

Este exemplar é a cópia final da tese
defendida por Alexandre A. Machado
em sessão
Julgada em 03 de agosto de 1995
Leandro
Professor

Análise da Propagação de Sólitons Usando a Técnica FDTD

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Comunicações, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica.

Autor

Alexandre Amorim Machado
Engenheiro Eletricista pelo INATEL em 1993

Orientador

Prof. Dr. Leonardo de Souza Mendes
PhD em Engenharia Elétrica Syracuse University em 1992

Campinas, 03 de agosto de 1995.

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	M 18 a
V.	Ex.
TOMBO D.	28543
PROC.	667/96
C	☐ D ☒ X
PREÇO	788,11,00
DATA	12/09/96
N.º CPD	

CM-00091622-4

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M18a

Machado, Alexandre Amorim

Análise da propagação de sólitons usando a técnica
FDTD / Alexandre Amorim Machado.--Campinas, SP:
[s.n.], 1995.

Orientador: Leonardo de Souza Mendes.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica.

1. Sólitos. 2. Métodos numéricos. 3. Comunicações
ópticas. 4. Equações diferenciais - Soluções numéricas. I.
Mendes, Leonardo de Souza. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica. III. Título.

Abstract

In this work, the method of finite difference in time domain (FDTD) is applied in the analysis and characterization of the propagation of soliton pulses. From Maxwell equations, with the introduction of the linear and nonlinear convolution as new variables, an FDTD algorithm is developed. Relevant aspects of the FDTD method and the basic soliton theory are studied. Some aspects of the soliton communication systems are also discussed. Results are obtained for one dimensional pulse propagation in the femtosecond regime in linear and nonlinear media.

Sumário

Neste trabalho o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) é usado na análise e caracterização da propagação de pulsos solitônicos. Das equações de Maxwell, introduzindo-se as convoluções linear e não-linear como novas variáveis, é desenvolvido um algoritmo baseado no método FDTD. No decorrer do trabalho, são estudados aspectos relevantes do método FDTD bem como a teoria básica de sólitons em fibras ópticas. Menciona-se ainda aspectos da engenharia dos sistemas de comunicações baseados nesses tipos de pulsos. Resultados de propagação em uma dimensão para ondas em regimes de operação de fs , em meios linear e não-linear, bem como a análise do seu comportamento espectral em função da distância propagada, são simulados.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao amigo e Professor Doutor Leonardo Mendes, pela dedicação, pela orientação, pelo material fornecido para o desenvolvimento deste e por acima de tudo, pela enorme paciência com o meu trabalho. Sempre disposto a ajudar, é um exemplo a ser seguido.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho. O Jackson pela mão nos programas, o Rodrigo e o Antônio com suas dicas sempre quentes, o Miguel e o seu *scanner*, o Jean Faustino pela sua ajuda no *Unix*, o Carlos Caballero e suas novidades, e por fim, o Mário Nimini no suporte das máquinas.

A todo pessoal que faz e fez da minha estadia em Campinas mais agradável, o meu agradecimento: Moisés, os Segatto (Marcelo e Goiaba), Thales, Cristian, Mateus, Fred, Nilton, Gaúcho, Pinga, Fançony, Gilmar, Zumba, Gean, Sandro, Edgard, Flávia, Edmílson, Flávia (Jacaré), Débora, Silvana, Fabiana, Cristiana, Chung, Rubem, Mazurco, Sérgio, Edson, Ricardo, Léo, Manoel, Arpasi, Ana, Edneu, Emiliano, Natanael, Luciano, Osmar, Paulo, ...

Ao pessoal da república do “Seu Alfredo”, um enorme abraço de agradecimento.

Ao grande amigo Alexandre Surerus (ô véi!) pelo apoio, e principalmente pelas horas de “divertimento”, um obrigado é pouco.

Agradeço à minha namorada Marília pelo seu humor, por sua dedicação, companheirismo e pelo apoio nas horas difíceis.

A minha mãe e a minha irmã, pela ajuda prestada nos momentos críticos da minha vida.

Finalmente, a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

Índice

1. Introdução

1.1 Considerações Iniciais.....	1
1.2 A Óptica Não-linear Ultra-Rápida.....	2
1.3 A Óptica Não-linear nas Comunicações.....	2
1.4 Os Métodos de Análise.....	3
1.5 Objetivos Deste Trabalho.....	4

2. Óptica Não-linear

2.1 Introdução.....	6
2.2 Origens da Não-linearidade em Óptica.....	7
2.3 Equações de Maxwell.....	8
2.3.1 Equação de Onda.....	9
2.4 Polarização Linear e Não-linear da Matéria.....	10
2.4.1 A Polarização Linear.....	11
2.4.2 A Polarização Não-linear.....	11
2.4.3 Considerações sobre a Simetria dos Materiais.....	13
2.4.4 Formulação Matemática para Tratamento da Propagação de Ondas Ópticas.....	13
2.5 Análise da Propagação de Pulsos em Fibras Ópticas.....	16
2.6 A Equação Não-linear de Schrödinger.....	20
2.7 Considerações Finais.....	21

3. Sólitons em Fibras Ópticas

3.1 Introdução e Aspectos Históricos.....	22
3.2 Regimes de Propagação.....	24
3.3 Dispersão da Velocidade de Grupo.....	25
3.3.1 Dispersão Cromática da Fibra.....	26
3.3.2 As Evoluções do Pulso no Tempo e na Frequência em Função da Distância Propagada.....	29
3.3.3. Considerações sobre a Dispersão de Maior Ordem.....	31
3.4 Auto-modulação de Fase.....	34
3.4.1 As Evoluções do Pulso no Tempo e na Frequência em Função da Distância Propagada.....	35
3.4.2 A Auto-modulação de Fase em regime de Pulsos de Curta Duração.....	38
3.5 Regime Dispersivo e Não-linear: O Surgimento de Sólitons Ópticos.....	40
3.5.1 A Descrição Matemática.....	41
3.5.1.1 Sóliton Fundamental e de Ordem Superior.....	42
3.5.1.2 As Perdas da Fibra e sua Influência nos Pulsos Solitônicos	44
3.5.1.2.1 Abertura do Sóliton devido às Perdas.....	44

3.5.1.2.2 Amplificação de Pulsos Solitônicos.....	45
3.5.2 Fatores Envolvidos nos Projetos de Sistemas Baseados em Sólitons.....	48
3.5.2.1 Interação entre Pulsos Solitônicos.....	48
3.5.2.2 Espaçamento entre Amplificadores.....	50
3.5.2.3 Ruído do Amplificador.....	51
3.5.3 Efeitos de Ordem Superior e suas Consequências no Sóliton Óptico.....	52
3.5.3.1 Auto-deflexão do Pulso.....	52
3.5.3.2 Auto-desvio em Frequência para o Vermelho.....	54
4. Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo	
4.1 Introdução.....	56
4.2 As Equações de Maxwell Discretizadas: o Algoritmo de Yee.....	57
4.2.1 Condições de Contorno.....	62
4.2.2 Valores Iniciais.....	64
4.2.3 Discretização e Critério de Estabilidade.....	65
4.2.4 Dispersão Numérica do Método.....	66
4.3 FDTD para Meios Dispersivos: $(FD)^2$ TD.....	68
4.3.1 O Método da Convolução no Tempo.....	68
4.3.2 O Método da Equação de Carga no Meio.....	71
4.3.3 Resultados Comparativos entre os Dois Métodos.....	72
4.3.3.1 Propagação em um Meio do Tipo Debye (Dispersão de 1ª ordem).....	73
4.3.3.2 Propagação em um Meio do Tipo Lorentz de 2ª Ordem.....	78
5. Obtenção de Sólitons Ópticos Ultra-Curtos Usando a Técnica FDTD	
5.1 Introdução.....	84
5.2 Formulação do problema.....	85
5.3 O Algoritmo.....	88
5.4 Resultados.....	89
5.4.1 As características do Meio Material.....	89
5.4.2 Considerações Sobre o Método.....	91
5.4.3 Simulação do Sóliton de 2ª Ordem.....	92
5.4.4 Simulação do Sóliton de 3ª Ordem.....	96
5.4.5 Colisão entre sólitons.....	98
6. Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	
6.1 Conclusões.....	100
6.2 Propostas para Trabalhos Futuros.....	101
<i>Apêndice I</i> - Propriedades elétricas da matéria.....	102
<i>Apêndice II</i> - Espalhamento Raman Estimulado.....	109
<i>Apêndice III</i> - Desenvolvimento das Equações que Compõem o Algoritmo.....	116
7. Bibliografia.....	120

Lista de Figuras

3-1	Variação do índice de refração n e do índice de refração n_g de grupo para a sílica fundida.....	28
3-2	Variação de β_2 com o comprimento de onda para a sílica fundida.....	28
3-3	Alargamento temporal sofrido pelo pulso Gaussiano, após a propagar-se por uma distância $z/L_D = 1$	31
3-4	Variação de β_3 com o comprimento de onda para a sílica fundida.....	33
3-5	Visualização dos efeitos causados pela dispersão de maior ordem sobre um pulso gaussiano na entrada.....	34
3-6	Variação temporal do desvio da fase.....	37
3-7	Variação do <i>chirp</i> de frequência ($\delta\omega T_0$) induzido pela <i>SPM</i>	37
3-8	Ilustração do fenômeno de auto-deflexão do pulso que surge com a dependência do índice de refração com a intensidade.....	40
3-9	Métodos de amplificação ópticos para transmissão solitônica sobre longas distâncias.....	47
3-10	Efeito da auto-deflexão do pulso sobre o sóliton fundamental.....	53
3-11	Comparação entre o espectro do sóliton e do efeito Raman da fibra.....	55
4-1	Célula básica de Yee.....	61
4-2	Onda incidindo em um contorno duro para vários steps de tempo.....	63
4-3	Ilustração da incidência de onda em uma parede absorvente. A aproximação usada aqui é a de primeira ordem.....	63
4-4	Velocidade de fase normalizada em função do ângulo de propagação.....	66

4-5	Velocidade de fase normalizada em função do ângulo de propagação.....	67
4-6	Efeito do fator de estabilidade no erro de dispersão numérica.....	67
4-7	Célula de Yee em 1 dimensão.....	72
4-8	Formato inicial do pulso de excitação.....	74
4-9	Espectro de frequências do pulso de excitação.....	75
4-10	Ilustração da onda incidindo na água após 300 steps de tempo usando o método da convolução.....	75
4-11	Formato da onda após 800 steps de tempo usando o método da convolução.....	76
4-12	Incidência de onda para 300 steps de tempo usando-se o método da equação diferencial.....	77
4-13	Onda após 800 steps de tempo utilizando-se o método da equação diferencial.....	78
4-14	Aspecto da distribuição espacial para o campo de excitação.....	80
4-15	Espectro de frequências da excitação utilizada.....	80
4-16	Incidência de onda em um meio Lorentziano após steps de tempo usando-se o método da convolução.....	81
4-17	Ilustração da onda após 800 steps de tempo usando-se o método da convolução.....	81
4-18	Incidência de onda em um meio Lorentziano após steps de tempo usando-se o método da equação da carga no meio.....	83
4-19	Aspecto da onda após 800 steps de tempo usando-se o método da equação da carga no meio.....	83
5-1	Variação do índice de refração com a frequência para o meio adotado...	90
5-2	Variação de β_2 com a frequência.....	91
5-3	Formato do pulso de excitação no tempo para o sóliton de 2 ^a ordem.....	93
5-4	Espectro de frequências do pulso de excitação correspondente ao sóliton de 2 ^a ordem.....	93

5-5	Aspecto do sóliton após 7554 passos de tempo que correspondem ao tempo de excitação.....	94
5-6	Pulso após propagar-se uma distância correspondente a 22000 passos de tempo.....	94
5-7	Pulso após propagar-se uma distância z	95
5-8	Pulso após propagar-se uma distância z em um meio linear dispersivo.....	95
5-9	Comparação entre os espectros inicial e após a propagação do pulso.....	96
5-10	Formato de pulso correspondente ao sóliton de 3ª ordem	97
5-11	Formato do sóliton de 3ª ordem após propagar-se 175 μm no meio.....	97
5-12	Aspecto dos pulsos para 10800 passos de tempo.....	98
5-13	Aspecto dos pulsos para 20250 passos de tempo, mostrando a colisão...	99
5-14	Aspecto dos pulsos para 122500 passos de tempo, evidenciando a inalteração de suas formas.....	99

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações iniciais

A idéia de utilização da luz para as comunicações é antiga e remonta ao início da civilização, quando sinais de fogo eram usados em comunicações rudimentares da época. Depois do grande avanço sofrido pela Física na Idade Média, alguns sábios concluíram que a óptica era uma ciência terminada, conseguindo-se no máximo aperfeiçoar os conhecimentos já adquiridos. Obviamente, esta previsão falhou e surgiram os lasers, a termovisão, a holografia, os componentes magnetoópticos e eletroópticos, as fibras ópticas, os efeitos não-lineares, etc. [1] .

Um dos frutos da pesquisa tecnológica deste século foi a óptica não-linear. Embora os fenômenos não-lineares já fossem discutidos teoricamente nos anos 30, o primeiro experimento demonstrando a geração de segundo harmônico foi realizado um ano após a operação do primeiro laser [2]. A óptica não-linear experimentou uma mudança considerável na década de 80 com a sua divisão em um grande número de sub-áreas. Dentre essas, pode-se destacar a óptica não-linear ultra-rápida.

1.2 A óptica não-linear ultra-rápida

O adjetivo *ultra-rápido* é usado nesse trabalho, para designar eventos que ocorram em uma escala de tempo menor ou igual a 1 ps . A óptica não-linear, evidentemente, refere-se às interações da luz com a matéria em que a intensidade da luz determina a resposta do material. Existe uma relação forte entre os dois conceitos. Os efeitos da óptica não-linear exercem um papel fundamental na geração de pulsos ópticos ultra-rápidos. De maneira inversa, pulsos ópticos ultra-rápidos permitem a investigação experimental de novos fenômenos não-lineares [2].

A motivação no uso de pulsos ultra-rápidos em uma dada aplicação obedece invariavelmente a duas razões: quando busca-se uma resolução temporal adequada para resolver o processo de interesse ou quando é requerida uma alta potência de pico em um pulso com energia relativamente pequena.

Esses pulsos não são gerados em todos os comprimentos de onda de interesse. Na realidade, um número desproporcional de experimentos são realizados na região do laranja, onde a maioria das fontes estão disponíveis [2]. Somente poucas aplicações são significantes o bastante para influenciar no desenvolvimento de novos lasers em outros comprimentos de onda. A pesquisa de componentes semicondutores de Arsenieto de Gálio em 800 nm e as comunicações ópticas em 1550 nm são exemplos disso.

1.3 A óptica não-linear nas comunicações

Com o aumento das taxas envolvidas na transmissão, armazenamento e processamento da informação, os sistemas ópticos se transformaram em uma excepcional alternativa para vencer o gargalo existente nos sistemas eletrônicos convencionais [3]. Crescentes aumentos nas taxas de transmissão, levarão à necessidade de se ter sistemas com capacidades ainda maiores, que devido a vários fatores não poderão ser realizados baseados na óptica linear convencional, assumindo, desta forma, a óptica não-linear um papel fundamental nas comunicações futuras.

Dentro desse quadro, os sólitons ópticos [2,4,5] possuem algumas características que os credenciam a ser uma das opções de uso em comunicações a longas distâncias e em

altas taxas, além de seu uso em processamentos ópticos de sinais. Logo, o estudo e compreensão dessas características se torna fundamental e é de grande interesse no cenário atual.

1.4 Os métodos de análise

O projeto de sistemas ópticos requer uma compreensão detalhada dos vários fatores que afetam as características dos seus vários componentes. É, portanto, de fundamental importância o desenvolvimento de métodos de análise que possam fornecer um entendimento mais completo dessas características. Somado a isso, um método preciso pode emular a operação dos componentes e circuitos, criando meios para exploração de novas idéias para esses dispositivos e sistemas sem os gastos (na maioria das vezes elevados) de fabricação e testes.

Existem vários métodos numéricos usados no estudo de efeitos não-lineares em fibras ópticas [6]. Dentre esses, pode-se destacar o método de Fourier de passo dividido (*"split step Fourier method"*) [6,7] que é muito empregado na análise de propagação de sólitons. Ele se baseia em uma série de aproximações a partir da equação de onda, e é adequado quando se tem propagação em longas distâncias e variações lentas e graduais das características do meio sobre a distância de propagação. Contudo, nos casos de componentes ópticos nos quais se tem variações abruptas dos parâmetros do meio, este método não pode ser empregado, tornando-se limitado.

O método FDTD [8] surgiu no final dos anos 60, mas ganhou espaço somente depois da década de 80 com o aumento na capacidade computacional. Nos últimos dezessete anos, problemas maiores e mais complexos tem sido resolvidos pelo FDTD. Conforme os componentes ópticos se tornam mais compactos, este método se torna mais aplicável nas suas análises se firmando como mais uma opção na análise de fenômenos ópticos.

Goorjan e outros [9], em 1992, deduziram as condições que limitam a aplicação do FDTD ao problema da propagação de sólitons ópticos ultra-curtos. Esse artigo, que é a base de todo o desenvolvimento deste trabalho, lança luzes sobre a potencialidade do FDTD para a análise da propagação solitônica e outros efeitos não-lineares. Até então, o FDTD vinha sendo explorado apenas como ferramenta de análise de fenômenos puramente lineares.

1.5 Objetivos deste trabalho

Neste trabalho, estuda-se o surgimento e as características da propagação de sólitons usando-se a técnica FDTD. É apresentada parte da teoria de sólitons encontrada na literatura e que se baseia nos métodos derivados a partir da equação de onda. Desenvolve-se o algoritmo FDTD que se mostra genérico e útil na análise de sólitons ópticos, principalmente nos casos em que o método de Fourier de passo dividido não pode ser aplicado.

No *capítulo 2* é mostrado o surgimento da óptica não-linear como um novo campo da óptica e tenta-se ilustrar o surgimento da não-linearidade no modelo dipolar. Conceitos básicos como a equação de onda, polarizações linear e não-linear da matéria, simetria dos materiais são abordados. Por último é apresentada a equação não-linear de Schrödinger que é obtida através de uma aproximação baseada na técnica perturbativa.

No *capítulo 3* apresenta-se a formulação teórica que fundamenta a análise do surgimento e propagação de sólitons em fibras ópticas. Discutem-se, brevemente, os principais efeitos envolvidos, descrevendo-os de uma maneira simples. No item 3.1 são mostrados alguns dos aspectos históricos. A definição dos regimes de propagação em função dos comprimentos de dispersão e de não-linearidade é apresentada na seção 3.2, enquanto que os efeitos de dispersão e de auto-modulação de fase são descritos a seguir, nos itens 3.3 e 3.4. No item 3.5 mostra-se como esses dois últimos interagem para dar surgimento aos pulsos solitônicos, sendo ainda mencionados alguns aspectos relevantes do seu comportamento.

No *capítulo 4* descrevemos o método das diferenças finitas no domínio do tempo, introduzindo a aproximação de derivadas por diferenças centradas. No item 4.2 apresentamos o algoritmo desenvolvido por Yee, incluindo considerações sobre condições de contorno, excitação, critério de estabilidade e dispersão numérica inerente ao método. Já no item 4.3 mostraremos a formulação de Yee modificada, que permite o modelamento de meios dispersivos lineares em uma dimensão, sendo também abordados os dois métodos de inclusão do fenômeno de dispersão no algoritmo de Yee. Finalmente, são mostrados resultados obtidos para meios dispersivos lineares de 1ª e 2ª ordens.

No *capítulo 5* é descrita a formulação que permite a obtenção de pulsos solitônicos usando a ferramenta FDTD. São apresentadas as propagações de pulsos solitônicos de 2ª e 3ª ordens em regimes de duração de fs . São mostrados os fenômenos de decaimento de sólitons

e auto-desvio de frequência para o vermelho. Por último, é ilustrada a colisão de dois pulsos solitônicos.

No *capítulo 6* apresentamos as conclusões e discutimos as perspectivas de continuação e desenvolvimento sobre o trabalho aqui apresentado.

Finalmente, nos *apêndices*, são apresentados uma análise do comportamento elétrico dos materiais, uma breve análise do espalhamento Raman e o desenvolvimento de equações do método FDTD.

CAPÍTULO 2

Óptica não-linear

2.1 Introdução

De maneira geral, os efeitos ópticos que presenciamos todos os dias são efeitos lineares. Isso quer dizer que, quando a luz interage com a matéria, essa responde usualmente de forma proporcional, e é esta resposta proporcional que leva aos fenômenos ópticos de reflexão, espalhamento e absorção.

Essas respostas ópticas lineares por parte da matéria modificam a luz de várias formas, mas não alteram a sua frequência. Por exemplo, após um feixe de laser passar através de lentes o seu comprimento de onda permanecerá o mesmo. O feixe provavelmente não terá a mesma direção devido a refração, e com certeza não terá a mesma intensidade dada as absorções e reflexões, mas certamente ele deixará o vidro com a mesma frequência.

Contudo em 1961, Peter Franken e outros na Universidade de Michigan observaram um efeito óptico fora do comum. Quando focalizaram em um cristal de quartzo a luz proveniente de um laser de rubi de alta potência, eles obtiveram uma luz transmitida que não era somente constituída por uma, mas sim por duas componentes de frequência, com comprimentos de onda em 694.3 e 347.15 *nm*. Ou seja, ao invés de apenas transmitir a luz do

laser, o cristal realmente gerou um segundo feixe que possuía exatamente o dobro da frequência da luz do laser. O feixe na região do ultravioleta era muito fraco, mas forte o suficiente para dar início a um novo campo de investigação. Passados alguns meses após o experimento realizado por Franken, mais efeitos harmônicos ópticos foram demonstrados e como consequência um novo braço da ciência óptica nasceu: *a óptica não-linear*.

Hoje em dia, tem-se a impressão de que aproximadamente todas as tecnologias ópticas de importância prática contam com no mínimo um efeito óptico não-linear. Investigações em métodos e materiais não-lineares tornaram-se algumas das disciplinas mais influentes na óptica moderna.

Além da geração de segundo harmônico observada por Franken e seus colegas, a lista de efeitos não-lineares tem crescido e inclui a retificação óptica, o efeito eletroóptico de Pockels, mistura de frequências, o efeito eletroóptico do tipo Kerr, espalhamento Raman estimulado, espalhamento Brillouin estimulado, conjugação de fase, auto-focamento, auto-modulação de fase, absorção, ionização e emissão de dois fótons. Alguns fenômenos como o Raman, Pockels e Kerr, foram descobertos antes de 1961, mas somente com o advento do laser suas aplicações práticas bem como novos efeitos não-lineares puderam ser realizados.

Sem qualquer sombra de dúvida os lasers produziram um forte impacto na óptica não-linear dado que os efeitos não-lineares aparecem normalmente somente mediante a presença de campos elétricos e magnéticos intensos.

2.2 Origens da Não-linearidade em Óptica

Ao passar por um material dielétrico, a luz interage com o meio e essa interação pode ser descrita por um modelo de dipolos que é função de um campo elétrico oscilante (a onda de luz) e uma coleção dipolos harmonicamente excitados (os átomos) [12]. Em níveis de irradiações convencionais (alguns W/m^2), os dipolos atômicos respondem linearmente ao campo de excitação da onda luminosa. Em outras palavras, existe uma correspondência um para um entre a frequência da onda de luz e a frequência de vibração dos dipolos. Porém em altos valores de irradiância (alguns MW/m^2), os dipolos não mais respondem linearmente e conseqüentemente deixam de oscilar harmonicamente. Isso se deve ao fato que a força do campo elétrico aplicado pela onda (força de excitação) compete agora com a força de

restauração de cada átomo. Do ponto de vista matemático este fenômeno corresponde à violação da lei de Hooke.

2.3 Equações de Maxwell

Como todos os fenômenos eletromagnéticos, a propagação de campos ópticos nas fibras é governada pelas equações de Maxwell que relacionam os campos elétrico e magnético às propriedades físicas do meio, formando toda uma base para a solução dos problemas da eletrodinâmica em meios materiais. No sistema de unidades MKS, essas equações, na forma diferencial, para um meio genérico são [10,11]

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

onde $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são os vetores de campo elétrico e magnético, respectivamente, e $\vec{D}$ e $\vec{B}$ são as correspondentes densidades de fluxo elétrico e magnético. O vetor densidade de corrente $\vec{J}$ e a densidade de carga ρ representam as fontes de campo eletromagnético. A solução exige a inclusão das relações constitutivas que relacionam as densidades de fluxo aos campos elétrico e magnético, e podem ser escritas por

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (2.6)$$

sendo $\vec{P}$ e $\vec{M}$ as polarizações elétricas e magnéticas induzidas, ϵ_0 a permissividade elétrica e μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo que se relacionam por

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \quad (2.7)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

2.3.1 A equação de onda

Como salientado, as equações de Maxwell podem ser usadas para obter a equação de onda que descreve a propagação da luz. Aplicando o operador rotacional em ambos os membros da equação (2.1) e como $\vec{B}$ é uma função contínua e diferenciável, tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \quad (2.8)$$

Das equações (2.2) e (2.6)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \nabla \times \vec{M} \quad (2.9)$$

substituindo (2.9) em (2.8) e usando a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (2.10)$$

das relações (2.5) e (2.7), obtém-se

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{M}) \quad (2.11)$$

De forma análoga pode ser obtida uma equação para o campo magnético, que é

$$\nabla^2 \vec{H} - \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{P}) \quad (2.12)$$

A equação (2.11) é a equação de onda para o campo elétrico em um meio material qualquer. Essa equação é tão geral quanto forem a polarização, a magnetização e a densidade de corrente. Alguns termos da equação de onda podem ser eliminados dependendo do tipo de meio material e do efeito em estudo. Para o caso específico de propagação em fibras, essa equação pode ser reduzida a

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

onde tomou-se $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$ e $\vec{M} = 0$. Para obter-se a solução de (2.13) basta agora relacionar-se a polarização induzida ao campo elétrico.

2.4 Polarização linear e não-linear dos materiais

Quando uma onda eletromagnética passa através de um material dielétrico, como por exemplo o vidro, existe uma interação do campo elétrico com o meio. A polarização elétrica descreve a forma como se processa esta interação, e assim traz embutidas todas as propriedades elétricas do material.

Para uma descrição matemática compreensível da resposta dos dipolos elétricos na matéria condensada, a susceptibilidade deve ser representada na forma tensorial de forma poder-se levar em conta o efeito combinado de todas as forças locais dos campos. Uma vez que a susceptibilidade seja caracterizada por completo, a resposta resultante a um campo elétrico aplicado pode ser expressa por [12]

$$\vec{P}^{(n)} = \epsilon_0 \chi^{(n)} \vec{E}^{(n)} \quad (2.14)$$

onde o vetor $\vec{P}^{(n)}$ representa a polarização induzida ou resposta do material, $\chi^{(n)}$ simboliza o tensor susceptibilidade, e o vetor $\vec{E}^{(n)}$ denota o campo elétrico aplicado. A variável n pode ser qualquer inteiro positivo, e indentifica o tipo de interação óptica em consideração. Como um exemplo, se $n = 1$ a polarização induzida $\vec{P}$ é puramente linear, e o material exibe todas as propriedades ópticas ordinárias. Já se n for igual ou maior que 2, tem-se polarização não-linear.

Em geral, a polarização $\vec{P}$ pode ser separada em duas partes, uma linear e outra não-linear, ou seja [6]

$$\vec{P} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL} \quad (2.15)$$

Dados a ordem de grandeza dos termos não-lineares e o surgimento do fenômeno de saturação da não-linearidade para campos extremamente fortes [7], a não-linearidade pode ser tratada adequadamente como uma perturbação.

2.4.1 A polarização linear

A componente linear da polarização reponde por todos os efeitos lineares (refração, reflexão, etc.). A dispersão cromática (APÊNDICE I) é também um efeito típico da polarização não-linear.

Quando se tem um meio material que responde instantaneamente ao campo aplicado, $\vec{P}_L$ em uma dada posição $\vec{r}$ e em um dado instante t só depende do campo elétrico nessa posição $\vec{r}$ e no instante t . Dessa maneira, as componentes da polarização linear dependem das componentes de campo elétrico segundo a equação

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.16)$$

onde $\chi^{(1)}$ são as componentes do tensor susceptibilidade elétrica linear ou de primeira ordem. A partir de análises baseadas em conservação de energia, mostra-se que $\chi^{(1)}$ é um tensor simétrico e por seguinte diagonalizável [7].

Para o caso em que o meio não responde instantaneamente ao campo, mas sim de forma retardada, a relação passa a ser descrita por uma convolução dada na forma

$$\vec{P}_L = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad (2.17)$$

que, aplicando as propriedades da transformada de Fourier, resulta, no domínio da frequência, na relação

$$\vec{P}_L(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (2.18)$$

A polarização $\vec{P}$ agora não só depende dos valores atuais do campo, mas também dos valores passados deste. Para sistemas causais, pode-se reescrever (2.17) na forma

$$\vec{P}_L = \epsilon_0 \int_0^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad (2.19)$$

que é a forma usualmente apresentada na literatura.

2.4.2 A polarização não-linear

Como já citado, com o aumento das intensidades de campo aplicadas, a polarização passa a ser uma função não-linear, e é, neste caso, responsável por vários efeitos

ópticos importantes, tais como a geração de harmônicos, auto-focalização, auto-modulação de fase, etc. .

No caso do meio material possuir resposta instantânea aos campos externos, a polarização não-linear pode ser dada pela expansão perturbativa [5]

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \dots \quad (2.20)$$

onde $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$ são as componentes dos tensores susceptibilidade elétrica de segunda e terceira ordem, respectivamente.

A equação (2.20) pode ser escrita como

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi(\vec{E}(\vec{r}, t)) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.21)$$

onde $\chi(\vec{E}(\vec{r}, t))$ é definido como o tensor susceptibilidade não-linear e é dado por

$$\chi(\vec{E}(\vec{r}, t)) = \epsilon_0 \chi^{(1)} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \chi^{(3)} \otimes \vec{E}(\vec{r}, t) + \dots \quad (2.22)$$

A equação é válida somente para valores de intensidades de campo moderados, onde a técnica perturbativa é aplicável.

Para as situações em que a resposta não-linear da matéria é atrasada em relação ao campo aplicado, analogamente ao caso da polarização linear, a relação passa a ser descrita por uma convolução entre o campo e a função susceptibilidade elétrica dada por

$$\vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(2)}(t - t_1, t - t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) dt_1 dt_2 \quad (2.23)$$

$$\vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \int \int \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) \vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (2.24)$$

sendo que

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) + \dots \quad (2.25)$$

A mesma consideração quanto à causalidade pode ser aplicada aqui, fazendo com que para valores de $t' < t$ tanto para esse como para o caso linear, as susceptibilidades elétricas sejam nulas.

2.4.3 Considerações sobre a simetria dos materiais

As estruturas moleculares dos materiais podem ser classificadas em duas grandes categorias: aquelas que possuem um centro de simetria e são por isso denominadas de *centrossimétricas*, e aquelas que não o possuem, as *não-centrossimétricas*.

Como se sabe, para um material centrossimétrico, a polarização é uma função ímpar do campo aplicado [7]. Desta forma teremos

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(5)}(\vec{r}, t) + \dots \quad (2.26)$$

sendo que as considerações na formulação relativas ao retardo nas respostas não-lineares continuam válidas sem qualquer alteração. No caso da sílica em sua forma vítrea, principal material constituinte das fibras ópticas, a sua estrutura molecular é do tipo centrossimétrica fazendo com que tenhamos apenas as componentes ímpares do tensor susceptibilidade elétrica.

2.4.4 Formulação matemática para tratamento de propagação de ondas ópticas

O campo elétrico de um pulso pode ser separado em duas componentes: uma parte lenta no tempo e que representa o perfil, e outra rápida que descreve as oscilações em frequência óptica da ordem de 10^{15} Hz. Este tipo de tratamento é adequado visto que os sistemas de detecção detetam somente a parte lenta dos campos elétricos.

Supondo que o campo elétrico é linearmente polarizado na direção $\hat{x}$ e que mantém essa polarização com a propagação, ele pode ser escrito como [6]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\vec{E}(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (2.27)$$

sendo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ a parte lenta do pulso e a função exponencial representa a parte rápida na frequência ω_0 , que é a sua frequência de portadora. Com isso, pode se escrever as polarizações nas formas

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\vec{P}_L(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (2.28)$$

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c.] \quad (2.29)$$

sendo que igualmente aqui, $\bar{P}_{NL}$ e $\bar{P}_L$ são as partes das polarizações não-linear e linear que possuem variações lentas, respectivamente.

Substituindo (2.27) em (2.19) e comparando com a equação acima para $\bar{P}_L$, tem-se para um meio dispersivo

$$\bar{P}_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty \chi^{(1)}(t - \bar{t}) \bar{E}(\vec{r}, t) \exp[i\omega_0(t - \bar{t})] d\bar{t} \quad (2.30)$$

cujas formulação no domínio da frequência é dada por

$$\bar{P}_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int \chi^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega \quad (2.31)$$

sendo ω_0 a frequência de portadora do pulso.

Para um meio com simetria de inversão e cuja a polarização não-linear é instantânea, e ainda desconsiderando os termos de maior ordem, obtém-se como resultado

$$\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \hat{x} \frac{1}{8} \epsilon_0 \chi^{(3)} \left\{ \bar{E}^3(\vec{r}, t) \exp(i3\omega_0 t) + 3|\bar{E}(\vec{r}, t)|^2 \bar{E}(\vec{r}, t) \exp(i\omega_0 t) + c.c. \right\} \quad (2.32)$$

Essa última equação mostra alguns termos que revelam um fenômeno extremamente interessante. Em geral, o efeito não-linear envolve processos de misturas de frequências nos quais ondas de diferentes frequências se interagem para produzir outras frequências [12]. Um exemplo disso, é a geração de segundo harmônico que define uma classe especial de mistura de ondas que possuem as mesmas frequências, levando à segunda harmônica [13]. Como se pode notar em (2.32), tem-se o surgimento de uma componente oscilando em uma frequência que é o triplo da frequência do campo, levando nesse caso à geração do terceiro harmônico [13], além da própria frequência do campo.

O fato de ondas luminosas poderem ser misturadas em frequência é algo no mínimo notável. Aparentemente ele viola o princípio da superposição. É a interação não-linear da luz com o meio que faz com que tal transferência de energia seja factível. A onda de polarização não-linear acopla a energia de uma onda luminosa à outra, agindo como uma ligação entre ambas. Esse efeito é denominado de interação óptica paramétrica [12].

A eficiência da troca de energia depende da velocidade de fase relativa da onda de polarização e das ondas luminosas no meio material. A partir dos problemas de dispersão cromática, obtém-se uma série de considerações a serem tomadas quanto ao casamento de

fase das ondas envolvidas no processo de mistura não-linear, visando-se com isso manter-se um padrão de interferência construtivo e por conseguinte um processo eficiente de transferência de energia. Esse tipo de casamento de fase exerce um papel crucial na óptica não-linear, já que dele depende toda uma série de fenômenos [12]. O escopo deste trabalho, para o caso da equação (2.32), limita o nosso interesse ao caso em que a susceptibilidade, e consequentemente a polarização não-linear, dependerá somente da amplitude quadrática do campo elétrico. Isso nos leva a

$$\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} |\bar{E}(\vec{r}, t)|^2 \bar{E}(\vec{r}, t) \quad (2.33)$$

A partir de (2.33) pode-se definir um novo ϵ_{NL}

$$\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} |\bar{E}(\vec{r}, t)|^2 \quad (2.34)$$

onde agora se tem

$$\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{NL} \bar{E}(\vec{r}, t) \quad (2.35)$$

Uma aproximação que pode ser feita e que é bastante adequada dada a natureza perturbativa do tratamento dispensado à não-linearidade, é tomá-la como sendo constante. Ou seja, no domínio da frequência a permissividade pode ser escrita na forma

$$\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) + \epsilon_{NL} \quad (2.36)$$

Para materiais não-magnéticos, o índice de refração é calculado a partir da raiz quadrada de $\epsilon(\omega)$ (APÊNDICE I). Considerando que ϵ_{NL} é muito menor do que o índice de refração linear, aqui denominado por n_0 , obtém-se, de (2.36), que

$$n(\omega) = n_0(\omega) + \frac{\epsilon_{NL}}{2n_0(\omega)} \quad (2.37)$$

Usando a equação (2.34) em (2.37), pode definir uma nova variável n_2 na forma

$$n_2 = \frac{3}{8} \frac{\chi^{(3)}}{n_0(\omega)} \quad (2.38)$$

de forma que

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2 |\bar{E}|^2 \quad (2.39)$$

A equação acima mostra a relação do índice de refração com a intensidade do campo. Para essa forma de dependência, com o quadrado do campo, a não-linearidade é chamada de não-linearidade do tipo *Kerr* [15], sendo esta a presente em fibras ópticas.

