Cristiano Marcos Agulhari

Estabilidade e controle de sistemas lineares e variantes no tempo com parâmetros incertos

Stabilité et commande des systèmes linéaires variants dans le temps aux paramètres incertains

Campinas
2013

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Cristiano Marcos Agulhari

Estabilidade e controle de sistemas lineares e variantes no tempo com parâmetros incertos

Stabilité et commande des systèmes linéaires variants dans le temps aux paramètres incertains

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na área de Automação.

Thèse de doctorat présentée à l'École Doctorale en Génie Électrique de la Faculté de Génie Électrique et d'Informatique de l'Université de Campinas, pour l'obtention du titre de Docteur en Génie Électrique, au domaine d'Automation.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Cristiano Marcos Agulhari e orientada pelo Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres.

Campinas
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Ag95e

Agulhari, Cristiano Marcos, 1983-
Estabilidade e controle de sistemas lineares e variantes no tempo com parâmetros incertos / Cristiano Marcos Agulhari. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas incertos variantes no tempo. 2. Sistemas lineares variantes no tempo. 3. Sistemas lineares invariantes no tempo. 4. Controle robusto. 5. Lyapunov, Funções de. I. Peres, Pedro Luis Dias,1960-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Stability and control of linear time-varying systems with uncertain parameters
Palavras-chave em inglês:
Uncertain time varying systems
Linear time varying systems
Linear time invariant systems
Robust control
Lyapunov functions
Área de concentração: Automação
Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica
Banca examinadora:
Pedro Luis Dias Peres [Orientador]
Olivier Bachelier
Edson Roberto De Pieri
Germain Garcia
Juan Francisco Camino dos Santos
Data de defesa: 16-04-2013
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Cristiano Marcos Agulhari

Data da Defesa: 16 de abril de 2013

Título da Tese: "Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares e Variantes no Tempo com Parâmetros Incertos"

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres (Presidente): ______________________

Prof. Dr. Olivier Bachelier: ______________________

Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri: ______________________

Prof. Dr. Germain Garcia: ______________________

Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos: ______________________

Agradecimentos

A trajetória percorrida durante o período deste doutorado, cheia de desafios e aprendizados, foi também permeada de momentos de incertezas e estagnações. O auxílio e a força de diversas pessoas que cruzaram meu caminho certamente foram condições necessárias para que as pesquisas realizadas no doutorado convergissem à presente tese, e a todos vocês manifesto meu mais profundo agradecimento.

Agradeço a meus orientadores: Pedro, que acompanha de perto meus passos desde a graduação e por quem desenvolvi uma grande admiração, tanto academicamente quanto pessoalmente, e que me ensina até hoje, com vontade e paciência, os principais aspectos da vida acadêmica e de pesquisador (e como fazer um .bib correto); e Germain, pelas discussões amigáveis, honestas e frutíferas que me permitiram formar uma sólida base para as pesquisas realizadas, e por ensinar que é importante implementar um método proposto, mas somente depois de confirmar que o método está correto.

Agradeço a meus co-orientadores informais: Ricardo, sempre disposto a ouvir, discutir e dar ideias; e Sophie, pela acolhida no LAAS e pela ajuda nas pesquisas, nas burocracias e no francês que não se ensina na escola. Não posso deixar de agradecer à minha companheira de sala Isabelle pelos mesmos motivos. Agradeço também ao meu orientador de mestrado Ivanil, cujas ideias e conceitos foram importantes também para o doutorado.

Agradeço a meus colegas do laboratório de Telemática pela sua amizade, pelos inúmeros "Café com Prosa" e por proporcionarem um ambiente de trabalho prazeroso. Em especial aos que estiveram mais próximos: Márcio Lacerda, Márcio Braga, Cecília, Rafael, Renato, Victor, Benito, Ali, Priscila, Juliana, Vavá, Taís e Eduardo. E à Flavia, sempre ajudando e fornecendo inúmeros sacos plásticos.

Agradeço a meus colegas do Labore, laboratório adotivo, pelos momentos de descontração e Magneto-bocha: Bacalhau, Laura, Fábio, André, Lu, Alan, José, Hugo, Celso e Christiano.

Agradeço aos diversos colegas do grupo MAC, que me acolheram de braços abertos e fizeram com que eu me sentisse realmente em casa (e que aprenderam que nem todo brasileiro é bom de bola). Em especial aos colegas mais próximos: Razvan, Sandy, Mirko, Mathieu, Maurício, Luiz, Francesco, Georgia, Cordélia, Jean-François, Tung e Andrea. E também a todos os demais professores e pesquisadores pelas discussões proveitosas e pausas-café.

Agradeço à minha família, por serem os principais responsáveis por eu ter chegado até aqui. Aos meus pais, Sueli e José, com constante presença e seu sólido amor. A meu irmão Ricardo, por sua força, clareza e sinceridade, e à minha cunhada preferida Maria Angélica, que faz mais que por merecer esse título. À minha avó Felícia, que continua nos ensinando o significado de determinação e amor, e ao meu avô Daniel, que nos deixa muitas saudades.

Agradeço aos que estiveram incondicionalmente ao meu lado nos momentos mais complicados dessa trajetória, em especial a: Tathi (ou Tathão), Anne, Nadia, Rick (distante porém presente), Renato (eterno cumpadre), Sandra e Eliseu (tia-irmã e tio-companheiro).

Agradeço aos companheiros de vida, ensinamentos, risadas e migués. Em especial à turma do Pagani, aos amigos Bandéspotas e Migués, aos amigos Cecília Quinzani, Baca, Laura, Will, Vivi, Alessandra, Fervs, Jamef, Fernanda Gallo, João Paulo, Maria Rita e ao grande companheiro Rodrigo Mazo.

Agradeço à agência FAPESP, pelo apoio financeiro concedido durante o período do doutorado, e ao convênio CAPES-COFECUB, que financiou o meu estágio sanduíche em Toulouse.

Agradeço a Deus, por tudo.

Resumo

As principais contribuições desta tese consistem no desenvolvimento de métodos para a síntese de controladores e para a análise de estabilidade de sistemas lineares, variantes ou invariantes no tempo. Com relação aos sistemas invariantes no tempo, o objetivo é a síntese de controladores robustos de ordem reduzida para sistemas a tempo contínuo com parâmetros incertos. O método apresentado para a síntese baseia-se em uma técnica de dois estágios, em que um ganho de realimentação de estados é construído no primeiro estágio e posteriormente utilizado no segundo estágio, que fornece o controlador robusto desejado. Cada etapa consiste na resolução de condições sob a forma de desigualdades matriciais lineares.

No caso de sistemas variantes no tempo, em geral, dependendo das informações disponíveis, dois modelos matemáticos podem ser utilizados. Por um lado, para sistemas cujos elementos variantes no tempo são limitados em norma mas não são completamente conhecidos, é possível utilizar modelos dependentes de parâmetros variantes no tempo, que levam a uma representação politópica. Nesse caso, a técnica de estabilização proposta é baseada no método de dois estágios, para gerar controladores dependentes dos parâmetros. Supõe-se que os parâmetros sejam mensuráveis em tempo real, e os controladores são sintetizados de forma a serem robustos a ruídos nas medições. Por outro lado, se a dinâmica variante no tempo é conhecida, o sistema pode ser tratado diretamente sem que seja utilizado nenhum tipo de parametrização. Duas técnicas de síntese são propostas para esse caso: a construção de ganhos estabilizantes utilizando diretamente a matriz de transição de estados, e uma técnica de síntese projetada a partir de um novo critério para a verificação da estabilidade do sistema. A validade dos métodos propostos é ilustrada por meio de exemplos numéricos, que mostram a qualidade dos resultados que podem ser obtidos.

Palavras-chave: Sistemas lineares, sistemas variantes no tempo, sistemas incertos, controle robusto, controle escalonado, critério de estabilização, desigualdades matriciais lineares.

Abstract

The main contributions of this thesis concern the development of methods for the stability analysis and the synthesis of controllers for linear systems, either time-varying or time-invariant. Concerning time-invariant systems, the objective is the synthesis of reduced-order robust controllers for continuous-time systems with uncertain parameters. The method presented for the synthesis is based on a two-stage technique, in which a stabilizing state-feedback gain is constructed in the first stage and then applied on the second stage to search for the desired controller. Each stage consists in the resolution of conditions based on linear matrix inequalities.

In the case of time-varying systems, depending on the amount of available information, two mathematical models may be used. On one hand, if the time-varying elements of the system are not entirely known, one can model the system as function of time-varying parameters, resulting on a polytopic representation. In this case, the stabilization method proposed is based on the two-stage technique, which yields parameter-dependent controllers. The parameters are supposed to be real-time measurable, and the controllers are robust with respect to noises and uncertainties on the measures. On the other hand, if the time-varying dynamics are known, the system may be directly handled without using any parameterization. Two synthesis techniques are proposed in this case: the construction of stabilizing gains by using the state transition matrix, and a synthesis technique derived from a new stability criterion for time-varying systems. The validity of the proposed methods is illustrated through numerical examples, that show the efficiency of the results that can be obtained.

Key-words: Linear systems, time-varying systems, uncertain systems, robust control, gain scheduling control, stabilization criterion, linear matrix inequalities.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Acrônimos e Notação

LMI	*Linear Matrix Inequality*
LTI	*Linear Time Invariant*
LTV	*Linear Time Varying*
LPV	*Linear Parameter Varying*
RDE	*Riccati Differential Equation*

$\lambda_{max}(M)$	Máximo autovalor de uma matriz M
$\lambda_{min}(M)$	Mínimo autovalor de uma matriz M
M'	Transposto de uma matriz M
$sym\{M\}$	Equivalente a $M + M'$
$\text{diag}(M_1, \ldots, M_n)$	Matriz diagonal composta pelos elementos $M_1, \ldots, M_n$
$\Re\{\cdot\}$	Parte real de um valor complexo
$\mathcal{L}_2$	Espaço de funções quadraticamente integráveis
$\|\|M(\cdot)\|\|$	Norma-2 de uma matriz $M(\cdot)$, eventualmente dependente de parâmetros, definida como $\|\|M(\cdot)\|\| = \sqrt{\lambda_{max}(M'(\cdot)M(\cdot))}$

Sumário

Introdução

O conceito de sistemas dinâmicos, originado nas teorias relacionadas à mecânica Newtoniana, consiste na definição das regras de evolução de um conjunto de variáveis básicas, chamadas variáveis de estados, ligadas por meio de uma dinâmica. Tal dinâmica é geralmente motivada por interações físicas, como em um circuito elétrico (cujas variáveis de estado podem ser as tensões e correntes em certos pontos do circuito), um foguete em fase de lançamento (sendo que a posição, velocidade, aceleração e os ângulos são possíveis variáveis de estado), ou mesmo a relação predador-presa em um dado ambiente (neste caso, as quantidades de predadores e presas seriam as variáveis de estado) [ZD63, Vid93, Che99, Kha02]. Os estudos de sistemas são geralmente divididos em três partes distintas:

- Modelagem, que consiste em descrever o comportamento do sistema a partir de um modelo matemático;
- Análise, que permite a obtenção de informações importantes sobre o sistema, como estabilidade ou quantidade de energia gasta;
- Controle, que corresponde à interferência externa sobre o sistema para que certos objetivos sejam alcançados, como a estabilização do sistema ou a minimização da energia gasta.

Na etapa de modelagem, um dos principais problemas encontrados é a falta de conhecimento dos valores de certas variáveis e parâmetros do sistema, ou mesmo de certos comportamentos, que podem ser muito complexos para serem descritos de forma precisa. Por exemplo, os valores reais dos componentes eletrônicos são sempre diferentes dos valores nominais em um circuito elétrico e, no caso de um foguete a variação do consumo de combustível depende de vários fatores desconhecidos e não pode ser completamente definida *a priori*. Tais elementos são as *incertezas* dos sistemas, que podem ser invariantes (como no caso dos circuitos, pelo menos no horizonte de tempo utilizado para a análise) ou variantes no tempo (como no caso do foguete).

Para tratar a presença de incertezas, é necessário definir uma descrição matemática para ser agregada ao modelo do sistema. Existem basicamente duas classes de incertezas: as estruturadas e as não estruturadas [EN00]. Os modelos que utilizam as incertezas não estruturadas [CP72] são em geral simples e conservadores, uma vez que nenhuma estrutura é conferida à incerteza. Com relação à classe de incertezas estruturadas, existem vários tipos de estruturas que podem ser consideradas, como as incertezas reais limitadas [HB93], em que as incertezas são modeladas como um subsistema conectado ao sistema nominal e são utilizados os resultados dos teoremas do pequeno ganho e da positividade real [And72, BIJ81, Vid93] para garantir que o sistema total seja robustamente estável, ou seja, que o sistema seja estável independentemente dos valores das incertezas; as incertezas positivas reais, utilizadas no caso em que a função de transferência do sistema e as incertezas são positivas e reais, veja [HB91] e suas referências; as incertezas limitadas em norma, em que os limitantes dos valores das incertezas são definidos *a priori* [ZK88, XdS92]; e as incertezas politópicas [BPG89, OP05, OP07], cujo domínio é descrito pela combinação convexa de um conjunto de vértices conhecidos. A modelagem politópica é a abordagem utilizada nesta tese devido à sua simplicidade, abrangência e facilidade de manipulação.

Com relação ao controle de sistemas afetados por incertezas politópicas, provavelmente as técnicas de síntese mais utilizadas atualmente são baseadas na aplicação do teorema de Lyapunov [Sas99, Kha02]. De forma geral, o teorema de Lyapunov possibilita a obtenção de informações sobre a estabilidade a partir da análise de uma função normalmente relacionada à energia do sistema. As primeiras abordagens utilizavam uma mesma função de Lyapunov (estabilização quadrática) para a síntese de controladores [BPG89, HB91, HB93, GCG93], mas os resultados obtidos eram consideravelmente conservadores pois a função deveria ser válida para todo o espaço de parâmetros incertos. Para reduzir o conservadorismo, podem-se utilizar funções de Lyapunov dependentes de forma afim dos parâmetros [GAC96, dOBG99, AT00, dOOL+02, dOG05, OdOP07], ou mesmo inserirem-se variáveis de folga para aumentar os graus de liberdade na busca de uma solução factível [dOBG99, dOG05]. Recentemente, foi demonstrado que, se a função de Lyapunov for estruturada como um polinômio homogêneo no espaço de parâmetros, podem-se obter condições de estabilidade cada vez melhores à medida em que o grau do polinômio é aumentado, sendo possível até mesmo anular o conservadorismo da condição. Todavia, a complexidade da abordagem cresce consideravelmente com o aumento do grau do polinômio considerado [OP06a, OP06b, BOMP06, OP07].

Mesmo em modelos precisamente conhecidos, frequentemente podem existir termos variantes no tempo ou não-lineares. Particularmente no caso de sistemas não-lineares, não há uma metodologia geral, mas apenas técnicas de controle voltadas para classes específicas de sistemas [Kha02]. Por outro lado, também é possível aplicar técnicas lineares em sistemas não-lineares, sendo neste caso necessário realizar algum procedimento de linearização. A grande vantagem de tal abordagem consiste em aproveitar a generalidade e simplicidade das metodologias aplicáveis a sistemas lineares, porém as condições relativas tanto à análise quanto à síntese de leis de controle são válidas apenas localmente. Se a linearização é feita em torno de um ponto de operação, obtém-se uma representação invariante no tempo (em inglês, *Linear Time Invariant* — LTI). Neste caso, as técnicas relacionadas são simples e diretas, mas o domínio válido do espaço de estados pode ser muito restrito. Se, no entanto, o sistema for linearizado em torno de uma trajetória, o sistema resultante é linear e variante no tempo (em inglês, *Linear Time Varying* — LTV). As técnicas desenvolvidas para a análise e síntese para sistemas LTV são mais elaboradas e geralmente mais complexas do que as técnicas referentes aos sistemas LTI, mas os resultados são válidos em uma região maior do espaço de estados.

Existem diversos métodos para a síntese de controladores variantes no tempo para sistemas LTV. Uma abordagem clássica consiste em aplicar técnicas de alocação de pólos, seja diretamente no sistema LTV [Zhu96, LC05], seja em um sistema LTI equivalente [Wol68, VO93, VO95]. O principal problema de tal abordagem é a necessidade de calcularem-se as derivadas das matrizes do sistema, o que pode ser complicado caso tais matrizes não sejam conhecidas *a priori* e tenham que ser obtidas em tempo real. Uma outra abordagem muito utilizada é baseada na resolução de uma equação diferencial de Riccati (em inglês, *Riccati Differential Equation* — RDE). Uma primeira versão dessa família de métodos foi proposta no artigo precursor de Kalman [Kal60], que motivou um esforço considerável na pesquisa de condições de existência e de limitantes sobre as soluções das RDEs [Buc72, BCG84, BCG85, ZP05, Var08]. Um estudo sobre as principais técnicas baseadas nas RDEs foi feito em [Hal90]. Apesar de os controladores gerados por tal abordagem serem ótimos em um certo sentido, tais técnicas são numericamente complexas e o desenvolvimento de um método simples para a resolução de RDEs é ainda um tema atual de pesquisa. Por fim, é importante ressaltar os métodos de horizontes retrocedentes [MRRS00], cuja principal vantagem é a possibilidade de gerar um controlador ótimo à partir da análise do sistema em malha aberta, que pode ser não-linear, variante no tempo e ainda apresentar restrições. A estabilidade é garantida seja incorporando um custo terminal no método [BGW90, RM93], seja adicionando um conjunto de restrições [MM93, CLM96, SMR99]. Entretanto, o cálculo de tais restrições pode ser trabalhoso e lento, uma vez que é necessário, por exemplo, obter a solução de uma equação diferencial de Lyapunov [KYK01]. Vale ressaltar que, se um conjunto de condições for satisfeito, é possível modelar os sistemas LTV em função de parâmetros variantes no tempo, resultando em sistemas lineares a parâmetros variantes (em inglês, *Linear Parameter Varying* — LPV). A vantagem de tal modelagem é a possibilidade de adaptação das técnicas de estabilização projetadas para lidar com sistemas afetados por incertezas politópicas, que são normalmente menos complexas. Porém, como uma boa parte das informações é perdida neste tipo de modelagem, os resultados são em geral mais conservadores.

O principal objetivo desta tese é o desenvolvimento de técnicas de análise e síntese para sistemas lineares, considerando a norma $\mathcal{H}_\infty$ [Col00, AN06] como critério de desempenho. As técnicas apresentadas aplicam-se a sistemas contínuos no tempo, porém algumas podem ser adaptadas para tratar sistemas discretos no tempo. A tese é organizada conforme descrito na sequência. No Capítulo 1 são introduzidos os principais conceitos e definições que são utilizados nos demais capítulos da tese, como por exemplo os conceitos e propriedades de estabilidade, controlabilidade e observabilidade de sistemas. No Capítulo 2, é apresentada a abordagem utilizada para a síntese de controladores para sistemas LTI incertos, ou seja, sistemas cujas incertezas são invariantes no tempo. A abordagem é baseada no método em dois estágios introduzida por [PA01, APS03]. A adaptação do método para lidar com sistemas afetados por incertezas variantes no tempo, sendo que as taxas de variação dos parâmetros incertos são limitadas e conhecidas, é apresentada no Capítulo 3. As condições de síntese são projetadas para que o controlador resultante, dependente de parâmetros, seja robusto a ruídos ou erros na medição em tempo real dos parâmetros. No Capítulo 4 é apresentado um novo critério para a verificação da estabilidade de sistemas LTV, bem como duas diferentes abordagens para a síntese de ganhos estabilizantes e variantes no tempo. A primeira abordagem consiste basicamente na utilização de informações do sistema em malha aberta para sintetizar a lei de controle, e a segunda provém do novo critério de estabilização apresentado e consiste em utilizar as informações do sistema em um horizonte finito de tempo. O capítulo de conclusões descreve as contribuições da tese e um elenco de trabalhos futuros ligados aos temas abordados.

Capítulo 1

Conceitos, definições e resultados preliminares

1.1 Introdução

O desenvolvimento de teorias e técnicas de análise linear de sistemas é um assunto que sempre recebeu uma considerável atenção. Por um lado, as condições impostas nos teoremas são, em geral, de fácil verificação e inspiram técnicas relativamente simples e numericamente eficazes, o que é importante para determinar, por exemplo, se um dado sistema é estável ou de que forma pode ser controlado para que certos objetivos sejam atingidos ([D'A70, ZD63, Rug96, Che99] e outros). Entre tais técnicas, as que baseiam-se na formulação das condições como desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) são particularmente marcantes [BEFB94, EN00]. Por outro lado, os métodos lineares podem ser utilizados para determinar certas propriedades de sistemas não-lineares, que possuem naturalmente uma maior complexidade. Para tanto, podem-se aplicar técnicas de linearização para que seja feita uma análise local [Kha02], ou então é possível manipular o modelo não-linear a fim de gerar uma descrição linear porém dependente de parâmetros, para posteriormente aplicar técnicas adaptadas para tratar este tipo de problema [Wu95, EN00, Bru04].

O objetivo deste capítulo é introduzir as definições, teoremas e propriedades relacionados a sistemas lineares que serão utilizados nos demais capítulos da tese, com ênfase nos critérios de estabilização e na possibilidade de síntese de leis de controle estabilizantes. Os resultados são apresentados para sistemas lineares e variantes no tempo (em inglês, *Linear Time Varying* — LTV), que descrevem uma classe mais geral de sistemas lineares. As particularizações dos resultados para o caso invariante no tempo (em inglês, *Linear Time Invariant* — LTI) são mostradas conforme necessário. Os resultados e lemas referentes às LMIs e utilizados no decorrer da tese são também apresentados no capítulo.

A Seção 1.2 apresenta as principais definições e resultados relativos aos sistemas lineares variantes e invariantes no tempo, como por exemplo os critérios de estabilização e os conceitos de controlabilidade e observabilidade. A norma $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas[1] é também introduzida como um critério de desempenho a ser considerado na síntese. Na Seção 1.3, os resultados são adaptados para o caso de sistemas dependentes de parâmetros. A principal metodologia utilizada nesta tese para resolver os problemas referentes a sistemas lineares e dependentes de parâmetros é a

[1]Ou norma $\mathcal{L}_2$ induzida do sistema.

abordagem LMI, cujos resultados principais são apresentados na Seção 1.4. A Seção 1.5 conclui o capítulo.

1.2 Sistemas lineares

Seja $y(t) = \mathcal{G}\{u(t)\}$ um sistema contínuo no tempo que recebe o vetor de entradas $u(t) \in \mathbb{R}^n$ e cujo conjunto de respostas é o vetor de saídas $y(t) \in \mathbb{R}^q$. O sistema $\mathcal{G}\{\cdot\}$ é linear se, e somente se, satisfaz o princípio da superposição [ZD63, Rug96], isto é, dados $y_1(t) = \mathcal{G}\{u_1(t)\}$ e $y_2(t) = \mathcal{G}\{u_2(t)\}$, a igualdade

$$\mathcal{G}\{a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

é válida para todo $t \in \mathbb{R}$ e para quaisquer constantes $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Se o sistema é tal que as saídas no instante atual são independentes das entradas nos instantes futuros, então o sistema é também causal.

Todo sistema linear e causal pode ser representado em função de um conjunto de variáveis básicas $x(t) \in \mathbb{R}^n$ conhecidas como variáveis de estado, e a representação dos sistemas é genericamente dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

sendo $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída medida. As matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ são de dimensões apropriadas. A quantidade mínima n de variáveis de estado necessária à completa representação do sistema é chamada de ordem do sistema.

Considere inicialmente a equação do sistema sem a atuação da entrada

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{1.2}$$

Se a condição inicial $x(t_0)$ da equação for conhecida, sendo t_0 o tempo inicial de análise, e se a matriz $A(t)$ for uma função integrável em t [ZD63], então os estados $x(t)$ podem ser calculados, para todo $t \geq t_0$, por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0). \tag{1.3}$$

A matriz $\Phi(t, t_0)$ é a matriz de transição de estados do sistema, que pode ser obtida pela resolução da equação diferencial matricial

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathrm{I}. \tag{1.4}$$

A matriz de transição de estados é primordial na análise de sistemas lineares. As principais propriedades de $\Phi(t, t_0)$ são apresentadas a seguir e as demonstrações, assim como outras propriedades, podem ser encontradas na literatura (por exemplo, [ZD63, D'A70, Rug96]).

Propriedade 1.1 Para todo valor de $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, a matriz de transição satisfaz

$$\Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1).$$

Propriedade 1.2 A matriz de transição de estados é sempre invertível, e sua inversa é dada por

$$\Phi(t,t_0)^{-1} = \Phi(t_0,t).$$

Propriedade 1.3 Se o sistema (1.2) for invariante no tempo, isto é, se $A(t) = A$ é constante, então a matriz de transição é igual à exponencial da matriz A:

$$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Teorema 1.1 (**Teorema de Floquet** [Flo83, MSA04]): Se o sistema (1.2) for periódico, isto é, se existir um valor $T > 0$ tal que $A(t+T) = A(t),\ \forall t$, então a matriz de transição pode ser reescrita em função de uma matriz periódica $G(t,t_0) = G(t+T,t_0)$ e de uma matriz constante R, da forma

$$\Phi(t,t_0) = G(t,t_0)e^{R(t-t_0)}, \quad G(t_0,t_0) = \mathrm{I}. \tag{1.5}$$

As matrizes $G(t,t_0)$ e R são conhecidas como matrizes de Floquet.

1.2.1 Estabilidade de sistemas lineares

A seguir, são apresentadas as definições referentes à estabilidade do sistema (1.2) [ZD63].

Definição 1.1 *O sistema* (1.2) *é estável no sentido de Lyapunov, ou estável, se, para todo* t_0 *e* $\epsilon > 0$*, existir um valor de* δ *dependente de* ϵ *e* t_0 *tais que*

$$||x(t_0)|| < \delta \Rightarrow ||x(t)|| < \epsilon,\ \forall t \geq t_0. \tag{1.6}$$

Definição 1.2 *Se o sistema* (1.2) *for estável e se, para todo* t_0 *e* ϵ*, existir um valor* $\delta > 0$ *independente de* t_0 *tal que a desigualdade* (1.6) *seja válida, então o sistema é uniformemente estável no sentido de Lyapunov, ou uniformemente estável.*

Definição 1.3 *Se o sistema* (1.2) *for uniformemente estável e se, para todo* t_0 *e* $x(t_0)$*, tem-se que*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0,$$

então o sistema é uniformemente assintoticamente estável.

Como os estados $x(t)$ são obtidos a partir da condição inicial $x(t_0)$ pela utilização da matriz de transição de estados definida em (1.4), é natural que $\Phi(t,t_0)$ seja utilizada na caracterização da estabilidade do sistema (1.2), conforme mostrado no seguinte lema.

Lema 1.1 *[Kha02, p. 156] A estabilidade uniforme e assintótica de um sistema linear é equivalente à estabilidade exponencial, isto é, o sistema* (1.2) *é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existirem constantes positivas* a *e* b *tais que*

$$||\Phi(t,t_0)|| \leq ae^{-b(t-t_0)},\ \forall t.$$

Propriedade 1.4 Se o sistema (1.2) for invariante no tempo, então o sistema é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores da matriz dinâmica A possuírem parte real negativa.

Lema 1.2 *Suponha que o sistema (1.2) é periódico com período $T > 0$, e sejam $G(t, t_0)$ e R as matrizes de Floquet provenientes do Teorema 1.1. O sistema é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores da matriz R possuírem parte real negativa. Adicionalmente, os limitantes da norma da matriz de transição são dados por*

$$G_m e^{\xi_m(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\| \leq G_M e^{\xi_M(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{G_M} e^{\xi_M(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\| \leq \frac{1}{G_m} e^{\xi_m(t-\tau)} \quad \forall t \leq \tau \tag{1.8}$$

sendo

$$\begin{array}{rr} 2\xi_m = \lambda_{\min}(R+R'), & 2\xi_M = \lambda_{\max}(R+R') \\ G_M = \max\limits_{t\in[t_1,t_1+T]} \|G(t,t_1)\|, & G_m = \min\limits_{t\in[t_1,t_1+T]} \|G(t,t_1)\|. \end{array}$$

Demonstração: De acordo com os resultados apresentados em [HL04], é possível notar que a matriz $e^{R(t-t_0)}$ satisfaz

$$e^{\lambda_{\min}\left(\frac{R+R'}{2}\right)(t-t_0)} \leq \left\|e^{R(t-t_0)}\right\| \leq e^{\lambda_{\max}\left(\frac{R+R'}{2}\right)(t-t_0)}. \tag{1.9}$$

Portanto, para $t \geq \tau$, tem-se

$$\Phi(t,\tau)\Phi'(t,\tau) = G(t,\tau)e^{R(t-\tau)}e^{R'(t-\tau)}G'(t,\tau).$$

De acordo com (1.9),

$$\|G(t,\tau)\|^2 e^{\lambda_{\min}(R+R')(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\Phi'(t,\tau)\| \leq \|G(t,\tau)\|^2 e^{\lambda_{\max}(R+R')(t-\tau)},$$

E, utilizando-se as definições de ξ_m e ξ_M, tem-se que

$$\|G(t,\tau)\|^2 e^{2\xi_m(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\Phi'(t,\tau)\| \leq \|G(t,\tau)\|^2 e^{2\xi_M(t-\tau)},$$

o que implica que

$$\|G(t,\tau)\| e^{\xi_m(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\| \leq \|G(t,\tau)\| e^{\xi_M(t-\tau)}.$$

Com os valores de G_m e G_M, que existem e são limitados caso $A(t)$ seja integrável [D'A70, MSA04], obtém-se a desigualdade (1.7). A desigualdade (1.8) é demonstrada de uma forma similar, notando-se que

$$\Phi(\tau,t) = \Phi(t,\tau)^{-1} = e^{-R(t-\tau)}G(t,\tau)^{-1},$$

consequentemente

$$\Phi(\tau,t)'\Phi(\tau,t) = G'(t,\tau)^{-1}e^{-R'(t-\tau)}e^{-R(t-\tau)}G(t,\tau)^{-1}$$

e

$$\left\|G(t,\tau)^{-1}\right\|^2 e^{-2\xi_M(t-\tau)} \leq \|\Phi'(\tau,t)\Phi(\tau,t)\| \leq \left\|G(t,\tau)^{-1}\right\|^2 e^{-2\xi_m(t-\tau)}.$$

Denotando-se

$$\left\|G(t,\tau)^{-1}\right\|^2 = \lambda_{max}(G(t,\tau)^{-1}G'(t,\tau)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{min}(G(t,\tau)G'(t,\tau))} \leq \frac{1}{G_m^2}$$

e trocando as variáveis t e τ tem-se, para $\tau \geq t$,

$$\frac{1}{\|G(\tau,t)\|}e^{\xi_M(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\| \leq \frac{1}{\|G(\tau,t)\|}e^{\xi_m(t-\tau)}$$

e a desigualdade (1.8) é demonstrada.

Analisando os limitantes obtidos e utilizando o resultado do Lema 1.1, nota-se que o sistema é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, $\xi_m \leq \xi_M < 0$, o que é verificado se todos os autovalores de R possuírem parte real negativa.

Uma outra forma de caracterizar a estabilidade de sistemas, extensivamente utilizada para demonstrar parte dos resultados mais importantes da teoria de controle de sistemas, consiste em utilizar o teorema de Lyapunov [Sas99, Kha02].

Teorema 1.2 [Kha02, p. 163] O sistema (1.2) é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existir uma função associada $v(t,x)$, denominada função de Lyapunov, que satisfaça as desigualdades

$$0 < \alpha_1(||x||) \leq v(t,x) \leq \alpha_2(||x||) \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{dt}v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}v(t,x)A(t)x(t) \leq -\alpha_3(||x||) \tag{1.11}$$

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\right|\right| \leq \alpha_4(||x||), \tag{1.12}$$

sendo α_1, α_2, α_3 e α_4 funções positivas e uniformemente limitadas em $||x||$, isto é, limitadas para valores finitos de $||x||$.

Para uma certa classe de sistemas lineares, sempre é possível encontrar uma função válida de Lyapunov que seja uma forma quadrática [Kha02].

Teorema 1.3 [Kha02, p. 158] Seja o sistema (1.2) uniformemente assintoticamente estável e seja a matriz $A(t)$ contínua e limitada em norma. Neste caso, existe uma matriz $P(t)$ diferenciável, limitada, simétrica e definida positiva que satisfaz

$$A'(t)P(t) + P(t)A(t) + \frac{d}{dt}P(t) < 0.$$

Consequentemente, $v(t,x) = x(t)'P(t)x(t)$ é uma função de Lyapunov que satisfaz as condições do Teorema 1.2.

É possível também utilizar o teorema seguinte para avaliar a estabilidade dos sistemas lineares.

Teorema 1.4 O sistema (1.2) é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existir uma função associada $w(t,x)$, integrável para todo t, e um escalar positivo σ que satisfaçam as desigualdades

$$0 < \alpha_5(||x||) \leq w(t,x) \leq \alpha_6(||x||) \tag{1.13}$$

$$w(t+\sigma,x) - w(t,x) \leq -\alpha_7(||x||), \tag{1.14}$$

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial x}w(t,x)\right|\right| \leq \alpha_8(||x||) \tag{1.15}$$

sendo α_5, α_6, α_7 e α_8 funções positivas e uniformemente limitadas em $||x||$.

Demonstração: Seja $v(t,x)$ dada por

$$v(t,x) = \int_t^{t+\sigma} w(\tau,x)d\tau.$$

Se (1.13) é válida e $w(t,x)$ é integrável para todo t, então a função $v(t,x)$ satisfaz a desigualdade (1.10). A derivada de $v(t,x)$ é dada por

$$\frac{d}{dt}v(t,x) = w(t+\sigma,x) - w(t,x),$$

que é definida negativa e uniformemente limitada de acordo com (1.14) e, portanto, satisfaz (1.11). Se a condição (1.15) for satisfeita, pode-se notar que a condição (1.12) também é válida. Desta forma, existe uma função de Lyapunov $v(t,x)$ associada ao sistema (1.2) e, segundo o Teorema 1.2, tal condição é necessária e suficiente para que o sistema seja uniformemente assintoticamente estável.

Outras condições necessárias e suficientes para caracterizar a estabilidade de sistemas lineares podem ser encontradas na literatura [ZD63, Vid93, Sas99, Kha02]. Uma condição particularmente interessante, que resulta no envelope exato das normas de todas as possíveis trajetórias que partem de um conjunto definido de estados iniciais, foi apresentada em [GPT10] e é reproduzida no teorema a seguir.

Teorema 1.5 Seja o sistema (1.2) com estados iniciais $x(t_0)$ que satisfazem

$$x(t_0)'x(t_0) \leq \rho_0^2, \text{ para um certo } \rho_0 > 0. \tag{1.16}$$

Considere também a função

$$\rho(t) = \rho_0 \lambda_{max}^{1/2}\left(X(t,t_0)\right),$$

sendo $X(t,t_0)$ a solução da equação diferencial de Lyapunov

$$\frac{d}{dt}X(t,t_0) = A(t)X(t,t_0) + X(t,t_0)A'(t), \; X(t_0,t_0) = \mathrm{I}. \tag{1.17}$$

O sistema (1.2) é assintoticamente estável se, e somente se,

$$\max_{t\geq t_0}\rho(t) < +\infty \text{ e } \lim_{t\to+\infty}\rho(t) = 0, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

Os detalhes da demonstração são apresentados em [GPT10]. Uma característica importante do Teorema 1.5 é o fato da função $\rho(t)$ permitir uma descrição do envelope das normas de todas as possíveis trajetórias que partem de um conjunto de estados iniciais satisfazendo (1.16), isto é,

$$\text{Se } x(t_0)'x(t_0) \leq \rho_0^2, \text{ então } x(t)'x(t) \leq \rho^2(t).$$

Note ainda que

$$X(t,t_0) = \Phi(t,t_0)\Phi'(t,t_0)$$

satisfaz (1.17).

Para verificar a estabilidade assintótica e uniforme, pode-se utilizar o teorema a seguir.

Teorema 1.6 Seja o sistema (1.2) com estados iniciais $x(t_0)$ que satisfazem

$$x(t_0)'x(t_0) \leq \rho_0^2, \text{ para um certo } \rho_0 > 0. \tag{1.18}$$

Considere também a função

$$\rho_\xi(t) = \rho_0 \lambda_{max}^{1/2}\left(Y(t,t_0)\right),$$

sendo $Y(t,t_0)$ a solução da equação diferencial de Lyapunov

$$\frac{d}{dt}Y(t,t_0) = (A(t)+\xi \mathrm{I})Y(t,t_0) + Y(t,t_0)(A'(t)+\xi \mathrm{I}),\ X(t_0,t_0) = \mathrm{I}, \xi > 0. \tag{1.19}$$

O sistema (1.2) é assintoticamente estável se, e somente se,

$$\max_{t \geq t_0} \rho_\xi(t) < +\infty, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Controle de sistemas lineares

Seja o sistema com uma entrada de controle

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \tag{1.20}$$

Se $B(t)$ e $u(t)$ forem funções integráveis de Lebesgue, então existe uma única solução $x(t)$ que satisfaz (1.20) [Kal60], dada por

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{1.21}$$

O objetivo geral do controle de sistemas é, dado um estado inicial $x(t_0)$ para o sistema (1.20), calcular uma entrada de controle $u(t)$ definida para todo $t \geq t_0$ que seja capaz de conduzir os estados ao ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ em um período finito de tempo. A possibilidade de calcular tal entrada é a definição de *controlabilidade completa no tempo* t_0 [Kal60]. Neste caso o sistema, ou o par $\{A(t), B(t)\}$, é definido como *completamente controlável no tempo* t_0.

A controlabilidade completa do sistema (1.20) pode ser avaliada a partir da análise do Gramiano de controlabilidade $W(t,t_0)$.

Teorema 1.7 [Kal60] O par $\{A(t), B(t)\}$ é completamente controlável no tempo t_0 se, e somente se, a matriz

$$W(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_0,\tau)d\tau$$

for definida positiva para algum $t > t_0$.

A matriz $W(t, t_0)$ é associada à energia de controle necessária para conduzir os estados ao ponto de equilíbrio em um horizonte finito de tempo [Kal60]. A condição de controlabilidade completa implica que, a partir de um instante t, o *rank* do Gramiano $W(t, t_0)$ é completo, e todos os estados durante este intervalo temporal podem ser conduzidos à origem. Uma condição mais forte é obtida caso seja necessário que o *rank* do Gramiano seja completo em um intervalo $[t_0, t_0 + \delta_c]$ para um valor positivo fixo de δ_c e para todo valor de t_0 [D'A70]. Tal condição se refere à controlabilidade completa e uniforme do sistema.

Teorema 1.8 [Kal60] O par $\{A(t), B(t)\}$ é uniformemente completamente controlável se, e somente se, as seguintes condições forem válidas para todo t

$$\begin{aligned} &0 < \alpha_9(\delta_c)I \leq W(t + \delta_c, t) \leq \alpha_{10}(\delta_c)I \\ &0 < \alpha_{11}(\delta_c)I \leq \Phi(t + \delta_c, t)W(t + \delta_c, t)\Phi'(t + \delta_c, t) \leq \alpha_{12}(\delta_c)I \end{aligned} \tag{1.22}$$

sendo δ_c um escalar fixo e positivo e as funções $\alpha_i(\delta_c)$, $i = 9, \ldots, 12$ são positivas e uniformemente limitadas.

Utilizando as condições do Teorema 1.8, pode-se mostrar que [Kal60]

$$\frac{\alpha_{11}(\delta_c)}{\alpha_{10}(\delta_c)} \leq ||\Phi(t + \delta_c, t)||^2 \leq \frac{\alpha_{12}(\delta_c)}{\alpha_9(\delta_c)}, \quad \frac{\alpha_9(\delta_c)}{\alpha_{12}(\delta_c)} \leq ||\Phi(t, t + \delta_c)||^2 \leq \frac{\alpha_{10}(\delta_c)}{\alpha_{11}(\delta_c)}. \tag{1.23}$$

Uma vez que as desigualdades do Teorema 1.8 também são válidas para todo $\hat{\delta} > \delta_c$, é possível concluir que

$$||\Phi(t, \tau)|| \leq \alpha_{13}(|t - \tau|), \ \forall t, \tau, \tag{1.24}$$

sendo $\alpha_{13}(\cdot)$ uma função positiva e uniformemente limitada.

Como as propriedades de sistemas invariantes no tempo não dependem do tempo inicial t_0 considerado, o adjetivo "uniforme" não é utilizado nas caracterizações desta classe de sistemas [Rug96]. Desta forma, a caracterização da controlabilidade é mais simples, como mostrado a seguir.

Propriedade 1.5 Se o sistema (1.20) de ordem n for invariante no tempo, então é completamente controlável se, e somente se,

$$\text{rank}\left(\left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B\right]\right) = n.$$

Apesar de a controlabilidade completa e uniforme ser uma condição mais forte que a controlabilidade completa, os dois conceitos são equivalentes para sistemas lineares e periódicos.

Propriedade 1.6 Se o sistema (1.20) de ordem n for periódico com período T, então o sistema é uniformemente completamente controlável se, e somente se, $W(nT, 0) > 0$.

A demonstração da Propriedade 1.6 é baseada nos resultados de [Bru69], em que é provado que um sistema linear e periódico é completamente controlável se, e somente se, $W(nT, 0) > 0$, e nos resultados de [SA68], que ressalta que, para sistemas lineares e periódicos, a controlabilidade completa é equivalente à controlabilidade completa e uniforme. Mais especificamente, é possível verificar a condição de controlabilidade completa em um número $k \leq n$ de períodos [Kab86], sendo k o índice de controlabilidade do par formado pela matriz de transição e pelo Gramiano de controlabilidade. Por fim, para sistemas periódicos, é possível expressar analiticamente os limitantes do Gramiano de controlabilidade.

Lema 1.3 *Se o sistema* (1.20) *for periódico com período T e uniformemente completamente controlável, então os limitantes α_9, α_{10}, α_{11} e α_{12} podem ser descritos por*

$$\alpha_9(\delta_c) = \frac{M_B(\delta_c)}{G_M e^{2\xi_M \delta_c}} \sqrt{\frac{e^{2\xi_M \delta_c} - 1}{2\xi_M}}, \quad \alpha_{10}(\delta_c) = \frac{M_B(\delta_c)}{G_m} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\xi_m \delta_c}}{2\xi_m}},$$

$$\alpha_{11}(\delta_c) = M_B(\delta_c) G_m e^{2\xi_m \delta_c} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\xi_m \delta_c}}{2\xi_m}}, \ \alpha_{12}(\delta_c) = M_B(\delta_c) G_M \sqrt{\frac{e^{2\xi_M \delta_c} - 1}{2\xi_M}},$$

sendo $M_B(\delta_c)$ tal que

$$\int_t^{t+\delta_c} \|B(\tau)\|^2 d\tau \leq M_B^2(\delta_c).$$

Demonstração: Utilizando-se a desigualdade de Schwarz [ZD63] e o Lema 1.2, tem-se

$$\|W(t+\delta_c, t)\| \leq \int_t^{t+\delta_c} \|\Phi(t,\tau)\|^2 \|B(\tau)\|^2 d\tau \leq \left(\int_t^{t+\delta_c} \|\Phi(t,\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_t^{t+\delta_c} \|B(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2}$$

$$\leq M_B(\delta_c) \left(\int_t^{t+\delta_c} \frac{1}{G_m^2} e^{2\xi_m (t-\tau)} d\tau \right)^{1/2} = \frac{M_B(\delta_c)}{G_m} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\xi_m \delta_c}}{2\xi_m}} = \alpha_{10}(\delta_c).$$

Similarmente,

$$\|\Phi(t+\delta_c, t) W(t+\delta_c, t) \Phi'(t+\delta_c, t)\| \leq M_B(\delta_c) \left(\int_t^{t+\delta_c} \|\Phi(t+\delta_c, \tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2}$$

$$\leq M_B(\delta_c) \left(\int_t^{t+\delta_c} G_M^2 e^{2\xi_M (t+\delta_c-\tau)} d\tau \right)^{1/2} = M_B(\delta_c) G_M \sqrt{\frac{e^{2\xi_M \delta_c} - 1}{2\xi_M}} = \alpha_{12}(\delta_c).$$

A utilização do Lema 1.2 resulta em

$$\|\Phi(t+\delta_c, t)\|^2 \leq G_M^2 e^{2\xi_M \delta_c} = \frac{\alpha_{12}(\delta_c)}{\alpha_9(\delta_c)}$$

e, portanto, $\alpha_9(\delta_c)$ é dado por

$$\alpha_9(\delta_c) = \frac{\alpha_{12}(\delta_c)}{G_M^2 e^{2\xi_M \delta_c}} = \frac{M_B(\delta_c)}{G_M e^{2\xi_M \delta_c}} \sqrt{\frac{e^{2\xi_M \delta_c} - 1}{2\xi_M}}.$$

Por fim, utilizando argumentos similares,

$$\|\Phi(t+\delta_c, t)\|^2 \geq \frac{\alpha_{11}(\delta_c)}{\alpha_{10}(\delta_c)} = G_m^2 e^{2\xi_m \delta_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{11}(\delta_c) = \alpha_{10}(\delta_c) G_m^2 e^{2\xi_m \delta_c} = M_B(\delta_c) G_m e^{2\xi_m \delta_c} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\xi_m \delta_c}}{2\xi_m}}.$$

Para finalizar a demonstração, basta notar que todos os termos utilizados para expressar os limitantes $\alpha_i(\delta_c), i = 9, \ldots, 12$ são positivos e limitados.

Se uma saída $y(t)$ é considerada, como por exemplo no sistema (1.1), a observabilidade do par $\{A(t), C(t)\}$ pode ser avaliada pelo teorema a seguir.

Teorema 1.9 [Kal60] O par $\{A(t), C(t)\}$ é completamente observável no tempo t_0 se, e somente se, a matriz simétrica

$$W_o(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi'(\tau, t_0) C'(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \tag{1.25}$$

for definida positiva para algum $t > t_0$.

Teorema 1.10 [Kal60] O par $\{A(t), C(t)\}$ é uniformemente completamente observável se, e somente se, o sistema dual, ou seja, o par $\{-A'(t), B'(t)\}$ [Kal60], for uniformemente completamente controlável. Ainda, os limitantes das matrizes $W_o(t+\delta_o, t)$ e $\Phi'(t, t+\delta_o) W_o(t+\delta_o, t) \Phi(t, t+\delta_o)$ são equivalentes aos limitantes mostrados ao Teorema 1.8.

O conceito de dualidade, conforme ilustrado no Teorema 1.10, é muito importante na teoria de sistemas. Dado o sistema (1.1), a sua representação dual é descrita por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t^*) &= A'(t^*)\tilde{x}(t^*) + C'(t^*)u(t^*) \\ y(t^*) &= B'(t^*)\tilde{x}(t^*) + D(t^*)u(t^*) \end{aligned}, \tag{1.26}$$

sendo $\tilde{x}(t)$ os estados duais e $t^* = -t$. A teoria e as propriedades mais importantes sobre sistemas duais podem ser encontradas, por exemplo, em [Kal59, Kal60, ZD63, Rug96].

1.2.3 Norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares

Em alguns casos, a estabilização de sistemas não é o único objetivo considerado na síntese de controladores. Por vezes é necessário calcular leis de controle de forma que certos critérios de desempenho sejam satisfeitos, como a minimização do esforço de controle, da energia gasta para cumprir uma certa trajetória ou ainda minimizar o ganho máximo entre entrada e saída para sinais de energia. O foco da presente tese é no último critério, também conhecido como a minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema [Col00].

Seja o sistema linear

$$\mathcal{G}(t) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_w(t)w(t) + B(t)u(t) \\ z(t) &= C(t)x(t) + D_w(t)w(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \right. , \tag{1.27}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ a entrada exógena, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída medida.

Definição 1.4 *Se o sistema* (1.27) *com* $u(t) = 0$ *é estável, então sua norma* $\mathcal{H}_\infty$ *entre* $w(t)$ *e* $z(t)$*, denotada por* $||\mathcal{G}(t)||_\infty$*, é igual a*

$$||\mathcal{G}(t)||_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{||z(t)||}{||w(t)||} = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{|| \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B_w(\tau)w(\tau)d\tau + D_w(t)w(t)||}{||w(t)||}.$$

Propriedade 1.7 [Wu09] Se o sistema (1.27) com $u(t) = 0$ é estável e se

$$||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \gamma,$$

para um certo valor positivo de $\gamma \in \mathbb{R}$, então

$$\int_{t_0}^{t} \Big(||z(\tau)||^2 - \gamma^2 ||w(\tau)||^2 \Big) d\tau \leq 0, \quad \forall w(t) \in \mathcal{L}_2, \quad \forall t \geq t_0.$$

Para sistemas estáveis, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode também ser caracterizada por uma versão adaptada do teorema de Lyapunov (Teorema 1.2).

Teorema 1.11 [BEFB94, EN00] O sistema (1.27) é uniformemente assintoticamente estável e sua norma $\mathcal{H}_\infty$ é limitada por $||\mathcal{G}(t)||_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$ se, e somente se, existir uma função de Lyapunov $v(t, x)$ que satisfaça as desigualdades

$$0 < \alpha_{14}(||x||) \leq v(t, x) \leq \alpha_{15}(||x||) \tag{1.28}$$

$$\frac{d}{dt} v(t, x) + z(t)' z(t) - \gamma^2 w(t)' w(t) \leq -\alpha_{16}(||x||), \tag{1.29}$$

sendo α_{14}, α_{15} e α_{16} funções positivas e uniformemente limitadas em $||x||$. Além disso, se a matriz $A(t)$ é contínua e limitada, existe uma função quadrática de Lyapunov $v(t, x) = x(t)' P(t) x(t)$ que satisfaz as desigualdades (1.28)-(1.29).

1.3 Sistemas lineares dependentes de parâmetros

Na modelagem de sistemas, é comum que sejam feitas simplificações na obtenção do modelo nominal. Todavia, a aplicação de tais simplificações resulta em um modelo que pode apresentar uma dinâmica consideravelmente diferente da dinâmica real do sistema. Além disso, por vezes existem no modelo certos parâmetros cujos valores ou comportamentos não são precisamente conhecidos. A inserção de modelos incertos ou dependentes de parâmetros é uma maneira de buscar uma representação mais acurada do sistema. Ao considerar a inserção de incertezas, a dinâmica do modelo aproxima-se mais do sistema real, justificando-se portanto os esforços para considerarem-se as incertezas na síntese de controladores estabilizantes, tanto para leis de controle independentes dos valores dos parâmetros (controle robusto) quanto no caso de controladores dependentes de parâmetros, que supõem que os parâmetros são mensuráveis em tempo real (controle escalonado ou *gain scheduling*) [Sha03, APS03, Bru04, MOP06, OdOP07, MOPB09, DBG08, YS09, AOP12].

Nesta tese, supõem-se que as incertezas são limitadas, com limitantes conhecidos *a priori*. Dessa forma pode-se construir para cada matriz do sistema, caso as matrizes sejam dependentes dos parâmetros de forma afim, politopos convexos cuja vantagem principal é a relativa simplicidade de manipulação [BEFB94, EN00]. O sistema incerto é denotado por

$$\mathcal{G}_\alpha(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B_1(\alpha(t))w(t) + B_2(\alpha(t))u(t) \\ z(t) = C_1(\alpha(t))x(t) + D_1(\alpha(t))w(t) + D_2(\alpha(t))u(t) \ , \\ y(t) = C_2(\alpha(t))x(t) + D_y(\alpha(t))w(t) \end{cases} \tag{1.30}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ a entrada exógena, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída medida, e $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t)\} \in \Delta_N$ o conjunto de N elementos conhecido como simplex unitário, definido por

$$\Delta_N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N \ : \ \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1, \ \xi_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, N \right\}. \tag{1.31}$$

Assim, as matrizes do sistema são genericamente descritas por

$$M(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) M_i, \ \alpha \in \Delta_N, \tag{1.32}$$

com $M(\alpha(t))$ representando cada matriz de (1.30) e M_i os respectivos vértices.

Conforme mostrado na Seção 1.4 a seguir, a representação politópica (1.32) permite a utilização de um conjunto de matrizes invariantes no tempo (os vértices M_i) nas condições de análise de estabilidade e de síntese de controladores. Além da possibilidade de representar as variáveis incertas do sistema, a abordagem paramétrica pode ser utilizada para descrever uma classe de sistemas variantes no tempo, o que pode ser vantajoso dependendo da situação. Por exemplo, seja a equação de Mathieu [GC06] dada por

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g^2 + a^2 \cos(\omega t)) & -\kappa \end{bmatrix} x(t),$$

sendo g, a, ω e κ constantes conhecidas e predefinidas. Defina as variáveis

$$\alpha_1(t) = 0.5 + 0.5 \cos(\omega t), \quad \alpha_2(t) = 0.5 - 0.5 \cos(\omega t).$$

Note que $\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) \in \Delta_2$. A equação de Mathieu pode ser reescrita de maneira politópica como

$$\dot{x}(t) = \left(\alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g^2 + a^2) & -\kappa \end{bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g^2 - a^2) & -\kappa \end{bmatrix} \right) x(t).$$

Os sistemas representados desta forma são também conhecidos como sistemas lineares aos parâmetros variantes (em inglês, *Linear Parameter Varying* — LPV) [Bru04, GC06].

Os teoremas apresentados nas seções anteriores são válidos para o caso LPV se as condições exigidas forem satisfeitas $\forall \alpha(t) \in \Delta_N$. Os dois teoremas a seguir correspondem à adaptação dos Teoremas 1.2 e 1.11 para o sistema incerto

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t)) x(t). \tag{1.33}$$

Note que a matriz $A(\alpha(t))$ é sempre limitada em norma, pois tal condição é necessária para que o sistema possua uma representação politópica.

Teorema 1.12 Seja o sistema (1.30) uniformemente assintoticamente estável cuja matriz dinâmica $A(\alpha(t))$ é contínua e limitada. Portanto, existe uma matriz $P(\alpha(t))$ diferenciável, limitada, simétrica e definida positiva que satisfaz

$$A'(\alpha(t)) P(\alpha(t)) + P(\alpha(t)) A(\alpha(t)) + \frac{d}{dt} P(\alpha(t)) < 0.$$

Consequentemente, $v(t, x) = x(t)' P(\alpha(t)) x(t)$ é uma função de Lyapunov que satisfaz as condições do Teorema 1.2.

Teorema 1.13 O sistema (1.30) é uniformemente assintoticamente estável e sua norma $\mathcal{H}_\infty$ é limitada por $||\mathcal{G}(t)||_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$ se, e somente se, existir uma função de Lyapunov $v(t,x)$ que satisfaça as desigualdades

$$0 < \alpha_{15}(||x||) \leq v(t,x) \leq \alpha_{16}(||x||) \tag{1.34}$$

$$\frac{d}{dt}v(t,x) + z(t)'z(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) \leq -\alpha_{17}(||x||), \tag{1.35}$$

sendo α_{15}, α_{16} e α_{17} funções positivas e uniformemente limitadas em $||x||$. Ainda, se existir uma função de Lyapunov que satisfaça as condições do teorema então existe uma função quadrática $v(t,x) = x(t)'P(\alpha(t))x(t)$ tal que (1.34)-(1.35) são satisfeitas.

1.4 Desigualdades matriciais lineares

A utilização de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) para a resolução de problemas de otimização convexos ou quasi-convexos na análise de sistemas e síntese de controladores tem aumentado consideravelmente nas últimas décadas. A possibilidade de resolver as LMIs em tempo polinomial graças a diversos pacotes computacionais [Stu99, Löf04], em conjunto com uma grande quantidade de propriedades e teoremas na literatura que visam a transformação e a redução de problemas a procedimentos de otimização com restrições LMIs [BEFB94, EN00], explicam o crescimento da utilização dessa metodologia.

A primeira motivação documentada para o emprego das LMIs foi na aplicação do teorema de Lyapunov (Teorema 1.12) [BEFB94]. Considere, por uma questão de simplicidade, o sistema (1.33) dependente de parâmetros $\alpha \in \mathbb{R}^N$ invariantes no tempo. Segundo o teorema de Lyapunov, o sistema é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$ tal que

$$A'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0. \tag{1.36}$$

Tal condição deve ser válida para todo $\alpha \in \Delta_N$, o que a torna um problema de dimensão infinita. Para obter um conjunto finito de condições LMIs, é necessário impor uma estrutura para a matriz de Lyapunov. Se a matriz é constante, ou seja, $P(\alpha) = P$, a condição (1.36) é dada por

$$P > 0 \ : \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(A_i'P + PA_i\right) < 0, \quad \forall \ \alpha \in \Delta_N, \tag{1.37}$$

pois $A(\alpha)$ é descrita de forma politópica, como em (1.32). Um conjunto de condições suficientes para que (1.37) seja válida é obtido ao se impor que todos os coeficientes dos monômios do polinômio (1.37) sejam definidos negativos [AT00], resultando nas condições

$$P > 0, \quad A_i'P + PA_i < 0, \ i = 1, \ldots, N. \tag{1.38}$$

A expressão (1.38) corresponde a um conjunto de $N+1$ condições LMIs, que pode ser resolvido com a utilização de pacotes computacionais [Stu99, Löf04]. No entanto, tal relaxação é uma fonte de conservadorismo em relação ao conjunto de soluções de (1.36), e existe a possibilidade de que nenhuma solução com P constante seja obtida mesmo que o sistema seja estável. A fim de reduzir o conservadorismo, outras estruturas podem ser consideradas para a matriz de Lyapunov, como por exemplo supor $P(\alpha)$ um polinômio homogêneo em α de grau genérico, e aplicando técnicas como a relaxação de Pólya [Sch03, Sch05]. Nesta tese, todas as variáveis dependentes de parâmetros no simplex unitário são modeladas, exceto se especificado de outra forma, como polinômios homogêneos de grau genérico. Para maiores detalhes, consulte por exemplo [GAC96, LOdOP04, OP05, OP07, MOPB09].

Alguns lemas importantes para a manipulação das LMIs são apresentados na sequência.

Lema 1.4 Lema de Finsler *[dOS01]*

Sejam $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que rank$(\mathcal{B}) < n$ e seja $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). As condições apresentadas a seguir são equivalentes:

i) $w'\mathcal{Q}w < 0, \ \forall w \neq 0 \ : \ \mathcal{B}w = 0$;

ii) $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp < 0$;

iii) $\exists \mu \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$;

iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} \ : \ \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0$.

Lema 1.5 Lema da projeção *[SIG98, GA94, IS94]*

Dadas as matrizes $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{k\times m}$ e $\Psi = \Psi' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, as condições apresentadas a seguir são equivalentes:

i) Existe uma matriz $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ que satisfaz

$$\Psi + \mathcal{V}\mathcal{X}\Lambda + (\mathcal{V}\mathcal{X}\Lambda)' < 0$$

ii) As duas condições a seguir

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_v\Psi\mathcal{N}_v' < 0 \ \text{ou} \ \mathcal{V}\mathcal{V}' > 0 \\ &\mathcal{N}_u'\Psi\mathcal{N}_u < 0 \ \text{ou} \ \Lambda'\Lambda > 0 \end{aligned}$$

são verificadas, sendo $\mathcal{N}_v$ e $\mathcal{N}_u'$ os complementos ortogonais de, respectivamente, $\mathcal{V}$ e Λ', isto é,

$$\mathcal{N}_v\mathcal{V} = 0, \qquad \mathcal{N}_u'\Lambda' = 0.$$

Lema 1.6 Complemento de Schur *[BEFB94]*

Sejam três matrizes Q, R e S de dimensões apropriadas, com $Q = Q'$ e $R = R'$. Então

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{cases} R < 0 \\ Q - SR^{-1}S' < 0 \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} Q < 0 \\ R - S'Q^{-1}S < 0 \end{cases} \end{array}$$

Os lemas apresentados são extensivamente utilizados na geração de resultados importantes da teoria de controle. O lema a seguir, conhecido como *Bounded Real Lemma*, é o resultado da aplicação do Lema 1.6 às condições do Teorema 1.13.

Lema 1.7 *Bounded Real Lemma [BEFB94]*

Considere o sistema (1.30) *com* $u(t) = 0$. *A norma* $\mathcal{H}_\infty$ *do sistema, denotada por* $||\mathcal{G}_\alpha||_\infty$, *é limitada superiormente por um escalar positivo* γ *se, e somente se, existir uma matriz* $P(\alpha(t)) = P'(\alpha(t)) > 0$ *que verifique*[2]

$$\begin{bmatrix} A'(\alpha(t))P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t)) & P(\alpha(t))B_1(\alpha(t)) & C_1'(\alpha(t)) \\ \star & -\gamma^2\mathrm{I} & D_1'(\alpha(t)) \\ \star & \star & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{1.39}$$

1.5 Conclusão

Os principais resultados e definições referentes a sistemas lineares foram apresentados neste capítulo. A informação sobre a estabilidade do sistema pode ser recuperada seja utilizando diretamente a matriz de transição de estados (Lema 1.1), seja procurando por uma função de Lyapunov, descrita por uma matriz que não depende explicitamente dos estados do sistema (Teorema 1.2), ou ainda analisando a solução de uma equação diferencial de Lyapunov (Teorema 1.5). O último método, em particular, permite que se defina o envelope das normas de todas as possíveis trajetórias que partem de um conjunto de estados iniciais dado. A informação sobre a controlabilidade do sistema, ou seja, sobre a possibilidade de conduzir um estado qualquer ao ponto de equilíbrio do sistema em um horizonte finito de tempo, pode ser avaliada utilizando-se o Gramiano de controlabilidade. Algumas maneiras de calcular a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema, que corresponde ao máximo ganho entrada-saída para a energia do sistema, também foram apresentadas. Por fim, a modelagem de sistemas com incertezas utilizando-se matrizes dependentes de parâmetros foi apresentada, bem como técnicas e teoremas para a manipulação de LMIs, que é uma metodologia importante na análise e síntese de sistemas lineares.

[2] O símbolo $\star$ representa os blocos simétricos nas LMIs.

Capítulo 2

Sistemas lineares invariantes no tempo e incertos

2.1 Introdução

O problema da síntese de ganhos estabilizantes por realimentação de saída é um dos problemas mais complicados em teoria de controle, e é um dos principais assuntos de pequisa desde os primeiro trabalhos na área [SADG97]. Mesmo a caracterização da complexidade do problema ainda não é clara [BT00], e as estratégias baseadas em LMIs, extensivamente abordadas na literatura, são consideradas como problemas NP-completos [FL97]. O problema torna-se ainda mais desafiador para sistemas que são dependentes de parâmetros incertos. Neste caso, o objetivo principal é a síntese de controladores robustos, ou seja, leis de controle que estabilizem o sistema independentemente dos valores dos parâmetros, contruídas a partir de controladores dinâmicos, de ordem completa ou reduzida, ou mesmo estáticos. A síntese de controladores robustos é atualmente o objetivo de diversas pesquisas (veja, por exemplo, [PG94, GPS96, EOA97, GdS98, CT99, Sha03, GKB07, YS09, Tro09]).

Recentemente, foi apresentada em [PA01, APS03, MBB04] uma metodologia para a síntese de ganhos estáticos de realimentação de saída baseada em um procedimento de dois estágios. Tal metodologia foi desenvolvida e adaptada para lidar com outros tipos de sistemas [AGPP09, AGPP10, AOP10a, MOP11, AOP10b, AOP12], geralmente apresentando bons resultados. A adaptação da técnica de dois estágios para a síntese de controladores robustos de ordem reduzida, capazes de estabilizar sistemas afetados por parâmetros incertos e invariantes no tempo, é descrita no presente capítulo. As condições de síntese são também formuladas para gerar controladores que minimizem um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada.

A Seção 2.2 descreve a formulação do problema, que consiste em mostrar a forma como as incertezas são inseridas no modelo, e também apresentar como se pode obter uma representação aumentada do sistema para que a busca por um controlador dinâmico seja transformada em um problema de síntese de um ganho estático de realimentação de saída. A Seção 2.3 detalha o método de dois estágios, e as condições LMIs utilizadas em cada estágio são mostradas na Seção 2.4. A Seção 2.5 apresenta exemplos que ilustram as vantagens do método, e a Seção 2.6 conclui o capítulo.

2.2 Formulação do problema

Seja o sistema linear a tempo contínuo, invariante no tempo e incerto dado por

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)w(t) + B_2(\alpha)u(t) \\ z(t) = C_1(\alpha)x(t) + D_1(\alpha)w(t) + D_2(\alpha)u(t) \\ y(t) = C_2(\alpha)x(t) + D_y(\alpha)w(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ a entrada exógena, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada e $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída medida. É importante ressaltar que, conforme considerado em uma grande quantidade de artigos referentes a problemas similares, a entrada de controle $u(t)$ não afeta diretamente a saída medida $y(t)$. As matrizes do sistema pertencem a um domínio politópico e são definidas por

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i M_i, \ \alpha \in \Delta_N.$$

A matriz $M(\alpha)$ representa cada matriz dada em (2.1), N é o número de vértices do politopo, $M_i, i = 1, \ldots, N$ são os vértices e Δ_N é o simplex unitário definido em (1.31).

O problema abordado neste capítulo é a síntese de controladores de ordem reduzida que sejam capazes de estabilizar o sistema (2.1), garantindo que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema controlado seja menor que um escalar positivo γ predefinido. O controlador possui ordem $n_c \leq n$ e é dado por

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \tag{2.2}$$

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t), \tag{2.3}$$

sendo $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ os estados do controlador e as matrizes A_c, B_c, C_c e D_c, de dimensões apropriadas, devem ser determinadas. De acordo com uma estratégia conhecida (veja, por exemplo, [EOA97, YS09]), uma representação aumentada pode ser obtida agrupando-se os estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ do sistema com os estados $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ do controlador, resultando em

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) + B_2(\alpha)D_c C_2(\alpha) & B_2(\alpha)C_c \\ B_c C_2(\alpha) & A_c \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl}(\alpha)} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1(\alpha) + B_2(\alpha)D_c D_y(\alpha) \\ B_c D_y(\alpha) \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_{cl}(\alpha)} w(t) \tag{2.4}$$

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1(\alpha) + D_2(\alpha)D_c C_2(\alpha) & D_2(\alpha)C_c \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_{cl}(\alpha)} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_1(\alpha) + D_2(\alpha)D_c D_y(\alpha) \end{bmatrix}}_{\tilde{D}_{cl}(\alpha)} w(t) \tag{2.5}$$

Definindo-se

$$\tilde{K}_{of} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

o problema da síntese de um controlador robusto de ordem reduzida pode ser visto como a síntese de um ganho *estático* de realimentação de saída $\tilde{K}_{of} \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(n_c+q)}$ para o sistema em malha fechada

$$\tilde{\mathcal{G}} \triangleq \begin{cases} \dot{\eta}(t) = \tilde{A}(\alpha)\eta(t) + \tilde{B}_1(\alpha)w(t) + \tilde{B}_2(\alpha)u(t) \\ z(t) = \tilde{C}_1(\alpha)\eta(t) + \tilde{D}_1(\alpha)w(t) + \tilde{D}_2(\alpha)u(t) \\ y(t) = \tilde{C}_2(\alpha)\eta(t) + \tilde{D}_y(\alpha)w(t) \end{cases} \tag{2.7}$$

sendo

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix}, \ \tilde{B}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{B}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & B_2(\alpha) \\ \mathrm{I}_{n_c} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\tilde{C}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} C_1(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{D}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} D_1(\alpha) \end{bmatrix}, \ \tilde{D}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & D_2(\alpha) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$\tilde{C}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_{n_c} \\ C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{D}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ D_y(\alpha) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Portanto, as matrizes em malha fechada do sistema (2.4)-(2.5) são dadas por

$$\tilde{A}_{cl}(\alpha) = \tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \tag{2.11}$$

$$\tilde{B}_{cl}(\alpha) = \tilde{B}_1(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{D}_y(\alpha) \tag{2.12}$$

$$\tilde{C}_{cl}(\alpha) = \tilde{C}_1(\alpha) + \tilde{D}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \tag{2.13}$$

$$\tilde{D}_{cl}(\alpha) = \tilde{D}_1(\alpha) + \tilde{D}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{D}_y(\alpha). \tag{2.14}$$

2.3 Método de dois estágios

A abordagem principal utilizada para a síntese de ganhos estáticos de realimentação de saída é baseada no método de dois estágios, proposto por [PA01, AP02, APS03] com maiores desenvolvimentos em [MBB04, AGPP09, AGPP10, AOP10a, MOP11, AOP10b, AOP12]. Alguns resultados preliminares necessários para uma melhor compreensão do método são apresentados a seguir.

Teorema 2.1 As duas afirmações seguintes são equivalentes.

1. O sistema (2.7) é estabilizável por um ganho robusto de realimentação de saída se, e somente se, existirem matrizes $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$ e $\tilde{K}_{of}$ tais que a condição

$$(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha))'P(\alpha) + P(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)) < 0 \tag{2.15}$$

   seja válida $\forall \alpha \in \Delta_N$;

2. O sistema (2.7) é estabilizável por um ganho robusto de realimentação de saída se, e somente se, existirem matrizes $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$, R e L tais que a condição[1]

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \star & 0 \end{bmatrix} + sym\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{K}'_{sf}(\alpha) \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\tilde{C}_2(\alpha) & -R \end{bmatrix} \right\} < 0 \tag{2.16}$$

   seja válida $\forall \alpha \in \Delta_N$. Neste caso, o ganho de realimentação de saída é dado por $\tilde{K}_{of} = R^{-1}L$.

[1]Dada uma matriz M, a operação $sym\{M\}$ corresponde a $M + M'$.

