

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE SEMICONDUTORES, INSTRUMENTOS E FOTÔNICA

TÉCNICAS DE COMPUTAÇÃO SÔNICA APLICADAS AO DESIGN DE SOFTWARE MUSICAL

Autora: **Maria Aparecida Silva Cruz**

Orientador: **Prof.Dr.Furio Damiani**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Furio Damiani – DSIF/FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Jônatas Manzolli – IA/UNICAMP

Prof. Dr. Adolfo Maia Junior – IMEC/UNICAMP

Prof. Dr. Peter Jürgen Tatsch – DSIF/FEEC/UNICAMP

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de **Mestre em Engenharia Elétrica**. Área de concentração: **Eletrônica, Microeletrônica e Optoeletrônica**.

19 de Novembro de 2001.

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo e a obtenção de novas técnicas computacionais para síntese de som e para composição musical, fundamentadas na Ciência do Caos e na Geometria dos Fractais. Três novos modelos são propostos:

O primeiro é um método de processamento digital de sinais baseado em Sistemas de Funções Iteradas aplicados à manipulação sonora. O método faz a manipulação do Espectro de Fourier de um dado sinal e conseqüente transforma sua forma de onda no domínio do tempo.

O segundo faz a classificação do sinal gerado no modelo anterior, com base no cálculo de sua dimensão fractal usando conceitos de Morfologia Matemática, cujo resultado é dizer quão ruidoso é o sinal.

E o terceiro explora a propriedade de auto-similaridade presente em estruturas fractais e a sensibilidade às condições iniciais, que são características dos sistemas caóticos, no âmbito da composição musical.

Abstract

The aim of his work is the study and development of new computational techniques for sound synthesis and musical composition, based on Chaos Theory and Fractal Geometry. Three new models are proposed:

The first is a Digital Signal Processing method using Iterative Function Systems applied to sound. This method manipulates a signal's Fourier Spectrum, thus transforming its time domain waveform.

The second classifies signals made by the previous model. The classification is based on the signal's fractal dimension, measured using mathematical morphology, showing how noisy the signal is.

The third explores the self-similarity property of fractal structures and their initial conditions' sensitivity, which are typical of chaotic systems, to create musical compositions.

*Ao meu marido, Adailton
e meu filho, Henrique*

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Furio Damiani, orientador desta tese, pela oportunidade, confiança e apoio no desenvolvimento do presente trabalho.

Ao Prof. Jônatas Manzolli por todos os conhecimentos transmitidos e pelas contribuições tanto na concepção das idéias como pela empolgação contagiante de grande valia para a arrancada (e finalização) dos trabalhos.

Ao Prof. Adolfo Maia Junior que discutiu comigo muitos conceitos importantes utilizados nesta dissertação.

Um reconhecimento especial ao meu marido, Adailton, não somente pelo apoio emocional, paciência e amizade demonstrada como pelo apoio em todas as etapas deste trabalho, onde contribuiu com valiosas discussões e sugestões, pelo seu interesse na revisão do texto e também por eliminar as minhas dúvidas de programação.

A CAPES pelo apoio financeiro através da bolsa de mestrado.

Conteúdo

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2: MODELAGEM MATEMÁTICA.....	4
2.1 - INTRODUÇÃO	4
2.2 - FRACTAIS.....	4
2.2.1 - Definição do termo fractal.....	5
2.2.1.1 - Algumas considerações sobre a Dimensão Topológica	5
2.2.1.2 - Dimensão de Hausdorff-Besicovitch	7
2.2.1.3 Definição Fractal de Mandelbrot	10
2.2.2 - Conjunto Triádico de Cantor	10
2.2.3 - Curva de Koch.....	11
2.3 SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS	13
2.4 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES	16
2.4.1 - Alguns Conceitos	17
2.4.2 - Modelo de Crescimento Populacional.....	20
2.4.3 Caos	21
2.4.3.1 - O surgimento do Caos	23
2.4.3.2 - Diagrama da Bifurcação	24
2.5 UM ALGORITMO PARA O CÁLCULO DA DIMENSÃO FRACTAL	29
2.5.1 Morfologia Matemática	30
2.5.1.1 Dilatação ou Soma de Minkowski	30
2.5.1.2 Erosão ou Subtração de Minkowski.....	31
2.5.2 O algoritmo para o cálculo da dimensão fractal	32
CAPÍTULO 3:DESIGN DE SOFTWARE MUSICAL–MODELAGEM E PROGRAMAÇÃO	35
3.1 - INTRODUÇÃO	35
3.2 - MODELO I: SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS APLICADAS NA GERAÇÃO DE SÍNTESE DE SOM.....	36
3.2.1 - Espectro Sonoro	37
3.2.1.1 - Aspectos de Implementação	39
3.2.2 - Mola Sonora.....	40
3.2.3 - Espectro Sonoro X Mola Sonora	41
3.3 - MODELO II: CLASSIFICAÇÃO DE UM SINAL BASEADA EM DIMENSÃO FRACTAL.....	42
3.4 MODELO III: SISTEMAS PARA COMPOSIÇÃO ALGORÍTMICA.....	45
3.4.1 - Auto Semelhança.....	45
3.4.2 - Máquina Rítmica	50
CAPÍTULO 4: AVALIAÇÕES GERAIS E CONCLUSÕES.....	52
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55

Capítulo 1: Introdução

Os sistemas de composição musical têm variado com o desenvolvimento da música ocidental. Por volta de 1026 Guido d'Arezzo já desenvolvera uma técnica para compor música que consistia em associar notas a vogais de um texto [Loy 89]. Outro exemplo também muito conhecido na literatura é o Jogo de Dados de Mozart.

Como não poderia ser diferente, o surgimento dos computadores também contribui para o desenvolvimento de novos sistemas de composição musical, agora explorando as ferramentas oferecidas pelo "mundo digital". As facilidades oferecidas por este novo aliado, como por exemplo a praticidade na simulação e nos testes, possibilita explorar modelos baseados nas diversas áreas da matemática e da física. Um resultado desta efervescência é a proliferação de novas técnicas composicionais

A interface entre o universo digital e o musical vem sendo utilizado como veículo para uma grande variedade de práticas composicionais, tais como:

- gerar partituras musicais a partir de implementação de algoritmos;
- criar ambientes gráficos para música;
- reproduzir um sinal digital;
- ser o próprio instrumento musical gerador do som;

A música gerada através do computador, ou música computacional possui, entre outras características, estéticas e artísticas, a utilização de modelos matemáticos e computacionais para criação musical, tornando-a uma área de pesquisa interdisciplinar. O estudo desta área pode ser dividido em dois grandes grupos: Composição Algorítmica e Síntese de Som.

A Composição Algorítmica tem como finalidade desenvolver ferramentas e implementar algoritmos para organização de estruturas musicais. Enquanto que a Síntese de Som estuda o desenvolvimento de modelos aplicados na geração do som.

Os primeiros experimentos com música gerada por computador foram feitos por Lejaren Hiller e Leonard Isaacson. O resultado foi uma peça chamada Illiac Suite composta em 1955

através do computador Illiac da Universidade de Illinois [**Hiller 59**]. Esta música foi composta por uma série de escolhas randômicas refinadas por filtros composicionais — esta técnica foi posteriormente chamada de “rules-by-noise”.

O desenvolvimento deste conceito cresceu em diferentes direções e muitos compositores desenharam sistemas que otimizavam a eficácia da escolha musical através de Processos Estocásticos [**Hiller 59; Xenakis 71; Jones 81**]. A característica desta abordagem foi a busca por automação e sistematização do processo composicional. A música era determinada automaticamente por um programa de computador, através do refinamento das escolhas aleatórias.

O compositor Iannis Xenakis, pioneiro na utilização de computadores na música, explorou basicamente algoritmos que envolviam processos estocásticos, ou seja, não determinísticos. Como resultado do seu trabalho temos o surgimento da chamada “Música Estocástica”.

No entanto existem trabalhos para os quais são utilizadas técnicas determinísticas. Como exemplo podemos citar o compositor Gareth Loy que utiliza algoritmos derivados da teoria de números.

Assim, é possível polarizar os algoritmos utilizados para composição em algoritmos não-determinísticos, cuja execução depende de escolhas aleatórias e, portanto, a cada execução temos um resultado diferente; e os algoritmos determinísticos, onde cada programa produz uma única saída de acordo com seus parâmetros de entrada.

A segunda linha de pesquisa da Música Computacional — Síntese de Som — enfatiza o estudo de modelos para geração de som como Síntese Aditiva, Síntese por FM, a Transformada Rápida de Fourier (FFT) e Síntese Granular.

Partiram do norte-americano Max Mathews, na década de 50, as primeiras tentativas de utilizar o computador como uma ferramenta para sintetizar o som, que resultou em dois programas experimentais: Music I, de 1957 e Music II de 1958.

Em 1960 Mathews produziu o Music III e mais uma série de programas como Music IV, Music V foram sendo desenvolvidos. Embora estes programas fossem bastante semelhantes ao modelo implementado em Music I, eles contribuem para o refinamento do modelo inicial. Estes refinamentos geram programas que produzem um melhor controle do processo de geração sonora [**Dodge 85**].

Hoje a produção de sons digitais é muita facilitada devido ao desenvolvimento das técnicas de processamento digital de sinais. É possível definir e produzir sons que são fisicamente impossíveis de se obter diretamente através de vibrações acústicas.

Muitas tecnologias vem sendo exploradas. Em particular, citamos o protocolo MIDI [**Roads 89, Moore 90**] — Musical Instrument Digital Interface — para comunicação e transmissão de dados entre computadores, sintetizadores, samplers e instrumentos musicais. Por

outro lado em Composição Algorítmica, temos a exploração da Geometria dos Fractais **[Barnsley 88]**, que representa um campo extremamente relevante para as atuais pesquisas.

O objetivo deste trabalho é estudar alguns modelos desenvolvidos para síntese de som e para composição musical e construir ferramentas algorítmicas para ambas fundamentados na Teoria do Caos e na Geometria dos Fractais.

Para esta finalidade se fez necessário adquirir um conhecimento teórico sobre estas duas disciplinas; como por exemplo, estudar alguns modelos matemáticos, pesquisar experiências já existentes na utilização do computador na música, tanto de compositores e/ou pesquisadores citados anteriormente e alguns resultados recentes como, por exemplo os trabalhos desenvolvidos no Núcleo Interdisciplinar de Comunicação Sonora da Universidade Estadual de Campinas- NICS/UNICAMP (www.nics.unicamp.br). Discutir a aplicabilidade e a eficiência das técnicas utilizadas nestas experiências e por fim propor alguns modelos desenvolvidos por nós. Assim nossas pesquisas foram direcionadas para pontos específicos.

O Capítulo II exhibe os conceitos matemáticos utilizados no decorrer deste texto. Nele também abordamos, com o nível de detalhes necessários para este trabalho, algumas técnicas como Sistemas de Funções Iteradas utilizada na geração de imagens e o cálculo da dimensão fractal por meios de ferramentas morfológicas, que serão particularmente por nós adotadas na música.

O Capítulo III expõe em detalhes uma nova proposta para geração de sons e as ferramentas construídas para composição musical. Abordaremos a proposta apresentando três modelos: o Modelo I apresenta métodos de processamento digital para síntese de som, cujo resultados conduz à geração de novos timbres musicais. Eles são baseados em técnicas matemáticas como Sistemas de Funções Iteradas e Transformadas Rápida de Fourier, a Direta e Inversa (FFT e IFFT). O Modelo II é um software de classificação sonora para o sinal gerado pelo Modelo I. Esta classificação é efetuada com base no cálculo da dimensão fractal, a qual possibilita estimar a quantidade de ruído no sinal ou ainda irregularidades. O Modelo III busca explorar a propriedade de auto-similaridade, presente em estruturas fractais, e a sensibilidade às condições iniciais, naturais dos sistemas caóticos, no âmbito da composição musical.

No capítulo IV mencionamos deficiências e vantagens dos métodos e finalizamos levantando algumas questões que poderão ser alvo de novas pesquisas.

Capítulo 2: Modelagem Matemática

2.1 – Introdução

Neste capítulo são abordados os fundamentos teóricos necessários para a construção dos modelos desenvolvidos no capítulo III.

Inicialmente apresentamos uma descrição intuitiva de um fractal, em seguida é dada a definição clássica de Mandelbrot para o termo fractal e demais conceitos necessários para este fim, como dimensão de Hausdorff-Besicovitch e Dimensão Topológica. Mostramos também exemplos do cálculo da dimensão para alguns fractais bastante conhecidos na literatura, o Conjunto Triádico de Cantor e a Curva de Koch.

Logo após introduzimos os Sistemas de Funções Iteradas e alguns conceitos pertinentes aos Sistemas Dinâmicos Não-Lineares, área de pesquisa na qual se encontra a Teoria do Caos. Fazemos também um breve estudo de algumas aplicações que serão úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho, tais como, um algoritmo para geração de imagens apresentado por Barnsley [**Barnsley 88**]; um modelo utilizado para estudar o crescimento populacional, conhecido por “Equação Logística” e ilustramos seu comportamento tanto analiticamente quanto graficamente usando o diagrama de bifurcação.

Para finalizar este capítulo definimos duas operações que são básicas no estudo de Morfologia Matemática: dilatação e erosão, com o propósito de explorarmos um algoritmo para o cálculo da dimensão fractal.

2.2 - Fractais

O termo *fractal* provém da palavra latina *fractus*, que significa quebrado, irregular ou descontínuo.

Mandelbrot foi bastante feliz ao escolher esta palavra para expressar a geometria dos objetos cujo “todo está na parte”. Esta é uma característica muito freqüente nos fractais, a qual é denominada *auto-semelhança*, isto é, qualquer parte do objeto, por menor que seja, tem dentro de si, em escala ainda menor, uma cópia de si mesmo.

A couve-flor é um bom exemplo de fractal, cada parte da couve-flor se parece com a própria couve-flor e cada uma destas partes é formada por partes ainda menores que também se assemelham com a parte maior e assim podemos pensar nesta divisão infinitamente. Por trás deste exemplo está subentendido o conceito de escala, isto é, tomando partes maiores da couve-flor vamos observar o mesmo tipo de geometria. Em outras palavras esta auto-semelhança é “preservada” através das escalas.

E num sentido mais geral, fractais são simplesmente um outro tipo de objeto matemático (abstrato), como são as linhas, círculos, esferas, etc. Mais ao contrário destes objetos da geometria clássica, fractais não possuem uma dimensão medida no sentido da geometria euclidiana, porém possuem dimensão num sentido a ser definido abaixo..

Após esta breve apresentação da aparência de um fractal, faremos na próxima sub-seção uma definição formal do que é um fractal.

2.2.1 – Definição de um termo fractal

A noção matemática mais comum sobre dimensão é aquela de espaços vetoriais, esta é uma definição algébrica de dimensão. Daí o \mathbb{R}^2 é gerado por uma base de dois vetores, \mathbb{R}^3 por uma base de 3 vetores e assim por diante.

Com o desenvolvimento da topologia e geometria no começo do século XX, vários matemáticos perceberam que o conceito de dimensão poderia ser diferente do conceito algébrico. Hausdorff e outros foi um dos primeiros a conceber uma nova definição de dimensão. Esta é a que foi posteriormente usada por Mandelbrot para definição de sua geometria fractal, pois a dimensão de Hausdorff tem um forte apelo geométrico. Para os objetos comuns da geometria euclidiana, isto é, ponto, reta, plano, retângulos, triângulos, etc., as duas definições coincidem.

Abaixo introduzimos então a definição de Dimensão de Hausdorff e mostramos com ela pode ser visualizada para alguns casos simples, porém antes apresentamos algumas considerações sobre dimensão topológica.

2.2.1.1 – Algumas considerações sobre a Dimensão Topológica

A Topologia é um ramo da matemática que trata com questões das formas do ponto de vista qualitativo: a ela não interessam tamanhos, nem distâncias. Assim, linhas retas podem ser transformadas em curvas, círculos em triângulos ou quadrados, etc.; entretanto devem conservar as propriedades que dizem respeito à sua estrutura, ou propriedades invariantes. Por exemplo

uma intersecção é dita invariante; ao se transformar um objeto, preservando a topologia, não se pode criar intersecções ou destruir as já existentes. O número de buracos em um objeto também é topologicamente invariante, uma esfera jamais poderia ser transformada numa superfície do tipo toroidal.

Sendo o conceito de dimensão uma noção topológica¹ devemos esperar que objetos topologicamente semelhantes devem preservar a mesma dimensão topológica [**Peitgen 92**].

Para uma grande classe de objetos da geometria elementar usamos intuitivamente o conceito de dimensão topológica: pontos têm dimensão 0, curvas tem dimensão 1, superfícies dimensão 2 e sólidos dimensão 3; mas para objetos que fogem da geometria elementar não existe uma definição única e várias noções diferentes de dimensão foram propostas por grandes matemáticos. Assim, uma forma de definir dimensão pode ser útil para um determinado propósito mas não para outro.

Gerald A. Edgar [**Edgar 90**] discute em seu trabalho algumas destas definições detalhadamente, apresentando várias demonstrações, entre as quais que o clássico Conjunto Triádico de Cantor tem dimensão topológica zero. No entanto, neste contexto é suficiente utilizarmos a noção intuitiva de dimensão citada acima e uma maneira de verificar esta intuição pode ser vista através da definição de dimensão por cobertura.

A idéia básica da dimensão por cobertura é a seguinte: dada uma curva num plano deve-se cobri-la com discos de raios arbitrariamente pequenos. Figura 2.1

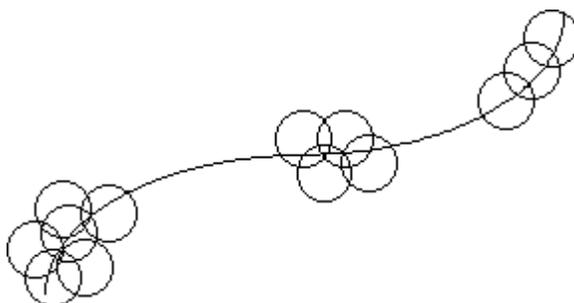


Figura 2.1: Dimensão por Cobertura

A curva no plano é coberta com disposições diferentes dos discos. No lado direito há pares de discos que se interceptam, no centro há triplas e no lado esquerdo temos quádruplas.

