



**UNICAMP**

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Comunicações

## Códigos de Grupo Comutativo

Este exemplar corresponde à redação final da tese  
aprovada por *Marcelo Eduardo Pellenz*  
Pellenz e aprovada pela Comissão  
ilgal. a em 24/05/96  
*Jaime Portugheis*  
Orientador

Por: Eng. Marcelo Eduardo Pellenz  
Orientador: Prof. Dr. Jaime Portugheis

Dissertação submetida à Faculdade  
de Engenharia Elétrica da Universi-  
dade Estadual de Campinas, para  
preenchimento dos pré-requisitos  
parciais para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia Elétrica.

Maio 1996

|           |                          |                                       |
|-----------|--------------------------|---------------------------------------|
| V.        | ...                      | Ep                                    |
| INSCRIÇÃO | 28501                    |                                       |
| PROG.     | 667/96                   |                                       |
| C         | <input type="checkbox"/> | D <input checked="" type="checkbox"/> |
| PREÇO     | R\$ 11,00                |                                       |
| DATA      | 11/09/96                 |                                       |
| N.º CPD   |                          |                                       |

CM-00091840-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P364c Pellenz, Marcelo Eduardo  
Códigos de grupo comutativo / Marcelo Eduardo  
Pellenz.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Jaime Portugheis.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Codificação. 2. Comunicações digitais. 3. Sistema  
de transmissão de dados. 4. Modulação digital. I.  
Portugheis, Jaime. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Elétrica. III. Título.

*A Deus, por mais esta vitória alcançada.*

*Há homens que lutam um dia e são bons. Há outros que lutam um ano e são melhores. Há os que lutam muitos anos e são muito bons. Porém, há os que lutam toda a vida. Estes são os imprescindíveis.*

*Bertolt Brecht*

# Agradecimentos

Este trabalho não é apenas minha conquista, é a conquista de todas aquelas pessoas, que durante os últimos dois anos, apoiaram, ajudaram, sem medir esforços, e acima de tudo, acreditaram que era possível. À todas estas pessoas eu agradeço e dedico este trabalho.

Agradeço a minha família, aos meus adoráveis pais, Helio e Tais, por todo o apoio e carinho. A minha querida irmã Cristiane, que continue seus estudos e possa alcançar conquistas muito maiores que esta. Ao meu irmão caçula Gilvã, que tem um maravilhoso futuro pela frente.

A meus avós maternos, meu avô Luiz, que bem sei orgulharia-se deste trabalho, e minha avó Nicanordina, que continua preparando aqueles deliciosos docinhos. Em memória de meus avós paternos, Alberto e Josefina, aos quais muito gostaria de ter conhecido.

Agradeço em especial a minha namorada Juliana, a quem muito amo e admiro. Obrigado pelo teu carinho, teu amor e por ter me esperado tanto tempo. Agradeço também à sua família, por todo apoio que me deram.

Agradeço ao meu amigo Gean, a quem considero um irmão, por tantos anos de convivência e estudo que passamos juntos. Foi difícil, complicado, às vezes parecia impossível, pois bem, aqui estamos nós, mestres.

A todos os amigos, pelos bons momentos juntos, e que sempre me incentivaram a continuar nesta caminhada.

Aos amigos com quem tenho convivido nestes últimos dois anos, Jackson, Tina, Ernesto, Antônio, Marcos, Marta, Natanael, Sandro, em especial ao pessoal do DECOM, onde encontrei grandes amigos.

Agradeço a todo pessoal do NEPAE, especialmente ao Nelson, que proporcionou tantas oportunidades e conquistas.

Ao meu orientador e amigo Jaime, pelos seus valiosos conselhos e pela orientação do trabalho. Agradeço à sua família, a Ting e a pequena grande Débora, aos quais tive o prazer de conhecer.

Agradeço ao professor Reginaldo Palazzo Jr. e ao professor Valdemar Cardoso da Rocha Jr., por aceitarem participar da banca julgadora.

Ao CNPq, pela bolsa de mestrado.

# Sumário

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

## RESUMO

## ABSTRACT

|                                                                       |          |
|-----------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 - INTRODUÇÃO .....</b>                                           | <b>1</b> |
| 1.1 - Estrutura do Trabalho .....                                     | 3        |
| <b>2 - CONCEITOS BÁSICOS .....</b>                                    | <b>4</b> |
| 2.1 - Representação Discreta de Sinais Contínuos .....                | 4        |
| 2.1.1 - Expansões Ortonormais de Sinais de Energia Finita .....       | 4        |
| 2.1.2 - Representação Geométrica de um Conjunto de Sinais .....       | 7        |
| 2.2 - Teoria da Detecção - $M$ Sinais Reais com Ruído .....           | 8        |
| 2.3 - Modulação Sem Memória e Demodulação Coerente .....              | 11       |
| 2.4 - Cálculo da Probabilidade de Erro .....                          | 16       |
| 2.4.1 - Limitantes Superior e Inferior da Probabilidade de Erro ..... | 18       |
| 2.5 - Códigos para o Canal Gaussiano .....                            | 19       |
| 2.5.1 - Matriz de Configuração .....                                  | 20       |
| 2.5.2 - Modelo Geométrico .....                                       | 21       |
| 2.6 - Grupos .....                                                    | 22       |
| 2.6.1 - Teorema Fundamental sobre Grupos Abelianos Finitos .....      | 23       |
| 2.7 - Representação de Grupos .....                                   | 24       |

|                                                     |           |
|-----------------------------------------------------|-----------|
| 2.7.1 - Representação Redutível e Irredutível ..... | 24        |
| 2.7.2 - Representação Real .....                    | 24        |
| 2.8 - Códigos de Grupo para o Canal Gaussiano ..... | 25        |
| <b>3 - CÓDIGOS DE GRUPO COMUTATIVO .....</b>        | <b>26</b> |
| 3.1 - Propriedades Gerais .....                     | 26        |
| 3.2 - O Problema do Vetor Inicial .....             | 28        |
| 3.3 - Parâmetros de Desempenho .....                | 32        |
| 3.4 - Geração de Códigos de Grupo Comutativo .....  | 33        |
| 3.4.1 - Representação Matricial dos Subgrupos ..... | 38        |
| <b>4 - RESULTADOS .....</b>                         | <b>41</b> |
| 4.1 - Códigos de Bloco .....                        | 41        |
| 4.2 - Análise de Subgrupos .....                    | 42        |
| 4.2.1 - Código de Grupo Comutativo (16,4) .....     | 43        |
| 4.2.2 - Código de Grupo Comutativo (16,5) .....     | 53        |
| 4.2.3 - Código de Grupo Comutativo (32,4) .....     | 55        |
| 4.2.4 - Código de Grupo Comutativo (32,5) .....     | 58        |
| 4.2.5 - Código de Grupo Comutativo (32,6) .....     | 60        |
| 4.3 - Tabela dos Códigos de Grupo Comutativo .....  | 63        |
| 4.4 - Comparação de Desempenho .....                | 64        |
| 4.5 - Aspectos de Implementação .....               | 68        |
| 4.5.1 - Demodulação .....                           | 72        |
| <b>5 - CONCLUSÃO .....</b>                          | <b>75</b> |

## **ANEXO A**

## **ANEXO B**

## **ANEXO C**

## **BIBLIOGRAFIA**

# Lista de Figuras

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 - Diagrama de Blocos de um Sistema de Comunicação Digital .....                     | 1  |
| 2.1 - Diagrama de Blocos de um Receptor de Correlação .....                             | 12 |
| 2.2 - Diagrama de Blocos de um Receptor de Filtro Casado .....                          | 13 |
| 2.3 - Diagrama de Blocos de um Receptor de Correlação com Sinais Expandidos .....       | 14 |
| 3.1 - Representação de Subcódigos Unidimensionais e Bidimensionais .....                | 27 |
| 3.2 - Diagrama de Blocos do Algoritmo de Partição .....                                 | 35 |
| 3.3 - Árvore de Partição .....                                                          | 37 |
| 4.1 - Constelação de Sinal 4-PSK - Código (16,4) .....                                  | 49 |
| 4.2 - Constelação de Sinal 8-PSK - Código (16,4) .....                                  | 49 |
| 4.3 - Diagrama de Blocos do Demodulador - Código (16,4) .....                           | 50 |
| 4.4 - Gráfico de Desempenho - Código (16,4) versus 4-PSK não Codificado .....           | 52 |
| 4.5 - Gráfico de Eficiência - Códigos Comutativos, Cíclicos, Simplex e Biotogonais .... | 66 |
| 4.6 - Gráfico de Eficiência - Códigos Cíclicos .....                                    | 67 |
| 4.7 - Constelação de Sinal 4-PSK - Código (64,6) .....                                  | 68 |
| 4.8 - Constelação de Sinal 8-PSK - Código (64,6) .....                                  | 68 |
| 4.9 - Gráfico de Desempenho - Código (64,6) versus 4-PSK .....                          | 71 |
| 4.10 - Diagrama de Blocos do Demodulador - Código (64,6) .....                          | 73 |
| 4.11 - Treliça - Código (64,6) .....                                                    | 74 |



# Lista de Tabelas

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 - Código de Bloco $(Z_8)^2$ - 64 Elementos .....            | 41 |
| 4.2 - Código de Bloco $(Z_8)^3$ - 512 Elementos .....           | 42 |
| 4.3 - Código de Bloco $(Z_8)^4$ - 4096 Elementos .....          | 42 |
| 4.4 - Valores de $\theta_{ij}$ e $d_i^2$ - Código (16,4) .....  | 44 |
| 4.5 - Equações de Restrição - Código (16,4) .....               | 45 |
| 4.6 - Código de Grupo Comutativo (16,4) .....                   | 46 |
| 4.7 - Perfil de Distâncias - Código (16,4) .....                | 46 |
| 4.8 - Valores de $\theta_{ij}$ e $d_i^2$ - Código (16,5) .....  | 53 |
| 4.9 - Equações de Restrição - Código (16,5) .....               | 54 |
| 4.10 - Perfil de Distâncias - Código (16,5) .....               | 55 |
| 4.11 - Valores de $\theta_{ij}$ e $d_i^2$ - Código (32,4) ..... | 56 |
| 4.12 - Equações de Restrição - Código (32,4) .....              | 57 |
| 4.13 - Perfil de Distâncias - Código (32,4) .....               | 57 |
| 4.14 - Valores de $\theta_{ij}$ e $d_i^2$ - Código (32,5) ..... | 58 |
| 4.15 - Equações de Restrição - Código (32,5) .....              | 59 |
| 4.16 - Perfil de Distâncias - Código (32,5) .....               | 60 |
| 4.17 - Valores de $\theta_{ij}$ e $d_i^2$ - Código (32,6) ..... | 61 |

**4.18** - Equações de Restrição - Código (32,6) .....62

**4.19** - Perfil de Distâncias - Código (32,6) .....62

**4.20** - Códigos de Grupo Comutativo (M,N) .....63

**4.21** - Parâmetros dos Códigos Simplex e Biortogonais .....64

# Resumo

A construção de códigos de grupo comutativo para o canal Gaussiano é considerada. O problema do vetor inicial pode ser formulado como uma extensão do caso de códigos de grupo cíclico. Todos os subgrupos de  $(\mathbb{Z}_8)^L$ ,  $L = 2, 3$ , com ordem  $2^m$  onde  $m = 6, 9$ , foram testados e novos códigos ótimos foram obtidos. Eles tem eficiência melhor que os códigos de grupo cíclico. Curiosamente, alguns códigos ( $L = 3$ ) apresentam dois níveis de energia e podem ser implementados como *QAM* estrela codificado. A estrutura de grupo possibilita encontrar uma solução para o problema do vetor inicial, facilita o esquema de codificação e possivelmente o de decodificação. Ela também implica em regiões de decisão de máxima verossimilhança congruentes, o que simplifica o cálculo de parâmetros de desempenho. Neste trabalho vamos utilizar o limitante de união da probabilidade de erro como medida de desempenho dos códigos gerados. Comparações de desempenho com outros esquemas tradicionais de modulação, em especial os códigos de grupo cíclico, são mostradas.

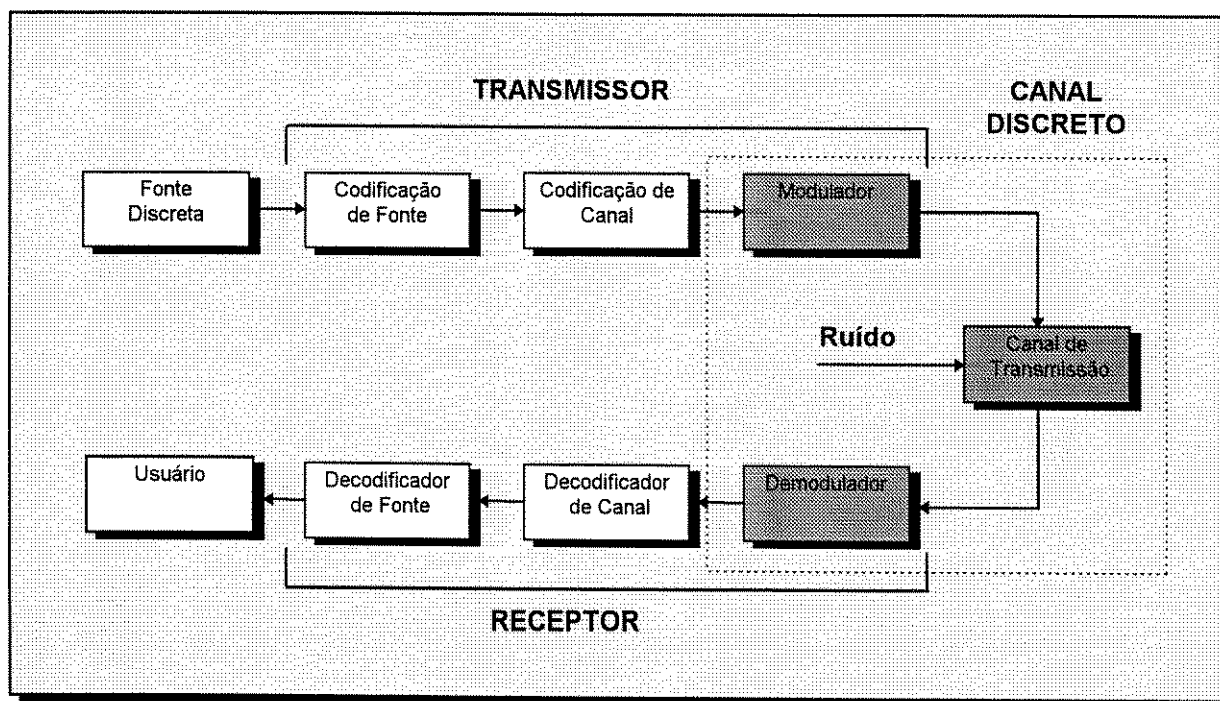
# Abstract

The construction of commutative group codes for the Gaussian channel is considered. The initial vector problem can be formulated in a similar fashion as it has been done for cyclic group codes. All subgroups of  $(\mathbb{Z}_8)^L$ ,  $L = 2, 3$ , with order  $2^m$  where  $m = 6, 9$ , have been tested and new optimal codes were obtained. They have better efficiency than cyclic group codes. Curiously, some codes ( $L = 3$ ) have two energy levels and can be implemented as coded level Star QAM. The group structure suggests and allow us to find a solution for the initial vector problem, simplifies the coding and possibly the decoding scheme. It also implies that maximum likelihood decision regions are congruent, which simplifies the computation of efficiency parameters. In this work we will use the error probability union bound as a performance criterion for the generated codes. A performance comparison of the new codes with other traditional modulation schemes, in special cyclic group codes, is shown.

# Capítulo 1

## Introdução

A crescente demanda pela troca de informação, principalmente na forma digital, tem propiciado uma grande evolução dos sistemas de comunicação. Muitas pesquisas e projetos foram e continuam a serem desenvolvidos nesta área, visando principalmente aumentar a capacidade de transmissão e a confiabilidade dos atuais sistemas. Para melhor definir o objetivo do nosso estudo, vamos considerar inicialmente o diagrama de blocos de um sistema de comunicação digital, que é mostrado na Figura 1.1. O desempenho deste sistema, abordado sob os aspectos de codificação de fonte, ou seja, a eficiência com que a informação de uma dada fonte pode ser representada, e de codificação de canal, que diz respeito a taxa de transmissão de informação através de um canal ruidoso, são assuntos tratados pela Teoria da Informação. Os limitantes fundamentais a que estes parâmetros, entropia e capacidade de canal, estão sujeitos são obtidos via Teoria da Informação.



*Figura 1.1 - Diagrama de blocos de um sistema de comunicação digital*

O nosso estudo é dedicado à busca de novos esquemas de modulação digital, de forma a melhorar a eficiência dos atuais sistemas. Basicamente, o modulador mapeia a informação proveniente da fonte (codificada ou não) em um conjunto de formas de onda, apropriada para a transmissão através de um canal disponível. A escolha deste conjunto de sinais para a transmissão através de um canal Gaussiano constitui um dos principais problemas na concepção de sistemas de comunicações.

Este conjunto de sinais, pode ser representado de forma discreta, ou seja, por um conjunto de vetores num espaço vetorial Euclidiano, sendo denominado de *constelação de sinais*. O modelo vetorial simplifica muito a análise dos sistemas. Portanto, determinar um conjunto de sinais consiste basicamente em escolher um conjunto de vetores no espaço vetorial Euclidiano, levando-se em conta certos critérios de projeto, como probabilidade de erro e taxa de transmissão.

A constelação de sinais é denominada de *código*  $(M,N)$  para o canal Gaussiano, onde  $M$  denota o número de sinais e  $N$  a dimensão do espaço Euclidiano gerado. Analisaremos uma classe de códigos de grupo para o canal Gaussiano, denominada de *códigos de grupo comutativo para o canal Gaussiano* [5]. Estes códigos são uma classe dos códigos *geometricamente uniformes* (GU) descritos por Slepian [19], isso implica que eles possuem regiões de Voronoi de máxima verossimilhança congruentes e *configuração equipontual*, ou seja, o conjunto de distâncias visto de qualquer uma das palavras código é o mesmo. Isso pode simplificar muito o cálculo de parâmetros de desempenho e possivelmente os esquemas de codificação e decodificação. Para fontes de informação que emitem símbolos não equiprováveis, pode-se minimizar a máxima probabilidade de erro utilizando-se este tipo de estrutura. Tais códigos, assim como os códigos de treliça são denominados *códigos de espaço de sinais* [2], pois a métrica associada é a distância Euclidiana. Estes códigos são geralmente não lineares sobre o corpo dos reais.

O nosso objetivo é gerar novos códigos de grupo utilizando-se como medida de desempenho o limitante de união da probabilidade de erro. O limitante é uma aproximação da probabilidade de erro verdadeira, que é extremamente difícil de ser calculada em certos casos. As palavras-código são geradas por transformações de um vetor inicial num espaço Euclidiano  $N$ -dimensional. O problema fundamental consiste em determinar o vetor inicial ótimo, de acordo com certas restrições pré-estabelecidas. Vamos abordar este problema como uma extensão do caso de códigos de grupo cíclico. O método Simplex de otimização linear é utilizado para a escolha do vetor ótimo para um dado código. Comparações entre códigos de

---

grupo comutativo e códigos de grupo cíclico são analisadas. Aspectos de implementação prática deste novos esquemas de modulação são propostos. Os códigos de grupo obtidos possuem características interessantes para serem utilizados como modulação codificada de bloco (BCM) e modulação codificada de treliça (TCM) [11,13]. Curiosamente alguns códigos possuem dois ou três níveis de energia e podem ser implementados como QAM estrela codificado [15].

## 1.1 - Estrutura do Trabalho

No Capítulo 2 são descritos os conceitos fundamentais sobre a teoria de transmissão digital utilizando-se o modelo vetorial para o canal Gaussiano. Definições sobre grupos, representação de grupos e códigos para o canal Gaussiano também são descritas, sendo necessárias ao entendimento do trabalho.

No Capítulo 3 é feita uma análise mais detalhada dos códigos de grupo comutativo e do método utilizado na construção dos códigos. O problema do vetor inicial é descrito de maneira similar ao de códigos de grupo cíclico e também pode ser resolvido utilizando-se o algoritmo simplex de otimização linear.

No Capítulo 4 são mostrados todos os resultados, ou seja, os novos códigos de grupo comutativo obtidos, parâmetros de desempenho, aspectos de implementação e comparações importantes com outros códigos para o canal Gaussiano.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho, discutindo as vantagens e desvantagens na utilização de códigos de grupo comutativo, complexidade de geração e características de implementação. Algumas sugestões para trabalhos futuros também são comentadas.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos

Neste capítulo vamos apresentar alguns conceitos básicos da teoria de transmissão digital. Inicialmente vamos definir o conceito do modelo vetorial para o canal Gaussiano, que será o fundamento de todo nosso estudo. Noções elementares sobre grupos, representação de grupos e códigos de grupo também são descritas.

### 2.1 - Representação Discreta de Sinais Contínuos

Sinais contínuos podem ser representados de forma discreta, ou seja, por um conjunto de pontos num espaço vetorial Euclidiano [2, p. 62]. Este modelo simplifica muito a análise dos esquemas de modulação digital.

#### 2.1.1 - Expansões Ortonormais de Sinais de Energia Finita

Um tipo fundamental de representação discreta é baseada em conjuntos de sinais chamados *ortonormais*. Para definir estes conjuntos, vamos considerar a notação de *produto escalar* entre dois sinais de energia finita  $x(t)$  e  $y(t)$ :

$$\langle x, y \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt ,$$

onde  $*$  denota o complexo conjugado de um sinal complexo. Sendo  $X(f)$  e  $Y(f)$  as transformadas de *Fourier* de  $x(t)$  e  $y(t)$ , temos:

$$\langle X, Y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df .$$

A igualdade de *Parseval* [1, p. 93] relaciona os produtos escalares definidos no domínio tempo e frequência,

$$\langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle .$$



Se  $\langle x, y \rangle = 0$ , ou equivalentemente  $\langle X, Y \rangle = 0$ , os sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  são chamados ortogonais. Das definições de produto escalar e ortogonalidade segue que  $\langle x, x \rangle = \mathcal{E}_x$ , é a energia de  $x(t)$ , e que a energia da soma de dois sinais ortogonais é igual a soma de suas energias. Suponha que se tenha uma seqüência de sinais ortogonais  $\{\Psi_i(t)\}_{i \in I}$ , isto é,

$$\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle = \begin{cases} \mathcal{E}_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

onde  $I$  é um conjunto finito de índices.

Se  $\mathcal{E}_i = 1$  para todo  $i \in I$ , os sinais da seqüência são chamados ortonormais. Obviamente, uma seqüência ortonormal pode ser obtida de uma ortogonal, dividindo-se cada  $\Psi_i(t)$  por  $\sqrt{\mathcal{E}_i}$ . Dada uma seqüência ortonormal, podemos aproximar um dado sinal de energia finita  $x(t)$  como uma combinação linear de sinais pertencentes a esta seqüência, ou seja:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i \in I} c_i \Psi_i(t). \quad (2.1)$$

Um critério apropriado para a escolha das constantes  $c_i$  é minimizar a energia do sinal erro:

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ \mathcal{E}_e &= \langle e, e \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) e^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2 - 2\Re\{x^*(t)\hat{x}(t)\} + \|\hat{x}(t)\|^2 dt = \\ &= \mathcal{E}_x + \sum_{i \in I} \|c_i\|^2 - 2\Re \sum_{i \in I} c_i \langle x, \Psi_i \rangle. \end{aligned}$$

A letra  $\Re$  denota a parte real da expressão. Completando os quadrados podemos escrever,

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_x + \sum_{i \in I} \|c_i - \langle x, \Psi_i \rangle\|^2 - \sum_{i \in I} \|\langle x, \Psi_i \rangle\|^2.$$

A energia do erro é minimizada escolhendo-se os  $c_i$  tal que:

$$c_i = \langle x, \Psi_i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi_i^*(t) dt, \quad i \in I. \quad (2.2)$$

O valor mínimo de  $\mathcal{E}_e$  é dado por:

$$(\mathcal{E}_e)_{min} = \mathcal{E}_x - \sum_{i \in I} \|\langle x, \Psi_i \rangle\|^2. \quad (2.3)$$

Quando os  $c_i$ ,  $i \in I$ , são calculados usando-se (2.2), o sinal  $\hat{x}(t)$  de (2.1) é chamado projeção de  $x(t)$  sobre o espaço gerado pelos sinais da seqüência  $\{\Psi_i(t)\}_{i \in I}$ , isto é,  $\hat{x}(t)$  pertence ao conjunto de sinais que podem ser expressos como combinação linear dos  $\Psi_i(t)$ .

Esta denominação surge do fato que, se a equação (2.2) é satisfeita, o erro  $e(t)$  é ortogonal a cada  $\Psi_i(t)$ ,  $i \in I$ , e a  $\hat{x}(t)$ . Pode-se verificar que

$$\begin{aligned}\langle e, \Psi_i \rangle &= \langle x - \hat{x}, \Psi_i \rangle \\ &= \langle x, \Psi_i \rangle - \langle \hat{x}, \Psi_i \rangle \\ &= c_i - c_i = 0, \quad i \in I.\end{aligned}$$

Um aspecto importante nesta teoria é a investigação das condições sob as quais  $(\mathcal{E}_e)_{\min} = 0$ .

Quando isto acontece, a sequência  $\{\Psi_i(t)\}_{i \in I}$  é dita ser *completa* para o sinal  $x(t)$ , e da equação (2.3) temos a igualdade

$$\mathcal{E}_x = \sum_{i \in I} \|c_i\|^2.$$

Neste caso podemos escrever que

$$x(t) = \sum_{i \in I} c_i \Psi_i(t).$$

Devido a importância de seqüências de sinais ortonormais, algoritmos foram desenvolvidos para a construção de tais seqüências. Um algoritmo que é computacionalmente conveniente porque é de natureza iterativa, é chamado de *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt* [2, p. 64]. Seja dada uma certa seqüência  $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^N$  de energia finita, constituída por sinais

linearmente independentes, ou seja, tal que qualquer combinação linear  $\sum_{i=1}^N c_i \phi_i(t)$  é zero somente se todos os  $c_i$  são zero. Uma seqüência ortonormal  $\{\Psi_i(t)\}_{i \in I}$  é gerada usando o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned}\Psi_1'(t) &= \phi_1(t) \\ \Psi_1(t) &= \frac{\Psi_1'(t)}{\sqrt{\langle \Psi_1', \Psi_1' \rangle}} \\ \Psi_2'(t) &= \phi_2(t) - \langle \phi_2, \Psi_1 \rangle \cdot \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) &= \frac{\Psi_2'(t)}{\sqrt{\langle \Psi_2', \Psi_2' \rangle}}, \quad i = 3, \dots, N \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Psi_i'(t) &= \phi_i(t) - \sum_{l=1}^{i-1} \langle \phi_i, \Psi_l \rangle \cdot \Psi_l(t) \\ \Psi_i(t) &= \frac{\Psi_i'(t)}{\sqrt{\langle \Psi_i', \Psi_i' \rangle}}\end{aligned} \tag{2.4}$$

## 2.1.2 - Representação Geométrica de um Conjunto de Sinais

A teoria de expansões ortonormais de sinais de energia finita mostra que  $x(t)$  pode ser representado por uma seqüência  $\{c_i\}_{i \in I}$  de produtos escalares (2.2), uma vez que uma seqüência ortonormal que é *completa* para  $x(t)$  tenha sido determinada. Se considerarmos uma dada seqüência  $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^N$  de  $N$  sinais ortonormais *reais*, ela será completa para qualquer  $x(t)$  real que possa ser escrito como uma combinação dos  $\Psi_i(t)$ , ou seja, na forma:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i \Psi_i(t). \quad (2.5)$$

Então cada sinal pode ser representado por um vetor real  $N$ -dimensional  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  ou, equivalentemente, por um ponto no espaço Euclidiano  $N$ -dimensional cujos eixos de coordenadas correspondem aos sinais  $\Psi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Portanto, se tivermos um conjunto de sinais  $\{x_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$ , e pudermos encontrar uma seqüência ortonormal que é completa para os  $M$  sinais, então podemos representar  $x_0(t), x_1(t), \dots, x_{M-1}(t)$  como  $M$  vetores ou  $M$  pontos num espaço Euclidiano de dimensão apropriada. Se os sinais do conjunto  $\{x_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$  são linearmente independentes, pode-se aplicar o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma seqüência ortonormal. Supondo-se agora que apenas  $N$  sinais em  $\{x_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$  são linearmente independentes, neste caso os  $M-N$  sinais restantes podem ser expressados como combinações lineares destes  $N$  sinais. O processo de Gram-Schmidt ainda poderá ser usado, mas irá produzir apenas  $N < M$  sinais ortogonais diferentes de zero. Então cada  $x_i(t)$  é representado por um vetor  $N$ -dimensional

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}), \quad (2.6)$$

onde

$$x_{ij} = \langle x_i, \Psi_j \rangle, \quad i = 0, \dots, M-1 \text{ e } j = 1, \dots, N.$$

## 2.2 - Teoria da Detecção - $M$ Sinais Reais com Ruído

Para  $M$  sinais, temos que decidir entre  $M$  hipóteses

$$H_j: y(t) = x_j(t) + n(t), \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

através da observação de  $y(t)$  no intervalo  $(0, T)$ . Os  $M$  sinais reais  $x_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ , são conhecidos e tem duração e energia finita. Usando o processo de Gram-Schmidt, podemos determinar um conjunto de sinais ortonormais  $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^N$ ,  $N \leq M$ , tal que cada  $x_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ , possa ser expresso como uma combinação linear de  $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^N$ . Também vamos considerar uma sequência completa de sinais ortonormais, tal que seus primeiros  $N$  sinais são  $\Psi_1(t), \dots, \Psi_N(t)$ . Denotando por  $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^\infty$  esta sequência, e definindo

$$y_i = \int_0^T y(t) \Psi_i(t) dt, \quad x_{ji} = \int_0^T x_j(t) \Psi_i(t) dt \quad \text{e} \quad n_i = \int_0^T n(t) \Psi_i(t) dt$$

para

$$j = 0, 1, \dots, M-1 \quad \text{e} \quad i = 1, 2, \dots, \infty,$$

o problema de decisão pode ser formulado na forma discreta. Escolher entre  $M$  hipóteses

$$H_j: \mathbf{y} = (x_{j1} + n_1, x_{j2} + n_2, \dots, x_{jN} + n_N, n_{N+1}, n_{N+2}, \dots), \quad (2.7)$$

baseando-se na observação dos valores tomados pelas variáveis aleatórias,  $y_1, y_2, \dots$ . Como as componentes do ruído  $n_{N+1}, n_{N+2}, \dots$  são independentes de  $n_1, \dots, n_N$  e das hipóteses, as observações de  $y_{N+1}, y_{N+2}, \dots$ , não adicionam nenhuma informação ao processo de decisão. Então a decisão pode ser baseada somente na observação de  $y_1, y_2, \dots, y_N$ . Definindo-se os vetores- linha  $N$ -dimensionais  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ ,  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N]$  e  $\mathbf{x}_j = [x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jN}]$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ , podemos reduzir (2.7) à forma

$$H_j: \mathbf{y} = \mathbf{x}_j + \mathbf{n}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Então, o detetor ótimo deve operar da seguinte forma:

$$\text{Escolha } H_j \text{ se } \hat{\mathbf{y}} \in R_j, \quad (2.8)$$

onde  $\hat{\mathbf{y}}$  é o valor observado do vetor aleatório  $\mathbf{y}$ , e  $R_0, R_1, \dots, R_{M-1}$  é a partição do espaço vetorial  $N$ -dimensional tal que a regra (2.8) forneça um valor mínimo de probabilidade de erro média,

$$P(e) = 1 - \sum_{j=0}^{M-1} p_j \int_{R_j} f_{y|H_j}(\mathbf{z}|H_j) d\mathbf{z}. \quad (2.9)$$

onde  $p_j = P\{H_j\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ , é a probabilidade de ocorrência da hipótese  $H_j$ . A função  $f_{y|H_j}(\mathbf{z})$  é a função densidade de probabilidade Gaussiana do vetor aleatório  $\mathbf{y}$ , sendo definida como

$$f_{y|H_j}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \cdot \exp\left[-\frac{(\mathbf{z} - \mathbf{x}_j)^2}{N_0}\right],$$

tendo média  $\mathbf{x}_j$  e variância  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ . Pode ser observado de (2.9) que  $P(e)$  é minimizada se cada  $R_j$  é escolhido de tal forma que

$$\mathbf{z} \in R_j \text{ se e somente se } p_j f_{y|H_j}(\mathbf{z}|H_j) = \max_i \{p_i f_{y|H_i}(\mathbf{z}|H_i)\}. \quad (2.10)$$

Combinando-se (2.8) e (2.10), obtemos a regra de máxima probabilidade a posteriori. Nesta situação as regiões  $R_j$   $N$ -dimensionais são chamadas de regiões de máxima probabilidade a posteriori. No caso especial em que as hipóteses  $H_j$  forem igualmente prováveis, isto é,  $p_j = 1/M$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ , (2.10) torna-se

$$\mathbf{z} \in R_j \text{ se e somente se } f_{y|H_j}(\mathbf{z}|H_j) = \max_i f_{y|H_i}(\mathbf{z}|H_i), \quad (2.11)$$

que corresponde a regra de decisão de *máxima verossimilhança* (MV). Da mesma forma, os  $R_j$  são chamados de regiões de decisão de máxima verossimilhança. Embora a regra de decisão MV minimiza a probabilidade de erro média somente para  $H_j$  igualmente prováveis, (2.11) é a regra de decisão mais usada. Definindo-se uma hipótese auxiliar

$$H: \mathbf{y} = \mathbf{n}, \quad (2.12)$$

(2.11) pode também ser escrita na forma

$$\mathbf{z} \in R_j \text{ se e somente se } \Lambda_j(\mathbf{z}) = \max_i \Lambda_i(\mathbf{z}),$$

onde definimos as *razão de verossimilhança*

$$\Lambda_j(\hat{\mathbf{y}}) = \frac{f_{y|H_j}(\hat{\mathbf{y}}|H_j)}{f_{y|H_0}(\hat{\mathbf{y}}|H)}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Então, a regra de decisão de MV é:

$$\text{Escolha } H_j \text{ se } \Lambda_j(\hat{\mathbf{y}}) = \max_i \Lambda_i(\hat{\mathbf{y}}). \quad (2.13)$$

O detetor de MV opera pelo cálculo das  $M$  razões de verossimilhança  $\Lambda_0(\hat{\mathbf{y}}), \Lambda_1(\hat{\mathbf{y}}), \dots, \Lambda_{M-1}(\hat{\mathbf{y}})$ , e então escolhendo a hipótese que corresponde a maior entre elas. Vamos calcular agora de maneira explícita as razões de verossimilhança. Pela observações sobre as hipóteses  $H_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $\mathbf{y}$  é um vetor aleatório Gaussiano com média  $\mathbf{x}_j$  (ou zero para  $j=0$ ), componentes independentes, e variância  $N_0/2$  para cada componente.

