

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Este exemplar corresponde à versão final  
da tese defendida por Anésio dos Santos Jr.  
e aprovada pela Comissão Julgadora em 06/06/86.

Sigmar S. Deckmann

O MÉTODO DA LAGRANGEANA AUMENTADA  
APLICADO AO FLUXO DE CARGA ÓTIMO

ANÉSIO DOS SANTOS JR.

Orientador:

Prof.Dr. Sigmar S. Deckmann

Co-orientador:

Prof.Dr. Secundino Soares Filho

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de DOU TOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

- Abril 1986 -

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

## RESUMO

Neste trabalho o problema do fluxo de carga ótimo é resolvido pelo método da lagrangeana aumentada. Os métodos da lagrangeana aumentada, dual clássico e de penalidades são apresentados com uma abordagem unificada. São descritas as características de modelagem utilizadas em um programa computacional desenvolvido tendo em vista a aplicação no planejamento da operação de sistemas de energia elétrica. Os resultados apresentados indicam que o método utilizado é uma boa alternativa para o cálculo do fluxo de carga ótimo.

## ABSTRACT

In this work the optimal power flow problem is solved by an augmented lagrangian method. Augmented lagrangian, classical dual and penalty methods are presented with a unified approach. The modelling characteristics are described as used in a computer program for application on operation planning of electrical energy systems. The results indicate that the method used is a good alternative for optimal power flow solutions.

## AGRADECIMENTOS

Ao Sigmar e ao Secundino pela confiança no projeto inicial deste trabalho e pelo apoio técnico prestado em todas as fases de seu desenvolvimento.

À Meime com quem começamos os estudos do método da Lagrangeana Aumentada.

Ao Murari e ao Akebo pelo apoio na utilizaçãõ do suporte computacional disponível na UNICAMP.

À Geni e à Elisabete pelo paciente trabalho de datilografia deste texto.

À Coordenadoria de Graduação do curso de Engenharia Elétrica pela dispensa de atividades didáticas neste semestre o que permitiu a conclusão deste trabalho.

A edição deste trabalho teve o apoio do COSE (Curso de Especialização em Planejamento da Operação de Sistemas de Energia Elétrica).

## ÍNDICE

<u>CAPÍTULO I</u>	-	INTRODUÇÃO.....	1
<u>CAPÍTULO II</u>	-	ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE SISTEMAS DE POTÊNCIA.....	4
II. 1	-	Modelo do fluxo de carga.....	4
II. 2	-	Método de Newton - Raphson aplicado ao problema do fluxo de carga .....	9
II. 3	-	Modelo do fluxo de carga ótimo.....	15
II. 4	-	Método Dommel-Tinney para o fluxo de carga ótimo [8].....	16
II. 5	-	Método de penalidades na análise de sistemas de potência.....	22
<u>CAPÍTULO III</u>	-	TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADAS A PROBLEMAS NÃO LINEARES.....	32
III.1	-	Problema não linear e solução pelo método de Newton.....	32
III.2	-	Análise dos métodos apresentados.....	34
III.3	-	Método de penalidades.....	35
		Interpretação geométrica.....	38
		Enfoque computacional.....	42
III.4	-	Método dual lagrangeano.....	46
		Interpretação geométrica.....	48
		Enfoque computacional.....	52

III.5 - Método dos multiplicadores-penalidades.....	55
Interpretação geométrica.....	57
Comportamento do método dos multiplicadores- penalidades.....	63
Lagrangeana aumentada definida por R.T. Rockafellar [26, 27, 29].....	65
Enfoque computacional.....	67
<u>CAPÍTULO IV</u> - FLUXO DE CARGA ÓTIMO E O MÉTODO DA LAGRANGEANA AUMENTADA.....	70
IV. 1 - A lagrangeana aumentada associada ao fluxo de carga ótimo .....	70
IV. 2 - Atualização dos multiplicadores.....	72
IV. 3 - Minimização da lagrangeana aumentada.....	73
IV. 4 - O vetor gradiente e a matriz hessiana.....	75
IV. 5 - Estrutura da matriz hessiana.....	80
IV. 6 - Matriz hessiana e matriz jacobiana.....	82
IV. 7 - Formação do vetor gradiente e da matriz hessiana.....	89
IV. 8 - Nota sobre a fatoração triangular da matriz hessiana.....	92
<u>CAPÍTULO V</u> - TESTES REALIZADOS.....	95
V. 1 - Política de penalidades.....	95
V. 2 - Algoritmo utilizado.....	97
V. 3 - Resultados.....	97
Sistema AEP30.....	97
Sistema IEEE118.....	108
Sistema CESP.....	121

CONCLUSÃO ..... 134

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 136

APÊNDICES

A - Expressões de fluxos e perda.....	140
B - Gradiente reduzido e multiplicadores de lagrange ..	144
C - Matriz hessiana aproximada.....	147
D - Alterações no multiplicador e na penalidade.....	152
E - Sobre o comportamento do método dos multiplicadores -penalidades.....	154
F - Função objetivo e suas derivadas.....	158
G - Restrições e suas derivadas.....	160

"... no momento em que, como filósofo, duvido que o mundo tenha uma ordem, consola-me descobrir, se não uma ordem, pelo menos uma série de conexões em pequenas porções dos negócios do mundo." (Umberto Eco em O Nome da Rosa)



## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

O fluxo de carga ótimo pode ser entendido como uma generalização e sistematização do problema clássico do despacho econômico e a sua formulação através de um modelo não linear de otimização foi proposta originalmente em 1962 por J.L. Carpentier [37]. Um amplo estudo sobre o problema do despacho econômico e sua evolução para o fluxo de carga ótimo foi apresentado por H. H. Happ em 1977 [38]. Com relação aos métodos de programação matemática aplicados ao fluxo de carga ótimo, um extenso estudo comparativo foi apresentado em 1986 por J.L. Carpentier [34]. A resolução do fluxo de carga ótimo pelo método Dommel-Tinney [8] só se tornou possível com a aplicação de técnicas de esparsidade que viabilizaram computacionalmente o cálculo do fluxo de carga pelo método de Newton [1,18]. Sobre a evolução dos métodos de cálculo do fluxo de carga, um estudo completo foi apresentado em 1974 por B. Stott [5]. Publicações mais recentes apresentam métodos do tipo PRIMAL aplicados ao cálculo do fluxo de carga ótimo [39,40].

Neste trabalho é analisado o problema do fluxo de carga ótimo sob o enfoque de uma metodologia específica da programação não linear, denominada método da lagrangeana aumentada ou método dos multiplicadores-penalidades. Esta metodologia pode ser vista como uma generalização do método clássico de penalidades, já proposto para a resolução do fluxo de carga ótimo e que apresentou resultados pouco eficientes em sua aplicação a sistemas de grande

porte [34]. O método apresentado neste trabalho reduz as dificuldades do método clássico de penalidades e sua aplicabilidade é verificada com os resultados obtidos. Do ponto de vista da programação não linear esse método pode ser visto como um método DUAL com penalidades e esse enfoque pode ser interpretado da análise apresentada no capítulo III. Um método do tipo DUAL, no qual a solução é procurada a partir de pontos não factíveis, interessa particularmente para os estudos de planejamento onde podem ocorrer situações em que a obtenção da factibilidade seja problemática. Nesses casos um método DUAL, como o proposto, fornecerá uma solução o mais próxima possível da região de factibilidade.

Os estudos realizados no planejamento da operação de sistemas de energia elétrica têm por objetivo estabelecer "boas" soluções de fluxo de carga que atendam a demanda específica. No Brasil esses estudos são realizados com o auxílio de programas de cálculo de fluxo de carga. Esses programas determinam soluções a partir de especificações de consumo de potência nas cargas, um despacho de potência ativa nos geradores e um perfil de tensão nos barramentos com tensão controlada. O despacho de potência ativa é obtido minimizando-se o custo de geração no caso de operação de sistemas térmicos e levando-se em conta critérios energéticos e de operação de reservatórios de água no caso de sistemas hidráulicos. O ajuste do perfil de tensão nas barras de tensão controlada é feito através de critérios baseados na experiência com o sistema. De acordo com a referência [35] "boas" soluções de fluxo de carga são caracterizadas por baixa perda, bom perfil de tensão e razoável despacho de potência reativa, objetivos estes que são alcançados "mais ou menos" simultaneamente. Um programa de fluxo de carga

ótimo, que tenha por objetivo minimizar a perda de transmissão, tem capacidade de fornecer "boas" soluções e certamente será uma ferramenta útil nos estudos de planejamento da operação. A vantagem do uso de um programa de fluxo de carga ótimo é que os ajustes no despacho de potência ativa e no perfil de tensão são feitos automaticamente através da relaxação dessas restrições. Neste trabalho, adotou-se como objetivo a minimização da perda de transmissão com a finalidade de desenvolver uma ferramenta capaz de fornecer "boas" soluções de fluxo de carga, possibilitando sua aplicação nos estudos de planejamento.

No capítulo II são apresentados os problemas do fluxo de carga usual e do fluxo de carga ótimo. É também descrita a aplicação dos métodos de Newton e de penalidades na resolução do fluxo de carga. Para a resolução do fluxo de carga ótimo são apresentados os métodos do gradiente reduzido e de penalidades.

No capítulo III é analisada uma família de métodos de resolução de um problema não linear de otimização. Na análise apresentada procura-se desenvolver os métodos através de um raciocínio intuitivo lançando mão, sempre que possível, de recursos de interpretação geométrica. Na literatura citada esses métodos são apresentados na forma axiomática, mas aqui optou-se por uma linguagem mais direta e intuitiva uma vez que se visa a sua aplicação na área específica de sistemas de potência. Acredita-se que o eventual prejuízo pelo não uso de uma linguagem formal seja compensado pela facilidade de interpretação dos resultados obtidos na aplicação ao problema do fluxo de carga ótimo.

No capítulo IV o fluxo de carga ótimo é formulado de modo a ser resolvido pelo método da lagrangeana aumentada. É

feito um estudo da matriz hessiana da função lagrangeana aumentada associada ao fluxo de carga ótimo. Essa análise mostra a viabilidade da aplicação do método de Newton na minimização da lagrangeana aumentada no caso de sistemas de grandes dimensões. Nesses casos, o grau de esparsidade da matriz hessiana torna-se compatível com o grau de esparsidade da matriz jacobiana utilizada na resolução do fluxo de carga pelo método de Newton.

No capítulo V são apresentados os resultados obtidos em simulações com sistemas teste IEEE e com o sistema de transmissão CESP. Os resultados obtidos mostram a eficiência do método para aplicação em estudos de planejamento e programação da operação de sistemas de energia elétrica.

## CAPÍTULO II

### ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

Neste capítulo são apresentados modelos para a análise estática não linear de sistemas de potência e técnicas matemáticas de resolução. Os modelos de fluxo de carga e fluxo de carga ótimo adotados utilizam uma formulação com base na representação polar das tensões nodais. Para a resolução do fluxo de carga são discutidos os métodos de Newton-Raphson, suas versões desacopladas e um método de penalidades. Para a resolução do fluxo de carga ótimo são apresentados os métodos Dommel-Tinney e de penalidades. Existe uma literatura muito extensa a respeito de métodos de resolução do fluxo de carga ótimo baseada em programação linear e não linear. As técnicas apresentadas neste capítulo cumpriram um papel fundamental nos estudos que levaram ao desenvolvimento do método apresentado neste trabalho.

#### II.1. Modelo do fluxo de carga

O modelo de um sistema de potência em regime permanente apresenta quatro variáveis reais associadas à cada barra, dadas por

$\theta_k$  - ângulo da tensão da barra  $k$ ;

$V_k$  - magnitude da tensão da barra  $k$ ;

$p_k$  - injeção líquida de potência ativa na barra  $k$ ;

$q_k$  - injeção líquida de potência reativa na barra  $k$ .

Os fluxos de potência ativa e reativa são funções dos ângulos e

magnitudes das tensões das barras terminais de uma ligação elétrica do sistema (Apêndice A). Assim, na Figura (II.1)



Figura (II.1)

os fluxos de potência que partem da barra k sobre a ligação (kl) são escritos como

$$P_{kl} = p(\theta_k, \theta_l, V_k, V_l) \quad (II.1),$$

$$q_{kl} = q(\theta_k, \theta_l, V_k, V_l)$$

onde:

$P_{kl}$  - fluxo de potência ativa que parte da barra k sobre a ligação (kl);

$q_{kl}$  - fluxo de potência reativa que parte da barra k sobre a ligação (kl);

$p, q$  - funções apresentadas no Apêndice A.

As injeções líquidas de potência ativa e reativa em uma barra qualquer devem satisfazer as equações de balanço nodal. Assim, como ilustra a Figura (II.2) o balanço de potência na barra k fornece as equações

$$p_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = \sum_{l \in \Omega_k} p_{kl}$$

(II.2),

$$q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = \sum_{l \in \Omega_k} q_{kl} + q_k^{sh}$$

onde:

$\underline{\theta}$  - vetor dos ângulos das tensões;

$\underline{V}$  - vetor das magnitudes das tensões;

$q_k^{sh}$  - potência reativa associada ao elemento shunt ligado a barra k;

$\Omega_k$  - conjunto das barras vizinhas à barra k.

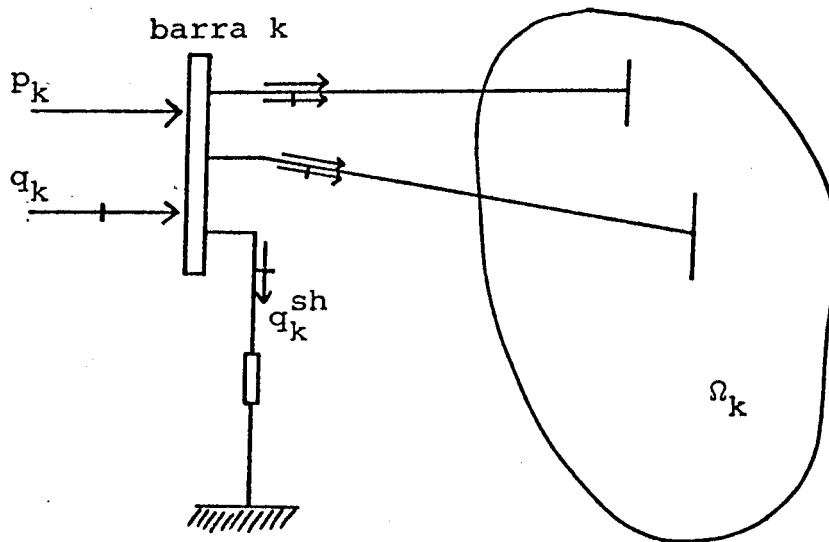


Figura (II.2)

As equações e inequações algébricas que constituem o problema do fluxo de carga para um sistema de N barras, com NG barras de geração e NC barras de carga, são apresentadas a seguir. Exceto para uma barra, todas as demais têm as injeções líquidas de potência ativa especificadas. A barra sem especificação funciona como folga para fechar o balanço de potência entre gera

ção, carga e perdas de transmissão. Isso é necessário uma vez que as perdas são inicialmente desconhecidas. Logo existem (N-1) equações de potência ativa do tipo

$$P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) - P_k^{esp} = 0 \quad (II.3).$$

As barras de carga têm as injeções líquidas de potência reativa especificadas, fornecendo NC equações do tipo

$$q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) - Q_k^{esp} = 0 \quad (II.4).$$

As barras de geração têm as magnitudes de tensão especificadas fornecendo NG equações do tipo

$$V_k - V_k^{esp} = 0 \quad (II.5).$$

Uma barra qualquer é adotada como referência dos ângulos das tensões fornecendo uma equação do tipo

$$\theta_k = 0 \quad (II.6).$$

O número total de equações é portanto

$$(N-1) + NC + NG + 1 = 2N \quad (II.7)$$

e as incógnitas a determinar são:

- $\theta_k$  em (N-1) barras;
- $V_k$  nas NC barras de carga;
- $q_k$  nas barras de geração e
- $P_k$  na barra de folga

O número total de incógnitas é, então, dado por

$$(N-1) + NC + NG + 1 = 2N \quad (II.8).$$



As barras do sistema são então denominadas de acordo com as variáveis especificadas. Assim adota-se uma das barras de geração como folga e referência angular, sendo denominada  $\theta_V$ , para a qual são especificadas as variáveis  $\theta_k$  e  $V_k$  e calculadas  $p_k$  e  $q_k$ . As demais barras de geração são denominadas PV, para as quais são especificadas as variáveis  $p_k$  e  $V_k$  e calculadas  $q_k$  e  $\theta_k$ . As barras de carga são denominadas PQ, para as quais são especificadas  $p_k$  e  $q_k$  e calculadas  $\theta_k$  e  $V_k$ .

Introduzindo-se (II.5) e (II.6) em (II.3) e (II.

4) obtém-se o sistema de equações

$$p_k(\underline{\theta}, \underline{V}) - P_k^{esp} = 0, \quad k \in \{PV\} \cup \{PQ\} \quad (II.9).$$

$$q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) - Q_k^{esp} = 0, \quad k \in \{PQ\}$$

Definindo-se o vetor  $\underline{x}$ , de incógnitas, como

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \theta_k, \quad k \in \{PV\} \cup \{PQ\} \\ V_k, \quad k \in \{PQ\} \end{bmatrix} \quad (II.10),$$

o sistema de equações (II.9) passa a ser representado por

$$\underline{g}(\underline{x}) = \underline{0} \quad (II.11),$$

onde:

$\underline{g}(\underline{x})$  - função vetorial cujas componentes são as expressões dadas no sistema (II.9).

Após resolver-se o sistema (II.9) calculam-se as injeções líquidas de potência: ativa na barra de folga e reativa nas barras de

geração.

As restrições operacionais nas magnitudes de tensão em barras de carga e injeções de potência reativa em barras de geração são dadas por

$$V_k^{\min} \leq V_k \leq V_k^{\max}, \quad k \in \{PQ\} \quad (II.12),$$

$$Q_k^{\min} \leq q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) \leq Q_k^{\max}, \quad k \in \{PV\} \cup \{\theta V\}$$

que passam a ser representadas como

$$\underline{h}(\underline{x}) \leq \underline{0} \quad (II.13).$$

O problema do fluxo de carga consiste em se determinar uma solução que satisfaça a equação (II.11) e a inequação (II.13).

## II.2. Método de Newton-Raphson aplicado ao problema do fluxo de carga

O cálculo da solução de equação (II.11) através do método de Newton-Raphson consiste na resolução iterativa da equação

$$J_{\underline{x}}^g(\underline{x}^v) \Delta \underline{x}^v = - \underline{g}(\underline{x}^v) \quad (II.14),$$

onde:

$J_{\underline{x}}^g(\underline{x}^v)$  - matriz Jacobiana da função vetorial  $\underline{g}(\underline{x})$  em relação a  $\underline{x}$  calculada no ponto  $\underline{x}^v$ ;

seguida da atualização do vetor  $\underline{x}^v$  dada por

$$\underline{x}^{v+1} = \underline{x}^v + \Delta \underline{x}^v \quad (\text{II.15}).$$

O processo é inicializado num ponto  $\underline{x}^0$  e repetido tantas vezes quanto necessárias até que se obtenha

$$\max_j \{ |g_j(\underline{x}^v)| \} \leq \vartheta \quad (\text{II.16}),$$

onde  $\vartheta$  é uma tolerância previamente definida. A idéia básica de um algoritmo Newton-Raphson é apresentada na Figura (II.3).

A consideração dos limites operacionais representados pela desigualdade (II.13) pode ser feita verificando, a cada atualização do vetor  $\underline{x}$ , se as restrições (II.12) estão satisfeitas. Se as restrições (II.12) estão satisfeitas o processo segue normalmente. Caso contrário, a variável é especificada no limite violado e uma outra variável da mesma barra é liberada. No caso de uma barra PQ, com a magnitude da tensão especificada no valor limite, libera-se a injeção de potência reativa. Daí por diante essa barra passa a ser considerada PV. Neste caso obtém-se a necessária variação na injeção de potência reativa para que a magnitude da tensão permaneça dentro dos limites operacionais especificados. No caso de uma barra PV ou  $\theta V$ , com a injeção de potência reativa especificada no valor limite, libera-se a magnitude da tensão. Daí por diante essa barra passa a ser considerada PQ ou  $\theta Q$ . Neste caso obtém-se a magnitude da tensão para que a injeção de potência reativa fique dentro dos limites especificados. Esse procedimento é implementado no algoritmo da Fig.(II.3) retirando ou adicionando funções no vetor  $g(\underline{x})$  e respectivamente adicionando ou retirando componentes no vetor  $\underline{x}$  a cada passo do processo iterativo.

O vetor  $\underline{x}$  é definido em (II.10) e a função veto



rial  $\underline{g}(\underline{x})$ , de acordo com (II.9), vale:

$$\underline{g}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \underline{p}(\underline{\theta}, \underline{v}) - \underline{p}^{esp} \\ \underline{q}(\underline{\theta}, \underline{v}) - \underline{q}^{esp} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17}),$$

onde:

$\underline{p}(\underline{\theta}, \underline{v})$  - função vetorial cujas componentes são as injeções líquidas de potência ativa dependentes de  $\underline{\theta}$  e  $\underline{v}$ ;

$\underline{p}^{esp}$  - vetor cujas componentes são as injeções líquidas de potência ativa especificadas;

$\underline{q}(\underline{\theta}, \underline{v})$  - função vetorial cujas componentes são as injeções líquidas de potência reativa dependentes de  $\underline{\theta}$  e  $\underline{v}$ ;

$\underline{q}^{esp}$  - vetor cujas componentes são as injeções líquidas de potência reativa especificadas.

A matriz Jacobiana é dada por

$$J_{\underline{x}}^{\underline{g}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} J_{\underline{\theta}}^{\underline{p}}(\underline{\theta}, \underline{v}) & J_{\underline{v}}^{\underline{p}}(\underline{\theta}, \underline{v}) \\ J_{\underline{\theta}}^{\underline{q}}(\underline{\theta}, \underline{v}) & J_{\underline{v}}^{\underline{q}}(\underline{\theta}, \underline{v}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

e é representada por

$$J_{\underline{x}}^{\underline{g}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} H(\underline{\theta}, \underline{v}) & N(\underline{\theta}, \underline{v}) \\ M(\underline{\theta}, \underline{v}) & L(\underline{\theta}, \underline{v}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.19}).$$

Os métodos desacoplados derivam do método Newton-Raphson quando se consideram as características específicas de um sistema de transmissão de potência em alta tensão. Tais características são traduzidas por uma forte relação entre potências ativas e ângulos de tensão. O efeito disso sobre a matriz Jacobiana dada em (II.19) é a predominância da submatriz  $H(\underline{\theta}, \underline{V})$  sobre  $N(\underline{\theta}, \underline{V})$ . Desprezando-se a submatriz  $N(\underline{\theta}, \underline{V})$ , a equação básica (II.14) desdobra-se em duas equações de menores dimensões correspondentes aos problemas P- $\theta$  e Q-V, dadas por

$$H(\underline{\theta}^v, \underline{V}^v) \Delta \underline{\theta}^v = - [p(\underline{\theta}^v, \underline{V}^v) - p^{esp}] \quad (II.20),$$

$$M(\underline{\theta}^v, \underline{V}^v) \Delta \underline{\theta}^v + L(\underline{\theta}^v, \underline{V}^v) \Delta \underline{V}^v = - [q(\underline{\theta}^v, \underline{V}^v) - q^{esp}] \quad (II.21).$$

Resolver as equações (II.20) e (II.21) e atualizar os vetores  $\underline{\theta}^v$  e  $\underline{V}^v$  simultaneamente é equivalente a resolver a equação (II.20), atualizar o vetor  $\underline{\theta}^v$

$$\underline{\theta}^{v+1} = \underline{\theta}^v + \Delta \underline{\theta}^v \quad (II.22),$$

em seguida calcular variações  $\Delta \underline{V}^v$  nas equações (II.21) correspondentes às potências reativas que fornecem

$$L(\underline{\theta}^v, \underline{V}^v) \Delta \underline{V}^v = - [q(\underline{\theta}^{v+1}, \underline{V}^v) - q^{esp}] \quad (II.23)$$

para atualizar o vetor  $\underline{V}^v$

$$\underline{V}^{v+1} = \underline{V}^v + \Delta \underline{V}^v \quad (II.24).$$

As equações (II.20) e (II.23) são resolvidas alternadamente e a variável correspondente é atualizada em cada passo. A idéia básica de um algoritmo para os métodos desacoplados é apresentada na

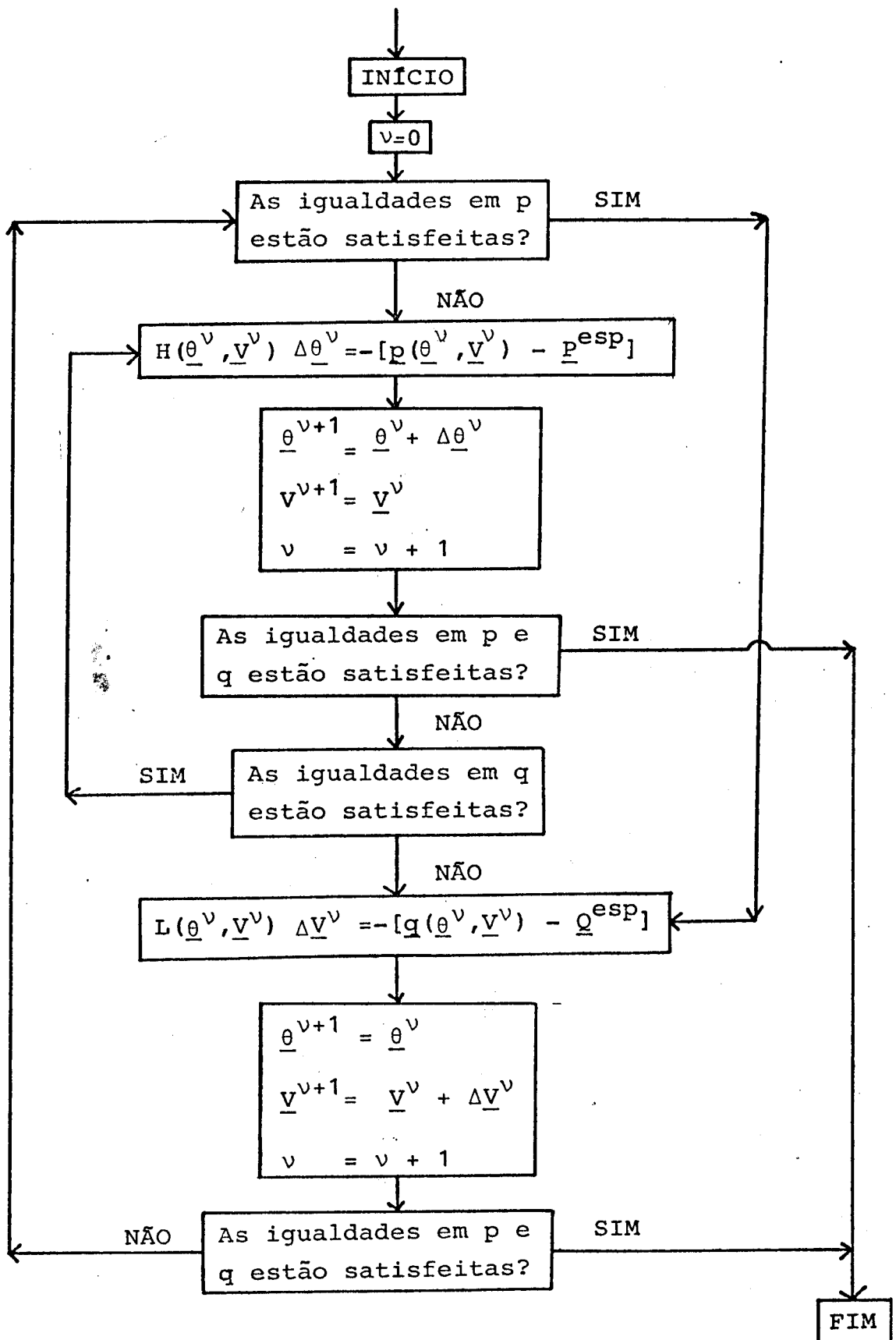


Figura (II.4)

Fig. (II.4) , onde a equação (II.23) é resolvida com a matriz  $L(\underline{\theta}, \underline{V})$  calculada para o valor de  $\underline{\theta}$  atualizado.

### II.3. Modelo do fluxo de carga ótimo

O modelo do fluxo de carga ótimo é obtido relaxando-se as restrições de geração de potência ativa e magnitudes de tensão nas barras de geração, mantendo-se as restrições de suprimento de potência ativa e reativa nas barras de carga e adotando-se uma função objetivo a ser otimizada. Assim esse problema apresenta:

- NC restrições do tipo

$$P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) - P_k^{esp} = 0 \quad (II.25)$$

nas barras de carga;

- NC restrições do tipo

$$q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) - Q_k^{esp} = 0 \quad (II.26)$$

nas barras de carga;

- NG restrições do tipo

$$P_k^{min} \leq P_k(\underline{\theta}, \underline{V}) \leq P_k^{max} \quad (II.27)$$

nas barras de geração;

- NG restrições do tipo

$$Q_k^{min} \leq q_k(\underline{\theta}, \underline{V}) \leq Q_k^{max} \quad (II.28)$$

nas barras de geração;

- N restrições do tipo

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad (II.29)$$

em todas as barras e



- uma restrição do tipo

$$\theta_k = 0 \quad (\text{II.30})$$

na barra de referência angular.

A função objetivo adotada neste trabalho é a perda de potência ativa ocorrida na transmissão, cuja expressão é dada por

$$L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \sum_{kl \in \Omega} L_{kl} \quad (\text{II.31}),$$

onde

$L_{kl}$  - perda de potência ativa na ligação  $kl$  (Apêndice A);

$\Omega$  - conjunto das ligações elétricas entre barras.

A formulação do problema do fluxo de carga ótimo através de um problema de otimização é feita de acordo com o método de resolução e isso é analisado nas secções seguintes.

#### II.4. Método Dommel-Tinney para o fluxo de carga ótimo [8]

H.W.Dommel e W.F.Tinney formularam em [8] o problema do fluxo de carga ótimo considerando duas possibilidades de função objetivo. Para o problema do fluxo de carga ótimo ativo e reativo consideram a função objetivo custo de geração dada por

$$f = \sum_i k_i (P_{Gi}) \quad (\text{II.32}),$$

onde:

$f$  - custo total de geração;

$P_{Gi}$  - geração de potência ativa na barra  $i$ ;

$K_i(P_{Gi})$  - custo da geração  $P_{Gi}$  na barra  $i$ .

Para o problema do fluxo de carga ótimo reativo consideram como função objetivo a perda de potência ativa na transmissão. Neste caso, o despacho de potência ativa é considerado fixo, ou seja, as restrições (II.27) são consideradas como de igualdade. A função objetivo adotada é a injeção líquida de potência ativa na barra de folga, que minimizada equivale à perda mínima na rede e é dada por

$$f = P_{\text{folga}}(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad (\text{II.33}).$$

São definidos os vetores  $\underline{x}$ ,  $\underline{u}$  e  $\underline{y}$ :

$\underline{x}$  - formado pelas variáveis dependentes nas restrições de igualdade e dado em (II.10);

$\underline{u}$  - formado pelas variáveis de controle e dado por

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} V_k - \text{nas barras de geração} \\ P_k - \text{em todas as barras de} \\ \text{geração no caso do flu} \\ \text{xo de carga ótimo ati} \\ \text{vo e reativo} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34});$$

$\underline{y}$  - formado pelas variáveis especificadas e dado por

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \theta_{\text{REF.}} - \text{na barra de referência} \\ P_k - \text{nas barras de carga e no} \\ \text{caso do fluxo de carga ô} \\ \text{timo reativo também nas} \\ \text{barras de geração} \\ q_k - \text{nas barras de carga} \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

O problema do fluxo de carga ótimo é então formulado como

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min f(\underline{x}, \underline{u}) \\ \text{s.a.} \quad \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}) = \underline{0} \\ \quad \quad \underline{h}(\underline{x}, \underline{u}) \leq \underline{0} \end{array} \right. \quad (II.36)$$

onde a função objetivo é dada em (II.32) ou (II.33). A desigualdade representa as restrições nas variáveis de controle e dependentes, dadas respectivamente por

$$\underline{u}^{\min} \leq \underline{u} \leq \underline{u}^{\max} \quad (II.37)$$

$$\underline{x}^{\min} \leq \underline{x} \leq \underline{x}^{\max} \quad (II.38)$$

e também as restrições funcionais de potência reativa dadas em (II.28).

Neste método o processo é inicializado em um ponto factível  $(\underline{u}^0, \underline{x}^0)$  e a variável  $\underline{u}$  é corrigida iterativamente até que, através de um critério pré-estabelecido, o processo seja interrompido. Dado um valor para  $\underline{u}$  a equação

$$\underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}) = \underline{0} \quad (II.39)$$

é resolvida em  $\underline{x}$  pelo método de Newton-Raphson, ou seja, um programa de fluxo de carga é executado. As restrições de desigualdade nas variáveis de controle (II.37) são tratadas por projeção, ou seja, o passo nas componentes do vetor  $\underline{u}$  é dado por

$$u_j^{v+1} = \left\{ \begin{array}{l} u_j^{\max}, \quad u_j^v + \Delta u_j^v > u_j^{\max} \\ u_j^{\min}, \quad u_j^v + \Delta u_j^v < u_j^{\min} \\ u_j^v + \Delta u_j^v, \quad u_j^{\min} \leq u_j^v + \Delta u_j^v \leq u_j^{\max} \end{array} \right. \quad (II.40).$$

As restrições de desigualdade funcionais são tratadas por penalidades, isto é, na medida em que sofrem uma violação, são incorporadas à função objetivo como função de penalidades. A função objetivo é então, a cada passo, redefinida como

$$f_w(\underline{x}, \underline{u}) = f(\underline{x}, \underline{u}) + \sum_j \begin{cases} w_j h^2_j(\underline{x}, \underline{u}) & , h_j(\underline{x}, \underline{u}) > 0 \\ 0 & , h_j(\underline{x}, \underline{u}) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{II.41}).$$

O método Dommel-Tinney associa ao problema (P), a cada passo, um problema modificado (PM) dado por

$$(\text{PM}) \begin{cases} \min f_w(\underline{x}, \underline{u}) \\ \text{s.a. } \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}) = \underline{0} \end{cases} \quad (\text{II.42}),$$

cuja função lagrangeana associada é

$$L(\underline{x}, \underline{u}) = f_w(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{\lambda}^t \cdot \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}) \quad (\text{II.43}).$$

As condições necessárias de otimalidade de (PM), ou seja, as condições de estacionariedade da função Lagrangeana são dadas por:

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}} L(\underline{x}, \underline{u}) = \underline{\nabla}_{\underline{x}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{J}_{\underline{x}}^{\underline{g}}(\underline{x}, \underline{u})^t \cdot \underline{\lambda} = \underline{0} \quad (\text{II.44});$$

$$\underline{\nabla}_{\underline{u}} L(\underline{x}, \underline{u}) = \underline{\nabla}_{\underline{u}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{J}_{\underline{u}}^{\underline{g}}(\underline{x}, \underline{u})^t \cdot \underline{\lambda} = \underline{0} \quad (\text{II.45});$$

$$\underline{\nabla}_{\underline{\lambda}} L(\underline{x}, \underline{u}) = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}) = \underline{0} \quad (\text{II.46}).$$

O gradiente reduzido de  $f_w$  em relação a  $\underline{u}$ , levando em conta as restrições de igualdade (II.39), é dado por (Apêndice B)

$$\underline{\nabla}_{\underline{u}} L(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{II.47}).$$

O cálculo do gradiente reduzido, dado um valor para  $\underline{u}$ , é feito a

través dos passos:

- i - resolve-se a equação (II.46) em  $\underline{x}$  pelo método de Newton-Raphson (fluxo de carga);
- ii - resolve-se a equação (II.44) em  $\underline{\lambda}$ ;
- iii - substitui-se  $\underline{u}$  dado e  $\underline{x}$  e  $\underline{\lambda}$  calculados respectivamente em (i) e (ii) em (II.47) obtendo-se o gradiente reduzido.

O aspecto crítico neste método é o cálculo do passo nas variáveis de controle, ou seja, o cálculo de  $\Delta \underline{u}$  [8]. A seguir são descritas duas maneiras alternativas de se calcular  $\Delta \underline{u}$ .

#### Passo de gradiente ótimo

Nesta versão o passo é dado na direção do gradiente reduzido e é expresso como

$$\Delta \underline{u} = -c \nabla_{\underline{u}} L(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{II.48}),$$

onde é crítica a determinação do parâmetro  $c$  [8]. Para valores pequenos de  $c$  a convergência é assegurada, mas o processo pode levar a um número excessivo de iterações. Para valores grandes de  $c$  ocorrem oscilações em torno da solução e a convergência do processo não é assegurada. Estas dificuldades são contornadas adotando-se um passo de gradiente ótimo, onde o parâmetro  $c$  é estimado através de uma busca unidimensional na direção do gradiente reduzido. Nessa direção, a função objetivo passa a depender apenas do parâmetro  $c$ , ou seja

$$\tilde{f}_w(c) = f_w(\underline{x}, \underline{u}^v + \Delta \underline{u}) \quad (\text{II.49}),$$

que é representada graficamente na Figura (II.5).

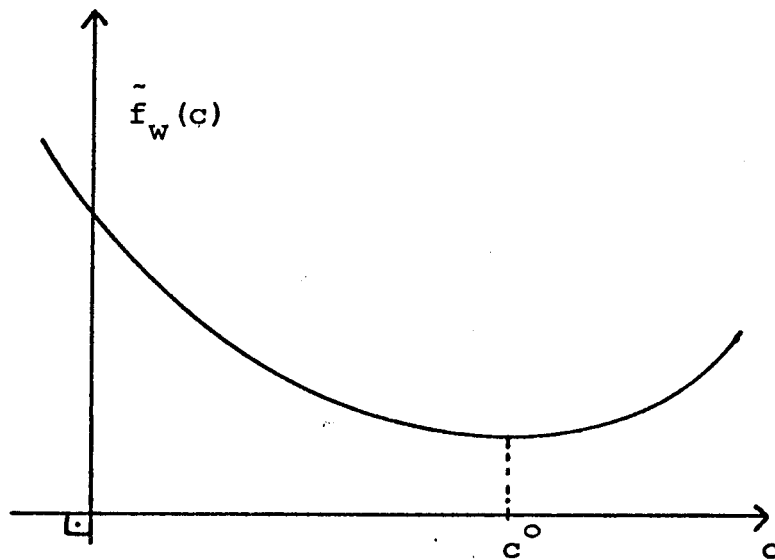


Figura (II.5)

Uma estimativa para  $c^o$  é feita aproximando-se  $\tilde{f}_w(c)$  por uma função quadrática ou cúbica. Este processo é computacionalmente oneroso pois exige o cálculo do fluxo de carga nos passos exploratórios de  $c$ , necessários para a interpolação quadrática ou cúbica.

Passo calculado pela matriz Hessiana aproximada

Nesta versão aproxima-se  $f_w(\underline{x}, \underline{u})$  por uma função quadrática em  $\underline{u}$ , para qual a condição necessária de otimalidade fornece

$$\Delta \underline{u} = - \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} \right]^{-1} \nabla_{\underline{u}} L(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{II.50})$$

onde:

$$\left[ \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} \right] - \text{matriz Hessiana de } f_w(\underline{x}, \underline{u}) \text{ em relação a } \underline{u}.$$

Este procedimento é apresentado em [8] desprezando-se na matriz Hessiana os elementos fora da diagonal e efetuando-se um passo exploratório em  $\underline{u}$  que permite calcular

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} = \frac{\text{variação em } (\partial L / u_i)}{\text{variação em } u_i} \quad (\text{II.51}).$$

O passo nas variáveis de controle é então dado por

$$\Delta u_i = \begin{cases} 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} \leq 0 \\ - \left( \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial u_i} \right), & \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} > 0 \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

A idéia básica do método Dommel-Tinney, qual quer que seja o procedimento para o cálculo de  $\Delta \underline{u}$ , é visualizada na Figura (II.6).

## II.5. Método de penalidades na análise de sistemas de potência

O método tratado aqui consiste em associar ao problema original um problema irrestrito que é resolvido por técnicas de programação não linear. A.M.Sasson apresenta em [12,13] a aplicação do método na resolução dos problemas do fluxo de carga e fluxo de carga ótimo. Nesse caso os problemas irrestritos são resolvidos pelo método Fletcher-Powell. A.M.Sasson, F.Vilória e F.Aboytes apresentam em [14] a aplicação do método na qual utilizam a matriz Hessiana exata. A.Monticelli, A.V.Garcia, A. Santos Jr. e C.A.Murari apresentam em [16] uma versão, com a matriz Hessiana simplificada, que é aplicada ao problema do fluxo de carga ótimo reativo. A seguir é analisada a aplicação desse método aos

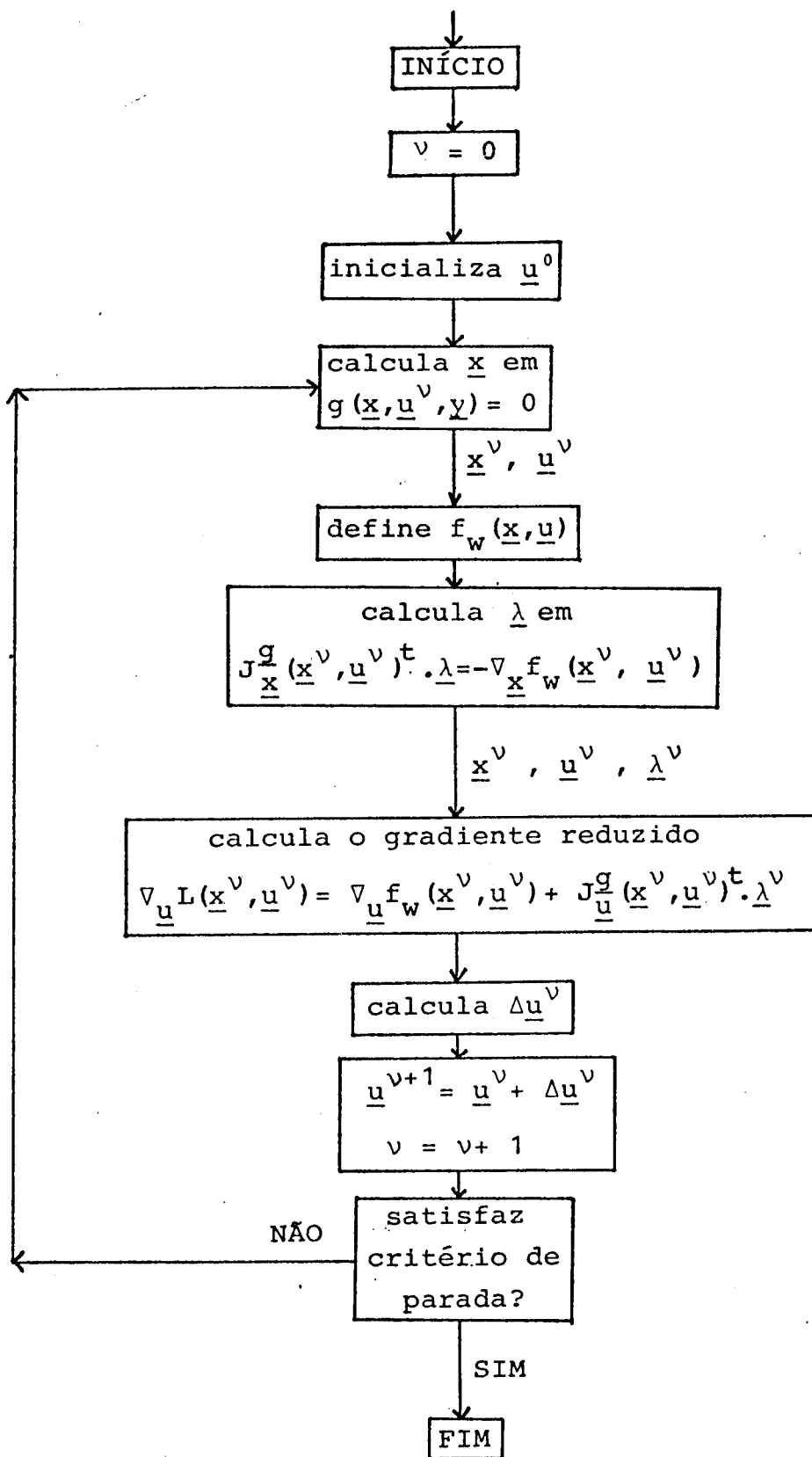


Figura (II.6)



problemas do fluxo de carga e fluxo de carga ótimo.

O problema do fluxo de carga representado na equação (II.11) é associado ao problema de otimização irrestrito dado por

$$(PI) \min_{\underline{x}} F(\underline{x}) \quad (II.53),$$

com

$$F(\underline{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} g_i^2(\underline{x}) \quad (II.54),$$

onde:

I - conjunto dos índices das restrições de igualdade.

Caso exista uma solução para a equação (II.11) o mínimo de  $F(\underline{x})$  é zero. O mínimo de  $F(\underline{x})$  é obtido através da resolução de uma sucessão de problemas quadráticos pelos quais o (PI) é aproximado.

O problema do fluxo de carga ótimo é formulado como

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min f(\underline{x}) \\ \text{s.a. } \underline{g}(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{h}(\underline{x}) \leq \underline{0} \end{array} \right. \quad (II.55),$$

onde:

$$\underline{x} = \left[ \begin{array}{l} \theta_k - \text{nas barras onde os ângulos de} \\ \text{tensão não são especificados} \\ V_k - \text{nas barras onde as magnitudes} \\ \text{de tensão não são especifica} \\ \text{das} \end{array} \right] \quad (II.56).$$

O problema (P) é então transformado no problema de otimização irrestrito (II.53), onde

$$F(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i \in I} w_i g_i^2(\underline{x}) + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} v_j h_j^2(\underline{x}) \quad (\text{II.57}),$$

com

$$w_i > 0$$

$$v_j \begin{cases} = 0, & h_j(\underline{x}) \leq 0 \\ > 0, & h_j(\underline{x}) > 0 \end{cases}$$

J - conjunto dos índices das restrições de desigualdade.

A solução do problema irrestrito (II.53) é obtida através da minimização de uma sequência de funções quadráticas pelas quais  $F(\underline{x})$  é aproximada. A função  $F(\underline{x})$ , em torno de um ponto  $\underline{x}^v$ , é aproximada por

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^v) + \nabla_{\underline{x}} F(\underline{x}^v)^t \Delta \underline{x} + \frac{1}{2} \Delta \underline{x}^t \nabla_{\underline{x}}^2 F(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} \quad (\text{II.58}),$$

onde:

$\Delta \underline{x}$  - perturbação em  $\underline{x}$ , em torno de  $\underline{x}^v$ , onde  $F(\underline{x})$  é aproximada por uma quadrática;

$\nabla_{\underline{x}} F(\underline{x}^v)$  - vetor gradiente de  $F(\underline{x})$  em relação a  $\underline{x}$  e calculado no ponto  $\underline{x}^v$ ;

$\nabla_{\underline{x}}^2 F(\underline{x}^v)$  - matriz Hessiana de  $F(\underline{x})$  em relação a  $\underline{x}$  e calculada no ponto  $\underline{x}^v$ .

A condição necessária de mínimo da função quadrática aproximada é dada por

$$\nabla_{\underline{x}}^2 F(\underline{x}^v) \cdot \Delta \underline{x}^v = - \nabla_{\underline{x}} F(\underline{x}^v) \quad (\text{II.59}),$$

que fornece um passo no qual o problema quadrático é resolvido e  $F(\underline{x})$  sofre um decréscimo. Desse modo obtém-se um novo ponto dado

por

$$\underline{x}^{v+1} = \underline{x}^v + \Delta \underline{x}^v \quad (\text{II.60}).$$

A Figura (II.7) ilustra uma iteração do processo.