Analisando a Figura 2.1 observamos que a curva pode ser coberta com apenas uma intersecção de cada dois discos e a dimensão por cobertura de uma linha é definida como $D_c = 1$.

Uma superfície (Figura 2.2) tem dimensão por cobertura $D_c = 2$, porque é necessário e suficiente coberturas duas sobreposições de esferas para cobrir a superfície.

¹ Duas noções básicas da Topologia são “dimensão” e “homeomorfismo”

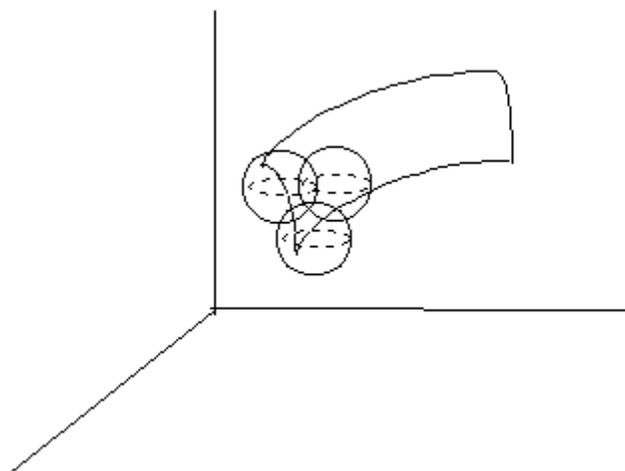


Figura 2.2 : Dimensão por Cobertura de uma Superfície

Um conjunto de pontos (Figura 2.3) podem ser cobertos por discos tal que não haja nenhuma intersecção entre eles. Sua dimensão por cobertura é portanto $D_c=0$.

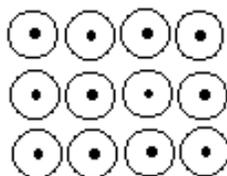


Figura 2.3: $D_c=0$

Esta mesma idéia pode ser generalizada para dimensão mais altas, assim a dimensão por cobertura de um cubo é $D_c = 3$ [Peitgen 92].

2.2.1.2 – Dimensão de Hausdorff-Besicovitch

Seja $\beta = \{B_n\}_{n=1}^N$ uma família finita de subconjuntos de \mathfrak{R}^p . Dizemos que β é um recobrimento de A , se $A \subset \bigcup_{n=1}^N B_n$.

Ressaltamos que aqui só estamos interessados em recobrimentos finitos.

Tomemos agora o caso particular em que os elementos do recobrimento β são hiper-cubos de lado ε contidos em \mathfrak{R}^p , isto é, β_n é um hiper-cubo em \mathfrak{R}^p .

A dimensão de Hausdorff-Besicovitch ou dimensão fractal é definida por:

$$D_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad \text{(e1)}$$

onde,

- ε : comprimento dos lados de cada hiper-cubo.
- $N(\varepsilon)$: número mínimo de hiper-cubos de lado ε necessários para cobrir todo o conjunto de pontos

Claramente, se $A \neq \emptyset$ então $N(\varepsilon) \geq 1$, daí este número mínimo existe. Para esta definição o fato de $N(\varepsilon)$ ser mínimo é importante, caso contrário não se pode definir a dimensão de Hausdorff sem ambiguidades.

É importante notar que ao fazermos uso da equação (e1) no cálculo de dimensões a geometria euclidiana é um caso particular da geometria dos fractais, no sentido que se um objeto tem uma dimensão topológica bem definida então esta coincide com a sua dimensão de Hausdorff. A título de ilustração vejamos os exemplos para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional.

No caso unidimensional tomemos um segmento de reta de comprimento L . Para $n \in \mathbb{N}$ fixado, podemos recobri-lo com um conjunto de intervalos fechados de comprimento $\varepsilon = L/2^n$, isto é, $\beta = \{B_n\}_{n=1}^N$ onde β_n é o intervalo de comprimento $L/2^n$. Veja a tabela abaixo:

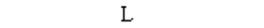
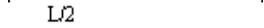
n	$N(\varepsilon)$	ε	
0	1	L	
1	2	$L/2$	
2	4	$L/4$	
3	8	$L/8$	
⋮	⋮	⋮	⋮
n	2^n	$L/2^n$	n

Tabela 2.1: Espaço Unidimensional

Vemos facilmente que:

$$D_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log(2^n/L)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 2^n - \log L}$$

Fazendo $x = \log 2^n$ temos $x \rightarrow \infty$, se $n \rightarrow \infty$

Daí $D_H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\log x - \log L}$. Aplicando a regra de L' Hospital segue que

$$D_H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/x} = 1.$$

Para o caso bidimensional temos $N(\varepsilon) = 2^{2n}$ e $\varepsilon = L/2^n$. Assim:

$$D_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{2n}}{\log(2^n/L)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \log 2}{n \log 2 - \log L} = 2.$$

De forma análoga tem-se o cálculo da dimensão de Hausdorff-Besicovitch para o caso do espaço tridimensional :

$$D_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{3n}}{\log(2^n/L)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n \log 2}{n \log 2 - \log L} = 3$$

A figura 2.4 representa um objeto (um cubo) num espaço tridimensional, com recobrimento de cubos.

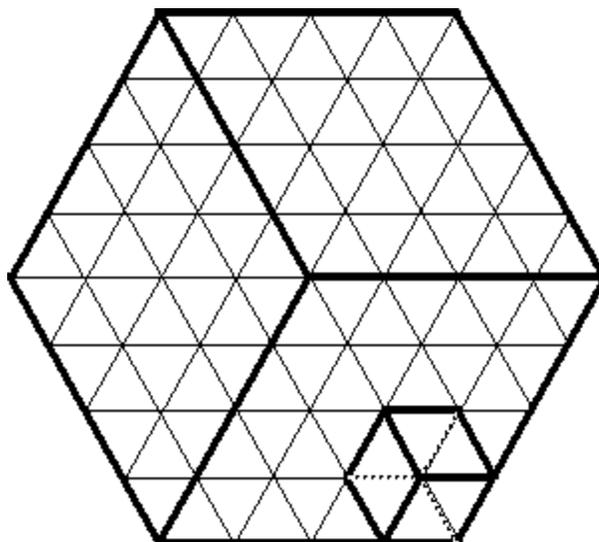


Figura 2.4: Espaço Tridimensional

Várias outras alternativas para o cálculo de dimensão fractal são encontradas na literatura. Em [Soille 96] é avaliada a robustez de vários algoritmos propostos para para esta finalidade. Um em particular será abordado por nós na seção 2.5, cuja fundamentação teórica se dá através de operadores da Morfologia Matemática.

2.2.1.3 Definição Fractal de Mandelbrot

Baseando-se no conceito de dimensão fractal apresentada por Hausdorff-Besicovitch, Mandelbrot definiu fractal como um conjunto onde a dimensão de Hausdorff-Besicovitch (D_H) seja maior do que a dimensão topológica (D_T) [Mandelbrot 83].

Dois exemplos clássicos de fractais são o Conjunto Triádico de Cantor e a Curva de Koch cuja dimensões são $D_T = 0$ e $D_H = 0.6309$, $D_T = 1$ e $D_H = 1.2618$ respectivamente. (Veja as sub-seções 2.2.2 e 2.2.3).

Embora os objetos aqui apresentados tenham dimensões fracionárias isto não é uma condição necessária para um conjunto ser considerado fractal e para ilustrar este caso podemos citar o Movimento Browniano, onde $D_T = 1$ e $D_H = 2$ cujos valores satisfazem a definição de fractal de Mandelbrot, ou seja, $D_H > D_T$.

Na seqüência veremos como construir e calcular as respectivas dimensões do conjunto de Cantor e da curva de Kock.

2.2.2 – Conjunto Triádico de Cantor

Aqui o Conjunto Triádico de Cantor também conhecido por Poeira de Cantor será apresentado sem a pretensão de descrevê-lo com uma linguagem matemática pois isto é muito complexo e fugiria do escopo deste trabalho. Este conjunto foi idealizado pelo matemático George Cantor que viveu no século XIX e é considerado o precursor dos fractais. Podemos construí-lo de uma maneira muito fácil, porém existe um fato bastante notável o qual o torna um conjunto difícil de se aceitar conceitualmente pois ele “desaparece progressivamente até tornar-se invisível” (Figura 2.5) .

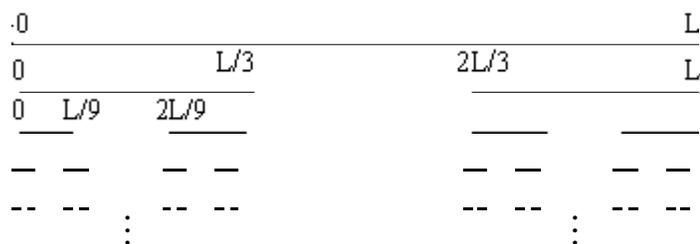


Figura 2.5: Construção do Conjunto Triádico de Cantor

Iniciemos com um segmento de reta que representa um intervalo de números de 0 à L. Divide-se este segmento em três partes iguais cada qual com tamanho $\frac{L}{3}$, eliminamos então o terço central. Isso resulta em dois segmentos, suprimimos o terço médio de cada um deles. Isso resulta em quatro segmentos de reta, e suprimimos novamente o terço central de cada um deles e assim repetimos este procedimento infinitamente nos segmentos resultantes de cada divisão. O resultado final será uma "poeira" de pontos.

Intuitivamente vemos que estamos diante de uma infinidade de pontos, assim a dimensão fractal não será nula. Por outro lado vemos claramente que não temos uma reta devido aos "espaços" referentes aos terços centrais retirados, logo a dimensão fractal também não é 1.

Portanto a dimensão da poeira de Cantor está compreendida entre 0 e 1. De fato usando o mesmo raciocínio da contagem de hiper-cubos temos $N(\epsilon) = 2^n$ e $\epsilon = \frac{L}{3^n}$, assim:

$$D_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log \left(\frac{3^n}{L}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2}{n \log 3 - \log L} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309$$

2.2.3 – Curva de Koch

Esta curva fractal é construída usando as seguintes regras:

1. Considerar um segmento de reta de comprimento L

Curva de ordem K_0



2. Dividir o segmento em 3 partes iguais e substituir o segmento central por 2 segmentos de comprimento $\frac{L}{3}$ de K_0 , formando "um bico equilátero";

Curva de ordem K_1

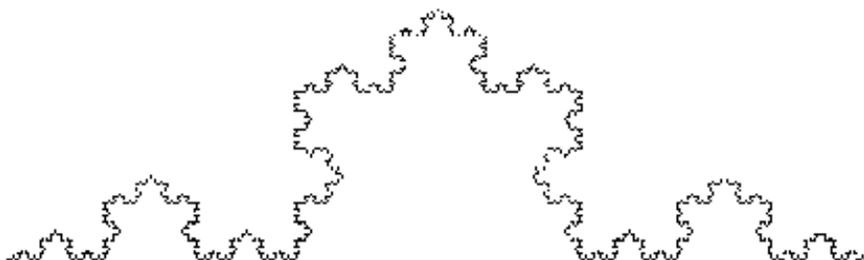


3. Aplicar o passo 2 para cada um dos 4 segmentos da curva de ordem K_1 , obtendo assim a curva de ordem 2;



Curva de ordem K_2

4. De uma forma geral a curva de ordem K_{i+1} é obtida em função da curva de ordem K_i , conforme procedimento acima.



Tomando-se, inicialmente, um triângulo equilátero e fazendo em cada lado do triângulo o procedimento dos itens 1-4 obtemos uma nova figura conhecida como "Curva de Kock", (ver figura 2.6).

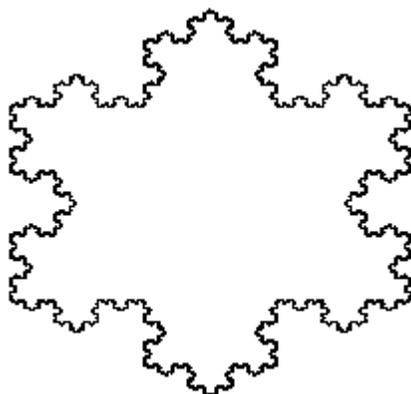


Figura 2.6: Floco de Neve

Vamos calcular o comprimento da curva resultante sobre um lado do triângulo. Considerando que:

- a curva de ordem K_0 tem comprimento L ;

- a curva de ordem K_1 tem comprimento $\frac{4}{3}L$;

E de uma forma geral K_{i+1} tem comprimento $\left(\frac{4}{3}\right)^i L$, então fazendo i tender a infinito,

seu comprimento também tenderá a infinito.

Por outro lado esta curva não preenche um quadrado (mesmo sendo arbitrariamente pequeno). Assim a curva de Koch não pertence ao espaço 1D e também não pertence ao espaço 2D, ou seja, é um objeto com dimensão entre 1 e 2 (dimensão fracionária).

Usando-se a fórmula de Hausdorff-Besicovitch, onde $N(\epsilon) = 4^n$ e $\epsilon = \frac{L}{3^n}$ obtemos:

$$D_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log \frac{3^n}{L}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3 - \log L} = 1,2618$$

2.3 Sistemas de Funções Iteradas

Nesta seção apresentaremos o conceito básico de um Sistema de Funções Iteradas conhecido por IFS. Iniciamos a secção com alguns comentários sobre “transformações”. As demonstrações dos teoremas referentes ao IFS podem ser encontradas em [Barnsley 88] e para um estudo mais aprofundado sobre transformações sugerimos [Gomes 98, Boldrini 80].

As transformações estão associadas ao movimento de objetos no espaço físico. Esse movimento, por sua vez, é descrito por uma mudança na posição e na orientação do objeto, os exemplos mais comuns são a translação e a rotação de um objeto no espaço.

Matematicamente, uma transformação $f: E \rightarrow E$ de um espaço E associa a cada ponto $p \in E$, o ponto $f(p) \in E$.

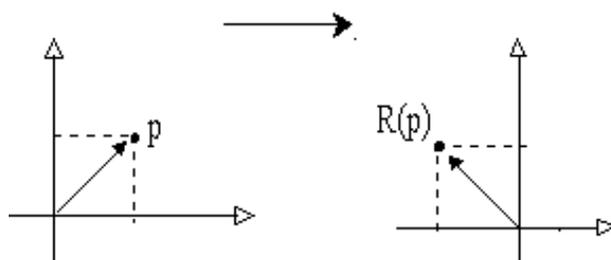


Figura 2.7: Rotação de 90° de um ponto $p \in \mathbb{R}^2$

As transformações que preservam a estrutura linear do \mathfrak{R}^n (ou do espaço vetorial) são chamadas de transformações lineares . Assim, uma transformação linear T deve satisfazer as seguintes condições, para quaisquer $u, v \in \mathfrak{R}^n, \lambda \in \mathfrak{R}$.

$$\begin{aligned} F(u + v) &= F(u) + F(v) \\ F(\lambda u) &= \lambda F(u) \end{aligned} \tag{e2}$$

A notação da Figura 2.7 é um exemplo de Transformação linear.

Dado um vetor $v \in \mathfrak{R}^n$, uma translação no \mathfrak{R}^n é definida por:

$$T_v : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n , \text{ onde } T_v(w) = w + v, \forall w \in \mathfrak{R}^n .$$

Por fim, uma transformação T é dita afim se T é a composição de uma transformação linear com uma translação.

A base de um sistema de funções iteradas são as transformações afins, mais precisamente os sistemas estudados aqui serão os mesmos estudados por Barnsley que se restringem às transformações afins no plano, isto é, a combinação de uma rotação e/ou uma escala² com uma translação.

De uma maneira mais formal podemos escrever uma transformação T em um conjunto X, por $Y = T(X)$, onde T é definida abaixo.

Para todo $x \in X$,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

onde os coeficientes a, b, c, d da matriz de ordem 2x2 indicam as rotações e as escalas, ou seja

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

e os coeficientes e, f do vetor coluna nos dá a translação do conjunto.

Com estes conceitos chegamos finalmente ao objetivo desta seção:

Um Sistema de Funções Iteradas é um conjunto de transformações afins:

$$W(X) : \bigcup_{i=1}^N w_i(X) ,$$

onde $\{w_i\}$ são funções contrativas, i.é, $\forall x_1, x_2 \in X, \exists k, 0 < k < 1$ t.q.

$d(w_i(x_1), w_i(x_2)) < k * d(x_1, x_2)$ onde "d" é a distância entre os pontos **[Gogins 91]**.

Em **[Barnsley 88]** encontramos dois algoritmos para gerar imagens a partir do IFS. As tabelas 2.2, 2.3 e 2.4 apresentam os parâmetros das transformações afins para três imagens.

² Uma escala refere-se à uma expansão ou contração.

a	b	c	d	e	f	p
0.5	0	0	0.5	1	1	0.33
0.5	0	0	0.5	1	50	0.33
0.5	0	0	0.5	50	50	0.34

Tabela 2.2: Parâmetros das Transformações do Triângulo de Sierpinski

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

Tabela 2.3: Parâmetros das Transformações para uma Folha de Samambaia

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.5	0	0	0.05
0.42	-0.42	0.42	0.42	0	0.2	0.4
0.42	0.42	-0.42	0.42	0	0.2	0.4
0.1	0	0	0.1	0	0.2	0.15

Tabela 2.4: Parâmetros das Transformações para uma Árvore Fractal

Cada linha das respectivas tabelas é uma transformação afim w_i , onde p_i é a probabilidade de cada transformação w_i ocorrer a cada iteração.

O programa consiste em escolhermos um ponto inicial (ou vários pontos iniciais), sortearmos um número randômico "rnd" e a partir deste número aplicarmos uma das transformações w_i , sendo que a transformação "i" é escolhida a partir das n possíveis transformações incrementando "i" até que $p(i) \geq \text{rnd}$. Repetimos o processo até conseguirmos obter a imagem desejada.

A figura 2.8 ilustra a imagem de quatro folhas de samambaia geradas a partir de uma implementação na linguagem Matlab, que é uma versão do programa de Barnsley. Neste trabalho vamos utilizá-lo para um algoritmo em síntese de som, no capítulo 3.