Então

$$\Lambda_j(\hat{\mathbf{y}}) = \frac{\exp\left[-(1/N_0)\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_j\|^2\right]}{\exp\left[-(1/N_0)\|\hat{\mathbf{y}}\|^2\right]} = \exp\left\{\frac{2}{N_0}\hat{\mathbf{y}}\mathbf{x}_j^T - \frac{1}{N_0}\|\mathbf{x}_j\|^2\right\}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

Considerando o logaritmo das razão de verossimilhança

$$\lambda_j(\hat{\mathbf{y}}) = \ln \Lambda_j(\hat{\mathbf{y}}),$$

podemos reescrever (2.13) da seguinte forma:

$$\text{Escolha } H_j \text{ se } \hat{\mathbf{y}}\mathbf{x}_j^T - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_j\|^2 = \max_i \left\{ \hat{\mathbf{y}}\mathbf{x}_i^T - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i\|^2 \right\}.$$

Uma outra expressão para o logaritmo da razão de verossimilhança pode ser derivada como segue. Como

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \Psi_i(t)$$

e

$$\mathbf{x}_j(t) = \sum_{l=1}^N x_{jl} \Psi_l(t),$$

temos

$$\int_0^T y(t) \mathbf{x}_j(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^N \hat{y}_i x_{jl} \int_0^T \Psi_i(t) \Psi_l(t) dt = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i x_{ji} = \mathbf{y} \mathbf{x}_j^T$$

e

$$\int_0^T x_j^2(t) dt = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N x_{jl} x_{jk} \int_0^T \Psi_l(t) \Psi_k(t) dt = \sum_{l=1}^N x_{jl}^2 = \|\mathbf{x}_j\|^2$$

assim

$$\lambda_j(\hat{\mathbf{y}}) = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) \mathbf{x}_j(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T x_j^2(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

## 2.3 - Modulação Sem Memória e Demodulação Coerente

O processo de modulação sem memória implica que as formas de onda disponíveis no modulador são estritamente limitadas ao intervalo de tempo  $T$  e que o modulador tem somente um estado, que portanto não afeta os sinais gerados. Para cada símbolo  $m_k$  de  $h$  bits, associa-se uma forma de onda. Isso pode ser escrito como

$$x_{\xi_k}(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T,$$

onde  $\xi_k$  é uma variável aleatória associada com a forma de onda. Esta variável aleatória pode ser a amplitude, a fase, a frequência, ou algum outro parâmetro que define a forma de onda. Em princípio, o demodulador forma um conjunto de sinais,

$$v_{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{\xi_k}(t - kT), \quad 0 \leq t < KT, \quad (2.14)$$

para todas as possíveis sequências  $\xi$ . Destes sinais, é recuperada uma estimativa  $\hat{\xi}$  da sequência de símbolos transmitidos. O logaritmo da razão de verossimilhança para a sequência  $\xi$ , baseada na observação de  $y(t)$  é dado por:

$$\lambda_{\xi} = \frac{2}{N_0} \int_0^{KT} y(t) v_{\xi}(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^{KT} v_{\xi}^2(t) dt. \quad (2.15)$$

O demodulador ótimo escolhe a sequência  $\hat{\xi}$  que maximiza  $\lambda_{\xi}$  na equação (2.15), ou seja,

$$\hat{\xi}: \quad \lambda_{\hat{\xi}} = \max_{\xi} \lambda_{\xi}.$$

Inserindo (2.14) em (2.15) e multiplicando por  $N_0/2$ , a sequência de máxima verossimilhança maximiza a expressão

$$l_{\xi} = \int_0^{KT} y(t) \sum_{k=0}^{K-1} x_{\xi_k}(t - kT) dt - \frac{1}{2} \int_0^{KT} \left[ \sum_{k=0}^{K-1} x_{\xi_k}(t - kT) \right]^2 dt. \quad (2.16)$$

Como estamos trabalhando com modulação sem memória e a duração  $T$  de  $x_{\xi_k}(t)$ , a equação (2.16) pode ser reescrita da forma:

$$l_{\xi} = \sum_{k=0}^{K-1} l_{\xi_k}, \quad (2.17)$$

onde

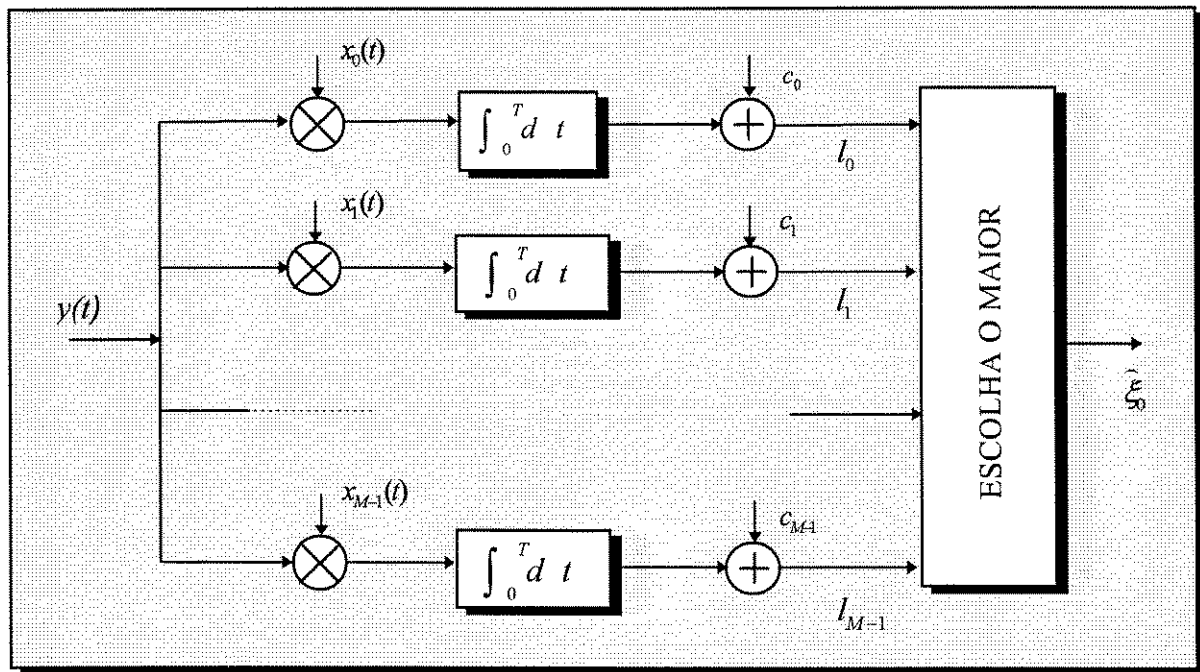
$$l_{\xi_k} = \int_{kT}^{(k+1)T} y(t) x_{\xi_k}(t - kT) dt - \frac{1}{2} \int_{kT}^{(k+1)T} x_{\xi_k}^2(t) dt. \quad (2.18)$$

De (2.17) podemos concluir que a sequência  $\hat{\xi}$  de MV é obtida como uma decisão símbolo por símbolo maximizando-se em cada intervalo  $T$  as quantidades  $l_{\xi_k}$  de (2.18). De fato, em nosso caso o máximo valor da soma (2.17) corresponde a soma dos máximos valores de suas componentes. Considerando este fato, a partir de agora, iremos nos restringir ao intervalo de tempo  $(0, T)$  correspondente a  $k=0$ .

As quantidades em (2.18) são ditas ser uma *estatística suficiente* do sinal recebido  $y(t)$ . Este é um termo técnico significando que tudo que precisamos saber sobre o sinal recebido  $y(t)$  para permitir uma decisão de MV está contida nestas quantidades. Desde de que a variável aleatória  $\xi_0$  pode assumir  $M$  valores diferentes, cada sinal  $x_{\xi_0}(t)$  é escolhido de um conjunto  $\{x_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$  de  $M$  formas de onda diferentes de duração  $T$ . Portanto, as variáveis aleatórias  $l_{\xi_0}$  de (2.18) tornam-se

$$l_i = \int_0^T y(t)x_i(t)dt + c_i, \quad c_i = -\frac{1}{2} \int_0^T x_i^2(t)dt = -\frac{1}{2} \mathcal{E}_i, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (2.19)$$

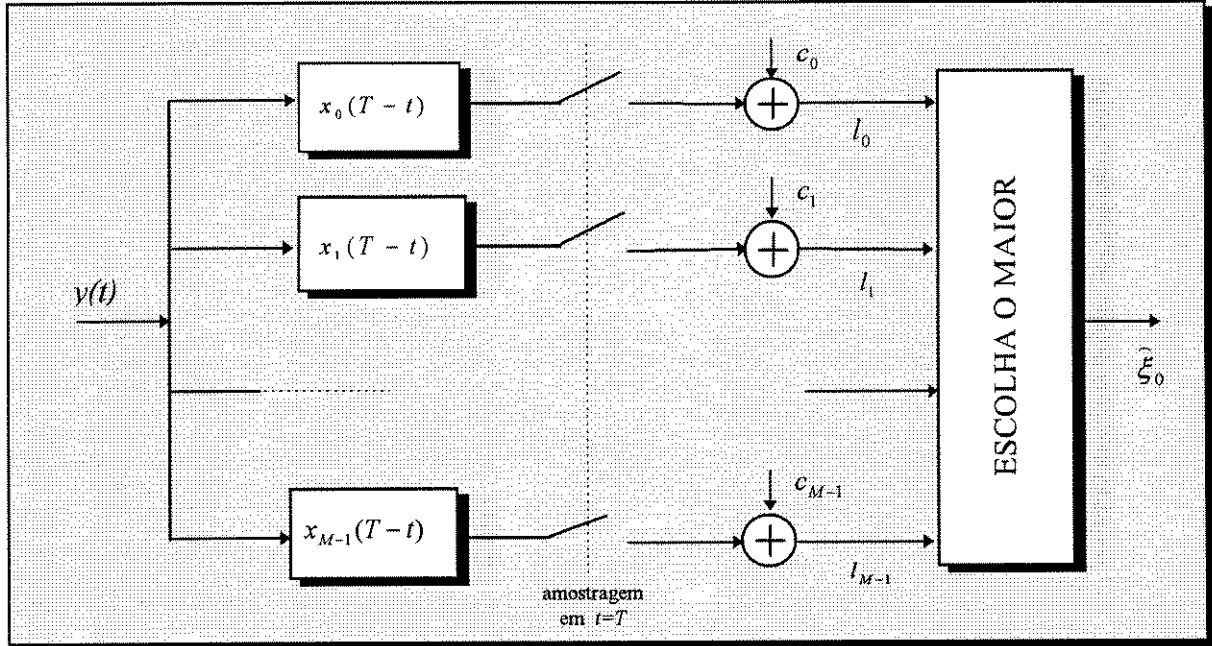
onde  $\mathcal{E}_i$  é a energia da  $i$ -ésima forma de onda. O diagrama de bloco do demodulador de MV é mostrado na Figura 2.1 e é usualmente referido como *demodulador de correlação*. Por simplicidade a figura também refere-se a detecção do primeiro símbolo, que é,  $k=0$ .



**Figura 2.1 - Diagrama de Blocos de um Receptor de Correlação**



Outro método para obter os valores (2.19) é trocar o banco de correlatores por um banco de filtros casados com os sinais  $\{x_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$ . O filtro casado com  $x_i(t)$  tem resposta ao impulso  $h_i(t) = x_i(T-t)$ . Portanto, a saída do filtro em  $t=T$ , quando a entrada é  $y(t)$ , é exatamente aquilo requerido por (2.19). O diagrama de blocos deste *demodulador de filtro casado* é mostrado na Figura 2.2.



**Figura 2.2 - Diagrama de Blocos de um Receptor de Filtro Casado**

Uma versão diferente do demodulador ótimo pode ser obtida representando-se os sinais  $\{x_i(t)\}_{i=1}^M$  na base ortonormal  $\{\Psi_j(t)\}_{j=1}^N$ ,  $N \leq M$ , utilizando-se o processo de Gram-Schmidt. Portanto, obtemos

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^N x_{ij} \Psi_j(t), \quad 0 \leq t < T, \quad i = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.20)$$

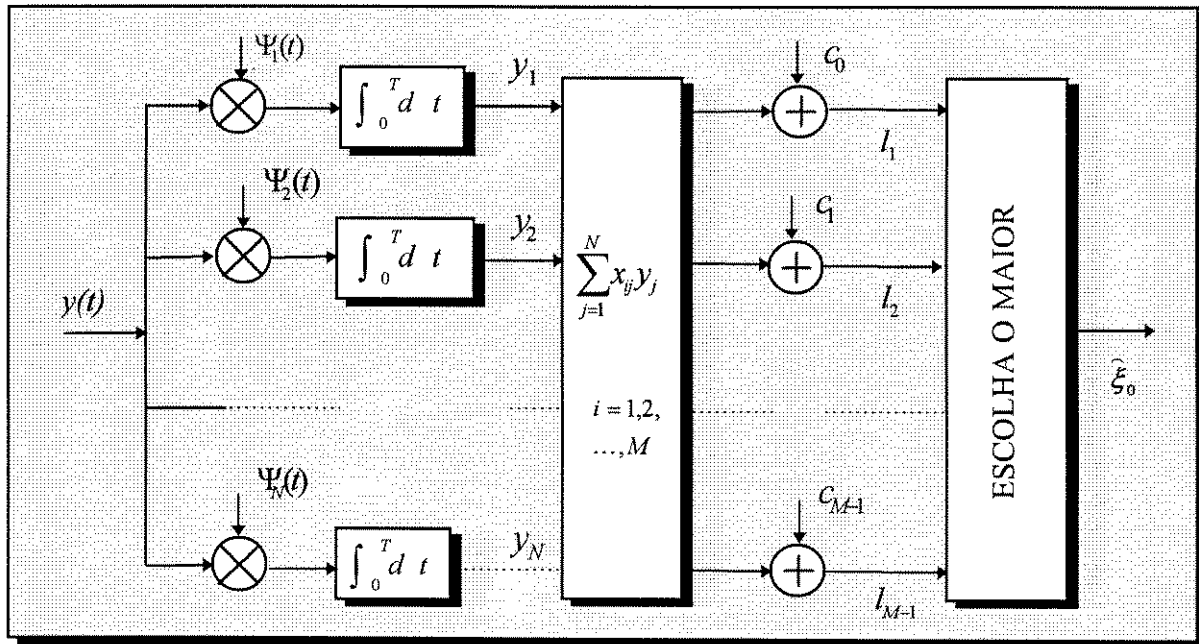
Inserindo (2.20) em (2.19) obtemos

$$l_i = \sum_{j=1}^N x_{ij} y_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N x_{ij}^2, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (2.21)$$

onde

$$y_j \equiv \int_0^T y(t) \Psi_j(t) dt. \quad (2.22)$$

Devido ao completo conhecimento do conjunto de sinais  $\{x_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$ , podemos concluir de (2.21) que uma estatística suficiente para o sinal  $y(t)$  é o conjunto  $\{y_j\}_{j=1}^N$  das componentes do sinal recebido no espaço  $N$ -dimensional gerado pela base ortonormal  $\{\Psi_j(t)\}_{j=1}^N$ . De fato, (2.21) mostra que somente as projeções de  $y(t)$  sobre o espaço de sinais são relevantes para a decisão. O demodulador ignora como dados relevantes qualquer componente do sinal recebido que é ortogonal ao espaço  $N$ -dimensional dos sinais transmitidos. O diagrama de blocos do demodulador baseado em (2.21) é mostrado na Figura 2.3. Há uma diferença conceitual entre este demodulador e aquele da Figura 2.1. A única diferença prática depende do número  $N$  de correlatores. Algumas vezes pode ser muito menos que  $M$ . Por outro lado, alguns processos adicionais estão presentes no demodulador da Figura 2.3.



**Figura 2.3** - Diagrama de Blocos de um Receptor de Correlação com Sinais Expandidos

Vamos considerar o diagrama da Figura 2.3 sob um ponto de vista diferente, com o objetivo de melhorar a interpretação geométrica da regra de decisão ótima. O espaço  $N$ -dimensional utilizado para representar o conjunto de sinais também contém a estatística suficiente para o sinal recebido  $y(t)$ . Portanto, usando (2.20) e (2.22), o sinal recebido pode ser colocado na forma de um vetor:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_j + \mathbf{n}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \quad (2.23)$$

onde

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N), \quad \mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jN}) \text{ e } \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N).$$

Utilizando-se a razão de verossimilhança definida anteriormente e completando o quadrado dos expoentes pela adição de um termo que não depende de  $\xi$ , e portanto é irrelevante para a decisão, definimos a função de verossimilhança

$$\Lambda'_\xi = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^{KT} [y(t) - v_\xi(t)]^2 dt \right\}.$$

Considerando decisão símbolo a símbolo, temos

$$\Lambda'_i = \exp \left\{ -\frac{2}{N_0} \int_0^T [y(t) - x_i(t)]^2 dt \right\}. \quad (2.24)$$

A maximização da expressão (2.24) é obtida tomando-se o menor expoente. Usando a representação vetorial (2.23), podemos escrever

$$\int_0^T [y(t) - x_i(t)]^2 dt = \sum_{j=1}^N (y_j - x_{ij})^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2.$$

Se definirmos a distância Euclidiana entre os dois vetores  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{x}_i$  como

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|,$$

podemos redefinir a regra de decisão de máxima verossimilhança numa abordagem geométrica. O demodulador ótimo escolhe o vetor  $\mathbf{x}_i$  que está mais perto do vetor recebido  $\mathbf{y}$ . Em conclusão, *a decisão de máxima verossimilhança é implementada pelo demodulador de distância mínima*. Cada ponto do espaço representa um possível vetor recebido  $\mathbf{y}$ . O demodulador calcula as distâncias de cada possível vetor transmitido. O espaço é particionado em regiões de decisão  $R_i$  que é o lugar dos pontos mais próximos do vetor  $\mathbf{x}_i$  que de qualquer outro. De maneira formal teríamos:

$$R_i = \left\{ \mathbf{y}: d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) = \max_j d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_j) \right\}. \quad (2.25)$$

A regra de decisão de máxima verossimilhança é portanto:

$$\text{Escolha } \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i \text{ sempre que } \mathbf{y} \in R_i.$$

## 2.4 - Cálculo da Probabilidade de Erro

O desempenho de cada esquema de transmissão usa como medida a *probabilidade de erro de símbolo*, que é a probabilidade de o demodulador escolher uma forma de onda diferente da transmitida. Na ausência de codificação de canal, nenhuma redundância é adicionada à sequência de informação. Portanto, o demodulador, após a seleção da forma de onda, pode fazer o mapeamento inverso da sequência digital, obtendo os bits de informação. Então o outro parâmetro de desempenho de interesse é a *probabilidade de erro de bit*. Estamos considerando *modulação sem memória* e *demodulação coerente*, isto é, o receptor tem conhecimento completo do conjunto possível de sinais transmitidos.

O propósito do demodulador é processar o sinal recebido  $y(t)$  para produzir uma estimativa  $\hat{\xi}$  da sequência transmitida  $\xi$ , e assim uma estimativa  $\hat{m}_k$  de cada símbolo transmitido. Calculando o desempenho de um esquema de modulação através da *probabilidade de erro de símbolo*, temos

$$P(e) = P\{\hat{\xi}_k \neq \xi_k\} = P\{\hat{m}_k \neq m_k\}.$$

Sob a hipótese de que os símbolos são igualmente prováveis, a probabilidade de erro de símbolo pode ser escrita como

$$P(e) = 1 - P(c) = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} P(c|\mathbf{x}_j),$$

onde  $P(c|\mathbf{x}_j)$  é a probabilidade de decisão correta dado que o vetor sinal  $\mathbf{x}_j$ , correspondente ao símbolo  $m_j$ , foi transmitido. Portanto, o cálculo da probabilidade de erro requer o cálculo do conjunto de probabilidades  $\{P(c|\mathbf{x}_j)\}_{j=0}^{M-1}$ . Abordando este problema sob o ponto de vista geométrico, podemos escrever que

$$P(e) = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} P\{\mathbf{y} \in R_j | \mathbf{x}_j\}. \quad (2.26)$$

Isto significa que o demodulador erra quando o vetor  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_j + \mathbf{n}$  não está na região de decisão  $R_j$  do vetor transmitido  $\mathbf{x}_j$ . A probabilidade de erro depende somente da configuração geométrica das regiões de decisão que são uma consequência direta, através de (2.25), de um dado conjunto de sinais transmitidos. Portanto a escolha de uma base ortonormal  $\{\Psi_j(t)\}$  não afeta a probabilidade de erro. Em outras palavras, alterar as formas de onda usadas para a

transmissão não muda a probabilidade de erro, dado que a configuração geométrica do conjunto de vetores é deixada inalterada. Este importante resultado é também devido ao fato da natureza sem distorção do canal. Em conclusão, conjunto de sinais tendo configurações geométricas idênticas são equivalentes.

Este conceito de equivalência entre conjuntos diferentes de sinais pode ser estendido depois de algumas considerações mais cuidadosas da geometria das regiões de decisão. Se definirmos como *pontos de sinais* no espaço de sinais as extremidades dos vetores, podemos dizer que a configuração das regiões de decisão dependem somente deste conjunto de pontos de sinais. Portanto, qualquer rotação ou translação do conjunto de pontos de sinais não muda o valor da probabilidade de erro. Uma vez que a probabilidade de erro é invariante com respeito a translação dos pontos de sinais, tal modificação muda a energia requerida para transmitir cada sinal. Como a energia média necessária para transmitir um dado conjunto de sinais é dada por

$$\mathcal{E}_{\text{media}} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \|\mathbf{x}_i\|^2, \quad (2.27)$$

uma questão importante pode ser levantada. Para uma dada configuração particular de pontos de sinais, e portanto um dado valor de probabilidade de erro, aonde deverá ser localizada a origem de tal forma que a energia média seja mínima ?

Reconhecendo que (2.27) é precisamente a definição de momento de inércia em torno da origem para um conjunto de  $M$  pontos de massas iguais localizados nos pontos de sinais, a resposta é que seu centro de gravidade deve ser a origem. Esta condição pode ser definida matematicamente como

$$\sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

Portanto um sinal satisfazendo (2.28) para uma dada probabilidade de erro requer a menor energia média para transmissão.

Iremos a seguir, definir um conjunto de sinais que apresenta *simetria completa*. Uma configuração geométrica de pontos de sinais apresenta uma simetria completa quando esta configuração possui regiões de decisão congruentes e função densidade de probabilidade simétrica. Nesta situação, a probabilidade condicional de decisão correta é independente do sinal transmitido. Como consequência, (2.26) pode ser escrito como

$$P(e) = 1 - P\{\mathbf{y} \in R_j | \mathbf{x}_j\}, \quad \text{para qualquer } j.$$

Precisamos conhecer a função densidade de probabilidade condicional do vetor recebido  $\mathbf{y}$  para um dado sinal transmitido  $\mathbf{x}_j$ . As variáveis aleatórias Gaussianas  $n_i$  são estatisticamente independentes com média zero e variância  $\frac{N_0}{2}$ . Então a densidade de probabilidade do vetor ruído  $\mathbf{n}$  é dada por

$$f_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{\alpha}|^2}{N_0}\right\}.$$

Como o vetor ruído  $\mathbf{n}$  é independente do sinal transmitido, a densidade de probabilidade condicional do vetor recebido  $f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}_j}(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}_j)$  é Gaussiana com média  $\mathbf{x}_j$  e é dada por

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}_j}(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{x}_j) = f_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}_j).$$

Finalmente, introduzindo esta expressão em (2.26), obtemos

$$P(e) = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{R_j} f_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}_j) d\boldsymbol{\alpha}.$$

### 2.4.1 - Limitantes Superior e Inferior da Probabilidade de Erro

Em muitos casos a probabilidade de erro não pode ser calculada de forma exata, sendo comum utilizar limitantes superiores e inferiores para a probabilidade de erro. Estes limitantes são de interesse prático e exigem poucos cálculos. Um evento de erro  $e_{ij}$  ocorre quando um vetor transmitido  $\mathbf{x}_i$  é transformado pelo canal em um vetor recebido  $\mathbf{y}$ , tal que  $\mathbf{y}$  esteja mais próximo do vetor  $\mathbf{x}_j$ , diferente de  $\mathbf{x}_i$ . Podemos associar o evento  $e_{ij}$  ao conjunto de pontos (hiperplano)

$$\{\mathbf{y}: d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_j) < d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) | \mathbf{x}_i\}.$$

Quando  $\mathbf{x}_i$  é transmitido, o evento de erro é a união de todos os eventos  $e_{ij}$ . Então podemos escrever

$$P(e|\mathbf{x}_i) = P\left\{\bigcup_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} e_{ij}\right\} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P(e_{ij}). \quad (2.29)$$

A Equação (2.29) é denominada *limitante da união* da probabilidade de erro condicional  $P(e|\mathbf{x}_i)$ . Este resultado é consequência direta da propriedade de que a união dos eventos é limitada superiormente pela soma das probabilidades destes eventos. Calcular  $P(e_{ij})$  em (2.29) é fácil porque somente os sinais  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  são considerados. Com isso, podemos escrever (2.29) da seguinte forma

$$P(e|\mathbf{x}_i) \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{ij}}{2\sqrt{N_o}} \right), \quad (2.30)$$

onde  $d_{ij} = d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ . Finalmente, fazendo-se a média de (2.30) sobre o conjunto de sinais, obtemos

$$P(e) \leq \frac{1}{2M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{ij}}{2\sqrt{N_o}} \right),$$

onde  $d_{ij} = d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \sqrt{2\mathcal{E} - 2\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}$ . Note que podemos normalizar os vetores  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_j$  com relação a  $\sqrt{\mathcal{E}}$  conduzindo a  $\mathbf{x}_i^N = \frac{\mathbf{x}_i}{\sqrt{\mathcal{E}}}$  e  $\mathbf{x}_j^N = \frac{\mathbf{x}_j}{\sqrt{\mathcal{E}}}$ . Com isso, finalmente temos que

$$P(e) \leq \frac{1}{2M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{2\mathcal{E}(1 - \mathbf{x}_i^N \mathbf{x}_j^N)}}{2\sqrt{N_o}} \right). \quad (2.31)$$

## 2.5 -Códigos para o Canal Gaussiano

Nesta seção vamos definir o conceito de *código* para o canal Gaussiano. Assumiremos que todos os vetores  $\mathbf{x}_i$  possuem energia constante. Isso implica que a razão de verossimilhança possa ser definida como

$$\Lambda_j(\hat{\mathbf{y}}) = \exp \left\{ \frac{2}{N_o} \hat{\mathbf{y}} \mathbf{x}_j^T \right\},$$

simplificando o esquema de demodulação.

## 2.5.1 - Matriz de Configuração

*Definição 1:* A matriz  $\mathbf{C}=(c_{ij})$  é uma matriz  $M \times M$  cujos elementos são os produtos escalares das formas de onda  $x_i(t)$ ,  $0 \leq i \leq M-1$ :

$$c_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle = \int_0^T x_i(t) x_j(t) dt.$$

Conforme definido anteriormente, as razões de verossimilhança formam um conjunto de estatísticas suficientes para tomada de decisão em relação ao símbolo transmitido. Então, do ponto de vista do receptor, o canal pode ser visto como um mecanismo aleatório que mapeia o sinal transmitido em um conjunto de  $M$  números reais  $\{\Lambda_i(\mathbf{y})\}_{i=0}^{M-1}$ , ou equivalentemente em um vetor  $[\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_0 \rangle, \dots, \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_{M-1} \rangle]$ . A probabilidade de erro pode ser limitada superiormente por

$$P(e) \leq f(\rho), \quad (2.32)$$

onde  $f(\cdot)$  é uma função crescente, e

$$\rho = \max_{i \neq j} c_{ij}.$$

A distância mínima pode ser definida como

$$d_{min}^2 = \int_0^T [x_i(t) - x_j(t)]^2 dt = 2\mathcal{E} - 2\rho,$$

onde  $\mathcal{E}$  é agora a energia dos vetores  $\mathbf{x}_i$ . Devido a (2.32) uma das maneiras de melhorar o índice de desempenho é escolher um conjunto de sinais que minimize  $\rho$ , ou, equivalentemente, que maximize a distância mínima entre os sinais. A probabilidade de erro pode ser definida da seguinte forma

$$P(e) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{M-1} p_{ij}.$$

As probabilidades  $p_{ij}$  denotam que o sinal transmitido  $x_i(t)$  resultou em um sinal recebido pertencente à região  $R_j$ ,  $i \neq j$ . Vamos demonstrar que as probabilidades  $p_{ij}$  dependem do conjunto de formas de onda somente através da matriz  $\mathbf{C}$  [3]. Isto significa que qualquer que seja o índice de desempenho do sistema de comunicação em consideração, este dependerá somente da matriz  $\mathbf{C}$ . Para um sinal transmitido  $x_r(t)$  definimos o vetor  $\mathbf{v}_r$  como

$$\mathbf{v}_r = [\langle x_r + n_1, x_1 \rangle, \dots, \langle x_r + n_M, x_M \rangle].$$



Para um dado valor de  $\tau$ , ou seja, um dado sinal transmitido,  $\mathbf{v}_\tau$  é uma vetor aleatório Gaussiano, com média

$$E\{\mathbf{v}_\tau|\tau\} = [\langle x_\tau, x_1 \rangle, \dots, \langle x_\tau, x_M \rangle] = \tau - \text{ésima linha de } \mathbf{C} \quad (2.34)$$

e matriz covariância

$$E\left\{\left[\mathbf{v}_\tau - E\{\mathbf{v}_\tau|\tau\}\right]^T \left[\mathbf{v}_\tau - E\{\mathbf{v}_\tau|\tau\}\right]\right\} = \mathbf{C} \quad (2.35)$$

independente de  $\tau$ . As probabilidades  $p_{ij}$  são obtidas pela integração das funções densidades de probabilidade Gaussianas com os parâmetros dados por (2.34) e (2.35) sobre as regiões de decisão. Esta operação irá resultar numa função da matriz  $\mathbf{C}$ .