Demonstração: A condição (2.15) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{C}_2'(\alpha)\tilde{K}_{of}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \tilde{B}_2'(\alpha)P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \tag{2.17}$$

Aplicando-se o lema da projeção (Lema 1.5) na condição (2.17), com

$$\mathcal{N}_u = \begin{bmatrix} I \\ \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) & -I \end{bmatrix} \text{ e } \Psi = \begin{bmatrix} \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \tilde{B}_2'(\alpha)P(\alpha) & 0 \end{bmatrix},$$

existe uma matriz $\mathcal{X}(\alpha)$ tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \tilde{B}_2'(\alpha)P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + sym\left\{\mathcal{X}(\alpha)\begin{bmatrix} \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) & -I \end{bmatrix}\right\} < 0. \tag{2.18}$$

A escolha de $\mathcal{X}'(\alpha) = [R_s'(\alpha) \quad - R']$, com $L = R\tilde{K}_{of}$ e $\tilde{K}_{sf}'(\alpha) = R_s(\alpha)R^{-1}$, permite verificar que a condição (2.18) é igual à condição (2.16), o que confirma a equivalência proposta pelo teorema. É importante ressaltar que, como $R + R' < 0$ na condição (2.18), então R é sempre invertível.

Lema 2.1 *A variável $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ na desigualdade* (2.16) *é um ganho estabilizante de realimentação de estados, e a função de Lyapunov $v(t,x) = x(t)'P(\alpha)x(t)$ demonstra simultaneamente a estabilidade dos sistemas em malha fechada cujas matrizes dinâmicas são dadas por $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)$ e $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)$.*

Demonstração: A multiplicação de (2.16) à esquerda por $[I \quad \tilde{K}_{sf}'(\alpha)]$ e à direita pelo transposto resulta em

$$(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha))'P(\alpha) + P(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)) < 0,$$

mostrando que $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ é um ganho estabilizante de realimentação de estados, e a estabilidade do sistema controlado é verificada utilizando-se a mesma função de Lyapunov $v(t,x) = x(t)'P(\alpha)x(t)$, com $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, considerada na demonstração da estabilidade do sistema em malha fechada com o ganho de realimentação de saída $\tilde{K}_{of}$ do Teorema 2.1.

O item 2 do Teorema 2.1 apresenta uma condição necessária e suficiente, mas não convexa e, portanto, de difícil resolução. No entanto, o Lema 2.1 permite, fixando uma das matrizes, que a condição possa ser relaxada em termos de duas partes convexas, com um certo grau de conservadorismo. Estratégias similares podem ser encontradas na literatura em vários problemas de controle formulados em termos de desigualdades matriciais não-lineares, em que tais desigualdades transformam-se em LMIs quando algumas das variáveis envolvidas é fixada [Iwa99, GS96]. Tal relaxação é a base do método de dois estágios, que é descrito no algoritmo a seguir.

Algoritmo 2.1 Método em dois estágios

- Estágio 1: Calcule um ganho estabilizante de realimentação de estados $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$;
- Estágio 2: Utilize o ganho $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ na condição (2.16) para calcular, se possível, um ganho estabilizante de realimentação de saída $\tilde{K}_{of}$.

O uso de diferentes ganhos $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ de realimentação de estados pode resultar em diferentes ganhos $\tilde{K}_{of}$ de realimentação de saída no segundo estágio, ou mesmo alterar a factibilidade da condição. Desta forma, para aumentar a possibilidade de que o segundo estágio seja factível, é importante experimentar diversas condições e métodos de síntese no primeiro estágio. A condição do segundo estágio pode ainda ser modificada de acordo com o objetivo do problema, por exemplo a obtenção de um ganho com uma certa estrutura ou de forma a otimizar algum critério de desempenho. No presente capítulo ambos os estágios são abordados por condições LMIs, conforme mostrado na seção a seguir.

2.4 Condições LMIs

O Teorema 2.2 apresenta uma condição para a síntese de um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros que assegura a estabilidade do sistema em malha fechada (2.7), isto é, a síntese de um ganho $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ garantindo a estabilidade assintótica de $\tilde{A}_{cl}(\alpha)$, apresentada em (2.11), $\forall\alpha \in \Delta_N$. O resultado do Teorema 2.2 pode ser visto como uma extensão para o caso dependente de parâmetros da condição de síntese sobre o sistema dual, com a utilização do Lema da Projeção (Lema 1.5) [PDSV09].

Teorema 2.2 Existe um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros que estabiliza o sistema (2.7) se existirem matrizes dependentes de parâmetros $W(\alpha) = W(\alpha)' > 0$, $Z_2(\alpha)$, $Z_3(\alpha)$, $Z_4(\alpha)$, $Q(\alpha)$ e $G(\alpha)$ tais que

$$\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)G(\alpha) + G(\alpha)'\tilde{A}'(\alpha) + \Omega(\alpha) + \Omega'(\alpha) & \star \\ W(\alpha) - G'(\alpha) + \xi\left(\tilde{A}(\alpha)G(\alpha) + \Omega(\alpha)\right) & -\xi(G(\alpha) + G'(\alpha)) \end{bmatrix} < 0, \text{ com} \tag{2.19}$$

$$\Omega(\alpha) = \begin{bmatrix} B_2(\alpha)Q(\alpha)Y + B_2(\alpha)Z_3(\alpha) & B_2(\alpha)Q(\alpha) + B_2(\alpha)Z_4(\alpha) \\ Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

para um matriz constante Y e um escalar $\xi > 0$ predefinidos. Se a condição (2.19) for satisfeita, então

$$\tilde{K}_{sf}(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \\ Q(\alpha)Y + Z_3(\alpha) & Q(\alpha) + Z_4(\alpha) \end{bmatrix} G(\alpha)^{-1} \tag{2.20}$$

é um ganho estabilizante de realimentação de estados para o sistema aumentado (2.7).

Demonstração: Denotando-se $Q(\alpha) \triangleq X(\alpha)Z_2(\alpha)$, a matriz $\Omega(\alpha)$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\Omega(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_2(\alpha)X(\alpha)Z_2(\alpha)Y + B_2(\alpha)Z_3(\alpha) & B_2(\alpha)X(\alpha)Z_2(\alpha) + B_2(\alpha)Z_4(\alpha) \\ Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{B}_2(\alpha)T^{-1}(\alpha)\hat{Z}(\alpha),\end{aligned}$$

com $\tilde{B}_2(\alpha)$ definido em (2.8) e

$$\hat{Z}(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \\ Z_3(\alpha) & Z_4(\alpha) \end{bmatrix}, \quad T(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X(\alpha) & I \end{bmatrix}.$$

Após a multiplicação de $\Gamma(\alpha)$ por $V'(\alpha)$ à esquerda e por $V(\alpha)$ à direita, com $V(\alpha) = \operatorname{diag}(G(\alpha)^{-1}, G(\alpha)^{-1})$, tem-se

$$\mathcal{Y}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{cc} F(\alpha)\overline{A}(\alpha) + \overline{A}'(\alpha)F'(\alpha) & \star \\ P(\alpha) - F'(\alpha) + \xi F(\alpha)\overline{A}(\alpha) & -\xi(F(\alpha) + F'(\alpha)) \end{array} \right]$$

com $\overline{A}(\alpha) \triangleq \tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)$, $F(\alpha) \triangleq (G'(\alpha))^{-1}$, $P(\alpha) \triangleq (G'(\alpha))^{-1}W(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{sf}(\alpha) &= T^{-1}(\alpha)\hat{Z}(\alpha)G(\alpha)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q(\alpha)Z_2^{-1}(\alpha) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \\ Z_3(\alpha) & Z_4(\alpha) \end{bmatrix} G(\alpha)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \\ Q(\alpha)Y + Z_3(\alpha) & Q(\alpha) + Z_4(\alpha) \end{bmatrix} G^{-1} = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

A multiplicação de $\mathcal{Y}(\alpha)$ por $[I \quad \overline{A}'(\alpha)]$ à esquerda e pelo transposto à direita resulta em $\overline{A}'(\alpha)P(\alpha)+P(\alpha)\overline{A}(\alpha) < 0$. Tal desigualdade, em conjunto com $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, é a condição de Lyapunov para a estabilidade do sistema em malha fechada [Kha02].

Observação 2.1 *A matriz $T(\alpha)$ foi utilizada no Teorema 2.2 para que as matrizes da realização de estados do controlador dinâmico correspondam a uma representação controlável e observável, como em [YS09]. Esta manipulação é feita pois foi observado, após testes exaustivos, que a utilização de controladores resultantes do primeiro estágio que sejam controláveis e observáveis forneceu melhores resultados. Por fim, diferentemente das condições mostradas em [YS09], as condições resultantes da manipulação proposta são convexas em termos de $T(\alpha)$.*

Observação 2.2 *As LMIs do Teorema 2.2 dependem do escalar ξ e da matriz Y, que podem ser vistos como graus de liberdade na busca de uma solução factível. Com relação ao escalar ξ pode-se, por exemplo, efetuar uma busca linear para encontrar um valor apropriado, ou mesmo testar valores pré-selecionados em um conjunto. A matriz Y é utilizada para ajustar as dimensões do bloco $(1,1)$ de $\hat{Z}(\alpha)$, para que se recupere $X(\alpha)$ a partir de $Q(\alpha)Z_2^{-1}(\alpha)$. Nos exemplos, foi utilizada a matriz $Y \triangleq [I_{n_c\times(n-1)} \; 0_{n_c\times 1}]$, mas outras escolhas de dimensões apropriadas podem ser consideradas.*

Observação 2.3 *Para obter uma expressão convexa para $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ resultante do Teorema 2.2, é necessário que a variável G seja independente de parâmetros.*

Uma condição suficiente para a existência de um ganho de realimentação de saída, tal que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada seja menor do que um valor predefinido, é apresentada no Teorema 2.3. A condição do teorema pressupõe que um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros que estabiliza o sistema é dado. O ganho pode ser obtido, por exemplo, usando a condição do Teorema 2.2 ou qualquer outro método disponível na literatura.

Teorema 2.3 [AOP12] Seja $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ um ganho estabilizante de realimentação de estados. Se existirem matrizes $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, $F(\alpha)$, $V(\alpha)$, $H(\alpha)$, R e L e um escalar $\gamma > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11}(\alpha) & \Upsilon_{12}(\alpha) & \Upsilon_{13}(\alpha) & \Upsilon_{14}(\alpha) & \Upsilon_{15}(\alpha) \\ \star & -V(\alpha) - V'(\alpha) & V(\alpha)\tilde{B}_1(\alpha) & 0 & V(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \star & \star & -\gamma^2\mathrm{I} & \tilde{D}_1'(\alpha)H(\alpha) & \tilde{D}_y'(\alpha)L' \\ \star & \star & \star & \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha) & H'(\alpha)\tilde{D}_2(\alpha) \\ \star & \star & \star & \star & -R - R' \end{bmatrix} < 0, \ \forall \alpha \in \Delta_N \tag{2.21}$$

com

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11}(\alpha) &= \big(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)\big)'F'(\alpha) + F(\alpha)\big(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)\big) \\ \Upsilon_{12}(\alpha) &= P(\alpha) - F(\alpha) + \big(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)\big)'V'(\alpha) \\ \Upsilon_{13}(\alpha) &= F(\alpha)\tilde{B}_1(\alpha) \\ \Upsilon_{14}(\alpha) &= \tilde{C}_1'(\alpha)H(\alpha) + \tilde{K}_{sf}'(\alpha)\tilde{D}_2'(\alpha)H(\alpha) \\ \Upsilon_{15}(\alpha) &= F(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) + \tilde{C}_2'(\alpha)L' - \tilde{K}_{sf}'(\alpha)R' \end{aligned}$$

então $\tilde{K}_{of} = R^{-1}L$ é um ganho robusto de realimentação de saída que estabiliza o sistema (2.7) com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ dado por γ.

Demonstração: Se a condição (2.21) for satisfeita, então também é verificada substituindo-se $\mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha)$ por $-H'(\alpha)H(\alpha)$, uma vez que $(\mathrm{I} - H(\alpha))'\big(\mathrm{I} - H(\alpha)\big) \geq 0$ implica $-H'(\alpha)H(\alpha) \leq \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha)$. Após a multiplicação da condição resultante por $T_1(\alpha)$ à esquerda e por $T_1'(\alpha)$ à direita, com

$$T_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & S_1'(\alpha) \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & S_2'(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$S_1(\alpha) = R^{-1}L\tilde{C}_2(\alpha) - \tilde{K}_{sf}(\alpha), \quad S_2(\alpha) = R^{-1}L\tilde{D}_y(\alpha),$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} F(\alpha)\tilde{A}_{cl}(\alpha) + \tilde{A}_{cl}'(\alpha)F'(\alpha) & P(\alpha) - F(\alpha) + \tilde{A}_{cl}'(\alpha)V'(\alpha) & F(\alpha)\tilde{B}_{cl}(\alpha) & \tilde{C}_{cl}'(\alpha)H(\alpha) \\ \star & -V(\alpha) - V'(\alpha) & V(\alpha)\tilde{B}_{cl}(\alpha) & 0 \\ \star & \star & -\gamma^2\mathrm{I} & \tilde{D}_{cl}'(\alpha)H(\alpha) \\ \star & \star & \star & -H(\alpha)H'(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \tag{2.22}$$

A multiplicação de (2.22) à esquerda por $T_2'(\alpha)$ e à direita por $T_2(\alpha)$, sendo

$$T_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{cl}(\alpha) & \tilde{B}_{cl}(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & H(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}$$

produz

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)\tilde{A}_{cl}(\alpha) + \tilde{A}'_{cl}(\alpha)P(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_{cl}(\alpha) & \tilde{C}'_{cl}(\alpha) \\ \star & -\gamma^2\mathrm{I} & \tilde{D}'_{cl}(\alpha) \\ \star & \star & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.23}$$

que é a versão dependente de parâmetros do *Bounded Real Lemma* (Lema 1.7). Portanto, o ganho robusto de realimentação de saída $\tilde{K}_{of} = R^{-1}L$ estabiliza o sistema em malha fechada (2.7) satisfazendo $||\tilde{\mathcal{G}}||_\infty < \gamma$, $\forall\alpha \in \Delta_N$.

Note que a condição do Teorema 2.3 corresponde ao segundo estágio do método descrito no Algoritmo 2.1. Para o primeiro estágio do método, é utilizado neste capítulo o Teorema 2.2. Uma vez que o Teorema 2.2 possibilita a síntese do ganho de realimentação de estados com $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$, uma condição similar à condição (2.21), porém dependente diretamente das matrizes $Z(\alpha)$ e $G(\alpha)$, pode ser obtida.

Teorema 2.4 [AOP12] Seja $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ um ganho estabilizante de realimentação de estados. Se existirem matrizes $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, $F(\alpha)$, $V(\alpha)$, $H(\alpha)$, R e L e um escalar $\gamma > 0$ tais que a condição dependente de parâmetros (2.21), substituindo-se Υ_{1j} por $\tilde{\Upsilon}_{1j}$, $j = 1, \ldots, 5$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Upsilon}_{11}(\alpha) &= G'(\alpha)F(\alpha)\big(\tilde{A}(\alpha)G(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)Z(\alpha)\big) + \big(\tilde{A}(\alpha)G(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)Z(\alpha)\big)'F'(\alpha)G(\alpha)\\
\tilde{\Upsilon}_{12}(\alpha) &= G'(\alpha)\big(P(\alpha) - F(\alpha) + \tilde{A}'(\alpha)V'(\alpha)\big) + Z'(\alpha)\tilde{B}'_2(\alpha)V'(\alpha)\\
\tilde{\Upsilon}_{13}(\alpha) &= G'(\alpha)F(\alpha)\tilde{B}_1(\alpha)\\
\tilde{\Upsilon}_{14}(\alpha) &= \big(G'(\alpha)\tilde{C}'_1(\alpha) + Z'(\alpha)\tilde{D}'_2(\alpha)\big)H(\alpha)\\
\tilde{\Upsilon}_{15}(\alpha) &= G'(\alpha)\big(F(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) + \tilde{C}'_2(\alpha)L'\big) - Z'(\alpha)R'
\end{aligned}$$

seja satisfeita, então $\tilde{K}_{of} = R^{-1}L$ é um ganho robusto de realimentação de saída que estabiliza o sistema (2.7) satisfazendo $||\tilde{\mathcal{G}}||_\infty < \gamma$.

Demonstração: A multiplicação da versão modificada de (2.21) à direita por

$$\mathrm{diag}(G(\alpha)^{-1}, \mathrm{I}, \mathrm{I}, \mathrm{I}, \mathrm{I})$$

e à esquerda por seu transposto resulta na LMI original (2.21).

Todas as condições LMIs apresentadas são problemas de otimização de dimensão infinita, uma vez que devem ser verificadas $\forall\alpha \in \Delta_N$. Conforme discutido em [BOMP06, OP07], as LMIs dependentes de parâmetros no simplex unitário podem ser resolvidas, sem conservadorismo, após uma sequência de relaxações: as variáveis de decisão são modeladas como polinômios homogêneos de grau g arbitrário e, quanto maior for o valor de g, menor o conservadorismo das LMIs geradas. No entanto, a complexidade das condições cresce consideravelmente com o aumento do grau dos polinômios. A complexidade dos métodos baseados na resolução de LMIs pode ser estimada a partir do número de variáveis escalares e de linhas das LMIs, que variam com a ordem do sistema, com a ordem do controlador, com o número de vértices do politopo e com o grau das variáveis polinomiais. A dificuldade na programação das

LMIs também aumenta dependendo da quantidade de vértices e do grau dos polinômios. Para contornar tal dificuldade, foi desenvolvido um pacote computacional para construir automaticamente um conjunto finito de LMIs a partir de sua descrição dependente de parâmetros, sem que o usuário tenha que se preocupar com, por exemplo, isolar cada monômio ou com a homogeneização dos polinômios. As LMIs também poderiam ser programadas com o auxílio de outros pacotes computacionais, como por exemplo o Yalmip [Löf04], porém um interpretador especializado pode construir as LMIs mais rapidamente. O interpretador desenvolvido e utilizado nesta tese é denominado ROLMIP (*Robust LMI Parser*) e está disponível em `http://www.dt.fee.unicamp.br/~agulhari/softwares/robust_lmi_parser.zip`.

O Teorema 2.4 pode também ser utilizado no segundo estágio do método descrito no Algoritmo 2.1. Apesar de os Teoremas 2.3 e 2.4 serem equivalentes para um dado conjunto $\alpha \in \Delta_N$, as LMIs resultantes das relaxações podem não ser e, portanto, podem fornecer diferentes ganhos. Os resultados obtidos são ilustrados nos exemplos numéricos, mostrados na Seção 2.5. Ambos os teoremas podem ser adaptados para gerar controladores sem levar em consideração a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema controlado; para tanto basta excluir a terceira, quarta e quinta linhas e colunas na condição (2.21), conforme apresentado em [AOP10b].

2.4.1 Procedimento iterativo

O método em dois estágios é um método eficaz para a síntese de ganhos estabilizantes de realimentação de saída. No entanto, se o objetivo é a minimização de uma norma, melhores resultados podem ser obtidos com a aplicação de um procedimento iterativo. Tal procedimento, especializado para as condições LMIs apresentadas no capítulo e projetado para a minimização do limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada, consiste basicamente no algoritmo apresentado na sequência.

Algoritmo 2.2 Procedimento iterativo

1. Atribua a variável de iteração $k \leftarrow 0$ e defina a quantidade máxima de iterações $k_{max} > 0$ e a tolerância de convergência $\epsilon > 0$;

2. Calcule um ganho estabilizante de realimentação de estados $\tilde{K}_{sf}^{(0)}(\alpha)$ utilizando o Teorema 2.2;

3. Calcule o ganho inicial de realimentação de saída $\tilde{K}_{of}^{(0)}$ e o limitante $\gamma^{(0)}$ resultante da minimização do valor de γ sujeito à condição do Teorema 2.3 ou do Teorema 2.4;

4. Obtenha o ganho de realimentação de estados dado por $\tilde{K}_{sf}^{(k+1)}(\alpha) = \tilde{K}_{of}^{(k)}\tilde{C}_2(\alpha)$;

5. Utilize o ganho $\tilde{K}_{sf}^{(k)}(\alpha)$, para resolver o problema de otimização

$$\gamma^* = \min \gamma \quad \text{sujeito a} \;\; (2.21).$$

   Se $\gamma^* < \gamma^{(k)}$, atribua $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^*$ e recupere o controlador correspondente $\tilde{K}_{of}^{(k+1)}$, senão atribua $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)}$;

6. Faça $k \leftarrow k+1$. Se $k = k_{max}$ ou se $|\gamma^{(k-1)} - \gamma^{(k)}|/\gamma^{(k-1)} < \epsilon$, pare; senão, retorne ao passo 4.

É importante ressaltar que o limitante final γ resultante do procedimento iterativo, que pode ser interpretado como um procedimento de otimização local, pode variar de acordo com o ganho de realimentação de estados calculado na etapa 2. Dessa forma, uma técnica que envolvesse a busca do melhor ganho de realimentação de estados seria necessária para tratar o problema de uma forma global.

A convergência do procedimento para $D_y(\alpha) = 0$ é garantida, como demonstrado a seguir.

Teorema 2.5 Considere o sistema (2.7) com $D_y(\alpha) = 0$. Seja $\tilde{K}_{of}$ um ganho estabilizante de realimentação de saída e γ o limitante mínimo proveniente da condição do Teorema 2.3. O limitante mínimo $\hat{\gamma}$ resultante da utilização de $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)$ no Teorema 2.3 satisfaz $\hat{\gamma} \leq \gamma$.

Demonstração: A aplicação do lema da projeção (Lema 1.5), com

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11}(\alpha) & \Upsilon_{12}(\alpha) & \Upsilon_{13}(\alpha) & \Upsilon_{14}(\alpha) & F(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \star & -V(\alpha) - V'(\alpha) & V(\alpha)\tilde{B}_1(\alpha) & 0 & V(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \star & \star & -\gamma^2 \mathrm{I} & \tilde{D}_1'(\alpha)H(\alpha) & 0 \\ \star & \star & \star & \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha) & H'(\alpha)\tilde{D}_2(\alpha) \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}, \ \mathcal{X} = R, \ \Lambda' = \begin{bmatrix} S'(\alpha) \\ 0 \\ Q'(\alpha) \\ 0 \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}, \ S(\alpha) = R^{-1}L\tilde{C}_2(\alpha) - \tilde{K}_{sf}(\alpha), \ Q(\alpha) = R^{-1}L\tilde{D}_y,$$

$$\mathcal{N}_u = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ S(\alpha) & 0 & Q(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{N}_v' = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

permite verificar que a condição (2.21) é equivalente às condições

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha))'F'(\alpha) \\ +F(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)) \end{matrix} & \star & \star & \star \\ P(\alpha) - F'(\alpha) + V(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)) & -V(\alpha) - V'(\alpha) & \star & \star \\ \tilde{B}_1'(\alpha)F'(\alpha) & \tilde{B}_1'(\alpha)V'(\alpha) & -\gamma^2 \mathrm{I} & \star \\ H'(\alpha)(\tilde{C}_1(\alpha) + \tilde{D}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)) & 0 & H'(\alpha)\tilde{D}_1(\alpha) & \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

e

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c}(\tilde{A}(\alpha)+\tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha))'F'(\alpha)\\ +F(\alpha)(\tilde{A}(\alpha)+\tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha))\end{array} & \star & \star & \star \\ P(\alpha)-F'(\alpha)+V(\alpha)(\tilde{A}(\alpha)+\tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)) & -V(\alpha)-V'(\alpha) & \star & \star \\ \tilde{B}_1'(\alpha)F'(\alpha) & \tilde{B}_1'(\alpha)V'(\alpha) & -\gamma^2\mathrm{I} & \star \\ H'(\alpha)(\tilde{C}_1(\alpha)+\tilde{D}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)) & 0 & H'(\alpha)\tilde{D}_1(\alpha) & \mathrm{I}-H(\alpha)-H'(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (2.25)$$

que são, respectivamente, as condições relacionadas ao *Bounded Real Lemma* (Lema 1.7) dos sistemas em malha fechada com o ganho de realimentação de estados $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ e com o ganho de realimentação de saída $\tilde{K}_{of}$. Suponha que a condição (2.21) é satisfeita com $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$, $\tilde{K}_{of}$ e γ (isto é, a aplicação do método de dois estágios possui uma solução factível); portanto as condições (2.24) e (2.25) são também satisfeitas. A mudança de variáveis $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)$ na condição (2.24) a torna igual à condição (2.25), mostrando que tal mudança na condição original (2.21), com o mesmo valor de γ, mantém a factibilidade da condição. Portanto, a minimização de γ sujeito a (2.21) com $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)$ resulta em $\hat{\gamma} \leq \gamma$, demonstrando o não crescimento da variável. Esta última informação, em conjunto com a existência de um limitante inferior de γ (por ser um valor relacionado a uma norma), demonstra a convergência do procedimento iterativo.

O Teorema 2.5 mostra a convergência do procedimento iterativo para o caso $D_y(\alpha) = 0$. Quando a saída é afetada por $D_y(\alpha) \neq 0$, a demonstração apresentada não se aplica e, até o momento, não foi possível demonstrar a convergência do procedimento. Note, no entanto, que o algoritmo pode tratar a possibilidade de um aumento do valor de γ durante o procedimento, mas é importante ressaltar que tal situação não foi observada em nenhum dos diversos experimentos realizados.

2.5 Exemplos numéricos

As rotinas foram implementadas no Matlab, versão 7.0.1 (R14) com os pacotes Yalmip [Löf04] e SeDuMi [Stu99]. O computador utilizado foi um AMD® Phenom II Quad Core 945 (3.0 GHz), 3.2GB RAM, Linux Ubuntu 9.04. O Teorema 2.2 foi utilizado na primeira etapa com $\xi = 0.05$.

2.5.1 Exemplo I

É importante mencionar que não há, na literatura, uma grande quantidade de métodos capazes de lidar com incertezas em todas as matrizes do sistema. O método apresentado é comparado à abordagem proposta em [YS09], que é uma técnica para a síntese de controladores robustos que considera a presença de incertezas tanto na matriz de dinâmica quanto na matriz de saída, de forma a minimizar um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema controlado. No entanto, a técnica de [YS09] exige que algumas matrizes sejam precisamente conhecidas. Nos exemplos, os parâmetros escalares α_1, α_2, α_3 e α_q usados por [YS09] (seguindo a notação do artigo) são considerados iguais e pertencentes ao conjunto $\{0.01, 0.05, 0.1, 1, 10\}$, sendo que somente os melhores resultados são apresentados. A técnica apresentada em [GKB07] é também considerada nas comparações, porém os controladores resultantes são sempre de ordem completa e algumas matrizes do sistema devem ser precisamente conhecidas.

Considere o modelo de uma versão modificada do controle de arfagem da aeronave F4E, apresentado em [YS09], cujas matrizes são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -10^4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^4 \end{bmatrix},$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os valores dos parâmetros da matriz A, para cada um dos $N = 4$ vértices do sistema, são mostrados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Valores dos parâmetros da matriz A considerada no Exemplo I, para cada um dos $N = 4$ vértices.

Vértice	1	2	3	4
a_{11}	-0.9896	-0.6607	-1.702	-0.5162
a_{12}	17.41	18.11	50.72	29.96
a_{13}	96.15	84.34	263.5	178.9
a_{21}	0.2648	0.08201	0.2201	-0.6896
a_{22}	-0.8512	-0.6587	-1.418	-1.225
a_{23}	-11.39	-10.81	-31.99	-30.38
b_1	-97.78	-272.2	-85.09	-175.6

Os menores limitantes para o custo $\mathcal{H}_\infty$ obtidos com o método de dois estágios com a posterior aplicação do procedimento iterativo (Algoritmo 2.2), utilizando os Teoremas 2.3 e 2.4 no segundo estágio, assim como os resultados provenientes de [YS09] e [GKB07], são mostrados na Tabela 2.2. O procedimento iterativo foi aplicado até um máximo de $k_{max} = 10$ iterações e uma tolerância de convergência de $\epsilon = 0.001$. Diferentes valores para os graus das matrizes polinomiais $P(\alpha)$ (no primeiro e segundo estágios), $Z(\alpha)$ e $G(\alpha)$ foram considerados. As variáveis de folga $F(\alpha)$, $V(\alpha)$ e $H(\alpha)$ possuem dependência afim em α. O conjunto $g = \{g_{sf}, g_{of}, g_Z, g_G\}$

indica, respectivamente, os graus da matriz de Lyapunov $P(\alpha)$ no primeiro e segundo estágios, e os graus das matrizes $Z(\alpha)$ e $G(\alpha)$. Apenas as configurações com os melhores resultados são mostradas.

Analisando a Tabela 2.2, é possível notar que o aumento na ordem dos controladores não implica necessariamente em melhores resultados. Uma explicação para tal efeito é que, assim como diferentes ganhos de realimentação de estados aplicados no segundo estágio podem fornecer diferentes resultados, uma mudança no valor de n_c pode implicar em diferentes ganhos de realimentação de estados e, consequentemente, não há uma relação entre os valores de norma para os diferentes controladores obtidos. Pode-se perceber também, na parte inferior da Tabela 2.2, que a utilização de ganhos robustos de realimentação de estados não é vantajosa para o método. Em comparação com outras abordagens, o método de dois estágios em conjunto com o procedimento iterativo produziu melhores resultados em 100% dos casos.

Tabela 2.2: Resultados para o Exemplo I. Para cada ordem n_c considerada, os valores dos limitantes $\gamma^{(0)}$ e $\gamma^{(k)}$, respectivamente antes e depois do procedimento iterativo (com os tempos de execução, em segundos, entre parênteses) são mostrados, assim como os graus $\{g_{sf}, g_{of}, g_Z, g_G\}$ das matrizes que forneceram os resultados apresentados.

	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$	$n_c = 3$	$n_c = 4$
Outros métodos					
[YS09]	7.52 (1)	3.98 (1)	4.05 (2)	3.96 (2)	3.95 (3)
[GKB07]	—	—	—	—	—
Teoremas 2.3 e 2.4 (menores normas $\tilde{\gamma}$ obtidas)					
Graus	$\{1,2,2,0\}$	$\{2,2,1,1\}$	$\{1,2,2,2\}$	$\{1,2,1,1\}$	$\{2,2,1,0\}$
$\gamma^{(0)}$	3.41 (15)	4.59 (27)	12.55 (154)	12.76 (103)	3.10 (92)
Iterações	3	7	10	10	10
$\gamma^{(k)}$	3.08 (30)	2.46 (68)	2.08 (159)	1.81 (245)	2.21 (572)
Teoremas 2.3 e 2.4 com graus $\{0,1,0,0\}$ (ou seja, ganhos robustos de realimentação de estados)					
$\gamma^{(0)}$	3.81 (6)	4.06 (7)	4.67 (12)	5.25 (19)	4.75 (51)
Iterações	4	10	10	10	10
$\gamma^{(k)}$	3.09 (27)	3.24 (77)	3.09 (140)	2.65 (208)	2.79 (513)

Os controladores $\tilde{K}_{of}$ que produziram os menores valores de γ, para cada valor de n_c, são mostrados a seguir.

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=0)} = \begin{bmatrix} 0.0586 & 0.4884 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=1)} = \begin{bmatrix} -1.6339 & -0.1443 & 0.2948 \\ -0.8907 & 0.1271 & 1.2624 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=2)} = \begin{bmatrix} -5.3331 & -4.5634 & -0.1954 & -0.7206 \\ -3.6117 & -10.4232 & -0.6498 & -4.4825 \\ 2.2537 & 5.4385 & 0.3881 & 2.5172 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=3)} = \begin{bmatrix} -35.4251 & -6.5711 & 15.1283 & -0.3314 & -1.3825 \\ -19.1838 & -8.0675 & 12.2609 & -0.8755 & -5.6835 \\ -45.5396 & -9.1124 & 17.9406 & -0.4876 & -0.7140 \\ 15.1329 & 4.0481 & -9.0492 & 0.4777 & 3.6535 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=4)} = \begin{bmatrix} 2.7037 & -0.4076 & -0.7353 & -2.0702 & -0.0502 & -0.1141 \\ 39.6620 & -4.8091 & -8.0747 & -13.8495 & -0.5210 & -3.0966 \\ 21.4227 & -1.6266 & -5.6690 & -8.7825 & -0.1718 & 0.2802 \\ -0.9464 & 0.0094 & 0.2227 & -2.3368 & -0.0050 & -0.0531 \\ 5.5532 & 0.1459 & -1.4757 & 1.5482 & 0.1135 & 0.9722 \end{bmatrix}$$

As normas $\mathcal{H}_\infty$ de pior caso, calculadas posteriormente por um procedimento de força bruta baseado na utilização de uma amostragem fina em $\alpha \in \Delta_N$, para o sistema em malha fechada com os controladores dados, são: $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 3.08$ ($n_c = 0$), $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 2.46$ ($n_c = 1$), $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 2.08$ ($n_c = 2$), $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 1.81$ ($n_c = 3$) e $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 2.20$ ($n_c = 4$).

Note que os valores dos limitantes após o procedimento iterativo se aproximam dos valores reais da norma de pior caso dos sistemas em malha fechada (calculados posteriormente), o que indica um baixo grau de conservadorismo das condições neste exemplo. Com relação aos graus das matrizes, para todos os valores de n_c os menores limitantes $\gamma^{(0)}$ foram obtidos utilizando-se grau igual a 2 para a matriz de Lyapunov no segundo estágio, o que era previsto uma vez que os resultados para essa configuração contêm os possíveis resultados obtidos utilizando-se graus menores. No entanto, o mesmo não pode ser afirmado para as outras matrizes. Por fim, somente os resultados relacionados aos menores valores de $\gamma^{(k)}$ foram mostrados, mas os valores obtidos por outras combinações de g_{sf}, g_{of}, g_Z e g_G foram menores do que os resultados de [YS09] e [GKB07] em 96% dos casos.

O problema de falhas parciais nos sensores pode ser modelado pela presença de incertezas na matriz de saída. Considere, por exemplo, que os sensores podem operar entre 50% e 100% da sua capacidade, produzindo a seguinte matriz de saída

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.5 \leq c_{11} = c_{22} \leq 1$$

Com base nos limitantes mínimos e máximos dos parâmetros incertos, um novo modelo politópico com $N = 8$ vértices é obtido para o sistema. Neste caso, o método de [GKB07] não foi capaz de gerar soluções factíveis. Utilizando-se o método de [YS09], os menores limitantes da norma $\mathcal{H}_\infty$ foram iguais a 37.20, para $n_c = 0, 1, 2, 3, 4$. De fato, para este caso as realizações dos controladores resultantes não são nem controláveis e nem observáveis, e portanto os controladores dinâmicos obtidos podem ser reduzidos a ganhos estáticos de realimentação de saída com o mesmo custo garantido. Por sua vez, os controladores obtidos pelo método de dois estágios não apresentam tal comportamento, e os respectivos limitantes são mostrados na Tabela 2.3.

2.5.2 Exemplo II

Considere uma versão modificada do modelo massa-mola apresentado em [Iwa96] e dada por

$$\left[\begin{array}{c:c:c} A(\alpha) & B_1 & B_2 \\ \hdashline C_1 & D_1 & D_2 \\ \hdashline C_2 & D_y & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:c:c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{k_1(\alpha)+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_0(\alpha)}{m_1} & 0 & 1 & m_1 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{c_0(\alpha)}{m_2} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

com $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_2 = 0.5$ e $1 \leq k_1 \leq 4$, $1 \leq c_0 \leq 4$, produzindo um politopo de $N = 4$ vértices.

Para este exemplo, o método [GKB07] não gerou soluções factíveis. Com a abordagem de [YS09], o custo $\mathcal{H}_\infty$ garantido é de 17.58 (após 1 segundo em média), para $n_c = 0, 1, 2, 3, 4$. A Tabela 2.4 mostra os resultados obtidos com o método de dois estágios com a aplicação do procedimento iterativo, e a Figura 2.1 mostra a evolução dos limitantes γ durante a aplicação do procedimento iterativo. O método exigiu um maior esforço computacional, porém produziu controladores robustos com custos $\mathcal{H}_\infty$ menores em 100% dos casos.

2.6 Conclusão

Um método para a síntese de controladores dinâmicos de ordem reduzida para sistemas lineares incertos e invariantes no tempo, minimizando um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada, foi apresentado neste capítulo. O problema corresponde à síntese de ganhos estáticos de realimentação de saída considerando uma representação aumentada do sistema, seguindo uma técnica simples e conhecida na literatura. A síntese é feita pela aplicação de um

Tabela 2.3: Resultados para o Exemplo I com falhas nos sensores. Para cada ordem n_c considerada, os valores dos limitantes $\gamma^{(0)}$ e $\gamma^{(k)}$, respectivamente antes e depois do procedimento iterativo (com os tempos de execução, em segundos, entre parênteses), são mostrados, assim como os graus $\{g_{sf}, g_{of}, g_Z, g_G\}$ das matrizes que forneceram os resultados apresentados. O método de [GKB07] não gerou soluções factíveis, e o custo garantido resultante de [YS09] foi de 37.20 para todos os valores de n_c.

Teoremas 2.3 e 2.4 (menores limitantes $\tilde{\gamma}$ obtidos)					
	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$	$n_c = 3$	$n_c = 4$
Graus	$\{2,2,1,0\}$	$\{2,2,1,1\}$	$\{2,2,2,0\}$	$\{2,2,2,0\}$	$\{2,2,2,0\}$
$\gamma^{(0)}$	3.94 (61)	6.66 (473)	3.95 (843)	3.67 (1727)	3.92 (6151)
Iterações	10	1	10	10	10
$\gamma^{(k)}$	3.29 (151)	2.76 (30)	2.96 (1638)	3.13 (3162)	2.92 (3823)

Tabela 2.4: Resultados para o Exemplo II. Para cada ordem n_c considerada, os valores dos limitantes $\gamma^{(0)}$ e $\gamma^{(k)}$, respectivamente antes e depois do procedimento iterativo (com os tempos de execução, em segundos, entre parênteses), são mostrados, assim como os graus $\{g_{sf}, g_{of}, g_Z, g_G\}$ das matrizes que forneceram os resultados apresentados. O método de [GKB07] não gerou soluções factíveis, e o custo garantido resultante de [YS09] foi de 17.58 para todos os valores de n_c.

Teoremas 2.3 e 2.4 (menores limitantes $\tilde{\gamma}$ obtidos)					
	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$	$n_c = 3$	$n_c = 4$
Graus	$\{1, 2, 2, 2\}$	$\{2, 2, 2, 0\}$	$\{2, 2, 1, 1\}$	$\{2, 2, 2, 0\}$	$\{2, 2, 1, 1\}$
$\gamma^{(0)}$	10.52 (32)	17.04 (11)	8.70 (64)	13.59 (33)	8.66 (58)
Iterações	10	10	10	10	10
$\gamma^{(k)}$	7.54 (50)	7.27 (48)	6.73 (100)	6.95 (141)	6.68 (278)

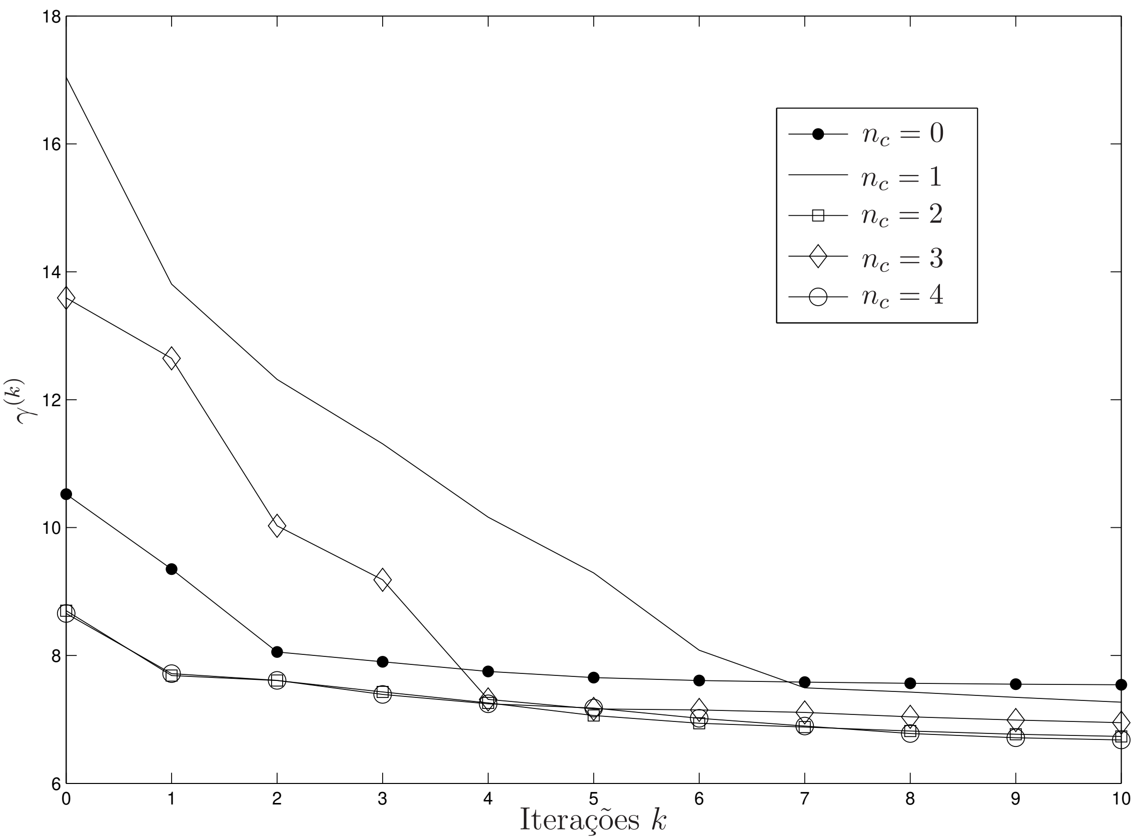

Figura 2.1: Evolução dos limitantes γ para cada iteração da aplicação do procedimento iterativo no Exemplo II.

método de dois estágios, que consiste na síntese de um ganho de realimentação de estados, possivelmente dependente de parâmetros, e sua posterior aplicação a uma condição LMI responsável por gerar, se possível, o ganho de realimentação de saída. Note que o ganho de realimentação de estados, que pode ser dependente de parâmetros, cumpre apenas um papel intermediário no algoritmo e não precisa ser implementado. Pode-se também aplicar um procedimento iterativo a fim de reduzir a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada. Uma série de exemplos foi apresentada para ilustrar as capacidades da abordagem proposta, que foi melhor do que outros métodos comparados na maior parte dos casos.

Capítulo 3

Sistemas LPV com incertezas nas medidas

3.1 Introdução

No Capítulo 2 foi considerado o problema de síntese de controladores estabilizantes, incluindo a norma $\mathcal{H}_\infty$ como critério de desempenho, para sistemas lineares e dependentes de parâmetros incertos e invariantes no tempo. No entanto, há situações em que os parâmetros são variantes no tempo, como por exemplo a massa de um foguete na fase de lançamento. A linearização de sistemas não-lineares pode conduzir a modelos lineares aos parâmetros variantes (em inglês, *Linear Parameter Varying* — LPV). A adaptação das condições de análise e síntese de sistemas LTI para tratar o caso LPV é feita de forma relativamente simples, porém para obterem-se condições menos conservadoras é necessário conhecer não só os limitantes dos valores dos parâmetros, mas também das taxas de variação.

A técnica apresentada neste capítulo para a síntese de controladores de ordem reduzida, de forma que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada seja menor do que um valor predefinido, é uma extensão da técnica em dois estágios apresentada no Capítulo 2. O objetivo do presente capítulo é a síntese de controladores escalonados, ou seja, o controlador depende de um conjunto de parâmetros que são mensuráveis em tempo real. O controlador é projetado para que seja robusto a ruídos nas medidas, e supõe-se que as normas dos ruídos são conhecidas.

A estrutura das incertezas considerada para o método é apresentada na Seção 3.2. A Seção 3.3 descreve a formulação do problema e detalha a modelagem do sistema e do controlador a ser calculado. As condições utilizadas nos dois estágios do método são desenvolvidas na Seção 3.4, e exemplos ilustram a validade da técnica na Seção 3.5. Por fim, a Seção 3.6 conclui o capítulo.

3.2 Estrutura dos parâmetros

Considere o sistema linear a tempo contínuo e dependente de parâmetros variantes no tempo, dado por

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) + B_2(\theta(t))u(t) \tag{3.1}$$

$$z(t) = C_1(\theta(t))x(t) + D_1(\theta(t))w(t) + D_2(\theta(t))u(t) \tag{3.2}$$

$$y(t) = C_2(\theta(t))x(t) + D_y(\theta(t))w(t) \tag{3.3}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ a entrada exógena, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída controlada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída medida e $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \ldots \ \theta_Q(t)]$ é o vetor com os Q parâmetros variantes no tempo, que satisfazem

$$\underline{a}_i \le \theta_i(t) \le \overline{a}_i, \quad \underline{d}_i \le \dot{\theta}_i(t) \le \overline{d}_i, \quad 0 \in [\underline{d}_i, \overline{d}_i], \quad i = 1, \ldots, Q.$$

Para simplificar a notação, a dependência de $\theta(t)$ em t será omitida no restante do capítulo. As matrizes do sistema (3.1)-(3.3) possuem dependência afim na variável θ e são dadas por

$$M(\theta) = M_0 + \sum_{i=1}^{Q} \theta_i M_i. \tag{3.4}$$

Conforme mostrado no Capítulo 2, é possível obter condições e métodos convexos e de simples tratamento se as matrizes do sistema são representadas em função de parâmetros pertencentes ao simplex unitário. A transformação dos parâmetros θ em parâmetros no simplex unitário é feita por meio da estrutura multi-simplex, definida a seguir.

Definição 3.1 *Um multi-simplex Δ é o produto cartesiano $\Delta_{N_1} \times \ldots \times \Delta_{N_Q}$ de um número finito de Q simplexos. A dimensão de Δ é denotada pelo índice $N = (N_1, \ldots, N_Q)$ e, para simplicidade de notação, $\mathbb{R}^N$ denota o espaço $\mathbb{R}^{N_1+\ldots+N_Q}$. Um elemento qualquer α de Δ é decomposto como $(\alpha_1, \ldots, \alpha_Q)$ e, subsequentemente, cada $\alpha_i \in \Delta_{N_i}$ é decomposto por $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{iN_i})$.*

Cada variável θ_i pode ser escrita em função de um simplex de dois vértices, cujos elementos α_i são dados por

$$\alpha_{i1} = \frac{\theta_i - \overline{a}_i}{\underline{a}_i - \overline{a}_i}, \ \alpha_{i2} = 1 - \alpha_{i1}, \quad \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) \in \Delta_2, \quad i = 1, \ldots, Q, \tag{3.5}$$

resultando em

$$\theta_i = \alpha_{i1}(\underline{a}_i - \overline{a}_i) + \overline{a}_i, \quad i = 1, \ldots, Q. \tag{3.6}$$

Aplicando a transformação (3.5), cada matriz dependente de forma afim em θ pode ser representada como um politopo em α. Por exemplo, considere a representação (3.4) com $Q = 1$, isto é,

$$M(\theta) = M_0 + \theta_1 M_1.$$

A aplicação da mudança de variáveis proposta resulta em

$$M(\alpha) = M_0 + \overline{a}_1 M_1 + \alpha_{11}(\underline{a}_1 - \overline{a}_1)M_1.$$

Após a homogeneização de $M(\alpha)$[1], tem-se

$$M(\alpha) = (\alpha_{11} + \alpha_{12})(M_0 + \overline{a}_1 M_1) + \alpha_{11}(\underline{a}_1 - \overline{a}_1)M_1.$$

A matriz polinomial $M(\alpha)$ pode, portanto, ser escrita como

$$M(\alpha) = \alpha_{11}T_1 + \alpha_{12}T_2, \alpha_1 \in \Delta_2,$$

com $T_1 = M_0 + \underline{a}_1 M_1$ e $T_2 = M_0 + \overline{a}_1 M_1$.

Analisando-se as relações em (3.5), tem-se que os limitantes das taxas de variação das variáveis α_i são iguais a

$$-\frac{\overline{d}_i}{\overline{a}_i - \underline{a}_i} \leq \dot{\alpha}_{i1} \leq -\frac{\underline{d}_i}{\overline{a}_i - \underline{a}_i}, \quad \frac{\underline{d}_i}{\overline{a}_i - \underline{a}_i} \leq \dot{\alpha}_{i2} \leq \frac{\overline{d}_i}{\overline{a}_i - \underline{a}_i}, \quad i = 1, \ldots, Q. \tag{3.7}$$

O espaço de valores das taxas de variação $\dot{\alpha}_i$ pode ser representado, se os limitantes forem conhecidos, por um politopo dado por [CGTV07]

$$\Upsilon_i = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^{N_i} : \varphi = \sum_{\ell=1}^{R_i} \eta_{i\ell} H_i^{(\ell)}, \quad \sum_{q=1}^{N_i} H_i(q,j) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, N_i, \quad \eta_i \in \Delta_{R_i} \right\},$$

sendo $H_i^{(\ell)}$ a ℓ-ésima coluna da matriz H_i, que é construída utilizando os limitantes de $\dot{\alpha}_i$ e considerando que a soma dos elementos de cada coluna de $H_i^{(\ell)}$ é nula, uma vez que

$$\sum_{\ell=1}^{N_i} \dot{\alpha}_{i\ell} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\ell=1}^{N_i} \alpha_{i\ell} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, Q.$$

Especificamente para um simplex de dois elementos cujos limitantes são dados por (3.7), a matriz H_i é dada por

$$H_i = \frac{1}{\overline{a}_i - \underline{a}_i} \begin{bmatrix} -\overline{d}_i & -\underline{d}_i \\ \overline{d}_i & \underline{d}_i \end{bmatrix}.$$

3.3 Formulação do problema

O principal problema considerado neste capítulo é a síntese de controladores estabilizantes de ordem reduzida e dependentes dos parâmetros θ, supondo que seja possível obter, em tempo real, os valores dos parâmetros para utilizar essa informação no cômputo do sinal de controle. Note que a implementação pode depender de um subconjunto dos parâmetros, mais especificamente dos parâmetros que possam ser medidos em tempo real, sendo os demais tratados como incertezas paramétricas. Todavia, é necessário levar em conta as imperfeições na obtenção dos parâmetros, para garantir a robustez dos controladores caso haja diferenças entre os valores reais dos parâmetros e os valores medidos. Considere que os parâmetros medidos são dados por

$$\tilde{\theta}_i = (1 + \rho_i)(\theta_i + \delta_i), i = 1, \ldots, Q$$

[1]Procedimento realizado para que todos os monômios do polinômio apresentem o mesmo grau.

sendo θ_i o valor real, δ_i o ruído aditivo e ρ_i o ruído multiplicativo, com

$$\underline{b_i} \leq \delta_i \leq \overline{b}_i, \quad \underline{c_i} \leq \rho_i \leq \overline{c}_i, \quad i = 1, \ldots, Q.$$

O objetivo é a construção de um controlador dinâmico de ordem $n_c \leq n$ cuja realização de estado é dada por

$$\dot{x}_c(t) = A_c(\tilde{\theta})x_c(t) + B_c(\tilde{\theta})y(t) \tag{3.8}$$

$$u(t) = C_c(\tilde{\theta})x_c(t) + D_c(\tilde{\theta})y(t), \tag{3.9}$$

sendo $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ os estados do controlador. A ordem do controlador é definida *a priori*, constitui um grau de liberdade a mais que permite que se melhore o equilíbrio entre o desempenho do controlador e o custo de implementação. As matrizes $A_c(\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c(\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_c \times q}$, $C_c(\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ e $D_c(\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times q}$ possuem dependência afim em $\tilde{\theta}_i = (1+\rho_i)(\theta_i + \delta_i)$ e podem ser genericamente representadas por

$$M_c(\tilde{\theta}) = M_{c_0} + \sum_{i=1}^{Q}(1+\rho_i)(\theta_i + \delta_i)M_{c_i}. \tag{3.10}$$

Após realizar uma mudança de variáveis similar a (3.5) em δ_i e ρ_i, tem-se

$$\breve{\alpha}_{i1} = \frac{\delta_i - \overline{b_i}}{\underline{b_i} - \overline{b_i}}, \ \breve{\alpha}_{i2} = 1 - \breve{\alpha}_{i1}, \ \breve{\alpha}_i \in \Delta_2, \ i = 1, \ldots, Q$$

e

$$\hat{\alpha}_{i1} = \frac{\rho_i - \overline{c_i}}{\underline{c_i} - \overline{c_i}}, \ \hat{\alpha}_{i2} = 1 - \hat{\alpha}_{i1}, \ \hat{\alpha}_i \in \Delta_2, \ i = 1, \ldots, Q.$$

Um domínio multi-simplex pode ser obtido ao se aplicar o mesmo procedimento realizado em θ_i. Por exemplo, se $Q = 1$,

$$M_c(\tilde{\theta}) = M_{c_0} + (1+\rho_1)(\theta_1 + \delta_1)M_{c_1}. \tag{3.11}$$

Neste caso, as variáveis do multi-simplex são $\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, \breve{\alpha}_1, \hat{\alpha}_1)$, com $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \in \Delta_2$ referentes a θ_1, $\breve{\alpha}_1 = (\breve{\alpha}_{11}, \breve{\alpha}_{12}) \in \Delta_2$ referentes a δ_1 e $\hat{\alpha}_1 = (\hat{\alpha}_{11}, \hat{\alpha}_{12}) \in \Delta_2$ referentes a ρ_1. Após tal mudança de variáveis, a matriz $M_c(\tilde{\theta})$ dada em (3.11) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} M_c(\tilde{\alpha}) = M_{c_0} &+ \hat{\alpha}_{11}(\underline{c_1} - \overline{c_1})\Big(\alpha_{11}(\underline{a_1} - \overline{a_1}) + \breve{\alpha}_{11}(\underline{b_1} - \overline{b_1})M_{c_1} \\ &+ (1+\overline{c_1})(\alpha_{11}(\underline{a_1} - \overline{a_1}) + \breve{\alpha}_{11}(\underline{b_1} - \overline{b_1}) + (\overline{a_1} + \overline{b_1})\Big)M_{c_1} + \hat{\alpha}_{11}(\underline{c_1} - \overline{c_1})(\overline{a_1} + \overline{b_1})M_{c_1} \end{aligned} \tag{3.12}$$

e, após um procedimento de homogeneização, a matriz polinomial com parâmetros no multi-simplex de dimensão $N = (2,2,2)$ é representada por

$$M_c(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \alpha_{1i}\breve{\alpha}_{1j}\hat{\alpha}_{1k}T_{ijk}$$

cujos coeficientes matriciais são iguais a

$$T_{ijk} = M_{c_0} + ((i-1)\overline{a_1} + (2-i)\underline{a_1} + (j-1)\overline{b_1} + (2-j)\underline{b_1})(1 + (k-1)\overline{c_1} + (2-k)\underline{c_1})M_{c_1}. \tag{3.13}$$

O procedimento é adaptado para tratar qualquer matriz polinomial com $Q \geq 1$ utilizando as equações a seguir.

$$M_c(\tilde{\alpha}) = \sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_Q=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_Q=1}^{2} \sum_{k_1=1}^{2} \cdots \sum_{k_Q=1}^{2} \alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{Qi_Q} \check{\alpha}_{1j_1} \ldots \check{\alpha}_{Qj_Q} \hat{\alpha}_{1k_1} \ldots \hat{\alpha}_{Qk_Q} T_{i_1 \ldots i_Q j_1 \ldots j_Q k_1 \ldots k_Q} \tag{3.14}$$

$$T_{i_1 \ldots i_Q j_1 \ldots j_Q k_1 \ldots k_Q} = M_{c0} + \sum_{\ell=1}^{Q} ((i_\ell - 1)\overline{a_\ell} + (2 - i_\ell)\underline{a_\ell} + (j_\ell - 1)\overline{b_\ell} + (2 - j_\ell)\underline{b_\ell})(1 + (k_\ell - 1)\overline{c_\ell} + (2 - k_\ell)\underline{c_\ell}) M_{c_\ell}.$$

Desta forma, a dependência das matrizes do controlador $A_c(\tilde{\alpha})$, $B_c(\tilde{\alpha})$, $C_c(\tilde{\alpha})$ e $D_c(\tilde{\alpha})$ nos parâmetros $\tilde{\alpha}$ pode ser modelada conforme feito com $M_c(\tilde{\alpha})$ em (3.14).

Considere que a mudança de variáveis proposta em (3.14) foi aplicada nas matrizes do sistema (3.1)-(3.3). Assim como feito no Capítulo 2, a síntese de um controlador dinâmico (3.8)-(3.9) é equivalente à síntese de um ganho estático de realimentação de saída para o sistema aumentado

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{A}(\tilde{\alpha})\eta(t) + \tilde{B}_1(\tilde{\alpha})w(t) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})u(t) \tag{3.15}$$

$$z(t) = \tilde{C}_1(\tilde{\alpha})\eta(t) + \tilde{D}_1(\tilde{\alpha})w(t) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})u(t) \tag{3.16}$$

$$y(t) = \tilde{C}_2(\tilde{\alpha})\eta(t) + \tilde{D}_y(\tilde{\alpha})w(t), \tag{3.17}$$

com $\eta(t)' = [x(t)' \;\; x_c(t)']$ e

$$\tilde{A}(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} A(\tilde{\alpha}) & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix}, \; \tilde{B}_1(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} B_1(\tilde{\alpha}) \\ 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{B}_2(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & B_2(\tilde{\alpha}) \\ \mathrm{I}_{n_c} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} C_1(\tilde{\alpha}) & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{D}_1(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} D_1(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix}, \; \tilde{D}_2(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & D_2(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_{n_c} \\ C_2(\tilde{\alpha}) & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{D}_y(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 \\ D_y(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

As matrizes do sistema aumentado em malha fechada com um ganho de realimentação de saída $\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})$ são iguais a

$$\tilde{A}_{cl}(\tilde{\alpha}) = \tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) \tag{3.21}$$

$$\tilde{B}_{cl}(\tilde{\alpha}) = \tilde{B}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}) \tag{3.22}$$

$$\tilde{C}_{cl}(\tilde{\alpha}) = \tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) \tag{3.23}$$

$$\tilde{D}_{cl}(\tilde{\alpha}) = \tilde{D}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}) \tag{3.24}$$

e o ganho é dado por

$$\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} A_c(\tilde{\alpha}) & B_c(\tilde{\alpha}) \\ C_c(\tilde{\alpha}) & D_c(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

3.4 Condições LMIs

A abordagem considerada para a síntese de um ganho estabilizante de realimentação de saída, de forma que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada seja limitada superiormente por um dado valor positivo γ, é o método de dois estágios apresentado na Seção 2.3. Para isso, no entanto, as condições LMI utilizadas em cada estágio devem ser adaptadas para o caso LPV. O teorema a seguir apresenta uma condição de síntese de ganhos de realimentação de estados, utilizada no primeiro estágio do método.

Teorema 3.1 Existe um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros que estabiliza o sistema (3.15)-(3.17) se existirem matrizes dependentes de parâmetros $W(\tilde{\alpha}) = W'(\tilde{\alpha}) > 0$, $Z_2(\tilde{\alpha})$, $Z_3(\tilde{\alpha})$, $Z_4(\tilde{\alpha})$ e $Q(\tilde{\alpha})$ e uma matriz constante G que satisfaçam

$$\Gamma(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\tilde{\alpha})G + G'\tilde{A}'(\tilde{\alpha}) + \Omega(\tilde{\alpha}) + \Omega'(\tilde{\alpha}) + \dot{W}(\tilde{\alpha}) & \star \\ W(\tilde{\alpha}) - G' + \xi\left(\tilde{A}(\tilde{\alpha})G + \Omega(\tilde{\alpha})\right) & -\xi(G + G') \end{bmatrix} < 0, \text{ com} \tag{3.26}$$

$$\Omega(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} B_2(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha})Y + B_2(\tilde{\alpha})Z_3(\tilde{\alpha}) & B_2(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) + B_2(\tilde{\alpha})Z_4(\tilde{\alpha}) \\ Z_2(\tilde{\alpha})Y & Z_2(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix}$$

para uma matriz fixa Y e um escalar $\xi > 0$ predefinidos. Se a condição (3.26) for satisfeita, então

$$\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} Z_2(\tilde{\alpha})Y & Z_2(\tilde{\alpha}) \\ Q(\tilde{\alpha})Y + Z_3(\tilde{\alpha}) & Q(\tilde{\alpha}) + Z_4(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} (G')^{-1} \tag{3.27}$$

é um ganho estabilizante de realimentação de estados para o sistema aumentado (3.15)-(3.17).

Demonstração: Similar à demonstração do Teorema 2.2.

Uma vez que $\tilde{\alpha} = (\alpha, \breve{\alpha}, \hat{\alpha}) \in \Delta_N = \Delta_{N_1} \times \cdots \times \Delta_{N_Q}$ implica $\dot{\tilde{\alpha}} = (\dot{\alpha}, \dot{\breve{\alpha}}, \dot{\hat{\alpha}}) \in \Upsilon$ para todo $t \geq 0$, a matriz $\dot{W}(\tilde{\alpha})$ pode ser calculada por

$$\dot{W}(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{Q}\sum_{j=1}^{N_i} \frac{\partial W(\tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} \dot{\tilde{\alpha}}_{ij} = \sum_{i=1}^{Q}\sum_{j=1}^{N_i} \frac{\partial W(\tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} \sum_{\ell=1}^{R_i} \eta_{i\ell} H_i(j,\ell).$$

Uma condição suficiente para a existência de um ganho de realimentação de saída, de forma que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada seja limitada por um valor predefinido, é apresentada no teorema a seguir.

Teorema 3.2 Seja $\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})$ um ganho estabilizante de realimentação de estados. Se existirem matrizes $P(\tilde{\alpha}) = P'(\tilde{\alpha}) > 0$, $S(\tilde{\alpha})$, $G(\tilde{\alpha})$, $Q(\tilde{\alpha})$, $J(\tilde{\alpha})$ e $H(\tilde{\alpha})$ e um escalar $\gamma > 0$ tais que

$$\Omega(\tilde{\alpha}) \triangleq \begin{bmatrix} (\tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}'_{sf}(\tilde{\alpha}))S'(\tilde{\alpha}) + S(\tilde{\alpha})(\tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})) + \dot{P}(\tilde{\alpha}) & \star & \star & \star & \star \\ P(\tilde{\alpha}) - S'(\tilde{\alpha}) + G(\tilde{\alpha})(\tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})) & -G(\tilde{\alpha}) - G'(\tilde{\alpha}) & \star & \star & \star \\ \tilde{B}'_1(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) & \tilde{B}'_1(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & -\gamma^2 I & \star & \star \\ Q'(\tilde{\alpha})(\tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})) & 0 & Q'(\tilde{\alpha})D_1(\tilde{\alpha}) & I - Q(\tilde{\alpha}) - Q'(\tilde{\alpha}) & \star \\ \tilde{B}'_2(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) + J(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) - H(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha}) & \tilde{B}'_2(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & J(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}) & \tilde{D}'_2(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) & -H(\tilde{\alpha}) - H'(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.28}$$

então

$$\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha}) = \left[\begin{array}{c:c} A_c(\tilde{\alpha}) & B_c(\tilde{\alpha}) \\ \hdashline C_c(\tilde{\alpha}) & D_c(\tilde{\alpha}) \end{array}\right] = H(\tilde{\alpha})^{-1}J(\tilde{\alpha}) \tag{3.29}$$

é um controlador dinâmico estabilizante e o custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada é dado por γ.

Demonstração: É possível aplicar o lema da projeção (Lema 1.5) na condição (3.28), com

$$\mathcal{X} = H(\tilde{\alpha}), \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} Y(\tilde{\alpha}) & 0 & \overline{Y}(\tilde{\alpha}) & 0 & -I \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{V}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

sendo $Y(\tilde{\alpha}) = H(\tilde{\alpha})^{-1}J(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) - \tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})$, $\overline{Y}(\tilde{\alpha}) = H(\tilde{\alpha})^{-1}J(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha})$ e

$$\Psi = \begin{bmatrix} \overline{A}'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) + S(\tilde{\alpha})\overline{A}(\tilde{\alpha}) + \dot{P}(\tilde{\alpha}) & \star & \star & \star & \star \\ P(\tilde{\alpha}) - S'(\tilde{\alpha}) + G(\tilde{\alpha})\overline{A}(\tilde{\alpha}) & -G(\tilde{\alpha}) - G'(\tilde{\alpha}) & \star & \star & \star \\ \tilde{B}_1'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) & \tilde{B}_1'(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & -\gamma^2\mathrm{I} & \star & \star \\ Q'(\tilde{\alpha})\overline{C}(\tilde{\alpha}) & 0 & Q'(\tilde{\alpha})D_1(\tilde{\alpha}) & \mathrm{I} - Q(\tilde{\alpha}) - Q'(\tilde{\alpha}) & \star \\ \tilde{B}_2'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) & \tilde{B}_2'(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & 0 & \tilde{D}_2'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha}), \qquad \overline{C}(\tilde{\alpha}) = \tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha}). \tag{3.30}$$

Sejam as matrizes $\mathcal{N}_v$ e $\mathcal{N}_v$ definidas como

$$\mathcal{N}_v = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{N}_u = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ Y(\tilde{\alpha}) & 0 & \overline{Y}(\tilde{\alpha}) & 0 \end{bmatrix},$$

de forma que $\mathcal{N}_v\ \mathcal{V} = 0$ e $\mathcal{N}_u'\Lambda' = 0$, portanto as desigualdades da condição $ii)$ do lema da projeção resultam em

$$\mathcal{N}_v\Psi\mathcal{N}_v' = \begin{bmatrix} \overline{A}'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) + S(\tilde{\alpha})\overline{A}(\tilde{\alpha}) + \dot{P}(\tilde{\alpha}) & \star \\ P(\tilde{\alpha}) - S'(\tilde{\alpha}) + G(\tilde{\alpha})\overline{A}(\tilde{\alpha}) & -G(\tilde{\alpha}) - G'(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.31}$$

e

$$\begin{bmatrix} S(\tilde{\alpha})A_{cl}(\tilde{\alpha}) + A_{cl}'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) + \dot{P}(\tilde{\alpha}) & P(\tilde{\alpha}) - S(\tilde{\alpha}) + A_{cl}'(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & S(\tilde{\alpha})B_{cl}(\tilde{\alpha}) & C_{cl}'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) \\ \star & -G(\tilde{\alpha}) - G'(\tilde{\alpha}) & G(\tilde{\alpha})B_{cl}(\tilde{\alpha}) & 0 \\ \star & \star & -\gamma^2\mathrm{I} & D_{cl}'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) \\ \star & \star & \star & -Q'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} < \mathcal{N}_u'\Psi\mathcal{N}_u < 0, \tag{3.32}$$

pois $(\mathrm{I} - Q(\tilde{\alpha}))'(\mathrm{I} - Q(\tilde{\alpha})) \geq 0$ implica $-Q'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) \leq \mathrm{I} - Q(\tilde{\alpha}) - Q'(\tilde{\alpha})$, com

$$A_{cl}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}), \qquad B_{cl}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{B}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}),$$
$$C_{cl}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}), \qquad D_{cl}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{D}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}).$$

A LMI (3.31) é a condição de estabilidade de $\tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})$, que garante que $\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})$ é um ganho estabilizante de realimentação de estados. A multiplicação de (3.32) por $T_3(\tilde{\alpha})$ à direita e por $T_3'(\tilde{\alpha})$ à esquerda, com

$$T_3(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ A_{cl}(\tilde{\alpha}) & B_{cl}(\tilde{\alpha}) & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & Q(\tilde{\alpha})^{-1} \end{bmatrix},$$

resulta no *Bounded Real Lemma* (Lema 1.7), associado à função de Lyapunov $v(t,x) = x'P(\tilde{\alpha})x$, com

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + y(t)'y(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) < 0.$$

Portanto, o controlador dinâmico (3.8)-(3.9) estabiliza o sistema (3.1)-(3.3) com um custo $\mathcal{H}_\infty$ garantido igual a γ.

3.4.1 Detalhes adicionais do método

A abordagem empregada para a síntese de controladores dinâmicos de ordem $n_c \leq n$, com um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada, é baseada no método de dois estágios e na aplicação do procedimento iterativo, apresentados em detalhes no Capítulo 2. Entretanto, o método deve ser adaptado para sistemas cujos parâmetros incertos são variantes no tempo, utilizando as condições mostradas no presente capítulo.

Algoritmo 3.1 Procedimento iterativo

1. Calcule um ganho estabilizante de realimentação de estados $\tilde{K}_{sf}^{(0)}(\tilde{\alpha})$ utilizando o Teorema 3.1;

2. Calcule o ganho de realimentação de saída $\tilde{K}_{of}^{(0)}(\tilde{\alpha})$ e a norma $\gamma^{(0)}$ resultantes da minimização de γ sujeito a (3.28);

3. Atribua $k \leftarrow 0$ e defina a quantidade máxima de iterações $k_{max} > 0$ e a tolerância de convergência $\epsilon > 0$;

4. Com o ganho $\tilde{K}_{of}^{(k)}(\tilde{\alpha})$, obtenha o ganho de realimentação de estados $\tilde{K}_{sf}^{(k+1)}(\tilde{\alpha}) = \tilde{K}_{of}^{(k)}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha})$;

5. Com o ganho $\tilde{K}_{sf}^{(k)}(\tilde{\alpha})$, resolva o problema de otimização

$$\gamma^* = \min \gamma \quad \text{sujeito a} \;\; (3.28).$$

   Se $\gamma^* < \gamma^{(k)}$, atribua $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^*$ e recupere o controlador correspondente $\tilde{K}_{of}^{(k+1)}(\tilde{\alpha})$, senão atribua $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)}$;

6. Incremente $k \leftarrow k+1$. Se $k = k_{max}$ ou se $|\gamma^{(k-1)} - \gamma^{(k)}|/\gamma^{(k-1)} < \epsilon$, pare; senão, retorne ao passo 4.