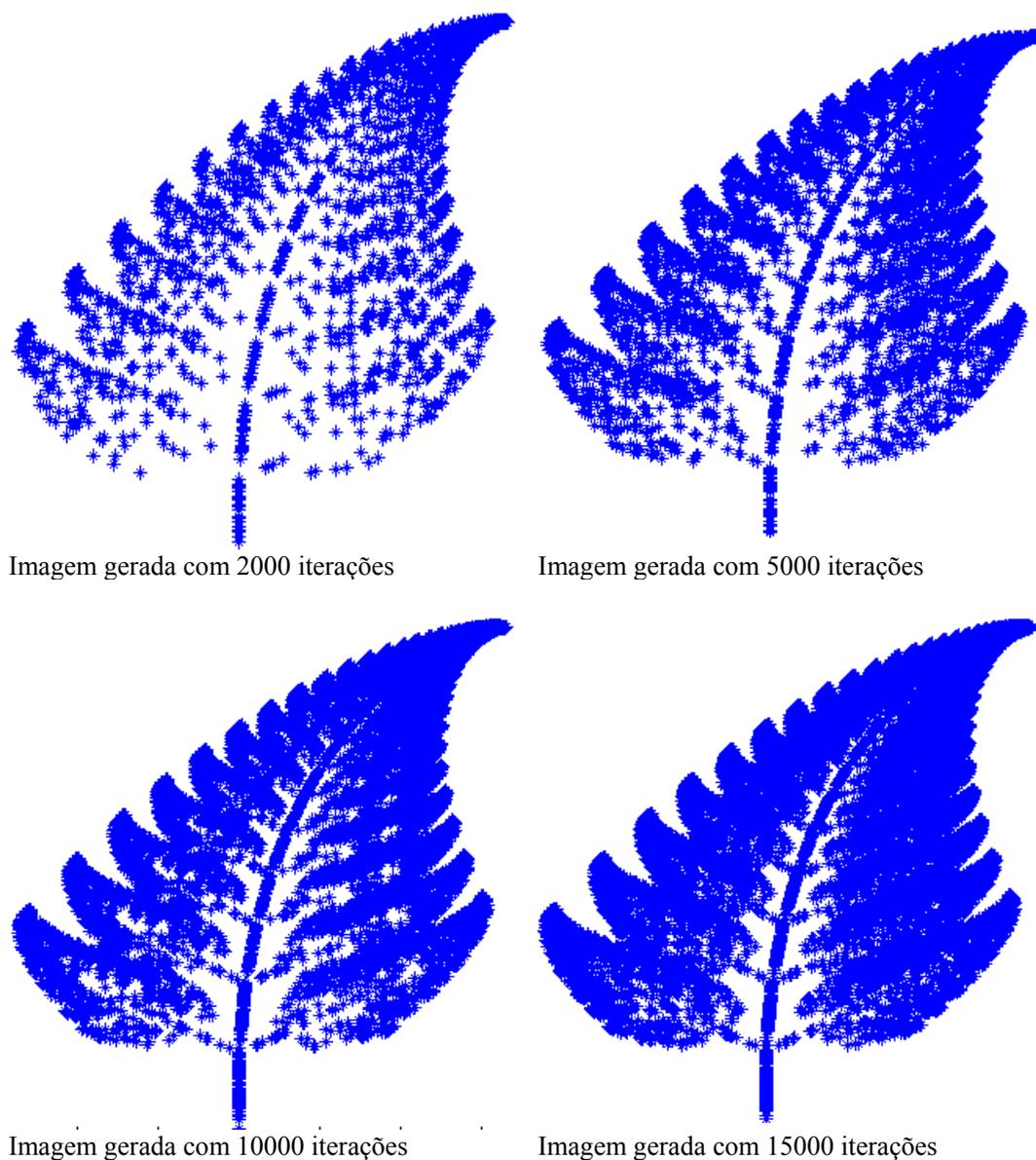


Figura 2.8: Folha de Samambaia

2.4 Sistemas Dinâmicos não-lineares

O estudo de sistemas dinâmicos não lineares é tão antigo quanto a própria disciplina do cálculo criada por Newton e Leibniz. O seu nascimento se deu devido a necessidade de resolver problemas da Mecânica Celeste.

Um dos fenômenos não lineares mais intrigante, o qual será um dos temas de nossos estudos, é o comportamento caótico.

Durante vários anos a Dinâmica Não-Linear foi conhecida como a “Teoria do Caos”. Atualmente a “Teoria do Caos” é vista como um sub-conjunto da Dinâmica Não-Linear.

Distante do rigor e do formalismo matemático discutiremos a seguir aspectos relevantes da Teoria do Caos.

2.4.1 – Alguns Conceitos

Sistemas:

Uma tentativa de definir sistemas é apresentada em [**Cassandras 93**]:

“Agregação ou montagem de coisas, combinadas pelo homem ou pela natureza de modo a formar um todo unificado”

“Grupo de itens interdependentes ou interagindo regularmente formando um todo unificado”

“Combinação de componentes que agem em conjunto para desempenhar uma função que se torna impossível na ausência de qualquer das partes”.

Sistemas Dinâmicos:

É um sistema que evolui ao longo do tempo, sendo que em geral seu comportamento depende do passado. Um sistema dinâmico por sua vez pode ser linear ou não-linear.

A distinção entre modelos lineares e não-lineares é feita através da idéia da superposição. Se a superposição de duas entradas leva o modelo a apresentar uma saída que é também uma superposição das saídas correspondentes às entradas aplicadas separadamente (equação e2), então o modelo é linear. Caso contrário o modelo é não linear.

Concluindo, podemos dizer que a resposta de um sistema dinâmico linear está correlacionada linearmente com o estímulo; enquanto que a resposta de um sistema dinâmico não-linear poderia estar relacionada com o quadrado ou com o cubo do estímulo, ou outra função qualquer.

Trajectoria:

É uma seqüência de pontos no espaço n-dimensional.

Atrator:

É um conjunto-limite de trajetórias convergentes.

Matematicamente, é o limite assintótico para o qual uma função $F(X_i)$ converge quando i tende para o infinito. Os tipos mais simples de atratores são: *ponto fixo*, que representa um estado estacionário; e *ciclo limite* (atrator periódico) o qual representa um comportamento que se repete continuamente.

Espaço de Fase :

É o espaço dos parâmetros de um sistema dinâmico em que uma trajetória é construída. Do ponto de vista prático é no espaço de fase que conseguimos transformar números em

imagens. Esta imagem é um gráfico dos parâmetros que descrevem o comportamento do sistema. A figura 2.9, exemplo adaptado de [Gleick 88], ilustra um gráfico no espaço de fase para um pêndulo oscilante sem atrito.

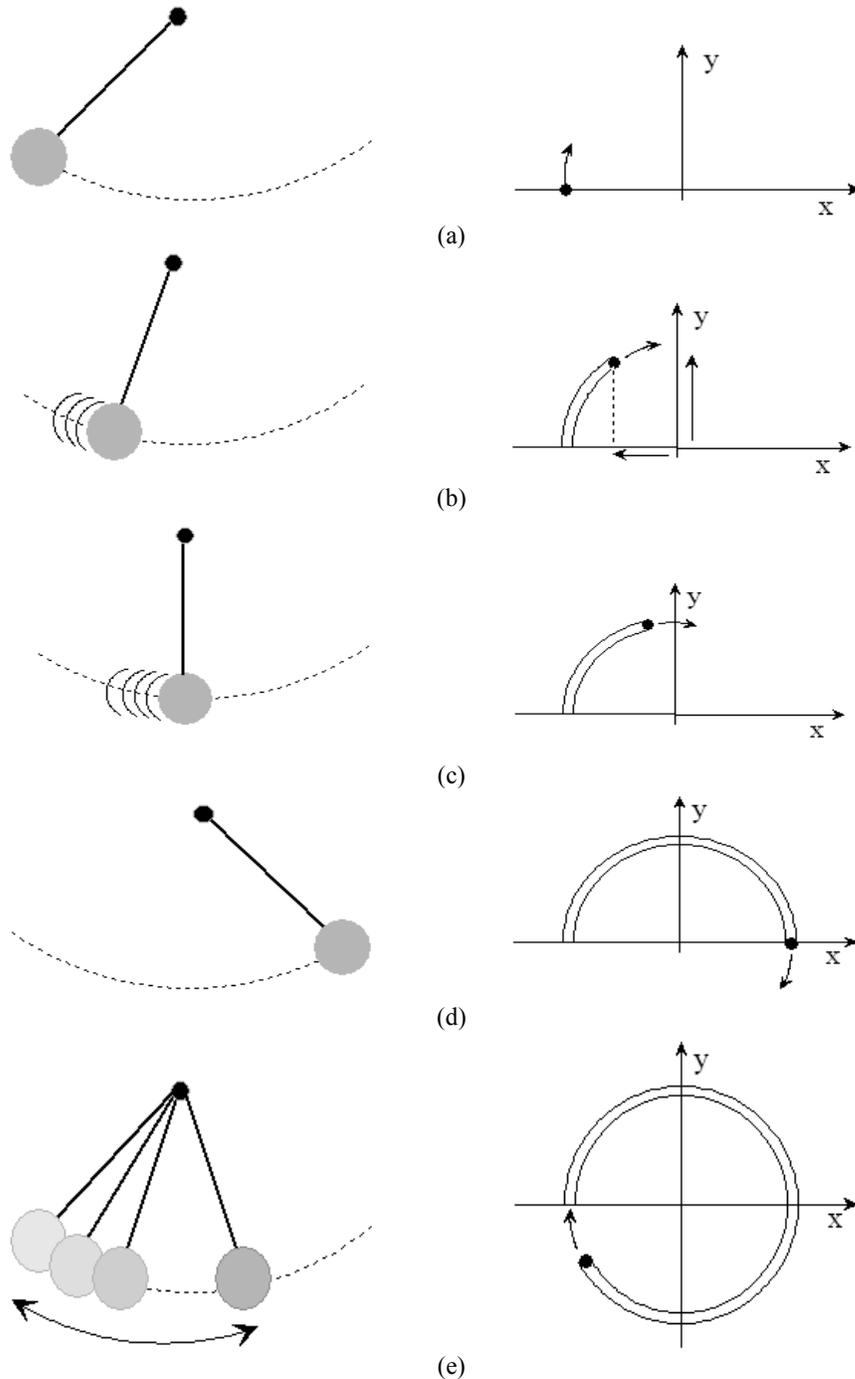


Figura 2.9: Espaço de fase (à direita) de um pêndulo oscilante sem atrito

Consideremos os parâmetros do sistema como sendo a posição (eixo x - horizontal) e a velocidade (eixo y - vertical). Na figura 2.9(a) a velocidade é 0 (zero) quando o pêndulo começa oscilar. Um ponto P no espaço de fase, ver figura 2.9(b), especifica de forma única as informações relativas ao sistema.

A velocidade máxima é alcançada quando o pêndulo passa pela posição 0 (zero), figura 2.9(c), a partir desta posição a velocidade decresce até 0 (zero) , figura 2.9(d), e passa a assumir valores negativos representando o movimento para a esquerda, conforme ilustrado na figura 2.9(e). Notemos no gráfico do espaço de fase que o movimento do pêndulo permanece numa trajetória elíptica, a elipse é o atrator periódico do sistema.

Na figura 2.10 temos o gráfico de um pêndulo sujeito a atrito.

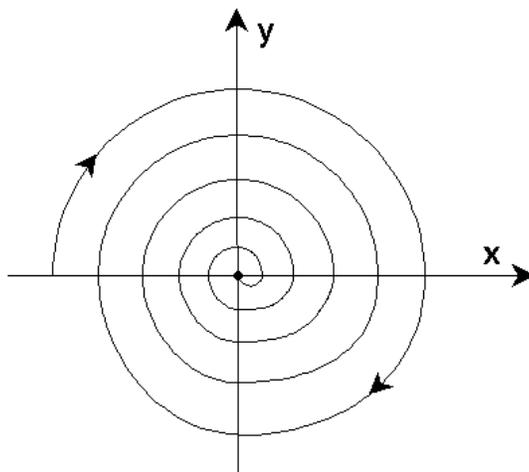


Figura 2.10: Espaço de fase de um pêndulo oscilante sujeito a atrito

Neste caso todas as trajetórias acabam num único ponto: posição 0 e velocidade 0, pois o pêndulo tende a perder energia com o atrito.

Já a figura 2.11 nos mostra um atrator que é um emaranhado de trajetórias, chamado atrator estranho, a sub seção 2.4.3.1 apresenta, entre outras informações, as equações usadas para gerar o referido atrator.

Um atrator estranho tem as seguintes características **[Ruelle 93]**:

- i) são objetos de dimensão não inteira, isto é, fractais;
- ii) o movimento sobre um atrator estranho apresenta o fenômeno de dependência hipersensível das condições iniciais;
- iii) embora possuam dimensão finita, a análise em termos de frequências temporais revela um contínuo de frequências.

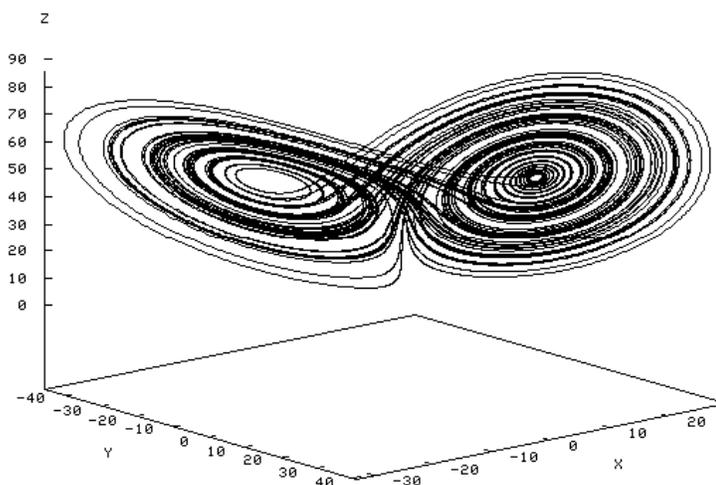


Figura 2.11: Atrator Estranho

2.4.2 - Modelo de Crescimento Populacional

Objetivando ilustrar os conceitos dados na subseção 1.3.1 apresentamos um modelo empregado para o estudo da evolução de uma população. Este modelo é discutido por uma equação conhecida na literatura por "Equação Logística"³, que é dada por:

$$X_{t+1} = \lambda X_t (1 - X_t) \quad (\text{e3})$$

Onde,

- X_0 = número inicial de uma população;
- X_t = população após t anos;
- λ = constante definida em função do tipo de população e das facilidades de se encontrar alimentos.

Na seqüência apresentamos o espaço de fase do sistema dinâmico dado por (e3) para alguns valores de λ . Figuras 2.12 e 2.13.

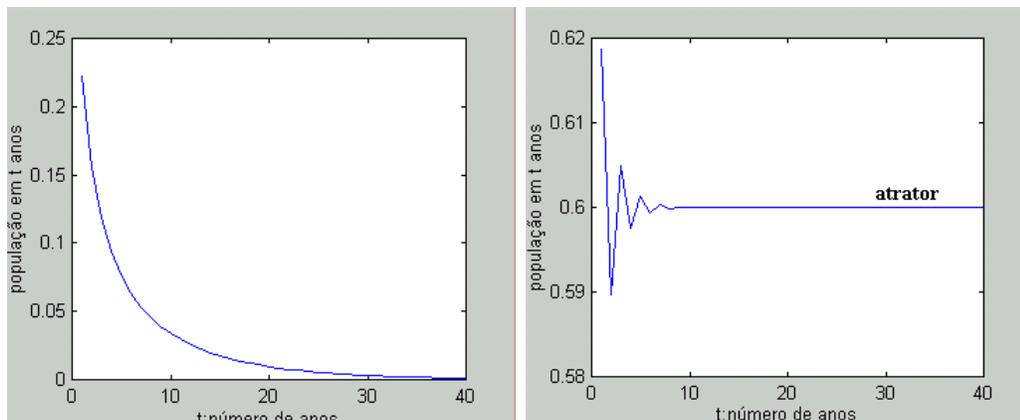


Figura 2.12: Valor Inicial $X_0=0.55$, $\lambda=0.9$ e $\lambda=2.5$ respectivamente.

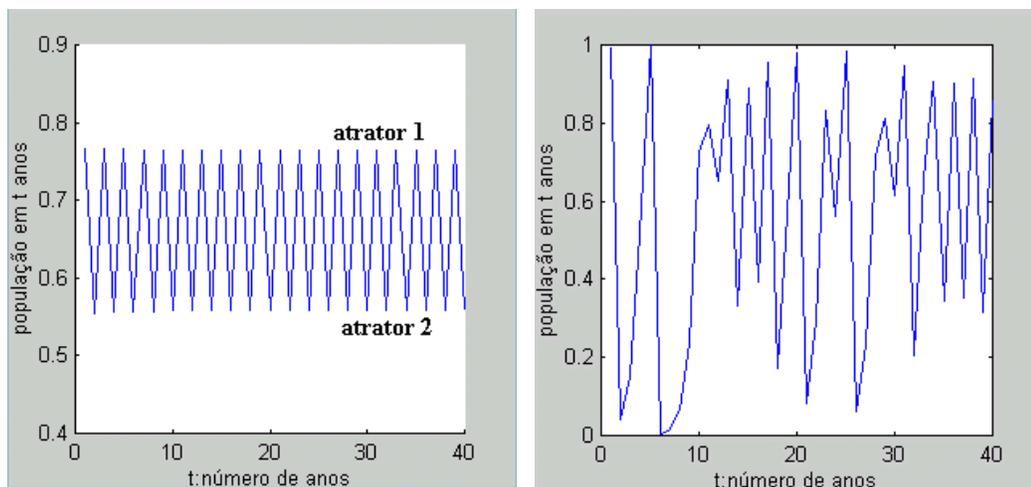


Figura 2.13: Valor Inicial $X_0= 0.55$, $\lambda =3.5$ e $\lambda =4.0$

Nestes exemplos conseguimos identificar claramente os atratores: para os casos $\lambda =0.9$ e $\lambda =2.5$, temos um atrator; para $\lambda = 3.5$ dois atratores e, no caso em que $\lambda = 4.0$ (Figura 2.14), observamos que os X_i 's não convergem para um valor determinado, ficando assim

³ Este nome foi dado por Verhulst (1804-1849), precursor no estudo de crescimento das populações, porém ele a escrevia de uma maneira equivalente. O autor [Riciari 90] cita o Modelo de Verhulst como $X_{t+1} = X_t(1 + \lambda) - \lambda(X_t)^2$.

impossível prever X_{i+1} . Esta configuração nos remete a um conceito mais geral que discutiremos na seção 2.4.3.