2.5 Análise da propagação dos pulsos em fibras ópticas

A propagação em fibras óptica pode ser analisada através das equações de Maxwell que caracteriza a óptica ondulatória. Como já analisado na seção 2.3, a partir da equação de onda, obtém-se a solução da propagação de onda na fibra. A equação de onda (2.13) pode ser escrita em coordenadas cilíndricas (geometria adequada para a fibra óptica) e resolvida utilizando-se a técnica de separação de variáveis. Tal procedimento é vastamente apresentado na literatura [3,6,16,17] e por seguinte não será descrito aqui.

Da resolução da equação de onda e da aplicação adequada das condições de contorno, chega-se aos modos de propagação da fibra. No caso de fibras monomodo, tem-se a presença de apenas um modo propagante (fundamental) que corresponde na realidade a duas polarizações. Para o caso de incluir-se a não-linearidade da fibra a equação de onda deve ser levemente modificada onde usa-se para isso a técnica perturbativa desenvolvida em [18]. Partindo de (2.36) pode-se escrever a equação de onda como

$$\nabla^2 \tilde{E} + \varepsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0 \quad (2.40)$$

já que ε_{NL} é tratada como uma perturbação e por seguinte pode ser considerada constante, permitindo com isso a sua transformação para o domínio da frequência sem maiores problemas. A equação (2.40) pode ser resolvida usando-se o método de separação de variáveis. Escrevendo o campo elétrico como

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z) \quad (2.41)$$

onde $\tilde{A}(z, \omega)$ é uma função que varia lentamente ao longo de z , $F(x, y)$ descreve a função transversal dos modos, e β_0 é uma constante de propagação a ser determinada. Com isso, chega-se a duas equações, uma para a distribuição transversal do campo e outra para a dependência axial

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \bar{\beta}^2]F = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\bar{\beta}^2 - \beta_0^2)\tilde{A} = 0 \quad (2.43)$$

Como assumiu-se que $\tilde{A}(z, \omega)$ corresponde à variação lenta do envelope do pulso e desde que esse pulso possua um espectro estreito, pode-se desprezar a segunda derivada em z $\left(\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} \approx 0\right)$

ficando então

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\bar{\beta}^2 - \beta_0^2)\tilde{A} = 0 \quad (2.44)$$

O processo de obtenção da constante de propagação $\bar{\beta}$ é similar ao usado na solução dos modos guiados pela fibra sem a presença de qualquer não-linearidade. A constante dielétrica pode ser aproximada por

$$\varepsilon = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n \quad (2.45)$$

sendo que Δn corresponde a uma pequena perturbação dada por

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + \frac{i\alpha}{2k_0} \quad (2.46)$$

Pode-se resolver a equação (2.42) pelo método da teoria de perturbação de primeira ordem [7]. Inicialmente obtém-se a distribuição de campo transversal do modo $F(x, y)$ e a correspondente constante de propagação $\beta(\omega)$. Como tem-se uma fibra monomodo, esta distribuição corresponde à distribuição do modo fundamental e que pode ser aproximada por

$$F(x, y) = \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{w^2}\right] \quad (2.47)$$

Considerando que Δn não afeta a distribuição transversal, a constante de propagação $\bar{\beta}$ pode ser expressa como

$$\bar{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta \quad (2.48)$$

sendo que

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} \quad (2.49)$$

Se em (2.44) usarmos a aproximação

$$\bar{\beta}^2 - \beta_0^2 = (\bar{\beta} + \beta_0)(\bar{\beta} - \beta_0) \approx 2\beta_0(\bar{\beta} - \beta_0)$$

tem-se

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0] \tilde{A} \quad (2.50)$$

Vamos agora expandir a constante de propagação $\beta(\omega)$ em uma série de Taylor em torno da frequência da portadora

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \beta_2 + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3 \beta_3 + \dots \quad (2.51)$$

onde

$$\beta_n = \left[\frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right]_{\omega=\omega_0} \quad (2.52)$$

Na expansão acima, vemos que os termos a partir de β_1 são os responsáveis pela dispersão de velocidade de grupo (*GVD*). Usualmente, a série pode ser truncada em β_2 , sendo que os outros termos só são relevantes em casos excepcionais, tais como pulsos com durações menores que 0.1 ps e operação em comprimentos de onda próximos daquele onde a dispersão de menor ordem (β_2) é zero. Substituindo (2.51) em (2.50) e tomando a sua transformada inversa,

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] d\omega \quad (2.53)$$

e ainda, usando o fato que na operação de transformada $(\omega - \omega_0)$ é substituída pelo operador diferencial $i \frac{\partial}{\partial t}$, resulta em

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta\beta A \quad (2.54)$$

O último termo engloba os efeitos de perda e não-linearidade da fibra. Usando (2.46) e (2.49), $\Delta\beta$ pode ser calculado e substituído em (2.54) obtendo-se com isso

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A \quad (2.55)$$

sendo γ o coeficiente não-linear definido como

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{eff}} \quad (2.56)$$

e o parâmetro A_{eff} é conhecido como área efetiva do núcleo e dado por

$$A_{eff} = \frac{\left[\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy \right]^2}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^4 dx dy} \quad (2.57)$$

Para o caso da aproximação gaussiana para a distribuição transversal do modo fundamental (equação (2.47)) o seu valor é [15]

$$A_{eff} = \pi w^2 \quad (2.58)$$

Para o caso de operação de pulsos em regime de curta duração (pulsos com larguras inferiores à 100 fs), a equação (2.55) deve ser modificada. Tais pulsos apresentam uma largura espectral já comparável à frequência da portadora, e várias aproximações usadas na formulação descrita anteriormente acima se tornam imprecisas [6]. Contudo, pode-se adicionar alguns novos termos a (2.55) usando novamente uma aproximação baseada na técnica perturbativa [6] chegando com isso à seguinte equação de propagação generalizada

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - a_1 \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 A) - a_2 A \frac{\partial |A|^2}{\partial t} \quad (2.59)$$

Nota-se o surgimento de três novos termos na equação acima. Um termo em β_3 resultante da inclusão do termo cúbico na expansão (2.51), sendo que ele incorpora os efeitos da dispersão de maior ordem e só é relevante para pulsos extremamente curtos. O termo proporcional a a_1 advém da inclusão da primeira derivada da parte lenta da polarização não-

linear $\bar{P}_{NL}$ e provoca o fenômeno denominada de auto-deflexão do pulso. Ele pode ser descrito aproximadamente por [6]

$$a_1 = \frac{2\gamma}{\omega_0} \quad (2.60)$$

O último termo, que é função de a_2 , representa o atraso na resposta não-linear e provoca o auto-desvio em frequência [19]. O parâmetro a_2 está relacionado com o ganho Raman [19], e pode ser escrito como

$$a_2 = i\gamma T_R \quad (2.61)$$

onde T_R é uma função da inclinação do ganho Raman [19], sendo a sua variação na frequência tomada como linear na vizinhança de ω_0 .

2.6 A equação não-linear de Schrödinger

Com o objetivo de simplificar (2.59), vamos introduzir algumas mudanças de variáveis. Seja um ponto referencial que se move com o pulso propagante na sua velocidade de grupo v_g , ou seja, seja a mudança de variáveis

$$T = t - \frac{z}{v_g} = t - \beta_1 z \quad (2.62)$$

que, quando utilizada conjuntamente com (2.59)-(2.61), leva

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} = i\gamma \left[|A|^2 A + \frac{2i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - T_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial T^2} \right] \quad (2.63)$$

sendo que essa equação é adequada para a propagação de pulsos curtos na casa de fs . Para pulsos com durações temporais maiores (acima de $100 fs$), pode-se partir de (2.55) e obter-se a seguinte expressão simplificada

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \alpha A + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A \quad (2.64)$$

Para o caso de não ter-se perdas no sistema, tem-se $\alpha = 0$ e a equação acima é denominada de *equação não-linear de Schrödinger*. Por analogia, (2.63) é às vezes chamada de *equação de Schrödinger generalizada*. Vale ressaltar que na obtenção de (2.63) a inclusão da resposta não-linear retardada foi feita de forma apenas aproximada, existindo aproximações mais rigorosas.

2.7 Considerações finais

A formulação desenvolvida nesse capítulo baseou-se naquela apresentada na referência [6] visto que, foi a mais acessível frente aos objetivos do trabalho. Existem desenvolvimentos mais rigorosos como os apresentados em [4] sendo esses mais completos e, por consequência, mais complexos, que apresentam uma abordagem matemática mais abrangente não acrescentando porém, mudanças significativas nos resultados apresentados.

CAPÍTULO 3

SÓLITONS EM FIBRAS ÓPTICAS

3.1 Introdução e aspectos históricos

Uma das manifestações mais fascinantes e mais importantes da não-linearidade em fibras ópticas é o surgimento de sólitons. O termo sóliton refere-se a uma classe especial de ondas que pode se propagar sobre longas distâncias sem sofrer praticamente nenhuma distorção e possuem a propriedade de permanecerem inalteradas mesmo após colidirem entre si. No contexto das comunicações, o sóliton é uma ferramenta promissora no tocante aos enlaces de altas taxas de bits em distâncias extremamente longas, ou seja, pode-se vislumbrar capacidades não possíveis em sistemas baseados na óptica linear convencional. Portanto, o conhecimento das suas características é de fundamental importância na área de comunicações ópticas.

A primeira notícia que se teve sobre sólitons como um fenômeno físico foi obtida por um cavalheiro escocês extremamente observador [20]. Em 1838, J. Scott Russell observou que, em um pequeno canal na Escócia, quando da parada súbita de uma embarcação, “uma grande elevação solitária de água, arredondada, suave e extremamente bem definida, prosseguiu o seu curso ao longo do canal, aparentemente sem sofrer qualquer mudança de forma ou diminuição de sua velocidade”. Vale ressaltar que o Sr. Russell montava a cavalo, e ao ver tal formação na água a seguiu por alguns quilômetros. Esta

observação ele publicou na revista “*Reports of the Meetings of the British Association for the Advancement of Science*”, em 1844.

Nesta época, a equação de ondas em águas rasas não havia ainda sido desenvolvida. Somente na virada do século (1895) Korteweg e de Vries equacionaram o problema, sendo essa equação hoje denominada KdV. A partir disso, pode-se notar que tal “elevação solitária” observada por Russell era a solução solitária da seguinte equação KdV [21]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \left(1 + \frac{3u}{2h} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0 \quad (3.1)$$

Aqui u é a altura da onda em relação ao nível da superfície de água não perturbada, cuja profundidade é h ; c é a velocidade da onda na água se a perturbação na superfície for pequena e o comprimento de onda for grande. A velocidade é, contudo, uma função da amplitude da onda em relação à profundidade da água. Já o último termo da equação é linear e representa a dispersão, também chamada de dispersão de terceira ordem, dado que ela depende da terceira derivada. Pode-se notar também que somente uma derivada temporal de primeira ordem aparece na expressão. A equação KdV foi simplificada considerando-se ondas que viajavam somente em uma única direção.

Ondas solitárias similares àquela observada por Scott Russell são comuns na natureza. A característica mais notável nessas ondas do tipo KdV é que elas podem colidir, passar uma pela outra e retomar por completo as suas formas originais após a colisão. Como já mencionado anteriormente, ondas solitárias desse tipo são denominadas de *sólitons*.

A equação KdV faz parte de uma classe de equações diferenciais parciais não-lineares que tem sido intensamente estudadas, sob o aspecto matemático. O primeiro caso de sóltons relevante na óptica ocorreu no meio da década de 60 junto com o fenômeno de transparência auto-induzida estudado por Hahn e McCall. Algum tempo depois, Zakharov e Shabat [22] da extinta União Soviética, demonstraram que a equação não-linear de Schrödinger, que descreve a propagação em meio não-linear unidimensional, permite a formação de sóltons que podem ser obtidos pela teoria do espalhamento inverso. Entretanto, foi Hasegawa [23] quem primeiramente sugeriu que sóltons poderiam ser observados em fibras ópticas em regime de dispersão anômala. Na época da proposta de Hasegawa ainda não se dispunha de fontes de pulsos ultra-curtos na faixa de comprimentos de onda em que a fibra exibia dispersão anômala. L. Mollenauer e outros [24], desenvolveram uma fonte adequada e a

usaram para excitar fibras na faixa de 1.5 μm e puderam com isso observar o surgimento de ondas solitônicas e comprovar a proposta pioneira de Hasegawa.

3.2 Regimes de propagação

Conforme um pulso óptico se propaga na fibra, ele vai interagindo com o meio e com isso vai sofrendo modificações impostas basicamente pelas características de atenuação, dispersão e não-linearidade da fibra. A importância que uma dada característica toma em relação à outra é dependente das condições iniciais do pulso, como por exemplo a sua duração no tempo e a sua potência de pico.

Rescrevendo (2.64) temos e introduzindo uma nova variável $U = A/\sqrt{P_0} e^{-\alpha z}$, tem-se

$$i \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{\exp(-\alpha z)}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (3.2)$$

onde $\text{sgn}(\beta_2)$ se refere ao sinal de β_2 podendo assumir os valores ± 1 . Já L_D e L_{NL} são denominados de comprimentos de dispersão e de não-linearidade, respectivamente, sendo dados por

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad (3.3)$$

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (3.4)$$

e quando comparados à distância L de propagação, temos o que se define de regimes de propagação [6].

Quando L_D e L_{NL} são muito maiores que L , o segundo e terceiro termos da equação (3.2) tornam-se desprezíveis, supondo ainda que o perfil do pulso no tempo seja suave o bastante para o termo $\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ não vir a ser de valor muito elevado. Nesse caso, a fibra se comporta como um mero transportador de pulsos ópticos (exceto pela perda imposta ao pulso).

Para o caso em que $L \ll L_{NL}$ mas $L \cong L_D$, temos o regime predominantemente dispersivo. Na equação (3.2) isto equivale a fazer-se o último termo desprezível face aos

outros. O pulso é governado então pela *Dispersão de Velocidade de Grupo GVD* (*Group Velocity Dispersion*). Esse regime é adequado quando os parâmetros da fibra e do pulso são tais que

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \ll 1 \quad (3.5)$$

Em contrapartida, para $L \equiv L_{NL}$ e $L \ll L_D$, o regime dominante é o não-linear, traduzindo em um segundo termo nulo na equação (3.2). A evolução do pulso aqui é ditada pelo fenômeno de *Auto-modulação de Fase SPM* (*Self-Phase Modulation*). Essa situação é adequada para a seguinte relação entre os parâmetros da fibra e do pulso

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \gg 1 \quad (3.6)$$

Por último, na condição em que L é comparável à L_D e L_{NL} , dispersão e não-linearidade atuam conjuntamente sobre o pulso, balanceando-se ou não. Caso o pulso esteja na faixa de dispersão anômala da fibra, temos a formação de uma onda solitônica em decorrência da compensação entre esses.

3.3 Dispersão da velocidade de grupo

Como se sabe, todos os materiais na prática são dispersivos. A dispersão é causada pela dependência das características elétricas e magnéticas do meio com a frequência (APÊNDICE I). Com isso, diferentes componentes de frequência que compõem o pulso viajam com diferentes velocidades, acarretando uma distorção do mesmo. Este efeito denomina-se de *Dispersão de Velocidade de Grupo (GVD)*. Em fibras monomodo, ela é usualmente chamada de dispersão cromática, e é resultante das contribuições da dispersão material somada à dispersão de guia de onda [17]. No caso de fibras multimodo, que não são mais utilizadas em comunicações à longa distância (e que não se encaixam na formulação aqui desenvolvida) deve-se acrescentar a dispersão entre os diversos modos propagantes, chamada de dispersão intermodal [17].

A principal consequência da dispersão em sistemas de comunicação é a limitação na taxa de transmissão (sistemas digitais) ou da banda passante (sistemas analógicos). Em

sistemas digitais por exemplo, a dispersão pode levar a níveis de interferência intersimbólica inadmissíveis [17], que comprometem por completo o desempenho do sistema.

3.3.1 Dispersão cromática da fibra

O índice de refração da sílica é aproximadamente dado pela seguinte expressão conhecida por equação de Sellmeier [15] e que é válida somente para operação distante das frequências de ressonância do meio

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \lambda_j^2}{\lambda_j^2 - \lambda^2} \quad (3.7)$$

onde λ_j é a frequência de ressonância e B_j são os pesos correspondentes a cada frequência, sendo obtidos de maneira experimental. Para o caso da sílica fundida tem-se $m = 3$ e os seguintes valores para os λ_j e B_j [15]

$$\begin{aligned} - B_1 &= 0.6961663 & - \lambda_1 &= 0.0684043 \text{ } \mu\text{m}; \\ - B_2 &= 0.4079426 & - \lambda_2 &= 0.1162414 \text{ } \mu\text{m}; \\ - B_3 &= 0.8974794 & - \lambda_3 &= 9.896161 \text{ } \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Do ponto de vista matemático, como feito no item 2.5 do capítulo anterior, os efeitos de dispersão são levados em conta expandindo-se a constante de propagação modal β em uma série de Taylor em torno da frequência central w_0 , já que para todos os pulsos de interesse prático β desvia-se muito pouco de uma função linear dentro da faixa espectral do campo a ser propagado. Ou seja,

$$\beta(w) = n(w) \frac{w}{c} = \beta_0 + \beta_1 (w - w_0) + \frac{1}{2} \beta_2 (w - w_0)^2 + \frac{1}{6} \beta_3 (w - w_0)^3 + \dots \quad (3.8)$$

sendo

$$\beta_m = \left[\frac{d^m \beta}{dw^m} \right]_{w=w_0} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Tais parâmetros se relacionam com o índice de refração através das equações

$$\beta_1 = \frac{1}{c} \left[n + w \frac{dn}{dw} \right] = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{v_g} \quad (3.10)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left[2 \frac{dn}{dw} + w \frac{d^2 n}{dw^2} \right] = \frac{w}{c} \frac{d^2 n}{dw^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (3.11)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{c} \left[3 \frac{d^2 n}{dw^2} + w \frac{d^3 n}{dw^3} \right] \equiv - \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2 c^3} \left(3\lambda^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2} + \lambda^3 \frac{d^3 n}{d\lambda^3} \right) \quad (3.12)$$

onde n_g é o índice de refração de grupo. Entrando com as expressões anteriores em (3.7), obtém-se

$$\frac{dn}{d\lambda} = - \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^2 B_j}{(\lambda^2 - \lambda_j^2)^2} \quad (3.13)$$

$$\frac{d^2 n}{d\lambda^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^2 (3\lambda^2 + \lambda_j^2) B_j}{(\lambda^2 - \lambda_j^2)^3} - \frac{1}{n} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \quad (3.14)$$

$$\frac{d^3 n}{d\lambda^3} = - \frac{12\lambda}{n} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^2 (\lambda^2 + \lambda_j^2) B_j}{(\lambda^2 - \lambda_j^2)^4} - \frac{3}{n} \frac{dn}{d\lambda} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (3.15)$$

As figuras 3-1 e 3-2 mostram as variações de n , n_g e β_2 com o comprimento de onda utilizando-se as equações acima descritas. Podemos notar a partir da figura 2 que β_2 é nulo para $\lambda = \lambda_d = 1.27 \mu\text{m}$ e que torna-se negativo para comprimentos de onda maiores. As curvas acima são relativas à sílica fundida, diferindo das curvas de uma fibra real devido à dopagem do núcleo e ao efeito de dispersão de guia de onda [17], que unicamente deslocam λ_d para em torno de $1.31 \mu\text{m}$. Para o caso de β_2 positivo, temos o que denomina-se de dispersão normal, onde componentes de frequências mais baixas viajam em uma velocidade maior do que as componentes de frequências mais elevadas. No caso de β_2 negativo, a fibra apresenta dispersão anômala, onde as componentes de menor frequência se propagam mais lentamente do que as de frequências maiores [6,11,17,21,25]. Vale salientar no entanto, que para o caso de β_2 nulo o fenômeno de dispersão ocorre, já que agora o termo de 3ª ordem já não é mais desprezível e assume o papel de fator limitante [6,15]. A dispersão da fibra óptica está intimamente relacionada com o seu perfil de índice de refração do núcleo, possibilitando com isso atuar-se na característica de dispersão da mesma. Um exemplo disto é a fibra de dispersão deslocada [26], onde temos o comprimento de onda de dispersão zero deslocado para a terceira janela de transmissão, permitindo aliar uma menor atenuação a uma menor dispersão.

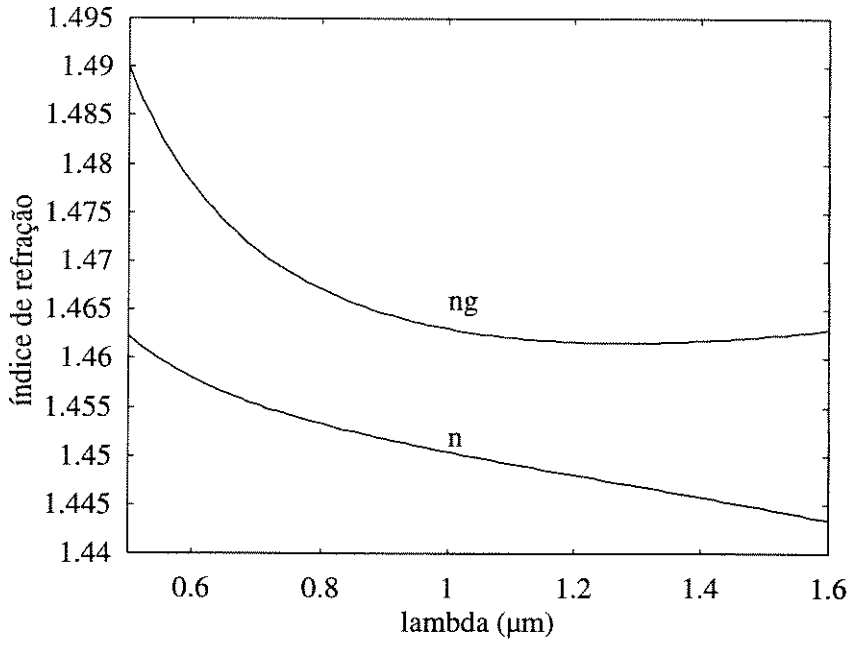


Figura 3-1. Variação do índice de refração n e do índice de refração n_g de grupo para a sílica fundida.

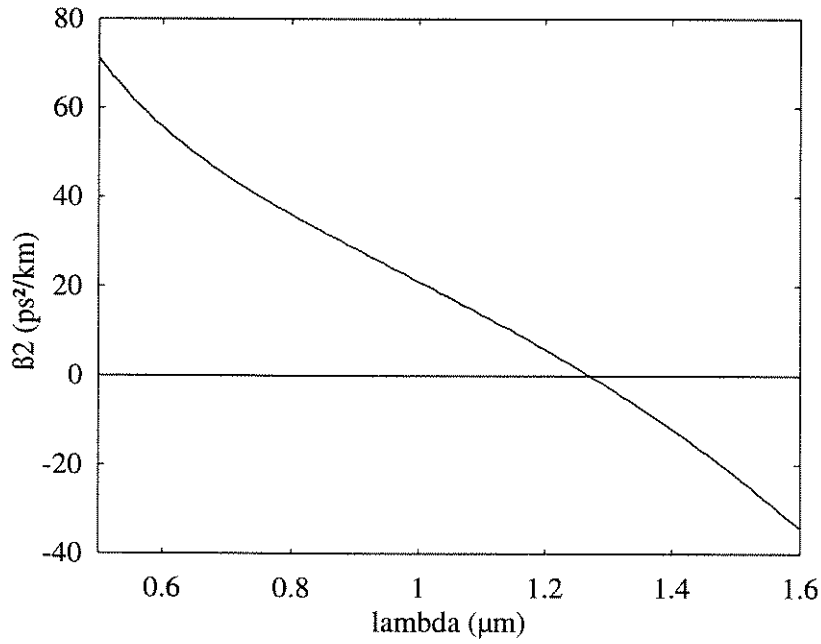


Figura 3-2. Variação de β_2 com o comprimento de onda para a sílica fundida.

3.3.2 As evoluções do pulso no tempo e na frequência em função da distância propagada

Como citado anteriormente, para o caso de propagação em regime puramente dispersivo a equação (3.2) toma a forma

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad (3.16)$$

Essa equação é resolvida usando-se o método de Fourier. Se $\tilde{U}(z, w)$ é a transformada de $U(z, T)$, então ela satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária [6]

$$i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \beta_2 w^2 \tilde{U} \quad (3.17)$$

que tem como solução

$$\tilde{U}(z, w) = \tilde{U}(0, w) \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 w^2 z\right) \quad (3.18)$$

sendo $\tilde{U}(0, w)$ dado por

$$\tilde{U}(0, w) = \int_{-\infty}^{\infty} U(0, T) \exp(iwT) dT \quad (3.19)$$

com o campo inicial dado por $U(0, T)$. A solução geral é então

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(0, w) \exp\left[\frac{i}{2} \beta_2 w^2 z - iwT\right] dw \quad (3.20)$$

Observando-se as equações (3.19) e (3.20) vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(z, T)|^2 dT = \int_{-\infty}^{\infty} |U(0, T)|^2 dT \quad (3.21)$$

justificando a diminuição na intensidade do pulso a medida que este vai se alargando no tempo (conservação de energia).

É usual adotar-se um formato Gaussiano para o pulso inicial. Com isso,

$$U(0, T) = \exp\left[-\frac{T^2}{2T_0^2}\right] \quad (3.22)$$

cujas intensidade vale

$$|U(0, T)|^2 = \exp\left[-\frac{T^2}{T_0^2}\right] \quad (3.23)$$

onde T_0^2 é definido como sendo a metade da largura entre os pontos de intensidade $1/e$. Na maioria dos casos práticos contudo, costuma-se definir a largura total (T_{FWHM}) entre os pontos de meia potência (pontos de 3 dB). Para um formato gaussiano, essas larguras se relacionam na forma

$$T_{FWHM} = 2(2 \ln 2)^{\frac{1}{2}} T_0 \approx 1.665 T_0 \quad (3.24)$$

Levando-se (3.22) em (3.19), e substituindo em (3.20), tem-se como resultado

$$U(z, T) = \left[\frac{T_0^2}{T_0^2 - i\beta_2 z} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)} \right] \quad (3.25)$$

cuja a intensidade é

$$|U(z, T)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{L_D} \right)^2} \exp \left\{ -\frac{T^2}{T_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{L_D} \right)^2 \right)} \right\} \quad (3.26)$$

Com isso (3.25) pode se reescrita na forma

$$U(z, T) = |U(z, T)| \exp[i\phi(z, T)] \quad (3.27)$$

que quando comparada com (3.23), mostra que o pulso mantém seu formato no tempo, mas sua largura aumenta com a distância segundo a relação

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + \left(\frac{z}{L_D} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

Além disso, embora o pulso não possuísse qualquer tipo de modulação de fase (“chirp”), o pulso propagado apresenta tal característica. Igualando (3.27) e (3.25) obtém-se

$$\phi(z, T) = -\frac{\text{sgn}(\beta_2)(z/L_D)}{1 + (z/L_D)^2} \frac{T^2}{T_0^2} + \tan^{-1} \left(\frac{z}{L_D} \right) \quad (3.29)$$

Mostrando que a dependência da fase com o tempo implica em uma frequência instantânea que difere sobre o pulso da frequência central ω_0 . Essa diferença em frequência é dada por

$$\delta\omega = -\frac{\partial\phi}{\partial T} = \frac{2 \text{sgn}(\beta_2)(z/L_D)}{1 + (z/L_D)^2} \frac{T}{T_0^2} \quad (3.30)$$

Mostrando que a frequência muda linearmente sobre o pulso. Esse é o chamado *chirp linear*.

A partir de (3.30) nota-se que ele é dependente do sinal de β_2 , tendo o comportamento

diferenciado para regiões de dispersão normal e anômala. Para a primeira ($\beta_2 > 0$), $\delta\omega$ é negativo na parte frontal do pulso e cresce linearmente sobre o mesmo. O oposto acontece quando o pulso experimenta o regime de dispersão anômala.

Para pulsos que não possuem qualquer *chirp* inicial a abertura sofrida no tempo não depende do sinal de β_2 . Logo, para um dado valor de L_D , o pulso espalha-se por uma mesma quantidade, esteja ele na região anômala ou não. A figura 3-3 mostra a variação do pulso em função da distância normalizada z/L_D . Existem ainda implicações quanto a pulsos que possuem um eventual *chirp* inicial que traz uma série de outras considerações [6], que não serão abordadas neste texto.

Quanto ao espectro de amplitude do pulso propagado ele se mantém invariante, uma vez que o sistema em questão é linear e livre de perdas. Com isso, a forma do espectro para qualquer distância propagada é a mesma.

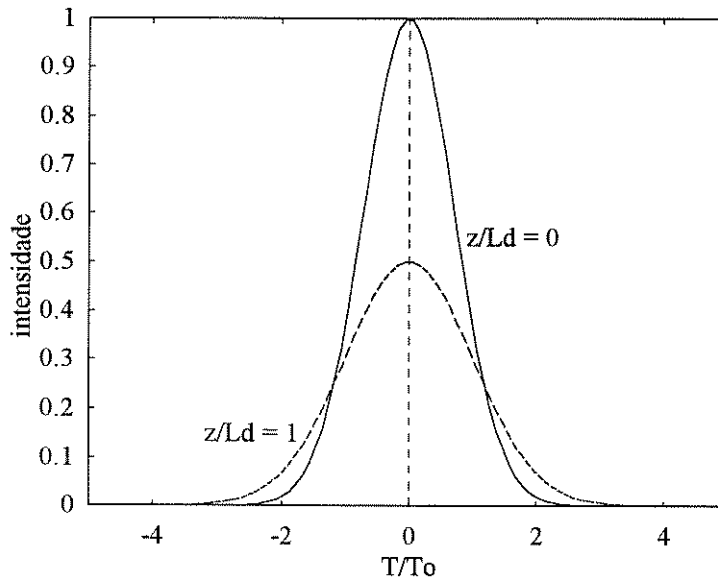


Figura 3-3. Alargamento temporal sofrido pelo pulso Gaussiano, após propagar-se por uma distância $z/L_D = 1$.

3.3.3 Considerações sobre a dispersão de maior ordem

A abertura provocada no pulso propagado deve-se até aqui, única e exclusivamente ao termo de mais baixa ordem proporcional a β_2 na expansão dada pela equação (3.8). Embora atualmente na maioria dos casos de interesse ela predomine, algumas vezes se faz necessário a

inclusão do termo de maior ordem proporcional a β_3 . Isto é verdade tipicamente nos casos em que o comprimento de onda de operação está muito próximo do comprimento de onda de dispersão nula da fibra, e para os casos em que os pulsos são ultra curtos ($T_0 < 0.1$ ps), mesmo quando não se está operando em comprimentos de onda onde a dispersão é nula ($\beta_2 \neq 0$), já que o parâmetro $\Delta\omega/\omega_0$ não é mais tão pequeno ao ponto de ser desprezado. A figura 3-4 mostra a variação de β_3 com o comprimento de onda para o caso da sílica fundida.

Levando-se em consideração os efeitos de maior ordem na *GVD*, e ainda desconsiderando-se os efeitos não-lineares, a equação (3.16) pode ser rescrita como

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{i}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 U}{\partial T^3} \quad (3.31)$$

que pode ser resolvida utilizando-se a técnica de Fourier. O campo transmitido é então [6]

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(0, \omega) \exp \left[\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z + \frac{i}{6} \beta_3 \omega^3 z - i\omega T \right] d\omega \quad (3.32)$$

podendo esta equação ser usada para estudar-se os efeitos de dispersão de maior ordem. Novamente para o caso de um pulso gaussiano na entrada (equação (3.22)), obtém-se como resultado uma equação analítica baseada em funções de Airy [27], sendo o formato do pulso ilustrado na figura 3-5, para $\beta_2=0$ e para $\beta_2=\beta_3 / T_0$. Com o termo de maior ordem incluso na dispersão, vê-se que o pulso já não tende a manter o formato gaussiano com a distância propagada, apresentando agora uma assimetria acompanhada de oscilações nas suas extremidades. Dependendo do sinal de β_3 , essa oscilação pode se localizar-se na parte frontal do pulso ou na sua parte final.

Para os casos de formatos de pulsos de entrada mais complicados, a *FWHM* não é mais uma medida verdadeira da largura do pulso sendo mais usual trabalhar-se com a largura eficaz (rms) σ definida por [15]

$$\sigma = \left[\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

sendo

$$\langle T^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} T^n |U(z, T)|^2 dT}{\int_{-\infty}^{\infty} |U(z, T)|^2 dT} \quad (3.34)$$

Para o caso de um pulso gaussiano de entrada que não possui um *chirp* inicial, tem-se que a abertura sofrida com a distância vale [15]

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left[1 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_0^2} \right)^2 + \left(\frac{\beta_3 z}{2T_0^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.35)$$

onde σ_0 é a largura inicial do pulso ($\sigma_0 = T_0/\sqrt{2}$). Para $\beta_3=0$, esta equação se reduz à equação (3.27), como esperado. Observando-se a equação (3.35) vemos que ambos os termos (β_2 e β_3) contribuem para a abertura do pulso, e para o caso de dispersão de maior ordem, essa abertura independe do sinal de β_3 e de um eventual *chirp* inicial, de forma contrária à dispersão em β_2 que é dependente de tais parâmetros [6].

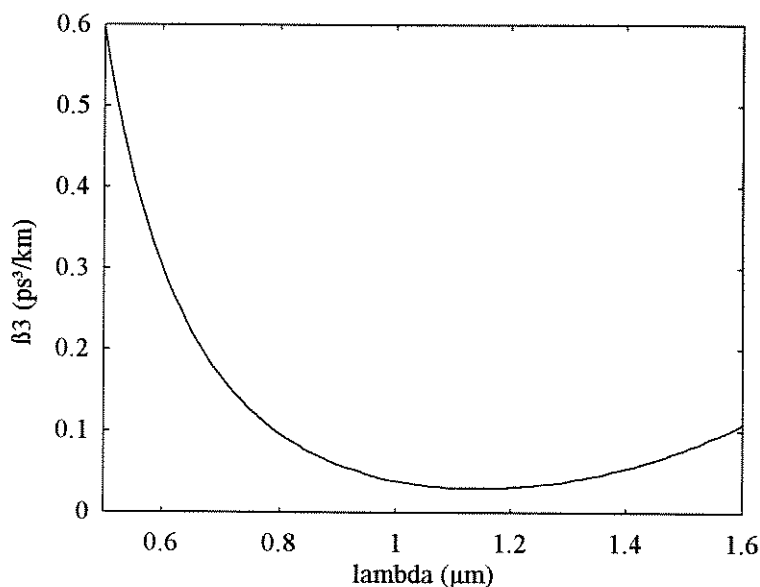


Figura 3-4. Variação de β_3 com o comprimento de onda para a sílica fundida.