## 2.5.2 - Modelo Geométrico

Precisamos definir inicialmente o conceito de *posto* de uma matriz. A dimensão comum do espaço das linhas e do espaço das colunas de uma matriz  $\mathbf{C}$  é chamado de posto [21]. Considerando o modelo geométrico, se denotarmos por  $N$  o posto da matriz  $\mathbf{C}$ , então podemos encontrar  $M$  vetores coluna  $N$ -dimensionais de norma unitária  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{M-1}$  gerando o espaço  $N$ -dimensional Euclidiano, tal que seus produtos escalares sejam iguais aos das formas de onda

$$\left\{ \frac{x_i(t)}{\mathcal{E}_i} \right\}_{i=0}^{M-1}, \quad t \in (0, T),$$

isto é

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = \frac{1}{\mathcal{E}} \langle x_i, x_j \rangle = \frac{1}{\mathcal{E}} c_{ij}. \quad (2.36)$$

A matriz  $\mathbf{C}$  é simétrica e pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal  $\mathbf{R} = (r_{ij})$ :

$$\mathbf{R} \mathbf{C} \mathbf{R}^T = \mathbf{D}. \quad (2.37)$$

Como  $\mathbf{C}$  é uma matriz de produtos escalares, ela é não-negativa definida [20, p. 590], tendo posto  $N$ . A matriz  $\mathbf{D}$  tem  $N$  elementos positivos na diagonal principal e todos os outros nulos. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que os primeiros  $N$  elementos da diagonal de  $\mathbf{D}$ , digamos  $\lambda_{ii} = \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , são todos positivos. De (2.37) segue que

$$c_{ij} = \sum_l r_{li} \sqrt{\lambda_l} r_{lj} \sqrt{\lambda_l}.$$

Então encontramos  $M$  vetores unitários tal que (2.36) seja satisfeita. Para mostrar que estes vetores geram o espaço Euclidiano  $N$ -dimensional, podemos observar que (2.36) pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y},$$

onde  $\mathbf{Y}$  é uma matriz  $N \times M$  cuja  $i$ -ésima coluna é  $\mathbf{x}_i$ . Como o posto do produto de duas matrizes não pode exceder o menor dos postos, segue que  $\mathbf{Y}$  deve ter posto  $N$ . De fato, se ela for de posto menor do que  $N$ , então  $\mathbf{C}$  também deveria ter posto  $N$ , ao contrário da hipótese. De maneira inversa, se o conjunto  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{M-1}$  de vetores  $N$ -dimensionais gerando o espaço Euclidiano  $N$ -dimensional é dado, considerando  $N$  sinais ortogonais no intervalo  $(0, T)$ , digamos  $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^N$ , podemos construir um conjunto de sinais  $\{x_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$ ,  $t \in (0, T)$ , tal que (2.36) seja satisfeita. Portanto, sendo  $x_{ij}$  a  $j$ -ésima componente de  $\mathbf{x}_i$ , temos:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^N x_{ij} \Psi_j(t), \quad t \in (0, T).$$

O conjunto  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{M-1}$  é denominado de *código  $(M, N)$  para o canal Gaussiano*.

## 2.6 - Grupos

Conforme descrito em [7], o tratamento moderno da álgebra abstrata começa com a simples definição de *grupo*. Este conceito é fundamental para o entendimento do trabalho. Antes de formalizar o conceito de grupo, precisamos de algumas definições básicas.

- Uma *operação binária*  $\bullet$  sobre um conjunto  $G$  é uma função do produto cartesiano de  $G$  com  $G$  em  $G$ ,  $\bullet: G \times G \rightarrow G$ . Para qualquer  $a, b \in G$  escrevemos  $a \bullet b$  para  $\bullet(a, b)$ .

- Uma operação binária sobre um conjunto  $G$  é associativa se para todos  $a, b, c \in G$ ,  $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ .

- Se  $\bullet$  é uma operação binária sobre um conjunto  $G$  dizemos que os elementos  $a$  e  $b$  de  $G$  comutam se  $a \bullet b = b \bullet a$ . Dizemos então que  $\bullet$  (ou  $G$ ) é comutativo se para todos  $a, b \in G$ ,  $a \bullet b = b \bullet a$ .

*Definição 2:* Um *grupo* é um par ordenado  $(G, \bullet)$  onde  $G$  é um conjunto e  $\bullet$  é uma operação binária sobre  $G$  satisfazendo os seguintes axiomas:

---

1 -  $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ , para todo  $a, b, c \in G$  (isto é,  $\bullet$  é associativa).

2 - Existe um elemento  $e$  em  $G$  tal que  $a \bullet e = e \bullet a = a$ , para todo  $a \in G$ .  $e$  é chamado identidade de  $G$ .

3 - Para cada  $a \in G$  existe um elemento  $a^{-1}$  de  $G$  tal que  $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$ .  $a^{-1}$  é chamado o inverso de  $a$ .

O grupo  $(G, \bullet)$  é chamado *abeliano* (ou comutativo) se  $a \bullet b = b \bullet a$ , para todo  $a, b \in G$ . Seja  $G$  um grupo. O subconjunto  $H$  de  $G$  é um subgrupo de  $G$  se  $H$  é não vazio e  $H$  é fechado sobre produtos e inversos. Se  $H$  é um subgrupo de  $G$ , escrevemos  $H \leq G$ .

*Definição 3:* Seja  $H$  um subgrupo de um grupo  $G$ , e seja  $a \in G$ . A *classe lateral à esquerda*  $a \bullet h$  de  $H$  é o conjunto  $\{a \bullet h | h \in H\}$ . A *classe lateral à direita*  $h \bullet a$  é similarmente definido.

Para o caso de grupos abelianos, a classe lateral à esquerda e a classe lateral à direita são idênticas. Qualquer elemento da classe lateral pode ser o *líder de classe lateral* ou *representante da classe lateral*. O conjunto de representantes definem uma partição de  $G$ .

### 2.6.1 - Teorema Fundamental sobre Grupos Abelianos

Um teorema importante que utilizaremos posteriormente é o teorema fundamental sobre grupos abelianos finitos.

*Teorema 1* [18, p. 119]: Um grupo abeliano finito é o produto direto de grupos cíclicos.

Isso significa que um grupo abeliano  $G$  com ordem  $p^n$  é isomorfo ao produto direto de grupos cíclicos,  $G = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ , onde os  $A_i$  são grupos cíclicos de ordem  $p^{n_i}$  e  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Os inteiros  $n_i \geq 0$  dão uma *partição* de  $n$ . Dois grupos abelianos de ordem  $p^n$  são isomorfos se e somente se eles possuem os mesmos  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Podemos concluir portanto que o número de grupos não isomorfos de ordem  $p^n$  é igual ao número de partições de  $n$ . Como exemplo, para  $n=4$  temos 5 partições que são  $4=4$ ,  $4=3+1$ ,  $4=2+2$ ,  $4=2+1+1$ ,  $4=1+1+1+1$ . Isso significa que há cinco grupos não isomorfos de ordem  $p^4$ .

## 2.7 - Representação de Grupos

Seja  $G$  um grupo abstrato finito. Se para cada elemento  $g_i \in G$  existe uma matriz  $N \times N$   $\mathbf{D}(g_i)$  não singular, e se  $\mathbf{D}(g_i)\mathbf{D}(g_j) = \mathbf{D}(g_i g_j)$ , o conjunto  $D = \{\mathbf{D}(g_i)\}$ , é chamado de *representação*  $N$ -dimensional do grupo  $G$  [3].

### 2.7.1 - Representação Redutível e Irredutível

Uma representação  $N$ -dimensional  $D$  é dita ser *redutível* se existe uma matriz  $N \times N$   $\mathbf{U}$ , tal que  $\mathbf{U}\mathbf{D}(g_i)\mathbf{U}^{-1}$  possa ser escrita como a soma direta de duas matrizes  $\mathbf{A}(g_i)$  e  $\mathbf{B}(g_i)$  na forma

$$\mathbf{U}\mathbf{D}(g_i)\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}(g_i) \oplus \mathbf{B}(g_i) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{A}(g_i) & \Omega' \\ \Omega'' & \mathbf{B}(g_i) \end{pmatrix},$$

onde  $\mathbf{A}(g_i)$  e  $\mathbf{B}(g_i)$  são matrizes quadradas, e  $\Omega'$ ,  $\Omega''$  são matrizes cujos elementos são nulos. Uma representação que não é redutível é chamada de *irredutível*.

### 2.7.2 - Representação Real

Toda representação real de um grupo finito é equivalente a uma representação por matrizes ortogonais. Pode-se definir também representações reais irredutíveis, obedecendo a mesma definição mostrada na Subseção 2.7.1. Toda representação real irredutível que é redutível sobre os números complexos é equivalente a soma direta de uma representação irredutível e seu conjugado. Se a representação irredutível

$$D = \{\mathbf{D}(g_i)\} = \{\mathbf{D}_1(g_i) + j\mathbf{D}_2(g_i)\}, \quad g_i \in G, \quad j = \sqrt{-1},$$

(com  $\mathbf{D}_1(g_i)$  e  $\mathbf{D}_2(g_i)$  reais) não é equivalente a uma representação real ortogonal, então

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_1(g_i) & \mathbf{D}_2(g_i) \\ -\mathbf{D}_2(g_i) & \mathbf{D}_1(g_i) \end{pmatrix}, \quad g_i \in G,$$

é uma representação real irredutível por matrizes ortogonais reais.

## 2.8 -Códigos de Grupo para o Canal Gaussiano

*Definição 4:* Um código de grupo para o canal Gaussiano é um conjunto de  $M$  vetores unitários  $N$ -dimensionais  $\{\mathbf{x}_i\}$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ , com as seguintes propriedades:

1 - Os vetores  $\{\mathbf{x}_i\}$  geram o espaço vetorial  $N$ -dimensional.

2 - Existe um conjunto de  $M$  matrizes ortogonais  $\{O_i\}$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ , tal que

$$\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{M-1} = \{\mathbf{x}_j \cdot O_i\}_{i=0}^{M-1}, \quad \text{para qualquer } j \in (0, M-1).$$

Para um código de grupo as regiões de decisão de MV  $\{R_i\}_{i=0}^{M-1}$  são todas congruentes e todos os vetores tem a mesma probabilidade de erro. É possível, para todos os códigos de grupo conhecidos, encontrar um conjunto  $\{O_i\}_{i=0}^{M-1}$  de matrizes ortogonais satisfazendo a condição 2 da Definição 4, e formando um grupo sobre multiplicação de matrizes. O inverso é obviamente verdade. O conjunto  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{M-1}$  definido por

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 \cdot O_i \quad (2.38)$$

onde  $\{O_i\}_{i=0}^{M-1}$  é um grupo multiplicativo de matrizes ortogonais, é um código grupo.

*Definição 5:* Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz  $N \times N$ , então um vetor não nulo  $\mathbf{x} \in R^N$  é chamado um autovetor de  $\mathbf{A}$  se  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  é um escalar múltiplo de  $\mathbf{x}$ , ou seja,  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ , para qualquer escalar  $\alpha$ . O escalar  $\alpha$  é chamado de autovalor da matriz  $\mathbf{A}$ .

O conjunto  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{M-1}$  contém  $M$  vetores distintos se e somente se  $\mathbf{x}_0$  não é um autovetor de qualquer uma das matrizes  $O_i$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ . Dois códigos de grupo são chamados equivalentes se um pode ser obtido a partir do outro por uma transformação ortogonal. Slepian [19] mostrou que um código de grupo definido pela equação (2.38) é equivalente a soma direta de  $j$  códigos de grupo, cada um gerado por grupo de matrizes ortogonais irredutíveis, ou seja,  $O_i$  na forma pseudodiagonal  $O_i = [A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ij}]$ , onde  $\{A_{ik}\}_{i=0}^{M-1}$  constituem grupos irredutíveis de matrizes ortogonais. Para os códigos de grupo temos as regiões de decisão congruentes, ou seja,  $P(e|\mathbf{x}_i) = P(e)$ . Finalmente obtemos a expressão do limitante da união da probabilidade de erro,

$$P(e) \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\mathcal{E}(1 - \mathbf{x}_i^N \mathbf{x}_j^N)}{N_o}} \right).$$

# Capítulo 3

## Códigos de Grupo Comutativo

Vamos analisar uma classe de códigos de grupo para o canal Gaussiano, gerada a partir de grupos comutativos de matrizes ortogonais. Tais códigos, denominados *códigos de grupo comutativo para o canal Gaussiano*, podem ser descritos de maneira muito parecida com os códigos algébricos lineares. O nosso estudo está fundamentado no modelo vetorial do canal Gaussiano branco, conforme descrito no Capítulo 2.

### 3.1 - Propriedades Gerais

Conforme vimos na Seção 2.7, todo grupo finito possui uma representação  $N$ -dimensional através de um conjunto de matrizes que formam um grupo. Em nosso caso estamos interessados em representações reais-irredutíveis. Isso é equivalente a representações feitas por matrizes ortogonais. Para os códigos de grupo comutativo este conjunto de matrizes deve formar um grupo comutativo sob multiplicação. Podemos definir então o conceito de código de grupo comutativo [5].

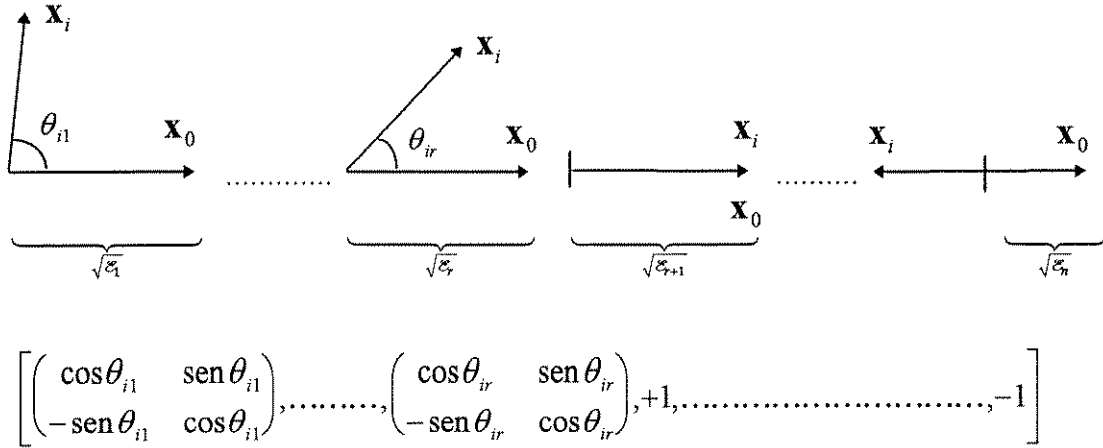
*Definição 6:* Um código de grupo comutativo é um código de grupo gerado por um grupo comutativo de matrizes  $N \times N$  ortogonais,  $\{O_i\}_{i=0}^{M-1}$ .

As matrizes ortogonais podem ser representadas na forma pseudodiagonal, definida como:

$$O_i = \text{diagonal} \left[ \begin{pmatrix} \cos \theta_{i1} & \sin \theta_{i1} \\ -\sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos \theta_{ir} & \sin \theta_{ir} \\ -\sin \theta_{ir} & \cos \theta_{ir} \end{pmatrix}, \pm 1, \dots, \pm 1 \right]. \quad (3.1)$$

Uma propriedade importante é que cada código de grupo comutativo é equivalente a soma direta de um conjunto de subcódigos unidimensionais e bidimensionais gerados por representações reais irredutíveis de matrizes ortogonais.

O vetor  $\mathbf{x}_0$  é projetado sobre  $n$  subespaços mutuamente ortogonais,  $r$  bidimensionais e  $n-r$  unidimensionais. As primeiras  $r$  componentes são rotacionadas por  $O_i$  de um ângulo  $\theta_{ij}$  ( $j \leq r$ ) e os sinais remanescentes das componentes unidimensionais são alterados ou não, de acordo com as entradas  $\pm 1$ . Portanto, conforme descrito por Ingemarsson [5], essa divisão unidimensional e bidimensional pode ser ilustrada como mostrado na Figura 3.1



**Figura 3.1** - Representação dos Subcódigos Unidimensionais e Bidimensionais

Discutiremos no Capítulo 4 os aspectos de implementação, mas é importante observar que as primeiras  $r$  componentes podem ser representadas por  $r$  sinais modulados em fase mutuamente ortogonais e as  $n-r$  componentes restantes correspondem a sinais antipodais. A operação de  $O_i$  é descrita por seu vetor de rotação  $\vec{\theta}_i$ , definido como

$$\vec{\theta}_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{ir}, \theta_{r+1}, \dots, \theta_{in}). \quad (3.2)$$

As primeiras  $r$  componentes de  $\vec{\theta}_i$  são os ângulos de rotação bidimensionais da equação (3.1) e as  $n-r$  componentes restantes são 0 ou  $\pi$ . Então podemos rescrever a equação (3.1) da seguinte forma,

$$O_i = \text{diagonal} \left[ \begin{pmatrix} \cos \theta_{i1} & \sin \theta_{i1} \\ -\sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos \theta_{ir} & \sin \theta_{ir} \\ -\sin \theta_{ir} & \cos \theta_{ir} \end{pmatrix}, \cos \theta_{ir+1}, \dots, \cos \theta_{in} \right]. \quad (3.3)$$

O vetor rotação do produto de duas matrizes é a soma módulo  $2\pi$  de seus vetores rotação, onde a adição de vetores rotação é definida como adição componente a componente, módulo  $2\pi$ . O conjunto de vetores rotação  $\{\vec{\theta}_i\}_{i=0}^{M-1}$  associado com o grupo multiplicativo  $\{O_i\}_{i=0}^{M-1}$ ,

forma um grupo aditivo, isomorfo a  $\{O_i\}_{i=0}^{M-1}$ . A matriz identidade tem vetor rotação  $\vec{\theta}_0 = \vec{0}$ , o vetor identidade, que é o elemento nulo do grupo  $\{\vec{\theta}_i\}_{i=0}^{M-1}$ .

## 3.2 - O Problema do Vetor Inicial

A busca por códigos de grupo com baixa probabilidade de erro envolve basicamente dois problemas. Primeiro precisamos encontrar um grupo apropriado de matrizes ortogonais e, segundo, um vetor inicial que junto com o grupo de matrizes, proporcione uma probabilidade de erro tão pequena quanto possível. Vamos definir de forma genérica o problema do vetor inicial, que deve ser escolhido em função de certos critérios. Devemos encontrar um vetor inicial  $\mathbf{x}_0$  que maximize a distância mínima, ou seja, encontrar

$$\max_{\mathbf{x}_0} \min_{i \neq 0} \|\mathbf{x}_0 - O_i \cdot \mathbf{x}_0\|$$

para um dado conjunto de matrizes.

Foi mostrado que, para o caso de códigos de grupo cíclico [3,4], este é equivalente a um problema de otimização linear e pode ser resolvido usando-se o *algoritmo simplex* [6]. Vamos verificar que podemos também modelar os casos em que o grupo é abeliano através do problema de otimização linear para o caso de códigos de grupo comutativo. Dado um conjunto de matrizes  $\{O_i\}_{i=0}^{M-1}$ , as propriedades de distância são completamente caracterizadas pelo vetor  $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_N)$ . Inicialmente vamos considerar a distância entre o vetor inicial  $\mathbf{x}_0$  e um outro vetor qualquer do código  $\mathbf{x}_i$ , que pode ser expressa como

$$d_i = \|\mathbf{x}_0 - O_i \cdot \mathbf{x}_0\|. \quad (3.4)$$

Podemos manipular esta expressão de forma a obter  $d_i$  como uma função das coordenadas do vetor  $\mathbf{x}_0$  e dos ângulos  $\theta_{ij}$  das matrizes  $O_i$ . Fazendo-se isso podemos mostrar que recaímos em um problema de programação linear. Todos os passos desta demonstração são descritos a seguir.



$$d_i^2 = \left\| (x_1, \dots, x_N) - (x_1 \cdot \cos \theta_{i1} - x_2 \cdot \sin \theta_{i1}, x_1 \cdot \sin \theta_{i1} + x_2 \cdot \cos \theta_{i1}, \dots, x_{2r-1} \cdot \cos \theta_{ir} - x_{2r} \cdot \sin \theta_{ir}, x_{2r-1} \cdot \sin \theta_{ir} + x_{2r} \cdot \cos \theta_{ir}, x_{2r+1} \cdot \cos \theta_{i(r+1)}, \dots, x_N \cdot \cos \theta_{in}) \right\|^2$$

$$d_i^2 = \left\| (x_1 - x_1 \cdot \cos \theta_{i1} + x_2 \cdot \sin \theta_{i1}, x_2 - x_1 \cdot \sin \theta_{i1} - x_2 \cdot \cos \theta_{i1}, \dots, x_{2r-1} - x_{2r-1} \cdot \cos \theta_{ir} + x_{2r} \cdot \sin \theta_{ir}, x_{2r} - x_{2r-1} \cdot \sin \theta_{ir} - x_{2r} \cdot \cos \theta_{ir}, x_{2r+1} - x_{2r+1} \cdot \cos \theta_{i(r+1)}, \dots, x_N - x_N \cdot \cos \theta_{in}) \right\|^2$$

Podemos expressar  $d_i^2$  da seguinte forma:

$$d_i^2 = a_1 + \dots + a_r + a_{r+1} + \dots + a_n,$$

$$\text{onde } a_j = 2 \cdot (x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2) - 2 \cdot \cos \theta_{ij} \cdot (x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2), \text{ para } 1 \leq j \leq r \quad (3.5)$$

e

$$a_j = x_{j+r}^2 - 2 \cdot x_{j+r}^2 \cdot \cos \theta_{ij} + x_{j+r}^2 \cdot \cos^2 \theta_{ij}, \text{ para } r+1 \leq j \leq n. \quad (3.6)$$

Como  $\cos^2 \theta_{ij} = 1$  para  $r+1 \leq j \leq n$ , podemos reescrever a equação 3.6 da seguinte forma

$$a_j = 2 \cdot x_{j+r}^2 - 2 \cdot x_{j+r}^2 \cdot \cos \theta_{ij}, \text{ para } r+1 \leq j \leq n \quad (3.7)$$

Adicionando os termos, obtemos

$$d_i^2 = \sum_{j=1}^r 2 \cdot (x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2) - 2 \cdot \cos \theta_{ij} \cdot (x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2) + \sum_{j=r+1}^n 2 \cdot x_{j+r}^2 - 2 \cdot x_{j+r}^2 \cdot \cos \theta_{ij}. \quad (3.8)$$

Considerando os vetores normalizados (energia unitária), temos que

$$\sum_{j=1}^r 2 \cdot (x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2) + \sum_{j=r+1}^n 2 \cdot x_{j+r}^2 = 2 \cdot \|(x_1, \dots, x_N)\|^2 = 2.$$

Portanto, podemos reescrever (3.8) como

$$d_i^2 = 2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^r \cos \theta_{ij} \cdot (x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2) - 2 \cdot \sum_{j=r+1}^n x_{j+r}^2 \cdot \cos \theta_{ij}. \quad (3.9)$$

Definindo-se

$$\begin{aligned}\mu_j &= x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2, \text{ para } 1 \leq j \leq r, \text{ e} \\ \mu_j &= x_{j+r}^2, \text{ para } r+1 \leq j \leq n,\end{aligned}\tag{3.10}$$

temos

$$d_i^2 = 2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot \cos \theta_{ij} - 2 \cdot \sum_{j=r+1}^n \mu_j \cdot \cos \theta_{ij} .\tag{3.11}$$

Através de algumas manipulações algébricas, podemos rescrever a equação (3.11) de outra forma. Dado que  $\cos(2A) = 1 - 2 \cdot \sin^2 A$ , temos:

$$\begin{aligned}d_i^2 &= 2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2}) - 2 \cdot \sum_{j=r+1}^n \mu_j \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2}) = \\ &= 2 - 2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^r \mu_j + \sum_{j=r+1}^n \mu_j \right] - 2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^r -2 \cdot \mu_j \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} \right] - 2 \cdot \left[ \sum_{j=r+1}^n -2 \cdot \mu_j \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} \right] = \\ &= 4 \cdot \left[ \sum_{j=1}^r \mu_j \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} + \sum_{j=r+1}^n \mu_j \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} \right].\end{aligned}$$

Supondo que  $d^2$  seja a distância ao vizinho, temos

$$d_i^2 \geq d^2 ,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^r 4 \cdot \mu_j \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} + \sum_{j=r+1}^n 4 \cdot \mu_j \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} \geq d^2 .$$

Dividindo-se todos os termos por  $d^2$  chegamos a seguinte relação,

$$\sum_{j=1}^r \frac{4 \cdot \mu_j}{d^2} \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} + \sum_{j=r+1}^n \frac{4 \cdot \mu_j}{d^2} \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} \geq 1 .$$

Denominando

$$y_i \equiv \frac{4 \cdot \mu_i}{d^2} ,\tag{3.12}$$

segue que

$$\sum_{j=1}^r y_j \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} + \sum_{j=r+1}^n y_j \cdot \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2} \geq 1 .$$

Pode-se verificar que

$$\sum_{i=1}^n y_i = \frac{4}{d^2} \left( \sum_{i=0}^n \mu_i = 1 \right) .\tag{3.13}$$

Da expressão (3.13) podemos verificar que maximizar a distância mínima, significa minimizar a expressão linear

$$\sum_{i=1}^n y_i \quad (3.14)$$

considerando as seguintes restrições

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{y}^T \geq 1, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{y} \geq 0^1, \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n),$$

$$b_{ij} = \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2}, \text{ para } j \leq r$$

$$\text{e } b_{ij} = \sin^2 \frac{\theta_{ij}}{2}, \text{ para } r+1 \leq j \leq n \quad (\theta_{ij} \in \{0, \pi\})$$

Foi mostrado então que para os códigos de grupo comutativo o problema do vetor inicial também pode ser formulado como um problema de otimização linear. Teremos uma equação de restrição para cada matriz  $O_i$ , representadas pela equação (3.15). A equação de restrição dada por (3.16) implica em se restringir valores negativos de distância mínima.

Podemos concluir que uma diferença fundamental entre os códigos de grupo comutativo e os códigos de grupo cíclico está na estrutura pseudodiagonal das matrizes  $O_i$ . Para os códigos de grupo comutativo a forma pseudodiagonal das matrizes  $O_i$  é dada por

$$O_i = \text{diagonal} \left[ \begin{pmatrix} \cos \theta_{i1} & \sin \theta_{i1} \\ -\sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos \theta_{ir} & \sin \theta_{ir} \\ -\sin \theta_{ir} & \cos \theta_{ir} \end{pmatrix}, \pm 1, \dots, \pm 1 \right].$$

Como descrito em [3,4], para os códigos de grupo cíclico temos uma forma pseudodiagonal definida por

$$O_i = \text{diagonal} \left[ \begin{pmatrix} \cos \theta_{i1} & \sin \theta_{i1} \\ -\sin \theta_{i1} & \cos \theta_{i1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos \theta_{ir} & \sin \theta_{ir} \\ -\sin \theta_{ir} & \cos \theta_{ir} \end{pmatrix}, \pm 1 \right],$$

ou seja, qualquer grupo cíclico pode ter uma representação contendo apenas um subcódigo unidimensional, sendo os demais bidimensionais. No Capítulo 4 vamos mostrar numericamente uma justificativa desta representação.

<sup>1</sup> A notação  $\mathbf{y} \geq 0$  significa que cada componente  $y_i \geq 0$

### 3.3 - Parâmetros de Desempenho

Quando se deseja comparar dois esquemas de modulação digital, ambos devem ter, a priori, a mesma taxa de transmissão. O índice de desempenho geralmente utilizado, é a probabilidade de erro de bit ou, o limitante da união da probabilidade de erro. Os códigos de grupo apresentam as mais variadas taxas de transmissão, inclusive taxas não inteiras. Portanto, deve-se utilizar outras medidas de desempenho, que permitam comparar os códigos de grupo. Uma das medidas utilizadas é a *eficiência espectral*, que é definida como a relação entre a taxa de transmissão e a largura de banda,

$$\frac{R}{W} \quad (3.17)$$

Essa medida representa a quantidade de bits/s transmitidos para cada 1 Hz de frequência. A taxa de transmissão de um esquema de modulação é dada por

$$R = \frac{\log_2 M}{T},$$

e representa a quantidade de bits transmitidos a cada período de sinalização. A unidade utilizada é *bits/s*. Já a largura de banda adotada será  $\frac{1}{2T}$ , que é a menor largura de banda conseguida de forma a minimizar a interferência intersimbólica. De modo a relacionar esta medida com a dimensão do espaço de sinais, vamos utilizar a seguinte relação,

$$N = 2 \cdot W \cdot T. \quad (3.18)$$

Da equação 3.18, obtemos

$$\frac{R}{W} = \frac{2 \cdot \log_2 M}{N}. \quad (3.19)$$

O outro parâmetro utilizado é dado por

$$K = (1 - \rho) \cdot \log_2 M,$$

e pode ser expresso como uma função da distância mínima entre as palavras código,

$$K = \frac{d_{min}^2}{2} \cdot \log_2 M \quad (3.20)$$

As equações (3.19) e (3.20) serão utilizadas no capítulo seguinte, onde analisaremos o desempenho de alguns códigos de grupo gerados.

### 3.4 - Geração de Códigos de Grupo Comutativo

O primeiro passo na geração de códigos de grupo comutativo é a escolha de um conjunto de matrizes ortogonais. Estas matrizes devem satisfazer a propriedade mencionada anteriormente, ou seja, devem formar um grupo comutativo sob multiplicação ordinária. Através delas se determinará um vetor inicial ótimo, utilizando-se algum método de otimização. A eficiência espectral do código de grupo é definida pela própria estrutura das matrizes, já a probabilidade de erro, vai depender do vetor inicial escolhido. Portanto, a obtenção do conjunto de matrizes de alguma forma deve ser realizada. Não existe nenhum procedimento prático, que permita obter diretamente um conjunto ótimo, em função de critérios pré-estabelecidos.

A idéia é particionar um dado grupo comutativo, obtendo-se assim, através do isomorfismo, o conjunto de matrizes. Estes grupos comutativos serão referidos como grupos geradores. A partir de um dado grupo gerador, utiliza-se um algoritmo de maneira a obter-se subgrupos que apresentem uma boa característica em termos do conjunto de distâncias mínimas num dado nível de partição.

Vamos definir agora a estrutura dos grupos comutativos que serão utilizados. Qualquer conjunto de números inteiros  $Z_Q = \{0, \dots, Q-1\}$  forma um grupo comutativo sob a operação de adição módulo  $Q$ . Utilizaremos grupos, denominados *geradores*, do tipo  $G = (Z_Q)^L$ , onde  $Q$  é uma potência de 2,  $L$  um inteiro. A notação  $(Z_Q)^L$  representa o produto cartesiano

$$\underbrace{Z_Q \times Z_Q \times \dots \times Z_Q}_L.$$

A partição dos grupos geradores é feita através dos *representantes de classes laterais* ou, também denominados, *líderes de classe laterais* [7]. Todo elemento identidade de um grupo gerador é um subgrupo, pois ele próprio é o elemento identidade e o elemento inverso. Portanto inicia-se a partição através do elemento zero e busca-se pelos representantes de classes laterais que vão gerar os demais subgrupos. É descrito a seguir as etapas do algoritmo utilizado para a partição dos grupo comutativos  $(Z_Q)^L$ . Esta é uma versão simplificada de um algoritmo descrito em [10,11], utilizado para se obter partições geometricamente uniformes de constelações  $L$ -MPSK.

