar agregação de tráfegos.                                               |
| $G\{\cdot\}$                   | Mapeamento de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ , útil para representar desagregação de tráfegos.                                            |
| $u, v, x, y$                   | Funções em $\mathcal{C}_t \cap \mathcal{C}_s$ . Representam fluxos de tráfego.                                                            |
| $\mathbf{S}$                   | Sistema genérico de interesse.                                                                                                            |
| $x_k$                          | Função que representa os dados do fluxo $k$ ao passar por um ponto $x$ de uma rede de comunicações.                                       |
| $\sigma, \rho$                 | Curvas de regulação.                                                                                                                      |
| $\beta, \mu$                   | Curvas de serviço.                                                                                                                        |
| $w(t)$                         | <i>Backlog</i> de um sistema no instante $t$ .                                                                                            |
| $W(t)$                         | Limitante para o maior <i>backlog</i> de um sistema no instante $t$ .                                                                     |
| $\overline{W}$                 | Limitante para o maior <i>backlog</i> de um sistema em qualquer instante.                                                                 |
| $d(t)$                         | Atraso virtual máximo de um sistema no instante $t$ .                                                                                     |
| $D(t)$                         | Limitante para o atraso virtual máximo de um sistema no instante $t$ .                                                                    |
| $\bar{D}$                      | Limitante para o atraso virtual máximo de um sistema em qualquer instante.                                                                |
| $\nu$                          | Variável inteira que representa o tamanho de um intervalo de interesse. Em geral, $\nu = t - s$ .                                         |
| $\sigma_y$                     | Curva de regulação atendida pelo fluxo $y$ .                                                                                              |
| $\mathbf{R}$                   | Representação de um sistema.                                                                                                              |
| $\pi$                          | Parâmetro de QoS.                                                                                                                         |
| $\mathcal{L}(\mathbf{R}, \pi)$ | Limitante do parâmetro $\pi$ obtido para a representação $\mathbf{R}$ , a partir do método da Seção 5.1 deste trabalho.                   |
| $\beta^\Theta$                 | Curva de serviço parametrizada pela constante $\Theta \in \mathbb{Z}^+$ ou pela função $\Theta : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ . |
| $x_{(i)}$                      | Somatório no sentido convencional das funções $x_k, \forall k$ , excetuado-se a função $x_i$ , isto é, $x_{(i)} = \sum_{k \neq i} x_k$ .  |
| $f_i$                          | Função $f$ referente ao fluxo $x_i$ . Por exemplo: $\beta_i, D_i$ .                                                                       |

|                       |                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\tilde{f}_i$         | Função $f$ referente a um agregado de tráfegos excetuado-se o fluxo $x_i$ . Por exemplo: $\tilde{\beta}_i$ .                                                                               |
| $\tilde{D}_i$         | Limitante para o atraso virtual máximo do fluxo agregado, excetuando-se o fluxo $i$ .                                                                                                      |
| $\beta^{\mathcal{D}}$ | Curva de serviço que satisfaz um dado limitante de atraso virtual $\bar{D}$ .                                                                                                              |
| $\Delta(t)$           | Atraso virtual instantâneo em relação ao fluxo de saída. Também chamado de atraso virtual <i>a posteriori</i> ou p-atraso.                                                                 |
| $\delta_a$            | Função de p-atraso variável $a(t)$ .                                                                                                                                                       |
| $a(t)$                | Função limitante do p-atraso $\Delta(t)$ .                                                                                                                                                 |
| $\Delta^-(t)$         | Medida de atraso virtual instantâneo em relação ao fluxo de saída.                                                                                                                         |
| $\Lambda, \Omega$     | Funções de distância horizontal entre curvas de regulação e de serviço.                                                                                                                    |
| $\beta^a$             | Curva de serviço que satisfaz um limitante de p-atraso $a(t)$ .                                                                                                                            |
| $C$                   | Capacidade máxima de transmissão de um enlace conservativo.                                                                                                                                |
| $\xi$                 | Ponto em que, dadas duas funções em $\mathcal{C}$ e dois instantes de tempo, o produto em $\mathcal{C}$ atinge o mínimo. Por exemplo, $\xi : (x\beta)(s, t) = x(s, \xi) + \beta(\xi, t)$ . |
| $\partial_D$          | Função de atraso virtual variável $D(t)$ .                                                                                                                                                 |
| $L$                   | Tamanho máximo dos pacotes de um dado fluxo.                                                                                                                                               |
| $P_L$                 | Função de quantização que descreve matematicamente o comportamento de um <i>buffer</i> de recepção.                                                                                        |
| $\varphi$             | Função que limita o quão lento uma dada função de fluxo pode variar.                                                                                                                       |
| $D_{ik}(t)$           | Função limitante para o atraso de reordenação gerado pelo fluxo $k$ no fluxo $i$ .                                                                                                         |
| $B_{ik}(t)$           | Função limitante para o <i>backlog</i> de reordenação gerado pelo fluxo $k$ no fluxo $i$ .                                                                                                 |
| $LP(i)$               | Conjunto dos fluxos com menor prioridade do que o fluxo $i$ .                                                                                                                              |

# Lista de Acrônimos

|                 |                                        |
|-----------------|----------------------------------------|
| <b>BB</b>       | <i>Bandwidth Broker</i>                |
| <b>DEDS</b>     | <i>Discrete Event Dynamic Systems</i>  |
| <b>DiffServ</b> | <i>Differentiated Services</i>         |
| <b>FIFO</b>     | <i>First In, First Out</i>             |
| <b>GPS</b>      | <i>Generalized Processor Sharing</i>   |
| <b>GR</b>       | <i>Guaranteed Rate</i>                 |
| <b>IntServ</b>  | <i>Integrated Services</i>             |
| <b>IP</b>       | <i>Internet Protocol</i>               |
| <b>LFCFS</b>    | <i>Locally First-Come First-Served</i> |
| <b>NC</b>       | <i>Network Calculus</i>                |
| <b>QoS</b>      | <i>Quality of Service</i>              |
| <b>SLA</b>      | <i>Service Level Agreements</i>        |
| <b>VoD</b>      | <i>Video-on-Demand</i>                 |
| <b>VoIP</b>     | <i>Voice over IP</i>                   |

# Trabalhos Publicados pelo Autor

- DANIEL-CAVALCANTE, M.; LIMA, T. M. R.; DA COSTA, V. L.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R.** Algoritmo adaptativo para balanceamento de carga para tráfego tipo melhor esforço em redes IP/MPLS. In: 20º Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores (SBRC'02), 2002. *Anais...* Búzios, RJ, Brasil, 2002. v. 1.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; LIMA, T. M. R.; DA COSTA, V. L.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R.** Algoritmo adaptativo baseado em análise de perturbações para balanceamento de carga em redes MPLS. In: XIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA'02), 2002. *Anais...* Natal, RN, Brasil, 2002. v. 1. p. 1464–1470.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; LIMA, T. M. R.; DA COSTA, V. L.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R.** Adaptive shifting algorithm for load balancing in MPLS networks. In: 15th International Conference on Parallel and Distributed Computing Systems (PDCS'02), 2002. *Anais...* Louisville, Kentucky, USA, 2002. v. 1. p. 260–265.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; SANTOS-MENDES, R.** Estimação de limitantes em variáveis aleatórias limitadas. In: XV Congresso Brasileiro de Automática (CBA'04), 2004. *Anais...* Gramado, RS, Brasil, 2004.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R.** The Max-Plus algebra and the Network Calculus. In: 8th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'06), 2006. *Anais...* Ann Arbor- Michigan, USA, 2006. p. 439–444.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R.** Max-Plus: A network algebra. In: Second Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA'06), 2006. *Anais...* Grenoble, França, 2006.
- In: COMMAULT, C. (Ed.); MARCHAND, N. (Ed.).** *Positive systems*. Berlin, Alemanha: Springer Berlin/Heidelberg, October 2006. v. 341/2006 em *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Cap. Max-Plus: A Network Algebra, p. 375–382.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; SANTOS-MENDES, R.** A álgebra Max-Plus e o controle de tráfego em elementos de redes de comunicações. In: XVI Congresso Brasileiro de Automática (CBA'06), 2006. *Anais...* Salvador- BA, Brasil, 2006. p. 2183–2188.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; SANTOS-MENDES, R.** Dioid of formal power series for the determination of performance parameters of communication networks. In: 9th

International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08), 2008. *Anais...* Göteborg, Sweden, 2008.

**DANIEL-CAVALCANTE, M.; SANTOS-MENDES, R.** Metodologia modular baseada em dióides para a modelagem de restrições de desempenho de redes de comunicações. In: Primeiro Encontro dos Alunos e Docentes do Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial (EADCA'08), 2008. *Anais...* Campinas-SP, 2008.

# Capítulo 1

## Introdução

Redes de comunicações com suporte para serviços integrados (Intserv - Braden *et al.*, 1994) ou diferenciados (DiffServ - Blake *et al.*, 1998) podem transportar tráfegos de uma grande variedade de aplicações e ainda serem capazes de prover garantias de desempenho para tráfegos de tempo real, como vídeo sob demanda (VoD), videoconferências e voz sobre IP (VoIP) (Parekh e Gallager, 1993). Para satisfazer seus usuários finais, cada tipo de aplicação demanda um certo requisito de Qualidade de Serviço (QoS), tal como máximo atraso fim-a-fim, máxima variação de atraso (ou *jitter*) e mínima taxa de transmissão de dados. Esse cenário de tráfegos impõe a determinação de limitantes de parâmetros de QoS e mecanismos de filtragem de tráfegos, para evitar a monopolização de recursos de redes por um único fluxo e a conseqüente piora na qualidade de serviço oferecida a outros fluxos. Por exemplo, considere-se uma rádio *online*. Neste caso, apresentar aos ouvintes um serviço de qualidade significa disponibilizar áudio sem cortes ou ruídos, a uma taxa adequada. Para conseguir a qualidade desejada, em geral, a partir da requisição do ouvinte, dados são armazenados em um *buffer* durante algum tempo. Esse *buffer* é importante para que o usuário não perceba eventuais oscilações na taxa de dados recebidos e conseqüentes falhas no áudio, mas não pode ser tão grande ao ponto de fazer o ouvinte desistir de ouvir a rádio porque o atraso inicial (até começar a ouvir a rádio) é muito grande.

O *Network Calculus* (NC) surgiu no contexto de prover QoS à Internet, como um fundamento matemático para um estudo mais rigoroso da arquitetura DiffServ/IntServ em um contexto estático<sup>1</sup> e determinístico. O NC pode ser definido como um conjunto de regras e resultados para calcular limitantes de parâmetros de desempenho em redes de comunicações e é uma forma alternativa à teoria de filas clássica, para analisar o comportamento de sistemas de filas. O NC se baseia na idéia de que uma análise detalhada dos fluxos de tráfego não é necessária, para analisar o desempenho de uma rede em termos dos requisitos de serviço (Malaney

---

<sup>1</sup>Estático, porque não se leva em conta a natureza de tempo real de aplicações (Parekh e Gallager, 1994).

e Rogers, 1999). A teoria existente sobre o NC está basicamente descrita em Le Boudec (1996), Chang (2000), Chang *et al.* (2002) e Le Boudec e Thiran (2003) e uma introdução ao assunto pode ser encontrada em Agrawal *et al.* (1999), Le Boudec *et al.* (2000a), Le Boudec *et al.* (2000b), Firoiu *et al.* (2002) e Benvenuti *et al.* (2003).

A evolução da tecnologia trouxe à tona sistemas dinâmicos complexos, cujo espaço de estados é descrito por um conjunto *discreto*, e cujas transições de estados são associadas à ocorrência instantânea de *eventos*. Esses sistemas são chamados Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos (DEDS). As redes de comunicações, alvo de estudo do *Network Calculus*, são exemplos de DEDS. Nesse caso, por exemplo, pode-se definir como *variável de estado* o número de pacotes presentes na rede; e como *eventos*, a chegada e a saída de pacotes. Outros exemplos de DEDS são: sistemas de manufatura flexível, sistemas de controle de tráfego, sistemas multiprocessados e sistemas de logística.

DEDS não são adequadamente descritos pelo arsenal matemático centrado em equações diferenciais ou a diferenças. Para esses sistemas, há técnicas alternativas mais adequadas, conforme discussão em Cassandras e Lafortune (1999). Em geral, os DEDS levam a uma descrição não-linear na álgebra convencional de números reais. Contudo, existe uma subclasse desses sistemas que pode ser modelada linearmente na *Álgebra de Dióides*. As características intrínsecas a essa álgebra são, portanto, mais adequadas para o tratamento desses sistemas.

A relação entre o NC e a álgebra de dióides está presente na literatura. Por exemplo, Le Boudec (1996) utiliza a álgebra de dióides para representar restrições da taxa de serviço mínima de redes; e Chang (1998b) e Chang *et al.* (2002) mostram que cálculos de limitantes de desempenho em redes de comunicações são simplificados, se suas restrições são representadas nessa álgebra. Contudo, o potencial da álgebra de dióides para o tratamento sistemático de redes de comunicações ainda não foi totalmente explorado.

Os trabalhos existentes sobre NC em geral utilizam uma notação heterogênea (álgebra tradicional e de dióides) para representar as restrições matemáticas de sistemas, o que obscurece as relações entre variáveis. Além disso, alguns símbolos utilizados na literatura do NC e de dióides aparecem com significados diferentes, dificultando o correto entendimento de expressões. Nesse contexto, os objetivos deste trabalho podem ser considerados sob dois aspectos. Por um lado, deseja-se utilizar sistematicamente as propriedades da álgebra de dióides na formulação e derivação de resultados em NC. Em particular, deseja-se:

- Uniformizar a notação utilizada, em torno da literatura de dióides.
- Usar mais sistematicamente resultados conhecidos da álgebra de dióides.
- Definir métodos para o tratamento sistemático e modular de problemas como a modelagem e a determinação de parâmetros de QoS em redes de comunicações.

- Quando possível, apresentar resultados e demonstrações completamente na álgebra de dióides.

Por outro lado, deseja-se obter resultados menos conservativos para problemas encontrados na literatura.

Como uma forma de ilustrar os métodos propostos neste trabalho, analisam-se alguns componentes encontrados freqüentemente em modelos de redes de comunicações, tais como: enlaces conservativos, reguladores de tráfegos, *buffers* de recepção e multiplexadores. Em particular, destacam-se as análises desenvolvidas para multiplexadores, apresentadas nos Capítulos 6 e 7.

Trabalhar em uma plataforma completamente baseada na álgebra de dióides é uma abordagem nova para o NC. Há muitos resultados úteis da álgebra de dióides que ainda não foram explorados e podem ser usados para melhorar resultados conhecidos ou resolver problemas novos, relacionados a limitantes de desempenho ou à modelagem de redes de comunicações. Além disso, vale ressaltar que a comunidade de Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos aplica o formalismo da álgebra de dióides sistematicamente, para a modelagem e controle de DEDS. Seria, portanto, positivo se ambas comunidades (DEDS e NC) compartilhassem as mesmas técnicas.

Este trabalho está dividido da maneira descrita a seguir. No Capítulo 2, apresenta-se um breve histórico do NC, introduzindo alguns conceitos importantes, como “curvas de regulação”<sup>2</sup> e “curvas de serviço”. No Capítulo 3, apresentam-se definições e resultados da álgebra de dióides que formam a base matemática deste trabalho. No Capítulo 4, definem-se os diferentes tipos de restrições matemáticas aqui tratados. A partir dessas restrições, formam-se unidades de modelo, chamadas de *elementos básicos*, com as quais é possível o tratamento de diversos problemas relacionados a redes de comunicações. No Capítulo 5, a partir dos elementos básicos, define-se um método para a determinação de parâmetros de QoS em redes de comunicações. A partir desse método, determinam-se, para um sistema simples, alguns limitantes de desempenho como máximo atraso fim-a-fim e máxima utilização de *buffers* (ou *backlog*). Finalmente, introduz-se o conceito de equivalência entre modelos de sistemas e se obtêm algumas regras para a simplificação desses modelos. No Capítulo 6, analisa-se um sistema com agregação (multiplexação) dos tráfegos de entrada. No Capítulo 7, analisam-se componentes comumente encontrados na modelagem de sistemas de comunicações, tais como: enlaces conservativos, reguladores de tráfegos, *buffers* de recepção e multiplexadores. Finalmente, no Capítulo 8, apresentam-se conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Para dar mais fluência ao texto, as demonstrações de algumas propriedades dos

---

<sup>2</sup>Na literatura, há uma multiplicidade de nomes associados ao conceito de curva de regulação (e.g., “*arrival curve*”). Uma revisão histórica destes termos é apresentada no Capítulo 2.

Capítulos 3, 4, 6 e 7 estão apresentadas à parte, respectivamente, nos Apêndices B-E. Além disso, no Apêndice F, apresentam-se alguns resultados da literatura, referenciados ao longo do texto; e, no Apêndice G, as demonstrações de algumas passagens específicas. Para facilitar consultas futuras, as tabelas de resultados apresentadas ao longo deste trabalho estão repetidas no Apêndice A.

## Capítulo 2

# *Network Calculus*

Pode-se definir *Network Calculus* (NC) como uma compilação de regras e resultados relacionados à determinação de limitantes de parâmetros de desempenho em redes de pacotes (Le Boudec, 1998). O NC surgiu no início dos anos noventa como uma ferramenta determinística para a análise do desempenho de redes de comunicações, mais especificamente redes de pacotes com garantia de serviço, mas existem extensões do NC em um contexto estocástico (Vojnović e Le Boudec, 2002; Liebeherr *et al.*, 2003; Pandit *et al.*, 2004; Jiang, 2006; Li *et al.*, 2007). Neste trabalho, o NC é visto em um contexto puramente determinístico.

O modelo de redes utilizado está descrito a seguir e se baseia em Sariowan (1996). Uma rede consiste de um conjunto de nós roteadores interconectados por enlaces. Assume-se um modelo de circuito virtual, no qual pacotes de uma sessão trafegam por um caminho físico pré-definido. Desta forma, pacotes de uma mesma sessão seguem um mesmo caminho (Le Boudec e Hébuterne, 2000). Uma rota consiste de um conjunto de enlaces ordenados conectando fonte e destino de uma sessão. Como em Fidler (2003), consideram-se apenas rotas sem ciclos<sup>1</sup>. A rota é configurada no estabelecimento da sessão e permanece inalterada enquanto a sessão está ativa. Ao invés de impor uma estrutura probabilística específica, assume-se que o tráfego de entrada é arbitrário, mas obedece a alguma restrição de rajada, conforme explicado a seguir. Consideram-se serviços *sem preempção*, ou seja, uma vez que um servidor começou o serviço de um pacote, deverá continuar até seu último bit.

Em geral, fontes de tráfego geram fluxos<sup>2</sup> de uma maneira desconhecida e aleatória. Portanto, um possível método para modelar fontes de tráfego consiste em escolher um processo

---

<sup>1</sup>Ao configurar os caminhos seguidos por pacotes, utiliza-se algum algoritmo de prevenção de ciclos, como *spanning tree*, *up/down routing* ou *turn prohibition* (Starobinski *et al.*, 2003).

<sup>2</sup>Um fluxo de tráfego (ou simplesmente fluxo) é um conjunto de pacotes com as mesmas características, os quais trafegam entre dois pontos terminais de uma rede. Por exemplo, um conjunto de pacotes com os mesmos nós de origem e destino (ou mesmos nós de ingresso e de egresso) e um conjunto de atributos que determinam seu comportamento e seus requisitos à rede, como classe de serviço e identificador de sessão (Daniel-Cavalcante, 2001).

estocástico para o tráfego emitido. Esse tipo de modelo permite fazer inferências estatísticas sobre o desempenho de redes, como, por exemplo, a probabilidade do atraso fim-a-fim de um pacote exceder  $T$  unidades de tempo. O NC, ao contrário, trabalha com limitantes determinísticos para medidas de desempenho. Esses limitantes podem ser usados para a configuração de redes com garantia de desempenho no pior caso. Para o exemplo anterior, determinam-se condições para que o atraso de pacotes *nunca* exceda  $T$  unidades de tempo (Kumar *et al.*, 2004).

As principais ferramentas para a obtenção de limitantes de QoS em redes de pacotes são o *Network Calculus* e a Teoria de Filas. A Teoria de Filas busca *valores médios* de parâmetros de desempenho, com o sistema em um estado de equilíbrio; o NC faz uma análise de pior caso buscando *limitantes* para esses parâmetros (Pandit *et al.*, 2004). Se, por um lado, ao determinar limitantes no pior caso, o NC é conservativo, por outro lado, limitantes de parâmetros de desempenho são bem mais facilmente obtidos usando os resultados do NC.<sup>3</sup> Outros métodos para obtenção de medidas de desempenho no contexto de redes podem ser encontrados em Liu *et al.* (2001), Firoiu *et al.* (2002) e Cassandras *et al.* (2002).

O NC se baseia na idéia de que não é necessária uma análise detalhada de fluxos de tráfego, para especificar o desempenho de uma rede de comunicações, dado que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- O fluxo de entrada da rede seja limitado.
- Alguma garantia mínima de serviço por fluxo seja fornecida.

As condições acima definem um sistema mínimo para o NC: um filtro que limite o tráfego de entrada; e uma rede de pacotes que forneça alguma garantia mínima de serviço. A Figura 2.1 ilustra esse sistema. Essas condições estão diretamente relacionadas a dois conceitos fundamentais do NC, apresentados a seguir: as “curvas de chegada” ou “curvas de entrada” e as “curvas de serviço”.

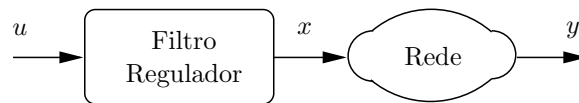


Figura 2.1: Rede com fluxo de entrada sujeito a um filtro regulador.

---

<sup>3</sup>Uma desvantagem da Teoria de Filas é que normalmente, para obter resultados de complexidade aceitável, assumem-se tráfegos Markovianos (Pandit *et al.*, 2004).

## 2.1 Curvas de regulação

Considere-se uma função  $x : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , tal que  $x(t)$  representa a quantidade de dados que passam em um determinado ponto de uma rede de comunicações no intervalo de tempo  $(0, t]$ . A função  $x(t)$  é, portanto, não-decrescente em  $t$ .

Como mencionado anteriormente, o NC considera que fluxos de entrada de redes são limitados de uma forma conhecida. Essa idéia gerou o conceito de “restrições de rajada” (*burstiness constraints*), introduzido em 1991 por Cruz (1991a) e Cruz (1991b) da maneira descrita a seguir. Como ilustrado na Figura 2.1, seja  $x$  uma função que representa o fluxo de entrada de uma determinada rede. Nesse caso, para alguma função  $\sigma : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , a seguinte inequação deve ser satisfeita,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , tal que  $s \leq t$ :

$$x(t) - x(s) \leq \sigma(t - s). \quad (2.1)$$

Le Boudec (1996) chama as funções  $\sigma$  para as quais a inequação (2.1) é satisfeita de “curvas de entrada” (*arrival curves*). Esse termo é utilizado mais freqüentemente na literatura do NC do que “restrições de rajada”.

Qualquer que seja a função  $u(t)$  ilustrada na Figura 2.1, mesmo que não satisfaça a inequação (2.1), produzirá, após passar pelo “Filtro Regulador”, uma curva  $x(t)$  que satisfaz a inequação (2.1). A Figura 2.2 ilustra o efeito de uma curva de entrada  $\sigma(t)$ .

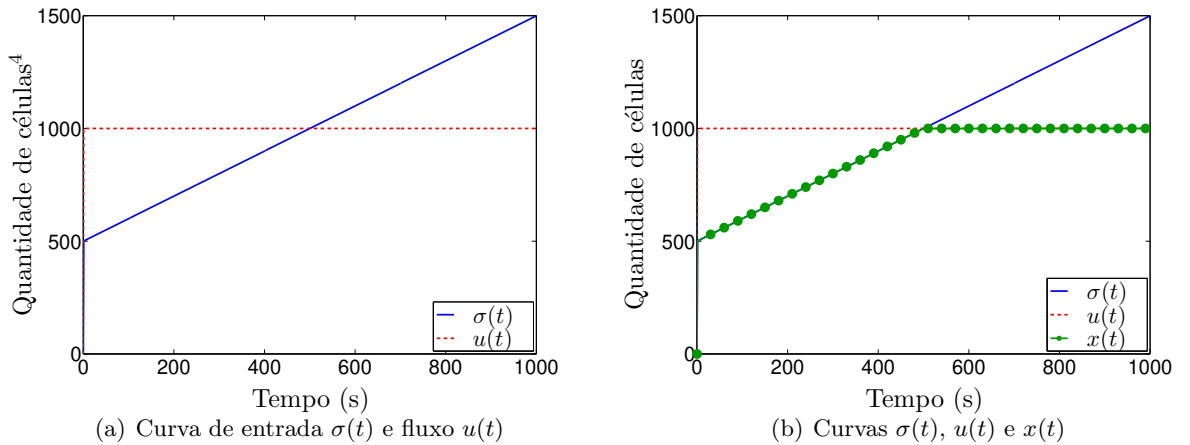


Figura 2.2: Exemplo de curva de entrada  $\sigma(t)$ . Em (a), a curva  $\sigma(t)$  e uma instanciación do fluxo de entrada  $u(t)$ . Em (b), repetição das curvas  $\sigma(t)$  e  $u(t)$  e a curva de saída do regulador,  $x(t)$ .

Considere-se a definição de funções invariantes e variantes no tempo apresentada a seguir.

<sup>4</sup>Células são pacotes de mesmo tamanho.

**Definição 1** (Funções invariantes e variantes no tempo). *Seja  $f$  uma função do tipo  $f : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ . A função  $f$  é invariante no tempo se atende a seguinte igualdade:*

$$f(s, t) = f(s + d, t + d), \quad \forall d \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.2)$$

*ou seja, o valor de  $f(s, t)$  depende apenas do tamanho do intervalo  $(s, t]$ . Notação:  $f(s, t) = f(t - s)$ . Se, por outro lado, a equação (2.2) não é satisfeita, então  $f$  é uma função variante no tempo.*

Existem filtros reguladores que são melhor representados por curvas de entrada variantes no tempo. Neste sentido, Chang *et al.* (2002) apresentam uma versão variante no tempo para a inequação (2.1). Nesse caso, considera-se que uma função de tráfego  $x$  satisfaz uma “envoltória superior” (*upper envelope*)  $\sigma$ , quando a seguinte inequação é satisfeita:

$$x(t) - x(s) \leq \sigma(s, t). \quad (2.3)$$

Chang *et al.* (2002) chamam a relação expressa na inequação (2.3) de “restrição de regulação” (*regulation constraint*).

Seja  $x : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  uma função tal que  $x(s, t)$  representa a quantidade de dados que passam em um determinado ponto de uma rede de comunicações no intervalo de tempo  $(s, t]$ . Para cada valor de  $s$ ,  $x(s, t)$  deve ser uma função não-decrescente de  $t$ . Neste trabalho, chama-se “restrição de regulação” uma expressão parecida com a inequação (2.3), apresentada na Definição 2.

**Definição 2** (Restrição de regulação e curva de regulação). *Sejam  $x, \sigma : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  funções que satisfazem a seguinte inequação,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , com  $s \leq t$ :*

$$x(0, t) - x(0, s) \leq \sigma(s, t). \quad (2.4)$$

*A inequação (2.4) é chamada de “restrição de regulação” e a função  $\sigma$  é chamada de “curva de regulação” da função  $x$ .*

**Observação 1.** *A quantidade de dados que passam em um determinado ponto de uma rede de comunicações no intervalo de tempo  $(s, t]$ ,  $x(s, t)$ , é dada por  $x(t) - x(s)$ . Neste trabalho, entretanto, visando um formalismo mais uniforme, apresentado no Capítulo 3, utiliza-se a função  $x : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  para representar essa quantidade de dados. Como este capítulo pretende fazer uma revisão ao mesmo tempo conceitual e histórica do NC, serão usadas (apenas neste capítulo) as duas notações,  $x(t)$  e  $x(s, t)$ , concomitantemente, sem dar origem a confusão.*

Em Cruz (1995), a curva de regulação do tráfego de saída de uma rede é chamada de “curva de saída” (*departure curve*). Considerando que ambas (a curva de entrada e a curva de saída) têm o mesmo significado de limitação de rajadas de tráfegos, neste trabalho, preferiu-se

usar a mesma denominação (curva de regulação) evidenciando que ambas pertencem ao mesmo “tipo de restrição”.

As curvas de regulação mais comumente encontradas na literatura são as seguintes funções,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , com  $s \leq t$ :

$$\sigma(t - s) = b + r \cdot (t - s). \quad (2.5)$$

Em geral, quando uma função  $x$  satisfaz a curva de regulação  $\sigma$  expressa na equação (2.5), diz-se que  $x$  está sujeito a um *leaky bucket*<sup>5</sup> (ou *token bucket*) com tamanho de balde de *tokens*  $b$  e taxa de criação de *tokens*  $r$ . Para uma melhor compreensão da equação (2.5), considere-se uma rede cujo fluxo de entrada está sujeito a um filtro do tipo *leaky bucket*. Esses filtros funcionam da seguinte maneira: cada pacote precisa de um *token* (permissão para transmissão) ou um conjunto de *tokens*, para ser transmitido; esses *tokens* são gerados a uma taxa  $r$  fixa, e pacotes são liberados para transmissão na rede após a remoção da quantidade necessária de *tokens* (se houver *tokens* suficientes). Não há limite para o número de pacotes que podem ser armazenados pelo filtro. Dessa forma, considera-se que *leaky buckets* possuem *buffers* de tamanho infinito. Mas o número máximo de *tokens* é limitado em  $b$  (Parekh e Gallager, 1993).

## 2.2 Curvas de serviço

Cruz (1991a) e Cruz (1991b) utilizam limitações de rajadas de tráfegos (equação 2.1), para determinar limitantes de atraso de alguns sistemas. A idéia principal de Cruz (1991a) e Cruz (1991b) é modelar sistemas complexos a partir de sistemas simples. Como exemplo, modela-se um roteador, a partir da junção em série de um multiplexador, um *buffer* e um demultiplexador. Dos modelos obtidos para sistemas simples, encontram-se limitantes de atraso para sistemas mais complexos, somando os atrasos de cada parte. Os limitantes obtidos por esse procedimento são conservativos, porque admitem que um mesmo pacote pode sofrer o atraso máximo em redes consecutivas (Cruz, 1995). Esse princípio é chamado de “*Pay Burst Only Once*”<sup>6</sup> em Le Boudec e Thiran (2003).

Parekh e Gallager (1993) e Parekh e Gallager (1994) mostram que os limitantes obtidos para um sistema a partir da soma dos limitantes de suas partes podem ser melhorados, quando os enlaces de uma rota são tratados em *conjunto*. Para tornar possível esse tratamento conjunto, definem as “curvas de serviço universais”, conforme a Definição 3.

**Definição 3** (Curva de serviço universal). *Seja  $l_k$  o  $k$ -ésimo enlace do caminho de um fluxo de interesse,  $i$ . A curva de serviço universal  $\mu_i^m(t)$  do fluxo  $i$  ao passar pelos enlaces  $l_1, \dots, l_m$ , representa o número mínimo de bits de  $i$  que podem atravessar uma sub-rede formada pelos*

<sup>5</sup>Literalmente, “balde furado”.

<sup>6</sup>“*Pay Burst Only Once*” pode ser traduzido como “Considerar Rajadas Apenas Uma Vez”.

enlaces  $l_1, \dots, l_m$  nas primeiras  $t$  unidades de tempo após o início de uma rajada. Seja  $x_i$  uma função que representa o fluxo  $i$  antes de entrar no enlace  $l_1$ ; e seja  $y_i^m$  uma função que representa o fluxo  $i$  ao deixar o  $m$ -ésimo enlace de seu caminho,  $l_m$ . Considere-se  $s$  um instante em que a rede não contém pacotes do fluxo  $i$ . A seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$y_i^m(s, t) \geq \min_{s \leq \tau \leq t} \{x_i(s, \tau) + \mu_i^m(t - \tau)\}.$$

(Parekh e Gallager, 1994, Lemma 8).

As curvas de serviço representam um limitante inferior para a quantidade de serviço alocada por uma rede para um dado fluxo (Agrawal *et al.*, 1999). Da Definição 3, pode-se perceber que, ao invés de caracterizar serviço a partir de um único *número*, como máximo atraso ou mínima taxa de serviço de dados, as curvas de serviço especificam as características do serviço oferecido a partir de uma *função*. Desta forma, contêm um amplo espectro de características do serviço oferecido (Sariowan *et al.*, 1999).

A partir das definições de curvas de entrada e de serviço, os dois conceitos fundamentais para o desenvolvimento do NC se fazem presentes. Dessa forma, pode-se dizer que o NC tem suas bases em Cruz (1991a), Cruz (1991b), Parekh e Gallager (1993) e Parekh e Gallager (1994).

Cruz (1995) mostra que as curvas de serviço são convenientes para o gerenciamento determinístico de garantias de QoS em redes, porque medidas de desempenho fim-a-fim podem ser obtidas facilmente a partir destas curvas e de restrições de rajadas dos tráfegos de entrada. Defina-se “backlog” a quantidade de dados internos a um determinado sistema, ou seja, os dados “em transmissão”. Sariowan *et al.* (1995) e Cruz (1995) reapresentam a definição de curva de serviço, conforme a Definição 4.

**Definição 4** (Curva de serviço estrita). *Sejam  $x, y$ , respectivamente, os fluxos de entrada e de saída de um determinado servidor. Uma curva de serviço estrita representa o mínimo número de pacotes de uma sessão que têm que deixar um servidor em um dado intervalo de tempo, em um período de backlog não nulo. Matematicamente, tem-se,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+, \exists s \in \mathbb{Z}^+$ , tal que  $s \leq t$ ,  $x(s) = y(s)$  (o sistema está vazio no instante  $s$ ) e a seguinte inequação é satisfeita:*

$$y(s, t) \geq \beta(t - s).$$

A partir da Definição 4, usando a idéia de trabalhar com os enlaces de uma rota em conjunto, Sariowan *et al.* (1995) e Cruz (1995) definem a curva de serviço ao longo do caminho percorrido por um dado fluxo de interesse da forma apresentada a seguir. Seja  $\beta_{i,m}$  a curva de serviço estrita do fluxo  $i$  ao percorrer um enlace  $l_m$ . Considere-se que o fluxo  $i$  percorre um total

de  $M$  enlaces, sendo  $l_1, \dots, l_M$  seu percurso total, e que o *backlog* do fluxo  $i$  no enlace  $l_1$  é nulo no instante  $\tau_1$ . Entre os fluxos de entrada em  $l_1$  e saída em  $l_M$ , o sistema dedica ao fluxo  $i$  a seguinte curva de serviço:

$$\beta_i^{\text{NET}}(t) = \min_{\tau_1, \dots, \tau_M \geq 0; \sum_{m=1}^M \tau_m = t} \left\{ \sum_{m=1}^M \beta_{i,m}(\tau_m) \right\}. \quad (2.6)$$

Sariowan (1996) e Le Boudec (1996) mostram que a curva de serviço da Definição 4 é mais restrita do que o necessário e apresentaram uma nova definição, apresentada a seguir.

**Definição 5** (Curva de serviço invariante). *Sejam  $x, y$ , respectivamente, os fluxos de entrada e de saída de um determinado sistema. Esse sistema apresenta uma curva de serviço invariante  $\beta(t)$ , se  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\exists s \in \mathbb{Z}^+$ , com  $s \leq t$ , tal que a seguinte inequação é satisfeita:*

$$y(t) \geq x(s) + \beta(t - s),$$

ou seja,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$y(t) \geq \min_{0 \leq s \leq t} \{x(s) + \beta(t - s)\}. \quad (2.7)$$

**Observação 2.** *O conceito de curva de serviço apresentado na Definição 5 é mais amplo do que o apresentado na Definição 4, porque não se exige backlog nulo no instante  $s$ . Dadas curvas de serviço definidas segundo a Definição 5 para todos os enlaces do caminho de um dado fluxo  $i$ , a curva de serviço fim-a-fim para o fluxo  $i$  pode ser definida como na equação (2.6), relaxando-se a restrição de backlog nulo para o primeiro enlace.*

A Figura 2.3 apresenta um exemplo de curva de serviço invariante  $\beta(t)$  e do limitante para o fluxo  $y(t)$ ,  $f(t) = \min_{0 \leq s \leq t} \{x(s) + \beta(t - s)\}$  (inequação 2.7).

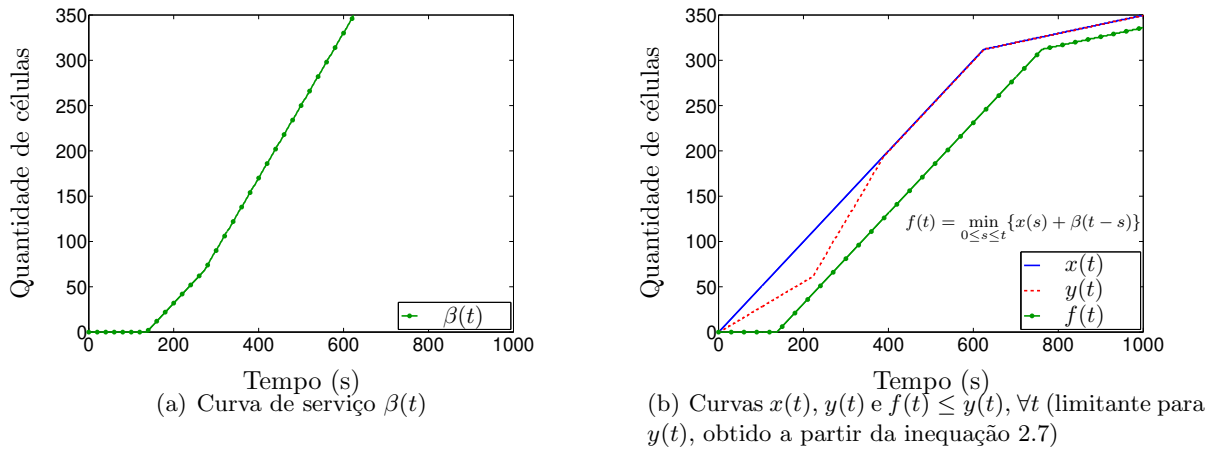


Figura 2.3: Exemplo de curva de serviço  $\beta(t)$ . Em (a), a curva  $\beta(t)$ . Em (b), uma instanciação do fluxo de entrada  $x(t)$ , do fluxo de saída  $y(t)$  e do limitante  $f(t) = \min_{0 \leq s \leq t} \{x(s) + \beta(t - s)\}$ .

Le Boudec *et al.* (2000a) fazem uma comparação entre a inequação (2.7), que relaciona os fluxos de entrada e de saída de uma dada rede com curva de serviço  $\beta(t)$ , e a expressão entre as tensões de entrada e de saída de um circuito RC, respectivamente, as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  indicadas na Figura 2.4.<sup>7</sup> Essa comparação entre curvas está apresentada sucintamente a seguir. Uma versão mais detalhada encontra-se em Le Boudec e Thiran (2003, *Introduction*) e Benvenuti *et al.* (2003).

Considere-se um circuito RC, ilustrado na Figura 2.4. Seja  $x(t)$  o sinal de entrada e  $y(t)$  o sinal de saída, conforme ilustrado.

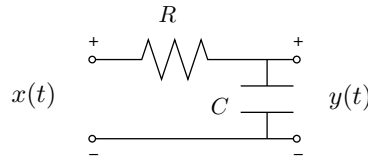


Figura 2.4: Circuito RC, formado pela junção em série de um resistor  $R$  e um capacitor  $C$ . Considera-se  $x(t)$  a tensão de entrada, e  $y(t)$  a tensão de saída.

A resposta ao impulso<sup>8</sup> deste circuito é dada por,  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ :

$$h(t) = \left( \frac{1}{RC} \right) \cdot e^{-t/(RC)}.$$

A função  $y(t)$  está relacionada à função  $x(t)$  da seguinte maneira:

$$y(t) = \int_0^t x(s) \cdot h(t-s) \, ds. \quad (2.8)$$

A integral expressa na equação (2.8) é chamada de convolução. Nesse caso, mais especificamente, a convolução da tensão de entrada,  $x(t)$ , e a resposta ao impulso do circuito RC,  $h(t)$ . Comparando as equações (2.7) e (2.8), e considerando que uma integral representa uma soma de termos, pode-se perceber que existe uma correspondência entre convolução de funções no tempo e restrições de serviço em redes. De fato, a operação de min e a soma em uma, correspondem à soma (ou integração) e à multiplicação na outra. Tendo isso em vista, Le Boudec (1996) passa a chamar a operação entre as funções  $x$  e  $\beta$  na inequação (2.7) de “convolução min-plus” (Le Boudec, 1996, *Definition 5*). Esse termo é uma referência ao dióide min-plus (Baccelli *et al.*, 1992). A seguir, no Capítulo 3, é apresentada uma definição de dióides e são citadas algumas características da álgebra de dióides. Em particular, apresenta-se o dióide min-plus, no Exemplo 3.2.

<sup>7</sup>Chama-se circuito RC o circuito formado pela junção em série de um resistor de resistência  $R$  e um capacitor com capacitância  $C$ .

<sup>8</sup>Neste caso, resposta ao impulso significa a tensão do capacitor, quando  $x(t)$  é um pico infinito de tensão aplicado no instante  $t = 0$ , com duração desprezível.

A denominação “*Network Calculus*” surge quando é explicitada uma relação entre o dióide min-plus e a representação de restrições de elementos de redes de comunicações, como uma forma de realçar a adequação da álgebra de dióides para o tratamento desses sistemas. Nesse sentido, uma possível tradução para o termo *Network Calculus* seria “álgebra de redes”.

A partir do momento em que é explicitada a relação entre álgebra de dióides e redes de comunicações, procura-se encontrar expressões lineares nessa álgebra, para representar restrições de sistemas. Chang (1997) menciona que determinados sistemas podem ter suas restrições escritas linearmente na álgebra min-plus, mas não chega a utilizar os símbolos convencionais dessa álgebra. Especificamente, menciona que a regulação de tráfegos pode ser alcançada por um filtro linear invariante no tempo com resposta ao impulso  $\sigma$ , na álgebra min-plus, quando a função  $\sigma$  é crescente e sub-aditiva (Definição 32, Apêndice F). Chang (1998b) apresenta a álgebra min-plus mais rigorosamente e reapresenta os conceitos de curvas de regulação e de serviço nessa álgebra discutindo como é possível obter reguladores ótimos a partir de métodos sistemáticos.

Outro exemplo de trabalho que expressa linearmente na álgebra de dióides as restrições de redes de pacotes, Baccelli e Hong (2000) mostram que, em uma conexão controlada via protocolo TCP, as variáveis que representam os instantes de saída de pacotes em cada roteador satisfazem uma relação linear na álgebra max-plus. Esse modelo foi analisado por Andreola (2007) para uma rede sem fio.

Embora, a partir de 1996, explicitar a relação dióides/redes seja um ponto comum na literatura do NC, não existiu (como ainda não existe) uma uniformidade na notação utilizada. Por exemplo, Le Boudec (1996) e Malaney e Rogers (1999) definem a “convolução” entre duas funções  $x$  e  $\beta$  da seguinte maneira:

$$(x \oplus \beta)(t) = \min_{0 \leq s \leq t} \{x(s) + \beta(t - s)\}.$$

Essa mesma operação de “convolução” é denotada  $(x \star \beta)(t)$  em Chang (1998b), e  $(x \otimes \beta)(t)$  em Le Boudec (1998). Para um cenário de funções invariantes no tempo em que não se expressam restrições entre funções matricialmente, a notação  $(x \otimes \beta)$  é, sem dúvida, a utilizada na literatura recente do NC. Porém, quando  $x$  e  $\beta$  expressam matrizes (Cruz e Taneja, 1998; Chang, 1998a; Chang, 1998b; Malaney e Rogers, 1999) ou são funções variantes no tempo (Chang e Cruz, 1999; Chang, 2000; Chang *et al.*, 2002; Kim e Hou, 2004), a diversidade de notação ainda é presente.

Chang *et al.* (2002) reapresentam o conceito de curva de serviço para funções variantes no tempo. Nesse caso, considera-se que a função  $y$  satisfaz uma curva de serviço  $\beta$  em relação ao fluxo  $x$  (Figura 2.1) se,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\exists s \in \mathbb{Z}^+$ , tal que  $s \leq t$ , e a seguinte inequação é satisfeita:

$$y(t) \geq x(s) + \beta(s, t). \quad (2.9)$$

Neste trabalho, chama-se “restrição de serviço” uma expressão parecida com a inequação (2.9), apresentada a seguir, na Definição 6.

**Definição 6** (Restrição de serviço e curva de serviço). *Sejam  $x, y, \beta : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  funções que satisfazem a seguinte inequação:*

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+, \exists s \leq t : y(0, t) \geq x(0, s) + \beta(s, t),$$

ou seja,

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \geq \min_{0 \leq s \leq t} \{x(0, s) + \beta(s, t)\}. \quad (2.10)$$

A inequação (2.10) é chamada de “restrição de serviço” entre  $x$  e  $y$ ; e a função  $\beta$  correspondente é chamada de “curva de serviço”.

## 2.3 Resultados da literatura

No contexto determinístico, no qual se insere esta tese, existem duas linhas principais de trabalhos que utilizam os resultados do NC. A primeira busca a *determinação de limitantes de parâmetros de QoS*, a partir de informações sobre o tráfego de entrada e de informações sobre serviço (descrição do comportamento do sistema, disciplina de serviços adotada, garantia mínima de serviços fornecida). Em geral, na literatura, encontram-se trabalhos relacionados aos seguintes parâmetros de QoS: atraso, *backlog*, variação de atraso (*jitter*), taxa máxima e efetiva de envio de dados (respectivamente, *throughput* e *effective bandwidth*) e curvas de serviço. Por exemplo, Goyal *et al.* (1997) determinam medidas de atraso fim-a-fim, quando o algoritmo de escalonamento é do tipo *Guaranteed Rate* (GR - Goyal *et al.*, 1997). Barta *et al.* (2001) determinam atraso fim-a-fim em redes que empregam a disciplina GPS (*Generalized Processor Sharing* - Parekh e Gallager, 1993) em cada nó. Outros exemplos de trabalhos nesta linha são: Le Boudec e Verscheure (2000a), Le Boudec e Verscheure (2000b), Jasperneite *et al.* (2002), Kim e Hou (2004), Rizzo e Le Boudec (2005), Morais (2005), Fidler e Schmitt (2006) e Li *et al.* (2007).

Uma outra linha de trabalhos é o *controle de admissão* ou *escalonamento* de tráfegos (Keshav, 1997) visando a manutenção de limitantes de interesse dentro de uma faixa de valores determinada, ou visando a satisfação de uma curva de serviço pré-determinada. Por exemplo, Fidler (2003) discute como resultados do NC podem ser usados para o controle de admissão de tráfegos a partir de um *Bandwidth Broker*<sup>9</sup> (BB), para um cenário particular de curvas de regulação e de serviço e a partir de medidas de atraso virtual máximo fim-a-fim. Outros exemplos de trabalhos nesta linha são: Sariowan (1996), Sariowan *et al.* (1999), Malaney e Rogers (1999), Le Boudec e Verscheure (2000a), Le Boudec e Verscheure (2000b).

---

<sup>9</sup>Um BB controla o acesso a serviços de redes de um certo domínio.

Visando possibilitar a implementação dos resultados do NC, Rabinovitch *et al.* (2005), em sua proposta de patente, discutem como gerar parâmetros de curvas de regulação, de forma a assegurar a conformidade de tráfegos com *Service Level Agreements*<sup>10</sup> (SLA); e Frossard *et al.* (2007), em sua patente, apresentam estratégias de escalonamento (multiplexação) de tráfegos multimídia em um ambiente com restrições de capacidade de transmissão, respeitando a necessidade de temporização das apresentações multimídia e minimizando atraso (*playback delay*) e utilização de *buffer*.

---

<sup>10</sup>*Service Level Agreements* são especificações de serviço contratadas.

## Capítulo 3

# Álgebra de dióides

Este capítulo traz as principais definições e resultados necessários para o entendimento das análises presentes nesta tese. Em particular, são apresentados definições e resultados das estruturas algébricas denominadas *dióides*, que formam a base matemática deste trabalho. O capítulo é dividido em duas partes. Inicialmente, são apresentadas definições e propriedades gerais de dióides; em seguida, é introduzido o dióide proposto neste trabalho e suas características particulares. Para facilitar a leitura, foram incluídas tabelas com os resultados mais relevantes, e demonstrações foram deixadas em apêndice.

### 3.1 Definições e propriedades gerais de dióides

Esta seção introduz o conceito de dióides da forma como aparece em Baccelli *et al.* (1992, *Definition 4.1*) e apresenta resultados relevantes associados.

**Definição 7** (Dióide). *Um dióide  $\mathcal{D}$  é um conjunto  $\mathcal{D}$  munido de duas operações fechadas, chamadas de “adição” ou “soma” ( $\oplus$ ) e “multiplicação” ou “produto” ( $\otimes$ ). A notação usual é  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ . Os seguintes axiomas devem ser satisfeitos:*

1. **Associatividade da adição.**  $\forall a, b, c \in \mathcal{D} : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ .
2. **Comutatividade da adição.**  $\forall a, b \in \mathcal{D} : a \oplus b = b \oplus a$ .
3. **Associatividade da multiplicação.**  $\forall a, b, c \in \mathcal{D} : (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ .
4. **Distributividade da multiplicação para somas finitas.**

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathcal{D} : \quad (a \oplus b) \otimes c &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c), \\ c \otimes (a \oplus b) &= (c \otimes a) \oplus (c \otimes b). \end{aligned}$$

5. **Existência de um elemento nulo.**  $\forall a \in \mathcal{D}, \exists \varepsilon \in \mathcal{D} : a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ .
6. **Existência de um elemento identidade.**  $\forall a \in \mathcal{D}, \exists e \in \mathcal{D} : a \otimes e = e \otimes a = a$ .

7. **Absorção pelo elemento nulo  $\varepsilon$ .**  $\forall a \in \mathcal{D} : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ .

8. **Idempotência da adição.**  $\forall a \in \mathcal{D} : a \oplus a = a$ .

A seguir, são apresentados alguns exemplos de dióides.

**Exemplo 3.1** (Dióide  $(\mathbb{Z}, \max, +)$ ). *Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Definem-se as seguintes operações:*

$$a \oplus b = \max \{a, b\};$$

$$a \otimes b = a + b.$$

Neste dióide, portanto,  $2 \oplus 3 = \max \{2, 3\} = 3$  e  $2 \otimes 3 = 2 + 3 = 5$ .

**Exemplo 3.2** (Dióide  $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \min, +)$  ou dióide min-plus). *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ . Definem-se as seguintes operações:*

$$a \oplus b = \min \{a, b\};$$

$$a \otimes b = a + b.$$

Neste dióide,  $2 \oplus 3 = 2$  e  $2 \otimes 3 = 5$ .

**Exemplo 3.3** (Dióide  $(\{0, 1\}, \max, \min)$ ). *Sejam  $a, b \in \{0, 1\}$ . Definem-se as seguintes operações:*

$$a \oplus b = \max \{a, b\};$$

$$a \otimes b = \min \{a, b\}.$$

Existe uma completa correspondência entre este dióide e a álgebra de Boole. De fato:  $0 \oplus 0 = 0$ ,  $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ ,  $1 \oplus 1 = 1$ ,  $0 \otimes 0 = 0$ ,  $0 \otimes 1 = 1 \otimes 0 = 0$  e  $1 \otimes 1 = 1$ .

Os dióides também são chamados de semianéis idempotentes, uma vez que a operação de adição é idempotente (Definição 7, Axioma 8) e não existe um elemento simétrico (ou elemento inverso da adição). Da Definição 7, pode-se perceber que, a menos da idempotência da adição, os axiomas satisfeitos pelos dióides são comuns à álgebra convencional, o que facilita o uso dessas estruturas. A Tabela 3.1 resume os axiomas de um dióide.

$\forall a, b, c \in \mathcal{D}$ :

|                                                               |                                                               |                                                     |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $a \oplus b = b \oplus a$                                     | $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$               | $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ |
| $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ | $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$ | $\varepsilon \oplus a = a \oplus \varepsilon = a$   |
| $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ | $e \otimes a = a \otimes e = a$                               | $a \oplus a = a$                                    |

Tabela 3.1: Axiomas de um dióide.

**Observação 3.** Para simplificar a notação, algumas vezes o símbolo  $\otimes$  é omitido. Por exemplo, para representar “ $a \otimes b$ ” é escrito simplesmente “ $ab$ ”.

Os dióides podem ser classificados dependendo de suas características particulares. Por exemplo, chama-se dióide *comutativo* um dióide cuja multiplicação também é comutativa ( $\forall a, b \in \mathcal{D} : a \otimes b = b \otimes a$ ). O dióide  $(\{0, 1\}, \max, \min)$  apresentado no Exemplo 3.3 é um dióide comutativo. Neste trabalho, dentre os possíveis tipos de dióides, destacam-se os dióides *completos*, conforme definição a seguir. Outros tipos podem ser encontrados em Baccelli *et al.* (1992).

**Definição 8** (Dióide completo). *Um dióide é completo, quando é fechado para somas infinitas, e a distributividade se aplica para somas infinitas (Baccelli et al., 1992, Definition 4.32).*

Uma consequência direta da Definição 8 é que, se um dióide é completo, então é fechado para a soma de todos os seus elementos. Considerem-se, agora, as Definições 9 e 10.

**Definição 9** (Relação de ordenamento parcial). *Uma relação binária é chamada de relação de ordenamento parcial em um dado conjunto  $\mathcal{D}$  (denotada  $\preceq$ ), se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. **Reflexividade.**  $\forall a \in \mathcal{D} : a \preceq a$ .
2. **Antissimetria.**  $\forall a, b \in \mathcal{D} : \text{se } a \preceq b \text{ e } b \preceq a, \text{ então } a = b$ .
3. **Transitividade.**  $\forall a, b, c \in \mathcal{D} : \text{se } a \preceq b \text{ e } b \preceq c, \text{ então } a \preceq c$ .

**Observação 4.** Neste trabalho, consideram-se relações de ordenamento simétricas, em que  $a \succcurlyeq b$  implica, necessariamente, que  $b \preceq a$ .

**Definição 10** (Ordenamento parcial em um dióide  $\mathcal{D}$ ). *Seja  $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  um dióide, e sejam  $a, b \in \mathcal{D}$ . A seguinte relação define um ordenamento parcial em  $\mathcal{D}$ :*

$$\forall a, b \in \mathcal{D} : a \succcurlyeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b,$$

ou ainda,

$$\forall a, b \in \mathcal{D} : a \succcurlyeq b \Leftrightarrow \exists c : a = b \oplus c$$

(Baccelli et al., 1992, Theorem 4.28).

Seja  $\mathcal{D}$  um dióide completo, e seja  $\top$  a soma de todos os elementos de  $\mathcal{D}$ , isto é,

$$\top = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x. \quad (3.1)$$

Conforme comentado anteriormente, se  $\mathcal{D}$  é um dióide completo, então é fechado para a soma de todos os seus elementos, de forma que  $\top \in \mathcal{D}$ . Da Definição 10, portanto, o elemento  $\top$  é o máximo elemento de  $\mathcal{D}$ .  $\top$  é chamado de topo de  $\mathcal{D}$  (em inglês, *top*).

**Observação 5.** *Note-se a diferença entre os símbolos  $\geq$  e  $\leq$  que representam a ordenação linear na álgebra convencional e os símbolos  $\succcurlyeq$  e  $\preccurlyeq$  que representam o ordenamento parcial em um dióide, apresentado na Definição 10.*

Dado um ordenamento parcial em um conjunto  $\mathcal{D}$  (Definição 9), pode-se definir limitantes superior e inferior dos subconjuntos de  $\mathcal{D}$ , conforme apresentado a seguir.

**Definição 11** (Limitante superior (inferior) de um subconjunto). *Seja um conjunto  $\mathcal{D}$  munido de um ordenamento parcial. Defina-se o limitante superior (inferior) de um dado subconjunto de  $\mathcal{D}$  como o menor (maior) elemento de  $\mathcal{D}$ , maior ou igual (menor ou igual) a todos os elementos do subconjunto dado.*

**Observação 6.** *Dado um conjunto  $\mathcal{D}$ , os limitantes superior e inferior de um subconjunto de  $\mathcal{D}$  não necessariamente pertencem a esse subconjunto.*

Das Definições 7, 9 e 10, pode-se perceber que os dióides são estruturas situadas entre a álgebra convencional e os reticulados<sup>1</sup> possuindo características de ambos. Por exemplo, da álgebra convencional possuem as propriedades decorrentes dos Axiomas 1-7 da Definição 7, e dos reticulados possuem o ordenamento parcial e a existência de limitantes superior e inferior para cada par de elementos.

**Observação 7.** *Neste trabalho, a notação utilizada para o máximo limitante inferior entre dois elementos  $a, b$  é  $(a \wedge b)$ .*

Uma consequência das Definições 10 e 11 é que, dado um dióide  $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  completo (Definição 8), as seguintes relações são satisfeitas:

$$\forall a, b \in \mathcal{D} : a \succcurlyeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow b = b \wedge a. \quad (3.2)$$

Seja um mapeamento isotônico entre dióides conforme definição abaixo.

**Definição 12** (Mapeamento isotônico). *Sejam  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{B}$  dois dióides. Um mapeamento  $f$  de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{B}$  é dito isotônico, quando satisfaz a seguinte condição:*

$$\forall a, b \in \mathcal{D} : a \succcurlyeq b \Rightarrow f(a) \succcurlyeq f(b) \text{ com } f(a), f(b) \in \mathcal{B}.$$

**Observação 8.** *A operação  $\wedge$  é associativa, comutativa e idempotente. Entretanto, a multiplicação não é necessariamente distributiva em relação a essa operação. De um modo geral,*

---

<sup>1</sup>Reticulados são conjuntos ordenados em que existem limitantes superior e inferior (Definição 11) para qualquer subconjunto finito (Blyth e Janowitz, 1972; Birkhoff, 1979). Outras definições relacionadas a reticulados também podem ser encontradas em Baccelli *et al.* (1992), *Chapter 4*.

têm-se:

$$(x \wedge y) \otimes c \preceq (x \otimes c) \wedge (y \otimes c),$$

$$c \otimes (x \wedge y) \preceq (c \otimes x) \wedge (c \otimes y).$$

(Baccelli et al., 1992, seção 4.3.4). Além disso, dado um dióide completo  $\mathcal{D}$ ,  $\top \in \mathcal{D}$  (equação 3.1) é o elemento neutro da operação  $\wedge$ .

Quando restrições de sistemas são representadas usando a estrutura algébrica definida anteriormente, o resultado obtido pode ser um conjunto de equações da forma  $f(x) = b$ , sendo  $f$  um mapeamento isotônico (Definição 12) entre dióides completos.<sup>2</sup> Encontrar possíveis valores de  $x$  que satisfaçam esse tipo de equação corresponde, de alguma forma, a encontrar uma possível inversa de  $f$  em  $\mathcal{D}$ . Esse problema, de forma semelhante ao que acontece na álgebra convencional, pode não ter resposta, ou a resposta pode não ser única. De modo geral, em reticulados, esta questão é tratada da seguinte maneira. Resolve-se uma relaxação do problema original, que pode ser:

- Encontrar o máximo  $x$  para o qual  $f(x) \preceq b$ ;
- Encontrar o mínimo  $x$  para o qual  $f(x) \succeq b$ .

Nesses casos, a solução é única, quando o conjunto de possíveis soluções da inequação  $f(x) \preceq b$  ( $f(x) \succeq b$ ) é não-vazio e contém um limitante superior (inferior). No caso da inequação  $f(x) \preceq b$ , quando o conjunto de possíveis soluções é não-vazio e contém um limitante superior, então diz-se que a função  $f$  é residuada, conforme a definição a seguir.

**Definição 13** (Função residuada e resíduo). *Seja  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  um mapeamento isotônico do dióide completo  $\mathcal{D}$  no dióide completo  $\mathcal{B}$ . Se,  $\forall b \in \mathcal{B}$ , o conjunto das soluções da inequação  $f(x) \preceq b$  é não-vazio e contém seu limitante superior, denotado  $f^\sharp(b)$ , então  $f$  é uma função residuada e  $f^\sharp(b)$  é chamado de resíduo de  $f$  em  $b$  (Baccelli et al., 1992, Theorem 4.50).*

**Definição 14** (Função dualmente residuada e resíduo dual). *Seja  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  um mapeamento isotônico do dióide completo  $\mathcal{D}$  no dióide completo  $\mathcal{B}$ . Se,  $\forall b \in \mathcal{B}$ , o conjunto das soluções da inequação  $f(x) \succeq b$  é não-vazio e contém seu limitante inferior, denotado  $f^\flat(b)$ , então  $f$  é uma função dualmente residuada e  $f^\flat(b)$  é chamado de resíduo dual de  $f$  em  $b$  (Baccelli et al., 1992, Theorem 4.52).*

Sejam, por exemplo, as funções  $l_a(x)$  e  $r_a(x)$  definidas da seguinte maneira:

$$l_a(x) = a \otimes x, \tag{3.3}$$

$$r_a(x) = x \otimes a. \tag{3.4}$$

---

<sup>2</sup>Assume-se que os dióides são completos, para garantir a existência de limitantes inferiores e superiores.

Pode-se demonstrar que, para *qualquer* dióide completo  $\mathcal{D}$ , as funções  $l_a(x)$  e  $r_a(x)$  são residuáveis (Maia, 2003, Seção 2.1.4). Suas funções resíduo são denotadas, respectivamente,  $l_a^\#(y) = a \dot{\bowtie} y$  e  $r_a^\#(y) = y \phi a$ , definindo “divisões” por  $a$  em  $\mathcal{D}$  à esquerda e à direita, respectivamente. Deve-se observar que a operação  $\dot{\bowtie}$  (ou  $\phi$ ), embora univocamente definida, não é precisamente a inversa de  $l_a(x)$  (ou  $r_a(x)$ ). De modo geral,  $a \otimes (a \dot{\bowtie} b) \preceq b$  (ou  $(b \phi a) \otimes a \preceq b$ ). Em casos particulares, a igualdade pode ocorrer. A Tabela 3.2 apresenta algumas propriedades conhecidas da residuação, relacionadas a essa “divisão”.

$\forall a, b, x \in \mathcal{D}$ :

|                                                                                            |                                                                 |         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------|
| $ax \preceq b \Leftrightarrow x \preceq a \dot{\bowtie} b$                                 | $xa \preceq b \Leftrightarrow x \preceq b \phi a$               | (PR.1)  |
| $a \dot{\bowtie} (ax) \succcurlyeq x$                                                      | $(xa) \phi a \succcurlyeq x$                                    | (PR.2)  |
| $(ab) \dot{\bowtie} x = b \dot{\bowtie} (a \dot{\bowtie} x)$                               | $x \phi (ba) = (x \phi a) \phi b$                               | (PR.3)  |
| $(a \oplus b) \dot{\bowtie} x = a \dot{\bowtie} x \wedge b \dot{\bowtie} x$                | $x \phi (a \oplus b) = x \phi a \wedge x \phi b$                | (PR.4)  |
| $b(a \dot{\bowtie} x) \preceq (a \phi b) \dot{\bowtie} x$                                  | $(x \phi a)b \preceq x \phi (b \dot{\bowtie} a)$                | (PR.5)  |
| $(a \dot{\bowtie} x)b \preceq a \dot{\bowtie} (xb)$                                        | $b(x \phi a) \preceq (bx) \phi a$                               | (PR.6)  |
| $x \phi a^* \preceq x$                                                                     | $a^* \dot{\bowtie} x \preceq x$                                 | (PR.7)  |
| $a \dot{\bowtie} (x \wedge y) = (a \dot{\bowtie} x) \wedge (a \dot{\bowtie} y)$            | $(x \wedge y) \phi a = (x \phi a) \wedge (y \phi a)$            | (PR.8)  |
| $a \dot{\bowtie} (x \oplus y) \succcurlyeq (a \dot{\bowtie} x) \oplus (a \dot{\bowtie} y)$ | $(x \oplus y) \phi a \succcurlyeq (x \phi a) \oplus (y \phi a)$ | (PR.9)  |
| $(a \wedge b) \dot{\bowtie} x \succcurlyeq (a \dot{\bowtie} x) \oplus (b \dot{\bowtie} x)$ | $x \phi (a \wedge b) \succcurlyeq (x \phi a) \oplus (x \phi b)$ | (PR.10) |
| $a(a \dot{\bowtie} x) \preceq x$                                                           | $(x \phi a)a \preceq x$                                         | (PR.11) |
| $a(a \dot{\bowtie} (ax)) = ax$                                                             | $((ax) \phi a)a = ax$                                           | (PR.12) |
| $a \dot{\bowtie} [a(a \dot{\bowtie} x)] = a \dot{\bowtie} x$                               | $[(x \phi a)a] \phi a = x \phi a$                               | (PR.13) |
| $(a \dot{\bowtie} x) \phi b = a \dot{\bowtie} (x \phi b)$                                  | $b \dot{\bowtie} (x \phi a) = (b \dot{\bowtie} x) \phi a$       | (PR.14) |
| $(a \dot{\bowtie} x) \oplus b \preceq a \dot{\bowtie} (x \oplus ab)$                       | $(x \phi a) \oplus b \preceq (x \oplus ba) \phi a$              | (PR.15) |

Tabela 3.2: Propriedades da residuação (adaptado de Baccelli *et al.*, 1992, Table 4.1).

Como mencionado anteriormente, a residuação é uma forma de tentar encontrar possíveis soluções para a equação  $f(x) = b$ , a partir dos conjuntos de soluções da inequação  $f(x) \preceq b$ . Outros problemas interessantes estão apresentados a seguir. Dados  $a, b \in \mathcal{D}$ , sendo  $\mathcal{D}$  um dióide completo,

- Encontrar possíveis valores de  $x$  para os quais  $x = xa \oplus b$  ou  $x \succcurlyeq xa \oplus b$ .
- Encontrar possíveis valores de  $x$  para os quais  $x = x \phi a \wedge b$  ou  $x \preceq x \phi a \wedge b$ .

Os Teoremas 1 e 2 respondem esses problemas.

**Teorema 1.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois elementos de um dióide completo  $\mathcal{D}$ . Têm-se:*

1. *A solução mínima de  $x = xa \oplus b$  e  $x \succcurlyeq xa \oplus b$  é dada por  $x = b \otimes a^*$ , onde  $a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$  (chamado “fechamento de Kleene”),  $a^0 = e$ , e*

$$a^i = \underbrace{a \otimes \dots \otimes a}_i.$$

*i vezes*

2. Qualquer solução de  $x = xa \oplus b$  e  $x \succcurlyeq xa \oplus b$  satisfaz  $x = xa^*$ .

*Este teorema é análogo a Baccelli et al. (1992, Theorem 4.75).*

**Teorema 2.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois elementos de um dióide completo  $\mathcal{D}$ . Têm-se:*

1. *A solução máxima de  $x = x\phi a \wedge b$  e  $x \preccurlyeq x\phi a \wedge b$  é dada por  $x = b\phi a^*$ .*
2. *Qualquer solução de  $x = x\phi a \wedge b$  e  $x \preccurlyeq x\phi a \wedge b$  satisfaz  $x = x\phi a^*$ .*

*Este teorema é análogo a Baccelli et al. (1992, Theorem 4.73).*

### 3.2 Dióide proposto: $\mathcal{C}$

Como mencionado anteriormente, um dos objetivos desta tese é considerar um método algébrico para manipular problemas relacionados ao desempenho de redes de comunicações. Os elementos a serem manipulados são *funções positivas* do tipo

$$x : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},$$

em que uma função  $x(s, t)$  representa a quantidade de dados que passam em um determinado ponto de uma dada rede, em um intervalo de tempo  $(s, t]$ . Como em Cruz (1995), portanto, considera-se um modelo de tempo discreto.

Seja o seguinte conjunto de funções  $x : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ :

$$\mathcal{C} = \{x : x(s, t) \geq 0, \text{ se } s \leq t, \text{ e } x(s, t) = 0, \text{ se } s > t\}. \quad (3.5)$$

Dados  $a, b \in \mathcal{C}$ , pode-se definir as seguintes operações em  $\mathcal{C}$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$(a \oplus b)(s, t) = \inf \{a(s, t), b(s, t)\}, \quad (3.6)$$

$$(a \otimes b)(s, t) = \begin{cases} \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + b(\tau, t)\}, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases} \quad (3.7)$$

O conjunto  $\mathcal{C}$  e as operações de soma e produto definidas acima formam o dióide  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ . No restante desta seção, demonstra-se que  $\mathcal{C}$  é um dióide completo, e se determinam expressões para as residuações das funções produto à direita e à esquerda em  $\mathcal{C}$ .<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Neste trabalho, por razões de simplicidade, as residuações das operações de produto à esquerda ( $l_a(x)$  na equação 3.3) e à direita ( $r_a(x)$  na equação 3.4) são denominadas, respectivamente, operações de residuação à esquerda e à direita.

**Teorema 3.**  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$  é um dióide completo definido pelas equações (3.5)-(3.7). Os elementos nulo e unidade são definidos, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\varepsilon(s, t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$e(s, t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } s < t, \\ 0, & \text{se } s \geq t. \end{cases} \quad (3.9)$$

As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram os elementos neutros em  $\mathcal{C}$  para um dado valor de  $s$ . Note-se que  $\varepsilon$  e  $e$  diferem no ponto  $s = t$ :  $\varepsilon(s, s) = +\infty, \forall s$ ;  $e(s, s) = 0, \forall s$ .

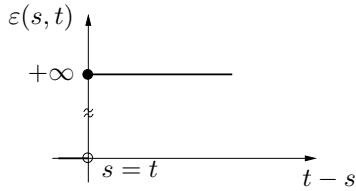


Figura 3.1: Elemento nulo em  $\mathcal{C}$ .

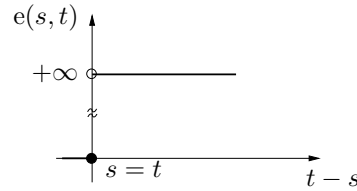


Figura 3.2: Elemento identidade em  $\mathcal{C}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, deve-se mostrar que a adição e a multiplicação definidas pelas equações (3.6) e (3.7) são fechadas em  $\mathcal{C}$ . Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ . Da definição de  $\mathcal{C}$  (equação 3.5), se  $s \leq t$ , então  $a(s, t) \geq 0$  e  $b(s, t) \geq 0$ . Assim,  $(a \oplus b)(s, t) = \inf \{a(s, t), b(s, t)\} = \min \{a(s, t), b(s, t)\} \geq 0$  e  $(a \otimes b)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + b(\tau, t)\} \geq 0$ . Por outro lado, se  $s > t$ ,  $a(s, t) = b(s, t) = 0$ . Daí:  $(a \oplus b)(s, t) = \inf \{a(s, t), b(s, t)\} = \min \{0, 0\} = 0$  e  $(a \otimes b)(s, t) = 0$  (diretamente da definição). Assim,  $(a \oplus b), (a \otimes b) \in \mathcal{C}$ .

A seguir, mostra-se que a estrutura  $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$  satisfaz cada axioma da Definição 7 e da Definição 8. Consideram-se  $s, t \in \mathbb{Z}^+$ .

**1** (Associatividade da adição). Para todo  $a, b, c \in \mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} \forall s, t : [(a \oplus b) \oplus c](s, t) &= \inf \{ \inf \{a(s, t), b(s, t)\}, c(s, t) \} \\ &= \inf \{a(s, t), \inf \{b(s, t), c(s, t)\} \} \\ &= [a \oplus (b \oplus c)](s, t). \end{aligned}$$

Daí:  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ .

**2** (Comutatividade da adição). Para todo  $a, b \in \mathcal{C}$ ,

$$\begin{aligned} \forall s, t : (a \oplus b)(s, t) &= \inf \{a(s, t), b(s, t)\} \\ &= \inf \{b(s, t), a(s, t)\} = (b \oplus a)(s, t). \end{aligned}$$

Assim,  $a \oplus b = b \oplus a$ .

**3** (Associatividade da multiplicação). *Sejam  $a, b, c \in \mathcal{C}$ . Para todo  $s, t$ , tal que  $s \leq t$ :*

$$\begin{aligned} [(a \otimes b) \otimes c](s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{(a \otimes b)(s, \tau) + c(\tau, t)\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t} \left\{ \min_{s \leq \tau' \leq \tau} \{a(s, \tau') + b(\tau', \tau)\} + c(\tau, t) \right\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t} \left\{ \min_{s \leq \tau' \leq \tau} \{a(s, \tau') + b(\tau', \tau) + c(\tau, t)\} \right\} \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 40 (Apêndice F) na equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} [(a \otimes b) \otimes c](s, t) &= \min_{s \leq \tau' \leq t} \left\{ \min_{\tau' \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau') + b(\tau', \tau) + c(\tau, t)\} \right\} \\ &= \min_{s \leq \tau' \leq t} \left\{ a(s, \tau') + \min_{\tau' \leq \tau \leq t} \{b(\tau', \tau) + c(\tau, t)\} \right\} \\ &= \min_{s \leq \tau' \leq t} \{a(s, \tau') + (b \otimes c)(\tau', t)\} \\ &= [a \otimes (b \otimes c)](s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $s \geq t$ , da equação (3.7),  $[(a \otimes b) \otimes c](s, t) = 0 = [a \otimes (b \otimes c)](s, t)$ . Daí:  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ .

**4** (Distributividade para somas infinitas). *Por um lado, é necessário mostrar que, se  $a_k \in \mathcal{C}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , então  $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a_k \in \mathcal{C}$ . Para todo  $s, t$ , quando  $s > t$ ,  $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a_k(s, t) = \inf_{k \in \mathbb{N}} 0 = 0$ ; quando  $s \leq t$ ,  $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a_k(s, t) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{a_k(s, t)\} \geq 0$ , porque  $a_k \in \mathcal{C}$ ,  $\forall k$ . Dessa forma,  $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a_k \in \mathcal{C}$ .*

*Finalmente, sejam  $a_k \in \mathcal{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $c \in \mathcal{C}$ . Para todo  $s, t$ , se  $s \leq t$ ,*

$$\begin{aligned} \left[ \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a_k \right) \otimes c \right](s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \left\{ \inf_{k \in \mathbb{N}} \{a_k(s, \tau)\} + c(\tau, t) \right\} \\ &= \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{s \leq \tau \leq t} \{a_k(s, \tau) + c(\tau, t)\} \right\} \\ &= \left[ \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (a_k \otimes c) \right](s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $s > t$ ,  $[(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a_k) \otimes c](s, t) = 0 = [\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (a_k \otimes c)](s, t)$ . Assim,  $(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a_k) \otimes c = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (a_k \otimes c)$ .

*A prova da segunda parte, ou seja  $c \otimes (\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a_k) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (c \otimes a_k)$  é semelhante.*

**5** (Existência do elemento nulo). *Seja  $a \in \mathcal{C}$ . De acordo com a definição de  $\varepsilon$  dada na*

equação (3.8),  $\forall s, t$ :

$$\begin{aligned} (\varepsilon \oplus a)(s, t) &= \inf \{ \varepsilon(s, t), a(s, t) \} \\ &= \begin{cases} \min \{ +\infty, a(s, t) \} = a(s, t), & \text{se } s \leq t, \\ \min \{ 0, 0 \} = 0 = a(s, t), & \text{se } s > t, \end{cases} \\ &= a(s, t). \end{aligned}$$

Daí:  $\varepsilon \oplus a = a$ . Da comutatividade da adição, portanto,  $\varepsilon \oplus a = a \oplus \varepsilon = a$ .

**6** (Existência do elemento identidade). *Seja  $a \in \mathcal{C}$ . Da definição de  $e$  dada na equação (3.9),  $\forall s, t$ :*

$$\begin{aligned} (a \otimes e)(s, t) &= \begin{cases} \min_{s \leq \tau \leq t} \{ a(s, \tau) + e(\tau, t) \}, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min \left\{ \min_{s \leq \tau < t} \{ a(s, \tau) + \infty \}, a(s, t) \right\} = a(s, t), & \text{se } s \leq t, \\ 0 = a(s, t), & \text{se } s > t, \end{cases} \\ &= a(s, t). \end{aligned}$$

Daí:  $a \otimes e = a$ . A demonstração de que  $e \otimes a = a$  é parecida.

**7** (Absorção pelo elemento nulo). *Seja  $a \in \mathcal{C}$ . Para todo  $s, t$ :*

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes a)(s, t) &= \begin{cases} \min_{s \leq \tau \leq t} \{ \varepsilon(s, \tau) + a(\tau, t) \} = +\infty, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t, \end{cases} \\ &= \varepsilon(s, t). \end{aligned}$$

Daí:  $\varepsilon \otimes a = \varepsilon$ . A prova de  $a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ , é parecida.

**8** (Idempotência da adição). *Seja  $a \in \mathcal{C}$ . Para todo  $s, t$ :*

$$\begin{aligned} (a \oplus a)(s, t) &= \inf \{ a(s, t), a(s, t) \} \\ &= a(s, t). \end{aligned}$$

Daí:  $a \oplus a = a$ . □

**Observação 9.** *A multiplicação em um dióide não é necessariamente comutativa. Por exemplo, a operação  $\otimes$  definida na equação (3.7) não é comutativa.*

Uma vez que o dióide  $\mathcal{C}$  é completo, é possível definir, para qualquer par de elementos, um limitante inferior.

**Definição 15.** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ . Definem-se o máximo limitante inferior entre  $a$  e  $b$ ,  $a \wedge b$ , e o máximo elemento em  $\mathcal{C}$ ,  $\top$ , conforme equações a seguir. Para todo  $s, t \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(a \wedge b)(s, t) = \sup \{a(s, t), b(s, t)\},$$

$$\top(s, t) = 0.$$

De acordo com (3.2), um ordenamento parcial em um dióide completo qualquer é dado por  $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x = x \oplus y \Leftrightarrow y = y \wedge x$ . A partir destas definições, é imediato:

$$y \succcurlyeq x \Leftrightarrow \forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : y(s, t) \leq x(s, t), \quad (3.10)$$

onde “ $\leq$ ” é o ordenamento linear usual em  $\mathbb{R}$ , e “ $\succcurlyeq$ ” é o ordenamento parcial em  $\mathcal{C}$ .

**Observação 10.** *A partir das equações (3.2) e (3.6), os símbolos  $\preccurlyeq$  e  $\succcurlyeq$  que representam o ordenamento parcial em  $\mathcal{C}$  correspondem, respectivamente, aos símbolos  $\geq (\forall s, t)$  e  $\leq (\forall s, t)$  na álgebra usual (note-se a inversão). Neste trabalho, diz-se que  $a \in \mathcal{C}$  é um limitante  $\mathcal{C}$ -inferior para  $b \in \mathcal{C}$ , se  $a \preccurlyeq b$ . Analogamente, definem-se os limitantes  $\mathcal{C}$ -superiores. Novamente, ressalte-se a inversão em relação aos conceitos usuais de limitantes inferior e superior.*

**Proposição 4** (Residuações em  $\mathcal{C}$ ). *Para o dióide  $\mathcal{C}$  definido anteriormente, os resíduos das funções  $l_a(x) = a \otimes x$  e  $r_a(x) = x \otimes a$ , respectivamente  $l_a^\#(y)$  e  $r_a^\#(y)$ , são expressos da seguinte maneira,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$l_a^\#(y) = (a \dot{\setminus} y)(s, t) = \begin{cases} \max_{0 \leq \tau \leq s \leq t} \{y(\tau, t) - a(\tau, s)\}^+, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$r_a^\#(y) = (y \dot{\setminus} a)(s, t) = \begin{cases} \sup_{s \leq t \leq \tau} \{y(s, \tau) - a(t, \tau)\}^+, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t, \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $x^+ = \max\{0, x\}$ .

*Demonstração.* A seguir, demonstra-se a equação (3.11). De acordo com a Definição 13, o resíduo da função  $l_a(x) = a \otimes x$  é a máxima função  $x \in \mathcal{C}$  que satisfaz a inequação  $l_a(x) = a \otimes x \preccurlyeq y$ . Portanto, de (3.10):

$$\forall \tau, t \in \mathbb{Z}^+ : (a \otimes x)(\tau, t) \geq y(\tau, t).$$

Essa inequação é naturalmente satisfeita, quando  $\tau > t$ , visto que, nesse caso,  $(a \otimes x)(\tau, t) = y(\tau, t) = 0$ . Por outro lado, quando  $\tau \leq t$ ,  $(a \otimes x)(\tau, t) = \min_{\tau \leq s \leq t} \{a(\tau, s) + x(s, t)\}$ , de forma que a seguinte inequação é satisfeita,  $\forall \tau, t \in \mathbb{Z}^+$ , tais que  $\tau \leq t$ :

$$(a \otimes x)(\tau, t) = \min_{\tau \leq s \leq t} \{a(\tau, s) + x(s, t)\} \geq y(\tau, t).$$

A desigualdade anterior é satisfeita, quando

$$a(\tau, s) + x(s, t) \geq y(\tau, t), \quad \forall \tau, s, t \in \mathbb{Z}^+, \text{ tais que } \tau \leq s \leq t,$$

ou, equivalentemente, quando

$$x(s, t) \geq y(\tau, t) - a(\tau, s), \quad \forall \tau, s, t \in \mathbb{Z}^+, \text{ tais que } \tau \leq s \leq t.$$

Por outro lado, como  $x \in \mathcal{C}$ , então  $x(s, t) \geq 0$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ . Dessa forma, a inequação acima pode ser expressa da seguinte maneira:  $\forall \tau, s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$  :  $x(s, t) \geq \max_{\tau \leq s \leq t} \{y(\tau, t) - a(\tau, s)\}^+$ .