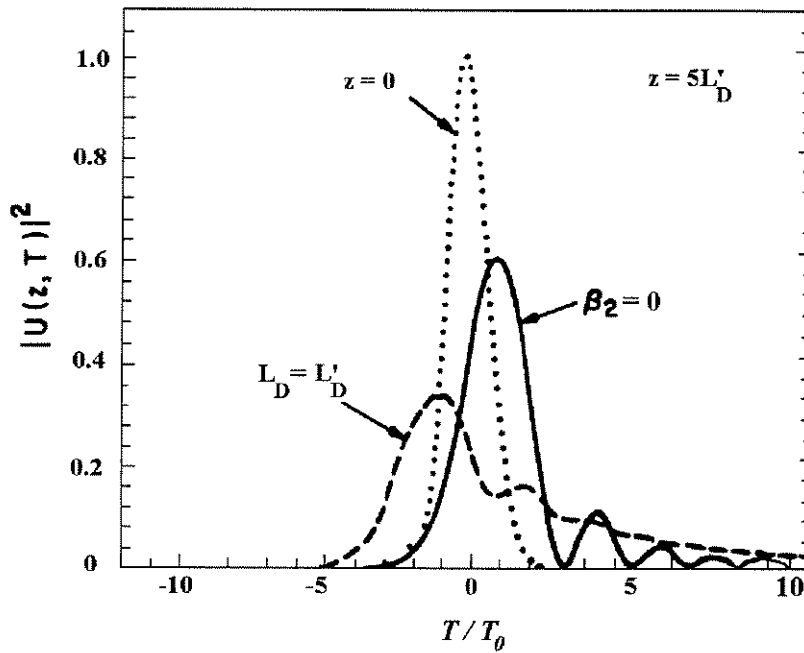


Figura 3-5. Visualização dos efeitos causados pela dispersão de maior ordem sobre um pulso gaussiano na entrada [6].

3.4 Auto-modulação de fase

Uma consequência da dependência do índice de refração com a intensidade em meios não-lineares é a ocorrência da *Auto-modulação de Fase SPM* (“*Self-Phase Modulation*”), um fenômeno que leva à abertura espectral do pulso óptico propagante. As fibras ópticas possuem não-linearidade Kerr [16], levando o perfil de intensidade do pulso modular o índice de refração do mesmo, sendo que este índice modula em contrapartida a fase da onda propagante. Daí advém a designação de auto-modulação de fase. Como a frequência instantânea é a derivada da fase com respeito ao tempo mais a frequência da portadora óptica, vemos que a frequência varia sobre o pulso com a distribuição do campo.

O espectro do pulso agora, contrário ao que ocorre no caso da propagação em regime unicamente linear, se torna modulado em fase (“*chirped*”), onde as componentes de baixa frequência se localizam na parte frontal do pulso e as de alta são atrasadas.

3.4.1 A evolução do pulso no tempo e na frequência em função da distância propagada

Considerando-se regime de propagação puramente não-linear, a equação (3.2) pode ser transformada fazendo-se β_2 igual a zero. Essa aproximação é válida para o caso em que a largura do pulso é tal que $L_D \gg L_{NL} \leq L$, onde L é o comprimento da fibra, sendo que para pulsos com $T_0 > 100$ ps com potências de pico da ordem de 1W os efeitos da GVD são desprezíveis. Com isso a equação (3.2) toma a seguinte forma

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{i}{L_{NL}} \exp(-\alpha z) |U|^2 U \quad (3.36)$$

sendo α a perda introduzida pela fibra. A solução dessa equação é

$$U(z, T) = U(0, T) \exp[i\phi_{NL}(z, T)] \quad (3.37)$$

onde $U(0, T)$ é a amplitude do campo em $z = 0$ e

$$\phi_{NL}(z, T) = |U(0, T)|^2 \left(\frac{z_{eff}}{L_{NL}} \right) \quad (3.38)$$

com

$$z_{eff} = \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha z)] \quad (3.39)$$

Da equação (3.37) verifica-se que o formato da amplitude do pulso mantém-se invariante com a distância, enquanto que a SPM aparece como um desvio de fase dependente do tempo e da distância. O desvio de fase não-linear $\phi_{NL}(z, T)$ dado pela equação acima aumenta com a distância propagada. A quantidade z_{eff} simboliza uma distância efetiva que é menor do que a distância de propagação z devido as perdas da fibra. Desprezando essas perdas, tem-se $z_{eff} = z$. O desvio de fase máximo ocorre no centro do pulso localizado em $z = 0$. Desde que U é normalizada tal que $|U(0, 0)| = 1$, o desvio máximo é dado por

$$\phi_{max} = \frac{z_{eff}}{L_{NL}} = \gamma P_0 z_{eff} \quad (3.40)$$

Da equação (3.40) o significado físico de L_{NL} é evidente: é a distância de propagação efetiva em que $\phi_{max} = 1$.

A abertura espectral induzida pela SPM é uma consequência da dependência temporal de $\phi_{NL}(z, T)$. Pode se demonstrar que uma fase variante no tempo implica em uma frequência óptica que difere de sua frequência central ω_0 . Essa diferença é dada por

$$\delta\omega(T) = -\frac{\partial\phi_{NL}}{\partial T} = -\frac{\partial|U(0,T)|^2}{\partial T} \frac{z_{eff}}{L_{NL}} \quad (3.41)$$

De maneira similar à discutida no item 3.3.2, a dependência temporal de $\delta\omega$ pode ser vista como um *chirp* em frequência. O *chirp* é induzido pela *SPM* e a sua amplitude aumenta com a distância propagada. Ou seja, novas componentes são geradas com a propagação do pulso, provocando a abertura do espectro com relação ao espectro inicial em $z = 0$. De (3.41) vê-se que a abertura espectral é dependente do formato do pulso. Seja novamente um formato gaussiano cuja a intensidade descrita pela equação (3.23), em $z = 0$, vale

$$|U(0,T)|^2 = \exp\left[-\frac{T^2}{T_0^2}\right]$$

O *chirp* induzido pela *SPM* para esse caso vale, então,

$$\delta\omega = \frac{2}{T_0} \frac{z_{eff}}{L_{NL}} \left[\frac{T}{T_0}\right] \exp\left[-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right] \quad (3.42)$$

sendo a variação da fase e do *chirp* ilustrados nas figuras 3-6 e 3-7 para $z = L_{NL}$. A variação temporal do *chirp* induzido $\delta\omega$ apresenta características interessantes e que por isso merecem alguma análise. Primeiramente, $\delta\omega$ é negativa próxima da parte frontal do pulso (desvio para o vermelho) e torna-se positivo para a parte de trás do mesmo (desvio para o azul). Segundo, o *chirp* é linear e positivo sobre uma grande parte central do pulso gaussiano.

Para se obter uma estimativa da ordem de grandeza da abertura espectral induzida pela *SPM*, basta diferenciarmos (3.42) e fazer o resultado igual a zero, teremos então o seu valor de pico. Desta forma chega-se a

$$\delta\omega_{max} = \frac{0.86}{T_0} \phi_{max} \quad (3.43)$$

Para estimar-se o fator de espalhamento do espectro, a largura do pulso T_0 pode ser relacionada com a largura espectral inicial $\Delta\omega$ (definida como a meia-largura nos pontos de 1/e). Para um pulso gaussiano,

$$\Delta\omega = \frac{1}{T_0} \quad (3.44)$$

usando (3.44) pode-se reescrever (3.43)

$$\delta\omega_{max} = 0.86\Delta\omega\phi_{max} \quad (3.45)$$

mostrando que a abertura do pulso é aproximadamente dada pelo valor numérico do desvio de fase máximo ϕ_{max} .

Similar ao caso da dispersão de velocidade de grupo (*GVD*), um *chirp* inicial do pulso de entrada influencia fortemente as características de propagação em regime puramente não-linear [6], mas este caso não será abordado neste trabalho.

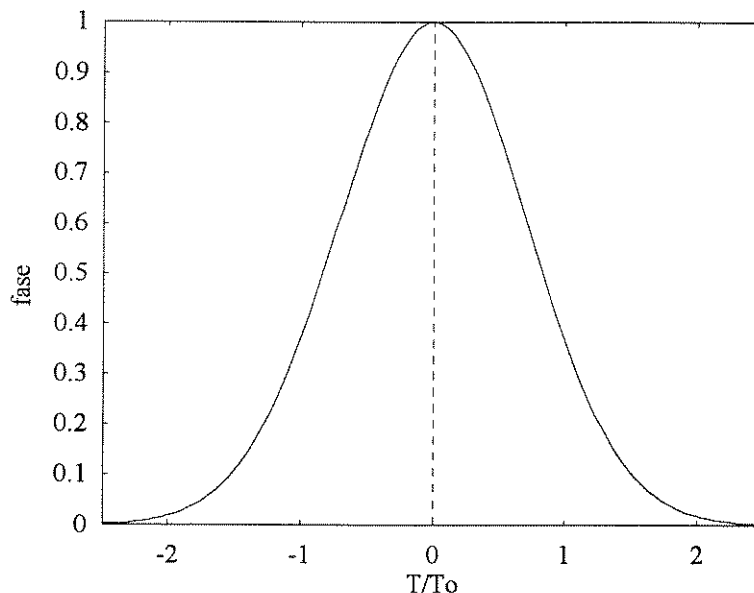


Figura 3-6. Variação temporal do desvio da fase.

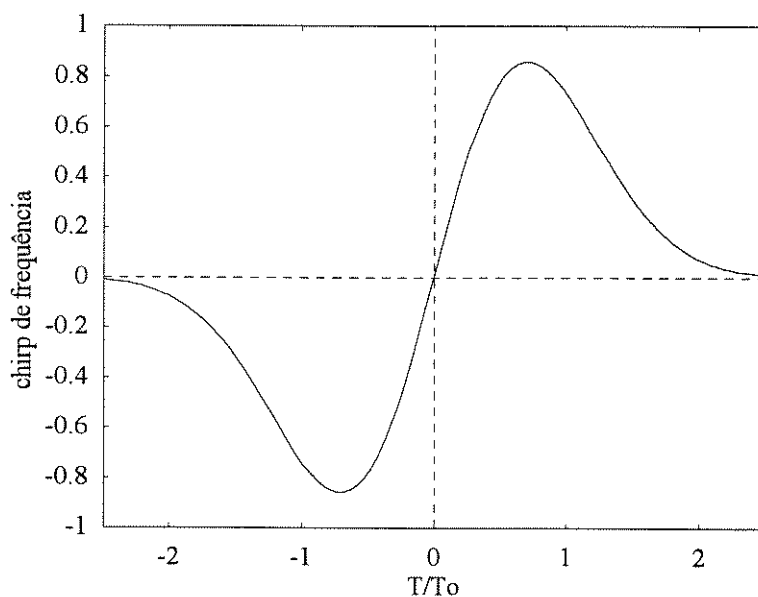


Figura 3-7. Variação do *chirp* de frequência ($\delta\omega T_0$) induzido pela *SPM*.

3.4.2 A auto-modulação de fase em regime de pulsos de curta duração

Toda a discussão do fenômeno de auto-modulação de fase descrita anteriormente se baseia na equação de propagação simplificada que considera somente os efeitos de *GVD* e *SPM* de ordens mais baixas. Entretanto, de maneira análoga ao caso da propagação em regime puramente linear, quando se tem pulsos com larguras inferiores que 0.1 ps se faz necessária a inclusão dos efeitos não-lineares de ordens superiores. Uma consequência importante da inclusão dos termos de ordem superior é o efeito de deformação temporal e espectral que ocorre na onda propagante e é denominado de auto-deflexão do pulso [6].

Assumindo-se uma resposta instantânea da não-linearidade, pode-se escrever

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + i \frac{\text{sgn}(\beta_3)}{6L_D'} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} - \frac{e^{-\alpha z}}{L_{NL}} \left[|U|^2 U + is \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) \right] \quad (3.46)$$

onde L_D' é dado por

$$L_D' = \frac{T_0^3}{|\beta_3|} \quad (3.47)$$

Os efeitos de auto-deflexão do pulso são governados pelo último termo em (3.46) com o parâmetro s definido como

$$s = \frac{2}{\omega_0 T_0} = \frac{T_{opt}}{\pi T_0} \quad (3.48)$$

onde T_{opt} é o período óptico dado por $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Considerando que na região visível ele vale por

volta de 2 fs, sendo s um parâmetro pouco maior que 0.01 para T_0 próximos de 60 fs. Para o caso de propagação em regime puramente não-linear, tem-se

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{e^{-\alpha z}}{L_{NL}} \left[|U|^2 U + is \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) \right] \quad (3.49)$$

Essa equação pode ser resolvida analiticamente para o caso em que $\beta_2 = 0$ [6]. Para simplificar, seja $\alpha = 0$. Adotando-se uma distância normalizada $Z = z / L_{NL}$, a equação acima torna-se

$$\frac{\partial U}{\partial Z} + s \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) = i |U|^2 U \quad (3.50)$$

Usando-se $U = \sqrt{I} \exp(i\phi)$ em (3.50) e separando-se as partes real e imaginária, tem-se

$$\frac{\partial I}{\partial Z} + 3sI \frac{\partial I}{\partial \tau} = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial Z} + sI \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = I \quad (3.52)$$

ou seja, as equações de fase e de intensidade são desacopladas por esta mudança de variáveis. A solução geral de (3.51) é dada por [6]

$$I(Z, \tau) = f(\tau - 3sIZ) \quad (3.53)$$

onde a condição inicial

$$I(0, \tau) = f(\tau) \quad (3.54)$$

foi usada. A função $f(\tau)$ descreve o formato inicial do pulso em $z = 0$. A equação (3.53) mostra que cada ponto σ se move ao longo de uma reta a partir do seu valor inicial, e a inclinação da reta depende da intensidade. Essa característica provoca a distorção do pulso. Para exemplificar, considera-se o caso de um pulso gaussiano

$$I(0, \tau) = f(\tau) = \exp(-\tau^2) \quad (3.55)$$

Das equações (3.55) e (3.53), vê-se que o formato do pulso após uma distância Z propagada é obtido usando-se

$$I(Z, \tau) = \exp[-(\tau - 3sIZ)^2] \quad (3.56)$$

A equação (3.56) deve ser resolvida para cada τ para obter-se o formato do pulso para um dado valor de Z . Conforme o pulso se propaga na fibra, ele se torna assimétrico com o seu pico deslocado em direção a sua parte de trás. Como resultado, essa parte vai se tornando cada vez mais abrupta com a distância propagada. Fisicamente, isso significa que a velocidade de grupo do pulso é dependente da intensidade, de forma que o pico viaja a uma velocidade menor do que as laterais do mesmo. A figura 3-8 ilustra o formato de pulso para o perfil gaussiano de entrada para $sZ = 0.1$ e 0.2 , com $s = 0.01$. Nesta figura fica claro o fenômeno de auto-deflexão do pulso.

Neste caso a distribuição espectral do pulso também é afetada. A assimetria espectral apresenta uma característica muito interessante, visto que os valores de amplitude são maiores nos picos desviados para o vermelho quando comparados com aqueles desviados para o azul [6].

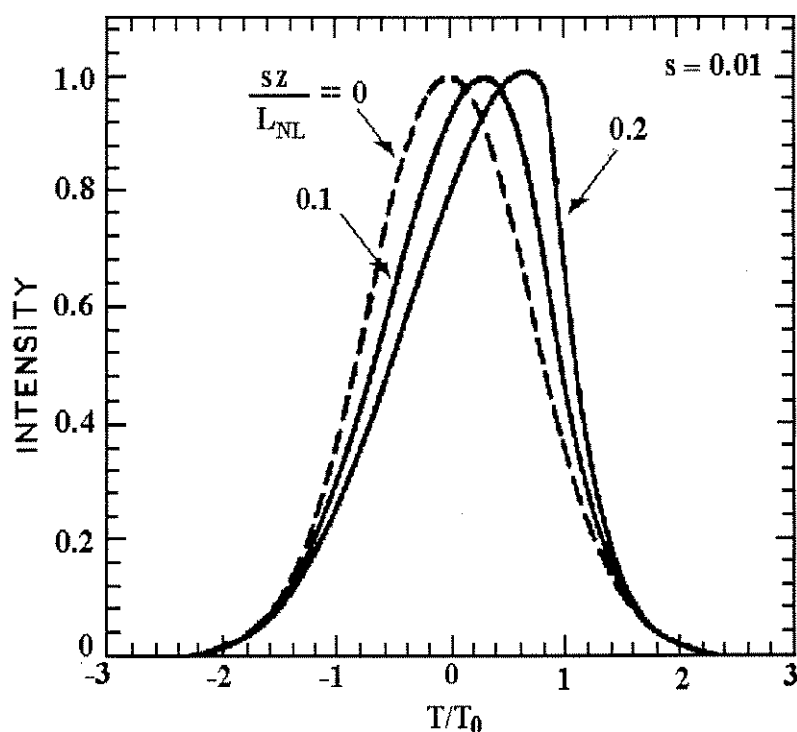


Figura 3-8. Ilustração do fenômeno de auto-deflexão do pulso que surge com a dependência do índice de refração com a intensidade [6].

3.5 Regime dispersivo e não-linear - O surgimento de sólitons ópticos

Quando as condições dadas pelas equações (3.5) e (3.6) não são satisfeitas, os efeitos de auto-modulação de fase (*SPM*) e de dispersão de velocidade de grupo (*GVD*) devem ser considerados. Sob certas condições pode-se obter um balanceamento entre os dois fenômenos de maneira que eles se anulem. Nesse cenário temos o surgimento de pulsos solitônicos.

Pode-se, de forma intuitiva, entender como o balanço entre esses dois fenômenos é possível. Como mostrado na seção 3.3, a *GVD* espalha o pulso durante a sua propagação ao longo da fibra. Já a *SPM*, resultante da dependência do índice com a intensidade (seção 3.4), impõe uma modulação de fase (*chirp*) ao pulso. Como este último é dependente da intensidade, não é difícil imaginar que sob certas circunstâncias a *SPM* e a *GVD* podem

cooperar-se de maneira que o *chirp* induzido pela *SPM* cancela exatamente a abertura induzida pela *GVD*. Com isso, o pulso pode propagar-se sem distorções na forma de um sóliton.

3.5.1 A descrição matemática

A descrição matemática de sóltons em fibras requer a solução da equação de onda em um meio não-linear dispersivo. Rescrevendo a equação 3.2 temos

$$i \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{\exp(-\alpha z)}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (3.57)$$

onde β_1 é dado pelo inverso da velocidade de grupo, e γ é o parâmetro de não-linearidade definido por

$$\gamma = \frac{2\pi n_2}{(\lambda A_{eff})} \quad (3.58)$$

Aqui n_2 é o índice de refração não-linear, λ é o comprimento de onda óptico, e A_{eff} é a área efetiva do núcleo dada por (2.57), e que no caso da aproximação gaussiana para o modo fundamental é dada por (2.58). A equação (3.57) pode ser usada na maioria dos casos de interesse. É útil normalizarmos a distância usando a seguinte relação

$$\xi = \frac{z}{L_D} \quad (3.59)$$

que aplicada em (3.57) resulta em

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} - \text{sgn}(\beta_2) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + N^2 |U|^2 U = 0 \quad (3.60)$$

Nesta equação, o parâmetro N é definido como

$$N^2 = \gamma P_0 L_D = \gamma P_0 \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad (3.61)$$

Será mostrado mais adiante que N possui um significado físico, sendo extremamente importante na caracterização de pulsos solitônicos. Todo esse conjunto de normalizações aplicados desde a obtenção da equação de onda para meios dispersivos, visa não só a eliminação da derivada de primeira ordem em t , mas também para que se possa escolher valores de tempo e distância tal que β_2 e γ tenham ordens de grandezas por volta da unidade [28].

3.5.1.1 Sóliton fundamental e de ordem superior

A equação não-linear de Schrödinger pertence à uma classe especial de equações não-lineares parciais que podem ser resolvidas exatamente pelo uso da técnica matemática conhecida por *método de espalhamento inverso* [29]. Embora existam soluções para os regimes anômalo e normal, atualmente pulsos solitônicos em fibras com aplicações em comunicações são, na sua grande maioria, encontrados em regime anômalo ($\beta_2 < 0$) [23]. Em caso de operação na região de dispersão normal, as soluções recebem a denominação de *sólitons escuros* (“dark solitons”), ao passo que para a região anômala eles se denominam *sólitons claros* (“bright solitons”). Aqui abordaremos somente o caso de sólitons claros.

No caso de dispersão anômala ($\beta_2 < 0$), (3.60) torna-se

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} - \beta_2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + N^2 |U|^2 U = 0 \quad (3.62)$$

que pode ser resolvida pelo método de espalhamento inverso [6,29]. As soluções dessa equação assumem a forma de sólitons. O parâmetro N descreve a ordem do sóliton. Como $\xi = z/L_D$, o período do sóliton z_0 , definido como a distância na qual o sóliton de ordem N qualquer recupera o seu formato inicial, é dado por

$$z_0 = \frac{\pi}{2} L_D = \frac{\pi}{2} \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad (3.63)$$

Este parâmetro desempenha um papel muito importante na teoria dos sólitons ópticos. Como um exemplo, quando da propagação de um sóliton de 3ª ordem ($N=3$), o formato do pulso inicialmente experimenta uma contração, reparte-se em seguida em várias componentes e então retoma o seu formato original no fim do período z_0 . Um padrão similar ocorre para outros valores de N , exceto para o caso de $N=1$, no qual o formato do pulso não muda durante a propagação. Desta forma, têm-se que os sólitons para $N > 1$ apresentam variação periódica de forma com a propagação [6]. Já para $N=1$ o sóliton se mantém constante durante toda a propagação e é denominado de sóliton fundamental. Para $N > 1$ tem-se os sólitons de ordem superior.

A solução correspondente ao sóliton fundamental pode ser obtida resolvendo-se a equação (3.62) diretamente sem a necessidade de usar-se o método de espalhamento inverso [30]. A aproximação consiste em assumir-se uma solução na forma

$$U(\xi, \tau) = V(\tau) \exp(i\phi) \quad (3.64)$$

onde V deve ser independente de ξ para a equação acima representar um sóliton fundamental que mantém seu perfil de amplitude durante a propagação. A fase ϕ pode depender de ξ bem como de τ . Se (3.64) é substituída em (3.62) e as partes real e imaginária são separadas, obtém-se duas equações para V e ϕ . A equação de fase mostra que ϕ deve ser da forma $\phi(\xi, \tau) = K\xi$, onde K é uma constante. A função $V(\tau)$ é encontrada a fim de satisfazer a seguinte equação diferencial não-linear de segunda ordem

$$\frac{d^2V}{d\tau^2} = 2V(K - V^2) \quad (3.65)$$

onde N foi tomado igual a 1. Essa equação pode ser resolvida multiplicando-a por $2(dV/d\tau)$ e integrando-a em τ , resultando em

$$\left(\frac{dV}{d\tau}\right)^2 = 2KV^2 - V^4 + C \quad (3.66)$$

onde C é uma constante de integração, que é eliminada aplicando-se a condição de que V e $dV/d\tau$ devem ser nulas para $|\tau| = \infty$. Já a constante K é determinada aplicando-se a condição que $V=1$ e $dV/d\tau = 0$ no pico do sóliton, assumindo-se que isso ocorra para τ igual a 0. Isso resulta em um $K=1/2$, e consequentemente $\phi = \xi/2$. A equação (3.66) é integrada e chega-se a solução $V(\tau) = \text{sech}(\tau)$. Obtém-se então

$$U(\xi, \tau) = \text{sech}(\tau) \exp(i\xi/2) \quad (3.67)$$

que é a forma do sóliton fundamental via integração direta na NLSE. Essa equação mostra que o pulso de entrada adquire um desvio de fase $\phi = \xi/2$ à medida que se propaga dentro da fibra, porém sua amplitude permanece inalterada. Essa propriedade do sóliton fundamental é que o torna bastante atraente para a aplicação em sistemas de comunicações ópticas de altíssimas taxas. Resumindo, os efeitos de dispersão são exatamente compensados pela não-linearidade da fibra quando o pulso de entrada possui um formato do tipo secante hiperbólico e a sua largura e potência de pico satisfazem a relação dada pela equação (3.61) para $N=1$.

Uma propriedade interessante dos sóltons ópticos é que eles são altamente estáveis. Com isso, mesmo que as características do pulso de entrada desviem das condições anteriormente mencionadas, o sóliton fundamental pode ser excitado. Como um exemplo, se um pulso de entrada possui formato gaussiano e suas características resultem em $N \cong 1$, o próprio pulso ajusta a sua forma e a sua largura na tentativa de tornar-se um sóliton

fundamental. Um comportamento parecido é observado para casos em que N difere de um inteiro. Pode-se mostrar que um sólito de ordem N pode ser formado quando o valor de N na entrada varia na faixa de $N - 1/2$ a $N + 1/2$. Em particular para o sólito fundamental, tem-se a possibilidade de sua formação para a faixa de variação de 0.5 a 1.5. Em geral, pequenos desvios com relação às condições ideais não comprometem a propagação de pulsos solitônicos. Alguma energia do pulso é perdida durante essa fase de adaptação do pulso sob forma de ondas dispersivas. Consequentemente, é interessante casar-se na medida do possível as condições iniciais do pulso com aquelas que são as ideais.

3.5.1.2 As perdas da fibra e sua influência nos pulsos solitônicos

Como visto acima, o que torna os sólitos atrativos aos sistemas de comunicações ópticas de alta capacidade é a propriedade de manter a sua forma mesmo sob a presença de dispersão. Porém em todos desenvolvimentos realizados até aqui, as perdas das fibras não foram levadas em consideração. Quando a energia do sólito cai abaixo de um certo valor limite, o efeito não-linear não é mais suficiente para compensar a *GVD*. Com isso, torna-se necessário buscar-se mecanismos que possam amplificar os pulsos a fim de restituir a energia do sólito.

3.5.1.2.1 Abertura do sólito devido às perdas

As perdas da fibra são incluídas adicionando-se o termo $-i\alpha L_d U/2$ ao lado direito da equação (3.57), onde α é coeficiente de atenuação da fibra. Com isso

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} - \beta_2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + N^2 |U|^2 U = -i\Gamma U \quad (3.68)$$

onde

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2} L_D = \frac{\alpha}{2} \frac{T_0^2}{|\beta_2|} = \frac{\alpha z_0}{\pi} \quad (3.69)$$

A equação (3.68) pode ser resolvida utilizando-se o método do espalhamento inverso para $\Gamma \ll 1$, tal que as perdas possam ser tratadas como perturbações. Para um pulso de entrada com o formato de um sólito fundamental, a solução aproximada de (3.68) é dada por [30]

$$U(\xi, \tau) = \text{sech}[\exp(-2\Gamma\xi)\tau] \exp\left\{\left(i/8\Gamma\right)[1 - \exp(-4\Gamma\xi)]\right\} \quad (3.70)$$

Da equação acima vemos que a largura cresce exponencialmente na forma

$$T_1 = T_0 \exp(2\Gamma\xi) = T_0 \exp(\alpha z) \quad (3.71)$$

Esse aumento exponencial na largura do sóliton não é válido para distâncias longas, sendo limitado a distâncias tais que o produto $\Gamma\xi \ll 1$. Observando-se (3.71) e (3.28) é importante notar que abertura de um pulso solitônico é muito menor do que a sofrida por um pulso operando no caso linear. Logo, efeitos não-lineares são interessantes mesmo nos casos em que os sólitons não podem se manter perfeitamente devido às perdas das fibras. Essa característica pode ser aproveitada para se aumentar o espaçamento entre repetidores dos sistemas ópticos cuja a limitação é dada pela dispersão. Em contra partida a potência de transmissão requerida é maior, porém não o suficiente para impedir que sistemas de comunicações baseados em sólitons sejam realizáveis usando-se lasers comerciais.

3.5.1.2.2 Amplificação de pulsos solitônicos

Em um tipo de aplicação, sólitons são encarregados da transmissão de sinais ópticos sobre distâncias extremamente longas (até 10.000 km ou mais) sem o emprego de repetidores eletrônicos. Para compensar os efeitos das perdas da fibra, há a necessidade de se amplificar os sólitons periodicamente com o intuito de recuperar as sua largura e potência de pico original. Esse sistema é bastante atrativo no uso em comunicações transoceânicas, visto que o sinal permanece com a sua forma através do enlace.

A forma mais simples para a amplificação solitônica se baseia nos esquemas usados em sistemas de transmissão óptica que não se utilizam de efeitos não-lineares da fibra. Tem-se um amplificador óptico inserido periodicamente ao longo do enlace com o seu ganho ajustado para compensar as perdas inseridas pela fibra. Um parâmetro que surge devido a essa configuração sistêmica e se torna um dos mais relevantes é o espaçamento L_{amp} entre dois amplificadores consecutivos. Ele deve ser o maior possível a fim de diminuir-se o número de amplificadores e consequentemente o custo total do sistema. Para sistemas não solitônicos, o espaçamento entre amplificadores se situa na faixa de 50-100 km, dependendo do comprimento de onda de operação, dentre outros fatores. Já para sistemas operando com pulsos solitônicos, este se restringe a valores bem mais modestos, na faixa de 10-30 km. Essa redução no comprimento reside no fato de que os amplificadores aumentam a energia do sóliton localmente e não permitem com isso uma recuperação gradual do formato do pulso solitônico. A largura do pulso amplificado se ajusta dinamicamente na seção da fibra que segue ao

amplificador, perdendo contudo, uma parcela de sua energia sob forma de ondas dispersivas durante o ajuste de fase [30]. Essa perda pode se acumular e atingir níveis significantes quando se tem vários estágios de amplificação e deve ser evitada. Uma maneira de reduzi-la é diminuir-se o espaçamento entre amplificadores tal que o sóliton não seja perturbado dentro do mesmo. Estudos mostram que esse é o caso para L_{amp} 's da ordem de frações do período z_0 do sóliton ($L_{amp} \ll z_0$). Como o período do sóliton depende da largura inicial do pulso e da dispersão da fibra, esse pode variar de 10-1000 km. Valores típicos para z_0 estão na casa de 100 km para sistemas ópticos operando com taxas de transmissão acima de 1Gbits/s em fibras convencionais. Na configuração de amplificadores em cascata L_{amp} deve ser menor que 20 km, um valor indesejável sob o ponto de vista de projeto. Entretanto, quando se tem o emprego de fibras com dispersão deslocada ($\beta_2 < 1 \text{ ps}^2/\text{km}$), z_0 pode atingir valores entre 500-1000 km, elevando os valores de L_{amp} para a faixa de 30-50 km.

Uma solução alternativa é o uso da amplificação distribuída na qual os sólítos são amplificados através da fibra. Amplificadores do tipo Raman [6] podem ser usados para esse propósito, desde que estes forneçam o ganho Raman estimulado quando a fibra é bombeada opticamente via injeção de luz. Para isso, a frequência de bombeamento é escolhida tal que exceda a frequência da portadora do sóliton na ordem do desvio de Raman (para fibras de sílica vale por volta de 13.2 THz) [30]. Desde que o ganho Raman se distribui por inteiro sobre fibra, os pulsos podem ser amplificados adiabaticamente de maneira que N é mantido próximo de 1 a despeito das perdas da fibra. Uma condição ideal é aquela na qual o ganho compensaria com exatidão essas perdas, e N se manteria por toda extensão de propagação. Na prática todavia, essa condição não é obtida já que as perdas também atuam no pulso de bombeio, atenuando-o com a distância. Isso leva a necessidade de reinjetar-se o bombeio para a amplificação Raman de forma periódica. O espaçamento entre os bombeios depende das perdas da fibra, do próprio comprimento de onda do bombeio e da tolerância permitida no desvio da energia do sóliton. Tipicamente, L_{amp} varia de 40-50 km se aproximadamente 20% de desvio na energia do pulso são toleráveis [28]. Entretanto, L_{amp} pode ser maior que o período sóliton por uma alta margem.

Os experimentos iniciais na amplificação de pulsos solitônicos se concentraram no esquema de amplificação Raman dada as vantagens da amplificação distribuída. Contudo, a sua aplicabilidade prática esbarra atualmente em algumas das suas características e das dos componentes envolvidos nesse esquema. As principais delas são que este tipo de amplificação

é bastante ruidosa [20] e que os lasers de bombeio devem possuir uma potência cw maior que 500 mW, por volta do comprimento de onda de $1.45 \mu\text{m}$ [30]. É extremamente difícil obter-se tais potências de emissão usando-se lasers semicondutores, e os lasers utilizados em demonstrações experimentais são extremamente grandes para serem usados em sistemas ópticos práticos.

Com o surgimento e amadurecimento da tecnologia de amplificadores a fibra dopada com érbio (AFDE) [31] o quadro mudou substancialmente. Vários experimentos usando esses amplificadores mostraram que os pulsos podem se manter sobre longas distâncias a despeito da natureza de amplificação ser concentrada e não distribuída. Com isso, AFDE's têm recebido grande atenção e aparecem como a principal alternativa para amplificação nesses tipos de sistemas [20]. A figura 3-9 ilustra os métodos de amplificação para transmissão de sólitons em sistemas de longas distâncias.

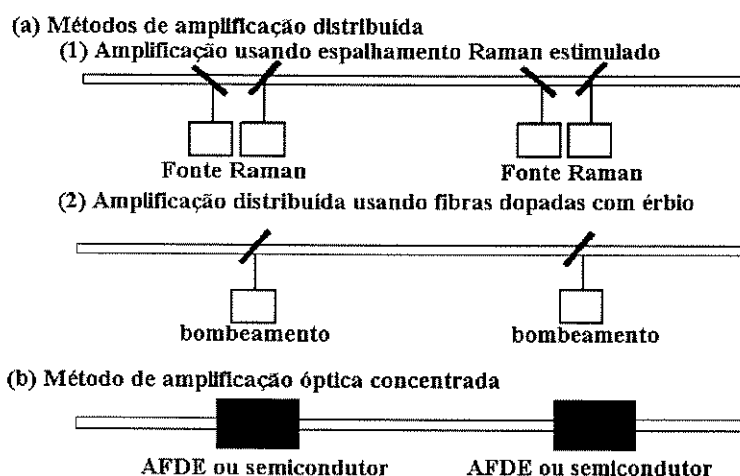


Figura 3-9. Métodos de amplificação ópticos para transmissão solitônica sobre longas distâncias.

3.5.2 Fatores envolvidos nos projetos de sistemas baseados em sólitos

3.5.2.1 Interação entre pulsos solitônicos

Como mostrado, o pulso de entrada deve possuir um perfil tipo secante hiperbólico de maneira propagar-se dentro da fibra sob a forma de um sólito fundamental. Além do mais, a sua largura e potência devem se relacionar tal que N seja igual a 1. Em termos de variáveis não-normalizadas, a amplitude do campo na entrada da fibra é dado por

$$A(0,t) = \sqrt{P_0 \operatorname{sech}\left(\frac{t}{T_0}\right)} \quad (3.72)$$

onde a potência de pico se relaciona a largura do pulso T_0 e aos parâmetros da fibra através de

$$P_0 = \frac{|\beta_2|}{(\gamma T_0^2)} \quad (3.73)$$

A largura do pulso está relacionada com a $FWHM$ do sólito por

$$T_{FWHM} = 1.763T_0 \quad (3.74)$$

E a sua energia pode ser obtida por

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} |A(0,T)|^2 dt = 2P_0T_0 \quad (3.75)$$

Uma variável de projeto extremamente importante é a largura do pulso $FWHM$. Ao contrário dos sistemas ópticos tradicionais, sistemas solitônicos só podem empregar formatos de pulso do tipo RZ. Isso se deve basicamente ao fenômeno de interação entre sólitos [6,32] que faz com que estes possam ocupar somente uma fração do tempo de bit T_B ($T_B = 1/B$, sendo B a taxa de bits). A razão é que a solução (3.67) só vale para pulsos que se propagam de forma isolada. A presença de outros perturba porque o campo óptico resultante da combinação não é uma solução da $NLSE$ [30].