As etapas do algoritmo são as seguintes:

1 - Inicialização: Denomina-se de  $np$  o nível de partição. Atribui-se a  $np$  o valor  $m$  (onde o número de elementos do grupo gerador é  $2^m$ ) e armazena-se o elemento identidade no subgrupo  $SG_m^1$ . Armazena-se o número de subgrupos como  $N(m) = 1$ .

2 - Decrementa-se o valor de  $np$  de uma unidade. Se  $np$  for igual a zero, será o final do algoritmo. Caso contrário, atribui-se ao ponteiro de subgrupo  $ps=1$ .

3 - Recupera-se o subgrupo  $SG_{np+1}^{ps}$  identificado por  $ps$  no nível de partição  $np+1$  e calcula-se suas classes laterais  $c_{np}^{(i)}$ .

4 - Faz-se o contador de classes laterais  $k=1$ .

5 - Verifica-se se a união de  $SG_{np+1}^{ps}$  com  $c_{np}^{(k)}SG_{np+1}^{ps}$  forma um subgrupo, onde  $c_{np}^{(k)}SG_{np+1}^{ps}$  denota o conjunto formado pela soma de  $c_{np}^{(k)}$  a cada elemento de  $SG_{np+1}^{ps}$ . Se união não formar um subgrupo, vá para o passo número 7.

6 - Verifica-se se este subgrupo já foi considerado. Se ainda não foi considerado, armazena-se o novo subgrupo como  $SG_{np}^{ps}$  e incrementa-se o valor de  $N(np)$ .

7 - Incrementa-se  $k$ . Se  $k$  for maior que o número máximo de classes laterais, vá para o passo 8, senão vá para o passo 5.

8 - Incrementa-se  $ps$ . Se  $ps$  for maior que  $N(np+1)$ , vá para o passo 2. Caso contrário vá para o passo 3.

Na Figura 3.2 é mostrado o diagrama de blocos do algoritmo de partição. O processo de partição consiste de uma busca exaustiva pelos representantes de classes laterais que vão gerar novos subgrupos. Posteriormente vamos fazer algumas observações importantes sobre a natureza iterativa do algoritmo, suas vantagens e desvantagens. No Anexo A consta a listagem do programa de partição, que foi desenvolvido em linguagem C.

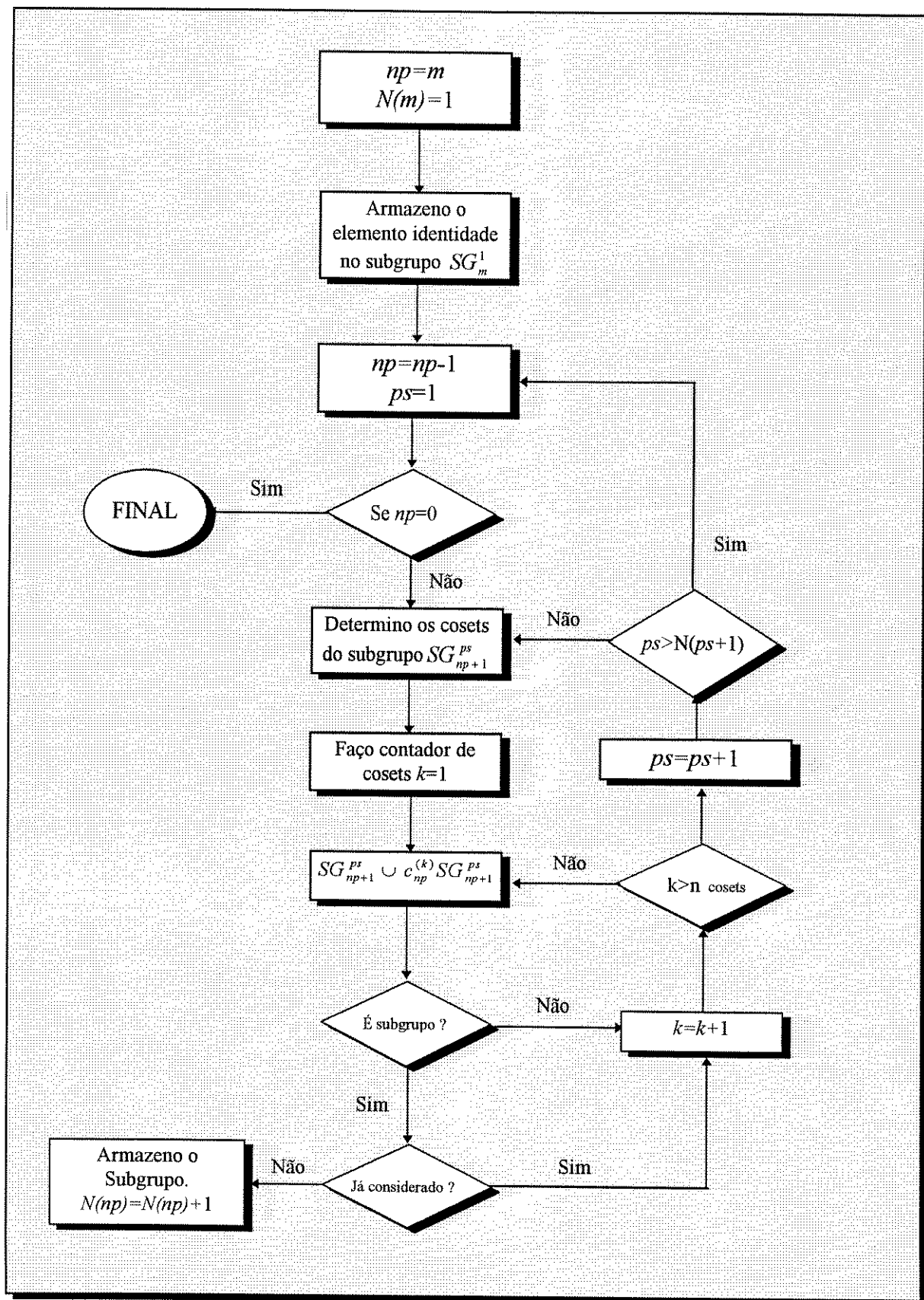


Figura 3.2 - Diagrama de Blocos do Algoritmo de Partição.

Como exemplo de utilização do algoritmo vamos considerar a partição do grupo  $(Z_4)^2$ , que tem 16 elementos,

$$\{00,01,02,03,10,20,30,11,12,13,21,22,23,31,32,33\}.$$

- Passo 1 - Inicialmente faz-se o nível de partição  $np=4$  e armazena-se o elemento identidade  $(SG_{np}^1)$  como  $SG_4^1 = \{00\}$ . Armazena-se o número de subgrupos  $N(4)=1$ .

- Passo 2 - Decrementa-se  $np$ , obtendo-se  $np=3$ . Atribui-se ao ponteiro de subgrupo  $ps=1$ .

- Passo 3 - Calcula-se todas as classes laterais  $(c_{np}^{(i)})$  de  $(SG_{np+1}^{ps})$ ,  $SG_4^1 = \{00\}$ , que são todos os outros elementos, definidos como,  $c_3^{(1)} = \{01\}$ ,  $c_3^{(2)} = \{02\}$ , ...,  $c_3^{(15)} = \{33\}$ .

- Passo 4 - Faz-se  $k=1$ .

- Passo 5 - Verifica-se se a união de  $SG_4^1$  ( $SG_{np+1}^{ps}$ ) com  $c_3^{(1)}SG_4^1$  ( $c_{np}^{(k)}SG_{np+1}^{ps}$ ) forma um subgrupo, ou seja, verifica-se se  $SG_4^1 \cup c_3^{(1)}SG_4^1 = \{00\} \cup \{01\} = \{00,01\}$  é um subgrupo. Como não é subgrupo vá para o passo 7 e incremente  $k$ , isto é,  $k=2$ . Como  $k < 15$  volto ao passo 5. Verifica-se se  $SG_4^1 \cup c_3^{(2)}SG_4^1 = \{00\} \cup \{02\} = \{00,02\}$ .

Neste caso é um subgrupo. Ele ainda não foi considerado, portanto armazene este novo subgrupo como  $SG_3^1 = \{00,02\}$  e incremente  $N(3)=1$ . Incremente  $k$ ,  $k=3$ , como  $k < 15$  volte ao passo 5.

Assim, segue-se sucessivamente os passos do algoritmo obtendo-se os subgrupos em cada nível de partição. Para o nível de partição  $np=3$ , podemos descrever resumidamente a geração de subgrupos, da seguinte maneira:

$k=1$  -  $SG_4^1 \cup c_3^{(1)}SG_4^1 = \{00\} \cup \{01\} = \{00,01\}$  -  $N(3)=0$  - Não é Subgrupo.

$k=2$  -  $SG_4^1 \cup c_3^{(2)}SG_4^1 = \{00\} \cup \{02\} = \{00,02\}$  -  $N(3)=1$  - É Subgrupo.

$\vdots$

$k=5$  -  $SG_4^1 \cup c_3^{(5)}SG_4^1 = \{00\} \cup \{20\} = \{00,20\}$  -  $N(3)=2$  - É Subgrupo.

$\vdots$

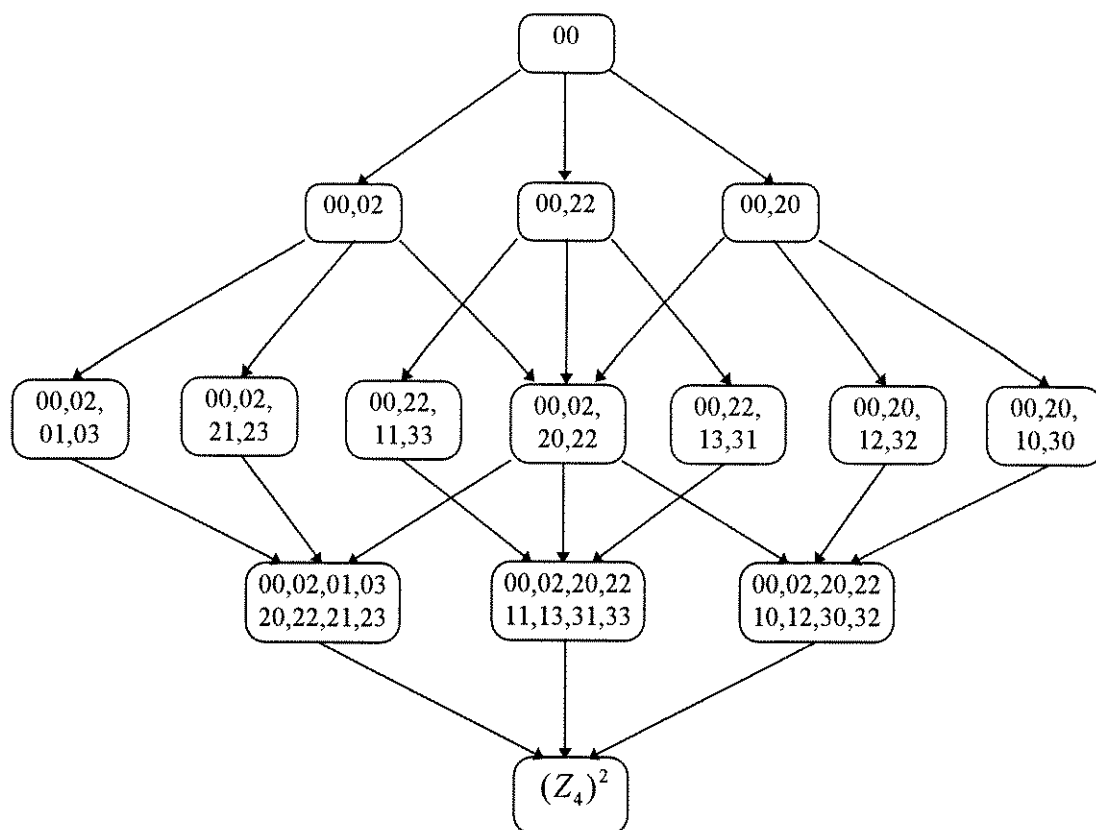
$k=11$  -  $SG_4^1 \cup c_3^{(11)}SG_4^1 = \{00\} \cup \{22\} = \{00,22\}$  -  $N(3)=3$  - É Subgrupo.

$\vdots$

$k=15$  -  $SG_4^1 \cup c_3^{(15)}SG_4^1 = \{00\} \cup \{33\} = \{00,33\}$  -  $N(3)=3$  - Não é Subgrupo.



Portanto, no nível de partição  $np=3$  obtemos 3 subgrupos, de cardinalidade 2. No nível  $np=2$ , obtêm-se 7 subgrupos, com cardinalidade 4. No nível  $np=1$ , têm-se 3 subgrupos de cardinalidade 8. Finalmente para  $np=0$ , obtêm-se o grupo gerador  $(Z_4)^2$ , com 16 elementos. Essa descrição pode ser melhor visualizada através da árvore de partição deste subgrupo, mostrada na Figura 3.3.



**Figura 3.3 - Árvore de Partição.**

De modo geral cada subgrupo é um *código de bloco*  $C$  sobre  $Z_Q$ , cujas palavras código  $\underline{c}_i$  são formadas por  $L$ -uplas,  $\underline{c}_i = (c_{i1}, \dots, c_{iL})$ . Através deste algoritmo, geramos as partições dos grupos geradores  $(Z_8)^2$ ,  $(Z_8)^3$  e  $(Z_8)^4$ . No Anexo B consta a partição completa de  $(Z_8)^3$ , pois a nossa análise para a busca de bons códigos baseou-se praticamente nesta partição. É importante fazer algumas considerações sobre o algoritmo. Este algoritmo foi implementado em linguagem C e foi rodado em estações de trabalho *SUN SPARC 20*. Temos dois problemas básicos, o tempo computacional e a alocação de memória.

**Tempo computacional:** Podemos verificar que o algoritmo constitui um processo de força bruta, ou seja, ele vai tentando todas as possibilidades possíveis para encontrar os representantes de classes laterais e gerar novos subgrupos. Por isso o tempo computacional de partição de certos grupos com  $Q$  e  $L$  grandes é “proibitivo”.

**Alocação de Memória:** A memória necessária também é grande e a quantidade que deve ser alocada varia muito no decorrer do processo de partição. Portanto deve-se utilizar alocação dinâmica de memória para otimizar o processo de geração.

### 3.4.1 - Representação Matricial dos Subgrupos

Uma vez obtida a partição do grupo gerador, inicia-se a primeira etapa na geração dos códigos de grupo comutativo, ou seja, obter o conjunto de matrizes a partir das palavras do código de bloco. Esse problema pode ser abordado de duas formas, primeiro podemos considerar o isomorfismo das palavras código  $\underline{c}_i$ , que formam um grupo comutativo sob adição módulo  $Q$  (componente a componente), e os vetores rotação  $\vec{\theta}_i$ , que forma um grupo comutativo sob adição módulo  $2\pi$ . De outra forma, pode-se considerar o grupo de matrizes como uma representação do grupo (código de bloco). Não podemos especificar, à priori, quais subgrupos irão gerar bons códigos, mas veremos mais adiante algumas características importantes que nos permitem fazer uma pré-análise da partição.

Supondo que se tenha escolhido um dado código de bloco, vamos determinar seu conjunto de matrizes. Define-se inicialmente a estrutura de uma matriz geradora, que é dada na sua forma pseudodiagonal

$$O_i = \text{diagonal}[A_1, A_2, \dots, A_L],$$

onde cada  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, L$ , pode ser da seguinte forma:

$$A_j(l_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{M} l_{ij} & \sin \frac{2\pi}{M} l_{ij} \\ -\sin \frac{2\pi}{M} l_{ij} & \cos \frac{2\pi}{M} l_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_j = \pm 1.$$

A partir de uma palavra do código de bloco  $\underline{c}_i = (c_{i1}, \dots, c_{iL})$ , para obter-se o vetor rotação correspondente, através do isomorfismo, basta multiplicar  $\underline{c}_i$  por  $\frac{2\pi}{Q}$ , resultando em ângulos  $\theta_{ij}$  com valores entre 0 e  $\frac{2\pi \cdot (Q-1)}{Q}$ , pois as componentes  $c_{ij} \in \{0, \dots, Q-1\}$ . Obviamente podemos ter  $c_{ij} = 0$  ou  $c_{ij} = \frac{Q}{2}$ , resultando em ângulos  $\theta_{ij} = 0$  e  $\theta_{ij} = \pi$ , que representam as componentes unidimensionais da forma pseudodiagonal mostrada em (3.1). Podemos então relacionar cada matriz  $O_i$  diretamente com as palavras do código de bloco  $C$ . Inicialmente a escolha dos  $A_j$  da matriz geradora é feita analisando-se as componentes de cada palavra, em uma mesma posição. Isso pode ser feito listando-se todas as palavras da seguinte forma:

$$Q^L \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{c_{11}, \dots, c_{1L}}^L \\ \vdots \\ c_{i1}, \dots, c_{iL} \end{array} \right.$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$   
 $A_1, \dots, A_L$

A estrutura de cada  $A_j$  é definida verificando-se quantas dimensões são necessárias para representar todos os componentes de uma dada coluna. Para o caso de duas dimensões define-se

$$A_j(c_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{M} c_{ij} & \sin \frac{2\pi}{M} c_{ij} \\ -\sin \frac{2\pi}{M} c_{ij} & \cos \frac{2\pi}{M} c_{ij} \end{pmatrix},$$

e no caso unidimensional define-se

$$A_j(c_{ij}) = (-1)^{\frac{2c_{ij}}{Q}}$$

Desta forma é construída a forma pseudodiagonal das matrizes, bastando substituir cada palavra do código de bloco, para obter-se a matriz  $O_i$  correspondente.

Pelo Teorema 1 sabemos que um grupo comutativo multiplicativo é igual ao produto direto de subgrupos cíclicos cujas ordens são potência de primo. Isso significa que a matriz  $O_i$  pode ser escrita como

$$O_i = \prod_{l=1}^k \mathbf{D}_l^{m_l}$$

onde  $m_l$  ( $l = 1, \dots, k$ ) são inteiros que dependem de  $i$ , e as matrizes  $\mathbf{D}_l$  tem a mesma forma pseudodiagonal de  $O_i$ . Os valores assumidos por  $m_l$  são  $0, 1, \dots, q_l - 1$ , onde os  $q_l$  são potências de primo. A ordem do grupo  $\{O_i\}$  é dada por

$$M = \prod_{l=1}^k q_l.$$

Os vetores rotação  $\vec{\theta}_i$  de  $O_i$  são decompostos em termos dos vetores rotação  $\gamma_l$  de  $\mathbf{D}_l$ ,

$$\vec{\theta}_i = \sum_{l=1}^k m_l \gamma_l \pmod{2\pi}.$$

Portanto podemos escrever os vetores rotação como

$$\vec{\theta}_i = \mathbf{m} \cdot \Gamma,$$

onde  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$  e

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{k1} & & \gamma_{kn} \end{pmatrix}$$

é uma matriz  $k \times n$ , denominada geradora.

*Teorema 2* [5]: Se a matriz geradora  $\Gamma$  contém dois vetores coluna que são nulos ou cuja soma é nula (mod  $2\pi$ ), então os vetores código definidos por  $\Gamma$  não geram o espaço Euclidiano  $N$ -dimensional.

Utilizaremos este teorema no Capítulo 4 para verificar a dimensão dos códigos de grupo comutativo gerados.

# Capítulo 4

## Resultados

Neste capítulo são mostrados os novos códigos de grupo comutativo gerados, onde é feita uma descrição detalhada de todo o processo de geração, desde a representação do conjunto matrizes, até o cálculo das equações de restrições utilizadas para a obtenção do vetor inicial ótimo. São apresentados cálculos de parâmetros de desempenho e limitante de união da probabilidade de erro. Algumas características peculiares são discutidas, bem como comparações importantes em relação à outros códigos de grupo, como cíclicos, biortogonais e simplex.

### 4.1 - Códigos de Bloco

O primeiro passo na geração de códigos de grupo comutativo é a obtenção de um grupo comutativo de matrizes. Estas matrizes são obtidas através do isomorfismo com códigos de bloco definidos sobre  $Z_Q$ , com comprimento  $L$ . Foram particionados códigos de bloco  $(Z_Q)^L$ , para  $Q=8$  e  $L=2,3,4$ , utilizando-se o algoritmo descrito na Seção 3.4. As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 mostram a ordem e o número respectivo de subgrupos existentes.

| Nível de Partição<br>$np$ | Número de<br>Subgrupos | Ordem do<br>Subgrupo |
|---------------------------|------------------------|----------------------|
| 6                         | 4                      | 2                    |
| 5                         | 8                      | 4                    |
| 4                         | 16                     | 8                    |
| 3                         | 8                      | 16                   |
| 2                         | 4                      | 32                   |
| 1                         | 1                      | 64                   |

**Tabela 4.1 - Código de Bloco  $(Z_8)^2$  - 64 Elementos**

| Nível de Partição<br>$np$ | Número de Subgrupos | Ordem do Subgrupo |
|---------------------------|---------------------|-------------------|
| 9                         | 8                   | 2                 |
| 8                         | 36                  | 4                 |
| 7                         | 156                 | 8                 |
| 6                         | 204                 | 16                |
| 5                         | 204                 | 32                |
| 4                         | 156                 | 64                |
| 3                         | 36                  | 128               |
| 2                         | 8                   | 256               |
| 1                         | 1                   | 512               |

**Tabela 4.2 - Código de Bloco  $(Z_8)^3$  - 512 Elementos**

| Nível de Partição<br>$np$ | Número de Subgrupos | Ordem do Subgrupo |
|---------------------------|---------------------|-------------------|
| 12                        | 16                  | 2                 |
| 11                        | 156                 | 4                 |
| 10                        | 1396                | 8                 |
| 9                         | 4132                | 16                |
| 8                         | -                   | 32                |
| 7                         | -                   | 64                |
| 6                         | -                   | 128               |
| 5                         | -                   | 256               |
| 4                         | -                   | 512               |
| 3                         | -                   | 1024              |
| 2                         | -                   | 2048              |
| 1                         | 1                   | 4096              |

**Tabela 4.3 - Código de Bloco  $(Z_8)^4$  - 4096 Elementos**

## 4.2 - Análise dos Subgrupos

Foi feita uma análise completa dos subgrupos da partição de  $(Z_8)^3$  e de alguns subgrupos de  $(Z_8)^4$ . A seguir são descritos todos os novos códigos de grupo comutativo obtidos. Os códigos são referidos por seus parâmetros  $(M,N)$ . A análise da partição de  $(Z_8)^2$  não resultou em nenhum “bom” código, portanto algumas considerações sobre este caso serão feitas posteriormente.

### 4.2.1 - Código de Grupo Comutativo (16,4)

Este código já foi apresentado em [9] e é isomorfo a um código de bloco, subgrupo de  $(Z_8)^3$ . Obviamente deveria aparecer em nossa partição. Este código de grupo foi obtido utilizando-se o subgrupo de  $(Z_8)^3$  com 16 elementos,

$$\{000,004,002,006,041,045,043,047,401,405,403,407,442,446,444,440\}.$$

Cada palavra do código de bloco é formada por 3 componentes, portanto a estrutura das matrizes, na forma pseudodiagonal, é dada por

$$O_i = \text{diagonal}(A_1, A_2, A_3).$$

Cada  $A_j$  é associada a uma das 3 componentes da palavra código, sendo definida em função de seus valores. Podemos observar que as duas primeiras componentes de todas as palavras são formadas por 0 e 4. Isso significa que precisamos apenas uma dimensão para representá-las. Já para a terceira componente de cada palavra, temos valores entre 0 e 7, sendo necessário duas dimensões para sua representação. Para este caso, a estrutura das matrizes  $O_i$  é definida como

$$O_i = \text{diagonal}\left(\cos\theta_{i1}, \cos\theta_{i2}, \begin{pmatrix} \cos\theta_{i3} & \text{sen}\theta_{i3} \\ -\text{sen}\theta_{i3} & \cos\theta_{i3} \end{pmatrix}\right),$$

tendo como parâmetros  $r=1$  e  $n=3$ . A matriz pode ser escrita em função das componentes da palavra  $\underline{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$  do código de bloco correspondente, ou seja,

$$O_i = \text{diagonal}\left((-1)^{\frac{c_{i1}}{4}}, (-1)^{\frac{c_{i2}}{4}}, \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi c_{i3}}{8} & \text{sen}\frac{2\pi c_{i3}}{8} \\ -\text{sen}\frac{2\pi c_{i3}}{8} & \cos\frac{2\pi c_{i3}}{8} \end{pmatrix}\right).$$

Para cada palavra do código de bloco temos uma matriz  $O_i$  correspondente. Conforme demonstrado na Seção 3.2, a distância Euclidiana  $d_i$  entre o vetor  $\mathbf{x}_0$  e um outro vetor qualquer do código  $\mathbf{x}_i$ , é dada por

$$d_i^2 = \sum_{j=1}^r 4 \cdot \mu_j \cdot \text{sen}^2 \frac{\theta_{ij}}{2} + \sum_{j=r+1}^n \mu_j \cdot [2 - 2 \cdot \cos\theta_{ij}],$$

onde o primeiro somatório se refere às componentes bidimensionais e o segundo às componentes unidimensionais. Qualquer alteração de ordem nos somatórios não implica em

nenhuma mudança nos procedimentos de cálculo. Para o nosso caso, esta expressão pode ser escrita da seguinte forma,

$$d_i^2 = \mu_1 \cdot [2 - 2 \cdot \cos \theta_{i1}] + \mu_2 \cdot [2 - 2 \cdot \cos \theta_{i2}] + 4 \cdot \mu_3 \cdot \sin^2 \frac{\theta_{i3}}{2},$$

onde  $\mu_1 = x_1^2$ ,  $\mu_2 = x_2^2$  e  $\mu_3 = (x_3^2 + x_4^2)$ .

Na Tabela 4.4 estão listados todos os valores de  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$ , em função dos elementos do código de bloco. Conforme foi mostrado no Capítulo 3, o conjunto de equações referentes às distâncias  $d_i^2$  vão definir as restrições do método de otimização para o cálculo do vetor inicial.

| i  | $\underline{c}_i$ | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | $\theta_{i1}$ | $\theta_{i2}$ | $\theta_{i3}$ | $d_i^2$                                              |
|----|-------------------|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|------------------------------------------------------|
| 1  | 000               | 0        | 0        | 0        | 0             | 0             | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |
| 2  | 004               | 0        | 0        | 4        | 0             | 0             | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 3  | 002               | 0        | 0        | 2        | 0             | 0             | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 4  | 006               | 0        | 0        | 6        | 0             | 0             | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 5  | 041               | 0        | 4        | 1        | 0             | $\pi$         | $\pi/4$       | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 6  | 045               | 0        | 4        | 5        | 0             | $\pi$         | $5\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 7  | 043               | 0        | 4        | 3        | 0             | $\pi$         | $3\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 8  | 047               | 0        | 4        | 7        | 0             | $\pi$         | $7\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 9  | 401               | 4        | 0        | 1        | $\pi$         | 0             | $\pi/4$       | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 10 | 405               | 4        | 0        | 5        | $\pi$         | 0             | $5\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 11 | 403               | 4        | 0        | 3        | $\pi$         | 0             | $3\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 12 | 407               | 4        | 0        | 7        | $\pi$         | 0             | $7\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 13 | 442               | 4        | 4        | 2        | $\pi$         | $\pi$         | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 14 | 446               | 4        | 4        | 6        | $\pi$         | $\pi$         | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 15 | 444               | 4        | 4        | 4        | $\pi$         | $\pi$         | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 16 | 440               | 4        | 4        | 0        | $\pi$         | $\pi$         | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |

**Tabela 4.4 - Valores de  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$  - Código (16,4)**

É importante notar que existem restrições redundantes e que podem ser retiradas. Não se pode definir a priori quantas redundâncias existem. Para cada código de grupo comutativo é preciso fazer uma análise do seu conjunto de equações.



A Tabela 4.5 mostra o conjunto de restrições, já excluídas as redundâncias. Portanto, devemos minimizar a expressão

$$y_1 + y_2 + y_3,$$

onde  $y_j = \frac{\mu_j}{d_{min}^2}$ , sujeito as restrições da Tabela 4.5.

|                                                       |
|-------------------------------------------------------|
| $0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \geq 1$      |
| $0 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 0,5857 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $4 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0,5857 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $4 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 1$      |
| $y_1, y_2, y_3 \geq 0$                                |

**Tabela 4.5 - Equações de Restrição - Código (16,4)**

Obtemos os seguintes valores,

$$y_1 = 0,17678, \quad y_2 = 0,17678 \quad \text{e} \quad y_3 = 0,5.$$

A distância mínima é obtida através da relação

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{d_{min}^2}, \quad \text{donde} \quad d_{min}^2 = 1,17157.$$

As componentes do vetor inicial são calculadas da seguinte forma

$$y_1 = \frac{\mu_1}{d_{min}^2}, \quad y_2 = \frac{\mu_2}{d_{min}^2}, \quad y_3 = \frac{\mu_3}{d_{min}^2}, \quad \text{onde}$$

$$\mu_1 = x_1^2,$$

$$\mu_2 = x_2^2,$$

$$\text{e } \mu_3 = x_3^2 + x_4^2.$$

Temos portanto o vetor inicial

$$\mathbf{x}_0 = (0,4551 \quad 0,4551 \quad 0,7654 \quad 0).$$

Uma vez calculada a distância mínima e tendo os valores de  $M$  e  $N$  podemos determinar os parâmetros de desempenho do código de grupo,

$$K = \frac{d_{min}^2 \cdot \log_2 M}{2} = 2,34315 \quad \text{e} \quad \frac{R}{W} = \frac{2 \cdot \log_2 M}{N} = 2,0.$$

O código de grupo completo, ou seja, o seu conjunto de vetores é gerado a partir do vetor inicial utilizando-se o grupo comutativo de matrizes ortogonais. O código de grupo comutativo completo é listado na Tabela 4.6.

| $i$ | $\mathbf{x}_i$                   |
|-----|----------------------------------|
| 0   | (0.4551 0.4551 0.7654 0)         |
| 1   | (0.4551 0.4551 -0.7654 0)        |
| 2   | (0.4551 0.4551 0 0.7654)         |
| 3   | (0.4551 0.4551 0 -0.7654)        |
| 4   | (0.4551 -0.4551 0.5412 0.5412)   |
| 5   | (0.4551 -0.4551 -0.5412 -0.5412) |
| 6   | (0.4551 -0.4551 -0.5412 0.5412)  |
| 7   | (0.4551 -0.4551 0.5412 -0.5412)  |
| 8   | (-0.4551 0.4551 0.5412 0.5412)   |
| 9   | (-0.4551 0.4551 -0.5412 -0.5412) |
| 10  | (-0.4551 0.4551 -0.5412 0.5412)  |
| 11  | (-0.4551 0.4551 0.5412 -0.5412)  |
| 12  | (-0.4551 -0.4551 0 0.7654)       |
| 13  | (-0.4551 -0.4551 0 -0.7654)      |
| 14  | (-0.4551 -0.4551 -0.7654 0)      |
| 15  | (-0.4551 -0.4551 0.7654 0)       |

**Tabela 4.6 - Código de Grupo Comutativo (16,4)**

| $d_i^2$ | $N(d_i^2)$ |
|---------|------------|
| 4       | 1          |
| 2.828   | 6          |
| 2.343   | 1          |
| 1.656   | 1          |
| 1.171   | 6          |

**Tabela 4.7 - Perfil de Distâncias - Código (16,4)**

Uma característica importante a ser observada é o perfil de distâncias do código. Este perfil vai definir o limitante de união da probabilidade de erro, baseando-se no número de vizinhos do vetor inicial. O perfil de distância deste código é mostrado na Tabela 4.7.

