



Luciano Prado de Oliveira

EFEITO DOS MODOS ESPÚRIOS NA ANÁLISE MODAL E EM
ESQUEMAS DE PROPAGAÇÃO DE FEIXES NA MODELAGEM DE
GUIAS DE ONDA POR ELEMENTOS FINITOS

Campinas
2013



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Luciano Prado de Oliveira

EFEITO DOS MODOS ESPÚRIOS NA ANÁLISE MODAL E EM ESQUEMAS DE PROPAGAÇÃO
DE FEIXES NA MODELAGEM DE GUIAS DE ONDA POR ELEMENTOS FINITOS

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno e orientado pelo Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa.

Campinas
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

OL4e Oliveira, Luciano Prado de
 Efeito dos modos espúrios na análise modal e em
 esquemas de propagação de feixes na modelagem de
 guias de onda por elementos finitos / Luciano Prado de
 Oliveira. --Campinas, SP: [s.n.], 2013.

 Orientador: Hugo Enrique Hernandez Figueroa.
 Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
 Computação.

 1. Método dos elementos finitos. 2. Análise modal.
 3. Guias de ondas. 4. Fotônica. 5. Eletromagnetismo. I.
 Hernandez-Figueroa, Hugo Enrique, 1958-. II.
 Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
 Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: The impact of spurious modes in the modal analysis and bpm
schemes for the fem modeling of optical waveguides

Palavras-chave em Inglês: Finite elements method, Modal analysis, Waveguides,
Photonics, electromagnetism

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Vitaly Félix Rodríguez Esquerre, Jose Patrocinio da Silva,
Leonardo Lorenzo Bravo Roger, Michel Zamboni Rached

Data da defesa: 28-02-2013

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Luciano Prado de Oliveira

Data da Defesa: 28 de fevereiro de 2013

Título da Tese: "Efeito dos Modos Espúrios na Análise Modal e em Esquemas de Propagação de Feixes na Modelagem de Guias de Onda por Elementos Finitos"

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa (Presidente): _____

Prof. Dr. Vitaly Félix Rodríguez Esquerre: _____

Prof. Dr. Jose Patrocinio da Silva: _____

Prof. Dr. Leonardo Lorenzo Bravo Roger: _____

Prof. Dr. Michel Zamboni Rached: _____

À MINHA MÃE ARLETE.

Agradecimentos

A Deus;

Aos meus pais Antônio e Arlete, que sempre me auxiliaram, incentivaram e deram todo o apoio e carinho necessários para que pudesse chegar até esse momento;

À minha avó Edith, pelo amor incondicional;

À minha irmã Fabiane;

Ao Prof. Hugo Figueroa pela orientação científica e amizade ao longo desses anos de trabalho em conjunto, os quais foram e sempre serão muito valiosos;

Aos grandes amigos, Eduardo, Alexandre, Murilo e Fellipe pelas colaborações, sugestões e valiosas discussões;

À Guiomar, Rosa Maria, Bia, Carol, Raquel, Maria, Angela e Patricia pela amizade e apoio;

À Agência FAPESP pelo apoio financeiro concedido durante todo o período de doutoramento;

À FEEC/UNICAMP pela estrutura que oferece aos estudantes e pesquisadores;

A todos que, direta ou indiretamente, deram sua parcela de contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

”Recria tua vida, sempre, sempre. Remove pedras
e planta roseiras e faz doces. Recomeça.”

Cora Coralina

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo dos efeitos dos modos espúrios na análise modal e em esquemas de propagação de feixes na modelagem de guias de onda por elementos finitos mistos. A presença dos modos espúrios no espectro das matrizes de elementos finitos é investigada e discutida a partir de uma formulação alternativa para a análise modal em guias de onda bidimensionais, onde a condição de divergente nulo é imposta inicialmente na equação vetorial de onda. Um novo esquema de propagação de feixes é proposto substituindo a componente longitudinal da equação vetorial de onda pela equação de Gauss e uma análise do efeito dos modos espúrios sobre os esquemas de propagação de feixes é realizada. Testes computacionais de convergência e estabilidade dos novos esquemas de propagação de feixes, assim como dos esquemas convencionais, são apresentados.

Palavras-chave: análise modal, modos espúrios, método dos elementos finitos, eletromagnetismo computacional, método de propagação de feixes (BPM), fotônica.

Abstract

This work shows a study of the effects of spurious modes in the modal analysis and in beam propagation schemes based on finite element mixed for modelling bidimensional waveguides structures. The presence of spurious modes in the spectrum of the finite element matrices is investigated and discussed from an alternative formulation for modal analysis of two-dimensional waveguides, where the divergence-free condition is imposed on the vector wave equation. A new beam propagation scheme is proposed by replacing the longitudinal component of the vectorial wave equation with Gauss equation, and analysis of the effect of spurious modes on beam propagations schemes is performed. Computational convergence and stability tests for the new beam propagations schemes as well as the conventional schemes are presented.

Key-words: modal analysis, spurious modes, finite elements method, computational electromagnetics, beam propagation method, photonics.

Lista de Figuras

1.1	Espectro modal calculado através de elementos finitos. (a) Elementos Finitos Nodais. (b) Elementos Finitos Vetoriais.	2
2.1	Ilustração de uma estrutura tridimensional.	5
2.2	Fronteira entre os meios quaisquer.	16
2.3	Ilustração de uma estrutura tridimensional.	24
3.1	Guia de ondas blindado parcialmente preenchido com dielétrico de alto índice de refração.	25
3.2	Guia de ondas blindado parcialmente preenchido com dielétrico de alto índice de refração.	26
3.3	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal EH11 guiado pelo guia blindado da Figura 3.1 em $f_0 = 13$ GHz numa janela computacional de 16×16 mm. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV.	27
3.4	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal HE21 guiado pelo guia blindado da Figura 3.1 em $f_0 = 13$ GHz numa janela computacional de 16×16 mm. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$, calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$, calculados pelo FEM-DIV.	28
3.5	Guia óptico de alto contraste.	29
3.6	Curva de dispersão para os três primeiros modos de propagação do guia canal mostrado na Figura 3.5.	29
3.7	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal do modo fundamental quase-TE guiado pelo guia canal mostrado na Figura 3.5 em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$, com $n_{eff} = 3,4270$. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV.	30
3.8	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal do segundo modo quase-TE guiado pelo guia canal mostrado na Figura 3.5 em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$, $n_{eff} = 3,4221$. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV.	31
3.9	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal do terceiro modo quase TE guiado pelo guia canal mostrado na Figura 3.5 em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$, $n_{eff} = 3,4116$. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV.	32

3.10	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal dos modos espúrios calculados em $f_0 = 13$ GHz numa janela computacional de 16×16 mm. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) Campo $\mathbf{E}_t$ calculado pelo FEM-DIV caso 1. (d) Campo $\mathbf{E}_t$ calculado pelo FEM-DIV caso 2.	34
3.11	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal dos modos espúrios calculados em $f_0 = 13$ GHz numa janela computacional de 16×16 mm. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV caso 1. (e) e (f) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV caso 2.	35
3.12	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$ através do FEM convencional.	36
3.13	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$ através da formulação FEM-DIV caso 1.	37
3.14	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$ através do FEM-DIV caso 2.	38
3.15	Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 1,15\mu\text{m}$ calculados através da formulação FEM convencional e FEM-DIV caso 1.	39
4.1	Distribuição de campo calculada no plano $(z + h)$ a partir da distribuição em z	42
4.2	Guia de ondas dielétrico.	42
5.1	Guia canal de alto contraste.	55
5.2	Feixe gaussiano com campo elétrico polarizado ao longo da direção x com <i>spot size</i> de $0,4\mu\text{m}$ e $\lambda_0 = 0,4\mu\text{m}$, lançado na entrada do guia óptico mostrado na Figura 5.1, na janela computacional de $12 \times 5\mu\text{m}$	56
5.3	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z	57
5.4	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 40\mu\text{m}$, calculadas através do BPM convencional. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t	57
5.5	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 90\mu\text{m}$, calculadas através do BPM convencional. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t	58
5.6	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 130\mu\text{m}$, calculadas através do BPM convencional. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t	59
5.7	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 1000\mu\text{m}$, calculadas através do BPM convencional. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t	60
5.8	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 40\mu\text{m}$, calculadas através do BPM-DIV. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t	61

5.9	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 90\mu\text{m}$, calculadas através do BPM-DIV. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t	62
5.10	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 130\mu\text{m}$, calculadas através do BPM-DIV. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t	63
5.11	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 1000\mu\text{m}$, calculadas através do BPM-DIV. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t	64
5.12	Seção reta de um acoplador direcional com duas fibras ópticas.	65
5.13	Distribuição espacial das componentes do campo elétrico E_t (V/m) calculada através do BPM-DIV. (a) $z = 0 \mu\text{m}$ (b) $z = 9 \mu\text{m}$ (c) $z = 18,2 \mu\text{m}$ (d) $z = 29 \mu\text{m}$ (e) $z = 35 \mu\text{m}$ (f) $z = 39 \mu\text{m}$	66
5.14	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z para uma malha com 739 nós e 1390 elementos.	67
5.15	Distribuição da componente transversal do campo elétrico do modo espúrio, em $z = 0$	68
5.16	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z para feixe gaussiano poluído com modo espúrio de peso $p = 0, 2$, em $\lambda_0 = 1, 1\mu\text{m}$. (a) $0 < z < 2000\text{m}$. (b) $0 < z < 2\text{m}$	69
5.17	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z para feixe gaussiano poluído com modo espúrio de peso $p = 0, 4$, em $\lambda_0 = 1, 1\mu\text{m}$. (a) Evolução de n_{eff} para $0 < z < 2000\text{m}$. (b) Evolução de n_{eff} para $0 < z < 2\text{m}$	70
5.18	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z quando os propagadores com aproximação paraxial são alimentados com pulso gaussiano de <i>spot size</i> igual a $0,4\mu\text{m}$	71
5.19	Amplitude do pulso gaussiano de entrada com <i>spot size</i> $0,4\mu\text{m}$ e $0,03\mu\text{m}$	72
5.20	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z quando os propagadores são alimentados com pulso gaussiano de <i>spot size</i> igual a $0,03\mu\text{m}$	72
5.21	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z para feixe gaussiano poluído com modo espúrio de peso $p = 0, 4$. (a) BPM convencional. (b) BPM-DIV.	73
5.22	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z quando os propagadores são alimentados com pulso gaussiano de <i>spot size</i> igual a $0,03\mu\text{m}$	74
5.23	Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z quando os propagadores BPM convencional e BPM-DIV são alimentados com pulso gaussiano de poluído com um modo espúrio de peso $p = 0, 4$	75

5.24	Distribuição espacial da componente do campo elétrico E_t (V/m) calculada através do BPM-DIV e BPM convencional. (a) BPM-DIV em $z = 0 \mu\text{m}$ (b) BPM convencional em $z = 0 \mu\text{m}$ (c) BPM-DIV em $z = 18,2 \mu\text{m}$ (d) $z = 18,2 \mu\text{m}$ (e) BPM-DIV em $z = 39 \mu\text{m}$ (f) BPM convencional em $z = 39 \mu\text{m}$	76
------	---	----

Sumário

1	Introdução Geral	1
1.1	Introdução	1
1.2	Objetivos e organização do trabalho	3
2	Análise Modal	5
2.1	Introdução	5
2.2	Equação de Onda	5
2.3	Decomposição das Equações	7
2.3.1	Decomposição da Equação Vetorial de Onda	7
2.3.2	Decomposição da Equação de Gauss	11
2.3.3	Forma Matricial	12
2.4	Análise Modal	13
2.4.1	Forma Integral	14
2.4.2	Condições de Contorno	16
2.4.3	Normalização dos Campos Eletromagnéticos	18
2.5	Conclusão	23
3	Análise Modal: Resultados Numéricos	25
3.1	Introdução	25
3.2	Guia Metálico Parcialmente Preenchido	25
3.3	Guia Dielétrico de Alto Contraste	28
3.4	Modos Espúrios	33
3.4.1	Guia Metálico Parcialmente Preenchido	33
3.4.2	Guia Dielétrico de Alto Contraste	36
3.5	Conclusão	40
4	Método da Propagação por Feixe	41
4.1	Introdução	41
4.2	Método da Propagação por Feixe	41
4.2.1	BPM Convencional	41
4.2.2	BPM-DIV	47
4.3	Análise da Solução Crescente ao longo da Direção z	50
4.3.1	BPM Convencional	50
4.3.2	BPM-DIV	51

4.4	Discretização	52
4.4.1	BPM Convencional	52
4.4.2	BPM-DIV	53
4.5	Conclusão	54
5	BPM: Resultados Numéricos	55
5.1	Introdução	55
5.2	Guia Dielétrico de Alto Contraste	55
5.3	Acoplador Direcional com Fibras Ópticas	65
5.4	Testes de Estabilidade e Convergência	67
5.4.1	Guia Dielétrico de Alto Contraste	67
5.4.2	Acoplador Direcional com Fibra Óptica	74
5.5	Conclusão	77
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	78
	Referências Bibliográficas	81

Capítulo 1

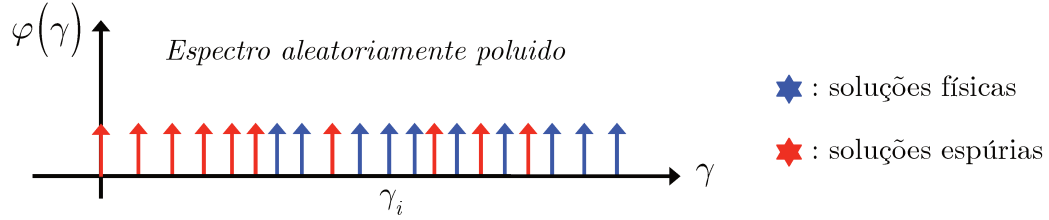
Introdução Geral

1.1 Introdução

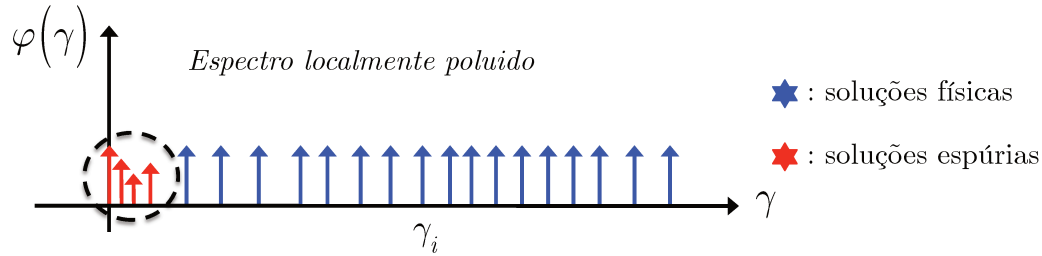
O Método dos Elementos Finitos tem sido usado durante as últimas quatro décadas na análise de estruturas eletromagnéticas (Cendes & Silvester 1970, Konrad 1976, Hano 1984, Koshiba & Suzuki 1986, Fernandez, Lu, Davis & Zhu 1993, Hernández-Figueroa 1994, Saitoh & Koshiba 2001, Gonçalves, Figueroa & Bordonalli 2006, Pintus, Pasquale & Bowers 2011). Devido sua versatilidade e flexibilidade em permitir o uso de malhas não-estruturadas, tal técnica possibilita a modelagem de sofisticadas e complexas estruturas com diferentes materiais e geometrias arbitrárias nas faixas de frequências de micro-ondas, ondas milimétricas e ópticas. Entretanto, apesar dessas vantagens, a modelagem através de elementos finitos apresenta uma limitação que tem sido objeto de estudo desde as primeiras décadas e que ainda hoje limita o uso de tal técnica em alguns tipos de problemas na área de eletromagnetismo – os modos espúrios, soluções numéricas, porém não-físicas, do sistema linear gerado a partir da discretização domínio computacional por elementos finitos (Cendes 1991, Sun, Manges, Yuan & Cendes 1995, Jiang, Wu & Povinelli 1996, Mur & Lager 2002).

Durante toda a década de 80 e até meados dos anos 90 diversos pesquisadores buscaram uma solução que eliminasse os modos espúrios em Elementos Finitos Nodais (Rahman & Davies 1984, Wong & Cendes 1988, Kobelansky & Webb 1986, Hernández-Figueroa, Fernández, Lu & Davies 1995), modos esses originados devido à imprecisão da modelagem do espaço nulo do operador rotacional uma vez que tais elementos não atendiam à condição de divergente nulo (Jin 2002, Monk 2003, Wong & Cendes 1988) e que poluíam o espectro de modais aleatoriamente, como ilustra a Figura (a). No inícios dos anos 90 uma formulação livre de modos espúrios foi apresentada (Hernández-Figueroa et al. 1995), onde a condição de divergente nulo era forçada na equação de onda eliminando a componente longitudinal do campo magnético através da equação de Gauss para o fluxo magnético. Contudo, com a introdução dos Elementos Finitos Vetoriais essas formulações alternativas foram sendo gradualmente abandonadas, pois a formulação baseada nos elementos de aresta, além de elegante, garantia naturalmente a continuidade das componentes tangenciais das intensidades de campo elétrico ou magnético, uma vez que atende localmente à condição de divergente nulo, gerando matrizes massa e rigidez positivo-definidas (Jin 2002). Não obstante, a despeito do que se costuma acreditar, os elementos finitos vetoriais não eliminam os modos espúrios do espectro finito, muito embora

tais soluções sejam confinadas em torno dos autovalores nulos (Lee, Sun & Cendes 1991, He & Teixeira 2007), conforme ilustrado Figura (b).



(a) Espectro modal calculado usando finitos nodais



(b) Espectro modal calculado usando elementos finitos vetoriais

Figura 1.1: Espectro modal calculado através de elementos finitos. (a) Elementos Finitos Nodais. (b) Elementos Finitos Vetoriais.

Tais modos são originados nos nós da malha pois nesses pontos as funções de aresta, embora impondo localmente a condição de divergente nulo, não garantem que tal condição seja mantida globalmente gerando, assim, matrizes mal condicionadas e que podem levar à instabilidade computacional no domínio do tempo (*late time instability*) (Chilton & Lee 2007, Wang, Riley & Jin 2010) e instabilidade de baixa frequência na análise de problemas no domínio da frequência (Lee, Lee & Lee 2003, Dyczij-Edlinger, Peng & Lee 2000). Por esse motivo, a fim de eliminar os modos espúrios da formulação baseada nos elementos finitos vetoriais algumas técnicas têm sido propostas ao longo dos últimos anos – técnicas de pré e pós processamento, como decomposição *tree-cotree* (Wang et al. 2010) e filtragem (Hwang & Wu 1999) *a posteriori* ou técnicas que operam diretamente sobre a formulação, tais como os elementos finitos mistos (He & Teixeira 2007) e a inserção da equação do divergente nulo na formulação modal (Vardapetyan & Demkowicz 2002).

Muito embora os elementos finitos de aresta tenham resolvido o problema do cálculo de autovalores, confinando as autosoluções numa região conhecida do espectro, sua existência como parte do espectro de soluções pode afetar a precisão e a estabilidade de métodos dinâmicos baseados em elementos finitos vetoriais. No domínio do tempo, a equação vetorial de segunda ordem admite uma solução na forma, $\mathbf{E} = (c_1 + c_2 t) \nabla \phi$. Tal solução é consequência de modos espúrios no espaço nulo do operador temporal de segunda ordem e também no espaço nulo do operador rotacional (Donderici & Teixeira 2008). Considerando que a equação de onda no domínio da frequência é modelada usando a mesma base de elementos finitos vetoriais, é possível considerar que tais modos espúrios possam também afetar esquemas dinâmicos de propagação no domínio

da frequência baseados em elementos finitos vetoriais, tais como o Método de Propagação de Feixes (BPM – *Beam Propagation Method*), uma vez que essas soluções não físicas provocam instabilidade em BPMs baseados em Diferenças Finitas e Elementos Finitos Nodais (Schulz, Glingener & Voges 1994, Yevick, Yu, Bardyszewski, & Glasner 1995).

Os Métodos de Propagação de Feixes (BPM's) são atualmente as mais usadas e versáteis técnicas para investigar a propagação da luz em guias de ondas ópticos e fotônicos longos, quando comparados ao comprimento de onda de operação, e com variação longitudinal suave do índice de refração. No passado uma grande variedade de formulações numéricas foram apresentadas baseadas na Técnica de Diferenças Finitas e no Método de Elementos Finitos Nodais e demonstraram modelar com sucesso o guiamento da luz em estruturas ópticas (Nolting & März 1995, Chang & Dagli 1991, Schulz et al. 1994, Yevick & Hermansson 1990, Hadley 1992). Esquemas de propagação de feixe baseados na Transformada Rápida de Fourier (FFT-BPM), no Método das Diferenças Finitas (FD-BPM) e no Método dos Elementos Finitos (FE-BPM) têm sido reportados com sucesso na literatura ao longo dos últimos anos (Hernández-Figueroa 1994, Schultz, Gingerer, Bludsuweit & Voges 1998, da Silva, Frasson & Hernandez-Figueroa 2003). Nos esquemas FD-BPM, contudo, o espectro de autovalores das matrizes de diferenças finitas contém autovalores complexos uma vez que as matrizes são não-hermitianas, levando os esquemas baseados em Diferenças Finitas a ganhos não-físicos quando um campo arbitrário é aplicado (Schulz et al. 1994). À época, uma abordagem alternativa foi considerada a fim de reduzir os efeitos desse ganho não-físico sem, contudo, eliminar completamente os efeitos dos modos espúrios (Yevick et al. 1995). O mesmo problema também afeta os esquemas FE-BPM baseados em elementos finitos nodais uma vez que não é da natureza dos elementos nodais prevenir ou mesmo confinar as soluções espúrias, levando os esquemas BPM a ganhos não-físicos. À época um esquema alternativo provou ser eficiente em superar o problema de instabilidade, eliminando os modos espúrios do espectro modal pela aplicação da condição do divergente nulo na formulação do BPM (Hernández-Figueroa 1994, da Silva et al. 2003). Entretanto, a despeito de sua eficiência as formulações baseadas em elementos nodais gradativamente perderam espaço para as formulações baseadas em elementos finitos vetoriais.

Conforme mencionado anteriormente, os modos espúrios têm sido constante objeto de estudo para aqueles que trabalham com eletromagnetismo computacional e, embora os elementos finitos vetoriais tenham minimizado os efeitos dessas soluções não-físicas, a busca de técnicas que possam, de maneira simples e eficiente, eliminar tais modos dos espectro de autovalores dos sistemas baseados em elementos finitos ainda se constituiu objeto de pesquisa, pois tais modos podem comprometer a estabilidade de esquemas dinâmicos de propagação tanto nos domínios do tempo como no domínio da frequência.

1.2 Objetivos e organização do trabalho

Baseado no exposto anteriormente, esta tese tem como objetivo o estudo dos efeitos dos modos espúrios em formulações baseados em Elementos Finitos Vetoriais no domínio da frequência – os efeitos dos modos espúrios na análise modal e em esquemas de propagação de feixes na modelagem de guias de onda por elementos híbridos. A partir da formulação modal proposta

por Demkowicz (Vardapetyan & Demkowicz 2002), um detalhado estudo da presença dos modos espúrios no espectro de autovalores da solução de problemas modais bidimensionais é apresentado. Além disso, a tese apresenta um novo esquema de propagação de feixes usando os conceitos dessa formulação modal alternativa onde a equação de Gauss (ou condição do divergente nulo) é forçada na equação de onda com intuito de eliminar os modos espúrios. Partindo dessa premissa, este trabalho foi dividido em duas partes e cada parte dividida em duas partes complementares.

O Capítulo 2 apresenta a modelagem matemática que permite calcular os modos de propagação em estruturas guiantes em domínios com anisotropia completa. Nesta dedução, seguindo a abordagem convencional, a equação vetorial de onda é decomposta em termos de suas componentes transversal e longitudinal à direção de propagação, resultando em um sistema de equações acopladas através das componentes transversais e longitudinal dos campos elétrico ou magnético. Seguindo a formulação proposta por Demkowicz, a equação do divergente nulo é inserida na formulação em substituição à componente longitudinal da equação de onda. Após normalizada, a componente longitudinal do campo eletromagnético, dois esquemas de cálculo modal são derivados. Uma análise da presença de modos espúrios no espectro das matrizes de elementos finitos resultantes é apresentado.

O Capítulo 3 apresenta os resultados numéricos calculados a partir de códigos computacionais implementados a partir das formulações derivadas no Capítulo 2. Para tanto, foram escolhidos dois problemas clássicos, um guia metálico parcialmente preenchido com um dielétrico de alto índice de refração e operando na faixa de micro-ondas e um guia dielétrico de alto contraste operando na faixa óptica de frequências. Curvas de dispersão e distribuição de campos eletromagnéticos, calculados usando a formulação modal convencional e a formulação usando a equação do divergente são apresentadas. O capítulo também traz a distribuição de campo dos modos espúrios e discute sua presença no espectro de soluções dos sistemas lineares analisados.

O Capítulo 4 apresenta de forma detalhada esquemas de BPM baseados em elementos finitos híbridos. A partir da formulação modal alternativa onde a componente longitudinal da equação vetorial de onda é substituída pela equação do divergente nulo, um novo esquema de propagação por feixes é proposto. O capítulo também traz o equacionamento detalhado da formulação BPM convencional. Uma análise de estabilidade das formulações BPM é apresentada assumindo a presença de modos espúrios no espectro do sinal de entrada. O Capítulo apresenta ainda os esquemas de integração numérica ao longo da direção de propagação para as quatro formulações derivadas.

O Capítulo 5 apresenta os resultados numéricos calculados através de códigos computacionais implementados a partir das formulações derivadas no Capítulo 4. Figuras de mérito, atestando a convergência dos códigos computacionais, são apresentadas para uma estrutura fotônica complexa com alto contraste de índice e condições de contorno absorventes do tipo camadas perfeitamente casadas. Além disso, o capítulo apresenta os efeitos dos modos espúrios na convergência dos algoritmos baseados na formulação BPM convencional e na nova formulação usando a equação de Gauss em substituição à componentes longitudinal da equação de onda.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões dos resultados obtidos, bem como sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Análise Modal

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma dedução detalhada da análise modal bidimensional usando tanto a abordagem tradicional de decompor a equação vetorial de onda em suas componentes transversal e longitudinal, como também uma abordagem alternativa onde a equação de Gauss é usada em substituição à componente longitudinal de onda.

2.2 Equação de Onda

Seja a estrutura tridimensional ilustrada na Figura 2.1, orientada sob o sistema de coordenadas (i, j, k) . Tal sistema representa, de forma generalizada, o sistema (x, y, z) de modo que, aplicando rotações cíclicas horárias, pode-se obter as seguintes relações:

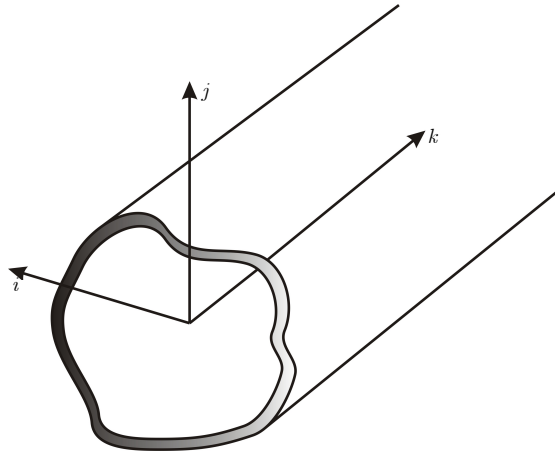


Figura 2.1: Ilustração de uma estrutura tridimensional.

$$(i, j, k) = (x, y, z), \quad (2.1a)$$

$$(i, j, k) = (z, x, y), \quad (2.1b)$$

$$(i, j, k) = (y, z, x). \quad (2.1c)$$

Sejam as equações de Maxwell na sua forma pontual, em uma região $\Omega \in \mathbb{R}^3$ livre de fontes,

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (2.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \quad (2.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = 0, \quad (2.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.2d)$$

onde $\mathbf{e} = \mathbf{e}(i, j, k, t)$ é o vetor intensidade de campo elétrico, $\mathbf{h} = \mathbf{h}(i, j, k, t)$ é o vetor intensidade de campo magnético, $\mathbf{d} = \mathbf{d}(i, j, k, t)$ é o vetor densidade de fluxo elétrico e $\mathbf{b} = \mathbf{b}(i, j, k, t)$ é o vetor densidade de fluxo magnético. As intensidades de campo e as densidades de fluxo estão relacionadas através das relações constitutivas,

$$\mathbf{d} = \epsilon_0 \bar{\bar{\epsilon}}_r * \mathbf{e}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{b} = \mu_0 \bar{\bar{\mu}}_r * \mathbf{h}, \quad (2.3b)$$

onde o operador $(*)$ significa a convolução no domínio do tempo e os tensores $\bar{\bar{\epsilon}}$ e $\bar{\bar{\mu}}$ representam a permissividade e a permeabilidade relativas, respectivamente, funções contínuas por partes ao longo do plano transversal e contínuas ao longo do eixo longitudinal.

Combinando as equações de Faraday (2.2a) e Ampère (2.2b), e usando as relações constitutivas (2.3), obtém-se a equação vetorial da onda, escrita em função do campo elétrico sob a forma,

$$\nabla \times \left(\bar{\bar{\theta}}_r \nabla \times \mathbf{e} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\bar{\epsilon}}_r * \mathbf{e}), \quad (2.4)$$

ou do campo magnético,

$$\nabla \times \left(\bar{\bar{\phi}}_r \nabla \times \mathbf{h} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\bar{\mu}}_r * \mathbf{h}), \quad (2.5)$$

onde $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ é a velocidade da luz no vácuo e,

$$\bar{\bar{\theta}}_r = \frac{1}{\bar{\bar{\mu}}_r}, \quad (2.6a)$$

$$\bar{\bar{\phi}}_r = \frac{1}{\bar{\bar{\epsilon}}_r}. \quad (2.6b)$$

A generalização da equação de onda possibilita maior flexibilização na utilização dos algoritmos, tanto para o campo elétrico $\mathbf{e}$ quanto para o campo magnético $\mathbf{h}$. Assim, a equação de onda pode ser escrita de forma geral em função do campo vetorial $\mathbf{a}$,

$$\nabla \times \left(\bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{a} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bar{\bar{\xi}}_r * \mathbf{a}) = 0, \quad (2.7)$$

de modo que as equações (2.4) e (2.5) podem ser diretamente obtidas, assumindo-se:

$$\text{i. caso elétrico} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{e} \\ \bar{\bar{\xi}}_r = \bar{\bar{\epsilon}}_r \\ \bar{\bar{\zeta}}_r = \bar{\bar{\theta}}_r = \frac{1}{\bar{\bar{\mu}}_r} \end{cases}, \quad (2.8a)$$

$$\text{ii. caso magnético} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{h} \\ \bar{\bar{\xi}}_r = \bar{\bar{\mu}}_r \\ \bar{\bar{\zeta}}_r = \bar{\bar{\phi}}_r = \frac{1}{\bar{\bar{\epsilon}}_r} \end{cases}. \quad (2.8b)$$

De maneira geral, o meio de propagação pode ser definido pelo tensor

$$\bar{\bar{\xi}} = \xi_0 \bar{\bar{\xi}}_r,$$

onde $\bar{\bar{\xi}}$ representa a permissividade $\bar{\bar{\epsilon}}$ ou a permeabilidade $\bar{\bar{\mu}}$. Considerando que não há variação ao longo da coordenada k (caso planar), embora o meio seja anisotrópico e espacialmente arbitrário, será permitida apenas variação nas direções i e j . Assim, o tensor $\bar{\bar{\xi}}_r$ pode ser definido como

$$\bar{\bar{\xi}}_r = \begin{bmatrix} \xi_{ii}(i, j) & \xi_{ij}(i, j) & \xi_{ik}(i, j) \\ \xi_{ji}(i, j) & \xi_{jj}(i, j) & \xi_{jk}(i, j) \\ \xi_{ki}(i, j) & \xi_{kj}(i, j) & \xi_{kk}(i, j) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

No domínio da frequência, a equação vetorial de onda generalizada é obtida aplicando-se a transformada de Fourier à equação (2.7). Portanto, assumindo que o meio material é invariante no tempo, a equação de onda pode ser escrita como:

$$\nabla \times (\bar{\bar{\xi}}_r \nabla \times \mathbf{A}) - \kappa_0^2 \bar{\bar{\xi}}_r \mathbf{A} = 0, \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{A}(i, j, k, \omega)$ é a transformada de Fourier do campo vetorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(i, j, k, t)$ e $\kappa_0 = \frac{\omega}{c}$ é o número de onda no vácuo.