Do exposto anteriormente, pode-se concluir que a solução máxima em  $\mathcal{C}$  de  $l_a(x) \preceq y$  é dada da seguinte forma:

$$\forall \tau, s, t \in \mathbb{Z}^+ : (a \bowtie y)(s, t) = \begin{cases} \max_{\tau \leq s \leq t} \{y(\tau, t) - a(\tau, s)\}^+, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

A demonstração da equação (3.12) é parecida. □

A Tabela 3.3 resume as definições das operações usadas neste trabalho.

|                                                                                                                                                                |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $\forall a, b, y \in \mathcal{C} :$                                                                                                                            |  |
| $(a \oplus b)(s, t) = \inf \{a(s, t), b(s, t)\}$                                                                                                               |  |
| $(a \otimes b)(s, t) = \begin{cases} \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + b(\tau, t)\}, & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$   |  |
| $(a \bowtie b)(s, t) = \begin{cases} \max_{\tau \leq s \leq t} \{b(\tau, t) - a(\tau, s)\}^+, & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ |  |
| $(b \phi a)(s, t) = \begin{cases} \sup_{s \leq t \leq \tau} \{b(s, \tau) - a(t, \tau)\}^+, & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$    |  |
| $(a \wedge b)(s, t) = \sup \{a(s, t), b(s, t)\}$                                                                                                               |  |

Tabela 3.3: Operações definidas em  $\mathcal{C}$ .

**Observação 11.** *Conforme a Definição 1, no caso invariante no tempo, é possível representar os elementos de  $\mathcal{C}$  como funções de  $t - s$ . Sejam  $a(t - s)$  e  $b(t - s)$  as representações de duas funções em  $\mathcal{C}$  invariantes no tempo. Neste caso,  $(b \phi a)(s, t) = (a \bowtie b)(s, t) = \sup_{d \geq 0} \{b(t - s + d) - a(d)\}^+$ , se  $s \leq t$ ; e  $(b \phi a)(s, t) = (a \bowtie b)(s, t) = 0$ , se  $s > t$ . Esta expressão é muito semelhante à operação de deconvolução definida por Chang (1998b) como  $(b \odot a)(t) = \sup_{d \geq 0} \{b(t + d) - a(d)\}$ . O nome “deconvolução” indica que esta operação é, de certo modo, uma inversa da convolução apresentada na Seção 2.2.*

**Proposição 5** (Residuações duais em  $\mathcal{C}$ ). *Os mapeamentos  $l_a(x) = a \otimes x$  e  $r_a(x) = x \otimes a$  do dióide  $\mathcal{C}$  no dióide  $\mathcal{C}$  não são dualmente residuados.*

*Demonstração.* Segundo Baccelli *et al.* (1992, *Definition 4.43* e *Theorem 4.52*), para que um mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  do dióide completo  $\mathcal{D}$  no dióide completo  $\mathcal{B}$  seja dualmente residuado, é necessário que  $f(\top) = \top$  e que  $\forall x, y \in \mathcal{D}$ ,  $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ , sendo  $f(x \wedge y), f(x), f(y) \in \mathcal{B}$ .

Sejam os mapeamentos  $l_a(x) = a \otimes x$  e  $r_b(x) = x \otimes b$ . Da Definição 15, têm-se:

$$(a \otimes \top)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + \top(\tau, t)\} = \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau)\},$$

$$(\top \otimes b)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{\top(s, \tau) + b(\tau, t)\} = \min_{s \leq \tau \leq t} \{b(\tau, t)\}.$$

Assim, para que  $a \otimes \top = \top$  e  $\top \otimes b = \top$ , as seguintes equações precisam ser satisfeitas,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$(a \otimes \top)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau)\} = 0, \quad (3.13)$$

$$(\top \otimes b)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{b(\tau, t)\} = 0. \quad (3.14)$$

Essas equações, contudo, não são satisfeitas para quaisquer elementos de  $\mathcal{C}$ . Por exemplo, considerem-se  $\forall s: a(s, s) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau)\}$ , e  $\forall t: b(t, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{b(\tau, t)\}$ . Nesses casos,  $(a \otimes \top)(s, t) = a(s, s)$  e  $(\top \otimes b)(s, t) = b(t, t)$ . Dessa forma, se  $\exists s : a(s, s) \neq 0$ , e  $\exists t : b(t, t) \neq 0$ , então as equações (3.13) e (3.14) deixam de ser satisfeitas,  $\forall s, t$ .  $\square$

No começo deste capítulo, mencionou-se que as funções  $x(s, t)$  representam o número de pacotes que passam por um determinado ponto de uma rede de comunicações durante o intervalo  $(s, t]$ . Essas funções devem ser não-decrescentes em  $t$ , para cada valor de  $s$ . Por outro lado, pode-se perceber que não se exige que elementos em  $\mathcal{C}$  sejam funções não-decrescentes de  $t$ . Por essa razão, o resultado de uma multiplicação em  $\mathcal{C}$  de termos não-decrescentes em  $t$ , pode ser uma função com porções decrescentes em  $t$ .

Seja  $\mathcal{C}_t$  o subconjunto das funções de  $\mathcal{C}$  não-decrescentes em  $t$ . O conjunto  $\mathcal{C}_t$  pode ser definido da seguinte maneira:

$$\mathcal{C}_t = \{x \in \mathcal{C} : x(s, t_1) \geq x(s, t_2), \forall s, \text{ se } t_1 > t_2\}. \quad (3.15)$$

Chang *et al.* (2002) sugerem que o conjunto  $\mathcal{C}_t$  (chamado de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , na referência original) é uma escolha natural para aplicações em *Network Calculus* dando origem à estrutura algébrica  $(\mathcal{C}_t, \oplus, \otimes)$ , na qual as operações de soma e produto são as mesmas definidas nas equações (3.6) e (3.7). Porém, o produto definido na equação (3.7) não é fechado em  $\mathcal{C}_t$  (ou  $\tilde{\mathcal{F}}$ ), como mostra o Exemplo 3.4. Conseqüentemente,  $(\mathcal{C}_t, \oplus, \otimes)$  não é um dióide.

**Exemplo 3.4** (Não fechamento do conjunto  $\mathcal{C}_t$  em relação a  $\otimes$ ). *Para mostrar que a operação*

$\otimes$  não é fechada em  $\mathcal{C}_t$ , sejam  $a, b \in \mathcal{C}_t$  definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a(0, 0) &= 1, & a(0, 1) &= 1, \\ b(0, 0) &= 1, & b(0, 1) &= 3, & b(1, 1) &= 0, \end{aligned}$$

$$a(s, t) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } (s, t) \notin \{(0, 0), (0, 1)\} \text{ e } s \leq t, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$b(s, t) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } (s, t) \notin \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \text{ e } s \leq t, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Têm-se:

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(0, 0) &= a(0, 0) + b(0, 0) = 2, \\ (a \otimes b)(0, 1) &= \min \{a(0, 0) + b(0, 1), a(0, 1) + b(1, 1)\} \\ &= \min \{4, 1\} = 1 < 2. \end{aligned}$$

Dessa maneira,  $(a \otimes b)(s, t)$  não é não-decrescente em  $t \forall s$ , e  $(a \otimes b) \notin \mathcal{C}_t$ .

Chang *et al.* (2002) basearam alguns de seus resultados no fato de  $(\mathcal{C}_t, \oplus, \otimes)$  ser um dióide completo. Apesar dessa consideração não ser realmente atendida, a grande maioria dos resultados apresentados em Chang *et al.* (2002) estão corretos, porque os autores partem sempre da premissa de que as funções  $x$  estão em um subconjunto de  $\mathcal{C}_t$  (chamado  $\tilde{\mathcal{F}}_0$ ) de elementos tais que  $x(s, s) = 0, \forall s \in \mathbb{Z}^+$ . O conjunto  $\tilde{\mathcal{F}}_0$ , por sua vez, é fechado para o produto definido na equação (3.7). Contudo, a estrutura  $(\tilde{\mathcal{F}}_0, \oplus, \otimes)$  também não define um dióide, por não incluir o elemento  $\varepsilon$ .<sup>4</sup> Uma possível solução para essa falha técnica em Chang *et al.* (2002) seria adicionar o elemento  $\varepsilon$  ao conjunto  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  e trabalhar em  $\tilde{\mathcal{F}}' = \tilde{\mathcal{F}}_0 \cup \{\varepsilon\}$ . Neste trabalho, contudo, essa não é uma solução razoável, porque o conjunto  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  não inclui alguns elementos de  $\mathcal{C}$  que são essenciais para a descrição das restrições de elementos de redes de comunicações. Exemplos desses elementos são apresentados na próxima seção.

### 3.3 Elementos e mapeamentos úteis do dióide $\mathcal{C}$

Nesta seção, são apresentados dois elementos do dióide  $\mathcal{C}$  que se destacam por facilitarem a descrição de restrições de elementos de redes de comunicações. São eles: as funções do tipo  $\lambda_B$ , que facilitam a descrição de restrições de *backlog*; e as funções do tipo  $\delta_D$ , úteis para representar restrições de atraso máximo. Em seguida, são definidos os mapeamentos  $\hat{x}$ , úteis

---

<sup>4</sup>Note-se que  $\varepsilon(s, s) = +\infty, \forall s$ .

para representar restrições apenas no intervalo de tempo  $(0, t]$ ; e os mapeamentos de projeção  $\mathcal{C}$ -superior e  $\mathcal{C}$ -inferior de funções de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}_t$ , importantes quando se quer determinar possíveis limitantes em  $\mathcal{C}_t$  de funções em  $\mathcal{C}_t$ . Por último, são apresentadas propriedades que facilitam a análise de redes com agregação (multiplexação) de fluxos. Para cada um desses elementos e mapeamentos especiais de  $\mathcal{C}$ , destacam-se algumas propriedades interessantes. Para garantir a fluidez do texto, as demonstrações dessas propriedades são apresentadas no Apêndice B; para facilitar uma consulta posterior, as propriedades estão apresentadas em forma de tabelas (repetidas no Apêndice A).

**Definição 16** (Função de deslocamento vertical). *Seja uma função  $B : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ . Define-se a função de deslocamento vertical,  $\lambda_B \in \mathcal{C}$ , da seguinte maneira:*

$$\lambda_B(s, t) = \begin{cases} 0, & s > t, \\ B(t), & s = t, \\ +\infty, & s < t. \end{cases}$$

A Figura 3.3 ilustra a função  $\lambda_B(s, t)$ , para algum valor de  $s$  dado. Da equação (3.5), claramente,  $\lambda_B \in \mathcal{C}$ . Essa função foi anteriormente definida por Chang *et al.* (2002, *Example 6.7*).

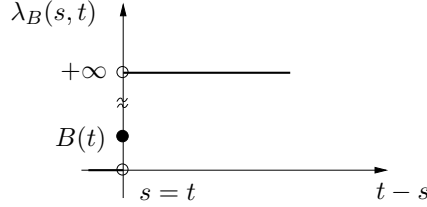


Figura 3.3: Função de deslocamento vertical:  $\lambda_B \in \mathcal{C}$ .

As funções do tipo  $\lambda_B$  são úteis para representar limitações de capacidade de armazenagem de dados em elementos de redes de comunicações, conforme apresentado no próximo capítulo. A Tabela 3.4 apresenta propriedades dessas funções. Suas demonstrações podem ser encontradas no Apêndice B, Seção B.1.

Outros elementos de  $\mathcal{C}$  que facilitam a representação de restrições impostas a elementos de redes de comunicações são as funções do tipo  $\delta_D$ , definidas a seguir.

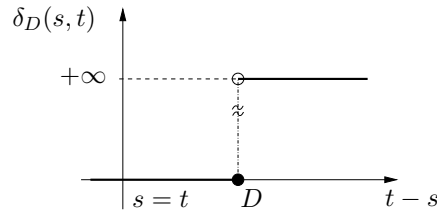
**Definição 17** (Função de atraso). *Dado um  $D \in \mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\}$ , define-se a função de atraso  $\delta_D \in \mathcal{C}$  da seguinte maneira:*

$$\delta_D(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq s + D, \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

| Validade                    | Propriedade                                                                                                              | Referência |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\forall x \in \mathcal{C}$ | $(x \otimes \lambda_B)(s, t) = \begin{cases} x(s, t) + B(t), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$ | (PL.1)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}$ | $(\lambda_B \otimes x)(s, t) = \begin{cases} x(s, t) + B(s), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$ | (PL.2)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}$ | $(x \not\phi \lambda_B)(s, t) = [x(s, t) - B(t)]^+$                                                                      | (PL.3)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}$ | $(\lambda_B \not\phi x)(s, t) = [x(s, t) - B(s)]^+$                                                                      | (PL.4)     |

Tabela 3.4: Propriedades da função de deslocamento vertical:  $\lambda_B \in \mathcal{C}$ .

A Figura 3.4 representa graficamente uma função do tipo  $\delta_D$ . Essas funções são úteis para representar restrições de atrasos em elementos de redes de comunicações. Esse tipo de função foi anteriormente definido na literatura (Chang, 1998b; Agrawal *et al.*, 1999).

Figura 3.4: Função de atraso constante:  $\delta_D \in \mathcal{C}$ .

Seja  $\mathcal{C}_s$  o conjunto dos elementos de  $\mathcal{C}$  não-crescentes em  $s$ , ou seja,

$$\mathcal{C}_s = \{x \in \mathcal{C} : x(s_1, t) \geq x(s_2, t), \forall t, \text{ se } s_1 \leq s_2\}. \quad (3.16)$$

A Tabela 3.5 traz algumas propriedades relacionadas às funções  $\delta_D$  e aos elementos dos conjuntos  $\mathcal{C}_t$  (equação 3.15) e  $\mathcal{C}_s$  (equação 3.16).

A seguir são definidos alguns mapeamentos úteis em  $\mathcal{C}$ . Sejam  $x, y \in \mathcal{C}$ . De (3.10), dizer que  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : y(s, t) \leq x(s, t)$  equivale a dizer que  $y = y \oplus x$ , ou ainda, que  $y \succcurlyeq x$  ou que  $x = x \wedge y$ . Em alguns casos, porém, só é possível afirmar que  $y(0, t) \leq x(0, t), \forall t$ , seja porque não se tem informação sobre a relação entre  $y(s, t)$  e  $x(s, t)$  para  $s \neq 0$ , ou simplesmente porque  $y(s, t) \not\leq x(s, t), \forall s, t$ . Em qualquer desses casos, pode-se usar o artifício descrito a seguir.

**Definição 18** (Mapeamento  $\hat{x} \in \mathcal{C}$ ). *Seja  $x \in \mathcal{C}$ . Define-se o mapeamento  $\hat{x}$  de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}$  da seguinte maneira:*

$$\hat{x}(s, t) = \begin{cases} x(0, t), & \text{se } s = 0, \\ \varepsilon(s, t), & \text{se } s \neq 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

| Validade                         | Propriedade                                                                                                                                                        | Referência |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | $(x \otimes \delta_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - D), & \text{se } t \geq s + D \\ x(s, s), & \text{se } s \leq t < s + D \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$ | (PD.1)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$    | $(\delta_D \otimes x)(s, t) = \begin{cases} x(s + D, t), & \text{se } t \geq s + D \\ x(t, t), & \text{se } s \leq t < s + D \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$ | (PD.2)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | $(x \otimes \delta_D) \in \mathcal{C}_t$                                                                                                                           | (PD.3)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$    | $(\delta_D \otimes x) \in \mathcal{C}_s$                                                                                                                           | (PD.4)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | Se $x(s, s) = 0, \forall s$ , então $(x \otimes \delta_D)(s, t) = x(s, (t - D)^+)$                                                                                 | (PD.5)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$    | Se $x(s, s) = 0, \forall s$ , então $(\delta_D \otimes x)(s, t) = x(s + D, t)$                                                                                     | (PD.6)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | $(x \phi \delta_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t + D), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$                                                  | (PD.7)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | $(x \otimes \delta_D) \phi \delta_D = x \otimes (\delta_D \phi \delta_D) = x$                                                                                      | (PD.8)     |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_t$ | $(x \oplus y) \phi \delta_D = x \phi \delta_D \oplus y \phi \delta_D$                                                                                              | (PD.9)     |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_t$ | Se $x \delta_D \succcurlyeq y$ , então $x \succcurlyeq y \phi \delta_D$                                                                                            | (PD.10)    |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_t$ | Se $x(s, s) \leq y(s, s), \forall s$ , então $x \delta_D \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y \phi \delta_D$                                            | (PD.11)    |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$    | $(\delta_D \bowtie x)(s, t) = \begin{cases} x((s - D)^+, t), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$                                           | (PD.12)    |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_s$ | $\delta_D \bowtie (x \oplus y) = \delta_D \bowtie x \oplus \delta_D \bowtie y$                                                                                     | (PD.13)    |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_s$ | Se $\delta_D x \succcurlyeq y$ , então $x \succcurlyeq \delta_D \bowtie y$                                                                                         | (PD.14)    |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_s$ | Se $x(t, t) \leq y(t, t), \forall t$ , então $\delta_D x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succcurlyeq \delta_D \bowtie y$                                         | (PD.15)    |

Tabela 3.5: Propriedades da função de atraso constante:  $\delta_D \in \mathcal{C}$ .

Quando,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \leq x(0, t)$ , então  $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : \hat{y}(0, t) \leq \hat{x}(0, t)$ . Por outro lado,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$  se  $s \neq 0$ :  $\hat{y}(s, t) = \hat{x}(s, t) = \varepsilon(s, t)$ . Assim, quando  $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \leq x(0, t)$ , então  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : \hat{y}(s, t) \leq \hat{x}(s, t)$  e, portanto, como em (3.10), as seguintes equivalências são satisfeitas:

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \leq x(0, t) \Leftrightarrow \forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : \hat{y}(s, t) \leq \hat{x}(s, t) \Leftrightarrow \hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x} \Leftrightarrow \hat{y} \succcurlyeq \hat{x} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{x} \wedge \hat{y}.$$

A Tabela 3.6 mostra as equivalências entre restrições discutidas anteriormente; e a Tabela 3.7, propriedades do mapeamento  $\hat{x}$ .

$$\forall x, y \in \mathcal{C} :$$

|                                                        |                                    |                                |                                    |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : y(s, t) \leq x(s, t)$ | $y = y \oplus x$                   | $y \succcurlyeq x$             | $x = x \wedge y$                   |
| $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \leq x(0, t)$    | $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$ | $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x}$ | $\hat{x} = \hat{x} \wedge \hat{y}$ |

Tabela 3.6: Equivalências entre restrições na álgebra convencional e no dióide  $\mathcal{C}$ .

| Validade                                                                           | Propriedade                                                                                                                                                 | Referência |
|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\forall a, b \in \mathcal{C}, b(0, 0) = 0$                                        | $b \otimes \hat{a} = \hat{a}$                                                                                                                               | (PH.1)     |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}$                                                     | $\hat{a} \otimes b = \widehat{(ab)}$                                                                                                                        | (PH.2)     |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}$                                                     | $(\hat{a} \bowtie b)(s, t) = \begin{cases} [b(0, t) - a(0, s)]^+, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$                         | (PH.3)     |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}$                                                     | $(b \phi \hat{a})(s, t) = \begin{cases} \sup_{\tau \geq 0} \{b(0, \tau) - a(0, \tau)\}^+, & \text{se } s = t = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ | (PH.4)     |
| $\forall a, b \in \mathcal{C},$<br>$b(s, t) < +\infty, \text{ se } s, t < +\infty$ | $b \bowtie \hat{a} = \varepsilon$                                                                                                                           | (PH.5)     |
| $\forall a, b \in \mathcal{C},$<br>$b(s, t) < +\infty, \text{ se } s, t < +\infty$ | $\hat{a} \phi b = \widehat{(a \phi b)}$                                                                                                                     | (PH.6)     |
| $\forall a \in \mathcal{C}$                                                        | $(\hat{a}^*)(s, t) = \begin{cases} a(0, t), & \text{se } s = 0 \\ e(s, t), & \text{se } s \neq 0 \end{cases}$                                               | (PH.7)     |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}$                                                     | $b \otimes \hat{a}^* = b \oplus \hat{a}$                                                                                                                    | (PH.8)     |
| $\forall a \in \mathcal{C}_t$                                                      | $(\hat{a} \bowtie \hat{a})^* = (\hat{a} \bowtie \hat{a})$                                                                                                   | (PH.9)     |

Tabela 3.7: Propriedades do mapeamento  $\hat{x}$ .

Conforme mencionado anteriormente, este trabalho trata da determinação de limitantes de parâmetros de QoS em redes de comunicações. A determinação desses limitantes, muitas vezes, está ligada à determinação de limitantes de funções em  $\mathcal{C}$ . Adicionalmente, neste trabalho, considera-se que  $x(s, t)$  representa a quantidade de dados que passam por um dado ponto da rede no intervalo de tempo  $(s, t]$ . Assim, é natural partir da consideração de que, para cada  $s$ ,  $x(s, t)$  é uma função não-decrescente de  $t$ , ou seja,  $x \in \mathcal{C}_t$ . Nesse caso, é natural procurar limitantes de  $x$  também em  $\mathcal{C}_t$ . Contudo, para garantir o fechamento da operação  $\otimes$  no conjunto  $\mathcal{C}$ , admite-se funções com porções decrescentes em  $t$ . Surge, então, a questão de como se pode garantir limitantes em  $\mathcal{C}_t$  para funções em  $\mathcal{C}_t$ . A solução escolhida nesta tese foi a de

trabalhar no conjunto  $\mathcal{C}$  e depois fazer uma projeção dos limitantes encontrados, do conjunto  $\mathcal{C}$  para o conjunto  $\mathcal{C}_t$ , da maneira descrita a seguir.

**Definição 19** (Projeções de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}_t$ ). *Seja a função  $x \in \mathcal{C}$ . Definem-se  $\underline{\text{Pr}}\{x\}$  e  $\overline{\text{Pr}}\{x\}$ , respectivamente, as projeções  $\mathcal{C}$ -inferior e  $\mathcal{C}$ -superior de  $x$  em  $\mathcal{C}_t$ , da seguinte maneira,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(\underline{\text{Pr}}\{x\})(s, t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau)\},$$

$$(\overline{\text{Pr}}\{x\})(s, t) = \inf_{\tau \geq t} \{x(s, \tau)\}.$$

A Figura 3.5 ilustra o significado das projeções  $\mathcal{C}$ -inferior e  $\mathcal{C}$ -superior de uma função  $x \in \mathcal{C}$  no conjunto  $\mathcal{C}_t$  (respectivamente,  $\underline{\text{Pr}}\{x\}$  e  $\overline{\text{Pr}}\{x\}$ ). Para facilitar a distinção entre as curvas, os gráficos foram criados considerando  $s, t \in \mathbb{R}^+$ . Note-se que os operadores de projeção são isotônicos, por exemplo, se  $a \preceq b$ , então  $\overline{\text{Pr}}\{a\} \preceq \overline{\text{Pr}}\{b\}$ .

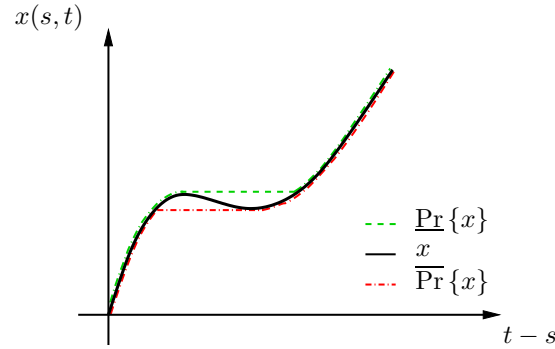


Figura 3.5: Projeções de uma função  $x(s, t)$  de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}_t$ , para um certo valor de  $s$ .

**Proposição 6** (Limitantes em  $\mathcal{C}_t$  de funções em  $\mathcal{C}_t$ ). *Sejam  $x_{\sharp}, x_{\flat} \in \mathcal{C}$ , possíveis limitantes da função  $x \in \mathcal{C}_t$  tais que  $x_{\flat} \preceq x \preceq x_{\sharp}$ . As projeções  $\overline{\text{Pr}}\{x_{\flat}\}$  e  $\underline{\text{Pr}}\{x_{\sharp}\}$  de  $x_{\flat}$  e  $x_{\sharp}$  em  $\mathcal{C}_t$  também são possíveis limitantes de  $x$ . Nesse caso,*

$$\overline{\text{Pr}}\{x_{\flat}\} \preceq x \preceq \underline{\text{Pr}}\{x_{\sharp}\}.$$

*Demonstração.* A demonstração dessa propriedade encontra-se no Apêndice B, Seção B.4.  $\square$

Sob certas condições, duas funções  $a, b \in \mathcal{C}_t$  levam a uma função  $(a \otimes b) \in \mathcal{C}_t$ , o que implica que  $\overline{\text{Pr}}\{(a \otimes b)\} = \underline{\text{Pr}}\{(a \otimes b)\} = (a \otimes b)$ . Considere-se o seguinte conjunto:

$$\mathcal{C}'_t = \{x \in \mathcal{C}_t : x(t, t) \leq x(t+1, t+1), \forall t\}. \quad (3.18)$$

Propriedades envolvendo projeções podem ser encontradas na Tabela 3.8.

| Validade                          | Propriedade                                                                                | Referência |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$     | $\underline{\text{Pr}}\{x\} = \overline{\text{Pr}}\{x\} = x$                               | (PP.1)     |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}'_t$ | $\overline{\text{Pr}}\{a \otimes b\} = \underline{\text{Pr}}\{a \otimes b\} = a \otimes b$ | (PP.2)     |

Tabela 3.8: Propriedades das projeções de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}_t$ .

Das definições de  $\mathcal{C}'_t$  (equação 3.18) e de produto em  $\mathcal{C}$  (Tabela 3.3), se  $a, b \in \mathcal{C}'_t$ , tem-se:

$$(a \otimes b)(t, t) = a(t, t) + b(t, t) \leq a(t+1, t+1) + b(t+1, t+1) = (a \otimes b)(t+1, t+1).$$

Assim, o produto definido na equação (3.7) é fechado em  $\mathcal{C}'_t$ .

**Observação 12.** *O fato do produto definido na equação (3.7) ser fechado em  $\mathcal{C}'_t$  pode induzir à conclusão de que uma maneira simples de contornar o não-fechamento do conjunto  $\mathcal{C}_t$  é trabalhar no conjunto  $\mathcal{C}'_t$ . Essa solução, embora realmente possível, não foi levada em conta nesta tese, porque implicaria trabalhar com funções  $\lambda_B$  tais que  $B(t) \leq B(t+1)$  (ver Definição 16) e isso significaria, por sua vez, trabalhar com sistemas com backlog crescente no tempo, o que não é interessante. Esse último aspecto será aprofundado no próximo capítulo.*

Por fim, seja  $x \in \mathcal{C}$  um fluxo formado pela agregação de dois outros fluxos,  $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ . Nesse caso, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $x(s, t) = x_1(s, t) + x_2(s, t)$ . Dessa forma,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $x_1(s, t) = x(s, t) - x_2(s, t)$  e  $x_2(s, t) = x(s, t) - x_1(s, t)$ . Para tornar possível a representação em  $\mathcal{C}$  desse tipo de restrições relacionadas à multiplexação de fluxos, definem-se os mapeamentos  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  a seguir.

**Definição 20** (Mapeamento F). *Dados  $a, b \in \mathcal{C}$ , define-se o mapeamento  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  da seguinte forma,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(F\{a, b\})(s, t) = a(s, t) + b(s, t). \quad (3.19)$$

*Note-se que, se  $a, b \in \mathcal{C}$ , então  $F\{a, b\} \in \mathcal{C}$ . De fato, por um lado,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s > t$ :  $a(s, t) = b(s, t) = 0$ , e, portanto,  $(F\{a, b\})(s, t) = a(s, t) + b(s, t) = 0$ ; por outro lado, se  $s \leq t$ ,  $a(s, t) \geq 0$  e  $b(s, t) \geq 0$ , de forma que  $(F\{a, b\})(s, t) = a(s, t) + b(s, t) \geq 0$ . Daí,  $F\{a, b\} \in \mathcal{C}$ . Note-se também que o mapeamento F é tal que  $F\{a, b\} = F\{b, a\}$ .*

**Definição 21** (Mapeamento G). *Dados  $a, b \in \mathcal{C}$ , define-se, o mapeamento  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  da seguinte forma,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(G\{a, b\})(s, t) = \{a(s, t) - b(s, t)\}^+$$

*Para mostrar que, se  $a, b \in \mathcal{C}$ , então,  $G\{a, b\} \in \mathcal{C}$ , por um lado, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $(G\{a, b\})(s, t) \geq 0$ , diretamente da definição de  $x^+$ . Por outro lado, como  $a, b \in \mathcal{C}$ , então*

$\forall s > t : a(s, t) = b(s, t) = 0$ , de forma que  $\{a(s, t) - b(s, t)\}^+ = \max\{0, x_1(s, t) - x_2(s, t)\} = \max\{0, 0\} = 0$ . Daí,  $G\{a, b\} \in \mathcal{C}$ .

A Tabela 3.9 apresenta mapeamentos definidos nesse capítulo.

$$\forall a, b, x \in \mathcal{C} :$$

|                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------|
| $(\underline{\text{Pr}}\{x\})(s, t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau)\}$ |
| $(\overline{\text{Pr}}\{x\})(s, t) = \inf_{\tau \geq t} \{x(s, \tau)\}$         |
| $(F\{a, b\})(s, t) = a(s, t) + b(s, t)$                                         |
| $(G\{a, b\})(s, t) = [a(s, t) - b(s, t)]^+$                                     |

Tabela 3.9: Mapeamentos  $\underline{\text{Pr}}$ ,  $\overline{\text{Pr}}$ ,  $F$  e  $G$  definidos em  $\mathcal{C}$ .

A Tabela 3.10 apresenta algumas propriedades em  $\mathcal{C}$  relacionadas aos mapeamentos  $F$  e  $G$ . As demonstrações encontram-se no Apêndice B, Seção B.6.

| Validade                                                                                              | Propriedade                                                                                                   | Referência |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\forall a, b, c, d \in \mathcal{C}$                                                                  | Se $a \succcurlyeq c$ e $b \succcurlyeq d$ , então $F\{a, b\} \succcurlyeq F\{c, d\}$                         | (PM.1)     |
| $\forall a, b, c \in \mathcal{C}$                                                                     | $a \succcurlyeq F\{b, c\} \Leftrightarrow b \preccurlyeq G\{a, c\} \Leftrightarrow c \preccurlyeq G\{a, b\}$  | (PM.2)     |
| $\forall a, b, c \in \mathcal{C}$                                                                     | $a \preccurlyeq F\{b, c\} \Leftrightarrow b \succcurlyeq G\{a, c\} \Leftrightarrow c \succcurlyeq G\{a, b\}$  | (PM.3)     |
| $\forall a, b, c \in \mathcal{C}$                                                                     | Se $a \succcurlyeq b$ , então $G\{c, a\} \preccurlyeq G\{c, b\}$                                              | (PM.4)     |
| $\forall a, b, c, d \in \mathcal{C}$                                                                  | $(F\{a, b\}) \bowtie (F\{c, d\}) \succcurlyeq F\{(a \bowtie c), (b \bowtie d)\}$                              | (PM.5)     |
| $\forall x_k \in \mathcal{C}_t, k = 1, \dots, M$                                                      | $F\{x_1 \delta_D, \dots, x_M \delta_D\} = F\{x_1, \dots, x_M\} \otimes \delta_D$                              | (PM.6)     |
| $\forall x_k \in \mathcal{C} \text{ e } \forall X_k : \lambda_{X_k} \in \mathcal{C}, k = 1, \dots, M$ | $F\{x_1 \lambda_{X_1}, \dots, x_M \lambda_{X_M}\} = F\{x_1, \dots, x_M\} \lambda_{(X_1 + \dots, X_M)}$        | (PM.7)     |
| $\forall x_k, \beta_k \in \mathcal{C}, k = 1, \dots, M$                                               | $F\{x_1 \beta_1, \dots, x_M \beta_M\} \succcurlyeq F\{x_1, \dots, x_M\} \otimes F\{\beta_1, \dots, \beta_M\}$ | (PM.8)     |

Tabela 3.10: Propriedades dos mapeamentos  $F$  e  $G$ .

### 3.4 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados os conceitos que formam a base matemática deste trabalho. Primeiramente, foram apresentados conceitos gerais da álgebra de dióides presentes na literatura. Em seguida, foi introduzido o dióide  $\mathcal{C}$  proposto neste trabalho, e foram definidas algumas funções e mapeamentos importantes para a descrição de sistemas de comunicações. Conforme mencionado, o dióide  $\mathcal{C}$  proposto neste trabalho se baseia na estrutura definida em Chang *et al.* (2002), com as alterações necessárias para garantir o fechamento da operação de multiplicação e, desta forma, permitir a definição de um dióide.

A relação de ordenamento parcial representada pelos símbolos  $\succsim$  e  $\preccurlyeq$  não aparece na literatura associada ao *Network Calculus*. A operação  $\wedge$ , por outro lado, é comumente encontrada, mas com significado oposto ao utilizado na literatura de dióides.<sup>5</sup> Neste trabalho, preferiu-se a conformidade com seu significado na teoria de dióides.

Na literatura do NC, em geral, trabalha-se na estrutura  $(\mathcal{C}_t, \min, +)$ , chamada de “dióide min-plus”. Nesta estrutura, para tornar possível a representação de restrições de sistemas de comunicações, definem-se vários mapeamentos<sup>6</sup>. Por exemplo, conforme mencionado no Capítulo 2, a multiplicação definida pela equação (3.7) é apresentada como um mapeamento chamado de “convolução min-plus”. Conseqüentemente, resultados conhecidos da literatura de dióides, como a existência de residuações para o produto à esquerda e à direita e as propriedades da Tabela 3.2 não são diretamente aplicáveis para a multiplicação definida na equação (3.7), tendo que ser individualmente demonstrados.

Entre os elementos do dióide  $\mathcal{C}$ , foi destacada a importância das funções  $\delta_D$  e  $\lambda_B$ . A primeira é particularmente interessante para a representação de atrasos constantes; a segunda, para a representação de restrições de *backlog*. Embora as funções  $\delta_D$  e  $\lambda_B$  já estejam presentes na literatura (Chang, 1998b, e Chang *et al.*, 2002, por exemplo), a quase totalidade das propriedades apresentadas nas Tabelas 3.4 e 3.5 são contribuições deste trabalho. São também contribuições deste trabalho a definição e utilização sistemática da operação de residuação e suas propriedades, assim como todas as definições e propriedades de mapeamentos apresentadas.

Cinco mapeamentos foram definidos neste capítulo e são uma contribuição deste trabalho. O mapeamento  $\widehat{x}$ , permite extrair de uma função  $x \in \mathcal{C}$  apenas as informações referentes ao intervalo  $(0, t]$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ . Os mapeamentos  $\overline{\text{Pr}}\{\cdot\}$  e  $\underline{\text{Pr}}\{\cdot\}$  permitem a obtenção de funções no conjunto  $\mathcal{C}_t$  a partir de funções em  $\mathcal{C}$ . Finalmente, os mapeamentos  $\text{F}\{\cdot\}$  e  $\text{G}\{\cdot\}$  facilitam a representação de restrições relacionadas à multiplexação de tráfegos.

---

<sup>5</sup>Na literatura relacionada ao *Network Calculus*, a operação  $\wedge$  é utilizada como um sinônimo do operador de mínimo da álgebra convencional dos números reais. Portanto, seu significado é praticamente o oposto do apresentado neste trabalho para o dióide  $\mathcal{C}$ .

<sup>6</sup>Alguns dos mapeamentos usados na literatura do NC estão apresentados em Le Boudec *et al.* (2000b, Seção 2).

## Capítulo 4

# Restrições matemáticas básicas e elementos básicos associados

Este trabalho trata da determinação de parâmetros de QoS tais como máximo atraso fim-a-fim, máximo *backlog* e curvas de regulação e de serviço. O termo “parâmetro”<sup>1</sup> é utilizado neste contexto para fazer referência a curvas, em geral elementos do dióide  $\mathcal{C}$ . Neste ponto, cabe estabelecer a diferença entre curva parametrizada (uso comum) e uma curva ela própria entendida como um parâmetro (utilização feita neste trabalho). Restrições matemáticas podem ser associadas a parâmetros de QoS, para descrever o comportamento de elementos de sistemas de comunicações. Essas restrições (igualdades ou desigualdades) podem expressar:

- Especificações de desempenho.
- Limitações físicas do sistema.

Considere-se o dióide  $\mathcal{C}$  e a interpretação física de seus elementos conforme descrito na Seção 3.2. Sejam  $x, y \in \mathcal{C}$  os fluxos de entrada e saída, respectivamente, de um dado sistema  $S$ , como ilustrado pela Figura 4.1.

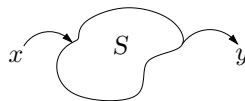


Figura 4.1: Elemento genérico com fluxo de entrada  $x$  e fluxo de saída  $y$ .

A seguir, cinco tipos de restrições entre os fluxos  $x$  e  $y$  são descritos, no dióide  $\mathcal{C}$ : as restrições de fluxo, de agregação ou acoplamento, de regulação, de serviço e de *backlog*. Em seguida, mostra-se que restrições de atraso máximo são um caso especial das restrições de serviço.

---

<sup>1</sup>De acordo com Michaelis, “parâmetro” é “todo elemento cuja variação de valor altera a solução de um problema sem alterar-lhe a natureza” (Melhoramentos, 2008). Neste sentido, *funções* como as curvas de regulação e de serviço também são consideradas “parâmetros”.

Um aspecto importante deste trabalho é ressaltar que o conjunto de restrições acima permite o tratamento de uma classe abrangente de problemas relacionados aos parâmetros de QoS mencionados anteriormente. Por essa razão, esse conjunto de restrições será chamado *conjunto básico de restrições*. Estas restrições não necessariamente formam um conjunto completo, capaz de tratar qualquer problema relacionado a sistemas de comunicações. Outras restrições podem ser adicionadas a este conjunto, conforme a necessidade de modelagem de problemas diferentes dos aqui apresentados.

## 4.1 Restrições de fluxo

A *restrição de fluxo* garante que a quantidade de dados que entram em um sistema desde o instante inicial,  $s = 0$ , nunca é maior do que a quantidade de dados que o deixam. Matematicamente, essa restrição pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \leq x(0, t). \quad (4.1)$$

A inequação (4.1) significa que se considera que os sistemas não criam tráfego, mas apenas o atrasam, quando necessário. Essa restrição está sempre presente em sistemas causais.

De acordo com a Tabela 3.6, a inequação (4.1) pode ser rescrita em  $\mathcal{C}$  da seguinte maneira:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}. \quad (4.2)$$

## 4.2 Restrições de acoplamento

A *restrição de acoplamento*<sup>2</sup> permite a modelagem de sistemas em que o fluxo de saída é o acoplamento dos fluxos de entrada. Por exemplo, considere-se um sistema cuja saída é o agregado de  $M$  fluxos. Sejam  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , os fluxos de entrada e  $x$  o fluxo de saída desse sistema<sup>3</sup>. Matematicamente, a restrição de acoplamento pode ser expressa da seguinte maneira,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$x(s, t) = x_1(s, t) + x_2(s, t) + \dots + x_M(s, t). \quad (4.3)$$

Considere-se a Definição 20 apresentada no Capítulo 3, ou seja, dados  $a, b \in \mathcal{C}$ , tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$(F \{a, b\})(s, t) = a(s, t) + b(s, t).$$

---

<sup>2</sup>Neste trabalho, utilizam-se os termos multiplexação, agregação e acoplamento como sinônimos. Todos representam a soma no sentido convencional de funções.

<sup>3</sup>Em geral, neste trabalho, preferiu-se usar a mesma letra para representar fluxos de entrada e saída de acopladores. A diferenciação entre entrada e saída é feita pela inclusão de um sub-índice para fluxos de entrada.

A equação (4.3) pode ser rescrita em  $\mathcal{C}$  da seguinte maneira:

$$x = F \{x_1, x_2, \dots, x_M\}. \quad (4.4)$$

Defina-se a seguinte notação:

$$F_{k=1, \dots, M} \{x_k\} = F \{x_1, x_2, \dots, x_M\}.$$

A equação (4.4) também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$x = F_{k=1, \dots, M} \{x_k\}. \quad (4.5)$$

### 4.3 Restrições de regulação

Conforme mencionado anteriormente, o NC parte do pressuposto que os fluxos de uma rede de comunicações são limitados. Seja  $\sigma \in \mathcal{C}$  a *curva de regulação* de um sistema (filtro) com fluxo de entrada  $x \in \mathcal{C}$  e fluxo de saída  $y \in \mathcal{C}$ , conforme Definição 2 apresentada no Capítulo 2. Da inequação (2.4), define-se a *restrição de regulação* da seguinte maneira,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , com  $s \leq t$ :

$$y(0, t) - y(0, s) \leq \sigma(s, t). \quad (4.6)$$

A curva de regulação está relacionada à quantidade máxima de dados que podem deixar um sistema que atende a inequação (4.6), em um dado intervalo de tempo, conforme mostrado na Proposição 7.

**Proposição 7.** *Seja  $y \in \mathcal{C}$  a função de saída de um filtro que atende a curva de regulação  $\sigma \in \mathcal{C}$ . Considere-se  $y$  uma função aditiva, conforme Definição 31, Apêndice F. Tem-se:*

$$\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : y(s, t) \leq \sigma(s, t),$$

ou, equivalentemente, de acordo com a Tabela 3.6:  $y = y \oplus \sigma$ .

*Demonstração.* Da Definição 31 (Apêndice F, página 213):  $y(s, t) = y(0, t) - y(0, s)$ . Nesse caso, a propriedade acima decorre diretamente, da inequação (4.6).  $\square$

A inequação (4.6) pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \leq \min_{0 \leq s \leq t} \{y(0, s) + \sigma(s, t)\}.$$

Assim, de acordo com a Tabela 3.3, como  $t \geq 0$ , tem-se:

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \leq (y \otimes \sigma)(0, t). \quad (4.7)$$

Finalmente, da Tabela 3.6 e da propriedade (PH.2), Tabela 3.7, a inequação (4.7) pode ser rescrita em  $\mathcal{C}$  da seguinte maneira:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma. \quad (4.8)$$

**Proposição 8.** *Se um dado fluxo  $x$  de um sistema satisfaz uma curva de regulação  $\sigma \in \mathcal{C}$ , então também satisfaz a uma curva de regulação  $\sigma^* \in \mathcal{C}$  (considerando que  $\sigma^*$  exista).*

*Demonstração.* Se o fluxo  $x$  satisfaz a curva de regulação  $\sigma$ , então  $\hat{x} = \hat{x}(e \oplus \sigma)$ . Daí, de acordo com o Teorema 1 (item 2), tem-se:  $\hat{x} = \hat{x}\sigma^*$ . Assim, da idempotência da adição:  $\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{x}\sigma^*$ . Dessa forma, o fluxo  $x$  também satisfaz uma curva de regulação  $\sigma^*$ . Esse resultado foi anteriormente apresentado em Chang *et al.* (2002, Lemma 3.2).  $\square$

Seja um sistema formado pelo acoplamento de  $M$  fluxos de entrada, onde cada fluxo de entrada está sujeito a uma curva de regulação  $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , conforme ilustrado na Figura 4.2. A curva de regulação total do sistema pode ser definida conforme a proposição a seguir.

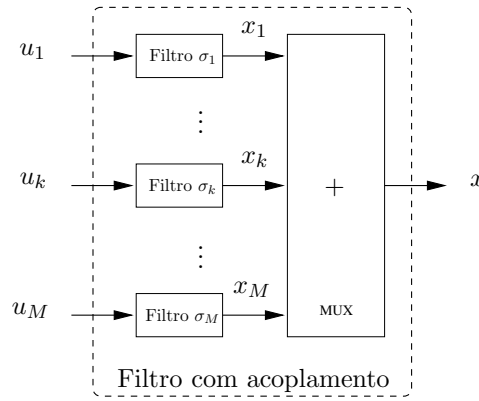


Figura 4.2: Sistema formado pelo acoplamento de  $M$  fluxos de entrada, sujeitos a curvas de regulação  $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ .

**Proposição 9.** *Considere-se um filtro cujo fluxo de saída é formado pelo agrupamento de  $M$  funções de entrada, conforme ilustra a Figura 4.2. Sejam  $u_k \in \mathcal{C}$ ,  $k = 1, \dots, M$  os fluxos de entrada deste filtro. Considere-se que a função  $u_k$  está sujeita a uma curva de regulação  $\sigma_k \in \mathcal{C}$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Seja, ainda,  $x = F\{x_1, \dots, x_M\}$  a saída total do sistema (Definição 20). Uma possível curva de regulação para o fluxo de saída deste sistema,  $\sigma \in \mathcal{C}$ , pode ser definida da seguinte maneira:*

$$\sigma = F\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_M^*\}.$$

*Demonstração.* A demonstração desta propriedade pode ser encontrada no Apêndice C.  $\square$

**Proposição 10.** *Seja  $\sigma \in \mathcal{C}$  uma curva de regulação para um tráfego  $y$ . Qualquer função  $\sigma'$  tal que  $\sigma' \preceq \sigma$  também é uma curva de regulação para  $y$ .*

*Demonstração.* A função  $\sigma$  é uma curva de regulação para o tráfego  $y$ . Daí, da equação (4.8) e da Tabela 3.6,  $\hat{y} \succ \hat{y}\sigma$ . Por outro lado,  $\sigma' \preccurlyeq \sigma$ . Dessa forma, da isotonicidade do produto em  $\mathcal{C}$ ,  $\hat{y}\sigma' \preccurlyeq \hat{y}\sigma$ , o que implica que  $\hat{y} \succ \hat{y}\sigma \succ \hat{y}\sigma'$ . Assim, novamente da Tabela 3.6,  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma'$  e, portanto, a função  $\sigma'$  é uma curva de regulação para o tráfego  $y$ .  $\square$

## 4.4 Restrições de serviço

A *restrição de serviço* está relacionada à quantidade mínima de dados, em um certo intervalo de tempo, para a qual se garante serviço. Neste trabalho, da Definição 6 (Capítulo 2), mais especificamente da equação (2.10), a restrição de serviço pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \geq \min_{0 \leq s \leq t} \{x(0, s) + \beta(s, t)\}. \quad (4.9)$$

Das Tabelas 3.3 e 3.6 e da propriedade (PH.2), Tabela 3.7, a inequação (4.9) pode ser rescrita em  $\mathcal{C}$  da seguinte maneira:

$$\hat{x}\beta = \hat{x}\beta \oplus \hat{y}. \quad (4.10)$$

A seguir, apresentam-se algumas propriedades relacionadas às restrições de serviço. As demonstrações estão apresentadas no Apêndice C.

**Proposição 11.** *Sejam  $x$  e  $y$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída de um dado sistema causal. Se a função  $y$  é aditiva, então sempre existe um  $s$ , com  $0 \leq s \leq t$ , tal que  $y(s, t) \geq \beta(s, t)$ .*

**Proposição 12.** *Se um sistema apresenta uma curva de serviço  $\beta \in \mathcal{C}$ , então qualquer função  $\beta' \in \mathcal{C}$  tal que  $\beta' \succ \beta$ , também é uma possível curva de serviço para o sistema.*

## 4.5 Restrições de *backlog*

A *restrição de backlog* representa limitações de capacidade de *buffers*. Sejam  $x, y \in \mathcal{C}$ , respectivamente, as curvas de entrada e saída de um dado sistema. Define-se o *backlog* do sistema no instante  $t$ ,  $w(t)$ , como a diferença entre suas curvas de entrada e de saída no instante  $t$ , ou seja,

$$w(t) = x(0, t) - y(0, t).$$

Dessa forma, quando uma dada fila tem um *backlog* no instante  $t$  limitado pela função  $W(t)$ , a seguinte inequação deve ser satisfeita,  $\forall t: w(t) = x(0, t) - y(0, t) \leq W(t)$ . Equivalentemente,  $\forall t:$

$$x(0, t) \leq y(0, t) + W(t). \quad (4.11)$$

Da Tabela 3.4,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) + W(t) = (y \otimes \lambda_W)(0, t)$  de forma que a inequação (4.11) pode ser rescrita da seguinte maneira,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : x(0, t) \leq (y \otimes \lambda_W)(0, t)$ , ou equivalentemente, de acordo com a Tabela 3.6 e da propriedade (PH.2), Tabela 3.7,

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y} \lambda_W. \quad (4.12)$$

As restrições de *backlog* podem ser consideradas por um ponto de vista diferente. A quantidade de dados  $y(s, t)$  que pode sair de um sistema em um dado intervalo de tempo  $(s, t]$  também é limitada pelo *backlog* do sistema em cada instante. De fato, em cada intervalo de tempo, pode sair de um sistema, no máximo, a quantidade de dados que estava armazenada no sistema no início deste intervalo mais os dados que entraram no sistema durante o intervalo. Portanto, a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$y(s, t) \leq x(s, t) + w(s),$$

ou ainda, considerando  $w(s) \leq W(s)$ ,  $\forall s$ :

$$y(s, t) \leq x(s, t) + W(s). \quad (4.13)$$

Finalmente, da Tabela 3.4, a inequação (4.13) pode ser rescrita da seguinte maneira,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , com  $s \leq t$ :

$$y(s, t) \leq x(s, t) + W(s) = (\lambda_W \otimes x)(s, t).$$

A inequação acima também é válida, se  $s > t$ . Nesse caso,  $y(s, t) = (\lambda_W \otimes x)(s, t) = 0$ . De acordo com a Tabela 3.6, portanto, tem-se:

$$y = y \oplus \lambda_W x.$$

## 4.6 Restrições de atraso máximo

Define-se *atraso virtual* de um sistema no instante  $t$ ,  $d(t)$ , como o deslocamento temporal em  $t$  entre suas curvas de entrada e de saída. Considere-se o bit com menor prioridade de transmissão presente em um sistema em um certo instante  $t$ . O atraso virtual é, por definição, o tempo de espera deste bit, considerando que nenhum outro bit (com maior prioridade) chega ao sistema. Sejam  $x$  e  $y$  os fluxos de entrada e saída de um dado sistema, respectivamente, com  $\hat{x} \succcurlyeq \hat{e}$ . O atraso virtual em  $t$  para esse sistema pode ser expresso matematicamente da seguinte maneira:

$$d(t) = \inf \{d \geq 0 : x(0, t) \leq y(0, t + d)\} \quad (4.14)$$

(adaptado de Le Boudec e Thiran, 2003, seção 1.1.2). A Figura 4.3 ilustra o cálculo do atraso virtual de um sistema para  $t = t_1$ .

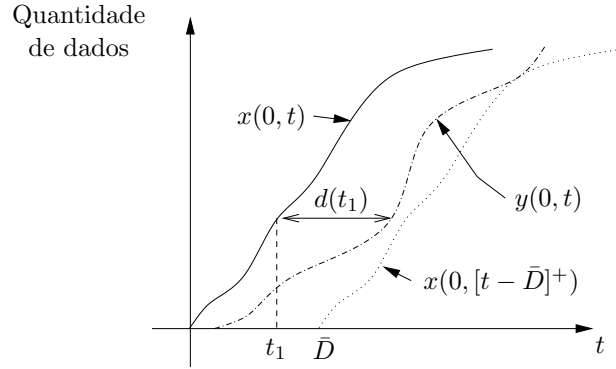


Figura 4.3: Fluxos de entrada e saída para um sistema genérico com atraso virtual máximo  $\bar{D}$ .

Sejam  $D(t)$  um limitante para o atraso virtual máximo no instante  $t$  e  $\bar{D}$  um limitante para o atraso virtual máximo em qualquer instante. Considere-se conhecida a função  $D(t)$ . O parâmetro  $\bar{D}$  pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\bar{D} = \sup_{t \geq 0} \{D(t)\}. \quad (4.15)$$

Se um sistema tem atraso virtual máximo  $\bar{D}$ , qualquer bit que tenha deixado o sistema no instante  $s$ , deve ter chegado em um instante posterior a  $[s - \bar{D}]^+$ . Caso contrário, seria admitido um atraso virtual máximo maior do que  $\bar{D}$ . Esse sistema tem que atender a seguinte inequação,  $\forall s, t: x([s - \bar{D}]^+, t) \geq y(s, t)$ . Além disso, como ilustrado na Figura 4.3,  $\forall t: x(0, [t - \bar{D}]^+) \leq y(0, t)$ . Portanto, da Tabela 3.6 e das propriedades (PD.1) e (PD.2), Tabela 3.5, um sistema que tem atraso virtual máximo  $\bar{D}$  deve atender as seguintes equações em  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} y &= y \oplus (\delta_{\bar{D}} \Downarrow x), \\ \hat{x} \delta_{\bar{D}} &= \hat{x} \delta_{\bar{D}} \oplus \hat{y}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

**Observação 13.** Comparando as equações (4.16) e (4.10), a conclusão natural é que  $\beta = \delta_{\bar{D}}$  é uma curva de serviço possível (em muitos casos conservativa), para esse sistema. Esse resultado foi anteriormente apresentado para funções invariantes no tempo por Le Boudec e Thiran (2003, Proposition 1.3.3). Pode-se utilizar, portanto, uma rede  $\beta = \delta_{\bar{D}}$  para modelar um atraso máximo  $\bar{D}$ .

## 4.7 Elementos básicos

Por razões de praticidade, quatro<sup>4</sup> elementos pictóricos podem ser definidos a partir das restrições matemáticas básicas descritas anteriormente pelas equações (4.2), (4.5), (4.8),

<sup>4</sup>A restrição de fluxo não define um elemento básico, porque é considerada sempre presente.

(4.10) e (4.12). Essas definições permitem a descrição modular das restrições de elementos de redes de comunicações mais complexos, conforme exemplificado nos Capítulos 6 e 7. Os elementos básicos, portanto, não representam sistemas físicos, mas apenas restrições matemáticas de sistemas. Todos os elementos básicos deste trabalho são considerados *causais*.

**$M$ -Acopladores.**  $M$ -acopladores representam elementos que agregam  $M$  tráfegos de entrada, de forma a satisfazer a equação (4.5).  $M$ -acopladores nunca atrasam ou adiantam os fluxos de entrada. A Figura 4.4 mostra a representação gráfica adotada neste trabalho para um  $M$ -acoplador com fluxos de entrada  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , e fluxo de saída  $x$ .

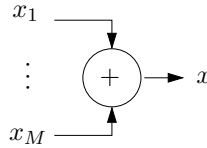


Figura 4.4: Acoplador com  $M$  fluxos de entrada.

**Reguladores  $\sigma$ .** Reguladores  $\sigma$  representam elementos de rede com *buffer* infinito, os quais atrasam o tráfego de entrada, quando necessário, de forma a satisfazer as restrições de fluxo (equação 4.2, considerada sempre presente), e de regulação (equação 4.8). Dessa forma, as seguintes equações em  $\mathcal{C}$  devem ser satisfeitas:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (4.17)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma. \quad (4.18)$$

Basicamente, os reguladores determinam limitantes  $\mathcal{C}$ -inferiores para fluxos de dados.

Pelos axiomas da Tabela 3.1, as equações (4.17) e (4.18) equivalem à seguinte equação:  $\hat{y} = \hat{y}(\mathbf{e} \oplus \sigma) \oplus \hat{x}$ . A Figura 4.5 mostra a representação gráfica adotada neste trabalho para um regulador  $\sigma$ .

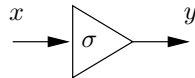


Figura 4.5: Regulador sem perdas, com curva característica  $\sigma \in \mathcal{C}$ .

**Redes  $\beta$ .** As redes  $\beta$  representam sistemas causais sem perdas, os quais são restritos pela equação (4.10), para algum  $\beta \in \mathcal{C}$ . Ao contrário dos reguladores, as redes  $\beta$  determinam limitantes  $\mathcal{C}$ -superiores para fluxos.

Para esses elementos, as seguintes equações em  $\mathcal{C}$  devem ser atendidas:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{y} \oplus \hat{x}, \\ \hat{x}\beta &= \hat{x}\beta \oplus \hat{y},\end{aligned}$$

A Figura 4.6 mostra a representação gráfica desse tipo de elemento, também chamado de rede  $\beta$ .

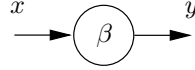


Figura 4.6: Elemento com curva de serviço  $\beta \in \mathcal{C}$ .

**Filas  $W$ .** Seja  $W$  uma função do tipo  $W : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ . Uma fila causal sem perdas garante um *backlog* máximo no instante  $t$ ,  $W(t)$ , quando satisfaz a equação (4.12). Para esse sistema, portanto, as seguintes equações em  $\mathcal{C}$  devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{y} \oplus \hat{x}, \\ \hat{x} &= \hat{x} \oplus \hat{y}\lambda_W.\end{aligned}$$

A Figura 4.7 apresenta a representação gráfica desse sistema.

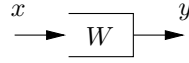


Figura 4.7: Fila sem perdas, com *backlog* máximo no instante  $t$  limitado pela função  $W(t)$ .

A Tabela 4.1 apresenta os sistemas de equações em  $\mathcal{C}$  e as representações gráficas que caracterizam cada elemento básico.

| Elemento                      | Representação gráfica | Restrições matemáticas                                                                                         |
|-------------------------------|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M$ -acoplador sem perdas     |                       | $y = F_{k=1, \dots, M} \{x_k\}$                                                                                |
| Regulador $\sigma$ sem perdas |                       | $\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{y} \oplus \hat{x} \\ \hat{y} &= \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma\end{aligned}$     |
| Rede $\beta$ sem perdas       |                       | $\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{y} \oplus \hat{x} \\ \hat{x}\beta &= \hat{x}\beta \oplus \hat{y}\end{aligned}$ |
| Fila $W$ sem perdas           |                       | $\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{y} \oplus \hat{x} \\ \hat{x} &= \hat{x} \oplus \hat{y}\lambda_W\end{aligned}$  |

Tabela 4.1: Elementos básicos e suas restrições matemáticas em  $\mathcal{C}$ .

**Observação 14.** As flechas na representação gráfica dos elementos básicos indicam a direção da restrição de fluxo (sentido função  $\mathcal{C}$ -inferior para  $\mathcal{C}$ -superior). Para os  $M$ -acopladores, como nunca são inseridos atrasos ou adiantamentos aos fluxos de entrada, as setas são puramente estéticas indicando o sentido de entrada (parcelas) para saída (soma). Duas confusões devem ser evitadas:

1. Os elementos básicos representam restrições matemáticas. As funções de entrada e saída de elementos básicos não representam, necessariamente, os fluxos de entrada e saída de elementos reais de uma rede de pacotes. Por exemplo, considere-se a fila  $W$  ilustrada na Figura 4.7. Essa fila não significa que entre os fluxos  $x$  e  $y$  exista necessariamente um buffer com capacidade para armazenar  $W(t)$  dados. Na verdade, essa representação indica apenas que a distância vertical entre as funções  $x(0, t)$  e  $y(0, t)$  não ultrapassa  $W(t)$  dados. Dessa forma, o sistema real entre  $x$  e  $y$  pode ser inclusive desconhecido.
2. Na representação gráfica com elementos básicos, pontos com bifurcações de flechas indicam que a mesma função atende a mais de uma restrição. Assim, as flechas não estão necessariamente relacionadas ao caminho físico seguido pelos dados. Por exemplo, considerem-se duas restrições de serviço em paralelo conforme ilustra a Figura 4.8. Essa representação não significa uma divisão do fluxo em  $u$  entre dois servidores, mas apenas a satisfação das seguintes equações (Tabela 4.1):  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}$ ,  $\hat{u}\beta_1 = \hat{u}\beta_1 \oplus \hat{y}$  e  $\hat{u}\beta_2 = \hat{u}\beta_2 \oplus \hat{y}$ , ou seja, entre as funções  $u$  e  $y$  existem duas curvas de serviço possíveis,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ .

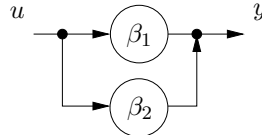


Figura 4.8: Duas restrições de serviço entre os mesmos fluxos  $x$  e  $y$ .

## 4.8 Método para a resolução de problemas em $\mathcal{C}$

Como mencionado anteriormente, o objetivo deste trabalho é considerar um método algébrico, para manipular problemas relacionados ao desempenho de redes de comunicações. Os elementos a serem manipulados são *funções positivas* do tipo  $x : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , onde uma função  $x(s, t)$  representa a quantidade de dados que passam por um determinado ponto de uma rede de comunicações, em um intervalo de tempo  $(s, t]$ .

Possíveis problemas de interesse são a determinação de limitantes para as funções  $x$ . Para resolvê-los, a estratégia adotada neste trabalho é usar a estrutura algébrica apresentada

no Capítulo 3, para descrever as restrições das redes de comunicações de interesse como uma composição dos elementos básicos definidos neste capítulo. O método proposto é *modular*.

A Figura 4.9 ilustra o método proposto. Note-se que, se outras restrições básicas são criadas, outros blocos básicos também são automaticamente criados, mas a estrutura do método se mantém.

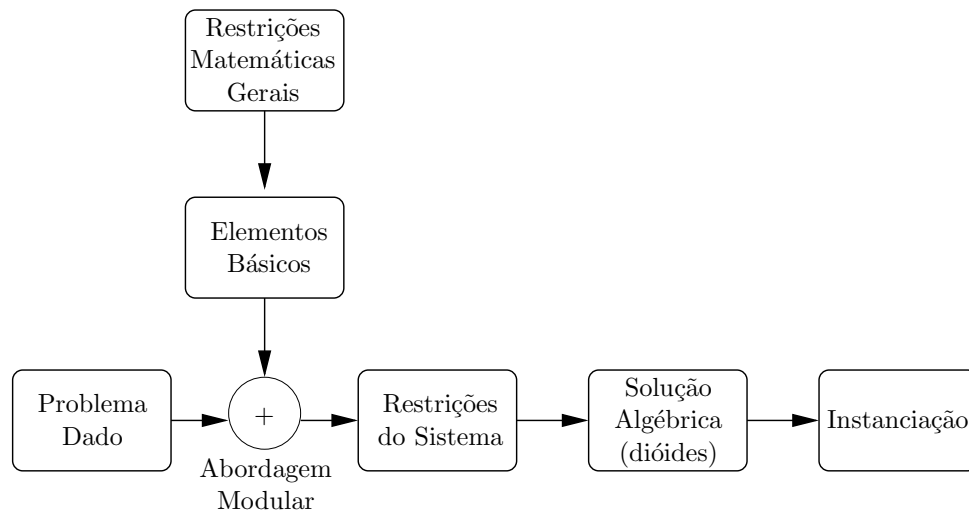


Figura 4.9: Método para a resolução de problemas em  $\mathcal{C}$ .

Nessa abordagem, o problema de obter limitantes para parâmetros de QoS de uma rede de comunicações é tratado da seguinte maneira:

1. O problema particular é descrito como uma composição de elementos básicos.
2. As restrições algébricas de cada elemento básico de 1 são escritas.
3. O sistema de equações obtido em 2 é resolvido usando a estrutura algébrica introduzida no Capítulo 3.
4. Os resultados obtidos são instanciados no contexto do problema em particular, se necessário.

## 4.9 Conclusão

Neste capítulo, foram definidos cinco tipos de restrições que permitem o tratamento de uma classe abrangente de problemas relacionados a parâmetros de QoS em sistemas de comunicações.

A classificação das restrições matemáticas de sistemas de comunicações em diferentes tipos não é nova (a exemplo de Chang *et al.*, 2002). Contudo, neste trabalho, esta classificação é apresentada de uma forma sistemática usando a álgebra de dióides. Isso permite a definição de um

conjunto finito de restrições consideradas *básicas*. A partir destas restrições, é possível definir *unidades de modelo*, chamados elementos básicos, com as quais é possível modelar elementos diversos de sistemas de comunicações. Conforme mencionado, o conjunto de restrições aqui definido não é necessariamente completo, ou seja, não é necessariamente capaz de tratar qualquer problema relacionado a sistemas de comunicações. Contudo, é sempre possível a adição de novas restrições e de novos elementos básicos, à medida que se fizerem necessários.

Em geral, na literatura relacionada ao *Network Calculus*, sistemas são tratados individualmente, de forma que, para cada problema, propõe-se uma solução. Uma contribuição deste trabalho presente neste capítulo é a idéia de descrever e resolver o conjunto de restrições de um dado sistema completamente na álgebra de dióides. Esse uso intensivo das técnicas da álgebra de dióides permite uma análise mais sistemática de problemas.

## Capítulo 5

# Determinação de limitantes de parâmetros de QoS

Conforme mencionado anteriormente, uma das contribuições deste trabalho é a definição de métodos para a análise de sistemas de comunicações, o que permite a sistematização no tratamento de problemas diversos. Neste sentido, nos capítulos anteriores, apresentou-se uma estrutura algébrica para representar as restrições de sistemas de comunicações, e foi definido um método para a representação dessas restrições a partir de estruturas chamadas de “elementos básicos”.

Sejam  $x$  e  $y$  os fluxos de entrada e saída de um determinado sistema, conforme ilustra a Figura 5.1. Neste capítulo, define-se um método para a determinação de parâmetros de QoS de interesse para esse sistema, dado um modelo obtido a partir de elementos básicos entre os fluxos  $x$  e  $y$ . Os parâmetros de QoS abordados são: o atraso máximo fim-a-fim, o *backlog* máximo, e as curvas de regulação e de serviço. Esses problemas são analisados nas próximas seções para um sistema simples.

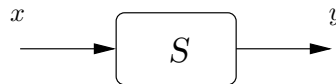


Figura 5.1: Sistema genérico de interesse.

O capítulo está dividido conforme descrito a seguir. Primeiramente, o método para determinação de parâmetros de QoS é definido. Em seguida, a aplicação desse método é ilustrada a partir da análise de um sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$ . Por fim, analisa-se, de um modo geral, como a representação de um sistema de comunicações pode ser simplificada, através da análise de equivalência entre modelos.

## 5.1 Método

No Capítulo 4, mencionou-se que restrições matemáticas podem ser associadas a parâmetros de QoS, expressando *especificações de desempenho* ou *limitações físicas de um sistema*. Neste capítulo, são introduzidas as restrições *redundantes*, um novo tipo de restrição.

Ao acrescentar um novo elemento em paralelo a um sistema, acrescenta-se uma nova restrição ao conjunto de equações que descrevem suas limitações. Daí, duas situações podem ocorrer: ou a restrição adicionada *impõe* uma nova limitação ao sistema, como é o caso das restrições que expressam especificações de desempenho ou limitações físicas; ou a restrição adicionada é *redundante* e sua inclusão ou exclusão não afeta o sistema de equações original.

O caso limite entre estes dois tipos de restrições pode ser usado para a determinação de possíveis limitantes para parâmetros de QoS em sistemas de comunicações. Nesse caso, utiliza-se o seguinte método:

1. Acrescenta-se um elemento que represente o parâmetro considerado, entre as funções de entrada e saída do sistema de interesse. Este procedimento está ilustrado na Figura 5.2. As restrições redundantes estão representadas com linhas tracejadas.

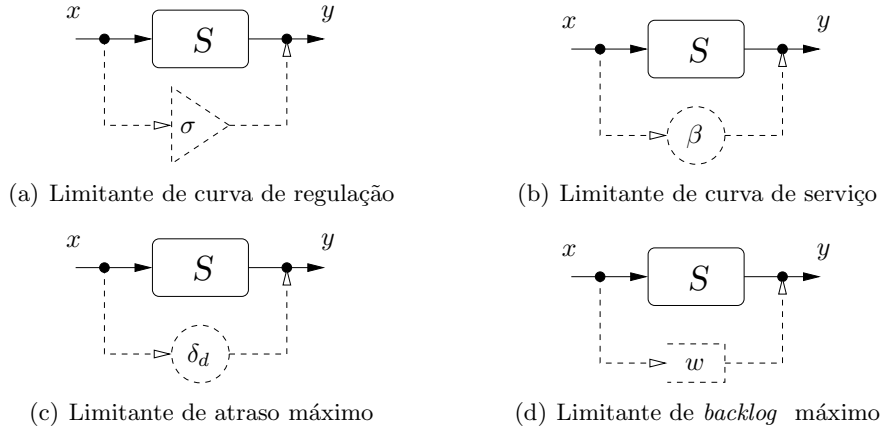


Figura 5.2: Método para a determinação de limitantes de parâmetros de QoS.

2. Determinam-se os intervalos de valores do parâmetro adicionado para os quais as equações do novo elemento são *redundantes*. Essa escolha de intervalos está normalmente relacionada à escolha dos termos que devem prevalecer em uma operação de soma ( $\oplus$ ) ou de mínimo ( $\wedge$ ) em  $\mathcal{C}$ , de forma a não se alterarem as características iniciais do sistema em análise. Uma aplicação concreta desse princípio pode ser observado, por exemplo, na passagem das equações (5.7) e (5.8), na próxima seção.
3. Encontra-se o valor limite (máximo ou mínimo) do parâmetro adicionado dentre os valores encontrados no item 2.

Conforme mencionado anteriormente, o *Network Calculus* parte do pressuposto que os fluxos de entrada de sistemas são limitados de alguma forma e que é oferecida alguma garantia de mínimo serviço para esses fluxos. Essas condições estão diretamente relacionadas às restrições de regulação e de serviço, que, portanto, devem estar sempre presentes. Dessa forma, o sistema da Figura 5.3 pode ser considerado o sistema elementar ou mínimo para o NC.

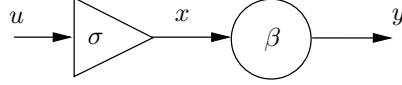


Figura 5.3: Rede com curva de serviço  $\beta$  conectada a um regulador  $\sigma$ .

A seguir, o método apresentado nesta seção será utilizado para a determinação de possíveis limitantes para parâmetros de QoS relacionados ao sistema da Figura 5.3. Os parâmetros analisados são:

- Atraso máximo da rede  $\beta$ ;
- *Backlog* máximo da rede  $\beta$ ;
- Taxa máxima de saída de dados;
- Curva de serviço total para o sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$ .

Limitantes equivalentes para vários desses parâmetros estão presentes na literatura. Apesar disso, as demonstrações foram mantidas no texto a seguir, porque tais demonstrações, diferentemente dos resultados apresentados na literatura, são feitas integralmente no contexto da álgebra de dióides utilizando de modo sistemático suas propriedades intrínsecas (e.g., a residuação). Este fato unifica os resultados teóricos encontrados na literatura em torno da abordagem de dióides.

## 5.2 Atraso virtual máximo

Nesta seção, o método introduzido na seção anterior é utilizado para a determinação de um possível limitante para o atraso virtual máximo da rede  $\beta$  ilustrada na Figura 5.3. O resultado obtido está apresentado no Teorema 13 a seguir. Este resultado é similar ao apresentado por Chang (2000, *Theorem 5.5.5.iii*), embora demonstrado de maneira diferente. Basicamente, o Teorema 13 determina que o maior atraso virtual de um bit que pertence a um fluxo que satisfaz uma curva de regulação  $\sigma$  e que atravessa uma rede com curva de serviço  $\beta$  está relacionado à maior *distância horizontal* entre as curvas  $\sigma$  e  $\beta$ .

**Teorema 13.** *Para o sistema da Figura 5.3, sejam as funções  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ . Considere-se que  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x} \succcurlyeq \hat{u}$ , ou seja, o sistema é causal; e  $\hat{u} \succcurlyeq \hat{e}$ , ou seja, o sistema está*

vazio em  $s = t = 0$ . Um possível limitante  $\bar{D}$  para o atraso virtual da rede  $\beta$  representada na Figura 5.3 corresponde à resposta do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{D}} &= \inf \delta_d, \\ \text{s. a } \sigma^* \delta_d &\succcurlyeq \beta. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seguindo o método apresentado na Seção 5.1, uma maneira de determinar o máximo atraso virtual da rede  $\beta$  ilustrada na Figura 5.3 é acrescentar um elemento básico com curva de serviço  $\delta_d$  de  $x$  para  $y$  (paralelo à rede  $\beta$ , conforme ilustrado na Figura 5.2(c)) e determinar para que valores de  $d$  as restrições impostas pelo novo elemento são redundantes. A Figura 5.4 ilustra esse procedimento. A seguir, deve-se determinar o valor ótimo de  $\delta_d$  (nesse caso, o valor mínimo em  $\mathcal{C}$ ) para que não se alterem os possíveis valores de  $x$  e  $y$  que satisfazem as equações originais do problema.

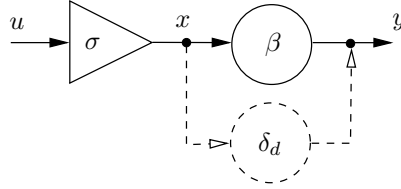


Figura 5.4: Sistema com curva de serviço  $\delta_d$  conectado em paralelo à rede  $\beta$  da Figura 5.3, para determinação de seu atraso virtual máximo.

De acordo com a Tabela 4.1, o sistema mostrado na Figura 5.4 atende as seguintes equações:

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u}, \quad (5.1)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{x}\sigma, \quad (5.2)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (5.3)$$

$$\hat{x}\beta = \hat{x}\beta \oplus \hat{y}, \quad (5.4)$$

$$\hat{x}\delta_d = \hat{x}\delta_d \oplus \hat{y}. \quad (5.5)$$

Da consideração de que  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x} \succcurlyeq \hat{u}$ , as equações (5.1) e (5.3) são naturalmente satisfeitas (ver Tabela 3.6). Além disso, das equações (5.4) e (5.5) e da Tabela 3.6, têm-se  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\beta$  e  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\delta_d$ . Dessa forma,  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\beta \wedge \hat{x}\delta_d$  e, portanto, a equação (5.5) é redundante, se  $\hat{x}\beta \preccurlyeq \hat{x}\delta_d$ . Essa inequação não pode ser explicitamente resolvida para  $\delta_d$ , porque o dióide  $\mathcal{C}$  não é dualmente residuado (Proposição 5). Mas, pela isotonicidade do produto, ela é com certeza satisfeita se  $\beta \preccurlyeq \delta_d$ . Esta última inequação significa que, no caso em que o atraso virtual máximo de um sistema for conhecido e igual a  $d$  (ou quando um limitante para o seu atraso virtual máximo for conhecido e igual a  $d$ ), pode-se garantir uma curva de serviço  $\delta_d$ , conforme mencionado na

Observação 13. Esse resultado, contudo, não é útil para o cálculo de  $\delta_d$ , pois é muito conservativo, levando facilmente ao resultado  $d = +\infty$ , bastando para isso que  $\beta(s, t) < +\infty, \forall t < +\infty$ .

Continuando a busca por um limitante para  $\delta_d$ , da equação (5.2) e da Proposição 8, tem-se:  $\hat{x} = \hat{x}\sigma^*$ . Portanto,

$$\hat{x} \succcurlyeq \hat{x}\sigma^*, \quad (5.6)$$

de forma que  $\hat{x}\delta_d \succcurlyeq \hat{x}\sigma^*\delta_d$ . Assim, da propriedade (PR.1), Tabela 3.2:  $\hat{x} \preccurlyeq (\hat{x}\delta_d) \phi (\sigma^*\delta_d)$ . Agora, da equação (5.4) e da Tabela 3.6:  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\beta$ . Portanto, da propriedade (PR.5), Tabela 3.2:

$$\begin{aligned} \hat{y} &\preccurlyeq \hat{x}\beta \\ &\preccurlyeq [(\hat{x}\delta_d) \phi (\sigma^*\delta_d)] \beta \\ &\preccurlyeq (\hat{x}\delta_d) \phi [\beta \bowtie (\sigma^*\delta_d)]. \end{aligned}$$

Daí, novamente de acordo com a propriedade (PR.1), Tabela 3.2:  $\hat{x}\delta_d \succcurlyeq \hat{y}[\beta \bowtie (\sigma^*\delta_d)]$ .

Por outro lado, da equação (5.5),  $\hat{x}\delta_d \succcurlyeq \hat{y}$ . Dessa forma, a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$\hat{x}\delta_d \succcurlyeq \hat{y}[\beta \bowtie (\sigma^*\delta_d) \oplus e]. \quad (5.7)$$

Daí, se for garantido que  $\beta \bowtie (\sigma^*\delta_d) \succcurlyeq e$ , ou seja, se  $\sigma^*\delta_d \succcurlyeq \beta$ , então a equação (5.5) será redundante,  $\forall d$ . De fato, quando  $\beta \bowtie (\sigma^*\delta_d) \succcurlyeq e$ , então  $\hat{x}\delta_d \succcurlyeq \hat{y}[\beta \bowtie (\sigma^*\delta_d) \oplus e] = \hat{y}[\beta \bowtie (\sigma^*\delta_d)] \succcurlyeq \hat{y} e$ , portanto, a inequação  $\hat{x}\delta_d \succcurlyeq \hat{y}$  é sempre satisfeita.

**Observação 15.** *Conforme mencionado no item 2 do método apresentado na Seção 5.1, a escolha dos intervalos para os quais as equações do elemento inicialmente adicionado (para esse exemplo, a rede  $\delta_d$ ) sejam redundantes está relacionada à escolha de termos predominantes de uma operação de soma ou de mínimo em  $\mathcal{C}$ . Para esse exemplo, a predominância do termo  $\beta \bowtie (\sigma^*\delta_d)$  sobre o termo  $e$ .*

Finalmente, o valor limite para o atraso virtual máximo do sistema da Figura 5.3 pode ser determinado a partir da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{D}} &= \inf \delta_d, \\ \text{s. a } &\sigma^*\delta_d \succcurlyeq \beta. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Nesse caso, usou-se o operador de ínfimo porque quanto menor  $\delta_d$ , melhor é o limitante encontrado (quanto menor é  $\delta_{\bar{D}}$ , em  $\mathcal{C}$ , menor é o limitante de atraso virtual máximo  $\bar{D}$  associado).  $\square$

O Teorema 13 foi anteriormente publicado em Daniel-Cavalcante e Santos-Mendes (2006).

**Exemplo 5.1.** Sejam  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}_t$  funções invariantes no tempo, conforme ilustrado na Figura 5.5. De acordo com (5.8), o limitante de atraso máximo,  $\bar{D}$ , é o valor mínimo de  $d$  para o qual  $\sigma^* \delta_d \succcurlyeq \beta$ . Graficamente,  $\bar{D}$  é o menor atraso (deslocamento para a direita) que pode ser dado à curva  $\sigma^* = \sigma$ , de forma a torná-la abaixo da curva  $\beta$ . A função  $\sigma^* \delta_{\bar{D}}$  também está representada na Figura 5.5.

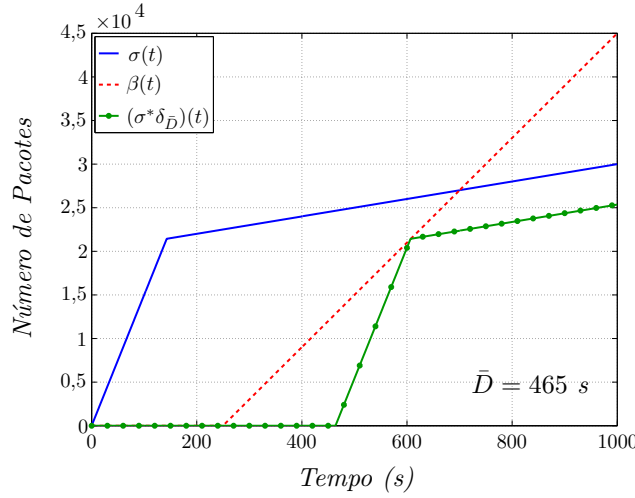


Figura 5.5: Funções  $\sigma(t)$  e  $\beta(t)$  e respectiva função  $(\sigma^* \delta_{\bar{D}})(t)$ .

### 5.3 Backlog máximo

Um procedimento semelhante ao descrito na seção anterior pode ser usado para determinar o *backlog* máximo da rede  $\beta$  da Figura 5.3. Nesse caso, acrescenta-se um elemento básico com curva de serviço  $\lambda_w$  de  $x$  para  $y$  em paralelo à rede  $\beta$  e se determina para que função  $w(t)$  as restrições do elemento adicionado são redundantes. A Figura 5.6 ilustra esse procedimento. Os resultados obtidos estão apresentados no Teorema 14 e Corolário 14.1 a seguir. Este resultado é similar ao apresentado por Chang (2000, *Theorem 5.5.5.i*), mas está demonstrado de maneira diferente. O Teorema 14 relaciona o maior *backlog* de um sistema à maior *distância vertical* entre sua curva de serviço  $\beta$  e à curva de regulação  $\sigma$  do tráfego de entrada.