Um grupo multiplicativo comutativo pode ser representado pela soma direta de subgrupos cíclicos de ordens que são potência de primos. Este código de bloco tem cardinalidade  $|G| = 2^4$ . Pelo Teorema 1, como este grupo tem cardinalidade  $|G| = p^n$ , onde  $p$  é primo, ele é isomorfo à um dos seguintes grupos:

$$G = Z_8 \times Z_2,$$

$$\text{ou } G = Z_4 \times Z_4,$$

$$\text{ou } G = Z_4 \times Z_2 \times Z_2,$$

$$\text{ou } G = Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2.$$

Este código de grupo pode ser gerado como

$$G = [041] \cdot m_1 + [440] \cdot m_2,$$

$$\text{onde } m_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \text{ e } m_2 \in \{0,1\}.$$

O isomorfismo encontrado é portanto com o grupo  $G = Z_8 \times Z_2$ . Através do Teorema 2, podemos demonstrar que os vetores do código de grupo comutativo geram o espaço Euclidiano 4-dimensional. Os elementos  $[041]$  e  $[440]$  tem as respectivas representações matriciais,

$$[041] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{2\pi}{8} & \sin \frac{2\pi}{8} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{2\pi}{8} & \cos \frac{2\pi}{8} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [440] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elas representam subgrupos cíclicos de matrizes ortogonais de ordem  $2^3$  e 2, respectivamente. Todos os vetores  $\vec{\theta}_i$  da representação matricial podem ser escritos como combinação dos vetores rotação destas duas matrizes. Isso pode ser expressado da seguinte forma,

$$\theta_i = \mathbf{m} \cdot \Gamma,$$

onde

$$\mathbf{m} = (m_1 \quad m_2) \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \pi & 2\pi/8 \\ \pi & \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Como não existem duas colunas iguais, ou cuja soma é nula (mod.  $2\pi$ ), os vetores códigos de  $\Gamma$  geram o espaço vetorial Euclidiano de 4 dimensões (Teorema 2, p. 40).

Através da representação por líderes de classes laterais, podemos gerar todas as palavras do código de bloco da seguinte forma:

$$\underline{c}_i = b_1 \cdot [004] + b_2 \cdot [002] + b_3 \cdot [041] + b_4 \cdot [401],$$

onde  $b_i \in \{0,1\}$ ,  $0 \cdot [c_{i1}c_{i2}c_{i3}] = [000]$  e  $1 \cdot [c_{i1}c_{i2}c_{i3}] = [c_{i1}c_{i2}c_{i3}]$ . Dessa maneira pode-se definir uma regra de associação dos bits de informação com os vetores do código de grupo comutativo. Para a implementação deste esquema de modulação precisamos de 4 funções ortonormais, com as quais possamos representar o conjunto de 16 sinais. Teremos um conjunto de sinais, definidos como:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_{01}\Psi_1(t) + x_{02}\Psi_2(t) + x_{03}\Psi_3(t) + x_{04}\Psi_4(t) \\ x_1(t) &= x_{11}\Psi_1(t) + x_{12}\Psi_2(t) + x_{13}\Psi_3(t) + x_{14}\Psi_4(t) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_{15}(t) &= x_{(15)1}\Psi_1(t) + x_{(15)2}\Psi_2(t) + x_{(15)3}\Psi_3(t) + x_{(15)4}\Psi_4(t) \end{aligned}$$

Conforme foi observado na Seção 3.1, as primeiras  $r$  componentes podem ser representadas por  $r$  sinais modulados em fase, mutuamente ortogonais. As  $n-r$  componentes restantes correspondem a sinais antipodais. Considerando portanto uma modulação em fase (*PSK*), as funções  $\Psi_1(t)$  e  $\Psi_2(t)$  podem ser representadas por um sinal *coseno* e *seno*, respectivamente. As funções  $\Psi_3(t)$  e  $\Psi_4(t)$  também podem ser representadas por *coseno* e *seno*, só que, obviamente, a sua ortogonalidade com  $\Psi_1(t)$  e  $\Psi_2(t)$  será temporal. Da Tabela 4.6 pode-se observar que as componentes  $x_{i1}$  e  $x_{i2}$ , dos vetores  $\mathbf{x}_i$ , representam um *4-PSK* e as componentes  $x_{i3}$  e  $x_{i4}$ , representam um *8-PSK*. Cada vetor do código de grupo comutativo é mapeado em uma sequência de dois sinais, ou seja, por um sinal *4-PSK* e por um sinal *8-PSK*,

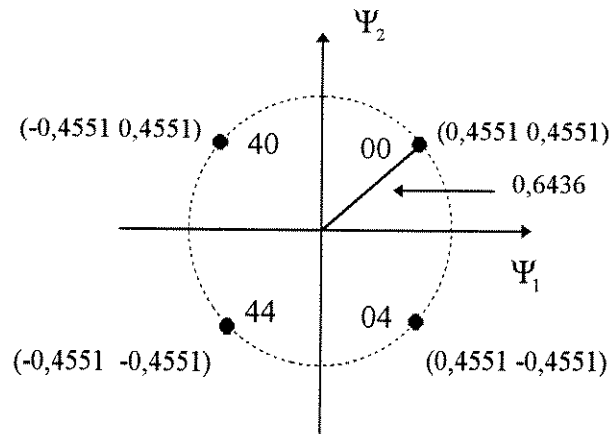
$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_{01}(t) + x_{02}(t) \\ x_1(t) &= x_{11}(t) + x_{12}(t) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_{15}(t) &= x_{(15)1}(t) + x_{(15)2}(t) \end{aligned}$$

onde

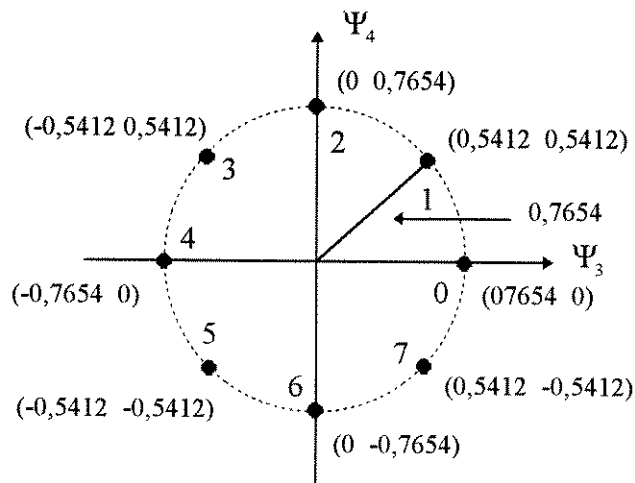
$$\begin{aligned} x_{i1}(t), \text{ está definido } 2kT \leq t \leq (2k+1)T, \\ \text{e } x_{i2}(t), \text{ está definido } (2k+1)T \leq t \leq (2k+2)T. \end{aligned}$$

Nas Figuras 4.1 e 4.2 são mostradas as duas constelações de sinais, 4-PSK e 8-PSK. Cada sinal  $x_i(t)$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ , é representado por

$$x_i(t) = x_{i1} \cdot \Psi_1(t) + x_{i2} \cdot \Psi_2(t) + x_{i3} \cdot \Psi_3(t) + x_{i4} \cdot \Psi_4(t).$$



**Figura 4.1** - Constelação de Sinal 4-PSK - Código (16,4)



**Figura 4.2** - Constelação de Sinal 8-PSK - Código (16,4)

Temos então um conjunto de bases ortogonais definidas como

$$\Psi'_1(t) = \cos(2\pi f_0 t), \quad 2kT \leq t \leq (2k+1) \cdot T,$$

$$\Psi'_2(t) = -\sin(2\pi f_0 t), \quad 2kT \leq t \leq (2k+1) \cdot T,$$

$$\Psi'_3(t) = \cos(2\pi f_0 t), \quad (2k+1) \cdot T \leq t \leq (2k+2) \cdot T,$$

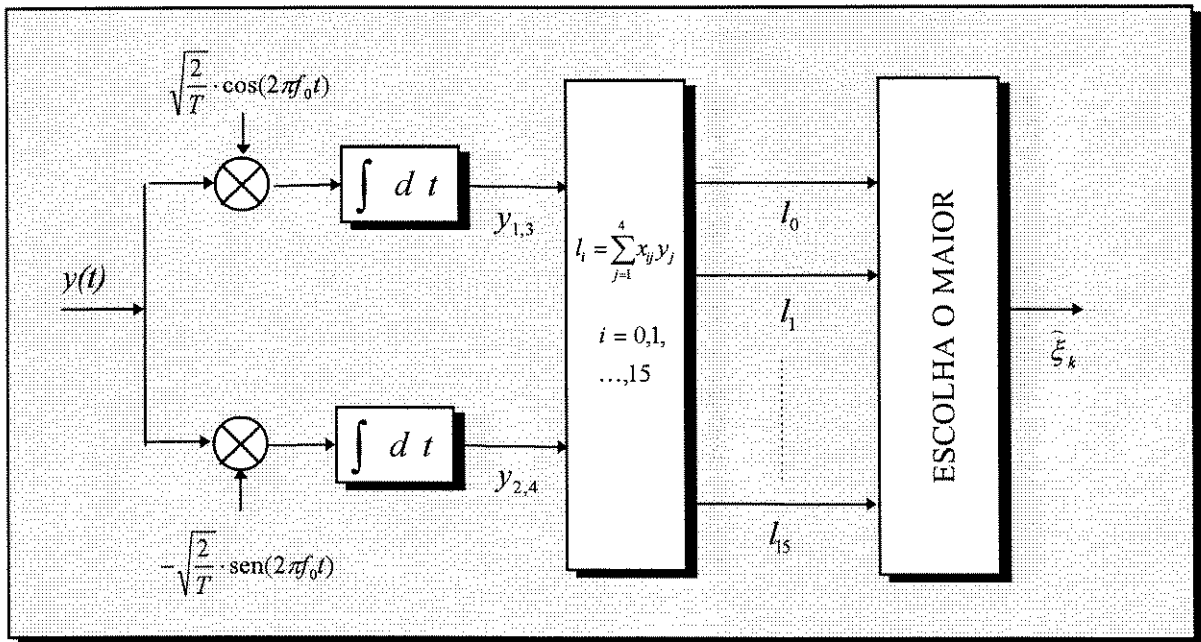
$$\Psi'_4(t) = -\sin(2\pi f_0 t), \quad (2k+1) \cdot T \leq t \leq (2k+2) \cdot T.$$

Para encontrar um conjunto ortonormal basta normalizar as bases ortogonais, utilizando-se o processo descrito na Seção 2.1,  $\Psi(t) = \frac{\Psi'(t)}{\sqrt{\langle \Psi', \Psi' \rangle}}$ . Obtemos então o seguinte conjunto de bases ortonormais,

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ \Psi_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \right\} \text{ para } 2kT \leq t < (2k+1) \cdot T \text{ e}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_3(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ \Psi_4(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \right\} \text{ para } (2k+1) \cdot T < t < (2k+2) \cdot T.$$

A forma de implementação descrita para o código (16,4), consiste de um esquema de modulação com memória. Um esquema de demodulação para este código é mostrado na Figura 4.3. Discutiremos posteriormente, com maiores detalhes, o aspecto de decodificação dos códigos de grupo comutativo utilizando-se estrutura de treliça.



**Figura 4.3 - Diagrama de Blocos do Demodulador - Código (16,4)**

O limitante de união da probabilidade de erro deste código de grupo comutativo pode ser calculado através de

$$P(e) \leq \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{15} \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}(1 - \mathbf{x}_i^N \mathbf{x}_j^N)}{N_0}} \right),$$

onde  $\mathbf{x}_i^N = \frac{\mathbf{x}_i}{\sqrt{\mathcal{E}}}$ . Podemos definir a relação sinal/ruído como  $SNR = \frac{\mathcal{E}}{N_0}$ . Sabemos que

$SNR = \frac{\mathcal{E}}{N_0} = \frac{4\mathcal{E}_b}{N_0}$ , então podemos rescrever a expressão do limitante como

$$P(e) \leq \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{15} \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mathcal{E}_b(1 - \mathbf{x}_i^N \mathbf{x}_j^N)}{N_0}} \right).$$

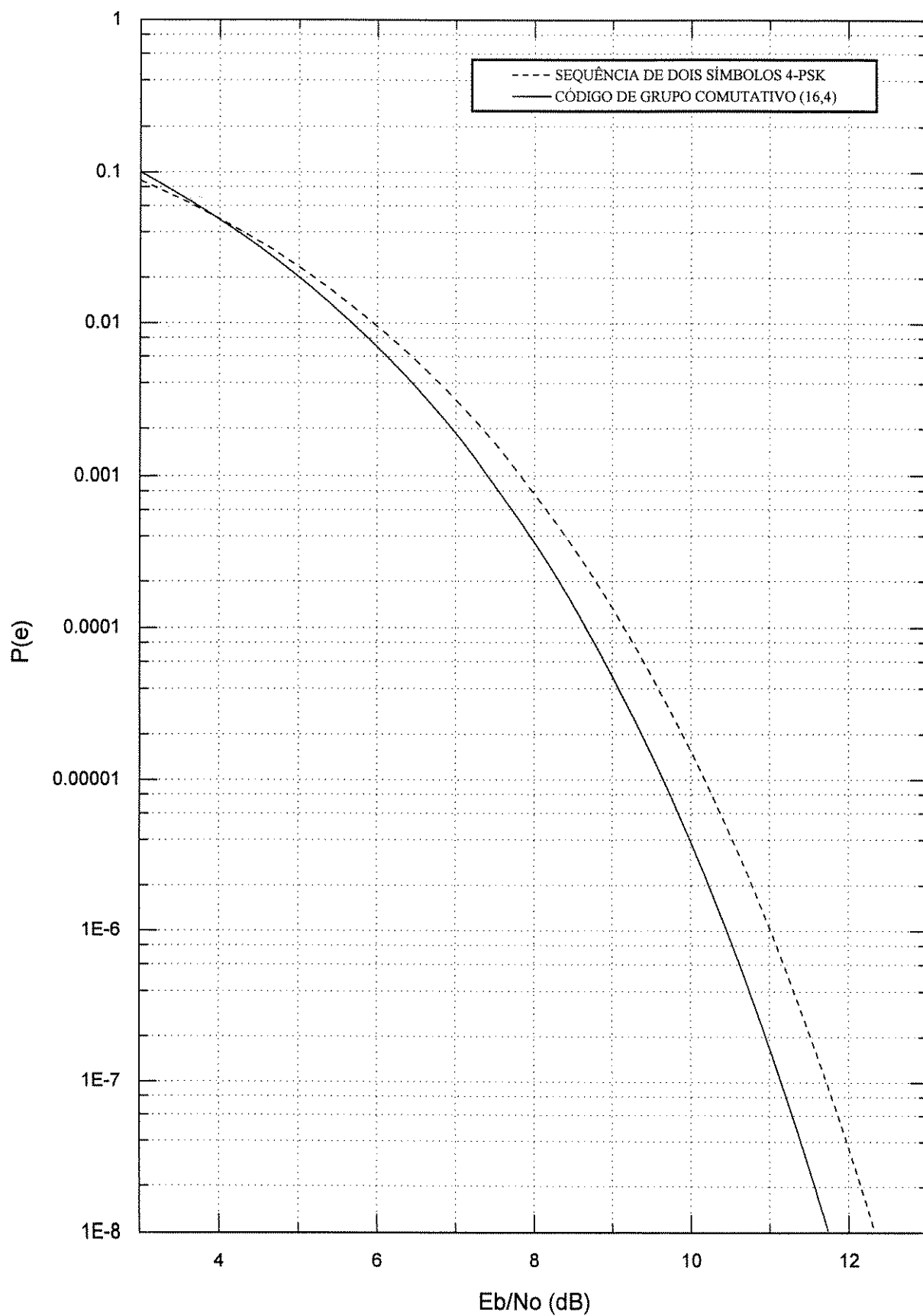
Como foi proposto uma implementação utilizando-se um *4-PSK* e um *8-PSK*, temos uma taxa de transmissão de 2 bits por período de sinalização,  $R = \frac{2}{T}$  bits/s. Portanto podemos comparar este código com um *4-PSK*. A probabilidade de erro de símbolo exata de um *4-PSK* é dada por

$$P(e) = 2p - p^2, \text{ onde } p = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \right).$$

Devemos considerar um bloco de dois símbolos *4-PSK* não codificado, ou seja, palavras de 4 bits. A probabilidade de erro fica portanto definida como

$$P(e) = 1 - [1 - (2p - p^2)]^2.$$

A Figura 4.4 mostra uma comparação entre o limitante de união do código (16,4) e a probabilidade de erro do bloco de dois símbolos do *4-PSK* não codificado. É possível observar que o código de grupo apresenta um desempenho superior ao *4-PSK*. Para baixa relação SNR o *4-PSK* apresenta, obviamente, um desempenho melhor. Essa estrutura pode ser descrita como um QAM estrela codificado. Este tipo de modulação é utilizado em canais de rádio móvel e comunicações via satélite [15].



**Figura 4.4** - Gráfico de Desempenho - Código (16,4) versus 4-PSK não Codificado



### 4.2.2 - Código de Grupo Comutativo (16,5)

Este código de grupo também é gerado utilizando-se um código de bloco com 16 palavras-código. Vamos verificar que este código apresenta uma distância mínima superior ao código (16,4), mas em consequência, possui uma eficiência espectral menor. Este código é gerado a partir do subgrupo

$$\{000,004,040,044,022,026,062,066,402,406,442,446,424,420,464,460\}.$$

Procedendo com a mesma análise descrita para o código (16,4), podemos definir a forma pseudodiagonal da matrizes  $O_i$ , como

$$O_i = \text{diagonal} \left( (-1)^{\frac{c_{i1}}{4}}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i2}}{8} & \text{sen} \frac{2\pi c_{i2}}{8} \\ -\text{sen} \frac{2\pi c_{i2}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i2}}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i3}}{8} & \text{sen} \frac{2\pi c_{i3}}{8} \\ -\text{sen} \frac{2\pi c_{i3}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i3}}{8} \end{pmatrix} \right).$$

Seus parâmetros são  $r=2$  e  $n=1$ . Neste caso duas componentes de cada palavra do código de bloco necessitam uma representação bidimensional. Isso nos leva a uma outra observação importante.

*Se especificarmos uma componente  $A_i$  unidimensional, como uma componente bidimensional, estaremos apenas perdendo eficiência espectral, sem alterar a distância mínima entre os vetores do código de grupo.*

Para este código de grupo o conjunto de distâncias fica portanto definido como

$$d_i^2 = x_1^2 \cdot [2 - 2 \cdot \cos \theta_{i1}] + 4 \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot \text{sen}^2 \frac{\theta_{i3}}{2} + 4 \cdot (x_4^2 + x_5^2) \cdot \text{sen}^2 \frac{\theta_{i3}}{2},$$

onde os valores de  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$  estão listados na Tabela 4.8.

| i | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | $\theta_{i1}$ | $\theta_{i2}$ | $\theta_{i3}$ | $d_i^2$                                         |
|---|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|-------------------------------------------------|
| 1 | 0        | 0        | 0        | 0             | 0             | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 2 | 0        | 0        | 4        | 0             | 0             | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 3 | 0        | 4        | 0        | 0             | $\pi$         | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 4 | 0        | 4        | 4        | 0             | $\pi$         | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 5 | 0        | 2        | 2        | 0             | $\pi/2$       | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 6 | 0        | 2        | 6        | 0             | $\pi/2$       | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 7 | 0        | 6        | 2        | 0             | $3\pi/2$      | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 8 | 0        | 6        | 6        | 0             | $3\pi/2$      | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |

| $i$ | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | $\theta_{i1}$ | $\theta_{i2}$ | $\theta_{i3}$ | $d_i^2$                                         |
|-----|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|-------------------------------------------------|
| 9   | 4        | 0        | 2        | $\pi$         | 0             | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 10  | 4        | 0        | 6        | $\pi$         | 0             | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 11  | 4        | 4        | 2        | $\pi$         | $\pi$         | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 12  | 4        | 4        | 6        | $\pi$         | $\pi$         | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 13  | 4        | 2        | 4        | $\pi$         | $\pi/2$       | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 14  | 4        | 2        | 0        | $\pi$         | $\pi/2$       | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 15  | 4        | 6        | 4        | $\pi$         | $3\pi/2$      | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 16  | 4        | 6        | 0        | $\pi$         | $3\pi/2$      | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |

**Tabela 4.8** - Valores de  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$  - Código (16,5)

Novamente podemos verificar o grande número de equações de restrição redundantes. Na Tabela 4.9 são mostradas apenas as equações não redundantes utilizadas no método de otimização. Deve-se fazer portanto essa análise para cada novo código a ser gerado.

|                                                  |
|--------------------------------------------------|
| $0 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $4 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $y_1, y_2, y_3 \geq 0$                           |

**Tabela 4.9** - Equações de Restrição - Código (16,5)

Para este código podemos observar que o número de equações de restrição não redundantes é diferente do código (16,4), apesar de ambos possuírem o mesmo número de palavras. Isso realmente mostra que não existe uma regra para se determinar quantas equações de restrição devemos utilizar na otimização do vetor inicial.

Os valores obtidos através da otimização, são  $y_1 = 0,125$ ,  $y_2 = 0,25$  e  $y_3 = 0,25$ . Verificamos portanto que este código de grupo apresenta uma distância mínima maior,  $d_{min}^2 = 1,6$ . Seus parâmetros de desempenho são

$$K = \frac{d_{min}^2 \cdot \log_2 M}{2} = 3,2 \quad \text{e} \quad \frac{R}{W} = \frac{2 \cdot \log_2 M}{N} = 1,6.$$

O vetor inicial ótimo fica portanto determinado,

$$\mathbf{x}_0 = (0,4472 \quad 0,6325 \quad 0 \quad 0,6325 \quad 0).$$

É interessante notar que o perfil de distâncias deste código apresenta apenas duas distâncias distintas entre todos os vetores, conforme mostra a Tabela 4.10.

| $d_i^2$ | $N(d_i^2)$ |
|---------|------------|
| 1,6     | 10         |
| 3,2     | 5          |

**Tabela 4.10** - Perfil de Distâncias - Código (16,5)

### 4.2.3 - Código de Grupo Comutativo (32,4)

Este código possui 32 vetores, gerando um espaço Euclidiano 4-dimensional. Em relação ao código (16,4), é intuitivo que como o número de vetores é maior, teremos uma distância mínima menor e um ganho considerável de eficiência espectral. Este código de grupo é obtido utilizando-se um código de bloco, subgrupo de  $(Z_8)^3$ , com 32 elementos,

$$\{000,004,002,006,001,005,003,007,040,044,042,046,041,045,043,047, \\ 400,404,402,406,401,405,403,407,440,444,442,446,441,445,443,447\}.$$

O código de bloco gerador de (16,4) é um subgrupo deste, implicando portanto que a forma pseudodiagonal das matrizes é a mesma,

$$O_i = \text{diagonal} \left( (-1)^{\frac{q_1}{4}}, (-1)^{\frac{q_2}{4}}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i3}}{8} & \sin \frac{2\pi c_{i3}}{8} \\ -\sin \frac{2\pi c_{i3}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i3}}{8} \end{pmatrix} \right).$$

Os parâmetros  $r$  e  $n$  da matriz, bem como a expressão de  $d_i^2$ , são definidos exatamente da mesma forma descrita na Seção 4.2.1. A diferença em relação ao código (16,4) está no número de palavras e nos valores de  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$  conforme é mostrado na Tabela 4.11.

| $i$ | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | $\theta_{i1}$ | $\theta_{i2}$ | $\theta_{i3}$ | $d_i^2$                                              |
|-----|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|------------------------------------------------------|
| 1   | 0        | 0        | 0        | 0             | 0             | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |
| 2   | 0        | 0        | 4        | 0             | 0             | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 3   | 0        | 0        | 2        | 0             | 0             | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 4   | 0        | 0        | 6        | 0             | 0             | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 5   | 0        | 0        | 1        | 0             | 0             | $\pi/4$       | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 6   | 0        | 0        | 5        | 0             | 0             | $5\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 7   | 0        | 0        | 3        | 0             | 0             | $3\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 8   | 0        | 0        | 7        | 0             | 0             | $7\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 9   | 0        | 4        | 0        | 0             | $\pi$         | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |
| 10  | 0        | 4        | 4        | 0             | $\pi$         | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 11  | 0        | 4        | 2        | 0             | $\pi$         | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 12  | 0        | 4        | 6        | 0             | $\pi$         | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 13  | 0        | 4        | 1        | 0             | $\pi$         | $\pi/4$       | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 14  | 0        | 4        | 5        | 0             | $\pi$         | $5\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 15  | 0        | 4        | 3        | 0             | $\pi$         | $3\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 16  | 0        | 4        | 7        | 0             | $\pi$         | $7\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 17  | 4        | 0        | 0        | $\pi$         | 0             | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |
| 18  | 4        | 0        | 4        | $\pi$         | 0             | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 19  | 4        | 0        | 2        | $\pi$         | 0             | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 20  | 4        | 0        | 6        | $\pi$         | 0             | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 21  | 4        | 0        | 1        | $\pi$         | 0             | $\pi/4$       | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 22  | 4        | 0        | 5        | $\pi$         | 0             | $5\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 23  | 4        | 0        | 3        | $\pi$         | 0             | $3\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 24  | 4        | 0        | 7        | $\pi$         | 0             | $7\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 25  | 4        | 4        | 0        | $\pi$         | $\pi$         | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |
| 26  | 4        | 4        | 4        | $\pi$         | $\pi$         | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 27  | 4        | 4        | 2        | $\pi$         | $\pi$         | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 28  | 4        | 4        | 6        | $\pi$         | $\pi$         | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 29  | 4        | 4        | 1        | $\pi$         | $\pi$         | $\pi/4$       | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 30  | 4        | 4        | 5        | $\pi$         | $\pi$         | $5\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 31  | 4        | 4        | 3        | $\pi$         | $\pi$         | $3\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 32  | 4        | 4        | 7        | $\pi$         | $\pi$         | $7\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |

**Tabela 4.11** - Valores de  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$  - Código (32,4)

|                                                       |
|-------------------------------------------------------|
| $0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0,5857 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $0 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 1$      |
| $4 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 1$      |
| $y_1, y_2, y_3 \geq 0$                                |

**Tabela 4.12 - Equações de Restrição - Código (32,4)**

Na Tabela 4.12 é mostrado o conjunto de restrições não redundantes utilizados na otimização, onde obtêm-se

$$y_1 = 0,25, \quad y_2 = 0,25 \quad \text{e} \quad y_3 = 1,707.$$

A distância mínima quadrática é  $d_{\min}^2 = 0,453$ , comprovando ser menor que a distância do código (16,4). Este código tem os seguintes parâmetros de desempenho:

$$K = \frac{d_{\min}^2 \cdot \log_2 M}{2} = 1,13 \quad \text{e} \quad \frac{R}{W} = \frac{2 \cdot \log_2 M}{N} = 2,5.$$

O vetor inicial ótimo é portanto

$$\mathbf{x}_0 = (0,3366 \quad 0,3366 \quad 0,8795 \quad 0).$$

Na Tabela 4.13 temos o perfil de distâncias deste código.

| $d_i^2$ | $N(d_i^2)$ |
|---------|------------|
| 0,453   | 4          |
| 0,906   | 5          |
| 1,359   | 2          |
| 1,546   | 2          |
| 2       | 4          |
| 2,453   | 2          |
| 2,640   | 2          |
| 3,093   | 5          |
| 3,546   | 4          |
| 4       | 1          |

**Tabela 4.13 - Perfil de Distâncias - Código (32,4)**

## 4.2.4 - Código de Grupo Comutativo (32,5)

Este código consiste de 32 vetores em 5 dimensões. O mesmo pode ser obtido, utilizando-se o seguinte código de bloco, subgrupo de  $(Z_8)^3$ , com 32 elementos,

$$\{000,004,002,006,040,044,042,046,021,025,023,027,061,065,063,067, \\ 401,405,403,407,441,445,443,447,422,426,424,420,462,466,464,460\}.$$

Os parâmetros da matriz são  $r=2$  e  $n=I$ , cuja forma pseudodiagonal é definida como

$$O_i = \text{diagonal} \left( (-1)^{\frac{c_{i1}}{4}}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i2}}{8} & \sin \frac{2\pi c_{i2}}{8} \\ -\sin \frac{2\pi c_{i2}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i2}}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i3}}{8} & \sin \frac{2\pi c_{i3}}{8} \\ -\sin \frac{2\pi c_{i3}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i3}}{8} \end{pmatrix} \right).$$

Para este caso, a expressão das distâncias é dada por

$$d_i^2 = x_1^2 \cdot [2 - 2 \cdot \cos \theta_{i1}] + 4 \cdot (x_2^2 + x_3^2) \cdot \sin^2 \frac{\theta_{i2}}{2} + 4 \cdot (x_4^2 + x_5^2) \cdot \sin^2 \frac{\theta_{i3}}{2},$$

cujos valores estão listados na Tabela 4.14.

| i  | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | $\theta_{i1}$ | $\theta_{i2}$ | $\theta_{i3}$ | $d_i^2$                                              |
|----|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|------------------------------------------------------|
| 1  | 0        | 0        | 0        | 0             | 0             | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |
| 2  | 0        | 0        | 4        | 0             | 0             | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 3  | 0        | 0        | 2        | 0             | 0             | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 4  | 0        | 0        | 6        | 0             | 0             | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 5  | 0        | 4        | 0        | 0             | $\pi$         | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |
| 6  | 0        | 4        | 4        | 0             | $\pi$         | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 7  | 0        | 4        | 2        | 0             | $\pi$         | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 8  | 0        | 4        | 6        | 0             | $\pi$         | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 9  | 0        | 2        | 1        | 0             | $\pi/2$       | $\pi/4$       | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 10 | 0        | 2        | 5        | 0             | $\pi/2$       | $5\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 11 | 0        | 2        | 3        | 0             | $\pi/2$       | $3\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 12 | 0        | 2        | 7        | 0             | $\pi/2$       | $7\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0,5875 \cdot \mu_3$ |
| 13 | 0        | 6        | 1        | 0             | $3\pi/2$      | $\pi/4$       | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 14 | 0        | 6        | 5        | 0             | $3\pi/2$      | $5\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 15 | 0        | 6        | 3        | 0             | $3\pi/2$      | $3\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |

| $i$ | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | $\theta_{i1}$ | $\theta_{i2}$ | $\theta_{i3}$ | $d_i^2$                                              |
|-----|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|------------------------------------------------------|
| 16  | 0        | 6        | 7        | 0             | $3\pi/2$      | $7\pi/4$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 17  | 4        | 0        | 1        | $\pi$         | 0             | $\pi/4$       | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 18  | 4        | 0        | 5        | $\pi$         | 0             | $5\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 19  | 4        | 0        | 3        | $\pi$         | 0             | $3\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 20  | 4        | 0        | 7        | $\pi$         | 0             | $7\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 21  | 4        | 4        | 1        | $\pi$         | $\pi$         | $\pi/4$       | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 22  | 4        | 4        | 5        | $\pi$         | $\pi$         | $5\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 23  | 4        | 4        | 3        | $\pi$         | $\pi$         | $3\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 3,4142 \cdot \mu_3$ |
| 24  | 4        | 4        | 7        | $\pi$         | $\pi$         | $7\pi/4$      | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0,5857 \cdot \mu_3$ |
| 25  | 4        | 2        | 2        | $\pi$         | $\pi/2$       | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 26  | 4        | 2        | 6        | $\pi$         | $\pi/2$       | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 27  | 4        | 2        | 4        | $\pi$         | $\pi/2$       | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 28  | 4        | 2        | 0        | $\pi$         | $\pi/2$       | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |
| 29  | 4        | 6        | 2        | $\pi$         | $3\pi/2$      | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 30  | 4        | 6        | 6        | $\pi$         | $3\pi/2$      | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$      |
| 31  | 4        | 6        | 4        | $\pi$         | $3\pi/2$      | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$      |
| 32  | 4        | 6        | 0        | $\pi$         | $3\pi/2$      | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$      |

**Tabela 4.14** - Valores de  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$  - Código (32,5)

O número de restrições para o código (32,4) é 4, enquanto que para o código (32,5) o número de equações não redundantes é maior, conforme mostra a Tabela 4.15. Para estas restrições os valores obtidos são respectivamente,  $y_1 = 0,176$ ,  $y_2 = 0,353$  e  $y_3 = 0,5$ .

|                                                       |
|-------------------------------------------------------|
| $0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \geq 1$      |
| $0 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 1$      |
| $0 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 0,5857 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $4 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0,5857 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 1$      |
| $y_1, y_2, y_3 \geq 0$                                |

**Tabela 4.15** - Equações de Restrição - Código (32,5)

A distância mínima quadrática deste código é  $d_{min}^2 = 0,97$  e seus parâmetros de desempenho são

$$K = \frac{d_{min}^2 \cdot \log_2 M}{2} = 2,426 \quad \text{e} \quad \frac{R}{W} = \frac{2 \cdot \log_2 M}{N} = 2.$$

O vetor inicial ótimo fica portanto definido como  $\mathbf{x}_0 = (0,4142 \quad 0,5858 \quad 0 \quad 0,6396 \quad 0)$  e seu perfil de distâncias é mostrado na Tabela 4.16. *É interessante observar, através do vetor inicial, que este código apresenta 3 níveis de energia.*

| $d_i^2$ | $N(d_i^2)$ |
|---------|------------|
| 0,97    | 8          |
| 1,372   | 3          |
| 1,941   | 1          |
| 2,343   | 14         |
| 3,313   | 3          |
| 3,715   | 2          |

**Tabela 4.16** - Perfil de Distâncias - Código (32,5)

#### 4.2.5- Código de Grupo Comutativo (32,6)

Na Seção 4.2.3 analisamos o código (32,4), que apresenta dois níveis distintos de energia e na Seção 4.2.4 verificamos que o código (32,5) apresenta três níveis distintos de energia. Como exemplo ilustrativo, vamos descrever o código (32,6), apresentando energias iguais. Isso significa que teríamos uma modulação multinível  $LxMPSK$  com energias iguais, ou seja, uma estrutura BCM. Este código de grupo também é obtido utilizando-se o código de bloco, subgrupo de  $(Z_8)^3$ , com 32 elementos,

{000,004,040,044,022,026,062,066,400,404,440,444,422,426,462,466,  
202,206,242,246,224,220,264,260,602,606,642,646,624,620,664,660}.