2.3 Decomposição das Equações

2.3.1 Decomposição da Equação Vetorial de Onda

Uma vez derivada a equação de onda no domínio da frequência (2.10), é necessário decompô-la em suas componentes transversal e longitudinal. O primeiro passo para tanto consiste em decompor o tensor $\bar{\bar{\xi}}_r$ em termos de suas componentes transversais (i, j) e longitudinal k . Assim, usando a notação diádica (Tai 1994), o tensor $\bar{\bar{\xi}}_r$, definido matricialmente em (2.9), pode ser escrito como

$$\bar{\bar{\xi}}_r = \bar{\bar{\xi}}_t + \xi_{ij} \hat{k} + \hat{k} \xi_{ji} + \xi_{kk} \hat{k} \hat{k}, \quad (2.11)$$

onde,

$$\bar{\bar{\xi}}_r = \begin{bmatrix} \xi_{ii}(i, j) & \xi_{ij}(i, j) \\ \xi_{ji}(i, j) & \xi_{jj}(i, j) \\ \xi_{ki}(i, j) & \xi_{kj}(i, j) \end{bmatrix}, \quad (2.12a)$$

$$\xi_{ij} = \xi_{ik}(i, j)\hat{i} + \xi_{jk}(i, j)\hat{j}, \quad (2.12b)$$

$$\xi_{ji} = \xi_{ki}(i, j)\hat{i} + \xi_{kj}(i, j)\hat{j}. \quad (2.12c)$$

De forma análoga, o campo vetorial $\mathbf{A}$ e o operador nabla devem ser escritos, respectivamente, em termos de suas componentes transversais (i, j) e longitudinal k , tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_t + \mathbf{A}_k, \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{A}_t = A_i\hat{i} + A_j\hat{j}, \quad (2.13b)$$

$$\mathbf{A}_k = A_k\hat{k}, \quad (2.13c)$$

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_k, \quad (2.14a)$$

$$\nabla_t = \frac{\partial}{\partial i}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial j}\hat{j}, \quad (2.14b)$$

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial k}\hat{k}. \quad (2.14c)$$

Fazendo uso das equações (2.11), (2.13a) e (2.14a), o argumento do primeiro termo da equação (2.10), pode ser escrito na forma,

$$\bar{\bar{\xi}}_r \nabla \times \mathbf{A} = \left(\bar{\bar{\xi}}_t + \zeta_{ij}\hat{k} + \hat{k}\zeta_{ji} + \zeta_{kk}\hat{k}\hat{k} \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \nabla_k \times \mathbf{A}_t + \nabla_k \times \mathbf{A}_k \right). \quad (2.15)$$

Entretanto, observando que,

$$\nabla_t \times \mathbf{A}_t \Rightarrow \text{direção longitudinal}, \quad (2.16a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{A}_k \Rightarrow \text{plano transversal}, \quad (2.16b)$$

$$\nabla_k \times \mathbf{A}_t \Rightarrow \text{plano transversal}, \quad (2.16c)$$

$$\nabla_k \times \mathbf{A}_k = 0, \quad (2.16d)$$

a equação (2.15) pode ser escrita de forma simplificada como:

$$\bar{\bar{\xi}}_r \nabla \times \mathbf{A} = \left(\zeta_{ij}\hat{k} + \zeta_{kk}\hat{k}\hat{k} \right) \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \left(\bar{\bar{\xi}}_t + \hat{k}\zeta_{ji} \right) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{A}_k + \nabla_k \times \mathbf{A}_t). \quad (2.17)$$

A partir das equações (2.12) e usando as relações vetoriais

$$\zeta_{ij} \left(\widehat{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) = \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t, \quad (2.18a)$$

$$\widehat{k} \left(\zeta_{ji} \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_k \right) = \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k, \quad (2.18b)$$

$$\widehat{k} \left(\zeta_{ji} \cdot \nabla_k \times \mathbf{A}_t \right) = \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times \mathbf{A}_t, \quad (2.18c)$$

$$\widehat{k} \left(\widehat{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) = \nabla_t \times \mathbf{A}_t, \quad (2.18d)$$

onde,

$$\zeta'_{ij} = -\zeta_{jk} \widehat{i} + \zeta_{ik} \widehat{j}, \quad (2.19a)$$

$$\zeta'_{ji} = \zeta_{kj} \widehat{i} - \zeta_{ki} \widehat{j}, \quad (2.19b)$$

a equação (2.17) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\zeta}} \nabla \times \mathbf{A} &= \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \zeta_{kk} \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \\ &+ \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times \mathbf{A}_t + \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times \mathbf{A}_t. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Aplicando o operador rotacional na equação (2.20), tem-se:

$$\nabla \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A} = \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A} + \nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.21)$$

onde,

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla_t \times \left[\zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \zeta_{kk} \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \right. \\ &\left. + \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times \mathbf{A}_t + \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times \mathbf{A}_t \right], \end{aligned} \quad (2.22a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla_k \times \left[\zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \zeta_{kk} \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \right. \\ &\left. + \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times \mathbf{A}_t + \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times \mathbf{A}_t \right]. \end{aligned} \quad (2.22b)$$

Analisando as equações (2.22) observa-se que,

$$\nabla_t \times \zeta_{kk} \nabla_t \times \mathbf{A}_t \Rightarrow \text{plano transversal}, \quad (2.23a)$$

$$\nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k \Rightarrow \text{plano transversal}, \quad (2.23b)$$

$$\nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times \mathbf{A}_t \Rightarrow \text{plano transversal}, \quad (2.23c)$$

$$\nabla_k \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t \Rightarrow \text{plano transversal}, \quad (2.23d)$$

$$\nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times \mathbf{A}_k \Rightarrow \text{plano transversal}, \quad (2.23e)$$

$$\nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times \mathbf{A}_t \Rightarrow \text{plano transversal}, \quad (2.23f)$$

$$\nabla_t \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t \Rightarrow \text{direção longitudinal}, \quad (2.23g)$$

$$\nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times \mathbf{A}_t \Rightarrow \text{direção longitudinal}, \quad (2.23h)$$

$$\nabla_k \times \zeta_{kk} \nabla_t \times \mathbf{A}_t \Rightarrow 0, \quad (2.23i)$$

$$\nabla_k \times \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k \Rightarrow 0, \quad (2.23j)$$

$$\nabla_k \times \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times \mathbf{A}_t \Rightarrow 0. \quad (2.23k)$$

Usando as considerações apresentadas em (2.23), a equação (2.21) pode, então, ser decomposta em suas componentes transversais e longitudinais, tal que:

$$\begin{aligned} \left[\nabla \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A} \right]_t &= \nabla_t \times \zeta_{kk} \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \\ &\quad + \nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times \mathbf{A}_t + \nabla_k \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \\ &\quad + \nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times \mathbf{A}_t, \end{aligned} \quad (2.24a)$$

$$\begin{aligned} \left[\nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A} \right]_k &= \nabla_t \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \\ &\quad + \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times \mathbf{A}_k. \end{aligned} \quad (2.24b)$$

Uma vez decomposto o primeiro termo, faz-se necessário a decomposição do segundo termo da equação vetorial de onda. Assim, fazendo uso das equações (2.11) e (2.13), o segundo termo de (2.10) pode ser escrito como

$$\kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}_r \mathbf{A} = \kappa_0^2 \left(\bar{\bar{\zeta}}_t + \xi_{ij} \widehat{k} + \widehat{k} \xi_{ji} + \xi_{kk} \widehat{k} \widehat{k} \right) \cdot (\mathbf{A}_t + \mathbf{A}_k), \quad (2.25)$$

ou,

$$\kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}_r \mathbf{A} = \kappa_0^2 \left(\bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{ij} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k + \widehat{k} \xi_{ji} \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{kk} \widehat{k} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k \right). \quad (2.26)$$

Separando (2.26) em suas componentes transversal e longitudinal, tem-se:

$$\left[\kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}_r \mathbf{A} \right]_t = \kappa_0^2 \left(\bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{ij} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k \right), \quad (2.27a)$$

$$\left[\kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}_r \mathbf{A} \right]_k = \kappa_0^2 \left(\widehat{k} \xi_{ji} \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{kk} \widehat{k} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k \right). \quad (2.27b)$$

A partir das equações (2.24) e (2.27), a equação vetorial de onda pode finalmente ser escrita em termos de suas componentes transversal e longitudinal, respectivamente,

$$0 = \left[\nabla_t \times \zeta_{kk} \nabla_t \times -\kappa_0^2 \bar{\bar{\xi}}_t \cdot + \nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times + \nabla_k \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times + \nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times \right] \mathbf{A}_t + \left[\nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times + \nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times -\kappa_0^2 \xi_{ij} \widehat{k} \cdot \right] \mathbf{A}_k, \quad (2.28a)$$

$$0 = \left[\nabla_t \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times -\kappa_0^2 \widehat{k} \xi_{ji} \cdot + \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times \right] \mathbf{A}_t + \left[\nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times -\kappa_0^2 \xi_{kk} \right] \mathbf{A}_k. \quad (2.28b)$$

2.3.2 Decomposição da Equação de Gauss

Fazendo-se uso do procedimento apresentado na Seção 2.3.1 é possível reescrever a equação de Gauss, não em termos de suas componentes transversal e longitudinal, uma vez que tal equação é de natureza escalar. Contudo, é possível apresentá-la em função das componentes transversal e longitudinal do campo eletromagnético. Para tanto, considere-se a equação de Gauss num meio sem cargas,

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{\xi}}_r \mathbf{A}) = 0. \quad (2.29)$$

Usando as equações (2.11) e (2.13a) o termo entre parênteses em (2.29) pode ser escrito como:

$$\bar{\bar{\zeta}}_r \mathbf{A} = \bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{ij} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k + \widehat{k} \xi_{ji} \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{kk} \widehat{k} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k. \quad (2.30)$$

Sabendo que $\nabla = \nabla_t + \nabla_k$ e, observando que,

$$\nabla_t \cdot (\widehat{k} \xi_{ji} \cdot \mathbf{A}_t) = \nabla_t \cdot (\xi_{kk} \widehat{k} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k) = \nabla_k \cdot (\xi_{ij} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k) = \nabla_k \cdot (\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t) = 0,$$

a equação (2.29) pode ser reescrita em função das componentes transversal $\mathbf{A}_t$ e longitudinal $\mathbf{A}_k$ do campo eletromagnético como:

$$\nabla_t \cdot (\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t) + \nabla_t \cdot (\xi_{ij} \widehat{k} \cdot \mathbf{A}_k) + \nabla_k \cdot (\widehat{k} \xi_{ji} \cdot \mathbf{A}_t) + \nabla_t \cdot (\xi_{kk} \mathbf{A}_k) = 0. \quad (2.31)$$

2.3.3 Forma Matricial

As equações (2.28) e (2.31) podem ser escritas de maneira compacta sob a forma matricial,

$$\mathbb{G}\mathbb{A} = 0, \quad (2.32)$$

sendo

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t, \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^T, \quad (2.33a)$$

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{B}_{22} \\ \mathcal{G}_{31} & \mathcal{B}_{32} \end{bmatrix}. \quad (2.33b)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{11} = & \nabla_t \times \zeta_{kk} \nabla_t \times -\kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot + \nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times + \nabla_k \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times + \\ & + \nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times, \end{aligned} \quad (2.34a)$$

$$\mathcal{G}_{12} = \nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times + \nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times -\kappa_0^2 \xi_{ij} \hat{k} \cdot, \quad (2.34b)$$

$$\mathcal{G}_{21} = \nabla_t \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times -\kappa_0^2 \hat{k} \xi_{ji} \cdot + \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_k \times, \quad (2.34c)$$

$$\mathcal{G}_{22} = \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times -\kappa_0^2 \xi_{kk}, \quad (2.34d)$$

$$\mathcal{G}_{31} = \nabla_t \cdot (\bar{\bar{\xi}}_t \cdot) + \nabla_k \cdot (\hat{k} \xi_{ji} \cdot), \quad (2.34e)$$

$$\mathcal{G}_{32} = \nabla_t \cdot (\xi_{ij} \hat{k} \cdot) + \nabla_k \cdot (\xi_{kk}). \quad (2.34f)$$

A fim de realizar a análise modal assume-se que o campo vetorial $\mathbf{A}$ possui variação espacial na forma,

$$\mathbf{A}(i, j, k) = \mathbf{A}(i, j) \exp(-\gamma k), \quad (2.35)$$

onde $\gamma = \alpha + j\beta$ é a constante de propagação no meio e o campo vetorial $\mathbf{A}(i, j)$ representa a distribuição transversal do campo eletromagnético, sendo grandezas a serem determinadas. A partir de (2.35), as derivadas do campo $\mathbf{A}$ em relação à variável k podem ser calculadas,

$$\frac{\partial}{\partial k} \mathbf{A}(i, j, k) = -\gamma \mathbf{A}(i, j) \exp(-\gamma k), \quad (2.36)$$

e, portanto,

$$\nabla_k \times \mathbf{A}(i, j, k) = \hat{k} \times \frac{\partial}{\partial k} \mathbf{A}(i, j) = -\gamma \mathbf{A}(i, j) \exp(-\gamma k), \quad (2.37a)$$

$$\nabla_k \cdot \mathbf{A}(i, j, k) = \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial k} \mathbf{A}(i, j) = -\gamma \mathbf{A}_k(i, j) \exp(-\gamma k). \quad (2.37b)$$

Usando (2.37) e observando que,

$$\nabla_t \times \mathbf{A}_k = -\widehat{k} \times \nabla_k A_k, \quad (2.38)$$

os termos $\mathcal{G}_{mn}$ em (2.34) podem ser reescritos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{11} = & \nabla_t \times \zeta_{kk} \nabla_t \times - \kappa_0^2 \bar{\bar{\xi}}_t \cdot - \gamma \nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \widehat{k} \times - \gamma \widehat{k} \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times + \\ & + \gamma^2 \widehat{k} \times \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \widehat{k} \times, \end{aligned} \quad (2.39a)$$

$$\mathcal{G}_{12} = -\nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \widehat{k} \times \nabla_t + \gamma \widehat{k} \times \bar{\bar{\xi}}_t \cdot \widehat{k} \times \nabla_t - \kappa_0^2 \xi_{ij}, \quad (2.39b)$$

$$\mathcal{G}_{21} = \nabla_t \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times - \kappa_0^2 \widehat{k} \xi_{ji} \cdot - \gamma \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \widehat{k} \times, \quad (2.39c)$$

$$\mathcal{G}_{22} = -\nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \widehat{k} \times \nabla_t - \kappa_0^2 \xi_{kk}, \quad (2.39d)$$

$$\mathcal{G}_{31} = \nabla_t \cdot (\bar{\bar{\xi}}_t \cdot) - \gamma \xi_{ji}, \quad (2.39e)$$

$$\mathcal{G}_{32} = \nabla_t \cdot (\xi_{ij} \cdot) - \gamma \xi_{kk}. \quad (2.39f)$$

2.4 Análise Modal

A fim de realizar a análise modal, um conjunto adequado de equações deve ser escolhido. O equacionamento apresentado anteriormente permite que duas formulações distintas possam ser usadas. A partir de (2.32) pode-se derivar a formulação de análise modal clássica baseada na decomposição direta da equação de onda, tomando-se os termos (2.39a) – (2.39d) (Pelosi & Coccioli 1998, Jin 2002). Contudo, uma formulação alternativa pode ser derivada, onde a componente longitudinal da equação vetorial de onda é substituída pela equação do divergente nulo.

Uma vez que formulação clássica é uma formulação consagrada na literatura (Pelosi & Coccioli 1998, Jin 2002), este capítulo focará sua atenção na análise da formulação alternativa derivada com o uso da equação de Gauss, a fim de investigar sua eficácia em eliminar os modos espúrios do espectro de soluções (Vardapetyan & Demkowicz 2002). Dessa forma, escolhendo os termos relativos à componente transversal da equação de onda, (2.39a) e (2.39b) e os termos associados à equação do divergente nulo, a equação matricial (2.32) se reduz a um sistema quadrado na forma,

$$\mathbb{B}\mathbf{A} = 0, \quad (2.40)$$

onde,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t, \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^t, \quad (2.41a)$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.41b)$$

e,

$$\mathcal{B}_{11} = \mathcal{G}_{11}, \quad (2.42a)$$

$$\mathcal{B}_{12} = \mathcal{G}_{12}, \quad (2.42b)$$

$$\mathcal{B}_{21} = \mathcal{G}_{31}, \quad (2.42c)$$

$$\mathcal{B}_{22} = \mathcal{G}_{32}, \quad (2.42d)$$

com operadores $\mathcal{G}_{mn}$ definidos em (2.39).

2.4.1 Forma Integral

A solução do sistema (2.40) através do Método dos Elementos Finitos exige que as equações sejam escritas na forma integral (Jin 2002). Assim, aplicando o método de Galerkin à equação (2.40) (Jin 2002), tem-se

$$\int_{\Omega} \mathbb{G} \mathbb{A} \cdot \mathbf{F}^* d\Omega = 0, \quad (2.43)$$

onde $\mathbf{F}^*$ é o complexo conjugado da função-teste,

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_t, \mathbf{F}_k]^T, \quad (2.44)$$

$\mathbf{F}_t$ a função-teste transversal e $\mathbf{F}_k = \hat{k} F_k$ a função teste longitudinal. Usando (2.40) e (2.44), a equação integral (2.43) pode ser escrita como,

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\mathcal{B}_{11} \mathbf{A}_t + \mathcal{B}_{12} \mathbf{A}_k \right) d\Omega = 0, \quad (2.45a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}_k \cdot \left(\mathcal{B}_{21} \mathbf{A}_t + \mathcal{B}_{22} \mathbf{A}_k \right) d\Omega = 0. \quad (2.45b)$$

Usando as equações (2.39) e (2.42), a equação (2.45) pode ser escrita em função dos operadores espaciais,

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\nabla_t \times \zeta_{kk} \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \kappa_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \\
& - \gamma \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \hat{k} \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\hat{k} \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \\
& + \gamma^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\hat{k} \times \bar{\bar{\xi}}_t \cdot \hat{k} \times \mathbf{F}_t \right) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \hat{k} \times \nabla_t A_k \right) d\Omega + \\
& + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\hat{k} \times \bar{\bar{\xi}}_t \cdot \hat{k} \times \nabla_t A_k \right) d\Omega - \kappa_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\xi_{ij} A_k \right) d\Omega,
\end{aligned} \tag{2.46a}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\Omega} F_k \left(\nabla_t \cdot \bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \gamma \int_{\Omega} F_k \left(\xi_{ji} \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \int_{\Omega} F_k \left(\nabla_t \cdot \xi_{ij} A_k \right) d\Omega - \\
& - \gamma \int_{\Omega} F_k \left(\xi_{kk} A_k \right) d\Omega.
\end{aligned} \tag{2.46b}$$

Do teorema de Green, tem-se que:

$$\int_V \left[u (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times u \nabla \times \mathbf{b}) \right] dV = \oint_S u \left(\mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} \right) \cdot \hat{n} dS, \tag{2.47a}$$

$$\int_V \left[a \nabla \cdot (u \nabla b) + (\nabla a) \cdot (\nabla b) \right] dV = \oint_S a u \nabla b \cdot \hat{n} dS, \tag{2.47b}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\nabla_t \times \zeta_{kk} \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega = & \int_{\Omega} \zeta_{kk} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \\
& - \oint_{\partial\Omega} \zeta_{kk} \mathbf{F}_t \cdot \left(\hat{n} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Gamma,
\end{aligned} \tag{2.48a}$$

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\nabla_t \times \zeta'_{ji} \times \hat{k} \times \nabla_t A_k \right) d\Omega = & \int_{\Omega} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k \right) - \\
& - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k \times \hat{n} \right) d\Gamma,
\end{aligned} \tag{2.48b}$$

$$\int_{\Omega} F_k \left[\nabla_t \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla_t F_k \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} F_k \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) \cdot \hat{n} d\Gamma, \tag{2.48c}$$

$$\int_{\Omega} F_k \left[\nabla_t \cdot \left(\zeta'_{ij} \cdot A_k \right) \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla_t F_k \left(\zeta'_{ij} A_k \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} F_k \left(\zeta'_{ij} A_k \right) \cdot \hat{n} d\Gamma. \tag{2.48d}$$

Aplicando as relações (2.48) em (2.46), tem-se que,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \zeta_{kk} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \kappa_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{ij} A_k \right) d\Omega - \\
& - \gamma \int_{\Omega} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\zeta'_{ji} \times \hat{k} \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\hat{k} \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \\
& + \gamma^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\hat{k} \times \bar{\bar{\xi}}_t \cdot \hat{k} \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\zeta'_{ji} \times \hat{k} \times \nabla_t A_k \right) d\Omega + \\
& + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\hat{k} \times \bar{\bar{\xi}}_t \cdot \hat{k} \times \nabla_t A_k \right) d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \zeta_{kk} \mathbf{F}_t \cdot \left(\hat{n} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Gamma - \\
& - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k \times \hat{n} \right) d\Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{2.49a}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla_t F_k \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla_t F_k \left(\zeta'_{ij} A_k \right) d\Omega + \gamma \int_{\Omega} F_k \left(\xi_{ji} \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{kk} A_k \right) d\Omega - \\
& - \oint_{\partial\Omega} F_k \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) \cdot \hat{n} d\Gamma - \oint_{\partial\Omega} F_k \left(\zeta'_{ij} A_k \right) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0.
\end{aligned} \tag{2.49b}$$

2.4.2 Condições de Contorno

Analisando a equação (2.49) observa-se a necessidade de uma investigação do comportamento das integrais de linha sobre o contorno Γ , ilustrado na Figura 2.2.

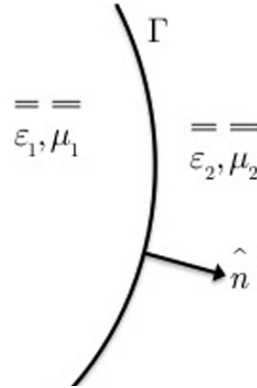


Figura 2.2: Fronteira entre os meios quaisquer.

Como as componentes tangenciais dos campos eletromagnéticos devem ser contínuas ao longo do contorno Γ , segue, então, que a componente $\left(\hat{n} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A} \right)$ deve ser contínua ao longo a interface que separa os meios 1 e 2. Expandindo o termo $\left(\hat{n} \cdot \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \times \mathbf{A} \right)$ em suas componentes transversal e longitudinal, tem-se que:

$$\begin{aligned} \left[\hat{n} \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \cdot \mathbf{A} \right]_t &= \zeta_{kk} \hat{n} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \hat{n} \times \hat{k} \zeta'_{ji} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \\ &\quad + \hat{n} \times \hat{k} \zeta'_{ji} \times \nabla_k \times \mathbf{A}_t, \end{aligned} \quad (2.50a)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{n} \times \bar{\bar{\zeta}}_r \nabla \cdot \mathbf{A} \right]_k &= \hat{n} \times \zeta'_{ij} \hat{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \hat{n} \times \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_k + \\ &\quad + \hat{n} \times \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \nabla_k \times \mathbf{A}_t. \end{aligned} \quad (2.50b)$$

Além disso, a componente normal dos fluxos eletromagnéticos também devem ser contínuas ao longo da interface Γ e, dessa forma, a componente $\hat{n} \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_r \mathbf{A} \right)$ também deve ser contínua através do contorno que separa dois meios distintos. Expandindo o termo $\hat{n} \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_r \mathbf{A} \right)$ tem-se:

$$\hat{n} \cdot \left(\bar{\bar{\xi}} \mathbf{A} \right) = \hat{n} \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_r \mathbf{A}_t \right) + \hat{n} \cdot \left(\xi'_{ij} A_k \right). \quad (2.51)$$

Aplicando as condições de contorno (2.50) e (2.51) nas equações (2.49), observa-se que as integrais de linha se anulam ao longo do contorno Γ .

Fazendo uso das identidades vetoriais

$$\hat{k} \times \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \hat{k} \times \mathbf{A}_t = \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \mathbf{A}_t, \quad (2.52a)$$

$$\hat{k} \times \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \hat{k} \times \nabla_t A_k = \bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \nabla_t A_k, \quad (2.52b)$$

$$\hat{k} \times \zeta'_{ij} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t = \zeta'_{ij} \hat{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_t, \quad (2.52c)$$

$$\zeta'_{ji} \times \hat{k} \times \mathbf{A}_t = \hat{k} \zeta'_{ji} \cdot \mathbf{A}_t, \quad (2.52d)$$

$$\zeta'_{ji} \times \hat{k} \times \nabla_t A_k = \hat{k} \zeta'_{ji} \cdot \nabla_t A_k, \quad (2.52e)$$

e orientando o sistema de coordenadas segundo à relação (2.1a), as equações (2.49) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \zeta_{zz} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \kappa_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{xy} A_z \right) d\Omega - \\ &- \gamma \int_{\Omega} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\hat{z} \zeta'_{yx} \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\zeta'_{xy} \hat{z} \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \\ &\quad + \gamma^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\hat{z} \zeta'_{yx} \cdot \nabla_t A_z \right) d\Omega + \\ &\quad + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\bar{\bar{\zeta}}_t \cdot \nabla_t A_z \right) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.53a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla_t F_z \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla_t F_z \cdot \left(\xi'_{xy} A_k \right) d\Omega + \gamma \int_{\Omega} F_z \left(\xi_{yx} \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{zz} A_z \right) d\Omega = 0. \quad (2.53b)$$

2.4.3 Normalização dos Campos Eletromagnéticos

A fim de simetrizar o sistema de equações é possível aplicar dois tipos de normalização à componente longitudinal do campo eletromagnético. Tal processo levará, como será visto a seguir, a duas equações distintas e equivalentes de autovalor cujas soluções estão intrinsecamente relacionadas com as características dos modos espúrios.

Caso 1: normalização $A_z = \gamma A'_z$

Aplicado a transformação $A_z = \gamma A'_z$, onde A'_z é a componente longitudinal normalizada, a equação (2.53) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \int_{\Omega} \left(\bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \mathbf{A}_t + \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \nabla_t A'_z \right) \cdot \mathbf{F}_t d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \left(\zeta'_{xy} \hat{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \kappa_0^2 \zeta'_{xy} A'_z \right) \cdot \mathbf{F}_t d\Omega - \\ & - \gamma \int_{\Omega} \left(\hat{z} \zeta'_{yx} \cdot \nabla_t A'_z + \hat{z} \zeta'_{yx} \cdot \mathbf{A}_t \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) d\Omega - \kappa_0^2 \int_{\Omega} \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) \cdot \mathbf{F}_t d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \zeta_{zz} \left(\nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.54a)$$

$$\gamma^2 \int_{\Omega} \left(\xi_{zz} A'_z \right) F_z d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \left(\xi_{yx} \cdot \mathbf{A}_t F_x + \xi_{xy} A'_z \cdot \nabla_t F_z \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t \right) \cdot \nabla_t F_z d\Omega = 0, \quad (2.54b)$$

onde o tensor $\bar{\bar{\zeta}}'_t$ é dado por:

$$\bar{\bar{\zeta}}'_t = \begin{bmatrix} -\zeta_{yy} & \zeta_{yx} \\ \zeta_{xy} & -\zeta_{xx} \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

com ζ_{ij} definidos em (2.12a).

Discretização por Elementos Finitos

O sistema de equações (2.54) encerra um problema de condição de contorno onde os campos $\mathbf{A}_t$ e A'_z determinam a solução do sistema. Para tanto será aplicado o Método dos Elementos Finitos, onde o domínio Ω é dividido em M subdomínios – denominados elementos finitos. Este procedimento permite definir funções de interpolação mais simples sobre cada subdomínio, simplificando, assim, a solução do problema. O método dos elementos finitos permite representar a solução global $\mathbf{A}_t$ e A_k , definidas sobre o Ω , como um combinação linear de suas componentes elementares na forma (Jin 2002),

$$\mathbf{A}_t = \sum_{e=1}^M \mathbf{A}_t^e, \quad (2.56a)$$

$$A'_z = \sum_{e=1}^M A_z^e, \quad (2.56b)$$

onde os campos eletromagnéticos $\mathbf{A}_t^e$ e A_z^e são definidos sobre o domínio Ω^e do e -ésimo elemento finito, a partir da combinação linear

$$\mathbf{A}_t^e = \sum_{j=1}^n \mathbf{N}_j^e a_{tj}^e = \{\mathbf{a}_t^e\}^T \{\mathbf{N}^e\} = \{\mathbf{N}^e\}^T \{\mathbf{a}_t^e\}, \quad (2.57a)$$

$$A_z^e = \sum_{j=1}^n L_j^e a_{zj}^e = \{\mathbf{a}_z^e\}^T \{L^e\} = \{L^e\}^T \{\mathbf{a}_z^e\}, \quad (2.57b)$$

sendo que $\mathbf{N}_j^e$ e L_j^e são funções de forma, vetoriais e escalares, respectivamente, definidas sobre Ω^e ; a_{tj}^e e a_{zj}^e são incógnitas a serem determinadas e n representa o número de nós e arestas no elemento. De maneira similar, as funções-pesos são definidas sobre o e -ésimo elemento, tal que

$$\mathbf{F}_t^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i^e, \quad (2.58a)$$

$$F_z^e = \sum_{i=1}^n L_i^e. \quad (2.58b)$$

Usando as equações (2.57) e (2.58), o sistema de equações (2.54) pode ser escrito na forma de uma equação matricial de segunda ordem em γ , como,

$$\left[\gamma^2 \mathbb{M} + \gamma \mathbb{N} + \mathbb{P} \right] \{a\} = 0, \quad (2.59)$$

onde as matrizes $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ e o vetor $\{a\}$ são definidos tal que

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{M}_{tz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.60a)$$

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{tt} & \mathbf{N}_{tz} \\ \mathbf{N}_{zt} & \mathbf{N}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.60b)$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{zt} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.60c)$$

$$\{a\} = \left[\{\mathbf{a}_t\} \quad \{\mathbf{a}_z\} \right]^T, \quad (2.60d)$$

sendo:

$$\mathbf{M}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \left(\bar{\zeta}_t'^e \cdot \mathbf{N}_j^e \right) d\Omega, \quad (2.61a)$$

$$\mathbf{M}_{tz} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \left(\bar{\zeta}_t'^e \cdot \nabla_t L_j^e \right) d\Omega, \quad (2.61b)$$

$$\mathbf{M}_{zz} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \xi_{zz}^e L_i^e L_j^e d\Omega, \quad (2.61c)$$

$$\mathbf{N}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[\mathbf{N}_i^e \cdot \left(\zeta_{xy}^{e'} \hat{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{N}_j^e \right) - \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_i^e \right) \cdot \left(\hat{z} \zeta_{yx}^{e'} \cdot \mathbf{N}_j^e \right) \right] d\Omega, \quad (2.61d)$$

$$\mathbf{N}_{tz} = - \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[\kappa_0^2 \mathbf{N}_i^e \cdot \left(\xi_{xy}^{e'} L_j^e \right) d\Omega + \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_i^e \right) \cdot \left(\hat{z} \zeta_{yx}^{e'} \cdot \nabla_t L_j^e \right) \right] d\Omega, \quad (2.61e)$$

$$\mathbf{N}_{zt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} L_i^e \left(\xi_{yx}^{e'} \cdot \mathbf{N}_j^e \right) d\Omega, \quad (2.61f)$$

$$\mathbf{N}_{zz} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \nabla_t L_i^e \cdot \left(\xi_{xy}^{e'} L_j^e \right) d\Omega, \quad (2.61g)$$

$$\mathbf{P}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[\zeta_{zz}^e \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_i^e \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_j^e \right) - \kappa_0^2 \mathbf{N}_i^e \cdot \left(\bar{\xi}_t^e \cdot \mathbf{N}_j^e \right) \right] d\Omega, \quad (2.61h)$$

$$\mathbf{P}_{zt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \nabla_t L_i^e \cdot \left(\bar{\xi}_t^e \cdot \mathbf{N}_j^e \right) d\Omega. \quad (2.61i)$$

Modos Espúrios

Uma vez que tem-se por objetivo investigar a presença de modos espúrios no autovalor nulo, e sabendo que tais modos não-físicos se manifestam em códigos baseados em elementos finitos híbridos que modelam tanto meios anisotrópicos quanto meios isotrópicos, será considerado, sem perda de generalidade, apenas meios elétrica e magneticamente isotrópicos ou com anisotropia uniaxial. Dessa forma, os tensores $\zeta'_{xy} = \zeta'_{yx} = \xi_{xy} = \xi_{yx} = 0$ e, sob tais condições, a matriz $\mathbf{N}$ definida em (2.60b), é nula. Dessa forma, a equação matricial (2.59) se reduz a uma equação de segunda ordem incompleta em γ

$$\left[\gamma^2 \mathbb{M} + \mathbb{P} \right] \{a\} = 0, \quad (2.62)$$

onde $\mathbb{M}$ e $\mathbb{P}$ são definidos em (2.60a) e (2.60c).

A equação (2.62) encerra um problema de autovalor e pode ser escrita de forma generalizada, como

$$\lambda \mathbb{A}x = \mathbb{B}x. \quad (2.63)$$

onde

$$\mathbb{A} = \mathbb{M}, \quad (2.64a)$$

$$\mathbb{B} = -\mathbb{P}, \quad (2.64b)$$

e $\lambda = \gamma^2$ e $x = \{a\}$ são, respectivamente, os autovalores e autovetores do sistema.

O sistema definido por (2.63) admitirá solução não-trivial somente se a matriz $\mathbb{B}$ for singular. Contudo, sendo a matriz $\mathbb{B}$ definida em (2.64b), analisando matriz global (2.60c) verifica-se que a matriz $\mathbb{P}$, e portanto, $\mathbb{B}$, é singular independentemente da malha, tipo ou ordem dos elementos finitos utilizados. Isto leva, portanto, a uma solução não-trivial do sistema (2.63), verificando-se ser possível um conjunto de soluções não-triviais para a autoequação (2.62), tal que,

$$\gamma_i = 0, \{a_i\} \neq 0, \quad (2.65)$$

indicando a presença de modos espúrios no espectro de soluções de (2.62).