As LMIs dependentes de parâmetros podem ser resolvidas, por exemplo, realizando uma sequência de relaxações como a proposta em [OP07, OBP08]. O interpretador ROLMIP, utilizado para obter o conjunto finito de condições LMIs no Capítulo 2, não foi utilizado neste capítulo uma vez que ainda não estavam programadas as funções e definições necessárias para a implementação de variáveis multi-simplex. A matriz de Lyapunov $W(\tilde{\alpha})$ e as matrizes $\hat{Z}(\tilde{\alpha})$ e $Q(\tilde{\alpha})$ do Teorema 3.1, bem como a matriz de Lyapunov $P(\tilde{\alpha})$ e as matrizes $S(\tilde{\alpha})$, $G(\tilde{\alpha})$, $Q(\tilde{\alpha})$ do Teorema 3.2 são modeladas como polinômios homogêneos de grau genérico em $\tilde{\alpha}$. Porém, as variáveis $H(\tilde{\alpha})$ e $J(\tilde{\alpha})$ do Teorema 3.2 devem ser modeladas da forma mostrada em (3.10), para que as matrizes $A_c(\tilde{\theta})$, $B_c(\tilde{\theta})$, $C_c(\tilde{\theta})$ e $D_c(\tilde{\theta})$ do controlador (3.8)-(3.9) possam ser recuperadas.

Os graus das variáveis de decisão consideradas nos exemplos numéricos são definidos conforme descrito a seguir.

1. Os graus associados à matriz de Lyapunov $W(\tilde{\alpha})$ e $P(\tilde{\alpha})$ são iguais a 1. Se os limitantes das taxas de variação não são conhecidos, devem ser utilizadas W e P independentes de parâmetros (estabilidade quadrática);

2. As variáveis de folga $\hat{Z}(\tilde{\alpha})$ e $Q(\tilde{\alpha})$ do Teorema 3.1 e as variáveis $S(\tilde{\alpha})$, $G(\tilde{\alpha})$, $Q(\tilde{\alpha})$ do Teorema 3.2 apresentam graus iguais a 1;

3. Os graus das variáveis $H(\tilde{\alpha})$ e $J(\tilde{\alpha})$ do Teorema 3.2 são iguais a 1 caso deseje-se obter controladores dependentes de parâmetros, conforme feito nos exemplos numéricos, ou iguais a 0 caso o objetivo seja sintetizar controladores robustos.

3.5 Exemplos numéricos

As rotinas foram implementadas em MATLAB, versão 7.0.1 (R14) com os pacotes Yalmip [Löf04] e SeDuMi [Stu99]. O computador utilizado é um AMD® Phenom II Quad Core 945 (3.0 GHz), 3.2GB RAM, Linux Ubuntu 9.04.

3.5.1 Exemplo I

Seja o sistema apresentado em [MOP06] cujas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned}
A(\theta) &= \begin{bmatrix} 25.9 & 1 \\ 20 & 34 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 40 & 64 \end{bmatrix}, B_1(\theta) = \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.47 \end{bmatrix}, \\
B_2(\theta) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, C_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
D_1(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} D_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} D_y(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

sendo $\theta \in [0, 1]$ e $-1 \leq \dot{\theta} \leq 1$. Supõe-se que o parâmetro θ seja afetado por um ruído aditivo δ tal que $|\delta| \leq \zeta$ e $|\dot{\delta}| \leq 10$, com ζ definido a seguir. Neste exemplo, foi utilizado o Algoritmo 3.1 com $\xi = 0.1$ no Teorema 3.1, $k_{max} = 5$ para a quantidade máxima de iterações e uma tolerância de convergência de $\epsilon = 10^{-4}$. Primeiramente, os resultados obtidos com o Algoritmo 3.1 são comparados com os resultados obtidos por [DBG08, Theorem 2], que é um método capaz de sintetizar controladores dinâmicos de ordem completa, dependentes de parâmetros e robustos a ruídos aditivos no sensoriamento dos parâmetros. Tal método, no entanto, não é capaz de sintetizar controladores de ordem reduzida, não considera a presença de ruídos multiplicativos e só é capaz de lidar com a presença de parâmetros variantes na matriz de dinâmica $A(\theta)$, o que o torna um método restritivo em comparação à abordagem utilizada no Algoritmo 3.1.

A Figura 3.1 mostra os limitantes γ das normas $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas em malha fechada após a aplicação do método de [DBG08] e do Algoritmo 3.1, antes e após 2 iterações, alterando-se o valor do limitante ζ do ruído aditivo. Note que o método [DBG08] pode dar resultados melhores para valores pequenos de ζ, mas o limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada cresce de forma aproximadamente linear com o aumento da ação do ruído. O Algoritmo 3.1, no entanto, fornece resultados praticamente invariantes ao aumento da ação do ruído e, consequentemente, pode ser considerado mais robusto.

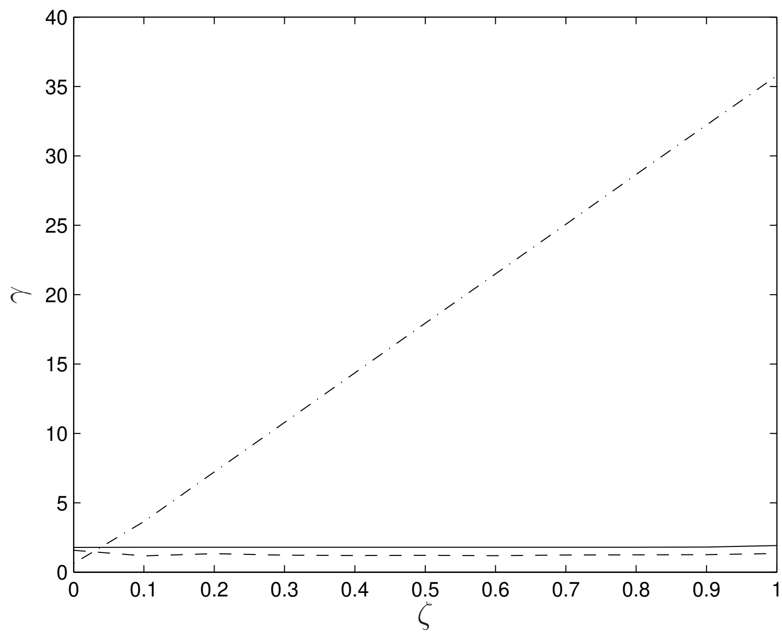

Figura 3.1: Resultados, para o Exemplo I, da comparação entre os limitantes das normas $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada com os controladores resultantes da aplicação do Algoritmo 3.1, antes (curva contínua) e após (curva tracejada) 2 iterações, e do método [DBG08] (curva traceja e pontilhada), variando-se o valor do limitante ζ do ruído aditivo.

A Tabela 3.1 apresenta os resultados obtidos considerando-se a síntese de controladores de ordem reduzida com a ação de um ruído multiplicativo, com $|\rho| \leq 0.2$ e $|\dot{\rho}| \leq 10$. Neste caso, o ruído aditivo considerado é tal que $|\delta| \leq 0.5$ e $|\dot{\delta}| \leq 10$. Note que os valores resultantes dos limitantes das normas, neste exemplo, não são significativamente afetados pela presença do ruído multiplicativo, o que ilustra a robustez da técnica.

Tabela 3.1: Resultados para o Exemplo I da aplicação do Algoritmo 3.1, considerando-se ruídos aditivos e multiplicativos, para a síntese de controladores de ordem reduzida. A tabela mostra os limitantes da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada antes ($\gamma^{(0)}$) e após ($\gamma^{(k)}$) k iterações.

	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$
$\gamma^{(0)}$	1.81	1.80	1.89
k	2	1	1
$\gamma^{(k)}$	1.07	1.17	1.69

3.5.2 Exemplo II

Considere o modelo da dinâmica do eixo lateral da aeronave L-1011, apresentado em [GB86, GPS96] cujas matrizes são dadas por

$$
\begin{aligned}
&A(\theta) = \begin{bmatrix} -2.98 & 0.93+\theta & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix}, \quad B_1(\theta) = \mathrm{I}, \quad B_2(\theta) = \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0 \\ 0 \\ -1.6 \end{bmatrix}, \\
&C_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
&D_1(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2(\theta) = 0, \quad D_y(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

com $\theta \in [-1.5, 1.5]$ e $-0.5 \leq \dot{\theta} \leq 0.5$. Supõe-se que o parâmetro θ seja afetado por um ruído aditivo δ com $|\delta| \leq \zeta$ e $|\dot{\delta}| \leq 1$, sendo ζ definido a seguir. Inicialmente, o Algoritmo 3.1 é aplicado utilizando $\xi = 500$ no Teorema 3.1, $k_{max} = 5$ para a quantidade máxima de iterações e uma tolerância de convergência $\epsilon = 10^{-4}$. A Tabela 3.2 mostra os limitantes γ das normas $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas em malha fechada após a aplicação do método de [DBG08] e do Algoritmo 3.1, antes e depois do procedimento iterativo, modificando-se o valor do limitante ζ do ruído. Assim como no Exemplo I, o resultado da aplicação do método de [DBG08] foi melhor para $\zeta = 0$ (ou seja, sem a presença de ruídos), mas um pequeno aumento no valor do ruído causou uma degradação considerável no resultado, e a técnica não retorna resultados factíveis para $\zeta \geq 0.4$. Por outro lado, a robustez do Algoritmo 3.1 pôde novamente ser verificada, pois as normas resultantes são praticamente invariantes ao aumento da norma do ruído para os valores analisados, e o método é factível para todo $\zeta < 1$.

A Tabela 3.3 apresenta os resultados obtidos considerando-se a síntese de controladores de ordem reduzida com a ação do ruído multiplicativo ρ, com $|\rho| \leq 0.5$ e $|\dot{\rho}| \leq 1$. Neste caso, o ruído aditivo considerado é tal que $|\delta| \leq 0.5$, e a constante ξ utilizada no Teorema 3.1 é um dos valores do conjunto $\{200, 500\}$. Neste exemplo, o procedimento iterativo não melhorou significativamente o valor dos limitantes, estagnando após um número pequeno, ou mesmo nulo, de iterações. Note que os valores resultantes das normas, neste exemplo, não são consideravelmente afetados pela presença do ruído multiplicativo, o que ilustra a robustez da técnica.

Tabela 3.2: Resultados, para o Exemplo II, da comparação entre o Algoritmo 3.1, antes ($\gamma^{(0)}$) e após ($\gamma^{(k)}$) k iterações, e o método [DBG08], para a síntese de controladores de ordem completa, alterando-se o limitante ζ do ruído aditivo.

Método	Limitantes $\mathcal{H}_\infty$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.4$	$\zeta = 0.6$	$\zeta = 0.8$	$\zeta = 0.99$
Alg. 3.1	$\gamma^{(0)}$	3.43	3.32	3.63	3.63	3.59	3.33
	k	2	0	0	0	1	1
	$\gamma^{(k)}$	2.93	3.32	3.63	3.63	2.87	2.91
[DBG08]	γ	0.50	130.79	—	—	—	—

Tabela 3.3: Resultados para o Exemplo II da aplicação do Algoritmo 3.1, considerando ruídos aditivos e multiplicativos, para a síntese de controladores de ordem reduzida. A tabela mostra os limitantes da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada antes ($\gamma^{(0)}$) e após ($\gamma^{(k)}$) k iterações.

	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$	$n_c = 3$	$n_c = 4$
$\gamma^{(0)}$	3.75	2.93	2.93	2.92	3.00
k	1	0	0	0	0
$\gamma^{(k)}$	2.94	2.93	2.93	2.92	3.00

3.6 Conclusão

A adaptação do método de dois estágios, proposto no Capítulo 2, para tratar sistemas dependentes de parâmetros variantes no tempo, foi apresentada neste capítulo. Os controladores sintetizados são de ordem reduzida e dependentes de parâmetros mensuráveis em tempo real, e os controladores são ainda robustos a ruídos nas medições. Os ruídos, modelados de forma aditiva e multiplicativa, são incorporados às condições de síntese utilizando a abordagem multi-simplex. Exemplos numéricos mostram que os resultados não apresentam grande sensibilidade a alterações nas normas dos ruídos considerados, pois o limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas em malha fechada mostrou-se praticamente invariante a mudanças nos valores dos ruídos. Além dos melhores resultados, o método se destaca em relação a outras abordagens da literatura por sua capacidade de tratar sistemas com todas as matrizes dependentes de parâmetros.

Capítulo 4

Sistemas LTV

4.1 Introdução

A análise das principais características de sistemas lineares variantes no tempo (em inglês, *Linear Time Varying* — LTV), bem como o desenvolvimento de técnicas de controle, são assuntos muito importantes na teoria de sistemas. Uma grande família de sistemas pode ser modelada utilizando-se a abordagem LTV, como por exemplo a aerodinâmica em alta velocidade de aviões e os coeficientes de difusão em processos químicos [LC05]. A linearização de sistemas em uma trajetória, ao invés de realizada em torno de um ponto fixo de operação, também resulta em sistemas LTV [Vid93, Kha02, LC05]. O método apresentado no Capítulo 3 pode ser utilizado para sintetizar controladores que estabilizam sistemas LTV caso os termos variantes no tempo sejam limitados. Entretanto, se tais termos forem conhecidos, o problema pode ser tratado pela utilização de técnicas diretas.

São apresentadas no presente capítulo duas abordagens diferentes para a síntese de leis de controle estabilizantes. Na primeira, a matriz de transição de estados do sistema é diretamente utilizada no cálculo de um ganho de realimentação de estados estabilizante. A segunda abordagem é baseada em um novo critério de análise de estabilidade. Tal critério é introduzido no capítulo e consiste basicamente na verificação de certas propriedades da matriz de transição de estados em um horizonte finito de tempo.

O primeiro método, projetado com base na matriz de transição de estados, é apresentado na Seção 4.2. A Seção 4.3 introduz o critério de análise de estabilidade proposto, e sua adaptação para a síntese de leis de controle estabilizantes é apresentada na Seção 4.4 e estendida para satisfazer critérios de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ na Seção 4.5. A Seção 4.6 apresenta alguns exemplos para ilustrar a validade dos métodos, e a Seção 4.7 conclui o capítulo.

4.2 Estabilização pela matriz de transição de estados

Considere o sistema dado por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{4.1}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle. O objetivo principal da presente seção é a síntese de um ganho de realimentação de estados $u(t) = K(t)x(t)$, também variante no tempo, de forma que o sistema em malha fechada seja estável. Uma possível solução para tal problema é apresentado no teorema a seguir, que é baseado na matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$ apresentada na Seção 1.2.

Teorema 4.1 Se o par $\{A(t), B(t)\}$ for uniformemente completamente controlável e se o par $\{A(t), B'(t)X_\delta(t)\}$ for uniformemente completamente observável para um certo valor de $\delta \geq 0$ (de acordo com os Teoremas 1.8 e 1.10), com $X_\delta(t) = \Phi'(t+\delta, t)\Phi(t+\delta, t)$, então a lei de controle

$$u(t) = K_\delta(t)x(t),$$

sendo

$$K_\delta(t) = -\beta\ B'(t)X_\delta(t),$$

com $\beta > 0$ suficientemente grande, estabiliza o sistema (4.1).

Demonstração: O primeiro passo consiste em mostrar que todas as trajetórias do sistema dual em malha fechada, dado por

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\left(A(t) - \beta B(t)B'(t)X_\delta(t)\right)' \tilde{x}(t)$$

são exponencialmente crescentes (sistema exponencialmente instável) [KP77]. Considere a candidata à função de Lyapunov

$$w(t, \tilde{x}) = \tilde{x}(t)'X_\delta(t)^{-1}\tilde{x}(t).$$

Como, por hipótese, o sistema é uniformemente completamente controlável, as desigualdades mostradas em (1.23) podem ser utilizadas para mostrar que a função $w(t, \tilde{x})$ satisfaz

$$\frac{\alpha_9(\delta)}{\alpha_8(\delta)}\tilde{x}(t)'\tilde{x}(t) \leq w(t, \tilde{x}) \leq \frac{\alpha_{10}(\delta)}{\alpha_7(\delta)}\tilde{x}(t)'\tilde{x}(t).$$

A derivada de $w(t, \tilde{x})$ é igual a

$$\begin{aligned}\dot{w}(t, \tilde{x}) &= \tilde{x}(t)' \left[-A(t)X_\delta(t)^{-1} - X_\delta(t)^{-1}A'(t) + 2\beta B(t)B'(t) + \dot{X}_\delta(t)^{-1}\right] \tilde{x}(t)\\ &= \tilde{x}(t)' \left[2\beta B(t)B'(t) - \Phi(t, t+\delta)\left(A(t+\delta) + A'(t+\delta)\right)\Phi'(t, t+\delta)\right] \tilde{x}(t).\end{aligned}$$

A última desigualdade é proveniente das expressões

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(t, t+\delta)}{dt} &= A(t)\Phi(t, t+\delta) - \Phi(t, t+\delta)A(t+\delta)\\ \frac{d\Phi'(t, t+\delta)}{dt} &= \Phi'(t, t+\delta)A'(t) - A'(t+\delta)\Phi'(t, t+\delta)\\ \frac{dX_\delta(t)^{-1}}{dt} &= A(t)X_\delta(t)^{-1} + X_\delta(t)^{-1}A(t)' - \Phi(t, t+\delta)\left(A(t+\delta) + A'(t+\delta)\right)\Phi'(t, t+\delta).\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 1.4, para mostrar a instabilidade exponencial do sistema dual é necessário provar que

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{w}(\tau, \tilde{x})d\tau = w(t+\sigma, \tilde{x}) - w(t, \tilde{x}) > 0,\ \forall t \geq t_0$$

para um $\sigma \geq \delta_c$, sendo δ_c um valor suficientemente grande que satisfaça as desigualdades do Teorema 1.8. A última expressão é igual a

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{w}(\tau,\tilde{x})d\tau = 2\int_t^{t+\sigma} \tilde{x}(\tau)'\beta B(\tau)B'(\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau \\ - \int_t^{t+\sigma} \tilde{x}(\tau)'\Phi(\tau,\tau+\delta)\left(A(\tau+\delta)+A'(\tau+\delta)\right)\Phi'(\tau,\tau+\delta)\tilde{x}(\tau)d\tau.$$

Defina o estado

$$\overline{x}(t_2) = \Phi'(t_1,t_2)\tilde{x}(t_1)$$

e reescreva as integrais acima como

$$\overline{x}(t)'\left(2\beta\int_t^{t+\sigma} \Phi(t,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t,\tau)d\tau \right. \\ \left. - \int_t^{t+\sigma} \Phi(t,\tau+\delta)\left(A(\tau+\delta)+A'(\tau+\delta)\right)\Phi'(t,\tau+\delta)d\tau\right)\overline{x}(t) \\ = 2\overline{x}(t)'\beta W(t+\sigma,t)\overline{x}(t) + \int_t^{t+\sigma} d\Phi(t,\tau+\delta)\Phi'(t,\tau+\delta) \\ = 2\overline{x}(t)'\beta W(t+\sigma,t)\overline{x}(t) + \overline{x}(t)'\left(\Phi(t,t+\sigma+\delta)\Phi'(t,t+\sigma+\delta) - \Phi(t,t+\delta)\Phi'(t,t+\delta)\right)\overline{x}(t).$$

De acordo com as desigualdades (1.23), tem-se

$$\overline{x}(t)'\left(\Phi(t,t+\sigma+\delta)\Phi'(t,t+\sigma+\delta) - \Phi(t,t+\delta)\Phi'(t,t+\delta)\right)\overline{x}(t) \\ \geq \overline{x}(t)'\left(\frac{\alpha_7(\delta+\sigma)}{\alpha_{10}(\delta+\sigma)} - \frac{\alpha_8(\delta)}{\alpha_9(\delta)}\right)\overline{x}(t).$$

Por fim, uma vez que, por hipótese, o sistema é uniformemente completamente controlável, as desigualdades (1.22) são válidas e, portanto,

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{w}(\tau,\tilde{x})d\tau \geq \overline{x}(t)'\left(2\beta\alpha_7(\sigma) + \frac{\alpha_7(\delta+\sigma)}{\alpha_{10}(\delta+\sigma)} - \frac{\alpha_8(\delta)}{\alpha_9(\delta)}\right)\overline{x}(t), \tag{4.2}$$

e existe um β que satisfaz

$$\beta > \beta_\ell = \frac{\dfrac{\alpha_7(\delta+\sigma)}{\alpha_{10}(\delta+\sigma)} - \dfrac{\alpha_8(\delta)}{\alpha_9(\delta)}}{2\alpha_7(\sigma)} \tag{4.3}$$

de forma que

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{w}(\tau,\tilde{x})d\tau > 0 \quad \forall t \geq t_0,$$

demonstrando que o sistema dual em malha fechada é exponencialmente instável. Os estados duais em tempo reverso são relacionados aos estados primais pela transformação

$$x(t) = X_{cl}(t,t_0)\tilde{x}(-t), \tag{4.4}$$

sendo $X_{cl}(t,t_0) = \Phi_{cl}(t,t_0)\Phi'_{cl}(t,t_0)$ a solução da equação diferencial de Lyapunov (1.17) para o sistema em malha fechada e $\Phi_{cl}(t,t_0)$ sua matriz de transição. Como $\tilde{x}(t)$ é exponencialmente instável, então $\tilde{x}(-t)$ é uniformemente assintoticamente estável. Utilizando (4.4), tem-se

$$||x(t)||^2 \leq ||X_{cl}(t,t_0)||\ ||\tilde{x}(-t)||$$

e basta mostrar que a matriz $X_{cl}(t,t_0)$ possui norma limitada para provar a estabilidade uniforme e assintótica de $x(t)$.

Seja a equação diferencial (1.17) para o sistema em malha fechada, dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X_{cl}(t,t_0) =& A(t)X_{cl}(t,t_0) + X_{cl}(t,t_0)A'(t) - \beta B(t)B'(t)X_\delta(t)X_{cl}(t,t_0)\\ &- \beta X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)B'(t)\ , \quad X_{cl}(t_0,t_0) = \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Pode-se notar que

$$\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)\big)\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)\big)' \geq 0$$

implica

$$\begin{aligned}&-\beta B(t)B'(t)X_\delta(t)X_{cl}(t,t_0) - \beta X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)B'(t) \leq\\ &\qquad\qquad B(t)B'(t) + \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)B'(t)X_\delta(t)X_{cl}(t,t_0).\end{aligned}$$

No Apêndice é demonstrado que a matriz $P(t,t_0)$ solução de

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t,t_0) = & A(t)P(t,t_0) + P(t,t_0)A'(t) + B(t)B'(t)\\ &+ \beta^2 P(t,t_0)X_\delta(t)B(t)B'(t)X_\delta(t)P(t,t_0)\ , \ P(t_0,t_0) \geq \mathbf{I}\end{aligned} \tag{4.5}$$

satisfaz

$$X_{cl}(t,t_0) \leq P(t,t_0).$$

Por outro lado, a solução de (4.5) existe, é única e é limitada por

$$0 < \alpha_{p1}\mathbf{I} \leq P(t,t_0) \leq \alpha_{p2}\mathbf{I}$$

se, e somente se, o par $\{A(t), B(t)\}$ for uniformemente completamente controlável e se o par $\{A(t), B'(t)X_\delta(t)\}$ for uniformemente completamente observável [BCG84], que são condições satisfeitas por hipótese. Portanto, tem-se

$$X_{cl}(t,t_0) \leq P(t,t_0) \leq \alpha_{p2}\mathbf{I},$$

demonstrando que $||X_{cl}(t,t_0)||$ possui um limitante superior e, consequentemente, o sistema (4.1) em malha fechada é uniformemente assintoticamente estável.

Uma versão da condição de observabilidade do par $\{A(t), K_\delta(t)\}$ como condição para a estabilização de sistemas invariantes no tempo pode ser verificada, por exemplo, no método de síntese baseado em equações de Lyapunov apresentado em [Che99]. Tal condição não é explicitamente considerada na maior parte dos métodos de estabilização para sistemas LTV, mas a condição é intrinsecamente satisfeita em, por exemplo, métodos baseados na resolução de equações diferenciais de Riccati ou em métodos baseados na construção direta de uma função de Lyapunov. No presente método, como o ganho $K_\delta(t)$ não é o resultado direto de uma equação diferencial, é necessário garantir tal condição separadamente.

O cálculo das matrizes de transição $\Phi(t+\delta,t)$ não é direto. Uma forma de calcular $\Phi(t+\delta,t)$ é pelo algoritmo apresentado em [Lu00], que é baseado no desenvolvimento em série de Taylor de primeira ordem

$$\Phi(t+h,t) \approx \Phi(t,t) + h(A(t)\Phi(t,t)) = (I + hA(t))\Phi(t,t) \tag{4.6}$$

para um valor pequeno de h. Esta expansão faz parte do algoritmo de integração de Euler para a resolução de equações diferenciais ordinárias [SB80]. Denotando-se $\Phi_k(t) = \Phi(t+kh,t)$, a versão recorrente de (4.6) é igual a

$$\Phi_k(t) = (I + hA(t+(k-1)h))\Phi_{k-1}(t) \ , \quad \Phi_0(t) = I. \tag{4.7}$$

O algoritmo apresentado por [Lu00] para o cálculo de $\Phi(t+\delta,t)$ é reproduzido na sequência.

Algoritmo 4.1

1. Escolha um valor de $\delta > 0$ de forma que o par $\{A(t), B'(t)X_\delta(t)\}$ seja uniformemente completamente observável e um número N suficientemente grande de passos de integração, sendo $h = \delta/N$ o tamanho de cada passo;

2. Para cada valor de t, calcule $\Phi_N(t) \approx \Phi(t+\delta,t)$ utilizando a recorrência (4.7);

3. $K_\delta(t)$ é então dado por

$$K_\delta(t) = -\beta B'(t)\Phi'_N(t)\Phi_N(t) \quad \text{para } t > t_0,$$

sendo β um valor maior do que o limitante dado em (4.3).

A convergência da recorrência (4.7) é garantida, para todo t, se for utilizado um valor suficientemente pequeno de h, pois δ é fixo e a norma de $\Phi(t+\delta,t)$ é limitada. Consequentemente, o erro de aproximação de $\Phi_N(t)$ é proporcional a h [SB80].

A principal dificuldade do método é a escolha dos parâmetros β e δ. Um limitante inferior para β é dado em (4.3), mas não há uma expressão equivalente para o valor de δ. Nos sistemas examinados, praticamente qualquer valor de $\delta \neq 0$ foi suficiente para gerar um ganho estabilizante, e especificamente para sistemas periódicos, isto é, sistemas cujas matrizes satisfazem $A(t) = A(t+T)$ e $B(t) = B(t+T)$ para um certo $T > 0$, a utilização de $\delta = T$ sempre resultou em ganhos estabilizantes. Ainda para sistemas periódicos, o limitante de β pode ser obtido mais facilmente pela aplicação dos resultados do Lema 1.3. Maiores detalhes para a aplicação do método em sistemas periódicos são apresentados em [AGTP12].

A matriz $\Phi(t+\delta,t)$ possui propriedades interessantes, que podem ser utilizadas para gerar um novo critério de verificação da estabilidade de sistemas LTV e, consequentemente, inspirar novos métodos para a síntese de leis de controle estabilizantes. Tal critério é apresentado na próxima seção.

4.3 Novo critério de estabilidade

Considere o sistema LTV dado por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{4.8}$$

O teorema apresentado a seguir introduz o novo critério para verificar a estabilidade assintótica e uniforme de um sistema LTV.

Teorema 4.2 O sistema (4.8) é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existir uma constante $\sigma > 0$ tal que

$$\Phi'(t+\sigma,t)\Phi(t+\sigma,t) < I, \ \forall t \geq t_0, \tag{4.9}$$

$$||\Phi(t+\tau,t)|| < \varphi(\tau), \ 0 < \tau < \sigma, \ \forall t \geq t_0 \tag{4.10}$$

sendo $\Phi(t,t_0)$ a matriz de transição de estados do sistema e $\varphi(\cdot)$ uma função uniformemente limitada. Se a desigualdade (4.9) for satisfeita para um certo valor de σ, então também é satisfeita para todo $\hat{\sigma} \geq \sigma$.

Demonstração:

Necessidade: Suponha que o sistema (4.8) seja uniformemente assintoticamente estável. Portanto, de acordo com o Lema 1.1, existem constantes positivas $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que a matriz de transição de estados satisfaz

$$||\Phi(t,t_0)|| \leq ae^{-b(t-t_0)}, \ \forall t \geq t_0.$$

Se $a \leq 1$, então para todo $\sigma > 0$

$$||\Phi(t+\sigma,t)|| \leq ae^{-b\sigma} \leq 1, \forall t \geq t_0$$

e a desigualdade também é válida para todo $\hat{\sigma} \geq \sigma$. Se $a > 1$, defina a constante

$$\sigma = \frac{\ln(a)}{b}.$$

Pode-se verificar que

$$||\Phi(t+\hat{\sigma},t)|| \leq ae^{-b\hat{\sigma}} \leq 1, \text{ para todo } \hat{\sigma} \geq \sigma,$$

o que implica que (4.9) é verificada, pois

$$||\Phi(t+\hat{\sigma},t)||^2 = \lambda_{max}\left(\Phi'(t+\hat{\sigma},t)\Phi(t+\hat{\sigma},t)\right).$$

Por fim, para todo τ tal que $0 < \tau < \sigma$, tem-se

$$||\Phi(t+\tau,t)|| \leq ae^{-b\tau} = \varphi(\tau) \leq a.$$

Suficiência: Suponha que existe um valor positivo de σ que satisfaz as desigualdades (4.9) e (4.10). Defina a função candidata da Lyapunov

$$v(t,x) = x(t)' \underbrace{\int_t^{t+\sigma} \Phi'(\tau,t)\Phi(\tau,t)d\tau}_{P(t,\sigma)} x(t).$$

A função $v(t,x)$ é uniformemente limitada se, e somente se, a condição (4.10) for satisfeita. Tal condição é também necessária para a estabilidade uniforme e assintótica do sistema pois, senão, a condição equivalente do Lema 1.1 não seria verificada. A derivada da função de Lyapunov é igual a

$$\dot{v}(t,x) = x(t)'(A'(t)P(t,\sigma) + P(t,\sigma)A(t) + \dot{P}(t,\sigma))x(t) = x(t)'(\Phi'(t+\sigma,t)\Phi(t+\sigma,t) - I)x(t),$$

que é definida negativa uma vez que a desigualdade (4.9) é verificada. Consequentemente, o sistema é uniformemente assintoticamente estável.

Uma interpretação do critério apresentado no Teorema 4.2 é que a estabilidade uniforme e assintótica do sistema (4.8) é equivalente a, para todo $t \geq t_0$, que todos os estados sobre a hiperesfera unitária $x(t)'x(t) = 1$ sejam conduzidos ao interior da hiperesfera após σ segundos. Em outras palavras, a análise da estabilidade de um sistema LTV em um horizonte infinito de tempo é equivalente à análise, em um horizonte finito, sobre um número infinito de subintervalos. Esta abordagem possui elementos similares às técnicas de horizonte retrocedente com restrições sobre o conjunto final [MM93, LKC98, MRRS00], porém na abordagem proposta o conjunto final, isto é, a hiperesfera unitária, é constante.

Se o sistema for periódico de período $T > 0$, um critério mais simples, apresentado no corolário a seguir, pode ser empregado.

Corolário 4.1 *Suponha que o sistema* (4.8) *é periódico com período fundamental* T*, ou seja,*

$$A(t+T) = A(t)\ \forall t,$$

sendo $A(t)$ *uma matriz sem descontinuidades de amplitude infinita. O sistema é uniformemente assintoticamente estável se e somente se existir um escalar* $\ell \in \mathbb{Z}^+$ *tal que*

$$\Phi'(\ell T, 0)\Phi(\ell T, 0) < I. \tag{4.11}$$

Demonstração: Segundo o Teorema 1.1, a matriz de transição de estados $\Phi(t,t_0)$ de um sistema T-periódico pode ser escrita como

$$\Phi(t,t_0) = G(t,t_0)e^{(t-t_0)R},$$

com $G(t,t_0) = G(t+\ell T, t_0), G(t_0,t_0) = G(t_0+\ell T, t_0) = I$ para $\ell \in \mathbb{Z}^+$ e sendo R uma matriz constante. Se $A(t)$ for uma matriz sem descontinuidades infinitas, então $||G(t,t_0)|| < +\infty\ \forall t, t_0$ e, assim, a condição (4.10) é satisfeita [MSA04]. Utilizando o teorema de Floquet, tem-se

$$\Phi'(\ell T, 0)\Phi(\ell T, 0) = e^{R'\ell T}G'(\ell T, 0)G(\ell T, 0)e^{R\ell T} = e^{R'\ell T}e^{R\ell T}.$$

Um sistema T-periódico é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores de R possuírem parte real negativa [MSA04]. Portanto, utilizando a desigualdade (1.9), existe um valor de $\ell \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\lambda_{\max}\big(\Phi'(\ell T,0)\Phi(\ell T,0)\big) = ||e^{R\ell T}||^2 < e^{-2\xi_M \ell T} < 1.$$

Numericamente, seria mais interessante dispor de condições que possam ser enunciadas utilizando elementos discretos. Para tanto, o teorema apresentado a seguir relaciona o Teorema 4.2 à estabilidade de um sistema LTV a tempo discreto, obtido a partir de informações do sistema original.

Teorema 4.3 Se a matriz de transição do sistema (4.8) satisfizer

$$||\Phi(t+\tau,t)|| < \varphi(\tau), \ \forall t \geq t_0, \tag{4.12}$$

sendo $\varphi(\cdot)$ uma função uniformemente limitada, então o sistema (4.8) é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existir um valor de $\sigma > 0$ tal que o sistema LTV a tempo discreto, dado por

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{x}(k), \ \hat{A}(k) = \Phi(t_{k+1}, t_k), \tag{4.13}$$

com $t_k = t_0 + k\sigma$, for uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração:

Necessidade: Suponha que o sistema contínuo (4.8) seja uniformemente assintoticamente estável. Portanto, pelo Lema 1.1, existem escalares positivos a e b tais que

$$||\Phi(t,t_0)|| \leq a e^{-b(t-t_0)}.$$

Pelas propriedades de sistemas discretos LTV [Rug96], a matriz de transição do sistema discreto (4.13) é dada por

$$\hat{\Phi}(k,j) = \hat{A}(k-1)\hat{A}(k-2)\cdots\hat{A}(j) = \Phi(t_k, t_j). \tag{4.14}$$

Assim,

$$||\hat{\Phi}(k,j)|| = ||\Phi(t_0 + k\sigma, t_0 + j\sigma)|| \leq a e^{-b\sigma(k-j)}.$$

Fazendo $\lambda = e^{-b\sigma}$, então

$$||\hat{\Phi}(k,j)|| \leq a\lambda^{k-j}.$$

Como o sistema contínuo é, por hipótese, uniformemente assintoticamente estável, então existe um valor de σ tal que

$$\lambda = e^{-b\sigma} < 1,$$

demonstrando que o sistema discreto é também uniformemente assintoticamente estável.

Suficiência: Suponha que o sistema discreto (4.13) seja uniformemente assintoticamente estável. Portanto, existem constantes $a > 0$ e $0 \leq \lambda < 1$ tais que

$$||\hat{\Phi}(k,j)|| \leq a\lambda^{k-j} \tag{4.15}$$

para todo k, j, $k \geq j$ [Rug96], sendo $\hat{\Phi}(k,j)$ a matriz de transição de estados do sistema discreto, dada por (4.14). Consequentemente, tem-se

$$||\hat{\Phi}(k,0)|| = ||\Phi(t_0 + k\sigma, t_0)|| \leq a\lambda^k.$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, existe uma constante $b > 0$ que satisfaz $\lambda = e^{-b\sigma}$. Então

$$||\Phi(t_k, t_0)|| \leq ae^{-b(t_k - t_0)}, \; k \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.16}$$

É necessário ainda provar que a desigualdade (4.16) é também válida para $t \neq t_0 + k\sigma$. Seja $\tilde{t}$ tal que $t_k < \tilde{t} \leq t_{k+1}$. Note que

$$\begin{aligned} ||\Phi(\tilde{t}, t_0)|| \leq ||\Phi(\tilde{t}, t_k)||||\Phi(t_k, t_0)|| &\leq \varphi(\tilde{t} - t_k)||\Phi(t_k, t_0)|| \\ &\leq \varphi(\tilde{t} - t_k)ae^{b(\tilde{t} - t_k)}e^{-b(\tilde{t} - t_0)} \leq \eta(\epsilon^*)e^{-b(\tilde{t} - t_0)}, \end{aligned}$$

com $\eta(\cdot) = a\varphi(\cdot)e^{b(\cdot)}$ e $\varphi(\cdot)$ é o limitante definido em (4.12), com ϵ^* solução de

$$\epsilon^* = \arg \max_{0 \leq \epsilon \leq \sigma} \varphi(\epsilon)e^{b\epsilon}.$$

Para $k \to \infty$ tem-se $\tilde{t} \to \infty$ e, portanto, a matriz de transição $\Phi(\tilde{t}, t_0)$ é limitada por uma exponencial negativa, demonstrando que o sistema (4.8) é uniformemente assintoticamente estável.

Corolário 4.2 *Seja σ um escalar que satisfaz a condição (4.9), e sejam δ e N escalares tais que $0 < \delta \leq \sigma$, $N = \sigma/\delta$, $N \in \mathbb{Z}$. Para cada $\ell \in \mathbb{Z}^+$, defina um sistema LTV a tempo discreto e periódico $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, dado por*

$$\hat{\mathcal{G}}_\ell(k) \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{x}(k), \quad com \\ \hat{A}(k) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta), \; k = 0, \ldots, N-1, \quad t_\ell = t_0 + \ell\sigma \\ \hat{A}(k) = \hat{A}(k + rN), \forall r \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.17}$$

O sistema (4.8) com (4.12) é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, os sistemas $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}^+$, forem uniformemente assintoticamente estáveis.

Demonstração:

Necessidade: Suponha que o sistema (4.8) é uniformemente assintoticamente estável e que σ é uma constante que satisfaz (4.9). De acordo com [dST00], basta mostrar que

$$\hat{\Phi}'_\ell(N,0)\hat{\Phi}_\ell(N,0) < I \tag{4.18}$$

para todos os sistemas discretos $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, sendo $\hat{\Phi}_\ell(k,j)$ as respectivas matrizes de transição. Note que

$$\hat{\Phi}_\ell(k,j) = \Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + j\delta), \; k > j, \; 0 < k \leq N.$$

Portanto,

$$\hat{\Phi}_\ell(N,0) = \Phi(t_\ell + \underbrace{N\delta}_{\sigma}, t_\ell)$$

e, uma vez que (4.9) é válido para σ, a condição (4.18) é verificada para todo $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$.

Suficiência: Suponha que todos os sistemas periódicos a tempo discreto $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, $\ell \in \mathbb{Z}^+$, são uniformemente assintoticamente estáveis. De acordo com [dST00], cada matriz de transição satisfaz

$$||\hat{\Phi}_\ell(k,j)|| \leq \xi_\ell \lambda_\ell^{k-j} \ , \ 0 \leq \lambda_\ell < 1 \tag{4.19}$$

e

$$||\hat{\Phi}_\ell(N,0)|| \leq \xi_\ell \lambda_\ell^N < 1 \ \text{ pois } \ \hat{\Phi}'_\ell(N,0)\hat{\Phi}_\ell(N,0) < I. \tag{4.20}$$

A última desigualdade implica que

$$\Phi'(t_\ell + \sigma, t_\ell)\Phi(t_\ell + \sigma, t_\ell) < I$$

para todo t_ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}^+$. Combinando (4.19) com (4.20) pode-se verificar que, para todo $k \in [0, N]$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
||\Phi(t_\ell + k\delta, t_0)|| &\leq ||\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell)||||\Phi(t_\ell, t_{\ell-1})|| \dots ||\Phi(t_2, t_1)||||\Phi(t_1, t_0)|| && (4.21)\\
&\leq \xi_\ell \lambda_\ell^k ||\Phi(t_{\ell-1} + N\delta, t_{\ell-1})|| \dots ||\Phi(t_1 + N\delta, t_1)||||\Phi(t_0 + N\delta, t_0)|| && (4.22)\\
&\leq \xi_\ell \lambda_\ell^k \prod_{j=0}^{\ell-1} \xi_j \lambda_j^N. && (4.23)
\end{aligned}$$

Defina μ^* e ξ^* como

$$\begin{aligned}
\mu^* &= \max_{j \in \mathbb{Z}^+} \xi_j \lambda_j^N,\\
\xi^* &= \max_{j \in \mathbb{Z}^+} \xi_j.
\end{aligned}$$

De acordo com (4.20) tem-se $\mu^* < 1$ e, consequentemente

$$\prod_{j=0}^{\ell-1} \xi_j \lambda_j^N \leq (\mu^*)^\ell,$$

e $\xi^* < +\infty$ pois todos os sistemas periódicos discretos são uniformemente assintoticamente estáveis por hipótese. A desigualdade (4.21) pode ser reescrita como

$$||\Phi(t_\ell + k\delta, t_0)|| \leq \xi^* \lambda_\ell^k (\mu^*)^\ell. \tag{4.24}$$

Como $0 \leq \mu^* < 1$ e $0 \leq \lambda_\ell < 1$, é possível calcular um valor $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mu^* \leq e^{-b\sigma}, \ \lambda_\ell \leq e^{-b\delta}.$$

Assim, (4.24) é equivalente a

$$||\Phi(t_0 + \ell\sigma + k\delta, t_0)|| \leq \xi^* e^{-b(\ell\sigma + k\delta)}$$

e, dessa forma,

$$||\Phi(t, t_0)|| \leq \xi^* e^{-b(t_{\ell k} - t_0)}, \ \text{para } t_{\ell k} = t_0 + \ell\sigma + k\delta. \tag{4.25}$$

Falta mostrar que a desigualdade (4.25) é também válida para $t \neq t_\ell + k\delta$. Seja $\tilde{t}$ tal que que $t_\ell + k\delta < \tilde{t} \leq t_\ell + (k+1)\delta$. Note que

$$\begin{aligned} ||\Phi(\tilde{t}, t_0)|| &\leq ||\Phi(\tilde{t}, t_{\ell k})||||\Phi(t_{\ell k}, t_0)|| \leq \varphi(\tilde{t} - t_{\ell k})||\Phi(t_{\ell k}, t_0)|| \\ &\leq \varphi(\tilde{t} - t_{\ell k})\xi^* e^{b(\tilde{t} - t_{\ell k})} e^{-b(\tilde{t} - t_0)} \leq \eta(\epsilon^*) e^{-b(\tilde{t} - t_0)}, \end{aligned}$$

com $\eta(\cdot) = \xi^* \varphi(\cdot) e^{b(\cdot)}$ e $\varphi(\cdot)$ é o limitante definido em (4.12), sendo ϵ^* a solução de

$$\epsilon^* = \arg \max_{0 \leq \epsilon \leq \delta} \varphi(\epsilon) e^{b\epsilon}.$$

Para $\ell \to \infty$ tem-se $\tilde{t} \to \infty$ e, portanto, a matriz de transição $\Phi(t, t_0)$ é limitada por uma exponencial negativa, demonstrando que o sistema (4.8) é uniformemente assintoticamente estável.

No geral, uma das vantagens de considerar um conjunto de problemas a tempo finito no lugar de um problema a tempo infinito é a possibilidade de paralelizar o procedimento, o que pode reduzir o tempo computacional para a análise de estabilidade. Outra vantagem é que a abordagem é baseada na análise pontual dos valores da norma da matriz de transição de estados, e não na sua evolução, o que é numericamente mais interessante. O desenvolvimento de um critério que seja melhor numericamente adaptado é uma das principais motivações do Teorema 4.3, pois os métodos projetados para lidar com sistemas discretos (por exemplo [dST00]) são geralmente mais simples do que os métodos que tratam sistemas a tempo contínuo. No entanto, o principal inconveniente é que o critério é um procedimento semi-decidível em σ; se a condição (4.9) for violada para um certo σ, não é possível saber se o sistema é instável ou se o valor utilizado de σ é muito pequeno. Uma estratégia seria utilizar o fato que, se a condição (4.9) for satisfeita por σ, então também é satisfeita para todo $\hat{\sigma} \geq \sigma$, e fazer a análise com um valor de σ suficientemente grande. Todavia, não há garantia de que tal valor seria suficiente, e o custo computacional aumenta proporcionalmente com σ.

O limitante uniforme (4.12) exigido pelos Teoremas 4.2 e 4.3 é satisfeito em certos casos especiais, por exemplo se $||A(t)|| < +\infty$ para todo t, mas tal condição pode ser de difícil verificação para sistemas LTV mais gerais. Devido a tais inconvenientes, o critério apresentado não é ainda atraente para a análise de estabilidade, em comparação com outros métodos (como, por exemplo, o método apresentado no Teorema 1.5), o que instiga pesquisas mais aprofundadas sobre o tema. Entretanto, a adaptação do critério introduzido nesta seção para a síntese de controladores não apresenta grandes problemas; a condição (4.12), por exemplo, é automaticamente satisfeita se o sistema for uniformemente completamente controlável (Teorema 1.8), que é uma condição razoável, e em geral não há a necessidade de definir explicitamente um valor para σ no caso de estabilização. A adaptação do critério proposto nos Teoremas 4.2 e 4.3 é o assunto tratado na próxima seção.

4.4 Síntese com o novo critério

4.4.1 Abordagem contínua no tempo

Considere o sistema LTV dado por (4.1). O objetivo desta seção é apresentar um método geral para a síntese de uma lei de controle estabilizante $u(t)$ baseada no critério descrito nos Teoremas 4.2 e 4.3. No método proposto, a construção de uma lei de controle capaz de estabilizar o sistema (4.1) em um horizonte infinito de tempo é decomposta em um conjunto de problemas de estabilização a tempo finito, como mostrado no teorema a seguir.

Teorema 4.4 Seja $\mathcal{T} = \{t_\ell\}$, $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $t_\ell = t_0 + \ell\delta$ uma grade temporal com $\delta > 0$. Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) O sistema (4.1) é uniformemente completamente controlável;

(2) Os estados do sistema, controlado por $u(t)$ no intervalo $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$, satisfazem

$$x(t_{\ell+1})'x(t_{\ell+1}) < x(t_\ell)'x(t_\ell), \forall \ell \in \mathbb{Z}; \tag{4.26}$$

(3) A matriz de transição do sistema controlado é tal que

$$||\Phi_{cl}(t+\tau, t)|| \leq \varphi(\tau) \;\forall t,$$

sendo $\varphi(\cdot)$ uma função uniformemente limitada.

Então, existe um valor de δ tal que o sistema controlado (4.1) seja uniformemente assintoticamente estável com a lei de controle $u(t)$.

Demonstração: De acordo com o Teorema 4.2, o sistema em malha fechada é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existir um valor de $\sigma > 0$ tal que as condições (4.9) e (4.10) são satisfeitas. A condição (4.10) é idêntica à hipótese 3. A hipótese 2 é válida se, e somente se,

$$||\Phi_{cl}(t_{\ell+1}, t_\ell)|| < 1$$

para todo ℓ, resultando em

$$||\Phi_{cl}(t_{\ell+q}, t_{\ell+1})|| \leq \theta_\ell(q) < 1$$

para todo $q > 1, q \in \mathbb{Z}$. Deve-se mostrar que a condição (4.9) é também válida para $t \neq t_\ell$. Sejam t e σ tais que

$$t_\ell \leq t < t_{\ell+1}, \quad t_{\ell+q} \leq t + \sigma < t_{\ell+q+1}.$$

Portanto, pode-se verificar que

$$\Phi_{cl}(t+\sigma, t) = \Phi_{cl}(t+\sigma, t_{\ell+q})\Phi_{cl}(t_{\ell+q}, t_{\ell+1})\Phi_{cl}(t_{\ell+1}, t)$$

e

$$t_{\ell+1} - t \leq \delta, \quad t + \sigma - t_{\ell+1} \leq \delta.$$

Considerando a hipótese 3 e utilizando o valor de δ^* dado por

$$\delta^* = \max_{0\leq\epsilon\leq\delta} \varphi(\epsilon),$$

tem-se

$$||\Phi_{cl}(t+\sigma,t)|| \leq ||\Phi_{cl}(t+\sigma,t_{\ell+q})||\; ||\Phi_{cl}(t_{\ell+q},t_{\ell+1})||\; ||\Phi_{cl}(t_{\ell+1},t)|| \leq \varphi^2(\delta^*)\theta_\ell(q).$$

Dado que $\lim_{\delta\to 0}\varphi(\delta) = 1$, que a função $\varphi(\cdot)$ é contínua e que $\theta_\ell(q) < 1$, então existe um valor de δ tal que

$$||\Phi_{cl}(t+\sigma,t)|| < 1,$$

demonstrando a estabilidade uniforme e assintótica do sistema (4.1).

Existem algumas técnicas na literatura capazes de sintetizar leis de controle que satisfaçam as condições do Teorema 4.4, como por exemplo as abordagens desenvolvidas para a estabilização de sistemas a tempo finito ou para garantir a estabilidade prática do sistema [MP72]. Em [GTB09], um controlador é calculado a partir da resolução de uma equação diferencial parametrizada de Lyapunov. O método apresentado em [Lu00] é baseado na utilização de uma técnica de horizonte retrocedente para garantir que o sistema em malha fechada seja praticamente estável após um intervalo de tempo. Algumas relaxações podem ser aplicadas na adaptação das técnicas para satisfazer as condições do Teorema 4.4.

O método apresentado no Teorema 4.4 possui algumas similaridades com as técnicas de horizonte retrocedente com restrições no conjunto final [MM93, LKC98, MRRS00], mas existe a liberdade sobre a escolha da abordagem a ser utilizada para a estabilização em tempo finito, o que é vantajoso pois algumas abordagens são numericamente mais eficientes e podem ser modificadas para agregar critérios de desempenho, como por exemplo a minimização de alguma norma. A abordagem proposta é também menos complexa do que as técnicas de horizonte retrocedente, pois não há a necessidade de calcular um custo final ou obter um conjunto final para garantir a estabilizabilidade da lei de controle.

Corolário 4.3 *Seja* $\mathcal{T} = \{t_\ell\}_{\ell=0}^{L}$, $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $t_\ell = t_0 + \ell\delta$ *uma grade temporal predefinida com* $\delta > 0$. *Se o sistema* (4.1) *for uniformemente completamente controlável e se existir uma lei de controle* $u(t) = K(t)x(t)$, *com*

$$\int_t^{t+s} ||K(\tau)||^2 d\tau \leq \hat{\varphi}(s),\; \forall t, s, \tag{4.27}$$

sendo $\hat{\varphi}(\cdot)$ *uma função uniformemente limitada, de forma que os estados satisfaçam*

$$x(t_{\ell+1})'x(t_{\ell+1}) < x(t_\ell)'x(t_\ell),\; \forall \ell \in \mathbb{Z},$$

então existe um valor de δ *tal que o sistema* (4.1) *em malha fechada seja uniformemente assintoticamente estável pela lei de controle dada por* $u(t)$.

Demonstração: De acordo com [AM69], a utilização de um controle por realimentação de estados $K(t)$ que satisfaça (4.27) não altera a controlabilidade completa e uniforme do sistema, o que significa que, segundo o Teorema 1.8 e (1.24),

$$||\Phi_{cl}(t+\tau,t)|| \leq \varphi(\tau)\ \forall t,$$

garantindo, em conjunto com a controlabilidade completa e uniforme do sistema e com a condição $x(t_{\ell+1})'x(t_{\ell+1}) < x(t_\ell)'x(t_\ell)$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}$, a estabilidade uniforme e assintótica do sistema em malha fechada.

Uma forma de garantir que a condição (4.27) seja satisfeita é considerar, por exemplo, que $K(t)$ seja uma função constante por partes. Um resultado particular pode ser obtido para sistemas periódicos.

Corolário 4.4 *Seja o sistema* (4.1) *periódico com período* T*. Se o sistema for uniformemente completamente controlável e se for possível obter uma lei de controle* $u(t_0)$ *limitada que garanta* $x(t_0+T)'x(t_0+T) < x(t_0)'x(t_0)$*, então o sistema em malha fechada com a lei de controle constante* $u(t_0)$ *é uniformemente assintoticamente estável.*

Demonstração: A aplicação de uma lei de controle constante $u(t_0)$ não altera a periodicidade do sistema (4.1). Como, por hipótese, os estados em malha fechada satisfazem $x(t_0+T)'x(t_0+T) < x(t_0)'x(t_0)$, por construção a condição (4.11) é então satisfeita para $\ell = 1$ e, de acordo com o Corolário 4.1, o sistema em malha fechada é uniformemente assintoticamente estável.

Adaptação do método de [Lu00]

O método apresentado em [Lu00] pode ser adaptado para sintetizar um ganho de realimentação de estados constante por partes que satisfaça as condições do Corolário 4.3. Em [Lu00, Theorem 4.1], afirma-se que existe um valor de δ tal que toda trajetória que parte de $x_0 \in \mathcal{S}$, com

$$\mathcal{S} = \{x | x'F(t_0)x \leq c\},$$

sendo $c > 0$ qualquer constante finita, permanecerá em $\mathcal{S}$ para todo $t \in [t_0, t_0+\sigma]$. A matriz $F(t)$ satisfaz a equação de Lyapunov

$$\dot{F}(t) = -\Big(A(t)+B(t)K(t)\Big)'F(t) - F(t)\Big(A(t)+B(t)K(t)\Big) - Q_F, \tag{4.28}$$

sendo Q_F uma matriz positiva definida Q_F, e $F(t)$ é dada por

$$F(t) = \int_t^\infty \Phi'_{cl}(\tau,t)Q_F\Phi_{cl}(\tau,t)d\tau,$$

sendo $\Phi_{cl}(t,t_0)$ a matriz de transição de estados do sistema em malha fechada. Como $\Phi_{cl}(t,t_0)$ é uma matriz de *rank* completo e é uniformemente assintoticamente estável [Lu00, Theorem 2.1], então a integral é convergente e é possível escolher um valor de Q_F tal que $F(t_0) \geq I$. Dessa forma, para todo $x(t_0)$, tem-se

$$x(t_0)'x(t_0) \leq x(t_0)'F(t_0)x(t_0).$$

Escolhendo $c = 1$ na definição do conjunto $\mathcal{S}$, tem-se que $x(t_0)'x(t_0) \leq 1$ pertence ao conjunto invariante, que também é contrativo devido à negatividade da derivada da função de Lyapunov utilizada na demonstração de [Lu00, Theorem 4.1] e à linearidade do sistema [Bla94]. Portanto, para algum valor fixo de δ tem-se $||x(t_{\ell+1})|| < ||x(t_\ell)||$. Existe um compromisso na escolha de δ, pois um valor pequeno não garante necessariamente que $||x(t_{\ell+1})|| < ||x(t_\ell)||$ e um valor grande não é aconselhável, segundo [Lu00].

O algoritmo adaptado de [Lu00] é apresentado na sequência.

Algoritmo 4.2

1. Escolha $\delta > 0$ e defina $t_\ell = t_0 + \ell\delta$;

2. Escolha as matrizes constantes $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ satisfazendo $Q \geq 0$ e $R > 0$;

3. Escolha um valor $0 < \epsilon < \delta$, relacionado à grade temporal utilizada no método, e atribua $N = \delta/\epsilon$;

4. Para cada t_ℓ:

   (a) Calcule a matriz $S = [S_1\ S_2\ \cdots\ S_N]$ cujos elementos são dados por

   $$S_j = \sum_{k=j}^{N-1} \Delta_k' Q G_{k,j-1},$$

   sendo Δ_k a matriz calculada a partir da recorrência

   $$\Delta_k = (I + \epsilon A(t_\ell + (k-1)\epsilon))\Delta_{k-1}, \quad \Delta_0 = I$$

   e $G_{k,i}$ é a matriz dada por

   $$G_{k,i} = (I + \epsilon A(t_\ell + (k-1)\epsilon))G_{k-1,i}, \quad G_{i+1,i} = \epsilon B(t_\ell + i\epsilon);$$

   (b) Obtenha a matriz $M = [G_{N,0}\ \cdots\ G_{N,N-1}]$;

   (c) Calcule $H = [H_{i,j}]$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, N$, cujos elementos podem ser obtidos pelo seguinte procedimento:

   - Se $i = j$, então

   $$H_{i,i} = aR + 2\sum_{k=i}^{N-1} G_{k,i-1}' Q G_{k,i-1}, \ a = \begin{cases} 1, & \text{se } \ i = 1 \ \text{ ou } \ i = N \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

- Senão

$$H_{i,j} = 2 \sum_{k=\max(i,j)}^{N-1} G'_{k,i-1} Q G_{k,j-1};$$

(d) Calcule

$$v = -\left(\left(H^{-1} - H^{-1}M\left(M'H^{-1}M\right)^{-1} M'H^{-1}\right) S' + \left(H^{-1}M\left(M'H^{-1}M\right)^{-1}\right)\Delta_N \right);$$

(e) Obtenha

$$K(t_\ell) = \mathrm{diag}\{I_{m\times m}, 0, \ldots, 0\} v = K(t) \quad \text{para} \quad t \in [t_\ell, t_{\ell+1}),$$

sendo $\mathrm{diag}\{\cdot\}$ uma matriz bloco-diagonal.

O método de [Lu00] gera um ganho de realimentação de estados que minimiza a soma entre a norma das trajetórias controladas e o esforço de controle, respectivamente ponderados pelas matrizes Q e R. Não há restrições particulares sobre tais parâmetros; desta forma, nos exemplos são utilizados $Q = I$ e $R = I$ de dimensões apropriadas.

4.4.2 Abordagem discreta no tempo

O Teorema 4.3 consiste em um critério de estabilidade baseado na utilização de um sistema LTV a tempo discreto, construído a partir de informações extraídas do sistema original. Uma condição de síntese baseada neste critério é introduzida no teorema a seguir.

Teorema 4.5 Considere o sistema LTV discreto dado por

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{x}(k) + \hat{B}(k)\hat{u}(k), \tag{4.29}$$

sendo $t_k = t_0 + k\delta$, $\hat{A}(k) = \Phi(t_{k+1}, t_k)$, $\hat{B}(k) = B(t_{k+1})$ e as matrizes $\Phi(t,\tau)$ e $B(t)$ provêm do sistema LTV a tempo contínuo (4.1). Se o par $\{A(t), B(t)\}$ for uniformemente completamente controlável, então existe um valor de $\delta > 0$ tal que o sistema é estabilizável pelo ganho de realimentação de estados constante por partes $u(t) = K(t)x(t)$, dado por

$$K(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta}\hat{K}(k)\Phi(t_k, t_{k+1}),\ t_k \le \tilde{t} < t_{k+1} \tag{4.30}$$

sendo $\hat{K}(k)$ um ganho discreto de realimentação de estados que estabiliza o sistema (4.29).

Demonstração: O sistema em malha fechada (4.29) é igual a

$$\hat{x}(k+1) = (\hat{A}(k) + \hat{B}(k)\hat{K}(k))\hat{x}(k) = (\Phi(t_{k+1}, t_k) + \hat{B}(k)\hat{K}(k))\hat{x}(k) = \hat{A}_{cl}(k)\hat{x}(k).$$

Tal sistema possui uma matriz de transição ligada à matriz de transição de estados do sistema contínuo em malha fechada da seguinte forma

$$\Phi_{cl}(t_{k+1}, t_k) = \hat{A}_{cl}(k) \ \Rightarrow\ \Phi_{cl}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) + \hat{B}(k)\hat{K}(k). \tag{4.31}$$

Por outro lado, pode-se mostrar que a matriz $\Phi_{cl}(t+\delta,t)$ pode ser representada como

$$\Phi_{cl}(t+\delta,t) = \Phi(t+\delta,t)M(t+\delta,t), \quad \frac{d}{d\delta}M(t+\delta,t) = \Phi(t,t+\delta)B(t+\delta)K(t+\delta)\Phi(t+\delta,t)$$

e, portanto,

$$\Phi_{cl}(t_{k+1},t_k) = \Phi(t_{k+1},t_k)M(t_{k+1},t_k).$$

A comparação entre a última expressão e (4.31) resulta em

$$M(t_{k+1},t_k) = I + \Phi(t_k,t_{k+1})\hat{B}(k)\hat{K}(k). \tag{4.32}$$

Alternativamente, a aproximação de Taylor de primeira ordem [Lu00] da matriz $M(t+\delta,t)$ produz, após algumas manipulações,

$$M(t_{k+1},t_k) \approx I + \delta\Phi(t_k,t_{k+1})B(t_{k+1})K(t_{k+1})\Phi(t_{k+1},t_k). \tag{4.33}$$

Comparando (4.32) com (4.33), é possível constatar

$$\hat{B}(k) \approx B(t_{k+1}), \ K(t_{k+1}) \approx \frac{1}{\delta}\hat{K}(k)\Phi(t_k,t_{k+1}) \tag{4.34}$$

são aproximações válidas para um valor suficientemente pequeno de δ.

O restante da demonstração consiste em mostrar que o ganho de realimentação de estados (4.30) estabiliza o sistema. De acordo com o Corolário 4.3, o ganho de realimentação de estados $K(t)$ estabiliza sistemas uniformemente completamente controláveis se for limitado, o que é garantido por hipótese, e se

$$x(t_{k+q})'x(t_{k+q}) < x(t_k)'x(t_k) \ \Rightarrow \ \Phi_{cl}'(t_k+\sigma,t_k)\Phi_{cl}(t_k+\sigma,t_k) < I, \quad \text{com } \sigma = q\delta. \tag{4.35}$$

De acordo com [Rug96], o sistema (4.29) é uniformemente assintoticamente estável se, e somente se, existirem constantes $\gamma > 0$ e $0 \leq \lambda < 1$ tais que

$$||\hat{\Phi}_{cl}(k,j)|| \leq \gamma\lambda^{k-j} \tag{4.36}$$

para todo $k, j, \ k \geq j$, sendo $\hat{\Phi}_{cl}(k,j)$ a matriz de transição de estados do sistema discreto em malha fechada, dada por

$$\hat{\Phi}_{cl}(k,j) = \Phi_{cl}(t_k,t_j).$$

Como o sistema discreto em malha fechada é uniformemente assintoticamente estável por hipótese, então a desigualdade (4.36) é válida e, portanto, existe um valor $q \in \mathbb{Z}^+$ de forma que $\sigma = q\delta$ satisfaz

$$||\hat{\Phi}_{cl}(k+q,k)|| = ||\Phi_{cl}(t_k+q\delta,t_k)|| \leq \gamma\lambda^q < 1 \Rightarrow \Phi_{cl}'(t_k+\sigma,t_k)\Phi_{cl}(t_k+\sigma,t_k) < I. \tag{4.37}$$

Se δ for um valor suficientemente pequeno tal que as aproximações (4.34) são válidas, então o sistema em malha fechada com o ganho de realimentação de estados (4.30) satisfaz as hipóteses do Teorema 4.3 e o sistema a tempo contínuo (4.1) é uniformemente assintoticamente estável.

Segundo o Teorema 4.5, o problema de estabilizar um sistema a tempo contínuo em um amplo horizonte de tempo pode ser transformado no problema de estabilizar diversos sistemas a tempo discreto em um horizonte pequeno de tempo. As principais vantagens do Teorema 4.5 são a utilização de técnicas de estabilização de sistemas a tempo discreto, em geral mais simples do que as técnicas destinadas a sistemas a tempo contínuo, e a possibilidade de paralelizar o algoritmo. No entanto, a escolha do valor de δ pode ser difícil, pois por um lado deve ser suficientemente pequeno para que as aproximações (4.34) sejam válidas, e pelo outro a redução do valor de δ implica no aumento do custo computacional associado.

O Corolário 4.2 pode também ser adaptado para gerar uma condição de síntese, como mostrado a seguir.

Corolário 4.5 *Sejam σ, δ e N escalares tais que $0 < \delta \leq \sigma$, $N = \sigma/\delta$, $N \in \mathbb{Z}$. Para cada $\ell \in \mathbb{Z}^+$, seja o sistema LTV discreto e periódico $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, dado por*

$$\hat{\mathcal{G}}_\ell(k) \quad : \quad \hat{x}(k+1) = \hat{A}_\ell(k)\hat{x}(k) + \hat{B}_\ell(k)\hat{u}(k), \tag{4.38}$$

com

$$\begin{aligned}
&\hat{A}_\ell(k) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta),\\
&\hat{B}_\ell(k) = B(t_\ell + (k+1)\delta),\ \ k = 0, \ldots, N-1, \quad t_\ell = t_0 + \ell\sigma\\
&\hat{A}_\ell(k) = \hat{A}_\ell(k + rN), \hat{B}_\ell(k) = \hat{B}_\ell(k + rN) \quad \forall r \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Se o par $\{A(t), B(t)\}$ for uniformemente completamente controlável, então existem valores de σ e δ tais que o sistema seja estabilizável por um ganho constante por partes de realimentação de estados $u(t) = K(t)x(t)$ dado por

$$K(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta}\hat{K}_\ell(k)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (k+1)\delta), \quad t_\ell + k\delta \leq \tilde{t} < t_\ell + (k+1)\delta,$$

sendo $\hat{K}_\ell(k)$ um ganho discreto e limitado de realimentação de estados que estabiliza $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$.

Demonstração: Similar à demonstração do Teorema 4.5.

A principal vantagem do Corolário 4.5 é que os métodos de estabilização de sistemas discretos e periódicos são em geral numericamente mais simples que os métodos a tempo contínuo (veja por exemplo [dST00, EKH+09, BLA10]).

Adaptação do método de [dST00]

O algoritmo a seguir é a versão adaptada do método de [dST00, Theorem 1], para sintetizar um ganho de realimentação de estados que satisfaça as condições do Teorema 4.5.

Algoritmo 4.3

1. Escolha $\sigma > 0$ e $0 < \delta \leq \sigma$;

2. Defina $N = \sigma/\delta$ e atribua $\ell \leftarrow 0$;

3. Para cada $t_\ell = t_0 + \ell\sigma$ faça:

(a) Calcule a matriz $\Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell), k = 0, \ldots, N-1$, resultante da equação diferencial (1.4) ou obtida pela aplicação de algum método numérico, como por exemplo o método apresentado em [Lu00];

(b) Obtenha as matrizes finitas $W_\ell(k) = W_\ell'(k)$ e $Y_\ell(k)$ que satisfazem

$$\begin{bmatrix} W_\ell(k) & \star \\ \hat{A}_\ell(k)W_\ell(k) + \hat{B}_\ell(k)Y_\ell(k) & W_\ell(k+1) \end{bmatrix} > 0, \ k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.39}$$

Note que

$$\hat{A}_\ell(k) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell)^{-1};$$

(c) Atribua $\tilde{K}_\ell(k) \leftarrow Y_\ell(k)W_\ell(k)^{-1}$;

(d) Calcule

$$K_\ell(\tilde{t}) \leftarrow \frac{1}{\delta}\hat{K}_\ell(k)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (k+1)\delta), \quad t_\ell + k\delta \le \tilde{t} < t_\ell + (k+1)\delta;$$

4. Se $K(t)$ estabiliza assintoticamente o sistema, pare; senão, reduza o valor de δ ou aumente o valor de σ, e retorne ao passo 1.

Para a utilização do Algoritmo 4.3, é necessário definir uma heurística para buscar valores apropriados de σ e δ. Para os sistemas considerados nos testes, valores em torno de $\sigma = 1$ e $\delta = 0.1$ foram suficientes para gerar controladores estabilizantes.

4.5 Síntese de controladores $\mathcal{H}_\infty$

As abordagens de síntese mostradas nas Seções 4.4.1 e 4.4.2 podem ser adaptadas a fim de considerar outras restrições ou para gerar controladores que apresentem certas propriedades. A presente seção introduz as adaptações necessárias para a síntese de controladores de forma que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema

$$\mathcal{G}(t) \triangleq \begin{cases} \dot{x}(t) & = A(t)x(t) + B_w(t)w(t) + B(t)u(t) \\ z(t) & = C(t)x(t) + D_w(t)w(t) + D(t)u(t), \end{cases} \tag{4.40}$$

enre $w(t)$ e $z(t)$, seja limitada por um valor γ predefinido.

4.5.1 Abordagem contínua no tempo

O teorema a seguir apresenta a síntese de ganhos $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação de estados utilizando a abordagem introduzida no Teorema 4.4.

Teorema 4.6 Suponha que o par $\{A(t), B(t)\}$ é uniformemente completamente controlável e seja $\mathcal{T} = \{t_\ell\}_{\ell=0}^{L}$, $t_\ell = t_0 + \ell\delta$ uma grade temporal com um valor positivo de δ. Se para todo intervalo $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$ for possível encontrar uma lei de controle $u(t)$ tal que

$$\int_{t_\ell}^{t} \Big(||z(\tau)||^2 - \gamma^2 ||w(\tau)||^2\Big) d\tau \leq 0, \;\; t_\ell \leq t < t_{\ell+1} \tag{4.41}$$

$$x(t_{\ell+1})' x(t_{\ell+1}) < x(t_\ell)' x(t_\ell) \tag{4.42}$$

$$||\Phi_{cl}(t+\tau, t)|| \leq \varphi(\tau), \;\; \forall t \tag{4.43}$$

para um valor predefinido de $\gamma > 0$, sendo $\Phi_{cl}(t+\tau, t)$ a matriz de transição do sistema controlado e $\varphi(\cdot)$ uma função uniformemente limitada, então a lei de controle $u(t)$ estabiliza o sistema (4.40) com um custo $\mathcal{H}_\infty$ garantido $||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \gamma$.

Demonstração: De acordo com o Teorema 4.4, as restrições (4.42) e (4.43) garantem a estabilidade uniforme e assintótica do sistema em malha fechada. Suponha que $u(t)$ é calculado de forma que a condição (4.41) seja válida para todo $\ell \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, de acordo com a Propriedade 1.7, a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada é limitada por $||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \gamma$.