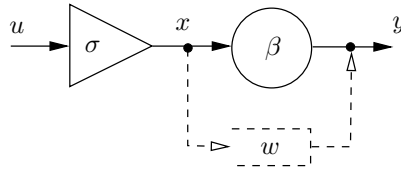


Figura 5.6: Fila  $w$  conectada em paralelo à rede  $\beta$  da Figura 5.3, para determinação de seu *backlog* máximo.

**Teorema 14.** *Seja o sistema da Figura 5.3. Novamente, considerem-se as funções  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ , com  $\hat{y} \succ \hat{x} \succ \hat{u}$  e  $\hat{u} \succ \hat{e}$ . Esse sistema apresenta o seguinte limitante para o backlog no instante  $t$ :*

$$W(t) = (\beta \bowtie \sigma^*)(t, t), \quad (5.9)$$

e o seguinte limitante para o backlog máximo:

$$\overline{W} = (\omega \phi \top)(0, 0),$$

sendo  $\omega \in \mathcal{C}$  a seguinte função:

$$\omega(s, t) = \begin{cases} W(t), & \text{se } s = 0, \\ \varepsilon(s, t), & \text{se } s \neq 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* De acordo com a Tabela 4.1, as seguintes equações devem ser satisfeitas para o sistema da Figura 5.6:

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u}, \quad (5.10)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{x}\sigma, \quad (5.11)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (5.12)$$

$$\hat{x}\beta = \hat{x}\beta \oplus \hat{y}, \quad (5.13)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y}\lambda_w. \quad (5.14)$$

Novamente, considera-se que as equações (5.10) e (5.12) são naturalmente atendidas. Da equação (5.11) e da Tabela 3.6:  $\hat{x} \succ \hat{x}\sigma$ . Assim, como na demonstração anterior (inequação 5.6),  $\hat{x} \succ \hat{x}\sigma^*$ . Da propriedade (PR.1), Tabela 3.2, então,  $\hat{x} \preccurlyeq \hat{x}\phi\sigma^*$ . Dessa forma, da equação (5.13) e da propriedade (PR.5), Tabela 3.2,

$$\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\beta \preccurlyeq (\hat{x}\phi\sigma^*)\beta \preccurlyeq \hat{x}\phi(\beta\bowtie\sigma^*).$$

Ou seja,

$$\hat{x} \succ \hat{y}(\beta\bowtie\sigma^*). \quad (5.15)$$

Da equação (5.14) e da inequação (5.15),  $\hat{x} \succ \hat{y}\lambda_w$  e  $\hat{x} \succ \hat{y}(\beta\bowtie\sigma^*)$ . Assim, a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$\hat{x} \succ \hat{y}[(\beta\bowtie\sigma^*) \oplus \lambda_w].$$

Finalmente, se  $\lambda_w \preccurlyeq \beta\bowtie\sigma^*$ , então  $\hat{x} \succ \hat{y}(\beta\bowtie\sigma^*) \succ \hat{y}\lambda_w$  e a equação (5.14) é redundante.

Para a análise da inequação  $\lambda_w \preccurlyeq \beta\bowtie\sigma^*$ , por sua vez, note-se que, de um modo geral, se  $s < t$ , então  $\lambda_w(s, t) = +\infty$ , de forma que  $\lambda_w(s, t) \geq (\beta\bowtie\sigma^*)(s, t)$ ; e se  $s > t$ , então

$\lambda_w(s, t) = 0 = (\beta \bowtie \sigma^*)(s, t)$ . Além disso, se  $s = t$ , então  $\lambda_w(t, t) = w(t)$ . Dessa forma, a inequação  $\lambda_w \preceq \beta \bowtie \sigma^*$  é sempre satisfeita, se  $w(t) \geq (\beta \bowtie \sigma^*)(t, t)$ . Assim, o melhor limitante do *backlog* máximo no instante  $t$  para a rede  $\beta$  da Figura 5.6 pode ser definido da seguinte maneira:

$$W(t) = (\beta \bowtie \sigma^*)(t, t).$$

Por fim, seja  $\omega \in \mathcal{C}$  a seguinte função:

$$\omega(s, t) = \begin{cases} W(t), & \text{se } s = 0, \\ \varepsilon(s, t), & \text{se } s \neq 0. \end{cases}$$

O limitante para o *backlog* máximo para todo  $t$  é dado diretamente por

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \sup_{t \geq 0} \{W(t)\} = \sup_{t \geq 0} \{\omega(0, t)\} \\ &= \sup_{t \geq 0} \{\omega(0, t) - \top(0, t)\}^+ \\ &= (\omega \phi \top)(0, 0). \end{aligned}$$

□

O resultado apresentado no Teorema 14, incluindo o método da Seção 5.1, foi anteriormente publicado em Daniel-Cavalcante *et al.* (2006b).

**Corolário 14.1.** *Quando  $\sigma$  e  $\beta$  são funções invariantes no tempo, ou seja,  $\sigma(s, t) = \sigma(t - s)$  e  $\beta(s, t) = \beta(t - s)$ , o limitante do backlog máximo no instante  $t$ ,  $W(t)$ , pode ser calculado pela seguinte equação:*

$$W(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\sigma^*(\nu) - \beta(\nu)\}^+.$$

Nesse caso, o backlog máximo do sistema,  $\overline{W}$ , é dado por:  $\overline{W} = \sup_{\nu \geq 0} \{\sigma^*(\nu) - \beta(\nu)\}^+$ . Esse último resultado é semelhante ao apresentado em Le Boudec (1996, Theorem 1), embora demonstrado de forma diferente.

*Demonstração.* Quando  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$  são funções invariantes no tempo, então

$$\begin{aligned} W(t) &= [\beta \bowtie \sigma^*](t, t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\sigma^*(s, t) - \beta(s, t)\}^+ \\ &= \max_{0 \leq s \leq t} \{\sigma^*(t - s) - \beta(t - s)\}^+. \end{aligned}$$

Fazendo  $\nu = t - s$ , portanto:  $W(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\sigma^*(\nu) - \beta(\nu)\}^+$ . Daí,  $\overline{W} = \sup_{t \geq 0} \{W(t)\} = \sup_{\nu \geq 0} \{\sigma^*(\nu) - \beta(\nu)\}^+$ . □

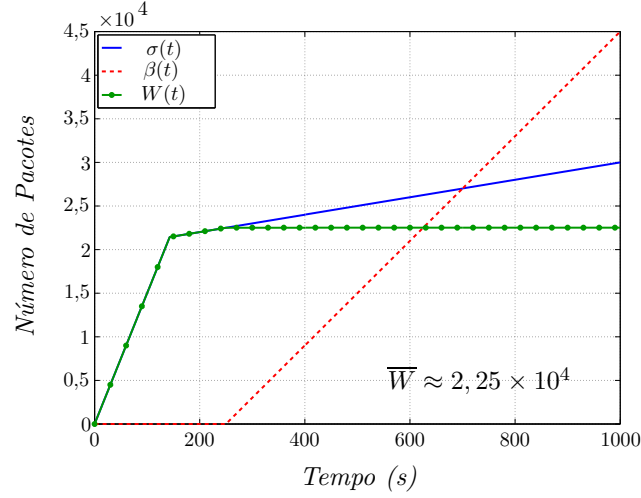


Figura 5.7: Funções  $\sigma(t)$  e  $\beta(t)$  e respectiva função limitante do máximo backlog,  $W(t) = [\beta \bowtie \sigma^*](t, t)$ .

**Exemplo 5.2.** Sejam as funções  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}_t$  ilustradas na Figura 5.7. A Figura 5.7 ilustra a função  $W(t)$  para esse sistema. O limitante para o backlog máximo do sistema é a máxima distância vertical entre as curvas  $\sigma^*$  (nesse caso igual a  $\sigma$ ) e  $\beta$ .

**Proposição 15.** Considere-se um sistema cujo fluxo de entrada satisfaz uma curva de regulação  $\sigma \in \mathcal{C}_t$ . Se forem conhecidos limitantes para o atraso máximo,  $\bar{D}$ , e para o backlog máximo no instante  $t$ ,  $W(t)$ , pode-se garantir que a curva  $(\sigma^* \phi \lambda_W) \wedge (\sigma^* \delta_{\bar{D}})$  é um possível limitante superior em  $\mathcal{C}$  para a curva de serviço desse sistema.

*Demonstração.* Dos Teoremas 13 e 14, se  $\bar{D}$  e  $W(t)$  são possíveis limitantes para o atraso máximo e backlog máximo em  $t$ , então

$$\sigma^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \beta,$$

$$\sigma^* \succcurlyeq \beta \lambda_W.$$

Desta forma, da propriedade (PR.1), Tabela 3.2,  $\beta \preccurlyeq (\sigma^* \phi \lambda_W)$ . Daí:  $\beta \preccurlyeq \sigma^* \delta_{\bar{D}} \wedge (\sigma^* \phi \lambda_W)$ .  $\square$

**Observação 16.** Limitantes mais conservativos para  $d(t)$  e  $w(t)$  podem ser obtidos, substituindo  $\sigma^*$  por  $\sigma$ , nos enunciados dos Teoremas 13 e 14. Nesse caso, as demonstrações são simplificadas pela utilização direta da equação (5.2).

## 5.4 Taxa de saída de dados máxima

Nesta seção, o método apresentado na Seção 5.1 é utilizado para a determinação da taxa de saída de dados máxima para o sistema da Figura 5.3.

Conforme mencionado na Seção 4.3, a curva de regulação está relacionada à quantidade máxima de dados que podem deixar um determinado sistema em um certo intervalo de tempo, ou seja, está relacionada à sua taxa máxima de saída de dados. Por esse motivo, nesta seção, acrescenta-se um regulador com curva característica  $\sigma_y \in \mathcal{C}$  em paralelo a todo o sistema da Figura 5.3, para obter a taxa máxima de saída de dados. Em seguida, de acordo com o método da Seção 5.1, determina-se para que funções  $\sigma_y$  as restrições do regulador adicionado são redundantes. A Figura 5.8 ilustra esse procedimento. O resultado obtido está apresentado no Teorema 16 a seguir.

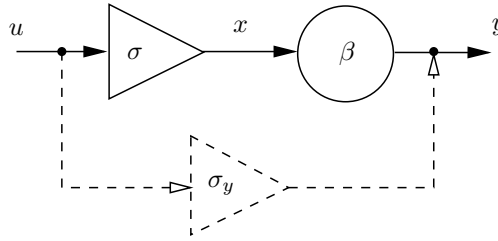


Figura 5.8: Regulador  $\sigma_y$  conectado em paralelo ao sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$  da Figura 5.3, para a determinação de um possível limitante para a taxa de saída de dados máxima.

**Teorema 16.** *Seja o sistema da Figura 5.3. Considerem-se  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ , com  $\hat{y} \succ \hat{x} \succ \hat{u}$  e  $\hat{u} \succ \hat{e}$ . A curva de saída,  $y$ , satisfaz a seguinte restrição de regulação:*

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma_y,$$

sendo  $\sigma_y = \beta \bowtie \sigma^*$ .

*Demonstração.* As condições do Teorema 14 são atendidas. Dessa forma, a inequação (5.15) é satisfeita, isto é,  $\hat{x} \succ \hat{y}(\beta \bowtie \sigma^*)$ . Além disso, por hipótese:  $\hat{y} \succ \hat{x}$ . Daí,  $\hat{y} \succ \hat{x} \succ \hat{y}(\beta \bowtie \sigma^*)$ . Assim,

$$\hat{y} \succ \hat{y}(\beta \bowtie \sigma^*). \quad (5.16)$$

Além dessas restrições, o sistema da Figura 5.8 satisfaz as restrições do elemento regulador adicionado (o regulador tracejado, na Figura 5.8). São elas:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}, \quad (5.17)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma_y. \quad (5.18)$$

A equação (5.17) é diretamente satisfeita, das hipóteses  $\hat{y} \succ \hat{x} \succ \hat{u}$ . Além disso, da inequação (5.16) e da equação (5.18), têm-se:  $\hat{y} \succ \hat{y}(\beta \bowtie \sigma^*)$  e  $\hat{y} \succ \hat{y}\sigma_y$ . Daí:  $\hat{y} \succ \hat{y}[\sigma_y \oplus (\beta \bowtie \sigma^*)]$ .

Seguindo o método apresentado na Seção 5.1, para que a equação (5.18) seja redundante, a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$\sigma_y \preccurlyeq \beta \bowtie \sigma^*.$$

Nesse caso, de fato:  $\hat{y} \succ \hat{y}(\beta \bowtie \sigma^*) \succ \hat{y}\sigma_y$ . Assim, a função  $\sigma_y = \beta \bowtie \sigma^*$  é um limitante para a curva de regulação da função de saída do sistema da Figura 5.3, ou seja, um limitante para sua taxa de saída de dados máxima.  $\square$

Os resultados obtidos no Teorema 16 são similares aos obtidos por Le Boudec (1996, *Theorem 2*), para o caso em que as funções  $\sigma$  e  $\beta$  são invariantes no tempo, e aos obtidos por Chang (2000, *Theorem 5.5.5.ii*), quando  $\sigma$  e  $\beta$  são funções variantes no tempo, mas estão demonstrados diferentemente.

**Exemplo 5.3.** *Sejam as funções  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}_t$  ilustradas na Figura 5.7 e repetidas na Figura 5.9. A Figura 5.9 ilustra também a função  $\sigma_y(t) = [\beta \bowtie \sigma^*](t)$ . Note-se que, para as funções  $\sigma$  e  $\sigma_y$  apresentadas, a curva de saída,  $y$ , pode alcançar taxas mais altas do que o fluxo de entrada,  $x$ . Esse fato se deve à possibilidade de acúmulo de pacotes na rede  $\beta$  (Figura 5.8).*

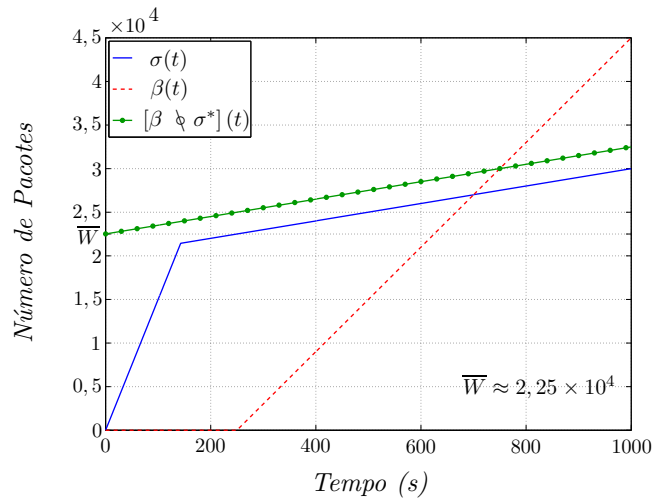


Figura 5.9: Funções  $\sigma(t)$  e  $\beta(t)$  e respectiva função limitante da máxima taxa de saída de dados,  $\sigma_y(t) = [\beta \bowtie \sigma^*](t)$ .

## 5.5 Curva de serviço de uma junção regulador $\sigma$ - rede $\beta$

Podem existir casos em que não existe uma expressão analítica<sup>1</sup> para o limitante de um dado parâmetro de QoS. Por exemplo, considere-se o sistema na Figura 5.3. Seguindo o método apresentado na Seção 5.1, para determinar uma curva de serviço para o sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$ , ilustrado na Figura 5.3, acrescenta-se uma rede  $\beta' \in \mathcal{C}$  em paralelo a todo o sistema e se determina para que funções  $\beta'$  as restrições da rede  $\beta'$  adicionada são redundantes. A Figura 5.10 ilustra o procedimento.

<sup>1</sup>No contexto deste trabalho, considera-se “expressão analítica” uma expressão matemática composta por um conjunto finito das operações em  $\mathcal{C}$ :  $\oplus$ ,  $\otimes$ ,  $\phi$ ,  $\bowtie$ ,  $*$ ,  $\preceq$  and  $\succ$ .

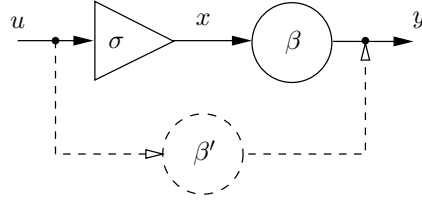


Figura 5.10: Rede  $\beta'$  conectada em paralelo ao sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$  da Figura 5.3, para a determinação de um possível limitante para a curva de serviço total do sistema.

Para o sistema da Figura 5.3, as seguintes equações são satisfeitas:

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u}, \quad (5.19)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{x}\sigma,$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (5.20)$$

$$\hat{x}\beta = \hat{x}\beta \oplus \hat{y}. \quad (5.21)$$

Além dessas equações, as restrições do novo elemento (Figura 5.10) também devem ser atendidas, de forma que as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}, \quad (5.22)$$

$$\hat{u}\beta' = \hat{u}\beta' \oplus \hat{y}. \quad (5.23)$$

Das equações (5.19) e (5.20), tem-se:  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x} \succcurlyeq \hat{u}$ . Daí,  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{u}$ , ou equivalentemente,  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}$ . Dessa forma, a equação (5.22) é sempre satisfeita. Por outro lado, da equação (5.21),  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\beta$  e, da equação (5.23),  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{u}\beta'$ . Daí:

$$\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\beta \wedge \hat{u}\beta'.$$

Dessa forma, a equação (5.23) será redundante, se  $\hat{x}\beta \preccurlyeq \hat{u}\beta'$ . Nesse caso, de fato:  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\beta \preccurlyeq \hat{u}\beta'$ . Para esse sistema, contudo, não é possível determinar uma função  $\beta'$  que sempre garanta o atendimento da inequação  $\hat{x}\beta \preccurlyeq \hat{u}\beta'$ , porque  $\mathcal{C}$  não é dualmente residuado, conforme Proposição 5. Conseqüentemente, não é possível determinar uma curva de serviço para o sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$  da Figura 5.3, usando o método da Seção 5.1.

A Tabela 5.1 resume os resultados obtidos nesta seção.

## 5.6 Simplificação de modelos e análise de equivalências

Nesta seção, analisa-se, de um modo geral, como a representação de um sistema de comunicações pode ser simplificada, sem que as restrições originais do sistema sejam

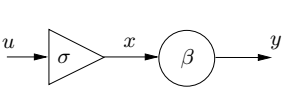
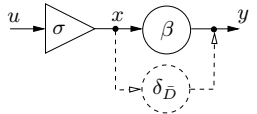
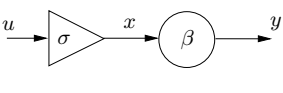
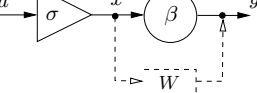
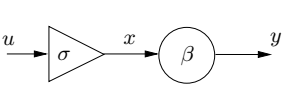
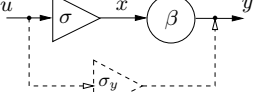
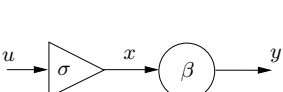
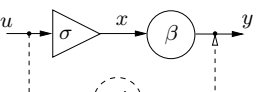
| Sistema original                                                                  | Sistema equivalente                                                                | Parâmetro de equivalência                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | $\delta_{\bar{D}} = \inf \delta_d,$ $\text{s. a } \sigma^* \delta_d \succcurlyeq \beta$ |
|  |  | $W(t) = (\beta \bowtie \sigma^*)(t, t)$                                                 |
|  |  | $\sigma_y = \beta \bowtie \sigma^*$                                                     |
|  |  | $\beta' \text{ indeterminado}$                                                          |

Tabela 5.1: Parâmetros de QoS obtidos para um sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$ .

desrespeitadas, e sem que se alterem os limitantes de parâmetros de QoS obtidos para a representação original. A análise leva em conta as definições de representação de um sistema e de equivalência entre representações de sistemas apresentadas a seguir.

**Definição 22** (Representação de um sistema). *Define-se a representação  $R$  de um sistema como sendo o conjunto finito de equações que o descreve, mais a definição de seus pontos de entrada e saída.*

**Definição 23** (Equivalências entre representações de sistemas). *Seja  $R$  a representação de um dado sistema, e seja  $\pi$  um parâmetro de QoS<sup>2</sup>. Defina-se  $L(R, \pi)$  o limitante do parâmetro  $\pi$  obtido para a representação  $R$  através do método introduzido na Seção 5.1. Duas representações  $R_1$  e  $R_2$  são equivalentes em relação ao parâmetro  $\pi$ , se, dado  $\pi$ :  $\mathcal{L}(R_1, \pi) = \mathcal{L}(R_2, \pi)$ . As representações  $R_1$  e  $R_2$  são totalmente equivalentes, se  $\forall \pi$ :  $\mathcal{L}(R_1, \pi) = \mathcal{L}(R_2, \pi)$ .*

**Observação 17.** *Dadas duas representações de sistemas com os mesmos pontos de entrada e saída, se o conjunto de equações de uma delas puder ser transformado em um conjunto idêntico ao conjunto de equações da outra representação, então, trivialmente, estas representações são totalmente equivalentes (condição suficiente).*

**Observação 18.** *Ao aplicar o método definido na Seção 5.1 em um dado modelo de sistema, adiciona-se um elemento básico que represente um parâmetro de QoS de interesse, e se determinam os parâmetros das equações adicionadas de forma a torná-las redundantes. Mas*

<sup>2</sup>Neste trabalho,  $\pi$  é considerado um dos seguintes parâmetros: backlog instantâneo; backlog máximo; curva de regulação; curva de serviço; p-atraso (definido no Capítulo 6); atraso virtual instantâneo e atraso virtual máximo.

equações redundantes, por definição, podem ser sempre retiradas, sem alterar o sistema de restrições original. Assim, os dois modelos (original e com o elemento básico adicionado) são sempre totalmente equivalentes, segundo a Definição 23.

Seja um dado fluxo  $x$  de um sistema. Considere-se que  $x \in \mathcal{C}$  é o resultado obtido ao passar um fluxo  $u \in \mathcal{C}$  por um sistema com curva de serviço  $\beta_1 \in \mathcal{C}$ . Essa restrição de serviço pode ser representada, adicionando ao modelo do sistema uma rede  $\beta_1$  entre os fluxos  $u$  e  $x$ , conforme ilustrado na Figura 5.11. O modelo ilustrado na Figura 5.11 descreve as limitações impostas ao fluxo  $x$ , quando a *restrição de interesse* é a quantidade (ou taxa) mínima de dados em  $y$ .

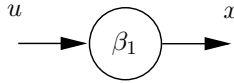
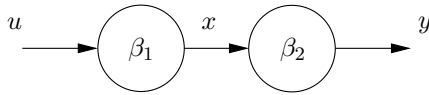
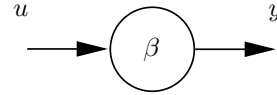


Figura 5.11: Rede  $\beta_1$  conectada entre os fluxos  $u$  e  $x$ , para indicar uma restrição de serviço.

Seja, agora, um fluxo  $y \in \mathcal{C}$  sujeito a uma curva de serviço  $\beta_2 \in \mathcal{C}$  em relação ao fluxo  $x$ , conforme ilustra a Figura 5.12(a).



(a) Restrições originais



(b) Restrições equivalentes

Figura 5.12: Exemplo de representação simplificada para as restrições de um sistema de interesse, em relação ao seu fluxo de entrada  $u$  e seu fluxo de saída  $y$ . Em (a), o modelo inicial do sistema. Em (b), o sistema equivalente, em relação aos fluxos  $u$  e  $y$ . Nesse caso,  $\beta = \beta_1 \otimes \beta_2$ .

Chang (2000, *Theorem 5.5.2*) afirma que a curva  $\beta = \beta_1 \otimes \beta_2$  é a curva de serviço entre  $u$  e  $y$  para o sistema da Figura 5.12(a). Dessa forma, se  $u$  e  $y$  são, respectivamente, os fluxos de entrada e de saída de interesse, então o sistema da Figura 5.12(a) pode ser visto como uma única rede  $\beta$ , como ilustrado na Figura 5.12(b). Essa é, portanto, uma forma de simplificar a representação das restrições de um sistema.

A seguir, são analisadas as associações possíveis entre dois elementos básicos do mesmo tipo, do ponto de vista dos fluxos de entrada e saída (respectivamente,  $u$  e  $y$ , nos exemplos a seguir). Para cada associação, tenta-se determinar um modelo *totalmente equivalente* em relação aos fluxos de entrada e saída.

**Reguladores em série.** Considere-se o sistema da Figura 5.13(a).

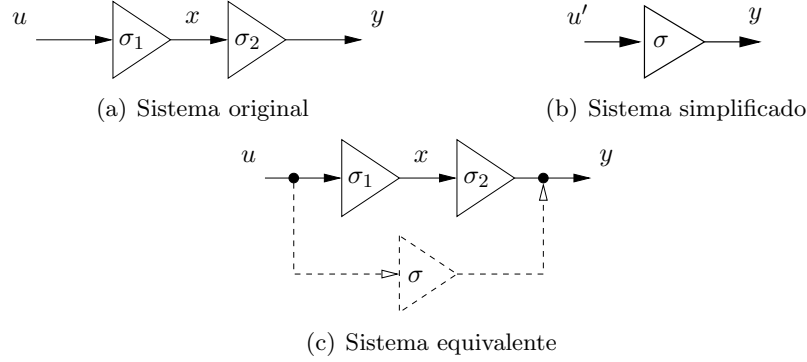


Figura 5.13: Análise de equivalência: reguladores em série.

Esse sistema está sujeito às seguintes equações:

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u}, \quad (5.24)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{x}\sigma_1, \quad (5.25)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (5.26)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma_2. \quad (5.27)$$

De acordo com o Teorema 1, têm-se: das equações (5.24) e (5.25),  $\hat{x} \succcurlyeq \hat{u}\sigma_1^*$ ; das equações (5.26) e (5.27),  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x}\sigma_2^*$ . Daí,  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x}\sigma_2^* \succcurlyeq (\hat{u}\sigma_1^*)\sigma_2^* = \hat{u}(\sigma_1^*\sigma_2^*)$ . Dessa forma, os sistemas das Figuras 5.13(a) e 5.13(b) são equivalentes em relação ao limitante para  $\hat{y}$ , quando  $\sigma = \sigma_1^* \otimes \sigma_2^*$  e  $u' = u$ .

Em contrapartida, das equações (5.25) e (5.27), e de acordo com o Teorema 1, têm-se:  $\hat{x} = \hat{x}\sigma_1^*$  e  $\hat{y} = \hat{y}\sigma_2^*$ . Assim, da equação (5.24),  $\hat{x} = \hat{x}\sigma_1^* \oplus \hat{u}$ . Da mesma forma, da equação (5.26), tem-se:  $\hat{y} = \hat{y}\sigma_2^* \oplus \hat{x}$ . Daí:  $\hat{y} = \hat{y}\sigma_2^* \oplus \hat{x}\sigma_1^* \oplus \hat{u}$ . Essa última equação corresponde ao sistema da Figura 5.13(b), fazendo  $\sigma = \sigma_2^*$  e  $\hat{u}' = \hat{x}\sigma_1^* \oplus \hat{u}$ . Note-se que, no primeiro caso, definiu-se  $\sigma = \sigma_1^*\sigma_2^*$  e, no segundo,  $\sigma = \sigma_2^* \preccurlyeq \sigma_1^*\sigma_2^*$ . Para esse exemplo, não existe uma definição única para a função  $\sigma$  para a qual o sistema da Figura 5.13(a) seja totalmente equivalente ao sistema da Figura 5.13(b).

Observe-se, agora, a Figura 5.13(c). A seguir, mostra-se que, do método proposto na Seção 5.1, é possível definir uma função  $\sigma$  na Figura 5.13(c) tal que os sistemas das Figuras 5.13(a) e 5.13(c) sejam totalmente equivalentes. Para o sistema da Figura 5.13(c), além das equações (5.24)-(5.27), têm-se:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}, \quad (5.28)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma. \quad (5.29)$$

Das equações (5.24) e (5.26):  $\hat{y} \succ \hat{x} \succ \hat{u}$ , ou equivalentemente,  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}$ . Dessa forma, a equação (5.28) é sempre satisfeita. Além disso, das equações (5.27) e (5.29):  $\hat{y} \succ \hat{y}\sigma_2$  e  $\hat{y} \succ \hat{y}\sigma$ . Dessa forma, se  $\sigma_2 \succ \sigma$ , então as equações do regulador  $\sigma$  são redundantes. Portanto,  $\sigma = \sigma_2$  é uma possível curva de regulação para o sistema da Figura 5.13(c) e esse valor de  $\sigma$  torna os sistemas das Figuras 5.13(a) e 5.13(c) totalmente equivalentes, conforme mencionado na Observação 18.

**Reguladores em paralelo.** Considere-se o sistema da Figura 5.14(a).

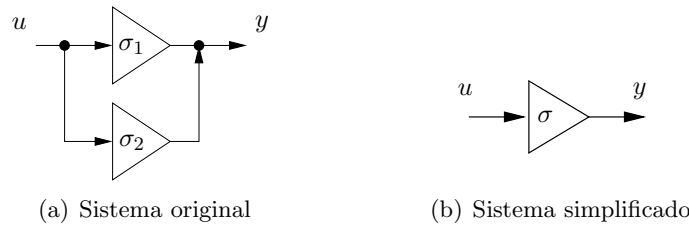


Figura 5.14: Análise de equivalência: reguladores em paralelo.

Esse sistema está sujeito às seguintes equações:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}, \quad (5.30)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma_1, \quad (5.31)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma_2. \quad (5.32)$$

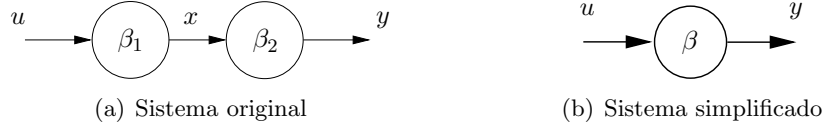
Da equação (5.31), tem-se:  $\hat{y} \succ \hat{y}\sigma_1$ ; da equação (5.32),  $\hat{y} \succ \hat{y}\sigma_2$ . Somando essas inequações, tem-se:  $\hat{y} \succ \hat{y}(\sigma_1 \oplus \sigma_2)$  ou equivalentemente

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}(\sigma_1 \oplus \sigma_2)^*. \quad (5.33)$$

As equações (5.33) e (5.30) são exatamente as equações de um regulador  $\sigma$ , com  $\sigma = (\sigma_1 \oplus \sigma_2)^*$ . Dessa forma, o sistema da Figura 5.14(a) equivale totalmente ao sistema da Figura 5.14(b), quando  $\sigma = (\sigma_1 \oplus \sigma_2)^*$ .

Chang *et al.* (2002, *Example 3.5*) analisam o sistema da Figura 5.14, para um caso particular de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , chegando à mesma conclusão para a curva  $\sigma$ .

**Redes  $\beta$  em série.** Considere-se o sistema da Figura 5.15(a).

Figura 5.15: Análise de equivalência: redes  $\beta$  em série.

Esse sistema está sujeito às seguintes equações:

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u}, \quad (5.34)$$

$$\hat{u}\beta_1 = \hat{u}\beta_1 \oplus \hat{x}, \quad (5.35)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (5.36)$$

$$\hat{x}\beta_2 = \hat{x}\beta_2 \oplus \hat{y}. \quad (5.37)$$

Da equação (5.35), tem-se:  $\hat{x} \preceq \hat{u}\beta_1$ ; da equação (5.37),  $\hat{y} \preceq \hat{x}\beta_2$ . Daí:  $\hat{y} \preceq \hat{x}\beta_2 \preceq \hat{u}\beta_1\beta_2$  ou equivalentemente

$$\hat{u}(\beta_1\beta_2) = \hat{u}(\beta_1\beta_2) \oplus \hat{y}. \quad (5.38)$$

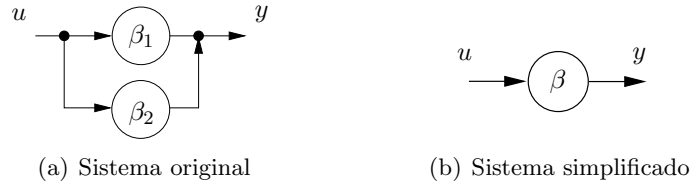
Além disso, das equações (5.34) e (5.36):  $\hat{y} \succ \hat{x} \succ \hat{u}$ , ou seja,

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}. \quad (5.39)$$

As equações (5.38) e (5.39) são as equações de uma rede  $\beta$ , com  $\beta = \beta_1 \otimes \beta_2$ . Dessa forma, de  $u$  para  $y$ , o sistema da Figura 5.15(a) equivale totalmente ao sistema da Figura 5.15(b), sendo  $\beta = \beta_1 \otimes \beta_2$ .

Chang (2000, *Theorem 5.5.2*) apresenta esse mesmo resultado para a curva  $\beta$  equivalente.

**Redes  $\beta$  em paralelo.** Considere-se o sistema da Figura 5.16(a).

Figura 5.16: Análise de equivalência: redes  $\beta$  em paralelo.

Esse sistema está sujeito às seguintes equações:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}, \quad (5.40)$$

$$\hat{u}\beta_1 = \hat{u}\beta_1 \oplus \hat{y}, \quad (5.41)$$

$$\hat{u}\beta_2 = \hat{u}\beta_2 \oplus \hat{y}. \quad (5.41)$$

Da equação (5.40), tem-se:  $\hat{y} \preceq \hat{u}\beta_1$ ; da equação (5.41),  $\hat{y} \preceq \hat{u}\beta_2$ . Daí:  $\hat{y} \preceq \hat{u}\beta_1 \wedge \hat{u}\beta_2$ . Conforme mencionado na Observação 8, em geral em dióides, tem-se:  $ab \wedge ac \succcurlyeq a(b \wedge c)$ . Assim, o passo  $\hat{y} \preceq \hat{u}\beta_1 \wedge \hat{u}\beta_2 = \hat{u}(\beta_1 \wedge \beta_2)$  não é necessariamente verdadeiro e, portanto, a função  $\beta_1 \wedge \beta_2$  não é necessariamente uma curva de serviço para o sistema. Para esse exemplo, não é possível garantir a existência de uma função única  $\beta$  tal que o sistema da Figura 5.16(b) seja totalmente equivalente ao sistema da Figura 5.16(a), a menos que seja demonstrado que  $\hat{u}\beta_1 \wedge \hat{u}\beta_2 = \hat{u}(\beta_1 \wedge \beta_2)$ .

Os casos em que a composição de curvas de serviço ocorre, mas não pode ser sintetizada em uma única curva podem ser vistos como uma generalização do conceito de curvas de serviço. Nesses casos, deve-se decidir entre uma representação mais complexa, mantendo a informação relativa às duas curvas de serviço, ou uma representação mais simples, porém mais conservativa.

**Observação 19.** Para os sistemas da Figura 5.16, quando  $\beta_1 = \delta_{\bar{D}_1}$  e  $\beta_2 = \delta_{\bar{D}_2}$ , é sempre possível definir  $\beta = \delta_{\bar{D}_1} \wedge \delta_{\bar{D}_2}$ . De fato,  $\hat{u}\delta_{\bar{D}_1} \wedge \hat{u}\delta_{\bar{D}_2} = \hat{u}(\delta_{\bar{D}_1} \wedge \delta_{\bar{D}_2}) = \hat{u}\delta_{\bar{D}}$ , sendo  $\bar{D} = \min \{ \bar{D}_1, \bar{D}_2 \}$ .

Chang (2000, *Theorem 5.5.3*) afirma que a curva  $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$  é uma possível curva de serviço para o sistema da Figura 5.16(b). De fato:  $\hat{y} \preceq \hat{u}\beta_1 \wedge \hat{u}\beta_2 \preceq \hat{u}\beta_1 \oplus \hat{u}\beta_2 = \hat{u}(\beta_1 \oplus \beta_2)$  e, portanto, a curva  $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$  é uma curva de serviço possível para o sistema. Isso não quer dizer, contudo, que fazendo  $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$  os dois sistemas da Figura 5.16 sejam totalmente equivalentes, porque, como mostrado a seguir, eles diferem em limitantes de parâmetros de QoS, o que fere a Definição 23.

**Exemplo 5.4** (Não equivalência entre os sistemas da Figura 5.16, quando  $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$ ). Considere-se que o sistema da Figura 5.16 está conectado a um regulador  $\sigma$ . Deseja-se determinar um limitante para a taxa máxima de dados na saída, ou seja, a curva de regulação do fluxo  $y$ . De acordo com os resultados obtidos na Seção 5.4, se for adicionado um regulador  $\sigma_1 = \beta_1 \bowtie \sigma^*$  em paralelo à junção regulador  $\sigma$  - rede  $\beta_1$ , e um regulador  $\sigma_2 = \beta_2 \bowtie \sigma^*$  em paralelo à junção regulador  $\sigma$  - rede  $\beta_2$ , obtém-se um sistema totalmente equivalente ao sistema inicial. A Figura 5.17(a) apresenta o sistema total, com a adição dos reguladores  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Além disso, da análise de reguladores em paralelo feita no início desta seção, se o regulador  $\sigma_1$  e o regulador  $\sigma_2$  forem substituídos por um único regulador  $\sigma_y = (\sigma_1 \oplus \sigma_2)^*$ , o sistema resultante, ilustrado na Figura 5.17(b) também é equivalente ao sistema inicial.

Por outro lado, considerando que as duas redes  $\beta$  sejam substituída por uma única rede  $\beta'$ , sendo  $\beta' = \beta_1 \oplus \beta_2$ , então, de acordo com a Seção 5.4, obtém-se uma curva de regulação

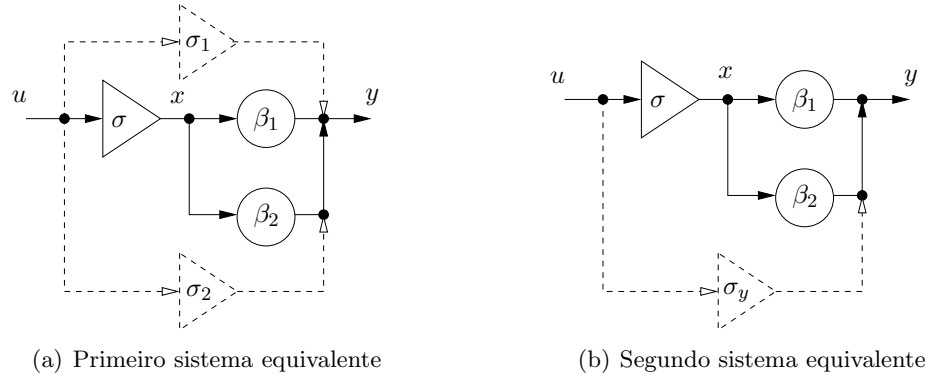


Figura 5.17: Redes  $\beta$  em paralelo: determinação de uma curva de regulação.

total:  $\sigma' = \beta' \bowtie \sigma^*$ . A seguir, mostra-se que a curva de regulação  $\sigma_y$  é um limitante melhor para a taxa máxima de dados na saída do sistema do que  $\sigma'$ . De fato, da Tabela 3.2:

$$\begin{aligned}
 \sigma_y &= [(\beta_1 \bowtie \sigma^*) \oplus (\beta_2 \bowtie \sigma^*)]^* \\
 &\succcurlyeq (\beta_1 \bowtie \sigma^*) \oplus (\beta_2 \bowtie \sigma^*) \\
 &\succcurlyeq (\beta_1 \bowtie \sigma^*) \wedge (\beta_2 \bowtie \sigma^*) \\
 &= (\beta_1 \oplus \beta_2) \bowtie \sigma^* = \sigma',
 \end{aligned}$$

e portanto:  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{y}_{\sigma_y} \succcurlyeq \hat{y}_{\sigma'}$ .

Dessa forma, do ponto de vista prático, em relação à taxa máxima de dados na saída, isto é, em relação à curva de regulação para o fluxo de saída, é menos conservativo modelar este sistema como na Figura 5.16(a) do que como na Figura 5.16(b).

**Filas  $W$  em série.** Considere-se o sistema da Figura 5.18(a).

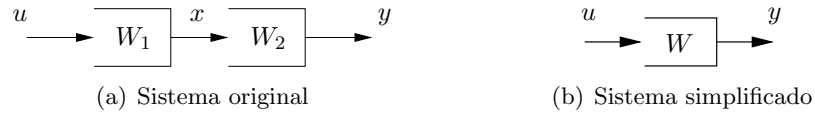


Figura 5.18: Análise de equivalência: filas  $W$  em série.

Esse sistema está sujeito às seguintes equações:

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u}, \quad (5.42)$$

$$\hat{u} = \hat{u} \oplus \hat{x} \lambda_{W_1}, \quad (5.43)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (5.44)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y} \lambda_{W_2}. \quad (5.45)$$

Da equação (5.43), tem-se:  $\hat{u} \succcurlyeq \hat{x}\lambda_{W_1}$ ; da equação (5.45),  $\hat{x} \succcurlyeq \hat{y}\lambda_{W_2}$ . Daí:  $\hat{u} \succcurlyeq \hat{x}\lambda_{W_1} \succcurlyeq \hat{y}\lambda_{W_2}\lambda_{W_1}$ , ou equivalentemente,

$$\hat{u} = \hat{u} \oplus \hat{y}(\lambda_{W_2}\lambda_{W_1}). \quad (5.46)$$

Por outro lado, das equações (5.42) e (5.44),  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x} \succcurlyeq \hat{u}$ , ou seja,

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}. \quad (5.47)$$

As equações (5.46) e (5.47) são as equações de uma fila  $W$ , tal que  $\lambda_W = \lambda_{W_2}\lambda_{W_1} = \lambda_{W_1}\lambda_{W_2}$ , ou seja,  $W(t) = W_1(t) + W_2(t)$ . Dessa forma, o sistema da Figura 5.18(a) equivale totalmente ao sistema da Figura 5.18(b), quando  $W(t) = W_1(t) + W_2(t)$ .

**Filas  $W$  em paralelo.** Considere-se o sistema da Figura 5.19(a).

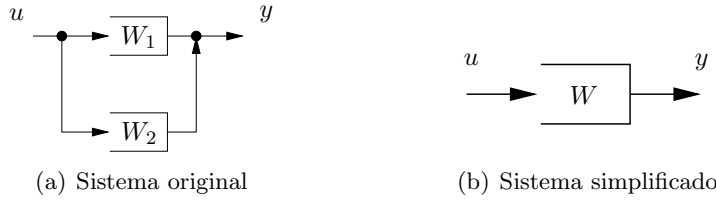


Figura 5.19: Análise de equivalência: filas  $W$  em paralelo.

Esse sistema está sujeito às seguintes equações:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}, \quad (5.48)$$

$$\hat{u} = \hat{u} \oplus \hat{y}\lambda_{W_1}, \quad (5.49)$$

$$\hat{u} = \hat{u} \oplus \hat{y}\lambda_{W_2}. \quad (5.50)$$

Da equação (5.49),  $\hat{u} \succcurlyeq \hat{y}\lambda_{W_1}$ ; da equação (5.50),  $\hat{u} \succcurlyeq \hat{y}\lambda_{W_2}$ . Somando essas inequações, tem-se:  $\hat{u} \succcurlyeq \hat{y}(\lambda_{W_1} \oplus \lambda_{W_2})$  ou equivalentemente

$$\hat{u} = \hat{u} \oplus \hat{y}(\lambda_{W_1} \oplus \lambda_{W_2}). \quad (5.51)$$

As equações (5.48) e (5.51) são as equações de uma fila  $W$ , com  $\lambda_W = \lambda_{W_1} \oplus \lambda_{W_2}$ , ou seja,  $W(t) = \min\{W_1(t), W_2(t)\}$ . Dessa forma, o sistema da Figura 5.19(a) equivale totalmente ao sistema da Figura 5.19(b), quando  $W(t) = \min\{W_1(t), W_2(t)\}$ .

A Tabela 5.2 resume os resultados obtidos nesta seção. A partir desta tabela, pode-se reapresentar a Tabela 5.1, para o caso em que as restrições de serviço de um sistema não podem ser sintetizadas em uma única curva de serviço. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 5.3 e são facilmente estendidos para mais de duas curvas de serviço em paralelo.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>O processo de obtenção dos resultados da Tabela 5.3 é semelhante ao utilizado para determinar  $\sigma_y$  no Exemplo 5.4.

| Sistema original | Sistema equivalente | Parâmetro para equivalência total       |
|------------------|---------------------|-----------------------------------------|
|                  |                     | $\sigma$ indeterminado                  |
|                  |                     | $\sigma = (\sigma_1 \oplus \sigma_2)^*$ |
|                  |                     | $\beta = \beta_1 \beta_2$               |
|                  |                     | $\beta$ indeterminado                   |
|                  |                     | $W(t) = W_1(t) + W_2(t)$                |
|                  |                     | $W(t) = \min \{W_1(t), W_2(t)\}$        |

Tabela 5.2: Sistemas equivalentes e parâmetros para equivalência total.

| Sistema original | Sistema equivalente | Parâmetro de equivalência                                                                                                                                                                                                     |
|------------------|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                  |                     | $\delta_{\bar{D}_1} = \inf \delta_d,$<br>s. a $\sigma^* \delta_d \succcurlyeq \beta_1$<br>$\delta_{\bar{D}_2} = \inf \delta_d,$<br>s. a $\sigma^* \delta_d \succcurlyeq \beta_2$<br>$\bar{D} = \min \{\bar{D}_1, \bar{D}_2\}$ |
|                  |                     | $W_1(t) = (\beta_1 \bowtie \sigma^*)(t, t)$<br>$W_2(t) = (\beta_2 \bowtie \sigma^*)(t, t)$<br>$W(t) = \min \{W_1(t), W_2(t)\}$                                                                                                |
|                  |                     | $\sigma_y = [\beta_1 \bowtie \sigma^* \oplus \beta_2 \bowtie \sigma^*]$                                                                                                                                                       |

Tabela 5.3: Parâmetros de QoS obtidos para um sistema formado pela junção em série de um regulador  $\sigma$  e duas redes  $\beta$  em paralelo.

## 5.7 Conclusão

Neste capítulo, definiu-se um método para a determinação de limitantes de parâmetros de QoS em sistemas de comunicações. A partir do método proposto, foram determinados, para um sistema simples formado pela junção em série de um regulador  $\sigma$  e uma rede  $\beta$ , limitantes para os seguintes parâmetros: atraso máximo entre os fluxos de entrada e saída da rede  $\beta$ ; taxa máxima de saída de dados; e *backlog* máximo da rede  $\beta$ . Adicionalmente, mostrou-se que não é possível determinar uma única curva de serviço entre os fluxos de entrada e saída para essa junção regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$ . Alguns dos limitantes obtidos para esse sistema, apresentados nas Seções 5.2 a 5.4, são resultados semelhantes aos já presentes na literatura. Porém suas demonstrações totalmente baseadas na álgebra de dióides são contribuições deste trabalho.

Na Seção 5.6, foi introduzido o conceito de equivalência entre representações de sistemas. A partir deste conceito, analisou-se como a representação de sistemas de comunicações pode ser simplificada em relação a um certo parâmetro de QoS e em relação a fluxos de entrada e saída de interesse.

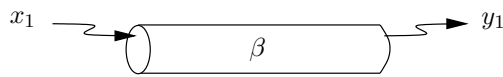
Em geral, na literatura, procura-se obter uma curva de serviço única, para representar as restrições de garantia de serviço de um dado sistema. Uma contribuição interessante deste capítulo é a idéia de manter diferentes curvas de serviço em paralelo, quando for conhecida mais de uma curva de serviço para um dado sistema e não for possível definir uma relação de ordenamento entre as curvas obtidas. Esse resultado gera uma representação original para as restrições de garantia de serviço de sistemas, a qual será utilizada no próximo capítulo.

## Capítulo 6

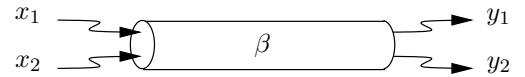
# Desacoplamento de curvas de serviço para tráfegos multiplexados

Neste capítulo, discute-se, para o caso de tráfegos multiplexados, como podem ser determinadas curvas de serviço. Especificamente, é estudado um multiplexador FIFO (*First In, First Out*), em que se considera que não há na rede nenhuma política de prioridade e que a ordem de transmissão das informações na saída do sistema é a ordem de chegada de cada bit.<sup>1</sup> Essa é, naturalmente, uma situação ideal, em que não se considera a integridade de pacotes na saída de um sistema. Situações mais realistas de tráfego, serão estudadas no próximo capítulo, Seção 7.5.

Considere-se um enlace com curva de serviço estrita  $\beta \in \mathcal{C}$  e fluxo de entrada  $x_1 \in \mathcal{C}$ , conforme ilustra a Figura 6.1(a). Da definição de curva de serviço estrita, pode-se garantir que uma quantidade de dados de pelo menos  $\beta(s, t)$  bits do fluxo  $x_1$  será transportada pelo enlace, caso o sistema nunca fique vazio ao longo do intervalo de tempo  $(s, t]$ .



(a) Enlace com curva de serviço  $\beta$ , fluxo de entrada  $x = x_1$  e fluxo de saída  $y = y_1$



(b) Enlace com curva de serviço  $\beta$ , fluxo de entrada  $x = x_1 + x_2$  e fluxo de saída  $y = y_1 + y_2$

Figura 6.1: Enlace com curva de serviço estrita  $\beta$ , fluxo de entrada  $x$  e fluxo de saída  $y$ . Em (a),  $x = x_1$  e  $y = y_1$ ; em (b),  $x = x_1 + x_2$  e  $y = y_1 + y_2$ .

Considere-se que um outro fluxo,  $x_2 \in \mathcal{C}$ , é adicionado à entrada do sistema, de

---

<sup>1</sup>Neste trabalho, essa disciplina de filas será chamada de FIFO bit a bit. Ao assumir essa disciplina de filas, ficam implícitas as considerações de que o tempo é uma variável discreta, mas que os fluxos são infinitamente divisíveis, de forma que um bit é uma unidade de tráfego de tamanho tendendo a zero (modelo chamado “ $L = 0$ ”, em Cruz, 1991a). Além disso, fica implícita a consideração de justiça no encaminhamento de dados, o que permite o “embaralhamento” de dados pertencentes a fluxos diferentes.

forma que a quantidade total de dados que devem passar pelo enlace de curva de serviço  $\beta$  passa a ser  $x = x_1 + x_2$  (soma convencional), conforme ilustra a Figura 6.1(b). Nesse caso, as seguintes perguntas podem surgir: como a presença do fluxo 2 interfere na utilização do canal pelo fluxo 1? qual é a curva de serviço que o sistema dedica ao fluxo 1, após a adição do novo fluxo?

## 6.1 Resultados anteriores

As questões anteriores foram abordadas primeiramente em Cruz (1998, *Theorem 4*), para o caso em que os dois fluxos de entrada são invariantes no tempo e a fila segue uma disciplina de filas FIFO bit a bit. O resultado está apresentado a seguir, no Teorema 17.

**Teorema 17.** *Considere-se um multiplexador FIFO com dois fluxos de entrada e curva de saída  $\beta$ . Sejam  $x_k, y_k \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, o fluxo de entrada e o fluxo de saída do tráfego  $k$ ,  $k = 1, 2$ . Além disso, sejam  $x = x_1 + x_2$  o fluxo total de entrada do sistema;  $y = y_1 + y_2$  o fluxo total de saída; e  $\beta$  uma curva de serviço entre  $x$  e  $y$ . Se o fluxo  $x_2$  satisfaz uma curva de regulação  $\sigma_2$ , invariante no tempo, então o fluxo  $x_1$  satisfaz a seguinte curva de serviço:*

$$\beta_1^\Theta(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{se } \nu \leq \Theta, \\ [\beta(\nu) - \sigma_2(\nu - \Theta)]^+, & \text{se } \nu > \Theta, \end{cases}$$

se  $\beta_1^\Theta$  for não-decrescente em  $\nu$ , sendo  $\Theta \in \mathbb{Z}^+$  um valor fixo qualquer.

*Demonstração.* A demonstração deste teorema aparece em Le Boudec e Thiran (2003, *Proposition 6.2.1*), para o caso particular em que  $\beta$  e  $\sigma_2$  são funções contínuas de tempo contínuo, e  $\Theta \in \mathbb{R}^+$  (modelo de tráfego fluido).  $\square$

**Observação 20.** *As curvas de serviço definidas pelo Teorema 17 dependem do parâmetro  $\Theta$ , que pode assumir infinitos valores, desde que satisfeita a condição de que  $\beta_1^\Theta(\nu)$  seja não-decrescente em  $\nu$ . Desta forma, esse teorema define, na verdade, uma família de curvas de serviço possíveis para o fluxo 1. O exemplo a seguir ilustra uma situação em que a condição acima não é satisfeita e mostra que, mesmo entre as curvas de serviço válidas, nem todas têm interesse prático.*

**Exemplo 6.1** (Parte 1). *Considere-se um multiplexador FIFO com duas entradas. Sejam  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  possíveis curvas de regulação para os fluxos  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, e  $\beta$  a curva de serviço total do sistema, conforme ilustra a Figura 6.2(a). As curvas  $\beta_k^0$ ,  $\beta_k^{50}$ ,  $\beta_k^{135}$  e  $\beta_k^{200}$ ,  $k = 1, 2$  estão ilustradas nas Figuras 6.2(b) e 6.2(c). Para esse exemplo, os limitantes do atraso virtual máximo do sistema como um todo,  $\bar{D}$ , e dos fluxos  $x_1$  e  $x_2$  individualmente,  $\bar{D}_k$ ,  $k = 1, 2$  são tais que  $\bar{D} = \bar{D}_1 = \bar{D}_2 = 135s$  (Teorema 13).*

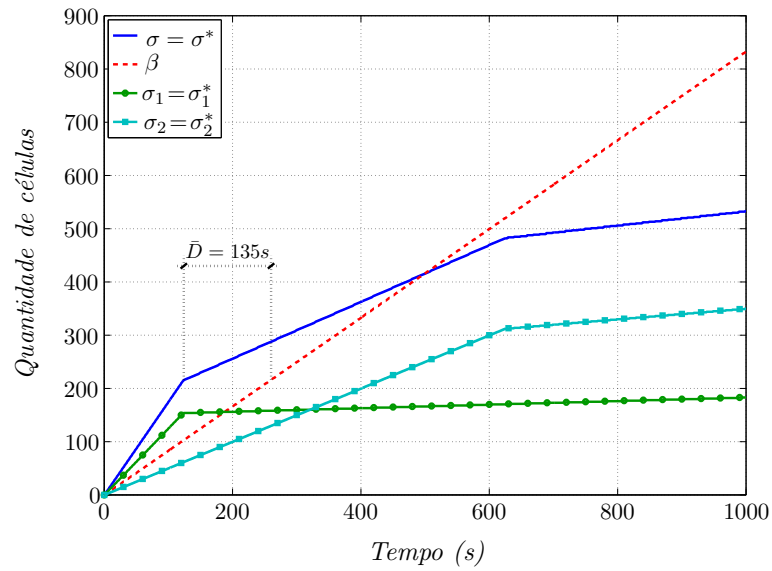
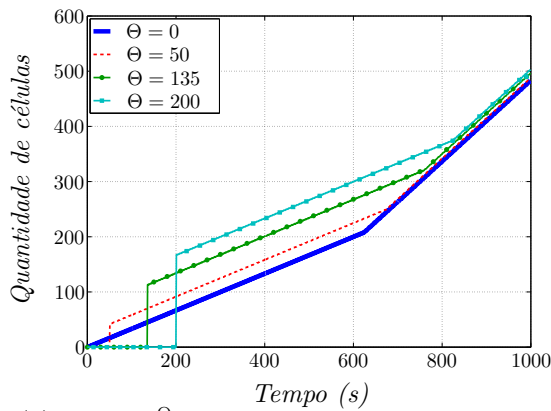
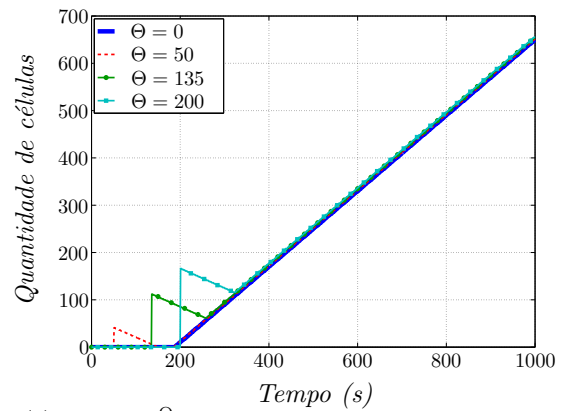
(a) Curvas de entrada  $\sigma$  e  $\sigma_k$ ,  $k = 1, 2$ , e curva de serviço total do sistema,  $\beta$ (b) Curvas  $\beta_1^\Theta$  obtidas a partir do Teorema 17, para diferentes valores de  $\Theta$ (c) Curvas  $\beta_2^\Theta$  obtidas a partir do Teorema 17, para diferentes valores de  $\Theta$ 

Figura 6.2: Problema da determinação de curvas de serviço para tráfegos multiplexados. Em (a), as curvas de regulação para o fluxo  $x_1$ ,  $\sigma_1$ ; para o fluxo  $x_2$ ,  $\sigma_2$ ; e para o sistema como um todo,  $\sigma$ ; e a curva de serviço total do sistema,  $\beta$ . Em (b)-(c), exemplos de funções  $\beta_1^\Theta$  e  $\beta_2^\Theta$  obtidas a partir do Teorema 17 para diferentes valores de  $\Theta$ .

Conforme mencionado anteriormente, note-se que nem todos os valores de  $\Theta$  nas expressões de  $\beta_k^\Theta(\nu)$ ,  $k = 1, 2$ , definidas pelo Teorema 17 levam a curvas de serviço válidas, e nem todas as curvas válidas obtidas são de interesse. Primeiramente, as curvas obtidas podem apresentar porções não-decrescentes em  $\nu$  sendo, portanto, não-válidas. São exemplos as curvas da Figura 6.2(c) em que  $\Theta \neq 0$ . Além disso, quando  $\Theta$  é maior do que  $\bar{D}$ , isto é,  $\Theta > 135s$ , então as curvas de serviço obtidas pelo Teorema 17 são mais conservativas do que a curva  $\delta_{\bar{D}}$ , que é garantidamente uma curva de serviço para o sistema (Observação 13, Capítulo 4). Nesse caso, portanto, é melhor trabalhar com a curva  $\delta_{\bar{D}}$  do que com as curvas  $\beta_k^\Theta$ ,  $k = 1, 2$ .

Da definição de  $\beta_1^\Theta$  expressa no Teorema 17, pode-se perceber que, se o parâmetro  $\Theta$  for muito pequeno, então a curva de serviço obtida tende a diminuir, porque quanto menor  $\Theta$ , menor o valor de  $\beta(\nu) - \sigma_2(\nu - \Theta)$ . Por outro lado, quanto maior o valor de  $\Theta$ , mais tempo a curva de serviço obtida permanece no valor 0, o que também não é interessante. Dessa forma, deve existir um valor de  $\Theta$  ótimo para o Teorema 17. Neste trabalho, de uma forma geral, utiliza-se a seguinte escolha, justificada a seguir:

$$\Theta = \sup \{ \nu : \beta(\nu) = 0 \}. \quad (6.1)$$

Sejam  $x$  e  $y$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída de um determinado sistema que admite uma curva de serviço  $\beta$ . Nesse caso, a curva  $y$  é limitada pela inequação  $\hat{y} \preceq \hat{x}\beta$ . Dessa forma, o quanto antes a curva de serviço atinge valores não-nulos, mais cedo o limitante da curva de saída,  $\hat{x}\beta$ , atinge valores não-nulos. Sendo assim, garante-se uma saída não-nula para o sistema ( $y(0, t) > 0$ ) mais cedo. Observe-se que qualquer outra escolha para  $\Theta$  garante saída de dados do sistema em instantes de tempo posteriores.

O Teorema 17 pode ser apresentado de forma mais geral do que no enunciado original. De fato, é possível encontrar uma expressão muito semelhante para a curva de serviço  $\beta_1^\Theta$ , para o caso em que se consideram funções variantes no tempo. Esse resultado está apresentado a seguir.

**Teorema 18.** *Considere-se que dois fluxos de tráfego entram em um elemento de rede com disciplina de filas FIFO bit a bit. Sejam  $x_k, y_k \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, o fluxo de entrada e o fluxo de saída do tráfego  $k$ ,  $k = 1, 2$ . Além disso,  $x = x_1 + x_2$  é o fluxo total de entrada do sistema, e  $y = y_1 + y_2$  é o fluxo total de saída. Se o fluxo  $x_2$  satisfaz uma curva de regulação  $\sigma_2 \in \mathcal{C}_t$ , então o fluxo  $x_1$  satisfaz a seguinte curva de serviço:*

$$\beta_1^\Theta(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta, \\ (\overline{\text{Pr}} \{G\{\beta, \sigma_2^* \delta_\Theta\}\})(s, t), & \text{se } s < t - \Theta, \end{cases}$$

sendo  $\Theta \in \mathbb{Z}^+$  um valor fixo qualquer.

*Demonstração.* A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice D. □

O Teorema 18 estende os resultados do Teorema 17 nos seguintes aspectos:

- a) As curvas de serviço são variantes no tempo, isto é,  $\beta$  passa a ser função de  $s$  e  $t$  e não apenas de  $\nu = t - s$ .
- b) Devido à utilização do operador de projeção em  $\mathcal{C}$  (Definição 19, Capítulo 3), o resultado vale para qualquer valor de  $\Theta$ .

Como mencionado anteriormente, as curvas de serviço definidas pelos Teoremas 17 e 18 definem *famílias* de curvas de serviço possíveis para o fluxo 1. No restante deste capítulo, apresenta-se uma nova forma para a determinação da curva de serviço de um tráfego de interesse dentre um agregado de fluxos. Os resultados obtidos são independentes da definição de parâmetros e permitem a satisfação da equivalência de atraso virtual definida na próxima seção.

## 6.2 Formalização do problema

Sejam  $M$  fluxos de tráfego servidos concorrentemente por uma rede  $\beta$ , conforme ilustra a Figura 6.3(a). Considere-se que a causalidade está presente em todo o sistema; que o fluxo  $i$  é o fluxo de interesse; e que os fluxos de entrada da rede  $\beta$ ,  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , são limitados por reguladores  $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Deseja-se determinar:

- Uma curva de serviço  $\beta_i \in \mathcal{C}$  que a rede  $\beta$  dedica especificamente ao fluxo  $i$ ;
- Uma curva de serviço  $\tilde{\beta}_i \in \mathcal{C}$  que a rede  $\beta$  dedica ao agregado dos demais fluxos, excetuando-se o fluxo  $i$ .

Neste trabalho, esse problema é mencionado como o desacoplamento de um fluxo de interesse. Esse problema é fundamental para a análise de sistemas de comunicações que envolvem agregação de tráfegos. As Figuras 6.3(b) e 6.3(c) ilustram a idéia do desacoplamento de tráfegos, incluindo a modelagem usando os blocos básicos introduzidos no Capítulo 4. As redes  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  estão evidenciadas na Figura 6.3(c).

Como mencionado anteriormente, será considerado que não há na rede nenhuma política de prioridade e que a ordem de transmissão das informações na saída do sistema é a ordem de chegada de cada bit (FIFO bit a bit). Dessa forma, o atraso de um bit é devido ao *backlog* total do sistema no instante de sua chegada. Conseqüentemente, os limitantes de atrasos virtuais observados pelos  $M$  fluxos de entrada são idênticos. Para esse exemplo, portanto, tem-se:

$$\bar{D}_1 = \bar{D}_2 = \dots = \bar{D}_M = \bar{D}.$$

Essa igualdade entre limitantes de atrasos virtuais é uma característica marcante para sistemas FIFO bit a bit. Por essa razão, nas análises que se seguem, procuram-se curvas de serviço  $\beta_i$  e

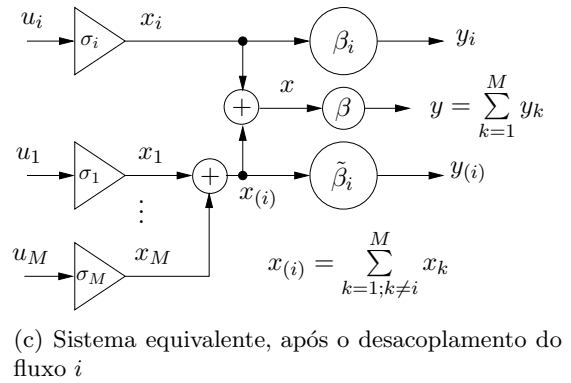
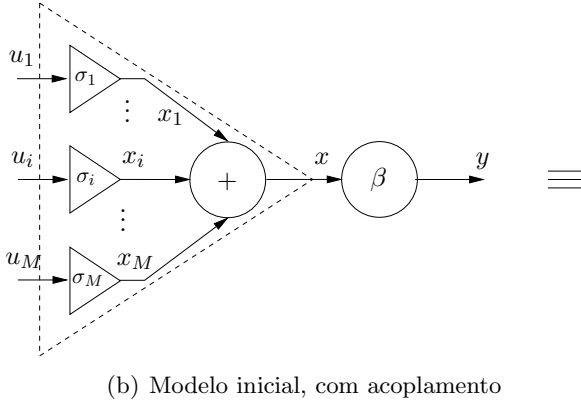
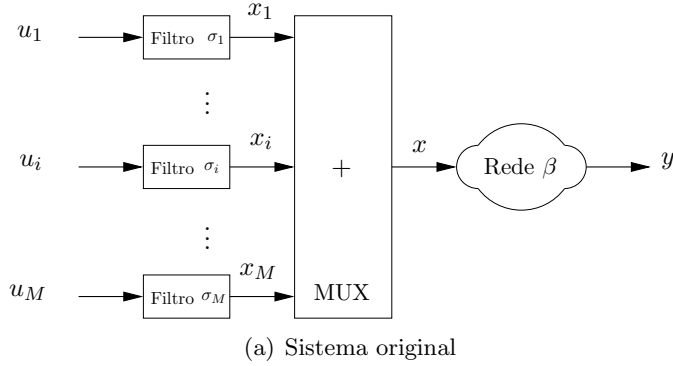


Figura 6.3: Sistema com  $M$  fluxos de entrada. Em (a), diagrama de blocos do sistema original, evidenciando a agregação dos  $M$  fluxos na entrada de uma rede  $\beta$ . Em (b), o modelo do sistema usando os blocos básicos definidos no Capítulo 4. Em (c), o modelo equivalente após o desacoplamento do fluxo de interesse,  $i$ .

$\tilde{\beta}_i$  que respeitem essa característica. Por fim, considera-se que o sistema é causal, e que  $\beta_i \succ \beta$  e  $\tilde{\beta}_i \succ \beta$ , para que não se exija do sistema, após o desacoplamento do fluxo  $i$ , mais garantias de serviço do que originalmente foi dado.

Para a resolução desse problema de desacoplamento de um fluxo de interesse, é usado o método apresentado na Seção 5.1 (página 52). Nesse caso, a idéia é acrescentar uma rede  $\beta_i$  entre as funções de entrada e saída do fluxo  $i$ , isto é, entre as funções  $x_i$  e  $y_i$ , ilustradas na Figura 6.3(c), onde  $y_i$  representa apenas os pacotes do fluxo  $i$  na curva de saída,  $y$ .

Para a análise dos sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c), repetindo o procedimento do capítulo anterior, parte-se do pressuposto de que é possível obter uma equivalência total entre ambos sistemas do ponto de vista dos fluxos totais de entrada e saída. Em seguida, é feita a análise específica da equivalência desses sistemas em relação aos atrasos virtuais máximos por fluxo, ou seja, entre as funções de entrada e saída de cada fluxo. A análise está dividida em três partes. Ainda nesta seção, são apresentados os conjuntos de restrições dos dois sistemas sem a suposição de disciplina de filas FIFO, e são analisadas as condições para as quais eles são totalmente equivalentes, considerando os fluxos totais de entrada e saída. Na Seção 6.3, são feitas análises de equivalência em relação ao atraso virtual máximo considerando a hipótese da disciplina de filas FIFO bit a bit e são expressas as condições para as quais se garante que os limitantes obtidos por fluxo para o sistema da Figura 6.3(b) não sejam alterados pelo desacoplamento do tráfego  $i$ , ilustrado na Figura 6.3(c). Por fim, na Seção 6.4, define-se uma nova medida de atraso virtual e se analisa a equivalência por fluxo entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) especificamente em relação a esse novo parâmetro de QoS.

Para o sistema ilustrado na Figura 6.3(b), da Tabela 4.1, as seguintes equações são satisfeitas:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \hat{x}_k \oplus \hat{u}_k, \quad k = 1, \dots, M, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k \oplus \hat{x}_k \sigma_k, \quad k = 1, \dots, M,\end{aligned}\tag{6.2}$$

$$x = F \{x_1, \dots, x_M\},\tag{6.3}$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x},\tag{6.4}$$

$$\hat{x}\beta = \hat{x}\beta \oplus \hat{y}.\tag{6.5}$$

Adote-se, agora, a seguinte notação:<sup>2</sup>

$$x_{(i)} = \sum_{k=1; k \neq i}^M x_k = F \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_M\}.\tag{6.6}$$

Das equações (6.3) e (6.6), tem-se:  $x = F \{x_i, x_{(i)}\} = F \{x_{(i)}, x_i\}$ .

---

<sup>2</sup>Esta notação, isto é, o uso de um sub-índice entre parênteses para indicar agregação com exclusão, será utilizada em outras situações ao longo deste texto.

Para o sistema da Figura 6.3(c), por sua vez, as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \hat{x}_k \oplus \hat{u}_k, \quad k = 1, \dots, M, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k \oplus \hat{x}_k \sigma_k, \quad k = 1, \dots, M, \\ \hat{y}_i &= \hat{y}_i \oplus \hat{x}_i,\end{aligned}\tag{6.7}$$

$$\hat{x}_i \beta_i = \hat{x}_i \beta_i \oplus \hat{y}_i,\tag{6.8}$$

$$\hat{y}_{(i)} = \hat{y}_{(i)} \oplus \hat{x}_{(i)},\tag{6.9}$$

$$\hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i = \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i \oplus \hat{y}_{(i)},\tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}x &= F \{x_i, x_{(i)}\}, \\ y &= F \{y_i, y_{(i)}\},\end{aligned}\tag{6.11}$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x},\tag{6.12}$$

$$\hat{x} \beta = \hat{x} \beta \oplus \hat{y}.\tag{6.13}$$

Observe-se que o segundo sistema apresenta as mesmas restrições do primeiro, mais as restrições relacionadas apenas aos fluxos  $x_i$  e ao fluxo agregado  $x_{(i)}$ .

**Observação 21.** *A curva de serviço que a rede  $\beta$  dedica ao agregado dos fluxos excetuando-se o fluxo  $i$ , não necessariamente é igual a  $\beta_{(i)} = \sum_{k=1; k \neq i}^M \beta_k$ . Por isso, foi utilizado o símbolo  $\tilde{\beta}_i$ .*

Nesta seção, deseja-se encontrar as condições que garantem a equivalência total entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c), considerando como entrada e saída, respectivamente, os fluxos  $x$  e  $y$ . A análise é feita através do método apresentado no Capítulo 5 (página 52). Primeiramente, note-se que um sistema causal atrasa de alguma forma os fluxos de entrada. Esse atraso acontece indistintamente para fluxos isoladamente (equação 6.7) e para agregados de fluxos (equações 6.9 e 6.12). Conseqüentemente, as equações (6.7) e (6.9) são satisfeitas pelo sistema da Figura 6.3(b), mesmo que tenham sido deixadas implícitas. Da mesma forma, a equação (6.11) está implícita ao sistema da Figura 6.3(b). Por essa razão, encontrar as condições que garantem a equivalência total entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) se resume a encontrar restrições para as curvas de serviço  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  tais que as equações (6.7)-(6.10) sejam redundantes.

Se as equações (6.8) e (6.10) forem satisfeitas, têm-se, respectivamente:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i \beta_i &\succcurlyeq \hat{y}_i, \\ \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i &\succcurlyeq \hat{y}_{(i)}.\end{aligned}$$

Daí, da equação (6.11) e da propriedade (PM.1), Tabela 3.10, a seguinte expressão deve ser satisfeita:

$$F \left\{ \hat{x}_i \beta_i, \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i \right\} \succcurlyeq F \left\{ \hat{y}_i, \hat{y}_{(i)} \right\} = \hat{y}. \quad (6.14)$$

Das inequações (6.13) e (6.14), a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$\hat{y} \preccurlyeq \hat{x} \beta \wedge F \left\{ \hat{x}_i \beta_i, \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i \right\}.$$

Seguindo o método apresentado no Capítulo 5 (item 2, página 52), deve-se escolher o termo predominante na operação de mínimo acima. Para que o desacoplamento do fluxo  $i$  não altere as equações do sistema original em relação a  $x$  e  $y$ , isto é, para que a equação (6.13) continue sendo a restrição predominante no sistema da Figura 6.3(a), deve-se fazer

$$\hat{x} \beta \preccurlyeq F \left\{ \hat{x}_i \beta_i, \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i \right\}. \quad (6.15)$$

Seja  $\sigma_{(i)}$  uma curva de regulação para o agregado de tráfegos excetuando-se o fluxo  $i$ . Para checar se as curvas  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  satisfazem a inequação (6.15), é necessário conhecer as curvas  $\hat{x}_i$  e  $\hat{x}_{(i)}$ , o que não é uma condição interessante. Por outro lado, da isotonicidade do produto em dióides, a inequação (6.15) é sempre satisfeita, quando  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  satisfazem a seguinte inequação:

$$\beta \preccurlyeq F \left\{ \sigma_i^* \beta_i, \sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i \right\}. \quad (6.16)$$

A inequação (6.16) é, portanto, uma condição suficiente para que a inequação (6.15) seja satisfeita. De fato, da propriedade (PM.8), Tabela 3.10, se  $\beta \preccurlyeq F \left\{ \sigma_i^* \beta_i, \sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i \right\}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{x} \beta &\preccurlyeq \hat{x} \otimes F \left\{ \sigma_i^* \beta_i, \sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i \right\} = F \left\{ \hat{x}_i, \hat{x}_{(i)} \right\} \otimes F \left\{ \sigma_i^* \beta_i, \sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i \right\} \\ &\preccurlyeq F \left\{ \hat{x}_i \sigma_i^* \beta_i, \hat{x}_{(i)} \sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i \right\} \\ &= F \left\{ \hat{x}_i \beta_i, \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i \right\}. \end{aligned}$$

As inequações (6.15) e (6.16) garantem a equivalência total entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em relação aos fluxos totais de entrada e saída, garantindo os mesmos limitantes de parâmetros de QoS em relação a esses fluxos. Contudo, garantir equivalência entre os fluxos totais de entrada e saída não implica, necessariamente, que os limitantes dos parâmetros de QoS obtidos *por fluxo* sejam respeitados. Essa questão será discutida a seguir, em relação ao atraso virtual máximo.

### 6.3 Atraso virtual máximo por fluxo

De acordo com a Definição 23, duas representações de um dado sistema são equivalentes em relação a um certo parâmetro de QoS se, de ambas representações, obtêm-se

os mesmos limitantes para o parâmetro em análise. A seguir, discute-se que restrições devem ser impostas às curvas de serviço  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$ , de forma a garantir equivalência entre as representações ilustradas nas Figuras 6.3(b) e 6.3(c), em relação ao atraso virtual máximo por fluxo.

Conforme discussão anterior, em um sistema FIFO bit a bit, consideram-se satisfeitas as seguintes igualdades:  $\bar{D} = \bar{D}_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Conseqüentemente, as seguintes igualdades também devem ser atendidas:  $\bar{D} = \bar{D}_i$  e  $\bar{D} = \tilde{D}_i$ , sendo  $\tilde{D}_i$  um limitante para o atraso virtual máximo do fluxo agregado, excetuando-se o fluxo de interesse,  $i$ .

Sejam  $\sigma$  e  $\beta$ , respectivamente, curvas de regulação e de serviço atendidas pelos fluxos de entrada e saída da rede  $\beta$  da Figura 6.3(b). De acordo com o Teorema 13, um limitante  $\bar{D}$  para o atraso virtual máximo desse sistema corresponde à solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{D}} &= \inf \delta_d, \\ \text{s. a } \quad \sigma^* \delta_d &\succcurlyeq \beta. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Além disso, sejam  $\sigma_i$  e  $\beta_i$ , respectivamente, curvas de regulação e de serviço para o fluxo de interesse,  $i$ ; e sejam  $\sigma_{(i)}$  e  $\tilde{\beta}_i$ , respectivamente, curvas de regulação e de serviço para o agregado de fluxos restante, excetuando-se o fluxo  $i$ . Novamente do Teorema 13, para que as considerações  $\bar{D} = \bar{D}_i = \tilde{D}_i$  sejam atendidas, o limitante  $\bar{D}$  deve corresponder, também, às soluções dos seguintes problemas:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{D}} &= \inf \delta_d, \\ \text{s. a } \quad \sigma_i^* \delta_d &\succcurlyeq \beta_i. \end{aligned} \tag{6.18}$$

e

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{D}} &= \inf \delta_d, \\ \text{s. a } \quad \sigma_{(i)}^* \delta_d &\succcurlyeq \tilde{\beta}_i. \end{aligned} \tag{6.19}$$

As restrições expressas pelos problemas (6.18) e (6.19) são, portanto, condições necessárias para que se garanta a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c), em relação ao limitante  $\bar{D}$  de atraso virtual máximo.

Para determinar um valor de  $\bar{D}$  que atenda aos três problemas acima, primeiramente deve-se conhecer a relação entre as curvas de regulação total do sistema,  $\sigma$ ; a curva de regulação  $\sigma_k$  do fluxo  $k$ ,  $k = 1, \dots, M$ ; e a curva de regulação  $\sigma_{(i)}$  do agregado de fluxos excetuando-se o fluxo de interesse  $i$ . De acordo com a Proposição 9,  $\sigma$  e  $\sigma_{(i)}$ , podem ser definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma &= F \{ \sigma_1^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_M^* \}, \\ \sigma_{(i)} &= F \{ \sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_M^* \}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Assim, da Proposição 47 (Apêndice G), tem-se:

$$\sigma = F \{ \sigma_i^*, \sigma_{(i)} \} = F \{ \sigma_i^*, \sigma_{(i)}^* \} = \sigma^*. \tag{6.21}$$

A partir da equação (6.21), de (6.17) e da propriedade (PM.6), Tabela 3.10, a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$\sigma^* \delta_{\bar{D}} = \sigma \delta_{\bar{D}} = F \left\{ \sigma_i^*, \sigma_{(i)}^* \right\} \delta_{\bar{D}} = F \left\{ \sigma_i^* \delta_{\bar{D}}, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \right\} \succcurlyeq \beta. \quad (6.22)$$

Daí, da propriedade (PM.3), Tabela 3.10, e da inequação (6.22) têm-se:

$$\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \right\}, \quad (6.23)$$

$$\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \right\}. \quad (6.24)$$

Além disso, de (6.18) e (6.19), as seguintes inequações devem ser satisfeitas:

$$\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \beta_i, \quad (6.25)$$

$$\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \tilde{\beta}_i. \quad (6.26)$$

Das inequações (6.23) e (6.25) e das inequações (6.24) e (6.26), têm-se:

$$\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \beta_i \oplus G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \right\},$$

$$\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \tilde{\beta}_i \oplus G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \right\}.$$

Das inequações acima, seguindo o método proposto na Seção 5.1, para que as curvas  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  não alterem os limitantes de atraso virtual máximo por fluxo,  $\bar{D}$ , previsto em (6.18) e (6.19), as seguintes inequações devem ser satisfeitas:

$$\beta_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \right\},$$

$$\tilde{\beta}_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \right\}.$$

Conseqüentemente, têm-se:

$$\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \beta_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \right\}, \quad (6.27)$$

$$\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \tilde{\beta}_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \right\}, \quad (6.28)$$

ou ainda, se for exigido  $\beta_i, \tilde{\beta}_i \in \mathcal{C}_t$ , da Proposição 6 (Capítulo 3, página 35), têm-se:<sup>3</sup>

$$\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \beta_i \succcurlyeq \overline{\text{Pr}} \left\{ G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \right\} \right\}, \quad (6.29)$$

$$\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \tilde{\beta}_i \succcurlyeq \overline{\text{Pr}} \left\{ G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \right\} \right\}. \quad (6.30)$$

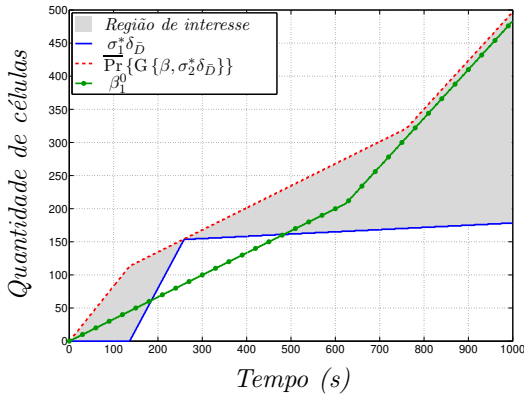
As inequações (6.27) e (6.28) são condições *necessárias* para garantir a equivalência entre as representações do multiplexador FIFO bit a bit ilustrado nas Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em

---

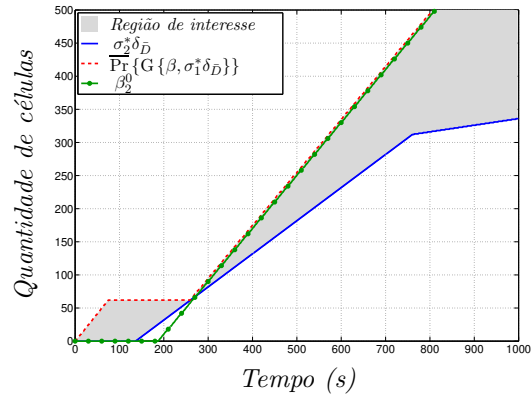
<sup>3</sup>Nas expressões (6.29) e (6.30), usou-se o fato de que  $\text{Pr} \{ \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \} = \sigma_i^* \delta_{\bar{D}}$  e que  $\underline{\text{Pr}} \{ \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \} = \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}}$ , porque  $\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \in \mathcal{C}_t$ , de acordo com a (PD.3), Tabela 3.5.

relação ao atraso virtual máximo por fluxo, se  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  forem curvas de serviço possíveis para o sistema. Contudo, é possível que nem toda curva  $\beta_i$  que satisfaça a inequação (6.27) seja uma curva de serviço para o fluxo  $i$ , assim como é possível que nem toda curva  $\tilde{\beta}_i$  que satisfaça a inequação (6.28) seja uma curva de serviço para o agregado dos fluxos restantes, excetuando-se o fluxo  $i$ . Para garantir que  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  são curvas de serviço possíveis, ainda é necessário demonstrar que  $\hat{y}_i \preceq \hat{x}_i \beta_i$  e que  $\hat{y}_{(i)} \preceq \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i$ .