Caso 2: Normalização $A_z = \gamma^{-1}A'_z$

Aplicado transformação $A_z = \gamma^{-1}A'_z$, a equação (2.53) pode ser reescrita, resultando em um novo sistema de equações de terceira ordem em γ , na forma:

$$\begin{aligned} & \gamma^3 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \gamma^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\zeta'_{xy} \hat{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \hat{z} \zeta'_{yx} \cdot \mathbf{A}_t \right) d\Omega + \\ & + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \nabla_t A'_z \right) d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \zeta_{zz} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{A}_t \right) d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \left(\nabla_t \times \mathbf{F}_t \right) \cdot \left(\hat{z} \zeta'_{yx} \cdot \nabla_t A'_z \right) d\Omega - \kappa_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{F}_t \cdot \left(\xi'_{xy} A'_z \right) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.66a)$$

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \int_{\Omega} \xi_{yx} \cdot \mathbf{A}_t F_z d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \left[\left(\bar{\bar{\xi}}'_t \cdot \mathbf{A}_t \right) \cdot \nabla_t F_z + \xi_{zz} A'_z F_z \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \xi_{xy} A'_z \cdot \nabla_t F_z d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.66b)$$

Discretização por Elementos Finitos

Aplicando o método dos elementos finitos e usando as equações (2.56) – (2.58), o sistema de equações (2.66) pode ser escrito como uma equação matricial de terceira ordem em γ

$$\left[\gamma^3 \mathbb{M} + \gamma^2 \mathbb{N} + \gamma \mathbb{P} + \mathbb{Q} \right] \{a\} = 0, \quad (2.67)$$

onde as matrizes $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ e o vetor $\{a\}$ são definidos tal que

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.68a)$$

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{zt} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.68b)$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{tt} & \mathbf{N}_{tz} \\ \mathbf{P}_{zt} & \mathbf{N}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.68c)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{tz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.68d)$$

$$\{a\} = [\{a_t\} \quad \{a_z\}]^T, \quad (2.68e)$$

sendo,

$$\mathbf{M}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \left(\bar{\bar{\zeta}}_t^e \cdot \mathbf{N}_j^e \right) d\Omega, \quad (2.69a)$$

$$\mathbf{N}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[\mathbf{N}_i^e \cdot \left(\zeta_{xy}^{e'} \hat{k} \cdot \nabla_t \times \mathbf{N}_j^e \right) - \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_i^e \right) \cdot \left(\hat{z} \zeta_{yx}^{e'} \cdot \mathbf{N}_j^e \right) \right] d\Omega, \quad (2.69b)$$

$$\mathbf{N}_{zt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} L_i^e \left(\zeta_{yx}^{e'} \cdot \mathbf{N}_j^e \right) d\Omega, \quad (2.69c)$$

$$\mathbf{P}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[\zeta_{zz}^e \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_i^e \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_j^e \right) - \kappa_0^2 \mathbf{N}_i^e \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t^e \cdot \mathbf{N}_j^e \right) \right] d\Omega, \quad (2.69d)$$

$$\mathbf{P}_{tz} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \left(\bar{\bar{\zeta}}_t^e \cdot \nabla_t L_j^e \right) d\Omega, \quad (2.69e)$$

$$\mathbf{P}_{zt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \nabla_t L_i^e \cdot \left(\bar{\bar{\xi}}_t^e \cdot \mathbf{P}_j^e \right) d\Omega, \quad (2.69f)$$

$$\mathbf{P}_{zz} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \xi_{zz}^e L_i^e L_j^e d\Omega, \quad (2.69g)$$

$$\mathbf{Q}_{tz} = - \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[\kappa_0^2 \mathbf{N}_i^e \cdot \left(\xi_{xy}^{e'} L_j^e \right) d\Omega + \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_i^e \right) \cdot \left(\hat{z} \zeta_{yx}^{e'} \cdot \nabla_t L_j^e \right) \right] d\Omega, \quad (2.69h)$$

$$\mathbf{Q}_{zz} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \nabla_t L_i^e \cdot \left(\xi_{xy}^{e'} L_j^e \right) d\Omega. \quad (2.69i)$$

Modos Espúrios

Assumindo meios elétrica e magneticamente isotrópicos ou com anisotropia uniaxial, as matrizes $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, definidas, respectivamente, por (2.68b) e (2.68d), são nulas, uma vez que

$\zeta'_{xy} = \zeta'_{yx} = \xi_{xy} = \xi_{yx} = 0$. Assim, a equação matricial (2.67) se reduz a uma equação de segunda ordem incompleta em γ , na forma

$$\left[\gamma^2 \mathbb{M} + \mathbb{P} \right] \{a\} = 0, \quad (2.70)$$

com as matrizes $\mathbb{M}$ e $\mathbb{P}$ definidos em (2.68a) e (2.68c), respectivamente.

A equação (2.70) encerra um problema de autovalor e pode ser escrita em sua forma generalizada,

$$\lambda \mathbb{A}x = \mathbb{B}x, \quad (2.71)$$

onde $\lambda = \gamma^{-2}$ e $x = \{a\}$ são, respectivamente, os autovalores e autovetores do sistema e

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}, \quad (2.72a)$$

$$\mathbb{B} = -\mathbb{M}. \quad (2.72b)$$

Neste caso, o sistema definido por (2.71) admitirá solução não-trivial se, e somente se, a matriz $\mathbb{B}$ for singular. Entretanto, sendo a matriz $\mathbb{B}$ definida em (2.72b), analisando matriz global (2.68a) verifica-se que a matriz $\mathbb{M}$, e portanto, a matriz $\mathbb{B}$, é singular independentemente da malha, tipo ou ordem dos elementos finitos utilizados. Tal característica da matriz $\mathbb{B}$ leva a uma solução não-trivial do sistema (2.71), e mostrando ser possível um conjunto de soluções não-triviais para a autoequação (2.70), tal que,

$$\gamma_i \rightarrow \infty, \{a_i\} \neq 0. \quad (2.73)$$

indicando a presença de modos espúrios no espectro de soluções de (2.62) quando $\gamma \rightarrow \infty$.

A Figura 2.3 apresenta uma tabela associando a presença dos modos espúrios para o Caso 1 – normalização $A_z = \gamma A'_z$, e Caso 2, normalização $A_z = \gamma^{-1} A'_z$, tanto para a formulação modal usando a equação do divergente nulo (equação de Gauss), e para a formulação modal convencional (Pelosi & Coccioli 1998). Como pode ser observado, a singularidade da matriz $\mathbb{P}$, para o Caso 1, e da matriz $\mathbb{M}$, para o Caso 2, determina a presença dos modos espúrios em $\gamma = 0$ e $\gamma \rightarrow \infty$, respectivamente, independentemente da formulação utilizada para o cálculo dos autovalores.

2.5 Conclusão

Uma análise da formulação modal alternativa é apresentada nesse capítulo onde a equação de Gauss é imposta na formulação modal em substituição à componente transversal da equação de onda, com o intuito de suprimir o surgimento de soluções não-físicas em torno do autovalor nulo. Segundo Demkowicz (Vardapetyan & Demkowicz 2002), a inserção da equação do divergente na formulação modal inibe completamente o surgimento de modos espúrios. Contudo, como

		$[M]$	$[P]$	γ_i
DIVERGENTE	Caso 1	$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{M}_{tz} \\ 0 & \mathbf{M}_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{tt} & 0 \\ \mathbf{P}_{zt} & 0 \end{bmatrix}$	$\gamma_i = 0$
	Caso 2	$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{tt} & \mathbf{N}_{tz} \\ \mathbf{P}_{zt} & \mathbf{N}_{zz} \end{bmatrix}$	$\gamma_i \rightarrow \infty$
CONVENCIONAL	Caso 1	$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{M}_{tz} \\ \mathbf{M}_{zt} & \mathbf{M}_{zz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\gamma_i = 0$
	Caso 2	$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & 0 \\ \mathbf{M}_{zt} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{tt} & \mathbf{M}_{zt} \\ 0 & \mathbf{M}_{zz} \end{bmatrix}$	$\gamma_i \rightarrow \infty$

Figura 2.3: Ilustração de uma estrutura tridimensional.

pode ser observado pela análise aqui apresentada, a presença dos modos espúrios no espectro de elementos finitos está associada à singularidade da matriz $\mathbb{B}$ presente tanto na auto-equação (2.62) quanto em (2.70), mostrando, assim, não é possível eliminar os modos espúrios pela simples inserção da equação de Gauss na formulação modal.

Capítulo 3

Análise Modal: Resultados Numéricos

3.1 Introdução

A fim de validar numericamente as formulações e as análises apresentadas no Capítulo 2, e verificar o surgimento de modos espúrios a partir da formulação modal usando a equação do divergente nulo (FEM-DIV) em substituição à componente longitudinal da equação vetorial de onda FEM convencional, foram escolhidos dois exemplos clássicos: (a) guia metálico parcialmente preenchido com um dielétrico de alto índice de refração operando na faixa de frequências de micro-ondas e, (b) um guia dielétrico de alto contraste operando na faixa óptica de frequências.

3.2 Guia Metálico Parcialmente Preenchido

Considere um guia metálico parcialmente preenchido com um dielétrico com alto índice de refração, cuja seção transversal é mostrada na Figura 3.1, onde $a = 3,45$ mm, $b = 7,899$ mm, $w = 7,899$ mm, $h = 3,2$ mm, $n_0 = 1,0$ e $n_G = 3,0$ (Fernandez et al. 1993).

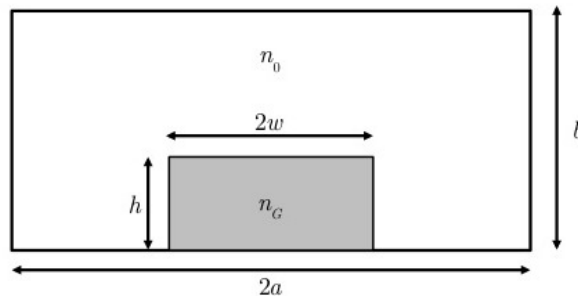


Figura 3.1: Guia de ondas blindado parcialmente preenchido com dielétrico de alto índice de refração.

Para a solução de tal problema foi utilizada uma malha com 10000 elementos lineares e o problema de autovalor foi resolvido usando a rotina `sptarn` do Matlab[®] (MathWorks 2011),

que usa o método de Arnoldi com transformação espectral para calcular autovalores em um intervalo pré-definido $[\lambda_1, \lambda_2]$ (Demmel 1997).

A curva de dispersão dos seis primeiros modos, calculados a partir da formulação FEM-DIV é mostrada na Figura 3.2. Os modos HE11, HE21 e HE31 são modos propagantes ao longo de toda a faixa de frequência estudada e, portanto, suas constantes de atenuação são nulas. O modo EH31 é evanescente até 16 GHz e, a partir dessa frequência, passa a ser propagante. O diagrama também mostra a onda complexa na faixa de 12 a 14,57 GHz, degenerando, a partir dessa frequência, nos modos EH21 e HE41. Os resultados mostrados aqui apresentam excelente concordância com os resultados apresentados por Fernandez (Fernandez et al. 1993).

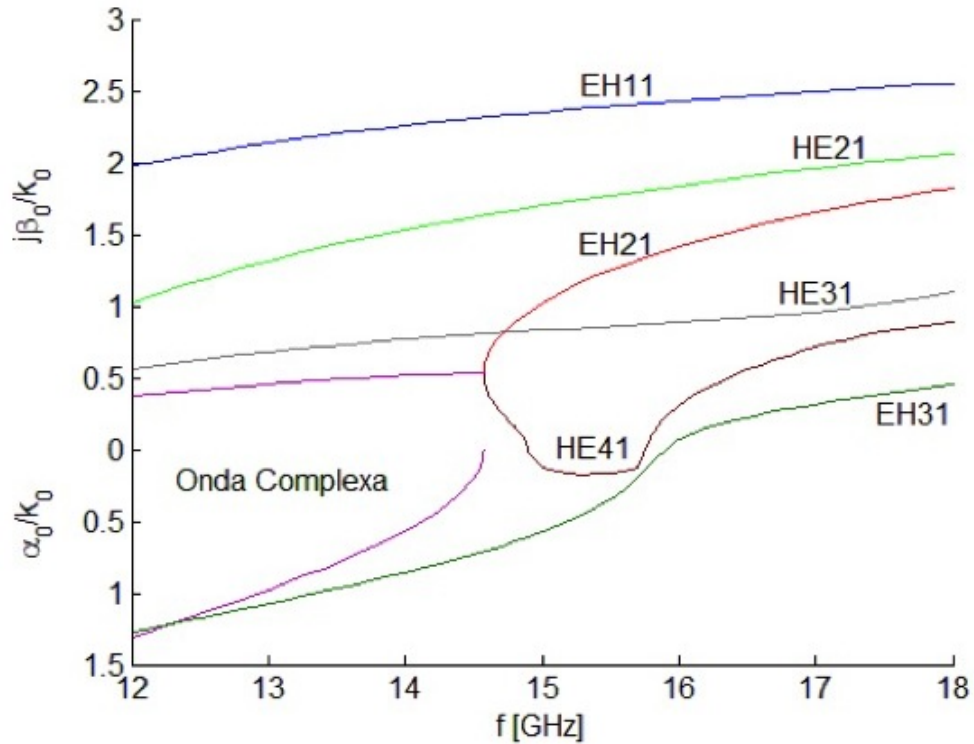


Figura 3.2: Guia de ondas blindado parcialmente preenchido com dielétrico de alto índice de refração.

As Figuras 3.3 e 3.4 mostram, respectivamente, as distribuições dos campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ dos modos EH11 e HE21 calculados em $f_0 = 13$ GHz. Tais campos foram calculados tanto através da formulação modal FEM convencional (Pelosi & Coccioli 1998) quanto pela formulação modal FEM-DIV e apresentam excelente concordância tanto na distribuição de campo quanto nos valores da constante de propagação efetiva – $\beta_{eff} = 2,1346$ para o modo EH11, e $\beta_{eff} = 1,3130$, para o modo HE21.

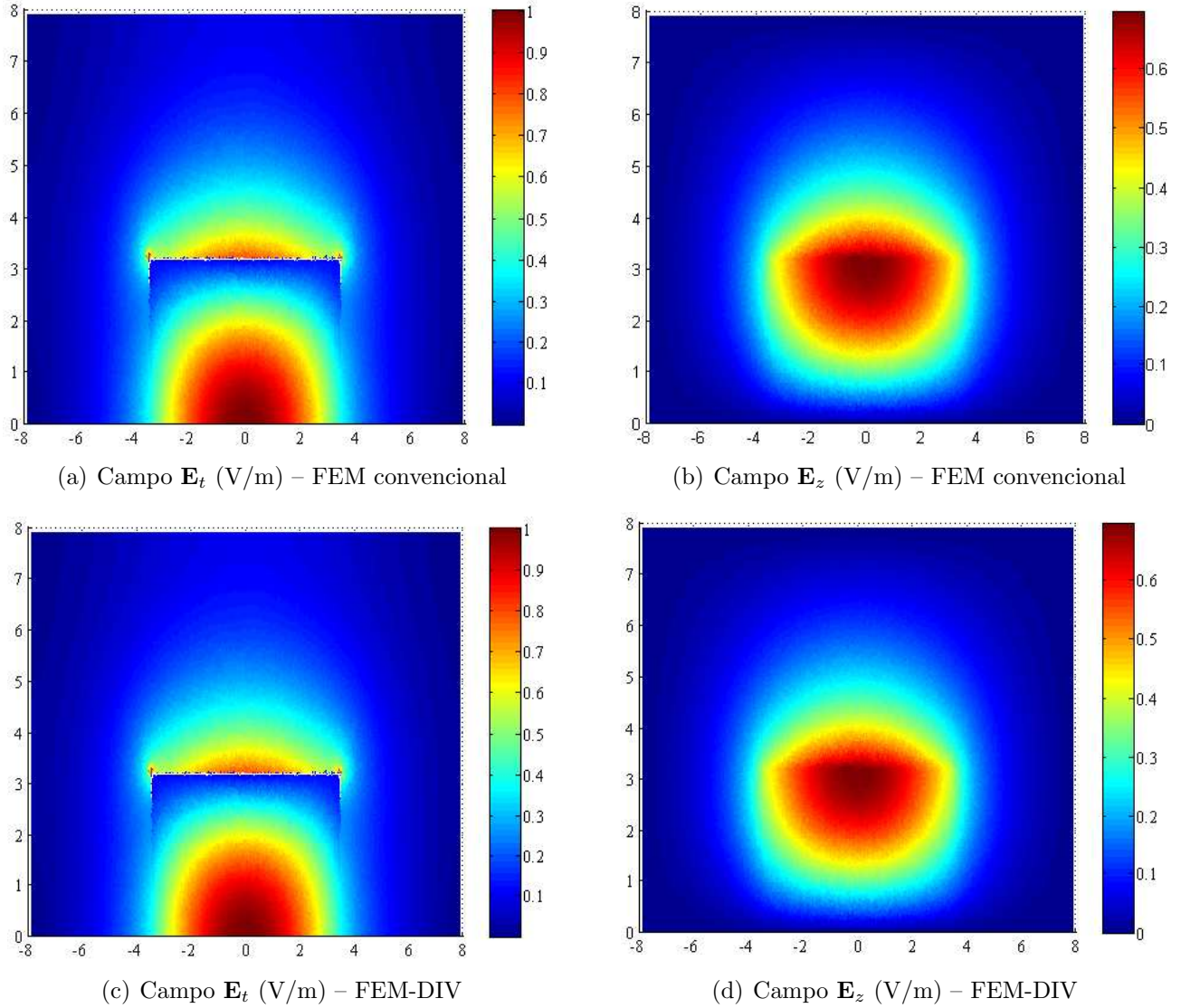


Figura 3.3: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal EH11 guiado pelo guia blindado da Figura 3.1 em $f_0 = 13$ GHz numa janela computacional de 16×16 mm. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV.

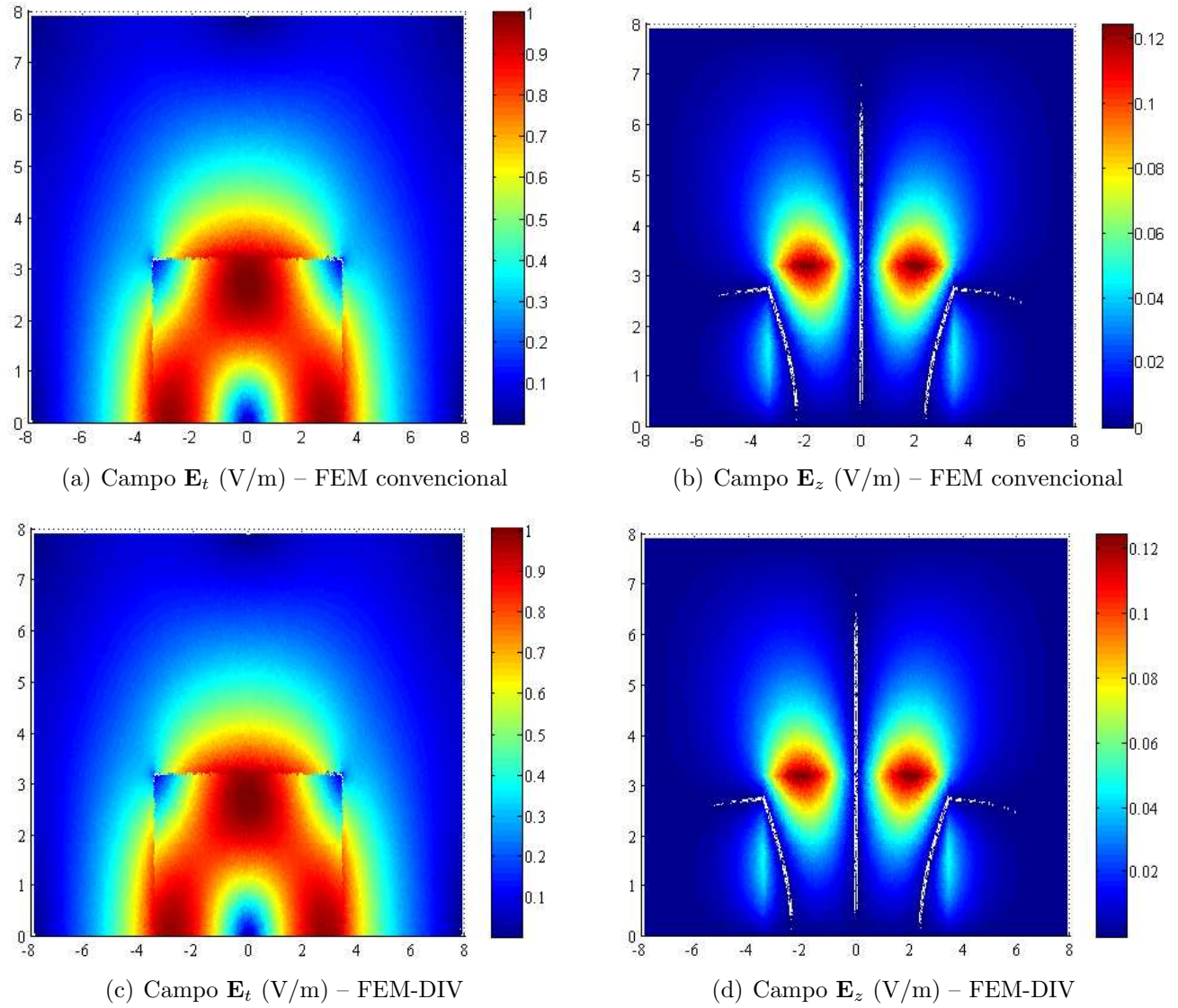


Figura 3.4: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal HE21 guiado pelo guia blindado da Figura 3.1 em $f_0 = 13$ GHz numa janela computacional de 16×16 mm. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$, calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$, calculados pelo FEM-DIV.

3.3 Guia Dielétrico de Alto Contraste

Considere o guia dielétrico de alto contraste cuja seção reta é mostrada na Figura 3.5, onde $W = 3,0\mu\text{m}$, $R = 2,9\mu\text{m}$, $D = 1,0\mu\text{m}$, $H = 1,0\mu\text{m}$, $G = 0,5\mu\text{m}$, $S = 2,0\mu\text{m}$ e $n_C = 1,0$, $n_G = 3,44$ e $n_S = 3,40$ (Hadley 2002).

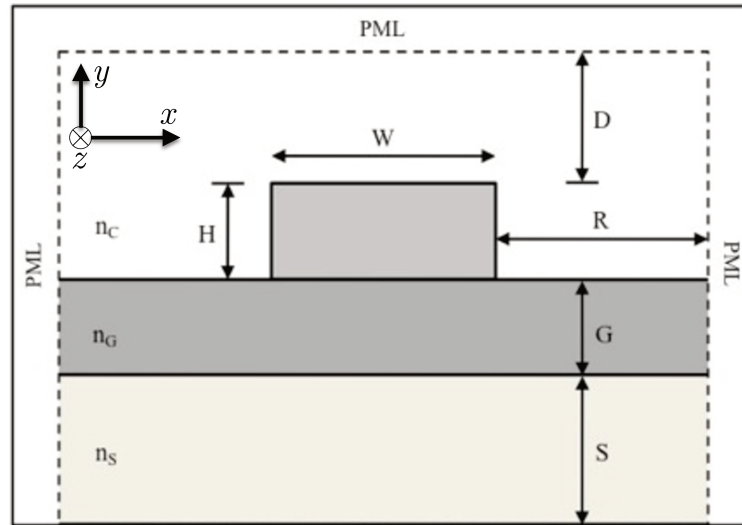


Figura 3.5: Guia óptico de alto contraste.

A janela computacional de $10 \times 5 \mu\text{m}$ foi discretizada com uma malha com 50.000 elementos lineares e o problema de autovalor foi resolvido usando a rotina *sptarn* do Matlab[®] (MathWorks 2011). A curva do índice de refração efetivo dos três primeiros modos de propagação versus comprimento de onda é mostrada na Figura 3.6.

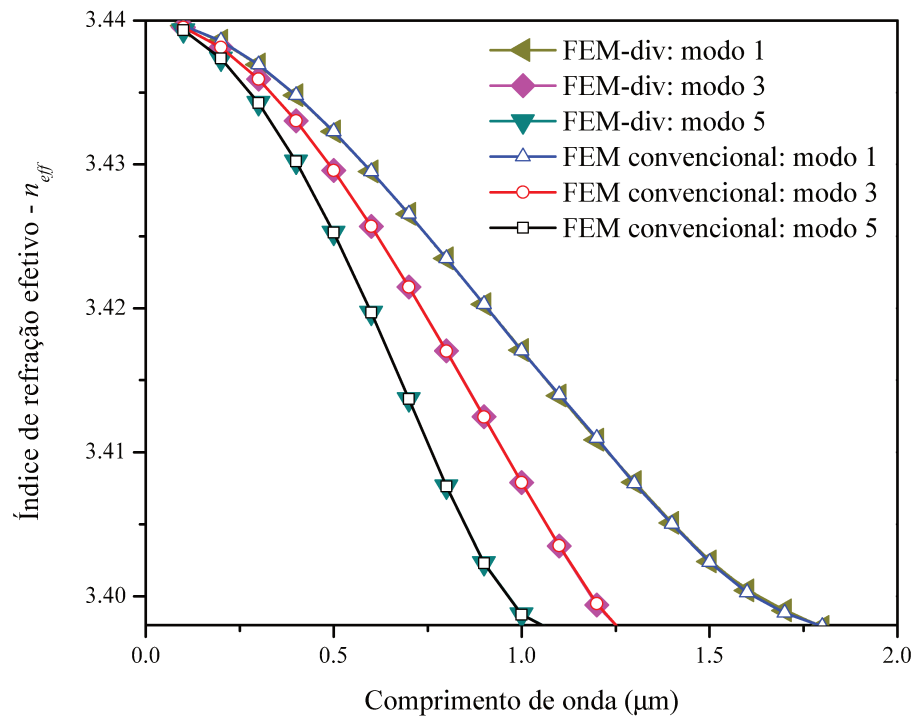


Figura 3.6: Curva de dispersão para os três primeiros modos de propagação do guia canal mostrado na Figura 3.5.

Os resultados calculados a partir dos códigos de elementos finitos usando as formulações FEM-DIV e o FEM convencional são comparados, mostrando excelente concordância entre si e

também com os resultados apresentados por Hadley (Hadley 2002).

As Figuras 3.7 à 3.9 mostram as distribuições dos campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ dos três primeiros modos quase-TE guiados pela estrutura mostrada na Figura 3.5, com índices de refração efetivos (n_{eff}) igual a 3,4270, 3,4221 e 3,4116, respectivamente. Tais campos foram calculados tanto pela análise modal FEM convencional quanto pela formulação modal FEM-DIV e, como pode ser observado, as componentes transversal e longitudinal dos campos apresentam excelente concordância entre si corroborando, uma vez mais, a eficiência da formulação proposta por Demkowicz.

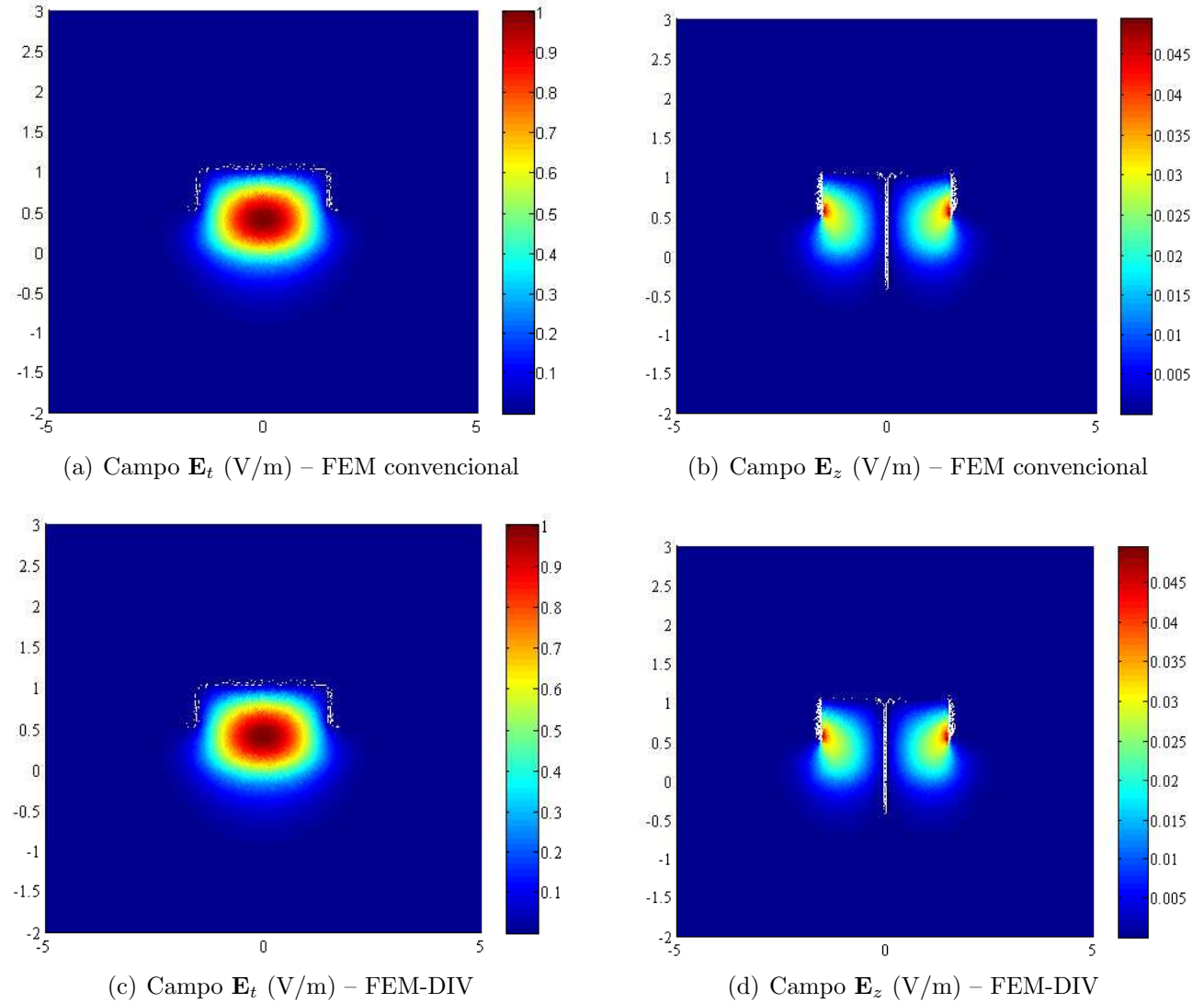


Figura 3.7: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal do modo fundamental quase-TE guiado pelo guia canal mostrado na Figura 3.5 em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$, com $n_{eff} = 3,4270$. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV.

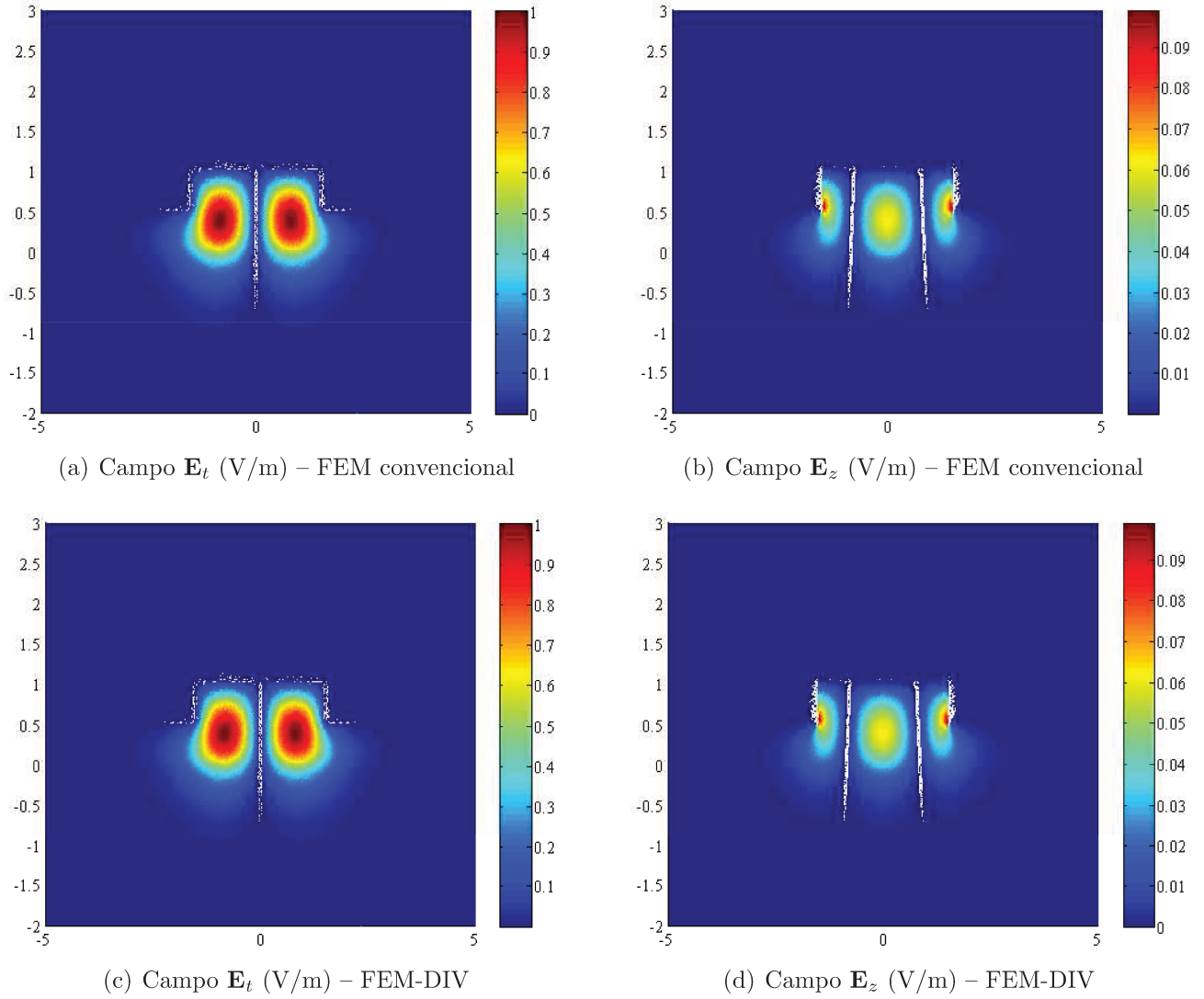


Figura 3.8: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal do segundo modo quase-TE guiado pelo guia canal mostrado na Figura 3.5 em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$, $n_{eff} = 3,4221$. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV.

