



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Telemática

Investimento e Produção de Múltiplos Itens em Presença de Incertezas

Dissertação de Mestrado

Autor: **Edilson Fernandes de Arruda**

Orientador: **Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val - FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. José Leandro Félix Salles - UFES

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes - FEEC/UNICAMP

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

29 de Abril de 2002

Ando devagar porque já tive pressa
E levo esse sorriso porque já chorei demais
(Almir Sater, Renato Teixeira)

Agradecimentos

- A meus pais, pelo incentivo e apoio incondicionais.
- A todos os super-heróis de minha infância, por me fazerem entender que é impossível resolver todos os problemas.
- Ao professor João Bosco, meu orientador, pelo apoio, incentivo e competência, que tornaram possível a solução dos problemas apresentados neste trabalho.
- A todos os leitores, em especial àqueles que, ao lerem esta dissertação, possam sentir-se um pouco co-autores dela.
- À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho desenvolve-se um modelo que serve aos problemas de produção e estoque de múltiplos itens, expansão de capacidade com diferentes classes de unidades de serviços e filas com servidor removível e diferentes classes de clientes. Utiliza-se a classe de *processos markovianos determinísticos por partes* e adota-se uma hipótese sobre o valor global de cada lote produzido, supondo que este seja uma variável aleatória exponencialmente distribuída. Considera-se a classe de controles estocásticos por intervenções, que consiste na mudança do item em fabricação ou na paralisação da produção em qualquer instante. A adoção da hipótese acima mencionada permite a simplificação da solução analítica do problema de otimização estocástica, e dos procedimentos computacionais de busca da solução ótima para esse problema. Para o modelo adotado, obtém-se um critério de decisão baseado apenas no estoque atual do sistema. A classe de políticas de controle obtida é denominada classe de políticas simples, e consiste na composição de regiões de produção para cada um dos produtos fabricados com uma região de paralisação, onde nenhum dos produtos é fabricado.

Abstract

We deal with a class of models for production/inventory problems of many classes of items, or capacity expansion problems with various classes of facilities or queueing problems with removable server and various classes of clients. Piecewise deterministic Markov processes are employed and an assumption concerning the global value of each item is adopted: it is assumed that it is an exponentially distributed random variable. Impulsive control is considered, consisting on interventions on the product in production, changing instantaneously the item in production or stopping the production process. The hypothesis mentioned above make it possible to simplify both the analytical solution of the stochastic optimization problem and the computational procedure that seeks the optimal solution for this problems. A decision criterion based only on the current inventory level of the system is obtained. The control policy is named simple policy since it depends on the storage/backlog level only, and it provides production regions for each product and a paralyzation region, where no item is produced.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Apresentação do sistema estudado	2
1.2	O problema de controle contínuo	4
1.3	O problema de controle impulsional	5
1.4	O problema de produção e estoque	6
1.5	O problema de expansão de capacidade	7
1.6	O problema de filas com servidor removível	8
1.7	Objetivos propostos	9
2	Problemas de um item	11
2.1	Solução do problema de controle contínuo	11
2.2	O operador <i>um salto</i>	12
2.3	Formulação do problema de controle impulsional	13
2.3.1	Definições e hipóteses	15
2.4	O operador <i>um salto ou uma intervenção</i>	15
2.5	Solução dos problemas de um item	17
2.6	Políticas de controle para o problema de um item	18
3	Problemas de múltiplos itens	22
3.1	Apresentação do sistema	22
3.2	O problema de controle impulsional	25
3.2.1	Definições e hipóteses	27
3.3	O operador <i>um salto ou uma intervenção</i>	28
3.4	Operadores e propriedades importantes	30
3.5	Solução do problema <i>PI</i>	32

4	Procedimentos recursivos	36
4.1	Algoritmos para problemas de um item	36
4.1.1	Atribuição das condições de contorno	38
4.1.2	Redução do espaço de estados	39
4.2	Algoritmos para problemas de múltiplos itens	41
5	Resultados numéricos	43
5.1	Resultados do problema de um item	43
5.2	Resultados do problema de múltiplos itens	48
6	Conclusões	53
A	Resultados auxiliares do capítulo 2	55
A.1	Resultados auxiliares da seção 2.2	55
A.2	Resultados auxiliares da seção 2.5	58
B	Resultados auxiliares da seção 4.1.2	60

Lista de Tabelas

4.1	Iterações e tempo de processamento dos exemplos apresentados na tabela 5.1	38
4.2	Iterações e tempo de processamento dos exemplos apresentados na tabela 5.2	42
5.1	Casos numéricos para o problema de um item	44
5.2	Casos numéricos para o problema de múltiplos itens	52

Lista de Figuras

1.1	Trajectoria do processo ξ_t	2
1.2	Trajectoria típica do processo (η_t, ξ_t)	4
1.3	Trajectoria típica do problema de controle impulsional	6
2.1	Política geral de controle para o problema PC	18
2.2	Política de controle IUC para o problema PC	19
2.3	Política de controle FRD para o problema PC	19
2.4	Política de controle $cutoff$ para o problema PC	20
2.5	Política simples para o problema PI	21
3.1	Evolução de ξ_t para $p = 2$	24
4.1	Função valor para o caso F (h linear)	39
4.2	Função valor para o caso H (h quadrático)	39
4.3	Caso H: comparação de W e V para $z \in S'$	40
4.4	Caso H: comparação de W e V para $z \in S''$	41
5.1	Estratégia de produção para o caso A	45
5.2	Estratégia de produção para o caso B	45
5.3	Estratégia de produção para o caso C	46
5.4	Estratégia de produção para o caso D	46
5.5	Estratégia de produção para o caso E	46
5.6	Estratégia de produção para o caso F	47
5.7	Estratégia de produção para o caso G	47
5.8	Estratégia de produção para o caso H	48
5.9	Estratégia de produção para o caso I	49
5.10	Estratégia de produção para o caso J	50

5.11 Exemplo de trajetória para o caso I	51
--	----

Notação e Simbologia

$:=$ Igual por definição

$\mathbb{1}_A$ Função indicadora do conjunto A

A/B Diferença entre os conjuntos A e B

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}_+$ Conjunto dos números reais positivos

$x \wedge y$ Mínimo entre x e y

P_z A lei de probabilidade markoviana de z_t iniciando em z

$E_y[x] = E[x|y]$ Valor esperado da variável aleatória x dado y

$\|\cdot\|$ Norma sup

$|\cdot|$ Valor absoluto

$B(S)$ Classe de funções limitadas sobre S

Capítulo 1

Introdução

Na literatura existem vários trabalhos envolvendo problemas de produção e estoque (*PE*), expansão de capacidade (*EC*) e filas com servidor removível (*FSR*). Todavia, a maior parte desses trabalhos trata de casos mais simples: problemas *PE* de um único produto, problemas *EC* que envolvam uma única classe de projetos de expansão ou problemas *FSR* com uma única classe de clientes e sem penalização devido a mudança de operação.

Por outro lado, é comum encontrarmos sistemas mais complexos, tais como unidades fabris encarregadas da produção de mais de um bem de consumo (*problemas PE*), unidades de suprimento onde se dispõe de mais de uma alternativa de projetos de expansão (*problemas EC*), ou servidores responsáveis pelo processamento de tarefas de várias classes diferentes de clientes.

O presente trabalho visa obter e sistematizar a solução desses problemas mais complexos, aqui denominados problemas de múltiplos itens, beneficiando-se de resultados já existentes na literatura para problemas mais simples, aqui chamados de problemas de um item. Dentre esses resultados, os mais utilizados são aqueles encontrados em (Salles and do Val, 2000), (Salles, 1999) e (Monticino and Weisinger, 1995), onde o processo é modelado de acordo com a classe de processos markovianos denominada Processos Markovianos Determinísticos por Partes (*PMDP*), vide (Davis, 1993) e (Gatarek, 1992). Através da utilização dos resultados mencionados, pretende-se tornar mais simples a formulação dos problemas estudados, bem como obter políticas de controle de fácil implementação em sistemas reais, considerando-se uma hipótese simplificadora.

A formulação dos problemas segue de perto aquela encontrada em (Salles, 1999), o que possibilita a obtenção de políticas ótimas de decisão baseadas no estado corrente do sistema. A adoção de custos totais de conclusão por unidade de produto (*problemas PE*), unidade de expansão (*problemas EC*) ou unidade de serviço (*problemas FSR*) exponencialmente distribuídos e ilimitados possibilita

a obtenção de políticas de decisão simples, baseadas apenas no nível de estoque¹ do sistema. Para problemas mais complexos, busca-se obter regiões do espaço de estados onde a política ótima é não intervir e, para as regiões de intervenção, o objetivo é a caracterização da intervenção. Caracterizar a intervenção no caso de múltiplos itens significa, tomando como exemplo os problemas *PE*, especificar qual produto passará a ser produzido quando se intervém no sistema.

Segue uma apresentação detalhada de um problema genérico de um item cuja representação pode ser facilmente adaptada para os três problemas estudados. A seguir são formulados problemas de controle ótimo para o problema genérico. Finalmente, voltando-se aos problemas originais, é feita uma associação das variáveis do problema genérico com os parâmetros dos problemas de produção e estoque, expansão de capacidade e filas com servidor removível.

1.1 Apresentação do sistema estudado

Considere um sistema responsável pela fabricação de determinado produto. Esse produto é fabricado em lotes individuais de K unidades e pode ser um bem de consumo ou um serviço oferecido. A fabricação desse produto evolui a uma taxa normalizada $u_t \in [0, 1], \forall t \geq 0$ e a progressão da produção de cada lote de itens em fabricação é representada pelo processo contínuo $t \rightarrow \xi_t$, definido como:

$$\xi_t = \int_{\theta}^t u_s ds \quad (1.1)$$

onde $\theta \in [0, t)$ é o instante de conclusão do lote de K itens previamente fabricado. Um lote é completado quando a progressão da produção chega a um certo valor dado por Γ ; logo, $0 \leq \xi_t \leq \Gamma, \forall t \geq 0$. Assume-se neste trabalho que, para cada lote fabricado, $\Gamma \in [0, \infty)$ é uma variável aleatória exponencialmente distribuída com taxa γ . A figura 1.1 exemplifica a trajetória do processo $t \rightarrow \xi_t$, onde Γ_i representa o esforço total de produção do i -ésimo lote de itens.

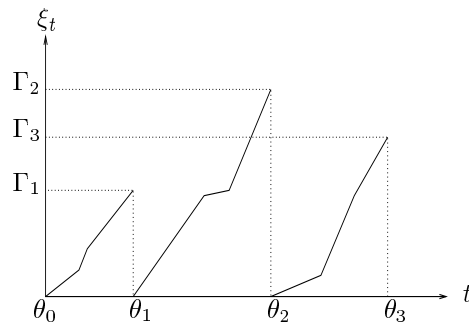


Figura 1.1: Trajetória do processo ξ_t

¹por nível de estoque entenda-se o nível de estoque/déficit para *problemas PE*, o nível de sobre/sub-capacidade para *problemas EC* ou o tamanho da fila para *problemas FSR*

Representa-se a produção acumulada até um determinado instante t pelo processo discreto $t \rightarrow q_t$, que obedece a seguinte equação:

$$q_t = \sum_i K \mathbb{I}_{\{\theta_i \leq t\}}, \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

Supõe-se também que as solicitações de compra dos clientes chegam em instantes e quantidades aleatórios, e que as chegadas de demanda formam um processo de Poisson com taxa $\delta > 0$. Assim, os pedidos formam uma seqüência de variáveis aleatórias discretas independentes e identicamente distribuídas (*iid*) denotadas por ω_i , com distribuição $p_k, k = 1, 2, \dots, l$; onde l é o maior tamanho de pedidos a ser aceito e $p_k = P(\omega_i = k)$.

Seja $\sigma_i, i = 1, 2, \dots$ a seqüência de instantes de chegada de clientes. Por conseguinte, a demanda acumulada até um determinado instante t é definida pelo processo $t \rightarrow d_t$, dado por:

$$d_t = \sum_i \omega_i \mathbb{I}_{\{\sigma_i \leq t\}}, \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

Tendo em vista a formulação acima, a quantidade de itens em estoque ou sob encomenda é expressa pelo processo discreto $t \rightarrow \eta_t$ assim definido:

$$\eta_t = q_t - d_t, \quad t \geq 0 \quad (1.4)$$

Seja $\bar{N} = \{N^-, \dots, N^+\} \subset \mathbb{Z}$ um conjunto enumerável, onde N^- representa o menor nível de estoque do sistema e N^+ representa o máximo estoque admitido para o sistema. O processo $t \rightarrow z_t = (\eta_t, \xi_t)$ toma valores em um conjunto $S := \bar{N} \times \mathbb{R}_+$ e apresenta uma trajetória determinística intercalada por saltos aleatórios, que ocorrem quando da chegada de clientes ou da conclusão de um lote de itens. Considerando que é aplicada ao sistema uma taxa de produção normalizada $u_t = a$, $a \in [0, 1]$ para todo instante $t \geq 0$, a taxa total de saltos do processo é expressa por:

$$\lambda(a) = \delta + \gamma a \quad (1.5)$$

O processo possui também uma medida de probabilidade de saltos $\mu(z', z)$ dada pela seguinte relação:

$$\mu(z', z | u = a) = \frac{\delta}{\lambda(a)} P(z' - z = \omega) + \frac{\gamma a}{\lambda(a)} \mathbb{I}_{\{z - z' = K\}} \quad (1.6)$$

onde considera-se que o processo salta de z' para z .

A figura 1.2 mostra uma trajetória típica do processo (η_t, ξ_t) para $K = 2$. Note que nos instantes de conclusão θ_i , o processo salta de $(\eta_{\theta_i-}, \Gamma)$ para $(\eta_{\theta_i-} + K, 0)$, ao passo que nos instantes de chegada de clientes o processo salta de $(\eta_{\sigma_i-}, \xi_{\sigma_i-})$ para $(\eta_{\sigma_i-} - \omega_i, \xi_{\sigma_i-})$.

Observação:

Considere a seguinte noção de estabilidade. O sistema será estável se conseguir suprir a demanda em todo instante t . Em outras palavras, a estabilidade do sistema será garantida se, para todo $t > 0$,

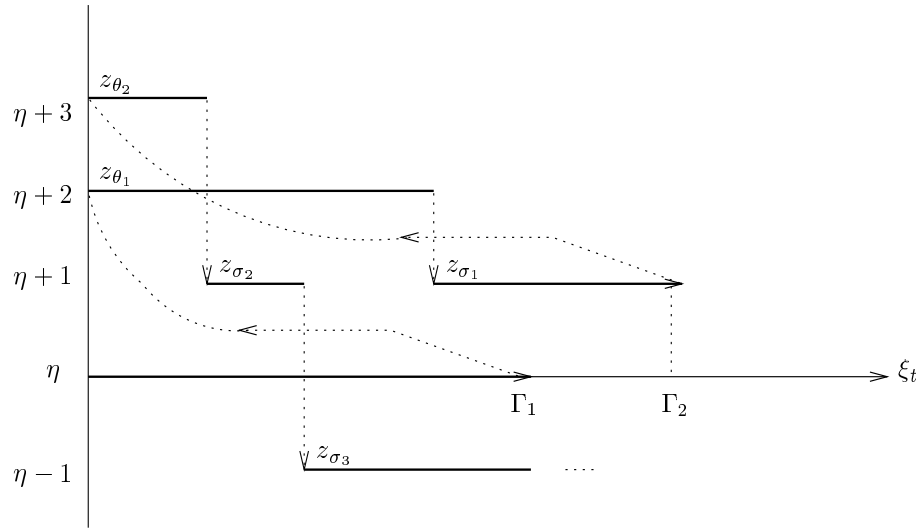


Figura 1.2: Trajetória típica do processo (η_t, ξ_t)

o valor esperado de itens produzidos for maior que o total esperado de itens solicitados, de acordo com a seguinte equação:

$$\delta \sum_{k=1}^l k p_k < \gamma K \quad (1.7)$$

1.2 O problema de controle contínuo

Considere o sistema descrito na seção anterior e imagine que esse sistema dispõe de um decisor encarregado de optar pela política de produção que minimize o custo esperado de operação do sistema em horizonte infinito. Imagine também que a única variável que o decisor tem sob seu poder é a taxa normalizada de produção ao longo do tempo, u_t .

Seja $\alpha > 0$ uma taxa de desconto e β uma constante positiva representando o custo de produção de cada lote de K itens por unidade de tempo. Define-se uma função convexa $\eta \rightarrow L(\eta)$ que representa o custo de estocagem (para o caso de $\eta_t > 0$) ou déficit (quando η_t for negativo). O problema de controle contínuo consiste na determinação da política de produção u_t que minimiza a *função valor* $V : \bar{N} \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ do processo $t \rightarrow z_t$ definida como:

$$V(z) := \inf_{u \in U} E_z^u \left\{ \int_0^\tau e^{-\alpha t} (L(\eta_t) + \beta u_t) dt + e^{-\alpha \tau} \Psi(z_\tau) \right\} \quad (1.8)$$

onde $z_0 = (\eta, \xi)$ é o valor inicial do processo e $\tau = \inf\{t \geq 0 : \eta_t \leq N^- \text{ ou } \eta_t \geq N^+\}$. O valor esperado é calculado em relação ao processo $z_t, t \geq 0$ e o ínfimo é decidido sobre a classe de controles realimentados $U = \{u : \bar{N} \times [0, \Gamma] \rightarrow [0, 1]\}$.

Este problema de controle é desenvolvido no capítulo 2, onde se verifica que sua solução consiste na adoção de uma política u_t^* do tipo *bang-bang* que tome apenas os valores extremos (0 e 1) de u_t . Dessa maneira, o espaço de estados do problema de controle contínuo pode ser dividido em duas regiões distintas:

- A região de produção, onde se fabrica o produto à máxima taxa possível ($u_t = 1$);
- A região de não-produção, onde a fabricação do produto é paralisada ($u_t = 0$).

Trata-se de uma política atraente dada sua simplicidade e sua facilidade de implementação. Ora, as ações de controle estão limitadas em iniciar/reiniciar a produção ou paralisá-la. Não obstante, as ações de paralisação e/ou retomada da produção podem gerar custos adicionais à operação do sistema, custos esses não previstos na formulação do problema de controle contínuo.

No sentido de aproveitar os resultados obtidos para o problema de controle contínuo e inserir na formulação os custos de paralisação e reinício da produção, existe uma outra abordagem de controle denominada *problema de controle impulsional*. Para esse problema considera-se que a variável u_t assume apenas os valores extremos (0 e 1) e que o decisor tem o poder de paralisar ou reiniciar o sistema sempre que julgar conveniente. A seguir são detalhadas as idéias do problema de controle impulsional.

1.3 O problema de controle impulsional

Considera-se, para o sistema apresentado, que a variável u_t , definida pela equação (1.1) assume apenas os valores do conjunto $\{0, 1\}$. Na prática, isso significa que estamos dividindo o espaço de estados S do processo $t \rightarrow z_t$ em duas cópias idênticas representadas por S' e S'' . Considera-se que o processo $t \rightarrow z_t$ evolui ora no subconjunto $S' := \bar{N} \times [0, \Gamma)$ (sempre que $u_t = 1$), ora no subconjunto $S'' := \bar{N} \times [0, \Gamma)$ (para todo $u_t = 0$). Portanto, não é sem razão que S' é denominado *subconjunto de produção*, enquanto S'' é chamado de *subconjunto de paralisação*. O espaço de estados do processo é dado por $S = S' \cup S''$.

Supõe-se também que o decisor desse sistema tem a capacidade de intervir de maneira a transferir-lo de S' para S'' , ou vice-versa, em instantes quaisquer, formando uma sequência τ_i de instantes aleatórios que representam as intervenções de controle no sistema. As intervenções devem, contudo, ser penalizadas.

A figura 1.3 mostra uma trajetória típica do processo $t \rightarrow z_t = (\eta_t, \xi_t)$. No subconjunto S' o processo $t \rightarrow z_t$ salta nos instantes de chegada de demanda ($\sigma_i, i = 1, 2$) e também nos instantes de conclusão de um novo lote de itens ($\theta_i, i = 1, 2$). No subconjunto S'' , o processo $t \rightarrow z_t$ apresenta apenas saltos por demanda ($t = \sigma_i, i = 3, 4$), permanecendo de outra forma no mesmo estado até o

próximo evento do tipo demanda (σ_i) ou intervenção (τ_i). Observe também na figura que o processo $t \rightarrow z_t$ é transferido de S' para S'' e vice-versa nos instantes τ_1 e τ_2 , respectivamente.