**Exemplo 6.1** (Parte 2). A Figura 6.4 ilustra, para as mesmas curvas de regulação e de serviço do Exemplo 6.1 (Parte 1), a região onde  $\beta_1$  e  $\tilde{\beta}_1 = \beta_2$  devem estar definidas, de modo a respeitar, respectivamente, as inequações (6.29) e (6.30) (região sombreada). Consideram-se  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{C}_t$ . As curvas de serviço  $\beta_1^0$  e  $\beta_2^0$  obtidas no Exemplo 6.1 (Parte 1) não estão totalmente contidas nas regiões sombreadas e, portanto, não garantem os limitantes desejados para o atraso virtual máximo por fluxo.



(a) Região onde  $\beta_1$  garante um atraso virtual máximo  $\bar{D}$  ao fluxo 1, e a curva de serviço  $\beta_1^0$  obtida no Exemplo 6.1 (Parte 1)



(b) Região onde  $\beta_2$  garante um atraso virtual máximo  $\bar{D}$  ao fluxo 2, e a curva de serviço  $\beta_2^0$  obtida no Exemplo 6.1 (Parte 1)

Figura 6.4: Regiões onde as curvas de serviço  $\beta_1$  e  $\tilde{\beta}_1 = \beta_2$  podem estar definidas, de forma a garantir um atraso virtual máximo  $\bar{D} = \bar{D}_1 = \bar{D}_2 = 135s$  e repetição das curvas obtidas no Exemplo 6.1 (Parte 1).

A partir do Exemplo 6.1 (Parte 2), pode-se perceber que as curvas de serviço  $\beta_1^\Theta$  e  $\beta_2^\Theta$  definidas pelo Teorema 17 não garantem necessariamente os mesmos limitantes de parâmetros de QoS por fluxo, para os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c). O Teorema 19 a seguir apresenta expressões alternativas para as curvas de serviço  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$ , de forma a garantir o mesmo limitante de atraso virtual máximo,  $\bar{D}$ .

**Teorema 19.** Para as mesmas condições apresentadas no Teorema 18, as curvas de serviço do fluxo  $i$  e do agregado de tráfegos restantes podem ser definidas, respectivamente, da seguinte

maneira:

$$\begin{aligned}\beta_i^{\mathcal{D}} &= \sigma_i^* \delta_{\bar{D}}, \\ \tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}} &= \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}},\end{aligned}$$

sendo,  $\delta_{\bar{D}} = \inf \{\delta_d : \beta \preceq \sigma^* \delta_d\}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, note-se que  $\delta_{\bar{D}} = \inf \{\delta_d : \beta \preceq \sigma^* \delta_d\}$  é um possível limitante para o atraso máximo do sistema como um todo e para os diferentes fluxos isoladamente, porque o sistema atende uma disciplina de filas FIFO bit a bit, o que implica que  $\bar{D} = \bar{D}_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Dessa forma, tem-se:  $\hat{x}_i \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \hat{y}_i$  e  $\hat{x}_{(i)} \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \hat{y}_{(i)}$ . Mas  $\hat{x}_i = \hat{x}_i \sigma_i^*$  e  $\hat{x}_{(i)} = \hat{x}_{(i)} \sigma_{(i)}^*$ , da Proposição 8. Daí, tem-se:  $\hat{y}_i \preceq \hat{x}_i \delta_{\bar{D}} = \hat{x}_i \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} = \hat{x}_i \beta_i^{\mathcal{D}}$  e  $\hat{y}_{(i)} \preceq \hat{x}_{(i)} \delta_{\bar{D}} = \hat{x}_{(i)} \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} = \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}}$ , e, portanto,  $\beta_i^{\mathcal{D}}$  e  $\tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}}$  são possíveis curvas de serviço para o sistema.  $\square$

As curvas de serviço  $\beta_i^{\mathcal{D}}$  e  $\tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}}$  definidas pelo Teorema 19 são tais que  $\beta_i^{\mathcal{D}} \succcurlyeq \delta_{\bar{D}}$  e  $\tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}} \succcurlyeq \delta_{\bar{D}}$ , mas não são mais conservativas do que  $\delta_{\bar{D}}$ . Por exemplo, de acordo com a demonstração do Teorema 19, tem-se:  $\hat{x}_i \beta_i^{\mathcal{D}} = \hat{x}_i \delta_{\bar{D}}$  e  $\hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}} = \hat{x}_{(i)} \delta_{\bar{D}}$ . Assim, as curvas  $\delta_{\bar{D}}$  e  $\sigma_i^* \delta_{\bar{D}}$  levam ao mesmo limitante para o fluxo  $\hat{y}_i$ ; e as curvas  $\delta_{\bar{D}}$  e  $\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}}$  levam ao mesmo limitante para a curva  $\hat{y}_{(i)}$ . Além disso, as curvas  $\beta_i^{\mathcal{D}}$  e  $\tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}}$  sempre satisfazem as considerações  $\beta_i^{\mathcal{D}} \succcurlyeq \beta$  e  $\tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}} \succcurlyeq \beta$ , o que não é necessariamente atendido pela curva  $\delta_{\bar{D}}$ . Por fim, note-se que as curvas  $\beta_i^{\mathcal{D}} = \sigma_i^* \delta_{\bar{D}}$  e  $\beta_{(i)}^{\mathcal{D}} = \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}}$  garantem a equivalência total entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) e também garantem a equivalência em relação ao atraso virtual máximo por fluxo. De fato, por um lado, da propriedade (PM.6), Tabela 3.10,  $F\{\beta_i^{\mathcal{D}}, \tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}}\} = F\{\sigma_i^* \delta_{\bar{D}}, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}}\} = \sigma^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \beta$ , de forma que a inequação (6.16) é satisfeita. Por outro lado, tem-se:

$$\delta_{\bar{D}} = \inf \{\delta_d : \beta \preceq \sigma^* \delta_d\} = \inf \{\delta_d : \beta_i^{\mathcal{D}} \preceq \sigma_i^* \delta_d\} = \inf \{\delta_d : \tilde{\beta}_i^{\mathcal{D}} \preceq \sigma_{(i)}^* \delta_d\}.$$

Cruz (1995) e Malaney e Rogers (1999) apresentam curvas de serviço para o fluxo  $i$  semelhantes à curva  $\beta_i^{\mathcal{D}}$ , com a diferença de que são consideradas funções  $\sigma$  invariantes no tempo. Além disso, Malaney e Rogers (1999) consideram o fluxo de entrada conhecido fazendo  $\sigma_i = \hat{x}_i \bowtie \hat{x}_i$ .

Considere-se a expressão que define  $\beta_1^{\Theta}$  no Teorema 18. Trocando-se  $\beta_1^{\Theta}$  por  $\beta_i^{\Theta}$  e  $\sigma_2^*$  por  $\sigma_{(i)}^*$ , é possível estender este teorema para o caso de um multiplexador com  $M$  entradas, sendo  $i$  o fluxo de interesse. Assim, dos Teoremas 18 e 19, podem-se obter duas curvas de serviço possíveis para o fluxo  $i$ :  $\beta_i^{\Theta}$  e  $\beta_i^{\mathcal{D}}$ . Nesse caso, vale salientar que nem sempre é possível provar que a curva  $\beta_i^{\Theta} \wedge \beta_i^{\mathcal{D}}$  é uma possível curva de serviço para o fluxo  $i$ . Quando esse for o caso, como discutido na Seção 5.6 (página 67), é mais vantajoso trabalhar com as duas redes  $\beta$  que

representam as curvas de serviço obtidas anteriormente em paralelo, do que trabalhar com uma das seguintes curvas isoladamente:  $\beta_i^\Theta$ ,  $\beta_i^\mathcal{D}$  ou  $\beta_i^\Theta \oplus \beta_i^\mathcal{D}$ . Nesse caso, as restrições entre os fluxos  $x_i$  e  $y_i$  na Figura 6.3(c) podem ser representadas como ilustrado na Figura 6.5.

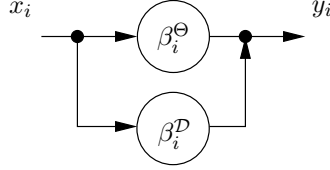


Figura 6.5: Restrições de serviço entre os fluxos  $x_i$  e  $y_i$  na Figura 6.3(c).

Para achar um limitante para a curva  $y_i$ , por exemplo, pode-se usar a seguinte inequação:  $\hat{y}_i \preceq \hat{x}_i \beta_i^\Theta \wedge \hat{x}_i \beta_i^\mathcal{D}$ , ou equivalentemente,

$$\hat{y}_i \preceq \hat{x}_i \beta_i^\Theta \wedge \hat{x}_i \delta_{\bar{D}}.$$

Da mesma forma, pode-se limitar a curva de saída do agregado de tráfegos excetuando-se o fluxo  $i$ ,  $\hat{y}_{(i)}$ , da seguinte maneira:

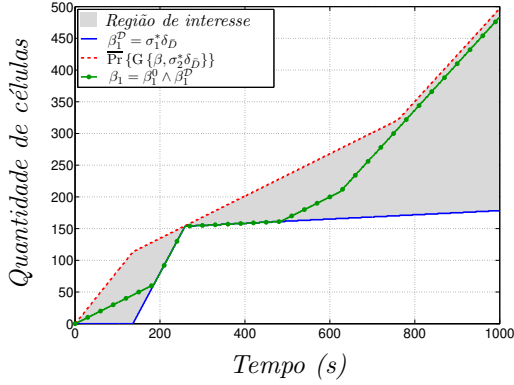
$$\hat{y}_{(i)} \preceq \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i^\Theta \wedge \hat{x}_{(i)} \delta_{\bar{D}}.$$

Para os demais limitantes de parâmetros de QoS, pode-se utilizar os resultados da Tabela 5.3.

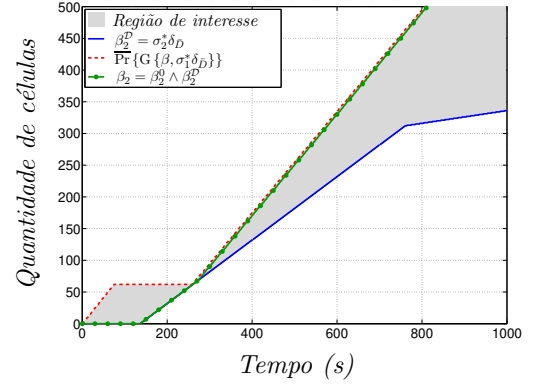
O exemplo a seguir, ilustra um caso em que  $\beta_1^\Theta \wedge \beta_1^\mathcal{D}$  não é uma curva de serviço possível para um dado sistema.

**Exemplo 6.1** (Parte 3). *As Figuras 6.6(a) e 6.6(b) reaperentam, para o Exemplo 6.1, a região onde  $\beta_1 \in \mathcal{C}_t$  e  $\tilde{\beta}_1 = \beta_2 \in \mathcal{C}_t$  devem estar definidas, de forma a garantir que o limitante para o atraso virtual máximo seja mantido, após o desacoplamento do fluxo 1 (região sombreada). Estão também ilustradas as curvas  $\beta_1 = \beta_1^0 \wedge \beta_1^\mathcal{D}$  e  $\beta_2 = \beta_2^0 \wedge \beta_2^\mathcal{D}$ , sendo  $\beta_1^0$  e  $\beta_2^0$  obtidas através do Teorema 17, fazendo  $\Theta = 0$ . Note-se, da Figura 6.6(c), que  $\beta_1$  não é uma curva de serviço possível para o tráfego 1, porque  $\hat{y}_1 \not\preceq \hat{x}_1 \beta_1$ , isto é, existem instantes em que a função  $\hat{y}_1$  está abaixo da função  $\hat{x}_1 \beta_1$  (a exemplo dos pontos em torno de  $t = 300s$  mostrados no detalhe). A função  $\beta_2$ , por outro lado, é uma curva de serviço possível para o tráfego 2, porque  $\beta_2 \succcurlyeq \delta_{\bar{D}}$  ( $\bar{D} = 135s$ ), como pode ser observado na Figura 6.6(d). Nas Figuras 6.6(e) e 6.6(f), pode-se perceber a melhora obtida nos limitantes dos fluxos de saída por fluxo, quando são mantidas em paralelo as curvas de serviço  $\beta_k^\Theta$  e  $\beta_k^\mathcal{D}$ ,  $k = 1, 2$ , conforme ilustrado na Figura 6.5.*

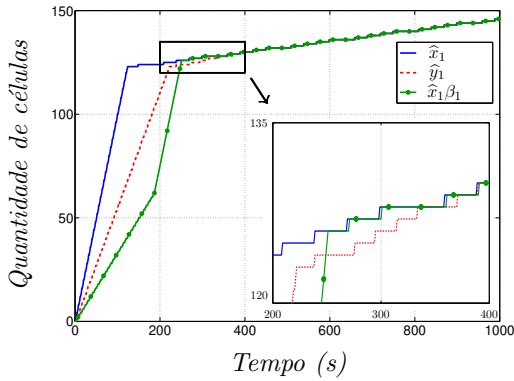
Nesta seção, foram apresentadas algumas definições possíveis para as curvas de serviço de um tráfego de interesse e para o agregado dos demais tráfegos em um sistema com multiplexação. O método empregado para a determinação dessas curvas de serviço foi o de garantir a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c), em relação ao atraso virtual



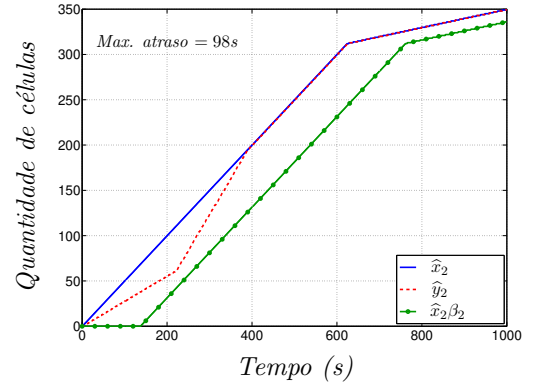
(a) Região onde qualquer  $\beta_1$  garante um atraso virtual máximo  $D$  ao fluxo 1 e curva  $\beta_1 = \beta_1^0 \wedge \beta_1^D$



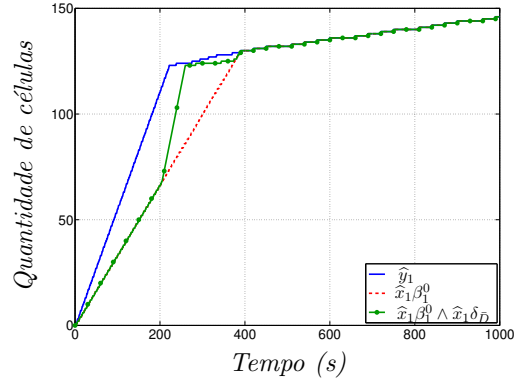
(b) Região onde qualquer  $\beta_2$  garante um atraso virtual máximo  $D$  ao fluxo 2 e curva  $\beta_2 = \beta_2^0 \wedge \beta_2^D$



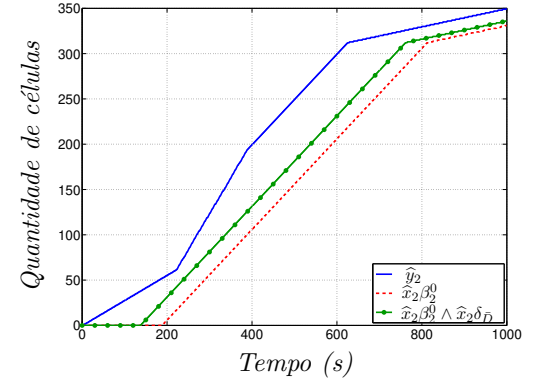
(c) Fluxos de entrada e saída para o fluxo 1, respectivamente  $x_1$  e  $y_1$ ; e curva  $\hat{x}_1 \beta_1 = \hat{x}_1 \otimes [\beta_1^0 \wedge \beta_1^D]$



(d) Fluxos de entrada e saída para o fluxo 2, respectivamente  $x_2$  e  $y_2$ ; e curva  $\hat{x}_2 \beta_2 = \hat{x}_2 \otimes [\beta_2^0 \wedge \beta_2^D]$



(e) Curvas  $\hat{x}_1 \beta_1^0$  e  $\hat{x}_1 \beta_1^0 \wedge \hat{x}_1 \delta_{\bar{D}}$ , ambas possíveis limitantes para  $\hat{y}_1$



(f) Curvas  $\hat{x}_2 \beta_2^0$  e  $\hat{x}_2 \beta_2^0 \wedge \hat{x}_2 \delta_{\bar{D}}$ , ambas possíveis limitantes para  $\hat{y}_2$

Figura 6.6: Problema da determinação de possíveis curvas de serviço para tráfegos multiplexados. Em (a) e (b), regiões onde as curvas de serviço  $\beta_1$  e  $\beta_2$  devem estar definidas, de forma a garantir um atraso virtual máximo  $\bar{D} = \bar{D}_1 = \bar{D}_2 = 135s$  e as curvas  $\beta_k = \beta_k^0 \wedge \beta_k^D$ ,  $k = 1, 2$ , sendo  $\beta_k^0$ ,  $k = 1, 2$  obtidas através do Teorema 17. Em (c) e (d), as curvas  $\hat{x}_k$ ,  $\hat{y}_k$  e  $\hat{x}_k \beta_k$ ,  $k = 1, 2$ , para o caso particular em que  $x_1(\nu) = 0,8 \times \sigma_1(\nu)$  e  $x_2(\nu) = \sigma_2(\nu)$ ,  $\forall \nu$ . Em (e) e (f), as curvas  $\hat{y}_k$ ,  $\hat{x}_k \beta_k^0$  e  $\hat{x}_k \beta_k^0 \wedge \hat{x}_k \delta_{\bar{D}}$ ,  $k = 1, 2$ , para as mesmas entradas usadas em (c) e (d).

máximo por fluxo. Esse mesmo método será utilizado na próxima seção, em relação ao atraso virtual máximo por fluxo em um dado instante.

## 6.4 Atraso virtual instantâneo em relação ao fluxo de saída

Considere-se a definição de atraso virtual no instante  $t$  apresentada no Capítulo 4 (equação 4.14), ou seja:

$$d(t) = \inf \{d \geq 0 : x(0, t) \leq y(0, t + d)\}.$$

De forma semelhante, pode-se definir o *atraso virtual no instante  $t$  em relação ao fluxo de saída*,  $\Delta(t)$ , da seguinte maneira:

$$\Delta(t) = \inf \{d \geq 0 : x(0, t - d) \leq y(0, t)\}. \quad (6.31)$$

O atraso virtual em relação ao fluxo de saída pode ser entendido como o atraso sofrido por um bit com prioridade mínima que *deixa* um sistema no instante  $t$ , considerando que nenhum bit de maior prioridade entrou no sistema.

Define-se como atraso virtual *a priori* o atraso que um bit *deverá sofrer* ao passar por um sistema; e atraso virtual *a posteriori* o atraso que esse bit *deve ter sofrido* ao passar pelo sistema, considerando uma disciplina de filas FIFO bit a bit. As funções  $d(t)$  e  $\Delta(t)$  definidas acima podem ser entendidas, respectivamente, como os atrasos virtuais *a priori* e *a posteriori* de um determinado bit. Neste trabalho, chama-se simplesmente “atraso virtual” o atraso *a priori*,  $d(t)$ ; e “p-atraso”, o atraso virtual *a posteriori*,  $\Delta(t)$ . A seguir, discute-se como as áreas de convergência discutidas na seção anterior, definidas pelas inequações (6.27) e (6.28), são alteradas, quando se refaz a análise em relação ao p-atraso.

Note-se que se um sistema apresenta um p-atraso  $\Delta(t)$ , definido pela equação (6.31), então satisfaz a seguinte inequação:

$$x(0, t - \Delta(t)) \leq y(0, t).$$

A seguir, o método de determinação de limitantes de parâmetros de desempenho definido no capítulo anterior é usado para determinar um limitante para o p-atraso. Antes, é necessária a definição de mais um elemento do dióide  $\mathcal{C}$ .

**Definição 24** (Função de p-atraso variável). *Seja uma função  $a : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ . Define-se a função de p-atraso variável  $\delta_a \in \mathcal{C}$  da seguinte maneira:*

$$\delta_a(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t - a(t) \leq s, \\ +\infty, & \text{se } t - a(t) > s. \end{cases}$$

A Tabela 6.1 apresenta algumas propriedades interessantes da função  $\delta_a$ . As demonstrações destas proposições encontram-se no Apêndice D.

| Validade                                         | Propriedade                                                                                                                                                           | Referência |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$                    | $(x\delta_a)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - a(t)), & \text{se } s \leq t - a(t), \\ x(s, s), & \text{se } t - a(t) < s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$ | (PDA.1)    |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$                    | Se $x(s, s) = 0, \forall s$ , então $(x \otimes \delta_a)(s, t) = x(s, [t - a(t)]^+)$                                                                                 | (PDA.2)    |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$                    | $(\delta_a \bowtie x)(s, t) = \begin{cases} x([s - a(s)]^+, t), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$                                         | (PDA.3)    |
| $\forall x_k \in \mathcal{C}_t, k = 1, \dots, M$ | $F\{x_1\delta_a, \dots, x_M\delta_a\} = F\{x_1, \dots, x_M\}\delta_a$                                                                                                 | (PDA.4)    |

Tabela 6.1: Propriedades da função de atraso variável  $\delta_a \in \mathcal{C}$ .

Como fica evidenciado pela propriedade (PDA.1), a função  $\delta_a$  pode ser usada para representar atrasos variáveis em funções em  $\mathcal{C}_t$ .

**Observação 22.** *Da propriedade (PDA.1), pode-se concluir que, quando a função  $a(t)$  não é constante em  $t$ , então o produto  $x\delta_a$  é uma função variante no tempo, mesmo quando  $x$  é invariante.*

A partir da propriedade (PDA.1), o Teorema 18 pode ser estendido para um multiplexador com  $M$  fluxos de entrada, sendo  $i$  o fluxo de interesse, e sendo  $\Theta : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  uma função qualquer.

**Teorema 20.** *Considere-se um multiplexador com  $M$  fluxos de entrada e disciplina de filas FIFO bit a bit, que atende uma curva de serviço  $\beta \in \mathcal{C}$ . Sejam  $x_k, y_k, \sigma_k \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, o fluxo de entrada, o fluxo de saída e uma curva de regulação para o tráfego  $k$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Sejam, ainda,  $x = x_1 + \dots + x_M = F\{x_1, \dots, x_M\}$  o fluxo de entrada total do sistema;  $y = y_1 + \dots + y_M = F\{y_1, \dots, y_M\}$  o fluxo total de saída; e  $\sigma_{(i)}^*$  a curva de regulação do agregado de tráfegos excetuando-se o fluxo  $i$ , definida pela equação (6.20). Definem-se curvas de serviço para o tráfego  $i$  e para o agregado de fluxos restante, respectivamente, da seguinte maneira:*

$$\beta_i^{\Theta_i}(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta_i(t), \\ \left( G\left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\Theta_i} \right\} \right)(s, t), & \text{se } s < t - \Theta_i(t), \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \tilde{\Theta}_i(t), \\ \left( G\left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_{\tilde{\Theta}_i} \right\} \right)(s, t), & \text{se } s < t - \tilde{\Theta}_i(t), \end{cases}$$

sendo  $\Theta_i : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  e  $\tilde{\Theta}_i : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  funções pré-definidas quaisquer.

*Demonstração.* A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice D. □

**Observação 23.** Caso se exija  $\beta_i, \tilde{\beta}_i \in \mathcal{C}_t$ , pode-se definir as seguintes curvas de serviço para o fluxo  $i$  e para o fluxo agregado, excetuando-se  $i$ :  $\beta_i = \overline{\text{Pr}}\{\beta_i^{\Theta_i}\}$  e  $\tilde{\beta}_i = \overline{\text{Pr}}\{\tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}\}$ . De fato, se  $\beta_i^{\Theta_i}$  e  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}$  são curvas de serviço para o fluxo  $i$  e para o fluxo agregado excetuando-se  $i$ , respectivamente, então  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  também são curvas de serviço para o fluxo  $i$  e para o fluxo agregado, porque  $\beta_i \succcurlyeq \beta_i^{\Theta_i}$  e  $\tilde{\beta}_i \succcurlyeq \tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}$ .

**Observação 24.** Caso não se exija  $\beta_i^{\Theta_i}, \tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i} \in \mathcal{C}_t$ , pode-se obter limitantes não-decrescentes em  $t$  para as funções  $\hat{y}_i \in \mathcal{C}_t$  e  $\hat{y}_{(i)} \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, a partir das funções  $\underline{\text{Pr}}\{\hat{x}_i\beta_i^{\Theta_i}\}$  e  $\underline{\text{Pr}}\{\hat{x}_{(i)}\tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}\}$ . De fato, como  $\beta_i^{\Theta_i}$  é uma curva de serviço para o fluxo  $i$  e  $y_i \in \mathcal{C}_t$ , tem-se:  $\forall \tau \leq t: y_i(0, t) \geq y_i(0, \tau) \geq (x_i\beta_i^{\Theta_i})(0, \tau)$ , de forma que  $y_i(0, t) \geq \max_{\tau \leq t} \{(x_i\beta_i^{\Theta_i})(0, \tau)\} = \left(\underline{\text{Pr}}\{x_i\beta_i^{\Theta_i}\}\right)(0, t) = \left(\underline{\text{Pr}}\{\hat{x}_i\beta_i^{\Theta_i}\}\right)(0, t)$ . De forma semelhante, prova-se que  $y_{(i)}(0, t) \geq \left(\underline{\text{Pr}}\{\hat{x}_{(i)}\tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}\}\right)(0, t)$ .

Da Observação 22, a menos que as funções  $\Theta_i(t)$  e  $\tilde{\Theta}_i(t)$  sejam constantes, as curvas  $\beta_i^{\Theta_i}$  e  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}$  definidas pelo Teorema 20 são funções variantes no tempo. Desta forma, mesmo quando as curvas  $\sigma$ ,  $\beta$  e  $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , são invariantes no tempo, pode-se associar aos fluxos de entrada curvas de serviço variantes no tempo.

A função de atraso variável,  $\delta_a$ , pode ser usada para determinar um limitante para o p-atraso  $\Delta(t)$ . Considere-se o sistema da Figura 5.3, por conveniência repetida na Figura 6.7. O Teorema 21 determina um limitante  $a(t)$  para o p-atraso  $\Delta(t)$  da rede  $\beta$  ilustrada na Figura 6.7.

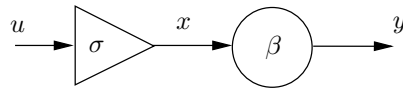


Figura 6.7: Rede com curva de serviço  $\beta$  conectada a um regulador  $\sigma$ .

**Teorema 21.** Para o sistema da Figura 6.7, sejam as funções  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ . Considere-se que  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x} \succcurlyeq \hat{u}$  (o sistema é causal); e  $\hat{u} \succcurlyeq \hat{e}$  (o sistema está vazio em  $s = t = 0$ ). Um limitante  $a(t)$  para o p-atraso  $\Delta(t)$  da rede  $\beta$  representada na Figura 6.7 corresponde à solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \delta_a &= \inf \delta_\alpha, \\ \text{s. a } \sigma * \delta_\alpha &\succcurlyeq \beta. \end{aligned} \tag{6.32}$$

*Demonstração.* A demonstração desta proposição encontra-se no Apêndice D.  $\square$

**Proposição 22.** Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída de um determinado sistema, e seja  $a(t)$  um limitante para o p-atraso desse sistema. A curva  $\beta = \delta_a$  é uma curva de serviço para esse sistema.

*Demonstração.* A função  $a(t)$  é um limitante para o p-atraso. Dessa forma, tem-se,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $y(0, t) \geq x(0, t - a(t))$ , de modo que, da propriedade (PDA.1), Tabela 6.1, tem-se:  $\hat{y} \preceq \hat{x}\delta_a$ . Assim, a curva  $\beta = \delta_a$  é tal que  $\hat{x}\beta = \hat{x}\delta_a \succ \hat{y}$ , e, portanto, é uma curva de serviço para o sistema.  $\square$

Repetindo os mesmos procedimentos usados na seção anterior, pode-se chegar a resultados semelhantes às inequações (6.27)-(6.30). Nesse caso, pode-se mostrar que as curvas de serviço  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  garantem a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c), se as seguintes inequações são satisfeitas:

$$\sigma_i^* \delta_a \succ \beta_i \succ G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\}, \quad (6.33)$$

$$\sigma_{(i)}^* \delta_a \succ \tilde{\beta}_i \succ G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_a \right\}, \quad (6.34)$$

ou ainda, quando se exigem curvas de serviço em  $\mathcal{C}_t$ , garante-se a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c), se as seguintes inequações são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \underline{\Pr} \left\{ \sigma_i^* \delta_a \right\} \succ \beta_i \succ \overline{\Pr} \left\{ G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\} \right\}, \\ \underline{\Pr} \left\{ \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\} \succ \tilde{\beta}_i \succ \overline{\Pr} \left\{ G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_a \right\} \right\}. \end{aligned}$$

A função  $\delta_a$  apresenta algumas propriedades úteis para descrever sistemas FIFO bit a bit. A seguir, estão enunciadas algumas dessas propriedades. As demonstrações encontram-se no Apêndice D.

**Proposição 23.** *Considere-se um sistema com  $M$  fluxos de entrada e disciplina de serviços FIFO bit a bit. Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída totais do sistema;  $x_k, y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída do fluxo  $k$ ; e  $i$  o fluxo de interesse. Da Definição 20, têm-se:  $x = F \left\{ x_i, x_{(i)} \right\}$  e  $y = F \left\{ y_i, y_{(i)} \right\}$ . Se  $\hat{y} \preceq \hat{x}\delta_a$ , então*

$$\hat{y}_i \preceq \hat{x}_i \delta_a,$$

$$\hat{y}_{(i)} \preceq \hat{x}_{(i)} \delta_a;$$

e se  $\hat{y} \succ \hat{x}\delta_a$ , então

$$\hat{y}_i \succ \hat{x}_i \delta_a,$$

$$\hat{y}_{(i)} \succ \hat{x}_{(i)} \delta_a.$$

Na Seção 6.2, comentou-se que um sistema causal atende naturalmente as restrições de fluxo em relação aos fluxos totais de entrada e saída, ou seja  $\hat{y} \succ \hat{x}$ , e em relação aos fluxos de entrada e saída isoladamente, ou seja  $\hat{y}_k \succ \hat{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Essas considerações são consequência direta da Proposição 23, para o caso em que  $a(t) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ .

Sejam, agora, as seguintes definições:

$$\Delta(t) = \inf \{d \geq 0 : y(0, t) \geq x(0, t - d)\}, \quad (6.35)$$

$$\Delta^-(t) = \sup \{d \geq 0 : y(0, t) \leq x(0, t - d)\}, \quad (6.36)$$

$$\Delta_k(t) = \inf \{d \geq 0 : y_k(0, t) \geq x_k(0, t - d)\}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (6.37)$$

$$\Delta_k^-(t) = \sup \{d \geq 0 : y_k(0, t) \leq x_k(0, t - d)\}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (6.38)$$

$$\Lambda(s, t) = \inf \{d \geq 0 : \sigma^*(s, t - d) \leq \beta(s, t)\}. \quad (6.39)$$

A seguir, mostra-se que não só os limitantes do atraso virtual máximo devem ser iguais em sistemas FIFO bit a bit, ou seja,  $\bar{D} = \bar{D}_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , mas também os p-atrasos devem ser iguais, ou seja,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $\Delta(t) = \Delta_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, M$ , sendo  $\Delta(t)$  e  $\Delta_k(t)$  definidas, respectivamente, segundo as equações (6.35) e (6.37). Além disso, a partir da função  $\Lambda(s, t)$  definida na equação (6.39), chega-se a um limitante para  $\Delta(t)$ . Esse limitante corresponde à solução do seguinte problema:  $\delta_a = \inf \{\delta_\alpha : \sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta\}$ . O resultado obtido é a função  $a(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Lambda(s, t)\}$ . Note-se que a função  $a(t)$  definida dessa forma é sempre não-decrescente em  $t$ .

**Proposição 24.** *Considere-se que  $M$  tráfegos entram em um elemento de rede com disciplina de filas FIFO bit a bit. Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$  os fluxos de entrada e saída totais do sistema; e  $x_k, y_k \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída do tráfego  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ . As seguintes igualdades são satisfeitas:*

$$\Delta(t) = \Delta^-(t) = \Delta_k(t) = \Delta_k^-(t), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

sendo  $\Delta(t)$ ,  $\Delta^-(t)$ ,  $\Delta_k(t)$  e  $\Delta_k^-(t)$  definidas pelas equações (6.35)-(6.38). Conseqüentemente, têm-se:

$$\hat{y} = \hat{x} \delta_\Delta,$$

$$\hat{y}_k = \hat{x}_k \delta_\Delta, \quad k = 1, \dots, M.$$

**Proposição 25.** *Sejam  $\sigma \in \mathcal{C}_t$  e  $\beta \in \mathcal{C}$ , respectivamente, uma curva de regulação e uma curva de serviço para um dado sistema com disciplina de filas FIFO bit a bit, fluxo de entrada  $x$  e fluxo de saída  $y$ , e seja  $a : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  a seguinte função:*

$$a(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Lambda(s, t)\}.$$

A função  $a(t)$  definida desta maneira corresponde à solução do seguinte problema de otimização:  $\delta_a = \inf \{\delta_\alpha : \sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta\}$ . Em particular, quando  $\sigma$  e  $\beta$  são funções invariantes no tempo, então  $\Lambda(s, t) = \Lambda(t - s)$ . Daí, tem-se:

$$a(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Lambda(t - s)\} = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Lambda(\nu)\}. \quad (6.40)$$

A partir das Proposições 24 e 25, pode-se definir possíveis curvas de serviço para o tráfego  $i$  e para o agregado de tráfegos restante, respectivamente,  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$ , de forma a sempre garantir que os limitantes  $\bar{D}$  e  $a(t)$  sejam respeitados por fluxo, isto é, de forma a satisfazer as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \bar{D}_k, \quad k = 1, \dots, M, \\ a(t) &= a_k(t), \quad k = 1, \dots, M.\end{aligned}$$

**Teorema 26.** *Para as mesmas condições apresentadas no Teorema 18, as curvas de serviço do fluxo  $i$  e do agregado de tráfegos restante podem ser definidas, respectivamente, da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}\beta_i^a &= \sigma_i^* \delta_a, \\ \tilde{\beta}_i^a &= \sigma_{(i)}^* \delta_a,\end{aligned}$$

sendo  $a(t)$  definida pela Proposição 25 ou pela equação (6.40).

*Demonstração.* Primeiramente, note-se que  $\delta_a = \inf \{\delta_\alpha : \sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta\}$  é um possível limitante para o p-atraso do sistema como um todo e dos diferentes fluxos isoladamente. Dessa forma,  $a(t) = a_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Assim,  $\hat{x}_i \delta_a \succcurlyeq \hat{y}_i$  e  $\hat{x}_{(i)} \delta_a \succcurlyeq \hat{y}_{(i)}$ . Mas  $\hat{x}_i = \hat{x}_i \sigma_i^*$  e  $\hat{x}_{(i)} = \hat{x}_{(i)} \sigma_{(i)}^*$ . Daí, têm-se:  $\hat{y}_i \preccurlyeq \hat{x}_i \delta_a = \hat{x}_i \sigma_i^* \delta_a = \hat{x}_i \beta_i^a$  e  $\hat{y}_{(i)} \preccurlyeq \hat{x}_{(i)} \delta_a = \hat{x}_{(i)} \sigma_{(i)}^* \delta_a = \hat{x}_{(i)} \tilde{\beta}_i^a$ , e, portanto,  $\beta_i^a$  e  $\tilde{\beta}_i^a$  são possíveis curvas de serviço para o sistema.  $\square$

**Teorema 27.** *As curvas de serviço  $\beta_i^a$ ,  $\tilde{\beta}_i^a$  definidas anteriormente garantem:*

1. *Equivalência total entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em relação aos tráfegos totais de entrada e saída;*
2. *Equivalência por fluxo desses sistemas em relação ao limitante do p-atraso,  $a(t)$ ;*
3. *Equivalência por fluxo desses sistemas em relação ao limitante de atraso virtual,  $\bar{D}$ .*

Considere-se a função  $\beta_i^{\Theta_i}$  definida pelo Teorema 20. Da Observação 24, quando não se exige  $\beta_i^{\Theta_i} \in \mathcal{C}_t$ , então, da definição do operador  $G\{\cdot\}$ , tem-se:

$$\beta_i^{\Theta_i}(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta_i(t), \\ \max \{0, \beta(s, t) - (\sigma_{(i)} \delta_{\Theta_i})(s, t)\}, & \text{se } s < t - \Theta_i(t). \end{cases} \quad (6.41)$$

Analisando a equação (6.41), pode-se perceber que, de forma semelhante ao parâmetro  $\Theta$  do Teorema 17, deve existir uma função  $\Theta_i(t)$  ótima para o Teorema 20. A seguir, apresenta-se a escolha para  $\Theta_i(t)$  utilizada neste trabalho. Da equação (6.41), note-se que, mesmo quando  $s < t - \Theta_i(t)$ , tem-se  $\beta_i^{\Theta_i}(s, t) = 0$ , se  $\beta(s, t) \leq (\sigma_{(i)} \delta_{\Theta_i})(s, t)$ . Dessa forma um valor ótimo para

$\Theta_i(t)$  deve ser tal que  $\beta(s, t) \geq (\sigma_{(i)}\delta_{\Theta_i})(s, t)$ ,  $\forall s, t$  tais que  $s < t - \Theta_i(t)$ . Além disso, quanto menor for a função  $\Theta_i(t)$ , mais cedo a função  $\beta_i^{\Theta_i}$  pode assumir valores não-nulos. Do exposto anteriormente, considerou-se que uma boa escolha para  $\Theta_i(t)$  corresponde à solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \delta_{\Theta_i} &= \inf \delta_\alpha, \\ \text{s. a } \sigma_{(i)}\delta_\alpha &\succcurlyeq \beta. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Comparando as equações (6.32) e (6.42), pode-se perceber que a função  $\Theta_i(t)$  definida pela equação (6.42) corresponde exatamente ao limitante de atraso virtual de um sistema com curva de regulação total de entrada  $\sigma_{(i)} = \sigma_{(i)}^*$  e curva de serviço  $\beta$ . A solução para (6.42), portanto, pode ser determinada a partir da Proposição 25, fazendo  $\Lambda_{\Theta_i}(s, t) = \inf \{d \geq 0 : \sigma_{(i)}(s, t - d) \leq \beta(s, t)\}$ .

A curva de serviço  $\beta_i^{\Theta_i}$  definida pelo Teorema 20 e a curva de serviço  $\beta_i^a$  definida pelo Teorema 26 podem ser funções variantes no tempo, mesmo que  $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  e  $\beta$  sejam funções invariantes no tempo. A Proposição 28 indica as condições necessárias para garantir a existência de uma curva de serviço  $\beta_i$  para o fluxo de interesse que seja invariante no tempo e que atenda a inequação (6.33).

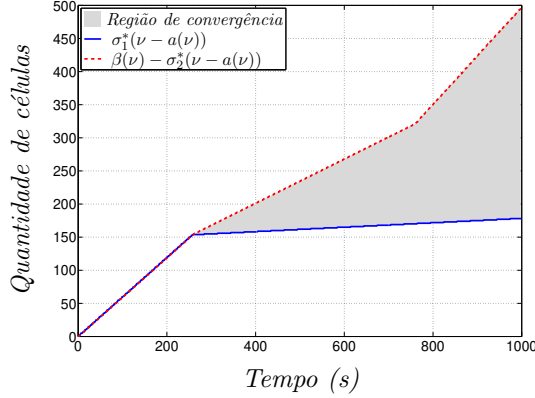
**Proposição 28.** *Considere-se um sistema com  $M$  fluxos de entrada. Sejam  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ , respectivamente, uma curva de regulação e uma curva de serviço para o sistema como um todo;  $\sigma_k \in \mathcal{C}_t$ , uma curva de regulação para o fluxo  $k$ ,  $k = 1, \dots, M$ ; e  $i$  o fluxo de interesse, de forma que  $\sigma^* = F\{\sigma_i^*, \sigma_{(i)}^*\}$ . Considerem-se, ainda,  $\sigma, \beta, \sigma_k, k = 1, \dots, M$  funções invariantes no tempo, e seja  $a : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  tal que  $\delta_a = \inf \{\delta_\alpha : \beta \preccurlyeq \sigma^*\delta_\alpha\}$ . Se uma curva de serviço  $\beta_i$  é invariante no tempo e garante equivalência em relação ao atraso então ela está completamente definida na seguinte região:*

$$\forall \nu \in \mathbb{Z}^+ : \sigma_i^*(\nu - a(\nu)) \leq \beta_i(\nu) \leq \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu)).$$

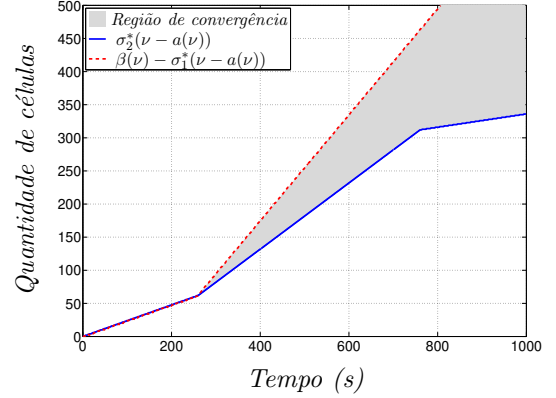
O exemplo a seguir mostra, para as mesmas curvas de regulação e de serviço do Exemplo 6.1, que não existe uma curva  $\beta_i$  invariante no tempo tal que se obtenha a equivalência dos sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em relação ao p-atraso.

**Exemplo 6.1** (Parte 4). *Sejam as mesmas curvas de regulação e de serviço do Exemplo 6.1, e seja  $a(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Lambda(\nu)\}$ . As Figuras 6.8(a) e 6.8(b) ilustram as regiões onde  $\beta_1 \in \mathcal{C}_t$  e  $\tilde{\beta}_1 = \beta_2 \in \mathcal{C}_t$  devem estar definidas, de forma a garantirem os mesmos limitantes para o p-atraso do sistema como um todo e dos fluxos  $x_1$  e  $x_2$ , caso seja considerado que  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são funções invariantes no tempo (Proposição 28). Da Figura 6.8(c), note-se que a curva  $\beta_1(\nu) = \sigma_1^*(\nu - a(\nu))$  não é uma curva de serviço para o fluxo 1, porque  $\hat{y}_1 \not\preccurlyeq \hat{x}_1\beta_1$ . Para esse exemplo, portanto,*

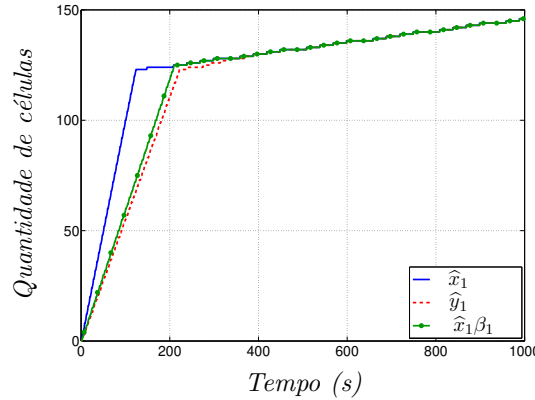
não existe uma função invariante no tempo que satisfaça a região definida na Proposição 28. Ou seja, não existe uma função  $\beta_1$  invariante no tempo que garanta a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c), em relação ao  $p$ -atraso.



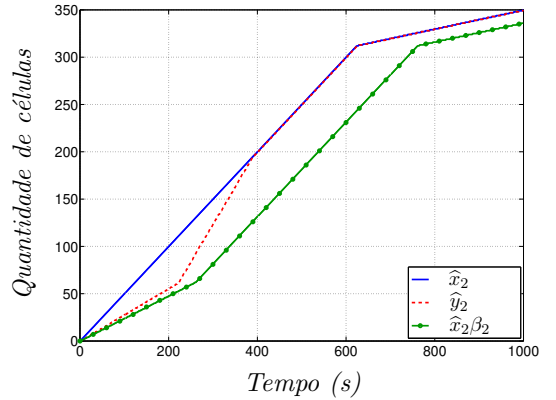
(a) Região onde  $\beta_1$  (invariante) garante o limitante  $a(t)$  para  $\Delta(t)$



(b) Região onde  $\beta_2$  (invariante) garante o limitante  $a(t)$  para  $\Delta(t)$



(c) Fluxos de entrada e saída para o fluxo 1, respectivamente  $\hat{x}_1$  e  $\hat{y}_1$ ; e curva  $\hat{x}_1\beta_1$ , sendo  $\beta_1(\nu) = \sigma_1^*(\nu - a(\nu))$



(d) Fluxos de entrada e saída para o fluxo 2, respectivamente  $\hat{x}_2$  e  $\hat{y}_2$ ; e curva  $\hat{x}_2\beta_2$ , sendo  $\beta_2(\nu) = \sigma_2^*(\nu - a(\nu))$

Figura 6.8: Em (a) e (b), regiões onde as curvas  $\beta_1$  e  $\beta_2$  garantem os mesmos limitantes  $a(t)$  para o  $p$ -atraso do sistema como um todo e dos fluxos  $x_1$  e  $x_2$  isoladamente, de acordo com a Proposição 28 (as funções  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são consideradas invariantes no tempo). Em (c) e (d), as curvas  $\hat{x}_k$ ,  $\hat{y}_k$  e  $\hat{x}_k\beta_k$ ,  $k = 1, 2$ , considerando-se  $\beta_k(\nu) = \sigma_k^*(\nu - a(\nu))$ ,  $k = 1, 2$ . Para esse exemplo, têm-se:  $x_1(0, \nu) = 0,8 \times \sigma_1(\nu)$  e  $x_2(0, \nu) = \sigma_2(\nu)$ .

A partir do Exemplo 6.1 (Parte 4), e da Proposição 28, pode-se perceber que nem sempre é possível encontrar curvas de serviço invariantes no tempo, para o fluxo  $i$  ou para o agregado de tráfegos restante de forma a garantir a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em relação aos atrasos virtuais máximos por fluxo, mesmo quando os fluxos de entrada e saída e as curvas de regulação e de serviço são funções invariantes no tempo. Dessa

forma, para se determinar as curvas de serviço para o tráfego  $i$  e para o agregado excetuando-se  $i$ , quando fluxos e curvas de regulação e de serviço são funções invariantes no tempo, é necessário, antes, escolher uma das seguintes opções:

1. As curvas de serviço  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  devem ser funções invariantes no tempo, mesmo que sejam sub-ótimas, ou seja, mesmo que levem a limitantes para o atraso virtual máximo,  $\bar{D}$ , ou para o p-atraso,  $a(t)$ , maiores do que a consideração FIFO garante. Nesse caso,  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  podem ser calculadas de acordo com os Teoremas 17 ou 18, e o parâmetro  $\Theta$  pode ser calculado a partir da equação (6.1).
2. As curvas de serviço  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  devem ser funções invariantes no tempo, mesmo que sejam sub-ótimas em relação ao limitante do p-atraso,  $a(t)$ , mas devem garantir a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em relação ao limitante do atraso virtual máximo,  $\bar{D}$ . Nesse caso, as curvas  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  podem ser calculadas diretamente através do Teorema 19, ou pode-se utilizar as curvas de serviço obtidas a partir dos Teoremas 18 e 19 em paralelo, conforme discussão anterior. Qualquer que seja a opção escolhida, o parâmetro  $\bar{D}$  corresponde à solução do seguinte problema:  $\delta_{\bar{D}} = \inf \{\delta_d : \sigma^* \delta_d \succcurlyeq \beta\}$ , isto é,  $\bar{D}$  corresponde ao menor atraso que pode ser dado à curva  $\sigma^*$  de forma a torná-la menor do que a curva  $\beta$  em qualquer instante; e o parâmetro  $\Theta$  pode ser calculado a partir da equação (6.1).
3. As curvas de serviço  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  devem garantir a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em relação a  $\bar{D}$  e  $a(t)$ , mesmo que isso resulte em funções variantes no tempo. Nesse caso,  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  podem ser determinadas a partir do Teorema 26, sendo  $a(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Lambda(\nu)\}$ , e  $\Lambda(\nu) = \inf \{d : \sigma^*(\nu - d) \leq \beta(\nu)\}$ . Alternativamente, pode-se utilizar as curvas de serviço obtidas a partir dos Teoremas 20 e 26 em paralelo. Nesse caso, no Teorema 20, pode-se fazer  $\Theta_i(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Lambda_{\Theta_i}(\nu)\}$ , com  $\Lambda_{\Theta_i}(\nu) = \inf \{d : \sigma_{(i)}^*(\nu - d) \leq \beta(\nu)\}$ .

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para o Exemplo 6.1, quando  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  correspondem à junção em paralelo das curvas de serviço obtidas pelos Teoremas 20 e 26. Para esse exemplo, têm-se  $\beta_1 \in \mathcal{C}_t$  e  $\beta_2 \in \mathcal{C}_t$ .

**Exemplo 6.1** (Parte 5). *Considerem-se  $\sigma$ ,  $\beta$  e  $\sigma_k$ ,  $k = 1, 2$ , as curvas definidas no Exemplo 6.1. Além disso, sejam:*

- $\beta_k^0$  a curva de serviço do fluxo  $k$  ( $k = 1, 2$ ) obtida a partir do Teorema 18, fazendo  $\Theta = 0$ ;
- $\beta_k^{\Theta_k}$  a curva de serviço do fluxo  $k$  obtida a partir do Teorema 20, fazendo  $\Theta_k(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Lambda_{\Theta_k}(\nu)\}$ , com  $\Lambda_{\Theta_1}(\nu) = \inf \{d : \sigma_2^*(\nu - d) \leq \beta(\nu)\}$  e  $\Lambda_{\Theta_2}(\nu) = \inf \{d : \sigma_1^*(\nu - d) \leq \beta(\nu)\}$ ;

- $\beta_k^a = \sigma_k^* \delta_a$  a curva de serviço do fluxo  $k$  obtida a partir do Teorema 26, sendo  $a(t)$  definida pela equação (6.40).

As Figuras 6.9(a) e 6.9(b) ilustram as curvas de serviço obtidas a partir do Teorema 20; e as Figuras 6.9(c) e 6.9(d) ilustram as curvas  $\hat{y}_k$ ,  $\hat{x}_k \beta_k^0$  e  $\hat{x}_k \beta_k^{\Theta_k} \wedge \hat{x}_k \beta_k^a$ ,  $k = 1, 2$ . Conforme esperado, têm-se:  $\hat{y}_1 \preceq \hat{x}_1 \beta_1$  e  $\hat{y}_2 \preceq \hat{x}_2 \beta_2$ . Além disso, das Figuras 6.9(c) e 6.9(d), note-se que as curvas  $\hat{x}_1 \beta_1^{\Theta_1} \wedge \hat{x}_1 \beta_1^a$  e  $\hat{x}_2 \beta_2^{\Theta_2} \wedge \hat{x}_2 \beta_2^a$  são melhores limitantes para  $\hat{y}_1$  e  $\hat{y}_2$ , respectivamente, do que as curvas  $\hat{x}_1 \beta_1^0$  e  $\hat{x}_2 \beta_2^0$ .

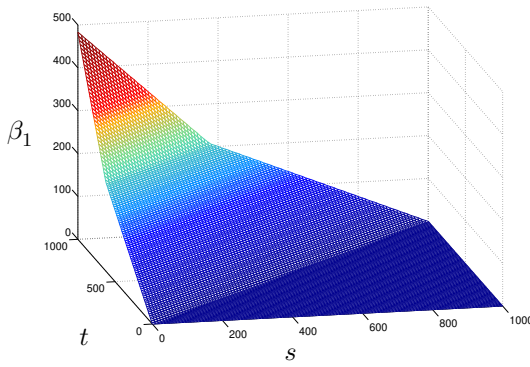
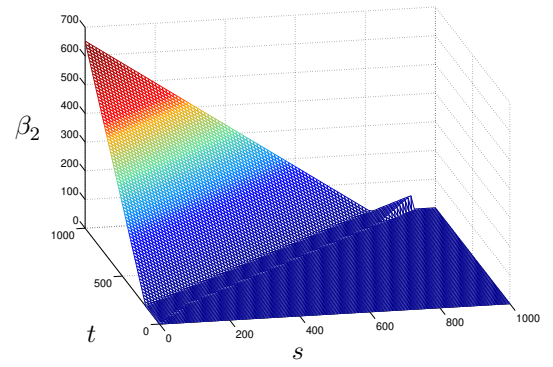
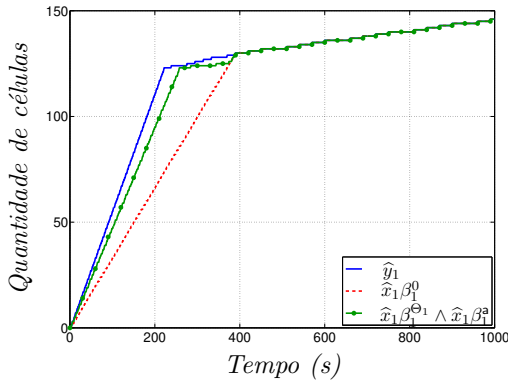
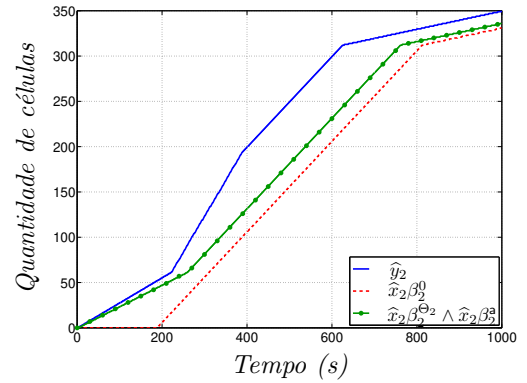
(a) Curva de serviço  $\beta_1$ (b) Curva de serviço  $\beta_2$ (c) Curva  $\hat{y}_1$  e seus limitantes  $\hat{x}_1 \beta_1^0$  e  $\hat{x}_1 \beta_1^{\Theta_1} \wedge \hat{x}_1 \beta_1^a$ (d) Curva  $\hat{y}_2$  e seus limitantes  $\hat{x}_2 \beta_2^0$  e  $\hat{x}_2 \beta_2^{\Theta_2} \wedge \hat{x}_2 \beta_2^a$ 

Figura 6.9: Problema da determinação de possíveis curvas de serviço para tráfegos multiplexados. Em (a) e (b), curvas de serviço  $\beta_1 \in \mathcal{C}_t$  e  $\beta_2 \in \mathcal{C}_t$  obtidas do Teorema 27. Em (c) e (d), curvas  $\hat{y}_k$ ,  $\hat{x}_k \beta_k^0$  e  $\hat{x}_k \beta_k^{\Theta_k} \wedge \hat{x}_k \beta_k^a$ ,  $k = 1, 2$ . Para esse exemplo, têm-se:  $x_1(0, \nu) = 0,8 \times \sigma_1(\nu)$  e  $x_2(0, \nu) = \sigma_2(\nu)$ .

A partir dos Teoremas 17 a 19 (caso invariante no tempo) ou dos Teoremas 20 e 26 (caso variante no tempo) é possível determinar curvas de serviço entre os fluxos  $x_i$  e  $y_i$  para o sistema ilustrado na Figura 6.3. Além disso, da Proposição 25, é possível determinar um limitante  $a_i(t)$  para o p-atraso entre  $x_i$  e  $y_i$ . A partir desses resultados, pode-se calcular um limitante  $\bar{D}_i$

para o atraso virtual entre  $x_i$  e  $y_i$ ; uma função  $W_i(t)$ , limitante para o *backlog* entre  $x_i$  e  $y_i$  no instante  $t$ ; e uma curva de regulação  $\sigma_{y_i}$  para o fluxo  $y_i$ . Da Tabela 5.1, têm-se:

$$\begin{aligned}\bar{D}_i &= \sup_{t \geq 0} \{a_i(t)\}, \\ W_i(t) &= (\beta_i \setminus \sigma_i^*)(t, t), \\ \sigma_{y_i} &= \beta_i \setminus \sigma_i^*.\end{aligned}\tag{6.43}$$

A equação (6.43) ainda pode ser melhorada, no caso em que a rede  $\beta$  ilustrada na Figura 6.3(a) corresponda a um enlace conservativo.<sup>4</sup> A Proposição 29 apresenta este resultado.

**Proposição 29.** *Quando a rede  $\beta$  ilustrada na Figura 6.3(a) corresponde a um enlace conservativo de capacidade  $\beta = C_o^*$ , então o fluxo  $\hat{y}_i$  atende a seguinte curva de regulação:  $\sigma_{y_i} = (\beta_i \setminus \sigma_i^*) \oplus C_o^*$ .*

*Demonstração.* A demonstração desta proposição encontra-se no Apêndice D. □

## 6.5 Conclusão

Neste capítulo, abordou-se o problema de determinação de curvas de serviço para um fluxo de interesse,  $i$ , pertencente a um agregado de tráfegos. A literatura aborda esse problema apenas para um cenário de curvas invariantes no tempo. Dessa forma, todas as curvas de serviço variantes no tempo apresentadas neste capítulo são contribuições deste trabalho. Também é uma contribuição deste trabalho a definição e uso da função de p-atraso.

Em Cruz (1998), definiu-se uma família de curvas de serviço parametrizada por um número inteiro positivo,  $\Theta$ . Na Seção 6.1, analisou-se a otimalidade destas curvas de serviço em relação a  $\Theta$ , enfatizando-se que nem todos os valores do parâmetro  $\Theta$  levam a curvas de serviço válidas (são consideradas válidas apenas as funções não-decrescentes no tempo).

Na seção seguinte, foi definido formalmente o problema de determinação da curva de serviço de um tráfego de interesse dentre um agregado de tráfegos e, a partir do método apresentado na Seção 5.1 para determinação de limitantes, foi feita uma investigação das restrições necessárias para garantir a equivalência total em relação aos fluxos totais de entrada e saída antes e depois do desacoplamento do fluxo de interesse (Figuras 6.3(b) e 6.3(c)).

Uma característica marcante de sistemas FIFO bit a bit é o fato de atrasos instantâneos dos fluxos de entrada individualmente e do agregado de todos os fluxos de entrada serem iguais. Tendo essa característica em vista, na Seção 6.3, determinou-se uma região onde a

---

<sup>4</sup>Um enlace conservativo é aquele que atende o fluxo de entrada à máxima taxa de transmissão possível. Os enlaces conservativos estão analisados detalhadamente no Capítulo 7, Seção 7.1.

curva de serviço para o tráfego de interesse deve estar definida, de forma a garantir essa igualdade de limitantes de atraso. Através de um contra-exemplo, mostrou-se que o limitante  $\mathcal{C}$ -inferior da região obtida não é necessariamente uma curva de serviço para o fluxo de interesse. Portanto, nem todas as funções da região obtida são válidas como curva de serviço para o tráfego de interesse. Por outro lado, provou-se que o limitante  $\mathcal{C}$ -superior da mesma região não só é uma curva de serviço válida, mas também garante a igualdade de limitantes desejada. Ainda nesta seção, a partir do Exemplo 6.1 (Parte 2), mostrou-se que as curvas de serviço definidas por Cruz (1998) não ficam necessariamente na região obtida anteriormente. Desta forma, não garantem necessariamente limitantes de atraso máximo iguais para os diversos fluxos individualmente e para o fluxo total de entrada.

Como discutido no Capítulo 5, quando é possível determinar diversas curvas de serviço para um certo fluxo, mas não é possível determinar uma relação de ordenamento entre estas curvas, é mais vantajoso trabalhar com as curvas obtidas em paralelo. A partir desse resultado, conseguiu-se obter, para o fluxo de saída de um exemplo ilustrativo, um limitante menos conservativo do que o limitante obtido através da curva de serviço definida em Cruz (1998).

Na Seção 6.4, foi introduzido o conceito de p-atraso e os resultados da Seção 6.3 foram estendidos para esse novo parâmetro de QoS. Dos resultados obtidos, definiu-se uma nova curva de serviço para o fluxo de interesse dependente apenas de limitantes para o p-atraso do sistema em estudo e da curva de regulação  $\sigma_i$ . Definiu-se, ainda, uma nova família de curvas de serviço para o tráfego de interesse parametrizadas por uma função inteira positiva  $\Theta_i(t)$ . Uma das vantagens dessa família de curvas de serviço é o fato de que todas as curvas obtidas são válidas, independentemente das definições das funções  $\Theta_i(t)$ , porque o conjunto  $\mathcal{C}$  não exige funções não-decrescentes em  $t$ , e os operadores de projeção permitem encontrar limitantes não-decrescentes em  $t$ , mesmo a partir de funções com porções decrescentes em  $t$ . Finalmente, definiu-se uma estratégia para a determinação de  $\Theta_i(t)$  e foi retomada a discussão sobre a manutenção de curvas de serviço em paralelo, quando não é possível estabelecer uma relação de ordenamento entre as curvas obtidas.

Uma contribuição importante deste capítulo é a idéia de ser possível e potencialmente mais vantajoso obter curvas de serviço variantes no tempo mesmo em um cenário invariante no tempo. Esse resultado, por si só, justifica a definição de um dióide variante no tempo para o *Network Calculus*. Como pode ser visto pelo Exemplo 6.1 (Parte 5), permitir curvas de serviço variantes no tempo, mesmo quando tráfegos de entrada e curvas de regulação e de serviço são funções invariantes, agrega informações às curvas de serviço obtidas. Essa informação adicionada pode melhorar os limitantes de parâmetros de QoS (como o fluxo de saída, por exemplo) no início de rajadas, quando o sistema experimenta um transitório na função de entrada.

## Capítulo 7

# Sistemas de pequena complexidade: elementos de redes isolados

Neste capítulo, os resultados obtidos anteriormente são usados para analisar elementos encontrados na modelagem de sistemas de comunicações. Seis elementos são analisados. Todos os sistemas são considerados causais. São eles:

1. Enlaces conservativos com capacidade de transmissão variável no tempo;
2. Reguladores ótimos (*greedy shapers*);
3. Canais com atraso máximo determinado;
4. *Buffers* de recepção;
5. Reordenadores de bits;
6. Multiplexadores.

Para cada tipo de elemento, considera-se que os fluxos de entrada atendem a curvas de regulação conhecidas. Para cada elemento, determinam-se os seguintes parâmetros:

- Um limitante  $\bar{D}$  para o atraso máximo, determinado a partir do Teorema 13 ou da equação (4.15).
- Uma função  $a(t)$ , limitante para o p-atraso, determinada a partir do Teorema 21 e/ou uma função  $D(t)$ , limitante de atraso máximo no instante  $t$ , determinada a partir do Teorema 30 (apresentado a seguir).
- Um limitante  $W(t)$  para o *backlog* máximo no instante  $t$ , determinado a partir do Teorema 14.
- Uma curva de regulação  $\sigma_y$  para o fluxo de saída  $y$ , determinado a partir do Teorema 16.

Ao longo do capítulo alguns exemplos simples são apresentados. Em geral, estes exemplos ilustram como uma solução obtida a partir da álgebra de dióides pode ser instanciada, conforme indicado no método da Figura 4.9.

No final do capítulo, discute-se como alterar o modelo de um elemento básico qualquer, de forma a permitir situações com perdas.

## 7.1 Enlace conservativo com capacidade variável e regulador “guloso” (*greedy shaper*)

Nesta seção, analisa-se um enlace conservativo com capacidade de transmissão conhecida e variável no tempo (Definição 25). Esse exemplo foi analisado anteriormente em Chang *et al.* (2002), mas foi tratado de forma diferente.

**Definição 25** (Sistema conservativo). *Um sistema é dito conservativo, quando atende o fluxo de entrada à máxima taxa possível. Um sistema conservativo, portanto, não pára de transmitir dados, a menos que seu backlog seja nulo; além disso, não atende o fluxo de entrada a uma taxa de serviço menor do que sua capacidade de transmissão máxima.*

Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída de um enlace conservativo com capacidade máxima de transmissão  $C \in \mathcal{C}_t$ . O fluxo de saída desse enlace é restrito pela capacidade  $C$ . Nesse caso, a seguinte inequação deve ser satisfeita,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $y(0, t) - y(0, s) \leq C^*(s, t)$ . Esse sistema funciona, portanto, como um regulador  $C^*$  e deve satisfazer as seguintes equações em  $\mathcal{C}$ :  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$  e  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}C^*$ , ou equivalentemente,

$$\hat{y} = \hat{y}(e \oplus C^*) \oplus \hat{x} = \hat{y}C^* \oplus \hat{x}. \quad (7.1)$$

Da Definição 25, a saída de um sistema conservativo deve ser máxima, o que corresponde à solução ótima da equação (7.1). De acordo com o Teorema 1, tem-se:

$$\hat{y} = \hat{x}C^*. \quad (7.2)$$

Da equação (7.2),  $\forall t$ , existe um  $\xi$  tal que  $y(0, t) = x(0, \xi) + C^*(\xi, t)$ . Mas  $x(0, \xi) \geq y(0, \xi)$ ,  $\forall \xi$ . Daí,  $y(0, t) \geq y(0, \xi) + C^*(\xi, t)$  de forma que  $y(0, t) - y(0, \xi) \geq C^*(\xi, t)$ . No entanto, como mencionado anteriormente,  $y(0, t) - y(0, s) \leq C^*(s, t)$ ,  $\forall s, t$ . Dessa maneira, a seguinte equação deve ser satisfeita:

$$y(0, t) - y(0, \xi) = C^*(\xi, t). \quad (7.3)$$

Do exposto anteriormente, tem-se:

$$y(0, t) = y(0, \xi) + C^*(\xi, t) = x(0, \xi) + C^*(\xi, t),$$

o que implica que  $x(0, \xi) = y(0, \xi)$ . Portanto, para um enlace conservativo, sempre existe um valor de  $\xi$  tal que  $x(0, \xi) = y(0, \xi)$ , isto é, o *backlog* no instante  $\xi$  é nulo, e a equação (7.3) é satisfeita.

Da equação (7.2), um enlace conservativo sempre atende a inequação  $\hat{y} \preceq \hat{x}C^*$ , admitindo uma curva de serviço  $C^*$ . Dessa forma, um sistema conservativo com capacidade máxima  $C$  funciona ao mesmo tempo como um regulador  $C^*$  e como uma rede  $\beta = C^*$ . Por essa razão, escolheu-se um símbolo diferenciado para esses sistemas, conforme ilustra a Figura 7.1(a).

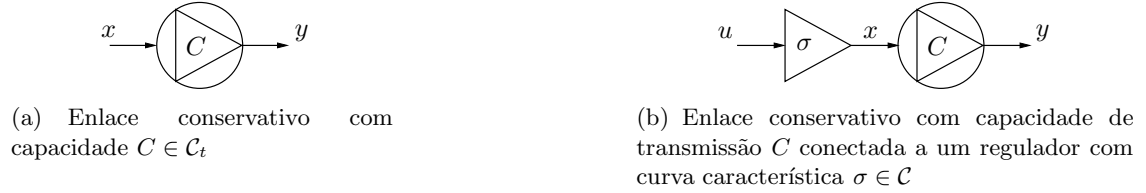


Figura 7.1: Enlace conservativo com capacidade de transmissão variável. Em (a), a representação gráfica desse sistema. Em (b), um enlace conservativo com capacidade de transmissão variável conectado em série a um regulador  $\sigma$ .

Ao conectar um enlace conservativo a um regulador  $\sigma$ , conforme ilustra a Figura 7.1(b), pode-se calcular um limitante para o p-atraso  $a(t)$  entre os fluxos  $x$  e  $y$ . O limitante  $a(t)$  corresponde à seguinte função de atraso:

$$\delta_a = \inf \{ \delta_\alpha : \sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq C^* \}.$$

Da Tabela 5.1, têm-se:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \sup_{t \geq 0} \{a(t)\}, \\ W(t) &= (C^* \bowtie \sigma^*)(t, t), \\ \sigma_y &= C^* \bowtie \sigma^*. \end{aligned}$$

Defina-se, agora, um regulador “guloso” aquele cuja saída é não-nula sempre que há dados a serem transmitidos. Um regulador guloso não insere atrasos em pacotes, a menos que necessário para satisfazer a restrição de regulação (equação 4.8). Seja  $C \in \mathcal{C}$  a curva característica de um regulador guloso com fluxos de entrada e saída, respectivamente,  $x$  e  $y$ . Da mesma forma que um enlace conservativo de capacidade  $C$ , um regulador guloso corresponde à solução ótima da equação (7.1) e atua ao mesmo tempo como um regulador  $C^*$  e como uma rede  $C^*$ . Assim, o mesmo símbolo ilustrado na Figura 7.1(a) pode ser usado para representar as restrições destes sistemas, e todos os resultados apresentados nesta seção também são válidos para esses reguladores. Reguladores gulosos invariantes no tempo foram anteriormente analisados (Le Boudec *et al.*, 2000b; Firoiu *et al.*, 2002).

## 7.2 Canal com atraso máximo $D$

Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída de um canal com atraso máximo  $D(t)$ . Considere-se a definição de atraso virtual no instante  $t$  apresentada no Capítulo 4, isto é:

$$d(t) = \inf \{d \geq 0 : x(0, t) \leq y(0, t + d)\}.$$

Neste trabalho, define-se um “canal de atraso máximo  $D$ ” um elemento em que qualquer bit que entra no instante  $t$  sofre um atraso de, no máximo,  $D(t)$ . Um canal de atraso máximo  $D$  é tal que  $d(t) \leq D(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ , quaisquer que sejam os fluxos  $x$  e  $y$ . Dessa forma, a seguinte inequação deve ser satisfeita,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $x(0, t) \leq y(0, t + D(t))$ . Para escrever essa inequação no dióide  $\mathcal{C}$ , é conveniente definir mais um elemento em  $\mathcal{C}$ .

**Definição 26** (Função de atraso variável  $\partial_D \in \mathcal{C}$ ). *Seja uma função  $D : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ . Define-se a função de atraso variável  $\partial_D \in \mathcal{C}$  da seguinte maneira:*

$$\partial_D(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s + D(s) \geq t, \\ +\infty, & \text{se } s + D(s) < t. \end{cases}$$

Como a função  $\delta_a$ , a função  $\partial_D$  pode ser usada para representar deslocamentos horizontais variáveis em funções em  $\mathcal{C}_t$  e  $\mathcal{C}_s$ . Algumas propriedades da função  $\partial_D$  estão apresentadas na Tabela 7.1.

| Validade                                         | Propriedade                                                                                                                                                             | Referência |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$                    | $(\partial_D x)(s, t) = \begin{cases} x(s + D(s), t), & \text{se } s + D(s) \leq t, \\ x(t, t) & \text{se } s + D(s) > t \geq s, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$ | (PPD.1)    |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$                    | Se $x(t, t) = 0, \forall t$ , então $(\partial_D \otimes x)(s, t) = x(s + D(s), t)$                                                                                     | (PPD.2)    |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$                    | $(x \phi \partial_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t + D(t)), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$                                                | (PPD.3)    |
| $\forall x_k \in \mathcal{C}_t, k = 1, \dots, M$ | $F\{x_1 \phi \partial_D, \dots, x_M \phi \partial_D\} = F\{x_1, \dots, x_M\} \phi \partial_D$                                                                           | (PPD.4)    |

Tabela 7.1: Propriedades da função de atraso variável  $\partial_D \in \mathcal{C}$ .

Da comparação das Tabelas 7.1 e 6.1, pode-se perceber que a função  $\delta_a$  é conveniente para descrever atrasos em relação ao fluxo de saída (atrasos de bits que deixam um sistema no instante  $t$ ) e para representar curvas de serviço do tipo  $\delta_a$ . Por outro lado, a função  $\partial_D$  é adequada para descrever atrasos em relação ao fluxo de entrada (atrasos de bits que chegam a um sistema no instante  $t$ ) e para modelar fluxos de prioridades distintas ou representar situações em que a ordem de serviço de bits é diferente da ordem de chegada. Estas últimas funcionalidades de  $\partial_D$  serão exploradas detalhadamente na Seção 7.4.

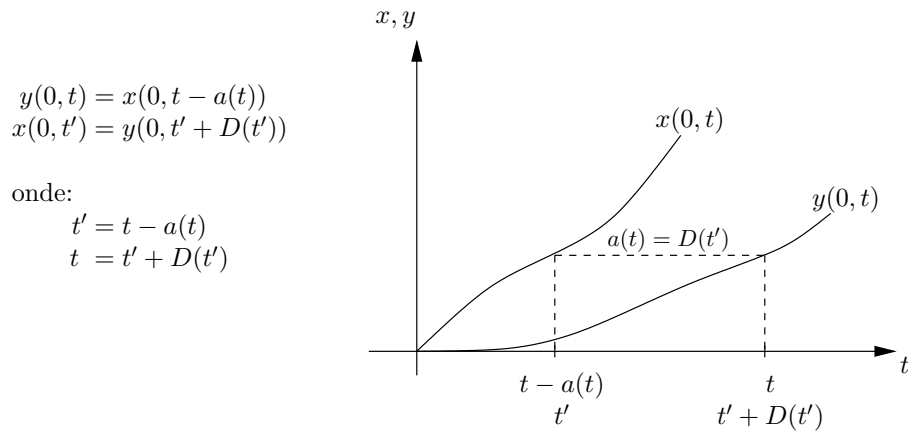


Figura 7.2: Curvas de entrada e saída de um dado sistema, mostrando a correspondência entre as funções de atraso  $a(t)$  e  $D(t')$ .

Existe uma relação entre as funções limitantes de atraso virtual  $a(t)$  e  $D(t)$ . Através da Figura 7.2, pode-se perceber que a relação entre  $a(t)$  e  $D(t)$  é clara, quando os fluxos de entrada e saída são estritamente crescentes. Contudo, essa relação fica menos visível, quando os fluxos de entrada e/ou saída apresentam patamares ou descontinuidades. Por isso, definir expressões fechadas para as residuações  $(x \phi \delta_a)$  e  $(\partial_D \backslash x)$  e para as multiplicações  $x \partial_D$  e  $\delta_a x$  não é prático. A definição das duas funções de atraso,  $\delta_a$  e  $\partial_D$ , permite a utilização de uma ou de outra conforme a conveniência, embora, de uma forma geral, seja possível definir  $D(t)$  dado  $a(t)$ , ou vice-versa, de forma a satisfazer a equação  $(\hat{x} \delta_a) \phi \partial_D = \hat{x}$ , para um  $x$  dado.

Da Definição 26 e da propriedade (PPD.3), Tabela 7.1, a inequação  $x(0, t) \leq y(0, t + D(t))$  que descreve o comportamento de um elemento com atraso máximo  $D(t)$  pode ser escrita em  $\mathcal{C}$  da seguinte maneira:

$$\hat{x} \succcurlyeq \hat{y} \phi \partial_D. \quad (7.4)$$

Pode-se associar à equação (7.4) um novo elemento básico. O símbolo escolhido está apresentado na Figura 7.3.

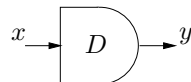


Figura 7.3: Linha de atraso máximo no instante  $t$  limitado pela função  $D(t)$ .

Em conformidade com os demais elementos básicos definidos no Capítulo 4, considera-se que o elemento ilustrado na Figura 7.3 é causal. Desta forma, as seguintes equações

devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{y} \oplus \hat{x}, \\ \hat{x} &= \hat{x} \oplus \hat{y} \phi \partial_D.\end{aligned}$$

A partir do método para determinação de limitantes introduzido no Capítulo 5 e dos canais com atraso máximo  $D$  apresentados nesta seção, pode-se determinar um limitante para o atraso virtual máximo do sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$  ilustrado na Figura 7.4. O resultado obtido está apresentado a seguir, no Teorema 30.

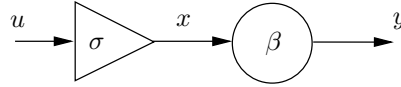


Figura 7.4: Rede com curva de serviço  $\beta$  conectada a um regulador  $\sigma$ .

**Teorema 30.** *Para o sistema da Figura 7.4, sejam as funções  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ . Considere-se que  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x} \succcurlyeq \hat{u}$  (o sistema é causal); e que  $\hat{u} \succcurlyeq e$  (o sistema está vazio em  $s = t = 0$ ). Um limitante  $D(t)$  para o atraso virtual no instante  $t$  da rede  $\beta$  representada na Figura 7.4 corresponde à resposta do seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned}\partial_D &= \inf \partial_d, \\ \text{s. a } \sigma^* &\succcurlyeq \beta \phi \partial_d.\end{aligned}$$

*Demonstração.* A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice E. □

De maneira análoga à apresentada no Capítulo 6, a função  $D(t)$  definida pelo Teorema 30 pode ser determinada a partir das seguintes equações:

$$\Omega(s, t) = \inf \{d \geq 0 : \beta(s, t + d) \geq \sigma^*(s, t)\}, \quad (7.5)$$

$$D(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Omega(s, t)\}. \quad (7.6)$$

Ou ainda, se  $\sigma$  e  $\beta$  forem funções invariantes no tempo, da seguinte maneira:

$$\Omega(\nu) = \inf \{d \geq 0 : (\beta(\nu + d) \geq \sigma^*(\nu))\}, \quad (7.7)$$

$$D(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Omega(\nu)\}. \quad (7.8)$$

A Tabela 7.2 resume os resultados dos Teoremas 21 e 30. Note-se a correspondência entre os limitantes  $a(t)$  e  $D(t)$ .

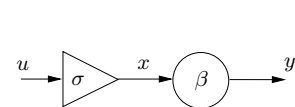
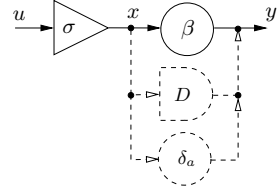
| Sistema original                                                                  | Sistema equivalente                                                               | Parâmetros de equivalência                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | $\delta_a = \inf \delta_\alpha,$ $\text{s. a } \sigma^* \delta_\alpha \succ \beta$<br>$\partial_D = \inf \partial_d,$ $\text{s. a } \sigma^* \succ \beta \not\prec \partial_d$ |

Tabela 7.2: Parâmetros de atraso obtidos para um sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$ .

A seguir, apresenta-se um exemplo de um canal com atraso máximo conhecido: uma linha de atraso constante.

