

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

Tese de Doutorado

Modelagem e Controle de Caimento e Dobras em Superfícies Deformáveis

Autor: **Vanio Fragoso de Melo**

Orientadora: **Profa. Dra-Ing. Wu, Shin-Ting**

Banca Examinadora: **Profa. Dra-Ing. Wu, Shin-Ting (FEEC-Unicamp)**
Prof. Dr. Martin Tygel (IMEEC-Unicamp)
Prof. Dr. Marcelo Firer (IMEEC-Unicamp)
Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan (FEC-Unicamp)
Prof. Dr.-Ing. Léo Pini Magalhães (FEEC-Unicamp)
Prof. Dr. Fernando José Von Zuben (FEEC-Unicamp)

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

28 de abril de 2004.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M491m Melo, Vanio Fragoso
Modelagem e controle de caimento e dobras em
superfícies deformáveis / Vanio Fragoso Melo. --Campinas,
SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Wu Shin-Ting.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Animação por computador. 2. Cascas (Engenharia)
Modelos matemáticos. 3. Deformações. 4. Superfícies
Modelos. 5. Simulação e modelagem. I. Wu, Shin-Ting. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Modeling and Control of draping and folds in deformable surfaces

Palavras-chave em Inglês: Animation for computer, Shells (Engineering) Mathematical
models, Deformations, Surfaces models, Simulation and
modeling

Área de concentração: Engenharia de Computação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Martin Tygel, Marcelo Firer, Aloísio Ernesto Assan, Léo Pini
Magalhães e Fernando José Von Zuber

Data da defesa: 28/04/2004

Resumo

Esta tese de doutorado tem como objetivo apresentar uma proposta de modelo computacional de superfície deformável. Há duas vertentes de modelos de superfícies deformáveis fisicamente embasados: modelos de mecânica das partículas e modelos de mecânica dos contínuos. Os modelos de mecânica dos contínuos são mais realísticos e intuitivos, por se basearem numa estrutura geométrica contínua e utilizarem os elementos de Geometria Diferencial para a sua análise. Similar a maioria dos modelos deformáveis com base na mecânica dos contínuos, propomos um modelo de superfície deformável com base na *superfície de Cosserat elástica*. Diferentemente dos modelos existentes na literatura de Computação Gráfica e Animação, o nosso modelo considera a relação entre as deformações tangenciais e normais, e inclui um novo paradigma linearizável para estimar os vetores normais. Isto possibilita a formação de dobras e rugas a partir da ação de forças tangenciais. Uma implementação é apresentada. Para corrigir alguns tipos de desequilíbrios criados pelo método das diferenças finitas empregado na discretização, propomos fatores de correções das forças internas atuantes nas bordas. Experimentalmente, o modelo proposto foi validado com aplicações para caimentos, para criação de dobras e rugas de tecido de pano.

Abstract

This doctoral thesis aims at presenting a proposal of a computational model for a deformable surface. There are two trends of deformable surface models that are physically based: particle systems and continuum mechanical models. The continuum mechanical models are more realistic and intuitive, since the underlying geometric structure is a continuum which can be analyzed with use of Differential Geometry. Similar to most of works based on the continuum mechanics, we propose a deformable surface model based on an *elastical Cosserat surface*. Differently from the existing models in the Graphic Computer and Animation literature, our model considers a relation between the tangential and normal deformations, and integrate a novel linearizable approach for

estimating the normal vectors. This provides an efficient way to simulate folds and wrinkles under the action of tangential forces. An implementation is presented. In order to correct some kinds of unbalance of forces, due to the methods of finite differences employed on the discretization, we propose correction factors for the internal forces that act on the boundaries. Experimentally, the proposed model was validated in the simulations of cloth draping, folds and wrinkles of cloth.

*Ainda que eu falasse a
língua dos homens e dos anjos,
e não tivesse AMOR,
seria como o metal que soa
ou como o sino que tine.
(1 Coríntios: cap. 13, vers. 1).*

Dedico esta dissertação a minha esposa Elizabete Amorim de Almeida Melo, aos meus filhos Izabela Vanessa de Almeida Melo e Marcos Ivan de Almeida Melo, a minha mãe Enilda Araújo de Melo, aos meus irmãos e a todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para alcançar mais uma vitória nesta minha modesta vida.

Agradecimentos

A Deus pela vida e a oportunidade de aprender e evoluir. Como dizia Gonzaguinha, “de ser um eterno aprendiz”.

A minha mãe, Enilda Araújo de Melo, que com heroísmo me deu amor, afeto e carinho e, acima de tudo, deu uma lição de bravura, coragem e força de vencer. Por ser a primeira pessoa a me ensinar a amar e ser amado, apresentando-me o mais nobre e o maior de todos os sentimentos.

A minha esposa e companheira Elizabete Amorim de Almeida Melo e aos meus filhos Izabela Vanessa de Almeida Melo e Marcos Ivan de Almeida Melo, por preencherem a minha vida com AMOR, CARINHO, AFETO e RESPEITO dando um maior sentido a ela, pois sem eles existiria um vazio em minha alma. Agradeço ainda a força que me deram nos momentos difíceis, incentivos nos momentos de desânimos e à partilha dos momentos tristes e felizes.

Aos meus irmãos, pela nossa relação de amizade e amor que sempre tivemos e sempre teremos. Ao meu tio, Etevaldo de Araújo Silva, que, por sua coragem e caridade durante um período de quatro anos, possibilitou a mim e meus irmãos alcançarmos o nosso direito de um lugar ao sol, pois sem ele a nossa história teria sido outra.

A minha tia Edneide de Araújo Silva pelos incentivos para continuar lutando pelos meus ideais de estudos, mesmo que para isso eu tivesse que me distanciar dos meus familiares.

A Profa. Wu Shin-Ting, pela orientação e discussões que me nortearam neste mar de conhecimentos. Agradeço ainda a paciência, parceria e compreensão.

À banca examinadora, na pessoa dos professores Léo Pini Magalhães, Fernando José Von Zuben, Martin Tygel e Aloísio Ernesto Assan, por aceitarem compor a mesma e darem as suas contribuições para esta tese.

Aos professores da pós-graduação (FEEC), que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta tese, através das discussões em sala de aula, das indicações de leituras ou nas conversas extra-classe.

Aos amigos do LCA, em particular Antonio José Lujan (Pepe), Mercedes e esposo (Cosme), Rangel e Alexandre Gonçalves pela ajuda, pelas trocas de informações e pelos

bons bate-papos descontraídos.

Aos amigos nordestinos, Amauri, Regina, Givaldo, Auriene, José Barros, Juliene, Edson, João de Deus e Zuleika, pelos encontros, pelas comemorações, pelo convívio e pela amizade que nos fortalece.

Aos amigos que aqui fiz, José Augusto, Márcia, Tieny, Tuany, Valmir, Marta, Mariana, Rivaldo, Neide e Izabela.

Aos professores do DME/UFCG, por suportarem a carga de trabalho para que eu pudesse realizar este doutorado.

À CAPES, pelo apoio financeiro para a realização deste doutorado.

Enfim, agradeço a todos que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização deste objetivo.

Sumário

SUMÁRIO	xi
LISTA DE FIGURAS	xv
LISTA DE TABELAS	xix
Símbolos e Notações	xix
1 Introdução	1
1.1 Motivação e Importância	1
1.2 Classificação dos Modelos Deformáveis	2
1.3 Panorama dos Modelos Físicos	3
1.4 Objetivos	5
1.5 Problemas e Conjecturas	6
1.6 Organização da Tese	7
2 Preliminares: Tensores e Superfícies Regulares	9
2.1 Tensores	9
2.2 Superfícies Regulares	17
3 Estado-da-Arte: Caimento, Dobras e Rugas de Tecidos	31
3.1 Modelos Físicos Baseados em Mecânica das Partículas	31
3.1.1 Sistemas de Partículas	32
3.1.2 Sistemas de Partículas Massa-Mola	38
3.2 Modelos Físicos Baseados em Mecânica dos Contínuos	41

3.3	Comentários Finais	49
4	Superfície de Cosserat	51
4.1	Definição de Superfície de Cosserat	52
4.2	Energia Armazenada na Superfície de Cosserat	54
4.2.1	Deformação de uma Superfície de Cosserat	55
4.2.2	Definição das Forças Atuantes na Superfície de Cosserat	58
4.2.3	Modelo de Energia Armazenada numa Superfície de Cosserat Elástica	60
4.3	Modelo Cinemático de Superfície de Cosserat	61
4.3.1	Densidade de Massa	61
4.3.2	Princípios de Equilíbrio	62
4.3.3	Equações Locais de Equilíbrio	64
4.4	Modelo Linear de Superfície de Cosserat Elástica	65
5	Um Modelo Contínuo de Superfícies Deformáveis	69
5.1	Restrições	70
5.2	Coeficientes de Elasticidade e Energia Interna	74
5.3	Densidade de Massa e Coeficiente de Amortecimento	77
5.4	Equações Constitutivas e Equilíbrio de Movimento	78
5.5	Vetor Normal	81
5.6	Comparações com outros Modelos Contínuos	84
6	Discretização do Modelo Proposto	89
6.1	Diferenças Finitas	90
6.2	Discretização das Equações Constitutivas	92
6.3	Cálculos das Densidades de Massa e dos Coeficientes de Amortecimento	96
6.4	Condições Iniciais e de Fronteira	98
6.4.1	Condições Iniciais	99
6.4.2	Condições de Fronteira	99
6.4.2.1	Vetor Normal	100

6.4.2.2	Tensores Métrico e Curvatura	101
6.4.2.3	Coeficientes de Elasticidade	101
6.4.2.4	Compensações de Desequilíbrios na Fronteira	102
6.5	Integração no Tempo	107
6.6	Compensação para Deslocamento não Esperados	109
7	Simulações	111
7.1	Dobras	111
7.2	Caimento de Tecido de Pano	118
7.3	Simulações de Controles Isotrópicos e Anisotrópicos	123
7.4	Simulações de Rigidez	124
8	Conclusões	135
A	Exemplos de Tensores	139
B	Taxas de Variações e Equações Locais de Equilíbrio	143
C	Aplicação do Teorema de Stokes	151
D	Componentes das Forças internas Versus Energia Interna Armazenada	153
E	Componentes do Vetor Força-Curva	155
F	Integração Numérica	159
	Referências Bibliográficas	161

Lista de Figuras

2.1	Mudanças de coordenadas	11
2.2	Coordenadas normais	20
2.3	Vetores de base recíprocos	21
3.1	Tecido de pano como sistema de partículas.	33
3.2	Resistências internas do tecido.	33
3.3	Superfície mergulhada.	35
3.4	Relação local.	36
3.5	Exemplos de treliças massa-mola.	38
3.6	Tipos de molas.	39
3.7	Configuração da casca.	46
4.1	Superfície de Cosserat.	51
4.2	Casca.	51
4.3	Superfície do meio da casca.	54
4.4	Estimativas de comprimento e ângulo.	55
4.5	Medidas cinemáticas do vetor diretor.	57
4.6	Área arbitrária.	58
4.7	Atuação de N , M , F e L	58
4.8	N^α e M^α ao longo das curvas coordenadas u^α	59

5.1	Forças de deformações das seções transversais e da espessura.	71
6.1	Uma bandeira tremulando.	98
6.2	Malha elástica.	104
6.3	Malha rígida.	105
6.4	Malha dobrável.	106
6.5	Bandeira com borda menos e mais rígida para curvar.	106
6.6	Mudando o deslocamento.	110
7.1	Dobras ao longo das linhas coordenadas ($\xi_{\alpha\beta} = 5.0 \times 10^{-4}$).	112
7.2	Diferentes rigidez para curvar ($t = 20s$).	113
7.3	Dobras em direções diferentes.	113
7.4	Pano suspenso por um ponto.	114
7.5	Bandeira ao vento ($t = 2min$).	115
7.6	Pano dobrado ($\zeta_{\alpha\beta} = 0.8$, $\xi_{\alpha\beta} = 5.0 \times 10^{-4}$).	116
7.7	Pano dobrado ($\zeta_{\alpha\beta} = 1.5$ e $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-2}$).	117
7.8	Cortina suspensa.	118
7.9	Caimento sobre uma mesa quadrada de um pano polyester.	119
7.10	Caimento sobre uma mesa retangular de um pano polyester.	120
7.11	Caimento sobre uma mesa redonda de um pano polyester.	121
7.12	Caimento de tecido rígido sobre uma mesa redonda.	122
7.13	Caimento de um pano tipo polyester suspenso por dois pontos.	122
7.14	Superfícies anisotrópicas.	124
7.15	Superfícies isotrópicas.	124
7.16	Forças nos cantos com grande resistência para curvar-se ($t = 40s$).	125
7.17	Forças nos cantos com pequena resistência para curvar-se ($t = 100s$).	126
7.18	O caimento de uma toalha de tecido de pano ($t = 75s$).	126