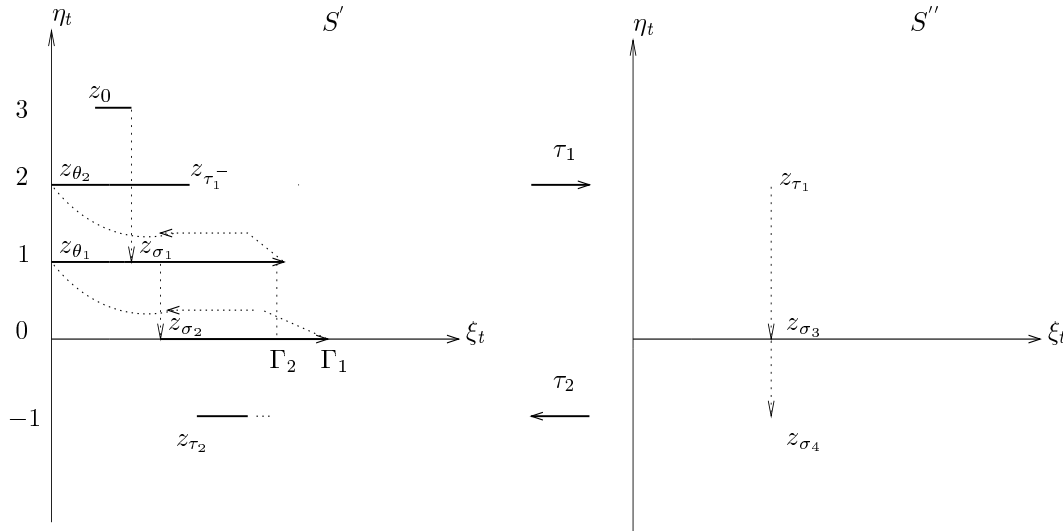


Figura 1.3: Trajetória típica do problema de controle impulsional

Define-se uma estratégia de produção pela seqüência de instantes de intervenção $\pi = \{\tau_1, \tau_2, \dots\} \in \Pi$, onde Π é a classe de todas as políticas de intervenção factíveis. Assume-se que as políticas de intervenção admissíveis são markovianas, e portanto têm o conhecimento completo do estado (η_t, ξ_t) e do subconjunto em que este se encontra (S' ou S''). Para cada estratégia de produção π associamos um certo custo de operação para o sistema. O operador desse sistema deve optar pela estratégia de produção que minimiza o custo esperado de operação do sistema em horizonte infinito, que é detalhado na seção 2.3.

A seguir são apresentados os problemas a serem abordados neste trabalho. É feita também a associação destes com o problema genérico definido anteriormente.

1.4 O problema de produção e estoque

O problema de Produção e Estoque (PE) é uma extensão do problema de controle de estoque padrão sujeito a demanda aleatória por itens. Diferentemente do problema de controle de estoque padrão, onde o estoque é controlado por um mecanismo que sugere que os itens são adquiridos de terceiros, no problema de Produção e Estoque as variáveis de controle são a taxa de produção dos itens em questão, bem como os instantes de início, reinício e/ou paralisação da produção. As decisões de controle devem ser tomadas de modo a minimizar o custo esperado de operação do sistema. Este custo é formado pelos seguintes elementos:

(i) Custo de armazenagem ou déficit de estoque

O custo de armazenagem leva em conta os gastos relacionados à manutenção e à operação das instalações de armazenagem; já o custo de déficit contempla os prejuízos relacionados à falta de itens em estoque para atender a demanda e à eventual perda de clientes por insatisfação ou por atrasos na entrega dos pedidos.

(ii) Custo de produção

São os gastos diretamente ligados à taxa de produção, tais como treinamento, despesas com empregados, aquisição de matéria-prima, aquisição e manutenção de equipamentos, etc.

(iii) Custo de ajuste (set up)

São os custos de paralisação e/ou reinício de produção. Estas despesas podem incluir demissão ou contratação de mão-de-obra, aquisição de equipamentos, gastos ocasionados pelo ajuste da linha de produção, custo associado a tempo de inatividade do sistema de produção, etc.

Para esse problema, η_t , dado pela equação (1.4), representa o nível de estoque ou déficit do sistema. O processo ξ_t , definido pela equação (1.1), representa o esforço de produção empregado no sistema. As variáveis aleatórias $(\Gamma_i, i = 1, 2, \dots)$, de distribuição exponencial e taxa γ , representam o esforço total de produção do i -ésimo lote de itens e formam uma sequência *iid*. O detalhamento das funções de custo de produção, armazenagem e ajuste (setup) é apresentado na seção 2.3.

1.5 O problema de expansão de capacidade

Expansão de Capacidade é o processo de se adicionar instalações de modo a satisfazer uma demanda crescente por um produto ou serviço. Cada novo projeto de expansão concluído representa um acréscimo de K unidades à capacidade total do sistema.

O problema de Expansão de Capacidade (*EC*) está normalmente relacionado a sistemas de grande porte e/ou alto valor agregado, tais como: sistemas de geração de energia, sistemas de comunicação, sistemas de manufatura de grandes itens, etc.

Nesse problema, persegue-se o equilíbrio entre oferta e demanda em horizonte infinito, por meio da construção de sucessivos projetos de expansão. As variáveis de controle são a taxa de investimento em expansão, bem como os instantes de início, retomada e/ou abandono de um projeto de expansão. As decisões de controle devem ser tomadas de modo a minimizar o custo esperado de operação do sistema, o qual recebe as seguintes contribuições:

(i) Custo de sobre ou sub-capacidade

O custo de sobre-capacidade está relacionado à capacidade ociosa do sistema, enquanto o

custo de sub-capacidade está relacionado à demanda não atendida pelo produto ou serviço oferecido.

(ii) Custo de expansão

São os custos diretamente relacionados aos projetos de expansão correntes, tais como: terceirização, contratação de mão-de-obra, aquisição de terrenos, matéria-prima e equipamentos, etc.

(iii) Custo de ajuste (set up)

Custos de paralisação e/ou reinício do projeto de expansão. Essas despesas podem incluir depreciação, rescisão de contratos, demissão e contratação de mão-de-obra, etc.

Para esse problema, η_t representa o nível de sobre ou sub-capacidade do sistema; ξ_t representa o valor já investido no projeto de expansão corrente. As variáveis aleatórias $(\Gamma_i, i = 1, 2, \dots)$, de distribuição exponencial e taxa γ , representam o custo do i -ésimo projeto de expansão e formam uma sequência *iid*. A seção 2.3 traz o detalhamento das funções de custo acima mencionadas.

1.6 O problema de filas com servidor removível

O problema de Filas com Servidor Removível (*FSR*) trata do gerenciamento das tarefas de um servidor responsável por um conjunto de usuários. Este servidor pode ser colocado fora de operação por determinado intervalo de tempo em decorrência de uma ação de controle.

Neste problema busca-se a minimização do custo de operação do sistema. Este custo está associado ao tempo de inatividade do servidor, à quantidade de clientes na fila e à paralisação e retomada do serviço.

As variáveis de controle desse problema são a taxa de processamento das tarefas do servidor, bem como os instantes de início, retomada e/ou paralisação da oferta de serviços por parte do servidor.

Para este problema, $\eta_t \in [0, N^+]$ representa o número de clientes na fila aguardando serviço; ξ_t representa a quantidade de tarefas requisitadas ao servidor. As variáveis aleatórias $(\Gamma_i, i = 1, 2, \dots)$, de distribuição exponencial e taxa γ , representam o total de tarefas requisitadas pelo i -ésimo cliente e formam uma sequência *iid*. As funções de custo mencionadas nessa seção são detalhadas na seção 2.3.

1.7 Objetivos propostos

A primeira contribuição desse trabalho é a simplificação dos resultados obtidos em (Salles, 1999) para o problema de controle impulsional, por meio da adoção de custos de conclusão Γ exponencialmente distribuídos e ilimitados. A adoção dessa hipótese simplificadora permite que a política ótima de gerenciamento do sistema seja uma política de limiares. Isto é, a política ótima não se altera até que o estoque chegue a um limiar a ser determinado. Para valores de estoque superiores a esse limiar, a política ótima obriga uma mudança de operação (de S' para S'' ou vice-versa).

Esse trabalho se propõe a obter e caracterizar as soluções para os problemas de controle impulsional de um item, fazendo uso da hipótese simplificadora mencionada. A seguir, fazendo uso dos resultados obtidos para esse problema, busca-se generalizar sua formulação e seus resultados para problemas de múltiplos itens, no intuito de obter políticas de controle de limiar para os problemas *PE*, *EC* e *FSR* que envolvam mais de um item. Para tanto, a adoção da hipótese simplificadora permite que se possa reduzir o espaço de estados e caracterizar a solução ótima por meio de equações a diferenças não lineares, como é mostrado no decorrer desta dissertação. Essa abordagem torna o problema mais tratável matematicamente e computacionalmente e permite que se possa obter soluções ótimas em situações onde seria inviável obtê-las não fazendo uso da hipótese simplificadora.

A formulação utilizada neste trabalho pode trazer perdas em relação àquela encontrada (Salles, 1999), principalmente no que diz respeito à qualidade da solução obtida. No entanto, além das vantagens mencionadas acima, a sua formulação pode ser justificada como forma de obter rapidamente uma solução sub-ótima para o problema mais geral.

Outra contribuição desse trabalho é a elaboração de algoritmos para solução dos problemas propostos de um e múltiplos itens, com base nas equações de otimalidade desses problemas. Da análise desses algoritmos são propostas e implementadas algumas idéias com respeito a procedimentos de aceleração de convergência.

O capítulo 2 é dedicado aos sistemas de produção de um único item. Primeiro mostra-se que o problema de controle contínuo pode ser considerado como uma particularização do problema de controle impulsional quando aplicado a esses sistemas. Em seguida obtém-se a solução do problema de controle impulsional de um item. Para fechar o capítulo, apresenta-se uma discussão acerca das políticas de controle encontradas na literatura para o problema de controle contínuo, e introduz-se a classe de *políticas simples de intervenção*, obtida neste trabalho para o problema de controle impulsional.

No capítulo 3 resolve-se o problema de controle impulsional aplicado a sistemas de produção de múltiplos itens. Inicia-se o capítulo com uma apresentação dos sistemas em questão. A seguir,

formula-se o problema de controle impulsional aplicado a esses sistemas, e introduz-se um operador que resolve o problema de otimização estocástica no horizonte do primeiro salto ou da primeira intervenção, o que ocorrer primeiro. Finalmente, apresenta-se a solução do problema, caracterizada em função desse operador.

No capítulo 4 apresenta-se os procedimentos recursivos elaborados para a solução dos problemas de controle impulsional aplicados a sistemas de produção de um único item e de múltiplos itens. Apresenta-se uma breve discussão acerca do comportamento da função valor que soluciona o problema de um item e também sugere-se procedimentos de aceleração da convergência para esse problema.

Apresenta-se, no capítulo 5, resultados numéricos obtidos para os problemas de um único item e de múltiplos itens. No capítulo 6 apresenta-se as conclusões do trabalho, bem como sugestões de trabalhos futuros concernentes ao tema dessa dissertação.

Capítulo 2

Problemas de um item

A proposta desse capítulo é mostrar que a política ótima para o problema de controle contínuo é uma política do tipo *bang-bang*, o que caracteriza esse problema como uma particularização do problema de controle impulsional, quando se desconsidera o custo de intervenção. Mostra-se também que a função valor do problema de controle contínuo é função apenas do nível de estoque quando se considera o custo de conclusão Γ como exponencialmente distribuído e ilimitado, isto é, que os custos finais de operação do sistema não dependem da variável progressão da produção ξ , mas somente do nível de estoque η .

Em seguida formula-se o problema de controle impulsional e sua solução é caracterizada. Fica demonstrado que a função valor do problema depende apenas do nível de estoque η e da função valor de intervenção g , não variando em função da variável progressão da produção ξ .

Finalmente, apresenta-se uma discussão acerca das políticas de controle obtidas na literatura para o problema de controle contínuo. Também é caracterizada a *política simples*, obtida neste trabalho para o problema de controle impulsional. Trata-se de uma política de controle de limiares, onde devem ser determinados dois limiares de estoque distintos (para S' e S'') tais que a política ótima não se altera até que o nível de estoque chegue ao limiar correspondente ao subconjunto de operação. Para valores de estoque superiores a esse limiar, a política ótima prevê transferência de subconjunto (de S' para S'' ou vice-versa)

2.1 Solução do problema de controle contínuo

Considera-se o problema de controle contínuo apresentado na seção 1.2. Assume-se que o custo de conclusão de um lote de itens Γ é uma variável aleatória distribuída exponencialmente com taxa γ . Portanto, o custo de conclusão do k -ésimo lote de itens (ξ_{θ_k}) será uma variável aleatória com a

seguinte distribuição:

$$P(\xi_{\theta_k} < \xi) := H(\xi) = 1 - e^{-\gamma\xi} \quad (2.1)$$

Supondo que, para todo instante $t \geq 0$, aplica-se uma ação de controle normalizada $u_t = a$, $a \in [0, 1]$, a taxa total de saltos do processo é dada por $\lambda(a)$, definida pela equação (1.5), onde γa pode ser vista como a taxa instantânea de saltos por conclusão de novos lotes quando $u_t = a$.

Assume-se que o k -ésimo salto do processo $t \rightarrow z_t$ ocorre no instante T_k . Entre saltos consecutivos, o processo $t \rightarrow z_t$ percorre uma trajetória determinística descrita pela seguinte função:

$$\varphi(s; (\eta_t, \xi_t)) = \begin{pmatrix} \eta_t \\ \xi_t + \int_t^s u_r dr \end{pmatrix}, \quad T_k \leq t \leq s < T_{k+1} \quad (2.2)$$

Seja a função valor do processo definida em (1.8). Na próxima seção é definido o operador de “um salto”, que resolve um problema de otimização no horizonte do primeiro salto do processo $t \rightarrow z_t$. Isso é feito com vistas a obter a solução do problema original aplicando sucessivas vezes esse operador até que se chegue à solução do problema original, que pode ser visto como uma composição de infinitos problemas de um salto.

2.2 O operador *um salto*

Seja o conjunto das ações de controle factíveis dado por $U = \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1], u \text{ é mensurável}\}$. Seja $\phi : \bar{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in B(S)$ e defina-se os seguintes operadores:

$$\mathcal{T}_u[\phi](\eta, \xi) = E_z^u \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha t} [L(\eta) + \beta u(s)] ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \right\} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{T}[\phi](\eta, \xi) = \inf_{u \in U} \mathcal{T}_u[\phi](\eta, \xi) \quad (2.4)$$

No Apêndice A é apresentada a solução do problema de controle contínuo no horizonte do primeiro salto por demanda ou conclusão. Mostra-se que a política ótima para esse problema é uma política do tipo *bang-bang*. Além disso, mostra-se que, para funções ϕ invariantes em relação à variável progressão da produção ($\phi(z) = \phi(\eta)$), o operador $\mathcal{T}[\phi]$ depende apenas do nível de estoque do sistema. Logo, podemos concluir que o problema de controle contínuo é um caso particular do problema de controle impulsional quando o custo é na forma $L(\eta) + \beta u$ e a dinâmica $\dot{\xi} = u$ é linear em relação a u .

Portanto, por ser o problema de controle contínuo uma particularização do problema de controle impulsional, opta-se nesse trabalho por formular e solucionar esse último. Essa opção leva em

consideração o fato de que o problema de controle contínuo não permite a inclusão da função custo de intervenção $g : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ na sua formulação. Além disso, a partir dos resultados obtidos para o problema de controle impulsional, pode-se chegar à solução do problema de controle contínuo ao se estabelecer $g \equiv 0$ (Salles, 1999). Segue detalhamento do problema de controle impulsional apresentado na seção 1.3.

2.3 Formulação do problema de controle impulsional

Considere o problema de controle impulsional apresentado na seção 1.3. O processo $t \rightarrow z_t$ é essencialmente o mesmo apresentado na seção 1.1, com algumas simplificações na notação, visto que se assume $u_t \in \{0, 1\}$, $\forall t \geq 0$. Os parâmetros cuja notação pode ser simplificada são redefinidos nessa seção com o intuito de facilitar a leitura.

Sejam η_t e ξ_t as variáveis definidas em (1.4) e (1.1), respectivamente. Como descrito na seção 1.3, o espaço de estados S é formado pela união de dois subconjuntos idênticos (S' e S''), que representam as regiões de produção ($u_t = 1$) e paralisação ($u_t = 0$), respectivamente.

O processo $t \rightarrow z_t$ toma valores em S e apresenta trajetória determinística intercalada por saltos aleatórios que ocorrem por ocasião da chegada de demanda ou da conclusão de um lote de itens do produto fabricado. A taxa total de saltos do processo é dada por:

$$\begin{aligned} \lambda &= \delta + \gamma \quad \forall z \in S' \\ \lambda &= \delta \quad \forall z \in S'' \end{aligned} \tag{2.5}$$

Assume-se que o k -ésimo salto do processo $t \rightarrow z_t$ ocorre no instante T_k , com $T_0 = 0$. Assim, considera-se a seqüência ordenada de instantes de salto do processo $\{T_k, k = 0, 1, \dots\}$, cuja distribuição de probabilidade entre saltos é expressa pela seguinte equação:

$$P(T_{k+1} - T_k > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \tag{2.6}$$

Entre saltos, o processo $t \rightarrow z_t = (\eta_t, \xi_t) \in S$ obedece uma trajetória determinística representada pela seguinte função:

$$\varphi(t, z) = \begin{cases} (\eta, t + \xi), & T_k \leq t \leq T_{k+1} \quad \forall z \in S' \\ (\eta, \xi), & T_k \leq t \leq T_{k+1} \quad \forall z \in S'' \end{cases} \tag{2.7}$$

O processo $t \rightarrow z_t$ possui também uma medida de probabilidade de saltos definida como:

$$\mu(z', z) = \frac{\delta}{\lambda} P(z' - z = \omega) + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I}_{\{z - z' = K, z \in S'\}}$$

assumindo-se que o processo salta de z' para z .

O problema de Controle Impulsional (*PI*) é caracterizado por intervenções que transferem o processo z_t de S' para S'' ou vice-versa, pagando-se por isso um custo instantâneo dado por uma função $g : S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Cabe lembrar que as intervenções ocorrem em instantes aleatórios τ_i . Entre os instantes de intervenção, um custo, dado por uma função $h : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, é associado à evolução do processo.

Seja a função $h(\eta)$ definida por:

$$h(\eta) := L(\eta) + \beta \mathbb{1}_{\{\eta \in S'\}} \quad \forall \eta \in S \quad (2.8)$$

onde $\beta > 0$ é o custo de produção de cada lote de K itens por unidade de tempo; e $\eta \rightarrow L(\eta)$, uma função convexa representativa do custo de estoque ($\eta > 0$) ou déficit ($\eta \leq 0$) de itens no problema *PE*.

Para o problema *EC*, descrito na seção 1.5, a função $\eta \rightarrow L(\eta)$ representa o custo associado à capacidade ociosa do sistema ou à demanda não atendida em caso de déficit, enquanto β representa o investimento em expansão por unidade de tempo. Já para o problema *FSR*, descrito na seção 1.6, $\eta \rightarrow L(\eta)$ é uma função de penalização proporcional ao tamanho da fila, ao passo que β é a taxa instantânea de processamento das tarefas do servidor. Para esse problema temos a seguinte restrição: $\bar{N} \subseteq \mathbb{N}$.

Para cada política de intervenção factível $\pi = \{\tau_1, \tau_2, \dots\} \in \Pi$ definida na seção 1.3, associamos uma *função valor* $V : \bar{N} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V(z) := \inf_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^\tau e^{-\alpha s} h(z_s) + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha \tau_i} g(z_{\tau_i-}) + e^{-\alpha \tau} \Psi(z_\tau) \right\} \quad (2.9)$$

onde α é a taxa de desconto, $z = z_0$ é o valor inicial do processo $t \rightarrow z_t$ e $\tau = \inf\{t \geq 0 : \eta_t \leq N^- \text{ ou } \eta_t \geq N^+\}$.

As características do processo $t \rightarrow z_t$ sugerem seu modelamento por meio de uma classe de processos markovianos denominada Processos Markovianos Determinísticos por Partes (PMDP). Introduzidos por Davis (Davis, 1984), os PMDP fornecem suporte matemático consistente para o tratamento dos problemas abordados e contemplam sua principal característica, a saber: trajetória determinística intercalada por saltos aleatórios.

A solução desse problema consiste em dividir o problema geral em uma série de problemas de um único salto ou uma única intervenção (o que ocorrer no menor horizonte) para depois recuperar a solução geral do problema fazendo o número de saltos tender a infinito. Segue a formulação desse processo de solução para o problema de um item.

Observação:

Para os três problemas abordados no capítulo 1, $g : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função de penalização por

intervenção no sistema, denominada de *custo de ajuste (set up)* e não incluída na formulação do problema de controle contínuo.