Pode-se buscar entender as implicações que decorrem da interação entre sólitos resolvendo a $NLSE$ com uma amplitude de entrada consistindo de um par de sólitos tal que [30]

$$U(0,\tau) = \operatorname{sech}(\tau - q_0) + r \operatorname{sech}[r(\tau + q_0)] \exp(i\theta) \quad (3.76)$$

onde r é a amplitude relativa dos dois sólitos, θ é a fase relativa e $2q_0$ separação inicial normalizada. Se a solução representa dois sólitos vizinhos, a suas separações devem ser iguais a T_B . Com isso, q_0 se relaciona com a taxa de bit por

$$B = \frac{1}{2q_0 T_0} = \frac{0.88}{q_0 T_{FWHM}} \quad (3.77)$$

Estudos revelam que a interação entre sólitos próximos é extremamente dependente de r , θ e q_0 . Para o caso de pulsos em fase ($\theta = 0$), os pulsos se atraem conforme a propagação e vão colidindo periodicamente. Entretanto, para sólitos defasados de 180° , eles experimentam uma força de repulsão se afastando um do outro [32]. Do ponto de vista sistêmico esse comportamento não é aceitável; isso poderia levar a um “*jitter*” no tempo de chegada dos pulsos, pois a fase relativa θ não é bem controlada. Uma forma de evitar-se a interação é aumentar q_0 já que essa depende do espaçamento entre os pulsos. Para q_0 suficientemente grandes, desvios nas posições dos sólitos são pequenos e os pulsos praticamente permanecem dentro dos correspondentes tempos de bit. Como consequência temos uma limitação na taxa de transmissão.

A dependência da separação entre sólitos pode ser estudada usando-se o método de espalhamento inverso [32]. Uma expressão que mostra tal dependência é dada por [30]

$$\xi_p = \frac{\pi \sinh(2q_0) \cosh(q_0)}{2q_0 + \sinh(2q_0)} \quad (3.78)$$

onde ξ_p é período de oscilação de $q_s(\xi)$, sendo esta a separação entre sólitos para qualquer distância ξ e é dada por [6]

$$2 \exp[2(q_s - q_0)] = 1 + \cos[4\xi \exp(-q_0)] \quad (3.79)$$

A equação (3.79) pode ser usada para projeto de sistemas da seguinte forma [30]: se $\xi_p L_D$ é muito maior que a distância total do enlace L_T , a interação entre sólitos pode ser desprezada, desde que o espaçamento entre eles desviará muito pouco do seu valor inicial. Uma forma que permite relacionar a taxa de transmissão com o comprimento do enlace em função da separação inicial entre pulsos é [30]

$$B^2 L_T \ll \frac{\pi \exp(q_0)}{8q_0^2 |\beta_2|} \quad (3.80)$$

O espaçamento pode ser reduzido pela metade usando-se pulsos vizinhos com amplitudes diferentes. Estudos numéricos [30] mostram que para $r=0.1$ a separação varia de 10% em relação à inicial. Nesse caso tem-se uma amplitude de pico desviando também de 10% do valor ideal que corresponderia a $N=1$. Como tratado anteriormente, pequenos

desvios na potência de pico não chegam a comprometer a natureza solitônica do pulso, podendo tornar esse tipo de esquema viável na prática.

3.5.2.2 Espaçamento entre amplificadores

O espaçamento entre amplificadores é um parâmetro de projeto extremamente importante para sistemas de comunicações baseados em sóltons, de forma análoga aos sistemas ópticos convencionais. Esse espaçamento pode chegar a 100 km para sistemas operando em 1.55 μm fazendo uso de AFDEs. Para sistemas solitônicos, como anteriormente mencionado, esta distância é geralmente menor e depende dos parâmetros do sistema. Tem-se feito esforços para determinar valores adequados para L_{amp} em sistemas que não se utilizam de amplificação distribuída.

Uma aproximação para estimar-se o espaçamento é baseada na simulação numérica de um sistema de comunicação por sólton. A equação *NLSE* com perdas (3.68) é então resolvida numericamente [30]. A amplitude U do sólton é incrementada em cada estágio de amplificação para compensar as perdas da fibra usando-se

$$U'(L, \tau) = \sqrt{G_0} U(L, \tau) \quad (3.81)$$

sendo G_0 o ganho do amplificador escolhido de maneira que

$$G_0 \exp(-\alpha L_{amp}) = 1 \quad (3.82)$$

Com isso a energia do sólton é amplificada para valores iguais ao inicial. A performance do sistema é dada pelo número de amplificadores que podem ser usados antes que o sistema se torne inoperável (degradação do diagrama de olho). Alguns experimentos mostram que sóltons podem se propagar sobre alguns milhares de quilômetros desde que L_{amp} seja mantido consideravelmente abaixo do período do sólton z_0 . Se assumirmos $L_{amp} < L_D$ como critério de projeto, onde o comprimento de dispersão é dado por (3.3), e relacionarmos T_0 à taxa de bit usando para isso (3.77), obtemos o seguinte critério

$$B^2 L_{amp} < (4q_0^2 |\beta_2|)^{-1} \quad (3.83)$$

sendo q_0 a separação relativa entre sóltons vizinhos. Aplicando-se alguns valores típicos para os parâmetros do sistema, obtém-se uma estimativa do espaçamento entre amplificadores revelando a necessidade imperiosa de usar-se fibras com dispersão deslocada para sistemas solitônicos.

A equação (3.83) fornece um limite superior para L_{amp} . O seu valor exato depende de outros parâmetros do sistema. Quando se tem $N=1$, geralmente é necessário manter $L_{amp} < z_0/10$ a fim de evitar grandes flutuações na amplitude do sóliton, na sua largura e energia [30]. Existem métodos como a pré-ênfase [30], que têm como objetivo principal o aumento de L_{amp} .

3.5.2.3 Ruído do amplificador

Todo os amplificadores ópticos adicionam ruído ao sinal sob a forma emissão espontânea amplificada (ASE) [31]. Os ruídos adicionados comprometem a performance do sistema de diversos modos. Eles degradam a relação sinal-ruído (SNR) que depende basicamente da figura de ruído dos amplificadores e da quantidade desses na linha. Os efeitos acumulativos da ASE além de poderem levar o ganho à saturação, limitam a distância de transmissão devido ao “jitter” induzido no tempo de chegada dos pulsos solitônicos [34].

A origem dessa incerteza na chegada dos pulsos pode ser entendida observando-se que a adição da ASE introduz flutuações na amplitude e na fase do pulso na saída do amplificador. Flutuações na amplitude levam à variações na largura do sóliton sendo que são pequenas o bastante ao ponto de se tornarem irrelevantes. A segunda muda a frequência da portadora de uma forma randômica, sendo a mais problemática. A razão para isto é que a velocidade de grupo v_g depende da frequência da portadora ω_0 . Uma mudança nessa frequência muda levemente a derivada, mudando randomicamente a velocidade do pulso após cada estágio de amplificação. Como resultado, o tempo de chegada dos pulsos no receptor varia randomicamente bit a bit, acarretando uma penalidade na potência e pode comprometer a taxa de erro do sistema.

Pode-se calcular a variância do “jitter” assumindo que cada estágio de amplificação produz desvios na velocidade de forma independente. Com isso, tem-se para o caso limite de muitos amplificadores na linha [32]

$$(BL_T)^3 < 0.1372 T_{FWHM} B A_{eff} \frac{f_j^2}{(h\omega n_2 D)} \quad (3.84)$$

sendo f_j uma fração específica da taxa de bit, L_T a distância total do enlace. Relacionando-se a T_{FWHM} à taxa de bits usando (3.77) e n_2 à γ via (3.58), a condição anterior pode ser reescrita como

$$BL_T < \left(\frac{\pi f_j^2}{q_0 \lambda h \alpha \gamma D} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.85)$$

revelando que os enlaces que cobrem distâncias transoceânicas podem ser realizados com fibras de dispersão deslocada com taxas de linha de até 5 Gb/s.

Existem implicações quanto a presença de um *chirp* inicial no pulso de entrada, que deve ser evitado ao máximo na medida do possível [30]. Porém tais implicações não serão aqui abordadas.

3.5.3 Efeitos de ordem superior e suas consequências no sólito óptico

As propriedades dos sólitons descritas até aqui se baseiam na equação de propagação simplificada. Como já visto, quando se trabalha com durações de pulsos da ordem ou menores que 100 fs há a necessidade de levar-se em consideração os efeitos de maior ordem. Com isso, a equação de propagação normalizada pode ser reescrita na forma

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - i \delta \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} = -N^2 \left[|U|^2 U + i s \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - \tau_R U \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2) \right] \quad (3.86)$$

sendo o pulso propagado na região de dispersão anômala e as perdas desprezadas. Os parâmetros δ , s e τ_R valem

$$\delta = \frac{\beta_3}{6|\beta_2|T_0} \quad s = \frac{2}{\omega_0 T_0} \quad \tau_R = \frac{T_R}{T_0} \quad (3.87)$$

que governam os efeitos de dispersão de maior ordem, auto-deflexão do pulso e o atraso na resposta não-linear do meio, respectivamente. Nota-se, que todos os três variam inversamente com a largura do pulso e são praticamente desprezíveis para T_0 maiores que 1 ps, tomando alguma importância para pulsos ultra-curtos.

3.5.3.1 Auto-deflexão do pulso

Para o caso de δ e τ_R iguais a zero, a equação (3.86) fica

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = -N^2 \left[|U|^2 U + i s \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) \right] \quad (3.88)$$

Como visto na seção 3.5.3, a dependência da velocidade de grupo com a intensidade resulta no pico do pulso viajando em uma velocidade menor do que os extremos do mesmo. Embora a GVD atenuie tal fenômeno, esse se manifesta através do desvio da parte

central do pulso, desde que esse é mais lento. A figura 3-10 ilustra o atraso sofrido pela parte central do pulso para o caso da propagação de um sólon fundamental [6].

O efeito de auto-deflexão nos sólitons de maior ordem é interessante já que leva a quebra do sólon propagante em seus constituintes, um fenômeno denominado de *decaimento de sólitons* [6]. Para o caso do sólon de 2ª ordem temos o surgimento de dois pulsos propagantes que vão se afastando conforme a distância propagada, enquanto que para o de 3ª ordem temos o surgimento de 3 pulsos que se propagam com diferentes velocidades de grupo.

O efeito da dispersão de maior ordem sobre o decaimento pode ser analisado inserindo-se a terceira derivada em τ em (3.88). O comportamento qualitativo permanece o mesmo [6]. Na realidade, a dispersão de maior ordem pode levar ao decaimento de sólitons mesmo na ausência de efeitos não-lineares superiores quando δ excede um valor limite. O retardo na resposta não-linear do meio também leva ao decaimento de sólitons [6]. O comportamento é igualmente similar aos descritos acima, diferindo que o efeito é pronunciado mesmo para pequenos valores de τ_R e para distâncias bem menores quando comparado ao decaimento induzido por s , e que o sólon secundário não sofre um atraso na mesma proporção daquele sofrido pelo sólon principal [6].

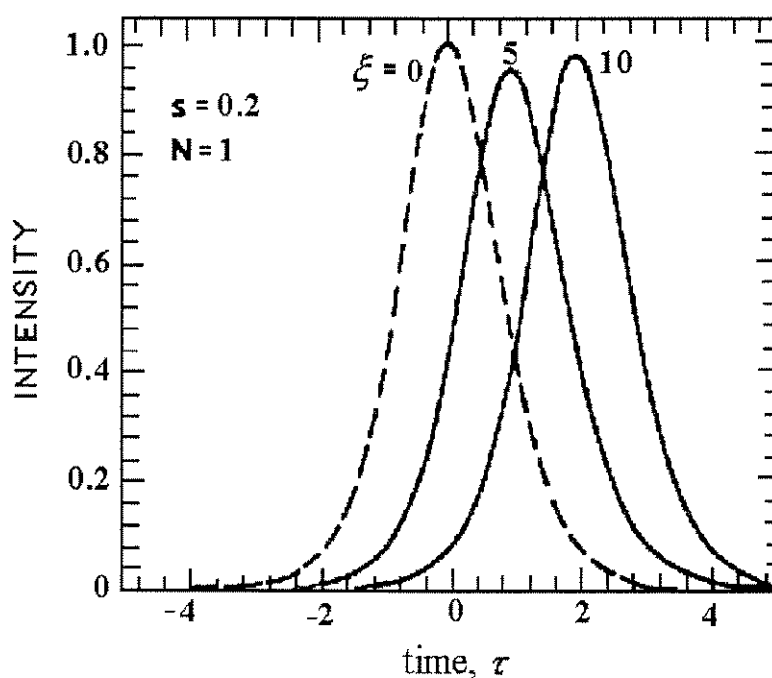


Figura 3-10. Efeito da auto-deflexão do pulso sobre o sólon fundamental [6].

3.5.3.2 Auto-desvio para o vermelho

Para valores finitos de τ_R o pulso solitônico experimenta um desvio em frequência auto-induzido. Dado o espectro do pulso, para regimes de duração da ordem de femtosegundos, o espectro do pulso se torna largo o suficiente para que o ganho Raman (Apêndice II) possa amplificar efetivamente as componentes de menor frequência às custas das componentes mais elevadas que atuam como bombeio [33]. O processo continua ao longo da propagação na fibra de tal maneira que a energia das componentes no azul é transferida para as componentes localizadas no vermelho. Essa transferência aparece como um desvio para o vermelho no espectro do sóliton propagado, sendo este função da distância propagada.

Gordon [33] desenvolveu a formulação para o fenômeno baseando-se no fato de que desvios na frequência média do sóliton propagante podem ser somente causados por um ganho ou uma perda da fibra dependentes da frequência, e que dada a estabilidade inerente dos pulsos solitônicos, os termos de maior ordem podem ser tratados adequadamente como perturbações. Gordon introduziu os efeitos Raman na equação de propagação simplificada (3.62) escrevendo a resposta não-linear do meio na forma [33]

$$|u|^2 u \rightarrow u(t) \int f(s) |u(t-s)|^2 ds \quad (3.89)$$

sendo $f(s)$ uma função real se não existirem perdas diferentes daquelas do tipo Raman, $f(s)=0$ para assegurar a causalidade, e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds = 1 \quad (3.90)$$

para ter-se (3.62) no caso de pequenos atrasos na não-linearidade. Desconsiderou-se os outros efeitos com o intuito de isolar e enfatizar o efeito Raman e obteve-se com isso [33]

$$\frac{df}{dz} \left(\frac{\text{THz}}{\text{Km}} \right) \propto T_0^{-4} \quad (3.91)$$

A equação (3.91) se mostra consistente já que o decaimento de sólitons cresce com $(z/z_0)^2$. Desde que z_0 é diretamente proporcional ao quadrado de T_0 , τ_d segue T_0^{-4} . Logo, como o desvio está diretamente relacionado τ_d , a sua escala também varia com T_0^{-4} . A figura 3-11 ilustra o espectro de um dado sóliton e o ganho Raman estimulado em função da frequência.

Embora o atraso sofrido pelos pulsos seja único, o desvio em frequência também deve ser levado em consideração já que os lasers na prática exibem flutuações randômicas nas larguras de pulsos emitidas, fazendo com que esses atrasos também sejam aleatórios causando

um *jitter* na chegada destes pulsos. Contudo, isto só é relevante para taxas muito altas (acima de 10 Gb/s), sendo essa a razão de não a ter incluído como uma variável de projeto.

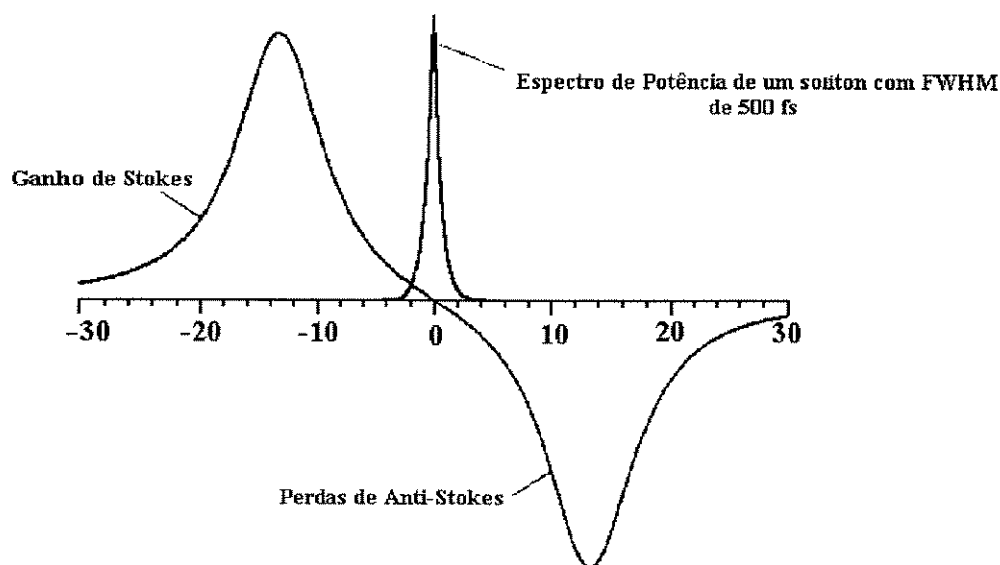


Figura 3-11. Comparação entre o espectro do soliton e do efeito Raman da fibra. As frequências estão expressas em THz [5].

CAPÍTULO 4

Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo

4.1 Introdução

O método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) permite a análise e modelamento da interação de ondas eletromagnéticas com diversos tipos de meios e estruturas usadas em engenharia. Este método, que foi proposto inicialmente por Yee [8], é uma solução direta das equações de Maxwell dependentes do tempo, obtida através da substituição das derivadas contidas nos operadores diferenciais por diferenças finitas centradas. Com isto, as funções que inicialmente eram contínuas, são transformadas em funções discretas, possibilitando assim uma redução dos dados amostrados do campo eletromagnético contínuo num certo volume do espaço, em um determinado período de tempo. A discretização no tempo e no espaço é feita de modo minimizar erros na amostragem e assegurar a estabilidade numérica do método [34].

O FDTD é um método que progride temporalmente simulando as ondas contínuas por dados numéricos amostrados, que se propagam no espaço de memória do computador de forma análoga à onda amostrada. Em cada passo de tempo, o sistema de equações usado para atualizar as componentes de campo é explícito, fazendo com que não haja necessidade de resolução de um sistema de equações lineares. Com isso, a memória requerida, bem como o

tempo de processamento é simplesmente proporcional ao formato elétrico do volume modelado.

As equações de Maxwell em suas formas diferenciais no domínio do tempo, formam um sistema de equações diferenciais hiperbólicas de primeira ordem que deve ser resolvido partindo-se de valores iniciais e considerando-se condições de contorno adequadas à resolução do problema [34].

De forma a obtermos métodos de solução numérica, substituímos as derivadas parciais em uma dada equação pelos quocientes diferença correspondentes. Com isso, transformamos nossas funções contínuas em funções amostradas. O nosso espaço-tempo antes contínuo passa ser dado por

$$(x, y, z, t) \rightarrow (i\delta_x, j\delta_y, k\delta_z, n\delta_t) = (i, j, k, n) \quad (4.1)$$

onde i, j, k, n são inteiros. Com essa transformação, nossas funções tornam-se

$$F(x, y, z, t) \rightarrow F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = F^n(i, j, k) \quad (4.2)$$

Utilizando a fórmula de Taylor

$$F(x + \Delta, y, z, t) = F(x, y, z, t) + \Delta \frac{d}{dx} F(x, y, z, t) + \frac{1}{2} \Delta^2 \frac{d^2}{dx^2} F(x, y, z, t) + \dots \quad (4.3)$$

e desprezando-se o termo de ordem 2 ($\Delta \gg \Delta^2$), obtemos

$$\frac{dF(x, y, z, t)}{dx} = \frac{F(x + \Delta, y, z, t) - F(x, y, z, t)}{\Delta} + O(\Delta x^2) \quad (4.4)$$

onde $O(\Delta x^2)$ indica que elementos de ordem maior ou igual a 2, estão sendo desprezados nas aproximações dos operadores diferenciais.

Da mesma forma, nossas funções discretizadas podem ter suas derivadas aproximadas por diferenças. Com isso

$$\frac{d}{dx} F^n(i, j, k) \equiv \frac{F^n(i+1, j, k) - F^n(i, j, k)}{\Delta x} \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt} F^n(i, j, k) \equiv \frac{F^{n+1}(i, j, k) - F^n(i, j, k)}{\Delta t} \quad (4.6)$$

4.2 As equações de Maxwell discretizadas: o algoritmo de Yee

Considerando uma região do espaço isenta de cargas livres e que tenha parâmetros constitutivos independentes do tempo, ou seja, um meio que não possui dispersão de qualquer

natureza, e ainda admitindo-se que este seja isotrópico e sem perdas, as equações de Maxwell na sua forma diferencial podem ser escritas como (sistema MKS)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H} \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \vec{E} \quad (4.8)$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico em V/m, $\vec{H}$ é o campo magnético em A/m, ε é a permissividade elétrica do meio em F/m, e μ é a permeabilidade magnética do meio em H/m.

Desmembrando as equações vetoriais (4.7) e (4.8) em suas componentes em um sistema de coordenadas cartesiano, temos

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (4.14)$$

Esse sistema de 6 equações hiperbólicas acopladas formam a base do algoritmo FDTD para interações de ondas eletromagnéticas com objetos tridimensionais genéricos. Baseado neste sistema, Yee [8] aplicou a aproximação das derivadas por diferenças centradas e chegou ao seguinte conjunto de equações diferença

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu} \cdot \left[\frac{E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (4.15)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu} \cdot \left[\frac{E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right] \quad (4.16)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t}{\mu} \cdot \left[\frac{E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \quad (4.17)$$

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) = E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \quad (4.18)$$

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) = E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \quad (4.19)$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) = E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (4.20)$$

Como podemos notar as equações anteriores são discretizadas temporal e espacialmente. Yee posicionou os campos intercalados espacialmente nessa forma, para que as condições de continuidade das componentes tangenciais fossem naturalmente satisfeitas. Com isso, ele distribuiu os campos conforme ilustrado na figura 4-1. À esta estrutura denominamos de célula básica de Yee [8,34,35]. Nela observamos que cada componente de campo magnético é envolto por quatro componentes de campo elétrico, e vice-versa. Além de permitir a substituição de nossas derivadas por diferenças centradas, este arranjo possui uma geometria adequada à implementação das leis de Faraday e de Ampère, em suas formas integrais, a nível de espaço discretizado [34]. Já a discretização temporal que intercala os campos magnético e elétrico, além de garantir a precisão de segunda ordem nas aproximações ($O(\Delta t^2)$), visa simular a interação existente entre estes campos na formação de uma onda eletromagnética. Logo, o espaço é agora constituído por um arranjo de células básicas que formam a malha FDTD.

As equações (4.15) a (4.20) são calculadas de forma iterativa a partir de um instante inicial $n=0$ dadas as condições iniciais para os campos, a excitação destes e as condições de contorno apropriadas para o problema. Em qualquer ponto de nossa malha, o valor atual de uma componente de campo depende somente de seu valor em um instante anterior e de outras componentes de campo em pontos adjacentes. Logo, em cada instante de tempo, temos explicitados os valores atuais dos campos.

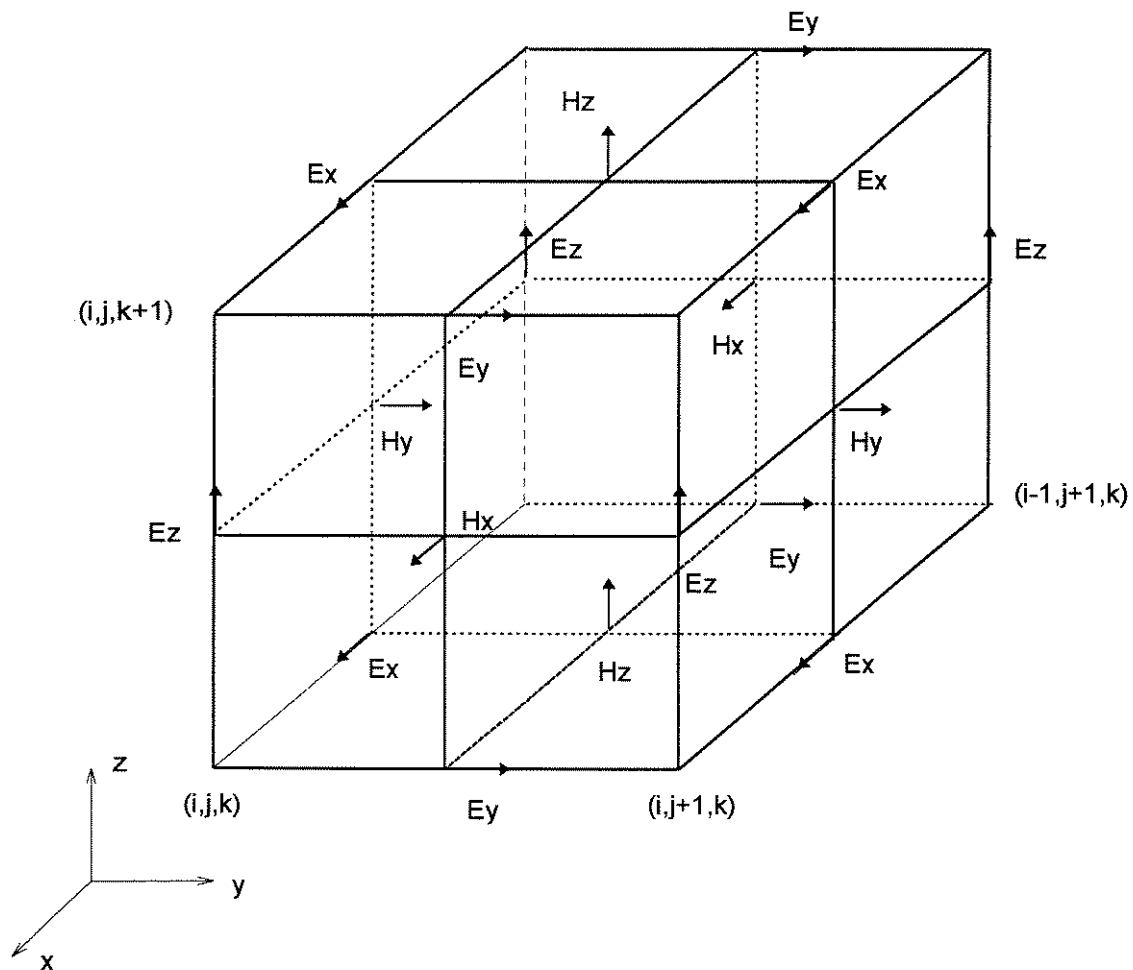


Figura 4-1. Célula básica de Yee [8].

4.2.1 Condições de contorno

Uma vez que o conjunto de equações mostrado anteriormente simula a propagação de ondas em um meio ilimitado e consequentemente em uma malha FDTD ilimitada, há necessidade de truncarmos o nosso espaço amostrado dada as limitações de memória. Com isso, devemos estabelecer condições de contorno ao nosso limite computacional, condições estas que devem se adequar ao problema em questão, para que não influenciem na solução do mesmo.

Dentre as condições existentes na literatura, identificamos 2 classes: as condições “duras” e as condições “absorventes”. A escolha de uma condição de contorno é dependente da natureza do problema a ser analisado. A condição dura é a utilização simples do conceito de paredes elétricas e magnéticas perfeitas. O seu uso encontra aplicação em modelamento de guias metálicos [34], em cavidades ressonantes [36], entre outras. Para uma melhor visualização do conceito de parede dura a figura 4-2 mostra a incidência de onda TEM unidimensional sobre uma parede perfeitamente condutora, situada na célula $i=400$, para vários steps de tempo.

As condições de contorno absorventes são empregadas quando se deseja simular meios abertos. Inicialmente, problemas de espalhamento [34,35] motivaram o desenvolvimento destas paredes. De forma contrária à parede dura, aqui é necessário que as ondas incidentes nos contornos sejam radiadas. Diversas aproximações foram desenvolvidas, porém Mur [37] formulou a partir do trabalho de Engquist e Majda [38] as condições de contorno absorventes mais adotadas na literatura. Mur fez aproximações de primeira e segunda ordens baseadas em polinômios de Pade na equação de onda unidirecional. Considerando a aproximação de primeira ordem e adotando que o limite computacional esteja localizado em $x=0$, tem-se a equação unidirecional para a componente de campo E_y dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - c_0^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_y \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.21)$$

e a sua forma discretizada (em $i=0$) [9]

$$E_y^{n+1} \left(0, j, k + \frac{1}{2} \right) = E_y^n \left(1, j, k + \frac{1}{2} \right) + \frac{c_0 \Delta t - \Delta}{c_0 \Delta t + \Delta} \cdot \left[E_y^{n+1} \left(1, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_y^n \left(0, j, k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.22)$$

Temos que para problemas em uma dimensão aqui abordados, essa aproximação já se mostra extremamente eficaz [39] e portanto, essa é a aproximação utilizada nas simulações. A figura 4-3 mostra a incidência em uma parede absorvente sob as mesmas condições da figura 4-2 para fins de comparação entre os dois contornos.

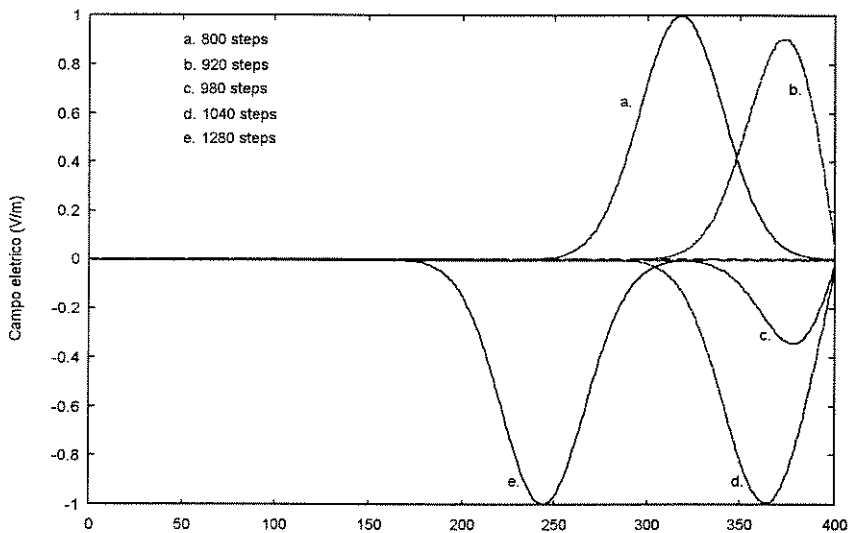


Figura 4-2. Onda incidindo em um contorno duro para vários steps de tempo. Nesse caso, temos a utilização de um condutor perfeito como fronteira provocando um coeficiente de reflexão igual a -1.

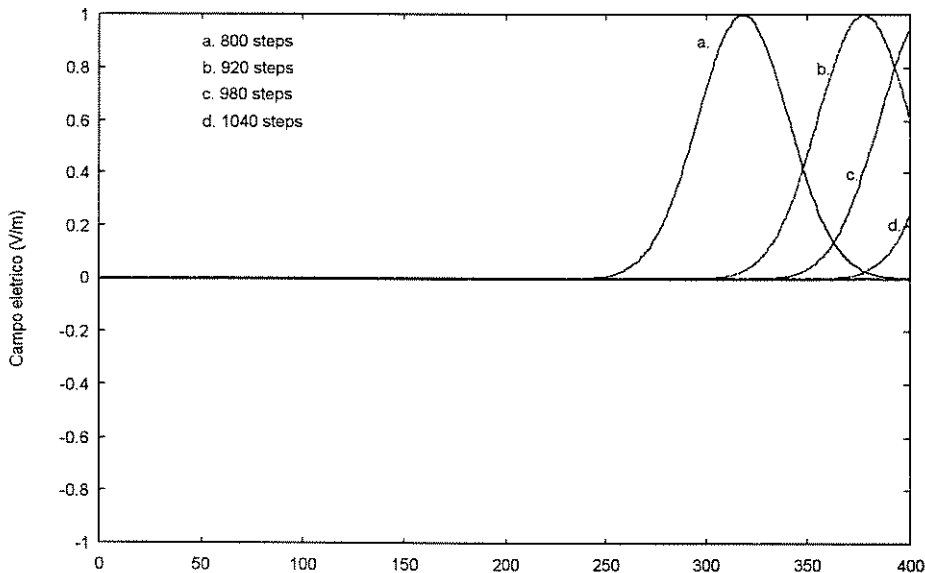


Figura 4-3. Ilustração da incidência de onda em uma parede absorvente. A aproximação usada aqui é a de primeira ordem.

4.2.2 Valores iniciais

Assim como as condições de contorno, os valores iniciais ou excitação é um parâmetro importante para o sucesso no uso do método. Na escolha de uma excitação deve-se levar em conta o tipo de problema sob análise já que o tempo de processamento está diretamente ligado a ela. Basicamente duas considerações devem ser feitas: uma sobre a distribuição espacial e outra sobre a distribuição temporal.

A escolha de uma distribuição espacial afeta diretamente o tratamento dos contornos e o tempo requerido para atingir-se uma distribuição de campo estável [40]. Em problemas de guiamento por exemplo, é usual estimar-se a configuração do campo de um modo desejado e então escolher-se os valores iniciais à partir dessa estimativa [40]. Esse procedimento equivale em parte à escolha apropriada das funções de base em técnicas no domínio das frequências. Ainda, o envelope espacial do pulso tem que ser largo o bastante com respeito à malha para não acumular erros numéricos com a sua propagação no espaço discretizado.

Um pulso Gaussiano atrasado no tempo é geralmente utilizado na distribuição temporal devido à sua suavidade no tempo e ao seu ajuste fácil para uma determinada largura de pulso. Ela é também a excitação mais fácil para tratamento das condições de contorno [40]. Neste trabalho trataremos sempre com excitações gaussianas no tempo.

4.2.3 Discretização e critério de estabilidade

A discretização da malha deverá ser tal que sobre um incremento espacial, o campo eletromagnético não varie significativamente, isto é, para obtenção de resultados expressivos a dimensão do incremento espacial deverá ser apenas uma fração do comprimento de onda.

Para garantia da estabilidade da malha, Taflov e Brodwin [41] desenvolveram uma formulação em que o incremento temporal Δt é função dos incrementos espaciais e vice-versa. Eles mostraram que a integração numérica das equações de Maxwell em uma malha FDTD retangular com tamanho de células $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ e passo de tempo Δt resulta em soluções na forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{[j(\omega(n\Delta t) - \vec{k}_x(p\Delta x) - \vec{k}_y(q\Delta y) - \vec{k}_z(r\Delta z))]} \quad (4.23)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{j(\omega(n\Delta t) - \vec{k}_x(p\Delta x) - \vec{k}_y(q\Delta y) - \vec{k}_z(r\Delta z))} \quad (4.24)$$

Taflove e Brodwin [41] mostraram que a relação de dispersão para esse caso é dada por

$$\left(\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\vec{k}_x \Delta x}{2} + \left(\frac{v\Delta t}{\Delta y}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\vec{k}_y \Delta y}{2} + \left(\frac{v\Delta t}{\Delta z}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\vec{k}_z \Delta z}{2} \leq 1 \quad (4.25)$$

onde $v_{ph} = (\mu\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$ e $\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$ são os números de onda nas direções x, y e z, respectivamente. Com isso, chega-se ao critério de estabilidade para o método FDTD [2,4,5]

$$v_{ph} \Delta t \leq \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.26)$$

Fazendo-se $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta l$, pode-se reescrever (4.26) na forma

$$SF = \frac{v_{ph} \cdot \Delta t}{\Delta l} \leq \sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_r}{n}} \quad (4.27)$$

ao valor dado pela equação acima denominamos de limite de Courant.