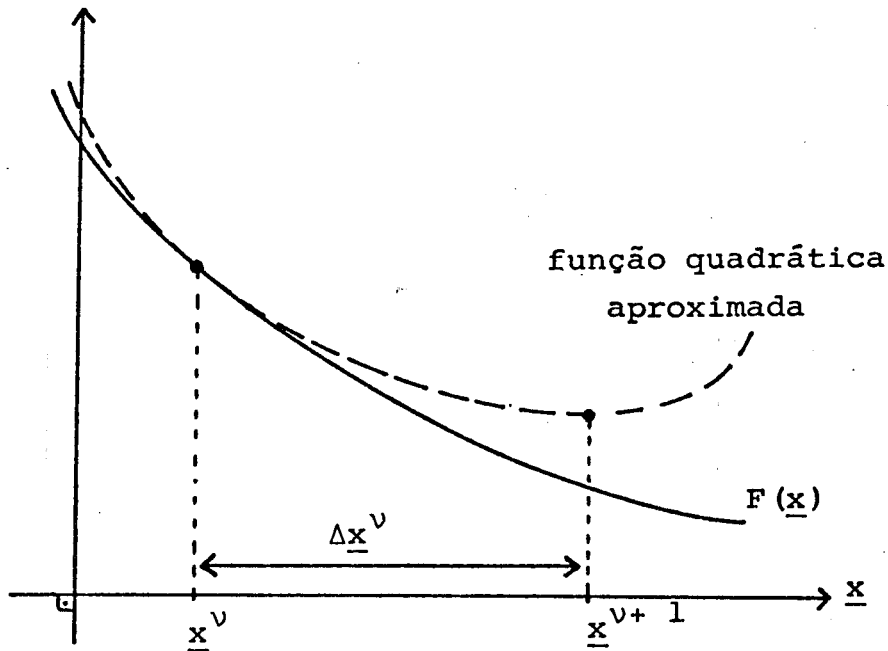


Figura (II.7)

A resolução da equação (II.59) e a atualização do ponto  $\underline{x}$  são repetidos até que se obtenha um ponto factível com as restrições do problema original (P). No caso do fluxo de carga ótimo as penalidades  $w_i$  e  $v_j$  variam ao longo do processo iterativo de acordo com uma política pré-estabelecida. A idéia básica de um algoritmo é apresentada na Figura (II.8).

### Resolução do fluxo de carga

A matriz Hessiana de  $F(\underline{x})$ , que aparece em (II.59), tem um grau de esparsidade menor que o da matriz Jacobiana utilizada no método de Newton-Raphson [14]. Isso implica que o tratamento da matriz Hessiana exige mais recursos de memória e mais

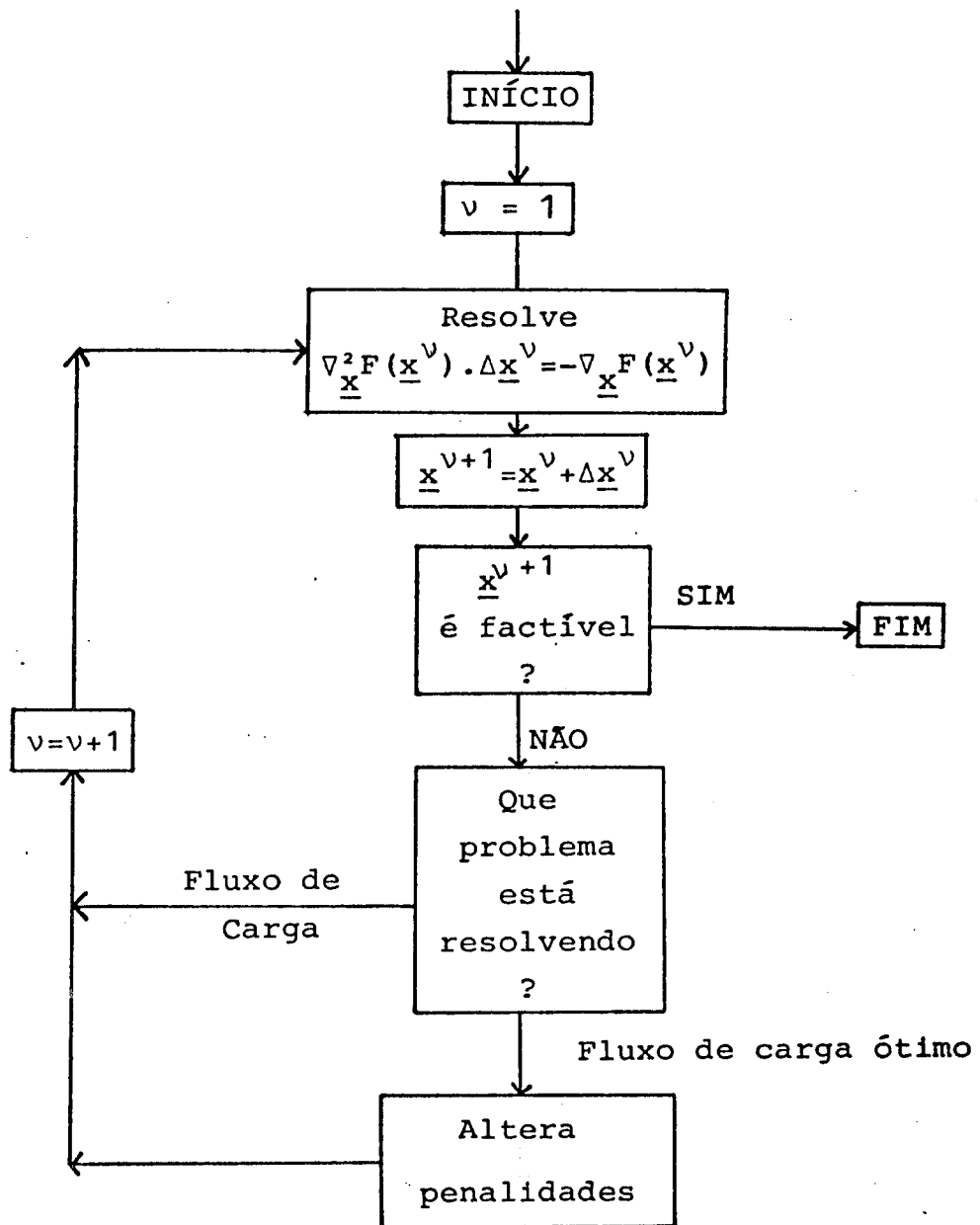


Figura (II.8)

tempo de cálculos, conferindo ao método de penalidades menos eficiência computacional que ao método de Newton-Raphson. Em situações normais, nas quais existe capacidade de transmissão suficiente para atendimento das cargas e disponibilidade de reativos para manter as magnitudes de tensão dentro de seus limites, as características de convergência [17,16] e o tempo de processamento tornam o método de Newton-Raphson mais atrativo que o método de penalidades. Entretanto, em situações típicas nos estudos de planejamento, onde essas condições não são satisfeitas o método de penalidades fornece resultados interessantes com erros mínimos nas variáveis especificadas. Isso dá uma boa idéia das insuficiências do sistema. Um programa de fluxo de carga utilizando o método de penalidades é uma ferramenta muito útil no planejamento da operação, com potencial de utilização nas situações em que os métodos convencionais falham.

#### Resolução do fluxo de carga ótimo

A.M.Sasson apresenta em [13] a resolução do fluxo de carga ótimo pelo método de penalidades. Nesse trabalho é utilizado a técnica de Fletcher-Powell no cálculo das correções  $\Delta x^v$ . Entretanto, esse procedimento apresenta limitações no tratamento de sistemas com dimensões mais elevadas, e só se aplica eficientemente à sistemas com dimensões da ordem de 50 barras [16].

A.M.Sasson, F.Viloria e F. Aboytes apresentam em [14] um método que utiliza a matriz Hessiana exata que é calculada passo a passo. Isso é possível, sem um custo computacional elevado, pois a matriz Hessiana é esparsa e simétrica, ou seja, tem características de uma matriz de rede. Tais características permiti

tem o seu tratamento através de técnicas específicas de armazenamento compacto e fatoração LDU [18,19]. Os autores sugerem que os fatores de penalidades sejam aumentados a cada dois passos como mostra o algoritmo proposto:

0. resolve-se o fluxo de carga, obtendo-se um ponto inicial  $\underline{x}^0$ ;
1. definem-se  $w_i$  e  $v_j$  iguais a 1.0;
2. efetuam-se duas iterações;
3. multiplicam-se as penalidades correspondentes às restrições violadas por um fator 5.0 ou 10.0;
4. efetuam-se duas iterações sendo que, se a correção  $\Delta \underline{x}$  for muito pequena não se realiza a segunda;
5. se todas as restrições estiverem satisfeitas a menos de uma tolerância, a solução foi encontrada. Caso contrário retorna-se ao passo 3.

Utilizando este algoritmo os autores apresentam a resolução do despacho econômico de geração (fluxo de carga ótimo ativo) para o sistema teste IEEE de 30 barras. Neste caso, o perfil das magnitudes de tensão das barras de geração foi considerado fixo.

A.Monticelli, A.V.Garcia, A.Santos Jr. e C.A.Murari apresentam em [16] uma versão aplicada à resolução do fluxo de carga ótimo reativo, na qual foi considerada a minimização da perda de potência ativa na transmissão. A idéia básica consiste em aproximar  $F(\underline{x})$  por uma quadrática linearizando as expressões dos termos quadráticos com penalidades. A função  $F(\underline{x})$ , em torno de um ponto  $\underline{x}$ , é aproximada por

$$\begin{aligned}
F(\underline{x}) = & f(\underline{x}^v) + \nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}^v)^t \Delta \underline{x} + \frac{1}{2} \Delta \underline{x}^t \nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i \in I} w_i [g_i(\underline{x}^v) + \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x}^v)^t \Delta \underline{x}]^2 + \quad (\text{II.61}) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} v_j [h_j(\underline{x}^v) + \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x}^v)^t \Delta \underline{x}]^2
\end{aligned}$$

cuja condição necessária de mínimo é (Apêndice C)

$$\begin{aligned}
& \left[ \nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}^v) + J_{\underline{x}}^{\underline{g}, \underline{h}}(\underline{x}^v)^t W J_{\underline{x}}^{\underline{g}, \underline{h}}(\underline{x}^v) \right] \Delta \underline{x} = \\
& - \nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}^v) - J_{\underline{x}}^{\underline{g}, \underline{h}}(\underline{x}^v)^t W \begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}^v) \\ \underline{h}(\underline{x}^v) \end{bmatrix} \quad (\text{II.62}),
\end{aligned}$$

onde:

$J_{\underline{x}}^{\underline{g}, \underline{h}}(\underline{x}^v)$  - matriz Jacobiana da função vetorial

$\begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}) \\ \underline{h}(\underline{x}) \end{bmatrix}$  em relação a  $\underline{x}$  calculada no ponto  $\underline{x}^v$ ;

$W$  - matriz diagonal cujos elementos são as penalidades  $w_i$  e  $v_j$  com  $i \in I$  e  $j \in J$ .

A matriz

$$\left[ \nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}^v) + J_{\underline{x}}^{\underline{g}, \underline{h}}(\underline{x}^v)^t W J_{\underline{x}}^{\underline{g}, \underline{h}}(\underline{x}^v) \right]$$

corresponde à uma simplificação da matriz Hessiana  $\nabla_{\underline{x}}^2 F(\underline{x}^v)$ , na qual são desprezadas as derivadas segundas das funções  $g_i(\underline{x})$  e  $h_j(\underline{x})$  com  $i \in I$  e  $j \in J$ . Essa matriz, a menos da parcela correspondente à função objetivo, é da mesma natureza da matriz ganho utiliza

da na estimação estática de estado [16,21] o que possibilita o seu desacoplamento P $\theta$ -QV. Em [16] são apresentados resultados de testes realizados com o sistema AEP de 30 barras. Os autores comparam o desempenho desta versão em tres procedimentos:

- A - matriz desacoplada, constante e sem busca unidimensional na direção de  $\Delta \underline{x}^v$ ;
- B - matriz desacoplada, constante e com busca unidimensional na direção de  $\Delta \underline{x}^v$ ;
- C - matriz completa, calculada ponto a ponto a cada iteração e sem busca unidimensional.



## CAPÍTULO III

### TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADAS A PROBLEMAS

#### NÃO LINEARES

Neste capítulo é discutida uma metodologia da programação não linear que fornece subsídios para a elaboração de um algoritmo aplicado ao problema do fluxo de carga ótimo. A característica comum dos métodos apresentados consiste em associar ao problema restrito original uma sequência de problemas irrestritos. A solução do problema original é, então, obtida através da resolução dessa sequência de problemas.

Inicialmente apresenta-se a associação entre um problema não linear restrito e um irrestrito, cuja resolução pelo método de Newton é considerada. Em seguida são apresentadas propriedades que servem de apoio à discussão dos métodos, que finalmente são discutidos através da interpretação geométrica de um problema simplificado.

#### III.1. Problema não linear e solução pelo método de Newton

O problema não linear de otimização é colocado na forma

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min f(\underline{x}) \\ \text{s.a. } \underline{g}(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{h}(\underline{x}) \leq \underline{0} \end{array} \right. \quad (\text{III.1}).$$

Os métodos de solução que serão discutidos se caracterizam por considerar uma sequência de funções do tipo

$$F_k(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \alpha_k [g(\underline{x})] + \beta_k [h(\underline{x})] \quad (\text{III.2}),$$

onde:

$$k = 1, 2, 3, \dots;$$

$\alpha_k, \beta_k$  - funções escalares.

A solução de (P) é, então, obtida através da resolução da sequência de problemas irrestritos

$$(\text{PI})^k \quad \min_{\underline{x}} F_k(\underline{x}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.3}).$$

Considerando-se a aproximação quadrática de  $F_k(\underline{x})$ , em torno de um ponto  $\underline{x}^v$ , dada por

$$\tilde{F}_k(\underline{x}) = F_k(\underline{x}^v) + \nabla_{\underline{x}} F_k(\underline{x}^v)^t \Delta \underline{x} + \frac{1}{2} \Delta \underline{x}^t \nabla_{\underline{x}}^2 F_k(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} \quad (\text{III.4}),$$

o problema  $(\text{PI})^k$  é parcialmente resolvido através do problema irrestrito aproximado como discutido na secção II.5.

$$(\text{PIA})^k \quad \min_{\underline{x}} \tilde{F}_k(\underline{x}) \quad (\text{III.5}).$$

A condição necessária de mínimo de  $\tilde{F}_k(\underline{x})$  é dada por

$$\nabla_{\underline{x}}^2 F_k(\underline{x}^v) \cdot \Delta \underline{x} = - \nabla_{\underline{x}} F_k(\underline{x}^v) \quad (\text{III.6})$$

que fornece o passo  $\Delta \underline{x}$  com o qual o vetor  $\underline{x}$  é corrigido, fornecendo um novo ponto dado por

$$\underline{x}^{v+1} = \underline{x}^v + \Delta \underline{x} \quad (\text{III.7})$$

Por um processo iterativo de resolução da equação (III.6) seguida da atualização de  $\underline{x}$  (III.7), aproxima-se o quanto se deseja da condição de estacionariedade de  $F_k(\underline{x})$ . O valor atualizado de  $\underline{x}$  juntamente com critérios que definem as funções  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  fornecem o próximo problema na sequência (PI)<sup>k</sup>.

### III.2. Análise dos métodos apresentados

Os métodos apresentados neste capítulo são analisados através de uma interpretação geométrica para o caso de um problema com uma única restrição de desigualdade, representado por

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min f(\underline{x}) \\ \text{s.a. } h(\underline{x}) \leq 0 \end{array} \right. \quad (III.8).$$

Uma família de problemas perturbados (PP) é associada com (P) e representada por

$$(PP) \left\{ \begin{array}{l} \min f(\underline{x}) \\ \text{s.a. } h(\underline{x}) \leq y \end{array} \right. \quad (III.9).$$

O conjunto de soluções de (PP) estabelece os limites mínimos possíveis para  $f(\underline{x})$ , que no plano  $[y; f(\underline{x})]$  é descrito por uma curva não crescente [23], dada por

$$t(y) = \inf_{\underline{x}} \{ f(\underline{x}) / h(\underline{x}) \leq y \} \quad (III.10).$$

No caso de restrições ativas na solução de (P), a Figura (III.1) ilustra o plano  $[y; f(\underline{x})]$  para um problema convexo e um não convexo. No caso de restrições não ativas na solução de (P), a Figura (III.2) ilustra o plano  $[y; f(\underline{x})]$  no qual se identifica a folga associada à restrição.

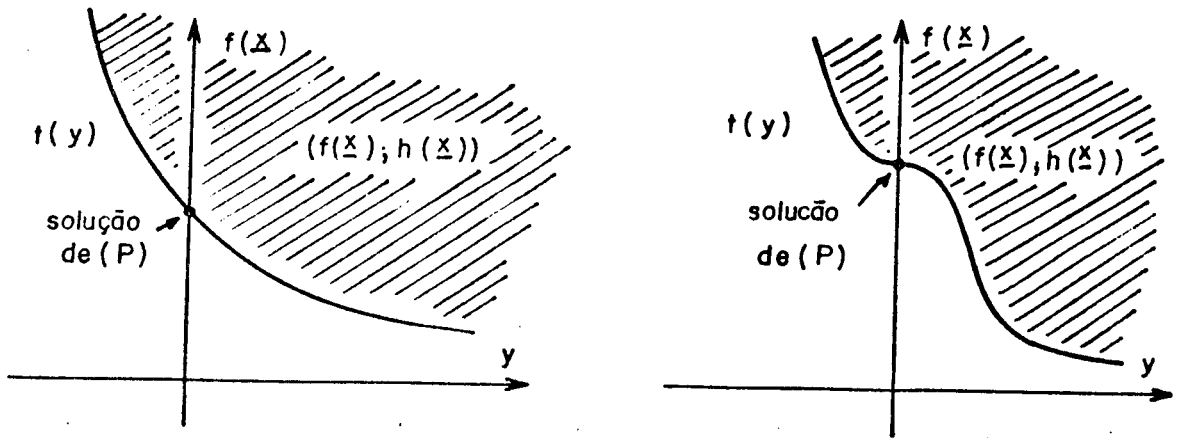


Figura (III.1)

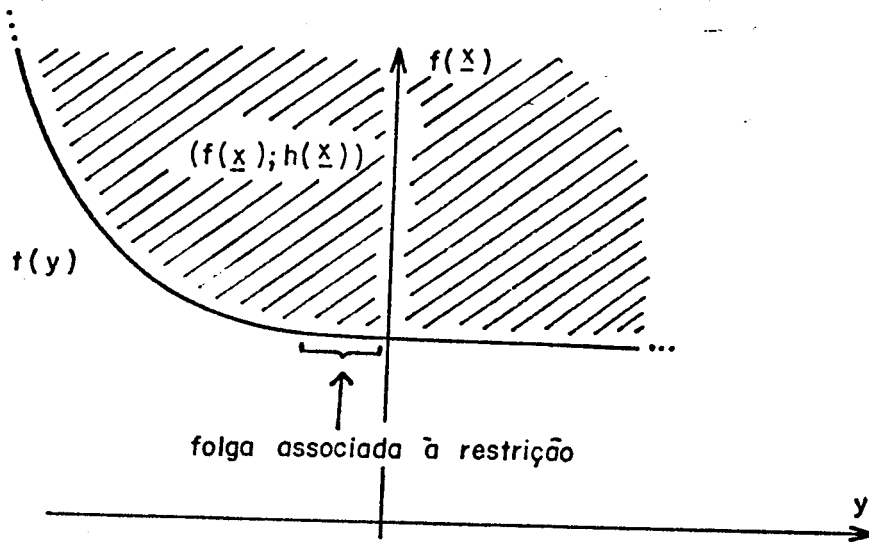


Figura (III.2)

### III.3. Método de penalidades

Nesse método define-se uma função de penalidades associada às restrições do problema (P), que é dada por

$$P_k(\underline{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} w_i^k g_i^2(\underline{x}) + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} v_j^k h_j^2(\underline{x}) \quad (\text{III.11}),$$

onde:

$$w_i^k > 0, \quad i \in I;$$

$$v_j^k > 0 \quad \text{se} \quad h_j(\underline{x}) > 0, \quad j \in J;$$

$$v_j^k = 0 \quad \text{se} \quad h_j(\underline{x}) \leq 0, \quad j \in J.$$

O método consiste em se adotar uma sequência de fatores  $\{w_i, v_j\}_k$ , com  $k = 1, 2, 3, \dots$ , tal que

$$w_i^{k+1} \geq w_i^k$$

$$v_j^{k+1} \geq v_j^k \quad \text{se} \quad h_j(\underline{x}) > 0$$

$$v_j^{k+1} = 0 \quad \text{se} \quad h_j(\underline{x}) \leq 0$$

e para cada  $k$  resolver o problema irrestrito (III.3), onde a função  $F_k(\underline{x})$  é dada por

$$F_k(\underline{x}) = f(\underline{x}) + P_k(\underline{x}) \quad (\text{III.12}).$$

A sequência de soluções  $\{\hat{\underline{x}}\}_k$  dos problemas irrestritos tende para a solução de (P) à medida em que as penalidades das restrições ativas crescem [22]. A solução de (P) é obtida quando na sequência  $\{\hat{\underline{x}}\}_k$  se encontrar um ponto factível, dentro de uma tolerância previamente estabelecida.

O tratamento das restrições de desigualdade constitui uma das dificuldades inerentes à aplicação deste método ao problema do fluxo de carga ótimo [16]. Na solução do problema (P) poderão ocorrer restrições ativas e não ativas. Essas informações não são disponíveis durante o processo de resolução no qual restrições podem estar temporariamente satisfeitas ou violadas. Nesses casos a definição do fator de penalidade por uma regra geral dificulta a convergência do processo. Em [14] essa questão foi levantada. Em [16] adotou-se um procedimento heurístico para o caso

das restrições de desigualdade. Esse procedimento consiste em se definir uma tolerância em torno do limite da restrição como mostra a Figura (III.3)

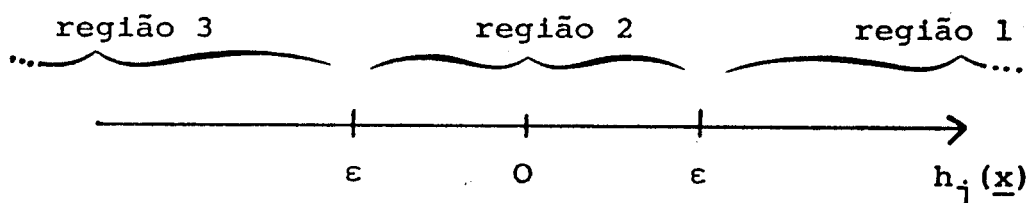


Figura (III.3)

e adotar a seguinte estratégia para a evolução dos fatores de penalidades:

- i - se  $h_j(\underline{x})$  está na região 1 considera-se a restrição violada, impõe-se

$$h_j(\underline{x}) = 0$$

e se faz

$$v_j^{k+1} = \alpha v_j^k \quad (\alpha > 1);$$

- ii - se  $h_j(\underline{x})$  está na região 2 considera-se a restrição como ativa, impõe-se

$$h_j(\underline{x}) = 0$$

e prossegue-se com o mesmo fator de penalidade, ou seja

$$v_j^{k+1} = v_j^k;$$

- iii - se  $h_j(\underline{x})$  está na região 3 considera-se a restrição como não ativa, impõe-se

$$h_j(\underline{x}) = h_j(\underline{x}^k)$$

e se faz

$$v_j^{k+1} = v_j^k .$$

Aqui a penalidade não é anulada para evitar mau condicionamento da matriz Hessiana. Neste caso a restrição só ganha mobilidade, na região permitida, na medida em que as penalidades das outras restrições aumentam relativamente.

Esse procedimento heurístico deu bons resultados no caso do sistema teste do IEEE de 30 barras.

### Interpretação geométrica

A sequência de problemas irrestritos associados com (P), dado em (III.8), é definida por

$$(PI)^k \quad \min_{\underline{x}} F_k(\underline{x}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (III.13)$$

onde:

$$F_k(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \frac{v^k}{2} h^2(\underline{x})$$

$$v^k > 0 \quad \text{se} \quad h(\underline{x}) > 0 \quad (III.14)$$

$$v^k = 0 \quad \text{se} \quad h(\underline{x}) \leq 0$$

Na resolução do problema irrestrito  $(PI)^k$ , a cada  $\underline{x}^1$  estão associados os valores

$$y = h(\underline{x}^1)$$

$$z = f(\underline{x}^1) \quad (III.15),$$

que definem um ponto no plano onde se representa a função  $t(y)$ . Ao ponto  $\underline{x}^1$  corresponde um valor da função  $F_k(\underline{x}^1)$  que, suposto constante, fornece a seguinte relação entre  $z$  e  $y$ .

$$z = \begin{cases} -\frac{v^k}{2} y^2 + \text{cte}, & \text{se } y > 0 \\ \text{cte}, & \text{se } y \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.16}).$$

Um ponto  $[h(\underline{x}); f(\underline{x})]$  no plano  $(y; z)$ , pertence à ou está acima da função  $t(y)$  [24], ou seja,

$$f(\underline{x}) \geq t(y) \quad \text{para } \forall \underline{x}/h(\underline{x}) \leq y \quad (\text{III.17})$$

O lugar geométrico dos pontos  $(y; z)$  associados a um valor constante de  $F_k(\underline{x})$  corresponde à curva de nível ilustrada na Figura (III.4).

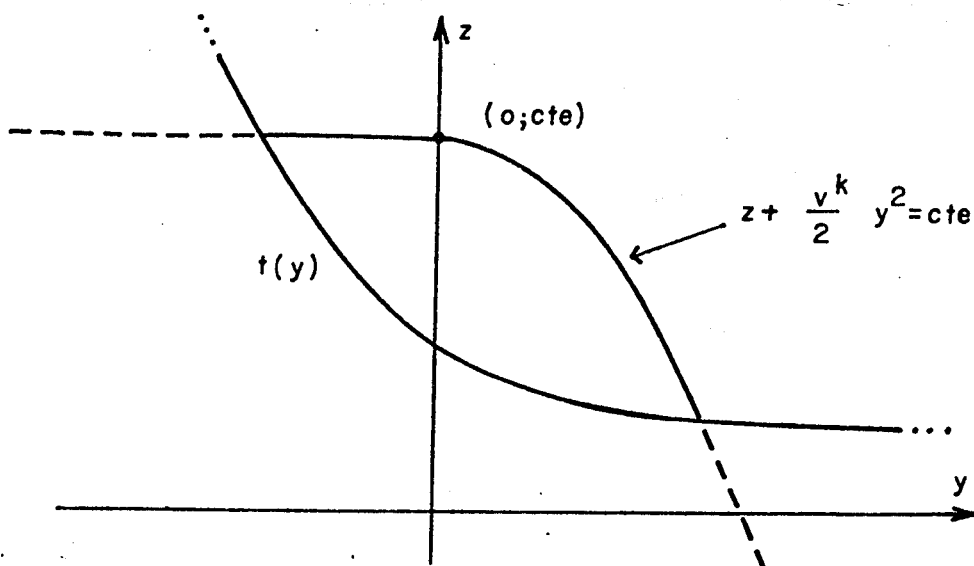


Figura (III.4)

O processo de minimização de  $F_k(\underline{x})$  gera uma sequência de pontos no plano  $(y; z)$ , cujo lugar geométrico são as curvas de nível de  $F_k(\underline{x})$ . A solução ótima de  $(PI)^k$  corresponde à curva que tangencia a função  $t(y)$ . A figura (III.5) dá uma idéia da evolução do pro



cesso de minimização de  $F_k(\underline{x})$ .

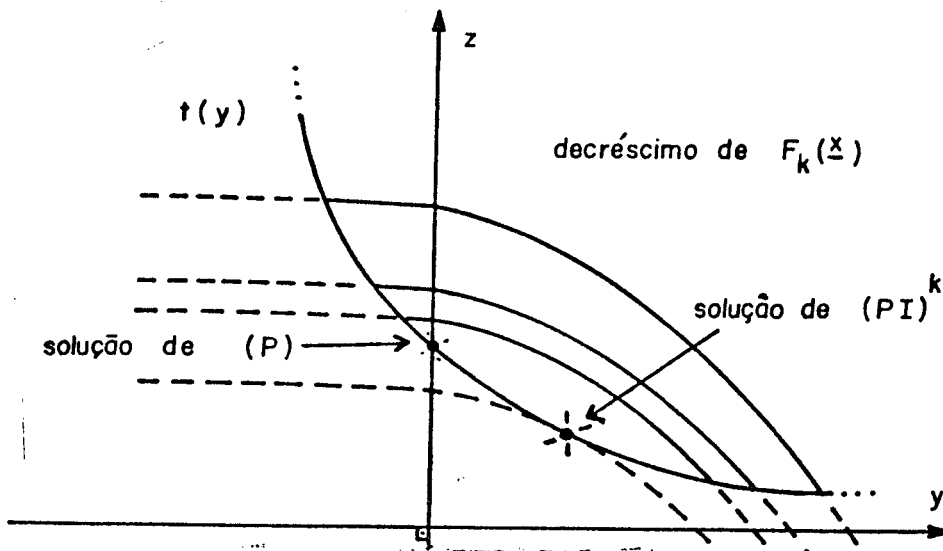


Figura (III.5)

A solução de  $(PI)^k$  não corresponde à solução de  $(P)$ . Para aproximá-las é preciso redefinir o fator de penalidade fazendo

$$v^{k+1} > v^k$$

que corresponde à uma nova família de curvas. Isso equivale a re direcionar a evolução do processo para um ponto mais próximo da solução de  $(P)$ . A mudança da penalidade pode ser feita durante o processo de resolução de  $(PI)^k$  como ilustra a Figura (III.6).

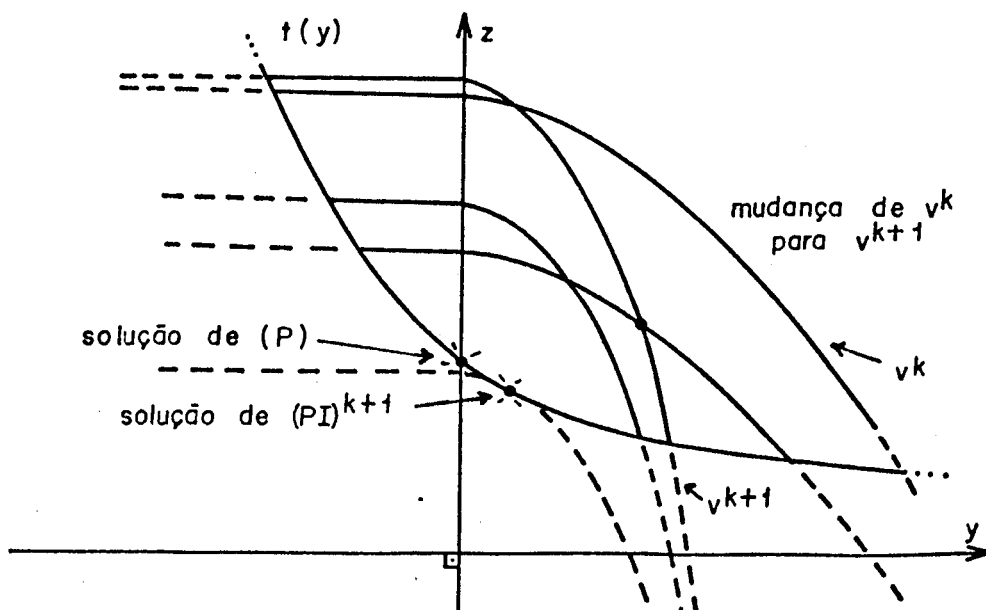


Figura (III.6)

No caso de restrições ativas, à medida em que o fator de penalidade cresce, as soluções dos problemas irrestritos aproximam-se da solução de (P). Assim, a solução de (P) é conseguida fazendo-se  $v^k$  crescer indefinidamente, como ilustra a Figura (III.7).

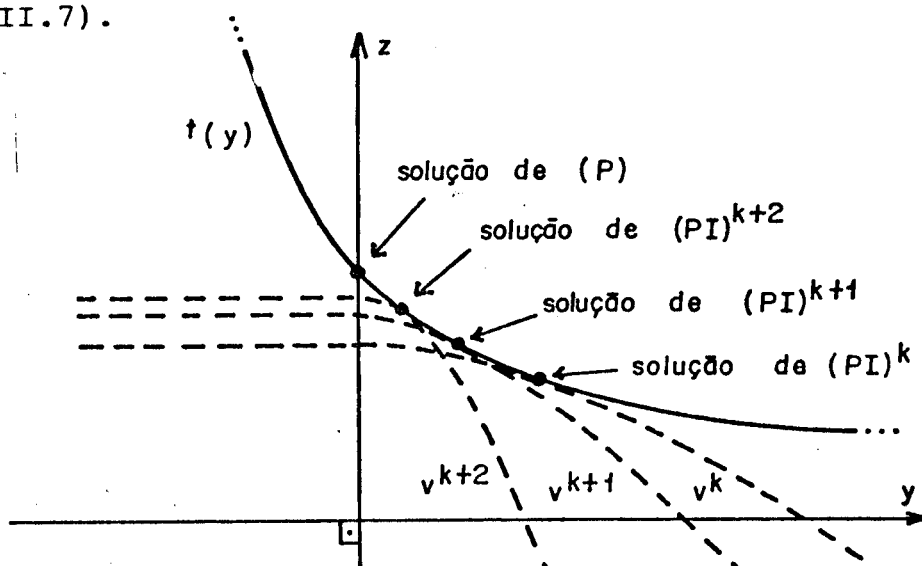


Figura (III.7)

No caso de restrições não ativas a solução é obtida para um fator de penalidade nulo como ilustra a Figura (III.8).

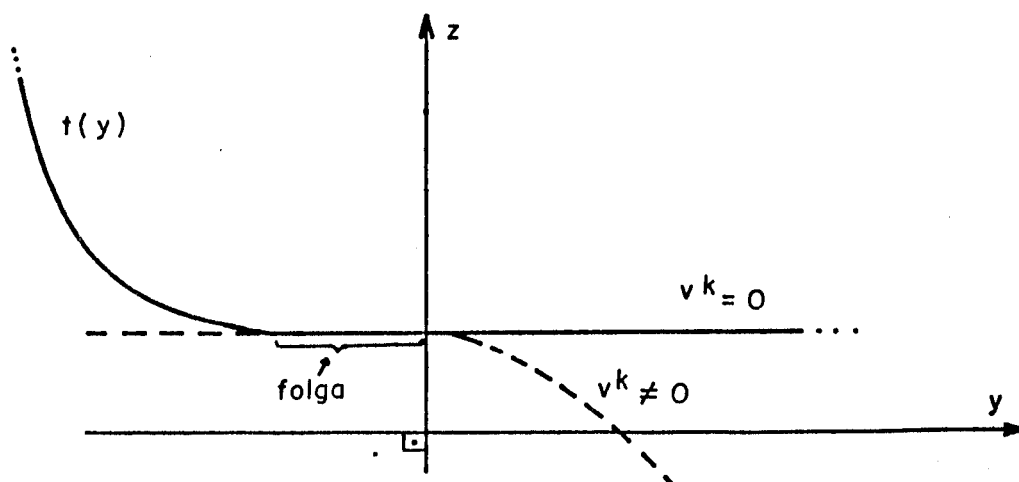


Figura (III.8)

No caso de problemas não convexos em torno da solução, como ilustra a Figura (III.9),

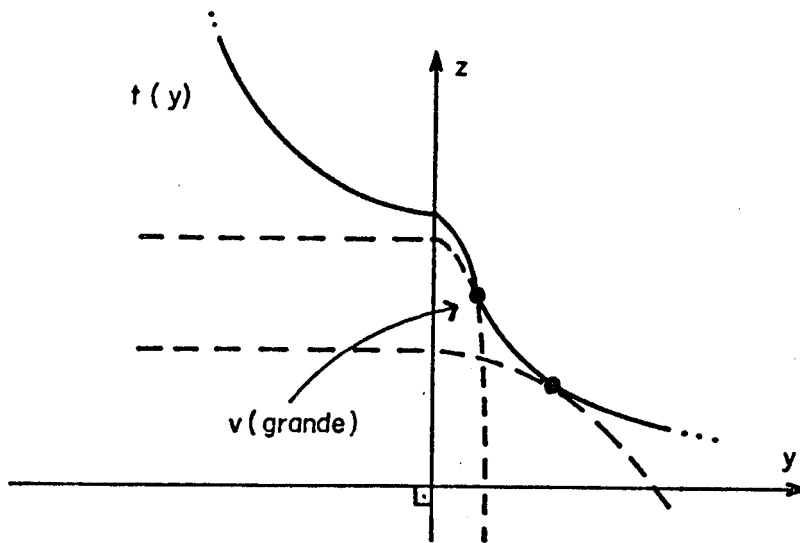


Figura (III.9)

pode ser necessário um crescimento excessivo do fator de penalidade, provocando um mau condicionamento na matriz Hessiana.

A análise apresentada aqui dá uma visão geométrica do comportamento do método de penalidades.

#### Enfoque computacional

O desempenho do método de penalidades depende do bom condicionamento da matriz Hessiana de  $F_k(\underline{x})$ . Isso porque cada iteração, na resolução do problema irrestrito, consiste do cálculo do passo  $\Delta \underline{x}$  pela equação (III.6). A implementação do método de penalidades é feita a partir da idéia geral ilustrada nos diagramas das Figuras (III.10) e (III.11). A aplicação do método de penalidades na resolução do fluxo de carga ótimo tem sido feita [14,16] considerando-se um ou dois passos entre cada modificação dos fatores de penalidades, ou seja, de redefinição do proble

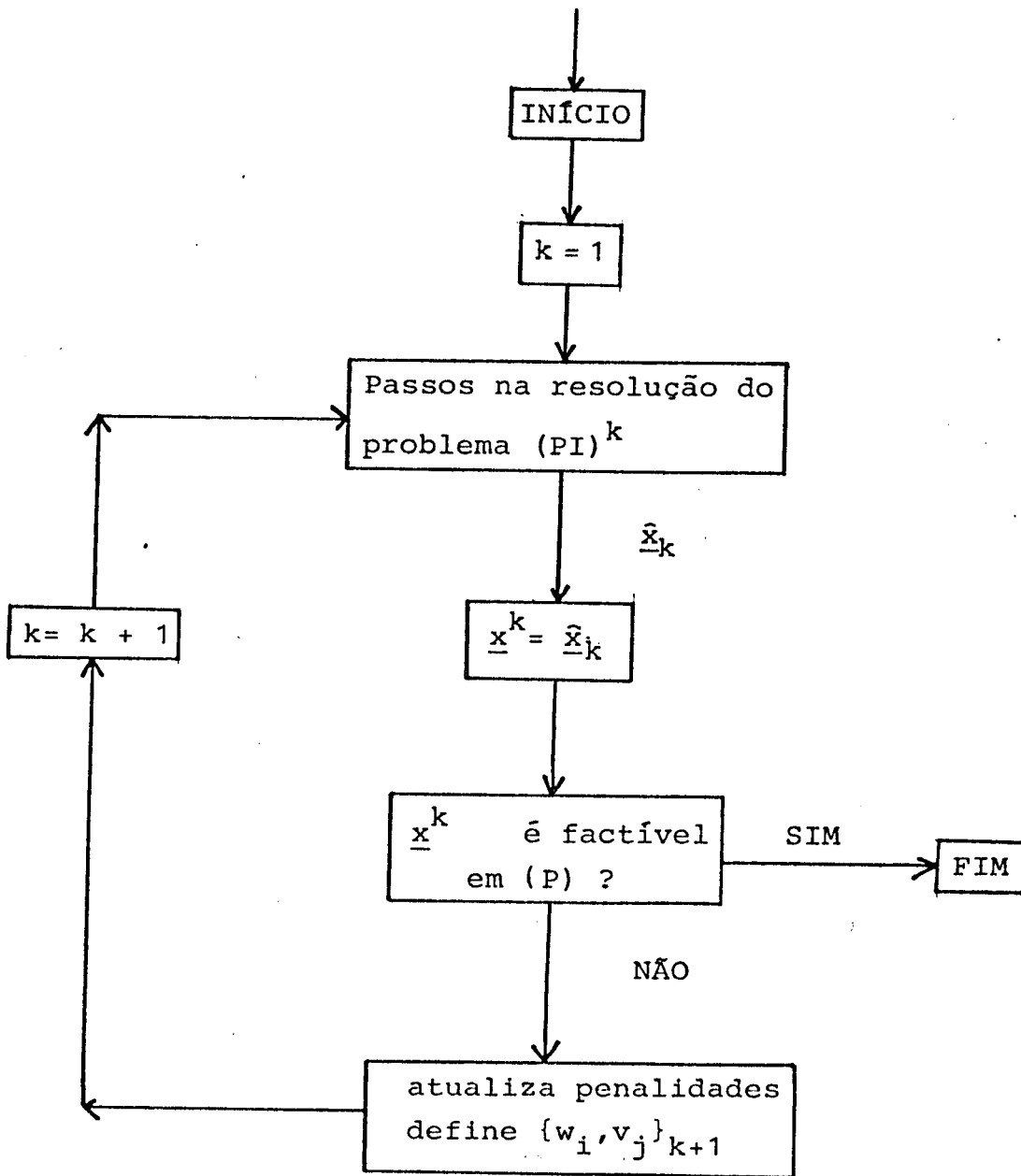


Figura (III.10)

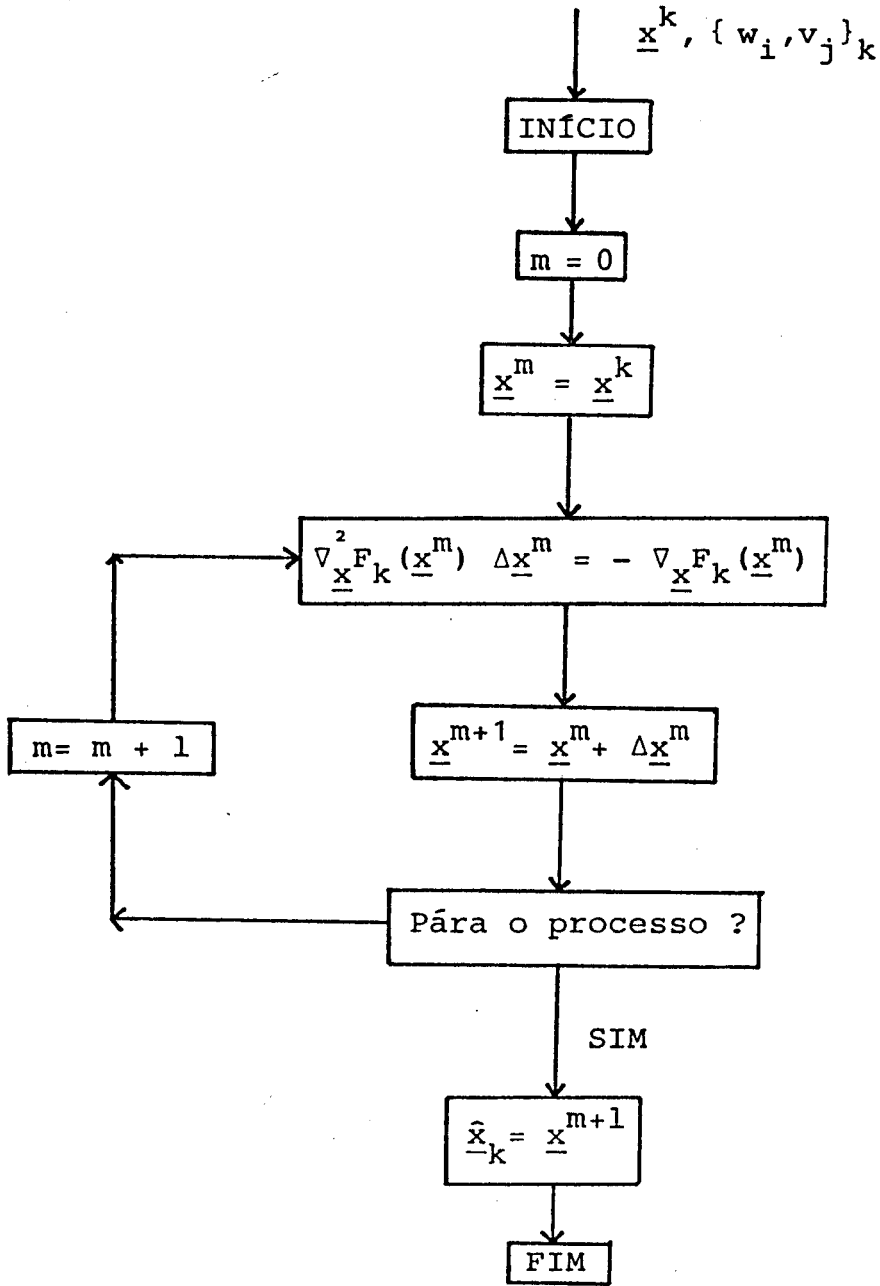


Figura (III.11)

ma irrestrito.

As expressões para o vetor gradiente e para a matriz Hessiana de  $F_k(\underline{x})$  são dadas por:

$$\nabla_{\underline{x}} F_k(\underline{x}) = \nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}) + \sum_{i \in I} w_i^k g_i(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x}) + \sum_{j \in J} v_j^k h_j(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x}) \quad (\text{III.18});$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{x}}^2 F_k(\underline{x}) = & \nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}) + \sum_{i \in I} w_i^k g_i(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}}^2 g_i(\underline{x}) + \sum_{j \in J} v_j^k h_j(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}}^2 h_j(\underline{x}) \\ & + \sum_{i \in I} w_i^k \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x})^t + \sum_{j \in J} v_j^k \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x})^t \end{aligned} \quad (\text{III.19}).$$

Com o crescimento dos fatores de penalidades, os termos da matriz Hessiana correspondentes às derivadas primeiras e segundas sofrem efeitos distintos.

Nos termos com derivadas segundas, à medida em que as penalidades crescem, as restrições tendem à factibilidade, fazendo com que os produtos

$$w_i^k g_i(\underline{x}) \quad \text{e} \quad v_j^k h_j(\underline{x})$$

evoluam para os multiplicadores de Lagrange [22] da solução, ou seja

$$\left. \begin{array}{l} w_i \rightarrow \infty \\ g_i(\underline{x}) \rightarrow 0 \end{array} \right\} w_i g_i(\underline{x}) \rightarrow \hat{\lambda}_i, \quad i \in I$$

e

$$\left. \begin{array}{l} v_j \rightarrow \infty \\ h_j(\underline{x}) \rightarrow 0 \end{array} \right\} v_j h_j(\underline{x}) \rightarrow \hat{\mu}_j, \quad j \in J$$

onde:

$\hat{\lambda}_i$  - multiplicador de Lagrange associado a uma restrição de igualdade;

$\hat{\mu}_j$  - multiplicador de Lagrange associado a uma restrição de desigualdade.

No caso de restrições de desigualdade não ativas a penalidade associada é nula, o mesmo ocorrendo para o multiplicador de Lagrange associado.

Nos termos com derivadas primeiras, à medida em que as penalidades crescem, os produtos

$$w_i^k \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x})^t \quad \text{e} \quad v_j^k \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x})^t$$

evoluem conjuntamente. Ou seja, devido a esses termos, os elementos da matriz Hessiana crescem na mesma proporção que os fatores de penalidades. Isso acarreta o mau condicionamento da matriz Hessiana, detectado nos problemas numéricos que aparecem na resolução da equação (III.6), quando os fatores de penalidades são elevados. Disso decorre também a dificuldade no tratamento de problemas não convexos, quando estes exigem o crescimento exagerado das penalidades.

#### III.4. Método dual lagrangeano

O método dual lagrangeano aqui descrito só se aplica a problemas convexos, como será visto simplifcadamente através de interpretação geométrica.

Associa-se ao problema original (P) a função lagrangeana dada por

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) = f(\underline{x}) + \underline{\lambda}^t \underline{g}(\underline{x}) + \underline{\mu}^t \underline{h}(\underline{x}) \quad (\text{III.20}),$$

onde:

$\underline{\lambda}$  - vetor formado pelos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade;

$\underline{\mu}$  - vetor formado pelos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade.

Os multiplicadores associados às restrições de igualdade são irrestritos e os associados às restrições de desigualdade são não negativos, ou seja

$\underline{\lambda}$  é irrestrito

$$\underline{\mu} \geq \underline{0}.$$

Se o problema (P) é estritamente convexo, existem multiplicadores  $\hat{\underline{\lambda}}$  e  $\hat{\underline{\mu}}$  que, aplicados ao problema irrestrito

$$(\text{PI}) \quad \min_{\underline{x}} L(\underline{x}, \hat{\underline{\lambda}}, \hat{\underline{\mu}}) \quad (\text{III.21}),$$

fazem com que a solução de (PI) coincida com a solução de (P) [23].

O método dual lagrangeano consiste em se resolver uma sequência de problemas irrestritos para  $\{\underline{\lambda}, \underline{\mu}\}_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , que passo a passo se aproximam de  $\{\hat{\underline{\lambda}}, \hat{\underline{\mu}}\}$ , situação na qual obtém-se a solução de (P).