2.3.1 Definições e hipóteses

Considere o problema de controle impulsional (*PI*) apresentado na seção anterior. Assuma que no instante de intervenção $\tau = t$ o processo $s \rightarrow z_s, 0 \leq s \leq t$ é transferido do estado $z_{t-} = \lim_{s \uparrow t} z_s = (\eta, \xi) \in S'$ para o estado $\bar{z} = (\eta, \xi) \in S''$ (ou vice-versa), do espaço de estados S .

Designa-se por $B(S)$ o conjunto das funções limitadas em S . Assume-se que o problema *PI* satisfaz as seguintes hipóteses:

A₁: h, g e $\psi \in B(S)$. $h(z) = h(\eta)$, $\psi(z) = \psi(\eta)$, $g(z) = g(\eta)$. Ou seja, as funções h e ψ dependem apenas do nível de estoque η , sendo independentes da variável de progressão ξ . Já a função g depende do nível de estoque e do subconjunto em que o processo se encontra no instante de salto (S' ou S''), vide 2.9;

A₂: $g(\eta) \geq g_0 > 0$. Essa condição assegura a existência de penalizações por intervenção e a impossibilidade dessas intervenções serem recompensadas;

A₃: $L(\eta)$ é uma função convexa associada ao nível de estoque/déficit do sistema.

Dadas as hipóteses acima, a expressão (2.9) será independente da variável progressão da produção ξ , como será mostrado no capítulo 3.

2.4 O operador *um salto ou uma intervenção*

Nesta seção define-se a função valor do problema de controle impulsional no horizonte do primeiro salto ou intervenção, e apresenta-se os resultados obtidos para esse problema, com base em operadores definidos para as situações de intervenção antes da ocorrência do primeiro salto por demanda ou conclusão, ou não intervenção até esse instante. Os resultados obtidos podem ser vistos como particularizações dos resultados obtidos na seção 3.3 para o problema de controle impulsional de múltiplos itens, de modo que julga-se conveniente a omissão das provas, que podem ser encontradas na seção 3.3 para o problema mais geral referido acima.

Seja T_1 , que obedece à distribuição de probabilidade dada por (2.6), o instante de primeiro salto por conclusão ou demanda do processo $t \rightarrow z_t$. Para $\phi \in B(S)$, defina-se a seguinte medida de transição:

$$\mathcal{Q}[\phi](\eta) := E[\phi(\eta_{T_1}) | \eta_{T_1^-} = \eta] = \frac{\delta}{\lambda} \sum_{k=1}^l p_k \phi(\eta - k) + \frac{\gamma}{\lambda} \phi(\eta + K) \quad (2.10)$$

Para funções ϕ e $\psi \in B(S)$ são definidos os seguintes operadores:

$$R_t[\phi, \psi](\eta) := E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}) \mathbb{1}_{\{T_1 < t\}} + e^{-\alpha t} (\psi(\bar{\eta}) + g(\eta) \mathbb{1}_{\{t \leq T_1\}}) \right\} \quad (2.11)$$

$$R_2[\phi](\eta) := E_z \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}) \right\} \quad (2.12)$$

onde $\phi(\eta_{T_1})$ representa o custo final associado ao primeiro salto por conclusão ou demanda, ao passo que a terceira parcela da equação (2.11) representa o custo final associado à intervenção no instante t , sendo que $\psi(\bar{\eta})$ é o custo associado ao destino, em caso de intervenção, e $g(\eta)$ representa o custo de intervenção a partir do estado z_t . A parcela integral contida nas expressões (2.11) e (2.12) representa o custo de produção no horizonte do primeiro salto ou intervenção.

Sejam também definidos os seguintes operadores:

$$R_1[\phi, \psi](\eta) := \inf_{0 \leq t < \infty} R_t[\phi, \psi](\eta) \quad (2.13)$$

$$R[\phi, \psi](\eta) := R_1[\phi, \psi](\eta) \wedge R_2[\phi](\eta) \quad (2.14)$$

R_1 representa o custo mínimo de intervenção, enquanto R_2 representa o custo de não intervenção até o instante de primeiro salto (T_1). Assim, pode-se definir a função valor para o problema de um salto ou intervenção ($v : S \rightarrow \mathbb{R}_+$) da seguinte forma:

$$v(\eta) := R[\phi, \psi](\eta) \quad (2.15)$$

Note que o operador R_2 é equivalente aos operadores $\mathcal{T}_1$ (se $z \in S'$) e $\mathcal{T}_0$ (se $z \in S''$) do problema de controle contínuo apresentado no apêndice A e definidos em (A.4) e (A.5), respectivamente.

Lema 2.1 *Assuma A_1 . Então, $R_t[\phi, \psi](\eta)$ e $R_2[\phi](\eta)$, definidos em (2.11) e (2.12), respectivamente satisfazem às seguintes equações:*

$$R_t[\phi, \psi](\eta) = \int_0^t e^{-\hat{\lambda}s} \{h(\eta) + \lambda \mathcal{Q}[\phi](\eta)\} ds + e^{-\hat{\lambda}t} (\psi(\bar{\eta}) + g(\eta)) \quad (2.16)$$

$$R_2[\phi](\eta) = \int_0^\infty e^{-\hat{\lambda}s} \{h(\eta) + \lambda \mathcal{Q}[\phi](\eta)\} ds$$

onde $\hat{\lambda} := \alpha + \lambda$

Lema 2.2 *Assuma A_1 . Então v , definido em (2.15), satisfaz a seguinte equação:*

$$v(\eta) = \{\psi(\bar{\eta}) + g(\eta)\} \wedge R_2[\phi](\eta), \quad z \in S \quad (2.17)$$

Observe que a equação algébrica 2.17 possui uma única solução, que coincide com a função valor. A função valor v é a solução do problema de controle ótimo no horizonte do primeiro salto ou intervenção. Todavia, para recuperar o problema original, além de definir os operadores que resolvem o problema de um salto, é necessário provar que a aplicação sucessiva desses operadores leva à solução do problema original. Esse procedimento é detalhado na próxima seção.

2.5 Solução dos problemas de um item

Para solucionar o problema de um item faz-se uso de uma importante propriedade dos operadores de programação dinâmica: a contratividade. A idéia é provar que o operador P , definido em (2.19), é um operador contrativo, e que sua aplicação sucessiva conduz à solução do problema original. Segue a definição de mapeamentos contrativos e os principais resultados aplicados ao problema de um item. Os resultados encontrados nessa seção são particularização dos resultados gerais obtidos e provados nas seções 3.4 e 3.5 para problemas de múltiplos itens. Por essa razão as provas são omitidas.

Definição 2.1 1. *Seja F um espaço métrico completo com norma denotada por $\|\cdot\|$. Um mapeamento $T : F \rightarrow F$ é chamado mapeamento contrativo se satisfizer a seguinte equação para algum $0 < \beta < 1$.*

$$\|Ty - Tz\| \leq \beta \|y - z\| \quad \forall y, z \in F \quad (2.18)$$

onde $Ty := T(y)$.

2. *Se $Tw = w$, então w é chamado ponto fixo de T .*

Seja definido o seguinte operador:

$$P[\phi](\eta) := R[\phi, R_2[\phi]](\eta) \quad \forall \eta \in S \quad (2.19)$$

Lema 2.3 $P : B(S) \rightarrow B(S)$ é um operador contrativo

Para funções $\phi \in B(S)$, defina-se a seguinte função:

$$W(\eta) = P[\phi](\eta)$$

A caracterização de solução do problema é feita com base na aplicação sucessiva do operador P , até que se chegue ao único ponto fixo desse operador (vide teorema A.1 do Apêndice A), que coincide com a função valor do problema original V .

Teorema 2.1 *A seqüência*

$$W_i = P[W_{i-1}] \quad (2.20)$$

onde $W_0 \in C(S)$ converge uniformemente para $V \in B(S)$ e V é a única solução de $V = P[V]$

O problema geral de múltiplos itens é explorado no capítulo 3, onde são evidenciadas algumas propriedades do processo $t \rightarrow z_t$ omitidas para o caso particular abordado nesse capítulo.

2.6 Políticas de controle para o problema de um item

Para o problema de controle de um item foram estudadas na literatura várias alternativas de política de controle com vistas à aplicação em sistemas reais.

Modelando o problema de controle contínuo com variável ξ_t limitada, (Davis et al., 1987) apresentaram políticas de controle caracterizadas pela existência de duas regiões distintas do espaço de estados (região de produção e região de paralisação), intercaladas por uma região de transição. A figura 2.1 representa a forma de solução de um problema genérico.

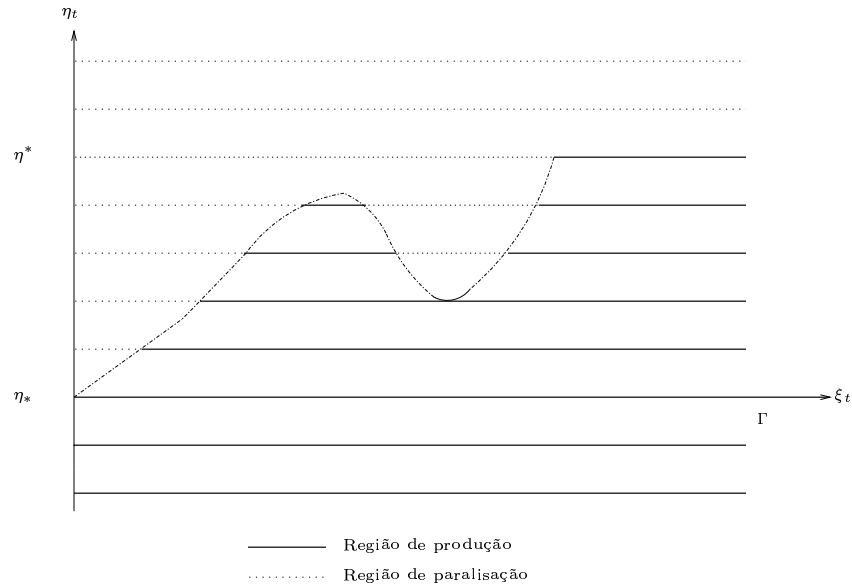


Figura 2.1: Política geral de controle para o problema *PC*

Também foram apresentadas em (Davis et al., 1987) algumas variações da política de controle geral, que apresentam certas características peculiares. A primeira delas foi denominada política *IUC* (invest until complete) e apresenta a seguinte característica: uma vez iniciada, a produção de um lote de itens não pode ser paralisaada até que esse lote de itens seja completado. A figura 2.2 ilustra a política *IUC*.

Uma outra política de controle possível apresentada em (Davis et al., 1987) é denominada política *FRD* (follow realized demand). A principal característica dessa política é a existência, para valores de estoque $\eta_* < \eta < \eta^*$, de níveis de progressão ξ_η a partir dos quais a produção é paralisaada até que chegue demanda adicional pelo produto. A figura 2.3 mostra um exemplo de política *FRD*.

Outra política de controle possível é uma variação da política *FRD* onde $\eta^* = \eta_*$. Monticino e Weisinger (Monticino and Weisinger, 1995) a denominaram *cutoff strategies* (estratégias de limiar). Essa política se baseia na existência de um limiar de estoque $\eta^* = \eta_*$ tal que a ação a ser tomada

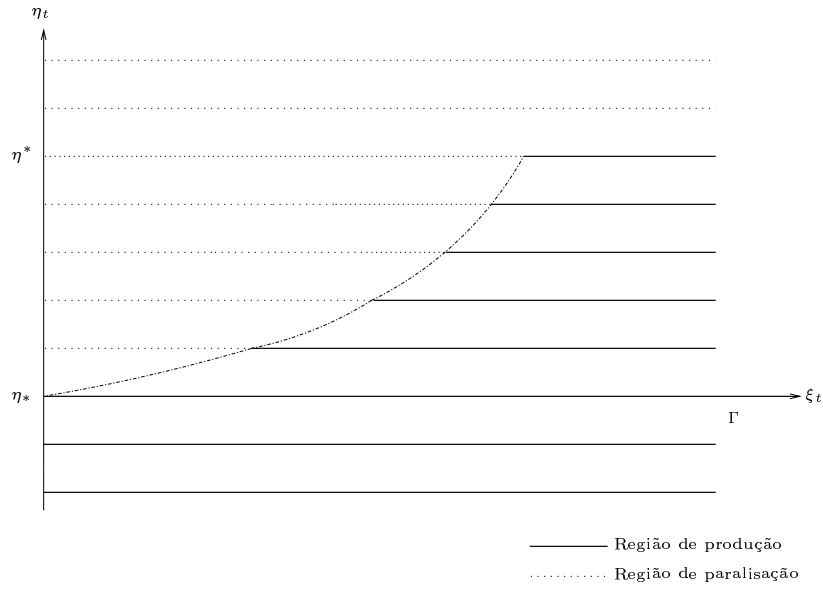


Figura 2.2: Política de controle *IUC* para o problema *PC*

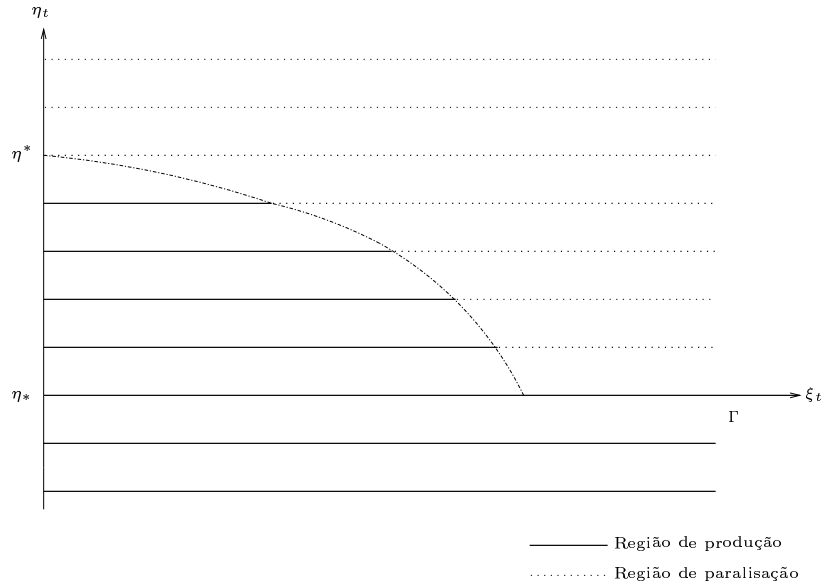


Figura 2.3: Política de controle *FRD* para o problema *PC*

consiste em produzir-se à máxima taxa possível até que o nível de estoque se iguale a η^* . Para níveis de estoque superiores a η^* a produção deve ser paralisada. A figura 2.4 ilustra a política *cutoff*.

Cabe ressaltar que essas políticas de controle foram estabelecidas para o *problema de controle contínuo* - vide (Davis et al., 1987) e (Monticino and Weisinger, 1995) - e não consideram, portanto,

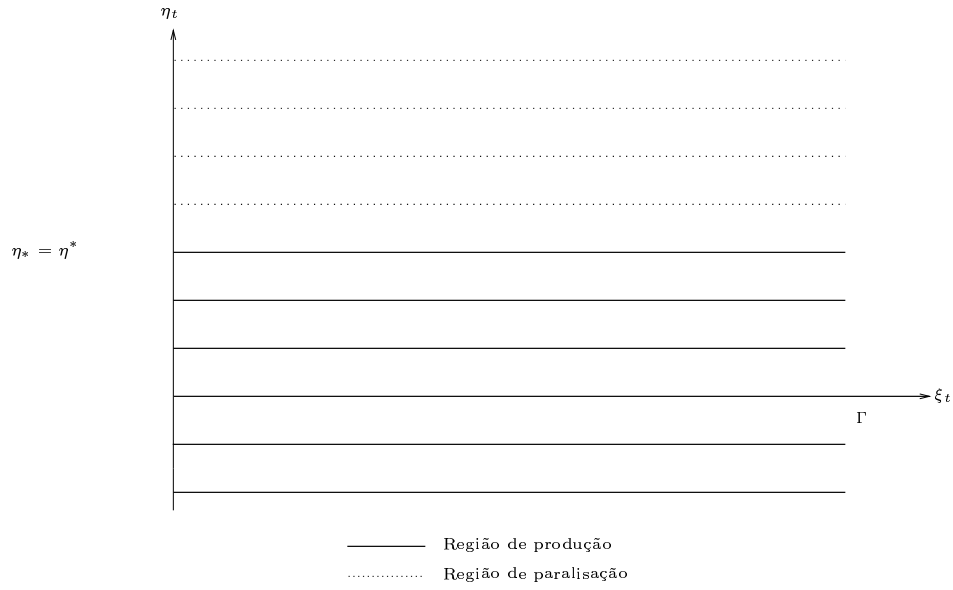


Figura 2.4: Política de controle *cutoff* para o problema *PC*

a existência de custos de intervenção no sistema. Para o problema de controle impulsional formulado neste trabalho, a política ótima de controle é semelhante à política *cutoff*, com a diferença que pode haver uma região de não intervenção, onde não se deve intervir no sistema, quer este esteja evoluindo em S' , ou em S'' . Esta política é aqui denominada *política simples* e é estabelecida também para o problema de múltiplos itens, abordado no próximo capítulo. A figura 2.5 exemplifica a política simples para o problema *PI* de um único item. Observe que a política ótima é permanecer em S' para todo nível de estoque $\eta \leq \eta'_*$ e transferir o sistema para S'' sempre que $\eta > \eta'_*$. Quando evoluindo em S'' , deve-se transferir o sistema para S' se o nível de estoque η for menor ou igual a η''_* , ou permanecer em S'' , se $\eta > \eta''_*$. Cabe ressaltar que trata-se de um caso particular do problema de múltiplos itens, estudado no próximo capítulo.

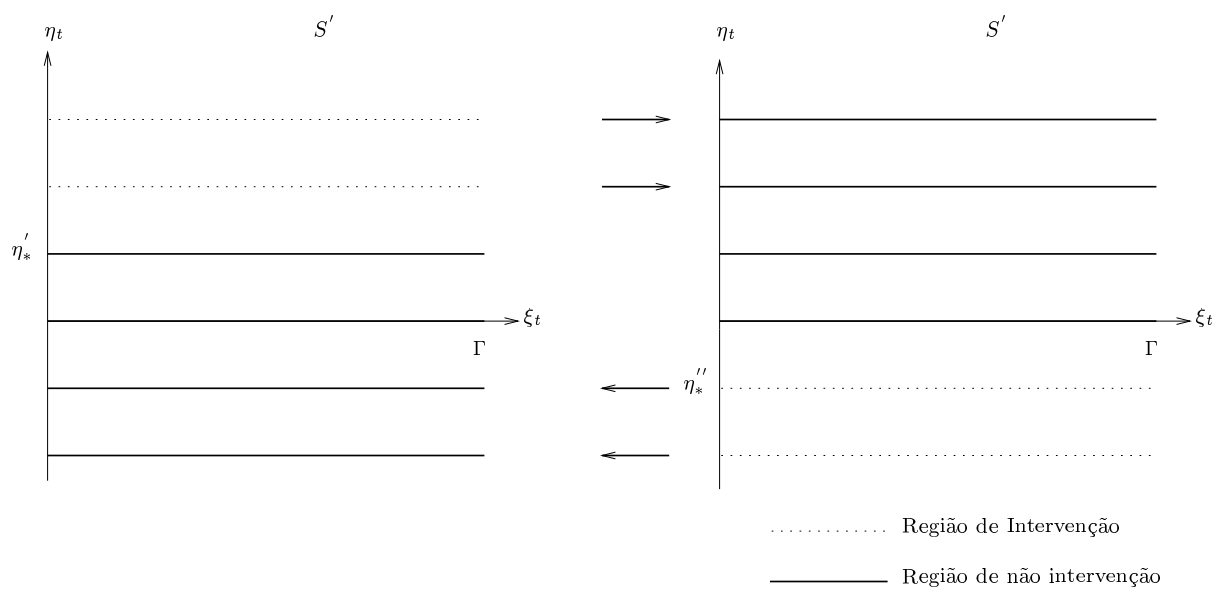


Figura 2.5: Política simples para o problema PI

Capítulo 3

Problemas de múltiplos itens

Apresenta-se inicialmente neste capítulo um problema genérico de múltiplos itens. Em seguida formula-se o problema de controle impulsional para o problema genérico e apresenta-se a proposta de solução do problema.

A forma de solução baseia-se, tal qual no capítulo anterior, na divisão do problema geral em uma seqüência infinita de problemas de um salto ou uma intervenção. Na seção 3.3 aborda-se o problema de controle impulsional no horizonte do primeiro salto ou intervenção. Na seção 3.5 recupera-se o problema geral e trata-se a sua solução através da aplicação e solução de sucessivos problemas de um único salto ou intervenção.