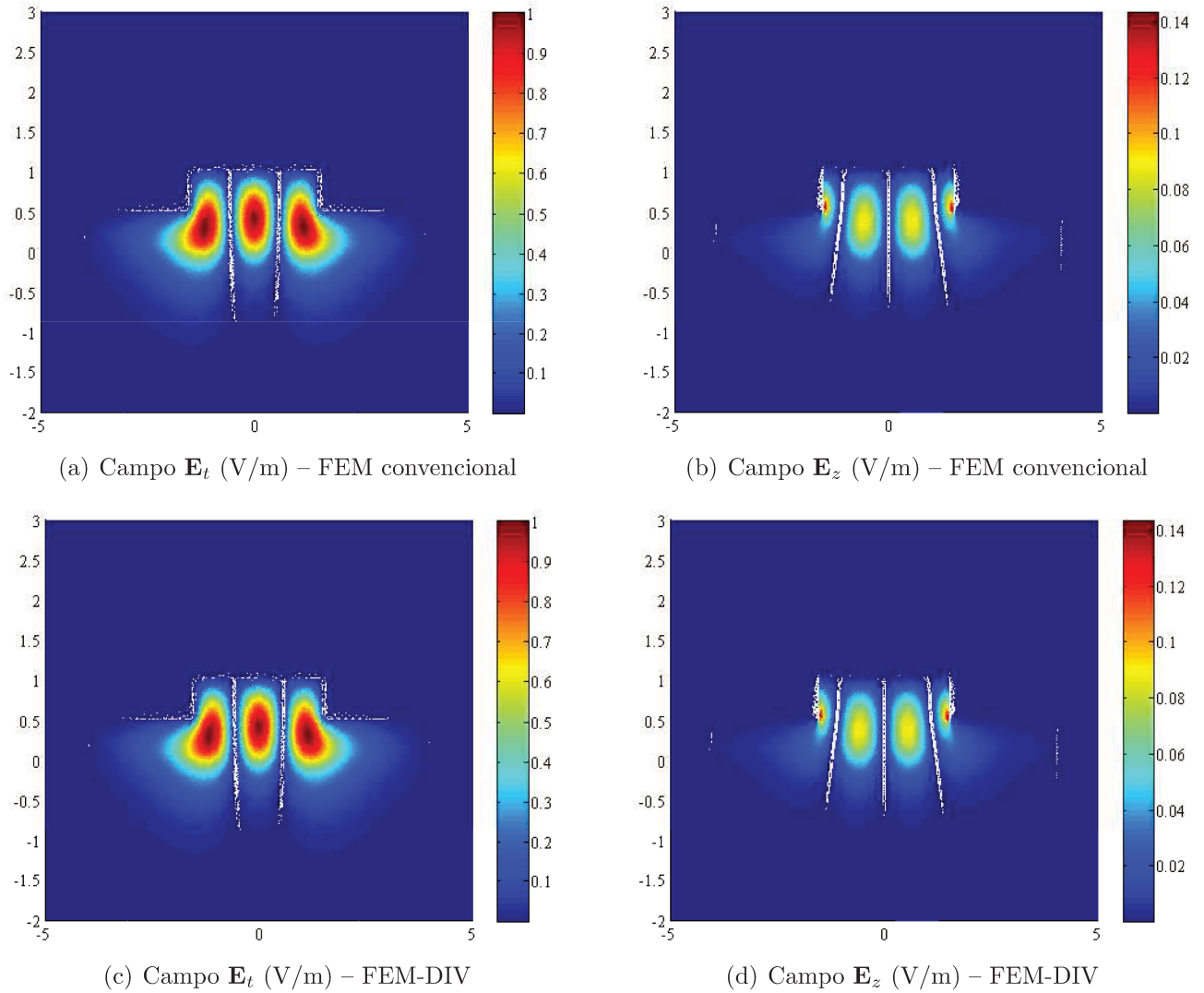


Figura 3.9: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal do terceiro modo quase TE guiado pelo guia canal mostrado na Figura 3.5 em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$, $n_{eff} = 3,4116$. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV.

3.4 Modos Espúrios

Uma vez testada a precisão da formulação modal FEM-DIV dos primeiros modos propagantes dos guias mostrados nas Figuras 3.1 e 3.5, investigou-se a presença dos modos espúrios no espectro de soluções de tais estruturas. Tal procedimento pedia um algoritmo que calculasse todas as soluções do sistema linear em questão e, para tanto, foi utilizada a rotina `eig` do Matlab[®], baseada na rotina `cdgeig` da biblioteca LAPACK, que resolve o sistema através de solução matricial permitindo o cálculo de todos os autovalores e autovetores possíveis do sistema. Como tal rotina trabalha com matrizes cheias, foi necessário utilizar matrizes menores e, conseqüentemente, malhas com resolução mais baixas. Por essa razão, algumas imagens mostradas a seguir apresentam resolução inferior às imagens mostradas nas figuras anteriores.

3.4.1 Guia Metálico Parcialmente Preenchido

Esse problema foi resolvido usando uma malha com 1110 elementos, resultando num sistema linear 2631×2631 . As formulações convencional e FEM-DIV1 apresentaram 632 modos espúrios no autovalor nulo, enquanto a formulação FEM-DIV2 apresentou o mesmo número de modos espúrios no autovalor infinito. A Figura 3.10 mostra a distribuição dos campos transversal e longitudinal de modos espúrios da estrutura mostrada na Figura 3.1 calculados na frequência de $f_0 = 13$ GHz, calculados pelos FEM convencional, FEM-DIV caso 1 e FEM-DIV caso 2. Os modos mostrados nas Figuras 3.10(a) – (c) apresentaram constantes de propagação $\gamma = 0$, enquanto os modos cujos campos são mostrados na Figura 3.10(d) apresentou constante de propagação $\gamma \rightarrow \infty$. Em todos os casos verificados, a componente longitudinal do campo elétrico resultou nula, como mostrado na Figura 3.10(b), enquanto as componentes transversais, independentemente da formulação, apresentaram distribuição de campo aleatória, não se assemelhando a nenhuma configuração de campo conhecida, como pode ser observado nas Figuras 3.10(a), (c) e (d).

A Figura 3.11 apresenta a distribuição das componentes transversais e longitudinais de modos espúrios calculados através das formulações FEM convencional – Figuras 3.11(a) e (b), FEM-DIV caso 1 – Figuras 3.11(c) e (d) e FEM-DIV caso 2 – Figuras 3.11(e) e (f), usando a mesma malha usada para o cálculo dos modos mostrados nas Figuras 3.3 e 3.4. Devido às dimensões do sistema matricial envolvido no cálculo, tais modos foram calculados através da rotina `sptarn` através do mapeamento local de alguns autovalores. Tal procedimento mostrou que os modos espúrios estão presentes no espectro de soluções do sistema de elementos finitos, independentemente do método de solução utilizado.

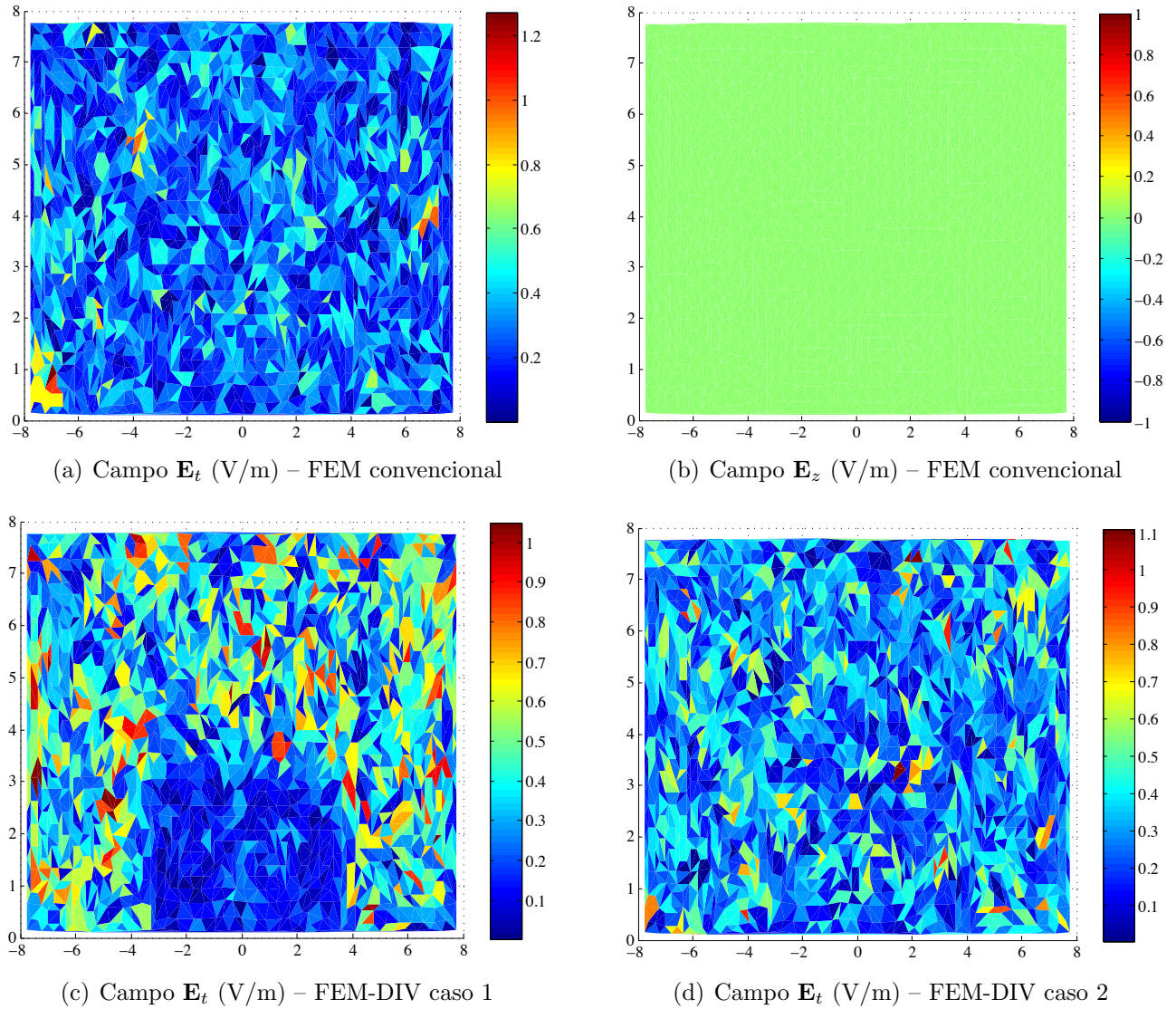


Figura 3.10: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal dos modos espúrios calculados em $f_0 = 13$ GHz numa janela computacional de 16×16 mm. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) Campo $\mathbf{E}_t$ calculado pelo FEM-DIV caso 1. (d) Campo $\mathbf{E}_t$ calculado pelo FEM-DIV caso 2.

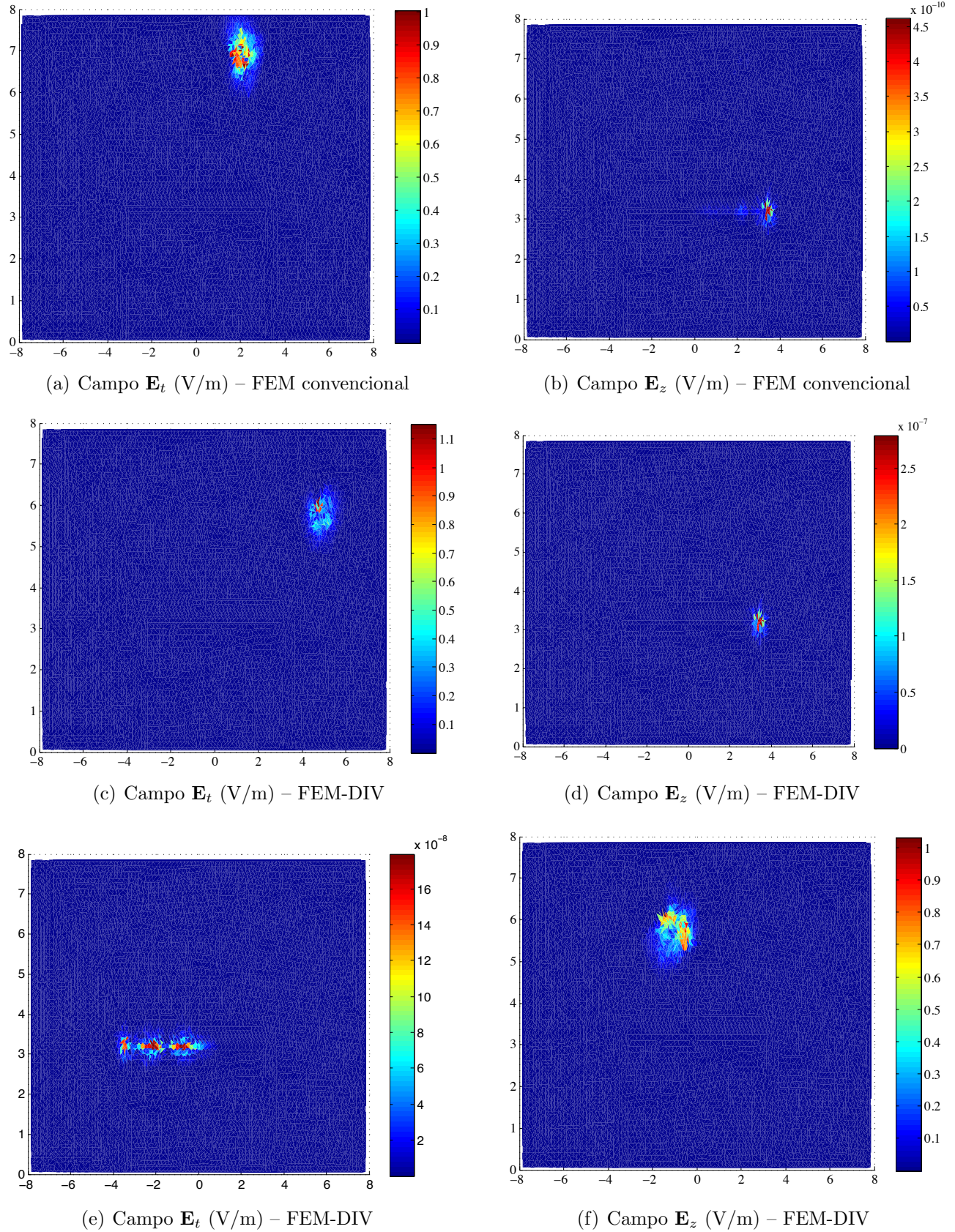


Figura 3.11: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal dos modos espúrios calculados em $f_0 = 13$ GHz numa janela computacional de 16×16 mm. (a) e (b) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM convencional. (c) e (d) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV caso 1. (e) e (f) Campos $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{E}_z$ calculados pelo FEM-DIV caso 2.

3.4.2 Guia Dielétrico de Alto Contraste

Para resolver esse problema a janela computacional de $10 \times 5 \mu\text{m}$ foi discretizada com 800 elementos, resultando num sistema linear 1412×1412 . As formulações convencional e FEM-DIV 1 apresentaram 331 modos espúrios no autovalor nulo, enquanto a formulação FEM-DIV 2 apresentou o mesmo número de modos espúrios no autovalor infinito. As Figuras 3.12, 3.13 e 3.14 apresentam as distribuições dos campos transversais e longitudinais de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 0,7 \mu\text{m}$ para as formulações convencional, FEM-DIV caso 1 e FEM-DIV caso 2, respectivamente. Assim como no problema anterior, as formulações FEM convencional e FEM-DIV caso 1 resultaram em constantes de propagação $\gamma = 0$, enquanto que o cálculo da constante de propagação através da formulação FEM-DIV caso 2 resultou em constantes de propagação $\gamma \rightarrow \infty$.

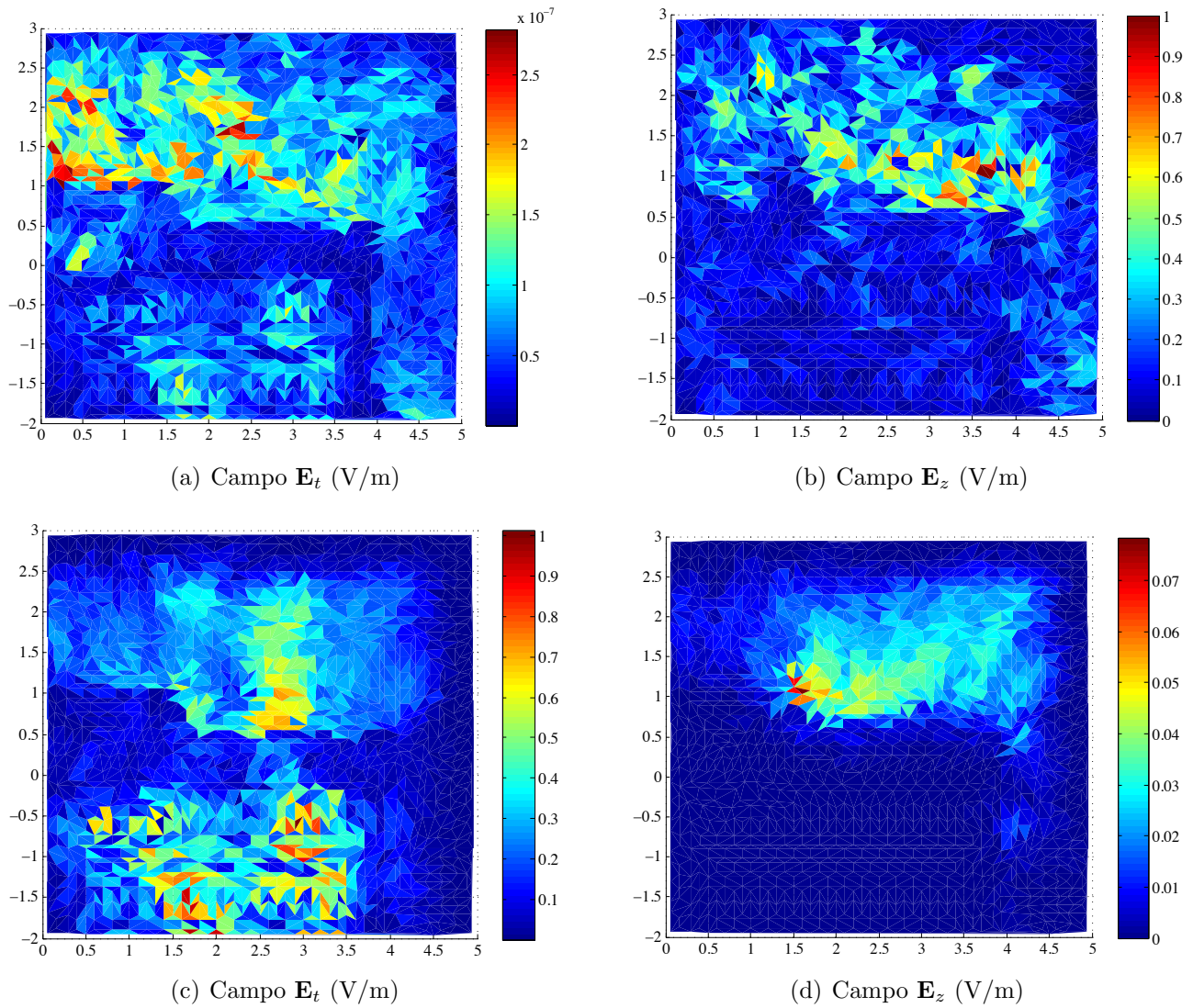


Figura 3.12: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 0,7 \mu\text{m}$ através do FEM convencional.

A exemplo do que foi observado no problema, anterior os modos espúrios investigados para o guia canal, mostrado na Figura 3.5, também apresentam distribuições de campo completamente aleatória, sem um padrão estabelecido. Observe que para o modo espúrio mostrado nas Figuras 3.12(a) e 3.12(b) o campo transversal é nulo enquanto o campo longitudinal possui amplitude local unitária. O oposto acontece no modo mostrado nas Figuras 3.12(c) e 3.12(d), onde o campo transversal é localmente unitária, enquanto o campo longitudinal é praticamente nulo. As Figuras 3.13 e 3.14 mostram a distribuição dos campos transversal e longitudinal calculados pelos FEM-DIV1 e FEM-DIV2, respectivamente.

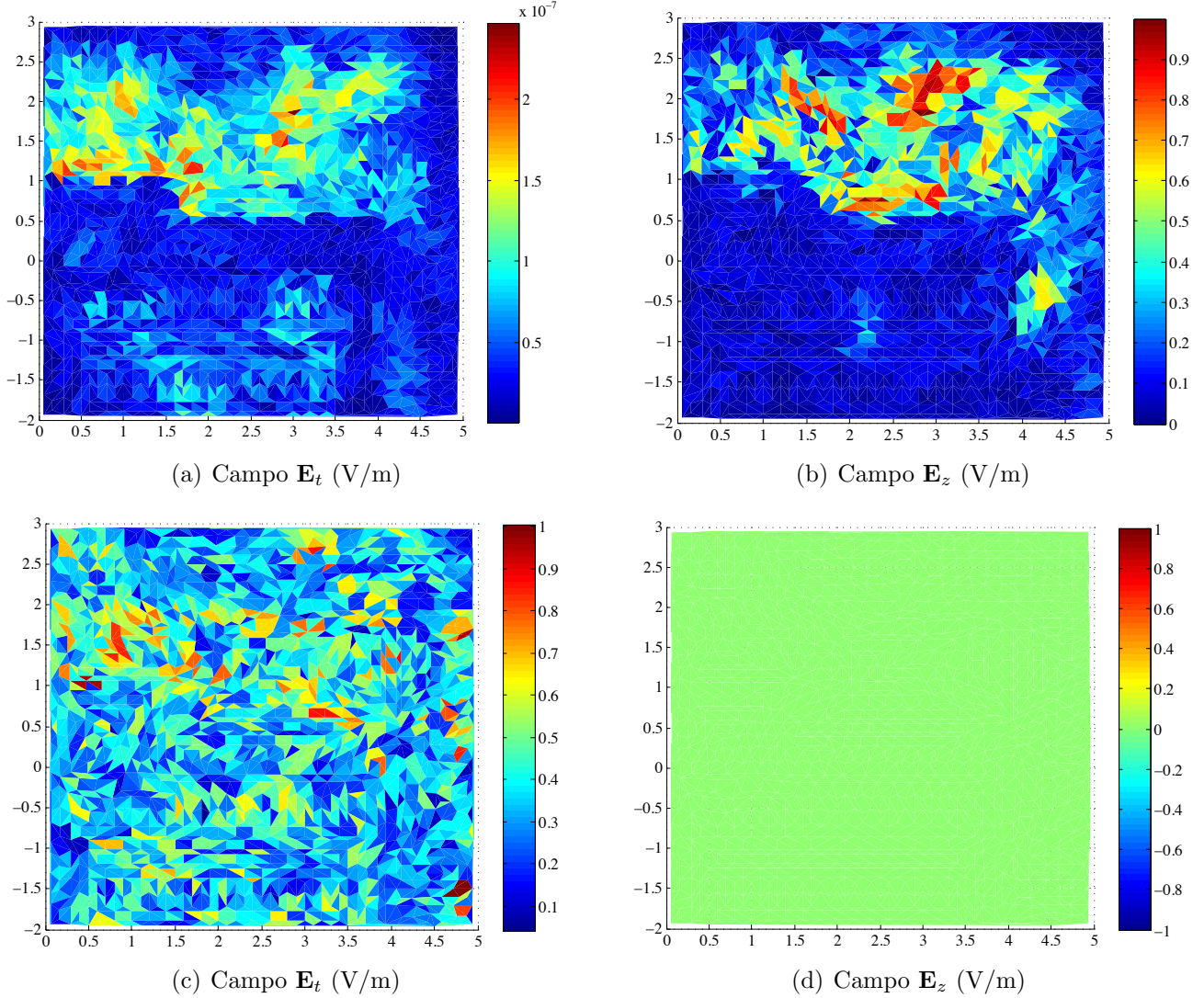


Figura 3.13: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$ através da formulação FEM-DIV caso 1.

Observe que tais campos, a exemplo dos campos mostrados na Figura 3.12, apresentam uma distribuição totalmente aleatória dos campos no interior do domínio.

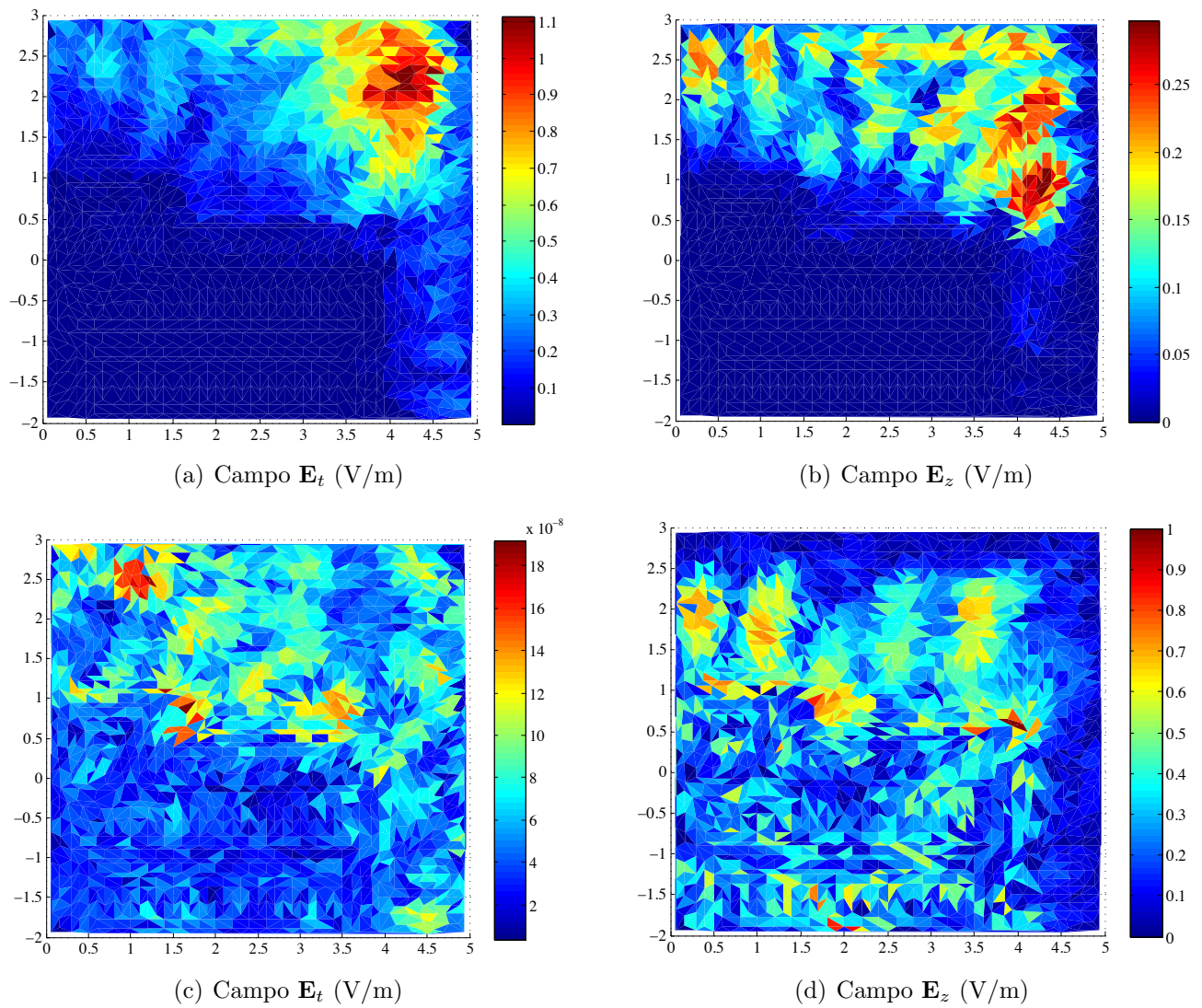


Figura 3.14: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 0,7\mu\text{m}$ através do FEM-DIV caso 2.

A Figura 3.15 mostra as distribuições dos campos transversais e longitudinais de modos espúrios calculados em $\lambda = 1,15\mu\text{m}$ para as formulações FEM convencional e FEM-DIV caso 1. Novamente são observadas distribuições de campo completamente aleatórias, fugindo ao padrão modal conhecido.

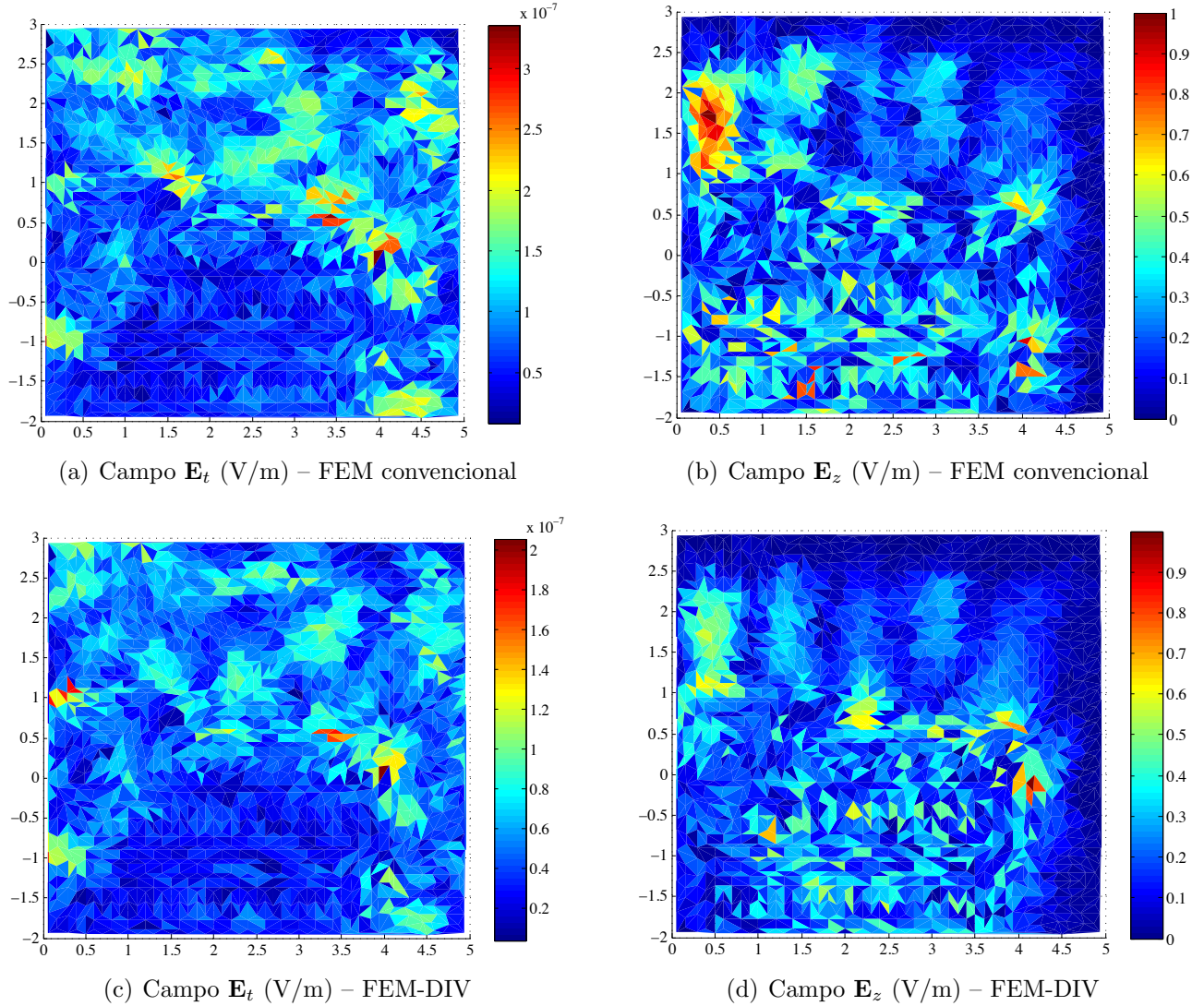


Figura 3.15: Distribuição dos campos elétricos transversal e longitudinal de modos espúrios calculados em $\lambda_0 = 1,15\mu\text{m}$ calculados através da formulação FEM convencional e FEM-DIV caso 1.

Importante observar que, matematicamente, o número de modos espúrios está diretamente relacionado com as características do sistema linear pois, sendo tais soluções combinações lineares das bases formadas pelas variáveis independentes do sistema linear, o número total de modos espúrios é exatamente igual ao número de variáveis independentes do sistema (Demmel 1997). Sendo assim, é possível estimar o número total de modos espúrios de determinado sistema através da análise das matrizes de elementos finitos, sendo tal número igual à diferença entre os postos das matrizes $\mathbb{M}$ e $\mathbb{P}$ para o caso 1 – equações (2.60a) e (2.60c), e das matrizes $\mathbb{M}$ e $\mathbb{P}$ para o caso 2 – equações (2.68a) e (2.68c).

3.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados resultados numéricos da formulação modal derivada no Capítulo 2. Pode-se observar que a formulação modal FEM-DIV mostra excelente precisão na modelagem de estruturas complexas nas faixas de micro-ondas e ópticas, apresentando-se como uma formulação alternativa à formulação modal convencional. Além disso, os testes computacionais corroboram a análise teórica apresentada no Capítulo 2, mostrando que modos espúrios fazem parte do espectro de soluções do problema de autovalores independente da formulação, tipo ou número de elementos utilizados na malha de elementos finitos. Convém ressaltar que o número de modos espúrios contido no espectro modal não é aleatório, pois sendo os modos espúrios combinações lineares das soluções não triviais do sistema, o número de modos não-físicos é igual ao número de variáveis independentes do sistema.

Capítulo 4

Método da Propagação por Feixe

4.1 Introdução

Uma vez que a formulação proposta por Demkowicz (Vardapetyan & Demkowicz 2002), a exemplo da formulação modal convencional (Lee et al. 1991), não elimina os modos espúrios do espectro de soluções cumpre, então, investigar os efeitos que tais soluções não-físicas possam ter sobre um processo dinâmico de propagação. Assim, partindo dessa proposta, o esquema de propagação por feixes (*Beam Propagation Method* – BPM) foi o processo dinâmico escolhido.

O esquema de propagação por feixes (BPM) é uma ferramenta numérica usada para estudar a propagação de ondas eletromagnéticas em dispositivos longos, quando comparados ao comprimento de onda de operação, e com variação longitudinal suave do índice de refração. A ideia básica é representar os campos eletromagnéticos como uma superposição de ondas planas, cada qual se propagando em diferentes direções. O método basicamente constrói uma relação entre os campos eletromagnéticos em dois planos paralelos adjacentes, onde a distribuição de campo em um determinado plano ($z + h$) é calculada numericamente a partir da distribuição dos campos no plano anterior z , como ilustra a Figura 4.1. Este procedimento é implementado recursivamente, permitindo calcular, passo-a-passo, a propagação da onda eletromagnética em uma direção arbitrária qualquer.

Este capítulo apresenta a análise detalhada do método de propagação por feixe usando duas abordagens distintas: a abordagem convencional, aqui denominada BPM convencional ou apenas BPM, que usa as componentes transversal e longitudinal da equação vetorial de onda; e uma abordagem alternativa, onde a componente longitudinal da equação de onda é substituída pela equação de Gauss e que será referida como BPM-DIV. Adicionalmente, como um dos objetivos desse trabalho é investigar possíveis soluções crescentes ao longo da direção de propagação, o capítulo apresenta uma análise de estabilidade para as formulações BPM e BPM-DIV.