2.4.3 Caos

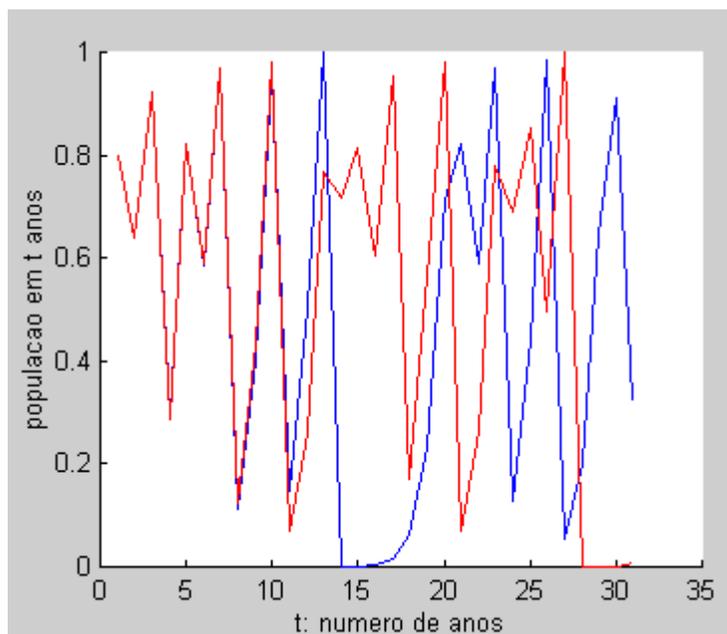


Figura 2.14:Valores iniciais $X_0=0.8$ e $x_0=0.8001$ p/ $\lambda = 4$

Caos são comportamentos que surgem em sistemas que apresentam grande sensibilidade às condições iniciais, cuja previsão precisa a longo prazo se torna impossível. Isto significa que se tomarmos arbitrariamente em um sistema dois pontos iniciais próximos, suas trajetórias poderão divergir exponencialmente de forma que o comportamento futuro deles é impossível de ser previsto. O exemplo do crescimento populacional apresentado na sub-seção 2.4.2 tem comportamento caótico quando consideramos $\lambda = 4$. A Figura 2.14 ilustra esta afirmativa.

Notemos que com uma pequena variação no valor inicial X_0 após algumas iterações constatamos claramente a divergência, ou seja, o sistema é bastante sensível às condições iniciais. Neste exemplo as previsões a “curto prazo” são possíveis, porém “curto prazo” depende de quão o sistema seja sensível para as pequenas mudanças nesses determinado instante de tempo.

Uma outra propriedade de sistemas caóticos que merece destaque é que eles não são aleatórios⁴ e nem periódicos⁵. Não são aleatórios porque o futuro dos sistemas caóticos

⁴ Sistemas Aleatórios: o comportamento futuro independe do estado inicial e só pode ser caracterizado em termos de probabilidade.

dependem das condições iniciais. Não são periódicos porque o comportamento nunca se repete. Na seção seguinte discutiremos um pouco da origem do caos.

2.4.3.1 – O surgimento do Caos

Embora estudos sobre a teoria do caos ainda seja recente, foi no final do século XIX que surgiram as primeiras descobertas. Nesta época estudiosos como Jacque Hadamard (1865 – 1963) , Pierre Duhem e Henri Poincaré (1854 – 1912) já se deparavam com o problema da “sensibilidade às condições iniciais”; e Poincaré escrevera: “Uma causa muito pequena, que nos escapa, determina um efeito considerável que não podemos deixar de ver, e então dizemos que este efeito se deve ao acaso”.

Vários anos depois dos estudos de Poincaré na chamada “época moderna”, (década de 1950 aos dias de hoje) os estudos sobre a sensibilidade às condições iniciais (re) surgiram, e em particular (re) surgiu com os estudos do meteorologista Edward Lorenz. Seus estudos consistiam em antecipar a previsão do tempo através de um modelo dinâmico.

O resultado dos esforços empregados neste estudo foi um modelo baseado em equações iterativas, o qual denominou de “Equação Não Linear de Recorrência”. O emprego desta equação permitia analisar a “tendência” do comportamento meteorológico baseando-se em uma situação atual, isto é, o futuro era analisado com dados do presente.

Lorenz observou que pequenas variações nas condições iniciais do problema poderiam levar a resultados não previsíveis, cuja observação já havia sido feita por Poincaré anteriormente, (ver Tabela 2.5).

	Valor presente (X_i)	Valor futuro (X_{i+1})
Obs. 01	0,532493	0,128579
Obs. 02	0,532490	1,701935 .

Tabela 2.5 – experimentos realizados por Lorenz

Lorenz constatou então que a previsão do tempo é um problema caótico visto que variações arbitrariamente pequenas podem determinar resultados radicalmente diferentes. Esta descoberta foi batizada por ele de “efeito borboleta”: é como se o bater das asas de uma borboleta em um dado país pudesse influenciar a meteorologia em outro país dias depois. Foi com este mesmo estudo que Lorenz traçando no espaço de fases os valores obtidos através de seu modelo dinâmico criou o chamado Atrator Estranho (Figura 2.11). Este modelo possuía

⁵ Sistemas Periódicos: voltam a mesma configuração regularmente, como é o caso do pêndulo do relógio. Este comportamento também fora analisado por outros cientistas como Yorke [Gleick 88] em O Período Três Subentende o Caos.

apenas 3 equações diferenciais⁶ não lineares de 1º grau que, no entanto, produzem trajetórias imprevisíveis.

O próximo passo em direção à teoria do caos que será citado neste trabalho foi dado nos anos 70, quando o biólogo Robert May retoma a equação logística (e3). O modelo é apresentado na secção abaixo.

2.4.3.2 – Diagrama da Bifurcação

Exploramos aqui uma representação e uma possível análise de “um diagrama de bifurcação”. Para isto vamos usar ainda a equação logística (e3).

Na secção 2.4.2 verificamos, através de alguns diagramas, resultados bastante intrigantes. O comportamento obtido para as populações varia com a taxa de crescimento λ , podendo assumir variações entre 2, 4, 8 etc., variações que parecem completamente aperiódicas (figura 2.13) ou estados estacionários (figura 2.12).

Este comportamento é mostrado no diagrama de bifurcações (figura 2.15).

O diagrama consiste em representarmos todos os atratores (eixo vertical) para os respectivos parâmetros λ (eixo horizontal) em um único gráfico.

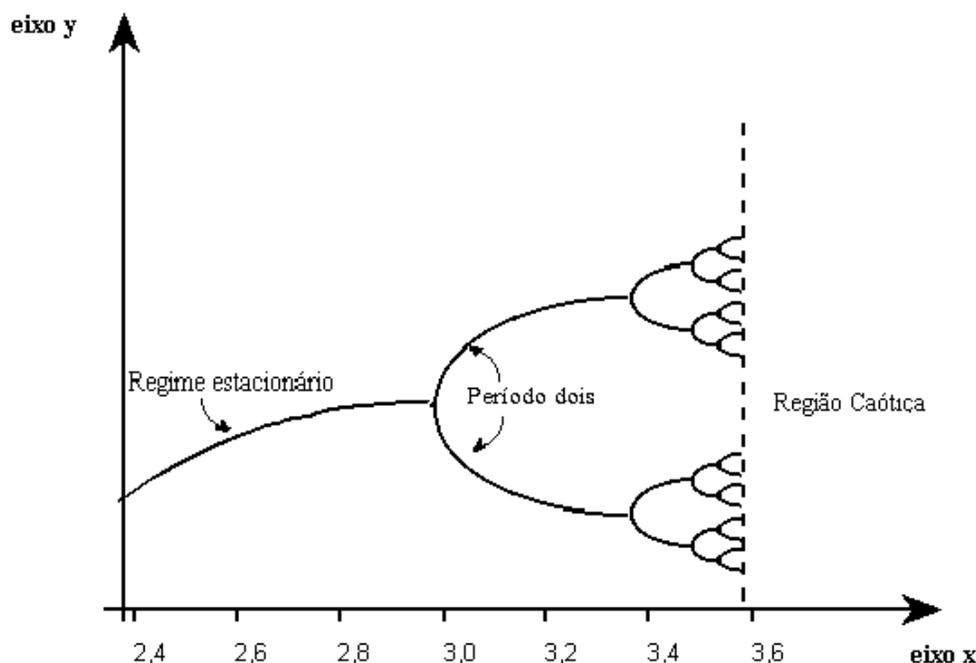


Figura 2.15: Diagrama da Bifurcação

⁶ Equações simplificadas de Lorenz: $\frac{dx}{dt} = -ax + ay$, $\frac{dy}{dt} = bx - y - xz$, $\frac{dz}{dt} = -cz + xy$ onde $a=10$, $b=28$ e $c=8/3$.

Notemos que no início do intervalo quando λ passa de 3 surge uma bifurcação, o gráfico que tinha uma "forma" de linha se decompõe em 2, oscilando entre 2 pontos alternados. Em $\lambda = 3.449499$, passamos de 2 para 4 bifurcações. Em $\lambda = 3.54409$ à 3.569946 , passamos de 4 para 8. E assim, estas bifurcações vão ocorrendo cada vez mais freqüentemente (2, 4, 8, 16, 32 ...) e para λ acima de um valor crítico ($\lambda_c \cong 3.6$) o sistema torna-se caótico. May ao estudar a evolução das populações constatou este comportamento conhecido na literatura por duplicações em período.⁷

Faremos a seguir uma análise um pouco mais formal deste comportamento conforme estudos encontrados em [Ferrara 94].

Para estudar a estabilidade de um sistema dinâmico $x_{t+1}=F(x_t)$ deve-se analisar o que ocorre com as iterações $x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, x_{t+3}, \dots$ próximas do ponto fixo⁸ x^* de F. Mais precisamente, estuda-se a derivada de F no ponto fixo x^* , ou seja,

$$C = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} \quad (e4)$$

E então, pode-se provar que:

- se $|C| < 1$, x^* é um ponto fixo estável ou atrator;
- se $|C| > 1$, x^* é um ponto fixo instável ou repulsor;
- quando $C = 1$ temos um comportamento neutro, i.é, se o sistema é linear tem-se que as soluções x_t para $t \rightarrow \infty$ não se afastam nem tendem a x^* , permanecendo em sua vizinhança. O ponto é então estável e é chamado um *centro*. Se o sistema é não-linear deve-se considerar termos de ordem superior na expansão em série de Taylor para concluir a respeito da estabilidade de x^* ;
- quando $C = -1$ também deve-se analisar termos de ordem superior na expansão em série de Taylor para concluir a respeito da estabilidade de x^* .

Abaixo, estamos interessados em analisar a estabilidade da equação logística (e3):

$$X_{t+1} = \lambda X_t (1 - X_t), \text{ cujos pontos fixos são } x^* = 0 \text{ e } x^* = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

Aqui temos $F(x) = \lambda x(1 - x)$ e daí:

$$C = \left. \frac{dF}{dx} \right| = \lambda - 2\lambda x$$

No ponto fixo $x^* = 0$ obtemos $C = \lambda$. Assim

⁷ Este comportamento também fora analisado por outros cientistas como Yorke [Gleick 88] em O Período Três Subentende o Caos.

⁸ Os pontos fixos x^* são aqueles que satisfazem $F'(x)=0$

- ponto fixo $x^*=0$ é estável se $-1 < \lambda < 1$, porém tomando apenas os valores positivos⁹, $x^*=0$ é estável se $0 < \lambda < 1$.
- o ponto fixo $x^*=0$ é instável para quaisquer valores de $\lambda > 1$ ou $\lambda < -1$.
- Podemos constatar geometricamente este comportamento traçando o gráfico no espaço de fase. Na Figura 2.16 plotamos o gráfico com $\lambda = 0.7$ e $x_0 = 0.5$, vê-se que a trajetória converge para zero, ou seja, temos um único atrator igual a zero.

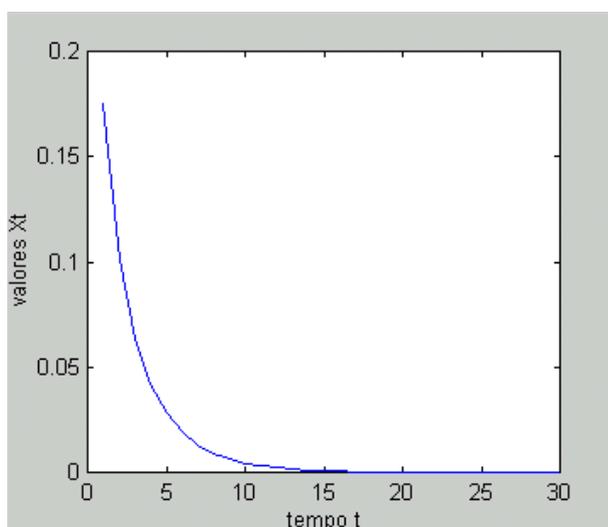


Figura 2.16: Ponto fixo estável $x^* = 0$

Já no ponto fixo $x^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$ obtemos $C = 2 - \lambda$. Logo

- O ponto fixo $x^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$ é estável se $1 < \lambda < 3$;
- O ponto fixo $x^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$ é instável se $\lambda < 1$ ou $\lambda > 3$.

Observemos que no caso $\lambda < 1$, mais precisamente, $0 < \lambda < 1$, o único atrator é o ponto fixo zero, como visto anteriormente.

Analisemos então, os casos onde $1 < \lambda < 3$ e $\lambda > 3$, em particular, $3 < \lambda < 4$.

Para $1 < \lambda < 3$, pode ser verificado no espaço de fase (Figura 2.17) um novo ponto fixo atrator diferente de zero, neste intervalo o zero passa a ser ponto fixo instável. Na **Figura 2.17** a trajetória converge para o ponto fixo estável $x^* = 0.6$ para o valor particular $\lambda = 2.5$

⁹ Observamos que são tomados apenas os valores positivos pelo fato da Eq. Logística pertencer à classe dos mapas unimodais. Mapas unimodais são mapas continuamente diferenciáveis que mapeiam o intervalo unitário $[0,1]$ nele mesmo, que apresentam um único máximo em $x = \frac{1}{2}$ e são monotônicos para $0 \leq x < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} < x \leq 1$.

No intervalo $3 < \lambda < 4$ os pontos fixos atratores constatados anteriormente, dão lugar a um atrator periódico, como se pode observar nas próximas figuras. Verifica-se na Figura 2.18 a existência de um ciclo de período 2, ou seja, tem-se dois atratores $x_1=0.5580$ e $x_2=0.7646$.

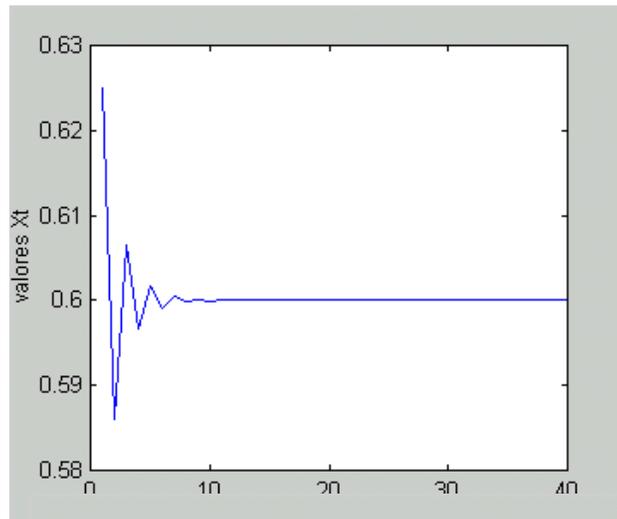


Figura 2.17: Ponto fixo estável $x^*=0.6$

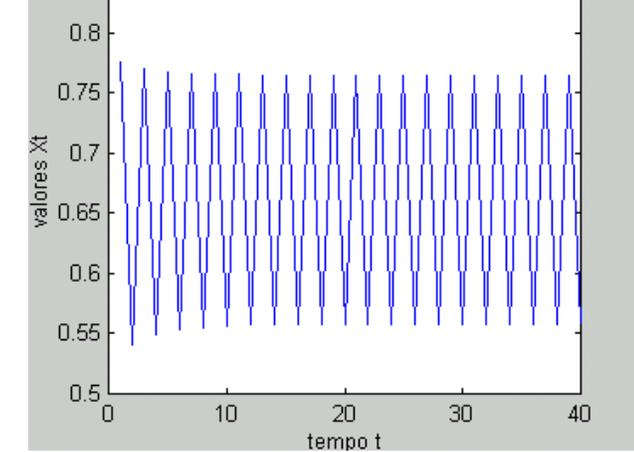


Figura 2.18: ciclo atrator de período 2

Aumentando-se o valor de λ , o período do ciclo sofre dobramento. Assim, o ciclo atrator adquire sucessivamente períodos 4, 8, 16, 32,... .Esta propriedade de dobramento pode ser observada nas Figuras 2.19 e 2.20.

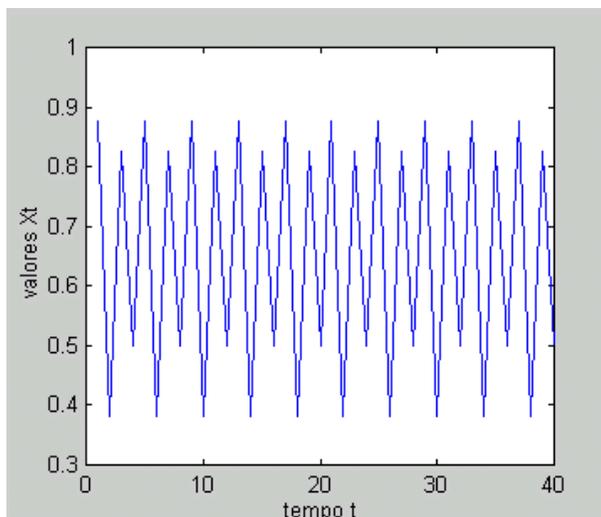


Figura 2.19: ciclo atrator de período 4

Neste exemplo obtemos uma trajetória que se alterna entre os atratores $x_1=0.8750$, $x_2=0.3828$, $x_3=0.8269$ e $x_4=0.5009$ para um valor de $\lambda = 3.5$.