De acordo com o Teorema 4.6, uma forma de sintetizar controladores $\mathcal{H}_\infty$ com menores valores de γ para sistemas LTV a tempo contínuo é aplicar a abordagem mostrada no Teorema 4.4 com um procedimento para minimizar o limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em um horizonte finito de tempo.

4.5.2 Abordagem discreta no tempo

Para adaptar a abordagem de síntese apresentada na Seção 4.4.2, considere o sistema discreto no tempo dado por

$$\hat{\mathcal{G}}(k) \triangleq \begin{cases} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}(k)\hat{x}(k) + \hat{B}_w(k)\hat{w}(k) + \hat{B}(k)\hat{u}(k) \\ \hat{z}(k) &= \hat{C}(k)\hat{x}(k) + \hat{D}_w(k)\hat{w}(k) + \hat{D}(k)\hat{u}(k) \end{cases}. \tag{4.44}$$

As definições para a norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas discretos no tempo são similares às definições relacionadas aos sistemas a tempo contínuo, como mostrado a seguir.

Definição 4.1 *Se o sistema* (4.44) *com* $\hat{u}(k) = 0$ *for estável, então a norma* $\mathcal{H}_\infty$ *é dada por*

$$||\hat{\mathcal{G}}(k)||_\infty = \sup_{\hat{w} \in \mathcal{L}_2} \frac{||\hat{z}(k)||}{||\hat{w}(k)||} = \sup_{\hat{w} \in \mathcal{L}_2} \frac{|| \sum_{j=k_0}^{k-1} \hat{C}(k)\hat{\Phi}(k, j+1)\hat{B}_w(j)\hat{w}(j) + \hat{D}_w(k)\hat{w}(k)||}{||\hat{w}(k)||}$$

Definição 4.2 *Se o sistema* (4.44) *com* $\hat{u}(k) = 0$ *for estável, então a desigualdade*

$$||\hat{\mathcal{G}}(t)||_\infty \leq \hat{\gamma},$$

para um certo escalar $\hat{\gamma}$*, é equivalente a*

$$\sum_{r=k_0}^{k} \Big(||\hat{z}(r)||^2 - \hat{\gamma}^2 ||\hat{w}(r)||^2\Big) \leq 0, \;\; \hat{w} \in \mathcal{L}_2, \;\; \forall k \geq k_0. \tag{4.45}$$

Corolário 4.6 *Pela Definição 4.2, pode-se mostrar que uma condição suficiente para garantir* (4.45) *é*

$$||\hat{z}(k)||^2 - \hat{\gamma}^2||\hat{w}(k)||^2 \leq 0, \ \hat{w} \in \mathcal{L}_2, \ \forall k \geq k_0. \tag{4.46}$$

Adicionalmente, se o sistema for periódico de período N, então basta verificar (4.46) *para* $k = 0, \ldots, N-1$.

Teorema 4.7 Sejam σ, δ e N escalares tais que $0 < \delta \leq \sigma$, $N = \sigma/\delta$, $N \in \mathbb{Z}$. Para cada $\ell \in \mathbb{Z}^+$ tal que $t_\ell = t_0 + \ell\sigma$ seja o sistema LTV a tempo discreto e periódico $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$ definido por

$$\begin{aligned} \hat{A}_\ell(k) &= \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta), & \hat{B}_\ell(k) &= B(t_\ell + (k+1)\delta), \\ \hat{B}_{w\ell}(k) &= \sqrt{\delta} B_w(t_\ell + (k+1)\delta), & \hat{C}_\ell(k) &= \sqrt{\delta} C(t_\ell + (k+1)\delta), \quad k = 0, \ldots, N-1. \\ \hat{D}_\ell(k) &= D(t_\ell + (k+1)\delta), & \hat{D}_{w\ell}(k) &= D_w(t_\ell + (k+1)\delta). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Considere que, para cada sistema $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, seja possível obter um ganho estabilizante de realimentação de estados $\hat{K}_\ell(k)$ tal que $||\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)||_\infty \leq \hat{\gamma}$ com um valor predefinido de $\hat{\gamma}$. Então, se o par $\{A(t), B(t)\}$ de (4.40) for uniformemente completamente controlável, existe um valor de $\delta > 0$ tal que o sistema seja estabilizável pelo ganho de realimentação de estados constante por partes $u(t) = K(t)x(t)$, com

$$K(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta}\hat{K}_\ell(k)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (k+1)\delta), \quad t_\ell + k\delta \leq \tilde{t} < t_\ell + (k+1)\delta \tag{4.48}$$

e a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (4.40) em malha fechada é limitada por $||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \hat{\gamma} + \epsilon(\delta)$ para uma certa função $\epsilon(\cdot)$.

Demonstração: Considere que $\hat{K}_\ell(k)$ seja um ganho de realimentação de estados tal que a condição (4.46) é válida para um dado valor de $\hat{\gamma}$ e para todo $\ell \in \mathbb{Z}$. Então, utilizando as propriedades de sistemas LTV a tempo discreto [Rug96], a condição (4.46) pode ser reescrita como

$$\left|\left| \sum_{j=0}^{k-1} \hat{C}_\ell(k)\hat{\Phi}_{cl}(k, j+1)\hat{B}_{w\ell}(j)\hat{w}(j) + \hat{D}_{w\ell}(k)\hat{w}(k) \right|\right|^2 - \hat{\gamma}^2||\hat{w}(k)||^2 \leq 0, k = 0, \ldots, N-1,$$

sendo $\hat{\Phi}_{cl}(j, j+1)$ a matriz de transição do sistema em malha fechada. A última desigualdade é válida para todo $\tilde{\gamma} \geq \hat{\gamma}$ e é equivalente a

$$\begin{aligned} &\left|\left| \sum_{j=0}^{k-1} C(t_\ell + (k+1)\delta)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (j+1)\delta)B_w(t_\ell + (j+1)\delta)w(t_\ell + (j+1)\delta)\delta \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + D_w(t_\ell + (k+1)\delta)w(t_\ell + (k+1)\delta) \right|\right|^2 - \tilde{\gamma}^2||w(t_\ell + (k+1)\delta)||^2 \leq 0. \end{aligned} \tag{4.49}$$

A soma mostrada em (4.49) é uma soma de Riemann [Ste08] e, consequentemente, para $\delta \to 0$ tem-se

$$\left|\left| \int_{t_\ell}^{t} C(t)\Phi(t, \tau)B_w(\tau)w(\tau)d\tau + D_w(t)w(t) \right|\right|^2 - \tilde{\gamma}^2||w(t)||^2 \leq 0, \forall t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$$

e $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$ satisfaz a desigualdade. Por outro lado, para todo $\delta > 0$ a soma de Riemann é apenas uma aproximação da integral. Neste caso, a condição (4.49) equivale a

$$\left|\left| \int_{t_\ell}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B_w(\tau)w(\tau)d\tau + f(t,\delta) + D_w(t)w(t) + g(t,\delta) \right|\right|^2 - \tilde{\gamma}^2||w(t) + h(t,\delta)||^2 \leq 0, \forall t \in [t_\ell, t_{\ell+1}], \quad (4.50)$$

sendo $f(t,\delta)$, $g(t,\delta)$ e $h(t,\delta)$ os erros entre, respectivamente, a integral, as variáveis $D_w(t)w(t)$ e $w(t)$ e as respectivas aproximações discretas. Note que, como $w \in \mathcal{L}_2$ e $\hat{w} \in \mathcal{L}_2$, o valor $h(t,\delta)$ pode ser desconsiderado na análise de pior caso. O lado esquerdo da desigualdade (4.50) é portanto limitado superiormente por

$$\left|\left| \int_{t_\ell}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B_w(\tau)w(\tau)d\tau + D_w(t)w(t) \right|\right|^2 + ||f(t,\delta) + g(t,\delta)||^2 - \tilde{\gamma}^2||w(t)||^2. \quad (4.51)$$

Devido ao termo $||f(t,\delta) + g(t,\delta)||^2$, a expressão (4.51) não é garantidamente negativa para $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$. Entretanto, as funções $f(t,\delta)$ e $g(t,\delta)$ são limitadas para valores fixos de δ uma vez que as matrizes do sistema são supostamente integráveis. Portanto, existe uma função $\epsilon(\delta)$ de forma que $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} + \epsilon(\delta)$ satisfaz (4.51) e, se a última afirmação é válida para todo $\ell \in \mathbb{Z}$, tem-se $||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \hat{\gamma} + \epsilon(\delta)$.

Adaptação do método de [dST00]

O algoritmo apresentado a seguir é baseado nos resultados de [dST00, Theorem 1].

Algoritmo 4.4

1. Escolha $\sigma > 0$, $0 < \delta \leq \sigma$ e $\hat{\gamma} > 0$;
2. Defina $N = \sigma/\delta$ e atribua $\ell \leftarrow 0$;
3. Para cada $t_\ell = t_0 + \ell\sigma$:
   (a) Calcule a matriz $\Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell), k = 0, \ldots, N-1$, resultante da resolução da equação diferencial (1.4) ou obtida pela aplicação de algum método numérico, como por exemplo o método apresentado em [Lu00];
   (b) Obtenha as matrizes $W_\ell(k) = W'_\ell(k)$ e $Y_\ell(k)$ que satisfaçam

$$\begin{bmatrix} W_\ell(k) & W_\ell(k)\hat{A}'_\ell(k) + Y'_\ell(k)\hat{B}'_\ell(k) & W_\ell(k)\hat{C}'_\ell(k) + Y'_\ell(k)\hat{D}'_\ell(k) & 0 \\ \star & W_\ell(k+1) & 0 & \hat{B}_{w\ell}(k) \\ \star & \star & I & \hat{D}_{w\ell}(k) \\ \star & \star & \star & \hat{\gamma}^2 I \end{bmatrix} > 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (4.52)$$

Note que

$$\hat{A}_\ell(k) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell)^{-1};$$

(c) Atribua $\tilde{K}_\ell(k) \leftarrow Y_\ell(k)W_\ell(k)^{-1}$;

(d) Calcule

$$K_\ell(\tilde{t}) \leftarrow \frac{1}{\delta}\hat{K}_\ell(k)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (k+1)\delta), \quad t_\ell + k\delta \leq \tilde{t} < t_\ell + (k+1)\delta;$$

4. Se $K(t)$ estabiliza assintoticamente o sistema, pare; senão, reduza o valor de δ ou aumente o valor de σ, e retorne ao passo 1.

4.6 Exemplos numéricos

4.6.1 Exemplo I

Para todos os exemplos deste capítulo, as rotinas foram implementadas em Matlab, versão 7.0.1 (R14), e o computador utilizado foi um AMD® Phenom II Quad Core 945 (3.0 GHz), 3.2GB RAM, Linux Ubuntu 9.04. O sistema analisado no primeiro exemplo foi introduzido em [LC05] e é dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2 & 0 \\ 0 & 2 & e^{-3t} \\ e^{-t} & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{-t} \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} u(t) \\
z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + w(t) \\
y(t) &= x(t).
\end{aligned}$$

A instabilidade do sistema, assim como a controlabilidade completa e uniforme do par $\{A(t), B(t)\}$, são mostrados em [LC05].

Primeiramente, os resultados obtidos com a aplicação do Algoritmo 4.1 são mostrados. Os ganhos estabilizantes de realimentação de estados foram calculados considerando $\delta = 1$, $N = 50$ e $\beta \in \{0.05, 0.1, 1\}$. A Figura 4.1 mostra as funções $\rho_{cl}(t)$, calculadas pelo Teorema 1.5, que correspondem aos envelopes das normas de todas as possíveis trajetórias do sistema em malha fechada que partem dos estados iniciais $x(t_0)$ tais que $||x(t_0)|| < 1$. Note que o valor máximo da função $\rho_{cl}(t)$ aumenta conforme os valores de β diminuem. De fato, de acordo com Equação (4.2), uma diminuição no valor de β implica na diminuição do limitante da taxa de variação da função de Lyapunov, o que pode resultar em um aumento do valor máximo das normas das trajetórias [LP02, LP04]. A Figura 4.2 mostra o ganho $K_\delta(t)$ obtido com $\beta = 1$.

Os Algoritmos 4.2 e 4.3 são também capazes de gerar ganhos estabilizantes. O Algoritmo 4.2 foi aplicado com $\{\epsilon = 0.01, \delta = 0.1\}$ e $\{\epsilon = 0.1, \delta = 1\}$. A Figura 4.3 mostra as funções $\rho_{cl}(t)$ obtidas com os dois valores considerados para δ, e os elementos dos ganhos resultantes são mostrados na Figura 4.4. Note que o aumento no valor de δ resulta em um decréscimo na norma dos ganhos de realimentação de estados, e as trajetórias convergem mais lentamente à origem. Tal efeito era esperado pois o método apresentado em [Lu00] consiste em minimizar a energia da lei de controle e da norma das trajetórias em malha fechada, de forma que o sistema seja praticamente estável após um intervalo δ de tempo. A utilização de valores pequenos de δ implica em condições mais restritivas para a estabilização e, na maioria das vezes, uma lei

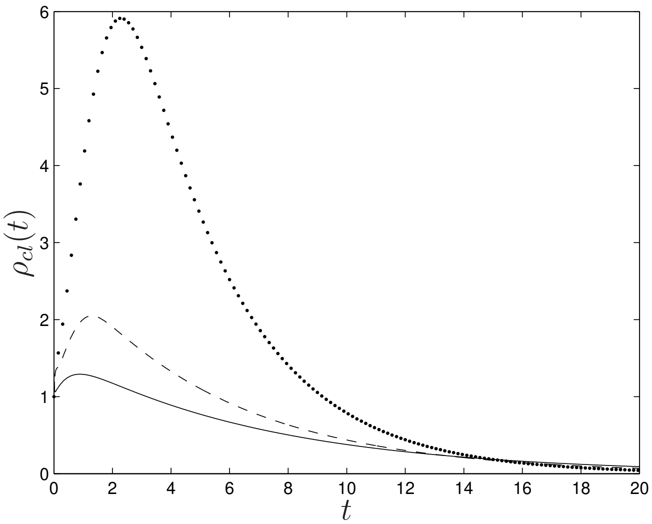

Figura 4.1: Funções $\rho_{cl}(t)$ obtidas no Exemplo I para o sistema em malha fechada com os ganhos de realimentação de estados $K_\delta(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.1, com $\beta = 0.05$ (curva pontilhada), $\beta = 0.1$ (curva tracejada) e com $\beta = 1$ (curva contínua).

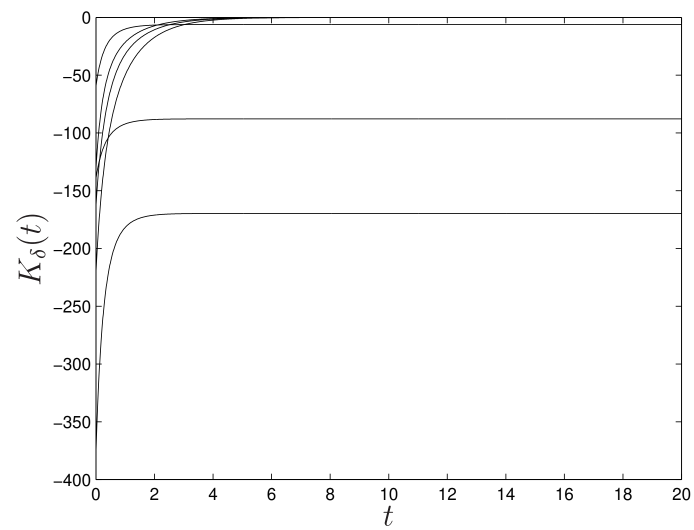

Figura 4.2: Elementos do ganho $K_\delta(t)$ resultante da aplicação do Algoritmo 4.1 ao Exemplo I com $\beta = 1$.

de controle de maior norma é necessária. Por outro lado, na demonstração do Teorema 4.4, afirma-se que a utilização de grandes valores de δ não garante necessariamente a estabilidade do sistema em malha fechada. É importante também notar que, como as dimensões das matrizes construídas no Algoritmo 4.2 são proporcionais a δ/ϵ, devem ser escolhidos valores apropriados de δ e ϵ para que as matrizes não apresentem dimensões muito grandes. Note também que o aumento de δ reduziu o valor máximo de $\rho_{cl}(t)$. Para o Algoritmo 4.3, foram utilizados os parâmetros $N = 20$ e $\sigma = \{0.5, 1\}$. As funções $\rho_{cl}(t)$ são mostradas na Figura 4.5, e a Figura 4.6 mostra os elementos dos ganhos obtidos.

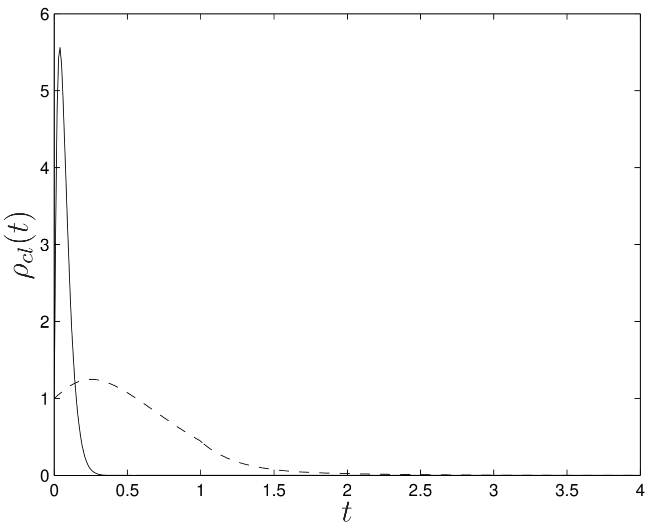

Figura 4.3: Funções $\rho_{cl}(t)$ obtidas no Exemplo I para o sistema em malha fechada com os ganhos de realimentação de estados $K(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.2, com $\delta = 1$ (curva tracejada) e com $\delta = 0.1$ (curva contínua).

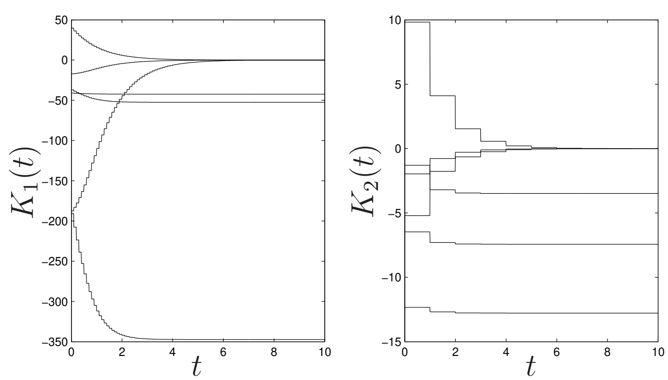

Figura 4.4: Elementos dos ganhos $K(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.2 no Exemplo I. O ganho $K_1(t)$ corresponde à utilização de $\delta = 0.1$ e $K_2(t)$ corresponde a $\delta = 1$.

Considere o problema de estabilizar o sistema minimizando o limitante γ da norma $\mathcal{H}_\infty$. O sistema apresentado neste exemplo não pode ser modelado pela abordagem LPV uma vez que os elementos variantes no tempo não são limitados para todo t. Consequentemente, uma

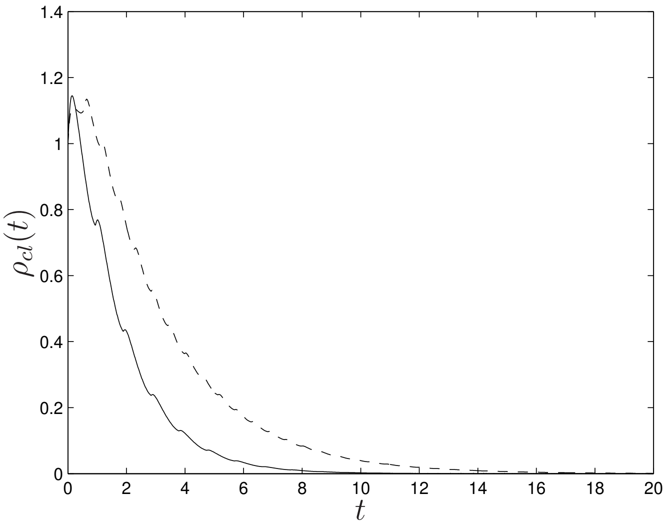

Figura 4.5: Funções $\rho_{cl}(t)$ obtidas no Exemplo I para o sistema em malha fechada com os ganhos de realimentação de estados $K(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.3, com $\sigma = 0.5$ (curva tracejada) e com $\sigma = 1$ (curva contínua).

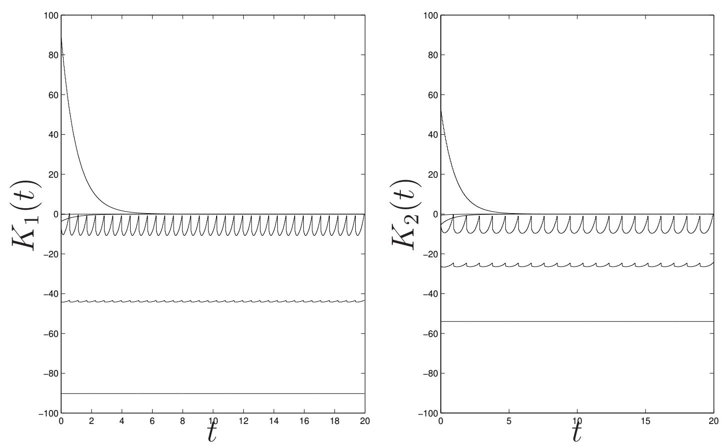

Figura 4.6: Elementos dos ganhos $K(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.3 no Exemplo I. Cada curva representa um dos elementos de $K(t) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. O ganho $K_1(t)$ corresponde à utilização de $\sigma = 0.5$ e $K_2(t)$ corresponde a $\sigma = 1$.

forma de construir ganhos estabilizantes que minimizem o limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ é dada pela aplicação do Algoritmo 4.4. A Tabela 4.1 mostra os valores mínimos dos limitantes, resultantes da utilização de todas as combinações de $\sigma = \{0.5, 1\}$ e $N = \{10, 20, 30\}$. Os valores mostrados na tabela são obtidos da minimização de $\hat{\gamma}$ no Algoritmo 4.4 para cada t_ℓ, e $\hat{\gamma}^*$ corresponde ao valor máximo dos $\hat{\gamma}$ calculados. Note que os valores de $\hat{\gamma}^*$ diminuem com o aumento de N e com a redução de σ, ao preço de aumentar o número de LMIs a serem resolvidas e, consequentemente, o custo computacional.

Tabela 4.1: Valores dos limitantes γ para a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema do Exemplo I em malha fechada após a aplicação do Algoritmo 4.4.

$N = 10$, $\sigma = 1$	$\hat{\gamma}^* = 1.0236$
$N = 20$, $\sigma = 1$	$\hat{\gamma}^* = 1.0054$
$N = 30$, $\sigma = 1$	$\hat{\gamma}^* = 1.0021$
$N = 10$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.0054$
$N = 20$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.0010$
$N = 30$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.0003$

4.6.2 Exemplo II

Para o segundo exemplo, considere o sistema periódico, de período $T = \pi$, utilizado em [Kha02, GPT10] e dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 + 1.5\cos^2(t) & 1 - 1.5\mathrm{sen}(t)\cos(t) \\ -1 - 1.5\mathrm{sen}(t)\cos(t) & -1 + 1.5(1 - \cos^2(t)) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \\
&\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{sen}(t)(\cos(t) + 3\mathrm{sen}(t)) \end{bmatrix} u(t) \\
z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + w(t) \\
y(t) &= x(t).
\end{aligned}$$

Como não foi encontrado nenhum valor inteiro de ℓ que satisfaça as condições do Corolário 4.1, o sistema é considerado instável. A instabilidade do sistema pode ser confirmada em [GPT10], e a controlabilidade do par $\{A(t), B(t)\}$ é verificada pela Propriedade 1.6.

Os elementos do ganho estabilizante de realimentação de estados $K_\delta(t)$ resultante do Algoritmo 4.1, com $\delta = T = \pi$, $N = 50$ e $\beta = 1$, são mostrados na Figura 4.7, e a Figura 4.8 ilustra os envelopes $\rho_{cl}(t)$ das trajetórias em malha fechada considerando $\beta \in \{0.1, 1, 10\}$. Note que a taxa de decrescimento de $\rho_{cl}(t)$ aumenta com o valor de β; no entanto, valores de $\beta > 10$ geram praticamente os mesmos resultados que $\beta = 10$.

Os Algoritmos 4.2 e 4.3 são também capazes de gerar ganhos estabilizantes. O Algoritmo 4.2 foi aplicado com $\{\epsilon = 0.1, \delta = 1\}$ e $\{\epsilon = 0.1, \delta = 5\}$. A Figura 4.9 mostra as funções $\rho_{cl}(t)$ obtidas com os dois valores considerados para δ, e os respectivos ganhos são mostrados na Figura 4.10. Note que, como no Exemplo I, o aumento de δ resulta no decrescimento da norma dos ganhos de realimentação de estados, mas neste caso as trajetórias não vão consideravelmente mais rápido à origem com ganhos de maior norma. Para o Algoritmo 4.3, foram utilizados os parâmetros $N = 20$ e $\sigma = \{0.5, \pi\}$. As respectivas funções $\rho_{cl}(t)$ são mostradas na Figura 4.11, e a Figura 4.12 mostra os ganhos obtidos.

Considere o problema de estabilizar o sistema minimizando o limitante γ da norma $\mathcal{H}_\infty$. A Tabela 4.2 mostra os valores mínimos dos limitantes encontrados pela aplicação dos Algoritmos 3.1 e 4.4, sendo o último para todas as combinações de $\sigma = \{\pi, 0.5\}$ e $N = \{10, 20, 30\}$. O

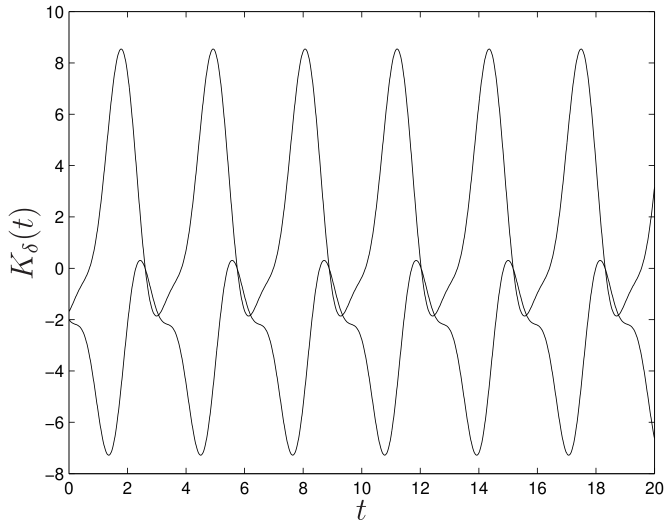

Figura 4.7: Elementos do ganho $K_\delta(t)$ resultante da aplicação do Algoritmo 4.1 no Exemplo II com $\beta = 1$.

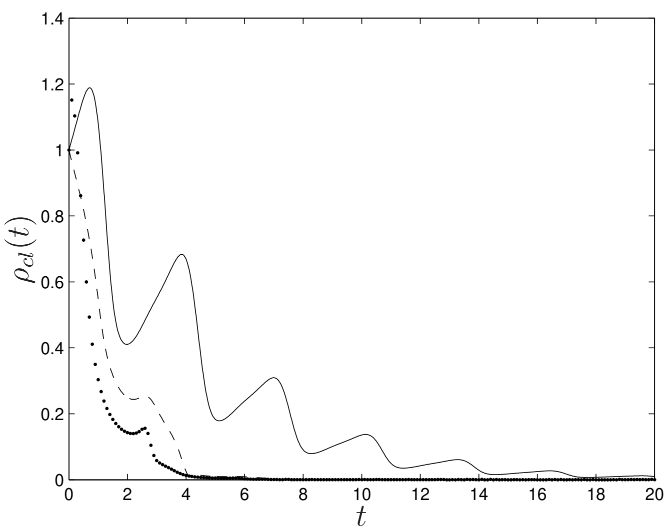

Figura 4.8: Funções $\rho_{cl}(t)$ obtidas pelo Exemplo II para o sistema em malha fechada com os ganhos de realimentação de estados $K_\delta(t)$ obtidos pelo Algoritmo 4.1, com $\beta = 0.1$ (curva contínua), $\beta = 1$ (curva tracejada) e com $\beta = 10$ (curva pontilhada).

modelo LPV foi obtido considerando $\theta_1(t) = \cos^2(t)$ e $\theta_2(t) = \operatorname{sen}(t)\cos(t)$, o Algoritmo 3.1 foi utilizado com $\xi = 0.1$ no primeiro estágio e o resultado mostrado corresponde a uma iteração do procedimento iterativo. Note que, assim como no Exemplo I, os limitantes das normas obtidos pelo Algoritmo 4.4 diminuem com o aumento de N e com a redução de σ. É importante

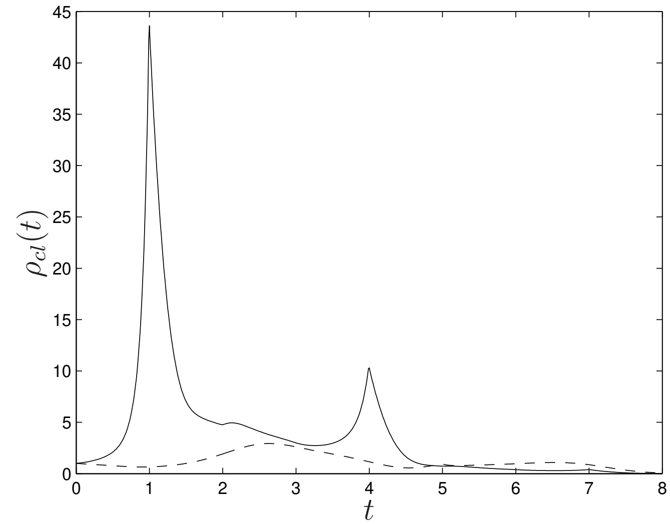

Figura 4.9: Funções $\rho_{cl}(t)$ do Exemplo II para o sistema em malha fechada com os ganhos de realimentação de estados $K(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.2, com $\delta = 1$ (curva contínua) e com $\delta = 5$ (curva tracejada).

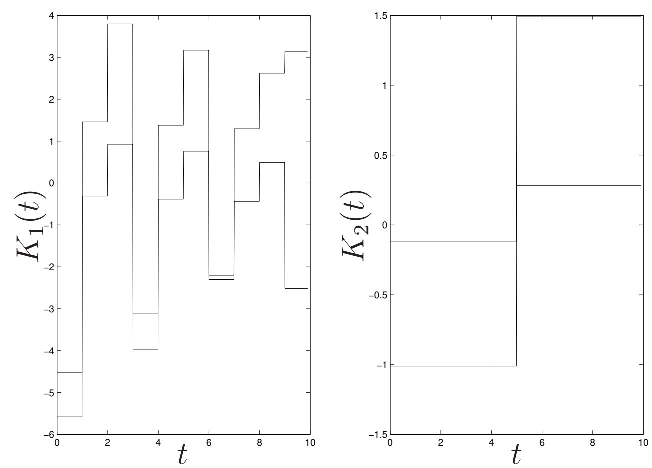

Figura 4.10: Elementos dos ganhos $K(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.2 ao Exemplo II. O ganho $K_1(t)$ corresponde à utilização de $\delta = 1$ e $K_2(t)$ corresponde a $\delta = 5$.

observar que o limitante resultante do método LPV é consideravelmente maior que os valores de $\hat{\gamma}^*$ gerados pela abordagem LTV, o que era esperado uma vez que, na modelagem do sistema na forma LPV, certas informações são perdidas (pois são considerados apenas os limitantes dos parâmetros e das taxas de variação).

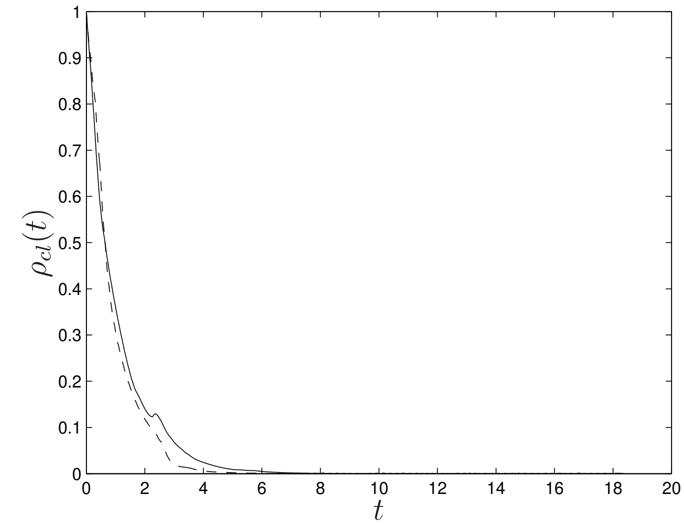

Figura 4.11: Funções $\rho_{cl}(t)$ do Exemplo II para o sistema em malha fechada com os ganhos de realimentação de estados $K(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.3, com $\sigma = \pi$ (curva tracejada) e com $\sigma = 0.5$ (curva contínua).

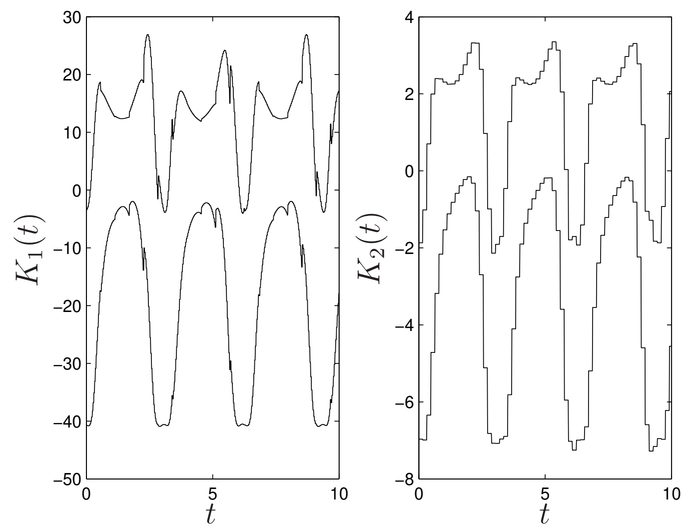

Figura 4.12: Elementos dos ganhos $K(t)$ resultantes da aplicação do Algoritmo 4.3 no Exemplo II. O ganho $K_1(t)$ corresponde à utilização de $\sigma = 1$ e $K_2(t)$ corresponde a $\sigma = \pi$.

4.7 Conclusão

Um conjunto de métodos para a síntese de leis de controle estabilizantes para sistemas lineares variantes no tempo foi introduzido neste capítulo. O primeiro método consiste na utilização

Tabela 4.2: Valores dos limitantes γ para a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema do Exemplo II em malha fechada após a aplicação dos Algoritmos 3.1 e 4.4.

Algoritmo 3.1	$\gamma = 10.88$	
Algoritmo 4.4	$N = 10$, $\sigma = \pi$	$\hat{\gamma}^* = 1.17$
	$N = 20$, $\sigma = \pi$	$\hat{\gamma}^* = 1.17$
	$N = 30$, $\sigma = \pi$	$\hat{\gamma}^* = 1.06$
	$N = 10$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.03$
	$N = 20$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.03$
	$N = 30$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.02$

de informações da matriz de transição de estados para o cálculo de um ganho de realimentação de estados, que estabiliza o sistema caso seja uniformemente completamente controlável e se uma condição de observabilidade for satisfeita. O cálculo do ganho é relativamente simples e rápido, porém a escolha dos parâmetros que satisfazem as condições não é direta. Os outros métodos baseiam-se em um critério de verificação de estabilidade introduzida no capítulo, que consiste basicamente em verificar os valores de uma função obtida pela matriz de transição calculada em um horizonte finito de tempo. As principais vantagens do critério são referentes à adaptabilidade a métodos computacionais, graças à possibilidade de paralelização. Duas técnicas desenvolvidas pela adaptação do critério para a síntese de controladores estabilizantes foram apresentadas. A primeira técnica consiste em aplicar métodos de estabilização a tempo finito. Tais métodos são, em geral, de simples implementação e só garantem a estabilidade assintótica do sistema se utilizadas em conjunto com a técnica proposta. Para a segunda técnica, sistemas discretos e periódicos são sintetizados a partir de informações do sistema original, e os ganhos projetados para estabilizar os sistemas discretos são modificados para garantir a estabilidade do sistema contínuo original. As duas técnicas foram adaptadas para assegurar a existência de um limitante γ da norma $\mathcal{H}_\infty$. Nos exemplos, os comportamentos das trajetórias em malha fechada com os ganhos obtidos pelos métodos propostos foram mostrados, ilustrando as capacidades de cada técnica. A adaptação da técnica discreta para o controle $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada foi comparada com a técnica LPV exposta no Capítulo 3. Conforme esperado, a utilização da abordagem LTV para sistemas precisamente conhecidos gera resultados melhores que a abordagem LPV, quando aplicável.

Conclusões

O principal objetivo desta tese foi o desenvolvimento de técnicas para a síntese de leis de controle estabilizantes para sistemas lineares a tempo contínuo, considerando a minimização de um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada como critério de desempenho. As técnicas apresentadas na tese, que são capazes de tratar uma boa parte da classe de sistemas lineares a tempo contínuo, são divididas em três categorias: os sistemas invariantes no tempo (LTI) que apresentam elementos e parâmetros incertos, sendo que os limitantes das incertezas são conhecidos; os sistemas aos parâmetros incertos e variantes no tempo (LPV); e os sistemas lineares precisamente conhecidos e variantes no tempo (LTV).

Para os sistemas LTI, buscam-se controladores dinâmicos robustos (isto é, que não sejam dependentes dos parâmetros incertos) e de ordem reduzida capazes de estabilizar os sistemas minimizando um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$. Uma representação aumentada do sistema é primeiramente obtida para que o problema de síntese de controladores dinâmicos seja reduzido a um problema de síntese de ganhos estáticos, e a síntese é realizada aplicando-se uma abordagem de dois estágios. Esta abordagem consiste no cálculo de um ganho de realimentação de estados no primeiro estágio, e na posterior utilização desse ganho no segundo estágio para calcular o ganho de realimentação de saída desejado. Como as incertezas são modeladas de forma politópica, cada estágio é composto pela resolução de condições LMIs, que são problemas de resolução simples graças à existência de ferramentas computacionais eficazes. Cada variável das LMIs pode ser modelada como um polinômio homogêneo de grau arbitrário, e graças a um interpretador desenvolvido especificamente para resolver este tipo de problema, pode-se alterar os graus das variáveis sem um grande esforço de programação. O interpretador também pode ser considerado como uma contribuição desta tese. Além da adaptação do método de dois estágios para a síntese de controladores dinâmicos robustos, uma outra contribuição desta tese é o desenvolvimento de um procedimento iterativo, que pode ser utilizado para melhorar algum critério de desempenho, como a minimização de um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$. O procedimento consiste basicamente, a cada iteração, em obter um ganho de realimentação de estados a partir da multiplicação do ganho de realimentação de saídas pela matriz de saída do sistema, e em sua aplicação na condição do segundo estágio. A convergência do limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ a um valor ao menos sub-ótimo é garantida.

Uma série de exemplos ilustra a validade e as capacidades do método de dois estágios com o procedimento iterativo, e os resultados obtidos são melhores do que os resultados de outros métodos conhecidos na literatura. A abordagem apresentada é mais versátil do que a maioria das outras técnicas, dado que o método de dois estágios é capaz de tratar as incertezas em todas as matrizes do sistema, e que é possível obter controladores de ordem reduzida, e não apenas controladores de ordem completa.

O método de dois estágios pode também ser adaptado para o caso LPV. Neste tipo de sistema supõe-se que um subconjunto dos parâmetros incertos seja mensurável em tempo real, para que possa ser gerado um controlador dinâmico dependente de parâmetros, que pode ser melhor em aspectos de abrangência e desempenho do que um controlador robusto. Todavia, em aplicações práticas, os sensores não são exatos e sempre contaminam os valores reais com ruídos de medição. A fim de considerar este tipo de problema e produzir controladores que sejam robustos a problemas de medição, as etapas de síntese são adaptadas para considerar ruídos tanto aditivos quando multiplicativos, que são incorporados às condições LMIs utilizando a abordagem multi-simplex. Os resultados obtidos podem confirmar que o método de dois estágios com o procedimento iterativo, ambos adaptados para o caso LPV, mostraram-se eficientes também para este tipo de problema. Particularmente, os resultados verificados nos exemplos, em termos dos limitantes da norma $\mathcal{H}_\infty$, não são consideravelmente piores com o aumento dos ruídos nas medições.

Por fim, duas abordagens diferentes para estabilizar sistemas LTV foram apresentadas. A primeira abordagem consiste em utilizar a matriz de transição de estados do sistema em malha aberta para calcular um ganho de realimentação de estados, que é capaz de estabilizar sistemas uniformemente completamente controláveis se uma condição de observabilidade for satisfeita. A matriz de transição utilizada é obtida considerando uma janela de tempo constante. Apesar de ser relativamente simples calcular tal matriz utilizando procedimentos numéricos, e que os exemplos numéricos tenham ilustrado a eficácia do método, problemas podem surgir na escolha de parâmetros como o tamanho da janela temporal utilizada no cálculo da matriz de transição, e a adaptação do método para considerar critérios de desempenho não é direta.

Uma análise mais aprofundada da matriz de transição calculada em uma janela constante de tempo inspirou o desenvolvimento de um novo critério para a verificação da estabilidade de sistemas LTV. Tal critério consiste em verificar se, para todo instante de tempo, a norma dos estados decresce após um intervalo finito de tempo, independentemente do comportamento durante o intervalo. As maiores vantagens de tal critério são de ordem numérica, pois é possível verificar a estabilidade do sistema analisando trechos finitos de tempo, com um procedimento que pode ser paralelizado. O critério pode ser utilizado para verificar a estabilidade do sistema LTV a tempo contínuo a partir da análise de um conjunto de sistemas discretos periódicos, construídos a partir do sistema original. A adaptação do critério para a síntese de leis de controle estabilizantes corresponde à segunda abordagem de síntese apresentada na tese, e tal técnica pode ser utilizada de duas formas diferentes: seja considerando o sistema LTV original e aplicando um método de estabilização a tempo finito, seja calculando leis de controle estabilizantes para uma série de sistemas LTV discretos e periódicos. Tais abordagens podem ser modificadas para considerar critérios de desempenho, como a minimização de um limitante da norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma relação entrada-saída particular, e os exemplos numéricos ilustram a validade e a eficácia dos métodos apresentados.

Foi também mostrado que os sistemas LTV podem ser modelados como sistemas LPV, caso os termos variantes no tempo sejam limitados para todos os instantes de tempo. Após a análise das normas $\mathcal{H}_\infty$ em malha fechada com os ganhos gerados pelos métodos LTV e LPV em alguns exemplos numéricos pode-se concluir que, caso seja possível escolher entre as duas abordagens, os métodos LTV podem fornecer melhores resultados. De fato, na modelagem de sistemas LPV, apenas as informações sobre os limitantes dos parâmetros e das taxas de variação são consideradas e, consequentemente, há uma perda de informação que pode levar a resultados mais conservadores. Por exemplo, a abordagem LPV não considera se um parâmetro varia como uma função seno ou cosseno, mas considera somente seus limitantes e de suas derivadas. No entanto, se não há suficiente informação sobre os parâmetros, então não é possível utilizar os métodos LTV, e os métodos LPV são mais apropriados.

As contribuições desta tese encorajam pesquisas mais aprofundadas nos assuntos apresentados. Entre os trabalhos futuros considerados, pode-se listar:

- Uma maior compreensão do método de dois estágios, com relação aos efeitos que os ganhos de realimentação de estados determinados no primeiro estágio causam sobre os ganhos de realimentação de saída resultantes do segundo estágio, para que seja possível a síntese de ganhos sub-ótimos;

- O desenvolvimento do interpretador ROLMIP para que possa tratar o caso multi-simplex, o que traria uma maior flexibilização para as condições de síntese dos sistemas LPV, assim como para os sistemas LTI;

- Aperfeiçoamento do método LTV baseado na matriz de transição de estados janelada, de forma a possibilitar a adaptação de critérios de desempenho, bem como desenvolver uma forma sistemática para definir o tamanho da janela temporal considerada;

- Aperfeiçoamento do novo critério de verificação de estabilidade de sistemas LTV e dos métodos de síntese baseados no critério, principalmente no sentido de poder tratar a síntese de controladores dinâmicos de ordem reduzida.

Artigos publicados

- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira e Pedro L. D. Peres, Robust $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. American Control Conference, 2010, Baltimore, MD, USA, pg. 4677–4682;

- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira e Pedro L. D. Peres, Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010, Atlanta, GA, USA, pg. 6894–6901;

- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira e Pedro L. D. Peres, Novas condições LMI para projeto de controladores estáticos mistos $\mathcal{H}_2$-$\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de saída para

sistemas politópicos contínuos invariantes no tempo. Congresso Brasileiro de Automática - XVIII CBA 2010, Bonito, MS, Brasil;

- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira e Pedro L. D. Peres, LMI relaxations for reduced-order robust control of continuous-time uncertain linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, pg. 1532–1537, 2012;

- Cristiano M. Agulhari, Germain Garcia, Sophie Tarbouriech e Pedro L. D. Peres, A numerical procedure to compute stabilizing state feedback gains for linear time-varying periodic systems. 7th IFAC Symposium on Robust Control Design - ROCOND 2012, Aalborg, Denmark, pg. 678–683;

- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira e Pedro L. D. Peres, Síntese de controladores escalonados $\mathcal{H}_\infty$ de ordem reduzida para sistemas politópicos contínuos e variantes no tempo. Congresso Brasileiro de Automática - XIX CBA 2012, Campina Grande, PB, Brasil;

- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira e Pedro L. D. Peres, Robust LMI Parser: A Computational Package to Construct LMI Conditions for Uncertain Systems. Congresso Brasileiro de Automática - XIX CBA 2012, Campina Grande, PB, Brasil.

Apêndice

Limitantes para a solução da equação diferencial de Riccati

Na demonstração do Teorema 4.1 é afirmado que, dado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X_{cl}(t,t_0) = A(t)X_{cl}(t,t_0) + X_{cl}(t,t_0)A'(t) - \beta B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0)\\ - \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t),\ X_{cl}(t_0,t_0) = I,\end{aligned} \quad (4.53)$$

então a matriz $P(t,t_0)$ solução de

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t,t_0) = A(t)P(t,t_0) + P(t,t_0)A'(t) + B(t)B'(t)\\ + \beta^2 P(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}P(t,t_0)\ ,\ P(t_0,t_0) \geq I\end{aligned} \quad (4.54)$$

satisfaz

$$X_{cl}(t,t_0) \leq P(t,t_0).$$

Para demonstrar a validade da última afirmação, basta verificar que a variável $\Delta(t,t_0)$, igual a

$$\Delta(t,t_0) = X_{cl}(t,t_0) - P(t,t_0),$$

é semi-definida negativa para todo $t \geq t_0$. Utilizando (4.53) e (4.54), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta(t,t_0) =& A(t)\Delta(t,t_0) + \Delta(t,t_0)A'(t) - \beta B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0)\\ &- \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t) - B(t)B'(t)\\ &- \beta^2 P(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}P(t,t_0).\end{aligned}$$

Substituindo $P(t,t_0) = X_{cl}(t,t_0) - \Delta(t,t_0)$ e considerando

$$G(t,t_0,\delta) = -\beta B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0) - \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t) - B(t)B'(t),$$

tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta(t,t_0) = A(t)\Delta(t,t_0) + \Delta(t,t_0)A'(t) + G(t,t_0,\delta) \\ - \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0) \\ + \beta^2 \Delta(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0) \\ + \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}\Delta(t,t_0) \\ - \beta^2 \Delta(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}\Delta(t,t_0).\end{aligned} \quad (4.55)$$

Observando que

$$\begin{aligned}G(t,t_0,\delta) - \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0) \\ = -\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)\big)\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)\big)',\end{aligned} \quad (4.56)$$

pode-se notar que (4.55) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}\Delta(t,t_0) = M(t,t_0,\delta)\Delta(t,t_0) + \Delta(t,t_0)M'(t,t_0,\delta) + W(t,t_0,\delta), \quad (4.57)$$

sendo

$$M(t,t_0,\delta) = A(t) + \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}$$

e

$$\begin{aligned}W(t,t_0,\delta) = & -\beta^2 \Delta(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}\Delta(t,t_0) \\ & - \big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)\big)\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)\big)'\end{aligned}$$

De acordo com [PBG88, Lemma 3], a matriz $\Delta(t,t_0)$ é dada por

$$\Delta(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi_M(t,\tau)W(\tau)\Phi'_M(t,\tau)d\tau + \Phi_M(t,t_0)\Delta(t_0,t_0)\Phi'(t,t_0),$$

sendo $\Phi_M(t,t_0)$ a matriz de transição do sistema cuja dinâmica é $M(t,t_0,\delta)$. Como $W(t,t_0,\delta) \leq 0$, a matriz $\Delta(t,t_0)$ é semi-definida negativa se, e somente se,

$$\Delta(t_0,t_0) = X_{cl}(t_0,t_0) - P(t_0,t_0) = I - P(t_0,t_0) \leq 0,$$

demonstrando a validade da desigualdade (4.54).

Bibliografia

[AGPP09] Arzelier, D., Gryazina, E. N., Peaucelle, D., and Polyak, B. T., 2009. Mixed LMI/Randomized methods for static output feedback control design: Stability and performance. Technical Report 09640, LAAS-CNRS.

[AGPP10] Arzelier, D., Gryazina, E. N., Peaucelle, D., and Polyak, B. T., 2010. Mixed LMI/Randomized methods for static output feedback control design. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference* (Baltimore, MD, USA), 4683–4688.

[AGTP12] Agulhari, C. M., Garcia, G., Tarbouriech, S., and Peres, P. L. D., 2012. A numerical procedure to compute stabilizing state feedback gains for linear time-varying periodic systems. In: *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2012)* (Aalborg, Denmark), 678–683.

[AM69] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., 1969. New results in linear system stability. *SIAM Journal on Control*, 7(3):398–414.

[AN06] Apkarian, P. and Noll, D., 2006. Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1):71–86.

[And72] Anderson, B. O., 1972. The small-gain theorem, the passivity theorem and their equivalence. *Journal of The Franklin Institute*, 293(2):105–115.

[AOP10a] Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2010. Robust $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In: *Proceedings of the 2010 American Control Conference* (Baltimore, MD, USA), 4677–4682.

[AOP10b] Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2010. Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control* (Atlanta, GA, USA), 6894–6901.

[AOP12] Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2012. LMI relaxations for reduced-order robust $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6):1532–1537.

[AP02] Arzelier, D. and Peaucelle, D., 2002. An iterative method for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ synthesis via static output-feedback. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control* (Las Vegas, NV, USA), 3464–3469.

[APS03] Arzelier, D., Peaucelle, D., and Salhi, S., 2003. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound. In: *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)* (Milan, Italy), 425–430.

[AT00] Apkarian, P. and Tuan, H. D., 2000. Parametrized LMIs in control theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4):1241–1264.

[BCG84] Bittanti, S., Colaneri, P., and Guardabassi, G., 1984. Periodic solutions of periodic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(7):665–667.

[BCG85] Bittanti, S., Colaneri, P., and Guardabassi, G., 1985. Periodic Riccati equation: a decomposition approach. In: *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control* (Fort Lauderdale, FL, USA), 1713–1718.

[BEFB94] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA).

[BGW90] Bitmead, R. R., Gevers, M., and Wertz, V., 1990. *Adaptive Optimal Control – The Thinking Man's GPC* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ).

[BIJ81] Benhabib, R. J., Iwens, R. P., and Jackson, R. L., 1981. Stability of large space structure control systems using positivity concepts. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 4(5):487–494.

[Bla94] Blanchini, F., 1994. Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(2):428–433.

[BLA10] Böhm, C., Lazar, M., and Allgöwer, F., 2010. A relaxation of Lyapunov conditions and controller synthesis for discrete-time periodic systems. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control* (Atlanta, GA, USA), 3277–3282.

[BOMP06] Bliman, P.-A., Oliveira, R. C. L. F., Montagner, V. F., and Peres, P. L. D., 2006. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In: *Proceedings* *of the 45th IEEE Conference on Decision and Control* (San Diego, CA, USA), 1486–1491.

[BPG89] Bernussou, J., Peres, P. L. D., and Geromel, J. C., 1989. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1):65–72.

[Bru69] Brunovsky, P., 1969. Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems. *Journal of Differential Equations*, 6(2):296–313.

[Bru04] Bruzelius, F., 2004. *Linear Parameter-varying Systems: An Approach to Gain Scheduling*. Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.

[BT00] Blondel, V. D. and Tsitsiklis, J. N., 2000. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9):1249–1274.

[Buc72] Bucy, R. S., 1972. The Riccati equation and its bounds. *Journal of Computer and System Sciences*, 6(4):343–353.

[CGTV07] Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A., and Vicino, A., 2007. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions. *Automatica*, 43(2):309–316.

[Che99] Chen, C. T., 1999. *Linear System Theory and Design* (Oxford University Press), 3rd edition.

[CLM96] Chisci, L., Lombardi, A., and Mosca, E., 1996. Dual receding horizon control of constrained discrete-time systems. *European Journal of Control*, 2(4):278–285.

[Col00] Colaneri, P., 2000. Continuous-time periodic systems in $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$. part I: Theoretical aspects. *Kybernetica*, 36(2):211–242.

[CP72] Chang, S. S. L. and Peng, T. K. C., 1972. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(4):474–483.

[CT99] Crusius, C. A. R. and Trofino, A., 1999. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1053–1057.

[D'A70] D'Angelo, H., 1970. *Linear Time-varying Systems: Analysis and Synthesis* (Allyn and Bacon, Boston, MA).

[DBG08] Daafouz, J., Bernussou, J., and Geromel, J. C., 2008. On inexact LPV control design of continuous-time polytopic systems. *Automatica*, 53(7):1674–1678.

[dOBG99] de Oliveira, M. C., Bernussou, J., and Geromel, J. C., 1999. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265.

[dOG05] DE OLIVEIRA, M. C. and GEROMEL, J. C., 2005. A class of robust stability conditions where linear parameter dependence of the Lyapunov function is a necessary condition for arbitrary parameter dependence. *Systems & Control Letters*, 54:1131–1134.

[dOOL+02] DE OLIVEIRA, P. J., OLIVEIRA, R. C. L. F., LEITE, V. J. S., MONTAGNER, V. F., and PERES, P. L. D., 2002. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: A numerical comparison. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control* (Las Vegas, NV, USA), 644–649.

[dOS01] DE OLIVEIRA, M. C. and SKELTON, R. E., 2001. Stability tests for constrained linear systems. In: S. O. Reza Moheimani (Editor), *Perspectives in Robust Control* (Springer-Verlag, New York, NY), volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. 241–257.

[dST00] DE SOUZA, C. E. and TROFINO, A., 2000. An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems. *International Journal of Control*, 73(8):696–703.

[EKH+09] EBIHARA, Y., KUBOYAMA, Y., HAGIWARA, T., PEAUCELLE, D., and ARZELIER, D., 2009. Further results on periodically time-varying memory state-feedback controller synthesis for discrete-time linear systems. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control — 28th Chinese Control Conference* (Shangai, P.R. China), 702–707.

[EN00] EL GHAOUI, L. and NICULESCU, S. I. (Editors), 2000. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Advances in Design and Control (SIAM, Philadelphia, PA).

[EOA97] EL GHAOUI, L., OUSTRY, F., and AIT-RAMI, M., 1997. A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176.

[FL97] FU, M. and LUO, Z., 1997. Computational complexity of a problem arising in fixed order output feedback design. *Systems & Control Letters*, 30(5):209–215.

[Flo83] FLOQUET, G., 1883. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 2(12):47–88.

[GA94] GAHINET, P. and APKARIAN, P., 1994. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4):421–448.

[GAC96] GAHINET, P., APKARIAN, P., and CHILALI, M., 1996. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442.

[GB86] Galimidi, A. R. and Barmish, B. R., 1986. The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(5):410–419.

[GC06] Geromel, J. C. and Colaneri, P., 2006. Robust stability of time varying polytopic systems. *Systems & Control Letters*, 55(1):81–85.

[GCG93] Garofalo, F., Celentano, G., and Glielmo, L., 1993. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2):281–284.

[GdS98] Geromel, J. C., de Souza, C. C., and Skelton, R. E., 1998. Static output feedback controllers: stability and convexity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1):120–125.

[GKB07] Geromel, J. C., Korogui, R. H., and Bernussou, J., 2007. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust output feedback control for continuous time polytopic systems. *IET Control Theory & Applications*, 1(5):1541–1549.

[GPS96] Geromel, J. C., Peres, P. L. D., and Souza, S. R., 1996. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):997–1003.

[GPT10] Garcia, G., Peres, P. L. D., and Tarbouriech, S., 2010. Assessing asymptotic stability of linear continuous time-varying systems by computing the envelope of all trajectories. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4):998–1003.

[GS96] Grigoriadis, K. M. and Skelton, R. E., 1996. Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods. *Automatica*, 32(8):1117–1125.

[GTB09] Garcia, G., Tarbouriech, S., and Bernussou, J., 2009. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2):364–369.

[Hal90] Halanay, A., 1990. Advances in linear control theory and Riccati equations. In: *Dynamical Systems and O.D.E.* (Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino), volume 48 (3), 251–348.

[HB91] Haddad, W. M. and Bernstein, D. S., 1991. Robust stabilization with positive real uncertainty: Beyond the small gain theorem. *Systems & Control Letters*, 17(3):191–208.

[HB93] Haddad, W. M. and Bernstein, D. S., 1993. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov theorems and their application to robust stability. part I: Continuous-time theory. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 3(4):313–339.

[HL04] Hu, G.-D. and Liu, M., 2004. The weighted logarithmic matrix norm and bounds of the matrix exponential. *Linear Algebra and Its Applications*, 390:145–154.

[IS94] Iwasaki, T. and Skelton, R. E., 1994. All controllers for the general $\mathcal{H}_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state-space formulas. *Automatica*, 30(8):1307–1317.

[Iwa96] Iwasaki, T., 1996. Robust performance analysis for systems with structured uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:85–99.

[Iwa99] Iwasaki, T., 1999. The dual iteration for fixed-order control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4):783–788.

[Kab86] Kabamba, P. T., 1986. Monodromy eigenvalue assignment in linear periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(10):950–952.

[Kal59] Kalman, R. E., 1959. On the general theory of control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*:481–492.

[Kal60] Kalman, R. E., 1960. Contributions to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 5:102–119.

[Kha02] Khalil, H. K., 2002. *Nonlinear Systems* (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ), 3rd edition.

[KP77] Kwon, W. H. and Pearson, A. E., 1977. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):838–842.

[KYK01] Kim, K. B., Yoon, T.-W., and Kwon, W. H., 2001. Stabilizing receding horizon $\mathcal{H}_\infty$ controls for linear continuous time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1273–1279.

[LC05] Lee, H. C. and Choi, J. W., 2005. Ackermann-like eigenvalue assignment formulae for linear time-varying systems. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 152(4):427–434.

[LKC98] Lee, J.-W., Kwon, W. H., and Choi, J., 1998. On stability of constrained receding horizon control with finite terminal weighting matrix. *Automatica*, 34(12):1607–1612.

[LOdOP04] Leite, V. J. S., Oliveira, R. C. L. F., de Oliveira, P. J., and Peres, P. L. D., 2004. $\mathcal{D}$-stability of polytopes of polynomial matrices: characterization through LMIs. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control* (Paradise Island, Bahamas), 863–868.

[Löf04] Löfberg, J., 2004. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design* (Taipei, Taiwan), 284–289. `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php`.

[LP02] Loría, A. and Panteley, E., 2002. Uniform exponential stability of linear time-varying systems: revisited. *Systems & Control Letters*, 47(1):13–24.

[LP04] Loría, A. and Panteley, E., 2004. Explicit bounds on the exponential decay and on the $\mathcal{L}_2$ gain for linear time-varying systems. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. 2544–2549.

[Lu00] Lu, P., 2000. Closed-form control laws for linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3):537–542.

[MBB04] Mehdi, D., Boukas, E. K., and Bachelier, O., 2004. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(1):1–13.

[MM93] Michalska, H. and Mayne, D. Q., 1993. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11):1623–1633.

[MOP06] Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2006. Design of $\mathcal{H}_\infty$ gain-scheduled controllers for linear time-varying systems by means of polynomial Lyapunov functions. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control* (San Diego, CA, USA), 5839–5844.

[MOP11] Moreira, H. R., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2011. Robust $\mathcal{H}_2$ static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optimal Control Applications and Methods*, 32(1):1–13.

[MOPB09] Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F., Peres, P. L. D., and Bliman, P.-A., 2009. Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variations. *International Journal of Control*, 82(6):1045–1059.

[MP72] Michel, A. N. and Porter, D. W., 1972. Practical stability and finite-time stability of discontinuous systems. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 19(2):123–129.

[MRRS00] Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V., and Scokaert, P. O. M., 2000. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814.

[MSA04] Montagnier, P., Spiteri, R. J., and Angeles, J., 2004. The control of linear time-periodic systems using Floquet–Lyapunov theory. *International Journal of Control*, 77(5):472–490.

[OBP08] Oliveira, R. C. L. F., Bliman, P.-A., and Peres, P. L. D., 2008. Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control* (Cancun, Mexico), 2226–2231.

[OdOP07] Oliveira, R. C. L. F., de Oliveira, M. C., and Peres, P. L. D., 2007. Parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability analysis of time-varying systems in polytopic domains. In: *Proceedings of the 2007 American Control Conference* (New York, NY, USA), 6079–6084.

[OP05] Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D., 2005. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, 405:209–228.

[OP06a] Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D., 2006. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 55(1):52–61.

[OP06b] Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D., 2006. LMI relaxations for homogeneous polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. In: *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2006)* (Toulouse, France).

[OP07] Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D., 2007. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7):1334–1340.

[PA01] Peaucelle, D. and Arzelier, D., 2001. An efficient numerical solution for $\mathcal{H}_2$ static output feedback synthesis. In: *Proceedings of the 2001 European Control Conference* (Porto, Portugal), 3800–3805.

[PBG88] Poubelle, M.-A., Bitmead, R. R., and Gevers, M. R., 1988. Fake algebraic Riccati techniques and stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(4):379–381.

[PDSV09] Pipeleers, G., Demeulenaere, B., Swevers, J., and Vandenberghe, L., 2009. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, 58(7):510–518.

[PG94] Peres, P. L. D. and Geromel, J. C., 1994. An alternate numerical solution to the linear quadratic problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(1):198–202.

[RM93] RAWLINGS, J. B. and MUSKE, K. R., 1993. The stability of constrained receding horizon control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(10):1512–1516.

[Rug96] RUGH, W. J., 1996. *Linear System Theory* (Prentice Hall, New Jersey), 2nd edition.

[SA68] SILVERMAN, L. M. and ANDERSON, B. D. O., 1968. Controllability, observability and stability of linear systems. *SIAM Journal on Control*, 6(1):121–130.

[SADG97] SYRMOS, V. L., ABDALLAH, C. T., DORATO, P., and GRIGORIADIS, K., 1997. Static output feedback – A survey. *Automatica*, 33(2):125–137.

[Sas99] SASTRY, S., 1999. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics (Springer-Verlag, New York).

[SB80] STOER, J. and BULIRSCH, R., 1980. *Introduction to Numerical Analysis* (New York: Springer Verlag, New York), 1st edition.

[Sch03] SCHERER, C. W., 2003. Higher-order relaxations for robust LMI problems with verifications for exactness. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control* (Maui, HI, USA), 4652–4657.

[Sch05] SCHERER, C. W., 2005. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(2):365–395.

[Sha03] SHAKED, U., 2003. An LPD approach to robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5):866–872.

[SIG98] SKELTON, R. E., IWASAKI, T., and GRIGORIADIS, K., 1998. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design* (Taylor & Francis, Bristol, PA).

[SMR99] SCOKAERT, P. O. M., MAYNE, D. Q., and RAWLINGS, J. B., 1999. Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability). *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3):648–654.

[Ste08] STEWART, J., 2008. *Calculus* (Thomson Learning Inc., Belmont, CA, USA), 6th edition.

[Stu99] STURM, J. F., 1999. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1–4):625–653. `http://sedumi.ie.lehigh.edu/`.

[Tro09] TROFINO, A., 2009. Sufficient LMI conditions for the design of static and reduced order controllers. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control — 28th Chinese Control Conference* (Shanghai, P. R. China), 6668–6673.

[Var08] VARGA, A., 2008. On solving periodic Riccati equations. *Numerical Linear Algebra and Its Applications*, 15(9):809–835.

[Vid93] VIDYASAGAR, M., 1993. *Nonlinear Systems Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ).

[VO93] VALASEK, M. and OLGAC, N., 1993. Generalization of Ackermann's formula for linear MIMO time invariant and time varying systems. In: *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control* (San Antonio, TX, USA), 827–832.

[VO95] VALASEK, M. and OLGAC, N., 1995. Efficient pole placement technique for linear time-variant SISO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 142(5):451–458.

[Wol68] WOLOVICH, W., 1968. On the stabilization of controllable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(5):569–572.

[Wu95] WU, F., 1995. *Control of Linear Parameter Varying Systems*. Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, USA.

[Wu09] WU, J. L., 2009. Simultaneous $\mathcal{H}_\infty$ control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(3):606–610.

[XdS92] XIE, L. and DE SOUZA, C. E., 1992. Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8):1188–1191.

[YS09] YAESH, I. and SHAKED, U., 2009. Robust reduced-order output-feedback $\mathcal{H}_\infty$ control. In: *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2009)* (Haifa, Israel), 155–160.

[ZD63] ZADEH, L. A. and DESOER, C. A., 1963. *Linear System Theory — The State Space Approach*. McGraw Hill Series in System Science (McGraw Hill, New York: McGraw-Hill).

[Zhu96] ZHU, J. J., 1996. A necessary and sufficient stability criterion for linear time-varying systems. In: *Proceedings of the Twenty-Eighth Southeastern Symposium on System Theory*. 115–119.

[ZK88] ZHOU, K. and KHARGONEKAR, P. P., 1988. Robust stabilization of linear systems with norm bounded time varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 10:17–20.

[ZP05] ZHU, Y. and PAGILLA, P. R., 2005. Bounds on the solution of the time-varying linear matrix differential equation $\dot{P}(t) = A^H(t)P(t)+P(t)A(t)+Q(t)$. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 23:269–277.

Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA Toulouse)

Discipline ou spécialité :

SYSTÈMES AUTOMATIQUES

Présentée et soutenue par :
Cristiano Marcos AGULHARI

le : 16 avril 2013

Titre :

Stabilité et commande des systèmes linéaires variant dans le temps aux paramètres incertains

---

Ecole doctorale :
Systèmes (EDSYS)

Unité de recherche :
LAAS - CNRS

Directeur(s) de Thèse :

Germain GARCIA

Rapporteurs :
Olivier BACHELIER
Edson Roberto DE PIERI

Autre(s) membre(s) du jury

Pedro Luis Dias PERES
Sophie TARBOURIECH
Juan Francisco CAMINO

Thèse

Préparée conjointement au
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS et à
l'Université de Campinas (Brésil)

En vue de l'obtention du
Doctorat de l'Institut National des Sciences Appliqués de Toulouse

par
Cristiano Marcos AGULHARI
Mestre em Engenharia Elétrica — Université de Campinas (UNICAMP / Brésil)
Engenheiro da Computação — Université de Campinas (UNICAMP / Brésil)

Stabilité et commande des systèmes linéaires
variants dans le temps aux paramètres incertains

Soutenue le 16 Avril 2013 devant le jury :

Président	S. TARBOURIECH
Directeur de Thèse	G. GARCIA
Rapporteurs	O. BACHELIER E. R. DE PIERI
Membres	P. L. D. PERES J. F. CAMINO

Avant-Propos

La trajectoire parcourue pendant ce doctorat, pleine de défis et d'apprentissages, a été aussi imprégnée de moments incertains et de stagnations. L'aide et l'esprit de pas mal de personnes qu'ont croisé mon chemin certainement ont été des conditions nécessaires pour garantir la convergence des recherches suivies dans le doctorat à cette thèse, et c'est à vous que je manifeste mon plus profond remerciement.

Je remercie mes encadrants : Pedro, qui m'accompagne depuis ma graduation et pour qui j'ai developpé une grande admiration, académiquement et personnellement et avec qui j'apprends encore les principaux aspects de la vie académique et de la recherche (et comment faire un bon .bib); et Germain, pour les discussions amicales, honnêtes et fructueuses qui m'ont donné une base solide pour les recherches faites, et pour m'enseigner qu'il est important de mettre en oeuvre une méthode proposée, mais pas avant de savoir si elle est bien correcte.

Je remercie mes co-encadrants informels : Ricardo, toujours prêt à écouter, discuter et donner des idées; et Sophie, pour l'accueil au LAAS et pour l'aide sur la recherche, les bureaucracies et le français qu'on n'apprends pas dans l'école. Je doit remercier également Isabelle, ma collègue de bureau, pour les mêmes raisons. Je remercie aussi mon encadrant du master, Ivanil, et ses idées et concepts qu'ont été très importants pour mon doctorat.

Je remercie mes collègues du laboratoire de Télématique pour leur amitié, pour les nombreuses "Café avec bavardage" et pour offrir une ambience très agréable. En particuler pour ceux qu'ont été plus proches : Márcio Lacerda, Márcio Braga, Cecília, Rafael, Renato, Victor, Benito, Ali, Priscila, Juliana, Vavá, Taís et Eduardo. Et Flavia, toujours en contribuant et en fournissant des sacs plastiques.