A solução ótima é caracterizada por meio da aplicação de operadores similares aos operadores de programação dinâmica discreta e baseia-se apenas nos níveis de estoque do sistema, sendo independente das variáveis de progressão da produção.

Conforme discutido no capítulo 2, pode-se dizer que a abordagem de controle impulsional é mais geral que a abordagem de controle contínuo. Por esse motivo, o sistema é apresentado de maneira adequada à formulação do *problema de controle impulsional*. Opta-se pela não formulação do *problema de controle contínuo*, uma vez que este último pode ser considerado como uma particularização do primeiro no contexto apresentado.

3.1 Apresentação do sistema

Considera-se um sistema responsável pela produção de um total de p diferentes tipos de produtos, que está limitado a fabricar apenas um produto por vez. Supõe-se que cada produto $P_i, i = 1, 2, \dots, p$ é fabricado em lotes individuais, cada qual adicionando ao sistema um total de K_i unidades desse produto.

Cada produto P_i possui uma taxa de produção normalizada $u_t^i \in \{0, 1\}$, $\forall t \geq 0$ e está associado ao processo estocástico $t \rightarrow \xi_t^i$, indicativo da progressão da produção do respectivo produto, de acordo com a seguinte relação:

$$\xi_t^i = \int_{\theta^k}^t u_s^i ds \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

onde o índice i refere-se ao i -ésimo produto; $0 \leq \theta^k \leq t$ é o instante de conclusão do lote de itens previamente fabricado do i -ésimo produto. Por estar limitado a produzir um único produto por vez, o sistema em questão apresenta a seguinte restrição:

$$\sum_{i=1}^p u_t^i \in \{0, 1\} \quad \forall t \geq 0$$

isso significa que, para todo $t \geq 0$, o sistema estará paralisado ($u_t^i = 0, \forall i = 1, \dots, p$) ou produzindo um dos produtos à máxima taxa possível ($u_t^i = 1, u_t^j = 0, \forall j \neq i, i, j \in [1, p]$)

É conveniente definir-se um vetor que represente a progressão da produção de todos os produtos fabricados pelo sistema, representado pelo processo $t \rightarrow \xi_t$ e definido como:

$$\xi_t = \begin{pmatrix} \xi_t^1 \\ \xi_t^2 \\ \vdots \\ \xi_t^p \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Um novo lote do produto P_i é entregue ao sistema quando ξ_t^i atinge um valor dado pela variável aleatória Γ^i , associada ao custo final de cada lote de itens do produto P_i . Neste trabalho considera-se que Γ^i é distribuída exponencialmente com taxa γ_i . A sequência de variáveis aleatórias θ_k^i , $k = 1, 2, \dots$ representa a ordem cronológica dos instantes de conclusão de cada lote de itens do i -ésimo produto entregue ao sistema, sendo que os intervalos $\theta_k^i - \theta_{k-1}^i$ são *iid*. A figura 3.1 ilustra uma trajetória do processo $t \rightarrow \xi_t$ para $p = 2$.

Representa-se a produção acumulada do produto P_i pelo processo $t \rightarrow q_t^i$, $t \geq 0$, definido como:

$$q_t^i = \sum_k K_i \mathbb{1}_{\{\theta_k^i \leq t\}}, \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

Convém também definir um vetor indicativo da produção acumulada de todos os produtos fabricados pelo sistema. Esse vetor, designado pelo processo $t \rightarrow q_t$, é dado por

$$q_t = \begin{pmatrix} q_t^1 \\ q_t^2 \\ \vdots \\ q_t^p \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

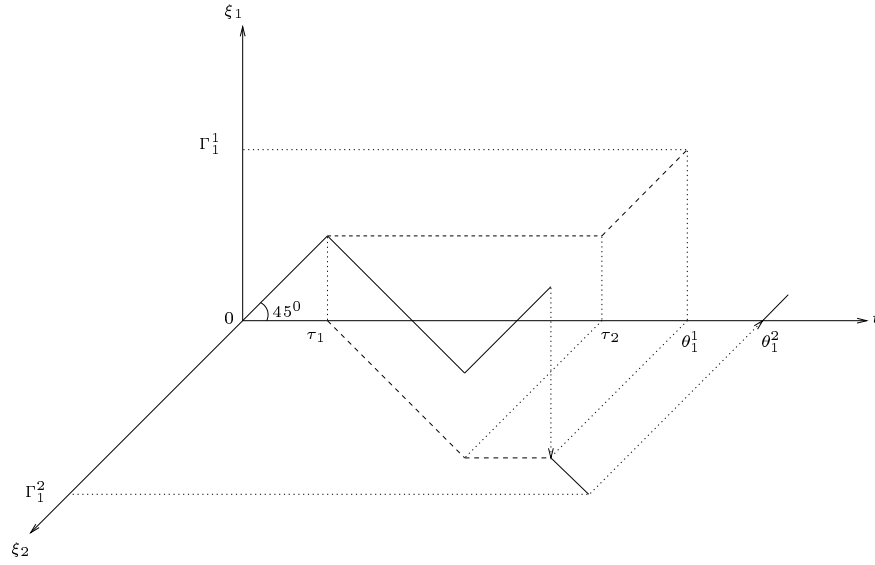


Figura 3.1: Evolução de ξ_t para $p = 2$

Assume-se que a demanda por todos os produtos oferecidos pelo sistema chega em instantes e quantidades aleatórios e supõe-se que cada produto P_i recebe solicitações de compra cuja ordem de chegada caracteriza um processo de Poisson com taxa $\delta_i > 0$. Designa-se por ω_k^i o k -ésimo pedido de produtos do tipo P_i . Dessa forma, a sequência de variáveis aleatórias *iid* $\omega_k^i, k = 1, 2, \dots$ caracteriza o histórico de chegada de demanda pelo produto P_i . Para cada produto P_i atribui-se uma distribuição $p_m^i, m = 1, 2, \dots, l_i$ às variáveis ω_k^i , onde l_i é o máximo pedido considerado para o produto P_i e $p_m^i = P(\omega_k^i = m)$.

Defina-se por $\sigma_k^i, i = 1, 2, \dots, p$ e $k = 1, 2, \dots$ a sequência de instantes de chegada de demanda por itens do produto P_i . A demanda acumulada pelo produto P_i é representada pelo processo $t \rightarrow d_t^i, t \geq 0$, dado por:

$$d_t^i = \sum_k \omega_k^i \mathbb{1}_{\{\sigma_k^i \leq t\}}, \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

Um vetor representativo da demanda acumulada por todos os produtos do sistema é denotado pelo processo $t \rightarrow d_t$ e definido como:

$$d_t = \begin{pmatrix} d_t^1 \\ d_t^2 \\ \vdots \\ d_t^p \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Dessa forma, a quantidade de itens em estoque ou sob encomenda será representada pelo processo $t \rightarrow \eta_t$, denotado por $\eta_t = q_t - d_t, t \geq 0$, de forma análoga ao definido para o problema de um item. Considera-se que η_t^i assume valores de um conjunto de inteiros $\bar{N}_i = \{N_i^-, \dots, N_i^+\}$.

Defina-se ainda o processo indicador do produto em produção $t \rightarrow v_t$, que pode assumir qualquer valor no conjunto de inteiros $\{0, \dots, p\}$. Assim, $v_t = 0$ indica que o sistema está paralisado, ao passo que $v_t = i, i = 1, \dots, p$ indica que o sistema está produzindo o produto P_i . Considerando o apresentado acima, o conjunto de estados do sistema pode ser denotado pelo processo $t \rightarrow z_t = (\eta_t, \xi_t, v_t)$.

3.2 O problema de controle impulsional

De acordo com as características do sistema apresentado, o espaço de estados do processo $t \rightarrow z_t$ é formado pela união de $p + 1$ subconjuntos denotados por $S^i, i = 0, 1, \dots, p$. Quando o processo se encontra no subconjunto $S^i, i = 1, 2, \dots, p$, o sistema encontra-se produzindo o produto P_i e $z_t = (\eta_t, \xi_t, v_t)$, com $v_t = i$. Quando a produção estiver paralisada, o processo $t \rightarrow z_t$ evolui no subconjunto S^0 e $z_t = (\eta_t, \xi_t, v_t)$, com $v_t = 0$.

Sejam definidos os conjuntos $S^i := \bar{N}_1 \times \dots \times \bar{N}_p \times \mathbb{R}_+ \times \dots \times \mathbb{R}_+ \times \{i\}, i = 0, 1, \dots, p$ e

$$S = \bigcup_{i=0}^p S^i$$

Quando $v_t = i, i = 1, \dots, p$, o processo evolui no subconjunto S^i , isto é, $\dot{\xi}_t^i = 1$ e $\dot{\xi}_t^j = 0$ para todo $j \neq i, j \in [1, p]$. Quando $v_t = 0$ o processo se encontra “paralisado”, isto é $\dot{\xi}_t^i = 0, \forall i = 1, \dots, p$.

O processo $t \rightarrow z_t$ toma valores em S e apresenta trajetória determinística intercalada por saltos aleatórios que ocorrem por ocasião de chegada de demanda ou quando é concluído um lote de itens de qualquer dos produtos fabricados pelo sistema. Para todo i , a taxa total de saltos do processo é dada por:

$$\lambda_i = \sum_{m=1}^p \delta_m + \gamma_i \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (3.7)$$

com $\gamma_0 := 0$.

Denota-se por T_k o instante de ocorrência do k -ésimo salto do processo $t \rightarrow z_t$, com $T_0 = 0$. Assim, a seqüência ordenada de instantes de salto do processo é denotada por $\{T_k, k = 0, 1, \dots\}$ e a distribuição de probabilidade entre saltos é expressa pela seguinte equação:

$$P(T_{k+1} - T_k > t) = e^{-\lambda_i t}, \quad t \geq 0, z \in S^i \quad (3.8)$$

Seja e^i um vetor coordenada de R^{p+1} , isto é:

$$e^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde a componente unitária se encontra na i -ésima linha.

Para todo $z = (\eta, \xi, i) \in S$ podemos definir a “trajetória” determinística associada ao processo $t \rightarrow z_t$ por:

$$\varphi(t, z) = \begin{cases} (\eta, t.e^i + \xi, i), & \forall z \in S^i, 1 \leq i \leq p \\ (\eta, \xi, i), & \forall z \in S^0 \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (3.9)$$

assim, $z_t = \varphi(t - T_k, z)$ quando $T_k \leq t < T_{k+1}$.

O processo $t \rightarrow z_t$ possui também uma medida de probabilidade de saltos dada por:

$$\mu(z', z) = \sum_{m=1}^p \frac{\delta_m}{\lambda_m} P(z' - z = \omega \cdot e^m) + \frac{\gamma_i}{\lambda_i} \mathbb{1}_{\{z-z'=K_i \cdot e^i\}}, \quad z \in S^i, i = 0, 1, \dots, p \quad (3.10)$$

onde $K_0 := 0$.

O problema de controle impulsional (*PI*) é caracterizado por intervenções que transferem o processo $t \rightarrow z_t$ de S^j para S^i , $i, j = 0, 1, \dots, p$, $j \neq i$, pagando-se por isso um custo instantâneo dado por uma função $g : S \rightarrow \mathbb{R}_+$. O processo $t \rightarrow v_t$ assume, portanto, valores constantes entre intervenções e expressa as transferências de subconjunto do sistema em decorrência de ações de controle. A função de intervenção $g : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ depende, por sua vez, do estado em que o processo se encontra no instante de intervenção $z_{t-} = (\eta_t, \xi_t, j)$ e do estado para o qual o processo será transferido, $z_t = (\eta_t, \xi_t, i)$. Entre os instantes de intervenção, um custo, dado por uma função $h : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, é associado à evolução do processo.

Um custo de penalização $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ é levado em conta sempre que qualquer das i -ésimas componentes do vetor η_t se igualar aos valores máximo (N_i^+) ou mínimo (N_i^-) do conjunto $\bar{N}_i$.

Sejam os instantes ordenados de intervenção dados por $\tau_k, k = 1, 2, \dots$; a sequência de instantes de intervenção é dada por $\pi = \{\tau_1, \tau_2, \dots\} \in \Pi$, onde Π é a classe de todas as políticas de intervenção factíveis, tais que $\tau_k < \tau_{k+1}, \forall k$.

A função valor do problema *PI* de múltiplos itens é dada por $V : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida como:

$$V(z) := \inf_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^\tau e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha \tau_i} g(z_{\tau_i-}, z_{\tau_i}) + e^{-\alpha \tau} \Psi(z_\tau) \right\} \quad (3.11)$$

onde α é a taxa de desconto; $z = z_0$ é o valor inicial do processo $t \rightarrow z_t$ e $\tau = \inf\{t \geq 0 : \eta_t^i \leq N_i^- \text{ ou } \eta_t^i \geq N_i^+\}$.

3.2.1 Definições e hipóteses

Considere o problema de controle impulsional (*PI*) apresentado na seção anterior. Assuma que no instante de intervenção $\tau = t$ o processo $s \rightarrow z_s, 0 \leq s \leq t$ é transferido do estado $z_{t-} = \lim_{s \uparrow t} z_s = (\eta, \xi, j) \in S^j$ para o estado $z_t = (\eta, \xi, i) \in S^i, j \neq i$.

Designa-se por $B(S)$ o conjunto das funções limitadas em S . Assume-se que o problema *PI* satisfaz as seguintes hipóteses:

A₁: g e $\psi \in B(S)$. $\psi(z) = \psi(\eta, i)$, $g(z_{\tau-}, z_{\tau}) = g(\eta, j, i)$. Ou seja, a função ψ depende do nível de estoque η e da variável indicadora i , mas não da variável de progressão ξ . Já a função g depende do nível de estoque e dos subconjuntos em que o processo se encontra no instante de salto e no instante imediatamente anterior ao salto.

A₂: $g(\eta, j, i) \geq g_0 > 0$. Essa condição assegura a existência de penalizações por intervenção e a impossibilidade dessas intervenções serem recompensadas;

A₃: $g(\eta, j, k) + g(\eta, k, i) > g(\eta, j, i)$, $\forall j, k, i = 0, 1, \dots, p, j \neq k \neq i$. Essa hipótese impossibilita a existência de transferências indiretas entre estados por meio de intervenções instantâneas sucessivas;

A₄: Os conjuntos $\tilde{N}_i, i = 1, \dots, p$, são todos finitos. Essa hipótese visa o tratamento matemático na classe $B(S)$ de funções. É possível mostrar que para conjuntos $\tilde{N}_i$ finitos suficientemente grandes, a solução do problema envolvendo esses conjuntos equivale à solução do problema composto por conjuntos $\tilde{N}_i$ enumeráveis infinitos. Para o caso de um único item essa propriedade foi mostrada em (Salles, 1999);

A₅: $h : S \rightarrow \mathbb{R}_+ \in B(S)$, tal que $h(z) := L(\eta) + \beta_i, z \in S^i, i = 1, \dots, p$, onde β_i é o custo de produção de cada lote de itens do produto P_i por unidade de tempo e $\eta \rightarrow L(\eta)$ é uma função convexa do custo de déficit/estoque do sistema.

Dadas as hipóteses acima, pode-se simplificar a notação do problema, designando-se por $y = (\eta, i)$ o conjunto de pontos $z = (\eta, \cdot, i)$, uma vez que as funções consideradas neste trabalho não dependem da variável ξ_t . Assim, a expressão (3.11) será, por sua vez, independente da variável progressão da produção ξ .

3.3 O operador *um salto ou uma intervenção*

Seja T_1 , o instante de primeiro salto do processo por conclusão ou demanda do processo $t \rightarrow z_t$.

Para $\phi \in B(S)$, defina-se a medida de transição $\mathcal{Q}[\phi](y)$, de acordo com a medida de probabilidade de saltos definida em (3.10):

$$\mathcal{Q}[\phi](\eta, i) := E[\phi(\eta_{T_1}, i_{T_1}) | y_{T_1^-} = (\eta, i)] = \sum_{m=1}^p \frac{\delta_m}{\lambda_i} \sum_{k=1}^{l_m} p_k^m \phi(\eta - k e^m, i) + \frac{\gamma_i}{\lambda_i} \phi(\eta + K_i \cdot e^i, i) \quad (3.12)$$

Seja $\Upsilon_i := \{j = 0, 1, \dots, p, j \neq i\}$, o conjunto de destinos possíveis após uma intervenção a partir de $y = (\eta, i)$. Para funções ϕ e $\psi \in B(S)$ define-se os seguintes operadores:

$$R_t[\phi, \psi](\eta, i) := E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s, i_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}, i) \mathbb{1}_{\{T_1 < t\}} \right. \\ \left. + \min_{j \in \Upsilon_i} e^{-\alpha t} (\psi(\eta, j) + g(\eta, i, j)) \mathbb{1}_{\{t \leq T_1\}} \right\} \quad (3.13)$$

$$R_2[\phi](\eta, i) := E_z \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s, i) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}, i) \right\} \quad (3.14)$$

onde $\phi(\eta_{T_1}, i)$ está associado ao primeiro salto por conclusão ou demanda, ao passo que a terceira parcela da equação (3.13) representa o custo mínimo associado à intervenção no instante t , sendo que $\psi(\eta, j)$ é o custo associado ao destino em caso de intervenção e $g(\eta, i, j)$ representa o custo de intervenção no estado z_t . A parcela integral contida nas expressões (3.13) e (3.14) representa o custo de produção no menor horizonte entre o primeiro salto e a primeira intervenção.

Sejam também definidos os seguintes operadores:

$$R_1[\phi, \psi](\eta, i) := \inf_{0 \leq t < \infty} R_t[\phi, \psi](\eta, i) \quad (3.15)$$

$$R[\phi, \psi](\eta, i) := R_1[\phi, \psi](\eta, i) \wedge R_2[\phi](\eta, i) \quad (3.16)$$

Comentário 3.1 R_1 representa o custo mínimo de intervenção, ao passo que R_2 representa o custo de não intervenção até o instante de primeiro salto T_1 . Assim, $R : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ representa a função valor para o problema de um salto ou uma intervenção, o que ocorrer primeiro.

Lema 3.1 *Assuma A_1 . Então: $R_t[\phi, \psi](\eta, i)$ e $R_2[\phi](\eta, i)$, definidos respectivamente em (3.13) e (3.14), satisfazem às seguintes equações:*

$$R_t[\phi, \psi](\eta, i) = R_2[\phi](\eta, i)(1 - e^{-\lambda_i t}) + e^{-\lambda_i t} \min_{j \in \Upsilon_i} \{\psi(\eta, j) + g(\eta, i, j)\} \quad (3.17)$$

$$R_2[\phi](\eta, i) = \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \{h(\eta, i) + \lambda_i \mathcal{Q}[\phi](\eta, i)\} \quad (3.18)$$

onde $\hat{\lambda}_i = \alpha + \lambda_i$

Prova:

Desenvolvendo o primeiro termo da equação (3.13) e lembrando que T_1 apresenta distribuição exponencial dada por (3.8), tem-se:

$$E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s, i_s) ds \right\} = \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \left(\int_0^s e^{-\alpha r} h(\eta, i) dr \right) ds + e^{-\lambda_i t} \left(\int_0^t e^{-\alpha r} h(\eta, i) dr \right) \quad (3.19)$$

lembrando que $y = (\eta, i)$ permanece constante no horizonte de primeiro salto. Da primeira parcela da equação (3.19), tem-se:

$$\int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \left(\int_0^s e^{-\alpha r} h(\eta, i) dr \right) ds = \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \left\{ \int_0^s \mathbb{1}_{\{r \leq s\}} e^{-\alpha r} h(\eta, i) dr \right\}$$

Assim, os limites de integração podem ser alterados para a forma:

$$= \int_0^t \int_r^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds \{ e^{-\alpha r} h(\eta, i) \}$$

Integrando a parcela relativa a λ_i , chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} &= \int_0^t -e^{-\lambda_i s} \Big|_r^t e^{-\alpha r} h(\eta, i) dr \\ &= \int_0^t (e^{-\lambda_i r} - e^{-\lambda_i t}) e^{-\alpha r} h(\eta, i) dr \end{aligned}$$

Desse modo, a partir de (3.19), chega-se ao seguinte resultado:

$$E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s, i_s) ds \right\} = \frac{1}{\hat{\lambda}_i} (1 - e^{-\hat{\lambda}_i t}) h(\eta, i) \quad (3.20)$$

onde $\hat{\lambda}_i = \alpha + \lambda_i$. Do segundo termo de (3.13) deriva-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} E_z \{ e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}, i) \mathbb{1}_{\{T_1 < t\}} \} &= E_z \{ e^{-\alpha T_1} \mathcal{Q}[\phi](\eta, i) \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t\}} \} \\ &= \int_0^t \lambda_i e^{-\hat{\lambda}_i s} \mathcal{Q}[\phi](\eta, i) ds = (1 - e^{-\hat{\lambda}_i t}) \mathcal{Q}[\phi](\eta, i) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Desenvolvendo a terceira parcela da equação (3.13), tem-se:

$$\begin{aligned} E_z \left\{ \min_{j \in \Upsilon_i} e^{-\alpha t} (\psi(\eta, j) + g(\eta, i, j)) \mathbb{1}_{\{t \leq T_1\}} \right\} &= E_z \left\{ e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\{t \leq T_1\}} \right\} \min_{j \in \Upsilon_i} (\psi(\eta, j) + g(\eta, i, j)) \\ &= e^{-\hat{\lambda}_i t} \min_{j \in \Upsilon_i} (\psi(\eta, j) + g(\eta, i, j)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo (3.20), (3.21) e (3.22) em (3.13) conclui-se que:

$$R_t[\phi, \psi](\eta, i) = \int_0^t e^{-\hat{\lambda}_i s} \{ h(\eta, i) + \lambda_i \mathcal{Q}[\phi](\eta, i) \} ds + e^{-\hat{\lambda}_i t} \min_{j \in \Upsilon_i} \{ \psi(\eta, j) + g(\eta, i, j) \} \quad (3.23)$$

Resolvendo a integral acima chega-se ao resultado expresso em (3.17). Fazendo $t \rightarrow \infty$ na equação (3.17) chega-se ao expresso em (3.18). $\square$

Lema 3.2 *Assuma A_1 . Então $R[\phi, \psi]$, definido em (3.16) satisfaz a seguinte equação:*

$$R[\phi, \psi](\eta, i) = \min_{j \in \Upsilon_i} \{ \psi(\eta, j) + g(\eta, i, j) \} \wedge R_2[\phi](\eta, i), \quad z \in S \quad (3.24)$$

Prova:

A combinação convexa expressa na equação (3.17) assume seu valor mínimo para $t = 0$ ou $t \rightarrow \infty$. Logo, comparando-se as equações (3.17) e (3.18) obtém-se o resultado expresso em (3.24). $\square$

Dadas funções ϕ e $\psi \in B(S)$, a expressão algébrica em (3.24) determina unicamente o valor do operador $R[\phi, \psi]$.