7.19 O caimento de uma toalha de um tecido de pano mais rígido ($t = 45s$).	127
7.20 Peçaço de esfera resistente.	128
7.21 Peçaço de esfera dobrável.	128
7.22 Peçaço de toro resistente.	129
7.23 Peçaço de toro dobrável.	129
7.24 Superfície cilíndrica senoidal com curvas fronteira maiores fixas ($t = 7.5s$).	130
7.25 Superfície cilíndrica senoidal com curvas fronteira menores fixas ($t = 7.5s$).	131
7.26 Cilindro flexível aberto sob a ação da gravidade ($t = 200s$).	131
7.27 Cilindro rígido aberto sob a ação da gravidade ($t = 200s$).	132
A.1 Sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.	141

Lista de Tabelas

6.1 Superfície plana quadrada 97

6.2 Cilindro 97

6.3 Peça de esfera 97

7.1 Tempo de Processamento 133

Símbolos e Notações

- $[]^\alpha$ vetor contravariante em relação as coordenadas de superfície u^β
- $[]_\alpha$ vetor covariante em relação as coordenadas de superfície u^β
- $\mathbf{a}^\alpha$, vetores de base recíprocos da superfície S
- $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$, vetor normal unitário a superfície S
- $\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}$, vetores de base da superfície S
- $\mathbf{g}^i$, vetores de base recíprocos do espaço
- $\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u^i}$, vetores de base do espaço
- $\mathbf{r}$, vetor posição de um ponto da superfície S dependente dos parâmetros u^1 e u^2
- $\mathbf{R}$, vetor posição de um ponto do espaço circundante a superfície S dependente de três parâmetros u^1 , u^2 e u^3
- $\square|_\beta$, derivada covariante com respeito a coordenada de superfície u^β associada a métrica da superfície
- $\square^i$ e $\square^\alpha$, tensores contravariantes de primeira ordem do espaço e de superfície, respectivamente
- $\square_{,\alpha} = \frac{\partial \square}{\partial u^\alpha}$, derivada parcial com relação à coordenada de superfície u^α
- $\square_i$ e $\square_\alpha$, tensores covariantes de primeira ordem do espaço e de superfície, respectivamente
- δ , limiar para as componentes do tensor curvatura na aproximação do vetor normal unitário
- $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$, símbolos de Christoffel do segundo tipo associado à métrica da superfície S
- γ_{ij}^k , símbolos de Christoffel do segundo tipo associado à métrica do espaço
- $a = \det(a_{\alpha\beta})$, determinante da matriz cujos elementos são as componentes do tensor métrico da superfície S

$a^{\alpha\beta}$, tensor métrico recíproco da superfície S

$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$, tensor métrico da superfície S

b^α_β , coeficientes de Weingarten

$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta}$, tensor curvatura da superfície S

$d\omega = \sqrt{\mathbf{a}} du^1 du^2$, elemento de área

$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$, tensor métrico recíproco do espaço

$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$, tensor métrico do espaço

S , superfície atual

u^i , coordenadas do espaço

u^α , coordenadas de superfície

$(\diamond \cdot \diamond)_i$, a i -ésima equação das expressões matemáticas $(\diamond \cdot \diamond)$

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e Importância

A modelagem de objetos deformáveis tem sido alvo de estudo pela comunidade de computação gráfica por mais de duas décadas, através de uma vasta cadeia de aplicações e pela arte em si que gera imagens e animações de cenas virtuais de fina beleza comparáveis às cenas reais.

Os modelos deformáveis têm sido usados, por exemplo, na manufatura e projeto de vestuários (animação de vestuários sobre figuras humanas, no comportamento de tecidos sobre outros objetos ou suspensos, etc), animações de expressões faciais e figuras humanas e animais e na área de medicina para análises de imagens médicas (incluindo segmentação, representação, registro e captura de movimento da forma), modelagem e animação de músculos, simulações cirúrgicas e treinamento de pessoal, ambos com a exigência de tempo real e modelagem fisicamente realística de tecidos humanos complexos, não-lineares e deformáveis [41], dentre outras aplicações. Para sumários do uso de modelos deformáveis em análises médica, recomenda-se a referência [60]. Um panorama de modelos deformáveis em computação gráfica com enfoque maior em medicina é dado em [41]. Aplicações e panorama de modelagem e animação de vestuários são apresentados em [66, 49, 90]. E, para uma revisão sobre superfícies deformáveis: *topologia, geometria e deformação*, recomenda-se [62].

A modelagem e animação de tecido em computação gráfica é de grande importância para moda e entretenimento. Muitos esforços de pesquisa em computação gráfica tem sido despendidos para a simulação estática e dinâmica de tecidos. O mesmo é relativamente difícil para simular, principalmente por causa da complexidade de suas formas

e movimentos. Ele é facilmente deformado e pode assumir muitas formas complicadas com muitas dobras, rugas e/ou vincos, e isto é ainda difícil de realizar com as técnicas computacionais conhecidas [69]. A aparência realística dos resultados de simulações dependerá então da capacidade do modelo deformável contemplar tais fenômenos físicos que ocorrem no tecido.

1.2 Classificação dos Modelos Deformáveis

Podemos classificar os modelos deformáveis em três tipos: (1) modelos geométricos, por exemplo [1, 6, 20, 21, 46, 47, 48, 57, 59, 61, 66, 67, 77, 81, 82, 92]; (2) modelos físicos, por exemplo [3, 4, 8, 9, 11, 12, 15, 27, 28, 33, 35, 37, 39, 40, 44, 50, 58, 65, 70, 73, 76, 85, 87, 93]; (3) existem modelos que tentam unir uma abordagem geométrica com uma abordagem física (modelos híbridos [14, 17, 22, 38]). Os modelos geométricos não levam em consideração as propriedades físicas do objeto, fazendo uso de entidades e/ou transformações geométricas para obterem os efeitos desejados. São úteis para modelagem estacionária, objetos rígidos cuja forma não muda ao longo do tempo. Infelizmente são modelos inertes [86]. Os modelos físicos buscam incorporar conceitos e propriedades físicas para a animação do objeto. Eles constituem um campo importante e tem atraído interesse da comunidade de computação gráfica, pela possibilidade de unir realismo e controle intuitivo em simulações estáticas e dinâmicas, o que não é possível fazer com os modelos geométricos. A desvantagem deste tipo de modelo está no custo computacional maior do que os modelos geométricos (complexidade de tempo e memória). Finalmente, os modelos híbridos tentam suprir as deficiências dos modelos físicos na simulação de distintos comportamentos de curvatura com as técnicas de modelagem geométrica para aumentar o realismo nas simulações.

De acordo com a representação geométrica do objeto sobre a qual é desenvolvida a teoria de deformação, distinguimos os modelos físicos em dois tipos: (1) aqueles que consideram o objeto como um conjunto discreto, como é o caso do modelo de sistemas de partículas que utilizam a mecânica das partículas [4, 8, 9, 11, 22, 33, 37, 39, 40, 44, 65, 73, 76, 85, 93]; e (2) aqueles que consideram o objeto como um contínuo utilizando a mecânica dos contínuos [3, 12, 15, 27, 28, 35, 50, 58, 70, 87]. A primeira, a abordagem de sistemas de partículas, parte do menor elemento que constitui o objeto, as partículas, as quais são consideradas como pontos-massa. Cada partícula está conectada às partículas vizinhas, por meio de fios ou molas, para incorporar os parâmetros de controle do comportamento do material do qual é feito o objeto, tais como estica-

mento, cisalhamento e curvatura. Estes fios ou molas constituem um mecanismo para modelar as relações ou interações desta partícula com as suas vizinhas. A segunda abordagem, baseada em mecânica dos contínuos, considera o objeto como um contínuo, usualmente representado parametricamente. É considerada uma região contínua em torno de cada ponto do objeto (geometria diferencial) e nela são impostos princípios de equilíbrio para obter equações diferenciais parciais na forma integral ou pontual que governam o equilíbrio. Por menor que seja a vizinhança local de cada ponto, ainda assim será um elemento de dimensão maior do que o ponto ou partícula, considerado elemento sem dimensão. Observemos que na segunda abordagem a incorporação dos parâmetros de controle do comportamento de deformação do objeto é feita de forma natural. Estes parâmetros já vêm embutidos no modelo contínuo e não há uma busca de modelar as possíveis interações internas ocorridas.

De acordo com Simo et al. [80], em todo procedimento de solução numérica, existem dois níveis diferentes de aproximações a serem considerados: (1) o primeiro nível se preocupa com a geometria do objeto e as equações de equilíbrio que governa o movimento dele; (2) o segundo nível está relacionado a solução numérica das equações de equilíbrio. Um modelo geometricamente exato refere-se ao primeiro nível. Consideramos o modelo de partículas *geometricamente inexato* enquanto o modelo contínuo, baseado em teoria de cascas, é considerado *geometricamente exato*. Isto é, aceitando as suposições cinemáticas que definem a classe de movimentos admissíveis, a geometria da casca e as equações de equilíbrios são tratadas exatamente.

1.3 Panorama dos Modelos Físicos

House e Breen [9, 49] estabeleceram que o “tecido é um mecanismo, não um contínuo”. Contudo, em computação gráfica, não podemos dar ao luxo de modelar cada detalhe deste mecanismo. A única maneira de evitar isto é considerar um pedaço do tecido como um material contínuo [37]. Infelizmente, modelos contínuos mais precisos numericamente geralmente conduzem a um grande esforço computacional. Eischen e Bigliani [34] realizaram uma bateria de testes e simulações para comparar os dois modelos distintos, um modelo contínuo e um modelo de partículas. Eles concluíram que um modelo contínuo é mais preciso enquanto um modelo de partículas tem um melhor desempenho em tempo e apresenta resultados qualitativamente corretos. No entanto, acreditamos que os modelos contínuos dão um melhor controle das deformações e resultados mais realísticos, por serem baseados numa teoria que permite análises diferenciais

sobre o seu comportamento [41].

O modelo precursor dos modelos físicos foi proposto por Feynman [39]. Ele tratou o caimento do tecido como um problema de minimização de funções energia de uma grade de pontos. Breen et al. [8, 9] também formularam o problema como um problema de minimização de funções energia, considerando os cruzamentos dos fios do tecido como partículas. Utilizaram ainda dados do tecido obtidos pelo sistema de avaliação de Kawabata [53] nas simulações. Motivados pelo modelo de Breen et al. [9], Eberhardt et al. [33] propuseram um modelo estendido incorporando a equação de Lagrange para governar o movimento das partículas. Baraff et al. [4] descreveram a energia em cada ponto do modelo em função das relações deste ponto com os seus vizinhos. Por questão de instabilidade na obtenção das soluções em cada instante t , introduziram ainda o método de Euler implícito na integração numérica de forma a não onerar o tempo de processamento. Bridson et al. [11] focaram a sua pesquisa na simulação de roupas com dobras e/ou vincos.

Outros modelos de partículas fazem uso de sistemas massas-molas para estimarem a força interna a partir das reações das molas. Provot [73] propôs um modelo baseado numa rede de massas-molas. Devido o tecido ter o comportamento não-linear, problemas de superelasticidade ocorrem quando a mola, que tem um comportamento linear, está submetida a alta pressão. Provot propôs a alteração da posição da partícula quando a sua distância para a partícula vizinha ultrapassa um valor limite estabelecido. Os trabalhos [16, 30, 31, 32, 40, 45, 52, 88, 89, 91] priorizaram a discussão sobre problemas de superelasticidade, complexidade temporal e instabilidade. Desbrun et al. [30] propuseram dividir as forças no sistema em partes linear e não-linear. O objetivo deles era propor um algoritmo estável e eficiente para animação de objetos deformáveis no contexto de realidade virtual. Kang et al. [52] tentaram melhorar a aparência do tecido subdividindo os triângulos e introduzindo curvas splines cúbicas enrugadas para gerar uma superfície suave enrugada. Na busca de tornar em tempo real a animação de humanos virtuais vestidos, Cordier et al. [22] combinaram um método geométrico com o método físico massa-mola, segmentando o tecido em várias seções para as quais algoritmos diferentes são aplicados. Considerando que, na maioria dos casos, cisalhamento e anisotropia de elongações podem ser negligenciados, Fuhrmann et al. [40] propuseram um modelo massa-mola mais simples que os anteriores, porém, contemplando as propriedades de elongações e curvatura. A maior preocupação deles não foi com a correteude física, mas com a simulação em tempo real. Jeong et al. [51] propuseram um modelo de mola 3D que exhibe uma força de resistência à curvatura e torção, usando uma massa

orientada com um único vetor direção para cada mola atada a massa. Porém, segundo eles, a mola 3D não cria toda força de restauração ou torque contrário a torção.