Temos neste caso matrizes de 6 dimensões, com a seguinte forma pseudodiagonal,

$$O_i = \text{diagonal} \left( \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i1}}{8} & \sin \frac{2\pi c_{i1}}{8} \\ -\sin \frac{2\pi c_{i1}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i1}}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i2}}{8} & \sin \frac{2\pi c_{i2}}{8} \\ -\sin \frac{2\pi c_{i2}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i2}}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i3}}{8} & \sin \frac{2\pi c_{i3}}{8} \\ -\sin \frac{2\pi c_{i3}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i3}}{8} \end{pmatrix} \right).$$

Os parâmetros da matriz são  $r=3$  e  $n=0$ . Para este caso, a expressão de distâncias é definida como

$$d_i^2 = 4 \cdot (x_1^2 + x_2^2) \cdot \sin^2 \frac{\theta_{i1}}{2} + 4 \cdot (x_3^2 + x_4^2) \cdot \sin^2 \frac{\theta_{i2}}{2} + 4 \cdot (x_5^2 + x_6^2) \cdot \sin^2 \frac{\theta_{i3}}{2}.$$

Na Tabela 4.17 estão os valores dos  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$ .

| i  | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | $\theta_{i1}$ | $\theta_{i2}$ | $\theta_{i3}$ | $d_i^2$                                         |
|----|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|-------------------------------------------------|
| 1  | 0        | 0        | 0        | 0             | 0             | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 2  | 0        | 0        | 4        | 0             | 0             | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 3  | 0        | 4        | 0        | 0             | $\pi$         | 0             | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 4  | 0        | 4        | 4        | 0             | $\pi$         | $\pi$         | $0 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 5  | 0        | 2        | 2        | 0             | $\pi/2$       | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 6  | 0        | 2        | 6        | 0             | $\pi/2$       | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 7  | 0        | 6        | 2        | 0             | $3\pi/2$      | $\pi/2$       | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 8  | 0        | 6        | 6        | 0             | $3\pi/2$      | $3\pi/2$      | $0 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 9  | 4        | 0        | 0        | $\pi$         | 0             | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 10 | 4        | 0        | 4        | $\pi$         | 0             | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 11 | 4        | 4        | 0        | $\pi$         | $\pi$         | 0             | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 12 | 4        | 4        | 4        | $\pi$         | $\pi$         | $\pi$         | $4 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 13 | 4        | 2        | 2        | $\pi$         | $\pi/2$       | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 14 | 4        | 2        | 6        | $\pi$         | $\pi/2$       | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 15 | 4        | 6        | 2        | $\pi$         | $3\pi/2$      | $\pi/2$       | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 16 | 4        | 6        | 6        | $\pi$         | $3\pi/2$      | $3\pi/2$      | $4 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 17 | 2        | 0        | 2        | $\pi/2$       | 0             | $\pi/2$       | $2 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 18 | 2        | 0        | 6        | $\pi/2$       | 0             | $3\pi/2$      | $2 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 19 | 2        | 4        | 2        | $\pi/2$       | $\pi$         | $\pi/2$       | $2 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 20 | 2        | 4        | 6        | $\pi/2$       | $\pi$         | $3\pi/2$      | $2 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 21 | 2        | 2        | 4        | $\pi/2$       | $\pi/2$       | $\pi$         | $2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 22 | 2        | 2        | 0        | $\pi/2$       | $\pi/2$       | 0             | $2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 23 | 2        | 6        | 4        | $\pi/2$       | $3\pi/2$      | $\pi$         | $2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 24 | 2        | 6        | 0        | $\pi/2$       | $3\pi/2$      | 0             | $2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |

| i  | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | $\theta_{i1}$ | $\theta_{i2}$ | $\theta_{i3}$ | $d_i^2$                                         |
|----|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|-------------------------------------------------|
| 25 | 6        | 0        | 2        | $3\pi/2$      | 0             | $\pi/2$       | $2 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 26 | 6        | 0        | 6        | $3\pi/2$      | 0             | $3\pi/2$      | $2 \cdot \mu_1 + 0 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 27 | 6        | 4        | 2        | $3\pi/2$      | $\pi$         | $\pi/2$       | $2 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 28 | 6        | 4        | 6        | $3\pi/2$      | $\pi$         | $3\pi/2$      | $2 \cdot \mu_1 + 4 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3$ |
| 29 | 6        | 2        | 4        | $3\pi/2$      | $\pi/2$       | $\pi$         | $2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 30 | 6        | 2        | 0        | $3\pi/2$      | $\pi/2$       | 0             | $2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |
| 31 | 6        | 6        | 4        | $3\pi/2$      | $3\pi/2$      | $\pi$         | $2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 4 \cdot \mu_3$ |
| 32 | 6        | 6        | 0        | $3\pi/2$      | $3\pi/2$      | 0             | $2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2 + 0 \cdot \mu_3$ |

**Tabela 4.17** - Valores de  $\theta_{ij}$  e  $d_i^2$  - Código (32,6)

|                                                  |
|--------------------------------------------------|
| $0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $0 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 1$ |
| $4 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \geq 1$ |
| - $y_1, y_2, y_3 \geq 0$                         |

**Tabela 4.18** - Equações de Restrição - Código (32,6)

A Tabela 4.18 mostra o conjunto de restrições, donde obtemos  $y_1 = 0,25$ ,  $y_2 = 0,25$  e  $y_3 = 0,25$ . A distância mínima quadrática é  $d_{min}^2 = 1,333$  e seus parâmetros de desempenho

$$K = \frac{d_{min}^2 \cdot \log_2 M}{2} = 3,33 \quad \text{e} \quad \frac{R}{W} = \frac{2 \cdot \log_2 M}{N} = 1,66.$$

O vetor inicial ótimo fica portanto definido como  $\mathbf{x}_0 = (0,577 \ 0 \ 0,577 \ 0 \ 0,577 \ 0)$ , onde podemos observar as energias iguais. O perfil de distâncias deste código consta na Tabela 4.19.

| $d_i^2$ | $N(d_i^2)$ |
|---------|------------|
| 1,332   | 15         |
| 2,665   | 15         |
| 4       | 1          |

**Tabela 4.19** - Perfil de distâncias - Código (32,6)

### 4.3- Tabela dos Códigos de Grupo Comutativo

Na Seção 4.2 foi feita uma análise detalhada da construção de alguns códigos de grupo comutativo, utilizando-se a metodologia descrita no Capítulo 3. Além dos códigos descritos anteriormente, outros bons códigos foram obtidos para valores de  $M=64$  e  $M=128$ . Não será feita uma descrição detalhada destes códigos. A Tabela 4.21 mostra todos os códigos de grupo comutativo construídos, seus parâmetros de desempenho e o respectivo vetor inicial ótimo.

| $(M,N)$ | $\mathbf{x}_0$            | $K$  | $R/W$ |
|---------|---------------------------|------|-------|
| (16,4)  | (0,455 0,455 0,765 0)     | 2,34 | 2     |
| (16,5)  | (0,447 0,632 0 0,632 0)   | 3,2  | 1,6   |
| (16,8)  | (0,5 0 0,5 0 0,5 0 0,5 0) | 4    | 1     |
| (32,4)  | (0,336 0,336 0,879 0)     | 1,13 | 2,5   |
| (32,5)  | (0,414 0,585 0 0,639 0)   | 2,42 | 2     |
| (32,6)  | (0,577 0 0,577 0,577 0)   | 3,33 | 1,66  |
| (64,6)  | (0,447 0 0,632 0 0,632 0) | 2,4  | 2     |
| (64,6)  | (0,541 0 0,541 0 0,643 0) | 2,48 | 2     |
| (128,5) | (0,26 0,681 0 0,681 0)    | 0,95 | 2,8   |
| (128,6) | (0,576 0 0,576 0 0,576 0) | 2,05 | 2,33  |
| (256,6) | (0,706 0 0,5 0 0,5 0)     | 1,17 | 2,66  |

**Tabela 4.20 - Códigos de Grupo Comutativo  $(M,N)$**

Apenas o código (16,8) foi construído através de um subgrupo de  $(Z_8)^4$ , os demais códigos de grupo foram obtidos utilizando-se códigos de bloco subgrupos de  $(Z_8)^3$ . Os códigos (16,8), (32,6) e (128,6) possuem energias iguais e são mostrados como exemplo, conforme discutimos na Seção 4.2.5. Podemos comparar o desempenho dos códigos de grupo comutativo com esquemas tradicionais de modulação, como simplex, biortogonal e principalmente com os códigos de grupo cíclico. Na Seção 4.4 são descritos os parâmetros de eficiência para estes códigos.

## 4.4 - Comparação de Desempenho

Vamos comparar o desempenho dos códigos de grupo comutativo com outros esquemas tradicionais de modulação, como *simplex*, *biortogonal* e os *códigos de grupo cíclico*. Na Tabela 4.21 são mostradas as características de dimensão, energia média ( $\mathcal{E}_{\text{media}}$ ) e distância mínima quadrática ( $d_{\text{min}}^2$ ) dos códigos simplex e biortogonais. Para efeitos de comparação, consideramos  $\mathcal{E}_{\text{media}} = 1$ .

| Código (M,N)       | Dimensão<br>N | Energia Média<br>$\mathcal{E}_{\text{media}}$ | Distância Quadrática Mínima<br>$d_{\text{min}}^2$ |
|--------------------|---------------|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <i>Simplex</i>     | $M - 1$       | $\mathcal{E}(1 - \frac{1}{M})$                | $\sqrt{2\mathcal{E}}$                             |
| <i>Biortogonal</i> | $\frac{M}{2}$ | $\mathcal{E}$                                 | $2\mathcal{E}$                                    |

**Tabela 4.21 - Parâmetros do Códigos Simplex e Biortogonais**

O cálculo dos parâmetros de desempenho dos códigos de grupo cíclico mostrados em [4] foram refeitos. Também foi feita uma nova busca de códigos cíclicos, procurando-se possíveis “bons códigos”, com desempenho superior aos códigos de grupo comutativo encontrados. No Capítulo 3 é mostrado a forma pseudodiagonal das matrizes para os códigos de grupo cíclico, onde tem-se apenas uma componente unidimensional. Como exemplo, o código cíclico (8,3) é gerado pelo grupo cíclico

$$\{00,14,20,34,40,54,60,74\},$$

e tem a forma pseudodiagonal das matrizes definida como

$$O_i = \text{diagonal} \left( \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi_{i1}}{8} & \text{sen} \frac{2\pi_{i1}}{8} \\ -\text{sen} \frac{2\pi_{i1}}{8} & \cos \frac{2\pi_{i1}}{8} \end{pmatrix}, (-1)^{\frac{q_2}{4}} \right).$$

Este código tem como parâmetros de desempenho  $K = 2,2164$  e  $R/W = 2$ . Vamos considerar um código de grupo cíclico  $(8,4)$ , gerado pelo grupo cíclico  $\{000,144,200,344,400,544,600,744\}$ , tendo a seguinte forma pseudodiagonal

$$O_i = \text{diagonal} \left( \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi c_{i1}}{8} & \sin \frac{2\pi c_{i1}}{8} \\ -\sin \frac{2\pi c_{i1}}{8} & \cos \frac{2\pi c_{i1}}{8} \end{pmatrix}, (-1)^{\frac{c_{i2}}{4}}, (-1)^{\frac{c_{i3}}{4}} \right).$$

Neste caso temos como parâmetros de desempenho  $K = 2,216$  e  $R/W = 1,5$ . Concluimos portanto que para o caso de códigos de grupo cíclico, acrescentar mais de uma componente unidimensional na forma pseudodiagonal, implica em perder eficiência espectral, sem aumentar a distância mínima do código. Este exemplo foi mostrado apenas para comprovar a propriedade descrita na Seção 3.1.

Na Figura 4.5 é mostrado os parâmetros de desempenho dos novos códigos de grupo comutativo gerados, dos códigos de grupo cíclico, simplex e biortogonais. Pode-se verificar que os códigos de grupo comutativo tem desempenho superior aos códigos de grupo cíclico. Para os códigos de grupo cíclico pode-se traçar facilmente um gráfico mostrando o comportamento dos parâmetros de desempenho quando varia-se a dimensão ou número de palavras do código. Para os códigos de grupo cíclico  $(30,9)$ ,  $(24,7)$ ,  $(28,7)$  e  $(36,7)$  traçamos os parâmetros de desempenho, variando-se a dimensão do código. Na Figura 4.6 estão plotadas as curvas destes códigos. É importante observar que temos um bom código de grupo cíclico, obtido a partir de  $(30,9)$ , com  $K \cong 2,7$  e  $R/W \cong 1,9$ . Este código não é mostrado nos resultados obtidos em [4].

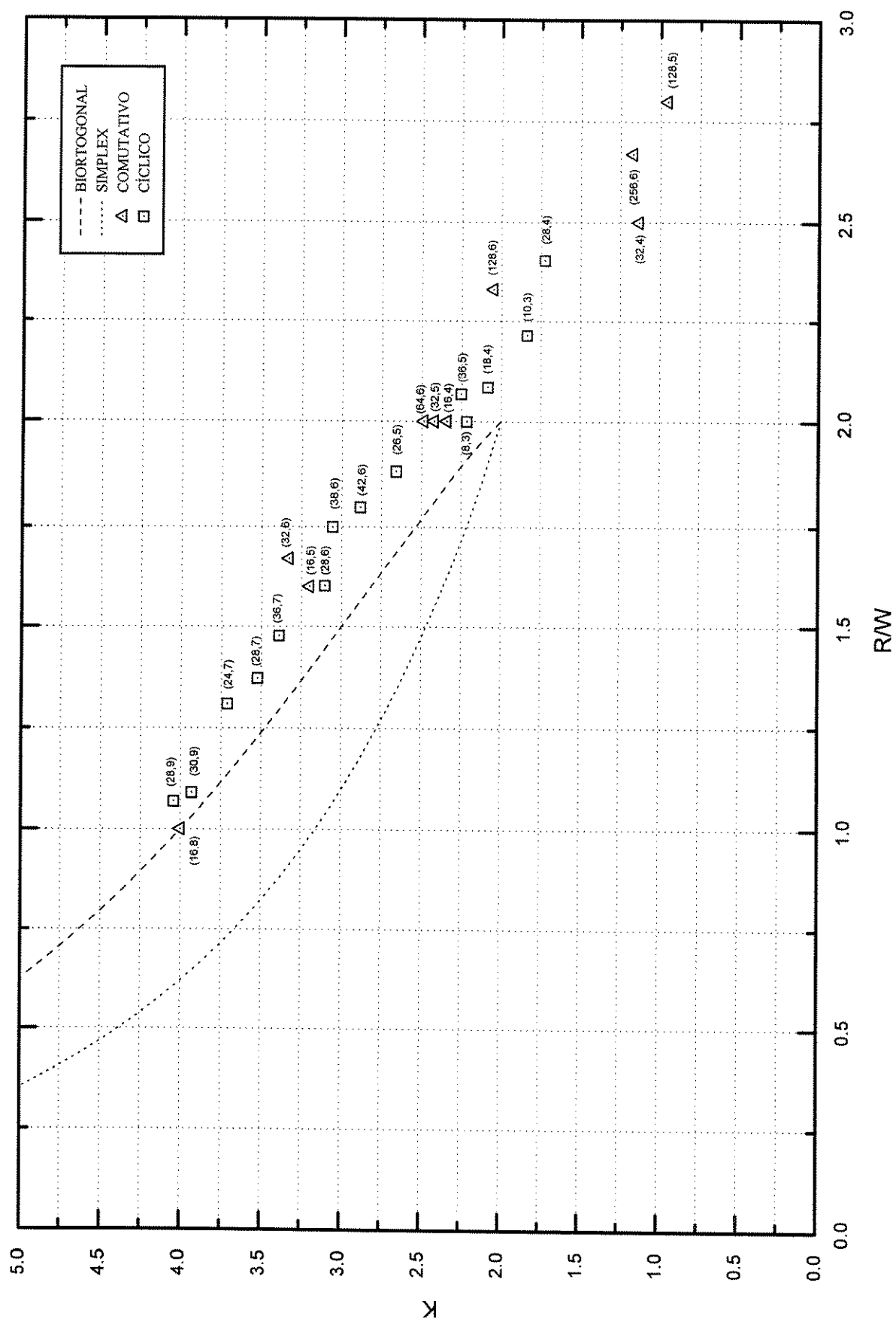
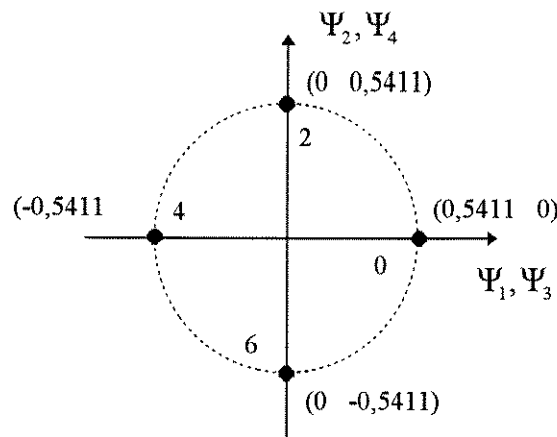


Figura 4.5 - Gráfico de Eficiência - Códigos Comutativos, Cíclicos, Simplex e Biorrtogonais

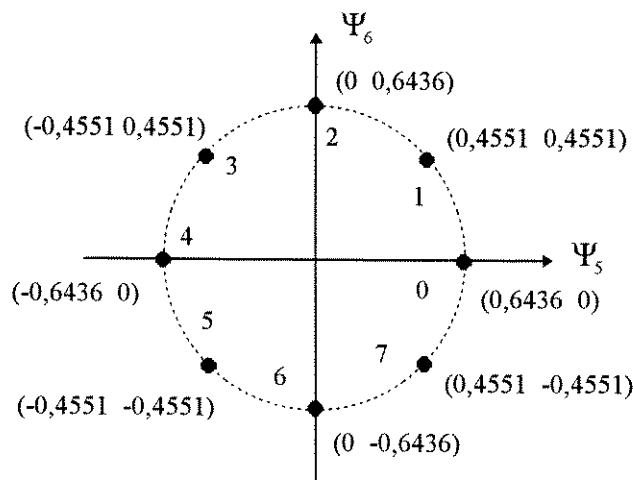


## 4.5 - Aspectos de Implementação

Na Seção 4.2.1 discutimos os aspectos de implementação do código (16,4). Vamos agora analisar o aspecto de implementação do código de grupo (64,6) onde vamos descrever em especial a estrutura de decodificação. Este código de grupo possui 64 elementos, distância mínima quadrática  $d_{min}^2 = 0,8284$  e parâmetros de desempenho  $K = 2,485$  e  $R/W = 2,0$ . De maneira similar ao código (16,4), a sua implementação pode ser feita utilizando-se o conjunto de sinais mostrado na Figura 4.7 e 4.8.



*Figura 4.7 - Constelação de Sinal 4-PSK - Código (64,6)*



*Figura 4.8 - Constelação de sinal 8-PSK - Código (64,6)*



Neste caso para cada palavra código são enviados dois sinais 4-PSK e um sinal 8-PSK, conforme mostrado na figura. Temos então um conjunto de bases ortogonais definidas como

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ \Psi_2(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \right\} \text{ para } 2kT \leq t \leq (2k+1) \cdot T,$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_3(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ \Psi_4(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \right\} \text{ para } (2k+1)T \leq t \leq (2k+2) \cdot T,$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_5(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ \Psi_6(t) &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \right\} \text{ para } (2k+2) \cdot T \leq t \leq (2k+3) \cdot T.$$

O código (64,6) apresenta uma taxa de 2 *bits*/*T*, que é, também, a mesma taxa de um 4-PSK não codificado. Podemos traçar um gráfico comparando o limitante de união do código (64,6) com uma sequência de 3 símbolos 4-PSK, com energia média unitária, isto é, a energia de cada símbolo é 1/3. Esta comparação é mostrada na Figura 4.9. O limitante de união da probabilidade de erro deste código de grupo comutativo pode ser calculado através de

$$P(e) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{64} \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}(1 - \mathbf{x}_i^N \mathbf{x}_j^N)}{N_0}} \right),$$

Neste caso temos que  $SNR = \frac{\mathcal{E}}{N_0} = \frac{6\mathcal{E}_b}{N_0}$ , então podemos reescrever a expressão do limitante como

$$P(e) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{64} \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_b(1 - \mathbf{x}_i^N \mathbf{x}_j^N)}{N_0}} \right).$$

Considerando 3 símbolos 4-PSK, temos  $P(e)$  é definida como

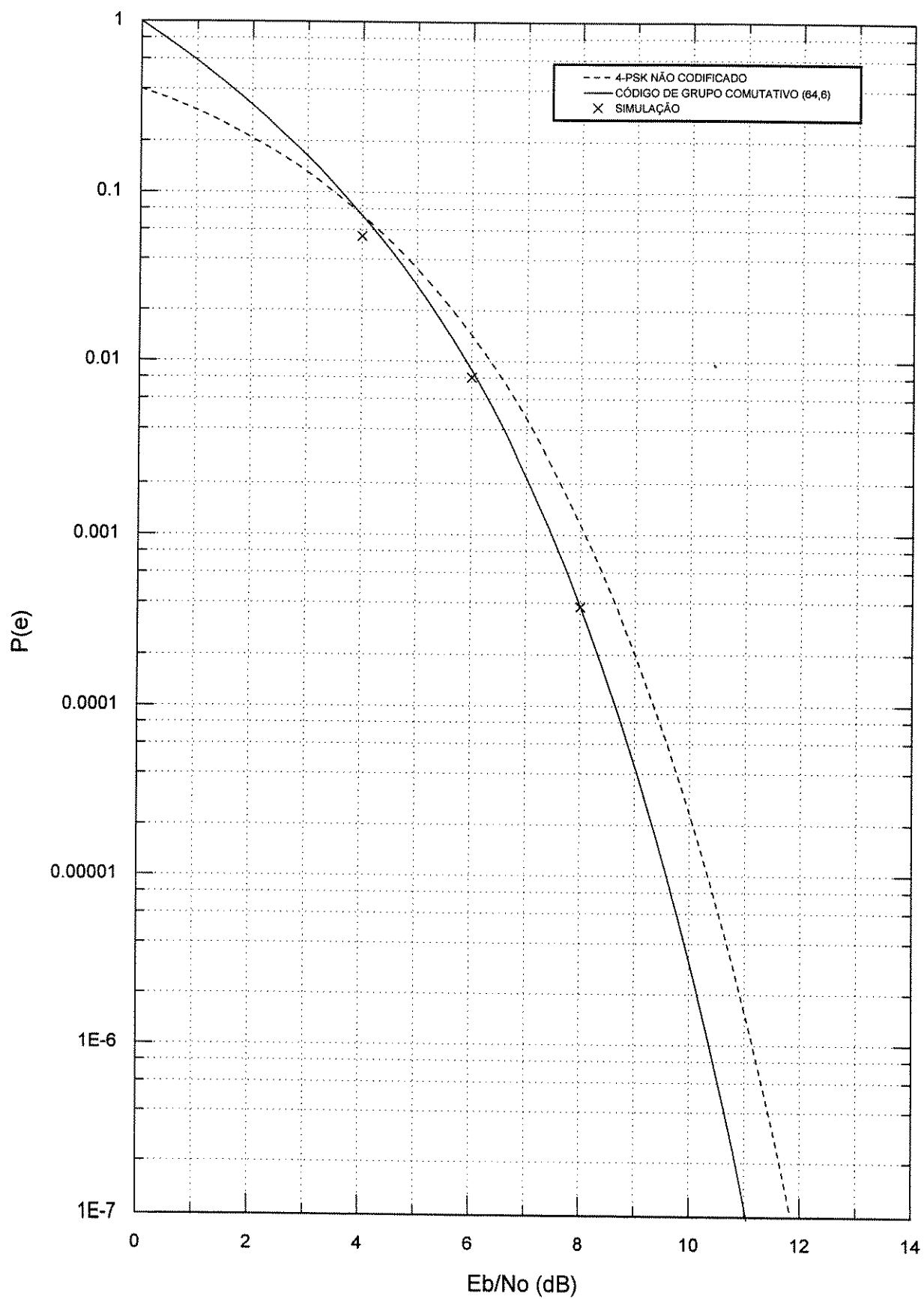
$$P(e) = 1 - \left[ 1 - (2p - p^2) \right]^3, \text{ onde } p = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}} \right).$$

A Figura 4.9 mostra uma comparação entre o limitante de união do código (64,6) e a probabilidade de erro do bloco de 3 símbolos 4-PSK. O código (64,6) apresenta uma ganho de codificação maior em relação ao código (16,4) descrito na Seção 4.2.1. Podemos observar que

para uma probabilidade de erro  $P(e) = 10^{-7}$  o ganho esperado é de 0,8 dB. O ganho assintótico de codificação é de

$$10 \cdot \log_{10} \left( \frac{d_{min}^2}{d_{4PSK}^2} \right) \text{ dB} = 1,24 \text{ dB}.$$

Na Figura 4.9 também são mostrados alguns resultados de simulação. Pode-se observar a excelente concordância entre a estimação de  $P(e)$  pelo limitante de união e pela simulação.



*Figura 4.9 - Gráfico de Desempenho - Código (64,6) versus 4-PSK*

## 4.5.1 - Demodulação

Na Seção 2.3 foram descritos os conceitos básicos sobre modulação sem memória e demodulação coerente. Antes de apresentarmos o esquema de demodulação para o código (64,6) precisamos fazer algumas considerações. A implementação de um esquema de modulação multidimensional implica em restringir as seqüências de sinais, ou seja, temos uma combinação de modulação e codificação. Isso significa que os sinais transmitidos não dependem apenas de  $\xi_k$ , mas também do estado  $\sigma_k$  do modulador. Um sinal transmitido num intervalo  $T$  vai depender dos sinais transmitidos nos intervalos anteriores. Neste caso o receptor de MV não pode utilizar decisão símbolo a símbolo. Este tipo de modulação é chamado de *modulação com memória* [2, p. 165]. Portanto vamos utilizar os resultados da Seção 2.3 para derivarmos o esquema de demodulação.

O demodulador forma um conjunto de sinais que agora são funções do estado  $\sigma_k$  do modulador. Então podemos reescrever a expressão (2.14) como

$$v_{\xi}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{\xi_k, \sigma_k}(t - kT), \quad 0 \leq t \leq KT.$$

O demodulador deve escolher uma seqüência  $\hat{\xi}$  que maximize as razões de verossimilhança. Da mesma forma que (2.16), temos

$$l_{\xi} = \int_0^{KT} y(t) v_{\xi}(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{KT} v_{\xi}^2(t) dt = \sum_{k=0}^{K-1} l_{\xi_k}, \quad (4.1)$$

onde

$$l_{\xi_k} = \int_{kT}^{(k+1)T} y(t) x_{\xi_k, \sigma_k}(t - kT) dt - \frac{1}{2} \int_{kT}^{(k+1)T} x_{\xi_k, \sigma_k}^2(t - kT) dt. \quad (4.2)$$

Precisamos introduzir a definição de soma parcial sobre os primeiros  $k$  intervalos de duração  $T$ ,

$$l_{\xi(k)} \equiv \sum_{i=0}^{k-1} l_{\xi_i}, \quad (4.3)$$

obtendo-se a relação

$$l_{\xi(k+1)} = l_{\xi(k)} + l_{\xi_k}, \quad (4.4)$$

onde  $l_{\xi(K)} = l_{\xi}$ . O demodulador de MV deve maximizar (4.1) sob o conjunto de possíveis seqüências  $\xi$ . Para seqüências  $\xi$  longas o cálculo de todas as possíveis seqüências  $\xi$  é proibitivo. A maximização de (4.1) símbolo a símbolo, dado por (4.2), não resulta em uma

decodificação ótima, pois os  $l_{\xi_k}$  não são independentes. Uma maneira de reduzir o número de comparações é a utilização do *algoritmo de Viterbi* que é baseado em (4.4). Utilizando-se este algoritmo pode-se descrever a decodificação através de uma treliça. A métrica utilizada na treliça para o nosso caso é a distância Euclidiana. Podemos mostrar que

$$d_i^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 = \sum_{j=1}^N y_j^2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^N y_j x_{ij} + \sum_{j=1}^N x_{ij}^2.$$

Como estamos trabalhando com sinais de energia unitária, podemos utilizar como métrica os próprios  $l_{\xi_k}$ , ou seja,  $\sum_{j=1}^N y_j x_{ij}$ . O diagrama de blocos do demodulador do código (64,6) é

mostrado na Figura 4.10. A Figura 4.11 mostra a estrutura de treliça do código de grupo comutativo (64,6). Apesar de termos deduzido a treliça da observação direta do código de bloco, deve ser possível obtê-la através da estrutura do grupo conforme descrito em [12]. A princípio seria necessário 64 comparações para a decodificação de cada símbolo transmitido. Com a estrutura de treliça é necessário apenas 31 comparações, o que simplifica bastante a decodificação.