3.4 Operadores e propriedades importantes

Nesta seção procura-se definir operadores cujas propriedades tornem possível encontrar a solução do problema proposto de maneira eficiente. A seção começa com alguns resultados auxiliares demonstrados a seguir.

Lema 3.3 *Sejam $F_1, F_2, \dots, F_n$, n mapeamentos de $B(S)$ em $B(S)$ e $c_i \in [0, 1) \forall i = 1, \dots, n$, n constantes tais que:*

$$\begin{aligned} \|F_1[\phi_0] - F_1[\phi_1]\| &\leq c_1 \|\phi_0 - \phi_1\| \\ \|F_2[\phi_0] - F_2[\phi_1]\| &\leq c_2 \|\phi_0 - \phi_1\| \\ &\vdots \\ \|F_n[\phi_0] - F_n[\phi_1]\| &\leq c_n \|\phi_0 - \phi_1\| \end{aligned}$$

Considere também o mapeamento $\mathcal{F}_n : B(S) \rightarrow B(S)$ definido como:

$$\mathcal{F}_n[\phi](z) := F_1[\phi](z) \wedge F_2[\phi](z) \wedge \dots \wedge F_n[\phi](z) \quad (3.25)$$

então

$$\|\mathcal{F}_n[\phi_0] - \mathcal{F}_n[\phi_1]\| \leq \max\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \|\phi_0 - \phi_1\| \quad (3.26)$$

Prova:

Este lema pode ser provado por indução. Para tanto, deve-se mostrar primeiro que a equação (3.25) é válida para $n = 2$. Para provar que a equação (3.25) vale para $\mathcal{F}_2$ primeiro supõe-se que:

$$\|\mathcal{F}_2[\phi_0] - \mathcal{F}_2[\phi_1]\| = \mathcal{F}_2[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{F}_2[\phi_1](\hat{z}), \text{ para algum } \hat{z} \in S$$

e assume-se $\hat{z}$ tal que:

$$F_1[\phi_1](\hat{z}) \wedge F_2[\phi_1](\hat{z}) = F_1[\phi_1](\hat{z})$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{F}_2[\phi_1](\hat{z}) &= F_1[\phi_0](\hat{z}) \wedge F_2[\phi_0](\hat{z}) - F_1[\phi_1](\hat{z}) \wedge F_2[\phi_1](\hat{z}) \\
&= F_1[\phi_0](\hat{z}) \wedge F_2[\phi_0](\hat{z}) - F_1[\phi_1](\hat{z}) \\
&\leq F_1[\phi_0](\hat{z}) - F_1[\phi_1](\hat{z}) \\
&\leq \|F_1[\phi_0] - F_1[\phi_1]\| \\
&\leq c_1 \|\phi_0 - \phi_1\|
\end{aligned}$$

Em seguida supõe-se:

$$F_1[\phi_1](\hat{z}) \wedge F_2[\phi](\hat{z}) = F_2[\phi_1](\hat{z})$$

Repetindo os argumentos acima, pode-se concluir que, nesse caso:

$$\mathcal{F}_2[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{F}_2[\phi_1](\hat{z}) \leq F_2[\phi_0](\hat{z}) - F_2[\phi_1](\hat{z}) \leq \|F_2[\phi_0] - F_2[\phi_1]\| \leq c_2 \|\phi_0 - \phi_1\|$$

Supõe-se agora que a equação (3.25) seja válida para um certo $n > 2$. É evidente que podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n+1}[\phi] &= F_1[\phi] \wedge F_2[\phi] \wedge \dots \wedge F_n[\phi] \wedge \mathcal{F}_{n+1}[\phi] \\
&= \mathcal{F}_n[\phi] \wedge F_{n+1}[\phi]
\end{aligned}$$

Aplicando-se a primeira parte da prova conclui-se que o resultado (3.26) vale para qualquer $\mathcal{F}_n$ definido como em (3.25). $\square$

Considera-se o seguinte operador:

$$P[\phi](\eta, i) := R[\phi, R_2[\phi]](\eta, i) \quad \forall z \in S \quad (3.27)$$

e o seguinte desenvolvimento matemático baseado na forma do operador R_t , definido em (3.13):

$$\begin{aligned}
P[\phi](\eta, i) &= \min_{t \geq 0} E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s, i_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}, i) \mathbb{1}_{\{t > T_1\}} \right. \\
&\quad \left. + \min_{j \in \Upsilon_i} e^{-\alpha t} (R_2[\phi](\eta, j) + g(\eta, i, j)) \mathbb{1}_{\{t \leq T_1\}} \right\}
\end{aligned}$$

pela propriedade de Markov, a equação acima toma a forma:

$$\begin{aligned}
&= \min_{t \geq 0} E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s, i) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}, i) \mathbb{1}_{\{t > T_1\}} \right. \\
&\quad \left. + \min_{j \in \Upsilon_i} e^{-\alpha t} \left(E \left\{ \int_t^{T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s, j) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}, j) \mid z_t, t < T_1 \right\} + g(\eta, i, j) \right) \mathbb{1}_{\{t \leq T_1\}} \right\}
\end{aligned}$$

baseado na expressão de R_2 em (3.14) chega-se ao seguinte resultado:

$$P[\phi](\eta, i) = \min_{t \geq 0, j \in \Upsilon_i} E_z \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(\eta_s, i_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(\eta_{T_1}, i_{T_1}) + g(\eta, i, j) \mathbb{1}_{\{t \leq T_1\}} \right\}$$

A partir da expressão acima, pode-se concluir que o operador $P[\phi]$ representa o custo mínimo associado à permanência no estado corrente no horizonte de primeiro salto ou à transferência do sistema para um outro estado, onde o sistema deve permanecer até o horizonte de primeiro salto. Na ocorrência do salto, o problema termina e paga-se $R_2[\phi]$.

Lema 3.4 $P : B(S) \rightarrow B(S)$ é um operador contrativo

Prova: Define-se:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\hat{\lambda}_i}$$

e note que $0 < \rho_i < 1$, tendo em vista que $\hat{\lambda}_i = \alpha + \lambda_i$.

De acordo com o lema 3.2, o operador $P[\phi]$ pode ser expresso pela seguinte relação:

$$P[\phi](\eta, i) := \min_{j \in \Upsilon_i} \{R_2[\phi](\eta, j) + g(\eta, i, j)\} \wedge R_2[\phi](\eta, i) \quad (3.28)$$

Assim, considerando o lema 3.3, pode-se provar que $P[\phi]$ é um operador contrativo mostrando apenas que $R_2[\phi]$ é operador contrativo. Considera-se o seguinte desenvolvimento matemático:

$$R_2[\phi_0](\eta, i) - R_2[\phi_1](\eta, i) = \rho_i(\mathcal{Q}[\phi_0](\eta, i) - \mathcal{Q}[\phi_1](\eta, i))$$

portanto,

$$|R_2[\phi_0](\eta, i) - R_2[\phi_1](\eta, i)| \leq \rho_i \|\mathcal{Q}[\phi_0] - \mathcal{Q}[\phi_1]\|$$

assim,

$$\|R_2[\phi_0] - R_2[\phi_1]\| \leq \rho_i \|\phi_0 - \phi_1\|$$

Da relação acima podemos concluir que $R_2[\phi]$ é um operador contrativo e a prova está concluída.

□

3.5 Solução do problema PI

O objetivo desta seção é caracterizar a solução do problema PI de acordo com os operadores introduzidos na seção anterior. Primeiro adapta-se os resultados obtidos por Davis (Davis, 1993) para o problema em questão. Em seguida mostra-se que, para o problema formulado neste trabalho, a função valor do problema pode ser obtida através do operador P , definido em (3.27). Além disso, por ser P um operador contrativo (vide lema 3.4) podemos concluir que o método aqui proposto converge para a solução do problema independentemente do valor inicial arbitrado, ao contrário do método proposto por Davis, que estipula que a busca deve partir de um limite superior para a função valor do problema.

Assim, a primeira maneira para se encontrar a função valor do problema PI vem da adaptação de resultados gerais obtidos em (Davis, 1993). Seja o operador:

$$\mathcal{L}[\phi] := R[\phi, \phi] \quad (3.29)$$

Proposição 3.1 *Assuma A_1 e A_2 . Então V é a maior solução mensurável a Borel que resolve o sistema:*

$$\begin{cases} W = \mathcal{L}[W] \\ W \leq f \end{cases}$$

onde:

$$f(\eta) := E_z \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha s} h(\eta_s) ds \right\} \quad (3.30)$$

Além disso, para uma função $V_0 \geq f$, a sequência $V_i, i = 1, 2, \dots$ definida por

$$V_i(\eta) := \mathcal{L}[V_{i-1}](\eta), \quad \eta \in S \quad (3.31)$$

é tal que $V_i \downarrow V$ a medida que $i \rightarrow \infty$.

Essa proposição é uma adaptação dos resultados encontrados em (Davis, 1993). Para maiores detalhes ver (Davis, 1993), (pg. 239), teorema 54.23. Considerando as equações (3.31) e (3.29), pode-se dizer que função valor do problema de controle impulsional para múltiplos itens em produção pode ser encontrada por meio da aplicação recursiva do operador $R[\phi, \phi]$. No entanto, a convergência do procedimento de busca é garantida apenas para funções valor iniciais $V_0 \leq f$.

Defina os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} S_c &:= \{z \in S : V(\eta, i) < \inf_{j \in \Upsilon_i} \{V(\eta, j) + g(\eta, i, j)\}\} \text{ e} \\ S_p &:= \{z \in S : V(\eta, i) = \inf_{j \in \Upsilon_j} \{V(\eta, j) + g(\eta, i, j)\}\} \end{aligned}$$

O conjunto dos pontos $(\eta, \xi, i) \subset S_c, (\eta, \xi, i) \in S^i$ indica os pontos de S^i onde não se deve intervir no processo, devendo o processo permanecer em S^i até que ocorra o primeiro salto para um ponto $(\eta, \xi, i) \subset S_p$. Para pontos (η, ξ, i) pertencentes ao conjunto S_p , deve-se intervir no processo de forma a transferi-lo para um ponto $(\eta, \xi, j) \in S_c, (\eta, \xi, j) \in S^j$, tal que $j \neq i$.

Lema 3.5 *Assuma A_1, A_2 e A_3 . Então se $(\eta, i) \in S_p$, então $\{(\eta, j) : V(\eta, i) = V(\eta, j) + g(\eta, i, j)\} \in S_c$*

Prova: Para $(\eta, i) \in S^i, (\eta, i) \in S_p$, supõe-se $(\eta, j) \in S_p, (\eta, j) \in S^j$. Neste caso,

$$V(\eta, i) = V(\eta, j) + g(\eta, i, j) = \min_{x \in \Upsilon_i} \{V(\eta, x) + g(\eta, i, x)\} \quad (\eta, i) \in S^i \quad (3.32)$$

Assumindo-se $(\eta, j) \in S_p$, tem-se:

$$V(\eta, j) = V(\eta, k) + g(\eta, j, k) = \min_{x \in \Upsilon_j} \{V(\eta, x) + g(\eta, j, x)\} \quad (\eta, j) \in S^j$$

Dessa forma, voltando à equação (3.32) chega-se ao seguinte resultado:

$$V(\eta, i) = V(\eta, k) + g(\eta, j, k) + g(\eta, i, j) \leq V(\eta, k) + g(\eta, i, k)$$

o que é um absurdo em vista de A_2 e A_3 . Portanto, se $(\eta, i) \in S^i$, $(\eta, i) \in S_p$ então $\{(\eta, j) : V(\eta, i) = V(\eta, j) + g(\eta, i, j)\} \in S_c$, $(\eta, j) \in S^j$. $\square$

A seguir mostra-se que a função valor do problema proposto é um ponto fixo do operador P , definido pela equação (3.27). Este é um resultado fundamental do trabalho e serve de base para o procedimento de busca de solução do problema de controle impulsional a ser proposto e detalhado a seguir.

Teorema 3.1 *Assuma A_1 , A_2 e A_3 , então $V = P[V]$*

Prova: Fazendo $R = V = \phi = \psi$ na equação (3.24) chegamos à seguinte relação:

$$V(\eta, i) = R_2[V](\eta, i) \wedge \min_{j \in \Upsilon_i} \{V(\eta, j) + g(\eta, i, j)\}, \forall (\eta, i) \in S \quad (3.33)$$

Do comentário 3.1, conclui-se que, se $(\eta, i) \in S_c$, então $V(\eta, i) = R_2[V](\eta, i)$. Além disso, considerando o lema 3.5, sabe-se que, se $(\eta, i) \in S_p$, então o estado destino

$$\{(\eta, j^*) : j^* = \arg \min_{j \in \Upsilon_i} [V(\eta, j) + g(\eta, i, j)]\} \in S_c$$

Por outro lado, considerando o comentário 3.1, se $(\eta, j^*) \in S_c$ então:

$$V(\eta, j^*) = R_2[V](\eta, j^*) \quad (3.34)$$

Assim, considerando a expressão (3.34), a equação (3.33), toma a seguinte forma:

$$V(\eta, i) = R_2[V](\eta, i) \wedge \min_{j \in \Upsilon_i} \{R_2[V](\eta, j) + g(\eta, i, j)\}$$

Comparando a expressão acima com a equação (3.28), verifica-se que

$$V(\eta, i) = P[V](\eta, i), \quad \forall z \in S$$

$\square$

Portanto, está provado que a função valor do problema V é um ponto fixo do operador P . Desse modo verifica-se que a função valor V pode também ser obtida por meio do operador P e não apenas através do operador $\mathcal{L}$, definido em (3.29). Além disso, o lema 3.4 mostra que o operador P

é um operador contrativo, e como tal possui um único ponto fixo (vide teorema A.1); logo, a função valor V é única. Cabe lembrar que a propriedade de contratividade não pode ser mostrada para o operador $\mathcal{L}$ acima mencionado.

A seguir define-se um procedimento de busca da função valor que soluciona o problema de otimização estocástica proposto. Esse procedimento baseia-se na aplicação do operador P sobre o espaço de estados do sistema e sua principal vantagem em relação ao procedimento proposto por Davis (Davis, 1993) é o fato de não exigir um limitante superior para o para cada ponto inicial do procedimento de busca.

Para funções $\phi \in B(S)$ defina-se o seguinte operador:

$$W(\eta, i) = P[\phi](\eta, i)$$

A caracterização da proposta para resolução do problema de otimização proposto nesse capítulo é a que segue:

Teorema 3.2 *A seqüência*

$$W_i = P[W_{i-1}] \tag{3.35}$$

onde $W_0 \in B(S)$ converge uniformemente para $V \in B(S)$ e V é a única solução de $V = P[V]$

Prova:

Do lema 3.4, tem-se que P é um operador contrativo. Portanto, para qualquer $W_0 \in B(S)$, a seqüência

$$\{W_0, PW_0, P^2W_0, \dots\}$$

converge para algum $W = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n W_0$, sendo W um ponto fixo de P . No entanto, o lema 3.4 mostra que P é um operador contrativo e, portanto, possui um único ponto fixo, vide teorema A.1 do apêndice A. Mas o teorema 3.1 mostra que $V = P[V]$, donde podemos concluir que $W = V$.

□

Dessa forma, o processo de solução do problema consiste em aplicar recursivamente a equação (3.35) partindo de uma função $W_0 \in B(S)$ qualquer, até que se chegue ao ponto $W = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n W_0$ que coincide com a função valor V , que é solução da equação (3.11). Como discutido anteriormente, esse processo de busca recursiva não estabelece nenhum limite superior para a função W_0 , ao contrário do método proposto por Davis (Davis, 1993). Esse último, caracterizado na proposição 3.1, impõe um limite superior para W_0 a fim de que se possa garantir a convergência do processo de busca.

Capítulo 4

Procedimentos recursivos

As rotinas computacionais desenvolvidas para a solução do problema de controle impulsional aplicado a sistemas de produção de múltiplos itens baseiam-se diretamente nos resultados obtidos na seção 3.5. A simplicidade das referidas ferramentas computacionais é uma implicação direta da forma de solução obtida no capítulo 3, em vista das hipóteses assumidas no modelamento do problema, que foi detalhado na seção 3.2.

Embora seja possível solucionar os problemas de um item através das rotinas elaboradas para o problema de múltiplos itens, foram desenvolvidas rotinas específicas para a solução do primeiro problema. Essas rotinas se utilizam das peculiaridades e da menor dimensão do problema de um item, no intuito de tornar o procedimento de busca mais eficiente. O procedimento de busca sugerido pode ser visto como uma aplicação direta dos resultados obtidos na seção 2.5 para o problema de controle impulsional aplicado a sistemas de produção de um único item.

Na seqüência do capítulo apresenta-se a descrição dos procedimentos computacionais sugeridos para a busca da solução dos problemas de um único item e de múltiplos itens. Além disso, apresenta-se sugestões para aceleração da convergência do procedimento computacional de busca da solução ótima para o problema de um único item. Apresenta-se também alguns resultados ilustrativos das alternativas discutidas ao longo do capítulo.

4.1 Algoritmos para problemas de um item

Foram implementadas duas ferramentas computacionais distintas para a solução do problema de controle impulsional aplicado a sistemas de produção de um único item. A primeira delas é uma aplicação direta da equação recursiva (2.20) e soluciona o problema a partir de uma função valor inicial $V_0 \in B(S)$ arbitrária. A cada iteração é realizada a comparação entre as funções

valor de permanência e intervenção para ambos os subconjuntos do sistema, escolhendo-se a menor delas. A estratégia de controle ótima corresponde às ações de controle referentes à função valor obtida a medida que o número de iterações tende a infinito. A segunda ferramenta computacional implementada é uma variação da primeira, onde assume-se uma função valor inicial $V_0 \in B(S)$, que é a solução analítica de regime para um problema auxiliar com os mesmos parâmetros, onde a intervenção é penalizada através de uma função de custo de setup $g \rightarrow \infty$. Os demais passos do procedimento computacional são idênticos àqueles referentes ao primeiro algoritmo. A seguir apresenta-se a descrição passo a passo dos algoritmos acima referidos.

Algoritmo I:

Passo 1 Escolha arbitrariamente $V_0 \in B(S)$

Passo 2 No subconjunto S' determine V_i resolvendo a seguinte equação:

$$V_i(\eta) = \{V_{i-1}(\bar{\eta}) + g(\eta)\} \wedge R_2[V_{i-1}](\eta) \quad \forall \eta \in S' \quad (4.1)$$

Passo 3 No subconjunto S'' determine V_i resolvendo a seguinte equação:

$$V_i(\eta) = \{V_i(\bar{\eta}) + g(\eta)\} \wedge R_2[V_{i-1}](\eta) \quad \forall \eta \in S'' \quad (4.2)$$

Passo 4 Retorne ao passo 2 caso o valor da norma $\|V_i - V_{i-1}\|$ não seja suficientemente pequeno.