Precusores dos modelos físicos baseado em mecânica dos contínuos, Terzopoulos et al. [87, 86] analisaram superfícies deformáveis usando teoria de elasticidade não-linear com uma resposta esforço-distensão simplificada. A energia elástica interna é estimada pelas quantidades geométricas, tensores métrico e curvatura. A partir dessa energia é aplicada uma técnica de minimização para obtenção da força elástica interna. Aono [58] apresentou um modelo de propagação de rugas e vincos baseado na teoria de elasticidade e nos princípios de D'Alembert. Neste modelo o tecido de pano é visto como um meio que propaga ondas. Carignan et al. [12] apresentaram um modelo de animação de roupas sobre atores sintéticos em movimento, propondo a substituição da força de amortecimento do modelo de Terzopoulos et al. [87] por uma força de amortecimento que varia de acordo com a taxa de variação, no tempo, da métrica da superfície. O objetivo deles era minimizar a velocidade da deformação. Na busca de uma força de reação precisa, foram propostos os modelos baseados na teoria de cascas finas [15, 35]. Chen et al. [15] tomaram como base física para seu modelo a teoria de sólido degenerado enquanto que Eischen et al. [35] se embasaram na teoria de superfície de Cosserat com vetor diretor inextensível. Em ambos os modelos foram introduzidas as medidas materiais, como módulo de Young, módulo de cisalhamento e raio de Poisson, nas simulações de caimentos de tecidos. Por último, Au et al. [3] apresentaram um modelo com características semelhantes ao modelo de Terzopoulos et al. [87] com o ponto alto que é a inclusão de propriedades materiais como: módulo elástico, módulo de cisalhamento, módulo de curvatura, módulo de torção e raio de Poisson.

1.4 Objetivos

Um modelo de superfícies deformáveis ideal seria aquele que embutisse quatro características importantes: realismo, controle intuitivo, eficiência (tempo e memória) e precisão nas simulações. Este trabalho visa prioritariamente a desenvolver um modelo que permita um usuário leigo controlar intuitivamente o comportamento visualmente realístico do tecido. Acreditamos que o avanço tecnológico, que nos oferece PC's cada vez mais velozes e com grande capacidade de armazenagem, dissipará o problema de eficiência (tempo e memória). Embora exista uma forte correlação entre a precisão e o realismo, não é o nosso objetivo avaliar a qualidade do nosso modelo sob o ponto de vista numérico.

Nesta tese, temos como objetivo apresentar um modelo alternativo, fisicamente embasado num modelo de mecânica dos contínuos bidimensional, que possibilite um controle intuitivo e resultados visualmente realísticos.

1.5 Problemas e Conjecturas

Percebemos nos modelos de partículas as dificuldades de controle da deformação, devido à modelagem das forças internas, principalmente no que diz respeito ao controle de curvatura e torção. É muito difícil a determinação destas interações a nível de microestrutura. Um outro problema é a modelagem do tecido que é um material com um comportamento não-linear, difícil de ser modelado neste nível de estrutura, surgindo assim problemas classificados na literatura como superelasticidade. Sua maior vantagem em relação aos modelos contínuos é o custo computacional. Conforme a análise de Eischen e Bigliani [34], o modelo contínuo apresenta resultados numéricos mais precisos enquanto que o modelo de partículas é superior em velocidade e apresenta resultados visuais qualitativamente realísticos.

Os modelos contínuos, propostos até o presente momento, são baseados em teorias de elasticidade de objetos tridimensionais, das quais derivam forças internas de reação a ação externa para um objeto bidimensional (superfície). Temos forças internas simplificadas, enfraquecendo o equilíbrio do movimento. Por outro lado, os modelos contínuos, em geral, têm uma semântica geométrica, associando as variações das medidas de geometria diferencial (tensores métrico e curvatura) com as forças aplicadas através das equações constitutivas. Estas medidas geométricas determinam a forma da superfície, isto é, elas determinam a superfície a menos de um movimento rígido. Com isso, acreditamos que a controlabilidade das deformações nesses modelos pode ser mais simples e intuitiva.

Por apresentar características que acreditamos serem boas, interface simples e intuitiva, uma série de experimentos sobre o modelo de Terzopoulos et al. têm sido realizados por nosso grupo de pesquisa. Em [74], os autores relataram que tinham tido dificuldades de obter os efeitos perceptuais de uma superfície em deformação que tem resistência para curvar-se. Eles suspeitaram que era devido a falha em satisfazer as condições de compatibilidade da geometria diferencial. Contudo, perceberam que mesmo quando as condições de compatibilidade eram satisfeitas, deformações não realísticas quando a superfície estava curvando ainda eram produzidas. Isto nos motivou a uma posterior investigação da fundamentação físico-matemática deste modelo.

Até o presente momento, temos identificado duas aproximações no modelo que acreditamos ser o motivo das distorções dos resultados das simulações: (1) a aproximação do vetor normal, e (2) a aproximação da força elástica da superfície de reação às ações externas.

Uma boa proposta de aproximação para o vetor normal, apresentada nesta tese, pode ser dada baseada nas fórmulas de Gauss. Esta abordagem é melhor, pois, tem uma maior fidelidade com sua magnitude, direção e sentido, reduzindo o problema (1). Porém, os problemas de equilíbrio no modelo de Terzopoulos et al. persistiram, motivando-nos a buscar um modelo analiticamente correto, para que tenhamos uma melhor aproximação da força elástica da superfície de reação às ações externas.

A teoria física apresentada em [42], bem explanada em [64], é uma melhor escolha para o embasamento da proposta de modelo de superfície deformável, pois, além de possuir a semântica geométrica, é uma teoria de deformação geral, completa e exata voltada para superfície. As equações e funções de estado são dependentes apenas dos dois parâmetros de superfície (bidimensional) e o comportamento da superfície em relação ao espaço em que ela está imersa é caracterizado por um campo de vetores não tangentes a ela. Seu desenvolvimento parte diretamente de princípios de equilíbrio para superfície, encontrando analiticamente a força interna que atua na mesma, em cada instante, bem como a relação de equilíbrio que governa o dinamismo do movimento. Ele tem um grande potencial para a modelagem realística e intuitiva de tecido, oferecendo um bom controle de curvatura (dobras e rugas) bem como um bom equilíbrio para o movimento (simulações dinâmicas).

Num tecido real, ao sofrer deformações de alongações, compressões ou cisalhamentos existe uma tendência de preservação da área surgindo forças internas capazes de criarem dobras e/ou rugas, conforme a rigidez de curvatura. Nenhum modelo proposto até o presente momento contempla de forma direta a relação entre as deformações tangenciais com as deformações normais. Propomos nesta tese, de forma direta, a inclusão da energia interna que relaciona esses dois tipos de deformações. Isto permite a formação de dobras e/ou rugas, quando somente forças tangencias ocorrem.

1.6 Organização da Tese

Esta tese está disposta como segue. No Capítulo 2, daremos uma breve revisão sobre tensor (Seção 2.1) e sobre geometria diferencial (Seção 2.2). No Capítulo 3, apre-

sentaremos uma revisão bibliográfica sobre modelos físicos de superfícies deformáveis, com foco nos modelos para aplicação ao tecido de pano. No Capítulo 4, faremos uma apresentação do modelo físico, o qual servirá como base teórica para o modelo que proporemos no Capítulo 5. Foram necessárias algumas simplificações no modelo original, sem comprometer a qualidade visual dos resultados. Mostramos ainda no Capítulo 5 que o nosso modelo, em parte, é uma generalização do modelo proposto por Terzopoulos et al. [87]. No Capítulo 6, discutiremos a implementação do modelo proposto no Capítulo 5. Sua implementação é realizada fazendo uso da técnica das diferenças finitas, para a qual são propostas algumas abordagens na fronteira, dentre elas, correção da força interna na fronteira para corrigir problemas de desequilíbrios criados pela técnica. Propomos também uma primeira abordagem para correção de deslocamento indevido, criado pela técnica, quando uma força é aplicada num ponto isolado. Também fazemos uma nova abordagem para o cálculo da densidade de massa e coeficiente de amortecimento ao longo do tempo. Em seguida, no Capítulo 7, mostraremos os resultados de simulações com o intuito de validação e demonstração do potencial do modelo proposto nesta tese. Encerraremos esta tese com o Capítulo 8, no qual teceremos as nossas conclusões e sugestões de trabalhos futuros. Para facilitar a compreensão desta tese, incluímos alguns apêndices: no Apêndice A apresentamos alguns exemplos de tensores; nos Apêndices B, C, D e E apresentamos algumas relações e deduções para dar suporte ao Capítulo 4; e, por último, no Apêndice F, apresentamos as fórmulas do trapézio e de Simpson para integração numérica.

Capítulo 2

Preliminares: Tensores e Superfícies Regulares

Neste capítulo, procuramos dar uma noção teórica sobre: tensor (Seção 2.1), com base em [83, 43], e geometria diferencial (Seção 2.2), embasado em [13, 55, 84]. Esses conceitos são utilizados na mecânica dos contínuos, na qual é fundamentada a nossa proposta de modelo de superfície deformável.

2.1 Tensores

Sintetizaremos, nesta seção, os principais conceitos associados aos tensores tais como as regras de transformações por covariância e contravariância, de acordo com os tipos e as ordens dos mesmos.

Uma preocupação corriqueira da comunidade de físico-matemáticos é o conhecimento de como certas grandezas e leis físicas se transformam diante da mudança do sistema de referência. Existe um grande interesse na universalidade da lei física, isto é, o fato de a lei não ter o carácter de dependência de um sistema de referência particular. Por exemplo, uma entidade que se anula num sistema de coordenadas anular-se-á em todos os sistemas de coordenadas? A resposta positiva acontece para o caso das entidades denominadas de tensores, devido à lei de transição de um para outro sistema de coordenadas. Podemos dizer que é uma transição linear. Equações tensoriais e tensores são de grande interesse para a comunidade de físico-matemáticos devido à independência do sistema de referência. A análise tensorial trata entidades e propriedades que são independentes da escolha desses sistemas de referência, tornando-a uma ferramenta

fundamental e ideal para o estudo de leis naturais. Outra característica importante da análise tensorial é a concisão das expressões. A seguir, discutiremos um pouco sobre o conceito de tensores, para em seguida concluirmos com a sua definição.

Tensor é um objeto abstrato representado num sistema de referência particular por um conjunto de funções, chamadas suas componentes, como um vetor é determinado num dado sistema de referência por um conjunto de componentes. Um dado conjunto de funções que representa um “tensor” depende de uma lei de transformação dessas funções de um sistema de coordenadas para outro. De acordo com a lei, temos uma transformação por invariância, covariância e contravariância.

Vamos considerar nossa discussão no espaço euclidiano 3-dimensional. Sejam x , y e z as coordenadas cartesianas de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais fixado. Denotamos por u^i ($i = 1, 2, 3$) as coordenadas de um sistema de coordenadas curvilíneas arbitrário, relacionadas às coordenadas cartesianas pela transformação

$$x = x(u^1, u^2, u^3), \quad y = y(u^1, u^2, u^3) \quad e \quad z = z(u^1, u^2, u^3), \quad (2.1)$$

com a mesma satisfazendo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u^3} \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^3} \\ \frac{\partial z}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.2)$$

A condição (2.2) acima garante a existência de uma única inversa da transformação (2.1) tal que

$$u^i = u^i(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Suponhamos agora que as coordenadas curvilíneas u^i são transformadas num conjunto de novas coordenadas curvilíneas $\bar{u}^i$ por quaisquer funções de valor único arbitrárias da forma

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2, u^3). \quad (2.4)$$

Suponhamos ainda que estas funções são inversíveis e possuam derivadas parciais de todas as ordens ou até uma ordem requerida. Então, sua inversa será

$$u^i = u^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3), \quad (2.5)$$

onde também assumimos que as funções u^i têm as mesmas propriedades mencionadas para $\bar{u}^i$.

As diferenciais destas funções se transformam da seguinte forma:

$$d\bar{u}^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} du^j, \quad du^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} d\bar{u}^j, \quad (2.6)$$

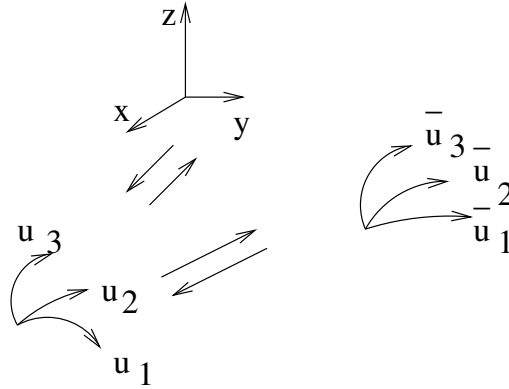


Figura 2.1: Mudanças de coordenadas

onde as matrizes $(\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j})$ e $(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j})$ são as matrizes jacobianas das mudanças de coordenadas que satisfazem:

1. $|\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}| \neq 0$ e $|\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}| \neq 0$;
2. $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^j} = \delta_j^i$ ou $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} \cdot \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} = \delta_j^i$,

onde δ_j^i é o delta de Kronecker dado por

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

O item (1) nos diz que as matrizes jacobianas das transformações de coordenadas são inversíveis e o item (2) que uma é a inversa da outra.