Je remercie mes collègues du Labore, laboratoire adoptif, pour les moments de détente et de "Magnéto-pétanque" : Bacalhau, Laura, Fábio, André, Lu, Alan, José, Hugo, Celso et Christiano.

Je remercie mes collègues du groupe MAC, qui m'ont accueilis les bras ouverts et m'ont fait sentir vraiment chez moi (et qu'ont appris que il y a des brésiliens que sont terribles au foot). En particulier les collègues plus proches : Razvan, Sandy, Mirko, Mathieu, Maurício, Luiz, Francesco, Georgia, Cordélia, Jean-François, Tung et Andrea. Et aussi les chercheurs et profs pour les bonnes discussions et pauses-café.

Je remercie ma famille, dont les membres sont les principaux responsables pour ma formation générale. Mes parents, Sueli et José, avec leur présence constante et son amour solide. Mon frère Ricardo, pour sa force, clarté et sincérité, et ma belle-soeur préférée, qui mérite bien ce titre. Ma grand-mère Felícia, qui nos enseigne encore la détermination et amour, et mon grand-père Daniel, qui nous manque beaucoup.

Je remercie ceux qui ont été sans réserve à mon côté dans les moments les plus compliqués de cette trajectoire, en particuler : Tathi (ou Tathão), Anne, Nadia, Rick (distant mais présent), Renato ("compadre" éternel), Sandra et Eliseu (tante-soeur et oncle-copain).

Je remercie les copains de vie, d'enseignements et de blagues. En particulier le Groupe du Pagani, aux amis Bandespotes et Migués, aux amis Cecília Quinzani, Baca, Laura, Will, Vivi, Alessandra, Fervs, Jamef, Fernanda Gallo, João Paulo, Maria Rita e à mon copain Rodrigo Mazo.

Je remercie l'agence FAPESP, pour le soutien financier pendant la durée du doctorat, et le programme CAPES-COFECUB, qui a financé mon stage sandwich à Toulouse.

Je remercie Dieu, pour tout.

Résumé

Les principales contributions de cette thèse concernent le développement de méthodes pour la synthèse de contrôleurs et pour l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires, soit variant ou invariant dans le temps. Concernant les systèmes invariant dans le temps, le but est la synthèse de contrôleurs robustes d'ordre réduit pour les systèmes en temps continu qui présentent des paramètres incertains. La méthode présentée pour la synthèse est basée sur une technique en deux étapes, où un gain de retour d'état est construit dans la première étape, et appliqué à la deuxième, fournissant le contrôleur robuste souhaité. Chaque étape consiste à la résolution de conditions sous la forme d'inégalités matricielles linéaires.

Dans le cas des systèmes variant dans le temps, en général, en fonction des informations disponibles, deux modèles mathématiques peuvent être utilisés. D'un côté, pour des systèmes dont les éléments variant dans le temps sont bornés mais pas complètement connus, on peut utiliser des modèles dépendant de paramètres variants, ce qui donne une représentation polytopique. Dans ce cas là, la technique de stabilisation proposée est basée sur la méthode en deux étapes, pour générer des contrôleurs dépendants des paramètres. On suppose que les paramètres sont mesurables en ligne, et les contrôleurs sont synthétisés pour qu'ils soient robustes à des bruits de mesures. De l'autre côté, si les dynamiques variantes dans le temps sont connues, on peut traiter directement le système sans utiliser aucune paramétrisation. Deux techniques de synthèse sont proposées pour ce cas : la construction des gains stabilisants en utilisant directement la matrice de transition d'état, et une technique de synthèse conçue à partir d'un nouveau critère de vérification de la stabilité du système. La validité des méthodes proposées est illustrée par plusieurs exemples numériques, qui montrent la qualité des résultats qui peuvent être obtenus.

Mots-clé : Systèmes linéaires, systèmes à temps variant, systèmes incertains, commande robuste, commande par séquencement de gains, critère de stabilisation, inégalités matricielles linéaires.

Abstract

The main contributions of this thesis concern the development of methods for the stability analysis and the synthesis of controllers for linear systems, either time-varying or time-invariant. Concerning time-invariant systems, the objective is the synthesis of reduced-order robust controllers for continuous-time systems presenting uncertain parameters. The method presented for the synthesis is based on a two-stages technique, in which a stabilizing state-feedback gain is constructed in the first stage and then applied on the second stage to search for the desired controller. Each stage consists in the resolution of conditions based on linear matrix inequalities.

In the case of time-varying systems, depending on the amount of available information, two mathematical models may be used. On one hand, if the time-varying elements of the system are not entirely known, one can model the system as function of time-varying parameters, resulting on a polytopic representation. In this case, the stabilization method proposed is based on the two-stages technique, which yields parameter-dependent controllers. The parameters are supposed to be real-time measurable, and the controllers are robust with respect to noises and uncertainties on the measures. On the other hand, if the time-varying dynamics are known, the system may be directly handled without using any parameterization. Two synthesis techniques are proposed in this case: the construction of stabilizing gains by using the state transition matrix, and a synthesis technique derived from a new stability criterion for time-varying systems. The validity of the proposed methods is illustrated through numerical examples, that show the efficiency of the results that can be obtained.

Key-words: Linear systems, time-varying systems, uncertain systems, robust control, gain scheduling control, stabilization criterion, linear matrix inequalities.

Table des figures

Liste des tableaux

Liste d'Acronymes et de Notation

LMI	*Linear Matrix Inequality*
LTI	*Linear Time Invariant*
LTV	*Linear Time Varying*
LPV	*Linear Parameter Varying*
RDE	*Riccati Differential Equation*

$\lambda_{max}(M)$	La valeur propre maximale d'une matrice M
$\lambda_{min}(M)$	La valeur propre minimale d'une matrice M
M'	La transposée d'une matrice M
$sym\{M\}$	Égale à $M + M'$
$\mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_n)$	Matrice diagonale avec les éléments $M_1, \ldots, M_n$
$\Re\{\cdot\}$	Partie réelle d'une valeur complexe
$\mathcal{L}_2$	Espace de fonctions quadratiquement intégrables
$\|\|M(\cdot)\|\|$	Norme-2 d'une matrice $M(\cdot)$, éventuellement dépendant de paramètres, définie comme $\|\|M(\cdot)\|\| = \sqrt{\lambda_{max}(M'(\cdot)M(\cdot))}$

Table des matières

Introduction Générale

Le concept de système dynamique, issu des théories sur la mécanique Newtonienne, consiste à la définition de règles d'évolution d'un ensemble de variables basiques, connues comme des variables d'état, liées par un certain processus. Ces processus sont souvent motivés par des interactions physiques, comme un circuit électrique (dont les variables d'état peuvent être les tensions et courants dans certains points), une fusée qui vient d'être lancée (où la position, la vitesse, l'accélération et des angles sont des possibles variables d'état) ou même la relation prédateur-proie dans un environnement quelconque (dont les variables d'état sont les nombres de prédateurs et de proies) [ZD63, Vid93, Che99, Kha02]. Les études sur des systèmes sont souvent composés en trois parties :

- La modélisation, qui consiste à décrire le comportement du système par un modèle mathématique ;
- L'analyse, qui permet l'obtention des informations importantes sur le système, comme sa stabilité ou l'énergie dépensée ;
- La commande, qui correspond à l'action d'interférer sur le système pour que certains objectives soient atteints, comme sa stabilisation ou la minimisation de l'énergie utilisée.

Dans l'étape de modélisation, un des principaux problèmes auxquels nous sommes confrontés est la méconnaissance des valeurs de certaines variables et paramètres du système, ou même de comportements trop complexes pour être décrits. Par exemple, les valeurs réelles des composants électriques sont toujours différentes des valeurs nominales, ou bien la variation de la consommation du carburant d'une fusée en lancement dépend d'autres facteurs inconnus et ne peut pas être complètement définie *a priori*. Ces types d'éléments sont des *incertitudes* sur les systèmes, qui peuvent être invariants (comme dans l'exemple des components de circuits, au moins dans l'horizon de temps considéré pour l'analyse) ou variants (comme dans l'exemple du carburant de la fusée) dans le temps.

Pour traiter des incertitudes, il faut définir comment les introduire dans le modèle du système, ce qui rend deux classifications différentes pour les incertitudes : structurées et non structurées [EN00]. La modélisation utilisant des incertitudes non structurées [CP72] est la modélisation la plus simpliste et la plus conservatrice, une fois qu'aucune structure n'est conférée aux incertitudes. Parmi les modèles d'incertitudes structurées les plus utilisés, on peut rencontrer les incertitudes bornées réelles [HB93], qui traitent les incertitudes tel qu'un sous-système interconnecté au système nominal et utilisent les résultats du théorème du petit gain et du théorème de la positivité réelle [And72, BIJ81, Vid93] pour garantir que le système général est robustement stable, *i.e.*, qu'il est stable indépendamment des valeurs des incertitudes ; les incertitudes positives réelles, considérées dans le cas où la fonction de transfert du système et les incertitudes sont positives et réelles, voir [HB91] et les références incluses ; les incertitudes bornées en norme, où les bornes sur les incertitudes sont définies *a priori* [ZK88, XdS92] ; et finalement les incertitudes polytopiques [BPG89, OP05, OP07], où le domaine est décrit par la combinaison convexe d'un ensemble de sommets précisément connus. La modélisation polytopique est l'approche utilisée dans la présente thèse, étant données sa simplicité, sa généralité et la facilité de la manipuler.

Par rapport à la commande des systèmes avec incertitudes polytopiques, probablement les techniques de synthèse les plus utilisées actuellement sont des méthodes basées sur l'application du théorème de Lyapunov [Sas99, Kha02]. Le théorème de Lyapunov permet d'obtenir des informations sur la stabilité en analysant une fonction liée à l'énergie du système. Les premières approches pour stabiliser des systèmes avec incertitudes polytopiques utilisaient une seule fonction de Lyapunov (stabilisation quadratique) pour la synthèse [BPG89, HB91, HB93, GCG93], mais les résultats obtenus étaient considérablement conservatifs une fois que la fonction devait être valide pour tout l'espace des paramètres incertains. Pour réduire le conservatisme, on peut utiliser des fonctions de Lyapunov dépendantes de manière affine des paramètres [GAC96, dOBG99, AT00, dOOL$^+$02, dOG05, OdOP07], ou même on peut introduire des variables d'écart, ce qui augmente les degrés de liberté pour la recherche d'une solution faisable [dOBG99, dOG05]. Récemment, il a été démontré que, si la fonction de Lyapunov est structurée comme un polynôme homogène dans l'espace des paramètres, l'augmentation du degré du polynôme peut améliorer les conditions de stabilité permettant d'annuler le conservatisme, toutefois au prix d'agrandir la complexité de l'approche [OP06a, OP06b, BOMP06, OP07].

Même avec des modèles précisément connus, on peut avoir des termes variants dans le temps ou non linéaires. Particulièrement pour les systèmes non linéaires, il n'y a pas une méthodologie générale, mais seulement des techniques de commande pour traiter de classes spécifiques de systèmes [Kha02]. Par contre, on peut utiliser des approches linéaires pour traiter les systèmes non linéaires, par exemple en les linéarisant. Le plus grand avantage de cette approche est qu'on profite de la simplicité et de la généralité des méthodologies applicables aux systèmes linéaires, mais les résultats de l'analyse et aussi pour la synthèse d'une loi de commande ne sont garantis que localement. Si la linéarisation est faite autour d'un point d'opération, on obtient une représentation invariante dans le temps (en anglais, *Linear Time Invariant* — LTI). Dans ce cas-là, les techniques d'analyse et de synthèse sont relativement simples et directes, mais le domaine de l'espace d'état où les conditions sont valides peut être trop contraint. De l'autre côté, on peut linéariser le système autour d'une trajectoire, ce qui donne une représentation variante dans le temps (en anglais, *Linear Time Varying* — LTV). Les techniques pour traiter les systèmes LTV sont plus élaborées et parfois plus complexes que celles utilisées dans le cas LTI, mais les résultats sont valides dans une région plus grande de l'espace d'état.

Il y a plusieurs techniques conçues pour synthétiser des contrôleurs variants dans le temps pour des systèmes LTV. Une approche classique consiste à appliquer des techniques de placement de pôles soit directement au système LTV [Zhu96, LC05], soit à un système LTI équivalent [Wol68, VO93, VO95]. Le principal problème d'une telle approche est le fait qu'elle demande la différenciation des matrices du système, ce qui peut être difficile si les informations du système ne sont obtenues qu'à travers des capteurs. Une autre approche souvent utilisée est basée sur la résolution d'une équation différentielle de Riccati (en anglais, *Riccati Differential Equation* — RDE). Une première version de cette famille de méthodes a été proposée dans l'article précurseur de Kalman [Kal60], qui a motivé un effort considérable sur la recherche des conditions d'existence et de bornitude pour les solutions des RDE [Buc72, BCG84, BCG85, ZP05, Var08].

Une étude sur des techniques principales basées sur l'approche RDE est faite en [Hal90]. Même si cette approche est capable de générer des contrôleurs qui sont optimaux dans un certain sens, elle est aussi numériquement compliquée et le développement d'une méthode simple pour la résolution des RDEs est encore un sujet de recherche ouvert. Finalement, on peut souligner des méthodes d'horizon glissant [MRRS00], dont le principal avantage est la possibilité de générer un contrôleur optimal à partir de l'analyse du système en boucle ouverte, ce qui peut être non linéaire, variant dans le temps et peut présenter des contraints. La stabilité est garantie soit en incorporant un coût terminal [BGW90, RM93], soit en rajoutant un ensemble de contraintes [MM93, CLM96, SMR99]. Pourtant, le calcul des tels éléments peut être complexe et lent, lorsqu'il demande, par exemple, la résolution des équations différentielles de Lyapunov [KYK01]. Il est important de souligner que, étant données certaines conditions, les systèmes LTV peuvent être modélisés en fonction des paramètres variants dans le temps, donnat des systèmes aux paramètres variants (en anglais, *Linear Parameter Varying* — LPV). L'avantage d'une telle modélisation est la possibilité d'adapation des techniques de stabilisation conçues pour traiter des systèmes affectés par des incertitudes polytopiques. Par contre, une fois qu'une partie des informations sont perdues dans ce type de modélisation, les résultats sont en générale plus conservatifs.

Le but principal de cette thèse concerne la stabilisation des systèmes linéaires, en considérant la norme $\mathcal{H}_\infty$ [Col00, AN06] comme critère de performance. Les techniques montrées sont conçues pour traiter des systèmes en temps continu, mais quelques techniques peuvent être adaptées pour traiter les systèmes discrets dans le temps. La thèse est organisée de la manière suivante. Le Chapitre 1 introduit les principaux concepts et définitions qui seront utilisés dans les autres chapitres, comme par exemple les concepts et propriétés sur la stabilité, contrôlabilité et observabilité des systèmes. Au Chapitre 2, est présenté l'approche utilisée pour la synthèse de contrôleurs pour des systèmes LTI incertains, *i.e.*, systèmes dont les incertitudes sont invariantes dans le temps. L'approche est basée sur la méthode en deux étapes introduite dans [PA01, APS03]. L'adaptation de la méthode pour traiter des incertitudes variantes dans le temps, dont les taux de variation sont bornés, est présentée dans le Chapitre 3. Les conditions de synthèse sont conçues pour que le contrôleur résultant, dépendant des paramètres, soit robuste à des bruits et erreurs dans la mesure en ligne de ces paramètres. Le Chapitre 4 présente un nouveau critère pour la vérification de la stabilité des systèmes LTV, ainsi que deux approches différentes pour la synthèse des gains stabilisants variants dans le temps. Une approche consiste basiquement à utiliser des informations du système en boucle ouverte pour construire la loi de commande. L'autre approche provient du critère de stabilisation introduit et consiste basiquement à utiliser des informations du système dans un horizon de temps fini. Le chapitre de conclusions décrit les contributions de la thèse et une liste des travaux futurs liés aux thèmes adressés.

Chapitre 1

Concepts, définitions et résultats préliminaires

1.1 Introduction

Le développement des théories et techniques d'analyse linéaire des systèmes est un sujet qui a toujours reçu une attention considérable. D'un côté, les conditions posées dans les théorèmes sont, en général, simples à vérifier et inspirent des techniques relativement simples et numériquement efficaces, ce qui est important pour déterminer, par exemple, si un système donné est stable ou de quelle manière on peut le commander pour que certaines objectives soient atteints ([D'A70, ZD63, Rug96, Che99] et autres). Parmi ces techniques, celles qui recourent aux inégalités matricielles linéaires (en anglais, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) sont particulièrement remarquables [BEFB94, EN00]. D'autre part, les méthodes linéaires peuvent être utilisées pour déterminer certaines propriétés des systèmes non linéaires, qui sont naturellement plus complexes. Pour cela, on peut appliquer des techniques de linéarisation pour analyser localement le système [Kha02], ou on peut manipuler le modèle non linéaire afin d'obtenir une description linéaire mais dépendante des paramètres, cette dépendance étant traitable à partir des adaptations des techniques linéaires [Wu95, EN00, Bru04].

Le but de ce chapitre est d'introduire les définitions, théorèmes et propriétés des systèmes linéaires, en particulier les critères de stabilisation et la possibilité de calculer des lois de commande stabilisantes. Les résultats sont présentés pour les systèmes linéaires et variants dans le temps (en anglais, *Linear Time Varying* — LTV), qui décrivent une classe plus générale de systèmes linéaires. Les particularisations des résultats pour le cas invariant dans le temps (en anglais, *Linear Time Invariant* — LTI) sont montrées selon la nécessité. Les résultats et lemmas concernant les LMIs et utilisés dans la thèse sont aussi exposés dans le chapitre.

La Section 1.2 présente les principaux résultats et définitions pour les systèmes linéaires variants et invariants dans le temps, comme par exemple des critères de stabilisation et les concepts de contrôlabilité et observabilité. La norme $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes[1] est aussi introduite comme un critère de performance pour la synthèse. Dans la Section 1.3, les résultats sont adaptés pour traiter les systèmes dépendants des paramètres. Le principal outil, utilisé dans cette thèse, pour résoudre les problèmes liés aux systèmes linéaires et dépendants des paramètres sont ceux basés sur des LMIs, dont les résultats essentiels sont exposés dans la Section 1.4. La Section 1.5 conclut le chapitre.

[1]Ou norme $\mathcal{L}_2$ induite.

1.2 Systèmes linéaires

Soit $y(t) = \mathcal{G}\{u(t)\}$ un système en temps continu qui reçoit un vecteur d'entrées $u(t) \in \mathbb{R}^n$ et dont l'ensemble de réponses est le vecteur de sorties $y(t) \in \mathbb{R}^q$. Le système $\mathcal{G}\{\cdot\}$ est linéaire si et seulement s'il satisfait le principe de la superposition [ZD63, Rug96], *i.e.*, étant donnés $y_1(t) = \mathcal{G}\{u_1(t)\}$ et $y_2(t) = \mathcal{G}\{u_2(t)\}$, l'égalité suivante

$$\mathcal{G}\{a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

est valide pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour toutes constantes $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. En plus, si le système est tel que la sortie est indépendante de l'entrée aux instants futurs, on dit que le système est un système causal.

Tous les systèmes linéaires et causaux peuvent être représentés en fonction d'un ensemble de variables basiques $x(t) \in \mathbb{R}^n$ appelées variables d'état, et la représentation est génériquement donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

étant $u(t) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ la sortie mesurée. Les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ sont de dimensions appropriées. La quantité n minimale de variables d'états nécessaires pour que le système soit complètement représenté est connue comme l'ordre du système.

Considérons, tout d'abord, seulement l'équation de dynamique du système sans l'entrée

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{1.2}$$

Si la condition initiale $x(t_0)$ de l'équation est connue, où t_0 est le temps initiale, et si la matrice $A(t)$ est une fonction intégrable en t [ZD63], alors les états $x(t)$ peuvent être calculés, pour tout $t \geq t_0$, par

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0). \tag{1.3}$$

La matrice $\Phi(t, t_0)$ est la matrice de transition d'état du système, qui peut être obtenue à partir de la résolution de l'équation différentielle matricielle

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathrm{I}. \tag{1.4}$$

La matrice de transition d'état est primordiale pour traiter des systèmes linéaires. Les principales propriétés de $\Phi(t, t_0)$ sont présentées dans ce qui suit. Notons que les démonstrations, ainsi que d'autres propriétés, sont bien décrites dans plusieurs travaux dans la littérature (*e.g.*, [ZD63, D'A70, Rug96]).

Propriété 1.1 Pour toutes les valeurs $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, la matrice de transition satisfait

$$\Phi(t_3, t_1) = \Phi(t_3, t_2)\Phi(t_2, t_1).$$

Propriété 1.2 La matrice de transition est toujours inversible, et son inverse est donnée par

$$\Phi(t, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t).$$

Propriété 1.3 Si le système (1.2) est invariant dans le temps, *i.e.*, si $A(t) = A$ est constante, alors la matrice de transition est égal à l'exponentielle de la matrice A :

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Théorème 1.1 (**Théorème de Floquet** [Flo83, MSA04]) Si le système (1.2) est périodique, *i.e.*, s'il y a une valeur $T > 0$ tel que $A(t+T) = A(t)$, $\forall t$, alors la matrice de transition peut être réécrite en fonction d'une matrice $G(t, t_0) = G(t + T, t_0)$ périodique et d'une matrice constante R comme

$$\Phi(t, t_0) = G(t, t_0)e^{R(t-t_0)}, \quad G(t_0, t_0) = \mathrm{I}. \tag{1.5}$$

Les matrices $G(t, t_0)$ et R sont connues comme les matrices de Floquet.

1.2.1 Stabilité des systèmes linéaires

Dans la suite, les définitions de stabilité pour le système (1.2) sont présentées [ZD63].

Définition 1.1 *Le système* (1.2) *est stable dans le sens de Lyapunov, ou stable, si, pour tout t_0 et $\epsilon > 0$, il y a une valeur de δ dépendante de ϵ et t_0 de telle sorte que*

$$||x(t_0)|| < \delta \Rightarrow ||x(t)|| < \epsilon, \ \forall t \geq t_0. \tag{1.6}$$

Définition 1.2 *Si le système* (1.2) *est stable et, si pour tout t_0 et ϵ il y a une valeur de $\delta > 0$ indépendante de t_0 telle que l'inégalité* (1.6) *est valide, alors le système est uniformément stable dans le sens de Lyapunov, ou uniformément stable.*

Définition 1.3 *Si le système* (1.2) *est uniformément stable et, si pour tout t_0 et $x(t_0)$, on a*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0,$$

alors le système est uniformément asymptotiquement stable.

Comme les états $x(t)$ sont obtenus à partir de la condition initiale $x(t_0)$ en utilisant la matrice de transition d'état définie en (1.4), il est naturel de l'utiliser pour caractériser la stabilité du système (1.2), comme cela est montré dans le lemme suivant.

Lemme 1.1 *[Kha02, p. 156] La stabilité uniforme et asymptotique d'un système linéaire est équivalente à la stabilité exponentielle, i.e., le système* (1.2) *est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il y a des constantes positives a et b de telle sorte que*

$$||\Phi(t, t_0)|| \leq ae^{-b(t-t_0)}, \ \forall t.$$

Propriété 1.4 Si le système (1.2) est invariant dans le temps, alors le système est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si la partie réelle des valeurs propres de la matrice dynamique A sont négatives.

Lemme 1.2 *Supposons que le système* (1.2) *est périodique avec période $T > 0$, et soient $G(t, t_0)$ et R les matrices de Floquet provenant du Théorème 1.1. Le système est uniformément* *asymptotiquement stable si et seulement si les parties réelles des valeurs propres de la matrice R sont négatives. En plus, les bornes de la norme de la matrice de transition sont données par*

$$G_m e^{\xi_m(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\| \leq G_M e^{\xi_M(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{G_M} e^{\xi_M(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\| \leq \frac{1}{G_m} e^{\xi_m(t-\tau)}, \quad \forall t \leq \tau \tag{1.8}$$

où

$$\begin{aligned} 2\xi_m = \lambda_{\min}(R+R'), \qquad 2\xi_M = \lambda_{\max}(R+R') \\ G_M = \max_{t\in[t_1,t_1+T]} \|G(t,t_1)\|, \qquad G_m = \min_{t\in[t_1,t_1+T]} \|G(t,t_1)\|. \end{aligned}$$

Démonstration :

En utilisant les résultats de [HL04], on peut voir que la matrice $e^{R(t-t_0)}$ satisfait

$$e^{\lambda_{\min}\left(\frac{R+R'}{2}\right)(t-t_0)} \leq \left\|e^{R(t-t_0)}\right\| \leq e^{\lambda_{\max}\left(\frac{R+R'}{2}\right)(t-t_0)}. \tag{1.9}$$

Alors, pour $t \geq \tau$, on a

$$\Phi(t,\tau)\Phi'(t,\tau) = G(t,\tau)e^{R(t-\tau)}e^{R'(t-\tau)}G'(t,\tau).$$

D'après (1.9),

$$\|G(t,\tau)\|^2 e^{\lambda_{\min}(R+R')(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\Phi'(t,\tau)\| \leq \|G(t,\tau)\|^2 e^{\lambda_{\max}(R+R')(t-\tau)},$$

et, en utilisant les définitions de ξ_m et ξ_M, il est vrai que

$$\|G(t,\tau)\|^2 e^{2\xi_m(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\Phi'(t,\tau)\| \leq \|G(t,\tau)\|^2 e^{2\xi_M(t-\tau)},$$

ce qui conduit à

$$\|G(t,\tau)\| e^{\xi_m(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\| \leq \|G(t,\tau)\| e^{\xi_M(t-\tau)}.$$

Avec les valeurs de G_m et G_M, qui existent et sont bornées si $A(t)$ est intégrable [D'A70, MSA04], on obtient l'inégalité (1.7). L'inégalité (1.8) est démontrée d'une façon similaire, en remarquant que

$$\Phi(\tau,t) = \Phi(t,\tau)^{-1} = e^{-R(t-\tau)}G(t,\tau)^{-1},$$

par conséquent

$$\Phi(\tau,t)'\Phi(\tau,t) = G'(t,\tau)^{-1}e^{-R'(t-\tau)}e^{-R(t-\tau)}G(t,\tau)^{-1}$$

et

$$\left\|G(t,\tau)^{-1}\right\|^2 e^{-2\xi_M(t-\tau)} \leq \|\Phi'(\tau,t)\Phi(\tau,t)\| \leq \left\|G(t,\tau)^{-1}\right\|^2 e^{-2\xi_m(t-\tau)}.$$

En dénotant

$$\left\|G(t,\tau)^{-1}\right\|^2 = \lambda_{max}(G(t,\tau)^{-1}G'(t,\tau)^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{min}(G(t,\tau)G'(t,\tau))} \leq \frac{1}{G_m^2}$$

et en changeant les rôles de t et τ on a, pour $\tau \geq t$,

$$\frac{1}{\|G(\tau,t)\|} e^{\xi_M(t-\tau)} \leq \|\Phi(t,\tau)\| \leq \frac{1}{\|G(\tau,t)\|} e^{\xi_m(t-\tau)}$$

et l'inégalité (1.8) est démontrée.

En analysant les bornes obtenues et en utilisant le résultat du Lemme 1.1, le système est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si $\xi_m \leq \xi_M < 0$, ce qui est vrai si les parties réelles des valeurs propres de la matrice R sont négatives.

Une autre manière de caractériser la stabilité des systèmes, largement utilisée pour démontrer une partie des résultats les plus importants dans la théorie de la commande des systèmes, est faite à partir du théorème de Lyapunov [Sas99, Kha02].

Théorème 1.2 [Kha02, p. 163] Le système (1.2) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il y a une fonction associée $v(t,x)$, appelée fonction de Lyapunov, qui satisfait les inégalités

$$0 < \alpha_1(||x||) \leq v(t,x) \leq \alpha_2(||x||) \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{dt}v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}v(t,x)A(t)x(t) \leq -\alpha_3(||x||) \tag{1.11}$$

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\right|\right| \leq \alpha_4(||x||), \tag{1.12}$$

où α_1, α_2, α_3 et α_4 sont des fonctions positives et uniformément bornées en $||x||$, *i.e.*, bornées pour des valeurs finies de $||x||$.

Pour une certaine classe de systèmes linéaires, on peut toujours définir une fonction valide de Lyapunov dans une forme quadratique [Kha02].

Théorème 1.3 [Kha02, p. 158] Considérons que le système (1.2) est uniformément asymptotiquement stable et que la matrice $A(t)$ est continue et bornée. Alors, il y a une matrice $P(t)$ différentiable, bornée, symétrique et définie positive qui satisfait

$$A'(t)P(t) + P(t)A(t) + \frac{d}{dt}P(t) < 0.$$

Par conséquent, $v(t,x) = x(t)'P(t)x(t)$ est une fonction de Lyapunov qui satisfait les conditions du Théorème 1.2.

On peut aussi utiliser le théorème suivant pour évaluer la stabilité des systèmes linéaires.

Théorème 1.4 Le système (1.2) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il y a une fonction associée $w(t,x)$ intégrable pour tout t et un scalaire positif σ qui satisfont les inégalités

$$0 < \alpha_5(||x||) \leq w(t,x) \leq \alpha_6(||x||) \tag{1.13}$$

$$w(t+\sigma,x) - w(t,x) \leq -\alpha_7(||x||), \tag{1.14}$$

$$\left|\left|\frac{\partial}{\partial x}w(t,x)\right|\right| \leq \alpha_8(||x||) \tag{1.15}$$

où α_5, α_6, α_7 et α_8 sont des fonctions positives uniformément bornées en $||x||$.

Démonstration : Soit $v(t,x)$ définie comme

$$v(t,x) = \int_t^{t+\sigma} w(\tau,x)d\tau.$$

Si (1.13) est valide et $w(t,x)$ est intégrable pour tout t, alors la fonction $v(t,x)$ satisfait l'inégalité (1.10). La dérivée de $v(t,x)$ est donnée par

$$\frac{d}{dt}v(t,x) = w(t+\sigma,x) - w(t,x),$$

ce qui est définie négative et uniformément bornée selon (1.14) et, par conséquent, vérifie (1.11). Si la condition (1.15) est satisfaite, on peut voir que la condition (1.12) est aussi valide. Il y a donc une fonction $v(t,x)$ associée au système (1.2) et, d'après le Théorème 1.2, cette condition est nécessaire et suffisante pour qu'un tel système soit uniformément asymptotiquement stable.

D'autres conditions nécessaires et suffisantes pour caractériser la stabilité des systèmes linéaires peuvent être rencontrées dans la littérature [ZD63, Vid93, Sas99, Kha02]. Une condition particulièrement intéressante, qui présente l'enveloppe exacte des normes de toutes les trajectoires possibles qui partent d'un ensemble défini d'états initiaux, a été présentée dans [GPT10] et est reproduite dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.5 Considérons le système (1.2) dont les états initiaux $x(t_0)$ sont tels que

$$x(t_0)'x(t_0) \leq \rho_0^2, \text{ pour un certain } \rho_0 > 0. \tag{1.16}$$

Considérons aussi la fonction

$$\rho(t) = \rho_0 \lambda_{max}^{1/2}\left(X(t,t_0)\right),$$

où $X(t,t_0)$ est la solution de l'équation différentielle de Lyapunov

$$\frac{d}{dt}X(t,t_0) = A(t)X(t,t_0) + X(t,t_0)A'(t), \; X(t_0,t_0) = \mathrm{I}. \tag{1.17}$$

Le système (1.2) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\max_{t\geq t_0} \rho(t) < +\infty \text{ et } \lim_{t\to+\infty} \rho(t) = 0, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

Les détails de la démonstration sont présentés dans [GPT10]. Une caractéristique importante de ce dernier théorème est que la fonction $\rho(t)$ permet de décrire l'enveloppe des normes de toutes les trajectoires possibles qui partent d'un état initial qui satisfait (1.16). En d'autres termes

$$\text{Si } x(t_0)'x(t_0) \leq \rho_0^2, \text{ alors } x(t)'x(t) \leq \rho^2(t).$$

Remarquons aussi que

$$X(t,t_0) = \Phi(t,t_0)\Phi'(t,t_0)$$

satisfait l'équation différentielle de Lyapunov (1.17).

Pour vérifier la stabilité asymptotique et uniforme, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 1.6 Considérons le système (1.2) dont les états initiaux $x(t_0)$ sont tels que

$$x(t_0)'x(t_0) \leq \rho_0^2, \text{ pour un certain } \rho_0 > 0. \tag{1.18}$$

Considérons aussi la fonction

$$\rho_\xi(t) = \rho_0 \lambda_{max}^{1/2}\left(Y(t,t_0)\right),$$

où $Y(t,t_0)$ est la solution de l'équation différentielle de Lyapunov

$$\frac{d}{dt}Y(t,t_0) = (A(t)+\xi \mathrm{I})Y(t,t_0) + Y(t,t_0)(A'(t)+\xi \mathrm{I}),\ \ X(t_0,t_0) = \mathrm{I}, \xi > 0. \tag{1.19}$$

Le système (1.2) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe $\xi > 0$ tel que

$$\max_{t \geq t_0} \rho_\xi(t) < +\infty, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Commande des systèmes linéaires

Considérons le système avec une entrée de commande

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \tag{1.20}$$

Si $B(t)$ et $u(t)$ sont des fonctions intégrables de Lebesgue, alors il y a une solution $x(t)$ unique qui satisfait (1.20) [Kal60], donnée par

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{1.21}$$

L'objectif général de la commande des systèmes est, étant donné un état initial $x(t_0)$ pour le système (1.20), construire une entrée de commande $u(t)$ définie sur $t \geq t_0$ qui soit capable de conduire les états au point d'équilibre $x(t) = 0$ dans une période de temps finie. La possibilité de construire une telle entrée $u(t)$ est la définition de *contrôlabilité complète au temps* t_0 [Kal60]. Dans ce cas là, le système, ou la paire $\{A(t), B(t)\}$, est caractérisé comme *complètement contrôlable au temps* t_0.

La contrôlabilité complète du système (1.20) peut être évaluée à partir de l'analyse du Grammian de contrôlabilité $W(t,t_0)$.

Théorème 1.7 [Kal60] La paire $\{A(t), B(t)\}$ est complètement contrôlable dans le temps t_0 si et seulement si la matrice

$$W(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_0,\tau)d\tau$$

est définie positive pour certains $t > t_0$.

La matrice $W(t,t_0)$ est associée à l'énergie de la commande appliquée pour conduire les états à l'origine dans un horizon de temps fini [Kal60]. La condition de contrôlabilité complète implique que, à partir d'un instant de temps t, le rang du Grammian $W(t,t_0)$ est plein, et tous les états dans cet instant de temps peuvent être conduits à l'origine. Une condition plus forte est obtenue si on demande que le rang du Grammian soit plein dans un intervalle $[t_0, t_0+\delta]$, pour une valeur positive et fixée de δ_c et pour tout t_0 [D'A70]. Cette condition est connue comme la contrôlabilité complète et uniforme.

Théorème 1.8 [Kal60] La paire $\{A(t), B(t)\}$ est uniformément complètement contrôlable si et seulement si les conditions suivantes sont valides pour tout t

$$\begin{aligned} &0 < \alpha_9(\delta_c)I \leq W(t+\delta_c, t) \leq \alpha_{10}(\delta_c)I \\ &0 < \alpha_{11}(\delta_c)I \leq \Phi(t+\delta_c,t)W(t+\delta_c,t)\Phi'(t+\delta_c,t) \leq \alpha_{12}(\delta_c)I \end{aligned} \tag{1.22}$$

où δ_c est un scalaire positif fixé et les fonctions $\alpha_i(\delta_c)$, $i = 9, \ldots, 12$, sont positives et uniformément bornées.

À partir des conditions du Théorème 1.8, on peut montrer que [Kal60]

$$\frac{\alpha_{11}(\delta_c)}{\alpha_{10}(\delta_c)} \leq ||\Phi(t+\delta_c, t)||^2 \leq \frac{\alpha_{12}(\delta_c)}{\alpha_9(\delta_c)}, \quad \frac{\alpha_9(\delta_c)}{\alpha_{12}(\delta_c)} \leq ||\Phi(t, t+\delta_c)||^2 \leq \frac{\alpha_{10}(\delta_c)}{\alpha_{11}(\delta_c)}. \tag{1.23}$$

Comme les inégalités du Théorème 1.8 sont aussi valides pour tout $\hat{\delta} > \delta_c$, on peut conclure que

$$||\Phi(t,\tau)|| \leq \alpha_{13}(|t-\tau|), \ \forall t, \tau, \tag{1.24}$$

où $\alpha_{13}(\cdot)$ est une fonction positive et uniformément bornée.

Une fois que les propriétés des systèmes invariants dans le temps sont déjà indépendents du temps initiale t_0 considéré, on n'utilise pas l'adjectif "uniform" dans la caractérisation de cette classe de systèmes [Rug96]. Par conséquent, la caractérisation de la contrôlabilité est plus simple, comme montré dans ce qui suit.

Propriété 1.5 Si le système (1.20) d'ordre n est invariant dans le temps, alors il est complètement contrôlable si et seulement si

$$\operatorname{rang}\left(\left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A^{n-1}B\right]\right) = n.$$

Même si le contrôlabilité complète et uniforme est une condition plus forte que la contrôlabilité complète, les deux concepts sont équivalents pour les systèmes linéaires périodiques, comme on peut le vérifier dans la propriété suivante.

Propriété 1.6 Si le système (1.20) d'ordre n est périodique de période T, alors il est uniformément complètement contrôlable si et seulement si $W(nT, 0) > 0$.

La démonstration de la Propriété 1.6 est basée sur les résultats de [Bru69], où il est démontré qu'un système linéaire et périodique est complètement contrôlable si et seulement si $W(nT, 0) > 0$, et ceux de [SA68], où il est remarqué que, pour des systèmes linéaires et périodiques, la contrôlabilité complète est équivalente à la contrôlabilité complète et uniforme. La contrôlabilité complète peut être vérifiée, en fait, dans un nombre $k \leq n$ de périodes [Kab86], k étant l'indice de contrôlabilité de la paire matrice de transition et Grammian de contrôlabilité. En plus, pour les systèmes périodiques, on peut obtenir des expressions analytiques pour les bornes du Grammian de contrôlabilité.

Lemme 1.3 *Si le système* (1.20) *est périodique de période T et s'il est uniformément complètement contrôlable, alors leur bornes α_9, α_{10}, α_{11} et α_{12} peuvent être données par*

$$\alpha_9(\delta_c) = \frac{M_B(\delta_c)}{G_M e^{2\xi_M \delta_c}} \sqrt{\frac{e^{2\xi_M \delta_c} - 1}{2\xi_M}}, \quad \alpha_{10}(\delta_c) = \frac{M_B(\delta_c)}{G_m} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\xi_m \delta_c}}{2\xi_m}},$$

$$\alpha_{11}(\delta_c) = M_B(\delta_c) G_m e^{2\xi_m \delta_c} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\xi_m \delta_c}}{2\xi_m}}, \ \alpha_{12}(\delta_c) = M_B(\delta_c) G_M \sqrt{\frac{e^{2\xi_M \delta_c} - 1}{2\xi_M}},$$

où $M_B(\delta_c)$ est de telle sorte que

$$\int_t^{t+\delta_c} \|B(\tau)\|^2 d\tau \leq M_B^2(\delta_c).$$

Démonstration : En utilisant l'inégalité de Schwarz [ZD63] et le Lemme 1.2, on a

$$\|W(t+\delta_c,t)\| \leq \int_t^{t+\delta_c} \|\Phi(t,\tau)\|^2 \|B(\tau)\|^2 d\tau \leq \left(\int_t^{t+\delta_c} \|\Phi(t,\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2} \left(\int_t^{t+\delta_c} \|B(\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq M_B(\delta_c)\left(\int_t^{t+\delta_c} \frac{1}{G_m^2} e^{2\xi_m(t-\tau)} d\tau\right)^{1/2} = \frac{M_B(\delta_c)}{G_m}\sqrt{\frac{1-e^{-2\xi_m\delta_c}}{2\xi_m}} = \alpha_{10}(\delta_c).$$

D'une façon similaire, on a

$$\|\Phi(t+\delta_c,t)W(t+\delta_c,t)\Phi'(t+\delta_c,t)\| \leq M_B(\delta_c)\left(\int_t^{t+\delta_c} \|\Phi(t+\delta_c,\tau)\|^2 d\tau\right)^{1/2}$$

$$\leq M_B(\delta_c)\left(\int_t^{t+\delta_c} G_M^2 e^{2\xi_M(t+\delta_c-\tau)} d\tau\right)^{1/2} = M_B(\delta_c) G_M \sqrt{\frac{e^{2\xi_M\delta_c}-1}{2\xi_M}} = \alpha_{12}(\delta_c).$$

L'utilisation du Lemme 1.2 donne

$$\|\Phi(t+\delta_c,t)\|^2 \leq G_M^2 e^{2\xi_M\delta_c} = \frac{\alpha_{12}(\delta_c)}{\alpha_9(\delta_c)}.$$

Alors, $\alpha_9(\delta_c)$ est donné par

$$\alpha_9(\delta_c) = \frac{\alpha_{12}(\delta_c)}{G_M^2 e^{2\xi_M\delta_c}} = \frac{M_B(\delta_c)}{G_M e^{2\xi_M\delta_c}}\sqrt{\frac{e^{2\xi_M\delta_c}-1}{2\xi_M}}.$$

Finalement, avec des arguments similaires, on vérifie que

$$\|\Phi(t+\delta_c,t)\|^2 \geq \frac{\alpha_{11}(\delta_c)}{\alpha_{10}(\delta_c)} = G_m^2 e^{2\xi_m\delta_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{11}(\delta_c) = \alpha_{10}(\delta_c) G_m^2 e^{2\xi_m\delta_c} = M_B(\delta_c) G_m e^{2\xi_m\delta_c}\sqrt{\frac{1-e^{-2\xi_m\delta_c}}{2\xi_m}}.$$

La démonstration est finie en remarquant que tous les termes utilisés pour exprimer les bornes $\alpha_i(\delta_c), i = 9, \ldots, 12$, sont positifs et bornés.

Si une sortie $y(t)$ est considérée, comme par exemple pour le système (1.1), alors l'observabilité de la paire $\{A(t), C(t)\}$ peut être évaluée à partir du théorème suivant.

Théorème 1.9 [Kal60] La paire $\{A(t), C(t)\}$ est complètement observable dans le temps t_0 si et seulement si la matrice symétrique

$$W_o(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi'(\tau,t_0)C'(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau \tag{1.25}$$

est définie positive pour certains $t > t_0$.

Théorème 1.10 [Kal60] La paire $\{A(t), C(t)\}$ est uniformément complètement observable si et seulement si le système dual, *i.e.*, la paire $\{-A'(t), B'(t)\}$ [Kal60], est uniformément complètement contrôlable. En plus, les bornes des matrices $W_o(t+\delta_o,t)$ et $\Phi'(t,t+\delta_o)W_o(t+\delta_o,t)\Phi(t,t+\delta_o)$ sont équivalentes à celles montrées au Théorème 1.8.

Le concept de dualité, illustré dans le Théorème 1.10, est très important dans la théorie des systèmes. Étant donné le système (1.1), sa répresentation duale est exprimée par

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t^*) &= A'(t^*)\tilde{x}(t^*) + C'(t^*)u(t^*) \\ y(t^*) &= B'(t^*)\tilde{x}(t^*) + D(t^*)u(t^*) \end{aligned}, \tag{1.26}$$

où $\tilde{x}(t^*)$ sont les états duaux et $t^* = -t$. Les plus importantes propriétés sur les systèmes duaux peuvent être consultées, par exemple, dans [Kal59, Kal60, ZD63, Rug96].

1.2.3 Norme $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes linéaires

Dans certains cas, la stabilisation du système n'est pas le seul but de la commande. On peut aussi chercher des lois de commande pour atteindre certains critères de performance, comme la minimisation de l'effort de la commande, de l'énergie du système qui est dépensée ou encore minimiser le plus grand transfert d'énergie entre l'entrée et la sortie. Dans la présente thèse on se concentrera sur le dernier critère, aussi connu comme la minimisation de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système [Col00].

Considérons le système linéaire

$$\mathcal{G}(t) \left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_w(t)w(t) + B(t)u(t) \\ z(t) &= C(t)x(t) + D_w(t)w(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \right. , \tag{1.27}$$

étant $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'états, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ l'entrée exogène, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée de commande, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie commandée et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ la sortie mesurée.

Définition 1.4 *Si le système* (1.27) *avec* $u(t) = 0$ *est stable, alors la norme* $\mathcal{H}_\infty$ *entre* $w(t)$ *et* $z(t)$*, dénotée par* $||\mathcal{G}(t)||_\infty$*, est égal à*

$$||\mathcal{G}(t)||_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{||z(t)||}{||w(t)||} = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{|| \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t,\tau)B_w(\tau)w(\tau)d\tau + D_w(t)w(t)||}{||w(t)||}.$$

Propriété 1.7 [Wu09] Si le système (1.27) avec $u(t) = 0$ est stable et si

$$||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \gamma,$$

pour une certaine valeur positive de $\gamma \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\int_{t_0}^t ||z(\tau)||^2 - \gamma^2 ||w(\tau)||^2 d\tau \leq 0, \quad \forall w(t) \in \mathcal{L}_2, \quad \forall t \geq t_0.$$

Pour les systèmes stables, la norme $\mathcal{H}_\infty$ peut aussi être caractérisée à partir d'une version adaptée du théorème de Lyapunov (Théorème 1.2).

Théorème 1.11 [BEFB94, EN00] Le système (1.27) est uniformément asymptotiquement stable et sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est bornée par $||\mathcal{G}(t)||_\infty < \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, si et seulement s'il y a une fonction de Lyapunov $v(t,x)$ qui satisfait les inégalités

$$0 < \alpha_{14}(||x||) \leq v(t,x) \leq \alpha_{15}(||x||) \tag{1.28}$$

$$\frac{d}{dt}v(t,x) + z(t)'z(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) \leq -\alpha_{16}(||x||), \tag{1.29}$$

où α_{14}, α_{15} et α_{16} sont des fonctions positives et uniformément bornées en $||x||$. Notons que, si la matrice $A(t)$ est continue et bornée, il y a une fonction quadratique de Lyapunov $v(t,x) = x(t)'P(t)x(t)$ qui satisfait les inégalités (1.28)-(1.29).

1.3 Systèmes linéaires dépendant des paramètres

Dans la modélisation des systèmes, il n'est pas rare que l'on fasse des simplifications pour obtenir le modèle nominal. Toutefois, l'utilisation des tels simplifications résulte en modèle qui peut présenter une dynamique considérablement différente de celle du système réel. Par ailleurs, dans le modèle il y a parfois des paramètres dont la valeur ou le comportement ne sont pas très bien connus. L'insertion des modèles incertains, ou dépendants des paramètres, est une manière de chercher une répresentation plus précise du système. En considérant des valeurs incertains, la dynamique du modèle simplifié peut se rapprocher du modèle réel, et on est capable de synthétiser des contrôleurs qui stabilisent le système soit indépendamment des valeurs des paramètres (commande robuste), soit en les mesurant en ligne (commande par séquencement de gain) [Sha03, APS03, Bru04, MOP06, OdOP07, MOPB09, DBG08, YS09, AOP12].

Les incertitudes sont traitées dans cette thèse en les considérant bornées, avec des bornes connues *a priori*. Avec ces bornes on peut construire pour chaque matrice du système, si les matrices sont affinement dépendantes des paramètres, des polytopes convexes, dont le principal avantage est la facilité de manipulation [BEFB94, EN00]. Le système est alors décrit par

$$\mathcal{G}_\alpha(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B_1(\alpha(t))w(t) + B_2(\alpha(t))u(t) \\ z(t) = C_1(\alpha(t))x(t) + D_1(\alpha(t))w(t) + D_2(\alpha(t))u(t) \\ y(t) = C_2(\alpha(t))x(t) + D_y(\alpha(t))w(t) \end{cases}, \tag{1.30}$$

étant $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'états, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ l'entrée exogène, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée de commande, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie commandée et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ la sortie mesurée, et $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \ldots, \alpha_N(t)\} \in \Delta_N$ est l'ensemble des N paramètres connu comme le simplexe unitaire, défini par

$$\Delta_N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N \;:\; \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N \right\}. \tag{1.31}$$

De cette façon, les matrices du système sont génériquement décrites comme

$$M(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) M_i,\ \alpha \in \Delta_N, \tag{1.32}$$

où $M(\alpha(t))$ représente toute matrice dans (1.30) et M_i les sommets respectives.

Comme cela sera montré dans la Section 1.4 suivante, la représentation polytopique (1.32) permet l'utilisation d'un ensemble de matrices invariantes dans le temps (les sommets M_i) dans les conditions d'analyse de la stabilité et de synthèse de contrôleurs. Outre la possibilité de représenter des variables inconnues du système, l'approche paramétrique peut être utilisée pour décrire des systèmes variants dans le temps, ce qui peut être avantageux suivant les cas. Par exemple, considérons l'équation de Mathieu [GC06] donnée par

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g^2 + a^2\cos(\omega t)) & -\kappa \end{bmatrix} x(t),$$

où g, a, ω et κ sont des constantes connues et prédéfinies. Définissons les variables

$$\alpha_1(t) = 0.5 + 0.5\cos(\omega t), \quad \alpha_2(t) = 0.5 - 0.5\cos(\omega t).$$

Remarquons que $\big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) \in \Delta_2$. L'équation de Mathieu peut être réécrite de façon polytopique comme

$$\dot{x}(t) = \left(\alpha_1(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g^2+a^2) & -\kappa \end{bmatrix} + \alpha_2(t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(g^2-a^2) & -\kappa \end{bmatrix}\right)x(t).$$

Cette classe de système est aussi connue comme la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (en anglais, *Linear Parameter Varying* — LPV) [Bru04, GC06].

Les théorèmes présentés dans les sections précédentes sont valides pour le cas LPV si leurs conditions sont satisfaites $\forall \alpha(t) \in \Delta_N$. Les deux théorèmes suivants correspondent à l'adaptation des Théorèmes 1.2 et 1.11 pour le système incertain

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t). \tag{1.33}$$

Remarquons que la matrice $A(\alpha(t))$ est toujours bornée, ce qui est une condition nécessaire pour que le système soit représenté de façon polytopique.

Théorème 1.12 Considérons que le système (1.30) est uniformément asymptotiquement stable et que la matrice $A(\alpha(t))$ soit continue et bornée. Alors, il y a une matrice $P(\alpha(t))$ différentiable, bornée, symétrique et définie positive qui satisfait

$$A'(\alpha(t))P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \frac{d}{dt}P(\alpha(t)) < 0.$$

Par conséquent, $v(t,x) = x(t)'P(\alpha(t))x(t)$ est une fonction de Lyapunov qui satisfait les conditions du Théorème 1.2.

Théorème 1.13 Le système (1.30) est uniformément asymptotiquement stable et sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est bornée par $||\mathcal{G}(t)||_\infty < \gamma$, $\gamma > 0$, si et seulement s'il y a une fonction de Lyapunov $v(t,x)$ qui satisfait les inégalités

$$0 < \alpha_{15}(||x||) \leq v(t,x) \leq \alpha_{16}(||x||) \tag{1.34}$$

$$\frac{d}{dt}v(t,x) + z(t)'z(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) \leq -\alpha_{17}(||x||), \tag{1.35}$$

où α_{15}, α_{16} et α_{17} sont des fonctions positives et uniformément bornées en $||x||$. En plus, si les conditions du théorème sont satisfaites, alors il y a une fonction quadratique de Lyapunov $v(t,x) = x(t)'P(\alpha(t))x(t)$ qui satisfait les inégalités (1.34)-(1.35).

1.4 Inégalités matricielles linéaires

L'utilisation des inégalités matricielles linéaires (en anglais, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) pour le traitement et la résolution de problèmes d'optimisation convexes ou quasi-convexes dans l'analyse et la commande des systèmes a eu une augmentation considérable dans les dernières décennies. La possibilité de résoudre les LMIs en temps polynomiale grâce à plusieurs outils numériques [Stu99, Löf04], combinée à une grande quantité de propriétés et théorèmes dans la littérature qui visent la transformation et réduction des problèmes pour leur simplification en procédures d'optimisation avec des contraintes LMIs [BEFB94, EN00], expliquent la croissance de l'utilisation de cette méthodologie.

La première motivation documentée pour l'emploi des LMIs a concerné l'application du théorème de Lyapunov (Théorème 1.12) [BEFB94]. Considérons, pour simplifier, le système (1.33) avec des paramètres α invariants dans le temps. Selon le théorème de Lyapunov, le système est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il y a une matrice de Lyapunov $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$ de telle sorte que

$$A'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0. \tag{1.36}$$

Cette condition doit être valide pour tout $\alpha \in \Delta_N$, ce qui en fait un problème de dimension infinie. Pour obtenir un ensemble fini de conditions LMIs, il faut imposer une structure pour la matrice de Lyapunov. Si la matrice de Lyapunov est considérée constante, *i.e.*, $P(\alpha) = P$, la condition (1.36) devient

$$P > 0 \ : \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(A_i'P + PA_i\right) < 0, \quad \forall\, \alpha \in \Delta_N, \tag{1.37}$$

car $A(\alpha)$ est décrite de façon polytopique, comme en (1.32). Un ensemble de conditions suffisantes pour que (1.37) soit valide est obtenu en imposant que tous les coefficients des monômes du polynôme (1.37) soient définies négatifs [AT00], ce qui donne les conditions

$$P > 0, \quad A_i'P + PA_i < 0, \ i = 1, \ldots, N. \tag{1.38}$$

L'expression (1.38) correspond à un ensemble de $N + 1$ conditions LMIs, qui peut être résolue en utilisant des outils numériques [Stu99, Löf04]. Par contre, cette relaxation est une source de conservatisme rélative à l'ensemble de solutions de (1.36), et il y a la possibilité qu'aucune solution avec P constante ne soit pas obtenue même si le système est stable. Pour réduire le conservatisme, on peut utiliser d'autres structures pour la matrice de Lyapunov, comme par exemple supposer $P(\alpha)$ comme un polynôme homogène en α avec un degré générique et appliquer des techniques comme la relaxation de Pólya [Sch03, Sch05]. Dans cette thèse, tous les variables dépendantes des paramètres au simplexe unitaire sont modélisées, sauf contrairement dit, comme des polynômes homogènes de degré générique. Pour plus de détails, voir par exemple [GAC96, LOdOP04, OP05, OP07, MOPB09].

Dans ce qui suit, plusieurs lemmes importants pour la manipulation des LMIs seront présentés.

Lemme 1.4 Lemme de Finsler *[dOS01]*

Soient $w \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telles que rang($\mathcal{B}$) $< n$ et $\mathcal{B}^\perp$ une base pour le noyau de $\mathcal{B}$ (i.e., $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $w'\mathcal{Q}w < 0, \ \forall w \neq 0 \ : \ \mathcal{B}w = 0$;

ii) $\mathcal{B}^{\perp\prime}\mathcal{Q}\mathcal{B}^\perp < 0$;

iii) $\exists \mu \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{Q} - \mu\mathcal{B}'\mathcal{B} < 0$;

iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n\times m} \ : \ \mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}'\mathcal{X}' < 0.$

Lemme 1.5 Lemme de projection *[SIG98, GA94, IS94]*

Étant données les matrices $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{k\times m}$ et $\Psi = \Psi' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il y a une matrice $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ *qui satisfait*

$$\Psi + \mathcal{V}\mathcal{X}\Lambda + (\mathcal{V}\mathcal{X}\Lambda)' < 0$$

ii) Les deux conditions suivantes

$$\mathcal{N}_v \Psi \mathcal{N}_v' < 0 \;\; ou \;\; \mathcal{V}\mathcal{V}' > 0$$
$$\mathcal{N}_u' \Psi \mathcal{N}_u < 0 \;\; ou \;\; \Lambda'\Lambda > 0$$

doivent être vérifiées, où $\mathcal{N}_v$ *et* $\mathcal{N}_u'$ *sont les compléments orthogonaux de* $\mathcal{V}$ *et* Λ'*, i.e.,*

$$\mathcal{N}_v \mathcal{V} = 0, \qquad \mathcal{N}_u' \Lambda' = 0.$$

Lemme 1.6 Complément de Schur *[BEFB94]*
Soient trois matrices Q*,* R *et* S *de dimensions appropriées, où* $Q = Q'$ *et* $R = R'$*. Alors*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} R < 0 \\ Q - SR^{-1}S' < 0 \end{array} \right. \\ \text{ou} \\ \left\{ \begin{array}{l} Q < 0 \\ R - S'Q^{-1}S < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Les lemmes présentés sont très utilisés pour générer des résultats importants de la théorie de la commande. Par exemple, le lemme suivant, aussi connu comme le lemme borné réel, est le résultat de l'application du Lemme 1.6 aux conditions du Théorème 1.13.

Lemme 1.7 Lemme Borné Réel *[BEFB94]*
Considérons le système (1.30) *avec* $u(t) = 0$*. Sa norme* $\mathcal{H}_\infty$*, dénotée par* $||\mathcal{G}_\alpha||_\infty$*, est bornée supérieurement par le scalaire positif* γ *si et seulement s'il y a une matrice* $P(\alpha(t)) = P'(\alpha(t))$ *qui vérifie*[2]

$$\begin{bmatrix} A'(\alpha(t))P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t)) & P(\alpha(t))B_1(\alpha(t)) & C_1'(\alpha(t)) \\ \star & -\gamma^2 \mathrm{I} & D_1'(\alpha(t)) \\ \star & \star & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0 \qquad (1.39)$$

1.5 Conclusion

Les principaux définitions et résultats concernant les systèmes linéaires utiles pour la suite de la thèse ont été présentés dans ce chapitre. L'information sur la stabilité du système peut être obtenue soit en utilisant directement la matrice de transition d'état (Lemme 1.1), soit en cherchant une fonction de Lyapunov, décrite pour une matrice qui ne dépend pas explicitement des états du système (Théorème 1.2), soit en analysant la solution d'une équation différentielle de Lyapunov (Théorème 1.5). Cette dernière méthode, en particulier, permet de définir l'enveloppe des normes de toutes les trajectoires possibles partant d'un ensemble d'états initiaux. L'information sur la contrôlabilité du système, *i.e.*, sur la possibilité de conduire un état quelconque au point d'équilibre dans un horizon de temps fini, peut être évaluée à partir du Grammian de contrôlabilité. Des façons pour calculer la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système, qui correspond au plus grand gain entrée-sortie pour l'énergie du système, ont été aussi exposées. Finalement, la modélisation des systèmes incertains en définissant des matrices dépendantes des paramètres a été traitée. Des techniques et théorèmes pour manipuler des LMIs, qui est une méthodologie importante pour l'analyse et pour la synthèse des systèmes linéaires, ont également été proposés.

[2]Le symbole $\star$ représent des blocs symétriques dans les LMIs.

Chapitre 2

Systèmes LTI avec des incertitudes invariantes dans le temps

2.1 Introduction

Le problème de la synthèse de gains stabilisants de retour de sortie est un des problèmes les plus compliqués dans le domaine de la commande, et il est un des principaux sujets de recherche depuis même les premières articles sur le sujet [SADG97]. Même la caractérisation de la complexité du problème n'est pas toujours claire [BT00], et les stratégies basées sur des LMIs, largement abordées dans la littérature, sont considerées comme des problèmes NP-complets [FL97]. Le problème devient plus difficile lorsque le système présente des paramètres incertains dans sa modélisation. Dans ce cas là, on recherche des lois de commande robustes, *i.e.*, des lois qui stabilisent le système indépendamment des valeurs des paramètres, calculées à partir de contrôleurs dynamiques, d'ordre complèt ou réduit, ou même statiques. La synthèse de contrôleurs robustes est actuellement le but de plusieurs recherches (voir, par exemple, [PG94, GPS96, EOA97, GdS98, CT99, Sha03, GKB07, YS09, Tro09]).

Récemment, [PA01, APS03, MBB04] ont présenté une méthodologie pour la synthèse de gains statiques de retour de sortie basée sur une procédure en deux étapes. Cette méthodologie a été développée et adaptée pour traiter d'autres cas [AGPP09, AGPP10, AOP10a, MOP11, AOP10b, AOP12] et elle présente souvent de bons résultats. L'adaptation de la technique en deux étapes pour la synthèse de contrôleurs robustes d'ordre réduit, capables de stabiliser des systèmes avec des paramètres incertains invariants dans le temps, est décrite dans ce chapitre. Les conditions de synthèse sont aussi conçues pour générer des contrôleurs qui minimisent une borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée.

La Section 2.2 décrit la formulation du problème, qui consiste à présenter la modélisation des incertitudes et de montrer comment obtenir une représentation augmentée du système pour que la recherche d'un contrôleur dynamique devienne un problème de synthèse d'un gain statique de retour de sortie. La Section 2.3 détaille la méthode en deux étapes, et les conditions LMIs utilisées à chaque étape sont montrées dans la Section 2.4. La Section 2.5 présente des exemples qui illustrent les avantages de la méthode, et la Section 2.6 conclut le chapitre.

2.2 Formulation du problème

Considérons le système linéaire en temps continu et incertain donné par

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B_1(\alpha)w(t) + B_2(\alpha)u(t) \\ z(t) = C_1(\alpha)x(t) + D_1(\alpha)w(t) + D_2(\alpha)u(t) \\ y(t) = C_2(\alpha)x(t) + D_y(\alpha)w(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'états, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ l'entrée exogène, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée de commande, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie commandée et $y(t) \in \mathbb{R}^q$ la sortie mesurée. Il est important de souligner que, comme dans une grande quantité d'articles sur des problèmes similaires, l'entrée de commande $u(t)$ n'affecte pas directement la sortie mesurée $y(t)$. Les matrices du système appartiennent à un domaine polytopique et sont définies par

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i M_i, \ \alpha \in \Delta_N.$$

La matrice $M(\alpha)$ représente toute matrice donnée en (2.1), N est le nombre de sommets du polytope, $M_i, i = 1, \dots, N$, sont les sommets et Δ_N est le simplexe unitaire défini en (1.31).

Le problème abordé dans ce chapitre est la synthèse de contrôleurs robustes d'ordre réduit qui soient capables de stabiliser le système (2.1) en garantissant une norme $\mathcal{H}_\infty$ moins grande qu'un scalaire γ défini *à priori*. Le contrôleur est d'ordre $n_c \leq n$ et est donné par

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \tag{2.2}$$

$$u(t) = C_c x_c(t) + D_c y(t), \tag{2.3}$$

avec $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ les états du contrôleur, et les matrices A_c, B_c, C_c et D_c, de dimensions appropriées, doivent être déterminées. Selon une stratégie bien connue (voir, par exemple, [EOA97, YS09]), une représentation augmentée peut être obtenue en regroupant les états $x(t) \in \mathbb{R}^n$ du système avec des états $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ du contrôleur, ce qui conduit à

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) + B_2(\alpha)D_cC_2(\alpha) & B_2(\alpha)C_c \\ B_cC_2(\alpha) & A_c \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{cl}(\alpha)} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1(\alpha) + B_2(\alpha)D_cD_y(\alpha) \\ B_cD_y(\alpha) \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_{cl}(\alpha)} w(t) \tag{2.4}$$

$$z(t) \ = \ \underbrace{\begin{bmatrix} C_1(\alpha) + D_2(\alpha)D_cC_2(\alpha) & D_2(\alpha)C_c \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_{cl}(\alpha)} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \ + \ \underbrace{\begin{bmatrix} D_1(\alpha) + D_2(\alpha)D_cD_y(\alpha) \end{bmatrix}}_{\tilde{D}_{cl}(\alpha)} w(t) \tag{2.5}$$

En définissant

$$\tilde{K}_{of} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

le problème de la synthèse d'un contrôleur robuste d'ordre réduit peut être traité comme la synthèse d'un gain *statique* de retour de sortie $\tilde{K}_{of} \in \mathbb{R}^{(m+n_c)\times(n_c+q)}$ pour le système bouclé

$$\tilde{\mathcal{G}} \triangleq \begin{cases} \dot{\eta}(t) = \tilde{A}(\alpha)\eta(t) + \tilde{B}_1(\alpha)w(t) + \tilde{B}_2(\alpha)u(t) \\ z(t) = \tilde{C}_1(\alpha)\eta(t) + \tilde{D}_1(\alpha)w(t) + \tilde{D}_2(\alpha)u(t) \\ y(t) = \tilde{C}_2(\alpha)\eta(t) + \tilde{D}_y(\alpha)w(t) \end{cases} \tag{2.7}$$

avec

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix},\ \tilde{B}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{B}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & B_2(\alpha) \\ \mathrm{I}_{n_c} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\tilde{C}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} C_1(\alpha) & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{D}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} D_1(\alpha) \end{bmatrix},\ \tilde{D}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & D_2(\alpha) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$\tilde{C}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_{n_c} \\ C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{D}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ D_y(\alpha) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Alors, les matrices en boucle fermée du système (2.4)-(2.5) sont données par

$$\tilde{A}_{cl}(\alpha) = \tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \tag{2.11}$$
$$\tilde{B}_{cl}(\alpha) = \tilde{B}_1(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{D}_y(\alpha) \tag{2.12}$$
$$\tilde{C}_{cl}(\alpha) = \tilde{C}_1(\alpha) + \tilde{D}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \tag{2.13}$$
$$\tilde{D}_{cl}(\alpha) = \tilde{D}_1(\alpha) + \tilde{D}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{D}_y(\alpha). \tag{2.14}$$

2.3 Méthode en deux étapes

L'approche principale utilisée dans ce travail pour la synthèse de gains statiques de retour de sortie est basée sur la méthode en deux étapes, proposée par [PA01, AP02, APS03] et développée dans [MBB04, AGPP09, AGPP10, AOP10a, MOP11, AOP10b, AOP12]. Avant de montrer la méthode, nous présentons quelques résultats préliminaires.

Théorème 2.1 Les deux affirmations suivantes sont équivalentes.

1. Le système (2.7) est stabilisable par un gain robuste de retour de sortie si et seulement s'il y a des matrices $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$ et $\tilde{K}_{of}$ telles que la condition

$$(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha))'P(\alpha) + P(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)) < 0 \tag{2.15}$$

   est valide $\forall \alpha \in \Delta_N$;

2. Le système (2.7) est stabilisable par un gain robuste de retour de sortie si et seulement s'il y a des matrices $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$, R et L telles que la condition

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \star & 0 \end{bmatrix} + sym\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{K}'_{sf}(\alpha) \\ -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\tilde{C}_2(\alpha) & -R \end{bmatrix} \right\} < 0 \tag{2.16}$$

   est valide $\forall \alpha \in \Delta_N$. Dans ce cas, le gain de retour de sortie est donné par $\tilde{K}_{of} = R^{-1}L$.

Démonstration : La condition (2.15) peut être écrite comme

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{C}'_2(\alpha)\tilde{K}'_{of} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \tilde{B}'_2(\alpha)P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \tag{2.17}$$

En appliquant le lemme de la projection (Lemme 1.5) dans la condition (2.17), avec

$$\mathcal{N}_u = \begin{bmatrix} I \\ \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) & -I \end{bmatrix} \text{ et } \Psi = \begin{bmatrix} \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \tilde{B}'_2(\alpha)P(\alpha) & 0 \end{bmatrix},$$

il existe une matrice $\mathcal{X}(\alpha)$ de telle sorte que[1]

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \tilde{B}_2'(\alpha)P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + sym\left\{\mathcal{X}(\alpha)\left[\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha) \quad -I\right]\right\} < 0. \tag{2.18}$$

Le choix de $\mathcal{X}'(\alpha) = [R_s'(\alpha) \quad -R']$, avec $L = R\tilde{K}_{of}$ et $\tilde{K}'_{sf}(\alpha) = R_s(\alpha)R^{-1}$, nous permet de voir que la condition (2.18) est égal à (2.16), ce qui confirme l'équivalence proposée par le théorème. Il est important de noter que, comme $R + R' < 0$ dans la condition (2.18), alors R est toujours inversible.

Lemme 2.1 *La variable $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ de l'inégalité* (2.16) *est un gain stabilisant de retour d'état, et la fonction de Lyapunov $v(t,x) = x(t)'P(\alpha)x(t)$ démontre simultanément la stabilité des systèmes en boucle fermée dont les matrices dynamiques sont données par $\tilde{A}(\alpha)+\tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)$ et $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)$.*

Démonstration : La multiplication de (2.16) à gauche par $[I \quad \tilde{K}'_{sf}(\alpha)]$ et à droit par le transposé résulte en

$$(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha))'P(\alpha) + P(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)) < 0,$$

ce qui démontre que $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ est un gain stabilisant de retour d'état, dont la stabilité est garantie en utilisant la même fonction de Lyapunov $v(t,x) = x(t)'P(\alpha)x(t)$, $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, considérée dans la démonstration de la stabilité en utilisant le gain de retour de sortie $\tilde{K}_{of}$ dans le Théorème 2.1.

La partie 2 du Théorème 2.1 présente une condition nécessaire et suffisante, mais pas convexe et, par consequent, difficile à résoudre. Pourtant, le Lemme 2.1 permet, en fixant une des matrices, que la condition soit relaxée en fonction de deux parties convexes, au prix de l'insertion d'un degré de conservatisme. On peut retrouver des stratégies similaires dans la littérature pour beaucoup de problèmes de commande formulés comme des inégalités matricielles non-linéaires. Des telles inégalités sont transformées en LMIs si des certaines variables sont fixées [Iwa99, GS96]. Cette relaxation est la base de la méthode en deux étapes et elle est décrite dans l'algorithme suivant.

Algorithme 2.1 Méthode en deux étapes

- Étape 1 : Calculer un gain stabilisant de retour d'état $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$;
- Étape 2 : Utiliser le gain $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ dans la condition (2.16) pour calculer, si possible, un gain stabilisant de retour de sortie $\tilde{K}_{of}$.