4.2.4 Dispersão numérica do método

As equações de Maxwell em sua forma discretizada causam dispersão nas ondas simuladas. Ou seja, a velocidade de fase dos modos numéricos na malha FDTD pode variar com o comprimento de onda do modo, com a direção de propagação e a discretização. Essa dispersão numérica pode levar a fenômenos como distorção do pulso, anisotropia artificial e pseudorefração [34].

Reescrevendo a relação de dispersão para as equações discretizadas temos que

$$\sin^2 \left(\frac{w \Delta t}{2} \right) = \left(\frac{c \Delta t}{\Delta} \right)^2 \times \left[\sin^2 \left(\frac{k_x \Delta}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{k_y \Delta}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta}{2} \right) \right] \quad (4.28)$$

onde assumiu-se uma malha FDTD uniforme ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$).

Contrastando com a relação de dispersão numérica, a relação de dispersão analítica para uma onda plana em um meio contínuo e sem perdas é

$$\frac{\omega^2}{v_{ph}^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (4.29)$$

Nota-se a partir das duas equações anteriores, que a equação (4.28) reduz-se à (4.29) no limite de $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ e Δz serem iguais à zero. Qualitativamente, isso sugere que a

dispersão numérica pode ser reduzida a um grau desejado se usarmos uma malha com uma resolução adequada.

Kim e Hoeffter [42] demonstraram a dependência da dispersão com o fator de estabilidade. Eles consideraram a propagação de uma onda TE em duas dimensões com um ângulo θ em relação ao eixo x positivo. A relação de dispersão para a velocidade de fase normalizada para esse tipo de onda é:

$$\frac{v_{ph}}{c} = \frac{\lambda_0}{SF\pi\Delta} \times \sin^{-1} \left\{ SF \left[\sin^2 \left(\frac{\pi\Delta \cos\theta}{\lambda_0} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi\Delta \cos\theta}{\lambda_0} \right) \right] \right\} \quad (4.30)$$

sendo $SF = \frac{v_{ph} \cdot \Delta t}{\Delta}$ o fator de estabilidade e c a velocidade da luz. A seguir são mostrados algumas figuras que ilustram a dependência do fenômeno de dispersão com o ângulo de propagação para diferentes SF . Como pode-se notar, trabalhando-se no limite superior do critério de estabilidade e com uma malha de discretização fina tem-se uma menor dispersão numérica.

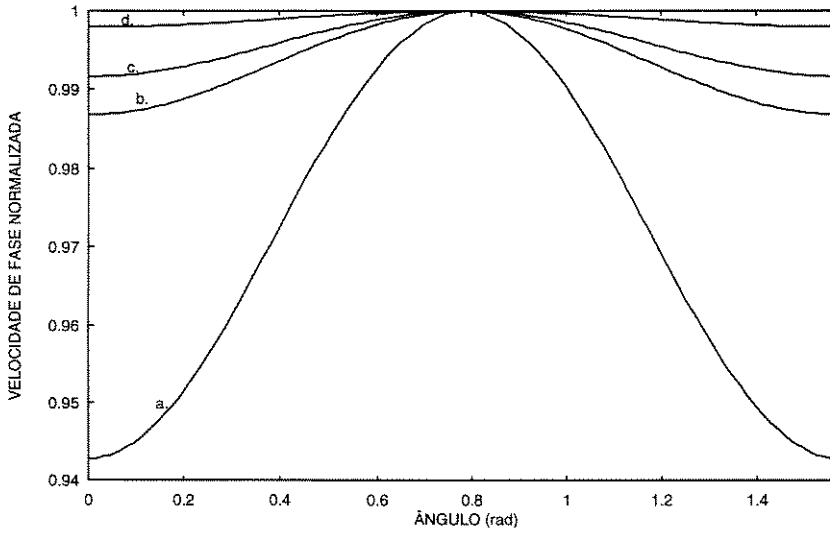


Figura 4-4. Velocidade de fase normalizada em função do ângulo de propagação para $\frac{\Delta x}{\lambda}$ iguais à: 4 (a.), 8(b.), 10(c.) e 20(d.). Em todos os casos tem-se $SF=0.7071$.

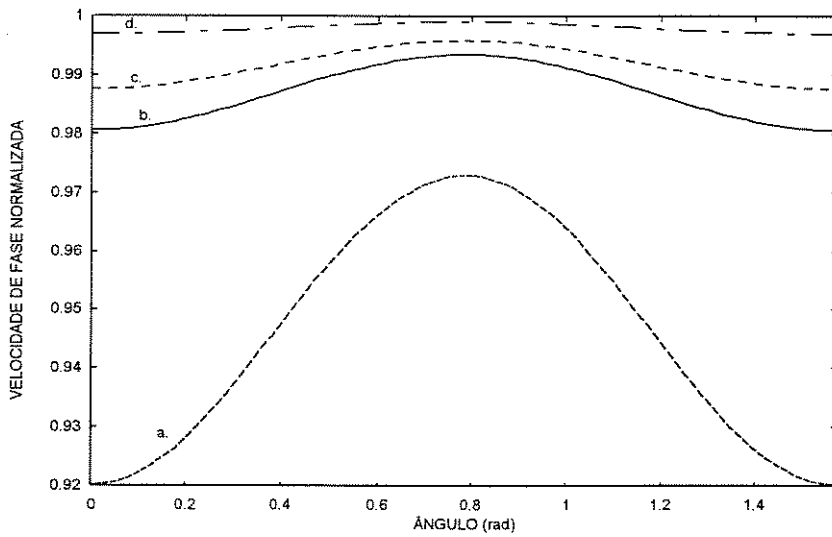


Figura 4-5. Velocidade de fase normalizada em função do ângulo de propagação para $SF=0.5$ e $\frac{\Delta x}{\lambda}$ iguais à: 4 (a.), 8 (b.), 10 (c.) e 20 (d.).

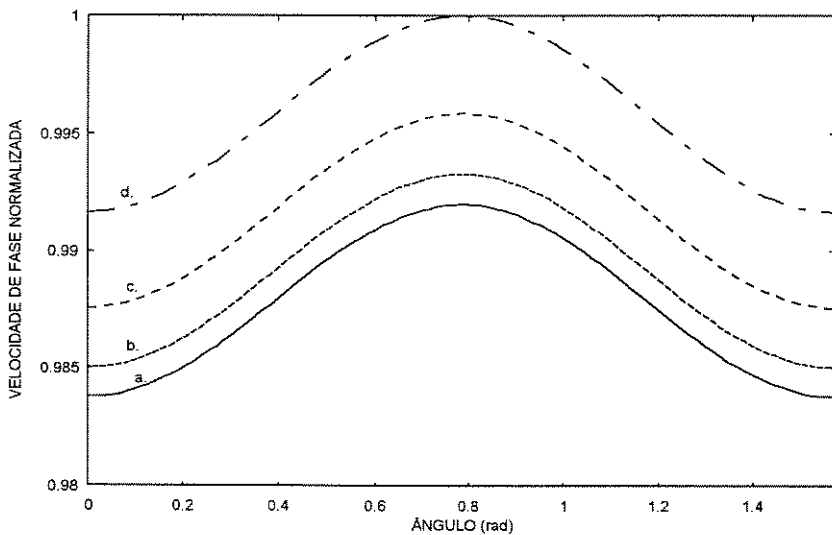


Figura 4-6. Efeito do fator de estabilidade no erro de dispersão numérica para $\frac{\lambda}{\Delta} = 10$ e para SF 's iguais à: 0.1 (a.), 0.3 (b.), 0.5 (c.) e 0.7071 (d.).

4.3 FDTD para meios dispersivos: (FD)²TD

Toda a formulação de Yee foi desenvolvida à partir da consideração de que os parâmetros constitutivos devem ser tratados como constantes. Contudo, com o passar do tempo tornou-se imprescindível a formulação dos efeitos de dispersão do ponto de vista de aplicações com grande largura de faixa, onde em uma simulação rigorosa tais efeitos não podem ser ignorados.

Existem dois métodos de tratamento do fenômeno de dispersão no método FDTD: um utiliza a convolução da permeabilidade ou da permissividade com o campo magnético ou elétrico, e outro usa a equação do movimento da carga no meio. O primeiro é tipicamente uma abordagem matemática, enquanto o segundo é uma solução mais física do problema. A escolha de qual dos dois é mais adequado em uma aplicação depende basicamente dos recursos computacionais necessários para obtenção de uma dada precisão desejada.

A seguir são mostradas a descrição dos dois métodos considerando-se meios eletricamente dispersivos. Todos os exemplos são dados em uma dimensão, visto que essa é a forma geralmente encontrada na literatura.

4.3.1 O método da convolução no tempo

Como citado, podemos inserir a dependência da permissividade dos materiais ou meios com a frequência através de uma convolução, ou seja, através de uma integração [43,44,45,46]. Essa aproximação considera a possibilidade de escrever-se as funções susceptibilidade elétrica no tempo em uma forma exponencial. A partir disso, torna-se possível o desenvolvimento de uma recursividade fazendo com que o problema se torne extremamente simples. Desde que toda função susceptibilidade pode ser expandida em uma série de exponenciais complexas usando-se o método de Prony ou outro similar, a aproximação usando a convolução pode ser considerada genérica.

Para um meio linear dispersivo, a relação entre D e E é dada por [25]

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_{\infty} \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \int_0^t \vec{E}(t-\tau) \chi(\tau) d\tau \quad (4.31)$$

onde ε_0 é a permissividade do espaço livre, $\chi(\tau)$ é a susceptibilidade elétrica, e ε_∞ é permissividade relativa de frequência infinita. Aplicando a discretização no tempo ($t = n\Delta t$) temos para cada componente de campo de $\vec{D}$ e $\vec{E}$

$$D(t) \approx D(n\Delta t) = D^n = \varepsilon_\infty \varepsilon_0 E^n + \varepsilon_0 \int_0^{n\Delta t} E(n\Delta t - \tau) \chi(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

Se considerarmos que o passo de discretização Δt é pequeno o bastante para não termos variação nos campos entre um passo e outro, e assumirmos que todos os campos são nulos para $t < 0$, podemos reescrever a equação (4.32) como

$$D^n = \varepsilon_\infty \varepsilon_0 E^n + \varepsilon_0 \sum_{m=0}^{n-1} E^{n-m} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \chi(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

Considerando a propagação de uma onda TEM em uma dimensão, tem-se

$$\frac{D_y^{n+1}(i) - D_y^n(i)}{\Delta t} = - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2})}{\Delta x} - \sigma E_y^{n+1}(i) \quad (4.34)$$

Usando a equação (4.33), encontramos

$$D_y^{n+1}(i) - D_y^n(i) = (\varepsilon_0 \varepsilon_\infty + \chi^0) E_y^{n+1}(i) - \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E_y^n(i) + \\ - \varepsilon_0 \sum_{m=0}^{n-1} E_y^{n-m}(i) (\chi^m - \chi^{m+1}) \quad (4.35)$$

sendo

$$\chi^m = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \chi(\tau) d\tau \quad (4.36)$$

Para fins de simplificação, definimos:

$$\Delta \chi^m = \chi^m - \chi^{m+1} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.35)-(4.37) em (4.34) e resolvendo para E_y^{n+1} , chega-se a:

$$E_y^{n+1}(i) = \frac{\varepsilon_\infty}{\frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} + \varepsilon_\infty + \chi^0} E_y^n(i) + \frac{1}{\frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} + \varepsilon_\infty + \chi^0} \sum E_y^{n-m}(i) \Delta \chi^m + \\ - \frac{\Delta t}{\left(\frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon_0} + \varepsilon_\infty + \chi^0 \right) \varepsilon_0 \Delta x} \cdot \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}) \right] \quad (4.38)$$

Para um meio com P frequências naturais e ordem M igual à 2P, a permissividade complexa pode ser descrita como sendo (APÊNDICE I):

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \sum_{p=1}^P \frac{G_p \omega_p^2}{\omega_p^2 + 2j\omega\delta_p - \omega^2} \quad (4.39)$$

com a condição que (APÊNDICE I)

$$\sum_{p=1}^P G_p = 1 \quad (4.40)$$

onde ϵ_s é a permissividade relativa estática, ω_p é a frequência de ressonância de ordem p , δ_p é o coeficiente de amortecimento de ordem p , sendo que considerou-se a solução harmônica no tempo para obtenção de (4.39). Tirando a transformada de Fourier para cada termo p do somatório, obtemos a correspondente susceptibilidade χ_p no domínio do tempo. Com isso

$$\chi_p(\tau) = \gamma_p e^{-\alpha_p \tau} \sin(\beta_p \tau) U(\tau) \Leftrightarrow \frac{\gamma_p \beta_p}{(\alpha_p^2 + \beta_p^2) + 2j\omega\alpha_p - \omega^2} \quad (4.41)$$

sendo $U(\tau)$ a função degrau. Comparando a equação (4.41) com (4.39) observamos que a expressão acima é correta para χ_p se satisfeita as condições:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \delta_p \\ \beta_p &= \sqrt{\omega_p^2 - \delta_p^2} \\ \gamma_p &= \frac{\omega_p^2 G_p (\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{\beta_p} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Definindo-se uma susceptibilidade no tempo complexa

$$\hat{\chi}_p(\tau) = -j\gamma_p e^{-(\alpha_p + j\beta_p)\tau} U(\tau) \quad (4.43)$$

tal que

$$\chi_p(\tau) = \text{Re}[\hat{\chi}_p(\tau)] \quad (4.44)$$

Aplicando (4.36) e (4.37) em (4.43) temos

$$\hat{\chi}_p^m = \frac{-j\gamma_p}{\alpha_p - j\beta_p} e^{(-\alpha_p + j\beta_p)m\Delta t} \left[1 - e^{(-\alpha_p + j\beta_p)\Delta t} \right] \quad (4.45)$$

$$\Delta \hat{\chi}_p^m = \frac{-j\gamma_p}{\alpha_p - j\beta_p} e^{(-\alpha_p + j\beta_p)m\Delta t} \left[1 - e^{(-\alpha_p + j\beta_p)\Delta t} \right]^2 \quad (4.46)$$

uma característica importante da equação (4.46) e que torna a recursividade possível é

$$\hat{\Delta \chi}_p^{m+1} = e^{(-\alpha_p + j\beta_p)\Delta t} \hat{\Delta \chi}_p^m \quad (4.47)$$

Definamos uma nova variável Ψ :

$$\Psi_p^n = \sum_{m=0}^{n-1} E_y^{n-m} \Delta \chi_p^m = \text{Re}[\hat{\Psi}_p^n] \quad (4.48)$$

Calculando-se $\hat{\Psi}_p^n$ para os primeiros passos de tempo

$$\hat{\Psi}_p^2(i) = \sum_{m=1}^1 E_y^{2-m}(i) \Delta \hat{\chi}_p^m(i) = E_y^1(i) \Delta \hat{\chi}_p^1(i) \quad (4.49)$$

para $n=2$. Já para $n=3$,

$$\hat{\Psi}_p^3(i) = \sum_{m=1}^2 E_y^{3-m}(i) \Delta \hat{\chi}_p^m(i) = E_y^2(i) \Delta \hat{\chi}_p^1(i) + E_y^1(i) \Delta \hat{\chi}_p^2(i) \quad (4.50)$$

Da equação (4.46), temos que:

$$\Delta \hat{\chi}_p^{m+1}(i) = e^{(-\alpha_p + j\beta_p)\Delta t} \Delta \hat{\chi}_p^m(i) \quad (4.51)$$

logo,

$$\hat{\Psi}_p^3(i) = E_y^2(i) \Delta \hat{\chi}_p^1(i) + E_y^1(i) \Delta \hat{\chi}_p^1(i) e^{(-\alpha_p + j\beta_p)\Delta t} = E_y^2(i) \Delta \hat{\chi}_p^1(i) + e^{(-\alpha_p + j\beta_p)\Delta t} \hat{\Psi}_p^2(i) \quad (4.52)$$

Generalizando,

$$\hat{\Psi}_p^n = E_y^n \Delta \hat{\chi}_p^0 + e^{(-\alpha_p + j\beta_p)\Delta t} \hat{\Psi}_p^{n-1} \quad (4.53)$$

Com isso, podemos então acumular a variável complexa $\hat{\Psi}_p^n$ utilizando uma simples recorrência. Para um meio com P pólos:

$$\chi^0 = \sum_{p=1}^P \text{Re}[\hat{\chi}_p^0] \quad (4.54)$$

e

$$\sum_{m=0}^{n-1} E_y^{n-m} \Delta \hat{\chi}^m = \sum_{p=1}^P \text{Re}[\hat{\Psi}_p^n] \quad (4.55)$$

Finalmente as equações (4.38), (4.53), (4.54) e (4.55) conjuntamente com a equação para o campo magnético

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_y^n(i+1) - E_y^n(i)] \quad (4.56)$$

fornece a solução completa para a análise de propagação de pulsos em meios lineares dispersivos.

4.3.2 O método da equação do movimento da carga no meio

Para um meio eletricamente dispersivo a relação constitutiva no domínio das frequências é

$$D_y(\omega) = \varepsilon(\omega) \cdot E_y(\omega) \quad (4.57)$$

O método se baseia na proposta sugerida por Jackson [25], que sugere a obtenção de uma equação diferencial no tempo a partir da expressão acima por intermédio de uma transformada inversa de Fourier. Para um meio dispersivo de ordem M, o método FDTD agora torna-se um processo recursivo com três etapas [47,48,49]

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_y^n(i+1) - E_y^n(i)] \quad (4.58)$$

$$\frac{D_y^{n+1}(i) - D_y^n(i)}{\Delta t} = - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2})}{\Delta x} \quad (4.59)$$

$$E_y^{n+1}(i) = f(D_y^{n+1}, \dots, D_y^{n-M+1}; E_y^{1n}, \dots, E_y^{n-m+1}) \quad (4.60)$$

Em um passo de tempo n, essa formulação requer o armazenamento de M valores passados de D_y e M-1 valores de E_y além dos valores atuais dos campos.

4.3.3 Resultados comparativos entre os dois métodos

Com o objetivo de comparar os dois métodos de análise do fenômeno de dispersão, utilizou-se as duas formulações para o estudo do caso de propagação em uma dimensão para dois meios distintos. Para tal, usou-se uma onda TEM e o seguinte esquema para a célula de Yee

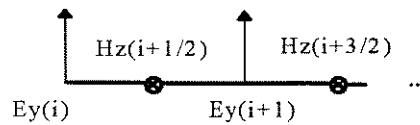


Figura 4-7. Célula de Yee em 1 dimensão.

4.3.3.1 Propagação em um meio do tipo Debye (dispersão de 1ª ordem)

a. Método da convolução no tempo

Um meio do tipo Debye apresenta uma permissividade dada por [43]

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega t_0} \quad (4.61)$$

onde t_0 é a constante de tempo de relaxação de Debye. A função susceptibilidade é então

$$\chi(\omega) = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega t_0} \quad (4.62)$$

e a sua expressão no domínio do tempo,

$$\chi(\tau) = \left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{t_0} \right) e^{\left(-\frac{\tau}{t_0} \right)} U(\tau) \quad (4.63)$$

onde $U(\tau)$ é a função degrau unitário. Para essa susceptibilidade, encontramos

$$\chi_0(i) = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \left[1 - e^{\left(-\frac{\Delta t}{t_0} \right)} \right] \quad (4.64)$$

e

$$\Delta \chi^m = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) e^{\left(-\frac{m\Delta t}{t_0} \right)} \left[1 - e^{\left(-\frac{\Delta t}{t_0} \right)} \right]^2 \quad (4.65)$$

Da equação (4.65), vemos que

$$\Delta \chi^{m+1} = e^{-\frac{\Delta t}{t_0}} \Delta \chi^m \quad (4.66)$$

Consequentemente

$$\Psi_y^n(i) = E_y^n(i) \Delta \chi_0(i) + e^{-\frac{\Delta t}{t_0}} \Psi_y^{n-1}(i) \quad (4.67)$$

com $\Psi_y^0(i) = \Psi_y^1(i) = 0$.

As figuras 4-8 e 4-9 ilustram a excitação utilizada e o seu espectro. A incidência de uma onda plana TEM em uma interface ar-água localizada na célula 500 foi escolhida para ilustrar a aplicação do método. Os parâmetros da água e do método são mostrados na tabela a seguir [43]

Tabela 4-I Valores para análise de propagação em meio tipo Debye.

Parâmetros	Valor
ϵ_s	81
ϵ_∞	1.8
τ	$9.4e^{-12}$ s
Δx	$37.5 \mu m$
Δt	$0.0625e^{-12}$ s

As figuras 4-10 e 4-11 mostram a distribuição espacial para dois instantes de tempo diferentes.

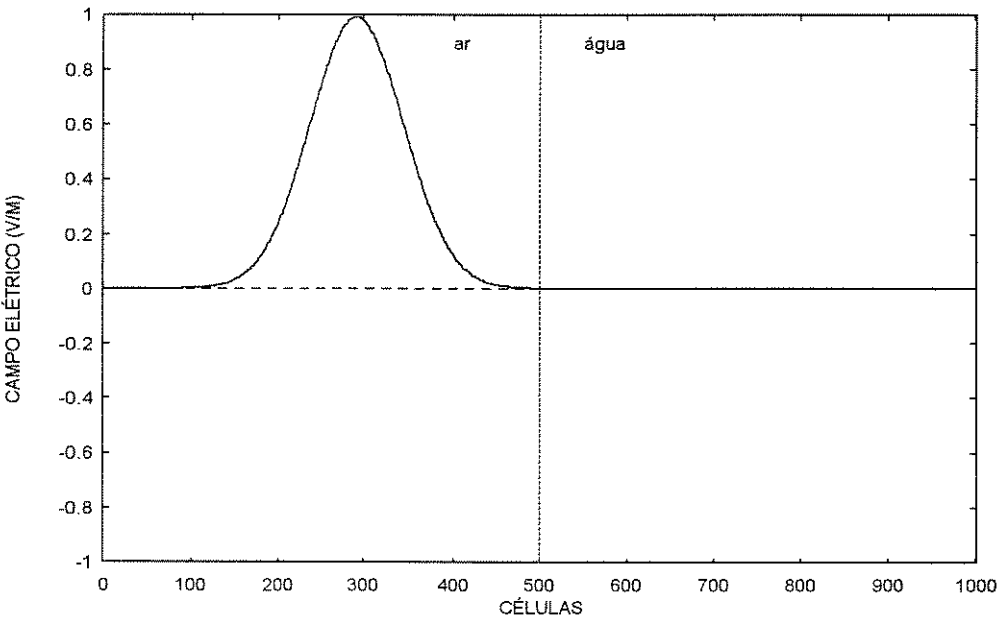


Figura 4-8. Formato inicial do pulso de excitação

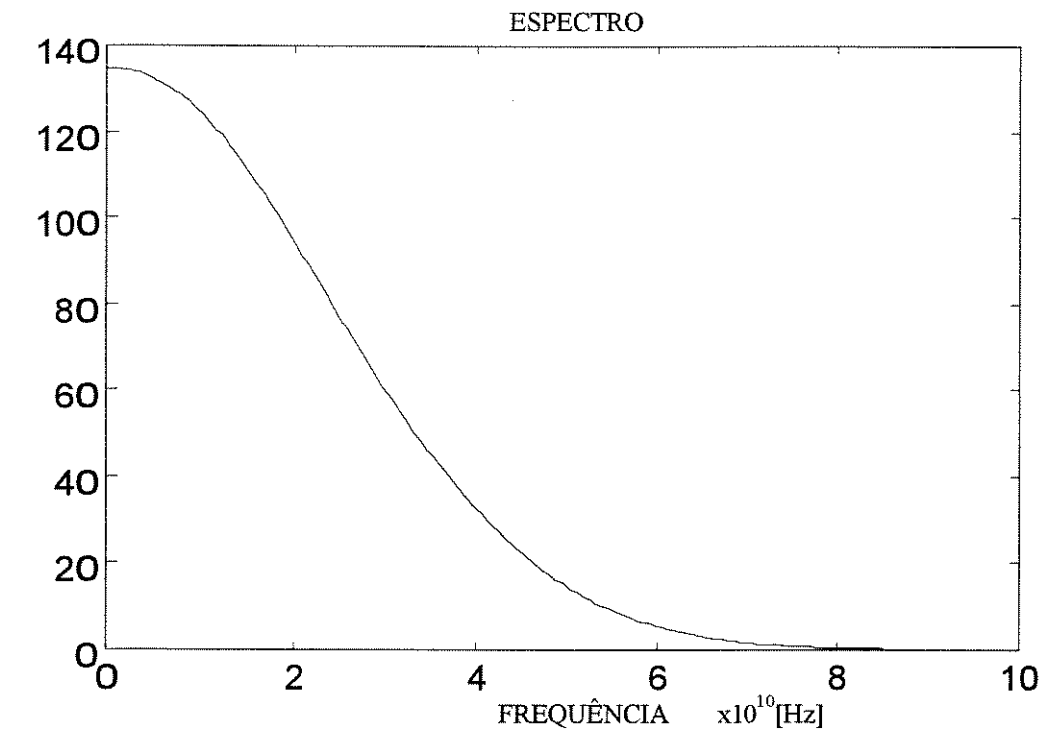


Figura 4-9. Espectro de frequências do pulso de excitação.

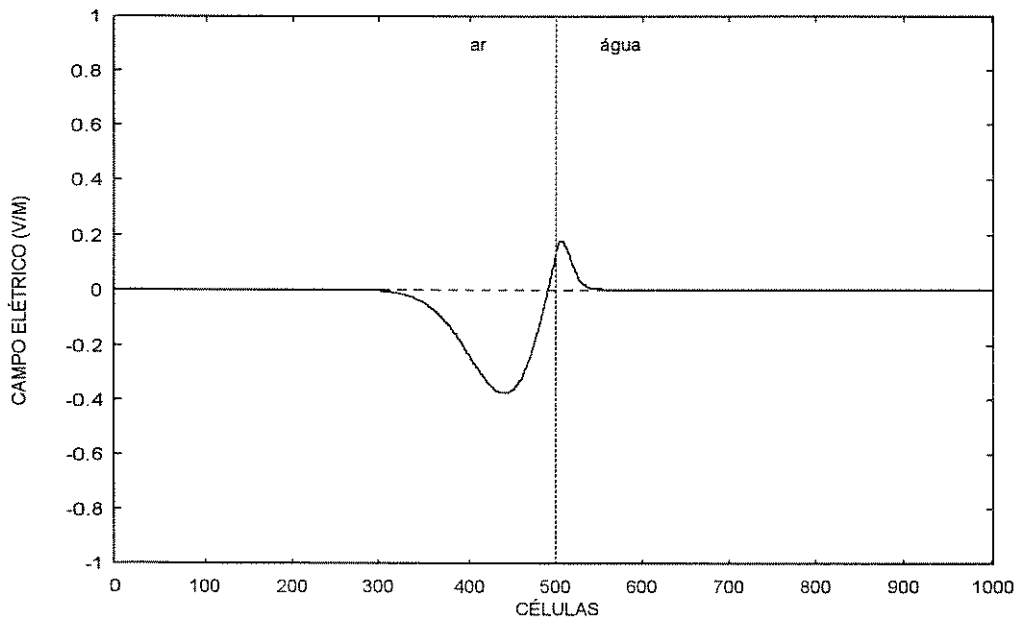


Figura 4-10. Ilustração da onda incidindo na água após 300 steps de tempo usando o método da convolução.

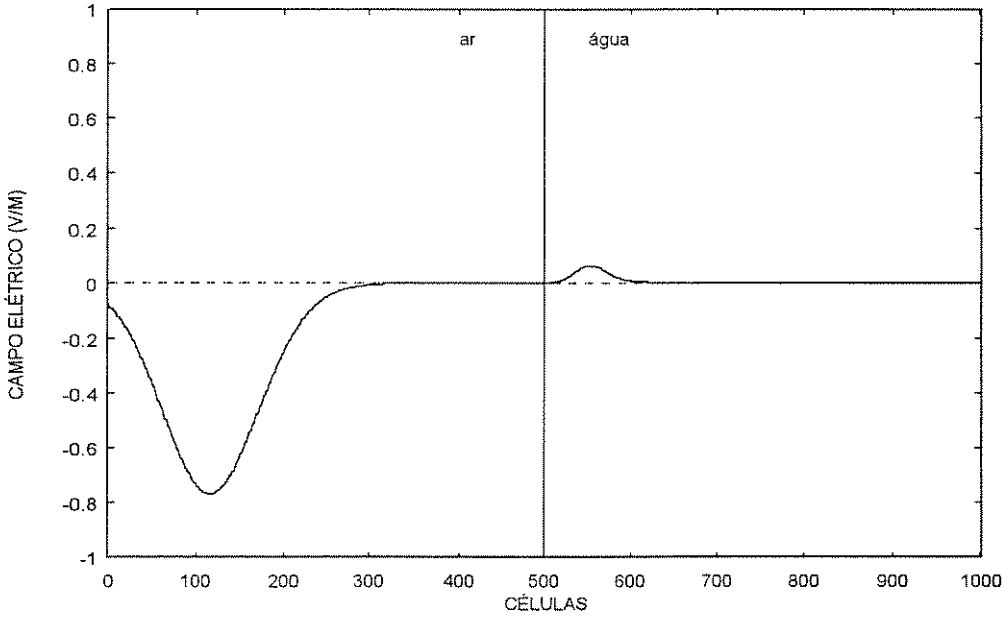


Figura 4-11. Formato da onda após 800 steps de tempo usando o método da convolução.

b. Método da equação da carga no meio

Reescrevendo (4.61)

$$\frac{D_y(\omega)}{E_y(\omega)} = \varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega t_0} \quad (4.68)$$

Tirando a sua transformada inversa de Fourier, chega-se na seguinte equação diferencial de 1ª ordem

$$D_y + \tau \frac{d}{dt} D_y = \varepsilon_s E_y + \tau \varepsilon_\infty \frac{d}{dt} E_y \quad (4.69)$$

Essa equação pode ser facilmente transformada em uma equação diferença que é dada por

$$\begin{aligned} \frac{D_y^{n+1}(i) + D_y^n(i)}{2} + \tau \left(\frac{D_y^{n+1}(i) - D_y^n(i)}{\Delta t} \right) = \varepsilon_s \left(\frac{E_y^{n+1}(i) + E_y^n(i)}{2} \right) + \\ + \tau \varepsilon_\infty \left(\frac{E_y^{n+1}(i) - E_y^n(i)}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Escrevendo $E_y^{n+1}(i)$ em função das outras variáveis e reagrupando alguns termos

$$E_y^{n+1}(i) = \frac{\Delta t + 2\tau}{2\tau\epsilon_\infty + \epsilon_s \Delta t} D_y^{n+1}(i) + \frac{\Delta t - 2\tau}{2\tau\epsilon_\infty + \epsilon_s \Delta t} D_y^n(i) + \frac{2\tau\epsilon_\infty - \epsilon_s \Delta t}{2\tau\epsilon_\infty + \epsilon_s \Delta t} E_y^n(i) \quad (4.71)$$

O uso conjunto de (4.71), (4.58) e (4.59) faz com que tenhamos a solução completa para o problema.

As figuras 4-12 e 4-13 mostram a mesma situação de incidência de onda em interface ar-água, porém utilizando-se agora o método da equação diferencial. Os resultados se mostraram idênticos aos da literatura pesquisada [43].

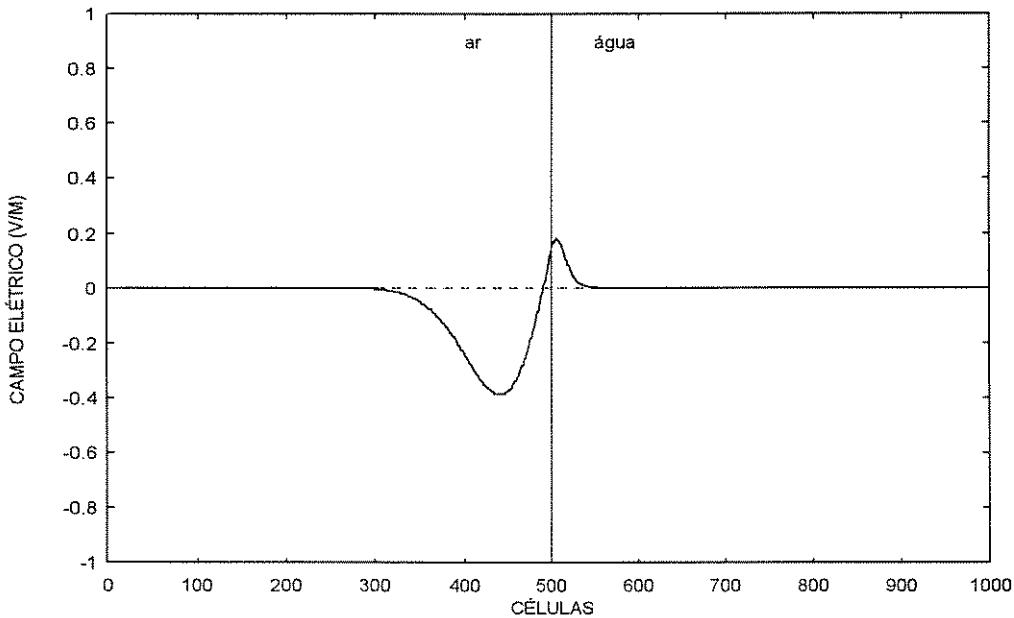


Figura 4-12. Incidência de onda para 300 steps de tempo usando-se o método da equação diferencial (situação idêntica à da figura 4-11).

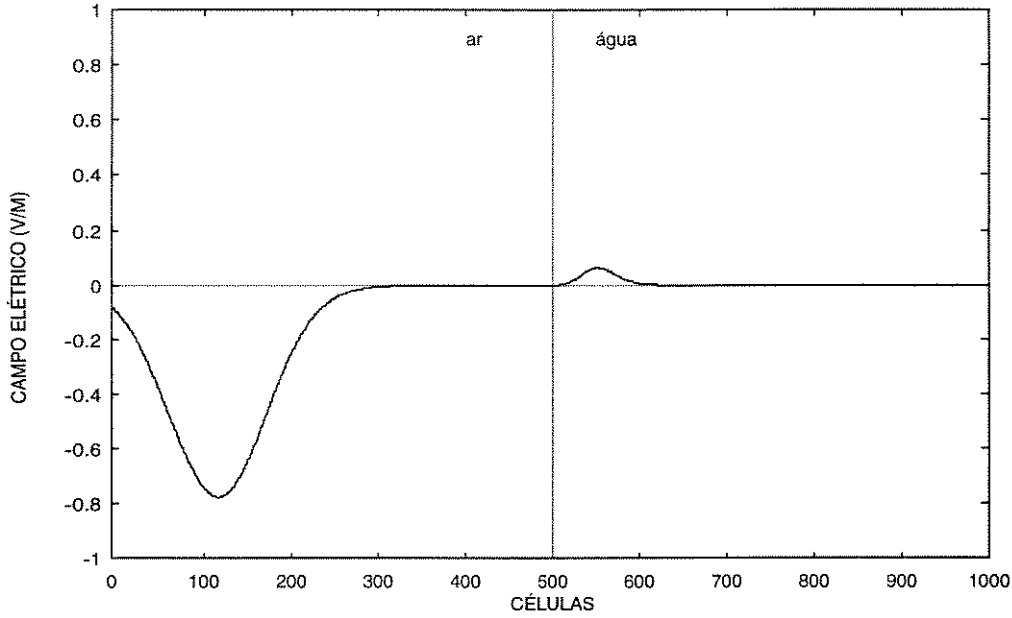


Figura 4-13. Onda após 800 steps de tempo utilizando-se o método da equação diferencial (situação idêntica à da figura 4-12).