Se o problema (P) é convexo, a solução ótima é encontrada quando as condições de Kuhn Tucker estiverem satisfeitas para  $(\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{\lambda}}, \hat{\underline{\mu}})$ :

$$\nabla_{\underline{x}} f(\hat{\underline{x}}) + \sum_{\underline{x}} \underline{g}(\hat{\underline{x}})^t \hat{\underline{\lambda}} + \sum_{\underline{x}} \underline{h}(\hat{\underline{x}})^t \hat{\underline{\mu}} = \underline{0} \quad (\text{a})$$



$$\begin{aligned}
 \underline{g}(\underline{\hat{x}}) &= \underline{0} \quad (b) \\
 \underline{h}(\underline{\hat{x}}) &\leq \underline{0} \quad (c) \\
 \underline{\hat{\mu}}^t \underline{h}(\underline{\hat{x}}) &= 0 \quad (d) \\
 \underline{\hat{\mu}} &\geq \underline{0} \quad (e)
 \end{aligned}
 \tag{III.22}$$

### Interpretação geométrica

Ao problema com uma única restrição de desigualdade, dado em (III.8), associa-se a função lagrangeana

$$L_k(\underline{x}, \mu^k) = f(\underline{x}) + \mu^k h(\underline{x}) \tag{III.23},$$

com  $\mu^k$  conhecido e satisfazendo

$$\mu^k \geq 0$$

Em seguida resolve-se o problema lagrangeano irrestrito

$$(PI)^k \quad \min L_k(\underline{x}, \mu^k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{III.24}$$

Na resolução de cada problema irrestrito  $(PI)^k$ , ao ponto  $\underline{x}^1$  estão associados os valores

$$\begin{aligned}
 y &= h(\underline{x}^1) \\
 z &= f(\underline{x}^1)
 \end{aligned}
 \tag{III.25}$$

que correspondem a um ponto no plano da função  $t(y)$ . Ao ponto  $\underline{x}^1$  corresponde um valor da função lagrangeana  $L_k(\underline{x}^1, \mu^k)$  que, suposto constante, fornece a seguinte relação entre  $z$  e  $y$

$$z + \mu^k y = \text{cte} \tag{III.26}.$$

Admitindo-se a condição (III.17), o lugar geométrico dos pontos

$(y; z)$  correspondentes a um valor constante de  $L_k(\underline{x}, \mu^k)$  é o trecho de reta que se situa acima da curva  $t(y)$ , como ilustra a Figura (III.12).

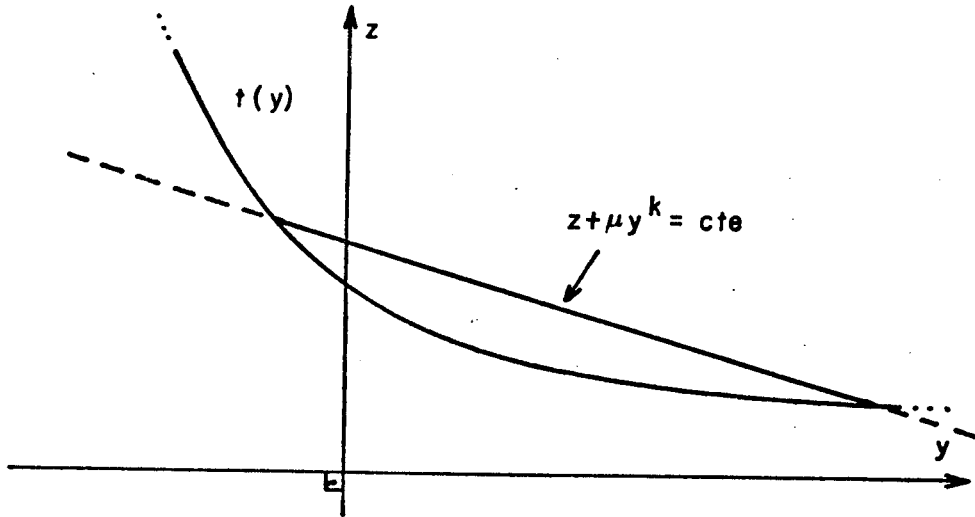


Figura (III.12)

O processo de minimização de  $L_k(\underline{x}, \mu^k)$  corresponde a uma sequência de pontos no plano  $(y; z)$  sobre segmentos de retas paralelas. A solução ótima de  $(PI)^k$  corresponde à reta que tangencia a curva  $t(y)$ . A figura (III.13) dá uma idéia da evolução do processo de minimização de  $L_k(\underline{x}, \mu^k)$ .

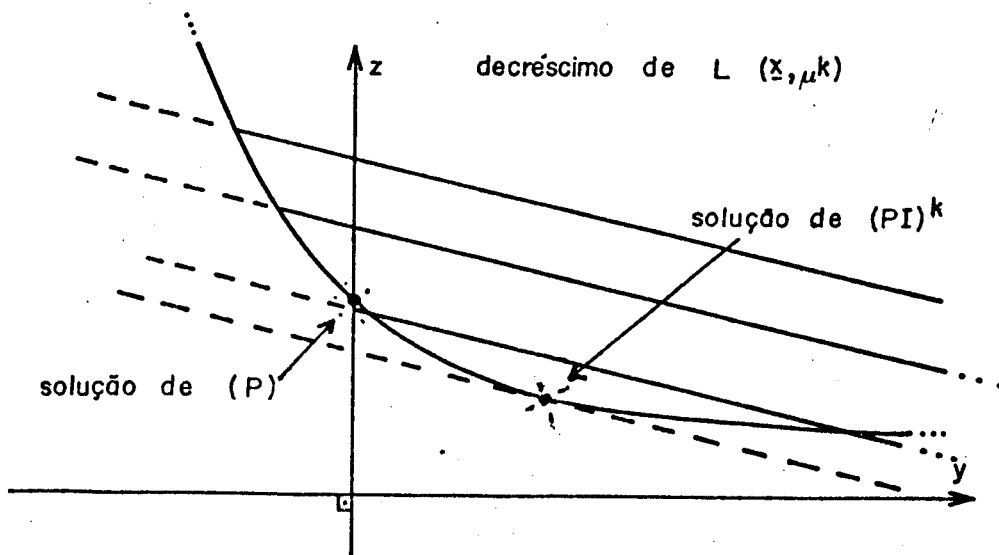


Figura (III.13)

Para obrigar que a solução do problema irrestrito se aproxime da solução de (P), redefine-se um novo multiplicador, fazendo

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \Delta\mu^k \quad (\text{III.27})$$

que corresponde a uma nova família de retas. A figura (III.14) ilustra a evolução do processo.

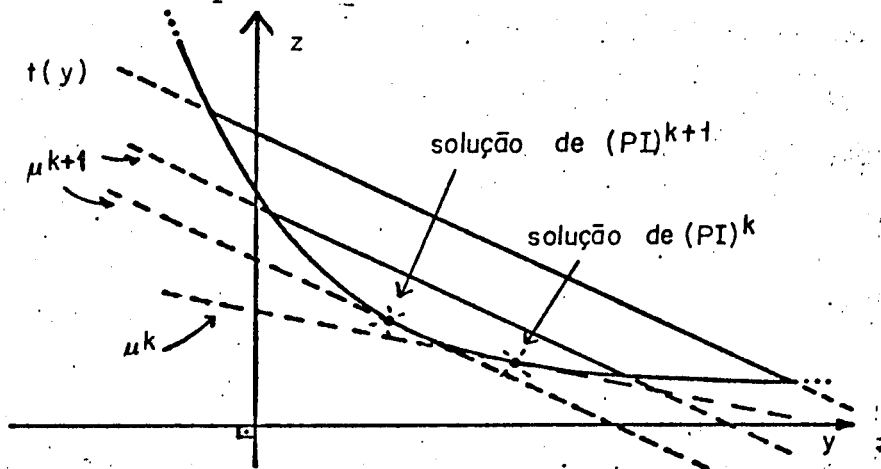


Figura (III.14)

No caso de restrições ativas, à medida em que o multiplicador de Lagrange se aproxima do valor ótimo  $\hat{\mu}$  as soluções dos problemas irrestritos evoluem para a solução de (P). A solução de (P) é encontrada quando o valor de  $\hat{\mu}$  for utilizado na resolução do problema irrestrito. A Figura (III.15) ilustra uma situação onde a sequência de multiplicadores  $\{\mu\}_k$  converge para o seu valor ótimo  $\hat{\mu}$ .

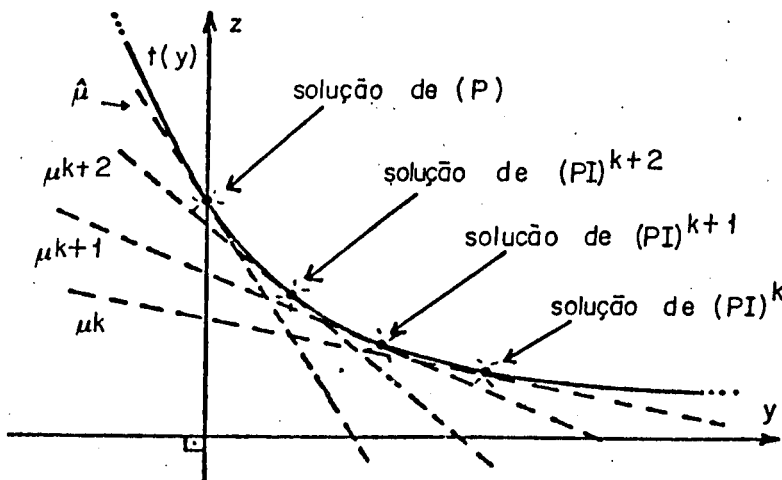


Figura (III.15)

No caso de restrições não ativas a solução é obtida anulando-se o multiplicador de Lagrange. Essa situação é ilustrada na Figura (III.16).

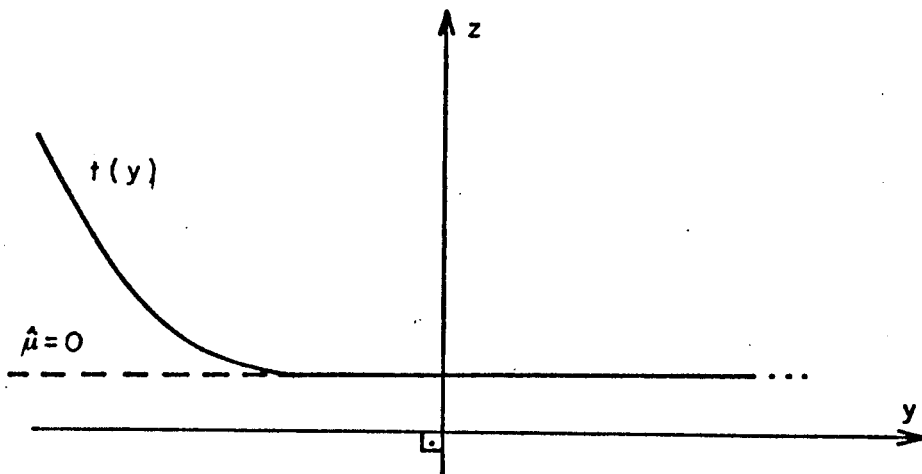


Figura (III.16)

No caso de problemas não convexos em torno da solução, esta não é obtida pelo método dual lagrangeano o que é uma desvantagem em relação ao método de penalidades. A Figura (III.17) ilustra tal situação.

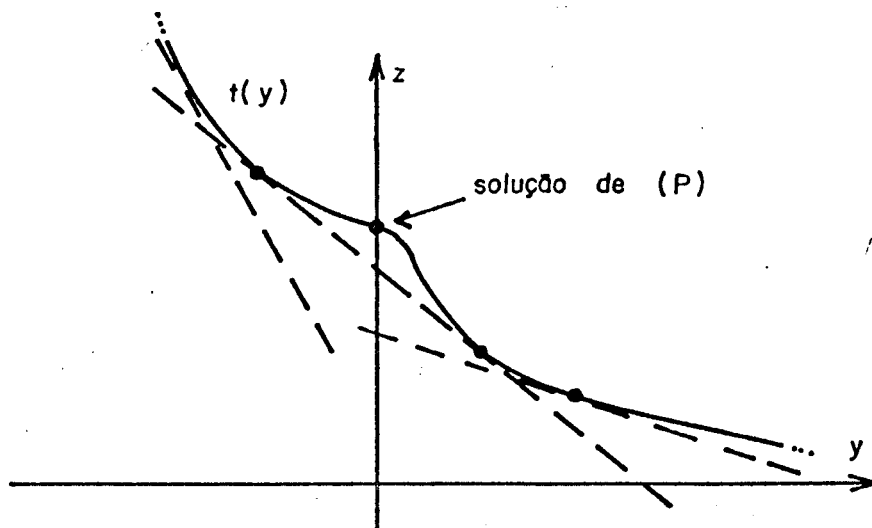


Figura (III.17)

No caso de problemas lineares, que não são es  
 tritamente convexos, como ilustra a Figura (III.18),

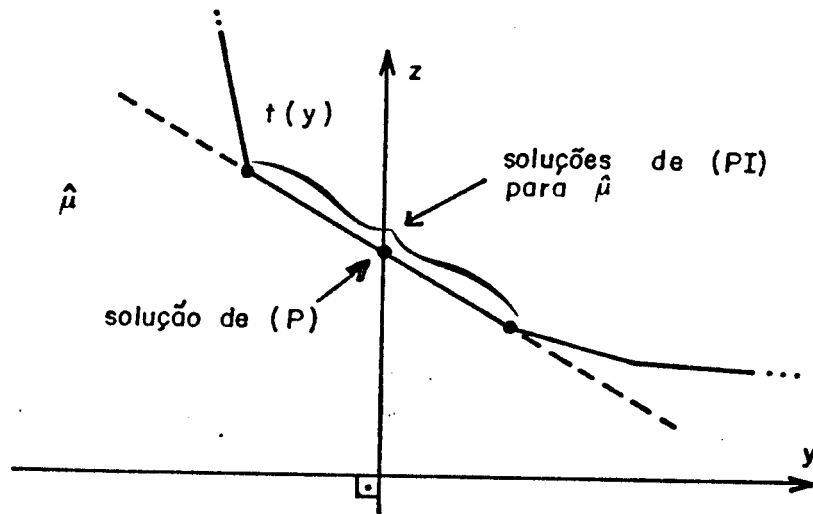


Figura (III.18)

a solução de (P) não é necessariamente obtida da resolução de (PI)  
 para  $\hat{\mu}$ .

### Enfoque computacional

O método dual lagrangeano só se aplica a proble  
 mas convexos em torno da região de trabalho. As versões computa  
 cionais deste método se diferenciam nas formas de atualização dos  
 multiplicadores.

O algoritmo de gradiente gera a sequência de  
 multiplicadores atualizando-os a cada passo pela expressão

$$\begin{bmatrix} \underline{\lambda} \\ \dots \\ \underline{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\lambda} \\ \dots \\ \underline{\mu} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}) \\ \dots \\ \underline{s} \end{bmatrix} \quad (\text{III.28}),$$

onde as componentes do vetor  $\underline{s}$  são dadas por

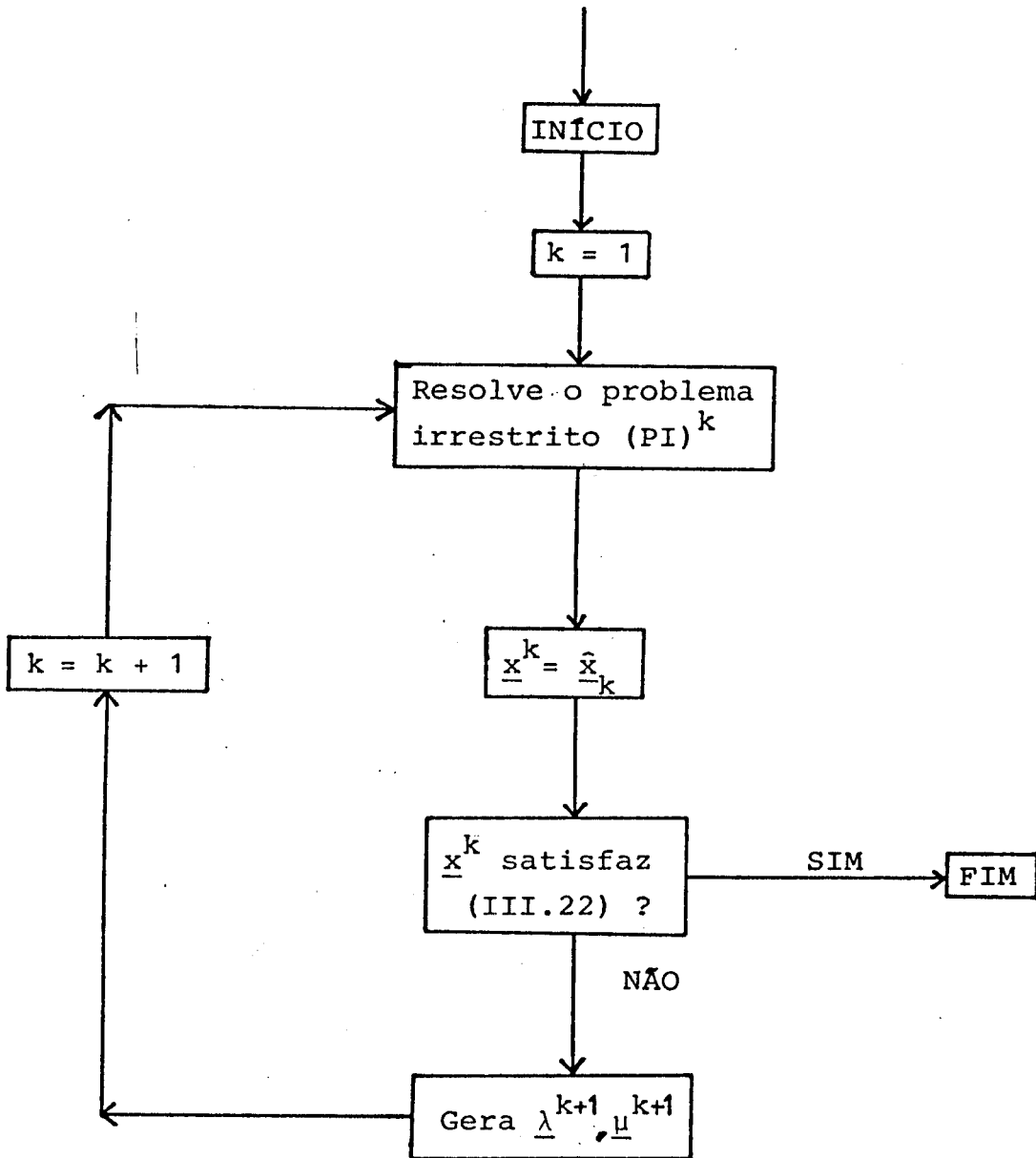


Figura (III.19)

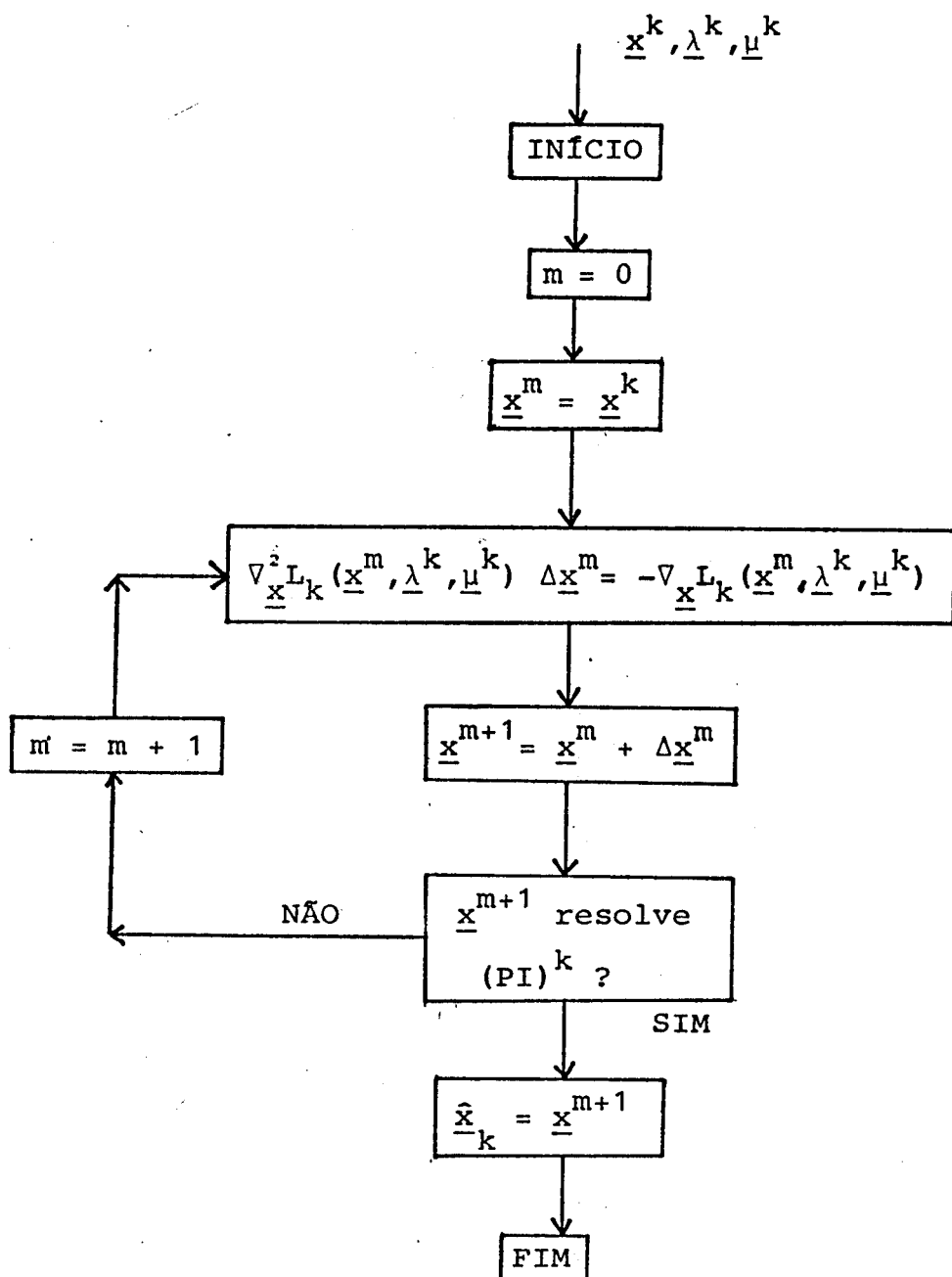


Figura (III.20)

$$s_j = \begin{cases} h_j(\underline{x}) & \text{se } \mu_j^k > 0 \\ \text{m\`ax} \{0, h_j(\underline{x})\} & \text{se } \mu_j^k = 0 \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

A cada passo o valor de  $\alpha$  é estimado garantindo-se o crescimento da função dual. Pode-se realizar uma busca unidimensional na função dual tornando o processo mais eficiente. Entretanto, essa busca onera computacionalmente o método.

O algoritmo de aproximação tangencial gera a sequência de multiplicadores, a cada passo, resolvendo um problema de otimização dual relaxado [23,25]. Este algoritmo tem a vantagem de prescindir de busca unidimensional [23].

Os algoritmos aqui comentados são concebidos a partir da teoria da dualidade [23]. A idéia geral da implementação desses algoritmos é ilustrada nas Figuras (III.19) e (III.20).

As expressões para o vetor gradiente e a matriz Hessiana de  $L_k(\underline{x}, \underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k)$  são dadas por:

$$\nabla_{\underline{x}} L_k(\underline{x}, \underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k) = \nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i^k \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x}) + \sum_{j \in J} \mu_j^k \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x}) \quad (\text{III.30});$$

$$\nabla_{\underline{x}}^2 L_k(\underline{x}, \underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k) = \nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i^k \nabla_{\underline{x}}^2 g_i(\underline{x}) + \sum_{j \in J} \mu_j^k \nabla_{\underline{x}}^2 h_j(\underline{x}) \quad (\text{III.31}).$$

### III.5. Método dos multiplicadores-penalidades

O método dos multiplicadores-penalidades é o resultado da combinação dos métodos de penalidades e dual lagrangeano. Inicialmente considera-se o problema (P), dado em (III.8), no qual é introduzido uma variável de folga que transforma a restrição de desigualdade em igualdade. Em seguida define-se o problema



modificado equivalente dado por

$$(PM)^k \left\{ \begin{array}{l} \min \{ f(\underline{x}) + \frac{v^k}{2} [h(\underline{x}) + e]^2 \} \\ \text{s.a. } h(\underline{x}) + e = 0 \\ e \geq 0 \end{array} \right. \quad (III.32).$$

A função lagrangeana associada a  $(PM)^k$  é definida como

$$L_k(\underline{x}, \mu^k, e) = f(\underline{x}) + \mu^k [h(\underline{x}) + e] + \frac{v^k}{2} [h(\underline{x}) + e]^2 \quad (III.33).$$

A condição necessária de minimização de  $L_k(\underline{x}, \mu^k)$  em relação a  $e$  é obtida analiticamente como

$$\tilde{e} = \text{máx} \{0, \tilde{e}\} \quad (III.34),$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial e} L_k(\underline{x}, \mu^k, e) \Big|_{\tilde{e}} = \mu^k + v^k [h(\underline{x}) + \tilde{e}] = 0 \quad (III.35)$$

que fornece

$$\tilde{e} = -\frac{\mu^k}{v^k} - h(\underline{x}) \quad (III.36).$$

A função lagrangeana aumentada associada a  $(P)$ , definida por R.T. Rockafellar em [26,27], é obtida substituindo-se  $\tilde{e}$  em (III.33) que fornece

$$L_k(\underline{x}, \mu^k) = f(\underline{x}) + r_k[h(\underline{x})] \quad (III.37),$$

onde:

$$r_k[h(\underline{x})] = \begin{cases} \mu^k h(\underline{x}) + \frac{v^k}{2} h^2(\underline{x}), & \text{se } h(\underline{x}) \geq -\frac{\mu^k}{v^k} \\ -\frac{\mu^k}{2v^k}, & \text{se } h(\underline{x}) \leq -\frac{\mu^k}{v^k} \end{cases} \quad (\text{III.38}).$$

O método dos multiplicadores-penalidades consiste em se resolver uma sequência de problemas irrestritos dados por

$$(\text{PI})^k \quad \min_{\underline{x}} L_k(\underline{x}, \mu^k), \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{III.39}).$$

Para tal adota-se uma sequência de valores para o par  $\{\mu^k, v^k\}$ . Os métodos de penalidades e dual lagrangeano são casos particulares deste método. No primeiro, o multiplicador de Lagrange é nulo e no segundo, o fator de penalidade é nulo. Neste método não é necessário que o fator de penalidade cresça indefinidamente e a evolução do multiplicador de Lagrange é do tipo apresentado no método dual lagrangeano.

### Interpretação geométrica

Na resolução de cada problema irrestrito  $(\text{PI})^k$ , ao ponto  $\underline{x}^1$  estão associados os valores

$$\begin{aligned} y &= h(\underline{x}^1) \\ z &= f(\underline{x}^1) \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

que correspondem a um ponto no plano da função  $t(y)$ . O ponto  $\underline{x}^1$  corresponde ao valor da função  $L_k(\underline{x}^1, \mu^k)$  que, suposto constante, fornece a seguinte relação entre  $z$  e  $y$

$$z + q_k(y) = \text{cte} \quad (\text{III.41}),$$

onde :

$$q_k(y) = \begin{cases} \mu^k y + \frac{v^k}{2} y^2, & \text{se } y \geq -\frac{\mu^k}{v^k} \\ -\frac{\mu^k y^2}{2v^k}, & \text{se } y \leq -\frac{\mu^k}{v^k} \end{cases} \quad (\text{III.42}).$$

O lugar geométrico dos pontos  $(y; z)$  correspondentes a um valor constante de  $L_k(\underline{x}, \mu^k)$  é o trecho da curva dada em (III.41) que se situa acima da curva  $t(y)$ , como ilustra a Figura (III.21)

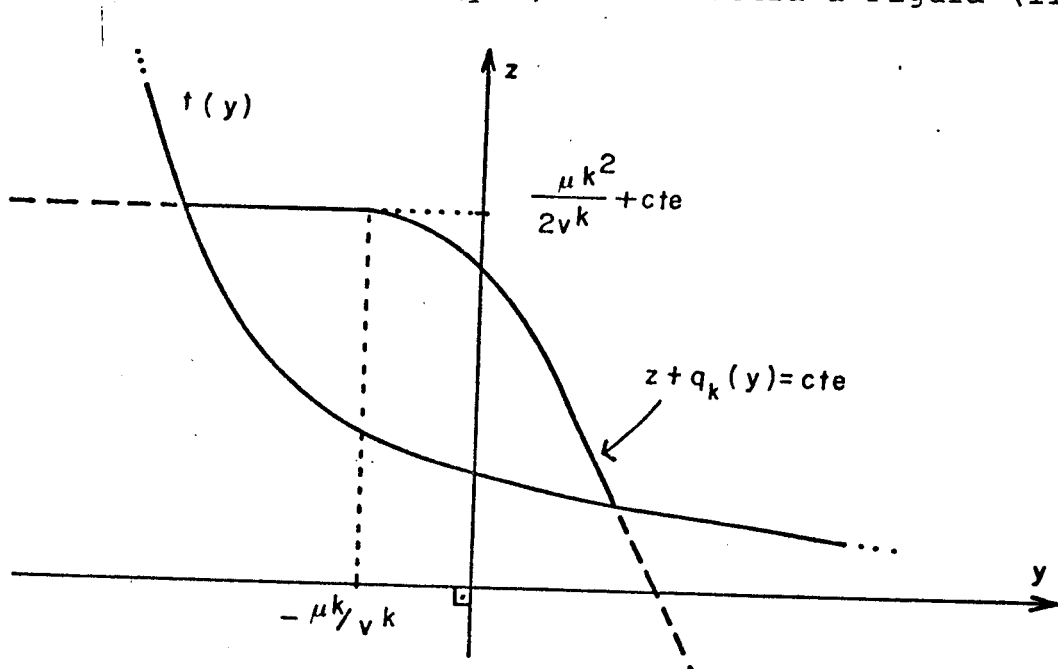


Figura (III.21)

O processo de minimização de  $L_k(\underline{x}, \mu^k)$  corresponde a uma sequência de pontos no plano  $(y; z)$ , cujo lugar geométrico são as curvas dadas em (III.41). A solução de  $(PI)^k$  corresponde à curva que tangencia  $t(y)$ . No caso de restrições ativas a solução  $\hat{\underline{x}}_k$  de um problema irrestrito  $(PI)^k$  satisfaz

$$h(\hat{\underline{x}}_k) \geq -\frac{\mu^k}{v^k} \quad (\text{III.43}),$$

que é ilustrado na Figura (III.22).

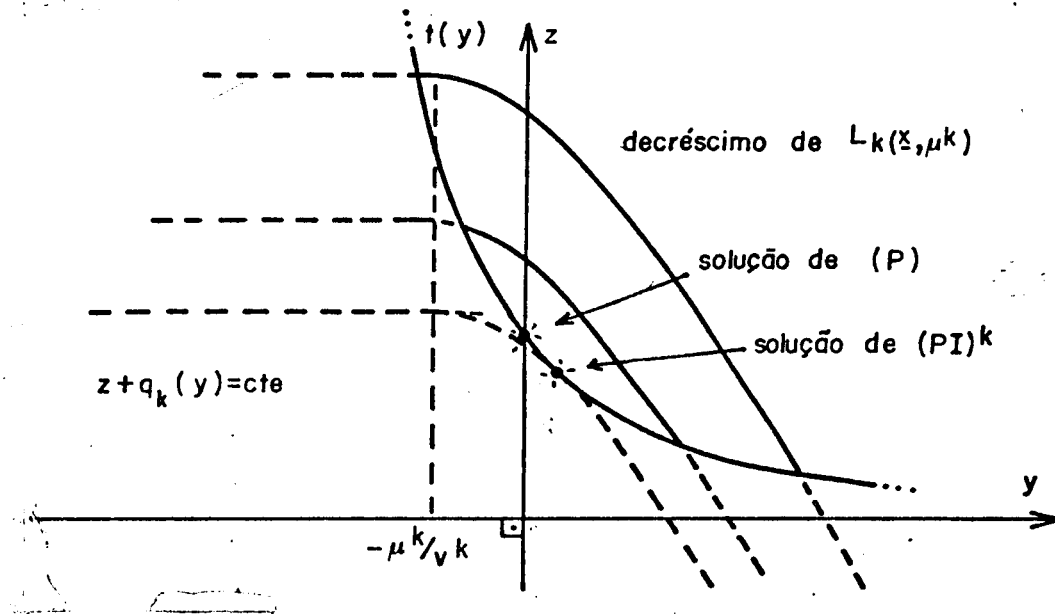


Figura (III.22)

No caso de restrições não ativas a solução  $\hat{x}_k$  de um problema  $po$  de satisfazer (III.43) ou a relação

$$h(\hat{x}_k) \leq -\frac{\mu^k}{v^k} \quad (\text{III.44})$$

como ilustra a Figura (III.23).

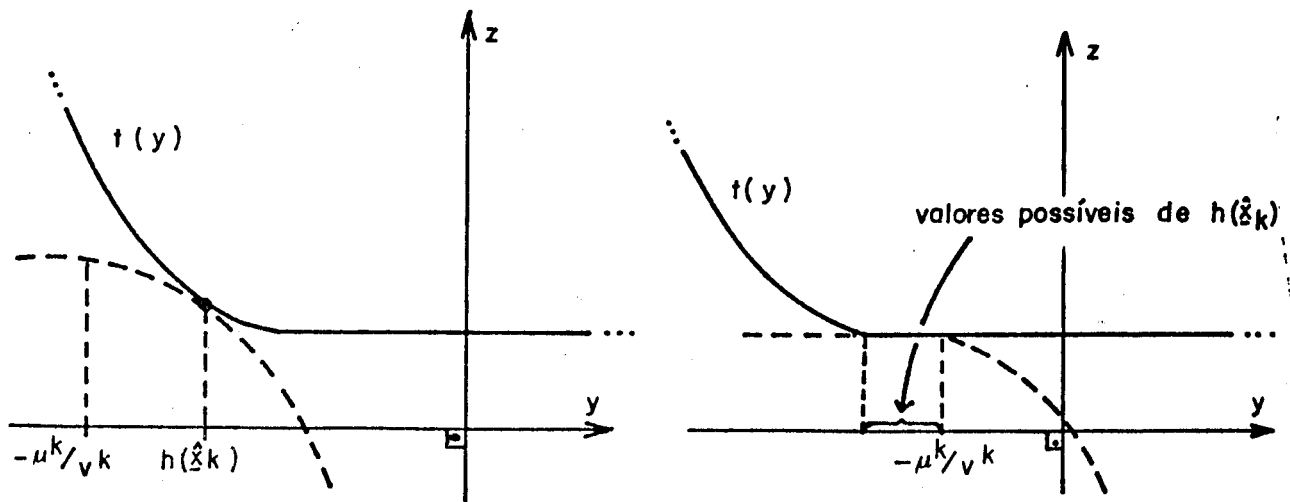


Figura (III.23)

A definição da função lagrangeana aumentada, feita por Rockafellar, permite dizer que a restrição é não ativa na solução de (P) se a condição (III.44) estiver satisfeita para a solução de um problema irrestrito (PI)<sup>k</sup>.

Com a solução  $\hat{x}_k$  do problema irrestrito (PI)<sup>k</sup> o multiplicador  $\mu^{k+1}$  deve ser definido a partir de uma lei do tipo

$$\mu^{k+1} = \text{função}(\mu^k, \hat{x}_k) \quad (\text{III.45})$$

Essa lei de recorrência é obtida através da análise de sensibilidade em torno da solução de (PI)<sup>k</sup>. Nesse ponto a derivada de z em relação a y é dada por

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \begin{cases} -[\mu^k + v^k h(\hat{x}_k)] & , \quad h(\hat{x}_k) \geq -\frac{\mu^k}{v^k} \\ 0 & , \quad h(\hat{x}_k) \leq -\frac{\mu^k}{v^k} \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

que corresponde ao coeficiente angular da reta tangente à curva t(y). Esse coeficiente é o multiplicador que, associado à função lagrangeana clássica do problema (P), leva a sua minimização ao mesmo ponto  $\hat{x}_k$ , como ilustra a Figura (III.24).

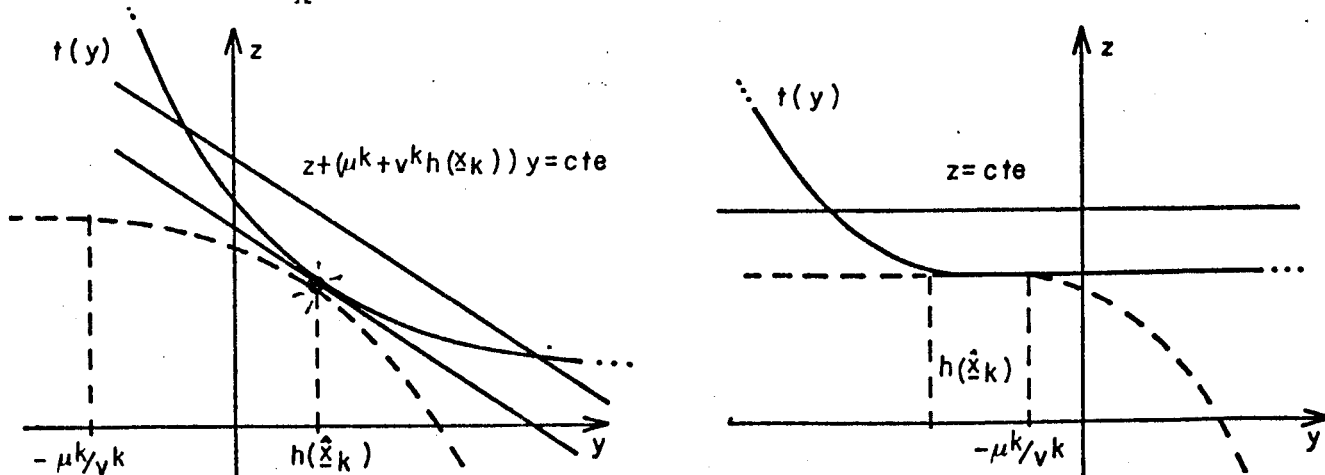


Figura (III.24)

A derivada de  $z$  com sinal trocado é, então, tomada como o multiplicador de Lagrange para o problema  $(PM)^{k+1}$ , fornecendo a lei de atualização dos multiplicadores para a sequência  $(PI)^k$ , ou seja

$$\mu^{k+1} = \begin{cases} \mu^k + v^k h(\bar{x}_k) & , \text{ se } h(\bar{x}_k) \geq -\frac{\mu^k}{v^k} \\ 0 & , \text{ se } h(\bar{x}_k) \leq -\frac{\mu^k}{v^k} \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

que pode ser reescrita como

$$\mu^{k+1} = \mu^k + v^k \nabla_{\mu} L_k(\bar{x}_k, \mu^k) \quad (\text{III.48})$$

A alteração do multiplicador de Lagrange pela relação (III.47) ou (III.48) faz com que as curvas dadas em (III.41) mantenham o grau de concavidade (Apêndice D), e se desloquem horizontalmente como o vértice da parábola cuja nova abscissa é dada por

$$-\frac{\mu^{k+1}}{v^k} = \begin{cases} -\frac{\mu^k}{v^k} - h(\bar{x}_k) & , \text{ se } h(\bar{x}_k) \geq -\frac{\mu^k}{v^k} \\ 0 & , \text{ se } h(\bar{x}_k) \leq -\frac{\mu^k}{v^k} \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

No caso de problemas não convexos a solução de (P) pode não ser obtida através da resolução da sequência  $(PI)^k$  apenas com as alterações nos multiplicadores. A Figura (III.25) ilustra uma situação na qual a curva correspondente a um problema irrestrito  $(PI)^k$  tangencia a função  $t(y)$  em dois pontos distintos. Nestas situações o processo não converge para a solução de (P) a menos que o fator de penalidade seja aumentado. D.P. Bertsekas em [30] propõe o crescimento do fator de penalidade durante

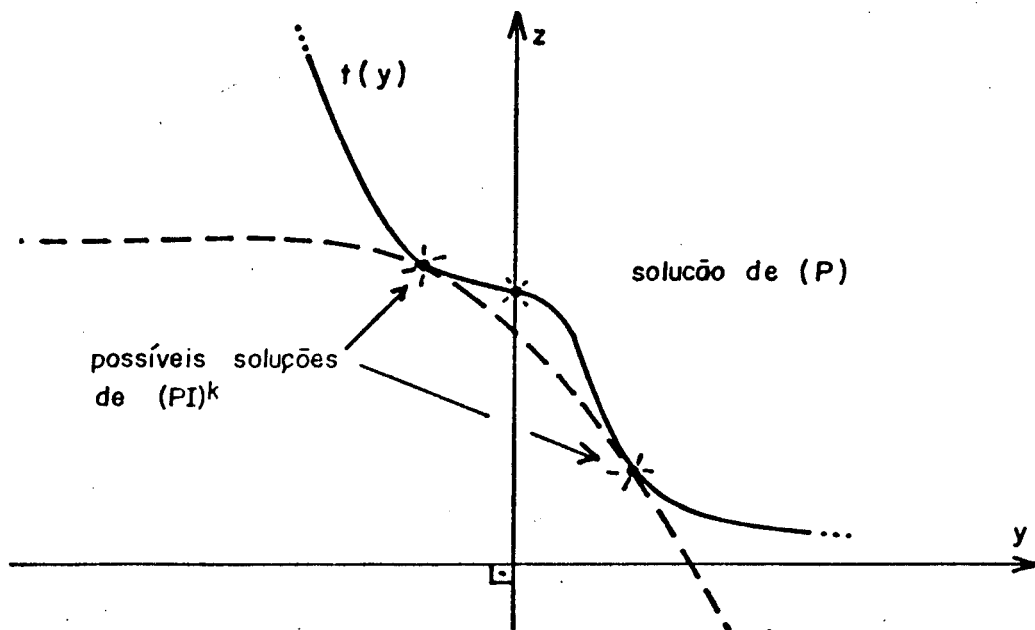


Figura (III.25)

o processo, o que resolve a questão dos problemas não convexos. V.A. Armentano em [31] analisa o comportamento do método no caso de problemas não convexos. É possível crescer o fator de penalidade, de modo a acentuar a concavidade da curva correspondente ao problema irrestrito, o suficiente para que a solução de (P) possa ser encontrada. Essa situação é ilustrada na Figura (III.26).

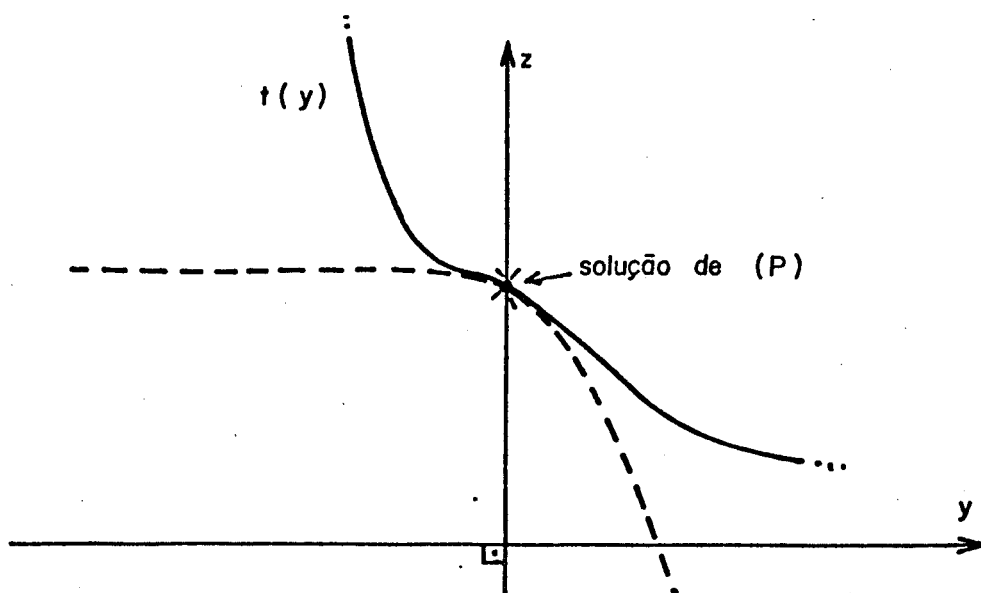


Figura (III.26)

Em comparação com o método de penalidades clássico, neste método o fator de penalidade não precisa crescer tanto para se obter a solução de (P). Isso é devido à possibilidade do deslocamento horizontal da parábola correspondente à alteração do multiplicador  $\mu^k$ .

### Comportamento do método dos multiplicadores-penalidades

A análise precedente mostra que não é necessário o fator de penalidade tender a infinito, como no método de penalidades, para se obter a solução de (P) através da resolução de um problema irrestrito. Entretanto é necessário verificar se a atualização dos multiplicadores por (III.51) faz com que as soluções de  $(PI)^k$  se aproximem da solução de (P). R.T. Rockafellar demonstra em [29] que, no caso de problemas convexos, as soluções de  $(PI)^k$  convergem para a solução de (P) para qualquer valor atribuído ao fator de penalidade. D.P. Bertsekas demonstra em [30] que, no caso de problemas não convexos, existe um fator de penalidade mínimo  $v^*$  acima do qual a convergência do processo fica garantida. Nesse mesmo trabalho é então proposto o crescimento do fator de penalidade que garante a convergência do processo desde que  $v$  ultrapasse  $v^*$ . A discussão apresentada a seguir dá uma idéia da evolução das soluções dos problemas irrestritos.

Considera-se a solução do problema irrestrito  $(PI)^k$  e em seguida o processo de resolução de  $(PI)^{k+1}$  onde apenas o multiplicador foi atualizado pela relação (III.47), como ilustra a Figura (III.27).

Considera-se a aproximação linear de  $t(y)$  na solução de  $(PI)^k$  e sua intersecção com o eixo  $z$ . Desloca-se a cur



va (III.41) correspondente ao problema  $(PI)^{k+1}$  de modo a tangenciar a aproximação linear de  $t(y)$ . Essa tangência se dá sobre o eixo  $z$  como ilustra a Figura (III.28).