Na Figura 2.20 utilizando $\lambda = 3.55$ obtemos um ciclo de período 8. Os oito atratores deste ciclo são $x_1=0.5405$, $x_2=0.8817$, $x_3=0.3703$ e $x_4=0.8278$, $x_5=0.5060$, $x_6=0.8874$, $x_7=0.3548$ e $x_8=0.8127$.

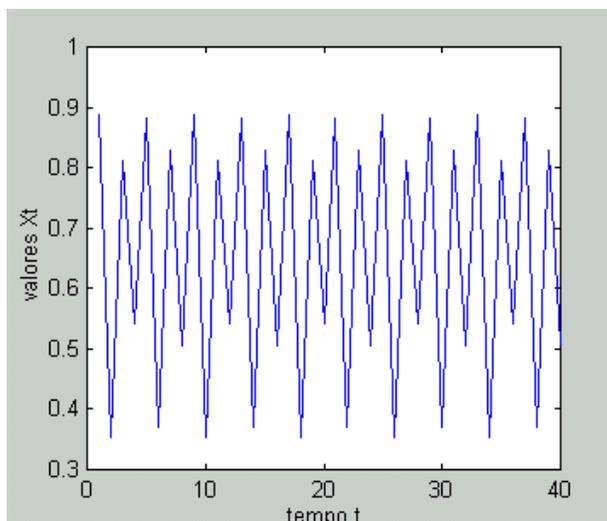


Figura 2.20: ciclo atrator de período 8

Quando $\lambda \geq 4$ torna-se praticamente impossível verificar a existência de ciclos. As trajetórias passam a ter um comportamento caótico. Na Figura 2.21 observamos este comportamento .

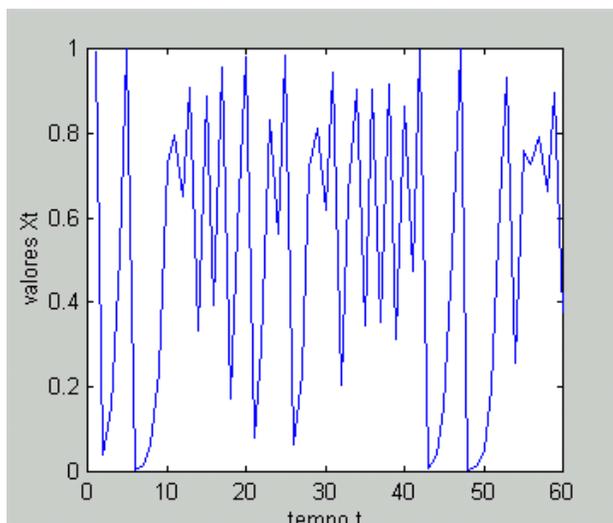


Figura 2.21: Comportamento caótico

Com esta breve análise verificamos os comportamento obtidos intuitivamente na seção 2.4.2. Estes intervalos estudados serão utilizados no capítulo III para a criação de ritmos musicais.

2.5 Um algoritmo para o cálculo da dimensão fractal.

Muitos objetos na natureza são complexos e irregulares. Através da dimensão fractal é possível se quantificar algumas informações estruturais destes objetos. No entanto, nem sempre é possível determinar a dimensão fractal analiticamente gerando então a necessidade, de se fazer isto através de estimadores.

Alguns estimadores de dimensão fractal comumente encontrados são *dimensão por compasso*, *dimensão counting box* e a *dimensão calculada por métodos morfológicos*.

Nosso propósito nesta secção é explorar um algoritmo apresentado em [Soille 96] que estima o cálculo da dimensão fractal fazendo uso de algumas operações básicas pertinentes a morfologia matemática.

Assim abaixo elucidamos os conceitos da Morfologia Matemática e definimos as operações morfológicas que fundamentam o algoritmo em questão.

2.5.1 Morfologia Matemática

O nome Morfologia Matemática (**MM**) apareceu por volta de 1964, Morfologia significa estudo das formas.

Assim **MM** é uma ferramenta para extrair informações geométricas de imagens binárias e tons-de-cinza (gray-scale) a partir de transformações de formas, realizadas através de dois operadores, denominados por George Matheron e Jean Serra [**Banon 94,Serra 88**], de dilatação e erosão.

Uma imagem pode ser considerada como um sinal multidimensional. Sua representação digital é uma função **f** discreta com domínio num espaço \mathfrak{R}^n (geralmente \mathfrak{R}^2) e com valores no intervalo $[0, \dots, k]$. Para $k=1$ então temos uma imagem binária, caso contrário k é um nível de cinza e então temos uma imagem gray-scale. Uma imagem **f** pode ser armazenada em uma estrutura matricial **M**_{pxq}. A figura 2.22 ilustra um possível caso.

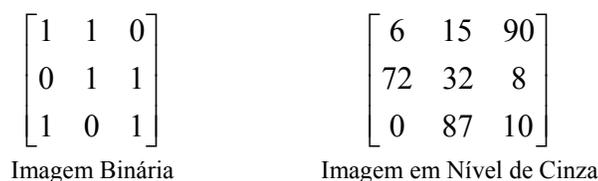


Figura 2.22 : Representação de uma imagem digital

A dilatação e erosão foram criadas a partir das noções de soma e subtração de Minkowski, a qual definimos abaixo, e, com a composição destes operadores define-se outros operadores de maior complexidade, como por exemplo os operadores usados para: obtenção do esqueleto de uma dada figura, a descrição de formas por granulometria, os filtros morfológicos, a extração de contornos, o preenchimento de buracos, entre outros.

2.5.1.1 Dilatação ou Soma de Minkowski

Dilatação é uma transformação morfológica que combina dois conjuntos usando adição de vetores, isto é, considerando **A** e **B** subconjuntos de \mathbf{E}^N , sendo $\mathbf{E}^N \subset \underbrace{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}}_{N\text{-vezes}}$. A dilatação

de **A** por **B** é denotada por $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ e definida por:

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \{x \in \mathbf{E}^N / x = a + b\} \quad (\mathbf{e5})$$

O exemplo dado a seguir mostra a aplicação da operação de dilatação para o caso \mathbf{E}^2 , onde:

$$\mathbf{A} = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0)\} \text{ e } \mathbf{B} = \{(0,0), (0,1)\}, \text{ por } (\mathbf{e5}) \text{ tem-se que}$$

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (0,2), (1,2), (2,3), (3,1)\}$$

Outra notação comumente encontrada na literatura para denotar a dilatação é dada por $\delta_B(A)$, que lê-se *dilatação de A por B*.

2.5.1.2 Erosão ou Subtração de Minkowski

Erosão é a transformação morfológica que combina dois conjuntos usando subtração de vetores. Supondo \mathbf{A} e \mathbf{B} subconjuntos de \mathbf{E}^N , sendo $\mathbf{E}^N \subset \underbrace{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}}_{N\text{-vezes}}$. A erosão de \mathbf{A} por \mathbf{B} é

denotada por $\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}$ e definida por:

$$(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) = \left\{ x \in \mathbf{E}^n / x + b \in A \text{ para todo } b \in B \right\} \quad (\mathbf{e6})$$

O exemplo a seguir mostra a aplicação da operação de erosão para o caso \mathbf{E}^2 , onde:

$$\mathbf{A} = \{ (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1) \} \text{ e}$$

$$\mathbf{B} = \{ (0,0), (0,1) \}.$$

por (e6) segue que

$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{B} = \{ (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \}$$

Uma notação alternativa encontrada freqüentemente na literatura para especificar a operação de erosão é $\mathcal{E}_B(A)$, que lê-se *erosão de A por B*.

Em ambos os casos, dilatação e erosão, o primeiro operando \mathbf{A} é a imagem (sinal) submetida à análise; enquanto o segundo operando \mathbf{B} é referido como o elemento estruturante. As transformações produzidas dependem da forma e tamanho do elemento estruturante. A título

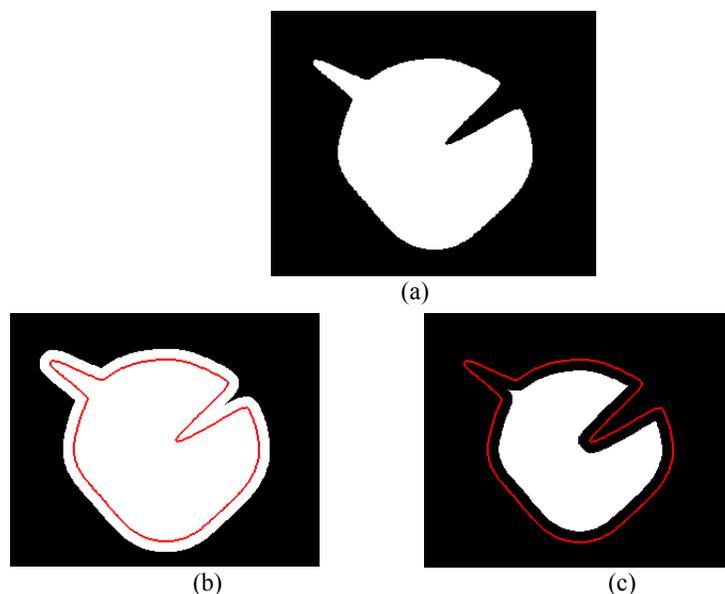


Figura 2.23 : (a) imagem original (b) Operação de Dilatação (c) Operação de Erosão

de ilustração ver Figura 2.23.

A figura 2.23(a) mostra a imagem original, a figura 2.23(b) mostra o resultado da operação de dilatação da imagem 2.23(a) por um elemento estruturante na forma de disco, a título de visualização marcou-se o contorno da imagem original. A figura 2.23(c) ilustra o mesmo processo, considerando agora a operação de erosão.

Geralmente o efeito que a dilatação produz na imagem é o de "expansão" e a erosão é de "encolhimento". No entanto, esta observação só se verifica quando a origem do sistema de coordenadas pertence ao elemento estruturante, i.e. $(0,0,\dots,0) \in B$. No exemplo da figura 2.23, o elemento estruturante (disco) contém a origem do sistema. Observamos também que a dilatação tende a eliminar os "vales", enquanto que a erosão tende a eliminar os "picos" (ver novamente figura 2.23).

Outro fato que chamamos a atenção é para algumas diferenças na definição de dilatação e erosão, encontradas na literatura, em relação a soma de Minkowski. Por exemplo, segundo o

autor **[Serra 88]** : $\delta_B(A) = A \oplus \overset{\vee}{B}$ ¹⁰

Já para os autores **[Haralick 87, Dougherty 92, Banon 94]** : $\delta_B(A) = A \oplus B$.

Porém as equações citadas dão apenas formas de interpretações geométricas diferentes, isto é, os resultados permanecem equivalentes. No decorrer do trabalho utilizaremos a definição $\delta_B(A) = A \oplus B$

2.5.2 O algoritmo para o cálculo da dimensão fractal

Uma vez apresentadas as operações básicas da **MM** passamos a descrever um algoritmo para o cálculo da dimensão fractal.

Ele se resume em calcular a dimensão fractal através da *dimensão de Minkowsky*:

$$D_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\log[S(C \oplus B_\varepsilon)]}{\log \varepsilon} \right] \quad (\mathbf{e7})$$

onde

- B_ε é um disco de diâmetro ε ;
- $S(C \oplus B_\varepsilon)$ é a área da superfície determinada pela dilatação da curva C pelo disco B_ε ;

¹⁰ $\overset{\vee}{B}$ = B refletido

- $\frac{S(C \oplus B_\epsilon)}{\epsilon} = L_\epsilon(C)$ é o comprimento da curva C.

Então

$$D_M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\log[S(C \oplus B_\epsilon)]}{\log \epsilon} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[2 - \left(\frac{\log L_\epsilon(C) + \log \epsilon}{\log \epsilon} \right) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\log[L_\epsilon(C)]}{\log \epsilon} \right]$$

Por outro lado a dimensão de Hausdorff-Besicovitch (equação **e1**) pode ser escrita como:

$$D_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(C)}{\log 1/\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{L_\epsilon(C)}{\epsilon} \right)}{\log 1/\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\log L_\epsilon(C) - \log \epsilon}{\log 1 - \log \epsilon} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\log L_\epsilon(C)}{\log \epsilon} \right)$$

Assim podemos observar que a dimensão de Minkowski coincide com a de Hausdorff-Besicovitch, onde o comprimento da curva $L_\epsilon(C)$ é calculado com ênfase em operadores da Morfologia Matemática. Mais precisamente aplica-se uma dilatação e uma erosão sobre a curva em questão, obtendo assim uma área entre estes dois resultados conforme ilustrado na Figura 2.24.

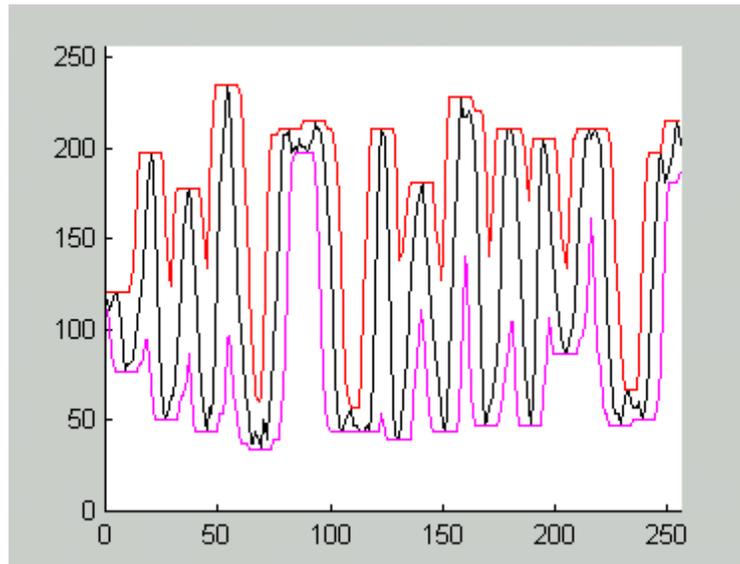


Figura 2.24: área obtida através da dilatação e erosão

O elemento estruturante utilizado para os cálculos da dilatação e erosão foi um disco B de raio 5 , sendo a linha preta o sinal original, a linha vermelha o resultado da dilatação e a linha magenta o resultado da erosão. Dividindo-se o valor da área pelo diâmetro ϵ do elemento estruturante teremos o comprimento da curva $L_\epsilon(C)$ (Veja fórmula **e7**).

A dimensão pode ser estimada calculando a regressão linear do logaritmo de L_ε versus logaritmo de ε . O declive da linha de regressão é igual $1 - D$, onde D é a dimensão fractal **[Soille 96]**.

A Figura 2.25 é um plot do valor do comprimento da curva (no eixo vertical) pelo respectivo diâmetro ε do elemento estruturante (no eixo horizontal).

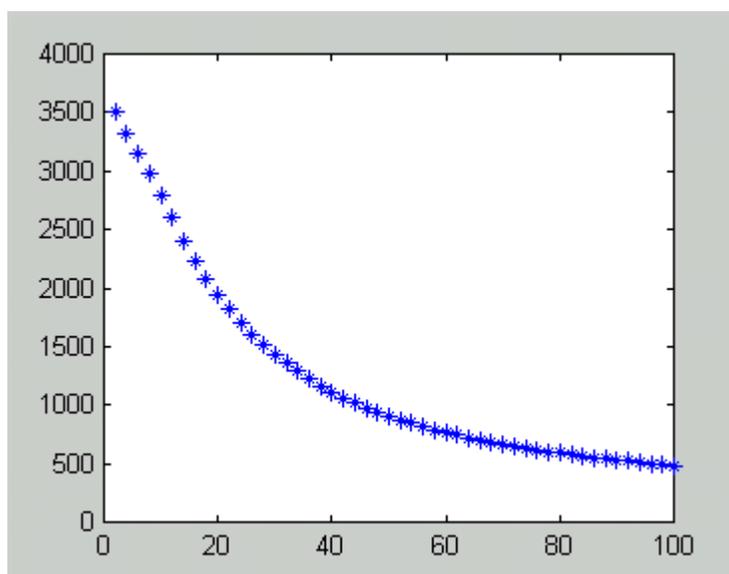


Figura 26: Comprimento L_ε para raios de elementos de 0 à 50

Para este caso obtivemos a seguinte regressão linear: $-0.6472x + 9.3067$. Assim a dimensão fractal é $D=1.6472$.

Capítulo 3: Design de Software Musical – Modelagem e Programação

3.1 – Introdução

O intuito deste capítulo é apresentar os modelos para a geração de sons e composição algorítmica desenvolvidos por nós a partir dos conceitos e técnicas abordados no capítulo anterior. Desenvolvemos três modelos, cuja fundamentação teórica encontra-se em conceitos da ciência do Caos e na Geometria dos Fractais. Mais precisamente, eles estão embasados em estudos do modelo clássico de crescimento populacional, sistemas de funções iteradas (IFS) e dimensão fractal.

No Modelo I criamos dois métodos de processamento digital para sintetizar som. Estes métodos são baseados na técnica matemática IFS e no Teorema de Fourier. O objetivo dos métodos é a manipulação do som (ondas sonoras) afim de gerar iterativamente variações sonoras. Modificamos a forma de uma onda aplicando IFS, tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, o que produz variações na forma de onda.

O Modelo II é um sistema de classificação de sinais unidimensionais (1D). Esta classificação é efetuada com base no cálculo da dimensão fractal do sinal 1D.

Criamos um banco de dados formado por parâmetros referentes à dimensão fractal de vários sinais 1D, calculamos a dimensão fractal de um sinal 1D qualquer e fazemos sua classificação segundo os valores dos parâmetros fornecidos pelo referido banco de dados. Com isto nos foi possível classificar os sinais gerados pelo modelo I.