A transformação das diferenciais é linear, cuja matriz associada é a matriz jacobiana da transformação de coordenadas, isto é,

$$\begin{pmatrix} d\bar{u}^1 \\ d\bar{u}^2 \\ d\bar{u}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \\ du^3 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

As quantidades du^i em (2.7) são exemplos de componentes de um **tensor contravariante** de ordem 1 no sistema de coordenadas u^i , cujas componentes no sistema de coordenadas $\bar{u}^i$ são $d\bar{u}^i$, onde $i = 1, 2, 3$, como poderá ser constatado pela definição de tensor dada no final desta seção.

Sejam $\mathbf{R}(u^1, u^2, u^3)$ e $\bar{\mathbf{R}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)$ o vetor posição de um ponto do espaço nas coordenadas curvilíneas u^i e o vetor posição do mesmo ponto do espaço nas coordenadas

curvilíneas $\bar{u}^i$, respectivamente. Observe que os vetores são o mesmo com relação ao sistema de coordenadas cartesianas ortogonais fixados, isto é,

$$\bar{\mathbf{R}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3) = \mathbf{R}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3), u^3(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)). \quad (2.8)$$

Considerando os vetores de base em cada sistema de coordenadas dados por

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u^i}, \quad \bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}}{\partial \bar{u}^i}, \quad (2.9)$$

em conjunto com (2.8), obtemos a seguinte relação de mudança entre os mesmos, quando mudamos do sistema de coordenadas u^i para o sistema de coordenadas $\bar{u}^i$,

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} \mathbf{g}_j. \quad (2.10)$$

A transformação em (2.10) é dita ser por covariância quando mudamos do sistema de coordenadas u^i para o sistema de coordenadas $\bar{u}^i$. Dizemos então que os vetores $\mathbf{g}_i$ são os vetores de base covariantes do sistema de coordenadas u^i , enquanto $\bar{\mathbf{g}}_i$ são os vetores de base covariantes do sistema de coordenadas $\bar{u}^i$.

Os vetores de base recíprocos $\mathbf{g}^j$, no sistema de coordenadas u^i , e $\bar{\mathbf{g}}^j$, no sistema de coordenadas $\bar{u}^i$, são definidos a partir dos vetores de base pelas expressões

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_j^i, \quad \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}^j = \delta_j^i, \quad (2.11)$$

respectivamente. Utilizando a definição dos vetores de base recíprocos e a relação de transformação dos vetores de base, podemos mostrar que os vetores de base recíprocos transformam-se, quando mudamos do sistema de coordenadas u^i para o sistema de coordenadas $\bar{u}^i$, pela relação

$$\bar{\mathbf{g}}^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} \mathbf{g}^j. \quad (2.12)$$

Lembramos que a matriz $(\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j})$ é a matriz jacobiana da transformação de coordenadas $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2, u^3)$, cuja inversa é a matriz jacobiana $(\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i})$ da transformação inversa de coordenadas $u^i = u^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)$. A transformação em (2.12) é dita ser por contravariância quando mudamos do sistema de coordenadas u^i para o sistema de coordenadas $\bar{u}^i$. Dizemos então que $\mathbf{g}^i$ são os vetores de base recíprocos contravariantes do sistema de coordenadas u^i , enquanto $\bar{\mathbf{g}}^i$ são os vetores de base recíprocos contravariantes do sistema de coordenadas $\bar{u}^i$.

Os vetores $\mathbf{V}_i$ e $\mathbf{V}^i$, $i = 1, 2, 3$, são ditos covariantes e contravariantes, respectivamente, se eles obedecem às mesmas regras de transformações (2.10) e (2.12) dos vetores

de base e vetores de base recíprocos, respectivamente, quando mudamos do sistema de coordenadas u^i para o sistema de coordenadas $\bar{u}^i$.

Vamos considerar neste momento um vetor V no espaço euclidiano 3-dimensional, invariante com respeito a mudança de coordenadas, com componentes v^i e v_i em relação aos sistemas de referência g_i (vetores de base covariantes) e g^i (vetores de base recíprocos contravariantes), respectivamente, isto é,

$$V = \sum_{j=1}^3 v^j g_j = \sum_{k=1}^3 v_k g^k. \quad (2.13)$$

A pergunta que fazemos é: como essas componentes se transformam quando mudamos do sistema de coordenadas u^i para o sistema de coordenadas $\bar{u}^i$? Pela transformação dos vetores de base, teremos por um lado

$$V = \sum_{j=1}^3 v^j \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} \bar{g}_k \right) = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 v^j \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} \right) \bar{g}_k, \quad (2.14)$$

e por outro lado

$$V = \sum_{k=1}^3 \bar{v}^k \bar{g}_k. \quad (2.15)$$

Usando as relações (2.14) e (2.15), concluímos que

$$\bar{v}^k = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^j} v^j. \quad (2.16)$$

De forma análoga, mostra-se que as componentes v_i transformam-se por

$$\bar{v}_k = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^k} v_j. \quad (2.17)$$

Dizemos que as componentes v_i e v^i são as componentes covariantes e contravariantes do vetor V no sistema de coordenadas u^i , respectivamente, enquanto as componentes $\bar{v}_i$ e $\bar{v}^i$ são as componentes covariantes e contravariantes do vetor V no sistema de coordenadas $\bar{u}^i$.

Observe que a transformação das componentes de um vetor de um sistema de coordenadas para outro é uma transformação linear, isto é,

$$\begin{pmatrix} \bar{v}^1 \\ \bar{v}^2 \\ \bar{v}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^3} \end{pmatrix}^{-t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^3}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^3}{\partial \bar{u}^3} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

onde o sobreíndice $-t$ corresponde à operação de inversão seguida da transposição da matriz. Observe que, se as componentes de um vetor são nulas num sistema de coordenadas, também serão nulas em qualquer outro sistema de coordenadas.

Tentando manter o mesmo caráter de independência do sistema de coordenadas da análise vetorial buscou-se uma generalização para tal tipo de transformação de seus elementos.

Considere um sistema F de funções, de qualquer ordem¹, cujas componentes são definidas no conjunto das variáveis gerais u^i e são funções de u^1 , u^2 e u^3 . Se mudarmos as coordenadas u^i para $\bar{u}^i$ e as componentes de F nos dois conjuntos de variáveis estiverem relacionadas por certas regras, que definiremos abaixo, então diremos que o sistema F é um *tensor* de ordem igual ao número de índices, em suas componentes, que variam. Definiremos, a seguir, até a ordem 2, três tipos de tensores: covariante, contravariante e misto².

I. Tensores de ordem 0: Considere um sistema definido por uma única função f nas variáveis u^i , isto é,

$$f(u^1, u^2, u^3). \quad (2.18)$$

Este mesmo sistema, nas variáveis $\bar{u}^i$, é definido por $\bar{f}$, a saber,

$$\bar{f}(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3). \quad (2.19)$$

O sistema será dito um *tensor de ordem zero* ou *invariante escalar* ou só *escalar* se

$$f(u^1, u^2, u^3) = \bar{f}(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3), \quad (2.20)$$

para valores correspondentes de u^i e $\bar{u}^i$. Por simplicidade, cometendo um abuso de linguagem, dizemos que f (ou $\bar{f}$) é um escalar ou tensor de ordem zero.

II. Tensores de ordem 1: Os tensores de ordem 1 seguem as regras de mudanças (2.16) e (2.17), de acordo com o tipo, contravariantes ou covariantes, respectivamente. Então, as componentes de um vetor num dado sistema de coordenadas são as componentes de um tensor de ordem 1 nesse sistema de coordenadas. Seguem-se as definições.

¹A ordem é o número de índices que variam.

²O tipo misto aparece a partir da ordem 2.

- a. Considere um sistema de funções de três componentes T^i nas variáveis u^i e três componentes $\bar{T}^i$ nas variáveis $\bar{u}^i$. Este sistema é dito um *tensor contravariante de ordem 1*, se

$$\bar{T}^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} T^j, \quad (2.21)$$

ou

$$\begin{pmatrix} \bar{T}^1 \\ \bar{T}^2 \\ \bar{T}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix},$$

para valores correspondentes de u^i e $\bar{u}^i$. Por simplicidade, dizemos que T^i (ou $\bar{T}^i$) é um *tensor contravariante de ordem 1*.

- b. Considere um sistema de funções de três componentes T_i nas variáveis u^i e três componentes $\bar{T}_i$ nas variáveis $\bar{u}^i$. Este sistema é dito um *tensor covariante de ordem 1*, se

$$\bar{T}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} T_j, \quad (2.22)$$

ou

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^3} \end{pmatrix}^{-t} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^3}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^3}{\partial \bar{u}^3} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

para valores correspondentes de u^i e $\bar{u}^i$. Por simplicidade, dizemos que T_i (ou $\bar{T}_i$) é um *tensor covariante de ordem 1*.

III. **Tensores de ordem 2:** Qual seria o processo natural de generalizar a transformação das componentes de um vetor? Considere os dois vetores

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^3 v^j \mathbf{g}_j = \sum_{k=1}^3 v_k \mathbf{g}^k, \quad \mathbf{W} = \sum_{j=1}^3 w^j \mathbf{g}_j = \sum_{k=1}^3 w_k \mathbf{g}^k, \quad (2.23)$$

e analise como as componentes $c^{ij} = v^i w^j$, $c_{ij} = v_i w_j$ e $c_j^i = v^i w_j$ se transformam quando mudamos do sistema de coordenadas u^i para o sistema de coordenadas $\bar{u}^i$. Observe que cada conjunto é composto de nove componentes que obedecem as seguintes regras, respectivamente:

- a. Considere um sistema de funções de nove componentes T^{ij} nas variáveis u^k e nove componentes $\bar{T}^{ij}$ nas variáveis $\bar{u}^k$. Este sistema é dito um *tensor contravariante de ordem 2*, se

$$\bar{T}^{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^l} T^{kl}, \quad (2.24)$$

para valores correspondentes de u^i e $\bar{u}^i$. Por simplicidade, dizemos que T^{ij} (ou $\bar{T}^{ij}$) é um *tensor contravariante de ordem 2*.

- b. Considere um sistema de funções de nove componentes T_{ij} nas variáveis u^k e nove componentes $\bar{T}_{ij}$ nas variáveis $\bar{u}^k$. Este sistema é dito um *tensor covariante de ordem 2*, se

$$\bar{T}_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j} T_{kl}, \quad (2.25)$$

para valores correspondentes de u^i e $\bar{u}^i$. Por simplicidade, dizemos que T_{ij} (ou $\bar{T}_{ij}$) é um *tensor covariante de ordem 2*.

- c. Considere um sistema de funções de nove componentes $T^i_{\cdot j}$ nas variáveis u^k e nove componentes $\bar{T}^i_{\cdot j}$ nas variáveis $\bar{u}^k$. Este sistema é dito um *tensor misto de ordem 2*, se

$$\bar{T}^i_{\cdot j} = \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j} T^k_{\cdot l}, \quad (2.26)$$

para valores correspondentes de u^i e $\bar{u}^i$. Por simplicidade, dizemos que $T^i_{\cdot j}$ (ou $\bar{T}^i_{\cdot j}$) é um *tensor misto de ordem 2*.

As componentes v^{ij} e v_{ij} dos vetores

$$V_i = \sum_{j=1}^3 v^{ij} g^j, \quad V^i = \sum_{j=1}^3 v_{ij} g^j, \quad (2.27)$$

covariantes e contravariantes, $i = 1, 2, 3$, respectivamente, são componentes de tensores contravariantes e covariantes de ordem 2, respectivamente.

Dois tensores de ordem 2, c_{ij} e d^{kl} , com determinantes não-nulos, $\det(c_{ij}) \neq 0$ e $\det(d^{kl}) \neq 0$, são ditos recíprocos ou conjugados se as relações

$$\sum_{k=1}^3 c_{ik} d^{kj} = \delta_i^j \quad (2.28)$$

são satisfeitas, isto é, se as matrizes (c_{ij}) e (d^{kl}) são inversas uma da outra.

As definições para tensores de ordens superiores a 2 segue de forma análoga às definições anteriores. Por exemplo,

$$\bar{T}^{ijk} = \sum_{l,m,n=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^l} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^m} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^n} T^{lmn} \quad (2.29)$$

para valores correspondentes de u^i e $\bar{u}^i$, é a regra para um tensor contravariante de ordem 3.