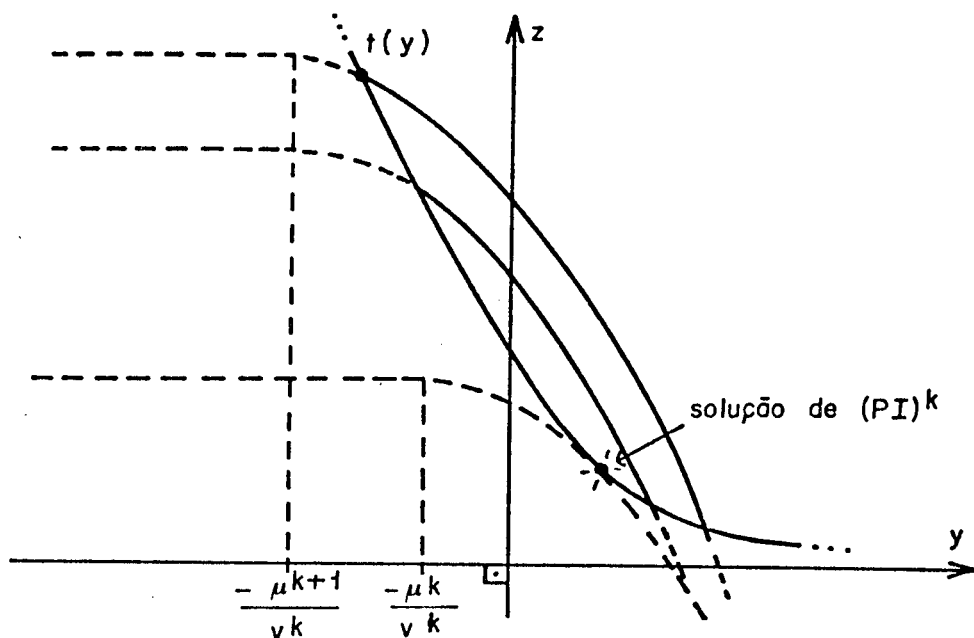


Figura (III.27)

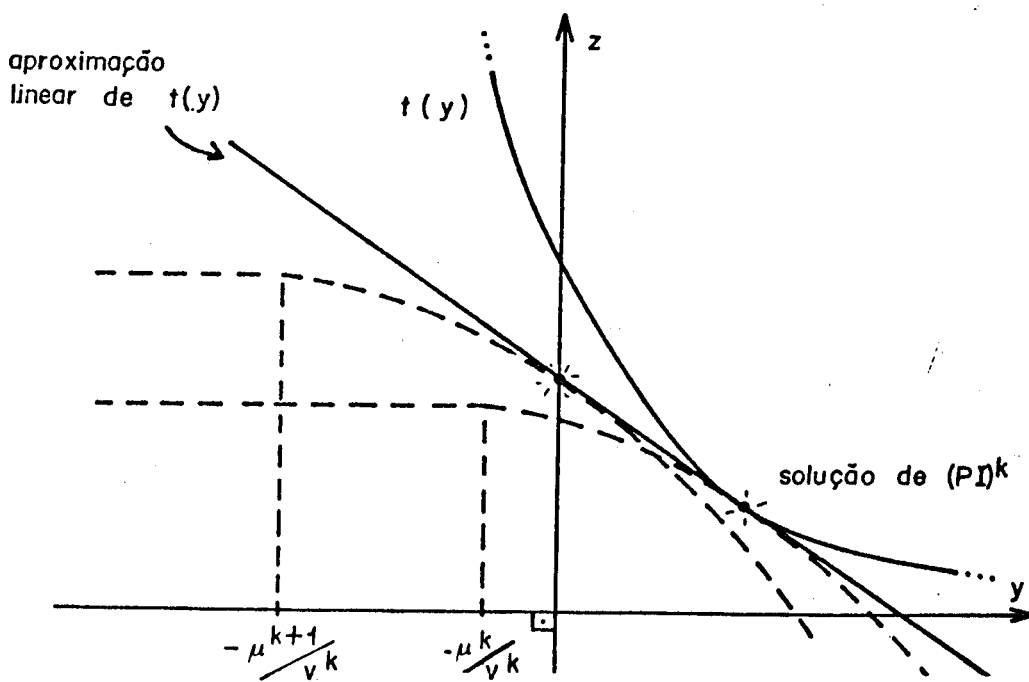


Figura (III.28)

Analisando-se a Figura (III.28) conclue-se que se  $t(y)$  é linear a solução de  $(PI)^{k+1}$  corresponde à solução de (P) e se  $t(y)$  é estritamente convexo a solução de  $(PI)^{k+1}$  satisfaz a relação

$$0 \leq h(\bar{x}_{k+1}) < h(\bar{x}_k) \quad (III.50).$$

No caso de a solução de  $(PI)^k$  se achar à esquerda do eixo  $z$  uma análise análoga mostra que

$$h(\bar{x}_k) < h(\bar{x}_{k+1}) \leq 0 \quad (III.51).$$

No apêndice E é analisado o comportamento do método do ponto de vista do efeito que o termo de penalidades tem sobre a função  $t(y)$  associada a um problema modificado. G. Stephanopoulos e A.W.westerberg em [32] analisam esse efeito em problemas não convexos através da teoria da dualidade.

Lagrangeana aumentada definida por R.T.Rockafellar [26,27,29]

A definição da função lagrangeana aumentada feita por R.T.Rockafellar possibilita não se considerar restrições sobre os multiplicadores e fatores de penalidades associados às restrições de desigualdade. Isso permite um tratamento formal unificado para a alteração dos multiplicadores correspondentes às restrições de igualdade e desigualdade. Essa função lagrangeana aumentada associada ao problema geral (P) dado em (III.1) é definida como

$$L_k(\underline{x}, \underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k) = f(\underline{x}) + \sum_{i \in I} [\lambda_i^k g_i(\underline{x}) + \frac{w_i^k}{2} g_i(\underline{x})^2] + \sum_{j \in J} \left\{ \begin{array}{l} \mu_j^k h_j(\underline{x}) + \frac{v_j^k}{2} h_j(\underline{x})^2, \quad h_j(\underline{x}) \geq -\frac{\mu_j^k}{v_j^k} \\ -\frac{\mu_j^k}{2v_j^k}, \quad h_j(\underline{x}) \leq -\frac{\mu_j^k}{v_j^k} \end{array} \right. \quad (III.52)$$

e a atualização dos multiplicadores é colocada na forma

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + w_i^k \frac{\partial L_k}{\partial \lambda_i} (\underline{\hat{x}}_k, \underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k), \quad i \in I \quad (\text{III.53})$$

$$\mu_j^{k+1} = \mu_j^k + v_j^k \frac{\partial L_k}{\partial \mu_j} (\underline{\hat{x}}_k, \underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k), \quad j \in J \quad (\text{III.54})$$

Quando

$$h_j(\underline{\hat{x}}_k) \leq - \frac{\mu_j^k}{v_j^k} \quad (\text{III.55})$$

o multiplicador  $\mu_j^{k+1}$  dado por (III.54) é automaticamente anulado. O vetor gradiente e a matriz hessiana utilizados na resolução de  $(PI)^k$  são dados por

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{x}} L_k(\underline{x}, \underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k) &= \nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}) + \sum_{i \in I} [\lambda_i^k + w_i^k g_i(\underline{x})] \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x}) + \\ &+ \sum_{j \in J} \left\{ \begin{array}{l} [\mu_j^k + v_j^k h_j(\underline{x})] \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x}), \quad h_j(\underline{x}) \geq - \frac{\mu_j^k}{v_j^k} \\ 0, \quad h_j(\underline{x}) \leq - \frac{\mu_j^k}{v_j^k} \end{array} \right. \quad (\text{III.56}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{x}}^2 L_k(\underline{x}, \underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k) &= \nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}) + \sum_{i \in I} [\lambda_i^k + w_i^k g_i(\underline{x})] \nabla_{\underline{x}}^2 g_i(\underline{x}) + \\ &+ \sum_{i \in I} w_i^k \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}} g_i(\underline{x})^t + \quad (\text{III.57}) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in J} \left\{ \begin{array}{l} [\mu_j^k + v_j^k h_j(\underline{x})] \nabla_{\underline{x}}^2 h_j(\underline{x}) + v_j^k \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x}) \nabla_{\underline{x}} h_j(\underline{x})^t, \quad h_j(\underline{x}) \geq - \frac{\mu_j^k}{v_j^k} \\ 0, \quad h_j(\underline{x}) \leq - \frac{\mu_j^k}{v_j^k} \end{array} \right.$$

## Enfoque computacional

Uma idéia geral do método dos multiplicadores-penalidades é visualizada nos diagramas das Figuras (III.36) e (III.37) e permite a implementação de versões nele contidas como:

- método clássico de penalidades;
- método dual lagrangeano;
- método dos multiplicadores com penalidades fixas.

Do ponto de vista teórico as vantagens deste método sobre os métodos clássicos se devem aos seguintes fatores:

- i - um critério de recorrência explícito para a atualização dos multiplicadores de Lagrange;
- ii- um bom condicionamento da matriz hessiana com crescimento moderado das penalidades, resultado da atualização dos multiplicadores;
- iii - a continuidade da matriz hessiana em torno dos limites das restrições de desigualdade ( $h_j(\underline{x}) = 0$ ).

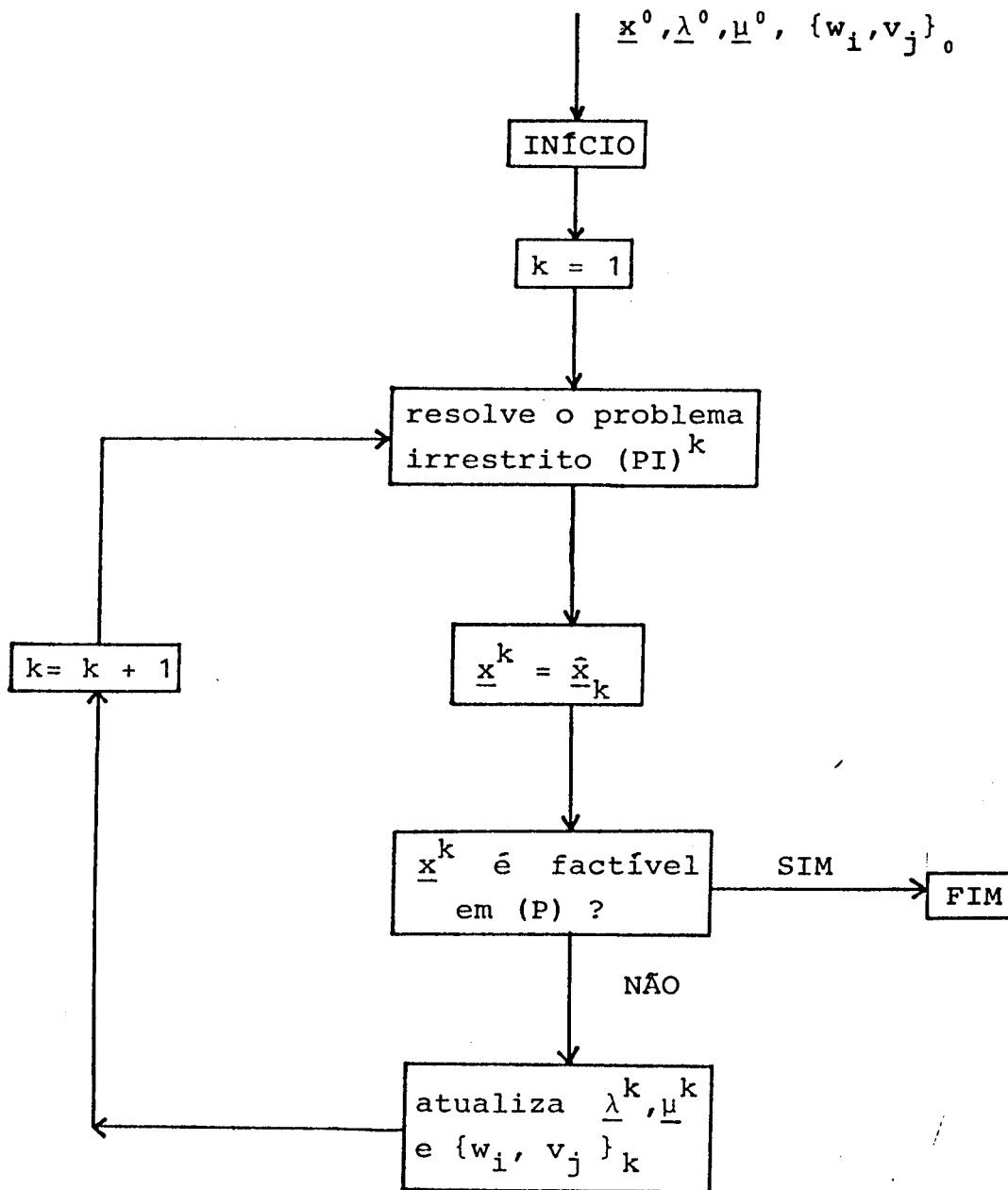


Figura (III.29)

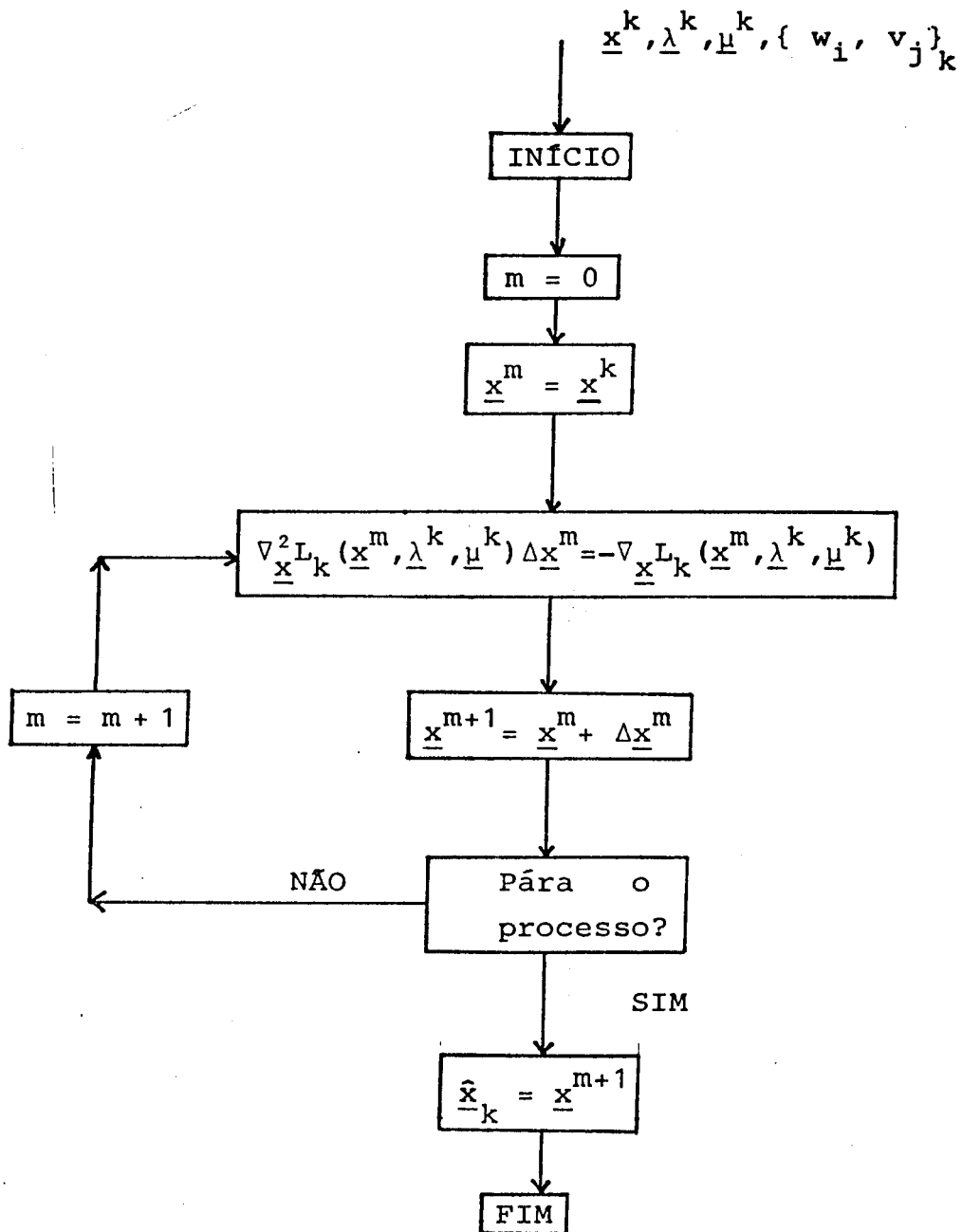


Figura (III.30)

## CAPÍTULO IV

### FLUXO DE CARGA ÓTIMO E O MÉTODO DA LAGRANGEANA

#### AUMENTADA

Neste capítulo o problema do fluxo de carga ótimo é formulado de modo a ser resolvido pelo método de lagrangeana aumentada. É feita uma análise da matriz hessiana da função lagrangeana aumentada que mostra a viabilidade da aplicação do método de Newton no caso do fluxo de carga ótimo. É ainda apresentado o algoritmo de formação da matriz hessiana utilizado no programa computacional desenvolvido para a realização de testes.

#### IV.1. A lagrangeana aumentada associada ao fluxo de carga ótimo

O problema do fluxo de carga ótimo será representado pelo modelo descrito na seção II.3., porém são acrescentadas as restrições de capacidade de transmissão de potência ativa sobre as ligações elétricas. Essas restrições de desigualdade são dadas por

$$P_{kl}(\theta_k, \theta_l, V_k, V_l) \leq P_{kl}^{\text{limite}}, \quad kl \in \Omega \quad (\text{IV.1}).$$

O modelo do fluxo de carga ótimo passa a ser representado pelo seguinte problema não linear de otimização

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\underline{\theta}, \underline{V}} L(\underline{\theta}, \underline{V}) \\ \text{s.a.} \quad \underline{g}(\underline{\theta}, \underline{V}) = \underline{0} \\ \quad \quad \underline{h}(\underline{\theta}, \underline{V}) \leq \underline{0} \end{array} \right. \quad (IV.2)$$

onde :

$L(\underline{\theta}, \underline{V})$  - perda de potência ativa dada em (II.31);

$\underline{g}(\underline{\theta}, \underline{V})$  - vetor das funções correspondentes às restrições de igualdade;

$\underline{h}(\underline{\theta}, \underline{V})$  - vetor das funções correspondentes às restrições de desigualdade.

Ao problema (P), dado em (IV.2), é associado um problema modificado (secção III.5) dado por

$$(PM)^k \left\{ \begin{array}{l} \min \left\{ L(\underline{\theta}, \underline{V}) + \frac{1}{2} \sum_{i \in I} w_i^k g_i^2(\underline{\theta}, \underline{V}) + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} v_j^k [h_j(\underline{\theta}, \underline{V}) + e_j]^2 \right\} \\ \text{s.a.} \quad \underline{g}(\underline{\theta}, \underline{V}) = \underline{0} \\ \quad \quad \underline{h}(\underline{\theta}, \underline{V}) + \underline{e} = \underline{0} \\ \quad \quad \underline{e} \geq \underline{0} \end{array} \right. \quad (IV.3),$$

onde :

$\underline{e}$  - vetor das variáveis de folga.

Na função lagrangeana associada ao problema (PM)<sup>k</sup> é considerada a condição de estacionaridade em relação às variáveis de folga  $e_j$  que, por um procedimento análogo ao descrito na secção (III.5), fornece

$$A_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = L(\underline{\theta}, \underline{V}) + \sum_{i \in I} s_i^k(\underline{\theta}, \underline{V}) + \sum_{j \in J} r_j^k(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad (IV.4),$$

onde :

$$s_i^k(\underline{\theta}, \underline{V}) = \lambda_i^k g_i(\underline{\theta}, \underline{V}) + \frac{w_i^k}{2} g_i^2(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad (IV.5);$$



$$s_j^k(\underline{\theta}, \underline{v}) = \begin{cases} \mu_j^k h_j(\underline{\theta}, \underline{v}) + \frac{v_j^k}{2} h_j^2(\underline{\theta}, \underline{v}), & h_j(\underline{\theta}, \underline{v}) \geq -\mu_j^k / v_j^k \\ -\mu_j^k / 2v_j^k, & h_j(\underline{\theta}, \underline{v}) \leq -\mu_j^k / v_j^k \end{cases} \quad (\text{IV.6}).$$

A função definida por (IV.4), (IV.5) e (IV.6) é denominada "a grangeana aumentada" [26, 27] associada ao problema (P). No método dos multiplicadores-penalidades a função  $A_k(\underline{\theta}, \underline{v})$  será minimizada para uma sequência

$$\underline{\lambda}^k, \underline{\mu}^k, \{w_i, v_j\}_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

até que as condições de Kuhn-Tucker para o problema (P) estejam satisfeitas, ou seja,

$$\nabla L(\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{v}}) + \sum_{\underline{\theta}, \underline{v}}^g(\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{v}})^t \underline{\hat{\lambda}} + \sum_{\underline{\theta}, \underline{v}}^h(\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{v}})^t \underline{\hat{\mu}} = \underline{0} \quad (\text{a})$$

$$g(\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{v}}) = \underline{0} \quad (\text{b})$$

$$h(\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{v}}) \leq \underline{0} \quad (\text{c}) \quad (\text{IV.7})$$

$$\underline{\hat{\mu}}^t h(\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{v}}) = \underline{0} \quad (\text{d})$$

$$\underline{\hat{\mu}} \geq \underline{0} \quad (\text{e})$$

onde  $\underline{\hat{\theta}}, \underline{\hat{v}}, \underline{\hat{\lambda}}, \underline{\hat{\mu}}$  são os vetores ótimos.

#### IV.2. Atualização dos multiplicadores

A condição necessária de mínimo da função  $A_k(\underline{\theta}, \underline{v})$  é dada por

$$\nabla A_k(\underline{\theta}, \underline{v}) = \underline{0} \quad (\text{IV.8})$$

Em um ponto  $(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k)$  onde essa condição está satisfeita o vetor gradiente de  $A_k(\underline{\theta}, \underline{v})$  é dado por

$$A_k(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) = \nabla L(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) + \sum_{i \in I} \nabla s_i^k(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) + \sum_{j \in J} \nabla r_j^k(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) \quad (\text{IV.9}),$$

onde :

$$\nabla s_i^k(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) = [\lambda_i^k + w_i^k g_i(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k)] \nabla g_i(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) \quad (\text{IV.10});$$

$$\nabla r_j^k(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) = \begin{cases} [\mu_j^k + v_j^k h_j(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k)] \nabla h_j(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) , \\ \quad h_j(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) \geq -\mu_j^k / v_j^k \\ 0, \quad h_j(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) \leq -\mu_j^k / v_j^k \end{cases} \quad (\text{IV.11}).$$

Considere-se a função lagrangeana, associada com o problema (P), cujo gradiente calculado no ponto  $(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k)$  é dado por

$$\nabla \ell(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) = \nabla L(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) \quad (\text{IV.12}).$$

A regra de atualização dos multiplicadores pode ser obtida por um procedimento baseado na análise de sensibilidade descrita na seção (III.5). Por um outro enfoque [33] o gradiente da lagrangeana aumentada é interpretado como sendo o gradiente da lagrangeana "normal" associada ao problema (P). Essa interpretação sugere [33] a regra de atualização dos multiplicadores, que é dada por

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + w_i^k g_i(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) \quad (\text{IV.13});$$

$$\mu_j^{k+1} = \begin{cases} \mu_j^k + v_j^k h_j(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k), & h_j(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) \geq -\mu_j^k / v_j^k \\ 0, & h_j(\underline{\theta}^k, \underline{v}^k) \leq -\mu_j^k / v_j^k \end{cases} \quad (\text{IV.14}).$$

### IV.3. Minimização da lagrangeana aumentada

A minimização da função lagrangeana aumentada é feita através do método de Newton, ou seja, através da resolução da equação

$$\nabla^2 A_k(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) \cdot \begin{bmatrix} \Delta \underline{\theta}^v \\ \Delta \underline{v}^v \end{bmatrix} = - \nabla A_k(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) \quad (\text{IV.15}),$$

onde o vetor gradiente é calculado no ponto  $(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v)$  pela relação (IV.9). A matriz hessiana é dada por

$$\nabla^2 A_k(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) = \nabla^2 L(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) + \sum_{i \in I} \nabla^2 s_i^k(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) + \sum_{j \in J} \nabla^2 r_j^k(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) \quad (\text{IV.16}),$$

onde :

$$\nabla^2 s_i^k(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) = [\lambda_i^k + w_i^k g_i(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v)] \nabla^2 g_i(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) + w_i^k \nabla g_i(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) \nabla g_i(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v)^t, \quad (\text{IV.17});$$

$$\nabla^2 r_j^k(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) = \begin{cases} [\mu_j^k + v_j^k h_j(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v)] \nabla^2 h_j(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) + v_j^k \nabla h_j(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) \nabla h_j(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v)^t, & h_j(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) \geq -\mu_j^k / v_j^k \\ 0, & h_j(\underline{\theta}^v, \underline{v}^v) \leq -\mu_j^k / v_j^k \end{cases} \quad (\text{IV.18}).$$

Após a resolução da equação (IV.15), um novo ponto é obtido através das relações

$$\begin{aligned} \underline{\theta}^{v+1} &= \underline{\theta}^v + \Delta \underline{\theta}^v \\ \underline{v}^{v+1} &= \underline{v}^v + \Delta \underline{v}^v \end{aligned} \quad (\text{IV.19}).$$

Na minimização da lagrangeana aumentada deve-se adotar um critério de parada. O ideal seria obter o mínimo da lagrangeana aumentada pois isso garantiria uma melhor precisão na atualização dos multiplicadores através (IV.13) e (IV.14). Por outro lado, um número excessivo de passos na resolução de um problema irrestrito pode comprometer o desempenho global do método quanto ao tempo de processamento. Assim, deve-se obter procedimentos alternativos que limitem o número de passos permitidos na resolução de cada problema irrestrito.

A matriz hessiana, dada em (IV.16) é esparsa, permitindo a resolução da equação (IV.15) com eficiência computa

cional no caso de sistemas de grande porte. A seguir será analisada a estrutura da matriz hessiana a qual será comparada com a matriz jacobiana utilizada no método de Newton para o cálculo do fluxo de carga.

#### IV.4. O vetor gradiente e a matriz hessiana

O vetor gradiente da função lagrangeana aumentada tem sua estrutura representada por

$$\nabla A_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{array}{|c|} \hline \underline{G}_\theta \\ \hline \underline{G}_V \\ \hline \end{array} \quad (\text{IV.20}),$$

onde :

$$\begin{aligned} G_\theta(i) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} A_k(\underline{\theta}, \underline{V}) \\ G_V(i) &= \frac{\partial}{\partial V_i} A_k(\underline{\theta}, \underline{V}) \end{aligned} \quad (\text{IV.21}).$$

Como mostram as relações (IV.9), (IV.10) e (IV.11) o vetor gradiente é uma combinação dos gradientes da função objetivo e das restrições.

A estrutura da matriz hessiana será representada por

$$\nabla^2 A_k(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{array}{|c|c|} \hline [H_{\theta\theta}] & [H_{\theta V}] \\ \hline [H_{V\theta}] & [H_{VV}] \\ \hline \end{array} \quad (\text{IV.22}),$$

onde  $[H_{\theta\theta}]$  e  $[H_{VV}]$  são simétricas,  $[H_{\theta V}]$  é simétrica de  $[H_{V\theta}]$  e seus elementos são dados por :

$$\begin{aligned}
H_{\theta\theta}(i,j) &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} A_k(\underline{\theta},\underline{V}) \\
H_{\theta V}(i,j) &= \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial V_j} A_k(\underline{\theta},\underline{V}) = H_{V\theta}(j,i) \\
H_{V\theta}(i,j) &= \frac{\partial^2}{\partial V_i\partial\theta_j} A_k(\underline{\theta},\underline{V}) = H_{\theta V}(j,i) \\
H_{VV}(i,j) &= \frac{\partial^2}{\partial V_i\partial V_j} A_k(\underline{\theta},\underline{V})
\end{aligned}
\tag{IV.23}$$

A matriz hessiana é uma combinação das hessianas da função objetivo, das restrições e dos produtos dos gradientes das restrições, como mostram as relações (IV.16), (IV.17) e (IV.18).

Na formação de um elemento da submatriz  $[H_{xy}]$  com  $\{xy\} = \{\theta\theta, \theta V, V\theta, VV\}$

contribuem termos correspondentes a :

- derivadas de 2ª ordem da função objetivo, dadas por

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} L(\underline{\theta}, \underline{V});$$

- derivadas de 2ª ordem das restrições, dadas por

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} h_\ell(\underline{\theta}, \underline{V});$$

- produtos das derivadas de 1ª ordem das restrições, dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h_\ell(\underline{\theta}, \underline{V}) \frac{\partial}{\partial y_j} h_\ell(\underline{\theta}, \underline{V})$$

A seguir é discutida a contribuição de cada um dos termos na formação do vetor gradiente e da matriz hessiana.

## Contribuição da função objetivo

A função objetivo contribui na formação do vetor gradiente com os termos

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \sum_{j \in \Omega_i} L_{ij} \quad (\text{IV.25})$$

$$\frac{\partial}{\partial V_i} L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \frac{\partial}{\partial V_i} \sum_{j \in \Omega_i} L_{ij} \quad (\text{IV.26})$$

onde  $L_{ij}$  é função somente das variáveis nodais  $\theta_i$ ,  $\theta_j$ ,  $V_i$  e  $V_j$  e é dada no Apêndice (A) pela expressão (A.12). Isso implica que na posição  $i$  dos vetores  $\underline{G}_\theta$  e  $\underline{G}_V$  somente contribuem as parcelas da função objetivo correspondentes às ligações elétricas conectadas ao nó  $i$ .

Na formação da matriz hessiana as contribuições da função objetivo são obtidas derivando-se as componentes do gradiente dadas em (IV.25) e (IV.26). As contribuições nas posições  $(i, j)$  das submatrizes da matriz hessiana são dadas por

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} L_{ij} \neq 0, & i \neq j \text{ e } j \in \Omega_i \\ 0, & i \neq j \text{ e } j \notin \Omega_i \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} \sum_{\ell \in \Omega_i} L_{i\ell}, & i = j \end{cases} \quad (\text{IV.27}).$$

Logo, a contribuição da função objetivo na formação da matriz hessiana se dá nos elementos da diagonal e nos elementos correspondentes às ligações elétricas. Essa contribuição é, em cada submatriz  $[H_{xy}]$ , análoga à estrutura da matriz admitância nodal da rede elétrica. As expressões das derivadas da função objetivo são apresen

tadas no Apêndice F.

### Contribuições das restrições no vetor gradiente

Uma restrição qualquer contribui para a formação do vetor gradiente com os termos :

$$[\mu + v h(\underline{\theta}, \underline{V})] \frac{\partial}{\partial \theta_i} h(\underline{\theta}, \underline{V}) \text{ na componente } G_\theta(i) ;$$

$$[\mu + v h(\underline{\theta}, \underline{V})] \frac{\partial}{\partial V_i} h(\underline{\theta}, \underline{V}) \text{ na componente } G_V(i) .$$

A função  $h(\underline{\theta}, \underline{V})$  pode representar uma restrição sobre uma variável nodal como magnitude de tensão, injeção de potência ativa ou reativa; mas também pode representar uma restrição sobre o fluxo de potência ativa em uma ligação elétrica. No caso de restrição sobre a magnitude de tensão de um nó  $i$ , a sua contribuição é apenas na componente  $G_V(i)$ . Se a restrição for sobre a injeção de potência ativa ou reativa em um nó  $i$ , as contribuições no vetor gradiente serão nas componentes  $G_\theta(i)$ ,  $G_V(i)$  e naquelas correspondentes aos nós ligados diretamente ao nó  $i$ , ou seja, nas componentes  $G_\theta(l)$  e  $G_V(l)$  com  $l \in \Omega_i$ . A restrição sobre o fluxo de potência ativa na ligação elétrica entre os nós  $i$  e  $j$  contribui nas componentes  $G_\theta(i)$ ,  $G_\theta(j)$ ,  $G_V(i)$  e  $G_V(j)$ .

### Contribuições das restrições na matriz hessiana

A contribuição de uma restrição na formação da matriz hessiana é obtida derivando-se as contribuições no vetor gradiente. Essa contribuição nas submatrizes  $H_{\theta\theta}$ ,  $H_{\theta V}$ ,  $H_{V\theta}$ , e  $H_{VV}$  é caracterizada pelos termos

$$[\mu + v h(\underline{\theta}, \underline{V})] \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} h(\underline{\theta}, \underline{V}) + v \frac{\partial}{\partial x_i} h(\underline{\theta}, \underline{V}) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} h(\underline{\theta}, \underline{V})$$

que participam da formação dos elementos  $(i, j)$ .

No caso da restrição sobre a magnitude da ten são de um nó  $i$ , a sua contribuição será somente na posição  $H_{VV}(i, i)$  com o termo

$$v \frac{\partial V_i}{\partial V_i} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial V_i} = v \quad (\text{IV.28}).$$

As restrições sobre as injeções de potência ati va ou reativa de um nó  $i$  são funções das variáveis  $\theta_i, V_i$  e das variáveis  $\theta_\ell$  e  $V_\ell$  para  $\ell$  correspondente a todos os nós ligados di retamente ao nó  $i$ . No caso de potência ativa as contribuições de cada restrição nas submatrizes correspondem às derivadas :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_i} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad \text{nas posições}$$

$$H_{xy}(i, i) ;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_i} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad \text{nas posições}$$

$$H_{xy}(i, \ell) \text{ e } H_{xy}(\ell, i) \text{ com } \ell \in \Omega_i ;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial y_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \quad \text{nas posições}$$

$$H_{xy}(\ell, \ell) \text{ com } \ell \in \Omega_i ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \cdot \frac{\partial}{\partial y_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) \text{ nas posições } H_{xy}(\ell, m) \text{ e } H_{xy}(m, \ell)$$

com  $\ell \neq m, \ell \in \Omega_i$  e  $m \in \Omega_i$ .

As restrições sobre o fluxo de potência ativa na ligação elétrica entre os nós  $i$  e  $\ell$  contribuem na formação das sub matrizes com termos correspondentes às derivadas :



$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i} P_{il} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_i} P_{il} \frac{\partial}{\partial y_i} P_{il} \quad \text{nas posições } H_{xy}(i,i);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial y_\ell} P_{il} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_\ell} P_{il} \frac{\partial}{\partial y_\ell} P_{il} \quad \text{nas posições } H_{xy}(\ell,\ell);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_\ell} P_{il} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_i} P_{il} \frac{\partial}{\partial y_\ell} P_{il} \quad \text{nas posições } H_{xy}(i,\ell);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial y_i} P_{il} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_\ell} P_{il} \frac{\partial}{\partial y_i} P_{il} \quad \text{nas posições } H_{xy}(\ell,i).$$

As expressões das derivadas das restrições são apresentadas no Apêndice G.

#### IV.5. Estrutura da matriz hessiana

A estrutura de elementos não nulos em cada um dos blocos  $H_{xy}$  da matriz hessiana é decorrência das contribuições da função objetivo e restrições. A função objetivo contribui na formação dos elementos da diagonal e nas posições  $(i,j)$  com  $i \neq j$ , desde que haja uma ligação elétrica entre os nós  $i$  e  $j$ , como mostram as relações (IV.27). As restrições contribuem para os elementos da diagonal e nas posições  $(i,j)$  com  $i \neq j$ , desde que haja entre os nós  $i$  e  $j$  uma ligação elétrica direta ou uma interligação através de um terceiro nó. Resumindo, o elemento  $H_{xy}(i,j)$  será não nulo nas possíveis situações entre os nós  $i$  e  $j$  ilustradas pela Figura (IV.1).

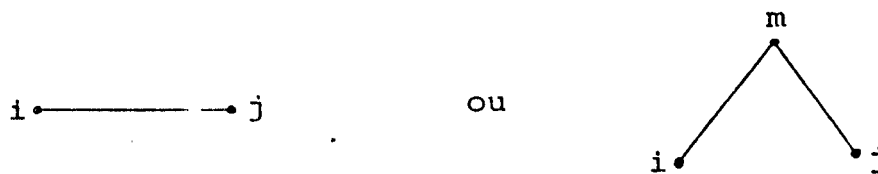


Figura (IV.1)

Assim, cada bloco  $H_{xy}$  tem uma estrutura de elementos não nulos correspondente à estrutura da matriz  $Y_{BARRA}$  onde ainda são considerados os elementos associados a interligação entre todos os nós vizinhos de um dado nó. Em outras palavras, essa estrutura corresponde à matriz  $Y'_{BARRA}$  de uma configuração na qual se consideram as ligações entre todos os nós da primeira vizinhança de um dado nó. Considera-se, como exemplo, um sistema cuja configuração é ilustrada na Figura (IV.2)

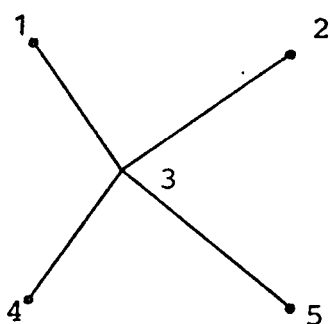


Figura (IV.2)

e cuja matriz admitância  $Y_{BARRA}$  tem uma estrutura de elementos não nulos representada por

$$[ Y_{BARRA} ] = \begin{bmatrix} X & & X & & \\ & X & X & & \\ X & X & X & X & X \\ & & X & X & \\ & & X & & X \end{bmatrix} \quad (IV.29).$$

A estrutura de uma submatriz  $H_{xy}$  corresponde à matriz  $Y'_{BARRA}$  da configuração obtida interligando-se toda primeira vizinhança do nó 3, como ilustrada na Figura (IV.3).

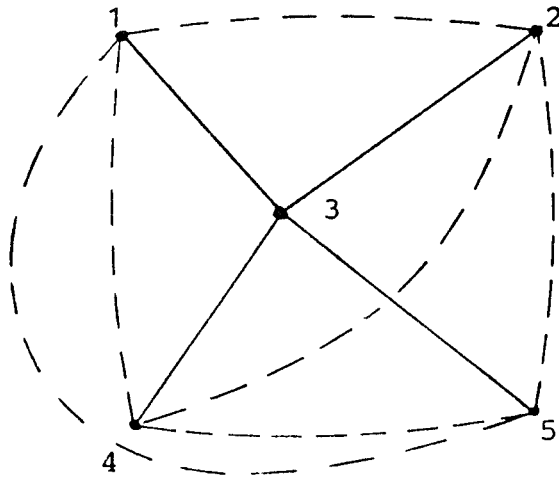


Figura (IV.3)

Essa configuração obtida é não plana e fornece uma matriz  $Y'_{\text{BARRA}}$  com a mesma estrutura de elementos não nulos das submatrizes  $H_{xy}$  e representada por

$$[H_{xy}] = [Y'_{\text{BARRA}}] = \begin{bmatrix} \textcircled{\bullet} & \Delta & x & \Delta & \Delta \\ \Delta & \textcircled{\bullet} & x & \Delta & \Delta \\ x & x & \textcircled{\bullet} & x & x \\ \Delta & \Delta & x & \textcircled{\bullet} & \Delta \\ \Delta & \Delta & x & \Delta & \textcircled{\bullet} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.30}),$$

onde

- $\textcircled{\bullet}$  - elementos da diagonal;
- x - elementos associados às ligações elétricas;
- $\Delta$  - elementos correspondentes às interligações da primeira vizinhança dos nós.

#### IV.6. Matriz hessiana e matriz jacobiana

A matriz jacobiana, utilizada para o cálculo do fluxo de carga pelo método de Newton, tem sua estrutura represen

tada por

$$J = \begin{array}{|c|c|} \hline J_{\underline{\theta}}^p & J_{\underline{V}}^p \\ \hline J_{\underline{\theta}}^q & J_{\underline{V}}^q \\ \hline \end{array} \quad (\text{IV.31}).$$

A estrutura de elementos não nulos das submatrizes  $J_{\underline{\theta}}^p$ ,  $J_{\underline{V}}^p$ ,  $J_{\underline{\theta}}^q$  e  $J_{\underline{V}}^q$  é analoga a da matriz  $Y_{\text{BARRA}}$  do sistema considerado.

A comparação entre as matrizes hessiana e jacobiana mostra que aquela apresenta um grau de esparsidade menor do que esta. O grau de esparsidade dessas matrizes aumenta com a dimensão das redes [14] como ilustra a tabela (IV.1)

SISTEMA (N)	JACOBIANA	HESSIANA
14	29%	57%
30	13%	28%
57	6.6%	13.8%
188	3.5%	9.2%

Tabela (IV.1)

onde estão representados os percentuais de elementos não nulos. O grau de esparsidade apresentado pela matriz hessiana possibilita que a minimização da lagrangeana aumentada pelo método de Newton seja feita de maneira computacionalmente eficiente. Isso é feito utilizando-se técnicas de fatoração triangular de matrizes espar

sas [18, 19, 20]. A seguir é apresentada uma análise comparativa entre os graus de esparsidade das matrizes hessiana e jacobiana associadas a uma configuração de rede específica.

Comparação entre as matrizes hessiana e jacobiana

Para uma comparação quantitativa entre os graus de esparsidade das matrizes hessiana e jacobiana considera-se um sistema hipotético cuja configuração é representada na Figura (IV.4).

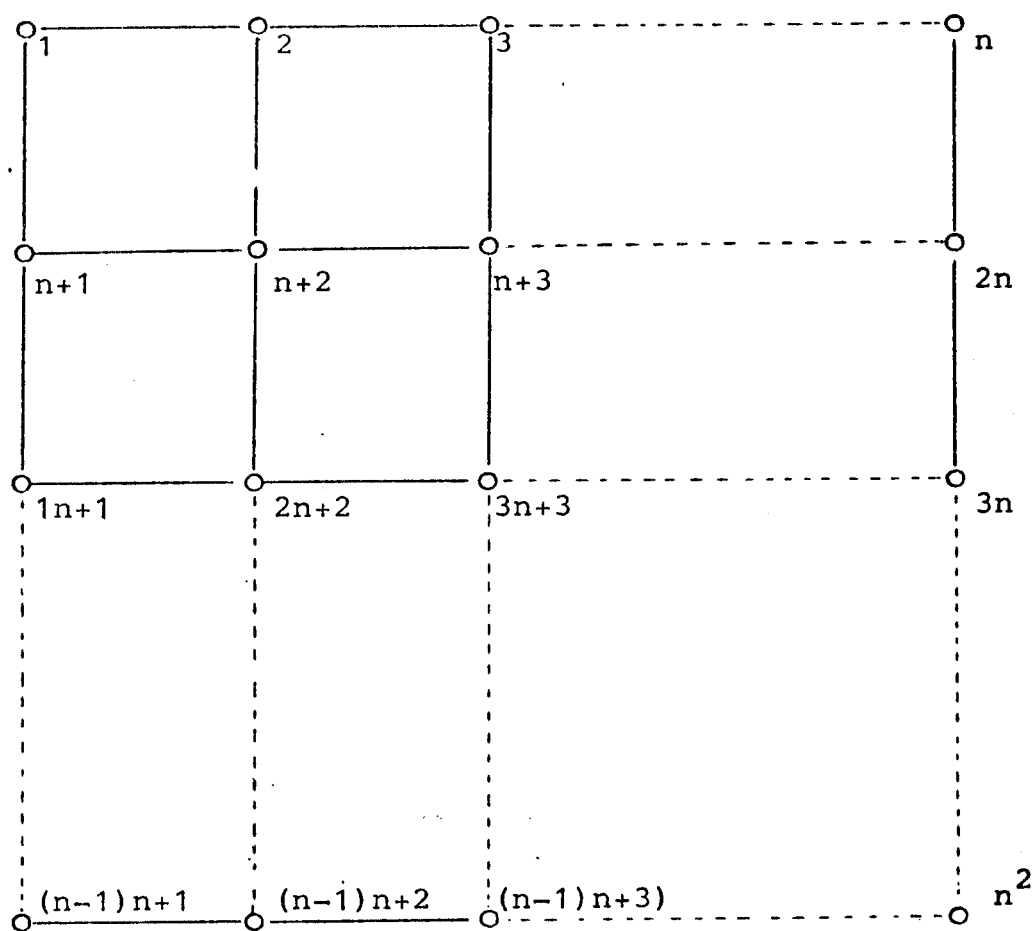


Figura (IV.4)

Nessa configuração o número de nós é dado por

$$N = n^2 \tag{IV.32}$$

e o número de ligações elétricas entre os nós é dado por

$$L = 2n(n-1) \quad (\text{IV.33}).$$

O número de elementos não nulos da matriz  $Y_{\text{BARRA}}$  associada a essa rede, ou seja das submatrizes da matriz jacobiana, é dado por

$$N + 2L = 5n^2 - 4n \quad (\text{IV.34}).$$

Portanto, o grau de esparsidade definido como

$$\rho = 1 - \frac{N + 2L}{N^2} \quad (\text{IV.35})$$

neste caso é dado por

$$\rho = 1 - \left( \frac{5n - 4}{n^3} \right) \quad (\text{IV.36}).$$

No caso das submatrizes da matriz hessiana, é preciso considerar os elementos correspondentes à interligação das primeiras vizinhanças de todos os nós da rede. A configuração assim obtida é representada na Figura (IV.5)

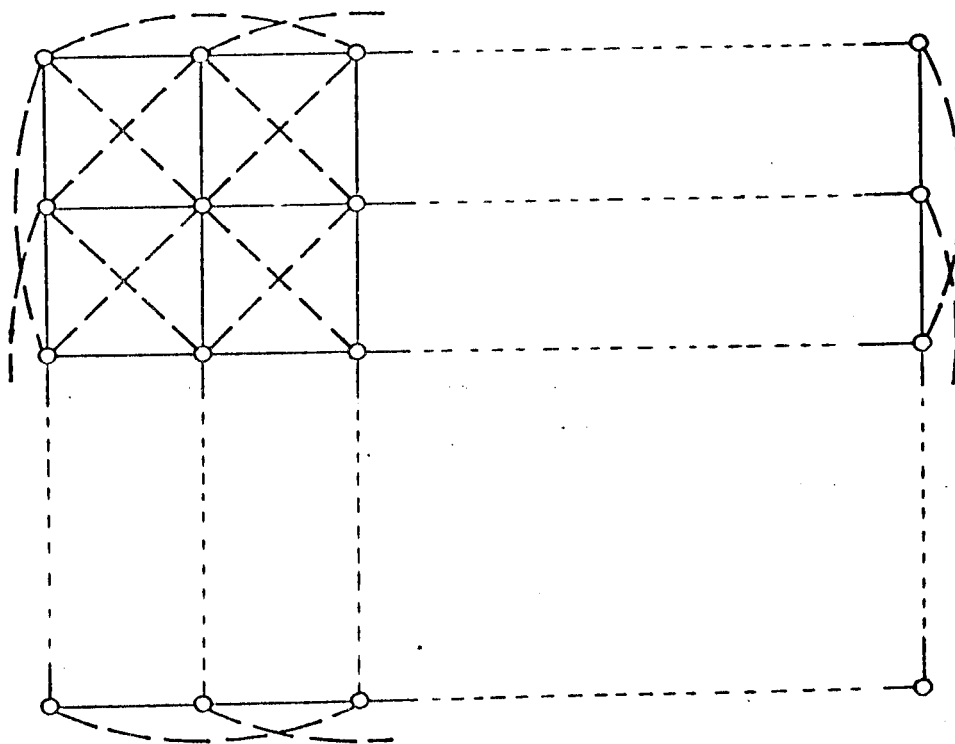


Figura (IV.5)

onde:

- ligações elétricas reais;
- interligações que representam as demais posições com valores não nulos na matriz hessiana.

O número de elementos não nulos da matriz  $Y'_{\text{BARRA}}$  associada à configuração representada na Figura (IV.5) é dado por  $(N + 2L + 2L')$  onde  $L'$  é o número de interligações das primeiras vizinhanças de todos os nós. A expressão de  $L'$  em função de  $n$  é calculada considerando-se três tipos de nós presentes na rede. Inicialmente consideram-se os quatro nós com apenas duas ligações a nós vizinhos, que são os nós  $1, n, (n-1)n+1$  e  $n^2$  que são representados na Figura (IV.6).

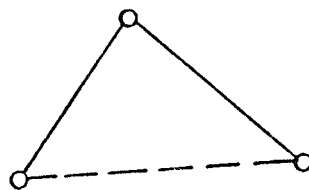


Figura (IV.6)

Cada um desses nós fornece uma ligação adicional representada pela linha seccionada. Como cada uma dessas ligações são contadas duas vezes, esses nós fornecem

2

ligações adicionais. Em seguida consideram-se os nós com três ligações a nós vizinhos que são em número de  $4(n-2)$  e estão representados na Figura (IV.7).

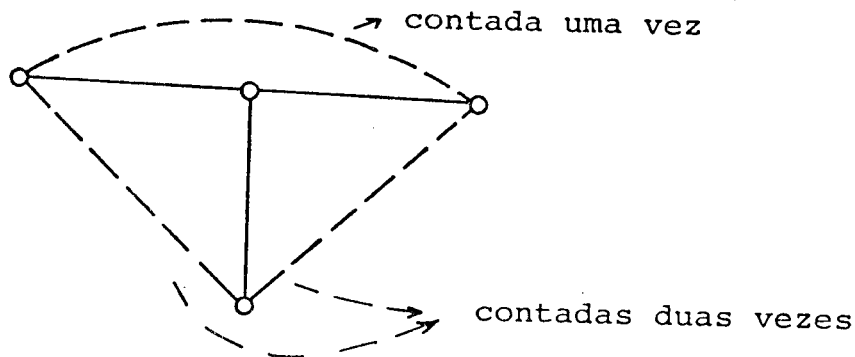


Figura (IV.7)

Cada um desses nós fornece três ligações adicionais sendo que uma delas é contada apenas uma vez e duas são contadas duas vezes. Portanto, o número de ligações adicionais fornecidas por esses nós é dado por

$$\left(1 + \frac{2}{2}\right)4(n-2) = 8(n-2) \quad (\text{IV.37}).$$

Finalmente consideram-se os nós com quatro ligações a nós vizinhos que são em número de  $(n-2)^2$  e estão representados na Figura (IV.8).