Caso contrário, adote como solução os últimos valores de V .

Deve-se intervir no sistema sempre que a relação $\{V_i(\bar{\eta}) + g(\eta)\} \leq R_2[V_{i-1}](\eta)$ for satisfeita.

Algoritmo II:

Passo 1 Determine W resolvendo analiticamente a seguinte equação:

$$W(\eta) = R_2[W](\eta) \quad \forall \eta \in S \quad (4.3)$$

e faça $V_0 = W$

Os passos 2, 3 e 4 são idênticos aos descritos no algoritmo I. Apresenta-se a seguir uma tabela comparativa do desempenho dos algoritmos I e II na busca de soluções dos problemas de um item propostos no capítulo 5, cujos parâmetros são apresentados na tabela 5.1. Para o algoritmo I foi arbitrada uma função valor inicial $V_0 = h$, coincidente com o custo instantâneo de evolução do sistema no estado corrente. O processo de resolução analítica da expressão (4.3) é explicitado no apêndice B.

Tabela 4.1: Iterações e tempo de processamento dos exemplos apresentados na tabela 5.1

Exemplo	Algoritmo I		Algoritmo II	
	Iterações	Tempo de processamento	Iterações	Tempo de processamento
Caso A	77	1.81 s	62	1.50 s
Caso B	77	1.81 s	61	1.43 s
Caso C	45	1.31 s	44	1.26 s
Caso D	77	1.75 s	47	1.32 s
Caso E	76	1.81 s	63	1.54 s
Caso F	59	1.65 s	48	1.32 s
Caso G	56	1.60 s	37	1.32 s
Caso H	41	1.21 s	27	1.16 s

4.1.1 Atribuição das condições de contorno

Nesse trabalho buscou-se simular o comportamento de sistemas de produção de um item com $\bar{N}$ infinito. Todavia, uma vez que se assumiu, para efeitos práticos, que o sistema possui conjunto $\bar{N}$ finito e, portanto, condições de contorno desconhecidas, foram estudadas alternativas de aproximação dessas condições de contorno, de forma a atenuar o efeito de condições de contorno incompatíveis com a solução do problema no processo de convergência do procedimento de obtenção da função valor do problema para a região de operação do sistema. Lembrando que as condições de contorno são os valores iniciais ($V(N^-), \dots, V(N^- + l)$) e finais ($V(N^+ - K), \dots, V(N^+)$) da função valor do problema. Ora, ao se assumir condições de contorno constantes, ocorre como que um “encolhimento” dos valores de η atualizados, uma vez que os estados constantes iniciais “amarram” os l valores seguintes, que permanecem constantes na próxima iteração, e assim por diante.

A primeira alternativa considerada foi aquela proposta em (Davis, 1984) que consiste em se estabelecer penalizações constantes para os estados extremos do conjunto $\bar{N}$ por meio da função de penalização Ψ . No entanto, ao se testar a aproximação das condições de contorno, iteração a iteração, por meio de extrapolação linear ou quadrática, e tomando como referência para a aproximação pontos da região de operação do sistema, verificou-se que a convergência do algoritmo torna-se mais rápida. Essa extrapolação consiste em tomar como base pontos vizinhos aos pontos centrais do conjunto $\bar{N}$ considerado, definir uma função linear ou quadrática passando por esses pontos, e aproximar as condições de contorno com base na função de extrapolação obtida. Desse modo, optou-se por desconsiderar a primeira alternativa, dada a redução sensível no tempo de processamento do algoritmo ao se aplicar a referida aproximação das condições de contorno. Uma vez que foram simulados sistemas com funções de custo de estoque/déficit lineares e quadráticas,

optou-se pela aproximação quadrática das condições de contorno, por se verificar que se trata de uma função aplicável satisfatoriamente para ambos os casos.

4.1.2 Redução do espaço de estados

Resultados numéricos mostraram que o comportamento da função valor do problema de controle impulsional aplicado a sistemas de produção de um único item tende a acompanhar o comportamento da função de custo instantâneo de permanência $h : S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Assim, a função valor de sistemas cuja função de custo de permanência é quadrática, tende a ser quadrática, e assim por diante. Os gráficos a seguir ilustram a trajetória da função valor ao longo do espaço de estados para os casos F e H da tabela 5.1.

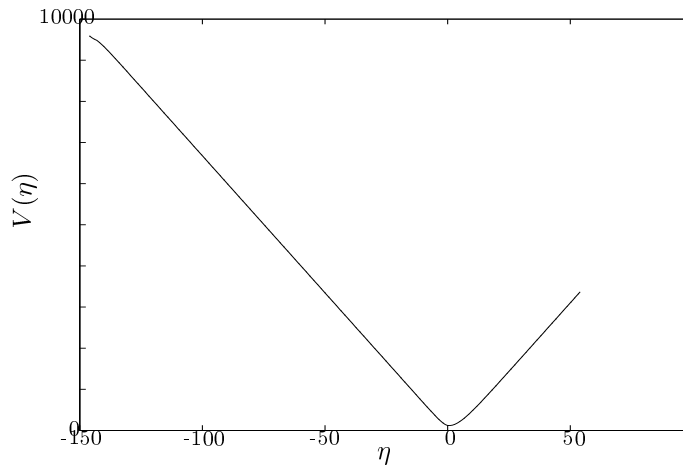


Figura 4.1: Função valor para o caso F (h linear)

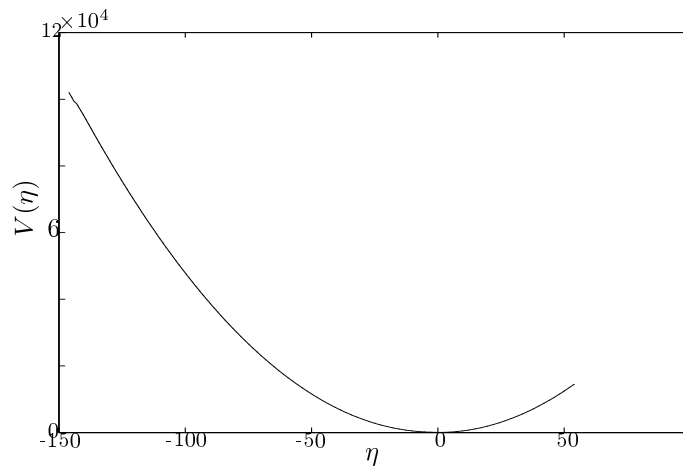


Figura 4.2: Função valor para o caso H (h quadrático)

Assim, a função valor do problema tem bastante similaridade com a função valor inicial, dada por (4.3) e atribuída pelo algoritmo 2, cuja facilidade de cálculo analítico é bastante simples, conforme mostrado no Apêndice B. De fato, o comportamento da função valor é alterado apenas em pontos próximos à região de comutação. Em vista disso, foi testada a alternativa de se assumir, para pontos a certa distância da região de comutação, a função valor como sendo a função W obtida pelo algoritmo 2 e reduzir-se o espaço de estados do sistema a um conjunto de pontos na vizinhança do ponto de mínimo da função convexa h . Dessa forma, assume-se as condições de contorno como conhecidas e dadas pelos valores de $V_0 = W$ correspondentes. Todavia, o tamanho a que o espaço de estados pode ser reduzido sem o risco de obtenção de uma estratégia sub-ótima depende das características dos custos de permanência e setup, devendo ser considerado individualmente para cada problema.

Como forma de verificação das afirmações acima, foi simulado o caso H da tabela 5.1 considerando-se o espaço de estados reduzido a $\bar{N}_0 = \{-5, \dots, 5\}$. Para os valores do conjunto $\bar{N}/\bar{N}_0$ assume-se $V = W$. Os gráficos abaixo permitem uma comparação entre os valores das funções valor inicial W e final V nos subconjuntos S' e S'' , respectivamente, para o caso H . Veja que na figura 4.3 os valores de W e V são praticamente iguais para valores $\eta < -5$ em S' . Na figura 4.4 verifica-se que os valores de W e V praticamente se confundem para valores de estoque $\eta > 5$ em S'' .

Com relação ao desempenho do algoritmo, verificou-se, aplicando o algoritmo 2, que o número de iterações baixou de 27 para 21. Já o tempo de processamento foi reduzido de 1.16s para 0.61s (vide tabela 5.1). Se comparado ao algoritmo I, o procedimento de redução do espaço de estados apresenta vantagem ainda maior.

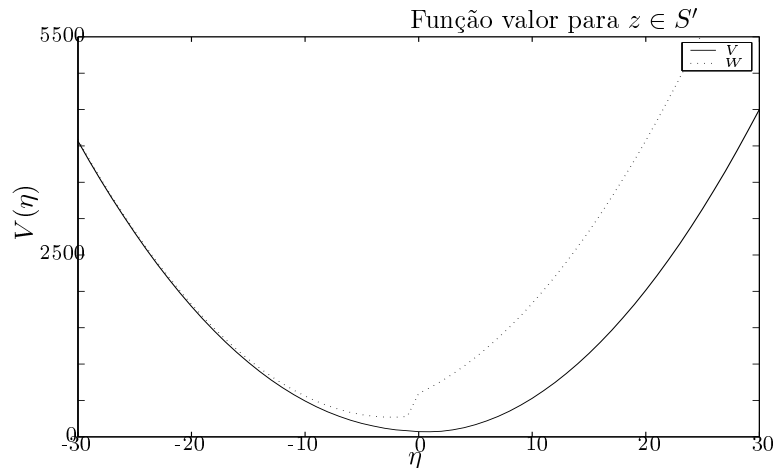


Figura 4.3: Caso H: comparação de W e V para $z \in S'$

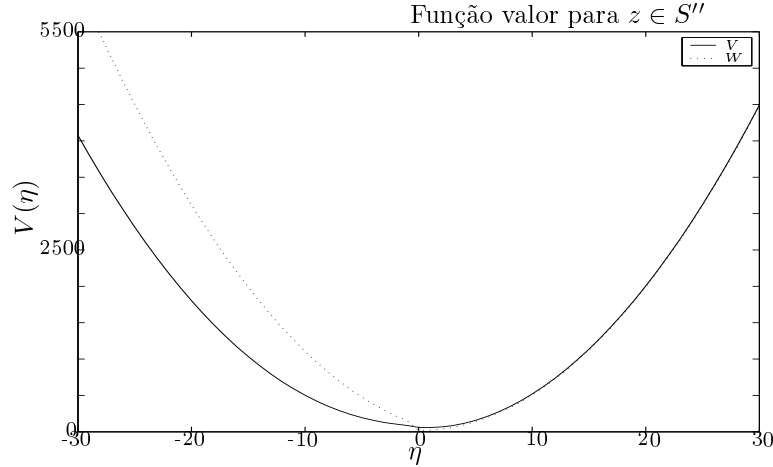


Figura 4.4: Caso H: comparação de W e V para $z \in S''$

4.2 Algoritmos para problemas de múltiplos itens

O procedimento computacional elaborado para a solução do problema de controle impulsional aplicado a sistemas de produção de múltiplos itens é uma aplicação direta da equação recursiva (3.35). Partindo de uma função V_0 arbitrária, compara-se, a cada iteração, a função valor de permanência com as funções valor de intervenção para cada um dos demais subconjuntos do espaço de estados, escolhendo-se a menor delas. A estratégia de controle ótima corresponde às ações de controle referentes à função valor obtida para cada subconjunto do espaço de estados, a medida que o número de iterações tende a infinito. Apresenta-se em seguida a descrição do algoritmo mencionado.

Algoritmo I:

Passo 1 Escolha arbitrariamente $V_0 \in B(S)$

Passo 2 Nos subconjuntos de produção S^i , $1 \leq i \leq p$ determine $V_k(\eta, v)$ resolvendo a seguinte equação:

$$V_k(\eta, i) = \min_{j \neq i} \{V_{k-1}(\eta, j) + g(\eta, i, j)\} \wedge R_2[V_{k-1}](\eta, i) \quad \forall \eta \in S^i \quad (4.4)$$

Passo 3 No subconjunto S^0 determine $V_k(\eta, 0)$ resolvendo a seguinte equação:

$$V_k(\eta, 0) = \min_{j \neq i} \{V_k(\eta, j) + g(\eta, i, j)\} \wedge R_2[V_{k-1}](\eta, 0) \quad \forall \eta \in S^0 \quad (4.5)$$

Passo 4 Retorne ao passo 2 se o valor da norma $\sum_{i=0}^p \|V_k - V_{k-1}\|$ não for suficientemente pequeno. Caso contrário, adote como solução os últimos valores de V .

Tabela 4.2: Iterações e tempo de processamento dos exemplos apresentados na tabela 5.2

Exemplo	Iterações	Tempo de processamento
Caso I	68	8.15 min
Caso J	46	5.71 min

Deve-se intervir no sistema sempre que a relação $\{V_k(\eta, j) + g(\eta, i, j)\} \leq R_2[V_{k-1}](\eta, i)$ for satisfeita para algum $j \neq i$.

Em vista da grande complexidade dos problemas de controle impulsional aplicados a sistemas de produção de múltiplos itens, os procedimentos de aceleração de convergência propostos para o caso de problemas de um único item não apresentam vantagens significativas se aplicados aos problemas de múltiplos itens. Isso se deve ao fato de requererem grande esforço computacional, recompensado com vantagens mínimas em relação ao algoritmo tradicional. Com relação às condições de contorno, a aproximação quadrática a diferenças parciais para cada componente do vetor η (procedimento equivalente ao adotado para problemas de um único item descrito na seção 4.1.1) não mostrou vantagens em relação ao procedimento de assumir penalizações constantes para os estados iniciais, proposto em (Davis, 1984). Por essa razão, adotou-se a última alternativa, que não apresenta esforço computacional extra na atribuição das condições de contorno. A tabela 4.2 apresenta o desempenho do algoritmo proposto na busca de soluções dos problemas de múltiplos itens propostos no capítulo 5, cujos parâmetros são apresentados na tabela 5.2.

De acordo com os parâmetros descritos na tabela 5.2, verifica-se que os casos I e J apresentam um espaço de estados composto por 40401 estados. Verifica-se também que o custo computacional do algoritmo cresce com a dimensão do problema. A quantidade de estados possíveis do sistema pode ser expressa pela seguinte desigualdade:

$$EP \geq \min_i (N_i^+ - N_i^- + 1)^p, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.6)$$

Assim, por apresentar um critério de decisão baseado no estado do sistema, o algoritmo proposto tornar-se-á mais lento a medida que se aumenta a dimensão do sistema, sendo necessário máquinas com alta capacidade de processamento para simular em tempo hábil sistemas de grande dimensão.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Neste capítulo apresenta-se os resultados numéricos de alguns exemplos simulados para o problema de controle impulsional aplicado aos sistemas de produção de um único item e de múltiplos itens. Alguns casos simulados para problemas de um item foram relatados no capítulo 5 de (Salles, 1999), tendo sido incluídos nesse trabalho como forma de validação dos resultados aqui obtidos.

Também são relatados os resultados obtidos para o problema de múltiplos itens com dois itens em produção. Resultados referentes a sistemas de maior dimensão não são mostrados por conta de sua dificuldade de visualização e apresentação. A seguir apresenta-se os resultados numéricos obtidos para alguns exemplos simulados neste trabalho.

5.1 Resultados do problema de um item

Seguem alguns resultados numéricos para o problema de controle impulsional de um item. Os parâmetros são descritos na tabela 5.1; considera-se que o espaço de estados seja dado por $S = \{-146, \dots, 54\} \times [0, \infty)$. Em cada um dos casos considera-se que o tamanho de cada lote pedido tem distribuição binomial $p_k = (0.0417 + 0.5^l l!) / k!(l - k)!$, $k = 1, \dots, l$, onde l é o máximo pedido aceito. A política $u = 1$ representa não intervenção para $z \in S'$, e intervenção para $z \in S''$; a política $u = 0$ representa não intervenção para $z \in S''$, e intervenção para $z \in S'$. Alguns dos casos aqui apresentados podem ser encontrados em (Salles, 1999), com a diferença que naquele trabalho adota-se um custo total Γ fixo, ao passo que aqui adota-se Γ exponencialmente distribuído, com o cuidado de fazer com que o valor médio da distribuição exponencial do custo seja igual ao custo fixo adotado em (Salles, 1999). A tabela 5.1 apresenta os parâmetros referentes aos exemplos numéricos simulados. Os casos simulados satisfazem a condição de estabilidade expressa pela equação (1.7).

Tabela 5.1: Casos numéricos para o problema de um item

Caso	Parâmetros									
	Taxa de desc. (α)	Custo de prod. (β)	Chegada de clientes (δ)	Taxa de conc. (γ)	Custo de estoque ($L(\eta)$)	Custo de déficit	Custo de set up ($g(\eta)$)	Lote produzido	Pedido máximo	Transição η''_* η'_*
A	0.1	0	0.25	0.5	5η	-10η	0	1	3	1 1
B	0.1	5	0.25	0.5	5η	-10η	0	1	3	0 0
C	0.1	0	0.25	0.5	5η	-10η	0	6	3	-2 -2
D	0.1	0	0.25	0.5	1.2η	-1.2η	0	1	3	0 0
E	0.1	5	0.25	0.5	η	$-\eta$	0	1	3	-1 -1
F	0.15	0	0.3	0.5	10η	-10η	2.5	1	3	-1 0
G	0.2	5	0.3	0.5	η^2	η^2	10	1	6	0 3
H	0.2	5	0.3	0.5	$\eta^2 + 5\eta$	$\eta^2 - 5\eta$	10	3	3	-2 -1

As figuras a seguir apresentam a política ótima para cada um dos casos apresentados na tabela 5.1. Os casos de A a E são exemplos de resolução do problema de controle contínuo através do procedimento de obtenção de solução para o problema de controle impulsional. Isso é possível porque o problema de controle contínuo pode ser visto como uma particularização do problema de controle impulsional, como mencionado na seção 2.2. Note que a política de controle obtida é equivalente à política *cutoff*, descrita na seção 2.6, pois cada um desses casos apresenta um único nível de estoque de transferência de S' para S'' e vice versa. As figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam as políticas de controle ótimas obtidas para os casos A , B , C , D e E , respectivamente.