**Exemplo 7.1** (Linha de atraso constante). *Uma linha de atraso constante é um elemento que atrasa um determinado fluxo de entrada de uma quantidade fixa de tempo,  $D(t) = D, \forall t$ . Esse sistema satisfaz a seguinte equação:  $y(0, t) = x(0, t - D)$ , ou equivalentemente em  $\mathcal{C}$ :  $\hat{y} = \hat{x} \delta_D$ . Seja  $t' = t - D$ . A seguinte equação também deve ser satisfeita,  $\forall t' \in \mathbb{Z}^+$ :  $y(0, t' + D) = x(0, t')$ , ou em  $\mathcal{C}$ :  $\hat{x} = \hat{y} \phi \partial_D$ . A inequação (7.4), portanto, é satisfeita. Além disso, um canal de atraso máximo  $D$  satisfaz naturalmente a restrição de fluxo. De fato:  $\hat{y} = \hat{x} \delta_D = \hat{x} (e \oplus \delta_D) \succ \hat{x}$ . Dessa forma a equação de fluxo,  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$ , é redundante. Uma linha de atraso constante satisfaz, ainda, uma curva de serviço  $\beta = \delta_D$ . De fato, da idempotência da adição,  $\hat{y} = \hat{x} \delta_D = \hat{x} \delta_D \oplus \hat{y}$ . Portanto, esse sistema é, ao mesmo tempo, uma rede  $\delta_D$  e um canal com atraso máximo  $D$ . Para enfatizar esse fato, pode-se utilizar um símbolo diferente para representá-lo, conforme ilustra a Figura 7.5(a).*

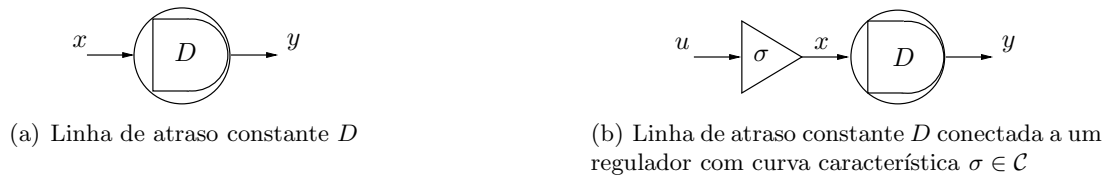


Figura 7.5: Linha de atraso constante  $D$ . Em (a), a representação gráfica de uma linha de atraso constante  $D$ . Em (b), uma linha de atraso constante conectada em série a um regulador  $\sigma$ .

Quando uma linha de atraso constante  $D$  é conectada a um regulador  $\sigma$ , conforme ilustra a Figura 7.5(b), obtêm-se os seguintes limitantes para o backlog máximo no instante  $t$  e para a curva de regulação do tráfego de saída,  $\sigma_y$ :

$$W(t) = (\delta_D \not\prec \sigma^*)(t, t),$$

$$\sigma_y = \delta_D \not\prec \sigma^*.$$

A Tabela 7.3 apresenta os símbolos e restrições matemáticas do enlace conservativo de capacidade variável (ou regulador “guloso”), do canal com atraso máximo conhecido e da linha de atraso constante.

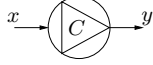
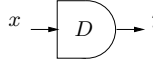
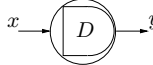
| Elemento                                                        | Representação gráfica                                                             | Restrições matemáticas                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Enlace conservativo com capacidade $C$ ou regulador $C$ guloso: |  | $\hat{y} = \hat{x}C^*$                                                                   |
| Linha de atraso máximo $D(t)$ sem perdas:                       |  | $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$<br>$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y} \phi \partial_D$ |
| Linha de atraso constante $D$ :                                 |  | $\hat{y} = \hat{x}\delta_D$                                                              |

Tabela 7.3: Elementos básicos adicionais e suas restrições em  $\mathcal{C}$ .

**Exemplo 7.2** (Enlace conservativo a menos de um período de latência ou vacância). *Considere-se um enlace não-conservativo com tempo máximo de latência de  $V(s)$  unidades de tempo para uma rajada com início no instante  $s$ . Esse período de latência é caracterizado por uma pausa na transmissão de dados na saída de um elemento com backlog não-nulo, ou seja, o sistema não está vazio, mas não transmite dados na saída. Como em Cruz (1991a), considera-se que o início de um período de latência só pode acontecer quando o sistema está vazio e que, uma vez que o sistema transmite dados, o faz à sua capacidade máxima de transmissão,  $C \in (\mathcal{C}_s \cap \mathcal{C}_t)$ . Esse sistema, portanto, é conservativo a menos do período de latência. Seja  $s$  o instante de início de uma rajada de dados (o sistema está vazio em  $s$ ) e sejam  $u$  e  $y$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída. Esse sistema só pode começar a transmitir dados após  $s + v(s)$  unidades de tempo, onde  $v(s) \leq V(s)$  é o período de latência observado para uma rajada com início em  $s$ . A partir de  $s + v(s)$ , o sistema transmite dados à máxima taxa possível. Dessa forma, a seguinte expressão deve ser satisfeita:  $y(0, t) - u(0, s) = y(0, t) - y(0, s) = C(s + v(s), t) \geq C(s + V(s), t)$ , dado que  $C \in \mathcal{C}_s$ . Dessa forma, em  $\mathcal{C}$ , têm-se:*

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u},$$

$$\hat{u}(\partial_V C) = \hat{u}(\partial_V C) \oplus \hat{y}.$$

A Figura 7.6 apresenta as restrições deste sistema entre  $u$  e  $y$ .

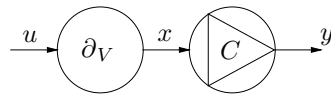


Figura 7.6: Enlace não-conservativo formado pela associação de uma fila com período de latência máxima  $V(s)$  (rajada com início em  $s$ ) e um enlace conservativo de capacidade  $C$ .

### 7.3 Buffer de recepção

Um *buffer* de recepção é um elemento que armazena todos os bits de um pacote até que o último bit tenha sido recebido, quando então todo o pacote é enviado instantaneamente para a saída. Dessa forma, ou o sistema está em espera, ou está transmitindo dados a uma taxa infinita. Além disso, o último bit de cada pacote nunca sofre atraso.

Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída de um *buffer* de recepção; e seja  $L$  o tamanho do maior pacote do fluxo  $x$ .<sup>1</sup> Os *buffers* de recepção podem ser utilizados na modelagem de sistemas cujo encaminhamento de pacotes é do tipo *storage and forward*, ou seja, pacotes devem ser inteiramente recebidos antes de serem novamente encaminhados.

Um *buffer* de recepção apresenta as seguintes características:

1. A capacidade de transmissão da saída é considerada infinita, para que os pacotes possam ser dispostos à saída instantaneamente.
2. O maior *backlog* possível é o tamanho do maior pacote,  $L$ .

A curva de serviço de um *buffer* de recepção pode ser definida como uma função do tipo  $\beta = \delta_{a_L}$ , sendo  $a_L(t)$  um limitante para o p-atraso do sistema, correspondente ao maior intervalo de tempo necessário à recepção de um pacote de tamanho  $L$  bits que deixa o sistema no instante  $t$ . A função  $\delta_{a_L}$  deve ser definida de tal forma que o *backlog* do sistema nunca ultrapasse  $L$  bits. A Figura 7.7 ilustra estas restrições.

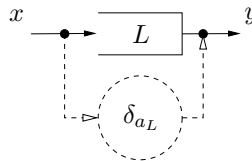


Figura 7.7: *Buffer* de recepção com tamanho máximo de pacote  $L$  e p-atraso limitado por  $a_L(t)$ .

Seja  $P_L : \mathcal{C}_t \rightarrow \mathcal{C}_t$  uma função de quantização que descreve matematicamente o comportamento de um *buffer* de recepção. Para que o sistema da Figura 7.7 represente um *buffer* de recepção, portanto, é necessário adicionar a seguinte restrição:  $y = P_L \{x\}$ . A função  $P_L \{x(s, t)\}$  representa o número total de bits de pacotes do fluxo  $x$  completamente recebidos no intervalo de tempo  $(s, t]$ . Dessa forma,  $(P_L \{x\})(s, t)$  é uma função não-decrescente de  $t$ , dado que  $x \in \mathcal{C}_t$ . A Figura 7.8 ilustra um exemplo de funções  $x$  e  $y$  para um *buffer* de recepção (para esse exemplo todos os pacotes têm o mesmo tamanho: 50 bits).

<sup>1</sup>Embora por simplicidade o parâmetro  $L$  seja considerado uma constante ao longo deste capítulo, ele pode, de modo geral, ser substituído por um tamanho variável  $L(t)$ . As demonstrações apresentadas no Apêndice E levam em conta o tamanho variável.

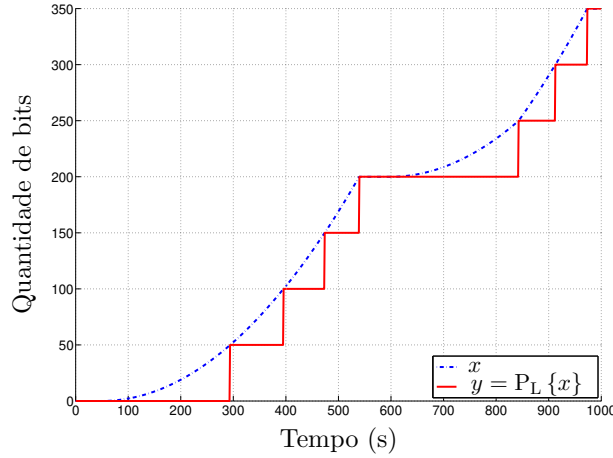


Figura 7.8: Exemplo de curvas de entrada e saída para o *buffer* de recepção ilustrado na Figura 7.7. Para esse exemplo, todos os pacotes têm 50 bits.

**Observação 25.** *Sejam dois fluxos  $x_1, x_2 \in \mathcal{C}_t$ , tais que  $x_1 \succcurlyeq x_2$ . Se  $x_1$  e  $x_2$  forem compostos pela mesma seqüência de pacotes,<sup>2</sup> então  $P_L\{x_1\} \succcurlyeq P_L\{x_2\}$ .*

Considere-se a definição de função  $L$ -quantizada abaixo.

**Definição 27** (Função  $L$ -quantizada). *Uma função  $x$  é dita  $L$ -quantizada, quando  $P_L\{x\} = x$ .*

Da Definição 27, qualquer função de saída de um *buffer* de recepção é necessariamente uma função  $L$ -quantizada. Considere-se que o sistema da Figura 7.7 representa um *buffer* de recepção. Nesse caso, tem-se:  $y = P_L\{x\} = P_L\{y\}$ , qualquer que seja o fluxo de entrada,  $x$ . Daí, o sistema da Figura 7.7 satisfaz as seguintes equações em  $\mathcal{C}$ :

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (7.9)$$

$$\hat{x}\delta_{a_L} = \hat{x}\delta_{a_L} \oplus \hat{y}, \quad (7.10)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y}\lambda_L, \quad (7.11)$$

$$y = P_L\{x\}. \quad (7.12)$$

Da equação (7.10),  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\delta_{a_L}$ ; e da equação (7.11),  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\phi\lambda_L$ . Dessa forma, tem-se:  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\delta_{a_L} \wedge \hat{x}\phi\lambda_L$ . Assim, para que a equação (7.10) seja redundante, a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$\hat{x}\delta_{a_L} \succcurlyeq \hat{x}\phi\lambda_L. \quad (7.13)$$

Adiante, será apresentado um caso particular em que não é necessário o conhecimento da função  $\hat{x}$  para determinar uma possível função  $a_L(t)$  que satisfaça a inequação (7.13).

<sup>2</sup>O primeiro pacote do fluxo  $x_1$  tem o mesmo tamanho do primeiro pacote do fluxo  $x_2$ ; o segundo pacote do fluxo  $x_1$  tem o mesmo tamanho do segundo pacote do fluxo  $x_2$  e assim sucessivamente.

Considere-se que o fluxo de entrada do *buffer* de recepção analisado anteriormente está sujeito a uma curva de regulação  $\sigma$ , conforme ilustra a Figura 7.9.

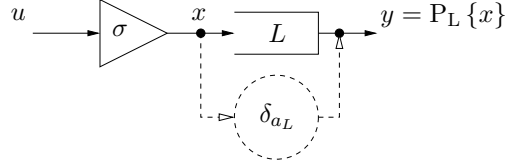


Figura 7.9: *Buffer* de recepção com tamanho máximo de pacote  $L$ , conectado a um regulador com curva característica  $\sigma \in \mathcal{C}$ .

As seguintes equações são adicionadas ao sistema (7.9)-(7.12):

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u}, \quad (7.14)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{x}\sigma. \quad (7.15)$$

Da equação (7.9),  $\hat{y} \succ \hat{x}$ ; e da equação (7.15),  $\hat{x} = \hat{x}\sigma^*$ . Daí, tem-se:  $\hat{y} \succ \hat{x} = \hat{x}\sigma^*$ . Além disso, da equação (7.11),  $\hat{x} \succ \hat{y}\lambda_L$ , o que implica que  $\hat{x}\sigma^* \succ (\hat{y}\lambda_L)\sigma^* = \hat{y}(\lambda_L\sigma^*)$ . Dessa forma,  $\hat{y} \succ \hat{y}(\lambda_L\sigma^*)$ . Assim, dado que  $(\lambda_L\sigma^*)^* = e \oplus \lambda_L\sigma^*$  (Apêndice G, Proposição 41), o fluxo  $y$  deve satisfazer a seguinte equação:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}(e \oplus \lambda_L\sigma^*),$$

Ou seja, o fluxo de saída  $y$  do sistema da Figura 7.9 satisfaz a seguinte curva de regulação:

$$\sigma_y = e \oplus \lambda_L\sigma^*. \quad (7.16)$$

Portanto, os fluxos de saída de *buffers* de recepção podem apresentar rajadas maiores que as permitidas para o fluxo de entrada.

**Exemplo 7.3.** Considere-se que o fluxo  $x$  na Figura 7.9 está sujeito a um *leaky bucket* sem perdas, modelado por uma curva de regulação invariante no tempo do tipo  $\sigma(\nu) = b + r \cdot \nu = \sigma^*(\nu)$ . Da equação (7.16), tem-se:  $\sigma_y(\nu) = 0$ , se  $\nu = 0$ ; e  $\sigma_y(\nu) = \sigma(\nu) + L = (b + L) + r \cdot \nu$ , se  $\nu > 0$ . Esse resultado foi anteriormente apresentado em Chang (2000, Lemma 2.4.2).

Considere-se, agora, que o fluxo de entrada do *buffer* de recepção da Figura 7.7 está sujeito a uma curva de serviço  $\beta$ , como ilustra a Figura 7.10(a). As seguintes equações são adicionadas ao sistema (7.9)-(7.12):

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u},$$

$$\hat{u}\beta = \hat{u}\beta \oplus \hat{x}. \quad (7.17)$$

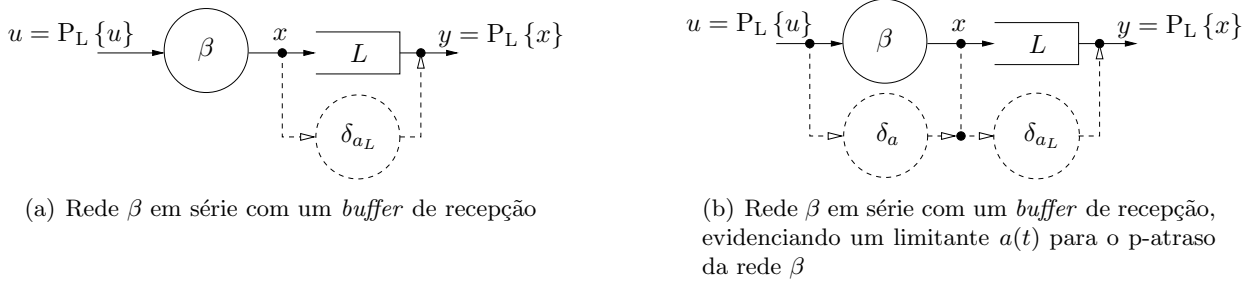


Figura 7.10: *Buffer* de recepção com tamanho máximo de fila  $L$ , conectado a uma rede  $\beta \in \mathcal{C}$ . Em (b), evidencia-se um limitante  $a(t)$  para o p-atraso da rede  $\beta$ .

Da equação (7.17),  $\hat{x} \preceq \hat{u}\beta$ ; e da equação (7.11),  $\hat{x} \succeq \hat{y}\lambda_L$ . Dessa forma, tem-se:  $\hat{y}\lambda_L \preceq \hat{u}\beta$ , e daí, da propriedade (PR.1), Tabela 3.2,

$$\hat{y} \preceq (\hat{u}\beta)\phi\lambda_L. \quad (7.18)$$

Essa inequação não define uma curva de serviço para o sistema da Figura 7.10(a), porque, de uma forma geral,  $(\hat{u}\beta)\phi\lambda_L \not\succeq \hat{u}(\beta\phi\lambda_L)$ . No entanto, é possível provar que, quando a função  $u$  é  $L$ -quantizada (Definição 27), então  $\hat{y} \preceq \hat{u}(\beta\phi\lambda_L)$ . O Teorema 31 apresenta esse resultado.

**Teorema 31.** *Considere-se uma rede  $\beta \in \mathcal{C}$  em série com um buffer de recepção, conforme ilustra a Figura 7.10(a). Além disso, considere-se que  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$ . Se o fluxo  $u$  da Figura 7.10(a) é  $L$ -quantizado, então a curva de serviço total da junção rede  $\beta$  - buffer de recepção pode ser definida da seguinte maneira:*

$$\beta' = \beta\phi\lambda_L.$$

*Demonstração.* A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice E. Este resultado foi anteriormente apresentado em Chang (2000, *Example 2.4.4*) e Le Boudec e Thiran (2003, *Theorem 1.7.1*), para o caso mais restrito que o aqui apresentado, em que  $\beta$  é uma função invariante no tempo.  $\square$

**Observação 26.** *Na prática, considerar que o fluxo  $u$  é  $L$ -quantizado ( $u = P_L\{u\}$ ) significa que, uma vez que um elemento de rede se dispõe a enviar um quadro por um enlace, este quadro está completamente disponível para envio, ou seja, um pacote foi recebido da camada de rede pela camada de enlace, e um quadro foi criado a partir desse pacote; ou um quadro foi completamente recebido por uma interface de rede e está pronto para ser re-encaminhado (por isso, não é permitido o encaminhamento do tipo cut-through). Esta hipótese é importante, para evitar os casos em que o tráfego de entrada é tão lento que é inviável determinar em quanto tempo seria recebido um pacote de tamanho  $L$ .*

Conforme mencionado anteriormente, um *buffer* de recepção não impõe atraso ao último bit de cada pacote. Conseqüentemente, ao acrescentar um *buffer* de recepção em série a um sistema, não se altera o limitante de p-atraso deste sistema. A seguir, apresenta-se uma demonstração desse resultado.

**Teorema 32.** *Considere-se o sistema da Figura 7.10(a), com  $u = P_L\{u\}$ . Se a função  $a(t)$  é um limitante para o p-atraso da rede  $\beta$  entre os fluxos  $u$  e  $x$ , como ilustra a Figura 7.10(b), então também é um limitante entre os fluxos  $u$  e  $y$ .*

*Demonstração.* Se a função  $a(t)$  é um limitante para o p-atraso da rede  $\beta$  da Figura 7.10(b), então,  $\hat{x} \preceq \hat{u}\delta_a$ . Daí, da Observação 25, como  $u = P_L\{u\}$ , tem-se:  $\hat{y} = P_L\{\hat{x}\} \preceq P_L\{\hat{u}\delta_a\} = \hat{u}\delta_a$ .  $\square$

Considere-se que o fluxo  $x$  da Figura 7.10(a) está sujeito a um regulador  $\sigma$ , como ilustra a Figura 7.11. Nesse caso, quando o fluxo  $u$  é  $L$ -quantizado, então é possível determinar  $a_L(t)$ , independentemente do fluxo  $x$ . O Teorema 33 apresenta este resultado.

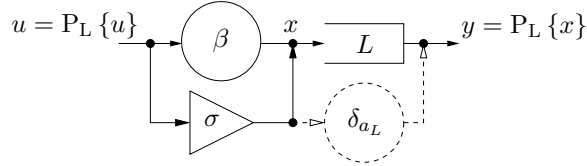


Figura 7.11: *Buffer* de recepção com tamanho máximo de fila  $L$ , conectado a uma rede  $\beta \in \mathcal{C}$  e um regulador  $\sigma \in \mathcal{C}$ .

**Teorema 33.** *Para o sistema da Figura 7.11, um limitante para o p-atraso do buffer de recepção entre os fluxos  $x$  e  $y$  corresponde à função  $a_L(t)$  determinada a partir do seguinte problema:*

$$\begin{aligned} \delta_{a_L} &= \inf \delta_\alpha \\ \text{s. a } \sigma^* \delta_\alpha &\succcurlyeq \beta \phi \lambda_L. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Do Teorema 31,  $(\beta \phi \lambda_L)$  é uma possível curva de serviço entre  $u$  e  $y$ , para o sistema da Figura 7.11. Assim, da Proposição 12 (Capítulo 4), qualquer função  $\sigma^* \delta_{a_L}$  tal que  $\sigma^* \delta_{a_L} \succcurlyeq \beta \phi \lambda_L$  também é uma curva de serviço entre  $u$  e  $y$ , de forma que  $\hat{y} \preceq \hat{u}(\sigma^* \delta_{a_L})$ . Além disso, das equações (7.14)-(7.15),  $\hat{x} \succcurlyeq \hat{u}\sigma^*$ . Dessa forma,  $\hat{y} \preceq \hat{u}(\sigma^* \delta_{a_L}) = (\hat{u}\sigma^*)_{\delta_{a_L}} \preceq \hat{x}\delta_{a_L}$  e, portanto,  $a_L(t)$  é um possível limitante para o p-atraso do *buffer* de recepção da Figura 7.11 no instante  $t$ .  $\square$

Por fim, considere-se o caso específico em que a rede  $\beta$  e o regulador  $\sigma$  da Figura 7.11 são substituídos por um enlace conservativo (ou um regulador guloso), conforme ilustra a Figura 7.12.

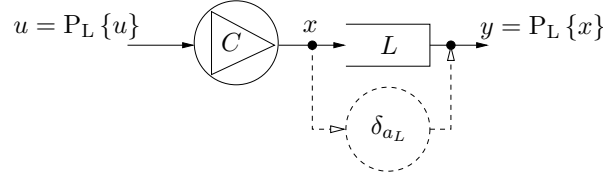


Figura 7.12: *Buffer* de recepção com tamanho máximo de pacote  $L$ , conectado a um enlace conservativo de capacidade  $C \in \mathcal{C}$ .

As seguintes equações são adicionadas às equações (7.9)-(7.12):

$$\begin{aligned} u &= P_L \{u\}, \\ \hat{x} &= \hat{u}C^*. \end{aligned} \tag{7.19}$$

O Teorema 33 se aplica para esse exemplo, conforme apresentado no Corolário 33.1.

**Corolário 33.1.** *Para o sistema da Figura 7.12, um possível limitante para o  $p$ -atraso do buffer de recepção entre os fluxos  $x$  e  $y$  corresponde à função  $a_L(t)$  determinada a partir do seguinte problema:  $\delta_{a_L} = \inf \{ \delta_\alpha : C^* \delta_\alpha \succcurlyeq C^* \phi \lambda_L \}$ .*

*Demonstração.* Este corolário é consequência direta do Teorema 33, fazendo  $\sigma = C^*$  e  $\beta = C^*$ .  $\square$

**Observação 27.** *De maneira semelhante à apresentada no Capítulo 6, a função  $a_L(t)$  definida pelo Teorema 33 (ou Corolário 33.1) pode ser determinada a partir de uma função  $\Lambda(s, t) = \inf \{ \alpha \geq 0 : \sigma^*(s, t - \alpha) \leq (\beta^* \phi \lambda_L)(s, t) \}$  da seguinte forma:  $a_L(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{ \Lambda(s, t) \}$ . Ou, se  $\sigma$  e  $\beta$  forem funções invariantes no tempo, pode ser definida a partir de  $\Lambda(\nu) = \inf \{ \alpha \geq 0 : \sigma^*(\nu - \alpha) \leq (\beta^* \phi \lambda_L)(\nu) \}$ , da seguinte forma:  $a_L(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{ \Lambda(\nu) \}$ .*

**Proposição 34.** *Na Figura 7.12, considere-se  $C = \lambda_L \rho^*$ , sendo  $\bar{L}(t) \geq L(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ . Nesse caso, existe um resultado mais forte que a equação (7.16) para a curva de regulação do fluxo de saída  $y$ ,  $\sigma_y$ . De fato, a função  $C^*$  também é uma curva de regulação para o fluxo de saída  $y$ , de forma que  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{y}C^*$ . Nesse caso, portanto, o fluxo de saída não pode apresentar rajadas maiores do que o permitido para o fluxo de entrada.*

*Demonstração.* A demonstração desta proposição encontra-se no Apêndice E. Este resultado foi apresentado anteriormente em Le Boudec e Thiran (2003), para funções invariáveis.  $\square$

**Exemplo 7.4** (*Buffer* de recepção com enlace de entrada de capacidade constante (Parte 1)). *Considere-se que o enlace de entrada do buffer de recepção da Figura 7.12 tem capacidade constante, com  $C^*(s, t) = C \cdot (t - s)^+$ . Seja  $L$  o tamanho do maior pacote do fluxo de entrada. Deseja-se determinar um limitante para o  $p$ -atraso  $a_L(t)$  e para o atraso máximo  $\bar{D}$ .*

Para esse sistema, do Corolário 33.1 e da Observação 27, têm-se:

$$\Lambda(\nu) = \inf \{ \alpha \geq 0 : C \cdot (\nu - \alpha)^+ \leq [C \cdot (\nu) - L]^+ \} = \begin{cases} \frac{L}{C}, & \text{se } \nu \geq \frac{L}{C}, \\ \nu, & \text{se } \nu < \frac{L}{C}, \end{cases}$$

$$a_L(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{ \Lambda(\nu) \} = \Lambda(t),$$

$$\bar{D} = \sup_{t \geq 0} \{ a_L(t) \} = \frac{L}{C}.$$

Considere-se mais uma vez o sistema da Figura 7.11. A partir do Teorema 30 também é possível determinar uma função  $D(t)$ , limitante para o atraso virtual máximo do *buffer* de recepção entre  $x$  e  $y$ , conforme ilustra a Figura 7.13. Esse resultado está apresentado na Proposição 35.

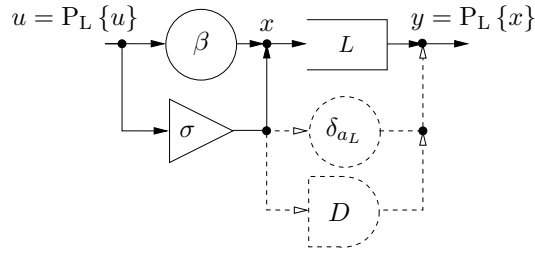


Figura 7.13: *Buffer* de recepção com tamanho máximo de fila  $L$ , conectado a uma rede  $\beta \in \mathcal{C}$  e um regulador  $\sigma \in \mathcal{C}$ , com a adição de um canal  $D$ , para determinar um limitante de atraso virtual máximo.

**Proposição 35.** *Considere-se o sistema da Figura 7.13. Um limitante para o atraso virtual máximo do canal entre os fluxos  $x$  e  $y$  corresponde à função  $D(t)$  determinada a partir do seguinte problema:*

$$\begin{aligned} D(t) &= \inf \delta_d, \\ \text{s. a } \sigma^* &\succcurlyeq \beta' \phi \partial_d, \\ \beta' &= \beta \phi \lambda_L, \end{aligned}$$

*Demonstração.* Da isotonicidade do produto em  $\mathcal{C}$ , para qualquer função  $\partial_d \in \mathcal{C}$  tal que  $\beta' \phi \partial_d \preccurlyeq \sigma^*$ , tem-se:  $\hat{x}(\beta' \phi \partial_d) \preccurlyeq \hat{x}$ . Daí, da Proposição 48 (Apêndice G):  $(\hat{x}\beta') \phi \partial_d \preccurlyeq \hat{x}$ . Por outro lado, do Teorema 31, a função  $\beta' = \beta \phi \lambda_L$  é uma curva de serviço entre  $u$  e  $y$  para o sistema da Figura 7.13. Dessa forma,  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{u}\beta'$ . Daí,  $\hat{y}\phi \partial_d \preccurlyeq (\hat{u}\beta')\phi \partial_d$ . Por fim, observando o sistema da Figura 7.13, tem-se:  $\hat{u} \preccurlyeq \hat{x}$ . Desta forma,  $\hat{y}\phi \partial_d \preccurlyeq (\hat{x}\beta')\phi \partial_d$ . Assim, como  $(\hat{x}\beta') \phi \partial_d \preccurlyeq \hat{x}$ , tem-se  $\hat{y}\phi \partial_d \preccurlyeq \hat{x}$ . Portanto,  $D(t)$  é um limitante para o atraso virtual do *buffer* de recepção da Figura 7.13.  $\square$

**Exemplo 7.5** (*Buffer de recepção com enlace de entrada de capacidade constante (Parte 2)*). Considere-se o sistema do Exemplo 7.4. Deseja-se determinar um limitante para o atraso virtual máximo  $D(t)$ .

Da Proposição 35 e das equações (7.7)-(7.8), têm-se:

$$\begin{aligned}\Omega(\nu) &= \inf \{d \geq 0 : [C \cdot (\nu + d) - L]^+ \geq C \cdot \nu \geq 0\}, \\ &= \inf \{d : C \cdot d \geq L\} = \frac{L}{C}, \\ D(t) &= \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Omega(\nu)\} = \frac{L}{C}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}^+.\end{aligned}\tag{7.20}$$

**Exemplo 7.6.** Considere-se o sistema da Figura 7.14(a), formado pela junção em série de um regulador  $\sigma$  e  $M$  sistemas iguais ao da Figura 7.10(a). Esse exemplo foi apresentado anteriormente por Le Boudec (2002) para um cenário invariante no tempo. Deseja-se determinar:

1. Uma curva de serviço total  $\beta_{\text{Total}}$  para a junção em série dos  $M$  sistemas iguais ao sistema da Figura 7.10(a) (Figura 7.14(b)).
2. Um limitante  $a(t)$  para o  $p$ -atraso entre  $u$  e  $y$ .

Do Teorema 31, o subsistema  $k$  formado pela rede  $\beta_k$  e o buffer de recepção seguinte apresenta a curva de serviço  $\beta'_k$ , definida a seguir (Figura 7.14(b)).

$$\beta'_k = \beta_k \phi \lambda_L.$$

Dessa forma, da Tabela 5.2, a curva de serviço total do sistema apresenta a seguinte curva de serviço (Figura 7.14(b)):

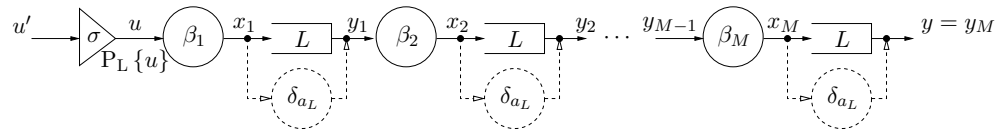
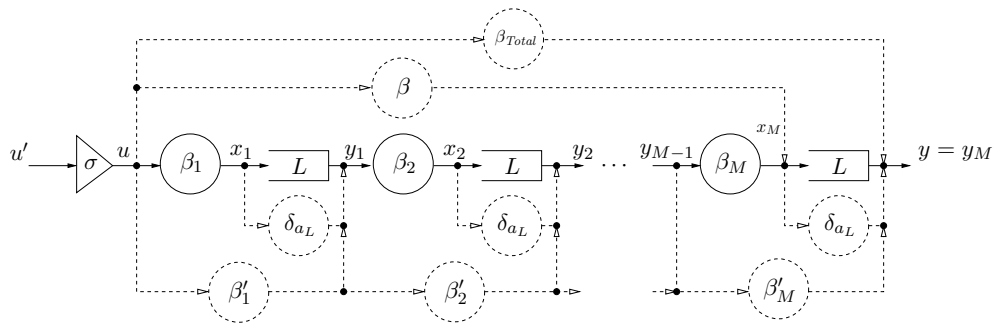
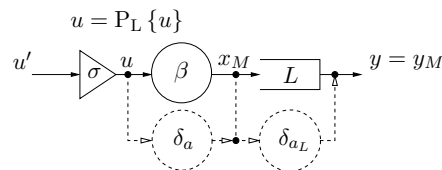
$$\beta_{\text{Total}} = \bigotimes_{k=1}^M \beta'_k.$$

Para o cálculo do  $p$ -atraso máximo fim-a-fim, por sua vez, do Teorema 32, não é necessário levar em conta o último buffer de recepção. A curva de serviço resultante sem o último buffer de recepção é a seguinte (Figura 7.14(b)):

$$\beta = \left( \bigotimes_{k=1}^{M-1} \beta'_k \right) \otimes \beta_M.$$

A Figura 7.14(c) apresenta o sistema equivalente entre  $u'$  e  $y$ , resultante desta simplificação entre  $u$  e  $x_M$ .

Finalmente, do Teorema 32, o limitante  $a(t)$  para o  $p$ -atraso desta rede  $\beta$  obtida é também um limitante de  $p$ -atraso entre  $u$  e  $y$ . Da Tabela 5.1, este limitante corresponde à solução do seguinte problema:  $\delta_a = \inf \{\delta_\alpha : \sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta\}$ .

(a) Conexão em série de um regulador  $\sigma$  e  $M$  sistemas iguais ao da Figura 7.10(a)(b) Sistema totalmente equivalente ao sistema em (a), em relação a  $u$  e  $y$ , ressaltando as redes  $\beta_{Total}$ ,  $\beta'_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , e  $\beta$ (c) Sistema totalmente equivalente ao sistema em (a), em relação a  $u$  e  $y$ , ressaltando o limitante de p-atraso  $a(t)$ Figura 7.14: Conexão em série de um regulador  $\sigma$  e  $M$  sistemas iguais ao da Figura 7.10(a).

*Esse exemplo foi anteriormente apresentado em Goyal et al. (1997) e Le Boudec e Thiran (2003, Theorem 2.1.5), para o caso invariante no tempo em que  $\sigma(\nu) = b + r \cdot \nu$  e  $\beta_k(\nu) = R_k \cdot (t - T_k)$ , ou seja, para o caso específico em que o regulador  $\sigma$  representa um leaky bucket sem perdas, e as redes  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  representam servidores do tipo Rate-Latency (Le Boudec e Thiran, 2003, Definition 2.1.1), com taxa de serviço  $R_k$  e latência  $T_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ .*

## 7.4 Reordenador de bits

No contexto deste trabalho, um “reordenador de bits” é um sistema abstrato que permite modelar alterações na ordem de serviço de bits em relação à ordem de recepção. Reordenadores de bits são interessantes, para modelar diferenças de prioridade entre fluxos e serão utilizados nas próximas seções na análise de multiplexadores.

Seja  $x \in \mathcal{C}_t$  o fluxo de entrada de um reordenador de bits. Um reordenador de bits pressupõe inversões na ordem de serviço de bits em relação à ordem de chegada. Por exemplo, seja  $B_1$  um bit de um fluxo  $x$  particular que chega a um reordenador de bits no instante  $t$ . É possível que existam bits que chegam ao sistema depois do instante  $t$ , mas que devem ser servidos antes de  $B_1$ . Dessa forma, o instante de serviço do bit  $B_1$  depende do futuro recebimento de dados pelo sistema. Considere-se as definições de atraso e *backlog* de reordenação abaixo.

**Definição 28** (Atraso de reordenação). *Neste trabalho, chama-se atraso de reordenação em um dado instante  $t$ , o intervalo de tempo que um bit que entra em um reordenador de bits no instante  $t$  deve esperar pela recepção de dados que chegam ao reordenador após o instante  $t$ .*

**Definição 29** (Backlog de reordenação). *Neste trabalho, chama-se backlog de reordenação em um dado instante  $t$ , a quantidade de bits que, embora tenham entrado em um reordenador de bits depois do instante  $t$ , são servidos antes de um bit qualquer que entra no sistema em  $t$ .*

Seja  $d(t)$  o atraso de reordenação do bit  $B_1$ . Antes de deixar o sistema,  $B_1$  deve esperar que uma quantidade de bits

$$b(t) = [x(0, t + d(t)) - x(0, t)] \quad (7.21)$$

seja recebida pelo sistema.

A função  $b(t)$  definida pela equação (7.21) representa o *backlog* de reordenação de um reordenador de bits para uma função  $x$  particular, em um instante  $t$  fixo. Seja a função  $v \in \mathcal{C}$  definida da seguinte maneira:

$$v(s, t) = \begin{cases} x(0, t + d(t)), & \text{se } s = 0, \\ \varepsilon(s, t), & \text{se } s \neq 0. \end{cases} \quad (7.22)$$

Nesse caso, das equações (7.21) e (7.22), tem-se:  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $b(t) = v(0, t) - x(0, t)$ .

O atraso  $d(t)$  sofrido por um bit depende do fluxo de entrada  $x$ . Seja  $D(t)$  um limitante independente de  $x$  para este atraso. Tem-se,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $x(0, t + d(t)) \leq x(0, t + D(t))$ . Portanto, o *backlog* de reordenação de um bit qualquer que entra em um reordenador de bits no instante  $t$  é limitado pela função  $B(t)$  definida da seguinte forma:

$$B(t) = [x(0, t + D(t)) - x(0, t)]. \quad (7.23)$$

Do exposto anteriormente, as seguintes inequações devem ser satisfeitas,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$v(0, t) = x(0, t + d(t)) \leq x(0, t + D(t)), \quad (7.24)$$

$$b(t) = v(0, t) - x(0, t) \leq B(t). \quad (7.25)$$

Das inequações (7.24) e (7.25), têm-se, respectivamente:

$$\hat{v} \succcurlyeq \hat{x} \phi \partial_D, \quad (7.26)$$

$$\hat{v} \succcurlyeq \hat{x} \lambda_B. \quad (7.27)$$

Considere-se que o fluxo  $x$  satisfaz uma curva de regulação  $\sigma \in \mathcal{C}$ . A Figura 7.15 é obtida a partir das restrições (7.26) e (7.27), utilizando os blocos básicos definidos no Capítulo 4 e na Seção 7.2 (Tabela 7.3).

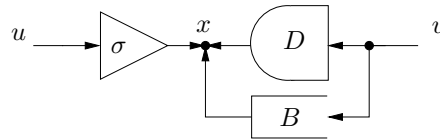


Figura 7.15: Reordenador de bits com fluxo de entrada sujeito a uma curva de regulação  $\sigma \in \mathcal{C}$ .

O sistema da Figura 7.15 satisfaz as seguintes equações em  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x} \oplus \hat{u}, \\ \hat{x} &= \hat{x} \oplus \hat{x} \sigma, \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{v}, \quad (7.29)$$

$$\hat{v} = \hat{v} \oplus \hat{x} \phi \partial_D, \quad (7.30)$$

$$\hat{v} = \hat{v} \oplus \hat{x} \lambda_B. \quad (7.31)$$

Das equações (7.28)-(7.29),  $\hat{x} \succcurlyeq \hat{v} \sigma^*$ . Além disso, da equação (7.30),  $\hat{v} \succcurlyeq \hat{x} \phi \partial_D$ . Daí,  $\hat{v} \succcurlyeq (\hat{v} \sigma^*) \phi \partial_D$ . Mas, da propriedade (PR.6), Tabela 3.2,  $(\hat{v} \sigma^*) \phi \partial_D \succcurlyeq \hat{v} (\sigma^* \phi \partial_D)$ . Dessa forma, tem-se:  $\hat{v} \succcurlyeq \hat{v} (\sigma^* \phi \partial_D)$ , o que implica que  $\hat{v} \succcurlyeq \hat{v} (\sigma^* \phi \partial_D)^* = \hat{v} [e \oplus (\sigma^* \phi \partial_D)]$  (Apêndice G,

Proposição 42). Por outro lado, da equação (7.31),  $\hat{v} \succ \hat{x}\lambda_B$ . Daí, fazendo novamente  $\hat{x} \succ \hat{v}\sigma^*$ , tem-se  $\hat{v} \succ \hat{v}(\sigma^*\lambda_B)$ , o que implica que  $\hat{v} \succ \hat{v}(\sigma^*\lambda_B)^* = \hat{v}(\mathbf{e} \oplus \sigma^*\lambda_B)$  (caso análogo ao demonstrado no Apêndice G, Proposição 41). Nesse caso, a seguinte equação deve ser satisfeita:

$$\hat{v} = \hat{v}[\mathbf{e} \oplus (\sigma^*\phi\partial_D) \oplus (\sigma^*\lambda_B)]. \quad (7.32)$$

Portanto, o fluxo  $v$  satisfaz a seguinte curva de regulação:

$$\sigma_v = \mathbf{e} \oplus (\sigma^*\phi\partial_D) \oplus (\sigma^*\lambda_B). \quad (7.33)$$

Na discussão anterior, considerou-se que as funções  $D(t)$  e  $B(t)$  (Figura 7.15) são conhecidas. A seguir, são apresentados alguns casos em que a função  $D(t)$  pode ser determinada independentemente do fluxo de entrada,  $x$ , se for conhecida uma função  $B(t)$ , limitante para o *backlog* de reordenação do sistema da Figura 7.15.

**Proposição 36.** *Seja  $x \in \mathcal{C}_t$  o fluxo de entrada de um reordenador de bits, conforme ilustra a Figura 7.15. Considerem-se conhecidas:*

1. *Uma função que limita o quão lento o fluxo  $x$  pode ser, ou seja, uma função  $\varphi \in \mathcal{C}$  tal que,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : x(0, t) - x(0, s) \geq \varphi(s, t)$ .*
2. *Uma função  $B(t)$ , limitante do backlog de reordenação do fluxo  $x$ .*

*O atraso de reordenação do reordenador de bits da Figura 7.15 é limitado pela seguinte função:*

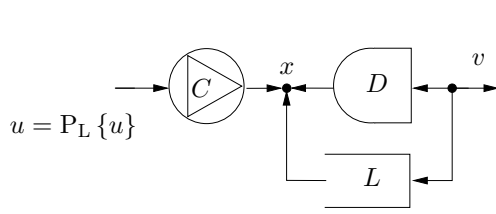
$$D(t) = \inf \{d \geq 0 : \varphi(t, t+d) \geq B(t)\}.$$

*Demonstração.* O *backlog* de reordenação de um bit que entra em um reordenador de bits no instante  $t$  é dado por  $b(t) = [x(0, t+d(t)) - x(0, t)]$ , sendo  $d(t)$  o atraso de reordenação deste bit. Da suposição de que  $B(t)$  é um limitante para  $b(t)$ , a seguinte inequação deve ser satisfeita,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : x(0, t+d(t)) - x(0, t) \leq B(t)$ . Mas das definições de  $D(t)$  e  $\varphi$  acima, tem-se:  $B(t) \leq \varphi(t, t+D(t)) \leq x(0, t+D(t)) - x(0, t)$ . Assim, como  $x \in \mathcal{C}_t$ , então  $d(t) \leq D(t)$ ,  $\forall t$ .  $\square$

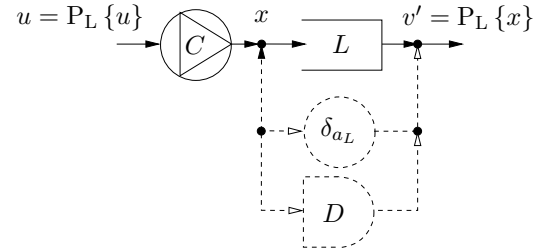
No exemplo a seguir, apresenta-se uma nova forma para calcular a função  $D(t)$  a partir de  $B(t)$  independentemente do fluxo  $x$ . Nesse caso, o fluxo  $u$  deve ser  $L$ -quantizado.

**Exemplo 7.7** (Inversor de pacotes com enlace de entrada conservativo). *Seja um “inversor de pacotes” um sistema que inverte a ordem de transmissão dos bits dos pacotes recebidos. Dessa forma, se um pacote é formado pelos bits  $B_1B_2B_3$  na entrada, será formado pelos bits  $B_3B_2B_1$  na saída. Considere-se que o enlace de entrada é conservativo e tem capacidade  $C(s, t) = C \cdot (t - s)^+$  e que o fluxo  $u$  é  $L$ -quantizado, conforme ilustra a Figura 7.16(a). Deseja-se determinar:*

1. Um limitante  $D(t)$  para o atraso máximo desse sistema no instante  $t$ .
2. As condições para as quais uma curva  $\sigma$  pode ser uma curva de regulação para o fluxo  $x$ .
3. As condições para as quais as equações do enlace  $C$  são redundantes, considerando a adição do regulador  $\sigma$  do item anterior em paralelo ao enlace  $C$  (Figura 7.17).
4. Uma curva de regulação  $\sigma_v$  para o tráfego de saída do inversor de pacotes (equação 7.33), dado que as condições dos itens anteriores são satisfeitas ao mesmo tempo.



(a) Inversor de pacotes com limitante de atraso  $D(t)$ , backlog máximo  $L$  e enlace de entrada de capacidade  $C$



(b) Modelo utilizado para calcular a função  $D(t)$  a ser usada na Figura 7.16(a)

Figura 7.16: Inversor de pacotes com limitante de atraso máximo  $D(t)$ , enlace de entrada de capacidade  $C$  e um fluxo de entrada com pacotes de tamanho máximo  $L$ . Em (b), um modelo que permite calcular a função  $D(t)$  a ser usada na Figura 7.16(a).

Exatamente como acontece em um buffer de recepção, para que um inversor de pacotes transmita o primeiro bit de um determinado pacote pelo enlace de saída, todos os bits deste pacote devem ter sido recebidos. Assim, um inversor de pacotes apresenta o mesmo limitante de atraso máximo,  $D(t)$ , de um buffer de recepção nas mesmas condições (nesse caso, um enlace de entrada de capacidade  $C$ , conforme ilustra a Figura 7.16(b)). Seja  $L$  o tamanho do maior pacote do fluxo de entrada. Da equação (7.20), tem-se:  $D(t) = \frac{L}{C}, \forall t$ . Portanto o limitante  $D(t)$  de um buffer de recepção (Figura 7.16(b)) é igual ao limitante  $D(t)$  em um inversor de pacotes (Figura 7.16(a)) nas mesmas condições para o tráfego de entrada.

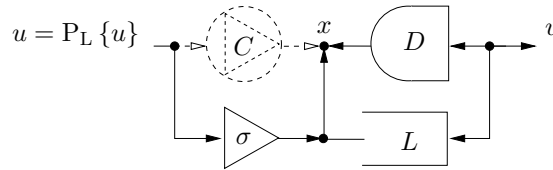


Figura 7.17: Inversor de pacotes com enlace de entrada conservativo de capacidade  $C$  e fluxo de entrada com tamanho de pacote máximo  $L$ , sujeito a uma curva de regulação  $\sigma$ .

Para a segunda parte deste problema, considere-se que o fluxo  $x$  das Figuras 7.16 também é limitado pela curva de regulação  $\sigma \in \mathcal{C}$ , conforme ilustra a Figura 7.17. O backlog de reordenação de um reordenador de bits é igual a  $[x(0, t + d(t)) - x(0, t)]$ , sendo  $d(t)$

o atraso de um bit que chega ao sistema em  $t$ . Para esse exemplo, essa quantidade de bits é limitada pelo tamanho do maior pacote,  $L$ . Portanto, a seguinte inequação deve ser satisfeita:  $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : x(0, t + d(t)) - x(0, t) \leq L$ . Daí, é possível que, para alguma entrada  $x$ , a igualdade  $x(0, t + d(t)) - x(0, t) = L$  seja satisfeita. Por outro lado, a função  $\sigma$  é uma curva de regulação para o fluxo  $x$ , e  $d(t) \leq D(t)$ ,  $\forall t$ . Então,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+ : x(0, t + d(t)) - x(0, t) \leq \sigma^*(t, t + D(t))$ . Dessa forma, a função  $\sigma$  deve atender a seguinte inequação:

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+ : \sigma^*(t, t + D(t)) \geq L. \quad (7.34)$$

Ao adicionar um regulador  $\sigma$  a um sistema com curva de regulação  $C$ , de acordo com a Tabela 5.2, o filtro resultante é um regulador  $(\sigma \oplus C)^*$ . Assim, as equações do enlace de capacidade  $C$  são redundantes, se a curva  $\sigma$  satisfizer a seguinte inequação:

$$\sigma \succcurlyeq C. \quad (7.35)$$

Finalmente, considere-se que as equações (7.34) e (7.35) são satisfeitas ao mesmo tempo. Para esse exemplo, para todo  $s \leq t$ , tem-se:  $C^*(s, t + D(t)) = C \cdot (t - s + \frac{L}{C})^+ = C \cdot (t - s) + L$ . Daí,  $C^*(t, t + D(t)) = L$ . Assim, para que as equações (7.34) e (7.35) sejam satisfeitas concomitantemente, a função  $\sigma$  deve atender a seguinte igualdade:

$$\sigma^*(t, t + D(t)) = L, \quad \forall t.$$

Daí, da sub-aditividade da função  $\sigma^*$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : \sigma^*(s, t + D(t)) \leq \sigma^*(s, t) + \sigma^*(t, t + D(t)) = \sigma^*(s, t) + L$ . Dessa forma, tem-se:  $\sigma^* \phi_{\partial D} \succcurlyeq \sigma^* \lambda_L$ . Portanto, da equação (7.33),  $\sigma_v$  pode ser definida da seguinte maneira:

$$\sigma_v = e \oplus (\sigma^* \phi_{\partial D}), \quad (7.36)$$

sendo  $D(t) = \frac{L}{C}$ ,  $\forall t$ .

Considere-se o sistema da Figura 7.18(a). A correspondência citada no exemplo anterior entre as funções limitantes de atraso em um *buffer* de recepção e um inversor de pacotes sob as mesmas condições para o tráfego de entrada pode ser utilizada de uma forma geral para a determinação do limitante de atraso máximo  $D(t)$ . Nesse caso, é necessário que as seguintes condições sejam atendidas:

1. A função  $u$  seja  $L$ -quantizada ( $u = P_L \{u\}$ );
2. Seja conhecido um limitante  $B(t)$  para o *backlog* de reordenação do sistema da Figura 7.18(a).

As Figuras 7.18 apresentam a correspondência de atrasos entre *buffer* de recepção e reordenador de bits.

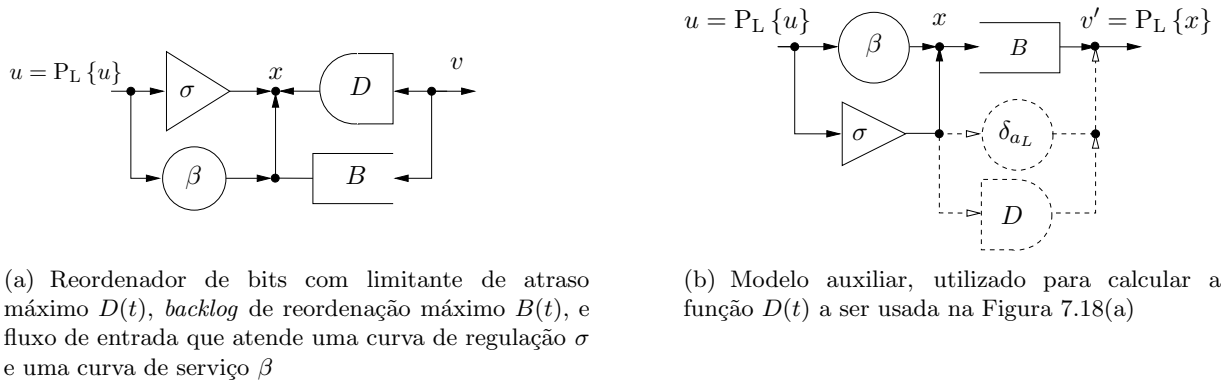


Figura 7.18: Reordenador de bits e *buffer* de recepção sob as mesmas condições dos tráfegos de entrada, evidenciando a correspondência de suas funções limitantes de atraso,  $D(t)$ .

## 7.5 Multiplexador com duas entradas

No Capítulo 6, foram determinadas curvas de serviço para um tráfego de interesse  $i$  e para o agregado de tráfegos excetuando-se o fluxo  $i$ , respectivamente  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$ , correspondentes a um multiplexador FIFO bit a bit com  $M$  entradas. Nesta seção, analisam-se multiplexadores com duas entradas, em que a integridade de pacotes é garantida na saída e se admitem tráfegos de diferentes prioridades. A partir da escolha de um fluxo de interesse, deseja-se determinar uma curva de serviço e limitantes de atraso, *backlog* e curva de regulação de saída para este fluxo específico.

Sejam  $x_k$ ,  $k = 1, 2$ , e  $y$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída de um multiplexador. Considere-se que o fluxo  $x_k$  atende uma curva de regulação  $\sigma_k$  e uma curva de serviço  $\mu_k$ , conforme ilustra a Figura 7.19.

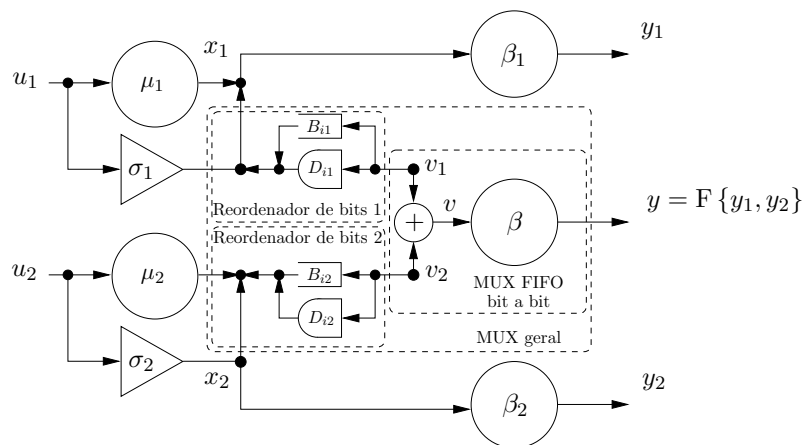


Figura 7.19: Multiplexador com duas entradas, evidenciando as restrições de regulação e de serviço dos tráfegos de entrada e os limitantes  $B_{ik}(t)$  e  $D_{ik}(t)$ ,  $k = 1, 2$ .

A análise de multiplexadores gerais pressupõe a possibilidade de reordenação na ordem de serviço de bits em relação à ordem de chegada, para que seja possível a análise de fluxos com prioridades distintas e a manutenção da integridade dos pacotes.

Seja  $i$  o fluxo de interesse. Considere-se um bit do fluxo  $i$  que chega a um multiplexador com  $M$  entradas no instante  $t$ . Dependendo do tipo de disciplina de filas do multiplexador, é possível que bits do próprio fluxo  $i$  ou de outro(s) fluxo(s) de entrada que chegam ao sistema após o instante  $t$  sejam servidos antes do bit do fluxo  $i$  que chega ao sistema em  $t$ . Por exemplo, considere-se um multiplexador FIFO com dois fluxos de entrada e enlaces de entrada com capacidade constante,  $C$ . Considere-se  $i = 1$ , e seja  $L_2$  o tamanho do maior pacote do fluxo 2. Como o enlace de entrada do fluxo 2 tem capacidade  $C$  constante, qualquer pacote do fluxo 2 leva no máximo  $L_2/C$  unidades de tempo para ser recebido. Considere-se que imediatamente antes do instante  $t$ , o sistema começa a recepção de um pacote do fluxo 2 de tamanho desconhecido. Antes de ser servido, um bit do fluxo 1 que chega ao sistema em  $t$  tem que esperar o serviço de todo o *backlog* já presente no sistema em  $t$ , mais o serviço do pacote do fluxo 2 que começou a ser recebido imediatamente antes de  $t$ . Como o maior atraso para a recepção de um pacote do fluxo 2 é limitado em  $L_2/C$ , esta última quantidade de bits é limitada pela quantidade de dados do fluxo 2 que pode ser recebida pelo sistema no intervalo  $(t, t + L_2/C]$ , ou seja, é limitada pela função  $B_2(t)$  definida da seguinte maneira:

$$B(t) = [x_2(0, t + L_2/C) - x_2(0, t)]. \quad (7.37)$$

Note-se que a equação (7.37) corresponde à equação (7.23), fazendo  $D(t) = L_2/C, \forall t$ . Essa correspondência sugere que o efeito do fluxo 2 no fluxo 1 em um multiplexador FIFO pode ser modelado por um reordenador de bits aplicado ao fluxo 2.

Considerem-se as seguintes definições:

- $D_{ik}(t)$ , uma função limitante para o atraso de reordenação gerado pelo fluxo  $k$  no fluxo  $i$ .
- $B_{ik}(t)$ , uma função limitante para o *backlog* de reordenação gerado pelo fluxo  $k$  no fluxo  $i$ .

Para o multiplexador FIFO do exemplo anterior, têm-se:  $B_{12}(t) = L_2, \forall t$ , e  $D_{12}(t) = L_2/C, \forall t$ . Além disso, como os bits do fluxo 1 são servidos na ordem de entrada, têm-se:  $B_{11}(t) = 0, \forall t$ , e  $D_{11}(t) = 0, \forall t$ .

Da discussão anterior, a análise apresentada nesta seção para multiplexadores gerais usa o seguinte método: utilizam-se reordenadores de bits para modelar apenas a reordenação do serviço de bits; a função de saída do reordenador de bits é usada diretamente no modelo de multiplexador FIFO bit a bit apresentado no Capítulo 6. A Figura 7.19 apresenta o modelo utilizado neste trabalho para um multiplexador geral com duas entradas. Note-se que este modelo depende dos valores de  $D_{ik}(t)$  e  $B_{ik}(t)$ , os quais dependem da escolha do tráfego de interesse  $i$ .

Dessa forma, o modelo da Figura 7.19 é *dependente* do fluxo de interesse. Os cálculos de  $D_{ik}(t)$  e  $B_{ik}(t)$  dependem da configuração do tráfego de entrada e da disciplina de filas utilizada. Nas próximas seções, quatro situações são analisadas:

1. Fluxos de mesma prioridade e disciplina de filas FIFO.
2. Fluxo de interesse e um fluxo de maior prioridade, com disciplina de filas FIFO para o fluxo de interesse.
3. Fluxo de interesse e um fluxo de menor prioridade, com disciplina de filas FIFO para o fluxo de interesse.
4. Fluxos sem garantia de ordem de serviço.

Para cada uma das situações acima, é possível determinar  $D_{ik}(t)$  e  $B_{ik}(t)$ . Uma vez conhecidas essas funções, pode-se definir uma função  $\sigma_{ik}$  da seguinte maneira (equação 7.33):

$$\sigma_{ik} = e \oplus (\sigma_k^* \phi' \partial_{D_{ik}}) \oplus (\sigma_k^* \lambda_{B_{ik}}), \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2. \quad (7.38)$$

A função  $\sigma_{ik}$  definida pela equação (7.38) representa uma curva de regulação para a função  $v_k$  (Figura 7.19), quando  $i$  é o fluxo de interesse. Da equação (7.32), portanto, a seguinte restrição deve ser satisfeita:

$$\hat{v}_k = \hat{v}_k \sigma_{ik}, \quad k = 1, 2. \quad (7.39)$$

Além disso, as equações do multiplexador FIFO bit a bit com  $M$  entradas analisado no Capítulo 6 (equações 6.3-6.5) devem ser satisfeitas. Fazendo  $M = 2$ , têm-se:

$$v = F \{v_1, v_2\} = F_{k=1,2} \{v_k\}, \quad (7.40)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{v},$$

$$\hat{v}\beta = \hat{v}\beta \oplus \hat{y}.$$

Da Proposição 9, se cada fluxo  $v_k$ ,  $k = 1, 2$ , satisfaz a equação (7.39), então o fluxo de entrada total,  $v$ , definido na equação (7.40) satisfaz uma curva de regulação  $\rho_i \in \mathcal{C}$  definida da seguinte maneira:

$$\rho_i = F \{\sigma_{i1}, \sigma_{i2}\}. \quad (7.41)$$

A partir da equação (7.41), é possível calcular uma função  $a_i(t)$ , limitante do p-atraso entre os fluxos  $v_i$  e  $y_i$ . Do Teorema 21, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta_{a_i} &= \inf \delta_\alpha, \\ \text{s. a } \rho_i \delta_\alpha &\succcurlyeq \beta. \end{aligned} \quad (7.42)$$

**Observação 28.** Conforme mencionado na Proposição 25 (Capítulo 6), a função  $a_i(t)$  definida pelo problema (7.42) pode ser determinada a partir de uma função  $\Lambda_i(s, t) = \inf \{ \alpha \geq 0 : \rho_i(s, t - \alpha) \leq \beta(s, t) \}$  da seguinte forma:  $a_i(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{ \Lambda_i(s, t) \}$ . Ou, se  $\rho_i$  e  $\beta$  forem funções invariantes no tempo, a função  $a_i(t)$  pode ser definida a partir de  $\Lambda_i(\nu) = \inf \{ \alpha \geq 0 : \rho_i(\nu - \alpha) \leq \beta(\nu) \}$ , da seguinte forma:  $a_i(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{ \Lambda_i(\nu) \}$ .

De forma semelhante, pode-se calcular uma função  $D_i(t)$ , limitante do atraso virtual entre os fluxos  $v_i$  e  $y_i$ . Do Teorema 30, tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_{D_i} &= \inf \partial_d, \\ \text{s. a } \rho_i &\succcurlyeq \beta \phi \partial_d. \end{aligned} \tag{7.43}$$

**Observação 29.** Conforme mencionado na Seção 7.2 (Teorema 30 e equações 7.5-7.8), a função  $D_i(t)$  definida pelo problema (7.43) pode ser determinada a partir de uma função  $\Omega_i(s, t) = \inf \{ d \geq 0 : \rho_i(s, t) \leq \beta(s, t + d) \}$  da seguinte forma:  $D_i(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{ \Omega_i(s, t) \}$ . Ou, se  $\rho_i$  e  $\beta$  forem funções invariantes no tempo, a função  $D_i(t)$  pode ser definida a partir de  $\Omega_i(\nu) = \inf \{ d \geq 0 : \rho_i(\nu) \leq \beta(\nu + d) \}$ , da seguinte forma:  $D_i(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{ \Omega_i(\nu) \}$ .

As funções  $a_i(t)$  e  $D_i(t)$  definidas pelos problemas (7.42) e (7.43) são limitantes, respectivamente, do p-atraso e do atraso virtual entre os fluxos  $v_i$  e  $y_i$ . A proposição a seguir mostra que essas funções também são limitantes, respectivamente, do p-atraso e do atraso entre os fluxos  $x_i$  e  $y_i$  (Figura 7.19).

**Proposição 37.** Considere-se o sistema ilustrado na Figura 7.19. Qualquer limitante de atraso entre os fluxos  $v_i$  e  $y_i$  também é um limitante de atraso entre os fluxos  $x_i$  e  $y_i$ .

*Demonstração.* Seja  $a_i(t)$  e  $D_i(t)$ , respectivamente, limitantes de p-atraso e de atraso virtual entre os fluxos  $v_i$  e  $y_i$ . Nesse caso, têm-se:  $\hat{y}_i \preccurlyeq \hat{v}_i \delta_{a_i}$  e  $\hat{v}_i \succcurlyeq \hat{y}_i \phi \partial_{D_i}$ . Mas, da Figura 7.19,  $\hat{v}_i \preccurlyeq \hat{x}_i$ . Dessa forma, têm-se:  $\hat{y}_i \preccurlyeq \hat{x}_i \delta_{a_i}$  e  $\hat{x}_i \succcurlyeq \hat{y}_i \phi \partial_{D_i}$  e, portanto,  $a_i(t)$  e  $D_i(t)$  também são limitantes de atraso entre os fluxos  $x_i$  e  $y_i$ .  $\square$

Como mencionado anteriormente, quatro configurações de tráfego serão analisadas nas próximas seções. Nas quatro situações analisadas, considera-se que o sistema é não-preemptivo, ou seja, a transmissão de um pacote nunca é interrompida. Além disso, o fluxo 1 é considerado o fluxo de interesse ( $i = 1$ ). Dessa forma, têm-se:  $\beta_i = \beta_1$  e  $\tilde{\beta}_i = \beta_2$ . A extensão dos resultados para  $i = 2$  é direta. Para cada tipo de multiplexador estudado, deseja-se determinar:

- Uma curva de serviço  $\beta_1$ , entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ .
- Uma função  $a_1(t)$ , limitante para o p-atraso entre  $x_1$  e  $y_1$ .

- Uma função  $D_1(t)$ , limitante para o atraso instantâneo entre  $x_1$  e  $y_1$ .

A partir dos resultados obtidos para esses parâmetros, também é possível calcular um limitante  $\bar{D}_1$  para o atraso máximo entre  $x_1$  e  $y_1$ ; uma função  $W_1(t)$ , limitante para o *backlog* entre  $x_1$  e  $y_1$  no instante  $t$ ; e uma curva de regulação  $\sigma_{y_1}$  para o fluxo  $y_1$ . Da Tabela 5.1, têm-se:

$$\bar{D}_1 = \sup_{t \geq 0} \{a_1(t)\}, \quad (7.44)$$

$$W_1(t) = (\beta_1 \bowtie \sigma_1^*)(t, t), \quad (7.45)$$

$$\sigma_{y_1} = \beta_1 \bowtie \sigma_1^*. \quad (7.46)$$

Como observado no Capítulo 6, quando fluxos e curvas de regulação e de serviço são funções invariantes no tempo, deve-se escolher entre uma curva de serviço invariante ou variante no tempo para o fluxo de interesse. Caso se deseje obter uma curva invariante no tempo, pode-se definir uma curva de serviço para o tráfego  $x_1$  da seguinte maneira (Teorema 19):

$$\beta_1^{\mathcal{D}}(\nu) = (\sigma_1^* \delta_{\bar{D}_1})(\nu). \quad (7.47)$$

sendo  $\bar{D}_1$  definido pela equação (7.44). Alternativamente, pode-se definir uma curva de serviço para o fluxo  $x_1$  da seguinte maneira (do Teorema 20, considerando  $\Theta_1 = \bar{D}_1$  e fazendo  $\nu = t - s$ ):

$$\beta_1^{\bar{D}_1}(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{se } \nu \leq \bar{D}_1, \\ (G \{\beta, \sigma_{12} \delta_{\bar{D}_1}\})(\nu), & \text{se } \nu > \bar{D}_1, \end{cases} \quad (7.48)$$

sendo  $\sigma_{12}$  definida a partir da equação (7.38) e  $\bar{D}_1$ , a partir da equação (7.44).

A seguir, são analisadas as quatro configurações de tráfego e disciplina de filas mencionadas anteriormente. Para cada uma das quatro configurações de tráfegos analisadas, são obtidos os limitantes  $a_1(t)$ ,  $D_1(t)$  e  $\beta_1(s, t)$  (variantes no tempo). A partir destes resultados, das equações (7.44)-(7.48) (ou das equações 7.44-7.45, 7.47-7.48 e da Proposição 29, se o enlace de saída for conservativo), os limitantes  $\bar{D}_1$ ,  $W_1(t)$ ,  $\sigma_{y_1}$  e  $\beta_1(\nu)$  (invariantes no tempo) ficam determinados.

### 7.5.1 Situação 1: Fluxos de mesma prioridade e disciplina de filas FIFO

Nesta seção, analisa-se um multiplexador FIFO com fluxos de entrada de mesma prioridade. Considera-se que dois pacotes de um mesmo fluxo não podem ser recebidos ao mesmo tempo. Seja  $L_k$  o tamanho do maior pacote do fluxo  $x_k$ ,  $k = 1, 2$ .<sup>3</sup> Dado um bit do fluxo  $x_1$  (fluxo de interesse) o qual chega ao sistema no instante  $t$ , têm-se:

<sup>3</sup>Caso se considere possível a recepção de vários pacotes de um mesmo fluxo no mesmo instante, pode-se redefinir  $L_k$  como o tamanho em bits da maior rajada permitida.

- Bits do fluxo  $x_1$  seguem a ordem de chegada. Por isso, não precisam esperar por outros bits do próprio fluxo  $x_1$ . Nesse caso, portanto,  $D_{11}(t) = 0$  e  $B_{11}(t) = 0, \forall t$ . Daí, da equação (7.38), tem-se:  $\sigma_{11} = \sigma_1^*$ .
- Se o bit do fluxo  $x_1$  recebido em  $t$  chega ao sistema imediatamente depois do primeiro bit de um pacote do fluxo  $x_2$ , esse bit tem que esperar o final da transmissão de todos os bits do pacote do fluxo  $x_2$ . Para esse exemplo, tem-se  $B_{12}(t) = L_2, \forall t$ . Nesse caso, se o fluxo  $u_2$  é  $L$ -quantizado, então o atraso  $D_{12}(t)$  corresponde ao atraso de um *buffer* de recepção com *backlog* máximo  $L_2$ . Seja  $\mu'_2 = \mu_2 \phi \lambda_{L_2}$ . Da Proposição 35, têm-se:

$$\Omega_2(s, t) = \inf \{d \geq 0 : \mu'_2(s, t + d) \geq \sigma_2^*(s, t)\},$$

$$D_{12}(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Omega_2(s, t)\}.$$

ou ainda, se  $\mu'_2$  e  $\sigma_2$  são funções invariantes no tempo,

$$\Omega_2(\nu) = \inf \{d \geq 0 : \mu'_2(\nu + d) \geq \sigma_2^*(\nu)\},$$

$$D_{12}(t) = \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Omega_2(\nu)\}.$$

Se, por outro lado, o fluxo  $u_2$  não é  $L$ -quantizado, duas situações podem ser analisadas. Se for conhecida uma função  $\varphi_2$  tal que  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : x_2(0, t) - x_2(0, s) \geq \varphi_2(s, t)$ , então é possível calcular  $D_{12}(t)$  a partir da Proposição 36, fazendo  $B_2(t) = L_2, \forall t$ . Senão, pode-se considerar  $D_{12}(t) = +\infty, \forall t$ . Conseqüentemente, o termo  $(\sigma_k^* \phi \partial_{D_{1k}})$  na equação (7.38) pode ser suprimido, de forma que  $\sigma_{12} = e \oplus (\sigma_2^* \lambda_{B_{12}}) = e \oplus (\sigma_2^* \lambda_{L_2})$ . A Figura 7.20 apresenta as restrições deste sistema ( $i = 1$ ).

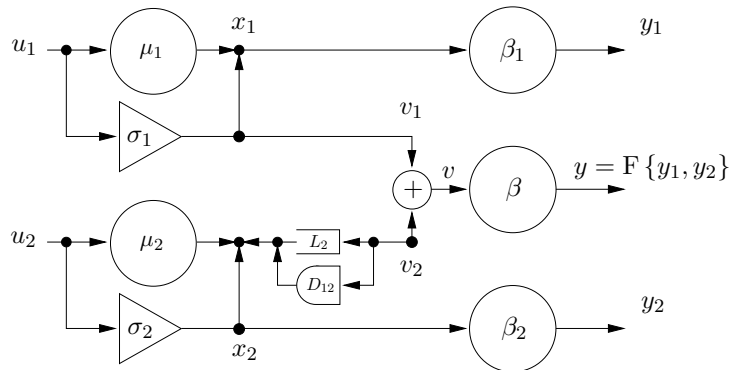


Figura 7.20: Multiplexador com duas entradas: fluxos com a mesma prioridade.

Para esse exemplo, da equação (7.41), tem-se:

$$\rho_1 = F \{\sigma_1^*, \sigma_{12}\}. \quad (7.49)$$

Além disso, de (7.42),  $\rho_1 \delta_{a_1} \succcurlyeq \beta$ . Desta forma, da equação (7.49), tem-se:

$$F\{\sigma_1^*, \sigma_{12}\} \delta_{a_1} = F\{\sigma_1^* \delta_{a_1}, \sigma_{12} \delta_{a_1}\} \succcurlyeq \beta.$$

Dai:  $\sigma_1^* \delta_{a_1} \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_{12} \delta_{a_1}\}$ .

Repetindo o raciocínio do Capítulo 6, para que o desacoplamento do fluxo 1 não altere as equações originais do problema, as seguintes inequações devem ser satisfeitas:

$$\sigma_1^* \delta_{a_1} \succcurlyeq \beta_1 \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_{12} \delta_{a_1}\}, \quad (7.50)$$

ou ainda, no caso em que se exige  $\beta_1 \in \mathcal{C}_t$ :

$$\underline{\text{Pr}}\{\sigma_1^* \delta_{a_1}\} \succcurlyeq \beta_1 \succcurlyeq \overline{\text{Pr}}\{G\{\beta, \sigma_{12} \delta_{a_1}\}\}.$$

Para esse problema, é possível definir uma curva de serviço  $\beta_1$  entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ , de forma análoga ao Teorema 26. Note-se que a curva definida a seguir atende as inequações (7.50). Considere-se um multiplexador FIFO com dois fluxos de entrada de mesma prioridade e curva de serviço  $\beta \in \mathcal{C}$ . O sistema dedica ao fluxo  $x_1$  a seguinte curva de serviço:

$$\beta_1^{a_1} = \sigma_1^* \delta_{a_1}, \quad (7.51)$$

sendo  $a_1(t)$  definida segundo o problema (7.42). Alternativamente, quando se exigem curvas de serviço em  $\mathcal{C}_t$ , pode-se definir uma curva de serviço  $\beta'_1$  para o fluxo 1 da seguinte maneira:  $\beta'_1 = \overline{\text{Pr}}\{\beta_1^{a_1}\}$ , sendo  $\beta_1^{a_1}$  definida pela equação (7.51).

Para mostrar que a função  $\beta_1^{a_1}$  definida pela equação (7.51) é uma curva de serviço entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ , note-se que a função  $a_1(t)$  é um limitante para o p-atraso do fluxo  $x_1$ . Dessa forma,  $\hat{y}_1 \preccurlyeq \hat{x}_1 \delta_{a_1}$ . Além disso,  $\beta_1^{a_1}$  é tal que  $\delta_{a_1} \preccurlyeq \beta_1^{a_1}$ . Dai:  $\hat{y}_1 \preccurlyeq \hat{x}_1 \delta_{a_1} \preccurlyeq \hat{x}_1 \beta_1^{a_1}$ .

Por outro lado, do modelo ilustrado na Figura 7.20, como o multiplexador entre os fluxos  $v_k$ ,  $k = 1, 2$  e  $y$  é FIFO bit a bit e  $x_1 = v_1$ , também é possível definir uma curva de serviço  $\beta_1$  entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ , de forma análoga ao Teorema 20. Nesse caso, tem-se:

$$\beta_1(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta_1(t), \\ (G\{\beta, \sigma_{12} \delta_{\Theta_1}\})(s, t), & \text{se } s < t - \Theta_1(t), \end{cases} \quad (7.52)$$

sendo  $\Theta_1 : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  uma função qualquer; e  $\sigma_{12}$  definida a partir da equação (7.38).

**Exemplo 7.8** (Multiplexador com duas entradas, enlaces de capacidade constante e fluxos de mesma prioridade). *Considere-se um multiplexador FIFO com dois fluxos de entrada de mesma prioridade e enlaces conservativos de capacidade constante, sendo  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :  $C_k(\nu) = C_k \cdot \nu$ ,  $k = 1, 2$ , as capacidades dos enlaces de entrada, e  $\beta(\nu) = C_o \cdot \nu$ , a capacidade do enlace de saída. Considere-se que  $(C_1 + C_2) \leq C_o$ , para que o sistema seja capaz de manter atrasos finitos. A Figura 7.21 apresenta as restrições deste problema. Deseja-se determinar:*

1. Uma função  $D_{12}(t)$ , limitante do atraso de reordenação gerado pelo fluxo 2 no fluxo 1.
2. Uma função  $a_1(t)$ , limitante de  $p$ -atraso entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ .
3. Uma curva de serviço  $\beta_1$  entre  $x_1$  e  $y_1$ .

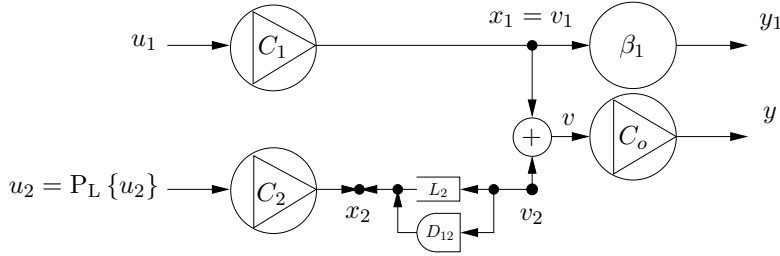


Figura 7.21: Multiplexador FIFO, com dois fluxos de entrada de mesma prioridade, sujeito enlaces conservativos de capacidade constante.

Primeiramente, note-se que entre  $u_2$  e  $v_2$  na Figura 7.21 existem as mesmas restrições ilustradas na Figura 7.16(a), Exemplo 7.7. Dessa forma, do Exemplo 7.7,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$D_{12}(t) = \frac{L_2}{C_2}.$$

Para determinar  $a_1(t)$ , das equações (7.38) e (7.49) as seguintes definições podem ser usadas:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(\nu) &= (e \oplus C_2 \phi \partial_{D_{12}} \oplus C_2 \lambda_{L_2})(\nu) \\ &= \begin{cases} C_2 \cdot (\nu) + L_2, & \text{se } \nu > 0, \\ 0, & \text{se } \nu = 0, \end{cases} \\ \rho_1(\nu) &= C_1 \cdot (\nu) + \sigma_{12}(\nu). \end{aligned}$$

Assim, da Observação 28 e da equação (7.44), têm-se:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\nu) &= \begin{cases} \nu, & \text{se } 0 \leq \nu < L_2/C_o, \\ \left[ \frac{(C_1+C_2-C_o) \cdot \nu + L_2}{(C_1+C_2)} \right]^+, & \text{se } \nu \geq L_2/C_o. \end{cases} \\ a_1(t) &= \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < L_2/C_o, \\ L_2/C_o, & \text{se } t \geq L_2/C_o. \end{cases} \\ \bar{D}_1 &= L_2/C_o. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Das equações (7.53) e (7.47), pode-se determinar uma curva de serviço  $\beta_1$  da seguinte maneira:

$$\beta_1^D(\nu) = C_1 \cdot (\nu - \bar{D}_1) = C_1 \cdot (\nu - L_2/C_o).$$

**Exemplo 7.9** (Multiplexador com duas entradas, enlaces de capacidade constante e fluxos de mesma prioridade (Parte 2)). *Seja o multiplexador do exemplo anterior (Exemplo 7.8). Considere-se que o fluxo de entrada está sujeito à seguinte curva de regulação,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :  $\sigma_k(\nu) = \min \{C_k \cdot \nu, b_k + r_k \cdot \nu\}$ ,  $k = 1, 2$ . Considere-se, ainda, que as seguintes restrições são atendidas:  $(C_1 + C_2) \geq C_o$  e  $(r_1 + r_2) \leq C_o$ . A Figura 7.22 ilustra as restrições deste problema. Note-se que as restrições dos enlaces  $C_k$ ,  $k = 1, 2$  são redundantes (Exemplo 7.7). Deseja-se determinar:*

1. Uma função  $D_1(t)$ , limitante do atraso virtual entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ .
2. Uma curva de serviço  $\beta_1$  entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ .

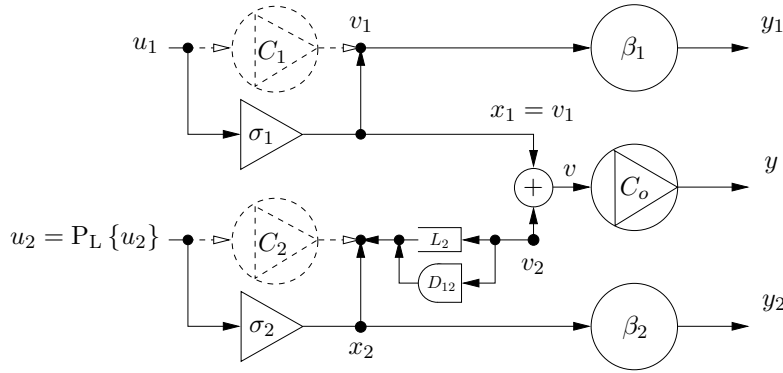


Figura 7.22: Multiplexador FIFO, com dois fluxos de entrada de mesma prioridade, sujeito enlaces conservativos.