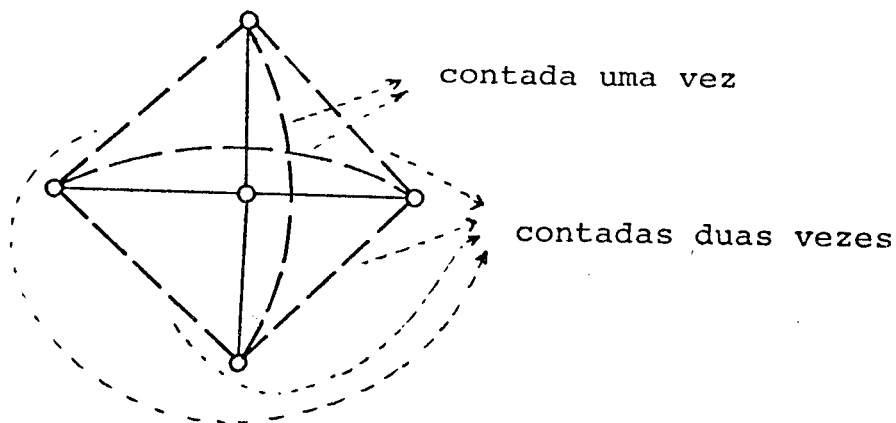


Figura (IV.8)

Cada um desses nós fornece seis ligações adicionais, sendo que duas delas são contadas apenas uma vez e quatro são contadas duas vezes. Portanto, o número de ligações adicionais fornecidas por esses nós é dado por



$$\left(2 + \frac{4}{2}\right)(n-2)^2 = 4(n-2)^2 \quad (\text{IV.38}).$$

Somando-se as ligações adicionais fornecidas por cada um dos tipos de nós obtém-se a expressão de  $L'$  dada por

$$L' = 4n^2 - 8n + 2.$$

Logo, o grau de esparsidade da matriz hessiana definido como

$$\rho = 1 - \frac{N+2L+2L'}{N^2} \quad (\text{IV.39})$$

é dado por

$$\rho = 1 - \left( \frac{13n^2 - 20n + 4}{n^4} \right) \quad (\text{IV.40}).$$

Com as expressões (IV.36) e (IV.40) e considerando-se o percentual de elementos não nulos na matriz hessiana que é dado por

$$K = (1 - \rho) \cdot 100\% \quad (\text{IV.41})$$

constrói-se a Tabela (IV.2).

SISTEMA		JACOBIANA		HESSIANA	
$N = n^2$	$n$	$\rho$	K	$\rho$	K
9	3	0.593	40.7%	0.247	75.3%
25	5	0.832	16.8%	0.634	36.6%
100	10	0.954	4.6%	0.890	11.0%
225	15	0.979	2.1%	0.948	5.2%
400	20	0.988	1.2%	0.970	3.0%

Tabela (IV.2)

Examinando a Tabela (IV.2) nota-se que o grau de esparsidade da matriz hessiana aumenta com a dimensão dos sistemas. Essa caracterís

tica torna o método de Newton atraente para a minimização da la grangeana aumentada no caso de sistemas de grandes dimensões. Nesse caso a resolução da equação (IV.15) é feita através de técni cas de fatoração triangular de matrizes esparsas.

#### IV.7. Formação do vetor gradiente e da matriz hessiana

Nas secções anteriores foram analisadas as es truturas do vetor gradiente e da matriz hessiana. Nesta secção são apresentados algoritmos para formação e cálculo dos elementos do vetor gradiente e da matriz hessiana. Esses algoritmos supõe que os dados e a topologia do sistema são acessíveis através de um con junto de vetores apontadores, que permitem a localização da vizi nhança de um determinado nó de interesse. Esse conjunto de vetores é análogo ao utilizado no armazenamento compacto da matriz  $Y_{BARRA}$  do sistema.

#### Algoritmo para formação do vetor gradiente

Para a formação do vetor gradiente percorrem-se todos os nós do sistema e para cada nó consideram-se todos os nós vizinhos. São calculadas então parcelas das componentes do vetor gradiente correspondentes às variáveis de cada nó e de seus vizi nhos. As expressões das derivadas primeiras da função perda e das res trições são apresentadas nos apêndices F e G. As parcelas das com ponentes do vetor gradiente são incrementadas nas respectivas po sições e correspondem aos seguintes termos :

- i) - derivadas da função perda em relação às variáveis  $\theta_i$  e  $V_i$  do nó  $i$ ;
- ii) - derivadas das restrições do nó  $i$  em re lação às variáveis  $\theta_i$  e  $V_i$  do nó  $i$ ;

- iii) - derivadas das restrições do nó  $i$  em relação às variáveis  $\theta_\ell$  e  $V_\ell$  dos nós  $\ell \in \Omega_i$ ;
- iv) - derivadas das restrições de fluxos nas ligações  $i\ell$ , com  $\ell \in \Omega_i$ , em relação às variáveis  $\theta_i$  e  $V_i$  do nó  $i$ .

A Figura (IV.9) ilustra um nó  $i$  com sua vizinhança e a correspondente contribuição nos vetores  $\underline{G}_\theta$  e  $\underline{G}_V$  que compõe o vetor gradiente.

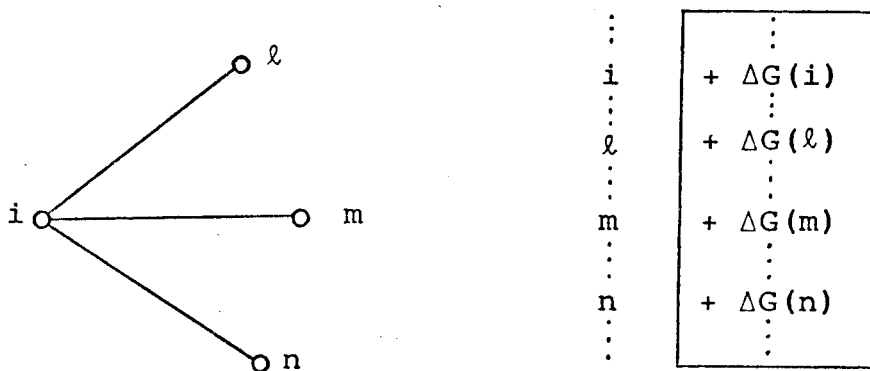


Figura (IV.9)

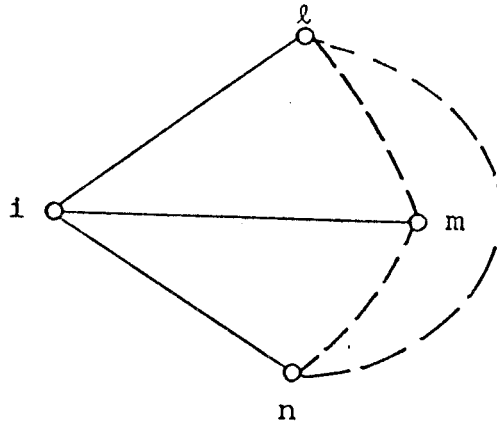
Algoritmo para formação da matriz hessiana

Para a formação da matriz hessiana percorrem-se todos os nós do sistema e para cada nó consideram-se todos os nós vizinhos. São calculadas então as parcelas dos elementos das submatrizes da matriz hessiana correspondentes as variáveis de cada nó e de seus vizinhos. As posições associadas a um nó  $i$  e sua vizinhança, representada por  $\ell \in \Omega_i$ , são as seguintes :

- da diagonal  $(i, i)$  e  $(\ell, \ell)$ ;
- fora da diagonal  $(i, \ell)$  e  $(\ell, i)$ ;
- fora da diagonal  $(\ell, m)$  e  $(m, \ell)$  para

$$l \in \Omega_i \text{ e } m \in \Omega_i.$$

A Figura (IV.10) ilustra o nó  $i$  com sua vizinhança e a contribuição correspondente na estrutura das submatrizes que formam a matriz hessiana.



	...	i	...	l	...	m	...	n	...
⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
i	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...
⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
l	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...
⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
m	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...
⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
n	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...	$+\Delta$	...
⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮

Figura (IV.11)

As expressões das derivadas segundas da função perda e das restrições são apresentadas nos apêndices F e G. As parcelas que formam os elementos da matriz hessiana, considerando-se

$$\{x_i, y_j\} = \{\theta_i, \theta_j, \theta_i, V_j, V_i, \theta_j, V_i, V_j\} \quad (\text{IV.42})$$

correspondem aos seguintes termos :

- i) - derivadas segundas da função perda em relação as variáveis  $x_i, y_i$  e  $x_i, y_\ell$  com  $\lambda \in \Omega_i$ ;
- ii) - derivadas segundas e produtos das derivadas primeiras das restrições do nó  $i$  em relação as variáveis  $x_i, y_i, x_i, y_\ell$  e  $x_\ell, y_\ell$  com  $\lambda \in \Omega_i$ ;
- iii) - produto das derivadas primeiras das restrições do nó  $i$  em relação as variáveis  $x_\ell$  e  $y_m$  com  $\lambda \in \Omega_i$  e  $m \in \Omega_i$ ;
- iv) - derivadas segundas e produtos das derivadas primeiras das restrições nos fluxos sobre as ligações  $i\ell$ , com  $\lambda \in \Omega_i$ , em relação as variáveis  $x_i, y_i$  e  $x_i, y_\ell$ .

#### IV.8. Nota sobre a fatoração triangular da matriz hessiana

As características de esparsidade da matriz hessiana justificam que o seu armazenamento deva ser feito de forma compacta. Isso que dizer que apenas os elementos não nulos são armazenados com o auxílio de um conjunto de vetores apontadores [18, 19, 20]. Durante o processo de otimização a estrutura de elementos não nulos permanece fixa. Isso possibilita que a estrutura de elementos não nulos, a ordenação da sequência de cálculos dos fatores triangulares e as posições de elementos "fill-in" criados durante a fatoração sejam estabelecidos inicialmente, antes do processo de otimização. Durante o processo de otimização são repetidos apenas

o cálculo dos fatores triangulares e as operações "forward" e "backward" para os valores atualizados dos elementos da matriz hessiana.

O acesso às posições (i,j) das submatrizes  $[H_{\theta\theta}]$ ,  $[H_{\theta V}]$ ,  $[H_{V\theta}]$  e  $[H_{VV}]$  através dos vetores apontadores é simultâneo. Essa característica é aproveitada no cálculo dos fatores triangulares e nas operações "forward" e "backward" considerando-se a matriz hessiana rearranjada como

$$\nabla^2 A_k(\underline{\theta}, V) = \begin{array}{|c|} \hline [H(1,1)] \text{ --- } [H(1,n)] \\ \hline \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \hline \text{--- } [H(i,j)] \text{ ---} \\ \hline \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \hline [H(n,1)] \text{ --- } [H(n,n)] \\ \hline \end{array} \tag{IV.43}$$

onde

$$[H(i,j)] = \begin{array}{|c|c|} \hline H_{\theta\theta}(i,j) & H_{\theta V}(i,j) \\ \hline H_{V\theta}(i,j) & H_{VV}(i,j) \\ \hline \end{array} \tag{IV.44}$$

e

$$[H(i,j)] = [H(j,i)]^t \quad (\text{IV.45})$$

Portanto, todo o processo de cálculo dos fatores triangulares da matriz hessiana é feito manipulando-se unidades matriciais de dimensão  $2 \times 2$ . Dessa forma resulta uma indexação única para os termos das quatro submatrizes economizando-se posições de memória e tempo de busca nas operações.

## CAPÍTULO V

### TESTES REALIZADOS

Neste capítulo são apresentados resultados de testes realizados com três sistemas de transmissão. Para a realização destes estudos foi desenvolvido um programa computacional conversacional em linguagem FORTRAN para o sistema PDP-10. A política de penalidades, a decisão sobre o número de passos de Newton em cada iteração e o critério de parada dependem do caso em estudo e são definidas pelo usuário durante a execução do programa. A seguir são descritas a política de penalidades, o algoritmo utilizado e os resultados obtidos nos testes com os sistemas AEP30, IEEE118 e CESP.

#### V.1. Política de Penalidades

A escolha dos valores iniciais e do critério de crescimento para os fatores de penalidades afetam sobre-maneira o processo de solução. Critérios de inicialização e crescimento foram estabelecidos em função do melhor desempenho alcançado para os exemplos testados. Verificou-se, por exemplo, que as restrições de desigualdade em magnitudes de tensão, injeções de potência ativa e reativa e em fluxos de potência ativa devem ser penalizadas, mesmo no caso de estarem satisfeitas. Adicionalmente também foram consideradas penalidades sobre os fluxos de potência reativa nas ligações elétricas. A adoção de penalidades em variáveis que satisfa



zem suas restrições de desigualdade, equivale a considerar a respectiva restrição, representada por

$$f(\underline{\theta}, \underline{V}) - F^{\text{limite}} \leq 0 \quad (\text{V.1})$$

como uma restrição de igualdade, dada por

$$f(\underline{\theta}, \underline{V}) - f(\underline{\theta}^v, \underline{V}^v) = 0 \quad (\text{V.2}).$$

Neste caso, os valores limites, impostos como restrição, são a cada passo, considerados no valor da variável calculada no ponto  $(\underline{\theta}^v, \underline{V}^v)$ .

Os fatores de penalidades associados às variáveis nodais de mesma natureza foram considerados iguais, ou seja, para as magnitudes de tensão adotaram-se penalidades iguais. Idem para as injeções de potência ativa e reativa.

No caso das variáveis de fluxos ativo e reativo adotaram-se penalidades inversamente proporcionais às susceptâncias das respectivas ligações elétricas, ou seja, penalidades do tipo

$$v = \alpha \cdot \frac{1}{|b_{k\ell}|} \quad (\text{V.3}),$$

onde :

$v$  - fator de penalidade associado a um fluxo de potência ativa ou reativa;

$\alpha$  - coeficiente de proporcionalidade;

$b_{k\ell}$  - susceptância da ligação elétrica  $k\ell$  .

O objetivo desse tipo de penalidade é dar aos fluxos nas ligações de maior capacidade de transmissão mobilidade maior que aos fluxos nas ligações de menor capacidade.

## V.2 Algoritmo utilizado

O procedimento para atualização dos multiplicadores e das penalidades consiste do seguinte :

- i - atualização dos multiplicadores através das relações (IV.13) e (IV.14);
- ii - crescimento das penalidades segundo um critério do tipo

$$v_{\text{nov}} = \beta v_{\text{velho}} \quad (\text{V.4}).$$

O diagrama apresentado na Figura (V.1) ilustra o algoritmo com o qual foram obtidos os resultados apresentados. Durante a primeira minimização da lagrangeana aumentada observou-se o módulo de seu gradiente até que sua taxa de descréscimo se tornasse bastante reduzida. O número de passos pelo método de Newton efetuados durante essa primeira minimização foi adotado para o restante do processo.

O critério de parada para o processo iterativo se baseou na factibilização das restrições. Entretanto não se préfixou uma tolerância mas tomou-se como solução do problema o ponto no qual os erros nas restrições deixaram de diminuir. Tal critério depende, portanto, da capacidade do método em se aproximar da solução do caso em estudo.

## V.3 Resultados

São apresentados resultados de testes realizados com os três sistemas, cuja base de potência comum é 100 MVA.

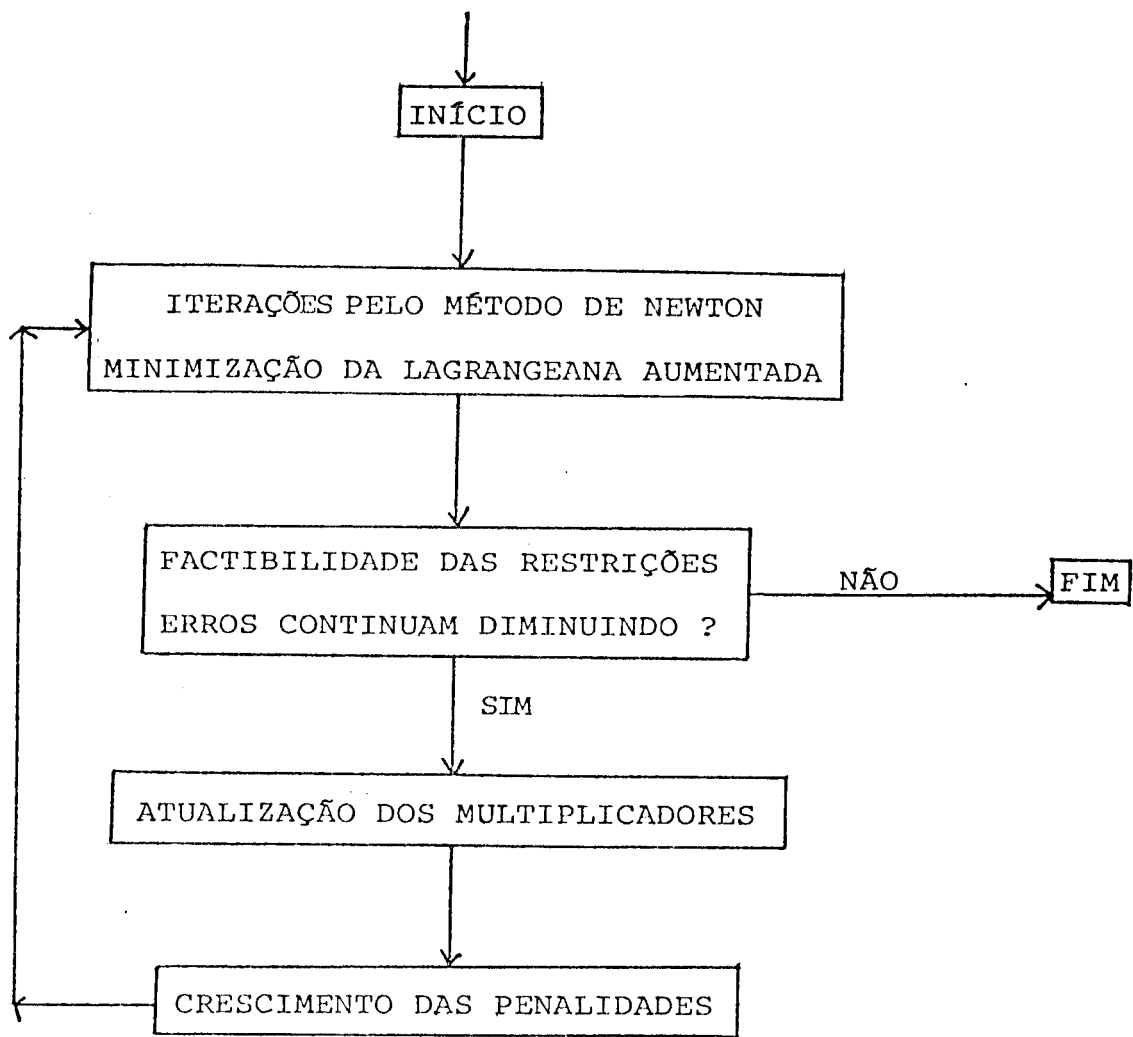


Figura (V.1)

## Sistema AEP30

Este sistema, cujo diagrama unifilar está representado na Figura (V.2), é composto de 30 barras, 37 linhas de transmissão e 4 transformadores. A Tabela (V.1) resume a natureza das barras e os tipos de restrições nodais associadas. Como mostra a Tabela (V.1)

número de barras	natureza das barras	restrições nas variáveis nodais		
		pot.ativa	pot.reativa	tensão
24	carga	igualdade	igualdade	canalização
2	geração de ativos e reativos	canalização	canalização	canalização
4	geração de reativos	igualdade	canalização	canalização

Tabela (V.1)

este problema apresenta 52 restrições de igualdade e 38 restrições de canalização em variáveis nodais. Além disso, as restrições sobre os fluxos de potência ativa e reativa foram levadas em conta como descrito na secção (V.1).

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , dados em (V.3) e (V.4), foram considerados como sendo :

$$\alpha = 0,1 ;$$

$$\beta = 1,5$$

Os fatores de penalidades e as condições iniciais para as variáveis nodais são apresentados nas Tabelas (V.2) e (V.5).

variáveis	pot.ativa	pot. reativa	magnitudo de tensão
penalidades iniciais	1,0	1,0	10,0

Tabela (V.2)

O ponto, em torno do qual foram relaxadas as restrições correspondentes ao despacho de potência ativa e perfil de tensão, apresenta uma solução de fluxos de carga representada na Tabela (V.4).

A obtenção de uma solução pelo programa de fluxo de carga ótimo foi conseguida com 8 iterações em cada qual foram efetuados 7 passos pelo método de Newton. A evolução das perdas, dos erros máximos e médios nas restrições de potência e do perfil de tensão é apresentada na Tabela (V.6). O comportamento dos erros máximos nas restrições de potência durante o processo iterativo é visualizado na Figura (V.3). As condições da rede para a solução obtida pelo programa de fluxo de carga ótimo são apresentadas na Tabela (V.7), sendo que suas características juntamente com as da solução básica do fluxo de carga estão apresentadas na Tabela (V.3), onde :

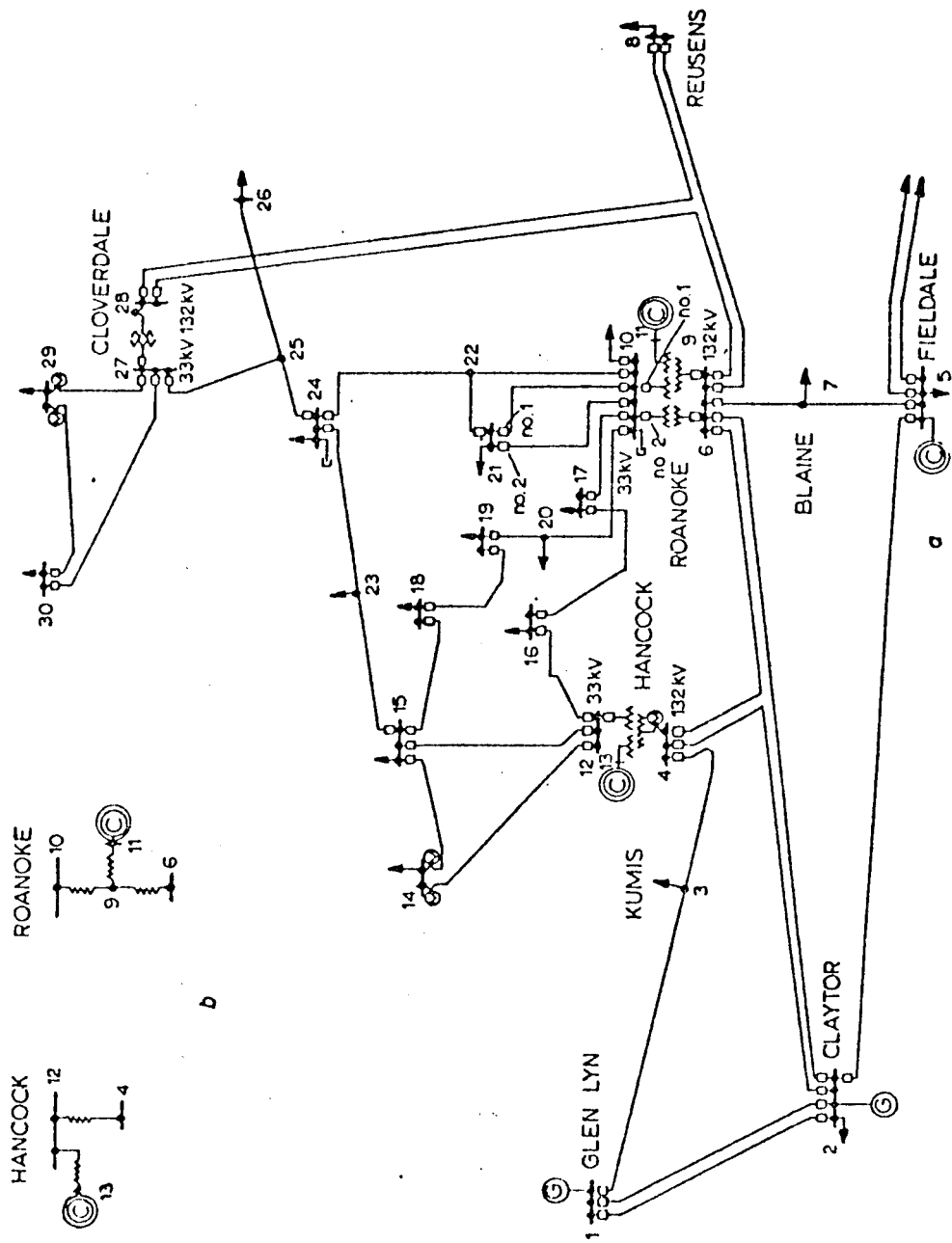
$\Sigma_{k \in \{PV\}} |Q_k|$  - índice associado ao despacho de potência reativa;

$k \in \{PV\}$  - conjunto de barras com tensão controlada.

características	solução básica do fluxo de carga	solução do fluxo de carga ótimo
perdas (p.u.)	0,176	0,174
tensão mínima (p.u.)	0,9909	0,9958
tensão máxima (p.u.)	1,0820	1,0856
tensão média (p.u.)	1,0288	1,0286
desvio padrão (p.u.)	0,0216	0,0209
$\sum_{k \in \{PV\}}  Q_k $ (p.u.)	1,250	0,902

Tabela (V.3)

Neste exemplo a redução das perdas foi pouco significativa mas ocorreram melhorias tanto no perfil de tensão quanto no despacho de potência reativa.



AEP 30 bus test system

- ⊖ synchronous compensators
- ⊖ generators
- a Bus-code diagram
- b 3-winding transformer equivalents

Figura (V.2)

SISTEMA I E E E - 30 BARRAS

RELATORIO #					ESTADO DO SISTEMA				
BARRA	TIPO	V	ANG	P(MW) Q(MVAR)	BARRA	TIPO	V	ANG	P(MW) Q(MVAR)
1	SL	1.0000	-0.0	260.9 -16.9	2	PV	1.0450	-5.5	18.4 50.5
3	PV	1.0195	-8.0	-2.4 -1.2	4	PQ	1.0109	-9.6	-7.6 -1.0
5	PV	1.0100	-14.4	-94.2 19.2	6	PQ	1.0095	-11.4	0.0 -0.0
7	PV	1.0015	-13.1	-22.8 -10.9	8	PV	1.0100	-12.1	-30.0 11.0
9	PV	1.0050	-14.4	0.0 0.0	10	PQ	1.0444	-16.0	-5.8 -2.0
11	PV	1.0020	-14.4	0.0 16.5	12	PQ	1.0508	-15.3	-11.2 -7.5
13	PV	1.0710	-15.3	0.0 10.9	14	PQ	1.0419	-16.2	-6.2 -1.0
15	PV	1.0372	-16.3	-8.2 -2.5	16	PQ	1.0444	-15.9	-3.5 -1.8
17	PV	1.0391	-16.2	-9.0 -5.8	18	PQ	1.0276	-16.9	-3.2 -0.9
19	PV	1.0251	-17.0	-9.5 -3.4	20	PV	1.0291	-16.8	-2.2 -0.7
21	PV	1.0320	-16.5	-17.5 -11.2	22	PQ	1.0320	-16.4	0.0 0.0
23	PV	1.0266	-16.6	-3.2 -1.0	24	PQ	1.0209	-16.8	-8.7 -6.7
25	PV	1.0164	-16.4	0.0 0.0	26	PQ	0.9987	-16.8	-3.5 -2.3
27	PV	1.0222	-15.8	-0.0 -0.0	28	PQ	1.0056	-12.0	0.0 -0.0
29	PV	1.0024	-17.1	-2.4 -0.9	30	PV	0.9909	-18.0	-10.0 -1.9

\*\*\* DIAGNOSTICO DO PERFIL DE TENSÃO \*\*\*  
 BARRA 30 VMINIMO= 0.9909  
 BARRA 11 VMAXIMO= 1.0820  
 MEDIA DAS TENSÕES = VMEQ= 1.0288  
 DESVIO PADRAO DAS TENSÕES= 0.021643

Tabela (V.4)



FLUXO DE CARGA COMO ATIVO E RELATIVO

BARRA	TLTA	Y	VMIN	VMAX	CONDIÇÕES INICIAIS	P	PHIN	PMAX	V	UMIN	QMAX
1 HAPPA1-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.102	-100.000	100.000	0.547	0.547	-100.000	100.000
2 HAPPA2-CARG	0.00	1.0450	0.9000	1.1183	0.119	0.103	0.263	0.368	0.368	-100.000	100.000
3 HAPPA3-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	-0.075	-0.024	-0.024	-0.318	-0.318	-0.012	-0.012
4 HAPPA4-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	-0.077	-0.076	-0.076	0.058	0.058	-0.016	-0.016
5 HAPPA5-CARG	0.00	1.0100	0.9000	1.1183	-0.010	-0.042	-0.042	-0.109	-0.109	100.000	100.000
6 HAPPA6-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	-0.139	0.000	0.000	-0.302	-0.302	0.000	0.000
7 HAPPA7-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	-0.030	-0.224	-0.224	-0.084	-0.084	-0.103	-0.103
8 HAPPA8-CARG	0.00	1.0100	0.9000	1.1183	0.000	0.300	0.300	0.255	0.255	100.000	100.000
9 HAPPA9-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	0.000	0.000	-0.592	-0.592	0.000	0.000
10 HAPPA10-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.059	-0.059	-0.248	-0.248	-0.040	-0.040
11 HAPPA11-CARG	0.00	1.0820	0.9000	1.1183	0.060	0.000	0.000	0.427	0.427	-100.000	-100.000
12 HAPPA12-CARG	0.00	1.0710	0.9000	1.1183	0.000	-0.112	-0.112	-0.792	-0.792	-0.075	-0.075
13 HAPPA13-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	0.000	0.000	0.543	0.543	100.000	100.000
14 HAPPA14-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.062	-0.062	0.200	0.200	-0.016	-0.016
15 HAPPA15-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.082	-0.082	-0.087	-0.087	-0.025	-0.025
16 HAPPA16-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.035	-0.035	0.200	0.200	-0.018	-0.018
17 HAPPA17-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.090	-0.090	0.000	0.000	-0.038	-0.038
18 HAPPA18-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.032	-0.032	-0.037	-0.037	-0.009	-0.009
19 HAPPA19-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.095	-0.095	0.000	0.000	-0.034	-0.034
20 HAPPA20-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.022	-0.022	0.000	0.000	-0.007	-0.007
21 HAPPA21-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.175	-0.175	0.000	0.000	-0.112	-0.112
22 HAPPA22-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	-0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
23 HAPPA23-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.032	-0.032	0.000	0.000	-0.016	-0.016
24 HAPPA24-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.087	-0.087	-0.087	-0.087	-0.067	-0.067
25 HAPPA25-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
26 HAPPA26-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.035	-0.035	0.000	0.000	-0.023	-0.023
27 HAPPA27-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	0.000	0.000	-0.083	-0.083	0.000	0.000
28 HAPPA28-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	-0.014	0.000	0.000	0.027	0.027	0.000	0.000
29 HAPPA29-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.024	-0.024	0.000	0.000	-0.009	-0.009
30 HAPPA30-CARG	0.00	1.0000	0.9000	1.1183	0.000	-0.106	-0.106	-0.105	-0.105	-0.019	-0.019

Tabela (V.5)

ILUMINACAO (P.U.)	CURVA (P.U.)		POTENCIA ATIVA		POTENCIA REATIVA		PERFIL DE TENSÃO			
	MAXIMO	MEIO	MAXIMO	MEIO	MAXIMO	MEIO	MINIMO	MAXIMO	MEIO	MAXIMO
0	0.015	0.022	0.099	0.717	0.110	0.110	1.0000	1.0020	1.0003	1.0224
1	0.040	0.110	0.054	0.033	0.019	0.019	0.9858	1.0754	1.0191	1.0202
2	0.056	0.057	0.047	0.007	0.003	0.003	0.9734	1.0582	1.0204	0.0184
3	0.081	0.035	0.032	0.008	0.005	0.005	0.9744	1.0533	1.0271	0.0183
4	0.109	0.025	0.020	0.007	0.005	0.005	0.9810	1.0591	1.0239	0.0179
5	0.134	0.015	0.011	0.008	0.004	0.004	0.9887	1.0684	1.0256	0.0181
6	0.154	0.004	0.004	0.007	0.002	0.002	0.9947	1.0762	1.0269	0.0188
7	0.167	0.003	0.003	0.005	0.001	0.001	0.9981	1.0819	1.0279	0.0199
8	0.174	0.002	0.002	0.003	0.001	0.001	0.9958	1.0856	1.0286	0.0209

Tabela (V.6)

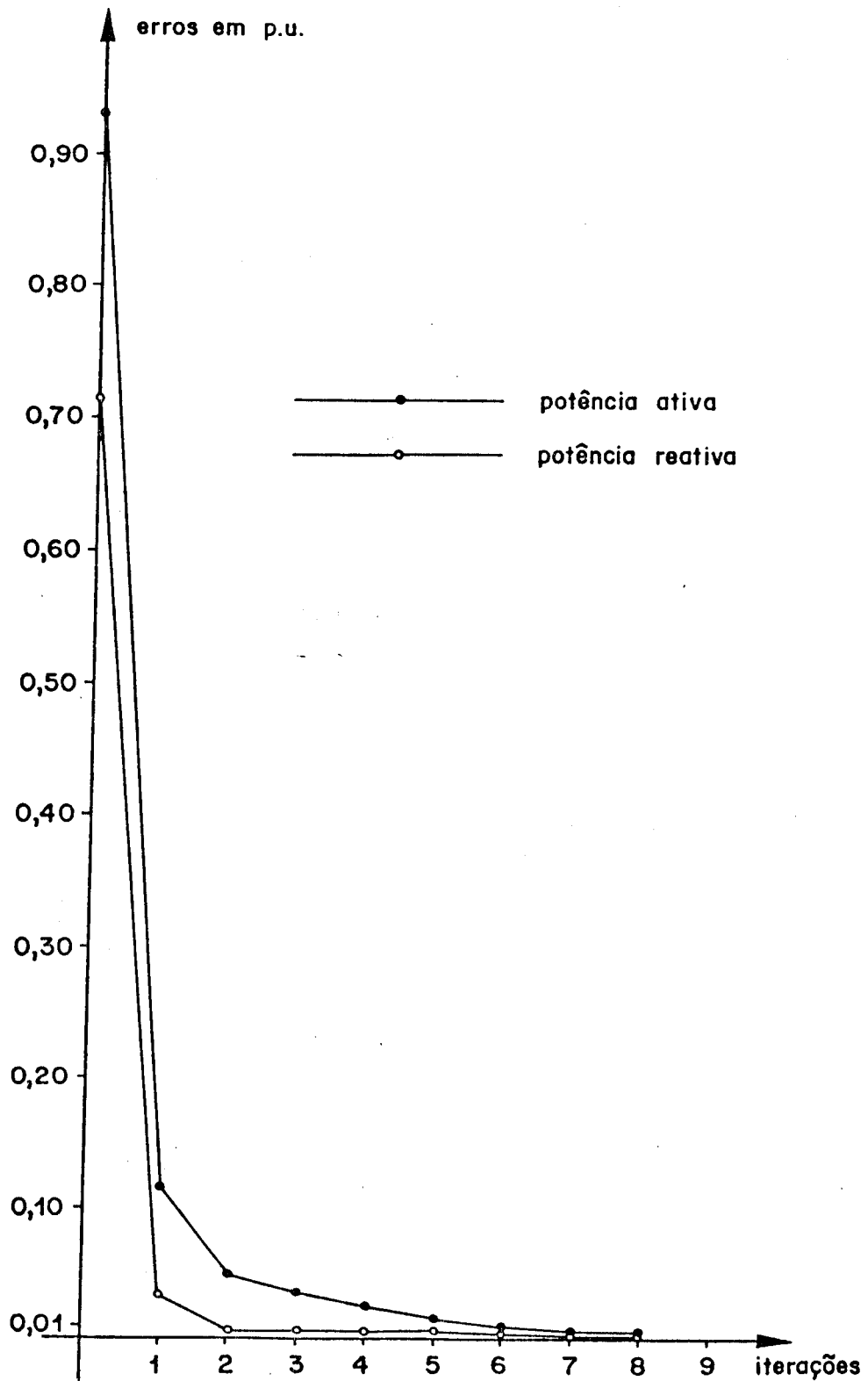


Figura (V. 3)

CONDICIONES DA REDE-----  
 DEPUIS DE 8 ITERACOES  
 PERROS (PU) = 0.17429  
 PENALIDADES \*  
 MULTIPLICADORES \*

1. 1.

BARRA	TLTA	V	WV	MULTV	P	MULTP	Q	WQ	MULTO
1	-6.0	1.0856	170.9	0.0000	2.583	17.086	0.000	17.086	0.000
2	-4.9	1.0520	170.9	0.0000	0.261	17.085	0.229	17.086	0.000
3	-7.0	1.0244	170.9	0.0000	-0.026	17.086	-0.012	17.086	0.032
CAMP 4	-9.1	1.0161	170.9	0.0000	-0.078	17.086	-0.016	17.086	0.033
5	-13.7	1.0034	170.9	0.0000	-0.244	17.086	0.079	17.086	0.000
6	-10.9	1.0124	170.9	0.0000	-0.002	17.086	0.343	17.086	0.030
7	-12.5	1.0306	170.9	0.0000	-0.230	17.086	0.365	17.086	0.030
8	-11.6	1.0135	170.9	0.0000	-0.302	17.086	0.353	17.086	0.000
9	-14.0	1.0470	170.9	0.0000	-0.067	17.086	-0.000	17.086	0.022
10	-15.7	1.0416	170.9	0.0000	-0.067	17.086	-0.070	17.086	0.027
11	-14.1	1.0714	170.9	0.0000	-0.002	17.086	0.395	17.086	0.000
12	-14.9	1.0522	170.9	0.0000	-0.114	17.086	-0.075	17.086	0.020
13	-14.9	1.0600	170.9	0.0000	-0.102	17.086	0.059	17.086	0.000
14	-15.9	1.0372	170.9	0.0000	-0.084	17.086	-0.016	17.086	0.026
15	-15.9	1.0374	170.9	0.0000	-0.084	17.086	-0.025	17.086	0.033
16	-15.5	1.0403	170.9	0.0000	-0.037	17.086	-0.018	17.086	0.025
17	-15.9	1.0356	170.9	0.0000	-0.092	17.086	-0.058	17.086	0.029
18	-16.6	1.0232	170.9	0.0000	-0.034	17.086	0.350	17.086	0.038
19	-15.8	1.0209	170.9	0.0000	-0.097	17.086	0.373	17.086	0.039
20	-15.6	1.0252	170.9	0.0000	-0.024	17.086	-0.015	17.086	0.035
21	-16.1	1.0292	170.9	0.0000	-0.177	17.086	0.370	17.086	0.039
22	-16.1	1.0298	170.9	0.0000	-0.002	17.086	-0.112	17.086	0.039
23	-16.4	1.0231	170.9	0.0000	-0.034	17.086	-0.060	17.086	0.049
24	-16.5	1.0189	170.9	0.0000	-0.089	17.086	-0.016	17.086	0.063
25	-16.1	1.0141	170.9	0.0000	-0.001	17.086	-0.047	17.086	0.105
26	-16.0	1.0010	170.9	0.0000	-0.036	17.086	0.390	17.086	0.144
27	-16.5	1.0257	170.9	0.0000	-0.001	17.086	0.434	17.086	0.103
28	-11.5	1.0385	170.9	0.0000	-0.001	17.086	0.369	17.086	0.037
29	-16.8	1.0071	170.9	0.0000	-0.025	17.086	0.354	17.086	0.140
30	-17.7	0.9958	170.9	0.0000	-0.107	17.086	0.426	17.086	0.149

Tabela (V.7)

## Sistema IEEE118

Este sistema, cujo diagrama unifilar está representado na Figura (V.4), é composto de 118 barras, 177 linhas de transmissão e 9 transformadores. A Tabela (V.8) resume a natureza das barras e os tipos de restrições nodais associadas. Como mostra a Tabela (V.8)

número de barras	natureza das barras	restrições nas variáveis nodais		
		pot.ativa	pot. reativa	tensão
66	carga	igualdade	igualdade	canalização
19	geração de ativos e reativos	canalização	canalização	canalização
33	geração de reativos	igualdade	canalização	canalização

Tabela (V.8)

este problema apresenta 165 restrições de igualdade e 189 restrições de canalização em variáveis nodais. As restrições sobre os fluxos de potência ativa e reativa foram levadas em conta como descrito na secção (V.1).

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  utilizados foram :

$$\alpha = 20;$$

$$\beta = 1,5.$$

Os fatores de penalidades e as condições iniciais para as variáveis nodais são apresentados nas tabrlas (V.9) e (V.12).

variáveis	pot. ativa	pot. reativa	magnitude de tensão
penalidades iniciais	1,0	1,0	100,0

Tabela (V.9)

O despacho de potência ativa e o perfil de tensão básicos, em torno do qual admitiu-se uma folga, apresentam uma solução de fluxo de carga representada na Tabela (V.11).

A solução obtida pelo programa de fluxo de carga ótimo foi conseguida com 9 iterações em cada qual foram efetuados 10 passos pelo método de Newton. A evolução das perdas, dos erros máximos e médios nas restrições de potência e do perfil de tensão é apresentada na Tabela (V.13). O comportamento dos erros máximos nas restrições de potência durante o processo iterativo é visualizado na Figura (V.5). As condições da rede para a solução obtida pelo programa de fluxo de carga ótimo são apresentadas na Tabela (V.14), sendo que suas características juntamente com as da solução básica do fluxo de carga estão apresentadas na Tabela (V.10).

características	solução básica do fluxo de carga	solução do fluxo de carga ótimo
perdas (p.u.)	1,296	1,083
tensão mínima (p.u.)	0,9430	0,9726
tensão máxima (p.u.)	1,0500	1,1167
tensão média (p.u.)	0,9871	1,0266
desvio padrão (p.u.)	0,0234	0,0402
$\sum_{k \in \{PV\}}  Q_k $ (p.u.)	23,502	28,414

Tabela (V.10)

Neste caso a redução das perdas foi bastante significativa (16,4%) mas o perfil de tensão e o despacho de potência reativa apresentam desvantagens.