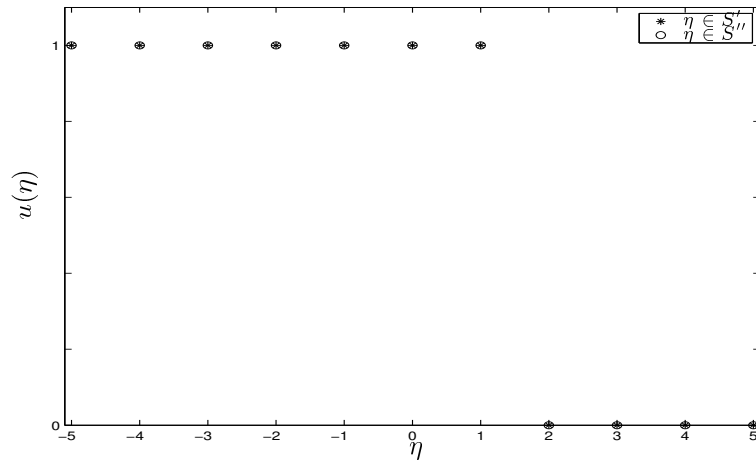


Figura 5.1: Estratégia de produção para o caso A

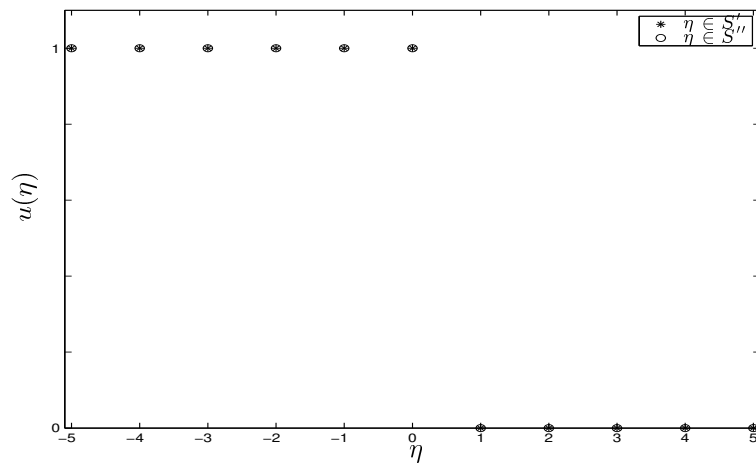


Figura 5.2: Estratégia de produção para o caso B

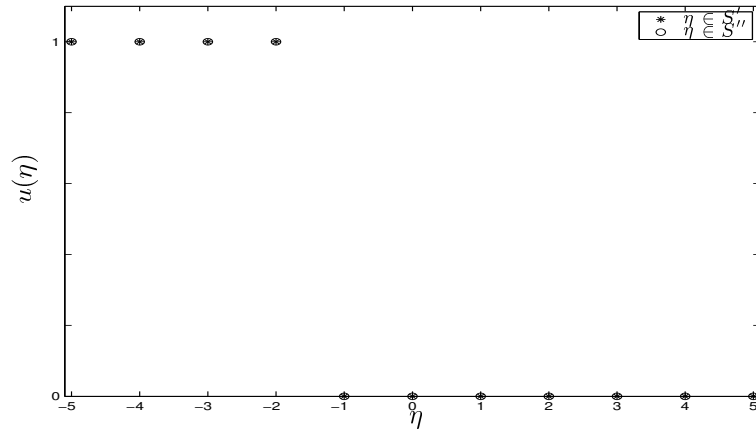


Figura 5.3: Estratégia de produção para o caso C

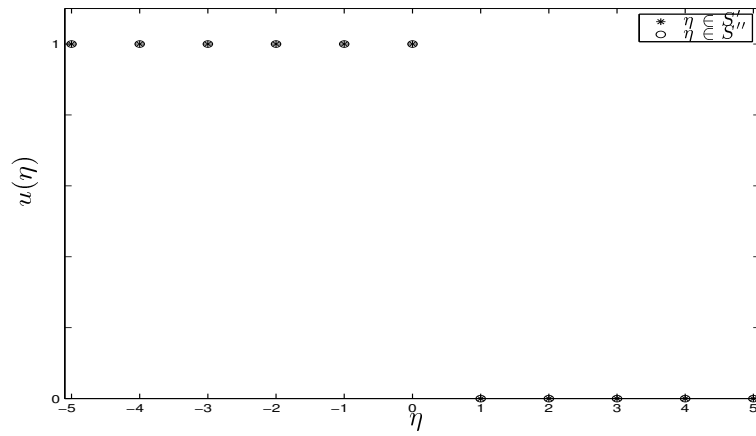


Figura 5.4: Estratégia de produção para o caso D

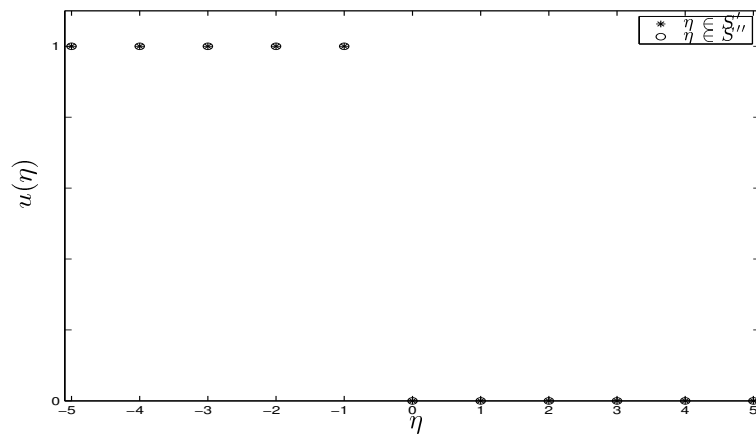


Figura 5.5: Estratégia de produção para o caso E

Os casos F , G e H apresentam custo de setup não nulo. Por esse motivo, a política ótima para esses casos apresenta três regiões distintas: uma região onde a política ótima é produzir o item à máxima taxa possível composta por níveis de estoque baixos; uma região onde a política ótima é não intervir no sistema, esteja ele evoluindo em qualquer dos subconjuntos (S' ou S''), denominada de *região de não intervenção* e uma região onde a política ótima é paralisar a produção, região esta composta por níveis de estoque altos. A região de não intervenção é composta por níveis de estoque onde a diferença entre as funções valor de permanência em S' e S'' é menor que o valor de setup $g(\eta)$. Assim, é mais vantajoso permanecer no subconjunto atual até o próximo salto do sistema, para que não se tenha que pagar o valor de intervenção no estado atual. As políticas de controle ótimas para os casos F , G e H são apresentadas nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8.

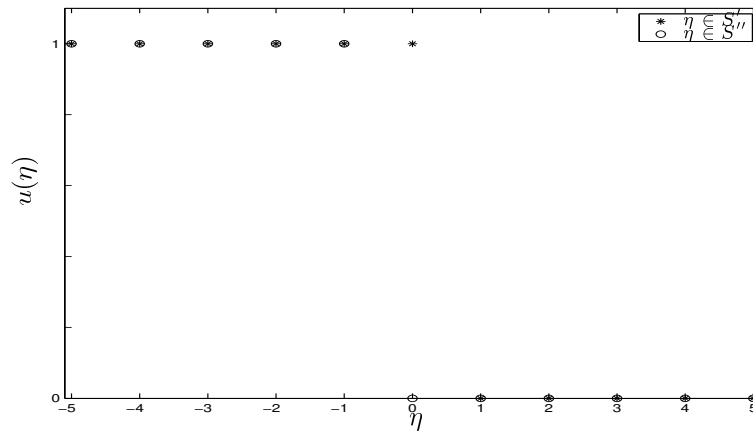


Figura 5.6: Estratégia de produção para o caso F

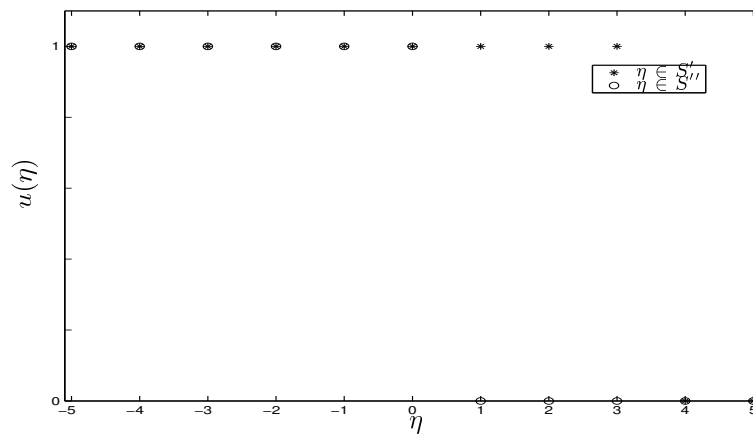


Figura 5.7: Estratégia de produção para o caso G

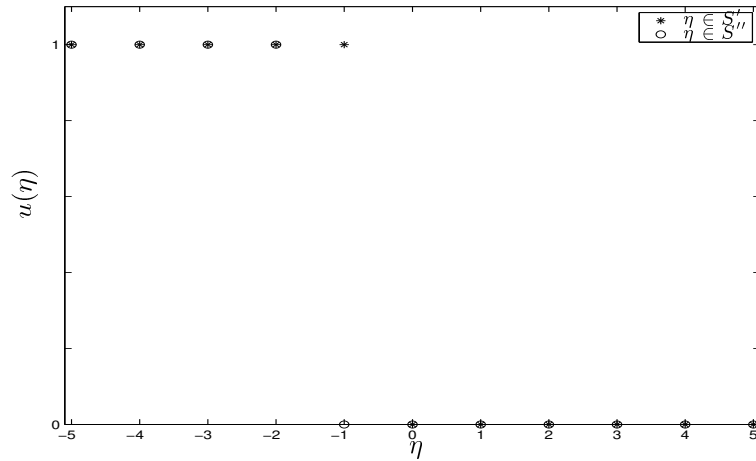


Figura 5.8: Estratégia de produção para o caso H

5.2 Resultados do problema de múltiplos itens

São apresentados alguns problemas simulados para sistemas de produção de dois itens cujos parâmetros se encontram descritos na tabela 5.2. Considera-se que o tamanho dos lotes pedidos para cada um dos produtos tem a mesma distribuição apresentada na seção 5.1. Os resultados obtidos para os casos I e J são mostrados nas figuras 5.9 e 5.10, respectivamente. Para pontos pertencentes a S^0 , $u = 0$ indica não intervenção, $u = 1$ indica transferência para S^1 e $u = 2$ indica transferência para S^2 ; para pontos pertencentes a S^1 , $u = 1$ indica não intervenção, $u = 0$ indica transferência para S^0 e $u = 2$ indica transferência para S^2 ; para pontos pertencentes a S^2 , $u = 2$ indica não intervenção, $u = 0$ indica transferência para S^0 e $u = 1$ indica transferência para S^1 . Cada subconjunto (S^0 , S^1 , e S^2) possui regiões onde a política ótima é não intervir e regiões onde a política ótima é transferir o sistema para um dos demais subconjuntos. Note que há níveis de estoque para os quais a política ótima é de não intervenção para mais de um subconjunto, sendo que a região de não intervenção é composta pelos níveis de estoque onde a política ótima é de não intervenção para todos os subconjuntos do espaço de estados. É importante mencionar que no caso de falhas no sistema de produção o sistema deve ser automaticamente transferido para S^0 .

A figura 5.11 exemplifica uma trajetória ótima para o caso I, cujos parâmetros estão descritos na tabela 5.2. Partindo do ponto inicial $z_0 = (2, -1) \in S^2$, são solicitadas 3 unidades do produto P_1 e o sistema salta para $z_1 = (-1, -1) \in S^2$. O salto seguinte ocorre quando é concluído um lote de $K_2 = 5$ unidades do produto P_2 e o sistema salta para o ponto $z_{2-} = (-1, 4) \in S^2$. Nesse estado ocorre uma intervenção e o sistema é transferido para o ponto $z_2 = (-1, 4) \in S^1$. Já evoluindo em S^1 , um lote de $K_1 = 2$ unidades do produto P_1 é concluído e o sistema salta para o ponto $z_{3-} = (1, 4) \in S^1$, onde uma nova intervenção transfere o sistema para o ponto $z_3 = (1, 4) \in S^0$.

Com o sistema paralisado chega um pedido de 3 unidades do produto P_2 e o sistema salta para o ponto $z_4 = (1, 1) \in S^0$. Em seguida, são solicitadas 3 unidades do produto P_1 e o sistema salta para o ponto $z_{5-} = (-2, 1) \in S^0$, onde uma nova intervenção deve transferi-lo para o subconjunto S^1 , e assim por diante.

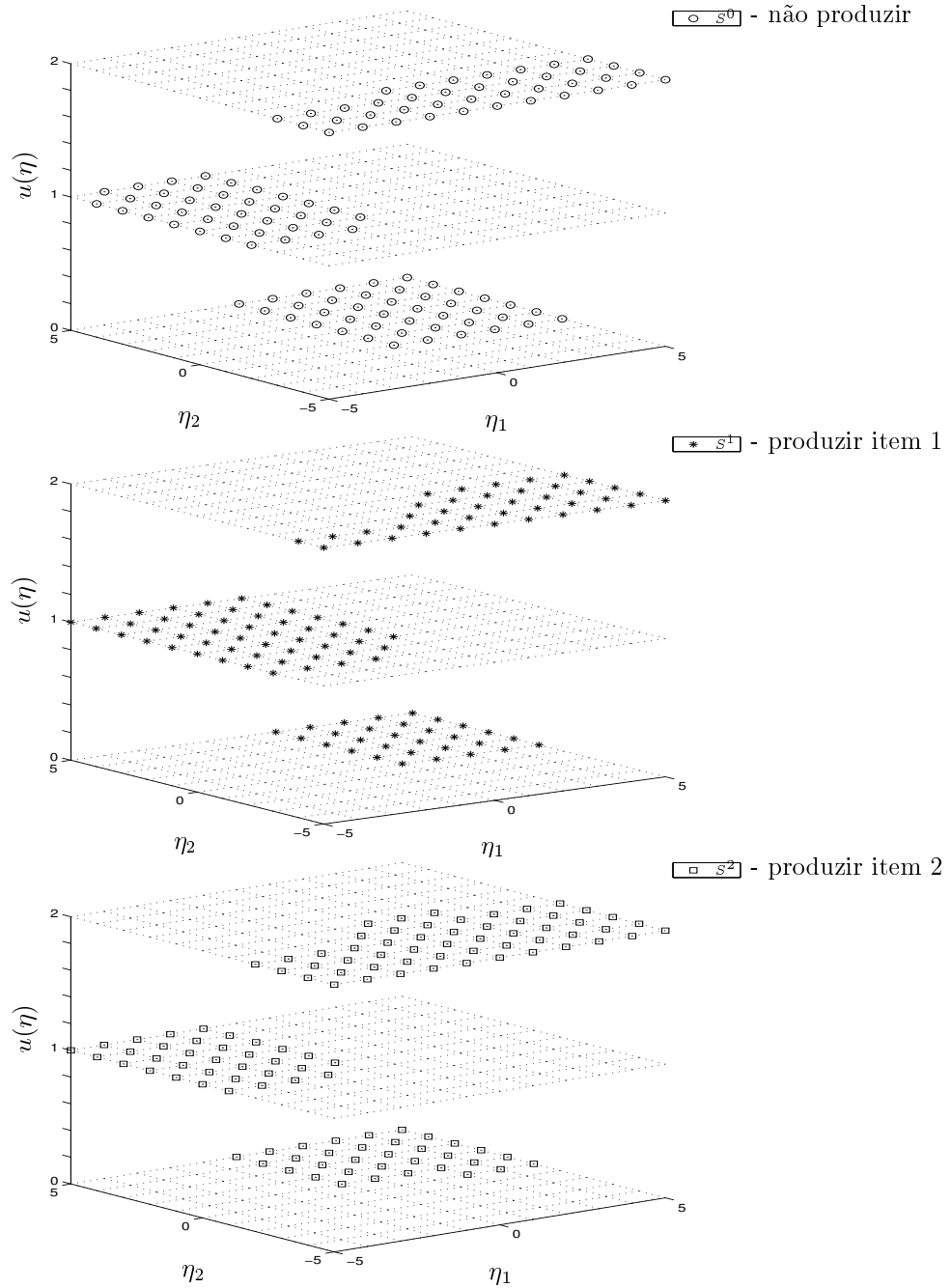


Figura 5.9: Estratégia de produção para o caso I

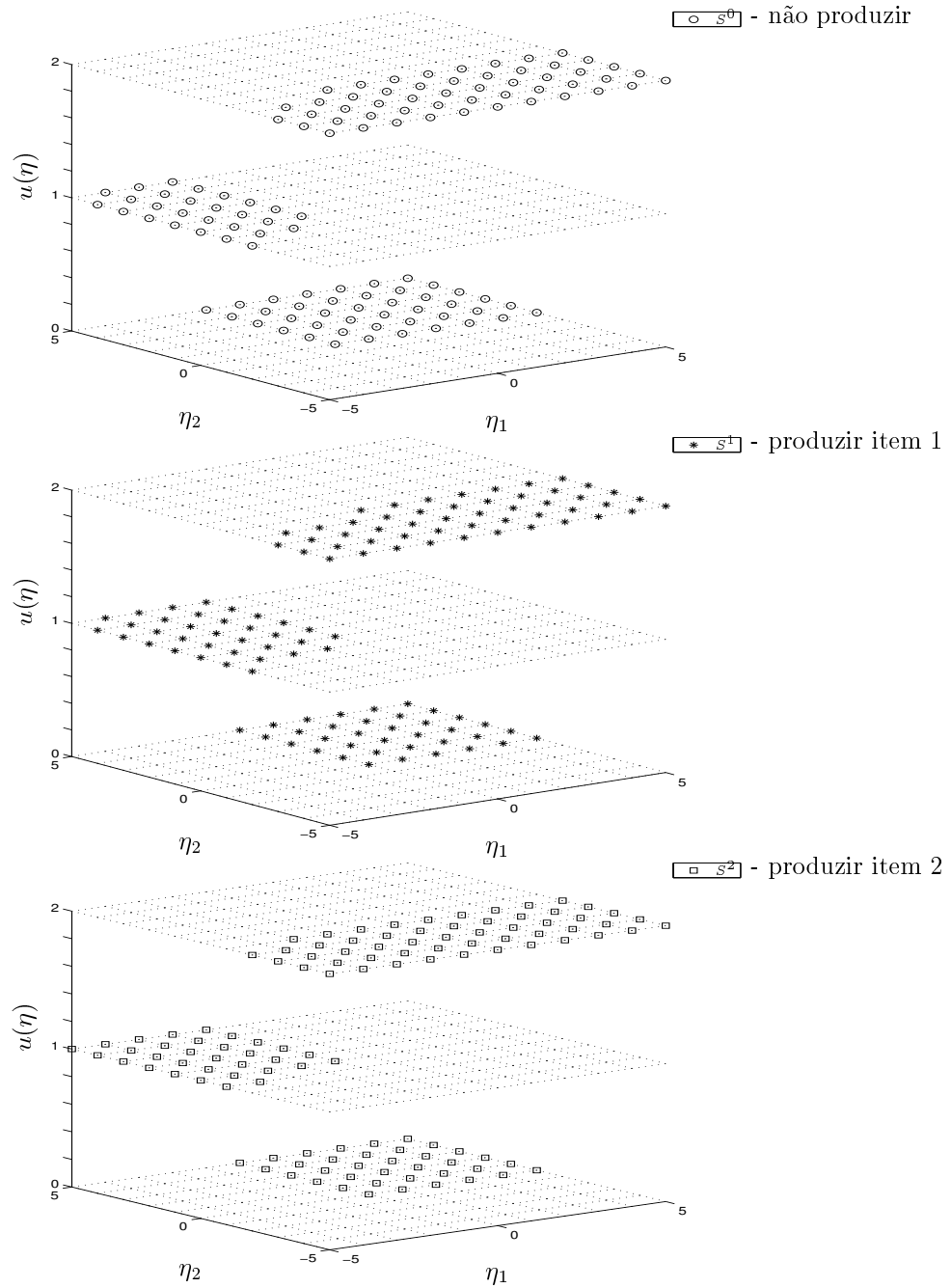


Figura 5.10: Estratégia de produção para o caso J

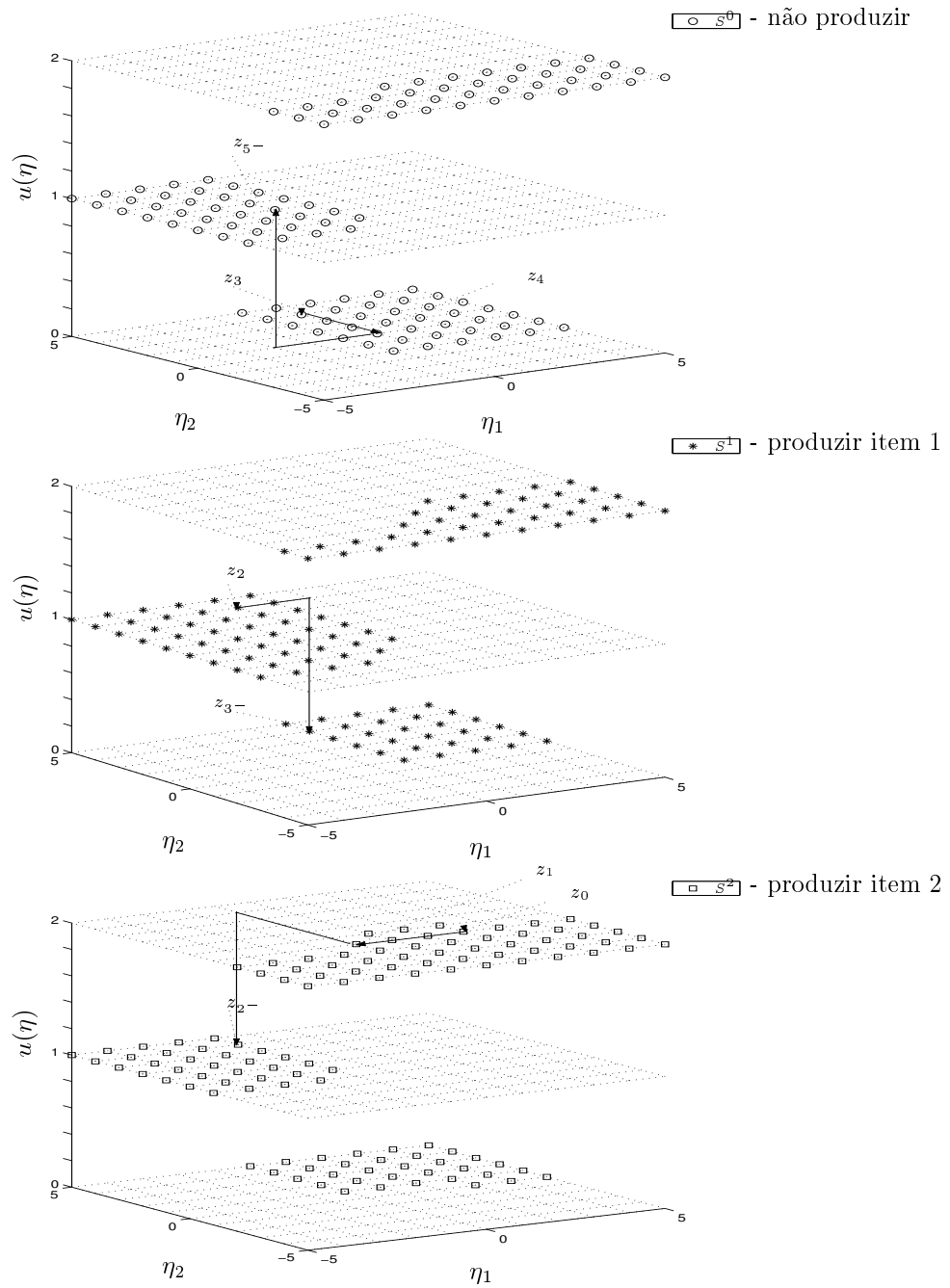


Figura 5.11: Exemplo de trajetória para o caso I

Tabela 5.2: Casos numéricos para o problema de múltiplos itens

Caso		Parâmetros														
	Taxa de desconto (α)	C. prod.		Ch. clientes		T. concl.		C. estoque		C. déficit		Custo de set up ($g(\eta)$)	Lotes		Pedidos	
		β_1	β_2	δ_1	δ_2	γ_1	γ_2	$L(\eta_1)$	$L(\eta_2)$	$L(\eta_1)$	$L(\eta_2)$		K_1	K_2	l_1	l_2
I	0.15	0	1	0.3	0.3	0.5	0.5	10η	η^2	-10η	η^2	10	2	5	3	6
J	0.25	2	5	0.2	0.4	0.5	0.5	η^2	$\eta^2 + 5\eta$	η^2	$\eta^2 - 5\eta$	2.5	3	4	4	6

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho se propôs a apresentar um método mais simples de solução para os problemas de controle impulsional aplicados a sistemas de produção de um único item e de múltiplos itens. Esse método pode ser aplicado a problemas bastante difundidos na literatura, tais como o *problema de expansão de capacidade*, o *problema de produção e estoque* e o *problema de filas com servidor removível*, de forma a tornar possível a obtenção da política ótima de intervenção para problemas de maior dimensão não abordados na vasta literatura de pesquisa operacional.