L'utilisation des différents gains $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ de retour d'état peut conduire à différents gains $\tilde{K}_{of}$ de retour de sortie à la deuxième étape, ou même changer sa faisabilité. De cette façon, pour augmenter la possibilité que la deuxième étape soit faisable, il est important d'essayer des méthodes différentes dans l'implémentation de la première étape. La condition considérée à la deuxième étape peut aussi être modifiée selon l'objectif du problème, par exemple l'obtention d'un gain structuré ou la minimisation d'une certaine norme du système bouclé. Dans ce chapitre les deux étapes sont abordées via des conditions LMIs, comme cela est montré dans la section suivante.

[1]Étant donnée une matrice M, l'opération $sym\{M\}$ correspond à $M + M'$.

2.4 Conditions LMI

Le Théorème 2.2 présente une condition pour la synthèse d'un gain dépendant des paramètres de retour d'état, qui assure la stabilité du système bouclé (2.7), *i.e.*, la synthèse d'un gain $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ qui assure la stabilité asymptotique de $\tilde{A}_{cl}(\alpha)$, définie en (2.11), $\forall\alpha \in \Delta_N$. Le résultat du Théorème 2.2 peut être vu comme une extension pour le cas dépendant de paramètres de la condition de synthèse sur le système dual, avec l'utilisation du Lemme de Projection (Lemme 1.5) [PDSV09].

Théorème 2.2 Il existe un gain de retour d'état dépendant des paramètres qui stabilise le système (2.7) s'il existe des matrices dépendantes des paramètres $W(\alpha) = W(\alpha)' > 0$, $Z_2(\alpha)$, $Z_3(\alpha)$, $Z_4(\alpha)$, $Q(\alpha)$ $G(\alpha)$ telles que

$$\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)G(\alpha) + G(\alpha)'\tilde{A}'(\alpha) + \Omega(\alpha) + \Omega'(\alpha) & \star \\ W(\alpha) - G'(\alpha) + \xi\left(\tilde{A}(\alpha)G(\alpha) + \Omega(\alpha)\right) & -\xi(G(\alpha) + G'(\alpha)) \end{bmatrix} < 0, \text{ avec} \tag{2.19}$$

$$\Omega(\alpha) = \begin{bmatrix} B_2(\alpha)Q(\alpha)Y + B_2(\alpha)Z_3(\alpha) & B_2(\alpha)Q(\alpha) + B_2(\alpha)Z_4(\alpha) \\ Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

pour une matrice fixée Y et un scalaire $\xi > 0$ prédéfini. Si la condition (2.19) est satisfaite, alors

$$\tilde{K}_{sf}(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \\ Q(\alpha)Y + Z_3(\alpha) & Q(\alpha) + Z_4(\alpha) \end{bmatrix} G(\alpha)^{-1} \tag{2.20}$$

est un gain stabilisant de retour d'état pour le système augmenté (2.7).

Démonstration : En notant $Q(\alpha) \triangleq X(\alpha)Z_2(\alpha)$, la matrice $\Omega(\alpha)$ peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_2(\alpha)X(\alpha)Z_2(\alpha)Y + B_2(\alpha)Z_3(\alpha) & B_2(\alpha)X(\alpha)Z_2(\alpha) + B_2(\alpha)Z_4(\alpha) \\ Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{B}_2(\alpha)T^{-1}(\alpha)\hat{Z}(\alpha), \end{aligned}$$

avec $\tilde{B}_2(\alpha)$ définie dans (2.8) et

$$\hat{Z}(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \\ Z_3(\alpha) & Z_4(\alpha) \end{bmatrix}, \quad T(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X(\alpha) & I \end{bmatrix}.$$

Après la multiplication de $\Gamma(\alpha)$ par $V'(\alpha)$ à gauche et par $V(\alpha)$ à droite, avec $V(\alpha) = \text{diag}(G(\alpha)^{-1}, G(\alpha)^{-1})$, on a

$$\mathcal{Y}(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} F(\alpha)\overline{A}(\alpha) + \overline{A}'(\alpha)F'(\alpha) & \star \\ P(\alpha) - F'(\alpha) + \xi F(\alpha)\overline{A}(\alpha) & -\xi(F(\alpha) + F'(\alpha)) \end{bmatrix}$$

avec $\overline{A}(\alpha) \triangleq \tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)$, $F(\alpha) \triangleq (G'(\alpha))^{-1}$, $P(\alpha) \triangleq (G'(\alpha))^{-1}W(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ et

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{sf}(\alpha) &= T^{-1}(\alpha)\hat{Z}(\alpha)G(\alpha)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q(\alpha)Z_2^{-1}(\alpha) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \\ Z_3(\alpha) & Z_4(\alpha) \end{bmatrix} G(\alpha)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} Z_2(\alpha)Y & Z_2(\alpha) \\ Q(\alpha)Y + Z_3(\alpha) & Q(\alpha) + Z_4(\alpha) \end{bmatrix} G^{-1} = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

La multiplication de $\mathcal{Y}(\alpha)$ par $[I \quad \overline{A}'(\alpha)]$ à gauche et par le transposé à droite conduit à l'inégalité $\overline{A}'(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)\overline{A}(\alpha) < 0$. Cette dernière inégalité, avec $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, est la condition de stabilité de Lyapunov pour le système en boucle fermée [Kha02].

Observation 2.1 *La matrice $T(\alpha)$ a été utilisée dans le Théorème 2.2 pour que les matrices de la réalisation d'états du contrôleur dynamique correspondent à une représentation commandable et observable, selon la méthode montrée dans [YS09]. Cette manipulation est faite une fois qu'on a observé, après des tests exhaustifs, que l'utilisation de tels contrôleurs résultants de la première étape donne des résultats meilleurs, en comparaison avec ceux obtenus avec l'utilisation des contrôleurs d'autre type. Par ailleurs, les conditions sont convexes en rélation à $T(\alpha)$, au contraire des conditions développées en [YS09], et par conséquent l'utiliser une telle approche ne pose pas de problèmes.*

Observation 2.2 *Les LMIs du Théorème 2.2 dépendent du scalaire ξ et de la matrice Y, qui représentent des degrés de liberté sur la recherche d'une solution faisable. On peut, par exemple, effectuer une recherche linéaire sur ξ, ou même tester des valeurs prédefinies dans un ensemble. La matrice Y est utilisée pour ajuster la dimension du bloc $(1,1)$ de $\hat{Z}(\alpha)$ pour récupérer $X(\alpha)$ à partir de $Q(\alpha)Z_2^{-1}(\alpha)$. Dans les exemples, la matrice $Y \triangleq [I_{n_c\times(n-1)} \; 0_{n_c\times 1}]$ a été utilisée, mais d'autres choix (avec dimensions appropriées) peuvent être considérés.*

Observation 2.3 *Pour obtenir une expression convexe pour $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ avec le Théorème 2.2, il faut que la variable G soit indépendante des paramètres.*

Une condition suffisante pour l'existence d'un gain de retour de sortie, de telle sorte que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée soit bornée par une valeur définie *a priori*, est présentée dans le Théorème 2.3. Dans la condition du théorème, on suppose qu'un gain de retour d'état dépendant de paramètres qui stabilise le système est donné. Le gain peut être obtenu, par exemple, en utilisant la condition du Théorème 2.2 ou une autre méthode disponible dans la littérature.

Théorème 2.3 [AOP12] Soit $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ un gain stabilisant de retour d'état. S'il y a des matrices $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, $F(\alpha)$, $V(\alpha)$, $H(\alpha)$, R et L et un scalaire $\gamma > 0$ de telle sorte que

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11}(\alpha) & \Upsilon_{12}(\alpha) & \Upsilon_{13}(\alpha) & \Upsilon_{14}(\alpha) & \Upsilon_{15}(\alpha) \\ \star & -V(\alpha) - V'(\alpha) & V(\alpha)\tilde{B}_1(\alpha) & 0 & V(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \star & \star & -\gamma^2 \mathrm{I} & \tilde{D}_1'(\alpha)H(\alpha) & \tilde{D}_y'(\alpha)L' \\ \star & \star & \star & \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha) & H'(\alpha)\tilde{D}_2(\alpha) \\ \star & \star & \star & \star & -R - R' \end{bmatrix} < 0, \ \forall\alpha \in \Delta_N \tag{2.21}$$

avec

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11}(\alpha) &= \big(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)\big)'F'(\alpha) + F(\alpha)\big(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)\big) \\ \Upsilon_{12}(\alpha) &= P(\alpha) - F(\alpha) + \big(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)\big)'V'(\alpha) \\ \Upsilon_{13}(\alpha) &= F(\alpha)\tilde{B}_1(\alpha) \\ \Upsilon_{14}(\alpha) &= \tilde{C}_1'(\alpha)H(\alpha) + \tilde{K}_{sf}'(\alpha)\tilde{D}_2'(\alpha)H(\alpha) \\ \Upsilon_{15}(\alpha) &= F(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) + \tilde{C}_2'(\alpha)L' - \tilde{K}_{sf}'(\alpha)R' \end{aligned}$$

alors $\tilde{K}_{of} = R^{-1}L$ est un gain robuste de retour de sortie qui stabilise le système (2.7) avec un coût $\mathcal{H}_\infty$ garanti donné par γ.

Démonstration : Si l'inégalité (2.21) est satisfaite, alors elle est aussi vérifiée avec $-H'(\alpha)H(\alpha)$ remplaçant $\mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha)$, puisque $(\mathrm{I} - H(\alpha))'\big(\mathrm{I} - H(\alpha)\big) \geq 0$ implique $-H'(\alpha)H(\alpha) \leq \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha)$. Après la multiplication de la condition résultante par $T_1(\alpha)$ à gauche et par $T_1'(\alpha)$ à droite, avec

$$T_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & S_1'(\alpha) \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & S_2'(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$S_1(\alpha) = R^{-1}L\tilde{C}_2(\alpha) - \tilde{K}_{sf}(\alpha), \quad S_2(\alpha) = R^{-1}L\tilde{D}_y(\alpha),$$

on a

$$\begin{bmatrix} F(\alpha)\tilde{A}_{cl}(\alpha) + \tilde{A}_{cl}'(\alpha)F'(\alpha) & P(\alpha) - F(\alpha) + \tilde{A}_{cl}'(\alpha)V'(\alpha) & F(\alpha)\tilde{B}_{cl}(\alpha) & \tilde{C}_{cl}'(\alpha)H(\alpha) \\ \star & -V(\alpha) - V'(\alpha) & V(\alpha)\tilde{B}_{cl}(\alpha) & 0 \\ \star & \star & -\gamma^2\mathrm{I} & \tilde{D}_{cl}'(\alpha)H(\alpha) \\ \star & \star & \star & -H(\alpha)H'(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (2.22)$$

La multiplication de (2.22) à gauche par $T_2'(\alpha)$ et à droite par $T_2(\alpha)$, avec

$$T_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{cl}(\alpha) & \tilde{B}_{cl}(\alpha) & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & H(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}$$

nous donne

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)\tilde{A}_{cl}(\alpha) + \tilde{A}_{cl}'(\alpha)P(\alpha) & P(\alpha)\tilde{B}_{cl}(\alpha) & \tilde{C}_{cl}'(\alpha) \\ \star & -\gamma^2\mathrm{I} & \tilde{D}_{cl}'(\alpha) \\ \star & \star & -\mathrm{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.23)$$

ce qui est la version dépendante des paramètres du Lemme Borné Réel (Lemme 1.7). Par conséquent, le gain robuste de retour de sortie $\tilde{K}_{of} = R^{-1}L$ stabilise le système en boucle fermée (2.7) avec $||\tilde{\mathcal{G}}||_\infty < \gamma$, $\forall \alpha \in \Delta_N$.

La condition du Théorème 2.3 correspond à la deuxième étape de la méthode décrite dans l'Algorithme 2.1. Pour la première étape de la méthode, on utilisera dans ce chapitre le Théorème 2.2. Une fois que le Théorème 2.2 a permis de construire le gain de retour d'état par $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$, une condition similaire à (2.21) peut être obtenue directement à partir des matrices $Z(\alpha)$ et $G(\alpha)$.

Théorème 2.4 [AOP12] Soit $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ un gain stabilisant de retour d'état. S'il y a des matrices $P(\alpha) = P'(\alpha) > 0$, $F(\alpha)$, $V(\alpha)$, $H(\alpha)$, R et L et un scalaire $\gamma > 0$ de telle sorte que la condition dépendante des paramètres (2.21) soit satisfaite avec Υ_{1j} remplacé par $\tilde{\Upsilon}_{1j}$, $j = 1, \ldots, 5$, avec

$$\tilde{\Upsilon}_{11}(\alpha) = G'(\alpha)F(\alpha)\big(\tilde{A}(\alpha)G(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)Z(\alpha)\big) + \big(\tilde{A}(\alpha)G(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)Z(\alpha)\big)'F'(\alpha)G(\alpha)$$
$$\tilde{\Upsilon}_{12}(\alpha) = G'(\alpha)\big(P(\alpha) - F(\alpha) + \tilde{A}'(\alpha)V'(\alpha)\big) + Z'(\alpha)\tilde{B}_2'(\alpha)V'(\alpha)$$
$$\tilde{\Upsilon}_{13}(\alpha) = G'(\alpha)F(\alpha)\tilde{B}_1(\alpha)$$
$$\tilde{\Upsilon}_{14}(\alpha) = \big(G'(\alpha)\tilde{C}_1'(\alpha) + Z'(\alpha)\tilde{D}_2'(\alpha)\big)H(\alpha)$$
$$\tilde{\Upsilon}_{15}(\alpha) = G'(\alpha)\big(F(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) + \tilde{C}_2'(\alpha)L'\big) - Z'(\alpha)R'$$

alors $\tilde{K}_{of} = R^{-1}L$ est un gain robuste de retour de sortie qui stabilise le système (2.7) de sorte que $||\tilde{\mathcal{G}}||_\infty < \gamma$.

Démonstration : La multiplication de la version modifiée de (2.21) à droite par

$$\mathrm{diag}(G(\alpha)^{-1}, \mathrm{I}, \mathrm{I}, \mathrm{I}, \mathrm{I})$$

et à gauche par son transposé permet d'obtenir la LMI originale (2.21).

Toutes les conditions LMIs présentées sont des problèmes d'optimisation de dimension infinie, car elles doivent être vérifiées $\forall\alpha \in \Delta_N$. Comme cela est discuté dans [BOMP06, OP07], les LMIs dépendantes de paramètres dans le simplexe unitaire peuvent être résolues, sans conservatisme, à partir d'une séquence de relaxations : les variables de décision sont modélisées comme des polynômes homogènes avec un degré g arbitraire et, plus le dégré g est grand, moins les LMIs résultants son conservatives. Par contre la complexité croît considérablement avec l'augmentation du dégré des polynômes. La complexité des méthodes basées sur des LMIs peut être estimée selon le nombre des variables scalaires et des lignes des LMIs, qui varient avec l'ordre du système, l'ordre du contrôleur, le nombre de sommets du polytope et les degrés des variables polynomiales. La difficulté de la programmation des LMIs augmente aussi en fonction de la quantité de sommets et du dégré des polynômes. Pour éviter une telle difficulté, les auteurs ont développé une procédure numérique, paquet computationnel pour construire automatiquement un ensemble fini de LMIs à partir de sa description dépendante des paramètres, sans que l'utilisateur ait besoin de faire des opérations comme isoler chaque monôme ou homogénéiser le polynôme. Bien que les LMIs pourraient aussi être programmées en utilisant, par exemple, Yalmip [Löf04], un parser spécialisé peut construire les LMIs plus vite. Le parser utilisé et développé dans cette thèse, ROLMIP (*Robust LMI Parser*), est disponible à `http://www.dt.fee.unicamp.br/~agulhari/softwares/robust_lmi_parser.zip`.

Le Théorème 2.4 peut aussi être utilisé à la deuxième étape de la méthode décrite dans l'algorithme 2.1. Même si ce théorème et le Théorème 2.3 sont équivalents pour un ensemble donné de $\alpha \in \Delta_N$, les LMIs issues des relaxations peuvent ne pas être équivalentes et, par conséquent, peuvent conduire à différents gains. De tels résultats seront illustrés dans les exemples numériques de la Section 2.5. Les deux théorèmes peuvent être adaptés pour obtenir des contrôleurs sans considérer la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée avec l'exclusion de la troisième, quatrième et cinquième lignes et colonnes de (2.21), comme présenté dans [AOP10b].

2.4.1 Procédure itérative

La méthode en deux étapes a une grande efficacité pour la synthèse de gains stabilisants de retour de sortie. Toutefois, si le but est la minimisation d'une norme, on peut obtenir de meilleurs résultats après l'application d'une procédure itérative. Cette procédure, spécialisée pour les conditions LMIs présentées dans ce chapitre et conçue pour minimiser la borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée, est décrite dans l'algorithme suivant :

Algorithme 2.2 Procédure itérative

1. Fixer la variable d'itération $k \leftarrow 0$, la quantité maximale d'itérations $k_{max} > 0$ et la toléra nce de convergence $\epsilon > 0$;
2. Calculer un gain stabilisant de retour d'état $\tilde{K}_{sf}^{(0)}(\alpha)$ en utilisant le Théorème 2.2 ;
3. Calculer le gain de retour de sortie initial $\tilde{K}_{of}^{(0)}$ et la borne $\gamma^{(0)}$ résultant de la minimisation de la valeur de γ sous la condition du Théorème 2.3 ou du Théorème 2.4 ;
4. Avec le gain $\tilde{K}_{of}^{(k)}$, on obtient le gain de retour d'état $\tilde{K}_{sf}^{(k+1)}(\alpha) = \tilde{K}_{of}^{(k)}\tilde{C}_2(\alpha)$;
5. Utiliser le gain $\tilde{K}_{sf}^{(k)}(\alpha)$, pour résoudre le problème d'optimisation
$$\gamma^* = \min \gamma \quad \text{sous contrainte} \;\; (2.21).$$
Si $\gamma^* < \gamma^{(k)}$, attribuer $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^*$ et récupérer le contrôleur correspondant $\tilde{K}_{of}^{(k+1)}$, sinon attribuer $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)}$;
6. Attribuer $k \leftarrow k+1$. Si $k = k_{max}$ ou si $|\gamma^{(k-1)} - \gamma^{(k)}|/\gamma^{(k-1)} < \epsilon$, arrêter ; sinon, retourner au pas 4.

Il est important de souligner que la borne finale γ résultant de la procédure itérative, ce qui peut être vue comme une procédure d'optimisation locale, peut changer selon le gain de retour d'état calculé au pas 2. Alors, une technique pour chercher le meilleur gain de retour d'état serait nécessaire pour traiter le problème d'une façon globale.

La convergence de la procédure lorsque $D_y(\alpha) = 0$ est garantie et montrée par le théorème suivant.

Théorème 2.5 Considérons le système (2.7) avec $D_y(\alpha) = 0$. Soit $\tilde{K}_{of}$ un gain stabilisant de retour de sortie et γ la borne minimale résultante de l'application de la condition du Théorème 2.3. Alors la borne minimale $\hat{\gamma}$ issue de l'application de $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)$ dans le Théorème 2.3 satisfait $\hat{\gamma} \leq \gamma$.

Démonstration : L'application du lemme de projection (Lemme 1.5), avec

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Upsilon_{11}(\alpha) & \Upsilon_{12}(\alpha) & \Upsilon_{13}(\alpha) & \Upsilon_{14}(\alpha) & F(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \star & -V(\alpha) - V'(\alpha) & V(\alpha)\tilde{B}_1(\alpha) & 0 & V(\alpha)\tilde{B}_2(\alpha) \\ \star & \star & -\gamma^2 \mathrm{I} & \tilde{D}_1'(\alpha)H(\alpha) & 0 \\ \star & \star & \star & \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha) & H'(\alpha)\tilde{D}_2(\alpha) \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}, \; \mathcal{X} = R, \; \Lambda' = \begin{bmatrix} S'(\alpha) \\ 0 \\ Q'(\alpha) \\ 0 \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}, \; S(\alpha) = R^{-1}L\tilde{C}_2(\alpha) - \tilde{K}_{sf}(\alpha), \; Q(\alpha) = R^{-1}L\tilde{D}_y,$$

$$\mathcal{N}_u = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ S(\alpha) & 0 & Q(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \; \mathcal{N}_v' = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nous permet de voir que la condition (2.21) est équivalente aux conditions

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c} (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha))'F'(\alpha) \\ +F(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)) \end{array} & \star & \star & \star \\ P(\alpha) - F'(\alpha) + V(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)) & -V(\alpha) - V'(\alpha) & \star & \star \\ \tilde{B}_1'(\alpha)F'(\alpha) & \tilde{B}_1'(\alpha)V'(\alpha) & -\gamma^2\mathrm{I} & \star \\ H'(\alpha)(\tilde{C}_1(\alpha) + \tilde{D}_2(\alpha)\tilde{K}_{sf}(\alpha)) & 0 & H'(\alpha)\tilde{D}_1(\alpha) & \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

et

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c} (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha))'F'(\alpha) \\ +F(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)) \end{array} & \star & \star & \star \\ P(\alpha) - F'(\alpha) + V(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)) & -V(\alpha) - V'(\alpha) & \star & \star \\ \tilde{B}_1'(\alpha)F'(\alpha) & \tilde{B}_1'(\alpha)V'(\alpha) & -\gamma^2\mathrm{I} & \star \\ H'(\alpha)(\tilde{C}_1(\alpha) + \tilde{D}_2(\alpha)\tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)) & 0 & H'(\alpha)\tilde{D}_1(\alpha) & \mathrm{I} - H(\alpha) - H'(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (2.25)$$

qui sont, respectivement, les conditions liées aux lemme borné réel (Lemme 1.7) des systèmes en boucle fermée avec le retour d'état $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$ et avec le retour de sortie $\tilde{K}_{of}$. Supposons que la condition (2.21) est satisfaite avec $\tilde{K}_{sf}(\alpha)$, $\tilde{K}_{of}$ et γ (*i.e.*, l'application de la méthode en deux étapes donne une solution faisable) ; alors les conditions (2.24) et (2.25) sont aussi satisfaites. Le changement de variables $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)$ dans la condition (2.24) la rend identique à la condition (2.25), ce qui démontre que ce changement de la condition originale (2.21), avec le même valeur de γ, maintient la faisabilité de la condition. Alors, la minimisation de γ sous contrainte (2.21) avec $\tilde{K}_{sf}(\alpha) = \tilde{K}_{of}\tilde{C}_2(\alpha)$ donne $\hat{\gamma} \leq \gamma$, ce qui démontre la non-croissance de cette variable. Cette information, avec le fait qu'une telle variable a une borne inférieur (une fois qu'elle est liée à une norme), démontre la convergence de la procédure itérative.

Le Théorème 2.5 montre la convergence de la procédure itérative pour le cas $D_y(\alpha) = 0$. Si la sortie est affectée par $D_y(\alpha) \neq 0$, la démonstration présentée n'est pas applicable et, jusqu'à présent, la convergence de la procédure n'a pas pu être démontrée. Remarquons, pourtant, que l'algorithme peut traiter la possibilité d'une augmentation de la valeur de γ pendant l'application de la procédure, mais il est important de souligner qu'une telle situation n'a pas été observée dans les différentes analyses faites.

2.5 Exemples numériques

Les routines ont été implémentées sur MATLAB, version 7.0.1 (R14) avec les paquets Yalmip [Löf04] et SeDuMi [Stu99]. L'ordinateur utilisé est un AMD® Phenom II Quad Core 945 (3.0 GHz), 3.2GB RAM, Linux Ubuntu 9.04. Le Théorème 2.2 a été utilisé à la première étape avec $\xi = 0.05$.

2.5.1 Exemple I

Il est important de mentionner que, dans la littérature, il n'y a pas beaucoup de méthodes capables de traiter des incertitudes sur toutes les matrices du système. La méthode présentée est comparée à l'approche de [YS09], une technique pour la synthèse des contrôleurs robustes qui peut traiter des incertitudes aussi lieu sur la matrice de dynamique que sur la matrice de sortie, en considérant aussi la minimisation d'une borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$. Par contre, la méthode de [YS09] demande que certains matrices soient fixées. Dans les exemples, les paramètres scalaires α_1, α_2, α_3 et α_q nécessaires pour [YS09] (selon la notation de l'article) sont considérés égaux et appartiennent à l'ensemble $\{0.01, 0.05, 0.1, 1, 10\}$, et seulement les meilleurs résultats sont montrés. La technique de [GKB07] est aussi considérée, mais elle ne donne que des contrôleurs d'ordre plein et certaines matrices du système doivent être fixées.

Considérons le modèle d'une version modifiée de la commande de tangage du F4E, présentée dans [YS09] dont les matrices sont données par

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & -10^4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^4 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs des paramètres de la matrice A, pour chacun des $N = 4$ sommets du système, sont données dans la Table 2.1.

Les plus petites bornes pour le coût $\mathcal{H}_\infty$ obtenues avec la méthode en deux étapes issue de l'application de la procédure itérative, en considérant les Théorèmes 2.3 et 2.4 à la deuxième étape, ainsi que les résultats des approches de [YS09] et [GKB07] sont montrées dans la Table 2.2. La procédure itérative a été appliquée jusqu'à $k_{max} = 10$ itérations avec une tolérance de $\epsilon = 0.001$. Différents valeurs pour les degrés des matrices polynomiales $P(\alpha)$ (première et deuxième étapes), $Z(\alpha)$ et $G(\alpha)$ sont considérées. Les variables d'écart $F(\alpha)$, $V(\alpha)$ et $H(\alpha)$ sont des polynômes homogènes de degré unitaire. L'ensemble $g = \{g_{sf}, g_{of}, g_Z, g_G\}$ indique, respectivement, les degrés de la matrice de Lyapunov $P(\alpha)$ aux première et deuxième étapes, et les degrés des matrices $Z(\alpha)$ et $G(\alpha)$. Seulement les configurations des meilleurs résultats sont montrées.

Une analyse de la Table 2.2 nous permet de voir que l'augmentation de l'ordre des contrôleurs ne donne pas forcément des meilleurs résultats. Une explication est que, ainsi comme des

TABLE 2.1 – Valeurs des paramètres de la matrice A considerée à l'Exemple I, pour chacun des $N = 4$ sommets.

Sommet	1	2	3	4
a_{11}	-0.9896	-0.6607	-1.702	-0.5162
a_{12}	17.41	18.11	50.72	29.96
a_{13}	96.15	84.34	263.5	178.9
a_{21}	0.2648	0.08201	0.2201	-0.6896
a_{22}	-0.8512	-0.6587	-1.418	-1.225
a_{23}	-11.39	-10.81	-31.99	-30.38
b_1	-97.78	-272.2	-85.09	-175.6

différents gains de retour d'état appliqués à la deuxième étape peuvent donner de différents résultats, le changement de la valeur de n_c peut résulter en gains de retour d'état complètement différents entre eux et, par conséquent, il n'y a pas une relation entre les valeurs de la norme pour de différents contrôleurs obtenus. On peut voir aussi à la partie inférieur de la Table 2.2 que l'utilisation de gains robustes de retour d'état ne donne pas de bons résultats. En comparaison avec d'autres approches, la méthode en deux étapes associée à la procédure itérative a produit de meilleurs résultats dans 100% des cas.

TABLE 2.2 – Résultats pour l'Exemple I. Pour chaque ordre n_c considéré, les valeurs des bornes $\gamma^{(0)}$ et $\gamma^{(k)}$, respectivement avant et après la procédure itérative (avec le temps d'exécution, en secondes, entre parenthèses) sont montrées, ainsi que les degrés $\{g_{sf}, g_{of}, g_Z, g_G\}$ des matrices qui ont fourni les meilleurs résultats.

	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$	$n_c = 3$	$n_c = 4$
Autres méthodes					
[YS09]	7.52 (1)	3.98 (1)	4.05 (2)	3.96 (2)	3.95 (3)
[GKB07]	—	—	—	—	—
Théorèmes 2.3 et 2.4 (plus petites bornes $\tilde{\gamma}$ obtenues)					
Degrés	$\{1,2,2,0\}$	$\{2,2,1,1\}$	$\{1,2,2,2\}$	$\{1,2,1,1\}$	$\{2,2,1,0\}$
$\gamma^{(0)}$	3.41 (15)	4.59 (27)	12.55 (154)	12.76 (103)	3.10 (92)
Itérations	3	7	10	10	10
$\gamma^{(k)}$	3.08 (30)	2.46 (68)	2.08 (159)	1.81 (245)	2.21 (572)
Théorèmes 2.3 et 2.4 avec degrés $\{0,1,0,0\}$ (*i.e.*, gains robustes de retour d'état)					
$\gamma^{(0)}$	3.81 (6)	4.06 (7)	4.67 (12)	5.25 (19)	4.75 (51)
Itérations	4	10	10	10	10
$\gamma^{(k)}$	3.09 (27)	3.24 (77)	3.09 (140)	2.65 (208)	2.79 (513)

Les contrôleurs $\tilde{K}_{of}$ qui ont donné les plus petits valeurs de γ, pour chaque valeur de n_c, sont présentés dans ce qui suit.

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=0)} = \begin{bmatrix} 0.0586 & 0.4884 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=1)} = \begin{bmatrix} -1.6339 & -0.1443 & 0.2948 \\ -0.8907 & 0.1271 & 1.2624 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=2)} = \begin{bmatrix} -5.3331 & -4.5634 & -0.1954 & -0.7206 \\ -3.6117 & -10.4232 & -0.6498 & -4.4825 \\ 2.2537 & 5.4385 & 0.3881 & 2.5172 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=3)} = \begin{bmatrix} -35.4251 & -6.5711 & 15.1283 & -0.3314 & -1.3825 \\ -19.1838 & -8.0675 & 12.2609 & -0.8755 & -5.6835 \\ -45.5396 & -9.1124 & 17.9406 & -0.4876 & -0.7140 \\ 15.1329 & 4.0481 & -9.0492 & 0.4777 & 3.6535 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}_{of}^{(n_c=4)} = \begin{bmatrix} 2.7037 & -0.4076 & -0.7353 & -2.0702 & -0.0502 & -0.1141 \\ 39.6620 & -4.8091 & -8.0747 & -13.8495 & -0.5210 & -3.0966 \\ 21.4227 & -1.6266 & -5.6690 & -8.7825 & -0.1718 & 0.2802 \\ -0.9464 & 0.0094 & 0.2227 & -2.3368 & -0.0050 & -0.0531 \\ 5.5532 & 0.1459 & -1.4757 & 1.5482 & 0.1135 & 0.9722 \end{bmatrix}$$

Les normes $\mathcal{H}_\infty$ de pire cas, calculées *a posteriori* avec une procédure de force brute basée dans l'utilisation d'une grille fine sur $\alpha \in \Delta_N$, pour le système en boucle fermée avec les contrôleurs donnés, sont : $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 3.08$ ($n_c = 0$), $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 2.46$ ($n_c = 1$), $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 2.08$ ($n_c = 2$), $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 1.81$ ($n_c = 3$) et $\mathcal{H}_{\infty p.c.} = 2.20$ ($n_c = 4$).

On note que les valeurs des bornes après la procédure itérative sont proches des valeurs réelles de la norme de pire cas des systèmes en boucle fermée (calculées *a posteriori*), ce qui indique un bas niveau de conservatisme des conditions sur cet exemple. Pour les degrés des matrices, pour toutes les valeurs de n_c les bornes les plus petites $\gamma^{(0)}$ ont été obtenues en fixant un degré égal à 2 pour la matrice de Lyapunov à la deuxième étape, ce qui était prévu dans la mésure où les résultats avec un degré 2 pour la matrice de Lyapunov ne peuvent pas être pire que ceux obtenus avec des matrices $P(\alpha)$ de degré unitaire. La même chose, par contre, ne peut pas être affirmée pour les autres matrices. Finalement, seulement les résultats liés aux plus petites bornes $\gamma^{(k)}$ ont été montrés, mais les valeurs obtenues par d'autres combinaisons de degrés g_{sf}, g_{of}, g_Z et g_G ont été plus petites que ceux donnés par [YS09] et [GKB07] dans 96% des cas.

Le problème de pannes partielles dans les capteurs peut être modélisée par la présence des paramètres incertains dans la matrice de sortie. Par exemple, considérons que les capteurs peuvent opérer entre 50% et 100% de leur capacité, en produisant la matrice de sortie

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0.5 \leq c_{11} = c_{22} \leq 1$$

Avec les valeurs minimales et maximales des paramètres incertains, un nouveau modèle polytopique avec $N = 8$ sommets est obtenu pour le système. Dans ce cas, la méthode de [GKB07] ne permet pas d'obtenir des solutions faisables. En utilisant la méthode de [YS09], les plus petites bornes résultantes pour la norme $\mathcal{H}_\infty$ ont été 37.20, pour $n_c = 0, 1, 2, 3, 4$. En fait, dans cet exemple, les réalisations de tous ces contrôleurs ne sont pas contrôlables ni observables, et alors les contrôleurs dynamiques peuvent être réduits à des gains statiques de retour de sortie avec le même coût garanti. Par ailleurs, les contrôleurs issus de la méthode en deux étapes ne présentent pas un tel comportement, et les bornes associées sont montrées à la Table 2.3.

2.5.2 Exemple II

Considérons une version modifiée du modèle masse-ressort étudié dans [Iwa96] et donné par

$$\left[\begin{array}{c:c:c} A(\alpha) & B_1 & B_2 \\ \hdashline C_1 & D_1 & D_2 \\ \hdashline C_2 & D_y & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:c:c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{k_1(\alpha)+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_0(\alpha)}{m_1} & 0 & 1 & m_1 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{c_0(\alpha)}{m_2} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

avec $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_2 = 0.5$ et $1 \leq k_1 \leq 4$, $1 \leq c_0 \leq 4$, ce qui produit un polytope de $N = 4$ sommets.

Pour cet exemple, la méthode de [GKB07] ne fournit pas de solutions faisables. Avec l'approche de [YS09], le coût $\mathcal{H}_\infty$ garanti est de 17.58 (dans 1 seconde), pour $n_c = 0, 1, 2, 3, 4$. La Table 2.4 montre les résultats obtenus avec la méthode en deux étapes associée à la procédure itérative, et la Figure 2.1 montre l'évolution des bornes γ pendant l'application de la procédure itérative. Cette méthode a demandé un plus grand effort de calcul mais a produit des contrôleurs robustes avec coûts $\mathcal{H}_\infty$ garantis plus petits dans 100% des cas.

Table 2.3 – Résultats pour l'Exemple I avec pannes dans les capteurs. Pour chaque ordre n_c considéré, les valeurs des bornes $\gamma^{(0)}$ et $\gamma^{(k)}$, respectivement avant et après la procédure itérative (avec le temps d'exécution, en secondes, entre parenthèses) sont montrées, ainsi que les degrés $\{g_{sf}, g_{of}, g_Z, g_G\}$ des matrices obtenues. La méthode de [GKB07] n'a pas donné de résultats faisables, et [YS09] a fourni un coût garanti de 37.20 pour tous les ordres n_c.

Théorèmes 2.3 et 2.4 (plus petites bornes $\tilde{\gamma}$ obtenues)					
	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$	$n_c = 3$	$n_c = 4$
Degrés	$\{2,2,1,0\}$	$\{2,2,1,1\}$	$\{2,2,2,0\}$	$\{2,2,2,0\}$	$\{2,2,2,0\}$
$\gamma^{(0)}$	3.94 (61)	6.66 (473)	3.95 (843)	3.67 (1727)	3.92 (6151)
Itérations	10	1	10	10	10
$\gamma^{(k)}$	3.29 (151)	2.76 (30)	2.96 (1638)	3.13 (3162)	2.92 (3823)

TABLE 2.4 – Résultats pour l'Exemple II. Pour chaque ordre n_c considéré, les valeurs des bornes $\gamma^{(0)}$ et $\gamma^{(k)}$, respectivement avant et après la procédure itérative (avec les temps d'exécution, en secondes, entre parenthèses) sont montrées, ainsi que les degrés $\{g_{sf}, g_{of}, g_Z, g_G\}$ des matrices obtenues. La méthode de [GKB07] n'a pas donné de résultats faisables, et [YS09] a fourni un coût garanti de 17.58 pour tous les ordres n_c.

Théorèmes 2.3 et 2.4 (plus petites bornes $\tilde{\gamma}$ obtenues)					
	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$	$n_c = 3$	$n_c = 4$
Degrés	$\{1,2,2,2\}$	$\{2,2,2,0\}$	$\{2,2,1,1\}$	$\{2,2,2,0\}$	$\{2,2,1,1\}$
$\gamma^{(0)}$	10.52 (32)	17.04 (11)	8.70 (64)	13.59 (33)	8.66 (58)
Itérations	10	10	10	10	10
$\gamma^{(k)}$	7.54 (50)	7.27 (48)	6.73 (100)	6.95 (141)	6.68 (278)

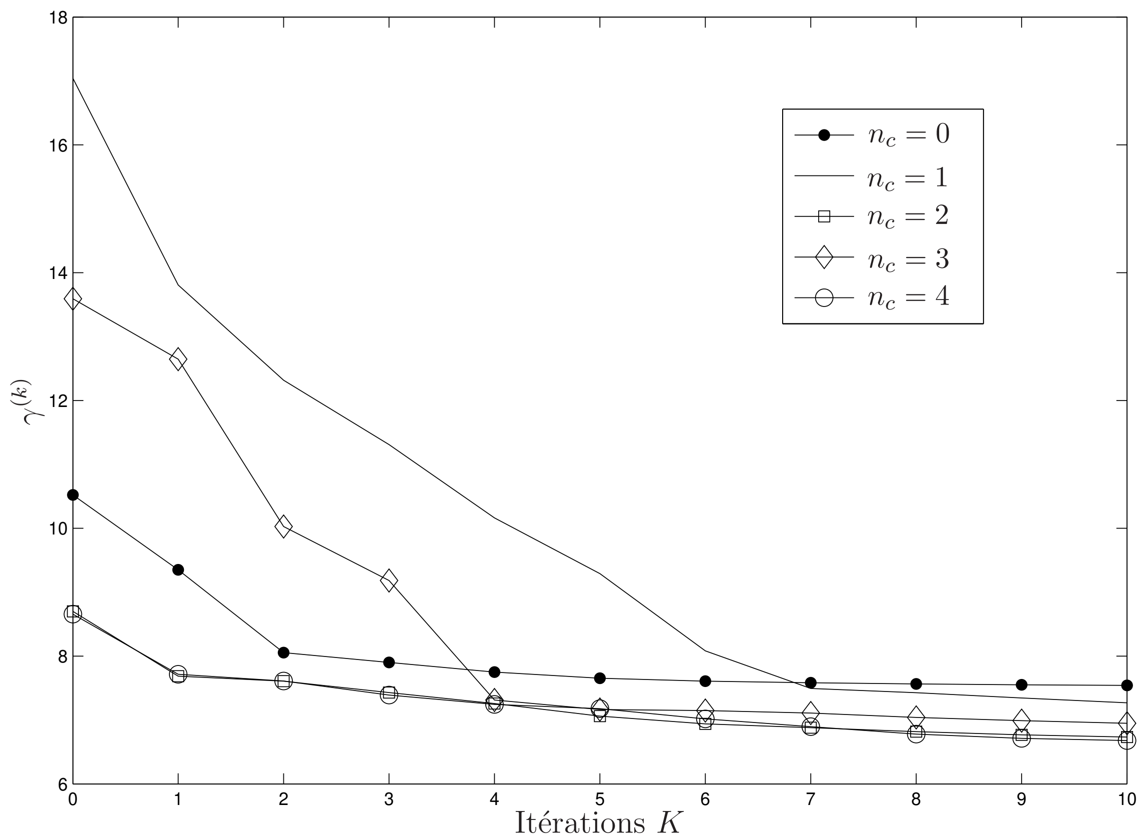

FIGURE 2.1 – Évolution des bornes γ pour chaque itérations de la procédure itérative sur l'Exemple II.

2.6 Conclusion

Une méthode pour la synthèse de contrôleurs dynamiques d'ordre réduit pour les systèmes linéaires avec paramètres incertains invariants dans le temps, permettant de minimiser une borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée, a été présentée dans ce chapitre. Ce problème correspond à la synthèse de gains statiques de retour de sortie en considérant une représentation augmentée du système, selon une technique simple et connue dans la littérature. La synthèse est faite à partir de l'application d'une méthode en deux étapes, qui consiste à la synthèse d'un gain de retour d'état, possiblement dépendant des paramètres, et à une condition LMI permettant de générer, si possible, le gain de retour de sortie. Notez que le gain de retour d'état, qui peut être dépendant de paramètres, ne joue qu'un rôle intermédiaire dans l'algorithme et on n'a pas besoin de le calculer. On peut aussi exécuter une procédure itérative afin de réduire la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système bouclé. Une série d'exemples a été présentée pour illustrer les capacités de l'approche proposée, qui a donné des meilleurs résultats (en comparaisant avec d'autres méthodes) dans la plupart des cas.

Chapitre 3

Systèmes LPV avec des mesures inexactes

3.1 Introduction

Dans le Chapitre 2, on a traité le problème de la synthèse de contrôleurs stabilisants, en considérant la norme $\mathcal{H}_\infty$ comme mesure de performance, pour les systèmes linéaires à paramètres incertains invariants dans le temps. Par contre, il y a des situations où les paramètres sont variants dans le temps, par exemple la masse d'une fusée en cours de lancement. La linéarisation des systèmes non linéaires peut conduire à des modèles linéaires à paramètres variants (en anglais, *Linear Parameter Varying* — LPV). L'adaptation des conditions d'analyse et de synthèse des systèmes LTI pour le cas LPV est faite d'une façon rélativement simple, mais pour que les conditions soient moins conservatives il faut connaître les bornes des taux de variation des paramètres, et pas uniquement les bornes de ses valeurs.

La technique présentée dans ce chapitre pour la synthèse des contrôleurs d'ordre réduit, de telle sorte que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée soit bornée par une valeur prédéfinie, est une extension de la méthode en deux étapes présentée au Chapitre 2. Le but de ce chapitre est la synthèse des contrôleurs par séquencement des gains, *i.e.*, le contrôleur dépend d'un ensemble de paramètres qui sont mesurables en ligne. Le contrôleur est projeté pour qu'il soit robuste à des bruits de mesure, où les bornes de tels bruits sont supposées connues.

La structure des incertitudes considérée pour la méthode est présentée dans la Section 3.2. La Section 3.3 décrit la formulation du problème et détaille la modélisation du système. Les conditions utilisées dans les deux étapes de la méthode sont développées dans la Section 3.4, et des exemples illustrent la validité de la méthode dans la Section 3.5. Finalement, la Section 3.6 conclut le chapitre.

3.2 Structure des paramètres

Considérons le système linéaire au temps continu avec des paramètres variants dans le temps, donné par

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) + B_2(\theta(t))u(t) \tag{3.1}$$
$$z(t) = C_1(\theta(t))x(t) + D_1(\theta(t))w(t) + D_2(\theta(t))u(t) \tag{3.2}$$
$$y(t) = C_2(\theta(t))x(t) + D_y(\theta(t))w(t). \tag{3.3}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'états, $w(t) \in \mathbb{R}^r$ l'entrée exogène, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée de commande, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie commandée, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ la sortie mesurée et $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \ldots \ \theta_Q(t)]$ est le vecteur des Q paramètres variants dans le temps, qui satisfont

$$\underline{a}_i \leq \theta_i(t) \leq \overline{a}_i, \quad \underline{d}_i \leq \dot{\theta}_i(t) \leq \overline{d}_i, \quad 0 \in [\underline{d}_i, \overline{d}_i], \quad i = 1, \ldots, Q.$$

Afin de simplifier la notation, la dépendance de $\theta(t)$ sur t sera omise dans le reste du chapitre. Tous les matrices du système (3.1)-(3.3) sont modélisées comme des variables affines en θ et sont décrites par

$$M(\theta) = M_0 + \sum_{i=1}^{Q} \theta_i M_i. \tag{3.4}$$

Comme déjà montré au Chapitre 2, on peut obtenir des conditions et méthodes convexes si les matrices du système sont représentées en fonction des paramètres au simplexe unitaire. La transformation des paramètres θ au simplexe unitaire est faite à travers de la structure multi-simplexe, définie dans ce qui suit.

Définition 3.1 *Un multi-simplexe Δ est le produit cartésien $\Delta_{N_1} \times \ldots \times \Delta_{N_Q}$ d'un nombre fini de Q simplexes. La dimension de Δ est dénotée par l'indice $N = (N_1, \ldots, N_Q)$ et, pour simplicité de notation, $\mathbb{R}^N$ dénote l'espace $\mathbb{R}^{N_1 + \ldots + N_Q}$. Un certain élément α de Δ est décomposé comme $(\alpha_1, \ldots, \alpha_Q)$ et, par conséquent, chaque $\alpha_i \in \Delta_{N_i}$ est décomposé comme $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{iN_i})$.*

Chaque variable θ_i peut être écrite en fonction d'un simplexe de deux sommets, dont les composants α_i sont donnés par

$$\alpha_{i1} = \frac{\theta_i - \overline{a}_i}{\underline{a}_i - \overline{a}_i}, \ \alpha_{i2} = 1 - \alpha_{i1}, \quad \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) \in \Delta_2, \quad i = 1, \ldots, Q, \tag{3.5}$$

ce qui résulte en

$$\theta_i = \alpha_{i1}(\underline{a}_i - \overline{a}_i) + \overline{a}_i, \quad i = 1, \ldots, Q. \tag{3.6}$$

Avec une telle transformation, chaque matrice affinement dépendant des paramètres θ peut être représentée comme un polytope en α. Par exemple, considérons la représentation (3.4) avec $Q = 1$, *i.e.*,

$$M(\theta) = M_0 + \theta_1 M_1.$$

L'utilisation du changement de variables proposé résulte en

$$M(\alpha) = M_0 + \overline{a}_1 M_1 + \alpha_{11}(\underline{a}_1 - \overline{a}_1) M_1.$$

Après l'homogénéisation de $M(\alpha)$[1], on a

$$M(\alpha) = (\alpha_{11} + \alpha_{12})(M_0 + \overline{a}_1 M_1) + \alpha_{11}(\underline{a}_1 - \overline{a}_1) M_1.$$

La matrice polynomiale $M(\alpha)$ peut, alors, être écrite comme

$$M(\alpha) = \alpha_{11} T_1 + \alpha_{12} T_2, \alpha_1 \in \Delta_2,$$

avec $T_1 = M_0 + \underline{a}_1 M_1$ et $T_2 = M_0 + \overline{a}_1 M_1$.

[1]Procédure réalisée pour que tous les monômes du polynôme présentent le même dégré.

En analysant les relations en (3.5), on peut voir que les bornes des taux de variation des variables α_i sont égaux à

$$-\frac{\overline{d}_i}{\overline{a}_i - \underline{a}_i} \leq \dot{\alpha}_{i1} \leq -\frac{\underline{d}_i}{\overline{a}_i - \underline{a}_i}, \quad \frac{\underline{d}_i}{\overline{a}_i - \underline{a}_i} \leq \dot{\alpha}_{i2} \leq \frac{\overline{d}_i}{\overline{a}_i - \underline{a}_i}, \quad i = 1, \ldots, Q. \tag{3.7}$$

L'espace des valeurs des taux de variation $\dot{\alpha}_i$ peut être représenté, si ses bornes sont connues, à partir d'un polytope donné par [CGTV07]

$$\Upsilon_i = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^{N_i} : \varphi = \sum_{\ell=1}^{R_i} \eta_{i\ell} H_i^{(\ell)}, \quad \sum_{q=1}^{N_i} H_i(q,j) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, N_i, \quad \eta_i \in \Delta_{R_i} \right\},$$

étant $H_i^{(\ell)}$ la ℓ-ème colonne de la matrice H_i, qui est construite à partir des bornes de $\dot{\alpha}_i$ et en considérant en plus que la somme des éléments de chaque colonne $H_i^{(\ell)}$ doit être nulle, une fois que

$$\sum_{\ell=1}^{N_i} \dot{\alpha}_{i\ell} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\ell=1}^{N_i} \alpha_{i\ell}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, Q.$$

Spécifiquement pour un simplexe de deux éléments dont les bornes sont données par (3.7), la matrice H_i est égal à

$$H_i = \frac{1}{\overline{a}_i - \underline{a}_i} \begin{bmatrix} -\overline{d}_i & -\underline{d}_i \\ \overline{d}_i & \underline{d}_i \end{bmatrix}.$$

3.3 Formulation du problème

Le principal problème considéré dans ce chapitre est la synthèse des contrôleurs stabilisants d'ordre réduit et dépendants des paramètres θ, en supposant qu'on puisse mesurer en ligne les valeurs des paramètres et les utiliser pour le calcul du signal de commande. Notons que l'implementation peux dépendre d'un sous-ensemble des paramètres, plus specifiquement des paramètres qui sont mésurables en ligne, étant les autres traités comme des incertitudes paramètriques. Toutefois, on doit tenir compte des imperfections sur la mesure des paramètres, pour garantir la robustesse des contrôleurs même si on a des différences entre les valeurs réelles des paramètres et celles qui ont été mesurées. Considérons alors que les paramètres mesurés sont donnés par

$$\tilde{\theta}_i = (1 + \rho_i)(\theta_i + \delta_i), i = 1, \ldots, Q$$

étant θ_i sa valeur réelle, δ_i le bruit additif et ρ_i le bruit multiplicatif, avec

$$\underline{b}_i \leq \delta_i \leq \overline{b}_i, \quad \underline{c}_i \leq \rho_i \leq \overline{c}_i, \quad i = 1, \ldots, Q.$$

Le but, alors, est la construction d'un contrôleur dynamique d'ordre $n_c \leq n$ dont la réalisation d'état donnée par

$$\dot{x}_c(t) = A_c(\tilde{\theta})x_c(t) + B_c(\tilde{\theta})y(t) \tag{3.8}$$

$$u(t) = C_c(\tilde{\theta})x_c(t) + D_c(\tilde{\theta})y(t), \tag{3.9}$$

étant $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ les états du contrôleur. L'ordre du contrôleur est défini *a priori*, ce qui constitue un degré supplémentaire de liberté pour qu'on puisse équilibrer la performance et la stabilisabilité avec le coût de calcul pour des implémentations pratiques. Les matrices $A_c(\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c(\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_c \times q}$, $C_c(\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$ et $D_c(\tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times q}$ sont affinement dépendantes de $\tilde{\theta}_i = (1+\rho_i)(\theta_i + \delta_i)$ et peuvent être génériquement représentées par

$$M_c(\tilde{\theta}) = M_{c_0} + \sum_{i=1}^{Q} (1+\rho_i)(\theta_i + \delta_i) M_{c_i}. \tag{3.10}$$

Après l'application d'un changement de variables similaire à (3.5) sur δ_i et ρ_i, on a

$$\check{\alpha}_{i1} = \frac{\delta_i - \overline{b_i}}{\underline{b_i} - \overline{b_i}},\ \check{\alpha}_{i2} = 1 - \check{\alpha}_{i1},\ \check{\alpha}_i \in \Delta_2,\ i = 1, \ldots, Q$$

et

$$\hat{\alpha}_{i1} = \frac{\rho_i - \overline{c_i}}{\underline{c_i} - \overline{c_i}},\ \hat{\alpha}_{i2} = 1 - \hat{\alpha}_{i1},\ \hat{\alpha}_i \in \Delta_2,\ i = 1, \ldots, Q.$$

Un domaine multi-simplexe peut être obtenu avec la même procédure appliquée à θ_i. Par exemple, si $Q = 1$,

$$M_c(\tilde{\theta}) = M_{c_0} + (1+\rho_1)(\theta_1 + \delta_1) M_{c_1}. \tag{3.11}$$

Dans ce cas, les variables du multi-simplexe sont $\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, \check{\alpha}_1, \hat{\alpha}_1)$, étant $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \in \Delta_2$ liées à θ_1, $\check{\alpha}_1 = (\check{\alpha}_{11}, \check{\alpha}_{12}) \in \Delta_2$ liées à δ_1 et $\hat{\alpha}_1 = (\hat{\alpha}_{11}, \hat{\alpha}_{12}) \in \Delta_2$ liées à ρ_1. Avec un tel changement de variables, la matrice $M_c(\tilde{\theta})$ (3.11) peut être réécrite par

$$\begin{aligned} M_c(\tilde{\alpha}) = M_{c_0} &+ \hat{\alpha}_{11}(\underline{c_1} - \overline{c_1})\Big(\alpha_{11}(\underline{a_1} - \overline{a_1}) + \check{\alpha}_{11}(\underline{b_1} - \overline{b_1}) M_{c_1} \\ &+ (1+\overline{c_1})(\alpha_{11}(\underline{a_1} - \overline{a_1}) + \check{\alpha}_{11}(\underline{b_1} - \overline{b_1}) + (\overline{a_1} + \overline{b_1})\Big) M_{c_1} + \hat{\alpha}_{11}(\underline{c_1} - \overline{c_1})(\overline{a_1} + \overline{b_1}) M_{c_1} \end{aligned} \tag{3.12}$$

et, après une procédure d'homogénéisation, la matrice polynomiale avec paramètres sur le domaine multi-simplexe de dimension $N = (2,2,2)$ est représentée par

$$M_c(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \alpha_{1i} \check{\alpha}_{1j} \hat{\alpha}_{1k} T_{ijk}$$

dont les coefficients matriciels sont donnés par

$$T_{ijk} = M_{c_0} + ((i-1)\overline{a_1} + (2-i)\underline{a_1} + (j-1)\overline{b_1} + (2-j)\underline{b_1})(1 + (k-1)\overline{c_1} + (2-k)\underline{c_1}) M_{c_1}. \tag{3.13}$$

Une telle procédure peut être adaptée pour traiter toute matrice polynomiale avec $Q \geq 1$ en utilisant les équations suivantes

$$M_c(\tilde{\alpha}) = \sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_Q=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{2} \cdots \sum_{j_Q=1}^{2} \sum_{k_1=1}^{2} \cdots \sum_{k_Q=1}^{2} \alpha_{1i_1} \ldots \alpha_{Qi_Q} \check{\alpha}_{1j_1} \ldots \check{\alpha}_{Qj_Q} \hat{\alpha}_{1k_1} \ldots \hat{\alpha}_{Qk_Q} T_{i_1 \ldots i_Q j_1 \ldots j_Q k_1 \ldots k_Q} \tag{3.14}$$

$$T_{i_1 \ldots i_Q j_1 \ldots j_Q k_1 \ldots k_Q} = M_{c_0} + \sum_{\ell=1}^{Q} ((i_\ell - 1)\overline{a_\ell} + (2-i_\ell)\underline{a_\ell} + (j_\ell - 1)\overline{b_\ell} + (2-j_\ell)\underline{b_\ell})(1 + (k_\ell - 1)\overline{c_\ell} + (2-k_\ell)\underline{c_\ell}) M_{c_\ell}.$$

De cette façon, la dépendance des matrices du contrôleur $A_c(\tilde{\alpha})$, $B_c(\tilde{\alpha})$, $C_c(\tilde{\alpha})$ et $D_c(\tilde{\alpha})$ sur les paramètres $\tilde{\alpha}$ peut être structurée comme pour $M_c(\tilde{\alpha})$ donnée par (3.14).

On considère que le même changement de variables en (3.14) a été appliqué sur les matrices du système (3.1)-(3.3). Ainsi comme dans le Chapitre 2, la synthèse d'un contrôleur dynamique (3.8)-(3.9) est équivalente à la synthèse d'un gain statique de retour de sortie pour le système augmenté

$$\dot{\eta}(t) = \tilde{A}(\tilde{\alpha})\eta(t) + \tilde{B}_1(\tilde{\alpha})w(t) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})u(t) \tag{3.15}$$
$$z(t) = \tilde{C}_1(\tilde{\alpha})\eta(t) + \tilde{D}_1(\tilde{\alpha})w(t) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})u(t) \tag{3.16}$$
$$y(t) = \tilde{C}_2(\tilde{\alpha})\eta(t) + \tilde{D}_y(\tilde{\alpha})w(t), \tag{3.17}$$

avec $\eta(t)' = [x(t)' \;\; x_c(t)']$ et

$$\tilde{A}(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} A(\tilde{\alpha}) & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix},\ \tilde{B}_1(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} B_1(\tilde{\alpha}) \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{B}_2(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & B_2(\tilde{\alpha}) \\ \mathrm{I}_{n_c} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} C_1(\tilde{\alpha}) & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{D}_1(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} D_1(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix},\ \tilde{D}_2(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & D_2(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_{n_c} \\ C_2(\tilde{\alpha}) & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{D}_y(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} 0 \\ D_y(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Les matrices du système augmenté en boucle fermée par un gain de retour de sortie $\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})$ sont égaux à

$$\tilde{A}_{cl}(\tilde{\alpha}) = \tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) \tag{3.21}$$
$$\tilde{B}_{cl}(\tilde{\alpha}) = \tilde{B}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}) \tag{3.22}$$
$$\tilde{C}_{cl}(\tilde{\alpha}) = \tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) \tag{3.23}$$
$$\tilde{D}_{cl}(\tilde{\alpha}) = \tilde{D}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}) \tag{3.24}$$

et le gain est dénoté par

$$\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} A_c(\tilde{\alpha}) & B_c(\tilde{\alpha}) \\ C_c(\tilde{\alpha}) & D_c(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

3.4 Conditions LMI

L'approche considérée pour la synthèse d'un gain stabilisant de retour de sortie, de sorte que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée soit bornée par une valeur donnée γ, est la méthode en deux étapes, présentée à la Section 2.3. Pour ça, toutefois, les conditions LMI utilisées à chaque étape doivent être adaptées pour traiter le cas des paramètres variants dans les temps. Le théorème suivant présente une condition de synthèse des gains de retour d'état, utilisée dans la première étape de la méthode.

Théorème 3.1 Il existe un gain dépendant des paramètres de retour d'état qui stabilise le système (3.15)-(3.17) s'il existe des matrices dépendants des paramètres $W(\tilde{\alpha}) = W'(\tilde{\alpha}) > 0$, $Z_2(\tilde{\alpha})$, $Z_3(\tilde{\alpha})$, $Z_4(\tilde{\alpha})$ et $Q(\tilde{\alpha})$ et une matrice constante G satisfaisant

$$\Gamma(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(\tilde{\alpha})G + G'\tilde{A}'(\tilde{\alpha}) + \Omega(\tilde{\alpha}) + \Omega'(\tilde{\alpha}) + \dot{W}(\tilde{\alpha}) & \star \\ W(\tilde{\alpha}) - G' + \xi\left(\tilde{A}(\tilde{\alpha})G + \Omega(\tilde{\alpha})\right) & -\xi(G+G') \end{bmatrix} < 0,\ \text{avec} \tag{3.26}$$

$$\Omega(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} B_2(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha})Y + B_2(\tilde{\alpha})Z_3(\tilde{\alpha}) & B_2(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) + B_2(\tilde{\alpha})Z_4(\tilde{\alpha}) \\ Z_2(\tilde{\alpha})Y & Z_2(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix}$$

où Y est une matrice et $\xi > 0$ un scalaire prédéfini. Si la condition (3.26) est satisfaite, alors

$$\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} Z_2(\tilde{\alpha})Y & Z_2(\tilde{\alpha}) \\ Q(\tilde{\alpha})Y + Z_3(\tilde{\alpha}) & Q(\tilde{\alpha}) + Z_4(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} (G')^{-1} \tag{3.27}$$

est un gain stabilisant de retour d'état pour le système augmenté (3.15)-(3.17).

Démonstration : Similaire à la démonstration du Théorème 2.2.

Une fois que $\tilde{\alpha} = (\alpha, \check{\alpha}, \hat{\alpha}) \in \Delta_N = \Delta_{N_1} \times \ldots \times \Delta_{N_Q}$ implique $\dot{\tilde{\alpha}} = (\dot{\alpha}, \dot{\check{\alpha}}, \dot{\hat{\alpha}}) \in \Upsilon$ pour tout $t \geq 0$, la matrice $\dot{W}(\tilde{\alpha})$ peut être calculée par

$$\dot{W}(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{Q} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{\partial W(\tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} \dot{\tilde{\alpha}}_{ij} = \sum_{i=1}^{Q} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{\partial W(\tilde{\alpha})}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} \sum_{\ell=1}^{R_i} \eta_{i\ell} H_i(j, \ell).$$

Une condition suffisante pour l'existence d'un gain de retour de sortie, de telle sorte que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée soit bornée par une valeur défini *a priori*, est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 3.2 Soit $\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})$ un gain stabilisant de retour d'état. S'il existe des matrices $P(\tilde{\alpha}) = P'(\tilde{\alpha}) > 0$, $S(\tilde{\alpha})$, $G(\tilde{\alpha})$, $Q(\tilde{\alpha})$, $J(\tilde{\alpha})$ et $H(\tilde{\alpha})$ et un scalaire $\gamma > 0$ de telle sorte que

$$\Omega(\tilde{\alpha}) \triangleq \begin{bmatrix} (\tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}'_{sf}(\tilde{\alpha}))S'(\tilde{\alpha}) + S(\tilde{\alpha})(\tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})) + \dot{P}(\tilde{\alpha}) & \star & \star & \star & \star \\ P(\tilde{\alpha}) - S'(\tilde{\alpha}) + G(\tilde{\alpha})(\tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})) & -G(\tilde{\alpha}) - G'(\tilde{\alpha}) & \star & \star & \star \\ \tilde{B}'_1(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) & \tilde{B}'_1(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & -\gamma^2 I & \star & \star \\ Q'(\tilde{\alpha})(\tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})) & 0 & Q'(\tilde{\alpha})D_1(\tilde{\alpha}) & I - Q(\tilde{\alpha}) - Q'(\tilde{\alpha}) & \star \\ \tilde{B}'_2(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) + J(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) - H(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha}) & \tilde{B}'_2(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & J(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}) & \tilde{D}'_2(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) & -H(\tilde{\alpha}) - H'(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.28}$$

alors

$$\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha}) = \left[\begin{array}{c:c} A_c(\tilde{\alpha}) & B_c(\tilde{\alpha}) \\ \hdashline C_c(\tilde{\alpha}) & D_c(\tilde{\alpha}) \end{array}\right] = H(\tilde{\alpha})^{-1} J(\tilde{\alpha}) \tag{3.29}$$

est un contrôleur dynamique stabilisant et le coût garanti $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée est donné par γ.

Démonstration : Il est possible appliquer le lemme de la projection (Lemme 1.5) à la condition (3.28), avec

$$\mathcal{X} = H(\tilde{\alpha}), \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} Y(\tilde{\alpha}) & 0 & \overline{Y}(\tilde{\alpha}) & 0 & -I \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{V}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

avec $Y(\tilde{\alpha}) = H(\tilde{\alpha})^{-1}J(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}) - \tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})$, $\overline{Y}(\tilde{\alpha}) = H(\tilde{\alpha})^{-1}J(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha})$ et

$$\Psi = \begin{bmatrix} \overline{A}'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) + S(\tilde{\alpha})\overline{A}(\tilde{\alpha}) + \dot{P}(\tilde{\alpha}) & \star & \star & \star & \star \\ P(\tilde{\alpha}) - S'(\tilde{\alpha}) + G(\tilde{\alpha})\overline{A}(\tilde{\alpha}) & -G(\tilde{\alpha}) - G'(\tilde{\alpha}) & \star & \star & \star \\ \tilde{B}_1'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) & \tilde{B}_1'(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & -\gamma^2 \mathrm{I} & \star & \star \\ Q'(\tilde{\alpha})\overline{C}(\tilde{\alpha}) & 0 & Q'(\tilde{\alpha})D_1(\tilde{\alpha}) & \mathrm{I} - Q(\tilde{\alpha}) - Q'(\tilde{\alpha}) & \star \\ \tilde{B}_2'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) & \tilde{B}_2'(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & 0 & \tilde{D}_2'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha}), \qquad \overline{C}(\tilde{\alpha}) = \tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha}). \tag{3.30}$$

Soient les matrices $\mathcal{N}_v$ et $\mathcal{N}_v$ définies comme

$$\mathcal{N}_v = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{N}_u = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \\ Y(\tilde{\alpha}) & 0 & \overline{Y}(\tilde{\alpha}) & 0 \end{bmatrix},$$

de telle sorte que $\mathcal{N}_v\ \mathcal{V} = 0$ et $\mathcal{N}_u'\Lambda' = 0$, alors les inégalités de la condition $ii)$ du Lemme 1.5 conduisent à

$$\mathcal{N}_v\Psi\mathcal{N}_v' = \begin{bmatrix} \overline{A}'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) + S(\tilde{\alpha})\overline{A}(\tilde{\alpha}) + \dot{P}(\tilde{\alpha}) & \star \\ P(\tilde{\alpha}) - S'(\tilde{\alpha}) + G(\tilde{\alpha})\overline{A}(\tilde{\alpha}) & -G(\tilde{\alpha}) - G'(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.31}$$

et

$$\begin{bmatrix} S(\tilde{\alpha})A_{cl}(\tilde{\alpha}) + A_{cl}'(\tilde{\alpha})S'(\tilde{\alpha}) + \dot{P}(\tilde{\alpha}) & P(\tilde{\alpha}) - S(\tilde{\alpha}) + A_{cl}'(\tilde{\alpha})G'(\tilde{\alpha}) & S(\tilde{\alpha})B_{cl}(\tilde{\alpha}) & C_{cl}'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) \\ \star & -G(\tilde{\alpha}) - G'(\tilde{\alpha}) & G(\tilde{\alpha})B_{cl}(\tilde{\alpha}) & 0 \\ \star & \star & -\gamma^2\mathrm{I} & D_{cl}'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) \\ \star & \star & \star & -Q'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} < \mathcal{N}_u'\Psi\mathcal{N}_u < 0, \tag{3.32}$$

car $(\mathrm{I} - Q(\tilde{\alpha}))'(\mathrm{I} - Q(\tilde{\alpha})) \geq 0$ implique $-Q'(\tilde{\alpha})Q(\tilde{\alpha}) \leq \mathrm{I} - Q(\tilde{\alpha}) - Q'(\tilde{\alpha})$, avec

$$A_{cl}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}), \qquad B_{cl}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{B}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}),$$
$$C_{cl}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{C}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha}), \qquad D_{cl}(\tilde{\alpha}) \triangleq \tilde{D}_1(\tilde{\alpha}) + \tilde{D}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{of}(\tilde{\alpha})\tilde{D}_y(\tilde{\alpha}).$$

La LMI (3.31) est la condition de stabilité de $\tilde{A}(\tilde{\alpha}) + \tilde{B}_2(\tilde{\alpha})\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})$, qui assure que $\tilde{K}_{sf}(\tilde{\alpha})$ est un gain stabilisant de retour d'état. La multiplication de (3.32) par $T_3(\tilde{\alpha})$ à droite et par $T_3'(\tilde{\alpha})$ à gauche, avec

$$T_3(\tilde{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ A_{cl}(\tilde{\alpha}) & B_{cl}(\tilde{\alpha}) & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & Q(\tilde{\alpha})^{-1} \end{bmatrix},$$

conduit à partir du Lemme Borné Réel (Lemme 1.7) associé à la fonction de Lyapunov $v(t,x) = x'P(\tilde{\alpha})x$, avec

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + y(t)'y(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) < 0.$$

à un contrôleur dynamique (3.8)-(3.9) qui stabilise le système (3.1)-(3.3) avec un coût $\mathcal{H}_\infty$ garanti égal à γ.

3.4.1 Détails additionnels de la méthode

L'approche employée pour la synthèse des contrôleurs dynamiques d'ordre $n_c \leq n$, avec un coût $\mathcal{H}_\infty$ garanti du système en boucle fermée, est basée sur la méthode en deux étapes et l'application de la procédure itérative, présentées et détaillées au Chapitre 2. Toutefois, la méthode doit être adaptée pour traiter des systèmes dont les paramètres incertains sont variants dans le temps, en utilisant les conditions présentées dans le présent chapitre. Une telle adaptation est exposée dans ce qui suit.

Algorithme 3.1 Procédure itérative

1. Calculer un gain stabilisant de retour d'état $\tilde{K}_{sf}^{(0)}(\tilde{\alpha})$ en utilisant le Théorème 3.1 ;

2. Calculer le gain de retour de sortie initial $\tilde{K}_{of}^{(0)}(\tilde{\alpha})$ et la norme $\gamma^{(0)}$ résultant de la minimisation de la valeur de γ sous contrainte (3.28) ;

3. Fixer la variable d'itération $k \leftarrow 0$, la quantité maximale d'itérations $k_{max} > 0$ et la tolérance de convergence $\epsilon > 0$;

4. Avec le gain $\tilde{K}_{of}^{(k)}(\tilde{\alpha})$, obtenir le gain de retour d'état $\tilde{K}_{sf}^{(k+1)}(\tilde{\alpha}) = \tilde{K}_{of}^{(k)}(\tilde{\alpha})\tilde{C}_2(\tilde{\alpha})$;

5. Utiliser le gain $\tilde{K}_{sf}^{(k)}(\tilde{\alpha})$, pour résoudre le problème d'optimisation suivant
$$\gamma^* = \min \gamma \quad \text{sous contrainte} \ \ (3.28).$$
Si $\gamma^* < \gamma^{(k)}$, attribuez $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^*$ et récupérez le contrôleur correspondant $\tilde{K}_{of}^{(k+1)}(\tilde{\alpha})$, sinon attribuez $\gamma^{(k+1)} \leftarrow \gamma^{(k)}$;

6. Attribuer $k \leftarrow k+1$. Si $k = k_{max}$ ou si $|\gamma^{(k-1)} - \gamma^{(k)}|/\gamma^{(k-1)} < \epsilon$, arrêter ; sinon, retourner au pas 4.