4.2 Método da Propagação por Feixe

4.2.1 BPM Convencional

Considere o guia de ondas cuja seção reta é mostrado na Figura 4.2, onde k é assumida como sendo a direção de propagação e i e j são as direções transversais à direção de propagação.

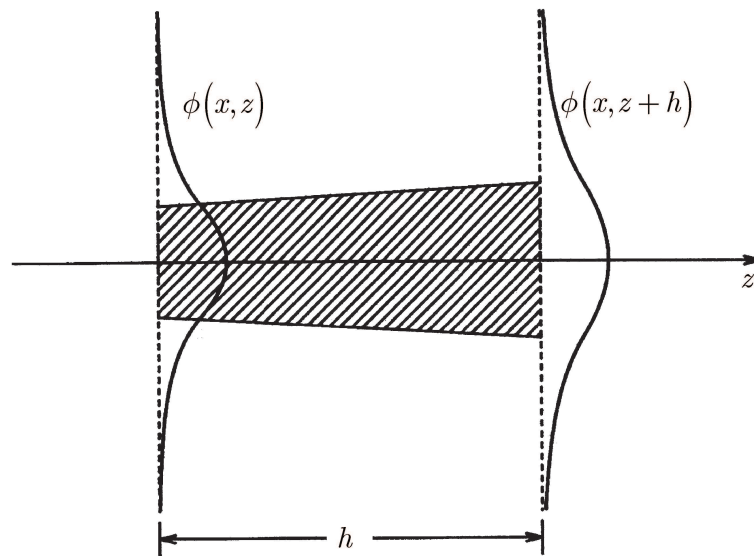


Figura 4.1: Distribuição de campo calculada no plano $(z+h)$ a partir da distribuição em z .

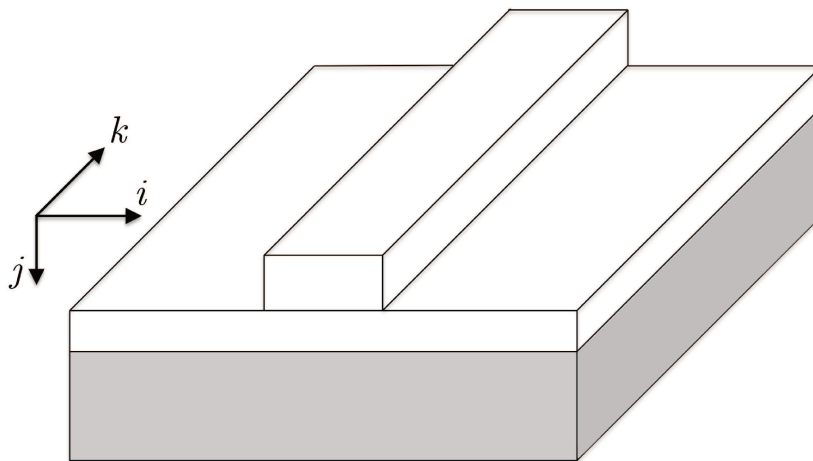


Figura 4.2: Guia de ondas dielétrico.

Tomando a equação vetorial de onda decomposta em suas componentes transversal e longitudinal, conforme demonstrado na Seção 2.3.3 e orientando o sistema de coordenadas segundo a relação (2.1a),

$$(i, j, k) = (x, y, z), \quad (4.1)$$

as equações que governam a propagação ao longo do guia de ondas podem ser expressas no sistema de coordenadas cartesiano como

$$0 = \nabla_t \times \zeta_{zz} \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \zeta'_{yx} \times \nabla_z \times \mathbf{A}_t + \nabla_z \times \xi'_{xy} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \nabla_z \times \bar{\bar{\zeta}}'_t \nabla_z \times \mathbf{A}_t - \kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \zeta'_{yx} \times \nabla_T \times \mathbf{A}_z + \nabla_z \times \bar{\bar{\zeta}}_T \nabla_t \times \mathbf{A}_z - \kappa_0^2 \xi_{xy} \hat{z} \cdot \mathbf{A}_z, \quad (4.2a)$$

$$0 = \nabla_t \times \zeta'_{xy} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t - \kappa_0^2 \hat{z} \xi_{yx} \cdot \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_z \times \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}_t \nabla_t \times \mathbf{A}_z - \kappa_0^2 \xi_{zz} \mathbf{A}_z. \quad (4.2b)$$

Na equação (4.2) os tensores ξ_{xy} , ξ_{yx} , ζ'_{xy} , ζ'_{yx} e $\bar{\bar{\zeta}}'_t$ são definidos, respectivamente, em (2.12), (2.19) e (2.55), segundo a orientação adotada em (4.1), e $(\mathbf{A}_t, \mathbf{A}_z)$ representam, respectivamente, os campos elétricos $(\mathbf{E}_t, \mathbf{E}_z)$ ou os campos magnéticos $(\mathbf{H}_t, \mathbf{H}_z)$.

Conforme observado na análise realizada nos capítulos anteriores, a presença dos modos espúrios no espectro de soluções é um fenômeno intrínseco à técnica numérica e independe do meio em questão. Sendo assim, para efeito da análise que será realizada nesse capítulo, o meio material será assumido magnética e eletricamente isotrópico ou possuindo apenas anisotropia uniaxial e, portanto, $\zeta'_{xy} = \zeta'_{yx} = \xi_{xy} = \xi_{yx} = 0$. Assim, fazendo uso das identidades vetoriais,

$$\nabla_k \times \bar{\bar{\zeta}}'_t \nabla_z \times \mathbf{A}_t = \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{A}_t, \quad (4.3a)$$

$$\nabla_z \times \bar{\bar{\zeta}}'_t \nabla_t \times \mathbf{A}_z = -\bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t A_z, \quad (4.3b)$$

$$\nabla_z \times \mathbf{A}_t = \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}_t, \quad (4.3c)$$

$$\nabla_T \times \mathbf{A}_z = -\hat{z} \times \nabla_t A_z, \quad (4.3d)$$

a equação (4.2) pode ser reescrita em termos de suas derivadas de primeira e segunda ordens em relação à direção z , como

$$\nabla_t \times \zeta_{zz} \nabla_t \times \mathbf{A}_t - \kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \mathbf{A}_t + \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{A}_t - \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t A_z = 0, \quad (4.4a)$$

$$\nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}_t - \nabla_t \times \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \hat{z} \times \nabla_t A_z - \kappa_0^2 \xi_{zz} \mathbf{A}_z = 0, \quad (4.4b)$$

onde as equações (4.4a) e (4.4b) são, respectivamente, as componentes transversal e longitudinal da equação vetorial de onda.

A seção transversal do guia de ondas será discretizada usando uma base de elementos finitos híbridos (Jin 2002), tal que,

$$\mathbf{A}_t = \sum_{e=1}^M \mathbf{A}_t^e, \quad (4.5a)$$

$$A_z = \sum_{e=1}^M A_z^e, \quad (4.5b)$$

onde $\mathbf{A}_t^e$ e A_z^e são definidos sobre o domínio Ω^e do e -ésimo elemento finito, a partir da combinação linear,

$$\mathbf{A}_t^e = \sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k^e \phi_{t_k}^e = \{\phi_t^e\}^T \{\mathbf{N}^e\} = \{\mathbf{N}^e\}^T \{\phi_t^e\}, \quad (4.6a)$$

$$A_z^e = j \sum_{k=1}^n L_k^e \phi_{z_k}^e = j \{\phi_z^e\}^T \{L^e\} = j \{L^e\}^T \{\phi_z^e\}, \quad (4.6b)$$

sendo, $j = \sqrt{-1}$, n o número de nós e arestas do e -ésimo elemento, $\mathbf{N}_k^e$ e L_k^e funções de forma, vetoriais e escalares, respectivamente, definidas sobre Ω^e , e $\{\phi_t^e\}$ e $\{\phi_z^e\}$ incógnitas a serem determinadas, funções apenas da coordenada z . Da mesma maneira, as funções-peso são definidas no e -ésimo elemento de forma que

$$\mathbf{F}_t^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i^e, \quad (4.7a)$$

$$F_z^e = j \sum_{i=1}^n L_i^e. \quad (4.7b)$$

Substituindo (4.5) - (4.7) em (4.4) obtém-se o seguinte sistema matricial,

$$\mathbf{M}_{tt} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi_t\} + j \mathbf{L}_{tz} \frac{d}{dz} \{\phi_z\} + \mathbf{K}_{tt} \{\phi_t\} = 0, \quad (4.8a)$$

$$j \mathbf{L}_{zt} \frac{d}{dz} \{\phi_t\} + \mathbf{K}_{zz} \{\phi_z\} = 0, \quad (4.8b)$$

onde

$$\mathbf{M}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \bar{\bar{\zeta}}_t'^e \cdot \mathbf{N}_k^e d\Omega, \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{L}_{tz} = - \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \bar{\bar{\zeta}}_t'^e \cdot \nabla_t L_k^e d\Omega, \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{K}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[\zeta_{zz}^e \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_i^e \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_k^e \right) - \kappa_0^2 \mathbf{N}_i^e \cdot \bar{\bar{\zeta}}_t'^e \cdot \mathbf{N}_k^e \right] d\Omega, \quad (4.9c)$$

$$\mathbf{L}_{zt} = - \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \nabla_t L_i^e \cdot \bar{\bar{\zeta}}_t'^e \cdot \mathbf{N}_k^e d\Omega, \quad (4.9d)$$

$$\mathbf{K}_{zz} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[- \nabla_t L_i^e \cdot \bar{\bar{\zeta}}_t'^e \cdot \nabla_t L_k^e d\Omega + \kappa_0^2 \zeta_{zz}^e L_i^e L_k^e \right] d\Omega. \quad (4.9e)$$

Aplicando uma transformação à componente longitudinal do campo (Schultz et al. 1998), tal que

$$\phi_z(z) = j \frac{d}{dz} \phi'_z(z), \quad (4.10)$$

o sistema (4.8) pode ser escrito como,

$$\mathbf{M}_{tt} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi_t\} - \mathbf{L}_{tz} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi'_z\} + \mathbf{K}_{tt} \{\phi_t\} = 0, \quad (4.11a)$$

$$j \mathbf{L}_{zt} \frac{d}{dz} \{\phi_t\} + j \mathbf{K}_{zz} \frac{d}{dz} \{\phi'_z\} = 0. \quad (4.11b)$$

Considerando que $\{\phi_t\}$ e $\{\phi_z\}$ são funções apenas da variáveis longitudinal z , sob a forma

$$\phi_t(z) = \phi_t(z) \exp(-\gamma z), \quad (4.12a)$$

$$\phi'_z(z) = \phi'_z(z) \exp(-\gamma z), \quad (4.12b)$$

o sistema (4.11) pode, então, ser reescrito como:

$$\mathbb{A} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi\} - 2\gamma \mathbb{A} \frac{d}{dz} \{\phi\} + \left[\mathbb{Q} + \gamma^2 \mathbb{A} \right] \{\phi\} = 0, \quad (4.13)$$

onde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & -\mathbf{L}_{tz} \\ -\mathbf{L}_{zt} & -\mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.14a)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.14b)$$

$$\{\phi\} = [\{\phi_t\} \quad \{\phi'_z\}]^T. \quad (4.14c)$$

A fim de deduzir uma expressão para a equação de BPM de ângulo largo, a equação (4.13) deve ser reescrita sob a forma:

$$-2\gamma\mathbb{A}\frac{d}{dz}\{\phi\}\left[1 - \frac{1}{2\gamma}\frac{d}{dz}\right] = -\left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right)\{\phi\}. \quad (4.15)$$

Usando a relação de recorrência de Padé (Hadley 1993) e substituindo a primeira derivada em relação a z , entre cochete na equação (4.15), por

$$\frac{d}{dz} \cong \frac{\mathbb{A}^{-1}}{2\gamma} \left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right), \quad (4.16)$$

a seguinte equação de Padé pode ser obtida:

$$-2\gamma\left[\mathbb{A} - \frac{1}{4\gamma^2}\left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right)\right]\frac{d}{dz}\{\phi\} = -\left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right)\{\phi\}. \quad (4.17)$$

A equação diferencial de primeira ordem em relação à variável z , apresentada em (4.17), é conhecida como a equação de BPM de ângulo largo e pode ser escrita de forma compacta como

$$\mathbb{M}\frac{d}{dz}\{\phi\} + \mathbb{K}\{\phi\} = 0, \quad (4.18)$$

onde,

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}, \quad (4.19a)$$

$$\mathbb{M} = -2\gamma\left[\mathbb{A} - \frac{1}{4\gamma^2}\left(\mathbb{K}_{tt} + \gamma^2\mathbb{A}\right)\right]. \quad (4.19b)$$

A aproximação paraxial, aproximação considerando $\partial z^2/\partial z^2 = 0$, pode ser deduzida diretamente da equação (4.18), fazendo

$$\mathbb{M} = -2\gamma\mathbb{A}. \quad (4.20)$$

4.2.2 BPM-DIV

Nessa seção será derivado um BPM alternativo usando a equação de Gauss, juntamente com a componente transversal da equação de onda. Tal equacionamento será desenvolvido de maneira análoga àquele apresentado na seção anterior, sendo a componente longitudinal da equação vetorial de onda substituída pela equação do divergente nulo.

Partindo da equação (2.32), e tomando os termos referentes à componente transversal da equação vetorial de onda – equações (2.34a) e (2.34b), e os termos referentes à equação de Gauss – equações (2.34e) e (2.34f), o sistema de equações que governa a propagação da onda pode ser escrito usando a relação (2.1a), como:

$$0 = \nabla_t \times \zeta_{zz} \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \zeta'_{yx} \times \nabla_z \times \mathbf{A}_t + \nabla_z \times \xi'_{xy} \times \nabla_t \times \mathbf{A}_t + \nabla_z \times \bar{\bar{\zeta}}'_t \nabla_z \times \mathbf{A}_t - \kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \mathbf{A}_t + \nabla_t \times \zeta'_{yx} \times \nabla_T \times \mathbf{A}_z + \nabla_z \times \bar{\bar{\zeta}}_T \nabla_t \times \mathbf{A}_z - \kappa_0^2 \xi_{xy} \hat{z} \cdot \mathbf{A}_z, \quad (4.21a)$$

$$0 = \nabla_t \cdot (\bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t) + \nabla_k \cdot (\hat{k} \xi_{yx} \cdot \mathbf{A}_t) + \nabla_t \cdot (\xi_{xy} \hat{k} \cdot \mathbf{A}_z) + \nabla_z \cdot (\xi_{zz} \mathbf{A}_z). \quad (4.21b)$$

Assumido um meio magnético e eletricamente isotrópico ou com anisotropia uniaxial, tal que $\zeta'_{xy} = \zeta'_{yx} = \xi_{xy} = \xi_{yx} = 0$, e usando as identidades vetoriais (4.3), a equação (4.21) pode ser escrita como:

$$\nabla_t \times \zeta_{zz} \nabla_t \times \mathbf{A}_t - \kappa_0^2 \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \mathbf{A}_t + \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{A}_t - \bar{\bar{\zeta}}'_t \cdot \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t \mathbf{A}_z = 0, \quad (4.22a)$$

$$\nabla_t \cdot \bar{\bar{\xi}}_t \cdot \mathbf{A}_t + \xi_{zz} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{A}_z = 0. \quad (4.22b)$$

Discretizando a seção transversal do guia de ondas usando uma base de elementos finitos híbridos, usando (4.5) – (4.7), o sistema de equações (4.22) pode ser reescrito na forma integral como,

$$\mathbf{M}_{tt} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi_t\} + j \mathbf{L}_{tz} \frac{d}{dz} \{\phi_z\} + \mathbf{K}_{tt} \{\phi_t\} = 0, \quad (4.23a)$$

$$j \mathbf{L}_{zt} \{\phi_t\} + \mathbf{K}_{zz} \frac{d}{dz} \{\phi_z\} = 0, \quad (4.23b)$$

onde

$$\mathbf{M}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \bar{\zeta}_t'^e \cdot \mathbf{N}_k^e d\Omega, \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{L}_{tz} = - \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \bar{\zeta}_t'^e \cdot \nabla_t L_k^e d\Omega, \quad (4.24b)$$

$$\mathbf{K}_{tt} = \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \left[\zeta_{zz}^e \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_i^e \right) \cdot \left(\nabla_t \times \mathbf{N}_k^e \right) - \kappa_0^2 \mathbf{N}_i^e \cdot \bar{\xi}_t^e \cdot \mathbf{N}_k^e \right] d\Omega, \quad (4.24c)$$

$$\mathbf{L}_{zt} = - \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \nabla_t L_i^e \cdot \bar{\xi}_t^e \cdot \mathbf{N}_k^e d\Omega, \quad (4.24d)$$

$$\mathbf{M}_{zz} = - \sum_{e=1}^M \int_{\Omega^e} \xi_{zz} L_i^e L_k^e d\Omega. \quad (4.24e)$$

Aplicando a transformação (4.10) à componente longitudinal do campo ϕ (Schultz et al. 1998), tem-se o seguinte sistema de equações,

$$\mathbf{M}_{tt} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi_t\} - \mathbf{L}_{tz} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi_z\} + \mathbf{K}_{tt} \{\phi_t\} = 0, \quad (4.25a)$$

$$-\mathbf{L}_{zt} \{\phi_t\} - \mathbf{K}_{zz} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi_z\} = 0. \quad (4.25b)$$

Assumindo que $\{\phi_t\}$ e $\{\phi_z\}$ são funções apenas da variável longitudinal z , na forma

$$\phi_t(z) = \phi_t(z) \exp(-\gamma z), \quad (4.26a)$$

$$\phi_z'(z) = \phi_z'(z) \exp(-\gamma z), \quad (4.26b)$$

o sistema (4.25) pode, após algumas manipulações algébricas, ser escrito de forma compacta como:

$$\mathbb{A} \frac{d^2}{dz^2} \{\phi\} - 2\gamma \mathbb{A} \frac{d}{dz} \{\phi\} + \left[\mathbb{Q} + \gamma^2 \mathbb{A} \right] \{\phi\} = 0, \quad (4.27)$$

onde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & -\mathbf{L}_{tz} \\ 0 & -\mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.28a)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & 0 \\ -\mathbf{L}_{zt} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.28b)$$

$$\{\phi\} = \begin{bmatrix} \{\phi_t\} & \{\phi_z\}' \end{bmatrix}^T. \quad (4.28c)$$

A fim de deduzir para a equação alternativa de BPM de ângulo largo, a equação (4.27) pode ser rearranjada, tal que:

$$-2\gamma\mathbb{A}\frac{d}{dz}\{\phi\}\left[1 - \frac{1}{2\gamma}\frac{d}{dz}\right] = -\left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right)\{\phi\}. \quad (4.29)$$

Usando a relação de recorrência de Padé (Hadley 1993) e substituindo a primeira derivada em relação a z , entre cochetes, em (4.29) por

$$\frac{d}{dz} \cong \frac{\mathbb{A}^{-1}}{2\gamma} \left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right), \quad (4.30)$$

a seguinte equação de Padé é obtida:

$$-2\gamma\left[\mathbb{A} - \frac{1}{4\gamma^2}\left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right)\right]\frac{d}{dz}\{\phi\} = -\left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right)\{\phi\}. \quad (4.31)$$

A equação (4.31) é a versão alternativa à equação BPM convencional de ângulo largo, mostrada na equação (4.17), e pode ser escrita de forma compacta como .

$$\mathbb{M}\frac{d}{dz}\{\phi\} + \mathbb{K}\{\phi\} = 0, \quad (4.32)$$

onde,

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}, \quad (4.33a)$$

$$\mathbb{M} = -2\gamma\left[\mathbb{A} - \frac{1}{4\gamma^2}\left(\mathbb{Q} + \gamma^2\mathbb{A}\right)\right]. \quad (4.33b)$$

A equação de primeira derivada em relação à variável z , apresentada em (4.32), descreve o esquema de propagação por feixe usando a equação do divergente nulo em substituição à componente longitudinal da equação de onda, e por usar a equação de recorrência de Padé, será denominada *equação de BPM-DIV de ângulo largo*.

A aproximação paraxial, aproximação que considera $\partial z^2/\partial z^2 = 0$, pode ser derivada diretamente da equação (4.32), fazendo

$$\mathbb{M} = -2\gamma\mathbb{A}. \quad (4.34)$$

As equações (4.33) e (4.34) se apresentam como novos esquemas de propagação por feixe, alternativo ao BPM convencional, usando a equação do divergente nulo em substituição à componente longitudinal da equação de onda.

4.3 Análise da Solução Crescente ao longo da Direção z

A análise de estabilidade apresentada nessa seção baseia-se na proposta do surgimento de uma solução crescente ao longo da direção de propagação z devido à presença de modos não-físicos com autovalor nulo no espectro modal do sinal lançado em $z = 0$. Para tanto, será considerada uma solução crescente ao longo de z , função dos autovalores γ_i e autovetores $\{\phi\}_i$ presentes na formulação modal convencional (Pelosi & Coccioli 1998) e na formulação modal FEM-DIV apresentada no Capítulo 2 desta tese.

Considere, por hipótese, um campo $\bar{\phi}$, tal que

$$\bar{\phi} = \{\phi\} \exp(-\gamma_i z), \quad (4.35a)$$

$$\bar{\phi} = (1 + z)\{\phi\}_i, \quad (4.35b)$$

onde γ_i e $\{\phi\}_i$ são, respectivamente, autovalor e autovetor contidos no espectro de solução modal e $\{\phi\}$ é a solução da equação de BPM. Combinando as equações (4.35) a solução geral do esquema BPM, crescente ao longo da direção z , pode ser escrita como

$$\{\phi\} = (1 + z)\{\phi\}_i \exp(\gamma_i z). \quad (4.36)$$

4.3.1 BPM Convencional

Considere a solução geral apresentada pela equação (4.36), onde $\{\phi\}_i$ e γ_i são os respectivos autovetores e autovalores contidos no espectro modal associado ao BPM convencional. Fazendo $\partial/\partial z = 0$ na equação (4.18), o espectro modal associado ao BPM convencional pode ser escrito como

$$\gamma^2 \mathbb{A} \{\phi\} = -\mathbb{Q} \{\phi\}, \quad (4.37)$$

onde,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & -\mathbf{L}_{tz} \\ -\mathbf{L}_{zt} & -\mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.38a)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.38b)$$

Seja a solução crescente ao longo da direção de propagação aplicada à equação de Padé. Assim, substituindo (4.36) em (4.18), tem-se a equação matricial:

$$\left[\mathbb{M} + \left(\gamma_i \mathbb{M} + \mathbb{K} \right) (1 + z) \right] \{\phi\}_i = 0, \quad (4.39)$$

onde as matrizes $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$ são definidas em (4.19), tal que

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \gamma^2 \mathbb{A}, \quad (4.40a)$$

$$\mathbb{M} = -2\gamma \left[\mathbb{A} - \frac{1}{4\gamma^2} \left(\mathbb{Q} + \gamma^2 \mathbb{A} \right) \right]. \quad (4.40b)$$

Considerando que $\{\phi\}_i$ e γ_i são soluções espúrias contidas no autovalor nulo do sistema (4.37) e, portanto, $\mathbb{Q}\{\phi\}_i = 0$, a equação (4.39) pode ser escrita de forma simplificada como

$$\mathbb{A}\{\phi\}_i = 0. \quad (4.41)$$

Analisando a equação (4.41) observa-se que (4.36) só será solução de (4.18) se $\{\phi\}_i$ fosse um autovetor da matriz $\mathbb{A}$. Entretanto, como $\mathbb{A}$ é uma matriz não-singular, os autovetores $\{\phi\}_i$ não pertencem ao conjunto de autovetores da matriz $\mathbb{A}$ e, portanto, o esquema de propagação (4.18) evoluirá ao longo de z sem ser afetado pelos modos espúrios.

4.3.2 BPM-DIV

Considere a solução geral apresentada pela equação (4.36), onde $\{\phi\}_i$ e γ_i são os respectivos autovetores e autovalores contidos no espectro modal associado ao BPM-DIV. Similarmente ao que foi feito no caso anterior, assumindo que $\partial/\partial z = 0$ na equação (4.32), o espectro modal associado ao BPM-DIV pode ser escrito como

$$\gamma^2 \mathbb{A}\{\phi\} = -\mathbb{Q}\{\phi\}, \quad (4.42)$$

onde,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & -\mathbf{L}_{tz} \\ 0 & -\mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.43a)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & 0 \\ -\mathbf{L}_{zt} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.43b)$$

Assumindo que (4.36) é solução da equação de Padé, isto é, substituindo (4.36) em (4.32) tem-se a equação matricial:

$$\left[\mathbb{M} + \left(\gamma_i \mathbb{M} + \mathbb{K} \right) (1 + z) \right] \{\phi\}_i = 0, \quad (4.44)$$

onde as matrizes $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$ são definidas em (4.33), tal que

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \gamma^2 \mathbb{A}, \quad (4.45a)$$

$$\mathbb{M} = -2\gamma \left[\mathbb{A} - \frac{1}{4\gamma^2} \left(\mathbb{Q} + \gamma^2 \mathbb{A} \right) \right]. \quad (4.45b)$$

Considerando que $\{\phi\}_i$ e γ_i são soluções espúrias contidas no autovalor nulo do sistema (4.42), a equação (4.44) pode ser escrita de forma simplificada como

$$\mathbb{A}\{\phi\}_i = 0. \quad (4.46)$$

Analisando a equação (4.46) observa-se que (4.36) só será solução de (4.18) se $\{\phi\}_i$ fosse um autovetor da matriz $\mathbb{A}$. Entretanto, como $\mathbb{A}$ é uma matriz não-singular, os autovetores $\{\phi\}_i$ não pertencem ao conjunto de autovetores da matriz $\mathbb{A}$ e, portanto, o esquema de propagação (4.18) evoluirá ao longo de z sem ser afetado pelos modos espúrios.

4.4 Discretização

A integração numérica dos esquemas BPM apresentados nesse capítulo foram implementados utilizando o método de Crank-Nicholson (Saitoh & Koshiba 2001).

4.4.1 BPM Convencional

Aplicando o esquema de dois pontos de recorrência para integração ao longo da direção z à equação de Padé (4.18), obtém-se a seguinte equação de diferenças

$$[A]_i \{\phi\}_{i+1} = [B]_i \{\phi\}_i, \quad (4.47)$$

com

$$[A]_i = \mathbb{M}_i + \theta \Delta z \mathbb{K}_i, \quad (4.48a)$$

$$[B]_i = \mathbb{M}_i - (1 - \theta) \Delta z \mathbb{K}_i, \quad (4.48b)$$

onde

$$\mathbb{K}_i = \mathbb{Q} - \kappa_0^2 n_{0i}^2 \mathbb{A}, \quad (4.49a)$$

$$\mathbb{M}_i = -j2\kappa_0 n_{0i} \left[\mathbb{A} + \frac{1}{4\kappa_0^2 n_{0i}^2} \left(\mathbb{Q} - \kappa_0^2 n_{0i}^2 \mathbb{A} \right) \right], \quad (4.49b)$$

onde os subscritos $i+1$ e i denotam as grandezas associadas aos $(i+1)$ -ésimo, i -ésimo passos de integração, respectivamente, Δz é o passo de integração e as matrizes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{Q}$ são as matrizes de BPM definidas em (4.14a) e (4.14b), respectivamente. O parâmetro $0,5 \leq \theta \leq 1,0$ é introduzido para controlar a estabilidade do esquema de integração e se $\theta = 0,5$ o esquema de integração apresentado em (4.47) é conhecido como Crank-Nicholson.

4.4.2 BPM-DIV

Aplicando o esquema de dois pontos de recorrência para integração em z à equação (4.32), obtém-se

$$[A]_i \{\phi\}_{i+1} = [B]_i \{\phi\}_i, \quad (4.50)$$

onde

$$[A]_i = \mathbb{M}_i + \theta \Delta z \mathbb{K}_i, \quad (4.51a)$$

$$[B]_i = \mathbb{M}_i - (1 - \theta) \Delta z \mathbb{K}_i, \quad (4.51b)$$

onde

$$\mathbb{K}_i = \mathbb{Q} - \kappa_0^2 n_{0i}^2 \mathbb{A}, \quad (4.52a)$$

$$\mathbb{M}_i = -j2\kappa_0 n_{0i} \left[\mathbb{A} + \frac{1}{4\kappa_0^2 n_{0i}^2} \left(\mathbb{Q} - \kappa_0^2 n_{0i}^2 \mathbb{A} \right) \right], \quad (4.52b)$$

os subscritos $i + 1$ e i denotam as grandezas associadas aos $(i + 1)$ -ésimo, i -ésimo passos de integração, respectivamente, Δz é o passo de integração e as matrizes $\mathbb{A}$ e $\mathbb{Q}$ são as matrizes de BPM definidas em (4.28a) e (4.28b), respectivamente.

Atualização do Índice de Refração Efetivo

A fim de melhorar a precisão numérica, o índice de refração efetivo é atualizado a cada passo de propagação, a partir da equação (Saitoh & Koshiba 2001),

$$n_{0i} = \frac{1}{\kappa_0} \text{Re} \left[\frac{-jb_i + \sqrt{-b_i^2 + 4a_i c_i}}{2a_i} \right], \quad (4.53)$$

onde

$$a_i = \{\phi\}_i^\dagger \mathbf{M}_i \{\phi\}_i, \quad (4.54a)$$

$$b_i = \{\phi\}_i^\dagger \mathbf{L}_i \{\phi\}_i, \quad (4.54b)$$

$$c_i = \{\phi\}_i^\dagger \mathbf{K}_i \{\phi\}_i, \quad (4.54c)$$

$\dagger$ indica o complexo conjugado transposto de $\{\phi\}_i$, e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.55a)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & j\mathbf{L}_{tz} \\ j\mathbf{L}_{zt} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.55b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.55c)$$

4.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas formulações de esquemas de propagação por feixe baseadas nos elementos finitos híbridos. Em uma primeira etapa foram derivados os esquemas de propagação por feixe usando as componentes transversal e longitudinal da equação de onda (Saitoh & Koshiba 2001). Um novo esquema de propagação inédito, usando a componente transversal da equação de onda e a equação de Gauss, também é apresentado nesse capítulo. Uma análise de estabilidade é apresentada assumindo-se a presença de modos espúrios no espectro do sinal de entrada. A análise parte de uma solução crescente ao longo da direção de propagação, função da distribuição campo e do índice efetivo dos modos espúrios presente no espectro de solução modal da estrutura. A análise mostra que tanto o esquema BPM convencional quanto o novo esquema usando a equação de Gauss não são afetados pela possível presença de modos espúrios, contaminando o espectro do sinal de entrada. O capítulo ainda apresenta esquemas de integração numérica ao longo da direção de propagação para as quatro formulações apresentadas e cujos resultados numéricos serão mostrados no capítulo seguinte.

Capítulo 5

BPM: Resultados Numéricos

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados numéricos das formulações de propagação por feixe apresentadas no Capítulo 4 e, para tanto, a ferramenta computacional escolhida foi o software Matlab[®] (MathWorks 2011). Os teste numéricos apresentados aqui têm como objetivo não apenas demonstrar a eficácia da nova formulação proposta, mas também mostrar numericamente os resultados da análise de estabilidade dos esquemas BPM convencional e DIV apresentados no Capítulo 4.

5.2 Guia Dielétrico de Alto Contraste

Considerando que o método de propagação por feixe é essencialmente utilizando no estudo de estruturas fotônicas, uma das estruturas escolhidas para os testes numéricos foi o guia canal de alto contraste, de seção reta constante mostrado na Figura 5.1 com $W = 3,0\mu\text{m}$, $R = 2,9\mu\text{m}$, $D = 1,0\mu\text{m}$, $H = 1,0\mu\text{m}$, $G = 0,5\mu\text{m}$, $S = 2,0\mu\text{m}$ e $n_C = 1,0$, $n_G = 3,44$ e $n_S = 3,40$.

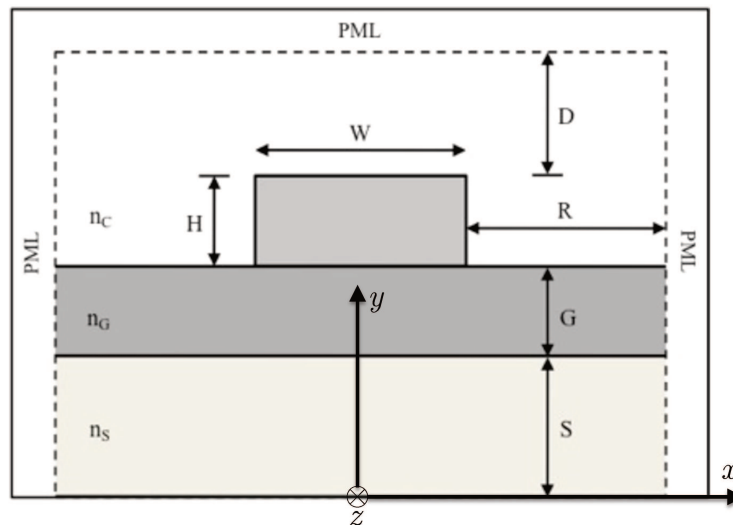


Figura 5.1: Guia canal de alto contraste.

A janela computacional de $12 \times 5 \mu\text{m}$ foi discretizada usando uma malha não estruturada com 10.765 nós e 21.102 elementos. A Figura 5.2 mostra o feixe gaussiano com *spot size* de $0,4 \mu\text{m}$, comprimento de onda de operação de $1,1 \mu\text{m}$ e polarização na direção x , usado na entrada do propagador.