Os resultados apresentados nesse trabalho tornaram mais simples o processo de busca da solução para problemas de um item, apresentando também sugestões acerca da melhoria da convergência do método proposto, com vistas a torná-lo ainda mais eficiente. As simplificações no modelamento tornaram possível a solução de problemas de múltiplos itens, uma vez que a solução do problema é expressa em termos de equações algébricas. Assim, foi possível a elaboração um procedimento computacional viável de busca da solução ótima para problemas de dimensão maior.

As soluções são obtidas através de propriedades e operadores de programação dinâmica, com o uso de uma técnica bem semelhante à programação dinâmica e que, tal qual a primeira, fornece ações de controle ótimas para cada estado possível do sistema. Nesse sentido, a adoção de custos distribuídos exponencialmente diminui significativamente a dimensão do espaço de estados do sistema uma vez que, possuindo uma distribuição sem memória, o custo esperado de conclusão de um item é constante para cada estado do sistema. Essa propriedade nos permite excluir a variável progressão da produção da formulação, considerando apenas a variável discreta de nível de estoque/encomendas.

A maior virtude do presente trabalho é a simplicidade dos resultados obtidos. A simplicidade da solução permite que se possa solucionar programas de grande dimensão computacional. Nesse sentido, foram propostos e implementados procedimentos computacionais eficientes, simples e de

fácil implementação, com base na solução matemática obtida para os problemas de um único item e de múltiplos itens. As políticas de intervenção obtidas para os problemas abordados são atraentes em vista de sua simplicidade, uma vez que estabelecem limiares de estoque dividindo as regiões de produção e intervenção do sistema.

Para trabalhos futuros sugere-se a análise da viabilidade de se tratar o problema de múltiplos itens como uma composição de p problemas de um único item, onde p é a quantidade de produtos do sistema. Outra possibilidade é a redução do espaço de estados do problema de múltiplos itens por meio da resolução separada de p problemas de um item, um para cada produto. Assim, os estados η tais que $\eta_i \in S'' \forall i \in \{1, p\}$ podem ser excluídos do espaço de estados, uma vez que pode-se concluir a priori que a política ótima para esses estados é a paralisação do sistema. Outras vertentes a serem exploradas referem-se aos procedimentos computacionais de solução do problema. Pode-se analisar o tratamento do problema aqui proposto ou mesmo considerar-se o tratamento do problema de fronteira fixa, abordado em (Salles, 1999), por meio de algoritmos genéticos.

O objetivo maior desse trabalho foi estabelecer uma abordagem para o problema de controle impulsional aplicado a sistemas de produção e múltiplos itens, com a pretensão de trazer também uma contribuição para o estudo desse problema, bem como servir de referência para trabalhos futuros nessa área. Possam esses objetivos serem alcançados, o trabalho terá sido ainda mais gratificante.

Apêndice A

Resultados auxiliares do capítulo 2

A.1 Resultados auxiliares da seção 2.2

Esta seção começa com o lema A.1, que calcula o valor esperado do operador $\mathcal{T}_u[\phi]$, definido pela equação (2.3). Em seguida mostra-se, de acordo com o princípio de Pontryagin, que a política de controle ótima para o problema de controle contínuo é do tipo bang-bang. O lema A.2 mostra que a função valor do problema PC no horizonte de um salto independe da variável progressão da produção ξ quando se assume $\phi(\eta, \xi) = \phi(\eta), \forall \xi \in S$.

Sejam definidas as seguintes variáveis:

$$\Lambda(t, u) := \int_0^t \lambda(u(s))ds = \delta t + \gamma \int_0^t u(s)ds$$

$$\hat{\Lambda}(t, u) := \alpha t + \Lambda(t)$$

$$\mathcal{Q}[\phi](\eta, \xi, a) = E[(\eta_t, \xi_t) | (\eta_{t-}, \xi_{t-}) = (\eta, \xi), u_{t-} = a] = \frac{\delta}{\lambda(a)} \sum_{k=1}^l \phi(\eta - k, \xi) + \frac{\gamma a}{\lambda(a)} \phi(\eta + K, 0) \quad (\text{A.1})$$

onde K é o tamanho do lote de itens em produção. A medida de transição $\mathcal{Q}[\phi](\eta, \xi, a)$ pode ser interpretada como a distribuição da próxima posição z_t após um salto ocorrido no instante t , a partir da posição z_{t-} , quando é utilizada a ação de controle $u_t = a$.

Seja T_1 o instante de primeiro salto do processo $t \rightarrow z_t$. T_1 é uma variável aleatória com a seguinte distribuição:

$$P(T_1 > t) = e^{-\Lambda(t, u)} \quad (\text{A.2})$$

Lema A.1 O operador $\mathcal{T}_u[\phi](\eta, \xi)$, definido em (2.3) é dado pela seguinte equação:

$$\mathcal{T}_u[\phi](\eta, \xi) = \int_0^\infty e^{-\hat{\Lambda}(s,u)} [L(\eta) + \beta u(s) + \lambda(u(s))\mathcal{Q}[\phi](\eta, \xi, u(s))] ds \quad (\text{A.3})$$

Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_u[\phi](\eta, \xi) &= E_z^u \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha t} [L(\eta) + \beta u(t)] dt + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \right\} \\ &= \int_0^\infty \left\{ E_z \left[\int_0^s e^{-\alpha r} (L(\eta) + \beta u(s)) dr + e^{-\alpha s} \phi(z_{T_1}) | T_1 = s \right] \lambda(u(s)) e^{-\Lambda(s,u)} ds \right\} \end{aligned}$$

Desenvolvendo a primeira parcela da equação anterior, teremos:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \lambda(u(s)) e^{-\Lambda(s,u)} ds \left\{ \int_0^s e^{-\alpha r} (L(\eta) + \beta u(r)) dr \right\} \\ &= \int_0^\infty \lambda(u(s)) e^{-\Lambda(s,u)} ds \left\{ \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{r \leq s\}} e^{-\alpha r} (L(\eta) + \beta u(r)) dr \right\} \\ &= \int_0^\infty \int_r^\infty \lambda(u(s)) e^{-\Lambda(s,u)} ds \left\{ e^{-\alpha r} (L(\eta) + \beta u(r)) dr \right\} \\ &= \int_0^\infty -e^{-\Lambda(s,u)} \Big|_r^\infty e^{-\alpha r} (L(\eta) + \beta u(r)) dr \\ &= \int_0^\infty e^{-\hat{\Lambda}(r,u)} e^{-\alpha r} (L(\eta) + \beta u(r)) dr \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{T}_u[\phi](\eta, \xi) = \int_0^\infty e^{-\hat{\Lambda}(s,u)} [L(\eta) + \beta u(s) + \lambda(u(s))\mathcal{Q}[\phi](\eta, \xi, u(s))] ds$$

Logo,

$$\mathcal{T}[\phi](\eta, \xi) = \inf_{u \in U} \int_0^\infty e^{-\hat{\Lambda}(s,u)} [L(\eta) + \beta u(s) + \lambda(u(s))\mathcal{Q}[\phi](\eta, \xi, u(s))] ds$$

□

Para η constante, o sistema pode ser expresso da seguinte forma:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

Defina-se o seguinte vetor:

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$$

O Hamiltoniano associado ao problema é dado por:

$$\begin{aligned}
H(z, a, p) &= L(\eta) + \beta a + \delta \sum_{k=1}^l \phi(\eta - k, \xi) + \gamma a \phi(\eta + K, 0) + p_2(t)u \\
&= L(\eta) + \sum_{k=1}^l \phi(\eta - k, \xi) + a(\beta + \gamma \phi(\eta + K, 0) + p_2(t))
\end{aligned}$$

Do princípio do mínimo de Pontryagin, o controle ótimo a^* do problema de um salto satisfaz:

$$\min_{a \in [0,1]} H(a, z, \bar{p}) = H(a^*, z, \bar{p})$$

Portanto, o controle $u^*(t)$ que minimiza a expressão acima assume os valores extremos 0 ou 1 (controle bang-bang) devido à dependência linear do Hamiltoniano em relação a $u_t = a$.

Aplicando na equação A.3 $u_t = 1$ e $u_t = 0, \forall t \geq 0$, respectivamente, defina-se os seguintes operadores:

$$\mathcal{T}_1[\phi](\eta, \xi) = \frac{1}{\alpha + \delta + \gamma} [L(\eta) + \beta + \delta \sum_{k=1}^l \phi(\eta - k, \xi) + \gamma \phi(\eta + K, 0)] \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{T}_0[\phi](\eta, \xi) = \frac{1}{\alpha + \delta} [L(\eta) + \delta \sum_{k=1}^l \phi(\eta - k, \xi)] \quad (\text{A.5})$$

De acordo com o exposto acima, para todo $z \in S$, o operador $\mathcal{T}[\phi](z)$ satisfaz a seguinte equação:

$$\mathcal{T}[\phi](\eta, \xi) = \mathcal{T}_0[\phi](\eta, \xi) \wedge \mathcal{T}_1[\phi](\eta, \xi) \quad (\text{A.6})$$

Lema A.2 *Seja $\phi(\eta, \xi) \in B(S) : \phi(\eta, \xi) = \phi(\eta)$, onde $B(S)$ é o espaço das funções limitadas em S . Então: $\mathcal{T}[\phi](\eta, \xi)$ é constante para todo $\eta \in \tilde{N}$.*

Prova:

Para provar-se que $\mathcal{T}[\phi](\eta, \xi)$ não varia com ξ basta provar que os operadores do lado direito de (A.6) são constantes em relação a ξ . Essa verificação é trivial.

Observação

Em (Monticino and Weisinger, 1995) (lema 3.1) é provado que a função valor do problema de controle contínuo independe de ξ devido à contratividade do operador $\mathcal{T}[\phi]$, mesmo que não se assuma a função ϕ como invariante em relação a ξ . Nesse trabalho, opta-se por omitir essa demonstração uma vez que o objetivo principal é a formulação do problema de controle impulsional.

A.2 Resultados auxiliares da seção 2.5

Teorema A.1 *Seja F um espaço métrico completo. Seja $T : F \rightarrow F$ um mapeamento contrativo. Então:*

1. *Há um único w satisfazendo a equação: $Tw = w$. Ou seja, T possui um único ponto fixo.*
2. *Para todo $z \in F$, seja $\{z, Tz, T^2z, \dots\}$ a sequência de iterações sucessivas, onde $T^2(z) = T(T(z))$, e assim por diante; então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n z - w\| = 0, \quad \forall z \in F$$

Prova:

Tome algum $z \in F$. Seja $\alpha := \|z - Tz\|$; então:

$$\|Tz - T^2z\| \leq \beta \|z - Tz\| = \beta \alpha$$

$$\|T^2z - T^3z\| \leq \beta \|Tz - T^2z\| \leq \beta^2 \alpha$$

Assim, por indução chegamos a:

$$\|T^n z - T^{n+1} z\| \leq \beta^n \alpha$$

O próximo passo será mostrar que $\{z, Tz, T^2z, \dots\}$ é uma sequência de Cauchy - isto é, dado $\epsilon > 0$ pode-se encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $\|T^n z - T^{n+i} z\| < \epsilon$, $i \geq 1$, $i \in \mathbb{N}$.

Seja N um número tão grande que $\frac{\beta^N \alpha}{1-\beta} < \epsilon$, o que é possível visto que $0 < \beta < 1$. Então, para $n \geq N$, $i \geq 1$:

$$\|T^n z - T^{n+i} z\| = \|T^n z - T^{n+1} z + T^{n+1} z - T^{n+2} z + \dots + T^{n+i-1} z - T^{n+i} z\|$$

$$\|T^n z - T^{n+i} z\| \leq \|T^n z - T^{n+1} z\| + \|T^{n+1} z - T^{n+2} z\| + \dots + \|T^{n+i-1} z - T^{n+i} z\|$$

$$\|T^n z - T^{n+i} z\| \leq \beta^n \alpha + \beta^{n+1} \alpha + \dots + \beta^{n+i-1} \alpha = \beta^n \alpha (1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{i-1})$$

$$\|T^n z - T^{n+i} z\| < \frac{\beta^N \alpha}{1-\beta} < \epsilon$$

Isto mostra que a seqüência $\{z, Tz, T^2z, \dots\}$ é uma seqüência de Cauchy. Sendo F um espaço métrico completo, a seqüência converge.

Seja $w := \lim_{n \rightarrow \infty} T^n z$ um ponto fixo de T . Como T é contínuo, pois $\|Tx - Ty\| < \beta\epsilon$ para todos os pontos x e y tais que $\|x - y\| \leq \epsilon$, podemos escrever:

$$Tw = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n z\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n z) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} z = w$$

Suponha então que $\tilde{w}$ seja um outro ponto fixo de T , portanto:

$$\|w - \tilde{w}\| = \|Tw - T\tilde{w}\| \leq \beta\|w - \tilde{w}\| = 0$$

o que prova a primeira parte deste teorema.

Para provar a segunda parte tome $y \neq z$. Pelo argumento anterior podemos provar que $\lim T^n y$ existe e é um ponto fixo. No entanto, como o operador T possui um único ponto fixo w , então $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n y = w$.

□

Apêndice B

Resultados auxiliares da seção

4.1.2

Explicita-se aqui o processo de inicialização do algoritmo II, proposto na seção 4.1 para o problema de controle impulsional de um único item. Esse procedimento de inicialização consiste na obtenção da solução analítica de regime da equação 4.3 nos subconjuntos S' e S'' . Essa solução é utilizada no processo de aceleração da convergência proposto na seção 4.1.2.

A obtenção da função W consiste em determinar a solução das seguintes equações a diferença:

$$W(\eta) = \frac{1}{\alpha + \delta + \gamma} (h(\eta) + \delta p_1 W(\eta - 1) + \dots + \delta p_l W(\eta - l) + \gamma W(\eta + K)), \quad \eta \in S' \quad (\text{B.1})$$

$$W(\eta) = \frac{1}{\alpha + \delta} (h(\eta) + \delta p_1 W(\eta - 1) + \dots + \delta p_l W(\eta - l)), \quad \eta \in S'' \quad (\text{B.2})$$

A estabilidade das equações acima pode ser garantida por manipulação simples de variável, pois se qualquer das equações acima for instável para η crescente, ela será estável para η decrescente. Para funções h lineares e quadráticas utilizou-se o método dos coeficientes a determinar para solucionar as equações (B.1) e (B.2); para funções h modulares ou envolvendo o módulo, o método utilizado para aproximar a solução das equações acima foi a resolução dessas equações para $\eta > 0$ e $\eta \leq 0$, $\eta \in \bar{N}$ separadamente, pelo método dos coeficientes a determinar; para funções h diferentes das mencionadas acima, são arbitradas condições iniciais para valores de $\eta < N^-$ arbitrariamente pequenos, como forma de atenuar a influência dos estados iniciais na região de comutação, para então resolver-se recursivamente as equações (B.1) e (B.2) a partir das condições iniciais arbitradas.

Referências Bibliográficas

- Arruda, E. F. and do Val, J. B. R. (2002). Problema de controle impulsional para vários itens em produção. Artigo submetido ao XIV Congresso Brasileiro de Automática.
- Bashyam, T. C. A. (1996). Competitive capacity expansion under demand uncertainty, *European journal of operational research* **95**: 89–114.
- Bazaraa, M. S. (1979). *Nonlinear programming: theory and algorithms*, Wiley, New York.
- Bremaud, P. (1999). *Markov chains: gibbs fields, monte carlo simulation and queues*, Springer-Verlag, New York.
- Davis, M. H. A. (1984). Piecewise-deterministic Markov process: a general class of non-diffusion stochastic models, *Journal of the royal statist. soc. B* **46**(3): 353–388.
- Davis, M. H. A. (1993). *Markov models and optimization*, Chapman and Hall, London.
- Davis, M. H. A., Dempster, M. A. H., Sethi, S. P. and Vermes, D. (1987). Optimal capacity expansion under uncertainty, *Advances in applied probability* **19**: 156–176.
- do Val, J. B. R. and Davis, M. H. A. (1988). Critérios locais de otimalidade para controle estocástico de processos determinísticos por partes, *Revista brasileira de probabilidade e estatística* **2**: 101–123.
- do Val, J. B. R. and Salles, J. L. F. (1999). Optimal production with preemption to meet stochastic demand, *Automática* **35**(11): 1819–1828.
- Garcia, A. L. (1994). *Probability and random processes for electrical engineering*, Addison-Wesley, New York.
- Gatarek, D. (1990). A note on impulsive control of Feller processes with costly information, *Applied mathematics* **35**: 21–59.

- Gatarek, D. (1992). Optimality conditions for impulse control of piecewise deterministic processes, *Mathematics of control signals and systems* **5**: 217–232.
- Gravish, B. and Graves, S. C. (1981). Production/inventory systems with a stochastic production rate under a continuous review policy, *Comput. & ops. res.* **8**(3): 169–183.
- Hall, R. W. (1991). *Queueing methods for services and manufacturing*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Higham, D. J. and Higham, N. J. (2000). *Matlab Guide*, Siam, Philadelphia.
- Çınlar, E. (1975). *Introduction to stochastic processes*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Kitaev, M. Y. and Rykov, V. V. (1995). *Controlled queueing systems*, CRC Press, Boca Raton.
- Kumar, P. R. and Varaiya, P. (1986). *Stochastic systems: estimation, identification and control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley, New York.
- Monticino, M. and Weisinger, J. (1995). Optimal cutoff strategies in capacity expansion problems, *Naval research logistics* **42**: 1021–1039.
- Perkins, J. and Srikant, R. (2001). Failure-prone production systems with uncertain demand, *IEEE transactions on automatic control* **46**(3): 441–449.
- Salles, J. L. F. (1999). *Controle da produção por itens com interrupções e demanda aleatória*, PhD thesis, FEEC-Unicamp, Campinas.
- Salles, J. L. F. and do Val, J. B. R. (2000). An impulse control problem of a production model with interruptions to follow stochastic demand, *European journal of operational research* **132**: 123–145.
- Zhang, Q., Yin, G. G. and Boukas, E. (2001). Optimal control of a marketing-production system, *IEEE transactions on automatic control* **46**(3): 416–427.
- Zhou, K., Doyle, J. C. and Glover, K. (1996). *Robust and optimal control*, Prentice Hall, Upper Saddle River.