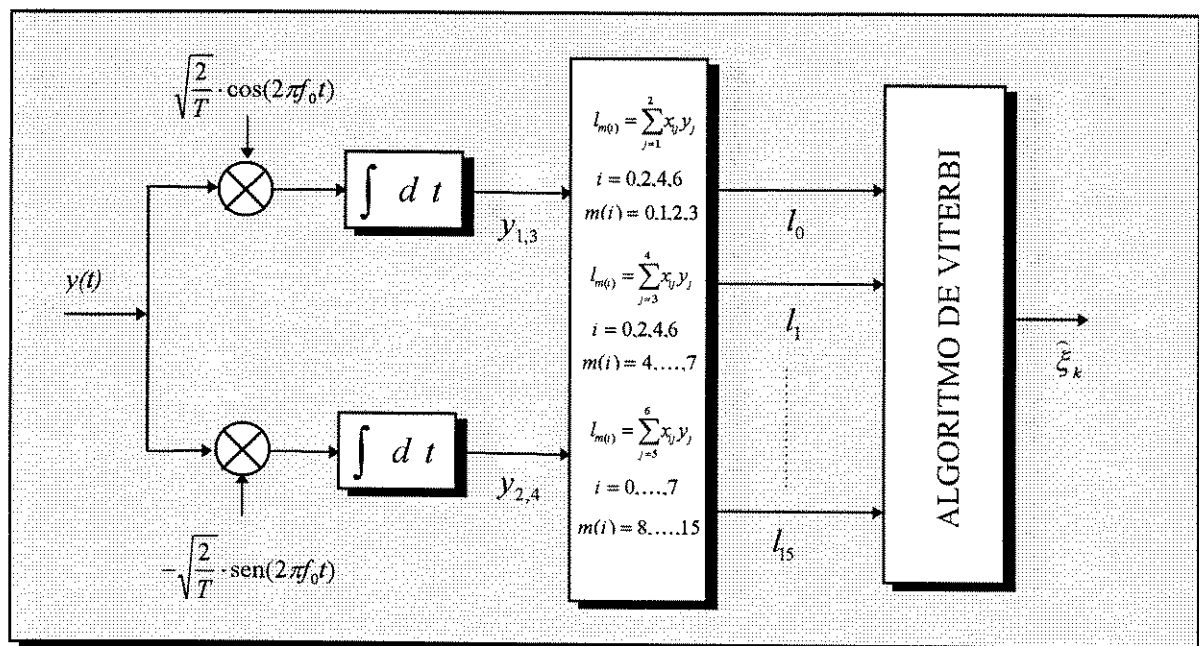


Figura 4.10 - Diagrama de Blocos do Demodulador - Código (64,6)

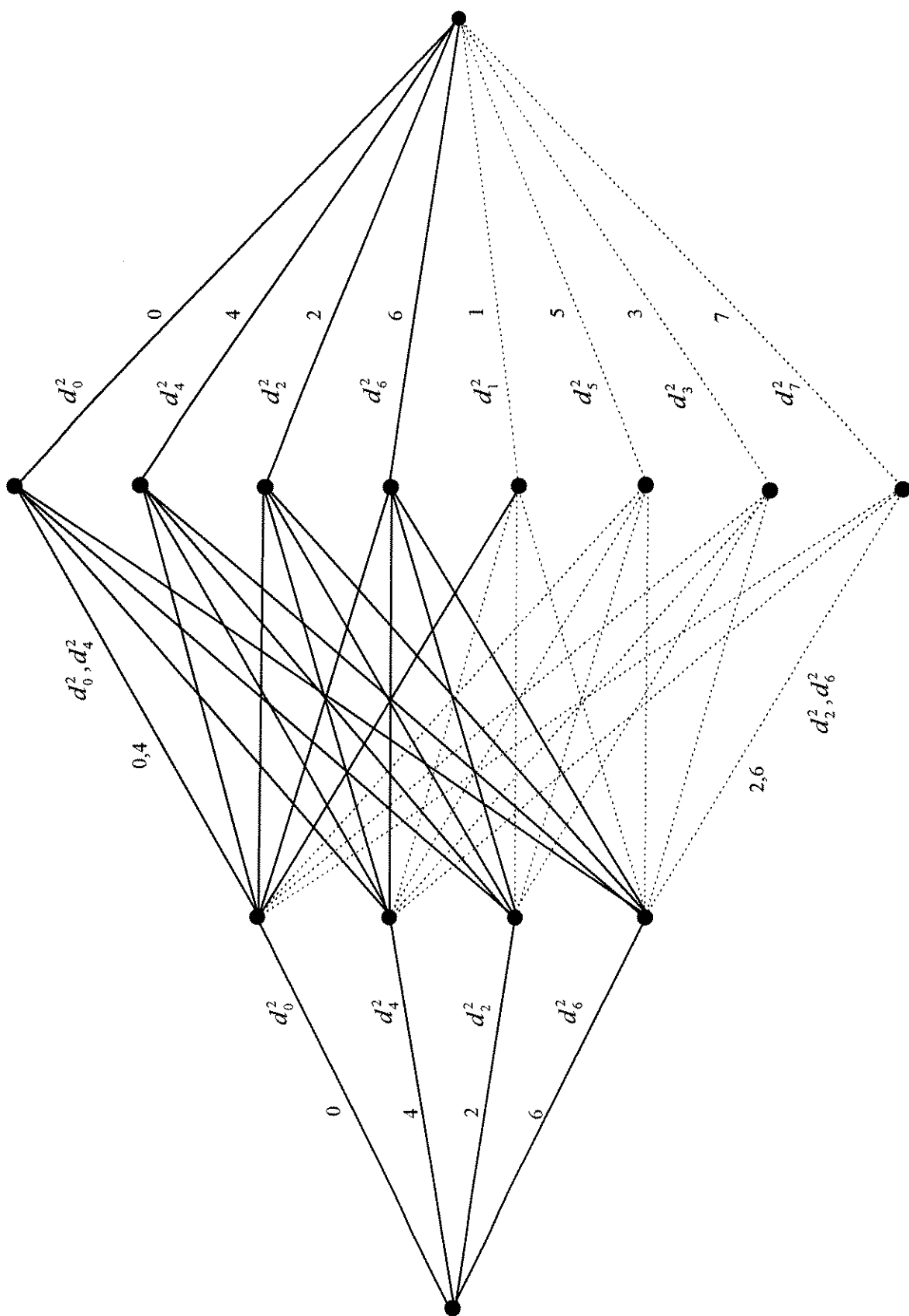


Figura 4.11 - Treliça - Código (64,6)

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho fizemos uma abordagem prática dos códigos de grupo comutativo para o canal Gaussiano. Nos restringimos à geração de novos códigos, comparações de desempenho, bem como propor sua implementação. É possível através da utilização de códigos de bloco de alfabeto e comprimento maior ( $Q$  e  $L$  grande) gerar novos códigos de grupo, que tenham bons parâmetros de desempenho. Inicialmente é importante destacar algumas características do método de geração. O algoritmo de partição faz uma busca exaustiva por representantes de classes laterais de maneira a obter todos os possíveis subgrupos. Isso obviamente implica num tempo computacional muito grande. Como exemplo, o tempo (CPU) de partição do grupo  $(Z_8)^3$ , numa estação *SPARC 20*, foi de aproximadamente 20 horas. Para valores grandes de  $Q$  e  $L$ , o tempo computacional torna-se proibitivo. Outro problema inerente ao processo de partição é a quantidade de memória necessária, que também é relativamente grande. É possível diminuir a complexidade do algoritmo aperfeiçoando-se as rotinas do programa de partição e o processo de alocação de memória. Apesar de ser uma alternativa viável, não resultaria numa grande redução de complexidade. Uma proposta alternativa para se construir bons códigos, sem particionar grandes grupos, seria a concatenação de códigos de grupo com os códigos algébricos lineares, obtendo-se assim novos códigos em dimensões muito maiores [16,17]. No Anexo C, apresentamos um subgrupo com 128 elementos com as respectivas distâncias mínimas, proveniente da partição do grupo  $(Z_8)^3$ . Quanto à implementação dos códigos de grupo comutativo, verificamos que é relativamente simples, através da utilização dos sinais modulados em fase (*PSK*). Os códigos de grupo cíclico apresentam uma decodificação relativamente simples, utilizando-se apenas um filtro casado. Para os códigos de grupo comutativo (por exemplo o código  $(64,6)$ ) é possível associar-se uma estrutura de treliça, o que simplificaria muito a decodificação por MV.

Os códigos de grupo comutativo apresentam um desempenho superior aos códigos cíclicos, que em contrapartida tem uma facilidade maior de construção. O problema do vetor

inicial tem solução semelhante para ambos os casos, sendo possível a utilização do algoritmo de otimização simplex. Uma diferença importante é em relação ao número de equações de restrição. Para um código de grupo cíclico  $(M,N)$  são necessárias no máximo  $M/2$  equações de restrição. Como verificamos, para os códigos de grupo comutativo não se pode definir a priori quantas equações são necessárias à otimização do vetor inicial. Para códigos com grande número de palavras (grande número de restrições) o problema do vetor inicial ainda pode ser resolvido através do algoritmo simplex ou simplex dual, retirando-se as equações redundantes. Uma abordagem eficiente para o problema do vetor inicial para o caso de códigos de grupo não comutativo é descrita em [14].

Alguns códigos possuem energias unidimensionais e bidimensionais distintas e podem ser referidos como uma modulação QAM estrela. Esse tipo de modulação é de particular interesse para aplicações em canais com desvanecimento, em especial comunicações móveis. Outro aspecto referente a implementação que deve ser destacado é a utilização da estrutura de treliça para a decodificação de códigos com grande número de palavras. Essa simplificação de decodificação é uma das justificativas para a utilização de códigos com estrutura de grupos.



# Anexo A

## Listagem do Programa de Partição do Grupo $(Z_8)^3$

```
#include<stdio.h>
#include<alloca.h>
#define L 3
#define M 8
#define ML 512
#define P 9
unsigned c1,c2,ele,tnsg,nsg;
unsigned GS[3];
unsigned N1[9]={1,7,35,155,203,203,155,35,7};
unsigned N2[9]={7,35,155,203,203,155,35,7,1};
unsigned ****SG;
unsigned ***TROCA;
unsigned **LISTA;
FILE *fp;
FILE *fp1;
void Gera_Grupo();
void Gera_Lista();
void verifica();
void verifica2();
void Aloca_Memoria();
void Desaloca();
main()
{
    unsigned i,j,k;
    fp=fopen("z8_3.txt","w");
    fclose(fp);
    fp1=fopen("troca3.txt","w");
    fclose(fp1);
    Aloca_Memoria(N1[0],N2[0],1);
    nsg=0;
    ele=1;
    tnsg=1;
    for(i=0;i<L;i++) SG[1][nsg][i][0]=0;
    for (c1=0;c1<P;c1++)
    {
        for(c2=0;c2<tnsg;c2++) Gera_Grupo();
        fp=fopen("z8_3.txt","a");
        for (i=0;i<nsg;i++)
        {
            for(j=0;j<(2*ele);j++)
            {
                for(k=0;k<L;k++)
                fprintf(fp,"%1d",SG[0][i][k][j]);
                fprintf(fp," ");
            }
            fprintf(fp,"\n");
        }
        fclose(fp);
    }
}
```

```

if (c1<=7)
{
    fp1=fopen("troca3.txt","w");
    for (i=0;i<nsg;i++)
    {
        fprintf(fp1,"\n");
        for(j=0;j<(2*ele);j++)
            fprintf(fp1,"%1d%1d%1d",SG[0][i][0][j],SG[0][i][1][j],SG[0][i][2][j]);
    }
    fclose(fp1);
    Desaloca(N1[c1],N2[c1],ele);
    Aloca_Memoria(N1[1+c1],N2[1+c1],2*ele);
    fp1=fopen("troca3.txt","r");
    for (i=0;i<nsg;i++)
    {
        for(j=0;j<(2*ele);j++)
            fscanf(fp1,"%1d%1d%1d",&SG[1][i][0][j],&SG[1][i][1][j],&SG[1][i][2][j]);
        fclose(fp1);
        ele=ele*2;
        tnsg=nsg;
        nsg=0;
    }
return 0;
}

void Aloca_Memoria(m1,m2,m3)
unsigned m1,m2,m3;
{
    unsigned i,j,k;
    SG = (unsigned ****) calloc(2,sizeof(unsigned***));
    SG[1] =(unsigned ***) calloc(m1,sizeof(unsigned**));
    SG[0] =(unsigned ***) calloc(m2,sizeof(unsigned**));
    for(j=0;j<m1;j++)
    {
        SG[1][j]=(unsigned **) calloc(L,sizeof(unsigned*));
        for(k=0;k<L;k++) SG[1][j][k]=(unsigned *) calloc(m3,sizeof(unsigned));
    }
    for(j=0;j<m2;j++)
    {
        SG[0][j]=(unsigned **) calloc(L,sizeof(unsigned*));
        for(k=0;k<L;k++) SG[0][j][k]=(unsigned *) calloc(2*m3,sizeof(unsigned));
    }
    LISTA=(unsigned **) calloc(L,sizeof(unsigned*));
    for(i=0;i<L;i++) LISTA[i]=(unsigned *) calloc(2*m3,sizeof(unsigned));
}

void Desaloca(m1,m2,m3)
unsigned m1,m2,m3;
{
    unsigned i,j,k;
    for(j=0;j<m1;j++)
        for(k=0;k<L;k++) free(SG[1][j][k]);
    for(j=0;j<m2;j++)
        for(k=0;k<L;k++) free(SG[0][j][k]);
    free(SG);
    for(i=0;i<L;i++) free(LISTA[i]);
    free(LISTA);
}

void Gera_Grupo()
{
    unsigned i1,i2,i3;
    for(i1=0;i1<M;i1++)
    for(i2=0;i2<M;i2++)
    for(i3=0;i3<M;i3++)
    {
        GS[0]=i1;
        GS[1]=i2;
        GS[2]=i3;
    }
}

```

---

```
Gera_Lista();  
verifica(); }}
```

```
void Gera_Lista()  
{  
    unsigned i,j;  
    for(i=0;i<ele;i++)  
        { LISTA[0][i]=SG[1][c2][0][i];  
          LISTA[1][i]=SG[1][c2][1][i];  
          LISTA[2][i]=SG[1][c2][2][i];  
          LISTA[0][ele+i]=(LISTA[0][i]+GS[0])%M;  
          LISTA[1][ele+i]=(LISTA[1][i]+GS[1])%M;  
          LISTA[2][ele+i]=(LISTA[2][i]+GS[2])%M; } }
```

```
void verifica()  
{ unsigned i1,i2,i3,k,cg=0;  
  for(i1=0;i1<(2*ele);i1++)  
    for(i2=i1;i2<(2*ele);i2++)  
      { for(i3=0;i3<(2*ele);i3++)  
        if (((LISTA[0][i1]+LISTA[0][i2])%M==LISTA[0][i3])&  
            ((LISTA[1][i1]+LISTA[1][i2])%M==LISTA[1][i3])&  
            ((LISTA[2][i1]+LISTA[2][i2])%M==LISTA[2][i3])) cg++; }
```

```
if (cg==((2*ele)*((2*ele)+1))/2) verifica2();}
```

```
void verifica2()  
{ unsigned i1,i2,i3,k,cg=0,cg1=0;  
  for(i1=0;i1<nsg;i1++)  
    { for(i2=0;i2<(2*ele);i2++)  
      { for(i3=0;i3<(2*ele);i3++)  
        if ((LISTA[0][i2]==SG[0][i1][0][i3])&  
            (LISTA[1][i2]==SG[0][i1][1][i3])&  
            (LISTA[2][i2]==SG[0][i1][2][i3])) { cg++; break; } }  
    if (cg==(2*ele)) cg1++; cg=0; }  
  if (cg1==0)  
    { for(i1=0;i1<(2*ele);i1++)  
      for(k=0;k<L;k++) SG[0][nsg][k][i1]=LISTA[k][i1];  
    nsg++; } }
```

# Anexo B

## Listagem Completa da Partição do Grupo $(Z_8)^3$

```
000 004
000 040
000 044
000 400
000 404
000 440
000 444

000 004 002 006
000 004 040 044
000 004 042 046
000 004 400 404
000 004 402 406
000 004 440 444
000 004 442 446
000 040 020 060
000 040 024 064
000 040 400 440
000 040 404 444
000 040 420 460
000 040 424 464
000 044 022 066
000 044 026 062
000 044 400 444
000 044 404 440
000 044 422 466
000 044 426 462
000 400 200 600
000 400 204 604
000 400 240 640
000 400 244 644
000 404 202 606
000 404 206 602
000 404 242 646
000 404 246 642
000 440 220 660
000 440 224 664
000 440 260 620
000 440 264 624
000 444 222 666
000 444 226 662
000 444 262 626
000 444 266 622

000 004 002 006 001 005 003 007
000 004 002 006 040 044 042 046
000 004 002 006 041 045 043 047
000 004 002 006 400 404 402 406
000 004 002 006 401 405 403 407
000 004 002 006 440 444 442 446
000 004 002 006 441 445 443 447
000 004 040 044 020 024 060 064
000 004 040 044 022 026 062 066
000 004 040 044 400 404 440 444
000 004 040 044 402 406 442 446
000 004 040 044 420 424 460 464
000 004 040 044 422 426 462 466
000 004 042 046 021 025 063 067
000 004 042 046 023 027 065 061
000 004 042 046 400 404 442 446
000 004 042 046 402 406 444 440
000 004 042 046 421 425 463 467
000 004 042 046 423 427 465 461
000 004 400 404 200 204 600 604
000 004 400 404 202 206 602 606
000 004 400 404 240 244 640 644
000 004 400 404 242 246 642 646
000 004 402 406 201 205 603 607
000 004 402 406 203 207 605 601
000 004 402 406 241 245 643 647
000 004 402 406 243 247 645 641
000 004 440 444 220 224 660 664
000 004 440 444 222 226 662 666
000 004 440 444 260 264 620 624
000 004 440 444 262 266 622 626
000 004 442 446 221 225 663 667
000 004 442 446 223 227 665 661
```

000 004 442 446 261 265 623 627  
000 004 442 446 263 267 625 621  
000 040 020 060 010 050 030 070  
000 040 020 060 014 054 034 074  
000 040 020 060 400 440 420 460  
000 040 020 060 404 444 424 464  
000 040 020 060 410 450 430 470  
000 040 020 060 414 454 434 474  
000 040 024 064 012 052 036 076  
000 040 024 064 016 056 032 072  
000 040 024 064 400 440 424 464  
000 040 024 064 404 444 420 460  
000 040 024 064 412 452 436 476  
000 040 024 064 416 456 432 472  
000 040 400 440 200 240 600 640  
000 040 400 440 204 244 604 644  
000 040 400 440 220 260 620 660  
000 040 400 440 224 264 624 664  
000 040 404 444 202 242 606 646  
000 040 404 444 206 246 602 642  
000 040 404 444 222 262 626 666  
000 040 404 444 226 266 622 662  
000 040 420 460 210 250 630 670  
000 040 420 460 214 254 634 674  
000 040 420 460 230 270 650 610  
000 040 420 460 234 274 654 614  
000 040 424 464 212 252 636 676  
000 040 424 464 216 256 632 672  
000 040 424 464 232 272 656 616  
000 040 424 464 236 276 652 612  
000 044 022 066 011 055 033 077  
000 044 022 066 015 051 037 073  
000 044 022 066 400 444 422 466  
000 044 022 066 404 440 426 462  
000 044 022 066 411 455 433 477  
000 044 022 066 415 451 437 473  
000 044 026 062 013 057 031 075  
000 044 026 062 017 053 035 071  
000 044 026 062 400 444 426 462  
000 044 026 062 404 440 422 466  
000 044 026 062 413 457 431 475  
000 044 026 062 417 453 435 471  
000 044 400 444 200 244 600 644  
000 044 400 444 204 240 604 640  
000 044 400 444 222 266 622 666  
000 044 400 444 226 262 626 662  
000 044 404 440 202 246 606 642  
000 044 404 440 206 242 602 646  
000 044 404 440 220 264 624 660  
000 044 404 440 224 260 620 664  
000 044 422 466 211 255 633 677  
000 044 422 466 215 251 637 673  
000 044 422 466 233 277 655 611  
000 044 422 466 237 273 651 615  
000 044 426 462 213 257 631 675  
000 044 426 462 217 253 635 671  
000 044 426 462 231 275 657 613  
000 044 426 462 235 271 653 617  
000 400 200 600 100 500 300 700  
000 400 200 600 104 504 304 704  
000 400 200 600 140 540 340 740  
000 400 200 600 144 544 344 744  
000 400 204 604 102 502 306 706  
000 400 204 604 106 506 302 702  
000 400 204 604 142 542 346 746  
000 400 204 604 146 546 342 742  
000 400 240 640 120 520 360 760  
000 400 240 640 124 524 364 764  
000 400 240 640 160 560 320 720  
000 400 240 640 164 564 324 724  
000 400 244 644 122 522 366 766  
000 400 244 644 126 526 362 762  
000 400 244 644 162 562 326 726  
000 400 244 644 166 566 322 722  
000 404 202 606 101 505 303 707  
000 404 202 606 105 501 307 703  
000 404 202 606 141 545 343 747  
000 404 202 606 145 541 347 743  
000 404 206 602 103 507 301 705  
000 404 206 602 107 503 305 701  
000 404 206 602 143 547 341 745  
000 404 206 602 147 543 345 741  
000 404 242 646 121 525 363 767  
000 404 242 646 125 521 367 763  
000 404 242 646 161 565 323 727  
000 404 242 646 165 561 327 723  
000 404 246 642 123 527 361 765  
000 404 246 642 127 523 365 761  
000 404 246 642 163 567 321 725  
000 404 246 642 167 563 325 721  
000 440 220 660 110 550 330 770  
000 440 220 660 114 554 334 774  
000 440 220 660 150 510 370 730  
000 440 220 660 154 514 374 734  
000 440 224 664 112 552 336 776  
000 440 224 664 116 556 332 772  
000 440 224 664 152 512 376 736

000 440 224 664 156 516 372 732  
 000 440 260 620 130 570 310 750  
 000 440 260 620 134 574 314 754  
 000 440 260 620 170 530 350 710  
 000 440 260 620 174 534 354 714  
 000 440 264 624 132 572 316 756  
 000 440 264 624 136 576 312 752  
 000 440 264 624 172 532 356 716  
 000 440 264 624 176 536 352 712  
 000 444 222 666 111 555 333 777  
 000 444 222 666 115 551 337 773  
 000 444 222 666 151 515 373 737  
 000 444 222 666 155 511 377 733  
 000 444 226 662 113 557 331 775  
 000 444 226 662 117 553 335 771  
 000 444 226 662 153 517 371 735  
 000 444 226 662 157 513 375 731  
 000 444 262 626 131 575 313 757  
 000 444 262 626 135 571 317 753  
 000 444 262 626 171 535 353 717  
 000 444 262 626 175 531 357 713  
 000 444 266 622 133 577 311 755  
 000 444 266 622 137 573 315 751  
 000 444 266 622 173 537 351 715  
 000 444 266 622 177 533 355 711

000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047  
 000 004 002 006 001 005 003 007 400 404 402 406 401 405 403 407  
 000 004 002 006 001 005 003 007 440 444 442 446 441 445 443 447  
 000 004 002 006 040 044 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066  
 000 004 002 006 040 044 042 046 021 025 023 027 061 065 063 067  
 000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446  
 000 004 002 006 040 044 042 046 401 405 403 407 441 445 443 447  
 000 004 002 006 040 044 042 046 420 424 422 426 460 464 462 466  
 000 004 002 006 040 044 042 046 421 425 423 427 461 465 463 467  
 000 004 002 006 041 045 043 047 400 404 402 406 441 445 443 447  
 000 004 002 006 041 045 043 047 401 405 403 407 442 446 444 440  
 000 004 002 006 400 404 402 406 200 204 202 206 600 604 602 606  
 000 004 002 006 400 404 402 406 201 205 203 207 601 605 603 607  
 000 004 002 006 400 404 402 406 240 244 242 246 640 644 642 646  
 000 004 002 006 400 404 402 406 241 245 243 247 641 645 643 647  
 000 004 002 006 440 444 442 446 220 224 222 226 660 664 662 666  
 000 004 002 006 440 444 442 446 221 225 223 227 661 665 663 667  
 000 004 002 006 440 444 442 446 260 264 262 266 620 624 622 626  
 000 004 002 006 440 444 442 446 261 265 263 267 621 625 623 627  
 000 004 040 044 020 024 060 064 010 014 050 054 030 034 070 074  
 000 004 040 044 020 024 060 064 012 016 052 056 032 036 072 076  
 000 004 040 044 020 024 060 064 400 404 440 444 420 424 460 464  
 000 004 040 044 020 024 060 064 402 406 442 446 422 426 462 466  
 000 004 040 044 020 024 060 064 410 414 450 454 430 434 470 474  
 000 004 040 044 020 024 060 064 412 416 452 456 432 436 472 476  
 000 004 040 044 022 026 062 066 011 015 051 055 033 037 073 077  
 000 004 040 044 022 026 062 066 013 017 053 057 035 031 075 071  
 000 004 040 044 022 026 062 066 400 404 440 444 422 426 462 466  
 000 004 040 044 022 026 062 066 402 406 442 446 424 420 464 460  
 000 004 040 044 022 026 062 066 411 415 451 455 433 437 473 477  
 000 004 040 044 022 026 062 066 413 417 453 457 435 431 475 471  
 000 004 040 044 400 404 440 444 200 204 240 244 600 604 640 644  
 000 004 040 044 400 404 440 444 202 206 242 246 602 606 642 646  
 000 004 040 044 400 404 440 444 220 224 260 264 620 624 660 664  
 000 004 040 044 400 404 440 444 222 226 262 266 622 626 662 666  
 000 004 040 044 402 406 442 446 201 205 241 245 603 607 643 647  
 000 004 040 044 402 406 442 446 203 207 243 247 605 601 645 641  
 000 004 040 044 402 406 442 446 221 225 261 265 623 627 663 667  
 000 004 040 044 402 406 442 446 223 227 263 267 625 621 665 661  
 000 004 040 044 420 424 460 464 210 214 250 254 630 634 670 674  
 000 004 040 044 420 424 460 464 212 216 252 256 632 636 672 676  
 000 004 040 044 420 424 460 464 230 234 270 274 650 654 610 614  
 000 004 040 044 420 424 460 464 232 236 272 276 652 656 612 616  
 000 004 040 044 422 426 462 466 211 215 251 255 633 637 673 677  
 000 004 040 044 422 426 462 466 213 217 253 257 635 631 675 671  
 000 004 040 044 422 426 462 466 231 235 271 275 653 657 613 617  
 000 004 040 044 422 426 462 466 233 237 273 277 655 651 615 611  
 000 004 042 046 021 025 063 067 400 404 442 446 421 425 463 467  
 000 004 042 046 021 025 063 067 402 406 444 440 423 427 465 461  
 000 004 042 046 023 027 065 061 400 404 442 446 423 427 465 461  
 000 004 042 046 023 027 065 061 402 406 444 440 425 421 467 463  
 000 004 042 046 400 404 442 446 200 204 242 246 600 604 642 646  
 000 004 042 046 400 404 442 446 202 206 244 240 602 606 644 640  
 000 004 042 046 400 404 442 446 221 225 263 267 621 625 663 667  
 000 004 042 046 400 404 442 446 223 227 265 261 623 627 665 661  
 000 004 042 046 402 406 444 440 201 205 243 247 603 607 645 641  
 000 004 042 046 402 406 444 440 203 207 245 241 605 601 647 643  
 000 004 042 046 402 406 444 440 220 224 262 266 622 626 664 660  
 000 004 042 046 402 406 444 440 222 226 264 260 624 620 666 662  
 000 004 400 404 200 204 600 604 100 104 500 504 300 304 700 704  
 000 004 400 404 200 204 600 604 102 106 502 506 302 306 702 706  
 000 004 400 404 200 204 600 604 140 144 540 544 340 344 740 744  
 000 004 400 404 200 204 600 604 142 146 542 546 342 346 742 746  
 000 004 400 404 202 206 602 606 101 105 501 505 303 307 703 707  
 000 004 400 404 202 206 602 606 103 107 503 507 305 301 705 701  
 000 004 400 404 202 206 602 606 141 145 541 545 343 347 743 747  
 000 004 400 404 202 206 602 606 143 147 543 547 345 341 745 741  
 000 004 400 404 240 244 640 644 120 124 520 524 360 364 760 764  
 000 004 400 404 240 244 640 644 122 126 522 526 362 366 762 766  
 000 004 400 404 240 244 640 644 160 164 560 564 320 324 720 724  
 000 004 400 404 240 244 640 644 162 166 562 566 322 326 722 726

000 004 400 404 242 246 642 646 121 125 521 525 363 367 763 767  
000 004 400 404 242 246 642 646 123 127 523 527 365 361 765 761  
000 004 400 404 242 246 642 646 161 165 561 565 323 327 723 727  
000 004 400 404 242 246 642 646 163 167 563 567 325 321 725 721  
000 004 440 444 220 224 660 664 110 114 550 554 330 334 770 774  
000 004 440 444 220 224 660 664 112 116 552 556 332 336 772 776  
000 004 440 444 220 224 660 664 150 154 510 514 370 374 730 734  
000 004 440 444 220 224 660 664 152 156 512 516 372 376 732 736  
000 004 440 444 222 226 662 666 111 115 551 555 333 337 773 777  
000 004 440 444 222 226 662 666 113 117 553 557 335 331 775 771  
000 004 440 444 222 226 662 666 151 155 511 515 373 377 733 737  
000 004 440 444 222 226 662 666 153 157 513 517 375 371 735 731  
000 004 440 444 260 264 620 624 130 134 570 574 310 314 750 754  
000 004 440 444 260 264 620 624 132 136 572 576 312 316 752 756  
000 004 440 444 260 264 620 624 170 174 530 534 350 354 710 714  
000 004 440 444 260 264 620 624 172 176 532 536 352 356 712 716  
000 004 440 444 262 266 622 626 131 135 571 575 313 317 753 757  
000 004 440 444 262 266 622 626 133 137 573 577 315 311 755 751  
000 004 440 444 262 266 622 626 171 175 531 535 353 357 713 717  
000 004 440 444 262 266 622 626 173 177 533 537 355 351 715 711  
000 040 020 060 010 050 030 070 400 440 420 460 410 450 430 470  
000 040 020 060 010 050 030 070 404 444 424 464 414 454 434 474  
000 040 020 060 014 054 034 074 400 440 420 460 414 454 434 474  
000 040 020 060 014 054 034 074 404 444 424 464 410 450 430 470  
000 040 020 060 400 440 420 460 200 240 220 260 600 640 620 660  
000 040 020 060 400 440 420 460 204 244 224 264 604 644 624 664  
000 040 020 060 400 440 420 460 210 250 230 270 610 650 630 670  
000 040 020 060 400 440 420 460 214 254 234 274 614 654 634 674  
000 040 020 060 404 444 424 464 202 242 222 262 606 646 626 666  
000 040 020 060 404 444 424 464 206 246 226 266 602 642 622 662  
000 040 020 060 404 444 424 464 212 252 232 272 616 656 636 676  
000 040 020 060 404 444 424 464 216 256 236 276 612 652 632 672  
000 040 024 064 012 052 036 076 400 440 424 464 412 452 436 476  
000 040 024 064 012 052 036 076 404 444 420 460 416 456 432 472  
000 040 024 064 016 056 032 072 400 440 424 464 416 456 432 472  
000 040 024 064 016 056 032 072 404 444 420 460 412 452 436 476  
000 040 024 064 400 440 424 464 200 240 224 264 600 640 624 664  
000 040 024 064 400 440 424 464 204 244 220 260 604 644 620 660  
000 040 024 064 400 440 424 464 212 252 236 276 612 652 636 676  
000 040 024 064 400 440 424 464 216 256 232 272 616 656 632 672  
000 040 024 064 404 444 420 460 202 242 226 266 606 646 622 662  
000 040 024 064 404 444 420 460 206 246 222 262 602 642 626 666  
000 040 024 064 404 444 420 460 210 250 234 274 614 654 630 670  
000 040 024 064 404 444 420 460 214 254 230 270 610 650 634 674  
000 040 400 440 200 240 600 640 100 140 500 540 300 340 700 740  
000 040 400 440 200 240 600 640 104 144 504 544 304 344 704 744  
000 040 400 440 200 240 600 640 120 160 520 560 320 360 720 760  
000 040 400 440 200 240 600 640 124 164 524 564 324 364 724 764  
000 040 400 440 204 244 604 644 102 142 502 542 306 346 706 746  
000 040 400 440 204 244 604 644 106 146 506 546 302 342 702 742  
000 040 400 440 204 244 604 644 122 162 522 562 326 366 726 766  
000 040 400 440 204 244 604 644 126 166 526 566 322 362 722 762  
000 040 400 440 220 260 620 660 110 150 510 550 330 370 730 770  
000 040 400 440 220 260 620 660 114 154 514 554 334 374 734 774  
000 040 400 440 220 260 620 660 130 170 530 570 350 390 750 790  
000 040 400 440 220 260 620 660 134 174 534 574 354 394 754 794  
000 040 400 440 224 264 624 664 112 152 512 552 336 376 736 776  
000 040 400 440 224 264 624 664 116 156 516 556 332 372 732 772  
000 040 400 440 224 264 624 664 132 172 532 572 356 396 756 796  
000 040 400 440 224 264 624 664 136 176 536 576 352 392 752 792  
000 040 404 444 202 242 606 646 101 141 505 545 303 343 707 747  
000 040 404 444 202 242 606 646 105 145 501 541 307 347 703 743  
000 040 404 444 202 242 606 646 121 161 525 565 323 363 727 767  
000 040 404 444 202 242 606 646 125 165 521 561 327 367 723 763  
000 040 404 444 206 246 602 642 103 143 507 547 301 341 705 745  
000 040 404 444 206 246 602 642 107 147 503 543 305 345 701 741  
000 040 404 444 206 246 602 642 123 163 527 567 321 361 725 765  
000 040 404 444 206 246 602 642 127 167 523 563 325 365 721 761  
000 040 404 444 222 262 626 666 111 151 515 555 333 373 737 777  
000 040 404 444 222 262 626 666 115 155 511 551 337 377 733 773  
000 040 404 444 222 262 626 666 131 171 535 575 353 393 757 797  
000 040 404 444 222 262 626 666 135 175 531 571 357 397 753 793  
000 040 404 444 226 266 622 662 113 153 517 557 331 371 735 775  
000 040 404 444 226 266 622 662 117 157 513 553 335 375 731 771  
000 040 404 444 226 266 622 662 133 173 537 577 351 391 755 795  
000 040 404 444 226 266 622 662 137 177 533 573 355 395 751 791  
000 044 022 066 011 055 033 077 400 444 422 466 411 455 433 477  
000 044 022 066 011 055 033 077 404 440 426 462 415 451 437 473  
000 044 022 066 015 051 037 073 400 444 422 466 415 451 437 473  
000 044 022 066 015 051 037 073 404 440 426 462 411 455 433 477  
000 044 022 066 400 444 422 466 200 244 222 266 600 644 622 666  
000 044 022 066 400 444 422 466 204 240 226 262 604 640 626 662  
000 044 022 066 400 444 422 466 211 255 233 277 611 655 633 677  
000 044 022 066 400 444 422 466 215 251 237 273 615 651 637 673  
000 044 022 066 404 440 426 462 202 246 224 260 606 642 620 664  
000 044 022 066 404 440 426 462 206 242 220 264 602 646 624 660  
000 044 022 066 404 440 426 462 213 257 235 271 617 653 631 675  
000 044 022 066 404 440 426 462 217 253 231 275 613 657 635 671  
000 044 026 062 013 057 031 075 400 444 426 462 413 457 431 475  
000 044 026 062 013 057 031 075 404 440 422 466 417 453 435 471  
000 044 026 062 017 053 035 071 400 444 426 462 417 453 435 471  
000 044 026 062 017 053 035 071 404 440 422 466 413 457 431 475  
000 044 026 062 400 444 426 462 200 244 226 262 600 644 626 662  
000 044 026 062 400 444 426 462 204 240 222 266 604 640 622 666  
000 044 026 062 400 444 426 462 213 257 231 275 613 657 631 675  
000 044 026 062 400 444 426 462 217 253 235 271 617 653 635 671  
000 044 026 062 404 440 422 466 202 246 220 264 606 642 624 660