Do Exemplo 7.7 (equação 7.36), tem-se:  $\sigma_{12} = e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_{D_{12}}$ , sendo  $D_{12}(t) = \frac{L_2}{C_2}$ ,  $\forall t$ . Daí, da equação (7.49) e da Proposição 10,  $\rho_1$  pode ser definida da seguinte maneira,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :  $\rho_1(\nu) = \sigma_1(\nu) + \sigma_2(\nu + L_2/C_2)$ . Assim, para determinar  $D_1(t)$ , da Observação 29, tem-se:

$$\begin{aligned} \Omega_1(\nu) &= \inf \{d \geq 0 : \sigma_1(\nu) + \sigma_2(\nu + L_2/C_2) \leq \beta(\nu + d)\} \\ &= \inf \{d \geq 0 : \sigma_1(\nu) + \sigma_2(\nu + L_2/C_2) \leq C_o \cdot (\nu + d)\} \\ &= \frac{1}{C_o} \{\sigma_1(\nu) + \sigma_2(\nu + L_2/C_2) - C_o \cdot \nu\}. \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \frac{1}{C_o} \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\sigma_1(\nu) + \sigma_2(\nu + L_2/C_2) - C_o \cdot \nu\}, \\ \bar{D}_1 &= \frac{1}{C_o} \sup_{t \geq 0} \{\sigma_1(t) + \sigma_2(t + L_2/C_2) - C_o \cdot t\}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

O limitante  $\bar{D}_1$  definido pela equação (7.54) foi anteriormente apresentado em Cruz (1991a, Theorem 4.1).

A partir das equações (7.54) e (7.47), pode-se determinar uma curva de serviço  $\beta_1$  entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$  da seguinte maneira:

$$\beta_1(\nu) = \beta_1^D(\nu) = \sigma_1^*(\nu - \bar{D}_1).$$

### 7.5.2 Situação 2: Fluxo de interesse com um fluxo de maior prioridade

Nesta seção, analisa-se a situação em que o fluxo de interesse,  $x_1$ , é menos prioritário que o fluxo  $x_2$ , e é garantida uma disciplina de serviços FIFO para o fluxo  $x_1$ . Em Cruz (1991a), esse multiplexador é chamado multiplexador LFCFS (*Locally First-Come First-Served*).

Considere-se um multiplexador com duas entradas e enlace de saída conservativo com capacidade constante tal que,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :  $\beta(\nu) = C \cdot \nu$ . De acordo com Le Boudec e Thiran (2003, Seção 1.3.2), se o fluxo  $x_2$  é mais prioritário que o fluxo  $x_1$  e satisfaz uma curva de regulação  $\sigma_2$ , invariante no tempo, então o sistema dedica ao fluxo  $x_1$  a seguinte curva de serviço:

$$\beta_1(\nu) = (G\{\beta, \sigma_2^*\})(\nu).$$

É possível obter uma expressão mais geral do que a apresentada originalmente. O Teorema 38 apresenta este resultado.

**Teorema 38.** *Considere-se um multiplexador FIFO não preemptivo com duas entradas e curva de serviço estrita  $\beta \in \mathcal{C}$  (Definição 4). Se o fluxo  $x_2$  é mais prioritário que o fluxo  $x_1$  e atende uma curva de regulação  $\sigma_2$ , então o sistema dedica ao fluxo  $x_1$  a seguinte curva de serviço estrita:*

$$\beta_1 = G\{\beta, \sigma_2^*\}.$$

*Demonstração.* A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice E. □

Seja  $\beta_1$  definida a partir do Teorema 38. Pode-se determinar limitantes  $a_1(t)$  e  $D_1(t)$  diretamente dos Teoremas 21 e 30 (Tabela 7.2), a partir das seguintes expressões:

$$\delta_{a_1} = \inf \{ \delta_\alpha : \sigma_1^* \delta_\alpha \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_2^*\} \}, \quad (7.55)$$

$$\partial_{D_1} = \inf \{ \partial_d : \sigma_1^* \partial_d \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_2^*\} \not\prec \partial_d \}. \quad (7.56)$$

As mesmas funções limitantes de atraso  $a_1(t)$  e  $D_1(t)$  obtidas a partir das equações (7.55)-(7.56) seriam obtidas a partir do procedimento utilizado na seção anterior. Por exemplo, através deste procedimento, demonstra-se a equação (7.56) a seguir.

Considere-se um bit do fluxo  $x_1$  (fluxo de interesse) que chega ao sistema no instante  $t$ . Têm-se:

- Bits do fluxo  $x_1$  seguem a ordem de chegada e não precisam esperar por outros bits do próprio fluxo  $x_1$  que chegam depois de  $t$ . Nesse caso,  $D_{11}(t) = 0$  e  $B_{11}(t) = 0, \forall t$ . Daí:  $\sigma_{11} = \sigma_1^*$ .
- Se o bit do fluxo  $x_1$  recebido em  $t$  chega ao sistema imediatamente depois do primeiro bit de uma rajada do fluxo  $x_2$ , esse bit tem que esperar o final da transmissão de toda a rajada do fluxo  $x_2$ . Considere-se que não se conhecem limitantes para o tamanho e a duração máximos de uma rajada do fluxo  $x_2$ . Nesse caso, não é possível definir  $D_{12}(t)$  através das Proposições 35 e 36. No entanto, sabe-se que  $D_{12}(t) \leq D_1(t), \forall t$ . Dessa forma, pode-se, alternativamente, fazer  $D_{12}(t) = d(t)$  para qualquer  $d(t) \geq D_1(t)$ . Nesse caso, a função  $\sigma_{12}$  pode ser definida da seguinte maneira:  $\sigma_{12} = e \oplus (\sigma_2^* \phi \partial_{D_{12}}) = e \oplus (\sigma_2^* \phi \partial_d)$ . A Figura 7.23 ilustra as restrições deste sistema.

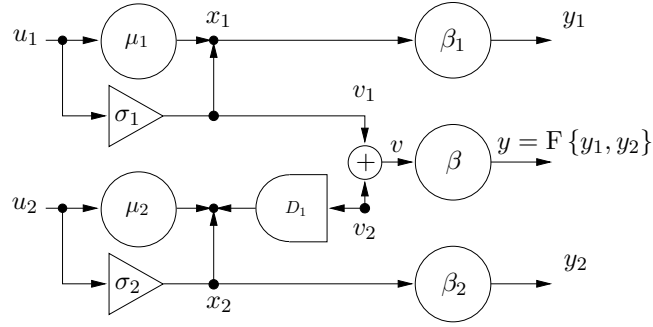


Figura 7.23: Multiplexador com duas entradas: fluxo de interesse com um fluxo de maior prioridade.

Da equação (7.41), pode-se definir  $\rho_1$  da seguinte maneira:

$$\rho_1 = F\{\sigma_1^*, \sigma_{12}\} = F\{\sigma_1^*, (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\}.$$

Daí, de (7.43), tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_{D_1} &= \inf \{\partial_d : F\{\sigma_1^*, (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\} \succcurlyeq \beta \phi \partial_d\} \\ &= \inf \{\partial_d : \sigma_1^* \succcurlyeq G\{\beta \phi \partial_d, (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\}\} \\ &= \inf \{\partial_d : \sigma_1^* \succcurlyeq G\{\beta \phi \partial_d, \sigma_2^* \phi \partial_d\}\} \\ &= \inf \{\partial_d : \sigma_1^* \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_2^*\} \phi \partial_d\}. \end{aligned} \tag{7.57}$$

A passagem para a equação (7.57) está demonstrada no Apêndice G, Proposição 43.

**Exemplo 7.10** (Multiplexador com duas entradas, com enlaces de capacidade constante e fluxo de interesse menos prioritário). *Considere-se um multiplexador com duas entradas e enlace de saída conservativo, com capacidade constante  $C_o$ , a menos de um período de latência de, no*

máximo,  $V$  (constante) unidades de tempo. Além disso, considere-se que os fluxos de entrada são restritos por curvas de regulação invariantes no tempo, tais que  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+ : \sigma_k^*(\nu) = \sigma_k(\nu)$ ,  $k = 1, 2$ . Deseja-se determinar um limitante para o atraso do fluxo  $x_1$ ,  $D_1(t)$ .

Para esse sistema, de acordo com o Exemplo 7.2, tem-se,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\beta(\nu) = (\partial_V C_o)(\nu) = C_o \cdot (\nu - V)^+.$$

Do Teorema 38, tem-se,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\beta_1(\nu) = [\beta(\nu) - \sigma_2^*(\nu)]^+ = [C_o \cdot (\nu - V)^+ - \sigma_2(\nu)]^+.$$

Daí, da equação (7.56), a função  $D_1(t)$  pode ser determinada a partir das seguintes equações,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} \Omega_1(\nu) &= \inf \{d \geq 0 : \sigma_1(\nu) \leq [C_o \cdot (\nu + d - V) - \sigma_2(\nu + d)]^+\}, \\ D_1(t) &= \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Omega_1(\nu)\}. \end{aligned}$$

### 7.5.3 Situação 3: Fluxo de interesse com um fluxo de menor prioridade

Nesta seção, analisa-se o caso em que o fluxo de interesse,  $x_1$ , é mais prioritário que o fluxo  $x_2$ , e se garante uma disciplina de filas FIFO para o fluxo  $x_1$ . Seja  $L_k$  o tamanho do maior pacote do fluxo  $x_k$ ,  $k = 1, 2$ . A curva de serviço  $\beta_1$  nesta situação é bem conhecida. De acordo com Le Boudec e Thiran (2003, Seção 1.3.2), quando o enlace de saída é conservativo e tem capacidade constante tal que  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+ : \beta(\nu) = C \cdot \nu$ , se o fluxo  $x_1$  é mais prioritário que o fluxo  $x_2$ , então o sistema dedica ao fluxo  $x_1$  a seguinte curva de serviço:

$$\beta_1(\nu) = (\beta \phi \lambda_{L_2})(\nu).$$

Essa expressão é extensível para o caso em que curvas de regulação e de serviço são funções variantes no tempo e  $\beta \in \mathcal{C}$  é uma curva de serviço estrita. O Teorema 39 apresenta este resultado.

**Teorema 39.** *Considere-se um multiplexador FIFO com duas entradas e curva de serviço estrita  $\beta \in \mathcal{C}$ . Se o fluxo  $x_2$  é menos prioritário que o fluxo  $x_1$ , e  $L_2$  (constante) é o tamanho do maior pacote do fluxo  $x_2$ , então o sistema dedica ao fluxo  $x_1$  a seguinte curva de serviço estrita:*

$$\beta_1 = \beta \phi \lambda_{L_2}.$$

*Demonstração.* A demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice E. □

Seja  $\beta_1$  definida a partir do Teorema 39. Dos Teoremas 21 e 30 (ou da Tabela 7.2), têm-se:

$$\begin{aligned}\delta_{a_1} &= \inf \{ \delta_\alpha : \sigma_1^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta \phi \lambda_{L_2} \}, \\ \partial_{D_1} &= \inf \{ \partial_d : \sigma_1^* \succcurlyeq (\beta \phi \lambda_{L_2}) \phi \partial_d \}.\end{aligned}\tag{7.58}$$

**Exemplo 7.11** (Multiplexador com duas entradas com enlaces de capacidade constante e fluxo de interesse de maior prioridade). *Seja um multiplexador com duas entradas e enlaces conservativos de capacidade constante, sendo,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :  $C_k(\nu) = C_k \cdot \nu$ ,  $k = 1, 2$ , as capacidades dos enlaces de entrada e  $C_o(\nu) = C_o \cdot \nu$  a capacidade do enlace de saída. Considere-se que os fluxos de entrada são restritos por curvas de regulação invariantes no tempo, tais que  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+ : \sigma_k^*(\nu) = \sigma_k(\nu)$ ,  $k = 1, 2$ . Deseja-se determinar:*

1. Uma curva de serviço  $\beta_1$  entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ .
2. Uma função  $D_1(t)$ , limitante para o atraso entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ ;
3. Um limitante  $\bar{D}_1$  para o atraso máximo entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ ;

Do Teorema 39, tem-se:

$$\beta_1(\nu) = [C_o \cdot \nu - L_2]^+.$$

Daí, um limitante para o atraso virtual entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$  pode ser determinado a partir da equação (7.58). Têm-se:

$$\begin{aligned}\Omega_1(\nu) &= \inf \{ d \geq 0 : \sigma_1(\nu) \leq [C_o \cdot (\nu + d) - L_2]^+ \} \\ &= \frac{1}{C_o} [\sigma_1(\nu) + L_2 - C_o \cdot \nu], \\ D_1(t) &= \frac{1}{C_o} \max_{0 \leq \nu \leq t} \{ \sigma_1(\nu) + L_2 - C_o \cdot \nu \}.\end{aligned}$$

Daí:

$$\bar{D}_1 = \frac{1}{C_o} \sup_{\nu \geq 0} \{ \sigma_1(\nu) + L_2 - C_o \cdot \nu \}.$$

#### 7.5.4 Situação 4: Fluxos sem garantia de ordem de serviço

Nesta seção analisa-se um multiplexador geral, em que não se garante a ordem de serviço de bits. Considere-se um bit do fluxo  $x_1$  (fluxo de interesse) que chega ao sistema no instante  $t$ . Têm-se:

- Não é possível definir a ordem de serviço dos bits. Dessa forma, não é possível definir limitantes para *backlog* e atraso de reordenação devido ao próprio fluxo  $x_1$ , respectivamente,  $B_{11}(t)$  e  $D_{11}(t)$ . No entanto, sabe-se que  $D_{11}(t) \leq D_1(t)$ ,  $\forall t$ . Dessa forma, pode-se

alternativamente fazer  $D_{11}(t) = d(t)$ , para qualquer  $d(t) \geq D_1(t)$ . Nesse caso, a função  $\sigma_{11}$  pode ser definida da seguinte maneira:  $\sigma_{11} = e \oplus (\sigma_1^* \phi \partial_{D_{11}}) = e \oplus (\sigma_1^* \phi \partial_d)$ .

- Como no item anterior,  $D_{12}(t) \leq D_1(t)$ ,  $\forall t$ . Portanto, a função  $\sigma_{12}$  pode ser definida da seguinte maneira:  $\sigma_{12} = e \oplus (\sigma_2^* \phi \partial_{D_{12}}) = e \oplus (\sigma_2^* \phi \partial_d)$ . A Figura 7.24 ilustra as restrições deste sistema.

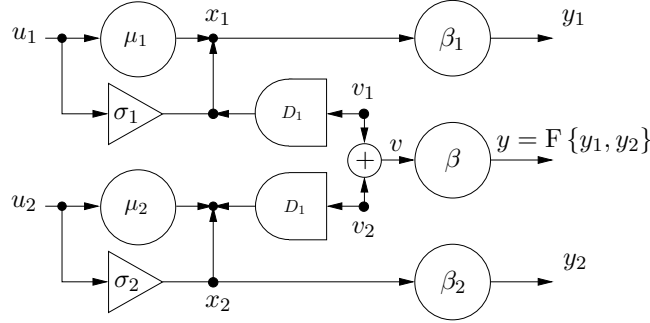


Figura 7.24: Multiplexador com duas entradas: fluxos sem garantia na ordem de serviço.

Da equação (7.41), tem-se:

$$\rho_1 = F\{\sigma_{11}, \sigma_{12}\} = F\{(e \oplus \sigma_1^* \phi \partial_d), (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\}. \quad (7.59)$$

Daí, de (7.43), a função  $D_1(t)$  corresponde à solução do seguinte problema:

$$\partial_{D_1} = \inf\{\partial_d : F\{(e \oplus \sigma_1^* \phi \partial_d), (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\} \succcurlyeq \beta \phi \partial_d\}. \quad (7.60)$$

A partir de  $D_1(t)$ , pode-se determinar  $\bar{D}_1$ . Tem-se:

$$\bar{D}_1 = \sup_{t \geq 0} \{D_1(t)\}.$$

Desse resultado, pode-se determinar uma curva de serviço para o fluxo 1 a partir da equação (7.47) ou da equação (7.48).

**Exemplo 7.12** (Multiplexador com duas entradas e fluxos sem garantia de ordem de serviço). *Considere-se um multiplexador com duas entradas e enlace de saída conservativo, com capacidade constante  $C_o$ , a menos de um período de latência de, no máximo,  $V$  (constante) unidades de tempo. Além disso, considere-se que os fluxos de entrada são restritos por curvas de regulação invariantes no tempo, tais que  $\sigma_k^*(\nu) = b_k + r_k \cdot \nu$ ,  $k = 1, 2$ , e  $(r_1 + r_2) \leq C_o$ . Deseja-se determinar:*

1. Uma função  $D_1(t)$ , limitante para o atraso entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ ;
2. Um limitante  $\bar{D}_1$  para o atraso máximo entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ ;
3. Uma curva de serviço  $\beta_1$  entre os fluxos  $x_1$  e  $y_1$ .

Para esse sistema, de acordo com o Exemplo 7.2, tem-se,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\beta(\nu) = (\partial_V C_o)(\nu) = C_o \cdot (\nu - V)^+.$$

Além disso, da equação (7.59) e da Proposição 10, pode-se definir  $\rho_1$  da seguinte maneira,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :  $\rho_1(\nu) = (b_1 + b_2) + (r_1 + r_2) \cdot (\nu + d)$ . Daí, da equação (7.60),  $D_1(t)$  pode ser determinada a partir das seguintes equações,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} \Omega_1(\nu) &= \inf \{d \geq 0 : (b_1 + b_2) + (r_1 + r_2) \cdot (\nu + d) \leq C_o \cdot (\nu + d - V)^+\} \\ &= \left[ \left( \frac{b_1 + b_2 + C_o \cdot V}{C_o - r_1 - r_2} \right) - \nu \right]^+, \\ D_1(t) &= \max_{0 \leq \nu \leq t} \{\Omega_1(\nu)\} = \left( \frac{b_1 + b_2 + C_o \cdot V}{C_o - r_1 - r_2} \right), \quad \forall t, \\ \bar{D}_1 &= \left( \frac{b_1 + b_2 + C_o \cdot V}{C_o - r_1 - r_2} \right). \end{aligned} \quad (7.61)$$

O limitante  $\bar{D}_1$  na equação (7.61) foi anteriormente apresentado em Cruz (1991a, equação 4.13). Das equações (7.47) e (7.61), tem-se,  $\forall \nu \in \mathbb{C}$ :

$$\beta_1(\nu) = \left[ b_1 - r_1 \cdot \left( \frac{b_1 + b_2 + C_o \cdot V}{C_o - r_1 - r_2} \right) \right] + r_1 \cdot \nu.$$

A Tabela 7.4 apresenta as curvas de serviço obtidas para o tráfego 1 para as quatro configurações de tráfego abordadas nesta seção.

| Configuração de tráfego                 | Curva de serviço do fluxo 1, $\beta_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Mesma prioridade (FIFO)                 | $\beta_1^{\text{a1}} = \sigma_1^* \delta_{a_1}$<br>$\beta_1(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta_1(t) \\ (G\{\beta, \sigma_{12} \delta_{\Theta_1}\})(s, t), & \text{se } s < t - \Theta_1(t) \end{cases}$<br>sendo<br>$B_{12}(t) = L_2, \quad \forall t$<br>$\Omega_2(s, t) = \inf \{d \geq 0, (\mu_2 \phi \lambda_{L_2})(s, t + d) \geq \sigma_2^*(s, t)\}$<br>$D_{12}(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Omega_2(s, t)\}$<br>$\sigma_{12} = e \oplus (\sigma_2^* \phi \partial_{D_{12}}) \oplus (\sigma_2^* \lambda_{B_{12}})$<br>$\rho_1 = F\{\sigma_{11}, \sigma_{12}\}$<br>$a_1 = \inf \{\delta_\alpha : \rho_1 \delta_\alpha \succcurlyeq \beta\}$ |
| Fluxo 1 menos prioritário (FIFO)        | $\beta_1 = G\{\beta, \sigma_2^*\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Fluxo 1 mais prioritário (FIFO)         | $\beta_1 = \beta \phi \lambda_{L_2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Fluxos sem garantia de ordem de serviço | $\beta_1 = \sigma_1^* \delta_{\bar{D}_1}$<br>sendo<br>$\partial_{D_1} = \inf \{\partial_d : F\{(e \oplus \sigma_1^* \phi \partial_d), (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\} \succcurlyeq \beta \phi \partial_d\}$<br>$\bar{D}_1 = \sup_{t \geq 0} \{D_1(t)\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

Tabela 7.4: Curvas de serviço obtidas para quatro configurações de tráfegos multiplexados.

Na próxima seção, é analisado o caso mais geral de um multiplexador com  $M$  fluxos de entradas de diferentes prioridades.

## 7.6 Multiplexador com $M$ fluxos de entradas

Considere-se um multiplexador com  $M$  fluxos de entrada. Sejam:  $\beta$ , uma curva de serviço estrita para o sistema como um todo, e  $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , uma curva de regulação para o fluxo  $x_k$ . Considere-se  $i$  o fluxo de interesse. Os demais fluxos podem ser reunidos em três grupos: os fluxos de menor prioridade, os de maior prioridade e os de mesma prioridade que o fluxo  $i$ . Considerem-se os seguintes conjuntos:

- $\text{LP}(i)$ : conjunto dos fluxos com menor prioridade do que o fluxo  $i$ .
- $\text{SP}(i)$ : conjunto dos fluxos com a mesma prioridade do fluxo  $i$ .
- $\text{HP}(i)$ : conjunto dos fluxos com maior prioridade do que o fluxo  $i$ .

Dessas definições, se um fluxo  $k$  tem prioridade menor do que o fluxo  $i$ , então  $k \in \text{LP}(i)$ ; se tem a mesma prioridade que  $i$ , então  $k \in \text{SP}(i)$ ; e se tem maior prioridade do que  $i$ , então  $k \in \text{HP}(i)$ .

**Observação 30.** Se  $\text{LP}(i) = \emptyset$  e  $\text{HP}(i) = \emptyset$ , então a curva  $\beta$  não precisa ser estrita.

Os fluxos de maior prioridade do que o fluxo  $i$  podem ser agrupados em um único fluxo, com curva de regulação  $\sigma_{\text{HP}(i)}$  definida da seguinte maneira:

$$\sigma_{\text{HP}(i)} = F_{k \in \text{HP}(i)} \{ \sigma_k^* \}.$$

Dessa forma, da Seção 7.5.2, a curva de serviço resultante para o agregado de fluxos incluindo o fluxo  $i$  e os fluxos de igual e de menor prioridade que  $i$ ,  $\beta_i^{\text{HP}}$ , pode ser definida da seguinte maneira:

$$\beta_i^{\text{HP}} = G \{ \beta, \sigma_{\text{HP}(i)} \}. \quad (7.62)$$

Considere-se o agregado de fluxos com menor prioridade que o fluxo  $i$ . Seja  $L_k$  o tamanho do maior pacote do fluxo  $k$ . O tamanho do maior pacote do agregado de fluxos de menor prioridade do que o fluxo  $i$ ,  $L_{\text{LP}(i)}$ , pode ser definido da seguinte maneira:

$$L_{\text{LP}(i)} = \max \{ L_k \}, \quad k \in \text{LP}(i). \quad (7.63)$$

O parâmetro  $L_{\text{LP}(i)}$  corresponde à seguinte função:

$$\lambda_{L_{\text{LP}(i)}} = \bigwedge_{k \in \text{LP}(i)} \lambda_{L_k}.$$

Da Seção 7.5.3, portanto, a curva de serviço para o agregado de tráfegos formado pelo fluxo  $i$  e os fluxos de mesma prioridade que  $i$ ,  $\beta_i^{\text{LP}}$ , pode ser definida da seguinte maneira:

$$\beta_i^{\text{LP}} = \beta_i^{\text{HP}} \phi \lambda_{L_{\text{LP}(i)}}, \quad (7.64)$$

sendo o parâmetro  $L_{\text{LP}(i)}$  definido pela equação (7.63).

Por fim, excetuando-se os fluxos de maior e de menor prioridade do que o fluxo  $i$ , surgem duas opções:

1. É garantida uma disciplina de filas FIFO para o fluxo  $i$ ;
2. Não é garantida uma ordem de serviço para o fluxo  $i$ .

Considere-se garantida uma disciplina de filas FIFO para o fluxo  $i$ . Da Seção 7.5.1,  $\forall k \in \text{SP}(i)$ , têm-se:

$$B_{ik}(t) = L_k, \quad \forall t,$$

A partir de  $B_{ik}(t)$ , se  $u_k = P_L \{u_k\}$ , com  $k \in \text{SP}(i)$ , pode-se determinar  $D_{ik}(t)$  das Proposições 35 e 36; senão, pode-se fazer  $D_{ik} = +\infty$ , conforme comentado na Seção 7.5.1.

Da Seção 7.5.1, dos valores de  $D_{ik}(t)$  e  $B_{ik}(t)$ , têm-se:

$$\sigma_{\text{SP}(i)} = F_{k \in \text{SP}(i)} \{e \oplus (\sigma_k^* \phi \partial D_{ik}) \oplus (\sigma_k^* \lambda_{L_k})\}, \quad (7.65)$$

$$\rho_i = F \{ \sigma_i^*, \sigma_{\text{SP}(i)} \},$$

$$\Lambda_i(s, t) = \inf \{ \alpha \geq 0 : \rho_i(s, t - \alpha) \leq \beta_i^{\text{LP}}(s, t) \},$$

$$a_i(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{ \Lambda_i(s, t) \}, \quad (7.66)$$

$$\Omega_i(s, t) = \inf \{ d \geq 0 : \rho_i(s, t) \leq \beta_i^{\text{LP}}(s, t + d) \},$$

$$D_i(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{ \Omega_i(s, t) \},$$

$$\bar{D}_i = \sup_{t \geq 0} \{ a_i(t) \}.$$

Do exposto anteriormente, uma curva de serviço para o fluxo  $i$  em um multiplexador com  $M$  fluxos de entrada de diferentes prioridades pode ser definida da seguinte maneira:

$$\beta_i^{\Theta_i}(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta_i(t), \\ (G \{ \beta_i^{\text{LP}}, \sigma_{\text{SP}(i)} \otimes \delta_{\Theta_i} \}) (s, t), & \text{se } s < t - \Theta_i(t), \end{cases} \quad (7.67)$$

sendo  $\beta_i^{\text{LP}}$  definida pela equação (7.64);  $\sigma_{\text{SP}(i)}$ , pela equação (7.65); e  $\Theta_i(t) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  uma função qualquer. Além disso, a função  $\overline{\text{Pr}} \{ \beta_i^{\Theta_i} \}$  é uma curva de serviço em  $\mathcal{C}_t$  para o fluxo  $i$ .

**Observação 31.** A fim de garantir o limitante de atraso  $a_i(t)$  obtido na equação (7.66), pode-se definir a seguinte curva de serviço para o fluxo  $i$ :

$$\beta_i^{\text{a}_i} = \sigma_i^* \delta_{a_i}.$$

Alternativamente, de forma semelhante à equação (6.42), pode-se utilizar na equação (7.67) a função  $\Theta_i(t)$  correspondente à solução do seguinte problema:  $\delta_{\Theta_i} = \inf \{ \delta_\alpha : \sigma_{\text{SP}(i)} \delta_\alpha \succcurlyeq \beta_i^{\text{LP}} \}$ .

Se, por outro lado, não se garante a ordem de serviço do fluxo  $i$ , então da Seção 7.5.4, tem-se:

$$\partial_{D_1} = \inf \{ \partial_d : F_{k \in \text{SP}(i) \cup \{i\}} \{ (e \oplus \sigma_k^* \phi \partial_d) \} \succcurlyeq \beta \phi \partial_d \}.$$

A partir de  $D_1(t)$ , pode-se determinar  $\bar{D}_1$ . Tem-se:

$$\bar{D}_1 = \sup_{t \geq 0} \{D_1(t)\}.$$

Daí, pode-se determinar uma curva de serviço para o fluxo 1 a partir da equação (7.47) ou da equação (7.48).

**Exemplo 7.13** (Multiplexador com enlaces conservativos e três fluxos de entradas com prioridades diferentes). *Considere-se um multiplexador com três fluxos de entrada de prioridade diferentes e enlaces conservativos de capacidade constante, sendo  $C$  a capacidade do enlace de saída. Seja  $L_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , o tamanho do maior pacote do fluxo  $k$ . Considere-se que o fluxo 1 é o menos prioritário entre todos, e que o fluxo 3 é o mais prioritário. Considere-se, também, que o fluxo  $k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , atende uma curva de regulação  $\sigma_k(\nu) = b_k + r_k \cdot \nu$ . Deseja-se determinar as curvas de serviço para cada um dos fluxos de entrada. A resolução deste problema está dividida por fluxo:*

1. Se  $i = 1$ , têm-se:  $\text{LP}(1) = \emptyset$ ;  $\text{SP}(1) = \emptyset$ ;  $\text{HP}(1) = \{2, 3\}$ . Daí, têm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{HP}(1)}(\nu) &= (\text{F} \{\sigma_2^*, \sigma_3^*\})(\nu) = (b_2 + b_3) + (r_2 + r_3) \cdot \nu, \\ \beta_1(\nu) &= (\beta_1^{\text{HP}})(\nu) = (\text{G} \{\beta, \sigma_{\text{HP}(1)}\})(\nu) = [C \cdot \nu - (b_2 + b_3) - (r_2 + r_3) \cdot \nu]^+ \\ &= (C - r_2 - r_3) \cdot \left[ \nu - \left( \frac{b_2 + b_3}{C - r_2 - r_3} \right) \right]^+. \end{aligned}$$

2. Se  $i = 2$ , têm-se:  $\text{LP}(2) = \{1\}$ ;  $\text{SP}(2) = \emptyset$ ;  $\text{HP}(2) = \{3\}$ . Daí, têm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{HP}(2)}(\nu) &= \sigma_3^*(\nu) = b_3 + r_3 \cdot \nu, \\ \beta_2^{\text{HP}}(\nu) &= (\text{G} \{\beta, \sigma_{\text{HP}(2)}\})(\nu) = [C \cdot \nu - b_3 - r_3 \cdot \nu]^+ = [(C - r_3) \cdot \nu - b_3]^+, \\ \lambda_{L_{\text{LP}(2)}} &= \lambda_{L_1}, \\ \beta_2(\nu) &= \beta_2^{\text{LP}}(\nu) = (\beta_2^{\text{HP}} \phi \lambda_{L_{\text{LP}(2)}})(\nu) = \{[(C - r_3) \cdot \nu - b_3]^+ - L_1\}^+, \\ &= (C - r_3) \cdot \left[ \nu - \frac{b_3 + L_1}{C - r_3} \right]^+. \end{aligned}$$

3. Se  $i = 3$ , têm-se:  $\text{LP}(3) = \{1, 2\}$ ;  $\text{SP}(3) = \emptyset$ ;  $\text{HP}(3) = \emptyset$ . Daí, têm-se:

$$\begin{aligned} L_{L_{\text{P}(3)}} &= \max \{L_1, L_2\}, \\ \beta_3^{\text{HP}} &= \beta, \\ \beta_3(\nu) &= \beta_3^{\text{LP}}(\nu) = (\beta \phi \lambda_{L_{\text{LP}(3)}})(\nu) = [C \cdot \nu - \max \{L_1, L_2\}]^+ \\ &= C \cdot \left[ \nu - \frac{\max \{L_1, L_2\}}{C} \right]^+. \end{aligned}$$

Os resultados dos itens 1. e 3. acima foram anteriormente apresentados em Georges et al. (2005). Para o item 2., Georges et al. (2005) apresentam a seguinte função como uma curva de serviço para o tráfego  $x_2$ :

$$\mu_2(\nu) = (C - r_3) \cdot \left[ \nu - \left( \frac{b_3}{C - r_3} + \frac{L_1}{C} \right) \right]^+.$$

Note-se que  $\mu_2(\nu) \geq \beta_2(\nu)$ ,  $\forall \nu$ . Desta forma, se  $\hat{y}_2 \preceq \hat{x}_2 \mu_2$ , então  $\mu_2$  seria uma curva de serviço menos conservativa para o tráfego  $x_2$ . Contudo, como pode ser observado na Figura 7.25 para um exemplo simples, ilustrativo, a função  $\mu_2$  não é uma verdadeira curva de serviço para o fluxo 2, porque  $\hat{y}_2 \not\preceq \hat{x}_2 \mu_2$ . A Tabela 7.5 apresenta os parâmetros utilizados para as três fontes de tráfego. Para esse exemplo, o enlace de saída tem capacidade  $C = \frac{25}{3}$  bits/s, e o enlace da entrada  $k$  tem capacidade  $C_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , de forma que  $\sigma'_k(\nu) = \min \{C_k \cdot \nu, b_k + r_k \cdot \nu\}$ <sup>4</sup>. As curvas de entrada  $x_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , são as maiores possíveis, como ilustra a Figura 7.25 para o fluxo  $x_2$  (fluxo de prioridade mediana).

| Fonte   | $C_k$ (bits/s) | $b_k$ (bits) | $r_k$ (bits/s) | $L_k$ (bits) |
|---------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| $k = 1$ | 12,5           | 1500         | 1/3            | 500          |
| $k = 2$ | 10             | 2500         | 1              | 100          |
| $k = 3$ | 10             | 500          | 10/3           | 500          |

Tabela 7.5: Parâmetros utilizados para as fontes de tráfego do exemplo ilustrado na Figura 7.25.

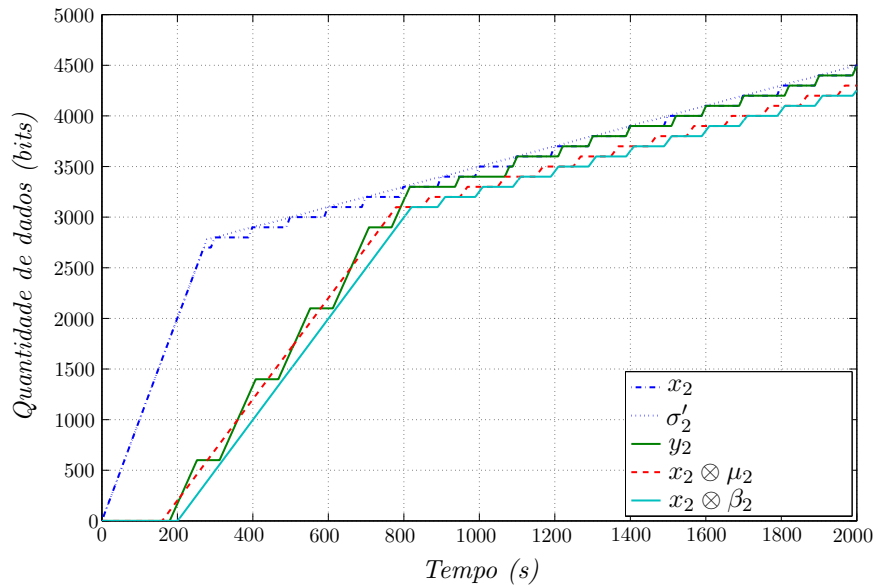


Figura 7.25: Problema da determinação de uma curva de serviço para um tráfego de prioridade mediana.

<sup>4</sup>Note-se que se a função  $\sigma'_k$  é uma curva de regulação para o tráfego  $x_k$ , então a função  $\sigma$  também o é.

## 7.7 Elementos com perdas

Todos os elementos básicos definidos neste trabalho (Tabelas 4.1 e 7.3) são elementos sem perdas. Para evitar perdas, considerou-se que reguladores  $\sigma$  e redes  $\beta$  têm *buffers* infinitos, e que o número de bits presentes em uma fila  $W$  no instante  $t$  nunca supera  $W(t)$  dados. Nesta seção, apresenta-se uma maneira de usar os elementos básicos anteriormente definidos, para representar situações com perdas. Considera-se que as perdas em sistemas acontecem por dois motivos:

- A quantidade de dados recebidos supera a capacidade física de armazenamento do sistema,  $B(t)$ .
- A quantidade de dados recebidos supera um limiar pré-estabelecido para o máximo *backlog*  $B(t)$  ou para o máximo atraso  $D(t)$ . Nesse caso, a perda é calculada de modo a garantir os valores dados para  $B(t)$  e  $D(t)$ .

Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os tráfegos de entrada e saída de um elemento  $S$ , com perdas. Considerem-se conhecidos o *backlog* máximo no instante  $t$ ,  $B(t)$ ; o atraso virtual máximo no instante  $t$ ,  $D(t)$ .

Seja  $u \in \mathcal{C}_t$  a porção do tráfego de entrada do regulador que aparece na saída, e seja  $u^P \in \mathcal{C}_t$  a porção do tráfego de entrada que é perdida. O fluxo total de entrada,  $x$ , do sistema  $S$  satisfaz a seguinte equação:

$$x = F \{u, u^P\}. \quad (7.68)$$

Essa equação pode ser modelada através de um acoplador de tráfegos com duas entradas, conforme ilustra a Figura 7.26. Nesta figura,  $S'$  é um elemento sem perdas com a mesma funcionalidade de  $S$ . Por exemplo, se  $S$  é um regulador com perdas, então  $S'$  é um regulador sem perdas.

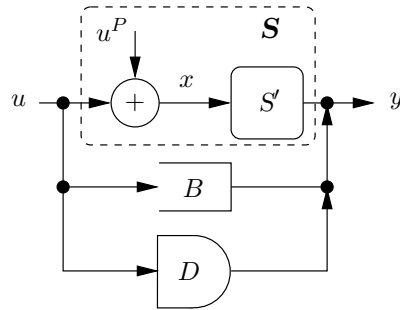


Figura 7.26: Elemento  $S$  com perdas.

Da equação (7.68), tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} [x(0, t) - x(0, s)] &= [u(0, t) - u(0, s)] + [u^P(0, t) - u^P(0, s)] \\ &\geq u(0, t) - u(0, s). \end{aligned}$$

Dessa forma, da Tabela 3.7,  $\hat{x} \bowtie \hat{x} \preceq \hat{u} \bowtie \hat{u}$ , o que implica que  $\hat{u} \succ \hat{u}(\hat{x} \bowtie \hat{x})$ , ou ainda

$$\hat{u} = \hat{u}(\hat{x} \bowtie \hat{x}). \quad (7.69)$$

Além da equação (7.69), o sistema da Figura 7.26 satisfaz as seguintes equações:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (7.70)$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{u}, \quad (7.71)$$

$$\hat{u} = \hat{u} \oplus \hat{y} \lambda_B, \quad (7.72)$$

$$\hat{u} = \hat{u} \oplus \hat{y} \phi \partial_D. \quad (7.73)$$

Da equação (7.71),  $\hat{y} \succ \hat{u}$ . Assim, da inequação (7.69), tem-se:

$$\hat{y} \succ \hat{u}(\hat{x} \bowtie \hat{x}). \quad (7.74)$$

A inequação (7.74) significa que o fluxo de saída do elemento  $S$  é limitado pela função total de entrada,  $x$ , e pela porção de  $x$  não perdida,  $u$ . A seguir é apresentada a análise específica de um regulador com perdas.

**Exemplo 7.14** (Regulador de tráfego com perdas). *Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os tráfegos de entrada e saída de um regulador  $\sigma \in \mathcal{C}$  com perdas, como ilustra a Figura 7.27.*

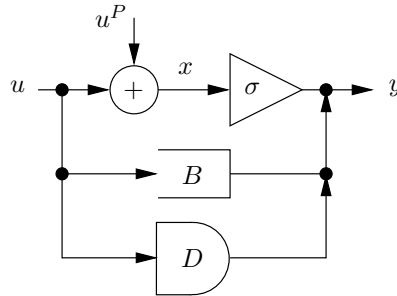


Figura 7.27: Regulador com perdas.

Além das equações (7.68)-(7.73), o sistema ilustrado na Figura 7.27 satisfaz a seguinte equação:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y} \sigma, \quad (7.75)$$

Da equação (7.75),  $\hat{y} = \hat{y}\sigma^*$ ; e da equação (7.72),  $\hat{u} \succ \hat{y}\lambda_B$ . Daí,  $\hat{u} \succ \hat{y}\sigma^*\lambda_B$ . Além disso, da equação (7.73),  $\hat{u} \succ \hat{y}\phi\partial_D$ . Assim,  $\hat{u} \succ (\hat{y}\sigma^*)\phi\partial_D \succ \hat{y}(\sigma^*\phi\partial_D)$ . Dessa forma, tem-se:

$$\hat{u} \succ \hat{y}[(\sigma^*\lambda_B) \oplus (\sigma^*\phi\partial_D)].$$

ou ainda, da equação (7.71),

$$\hat{u} = \hat{u}[e \oplus (\sigma^*\lambda_B) \oplus (\sigma^*\phi\partial_D)]. \quad (7.76)$$

Das equações (7.69) e (7.76), tem-se:

$$\hat{u} = \hat{u}[(\sigma^*\lambda_B) \oplus (\sigma^*\phi\partial_D) \oplus (\hat{x}\hat{x})]. \quad (7.77)$$

Finalmente, das equações (7.71), (7.75) e (7.77), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{y} &\succ \hat{u}\sigma^* \\ &= \hat{u}[(\sigma^*\lambda_B) \oplus (\sigma^*\phi\partial_D) \oplus (\hat{x}\hat{x})]\sigma^*. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Considere-se o caso particular em que  $B(t) = 0, \forall t$ . Nesse caso, das equações (7.71) e (7.72),  $\hat{y} = \hat{u}$ . Além disso, das equações (7.71) e (7.75),  $\hat{y} \succ \hat{u}\sigma$ . Assim, da inequação (7.74),  $\hat{y} \succ \hat{u}[\sigma \oplus (\hat{x}\hat{x})]$ . Daí, tem-se:

$$\hat{y} \succ \hat{u}[\sigma \oplus (\hat{x}\hat{x})]^*. \quad (7.79)$$

Considerando que  $\hat{u} \succ \hat{e}$ , as máximas funções  $\hat{y}$  que satisfazem as equações (7.78) e (7.79) são as seguintes funções:

$$y(0, t) = ([(\sigma^*\lambda_B) \oplus (\sigma^*\phi\partial_D) \oplus (\hat{x}\hat{x})]\sigma^*)(0, t), \quad (7.80)$$

$$y(0, t) = ([\sigma \oplus (\hat{x}\hat{x})]^*)(0, t). \quad (7.81)$$

O limitante de  $y(0, t)$  expresso na equação (7.80) foi anteriormente apresentado em Chang (2000, Theorem 5.4.1), e o limitante da equação (7.81) foi anteriormente apresentado em Cruz e Taneja (1998, Theorem 1).

**Observação 32.** Nesta seção, foi analisada a situação em que as perdas de pacotes são originadas por limitantes em  $B(t)$  e em  $D(t)$ . Contudo, é possível considerar o caso em que a causa das perdas de pacotes é desconhecida, mas são conhecidos limitantes para  $B(t)$  e  $D(t)$ . A modelagem para este caso é idêntica à apresentada nesta seção.

## 7.8 Conclusão

Neste capítulo foram analisados alguns elementos encontrados em modelos de sistemas de comunicações. Dos elementos apresentados, apenas os enlaces conservativos com capacidade variável haviam sido analisados em outros trabalhos para um cenário variante no tempo. Dos demais elementos, são contribuições deste trabalho os canais de atraso máximo determinado e os reordenadores de bit.

Na literatura, encontram-se análises de reguladores ótimos, *buffers* de recepção e multiplexadores. Porém, pela primeira vez, esses elementos são analisados a partir de uma abordagem baseada na álgebra de dióides, em um cenário variante no tempo e a partir de um método sistemático e modular. Também são contribuições deste trabalho a definição de função de atraso variável  $\partial_D$  (Definição 26) e o método para a representação de elementos com perdas apresentado na Seção 7.7. Como no Capítulo 6, os limitantes aqui obtidos são melhores do que os resultantes da análise invariante no tempo, embora neste capítulo tais comparações não estejam apresentadas explicitamente.

Nas Seções 7.5 e 7.6, o modelo de multiplexador FIFO bit a bit apresentado no Capítulo 6 foi estendido para multiplexadores mais realistas, em que se garante a integridade de pacotes e se permitem fluxos de entrada de diferentes prioridades. O modelo de multiplexador apresentado foi dividido em duas partes: uma responsável pela inversão na ordem de serviço de bits; outra responsável pela multiplexação e serviço dos tráfegos de entrada. A análise sistemática apresentada neste trabalho facilitou a extensão do modelo de multiplexador com dois fluxos de entrada (Seção 7.5) para um multiplexador com  $M$  fluxos de entrada de diferentes prioridades (Seção 7.6). Além disso, facilitou a verificação de uma falha na expressão apresentada como curva de serviço para um tráfego de prioridade mediana, em Georges *et al.* (2005).

Ao longo de todo o capítulo, foram inseridos exemplos ilustrativos. Esses exemplos foram apresentados como uma forma de validar os métodos propostos neste trabalho, confrontando os resultados aqui obtidos com os encontrados na literatura.

## Capítulo 8

# Conclusão

As contribuições deste trabalho podem ser consideradas sob dois aspectos. Por um lado, no uso sistemático da álgebra de dióides e na definição de métodos para a modelagem e análise de desempenho de redes de comunicações. Por outro lado, nas análises desenvolvidas e resultados alcançados para alguns sistemas específicos. Esses dois aspectos estão apresentados mais detalhadamente na Seção 8.1. Em seguida, na Seção 8.2, as possíveis extensões para este trabalho são apresentadas.

### 8.1 Contribuições do trabalho

Em geral, na literatura relacionada ao *Network Calculus*, sistemas são tratados individualmente, de forma que, para cada problema, propõe-se uma solução. Uma contribuição deste trabalho é o uso intensivo das técnicas da álgebra de dióides para uma análise mais sistemática de redes de comunicações. Nesse sentido, dois métodos foram propostos. O primeiro método, apresentado na Seção 4.8, propõe que a modelagem e a resolução de problemas relacionados a redes de comunicações sejam feitas na álgebra de dióides. Esse método só faz sentido, porque a proposição rigorosa de um dióide, juntamente com a utilização intensiva do formalismo de dióides, permitiu a classificação de restrições em “tipos”, o que levou, finalmente, à idéia de “elementos básicos”.

Os elementos básicos, isolados ou compostos, são capazes de descrever restrições de componentes de redes de comunicações. Para cada restrição considerada, deve existir um elemento básico ou uma composição de elementos básicos que a represente<sup>1</sup>. Por exemplo, no Capítulo 7, mostrou-se como é possível modelar perdas a partir de uma composição dos quatro elementos básicos definidos no Capítulo 4. Caso uma determinada restrição não corresponda aos

---

<sup>1</sup>A menos da restrição de fluxo que é considerada sempre presente.

elementos básicos definidos (ou a uma composição desses elementos), pode-se definir um novo elemento para representar a nova restrição. Por isso, esse método é modular.

Para tornar possível a implementação desse método de resolução de problemas na álgebra de dióides, definiu-se uma base matemática para a descrição de restrições comumente encontradas em redes de comunicações, como a presença de filtros reguladores, limitações de tamanho de *buffers* e a multiplexação de tráfegos. Neste sentido, são contribuições deste trabalho:

**Definição do dióide  $\mathcal{C}$ .** A partir de uma estrutura encontrada na literatura, definiu-se, no Capítulo 3, o dióide  $\mathcal{C}$ . Esse dióide mostrou-se adequado ao tratamento de redes de comunicações.

**Uso de residuações.** Residuação é uma ferramenta importante para a resolução de problemas na álgebra de dióides. Neste trabalho, definiram-se as residuações das operações de multiplicação à direita e à esquerda, definindo as “divisões” à direita ( $\phi$ ) e à esquerda ( $\psi$ ) no dióide  $\mathcal{C}$ . Essas residuações foram utilizadas sistematicamente ao longo do texto, permitindo a derivação de novos resultados para o NC.

**Definições de funções de atraso variáveis.** Conforme discussão no Capítulo 7, por conveniência, duas funções de atraso foram definidas:<sup>2</sup> a função  $\delta_a$ , adequada para descrever atrasos de bits que *deixam* um sistema em um dado instante e para representar curvas de serviço em função de informações sobre atraso; e a função  $\partial_D$ , adequada para descrever atrasos de bits que *chegam* a um sistema em um instante determinado e para representar fluxos de prioridades distintas e reordenamento de bits.

**Definições de mapeamentos.** Para trabalhar inteiramente na álgebra de dióides e, ao mesmo tempo, representar restrições comuns a redes de comunicações, definiram-se cinco mapeamentos em  $\mathcal{C}$ . O mapeamento  $\hat{x}$  extrai de uma dada função as informações referentes ao intervalo de tempo  $(0, t]$  sendo importante para escrever em  $\mathcal{C}$  praticamente todas as restrições abordadas neste trabalho, como restrições de fluxo, de *backlog*, de serviço e de regulação. Os mapeamentos de projeção  $\overline{\text{Pr}}\{\cdot\}$  e  $\underline{\text{Pr}}\{\cdot\}$  permitem a obtenção de limitantes não-decrescentes no tempo a partir de funções quaisquer, com ou sem porções decrescentes. Os mapeamentos  $F\{\cdot\}$  e  $G\{\cdot\}$  facilitam a representação de restrições relacionadas à multiplexação de tráfegos.

O segundo método definido neste trabalho, apresentado na Seção 5.1, determina procedimentos para a obtenção de limitantes de parâmetros de desempenho em redes. A idéia central deste método é adicionar um elemento básico que represente um parâmetro de interesse, em paralelo a um sistema em observação. Em seguida, verifica-se para que parâmetros do elemento adicionado suas restrições são redundantes. Este método se baseia no conceito de equivalência entre modelos de sistemas introduzido na Seção 5.6.

<sup>2</sup>A função  $\delta_D$ , apresentada no Capítulo 3, é um caso particular da função  $\delta_a$ , definida no Capítulo 6.

Além das contribuições mencionadas anteriormente, este trabalho chegou a alguns resultados particularmente interessantes, mencionados a seguir. Na Seção 5.6, o conceito de equivalência entre representações de sistemas foi usado, para determinar simplificações de modelos em relação a um certo parâmetro de QoS e em relação a fluxos de entrada e de saída de interesse. Como um resultado interessante dessa discussão, mostrou-se que, quando se obtêm várias curvas de serviço não comparáveis para um dado sistema, é mais vantajoso manter as curvas obtidas em paralelo. Essa idéia cria uma representação original para restrições de garantia de serviço em sistemas, na qual, ao invés de uma única curva, procura-se um conjunto de curvas de serviço que representem mais fielmente as restrições de serviço do sistema em análise. No Capítulo 6, mostrou-se, para um exemplo ilustrativo, como a manutenção de duas curvas de serviço foi capaz de representar mais adequadamente o comportamento de um multiplexador FIFO bit a bit, mantendo a característica particular a esse sistema de igualdade de limitantes de atraso para os diferentes tráfegos de entrada.

Também no Capítulo 6, mostrou-se que, mesmo em um cenário invariante no tempo, é possível e potencialmente mais vantajoso obter curvas de serviço variantes no tempo. Essas curvas de serviço tendem a ser menos conservativas<sup>3</sup> para a obtenção de limitantes de QoS no transitório do fluxo de entrada, no início de rajadas.

No Capítulo 7, como uma forma de ilustrar os métodos mencionados anteriormente, analisaram-se alguns componentes comumente encontrados em modelos de sistemas de comunicações, tais como: enlaces conservativos, reguladores ótimos, *buffers* de recepção, reordenadores de bits e multiplexadores. Dos elementos analisados, os canais de atraso máximo determinado e os reordenadores de bit são contribuições deste trabalho. Dos demais, reguladores ótimos, *buffers* de recepção e multiplexadores foram analisados pela primeira vez a partir de uma abordagem totalmente baseada na álgebra de dióides e em um cenário variante no tempo. Além disso, na Seção 7.6, analisaram-se multiplexadores mais realistas do que os encontrados normalmente na literatura do NC, em que se garante a integridade de pacotes e se permitem fluxos de entrada de diferentes prioridades. Finalmente, também é uma contribuição deste trabalho o método para a representação de elementos com perdas apresentado na Seção 7.7.

## 8.2 Trabalhos futuros

Uma questão relevante levantada por este trabalho é como os procedimentos sistemáticos propostos favorecem a utilização do NC para a resolução de problemas práticos. Uma extensão direta deste trabalho é a implementação de uma ferramenta computacional gráfica,

---

<sup>3</sup>Dependendo do caso em análise, é possível que se obtenham os mesmos limitantes a partir de curvas de serviço variantes ou invariantes no tempo.

por exemplo, um *toolbox* para o MATLAB Simulink (*Simulation and Model-Based Design* - The MathWorks, 2007). Uma ferramenta como esta facilitaria sensivelmente o uso dos resultados do NC, porque todos os cálculos poderiam ficar transparentes ao projetista ou avaliador de uma rede, que apenas precisaria entender o significado de cada elemento básico. Nesse caso, modelar e analisar uma rede de comunicações sob a ótica do NC significaria simplesmente: *desenhar* a rede; *determinar pontos de observação* entre os quais seriam monitoradas curvas de interesse ou parâmetros pré-definidos de QoS; *analisar os resultados* obtidos.

A relação entre NC e técnicas de controle e tomadas de decisão em redes é um aspecto que ainda pode ser melhor investigado. Na literatura, existem artigos que relacionam NC e técnicas de controle de admissão de tráfegos. Por exemplo, Daniel-Cavalcante e Santos-Mendes (2006), analisam como o controle de admissão de tráfegos pode ser usado, para garantir uma curva de serviço mínima para um certo fluxo de interesse. Considera-se um multiplexador com dois fluxos de entrada. Nesse caso, deseja-se determinar uma curva de regulação  $\sigma_c$  (controlador) a ser imposta a um dos fluxos de entrada de modo que o outro fluxo (de interesse) tenha garantida uma dada curva de serviço (objetivo de controle).

Uma ferramenta ainda inexplorada para a resolução de problemas relacionados ao NC é a definição de um dióide de séries de potência (Baccelli *et al.*, 1992). Dióides de séries de potência são particularmente interessantes para a representação de funções com padrão repetitivo. Para o caso invariante no tempo, é possível definir um dióide polinomial para o tratamento de problemas relacionados ao NC (Daniel-Cavalcante e Santos-Mendes, 2008a). Para o caso variante no tempo, a definição de um dióide polinomial não é direta e seria necessária uma investigação minuciosa para verificar sua possibilidade.

Um outro aspecto ainda pouco explorado na literatura, é a obtenção de uma curva de serviço fim-a-fim que um sistema formado pela junção em série de multiplexadores dedica a um determinado fluxo  $i$  de interesse. Do Capítulo 5, uma maneira de se obter essa curva de serviço é através da multiplicação em  $\mathcal{C}$  da curva de serviço obtida em cada multiplexador do caminho de  $i$ . Fidler (2003) discute como obter uma curva de serviço menos conservativa para esse fluxo de interesse, a partir do Princípio Estendido de “*Pay Burst Only Once*”. Esse resultado é intuitivo e leva em conta que um mesmo bit não deve sofrer o máximo atraso possível em duas redes consecutivas. Fidler (2003) trata apenas de um cenário invariante no tempo, com curvas de regulação tipo *leaky bucket* (equação 2.5) e curvas de serviço tipo *rate latency* ( $\beta(\nu) = R \cdot (\nu - T)^+$ ). Seria muito interessante, levando-se em conta este princípio, obter expressões gerais para a curva de serviço de um tráfego de interesse dentre um agregado de tráfegos, considerando qualquer tipo de curva de regulação e de serviço, para um cenário invariante ou variante no tempo, em que se determinam uma ou mais curvas de serviço para cada multiplexador pertencente ao caminho do fluxo de interesse e considerando possível multiplexadores com tráfegos de entrada

de diferentes prioridades.

Neste trabalho, obtiveram-se expressões para curvas de serviço a partir da descrição do comportamento de sistemas. Também é possível definir métodos para a determinação *experimental* de curvas de serviço. Liebeherr *et al.* (2007) analisam esta questão a partir da definição de um operador no dióide min-plus chamado de “transformada de Legendre”. Os resultados obtidos são utilizados para a definição de um tráfego de pacotes de monitoração, com os quais se obtêm informações suficientes para a estimação de curvas de serviço.

Os métodos apresentados neste trabalho podem ser utilizados para explorar melhor variações de atraso (*jitter*). Neste trabalho, tratam-se problemas relacionados a quatro parâmetros de desempenho: atraso, *backlog* e curvas de regulação e de serviço. A exemplo de Cruz (1998) e Bennet *et al.* (2002), também existem trabalhos na literatura sobre variações máximas de atraso (máximo *jitter*). Esses trabalhos partem da definição de *curva de máximo serviço* (*maximum service curve*) apresentada em Cruz (1998) e Agrawal *et al.* (1998, 1999). Para manter uma uniformidade com o presente trabalho, considere-se a definição de restrição de máximo serviço a seguir.

**Definição 30** (Restrição de máximo serviço e curva de máximo serviço). *Sejam  $x, y, \varrho : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  funções que satisfazem a seguinte inequação:*

$$\forall t \in \mathbb{Z}^+ : y(0, t) \leq \min_{0 \leq s \leq t} \{x(0, s) + \varrho(s, t)\}. \quad (8.1)$$

*A inequação (8.1) é chamada de “restrição de máximo serviço” entre  $x$  e  $y$ ; e a função  $\varrho$  correspondente é chamada de “curva de máximo serviço”.*

No dióide  $\mathcal{C}$  proposto neste trabalho, a inequação (8.1) pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x} \varrho. \quad (8.2)$$

Para utilizar os métodos apresentados neste trabalho no tratamento de problemas de *jitter* basta adicionar ao conjunto de restrições básicas consideradas, a equação (8.2); e ao conjunto de elementos básicos, um elemento que satisfaça as seguintes equações:  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$  e  $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x} \varrho$ .

Finalmente, embora os resultados deste trabalho tenham sido apresentados em um contexto puramente de determinação de desempenho de redes de pacotes, é possível que possam ser utilizados para outros sistemas de filas (sistemas de manufatura ou sistemas de transporte de mercadorias, por exemplo). Nesse caso, é necessário uma recontextualização das definições de curvas de regulação e de serviço para o sistema considerado. Por exemplo, as curvas de regulação podem representar a máxima quantidade de uma determinada peça que podem ser postas em uma esteira, em um certo intervalo de tempo.

# Referências Bibliográficas

- AGRAWAL, R.; CRUZ, R. L.; OKINO, C.; RAJAN, R. Performance bounds for flow control protocols, April 1998. Disponível em: <[www.ece.wisc.edu/~agrawal/ACOR98.ps](http://www.ece.wisc.edu/~agrawal/ACOR98.ps)>. Acesso em: 11 Janeiro 2008.
- AGRAWAL, R.; CRUZ, R. L.; OKINO, C.; RAJAN, R. Performance bounds for flow control protocols. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 7, n. 3, p. 310–323, June 1999.
- ANDREOLA, R. *Análise de um modelo TCP Max-Plus aplicado a uma rede sem fio*. 2007. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Curitiba, 2007.
- BACCELLI, F.; COHEN, G.; OLSDER, G. J.; QUADRAT, J.-P. *Synchronization and linearity: An algebra for discrete event systems*. England: John Wiley & Sons, 1992.
- BACCELLI, F.; HONG, D. TCP is max-plus linear. Technical Report 3986, INRIA - Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Paris, France, Août 2000.
- BARTA, P.; NÉMETH, F.; SZABÓ, R.; BÍRÓ, J. End-to-end delay bound calculation in Generalized Processor Sharing networks. In: Proceedings of the Sixth IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC'01), 2001. *Anais...* Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2001. p. 282–287.
- BENNET, J. C. R.; BENSON, K.; CHARNY, A.; COURTNEY, W. F.; LE BOUDEC, J.-Y. Delay jitter bounds and packet scale rate guarantee for expedited forwarding. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 10, n. 4, p. 529–540, August 2002.
- In: BENVENUTI, L. (Ed.); DE SANTIS, A. (Ed.); FARINA, L. (Ed.). *Positive systems*. Berlin / Heidelberg: Springer, September 2003. v. 294/2004 em *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Cap. Min-plus and Max-plus System Theory Applied to Communication Networks, p. 7–14.
- BIRKHOFF, G. *Lattice theory*. Third edition. Providence, Rhone Island: American Mathematical Society, 1979. v. XXV em *Colloquium Publications*.
- BLAKE, S.; BLACK, D.; CARLSON, M.; DAVIES, E.; WANG, Z.; WEISS, W. *An architecture for differentiated services*. IETF. RFC 2475, December, 1998. Disponível em: <<http://www.ietf.org/rfc/rfc2475.txt>>. Acesso em: 10 Janeiro 2008.
- BLYTH, T. S.; JANOWITZ, M. F. *Residuation theory*. First edition. Germany: Pergamon Press, 1972.

- BRADEN, R.; CLARK, D.; SHENKER, S. *Integrated services in the Internet architecture: An overview*. IETF, RFC 1633, June, 1994. Disponível em: <ftp://ftp.isi.edu/in-notes/rfc1633.txt>. Acesso em: 10 Janeiro 2008.
- CASSANDRAS, C. G.; LAFORTUNE, S. *Introduction to Discrete Event Systems*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- CASSANDRAS, C. G.; WARDI, Y.; MELAMED, B.; SUN, G.; PANAYIOTOU, C. G. Perturbation Analysis for online control and optimization of stochastic fluid models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 8, p. 1234–1248, August 2002.
- CHANG, C.-S. A filtering theory for deterministic traffic regulation. In: Sixteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM'97), 1997. *Anais...* Kobe, Japan: IEEE Computer Society, 1997. v. 2. p. 436–443.
- CHANG, C.-S. Matrix extensions of the filtering theory for deterministic traffic regulation and service guarantees. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 16, n. 5, p. 708–718, June 1998.
- CHANG, C.-S. On deterministic traffic regulation and service guarantees: A systematic approach by filtering. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 44, n. 3, p. 1097–1110, May 1998.
- CHANG, C.-S. *Performance guarantees in communication networks*. Telecommunication Networks and Computer Systems. London: Springer-Verlag, 2000.
- CHANG, C.-S.; CRUZ, R. L. A time varying filtering theory for constrained traffic regulation and dynamic service guarantees. In: Eighteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM'99), 1999. *Anais...* New York, NY, USA: IEEE, 1999. v. 1. p. 63–70.
- CHANG, C.-S.; CRUZ, R. L.; LE BOUDEC, J.-Y.; THIRAN, P. A min,+ system theory for constrained traffic regulation and dynamic service guarantees. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 10, n. 6, p. 805–817, December 2002.
- In: COMMAULT, C. (Ed.); MARCHAND, N. (Ed.). *Positive systems*. Berlin, Alemanha: Springer Berlin / Heidelberg, October 2006. v. 341/2006 em *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Cap. Max-Plus: A Network Algebra, p. 375–382.
- CRUZ, R. L. A calculus for network delay, part I: Network elements in isolation. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 37, n. 1, p. 114–131, January 1991.
- CRUZ, R. L. A calculus for network delay, part II: Network analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 37, n. 1, p. 132–141, January 1991.
- CRUZ, R. L. Quality of service guarantees in virtual circuit switched networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 13, n. 6, p. 1048–1056, August 1995.
- CRUZ, R. L. SCED+: Efficient management of quality of service guarantees. In: Seventeenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM'98), 1998. *Anais...* San Francisco, CA, USA: IEEE, 1998. v. 2. p. 625–634.

- CRUZ, R. L.; TANEJA, M. An analysis of traffic clipping. *Proc. 1998 Conf. on Information Sciences & Systems*, Princeton University, 1998.
- DANIEL-CAVALCANTE, M. *Algoritmos de balanceamento de carga para tráfego tipo melhor esforço em redes IP/MPLS*. 2001. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, 2001.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; LIMA, T. M. R.; DA COSTA, V. L.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R. Adaptive shifting algorithm for load balancing in MPLS networks. In: 15th International Conference on Parallel and Distributed Computing Systems (PDCS'02), 2002. *Anais...* Louisville, Kentucky, USA, 2002. v. 1. p. 260–265.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; LIMA, T. M. R.; DA COSTA, V. L.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R. Algoritmo adaptativo baseado em análise de perturbações para balanceamento de carga em redes MPLS. In: XIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA'02), 2002. *Anais...* Natal, RN, Brasil, 2002. v. 1. p. 1464–1470.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; LIMA, T. M. R.; DA COSTA, V. L.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R. Algoritmo adaptativo para balanceamento de carga para tráfego tipo melhor esforço em redes IP/MPLS. In: 20º Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores (SBRC'02), 2002. *Anais...* Búzios, RJ, Brasil, 2002. v. 1.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R. Max-Plus: A network algebra. In: Second Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA'06), 2006. *Anais...* Grenoble, França, 2006.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; MAGALHÃES, M. F.; SANTOS-MENDES, R. The Max-Plus algebra and the Network Calculus. In: 8th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'06), 2006. *Anais...* Ann Arbor- Michigan, USA, 2006. p. 433–438.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; SANTOS-MENDES, R. Estimação de limitantes em variáveis aleatórias limitadas. In: XV Congresso Brasileiro de Automática (CBA'04), 2004. *Anais...* Gramado, RS, Brasil, 2004.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; SANTOS-MENDES, R. A álgebra Max-Plus e o controle de tráfego em elementos de redes de comunicações. In: XVI Congresso Brasileiro de Automática (CBA'06), 2006. *Anais...* Salvador- BA, Brasil, 2006. p. 2183–2188.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; SANTOS-MENDES, R. Dioid of formal power series for the determination of performance parameters of communication networks. In: 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08), 2008. *Anais...* Göteborg, Sweden, 2008.
- DANIEL-CAVALCANTE, M.; SANTOS-MENDES, R. Metodologia modular baseada em dióides para a modelagem de restrições de desempenho de redes de comunicações. In: Primeiro Encontro dos Alunos e Docentes do Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial (EADCA'08), 2008. *Anais...* Campinas-SP, 2008.
- FIDLER, M. *Extending the Network Calculus Pay Bursts Only Once principle to aggregate scheduling*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

- FIDLER, M.; SCHMITT, J. B. On the way to a distributed systems calculus: An end-to-end Network Calculus with data scaling. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, New York, NY, USA, v. 34, n. 1, p. 287–298, June 2006.
- FIROIU, V.; LE BOUDEC, J.-Y.; TOWSLEY, D.; ZHANG, Z.-L. Theories and models for Internet quality of service. *Proceedings of the IEEE*, v. 90, n. 9, p. 1565–1591, September 2002.
- FROSSARD, P.; LIU, Z.; VERSCHEURE, O. Methods and apparatus for multimedia stream scheduling in resource-constrained environment. *United States Patent*, v. -, n. US 7,228,535 B2, Jun. 5, 2007.
- GEORGES, J.-P.; DIVOUX, T.; RONDEAU, E. Strict Priority versus Weighted Fair Queueing in switched Ethernet networks for time critical applications. In: Proceedings of the 19th IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'05) - Workshop 2, 2005. *Anais...* Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2005. p. 141–148.
- GOYAL, P.; LAM, S. S.; VIN, H. M. Determining end-to-end delay bounds in heterogeneous networks. *Multimedia Systems*, v. 5, p. 157–163, 1997.
- JASPERNEITE, J.; NEUMANN, P.; THEIS, M.; WATSON, K. Deterministic real-time communication with switched Ethernet. In: 4th IEEE International Workshop on Factory Communication Systems, 2002. *Anais...* Västerås, Sweden: IEEE, 2002. p. 11–18.
- JIANG, Y. A basic stochastic Network Calculus. In: Special Interest Group on Data Communications (ACM SIGCOMM'06), 2006. *Anais...* Pisa, Italy: ACM, 2006. p. 123–134.
- In: KESHAV, S. *An engineering approach to computer networking: ATM networks, the Internet, and the telephone network*. Addison-Wesley Professional Computing Series. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., January 1997. Cap. 9: Scheduling, p. 209–263.
- KIM, H.; HOU, J. C. Network Calculus based simulation for TCP congestion control: Theorems, implementation and evaluation. In: Twenty-third Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM'04), 2004. *Anais...* Hong Kong, China: IEEE, 2004. v. 4. p. 2844–2855.
- In: KUMAR, A.; MANJUNATH, D.; KURI, J. *Communication networking: An analytical approach*. The Morgan Kaufmann Series in Networking. [S.l.]: Elsevier Science & Technology Books, 2004. Cap. 4, Stream Sessions: Deterministic Network Analysis.
- LE BOUDEC, J.-Y. Network Calculus made easy. Technical Report 96/218, CH-1015, DI-EPFL, Lausanne, Switzerland, December 1996.
- LE BOUDEC, J.-Y. Application of Network Calculus to guaranteed service networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 44, n. 3, p. 1087–1096, May 1998.
- LE BOUDEC, J.-Y. Some properties of variable length packet shapers. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 10, n. 3, p. 329–337, June 2002.

- LE BOUDEC, J.-Y.; HÉBUTERNE, G. Comments on “A deterministic approach to the end-to-end analysis of packet flows in connection oriented networks”. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 8, n. 1, p. 121–124, February 2000.
- LE BOUDEC, J.-Y.; THIRAN, P. Network Calculus- A theory of deterministic queuing systems for the Internet. *Online Version of the Book Springer Verlag - LNCS 2050*, June. 2003. Disponível em: <[http://ica1www.epfl.ch/PS\\_files/NetCal.htm](http://ica1www.epfl.ch/PS_files/NetCal.htm)>. Acesso em: 25 June 2003.
- LE BOUDEC, J.-Y.; THIRAN, P.; GIORDANO, S. A short tutorial on Network Calculus I: Fundamental bounds in communication networks. In: IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS'00), 2000. *Anais...* Geneva, Switzerland: IEEE, 2000. p. IV–93–IV–96.
- LE BOUDEC, J.-Y.; THIRAN, P.; GIORDANO, S. A short tutorial on Network Calculus II: Min-plus system theory applied to communications networks. In: IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS'00), 2000. *Anais...* Geneva, Switzerland: IEEE, 2000. p. IV365–IV368.
- LE BOUDEC, J.-Y.; VERSCHEURE, O. Optimal smoothing for guaranteed service. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 8, n. 6, p. 689–696, December 2000.
- LE BOUDEC, J.-Y.; VERSCHEURE, O. Optimal smoothing for guaranteed service. Technical Report DSC2000/014, EPFL-DSC, Lausanne, Switzerland, March 2000.
- LI, C.; BURCHARD, A.; LIEBEHERR, J. A Network Calculus with effective bandwidth. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 15, n. 6, p. 1442–1453, December 2007.
- LIEBEHERR, J.; FIDLER, M.; VALAEE, S. A min-plus system interpretation of bandwidth estimation. In: 26th IEEE International Conference on Computer Communications (INFOCOM'07), 2007. *Anais...* Anchorage, Alaska, USA: IEEE, 2007. p. 1127–1135.
- LIEBEHERR, J.; PATEK, S. D.; BURCHARD, A. Statistical per-flow service bounds in a network with aggregate provisioning. In: Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM'03), 2003. *Anais...* San Francisco, California, USA: IEEE, 2003. v. 3. p. 1680–1690.
- LIU, B.; FIGUEIREDO, D. R.; GUO, Y.; KUROSE, J.; TOWSLEY, D. A study of network simulation efficiency: Fluid simulation vs. packet-level simulation. In: Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM'01), 2001. *Anais...* Anchorage, AK, USA: IEEE Computer Society, 2001. v. 3. p. 1244–1253.
- MAIA, C. A. *Identificação e controle de sistemas a eventos discretos na álgebra  $(\max, +)$* . Julho 2003. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, Julho 2003.
- MALANEY, R. A.; ROGERS, G. Network Calculus and service curve scheduling in heterogeneous networks. In: Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Networks (ICON'99), 1999. *Anais...* Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 1999. v. 00. p. 250.

- MELHORAMENTOS. (Editora Melhoramentos Ltda.). Michaelis: Moderno Dicionário da Língua Portuguesa. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=par%E2metro>>. Acesso em: 04 Março 2008.
- MORAIS, C. G. *Modelagem de desempenho de servidores web empregando a teoria Network Calculus*. 2005. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná, UFPR, Curitiba, 2005.
- PANDIT, K.; SCHMITT, J.; STEINMETZ, R. Network Calculus meets Queueing Theory- A simulation based approach to bounded queues. In: Twelfth IEEE International Workshop on Quality of Service (IWQoS'04), 2004. *Anais...* Montreal, Canada: IEEE, 2004. p. 114–120.
- PAREKH, A. K.; GALLAGER, R. G. A generalized processor sharing approach to flow control in integrated services networks: The single-node case. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 1, n. 3, p. 344–357, June 1993.
- PAREKH, A. K.; GALLAGER, R. G. A generalized processor sharing approach to flow control in integrated services networks: The multiple node case. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 2, n. 2, p. 137–150, April 1994.
- RABINOVITCH, P.; JANSEN, A.; KRSTULICH, Z. Network Service Level Agreement arrival-curve-based conformance checking. *Patent Application Publication*, v. -, n. US 2005/0097206 A1, May 5, 2005.
- RIZZO, G.; LE BOUDEC, J.-Y. “Pay Burst Only Once” does not hold for non-FIFO Guaranteed Rate nodes. Technical Report IC/2005/001, EPFL, Lausanne, Switzerland, January 2005.
- SARIOUAN, H. *A service-curve approach to performance guarantees in integrated-service networks*. 1996. Doctoral Thesis. University of California, University of California, San Diego, 1996.
- SARIOUAN, H.; CRUZ, R. L.; POLYZOS, G. C. Scheduling for quality of service guarantees via service curves. *Proceedings of the International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN'95)*, p. 512–520, September 1995.
- SARIOUAN, H.; CRUZ, R. L.; POLYZOS, G. C. SCED: A generalized scheduling policy for guaranteeing Quality-of-Service. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 7, n. 5, p. 669–683, October 1999.
- STAROBINSKI, D.; KARPOVSKY, M.; ZAKREVSKI, L. A. Application of Network Calculus to general topologies using Turn-Prohibition. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, v. 11, n. 3, June 2003.
- THE MATHWORKS. The MathWorks: Accelerating the pace of engineering and science. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/>>. Acesso em: 10 December 2007.
- VOJNOVIĆ, M.; LE BOUDEC, J.-Y. Elements of probabilistic Network Calculus for packet scale rate guarantee nodes. In: Invited Session on Network Calculus, Fifteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2002. *Anais...* University of Notre Dame, Indiana, USA, 2002.

# Apêndice A

## Tabelas de resultados

Este capítulo reapresenta as tabelas de resultados desta tese. As contribuições deste trabalho estão identificadas por uma estrela (★).

$\forall a, b, c \in \mathcal{D}$ :

|                                                               |                                                               |                                                     |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $a \oplus b = b \oplus a$                                     | $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$               | $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ |
| $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ | $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$ | $\varepsilon \oplus a = a \oplus \varepsilon = a$   |
| $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ | $e \otimes a = a \otimes e = a$                               | $a \oplus a = a$                                    |

Tabela 3.1 Axiomas de um dióide.

$\forall a, b, x \in \mathcal{D}$ :

|                                                                          |                                                                 |         |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------|
| $ax \preceq b \Leftrightarrow x \preceq a \bowtie b$                     | $xa \preceq b \Leftrightarrow x \preceq b \phi a$               | (PR.1)  |
| $a \bowtie (ax) \succcurlyeq x$                                          | $(xa) \phi a \succcurlyeq x$                                    | (PR.2)  |
| $(ab) \bowtie x = b \bowtie (a \bowtie x)$                               | $x \phi (ba) = (x \phi a) \phi b$                               | (PR.3)  |
| $(a \oplus b) \bowtie x = a \bowtie x \wedge b \bowtie x$                | $x \phi (a \oplus b) = x \phi a \wedge x \phi b$                | (PR.4)  |
| $b(a \bowtie x) \preceq (a \phi b) \bowtie x$                            | $(x \phi a) b \preceq x \phi (b \bowtie a)$                     | (PR.5)  |
| $(a \bowtie x) b \preceq a \bowtie (xb)$                                 | $b(x \phi a) \preceq (bx) \phi a$                               | (PR.6)  |
| $x \phi a^* \preceq x$                                                   | $a^* \bowtie x \preceq x$                                       | (PR.7)  |
| $a \bowtie (x \wedge y) = (a \bowtie x) \wedge (a \bowtie y)$            | $(x \wedge y) \phi a = (x \phi a) \wedge (y \phi a)$            | (PR.8)  |
| $a \bowtie (x \oplus y) \succcurlyeq (a \bowtie x) \oplus (a \bowtie y)$ | $(x \oplus y) \phi a \succcurlyeq (x \phi a) \oplus (y \phi a)$ | (PR.9)  |
| $(a \wedge b) \bowtie x \succcurlyeq (a \bowtie x) \oplus (b \bowtie x)$ | $x \phi (a \wedge b) \succcurlyeq (x \phi a) \oplus (x \phi b)$ | (PR.10) |
| $a(a \bowtie x) \preceq x$                                               | $(x \phi a) a \preceq x$                                        | (PR.11) |
| $a(a \bowtie (ax)) = ax$                                                 | $((ax) \phi a) a = ax$                                          | (PR.12) |
| $a \bowtie [a(a \bowtie x)] = a \bowtie x$                               | $[(x \phi a) a] \phi a = x \phi a$                              | (PR.13) |
| $(a \bowtie x) \phi b = a \bowtie (x \phi b)$                            | $b \bowtie (x \phi a) = (b \bowtie x) \phi a$                   | (PR.14) |
| $(a \bowtie x) \oplus b \preceq a \bowtie (x \oplus ab)$                 | $(x \phi a) \oplus b \preceq (x \oplus ba) \phi a$              | (PR.15) |

Tabela 3.2 Propriedades da residuação (adaptado de Baccelli *et al.*, 1992, *Table 4.1*).

$\forall a, b, y \in \mathcal{C} :$

|                                                                                                                                                                |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| $(a \oplus b)(s, t) = \inf \{a(s, t), b(s, t)\}$                                                                                                               |   |
| $(a \otimes b)(s, t) = \begin{cases} \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + b(\tau, t)\}, & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$   |   |
| $(a \bowtie b)(s, t) = \begin{cases} \max_{\tau \leq s \leq t} \{b(\tau, t) - a(\tau, s)\}^+, & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ | ★ |
| $(b \phi a)(s, t) = \begin{cases} \sup_{s \leq t \leq \tau} \{b(s, \tau) - a(t, \tau)\}^+, & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$    | ★ |
| $(a \wedge b)(s, t) = \sup \{a(s, t), b(s, t)\}$                                                                                                               | ★ |

Tabela 3.3 Operações definidas em  $\mathcal{C}$ .

| Validade                    | Propriedade                                                                                                              | Referência |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\forall x \in \mathcal{C}$ | $(x \otimes \lambda_B)(s, t) = \begin{cases} x(s, t) + B(t), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$ | (PL.1)     |
| $\forall x \in \mathcal{C}$ | $(\lambda_B \otimes x)(s, t) = \begin{cases} x(s, t) + B(s), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$ | (PL.2) ★   |
| $\forall x \in \mathcal{C}$ | $(x \phi \lambda_B)(s, t) = [x(s, t) - B(t)]^+$                                                                          | (PL.3) ★   |
| $\forall x \in \mathcal{C}$ | $(\lambda_B \bowtie x)(s, t) = [x(s, t) - B(s)]^+$                                                                       | (PL.4) ★   |

Tabela 3.4 Propriedades da função de deslocamento vertical:  $\lambda_B \in \mathcal{C}$ .

$\forall D \in \mathbb{Z}^+$  (constante):

| Validade                         | Propriedade                                                                                                                                                        | Referência |   |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---|
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | $(x \otimes \delta_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - D), & \text{se } t \geq s + D \\ x(s, s), & \text{se } s \leq t < s + D \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$ | (PD.1)     | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$    | $(\delta_D \otimes x)(s, t) = \begin{cases} x(s + D, t), & \text{se } t \geq s + D \\ x(t, t), & \text{se } s \leq t < s + D \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$ | (PD.2)     | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | $(x \otimes \delta_D) \in \mathcal{C}_t$                                                                                                                           | (PD.3)     | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$    | $(\delta_D \otimes x) \in \mathcal{C}_s$                                                                                                                           | (PD.4)     | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | Se $x(s, s) = 0, \forall s$ , então $(x \otimes \delta_D)(s, t) = x(s, (t - D)^+)$                                                                                 | (PD.5)     |   |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$    | Se $x(s, s) = 0, \forall s$ , então $(\delta_D \otimes x)(s, t) = x(s + D, t)$                                                                                     | (PD.6)     | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | $(x \phi \delta_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t + D), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$                                                  | (PD.7)     | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$    | $(x \otimes \delta_D) \phi \delta_D = x \otimes (\delta_D \phi \delta_D) = x$                                                                                      | (PD.8)     | ★ |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_t$ | $(x \oplus y) \phi \delta_D = x \phi \delta_D \oplus y \phi \delta_D$                                                                                              | (PD.9)     | ★ |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_t$ | Se $x \delta_D \succcurlyeq y$ , então $x \succcurlyeq y \phi \delta_D$                                                                                            | (PD.10)    | ★ |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_t$ | Se $x(s, s) \leq y(s, s), \forall s$ , então $x \delta_D \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y \phi \delta_D$                                            | (PD.11)    | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$    | $(\delta_D \bowtie x)(s, t) = \begin{cases} x((s - D)^+, t), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$                                           | (PD.12)    | ★ |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_s$ | $\delta_D \bowtie (x \oplus y) = \delta_D \bowtie x \oplus \delta_D \bowtie y$                                                                                     | (PD.13)    | ★ |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_s$ | Se $\delta_D x \succcurlyeq y$ , então $x \succcurlyeq \delta_D \bowtie y$                                                                                         | (PD.14)    | ★ |
| $\forall x, y \in \mathcal{C}_s$ | Se $x(t, t) \leq y(t, t), \forall t$ , então $\delta_D x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succcurlyeq \delta_D \bowtie y$                                         | (PD.15)    | ★ |

Tabela 3.5 Propriedades da função de atraso constante:  $\delta_D \in \mathcal{C}$ .