O tipo do tensor é denotado pela posição dos índices. A notação índice acima é usada para tensores contravariante e índice abaixo para tensores covariantes.

Para a definição de tensores de superfícies (bivariáveis), aplique as mesmas regras para tensores espaciais (trivariáveis) dadas nas equações (2.18) a (2.29), substituindo a variação dos índices de 1 a 3 para 1 a 2.

Apresentamos alguns exemplos de tensores no apêndice A.

2.2 Superfícies Regulares

Além de fixarmos algumas notações e expormos alguns resultados sobre superfícies, a ser utilizados ao longo desta tese, nesta seção daremos um bom suporte para o entendimento do modelo físico [42], na qual se baseia a nossa proposta.

A partir desta seção, os índices gregos assumem valores 1 e 2 e os índices latinos assumem valores 1, 2 e 3. Nesta tese adotaremos algumas convenções em busca de uma melhor clareza para compreensão das expressões: quando formos somar com relação a algum índice utilizaremos o símbolo de somatório e indicaremos o índice de variação; utilizaremos a letra em negrito com uma seta sobre a mesma para indicar um vetor.

A seguir, daremos a definição mais geral de uma superfície regular, elemento base da teoria física apresentada nesta tese.

Definição: Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{r} : U \rightarrow V \cap S$ de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, tal que

1. $\mathbf{r}$ é diferenciável;
2. $\mathbf{r}$ é um homeomorfismo;

3. (condição de regularidade) Para cada $q \in U$, a diferencial

$$d\mathbf{r}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ é injetiva.}$$

A aplicação $\mathbf{r}$ é dita uma parametrização de S e $V \cap S$ é a vizinhança coordenada de p em S . Uma vizinhança coordenada é uma vizinhança sobre a superfície S , em torno do ponto p , coberta pela parametrização ou, se preferir, coberta pelas coordenadas de superfície [13].

A condição (1) quer dizer que se escrevemos

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_i x^i(u, v) \mathbf{e}_i, \quad (u, v) \in U, \quad (2.30)$$

as funções $x^i(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U (C^∞), onde $\mathbf{e}_i$ são vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$. É claro que a ordem exigida para as derivadas pode ser $n \neq \infty$, de acordo com a conveniência, desde que se preserve o resultado que garante a existência da superfície regular (Teorema Fundamental das Superfícies).

A condição (2) quer dizer que $\mathbf{r}$ tem uma inversa $\mathbf{r}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua. A continuidade de $\mathbf{r}$ já é garantida por (1). A injetividade nesta condição garante que não haverá auto-intersecções na superfície regular. Isto garante a unicidade do plano tangente no ponto $p \in S$. A existência da inversa e sua continuidade é útil para a garantia da não dependência da superfície de sua parametrização $\mathbf{r}$. Isso nos leva ao livre trânsito de mudança de coordenadas, isto é, às propriedades e definições sobre a superfície independentes da parametrização.

Por último, a condição (3) quer dizer que os vetores

$$d\mathbf{r}_q(1, 0) = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad d\mathbf{r}_q(0, 1) = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial v} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

são linearmente independentes, isto é, o produto vetorial dos dois é um vetor não nulo. Isto garante a existência de um vetor normal a S em $p = \mathbf{r}(q)$. Ou ainda, garante a existência do plano tangente a S em $p = \mathbf{r}(q)$.

Observe que a definição de superfície acima considera a mesma como coberta por uma coleção de imagens de parametrizações $\mathbf{r}$ ou vizinhanças coordenadas. Considere, no decorrer desta tese, as superfícies cobertas por apenas uma imagem de uma parametrização. Nesse caso, ela é apenas uma parte da superfície definida acima.

Sejam x^i referidas a um sistema de coordenadas cartesianas fixo Ω , no instante t , e u^i a um sistema de coordenadas curvilíneas arbitrário. Elas são relacionadas pela

transformação de coordenadas

$$x^i = x^i(u^1, u^2, u^3, t), \quad \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right) > 0, \quad (2.31)$$

tal que existe a inversa, com $\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) > 0$. Observe que o determinante positivo garante não só a inversibilidade como também a preservação da orientação. Considere uma superfície S , mergulhada num espaço euclidiano 3-dimensional, definida pela equação $u^3 = 0$, dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^\alpha, t) = \sum_i x^i(u^1, u^2, 0, t) \mathbf{b}_i, \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição de um ponto de S relativo ao sistema Ω e $\mathbf{b}_i$ são os vetores de base unitários deste sistema cartesiano. Quando o sistema de coordenadas cartesianas é ortogonal, $\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$ são os vetores de base canônicos, cujas componentes são todas nulas com exceção da i -ésima componente que é igual a 1.

As coordenadas u^i serão identificadas como coordenadas normais convecionadas³: u^α , $\alpha = 1, 2$, correspondem as coordenadas de superfície sobre S e u^3 ao longo da direção normal a S . Isto quer dizer que cobrimos uma região do espaço euclidiano 3-dimensional com uma família de superfícies paralelas a S , onde para obtermos uma dessas superfícies fazemos u^3 constante. Observe que $u^3 = 0$ nos dá a superfície S . Este sistema de coordenadas é conhecido como sistema de coordenadas normal. O vetor posição de um ponto do espaço circundante (ou envolvente) a superfície S pode ser representado como

$$\mathbf{R}(u^1, u^2, u^3, t) = \mathbf{r}(u^1, u^2, t) + u^3 \mathbf{a}_3(u^1, u^2, t), \quad (2.33)$$

onde $\mathbf{a}_3$ é o vetor normal unitário da superfície S (Figura 2.2). A superfície S é chamada de superfície de referência do sistema de coordenadas do espaço circundante ou envolvente. Isto é uma forma de mergulharmos a superfície no espaço. O mergulho permite obtermos instrumentos de medições na superfície induzidos pelos instrumentos de medições do espaço circundante, tornando as medidas compatíveis.

Convencionaremos que no tempo inicial $t = 0$ a superfície será denotada por S^0 .

Se $\mathbf{a}_\alpha$ são os vetores de base ao longo das curvas coordenadas u^α , então

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha}, \quad \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = a_{\alpha\beta}, \quad a = \det(a_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.34)$$

onde $a_{\alpha\beta}$ são os coeficientes da primeira forma fundamental ou tensor métrico de S (tensor de superfície covariante de segunda ordem). Daqui em diante, convencionaremos

³A expressão coordenadas convecionadas significa que para cada ponto as coordenadas u^i estão fixadas ao longo do tempo [83, 64].

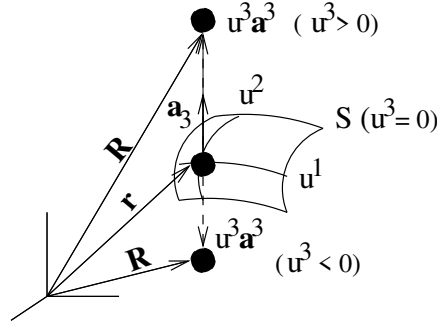


Figura 2.2: Coordenadas normais

que a vírgula como subíndice seguida de α indicará uma diferenciação parcial com respeito a u^α (isto também é válido para qualquer outro índice diferente de α). Os vetores de base recíprocos (Figura 2.3) são definidos por

$$\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (2.35)$$

e a partir deles obtemos o tensor métrico recíproco (tensor de superfície contravariante de segunda ordem)

$$a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta, \quad (2.36)$$

que satisfaz a relação

$$\sum_\lambda a^{\alpha\lambda} a_{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.37)$$

De fato, escrevendo

$$\mathbf{a}^\alpha = \sum_\gamma c^{\alpha\gamma} \mathbf{a}_\gamma, \quad \mathbf{a}_\beta = \sum_\lambda d_{\lambda\beta} \mathbf{a}^\lambda,$$

utilizando a equação (2.35) nos produtos internos $(\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\gamma)$ e $(\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_\lambda)$ para mostrar que $c^{\alpha\gamma} = a^{\alpha\gamma}$ e $d_{\lambda\beta} = a_{\lambda\beta}$ e efetuando o produto interno $(\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta)$ chegaremos à expressão (2.37). A expressão (2.37) nos diz que a matriz $(a^{\alpha\beta})$ é a inversa da matriz $(a_{\alpha\beta})$ e vice-versa, pois os tensores são simétricos. O tensor métrico recíproco pode ser obtido a partir do tensor métrico, resolvendo o sistema de equações dadas por (2.37), pela relação

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{a}, \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}. \quad (2.38)$$

Dados os vetores de base, poderemos obter os vetores de base recíprocos, e dados os vetores de base recíprocos, poderemos obter os vetores de base, respectivamente, pelas expressões

$$\mathbf{a}^\alpha = \sum_\beta a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta, \quad \mathbf{a}_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta. \quad (2.39)$$

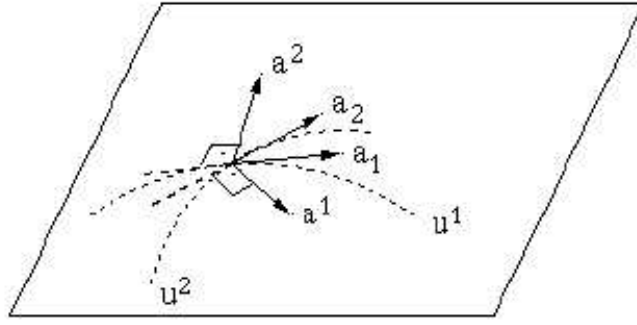


Figura 2.3: Vetores de base recíprocos

Podemos mostrar que o tensor métrico espacial (trivariável) do sistema de coordenadas u^i ,

$$g_{\alpha\beta} = \left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \mathbf{e}_j \right),$$

$$g_{\alpha 3} = \left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial u^3} \mathbf{e}_j \right) \mathbf{e}$$

$$g_{33} = \left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u^3} \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial u^3} \mathbf{e}_j \right) \quad (2.40)$$

sobre S ($u^3 = 0$), é dado por

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha 3} = g_{3\alpha} = 0, \quad g_{33} = 1, \quad (2.41)$$

e seus recíprocos por

$$g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha 3} = g^{3\alpha} = 0, \quad g^{33} = 1. \quad (2.42)$$

Definindo

$$g = \det(g_{ij}), \quad (2.43)$$

têm-se sobre S ($u^3 = 0$)

$$g = \det(g_{ij}) = a. \quad (2.44)$$

O vetor normal unitário a S pode ser definido por

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 = 0, \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3, \quad [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] > 0, \quad (2.45)$$

onde $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = \sqrt{a}$. O mesmo é obtido a partir dos vetores de base pela expressão

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}. \quad (2.46)$$

O tensor de superfície covariante de segunda ordem

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}_3, \quad (2.47)$$

é chamado tensor curvatura ou coeficientes da segunda forma fundamental, onde para a obtenção da segunda igualdade de (2.47) usamos a relação obtida quando derivamos a equação (2.45)₁ com respeito a u^β .

Os vetores de base $\mathbf{a}_\alpha$ são ditos covariantes com respeito às coordenadas de superfície u^α por transformarem-se segundo a regra para tensores de superfície covariantes de ordem 1, isto é, se a transformação de coordenadas de superfície é dada por

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^\lambda), \quad (2.48)$$

então

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \sum_\lambda \frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha} \mathbf{a}_\lambda. \quad (2.49)$$

Os recíprocos dos vetores de base são ditos contravariantes com respeito às coordenadas de superfície u^α por transformarem-se segundo a regra para tensores superfície contravariantes de ordem 1

$$\bar{\mathbf{a}}^\alpha = \sum_\lambda \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\lambda} \mathbf{a}^\lambda. \quad (2.50)$$

Já o vetor normal unitário $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$ é dito invariante, pois

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3. \quad (2.51)$$

Os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ associados ao sistema de coordenadas de superfície u^α são definidos pela métrica associada a esse sistema, isto é,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \sum_\gamma \frac{1}{2} a^{\gamma\lambda} (a_{\alpha\gamma,\beta} + a_{\beta\gamma,\alpha} - a_{\alpha\beta,\gamma}) = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^\lambda, \quad (2.52)$$

e estão associados ao determinante da matriz $(a_{\alpha\beta})$ por

$$\sum_\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda = \frac{(\sqrt{a})_{,\alpha}}{\sqrt{a}}. \quad (2.53)$$

As derivadas dos vetores de base são calculadas pelas expressões

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \sum_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \mathbf{a}_\lambda + b_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3, \quad (2.54)$$

chamadas de fórmulas de Gauss, e as derivadas dos vetores de base recíprocos por

$$\mathbf{a}^\alpha_{,\beta} = - \sum_\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \mathbf{a}^\lambda + b^\alpha_\beta \mathbf{a}_3. \quad (2.55)$$

As derivadas do vetor normal $\mathbf{a}_3$ são tangentes a S . De fato, derivando a equação (2.45)₂ com respeito a u^β concluímos que $\mathbf{a}_{3,\beta}$ é ortogonal a $\mathbf{a}_3$. Dessa forma, tem-se

$$\mathbf{a}_{3,\beta} = - \sum_{\alpha} b_{\beta}^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}, \quad (2.56)$$

como combinações lineares dos vetores de base $\mathbf{a}_{\alpha}$. Estas expressões são conhecidas como fórmulas de Weingarten.