No âmbito da composição musical temos o modelo III que explora a propriedade de auto-similaridade, presente em estruturas fractais, e a sensibilidade às condições iniciais, naturais dos sistemas caóticos. Para o primeiro caso desenvolvemos uma técnica utilizando a mesma idéia do

processo de construção da Curva Triádica de Cantor (seção 2.2.2) aplicada à subdivisão do tempo musical, resultando em **músicas fractais**, no sentido usual do termo.

No segundo caso fizemos uso da equação logística (seção 2.4.2) para gerar seqüências de pulsos rítmicos. Esta técnica denominada Máquina Rítmica, nos permite determinar tais seqüências organizadas de forma cíclica, constante ou caótica; através do controle do parâmetro λ da equação em questão.

As duas técnicas propostas no Modelo III foram desenvolvidas em tempo real, permitindo ao compositor interagir com o sistema, visualizar as mudanças dos parâmetros que controlam a geração sonora e ouvir o resultado musical. No entanto o mais importante para nós não é a visualização e sim o que elas representam pois, embora os programas desenvolvidos apresentem uma interface bastante simples (ou intuitiva), eles não possuem regras que auxiliem o usuário a montar sua estrutura de composição como, por exemplo, as notas que devem ser usadas, os ritmos, etc., assim a qualidade final pode apresentar resultados muito interessantes ou completamente sem sentido.

Apresentaremos na seqüência cada aplicação detalhadamente.

3.2 – Modelo I: Sistemas de Funções Iteradas Aplicadas na Geração de Síntese de Som

Imagens complexas e dotadas de muitos detalhes podem ser construídas por um computador através de programas bem simples e que necessitam de poucos dados de entrada. O Sistemas de Funções Iteradas - IFS é uma técnica que nos permite construir tais imagens, ou seja, uma ferramenta para sintetizar imagens fractais, conforme exposto no capítulo 2.

Aplicando-se uma seqüência de Transformações Afins a um conjunto inicial de pontos pode-se chegar a um atrator . Na seção 2.3 esta técnica é aplicada para gerar uma imagem fractal conhecida na literatura por Folha de Samambaia

Nossa proposta é utilizar esta metodologia, adaptando-a para o contexto da síntese de som para obtenção de novos timbres musicais. Com este objetivo, propomos dois algoritmos denominados: **Espectro Sonoro** e **Mola Sonora**.

Os dois métodos que serão apresentados utilizam como conjunto inicial um sinal digital 1D , representando uma onda sonora (por questão de simplicidade passaremos a referenciar este conjunto simplesmente por "onda"). A idéia é modificar a forma desta onda fazendo uso da técnica IFS.

No Espectro Sonoro as transformações são feitas em termos das amplitudes e freqüências que são obtidas a partir da onda original aplicando a Transformada Discreta de Fourier (DFT), fundamentada no Teorema de Fourier que diz:

"Qualquer vibração periódica, pode ser representada como a superposição de vibrações harmônicas puras, correspondentes às frequências múltiplas da frequência fundamental da onda original" [Roederer 73].

Por outro lado o método denominado *Mola Sonora* efetua suas transformações diretamente nas amplitudes (ou intensidades) da onda original.

3.2.1 – Espectro Sonoro

O método proposto aqui, denominado **Espectro Sonoro**, consiste em obter um "som" **S** a partir de um espectro sonoro (ver **definição 3.1** abaixo) inicial **w₀**. **S** é determinado pela chamada união* (ver **definição 3.3**) de todas as variações sonoras **V_i** (ver **definição 3.2**) derivadas a partir de **w₀**, aplicando-se um IFS definido por **k** transformações afins **T_k : R² → R²**, para **k = 1, ..., L**, nos sucessivos **w_i**, com **w_i = T_k(w_{i-1})** e **i = 1, 2, 3, ..., n**. Em notação matemática segue que :

$$S = \bigcup_{i=1}^N * V_i(T_k(w_i)) \tag{e8}$$

Definição 3.1

Um espectro sonoro inicial **w₀** é um conjunto de **M** pontos dado pelos pares ordenados **(F_j, A_j)**, sendo **F_j** a frequência e **A_j** a amplitude para **j = 1, ..., M**, obtidos pela aplicação da FFT a uma forma de onda sonora.

Definição 3.2

Uma variação sonora **V_k**, **k ∈ N**, é o conjunto de **M** pontos dado pelos pares ordenados **(t_i, a_i)**, sendo **t_i** o tempo e **a_i = x(t_i)** a intensidade para **i = 1, ..., M** obtido a partir de um espectro s onoro **w_k**, **k ∈ N**, sendo:

$$x(t_i) = \sum_{j=1}^M A_j \cdot \text{seno} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t_i}{M} \cdot F_j \right), \text{ para } (F_j, A_j) \in w_k \text{ e } i = 1, 2, \dots, M$$

Definição 3.3

Dado duas variações sonoras **V_k** e **V_l**, com **k, l ∈ N** e contendo **N** elementos cada uma, defini-se a operação **∪*** (lê-se união estrela) como o conjunto de pares ordenados obtidos da forma como segue:

$$V_k \cup^* V_l = \left\{ (t'_i, a'_i) / \begin{cases} t'_i = t_j + k \cdot N \text{ e } a'_i = a_j \text{ se } (t_j, a_j) \in V_k \\ t'_i = t_j + l \cdot N \text{ e } a'_i = b_j \text{ se } (t_j, b_j) \in V_l \end{cases} \right\},$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, 2 \cdot N$ e $j = 1, 2, 3, \dots, N$.

Na Figura 3.1 apresentamos, na forma de diagrama, uma possível interpretação geométrica dos principais passos do método. Em seguida uma descrição detalhada.

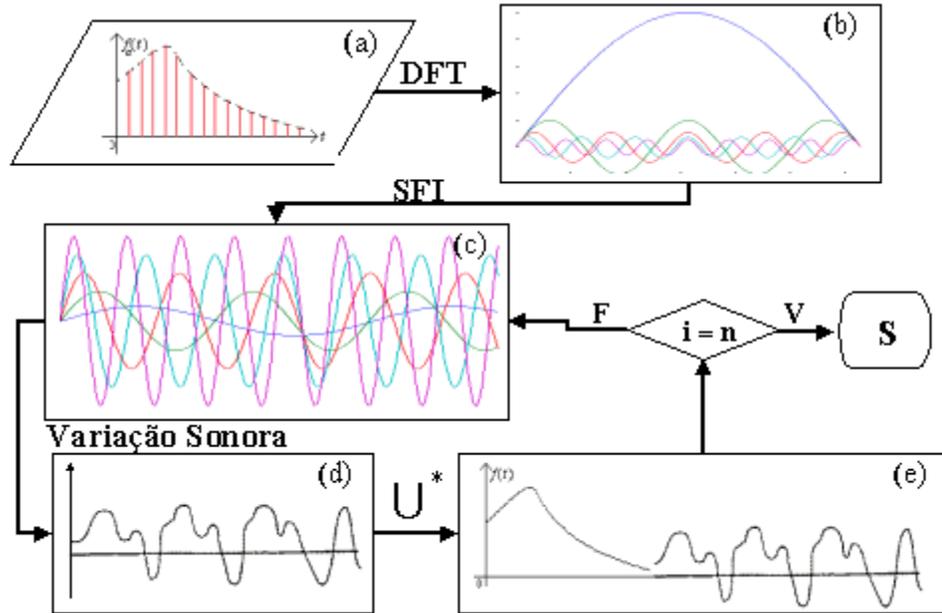


Figura 3.1: Diagrama do Espectro Sonoro

Como visto na seção 2.3 a idéia básica do IFS é aplicar uma seqüência de Transformações Afins num conjunto inicial de pontos que eventualmente convergem para um atrator.

Para o Espectro Sonoro o conjunto inicial w_0 (Figura 3.1(b)) é uma amostra com N pontos do espectro de uma determinada onda sonora (Figura 3.1(a)), obtido conforme **definição 3.1**

Inicia-se o processo de iterações sobre o espectro inicial w_0 e a cada iteração aplica-se uma das transformação afim T_k (Figura 27(c)), que descrevem o IFS de modo que

$$w_i = T_k(w_{i-1}) = \{ (F_j, A_j) / F_j : \text{frequência e } A_j : \text{amplitude, } p/ j = 1, 2, \dots, M \} \quad \text{(e9)}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Para cada w_i determina-se a variação sonora v_i correspondente (Figura 3.1(d)) da maneira dada por **definição 3.2**.

Por fim obtém-se o som final **S** pela expressão dada em **(e8)**. A operação união estrela \cup^* que aparece em **(e8)** pode ser vista como a concatenação das variações sonoras

$V_k, k \in N$ (Figura 3.1(e)), sendo as ordenadas t_i de cada V_k transladada de $t_i + k \cdot N$, onde N indica o número de elementos de V_k .

3.2.1.1 – Aspectos de Implementação

O conjunto de todas as transformações $T_k, k = 1, \dots, L$, que descrevem um IFS é conhecido como código IFS. Propor metodologias para determinar quantas e quais transformações afins T_k definem um código **IFS** não é objetivo deste trabalho.

A **estratégia** empregada na implementação do método Espectro Sonoro foi partir de um código **IFS** conhecido e efetuar alterações nos seus parâmetros guiando-se por tentativas e erros até chegar a um conjunto atrator que atenda algum **critério** especificado. Esta estratégia, embora bastante simples mas excessivamente trabalhosa, tem sido empregada por outros autores [**Gogins 91**].

O **critério** implementado para testar o método Espectro Sonoro é um tanto quanto subjetivo. O som gerado **S**, após **n** iterações, é o conjunto atrator, ou o *atrator audível*, se este agradar ao ouvido do usuário. Certamente que critérios mais elaborados devem ser propostos, mas isto foge o escopo do trabalho atual. Por exemplo, um critério viável poderia impor que o conjunto atrator “pareça-se” com uma forma de onda dada a priori. A viabilidade deste critério é garantida pelo teorema da colagem (the Collage Theorem) que, intuitivamente, diz ser possível encontrar um IFS cujo atrator “pareça-se” com um dado conjunto final [**Barnsley 88**].

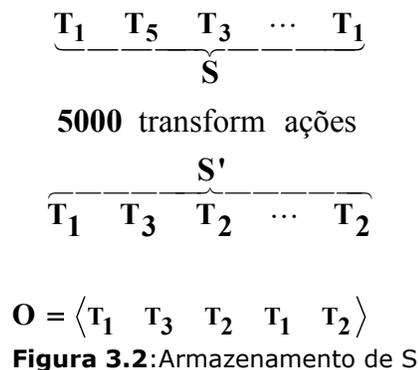
Outro aspecto considerado na implementação foi selecionar a transformação afim T_k que deve ser aplicada a cada iteração. O critério de seleção adotado funciona como a lei de formação da seqüência de transformações afins que convergem para o atrator. Foram estudados dois critérios, um randômico e outro determinístico.

No critério randômico o procedimento utilizado foi o mesmo descrito na seção 2.3 aplicado para gerar a imagem da folha de samambaia. o qual emprega uma distribuição de probabilidade para sortear uma entre as transformações T_k possíveis. O critério determinístico supõe a existência de uma ordem pré-estabelecida que define como as transformações T_k devem ser aplicadas.. A título de ilustração considere um código IFS dado por três transformações afins $\{T_1, T_2, T_3\}$, de modo que uma ordem possível é

$$O = \langle T_1 \ T_3 \ T_2 \ T_1 \ T_2 \rangle.$$

As transformações são então aplicadas nesta ordem e de forma cíclica, ou seja, ao chegarmos na última transformação T_k , voltamos a primeira até concluirmos todas as iterações desejadas. A ordem pode ser determinada por um número qualquer de transformações e não necessariamente precisa conter todas as transformações que descrevem o código IFS.

O método Espectro Sonoro oferece uma forma elegante e compacta de armazenar o som **S** gerado, bastando para isto armazenar os índices das transformações afins que compõem a seqüência que gera **S**. Tomando este fato como referência e considerando dois sons **S** e **S'** gerados por uma seqüência de **P** transformações afins . Sendo, **S** gerado pela seleção randômica, e **S'** gerado pela seleção determinística por um vetor ordem **O** de tamanho **Q**, com $Q \ll P$. Armazenar **S** equivale armazenar uma estrutura de tamanho **P**, enquanto **S'** requer uma de tamanho **Q**. Este fato evidencia uma grande vantagem da seleção determinística. pois em geral **Q** é muito menor que **P**. A Figura 3.2 ilustra um provável exemplo.



3.2.2 – Mola Sonora

O método proposto aqui, denominado **Mola Sonora**, consiste em obter um "som" **S** a partir de uma onda inicial **s₀** (ver **definição 3.4**). **S** é determinado pela união* (ver **definição 3.3** abaixo) de todas as variações sonoras **s_i** com $s_i = T_k(s_{i-1})$ e. $i = 1, 2, 3, \dots, n$., aplicando um IFS definido por **k** transformações afins $T_k : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, para $k = 1, \dots, L$. Em notação simbólica temos:

$$S = \bigcup_{i=1}^N * s_i \quad (\text{e10})$$

Definição 3.4

Uma onda inicial **s₀** é um conjunto de **M** pontos dado pelos pares ordenados (t_j, a_j) , sendo **t_j** o tempo e **a_j** a amplitude para $j = 1, \dots, M$.

Este método tem a mesma finalidade que o anterior, isto é, produzir de forma iterativa variações em uma determinada onda com base na técnica IFS. No entanto as transformações são feitas diretamente nas amplitudes da onda.

Analogamente ao que foi feito para o Espectro Sonoro, inicia-se o processo de iterações sobre o conjunto inicial s_0 (Figura 3.3 (a)) e a cada iteração aplica-se uma transformação afim T_k (Figura 3.3(b)) tal que $s_i = T_k(s_{i-1})$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Um diagrama ilustrando uma provável situação do método pode ser visto na Figura 3.3.

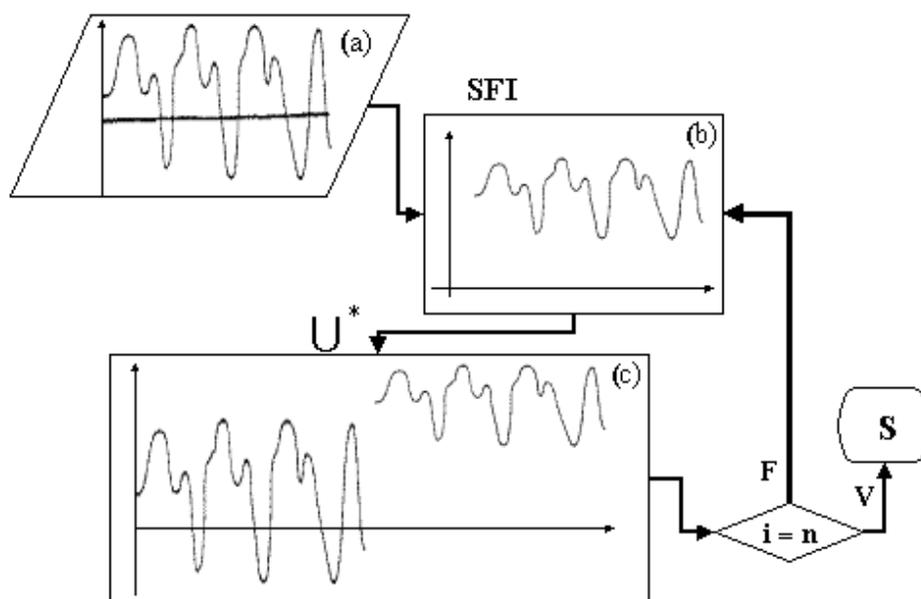


Figura 3.3: Diagrama da Onda Sonora

Consideramos aqui apenas um subconjunto das transformações afins, i.e., as que efetuam uma escala e/ou uma translação na amplitude (ordenadas dos pontos s_i) Este fato causa um efeito que denominamos mola. pois cada amplitude a_j da onda pode ser “esticada” ou “comprimada”.

De forma análoga ao Espectro Sonoro, considera-se que o som gerado S , após n iterações, é o conjunto atrator, ou o *atrator audível*, se este agradar ao ouvido do usuário. As transformações afins também são selecionadas de maneira idêntica ao exposto na sub-seção 3.2.1.1, bem como as observações feitas na mesma.

3.2.3 – Espectro Sonoro X Mola Sonora

Discute-se aqui a possibilidade de controlar o resultado final S . Isto é uma vez gerado um som S por um dos dois métodos expostos acima, analisa-se como gerar um novo som S'

modificado pelas técnicas acima discutidas. Esta modificação pode ser guiada ou pela forma de onda gerada por **S** ou pela sensação sonora percebida.

Os dois métodos apresentados o fazem através do controle paramétrico do código IFS. No entanto, um resultado mais preciso pode ser obtido ao se considerar a utilização de um ou outro método.

Por exemplo, para modificações guiadas pela forma da onda a melhor opção seria a Mola Sonora. Fazendo-se as transformações diretamente nas amplitudes, o controle sobre a forma da curva torna-se muito grande. Pode-se então causar distorções variadas, porém sem grandes almejar expectativas musicais. Os resultados produzidos podem ser muito complexos tal como acontece com as imagens geradas pelo IFS quando um atrator possui uma trajetória não muito bem comportada. Por outro lado, ao utilizarmos o espectro da onda, a "previsão", sob um ponto de vista musical, torna-se eventualmente possível, devido a facilidade de manipulação sobre os harmônicos.

3.3 – Modelo II: Classificação de um Sinal baseada em Dimensão Fractal

Nosso objetivo aqui é propor um método de classificação de sinais 1D. Um processo de classificação leva em conta características específicas dos objetos a serem classificados, de modo que todos aqueles que apresentem o mesmo conjunto de características são ditos pertencer a mesma classe.

Identificar e quantificar características que sejam significativas para um processo de classificação exige um tempo longo de pesquisa. Esta parte do processo é a que requer mais elaboração, mais engenharia e portanto é a mais complexa. O método em questão, vendo-o como um primeiro passo nesta direção, considera apenas uma única característica **d** (ou simplesmente parâmetro **d**, como passará a ser referido de agora em diante) na elaboração do critério de classificação. Neste trabalho escolhemos o parâmetro **d** como sendo a **dimensão fractal** do sinal, a qual é computada conforme algoritmo exposto na seção 2.5.2.