$\forall x, y \in \mathcal{C}$ :

|                                                       |                                    |                                |                                    |   |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|---|
| $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+: y(s, t) \leq x(s, t)$ | $y = y \oplus x$                   | $y \succcurlyeq x$             | $x = x \wedge y$                   | ★ |
| $\forall t \in \mathbb{Z}^+: y(0, t) \leq x(0, t)$    | $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$ | $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x}$ | $\hat{x} = \hat{x} \wedge \hat{y}$ | ★ |

Tabela 3.6 Equivalências entre restrições na álgebra convencional e no dióide  $\mathcal{C}$ .

| Validade                                                                           | Propriedade                                                                                                                                                     | Referência |   |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---|
| $\forall a, b \in \mathcal{C}, b(0, 0) = 0$                                        | $b \otimes \hat{a} = \hat{a}$                                                                                                                                   | (PH.1)     | ★ |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}$                                                     | $\hat{a} \otimes b = \widehat{(ab)}$                                                                                                                            | (PH.2)     | ★ |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}$                                                     | $(\hat{a} \bowtie b)(s, t) = \begin{cases} [b(0, t) - a(0, s)]^+, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$                             | (PH.3)     | ★ |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}$                                                     | $(b \not\phi \hat{a})(s, t) = \begin{cases} \sup_{\tau \geq 0} \{b(0, \tau) - a(0, \tau)\}^+, & \text{se } s = t = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ | (PH.4)     | ★ |
| $\forall a, b \in \mathcal{C},$<br>$b(s, t) < +\infty, \text{ se } s, t < +\infty$ | $b \bowtie \hat{a} = \varepsilon$                                                                                                                               | (PH.5)     | ★ |
| $\forall a, b \in \mathcal{C},$<br>$b(s, t) < +\infty, \text{ se } s, t < +\infty$ | $\hat{a} \not\phi b = \widehat{(a \not\phi b)}$                                                                                                                 | (PH.6)     | ★ |
| $\forall a \in \mathcal{C}$                                                        | $(\hat{a}^*)(s, t) = \begin{cases} a(0, t), & \text{se } s = 0 \\ e(s, t), & \text{se } s \neq 0 \end{cases}$                                                   | (PH.7)     | ★ |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}$                                                     | $b \otimes \hat{a}^* = b \oplus \hat{a}$                                                                                                                        | (PH.8)     | ★ |
| $\forall a \in \mathcal{C}_t$                                                      | $(\hat{a} \bowtie \hat{a})^* = (\hat{a} \bowtie \hat{a})$                                                                                                       | (PH.9)     | ★ |

Tabela 3.7 Propriedades do operador  $\hat{x}$ .

| Validade                          | Propriedade                                                                    | Referência |   |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------|---|
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$     | $\underline{\Pr}\{x\} = \overline{\Pr}\{x\} = x$                               | (PP.1)     | ★ |
| $\forall a, b \in \mathcal{C}'_t$ | $\overline{\Pr}\{a \otimes b\} = \underline{\Pr}\{a \otimes b\} = a \otimes b$ | (PP.2)     | ★ |

Tabela 3.8 Propriedades das projeções de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}_t$ . $\forall a, b, x \in \mathcal{C} :$ 

|                                                                           |   |
|---------------------------------------------------------------------------|---|
| $(\underline{\Pr}\{x\})(s, t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau)\}$ | ★ |
| $(\overline{\Pr}\{x\})(s, t) = \inf_{\tau \geq t} \{x(s, \tau)\}$         | ★ |
| $(F\{a, b\})(s, t) = a(s, t) + b(s, t)$                                   | ★ |
| $(G\{a, b\})(s, t) = [a(s, t) - b(s, t)]^+$                               | ★ |

Tabela 3.9 Mapeamentos  $\underline{\Pr}$ ,  $\overline{\Pr}$ ,  $F$  e  $G$  definidos em  $\mathcal{C}$ .

| Validade                                                                                      | Propriedade                                                                                                   | Referência |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---|
| $\forall a, b, c, d \in \mathcal{C}$                                                          | Se $a \succ c$ e $b \succ d$ , então $F\{a, b\} \succ F\{c, d\}$                                              | (PM.1)     | ★ |
| $\forall a, b, c \in \mathcal{C}$                                                             | $a \succ F\{b, c\} \Leftrightarrow b \preccurlyeq G\{a, c\} \Leftrightarrow c \preccurlyeq G\{a, b\}$         | (PM.2)     | ★ |
| $\forall a, b, c \in \mathcal{C}$                                                             | $a \preccurlyeq F\{b, c\} \Leftrightarrow b \succcurlyeq G\{a, c\} \Leftrightarrow c \succcurlyeq G\{a, b\}$  | (PM.3)     | ★ |
| $\forall a, b, c \in \mathcal{C}$                                                             | Se $a \succ b$ , então $G\{c, a\} \preccurlyeq G\{c, b\}$                                                     | (PM.4)     | ★ |
| $\forall a, b, c, d \in \mathcal{C}$                                                          | $(F\{a, b\}) \bowtie (F\{c, d\}) \succcurlyeq F\{(a \bowtie c), (b \bowtie d)\}$                              | (PM.5)     | ★ |
| $\forall x_k \in \mathcal{C}_t, k = 1, \dots, M$                                              | $F\{x_1 \delta_D, \dots, x_M \delta_D\} = F\{x_1, \dots, x_M\} \otimes \delta_D$                              | (PM.6)     | ★ |
| $\forall x_k \in \mathcal{C}$ e $\forall X_k: \lambda_{X_k} \in \mathcal{C}, k = 1, \dots, M$ | $F\{x_1 \lambda_{X_1}, \dots, x_M \lambda_{X_M}\} = F\{x_1, \dots, x_M\} \lambda_{(X_1 + \dots, X_M)}$        | (PM.7)     | ★ |
| $\forall x_k, \beta_k \in \mathcal{C}, k = 1, \dots, M$                                       | $F\{x_1 \beta_1, \dots, x_M \beta_M\} \succcurlyeq F\{x_1, \dots, x_M\} \otimes F\{\beta_1, \dots, \beta_M\}$ | (PM.8)     | ★ |

Tabela 3.10 Propriedades dos mapeamentos F e G.

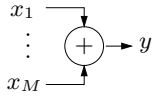
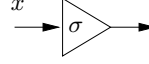
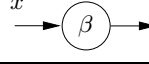
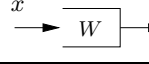
| Elemento                      | Representação gráfica                                                               | Restrições matemáticas                                                             |   |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---|
| $M$ -acoplador sem perdas     |    | $y = F_{k=1, \dots, M} \{x_k\}$                                                    | ★ |
| Regulador $\sigma$ sem perdas |   | $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$<br>$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{y}\sigma$     | ★ |
| Rede $\beta$ sem perdas       |  | $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$<br>$\hat{x}\beta = \hat{x}\beta \oplus \hat{y}$ | ★ |
| Fila $W$ sem perdas           |  | $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$<br>$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y}\lambda_W$  | ★ |

Tabela 4.1 Elementos básicos e suas restrições matemáticas em  $\mathcal{C}$ .

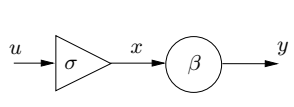
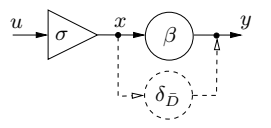
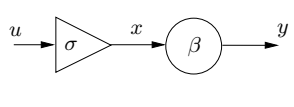
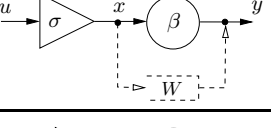
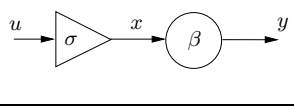
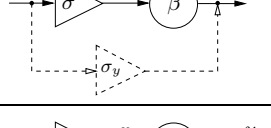
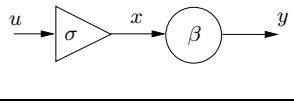
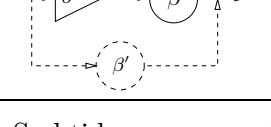
| Sistema original                                                                    | Sistema equivalente                                                                  | Parâmetro de equivalência                                                          |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---|
|  |  | $\delta_{\bar{D}} = \inf \delta_d,$<br>s. a $\sigma^* \delta_d \succcurlyeq \beta$ |   |
|  |  | $W(t) = (\beta \bowtie \sigma^*)(t, t)$                                            | ★ |
|  |  | $\sigma_y = \beta \bowtie \sigma^*$                                                |   |
|  |  | $\beta'$ indeterminado                                                             | ★ |

Tabela 5.1 Parâmetros de QoS obtidos para um sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$ .

| Sistema original | Sistema equivalente | Parâmetro para equivalência total       |   |
|------------------|---------------------|-----------------------------------------|---|
|                  |                     | $\sigma$ indeterminado                  | ★ |
|                  |                     | $\sigma = (\sigma_1 \oplus \sigma_2)^*$ |   |
|                  |                     | $\beta = \beta_1 \beta_2$               |   |
|                  |                     | $\beta$ indeterminado                   | ★ |
|                  |                     | $W(t) = W_1(t) + W_2(t)$                | ★ |
|                  |                     | $W(t) = \min \{W_1(t), W_2(t)\}$        | ★ |

Tabela 5.2 Sistemas equivalentes e parâmetros para equivalência total.

| Sistema original | Sistema equivalente | Parâmetro de equivalência                                                                                                                                                                                                       |   |
|------------------|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
|                  |                     | $\delta_{\bar{D}_1} = \inf \delta_d,$<br>s. a $\sigma^* \delta_d \not\geq \beta_1$<br><br>$\delta_{\bar{D}_2} = \inf \delta_d,$<br>s. a $\sigma^* \delta_d \not\geq \beta_2$<br><br>$\bar{D} = \min \{ \bar{D}_1, \bar{D}_2 \}$ | ★ |
|                  |                     | $W_1(t) = (\beta_1 \bowtie \sigma^*)(t, t)$<br>$W_2(t) = (\beta_2 \bowtie \sigma^*)(t, t)$<br>$W(t) = \min \{W_1(t), W_2(t)\}$                                                                                                  | ★ |
|                  |                     | $\sigma_y = [\beta_1 \bowtie \sigma^* \oplus \beta_2 \bowtie \sigma^*]$                                                                                                                                                         | ★ |

Tabela 5.3 Parâmetros de QoS obtidos para um sistema formado pela junção em série de um regulador  $\sigma$  e duas redes  $\beta$  em paralelo.

| Validade                                         | Propriedade                                                                                                                                                           | Referência |   |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---|
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$                    | $(x\delta_a)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - a(t)), & \text{se } s \leq t - a(t), \\ x(s, s), & \text{se } t - a(t) < s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$ | (PDA.1)    | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$                    | Se $x(s, s) = 0, \forall s$ , então $(x \otimes \delta_a)(s, t) = x(s, [t - a(t)]^+)$                                                                                 | (PDA.2)    | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$                    | $(\delta_a \bowtie x)(s, t) = \begin{cases} x([s - a(s)]^+, t), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$                                         | (PDA.3)    | ★ |
| $\forall x_k \in \mathcal{C}_t, k = 1, \dots, M$ | $F\{x_1\delta_a, \dots, x_M\delta_a\} = F\{x_1, \dots, x_M\}\delta_a$                                                                                                 | (PDA.4)    | ★ |

Tabela 6.1 Propriedades da função de atraso variável  $\delta_a \in \mathcal{C}$ .

| Validade                                         | Propriedade                                                                                                                                                             | Referência |   |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---|
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$                    | $(\partial_D x)(s, t) = \begin{cases} x(s + D(s), t), & \text{se } s + D(s) \leq t, \\ x(t, t) & \text{se } s + D(s) > t \geq s, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$ | (PPD.1)    | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_s$                    | Se $x(t, t) = 0, \forall t$ , então $(\partial_D \otimes x)(s, t) = x(s + D(s), t)$                                                                                     | (PPD.2)    | ★ |
| $\forall x \in \mathcal{C}_t$                    | $(x \phi \partial_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t + D(t)), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$                                                | (PPD.3)    | ★ |
| $\forall x_k \in \mathcal{C}_t, k = 1, \dots, M$ | $F\{x_1 \phi \partial_D, \dots, x_M \phi \partial_D\} = F\{x_1, \dots, x_M\} \phi \partial_D$                                                                           | (PPD.4)    | ★ |

Tabela 7.1 Propriedades da função de atraso variável  $\partial_D \in \mathcal{C}$ .

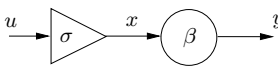
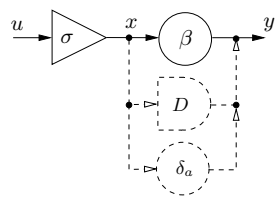
| Sistema original                                                                    | Sistema equivalente                                                                  | Parâmetros de equivalência                                                                                                                                                                               |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
|  |  | $\delta_a = \inf \delta_\alpha,$ <p>s. a <math>\sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta</math></p> $\partial_D = \inf \partial_d,$ <p>s. a <math>\sigma^* \succcurlyeq \beta \phi \partial_d</math></p> | ★ |

Tabela 7.2 Parâmetros de atraso obtidos para um sistema regulador  $\sigma$  - rede  $\beta$ .

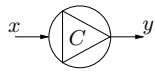
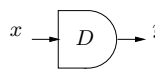
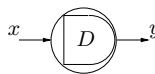
| Elemento                                                        | Representação gráfica                                                                | Restrições matemáticas                                                                   |   |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Enlace conservativo com capacidade $C$ ou regulador $C$ guloso: |  | $\hat{y} = \hat{x}C^*$                                                                   |   |
| Linha de atraso máximo $D(t)$ sem perdas:                       |  | $\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}$<br>$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y} \phi \partial_D$ | ★ |
| Linha de atraso constante $D$ :                                 |  | $\hat{y} = \hat{x}\delta_D$                                                              |   |

Tabela 7.3 Elementos básicos adicionais e suas restrições em  $\mathcal{C}$ .

| Configuração de tráfego                 | Curva de serviço do fluxo 1, $\beta_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |   |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Mesma prioridade                        | $\beta_1^{a_1} = \sigma_1^* \delta_{a_1},$<br>$\beta_1(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta_1(t) \\ (G\{\beta, \sigma_{12} \delta_{\Theta_1}\})(s, t), & \text{se } s < t - \Theta_1(t) \end{cases}$<br>sendo<br>$B_{12}(t) = L_2, \forall t$<br>$\Omega_2(s, t) = \inf \{d \geq 0, (\mu_2 \phi \lambda_{L_2})(s, t + d) \geq \sigma_2^*(s, t)\}$<br>$D_{12}(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Omega_2(s, t)\}$<br>$\sigma_{12} = e \oplus (\sigma_2^* \phi \partial_{D_{12}}) \oplus (\sigma_2^* \lambda_{B_{12}})$<br>$\rho_1 = F\{\sigma_{11}, \sigma_{12}\}$<br>$a_1 = \inf \{\delta_\alpha : \rho_1 \delta_\alpha \succcurlyeq \beta\}$ | ★ |
| Fluxo 1 menos prioritário               | $\beta_1 = G\{\beta, \sigma_2^*\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ★ |
| Fluxo 1 mais prioritário                | $\beta_1 = \beta \phi \lambda_{L_2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ★ |
| Fluxos sem garantia de ordem de serviço | $\beta_1 = \sigma_1^* \delta_{\bar{D}_1}$<br>sendo<br>$\partial_{D_1} = \inf \{\partial_d : F\{(e \oplus \sigma_1^* \phi \partial_d), (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\} \succcurlyeq \beta \phi \partial_d\}$<br>$\bar{D}_1 = \sup_{t \geq 0} \{D_1(t)\}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | ★ |

Tabela 7.4 Curvas de serviço obtidas para quatro configurações de tráfegos multiplexados.

## Apêndice B

# Demonstrações referentes ao Capítulo 3

A seguir, são apresentadas as demonstrações de propriedades apresentadas no Capítulo 3. Para facilitar a leitura, as demonstrações estão divididas por tabela.

### B.1 Propriedades da Tabela 3.4

**Propriedades (PL.1) e (PL.2).** Para todo  $x \in \mathcal{C}$ :

$$(x \otimes \lambda_B)(s, t) = \begin{cases} x(s, t) + B(t), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$(\lambda_B \otimes x)(s, t) = \begin{cases} x(s, t) + B(s), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathcal{C}$ . Da definição de produto apresentada na Tabela 3.3 e da Definição 16,  $\forall s, t$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (x \otimes \lambda_B)(s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + \lambda_B(\tau, t)\} \\ &= \min \left\{ \min_{s \leq \tau < t} \{x(s, \tau) + \lambda_B(\tau, t)\}, [x(s, t) + \lambda_B(t, t)] \right\} \\ &= \min \{+\infty, [x(s, t) + B(t)]\} = x(s, t) + B(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, quando  $s > t$ ,  $(x \otimes \lambda_B)(s, t) = 0$ , diretamente da definição de produto, o que completa a prova da equação (B.1).

A prova da equação (B.2) é parecida. □

**Propriedade (PL.3).** Para todo  $x \in \mathcal{C}$ :

$$(a \phi \lambda_B)(s, t) = [a(s, t) - B(t)]^+.$$

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (a \phi \lambda_B)(s, t) &= \sup_{s \leq t \leq \tau} \{a(s, \tau) - \lambda_B(t, \tau)\}^+ \\ &= \max \left\{ [a(s, t) - \lambda_B(t, t)]^+, \sup_{s \leq t < \tau} \{a(s, \tau) - \lambda_B(t, \tau)\}^+ \right\} \\ &= [a(s, t) - B(t)]^+. \end{aligned}$$

Além disso, se  $s > t$ , então  $a(s, t) = 0$ , de forma que  $[a(s, t) - B(t)]^+ = [0 - B(t)]^+ = 0 = (a \phi \lambda_B)(s, t)$ , da definição de residuação (Tabela 3.3).  $\square$

**Propriedade (PL.4).** Para todo  $x \in \mathcal{C}$ :

$$(\lambda_B \bowtie a)(s, t) = [a(s, t) - B(s)]^+.$$

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (\lambda_B \bowtie a)(s, t) &= \max_{0 \leq \tau \leq s \leq t} \{a(\tau, t) - \lambda_B(\tau, s)\}^+ \\ &= \max \left\{ [a(s, t) - \lambda_B(s, s)]^+, \max_{0 \leq \tau < s \leq t} \{a(\tau, t) - \lambda_B(\tau, s)\}^+ \right\} \\ &= [a(s, t) - B(s)]^+. \end{aligned}$$

Além disso, se  $s > t$ , então  $a(s, t) = 0$ , de forma que  $[a(s, t) - B(s)]^+ = 0 = (\lambda_B \bowtie a)(s, t)$  (Tabela 3.3).  $\square$

## B.2 Propriedades da Tabela 3.5

Nesta seção, considere-se que  $s, t, \tau, v, D \in \mathbb{Z}^+$  e que  $D$  é uma constante.

**Propriedade (PD.1).** Para todo  $x \in \mathcal{C}_t$ :

$$(x \otimes \delta_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - D), & \text{se } t \geq s + D, \\ x(s, s), & \text{se } s \leq t < s + D, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall s, t$ , se  $s \leq t$ ,

$$(x \otimes \delta_D)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + \delta_D(\tau, t)\}.$$

Seja  $t < s + D$ . Nesse caso, como  $s \leq \tau$ , então  $t < \tau + D$ . Assim, da Definição 17,  $\delta_D(\tau, t) = 0$ . Portanto, se  $s \leq t < \tau + D$ ,  $(x \otimes \delta_D)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau)\}$ . Mas, da consideração de que  $x \in \mathcal{C}_t$ :  $\min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau)\} = x(s, s)$ . Daí, se  $s \leq t < s + D$ , então  $(x \otimes \delta_D)(s, t) = x(s, s)$ .

Por outro lado, se  $t \geq s + D$ , ou seja, se  $s \leq t - D$ , então:

$$\begin{aligned} (x \otimes \delta_D)(s, t) &= \min \left\{ \min_{s \leq \tau < t-D} \{x(s, \tau) + \delta_D(\tau, t)\}, \min_{t-D \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + \delta_D(\tau, t)\} \right\} \\ &= \min \left\{ \min_{s \leq \tau < t-D} \{x(s, \tau) + \infty\}, \min_{t-D \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + 0\} \right\} \\ &= \min_{t-D \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau)\} = x(s, t-D). \end{aligned}$$

Por fim, quando  $s > t$ ,  $(x \otimes \delta_D)(s, t) = 0$ , direto da definição de produto.  $\square$

**Propriedade (PD.2).** Para todo  $x \in \mathcal{C}_s$ :

$$(\delta_D \otimes x)(s, t) = \begin{cases} x(s + D, t), & \text{se } t \geq s + D, \\ x(t, t), & \text{se } s \leq t < s + D, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall s, t$ , se  $s \leq t$ ,

$$(\delta_D \otimes x)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{\delta_D(s, \tau) + x(\tau, t)\}.$$

Seja  $t < s + D$ . Daí,  $\tau \leq t < s + D$ . Dessa forma, da Definição 17,  $\delta_D(s, \tau) = 0$  e então

$$(\delta_D \otimes x)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(\tau, t)\} = x(t, t),$$

porque  $x \in \mathcal{C}_s$ .

Por outro lado, se  $t \geq s + D$ :

$$\begin{aligned} (\delta_D \otimes x)(s, t) &= \min \left\{ \min_{s \leq \tau \leq s+D} \{0 + x(\tau, t)\}, \min_{s+D < \tau \leq t} \{+\infty + x(\tau, t)\} \right\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq s+D} \{x(\tau, t)\} = x(s + D, t). \end{aligned}$$

Finalmente,  $(\delta_D \otimes x)(s, t) = 0$ , se  $s > t$ , pela definição de produto.  $\square$

**Propriedades (PD.3) e (PD.4).** Para todo  $x \in \mathcal{C}_t$ :  $(x \otimes \delta_D) \in \mathcal{C}_t$  e  $(\delta_D \otimes x) \in \mathcal{C}_s$ .

*Demonstração.* Da propriedade (PD.1), Tabela 3.5,

$$(x \delta_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - D), & \text{se } t \geq s + D, \\ x(s, s), & \text{se } s \leq t < s + D, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

Sejam  $s, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^+$ , com  $t_1 \leq t_2$ . Nesse caso, para provar que  $x \delta_D \in \mathcal{C}_t$ , basta provar que  $(x \delta_D)(s, t_1) \leq (x \delta_D)(s, t_2)$ ,  $\forall s, t_1, t_2$ , com  $t_1 \leq t_2$ . A análise será feita por intervalos.

1. Se  $s \leq t_1 - D$ , então  $s \leq t_1 - D \leq t_2 - D$ . Nesse caso,  $(x\delta_D)(s, t_1) = x(s, t_1 - D)$  e  $(x\delta_D)(s, t_2) = x(s, t_2 - D)$ . Mas, como  $x \in \mathcal{C}_t$ , então,  $x(s, t_1 - D) \leq x(s, t_2 - D)$ . Portanto,  $(x\delta_D)(s, t_1) \leq (x\delta_D)(s, t_2)$ .
2. Se  $t_1 - D < s \leq \min\{t_2 - D, t_1\}$ , então  $(x\delta_D)(s, t_1) = x(s, s)$  e  $(x\delta_D)(s, t_2) = x(s, t_2 - D)$ . Como  $x \in \mathcal{C}_t$  e  $s \leq t_2 - D$ , então,  $x(s, s) \leq x(s, t_2 - D)$ . Portanto,  $(x\delta_D)(s, t_1) \leq (x\delta_D)(s, t_2)$ .
3. Se  $t_2 - D < s \leq t_1$ , então  $t_1 - D \leq t_2 - D < s \leq t_1 \leq t_2$ . Assim:  $(x\delta_D)(s, t_1) = x(s, s)$  e  $(x\delta_D)(s, t_2) = x(s, s)$ . Daí,  $(x\delta_D)(s, t_1) = (x\delta_D)(s, t_2)$ .
4. Se  $t_1 < s \leq t_2 - D$ , então  $(x\delta_D)(s, t_1) = 0$  e  $(x\delta_D)(s, t_2) = x(s, t_2 - D)$ . Daí, como  $x \in \mathcal{C}_t$ , então  $x(s, t) \geq 0, \forall s, t \in \mathbb{Z}^+$  e, portanto,  $(x\delta_D)(s, t_1) \leq (x\delta_D)(s, t_2)$ .
5. Se  $\max\{t_1, t_2 - D\} < s \leq t_2$ , então  $(x\delta_D)(s, t_1) = 0$  e  $(x\delta_D)(s, t_2) = x(s, s) \geq 0$ . Daí,  $(x\delta_D)(s, t_1) \leq (x\delta_D)(s, t_2)$ .
6. Finalmente, se  $s > t_2 \geq t_1$ , então  $(x\delta_D)(s, t_1) = (x\delta_D)(s, t_2) = 0$ .

Dos itens anteriores, tem-se  $\forall s, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^+$ , com  $t_1 \leq t_2$ :  $(x\delta_D)(s, t_1) \leq (x\delta_D)(s, t_2)$ . Desta forma,  $(x\delta_D) \in \mathcal{C}_t$ .

A análise da propriedade (PD.4), Tabela 3.5, é parecida. □

**Propriedades (PD.5) e (PD.6).** *Seja  $x \in \mathcal{C}$ , tal que  $x(s, s) = 0, \forall s$ . Se  $x \in \mathcal{C}_t$ :*

$$(x \otimes \delta_D)(s, t) = x(s, [t - D]^+).$$

*Além disso, se  $x \in \mathcal{C}_s$ :*

$$(\delta_D \otimes x)(s, t) = x(s + D, t).$$

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathcal{C}_t$ . Da propriedade (PD.1), Tabela 3.5, se  $x(s, s) = 0, \forall s$ :

$$(x\delta_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - D), & \text{se } t \geq s + D, \\ 0, & \text{se } t < s + D. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Agora, se  $t \geq s + D$ , então  $x(s, [t - D]^+) = x(s, t - D)$ , dado que  $s \geq 0$ . Portanto, da equação (B.3),  $(x\delta_D)(s, t) = x(s, [t - D]^+)$ . Por outro lado, se  $t < s + D$  dois casos podem acontecer:  $t < D \leq s + D$  ou  $D \leq t < s + D$ . Pela definição do conjunto  $\mathcal{C}$  (equação 3.5) e novamente da equação (B.3), se  $t < D$ , então  $x(s, [t - D]^+) = x(s, 0) = 0 = (x\delta_D)(s, t)$ ; se  $D \leq t < s + D$ , ou seja, se  $0 \leq t - D < s$ , então  $x(s, [t - D]^+) = x(s, t - D) = 0 = (x\delta_D)(s, t)$ . Do exposto anteriormente,  $(x\delta_D)(s, t) = x(s, [t - D]^+)$ .

A segunda propriedade, ou seja,  $(\delta_D x)(s, t) = x(s + D, t)$ , quando  $x(s, s) = 0, \forall s$ , é consequência direta da propriedade (PD.2), Tabela 3.5, e do fato de que, se  $x \in \mathcal{C}$ , então  $x(s + D, t) = 0$ , quando  $t < s + D$ . □

**Propriedade (PD.7).** Para todo  $x \in \mathcal{C}_t$ :

$$(x \phi \delta_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t + D), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall s, t$  tais que  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (x \phi \delta_D)(s, t) &= \sup_{s \leq t \leq \tau} \{x(s, \tau) - \delta_D(t, \tau)\}^+ \\ &= \max \left\{ 0, \max_{s \leq t \leq \tau \leq t+D} \{x(s, \tau) - 0\}, \sup_{\tau > t+D} \{x(s, \tau) - \infty\} \right\} \\ &= \max_{s \leq t \leq \tau \leq t+D} \{x(s, \tau)\} = x(s, t + D), \end{aligned}$$

se  $x \in \mathcal{C}_t$ . Quando  $s > t$ ,  $(x \phi \delta_D)(s, t) = 0$ , diretamente da definição da operação  $\phi$ .  $\square$

**Propriedade (PD.8).** Para todo  $x \in \mathcal{C}_t$ :

$$(x \otimes \delta_D) \phi \delta_D = x \otimes (\delta_D \phi \delta_D) = x.$$

*Demonstração.* Da propriedade (PD.7), Tabela 3.5,

$$[(x \delta_D) \phi \delta_D](s, t) = \begin{cases} (x \delta_D)(s, t + D), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

Mas, da propriedade (PD.1), Tabela 3.5, quando  $x \in \mathcal{C}_t$ :  $(x \delta_D)(s, t + D) = x(s, t)$ , se  $t \geq s$ . Assim,  $\forall s, t$ :

$$\begin{aligned} [(x \delta_D) \phi \delta_D](s, t) &= \begin{cases} x(s, t), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases} \\ &= x(s, t). \end{aligned}$$

Dai:  $[(x \delta_D) \phi \delta_D] = x$ .

Por fim, fazendo  $x = e$  na equação anterior, tem-se:  $[(e \delta_D) \phi \delta_D] = (\delta_D \phi \delta_D) = e$ , e então  $x \otimes (\delta_D \phi \delta_D) = x \otimes e = x$ , o que completa a prova.  $\square$

**Propriedade (PD.9).** Para todo  $x, y \in \mathcal{C}_t$ :

$$(x \oplus y) \phi \delta_D = x \phi \delta_D \oplus y \phi \delta_D.$$

*Demonstração.* Primeiramente, é necessário mostrar que, se  $x \in \mathcal{C}_t$  e  $y \in \mathcal{C}_t$ , então  $(x \oplus y) \in \mathcal{C}_t$ . Sejam  $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^+$  tais que  $t_1 \leq t_2$ . Então,  $\forall s$ :  $x(s, t_1) \leq x(s, t_2)$  e  $y(s, t_1) \leq y(s, t_2)$ . Assim, da Tabela 3.3,  $\forall s, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^+$ , com  $t_1 \leq t_2$ :

$$\begin{aligned} (x \oplus y)(s, t_1) &= \inf \{x(s, t_1), y(s, t_1)\} \\ &\leq \inf \{x(s, t_2), y(s, t_2)\} = (x \oplus y)(s, t_2), \end{aligned}$$

e, portanto,  $(x \oplus y) \in \mathcal{C}_t$ . Dessa forma, da propriedade (PD.7), Tabela 3.5, se  $s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} [(x \oplus y) \phi \delta_D](s, t) &= (x \oplus y)(s, t + D) \\ &= \inf \{x(s, t + D), y(s, t + D)\} \\ &= \inf \{(x \phi \delta_D)(s, t), (y \phi \delta_D)(s, t)\} \\ &= [(x \phi \delta_D) \oplus (y \phi \delta_D)](s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $s > t$ ,

$$[(x \oplus y) \phi \delta_D](s, t) = [(x \phi \delta_D) \oplus (y \phi \delta_D)](s, t) = 0.$$

Dessa forma,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : [(x \oplus y) \phi \delta_D](s, t) = [(x \phi \delta_D) \oplus (y \phi \delta_D)](s, t)$ . Portanto, da Tabela 3.6,  $(x \oplus y) \phi \delta_D = x \phi \delta_D \oplus y \phi \delta_D$ .  $\square$

**Propriedades (PD.10) e (PD.11).** Para todo  $x, y \in \mathcal{C}_t$ :

$$x \delta_D \succcurlyeq y \Rightarrow x \succcurlyeq y \phi \delta_D.$$

Além disso, se  $x(s, s) \leq y(s, s)$ ,  $\forall s$ , então:

$$x \delta_D \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \succcurlyeq y \phi \delta_D.$$

*Demonstração.* Primeiramente, se  $x \delta_D \succcurlyeq y$ , então, da Tabela 3.6,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : (x \delta_D)(s, t) \leq y(s, t)$ . Assim, da propriedade (PD.1), Tabela 3.5, se  $x \in \mathcal{C}_t$ , então  $\forall t \geq s + D : x(s, t - D) \leq y(s, t)$ , ou equivalentemente, fazendo  $v = t - D$ ,  $\forall v \geq s \geq 0 : x(s, v) \leq y(s, v + D)$ . Assim, da consideração de que  $y \in \mathcal{C}_t$  e da propriedade (PD.7), Tabela 3.5,

$$\forall v \geq s \geq 0 : x(s, v) \leq (y \phi \delta_D)(s, v).$$

Por outro lado,  $\forall v < s$ ,  $x(s, v) = (y \phi \delta_D)(s, v) = 0$ , de forma que a seguinte inequação é satisfeita:

$$\forall v, s \in \mathbb{Z}^+ : x(s, v) \leq (y \phi \delta_D)(s, v),$$

ou ainda, da Tabela 3.6,  $x \succcurlyeq y \phi \delta_D$ , o que completa a prova da primeira parte.

Para a segunda parte, considere-se que  $x \succcurlyeq y \phi \delta_D$ . Da Tabela 3.6, portanto,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : x(s, t) \leq (y \phi \delta_D)(s, t)$ . Nesse caso, se  $y \in \mathcal{C}_t$ , da propriedade (PD.7), Tabela 3.5,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$  se  $s \leq t : x(s, t) \leq y(s, t + D)$ . Seja  $v = t + D$ . Se  $s \leq t$ , então  $s \leq v - D$  ou, equivalentemente,  $v \geq s + D$ , de forma que  $\forall s, v \in \mathbb{Z}^+$  se  $v \geq s + D : x(s, v - D) \leq y(s, v)$ . Mas, da propriedade (PD.3), Tabela 3.5, se  $v \geq s + D$ , então  $x(s, v - D) = (x \delta_D)(s, v)$ . Daí, se  $x \succcurlyeq y \phi \delta_D$ , então

$$\forall s, v \in \mathbb{Z}^+, \text{ se } v \geq s + D : (x \delta_D)(s, v) \leq y(s, v).$$

Além disso, das hipóteses  $y \in \mathcal{C}_t$  e  $x(s, s) \leq y(s, s), \forall s$ , tem-se:  $\forall s, v \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq v : x(s, s) \leq y(s, s) \leq y(s, v)$ . Mas, quando  $s \leq v < s + D$ ,  $(x\delta_D)(s, v) = x(s, s)$ . Daí:

$$\forall s, v \in \mathbb{Z}^+, \text{ se } s \leq v < s + D : (x\delta_D)(s, v) \leq y(s, v).$$

Finalmente,  $\forall s, v \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s > v : (x\delta_D)(s, v) = y(s, v) = 0$ .

Do exposto anteriormente, se  $x, y \in \mathcal{C}_t$ ;  $x(s, s) \leq y(s, s), \forall s$ ; e  $x \succcurlyeq y \phi \delta_D$ :

$$\forall s, v \in \mathbb{Z}^+ : (x\delta_D)(s, v) \leq y(s, v).$$

Equivalentemente, da Tabela 3.6,  $x\delta_D \succcurlyeq y$ . □

**Propriedade (PD.12).** Para todo  $x \in \mathcal{C}_s$ :

$$(\delta_D \phi x)(s, t) = \begin{cases} x([s - D]^+, t), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$(\delta_D \phi x)(s, t) = \max_{\tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t) - \delta_D(\tau, s)\}^+,$$

onde  $\tau \in \mathbb{Z}^+$ . Daí, se  $s \geq D$ ,

$$\begin{aligned} (\delta_D \phi x)(s, t) &= \max \left\{ 0, \max_{s-D \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t) - 0\}, \max_{\tau < s-D \leq s \leq t} \{x(\tau, t) - \infty\} \right\} \\ &= \max_{s-D \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t)\}; \end{aligned}$$

se  $s < D$ ,

$$(\delta_D \phi x)(s, t) = \max \left\{ 0, \max_{s-D \leq 0 \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t) - 0\} \right\} = \max_{0 \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t)\}.$$

Da análise anterior, tem-se:

$$(\delta_D \phi x)(s, t) = \max_{[s-D]^+ \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t)\}.$$

Mas, se  $x \in \mathcal{C}_s$ , então  $\max_{[s-D]^+ \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t)\} = x([s - D]^+, t)$ . Nesse caso, portanto, se  $s \leq t$ :  $(\delta_D \phi x)(s, t) = x([s - D]^+, t)$ .

Finalmente, quando  $s > t$ :  $(\delta_D \phi x)(s, t) = 0$ , diretamente, da definição da operação  $\phi$ . □

**Propriedade (PD.13).** Para todo  $x, y \in \mathcal{C}_s$ :

$$\delta_D \phi (x \oplus y) = \delta_D \phi x \oplus \delta_D \phi y.$$

*Demonstração.* Primeiramente, é necessário mostrar que, se  $x \in \mathcal{C}_s$  e  $y \in \mathcal{C}_s$ , então  $(x \oplus y) \in \mathcal{C}_s$ . Sejam  $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^+$  tais que  $s_1 \leq s_2$ . Então,  $x(s_1, t) \geq x(s_2, t)$  e  $y(s_1, t) \geq y(s_2, t)$ . Daí,  $\forall s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s_1 \leq s_2$ , então:

$$\begin{aligned} (x \oplus y)(s_1, t) &= \inf \{x(s_1, t), y(s_1, t)\} \\ &\geq \inf \{x(s_2, t), y(s_2, t)\} = (x \oplus y)(s_2, t). \end{aligned}$$

Dessa forma,  $(x \oplus y) \in \mathcal{C}_s$ .

Uma vez que  $(x \oplus y) \in \mathcal{C}_s$ , de acordo com a propriedade (PD.12), Tabela 3.5, se  $s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} [\delta_D \bowtie (x \oplus y)](s, t) &= (x \oplus y)([s - D]^+, t) \\ &= \inf \{x([s - D]^+, t), y([s - D]^+, t)\} \\ &= \inf \{(\delta_D \bowtie x)(s, t), (\delta_D \bowtie y)(s, t)\} \\ &= [(\delta_D \bowtie x) \oplus (\delta_D \bowtie y)](s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $s > t$ ,

$$[\delta_D \bowtie (x \oplus y)](s, t) = [(\delta_D \bowtie x) \oplus (\delta_D \bowtie y)](s, t) = 0.$$

Portanto:  $\delta_D \bowtie (x \oplus y) = \delta_D \bowtie x \oplus \delta_D \bowtie y$ . □

**Propriedades (PD.14) e (PD.15).** Para todo  $x, y \in \mathcal{C}_s$ :

$$\delta_D x \succ y \Rightarrow x \succ \delta_D y.$$

Além disso, se  $x(t, t) \leq y(t, t)$ ,  $\forall t$ :

$$\delta_D x \succ y \Leftrightarrow x \succ \delta_D y.$$

*Demonstração.* Primeiramente, se  $\delta_D x \succ y$ , então, da Tabela 3.6,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : (\delta_D x)(s, t) \leq y(s, t)$ . Assim, da propriedade (PD.2), Tabela 3.5, se  $x \in \mathcal{C}_s$ ,  $\forall t \geq s + D : x(s + D, t) \leq y(s, t)$ , ou equivalentemente, fazendo  $v = s + D$ ,  $\forall t \geq v : x(v, t) \leq y(v - D, t)$ . Nesse caso,  $v \geq D$ , já que  $s \in \mathbb{Z}^+$ , de forma que  $y(v - D, t) = y([v - D]^+, t)$ . Assim, da consideração de que  $y \in \mathcal{C}_s$  e da propriedade (PD.12), Tabela 3.5,

$$\forall t \geq v : x(v, t) \leq (\delta_D \bowtie y)(v, t).$$

Por outro lado,  $\forall t < v$ ,  $x(v, t) = (\delta_D \bowtie y)(v, t) = 0$ , de forma que a seguinte inequação é satisfeita:

$$\forall v, t \in \mathbb{Z}^+ : x(v, t) \leq (\delta_D \bowtie y)(v, t).$$

ou ainda, da Tabela 3.6,  $x \succ \delta_D \text{ } y$ , o que completa a prova da primeira parte.

Para a segunda parte, considere-se que  $x \succ \delta_D \text{ } y$ . Da Tabela 3.6, portanto,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : x(s, t) \leq (\delta_D \text{ } y)(s, t)$ . Nesse caso, se  $y \in \mathcal{C}_s$ , da propriedade (PD.12), Tabela 3.5,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t : x(s, t) \leq y([s - D]^+, t)$ . Seja  $v = s - D$ . Se  $s \leq t$ , então  $t \geq v + D$ , de forma que  $\forall v, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $t \geq v + D : x(v + D, t) \leq y(v^+, t) = y(v, t)$ . Mas, da propriedade (PD.2), Tabela 3.5, se  $t \geq v + D$ , então  $x(v + D, t) = (\delta_D x)(v, t)$ . Daí, se  $x \succ \delta_D \text{ } y$ , então

$$\forall v, t \in \mathbb{Z}^+, \text{ se } t \geq v + D : (\delta_D x)(v, t) \leq y(v, t).$$

Além disso, das hipóteses  $y \in \mathcal{C}_t$  e  $x(t, t) \leq y(t, t), \forall t$ , tem-se:  $\forall v, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $v \leq t : x(t, t) \leq y(t, t) \leq y(v, t)$ . Mas, quando  $v \leq t < v + D$ ,  $(\delta_D x)(v, t) = x(t, t)$ . Daí:

$$\forall v, t \in \mathbb{Z}^+, \text{ se } v \leq t < v + D : (\delta_D x)(v, t) \leq y(v, t).$$

Finalmente,  $\forall v, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $v > t : (\delta_D x)(v, t) = y(v, t) = 0$ .

Do exposto anteriormente, se  $x, y \in \mathcal{C}_s; x(t, t) \leq y(t, t), \forall t$ ; e  $x \succ \delta_D \text{ } y$ :

$$\forall v, t \in \mathbb{Z}^+ : (\delta_D x)(v, t) \leq y(v, t).$$

Equivalentemente, da Tabela 3.6:  $\delta_D x \succ y$ . □

### B.3 Propriedades da Tabela 3.7

**Propriedade (PH.1).** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ , com  $b(0, 0) = 0$ . Tem-se:  $b \otimes \hat{a} = \hat{a}$ .*

*Demonstração.* Da Tabela 3.3 e da Definição 18, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (b \otimes \hat{a})(s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{b(s, \tau) + \hat{a}(\tau, t)\} \\ &= \begin{cases} \min_{0 \leq \tau \leq t} \{b(0, \tau) + \hat{a}(\tau, t)\}, & \text{se } s = 0, \\ \min_{s \leq \tau \leq t} \{b(s, \tau) + \varepsilon(\tau, t)\}, & \text{se } s > 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min \left\{ [b(0, 0) + \hat{a}(0, t)], \min_{0 < \tau \leq t} \{b(0, \tau) + \varepsilon(\tau, t)\} \right\}, & \text{se } s = 0, \\ \varepsilon(s, t), & \text{se } s > 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \hat{a}(0, t), & \text{se } s = 0, \\ \varepsilon(s, t), & \text{se } s > 0, \end{cases} \\ &= \hat{a}(s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, quando  $s > t$ , então  $(b \otimes \hat{a})(s, t) = \hat{a}(s, t) = 0$ . Dessa forma, se  $b(0, 0) = 0$ , então  $b \otimes \hat{a} = \hat{a}$ . □

**Propriedade (PH.2).** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ . Tem-se:  $\widehat{a \otimes b} = \widehat{ab}$ .*

*Demonstração.* De acordo com a Tabela 3.3,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :  $(a \otimes b)(s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + b(\tau, t)\}$ . Dessa forma, da Definição 18,  $\forall t$ :

$$\begin{aligned} \widehat{(a \otimes b)}(0, t) &= (a \otimes b)(0, t) \\ &= \min_{0 \leq \tau \leq t} \{a(0, \tau) + b(\tau, t)\} \\ &= \min_{0 \leq \tau \leq t} \{\widehat{a}(0, \tau) + b(\tau, t)\} \\ &= (\widehat{a \otimes b})(0, t). \end{aligned}$$

Além disso,  $\forall s \neq 0$ :  $\widehat{a}(s, t) = \varepsilon(s, t)$ ,  $\forall t$ . Dessa forma,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \neq 0$ :  $(\widehat{a \otimes b})(s, t) = (\varepsilon \otimes b)(s, t) = \varepsilon(s, t) = \widehat{(a \otimes b)}(s, t)$ . Daí,  $\widehat{(a \otimes b)} = \widehat{a \otimes b} = \widehat{ab}$ .  $\square$

**Propriedade (PH.3).** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ . Tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(\widehat{a} \setminus b)(s, t) = \begin{cases} [b(0, t) - a(0, s)]^+, & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Da Tabela 3.3 e da Definição 18, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (\widehat{a} \setminus b)(s, t) &= \max_{0 \leq \tau \leq s \leq t} \{b(\tau, t) - \widehat{a}(\tau, s)\}^+ \\ &= \max \left\{ [b(0, t) - \widehat{a}(0, s)]^+, \max_{0 < \tau \leq s \leq t} \{b(\tau, t) - \widehat{a}(\tau, s)\}^+ \right\} \\ &= \max \left\{ [b(0, t) - \widehat{a}(0, s)]^+, \max_{0 < \tau \leq s \leq t} \{b(\tau, t) - \varepsilon(\tau, s)\}^+ \right\} \\ &= [b(0, t) - a(0, s)]^+. \end{aligned}$$

Além disso, quando  $s > t$ ,  $(\widehat{a} \setminus b)(s, t) = 0$ , por definição.  $\square$

**Propriedade (PH.4).** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ . Tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(b \setminus \widehat{a})(s, t) = \begin{cases} \sup_{\tau \geq 0} \{b(0, \tau) - a(0, \tau)\}^+, & \text{se } s = t = 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Para todo  $s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (b \setminus \widehat{a})(s, t) &= \sup_{s \leq t \leq \tau} \{b(s, \tau) - \widehat{a}(t, \tau)\} \\ &= \begin{cases} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \{b(0, \tau) - \widehat{a}(0, \tau)\}^+, & \text{se } t = 0, \\ \sup_{s \leq t \leq \tau} \{b(s, \tau) - \varepsilon(t, \tau)\}^+, & \text{se } t \neq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sup_{\tau \geq 0} \{b(0, \tau) - \widehat{a}(0, \tau)\}^+, & \text{se } t = 0, \\ 0, & \text{se } t \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Para completar a prova, quando  $s > t$ ,  $(b \not\phi \hat{a})(s, t) = 0$ , por definição.  $\square$

**Propriedade (PH.5).** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ , com  $b(s, t) < +\infty$ ,  $\forall s, t < +\infty$ . Tem-se,  $b \not\phi \hat{a} = \varepsilon$ .*

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (b \not\phi \hat{a})(s, t) &= \max_{0 \leq \tau \leq s \leq t} \{\hat{a}(\tau, t) - b(\tau, s)\} \\ &= \max \left\{ [\hat{a}(0, t) - b(0, s)]^+, \max_{0 < \tau \leq s \leq t} \{\hat{a}(\tau, t) - b(\tau, s)\}^+ \right\} \\ &= \max \left\{ [\hat{a}(0, t) - b(0, s)]^+, \max_{0 < \tau \leq s \leq t} \{\varepsilon(\tau, t) - b(\tau, s)\}^+ \right\} \\ &= \varepsilon(s, t). \end{aligned}$$

Além disso, quando  $s > t$ ,  $(b \not\phi \hat{a})(s, t) = 0 = \varepsilon(s, t)$ . Daí:  $b \not\phi \hat{a} = \varepsilon$ .  $\square$

**Propriedade (PH.6).** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ , com  $b(s, t) < +\infty$ ,  $\forall s, t < +\infty$ . Tem-se:  $(\hat{a} \phi b) = \widehat{(a \phi b)}$ .*

*Demonstração.* De acordo com a Tabela 3.3,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (\hat{a} \phi b)(s, t) &= \sup_{s \leq t \leq \tau} \{\hat{a}(s, \tau) - b(t, \tau)\}^+ \\ &= \begin{cases} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \{\hat{a}(0, \tau) - b(t, \tau)\}^+, & \text{se } s = 0, \\ \sup_{s \leq t \leq \tau} \{\varepsilon(s, \tau) - b(t, \tau)\}^+, & \text{se } s \neq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sup_{0 \leq t \leq \tau} \{a(0, \tau) - b(t, \tau)\}^+, & \text{se } s = 0, \\ \varepsilon(s, t), & \text{se } s \neq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (a \phi b)(0, t), & \text{se } s = 0, \\ \varepsilon(s, t), & \text{se } s \neq 0, \end{cases} \\ &= \widehat{(a \phi b)}(s, t). \end{aligned}$$

Além disso, quando  $s > t$ ,  $(\hat{a} \phi b)(s, t) = \widehat{(a \phi b)}(s, t) = 0$ .  $\square$

**Propriedade (PH.7).** *Seja  $a \in \mathcal{C}$ , com  $a(0, 0) = 0$ . Tem-se:*

$$(\hat{a}^*)(s, t) = \begin{cases} a(0, t), & \text{se } s = 0, \\ e(s, t), & \text{se } s \neq 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Da propriedade (PH.1), Tabela 3.7,  $\hat{a} \otimes \hat{a} = \hat{a}$ . Daí:

$$\begin{aligned} \hat{a}^* &= e \oplus \hat{a} \oplus \hat{a}^2 \oplus \hat{a}^3 \oplus \dots \\ &= e \oplus \hat{a}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Dessa forma,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (\widehat{a}^*)(s, t) &= (e \oplus \widehat{a})(s, t) \\ &= \begin{cases} \inf \{e(0, t), a(0, t)\}, & \text{se } s = 0, \\ \inf \{e(s, t), \varepsilon(s, t)\}, & \text{se } s \neq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} a(0, t) = \widehat{a}(0, t), & \text{se } s = 0, \\ e(s, t), & \text{se } s \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Além disso, quando  $s > t$ ,  $(\widehat{a}^*)(s, t) = e(s, t) = 0$ , o que completa a prova.  $\square$

**Propriedade (PH.8).** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ . Tem-se:  $b \otimes \widehat{a}^* = b \oplus \widehat{a}$ .*

*Demonstração.* Da equação (B.4) e da propriedade (PH.7),

$$\begin{aligned} b \otimes \widehat{a}^* &= b \otimes (e \oplus \widehat{a}) \\ &= b \oplus b\widehat{a}. \end{aligned}$$

Agora, da propriedade (PH.1),  $b\widehat{a} = \widehat{a}$ . Daí:  $b \otimes \widehat{a}^* = b \oplus \widehat{a}$ .  $\square$

**Propriedade (PH.9).** *Seja  $a \in \mathcal{C}_t$ . Tem-se:  $(\widehat{a} \bowtie \widehat{a})^* = (\widehat{a} \bowtie \widehat{a})$ .*

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ ,

$$[(\widehat{a} \bowtie \widehat{a}) \otimes (\widehat{a} \bowtie \widehat{a})](s, t) = \min_{s \leq \tau \leq t} \{(\widehat{a} \bowtie \widehat{a})(s, \tau) + (\widehat{a} \bowtie \widehat{a})(\tau, t)\}.$$

Mas, de acordo com a propriedade (PH.3), Tabela 3.7, se  $s \leq t$ ,  $(\widehat{a} \bowtie \widehat{a})(s, t) = [a(0, t) - a(0, s)]^+$ . Além disso, da consideração de que  $a \in \mathcal{C}_t$ , quando  $s \leq t$ , então  $a(0, s) \leq a(0, t)$  de forma que  $[a(0, t) - a(0, s)]^+ = a(0, t) - a(0, s)$ . Daí:

$$\begin{aligned} [(\widehat{a} \bowtie \widehat{a}) \otimes (\widehat{a} \bowtie \widehat{a})](s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{(\widehat{a} \bowtie \widehat{a})(s, \tau) + (\widehat{a} \bowtie \widehat{a})(\tau, t)\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(0, \tau) - a(0, s) + a(0, t) - a(0, \tau)\} \\ &= a(0, t) - a(0, s) \\ &= (\widehat{a} \bowtie \widehat{a})(s, t). \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} (\widehat{a} \bowtie \widehat{a})^* &= e \oplus (\widehat{a} \bowtie \widehat{a}) \oplus (\widehat{a} \bowtie \widehat{a})^2 \oplus \dots \\ &= e \oplus (\widehat{a} \bowtie \widehat{a}) = (\widehat{a} \bowtie \widehat{a}), \end{aligned}$$

porque  $(\widehat{a} \bowtie \widehat{a})(t, t) = a(0, t) - a(0, t) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ .  $\square$

## B.4 Proposição 6

**Proposição.** *Sejam  $x_b, x_\# \in \mathcal{C}$  e  $x \in \mathcal{C}_t$ . Considerem-se  $\overline{\text{Pr}}\{x_b\}$  e  $\underline{\text{Pr}}\{x_\#\}$ , respectivamente, a projeção  $\mathcal{C}$ -superior de  $x_b$  em  $\mathcal{C}_t$ , e a projeção  $\mathcal{C}$ -inferior de  $x_\#$  em  $\mathcal{C}_t$ , conforme Definição 19. Se  $x_b \preceq x \preceq x_\#$ , então as seguintes inequações também são satisfeitas:*

$$\overline{\text{Pr}}\{x_b\} \preceq x \preceq \underline{\text{Pr}}\{x_\#\}.$$

*Demonstração.* De acordo com a Definição 19, têm-se:

$$\begin{aligned} (\overline{\text{Pr}}\{x_b\})(s, t) &= \inf_{\tau \geq t} \{x_b(s, \tau)\}, \\ (\underline{\text{Pr}}\{x_\#\})(s, t) &= \max_{0 \leq \tau \leq t} \{x_\#(s, \tau)\}. \end{aligned}$$

Assim, para todo ponto  $(s, t)$  da curva  $\overline{\text{Pr}}\{x_b\}$ , existe um ponto  $(s, \tau)$ , com  $\tau \geq t$ , tal que  $(\overline{\text{Pr}}\{x_b\})(s, t) = x_b(s, \tau) = (\overline{\text{Pr}}\{x_b\})(s, \tau)$ . No ponto  $(s, \tau)$ , tem-se:  $(\overline{\text{Pr}}\{x_b\})(s, \tau) = x_b(s, \tau) \geq x(s, \tau)$ , porque  $x_b \preceq x$ . Agora, como  $x \in \mathcal{C}_t$  e  $\tau \geq t$ ,  $x(s, \tau) \geq x(s, t)$ . Portanto, para todo ponto  $(s, t)$ , existe um  $\tau \geq t$ , tal que  $(\overline{\text{Pr}}\{x_b\})(s, t) = x_b(s, \tau) = (\overline{\text{Pr}}\{x_b\})(s, \tau) = x_b(s, \tau) \geq x(s, \tau) \geq x(s, t)$  e então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $(\overline{\text{Pr}}\{x_b\})(s, t) \geq x(s, t)$ . Dessa forma, da Tabela 3.6,  $\overline{\text{Pr}}\{x_b\} \preceq x$ .

Por outro lado, para todo ponto  $(s, t)$  da curva  $\underline{\text{Pr}}\{x_\#\}$ , existe um ponto  $(s, \tau)$ , com  $\tau \leq t$ , tal que  $(\underline{\text{Pr}}\{x_\#\})(s, t) = x_\#(s, \tau) = (\underline{\text{Pr}}\{x_\#\})(s, \tau)$ . No ponto  $(s, \tau)$ , tem-se:  $(\underline{\text{Pr}}\{x_\#\})(s, \tau) = x_\#(s, \tau) \leq x(s, \tau)$ , porque  $x \preceq x_\#$ . Agora, como  $x \in \mathcal{C}_t$  e  $\tau \leq t$ ,  $x(s, \tau) \leq x(s, t)$ . Portanto, para todo ponto  $(s, t)$ , existe um  $\tau \leq t$ , tal que  $(\underline{\text{Pr}}\{x_\#\})(s, t) = x_\#(s, \tau) = (\underline{\text{Pr}}\{x_\#\})(s, \tau) = x_\#(s, \tau) \leq x(s, \tau) \leq x(s, t)$  e então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $(\underline{\text{Pr}}\{x_\#\})(s, t) \leq x(s, t)$ . Daí,  $x \preceq \underline{\text{Pr}}\{x_\#\}$ , o que completa a prova.  $\square$

## B.5 Propriedades da Tabela 3.8

**Propriedade (PP.1).** *Seja  $x \in \mathcal{C}_t$ . Tem-se:*

$$\overline{\text{Pr}}\{x\} = \underline{\text{Pr}}\{x\} = x.$$

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathcal{C}_t$ . Nesse caso, se  $\tau \leq t$ ,  $x(s, \tau) \leq x(s, t)$  e então  $\max_{0 \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau)\} = x(s, t)$ . Por outro lado, para  $\tau \geq t$ ,  $x(s, \tau) \geq x(s, t)$ , de forma que  $\inf_{\tau \geq t} \{x(s, \tau)\} = x(s, t)$ . Assim, da Definição 19,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $(\overline{\text{Pr}}\{x\})(s, t) = (\underline{\text{Pr}}\{x\})(s, t) = x(s, t)$  e então  $\overline{\text{Pr}}\{x\} = \underline{\text{Pr}}\{x\} = x$ .  $\square$

**Propriedade (PP.2).** *Sejam  $a, b \in \mathcal{C}_t$ . Se  $b(t, t) \leq b(t+1, t+1)$ ,  $\forall t$ , então,*

$$\overline{\text{Pr}}\{a \otimes b\} = \underline{\text{Pr}}\{a \otimes b\} = a \otimes b.$$

*Demonstração.* De acordo com a Tabela 3.3,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t + 1$ :

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(s, t + 1) &= \min_{s \leq \tau \leq t+1} \{a(s, \tau) + b(\tau, t + 1)\} \\ &= \min \left\{ \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + b(\tau, t + 1)\}, a(s, t + 1) + b(t + 1, t + 1) \right\}. \end{aligned}$$

Se  $a, b \in \mathcal{C}_t$ , então,  $a(s, t + 1) \geq a(s, t)$ ,  $\forall s, t$  e  $b(\tau, t + 1) \geq b(\tau, t)$ ,  $\forall \tau, t$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(s, t + 1) &= \min \left\{ \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + b(\tau, t + 1)\}, a(s, t + 1) + b(t + 1, t + 1) \right\} \\ &\geq \min \left\{ \min_{s \leq \tau \leq t} \{a(s, \tau) + b(\tau, t)\}, a(s, t) + b(t + 1, t + 1) \right\} \\ &= \min \{(a \otimes b)(s, t), a(s, t) + b(t + 1, t + 1)\}. \end{aligned}$$

Assim, da consideração de que  $b(t + 1, t + 1) \geq b(t, t)$ ,  $\forall t$ , por um lado,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t + 1$ :

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(s, t + 1) &\geq \min \{(a \otimes b)(s, t), a(s, t) + b(t + 1, t + 1)\} \\ &\geq \min \{(a \otimes b)(s, t), a(s, t) + b(t, t)\} \\ &= (a \otimes b)(s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $s > t + 1$ , então  $s > t + 1 > t$ , de forma que  $(a \otimes b)(s, t + 1) = (a \otimes b)(s, t) = 0$ . Portanto,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : (a \otimes b)(s, t + 1) \geq (a \otimes b)(s, t)$ . Nesse caso,  $(a \otimes b) \in \mathcal{C}_t$  e, portanto, da propriedade (PP.1), Tabela 3.8,  $\overline{\text{Pr}} \{a \otimes b\} = \underline{\text{Pr}} \{a \otimes b\} = a \otimes b$ .  $\square$

## B.6 Propriedades da Tabela 3.10

Considerem-se as definições dos mapeamentos  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  e  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (Definições 20 e 21 do Capítulo 3). Dados  $a, b \in \mathcal{C}$ , tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} (F \{a, b\})(s, t) &= a(s, t) + b(s, t), \\ (G \{a, b\})(s, t) &= \max \{0, a(s, t) - b(s, t)\}. \end{aligned}$$

**Propriedade (PM.1).** *Dados  $a, b, c, d \in \mathcal{C}$ . Se  $a \succcurlyeq c$  e  $b \succcurlyeq d$ , então*

$$F \{a, b\} \succcurlyeq F \{c, d\}.$$

*Demonstração.* Das considerações de que  $a \succcurlyeq c$  e  $b \succcurlyeq d$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} a(s, t) &\leq c(s, t), \\ b(s, t) &\leq d(s, t). \end{aligned}$$

Somando as inequações acima, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$a(s, t) + b(s, t) \leq c(s, t) + d(s, t).$$

Equivalentemente:

$$\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : (F \{a, b\})(s, t) \leq (F \{c, d\})(s, t).$$

Da Tabela 3.6, portanto,  $F \{a, b\} \succcurlyeq F \{c, d\}$ . □

**Propriedades (PM.2).** *Sejam  $a, b, c \in \mathcal{C}$ . Tem-se:*

$$a \succcurlyeq F \{b, c\} \Leftrightarrow b \preccurlyeq G \{a, c\} \Leftrightarrow c \preccurlyeq G \{a, b\}.$$

*Demonstração.* Por um lado, se  $a \succcurlyeq F \{b, c\}$ , então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$a(s, t) \leq (F \{b, c\})(s, t) = b(s, t) + c(s, t).$$

Dessa forma,  $\forall s, t$ :

$$b(s, t) \geq a(s, t) - c(s, t).$$

Além disso, como  $b \in \mathcal{C}$ , então  $b(s, t) \geq 0$ ,  $\forall s, t$ . Daí,  $\forall s, t$ :

$$b(s, t) \geq \max \{0, a(s, t) - c(s, t)\} = (G \{a, c\})(s, t).$$

Daí:  $b \preccurlyeq G \{a, c\}$ .

Por outro lado, se  $b \preccurlyeq G \{a, c\}$ , então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$b(s, t) \geq (G \{a, c\})(s, t) = \max \{0, a(s, t) - c(s, t)\}.$$

Dessa forma,  $\forall s, t$ :  $b(s, t) \geq 0$ , e  $b(s, t) \geq a(s, t) - c(s, t)$ . Esta última inequação implica que,  $\forall s, t$ :  $a(s, t) \leq b(s, t) + c(s, t) = (F \{b, c\})(s, t)$ . Daí:  $a \succcurlyeq F \{b, c\}$ .

Finalmente, da comutatividade do mapeamento  $F$ :  $a \succcurlyeq F \{b, c\} \Leftrightarrow a \succcurlyeq F \{c, b\} \Leftrightarrow c \preccurlyeq G \{a, b\}$ . □

**Propriedade (PM.3).** *Sejam  $a, b, c \in \mathcal{C}$ . Tem-se:*

$$a \preccurlyeq F \{b, c\} \Leftrightarrow b \succcurlyeq G \{a, c\} \Leftrightarrow c \succcurlyeq G \{a, b\}.$$

*Demonstração.* Por um lado, se  $a \preccurlyeq F \{b, c\}$ , então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$a(s, t) \geq (F \{b, c\})(s, t) = b(s, t) + c(s, t). \tag{B.5}$$

Dessa forma,  $\forall s, t$ :

$$b(s, t) \leq a(s, t) - c(s, t) = (G \{a, c\})(s, t).$$

Dessa forma,  $b \succcurlyeq G\{a, c\}$ .

Por outro lado, se  $b \succcurlyeq G\{a, c\}$ , então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$b(s, t) \leq (G\{a, c\})(s, t) = a(s, t) - c(s, t).$$

Dessa forma,  $\forall s, t$ :  $a(s, t) \geq b(s, t) + c(s, t) = (F\{b, c\})(s, t)$ . Daí:  $a \preccurlyeq F\{b, c\}$ .

Finalmente, da comutatividade do mapeamento  $F$ :  $a \preccurlyeq F\{b, c\} \Leftrightarrow a \preccurlyeq F\{c, b\} \Leftrightarrow c \succcurlyeq G\{a, b\}$ .  $\square$

**Propriedade (PM.4).** *Sejam  $a, b, c \in \mathcal{C}$ . Se  $a \succcurlyeq b$ , então*

$$G\{c, a\} \preccurlyeq G\{c, b\}.$$

*Demonstração.* Se  $a \succcurlyeq b$ , então, da Tabela 3.6,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : a(s, t) \leq b(s, t)$ . Nesse caso, a seguinte inequação deve ser satisfeita,  $\forall c \in \mathcal{C}$ :

$$\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : c(s, t) - a(s, t) \geq c(s, t) - b(s, t).$$

Dessa forma,

$$\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : \max\{0, c(s, t) - a(s, t)\} \geq \max\{0, c(s, t) - b(s, t)\},$$

ou equivalentemente,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : (G\{c, a\})(s, t) \geq (G\{c, b\})(s, t)$ . Da Tabela 3.6, portanto:  $G\{c, a\} \preccurlyeq G\{c, b\}$ .  $\square$

**Propriedade (PM.5).** *Sejam  $a, b, c, d \in \mathcal{C}$ . Tem-se:*

$$(F\{a, b\}) \dot{\setminus} (F\{c, d\}) \succcurlyeq F\{(a \dot{\setminus} c), (b \dot{\setminus} d)\}.$$

*Demonstração.* Para todo  $s, t \in \mathbb{Z}^+$ , tem-se:

$$\begin{aligned} [(F\{a, b\}) \dot{\setminus} (F\{c, d\})](s, t) &= \max_{\tau \leq s \leq t} \{(F\{c, d\})(\tau, t) - (F\{a, b\})(\tau, s)\} \\ &= \max_{\tau \leq s \leq t} \{c(\tau, t) + d(\tau, t) - a(\tau, s) - b(\tau, s)\} \\ &= \max_{\tau \leq s \leq t} \{[c(\tau, t) - a(\tau, s)] + [d(\tau, t) - b(\tau, s)]\} \\ &\leq \max_{\tau \leq s \leq t} \{c(\tau, t) - a(\tau, s)\} + \max_{\tau \leq s \leq t} \{d(\tau, t) - b(\tau, s)\} \\ &= (a \dot{\setminus} c)(s, t) + (b \dot{\setminus} d)(s, t) \\ &= [F\{(a \dot{\setminus} c), (b \dot{\setminus} d)\}](s, t). \end{aligned}$$

Daí,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : [(F\{a, b\}) \dot{\setminus} (F\{c, d\})](s, t) \leq [F\{(a \dot{\setminus} c), (b \dot{\setminus} d)\}](s, t)$ . Portanto, da Tabela 3.6,  $(F\{a, b\}) \dot{\setminus} (F\{c, d\}) \succcurlyeq F\{(a \dot{\setminus} c), (b \dot{\setminus} d)\}$ .  $\square$

**Propriedade (PM.6).** *Sejam  $x_k \in \mathcal{C}_t$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Tem-se:*

$$F \{x_1 \delta_D, \dots, x_M \delta_D\} = F \{x_1, \dots, x_M\} \otimes \delta_D.$$

*Demonstração.* Da propriedade (PD.1), Tabela 3.5, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} (F \{x_1, \dots, x_M\} \otimes \delta_D)(s, t) &= \begin{cases} (F \{x_1, \dots, x_M\})(s, t - D), & \text{se } t \geq s + D, \\ (F \{x_1, \dots, x_M\})(s, s), & \text{se } s \leq t < s + D, \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^M x_k(s, t - D), & \text{se } t \geq s + D, \\ \sum_{k=1}^M x_k(s, s), & \text{se } s \leq t < s + D, \\ \sum_{k=1}^M 0, & \text{se } s > t \end{cases} \\ &= \sum_{k=1}^M (x_k \delta_D)(s, t) \\ &= (F \{x_1 \delta_D, \dots, x_M \delta_D\})(s, t), \end{aligned}$$

o que completa a prova. □

**Propriedade (PM.7).** *Sejam  $x_k \in \mathcal{C}$  e  $X_k : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , com  $k = 1, \dots, M$ . Tem-se:*

$$F \{x_1 \lambda_{X_1}, \dots, x_M \lambda_{X_M}\} = F \{x_1, \dots, x_M\} \lambda_{(X_1, \dots, X_M)}.$$

*Demonstração.* Da propriedade (PL.1), Tabela 3.4,  $(x_k \lambda_{X_k})(s, t) = x_k(s, t) + X_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Dessa forma, da Definição 20, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} (F \{x_1 \lambda_{X_1}, \dots, x_M \lambda_{X_M}\})(s, t) &= \sum_{k=1}^M (x_k \lambda_{X_k})(s, t) \\ &= \sum_{k=1}^M [x_k(s, t) + X_k(t)] \\ &= \sum_{k=1}^M x_k(s, t) + \sum_{k=1}^M X_k(t) \\ &= (F \{x_1, \dots, x_M\} \lambda_{(X_1, \dots, X_M)})(s, t). \end{aligned}$$

Daí:  $F \{x_1 \lambda_{X_1}, \dots, x_M \lambda_{X_M}\} = F \{x_1, \dots, x_M\} \lambda_{(X_1, \dots, X_M)}$ . □

**Propriedade (PM.8).** *Sejam  $x_k, \beta_k \in \mathcal{C}$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Tem-se:*

$$F \{x_1 \beta_1, \dots, x_M \beta_M\} \succcurlyeq F \{x_1, \dots, x_M\} \otimes F \{\beta_1, \dots, \beta_M\}.$$

*Demonstração.* Primeiramente,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F} \{x_1\beta_1, \dots, x_k\beta_k\})(s, t) &= \sum_{k=1}^M (x_k\beta_k)(s, t) \\
 &= \sum_{k=1}^M \min_{s \leq \tau \leq t} \{x_k(s, \tau) + \beta_k(\tau, t)\} \\
 &\leq \sum_{k=1}^M [x_k(s, \tau) + \beta_k(\tau, t)], \quad \forall \tau : s \leq \tau \leq t \\
 &= \sum_{k=1}^M x_k(s, \tau) + \sum_{k=1}^M \beta_k(\tau, t), \quad \forall \tau : s \leq \tau \leq t \\
 &= (\mathbf{F} \{x_1, \dots, x_M\})(s, \tau) + (\mathbf{F} \{\beta_1, \dots, \beta_M\})(\tau, t), \quad \forall \tau : s \leq \tau \leq t.
 \end{aligned}$$

Mas, se a inequação acima é válida  $\forall \tau$ , tal que  $s \leq \tau \leq t$ , então a seguinte inequação também é válida,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F} \{x_1\beta_1, \dots, x_M\beta_M\})(s, t) &\leq \min_{s \leq \tau \leq t} \{(\mathbf{F} \{x_1, \dots, x_M\})(s, \tau) + (\mathbf{F} \{\beta_1, \dots, \beta_M\})(\tau, t)\} \\
 &= (\mathbf{F} \{x_1, \dots, x_M\} \otimes \mathbf{F} \{\beta_1, \dots, \beta_M\})(s, t).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, quando  $s > t$ ,

$$(\mathbf{F} \{x_1\beta_1, \dots, x_M\beta_M\})(s, t) = 0 = (\mathbf{F} \{x_1, \dots, x_M\} \otimes \mathbf{F} \{\beta_1, \dots, \beta_M\})(s, t).$$

Dessa forma,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : (\mathbf{F} \{x_1\beta_1, \dots, x_M\beta_M\})(s, t) \leq (\mathbf{F} \{x_1, \dots, x_M\} \otimes \mathbf{F} \{\beta_1, \dots, \beta_M\})(s, t)$  e portanto, da Tabela 3.6,  $\mathbf{F} \{x_1\beta_1, \dots, x_M\beta_M\} \succcurlyeq \mathbf{F} \{x_1, \dots, x_M\} \otimes \mathbf{F} \{\beta_1, \dots, \beta_M\}$ .  $\square$

## Apêndice C

# Demonstrações referentes ao Capítulo 4

Neste capítulo, são apresentadas as demonstrações de propriedades apresentadas no Capítulo 4. Primeiramente, considere-se a Definição 20. Dados  $x_k \in \mathcal{C}$ ,  $k = 1, \dots, M$ , tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$(\mathbf{F}\{x_1, \dots, x_M\})(s, t) = x_1(s, t) + \dots + x_M(s, t).$$

**Proposição 9.** *Considere-se um sistema cujo fluxo de saída é formado pelo agrupamento de  $M$  funções de entrada, conforme ilustra a Figura 4.2. Sejam  $a_k \in \mathcal{C}$ ,  $k = 1, \dots, M$  as entradas do sistema, cada uma sujeita a uma curva de regulação  $\sigma_k \in \mathcal{C}$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Seja, ainda,  $x = \mathbf{F}\{x_1, \dots, x_M\}$  a saída total do sistema (Definição 20). Uma possível curva de regulação para esse sistema,  $\sigma \in \mathcal{C}$ , pode ser definida da seguinte maneira:*

$$\sigma = \mathbf{F}\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_M^*\}.$$

*Demonstração.* As curvas  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  estão sujeitas a uma curva de regulação  $\sigma_k$ . Assim, da equação (4.6),  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$x_k(0, t) \leq x_k(0, s) + \sigma_k(s, t),$$

ou ainda, da Proposição 8,

$$x_k(0, t) \leq x_k(0, s) + \sigma_k^*(s, t),$$

A inequação acima é válida para  $k = 1, \dots, M$ . Somando essas  $M$  inequações, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$\mathbf{F}\{x_1, \dots, x_M\}(0, t) \leq \mathbf{F}\{x_1, \dots, x_M\}(0, s) + (\mathbf{F}\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_M^*\})(s, t),$$

ou equivalentemente,

$$x(0, t) \leq x(0, s) + F\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_M^*\}(s, t).$$

Comparando a inequação acima com a inequação (4.7), percebe-se que  $\sigma = F\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_M^*\}$  é uma possível curva de regulação total do sistema.  $\square$

**Proposição 11.** *Sejam  $x$  e  $y$ , respectivamente, os fluxos entrada e saída de um dado sistema causal. Se a função  $y(s, t)$  é aditiva, então sempre existe um  $s$ , com  $0 \leq s \leq t$ , tal que  $y(s, t) \geq \beta(s, t)$ .*

*Demonstração.* Da equação (4.9), para todo  $t \geq 0$ ,  $y(0, t) \geq \min_{0 \leq \tau \leq t} \{x(0, \tau) + \beta(\tau, t)\}$ . Agora, se o sistema é causal, então  $y(0, \tau) \leq x(0, \tau)$ ,  $\forall \tau$ , de forma que a seguinte inequação deve ser satisfeita:

$$y(0, t) \geq \min_{0 \leq \tau \leq t} \{y(0, \tau) + \beta(\tau, t)\} \quad \forall t \geq 0.$$

Dessa maneira, existe pelo menos um  $s$  com  $0 \leq s \leq t$ , tal que  $y(0, t) \geq y(0, s) + \beta(s, t)$  ou, equivalentemente, existe pelo menos um  $s$  com  $0 \leq s \leq t$ , tal que  $y(s, t) \geq \beta(s, t)$ . É garantido, então, que uma quantidade de dados de pelo menos  $\beta(s, t)$  deixa o sistema durante o intervalo  $(s, t]$ .  $\square$

**Proposição 12.** *Se um sistema apresenta uma curva de serviço  $\beta$ , então qualquer função maior ou igual a  $\beta$ , em  $\mathcal{C}$ , também é uma possível curva de serviço para o sistema.*

*Demonstração.* Seja  $\beta$  uma curva de serviço para um dado sistema. A função  $\beta$  deve atender à seguinte inequação:  $\hat{x}\beta \succ \hat{y}$ . Assim, se  $\beta' \succ \beta$ , então  $\hat{x}\beta' \succ \hat{x}\beta \succ \hat{y}$ . Desta forma,  $\beta'$  também é uma possível curva de serviço para o sistema.  $\square$

## Apêndice D

# Demonstrações referentes ao Capítulo 6

Este apêndice contém demonstrações de proposições e teoremas apresentados no Capítulo 6. As demonstrações a seguir estão dispostas em uma ordem diferente da utilizada no Capítulo 6, para facilitar a compreensão.

Dada uma função  $a : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ , seja  $\delta_a \in \mathcal{C}$  definida da seguinte maneira:

$$\delta_a(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t - a(t) \leq s, \\ +\infty, & \text{se } t - a(t) > s, \end{cases}$$

conforme apresentado na Definição 24.

**Propriedade (PDA.1).** *Seja  $x \in \mathcal{C}_t$ . Tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :*

$$(x\delta_a)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - a(t)), & \text{se } s \leq t - a(t), \\ x(s, s), & \text{se } t - a(t) < s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

*Demonstração.* Considerem-se  $s, t \in \mathbb{Z}^+$ . Se  $s \leq t - a(t) \leq t$ , então,

$$\begin{aligned} (x\delta_a)(s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + \delta_a(\tau, t)\} \\ &= \min \left\{ \min_{s \leq t - a(t) \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + 0\}, \min_{s \leq \tau < t - a(t) \leq t} \{x(s, \tau) + \infty\} \right\} \\ &= \min_{s \leq t - a(t) \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau)\} \\ &= x(s, t - a(t)). \end{aligned}$$

Nos passos acima, a última equação é válida, porque  $x \in \mathcal{C}_t$ .

Por outro lado, quando  $t - a(t) < s \leq t$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (x\delta_a)(s, t) &= \min_{t-a(t) < s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + \delta_a(\tau, t)\} \\ &= \min_{t-a(t) < s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + 0\} \\ &= x(s, s) \end{aligned}$$

Por fim, da definição de produto em  $\mathcal{C}$ , tem-se:  $(x\delta_a)(s, t) = 0$ , quando  $s > t$ .  $\square$

**(PDA.2).** *Seja  $x \in \mathcal{C}_t$ . Se  $x(s, s) = 0$ ,  $\forall s$ , então  $(x \otimes \delta_a)(s, t) = x(s, [t - a(t)]^+)$ .*

*Demonstração.* Da propriedade (PDA.1), tem-se:

$$(x\delta_a)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - a(t)), & \text{se } s \leq t - a(t), \\ x(s, s), & \text{se } t - a(t) < s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

Dessa forma, se  $x(s, s) = 0$ ,  $\forall s$ , então a seguinte equação é satisfeita:

$$(x\delta_a)(s, t) = \begin{cases} x(s, t - a(t)), & \text{se } s \leq t - a(t), \\ 0, & \text{se } s > t - a(t). \end{cases}$$

Agora, se  $t - a(t) \geq s$ , então  $x(s, [t - a(t)]^+) = x(s, t - a(t))$ , porque  $s \geq 0$ . Nesse caso, tem-se:  $(x\delta_a)(s, t) = x(s, [t - a(t)]^+)$ . Por outro lado, se  $t - a(t) < s$  dois casos podem acontecer:  $t - a(t) \leq 0 \leq s$  ou  $0 \leq t - a(t) < s$ . Pela definição de  $\mathcal{C}$ , se  $t - a(t) < 0 \leq s$ , então  $x(s, [t - a(t)]^+) = x(s, 0) = 0 = (x\delta_a)(s, t)$ ; se  $s > t - a(t) \geq 0$ , então  $x(s, [t - a(t)]^+) = x(s, t - a(t)) = 0 = (x\delta_a)(s, t)$ . Do exposto anteriormente, tem-se:  $(x\delta_a)(s, t) = x(s, [t - a(t)]^+)$ .  $\square$

**(PDA.3).** *Seja  $x \in \mathcal{C}_s$ . Tem-se:*

$$(\delta_a \circ x)(s, t) = \begin{cases} x([s - a(s)]^+, t), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

*Demonstração.* Considerem-se  $s, t \in \mathbb{Z}^+$ . Se  $s \leq t$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (\delta_a \circ x)(s, t) &= \max_{0 \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t) - \delta_a(\tau, s)\} \\ &= \max \left\{ \max_{[s-a(s)]^+ \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t) - 0\}, \max_{\tau < s-a(s) \leq s \leq t} \{x(\tau, t) - \infty\} \right\} \\ &= \max_{[s-a(s)]^+ \leq \tau \leq s \leq t} \{x(\tau, t)\} \\ &= x([s - a(s)]^+, t). \end{aligned}$$

Nos passos acima, a última equação é válida, porque  $x \in \mathcal{C}_s$ .