Os coeficientes b_{β}^{α} são calculados multiplicando a equação (2.56) por $\mathbf{a}_{\lambda}$, utilizando (2.47), fazendo uso das simetria dos tensores métrico e curvatura e resolvendo o sistema de equações

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\alpha} = b_{\lambda\beta}. \quad (2.57)$$

Elas são dadas, portanto, por

$$b_{\beta}^{\alpha} = \sum_{\lambda} a^{\alpha\lambda} b_{\beta\lambda}. \quad (2.58)$$

Os tensores métrico e curvatura nos permitem mensurar quantitativamente o comportamento da vizinhança coordenada de um ponto sobre S . No estudo de geometria diferencial temos três classes de medidas de curvatura importantes: curvatura normal κ_n , curvatura gaussiana K e curvatura média H . As seções normais de uma superfície S , num dado ponto $p \in S$, são curvas que correspondem às interseções dos planos normais à superfície S passando por p . Cada direção tangente à superfície, junto com a direção normal a ela, determina um plano normal que, por sua vez, determina uma seção normal. A curvatura normal κ_n , num dado ponto da superfície S , para uma dada direção tangente, é a curvatura da seção normal correspondente. Esta curvatura é dada pela expressão

$$\kappa_n = \frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}}{\sum_{\alpha,\beta=1}^2 a_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}}. \quad (2.59)$$

O conjunto das curvaturas normais à superfície S , num dado ponto $p \in S$, possui um mínimo e um máximo, isto é, existe uma seção normal de menor curvatura κ_1 e uma seção normal de maior curvatura κ_2 . Estas curvaturas, κ_1 e κ_2 , são chamadas de curvaturas principais. A curvatura normal varia continuamente no intervalo fechado $[\kappa_1, \kappa_2]$. A partir das curvaturas principais, definimos duas outras classes de medidas de curvaturas. A curvatura gaussiana K de uma superfície S , num dado ponto $p \in S$, corresponde ao produto das curvaturas principais de S em p

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}}{a} \quad (2.60)$$

ou equivalentemente

$$K = -\frac{1}{a_{11}} \left(\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 \right), \quad (2.61)$$

enquanto a curvatura média de uma superfície S , num dado ponto $p \in S$, corresponde a média aritmética das curvaturas principais

$$H = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{b_{11} a_{22} - 2b_{12} a_{12} + b_{22} a_{11}}{a} \right). \quad (2.62)$$

É importante ressaltar que a curvatura gaussiana K (Eq. 2.61) depende apenas do tensor métrico. Neste caso, as superfícies que possuem o mesmo tensor métrico (superfícies isométricas) terão a mesma curvatura gaussiana K . Logo, dizemos que a curvatura gaussiana é invariante por isometria. Desta forma, superfícies isométricas são indistinguíveis do ponto de vista da curvatura gaussiana. A recíproca só é verdade localmente, isto é, superfícies que possuem a mesma curvatura gaussiana são localmente isométricas.

Com respeito à curvatura média, superfícies distintas também podem possuir a mesma curvatura média H . Por exemplo, planos, catenóides e helicóides são indistinguíveis sob o ponto de vista da curvatura média, uma vez que para todos os seus pontos $H = 0$.

As superfícies que têm, porém, as mesmas curvaturas gaussiana K e média H terão a mesma variação das curvaturas normais $\kappa_n \in [\kappa_1, \kappa_2]$, e vice-versa. De fato, ambas satisfarão a mesma equação do segundo grau

$$k^2 - 2Hk + K = 0, \quad (2.63)$$

que determinam as curvaturas principais k_1 e k_2 , e a curvatura normal pode ser calculada a partir delas pela expressão

$$k_n = k_1 (\cos \theta)^2 + k_2 (\sin \theta)^2, \quad (2.64)$$

onde θ é o ângulo entre a direção tangente que se está calculando a curvatura normal e a direção principal associada a curvatura principal k_1 . A variação da curvatura normal k_n é de extrema importância para a determinação da forma da superfície, no sentido de como ela se curva.

Os símbolos de Christoffel γ_{ij}^k associados ao sistema de coordenadas curvilíneas do espaço u^i são calculados por expressões análogas a (2.52), substituindo a métrica da superfície pela métrica do espaço envolvente (2.40). Fazendo uso de (2.40), da continuidade do tensor métrico e de suas derivadas parciais, de (2.41), (2.52), (2.56) e (2.47), tem-se sobre a superfície S

$$\gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda, \quad \gamma_{\beta 3}^\alpha = -b_\beta^\alpha, \quad \gamma_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{\alpha 3}^3 = \gamma_{33}^3 = 0. \quad (2.65)$$

Considere as componentes covariantes v_α de um vetor de superfície V com respeito a um sistema de coordenadas de superfície u^α . Sabemos que, se mudarmos o sistema de coordenadas de superfície de u^α para $\bar{u}^\alpha$, as componentes covariantes do vetor V se transformarão pela relação

$$\bar{v}_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} v_\beta, \quad (2.66)$$

pois estas componentes são as componentes de um tensor de superfície de primeira ordem (Eq. 2.17). Agora, como se transformam as derivadas $\frac{\partial v_\alpha}{\partial u^\beta}$? Estas derivadas são componentes de um tensor? Veremos a resposta no que segue. Derivando a equação (2.66) com respeito a $\bar{u}^\lambda$, aplicando a regra da soma, do produto e da cadeia (composta) para a derivada, obteremos

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial \bar{u}^\lambda} = \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\lambda} \frac{\partial v_\beta}{\partial u^\gamma} + \sum_\beta \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial \bar{u}^\lambda \partial \bar{u}^\alpha} v_\beta \quad (2.67)$$

que é a regra de transformação entre as derivadas das componentes de um tensor de superfície covariante de ordem 1. Comparando a equação (2.67) com a regra de transformação para tensores covariantes de ordem 2 (Eq. 2.25), conclui-se que as derivadas $\frac{\partial v_\alpha}{\partial u^\beta}$ não obedecem à regra de transformação, devido ao segundo termo do lado direito da igualdade, a não ser que a transformação de coordenadas seja afim. Isto motivou a busca de uma derivada sobre tensores cujo resultado fosse ainda um tensor. Explicitaremos a seguir como obter esta derivada para tensores de superfície de ordem 1.

Utilizaremos a seguinte relação [55]:

$$\frac{\partial^2 u^\beta}{\partial \bar{u}^\lambda \partial \bar{u}^\alpha} = \sum_\gamma \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\gamma \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\gamma} - \sum_{\kappa, \gamma} \Gamma_{\gamma\kappa}^\beta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\lambda} \frac{\partial u^\kappa}{\partial \bar{u}^\alpha} \quad (2.68)$$

entre os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ e $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda$ nos dois sistemas de coordenadas u^α e $\bar{u}^\alpha$, respectivamente, e a derivada segunda $\frac{\partial^2 u^\beta}{\partial \bar{u}^\lambda \partial \bar{u}^\alpha}$ que aparece na equação (2.67). Inserindo (2.68) na equação (2.67), utilizando (2.66) e reagrupando os termos teremos:

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} - \sum_\gamma \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{v}_\gamma = \sum_{\kappa, \lambda} \left(\frac{\partial v_\kappa}{\partial u^\lambda} - \sum_\gamma \Gamma_{\kappa\lambda}^\gamma v_\gamma \right) \frac{\partial u^\kappa}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\beta}. \quad (2.69)$$

Observe que, de acordo com (2.69), as 4 componentes $\left(\frac{\partial v_\kappa}{\partial u^\lambda} - \sum_\gamma \Gamma_{\kappa\lambda}^\gamma v_\gamma\right)$ transformam-se como um tensor de superfície covariante de ordem 2 para mudança de coordenadas de superfície. Dessa forma, define-se cada uma destas componentes como a derivada covariante $v_\alpha|_\beta$ da componente v_α de um tensor covariante de ordem 1, com respeito à coordenada de superfície u^β , ou seja,

$$v_\alpha|_\beta = \frac{\partial v_\alpha}{\partial u^\beta} - \sum_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma, \quad (2.70)$$

que é a componente de um tensor de superfície covariante de ordem 2.

Seguindo este caminho natural, define-se a derivada covariante de tensores de todas as ordens e tipos, de tal maneira que o resultado seja um tensor de uma ordem imediatamente superior.

Num invariante escalar definido sobre a superfície, a derivada covariante é igual à sua derivada usual ou ordinária. Para tensores de primeira e segunda ordens define-se:

1. Tensores de superfície de primeira ordem:

$$T_\alpha|_\beta = \frac{\partial T_\alpha}{\partial u^\beta} - \sum_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda T_\lambda, \quad T^\alpha|_\beta = \frac{\partial T^\alpha}{\partial u^\beta} + \sum_\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha T^\lambda. \quad (2.71)$$

2. Tensores de superfície de segunda ordem:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}|_\gamma &= \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \sum_\lambda (\Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda T_{\lambda\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda T_{\alpha\lambda}), \\ T^{\alpha\beta}|_\gamma &= \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \sum_\lambda (\Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha T^{\lambda\beta} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\beta T^{\alpha\lambda}), \\ T_{\alpha\beta}|_\gamma &= \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \sum_\lambda (\Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha T_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda T_{\alpha\lambda}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

De forma análoga, com respeito à métrica espacial (2.40), as definições dadas em (2.71) e (2.72) podem ser estendidas para tensores espaciais (trivariáveis).

Em geometria diferencial, o estudo das propriedades que dependem só da primeira forma fundamental, como comprimento de arco de curva, ângulo entre vetores tangentes, área e curvatura gaussiana, é conhecido como geometria intrínseca da superfície. Essas propriedades que dependem só da métrica são descritas sem referência ao espaço no qual a superfície está mergulhada. Isto quer dizer que elas não levam em

conta as características da superfície como ela pode apresentar-se para um observador localizado no espaço circundante. Duas superfícies isométricas, a saber um cilindro e um cone, por exemplo, são inteiramente diferentes quando vistos por um observador no espaço envolvente. Porém, do ponto de vista da geometria intrínseca, as duas são indistinguíveis pois as propriedades métricas delas são descritas por expressões idênticas.

Em geral, a derivada ordinária ou usual de um vetor do plano tangente de uma superfície não resulta num vetor pertencente ao plano tangente. No estudo da geometria intrínseca da superfície é definida uma derivada de um vetor do plano tangente à mesma, denominada de derivada covariante, com a finalidade de se ter o vetor resultante da operação derivada pertencente ao plano tangente à superfície. Então, define-se a derivada covariante do vetor tangente como sendo a projeção normal da derivada ordinária ou usual deste vetor sobre o plano tangente. A derivada covariante é definida nos vetores de base e base recíprocos por:

$$\mathbf{a}_\alpha|_\beta = \sum_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \mathbf{a}_\lambda, \quad \mathbf{a}^\alpha|_\beta = - \sum_\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \mathbf{a}^\lambda, \quad (2.73)$$

e é dita ser com respeito ao tensor métrico $a_{\alpha\beta}$.

Uma entidade que fornece uma caracterização da forma da superfície, como ela se apresenta para o espaço envolvente, é a linha normal à mesma. O comportamento do pé da linha normal, quando ela se desloca ao longo da superfície, depende da forma da mesma, isto é, de como ela se curva. Portanto, não é conveniente estudar o comportamento de deformação da superfície baseado no estudo da geometria intrínseca. O espaço envolvente à mesma deve ser mantido e a derivada covariante dos vetores de base passa a ser:

$$\mathbf{a}_\alpha|_\beta = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} - \sum_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \mathbf{a}_\lambda = b_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3, \quad (2.74)$$

que é a definição usada pela comunidade que estuda teoria de elasticidade de casca (*Shell*) [23, 42, 43, 64, 75]. Em resumo, ao invés de se fazer a projeção ortogonal da derivada ordinária (usual) no plano tangente faz-se a projeção ortogonal na direção normal a superfície.