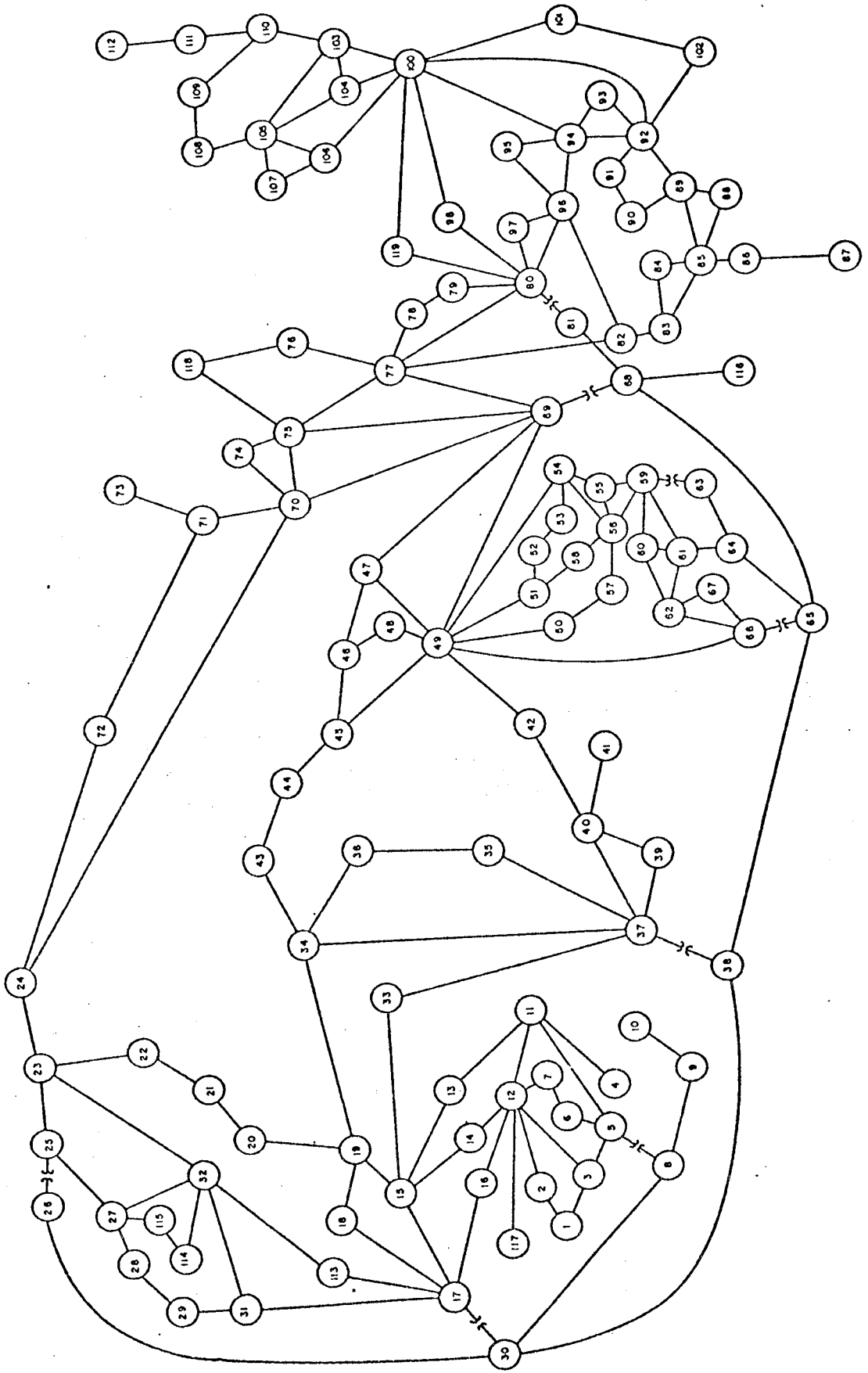


Figura (V.4)



SISTEMA I E E - 118 BARRAS



RELATORIO # 5 : ESTADO DO SISTEMA

BARRA	TIPO	V	ANG	P(MW)	Q(MVAR)	BARRA	TIPO	V	ANG	P(MW)	Q(MVAR)
1	PV	0.9550	-1.5	-51.0	-30.7	2	PQ	0.9714	-1.0	-20.0	-9.0
3	P2	0.9680	-0.6	-39.0	-10.0	4	PV	0.9980	3.1	-39.0	-41.0
5	P2	1.0031	3.6	0.0	0.0	6	PV	0.9900	0.8	-52.0	-8.2
7	P2	0.9893	0.4	-19.0	-2.0	8	PV	1.0150	8.7	-28.0	-49.9
9	P2	1.0429	15.9	0.0	-0.0	10	PV	1.0500	23.5	150.0	-50.9
11	P2	0.9853	0.5	-70.0	-23.0	12	SL	0.9900	-0.0	0.0	82.0
13	P2	0.9685	-0.9	-31.0	-10.0	14	PQ	0.9830	-0.7	-14.0	-1.0
15	PV	0.9700	-1.0	-90.0	-14.3	16	PQ	0.9826	-0.3	-25.0	-10.0
17	P2	0.9912	1.5	-11.0	-3.0	18	PV	0.9730	-0.8	-60.0	2.0
19	PV	0.9620	-1.2	-45.0	-11.7	20	PQ	0.9581	-0.4	-14.0	-3.0
21	P2	0.9596	1.1	-14.0	-9.0	22	PQ	0.9717	3.6	-10.0	-5.0
23	P2	1.0031	9.3	-7.0	-3.0	25	PV	1.0500	15.4	220.0	101.6
26	PV	1.0150	17.3	311.0	-132.3	27	PV	0.9690	2.9	-71.0	-9.1
28	P2	0.9616	1.2	-17.0	-7.0	29	PQ	0.9632	0.2	-24.0	-4.0
30	PV	1.0095	6.7	-0.0	0.0	31	PV	0.9670	0.3	-36.0	8.0
32	PV	0.9630	2.3	-59.0	-42.6	113	PV	0.9930	1.4	-0.0	19.6
114	P2	0.9601	2.0	-8.0	-3.0	115	PQ	0.9600	2.0	-22.0	-7.0
117	P2	0.9738	-1.5	-20.0	-9.0	74	PQ	0.9994	7.9	-13.0	-0.0
133	P2	0.9710	-1.6	-23.0	-9.0	34	PQ	0.9856	-0.9	-59.0	-26.0
38	P2	1.0045	4.9	-6.0	-0.0	35	PQ	0.9805	-1.3	-33.0	-9.0
36	PV	0.9800	-1.3	-31.0	-15.3	37	PQ	0.9909	-0.4	-0.0	-0.0
39	P2	0.9700	-3.8	-27.0	-11.0	40	PV	0.9700	-4.9	-66.0	5.3
41	P2	0.9664	-5.4	-37.0	-10.0	42	PV	0.9850	-3.8	-96.0	17.9
43	P2	0.9783	-1.0	-19.0	-7.0	44	PQ	0.9850	1.4	-16.0	-8.0
45	P2	0.9867	3.2	-53.0	-22.0	46	PV	1.0050	6.0	-9.0	-15.7
47	P2	1.0170	8.0	-34.0	0.0	48	PQ	1.0206	7.5	-20.0	-11.0
49	PV	1.0250	8.5	117.0	83.0	50	PQ	1.0011	6.5	-17.0	-4.0
51	P2	0.9670	4.0	-17.0	-9.0	52	PQ	0.9569	3.0	-19.0	-5.0
53	P2	0.9460	2.1	-23.0	-11.0	54	PV	0.9550	3.0	-65.0	-28.2
55	PV	0.9520	2.7	-03.0	-17.3	56	PV	0.9540	2.9	-84.0	-20.4
57	P2	0.9706	4.1	-12.0	-3.0	58	PQ	0.9591	3.2	-12.0	-3.0
59	PV	0.9450	7.3	-122.0	6.3	60	PQ	0.9932	11.1	-78.0	-3.0
61	PV	0.9950	12.0	100.0	-38.8	62	PV	0.9980	11.4	-77.0	-12.9
63	P2	0.9924	11.8	-0.0	0.0	64	PQ	0.9982	12.5	-0.0	0.0
65	PV	1.0050	15.8	391.0	-263.1	66	PV	1.0500	15.4	353.0	177.6
67	P2	1.0197	12.8	-28.0	-7.0	68	PQ	1.0122	15.8	0.0	-0.0
69	PV	1.0350	15.7	329.0	95.1	70	PV	0.9840	8.9	-66.0	-14.6
71	P2	0.9800	8.5	-0.0	-0.0	72	PV	0.9800	7.7	-12.0	-14.9
73	PV	0.9910	0.3	-0.0	9.6	74	PV	0.9540	8.0	-68.0	-33.0
75	P2	0.9675	9.2	-37.0	-11.0	76	PV	0.9430	8.3	-64.0	-30.6
77	PV	1.0000	13.6	-61.0	-15.0	78	PQ	1.0034	13.4	-71.0	-20.0
79	P2	1.0092	13.8	-39.0	-32.0	80	PV	1.0400	10.3	347.0	180.5
81	P2	1.0276	15.9	0.0	0.0	82	PQ	0.9886	14.3	-54.0	-27.0
83	P2	0.9814	15.5	-20.0	-10.0	84	PQ	0.9797	10.1	-11.0	-7.0
85	PV	0.9550	14.7	-24.0	-20.6	86	P2	0.9867	18.3	-21.0	-10.0
87	PV	1.0150	14.6	4.0	11.0	88	PQ	0.9874	22.3	-48.0	-10.0
89	PV	1.0050	26.9	607.0	-5.9	90	PV	0.9850	20.5	-163.0	17.3
91	PV	0.9800	20.5	-10.0	-13.1	92	PV	0.9900	21.0	-65.0	-25.5
93	P2	0.9454	18.0	-12.0	-7.0	94	PQ	0.9899	15.9	-30.0	-10.0
95	P2	0.9804	14.9	-12.0	-31.0	96	PQ	0.9923	14.7	-38.0	-15.0
97	P2	1.0112	15.1	-15.0	-9.0	98	PQ	1.0235	14.7	-34.0	-8.0
99	PV	1.0100	14.3	-42.0	-17.5	100	PV	1.0170	15.3	215.0	75.9
101	P2	0.9914	16.8	-22.0	-15.0	102	PQ	0.9891	19.5	-5.0	-3.0
103	PV	1.0100	11.5	17.0	59.4	104	PV	0.9710	8.9	-38.0	-22.6
105	PV	0.9650	7.8	-31.0	-44.4	106	PQ	0.9611	7.6	-43.0	-10.0
107	PV	0.9520	4.8	-50.0	-5.4	108	PQ	0.9662	6.6	-2.0	-1.0
109	P2	0.9670	0.2	-8.0	-3.0	110	PV	0.9730	5.3	-39.0	-29.7
111	PV	0.9800	7.0	36.0	-1.8	112	PV	0.9750	2.2	-67.9	28.5
116	PV	1.0050	15.9	0.0	-103.6	118	PQ	0.9495	8.4	-33.0	-15.0

\*\*\* DIAGNOSTICO DO PERFIL DE TENSÃO \*\*\*  
 BARRA 70 VARIÁVEL= 0.9430  
 BARRA 10 VARIÁVEL= 1.0500  
 MÉDIA DAS TENSÕES = VMEJ= 0.9871  
 DESVIO PADRÃO DAS TENSÕES= 0.023326

Tabela (V.11)

FLUXO DE CARGA OTIMIZADO ATIVO E REATIVO

BARRA	TELA	V	VMIN	CONDICÖES INICIAIS		P	PHIN	PHAX	U	UMIN	UMAX
				V*AX	P						
1 IEEB 119	0.00	0.9550	0.9000	1.1180	-0.402	-0.510	-0.510	-1.338	-100.000	100.000	0.000
2 IEEB 118	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.170	-0.200	-0.200	7.541	-0.590	100.000	0.000
3 IEEB 116	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.313	-0.390	-0.390	0.989	-0.100	-0.100	-0.100
4 IEEB 114	0.00	0.9980	0.9000	1.1180	-0.062	-0.370	-0.390	-0.274	-100.000	100.000	0.000
5 IEEB 112	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	-0.134	0.000	0.000	-0.578	0.000	0.000	0.000
6 IEEB 119	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.171	-0.520	-0.520	-0.638	-100.000	100.000	0.000
7 IEEB 118	0.00	1.0150	0.9000	1.1180	0.065	-0.280	-0.280	1.728	-0.020	-0.020	-0.020
8 IEEB 117	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	-0.163	0.000	0.000	0.503	-100.000	100.000	0.000
9 IEEB 115	0.00	1.0500	0.9000	1.1180	0.131	3.600	3.600	1.942	-100.000	100.000	0.000
10 IEEB 114	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.149	-0.700	-0.700	0.465	-0.230	-0.230	-0.230
11 IEEB 113	0.00	0.9900	0.9000	1.1180	-0.354	-100.000	100.000	1.319	-100.000	100.000	0.000
12 IEEB 112	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.034	-0.340	-0.340	0.072	-0.100	-0.100	-0.100
13 IEEB 111	0.00	0.9700	0.9000	1.1180	0.082	-0.140	-0.140	1.236	-0.010	-0.010	-0.010
14 IEEB 110	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	-0.270	-0.300	-0.300	1.983	-100.000	100.000	0.000
15 IEEB 109	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.029	-0.250	-0.250	0.079	-0.100	-0.100	-0.100
16 IEEB 108	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	-0.073	-0.110	-0.110	1.464	-0.030	-0.030	-0.030
17 IEEB 107	0.00	0.9620	0.9000	1.1180	-0.169	-0.450	-0.450	-0.296	-100.000	100.000	0.000
18 IEEB 106	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.067	-0.180	-0.180	-0.813	-100.000	100.000	0.000
19 IEEB 105	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.000	-0.140	-0.140	0.285	-0.030	-0.030	-0.030
20 IEEB 104	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.000	-0.100	-0.100	-0.023	-0.380	-0.380	-0.380
21 IEEB 103	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.000	-0.070	-0.070	-0.033	-0.050	-0.050	-0.050
22 IEEB 102	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.000	1.760	2.630	-0.799	-0.030	-0.030	-0.030
23 IEEB 101	0.00	1.0150	0.9000	1.1180	0.016	2.512	3.768	1.258	-100.000	100.000	0.000
24 IEEB 100	0.00	0.9680	0.9000	1.1180	-0.239	-0.710	-0.710	-1.227	-100.000	100.000	0.000
25 IEEB 099	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.080	-0.170	-0.170	-1.265	-100.000	100.000	0.000
26 IEEB 098	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.294	-0.240	-0.240	0.734	-0.070	-0.070	-0.070
27 IEEB 097	0.00	0.9670	0.9000	1.1180	-0.041	0.050	0.000	-0.185	-0.040	-0.040	-0.040
28 IEEB 096	0.00	0.9430	0.9000	1.1180	-0.330	-0.374	0.000	-1.395	0.000	0.000	0.000
29 IEEB 095	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	-0.270	-0.590	-0.590	-1.057	-100.000	100.000	0.000
30 IEEB 094	0.00	0.9430	0.9000	1.1180	-0.023	-0.060	-0.060	-1.174	-100.000	100.000	0.000
31 IEEB 093	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.127	-0.080	-0.080	-0.107	-100.000	100.000	0.000
32 IEEB 092	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.091	-0.220	-0.220	0.567	-0.030	-0.030	-0.030
33 IEEB 091	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.016	-0.200	-0.200	0.400	-0.070	-0.070	-0.070
34 IEEB 090	0.00	0.9420	0.9000	1.1180	-0.022	-0.130	-0.130	-1.050	-0.080	-0.080	-0.080
35 IEEB 089	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.007	-0.230	-0.230	-0.173	0.000	0.000	0.000
36 IEEB 088	0.00	0.9840	0.9000	1.1180	-0.384	-0.590	-0.590	0.166	-0.090	-0.090	-0.090
37 IEEB 087	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	-0.005	0.000	0.000	-1.625	-0.260	-0.260	-0.260
38 IEEB 086	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.404	-0.330	-0.330	-1.834	0.000	0.000	0.000
39 IEEB 085	0.00	1.0000	0.9000	1.1180	0.404	-0.330	-0.330	1.866	-0.090	-0.090	-0.090

(continua)

Tabela (V.12)

(continuação)

36	IEEE 114	0,00	0,9300	1,1180	-0,434	-0,310	-0,310	0,000	-1,972	-100,000	100,000
37	IEEE 110	0,00	1,0000	1,1180	0,493	0,000	0,000	0,000	1,420	0,000	0,000
38	IEEE 114	0,00	1,0000	1,1180	0,138	-0,270	-0,270	-0,270	0,433	-0,110	-0,110
39	IEEE 114	0,00	0,9700	1,1180	-0,374	-0,260	-0,260	-0,260	-1,271	-100,000	100,000
40	IEEE 114	0,00	1,0000	1,1180	0,199	-0,370	-0,370	-0,370	0,644	-0,100	-0,100
41	IEEE 114	0,00	0,9450	1,1180	-0,059	-0,260	-0,260	-0,260	-0,382	-100,000	100,000
42	IEEE 114	0,00	1,0000	1,1180	0,322	-0,180	-0,180	-0,180	0,138	-0,070	-0,070
43	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	0,000	-0,160	-0,160	-0,160	0,142	-0,090	-0,090
44	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	-0,054	-0,530	-0,530	-0,530	-0,302	-0,220	-0,220
45	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	0,029	-0,128	-0,128	-0,128	-0,063	-0,000	-0,000
46	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	-0,158	-0,340	-0,340	-0,340	0,577	0,000	0,000
47	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	0,184	-0,200	-0,200	-0,200	-0,644	-0,110	-0,110
48	IEEE 118	0,00	1,0250	1,1180	0,552	0,762	0,762	0,762	1,248	-100,000	100,000
49	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	-0,105	-0,170	-0,170	-0,170	0,421	-0,090	-0,090
50	IEEE 114	0,00	1,0000	1,1180	0,057	-0,170	-0,170	-0,170	-0,195	-0,080	-0,080
51	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	0,000	-0,180	-0,180	-0,180	0,027	-0,050	-0,050
52	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	0,076	-0,430	-0,430	-0,430	0,317	-0,110	-0,110
53	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	-0,141	-0,746	-0,746	-0,746	-1,374	-100,000	100,000
54	IEEE 118	0,00	0,9550	1,1180	-0,077	-0,630	-0,630	-0,630	-0,328	-100,000	100,000
55	IEEE 114	0,00	0,9520	1,1180	-0,348	-0,840	-0,840	-0,840	-1,280	-100,000	100,000
56	IEEE 118	0,00	0,9540	1,1180	0,150	-0,120	-0,120	-0,120	0,394	-0,030	-0,030
57	IEEE 114	0,00	1,0000	1,1180	0,150	-0,120	-0,120	-0,120	0,402	-0,030	-0,030
58	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	0,098	-1,530	-1,530	-1,530	-0,199	-100,000	100,000
59	IEEE 118	0,00	0,9450	1,1180	0,098	-0,780	-0,780	-0,780	0,450	-0,030	-0,030
60	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	-0,071	1,280	1,280	1,280	-0,585	-100,000	100,000
61	IEEE 118	0,00	0,9450	1,1180	-0,045	-0,770	-0,770	-0,770	-0,258	-100,000	100,000
62	IEEE 118	0,00	0,9380	1,1180	0,000	0,000	0,000	0,000	0,281	0,000	0,000
63	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	0,015	0,000	0,000	0,000	-0,276	0,000	0,000
64	IEEE 118	0,00	1,0050	1,1180	0,047	3,128	3,128	3,128	-1,788	-100,000	100,000
65	IEEE 118	0,00	1,0050	1,1180	0,047	2,746	2,746	2,746	-0,485	-100,000	100,000
66	IEEE 114	0,00	1,0500	1,1180	0,289	-0,280	-0,280	-0,280	-0,782	-0,070	-0,070
67	IEEE 114	0,00	1,0000	1,1180	-0,116	0,000	0,000	0,000	-1,274	0,000	0,000
68	IEEE 114	0,00	1,0000	1,1180	0,310	2,632	2,632	2,632	1,791	-100,000	100,000
69	IEEE 114	0,00	0,9440	1,1180	-0,174	-0,660	-0,660	-0,660	-0,982	-100,000	100,000
70	IEEE 114	0,00	0,9400	1,1180	0,168	0,000	0,000	0,000	0,568	0,000	0,000
71	IEEE 118	0,00	0,9400	1,1180	-0,039	-0,120	-0,120	-0,120	-0,204	-100,000	100,000
72	IEEE 114	0,00	0,9580	1,1180	-0,036	-0,060	-0,060	-0,060	-0,195	-100,000	100,000
73	IEEE 118	0,00	0,9410	1,1180	-0,327	-0,680	-0,680	-0,680	-1,210	-100,000	100,000
74	IEEE 118	0,00	0,9400	1,1180	0,225	-0,470	-0,470	-0,470	0,549	-0,110	-0,110
75	IEEE 118	0,00	0,9580	1,1180	-0,384	-0,680	-0,680	-0,680	-1,290	-100,000	100,000
76	IEEE 118	0,00	0,9430	1,1180	-0,101	-0,610	-0,610	-0,610	-0,545	-100,000	100,000
77	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	-0,136	-0,710	-0,710	-0,710	-0,454	-0,260	-0,260
78	IEEE 118	0,00	1,0000	1,1180	-0,120	-0,390	-0,390	-0,390	-0,754	-0,320	-0,320
79	IEEE 118	0,00	1,0400	1,1180	0,680	2,516	2,516	2,516	1,577	-100,000	100,000

(continua)

Tabela (V.12)

(continuação)

81	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,000	0,000	0,000	-1,485	0,000	0,000	0,000
82	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,022	-0,540	-0,540	-0,350	-0,270	-0,270	-0,270
83	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,027	0,540	0,540	-0,200	-0,100	-0,100	-0,100
84	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,090	0,110	0,110	0,172	0,070	0,070	0,070
85	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,190	-0,740	-0,740	-0,715	-100,000	100,000	100,000
86	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,022	0,210	0,210	0,000	-0,100	-0,100	-0,100
87	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,010	0,320	0,320	0,048	-100,000	100,000	100,000
88	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,015	0,380	0,380	0,050	-0,100	-0,100	-0,100
89	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,011	4,856	7,284	0,587	100,000	100,000	100,000
90	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,055	-1,630	-1,630	-0,318	-100,000	100,000	100,000
91	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,034	-0,100	-0,100	0,150	100,000	100,000	100,000
92	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,162	-0,650	-0,650	-0,859	-100,000	100,000	100,000
93	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,033	-0,120	-0,120	0,088	-0,070	-0,070	-0,070
94	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,095	-0,300	-0,300	-0,287	-0,160	-0,160	-0,160
95	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,000	-0,420	-0,420	-0,013	-0,310	-0,310	-0,310
96	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,041	-0,380	-0,380	-0,294	-0,150	-0,150	-0,150
97	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,081	-0,150	-0,150	-0,137	-0,090	-0,090	-0,090
98	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,098	-0,340	-0,340	-0,482	-0,080	-0,080	-0,080
99	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,049	-0,120	-0,120	-0,282	-100,000	100,000	100,000
100	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,275	1,646	2,654	1,469	-100,000	100,000	100,000
101	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,028	-0,220	-0,220	-0,159	-0,150	-0,150	-0,150
102	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,038	0,050	0,050	0,159	-0,030	-0,030	-0,030
103	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,155	0,090	0,090	0,463	100,000	100,000	100,000
104	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,073	-0,380	-0,380	-0,334	-100,000	100,000	100,000
105	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,164	-0,310	-0,310	-1,570	-100,000	100,000	100,000
106	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,205	-0,430	-0,430	0,711	-0,160	-0,160	-0,160
107	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,045	-0,500	-0,500	-0,390	-100,000	100,000	100,000
108	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,162	-0,020	-0,020	0,425	-0,010	-0,010	-0,010
109	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,114	-0,080	-0,080	0,299	-0,030	-0,030	-0,030
110	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	-0,186	-0,390	-0,390	-1,731	-100,000	100,000	100,000
111	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,024	0,288	0,288	1,074	-100,000	100,000	100,000
112	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,010	-0,680	-0,680	-1,003	-100,000	100,000	100,000
113	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,089	0,000	0,000	0,136	-100,000	100,000	100,000
114	1000	0,00	1,1180	0,9000	1,1180	0,290	-0,330	-0,330	0,448	-0,150	-0,150	-0,150

Tabela (V.12)

ITERAÇÃO	ERROS (P.U.)				PERFIL DE TENSÃO					
	PLANO	POTENCIA ATIVA	POTENCIA REATIVA	DESVIO	MÁXIMO	MÉDIO	MÍNIMO	MÁXIMO	MÉDIO	MÍNIMO
0	3.289	4.675	0.320	3.274	0.566	0.9430	1.0500	0.9953	0.9184	0.9184
1	0.794	0.213	0.062	0.084	0.030	0.9640	1.1191	1.0229	0.0392	0.0392
2	0.957	0.067	0.030	0.030	0.009	0.9676	1.1200	1.0242	0.0408	0.0408
3	1.247	0.035	0.011	0.025	0.005	0.9686	1.1177	1.0251	0.0409	0.0409
4	1.100	0.017	0.004	0.015	0.002	0.9699	1.1174	1.0258	0.0408	0.0408
5	1.120	0.013	0.005	0.007	0.001	0.9714	1.1172	1.0262	0.0407	0.0407
6	1.113	0.017	0.005	0.005	0.001	0.9721	1.1172	1.0264	0.0405	0.0405
7	1.105	0.004	0.001	0.003	0.000	0.9724	1.1170	1.0265	0.0404	0.0404
8	1.092	0.003	0.001	0.002	0.000	0.9725	1.1168	1.0266	0.0402	0.0402
9	1.083	0.001	0.000	0.001	0.000	0.9726	1.1167	1.0266	0.0402	0.0402

Tabela (V.13)

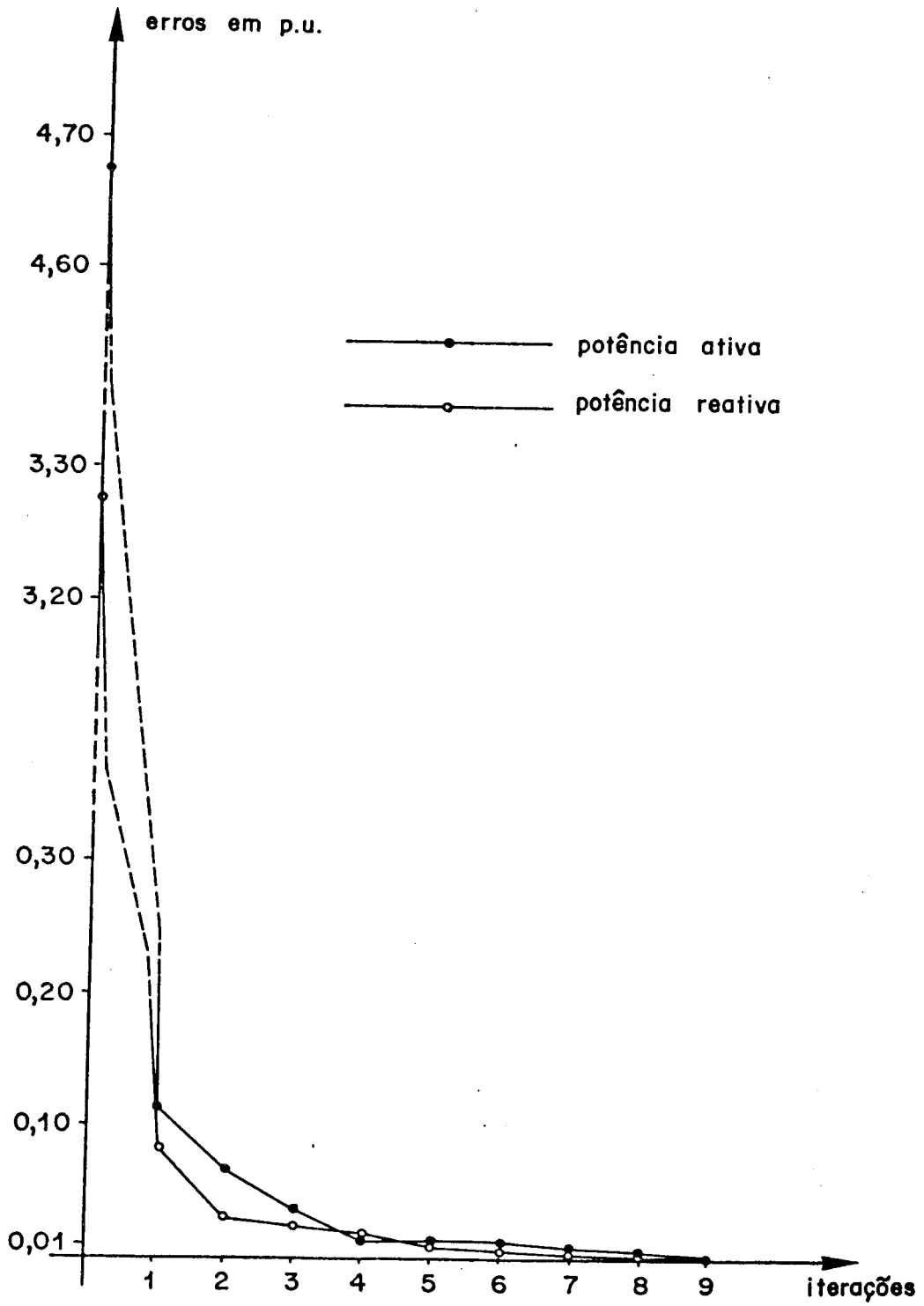


Figura (V.5)

CONDIÇÕES DA REDE  
 DEPOIS DE 9 ITERAÇÕES  
 PENALIDADES = 1.0E318  
 1. 1.  
 MULTIPLICADORES #P

BARRA	TELA	V	#V	#ULV	P	#P	MULTP	Q	#Q	MULTP
1	-2.3	0.9749	2562.9	0.0000	-0.510	25.629	-0.031	-0.355	25.629	0.000
2	-1.3	0.9689	2562.9	0.0000	-0.200	25.629	-0.040	0.000	25.629	0.004
3	-1.8	0.9904	2562.9	0.0000	-0.390	25.629	-0.037	-0.100	25.629	-0.006
4	0.5	1.0305	2562.9	0.0000	-0.390	25.629	-0.053	-0.329	25.629	0.000
5	0.9	1.0361	2562.9	0.0000	0.200	25.629	-0.054	0.000	25.629	-0.008
6	-0.5	1.0123	2562.9	0.0000	-0.520	25.629	-0.047	-0.183	25.629	0.000
7	-0.4	1.0091	2562.9	0.0000	-0.190	25.629	-0.047	-0.320	25.629	0.001
8	3.9	1.0555	2562.9	0.0000	-0.280	25.629	-0.043	-0.351	25.629	0.000
9	9.6	1.1054	2562.9	0.0000	0.200	25.629	-0.038	0.000	25.629	-0.012
10	15.5	1.1167	2562.9	0.0000	3.977	25.629	0.000	0.000	25.629	0.000
11	0.0	1.0076	2562.9	0.0000	-0.790	25.629	-0.045	-0.493	25.629	0.001
12	0.3	1.0080	2562.9	0.0000	2.340	25.629	0.000	-0.230	25.629	0.000
13	-2.8	0.9898	2562.9	0.0000	-0.340	25.629	0.000	-0.245	25.629	0.000
14	-2.7	0.9996	2562.9	0.0000	-0.140	25.629	-0.038	-0.160	25.629	0.003
15	-5.9	0.9893	2562.9	0.0000	-0.900	25.629	-0.047	-0.310	25.629	-0.001
16	-2.0	1.0014	2562.9	0.0000	-0.250	25.629	-0.045	-0.354	25.629	0.000
17	-3.9	1.0107	2562.9	0.0000	-0.110	25.629	-0.049	-0.100	25.629	-0.001
18	-6.1	0.9962	2562.9	0.0000	-0.600	25.629	-0.058	-0.300	25.629	-0.011
19	-6.6	0.9819	2562.9	0.0000	-0.150	25.629	-0.049	-0.075	25.629	0.000
20	-6.1	0.9864	2562.9	0.0000	-0.180	25.629	-0.049	-0.350	25.629	0.000
21	-5.4	0.9914	2562.9	0.0000	-0.140	25.629	-0.072	-0.030	25.629	-0.054
22	-3.5	1.0065	2562.9	0.0000	-0.100	25.629	-0.080	-0.080	25.629	-0.074
23	0.3	1.0405	2562.9	0.0000	-0.070	25.629	-0.076	-0.050	25.629	-0.074
24	7.2	1.0947	2562.9	0.0000	2.233	25.629	-0.052	-0.030	25.629	-0.032
25	9.1	1.0690	2562.9	0.0000	2.978	25.629	0.000	1.970	25.629	0.000
26	-3.5	0.9910	2562.9	0.0000	-0.710	25.629	-0.000	-1.277	25.629	0.000
27	-5.2	0.9819	2562.9	0.0000	-0.170	25.629	-0.040	-0.208	25.629	0.000
28	-6.7	0.9871	2562.9	0.0000	-0.240	25.629	-0.041	-0.070	25.629	0.000
29	0.1	1.0497	2562.9	0.0000	0.000	25.629	-0.039	-0.040	25.629	-0.003
30	-5.8	0.9927	2562.9	0.0000	-0.374	25.629	-0.041	0.000	25.629	-0.003
31	-4.3	0.9890	2562.9	0.0000	-0.590	25.629	-0.040	0.000	25.629	-0.015
32	-3.1	1.0159	2562.9	0.0000	-0.060	25.629	-0.041	-0.108	25.629	0.000
33	-4.0	0.9864	2562.9	0.0000	-0.080	25.629	-0.057	-0.434	25.629	0.000
34	-3.5	0.9842	2562.9	0.0000	-0.220	25.629	-0.042	0.140	25.629	0.000
35	-1.5	0.9932	2562.9	0.0000	-0.200	25.629	-0.042	-0.030	25.629	0.000
36	-1.0	1.0335	2562.9	0.0000	-0.130	25.629	-0.043	-0.070	25.629	-0.005
37	-7.8	0.9899	2562.9	0.0000	-0.230	25.629	-0.043	-0.080	25.629	-0.005
38	-8.5	1.0024	2562.9	0.0000	-0.590	25.629	-0.047	-0.000	25.629	0.017
39	-3.3	1.0317	2562.9	0.0000	0.000	25.629	-0.050	-0.090	25.629	-0.028
40	-8.9	0.9921	2562.9	0.0000	-0.330	25.629	-0.037	-0.260	25.629	-0.012
41							-0.049	0.000	25.629	-0.018
42								-0.390	25.629	-0.009

(continua)

Tabela (V.14)

(continuação)

36	0.4902	2562.9	0.0000	-0.310	25.529	-0.019	-0.538	25.629	0.000
37	1.0074	2562.9	0.0000	0.000	25.629	-0.052	-0.000	25.629	-0.018
38	0.9794	2562.9	0.0000	-0.279	25.629	-0.019	-0.110	25.629	-0.008
39	0.9732	2562.9	0.0000	-0.560	25.629	0.001	-0.168	25.629	0.000
40	0.9726	2562.9	0.0000	-0.370	25.629	0.008	-0.100	25.629	-0.003
41	0.9969	2562.9	0.0000	-0.760	25.629	0.017	0.014	25.629	0.000
42	1.0010	2562.9	0.0000	-0.180	25.629	-0.034	-0.070	25.629	-0.041
43	1.0163	2562.9	0.0000	-0.160	25.629	-0.002	-0.270	25.629	-0.043
44	1.0195	2562.9	0.0000	-0.530	25.629	0.011	-0.080	25.629	-0.026
45	1.0302	2562.9	0.0000	-0.371	25.629	0.000	-0.423	25.629	0.000
46	1.0372	2562.9	0.0000	-0.390	25.629	0.001	0.000	25.629	-0.010
47	1.0543	2562.9	0.0000	-0.200	25.629	0.001	0.000	25.629	-0.012
48	1.0553	2562.9	0.0000	1.544	25.629	0.000	0.814	25.629	0.000
49	1.0378	2562.9	0.0000	-0.170	25.629	0.011	-0.040	25.629	-0.009
50	0.9993	2562.9	0.0000	-0.180	25.629	0.029	-0.080	25.629	-0.009
51	0.9583	2562.9	0.0000	-0.230	25.629	0.036	-0.049	25.629	-0.009
52	0.9735	2562.9	0.0000	-0.554	25.629	0.043	-0.110	25.629	-0.004
53	0.9746	2562.9	0.0000	-0.630	25.629	0.045	-0.064	25.629	0.000
54	0.9772	2562.9	0.0000	-0.840	25.629	0.044	-0.650	25.629	0.000
55	0.9770	2562.9	0.0000	-0.120	25.629	0.031	-0.030	25.629	-0.005
56	0.9997	2562.9	0.0000	-0.120	25.629	0.036	-0.030	25.629	-0.006
57	0.9976	2562.9	0.0000	-0.120	25.629	0.000	-0.170	25.629	0.000
58	1.0192	2562.9	0.0000	-0.715	25.629	0.000	-0.030	25.629	0.001
59	1.0377	2562.9	0.0000	-0.780	25.629	0.000	-0.620	25.629	0.000
60	1.0351	2562.9	0.0000	1.751	25.629	0.000	-0.370	25.629	0.000
61	1.0362	2562.9	0.0000	-0.900	25.629	0.002	-0.000	25.629	0.000
62	1.0375	2562.9	0.0000	-0.000	25.629	-0.005	-0.000	25.629	0.000
63	1.0477	2562.9	0.0000	-0.000	25.629	0.000	-0.000	25.629	-0.000
64	1.0696	2562.9	0.0000	3.582	25.629	0.005	-0.000	25.629	0.000
65	1.0431	2562.9	0.0000	3.389	25.629	0.000	-2.590	25.629	0.000
66	1.0665	2562.9	0.0000	-0.280	25.629	0.000	-0.070	25.629	0.000
67	1.0682	2562.9	0.0000	-0.000	25.629	-0.004	0.000	25.629	-0.001
68	1.0952	2562.9	0.0000	2.989	25.629	-0.017	0.000	25.629	-0.005
69	1.0110	2562.9	0.0000	-3.060	25.629	0.000	1.180	25.629	0.000
70	1.0117	2562.9	0.0000	-0.000	25.629	0.003	-0.498	25.629	0.000
71	1.0069	2562.9	0.0000	-0.120	25.629	-0.005	-0.000	25.629	0.000
72	1.0177	2562.9	0.0000	-0.960	25.629	-0.005	-0.177	25.629	-0.002
73	0.9862	2562.9	0.0000	-0.000	25.629	-0.007	0.026	25.629	0.000
74	0.9862	2562.9	0.0000	-0.470	25.629	0.032	-0.571	25.629	0.000
75	1.0051	2562.9	0.0000	-0.680	25.629	0.026	-0.110	25.629	0.000
76	0.9778	2562.9	0.0000	-0.610	25.629	0.045	-0.528	25.629	0.001
77	1.0648	2562.9	0.0000	-0.710	25.629	0.009	-0.774	25.629	0.000
78	1.0645	2562.9	0.0000	-0.390	25.629	0.011	-0.460	25.629	0.000
79	1.0741	2562.9	0.0000	2.893	25.629	0.007	-0.320	25.629	-0.002
80	1.1130	2562.9	0.0000		25.629	0.000	4.659	25.629	0.000

(continua)

Tabela (V.14)



(continuação)

81	-2.7	1.1019	2562.9	0.0000	-0.000	25.629	-0.014	-0.000	25.629	-0.008
82	-3.3	1.0607	2562.9	0.0000	-0.540	25.629	0.013	-0.270	25.629	-0.002
83	-3.0	1.0391	2562.9	0.0000	-0.110	25.629	0.009	-0.100	25.629	-0.002
84	-1.9	1.0541	2562.9	0.0000	-0.240	25.629	-0.000	-0.070	25.629	0.003
85	-1.1	1.0595	2562.9	0.0000	-0.210	25.629	-0.010	-0.489	25.629	0.600
86	-2.1	1.0470	2562.9	0.0000	-0.404	25.629	0.002	-0.190	25.629	0.005
87	-1.6	1.0447	2562.9	0.0000	-0.480	25.629	0.001	-0.022	25.629	0.000
88	0.3	1.0920	2562.9	0.0000	-1.630	25.629	-0.018	-0.100	25.629	0.001
89	3.1	1.1101	2562.9	0.0000	4.354	25.629	0.000	1.147	25.629	0.000
90	-1.7	1.0754	2562.9	0.0000	-1.630	25.629	0.002	-0.100	25.629	0.000
91	-1.3	1.0618	2562.9	0.0000	-0.100	25.629	0.005	-0.198	25.629	0.000
92	-0.2	1.0799	2562.9	0.0000	-0.650	25.629	-0.020	-0.306	25.629	0.500
93	-1.7	1.0680	2562.9	0.0000	-0.120	25.629	-0.009	-0.070	25.629	0.001
94	-2.5	1.0638	2562.9	0.0000	-0.300	25.629	-0.003	-0.160	25.629	0.001
95	-3.1	1.0563	2562.9	0.0000	-0.420	25.629	0.005	-0.310	25.629	0.003
96	-3.0	1.0666	2562.9	0.0000	-0.360	25.629	0.004	-0.150	25.629	-0.002
97	-2.8	1.0851	2562.9	0.0000	-0.150	25.629	-0.003	-0.090	25.629	-0.004
98	-2.1	1.0910	2562.9	0.0000	-0.340	25.629	-0.006	-0.080	25.629	-0.006
99	-2.7	1.0619	2562.9	0.0000	-0.420	25.629	-0.005	-0.375	25.629	0.000
100	-2.2	1.0734	2562.9	0.0000	2.409	25.629	0.000	0.757	25.629	0.000
101	-2.1	1.0645	2562.9	0.0000	-0.220	25.629	-0.012	-0.150	25.629	0.000
102	-0.9	1.0741	2562.9	0.0000	-0.050	25.629	-0.017	-0.030	25.629	0.000
103	-5.0	1.0469	2562.9	0.0000	0.231	25.629	0.000	0.387	25.629	0.000
104	-7.4	1.0053	2562.9	0.0000	-0.380	25.629	0.007	-0.112	25.629	0.000
105	-9.3	0.9694	2562.9	0.0000	-0.310	25.629	0.010	-0.838	25.629	0.000
106	-3.6	0.9908	2562.9	0.0000	-0.430	25.629	0.012	-0.160	25.629	-0.001
107	-11.2	0.9738	2562.9	0.0000	-0.500	25.629	0.027	-0.119	25.629	0.000
108	-9.3	0.9876	2562.9	0.0000	-0.020	25.629	0.005	-0.010	25.629	-0.005
109	-9.6	0.9871	2562.9	0.0000	-0.060	25.629	0.007	-0.030	25.629	-0.005
110	-10.3	0.9445	2562.9	0.0000	-0.390	25.629	0.019	-0.377	25.629	0.000
111	-8.6	1.0055	2562.9	0.0000	0.413	25.629	0.000	0.088	25.629	0.000
112	-13.0	0.9776	2562.9	0.0000	-0.560	25.629	0.045	0.068	25.629	0.000
116	1.5	1.0860	2562.9	0.0000	-0.000	25.629	-0.017	-0.695	25.629	0.000
118	-5.6	0.9861	2562.9	0.0000	-0.330	25.629	0.038	-0.150	25.629	0.004

Tabela (V.14)

## Sistema CESP

Este sistema, cujo diagrama está representado na Figura (V.6), é composto de 129 barras, 187 linhas de transmissão e 26 transformadores. Neste sistema foi adotada a condição de carga média para o quarto trimestre de 1984. A Tabela (V.15) resume a natureza das barras e os tipos de restrições associadas. Como mostra a Tabela (V.15).

número de barras	natureza das barras	restrições nas variáveis nodais		
		pot. ativa	pot. reativa	tensão
112	carga	igualdade	igualdade	canalização
15	geração de ativos e reativos	canalização	canalização	canalização
2	geração de reativos	igualdade	canalização	canalização

Tabela (V.15)

este problema apresenta 226 restrições de igualdade e 161 restrições de canalização em variáveis nodais. Neste caso, as restrições sobre os fluxos de potência ativa e reativa também foram levadas em conta como descrito na secção (V.1).

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  utilizados foram :

$$\alpha = 180 ;$$

$$\beta = 1,5.$$

Os fatores de penalidades e as condições iniciais para as variáveis nodais são apresentados nas Tabelas (V.16) e (V.19).

variáveis	pot. ativa	pot.reativa	magnitude de tensão
penalidades iniciais	1,0	1,0	2000,0

Tabela (V.16)

O despacho de potência ativa e o perfil de tensão básicos, em torno do qual admitiu-se uma folga, apresentam uma solução de fluxo de carga representada na Tabela (V.18).

A solução do fluxo de carga ótimo foi obtida com 8 iterações em cada qual foram efetuados 12 passos de Newton. A evolução das perdas, dos erros máximos e médios nas restrições de potência e do perfil de tensão é apresentada na Tabela (V.20). O comportamento dos erros máximos nas restrições de potência durante o processo iterativo é visualizado na Figura (V.7). As condições da rede para a solução obtida pelo programa de fluxo de carga ótimo são apresentadas na Tabela (V.21), sendo que suas características juntamente com as da solução básica do fluxo de carga estão apresentadas na Tabela (V.17).

características	solução básica do fluxo de carga	solução do fluxo de carga ótimo
perdas (p.u.)	2,840	2,797
tensão mínima (p.u.)	0,9693	0,9793
tensão máxima (p.u.)	1,1177	1,1180
tensão média (p.u.)	1,0099	1,0197
desvio padrão (p.u.)	0,0232	0,0224
$\sum_{k \in \{PV\}}  Q_k $ (p.u.)	16,105	16,968

Tabela (V.17)

Neste caso as perdas diminuíram um pouco (1,5%) mas o perfil de tensão e o despacho de reativos se elevaram. A diminuição do desvio padrão indica que o perfil de tensão ficou mais uniforme.

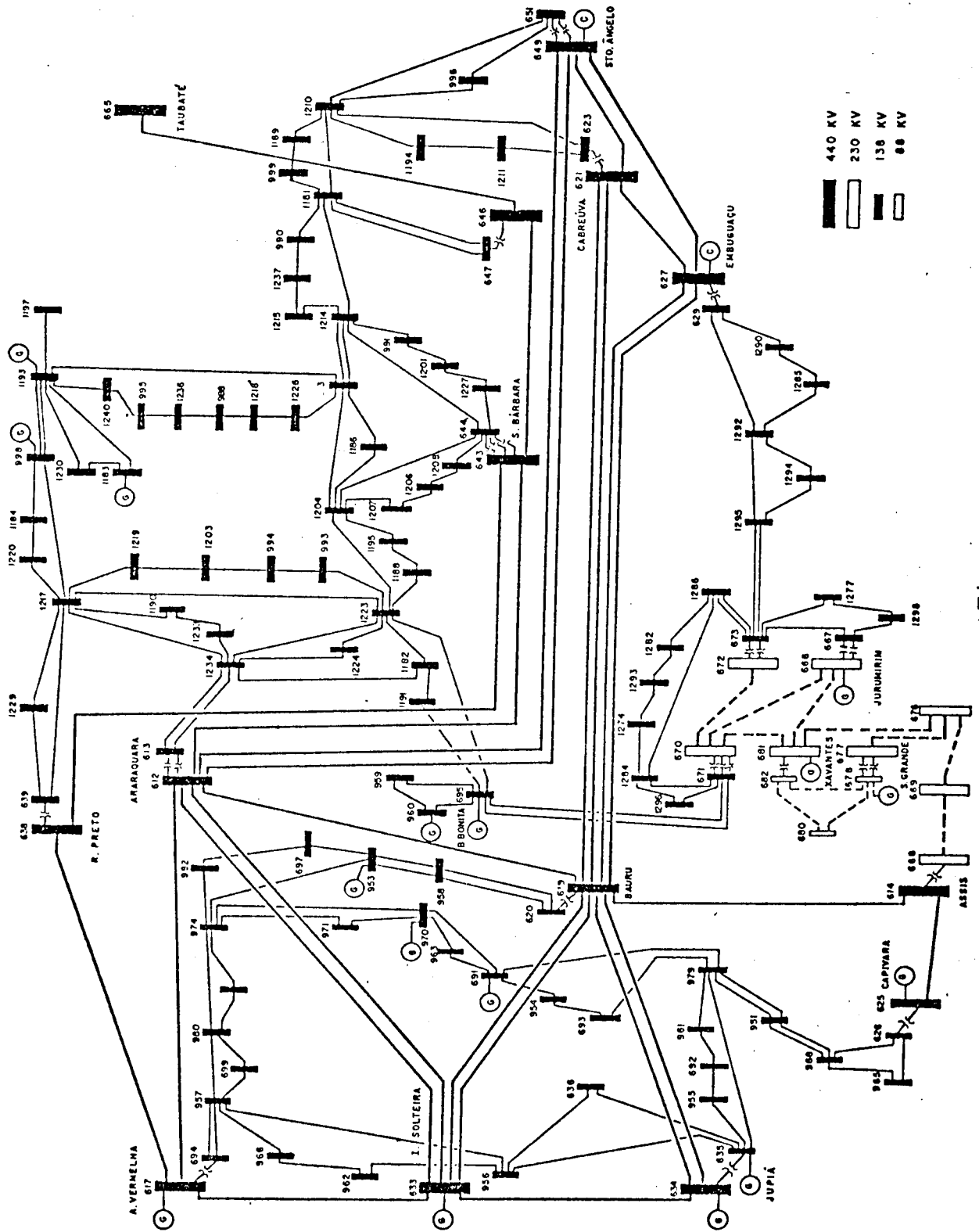


Figura (V.6)

SISTEMA \*C E S P\* - CARGA MEDIA  
REGULADOR # 5 : ESTADO DO SISTEMA

BARRA	TIPO	V	ANG	P(MW)	Q(MVAR)	BARRA	TIPO	V	ANG	P(MW)	Q(MVAR)
612	PV	1.0097	-12.5	0.0	0.0	613	PQ	1.0325	-15.3	-51.0	-54.0
614	PV	0.9947	-5.9	0.0	-0.0	617	PV	1.0400	7.4	1541.1	-153.6
619	PV	1.0082	-11.5	0.1	0.0	620	PV	1.0140	-10.2	-88.0	-23.0
621	PV	1.0030	-20.1	-911.1	-32.0	623	PQ	1.0350	-28.9	-6.0	-3.0
625	PV	1.0000	-1.3	500.0	9.5	626	PQ	1.0401	-5.1	-0.0	0.0
627	PV	0.9910	-28.3	-1700.1	-103.4	629	PQ	1.0298	-29.1	0.0	-0.0
633	SL	1.0430	5.0	2255.1	-109.5	634	PV	1.0430	3.9	950.0	-205.8
635	PV	1.0309	2.9	43.0	70.0	636	PQ	1.0167	1.8	-15.0	-7.0
638	PV	0.9880	-11.5	0.0	-0.0	639	PQ	1.0124	-14.3	-22.0	-33.0
643	PV	0.9910	-20.0	-0.0	-0.0	644	PQ	1.0121	-23.8	-295.0	-52.0
646	PV	1.0050	-21.1	-188.0	9.0	617	PQ	1.0314	-20.1	0.0	0.0
649	PV	1.0100	-26.8	-709.1	124.9	651	PQ	1.0310	-30.1	-91.0	15.0
655	PV	1.0231	-29.0	-351.0	43.0	606	PV	1.0120	-12.5	90.0	-1.5
607	PV	1.1177	-15.4	0.0	0.0	608	PQ	1.0354	-0.7	-10.0	23.0
609	PV	1.0303	-0.8	47.0	12.0	670	PQ	1.0110	-17.9	-206.0	43.0
671	PV	1.0046	-18.0	-40.0	-23.0	672	PQ	0.9819	-21.6	-0.0	0.0
673	PV	1.0211	-23.5	-81.0	-24.0	676	PQ	1.0241	-8.0	0.0	0.0
677	PV	1.0207	-8.1	-0.0	-0.0	678	PV	1.0490	-9.9	3.0	-42.0
600	PV	1.0337	-11.0	-20.0	-13.0	641	PV	1.0250	-8.7	275.0	9.0
682	PV	1.0526	-11.0	-18.0	-3.0	641	PV	1.0280	6.2	147.0	-22.9
692	PV	1.0253	2.1	-10.0	-0.0	693	PQ	1.0155	4.1	-27.0	-11.0
694	PV	1.0145	5.4	-3.0	-2.0	695	PV	1.0340	-14.8	114.0	50.7
697	PV	1.0171	-1.9	-14.0	-6.0	699	PQ	1.0003	1.1	-14.0	-9.0
901	PV	0.9993	-3.1	-45.0	-15.0	953	PV	1.0320	-2.0	115.0	-18.0
904	PV	1.0179	4.5	-3.0	-1.0	955	PQ	1.0360	2.8	-3.0	-2.0
906	PV	1.0107	1.8	-13.0	-8.0	957	PV	1.0096	2.3	-29.0	-3.0
908	PV	1.0205	-0.9	-0.0	-0.0	959	PQ	1.0289	-13.8	-39.0	-10.0
900	PV	1.0400	-10.7	125.0	-26.7	961	PQ	1.0188	1.6	-5.0	-2.0
902	PV	1.0116	1.6	-0.0	-4.0	903	PQ	1.0232	2.9	-29.0	-5.0
905	PV	1.0171	-0.1	-8.0	-3.0	966	PQ	1.0100	2.0	-2.0	-1.0
908	PV	1.0053	-0.5	-109.0	-15.0	970	PV	1.0310	4.0	123.0	12.8
971	PV	1.0199	2.2	-30.0	-17.0	974	PQ	1.0179	-0.7	-74.0	5.0
979	PV	1.0153	1.4	-3.0	-1.0	980	PQ	1.0008	0.1	-11.0	-8.0
981	PV	1.0005	0.0	-17.0	-11.0	982	PQ	1.0170	-1.5	-5.0	-1.0
988	PV	0.9693	-23.3	-22.0	-13.0	990	PQ	0.9852	-27.9	-20.0	-9.0
991	PV	0.9487	-25.3	-12.0	-5.0	993	PQ	0.9718	-22.0	-8.0	-3.0
994	PV	0.9697	-21.9	-20.0	-11.0	995	PQ	0.9702	-23.2	-7.0	-4.0
996	PV	1.0182	-30.4	-27.0	-19.0	998	PV	1.0250	-18.8	20.0	8.2
999	PV	1.0087	-29.3	-22.0	-10.0	1191	PQ	1.0041	-28.4	-31.0	-16.0
1132	PV	1.0055	-18.5	0.0	-0.0	1193	PV	1.0410	-17.8	48.0	13.4
1184	PV	1.0100	-19.1	-7.0	-4.0	1196	PQ	0.9812	-24.6	-8.0	-6.0
1186	PV	0.9806	-22.9	-6.0	-3.0	1189	PQ	1.0037	-29.7	-0.0	0.0
1190	PV	0.9957	-19.3	-5.0	-1.0	1191	PQ	1.0215	-16.4	-3.0	-1.0
1193	PV	1.0270	-14.8	70.0	33.0	1194	PQ	1.0052	-30.2	-30.0	-17.0
1195	PV	0.9807	-23.5	-6.0	-3.0	1197	PQ	1.0179	-17.5	14.0	-14.0
1202	PV	0.9910	-25.1	-36.0	-20.0	1203	PQ	0.9720	-21.6	-16.0	-6.0
1204	PV	0.9913	-23.8	-47.0	-24.0	1206	PQ	0.9828	-24.3	-44.0	-26.0
1207	PV	0.9822	-24.2	-8.0	-4.0	1208	PQ	0.9883	-24.3	-10.0	-5.0
1210	PV	1.0056	-30.1	-50.0	-19.0	1211	PV	1.0077	-30.1	-8.0	-4.0
1213	PV	0.9859	-25.0	-47.0	-19.0	1214	PQ	0.9908	-25.2	63.0	38.0
1215	PV	0.9856	-25.8	-27.0	-14.0	1217	PQ	0.9950	-19.3	-16.0	-9.0
1218	PV	0.9734	-26.3	-10.0	-4.0	1219	PQ	0.9630	-20.4	-9.0	-5.0
1220	PV	0.9948	-19.3	-8.0	-4.0	1223	PQ	0.9819	-21.9	-32.0	-20.0
1224	PV	0.9812	-21.5	-20.0	-11.0	1226	PQ	0.9819	-25.0	-19.0	-9.0
1227	PV	0.9907	-21.8	-0.0	-3.0	1229	PQ	0.9960	-18.7	-13.0	-4.0
1230	PV	1.0302	-19.5	-8.0	-5.0	1233	PQ	0.9969	-19.1	-13.0	-5.0
1234	PV	1.0000	-19.0	-10.0	-10.0	1236	PQ	0.9097	-23.3	-17.0	-9.0
1237	PV	0.9837	-27.2	-7.0	-4.0	1240	PQ	0.9862	-21.8	-0.0	-4.0
1274	PV	0.9978	-21.7	-5.0	-3.0	1277	PQ	1.0433	-21.5	-1.0	-1.0
1282	PV	0.9908	-22.7	-3.0	-2.0	1284	PV	0.9994	-21.4	-7.0	-4.0
1285	PV	1.0128	-29.5	-8.0	-1.0	1286	PQ	1.0008	-23.4	-36.0	-17.0
1290	PV	1.0100	-29.5	-0.0	-3.0	1292	PQ	1.0105	-29.2	-6.0	-3.0
1293	PV	0.9962	-22.4	-0.0	-4.0	1294	PQ	1.0005	-28.7	-2.0	-1.0
1295	PV	0.9917	-28.1	-51.0	-26.0	1296	PQ	0.9983	-20.9	-13.0	-6.0
1298	PV	1.0044	-17.2	-0.0	-5.0						