O método consiste em:

- determinar um conjunto de classes **C** ;
- dado um sinal **S** qualquer, determinar sua dimensão fractal **d** ;
- efetuar uma operação de busca de forma a dizer qual classe **I** de **C** o sinal **S** pertence.

O primeiro passo do método é construir o conjunto **C**, denominado de *Banco de valores do parâmetro d*. Este processo tem como entrada uma seqüência de **n** sinais e para cada um é determinado sua dimensão fractal **d_k**, para $k = 1, 2, \dots, n$. Os **n** valores **d_k** determinam uma

partição $\mathbf{P}([1,2])$ do intervalo semi-fechado a esquerda $[1,2)$ dada por $n+1$ subconjuntos, onde cada um deles equivale a uma classe de \mathbf{C} . Assim uma classe \mathbf{I} do conjunto \mathbf{D} é representado por um intervalo $\mathbf{I}=[d_j, d_f)$ semi-fechado a esquerda conforme ilustra o exemplo da Figura 3.4

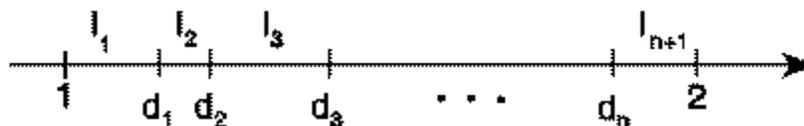


Figura 3.4:Partição do Banco de Valores

Como o banco de valores de \mathbf{d} é um conjunto ordenado o processo de busca pode ser efetuado, no pior caso, em tempo $O(\log_2(n))$ empregando uma busca binária .

As Figuras 3.5 e 3.6 instruem a simulação de uma situação exemplo do método. A Figura 3.5 mostra o gráfico dos nove sinais usados na construção do Banco de valores do parâmetro \mathbf{d} .

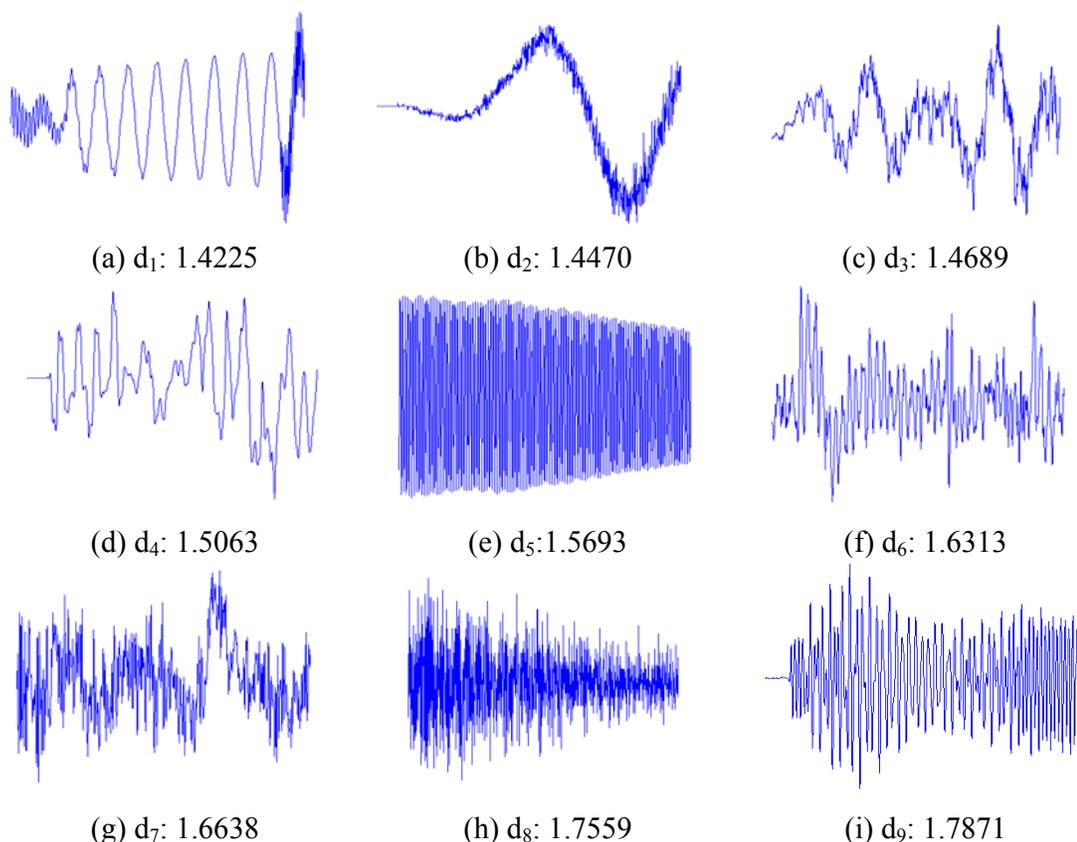


Figura 3.5: Sinais que compõem o Banco de Valores de \mathbf{d}

Os valores d_i apresentados na figura Figura 3.5(a) até (i) determinam o conjunto de classes **D** apresentado na tabela **Tabela 3.1**

# Classe	Intervalo	Valor
1	$[1, d_1)$	$[1, 1.4225)$
2	$[d_1, d_2)$	$[1.4225, 1.4470)$
3	$[d_2, d_3)$	$[1.4470, 1.4689)$
4	$[d_3, d_4)$	$[1.4689, 1.5063)$
5	$[d_4, d_5)$	$[1.5063, 1.5693)$
6	$[d_5, d_6)$	$[1.5693, 1.6313)$
7	$[d_6, d_7)$	$[1.6313, 1.6638)$
8	$[d_7, d_8)$	$[1.6638, 1.7559)$
9	$[d_8, d_9)$	$[1.7559, 1.7871)$
10	$[d_9, 2)$	$[1.7871, 2)$

Tabela 3.1: Conjunto de Classes D

A Figura 3.6 exibe os gráficos de quatro sinais que são classificados segundo o conjunto **D**.

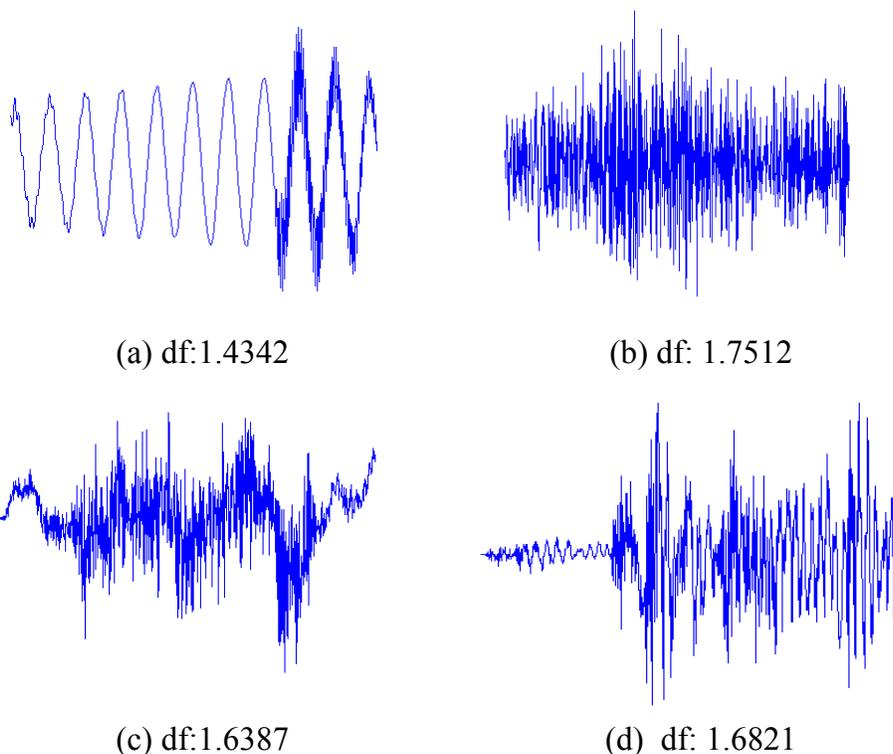


Figura 3.6: Sinais submetidos à classificação

Classificação dos sinais referentes à Figura 3.6:

- O sinal da Figura 3.6(a) é da classe **2**;
- O sinal da Figura 3.6(b) é da classe **8**;
- O sinal da Figura 3.6(c) é da classe **7**;
- O sinal da Figura 3.6(d) é da classe **8**;

Num segundo momento compara-se, fazendo-se uma análise visual e/ou reproduzindo o sinal, os dois sinais que deram origem a classe $I = [d_i, d_f)$ na qual um dado sinal **S** foi classificado. A expectativa é que haja relações do tipo sonora ou na forma da curva entre os sinais que determinam a classe e o classificado.

3.4 Modelo III: Sistemas para Composição Algorítmica

Na Geometria Fractal, denominada por Mandelbrot de Geometria da Natureza e que tem uma beleza irresistível, é possível fazer a medição de vários aspectos das coisas da natureza: as plantas, as nuvens, as costas dos mares e rios, etc. É a descoberta e a proclamação de uma nova estética [**Peitgen 86**]. Suas qualidades são a auto-similaridade, a medição do grande e do pequeno, a expressão do caótico, a capacidade de produzir estruturas complexas a partir de pouca informação.

Explorando estas qualidades dos fractais, desenvolvemos aqui duas técnicas para composição. A primeira, denominada *Auto Semelhança*, nos permite produzir música baseado numa pequena seqüência de notas musicais. Sua construção é feita utilizando-se a mesma idéia da construção da Curva Triádica de Cantor.

A outra é uma máquina para produzir ritmos. Sua construção é feita com o uso da equação logística pois, muitas vezes, o comportamento das soluções desta equação pode ser verificado nos ritmos.

Uma característica destas duas técnicas é que os programas permitem ao usuário alterações na composição em tempo real, e mesmo não tendo entendimento sobre os detalhes de seus parâmetros e a modelagem matemática envolvida, eles possuem a percepção e interpretação musicais, o que nos leva ao conceito de instrumento musical computacional.

3.4.1 – Auto Semelhança

Como visto no capítulo 2 (seção 2.2) uma característica inerente dos fractais é a *auto similaridade*, onde uma parte reflete o todo. Esta característica pode ser encontrada em composições hierárquicas baseadas na abordagem “tema recursivo” [**Roads 89**]. Para ilustrar esta abordagem vamos recordar o processo de construção da Curva Triádica de Cantor (seção 2.2.2) , um segmento de reta de tamanho L é subdividido em 3 segmentos de tamanho

$\frac{L}{3}$, depois em 9 segmentos $\frac{L}{9}$; e assim infinitamente. Neste trabalho esta mesma idéia é aplicada à subdivisão do tempo musical.

Afim de exemplificar a idéia de subdivisão de tempo vamos considerar o seguinte trecho musical:



O trecho é formado por três células cuja descrição segue abaixo:

- 1ª célula: possui uma seqüência de três notas musicais **N** (mi,fá,sol)¹¹ com unidades de tempo **D** referentes à (1,1,1) respectivamente;
- 2ª célula: formada por duas seqüências de três notas musicais **N** (mi,fá,sol; mi,fá,sol) com unidades de tempo **D** referentes à ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) respectivamente;
- 3ª célula: formada por quatro seqüências de três notas musicais **N** (mi,fá,sol; mi,fá,sol; mi,fá,sol; mi,fá,sol) com unidades de tempo **D** referentes à ($\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$) respectivamente.

A subdivisão do tempo refere-se à divisão do valor da unidade de tempo de cada nota das seqüências das segunda e terceira células em relação à célula anterior, i.e., os valores das unidades de tempo de cada nota da 2ª célula refere-se à metade dos valores das unidades de tempo das notas da 1ª célula; na 3ª célula tem-se que os valores das notas das seqüências correspondem à metade dos valores das notas das seqüências da 2ª célula.

¹¹ Estamos considerando a clave de sol

Repetindo várias vezes este procedimento de obter a geração de uma nova célula em função da subdivisão dos valores das unidades de tempo da célula anterior, resultará numa música que tem como característica a auto-similaridade, tal como os fractais.

Sua construção é realizada num espaço E denominado espaço sonoro e definido por:

Definição 3.5

Um **espaço sonoro** E é um conjunto de pares ordenados (d_i, n_i) , sendo d_i as durações das notas e n_i as notas para $i=1,2,3,\dots$

As notas são representadas por um intervalo numérico cujo valor mínimo é 24 e máximo 96, equivalentes a tabela MIDI (Apêndice xx), e as durações são valores que determinam a unidade de tempo de cada nota.

Cria-se um conjunto de notas e durações equivalentes à 1ª célula do exemplo 1, denominado Tema T (definição 3.6), onde a unidade total U (definição 3.7) de T pode ser comparada ao segmento de reta inicial L utilizado na construção do Conjunto Triádico de Cantor. Uma ilustração desta célula encontra-se na Figura 3.7. Ressaltamos que não é proposta deste trabalho desenvolver a “visualização do som”, porém existem várias abordagens para esta finalidade. Em particular, citamos o trabalho de Jonathan Foote [Foote 99] cuja técnica apresentada por ele, permite a visualização de uma música através da auto-similaridade ou não-similaridade, e ainda exhibe uma forma de quantificar o quão auto-similar é esta música.

Definição 3.6

Um **Tema** T é um conjunto inicial de pares ordenados $(d_j, n_j) \in E$ e $j=1,2,3,\dots, 12$.

Definição 3.7

Um **Unidade Total** U de uma célula é a somatória das durações de todas as notas pertencentes a esta célula.

Uma vez criada o tema T ¹² inicia-se o processo de construção onde as próximas gerações de células são geradas iterativamente da seguinte forma: uma nova geração de célula C_{t+1} é obtida multiplicando as durações de cada nota de C_t por uma taxa de replicação $R \in Z_+$, de modo que a duração total da nova geração C_{t+1} seja igual a duração total de T . (**Ver definição 3.9**)

Assim a quantidade de notas de uma nova geração C_{t+1} é inversamente proporcional aos valores das durações de cada nota de C_t , i.e., a quantidade de notas da nova geração C_{t+1} é

¹² Ressaltamos que T equivale a primeira célula C_1 .

$R \cdot (\text{número de notas de } C_t)$ com $R > 1$, enquanto o valor da duração de cada nota é $\frac{\lfloor (\text{duração de } n_j) \text{ de } C_t \rfloor}{R}$.

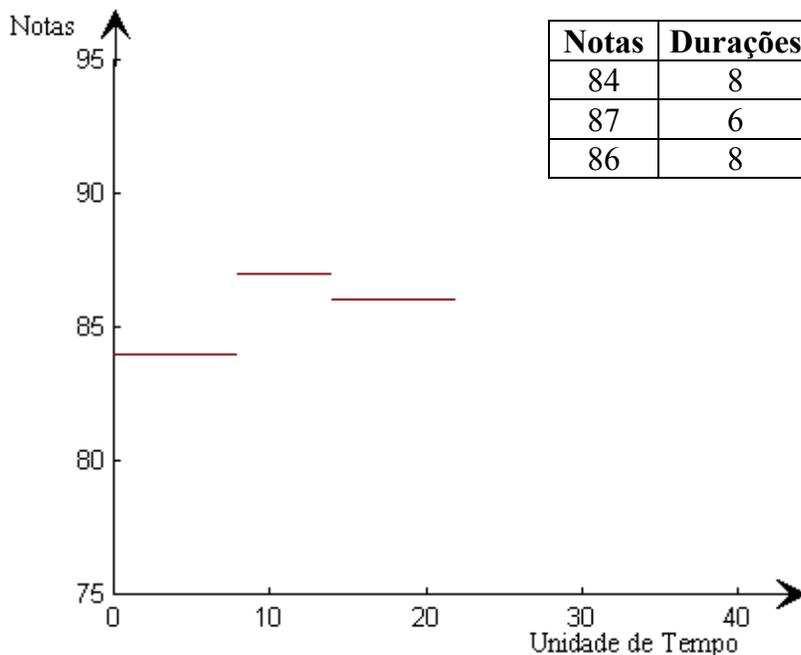


Figura 3.7: Tema Recursivo

Antes de apresentarmos a definição da célula C_{t+1} , apresentamos primeiramente a definição de concatenação (**Definição 3.8 abaixo**).

Definição 3.8

Sejam A e $B \in E$, $A \otimes B$ (lê-se A concatenado com B) é o conjunto formado pela seqüência dos elementos de A seguidos pela seqüência de elementos de B .

Definição 3.9

Sejam $A = \{(d_i, n_i) \mid i = 1, \dots, m\}$, R uma taxa de replicação e $A^R = \underbrace{A' \otimes A' \otimes \dots \otimes A'}_{R \text{ vezes}}$, sendo

$$A' = \left\{ (d_j, n_j) \mid d_j = \frac{d_i}{R}, n_j = n_i, (d_i, n_i) \in A \text{ e } i = j = 1, \dots, m \right\} .$$

Assim,

$$C_{t+1} = C_t^R, \quad t = 1, 2, \dots, \quad R: \text{taxa de replicação}.$$

O resultado é uma música M formada pela concatenação das células C_t , ou seja, $M = [C_1, C_2, C_3, \dots, C_n]$. A Figura 3.8 é uma possível ilustração da geração de duas células.