4.3.3.2 Propagação em meio do tipo Lorentz de 2ª ordem

a. Método da convolução

Para um meio Lorentziano de segunda ordem temos que a permissividade em função da frequência é dada por [46]

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2j\omega\delta - \omega^2} \right) \quad (4.72)$$

A susceptibilidade temporal é deduzida diretamente e é dada por

$$\chi(\tau) = \gamma e^{-\alpha\tau} \sin(\beta\tau) U(\tau) \quad (4.73)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta \\ \beta &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ \gamma &= \frac{\omega_0^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\beta} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Definindo uma susceptibilidade temporal complexa

$$\hat{\chi}(\tau) = -j\gamma e^{-(\alpha+j\beta)\tau} U(\tau) \quad (4.75)$$

tal que $\chi(\tau) = \text{Re}[\hat{\chi}(\tau)]$.

A partir disso, tem-se:

$$\hat{\chi}_0 = \frac{-j\gamma}{\alpha - j\beta} e^{(-\alpha + j\beta)m\Delta t} \left[1 - e^{(-\alpha + j\beta)\Delta t} \right] \quad (4.76)$$

$$\Delta\hat{\chi}_0^m = \frac{-j\gamma}{\alpha - j\beta} e^{(-\alpha + j\beta)m\Delta t} \left[1 - e^{(-\alpha + j\beta)\Delta t} \right]^2 \quad (4.77)$$

$$\Delta\hat{\chi}_0^{m+1} = e^{(-\alpha + j\beta)m\Delta t} \Delta\hat{\chi}_0^m \quad (4.78)$$

E finalmente

$$\hat{\Psi}_y^n = E^n \Delta\hat{\chi}_0^0 + e^{(-\alpha + j\beta)\Delta t} \hat{\Psi}_y^{n-1} \quad (4.79)$$

sendo $\Psi_y = \text{Re}[\hat{\Psi}_y]$, que usada em conjunto com (4.58) e (4.59) completam a solução do nosso problema.

Novamente escolheu-se uma incidência de onda TEM em uma interface para exemplificar a validade de utilização do método. Os parâmetros do meio, bem como os do método são dados na tabela abaixo.

Tabela 4-II Valores das constantes envolvidas na propagação em um meio Lorentziano de segunda ordem.

Parâmetros	Valor
ϵ_s	3.0
ϵ_∞	1.5
ω_0	$2\pi \times 20 \cdot 10^9 \text{ (rd / s)}$
δ	$0.1\omega_0$
Δx	$37.5 \text{ }\mu\text{m}$
Δy	$0.125 \cdot 10^{-12} \text{ (rd / s)}$

As figuras 4-14 a 4-17 mostram a forma do pulso de excitação e o seu espectro, bem como a distribuição espacial passados alguns instantes de tempo.

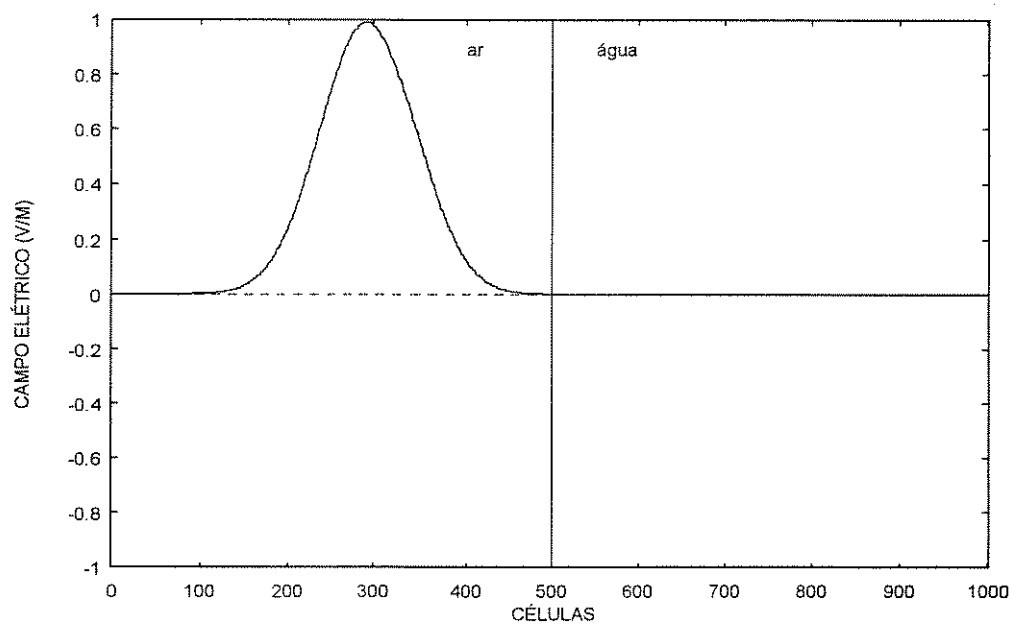


Figura 4-14. Aspecto da distribuição espacial para o campo de excitação.

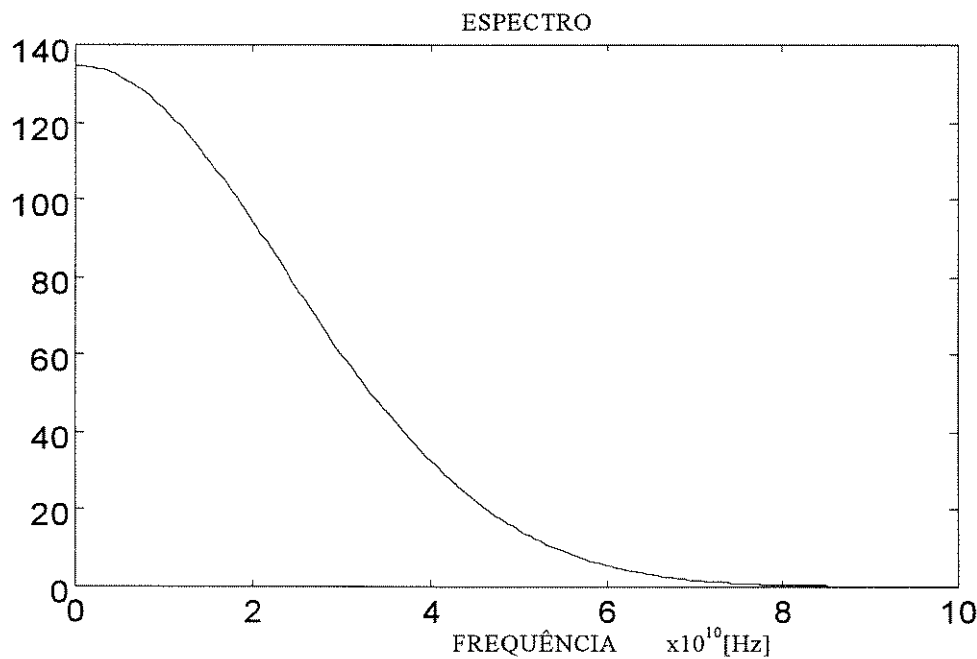


Figura 4-15. Espectro de frequências da excitação utilizada.

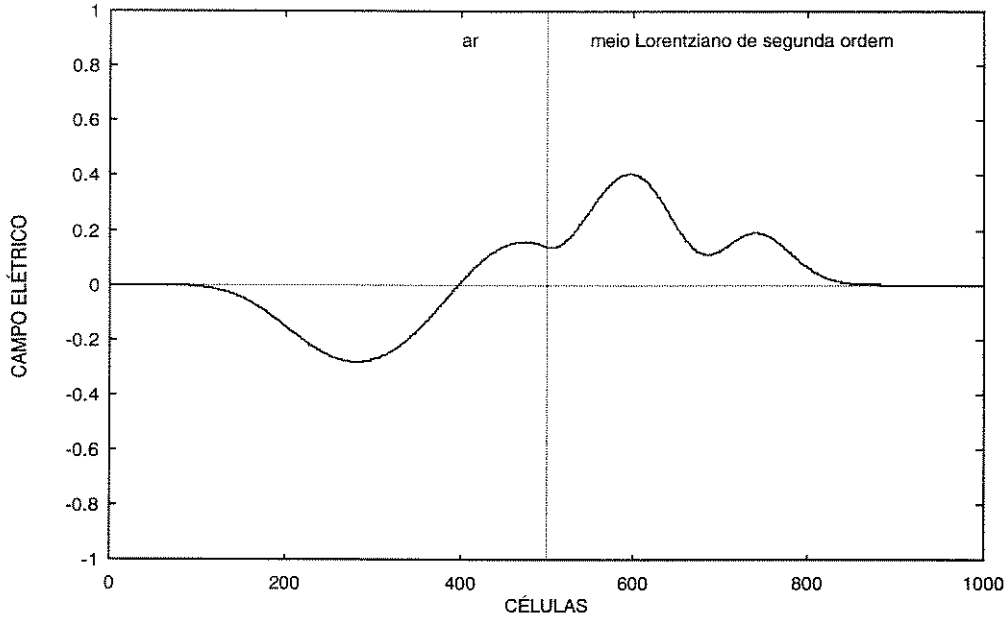


Figura 4-16. Incidência de onda em um meio Lorentziano após steps de tempo usando-se o método da convolução.

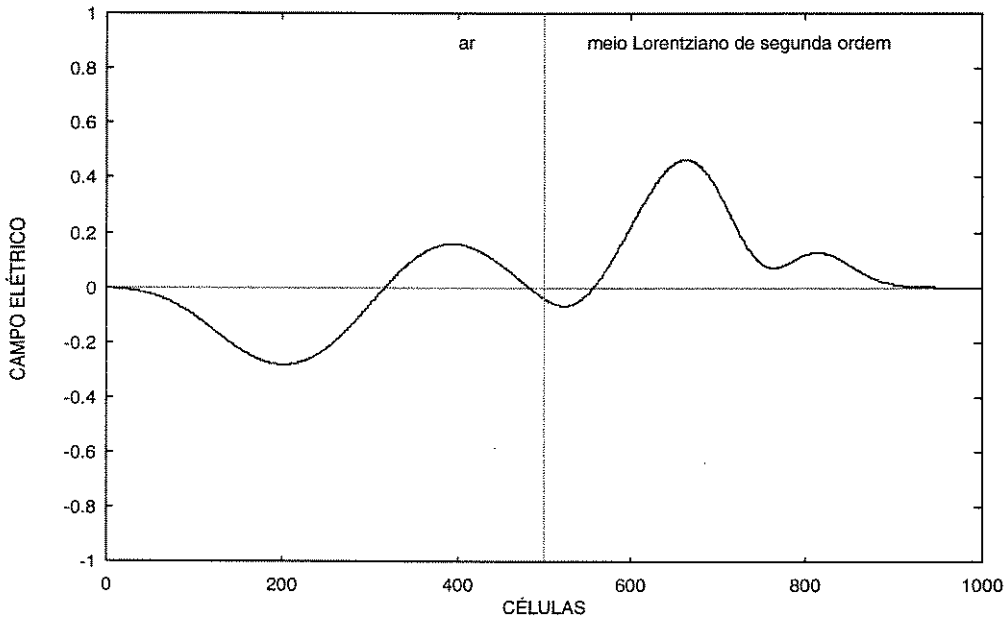


Figura 4-17. Ilustração da onda após 800 steps de tempo usando-se o método da convolução.

b. Método da equação da carga no meio

Usando a equação (4.72) e tirando a sua transformada inversa, chega-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2} D(t) + \frac{2\delta}{\omega_0^2} \frac{d}{dt} D(t) + \omega_0^2 D(t) = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_\infty \frac{d^2}{dt^2} E(t) + \frac{2\delta\varepsilon_\infty}{\omega_0^2} \frac{d}{dt} E(t) + \varepsilon_s E(t) \right) \quad (4.80)$$

Escrevendo a equação acima em forma de uma equação diferença

$$\begin{aligned} (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) D_y^{n+1} + (\beta_0 - \beta_1 - 2\beta_2) D_y^n + \beta_2 D_y^{n-1} = \\ (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) E_y^{n+1} + (\alpha_0 - \alpha_1 - 2\alpha_2) E_y^n + \alpha_2 E_y^{n-1} \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde tem-se

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\varepsilon_s \omega_0^2}{2} \\ \alpha_1 &= \frac{2\delta\varepsilon_\infty}{\Delta t} \\ \alpha_2 &= \frac{2\varepsilon_\infty}{\Delta t^2} \\ \beta_0 &= \frac{1}{\Delta t^2} \\ \beta_1 &= \frac{2\delta\varepsilon_\infty}{\Delta t} \\ \beta_2 &= \frac{2\varepsilon_\infty}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

A equação (4.80) juntamente com as equações (4.58) e (4.59) formam a solução do problema.

As figuras 4-18 e 4-19 mostram o mesmo caso de incidência mostrado anteriormente, só que utilizando-se o método da equação da carga no meio. Novamente faz-se notar a similaridade entre os resultados, comprovando a validade no uso das técnicas.

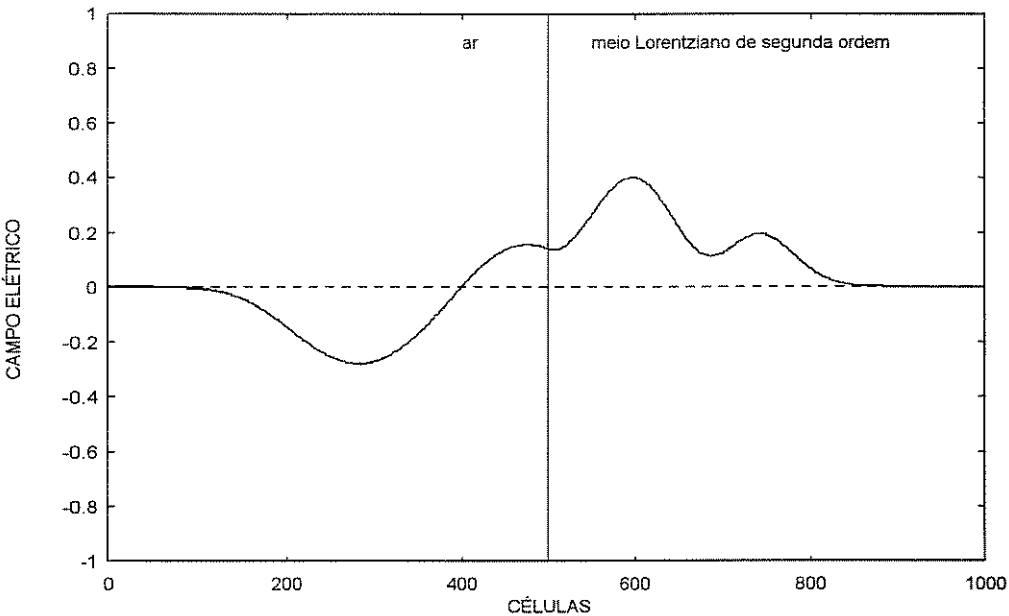


Figura 4-18. Situação idêntica à da figura 4-16 diferindo apenas o método de tratamento da dispersão.

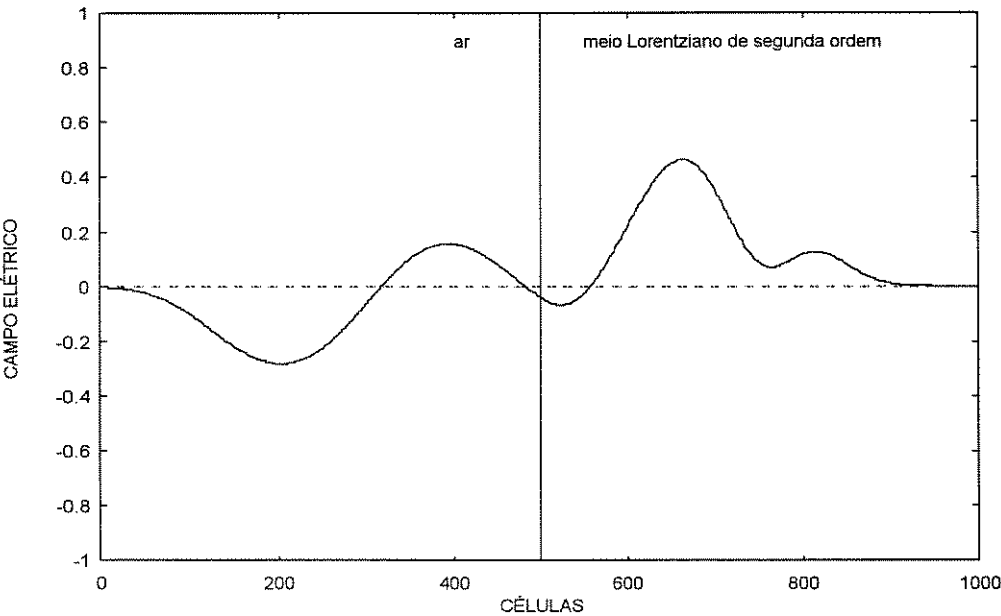


Figura 4-19. Aspecto da onda após 800 steps de tempo usando-se o método da equação da carga no meio.

CAPÍTULO 5

Obtenção de sólitons ópticos ultra-curtos usando a técnica FDTD

5.1 Introdução

Pelas formulações apresentadas nos capítulos 2 e 3, a descrição da propagação de pulsos solitônicos com larguras menores que 100 fs é obtida mediante uma série de aproximações. Estas aproximações impõem uma série de limitações que acabam por comprometer a solução final.

Geralmente, quando se trabalha com a aproximação de variação lenta do envelope (seção 2.5) dois métodos têm sido vastamente utilizados: o método de Fourier de passo dividido na solução de acopladores direcionais [7] e o método de propagação de feixe na simulação de propagação sobre longas distâncias em fibras ópticas com baixas perdas [6].

Todavia, certos efeitos são desprezados quando as equações de Maxwell são aproximadas pela equação não-linear de Schrödinger (*NLSE*), incluindo-se os efeitos de espalhamento e difração, além dos efeitos devido a duração extremamente curta do pulso [30]. Esses efeitos são extremamente relevantes em alguns tipos de aplicações como chaves ópticas integradas, e os métodos baseados na *NLSE* dificilmente os obterão já que a portadora é descartada nesse tipo de aproximação. Além disso, dado o crescimento das escalas de

integração, a análise adequada da não-homogeneidade dos circuitos ópticos não-lineares será extremamente complexa, sendo que estas não-homogeneidades estarão em distâncias curtas da ordem de 0.1-10 comprimentos de onda ópticos, e neste caso todas as considerações baseadas na variação lenta dos parâmetros se tornam imprecisas. Na realidade, não-homogeneidades do material afetam de maneira crítica o espalhamento sofrido pelo pulso mesmo na ausência de não-linearidades. A única forma de modelamento dessa situação é resolver-se as equações de Maxwell vetoriais para a geometria do material sob análise, impondo as condições de contorno adequadas aos campos.

Nesse capítulo, apresenta-se a análise da propagação de sólitons temporais partindo-se diretamente das equações de Maxwell e usando-se para isso a técnica FDTD. Aqui, as polarizações linear e não-linear são relacionadas ao campo elétrico via convolução não-linear, permitindo-se modelar as dispersões linear e não-linear do material. Ainda, dado a natureza do método FDTD, é possível simular o espalhamento e difração de pulsos ópticos incluindo-se os efeitos provocados na portadora.

5.2 Formulação do problema

Seja a propagação unidimensional na direção x de uma onda com as intensidades de campo elétrico E_z e magnético H_y . Assumindo que o meio é isotrópico e não permeável, as equações de Maxwell em uma dimensão podem ser escritas como

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E_z + P_z \quad (5.3)$$

sendo μ_0 e ε_0 os coeficientes de permeabilidade e permissividade para o espaço livre, ε_∞ a permissividade relativa do material na frequência infinita, D_z é o deslocamento do campo elétrico e P_z é a polarização elétrica. O último termo em (5.3) pode ser escrito na forma [6]

$$P_z = P_z^L + P_z^{NL} \quad (5.4)$$

onde P_z^L é o termo linear da polarização e P_z^{NL} o termo não-linear.

A polarização linear é dada pela convolução linear entre o campo $E_z(x, t)$ e a função susceptibilidade de primeira ordem $\chi^{(1)}$

$$P_z^L(x, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \bar{t}) E_z(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (5.5)$$

enquanto que P_z^{NL} é dada pela convolução não-linear de $E_z(x, t)$ e a função susceptibilidade de terceira ordem $\chi^{(3)}$

$$P_z^{NL}(x, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t - \bar{t}_1, t - \bar{t}_2, t - \bar{t}_3) E_z(x, \bar{t}_1) E_z(x, \bar{t}_2) E_z(x, \bar{t}_3) d\bar{t}_1 d\bar{t}_2 d\bar{t}_3 \quad (5.6)$$

A expressão acima modela uma não-linearidade com retardamento ou memória, ou seja, uma não-linearidade dispersiva que pode ocorrer devido aos efeitos quânticos na sílica com escalas de tempo que variam de 1 a 100 fs (APÊNDICE II). É interessante observar que $\chi^{(3)}$ pode diferir de $\chi^{(1)}$ em propriedades físicas tais como ressonâncias e decaimentos.

Seja um material com dispersão linear do tipo Lorentziana (APÊNDICE I)

$$\chi^{(1)}(t) = \left(\frac{\omega_p^2}{\nu_0} \right) \exp\left(-\frac{\delta t}{2}\right) \sin(\nu_0 t) \quad (5.7)$$

que corresponde no domínio da frequência à seguinte permissividade linear

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \chi^{(1)}(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\omega_0^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\omega_0^2 - j\omega\delta - \omega^2} \quad (5.8)$$

sendo $\omega_p^2 = \omega_0^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)$ e $\nu_0^2 = \omega_0^2 - \delta^2/4$.

Como descrito APÊNDICE II, para pulsos de curta duração, a não-linearidade do material pode ser escrita na seguinte forma para P_z^{NL}

$$P(x, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E_z(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \bar{t}) E_z^2(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (5.9)$$

onde $\chi^{(3)}$ é o coeficiente não-linear. A função resposta $g(t)$ é escrita na forma

$$g(t) = \alpha \delta(t) + (1 - \alpha) g_R(t) \quad (5.10)$$

e

$$g_R(t) = \left(\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \right) \exp\left(-t/\tau_2\right) \sin\left(t/\tau_1\right) \quad (5.11)$$

Em (5.10), $\delta(t)$ é a função delta que modela transições eletrônicas virtuais não-ressonantes do tipo Kerr, que estão na faixa de 1 fs ou menos. A função $g_R(t)$ modela o espalhamento Raman em regimes de pulsos ultra-curtos, enquanto que α parametriza a predominância relativa entre as interações Kerr e Raman (APÊNDICE II).

As equações (5.4)-(5.11) fornecem a descrição completa da polarização elétrica para um meio não-linear. Essas equações em conjunto com (5.1)-(5.3) fornecem a solução dos campos eletromagnéticos.

De forma a obter um algoritmo para resolver as equações anteriores usando-se o método FDTD, vamos definir as duas polarizações linear e não-linear como novas variáveis

$$F(t) = \varepsilon_0 \int_0^t \chi^{(1)}(t-\bar{t}) E_z(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (5.12)$$

$$G(t) = \varepsilon_0 \int_0^t g_R(t-\bar{t}) E_z^2(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (5.13)$$

que, a partir de um breve desenvolvimento matemático levam às seguintes equações acopladas (APÊNDICE III)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\delta}{\omega_0^2} \frac{dF}{dt} + \left[1 + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(\varepsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2)} \right] F + \\ + \left[\frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)(1-\alpha) \chi^{(3)} E_z}{(\varepsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2)} \right] G = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(\varepsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2)} D_z \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\omega}_0^2} \frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\omega}_0^2} \frac{dG(t)}{dt} + \left[1 + \frac{(1-\alpha) \chi^{(3)} E_z^2(x, \bar{t})}{(\varepsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2(x, \bar{t}))} \right] G(t) + \\ + \left(\frac{E_z(x, \bar{t})}{(\varepsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2(x, \bar{t}))} \right) F(t) = \left(\frac{E_z(x, \bar{t})}{(\varepsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2(x, \bar{t}))} \right) D_z(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$E_z(x, t) = \frac{D_z - F - (1-\alpha) \chi^{(3)} E_z G}{\varepsilon_0 (\varepsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2)} \quad (5.16)$$

5.3 O algoritmo

Seja uma região unidimensional no espaço-tempo $x-t$, que contém uma malha de pontos com coordenadas (i,n) para $E_Z(x,t)$ e $D_Z(x,t)$, e $(i+1/2,n+1/2)$ para $H_Y(x,t)$, definidas conforme a célula básica de Yee (figura 4-1). Usando a aproximação FDTD (seção 4.1), as equações diferença para (5.1) e (5.2) são dadas por, respectivamente

$$\frac{\mu_0}{\Delta t} \left(H_Y^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) - H_Y^{n-\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(E_Z^n(i+1) - E_Z^n(i) \right) \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(D_Z^{n+1}(i) - D_Z^n(i) \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(H_Y^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2} \right) - H_Y^{n-\frac{1}{2}} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (5.18)$$

Esse conjunto de equações funciona da seguinte forma: primeiramente (5.17) é usada para determinar-se $H_Y^{n+\frac{1}{2}}$ a partir dos valores passados de E_Y^n e $H_Y^{n-\frac{1}{2}}$. Em seguida usa-se (5.18) para determinar D_Z^{n+1} utilizando-se os valores já calculados $H_Y^{n+\frac{1}{2}}$ e D_Z^n . Feito isso, (5.14) e (5.15) são usadas para determinar os valores das convoluções linear e não-linear, F^{n+1} e G^{n+1} no passo de tempo $n+1$, usando os novos valores D_Z^{n+1} e os valores passados de D_Z , E_Z , F e G . Usando a aproximação (4.6) em (5.14) a (5.16), tem-se o seguinte conjunto de equações diferença acopladas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_o^2} \left(\frac{F^{n+1}(i) - 2F^n(i) + F^{n-1}(i)}{(\Delta t)^2} \right) + \frac{\delta}{\omega_o^2} \left(\frac{F^{n+1}(i) - F^{n-1}(i)}{2\Delta t} \right) + \left(1 + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} (E_z^n(i))^2} \right) \cdot \\ & \left(\frac{F^{n+1}(i) + F^{n-1}(i)}{2} \right) + \left(\frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)(1 - \alpha) \chi^{(3)} E_z^n(i)}{\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} (E_z^n(i))^2} \right) \cdot \left(\frac{G^{n+1}(i) + G^{n-1}(i)}{2} \right) = \\ & = \left(\frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} (E_z^n(i))^2} \right) \cdot \left(\frac{D_Z^{n+1}(i) + D_Z^{n-1}(i)}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{G^{n+1}(i) - 2G^n(i) + G^{n-1}(i)}{(\Delta t)^2} \right) + \frac{\varsigma}{\omega_0^2} \left(\frac{G^{n+1}(i) - G^{n-1}(i)}{2\Delta t} \right) + \left(1 + \frac{(1-\alpha)\chi^{(3)}(E_z^n(i))^2}{\varepsilon_\infty + \alpha\chi^{(3)}(E_z^n(i))^2} \right) \\
& \cdot \left(\frac{G^{n+1}(i) + G^{n-1}(i)}{2} \right) + \left(\frac{E_z^n(i)}{\varepsilon_\infty + \alpha\chi^{(3)}(E_z^n(i))^2} \right) \cdot \left(\frac{F^{n+1}(i) + F^{n-1}(i)}{2} \right) = \\
& = \left(\frac{E_z^n(i)}{\varepsilon_\infty + \alpha\chi^{(3)}(E_z^n(i))^2} \right) \cdot \left(\frac{D_z^{n+1}(i) + D_z^{n-1}(i)}{2} \right) \quad (5.20)
\end{aligned}$$

$$E_z^{n+1} = \frac{D_z^{n+1} - F^{n+1} - (1-\alpha)\chi^{(3)}E_z^p G^{n+1}}{\varepsilon_0 \left(\varepsilon_\infty + \alpha\chi^{(3)}(E_z^p)^2 \right)} \quad (5.21)$$

que completam a solução do nosso problema.

5.4 Resultados

5.4.1 As características do meio material

Seja um meio tipo Lorentziano que possua os parâmetros listado na tabela 5-I, que resulta em β_2 escalonado visando a formação do sóliton para distâncias curtas, já que a memória requerida pelo método é proporcional ao volume modelado tornando-o inviável para distâncias longas.

Usando-se as relações entre a função susceptibilidade elétrica e o índice de refração definidas no APÊNDICE I, obtém-se a partir de (A1-XXXII) a variação do índice com a frequência. Usando-se (3.10) e (3.12) tem-se o índice de refração de grupo e o parâmetro de dispersão de velocidade de grupo β_2 em função da frequência. A dependência do índice de refração e de β_2 com a frequência são ilustradas nas figuras 5-1 e 5-2, respectivamente. Da variação de β_2 pode-se notar que o pulso está se propagando na região de dispersão anômala do material, já que pretende-se simular sólitons claros.

Parâmetro	Valor
ϵ_s	5.25
ϵ_∞	2.25
ω_0	$4 \cdot 10^{14}$ (rd/s)
α	0.7
τ_1	12.2 (fs)
τ_2	32 (fs)

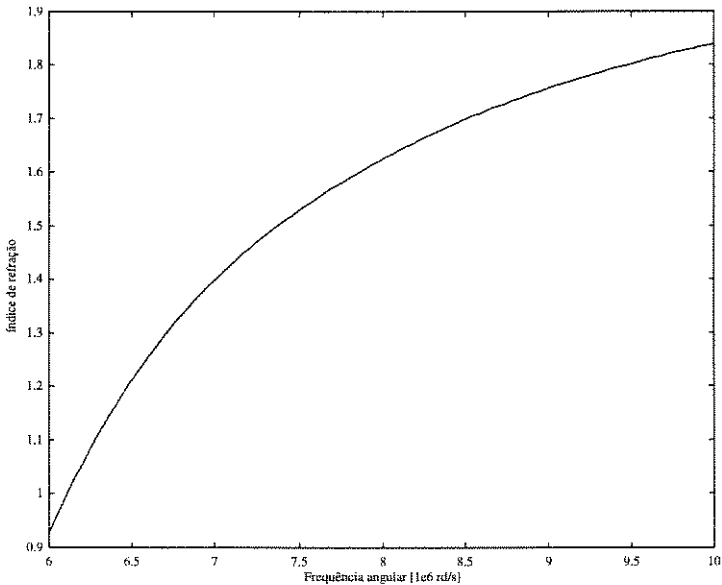


Figura 5-1. Variação do índice de refração com a frequência para o meio adotado.

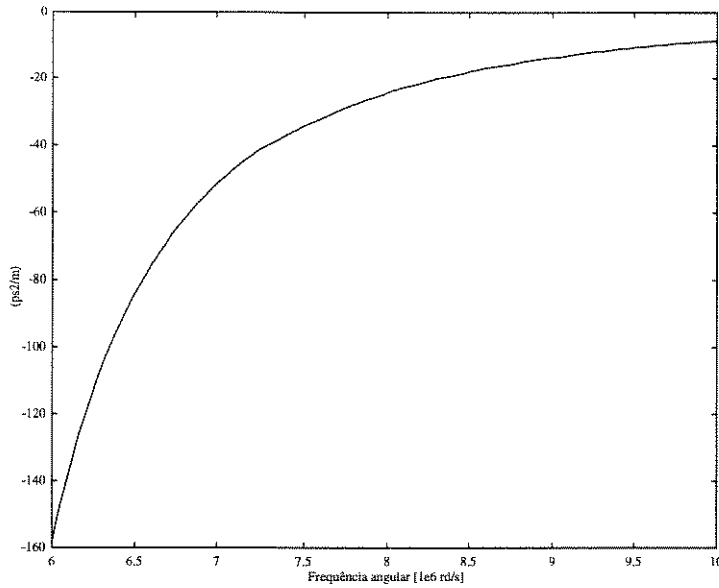


Figura 5-2. Variação de β_2 com a frequência. Nota-se que para essa faixa de frequências tem-se dispersão anômala do meio.

5.4.2 Considerações sobre o método

Para o método FDTD escolheu-se um valor de incremento espacial dado por

$$\Delta x = \frac{\lambda}{300} \quad (5.22)$$

tal que a dispersão numérica do método não influencie nos resultados (ítem 4.2.4) garantindo que a dispersão sofrida pelo pulso é unicamente devida às características do meio material. Como também apresentado, deve-se trabalhar no limite do critério de estabilidade que, para uma dimensão, é escrito como

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \quad (5.23)$$

para um menor de erro na velocidade de fase. As paredes absorventes seguem a aproximação de Mur de primeira ordem (seção 4.2.1).

5.4.3 Simulação do sóliton de 2ª ordem

Seja uma excitação da forma

$$E_z = \sec h \left(\frac{(n\Delta t - \times 6.2947 \times 10^{-15})}{8.2815 \times 10^{-15}} \right) \cos(2\pi (1.37 \times 10^{14} n\Delta t - 8.12372)) \quad (5.24)$$

O formato no tempo e o seu espectro são apresentados nas figuras 5-3 e 5-4. A figura 5-5 mostra o formato do pulso após 7554 steps de tempo correspondentes ao tempo de excitação.

As figuras 5-6 e 5-7 ilustram os formatos de pulso para dois instantes diferentes. A partir dessas figuras pode-se observar o surgimento do fenômeno de decaimento de sólitons. Como mencionado na seção 3.5.3.1, este decaimento surge devido aos efeitos de ordem superior que levam à frissão do sóliton. Percebe-se então, tratar-se do sóliton de 2ª ordem, sendo o sóliton decomposto pelos seus sólitons constituintes [4], que para esse caso são dois. Pode-se notar ainda que o sóliton de menor amplitude viaja em uma velocidade maior do que o principal revelando possuir uma maior frequência. Esse fenômeno se deve principalmente ao retardo na resposta não-linear do meio, modelada pelo espalhamento Raman descrito no APÊNDICE II, já que o pulso “gerado” não sofre o mesmo atraso sofrido pelo pulso principal (seção 3.5.3.1).

Para melhor visualização dos efeitos da não-linearidade do meio material, na figura 5-8 tem-se o formato do pulso após a propagação no meio para o caso de não ter-se qualquer não-linearidade. Essa condição é obtida fazendo-se $\chi^{(3)} = 0$ no algoritmo. Fica claro a distorção sofrida pelo pulso devido a dispersão. Como se trabalha na região anômala, vê-se as componentes de maior frequência viajando mais rápido do que as de menor frequência.

O espectro inicial do sóliton é comparado com aquele obtido após a propagação sendo ambos mostrados na figura 5-16. Pode não só se notar o surgimento de um novo pulso com frequência aproximadamente 2.8 vezes maior que o pulso original, bem como um desvio para as frequências mais baixas por parte do sóliton principal, característico do fenômeno de auto-desvio para o vermelho (seção 3.5.3.2).

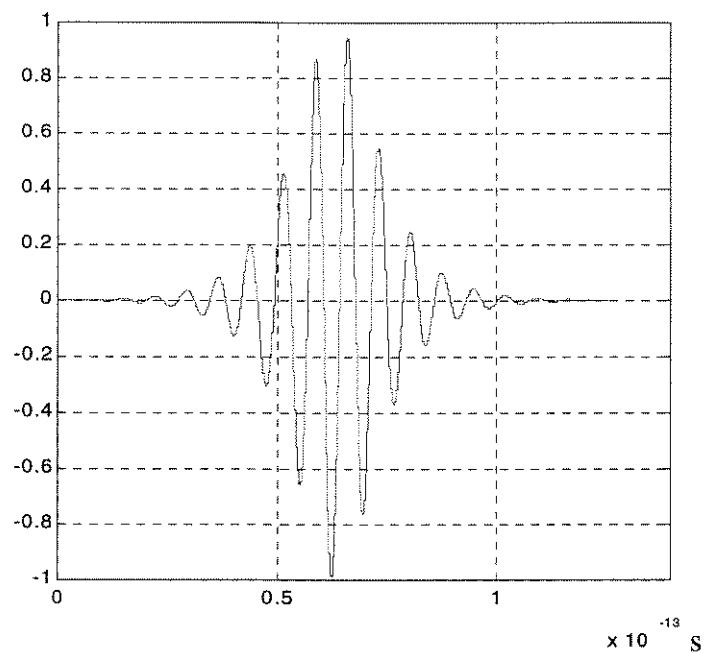


Figura 5-3. Formato do pulso de excitação no tempo para o sóliton de 2ª ordem.