Numa maneira similar, a derivada covariante dos vetores de base recíprocos e do vetor normal são definidas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\alpha|_\beta &= \mathbf{a}_{\alpha,\beta} + \sum_\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \mathbf{a}^\lambda = b_\beta^\alpha \mathbf{a}_3 \quad e \\ \mathbf{a}_3|_\alpha &= \mathbf{a}_{3,\alpha} = - \sum_\beta b_{\beta\alpha} \mathbf{a}^\beta = - \sum_\beta b_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta, \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde na segunda expressão em (2.75) levou-se em conta que o normal é um vetor invariante, para formularmos a igualdade entre a derivada covariante e a derivada usual. Dessa forma, mantido o espaço envolvente, a derivada covariante não será restritiva a vetores tangentes a superfície. Para pares de vetores v_α , covariantes, ou v^α , contravariantes, $\alpha = 1$ e 2 , a derivada covariante é aplicada seguindo a regra dos tensores covariantes ou contravariantes com respeito às coordenadas de superfície u^α , respectivamente, isto é,

$$v_\alpha|_\beta = v_{\alpha,\beta} - \sum_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda \quad (2.76)$$

e

$$v^\alpha|_\beta = v_{\alpha,\beta} + \sum_\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha v^\lambda. \quad (2.77)$$

Para vetores invariantes com respeito às coordenadas de superfície u^α , a derivada covariante é igual à derivada usual. Também são válidas para derivada covariante as regras do produto e soma da derivada usual.

Se o vetor

$$\mathbf{v} = \sum_\alpha v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + v^3 \mathbf{a}_3 = \sum_\beta v_\beta \mathbf{a}^\beta + v_3 \mathbf{a}^3,$$

é um invariante, v^α e v_β são ditas suas componentes contravariantes e covariantes, respectivamente, e v^3 e v_3 são os invariantes escalares.

Uma pergunta, no estudo de superfície, que não deve ficar sem resposta é: sob que condições garante-se a existência e a unicidade de uma superfície? Iniciamos apresentando dois resultados importantes, conhecidos como condições de compatibilidade ou condições de integrabilidade. O primeiro resultado, conhecido como equação de Gauss, é dado por

$$R_{\gamma\alpha\lambda\beta} = b_{\alpha\beta} b_{\lambda\gamma} - b_{\alpha\lambda} b_{\beta\gamma}, \quad (2.78)$$

onde $R_{\gamma\alpha\lambda\beta}$ é o tensor-curvatura de Riemann covariante [13, 55]. A equação (2.78), devido às relações de anti-simetria de $R_{\gamma\alpha\lambda\beta}$

$$R_{\gamma\alpha\lambda\beta} = -R_{\gamma\alpha\beta\lambda} \quad e \quad R_{\gamma\alpha\lambda\beta} = -R_{\alpha\gamma\lambda\beta},$$

se resume em

$$R_{1212} = b_{22}b_{11} - (b_{12})^2. \quad (2.79)$$

O segundo resultado, conhecido como as equações de Mainardi-Codazzi, é

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u_\lambda} - \sum_\rho b_{\rho\beta} \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho = \frac{\partial b_{\alpha\lambda}}{\partial u_\beta} - \sum_\rho b_{\rho\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho, \quad (2.80)$$

que, ao considerar as simetrias $\Gamma_{\mu\xi}^{\rho} = \Gamma_{\xi\mu}^{\rho}$ e $b_{\xi\mu} = b_{\mu\xi}$, equivale à expressão

$$b_{\alpha\beta}|_{\lambda} = b_{\alpha\lambda}|_{\beta}. \quad (2.81)$$

Se o leitor substituir os possíveis valores para α , β e λ em (2.81), facilmente perceberá que as equações de Mainardi-Codazzi se resumem apenas em duas:

$$b_{11}|_2 = b_{12}|_1, \quad b_{22}|_1 = b_{21}|_2. \quad (2.82)$$

Finalmente, devido a O. Bonnet, podemos acrescentar aos dois resultados vistos acima, um terceiro resultado importante, conhecido como teorema fundamental das superfícies ou teorema de Bonnet, que assegura a determinação de uma superfície a partir dos tensores métrico e curvatura [13, 55]. Em resumo, temos:

Teorema Fundamental das Superfícies: Se $a_{\alpha\beta}$ e $b_{\alpha\beta}$ são dadas como funções de u_1 e u_2 , suficientemente diferenciáveis (pelo menos de classe $n \geq 3$), que satisfazem às equações de Gauss (2.79) e Mainardi-Codazzi (2.82), enquanto $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, então existe uma superfície S que tem $a_{\alpha\beta}$ e $b_{\alpha\beta}$ como tensores métrico e curvatura, respectivamente. Esta superfície é determinada unicamente a menos de um movimento rígido. Se é conhecido um ponto da superfície, então, tem-se a garantia de que a superfície S é única.

Concluiremos esta seção dando dois conceitos que utilizaremos no decorrer desta tese, que são: superfície riemanniana e superfície euclidiana.

Um espaço bidimensional (superfície) coberto pelas coordenadas u^{α} é dito ser um espaço riemanniano se a métrica, dada pelas componentes $a_{\alpha\beta}$, prescreve um elemento de arco ds , de tal maneira que

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} \quad (2.83)$$

é uma forma quadrática positiva definida nas diferenciais du^{λ} ($ds^2 = a_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} > 0$), com $a_{\alpha\beta}$ pelo menos de classe C^1 . Dessa forma, as superfícies definidas nesta seção são espaços riemannianos bidimensionais ou superfícies riemannianas.

Um espaço euclidiano é aquele que pode ser coberto por um sistema de coordenadas Cartesianas. Então, uma condição necessária e suficiente para que um espaço bidimensional seja euclidiano é que ele possa ser coberto por um sistema de coordenadas u^{α} cujos coeficientes do tensor métrico $a_{\alpha\beta}$, associado ao sistema u^{α} , sejam constantes. Equivalentemente, é necessário e suficiente que o espaço possa ser coberto por um sistema de coordenadas Cartesianas retangulares ($a_{\alpha\alpha} = 1$ e $a_{12} = a_{21} = 0$). Uma superfície que também é um espaço euclidiano é chamada de uma superfície euclidiana. Observe

que toda superfície euclidiana é uma superfície riemanniana mas o contrário, em geral, não é verdadeiro.

Capítulo 3

Estado-da-Arte: Caimento, Dobras e Rugas de Tecidos

Neste capítulo, faremos uma revisão bibliográfica dos trabalhos específicos sobre modelos de superfícies deformáveis (tecidos) fisicamente embasados, propostos até o presente momento desta tese, na solução (ou pelo menos se preocuparam) do problema de caimento, dobras e rugas/vincos de tecidos.

Os modelos de superfícies deformáveis podem ser divididos em dois grupos: modelos geométricos e modelos físicos. Os modelos geométricos, como já foi dito, são modelos inertes que podem ser úteis para simulações estáticas e não levam em consideração as propriedades físicas na deformação do objeto. Daremos um panorama dos modelos fisicamente embasados.

O leitor que tiver interesse nos modelos geométricos pode recorrer ao relatório técnico [25], no qual fazemos uma revisão bibliográfica destes modelos.

Dividiremos os modelos físicos em duas seções de acordo com a abordagem inicial do objeto: discreto ou contínuo.

3.1 Modelos Físicos Baseados em Mecânica das Partículas

Modelos baseados em mecânica das partículas consideram o objeto como um conjunto discreto, cujos elementos são denominados partículas. A cada partícula são aplicados conceitos e propriedades físicas pontuais (mecânica das partículas).

Apresentaremos nesta seção alguns trabalhos dentro da abordagem de sistemas

de partículas. Dividiremos os mesmos em dois grupos: aqueles que não fazem uso de molas conectando as partículas (Subsecção 3.1.1), denominados aqui simplesmente de sistemas de partículas, e aqueles que consideram as partículas conectadas por molas (Subsecção 3.1.2), denominados aqui de sistemas massas-mola.

3.1.1 Sistemas de Partículas

Sistema de partículas consiste de um largo número de pontos-massa (partículas) movendo sob a influência de forças externas, tais como, gravidade, cargas uniformes e pontuais, campos vórtices¹, reações devido a colisões com obstáculos estacionários ou em movimento, não esquecendo das forças internas que se resultam de auto-colisões. Cada partícula, em geral, é representada por sua posição, velocidade, aceleração, massa e outros atributos. O conjunto de partículas move-se de acordo com as leis de Newton para o movimento.

Uma questão nos modelos para simular tecido, até então apresentados, era a ausência da relação entre as características físicas do tecido real e os parâmetros usados nos métodos de modelagem. Uma primeira tentativa proposta neste sentido foi descrita por Feynman [39]. Ele foi um dos primeiros pesquisadores a descrever o tecido como um conjunto de partículas representando as interseções dos fios [72]. Ele descreveu todo o sistema pela introdução de funções-energia para cada partícula, dependendo da posição geométrica das partículas vizinhas, e incluiu as dinâmicas do caimento do tecido minimizando todas as funções-energias em cada etapa discreta de tempo para encontrar trajetórias para todas as partículas. Usando diferentes parâmetros para as funções-energia ele foi capaz de simular uma variedade de tecidos. O modelo físico de Feynman [39] é voltado para modelagem de caimento de tecido de pano. Ele usou uma grade 2D para representar um tecido 3D. A posição final de tecido é obtida pela minimização da energia dada em cada ponto da grade por

$$E(P(i, j)) = k_e E_{elastica}(P(i, j)) + k_c E_{curvatura}(P(i, j)) + k_g E_{gravitacional}(P(i, j)),$$

onde k_e , k_c e k_g são as constantes de elasticidade, curvatura e densidade, respectivamente. Feynman derivou as energias $E_{elastica}$ e $E_{curvatura}$ da teoria de elasticidade supondo que o tecido é uma casca flexível. Para calcular a energia no ponto $P(i, j)$ ele utilizou vizinhança 8, isto é, utilizou os 8 pontos circundantes. A forma do tecido é obtida movendo os pontos para encontrar um estado de energia mínima produzindo a

¹Campos vórtices são campos rotatórios que originam redemoinhos, furacões, turbilhões e rodopios.

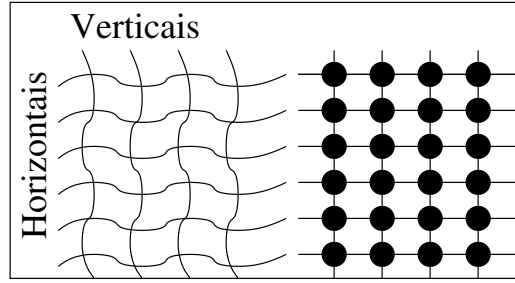


Figura 3.1: Tecido de pano como sistema de partículas.

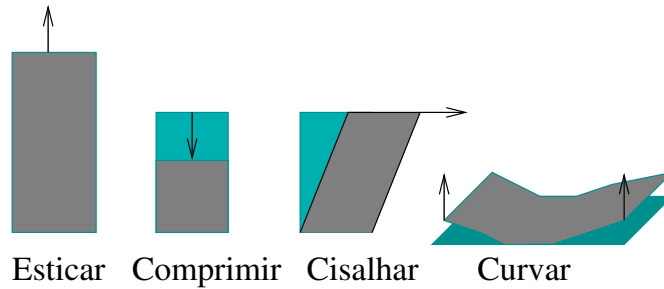


Figura 3.2: Resistências internas do tecido.

forma de equilíbrio ou a forma final. Sua principal preocupação é a forma final do tecido pois seu modelo é visto como sendo um modelo para simulação estática. Seu modelo não contempla o controle de cisalhamento, o que dificulta uma simulação realista do simples caimento de um pano sobre um objeto sob o efeito de seu próprio peso.

Preocupados com a interação do modelo deformável com os objetos rígidos, Breen et al. [8] propuseram quatro funções-energia buscando agregar relações mecânicas locais e pressões (coações) que existem nos cruzamentos dos fios do tecido, conforme ilustra Figura 3.1. São elas: (1) energia de repulsão U_{repel_i} , prevenindo a compressão e interpenetração; (2) energia de esticamento ou alongação $U_{stretch_i}$, energia que conecta a partícula com as quatro partículas vizinhas e captura as distensões; (3) energia U_{bend_i} devido à curvatura dos fios saindo do plano local do tecido; (4) energia $U_{trellis_i}$ devido ao cisalhamento no plano (Figura 3.2). Observe que eles propuseram a energia do trellisamento, ou cisalhamento no modelo contínuo, fenômeno que não é considerado no modelo de Feynman. Dessa forma, a energia total em cada partícula p_i é estimada por

$$U_{total_i} = U_{repel_i} + U_{stretch_i} + U_{bend_i} + U_{trellis_i}.$$

A minimização dessas funções energia produzem o caimento e dobramento.

O processo de simulação é dividido, numa mesma etapa de tempo, em duas fases. Na primeira fase da simulação, são modelados os efeitos da gravidade e os cálculos das

colisões entre o tecido e os objetos com os quais o mesmo está interagindo. Nesta fase, Breen et al. [8] utilizaram a seguinte equação do movimento para cada partícula p_i

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + c \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m_i \mathbf{G},$$

onde $\mathbf{r}_i$ é o vetor posição da mesma, m é a sua massa, c é a constante de amortecimento devido à resistência do ar e $\mathbf{G}$ é a força da gravidade. Eles utilizaram a solução analítica da equação acima.