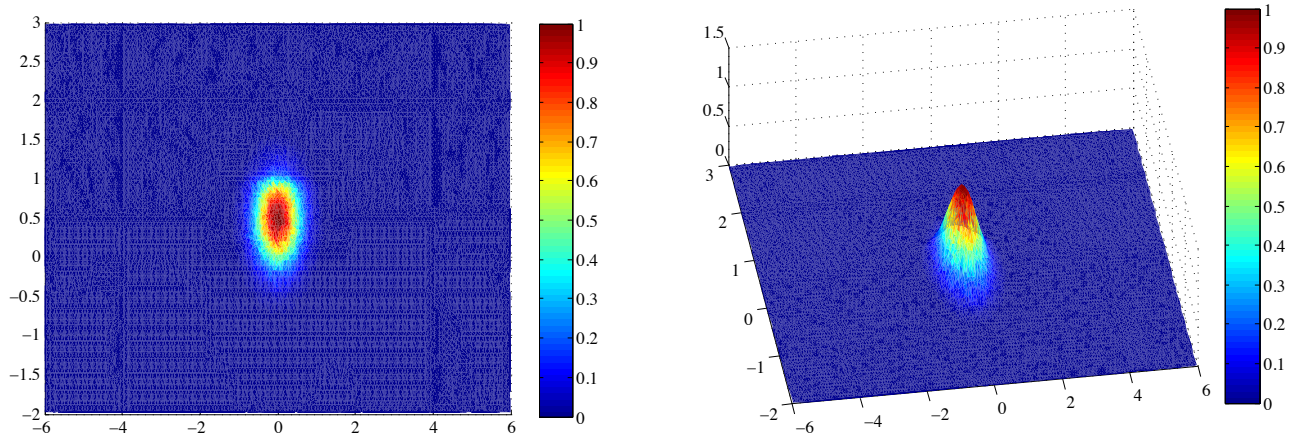


Figura 5.2: Feixe gaussiano com campo elétrico polarizado ao longo da direção x com *spot size* de $0,4 \mu\text{m}$ e $\lambda_0 = 0,4 \mu\text{m}$, lançado na entrada do guia óptico mostrado na Figura 5.1, na janela computacional de $12 \times 5 \mu\text{m}$.

O feixe gaussiano é lançado em $z = 0$ e sua evolução é acompanhada ao longo da direção z monitorando tanto a distribuição dos campos eletromagnéticos como a evolução do índice de refração efetivo n_{eff} . A convergência do algoritmo pode, portanto, ser analisada a partir do índice de refração efetivo n_{eff} , uma vez que este é função das componentes transversal e longitudinal dos campos eletromagnéticos, como mostrado na equação (4.53) e, uma vez que o feixe gaussiano se propaga e converge para o modo fundamental, o índice de refração efetivo deve convergir para o índice efetivo do referido modo. A Figura 5.3 mostra o índice de refração efetivo em função da distância de propagação, calculado através da formulação BPM convencional e BPM-DIV. Nos dois casos o índice de refração inicial usado foi $n_{eff} = 3,38$ e, como pode ser observado, seu valor converge para o índice de refração efetivo modo quase-TE – $n_{eff} = 3,42697$.

As Figuras 5.4 a 5.7 mostram a evolução das componentes do campo elétrico ao longo da direção de propagação em $40 \mu\text{m}$, $90 \mu\text{m}$, $130 \mu\text{m}$ e $1000 \mu\text{m}$, respectivamente, calculadas a partir do BPM convencional com passo de integração $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$ e $\theta = 1$, uma vez que instabilidades poderia surgir devido ao esquema Crank-Nicholson (Saitoh & Koshiba 2001). O pulso gaussiano lançado na entrada se propaga ao longo da direção z radiando sua energia no interior da estrutura à medida que se propaga. Assim, pode-se observar as mudanças na distribuição de campo durante a propagação até que o pulso convirja para o modo quase-TE.

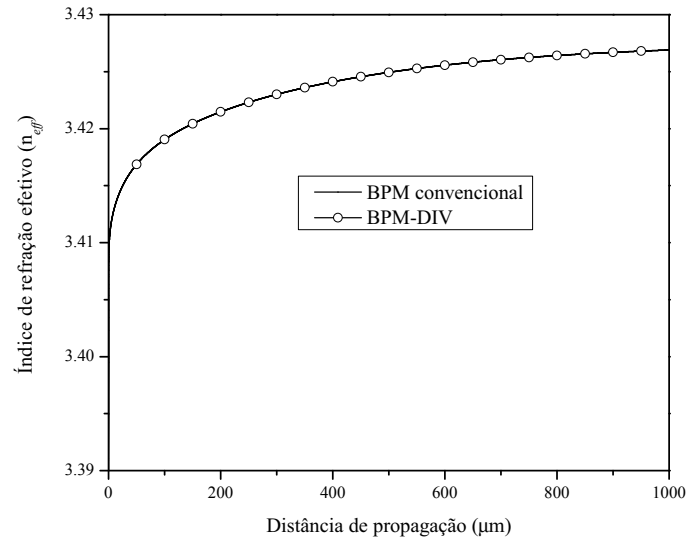


Figura 5.3: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z .

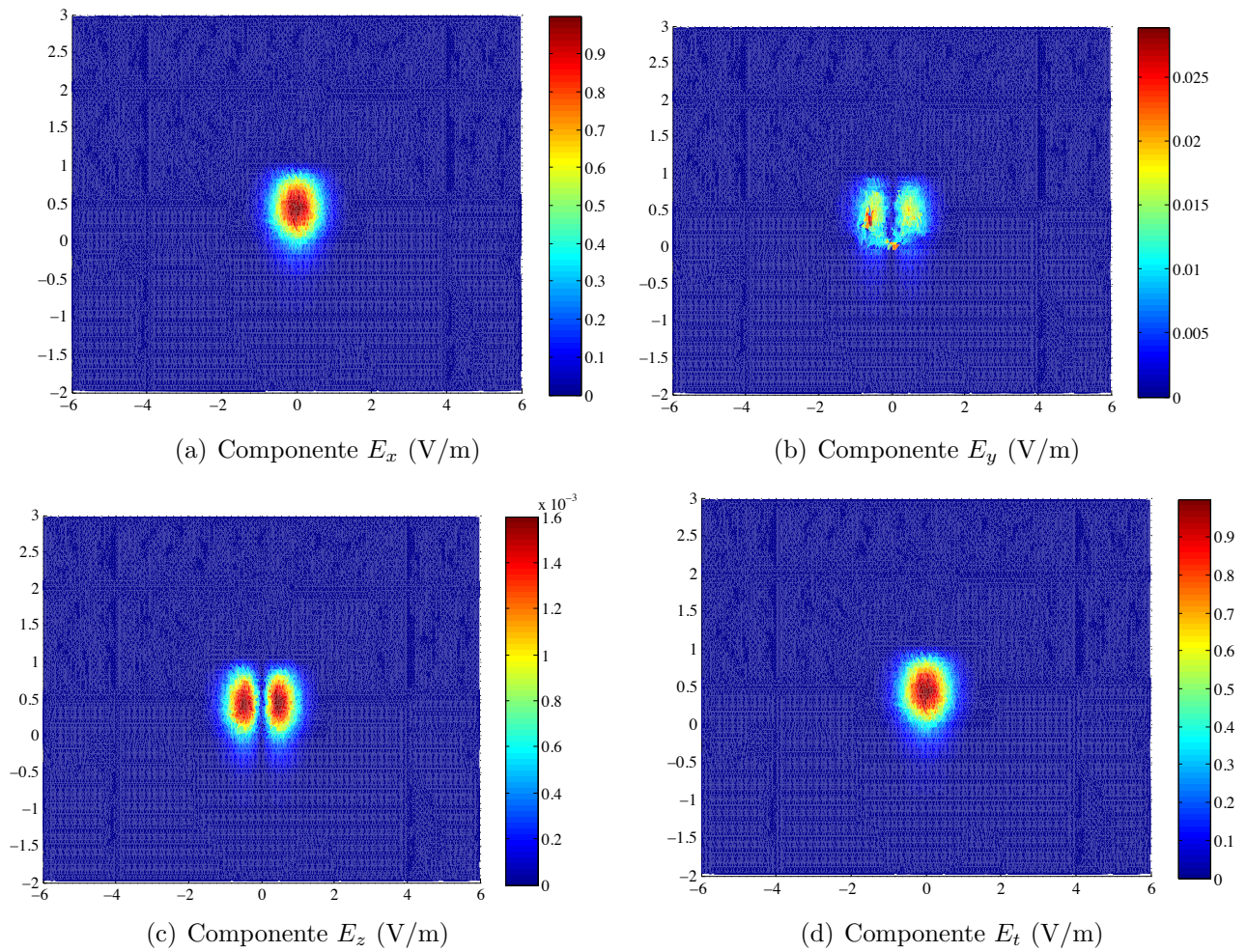


Figura 5.4: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 40\mu\text{m}$, calculadas através do BPM convencional. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t .

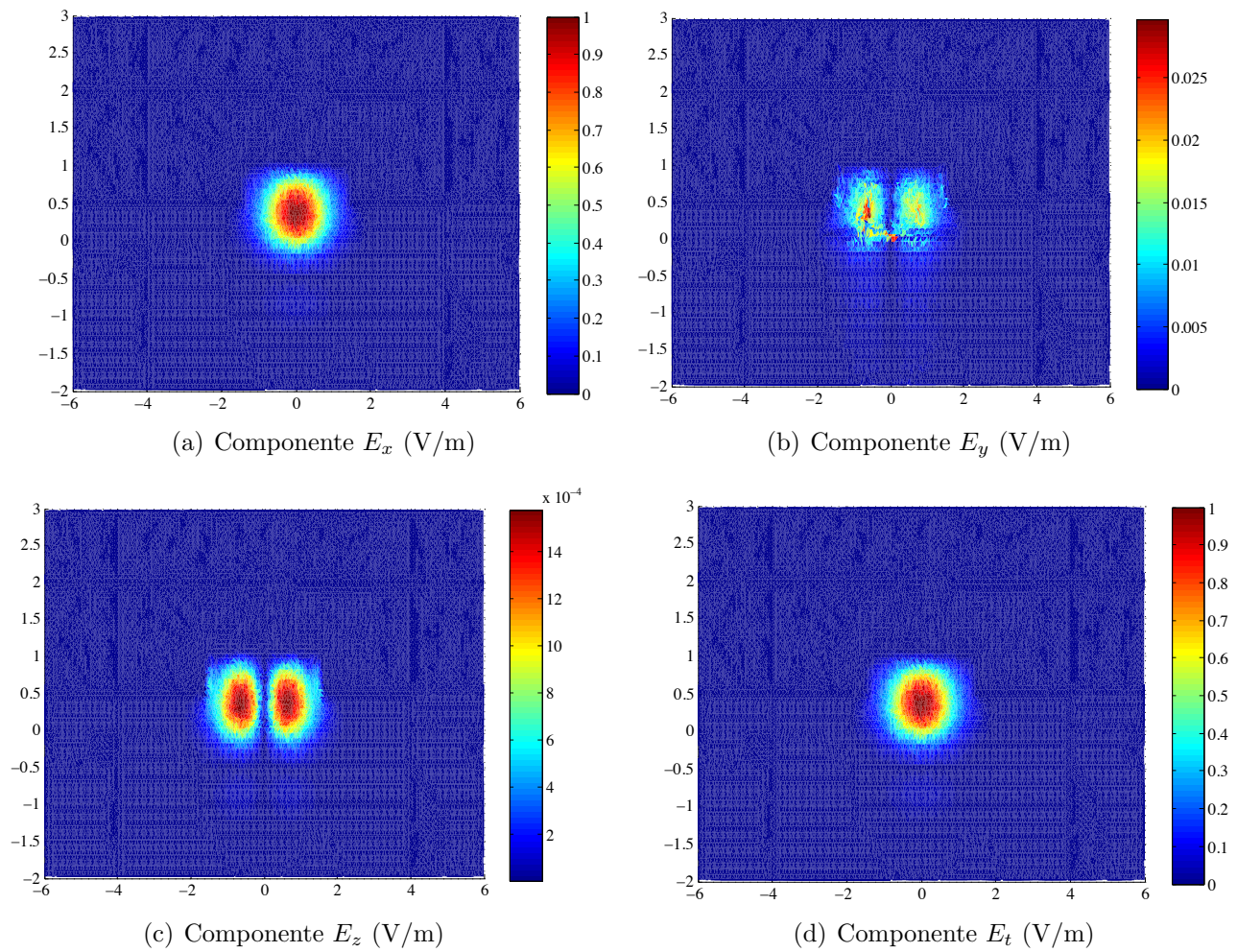


Figura 5.5: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 90\mu\text{m}$, calculadas através do BPM convencional. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t .

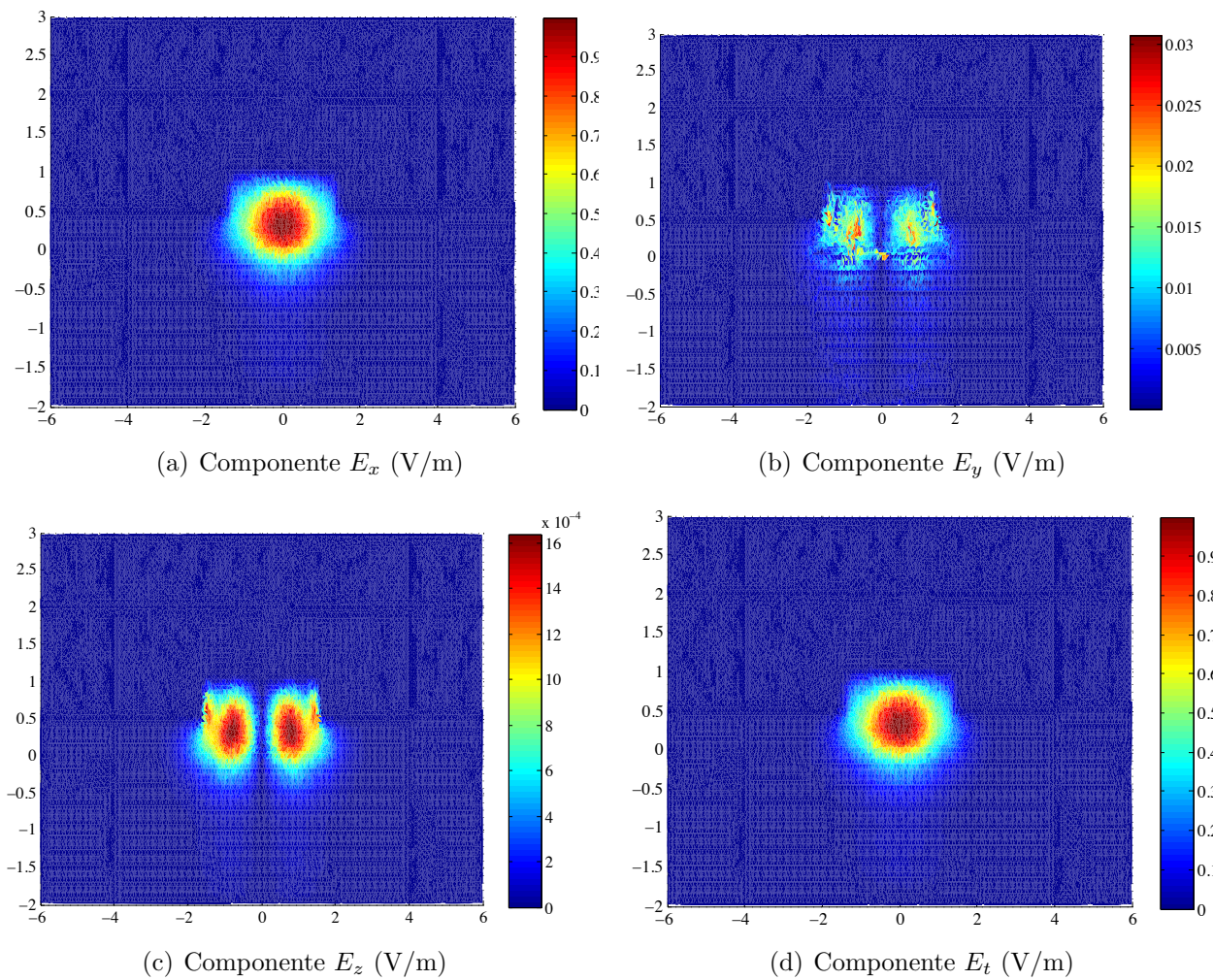


Figura 5.6: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 130 \mu\text{m}$, calculadas através do BPM convencional. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t .

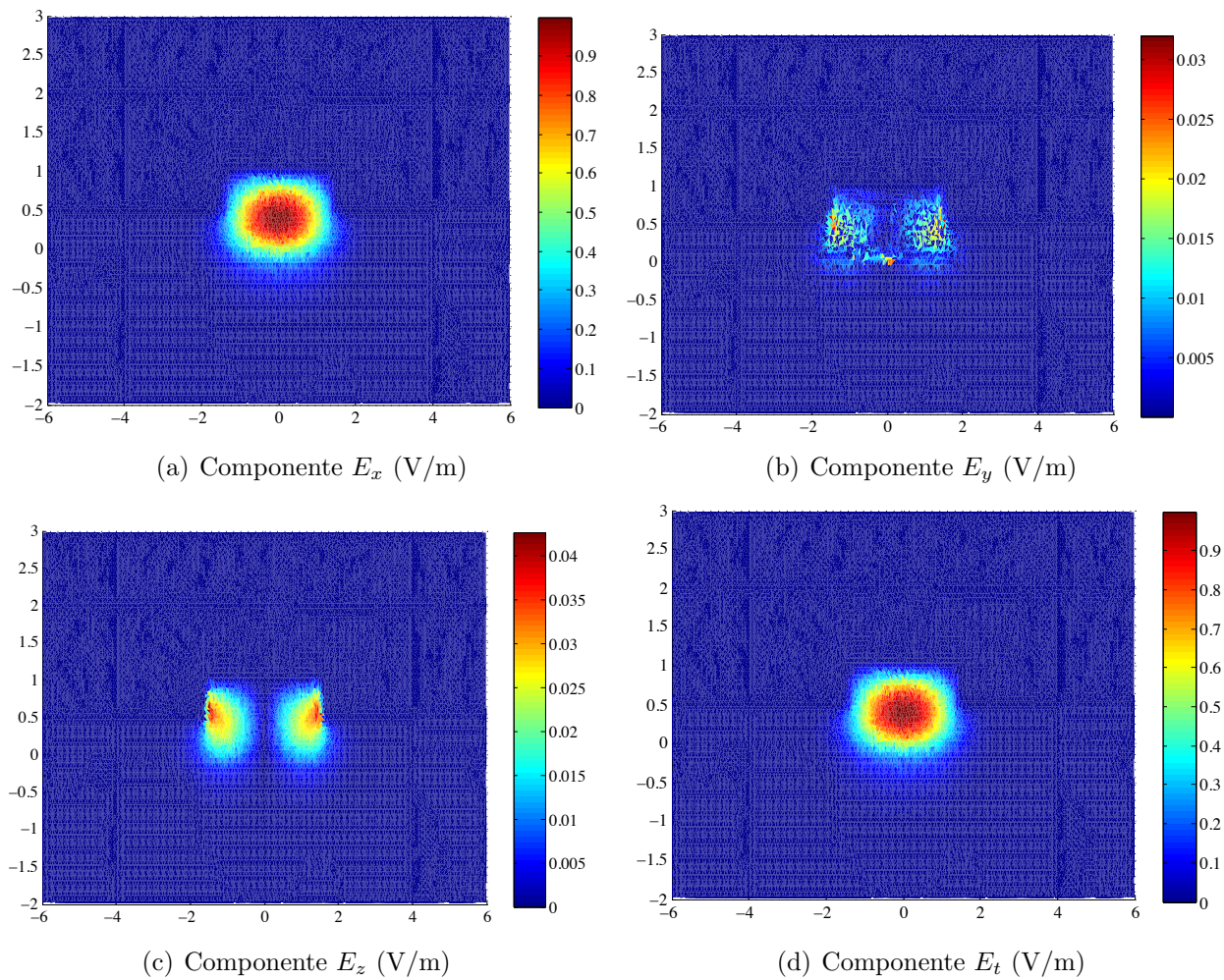


Figura 5.7: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 1000\mu\text{m}$, calculadas através do BPM convencional. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t .

As Figuras 5.8 a 5.11 mostram a evolução das componentes do campo elétrico ao longo da direção de propagação em $40\mu\text{m}$, $90\mu\text{m}$, $130\mu\text{m}$ e $1000\mu\text{m}$, respectivamente, calculadas a partir do BPM-DIV, alimentado pelo pulso gaussiano mostrado na Figuras 5.2, e com passo de integração $\Delta z = 0,1\mu\text{m}$. Como já indicava a evolução do índice efetivo, as componentes de campo calculadas através da nova formulação apresentada nessa tese mostram excelente concordância com os resultados obtidos através do BPM convencional.

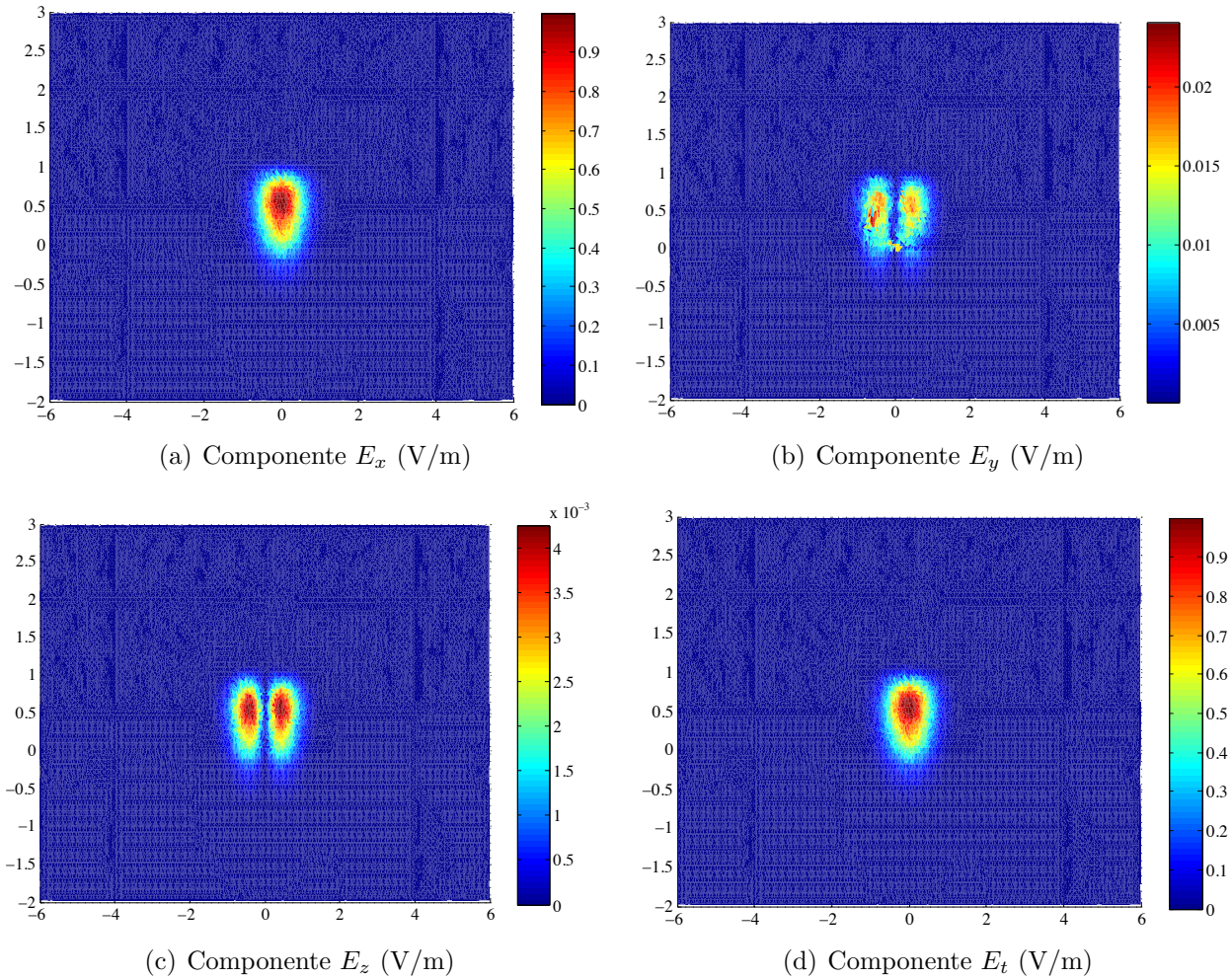


Figura 5.8: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 40\mu\text{m}$, calculadas através do BPM-DIV. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t .

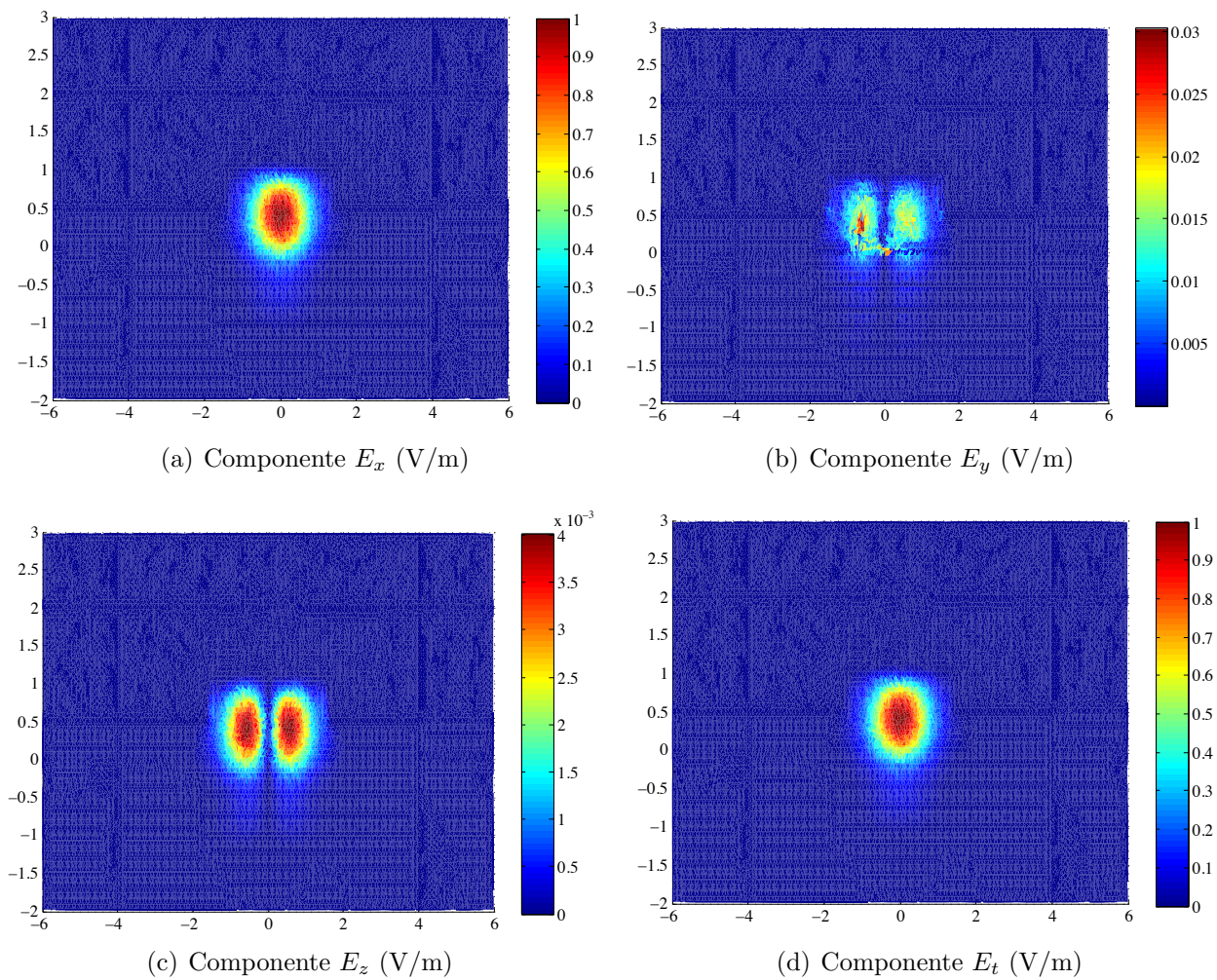


Figura 5.9: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 90\mu\text{m}$, calculadas através do BPM-DIV. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t .

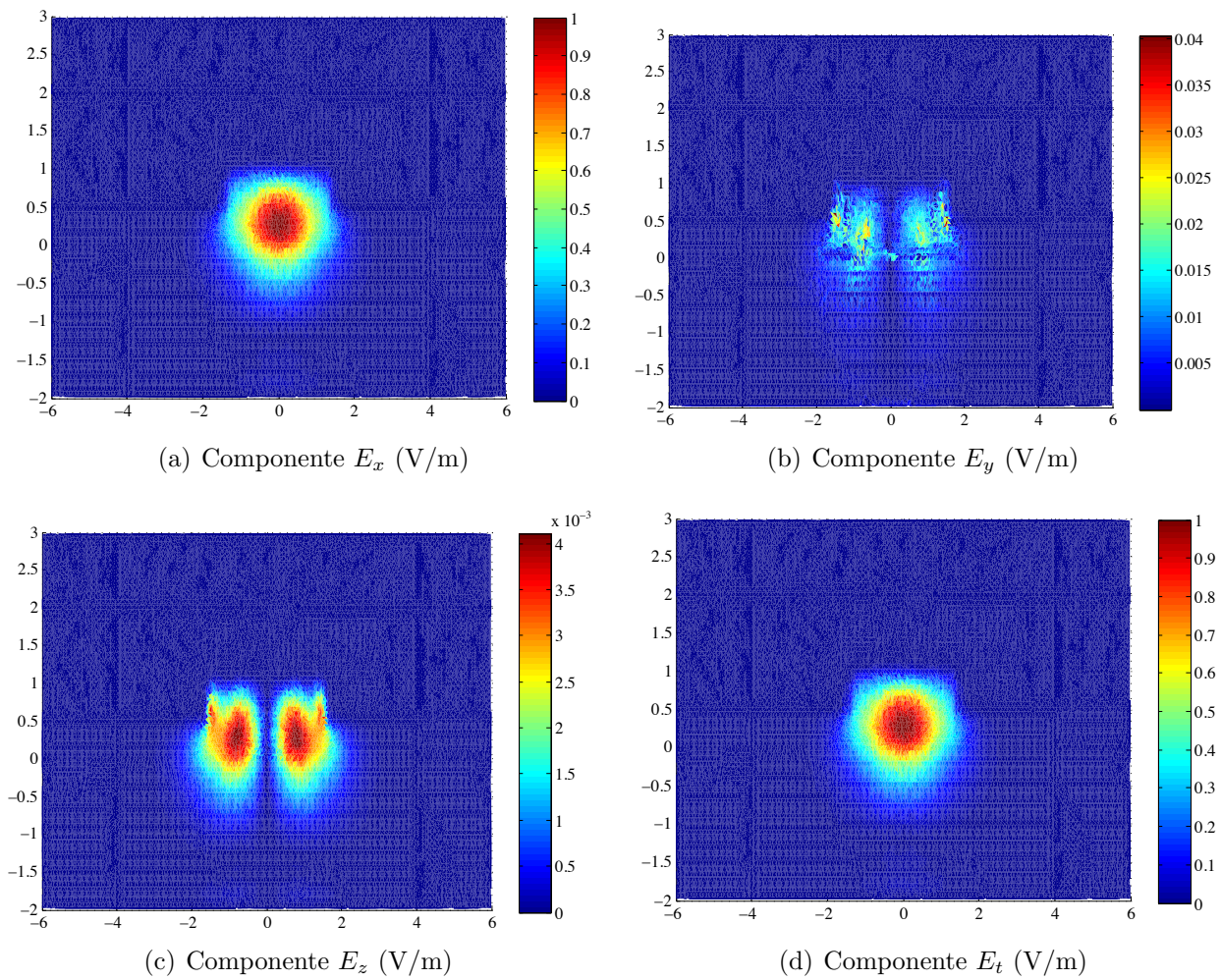


Figura 5.10: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 130\mu\text{m}$, calculadas através do BPM-DIV. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t .

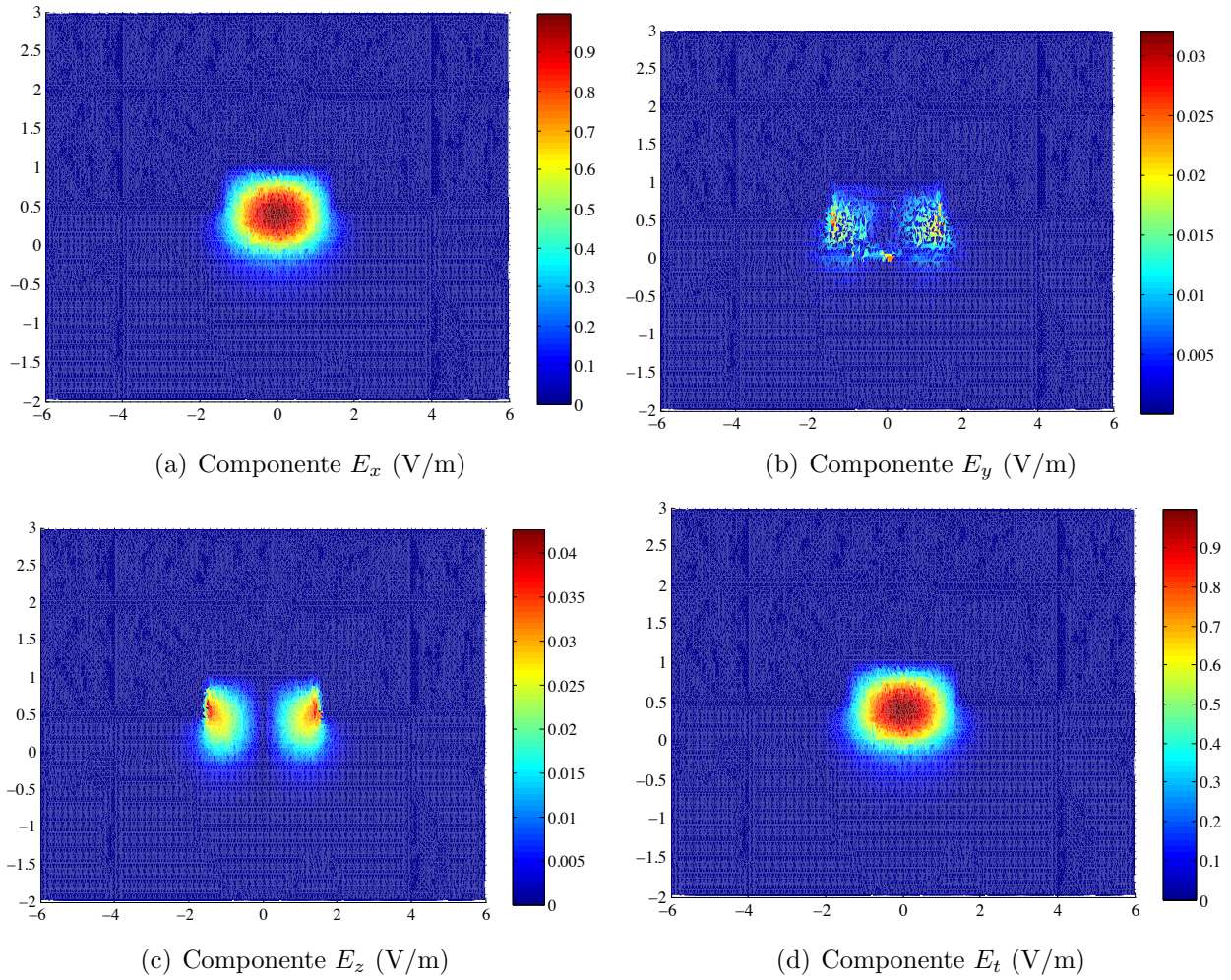


Figura 5.11: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico em $z = 1000\mu\text{m}$, calculadas através do BPM-DIV. (a) Componente E_x (b) Componente E_y (c) Componente E_z (d) Componente E_t .