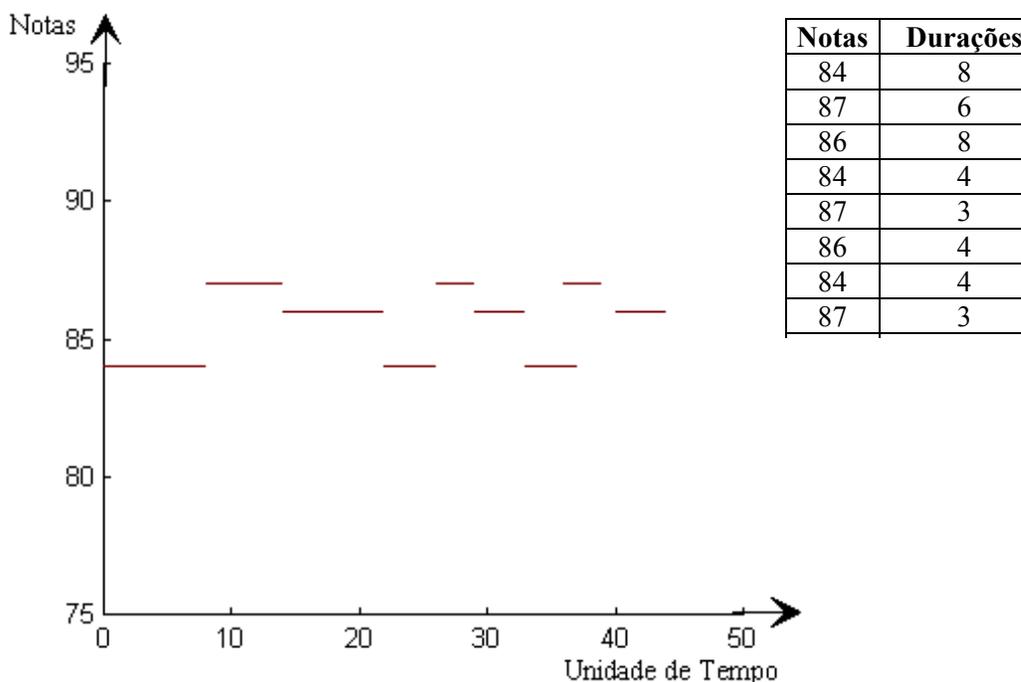


Figura 3.8: Geração de duas células

Uma ilustração da implementação do processo descrito anteriormente é dada pelo diagrama na Figura 3.9.

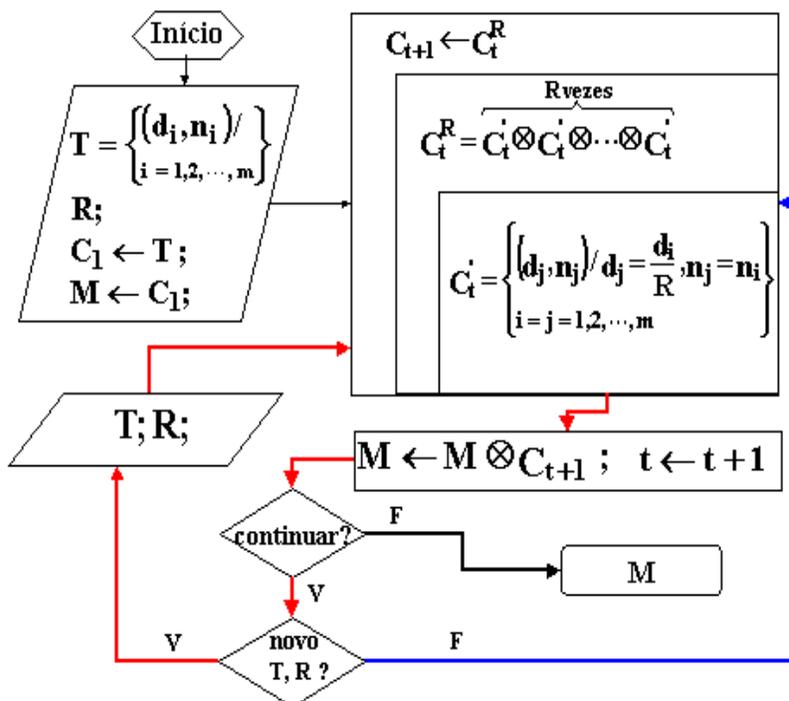


Figura 3.9: Diagrama da Auto-Semelhança

O conjunto T pode ser descrito por dois vetores colunas de dimensões 12×1 referentes às notas e respectivas durações D . Tanto as notas quanto as durações são elementos de livre improviso do compositor. A única restrição se refere à quantidade de notas iniciais em T , três notas no mínimo e no máximo 12.

A taxa de replicação R , outro elemento utilizado na construção, também é uma escolha do compositor, caso este não a faça inicialmente, iniciamo-la com valor 1.

Uma vez definido T , i.e., a configuração inicial, a música começa a ser gerada com algumas alternativas permitidas pelo algoritmo que resultam em "combinações fractais". Tais alternativas são:

1. Mudar as durações das notas de T
2. Aumentar ou diminuir a quantidade de notas de T
3. Trocar a taxa de replicação R

Estas possibilidades existentes no processo de composição são feitas em tempo real, assim o músico pode fazer suas composições guiando-se apenas pelo seu senso auditivo.

Vale observar que um fractal possui uma divisão infinita o que faz com que a música por nós construída seja uma aproximação de um fractal, caso contrário teríamos uma música com "infinitas gerações" o que faria com que não ouvíssemos notas isoladas, pois como visto acima a quantidade de notas é inversamente proporcional à suas durações.

3.4.2 – Máquina Rítmica

Na seção 2.4.2 apresentamos a equação logística $X_{t+1} = \lambda X_t (1 - X_t)$ e fizemos uma análise sobre o comportamento de suas soluções (seção 2.4.3.2). Observamos que, dependendo do parâmetro λ , o comportamento do sistema pode assumir estados estacionários, variações periódicas ou aperiódicas.

Este mesmo comportamento também pode ser usado para gerar seqüências de pulsos rítmicos. Por exemplo, o ritmo muitas vezes é formado por seqüências de durações que se repetem, outras vezes encontramos padrões rítmicos totalmente irregulares; e baseados neste fato implementamos um algoritmo a partir da equação logística que cria ritmos, o qual denominamos máquina rítmica. Antes de explicarmos a analogia do algoritmo primeiramente mostraremos os significados dos comportamentos do sistema na música.

Comportamento Estacionário: dizemos que o sistema é estacionário quando os valores X_t convergem para um determinado valor (para algum atrator). O significado na música é que o ritmo se tornará constante. No caso em que o atrator é o valor zero seria de grande utilidade na finalização de uma composição, ou seja, as durações iriam decrescendo até não conseguirmos mais ouvi-las.

Comportamento Periódico : são sistemas que voltam a mesma condição regularmente. Neste caso temos então seqüências de durações que se repetem.

Comportamento Aperiódico: neste caso não existem atratores e o sistema é considerado caótico. Na música jamais encontraríamos o mesmo desenho ritmico, isto é, as durações não se repetiriam numa determinada seqüência.

Abaixo encontra-se uma descrição e uma ilustração (Figura 3.10). da maneira pela qual implementamos nosso modelo.

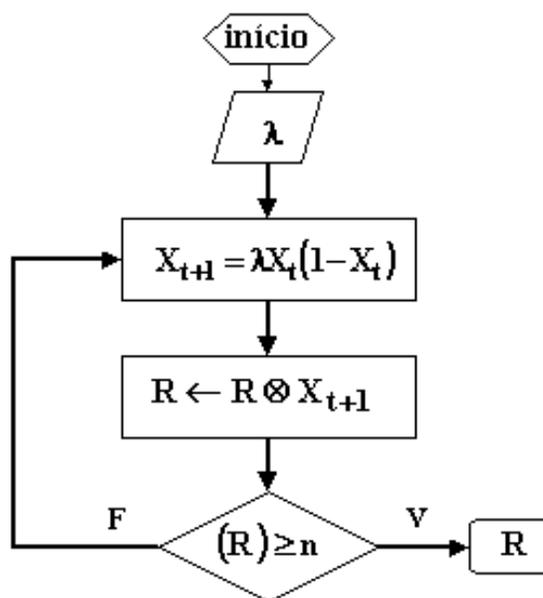


Figura 3.10: Diagrama da Máquina Rítmica

Considerando a equação logística: $X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_t)$ determinamos a seguinte relação:

- X_0 : valor inicial da duração
- X_t : duração de eventos sonoros
- λ : coeficiente de regularidade rítmica

A seqüência de pulsos rítmicos X_t será obtida através da iteração da equação citada acima, i.e., $X_{t+1} = F(X_t)$ onde $F(X_t) = \lambda X_t(1 - X_t)$. Basta que o compositor determine uma duração inicial e o valor do coeficiente λ e então, através do controle do coeficiente λ poderá construir “trajetórias” durante o ato de composição.

O resultado final, ou seja, os ritmos gerados serão seqüências de eventos organizados de forma cíclica, constante ou caótica, conforme discutido anteriormente.

Capítulo 4: Avaliações Gerais e Conclusões

O trabalho de pesquisa apresentado neste texto consistiu em estudar algumas técnicas e modelos, encontrados na literatura, empregados na **Síntese de som e na Composição Musical**. Investiu-se também na análise de técnicas e algoritmos pertinentes a geometria dos fractais e aos sistemas dinâmicos não lineares com o objetivo de adaptá-los ao contexto da síntese de som e da composição musical. Estes estudos resultaram em três abordagens distintas.

Faremos a seguir uma análise destas abordagens, discutindo os resultados obtidos e possíveis deficiências. Na seqüência apresentaremos algumas sugestões de trabalhos que podem ser desenvolvidos futuramente a partir deste trabalho.

- **Modelo I : Sistemas de Funções Iteradas aplicadas na geração de síntese de som**

Pode-se dizer que a proposta do modelo é um tanto quanto inovadora no que diz respeito ao uso da técnica **IFS** para sintetizar um som. Até onde nos foi possível pesquisar, apenas encontramos um trabalho nesta direção que pode ser encontrado em **[Manzoli 96]**. Em geral, o que encontramos na literatura é o uso de **IFS** em composição algorítmica **[Gogins 91, Barnsley 88]**.

Um resultado que obtivemos além do proposto, ou seja, a geração de variações sonoras de forma iterativa, foi a possibilidade da compactação da informação sonora. Para gerar o som S basta armazenar o conjunto inicial e os índices das transformações afins que compõem a seqüência que gera S .

O modelo também permite o controle do som final S com a opção de fazer as modificações diretamente na **forma da onda** ou no seu **espectro**.

- **Modelo II : Classificação de um Sinal baseada no Cálculo da Dimensão Fractal**

O propósito do modelo II é desenvolver um método que classifique sinais 1D. Propusemos então um método cuja classificação dos sinais foi feita através do **cálculo da dimensão fractal**.

A dificuldade principal do método consistiu exatamente na determinação das classes que seriam utilizadas para o processo de classificação, ou seja, identificar e quantificar quais as características que fossem mais significativas para o problema em questão.

A maneira pensada para realizar esta tarefa foi utilizar apenas uma característica para o processo de classificação, a dimensão fractal. Obtivemos alguns resultados coerentes, como, por exemplo, semelhanças na forma da curva.

Claramente resultados ainda melhores poderão ser obtidos ao se elaborar outros critérios de classificação que considere outros parâmetros, tornando-o apto para aplicações de maior envergadura tal como classificar um sinal levando em conta o ruído, ou ainda extendê-lo a outras áreas.

No entanto, observamos que ainda há muito para ser desenvolvido para que se chegue a resultados que tornem esta idéia prática e eficaz. Aqui apenas lançamos uma semente.

- **Modelo III: Sistemas para Composição Algorítmica**

Os dois algoritmos que desenvolvemos aqui foram projetados de forma a oferecer ao compositor novas ferramentas de composição, porém, dando ênfase a improvisação do compositor. Como visto acima não são disponíveis, para o compositor, nos algoritmos quais estruturas (ritmos, notas, valores de coeficientes) usar durante o ato da composição, eles apenas sugerem situações. Assim, a criatividade do músico jamais deixará de existir ao fazer uma composição, mesmo quando esta seja feita através das máquinas.

No primeiro, denominado **Auto-Semelhança**, construímos uma música a partir de uma pequena seqüência de notas. Tal construção é baseada em repetições de padrões pré-estabelecidos, fazendo com que nossa criação musical possuísse a característica da auto-similaridade, que é uma das propriedades dos fractais.

Com a **Máquina Rítmica**, o segundo algoritmo, foram obtidos resultados muito interessantes, ritmos diversos, isto é, a cada execução um resultado diferente era fornecido. Estas máquinas apresentam uma propriedade bastante requerida em ferramentas de composição: elas oferecem rapidamente uma grande variedade de sugestões que podem ser empregadas diretamente ou funcionar como um processo intuitivo para o compositor.

Vale comentar que no decorrer deste trabalho tornou-se necessário optar por várias ferramentas que nos permitissem por em prática nossa idéia. Nestas decisões não foi levado em consideração o fato da nossa escolha ser a melhor possível em termos de velocidade, precisão ou concisão das representações obtidas. Buscamos apenas tornar operacional a metodologia

idealizada, implementando-a de forma a aproveitar os recursos existentes e que nos fossem disponíveis.

Acreditamos que o objetivo principal visado no desenvolvimento deste trabalho foi alcançado, ou seja, desenvolver a partir de técnicas comuns à engenharia, novas técnicas para

Síntese de Som e Composição Algorítmica.

Na área de Música Computacional o uso da teoria da matemática dos fractais tem levado a muitos resultados. No entanto, muito ainda há para ser feito. Esperamos entretanto, que com nosso esforço inicial tenhamos reunido informações e experiências necessárias a execução desta tarefa e gostaríamos então de sugerir como complementação do trabalho desenvolvido:

1. Investigar o emprego de transformações diversas em algoritmos para síntese de som.
2. Compactação de um sinal, i.é, dado um atrator, sinal S, determinar o código SFI que faça com que um conjunto convirja para S.
3. Critérios mais elaborados para a classificação de sinais.
4. Explorar a construção de interfaces gráficas com a finalidade de:
 - 4.a Controlar o resultado final, o som S, gerado no Modelo I em tempo real. Isto pode ser feito com a manipulação do código SFI em tempo real.
 - 4.b Integrar os algoritmos desenvolvidos no Modelo III, com outros a serem desenvolvidos, ou até mesmo já existente na literatura, visando construir uma “combinação” para a composição de peças musicais.

Referências Bibliográficas

- [Loy 89]** Loy, G. "Composing with Computers-a Survey of Some Compositional Formalisms and Music Programming Languages", In Current Directions in Computer Music Research, ed. Mathews, M.V. and J.R. Pierce, Cambridge: The MIT Press, Massachusetts, 1989.
- [Hiller 59]** Hiller L.; e Isaacson L., "Experimental Music", New York: McGraw - Hill Book Company Inc, 1959.
- [Dodge 85]** Dodge C.; Jersey, T.A., "Computer Music - Synthesis, Composition and Performance", Schirmer Books: A Division of Macmillan, Inc - New York, 1985.
- [Xenakis 71]** Xenakis I., "Formalized Music", Indiana University Press, Bloomington, 1971.
- [Jones 81]** Jones, K., "Compositional Applications of Stochastic Processes", Computer Journal 5(2): 45-61, 1981.
- [Ricieri 90]** Ricieri, A. P., "Fractais e Caos: A Matemática de Hoje", Prandiano Edições São Paulo, 1990.
- [Mandelbrot 83]** Mandelbrot, B. B., "The Fractal Geometry of Nature", Freeman W.H. & Company, New York, 1983.
- [Barnsley 88]** Barnsley, M., "Fractals Everywhere", San Diego: Academic Press Inc, ISBN 0-12-079062-9, 1988.
- [Gogins 91]** Gogins, M., "Iterated Functions Systems Music", Computer Music Journal 12(3): 10-14, 1991.
- [Gomes 98]** Gomes, J.; Velho, L., "Computação Gráfica", Rio de Janeiro - RJ, IMPA, pp.20-27, 1998.
- [Boldrini 80]** Boldrini, J.L.; Costa, S.I.R.; Ribeiro, V.L.F.F.; Wetzler, H.G., "Álgebra Linear", Harper & Row do Brasil, São Paulo - SP, 1980.
- [Cassandras 93]** Cassandras, C.G., "Discrete event systems: modeling and performance analysis", Akesen Associates Incorporated Publishers, 1993.
- [Gleick 88]** Gleick, J., "Caos - A Criação de uma Nova Ciência", Editora Campus, Rio de Janeiro, 1988
- [Ruelle 93]** Ruelle, D., "Acaso e Caos", Tradução de Roberto Leal Ferreira - Ed. da Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 1993.
- [Ferrara 94]** Ferrara, N. F.; Prado, C.P.C., "Caos uma Introdução", Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1994.
- [Peitgen 92]** Peitgen, H. O.; Jürgens, S.; Saupe, D., "Fractals for the Classroom- Part One-Introduction to Fractals and Chaos", Springer - Verlag, New York - 1992.

- [Edgar 90]** Edgar, G.A., "*Measure, Topology and Fractal Geometry*", Springer - Verlag, New York Inc, 1990.
- [Peitgen 86]** Peitgen,H.O.;Richter, P.H., "*The Beauty of Fractals*" , *Images of Complex Dynamical Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986.
- [Roads 89]** Roads, C., "*The Computer Music Tutotial*", MIT Press, Cambridge, Massachusetts – Londos, England, 1989.
- [Foote 99]** Foote, J., "*Visualizing Music and Audio using Self-Similarity* ", ACM Multimedia '99 10/99 Orlando, FL, USA ,ACM 1-58113-151-8/99/0010, 1999.
- [Roederer 73]** Roederer, J.G., "*Introduction to the Physics and Psychophysics of Music* " Springer-Verlag New York Inc. Library of Congress Catalog Card , 1973.
- [Manzoli 96]** Manzoli, J.; Damiani, F., "*Spectral Morphs Using Iterated Function Systems*", Anais do III Simpósio Brasileiro de Computação e Música, 1996.
- [Soille 96]** Soille, P.; Rivest, J.F.; "*On the Validity of Fractal Dimension Measurements in Image Analysis*", Journal of Visual Communication and Image Representation, Vol.7, N°. 3, September, pp.217-229, 1996.
- [Haralick 87]** Haralick, R.M.; Sternberg S.R.; Zhuang X., "*Image Analysis Using Mathematical Morphology*", IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol PAMI-9, n°.4, July 1987.
- [Dougherty 92]** Dougherty, E., "*An Introduction to Morphological Image Processing*", SPIE, Optical Engineering Press, 1992.
- [Serra 88]** Serra J., "*Image Analysis and Mathematical Morphology*", vol.2, Theoretical Advances, Academic Press, London, 1988.
- [Banon 94]** Banon, G.J.F.; Barrera, J. "*Bases da Morfologia Matemática para a Análise de Imagens Binárias*", IX Escola de Computação, 1994.
- [Moore 90]** Moore, F.R.; "*Elements of Computer Music*", Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster, New Jersey,1990
- [Roads 89]** Roads, C.; "*The Music Machine: selected readings from Computer Music Journal*", The Mit Press, Cambridge, Massachusetts; London, England ,1989.