\*\*\* DIAGNOSTICO DO PERFIL DE TENSÃO \*\*\*  
 BARRA 053 VMINIMO= 0.9693  
 BARRA 607 VMAXIMO= 1.1177  
 MEDIA DAS TENSÕES = VME= 1.0099  
 DESVIO PADRAO DAS TENSÕES= 0.023232

Tabela (V.18)

FLUXO DE CARGA OTIMO ATIVO E RELATIVO

SARFA	LUTA	V	VMIG	CONDICÖES INICIAIS				Q	Q41H	QMAX
				VMAX	P	PMIN	PVAX			
512 ACRADJUA-130	-13,00	1,0191	0,9000	1,1180	0,958	0,000	0,000	0,191	0,000	0,000
513 ACRADJUA-138	-16,00	1,0423	0,9000	1,1180	-0,533	-0,510	-0,510	-0,583	-0,540	-0,540
514 ASSI-140	8,00	1,0939	0,9000	1,1180	0,646	0,000	0,000	0,118	0,000	0,000
517 JEIUAUS-440	7,00	1,0594	0,9000	1,1180	15,472	13,110	17,710	1,522	100,000	100,000
519 ACRADJUA-138	-12,00	1,0171	0,9000	1,1180	1,390	0,000	0,000	0,287	0,000	0,000
520 ACRADJUA-138	-11,00	1,0221	0,9000	1,1180	0,946	-0,880	-0,880	0,296	-0,730	-0,730
521 ACRADJUA-138	-27,00	1,0130	0,9000	1,1180	-9,421	-9,110	-9,110	-0,167	-0,320	-0,320
523 ACRADJUA-138	-30,00	1,0454	0,9000	1,1180	-0,170	-0,060	-0,060	-0,024	-0,030	-0,030
525 ACRADJUA-138	-3,00	1,0130	0,9000	1,1180	5,503	4,000	6,000	0,144	100,000	100,000
529 ACRADJUA-138	-7,00	1,0565	0,9000	1,1180	0,084	0,000	0,000	0,025	0,000	0,000
527 ACRADJUA-138	-29,00	1,0039	0,9000	1,1180	-16,478	-17,000	-17,000	-4,163	100,000	100,000
528 ACRADJUA-138	-30,00	1,0413	0,9000	1,1180	0,137	0,000	0,000	0,048	0,000	0,000
533 ISOLUPE-140	5,00	1,0534	0,9000	1,1180	25,820	100,000	100,000	-1,594	100,000	100,000
535 S. S. OIA-138	2,00	1,0474	0,9000	1,1180	7,565	7,500	11,400	-1,420	100,000	100,000
535 T. T. OIA-138	1,00	1,0772	0,9000	1,1180	0,207	0,430	0,430	0,918	0,700	0,700
536 ACRADJUA-138	-12,00	0,9969	0,9000	1,1180	-0,137	-0,150	-0,150	-0,093	-0,070	-0,070
539 ACRADJUA-138	-15,00	1,0221	0,9000	1,1180	0,241	0,000	0,000	0,103	0,000	0,000
541 S. S. OIA-138	-21,00	1,0029	0,9000	1,1180	-0,425	0,000	0,000	-0,342	-0,330	-0,330
544 S. S. OIA-138	-25,00	1,0221	0,9000	1,1180	-3,498	-2,950	-2,950	-1,339	-0,520	-0,520
546 P. JASOIT-140	-25,00	1,0413	0,9000	1,1180	-1,763	-1,880	-1,880	0,014	0,090	0,090
549 S. S. OIA-138	-28,00	1,0252	0,9000	1,1180	-0,103	0,000	0,000	0,020	0,000	0,000
551 S. S. OIA-138	-31,00	1,0413	0,9000	1,1180	-0,608	-0,910	-0,910	1,568	100,000	100,000
555 T. T. OIA-138	-30,00	1,0332	0,9000	1,1180	-3,644	-3,510	-3,510	0,488	0,430	0,430
566 VALXO-2230	-10,00	1,0221	0,9000	1,1180	0,339	0,720	1,080	0,010	100,000	100,000
567 ACRADJUA-138	-16,00	1,1282	0,9000	1,1180	0,443	0,000	0,000	0,064	0,000	0,000
568 ACRADJUA-138	-11,00	1,0433	0,9000	1,1180	-1,224	-0,190	-0,100	0,151	0,230	0,230
569 ACRADJUA-138	-11,00	1,0433	0,9000	1,1180	0,556	0,470	0,470	0,135	0,120	0,120
570 ACRADJUA-138	-21,00	1,0221	0,9000	1,1180	-2,531	-2,060	-2,060	0,425	0,430	0,430
571 ACRADJUA-138	-20,00	1,0140	0,9000	1,1180	0,147	-0,100	-0,100	-1,301	-0,230	-0,230
572 ACRADJUA-138	-24,00	0,9428	0,9000	1,1180	0,138	0,000	0,000	-0,012	0,000	0,000
573 ACRADJUA-138	-20,00	1,0322	0,9000	1,1180	-0,939	-0,810	-0,810	-0,211	-0,240	-0,240
576 ACRADJUA-138	-12,00	1,0332	0,9000	1,1180	-0,490	0,000	0,000	1,041	0,000	0,000
577 ACRADJUA-138	-17,00	1,0322	0,9000	1,1180	0,077	0,000	0,000	0,015	0,000	0,000
579 ACRADJUA-138	-13,00	1,0595	0,9000	1,1180	0,292	-0,110	0,170	-0,496	100,000	100,000
580 ACRADJUA-138	-15,00	1,0413	0,9000	1,1180	-0,504	-0,280	-0,280	-0,010	-0,130	-0,130
581 ACRADJUA-138	-12,00	1,0353	0,9000	1,1180	3,295	2,150	3,350	0,044	100,000	100,000
582 ACRADJUA-138	-14,00	1,0035	0,9000	1,1180	-0,082	-0,180	-0,180	-0,060	-0,030	-0,030
583 ACRADJUA-138	5,00	1,0383	0,9000	1,1180	1,502	1,170	1,770	-0,254	100,000	100,000
584 ACRADJUA-138	1,00	1,0353	0,9000	1,1180	-0,078	-0,100	-0,100	-0,077	-0,060	-0,060
593 ACRADJUA-138	3,00	1,0262	0,9000	1,1180	0,422	-0,270	-0,270	-0,331	-0,110	-0,110

(continua)

Tabela (V.19)

(continuação)

074 JERURIS-134	5.00	1.0302	0.9000	1.1180	0.182	-0.030	-0.030	0.617	-0.020	-0.020
075 JERURIS-138	-17.00	1.0443	0.9000	1.1180	0.901	0.790	1.390	0.617	-100.000	100.000
077 CAJADUVA-134	-2.00	1.0272	0.9000	1.1180	0.062	-0.140	-0.140	0.143	-0.060	-0.060
079 FERRAS-138	1.00	1.0110	0.9000	1.1180	0.142	-0.140	-0.140	0.190	-0.090	-0.090
081 FERRAS-138	-4.00	1.0090	0.9000	1.1180	-0.254	-0.150	1.400	0.731	-0.150	-0.150
083 FERRAS-138	-3.00	1.0123	0.9000	1.1180	1.086	0.900	1.400	0.130	-100.000	100.000
085 FERRAS-138	3.00	1.0292	0.9000	1.1180	-0.762	-0.230	-0.030	0.291	-0.010	-0.010
087 FERRAS-138	2.00	1.0494	0.9000	1.1180	0.204	-0.030	-0.030	-0.140	-0.020	-0.020
089 FERRAS-138	1.00	1.0472	0.9000	1.1180	-0.109	-0.130	-0.130	0.076	-0.080	-0.080
091 FERRAS-138	1.00	1.0201	0.9000	1.1180	-0.081	-0.200	-0.200	0.218	-0.030	-0.030
093 FERRAS-138	-8.00	1.0732	0.9000	1.1180	0.124	0.000	0.000	0.032	0.000	0.000
095 FERRAS-138	-16.00	1.0393	0.9000	1.1180	-0.374	-0.390	-0.390	0.108	-0.100	-0.100
097 FERRAS-138	-13.00	1.0504	0.9000	1.1180	1.240	1.000	1.500	0.263	-100.000	100.000
099 FERRAS-138	0.00	1.0292	0.9000	1.1180	-0.170	-0.050	-0.050	0.040	-0.020	-0.020
101 FERRAS-138	1.00	1.0221	0.9000	1.1180	-0.014	-0.080	-0.080	0.066	-0.040	-0.040
103 FERRAS-138	4.00	1.0373	0.9000	1.1180	-0.006	-0.200	-0.200	0.255	-0.050	-0.050
105 FERRAS-138	-8.00	1.0272	0.9000	1.1180	0.200	0.080	0.080	0.017	-0.030	-0.030
107 FERRAS-138	1.00	1.0211	0.9000	1.1180	0.002	-0.020	-0.020	0.020	-0.010	-0.010
109 FERRAS-138	-6.00	1.0150	0.9000	1.1180	-1.036	-1.090	-1.090	0.181	-0.150	-0.150
111 FERRAS-138	4.00	1.0413	0.9000	1.1180	1.307	0.770	1.690	0.077	-100.000	100.000
113 FERRAS-138	2.00	1.0302	0.9000	1.1180	-0.382	-0.300	-0.300	0.150	-0.170	-0.170
115 FERRAS-138	-1.00	1.0282	0.9000	1.1180	0.700	0.740	0.740	0.040	0.050	0.050
117 FERRAS-138	0.00	1.0252	0.9000	1.1180	-0.191	-0.030	-0.030	0.027	-0.010	-0.010
119 FERRAS-138	0.00	1.0120	0.9000	1.1180	-0.190	-0.110	-0.110	0.105	-0.060	-0.060
121 FERRAS-138	6.00	1.0120	0.9000	1.1180	0.051	-0.170	-0.170	0.126	-0.110	-0.110
123 FERRAS-138	-2.00	1.0272	0.9000	1.1180	0.232	-0.050	-0.050	0.060	-0.010	-0.010
125 FERRAS-138	-24.00	0.9787	0.9000	1.1180	0.220	0.220	0.220	0.158	-0.130	-0.130
127 FERRAS-138	-9.00	0.9949	0.9000	1.1180	-0.432	-0.260	-0.260	0.010	-0.090	-0.090
129 FERRAS-138	-26.00	0.9979	0.9000	1.1180	-0.074	-0.120	-0.120	1.103	-0.050	-0.050
131 FERRAS-138	-23.00	0.9197	0.9000	1.1180	-0.017	-0.080	-0.080	0.055	-0.030	-0.030
133 FERRAS-138	-23.00	0.9797	0.9000	1.1180	-0.629	-0.700	-0.700	0.366	-0.110	-0.110
135 FERRAS-138	-24.00	0.9797	0.9000	1.1180	-0.257	-0.070	-0.070	0.450	-0.040	-0.040
137 FERRAS-138	-31.00	1.0282	0.9000	1.1180	-0.094	-0.270	-0.270	0.208	-0.190	-0.190
139 FERRAS-138	-20.00	1.0353	0.9000	1.1180	0.051	0.160	0.160	0.144	-100.000	100.000
141 FERRAS-138	-30.00	1.0100	0.9000	1.1180	0.011	-0.220	-0.220	0.202	-0.100	-0.100
143 FERRAS-138	-29.00	1.0140	0.9000	1.1180	-0.054	-0.340	-0.340	0.236	-0.160	-0.160
145 FERRAS-138	-20.00	1.0161	0.9000	1.1180	-0.121	0.000	0.000	0.063	0.000	0.000
147 FERRAS-138	-19.00	1.0514	0.9000	1.1180	0.294	0.360	0.360	0.213	-100.000	100.000
149 FERRAS-138	-20.00	1.0252	0.9000	1.1180	-0.017	-0.070	-0.070	0.063	-0.040	-0.040
151 FERRAS-138	-26.00	0.9908	0.9000	1.1180	-0.202	-0.080	-0.080	-1.019	-0.060	-0.060
153 FERRAS-138	-24.00	0.9908	0.9000	1.1180	-0.472	0.000	0.000	0.179	-0.030	-0.030
155 FERRAS-138	-31.00	1.0100	0.9000	1.1180	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
157 FERRAS-138	-20.00	1.0250	0.9000	1.1180	-0.008	-0.050	-0.050	0.030	-0.010	-0.010
159 FERRAS-138	-10.00	1.0312	0.9000	1.1180	0.115	-0.030	-0.030	0.090	-0.010	-0.010
161 FERRAS-138	-20.00	1.0373	0.9000	1.1180	0.276	0.500	0.500	0.542	-100.000	100.000

(continua)

Tabela (V.19)



(continuação)

1191 F. MOCHAS-138	-31,07	1.0150	0.9000	1.1180	-0.104	-0.300	-7,290	-0.170
1192 IRACEMAP-138	-24,00	0.9404	0.9000	1.1180	1.559	-0.060	-7,584	-0.030
1197 ITAPAVA-138	-16,00	1.0247	0.9000	1.1180	0.229	0.140	-0.140	-0.140
1207 LINDOIA-138	-26,70	1.0009	0.9000	1.1180	-0.044	-0.360	-0.253	-0.200
1208 LINDOIA-138	-22,30	0.9417	0.9000	1.1180	0.254	-0.160	-0.224	-0.060
1209 LINDOIA-138	-25,06	0.9408	0.9000	1.1180	-1.060	-0.470	0.199	-0.240
1209 C. SERRA-138	-25,00	0.9928	0.9000	1.1180	-0.044	-0.140	-0.440	-0.260
1207 LINDOIA-138	-25,60	0.9414	0.9000	1.1180	-0.025	-0.080	-1,240	-0.040
1404 LINDOIA-138	-25,00	0.9479	0.9000	1.1180	-0.032	-0.160	-1,119	-0.080
1211 MARIPORANGA-138	-31,00	1.0161	0.9000	1.1180	-0.522	-0.560	-0.154	-0.080
1211 MOURA-138	-31,00	1.0181	0.9000	1.1180	-0.176	-0.080	0.231	-0.190
1213 MOURA-138	-29,00	0.9959	0.9000	1.1180	-0.594	-0.470	0.054	-0.040
1214 MOURA-138	-27,00	1.0009	0.9000	1.1180	1.186	0.630	0.157	-0.190
1215 MOURA-138	-27,00	0.9949	0.9000	1.1180	0.630	0.270	0.251	0.380
1217 PERREIRA-138	-20,00	1.0050	0.9000	1.1180	0.173	-0.160	-0.044	0.140
1215 PERREIRA-138	-25,00	0.9427	0.9000	1.1180	-0.031	-0.100	-0.282	-0.090
1217 PERREIRA-138	-21,00	0.9428	0.9000	1.1180	-0.091	-0.090	-0.376	-0.040
1220 PERREIRA-138	-20,00	1.0100	0.9000	1.1180	-0.011	-0.080	-0.041	-0.050
1224 PERREIRA-138	-23,00	0.9914	0.9000	1.1180	-0.051	-0.320	-0.044	-0.040
1224 PERREIRA-138	-23,00	0.9918	0.9000	1.1180	-0.427	-0.720	-0.349	-0.200
1227 RIFACU-138	-26,00	0.9418	0.9000	1.1180	-0.288	-0.200	0.005	-0.110
1227 RIFACU-138	-26,00	1.0000	0.9000	1.1180	-0.439	-0.190	-0.044	-0.090
1229 SERRA-138	-20,00	1.0000	0.9000	1.1180	-0.472	-0.080	0.038	-0.030
1230 SERRA-138	-20,00	1.0400	0.9000	1.1180	0.510	-0.130	0.109	-0.040
1233 SERRA-138	-20,00	1.0070	0.9000	1.1180	-0.025	-0.080	-0.285	-0.050
1234 SERRA-138	-20,00	1.0100	0.9000	1.1180	-0.378	-0.130	-1,080	-0.050
1238 SERRA-138	-24,00	0.9747	0.9000	1.1180	-0.289	-0.160	-1,090	-0.180
1237 SERRA-138	-24,00	0.9424	0.9000	1.1180	0.094	-0.070	-0.527	-0.090
1240 SERRA-138	-23,00	0.9459	0.9000	1.1180	-0.209	-0.060	-1,127	-0.040
1274 SERRA-138	-24,00	1.0040	0.9000	1.1180	0.255	-0.050	0.219	-0.040
1277 SERRA-138	-24,00	1.0544	0.9000	1.1180	0.043	-0.050	-0.176	-0.040
1262 SERRA-138	-25,00	1.0470	0.9000	1.1180	0.191	-0.030	-0.028	-0.030
1264 SERRA-138	-24,00	1.0100	0.9000	1.1180	-0.575	-0.070	-0.610	-0.020
1265 SERRA-138	-21,00	1.0241	0.9000	1.1180	-0.015	-0.080	1,160	-0.040
1265 SERRA-138	-26,00	1.0110	0.9000	1.1180	-0.424	-0.080	-1,064	-0.040
1229 SERRA-138	-31,00	1.0302	0.9000	1.1180	-0.196	-0.360	-0.164	-0.170
1223 SERRA-138	-25,00	1.0221	0.9000	1.1180	-0.114	-0.080	0.210	-0.030
1223 SERRA-138	-25,00	1.0470	0.9000	1.1180	-0.283	-0.060	-1,007	-0.030
1223 SERRA-138	-31,00	1.0120	0.9000	1.1180	-0.134	-0.020	1,084	-0.040
1225 SERRA-138	-30,00	1.0029	0.9000	1.1180	-0.429	-0.540	0.033	-0.010
1226 SERRA-138	-23,00	1.0080	0.9000	1.1180	0.084	-0.130	-0,318	-0.260
1226 SERRA-138	-20,00	1.1049	0.9000	1.1180	-0.193	-0.080	-0,116	-0.060
1226 SERRA-138	-20,00	1.1049	0.9000	1.1180	-0.193	-0.080	-0,014	-0.050

Tabela (V.19)



II. SÉRIE	PERDA		POTÊNCIA ATIVA		POTÊNCIA REATIVA		PERFIL DE TENSÃO				
	(P.U.)	(P.U.)	MÁXIMO	MÉDIO	MÁXIMO	MÉDIO	MÁXIMO	MÍNIMO	MÉDIO	MÍNIMO	PADRÃO
0	2,979	1,913	0,274	0,558	0,089	0,9787	1,1282	1,0200	1,0200	0,0234	
1	2,418	0,222	0,025	0,111	0,015	0,9791	1,1191	1,0201	1,0201	0,0227	
2	2,745	0,031	0,009	0,042	0,007	0,9793	1,1183	1,0200	1,0200	0,0225	
3	2,784	0,051	0,007	0,039	0,006	0,9794	1,1180	1,0199	1,0199	0,0224	
4	2,781	0,043	0,005	0,028	0,005	0,9794	1,1180	1,0198	1,0198	0,0224	
5	2,782	0,033	0,005	0,021	0,004	0,9794	1,1180	1,0198	1,0198	0,0224	
6	2,797	0,013	0,003	0,010	0,003	0,9793	1,1180	1,0198	1,0198	0,0224	
7	2,792	0,009	0,003	0,009	0,003	0,9793	1,1180	1,0198	1,0198	0,0224	
8	2,747	0,004	0,002	0,008	0,003	0,9793	1,1180	1,0197	1,0197	0,0224	

Tabela (V.20)

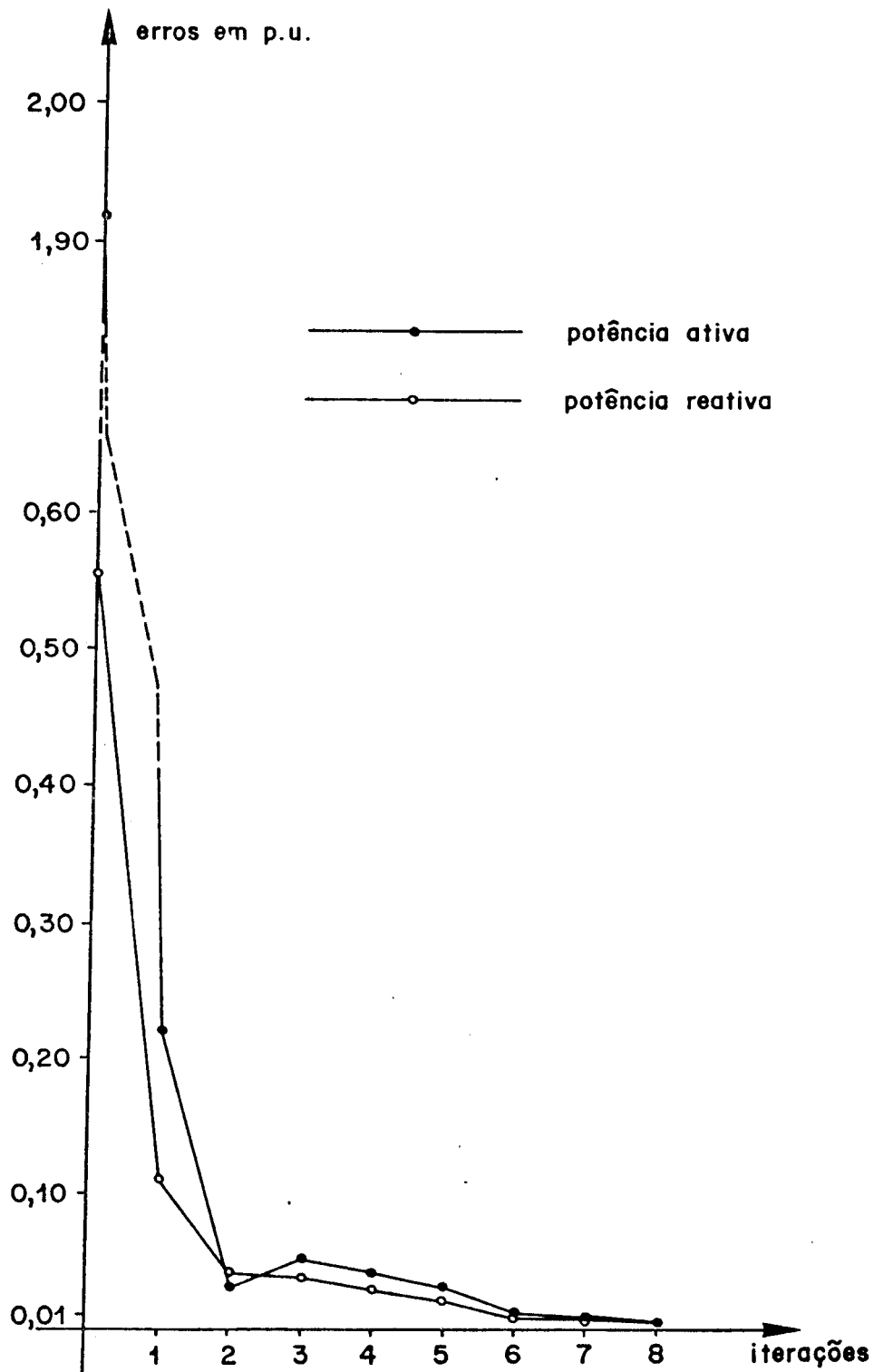


Figura (V. 7)

-----CORDICOES DA REDE-----

DEPOIS DO 8 ITERACOES  
 PERDAS(PU)= 2.79768  
 PENALIDADES \*

1.

Linha	TATA	V	WV	WLV	MULTIPLICADORES *				Q	W3	MULTO
					F	WP	MULTP	W2			
612	-12.8	1.0206	31171.9	0.0000	0.700	17.086	0.073	0.000	17.086	-0.014	
613	-15.8	1.0445	31171.9	0.0000	-0.509	17.086	0.001	-0.541	17.086	-0.048	
614	-7.3	1.0649	31171.9	0.0000	-0.000	17.086	0.054	0.000	17.086	0.022	
617	6.9	1.0495	31171.9	0.0000	15.256	17.086	0.000	-1.652	17.086	0.000	
619	-11.3	1.0194	31171.9	0.0000	0.000	17.086	0.074	0.001	17.086	0.018	
620	-10.4	1.0200	31171.9	0.0000	-0.480	17.086	0.100	-0.275	17.086	-0.037	
621	-20.2	1.0141	31171.9	0.0000	-9.109	17.086	0.131	-0.370	17.086	0.008	
623	-28.9	1.0408	31171.9	0.0000	-0.056	17.086	0.121	-0.403	17.086	-0.152	
625	-2.5	1.0098	31171.9	0.0000	4.056	17.086	0.000	0.070	17.086	0.000	
626	-8.3	1.0509	31171.9	0.0000	0.001	17.086	0.044	-0.001	17.086	-0.119	
647	-28.3	1.0210	31171.9	0.0000	-17.059	17.086	0.139	-4.452	17.086	0.000	
629	-27.3	1.0319	31171.9	0.0000	0.000	17.086	0.143	-0.501	17.086	-0.022	
633	5.0	1.0530	31171.9	0.0000	25.591	17.086	0.000	-4.800	17.086	0.000	
634	3.1	1.0529	31171.9	0.0000	7.030	17.086	0.000	-2.069	17.086	0.000	
635	2.6	1.0473	31171.9	0.0000	0.432	17.086	-0.009	0.700	17.086	-0.009	
636	1.0	1.0275	31171.9	0.0000	-0.147	17.086	0.005	-0.070	17.086	-0.015	
638	-11.9	1.0490	31171.9	0.0000	0.001	17.086	0.061	-0.000	17.086	-0.093	
639	-15.3	1.0239	31171.9	0.0000	-0.219	17.086	0.042	-0.330	17.086	-0.138	
643	-21.4	1.0549	31171.9	0.0000	0.000	17.086	0.060	-0.001	17.086	-0.137	
644	-21.2	1.0314	31171.9	0.0000	-2.951	17.086	0.033	-0.573	17.086	-0.193	
646	-21.3	1.0164	31171.9	0.0000	-1.880	17.086	0.055	0.089	17.086	-0.174	
647	-26.3	1.0327	31171.9	0.0000	0.001	17.086	0.049	-0.003	17.086	-0.246	
649	-20.8	1.0258	31171.9	0.0000	-7.689	17.086	0.132	1.223	17.086	0.000	
651	-30.1	1.0421	31171.9	0.0000	-0.908	17.086	0.142	0.149	17.086	-0.042	
655	-29.1	1.0338	31171.9	0.0000	-3.510	17.086	0.040	0.430	17.086	-0.200	
660	-15.2	1.0110	31171.9	0.0000	0.750	17.086	0.000	-0.277	17.086	0.000	
657	-17.9	1.0180	31171.9	4.5183	0.001	17.086	-0.002	-0.003	17.086	-0.305	
668	-4.0	1.0140	31171.9	0.0000	-0.106	17.086	0.098	0.231	17.086	0.042	
669	-8.0	1.0440	31171.9	0.0000	0.464	17.086	0.048	0.171	17.086	0.047	
670	-23.3	1.0162	31171.9	0.0000	-2.659	17.086	0.103	0.431	17.086	0.031	
671	-23.4	1.0109	31171.9	0.0000	-0.398	17.086	0.123	-0.279	17.086	0.058	
672	-23.7	0.9844	31171.9	0.0000	0.003	17.086	0.173	-0.001	17.086	-0.014	
673	-25.4	1.0293	31171.9	0.0000	-0.806	17.086	0.193	-0.242	17.086	-0.072	
676	-10.5	1.0242	31171.9	0.0000	-0.004	17.086	0.066	0.001	17.086	0.020	
677	-10.6	1.0260	31171.9	0.0000	-0.004	17.086	0.070	0.002	17.086	0.021	
678	-12.7	1.0582	31171.9	0.0000	-0.027	17.086	0.000	-0.380	17.086	0.000	
679	-13.8	1.0423	31171.9	0.0000	-0.201	17.086	0.104	-0.131	17.086	0.094	
680	-11.5	1.0273	31171.9	0.0000	2.364	17.086	0.000	0.113	17.086	0.000	
682	-13.7	1.0598	31171.9	0.0000	-0.178	17.086	0.097	-0.370	17.086	0.206	
691	4.0	1.0378	31171.9	0.0000	1.293	17.086	0.000	-0.206	17.086	0.000	
692	1.1	1.0350	31171.9	0.0000	-0.098	17.086	0.002	-0.061	17.086	-0.032	

(continua)

Tabela (V.21)

(continuação)

633	2.0	1.0257	31171.9	0.0000	-0.270	17.086	0.0000	0.023	-0.111	17.086	-0.007
634	4.9	1.0290	31171.9	0.0000	-0.030	17.086	0.013	0.013	-0.019	17.086	0.005
635	-17.0	1.0278	31171.9	0.0000	1.080	17.086	0.000	0.000	0.537	17.086	0.000
637	-2.0	1.0273	31171.9	0.0000	-0.142	17.086	0.000	0.077	-0.050	17.086	-0.061
639	0.0	1.0113	31171.9	0.0000	-0.139	17.086	0.106	0.106	-0.090	17.086	0.008
641	-4.2	1.0103	31171.9	0.0000	-0.448	17.086	0.100	0.100	-0.152	17.086	-0.048
643	-3.0	1.0412	31171.9	0.0000	1.654	17.086	0.000	0.000	-0.197	17.086	0.000
644	3.0	1.0292	31171.9	0.0000	-0.030	17.086	0.018	0.018	-0.010	17.086	0.000
645	1.9	1.0482	31171.9	0.0000	-0.028	17.086	-0.009	-0.009	-0.020	17.086	-0.005
646	1.0	1.0275	31171.9	0.0000	-0.127	17.086	0.006	0.006	-0.080	17.086	-0.009
647	1.8	1.0283	31171.9	0.0000	-0.199	17.086	0.072	0.072	-0.029	17.086	-0.016
648	-7.7	1.0321	31171.9	0.0000	0.000	17.086	0.069	0.069	0.005	17.086	-0.005
649	-14.2	1.0377	31171.9	0.0000	-0.390	17.086	0.015	0.015	-0.100	17.086	-0.037
650	-13.3	1.0345	31171.9	0.0000	1.162	17.086	0.000	0.000	-0.245	17.086	0.005
651	0.0	1.0293	31171.9	0.0000	-0.049	17.086	0.019	0.019	-0.021	17.086	0.000
652	1.0	1.0274	31171.9	0.0000	-0.078	17.086	0.019	0.019	-0.041	17.086	-0.051
653	2.7	1.0337	31171.9	0.0000	-0.198	17.086	-0.031	-0.031	-0.081	17.086	-0.000
655	-7.3	1.0282	31171.9	0.0000	-0.078	17.086	0.122	0.122	-0.032	17.086	0.073
656	1.4	1.0214	31171.9	0.0000	-0.019	17.086	0.077	0.077	-0.010	17.086	-0.141
658	-7.5	1.0105	31171.9	0.0000	-1.088	17.086	0.130	0.130	-0.152	17.086	-0.021
670	3.7	1.0415	31171.9	0.0000	1.408	17.086	0.000	0.000	-0.093	17.086	-0.120
671	1.9	1.0305	31171.9	0.0000	-0.300	17.086	0.015	0.015	-0.170	17.086	0.000
674	-1.2	1.0297	31171.9	0.0000	-0.740	17.086	0.059	0.059	0.051	17.086	-0.013
679	0.1	1.0259	31171.9	0.0000	-2.629	17.086	0.039	0.039	-0.011	17.086	-0.036
682	-0.1	1.0319	31171.9	0.0000	-0.104	17.086	0.101	0.101	-0.079	17.086	-0.029
683	-0.5	1.0316	31171.9	0.0000	-0.169	17.086	0.101	0.101	-0.109	17.086	-0.013
688	-2.0	1.0274	31171.9	0.0000	-0.051	17.086	0.078	0.078	-0.009	17.086	-0.014
690	-24.7	0.9793	31171.9	0.0000	-0.220	17.086	0.093	0.093	-0.132	17.086	-0.062
691	-26.3	0.9954	31171.9	0.0000	-0.261	17.086	0.015	0.015	-0.098	17.086	-0.147
692	-25.9	0.9993	31171.9	0.0000	-0.122	17.086	0.005	0.005	-0.056	17.086	-0.245
693	-22.9	0.9871	31171.9	0.0000	-0.080	17.086	0.087	0.087	-0.035	17.086	-0.265
694	-22.8	0.9799	31171.9	0.0000	-0.199	17.086	0.088	0.088	-0.115	17.086	-0.153
695	-24.6	0.9801	31171.9	0.0000	-0.079	17.086	0.094	0.094	-0.042	17.086	-0.145
696	-30.4	1.0294	31171.9	0.0000	-0.207	17.086	0.149	0.149	-0.192	17.086	-0.144
698	-20.7	1.0335	31171.9	0.0000	0.175	17.086	0.000	0.000	0.086	17.086	-0.121
699	-28.4	1.0115	31171.9	0.0000	-0.217	17.086	0.068	0.068	-0.107	17.086	0.000
1131	-28.0	1.0149	31171.9	0.0000	-0.338	17.086	0.049	0.049	-0.166	17.086	-0.208
1132	-19.7	1.0161	31171.9	0.0000	0.001	17.086	0.069	0.069	-0.002	17.086	-0.270
1133	-20.1	1.0478	31171.9	0.0000	0.365	17.086	-0.026	-0.026	0.143	17.086	-0.107
1134	-20.8	1.0240	31171.9	0.0000	-0.008	17.086	0.009	0.009	-0.041	17.086	0.000
1136	-25.1	0.9918	31171.9	0.0000	-0.081	17.086	0.009	0.009	-0.065	17.086	-0.030
1138	-23.7	0.9916	31171.9	0.0000	-0.060	17.086	0.068	0.068	-0.035	17.086	-0.240
1139	-23.8	1.0145	31171.9	0.0000	0.063	17.086	0.045	0.045	-0.007	17.086	-0.202
1140	-20.3	1.0659	31171.9	0.0000	-0.048	17.086	0.056	0.056	-0.013	17.086	-0.273
1141	-19.2	1.0311	31171.9	0.0000	-0.030	17.086	0.042	0.042	-0.011	17.086	-0.157
											-0.040

(continua)

Tabela (V.21)

(continuação)

1193	-23.8	1.0353	31171.9	0.0000	0.5PB	17.086	-0.011	0.345	17.086	0.000
1194	-32.2	1.0362	31171.9	0.0000	-0.295	17.086	0.112	-0.176	17.086	-0.246
1195	-24.2	0.9318	31171.9	0.0000	-0.001	17.086	0.062	-0.035	17.086	-0.208
1197	-19.5	1.0206	31171.9	0.0000	0.142	17.086	-0.144	-0.139	17.086	-0.034
12.2	-25.6	1.0020	31171.9	0.0000	-0.361	17.086	0.074	-0.205	17.086	-0.268
12.3	-24.5	0.9821	31171.9	0.0000	-0.159	17.086	0.084	-0.065	17.086	-0.139
12.4	-24.5	0.9974	31171.9	0.0000	-0.471	17.086	0.057	-0.245	17.086	-0.208
12.6	-24.8	0.9930	31171.9	0.0000	-0.441	17.086	0.050	-0.265	17.086	-0.213
12.8	-24.8	0.9995	31171.9	0.0000	-0.081	17.086	0.080	-0.045	17.086	-0.213
12.9	-33.1	1.0176	31171.9	0.0000	-0.161	17.086	0.056	-0.085	17.086	-0.211
12.11	-31.1	1.0147	31171.9	0.0000	-0.550	17.086	0.105	-0.195	17.086	-0.231
1213	-25.5	0.9961	31171.9	0.0000	-0.075	17.086	0.113	-0.046	17.086	-0.243
1214	-25.9	1.0013	31171.9	0.0000	-0.471	17.086	-0.022	-0.105	17.086	-0.191
1215	-26.5	0.9960	31171.9	0.0000	0.629	17.086	-0.027	0.374	17.086	-0.199
1217	-20.4	1.0057	31171.9	0.0000	-0.272	17.086	-0.021	-0.146	17.086	-0.207
1218	-22.1	0.9835	31171.9	0.0000	-0.158	17.086	0.048	-0.092	17.086	-0.144
1219	-21.4	0.9931	31171.9	0.0000	-0.101	17.086	0.049	-0.044	17.086	-0.172
1220	-21.9	1.0096	31171.9	0.0000	-0.088	17.086	0.065	-0.054	17.086	-0.140
1223	-24.8	0.9928	31171.9	0.0000	-6.077	17.086	0.036	-0.042	17.086	-0.114
1224	-22.4	0.9421	31171.9	0.0000	-0.320	17.086	0.073	-0.204	17.086	-0.179
1226	-25.8	0.9922	31171.9	0.0000	-0.260	17.086	0.078	-0.114	17.086	-0.182
1227	-25.2	1.0077	31171.9	0.0000	-0.191	17.086	-0.009	-0.095	17.086	-0.188
1229	-19.7	1.0084	31171.9	0.0000	-0.061	17.086	0.028	-0.035	17.086	-0.256
1230	-22.0	1.0030	31171.9	0.0000	-0.127	17.086	0.043	-0.041	17.086	-0.176
1233	-23.0	1.0075	31171.9	0.0000	-0.070	17.086	-0.015	-0.050	17.086	0.000
1234	-17.7	1.0106	31171.9	0.0000	-0.120	17.086	0.073	-0.052	17.086	-0.144
1236	-23.6	0.9797	31171.9	0.0000	-0.159	17.086	0.073	-0.182	17.086	-0.128
1237	-21.0	0.9960	31171.9	0.0000	-0.170	17.086	0.094	-0.092	17.086	-0.145
1239	-23.4	0.9958	31171.9	0.0000	-0.071	17.086	-0.001	-0.046	17.086	-0.230
1274	-23.7	1.0066	31171.9	0.0000	-0.060	17.086	0.072	-0.041	17.086	0.114
1277	-23.0	1.0489	31171.9	0.0000	-0.043	17.086	0.315	-0.075	17.086	-0.100
1282	-21.0	1.0059	31171.9	0.0000	-0.007	17.086	0.115	-0.014	17.086	0.114
1285	-23.1	1.0079	31171.9	0.0000	-0.023	17.086	0.354	-0.016	17.086	-0.207
1286	-25.0	1.0250	31171.9	0.0000	-0.064	17.086	0.246	-0.036	17.086	0.093
1286	-25.4	1.0091	31171.9	0.0000	-0.072	17.086	0.246	-0.041	17.086	0.111
1290	-29.0	1.0312	31171.9	0.0000	-0.355	17.086	0.292	-0.169	17.086	-0.086
1292	-29.0	1.0224	31171.9	0.0000	-0.072	17.086	0.136	-0.031	17.086	0.031
1293	-23.4	1.0053	31171.9	0.0000	-0.053	17.086	0.355	-0.036	17.086	-0.089
1294	-26.0	1.0115	31171.9	0.0000	-0.053	17.086	0.355	-0.036	17.086	-0.060
1295	-29.3	1.0022	31171.9	0.0000	-0.534	17.086	0.219	-0.011	17.086	-0.103
1296	-23.0	1.0005	31171.9	0.0000	-0.124	17.086	0.464	-0.262	17.086	-0.041
1298	-17.5	1.0004	31171.9	0.0000	-0.078	17.086	0.014	-0.056	17.086	-0.014
								-0.050	17.086	-0.432

Tabela (V.21)

## CONCLUSÃO

O método da lagrangeana aumentada se mostrou uma boa alternativa para a resolução do fluxo de carga ótimo. Em relação ao método clássico de penalidades as dificuldades associadas ao crescimento excessivo das penalidades foram eliminadas. Uma limitação do método proposto é a falta de sistematização na escolha das penalidades iniciais que basicamente dependem das características do sistema em estudo. A implementação computacional deste método, como a do método clássico de penalidades [34], é mais simples que a dos métodos que consideram as restrições de maneira explícita. Outra característica atrativa é a facilidade de tratamento tanto do problema ativo quanto do reativo ou de ambos simultaneamente como nos estudos de caso apresentados neste trabalho. Isso é feito através da definição dos limites máximos e mínimos das variáveis.

De um modo geral, podem ser obtidas melhorias com a adoção do método da lagrangeana aumentada nas aplicações onde o método clássico de penalidades é utilizado. No método Dommel-Tinney o tratamento das restrições de desigualdade, funcionais e nas variáveis dependentes (capítulo II), é feito pelo método de penalidades. Isso exige uma calibração adequada das penalidades e de seu fator de crescimento [9, 11] para cada sistema em estudo. Nesse caso o crescimento das penalidades pode ser abrandado pela adoção do método da Lagrangeana Aumentada. Um outro exemplo é o controle corretivo reativo/tensão resolvido pelo método dos mínimos quadrados ponderados [36]. Aí também a heurística de ajuste de penalidades, diferente para restrições de igualdade e desigualdade,

pode ser simplificada com a adoção da função lagrangeana aumentada em lugar da função de penalidades.

As contribuições deste trabalho podem ser resumidas em dois aspectos. Em um enfoque acadêmico, a síntese da contribuição é a incorporação de uma metodologia do tipo DUAL, desenvolvida recentemente, ao conjunto dos métodos aplicados na análise estática de sistemas de energia elétrica. Do ponto de vista prático o método proposto é de grande interesse para os estudos realizados no planejamento e programação da operação de sistemas de energia elétrica. A adequação do método a esse tipo de aplicação se dá pelo fato de ser um método do tipo DUAL, ou seja, não necessita de um ponto inicial factível. Em situações específicas do planejamento, onde ocorrerem dificuldades de obtenção de pontos factíveis, os métodos PRIMAIS falham mas através de um método DUAL, como o proposto, poderão ser obtidos pontos onde os erros nas restrições são minimizados. Nesses casos os multiplicadores associados às restrições são de grande utilidade, pois representam a sensibilidade entre a função objetivo e as respectivas violações nas restrições. Isso dá uma idéia do grau de dificuldade de sustentação das restrições e conseqüentemente sugere as insuficiências do sistema e os custos de remoção dessas violações.

A perspectiva de continuação da pesquisa pode ser dividida em três linhas gerais. Em primeiro lugar, no que diz respeito à modelagem do sistema estão previstos a inclusão de várias alternativas para a função objetivo e a consideração de derivações de transformadores como variáveis de otimização. Do ponto de vista do método dual existe a possibilidade de se melhorar os passos nos multiplicadores o que exigirá estudos mais detalhados



## ÍNDICE DOS GRÁFICOS

	<u>Pág.</u>
I - Gráfico Comparativo dos Escores do... Pré-Teste e do Pós-Teste .....	105
II - Gráfico Comparativo dos Escores do... Pré-Teste e do Teste de Retenção .....	106
III- Gráfico Comparativo dos Escores do Pré-Teste, do Pós-Teste e do Teste de... Retenção, por aluno, do 1º grupo .....	107
IV - Gráfico Comparativo dos Escores do Pré-Teste, Pós-Teste e Teste de Reten... ção, por aluno, do 2º grupo .....	108

da metodologia disponível. Finalmente a busca de uma maior eficiência computacional investigando as possibilidades de se trabalhar com a matriz hessiana constante, explorar possíveis desacoplamentos, etc...

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - W.F.Tinney e C.E.Hart, "Power flow solution by Newton's method", IEEE Trans. on PAS, Novembro 1967, vol.86, págs. 1449 à 1460.
- [2] - O.I.Elgerd, "Introdução à teoria de sistemas de energia elétrica", McGraw-Hill, São Paulo, 1978.
- [3] - B.Stott, "Decoupled Newton load flow", IEEE Trans. on PAS, Setembro/Outubro 1972, Vol.91, págs. 1955 à 1959.
- [4] - B.Stott e O. Alsac, "Fast decoupled load flow", IEEE Trans. on PAS, Maio/Junho 1974, Vol.93, págs. 859 à 869.
- [5] - B.Stott, "Review of load-flow calculation methods", Proceedings of the IEEE, Julho 1974, Vol.62, págs. 916 à 929.
- [6] - A.J.Monticelli, A.L.M.França e S.M.Deckmann, "Cálculo de fluxo de carga em sistemas elétricos de potência," Publicação interna UNICAMP/FEC/DEE, Abril 1978.
- [7] - A.J.Monticelli, "Fluxo de carga em redes de energia elétrica", Edgard Blücher, São Paulo, 1983.
- [8] - H.W.Dommel e W.F.Tinney, "Optimal power flow solutions", IEEE Trans. on PAS, Outubro 1968, Vol.87, págs. 1866 à 1876.
- [9] - C.A.Murari, A.V.Garcia e A.Monticelli, "Fluxo de carga ótimo e minimização de perdas", Relatório nº 1 do convênio CEPTEL/UNICAMP sobre controle de reativos, UNICAMP/FEC/DEE, Julho 1978.
- [10] - C.A.F.Murari, A.J.Monticelli e A.V.Garcia, "Minimização de perdas em sistemas de energia elétrica de grandes dimensões", Anais do 3º Congresso Brasileiro de Automática, Rio de Janeiro, Setembro 1980, págs. 269 à 274.

- [11] - C.A.F.Murari, "Minimização de perdas em sistemas de energia elétrica", Tese de Mestrado, UNICAMP/FEC/DEE, Janeiro 1980.
- [12] - A.M.Sasson "Nonlinear programming solutions for load-flow, minimum-loss, and economic dispatching problems", IEEE Trans. on PAS, Abril 1969, vol.88, págs. 399 à 409.
- [13] - A.M.Sasson, "Combined use of the Powell and Fletcher-Powell nonlinear programming methods for optimal load flows", IEEE Trans. on PAS, Outubro 1969, Vol.88, págs. 1530 à 1537.
- [14] - A.M.Sasson, F.Viloria e F.Aboytes, "Optimal load flow solution using the Hessian matrix", IEEE Trans. on PAS, Janeiro 1973, Vol.92, págs. 31 à 41.
- [15] - A.M.Sasson e H.M.Merrill, "Some applications of optimization techniques to power systems problems", Proceedings of the IEEE, Julho 1974, Vol.62, págs. 959 à 972.
- [16] - A.Monticelli, A.V.Garcia, A.Santos Jr. e C.A.Murari, "Controle reativo/tensão utilizando método de mínimos quadrados ponderados", Relatório nº 2 do convênio CEPEL/UNICAMP sobre controle de reativos, UNICAMP/FEC/DEE, Outubro 1978.
- [17] - H.Duran, discussão da referência [14].
- [18] - W.F.Tinney e J.W.Walker, "Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization", Proceedings of the IEEE, Novembro 1967, Vol.55, págs. 1801 à 1809.
- [19] - K.Zollenkopf, "Bi-factorization, basic computation algorithm and programming techniques", J.K.Reid ed.-Large sparse sets of linear equations, págs. 75 à 97, New York Academic Press, 1971.