5.3 Acoplador Direcional com Fibras Ópticas

Os esquemas BPM convencional e BPM-DIV também foram testados na análise da propagação de um acoplador direcional óptico formado por duas fibras ópticas raio $r = 0,5 \mu\text{m}$, espaçadas longitudinalmente de uma distância $d = 0,2 \mu\text{m}$. Tal estrutura possui vasta aplicação em óptica e pode ser usada em chaveamentos, divisão de potência, modulação e seleção de frequência. A distância entre as fibras é mantida constante e deve ser suficientemente pequena a fim de se obter um acoplamento eletromagnético intenso entre as fibras. As fibras utilizadas nesta análise possuem índice de refração do núcleo de $n_2 = 1,6$ e índice de refração da casca de $n_1 = 1,5$. A Figura 5.12 mostra a seção reta do acoplador direcional (da Silva et al. 2003). A janela computacional de $6 \times 6 \mu\text{m}$ foi discretizada com 16.976 elementos, passo de propagação de $\Delta z = 0,1 \mu\text{m}$.

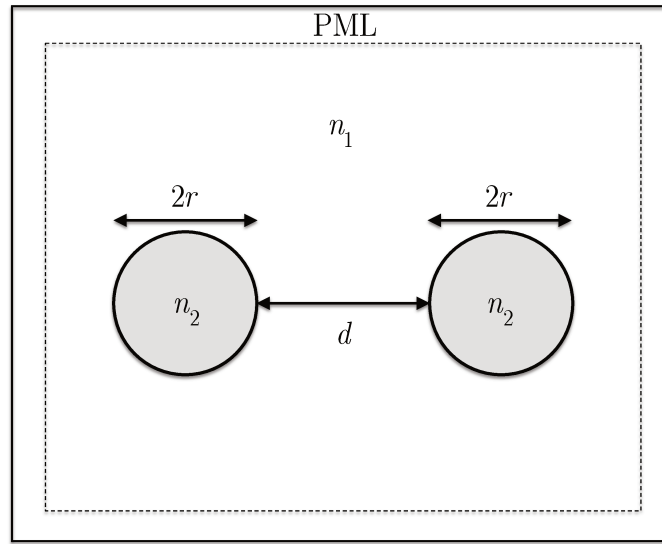


Figura 5.12: Seção reta de um acoplador direcional com duas fibras ópticas.

Os resultados da propagação ao longo do acoplador, usando o BPM-DIV são mostrados na Figura 5.13, quando um feixe gaussiano com *spot size* de $0,3 \mu\text{m}$, polarizado na direção x e operando em $0,8 \mu\text{m}$, é aplicado na entrada do propagador. Conforme pode ser observado, a luz lançada na entrada da fibra em $z = 0$ é transferida para a fibra adjacente após propagar-se por cerca $z = 39 \mu\text{m}$. À medida que a propagação continua a luz se alterna entre as fibras, conforme mostra a Figura 5.13.

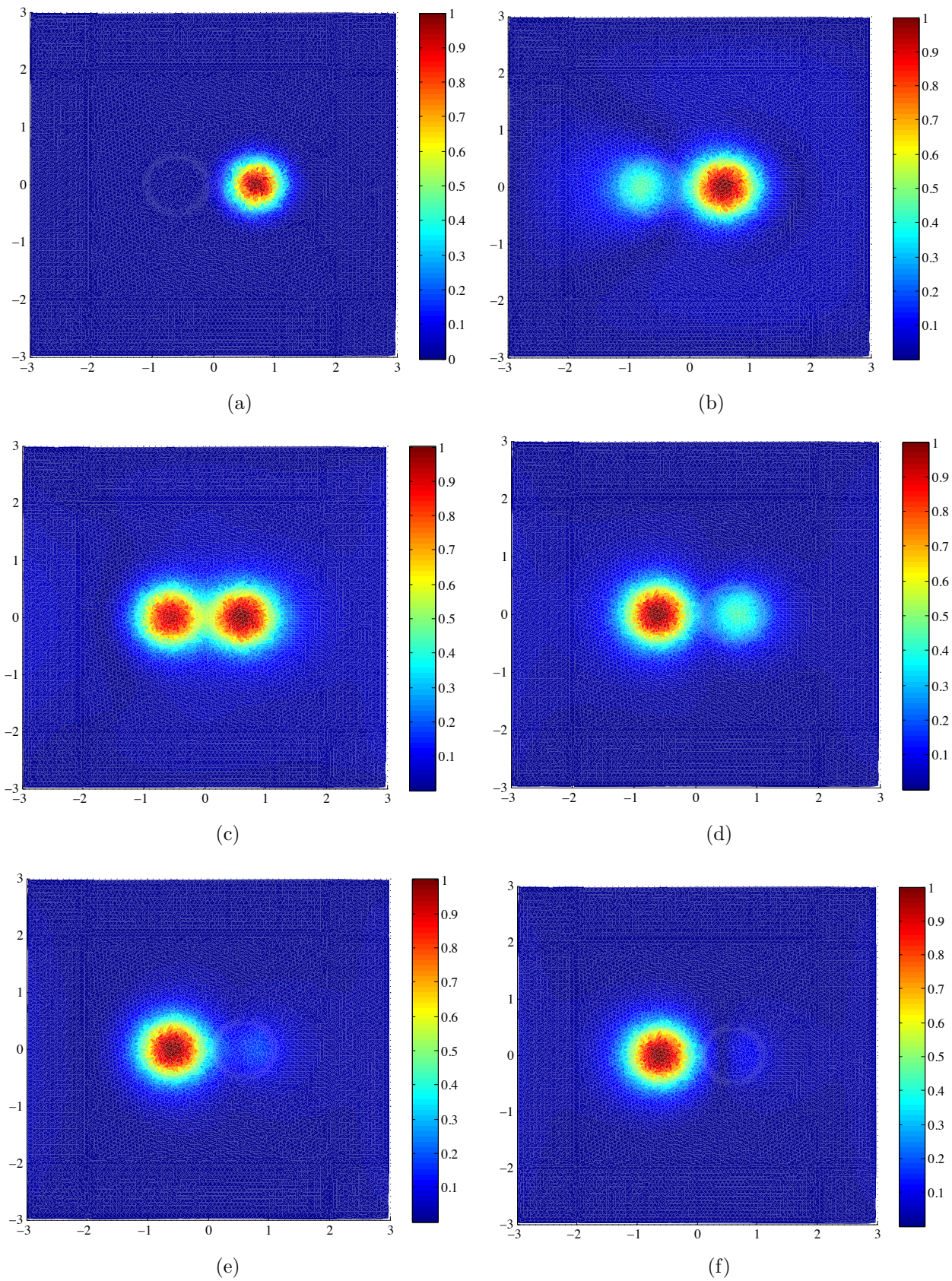


Figura 5.13: Distribuição espacial das componentes do campo elétrico E_t (V/m) calculada através do BPM-DIV. (a) $z = 0 \mu\text{m}$ (b) $z = 9 \mu\text{m}$ (c) $z = 18,2 \mu\text{m}$ (d) $z = 29 \mu\text{m}$ (e) $z = 35 \mu\text{m}$ (f) $z = 39 \mu\text{m}$.

5.4 Testes de Estabilidade e Convergência

5.4.1 Guia Dielétrico de Alto Contraste

A fim de implementar os testes numéricos de convergência e estabilidade fez-se necessário trabalhar com sistemas lineares menores, uma vez que a proposta era poluir o espectro do feixe de entrada com modos espúrios e, conforme discutido no Capítulo 3, o cálculo completo do espectro de soluções (modos espúrios incluídos) obriga o uso da rotina `eig` do Matlab®. Os testes foram realizados usando o guia de onda óptico cuja seção reta é mostrada na Figura 5.1 e, a fim não comprometer a convergência, uma vez que uma malha com menor resolução se fazia necessária, apenas metade da estrutura foi usada em $x = 0$ (simetria elétrica). O domínio computacional foi discretizado usando uma malha com 739 nós e 1390 elementos e a Figura 5.14 mostra o índice de refração de referência calculado para esse novo sistema para os esquemas BPM convencional e DIV em $\lambda_0 = 1,1\mu\text{m}$, passo de integração $\Delta z = 0,1\mu\text{m}$ e índice efetivo inicial de $n_{eff} = 3,38$. Como pode ser observado, ambos os métodos convergem para o índice efetivo do modo quase-TE ($n_{eff} = 3,4134$).

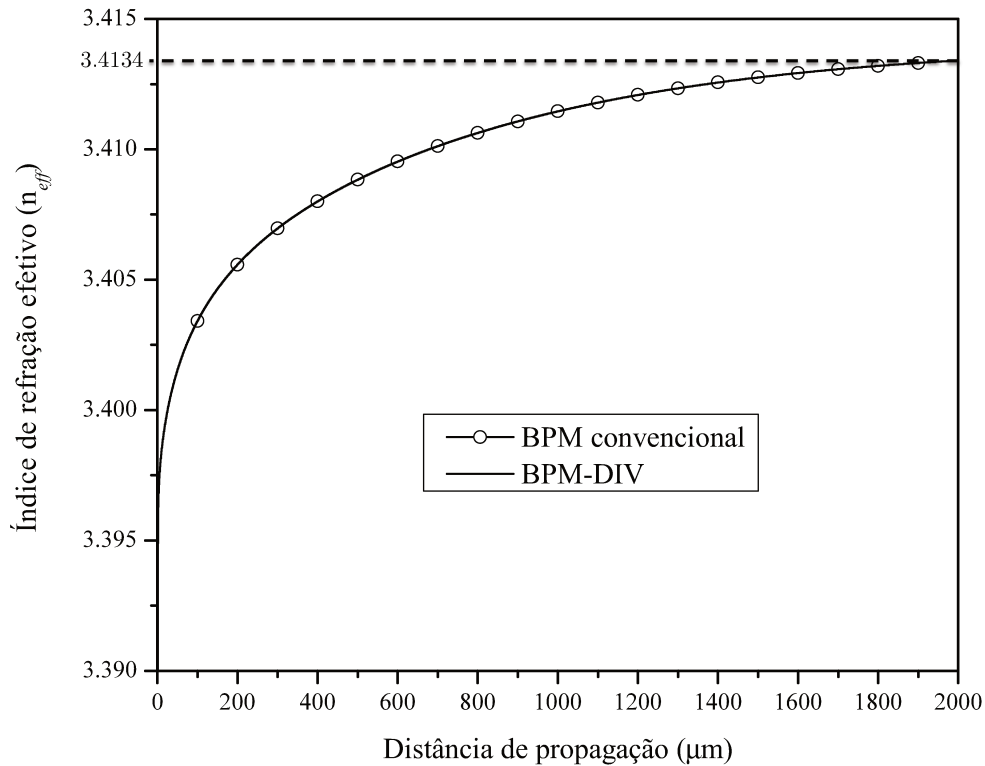


Figura 5.14: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z para uma malha com 739 nós e 1390 elementos.

A partir do ajuste da estrutura, os teste de estabilidade e convergência foram realizados assumindo um feixe gaussiano na entrada do propagador, como mostrado na Figura 5.2, com *spot size* de $0,4\mu\text{m}$, comprimento de onda de operação de $1,1\mu\text{m}$, e poluído com um modo espúrio aleatório. Dessa forma, o feixe de entrada pode ser considerado como,

$$F_0(x, y) = G(x, y) + pS_n(x, y), \quad (5.1)$$

onde $G(x, y)$ é o feixe gaussiano, $S_n(x, y)$ é a distribuição espacial do n -ésimo modo espúrio e $0 < p < 1$ é o peso atribuído a essa distribuição. A Figura 5.15 apresenta a distribuição da componente transversal do campo elétrico do modo espúrio adicionado ao pulso gaussiano em $z = 0$. A distribuição foi escolhida aleatoriamente dentre os 639 modos contidos no espectro de soluções modal da estrutura para a malha com 739 nós e 1390 elementos.

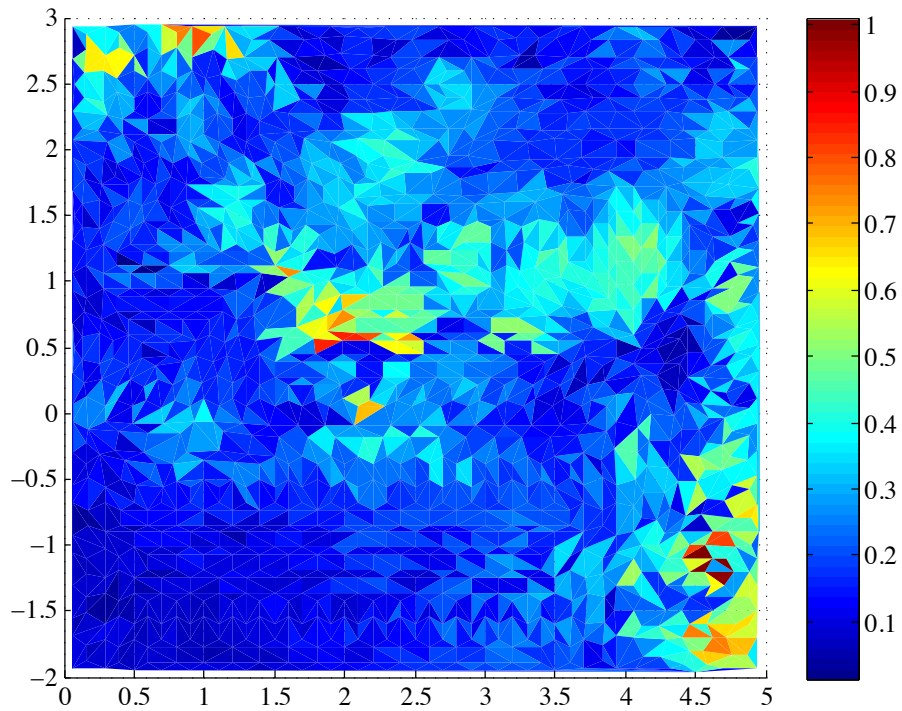


Figura 5.15: Distribuição da componente transversal do campo elétrico do modo espúrio, em $z = 0$.

A Figura 5.16 mostra a evolução do índice de refração de referência para os esquemas BPM convencional e DIV em $\lambda_0 = 1,1\mu\text{m}$. Nos dois casos foi usado o índice de refração inicial $n_{eff} = 3,3$ e o feixe gaussiano foi poluído com um modo espúrio peso de $p = 0,2$. Como pode ser observado, apesar dos dois esquemas convergirem para o $n_{eff} = 3,4134$, após o primeiro passo de propagação o índice calculado pelo esquema convencional sobre para valores de índice efetivo superiores a $n_{eff} = 4,0$, indicando que o esquema tradicional sentiu a presença do modo espúrio enquanto o índice calculado através do BPM-DIV sustenta o valor inicial do índice efetivo, convergindo gradualmente para o índice efetivo do modo quase-TE.

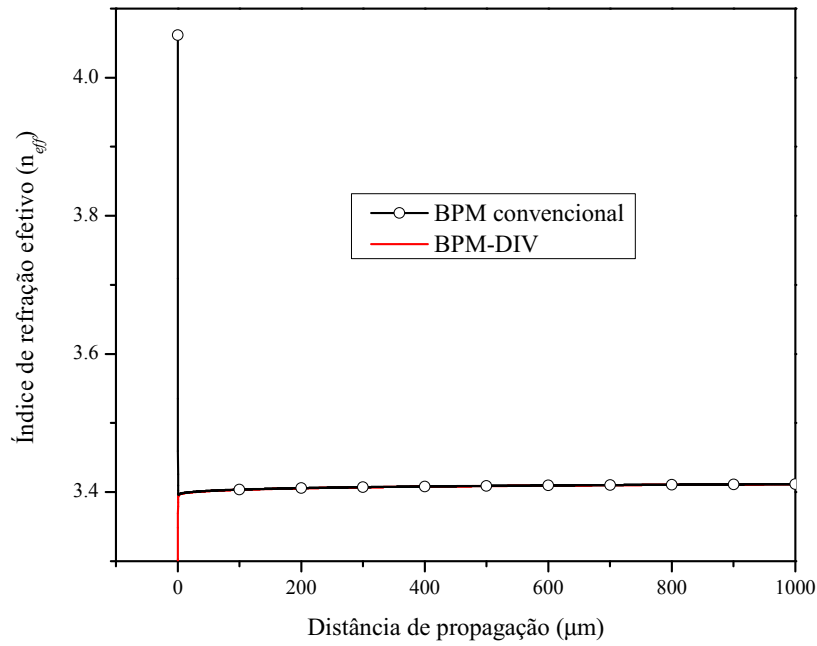
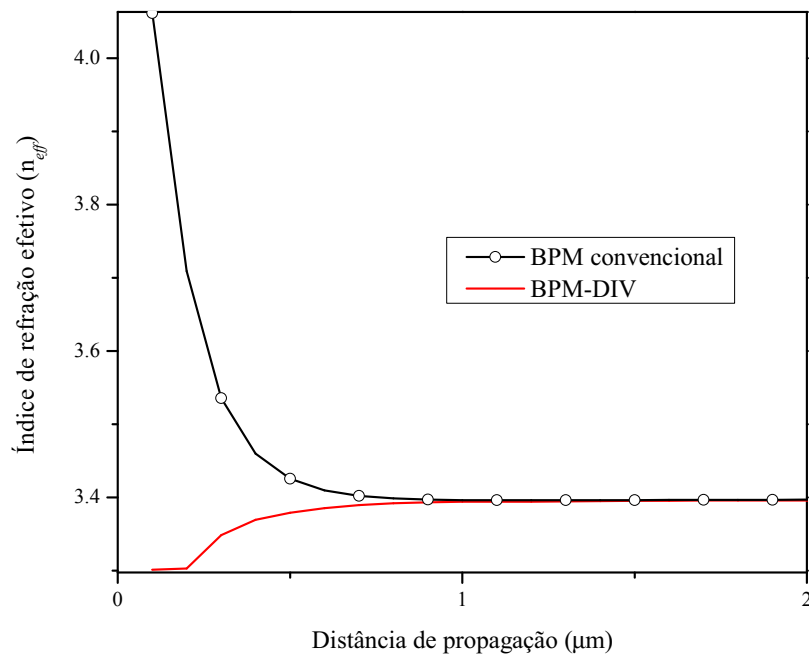
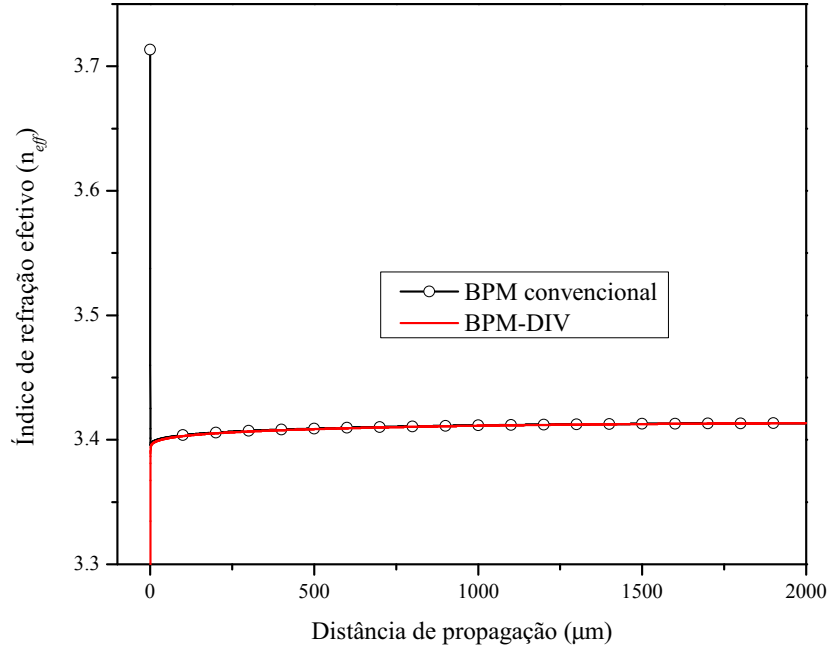
(a) Evolução de n_{eff} para $0 < z < 2000\text{m}$.(b) Evolução de n_{eff} para $0 < z < 2\text{m}$.

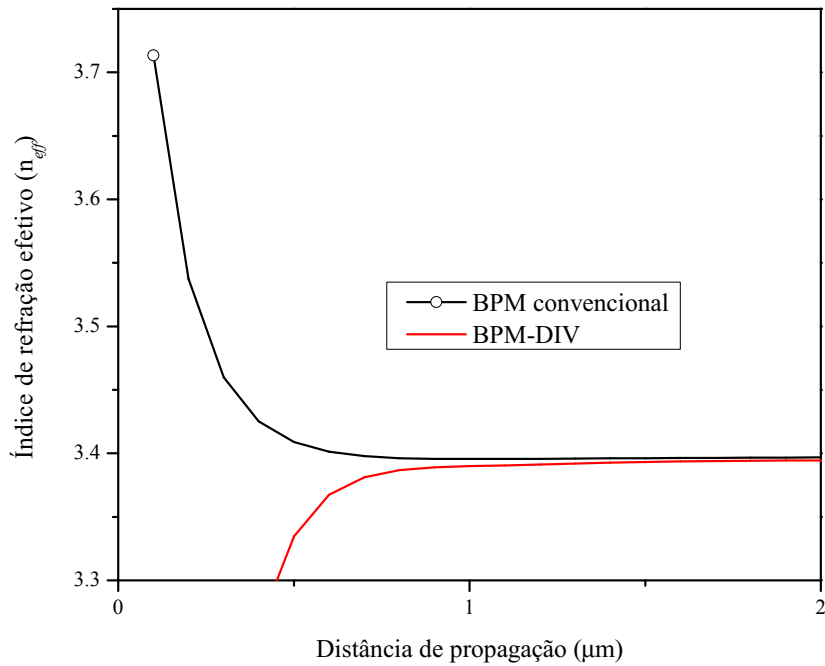
Figura 5.16: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z para feixe gaussiano poluído com modo espúrio de peso $p = 0, 2$, em $\lambda_0 = 1, 1\mu\text{m}$. (a) $0 < z < 2000\text{m}$. (b) $0 < z < 2\text{m}$

A Figura 5.17 mostra a evolução do índice de refração de referência para os esquemas BPM convencional e DIV em $\lambda_0 = 1, 1\mu\text{m}$. Nos dois casos foi usado o índice de inicial $n_{eff} = 3, 38$, $p = 0, 4$ e $\Delta z = 0, 5\mu\text{m}$. Como pode ser observado o índice de refração efetivo calculado através das duas formulações BPM convergem mas, a exemplo do que aconteceu no caso anterior, o

BPM convencional parte de um índice de referência maior que o índice inicial, enquanto o BPM-DIV sustenta o valor inicial do índice de refração de referência. Outros pesos foram testados na composição do sinal de entrada e em todos os casos os dois esquemas de propagação se mostraram imunes à presença dos modos espúrios.



(a) Evolução de n_{eff} para $0 < z < 2000m$.



(b) Evolução de n_{eff} para $0 < z < 2m$.

Figura 5.17: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z para feixe gaussiano poluído com modo espúrio de peso $p = 0,4$, em $\lambda_0 = 1,1\mu m$. (a) Evolução de n_{eff} para $0 < z < 2000m$. (b) Evolução de n_{eff} para $0 < z < 2m$.

A Figura 5.18 mostra a evolução do índice de refração quando um feixe gaussiano com *spot size* de $0,4\mu\text{m}$ é aplicado na entrada dos propagadores BPM convencional e BPM-DIV com aproximação paraxial, com $\lambda_0 = 1,1\mu\text{m}$, $\Delta z = 0,1\mu\text{m}$ e índice de referência inicial $n_{eff0} = 3,38$. Conforme pode ser observado, o índice efetivo, calculado através dos dois esquemas, converge para o índice efetivo do modo quase-TE, indicando que a aproximação paraxial do esquema BPM-DIV se mostra tão estável e robusta quando o BPM paraxial convencional.

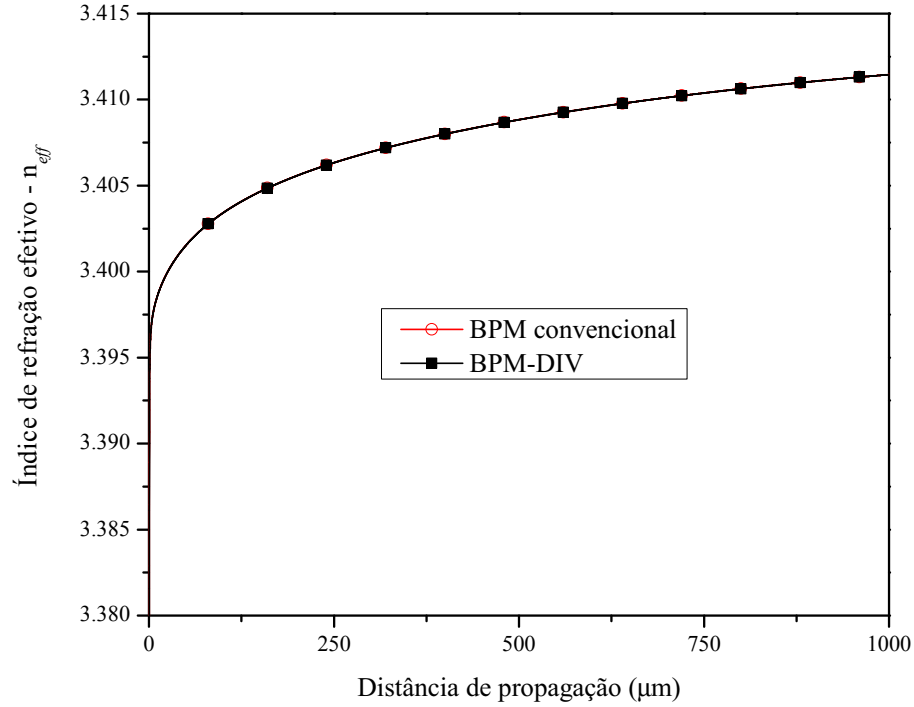


Figura 5.18: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z quando os propagadores com aproximação paraxial são alimentados com pulso gaussiano de *spot size* igual a $0,4\mu\text{m}$.

A Figura 5.20 apresenta a evolução do índice de refração de referência quando um feixe gaussiano com *spot size* de $0,03\mu\text{m}$, ilustrado na Figura 5.19, em comparação com o pulso de *spot size* igual a $0,4\mu\text{m}$, é aplicado na entrada dos propagadores BPM convencional e BPM-DIV com aproximação paraxial, usando $\lambda_0 = 1,1\mu\text{m}$, $\Delta z = 0,1\mu\text{m}$ e índice de referência inicial $n_{eff0} = 3,38$. Observe que nesse caso os dois esquemas não convergem para o índice efetivo do modo quase-TE. Isso pode ser explicado pelo fato do pulso gaussiano aplicado na entrada possuir um espectro espacial mais largo do que o ângulo de abertura dos esquemas sob teste. Assim, as componentes espectrais não contidas no ângulo de abertura do BPM serão filtradas e, conseqüentemente, o índice efetivo não convergirá ao índice efetivo esperado.

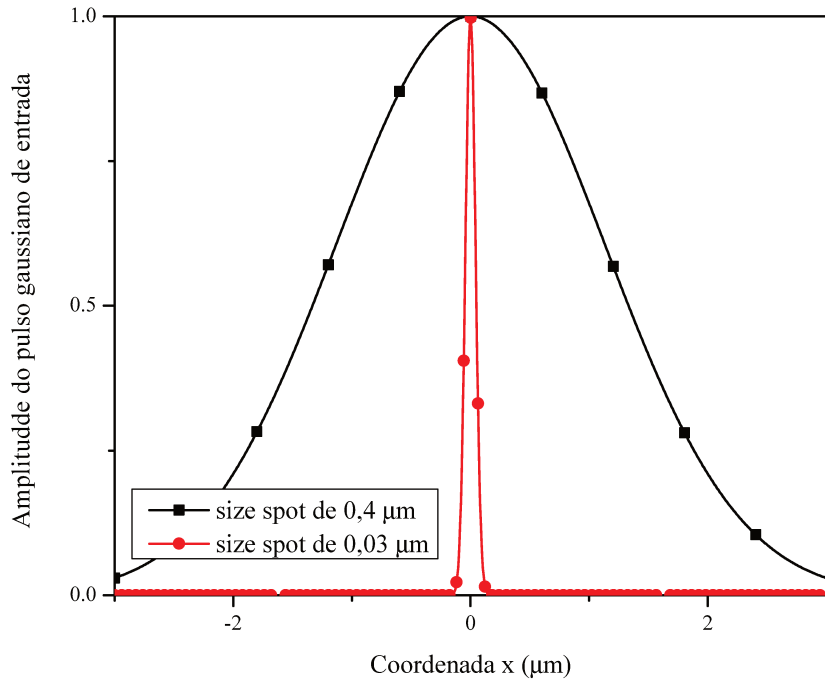


Figura 5.19: Amplitude do pulso gaussiano de entrada com *spot size* $0,4\mu\text{m}$ e $0,03\mu\text{m}$.

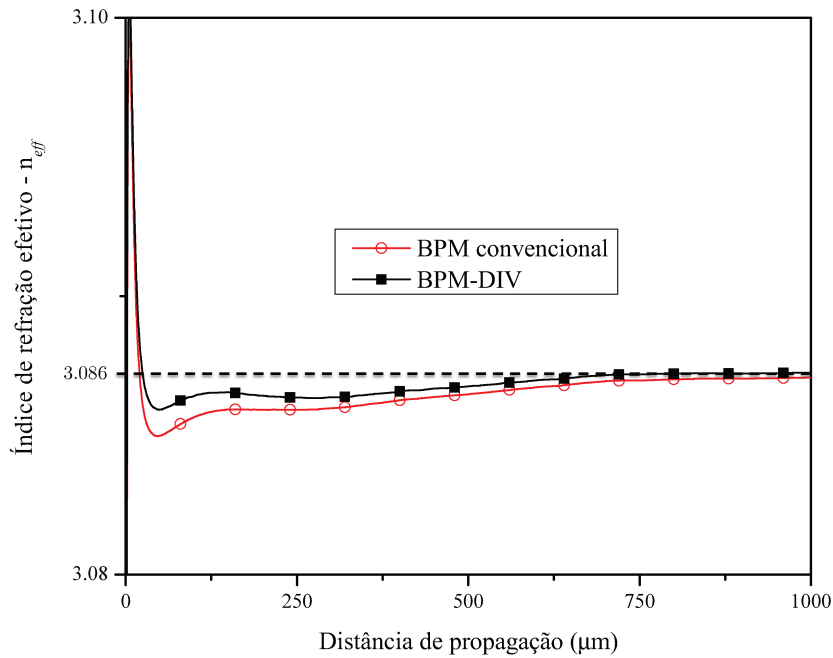
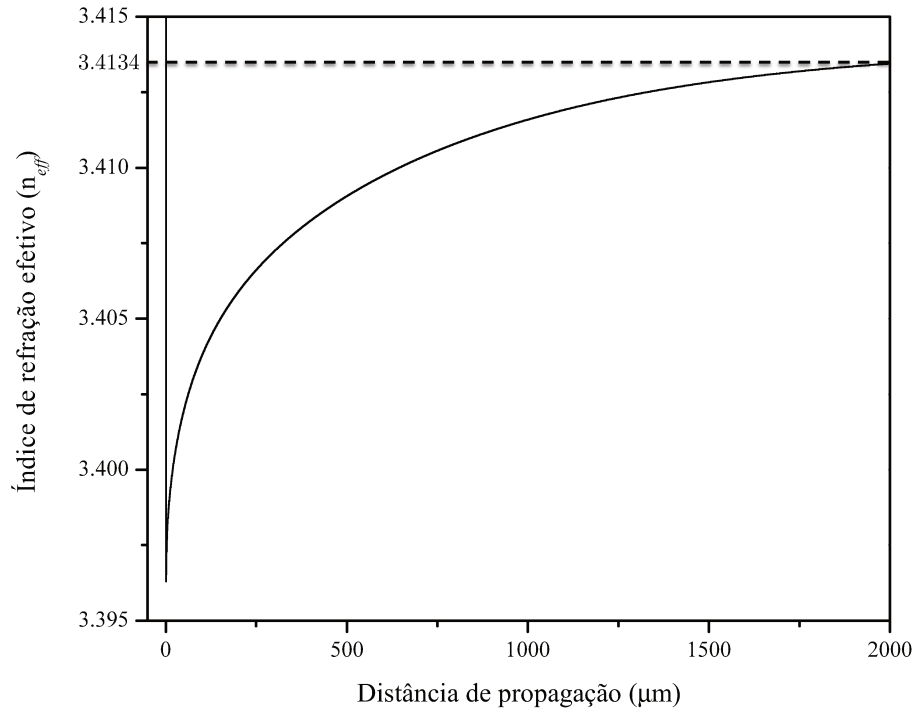
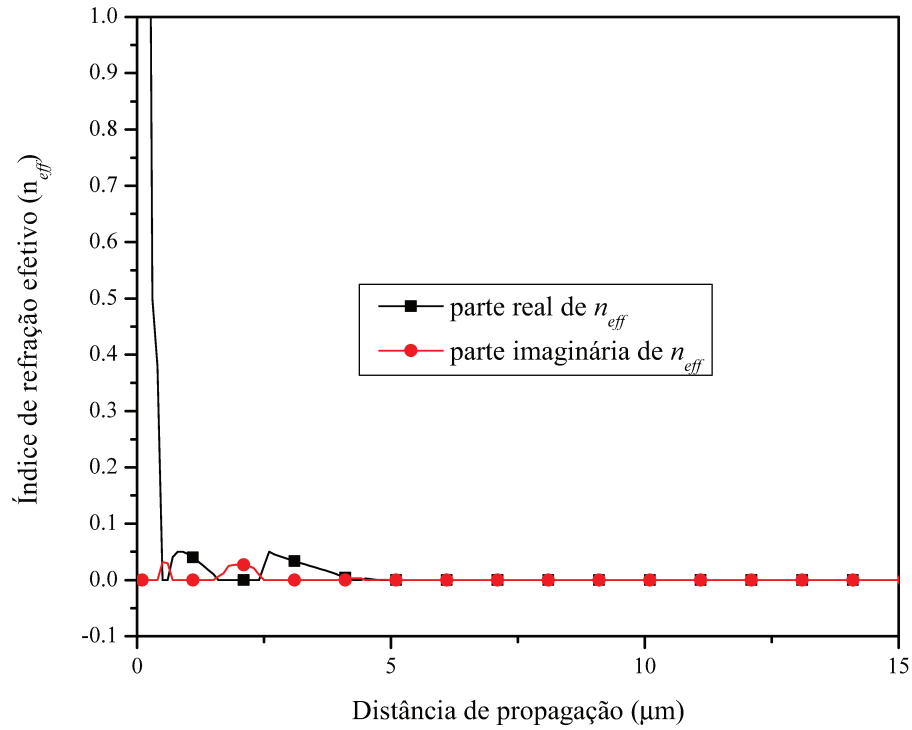


Figura 5.20: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z quando os propagadores são alimentados com pulso gaussiano de *spot size* igual a $0,03\mu\text{m}$.