Por fim, da definição da residuação do produto em  $\mathcal{C}$ , tem-se:  $(\delta_a \bowtie x)(s, t) = 0$ , quando  $s > t$ .  $\square$

**Propriedade (PDA.4).** *Sejam  $\forall x_k \in \mathcal{C}_t$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Tem-se:*

$$F \{x_1 \delta_a, \dots, x_M \delta_a\} = F \{x_1, \dots, x_M\} \delta_a.$$

*Demonstração.* Da propriedade (PDA.1), tem-se,  $k = 1, \dots, M$ :

$$(x_k \delta_a)(s, t) = \begin{cases} x_k(s, t - a(t)), & \text{se } s \leq t - a(t), \\ x_k(s, s), & \text{se } t - a(t) < s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

Dessa forma, da definição do operador  $F$ , se  $s \leq t - a(t)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (F \{x_1 \delta_a, \dots, x_M \delta_a\})(s, t) &= (x_1 \delta_a)(s, t) + \dots + (x_M \delta_a)(s, t) \\ &= x_1(s, t - a(t)) + \dots + x_M(s, t - a(t)) \\ &= (F \{x_1, \dots, x_M\})(s, t - a(t)) \\ &= (F \{x_1, \dots, x_M\} \delta_a)(s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $t - a(t) < s \leq t$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (F \{x_1 \delta_a, \dots, x_M \delta_a\})(s, t) &= (x_1 \delta_a)(s, t) + \dots + (x_M \delta_a)(s, t) \\ &= x_1(s, s) + \dots + x_M(s, s) \\ &= (F \{x_1, \dots, x_M\})(s, s) \\ &= (F \{x_1, \dots, x_M\} \delta_a)(s, t). \end{aligned}$$

Por fim, se  $s > t$ , como  $F \{x_1 \delta_a, \dots, x_M \delta_a\} \in \mathcal{C}$  e  $F \{x_1, \dots, x_M\} \delta_a \in \mathcal{C}$ , tem-se:  $(F \{x_1 \delta_a, \dots, x_M \delta_a\})(s, t) = (F \{x_1, \dots, x_M\} \delta_a)(s, t) = 0$ .  $\square$

**Proposição 23.** *Considere-se um sistema com  $M$  fluxos de entrada e disciplina de serviços FIFO bit a bit. Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída totais do sistema;  $x_k, y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída do fluxo  $k$ ; e  $i$  o fluxo de interesse. Da Definição 20, têm-se:  $x = F \{x_i, x_{(i)}\}$  e  $y = F \{y_i, y_{(i)}\}$ . Se  $\hat{y} \preceq \hat{x} \delta_a$ , então*

$$\hat{y}_i \preceq \hat{x}_i \delta_a,$$

$$\hat{y}_{(i)} \preceq \hat{x}_{(i)} \delta_a;$$

e se  $\hat{y} \succ \hat{x}\delta_a$ , então

$$\begin{aligned}\hat{y}_i &\succ \hat{x}_i\delta_a, \\ \hat{y}_{(i)} &\succ \hat{x}_{(i)}\delta_a.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Considere-se que  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\delta_a$  e  $\hat{y}_i \not\preccurlyeq \hat{x}_i\delta_a$ . Nesse caso,  $\exists t \in \mathbb{Z}^+$ , tal que

$$\begin{aligned}y(0, t) &\geq x(0, t - a(t)), \\ y_i(0, t) &< x_i(0, t - a(t)).\end{aligned}$$

Para esse sistema,  $x = F\{x_i, x_{(i)}\}$  e  $y = F\{y_i, y_{(i)}\}$ . Assim,

$$\begin{aligned}x(0, t) &= x_i(0, t) + x_{(i)}(0, t), \\ y(0, t) &= y_i(0, t) + y_{(i)}(0, t).\end{aligned}$$

Daí, se  $y(0, t) \geq x(0, t - a(t))$ , então

$$y_i(0, t) + y_{(i)}(0, t) \geq x_i(0, t - a(t)) + x_{(i)}(0, t - a(t)),$$

ou equivalentemente, da consideração de que  $y_i(0, t) < x_i(0, t - a(t))$ ,

$$\begin{aligned}y_{(i)}(0, t) &\geq [x_i(0, t - a(t)) - y_i(0, t)] + x_{(i)}(0, t - a(t)) \\ &> x_{(i)}(0, t - a(t)).\end{aligned}$$

Dessa forma, as seguintes inequações teriam que ser concomitantemente satisfeitas:

$$\begin{aligned}y_i(0, t) &< x_i(0, t - a(t)), \\ y_{(i)}(0, t) &> x_{(i)}(0, t - a(t)).\end{aligned}$$

Isso não é possível em um sistema FIFO bit a bit, porque significa que todos os dados que chegaram do agregado de tráfegos excetuando-se o fluxo  $i$  até o instante  $t - a(t)$  mais pelo menos um bit já deixaram o sistema até o instante  $t$ , mas nem todos os bits do fluxo  $i$  que chegaram até o instante  $t - a(t)$  deixaram o sistema. Em outras palavras, pelo menos um bit do fluxo agregado “passou na frente” de algum bit do fluxo  $i$ , o que contradiz a hipótese da disciplina FIFO bit a bit. A hipótese análoga, ou seja,  $\hat{y} \preccurlyeq \hat{x}\delta_a$  e  $\hat{y}_{(i)} \not\preccurlyeq \hat{x}_{(i)}\delta_a$ , leva ao mesmo tipo de contradição.

Considere-se, agora, que  $\hat{y} \succ \hat{x}\delta_a$ , e  $\hat{y}_i \not\succ \hat{x}_i\delta_a$ . Nesse caso,  $\exists t \in \mathbb{Z}^+$ , tal que

$$\begin{aligned}y(0, t) &\leq x(0, t - a(t)), \\ y_i(0, t) &> x_i(0, t - a(t)).\end{aligned}$$

Dessa forma, se  $y(0, t) \leq x(0, t - a(t))$ , então

$$y_i(0, t) + y_{(i)}(0, t) \leq x_i(0, t - a(t)) + x_{(i)}(0, t - a(t)).$$

Daí, de forma semelhante ao caso anterior,

$$\begin{aligned} y_{(i)}(0, t) &\leq [x_i(0, t - a(t)) - y_i(0, t)] + x_{(i)}(0, t - a(t)) \\ &< x_{(i)}(0, t - a(t)). \end{aligned}$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} y_i(0, t) &> x_i(0, t - a(t)), \\ y_{(i)}(0, t) &< x_{(i)}(0, t - a(t)). \end{aligned}$$

Conforme discussão anterior, essas duas inequações não podem ser concomitantemente satisfeitas em um sistema FIFO bit a bit. A hipótese de que  $\hat{y} \succ \hat{x}\delta_a$  e  $\hat{y}_{(i)} \not\succ \hat{x}_{(i)}\delta_a$  leva ao mesmo tipo de contradição.  $\square$

Na demonstração a seguir, ainda no contexto de um sistema com  $M$  fluxos de entrada, considerem-se as seguintes definições:

$$\Delta(t) = \inf \{d \geq 0 : y(0, t) \geq x(0, t - d)\}, \quad (\text{D.1})$$

$$\Delta^-(t) = \sup \{d \geq 0 : y(0, t) \leq x(0, t - d)\}, \quad (\text{D.2})$$

$$\Delta_k(t) = \inf \{d \geq 0 : y_k(0, t) \geq x_k(0, t - d)\}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (\text{D.3})$$

$$\Delta_k^-(t) = \sup \{d \geq 0 : y_k(0, t) \leq x_k(0, t - d)\}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (\text{D.4})$$

**Proposição 24.** *Considere-se que  $M$  fluxos de tráfego entram em um elemento de rede com disciplina de filas FIFO bit a bit. Sejam  $x, y \in \mathcal{C}_t$  os fluxos de entrada e saída totais do sistema; e  $x_k, y_k \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, os fluxos de entrada e saída do tráfego  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ . As seguintes igualdades são satisfeitas:*

$$\Delta(t) = \Delta^-(t) = \Delta_k(t) = \Delta_k^-(t), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Conseqüentemente, têm-se:

$$\hat{y} = \hat{x}\delta_\Delta,$$

$$\hat{y}_k = \hat{x}_k\delta_\Delta, \quad k = 1, \dots, M.$$

*Demonstração.* Primeiramente, da equação (D.2) e da propriedade (PDA.1), Tabela 6.1, tem-se:  $\hat{y} \succ \hat{x}\delta_{\Delta^-}$ . Daí, como o sistema é FIFO bit a bit, de acordo com a Proposição 23, tem-se:  $\hat{y}_k \succ \hat{x}_k\delta_{\Delta^-}$ . Dessa forma,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$y_k(0, t) \leq x_k(0, t - \Delta^-(t)), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Da equação (D.4), portanto, têm-se:  $\Delta_k^-(t) \geq \Delta^-(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ . Conseqüentemente, da equação (D.2),

$$y(0, t) \geq x(0, t - \Delta_k^-(t)), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

o que implica, da equação (D.1), que  $\Delta_k^-(t) \geq \Delta(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ . Dessa forma, têm-se:

$$\Delta_k(t) \geq \Delta_k^-(t) \geq \Delta(t), \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (\text{D.5})$$

Por outro lado, da equação (D.1),  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $y(0, t) \geq x(0, t - \Delta(t))$ , ou equivalentemente,  $\hat{y} \preceq \hat{x}\delta_{\Delta}$ . Daí, da Proposição 23,  $\hat{y}_k \preceq \hat{x}_k\delta_{\Delta}$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Assim,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$y_k(0, t) \geq x_k(0, t - \Delta(t)), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Portanto, da equação (D.3), tem-se:  $\Delta(t) \geq \Delta_k(t) \geq \Delta_k^-(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , o que implica, da inequação (D.5), que  $\Delta(t) = \Delta_k(t) = \Delta_k^-(t) = \Delta^-(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ .

Por fim, das Definições (D.1)-(D.4) e da propriedade (PDA.1), Tabela 6.1, se  $\Delta(t) = \Delta_k(t) = \Delta_k^-(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , então  $\hat{y}_k = \hat{x}_k\delta_{\Delta}$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Daí, tem-se:  $\hat{y} = F\{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_M\} = F\{\hat{x}_1\delta_{\Delta}, \dots, \hat{x}_M\delta_{\Delta}\} = \hat{x}\delta_{\Delta}$ , de forma que  $\Delta(t) = \Delta^-(t)$  e  $\hat{y} = \hat{x}\delta_{\Delta}$ .  $\square$

Na demonstração a seguir, considere-se o sistema ilustrado na Figura D.1.

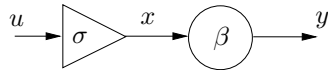


Figura D.1: Rede com curva de serviço  $\beta$  conectada a um regulador  $\sigma$ .

**Teorema 21.** Para o sistema da Figura D.1 (por conveniência uma repetição da Figura 6.7), sejam as funções  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ . Considere-se que  $\hat{y} \succ \hat{x} \succ \hat{u}$  (o sistema é causal); e  $\hat{u} \succ \hat{e}$  (o sistema está vazio em  $s = t = 0$ ). Um limitante  $a(t)$  para o p-atraso  $\Delta(t)$  da rede  $\beta$  representada na Figura D.1 corresponde à solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \delta_a &= \inf \delta_{\alpha}, \\ \text{s. a } \sigma^* \delta_{\alpha} &\succ \beta. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Primeiramente, se o sistema descrito anteriormente satisfaz uma função de p-atraso  $\Delta(t)$ , então, de (D.1), tem-se:  $\hat{y} \preceq \hat{x}\delta_{\Delta}$ , isto é,  $\hat{x}\delta_{\Delta} = \hat{x}\delta_{\Delta} \oplus \hat{y}$ . Portanto, o p-atraso

$\Delta(t)$  pode ser representado por uma rede  $\delta_\Delta$ . Desta maneira, seguindo o método apresentado na Seção 5.1, de forma semelhante ao procedimento para determinar o atraso virtual máximo  $\bar{D}$ , uma maneira de determinar um limitante para o p-atraso da rede  $\beta$  ilustrada na Figura D.1 é acrescentar um bloco básico com curva de serviço  $\delta_\alpha$  de  $x$  para  $y$  (paralelo à rede  $\beta$ ) e determinar os valores de  $\alpha(t)$  para os quais as restrições impostas pelo novo bloco são redundantes. A Figura D.2 ilustra esse procedimento. Em seguida, determina-se o valor ótimo de  $\delta_\alpha$  (nesse caso, o valor mínimo em  $\mathcal{C}$ ) para que não se alterem os possíveis valores de  $x$  e  $y$  que satisfazem as equações originais do problema.

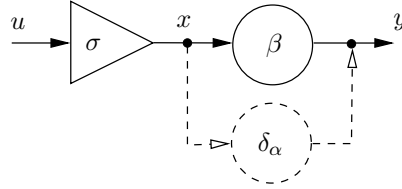


Figura D.2: Sistema com curva de serviço  $\delta_\alpha$  conectado em paralelo à rede  $\beta$  da Figura 6.7 (Figura D.1), para determinação de um limitante para o p-atraso.

O sistema da Figura D.2 satisfaz as seguintes equações em  $\mathcal{C}$ :

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{u}, \quad (\text{D.6})$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{x}\sigma, \quad (\text{D.7})$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \quad (\text{D.8})$$

$$\hat{x}\beta = \hat{x}\beta \oplus \hat{y}, \quad (\text{D.9})$$

$$\hat{x}\delta_\alpha = \hat{x}\delta_\alpha \oplus \hat{y}. \quad (\text{D.10})$$

As equações (D.6)-(D.10) são as mesmas utilizadas na demonstração do Teorema 13 (trocando-se  $\delta_{\bar{D}}$  por  $\delta_\alpha$ ). Assim, as mesmas manipulações feitas na prova do Teorema 13 podem ser usadas nesta demonstração, chegando-se ao seguinte resultado: As equações do bloco adicionado na Figura D.2 são redundantes, se a seguinte inequação for satisfeita:

$$\sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta.$$

Daí, o valor limite para o p-atraso da rede  $\beta$  da Figura D.1,  $a(t)$ , corresponde à solução do seguinte problema de otimização:  $\delta_a = \inf \{\delta_\alpha : \sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta\}$ .  $\square$

**Teorema 20.** *Considere-se um multiplexador com  $M$  fluxos de entrada e disciplina de filas FIFO bit a bit, que atende uma curva de serviço  $\beta \in \mathcal{C}$ . Sejam  $x_k, y_k, \sigma_k \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, o fluxo de entrada, o fluxo de saída e uma curva de regulação para o tráfego  $k$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Sejam, ainda,  $x = x_1 + \dots + x_M = F\{x_1, \dots, x_M\}$  o fluxo de entrada total do sistema;*

$y = y_1 + \dots + y_M = F\{y_1, \dots, y_M\}$  o fluxo total de saída; e  $\sigma_{(i)}^*$  a curva de regulação do agregado de tráfegos excetuando-se o fluxo  $i$ , definida pela equação (6.20). As curvas de serviço para o tráfego de interesse,  $i$ , e para o agregado de fluxos restante excetuando-se o fluxo  $i$  podem ser definidas, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\beta_i^{\Theta_i}(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta_i(t), \\ \left(G\{\beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\Theta_i}\}\right)(s, t), & \text{se } s < t - \Theta_i(t), \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \tilde{\Theta}_i(t), \\ \left(G\{\beta, \sigma_i^* \delta_{\tilde{\Theta}_i}\}\right)(s, t), & \text{se } s < t - \tilde{\Theta}_i(t), \end{cases}$$

sendo  $\Theta_i : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  e  $\tilde{\Theta}_i : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  funções pré-definidas quaisquer.

*Demonstração.* A seguir, demonstra-se que a curva  $\beta_i^{\Theta_i}$  é uma curva de serviço para o tráfego de interesse. A demonstração de que  $\tilde{\beta}_i^{\tilde{\Theta}_i}$  é uma curva de serviço para o agregado dos fluxos restante é análoga.

O sistema como um todo atende uma curva de serviço  $\beta \in \mathcal{C}$ . Portanto,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ , tem-se:

$$y(0, t) = y_i(0, t) + y_{(i)}(0, t) \geq (x\beta)(0, t), \quad (\text{D.11})$$

Seja  $\xi$  um ponto para o qual  $(x\beta)(0, t) = x(0, \xi) + \beta(\xi, t)$ . Da Proposição 24, tem-se:  $y(0, t) = x(0, t - \Delta(t))$ . Dessa forma, da inequação (D.11),

$$y(0, t) = x(0, t - \Delta(t)) \geq x(0, \xi) + \beta(\xi, t) \geq x(0, \xi). \quad (\text{D.12})$$

De (D.12), considerando que  $x \in \mathcal{C}_t$ , pode-se concluir que a inequação (D.11) só faz sentido para valores de  $\xi$  tais que  $\xi \leq t - \Delta(t)$ .

Da Proposição 24, e da inequação (D.11), tem-se:

$$\begin{aligned} y_i(0, t) &\geq (x\beta)(0, t) - y_{(i)}(0, t) \\ &= x(0, \xi) + \beta(\xi, t) - x_{(i)}(0, t - \Delta(t)) \\ &= x_i(0, \xi) + \beta(\xi, t) - [x_{(i)}(0, t - \Delta(t)) - x_{(i)}(0, \xi)]. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Da inequação (D.13), como  $\sigma_{(i)}$  é uma curva de regulação para o agregado de fluxos excetuando-se  $i$  e  $\xi \leq t - \Delta(t)$ , tem-se:

$$y_i(0, t) \geq x_i(0, \xi) + \beta(\xi, t) - \sigma_{(i)}^*(\xi, t - \Delta(t)). \quad (\text{D.14})$$

Considere-se definida a função  $\Theta_i(t)$ ,  $\forall t$ . A análise a seguir está dividida em dois casos:

$$\Theta_i(t) < \Delta(t),$$

$$\Theta_i(t) \geq \Delta(t).$$

1. Se  $\Theta_i(t) < \Delta(t)$ , então  $t - \Theta_i(t) > t - \Delta(t) \geq \xi$ . Da consideração de que  $\sigma_k \in \mathcal{C}_t$ ,  $k = 1, \dots, M$ , tem-se:  $\sigma_{(i)} \in \mathcal{C}_t$ . Daí, da inequação (D.14):

$$\begin{aligned} y_i(0, t) &\geq x_i(0, \xi) + \beta(\xi, t) - \sigma_{(i)}^*(\xi, t - \Delta(t)) \\ &\geq x_i(0, \xi) + \beta(\xi, t) - \sigma_{(i)}^*(\xi, t - \Theta_i(t)). \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Além disso, como  $t - \Delta(t) \geq \xi$  e  $x_i \in \mathcal{C}_t$ , tem-se:  $y_i(0, t) = x_i(0, t - \Delta(t)) \geq x_i(0, \xi)$ . Daí, da inequação (D.15), as seguintes inequações são satisfeitas:

$$\begin{aligned} y_i(0, t) - x_i(0, \xi) &\geq 0, \\ y_i(0, t) - x_i(0, \xi) &\geq \beta(\xi, t) - \sigma_{(i)}^*(\xi, t - \Theta_i(t)). \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} y_i(0, t) &\geq x_i(0, \xi) + \max \left\{ 0, \beta(\xi, t) - \sigma_{(i)}^*(\xi, t - \Theta_i(t)) \right\} \\ &= x_i(0, \xi) + \left( G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\Theta_i} \right\} \right) (\xi, t) \\ &= x_i(0, \xi) + \beta_i^{\Theta_i}(\xi, t) \\ &\geq (x_i \beta_i^{\Theta_i})(0, t). \end{aligned}$$

2. Se  $\Theta_i(t) \geq \Delta(t)$ , então,  $t - \Theta_i(t) \leq t - \Delta(t)$ . Dessa forma,  $\beta_i^{\Theta_i}(t - \Delta(t), t) = 0$ . Daí, da Proposição 24,

$$\begin{aligned} y_i(0, t) &= x_i(0, t - \Delta(t)) \\ &= x_i(0, t - \Delta(t)) + \beta_i^{\Theta_i}(t - \Delta(t), t) \\ &\geq (x_i \beta_i^{\Theta_i})(0, t). \end{aligned}$$

Do exposto anteriormente,  $y_i(0, t) \geq (x_i \beta_i^{\Theta_i})(0, t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ , independente da definição da função  $\Theta_i : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ , o que completa a prova.  $\square$

**Teorema 18.** *Considere-se que dois fluxos de tráfego entram em um elemento de rede com disciplina de filas FIFO bit a bit. Sejam  $x_k, y_k \in \mathcal{C}_t$ , respectivamente, o fluxo de entrada e o fluxo de saída do tráfego  $k$ ,  $k = 1, 2$ . Além disso,  $x = x_1 + x_2$  é o fluxo total de entrada do sistema, e  $y = y_1 + y_2$  é o fluxo total de saída. Se o fluxo 2 satisfaz uma curva de regulação  $\sigma_2 \in \mathcal{C}_t$ , então o fluxo  $x_1$  satisfaz a seguinte curva de serviço:*

$$\beta_1^{\Theta}(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \geq t - \Theta, \\ (G \{ \beta, \sigma_2^* \delta_{\Theta} \}) (s, t), & \text{se } s < t - \Theta, \end{cases}$$

sendo  $\Theta : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  uma função pré-definida qualquer.

*Demonstração.* Este teorema é uma aplicação direta do Teorema 20, quando:  $M = 2$ ,  $\Theta(t) = \Theta$ , e  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ .  $\square$

A seguir, considere-se  $\Lambda : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{Z}^+$  a seguinte função:

$$\Lambda(s, t) = \inf \{d \geq 0 : \sigma^*(s, t - d) \leq \beta(s, t)\}. \quad (\text{D.16})$$

**Proposição 25.** *Sejam  $\sigma \in \mathcal{C}_t$  e  $\beta \in \mathcal{C}$ , respectivamente, uma curva de regulação e uma curva de serviço para um dado sistema com disciplina de filas FIFO bit a bit, e seja  $a : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  a seguinte função:*

$$a(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Lambda(s, t)\}.$$

A função  $a(t)$  definida desta maneira corresponde à solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \delta_a &= \inf \delta_\alpha, \\ \text{s. a } \sigma^* \delta_\alpha &\succcurlyeq \beta. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

*Demonstração.* Primeiramente, note-se que,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $a(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Lambda(s, t)\} \geq \Lambda(s, t)$ . Dessa forma, da definição de  $\Lambda$  e como  $\sigma^* \in \mathcal{C}_t$ , tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} \beta(s, t) &\geq \sigma^*(s, t - \Lambda(s, t)) \\ &\geq \sigma^*(s, t - a(t)). \end{aligned}$$

Equivalentemente, da propriedade (PDA.1), Tabela 6.1, tem-se:  $\beta \preccurlyeq \sigma^* \delta_a$ , de forma que  $\delta_a$  é uma solução possível para o problema (D.17). Agora, para mostrar que  $\delta_a$  é também a solução ótima de (D.17), considere-se uma função factível e arbitrária  $b(t) \leq a(t)$  tal que  $\sigma^* \delta_b \succcurlyeq \beta$ . Se  $\sigma^* \delta_b \succcurlyeq \beta$ , então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , tem-se:  $\sigma^*(s, t - b(t)) \leq \beta(s, t)$ . Contudo, da definição de  $\Lambda$  (equação D.16), se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $\sigma^*(s, t - b(t)) \leq \beta(s, t)$ , então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $b(t) \geq \Lambda(s, t)$ . Em particular, essa inequação deve ser satisfeita para  $\Lambda(s, t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Lambda(s, t)\} = a(t)$ . Assim, qualquer função  $b(t)$  tal que  $\sigma^* \delta_b \succcurlyeq \beta$  é tal que  $b(t) \geq a(t)$ . Portanto,  $a(t)$  corresponde à solução ótima de (D.17).  $\square$

De acordo com o Teorema 20, as curvas de serviço para o fluxo  $i$  e para o agregado de tráfegos excetuando-se  $i$  podem ser definidas, respectivamente, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \beta_i^a, \\ \tilde{\beta}_i &= \tilde{\beta}_i^a, \end{aligned}$$

sendo  $a(t)$  definida pela Proposição 25.

**Teorema 27.** *As curvas de serviço  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  definidas acima garantem:*

1. *Equivalência total entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em relação aos tráfegos totais de entrada e saída;*
2. *Equivalência por fluxo desses sistemas em relação ao limitante de  $p$ -atraso,  $a(t)$ ;*
3. *Equivalência por fluxo desses sistemas em relação ao limitante de atraso virtual,  $\bar{D}$ .*

*Demonstração.* As demonstrações estão apresentadas por item.

1. *Equivalência total.* De acordo com a inequação (6.16), uma condição suficiente para a equivalência total entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) em relação aos tráfegos totais de entrada e saída é que  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  satisfaçam a seguinte inequação:

$$\beta \preceq F \left\{ \sigma_i^* \beta_i, \sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i \right\}.$$

Das definições de  $\beta_i^a$  e  $\tilde{\beta}_i^a$ , as seguintes inequações são satisfeitas:  $\beta_i^a \succcurlyeq \delta_a$  e  $\tilde{\beta}_i^a \succcurlyeq \delta_a$ . Daí, da isotonicidade do produto, têm-se:  $\sigma_i^* \beta_i^a \succcurlyeq \sigma_i^* \delta_a$  e  $\sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i^a \succcurlyeq \sigma_{(i)}^* \delta_a$ . Da propriedade (PM.1), Tabela 3.10, portanto:  $F \left\{ \sigma_i^* \beta_i^a, \sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i^a \right\} \succcurlyeq F \left\{ \sigma_i^* \delta_a, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\} = \sigma^* \delta_a$ . Mas da Proposição 25, tem-se:  $\sigma^* \delta_a \succcurlyeq \beta$ . Dessa forma, tem-se:

$$F \left\{ \sigma_i^* \beta_i^a, \sigma_{(i)}^* \tilde{\beta}_i^a \right\} \succcurlyeq \sigma^* \delta_a \succcurlyeq \beta.$$

Assim, a equivalência total é garantida, em relação aos fluxos totais de entrada e saída.

2. *Equivalência por fluxo em relação a  $\Delta(t)$ .* De acordo com as inequações (6.33) e (6.34), a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) acontece para quaisquer curvas  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  que satisfaçam as seguintes inequações:

$$\sigma_i^* \delta_a \succcurlyeq \beta_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\}, \quad (D.18)$$

$$\sigma_{(i)}^* \delta_a \succcurlyeq \tilde{\beta}_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_a \right\}. \quad (D.19)$$

Essas inequações são satisfeitas para  $\beta_i^a$  e  $\tilde{\beta}_i^a$ . Primeiramente, note-se que, se  $s \geq t - a(t)$ , têm-se:  $(\sigma_i^* \delta_a)(s, t) = 0 = \beta_i^a(s, t)$  e  $(\sigma_{(i)}^* \delta_a)(s, t) = 0 = \tilde{\beta}_i^a(s, t)$ . Além disso, têm-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\}(s, t) \geq 0$  e  $G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_a \right\}(s, t) \geq 0$ . Dessa forma, quando  $s \geq t - a(t)$ :  $G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\}(s, t) \geq 0 = \beta_i^a(s, t)$  e  $G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_a \right\}(s, t) \geq 0 = \tilde{\beta}_i^a(s, t)$ .

Por outro lado, quando  $s < t - a(t)$ , então  $\beta_i^a(s, t) = G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\}(s, t) \geq (\sigma_i^* \delta_a)(s, t)$ , e  $\tilde{\beta}_i^a(s, t) = G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_a \right\}(s, t) \geq (\sigma_{(i)}^* \delta_a)(s, t)$ . Desta forma, as curvas  $\beta_i^a$  e  $\tilde{\beta}_i^a$  estão na região que garante a equivalência em relação a  $\Delta(t)$ .

3. *Equivalência por fluxo em relação a  $\bar{D}$ .* De acordo com as inequações (6.27) e (6.28), a equivalência entre os sistemas das Figuras 6.3(b) e 6.3(c) acontece para quaisquer curvas  $\beta_i$  e  $\tilde{\beta}_i$  que satisfaçam as seguintes inequações:

$$\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \beta_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \right\},$$

$$\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \tilde{\beta}_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \right\}.$$

Essas inequações são satisfeitas para  $\beta_i^a$  e  $\tilde{\beta}_i^a$ , como mostrado a seguir. Primeiramente, note-se que  $a(t) \leq \bar{D}$ ,  $\forall t$ . Daí, tem-se:  $\delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \delta_a$ . Então, da isotonicidade dos operadores de projeção e como  $\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \in \mathcal{C}_t$ , das considerações de que  $\sigma_i, \sigma_{(i)} \in \mathcal{C}_t$ , as seguintes inequações são satisfeitas:  $\sigma_i^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \sigma_i^* \delta_a$  e  $\sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} \succcurlyeq \sigma_{(i)}^* \delta_a$ . Da mesma forma, têm-se:  $G\{\beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}}\} \preccurlyeq G\{\beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a\}$  e  $G\{\beta, \sigma_i^* \delta_{\bar{D}}\} \preccurlyeq G\{\beta, \sigma_i^* \delta_a\}$ . Daí, das inequações (D.18) e (D.19), têm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_i^* \delta_{\bar{D}} &\succcurlyeq \sigma_i^* \delta_a \succcurlyeq \beta_i^a \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a\} \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}}\}, \\ \sigma_{(i)}^* \delta_{\bar{D}} &\succcurlyeq \sigma_{(i)}^* \delta_a \succcurlyeq \tilde{\beta}_i^a \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_i^* \delta_a\} \succcurlyeq G\{\beta, \sigma_i^* \delta_{\bar{D}}\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, as curvas  $\beta_i^a$  e  $\tilde{\beta}_i^a$  também estão na região que garante a equivalência em relação a  $\bar{D}$ .

□

**Proposição 28.** *Considere-se um sistema com  $M$  fluxos de entrada. Sejam  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ , respectivamente, uma curva de regulação e uma curva de serviço para o sistema como um todo;  $\sigma_k \in \mathcal{C}_t$ , uma curva de regulação para o fluxo  $k$ ,  $k = 1, \dots, M$ ; e  $i$  o fluxo de interesse, de forma que  $\sigma^* = F\{\sigma_i^*, \sigma_{(i)}^*\}$ . Considerem-se, ainda,  $\sigma, \beta, \sigma_k, k = 1, \dots, M$  funções invariantes no tempo, e seja  $a : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  tal que  $\delta_a = \inf\{\delta_\alpha : \beta \preccurlyeq \sigma^* \delta_\alpha\}$ . Se uma curva de serviço  $\beta_i$  é invariante no tempo e garante equivalência em relação ao atraso então ela está completamente definida na seguinte região:*

$$\forall \nu \in \mathbb{Z}^+ : \sigma_i^*(\nu - a(\nu)) \leq \beta_i(\nu) \leq \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu)).$$

*Demonstração.* Primeiramente, da consideração de que  $\beta_i \preccurlyeq \sigma_i^* \delta_a$  e da propriedade (PDA.1), Tabela 6.1, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :  $\beta_i(s, t) \geq \sigma_i^*(s, t - a(t))$ . Seja, agora,  $\nu = t - s$ . As seguintes inequações devem ser satisfeitas,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} \beta_i(0, \nu) &\geq \sigma_i^*(0, \nu - a(\nu)), \\ \beta_i(1, \nu + 1) &\geq \sigma_i^*(1, \nu + 1 - a(\nu + 1)), \\ &\vdots \\ \beta_i(s, \nu + s) &\geq \sigma_i^*(s, \nu + s - a(\nu + s)), \quad \forall s \geq 0. \end{aligned}$$

Daí, se  $\sigma_i$  e  $\beta_i$  são funções invariantes no tempo, as seguintes inequações também devem ser

atendidas,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned}\beta_i(\nu) &\geq \sigma_i^*(\nu - a(\nu)), \\ \beta_i(\nu) &\geq \sigma_i^*(\nu - a(\nu + 1)), \\ &\vdots \\ \beta_i(\nu) &\geq \sigma_i^*(\nu - a(\nu + s)), \quad \forall s \geq 0.\end{aligned}$$

Das inequações acima, pode-se concluir que, para que  $\beta_i \preceq \sigma_i^* \delta_a$  e  $\beta_i$  seja uma função invariante no tempo, a seguinte inequação deve ser satisfeita,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned}\beta_i(\nu) &\geq \sup_{s \geq 0} \{\sigma_i^*(\nu - a(\nu + s))\} \\ &= \sigma_i^*(\nu - \inf_{s \geq 0} \{a(\nu + s)\}),\end{aligned}\tag{D.20}$$

sendo que a inequação (D.20) é satisfeita, porque  $\sigma_i \in \mathcal{C}_t$ . Da consideração de que  $a(t)$  corresponde a  $\delta_a = \inf \{\delta_\alpha : \sigma^* \delta_\alpha \succcurlyeq \beta\}$ , e da Proposição 25, tem-se:  $a(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{\Lambda(s, t)\}$ . Dessa forma,  $a(t)$  é uma função não-decrescente em  $t$ . Daí, a seguinte igualdade é satisfeita:  $\inf_{s \geq 0} \{a(\nu + s)\} = a(\nu)$ . Da inequação (D.20), tem-se:

$$\forall \nu \in \mathbb{Z}^+ : \beta_i(\nu) \geq \sigma_i^*(\nu - a(\nu)).$$

Por outro lado, da definição de  $a(t)$ , tem-se:  $\beta \preceq \sigma^* \delta_a$ . Portanto, da consideração de que  $\sigma$  e  $\beta$  são funções invariantes no tempo, tem-se,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+ : \beta(\nu) \geq \sigma^*(\nu - a(\nu)) \geq \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu))$ . Assim, se  $\beta_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\}$ , da propriedade (PDA.1), Tabela 6.1, tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+ : \beta_i(s, t) \leq \max \left\{ 0, \beta(s, t) - \sigma_{(i)}^*(s, t - a(t)) \right\} = \beta(s, t) - \sigma_{(i)}^*(s, t - a(t))$ . Seja, novamente,  $\nu = t - s$ . Quando  $\beta_i(s, t) \leq \beta(s, t) - \sigma_{(i)}^*(s, t - a(t))$ , as seguintes inequações também devem ser satisfeitas,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned}\beta_i(0, \nu) &\leq \beta(0, \nu) - \sigma_{(i)}^*(0, \nu - a(\nu)), \\ \beta_i(1, \nu + 1) &\leq \beta(1, \nu + 1) - \sigma_{(i)}^*(1, \nu + 1 - a(\nu + 1)), \\ &\vdots \\ \beta_i(s, \nu + s) &\leq \beta(s, \nu + s) - \sigma_{(i)}^*(s, \nu + s - a(\nu + s)), \quad \forall s \geq 0.\end{aligned}$$

Daí, como  $\sigma_{(i)}$  e  $\beta$  são funções invariantes no tempo, então para que  $\beta_i$  seja uma função invariante

no tempo, as seguintes inequações devem ser atendidas,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned}\beta_i(\nu) &\leq \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu)), \\ \beta_i(\nu) &\leq \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu + 1)), \\ &\vdots \\ \beta_i(\nu) &\leq \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu + s)), \quad \forall s \geq 0.\end{aligned}$$

Das inequações acima, pode-se concluir que, para que  $\beta_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\}$ , e  $\beta_i$  seja uma função invariante no tempo, as seguintes expressões devem ser satisfeitas,  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned}\beta_i(\nu) &\leq \inf_{s \geq 0} \left\{ \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu + s)) \right\} \\ &= \beta(\nu) - \sup_{s \geq 0} \left\{ \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu + s)) \right\} \\ &= \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - \inf_{s \geq 0} \{a(\nu + s)\}),\end{aligned}\tag{D.21}$$

Nos passos acima, usou-se o fato de que  $\sigma_{(i)}^* \in \mathcal{C}_t$ . Mas a função  $a(t)$  é não-decrescente em  $t$ . Dessa forma, tem-se:  $\inf_{s \geq 0} \{a(\nu + s)\} = a(\nu)$ . Assim, a inequação (D.21) pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$\forall \nu \in \mathbb{Z}^+ : \beta_i(\nu) \leq \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu)).$$

Do exposto anteriormente, para que exista uma função  $\beta_i$  invariante no tempo tal que  $\sigma_i^* \delta_a \succcurlyeq \beta_i \succcurlyeq G \left\{ \beta, \sigma_{(i)}^* \delta_a \right\}$ , então a seguinte inequação deve ser satisfeita:  $\forall \nu \in \mathbb{Z}^+$ :  $\sigma_i^*(\nu - a(\nu)) \leq \beta_i(\nu) \leq \beta(\nu) - \sigma_{(i)}^*(\nu - a(\nu))$ .  $\square$

**Proposição 29.** *Considere que a rede  $\beta$  ilustrada na Figura 6.3(a) corresponde a um enlace conservativo de capacidade  $\beta = C_o^*$ . Nesse caso, o fluxo  $\hat{y}_i$  deve atender a seguinte curva de regulação:*

$$\sigma_{y_i} = (\beta_i \setminus \sigma_i^*) \oplus C_o^*.$$

*Demonstração.* Se a rede  $\beta$  ilustrada na Figura 6.3(a) corresponde a um enlace conservativo de capacidade  $\beta = C_o^*$ , então, da Seção 7.1, tem-se:  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{y} C_o^*$ , ou ainda:  $\hat{y} \setminus \hat{y} \succcurlyeq C_o^*$ . Por outro lado, como  $y_i, y_{(i)}, y \in \mathcal{C}_t$ , tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned}[y(0, t) - y(0, s)]^+ &= y(0, t) - y(0, s) \\ &= y_i(0, t) + y_{(i)}(0, t) - y_i(0, s) - y_{(i)}(0, s) \\ &= [y_i(0, t) - y_i(0, s)] + [y_{(i)}(0, t) - y_{(i)}(0, s)] \\ &\geq y_i(0, t) - y_i(0, s) = [y_i(0, t) - y_i(0, s)]^+.\end{aligned}$$

Daí, da propriedade (PH.3), Tabela 3.7, tem-se:  $\hat{y}_i \bowtie \hat{y}_i \succ \hat{y} \bowtie \hat{y} \succ C_o^*$ . Dessa forma, a função  $C_o^*$  também é uma curva de regulação para o tráfego  $y_i$ . Além disso, da equação (6.43), a curva  $(\beta_i \bowtie \sigma_i^*)$  é uma curva de regulação para o fluxo  $y_i$  de forma que  $\hat{y}_i \succ \hat{y}_i(\beta_i \bowtie \sigma_i^*)$ . Assim, tem-se:  $\hat{y}_i \succ \hat{y}_i[(\beta_i \bowtie \sigma_i^*) \oplus C_o^*]$ . Portanto, se o fluxo de saída é conservativo e tem capacidade  $C_o^*$ , então o fluxo  $\hat{y}_i$  deve atender a seguinte curva de regulação:

$$\sigma_{y_i} = (\beta_i \bowtie \sigma_i^*) \oplus C_o^*.$$

□

## Apêndice E

# Demonstrações referentes ao Capítulo 7

Este apêndice contém demonstrações de proposições e teoremas apresentados no Capítulo 7.

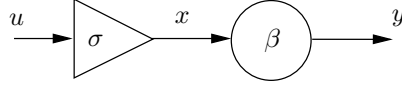


Figura E.1: Rede com curva de serviço  $\beta$  conectada a um regulador  $\sigma$ .

**Teorema 30.** *Para o sistema da Figura E.1 (por conveniência uma repetição da Figura 7.4), sejam as funções  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$  e  $\sigma, \beta \in \mathcal{C}$ . Considere-se que  $\hat{y} \succ \hat{x} \succ \hat{u}$  (o sistema é causal); e que  $\hat{u} \succ$  e (o sistema está vazio em  $s = t = 0$ ). Um limitante  $D(t)$  para o atraso virtual no instante  $t$  da rede  $\beta$  representada na Figura E.1 corresponde à resposta do seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} \partial_D &= \inf \partial_d, \\ \text{s. a } \sigma^* &\succ \beta \phi \partial_d. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Seguindo o método apresentado na Seção 5.1, uma maneira de se determinar o atraso virtual máximo no instante  $t$  da rede  $\beta$  ilustrada da Figura E.1 é acrescentar um elemento com atraso máximo  $d(t)$  de  $x$  para  $y$  (paralelo à rede  $\beta$ ) e determinar os valores de  $d(t)$  para os quais as restrições impostas pelo novo bloco são redundantes. A Figura E.2 ilustra esse procedimento. Em seguida, deve-se determinar o valor ótimo  $\partial_D$  (nesse caso o mínimo em  $\mathcal{C}$ ), dentre os valores encontrados anteriormente, que sejam independentes dos fluxos  $\hat{u}$ ,  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ .

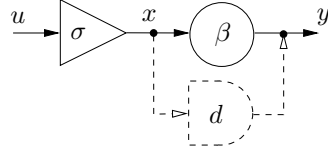


Figura E.2: Sistema com atraso máximo  $d(t)$  conectado em paralelo à rede  $\beta$  da Figura E.1, para determinação de seu atraso virtual máximo.

O sistema da Figura E.2 satisfaz as seguintes equações em  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{x} \oplus \hat{u}, \\ \hat{x} &= \hat{x} \oplus \hat{x}\sigma,\end{aligned}\tag{E.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{y} \oplus \hat{x}, \\ \hat{x}\beta &= \hat{x}\beta \oplus \hat{y},\end{aligned}\tag{E.2}$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y}\phi\partial_d.\tag{E.3}$$

Da equação (E.2),  $\hat{y} \preceq \hat{x}\beta$ . Daí:  $\hat{y}\phi\partial_d \preceq (\hat{x}\beta)\phi\partial_d$ . Por outro lado, da equação (E.1),  $\hat{x} = \hat{x}\sigma^*$ , e da equação (E.3),  $\hat{y}\phi\partial_d \preceq \hat{x}$ . Dessa forma, tem-se:

$$\hat{y}\phi\partial_d \preceq (\hat{x}\beta)\phi\partial_d \wedge \hat{x}\sigma^*.\tag{E.4}$$

Seguindo o método proposto no Capítulo 5 (Seção 5.1), deve-se escolher um termo predominante na inequação (E.4), de forma a garantir a redundância da equação (E.3). Nesse caso, a equação (E.3) é redundante, se a seguinte inequação for satisfeita:

$$(\hat{x}\beta)\phi\partial_d \preceq \hat{x}\sigma^*.\tag{E.5}$$

Achar uma função  $\delta_d$  ótima que satisfaça a inequação (E.5) equivale a encontrar uma solução ótima em  $\partial_d$  para a seguinte equação:

$$\hat{x}(\beta\phi\partial_d) \preceq \hat{x}\sigma^*.\tag{E.6}$$

De fato, da propriedade (PR.6), Tabela 3.2, qualquer função  $\delta_d$  que satisfaz a equação (E.5), também satisfaz a equação (E.6). Por outro lado, da Proposição 48 (Apêndice G), se a equação (E.6) é satisfeita, então a equação (E.5) também é satisfeita.

A solução da equação (E.6) envolve a residuação  $\hat{x} \bowtie \hat{x}$ . Dessa forma, é necessariamente dependente de  $x$ . Por outro lado, considere-se que a seguinte inequação é satisfeita:

$$\sigma^* \succcurlyeq \beta\phi\partial_d.\tag{E.7}$$

Nesse caso, a simples pré-multiplicação dos dois lados da equação (E.7) por  $\hat{x}$  implica que a equação (E.6) é satisfeita. Desta forma, a equação (E.5) é satisfeita. Assim, um limitante sub-ótimo para  $\partial_d$ , independente do fluxo  $x$ , pode ser definido da seguinte maneira:  $\partial_D = \inf \{\partial_d : \sigma^* \succcurlyeq \beta \phi \partial_d\}$ .  $\square$

Seja  $D : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  uma função conhecida. Nas demonstrações a seguir, utiliza-se a seguinte definição (Definição 26):

$$\partial_D(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s + D(s) \geq t, \\ +\infty, & \text{se } s + D(s) < t. \end{cases}$$

**Propriedade (PPD.1).** *Seja  $x \in \mathcal{C}_s$ . Tem-se:*

$$(\partial_D x)(s, t) = \begin{cases} x(s + D(s), t), & \text{se } s + D(s) \leq t, \\ x(t, t) & \text{se } s + D(s) > t \geq s, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

*Demonstração.* Considerem-se  $s, t \in \mathbb{Z}^+$ . Se  $s + D(s) \leq t$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (\partial_D x)(s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{\partial_D(s, \tau) + x(\tau, t)\} \\ &= \min \left\{ \min_{s \leq \tau \leq s+D(s) \leq t} \{0 + x(\tau, t)\}, \min_{s \leq s+D(s) < \tau \leq t} \{\infty + x(\tau, t)\} \right\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq s+D(s) \leq t} \{x(\tau, t)\} \\ &= x(s + D(s), t). \end{aligned}$$

Nos passos acima, a última equação é válida, porque  $x \in \mathcal{C}_s$ .

Por outro lado, se  $s + D(s) > t \geq s$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (\partial_D x)(s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t < s+D(s)} \{\partial_D(s, \tau) + x(\tau, t)\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t < s+D(s)} \{0 + x(\tau, t)\} \\ &= x(t, t). \end{aligned}$$

Por fim, da definição de produto em  $\mathcal{C}$ , tem-se:  $(\partial_D x)(s, t) = 0$ , quando  $s > t$ .  $\square$

**Propriedade (PPD.2).** *Seja  $x \in \mathcal{C}_s$ . Se  $x(t, t) = 0, \forall t$ , então  $(\partial_D x)(s, t) = x(s + D(s), t)$ .*

*Demonstração.* Da propriedade (PPD.1), quando  $x(t, t) = 0, \forall t$ , tem-se:

$$(\partial_D x)(s, t) = \begin{cases} x(s + D(s), t), & \text{se } s + D(s) \leq t, \\ 0, & \text{se } s + D(s) > t. \end{cases}$$

Mas da definição de  $\mathcal{C}$ ,  $x(s + D(s), t) = 0$ , se  $s + D(s) > t$ . Dessa forma, quando  $x(t, t) = 0$ ,  $\forall t$ , então  $(\partial_D x)(s, t) = x(s + D(s), t)$ .  $\square$

**Propriedade (PPD.3).** *Seja  $x \in \mathcal{C}_t$ . Tem-se:*

$$(x \phi \partial_D)(s, t) = \begin{cases} x(s, t + D(t)), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

*Demonstração.* Considerem-se  $s, t \in \mathbb{Z}^+$ . Se  $s \leq t$ :

$$\begin{aligned} (x \phi \partial_D)(s, t) &= \sup_{s \leq t \leq \tau} \{x(s, \tau) - \partial_D(t, \tau)\}^+ \\ &= \max \left\{ \sup_{s \leq t \leq t+D(t) < \tau} \{x(s, \tau) - \infty\}, \max_{s \leq t \leq \tau \leq t+D(t)} \{x(s, \tau) - 0\}, 0 \right\} \\ &= \max_{s \leq t \leq \tau \leq t+D(t)} \{x(s, \tau)\} \\ &= x(s, t + D(t)). \end{aligned}$$

Nos passos acima, a última equação é válida, porque  $x \in \mathcal{C}_t$ .

Por fim, da definição da residuação do produto em  $\mathcal{C}$ , tem-se:  $(x \phi \partial_D)(s, t) = 0$ , quando  $s > t$ .  $\square$

**Propriedade (PPD.4).** *Sejam  $\forall x_k \in \mathcal{C}_t$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Tem-se:*

$$F \{x_1 \phi \partial_D, \dots, x_M \phi \partial_D\} = F \{x_1, \dots, x_M\} \phi \partial_D.$$

*Demonstração.* Da (PPD.3), tem-se, para  $k = 1, \dots, M$ :

$$(x_k \phi \partial_D)(s, t) = \begin{cases} x_k(s, t + D(t)), & \text{se } s \leq t, \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

Dessa forma, da definição do operador  $F$ , se  $s \leq t$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (F \{(x_1 \phi \partial_D), \dots, (x_M \phi \partial_D)\})(s, t) &= (x_1 \phi \partial_D)(s, t) + \dots + (x_M \phi \partial_D)(s, t) \\ &= x_1(s, t + D(t)) + \dots + x_M(s, t + D(t)) \\ &= (F \{x_1, \dots, x_M\})(s, t + D(t)) \\ &= (F \{x_1, \dots, x_M\} \phi \partial_D)(s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado,  $F \{x_1 \phi \partial_D, \dots, x_M \phi \partial_D\} \in \mathcal{C}$  e  $F \{x_1, \dots, x_M\} \phi \partial_D \in \mathcal{C}$ . Portanto, se  $s > t$ :  $(F \{x_1 \phi \partial_D, \dots, x_M \phi \partial_D\})(s, t) = (F \{x_1, \dots, x_M\} \phi \partial_D)(s, t) = 0$ .  $\square$

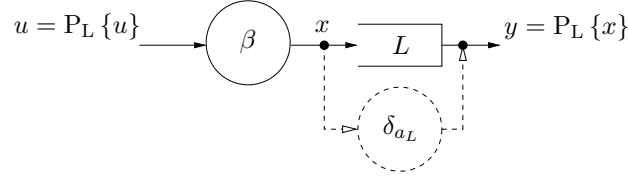


Figura E.3: Rede  $\beta$  em série com um *buffer* de recepção e tamanho máximo de pacotes  $L$ .

**Teorema 31.** *Considere-se uma rede  $\beta \in \mathcal{C}$  em série com um buffer de recepção, conforme ilustra a Figura E.3 (por conveniência, uma repetição da Figura 7.10). Além disso, considere-se que  $u, x, y \in \mathcal{C}_t$ . Se o fluxo  $u$  da Figura E.3 é  $L$ -quantizado, então a curva de serviço total da junção rede  $\beta$  - buffer de recepção pode ser definida da seguinte maneira:*

$$\beta' = \beta \phi \lambda_L.$$

*Demonstração.* Primeiramente, para esse sistema,  $\hat{y} \preccurlyeq (\hat{u}\beta) \phi \lambda_L$  (equação 7.18). Desta forma,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$y(0, t) \geq [(u\beta)(0, t) - L(t)]^+. \quad (\text{E.8})$$

Seja  $\xi$  um ponto tal que  $(u\beta)(0, t) = u(0, \xi) + \beta(\xi, t)$ . Da equação (E.8), tem-se:

$$\begin{aligned} y(0, t) &\geq [(u\beta)(0, t) - L(t)]^+ \\ &= [u(0, \xi) + \beta(\xi, t) - L(t)]^+ \\ &\geq u(0, \xi) + \beta(\xi, t) - L(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se:

$$y(0, t) - u(0, \xi) \geq \beta(\xi, t) - L(t). \quad (\text{E.9})$$

Agora, se o fluxo  $u$  é  $L$ -quantizado, então  $u = P_L \{u\}$ . Daí, as seguintes inequações devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} y(0, t) &= P_L \{x(0, t)\} \\ &\geq P_L \{(u\beta)(0, t)\} = P_L \{u(0, \xi) + \beta(\xi, t)\} \\ &\geq P_L \{u(0, \xi)\} = u(0, \xi). \end{aligned}$$

Assim, da inequação (E.9), as seguintes inequações devem ser atendidas ao mesmo tempo:

$$\begin{aligned} y(0, t) - u(0, \xi) &\geq \beta(\xi, t) - L(t), \\ y(0, t) - u(0, \xi) &\geq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} y(0, t) &\geq u(0, \xi) + [\beta(\xi, t) - L(t)]^+ \\ &= u(0, \xi) + (\beta \phi \lambda_L)(\xi, t) \\ &\geq [u (\beta \phi \lambda_L)](0, t), \end{aligned}$$

ou ainda

$$\hat{y} \preceq \hat{u} (\beta \phi \lambda_L).$$

Dessa forma, a curva  $\beta' = \beta \phi \lambda_L$  é uma curva de serviço para o sistema entre  $u$  e  $y$ .  $\square$

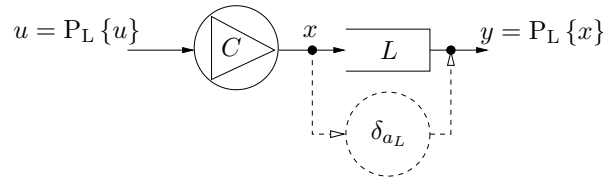


Figura E.4: *Buffer* de recepção com tamanho máximo de pacote  $L$ , conectado a um enlace conservativo de capacidade  $C \in \mathcal{C}$ .

**Proposição 34.** Na Figura E.4 (por conveniência, uma repetição da Figura 7.12), considere-se  $C = \lambda_{\bar{L}} \rho^*$ , sendo  $\bar{L}(t) \geq L(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ . Então, a função  $C^*$  também é uma curva de regulação para o fluxo de saída  $y$ , de forma que  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{y} C^*$ .

*Demonstração.* O sistema da Figura E.4 satisfaz as seguintes equações:

$$\hat{x} = \hat{u} C^*, \tag{E.10}$$

$$\hat{y} = \hat{y} \oplus \hat{x}, \tag{E.11}$$

$$\hat{x} = \hat{x} \oplus \hat{y} \lambda_L, \tag{E.12}$$

$$y = P_L \{x\}.$$

Da equação (E.12),  $\hat{y} \preceq \hat{x} \phi \lambda_L$ . Daí, da equação (E.10), tem-se:  $\hat{y} \preceq (\hat{u} C^*) \phi \lambda_L$ . Além disso, de (E.10) e (E.11),  $\hat{y} \succcurlyeq \hat{x} = \hat{u} C^*$ . Assim, da Tabela 3.2,

$$\begin{aligned} \hat{y} \bowtie \hat{y} &\succcurlyeq [(\hat{u} C^*) \phi \lambda_L] \bowtie (\hat{u} C^*) \\ &\succcurlyeq \lambda_L [(\hat{u} C^*) \bowtie (\hat{u} C^*)]. \end{aligned}$$

Mas  $(u C^*) \in \mathcal{C}_t$ , dado que  $u, C \in \mathcal{C}_t$ , e  $C^*(t, t) = 0$ ,  $\forall t$ . Dessa forma, da propriedade (PH.3), Tabela 3.7,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} (\hat{y} \bowtie \hat{y})(s, t) &\leq L(s) + [(u C^*)(0, t) - (u C^*)(0, s)]^+ \\ &= L(s) + (u C^*)(0, t) - (u C^*)(0, s), \end{aligned} \tag{E.13}$$

Observe-se, agora, que  $\forall s, t : (uC^*)(0, t) \leq u(0, s) + C^*(s, t)$ . Em particular,  $(uC^*)(0, t) \leq u(0, \xi) + C^*(\xi, t)$ , sendo  $\xi$  um ponto em que a seguinte igualdade é verificada:

$$(uC^*)(0, s) = u(0, \xi) + C^*(\xi, s). \quad (\text{E.14})$$

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} (uC^*)(0, t) - (uC^*)(0, s) &\leq u(0, \xi) + C^*(\xi, t) - u(0, \xi) + C^*(\xi, s) \\ &= C^*(\xi, t) - C^*(\xi, s). \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Analisando o termo  $[(C^*(\xi, t) - C^*(\xi, s))]$ , surgem duas possibilidades:  $\xi \neq s$  ou  $\xi = s$ . Esses dois casos estão detalhados a seguir.

1. Se  $\xi \neq s$ , considerando que  $C = \lambda_{\bar{L}}\rho^*$  ( $C^* = e \oplus \lambda_{\bar{L}}\rho^*$ ) e que  $\rho^*$  é uma função sub-aditiva, tem-se:

$$\begin{aligned} C^*(\xi, t) - C^*(\xi, s) &= [\bar{L}(\xi) + \rho^*(\xi, t)] - [\bar{L}(\xi) + \rho^*(\xi, s)] \\ &= \rho^*(\xi, t) - \rho^*(\xi, s) \\ &\leq \rho^*(s, t). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Assim, das equações (E.13)-(E.16),  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} (\hat{y} \circ \hat{y})(s, t) &\leq L(s) + \rho^*(s, t) \\ &\leq \bar{L}(s) + \rho^*(s, t) \\ &= (\lambda_{\bar{L}}\rho^*)(s, t) = C(s, t). \end{aligned}$$

2. Se  $\xi = s$ , da definição de  $\xi$  (equação E.14), tem-se  $(\hat{u}C^*)(0, s) = \hat{u}(0, s)$ . Daí,

$$\begin{aligned} y(0, s) &= \hat{y}(0, s) = P_L \{x(0, s)\} \\ &= P_L \{(uC^*)(0, s)\} \\ &= P_L \{u(0, s)\} = u(0, s). \end{aligned}$$

Daí, como  $y \in \mathcal{C}_t$ , tem-se:

$$\begin{aligned} (\hat{y} \circ \hat{y})(s, t) &= y(0, t) - y(0, s) \\ &\leq x(0, t) - u(0, s) \\ &= (uC^*)(0, t) - u(0, s) \\ &\leq u(0, s) + C^*(s, t) - u(0, s) = C^*(s, t), \end{aligned}$$

Dos resultados anteriores, tem-se  $\hat{y} \succ \hat{y}C$ , de forma que a função  $C$  é uma curva de regulação para o fluxo  $y$ . Conseqüentemente,  $\hat{y} \succ \hat{y}C^*$ , e a função  $C^*$  também é uma curva de regulação para  $y$ .  $\square$

**Teorema 38.** *Considere-se um multiplexador FIFO não preemptivo com duas entradas e curva de serviço estrita  $\beta \in \mathcal{C}$  (Definição 4). Se o fluxo  $x_2$  é mais prioritário que o fluxo  $x_1$  e atende uma curva de regulação  $\sigma_2$ , então o sistema dedica ao fluxo  $x_1$  a seguinte curva de serviço estrita:*

$$\beta_1 = G\{\beta, \sigma_2^*\}.$$

*Demonstração.* Se  $\beta$  é uma curva de serviço estrita para o sistema como um todo, então, para todo  $t \in \mathbb{Z}^+$ , existe um  $s \leq t$  tal que  $x(0, s) = y(0, s)$  e a seguinte inequação é satisfeita:

$$y(0, t) = y_1(0, t) + y_2(0, t) \geq x(0, s) + \beta(s, t),$$

Daí, tem-se:

$$\begin{aligned} y_1(0, t) &\geq x(0, s) + \beta(s, t) - y_2(0, t) \\ &= x_1(0, s) + \beta(s, t) - y_2(0, t) + x_2(0, s) \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned} &= x_1(0, s) + \beta(s, t) - [y_2(0, t) - x_2(0, s)] \\ &\geq x_1(0, s) + \beta(s, t) - [x_2(0, t) - x_2(0, s)] \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

$$\geq x_1(0, s) + \beta(s, t) - \sigma_2^*(s, t). \quad (\text{E.19})$$

Nas inequações acima, (E.17) é satisfeita, porque,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $x(0, t) = x_1(0, t) + x_2(0, t)$ ; (E.18), porque  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $y_2(0, t) \leq x_2(0, t)$ , da causalidade do sistema; e (E.19), porque  $\sigma_2^*$  é uma curva de regulação para o fluxo 2.

Note-se que  $x(0, s) = y(0, s)$ . Da causalidade do sistema, para que essa igualdade seja satisfeita, têm-se:

$$x_1(0, s) = y_1(0, s),$$

$$x_2(0, s) = y_2(0, s).$$

Mas,  $s \leq t$ . Daí, como  $y_1 \in \mathcal{C}_t$ , então  $x_1(0, s) = y_1(0, s) \leq y_1(0, t)$ . Dessa forma, da inequação (E.19), as seguintes inequações devem ser satisfeitas:

$$y_1(0, t) - x_1(0, s) \geq \beta(s, t) - \sigma_2^*(s, t),$$

$$y_1(0, t) - x_1(0, s) \geq 0.$$

Seja  $\beta_1 = G\{\beta, \sigma_2^*\}$ . Das inequações acima,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} y_1(0, t) &\geq x_1(0, s) + \max\{0, \beta(s, t) - \sigma_2^*(s, t)\} \\ &= x_1(0, s) + (G\{\beta, \sigma_2^*\})(s, t) \\ &\geq (x_1\beta_1)(0, t). \end{aligned}$$

Dessa forma,  $\beta_1 = G\{\beta, \sigma_2^*\}$  é uma curva de serviço estrita para o fluxo 1.  $\square$

**Teorema 39.** *Considere-se um multiplexador FIFO com duas entradas e curva de serviço estrita  $\beta \in \mathcal{C}$ . Se o fluxo  $x_2$  é menos prioritário que o fluxo  $x_1$ , e  $L_2$  (constante) é o tamanho do maior pacote do fluxo  $x_2$ , então o sistema dedica ao fluxo  $x_1$  a seguinte curva de serviço estrita:*

$$\beta_1 = \beta \phi \lambda_{L_2}.$$

*Demonstração.* Seja  $s \leq t$  o ponto de início de uma rajada do fluxo 1. Tem-se:  $x_1(0, s) = y_1(0, s)$ . A partir do ponto  $s$ , como o fluxo 2 é menos prioritário e o sistema é não-preemptivo, o sistema vai se dedicar inteiramente ao fluxo 1, a menos que já tenha iniciado a transmissão de um pacote do fluxo 1. Considere-se que o sistema ainda tenha dados do fluxo 1 no instante  $t$ . Nesse caso, a partir de  $s$  e até  $t$ , a quantidade de dados que podem sair do fluxo  $x_2$  é limitada pelo tamanho do maior pacote,  $L_2$ , ou seja,  $y_2(0, t) - y_2(0, s) \leq L_2$ . Além disso, como o sistema é causal, tem-se:  $y_2(0, s) \leq x_2(0, s)$ ,  $\forall s$ .

Da demonstração anterior (inequação E.17), tem-se:

$$y_1(0, t) \geq x_1(0, s) + \beta(s, t) - y_2(0, t) + x_2(0, s).$$

Daí:

$$\begin{aligned} y_1(0, t) &\geq x_1(0, s) + \beta(s, t) - [y_2(0, t) - y_2(0, s)], \\ &\geq x_1(0, s) + \beta(s, t) - L_2. \end{aligned}$$

Como  $s \leq t$ ,  $y_1 \in \mathcal{C}_t$  e  $x_1(0, s) = y_1(0, s)$ , tem-se:  $x_1(0, s) = y_1(0, s) \leq y_1(0, t)$ . Daí, as seguintes inequações devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} y_1(0, t) - x_1(0, s) &\geq \beta(s, t) - L_2, \\ y_1(0, t) - x_1(0, s) &\geq 0. \end{aligned}$$

Seja  $\beta_1 = \beta \phi \lambda_{L_2}$ . Das inequações acima,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} y_1(0, t) &\geq x_1(0, s) + [\beta(s, t) - L_2]^+ \\ &= x_1(0, s) + (\beta \phi \lambda_{L_2})(s, t) \\ &\geq (x_1\beta_1)(0, t). \end{aligned}$$

Dessa forma,  $\beta_1 = \beta \phi \lambda_{L_2}$  é uma curva de serviço estrita para o fluxo 1.  $\square$

## Apêndice F

# Resultados conhecidos

**Teorema 40.** *Seja  $S$  um subconjunto não-vazio de  $\mathbb{Z}$ , e seja  $f$  uma função de  $S$  em  $\mathbb{Z}$ . Seja  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  um conjunto de subconjuntos de  $S$  cuja união resulta em  $S$ . Tem-se:*

$$\inf_{s \in S} \{f(s)\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \inf_{s_n \in S_n} \{f(s_n)\} \right\}.$$

*Adaptado de Le Boudec e Thiran (2003, Theorem 3.1.1).*

**Definição 31** (Funções aditivas). *Seja  $x$  uma função do tipo  $x : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $x$  é dita aditiva, quando satisfaz a seguinte equação:*

$$x(s, t) = x(s, \tau) + x(\tau, t),$$

*para todo  $\tau$ , tal que  $s \leq \tau \leq t$ .*

*Se  $x \in \mathcal{C}$  é uma função aditiva, então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , tem-se:*

$$\begin{aligned} x^2(s, t) &= (x \otimes x)(s, t) \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + x(\tau, t)\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, t)\} = x(s, t), \end{aligned}$$

*o que implica que  $x^2 = x$  e então  $x^* = x$  (Chang et al., 2002, Remark 2.5).*

Tendo em vista a Definição 31, pode-se definir as funções sub-aditivas como a seguir.

**Definição 32** (Funções sub-aditivas). *Seja  $x$  uma função do tipo  $x : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . A função  $x$  é dita sub-aditiva, quando satisfaz a seguinte inequação:*

$$x(s, t) \leq x(s, \tau) + x(\tau, t),$$

*para todo  $\tau$ , tal que  $s \leq \tau \leq t$ .*

Se  $x \in \mathcal{C}$  é uma função sub-aditiva, então,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , tem-se:

$$\begin{aligned} x^2(s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + x(\tau, t)\} \\ &\geq \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, t)\} = x(s, t), \end{aligned}$$

o que implica que  $x^2 \preceq x$  e então  $x^* = e \oplus x$ .

## Apêndice G

# Demonstrações e proposições adicionais

**Proposição 41.** *Sejam  $\lambda_L, \sigma \in \mathcal{C}$ , e  $\lambda_L$  uma função de deslocamento vertical (Definição 16). Tem-se:  $(\lambda_L \sigma^*)^* = e \oplus \lambda_L \sigma^*$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, da propriedade (PL.2), Tabela 3.4,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$(\lambda_L \sigma^*)(s, t) = L(s) + \sigma^*(s, t).$$

Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} [(\lambda_L \sigma^*) \otimes (\lambda_L \sigma^*)](s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{(\lambda_L \sigma^*)(s, \tau) + (\lambda_L \sigma^*)(\tau, t)\} \\ &= L(s) + \sigma^*(s, \tau) + L(\tau) + \sigma^*(\tau, t) \\ &\geq L(s) + \sigma^*(s, \tau) + \sigma^*(\tau, t). \end{aligned}$$

Desta forma, como  $\sigma^*$  é uma função sub-aditiva,

$$\begin{aligned} [(\lambda_L \sigma^*) \otimes (\lambda_L \sigma^*)](s, t) &\geq L(s) + \sigma^*(s, t) \\ &= (\lambda_L \sigma^*)(s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $s > t$ ,  $[(\lambda_L \sigma^*) \otimes (\lambda_L \sigma^*)](s, t) = (\lambda_L \sigma^*)(s, t) = 0$ . Assim,  $(\lambda_L \sigma^*)^2 \preceq (\lambda_L \sigma^*)$ . Da mesma forma,  $(\lambda_L \sigma^*)^3 = (\lambda_L \sigma^*)^2 \otimes (\lambda_L \sigma^*) \preceq (\lambda_L \sigma^*) \otimes (\lambda_L \sigma^*) \preceq (\lambda_L \sigma^*)$  e assim sucessivamente. Portanto, a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\begin{aligned} (\lambda_L \sigma^*)^* &= e \oplus (\lambda_L \sigma^*) \oplus (\lambda_L \sigma^*)^2 \oplus \dots \\ &= e \oplus \lambda_L \sigma^*. \end{aligned}$$

□

**Proposição 42.** *Sejam  $\partial_D, x \in \mathcal{C}$ , e  $\partial_D$  uma função de atraso variável (Definição 26). Tem-se:  $(x^* \phi \partial_D)^* = e \oplus x^* \phi \partial_D$ .*

*Demonstração.* Considere-se  $x \in \mathcal{C}_t$ . Primeiramente, da propriedade (PPD.3), Tabela 7.1,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , se  $s \leq t$ :

$$(x^* \phi \partial_D)(s, t) = x^*(s, t + D(t)).$$

Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} [(x^* \phi \partial_D) \otimes (x^* \phi \partial_D)](s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{(x^* \phi \partial_D)(s, \tau) + (x^* \phi \partial_D)(\tau, t)\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x^*(s, \tau + D(\tau)) + x^*(\tau, t + D(t))\}. \end{aligned}$$

Desta forma, como  $x^*$  é uma função sub-aditiva e  $x \in \mathcal{C}_t$ ,

$$\begin{aligned} [(x^* \phi \partial_D) \otimes (x^* \phi \partial_D)](s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x^*(s, \tau + D(\tau)) + x^*(\tau, t + D(t))\} \\ &\geq \min_{s \leq \tau \leq t} \{x^*(s, \tau) + x^*(\tau, t + D(t))\} \\ &\geq \min_{s \leq \tau \leq t} \{x^*(s, t + D(t))\} \\ &= x^*(s, t + D(t)) = (x^* \phi \partial_D)(s, t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $s > t$ ,  $[(x^* \phi \partial_D) \otimes (x^* \phi \partial_D)](s, t) = (x^* \phi \partial_D)(s, t) = 0$ . Assim,  $(x^* \phi \partial_D)^2 \preceq (x^* \phi \partial_D)$ . Da mesma forma,  $(x^* \phi \partial_D)^3 = (x^* \phi \partial_D)^2 \otimes (x^* \phi \partial_D) \preceq (x^* \phi \partial_D) \otimes (x^* \phi \partial_D) \preceq (x^* \phi \partial_D)$  e assim sucessivamente. Daí, a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\begin{aligned} (x^* \phi \partial_D)^* &= e \oplus (x^* \phi \partial_D) \oplus (x^* \phi \partial_D)^2 \oplus \dots \\ &= e \oplus x^* \phi \partial_D. \end{aligned}$$

□

**Proposição 43.** *Sejam  $\sigma_1, \sigma_2, \beta \in \mathcal{C}$  e  $\partial_D$  uma função de atraso variável (Definição 26). A seguinte igualdade é satisfeita (equação 7.57):*

$$\inf \{\partial_d : \sigma_1^* \succcurlyeq G \{\beta \phi \partial_d, (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\}\} = \inf \{\partial_d : \sigma_1^* \succcurlyeq G \{\beta \phi \partial_d, \sigma_2^* \phi \partial_d\}\}.$$

*Demonstração.* A seguir, demonstra-se a seguinte equivalência:

$$\sigma_1^* \succcurlyeq G \{\beta \phi \partial_d, \sigma_2^* \phi \partial_d\} \Leftrightarrow \sigma_1^* \succcurlyeq G \{\beta \phi \partial_d, (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\}.$$

Primeiramente, note-se que  $(\sigma_2^* \phi \partial_d) \preceq e \oplus (\sigma_2^* \phi \partial_d)$ . Dessa forma, da propriedade (PM.4), Tabela 3.10, tem-se:

$$G \{\beta \phi \partial_d, \sigma_2^* \phi \partial_d\} \succcurlyeq G \{\beta \phi \partial_d, (e \oplus \sigma_2^* \phi \partial_d)\}.$$

Daí, qualquer  $\partial_d$  que satisfaz a inequação  $\sigma_1^* \succ G\{\beta\phi\partial_d, \sigma_2^*\phi\partial_d\}$  também satisfaz a inequação  $\sigma_1^* \succ G\{\beta\phi\partial_d, (e \oplus \sigma_2^*\phi\partial_d)\}$ .

Considere-se, agora, que a inequação  $\sigma_1^* \succ G\{\beta\phi\partial_d, (e \oplus \sigma_2^*\phi\partial_d)\}$  é satisfeita, mas não a inequação  $\sigma_1^* \succ G\{\beta\phi\partial_d, \sigma_2^*\phi\partial_d\}$ . Nesse caso, devem existir  $s, t \in \mathbb{Z}^+$  tais que as seguintes inequações sejam satisfeitas:

$$(G\{\beta\phi\partial_d, \sigma_2^*\phi\partial_d\})(s, t) < \sigma_1^*(s, t) \leq (G\{\beta\phi\partial_d, (e \oplus \sigma_2^*\phi\partial_d)\})(s, t). \quad (G.1)$$

Para mostrar que as inequações (G.1) não podem ser satisfeitas, considerem-se dois casos:  $s \geq t$  e  $s < t$ .

1. Se  $s \geq t$ , então  $\sigma_1^*(s, t) = 0$ . Dessa forma, a desigualdade  $(G\{\beta\phi\partial_d, \sigma_2^*\phi\partial_d\})(s, t) < \sigma_1^*(s, t)$  não pode ser satisfeita, porque  $G\{\beta\phi\partial_d, \sigma_2^*\phi\partial_d\} \in \mathcal{C}$ .
2. Se  $s < t$ , então  $e(s, t) = +\infty$ . Nesse caso,  $(e \oplus \sigma_2^*\phi\partial_d)(s, t) = (\sigma_2^*\phi\partial_d)(s, t)$ , e a desigualdade  $(G\{\beta\phi\partial_d, \sigma_2^*\phi\partial_d\})(s, t) < (G\{\beta\phi\partial_d, (e \oplus \sigma_2^*\phi\partial_d)\})(s, t)$  não pode ser satisfeita.

Do exposto anteriormente, qualquer função  $\partial_d$  que satisfaz a inequação  $\sigma_1^* \succ G\{\beta\phi\partial_d, (e \oplus \sigma_2^*\phi\partial_d)\}$  também satisfaz a inequação  $\sigma_1^* \succ G\{\beta\phi\partial_d, \sigma_2^*\phi\partial_d\}$ .  $\square$

**Proposição 44.** *Sejam  $a, b, c, d : (\mathbb{Z}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Tem-se:*

$$\max_{\tau \leq s \leq t} \{c(\tau, t) - a(\tau, s) + d(\tau, t) - b(\tau, s)\} \leq \max_{\tau_1 \leq s \leq t} \{c(\tau_1, t) - a(\tau_1, s)\} + \max_{\tau_2 \leq s \leq t} \{d(\tau_2, t) - b(\tau_2, s)\}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, têm-se,  $\forall t$ :

$$\begin{aligned} \forall \tau_1 : c(\tau_1, t) - a(\tau_1, s) &\leq \max_{\tau_1 \leq s \leq t} \{c(\tau_1, t) - a(\tau_1, s)\}, \\ \forall \tau_2 : c(\tau_2, t) - a(\tau_2, s) &\leq \max_{\tau_2 \leq s \leq t} \{c(\tau_2, t) - a(\tau_2, s)\}. \end{aligned}$$

Somando-se as inequações acima, tem-se:

$$\forall \tau_1, \tau_2 : c(\tau_1, t) - a(\tau_1, s) + c(\tau_2, t) - a(\tau_2, s) \leq \max_{\tau_1 \leq s \leq t} \{c(\tau_1, t) - a(\tau_1, s)\} + \max_{\tau_2 \leq s \leq t} \{c(\tau_2, t) - a(\tau_2, s)\}.$$

Em particular, portanto,  $\forall \tau$ :

$$c(\tau, t) - a(\tau, s) + c(\tau, t) - a(\tau, s) \leq \max_{\tau_1 \leq s \leq t} \{c(\tau_1, t) - a(\tau_1, s)\} + \max_{\tau_2 \leq s \leq t} \{c(\tau_2, t) - a(\tau_2, s)\}.$$

Mas, se a expressão acima é válida  $\forall \tau$ , então a seguinte expressão também é válida:

$$\max_{\tau \leq s \leq t} \{c(\tau, t) - a(\tau, s) + c(\tau, t) - a(\tau, s)\} \leq \max_{\tau_1 \leq s \leq t} \{c(\tau_1, t) - a(\tau_1, s)\} + \max_{\tau_2 \leq s \leq t} \{c(\tau_2, t) - a(\tau_2, s)\}.$$

$\square$

**Proposição 45.** Considere-se  $\mathcal{D}$  um dióide qualquer e sejam  $a, b, c \in \mathcal{D}$ . Se  $a \succcurlyeq b$ , então,  $a \dot{\bowtie} c \preccurlyeq b \dot{\bowtie} c$ .

*Demonstração.* Se  $a \succcurlyeq b$ , então, da Definição 10,  $a = a \oplus b$ . Assim, da Tabela 3.2,  $a \dot{\bowtie} c = (a \oplus b) \dot{\bowtie} c = a \dot{\bowtie} c \wedge b \dot{\bowtie} c$ . Daí, novamente da Definição 10,  $a \dot{\bowtie} c \preccurlyeq b \dot{\bowtie} c$ .  $\square$

**Proposição 46.** Considere-se o dióide  $\mathcal{C}$  definido do Capítulo 3, e sejam  $a, b \in \mathcal{C}$ . Tem-se:

$$[(e \oplus b) \dot{\bowtie} a^*](t, t) = [b \dot{\bowtie} a^*](t, t).$$

*Demonstração.* Da Tabela 3.3,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} [(e \oplus b) \dot{\bowtie} a^*](t, t) &= \max_{0 \leq \tau \leq t} \{a^*(\tau, t) - (e \oplus b)(\tau, t)\}^+ \\ &= \max \left\{ \max_{0 \leq \tau < t} \{a^*(\tau, t) - (e \oplus b)(\tau, t)\}^+, \{a^*(t, t) - (e \oplus b)(t, t)\}^+ \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{0 \leq \tau < t} \{a^*(\tau, t) - b(\tau, t)\}^+, \{a^*(t, t) - b(t, t)\}^+ \right\} \quad (\text{G.2}) \\ &= [b \dot{\bowtie} a^*](t, t). \end{aligned}$$

Nas passagens acima, a equação (G.2) é consequência das seguintes igualdades:  $\{a^*(t, t) - (e \oplus b)(t, t)\}^+ = \{0 - 0\}^+ = 0 = \{0 - b(t, t)\}^+ = \{a^*(t, t) - b(t, t)\}^+$ .  $\square$

**Proposição 47.** Sejam  $x, x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ . Se,  $x = F\{x_1^*, x_2^*\}$ , então  $x^* = x$ .

*Demonstração.* Primeiramente, note-se que,  $\forall t \in \mathbb{Z}^+$ :  $x(t, t) = 0$ . De fato:

$$x(t, t) = (F\{x_1^*, x_2^*\})(s, t) = x_1^*(t, t) + x_2^*(t, t) = 0 + 0 = 0.$$

Dessa forma, para completar a prova, é suficiente mostrar que  $x^2 \preccurlyeq x$ . Da definição de produto em  $\mathcal{C}$ , tem-se,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\begin{aligned} (x \otimes x)(s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x(s, \tau) + x(\tau, t)\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{[x_1^*(s, \tau) + x_2^*(s, \tau)] + [x_1^*(\tau, t) + x_2^*(\tau, t)]\} \\ &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{[x_1^*(s, \tau) + x_1^*(\tau, t)] + [x_2^*(s, \tau) + x_2^*(\tau, t)]\} \\ &\geq \min_{s \leq \tau_1 \leq t} \{x_1^*(s, \tau_1) + x_1^*(\tau_1, t)\} + \min_{s \leq \tau_2 \leq t} \{x_2^*(s, \tau_2) + x_2^*(\tau_2, t)\} \\ &= (x_1^* \otimes x_1^*)(s, t) + (x_2^* \otimes x_2^*)(s, t) \\ &= x_1^*(s, t) + x_2^*(s, t) = x(s, t), \end{aligned}$$

o que completa a prova.  $\square$

**Proposição 48.** *Seja  $\beta \in \mathcal{C}$  e  $x \in \mathcal{C}_t$ . Se  $\widehat{x}(\beta \phi \partial_d) \preceq \widehat{x}$ , então  $(\widehat{x}\beta) \phi \partial_d \preceq \widehat{x}$ .*

*Demonstração.* Para algum instante  $t$  fixo, considere-se que a inequação  $\widehat{x}(\beta \phi \partial_d) \preceq \widehat{x}$  é satisfeita, mas não a inequação  $(\widehat{x}\beta) \phi \partial_d \preceq \widehat{x}$ . Nesse caso, tem-se:

$$[\widehat{x}(\beta \phi \partial_d)](0, t) \geq x(0, t) > [(\widehat{x}\beta) \phi \partial_d](0, t). \quad (\text{G.3})$$

Mas a função  $[(\widehat{x}\beta) \phi \partial_d]$  satisfaz as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} [(\widehat{x}\beta) \phi \partial_d](0, t) &= \min_{0 \leq s \leq t+d(t)} \{x(0, s) + \beta(s, t + d(t))\} \\ &= \min \left\{ \min_{0 \leq s \leq t} \{x(0, s) + \beta(s, t + d(t))\}, \min_{t < s \leq t+d(t)} \{x(0, s) + \beta(s, t + d(t))\} \right\} \\ &= \min \left\{ [\widehat{x}(\beta \phi \partial_d)](0, t), \min_{t < s \leq t+d(t)} \{x(0, s) + \beta(s, t + d(t))\} \right\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, as inequações (G.3) só podem ser satisfeitas, se as seguintes inequações também forem verificadas:

$$[\widehat{x}(\beta \phi \partial_d)](0, t) \geq x(0, t) > \min_{t < s \leq t+d(t)} \{x(0, s) + \beta(s, t + d(t))\}. \quad (\text{G.4})$$

No entanto, as inequações (G.4) também não podem ser satisfeitas, porque, como  $\beta \in \mathcal{C}$  e  $x \in \mathcal{C}_t$ , então  $\beta(s, t + d(t)) \geq 0$  e  $x(0, s) \geq x(0, t)$ , para qualquer  $s$  no intervalo  $t < s \leq t + d(t)$ , de forma que  $\min_{t < s \leq t+d(t)} \{x(0, s) + \beta(s, t + d(t))\} \geq x(0, t)$ .

Do exposto anteriormente, as inequações (G.3) nunca se verificam. Conseqüentemente, qualquer função  $\partial_d$  tal que  $\widehat{x}(\beta \phi \partial_d) \preceq \widehat{x}$  também satisfaz a inequação  $(\widehat{x}\beta) \phi \partial_d \preceq \widehat{x}$ .  $\square$

**Proposição 49.** *Qualquer função do tipo  $x^* = e \oplus x \oplus x^2 \oplus \dots$  é uma função sub-aditiva, conforme Definição 32 (Apêndice F). De fato, como  $x^* = x^* \otimes x^*$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{Z}^+$ , com  $s \leq t$ :*

$$\begin{aligned} x^*(s, t) &= \min_{s \leq \tau \leq t} \{x^*(s, \tau) + x^*(\tau, t)\} \\ &\leq x^*(s, \tau) + x^*(\tau, t), \quad \forall \tau : s \leq \tau \leq t. \end{aligned}$$