- [20] - M.Morozowski F., "Matrizes esparsas em redes de potência" ,  
L.T.C. Ed., Rio de Janeiro 1981.
- [21] - A.V.Garcia, "Estimação estática de estado em sistemas de  
potência utilizando método desacoplado", Tese de Mestrado ,  
UNICAMP/FEC/DEE, Maio 1977.
- [22] - D.G.Luenberger, "Introduction to linear and nonlinear pro  
gramming", Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, 1973.
- [23] - L.S.Lasdon, "Optimization theory for large systems", Mac  
millan Publishing, New York, 1970.
- [24] - M.S.Bazaraa e C.M.Shetty, "Nonlinear programming-theory and  
algorithms", John Wiley-Sons, New York, 1979.
- [25] - S.Soares F., "Programação matemática de grande porte - uma  
aplicação à sistemas hidrotérmicos de potência", Tese de  
Doutorado, UNICAMP/FEC/DEE, Outubro 1978.
- [26] - R.T.Rockafellar, "A dual approach to solving nonlinear pro  
gramming problems by unconstrained optimization", Mathematical  
programming, 5(1973), págs. 354 à 373.
- [27] - R.T.Rockafellar, "Augmented lagrange multiplier functions  
and duality in nonconvex programming", SIAM J.Control, Maio  
1974, Vol.12, nº 2, págs. 268 à 285.
- [28] - B.W.Kort e D.P.Bertsekas, "Combined primal-dual and penalty  
methods for convex programming", SIAM J.Control and  
Optimization, Fevereiro 1976, Vol.14, nº 2, págs. 268 à 294.
- [29] - R.T.Rockafellar, "The multiplier method of Hestenes and  
Powell applied to convex programming", Journal of optimization  
theory and applications, 1973, Vol.12, nº 6, págs. 535 à  
562.

- [30] - D.P.Bertsekas, "On penalty and multiplier methods for constrained minimization", "SIAM J.Control and Optimization", Fevereiro 1976, Vol.14, nº 2.
- [31] - V.A.Armentano, "Programação linear dinâmica", Tese de Mestrado, UNICAMP/FEC/DEE, Outubro 1979.
- [32] - G.Stephanopoulos e A.W.Westerberg, "The use of Hestene's method of multipliers to resolve dual gaps in engineering system optimization", Journal of optimization theory and applications, Março 1975, Vol.15, nº 3, págs. 285 à 309.
- [33] - M.R. Hestenes, "Multiplier and gradient methods", Journal of optimization theory and applications, 1969, Vol.4, nº5, págs, 303 à 320.
- [34] - J.L.Carpentier, "Optimal power flows: uses, methods and developments", IFAC Electric Energy Systems, Brasil, 1985, Preprints of Symposium Planning and Operation, págs. 11 à 21.
- [35] - H.W.Dommel, "Economic dispatch and optimal power flow methods for planning and operation", University of British Columbia, 1978.
- [36] - A.V.Garcia, A.Monticelli, "Um método de mínimos quadrados ponderados aplicado ao controle corretivo reativo/tensão", Relatório nº 3 do convênio CEPEL/UNICAMP sobre controle reativo/tensão, UNICAMP/FEC/DEE, Abril 1979.
- [37] - J. Carpentier, "Contribution à l'étude du Dispatching Economique", Bulletin de la Société Française des Electriciens, Ser. 8, Vol. 3 (August, 1962).
- [38] - H.H. Happ, "Optimal power dispatch - A comprehensive survey",

- IEEE Trans. on PAS, May/June 1977, vol.96, págs. 841 à 854.
- [39] - R.C. Burchett, H.H. Happ e K.A. Wirgau, "Large scale optimal power flow", IEEE Trans. on PAS, October 1982, vol. 101, págs. 3722 à 3732.
- [40] - D.I. Sun, B. Ashley, B. Brewer, A. Hughes e W.F. Tinney, "Optimal power flow by Newton approach", IEEE Trans. on PAS, October 1984, vol. 103, págs. 2864 à 2880.

## APÊNDICE A

### EXPRESSÕES DE FLUXOS E PERDA

Neste apêndice são desenvolvidas as expressões de fluxos de potência ativa e reativa, de potência reativa consumida por um elemento shunt e da perda ativa em uma ligação elétrica.

#### A.1. Fluxos de potência ativa e reativa

Uma ligação elétrica em um sistema de potência em regime permanente é representada pelo seu modelo equivalente como mostra a Figura (A.1.).

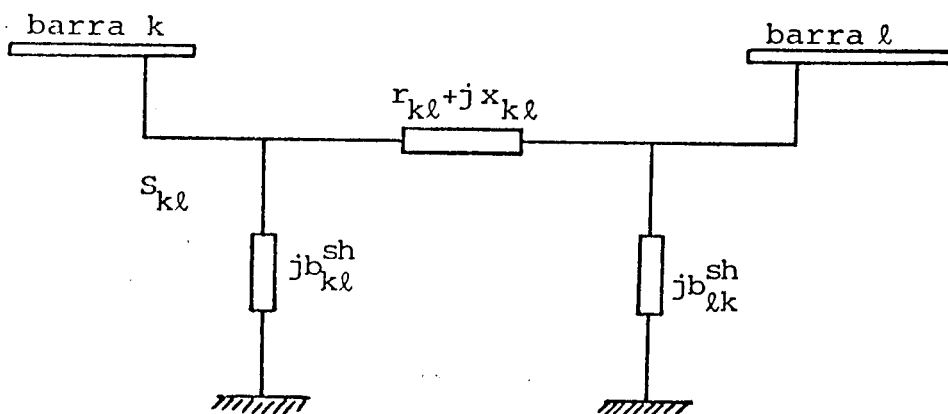


Figura (A.1.)

onde :

$r_{kl}$  - resistência série;

$x_{kl}$  - reatância série ;

$b_{kl}^{sh}$  - susceptância shunt do lado da barra k.



O fluxo de potência complexa que parte da barra k sobre a ligação (kl) é dado por

$$S_{kl} = \hat{V}_k \left[ j b_{kl}^{sh} \hat{V}_k + \frac{\hat{V}_k - \hat{V}_l}{r_{kl} + j x_{kl}} \right]^* \quad (A.1),$$

onde :

$\hat{V}_k$  - fasor associado à tensão da barra k;

\* - indica complexo conjugado.

Fazendo

$$\begin{aligned} \hat{V}_k &= V_k e^{j\theta_k} \\ \hat{V}_l &= V_l e^{j\theta_l} \\ g_{kl} &= \frac{r_{kl}}{r_{kl}^2 + x_{kl}^2} \\ b_{kl} &= \frac{-x_{kl}}{r_{kl}^2 + x_{kl}^2} \end{aligned}$$

e substituindo-se em (A.1.), obtêm-se

$$\begin{aligned} S_{kl} &= g_{kl} V_k^2 - V_k V_l [g_{kl} \cos\theta_{kl} + b_{kl} \sin\theta_{kl}] + \\ &+ j \left\{ - [b_{kl}^{sh} + b_{kl}] V_k^2 - V_k V_l [g_{kl} \sin\theta_{kl} - b_{kl} \cos\theta_k] \right\} \end{aligned} \quad (A.2),$$

onde :

$$\theta_{kl} = \theta_k - \theta_l \quad (A.3).$$

Comparando-se (A.2.) com

$$S_{kl} = P_{kl} + jQ_{kl} \quad (A.4)$$

obtêm-se os fluxos de potência ativa e reativa que partem da barra k sobre a ligação kl que são dados por :

$$p_{kl} = g_{kl} V_k^2 - V_k V_l [g_{kl} \cos\theta_{kl} + b_{kl} \sin\theta_{kl}] \quad (A.5);$$

$$q_{kl} = - [b_{kl}^{sh} + b_{kl}] V_k^2 - V_k V_l [g_{kl} \sin\theta_{kl} - b_{kl} \cos\theta_{kl}] \quad (A.6).$$

## A.2. Potência reativa consumida por um elemento shunt

Um elemento shunt ligado à uma barra é representado na Figura (A.2.)

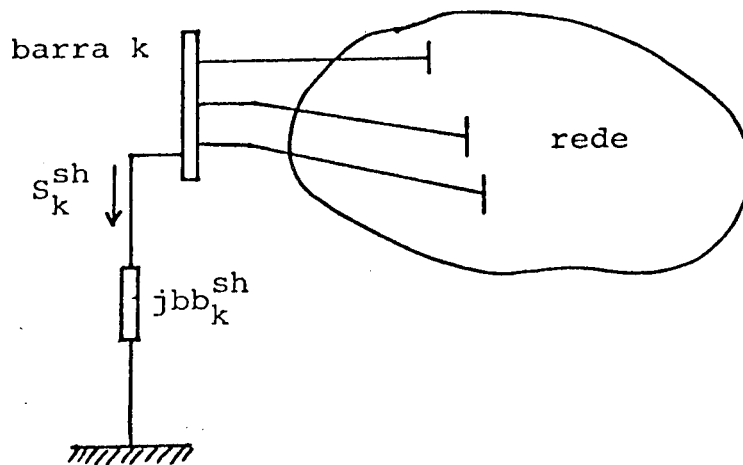


Figura (A.2.)

onde :

$bb_k^{sh}$  - susceptância do elemento shunt.

A potência complexa consumida pelo elemento shunt é dada por

$$S_k^{sh} = \hat{V}_k [jbb_k^{sh} \hat{V}_k]^* \quad (A.7),$$

que fornece

$$S_k^{sh} = - jbb_k^{sh} V_k^2 \quad (A.8)$$

Comparando-se (A.8) com

$$S_k^{sh} = p_k^{sh} + jq_k^{sh} \quad (A.9),$$

obtém-se a potência reativa consumida pelo elemento shunt que é dada por :

$$q_k^{sh} = - b b_k^{sh} V_k^2 \quad (A.10)$$

### A.3. Perda ativa em uma ligação elétrica

A perda de potência ativa em uma ligação (kl) é obtida somando-se os fluxos que partem das barras k e l, sobre a ligação (kl), ou seja,

$$L_{kl} = P_{kl} + P_{lk}$$

que fornece

$$L_{kl} = g_{kl} [V_k^2 + V_l^2 - 2V_k V_l \cos\theta_{kl}] \quad (A.12)$$

## APÊNDICE B

### GRADIENTE REDUZIDO E MULTIPLICADORES DE

#### LANGRANGE

Neste apêndice são apresentados o cálculo do gradiente reduzido e sua interpretação conjunta com os multiplicadores de lagrange.

#### B.1. Gradiente reduzido

A formulação do problema (II.42) com partição em variáveis de controle e dependentes como

$$(PM) \left\{ \begin{array}{l} \min f_w(\underline{x}, \underline{u}) \\ \text{s.a. } \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}) = \underline{0} \end{array} \right. \quad (B.1)$$

possibilita a sua resolução através do método do gradiente reduzido. Considerando o vetor  $\underline{x}$  como função implícita de  $\underline{u}$ , a função objetivo é reescrita como [22]

$$z(\underline{u}) = f_w[\underline{x}(\underline{u}), \underline{u}] \quad (B.2)$$

e o gradiente reduzido de  $f_w$  em relação a  $\underline{u}$  é dado por

$$\nabla_{\underline{u}} z(\underline{u}) = \nabla_{\underline{u}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) + S^t \nabla_{\underline{x}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) \quad (B.3),$$

onde :

S - matriz sensibilidade entre  $\underline{x}$  e  $\underline{u}$ .

A matriz sensibilidade é obtida linearizando-se a restrição de igualdade que fornece

$$J_{\underline{x}}^g(\underline{x}, \underline{u}) \Delta \underline{x} + J_{\underline{u}}^g(\underline{x}, \underline{u}) \Delta \underline{u} = \underline{0} \quad (B.4),$$

e desde que a matriz Jacobiana  $J_{\underline{x}}^g$  seja não singular, (B.4) é reescrita como

$$\Delta \underline{x} = - J_{\underline{x}}^g(\underline{x}, \underline{u})^{-1} J_{\underline{u}}^g(\underline{x}, \underline{u}) \Delta \underline{u} \quad (\text{B.5}).$$

A matriz S é, então, dada por

$$S = - J_{\underline{x}}^g(\underline{x}, \underline{u})^{-1} J_{\underline{u}}^g(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{B.6}),$$

que substituída em (B.3) fornece

$$\nabla_{\underline{u}} z(\underline{u}) = \nabla_{\underline{u}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) - J_{\underline{u}}^g(\underline{x}, \underline{u})^t \left[ J_{\underline{x}}^g(\underline{x}, \underline{u})^t \right]^{-1} \nabla_{\underline{x}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{B.7}).$$

## B.2. Gradiente reduzido e multiplicadores de Lagrange

O cálculo do gradiente reduzido também é feito utilizando os multiplicadores de Lagrange. A função Lagrangeana associada ao problema (B.1) é dada por

$$L(\underline{x}, \underline{u}) = f_w(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{\lambda}^t \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{B.8}),$$

cuja condição de estacionariedade em relação a  $\underline{x}$  fornece

$$\nabla_{\underline{x}} L(\underline{x}, \underline{u}) = \nabla_{\underline{x}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) + J_{\underline{x}}^g(\underline{x}, \underline{u})^t \underline{\lambda} = \underline{0} \quad (\text{B.9}).$$

Calculando  $\underline{\lambda}$  em (B.9) obtém-se

$$\underline{\lambda} = - \left[ J_{\underline{x}}^g(\underline{x}, \underline{u})^t \right]^{-1} \nabla_{\underline{x}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{B.10}),$$

que substituída em

$$\nabla_{\underline{u}} L(\underline{x}, \underline{u}) = \nabla_{\underline{u}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) + J_{\underline{u}}^g(\underline{x}, \underline{u})^t \underline{\lambda} \quad (\text{B.11})$$

fornece

$$\nabla_{\underline{u}} L(\underline{x}, \underline{u}) = \nabla_{\underline{u}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) - J_{\underline{u}}^g(\underline{x}, \underline{u})^t \left[ J_{\underline{x}}^g(\underline{x}, \underline{u})^t \right]^{-1} \nabla_{\underline{x}} f_w(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{B.12}).$$

Comparando (B.7) com (B.12) obtém-se o gradiente reduzido dado por

$$\nabla_{\underline{u}} z(\underline{u}) = \nabla_{\underline{u}} L(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{B.13})$$

### B.3. Conclusão

O cálculo do gradiente reduzido pela expressão (B.7) exige a utilização da matriz Jacobiana inversa o que é pouco atraente no caso de sistemas com grandes dimensões. No caso de sistemas de potência, o cálculo pelos multiplicadores de Lagrange é mais eficiente pois a matriz Jacobiana é esparsa. Neste caso, calculam-se os multiplicadores de Lagrange em (B.9) através de técnicas de esparsidade.

APÊNDICE C

MATRIZ HESSIANA APROXIMADA

Neste apêndice são apresentadas as aproximações feitas na matriz Hessiana e as hipóteses admitidas para o seu de sacoplamento na versão do método de penalidades apresentada em [16].

C.1. Aproximação na matriz Hessiana

A função de penalidades dada em (II.57) é reescrita como

$$F(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}) \\ \underline{h}(\underline{x}) \end{bmatrix}^t W \begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}) \\ \underline{h}(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

e sua aproximação quadrática feita em (II.61) é dada por

$$F(\underline{x}) = f(\underline{x}^v) + \nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}^v)^t \Delta \underline{x} + \frac{1}{2} \Delta \underline{x}^t \nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} + \\ + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}^v) \\ \underline{h}(\underline{x}^v) \end{bmatrix} + J_{\underline{x}} \underline{g}, \underline{h}(\underline{x}^v)^t \Delta \underline{x} \quad W \quad \begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}^v) \\ \underline{h}(\underline{x}^v) \end{bmatrix} + J_{\underline{x}} \underline{g}, \underline{h}(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} \quad (C.2),$$

cuja condição necessária de mínimo é

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}^v) + J_{\underline{x}} \underline{g}, \underline{h}(\underline{x}^v)^t W J_{\underline{x}} \underline{g}, \underline{h}(\underline{x}^v) \end{bmatrix} \Delta \underline{x} = \\ - \nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}^v) - J_{\underline{x}} \underline{g}, \underline{h}(\underline{x}^v)^t W \begin{bmatrix} \underline{g}(\underline{x}^v) \\ \underline{h}(\underline{x}^v) \end{bmatrix} \quad (C.3).$$

A matriz

$$J_{\underline{x}}^{\underline{g}, \underline{h}}(\underline{x}^v)^t W J_{\underline{x}}^{\underline{g}, \underline{h}}(\underline{x}^v) \quad (C.4)$$

é a matriz ganho utilizada na estimação estática de estado e é de sacoplável [21], ao contrário da matriz  $\nabla_{\underline{x}}^2 f(\underline{x}^v)$  [16]. Em [16] é introduzida uma modificação quadrando  $f(\underline{x})$  e  $F(\underline{x})$  é considerada como

$$F(\underline{x}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{f}(\underline{x}) \\ \underline{g}(\underline{x}) \\ \underline{h}(\underline{x}) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^t & \underline{0}^t \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & & \\ \vdots & & \\ \underline{0} & & \\ & & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}(\underline{x}) \\ \underline{g}(\underline{x}) \\ \underline{h}(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad (C.5),$$

onde :

$\underline{0}$  - vetor com todos os elementos nulos.

A aproximação de  $F(\underline{x})$  por uma quadrática é obtida linearizando-se também  $f(\underline{x})$ , ou seja, é dada por

$$F(\underline{x}) = \left[ \underline{y}(\underline{x}^v) + J_{\underline{x}}^{\underline{y}}(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} \right]^t R \left[ \underline{y}(\underline{x}^v) + J_{\underline{x}}^{\underline{y}}(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} \right] \quad (C.6),$$

onde :

$$\underline{y}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \underline{f}(\underline{x}) \\ \underline{g}(\underline{x}) \\ \underline{h}(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad (C.7);$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^t & \underline{0}^t \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & & \\ \vdots & & \\ \underline{0} & & \\ & & W \end{bmatrix} \quad (C.8);$$

cuja condição necessária de mínimo é

$$J_{\underline{x}}^{\underline{y}}(\underline{x}^v)^t R J_{\underline{x}}^{\underline{y}}(\underline{x}^v) \Delta \underline{x} = - J_{\underline{x}}^{\underline{y}}(\underline{x}^v)^t R \underline{y}(\underline{x}^v) \quad (C.9)$$



C.2. Desacoplamento da matriz Hessiana aproximada [16]

Decompondo o vetor  $\underline{x}$  como

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{\theta} \\ \underline{v} \end{bmatrix} \quad (C.10)$$

e a função vetorial  $\underline{y}(\underline{x})$  como

$$\underline{y}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f(\underline{\theta}, \underline{v}) \\ \underline{p}(\underline{\theta}, \underline{v}) - \underline{p}^{esp} \\ \underline{q}(\underline{\theta}, \underline{v}) - \underline{q}^{esp} \\ \underline{v} - \underline{v}^{esp} \end{bmatrix} \quad (C.11),$$

a matriz Jacobiana que aparece na equação é rearranjada como

$$\underline{J}_{\underline{x}}^{\underline{y}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \underline{J}_{\underline{\theta}}^f & \underline{J}_{\underline{v}}^f \\ \underline{J}_{\underline{\theta}}^p & \underline{J}_{\underline{v}}^p \\ \underline{J}_{\underline{\theta}}^q & \underline{J}_{\underline{v}}^q \\ \underline{J}_{\underline{\theta}}^v & \underline{J}_{\underline{v}}^v \end{bmatrix} \quad (C.12).$$

Admitindo-se as hipóteses do desacoplamento P $\theta$  - QV feitas em [21], a matriz Jacobiana dada em (C.12) passa a ser dada por

$$\underline{J}_{\underline{x}}^{\underline{y}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \underline{J}_{\underline{\theta}}^f & \underline{J}_{\underline{v}}^f \\ \underline{J}_{\underline{\theta}}^p & [0] \\ [0] & \underline{J}_{\underline{v}}^q \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (C.13),$$

onde :

[0] - matriz nula;

[I] - matriz identidade.

Considerando-se a matriz Jacobiana desacoplada (C.13) e W rearranjada como

$$W = \begin{bmatrix} W^P & [0] & [0] \\ [0] & W^Q & [0] \\ [0] & [0] & W^V \end{bmatrix} \quad (C.14),$$

a matriz

$$\underline{J}_{\underline{x}}^Y(\underline{x})^t R \underline{J}_{\underline{x}}^Y(\underline{x}) \quad (C.15)$$

utilizada na equação (C.9) é obtida como

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} J_{\underline{\theta}}^{f^t} & J_{\underline{\theta}}^f + J_{\underline{\theta}}^{p^t} W^P & J_{\underline{\theta}}^p & J_{\underline{\theta}}^{f^t} & J_{\underline{V}}^f \\ \hline J_{\underline{V}}^{f^t} & J_{\underline{V}}^f & & J_{\underline{V}}^{f^t} & J_{\underline{V}}^f + J_{\underline{V}}^{q^t} W^Q & J_{\underline{V}}^q + W^V \end{array} \right] \quad (C.16)$$

Desprezando-se na matriz (C.16) os termos

$$J_{\underline{\theta}}^{f^t} J_{\underline{V}}^f \quad \text{e} \quad J_{\underline{V}}^{f^t} J_{\underline{\theta}}^f$$

e considerando o vetor

$$\begin{bmatrix} \underline{z}^{\underline{\theta}} \\ \underline{z}^{\underline{V}} \end{bmatrix} = - \underline{J}_{\underline{x}}^Y(\underline{x})^t R \underline{Y}(\underline{x}) \quad (C.17),$$

a equação (C.9) é desacoplada nas equações

$$\begin{bmatrix} J_{\underline{\theta}}^{f^t} & J_{\underline{\theta}}^f + J_{\underline{\theta}}^{p^t} W^P & J_{\underline{\theta}}^p \end{bmatrix} \Delta \underline{\theta} = \underline{z}^{\underline{\theta}} \quad (C.18)$$

$$\begin{bmatrix} J_{\underline{V}}^{f^t} & J_{\underline{V}}^f + J_{\underline{V}}^{q^t} W^Q & J_{\underline{V}}^q + W^V \end{bmatrix} \Delta \underline{V} = \underline{z}^{\underline{V}} \quad (C.19)$$

### C.3. Conclusão

O método de penalidades com a matriz Hessiana a aproximada é apresentado em [16] nas versões com matriz completa e desacoplada.

Na versão desacoplada as equações (C.18) e (C.19) são resolvidas alternadamente por um processo análogo aos métodos desacoplados de resolução do fluxo de carga e estimação estática de estado [21].

Em [16] são apresentados resultados de testes realizados com esses métodos. O desempenho da versão com matriz completa é comparado com o método desacoplado. Na versão desacoplada as matrizes são consideradas constantes ao longo do processo e são realizadas buscas unidimensionais nas direções  $\Delta\theta$  e  $\Delta V$  obtidos das equações (C.18) ou (C.19).

## APÊNDICE D

### ALTERAÇÕES NO MULTIPLICADOR E NA PENALIDADE

Neste apêndice é analisado o comportamento de uma parábola com a variação dos coeficientes. Considera-se a parábola no plano  $(y; z)$  descrita pela equação

$$z + \mu y + \frac{\nu}{2} y^2 = C \quad (D.1)$$

com

$$\mu \geq 0$$

$$\nu > 0$$

$$C = \text{cte}$$

O gráfico da relação (D.1) é a parábola ilustrada na Figura (D.1)

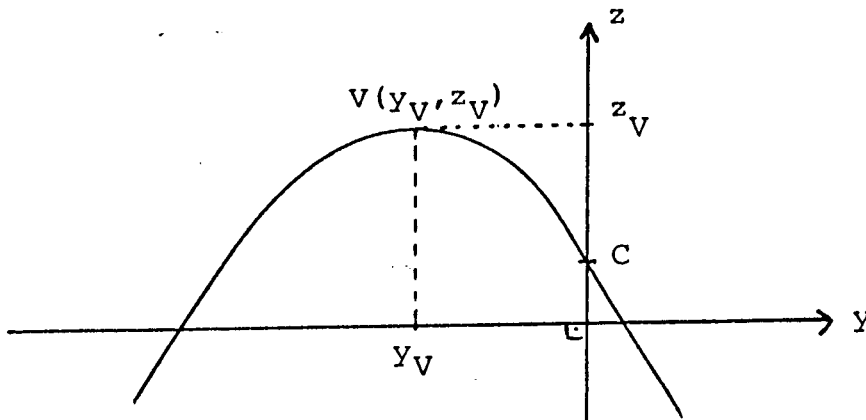


Figura (D.1)

cujas coordenadas do vértice são dadas por

$$y_V = -\frac{\mu}{\nu} \quad (D.2)$$

$$z_v = \frac{\mu^2}{2v} + C \quad (D.3).$$

As derivadas de  $z$  em relação a  $y$  são dadas por

$$\frac{dz}{dy} = -\mu - vy \quad (D.4),$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -v \quad (D.5).$$

Analisando-se as expressões dadas em (D.2), (D.4) e D.5) verifica-se que :

- a alteração em  $\mu$ , com  $v$  mantido constante, faz com que a curva se desloque mantendo o seu grau de concavidade;

- a alteração em  $v$  faz com que a curva se desloque e o seu grau de concavidade se altere simultaneamente.

## APÊNDICE E

### SOBRE O COMPORTAMENTO DO MÉTODO DOS

#### MULTIPLICADORES-PENALIDADES

A solução de um problema irrestrito  $(PI)^k$  é um ponto no plano  $(y; z)$  que fornece a derivada da função de perturbação dada por

$$\frac{\partial t}{\partial y} = - \mu^k - v^k h(\underline{\hat{x}}_k) \quad (E.1)$$

uma vez que a curva dada em (III.41) a tangencia nesse ponto. A Figura (III.24) ilustra tal situação. Isso significa que o mesmo ponto  $\underline{\hat{x}}_k$  seria obtido se o problema  $(PI)^k$  fosse resolvido desprezando-se o termo de penalidades

$$\frac{v^k}{2} h(x)^2$$

mas considerando-se o multiplicador de Lagrange dado por

$$\mu^k + v^k h(\underline{\hat{x}}_k)$$

o que também é visualizado na Figura (III.24).

Associa-se ao problema (III.8) um problema com penalidades dado por

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} \min \{ f(\underline{x}) + \frac{v^k}{2} h(\underline{x})^2 \} \\ \text{s.a. } h(\underline{x}) \leq 0 \end{array} \right. \quad (E.2),$$

cuja função de perturbação é definida como

$$p(y) = \inf_{\underline{x}} \left\{ f(\underline{x}) + \frac{\nu^k}{2} h(\underline{x})^2 / h(\underline{x}) \leq y \right\} \quad (\text{E.3}).$$

A intersecção entre as curvas  $t(y)$  e  $p(y)$  ocorre para

$$h(\underline{x}) = 0 \quad (\text{E.4})$$

e essa situação é ilustrada na Figura (E.1).

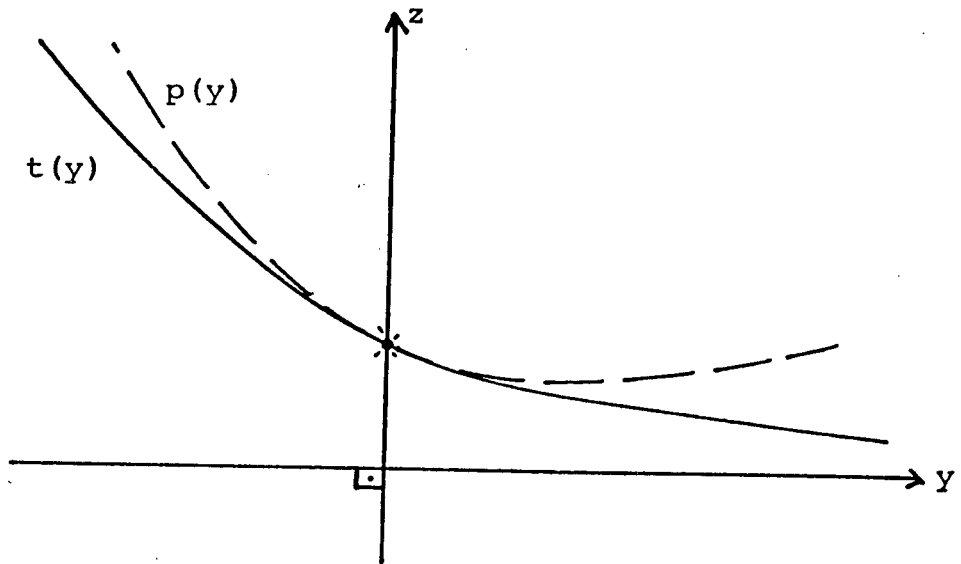


Figura (E.1)

As funções  $t(y)$  e  $p(y)$  satisfazem as condições

$$\begin{aligned} p(0) &= t(0) \\ p(y) &> t(y) \quad p/y \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

e tal propriedade é demonstrada em [32].

No caso de problemas convexos a resolução do problema irrestrito  $(PI)^{k+1}$  com o multiplicador  $\mu^{k+1}$  dado em (III.47) é interpretada como a minimização da função lagrangeana do problema  $(P')^{k+1}$  que tem como solução um ponto entre a solução de  $(PI)^k$  e a solução de  $(P)$ . Para a solução de  $(PI)^k$  que satisfaz

$$h(\hat{\underline{x}}_k) > 0$$

a situação é ilustrada na Figura (E.2).

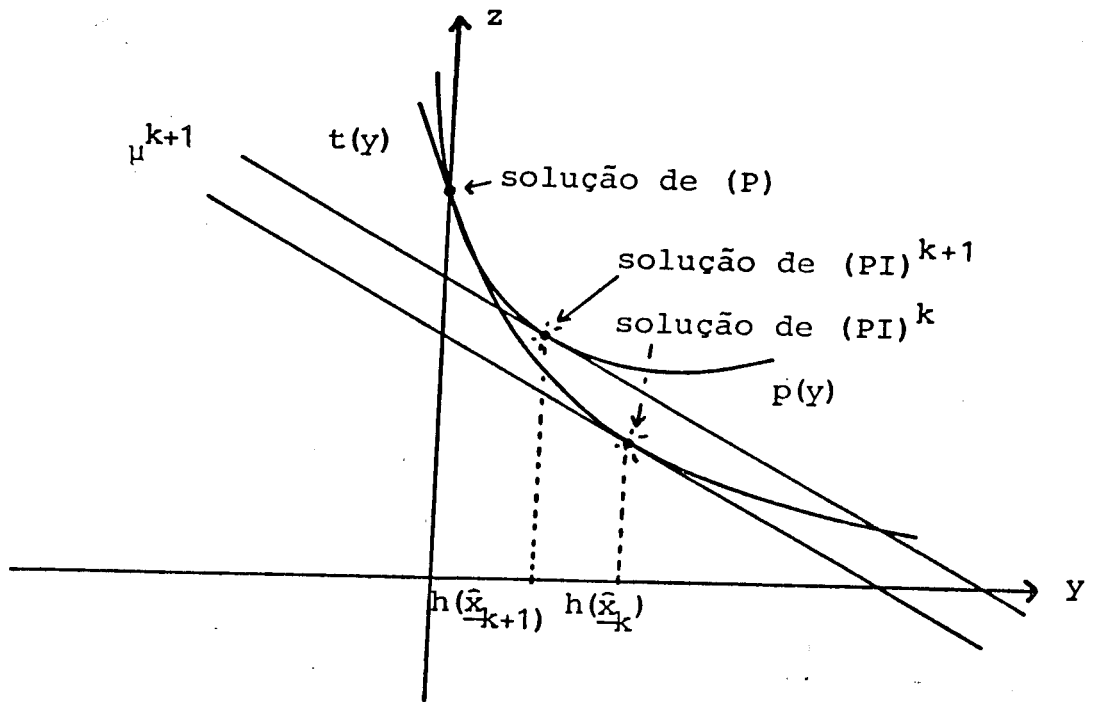


Figura (E.2)

Para a solução de  $(PI)^k$  que satisfaz

$$h(\hat{x}_k) < 0$$

a situação é ilustrada na Figura (E.3).

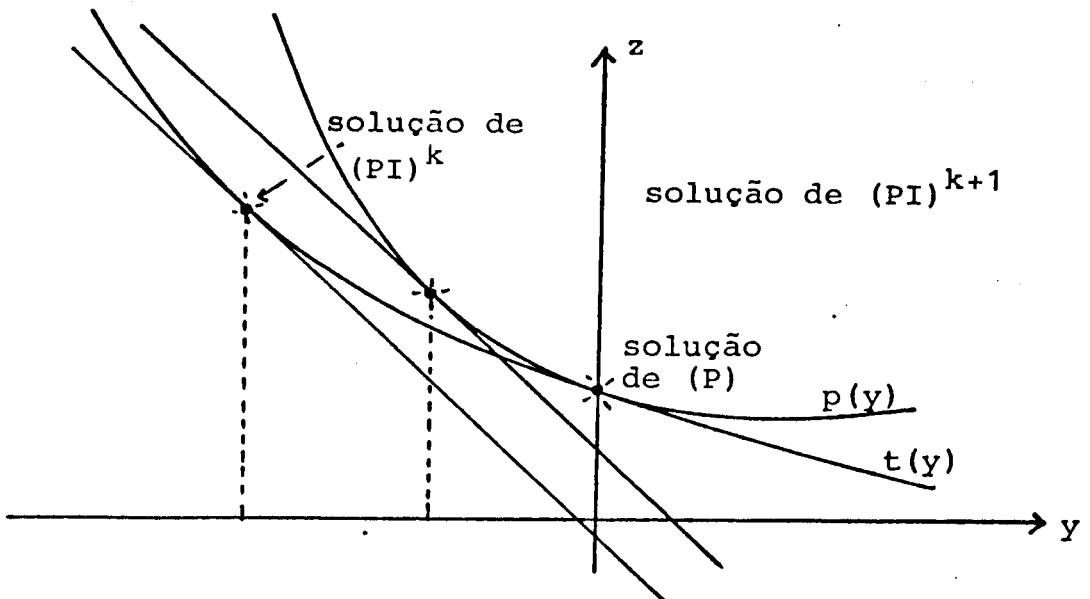


Figura (E.3)



No caso de problemas não convexos o crescimento do fator de penalidades diminui e elimina a concavidade da função  $p(y)$ . Em [32] é demonstrado que existe um valor  $v^*$  acima do qual a função  $p(y)$  passa a ser convexa. A Figura (E.4) dá uma idéia do efeito que o crescimento do fator de penalidade causa sobre a função  $p(y)$ .

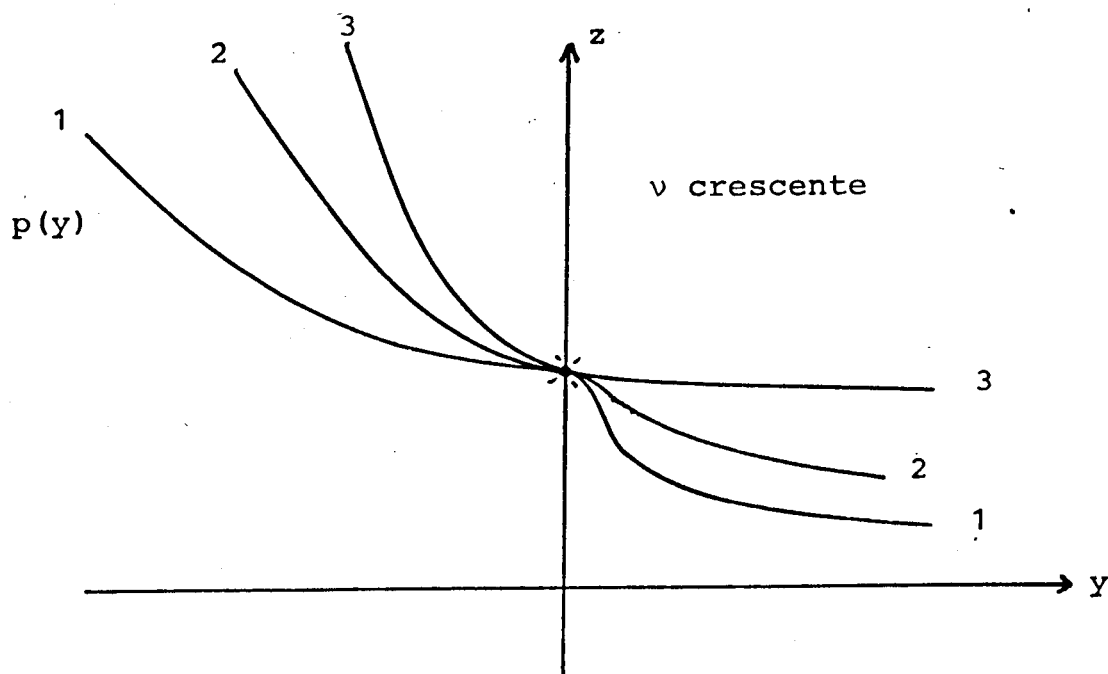


Figura (E.4)

## APÊNDICE F

### FUNÇÃO OBJETIVO E SUAS DERIVADAS

Neste apêndice são apresentadas as expressões da perda de potência, das componentes de seu gradiente e dos elementos da sua matriz hessiana.

#### F.1. Função objetivo e elementos do vetor gradiente e da matriz hessiana

A expressão da perda de potência ativa ocorrida na transmissão é obtida de (II.31) e (A.12) e é dada por

$$L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \sum_{ij \in \Omega} g_{ij} [V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \theta_{ij}] \quad (\text{F.1.})$$

As expressões para as componentes do vetor gradiente, obtidas de (F.1), são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \sum_{j \in \Omega_i} 2g_{ij} V_i V_j \sin \theta_{ij} \quad (\text{F.2})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial V_i} L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \sum_{j \in \Omega_i} 2g_{ij} [V_i - V_j \cos \theta_{ij}] \quad (\text{F.3.})$$

As expressões para os elementos da matriz hessiana, obtidas de (F.2) e (F.3), são dadas por:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} \sum_{\ell \in \Omega_i} 2g_{i\ell} V_i V_\ell \cos \theta_{i\ell}, & j=i \\ -2g_{ij} V_i V_j \cos \theta_{ij}, & j \in \Omega_i \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{F.4});$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial V_j} L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} \sum_{\ell \in \Omega_i} 2g_{i\ell} V_\ell \text{ sen} \theta_{i\ell}, & j=i \\ 2g_{ij} V_i \text{ sen} \theta_{ij}, & j \in \Omega_i \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{F.5})$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial V_i \partial V_j} L(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} \sum_{\ell \in \Omega_i} 2g_{i\ell} & , \quad j=i \\ -2g_{ij} \cos \theta_{ij} & , \quad j \in \Omega_i \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{F.6}).$$

## APÊNDICE G

### RESTRICÇÕES E SUAS DERIVADAS

Neste apêndice são apresentadas as expressões das injeções nodais de potência, de suas respectivas derivadas e das derivadas dos fluxos de potência ativa e reativa nas ligações elétricas. Todas as expressões são colocadas em função das derivadas primeiras das injeções nodais de potência ativa.

#### G.1. Injeções nodais de potência ativa e reativa

As expressões das injeções nodais e de potência ativa e reativa em uma barra, como ilustrada na Figura (G.1), são obtidas somando-se os fluxos

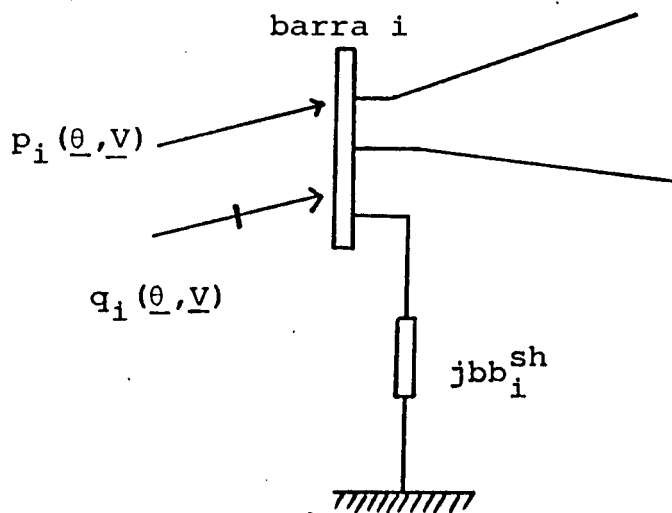


Figura (G.1)

dados pelas expressões (A.5) e (A.6) que fornecem

$$P_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = G_i V_i^2 - V_i \sum_{l \in \Omega_i} V_l [g_{il} \cos \theta_{il} + b_{il} \sin \theta_{il}] \quad (G.1),$$

$$Q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = -B_i V_i^2 - V_i \sum_{l \in \Omega_i} V_l [g_{il} \sin \theta_{il} - b_{il} \cos \theta_{il}] \quad (G.2),$$

onde :

$$G_i = \sum_{l \in \Omega_i} g_{il} \quad (G.3).$$

$$B_i = b b_i^{sh} + \sum_{l \in \Omega_i} (b_{il}^{sh} + b_{il})$$

## G.2. Derivadas primeiras das injeções de potência e dos fluxos de potência ativa e reativa

As derivadas primeiras de  $p_i(\underline{\theta}, \underline{V})$  são calculadas de (G.1.) como :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_l} P_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} -Q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) - B_i V_i^2 & , \quad l = i \\ -V_i V_l [g_{il} \sin \theta_{il} - b_{il} \cos \theta_{il}] & , \quad l \in \Omega_i \\ 0 & , \quad l \neq i \text{ e } l \notin \Omega_i \end{cases} \quad (G.4)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial V_l} P_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} \frac{1}{V_i} P_i(\underline{\theta}, \underline{V}) + G_i V_i & , \quad l = i \\ -V_i [g_{il} \cos \theta_{il} + b_{il} \sin \theta_{il}] & , \quad l \in \Omega_i \\ 0 & , \quad l \neq i \text{ e } l \notin \Omega_i \end{cases} \quad (G.5).$$

As derivadas primeiras de  $q_i(\underline{\theta}, \underline{V})$  são calculadas de (G.2) como :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_l} Q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} P_i(\underline{\theta}, \underline{V}) - G_i V_i^2 & , \quad l = i \\ -V_l \frac{\partial}{\partial V_l} P_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad l \in \Omega_i \\ 0 & , \quad l \neq i \text{ e } l \notin \Omega_i \end{cases} \quad (G.6)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial V_\ell} q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} \frac{1}{V_i} q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) - B_i V_i & , \quad \ell = i \\ \frac{1}{V_\ell} \frac{\partial}{\partial \theta_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell \in \Omega_i \\ 0 & , \quad \ell \neq i \text{ e } \ell \notin \Omega_i \end{cases} \quad (\text{G.7}).$$

As derivadas primeiras dos fluxos de potência ativa sobre as ligações elétricas  $ij$  são dadas por :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\ell} p_{ij} = \begin{cases} - \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell = i \\ \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell = j \\ 0 & , \quad \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \end{cases} \quad (\text{G.8})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial V_\ell} p_{ij} = \begin{cases} 2g_{ij} V_i + \frac{V_j}{V_i} \frac{\partial}{\partial V_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell = i \\ \frac{\partial}{\partial V_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell = j \\ 0 & , \quad \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \end{cases} \quad (\text{G.9}).$$

As derivadas primeiras dos fluxos de potência reativa sobre as ligações elétricas  $ij$  são dadas por :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\ell} q_{ij} = \begin{cases} V_j \frac{\partial}{\partial V_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell = i \\ - V_j \frac{\partial}{\partial V_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell = j \\ 0 & , \quad \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \end{cases} \quad (\text{G.10})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial V_\ell} q_{ij} = \begin{cases} -2 [b_{ij}^{sh} + b_{ij}] V_i + \frac{1}{V_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell = i \\ \frac{1}{V_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell = j \\ 0, & \ell \neq i \text{ e } \ell \neq j \end{cases} \quad (G.11).$$

### G.3. Derivadas segundas das injeções de potência

As derivadas segundas de  $p_i(\underline{\theta}, \underline{V})$  são calculadas de (G.4) e (G.5) como :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_\ell \partial \theta_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} -p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) + G_i V_i^2, & \ell = m = i \\ V_m \frac{\partial}{\partial V_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell = i \text{ e } m \in \Omega_i \\ -V_m \frac{\partial}{\partial V_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell = m \in \Omega_i \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (G.12);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_\ell \partial V_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} -\frac{1}{V_i} q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) - B_i V_i, & \ell = m = i \\ -\frac{1}{V_m} \frac{\partial}{\partial \theta_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell = i \text{ e } m \in \Omega_i \\ \frac{1}{V_m} \frac{\partial}{\partial \theta_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell \in \Omega_i \text{ e } m = i \\ \frac{1}{V_m} \frac{\partial}{\partial \theta_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell = m \in \Omega_i \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (G.13)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial V_\ell \partial V_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} 2G_i, & \ell = m = i \\ \frac{1}{V_\ell} \frac{\partial}{\partial V_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell = i \text{ e } m \in \Omega_i \\ 0, & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (G.14).$$

As derivadas segundas de  $q_i(\underline{\theta}, \underline{V})$  são calculadas das expressões (G.6) e (G.7) como :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_\ell \partial \theta_m} q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} - q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) - B_i V_i^2 & , \ell = m = i \\ \frac{\partial}{\partial \theta_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \ell = i \text{ e } m \in \Omega_i \\ - \frac{\partial}{\partial \theta_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \ell = m \in \Omega_i \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.15});$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_\ell \partial V_m} q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} \frac{1}{V_i} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) - G_i V_i & , \ell = m = i \\ \frac{\partial}{\partial V_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \ell = i \text{ e } m \in \Omega_i \\ - \frac{V_\ell}{V_m} \frac{\partial}{\partial V_\ell} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}), & \ell \in \Omega_i \text{ e } m = i \\ - \frac{\partial}{\partial V_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \ell = m \in \Omega_i \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.16})$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial V_\ell \partial V_m} q_i(\underline{\theta}, \underline{V}) = \begin{cases} - 2B_i & , \ell = m = i \\ \frac{1}{V_\ell V_m} \frac{\partial}{\partial \theta_m} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \ell = i \text{ e } m \in \Omega_i \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.17}).$$



G.4. Derivadas segundas dos fluxos de potência ativa e reativa

As derivadas segundas dos fluxos de potência ativa sobre as ligações ij são calculadas das expressões (G.8) e (G.9) como :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_\ell \partial \theta_m} P_{ij} = \begin{cases} -v_j \frac{\partial}{\partial v_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{v}) & , \quad \ell=m=i \\ -v_j \frac{\partial}{\partial v_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{v}) & , \quad \ell=m=j \\ v_j \frac{\partial}{\partial v_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{v}) & , \quad \ell=i \text{ e } m=j \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.18});$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_\ell \partial v_m} P_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{v_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{v}) & , \quad \ell=m=i \\ \frac{1}{v_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{v}) & , \quad \ell=m=j \\ -\frac{1}{v_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{v}) & , \quad \ell=i \text{ e } m=j \\ \frac{1}{v_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{v}) & , \quad \ell=j \text{ e } m=i \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.19})$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial v_\ell \partial v_m} P_{ij} = \begin{cases} 2g_{ij} & , \quad \ell=m=i \\ \frac{1}{v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{v}) & , \quad \ell=i \text{ e } m=j \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.20}).$$

As derivadas segundas dos fluxos de potência reativa sobre as ligações ij são calculadas das expressões (G.10) e (G.11) como :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_\ell \partial \theta_m} q_{ij} = \begin{cases} - \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell=m=i \\ - \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell=m=j \\ \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell=i \text{ e } m=j \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.21});$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_\ell \partial V_m} q_{ij} = \begin{cases} \frac{V_i}{V_j} \frac{\partial}{\partial V_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell=m=i \\ - \frac{\partial}{\partial V_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell=m=j \\ \frac{\partial}{\partial V_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell=i \text{ e } m=j \\ - \frac{V_j}{V_i} \frac{\partial}{\partial V_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell=j \text{ e } m=i \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.22});$$

$$\frac{\partial^2}{\partial V_\ell \partial V_m} q_{ij} = \begin{cases} - 2 [b_{ij}^{sh} + b_{ij}] & , \quad \ell=m=i \\ \frac{1}{V_i V_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} p_i(\underline{\theta}, \underline{V}) & , \quad \ell=i \text{ e } m=j \\ 0, \text{ nos outros casos} & \end{cases} \quad (\text{G.23}).$$