A Figura 5.21 mostra a evolução do índice de refração de referência para a aproximação paraxial dos esquemas BPM convencional e BPM-DIV em $\lambda_0 = 1,1\mu\text{m}$, quando o feixe gaussiano é poluído com um modo espúrio de peso $p = 0,4$ e $\Delta z = 0,1\mu\text{m}$.



(a) BPM paraxial convencional



(b) BPM-DIV paraxial

Figura 5.21: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z para feixe gaussiano poluído com modo espúrio de peso $p = 0,4$. (a) BPM convencional. (b) BPM-DIV.

Foram testados diversos pesos do modo espúrio na composição do pulso gaussiano e foi

observado que para $p \geq 0,35$, enquanto o esquema BPM convencional paraxial se propaga sem sentir a presença do modo espúrio, os campos eletromagnéticos e, conseqüentemente, o índice de refração de referência, calculados pelo esquema BPM-DIV paraxial, convergem rapidamente para zero após poucas iterações. Comparando os resultados apresentados nas Figuras 5.20 e 5.21 pode-se concluir que a perda da convergência do BPM-DIV paraxial não pode ser atribuída apenas à aplicação de um pulso de banda espectral mais larga que sua abertura, mas, sim, devido à presença do modo espúrio na composição espectral no pulso de entrada.

5.4.2 Acoplador Direcional com Fibra Óptica

Prosseguindo com os testes de convergência e estabilidade dos esquemas BPM quando submetidos a uma perturbação em virtude de modos espúrios, será analisado o acoplador direcional mostrado na Figura 5.12. Para se obter os modos espúrios, necessários para poluir o feixe de entrada, o domínio computacional foi discretizado usando uma malha com 2.000 elementos, resultando na geração de 4.190 modos espúrios. Vários modos espúrios foram testados e todos os testes apresentaram os resultados reportados a seguir.

A Figura 5.22 mostra evolução do índice de refração efetivo, calculado pelos BPM convencional e DIV de ângulo largo, para o acoplador direcional ao longo da direção de propagação, referente à propagação mostrada na Figura 5.13, isto é, para $p = 0$ e para um índice de referência inicial de $n_{eff} = 1.5331$. Observe que o índice de referência varia ao longo da propagação, convergindo para $n_{eff} = 1.546$, o índice do modo E_{11}^x .

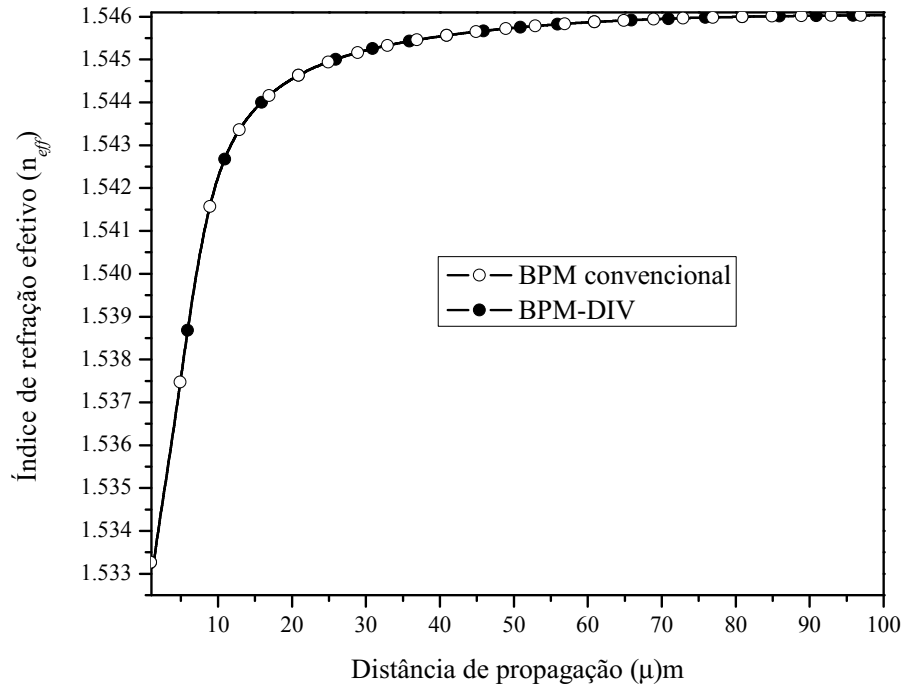


Figura 5.22: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z quando os propagadores são alimentados com pulso gaussiano de *spot size* igual a $0,03\mu\text{m}$.

Uma vez levantada a curva de índice de refração de referência para um pulso de entrada

livre de modos espúrios, os teste prosseguiram alimentando o propagador com um feixe gaussiano poluído com modos espúrios conforme definido na equação (5.1), variando o parâmetro p . Observou-se que para $p < 0,3$ os dois esquemas são equivalentes e os índices de refração calculados através do BPM convencional e BPM-DIV convergem para $n_{eff} = 1.546$. Contudo, para $p \geq 0,3$ a presença dos modos espúrios afeta significativamente a propagação no BPM convencional, conforme mostra a Figura 5.23.

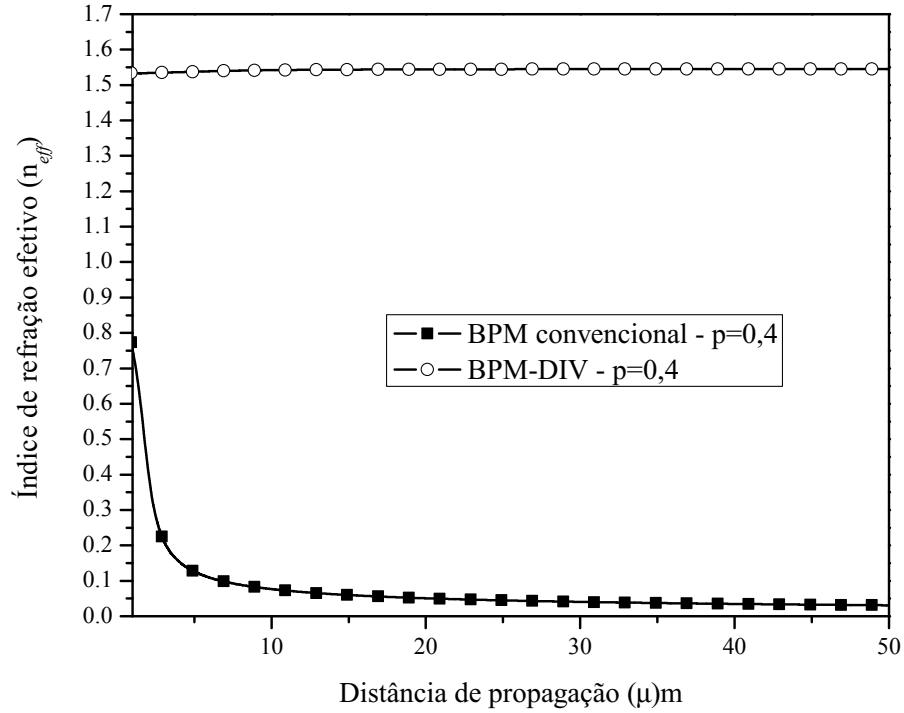


Figura 5.23: Índice de refração efetivo n_{eff} versus a distância de propagação ao longo de z quando os propagadores BPM convencional e BPM-DIV são alimentados com pulso gaussiano de poluído com um modo espúrio de peso $p = 0,4$.

Como pode ser observado, enquanto o índice de referência calculado pelo BPM-DIV converge para o índice de referência do modo E_{11}^x , mostrado na Figura 5.22, o índice de referência calculado pelo BPM convencional converge para zero à medida que o pulso se propaga na estrutura. Este fenômeno pode ser melhor entendido analisando a distribuição de campo na seção transversal do acoplador em alguns pontos ao longo da direção de propagação, mostrado na Figura 5.24. Observe que enquanto o BPM-DIV não sente a presença do modo espúrio, permitindo ao feixe gaussiano se acoplar à fibra óptica adjacente, o mesmo não acontece com o BPM convencional. Nesse caso, a presença do modo espúrio com peso $p \geq 0,3$ faz com que o feixe vá se atenuando à medida que se propaga na fibra, não permitindo, assim, o acoplamento ao guia adjacente como no caso anterior. Foram testados vários modos espúrios, aleatoriamente escolhido no espectro modal, e em todos os teste foram observados o mesmo comportamento acima descrito.

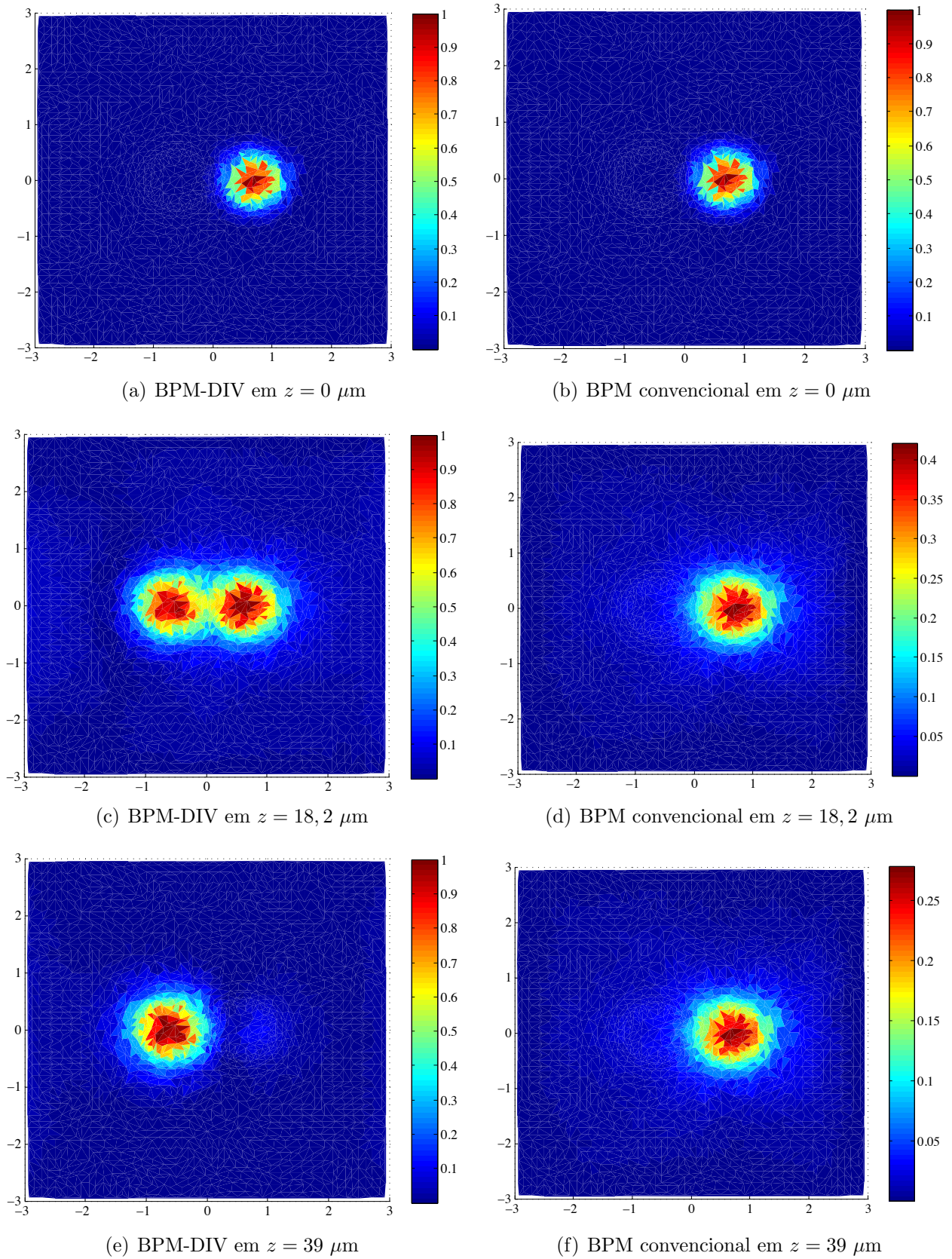


Figura 5.24: Distribuição espacial da componente do campo elétrico E_t (V/m) calculada através do BPM-DIV e BPM convencional. (a) BPM-DIV em $z = 0 \mu\text{m}$ (b) BPM convencional em $z = 0 \mu\text{m}$ (c) BPM-DIV em $z = 18,2 \mu\text{m}$ (d) $z = 18,2 \mu\text{m}$ (e) BPM-DIV em $z = 39 \mu\text{m}$ (f) BPM convencional em $z = 39 \mu\text{m}$.

5.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados resultados numéricos das formulações BPM convencional e BPM-DIV derivadas no Capítulo 4. A estrutura escolhida para teste foi o guia de ondas mostrado na Figura 5.1, um guia de ondas óptico de alto contraste e com condições de contorno absorventes. Os testes de convergência foram feitos discretizando o domínio computacional com uma malha contendo 10.765 nós e 21.102 elementos e aplicando-se um pulso gaussiano na entrada do guia e propagando esse pulso ao longo da direção axial. Os resultados apresentados nas Figuras 5.3 a 5.11 indicam que sob tais condições o esquema BPM-DIV converge tão bem quanto o esquema BPM convencional. O Capítulo também apresenta os testes de estabilidade e convergência dos BPMs convencional e DIV.

Do ponto de vista de estabilidade os testes mostraram que nenhum dos esquemas apresenta ganho não-físico devido à presença de modos espúrios no espectro do feixe de entrada, independentemente da magnitude de tais modos no espectro do pulso inicial, corroborando os resultados teóricos obtidos no capítulo anterior. Para o caso do guia canal, a presença dos modos espúrios é sentida pelos esquemas de propagação e, independentemente de sua intensidade, os esquemas BPM de ângulo largo mantêm a precisão e a convergência. Na análise dos esquemas BPM com aproximação paraxial, entretanto, os modos espúrios apresentaram efeito negativo sobre o BPM-DIV. Nesse caso, enquanto o peso dos modos espúrios foi mantida abaixo de certo limite, $p \leq 0,35$, os dois esquemas apresentaram excelente convergência, como pode ser observado nas Figuras 5.18. À medida que o peso dos modos espúrios na composição do pulso de entrada foi aumentado, $p \geq 0,4$, o BPM convencional, apesar da rápida variação do índice de referência, mantém a convergência, como mostra a Figura 5.21(a), indicando que o esquema não foi afetado pela presença dos modos espúrios. Contudo, nesta situação, a convergência do BPM-DIV paraxial é seriamente afetada. Os campos se degradam rapidamente, levando o índice de refração efetivo a zero, como mostrado na Figura 5.21(b).

Os testes com o acoplador óptico, contudo, mostraram um comportamento diferente do observado anteriormente quando o feixe de entrada é poluído com um modo espúrio. Nesse caso, os esquemas BPM-DIV de ângulo largo e paraxial mostram-se mais robustos quando submetidos a modos espúrios com peso $p \geq 0,3$, não sendo afetados pela presença dos modos não-físicos presentes na composição do feixe de entrada. Nos esquemas BPM convencional, contudo, a presença dos modos não-físicos na composição do feixe de alimentação não permite o acoplamento fibra-fibra e os campos vão sendo gradualmente degradados à medida que se propagam.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Conclusões

Os esforços despendidos ao longo desse trabalho tiveram como objetivo estudar como os modos espúrios afetam formulações no domínio da frequência, especificamente os efeitos dessas soluções não-físicas na análise modal e em esquemas de propagação de feixes na modelagem de guias de onda por elementos finitos vetoriais.

O ponto de partida dessa tese foi um trabalho publicado por Demkowicz (Vardapetyan & Demkowicz 2002) na tentativa de eliminar os modos associados a soluções não-físicas localizadas no autovalor nulo das matrizes de elementos finitos vetoriais, impondo a equação do divergente nulo na formulação modal. Esta técnica é claramente inspirada nas técnicas desenvolvidas no final dos anos 80 e inícios dos anos 90, onde a equação do divergente era imposta na formulação modal pela eliminação da componente longitudinal do campo elétrico ou magnético (Hernández-Figueroa et al. 1995). Essa formulação é apresentada em detalhes no Capítulo 2, onde a equação vetorial de onda é decomposta em suas componentes transversal e longitudinal e, então, a equação de Gauss é forçada na formulação, substituindo a componente axial da equação de onda. O novo sistema é, então, discretizado usando elementos finitos mistos, isto é, elementos de aresta para modelar as componentes transversais e elementos nodais para modelar a componente axial dos campos eletromagnéticos. A partir da normalização da componente axial do campo eletromagnético é possível se obter dois sistemas lineares para o cálculo dos autovalores, e é aqui que os resultados apresentados nesse trabalho divergem dos resultados publicados por Demkowicz. De acordo com Demkowicz essa formulação resultaria num sistema linear livre de modos espúrios. Contudo, como pode ser observado na análise apresentada no Capítulo 2, a imposição da equação de Gauss na formulação modal não suprime os modos espúrios do espectro finito. O que acontece é que, dependendo da normalização utilizada, essas soluções não-físicas podem ser alocadas ou no autovalor nulo ou no autovalor infinito.

A nova formulação foi implementada computacionalmente e os resultados numéricos são apresentados no Capítulo 3. Através desses testes, pode ser observado que a formulação modal, usando a equação de Gauss, mostra excelente precisão na modelagem de estruturas complexas nas faixas de micro-ondas e ópticas, apresentando-se como uma alternativa à formulação modal convencional. Além disso, contrariamente ao afirmado por Demkowicz, os testes computacionais confirmaram a análise teórica apresentada no capítulo anterior, mostrando que modos espúrios

fazem parte do espectro de soluções do problema de autovalores independente da formulação, tipo ou número de elementos utilizados na malha de elementos finitos. Aqui também são mostradas distribuições de campo dos modos espúrios e pode ser observado que tal distribuição é completamente aleatória sobre o domínio computacional, não se assemelhando a nenhum tipo de distribuição de campo associada a modos físicos.

Uma vez que a formulação modal usando a condição do divergente, a exemplo da formulação modal convencional, não elimina os modos espúrios do espectro finito, partiu-se para a segunda etapa do trabalho – investigar os efeitos desses modos não-físicos sobre os esquemas de propagação de feixes na modelagem por elementos finitos híbridos. Aqui, além do equacionamento detalhado da formulação BPM convencional, um novo esquema de propagação de feixe baseado nos elementos finitos híbridos é proposto, onde a componente longitudinal da equação vetorial de onda é substituída pela equação do divergente nulo.

Assumindo que os modos espúrios presentes nas matrizes de elementos finitos, a exemplo do que acontece com BPM baseados em Diferenças Finitas e também Elementos Finitos Vetoriais, poderia levar os BPMs baseados em Elementos Finitos Vetoriais a ganhos ou atenuações não-físicas, as formulações BPM são submetidas a uma análise de estabilidade, onde se conclui que os modos espúrios, se presentes no espectro do sinal de entrada, não afetariam os esquemas de propagação de feixes. Os resultados numéricos gerados a partir de algoritmos baseados nas formulações derivadas no Capítulo 4 mostraram que o novo esquema de propagação de feixes – BPM-DIV de ângulo largo é robusto e, assim como o BPM convencional de ângulo largo, apresenta excelente convergência quando pulsos gaussianos são aplicados na entrada do propagador. Os testes também mostraram que, diferentemente do que acontece com os FD-BPM e FE-BPM nodal, a presença de modos espúrios no espectro de entrada não leva os BPMs baseados em Elementos Finitos Vetoriais a ganhos não-físicos, corroborando a análise teórica apresentada no Capítulo 4. Os teste numéricos mostraram ainda que, para o guias canal de alto contraste a presença dos modos espúrios é sentida pelos esquemas de propagação de feixes com aproximação paraxial. Aqui observou-se a principal diferença entre o BPM convencional e o BPM-DIV proposto nessa tese. Enquanto o BPM convencional, com aproximação paraxial, não é afetado pelos modos espúrios, o BPM-DIV paraxial é susceptível à presença dessas soluções não-físicas que, dependendo de seu peso, podem comprometer a convergência do BPM-DIV paraxial. No caso do acoplador direcional, contudo, as simulações numéricas mostraram um comportamento diferente do observado anteriormente quando o feixe de entrada é poluído com um modo espúrio. Nesse caso, os esquemas BPM-DIV de ângulo largo e paraxial mostram-se mais robustos quando submetidos a modos espúrios com peso $p \geq 0,3$, não sendo afetados pela presença desses modos não-físicos presentes na composição do feixe de entrada. Os esquemas BPM convencional, contudo, a presença do modos não-físicos na composição do feixe de alimentação não permite o acoplamento fibra-fibra e os campos vão sendo gradualmente degradados à medida que se propagam.

Trabalhos Futuros

Os resultados apresentados nessa tese mostram que, embora os modos espúrios não afetem a estabilidade dos esquemas BPM, os modos modos espúrios podem ser uma fonte de erro

na análise de determinadas estruturas. Tais resultados mostram a necessidade de se analisar outros tipos de estruturas, tais como as fibras de cristais fotônicos – PCF, cujos testes não foram possíveis por limitações computacionais. Tais estruturas serão testadas assim que ampliarmos nossa capacidade computacional para que se possa colher resultados confiáveis, uma vez que tais fibras requerem malhas extremamente refinadas.

Embora essa tese tenha mostrado que a presença de modos espúrios não compromete substancialmente o desempenho de algoritmos dinâmicos no domínio da frequência, a solução computacional da equação vetorial de onda no domínio do tempo em três dimensões ainda se constitui um desafio, uma vez que a presença dos modos espúrios nos espaços nulos dos operadores de segunda ordem temporal e rotacional tende a provocar instabilidade nos códigos baseados em elementos finitos vetoriais (Donderici & Teixeira 2008). Assim, como extensão natural desse trabalho, sugere-se atacar os problemas dinâmicos tempo-espaciais utilizando a técnica Galerkin Descontínuo 3D (Hille, Kullock, Grafström & Eng 2010, Cohen, Ferrieres & Pernet 2006). Essencialmente o método Galerkin Descontínuo é uma variante do FEM convencional. O domínio computacional é dividido em um conjunto de elementos, a malha, e em cada elemento os campos eletromagnéticos são expandidos em termos de um conjunto de funções de base. A principal diferença para o FEM é que essas bases são restritas aos respectivos elementos, sendo nulas em todos os outros elementos – especialmente nos elementos vizinhos. Dessa forma, na interface entre dois elementos vizinhos podem existir dois valores diferentes de campo eletromagnético, um para cada elemento - daí a origem do termo ‘descontínuo’ do nome do método. Sem a possibilidade da sobreposição das funções de base entre elementos vizinhos como mecanismo de acoplamento, faz-se necessário, então, tratar elementos individualmente, aplicando as técnicas de expansão para gerar as matrizes elementares. Uma vez calculadas as matrizes em cada um dos elementos, o acoplamento entre os elementos é forçado usando o conceito de fluxo numérico. Dessa forma, se obtém um sistema semi-discreto: discretizado no espaço e contínuo no tempo. Nesse ponto ou usa-se uma técnica de integração temporal similar ao FDTD para resolver o sistema no domínio do tempo ou resolve-se o sistema no domínio da frequência. Vale ressaltar que o sistema temporal resultante combina as vantagens tanto do FDTD quanto do FEM, uma vez que é tão preciso quando o FEM e tão rápido quando o FDTD, onde cada elemento de malha avança no tempo de maneira síncrona, usando seu passo temporal próprio. Isso, além de garantir a estabilidade numérica, proporciona um significativo ganho no tempo de processamento para malhas não-estruturadas, uma vez que os elementos maiores usam passos temporais de ordem duas a cinco vezes maiores que os menores elementos da malha (Stannigel, König, Niegemann & Busch 2009, H. Songoro & Cendes 2010).

Publicações

Oliveira, L. P. ; Figueroa H. E. H.. BPM schemes for the FEM Modelling of Optical Waveguides. In Fiber and Integrated Optics, submetido.

Peternella, F. G. ; Oliveira, L. P. ; Figueroa, H. E. H. . Novel FEM Modal Simulator for Photonic Structures Completely Free of Spurious Modes. In: Information Photonics 2011, 2011, Ottawa. Proceedings of Information Photonics 2011, 2011.

Figuerola, H. E. H. ; Gonçalves, M. S. ; Oliveira, L. P. . Numerical Modeling Challenges for Guided-Wave Photonic Device Simulations. In: Photonics North, 2009, Québec. Photonics North, 2009.

Referências Bibliográficas

- Cendes, Z. J. (1991). Vector finite elements for electromagnetic field computation, *IEEE Trans. on Magnetics* **27**(5): 3958–3966.
- Cendes, Z. J. & Silvester, P. (1970). Numerical solution of dielectric loaded waveguides: I – finite-element analysis, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech* **MTT-18**: 1124–1131.
- Chang & Dagli, N. (1991). Analysis of z-invariant and z-variant semi-conductor rib waveguides by explicit finite difference beam propagation method with nonuniform mesh configuration, *IEEE Journal Quantum Electronic* **27**: 2295–2305.
- Chilton, R. A. & Lee, R. (2007). Late-time instability of the finite element time domain (fetd) method when using newmark time integration, *Antennas and Propagation Society International Symposium* pp. 5071–5074.
- Cohen, G., Ferrieres, X. & Pernet, S. (2006). A spatial high-order hexahedral discontinuous galerkin method to solve maxwell’s equations in time domain, *Journal of Computational Physics* **217**: 340–363.
- da Silva, J. P., Frasson, A. & Hernandez-Figueroa, H. (2003). Improved vectorial finite-element bpm analysis for transverse anisotropic media, *Journal of Lightwave Technology* **21**(2): 567–576.
- Demmel, J. W. (1997). *Applied Numerical Linear Algebra*, first edn, Siam.
- Donderici, B. & Teixeira, F. L. (2008). Mixed finite-element time-domain method for transient maxwell equations in doubly dispersive media, *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.* **56**(1): 113–120.
- Dyczij-Edlinger, R., Peng, G. & Lee, J. F. (2000). Stability conditions for using tvfems to solve maxwell equations in the frequency domain, *International Journal of Numerical Modeling* **13**: 245–260.
- Fernandez, F. A., Lu, Y., Davis, J. B. & Zhu, S. (1993). Finite element analysis of complex modes in inhomogeneous waveguides, *IEEE Transactions on Magnetics* **29**(2): 1601–1604.
- Gonçalves, M., Figueroa, H. & Bordonalli, A. (2006). Time-domain full-band method using orthogonal edge basis functions, *IEEE Photonics Technology Letters* **18**: 52–54.

- H. Songoro, M. V. & Cendes, Z. (2010). Keeping time with maxwell's equations, *IEEE Microwave Magazine* pp. 43—49.
- Hadley, G. R. (1992). Wide-angle beam propagation using padé approximant operators, *Optic Letter* **20**: 1426–1428.
- Hadley, G. R. (1993). Wide angle beam propagation using padé approximant operator, *Optic Letters* **17**(2): 1426–1428.
- Hadley, G. R. (2002). High accuracy finite difference equations for dielectric waveguide analysis ii: Dielectric corners, *Journal of Lightwave Technology* **20**(20): 531–534.
- Hano, M. (1984). Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguides, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech* **MTT-32**: 1275–1279.
- He, B. & Teixeira, F. L. (2007). Differential forms, galerkin duality, and space inverse approximations in finite element solutions of maxwell equations, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **AP-55**(5): 1359–1368.
- Hernández-Figueroa, H. E. (1994). Simple nonparaxial beam-propagation method for integrated optics, *Journal of Lightwave Technology* **12**: 644–649.
- Hernández-Figueroa, H. E., Fernández, A. F., Lu, Y. & Davies, J. B. (1995). Vectorial finite element modelling of 2d leaky waveguides, *IEEE Trans. on Magnetics* **31**(5): 1710–1713.
- Hille, A., Kullock, R., Grafström, S. & Eng, L. M. (2010). Improving nano-optical simulations through curved elements implemented within the discontinuous galerkin method, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* **7**(8): 1581–1586.
- Hwang, C. T. & Wu, R. B. (1999). Treating late-time instability of hybrid finite-element/finite difference time-domain method, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **47**(2): 227–232.
- Jiang, B., Wu, J. & Povinelli, L. A. (1996). The origin of spurious solutions in computational electromagnetics, *Journal of Computational Physics* **125**: 104–123.
- Jin, J. (2002). *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley Sons, Inc.
- Kobelansky, A. J. & Webb, J. P. (1986). Eliminating spurious modes in finite-element waveguide problems by using divergence-free fields, *Electronic Letters* **22**: 569–570.
- Konrad, A. (1976). Vector variational formulation of electromagnetic fields in anisotropic media, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech* **MTT-14**: 553–559.
- Koshiba, M. & Suzuki, M. (1986). Finite-element analysis of h-plane waveguide junction with arbitrary shaped ferrite post, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech* **MTT-34**: 103–109.

- Lee, J., Sun, D. & Cendes, Z. J. (1991). Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech* **MTT-39**(8): 1262–1271.
- Lee, S., Lee, J. F. & Lee, R. (2003). Hierarchical vector finite elements for analysing waveguiding structures, *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.* **51**: 1897–1905.
- MathWorks (2011).
URL: <http://http://www.mathworks.com/>
- Monk, P. (2003). *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, first edn, Oxford University Press.
- Mur, G. & Lager, I. E. (2002). On the causes of spurious solutions in electromagnetics, *Electromagnetics* **22**: 357–367.
- Nolting, H. P. & März, R. (1995). Results of benchmark tests for different numerical bpm algorithms, *Journal of Lightwave Technology* **13**: 216–224.
- Pelosi, G. & Coccioli, R. (1998). *Quick Finite Elements for Electromagnetic Waves*, first edn, Artech House.
- Pintus, P., Pasquale, F. & Bowers, J. E. (2011). Design of transverse electric ring isolators for ultra-low-loss si_3n_4 waveguides based on the finite element method, *Optics Letters* **36**(23): 4599–4601.
- Rahman, B. M. A. & Davies, J. B. (1984). Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements, *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.* **MTT-32**(8): 922–928.
- Saitoh, K. & Koshiba, M. (2001). Full-vectorial finite element beam propagation method with perfectly matched layers for anisotropic optical waveguides, *Journal of Lightwave Technology* **19**(3): 405–413.
- Schultz, D., Gingerer, C., Bludsuweit, M. & Voges, E. (1998). Mixed finite element beam propagation method, *Journal of Lightwave Technology* **16**(7): 1336–1341.
- Schulz, D., Glingener, C. & Voges, E. (1994). Novel generalized finite- difference beam propagation method, *IEEE Journal Quantum Electronic* **30**: 2295–2305.
- Stannigel, K., König, M., Niegemann, J. & Busch, K. (2009). Discontinuous galerkin time-domain computations of metallic nanostructures, *Optics Express* **17**(17): 14934–14947.
- Sun, D., Manges, J., Yuan, X. & Cendes, Z. (1995). Spurious modes in finite-element methods, *IEEE Antennas and Propagation Mag* **37**(5): 12–24.
- Tai, C. T. (1994). *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, second edn, IEEE Press.
- Vardapetyan, L. & Demkowicz, L. (2002). hp-vector finite element method for the full-wave analysis of waveguides with no spurious modes, *Electromagnetics* **22**(1): 419–428.

- Wang, R., Riley, D. J. & Jin, J. M. (2010). Application of tree-cotree splitting to time-domain finite element analysis of electromagnetic problems, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **58**: 1590–1600.
- Wong, S. H. & Cendes, Z. J. (1988). Combined finite element-modal solution of three-dimensional eddy current problems, *IEEE Trans. on Magnetics* **24**: 2685–2687.
- Yevick, D. & Hermansson, B. (1990). Efficient beam propagation techniques, *IEEE Journal Quantum Electronic* **30**: 109–112.
- Yevick, D., Yu, J., Bardyszewski, W., & Glasner, M. (1995). Stability issues in vector electric field propagation, *IEEE Photonics Technology Letter* **7**: 658—660.