Les LMIs dépendants des paramètres peuvent être résolues, par exemple, à partir d'une séquence de relaxations LMI, comme proposé sur [OP07, OBP08]. Le "parser" ROLMIP, utilisé pour obtenir l'ensemble fini de conditions LMIs au Chapitre 2, n'a pas été utilisé dans ce chapitre une fois que les fonctions et définitions nécessaires pour l'implementation des variables multi-simplexes n'étaient pas encore programmées. La matrice de Lyapunov $W(\tilde{\alpha})$, les matrices $\hat{Z}(\tilde{\alpha})$ et $Q(\tilde{\alpha})$ du Théorème 3.1, aussi bien que la matrice de Lyapunov $P(\tilde{\alpha})$ et les matrices $S(\tilde{\alpha})$, $G(\tilde{\alpha})$, $Q(\tilde{\alpha})$ du Théorème 3.2 sont modélisées comme des polynômes homogènes de degré générique en $\tilde{\alpha}$. Par contre, les variables $H(\tilde{\alpha})$ et $J(\tilde{\alpha})$ du Théorème 3.2 doivent être modélisées comme en (3.10), pour que les matrices $A_c(\tilde{\theta})$, $B_c(\tilde{\theta})$, $C_c(\tilde{\theta})$ et $D_c(\tilde{\theta})$ du contrôleur (3.8)-(3.9) puissent être récupérées.

Les degrés des variables de décision considérées dans les exemples numériques sont définis dans ce qui suit.

1. Les degrés associés à la matrice de Lyapunov $W(\tilde{\alpha})$ e $P(\tilde{\alpha})$ sont égaux à 1. Si les bornes des taux de variation des paramètres ne sont pas connues, on doit utiliser des matrices W et P indépendant des paramètres (stabilité quadratique) ;

2. Les variables d'écart $\hat{Z}(\tilde{\alpha})$ et $Q(\tilde{\alpha})$ du Théorème 3.1 et les variables $S(\tilde{\alpha})$, $G(\tilde{\alpha})$, $Q(\tilde{\alpha})$ du Théorème 3.2 présentent des degrés égaux à 1 ;

3. Les degrés liés aux variables $H(\tilde{\alpha})$ et $J(\tilde{\alpha})$ du Théorème 3.2 sont égaux à 1 si on cherche des contrôleurs dépendants des paramètres, comme ce sera le cas dans les exemples numériques, ou égaux à 0 si le but est la synthèse de contrôleurs robustes.

3.5 Exemples numériques

Les programmes ont été implémentées sur MATLAB, version 7.0.1 (R14) avec les paquets Yalmip [Löf04] et SeDuMi [Stu99]. L'ordinateur utilisé est un AMD® Phenom II Quad Core 945 (3.0 GHz), 3.2GB RAM, Linux Ubuntu 9.04.

3.5.1 Exemple I

Considérons le système présenté dans [MOP06] dont les matrices sont données par

$$\begin{aligned}
A(\theta) &= \begin{bmatrix} 25.9 & 1 \\ 20 & 34 \end{bmatrix} - \theta \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 40 & 64 \end{bmatrix}, B_1(\theta) = \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.47 \end{bmatrix}, \\
B_2(\theta) &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, C_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
D_1(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} D_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} D_y(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

où $\theta \in [0, 1]$ et $-1 \leq \dot{\theta} \leq 1$. On suppose que le paramètre θ soit affecté par un bruit additif δ de sorte que $|\delta| \leq \zeta$ et $|\dot{\delta}| \leq 10$, ζ étant définie dans la suite. Dans cet exemple, l'Algorithme 3.1 est appliqué en considérant $\xi = 0.1$ au Théorème 3.1, $k_{max} = 5$ pour la quantité maximale d'itérations et une tolérance de convergence $\epsilon = 10^{-4}$. Premièrement, les résultats obtenus avec l'Algorithme 3.1 sont comparés à ceux donnés par l'application de [DBG08, Theorem 2], qui est une méthode capable de construire des contrôleurs dynamiques d'ordre plein, dépendants des paramètres et robustes à bruits additifs dans les mesures. Cette méthode, toutefois, n'est pas capable de synthétiser des contrôleurs d'ordre réduit, ne considère pas la présence de bruits multiplicatifs et n'admet que des paramètres variants dans la matrice de dynamique $A(\theta)$, ce qui la rend très contrainte par rapport à l'approche utilisée dans l'Algorithme 3.1.

La Figure 3.1 montre les bornes γ des normes $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes en boucle fermée après l'application de la méthode de [DBG08] et de l'Algorithme 3.1, avant et après 2 itérations, en changeant la valeur de la borne ζ du bruit additif. Remarquer que la méthode de [DBG08] peut donner des résultats meilleurs pour de petits valeurs de ζ, mais on a une augmentation presque linéaire de la borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée lorsque le bruit additif augmente. L'Algorithme 3.1, par contre, donne des résultats presque invariants à l'augmentation de l'action du bruit et, par conséquent, la technique peut être considérée comme plus robuste.

La Table 3.1 présente les résultats obtenus en considérant la synthèse de contrôleurs d'ordre réduit avec l'action d'un bruit multiplicatif ρ, avec $|\rho| \leq 0.2$ et $|\dot{\rho}| \leq 10$. Dans ce cas là, le bruit

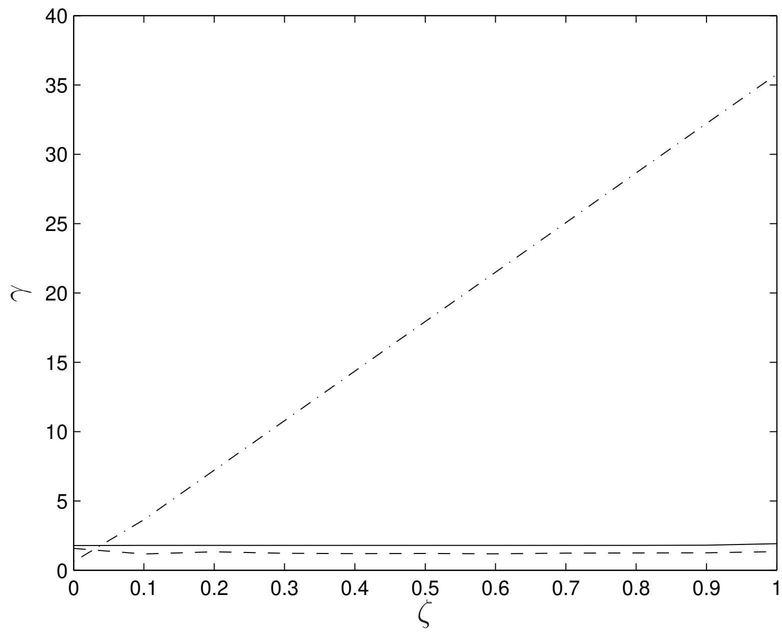

FIGURE 3.1 – Résultats, pour l'Exemple I, de la comparaison entre les bornes des normes $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée avec les contrôleurs résultant de l'application de l'Algorithme 3.1, avant (courbe continue) et après (courbe en tirets) 2 itérations, et de la méthode en [DBG08] (courbe en points et tirets), en variant la valeur de la borne ζ du bruit additif.

additif considéré est tel que $|\delta| \leq 0.5$ et $|\dot{\delta}| \leq 10$. Notez que les valeurs des bornes des normes résultantes, dans cet exemple, ne sont pas très affectées par la présence du bruit multiplicatif, ce qui illustre bien la robustesse de la technique.

TABLE 3.1 – Résultats pour l'Exemple I de l'application de l'Algorithme 3.1, en considérant des bruits additifs et multiplicatifs, pour la synthèse de contrôleurs d'ordre réduit. La table montre les bornes de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée avant ($\gamma^{(0)}$) et après ($\gamma^{(k)}$) k itérations.

	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$
$\gamma^{(0)}$	1.81	1.80	1.89
k	2	1	1
$\gamma^{(k)}$	1.07	1.17	1.69

3.5.2 Exemple II

On considère le modèle de la dynamique de l'axe latéral de l'avion L-1011, présentée dans [GB86, GPS96] dont les matrices sont données par

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -2.98 & 0.93+\theta & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix}, \quad B_1(\theta) = \mathrm{I}, \quad B_2(\theta) = \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0 \\ 0 \\ -1.6 \end{bmatrix},$$

$$C_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2(\theta) = 0, \quad D_y(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où $\theta \in [-1.5, 1.5]$ et $-0.5 \leq \dot{\theta} \leq 0.5$. On suppose que le paramètre θ soit affecté par un bruit additif δ de sorte que $|\delta| \leq \zeta$ et $|\dot{\delta}| \leq 1$, ζ étant définie dans la suite. D'abord, l'Algorithme 3.1 est appliqué en considérant $\xi = 500$ au Théorème 3.1, $k_{max} = 5$ pour la quantité maximale d'itérations et une tolérance de convergence $\epsilon = 10^{-4}$. La Table 3.2 montre les bornes γ des normes $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes en boucle fermée après l'application de la méthode de [DBG08] et de l'Algorithme 3.1, avant et après la procédure itérative, en changeant la valeur de la borne ζ du bruit additif. Ainsi comme à l'Exemple I, la méthode de [DBG08] a donné un résultat meilleur pour $\zeta = 0$ (*i.e.*, sans le bruit additif), mais une petite augmentation sur l'action du bruit a empiré considérablement la valeur de la norme, et la méthode n'est pas faisable pour $\zeta \geq 0.4$. D'un autre côté, la robustesse de l'Algorithme 3.1 est illustrée dans cet exemple, une fois que les normes résultantes sont presque invariantes à l'augmentation de la norme du bruit pour les valeurs analysées. La méthode est faisable pour tout $\zeta < 1$.

TABLE 3.2 – Résultats, pour l'Exemple II, de la comparaison entre l'Algorithme 3.1, avant ($\gamma^{(0)}$) et après ($\gamma^{(k)}$) k itérations, et la méthode [DBG08], pour la synthèse des contrôleurs d'ordre plein, en changeant la borne ζ du bruit additif.

Méthode	Bornes $\mathcal{H}_\infty$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.4$	$\zeta = 0.6$	$\zeta = 0.8$	$\zeta = 0.99$
Alg. 3.1	$\gamma^{(0)}$	3.43	3.32	3.63	3.63	3.59	3.33
	k	2	0	0	0	1	1
	$\gamma^{(k)}$	2.93	3.32	3.63	3.63	2.87	2.91
[DBG08]	γ	0.50	130.79	—	—	—	—

La Table 3.3 présente les résultats obtenus en considérant la synthèse des contrôleurs d'ordre réduits avec l'action d'un bruit multiplicatif ρ, avec $|\rho| \leq 0.5$ et $|\dot{\rho}| \leq 1$. Dans ce cas là, le bruit additif considéré est tel que $|\delta| \leq 0.5$, et la constante ξ utilisée dans le Théorème 3.1 est une des valeurs de l'ensemble $\{200, 500\}$. Dans cet exemple, les valeurs des bornes n'ont pas beaucoup changé avec la procédure itérative, qui est arrêtée après un nombre petit, ou même nulle, d'itérations. Notez que les valeurs des normes, dans cet exemple, ne sont pas très affectées par la présence du bruit multiplicatif, ce qui illustre bien la robustesse de la technique.

Table 3.3 – Résultats pour l'Exemple II de l'application de l'Algorithme 3.1, en considérant des bruits additifs et multiplicatifs, pour la synthèse des contrôleurs d'ordre réduit. La table montre les bornes de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée avant ($\gamma^{(0)}$) et après ($\gamma^{(k)}$) k itérations.

	$n_c = 0$	$n_c = 1$	$n_c = 2$	$n_c = 3$	$n_c = 4$
$\gamma^{(0)}$	3.75	2.93	2.93	2.92	3.00
k	1	0	0	0	0
$\gamma^{(k)}$	2.94	2.93	2.93	2.92	3.00

3.6 Conclusion

L'adaptation de la méthode en deux étapes, proposée au Chapitre 2, pour traiter des systèmes à paramètres variants dans le temps, a été présentée dans ce chapitre. Les contrôleurs conçus sont d'ordre réduit et dépendants des paramètres mesurables en ligne, et ils sont robustes à des bruits de mesure de ces paramètres. Les bruits, supposés additifs et multiplicatifs, sont incorporés dans les conditions de synthèse en utilisant l'approche multi-simplexe. Des exemples numériques montrent que les résultats ne sont pas sensibles à des altérations sur la norme des bruits considérés, une fois que les valeurs de la borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes en boucle fermée sont bien invariantes au changement des bornes des bruits. Outre de meilleurs résultats, la méthode se distingue par rapport à d'autres approches par sa capacité de traiter des systèmes pour lesquels toutes les matrices dépendent des paramètres.

Chapitre 4

Systèmes LTV

4.1 Introduction

L'analyse des principales caractéristiques concernant des systèmes linéaires au temps variant (en anglais, *Linear Time Varying* — LTV), comme le développement des techniques de commande, sont des sujets très importants dans la théorie des systèmes. Une grande famille de systèmes peut être modélisée en utilisant l'approche LTV, par exemple l'aérodynamique à haute vitesse des avions et les coefficients de diffusion dans des procédés chimiques [LC05]. De plus, la linéarisation des systèmes autour d'une trajectoire, au lieu d'un point fixe d'opération, conduit à des systèmes LTV [Vid93, Kha02, LC05]. La méthode présentée au Chapitre 3 peut être utilisée pour synthétiser des contrôleurs pour stabiliser des systèmes LTV si les termes variants dans le temps sont bornés. Pourtant, si ces termes sont connus, on peut traiter le problème en utilisant des techniques directes.

Dans ce chapitre, deux différentes approches pour la synthèse des lois de commande stabilisantes sont présentées. Dans la première, la matrice de transition d'états du système est directement utilisée pour construire un gain de retour d'états stabilisant. La deuxième approche est basée sur un nouveau critère d'analyse de la stabilité, qui consiste basiquement dans la vérification de certaines propriétés de la matrice de transition d'états sur un horizon de temps fini.

La première méthode, s'appuyant sur la matrice de transition d'états, sera présentée dans la Section 4.2. La Section 4.3 introduit le nouveau critère d'analyse de la stabilité, et son adaptation pour synthétiser des lois de commande stabilisantes est exposée dans la Section 4.4 et développée pour satisfaire des contraintes de performance sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ dans la Section 4.5. La Section 4.6 présente quelques exemples pour illustrer la validité des méthodes, et la Section 4.7 conclut le chapitre.

4.2 Stabilisation avec la matrice de transition d'états

Considérons le système LTV donné par

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{4.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'états et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée de commande. Le but principal dans la présente section est la synthèse d'un gain de retour d'états $u(t) = K(t)x(t)$, variant dans le temps, de telle sorte que le système en boucle fermée soit stable. Une possible solution pour un tel problème est exposée dans théorème suivant, qui utilise la matrice de transition d'états $\Phi(t, t_0)$ présentée en détails dans la Section 1.2.

Théorème 4.1 Si la paire $\{A(t), B(t)\}$ est uniformément complètement contrôlable et si la paire $\{A(t), B'(t)X_\delta(t)\}$ est uniformément complètement observable pour une certaine valeur de $\delta \geq 0$ (voyez les Théorèmes 1.8 et 1.10), avec $X_\delta(t) = \Phi'(t+\delta, t)\Phi(t+\delta, t)$, alors la commande

$$u(t) = K_\delta(t)x(t),$$

avec

$$K_\delta(t) = -\beta \ B'(t)X_\delta(t),$$

avec $\beta > 0$ suffisamment grand, est une loi de commande qui stabilise le système (4.1).

Démonstration : Le premier pas consiste à montrer que toutes les trajectoires du système dual en boucle fermée, donné par

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\left(A(t) - \beta B(t)B'(t)X_\delta(t)\right)' \tilde{x}(t)$$

sont exponentiellement croissantes (système exponentiellement instable) [KP77]. Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$w(t, \tilde{x}) = \tilde{x}(t)' X_\delta(t)^{-1} \tilde{x}(t).$$

Comme le système est uniformément complètement contrôlable, on peut employer les inégalités en (1.23) pour montrer que la fonction $w(t, \tilde{x})$ satisfait

$$\frac{\alpha_9(\delta)}{\alpha_8(\delta)} \tilde{x}(t)'\tilde{x}(t) \leq w(t, \tilde{x}) \leq \frac{\alpha_{10}(\delta)}{\alpha_7(\delta)} \tilde{x}(t)'\tilde{x}(t).$$

La dérivée de $w(t, \tilde{x})$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t, \tilde{x}) &= \tilde{x}(t)' \left[-A(t)X_\delta(t)^{-1} - X_\delta(t)^{-1}A'(t) + 2\beta B(t)B'(t) + \dot{X}_\delta(t)^{-1}\right] \tilde{x}(t) \\
&= \tilde{x}(t)' \left[2\beta B(t)B'(t) - \Phi(t, t+\delta)\left(A(t+\delta) + A'(t+\delta)\right)\Phi'(t, t+\delta)\right] \tilde{x}(t).
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient des expressions

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(t, t+\delta)}{dt} &= A(t)\Phi(t, t+\delta) - \Phi(t, t+\delta)A(t+\delta) \\
\frac{d\Phi'(t, t+\delta)}{dt} &= \Phi'(t, t+\delta)A'(t) - A'(t+\delta)\Phi'(t, t+\delta) \\
\frac{dX_\delta(t)^{-1}}{dt} &= A(t)X_\delta(t)^{-1} + X_\delta(t)^{-1}A(t)' - \Phi(t, t+\delta)\left(A(t+\delta) + A'(t+\delta)\right)\Phi'(t, t+\delta).
\end{aligned}$$

Selon le Théorème 1.4, pour montrer l'instabilité exponentielle du système dual il faut prouver que

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{w}(\tau, \tilde{x})d\tau = w(t+\sigma, \tilde{x}) - w(t, \tilde{x}) > 0, \ \forall t \geq t_0$$

pour un $\sigma \geq \delta_c$, δ_c étant une valeur suffisamment grande qui satisfait les inégalités du Théorème 1.8. La dernière expression est égal à

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{w}(\tau, \tilde{x}) d\tau = 2\int_t^{t+\sigma} \tilde{x}(\tau)'\beta B(\tau)B'(\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau$$
$$- \int_t^{t+\sigma} \tilde{x}(\tau)'\Phi(\tau, \tau+\delta)\left(A(\tau+\delta) + A'(\tau+\delta)\right)\Phi'(\tau, \tau+\delta)\tilde{x}(\tau)d\tau.$$

Définissons l'état

$$\overline{x}(t_2) = \Phi'(t_1, t_2)\tilde{x}(t_1)$$

et réécrivons les dernières intégrales par

$$\begin{aligned}
&\overline{x}(t)'\left(2\beta\int_t^{t+\sigma}\Phi(t,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t,\tau)d\tau\right.\\
&\qquad\left.-\int_t^{t+\sigma}\Phi(t,\tau+\delta)\left(A(\tau+\delta)+A'(\tau+\delta)\right)\Phi'(t,\tau+\delta)d\tau\right)\overline{x}(t)\\
&= 2\overline{x}(t)'\beta W(t+\sigma,t)\overline{x}(t) + \int_t^{t+\sigma} d\Phi(t,\tau+\delta)\Phi'(t,\tau+\delta)\\
&= 2\overline{x}(t)'\beta W(t+\sigma,t)\overline{x}(t) + \overline{x}(t)'\left(\Phi(t,t+\sigma+\delta)\Phi'(t,t+\sigma+\delta) - \Phi(t,t+\delta)\Phi'(t,t+\delta)\right)\overline{x}(t).
\end{aligned}$$

Selon les inégalités (1.23), on a

$$\begin{aligned}
&\overline{x}(t)'\left(\Phi(t,t+\sigma+\delta)\Phi'(t,t+\sigma+\delta) - \Phi(t,t+\delta)\Phi'(t,t+\delta)\right)\overline{x}(t)\\
&\geq \overline{x}(t)'\left(\frac{\alpha_7(\delta+\sigma)}{\alpha_{10}(\delta+\sigma)} - \frac{\alpha_8(\delta)}{\alpha_9(\delta)}\right)\overline{x}(t).
\end{aligned}$$

Finalement, comme le système est uniformément complètement contrôlable, les inégalités (1.22) sont valides et on a

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{w}(\tau,\tilde{x})d\tau \geq \overline{x}(t)'\left(2\beta\alpha_7(\sigma) + \frac{\alpha_7(\delta+\sigma)}{\alpha_{10}(\delta+\sigma)} - \frac{\alpha_8(\delta)}{\alpha_9(\delta)}\right)\overline{x}(t), \tag{4.2}$$

et il existe un β qui satisfait

$$\beta > \beta_\ell = \frac{\dfrac{\alpha_7(\delta+\sigma)}{\alpha_{10}(\delta+\sigma)} - \dfrac{\alpha_8(\delta)}{\alpha_9(\delta)}}{2\alpha_7(\sigma)} \tag{4.3}$$

de telle sorte que

$$\int_t^{t+\sigma} \dot{w}(\tau,\tilde{x})d\tau > 0 \quad \forall t \geq t_0,$$

ce qui démontre que le système dual en boucle fermée est exponentiellement instable. Les états duaux en temps inversé sont liés aux états primaux selon la transformation

$$x(t) = X_{cl}(t,t_0)\tilde{x}(-t), \tag{4.4}$$

étant $X_{cl}(t,t_0) = \Phi_{cl}(t,t_0)\Phi'_{cl}(t,t_0)$ la solution de l'équation différentielle de Lypaunov (1.17) pour le système en boucle fermée et $\Phi_{cl}(t,t_0)$ sa matrice de transition. Puisque $\tilde{x}(t)$ est exponentiellement instable, alors $\tilde{x}(-t)$ est uniformément asymptotiquement stable. Avec (4.4), on a

$$||x(t)||^2 \leq ||X_{cl}(t,t_0)||\ ||\tilde{x}(-t)||$$

et il suffit de montrer que la matrice $X_{cl}(t, t_0)$ est bornée pour prouver la stabilité uniforme et asymptotique de $x(t)$.

Considérons l'équation différentielle (1.17) pour le système en boucle fermée, donnée par

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X_{cl}(t,t_0) =& A(t)X_{cl}(t,t_0) + X_{cl}(t,t_0)A'(t) - \beta B(t)B'(t)X_\delta(t)X_{cl}(t,t_0)\\ &- \beta X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)B'(t)\ , \quad X_{cl}(t_0,t_0) = \mathbf{I}.\end{aligned}$$

On peut voir que

$$\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)\big)\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)\big)' \geq 0$$

impliquant que

$$\begin{aligned}&-\beta B(t)B'(t)X_\delta(t)X_{cl}(t,t_0) - \beta X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)B'(t) \leq\\ &\qquad\qquad B(t)B'(t) + \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X_\delta(t)B(t)B'(t)X_\delta(t)X_{cl}(t,t_0).\end{aligned}$$

Dans l'Appendice il est démontré que la matrice $P(t, t_0)$ solution de

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t,t_0) =& A(t)P(t,t_0) + P(t,t_0)A'(t) + B(t)B'(t)\\ &+ \beta^2 P(t,t_0)X_\delta(t)B(t)B'(t)X_\delta(t)P(t,t_0)\ ,\ P(t_0,t_0) \geq \mathbf{I}\end{aligned} \tag{4.5}$$

satisfait

$$X_{cl}(t,t_0) \leq P(t,t_0).$$

De plus, la solution de (4.5) existe, est unique et est bornée par

$$0 < \alpha_{p1}\mathbf{I} \leq P(t,t_0) \leq \alpha_{p2}\mathbf{I}$$

si et seulement si la paire $\{A(t), B(t)\}$ est uniformément complètement contrôlable et la paire $\{A(t), B'(t)X_\delta(t)\}$ est uniformément complètement observable [BCG84], ceux que nous avons supposé. Pour cette raison, on a

$$X_{cl}(t,t_0) \leq P(t,t_0) \leq \alpha_{p2}\mathbf{I},$$

et ainsi $||X_{cl}(t,t_0)||$ a une borne supérieure et, par conséquent, le système (4.1) en boucle fermée est uniformément asymptotiquement stable.

Une version de la condition d'observabilité de la paire $\{A(t), K_\delta(t)\}$ comme condition pour la stabilisation des systèmes au temps invariant est invoquée, par exemple, dans la méthode de synthèse basée sur des équations de Lyapunov présentée en [Che99]. Cette condition n'est pas explicitement prise en compte dans la plupart des méthodes pour la stabilisation des systèmes LTV, mais la condition est intrinsèquement satisfaite dans, par exemple, les méthodes basées sur la résolution d'une équation différentielle de Riccati ou celles basées sur la construction directe d'une fonction de Lyapunov. Dans la présente méthode, comme le gain $K_\delta(t)$ n'est pas le résultat direct d'une équation différentielle, il faut garantir cette condition séparément.

L'obtention des matrices de transition $\Phi(t+\delta, t)$ n'est pas toujours évidente. Une façon de calculer $\Phi(t+\delta, t)$ est suivre l'algorithme présenté par [Lu00], qui est basé sur le développement en série de Taylor au premier ordre

$$\Phi(t+h,t) \approx \Phi(t,t) + h(A(t)\Phi(t,t)) = (I + hA(t))\Phi(t,t) \tag{4.6}$$

pour une petite valeur de la constante h. Une telle expansion fait partie de l'algorithme d'intégration d'Euler pour la résolution des équations différentielles ordinaires [SB80]. En dénotant $\Phi_k(t) = \Phi(t + kh, t)$, la version récurrente de (4.6) s'écrit

$$\Phi_k(t) = (I + hA(t + (k - 1)h))\Phi_{k-1}(t) \ , \quad \Phi_0(t) = I. \tag{4.7}$$

L'algorithme présenté par [Lu00] pour le calcul de $\Phi(t + \delta, t)$ est reproduit dans ce qui suit.

Algorithme 4.1

1. Choisissez une valeur $\delta > 0$ de telle sorte que la paire $\{A(t), B'(t)X_\delta(t)\}$ soit uniformément complètement observable et un nombre N suffisamment grand devant le pas d'intégration. Soit $h = \delta/N$ la taille de chaque pas d'intégration ;

2. Pour chaque valeur de t, calculez $\Phi_N(t) \approx \Phi(t + \delta, t)$ en utilisant la récurrence (4.7) ;

3. $K_\delta(t)$ est alors donné par

$$K_\delta(t) = -\beta B'(t)\Phi'_N(t)\Phi_N(t) \ \text{ pour } t > t_0,$$

   β étant une valeur plus grande que la borne donnée en (4.3).

La convergence de la récurrence (4.7) est garantie, $\forall t$, pour une valeur suffisamment petite de h, une fois que δ est fixée, la norme de la matrice $\Phi(t + \delta, t)$ est bornée. Par conséquent, l'erreur d'approximation de $\Phi_N(t)$ est proportionnelle à h [SB80].

La principale difficulté de cette méthode est liée au choix des paramètres β et δ. Une borne inférieure pour β est fournie en (4.3), mais il n'y a pas une expression équivalente pour la valeur de δ. Dans les systèmes examinés, presque toutes les valeurs de $\delta \neq 0$ ont été suffisantes pour générer un gain stabilisant, et spécifiquement pour les systèmes périodiques, *i.e.*, les systèmes dont les matrices satisfont $A(t) = A(t + T)$ et $B(t) = B(t + T)$ pour un certain $T > 0$, l'utilisation de $\delta = T$ a toujours donné de bons résultats. Pour les systèmes périodiques, la borne de β peut être obtenue plus facilement en utilisant les résultats du Lemme 1.3. Plus de détails sur l'application de la méthode à systèmes périodiques sont donnés dans [AGTP12].

La matrice $\Phi(t + \delta, t)$ présente des propriétés intéressantes, qui peuvent être utilisées pour générer un nouveau critère de vérification de la stabilité des systèmes LTV et, par conséquent, inspirer de nouvelles méthodes pour la synthèse de lois de commande stabilisantes. Un tel critère est présenté dans la section suivante.

4.3 Nouveau critère de stabilité

On considère le système LTV donné par

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{4.8}$$

Le théorème suivant présente le nouveau critère pour vérifier la stabilité asymptotique et uniforme d'un système LTV.

Théorème 4.2 Le système (4.8) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$\Phi'(t+\sigma,t)\Phi(t+\sigma,t) < I, \ \forall t \geq t_0, \tag{4.9}$$
$$||\Phi(t+\tau,t)|| < \varphi(\tau), \ 0 < \tau < \sigma, \ \forall t \geq t_0 \tag{4.10}$$

où $\Phi(t,t_0)$ est la matrice de transition d'états du système et $\varphi(\cdot)$ une fonction uniformément bornée. En plus, si l'inégalité (4.9) est satisfaite par un certain σ, elle est aussi satisfaite pour tout $\hat{\sigma} \geq \sigma$.

Démonstration :
Nécessité : On considère que le système (4.8) est uniformément asymptotiquement stable. Alors, selon le Lemme 1.1, il existe des constantes positives $a, b \in \mathbb{R}$ de telle sorte que la matrice de transition d'états satisfait

$$||\Phi(t,t_0)|| \leq ae^{-b(t-t_0)}, \ \forall t \geq t_0.$$

Si $a \leq 1$, alors pour tout $\sigma > 0$

$$||\Phi(t+\sigma,t)|| \leq ae^{-b\sigma} \leq 1, \forall t \geq t_0$$

et pour tout $\hat{\sigma} \geq \sigma$, la dernière inégalité est satisfaite. Si $a > 1$, considérons la constante

$$\sigma = \frac{\ln(a)}{b}.$$

On peut alors vérifier que

$$||\Phi(t+\hat{\sigma},t)|| \leq ae^{-b\hat{\sigma}} \leq 1, \ \text{pour tout } \hat{\sigma} \geq \sigma,$$

ce qui implique que (4.9) est vérifiée, car

$$||\Phi(t+\hat{\sigma},t)||^2 = \lambda_{max}\left(\Phi'(t+\hat{\sigma},t)\Phi(t+\hat{\sigma},t)\right).$$

Alors, pour tout τ tel que $0 < \tau < \sigma$, on a

$$||\Phi(t+\tau,t)|| \leq ae^{-b\tau} = \varphi(\tau) \leq a.$$

Suffisance : On considère qu'il existe une valeur positive de σ qui satisfait les inégalités (4.9) et (4.10). Définissons la fonction candidate de Lyapunov

$$v(t,x) = x(t)' \underbrace{\int_t^{t+\sigma} \Phi'(\tau,t)\Phi(\tau,t)d\tau}_{P(t,\sigma)} x(t).$$

La fonction $v(t,x)$ est uniformément bornée si et seulement si la condition (4.10) est satisfaite. Une telle condition est aussi nécessaire pour la stabilité uniforme et asymptotique du système car, sinon, la condition équivalente du Lemme 1.1 ne serait pas valable. La dérivée de la fonction de Lyapunov est égal à

$$\dot{v}(t,x) = x(t)'(A'(t)P(t,\sigma) + P(t,\sigma)A(t) + \dot{P}(t,\sigma))x(t) = x(t)'(\Phi'(t+\sigma,t)\Phi(t+\sigma,t) - I)x(t),$$

qui est définie négative car l'inégalité (4.9) est satisfaite. Par conséquent, le système est uniformément asymptotiquement stable.

Une interprétation du critère présenté dans le Théorème 4.2 est que la stabilité uniforme et asymptotique du système (4.8) est équivalente au fait que, pour tout $t \geq t_0$, tous les états sur l'hypersphère unitaire $x(t)'x(t) = 1$ doivent être à l'intérieur de l'hypersphère après σ secondes. Autrement dit, l'analyse de la stabilité d'un système LTV sur un horizon infini de temps est équivalente à l'analyse, sur un horizon fini, d'un nombre infini de sous-intervalles. Cette approche a des éléments similaires avec les techniques d'horizon glissant avec contraintes sur l'ensemble final [MM93, LKC98, MRRS00], mais dans l'approche proposée l'ensemble final, *i.e.*, l'hypersphère unitaire, est constante.

Si le système est périodique avec période $T > 0$, un critère plus simple, présenté dans le corollaire suivant, peut être utilisé.

Corollaire 4.1 *Considérons que le système* (4.8) *est périodique de période T, i.e.,*

$$A(t+T) = A(t)\ \forall t,$$

$A(t)$ étant une matrice sans discontinuités d'amplitude infinie. Le système est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un scalaire $\ell \in \mathbb{Z}^+$ de telle sorte que

$$\Phi'(\ell T, 0)\Phi(\ell T, 0) < I. \tag{4.11}$$

Démonstration : Selon le Théorème 1.1, la matrice de transition d'états $\Phi(t, t_0)$ d'un système T-périodique peut être réécrite comme

$$\Phi(t, t_0) = G(t, t_0)e^{(t-t_0)R},$$

avec $G(t, t_0) = G(t + \ell T, t_0), G(t_0, t_0) = G(t_0 + \ell T, t_0) = I$ pour $\ell \in \mathbb{Z}^+$ et R est une matrice constante. Si $A(t)$ est une matrice sans discontinuités infinies, alors $||G(t, t_0)|| < +\infty\ \forall t, t_0$ et, par conséquent, la condition (4.10) est satisfaite [MSA04]. En utilisant le théorème de Floquet, on a

$$\Phi'(\ell T, 0)\Phi(\ell T, 0) = e^{R'\ell T}G'(\ell T, 0)G(\ell T, 0)e^{R\ell T} = e^{R'\ell T}e^{R\ell T}.$$

Un système T-périodique est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si la partie réelle des valeurs propres de R est négative [MSA04]. Alors, en utilisant l'Inégalité (1.9), il existe une valeur de $\ell \in \mathbb{Z}^+$ de telle sorte que

$$\lambda_{\max}\big(\Phi'(\ell T, 0)\Phi(\ell T, 0)\big) = ||e^{R\ell T}||^2 < e^{-2\xi_M \ell T} < 1.$$

Numériquement, il serait plus intéressant d'avoir des conditions qui peuvent être énoncées avec des éléments discrets. Pour cette raison, le théorème suivant fait la liaison entre le Théorème 4.2 et la stabilité d'un système LTV au temps discret, obtenu à partir des informations sur le système original.

Théorème 4.3 Si le système (4.8) est tel que

$$||\Phi(t+\tau, t)|| < \varphi(\tau),\ \forall t \geq t_0, \tag{4.12}$$

où $\varphi(\cdot)$ est une fonction uniformément bornée, alors le système (4.8) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une valeur de $\sigma > 0$ tel quel le système LTV en temps discret, donné par

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{x}(k), \ \hat{A}(k) = \Phi(t_{k+1}, t_k), \tag{4.13}$$

avec $t_k = t_0 + k\sigma$, est uniformément asymptotiquement stable.

Démonstration :

Nécessité : Supposons que le système en temps continu (4.8) soit uniformément asymptotiquement stable. Alors, selon le Lemme 1.1, il y a des scalaires positifs a e b telles que

$$||\Phi(t, t_0)|| \leq ae^{-b(t-t_0)}.$$

Selon les propriétés des systèmes LTV en temps discret [Rug96], la matrice de transition du système (4.13) est donnée par

$$\hat{\Phi}(k, j) = \hat{A}(k-1)\hat{A}(k-2)\cdots\hat{A}(j) = \Phi(t_k, t_j). \tag{4.14}$$

De cette façon,

$$||\hat{\Phi}(k, j)|| = ||\Phi(t_0 + k\sigma, t_0 + j\sigma)|| \leq ae^{-b\sigma(k-j)}.$$

En dénotant $\lambda = e^{-b\sigma}$, on a

$$||\hat{\Phi}(k, j)|| \leq a\lambda^{k-j}.$$

Une fois que le système est, par hypothèse, uniformément asymptotiquement stable, alors il existe une valeur de σ telle que

$$\lambda = e^{-b\sigma} < 1,$$

ce qui démontre que le système discret est uniformément asymptotiquement stable.

Suffisance : Supposons que le système discret (4.13) est uniformément asymptotiquement stable. Alors, il existe des constantes $a > 0$ et $0 \leq \lambda < 1$ telles que

$$||\hat{\Phi}(k, j)|| \leq a\lambda^{k-j} \tag{4.15}$$

pour tout k, j, $k \geq j$ [Rug96], $\hat{\Phi}(k, j)$ étant la matrice de transition d'états du système en temps discret donnée par (4.14). Par conséquent, on a

$$||\hat{\Phi}(k, 0)|| = ||\Phi(t_0 + k\sigma, t_0)|| \leq a\lambda^k.$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, il existe une constante $b > 0$ qui satisfait $\lambda = e^{-b\sigma}$. Alors

$$||\Phi(t_k, t_0)|| \leq ae^{-b(t_k - t_0)}, \ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.16}$$

Il reste prouver que l'inégalité (4.16) est aussi valable pour $t \neq t_0 + k\sigma$. Soit $\tilde{t}$ de telle sorte que $t_k < \tilde{t} \leq t_{k+1}$. Notons que

$$\begin{aligned} ||\Phi(\tilde{t}, t_0)|| &\leq ||\Phi(\tilde{t}, t_k)|| ||\Phi(t_k, t_0)|| \leq \varphi(\tilde{t} - t_k)||\Phi(t_k, t_0)|| \\ &\leq \varphi(\tilde{t} - t_k)ae^{b(\tilde{t}-t_k)}e^{-b(\tilde{t}-t_0)} \leq \eta(\epsilon^*)e^{-b(\tilde{t}-t_0)}, \end{aligned}$$

où $\eta(\cdot) = a\varphi(\cdot)e^{b(\cdot)}$ et $\varphi(\cdot)$ est la borne définie en (4.12), avec ϵ^* solution de

$$\epsilon^* = \arg\max_{0 \leq \epsilon \leq \sigma} \varphi(\epsilon)e^{b\epsilon}.$$

Pour $k \to \infty$ on a $\tilde{t} \to \infty$ et, par conséquent, la matrice de transition $\Phi(\tilde{t}, t_0)$ est bornée par une exponentielle négative, ce qui démontre que le système (4.8) est uniformément asymptotiquement stable.

Corollaire 4.2 *Soit σ un scalaire qui satisfait la condition* (4.9)*, et soient δ et N des scalaires avec $0 < \delta \leq \sigma$, $N = \sigma/\delta$, $N \in \mathbb{Z}$. Pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}^+$, définissons un système LTV en temps discret et périodique $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, donné par*

$$\hat{\mathcal{G}}_\ell(k) \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{x}(k), \quad \textit{avec} \\ \hat{A}(k) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta), \; k = 0, \ldots, N-1, \quad t_\ell = t_0 + \ell\sigma \\ \hat{A}(k) = \hat{A}(k + rN), \forall r \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.17}$$

Le système (4.8) *avec* (4.12) *est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si les systèmes $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}^+$, sont uniformément asymptotiquement stables.*

Démonstration :

Nécessité : Supposons que le système (4.8) est uniformément asymptotiquement stable et σ est une constante que satisfait (4.9). Selon [dST00], il suffit de montrer que

$$\hat{\Phi}'_\ell(N, 0)\hat{\Phi}_\ell(N, 0) < I \tag{4.18}$$

pour tous les systèmes en temps discret $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, où $\hat{\Phi}_\ell(k, j)$ sont les matrices de transition correspondantes. Notons que

$$\hat{\Phi}_\ell(k, j) = \Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + j\delta), \; k > j, \; 0 < k \leq N.$$

Par conséquent,

$$\hat{\Phi}_\ell(N, 0) = \Phi(t_\ell + \underbrace{N\delta}_{\sigma}, t_\ell)$$

et, comme (4.9) est valide pour un certain σ, la condition (4.18) est vérifiée pour tous les $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$.

Suffisance : Supposons maintenant que tous les systèmes périodiques en temps discret $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, $\ell \in \mathbb{Z}^+$, soient uniformément asymptotiquement stables. Selon [dST00], chaque matrice de transition satisfait

$$||\hat{\Phi}_\ell(k, j)|| \leq \xi_\ell \lambda_\ell^{k-j} \;, \; 0 \leq \lambda_\ell < 1 \tag{4.19}$$

et

$$||\hat{\Phi}_\ell(N, 0)|| \leq \xi_\ell \lambda_\ell^N < 1 \;\; \text{car} \;\; \hat{\Phi}'_\ell(N, 0)\hat{\Phi}_\ell(N, 0) < I. \tag{4.20}$$

La dernière inégalité implique que

$$\Phi'(t_\ell + \sigma, t_\ell)\Phi(t_\ell + \sigma, t_\ell) < I$$

pour tout t_ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}^+$. En combinant (4.19) et (4.20), on peut voir que, pour tout $k \in [0, N]$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} ||\Phi(t_\ell + k\delta, t_0)|| &\leq ||\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell)|| ||\Phi(t_\ell, t_{\ell-1})|| \ldots ||\Phi(t_2, t_1)|| ||\Phi(t_1, t_0)|| && (4.21) \\ &\leq \xi_\ell \lambda_\ell^k ||\Phi(t_{\ell-1} + N\delta, t_{\ell-1})|| \ldots ||\Phi(t_1 + N\delta, t_1)|| ||\Phi(t_0 + N\delta, t_0)|| && (4.22) \\ &\leq \xi_\ell \lambda_\ell^k \prod_{j=0}^{\ell-1} \xi_j \lambda_j^N. && (4.23) \end{aligned}$$

Définissons μ^* et ξ^* comme

$$\mu^* = \max_{j \in \mathbb{Z}^+} \xi_j \lambda_j^N,$$

$$\xi^* = \max_{j \in \mathbb{Z}^+} \xi_j.$$

Selon (4.20) on a $\mu^* < 1$ et, par conséquent,

$$\prod_{j=0}^{\ell-1} \xi_j \lambda_j^N \leq (\mu^*)^\ell,$$

et $\xi^* < +\infty$ une fois que tous les systèmes périodiques en temps discret sont supposés uniformément asymptotiquement stables. L'inégalité (4.21) peut alors être réécrite comme

$$||\Phi(t_\ell + k\delta, t_0)|| \leq \xi^* \lambda_\ell^k (\mu^*)^\ell. \tag{4.24}$$

Comme $0 \leq \mu^* < 1$ et $0 \leq \lambda_\ell < 1$, il est possible d'obtenir une valeur $b \in \mathbb{R}$ de telle sorte que

$$\mu^* \leq e^{-b\sigma}, \ \lambda_\ell \leq e^{-b\delta}.$$

Alors, (4.24) est équivalente à

$$||\Phi(t_0 + \ell\sigma + k\delta, t_0)|| \leq \xi^* e^{-b(\ell\sigma + k\delta)}$$

et, alors,

$$||\Phi(t, t_0)|| \leq \xi^* e^{-b(t_{\ell k} - t_0)}, \text{ pour } t_{\ell k} = t_0 + \ell\sigma + k\delta. \tag{4.25}$$

Il reste montrer que l'inégalité (4.25) est valide aussi pour $t \neq t_\ell + k\delta$. Soit $\tilde{t}$ de telle sorte que $t_\ell + k\delta < \tilde{t} \leq t_\ell + (k+1)\delta$. Notons que

$$\begin{aligned} ||\Phi(\tilde{t}, t_0)|| \leq ||\Phi(\tilde{t}, t_{\ell k})|| ||\Phi(t_{\ell k}, t_0)|| &\leq \varphi(\tilde{t} - t_{\ell k}) ||\Phi(t_{\ell k}, t_0)|| \\ &\leq \varphi(\tilde{t} - t_{\ell k}) \xi^* e^{b(\tilde{t} - t_{\ell k})} e^{-b(\tilde{t} - t_0)} \leq \eta(\epsilon^*) e^{-b(\tilde{t} - t_0)}, \end{aligned}$$

où $\eta(\cdot) = \xi^* \varphi(\cdot) e^{b(\cdot)}$ et $\varphi(\cdot)$ est la borne définie en (4.12), ϵ^* étant la solution de

$$\epsilon^* = \arg \max_{0 \leq \epsilon \leq \delta} \varphi(\epsilon) e^{b\epsilon}.$$

Pour $\ell \to \infty$ on a $\tilde{t} \to \infty$ et, alors, la matrice de transition $\Phi(t, t_0)$ est bornée par une exponentielle négative, ce qui démontre que le système (4.8) est uniformément asymptotiquement stable.

Dans le cas général, un des avantages de considérer un ensemble de problèmes en temps fini au lieu d'un problème en temps infini est la possibilité de paralléliser la procédure, en réduisant alors le temps de calcul sur l'analyse de la stabilité. De plus, l'approche est basée sur l'analyse ponctuelle des valeurs de la norme de la matrice de transition d'états, et non sur son évolution, ce qui est plus intéressant d'un point de vue numérique. Le développement d'un critère plus adapté numériquement est la principale motivation du Théorème 4.3, car les méthodes pour traiter des systèmes discrets (par exemple [dST00]) sont souvent plus simples que celles conçues pour traiter des systèmes continus. Par contre, le plus grand inconvénient est que le critère est une procédure semi-décidable sur σ ; si la condition (4.9) est violée pour un certain σ, on ne peut pas savoir si le système est instable ou si la valeur utilisée de σ est trop petite. Une stratégie est de compter sur le fait que, si la condition (4.9) est satisfaite par σ, elle est aussi satisfaite pour tout $\hat{\sigma} \geq \sigma$, et faire l'analyse avec une valeur de σ suffisamment grande. Toutefois, il n'y a pas de garantie, et le coût numérique augmente proportionnellement avec σ.

La borne uniforme (4.12) requise pour les Théorèmes 4.2 et 4.3 est satisfaite dans certains cas spéciaux, par exemple $||A(t)|| < +\infty$ pour tout t, mais une telle condition peut être difficile d'analyser pour des systèmes LTV plus généraux. À cause de ces inconvénients, le critère présenté n'est pas encore attrayant pour l'analyse de la stabilité, en comparaison avec d'autres méthodes (comme, par exemple, celui présenté dans le Théorème 1.5), ce qui incite des recherches plus approfondies sur ce sujet. Par contre, dans le cadre de la synthèse, l'adaptation du critère exposé dans la présente section ne pose pas de grands problèmes ; la condition (4.12), par exemple, est automatiquement satisfaite si le système est uniformément complètement contrôlable (Théorème 1.8), ce qui est une condition raisonnable, et on n'a pas besoin de définir explicitement une valeur pour σ dans le cas de la stabilisation. L'adaptation du critère proposé dans les Théorèmes 4.2 et 4.3 est le sujet de la section suivante.

4.4 Synthèse avec le nouveau critère

4.4.1 Approche en temps continu

On considère le système LTV donné par (4.1). L'objectif de cette section est présenter une méthode générale pour synthétiser une loi de commande stabilisante $u(t)$, basée sur le critère décrit dans les Théorèmes 4.2 et 4.3. Dans la méthode proposée, la construction d'une loi de commande capable de stabiliser le système (4.1) dans un horizon infini de temps est décomposée dans un ensemble de problèmes de stabilisation en temps fini, comme décrit dans le théorème suivant.

Théorème 4.4 Soit $\mathcal{T} = \{t_\ell\}$, $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $t_\ell = t_0 + \ell\delta$ une grille temporelle prédéfinie avec $\delta > 0$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Le système (4.1) est uniformément complètement contrôlable ;

(2) Les états du système, commandé par $u(t)$ dans l'intervalle $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$, satisfont

$$x(t_{\ell+1})'x(t_{\ell+1}) < x(t_\ell)'x(t_\ell), \forall \ell \in \mathbb{Z}; \tag{4.26}$$

(3) La matrice de transition du système commandé est telle que

$$||\Phi_{cl}(t+\tau, t)|| \leq \varphi(\tau) \ \forall t,$$

étant $\varphi(\cdot)$ une fonction uniformément bornée.

Alors il existe une valeur de δ de sorte que le système commandé (4.1) est uniformément asymptotiquement stable avec la loi de commande $u(t)$.

Démonstration : Selon le Théorème 4.2, le système en boucle fermée est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il y a une valeur de $\sigma > 0$ telle que les conditions (4.9) et (4.10) sont satisfaites. La condition (4.10) est identique à l'hypothèse 3. L'hypothèse 2 est valide si et seulement si

$$||\Phi_{cl}(t_{\ell+1}, t_\ell)|| < 1$$

pour tour ℓ, ce qui conduit à

$$||\Phi_{cl}(t_{\ell+q}, t_{\ell+1})|| \leq \theta_\ell(q) < 1$$

pour tout $q > 1, q \in \mathbb{Z}$. Il reste à montrer que la condition (4.9) est valide aussi pour $t \neq t_\ell$. Soient t et σ de sorte que

$$t_\ell \leq t < t_{\ell+1}, \quad t_{\ell+q} \leq t + \sigma < t_{\ell+q+1}.$$

Alors, on peut vérifier que

$$\Phi_{cl}(t+\sigma, t) = \Phi_{cl}(t+\sigma, t_{\ell+q})\Phi_{cl}(t_{\ell+q}, t_{\ell+1})\Phi_{cl}(t_{\ell+1}, t)$$

et

$$t_{\ell+1} - t \leq \delta, \quad t + \sigma - t_{\ell+1} \leq \delta.$$

En considérant l'hypothèse 3 et en utilisant la valeur de δ^* donnée par

$$\delta^* = \max_{0 \leq \epsilon \leq \delta} \varphi(\epsilon),$$

on a

$$||\Phi_{cl}(t+\sigma, t)|| \leq ||\Phi_{cl}(t+\sigma, t_{\ell+q})||\ ||\Phi_{cl}(t_{\ell+q}, t_{\ell+1})||\ ||\Phi_{cl}(t_{\ell+1}, t)|| \leq \varphi^2(\delta^*)\theta_\ell(q).$$

Comme $\lim_{\delta \to 0} \varphi(\delta) = 1$, comme la fonction $\varphi(\cdot)$ est continue et comme $\theta_\ell(q) < 1$, alors il existe une valeur de δ de sorte que

$$||\Phi_{cl}(t+\sigma, t)|| < 1,$$

ce qui démontre la stabilité uniforme et asymptotique du système (4.1).

Il existe quelques techniques dans la littérature qui sont capables de synthétiser des lois de commandes qui satisfont les conditions du Théorème 4.4, par exemple des approches développées pour traiter la stabilisation des systèmes en temps fini ou pour garantir la stabilité pratique [MP72]. En [GTB09], un contrôleur est construit à partir de la résolution d'une équation différentielle paramétrée de Lyapunov. La méthode présentée en [Lu00] est basée sur l'utilisation d'une technique d'horizons glissants pour garantir que le système en boucle fermée est pratiquement stable après un intervalle de temps. Quelques relaxations peuvent être appliquées lorsque les conditions sont adaptées pour atteindre les conditions du Théorème 4.4.

La méthode proposée dans le Théorème 4.4 a quelques similarités avec des techniques d'horizon glissant avec des contraintes sur l'ensemble final [MM93, LKC98, MRRS00], mais il y a un degré de liberté sur le choix de l'approche utilisé pour la stabilisation en temps fini, ce qui est avantageux, car certaines approches sont numériquement efficaces et on peut appliquer des modifications pour ajouter des critères de performance, par exemple la minimisation d'une norme. L'approche proposée est ainsi moins complexe que les techniques à horizon glissant, parce que on n'a pas besoin de calculer un coût ou définir un ensemble final pour garantir la stabilisabilité de la loi de commande.

Le corollaire suivant adapte le Théorème 4.4 au cas où la loi de commande souhaitée est un gain de retour d'état, *i.e.*, $u(t_\ell) = K(t_\ell)x(t_\ell)$.

Corollaire 4.3 *Soit* $\mathcal{T} = \{t_\ell\}_{\ell=0}^{L}$, $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $t_\ell = t_0 + \ell\delta$ *une grille temporelle prédéfinie avec* $\delta > 0$*. Si le système* (4.1) *est uniformément complètement contrôlable et s'il existe une loi de commande* $u(t) = K(t)x(t)$*, avec*

$$\int_t^{t+s} ||K(\tau)||^2 d\tau \leq \hat{\varphi}(s), \ \forall t, s, \tag{4.27}$$

étant $\hat{\varphi}(\cdot)$ *une fonction uniformément bornée, de telle sorte que les états satisfont*

$$x(t_{\ell+1})'x(t_{\ell+1}) < x(t_\ell)'x(t_\ell), \ \forall \ell \in \mathbb{Z},$$

alors il existe une valeur de δ *de sorte que le système* (4.1) *en boucle fermée est uniformément asymptotiquement stable par la loi de commande* $u(t)$*.*

Démonstration : Selon [AM69], l'utilisation d'une commande par retour d'états $K(t)$ qui satisfait (4.27) ne change pas la contrôlabilité complète et uniforme du système, ce qui veut dire que, selon le Théorème 1.8 et (1.24),

$$||\Phi_{cl}(t + \tau, t)|| \leq \varphi(\tau) \ \forall t,$$

ce qui garanti, avec la contrôlabilité complète et uniforme du système et avec la condition $x(t_{\ell+1})'x(t_{\ell+1}) < x(t_\ell)'x(t_\ell)$, $\forall \ell \in \mathbb{Z}$, la stabilité uniforme et asymptotique du système en boucle fermée.

Une façon de garantir que la condition (4.27) soit satisfaite est considérer, par exemple, que $K(t)$ soit une fonction constante par morceaux. Un résultat particulier peut être obtenu pour les systèmes périodiques.

Corollaire 4.4 *On considère le système* (4.1) *périodique de période* T*. Si le système est uniformément complètement contrôlable et s'il est possible d'obtenir une loi de commande* $u(t_0)$ *bornée qui garantie* $x(t_0 + T)'x(t_0 + T) < x(t_0)'x(t_0)$*, alors le système en boucle fermée avec la loi de commande constante* $u(t_0)$ *est uniformément asymptotiquement stable.*

Démonstration : L'application d'une loi de commande constante $u(t_0)$ ne change pas la périodicité du système (4.1). Une fois que, par hypothèse, les états en boucle fermée satisfont $x(t_0 + T)'x(t_0 + T) < x(t_0)'x(t_0)$, donc par construction la condition (4.11) est satisfaite pour $\ell = 1$ et, selon le Corollaire 4.1, le système en boucle fermée est uniformément asymptotiquement stable.

Adaptation de la méthode de [Lu00]

La méthode présentée en [Lu00] peut être adaptée pour synthétiser un gain de retour d'état constant par morceaux qui satisfait les conditions du Corollaire 4.3. En [Lu00, Theorem 4.1], il est affirmé qu'il existe une valeur de δ de telle sorte que toute trajectoire partant de $x_0 \in \mathcal{S}$, avec

$$\mathcal{S} = \{x | x'F(t_0)x \leq c\},$$

$c > 0$ étant une constante finite choisie, restera dans $\mathcal{S}$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$. La matrice $F(t)$ satisfait l'équation de Lyapunov

$$\dot{F}(t) = -\Big(A(t) + B(t)K(t)\Big)' F(t) - F(t)\Big(A(t) + B(t)K(t)\Big) - Q_F, \tag{4.28}$$

Q_F étant une matrice positive, et $F(t)$ est donnée par

$$F(t) = \int_t^\infty \Phi'_{cl}(\tau, t) Q_F \Phi_{cl}(\tau, t) d\tau,$$

$\Phi_{cl}(t, t_0)$ étant la matrice de transition du système en boucle fermée. Comme $\Phi_{cl}(t, t_0)$ est une matrice de rang complet et qu'elle est uniformément asymptotiquement stable [Lu00, Theorem 2.1], alors l'intégrale est supposée convergente et il est possible de choisir une valeur de Q_F telle que $F(t_0) \geq I$. Alors, pour tout $x(t_0)$, on a

$$x(t_0)' x(t_0) \leq x(t_0)' F(t_0) x(t_0).$$

En choisissant $c = 1$ dans la définition de l'ensemble $\mathcal{S}$, on peut voir que $x(t_0)'x(t_0) \leq 1$ est inclus dans l'ensemble invariant, qui est aussi contractif car la dérivée de la fonction de Lyapunov utilisée dans la démonstration de [Lu00, Theorem 4.1] est définie négative et car le système est linéaire [Bla94]. Alors, pour toute valeur fixée δ on garantit que $||x(t_{\ell+1})|| < ||x(t_\ell)||$. Il y a un compromis sur le choix de δ, car une valeur petite ne garantit pas forcément que $||x(t_{\ell+1})|| < ||x(t_\ell)||$ et une valeur trop grande n'est pas recommandée, selon [Lu00].

L'algorithme adapté de [Lu00] est présenté dans ce qui suit.

Algorithme 4.2

1. Choisir $\delta > 0$ et définir $t_\ell = t_0 + \ell\delta$;
2. Choisir des matrices constantes $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de telle sorte que $Q \geq 0$ et $R > 0$;
3. Choisir une valeur $0 < \epsilon < \delta$, relative à la grille temporelle utilisée dans la méthode, et attribuer $N = \delta/\epsilon$;
4. Pour chaque t_ℓ, faire :

   (a) Obtenir la matrice $S = [S_1 \; S_2 \; \cdots \; S_N]$ dont les éléments sont donnés par

   $$S_j = \sum_{k=j}^{N-1} \Delta'_k Q G_{k,j-1},$$

   Δ_k étant la matrice calculée à partir de la récurrence

   $$\Delta_k = (I + \epsilon A(t_\ell + (k-1)\epsilon))\Delta_{k-1}, \quad \Delta_0 = I$$

   et $G_{k,i}$ est la matrice donnée par

   $$G_{k,i} = (I + \epsilon A(t_\ell + (k-1)\epsilon))G_{k-1,i}, \quad G_{i+1,i} = \epsilon B(t_\ell + i\epsilon);$$

   (b) Calculer la matrice $M = [G_{N,0} \; \cdots \; G_{N,N-1}]$;

(c) Calculer la matrice $H = [H_{i,j}]$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, N$, dont les éléments sont obtenus par la procédure suivante :

- Si $i = j$, alors

$$H_{i,i} = aR + 2\sum_{k=i}^{N-1} G'_{k,i-1} Q G_{k,i-1},\ a = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1 \text{ ou } i = N \\ 0 & \text{autrement;} \end{cases}$$

- Sinon

$$H_{i,j} = 2 \sum_{k=\max(i,j)}^{N-1} G'_{k,i-1} Q G_{k,j-1};$$

(d) Calculer

$$v = -\left(\left(H^{-1} - H^{-1}M \left(M'H^{-1}M \right)^{-1} M'H^{-1} \right) S' + \left(H^{-1}M \left(M'H^{-1}M \right)^{-1} \right) \Delta_N \right);$$

(e) Calculer

$$K(t_\ell) = \mathrm{diag}\{I_{m\times m}, 0, \ldots, 0\} v = K(t) \quad \text{pour} \;\; t \in [t_\ell, t_{\ell+1}),$$

diag$\{\cdot\}$ étant une matrice bloc-diagonale.

La méthode de [Lu00] conçoit un gain de retour d'états qui minimise la somme de la norme des trajectoires commandées et l'effort de la commande, respectivement pondérés par les matrices Q et R. Comme il n'y a pas de contraintes particulières sur ces paramètres dans les exemples, on considére $Q = I$ et $R = I$ de dimensions appropriées.

4.4.2 Approche en temps discret

Le Théorème 4.3 propose un critère de stabilité basé sur l'utilisation d'un système LTV en temps discret, construit à partir des informations extraites du système original. Une condition de synthèse définie à partir de ce critère est introduite dans le théorème suivant.

Théorème 4.5 Considérons le système LTV en temps discret donné par

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(k)\hat{x}(k) + \hat{B}(k)\hat{u}(k), \tag{4.29}$$

avec $t_k = t_0 + k\delta$, $\hat{A}(k) = \Phi(t_{k+1}, t_k)$, $\hat{B}(k) = B(t_{k+1})$ et les matrices $\Phi(t,\tau)$ et $B(t)$ proviennent du système LTV en temps continu (4.1). Si la paire $\{A(t), B(t)\}$ est uniformément complètement contrôlable, alors il existe une valeur de $\delta > 0$ telle que le système est stabilisable par le gain de retour d'état constant par morceaux $u(t) = K(t)x(t)$, obtenu par

$$K(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta}\hat{K}(k)\Phi(t_k, t_{k+1}),\ t_k \le \tilde{t} < t_{k+1} \tag{4.30}$$

où $\hat{K}(k)$ est un gain discret de retour d'état que stabilise le système (4.29).

Démonstration : Le système en boucle fermée (4.29) s'écrit

$$\hat{x}(k+1) = (\hat{A}(k) + \hat{B}(k)\hat{K}(k))\hat{x}(k) = (\Phi(t_{k+1}, t_k) + \hat{B}(k)\hat{K}(k))\hat{x}(k) = \hat{A}_{cl}(k)\hat{x}(k).$$

Ce système possède une matrice de transition liée à la matrice de transition d'états du système continu en boucle fermée de la façon suivante

$$\Phi_{cl}(t_{k+1}, t_k) = \hat{A}_{cl}(k) \;\Rightarrow\; \Phi_{cl}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k) + \hat{B}(k)\hat{K}(k). \tag{4.31}$$

D'un autre côté, on peut montrer que la matrice $\Phi_{cl}(t+\delta, t)$ peut être écrite comme

$$\Phi_{cl}(t+\delta, t) = \Phi(t+\delta, t)M(t+\delta, t), \quad \frac{d}{d\delta}M(t+\delta, t) = \Phi(t, t+\delta)B(t+\delta)K(t+\delta)\Phi(t+\delta, t)$$

et, par conséquent,

$$\Phi_{cl}(t_{k+1}, t_k) = \Phi(t_{k+1}, t_k)M(t_{k+1}, t_k).$$

La comparaison de la dernière expression avec (4.31) résulte en

$$M(t_{k+1}, t_k) = I + \Phi(t_k, t_{k+1})\hat{B}(k)\hat{K}(k). \tag{4.32}$$

Alternativement, l'approximation de Taylor du premier ordre [Lu00] de la matrice $M(t+\delta, t)$ conduit, après quelques manipulations,

$$M(t_{k+1}, t_k) \approx I + \delta\Phi(t_k, t_{k+1})B(t_{k+1})K(t_{k+1})\Phi(t_{k+1}, t_k). \tag{4.33}$$

En comparant (4.32) avec (4.33), on peut constater que

$$\hat{B}(k) \approx B(t_{k+1}), \;\; K(t_{k+1}) \approx \frac{1}{\delta}\hat{K}(k)\Phi(t_k, t_{k+1}) \tag{4.34}$$

sont des approximations valides pour une valeur suffisamment petite de δ.

Pour finir la démonstration, il faut montrer que le gain de retour d'état (4.30) stabilise le système. Selon le Corollaire 4.3, le gain de retour d'état $K(t)$ stabilise les systèmes uniformément complètement contrôlables s'il est borné, ce qui est garanti par hypothèse, et si

$$x(t_{k+q})'x(t_{k+q}) < x(t_k)'x(t_k) \;\Rightarrow\; \Phi'_{cl}(t_k+\sigma, t_k)\Phi_{cl}(t_k+\sigma, t_k) < I, \quad \text{avec } \sigma = q\delta. \tag{4.35}$$

Selon [Rug96], le système (4.29) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe des constantes $\gamma > 0$ et $0 \leq \lambda < 1$ telles que

$$||\hat{\Phi}_{cl}(k, j)|| \leq \gamma\lambda^{k-j} \tag{4.36}$$

pour tout k, j avec $k \geq j$, $\hat{\Phi}_{cl}(k, j)$ étant la matrice de transition d'états du système discret en boucle fermée, égal à

$$\hat{\Phi}_{cl}(k, j) = \Phi_{cl}(t_k, t_j).$$

Comme le système discret en boucle fermée est censé d'être uniformément asymptotiquement stable, alors (4.36) est valide et, par conséquent, il existe une valeur $q \in \mathbb{Z}^+$ de telle sorte que $\sigma = q\delta$ satisfait

$$||\hat{\Phi}_{cl}(k+q, k)|| = ||\Phi_{cl}(t_k + q\delta, t_k)|| \leq \gamma\lambda^q < 1 \Rightarrow \Phi'_{cl}(t_k+\sigma, t_k)\Phi_{cl}(t_k+\sigma, t_k) < I. \tag{4.37}$$

Si δ est une valeur suffisamment petite telle que les approximations (4.34) sont valides, alors le système en boucle fermée avec le gain de retour d'état (4.30) satisfait les hypothèses du Théorème 4.3 et le système en temps continu (4.1) est uniformément asymptotiquement stable.

Selon le Théorème 4.5, le problème de stabiliser un système en temps continu sur un large horizon de temps peut être transformé dans le problème de stabiliser plusieurs systèmes en temps discret sur un petit horizon de temps. Les principaux avantages du Théorème 4.5 sont l'utilisation des techniques de stabilisation de systèmes en temps discret, en général plus simples que celles destinées aux systèmes en temps continu, et la possibilité de paralléliser l'algorithme. Par contre, le choix de la valeur de δ peut être difficile, car d'un côté δ doit être suffisamment petit pour que les approximations (4.34) soient valides, et de l'autre côté la réduction de la valeur de δ implique l'augmentation du coût de calcul associé.

Le Corollaire 4.2 peut aussi être adapté pour générer une condition de synthèse, comme exposé dans ce qui suit.

Corollaire 4.5 *Soient σ, δ et N des scalaires avec $0 < \delta \leq \sigma$, $N = \sigma/\delta$, $N \in \mathbb{Z}$. Pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}^+$, soit le système LTV en temps discret et périodique $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, donné par*

$$\hat{\mathcal{G}}_\ell(k) \quad : \quad \hat{x}(k+1) = \hat{A}_\ell(k)\hat{x}(k) + \hat{B}_\ell(k)\hat{u}(k), \tag{4.38}$$

avec

$$\begin{array}{l} \hat{A}_\ell(k) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta), \\ \hat{B}_\ell(k) = B(t_\ell + (k+1)\delta),\ k = 0, \ldots, N-1, \quad t_\ell = t_0 + \ell\sigma \\ \hat{A}_\ell(k) = \hat{A}_\ell(k + rN), \hat{B}_\ell(k) = \hat{B}_\ell(k + rN) \quad \forall r \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Si la paire $\{A(t), B(t)\}$ est uniformément complètement contrôlable, alors il existe des valeurs pour σ et δ de sorte que le système soit stabilisable par un gain constant par morceaux, soit $u(t) = K(t)x(t)$ exprimé par

$$K(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta}\hat{K}_\ell(k)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (k+1)\delta), \quad t_\ell + k\delta \leq \tilde{t} < t_\ell + (k+1)\delta,$$

où $\hat{K}_\ell(k)$ est un gain discret de retour d'état borné qui stabilise $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$.

Démonstration : Similaire à la démonstration du Théorème 4.5.

Le principal avantage du Corollaire 4.5 est que les méthodes conçues pour traiter la stabilisation des systèmes LTV en temps discret sont souvent numériquement plus simples que les méthodes en temps continu (voyez e.g. [dST00, EKH+09, BLA10]).

Adaptation de la méthode de [dST00]

L'algorithme suivant est la version adaptée de la méthode de [dST00, Theorem 1], pour construire un gain de retour d'état qui satisfait les conditions du Théorème 4.5.

Algorithme 4.3

1. Choisir $\sigma > 0$ et $0 < \delta \leq \sigma$;
2. Définir $N = \sigma/\delta$ et initialiser $\ell \leftarrow 0$;

3. Pour chaque $t_\ell = t_0 + \ell\sigma$:

   (a) Calculer la matrice $\Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell), k = 0, \ldots, N-1$, résultant de la résolution de l'équation différentielle (1.4) ou obtenue à partir d'une méthode numérique, par exemple la méthode présentée en [Lu00] ;

   (b) Obtenir des matrices finies $W_\ell(k) = W'_\ell(k)$ et $Y_\ell(k)$ de telle sorte que

$$\begin{bmatrix} W_\ell(k) & \star \\ \hat{A}_\ell(k)W_\ell(k) + \hat{B}_\ell(k)Y_\ell(k) & W_\ell(k+1) \end{bmatrix} < 0, \;\; k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.39}$$

   On a

$$\hat{A}_\ell(k) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell)^{-1};$$

   (c) $\tilde{K}_\ell(k) \leftarrow Y_\ell(k)W_\ell(k)^{-1}$;

   (d) Calculer

$$K_\ell(\tilde{t}) \leftarrow \frac{1}{\delta}\hat{K}_\ell(k)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (k+1)\delta), \quad t_\ell + k\delta \leq \tilde{t} < t_\ell + (k+1)\delta;$$

4. Si $K(t)$ stabilise asymptotiquement le système, arrêtez ; sinon, réduisez la valeur de δ ou augmentez la valeur de σ, et retournez au pas 1.

Pour l'utilisation de l'Algorithme 4.3, il faut dériver une heuristique pour chercher les bonnes valeurs pour σ et δ. Pour tous les systèmes considérés dans les tests, des valeurs autour de $\sigma = 1$ et $\delta = 0.1$ ont été suffisantes pour générer des contrôleurs stabilisants.

4.5 Synthèse des contrôleurs $\mathcal{H}_\infty$

Les approches de synthèse exposées dans les Sections 4.4.1 et 4.4.2 peuvent être adaptées pour traiter d'autres contraintes ou obtenir des contrôleurs avec certaines propriétés. La présente section introduit les adaptations nécessaires pour synthétiser des contrôleurs de sorte que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système

$$\mathcal{G}(t) \triangleq \begin{cases} \dot{x}(t) & = A(t)x(t) + B_w(t)w(t) + B(t)u(t) \\ z(t) & = C(t)x(t) + D_w(t)w(t) + D(t)u(t), \end{cases} \tag{4.40}$$

entre $w(t)$ et $z(t)$, soit bornée par une valeur γ prédéfinie.

4.5.1 Approche en temps continu

Le théorème suivant présente la synthèse des gains $\mathcal{H}_\infty$ de retour d'état en utilisant l'approche exposée au Théorème 4.4.