000 044 026 062 044 400 422 466 206 242 224 260 602 615 602 664  
000 044 026 062 404 400 422 466 211 255 237 603 615 651 633 677  
000 044 026 062 044 400 422 466 215 251 233 277 611 655 637 677  
000 044 400 444 200 244 600 644 100 144 500 544 300 700 744  
000 044 400 444 200 244 600 644 104 144 504 544 304 704 744  
000 044 400 444 200 244 600 644 122 166 522 566 322 366 722 766  
000 044 400 444 200 244 600 644 126 162 526 562 362 726 762  
000 044 400 444 204 240 604 640 102 146 502 546 306 726 762  
000 044 400 444 204 240 604 640 102 146 502 542 306 702 746  
000 044 400 444 204 240 604 640 120 164 520 564 324 760 724  
000 044 400 444 204 240 604 640 124 160 524 560 324 760 764  
000 044 400 444 222 266 622 666 111 555 511 555 337 733 777  
000 044 400 444 222 266 622 666 115 151 515 551 337 373 737 773  
000 044 400 444 222 266 622 666 133 177 537 573 355 311 755 711  
000 044 400 444 222 266 622 666 137 173 537 573 351 751 715  
000 044 400 444 226 262 626 662 113 517 513 557 331 375 731 775  
000 044 400 444 226 262 626 662 117 513 517 553 357 371 735 771  
000 044 400 444 226 262 626 662 131 175 531 575 357 317 757 713  
000 044 400 444 226 262 626 662 135 171 535 571 353 317 757 713  
000 044 404 404 202 246 606 642 101 144 505 541 303 747 703  
000 044 404 404 202 246 606 642 105 141 501 545 307 343 703 747  
000 044 404 404 202 246 606 642 123 167 527 563 325 361 721 765  
000 044 404 404 202 246 606 642 127 163 523 567 321 365 725 761  
000 044 404 404 206 242 602 646 103 147 507 543 301 345 705 741  
000 044 404 404 206 242 602 646 107 143 503 547 321 341 701 745  
000 044 404 404 206 242 602 646 115 125 525 561 327 363 727 763  
000 044 404 404 206 242 602 646 125 161 521 565 323 363 727 767  
000 044 404 404 220 264 624 660 110 154 514 550 330 374 734 770  
000 044 404 404 220 264 624 660 114 150 510 554 334 370 730 774  
000 044 404 404 220 264 624 660 132 176 536 572 352 316 716 772  
000 044 404 404 220 264 624 660 136 172 532 576 356 312 712 776  
000 044 404 404 220 264 620 664 112 156 516 552 336 372 732 776  
000 044 404 404 220 264 620 664 116 152 512 556 332 376 736 772  
000 044 404 404 220 264 620 664 130 174 530 574 354 310 750 714  
000 044 404 404 220 264 620 664 134 170 530 574 354 310 754 710

[illegible]





000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 020 024 022 026 021 025 023 027 060 064 062 066 061 065 063 067 010 014 012 016 011 015 013 017 050 054 052 056 051  
055 053 057 030 034 032 036 031 035 033 037 070 074 072 076 071 075 073 077  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 020 024 022 026 021 025 023 027 060 064 062 066 061 065 063 067 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441  
445 443 447 420 424 422 426 421 425 423 427 460 464 462 466 461 465 463 467  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 020 024 022 026 021 025 023 027 060 064 062 066 061 065 063 067 410 414 412 416 411 415 413 417 450 454 452 456 451  
455 453 457 430 434 432 436 431 435 433 437 470 474 472 476 471 475 473 477  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441 445 443 447 200 204 202 206 201 205 203 207 240 244 242 246 241  
245 243 247 600 604 602 606 601 605 603 607 700 704 702 646 641 645 643 647  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441 445 443 447 220 224 222 226 221 225 223 227 260 264 262 266 261  
265 263 267 620 624 622 626 621 625 623 627 660 664 662 666 661 665 663 667  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 420 424 422 426 421 425 423 427 460 464 462 466 461 465 463 467 210 214 212 216 211 215 213 217 250 254 252 256 251  
255 253 257 630 634 632 636 631 635 633 637 670 674 672 676 671 675 673 677  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 420 424 426 421 425 423 427 460 464 462 466 461 465 463 467 230 234 232 236 231 235 233 237 270 274 272 276 271  
275 273 277 650 654 652 656 651 655 653 657 610 614 612 616 611 615 613 617  
000 004 002 006 001 005 003 007 400 404 402 406 401 405 403 407 200 204 202 206 201 205 203 207 600 604 602 606 601 605 603 607 100 104 102 106 101 105 103 107 500 504 502 506 501  
505 503 507 300 304 302 306 301 305 303 307 700 704 702 706 701 705 703 707  
000 004 002 006 001 005 003 007 400 404 402 406 401 405 403 407 200 204 202 206 201 205 203 207 600 604 602 606 601 605 603 607 100 104 102 106 101 105 103 107 500 504 502 506 501  
545 543 547 340 344 342 346 341 345 343 347 740 744 742 746 741 745 743 747  
000 004 002 006 001 005 003 007 400 404 402 406 401 405 403 407 240 244 242 246 241 245 243 247 640 644 642 646 641 645 643 647 120 124 122 126 121 125 123 127 520 524 522 526 521  
525 523 527 360 364 362 366 361 365 363 367 760 764 762 766 761 765 763 767  
000 004 002 006 001 005 003 007 400 404 402 406 401 405 403 407 240 244 242 246 241 245 243 247 640 644 642 646 641 645 643 647 160 164 162 166 161 165 163 167 560 564 562 566 561  
565 563 567 320 324 322 326 321 325 323 327 720 724 722 726 721 725 723 727  
000 004 002 006 001 005 003 007 440 444 442 446 441 445 443 447 220 224 222 226 221 225 223 227 660 664 662 666 661 665 663 667 110 114 112 116 111 115 113 117 550 554 552 556 551  
555 553 557 330 334 332 336 331 335 333 337 770 774 772 776 771 775 773 777  
000 004 002 006 001 005 003 007 440 444 442 446 441 445 443 447 220 224 222 226 221 225 223 227 660 664 662 666 661 665 663 667 150 154 152 156 151 155 153 157 510 514 512 516 511  
515 513 517 370 374 372 376 371 375 373 377 730 734 732 736 731 735 733 737  
000 004 002 006 001 005 003 007 440 444 442 446 441 445 443 447 260 264 262 266 261 265 263 267 620 624 622 626 621 625 623 627 130 134 132 136 131 135 133 137 570 574 572 576 571  
575 573 577 310 314 312 316 311 315 313 317 750 754 752 756 751 755 753 757  
000 004 002 006 001 005 003 007 440 444 442 446 441 445 443 447 260 264 262 266 261 265 263 267 620 624 622 626 621 625 623 627 170 174 172 176 171 175 173 177 530 534 532 536 531  
535 533 537 350 354 352 356 351 355 353 357 710 714 712 716 711 715 713 717  
000 004 002 006 040 044 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 010 014 012 016 050 054 052 056 030 034 032 036 070 074 072 076 400 404 402 406 440 444 442 446 420 424 422 426 460  
464 462 466 410 414 412 416 450 454 452 456 430

000 004 002 006 040 044 042 046 021 025 023 027 061 065 063 067 401 405 403 407 441 445 443 447 422 426 424 420 462 466 464 460 210 214 212 216 250 254 252 256 231 235 233 237 271  
275 273 277 611 615 613 617 651 653 657 632 636 634 630 672 676 674 670  
000 004 002 006 040 044 042 046 021 025 023 027 061 065 063 067 401 405 403 407 441 445 443 447 422 426 424 420 462 466 464 460 211 215 213 217 251 255 253 257 232 236 234 230 272  
276 274 270 612 616 614 610 652 656 654 650 633 637 635 631 673 677 675 671  
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 200 204 202 206 240 244 242 246 600 604 602 606 640 644 642 646 100 104 102 106 140 144 142 146 500 504 502 506 540  
544 542 546 300 304 302 306 340 344 342 346 700 704 702 706 740 744 742 746  
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 200 204 202 206 240 244 242 246 600 604 602 606 640 644 642 646 101 105 103 107 141 145 143 147 501 505 503 507 541  
545 543 547 301 305 303 307 341 345 343 347 701 705 703 707 741 745 743 747  
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 200 204 202 206 240 244 242 246 600 604 602 606 640 644 642 646 120 124 122 126 160 164 162 166 520 524 522 526 560  
564 562 566 320 324 322 326 360 364 362 366 720 724 722 726 760 764 762 766  
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 200 204 202 206 240 244 242 246 600 604 602 606 640 644 642 646 121 125 123 127 161 165 163 167 521 525 523 527 561  
565 563 567 321 325 323 327 361 365 363 367 721 725 723 727 761 765 763 767  
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 220 224 222 226 260 264 262 266 620 624 622 626 660 664 662 666 110 114 112 116 150 154 152 156 510 514 512 516 550  
554 552 556 330 334 332 336 370 374 372 376 730 734 732 736 770 774 772 776  
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 220 224 222 226 260 264 262 266 620 624 622 626 660 664 662 666 111 115 113 117 151 155 153 157 511 515 513 517 551  
555 553 557 331 335 333 337 371 375 373 377 731 735 733 737 771 775 773 777  
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 220 224 222 226 260 264 262 266 620 624 622 626 660 664 662 666 110 114 112 116 150 154 152 156 510 514 512 516 550  
574 572 576 350 354 352 356 310 314 312 316 750 754 752 756 710 714 712 716  
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 220 224 222 226 260 264 262 266 620 624 622 626 660 664 662 666 131 135 133 137 171 175 173 177 531 535 533 537 571  
575 573 577 351 355 353 357 311 315 313 317 751 755 753 757 711 715 713 717  
000 004 002 006 041 045 043 047 400 404 402 406 441 445 443 447 200 204 202 206 241 245 243 247 600 604 602 606 641 645 643 647 100 104 102 106 141 145 143 147 500 504 502 506 541  
545 543 547 300 304 302 306 341 345 343 347 700 704 702 706 741 745 743 747  
000 004 002 006 041 045 043 047 400 404 402 406 441 445 443 447 200 204 202 206 241 245 243 247 600 604 602 606 641 645 643 647 101 105 103 107 142 146 144 140 501 505 503 507 542  
546 544 540 301 305 303 307 342 346 344 340 701 705 703 707 742 746 744 740  
000 004 002 006 041 045 043 047 400 404 402 406 441 445 443 447 201 205 203 207 242 246 244 240 601 605 603 607 642 646 644 640 120 124 122 126 161 165 163 167 520 524 522 526 561  
565 563 567 321 325 323 327 362 366 364 360 721 725 723 727 762 766 764 760  
000 004 002 006 041 045 043 047 400 404 402 406 441 445 443 447 201 205 203 207 242 246 244 240 601 605 603 607 642 646 644 640 121 125 123 127 162 166 164 160 521 525 523 527 562  
566 564 560 322 326 324 320 363 367 365 361 722 726 724 720 763 767 765 761  
000 004 002 006 041 045 043 047 401 405 403 407 442 446 444 440 220 224 222 226 261 265 263 267 621 625 623 627 662 666 664 660 110 114 112 116 151 155 153 157 511 515 513 517 552  
556 554 550 330 334 332 336 371 375 373 377 731 735 733 737 772 776 774 770  
000 004 002 006 041 045 043 047 401 405 403 407 442 446 444 440 220 224 222 226 261 265 263 267 621 625 623 627 662 666 664 660 111 115 113 117 152 156 154 150 512 516 514 510 553  
557 555 551 331 335 333 337 372 376 374 370 732



000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 044 041 045 043 047 020 024 022 026 021 025 023 027 060 064 062 066 061 065 063 067 010 014 012 016 011 015 013 017 050 054 052 056 051  
055 053 057 030 034 032 036 031 035 033 037 070 074 072 076 071 075 073 077 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441 445 443 447 420 424 426 421 425 423 427 460 464  
462 466 461 465 463 467 410 414 412 416 411 415 417 414 412 450 454 452 456 451 455 453 457 430 434 432 436 431 435 433 437 470 474 472 471 475 473 477  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 020 024 022 026 021 025 023 027 060 064 062 066 061 065 063 067 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441  
445 443 447 420 424 422 426 421 425 423 427 460 464 462 466 461 465 463 467 200 204 202 206 201 205 203 207 240 244 242 246 241 245 243 247 220 224 222 226 221 225 223 227 260 264  
262 266 261 265 263 267 600 604 602 606 601 605 603 607 640 644 642 646 641 645 643 647 620 624 622 626 621 625 623 627 600 604 602 606 601 605 603 667  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 020 024 022 026 021 025 023 027 060 064 062 066 061 065 063 067 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441  
445 443 447 420 424 422 426 421 425 423 427 460 464 462 466 461 465 463 467 210 214 212 216 211 215 213 217 250 254 256 251 255 253 257 230 234 232 236 231 235 233 237 270 274  
272 276 271 275 273 277 610 614 612 616 611 615 613 617 650 654 652 656 651 655 653 657 630 634 632 636 631 635 633 637 670 674 672 676 671 675 673 677  
000 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441 445 443 447 200 204 202 206 201 205 203 207 240 244 242 246 241  
245 243 247 600 604 602 606 601 605 603 607 640 644 642 646 641 645 643 647 100 104 102 106 101 105 103 107 140 144 142 146 141 145 143 147 500 504 502 506 501 505 503 507 540 544  
542 546 541 545 543 547 300 304 302 306 301 305 303 307 340 344 342 346 341 345 343 347 700 704 702 706 701 705 703 707 740 744 742 746 741 745 743 747  
000 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441 445 443 447 200 204 202 206 201 205 203 207 240 244 242 246 241  
245 243 247 600 604 602 606 601 605 603 607 640 644 642 646 641 645 643 647 120 124 122 126 121 125 123 127 160 164 162 166 161 165 163 167 520 524 522 526 521 525 523 527 560 564  
562 566 561 565 563 567 320 324 322 326 321 325 323 327 360 364 362 366 361 365 363 367 720 724 722 726 721 725 723 727 760 764 762 766 761 765 763 767  
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441 445 443 447 220 224 222 226 221 225 223 227 260 264 262 266 261  
265 263 267 620 622 626 621 625 623 627 660 664 662 666 661 665 663 667 110 114 112 116 111 115 113 117 150 154 152 156 151 155 153 157 510 514 512 516 511 515 513 517 550 554  
552 556 551 555 553 557 330 334 332 336 331 335 333 337 370 374 372 376 371 375 373 377 730 734 732 736 731 735 733 737 770 774 772 776 771 775 773 777  
000 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 400 404 402 406 401 405 403 407 440 444 442 446 441 445 443 447 220 224 222 226 221 225 223 227 260 264 262 266 261  
265 263 267 620 622 626 621 625 623 627 660 664 662 666 661 665 663 667 130 134 132 136 131 135 133 137 170 174 172 176 171 175 173 177 530 534 532 536 531 535 533 537 570 574  
572 576 571 575 573 577 350 354 352 356 351 355 353 357 310 314 312 316 311 315 313 317 750 754 752 756 751 755 753 757 710 714 712 716 711 715 713 717  
000 004 002 006 040 044 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 010 014 012 016 050 054 052 056 030 034 032 036 070 074 072 076 400 404 402 406 440 444 442 446 420 424 422 426 460  
464 462 466 410 414 412 416 450 454 452 456 430 434 432 436 470 474 472 476 200 204 202 206 240 244 242 246 220 224 222 226 600 604 602 266 210 214 212 216 250 254 252 256 230 234  
232 236 270 274 272 276 600 604 602 606 640 644 642 620 624 626 660 664 662 666 610 614 612 616 650 654 652 656 630 634 632 636 670 674 672 676  
000 004 00



000 004 002 006 040 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 011 015 013 017 051 055 053 057 031 035 033 037 071 075 073 077 400 404 402 406 440 444 442 446 420 424 422 426 460  
464 462 466 411 415 413 417 451 455 453 457 431 445 433 437 471 475 473 477 200 204 240 242 246 220 224 222 226 222 662 266 211 215 213 217 251 255 253 257 231 235  
233 237 271 275 277 279 604 602 606 640 644 642 646 620 624 622 626 660 664 662 666 611 615 613 617 651 655 653 657 631 635 633 637 671 675 673 677  
000 004 002 006 040 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 011 015 013 017 051 055 053 057 031 035 033 037 071 075 073 077 400 404 402 406 440 444 442 446 420 424 422 426 460  
464 462 466 411 415 413 417 451 455 453 457 431 445 433 437 471 475 473 477 201 205 203 207 241 245 243 247 221 225 223 227 261 265 263 267 212 216 214 210 252 256 254 250 232 236  
234 230 272 276 274 270 601 605 603 607 641 645 643 647 621 625 623 627 661 665 663 667 612 616 614 610 652 656 654 650 632 636 634 630 672 676 674 670  
000 004 002 006 040 044 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 400 404 402 406 440 444 442 446 420 424 422 426 460 464 462 466 200 204 202 206 240 244 242 246 220 224 222 226 260  
264 262 266 600 602 606 640 644 642 646 620 624 622 626 660 664 662 666 100 104 102 106 140 142 146 120 124 122 126 160 164 162 166 500 504 502 506 540 544 542 526 520 524  
520 526 560 564 562 566 300 302 306 340 342 346 320 322 326 360 364 362 366 700 704 702 706 740 744 742 746 720 724 722 726 760 764 762 766  
000 004 002 006 040 044 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 400 404 402 406 440 444 442 446 420 424 422 426 460 464 462 466 200 204 202 206 240 244 242 246 220 224 222 226 260  
264 262 266 600 604 602 606 640 644 642 646 620 624 622 626 660 664 662 666 101 105 103 107 141 145 143 147 121 125 123 127 161 165 163 167 501 505 503 507 541 545 543 547 521 525  
523 527 561 565 563 567 301 305 303 307 341 345 343 347 321 325 323 327 361 365 363 367 701 705 703 707 741 745 743 747 721 725 723 727 761 765 763 767  
000 004 002 006 040 044 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 400 404 402 406 440 444 442 446 420 424 422 426 460 464 462 466 200 204 202 206 240 244 242 246 220 224 222 226 260  
264 262 266 600 604 602 606 640 644 642 646 620 624 622 626 660 664 662 666 110 114 112 116 150 154 152 156 130 134 132 136 170 174 172 176 510 514 512 516 550 554 552 556 530 534  
532 536 570 574 572 576 310 314 312 316 350 354 352 356 330 334 332 336 700 374 372 376 710 714 712 716 750 754 752 756 730 734 732 736 770 774 772 776  
000 004 002 006 040 044 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 400 404 402 406 440 444 442 446 420 424 422 426 460 464 462 466 200 204 202 206 240 244 242 246 220 224 222 226 260  
264 262 266 600 602 606 640 644 642 646 620 624 622 626 660 664 662 666 111 115 113 117 151 155 153 157 131 135 133 137 171 175 173 177 511 515 513 517 551 555 553 557 531 535  
533 537 571 575 573 577 311 315 313 317 351 355 353 357 331 335 333 337 371 375 373 377 711 715 713 717 751 755 753 757 731 735 733 737 771 775 773 777  
000 004 002 006 040 044 042 046 021 025 023 027 061 065 063 067 400 404 402 406 440 444 442 446 421 425 423 427 461 465 463 467 200 204 202 206 240 244 242 246 221 225 223 227 261  
265 263 267 600 604 602 606 640 644 642 646 621 625 623 627 661 665 663 667 100 104 102 106 140 142 146 121 125 123 127 161 165 163 167 500 504 502 506 540 544 542 526 520 524  
523 527 561 565 563 567 300 304 302 306 340 344 342 346 321 325 323 327 361 365 363 367 700 704 702 706 740 744 742 746 721 725 723 727 761 765 763 767  
000 004 002 006 040 044 042 046 021 025 023 027 061 065 063 067 400 404 402 406 440 444 442 446 421 425 423 427 461 465 463 467 200 204 202 206 240 244 242 246 221 225 223 227 261  
265 263 267 600 604 602 606 640 644 642 646 621 625 623 627 661 665 663 667 101 105 103 107 141 145 143 147 121 125 123 127 161 165 163 167 501 505 503 507 541 545 543 547 521 525  
523 527 561 565 563 567 300 304 302 306 340 344 342 346 321 325 323 327 361 365 363 367 700 704 702 706 740 744 742 746 721 725 723 727 761 765 763 767  
264 262 266 600 604 602 606 64



# Anexo C

## Partição do Subgrupo de 128 Elementos

```
000 004 ---> dmin=1.86353
000 040 ---> dmin=1.86353
000 044 ---> dmin=3.72706
000 400 ---> dmin=0.27290
000 404 ---> dmin=2.13643
000 440 ---> dmin=2.13643
000 444 ---> dmin=3.99996
```

```
000 004 002 006 ---> dmin=0.93177
000 004 040 044 ---> dmin=1.86353
000 004 042 046 ---> dmin=1.86353
000 004 400 404 ---> dmin=0.27290
000 004 402 406 ---> dmin=1.20467
000 004 440 444 ---> dmin=1.86353
000 004 442 446 ---> dmin=1.86353
000 040 020 060 ---> dmin=0.93177
000 040 024 064 ---> dmin=1.86353
000 040 400 440 ---> dmin=0.27290
000 040 404 444 ---> dmin=1.86353
000 040 420 460 ---> dmin=1.20467
000 040 424 464 ---> dmin=1.86353
000 044 022 066 ---> dmin=1.86353
000 044 026 062 ---> dmin=1.86353
000 044 400 444 ---> dmin=0.27290
000 044 404 440 ---> dmin=2.13643
000 044 422 466 ---> dmin=2.13643
000 044 426 462 ---> dmin=2.13643
```

```
000 004 002 006 001 005 003 007 ---> dmin=0.27291
000 004 002 006 040 044 042 046 ---> dmin=0.93177
000 004 002 006 041 045 043 047 ---> dmin=0.93177
000 004 002 006 400 404 402 406 ---> dmin=0.27290
000 004 002 006 401 405 403 407 ---> dmin=0.54581
000 004 002 006 440 444 442 446 ---> dmin=0.93177
000 004 002 006 441 445 443 447 ---> dmin=0.93177
000 004 040 044 020 024 060 064 ---> dmin=0.93177
000 004 040 044 022 026 062 066 ---> dmin=1.86353
000 004 040 044 400 404 440 444 ---> dmin=0.27290
000 004 040 044 402 406 442 446 ---> dmin=1.20467
000 004 040 044 420 424 460 464 ---> dmin=1.20467
000 004 040 044 422 426 462 466 ---> dmin=1.86353
000 004 042 046 021 025 063 067 ---> dmin=1.20467
000 004 042 046 023 027 065 061 ---> dmin=1.20467
000 004 042 046 400 404 442 446 ---> dmin=0.27290
000 004 042 046 402 406 444 440 ---> dmin=1.20467
000 004 042 046 421 425 463 467 ---> dmin=1.47758
000 004 042 046 423 427 465 461 ---> dmin=1.47758
000 040 020 060 010 050 030 070 ---> dmin=0.27291
000 040 020 060 014 054 034 074 ---> dmin=0.93177
000 040 020 060 400 440 420 460 ---> dmin=0.27290
000 040 020 060 404 444 424 464 ---> dmin=0.93177
000 040 020 060 410 450 430 470 ---> dmin=0.54581
000 040 020 060 414 454 434 474 ---> dmin=0.93177
000 040 024 064 012 052 036 076 ---> dmin=1.20467
000 040 024 064 016 056 032 072 ---> dmin=1.20467
000 040 024 064 400 440 424 464 ---> dmin=0.27290
000 040 024 064 404 444 420 460 ---> dmin=1.20467
000 040 024 064 412 452 436 476 ---> dmin=1.47758
000 040 024 064 416 456 432 472 ---> dmin=1.47758
000 044 022 066 011 055 033 077 ---> dmin=0.54582
000 044 022 066 015 051 037 073 ---> dmin=1.86353
000 044 022 066 400 444 422 466 ---> dmin=0.27290
000 044 022 066 404 440 426 462 ---> dmin=1.86353
000 044 022 066 411 455 433 477 ---> dmin=0.81872
000 044 022 066 415 451 437 473 ---> dmin=1.86353
000 044 026 062 013 057 031 075 ---> dmin=1.86353
000 044 026 062 017 053 035 071 ---> dmin=0.54582
000 044 026 062 400 444 426 462 ---> dmin=0.27290
000 044 026 062 404 440 422 466 ---> dmin=1.86353
000 044 026 062 413 457 431 475 ---> dmin=1.86353
000 044 026 062 417 453 435 471 ---> dmin=0.81872
```

```
000 004 002 006 001 005 003 007 040 044 042 046 041 045 043 047 ---> dmin=0.27291
000 004 002 006 001 005 003 007 400 404 402 406 401 405 403 407 ---> dmin=0.27290
000 004 002 006 001 005 003 007 440 444 442 446 441 445 443 447 ---> dmin=0.27291
000 004 002 006 040 044 042 046 020 024 022 026 060 064 062 066 ---> dmin=0.93177
000 004 002 006 040 044 042 046 021 025 023 027 061 065 063 067 ---> dmin=0.93177
000 004 002 006 040 044 042 046 400 404 402 406 440 444 442 446 ---> dmin=0.27290
000 004 002 006 040 044 042 046 401 405 403 407 441 445 443 447 ---> dmin=0.54581
```





# Bibliografia

- [1] **H. P. Hsu**, *Analisis de Fourier*, Addison-Wesley, 1987.
- [2] **S. Benedetto, E. Biglieri e V. Castellani**, *Digital Transmission Theory*, Prentice-Hall, 1987.
- [3] **E. Biglieri e M. Elia**, *Signal Sets Generated by Groups*, In: Longo, G. (Editor) *The Information Theory Approach to Communications*, pp. 263-306, Springer, 1977.
- [4] **E. Biglieri e M. Elia**, *Cyclic Group Codes for the Gaussian Channel*, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-22, No. 5, pp. 624-629, Settembre 1976.
- [5] **I. Ingemarsson**, *Commutative Group Codes for the Gaussian Channel*, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-19, No. 5, pp. 215-219, Marzo 1973.
- [6] **M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis e H. D. Sherali**, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, 1990.
- [7] **D. S. Dummit, R. M. Foote**, *Abstract Algebra*, Prentice-Hall, 1991.
- [8] **I. Ingemarsson**, *Group Codes for the Gaussian Channel*, Ph. D. thesis, Royal Inst. Technol., Stockholm, Sweden, 1970.
- [9] **M. Elia**, *Group Codes and Signal Design for Digital Transmission*, *International Symposium on Information and Coding Theory*, pp. 235-254, Campinas, Brasil, Agosto 1987.
- [10] **S. Benedetto, R. Garello, M. Mondin e G. Montorsi**, *Geometrically Uniform Partition of  $L_x$ MPSK Constellations and Related Binary Trellis Codes*, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 39, No. 6, pp. 1773-1798, Novembre 1993.
- [11] **S. Benedetto, R. Garello, M. Mondin e G. Montorsi**, *Geometrically Uniform TCM Codes over Group Based on  $L_x$ MPSK Constellation*, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, No. 1, pp. 137-152, Janeiro 1994.
- [12] **E. Biglieri e G. Caire**, *Symmetry Properties of Multilevel Coded Modulation*, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, No. 5, pp. 1630-1632, Settembre 1994.

- [13] **H. Imai e S. Hirakawa**, *A New Multilevel Coding Method Using Error-Correcting Codes*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-23, No. 3, pp. 371-377, Maio 1977.
- [14] **Y. O. Chang e J. K. Karlof**, *Large scale geometric programming: An application in coding theory*, Computers Ops. Res., vol. 21, No. 7, pp. 747-755, 1994.
- [15] **L. Hanzo, W. Webb, R. Steele, R. A. Salami**, *On QAM speech transmission schemes for microcellular mobile PCNs*, ETT, vol. 4, pp. 495-510, Settembre-Outubro 1993.
- [16] **J. Portugheis**, *On block multidimensional M-PSK modulation codes*, Proceedings, 14th Symp. Inform. Theory and Applications, Ibusuki, Japan, pp. 337-380, Dezembro 1991.
- [17] **S. Benedetto e R. Garelo**, *Multilevel construction of block and trellis group codes*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 41, pp. 1257-1264, Settembre 1995.
- [18] **I. N. Herstein**, *Abstract Algebra*, Macmillan, N. Y., 1990.
- [19] **D. Slepian**, *Group Codes for the Gaussian Channel*, B. S. T. J., pp. 575-602, Abril 1968.
- [20] **M. Schwartz, W. R. Bennet e S. Stein**, *Communication System and Techniques*, McGraw-Hill, 1966.
- [21] **H. Anton e C. Rorres**, *Elementary Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.