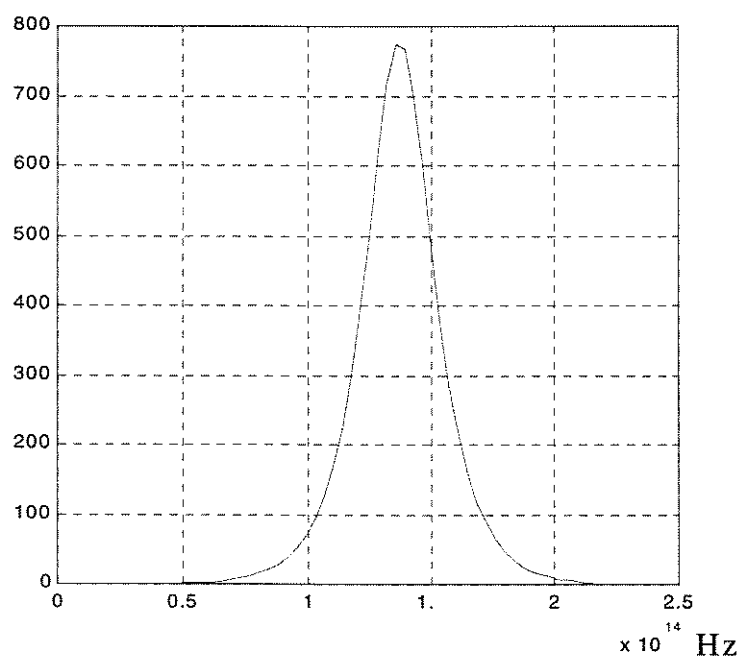


Figura 5-4. Espectro de frequências do pulso de excitação correspondente ao sóliton de 2ª ordem.

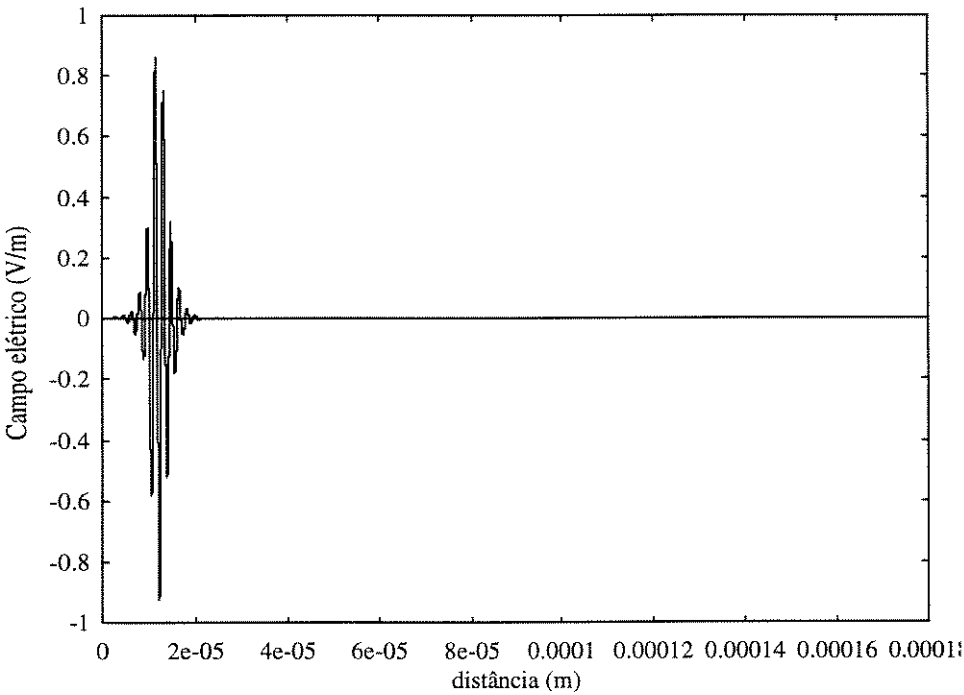


Figura 5-5. Aspecto do sóliton após 7554 passos de tempo que correspondem ao tempo de excitação.

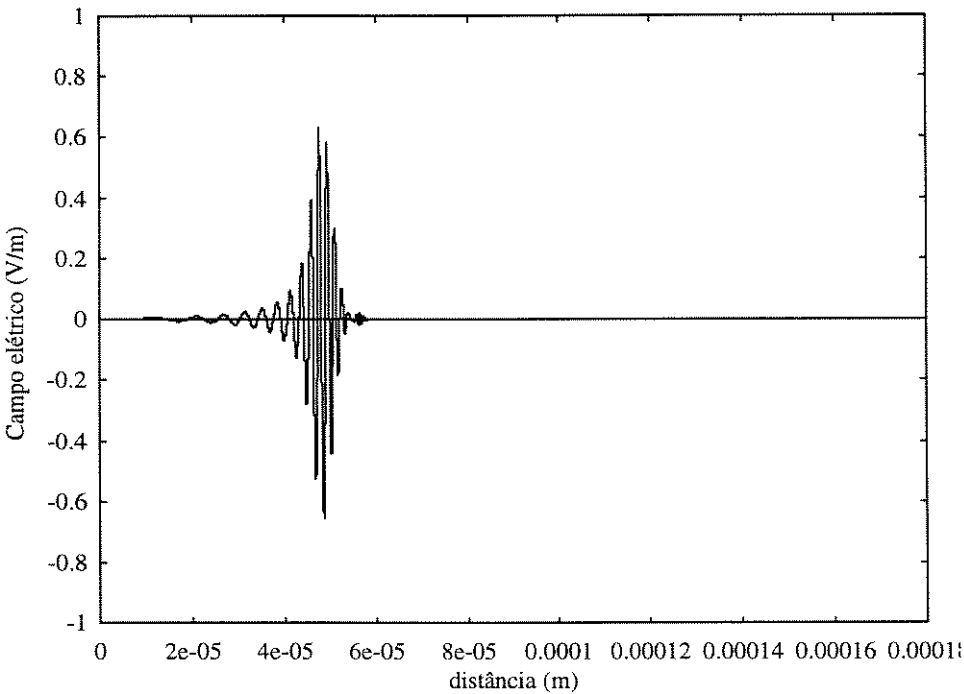


Figura 5-6. Pulso após propagar-se uma distância correspondente a 22000 passos de tempo. Pode-se observar o surgimento de um novo pulso com menor amplitude.

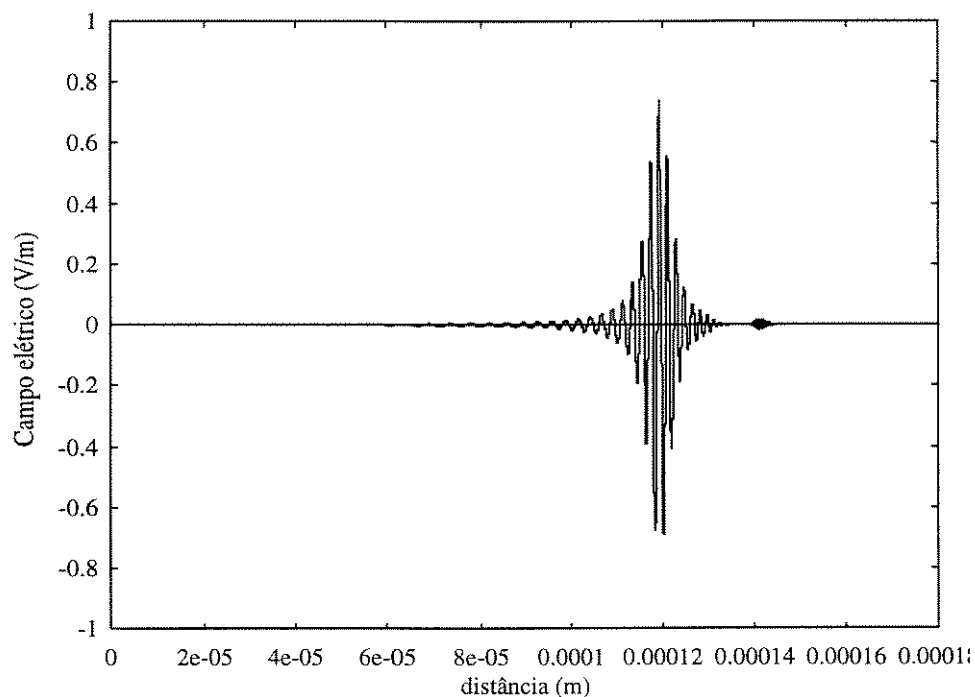


Figura 5-7. Pulso após propagar-se pelo meio material. Nessa figura observa-se o afastamento entre os dois sólitons, já que o sólito gerado viaja em uma velocidade maior.

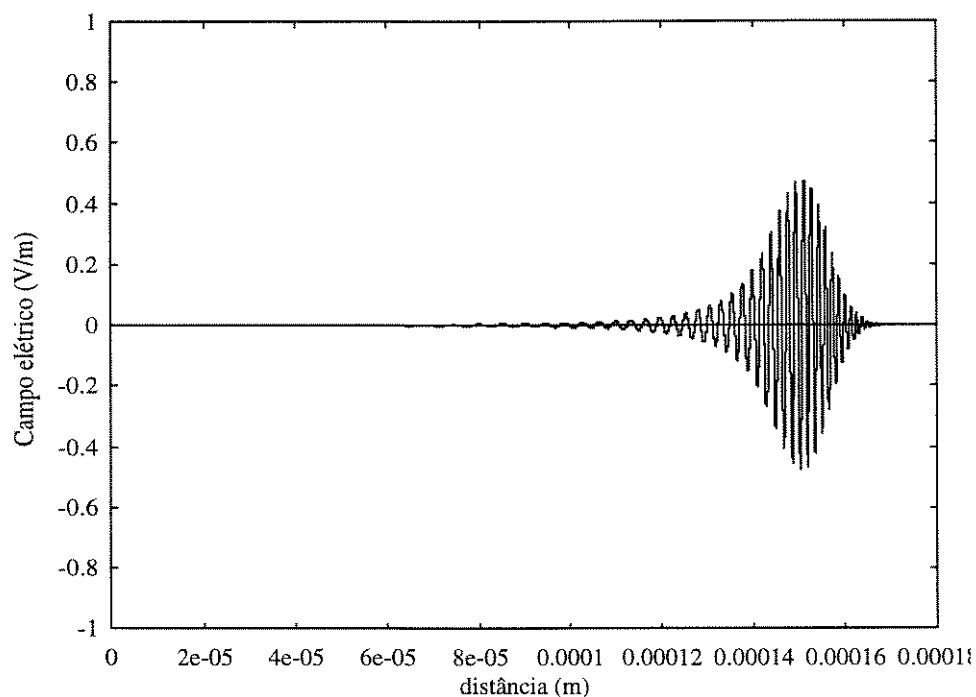


Figura 5-8. Visualização da propagação em um meio linear. Pode-se notar as componentes de maior frequência viajando mais rápido, caracterizando operação na região de dispersão anômala. Pode-se perceber também o decréscimo sofrido pela amplitude do pulso.

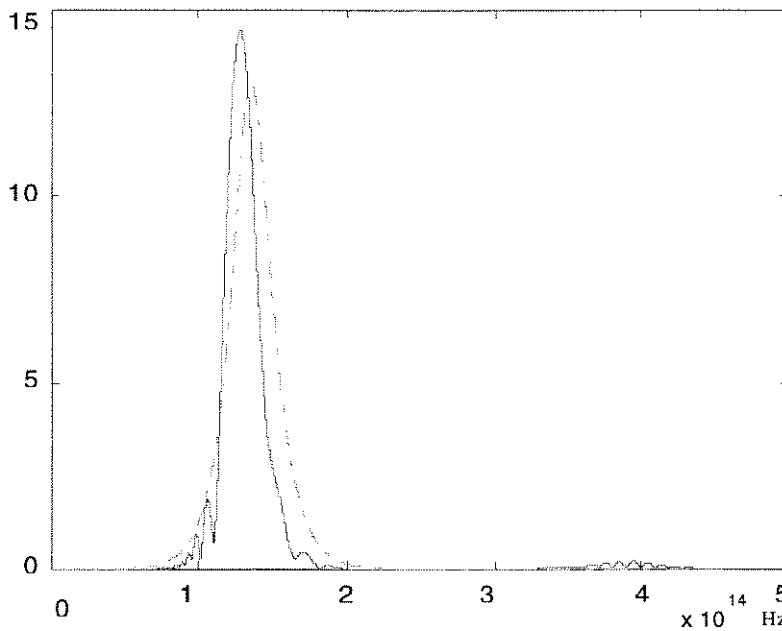


Figura 5-9. Comparação entre os espectros inicial e após a propagação do pulso. Pode-se notar a quebra do sóliton de 2ª ordem em dois sólitons, além do desvio de frequência para o vermelho. -- :espectro inicial do sóliton — :espectro após a propagação

5.4.4 Simulação do sóliton de 3ª ordem

Para simular-se o sóliton de ordem mais elevada, implica em ter-se maior N . A partir de (3.61), observa-se que isto pode ser conseguido ou com um pulso que possui maior amplitude ou uma maior duração temporal, ou ainda com um meio com maior coeficiente de não-linearidade, que foi a opção aqui adotada. Com isso, mantendo-se a mesma excitação descrita por (5.24) e mudando-se apenas o parâmetro $\chi^{(3)}$ para 0.08, consegue-se atingir valores de N próximos de 3. As figuras 5-10 e 5-11 mostram os formatos de pulso para dois instantes distintos. Pode-se notar o surgimento de um 3º pulso de menor amplitude, que evidencia o decaimento do sóliton de 3ª ordem em seus constituintes.

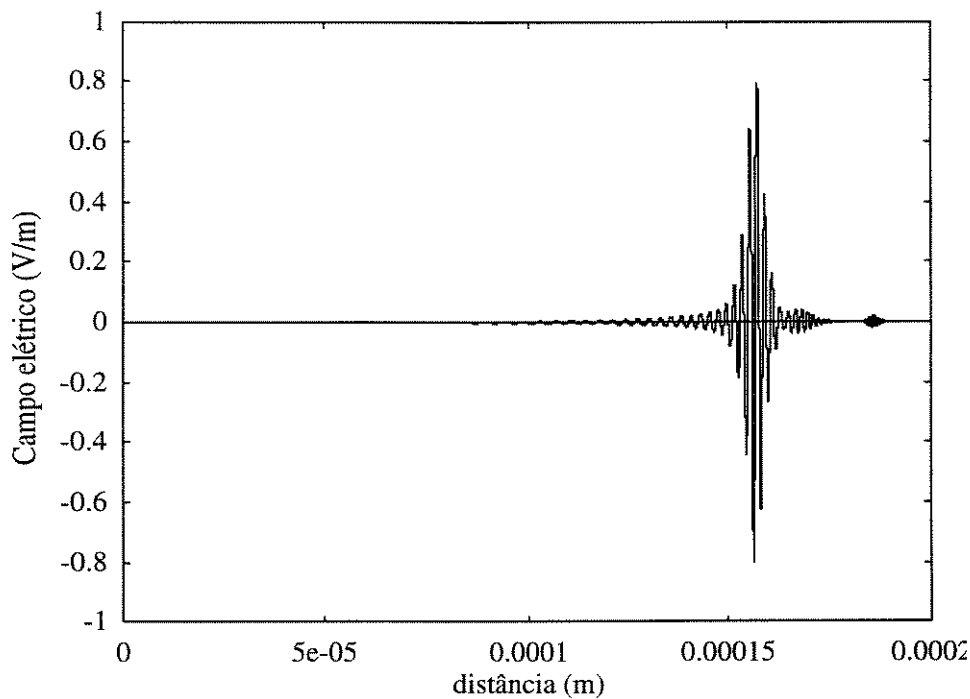


Figura 5-10. Formato de pulso correspondente ao sóliton de 3ª ordem para propagação em 155μm.

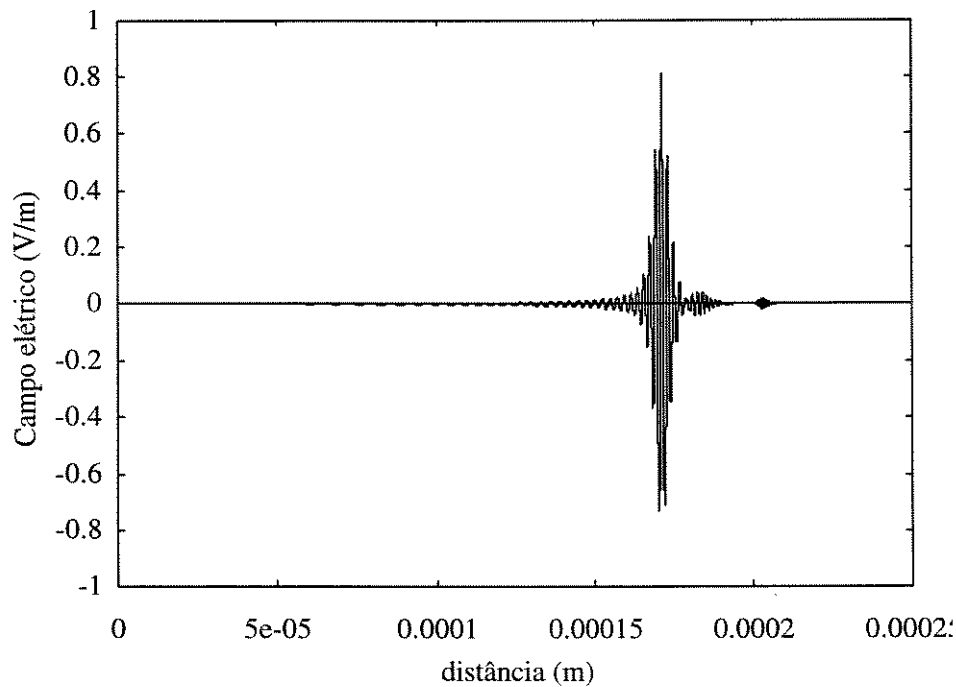


Figura 5-11. Formato de pulso correspondente ao sóliton de 3ª ordem para propagação em 175μm. Já é facilmente visível o surgimento de um terceiro pulso, caracterizando o decaimento do sóliton de 3ª ordem.

5.4.5 Simulação da colisão entre sólitons

É apresentada aqui a colisão entre dois sólitons. Para tal, tem-se agora a excitação localizada não só na origem (extrema esquerda), mas também na outra extremidade do meio modelado. Com isso, obtém-se dois pulsos que viajam em direções opostas, e que em um dado instante de tempo colidirão. Segundo a natureza solitônica dos pulsos, após a colisão estes não devem sofrer qualquer mudança significativa em suas formas. As figuras 5-12 a 5-14 ilustram o processo de colisão, podendo-se verificar a propriedade dos pulsos de reconstituírem as suas formas mesmo após a colisão.

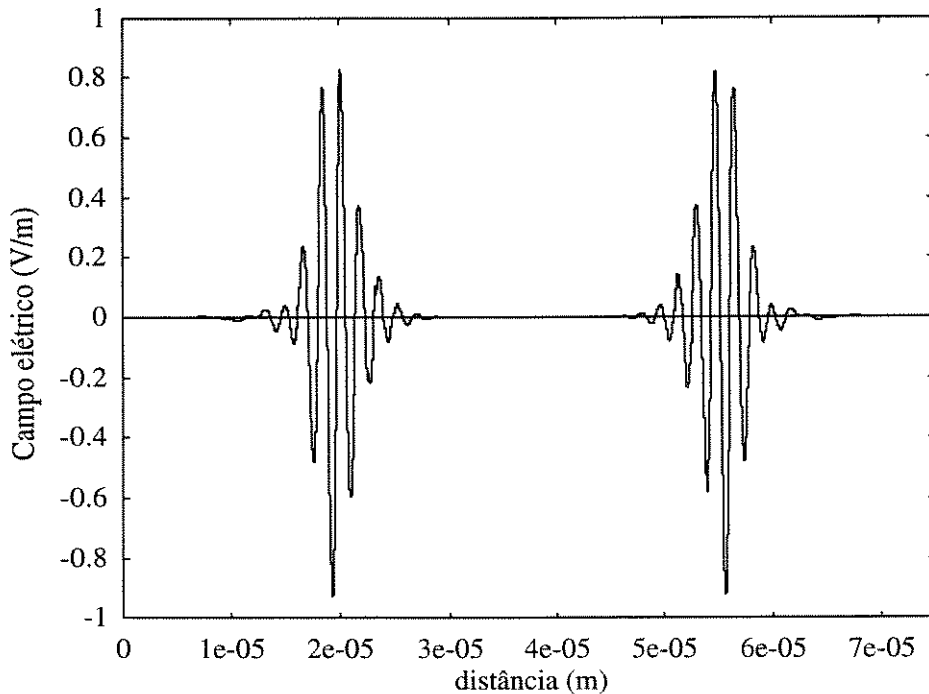


Figura 5-12. Aspecto dos pulsos para 10800 passos de tempo.

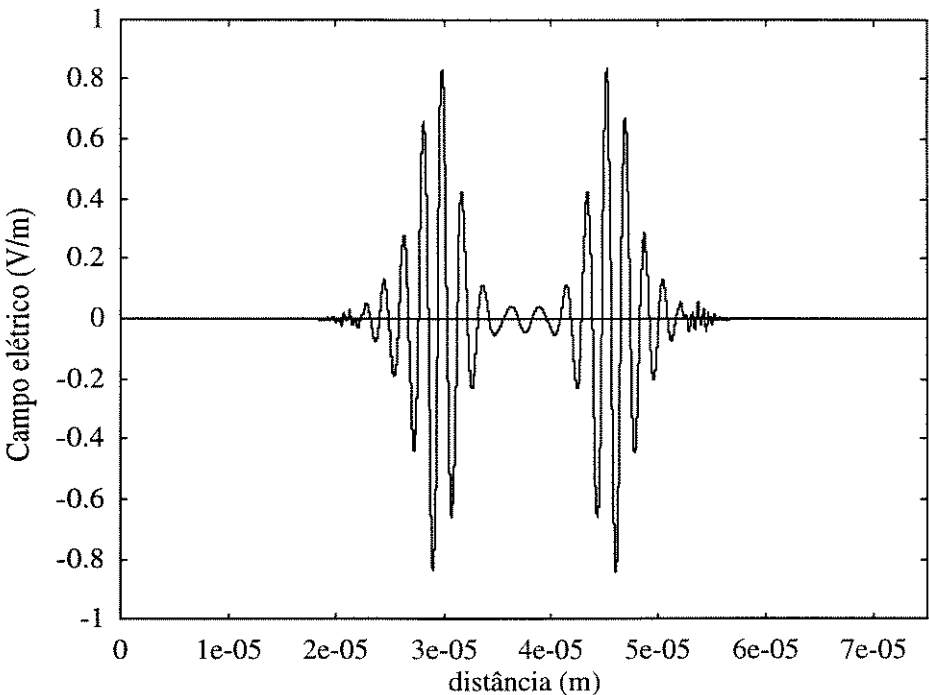


Figura 5-13. Aspecto dos pulsos para 20.250 passos de tempo. Nessa situação, já se os formatos dos pulsos logo após a colisão.

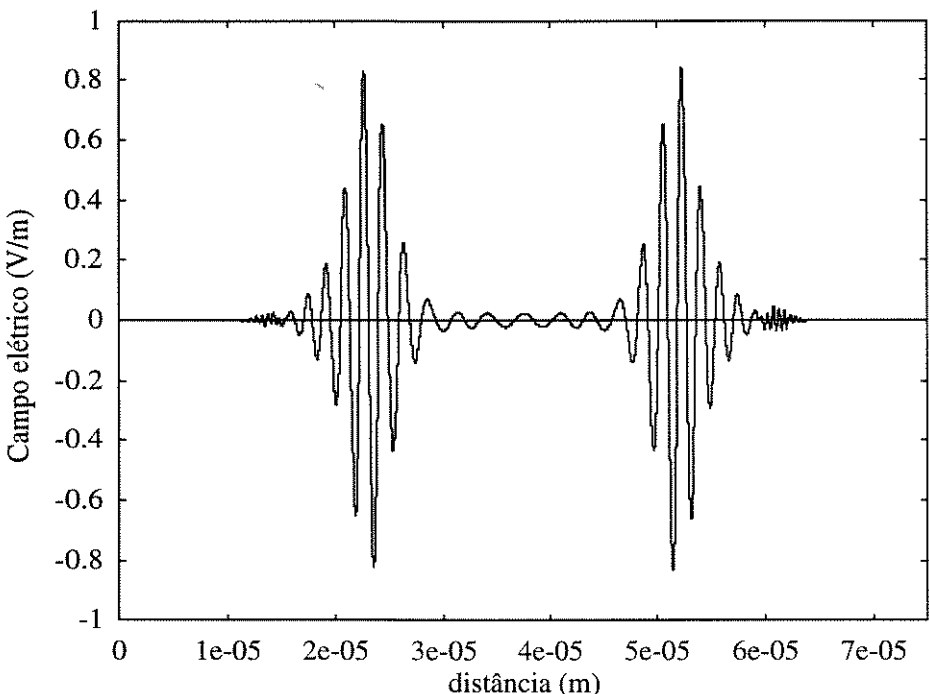


Figura 5-14. Ilustração dos pulsos para 122.500 passos de tempo. Aqui já se tem os pulsos separados quase que por completo. Observa-se que não há mudança aparente nas suas formas, característica inerente aos sólitons.

CAPÍTULO 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

6.1 Conclusões

Neste trabalho estudou-se a propagação de sólitons ópticos ultra-curtos através da técnica FDTD. Mostrou-se que a partir das equações de Maxwell e das relações constitutivas, obtém-se um algoritmo FDTD que permite a análise da propagação solitônica. A propagação dos sólitons de 2ª e 3ª ordens foram simuladas, sendo ainda ilustrados alguns fenômenos de ordem superior como o auto-desvio para o vermelho e o decaimento de sólitons. Por fim, a colisão entre pulsos solitônicos é ilustrada.

A técnica apresentada é genérica, não se baseando em qualquer tipo de aproximação na equação de onda. Ao contrário de métodos usualmente empregados, a portadora óptica não é descartada, podendo ser visualizada durante toda a propagação. Este método também mantém as propriedades vetoriais dos campos, sendo essa uma característica muito importante quando estuda-se componentes sensíveis à polarização. Problemas de reflexões e descontinuidades bruscas na direção de propagação são incorporadas na formulação, permitindo seu uso na análise de estruturas que possuem não-homogeneidades, independentemente da sua direção e da sua ordem de grandeza.

Contudo, como que para o FDTD a memória requerida é proporcional ao volume amostrado, as distâncias envolvidas devem ser limitadas. Com isso, o método fica restrito a

propagação em pequenas distâncias, não podendo simular o comportamento de um sóliton ao longo de uma fibra óptica, por exemplo. Além disso, o esforço computacional requerido é grande, sendo mais crítico quando se trabalha em duas ou três dimensões. No tempo de processamento, quando comparada ao método de Fourier de passo dividido, a técnica FDTD se mostra muito lenta, dado principalmente que o método de Fourier se baseia nas rotinas de FFT (transformada rápida de Fourier) que são extremamente rápidas.

Como ferramenta de análise de sistemas ópticos, sugere-se o uso da técnica FDTD principalmente no estudo de componentes ópticos integrados, onde tem-se distâncias curtas, além de não-homogeneidades, deixando a outro método (o de Fourier de passo dividido, por exemplo), a análise da propagação sobre grandes distâncias onde as aproximações são mais adequadas.

6.2 Propostas para Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros pretende-se estender esta técnica para o estudo de guias e dispositivos ópticos não-lineares, com análise em duas e três dimensões, que permitem a visualização de fenômenos espaciais, como por exemplo o auto-focamento. Em particular, pretende-se utilizar esta formulação para o estudo de acopladores ópticos. Pretende-se também aperfeiçoar os códigos numéricos desenvolvidos com estudo de outras técnicas para obtenção da convolução não-linear e uso de processamento paralelo.

APÊNDICE I

Propriedades elétricas da matéria

O objetivo essencial deste apêndice, é trazer definições básicas de comportamento elétrico dos materiais, quando da presença de ondas eletromagnéticas. Na introdução definimos os diversos tipos de meios em função do comportamento dos seus parâmetros. Em seguida, dispensamos uma maior atenção ao fenômeno de dispersão, desenvolvendo um modelo bastante consistente e simples de análise, que nos dá uma idéia do comportamento em frequência da maioria dos materiais de interesse deste trabalho. Finalmente são descritas as relações entre os parâmetros constitutivos e as constantes ópticas.

Introdução

O comportamento elétrico dos materiais quando estes são submetidos a campos eletromagnéticos é caracterizado pelos seus parâmetros constitutivos (ϵ , μ e σ). Materiais cujos parâmetros constitutivos não são função do campo aplicado são denominados *lineares*; caso contrário são materiais *não-lineares*. Na prática, todo material exhibe características lineares desde que os campos aplicados estejam dentro de certos limites. Como exemplo, tem-se o ar que é aproximadamente linear para campos até a ordem de 1×10^6 (V/m). Acima deste valor, ele exhibe um alto grau de não-linearidade.

Quando os parâmetros constitutivos do meio não são função da posição, os materiais são ditos *homogêneos*; caso contrário são denominados *não-homogêneos*. Todos os

materiais possuem alguma não-homogeneidade, contudo na maior parte dos casos essa é tão pequena que pode ser desconsiderada tornando estes materiais praticamente homogêneos. Se os parâmetros do material variam em função da frequência, eles são chamados de *dispersivos*, sendo *não-dispersivos* caso tais parâmetros não dependam da frequência. Todos os materiais que encontram uso na prática são dispersivos. Já materiais *anisotrópicos* são aqueles nos quais seus dependem da direção do campo aplicado; caso contrário são denominados materiais *isotrópicos*. Muitos materiais, especialmente os cristais, apresentam um alto grau de anisotropia.

Variações AC nos materiais

Pode-se mostrar que quando um material é submetido a um campo elétrico estático, os centróides das cargas positivas e negativas (representando o núcleo e a nuvem eletrônica) são deslocados um com relação ao outro formando-se com isso um dipolo elétrico. Quando observa-se o material de uma maneira macroscópica, a presença de todos esses dipolos é levada em conta introduzindo-se um vetor de polarização elétrica $\vec{P}$. Um mesmo procedimento é usado para levar-se em consideração as órbitas e os spins dos elétrons dos átomos, quando materiais magnéticos estão sujeitos a um campo magnético estático. Quando o mesmo é observado macroscopicamente, a presença de todos os loops é considerada introduzindo-se um vetor de polarização magnética $\vec{M}$.

Quando esses campos começam a ter as suas polaridades alternadas, os vetores $\vec{P}$ e $\vec{M}$, e conseqüentemente a permissividade e a permeabilidade, são afetados e são funções agora da frequência destes campos alternados.

O modelo de Drude-Lorentz

Como se sabe, toda a matéria é constituída por elétrons negativos e núcleos positivos. Íons nada mais são que átomos que possuem um certo desequilíbrio de cargas. Elétrons assim como íons, serão tratados como osciladores harmônicos, ou seja, partículas que vão para os seus estados de equilíbrio por intermédio de uma força de restauração linear. Para generalizar-se este conceito tomamos um oscilador harmônico amortecido, incluindo-se com isso uma força de decaimento linear proporcional à velocidade. Com a presença de uma

onda eletromagnética, o oscilador responde ao campo elétrico dessa onda, visto que a força magnética é muito menor quando comparada a essa, e por esta razão pode ser desprezada. A resposta do meio sob um ponto de vista macroscópico é obtida somando-se todos os movimentos das partículas envolvidas. Partindo-se do princípio que os campos elétricos estão dentro de limites que não permitem a excitação de não-linearidades de qualquer natureza, ϵ , e σ resultantes do modelo serão independentes da magnitude de $\vec{E}$, mas dependentes de sua frequência.

A equação do movimento para esse modelo pode ser escrita como

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + G \frac{dx}{dt} + C x = e E_m \quad (\text{A1-I})$$

ou

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{e E_m}{m} \quad (\text{A1-II})$$

onde e e m são a carga e a massa da partícula, e E_m é o campo aplicado à nível atômico. A constante de decaimento γ possui dimensão de frequência. A frequência natural do oscilador não amortecido é ω_0 e é relacionada à força constante C por $m\omega_0^2 = C$. Levando-se em consideração alguma interação mútua entre as partículas, supõe-se o campo E_m é assumido como sendo dependente do campo da onda E na forma

$$E_m = E + \frac{\nu}{\epsilon_0} P \quad (\text{A1-III})$$

onde P é a polarização do meio. Assumindo-se uma dependência harmônica no tempo e no espaço para E_m , P e E , têm-se

$$E_m = \hat{E}_m e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (\text{A1-IV})$$

com a mesma equação válida para P e E .

Nas maioria das aplicações, o comprimento de onda será muito maior que o tamanho da região em que a partícula se movimenta. Com isso pode-se desprezar a variação espacial, permitindo-se escrever com isso

$$k = 0 \quad (\text{A1-V})$$

e o campo se torna uniforme,

$$E_m = \hat{E}_m e^{-i\omega t} \quad (\text{A1-VI})$$

Com a equação acima, as soluções em regime permanente da equação (A1-I) são dadas por

$$x(t) = \hat{x}e^{-i\omega t} \quad (\text{A1-VII})$$

e determina-se a amplitude $\hat{x}$ desconhecida tal que, a equação seja satisfeita para uma dada frequência ω genérica. Com isso, tem-se

$$\hat{x} = \frac{eE_m/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{A1-VIII})$$

O movimento da partícula é proporcional ao campo E e, como depende da frequência do mesmo, é especialmente grande na ressonância (ω_0). No caso da não existência do decaimento, tem-se a amplitude tendendo ao infinito, mostrando a necessidade de se ter algum tipo de amortecimento para tornar o modelo próximo da realidade.

A relação entre o deslocamento mecânico x das partículas microscópicas carregadas que compõem o material e a resposta elétrica macroscópica deste é dada pela densidade de polarização P . Sendo o momento do dipolo devido ao deslocamento de carga e dado por ex , tem-se

$$P = Nex \quad (\text{A1-IX})$$

onde N é o número de cargas por unidade de volume. Assumindo que a polarização P é proporcional ao campo aplicado

$$P = \chi E \quad (\text{A1-X})$$

onde

$$\epsilon = \epsilon_0 + \chi \quad (\text{A1-XI})$$

$$\epsilon_r = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (\text{A1-XII})$$

Das equações (A1-VIX)-(A1-XI),

$$\chi E = \frac{N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_m \quad (\text{A1-XIII})$$

e usando as equações (A1-V) e (A1-XI)

$$E_m = \left(1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}\right) E \quad (\text{A1-XIV})$$

Com isso

$$\frac{\chi}{1 + \chi/\epsilon_0} = \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{A1-XV})$$

Da equação (A1-XII)

$$\chi = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \quad (\text{A1-XVI})$$

levando à seguinte equação para a permissividade elétrica relativa

$$\frac{\epsilon_r - 1}{1 + v(\epsilon_r - 1)} = \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{A1-XVII})$$

Definindo-se

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \quad (\text{A1-XVIII})$$

de forma que

$$\frac{\epsilon_r - 1}{1 + v(\epsilon_r - 1)} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad \text{A1-XIX}$$

Essa expressão relaciona a constante dielétrica ϵ_r , macroscópica e as propriedades microscópicas das partículas carregadas que formam o meio. Nela se faz notar que ϵ_r é um número complexo e dependente da frequência. Com isso o modelo se aplica adequadamente a um meio condutor e dispersivo.