Théorème 4.6 Supposons que la paire $\{A(t), B(t)\}$ est uniformément complètement contrôlable et soit $\mathcal{T} = \{t_\ell\}_{\ell=0}^{L}$, $t_\ell = t_0 + \ell\delta$ une grille temporelle avec une valeur positive de δ. Si pour tout intervalle $t \in [t_\ell, t_{\ell+1})$ il est possible de trouver une loi de commande $u(t)$ de sorte que

$$\int_{t_\ell}^{t} \Big(||z(\tau)||^2 - \gamma^2 ||w(\tau)||^2 \Big) d\tau \leq 0, \ t_\ell \leq t < t_{\ell+1} \tag{4.41}$$

$$x(t_{\ell+1})' x(t_{\ell+1}) < x(t_\ell)' x(t_\ell) \tag{4.42}$$

$$||\Phi_{cl}(t+\tau, t)|| \leq \varphi(\tau), \ \forall t \tag{4.43}$$

pour une valeur prédéfinie de $\gamma > 0$, $\Phi_{cl}(t+\tau, t)$ étant la matrice de transition du système commandé et $\varphi(\cdot)$ une fonction uniformément bornée, alors la loi de commande $u(t)$ stabilise le système (4.40) avec un coût $\mathcal{H}_\infty$ garanti $||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \gamma$.

Démonstration : Selon le Théorème 4.4, les contraintes (4.42) et (4.43) garantissent la stabilité uniforme et asymptotique du système en boucle fermée. Supposons que $u(t)$ est construit telle que (4.41) soit valide pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$. Alors, selon la Propriété 1.7, la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée est bornée par $||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \gamma$.

Selon le Théorème 4.6, une façon de synthétiser des contrôleurs $\mathcal{H}_\infty$ avec des valeurs plus petites de γ pour systèmes LTV en temps continu est d'appliquer l'approche exposée dans le Théorème 4.4 avec une procédure pour minimiser la borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système sur un horizon fini de temps.

4.5.2 Approche en temps discret

Pour adapter l'approche de synthèse exposée à la Section 4.4.2, il faut considérer des systèmes LTV en temps discret donné par

$$\hat{\mathcal{G}}(k) \triangleq \begin{cases} \hat{x}(k+1) & = \hat{A}(k)\hat{x}(k) + \hat{B}_w(k)\hat{w}(k) + \hat{B}(k)\hat{u}(k) \\ \hat{z}(k) & = \hat{C}(k)\hat{x}(k) + \hat{D}_w(k)\hat{w}(k) + \hat{D}(k)\hat{u}(k) \end{cases} . \tag{4.44}$$

Les définitions pour la norme $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes en temps discret sont similaires aux définitions pour les systèmes en temps continu, comme le montre dans ce qui suit.

Définition 4.1 *Si le système* (4.44) *avec* $\hat{u}(k) = 0$ *est stable, alors la norme* $\mathcal{H}_\infty$ *est donnée par*

$$||\hat{\mathcal{G}}(k)||_\infty = \sup_{\hat{w} \in \mathcal{L}_2} \frac{||\hat{z}(k)||}{||\hat{w}(k)||} = \sup_{\hat{w} \in \mathcal{L}_2} \frac{|| \sum_{j=k_0}^{k-1} \hat{C}(k)\hat{\Phi}(k, j+1)\hat{B}_w(j)\hat{w}(j) + \hat{D}_w(k)\hat{w}(k)||}{||\hat{w}(k)||}$$

Définition 4.2 *Si le système* (4.44) *avec* $\hat{u}(k) = 0$ *est stable, alors l'inégalité*

$$||\hat{\mathcal{G}}(t)||_\infty \leq \hat{\gamma},$$

pour un certain scalaire $\hat{\gamma}$*, est équivalente à*

$$\sum_{r=k_0}^{k} \Big(||\hat{z}(r)||^2 - \hat{\gamma}^2 ||\hat{w}(r)||^2 \Big) \leq 0, \ \hat{w} \in \mathcal{L}_2, \ \forall k \geq k_0. \tag{4.45}$$

Corollaire 4.6 *À partir de la Définition 4.2, on peut montrer que une condition suffisante pour garantir* (4.45) *est*

$$||\hat{z}(k)||^2 - \hat{\gamma}^2||\hat{w}(k)||^2 \leq 0,\ \hat{w} \in \mathcal{L}_2,\ \forall k \geq k_0. \tag{4.46}$$

En plus, si le système est périodique de période N, alors il suffit de vérifier (4.46) *pour* $k = 0, \ldots, N-1$.

Théorème 4.7 Soient σ, δ et N des scalaires qui satisfont $0 < \delta \leq \sigma$, $N = \sigma/\delta$, $N \in \mathbb{Z}$. Pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}^+$ de sorte que $t_\ell = t_0 + \ell\sigma$, considérons le système LTV en temps discret et périodique $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$ défini par

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\ell(k) &= \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta), & \hat{B}_\ell(k) &= B(t_\ell + (k+1)\delta), \\
\hat{B}_{w\ell}(k) &= \sqrt{\delta} B_w(t_\ell + (k+1)\delta), & \hat{C}_\ell(k) &= \sqrt{\delta} C(t_\ell + (k+1)\delta), \quad k = 0, \ldots, N-1. \\
\hat{D}_\ell(k) &= D(t_\ell + (k+1)\delta), & \hat{D}_{w\ell}(k) &= D_w(t_\ell + (k+1)\delta).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

On considère que, pour chaque système $\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)$, on peut obtenir un gain stabilisant de retour d'état $\hat{K}_\ell(k)$ tel que $||\hat{\mathcal{G}}_\ell(k)||_\infty \leq \hat{\gamma}$ avec une valeur prédéfinie de $\hat{\gamma}$. Alors, si la paire $\{A(t), B(t)\}$ de (4.40) est uniformément complètement contrôlable, il existe une valeur de $\delta > 0$ de telle sorte que le système soit stabilisable par le gain de retour d'état constant par morceaux $u(t) = K(t)x(t)$, avec

$$K(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta}\hat{K}_\ell(k)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (k+1)\delta), \quad t_\ell + k\delta \leq \tilde{t} < t_\ell + (k+1)\delta \tag{4.48}$$

et la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système (4.40) en boucle fermée est bornée par $||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \hat{\gamma} + \epsilon(\delta)$ pour une certaine fonction $\epsilon(\cdot)$.

Démonstration : On considère que $\hat{K}_\ell(k)$ est un gain de retour d'état tel que (4.46) est valide pour une valeur donnée de $\hat{\gamma}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$. Alors, en utilisant des propriétés des systèmes LTV en temps discret [Rug96], la condition (4.46) peut être réécrite comme

$$\left|\left|\sum_{j=0}^{k-1} \hat{C}_\ell(k)\hat{\Phi}_{cl}(k, j+1)\hat{B}_{w\ell}(j)\hat{w}(j) + \hat{D}_{w\ell}(k)\hat{w}(k)\right|\right|^2 - \hat{\gamma}^2||\hat{w}(k)||^2 \leq 0, k = 0, \ldots, N-1,$$

où $\hat{\Phi}_{cl}(j, j+1)$ est la matrice de transition du système en boucle fermée. La dernière inégalité est valide pour tout $\tilde{\gamma} \geq \hat{\gamma}$ et est équivalente à

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\sum_{j=0}^{k-1} C(t_\ell + (k+1)\delta)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (j+1)\delta)B_w(t_\ell + (j+1)\delta)w(t_\ell + (j+1)\delta)\delta\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + D_w(t_\ell + (k+1)\delta)w(t_\ell + (k+1)\delta)\right|\right|^2 - \tilde{\gamma}^2||w(t_\ell + (k+1)\delta)||^2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Cette somme est une somme de Riemann [Ste08] et, par conséquent, pour $\delta \to 0$ on a

$$\left|\left|\int_{t_\ell}^{t} C(t)\Phi(t, \tau)B_w(\tau)w(\tau)d\tau + D_w(t)w(t)\right|\right|^2 - \tilde{\gamma}^2||w(t)||^2 \leq 0, \forall t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]$$

et $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$ satisfait l'inégalité. D'un autre côté, pour tout $\delta > 0$ la somme de Riemann ne correspond qu'à une approximation de l'intégrale. Dans ce cas, la condition (4.49) est équivalente à

$$\left|\left| \int_{t_\ell}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B_w(\tau)w(\tau)d\tau + f(t,\delta) + D_w(t)w(t) + g(t,\delta) \right|\right|^2 \\ - \tilde{\gamma}^2 ||w(t) + h(t,\delta)||^2 \leq 0, \forall t \in [t_\ell, t_{\ell+1}], \quad (4.50)$$

où $f(t,\delta)$, $g(t,\delta)$ et $h(t,\delta)$ sont les erreurs entre, respectivement, l'intégrale, les variables $D_w(t)w(t)$ et $w(t)$ et les respectives approximations discretes. Remarquez que, comme $w \in \mathcal{L}_2$ et $\hat{w} \in \mathcal{L}_2$, la valeur $h(t,\delta)$ peut être négligée dans l'analyse de pire cas. Le membre gauche de l'inégalité (4.50) est alors borné supérieurement par

$$\left|\left| \int_{t_\ell}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B_w(\tau)w(\tau)d\tau + D_w(t)w(t) \right|\right|^2 + ||f(t,\delta) + g(t,\delta)||^2 - \tilde{\gamma}^2||w(t)||^2. \quad (4.51)$$

En raison de $||f(t,\delta) + g(t,\delta)||^2$, l'expression (4.51)) n'est plus garantie d'être négative pour $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma}$. Pourtant, les fonctions $f(t,\delta)$ et $g(t,\delta)$ sont bornées pour des valeurs fixées de δ si les matrices du système sont supposées intégrables. Alors, il y a une fonction $\epsilon(\delta)$ de telle sorte que $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} + \epsilon(\delta)$ satisfasse (4.51) et, si la dernière affirmation est valide pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, on a $||\mathcal{G}(t)||_\infty \leq \hat{\gamma} + \epsilon(\delta)$.

Adaptation de la méthode de [dST00]

L'algorithme présenté dans la suite est basé sur des résultats de [dST00, Theorem 1].

Algorithme 4.4

1. Choisir $\sigma > 0$, $0 < \delta \leq \sigma$ et $\hat{\gamma} > 0$;
2. Définir $N = \sigma/\delta$ et initialiser $\ell \leftarrow 0$;
3. Pour chaque $t_\ell = t_0 + \ell\sigma$:
   (a) Calculer la matrice $\Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell), k = 0, \ldots, N-1$, résultant de la résolution de l'équation différentielle (1.4) ou obtenue à partir d'une méthode numérique, par exemple la méthode présentée en [Lu00] ;
   (b) Obtenir des matrices $W_\ell(k) = W_\ell'(k)$ et $Y_\ell(k)$ de telle sorte que

$$\begin{bmatrix} W_\ell(k) & W_\ell(k)\hat{A}_\ell'(k) + Y_\ell'(k)\hat{B}_\ell'(k) & W_\ell(k)\hat{C}_\ell'(k) + Y_\ell'(k)\hat{D}_\ell'(k) & 0 \\ \star & W_\ell(k+1) & 0 & \hat{B}_{w\ell}(k) \\ \star & \star & I & \hat{D}_{w\ell}(k) \\ \star & \star & \star & \hat{\gamma}^2 I \end{bmatrix} > 0, \\ k = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (4.52)$$

   On a

$$\hat{A}_\ell(k) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell + k\delta) = \Phi(t_\ell + (k+1)\delta, t_\ell)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell)^{-1};$$

(c) $\tilde{K}_\ell(k) \leftarrow Y_\ell(k)W_\ell(k)^{-1}$;

(d) Calculer

$$K_\ell(\tilde{t}) \leftarrow \frac{1}{\delta}\hat{K}_\ell(k)\Phi(t_\ell + k\delta, t_\ell + (k+1)\delta), \quad t_\ell + k\delta \leq \tilde{t} < t_\ell + (k+1)\delta;$$

4. Si $K(t)$ stabilise asymptotiquement le système, arrêter ; sinon, réduire la valeur de δ ou augmenter la valeur de σ, et retourner au pas 1.

4.6 Exemples numériques

4.6.1 Exemple I

Pour tous les exemples de ce chapitre, les programmes ont été implémentées sur MATLAB, version 7.0.1 (R14), et l'ordinateur utilisé est un AMD® Phenom II Quad Core 945 (3.0 GHz), 3.2GB RAM, Linux Ubuntu 9.04. Le système analysé dans le premier exemple a été introduit à l'article [LC05] et est donné par

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2 & 0 \\ 0 & 2 & e^{-3t} \\ e^{-t} & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{-t} \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} u(t) \\
z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + w(t) \\
y(t) &= x(t).
\end{aligned}$$

L'instabilité du système, comme la contrôlabilité complète et uniforme de la paire $\{A(t), B(t)\}$, sont montrées dans [LC05].

D'abord, les résultats obtenus avec l'application de l'Algorithme 4.1 sont proposés. Les gains stabilisants de retour d'états ont été calculés en considérant $\delta = 1$, $N = 50$ et $\beta \in \{0.05, 0.1, 1\}$. La Figure 4.1 montre les fonctions $\rho_{cl}(t)$, calculées à partir du Théorème 1.5, qui correspondent aux enveloppes des normes de toutes les possibles trajectoires du système en boucle fermée qui partent des états initiaux $x(t_0)$ et tels que $||x(t_0)|| < 1$. Remarquez que la valeur maximale de la fonction $\rho_{cl}(t)$ est plus grande avec les valeurs les plus petites de β. En effet, selon (4.2), une réduction de la valeur de β implique la réduction de la borne du taux de variation de la fonction de Lyapunov, ce qui peut se répercuter par une hausse de la valeur maximale des normes des trajectoires [LP02, LP04]. La Figure 4.2 montre le gain $K_\delta(t)$ obtenu avec $\beta = 1$.

Les Algorithmes 4.2 et 4.3 sont aussi capables de générer des gains stabilisants. L'Algorithme 4.2 a été appliqué avec $\{\epsilon = 0.01, \delta = 0.1\}$ et $\{\epsilon = 0.1, \delta = 1\}$. La Figure 4.3 montre les fonctions $\rho_{cl}(t)$ obtenues avec les deux valeurs considérées pour δ, et les éléments des gains résultants sont montrés dans la Figure 4.4. Notez que l'augmentation de la valeur de δ conduit à la décroissance de la norme des gains de retour d'état, et les trajectoires convergent plus lentement vers l'origine. Cet effet était attendu car la méthode présentée en [Lu00] consiste en la minimisation de l'énergie de la loi de commande et la norme des trajectoires en boucle fermée, de sorte que le système soit pratiquement stable après un intervalle δ de temps. L'utilisation de petites valeurs de δ implique des conditions plus contraintes pour la stabilisation et, dans la plupart des cas, une loi de commande de plus grande norme. D'un autre côté, dans la démonstration du Théorème 4.4 il est clair que l'application de grandes valeurs pour δ ne garantit pas forcément la stabilité du système en boucle fermée. Comme les dimensions des matrices

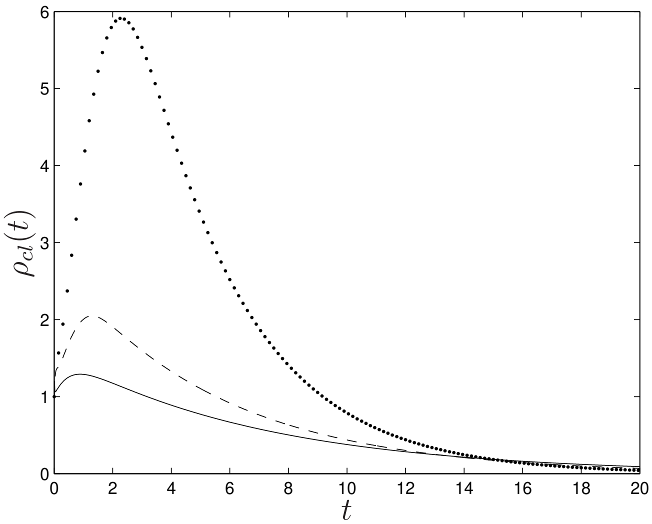

FIGURE 4.1 – Fonctions $\rho_{cl}(t)$ obtenues pour l'Exemple I pour le système en boucle fermée avec les gains de retour d'état $K_\delta(t)$ résultant de l'application de l'Algorithme 4.1, avec $\beta = 0.05$ (courbe en pointillés), $\beta = 0.1$ (courbe en tirets) et avec $\beta = 1$ (courbe continue).

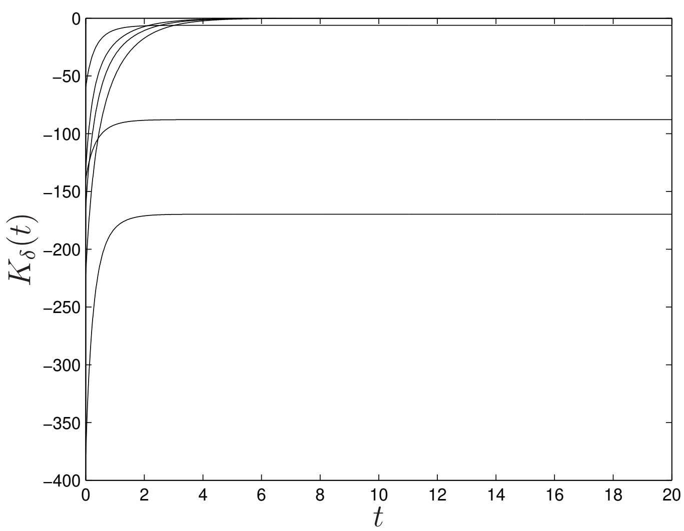

FIGURE 4.2 – Éléments du gain $K_\delta(t)$ résultant de l'application de l'Algorithme 4.1 à l'Exemple I avec $\beta = 1$.

construites à l'Algorithme 4.2 sont proportionnelles à δ/ϵ, il est important de choisir des valeurs appropriées de δ et ϵ pour que les matrices n'aient pas des dimensions trop grandes. Notez aussi que l'augmentation de δ a réduit la valeur maximale de $\rho_{cl}(t)$. Pour l'Algorithme 4.3, les paramètres ont été choisis comme $N = 20$ et $\sigma = \{0.5, 1\}$. Les fonctions $\rho_{cl}(t)$ sont représentées sur la Figure 4.5, et la Figure 4.6 montre les éléments des gains obtenus.

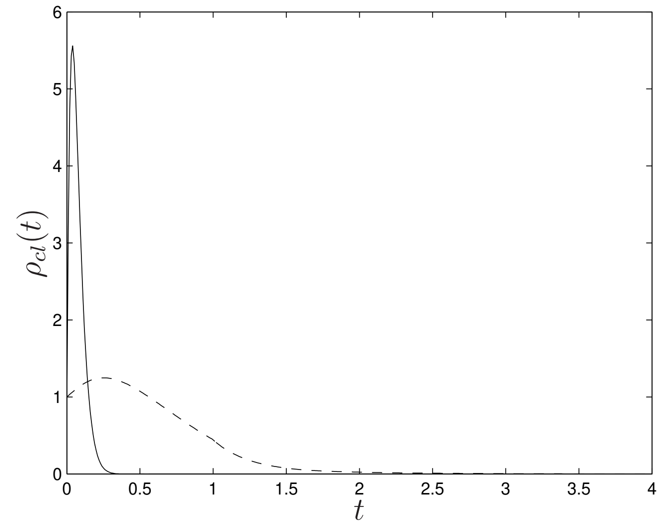

FIGURE 4.3 – Fonctions $\rho_{cl}(t)$ obtenues pour l'Exemple I pour le système en boucle fermée avec les gains de retour d'état $K(t)$ résultant de l'application de l'Algorithme 4.2, avec $\delta = 1$ (courbe en tirets) et avec $\delta = 0.1$ (courbe continue).

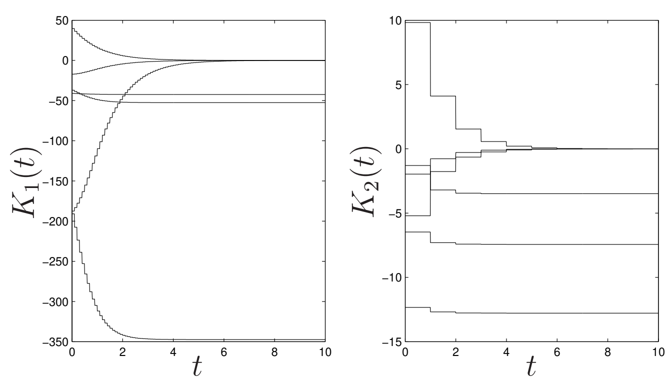

FIGURE 4.4 – Éléments des gains $K(t)$ résultants de l'application de l'Algorithme 4.2 à l'Exemple I. Le gain $K_1(t)$ correspond à l'utilisation de $\delta = 0.1$ et $K_2(t)$ correspond à $\delta = 1$.

Considérons le problème de stabiliser le système en minimisant la borne γ de la norme $\mathcal{H}_\infty$. Le système présenté dans cet exemple ne peut pas être modélisé par l'approche LPV car les éléments variants dans le temps ne sont pas bornés pour tout t. Par conséquent, une façon de construire des gains stabilisants en minimisant la borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ est donnée par l'application de l'Algorithme 4.4. La Table 4.1 montre les valeurs minimales des bornes obtenues en utilisant tous les combinaisons de $\sigma = \{0.5, 1\}$ et $N = \{10, 20, 30\}$. Les valeurs montrées dans la table sont obtenues par la minimisation de $\hat{\gamma}$ dans l'Algorithme 4.4 à chaque t_ℓ, et $\hat{\gamma}^*$ correspond à la

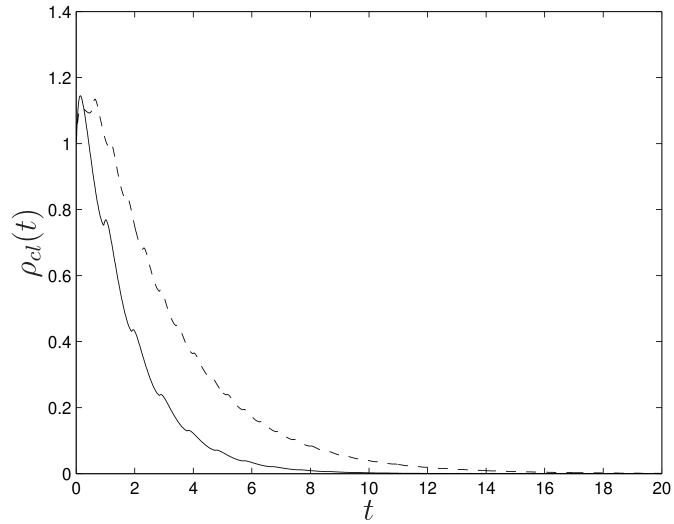

FIGURE 4.5 – Fonctions $\rho_{cl}(t)$ obtenues pour l'Exemple I pour le système en boucle fermée avec les gains de retour d'état $K(t)$ résultant de l'application de l'Algorithme 4.3, avec $\sigma = 0.5$ (courbe en tirets) et avec $\sigma = 1$ (courbe continue).

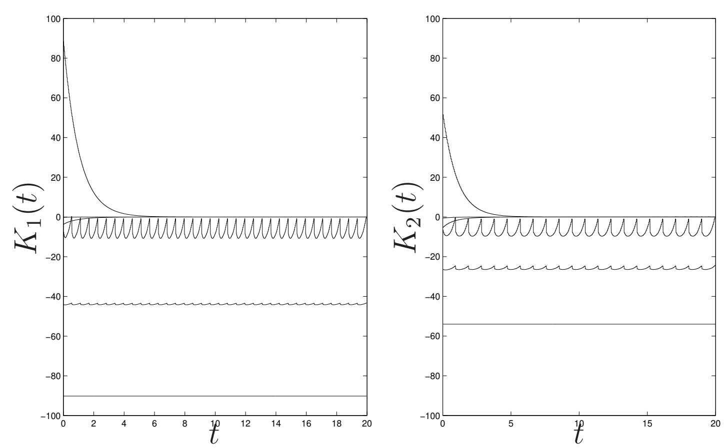

FIGURE 4.6 – Éléments des gains $K(t)$ résultant de l'application de l'Algorithme 4.3 à l'Exemple I. Chaque courbe représente un des éléments de $K(t) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Le gain $K_1(t)$ correspond à l'utilisation de $\sigma = 0.5$ et $K_2(t)$ correspond à $\sigma = 1$.

valeur maximale des $\hat{\gamma}$. Notez que les valeurs de $\hat{\gamma}^*$ réduisent avec l'augmentation de N et avec la décroissance de σ, au prix d'augmenter le nombre de LMIs à résoudre et, par conséquent, le coût de calcul.

TABLE 4.1 – Valeurs des bornes γ pour la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système de l'Exemple I en boucle fermée après l'application de l'Algorithme 4.4.

$N = 10$, $\sigma = 1$	$\hat{\gamma}^* = 1.0236$
$N = 20$, $\sigma = 1$	$\hat{\gamma}^* = 1.0054$
$N = 30$, $\sigma = 1$	$\hat{\gamma}^* = 1.0021$
$N = 10$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.0054$
$N = 20$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.0010$
$N = 30$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.0003$

4.6.2 Exemple II

Pour le deuxième exemple, considérons le système périodique, avec période $T = \pi$, utilisé dans [Kha02, GPT10] et donné par

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 + 1.5\cos^2(t) & 1 - 1.5\sin(t)\cos(t) \\ -1 - 1.5\sin(t)\cos(t) & -1 + 1.5(1-\cos^2(t)) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ -\sin(t)(\cos(t) + 3\sin(t)) \end{bmatrix} u(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + w(t) \\ y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

On a obtenu aucune valeur entière de ℓ qui satisfait les conditions du Corollaire 4.1, le système est donc considéré instable. L'instabilité du système peut être confirmée dans [GPT10], et la contrôlabilité de la paire $\{A(t), B(t)\}$ est vérifiée par la Propriété 1.6.

Les éléments du gain stabilisant de retour d'état $K_\delta(t)$ résultant de l'emploi de l'Algorithme 4.1, avec $\delta = T = \pi$, $N = 50$ et $\beta = 1$, sont montrés dans la Figure 4.7, et la Figure 4.8 illustre les enveloppes $\rho_{cl}(t)$ des trajectoires en boucle fermée en considérant $\beta \in \{0.1, 1, 10\}$. Remarquez que la taux de décroissance de $\rho_{cl}(t)$ augmente avec la valeur de β ; par contre, des valeurs de $\beta > 10$ donnent pratiquement le même résultat que $\beta = 10$.

Les Algorithmes 4.2 et 4.3 sont aussi capables de générer des gains stabilisants. L'Algorithme 4.2 a été appliqué avec $\{\epsilon = 0.1, \delta = 1\}$ et $\{\epsilon = 0.1, \delta = 5\}$. La Figure 4.9 montre les fonctions $\rho_{cl}(t)$ obtenues avec les deux valeurs considérées pour δ, et les gains résultant sont montrés dans la Figure 4.10. Notez que, comme à l'Exemple I, l'augmentation de δ conduit à la décroissance de la norme des gains de retour d'état, mais dans ce cas les trajectoires ne vont pas considérablement plus vite vers l'origine avec des gains de plus grande norme. Pour l'Algorithme 4.3, on a considéré $N = 20$ et $\sigma = \{0.5, \pi\}$. Les fonctions $\rho_{cl}(t)$ sont représentées sur la Figure 4.11, et la Figure 4.12 montre les gains obtenus.

Considérons maintenant le problème de stabiliser le système en minimisant la borne γ de la norme $\mathcal{H}_\infty$. La Table 4.2 montre les valeurs minimales des bornes obtenues en appliquant l'Algorithme 3.1 et l'Algorithme 4.4, où le dernier a été appliqué avec toutes les combinaisons de $\sigma = \{\pi, 0.5\}$ et $N = \{10, 20, 30\}$. Le modèle LPV a été obtenu en considérant $\theta_1(t) = \cos^2(t)$ et $\theta_2(t) = \sin(t)\cos(t)$, l'Algorithme 3.1 a été appliqué avec $\xi = 0.1$ à la première étape et le résultat correspond à une itération de la procédure itérative. Notez que, comme pour l'Exemple I, les bornes des normes obtenues avec l'Algorithme 4.4 réduisent avec l'augmentation de N et avec la décroissance de σ. Il est important de remarquer que la borne résultant de la méthode

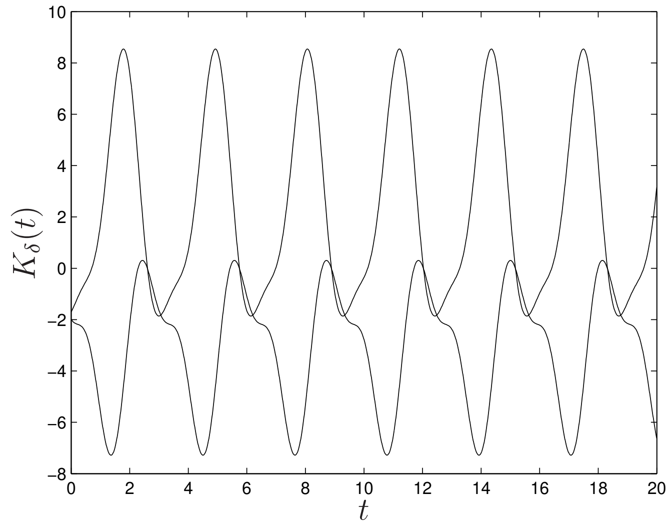

FIGURE 4.7 – Éléments du gain $K_\delta(t)$ résultant de l'application de l'Algorithme 4.1 à l'Exemple II avec $\beta = 1$.

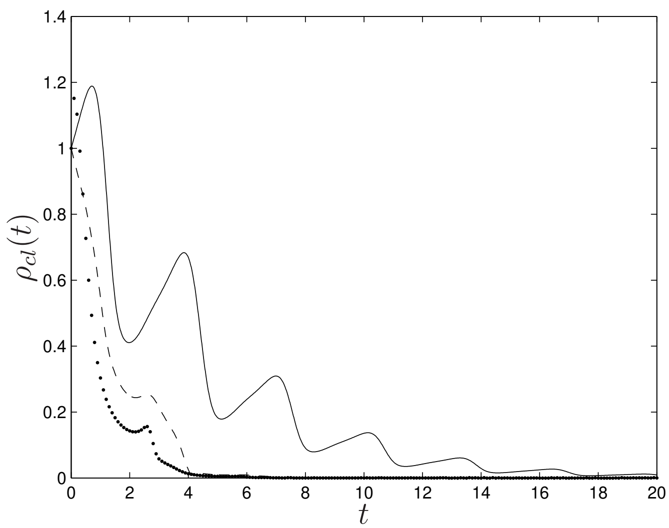

FIGURE 4.8 – Fonctions $\rho_{cl}(t)$ obtenues pour l'Exemple II pour le système en boucle fermée avec les gains de retour d'état $K_\delta(t)$ résultant de l'Algorithme 4.1, avec $\beta = 0.1$ (courbe continue), $\beta = 1$ (courbe en tirets) et avec $\beta = 10$ (courbe en pointillés).

LPV est considérablement plus grande que les valeurs de $\hat{\gamma}^*$ générées par l'approche LTV, ce qui était attendu, puisque la modélisation sous forme LPV fait perdre des informations (on ne considére que les bornes des paramètres et de leurs taux de variation).

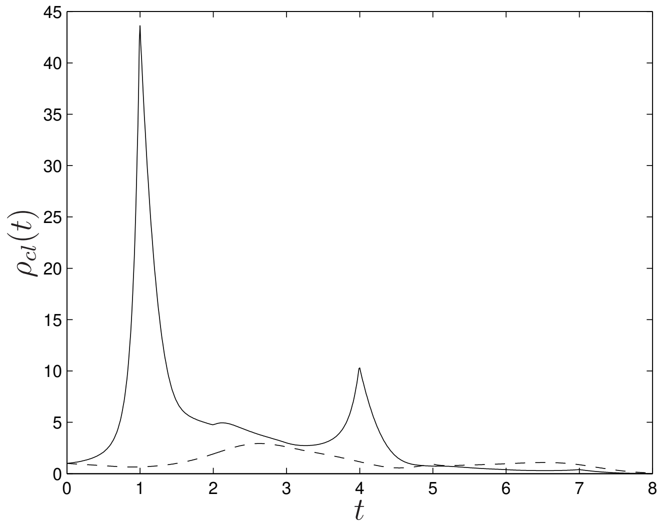

FIGURE 4.9 – Fonctions $\rho_{cl}(t)$ obtenues pour l'Exemple II pour le système en boucle fermée avec les gains de retour d'état $K(t)$ résultant de l'application de l'Algorithme 4.2, avec $\delta = 1$ (courbe continue) et avec $\delta = 5$ (courbe en tirets).

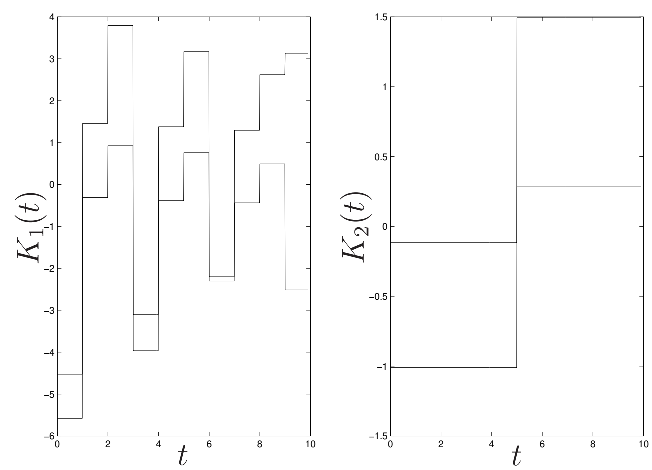

FIGURE 4.10 – Éléments des gains $K(t)$ résultants de l'application de l'Algorithme 4.2 à l'Exemple II. Le gain $K_1(t)$ correspond à l'utilisation de $\delta = 1$ et $K_2(t)$ correspond à $\delta = 5$.

4.7 Conclusion

Des méthodes pour la synthèse de lois de commande stabilisantes pour des systèmes linéaires variants dans le temps ont été introduites dans ce chapitre. La première méthode consiste dans l'utilisation des informations de la matrice de transition d'états pour la construction d'un gain de retour d'états, qui stabilise le système s'il est uniformément complètement contrôlable et si

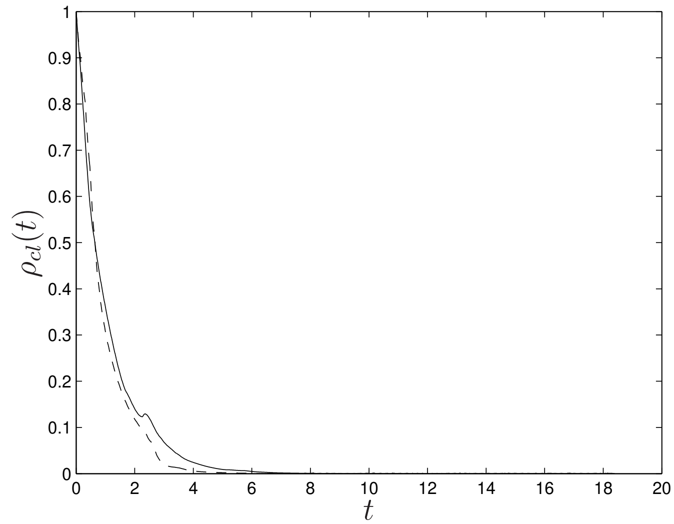

FIGURE 4.11 – Fonctions $\rho_{cl}(t)$ obtenues pour l'Exemple II pour le système en boucle fermée avec les gains de retour d'état $K(t)$ résultant de l'application de l'Algorithme 4.3, avec $\sigma = \pi$ (courbe en tirets) et avec $\sigma = 0.5$ (courbe continue).

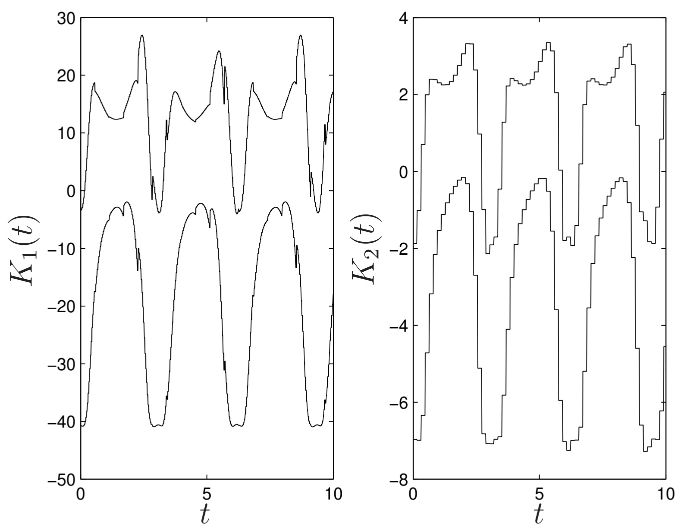

FIGURE 4.12 – Éléments des gains $K(t)$ résultants de l'application de l'Algorithme 4.3 pour l'Exemple II. Le gain $K_1(t)$ correspond à l'utilisation de $\sigma = 1$ et $K_2(t)$ correspond à $\sigma = \pi$.

une condition d'observabilité est satisfaite. La construction de ce gain est relativement simple et rapide, mais le choix des paramètres pour satisfaire les conditions n'est pas évident. Les autres méthodes sont basées sur un critère de vérification de la stabilité introduit dans le chapitre, qui consiste basiquement à vérifier les valeurs d'une fonction obtenue à partir de la matrice de

TABLE 4.2 – Valeurs des bornes γ pour la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système de l'Exemple II en boucle fermée après l'application des Algorithmes 3.1 et 4.4.

Algorithme 3.1	$\gamma = 10.88$	
Algorithme 4.4	$N = 10$, $\sigma = \pi$	$\hat{\gamma}^* = 1.17$
	$N = 20$, $\sigma = \pi$	$\hat{\gamma}^* = 1.17$
	$N = 30$, $\sigma = \pi$	$\hat{\gamma}^* = 1.06$
	$N = 10$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.03$
	$N = 20$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.03$
	$N = 30$, $\sigma = 0.5$	$\hat{\gamma}^* = 1.02$

transition calculée sur un horizon de temps fini. Les principaux avantages de ce critère concernent son adaptabilité dans des méthodes numériques, grâce à la possibilité de parallélisation. Deux techniques conçues en adaptant le critère pour synthétiser des contrôleurs stabilisants ont été exposées. La première technique consiste à appliquer des méthodes de stabilisation en temps fini. Ces méthodes sont, en général, simples à implémenter et la stabilité asymptotique est garantie seulement si les méthodes sont utilisées avec la technique proposée. Pour la deuxième technique, des systèmes discrets et périodiques sont construits à partir des informations du système original, et les gains synthétisés pour stabiliser les systèmes discrets sont modifiés pour garantir la stabilité du système continu original. Les deux techniques ont été adaptées pour le calcul d'une borne γ pour la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert entre une perturbation et une sortie. Dans les exemples, les comportements des trajectoires en boucle fermée avec les gains construits par les méthodes proposées ont été montrés, ce qui illustre les capacités de chaque technique. L'adaptation discrete pour la commande $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée a été comparée avec la technique LPV exposée au Chapitre 3. Comme attendu, l'utilisation de l'approche LTV dans le cas où le système est bien connu donne des résultats meilleurs qu'avec l'approche LPV.

Conclusions

Le principal objectif de cette thèse a été le développement de techniques pour la synthèse de lois de commande stabilisantes pour des systèmes linéaires en temps continu, en considérant la minimisation d'une borne pour la norme $\mathcal{H}_\infty$ du système en boucle fermée comme critère de performance. Les techniques présentées dans la thèse, qui sont capables de traiter une bonne partie de la classe de systèmes linéaires en temps continu, sont divisées en trois catégories : les systèmes en temps invariants (LTI) qui présentent des éléments et des paramètres incertains, dont les bornes des telles incertitudes sont connues ; les systèmes à paramètres incertains et variants dans le temps (LPV) ; et les systèmes linéaires précisément connus et variants dans le temps (LTV).

Pour les systèmes LTI, on cherche des contrôleurs dynamiques robustes (*i.e.*, qui ne sont pas dépendants des paramètres incertains) et d'ordre réduit capables de stabiliser les systèmes en minimisant une borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$. Une procédure d'augmentation du système est appliquée pour que le problème de synthèse d'un contrôleur dynamique soit réduit à un problème de synthèse d'un gain statique, et la synthèse est réalisée à partir d'une approche en deux étapes. Cette approche consiste à la construction d'un gain de retour d'état à la première étape, et son utilisation ultérieure dans une deuxième étape pour construire le gain de retour de sortie souhaité. Une fois que les incertitudes sont modélisées de façon polytopique, chaque étape peut être exécutée en résolvant des conditions LMIs, ce qui peut être fait facilement facile grâce à des outils numériques efficaces. Chaque variable des LMIs peut être modélisée comme un polynôme homogène de degré arbitraire, et grâce à un parser développé spécifiquement pour résoudre ce genre de problème, on peut jouer sur les degrés des variables sans grand effort de programmation. Le paquet peut aussi être considéré comme une contribution de cette thèse. En plus de l'adaptation de la méthode à deux étapes pour la synthèse des contrôleurs dynamique robustes, une autre contribution de cette thèse est le développement d'une procédure itérative, qui peut être utilisée pour améliorer un certain critère de performance, comme la minimisation d'une borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$. La procédure basiquement consiste, dans chaque itération, à obtenir un gain de retour d'état à partir de la multiplication du gain de retour de sortie par la matrice de sortie du système, et son application à la condition de la deuxième étape. La convergence de la borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ vers une valeur sous-optimale est garantie.

Une série d'exemples illustre la validité et les capacités de la méthode en deux étapes avec la procédure itérative, et les résultats obtenus sont meilleurs que ceux obtenus par d'autre méthodes bien connues de la littérature. En plus, l'approche présentée est plus versatile que la plupart des autres techniques, étant donné qu'elle est capable de traiter des incertitudes dans toutes les matrices du système, et qu'il est possible d'obtenir des contrôleurs d'ordre réduit, et pas seulement des contrôleurs d'ordre plein.

La méthode en deux étapes peut aussi être adaptée pour traiter les systèmes LPV. Pour ce genre de système, on suppose qu'un sous-ensemble des paramètres est mesurable en ligne, pour qu'on puisse concevoir un contrôleur dynamique dépendant de ces paramètres, qui peut être meilleur qu'un contrôleur robuste par rapport à la performance et à la généralité. Toutefois, dans des applications pratiques, les capteurs ne sont pas complètement exacts et on a toujours des bruits dans la mesure des paramètres. Afin de traiter ce genre de problème et de produire des contrôleurs robustes aux problèmes de mesure, les étapes de synthèse sont adaptées pour considérer des bruits additifs ou multiplicatifs, qui sont incorporés aux conditions LMI en utilisant l'approche multi-simplexe. Les résultats obtenus peuvent confirmer que la méthode en deux étapes avec la procédure itérative, adaptées pour traiter le cas LPV, sont efficaces également pour ce genre de problème. Particulièrement, les résultats vérifiés aux exemples, par rapport aux bornes de la norme $\mathcal{H}_\infty$, ne sont pas considérablement dégradés avec l'augmentation des bruits de mesures.

Finalement, deux approches différentes pour stabiliser les systèmes LTV ont été présentées. La première approche consiste à utiliser la matrice de transition d'états du système en boucle ouverte pour construire un gain de retour d'état, qui est capable de stabiliser des systèmes uniformément complètement contrôlables si une condition d'observabilité est satisfaite. La matrice de transition utilisée est construite en considérant une fenêtre de temps constante. Bien que cette matrice soit relativement facile à obtenir par des procédures numériques et que les exemples numériques aient prouvé que cette approche est effective, on peut avoir des problèmes sur le choix de la taille de la fenêtre de temps pour calculer la matrice de transition, et il n'est pas clair comment on peut adapter cette méthode pour considérer des critères de performance.

Une analyse plus approfondie de la matrice de transition construite dans une fenêtre de temps constante a inspiré le développement d'un nouveau critère de vérification de la stabilité des systèmes LTV. Ce critère consiste à vérifier si, pour chaque instant de temps, la norme des états décroît après une période finie de temps, indépendamment du comportement pendant cette période. Les plus grands avantages d'un tel critère sont d'ordre numérique, parce qu'il est possible de tester la stabilité du système en analysant des intervalles de temps finis, avec une procédure qui peut être parallélisée. En plus, ce critère peut être utilisé pour vérifier la stabilité du système LTV en temps continue à partir de l'analyse d'une série de systèmes LTV périodiques en temps discret, construite à partir du système original. L'adaptation d'un tel critère pour la synthèse de lois de commande stabilisantes correspond à la deuxième approche de synthèse présentée, et cette technique peut être utilisée de deux différentes manières : soit on considère le système LTV original et on applique une méthode de stabilisation en temps fini, soit on calcule les lois de commande stabilisantes pour une série de systèmes LTV périodiques en temps discret. Ces approches peuvent être modifiées pour considérer des critères de performance, comme la minimisation de la borne de la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un transfert particulier, et les exemples numériques illustrent la validité et l'efficacité de ces méthodes.

Il a été également montré que les systèmes LTV peuvent être modélisés comme des systèmes LPV, si les termes variants dans le temps sont bornés pour tous les instants de temps. Après l'analyse des normes $\mathcal{H}_\infty$ en boucle fermée avec les gains calculés par les méthodes LTV et LPV dans quelques exemples numériques, on peut conclure que, si on peut choisir entre les deux approches, les méthodes LTV conduisent à des meilleurs résultats. En effet, dans la modélisation du système LPV, on ne prend compte que des données sur les bornes des paramètres et des taux de variation et, par conséquent, on a une perte d'information qui peut conduire à des résultats plus conservateurs. Par exemple, l'approche LPV ne considère pas si un paramètre varie comme une fonction sinus ou cosinus, seulement ses bornes et la borne de ses taux de variation sont utilisées. Par contre, si on ne dispose pas de beaucoup d'informations sur les paramètres, il n'est pas possible d'utiliser les méthodes LTV, et l'approche LPV est plus appropriée.

Les contributions de cette thèse encouragent des recherches plus approfondies sur les sujets présentés. Parmi les travaux futurs envisagés, on peut lister :

- Une plus grande compréhension de la méthode en deux étapes, par rapport aux effets des gains de retour d'état déterminés à la première étape sur les gains de retour de sortie obtenus dans la deuxième étape, pour qu'on soit capable de construire des gains optimaux ;
- Le développement du paquet computationnel développé pour qu'il puisse traiter le cas multi-simplexe, ce qui donnerait une plus grande flexibilité aux conditions de synthèse de systèmes LPV, ainsi que pour les conditions des systèmes LTI ;
- L'amélioration de la méthode LTV basée sur la matrice de transition fenêtrée, de manière à l'adapter pour inclure des niveaux de performance, et définir de manière systématique la taille de la fenêtre de temps considérée ;
- L'amélioration du nouveau critère de vérification de la stabilité des systèmes LTV et des méthodes de synthèse basées sur ce critère, principalement dans le sens de les adapter pour la construction des contrôleurs dynamiques d'ordre réduit.

Articles publiés

- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira et Pedro L. D. Peres, Robust $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. American Control Conference, 2010, Baltimore, MD, USA, pg. 4677–4682 ;
- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira et Pedro L. D. Peres, Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. 49th IEEE Conference on Decision and Control, 2010, Atlanta, GA, USA, pg. 6894–6901 ; ;
- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira et Pedro L. D. Peres, Novas condições LMI para projeto de controladores estáticos mistos $\mathcal{H}_2$-$\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de saída para sistemas politópicos contínuos invariantes no tempo. Congresso Brasileiro de Automática - XVIII CBA 2010, Bonito, MS, Brasil ;
- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira et Pedro L. D. Peres, LMI relaxations for reduced-order robust control of continuous-time uncertain linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, pg. 1532–1537, 2012 ;
- Cristiano M. Agulhari, Germain Garcia, Sophie Tarbouriech et Pedro L. D. Peres, A numerical procedure to compute stabilizing state feedback gains for linear time-varying periodic systems. 7th IFAC Symposium on Robust Control Design - ROCOND 2012, Aalborg, Denmark, pg. 678–683 ;
- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira et Pedro L. D. Peres, Síntese de controladores escalonados $\mathcal{H}_\infty$ de ordem reduzida para sistemas politópicos contínuos e variantes no tempo. Congresso Brasileiro de Automática - XIX CBA 2012, Campina Grande, PB, Brasil ;

- Cristiano M. Agulhari, Ricardo C. L. F. Oliveira et Pedro L. D. Peres, Robust LMI Parser : A Computational Package to Construct LMI Conditions for Uncertain Systems. Congresso Brasileiro de Automática - XIX CBA 2012, Campina Grande, PB, Brasil.

Appendice

Bornitude de la solution de l'équation différentielle de Riccati

Dans la démonstration du Théorème 4.1 il est affirmé que, étant donné

$$\frac{d}{dt}X_{cl}(t,t_0) = A(t)X_{cl}(t,t_0) + X_{cl}(t,t_0)A'(t) - \beta B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0)$$
$$- \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t),\ X_{cl}(t_0,t_0) = I, \quad (4.53)$$

alors la matrice $P(t,t_0)$ solution de

$$\frac{d}{dt}P(t,t_0) = A(t)P(t,t_0) + P(t,t_0)A'(t) + B(t)B'(t)$$
$$+ \beta^2 P(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}P(t,t_0)\ ,\ P(t_0,t_0) \geq I \quad (4.54)$$

satisfait

$$X_{cl}(t,t_0) \leq P(t,t_0).$$

Pour démontrer la validité de la dernière affirmation, il suffit de vérifier que la variable $\Delta(t,t_0)$, égal à

$$\Delta(t,t_0) = X_{cl}(t,t_0) - P(t,t_0),$$

est semi-définie négative pour tout $t \geq t_0$. En utilisant (4.53) et (4.54), on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta(t,t_0) =& A(t)\Delta(t,t_0) + \Delta(t,t_0)A'(t) - \beta B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0)\\ &- \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t) - B(t)B'(t)\\ &- \beta^2 P(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}P(t,t_0).\end{aligned}$$

En remplaçant par $P(t,t_0) = X_{cl}(t,t_0) - \Delta(t,t_0)$ et en introduisant

$$G(t,t_0,\delta) = -\beta B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0) - \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t) - B(t)B'(t),$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta(t,t_0) = A(t)\Delta(t,t_0) + \Delta(t,t_0)A'(t) + G(t,t_0,\delta)\\ - \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0)\\ + \beta^2\Delta(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0)\\ + \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}\Delta(t,t_0)\\ - \beta^2\Delta(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}\Delta(t,t_0).\end{aligned} \tag{4.55}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}G(t,t_0,\delta) - \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}X_{cl}(t,t_0)\\ = -\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)\big)\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)\big)',\end{aligned} \tag{4.56}$$

on peut voir que (4.55) peut être réécrite comme

$$\frac{d}{dt}\Delta(t,t_0) = M(t,t_0,\delta)\Delta(t,t_0) + \Delta(t,t_0)M'(t,t_0,\delta) + W(t,t_0,\delta), \tag{4.57}$$

où

$$M(t,t_0,\delta) = A(t) + \beta^2 X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}$$

et

$$\begin{aligned}W(t,t_0,\delta) = &- \beta^2\Delta(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)B'(t)X(t,t+\delta)^{-1}\Delta(t,t_0)\\ &- \big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)\big)\big(B(t) + \beta X_{cl}(t,t_0)X(t,t+\delta)^{-1}B(t)\big)'\end{aligned}$$

Selon [PBG88, Lemma 3], la matrice $\Delta(t,t_0)$ est donnée par

$$\Delta(t,t_0) = \int_{t_0}^{t}\Phi_M(t,\tau)W(\tau)\Phi'_M(t,\tau)d\tau + \Phi_M(t,t_0)\Delta(t_0,t_0)\Phi'(t,t_0),$$

où $\Phi_M(t,t_0)$ est la matrice de transition du système dont la matrice dynamique est $M(t,t_0,\delta)$. Comme $W(t,t_0,\delta) \leq 0$, la matrice $\Delta(t,t_0)$ est semi-définie négative si et seulement si

$$\Delta(t_0,t_0) = X_{cl}(t_0,t_0) - P(t_0,t_0) = I - P(t_0,t_0) \leq 0,$$

ce qui démontre la validité de l'Inégalité (4.54).

Bibliographie

[AGPP09] Arzelier, D., Gryazina, E. N., Peaucelle, D., and Polyak, B. T., 2009. Mixed LMI/Randomized methods for static output feedback control design : Stability and performance. Technical Report 09640, LAAS-CNRS.

[AGPP10] Arzelier, D., Gryazina, E. N., Peaucelle, D., and Polyak, B. T., 2010. Mixed LMI/Randomized methods for static output feedback control design. In : *Proceedings of the 2010 American Control Conference* (Baltimore, MD, USA), 4683–4688.

[AGTP12] Agulhari, C. M., Garcia, G., Tarbouriech, S., and Peres, P. L. D., 2012. A numerical procedure to compute stabilizing state feedback gains for linear time-varying periodic systems. In : *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2012)* (Aalborg, Denmark), 678–683.

[AM69] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., 1969. New results in linear system stability. *SIAM Journal on Control*, 7(3) :398–414.

[AN06] Apkarian, P. and Noll, D., 2006. Nonsmooth $\mathcal{H}_\infty$ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1) :71–86.

[And72] Anderson, B. O., 1972. The small-gain theorem, the passivity theorem and their equivalence. *Journal of The Franklin Institute*, 293(2) :105–115.

[AOP10a] Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2010. Robust $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In : *Proceedings of the 2010 American Control Conference* (Baltimore, MD, USA), 4677–4682.

[AOP10b] Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2010. Static output feedback control of polytopic systems using polynomial Lyapunov functions. In : *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control* (Atlanta, GA, USA), 6894–6901.

[AOP12] Agulhari, C. M., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2012. LMI relaxations for reduced-order robust $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6) :1532–1537.

[AP02] Arzelier, D. and Peaucelle, D., 2002. An iterative method for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ synthesis via static output-feedback. In : *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control* (Las Vegas, NV, USA), 3464–3469.

[APS03] Arzelier, D., Peaucelle, D., and Salhi, S., 2003. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems : Improving the guaranteed performance bound. In : *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)* (Milan, Italy), 425–430.

[AT00] Apkarian, P. and Tuan, H. D., 2000. Parametrized LMIs in control theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(4) :1241–1264.

[BCG84] Bittanti, S., Colaneri, P., and Guardabassi, G., 1984. Periodic solutions of periodic Riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(7) :665–667.

[BCG85] Bittanti, S., Colaneri, P., and Guardabassi, G., 1985. Periodic Riccati equation : a decomposition approach. In : *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control* (Fort Lauderdale, FL, USA), 1713–1718.

[BEFB94] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* (SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA).

[BGW90] Bitmead, R. R., Gevers, M., and Wertz, V., 1990. *Adaptive Optimal Control – The Thinking Man's GPC* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ).

[BIJ81] Benhabib, R. J., Iwens, R. P., and Jackson, R. L., 1981. Stability of large space structure control systems using positivity concepts. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 4(5) :487–494.

[Bla94] Blanchini, F., 1994. Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(2) :428–433.

[BLA10] Böhm, C., Lazar, M., and Allgöwer, F., 2010. A relaxation of Lyapunov conditions and controller synthesis for discrete-time periodic systems. In : *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control* (Atlanta, GA, USA), 3277–3282.

[BOMP06] Bliman, P.-A., Oliveira, R. C. L. F., Montagner, V. F., and Peres, P. L. D., 2006. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In : *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control* (San Diego, CA, USA), 1486–1491.

[BPG89] Bernussou, J., Peres, P. L. D., and Geromel, J. C., 1989. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1) :65–72.

[Bru69] Brunovsky, P., 1969. Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems. *Journal of Differential Equations*, 6(2) :296–313.

[Bru04] Bruzelius, F., 2004. *Linear Parameter-varying Systems : An Approach to Gain Scheduling*. Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.

[BT00] Blondel, V. D. and Tsitsiklis, J. N., 2000. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9) :1249–1274.

[Buc72] Bucy, R. S., 1972. The Riccati equation and its bounds. *Journal of Computer and System Sciences*, 6(4) :343–353.

[CGTV07] Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A., and Vicino, A., 2007. Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions. *Automatica*, 43(2) :309–316.

[Che99] Chen, C. T., 1999. *Linear System Theory and Design* (Oxford University Press), 3rd edition.

[CLM96] Chisci, L., Lombardi, A., and Mosca, E., 1996. Dual receding horizon control of constrained discrete-time systems. *European Journal of Control*, 2(4) :278–285.

[Col00] Colaneri, P., 2000. Continuous-time periodic systems in $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$. part I : Theoretical aspects. *Kybernetica*, 36(2) :211–242.

[CP72] Chang, S. S. L. and Peng, T. K. C., 1972. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(4) :474–483.

[CT99] Crusius, C. A. R. and Trofino, A., 1999. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5) :1053–1057.

[D'A70] D'Angelo, H., 1970. *Linear Time-varying Systems : Analysis and Synthesis* (Allyn and Bacon, Boston, MA).

[DBG08] Daafouz, J., Bernussou, J., and Geromel, J. C., 2008. On inexact LPV control design of continuous-time polytopic systems. *Automatica*, 53(7) :1674–1678.

[dOBG99] de Oliveira, M. C., Bernussou, J., and Geromel, J. C., 1999. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4) :261–265.

[dOG05] de Oliveira, M. C. and Geromel, J. C., 2005. A class of robust stability conditions where linear parameter dependence of the Lyapunov function is a necessary condition for arbitrary parameter dependence. *Systems & Control Letters*, 54 :1131–1134.

[dOOL+02] de Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F., Leite, V. J. S., Montagner, V. F., and Peres, P. L. D., 2002. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems : A numerical comparison. In : *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control* (Las Vegas, NV, USA), 644–649.

[dOS01] de Oliveira, M. C. and Skelton, R. E., 2001. Stability tests for constrained linear systems. In : S. O. Reza Moheimani (Editor), *Perspectives in Robust Control* (Springer-Verlag, New York, NY), volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. 241–257.

[dST00] de Souza, C. E. and Trofino, A., 2000. An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems. *International Journal of Control*, 73(8) :696–703.

[EKH+09] Ebihara, Y., Kuboyama, Y., Hagiwara, T., Peaucelle, D., and Arzelier, D., 2009. Further results on periodically time-varying memory state-feedback controller synthesis for discrete-time linear systems. In : *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control — 28th Chinese Control Conference* (Shangai, P.R. China), 702–707.

[EN00] El Ghaoui, L. and Niculescu, S. I. (Editors), 2000. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Advances in Design and Control (SIAM, Philadelphia, PA).

[EOA97] El Ghaoui, L., Oustry, F., and Ait-Rami, M., 1997. A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8) :1171–1176.

[FL97] Fu, M. and Luo, Z., 1997. Computational complexity of a problem arising in fixed order output feedback design. *Systems & Control Letters*, 30(5) :209–215.

[Flo83] Floquet, G., 1883. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 2(12) :47–88.

[GA94] Gahinet, P. and Apkarian, P., 1994. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4) :421–448.

[GAC96] Gahinet, P., Apkarian, P., and Chilali, M., 1996. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :436–442.

[GB86] Galimidi, A. R. and Barmish, B. R., 1986. The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(5) :410–419.

[GC06] Geromel, J. C. and Colaneri, P., 2006. Robust stability of time varying polytopic systems. *Systems & Control Letters*, 55(1) :81–85.

[GCG93] Garofalo, F., Celentano, G., and Glielmo, L., 1993. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2) :281–284.

[GdS98] Geromel, J. C., de Souza, C. C., and Skelton, R. E., 1998. Static output feedback controllers : stability and convexity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1) :120–125.

[GKB07] Geromel, J. C., Korogui, R. H., and Bernussou, J., 2007. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ robust output feedback control for continuous time polytopic systems. *IET Control Theory & Applications*, 1(5) :1541–1549.

[GPS96] Geromel, J. C., Peres, P. L. D., and Souza, S. R., 1996. Convex analysis of output feedback control problems : robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7) :997–1003.

[GPT10] Garcia, G., Peres, P. L. D., and Tarbouriech, S., 2010. Assessing asymptotic stability of linear continuous time-varying systems by computing the envelope of all trajectories. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4) :998–1003.

[GS96] Grigoriadis, K. M. and Skelton, R. E., 1996. Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods. *Automatica*, 32(8) :1117–1125.

[GTB09] Garcia, G., Tarbouriech, S., and Bernussou, J., 2009. Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2) :364–369.

[Hal90] Halanay, A., 1990. Advances in linear control theory and Riccati equations. In : *Dynamical Systems and O.D.E.* (Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino), volume 48 (3), 251–348.

[HB91] Haddad, W. M. and Bernstein, D. S., 1991. Robust stabilization with positive real uncertainty : Beyond the small gain theorem. *Systems & Control Letters*, 17(3) :191–208.

[HB93] Haddad, W. M. and Bernstein, D. S., 1993. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov theorems and their application to robust stability. part I : Continuous-time theory. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 3(4) :313–339.

[HL04] Hu, G.-D. and Liu, M., 2004. The weighted logarithmic matrix norm and bounds of the matrix exponential. *Linear Algebra and Its Applications*, 390 :145–154.

[IS94] Iwasaki, T. and Skelton, R. E., 1994. All controllers for the general $\mathcal{H}_\infty$ control problem : LMI existence conditions and state-space formulas. *Automatica*, 30(8) :1307–1317.

[Iwa96] Iwasaki, T., 1996. Robust performance analysis for systems with structured uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6 :85–99.

[Iwa99] Iwasaki, T., 1999. The dual iteration for fixed-order control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4) :783–788.

[Kab86] Kabamba, P. T., 1986. Monodromy eigenvalue assignment in linear periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(10) :950–952.

[Kal59] Kalman, R. E., 1959. On the general theory of control systems. *IRE Transactions on Automatic Control* :481–492.

[Kal60] Kalman, R. E., 1960. Contributions to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 5 :102–119.

[Kha02] Khalil, H. K., 2002. *Nonlinear Systems* (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ), 3rd edition.

[KP77] Kwon, W. H. and Pearson, A. E., 1977. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5) :838–842.

[KYK01] Kim, K. B., Yoon, T.-W., and Kwon, W. H., 2001. Stabilizing receding horizon $\mathcal{H}_\infty$ controls for linear continuous time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8) :1273–1279.

[LC05] Lee, H. C. and Choi, J. W., 2005. Ackermann-like eigenvalue assignment formulae for linear time-varying systems. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 152(4) :427–434.

[LKC98] Lee, J.-W., Kwon, W. H., and Choi, J., 1998. On stability of constrained receding horizon control with finite terminal weighting matrix. *Automatica*, 34(12) :1607–1612.

[LOdOP04] Leite, V. J. S., Oliveira, R. C. L. F., de Oliveira, P. J., and Peres, P. L. D., 2004. $\mathcal{D}$-stability of polytopes of polynomial matrices : characterization through LMIs. In : *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control* (Paradise Island, Bahamas), 863–868.

[Löf04] Löfberg, J., 2004. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In : *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design* (Taipei, Taiwan), 284–289. `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php`.

[LP02] Loría, A. and Panteley, E., 2002. Uniform exponential stability of linear time-varying systems : revisited. *Systems & Control Letters*, 47(1) :13–24.

[LP04] Loría, A. and Panteley, E., 2004. Explicit bounds on the exponential decay and on the $\mathcal{L}_2$ gain for linear time-varying systems. In : *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. 2544–2549.

[Lu00] Lu, P., 2000. Closed-form control laws for linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3) :537–542.

[MBB04] Mehdi, D., Boukas, E. K., and Bachelier, O., 2004. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(1) :1–13.

[MM93] Michalska, H. and Mayne, D. Q., 1993. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11) :1623–1633.

[MOP06] Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2006. Design of $\mathcal{H}_\infty$ gain-scheduled controllers for linear time-varying systems by means of polynomial Lyapunov functions. In : *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control* (San Diego, CA, USA), 5839–5844.

[MOP11] Moreira, H. R., Oliveira, R. C. L. F., and Peres, P. L. D., 2011. Robust $\mathcal{H}_2$ static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optimal Control Applications and Methods*, 32(1) :1–13.

[MOPB09] Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F., Peres, P. L. D., and Bliman, P.-A., 2009. Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variations. *International Journal of Control*, 82(6) :1045–1059.

[MP72] Michel, A. N. and Porter, D. W., 1972. Practical stability and finite-time stability of discontinuous systems. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 19(2) :123–129.

[MRRS00] Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V., and Scokaert, P. O. M., 2000. Constrained model predictive control : Stability and optimality. *Automatica*, 36(6) :789–814.

[MSA04] Montagnier, P., Spiteri, R. J., and Angeles, J., 2004. The control of linear time-periodic systems using Floquet–Lyapunov theory. *International Journal of Control*, 77(5) :472–490.

[OBP08] Oliveira, R. C. L. F., Bliman, P.-A., and Peres, P. L. D., 2008. Robust LMIs with parameters in multi-simplex : Existence of solutions and applications. In : *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control* (Cancun, Mexico), 2226–2231.

[OdOP07] Oliveira, R. C. L. F., de Oliveira, M. C., and Peres, P. L. D., 2007. Parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability analysis of time-varying systems in polytopic domains. In : *Proceedings of the 2007 American Control Conference* (New York, NY, USA), 6079–6084.

[OP05] Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D., 2005. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions : Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, 405 :209–228.

[OP06a] Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D., 2006. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 55(1) :52–61.

[OP06b] Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D., 2006. LMI relaxations for homogeneous polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. In : *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2006)* (Toulouse, France).

[OP07] Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D., 2007. Parameter-dependent LMIs in robust analysis : Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7) :1334–1340.

[PA01] Peaucelle, D. and Arzelier, D., 2001. An efficient numerical solution for $\mathcal{H}_2$ static output feedback synthesis. In : *Proceedings of the 2001 European Control Conference* (Porto, Portugal), 3800–3805.

[PBG88] Poubelle, M.-A., Bitmead, R. R., and Gevers, M. R., 1988. Fake algebraic Riccati techniques and stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(4) :379–381.

[PDSV09] Pipeleers, G., Demeulenaere, B., Swevers, J., and Vandenberghe, L., 2009. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, 58(7) :510–518.

[PG94] Peres, P. L. D. and Geromel, J. C., 1994. An alternate numerical solution to the linear quadratic problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(1) :198–202.

[RM93] Rawlings, J. B. and Muske, K. R., 1993. The stability of constrained receding horizon control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(10) :1512–1516.

[Rug96] Rugh, W. J., 1996. *Linear System Theory* (Prentice Hall, New Jersey), 2nd edition.

[SA68] Silverman, L. M. and Anderson, B. D. O., 1968. Controllability, observability and stability of linear systems. *SIAM Journal on Control*, 6(1) :121–130.

[SADG97] Syrmos, V. L., Abdallah, C. T., Dorato, P., and Grigoriadis, K., 1997. Static output feedback – A survey. *Automatica*, 33(2) :125–137.

[Sas99] Sastry, S., 1999. *Nonlinear Systems : Analysis, Stability, and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics (Springer-Verlag, New York).

[SB80] Stoer, J. and Bulirsch, R., 1980. *Introduction to Numerical Analysis* (New York : Springer Verlag, New York), 1st edition.

[Sch03] Scherer, C. W., 2003. Higher-order relaxations for robust LMI problems with verifications for exactness. In : *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control* (Maui, HI, USA), 4652–4657.

[Sch05] Scherer, C. W., 2005. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(2) :365–395.

[Sha03] Shaked, U., 2003. An LPD approach to robust $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ static output-feedback design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5) :866–872.

[SIG98] Skelton, R. E., Iwasaki, T., and Grigoriadis, K., 1998. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design* (Taylor & Francis, Bristol, PA).

[SMR99] Scokaert, P. O. M., Mayne, D. Q., and Rawlings, J. B., 1999. Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability). *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3) :648–654.

[Ste08] Stewart, J., 2008. *Calculus* (Thomson Learning Inc., Belmont, CA, USA), 6th edition.

[Stu99] Sturm, J. F., 1999. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1–4) :625–653. `http://sedumi.ie.lehigh.edu/`.

[Tro09] Trofino, A., 2009. Sufficient LMI conditions for the design of static and reduced order controllers. In : *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control — 28th Chinese Control Conference* (Shanghai, P. R. China), 6668–6673.

[Var08] Varga, A., 2008. On solving periodic Riccati equations. *Numerical Linear Algebra and Its Applications*, 15(9) :809–835.

[Vid93] Vidyasagar, M., 1993. *Nonlinear Systems Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ).

[VO93] Valasek, M. and Olgac, N., 1993. Generalization of Ackermann's formula for linear MIMO time invariant and time varying systems. In : *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control* (San Antonio, TX, USA), 827–832.

[VO95] Valasek, M. and Olgac, N., 1995. Efficient pole placement technique for linear time-variant SISO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 142(5) :451–458.

[Wol68] Wolovich, W., 1968. On the stabilization of controllable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(5) :569–572.

[Wu95] Wu, F., 1995. *Control of Linear Parameter Varying Systems*. Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, USA.

[Wu09] Wu, J. L., 2009. Simultaneous $\mathcal{H}_\infty$ control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(3) :606–610.

[XdS92] Xie, L. and de Souza, C. E., 1992. Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(8) :1188–1191.

[YS09] Yaesh, I. and Shaked, U., 2009. Robust reduced-order output-feedback $\mathcal{H}_\infty$ control. In : *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2009)* (Haifa, Israel), 155–160.

[ZD63] Zadeh, L. A. and Desoer, C. A., 1963. *Linear System Theory — The State Space Approach*. McGraw Hill Series in System Science (McGraw Hill, New York : McGraw-Hill).

[Zhu96] Zhu, J. J., 1996. A necessary and sufficient stability criterion for linear time-varying systems. In : *Proceedings of the Twenty-Eighth Southeastern Symposium on System Theory*. 115–119.

[ZK88] Zhou, K. and Khargonekar, P. P., 1988. Robust stabilization of linear systems with norm bounded time varying uncertainty. *Systems & Control Letters*, 10 :17–20.

[ZP05] Zhu, Y. and Pagilla, P. R., 2005. Bounds on the solution of the time-varying linear matrix differential equation $\dot{P}(t) = A^H(t)P(t)+P(t)A(t)+Q(t)$. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 23 :269–277.