Generalizando para a maioria dos materiais encontrados, que raramente são compostos por partículas de mesma natureza, pode-se escrever:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{1 + v(\epsilon_r - 1)} = \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\gamma_i\omega} \quad (\text{A1-XX})$$

onde ω_{0i}^2 e γ_i são, respectivamente, a frequência natural e a constante de decaimento resultantes de N_i partículas de carga e_i e massa m_i . Considerando-se cargas e massas idênticas para essas diferentes partículas, pode-se escrever (A1-XX) na forma

$$\frac{\epsilon_r - 1}{1 + v(\epsilon_r - 1)} = \omega_p^2 \sum \frac{G_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\gamma_i\omega} \quad (\text{A1-XXI})$$

onde $G_i = \frac{N_i}{N}$ é a fração de osciladores do tipo i . Desde que $\sum N_i = N$,

$$\sum G_i = 1 \quad (\text{A1-XXII})$$

Se adotarmos $v = 1/3$ (campos locais Lorentzianos), verificamos que a equação (A1-XXI) se trata de uma generalização da equação de Clausius-Mossoti.

Nas frequências onde um pico de ressonância domina todos os outros, pode-se eliminar v usando-se a consideração

$$(\epsilon_r - 1)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) = [1 + v(\epsilon_r - 1)]\omega_p^2 \quad (\text{A1-XXIII})$$

tal que

$$\epsilon_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - v\omega_p^2) - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{A1-XXIV})$$

Essa equação equivale à não fazer-se qualquer tipo de correção no campo, sendo que tem-se agora uma frequência de ressonância efetiva e única dada por $\omega_0^2 = \omega_0^2 - v\omega_p^2$. Consequentemente, pode-se investigar a dependência em frequência de $\hat{\epsilon}_r$, utilizando-se para tal a seguinte equação

$$\hat{\epsilon}_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{A1-XXV})$$

sendo esta extremamente útil na descrição de muitos problemas práticos.

A relação com as constantes ópticas

Desde que a propagação de onda eletromagnética é determinada pelas constantes ópticas n e k , torna-se importante explorar as suas relações com as grandezas ϵ_r e σ , através dos quais os materiais são originalmente expressos. Definindo-se um índice de refração complexo

$$\hat{n} = n + ik \quad (\text{A1-XXVI})$$

Para materiais não-magnéticos

$$\hat{\epsilon}_r = \hat{n}^2 \quad (\text{A1-XXVII})$$

Embora pareça complicada, quando reescrevemos $\hat{\epsilon}_r$ em duas partes, sendo uma real e outra imaginária, a relação (A1-XXVII) torna-se extremamente simples. Procedendo-se dessa maneira

$$\hat{\epsilon}_r = \epsilon_{re} + i\epsilon_i \quad (\text{A1-XXVIII})$$

e elevando (A1-XXVI) ao quadrado e separando em suas partes real e imaginária, e usando a equação acima chega-se ao seguinte sistemas de equações

$$\begin{aligned} \epsilon_{re} &= n^2 - k^2 \\ \epsilon_i &= 2nk \end{aligned} \quad (\text{A1-XXIX})$$

que quando resolvido para n e k , resulta em

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}[\epsilon_{re} + \sqrt{\epsilon_{re}^2 + \epsilon_i^2}]} \quad (\text{A1-XXX})$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} \left[-\epsilon_r + \sqrt{\epsilon_{re}^2 + \epsilon_i^2} \right]} \quad (\text{A1-XXXI})$$

Permitido com isso, observar-se a velocidade de fase e o comprimento de atenuação da onda eletromagnética. Para frequências distantes da frequência de ressonância do meio, pode-se escrever para n

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)] \quad (\text{A1-XXXII})$$

onde $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega) = \epsilon_{re}(\omega) - 1$.

APÊNDICE II

Espalhamento Raman estimulado

Neste apêndice apresenta-se uma breve análise do espalhamento Raman como intuito de fornecer informações básicas sobre este fenômeno. Um estudo aprofundado implicaria em extensos desenvolvimentos que fogem dos objetivos deste trabalho. Ao leitor mais rigoroso fica indicada as literaturas pesquisadas que tratam o assunto de forma mais detalhada e mais consistente.

Introdução

Um efeito bastante interessante e que fornece muita informação sobre os estados quânticos moleculares foi descoberto experimentalmente em 1928 por Raman [5]. Trata-se do espalhamento de luz por moléculas acompanhado por uma mudança de frequência. Em fibras ópticas, existem também outros tipos de espalhamento, como os espalhamento Mie e Brillouin, e principalmente o de Rayleigh, sendo esse último o mais tratado na literatura [17].

No espalhamento comum de Rayleigh por moléculas, a frequência da luz espalhada é a mesma da luz incidente. No processo de fluorescência, a frequência da luz incidente coincide com uma frequência de absorção das moléculas espalhadoras do gás. Este é um fenômeno de ressonância onde a molécula é levada a um estado excitado e, após um breve tempo de vida, reemite luz numa frequência diferente. No efeito Raman, a frequência da luz espalhada é diferente da frequência da luz incidente mas esta frequência incidente *não* está relacionada com alguma frequência característica da molécula espalhadora.

Se a radiação incidente for intensa e monocromática de frequência f , observa-se que a luz espalhada a 90° com a direção incidente contém além da radiação de frequência f (espalhamento Rayleigh), radiações mais fracas de frequência $f \pm f_\Delta$ (espalhamento Raman). O espectro de espalhamento apresenta portanto linhas Raman mais fracas de cada lado da linha Rayleigh. Se mudarmos a frequência da luz incidente observamos novamente linhas fracas de cada lado da linha de Rayleigh no espectro espalhado, com a mesma diferença em frequência que antes. A **diferença** de frequência f_Δ entre a luz incidente e espalhada no efeito Raman é uma característica de transição na molécula espalhadora. Durante o processo de espalhamento a molécula pode mudar seu estado de uma energia permitida a outra. Para que a energia seja conservada no processo, o fóton espalhado deverá ter uma energia diferente do fóton incidente de uma quantidade igual e em sentido oposto à mudança da energia molecular.

Existem várias maneiras da luz interagir com a matéria. Talvez a mais simples seja o acoplamento do campo eletromagnético aos estados eletrônicos. Esse acoplamento leva a muitos fenômenos mas para o nosso propósito podem ser adequadamente distribuídos em duas classes:

a. transições reais que envolvem rearranjo da distribuição de uma forma permanente; por exemplo, o elétron levado a um estado excitado. Aqui, como tratamos de material baseado na sílica, onde a energia do fóton no infravermelho próximo é pequena quando comparada ao *gap*, não são permitidas tais tipos de transições;

b. transições virtuais que envolvem estados que são energeticamente proibidos. Essas transições podem ser encaradas como ocorrendo pelo fornecimento de energia extra ΔE necessária para ter-se a possibilidade de transição somente por um certo período curto de tempo, da ordem de $\hbar/\Delta E$ no qual está na faixa de sub-femtosegundos para a sílica, antes de retornar ao estado inicial. Esses tipos de transições são as responsáveis pelo efeito Kerr na sílica em que o índice de refração é uma função da intensidade.

O espalhamento Raman, que é o de interesse aqui, é causado pela interação da luz com os modos dos fónons ópticos. A luz espalhada possui frequência menor, como um resultado da emissão do fónon, e é principalmente observada no sentido direto de propagação. Na sílica, as altas frequências do fónon óptico levam a desvios de frequência da luz espalhada de 13.2 THz que é extremamente grande e geralmente leva ao espalhamento Raman sem fase

casada. Finalmente nota-se que a energia do fónon é muito menor que a energia óptica, de forma que a energia óptica é aproximadamente conservada na interação Raman.

Descrição matemática do processo

O espalhamento Raman é normalmente formulado para ondas planas onde tem que se levar em conta o acoplamento de ondas com k-vetores em diferente direções. A situação em fibras monomodos é algo mais simples desde que os k-vetores dos modos propagantes sejam todos paralelos. Logo, para o nosso propósito é necessário tratar somente com as amplitudes escalares dos modos transversais. A formulação descrita aqui se baseia integralmente na referência [5], sendo essa a fonte de consulta escolhida como a adequada.

A formulação parte da derivação heurística das equações clássicas que descrevem o processo. Parte-se das equações de onda para os campos do fónon e ópticos, e adiciona-se os termos não-lineares de interação de frequência apropriada. A conservação de energia óptica é então utilizada para obter-se a relação entre os coeficientes não-lineares.

As equações de onda que viajam para frente e que incluem a interação não-linear generalizada pode ser escrita como

$$i\frac{\partial E_L}{\partial z} = \beta_L E_L + G_L(\omega_L; E_L; E_S; Q) \quad (\text{A2- I})$$

$$i\frac{\partial E_S}{\partial z} = \beta_S E_S + G_S(\omega_S; E_L; E_S; Q) \quad (\text{A2- II})$$

$$i\frac{\partial Q}{\partial z} = kQ + G_Q(\omega_Q; E_L; E_S; Q) \quad (\text{A2- III})$$

onde as funções G podem ser calculadas exatamente a partir da energia livre da interação de onda. Aqui, assumi-se que as funções são quadráticas nos campos e que a frequência da interação é a mesma bem como aquela do lado esquerdo da equação (A2-I) usando $\omega_L - \omega_S = \Omega_Q$. Isso fornece a seguinte forma para as funções de interação

$$G_L = g_L E_S Q \quad (\text{A2- IV})$$

$$G_S = g_S E_L Q^* \quad (\text{A2- V})$$

$$G_Q = g_Q E_L E_S^* \quad (\text{A2- VI})$$

onde, por exemplo, o campo Q^* possui frequência $-\Omega_Q$. Substituindo as equações (A2-IV)-(A2-VI) nas equações (A2-I)-(A2-III), obtém-se as seguintes equações não-lineares

$$i\frac{\partial E_L}{\partial z} = \beta_L E_L + g_L E_S Q \quad (\text{A2- VII})$$

$$i \frac{\partial E_s}{\partial z} = \beta_s E_s + g_s E_L Q^* \quad (\text{A2- VIII})$$

$$i \frac{\partial Q}{\partial z} = kQ + g_Q E_L E_s^* \quad (\text{A2- IX})$$

que descrevem a interação dos campos do bombeamento, de Stokes e dos fónons ópticos. A essa altura o problema pode ser reduzido trabalhando-se em regime permanente onde as dependências no espaço e tempo (implícita na dependência em frequência de k) no movimento do fónon se tornam nulas. Quando isso é feito, tem-se a relação para o campo do fónon da equação (A2-IX)

$$Q = -\frac{g_Q}{k} E_L E_s^* \quad (\text{A2- X})$$

sendo k uma constante calculada na frequência do fónon. Com isso, pode-se usar agora a equação anterior para eliminar o campo do fónon da equação (A2-VII) e (A2-VIII) para obter as equações para os campos ópticos

$$i \frac{\partial E_L}{\partial z} = \beta_L E_L - \frac{g_L g_Q}{k} |E_s|^2 E_L \quad (\text{A2- XI})$$

$$i \frac{\partial E_s}{\partial z} = \beta_s E_s - \frac{g_s g_Q^*}{k} |E_L|^2 E_s \quad (\text{A2- XII})$$

Tem-se agora as equações para os quatro campos ópticos que envolvem dois coeficientes não-lineares. Para prosseguir é necessário calcular a quantidade conservada pelas duas equações anteriores e compará-la com a energia óptica total. Multiplicando a equação (A2-XI) por E_L^* e somando a essa equação o seu complexo conjugado (fazendo o mesmo para (A2-XII)), tem-se as equações de evolução para a intensidade óptica

$$\frac{dI_L}{dz} = -\chi_L I_s I_L \quad (\text{A2- XIII})$$

$$\frac{dI_s}{dz} = -\chi_s I_s I_L \quad (\text{A2- XIV})$$

sendo $\chi_s = \text{Im} \left(\frac{g_s g_Q^*}{k} \right)$ e $\chi_L = \text{Im} \left(\frac{g_L g_Q}{k} \right)$. Multiplicando (A2-XIII) por χ_s e (A2-XIV)

por χ_L e subtraindo-as, obtem-se a quantidade conservada

$$\chi_L I_s - \chi_s I_L = \text{const.} \quad (\text{A2- XV})$$

Pode-se ter então a condição necessária entre os coeficientes não-linear impondo-se a condição que o número total de fótons seja conservado. O número de fótons é definido como

a energia na onda óptica dividida pela energia do fóton $\hbar\omega$ e essa condição pode ser expressa como

$$\frac{I_L}{\omega_L} + \frac{I_S}{\omega_S} = \text{const.} \quad (\text{A2- XVI})$$

Comparando (A2-XV) e (A2-XVI) chega-se a relação

$$\omega_L \chi_S = -\omega_S \chi_L \equiv -\omega_S \omega_L \chi_R \quad (\text{A2- XVII})$$

Com isso, pode-se finalmente escrever nossas equações que descrevem *SRS* em *CW* (regime permanente) na forma

$$\frac{dI_L}{dz} = -\omega_L \chi_R I_S I_L \quad (\text{A2- XVIII})$$

$$\frac{dI_S}{dz} = -\omega_S \chi_R I_S I_L \quad (\text{A2- XIX})$$

A solução das duas equações acima é obtida fazendo-se uma mudança de variáveis

$$S = \frac{I_L}{\omega_L} + \frac{I_S}{\omega_S} \quad (\text{A2- XX})$$

$$D = \frac{I_L}{\omega_L} - \frac{I_S}{\omega_S} \quad (\text{A2- XXI})$$

onde S é a energia total (uma constante), e D é a diferença entre as energias de bombeio e de Stokes. A equação para a evolução da diferença de energia é

$$\frac{dD}{dz} = -\omega_S \omega_L \frac{\chi_R}{2} (S^2 - D^2) \quad (\text{A2- XXII})$$

que pode ser integrada fornecendo a solução

$$D = S \tanh \left(-\frac{\omega_S \omega_L \chi_R S}{2} (z - z_0) \right) \quad (\text{A2- XXIII})$$

onde o parâmetro z_0 é definido por $D_0 = S \tanh(\omega_S \omega_L \chi_R S z_0 / 2)$ e a propagação na fibra tem início em $z=0$.

Formulação do fenômeno para pulsos ultra-curtos

Todo desenvolvimento do *SRS* descrito anteriormente é adequado quando a largura de faixa da luz nas linhas de bombeio ou de Stokes é pequena comparada às suas separações. Analogamente, a equação não-linear de Schrödinger modificada (2.64) é adequada quando a banda do sóliton é pequena quando comparada ao desvio de Stokes. Quando se tem pulsos ultra-curtos tem-se um acoplamento muito forte entre o sóliton e o

fenômeno Raman e uma equação mais exata se faz necessária. Com isso, para pulsos que possuem larguras de faixa não desprezíveis o tratamento dispensado ao espalhamento Raman não deve ser mais realizado no domínio da frequência que considera pulsos quasi-monocromáticos. A formulação do fenômeno no domínio do tempo se mostra mais eficiente computacionalmente e a sua análise menos complexa [19].

Quando analisado no domínio do tempo, o ganho Raman possui uma interpretação física mais clara. A aplicação de um pulso óptico curto e intenso à uma molécula perturba a estrutura eletrônica dessa molécula e tem como resultado uma mudança na polarizabilidade que é dependente da intensidade. O efeito eletrônico ocorre em uma escala de tempo muito menor que a do pulso mais curto, podendo ser taxado de instantâneo. Contudo, a perturbação da estrutura eletrônica induzida pelo campo também perturba o campo visto pelo núcleo da molécula e tem-se a possibilidade de vibração da mesma. Isso resulta em mudanças adicionais na polarizabilidade dependentes do tempo e da intensidade. Essa porção da mudança na polarizabilidade associada à excitação de vibrações do núcleo é definida como efeito Raman, e que no domínio do tempo pode ser descrito como um índice de refração não-linear dependente do tempo [19].

A principal consideração que não pode mais ser feita é a que despreza a dependência no tempo da polarização de onda do fónon óptico. Matematicamente, isso significa que deve-se inserir em (A2-IX) a dependência em frequência da constante de propagação do fónon k . Expandindo k em primeira ordem em Ω tem-se

$$k = k_0 - i\gamma + k'_0\Omega \quad (\text{A2- XXIV})$$

que pode ser substituída em (A2-IX). Usando as propriedades da curva de dispersão do fónon óptico podemos desprezar a derivada com respeito a z e o pequeno termo constante k_0 , para chegar à seguinte equação para essa dependência da polarização do fónon

$$ik'_0 \frac{\partial Q}{\partial t} + i\gamma Q = g_Q E_L E_S^* \quad (\text{A2- XXV})$$

essa equação pode ser resolvida para Q uma vez que os campos ópticos são conhecidos e obtém-se

$$Q(t) = -i \frac{g_Q}{k'_0} \int e^{-\frac{\gamma}{k'_0}(t-t')} E_S^*(t') E_P(t') dt' \quad (\text{A2- XXVI})$$

que tem a forma de uma resposta do campo óptico atrasada no tempo. Em geral uma susceptibilidade dependente da frequência possui uma função resposta no domínio do tempo. Sob condições normais onde os campos são quase *CW*, a descrição no domínio da frequência

é a mais conveniente. Entretanto, em regime transitório deve-se trabalhar no domínio do tempo de forma obter-se uma solução mais simples. A polarização não-linear pode ser modelada para esses casos como [50]

$$P_{NL}(t) = \chi^{(3)} E(t) \int_{-\infty}^t f(t-t') E(t')^2 dt', \quad (\text{A2- XXVII})$$

onde a resposta retardada é aplicada à intensidade óptica. A função resposta $f(t-t')$ pode ser obtida do espectro do ganho Raman aplicando-se primeiramente a transformada de Kramers-Kronig [25] para se ter a parte real da susceptibilidade e então aplica-se a transformada inversa de Fourier.

A função resposta de terceira ordem nas fibras de sílica possui duas escalas de tempo dominantes. A menor escala de tempo, da ordem de femtosegundos ou menos, contribui para a parte real de $\chi^{(3)}$ e surge das transições eletrônicas virtuais e não-ressonantes [50]. Como já mencionado, essas transições podem ser tomadas como instantâneas e aqui são representadas por uma função delta. A outra escala de tempo que é da ordem de 100 fs é dada pelo tempo de vida do fóton. Essa parte da interação é modelada como uma única linha Lorentziana, centrada na frequência do fónon óptico. Com isso, a função resposta de terceira ordem é dada por [50]

$$g(t) = \alpha \delta(t) + (1-\alpha) g_R(t) \quad (\text{A2- XXVIII})$$

sendo usado aqui

$$g_R = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \exp\left[-\frac{t}{\tau_2}\right] \sin\left[\frac{t}{\tau_1}\right] \quad (\text{A2- XXIX})$$

onde α parametriza a relação entre as interações tipo Kerr e Raman. O inverso da escala de tempo $1/\tau_1$ fornece a frequência do fónon e $1/\tau_2$ determina a largura de faixa da linha Lorentziana.

APÊNDICE III

Desenvolvimento das equações que compõem o algoritmo

Sejam as polarizações linear e não-linear escritas na forma

$$F(t) = \epsilon_0 \int_0^t \chi^{(1)}(t-\bar{t}) E_Z(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (\text{A3-I})$$

$$G(t) = \epsilon_0 \int_0^t g_R(t-\bar{t}) E_Z^2(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (\text{A3-II})$$

Tomando-se as derivadas 1ª e 2ª de (A3-I) e (A3-II) com relação ao tempo, obtém-se

se

$$\frac{dF(t)}{dt} = \epsilon_0 \int_0^t \frac{d\chi^{(1)}(t-\bar{t})}{dt} E_Z(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (\text{A3-III})$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = \epsilon_0 \int_0^t \frac{dg_R(t-\bar{t})}{dt} E_Z^2(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (\text{A3-IV})$$

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = \epsilon_0 \int_0^t \frac{d^2\chi^{(1)}(t-\bar{t})}{dt^2} E_Z(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (\text{A3-V})$$

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} = \epsilon_0 \int_0^t \frac{d^2g_R(t-\bar{t})}{dt^2} E_Z^2(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (\text{A3-VI})$$

sendo que no processo de derivação foi usada a propriedade

$$\frac{d}{dt} (x(t) * y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot y(t-\bar{t}) d\bar{t} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\bar{t}) \cdot \frac{dy(t)}{dt} d\bar{t} \quad (\text{A3-VII})$$

A equação (5.8) pode ser escrita na forma

$$\omega_0^2 \chi^{(1)}(\omega) - j\delta\omega \chi^{(1)}(\omega) - \omega^2 \chi^{(1)}(\omega) = \omega_0^2 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \quad (\text{A3-VIII})$$

Tomando-se a transformada inversa de Fourier de (A3-VIII),

$$\omega_0^2 \chi^{(1)}(t) + \delta \frac{d}{dt} \chi^{(1)}(t) + \frac{d^2}{dt^2} \chi^{(1)}(t) = \omega_0^2 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \delta(t) \quad (\text{A3-IX})$$

Substituindo $\frac{d^2}{dt^2} \chi^{(1)}(t)$ da equação acima em (A3-V) tem-se

$$\frac{d^2 F(t)}{dt^2} = \epsilon_0 \int_0^t \left[\omega_0^2 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \delta(t - \bar{t}) - \omega_0^2 \chi^{(1)}(t - \bar{t}) + \delta \frac{d}{dt} \chi^{(1)}(t - \bar{t}) \right] E_z(x, t - \bar{t}) d\bar{t} \quad (\text{A3-X})$$

que uma vez comparada com (A3-I) e após uma breve manipulação, resulta em

$$\frac{d^2 F(t)}{dt^2} = \epsilon_0 \omega_0^2 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) E_z(x, t) - \omega_0^2 F(t) - \delta \frac{dF(t)}{dt} \quad (\text{A3-XI})$$

De (5.3) pode-se escrever que

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_\infty} [D_z - P_z^L - P_z^{NL}] \quad (\text{A3-XII})$$

usando (5.5), (5.9) e (5.10) tem-se para E_z ,

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_\infty} \left\{ D_z - \epsilon_0 \int_0^t \chi^{(1)}(t - \bar{t}) E_z(x, \bar{t}) d\bar{t} - \epsilon_0 \chi^{(3)} E_z(x, \bar{t}) \int_0^t g(t - \bar{t}) E_z^2(x, \bar{t}) d\bar{t} \right\} \quad \therefore$$

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_\infty} \left\{ D_z - F - \epsilon_0 \chi^{(3)} E_z(x, \bar{t}) \left[\alpha E_z^2(x, t) + \frac{(1 - \alpha)}{\epsilon_0} G \right] \right\} \quad \therefore$$

$$[\epsilon_0 \epsilon_\infty + \alpha \epsilon_0 \chi^{(3)} E_z^2] E_z = D_z - F - (1 - \alpha) \chi^{(3)} E_z G \quad \therefore$$

$$E_z(x, t) = \frac{D_z - F - (1 - \alpha) \chi^{(3)} E_z G}{\epsilon_0 (\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2)} \quad (\text{A3-XIII})$$

Substituindo (A3-XIII) em (A3-XI)

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \epsilon_0 \omega_0^2 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \cdot \left[\frac{D_z - F - (1 - \alpha) \chi^{(3)} E_z G}{\epsilon_0 (\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_z^2)} \right] - \omega_0^2 F - \delta \frac{dF}{dt} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\delta}{\omega_0^2} \frac{dF}{dt} + \left[1 + \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{(\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_Z^2)} \right] F + \left[\frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)(1 - \alpha) \chi^{(3)} E_Z}{(\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_Z^2)} \right] G = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{(\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_Z^2)} D_Z \quad (\text{A3-XIV})$$

Observando-se (5.7) e (5.10), tem-se as seguintes relações

$$v_0 = \frac{1}{\tau_1} \quad (\text{A3-XV})$$

$$\bar{\delta}_2 = \frac{2}{\tau_2} \quad (\text{A3-XVI})$$

$$\bar{\omega}_0^2 = \left(\frac{1}{\tau_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{\tau_2} \right)^2 \quad (\text{A3-XVII})$$

Com isso, pode-se escrever agora uma função $G_R(\omega)$ que vale

$$G_R(\omega) = \frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\omega}_0^2 - j\bar{\delta}\omega - \omega^2} \quad (\text{A3-XVIII})$$

e que no domínio do tempo, resulta na seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2 g_R(t)}{dt^2} + \bar{\delta} \frac{d g_R(t)}{dt} + \omega_0^2 g_R(t) = \omega_0^2 \delta(t) \quad (\text{A3-XIX})$$

Isolando $\frac{d^2 g_R(t)}{dt^2}$ e substituindo em (A3-VI)

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} = \epsilon_0 \int \left[\bar{\omega}_0^2 \delta(t) - \bar{\omega}_0^2 g_R(t) - \bar{\delta} \frac{d g_R(t)}{dt} \right] E_Z^2(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad \therefore$$

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} = \epsilon_0 \bar{\omega}_0^2 E_Z^2(x, \bar{t}) - \bar{\omega}_0^2 G(t) - \bar{\delta} \frac{dG(t)}{dt} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{\bar{\omega}_0^2} \frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\omega}_0^2} \frac{dG(t)}{dt} + G(t) - \epsilon_0 E_Z^2(x, \bar{t}) = 0 \quad (\text{A3-XX})$$

e usando (A3-XIII) obtemos,

$$\frac{1}{\bar{\omega}_0^2} \frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\omega}_0^2} \frac{dG(t)}{dt} + G(t) - \epsilon_0 E_Z^2(x, \bar{t}) \cdot \left[\frac{D_Z - F - (1 - \alpha) \chi^{(3)} E_Z(x, \bar{t}) G(t)}{\epsilon_0 (\epsilon_\infty + \alpha \chi^{(3)} E_Z^2(x, \bar{t}))} \right] = 0$$

$$\frac{1}{\bar{\omega}_0^2} \frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\omega}_0^2} \frac{dG(t)}{dt} + \left[1 + \frac{(1-\alpha)\chi^{(3)} E_Z^2(x, \bar{t})}{(\epsilon_\infty + \alpha\chi^{(3)} E_Z^2(x, \bar{t}))} \right] G(t) +$$

$$+ \left(\frac{E_Z(x, \bar{t})}{(\epsilon_\infty + \alpha\chi^{(3)} E_Z^2(x, \bar{t}))} \right) F(t) = \left(\frac{E_Z(x, \bar{t})}{(\epsilon_\infty + \alpha\chi^{(3)} E_Z^2(x, \bar{t}))} \right) D_Z(t)$$

(A3-XXI)

As equações (A3-XIII), (A3-XIV), (A3-XXI) usadas em conjunto com as equações para os campos magnéticos completam a solução do problema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] **Ribeiro, J.A.J.** : *Sistemas de Comunicações Ópticas*, CEDETEC-INATEL, Santa Rita do Sapucaí-MG, 2^a edição, Setembro, 1986, apostila de curso.
- [2] **Agrawal, J.P. and Boyd, R.W.** : *Contemporary Nonlinear Optics*, Academic Press, 1992.
- [3] **Senior, J.M.** : *Optical fiber Communications: Principles and Practice*, 2nd edition, Prentice Hall, 1992.
- [4] **Hasegawa, A.** : *Optical Solitons in Fibers*. New York: Springer Verlag, 1990.
- [5] **Boardman, A.D., Bertolotti, M. and Twardowski, T.** : *Nonlinear Waves in Solid State Physics*, Plenum Press, New York, 1990.
- [6] **Agrawal, G.P.** : *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, 1991.
- [7] **Carlos Alberto Carneiro Feitosa** : *Colisão e Chaveamento de Sólitos em Fibras Ópticas especiais*, tese de mestrado, UFCe, Fevereiro, 1995.
- [8] **Yee, K.S.** : “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media”, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. AP-14, pp. 302-307, Maio, 1966.
- [9] **Goorjian, P.M., Taflove, A., Joseph, R.M. and Hagness, S.C.** : “Computational Modeling of Femtosecond Optical Solitons from Maxwell’s Equations”, IEEE Journal of Quantum Electronics, vol.28, n^o 10, pp. 2416-2422, Outubro, 1992.
- [10] **Balanis, C.A.** : *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, 1989.
- [11] **Reitz, J.R., Milford, F.J. and Christy, R.W.** : *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, third edition, 1979.
- [12] **Higgins, T.H.** : “Nonlinear optical effects are revolutionizing electro-optics”, Laser Focus World, August, 1994.
- [13] **Mills, D.L.** : *Nonlinear Optics: Basic Concepts*, Springer-Verlag, 1991.

- [14] **Shen, Y.R.** : *Principles of Nonlinear Optics*, Benjamin, Reading, Mass., 1977.
- [15] **Marcuse, D.** : *Light Transmission Optics*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1982.
- [16] **Yariv, A.** : *Optical Electronics*, Saunders College Publishing, 4^a edição, 1991.
- [17] **Keiser, G.** : *Optical Fiber Communications*, Mc Graw Hill, 2^a edição, 1991.
- [18] **Haus, H.A.** : *Waves and Fields in Optoelectronics*, Prentice-Hall, 1984.
- [19] **Stolen, R.H., Gordon, J.P., Tomlinson, W.J. and Haus, H.A.** : “Raman response function of silica core fibers”, *Journal of Optical Society of America B*, vol.6, n^o 6, pp. 1159-1166, June, 1989.
- [20] **Nakagawa, M.** : “Soliton Transmission in Telecommunications Networks”, *IEEE Communications Magazine*, pp. 34-41, March, 1994.
- [21] **Haus, H.A.** : “Optical Fiber Solitons, Their Properties and Uses”, *Proceedings of IEEE*, vol.81, n^o 7, pp. 970-983, July, 1993.
- [22] **Zakharov, V.E. and Shabat, A.B.** : “Exact Theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media”, *Sov.Phys. JETP* 34, pp. 62, 1972.
- [23] **Hasegawa, A. and Tappert, F.** : “Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers.I. Anomalous dispersion”, *Appl.Phys.Lett.*, vol.23, n^o 3, pp. 142-144, August, 1973.
- [24] **Mollenauer, L.F., Stolen, R.H. and Gordon, J.P.** : “Experimental Observation of Picosecond Narrowing and Solitons in Optical Fibers”, *Phys. Review Letters*, vol.45, n^o 13, pp. 1095-1098, September, 1980.
- [25] **Jackson, J.D.** : *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. New York: Wiley, 1975.
- [26] **Giozza, W.F., Conforti, E. e Waldman, H.** : *Fibras Ópticas: tecnologia e projeto de sistemas*, Makron, McGraw Hill, São Paulo, 1991.
- [27] **Miyagi, M. and Nishida, S.** : “Pulse spreading in a single-mode fiber due to third-order dispersion”, *Applied Optics*, vol.18, n^o 5, pp. 678-682, March, 1979.
- [28] **Mollenauer, L.F., Gordon, J.P. and Islam, M.N.** : “Soliton Propagation in Long Fibers with Periodically Compensated Loss”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. Qe-22, n^o 1, pp. 157-173, January, 1986.
- [29] **Lamb, G.L.** : *Elements of Soliton Theory*, Wiley, New York, 1980.
- [30] **Agrawal, G.P.** : *Fiber-Optic Communications Systems*, Wiley-Interscience, 1992.

- [31] **Surerus, A.A.** : *Projeto de enlaces digitais com amplificadores ópticos*, UNICAMP, tese de mestrado a ser defendida.
- [32] **Gordon, J.P. and Haus, H.A.** : "Random walk of coherently amplified solitons in optical fiber transmission", *Optics Letters*, vol.11, nº 10, pp.665-667, October, 1986.
- [33] **Gordon, J.P.** : "Theory of the Soliton self-frequency shift", *Optics Letters*, vol.11, nº10, pp. 662-664, October 1986.
- [34] **Taflove, A.** : "Review of the Formulation and Applications of the Finite-Difference Time-Domain Method for Numerical Modeling of Electromagnetic Wave Interactions With Arbitrary Structures", 10, pp. 547-582, 1988.
- [35] **Umashankar, K. and Taflove, A.** : "A Novel Method to Analyze Electromagnetic Scattering of Complex Objects", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. EMC-24, nº 4, pp. 397-405, November, 1982.
- [36] **Segatto, M.E.V.** : *Aplicação do Método das Diferenças Finitas no Domínio do tempo a meios Giroelétricos Dispersivos: Plasma Magnetizado*, UNICAMP, tese de mestrado, 1994.
- [37] **Mur, G.** : "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations", *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. EMC-23, nº 4, pp. 377-382, November, 1981.
- [38] **Engquist, B. and Majda, A.** : "Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves", *Math. Comp.*, vol.31, pp. 1621-1633, July, 1977.
- [39] **Fang, J. and Mei, K.K.** : "A Super-Absorbing Boundary Algorithm for Solving Electromagnetic Problems by Time-Domain Finite-Difference Method", *IEEE AP-S International Symposium*, pp. 472-475, Syracuse, NY, 1988.
- [40] **Choi, D.H. and Hoefer, W.J.R.** : "The Finite-difference Time-domain Method and its Application to Eigenvalue Problems", *IEEE Transactions on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-34, nº12, pp. 1464-1470, December, 1986.
- [41] **Taflove, A. and Brodwin, M.E.** : "Numerical Solution of State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time Dependent Maxwell's Equations", *IEEE Transactions on Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, pp. 623-630, August, 1975.
- [42] **Kim, I.S. and Hoefer, W.J.R.** : "Numerical Dispersion Characteristics and Stability Factor for the TD-FD Method", *Electronics Letters*, vol.26, nº 7, pp. 485-486, March, 1990.

- [43] **Leuebbers, R.J., Hunsberger, F.P., Kunz, K.S., Standler, R.B. and Scheneider, M.** : "A Frequency-Dependent Finite-Difference Time-Domain Formulation for Dispersive Materials", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol.32, n^o 3, pp. 222-227, August, 1990.
- [44] **Hunsberger, F., Luebbers, R.J. and Kunz, K.S.** : "Finite-Difference Time-Domain Analysis of Gyrotropic Media-I: Magnetized Plasma", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.40, n^o 12, pp. 1489-1495, December, 1992.
- [45] **Luebbers, R.J., Hunsberger, F. and Kunz, K.S.** : "A Frequency-Dependent Finite-Difference Time-Domain Formulation for Transient Propagation in Plasma", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 39, n^o 1, pp. 29-34, January, 1991.
- [46] **Luebbers, R.J. and Hunsberger, F.** : "FDTD for *N*th-Order Dispersive Media", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.40, n^o 11, pp. 1297-1301, November, 1992.
- [47] **Kashiwa, T., Ohtomo, Y. and Fukai, I.** : "Formulation of Dispersive Characteristics Associated with Orientation Polarization Using the FD-TD Method", Electronics and Communications in Japan, Part 1, vol.75, n^o 6, pp. 87-95, 1992.
- [48] **Gandhi, O.P., Gao, B. and Chen, J.** : "A Frequency-Dependent Finite-Difference Time-Domain Formulation for General Dispersive Media", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol.41, n^o 4, pp. 658-664, April, 1993.
- [49] **Joseph, R.M., Hagness, S.C. and Taflove, A.** : "Direct time integration of Maxwell's equations in linear dispersive media with absorption for scattering and propagation of femtosecond electromagnetic pulses", Optics Letters, vol.16, n^o 18, pp. 1412-1414, September, 1991.
- [50] **Abe, H and Okuda, H.** : "Numerical Studies on Soliton Propagation in Dielectric Media by the Nonlinear Lorentz Computational Model", IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 31, n^o 06, pp. 1098-1106, June, 1995.
- [51] **Blow, K.J. and Wood, D.** : "Theoretical Description of Transient Stimulated Raman Scattering in Optical Fibers", IEEE Journal of Quantum Electronics, vol.25, n^o 12, pp. 2665-2673, December, 1989.