Na segunda fase, a energia U_{total_i} é minimizada para a obtenção da forma final do tecido. Encerrada esta fase, a velocidade de cada partícula é corrigida de acordo com a mudança de posição.

Posteriormente, introduziram em [9, 10] a energia gravitacional U_{grav_i} dependente da altura da partícula, isto é, $U_{grav_i} = m_i g h_i$, onde m_i e h_i são a massa e a altura da partícula p_i e g é a aceleração gravitacional. Tentando reproduzir o comportamento de caimento de tecidos reais, utilizaram dados experimentais de Kawabata [53] para estimarem as energias U_{bend_i} e $U_{trellis_i}$. Estes modelos representam um avanço em relação ao modelo de Feynman por introduzirem dados do material e o controle de cisalhamento.

Motivados pelo trabalho de Breen et al. [9], pela flexibilidade e pelo baixo custo computacional em relação aos modelos contínuos e pela inclusão de dados do material, Eberhardt et al. [33] buscaram estender o modelo deles. Eles se preocuparam não só com as posições finais das partículas mas também com as trajetórias das mesmas. Porém, não é tido como um modelo dinâmico eficiente. Eles introduziram técnicas para modelar dados de forças através dos dados experimentais de Kawabata [53] tentando reproduzir comportamentos anisotrópicos e histereses. As forças são derivadas de funções-energia cinética e potencial pela formulação lagrangeana

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_{ij}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_{ij}}, \quad j = 1, 2, 3,$$

onde x_{ij} e v_{ij} são as coordenadas dos vetores posição e velocidade da partícula p_i . A função de Lagrange é dada por $L = E_{cinetica} - V$, com $E_{cinetica} = \frac{1}{2} m_i (v_{ij})^2$ e a energia potencial total V é a soma das energias E_{tensao} , $E_{cisalhamento}$ e $E_{curvatura}$ correspondentes às forças de tensão (esticamento e repulsão), cisalhamento e curvatura, respectivamente, e da energia potencial $E_{potencial}$ que depende da altura, equivalente à energia gravitacional U_{grav_i} do modelo de Breen et al. Incluíram no sistema resistência do meio, permitindo distinguir os efeitos de um tecido caindo sob a resistência do ar e vento, e interações do tecido com corpos em movimento e fricções com superfícies, tornando mais realísticas as simulações.

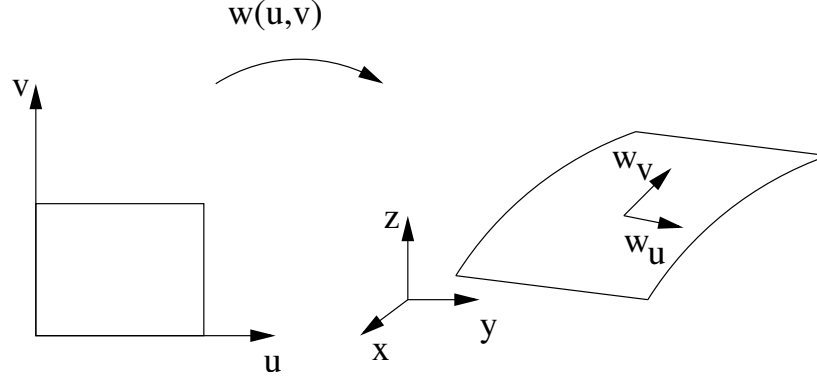


Figura 3.3: Superfície mergulhada.

As interações com o meio ou interpenetrações são realizadas entre duas iterações subsequentes no tempo para ajustes de posições e velocidades.

Baraff et al. [4] propuseram um sistema de simulação de tecido de pano usando para cada partícula funções-energia $E_{stretch}$, E_{shear} e E_{bend} dependentes das condições vetoriais entre as partículas vizinhas. Não fizeram uso de dados de Kawabata [53] para estimá-las. Utilizaram uma malha triangular e consideraram o tecido como uma superfície mergulhada no $\mathbb{R}^3$ (Figura 3.3). Buscaram uma relação que permitisse encontrar os vetores tangentes w_u e w_v , inspirados na Figura 3.4, e a partir deles determinaram as energias $E_{stretch}$ e E_{shear} . Para a energia E_{bend} eles utilizaram a medida do ângulo entre dois triângulos adjacentes. Este sistema pode realizar simulações estáveis numericamente em grandes passos de integração no tempo, devido ao acoplamento de coações sobre partículas individuais do tecido com método de integração implícito. Eles combinaram um método de integração de Euler implícito recuado com um método de integração de Euler explícito avançado para tornar a simulação mais rápida em relação aos modelos de partículas anteriores. Eles reorientaram os pesquisadores da área de modelos deformáveis, em computação gráfica, para o uso de esquemas implícitos, por mostrarem que é possível tornar o processamento mais rápido que o uso dos esquemas explícitos que exigem pequenas etapas de integração, por questões de instabilidades. Uma outra característica deste modelo é o passo de tempo ser adaptado dinamicamente.

Dada a energia interna total $E = E_{stretch} + E_{shear} + E_{bend}$ no ponto, a força interna total neste ponto é calculada pela primeira variação $-\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}}$. Utilizaram a dinâmica do movimento dada pela equação

$$\ddot{\mathbf{x}} = m^{-1} \left(-\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \right),$$

onde m é a massa e $\mathbf{F}$ representa forças externas (ar, contato e amortecimento). Observe

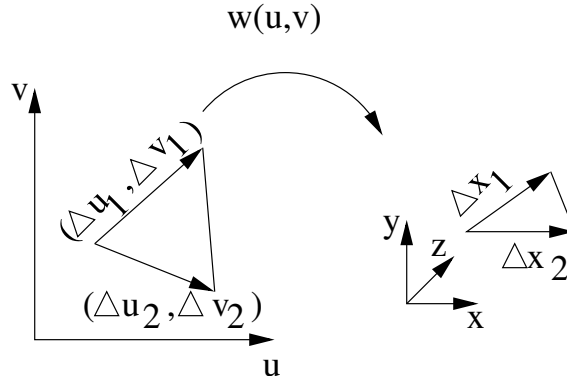


Figura 3.4: Relação local.

que $-\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}}$ corresponde a força interna total no ponto. O problema relacionado com o modelo de Baraff et al é a superelasticidade (deformações grandes) devido o tecido ter um comportamento não-linear, o qual não é bem modelado pelos modelos de sistemas de partículas. Baraff et al. [5] também propuseram um procedimento para resolver este problema. Eles apresentaram um sistema de partículas confinadas ou refreadas empregando o princípio de trabalho virtual de mecânica clássica.

Os modelos discutidos até o momento incluem procedimentos de minimização de energia. Para evitar esses procedimentos de minimização de energia, devido ao custo computacional de resolução de equações diferenciais não-triviais, Plath [72] propôs uma abordagem, usando outro método físico, denominada de autômata celular. O estado da partícula depende dos vizinhos locais através de sugestões vindas deles. A direção do movimento de cada partícula é determinada pela combinação destas sugestões. Como nos modelos anteriores, sua proposta tem como aplicação o caimento sobre objetos, incluindo o corpo humano.

Mais que caimentos, simulações de comportamento de dobra e enrugamento foram também alvos de pesquisa.

Ng et al. [68] apresentaram um sistema para modelagem e visualização de tecido com linhas similares a Feynman, mostrando alguns caimentos. Propuseram um melhor e mais rápido método para minimização de energia. Propôs em [67] um método geométrico para formação de dobras utilizando funções senoidais.

Etzmuß et al. [37] apresentaram um engenho completo de simulação de roupas com o intuito de produzir animações rápidas e realísticas. Este sistema modela roupas para figuras animadas. Neste modelo, eles tentam unir a rapidez das simulações de sistemas de partículas com o realismo dos modelos de mecânica dos contínuos por

uma formulação de diferenças finitas. Desse modo, tentam obter forças corretas e propriedades físicas do material tais como parâmetros de curvatura, cisalhamento e tensão do tecido, que podem ser diretamente derivados para o modelo de partículas da teoria de contínuos. Apesar de aceitarem como verdadeiro o comentário feito por House e Breen [49] - “*cloth is a mechanism, not a continuous material*”, eles complementam - “*in computer animation we cannot afford to model each detail of this mechanism, i.e., each single thread and structure*”. Segundo eles, a chave do problema está na aproximação do tensor de esforço σ . Considerando $\mathbf{r}(u, v)$ o vetor posição de uma superfície deformada, σ é aproximado por

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1(\sqrt{a_{11}} - 1) & \frac{1}{2}\mu a_{12} \\ \frac{1}{2}\mu a_{21} & k_2(\sqrt{a_{22}} - 1) \end{pmatrix}$$

onde $\sqrt{a_{11}} = \|\mathbf{r}_u\|$, $\sqrt{a_{22}} = \|\mathbf{r}_v\|$, $a_{12} = a_{21} = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$ e k_1 , k_2 e μ são constantes elásticas de materiais. Do divergente do tensor esforço ($\text{div } \sigma$), eles estimaram as forças de esticamento e cisalhamento. As forças internas de curvatura não podem ser derivadas do tensor de esforço proposto por eles. Então, essas forças são aproximadas pela “energia de lâmina fina” projetada sobre o normal da superfície. A equação do movimento utilizada é

$$\rho \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \text{div } \sigma = \mathbf{f},$$

onde $\mathbf{f}$ é a força gravitacional. Distanciamento dos pontos na direção perpendicular à direção das forças aplicadas, como o processo de formação de vincos, não consegue ser simulado.

Bridson et al., com vistas voltadas para dois problemas, um referente à aparência e aspecto do tecido e o outro referente ao tempo da simulação, propuseram em [11] uma nova abordagem para o controle de curvatura e um novo esquema misto de integração no tempo. Com relação à proposta de esquemas de integração no tempo para acelerar o processo de simulação, bem como aumentar a estabilidade do mesmo, vários autores já tinham dado suas contribuições como [4, 32, 91, 45, 71].

O trabalho de Bridson et al. é voltado para simulação de roupas com dobras e vincos. Para eles, uma chave para obterem um alto nível de detalhes, isto é, dinâmicas de dobras e vincos, é obter um bom modelo para o curvatura ou bom controle para a mudança de curvatura. Considerando que a física da mudança da curvatura do tecido ainda era insuficientemente compreendida, buscaram propor uma família de forças para controle de curvatura, segundo eles fisicamente corretas, para atuar entre pares de triângulos [11]. O elemento de curvatura básico são dois triângulos margeados por um lado comum, podendo a malha triangular ser desestruturada. Isto visava não só

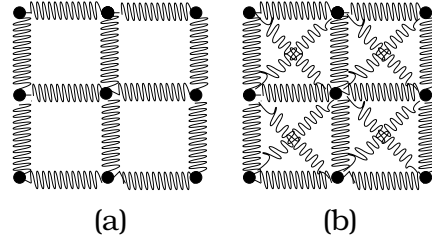


Figura 3.5: Exemplos de treliças massa-mola.

o manuseio de malhas de triângulos desestruturadas como também a obtenção de um controle fino e mais robusto sobre a curvatura, que consideravam não ser eficientemente possível com os modelos centrados no vértice como elemento básico. Os elementos de curvatura são embasados no ângulo diedral e sua taxa de mudança, como em Baraff et al. [4] e estendido por Grispun et al. [44]. Em resumo, com o objetivo de produzir uma simulação de tecido com dobras e vincos para melhorar o realismo Bridson et al propuseram: (1) um modelo de curvatura com ângulos de repouso não-nulos para a pré-formação de dobras e rugas; (2) uma técnica para premeditação de detalhes em regiões de contatos; (3) um método para tratamento de colisões que preserva dobras e vincos; (4) um mecanismo dinâmico de pressão que auxilia para controlar o dobramento de larga escala. Apesar de tanto esforço o seu modelo não contempla o acoplamento entre as deformações tangenciais e normais, usualmente desprezados no modelo de casca fina [63].

3.1.2 Sistemas de Partículas Massa-Mola

Sistemas massa-mola são essencialmente sistemas de partículas com conexões cujos comportamentos são regidos pela lei de Hook: a cada partícula está conectado um número finito de partículas vizinhas por forças-mola [93]. Um objeto é modelado como uma coleção de pontos-massa conectados por molas numa estrutura de treliça (Figura 3.5). É fácil e simples calcular a força sobre cada ponto-massa, o qual pode ser animado pela integração numérica da força. A relação entre as forças e as distensões das molas pode ser formulada com uma simples equação diferencial ordinária.

Provot [73] propôs um modelo massa-mola para a animação de tecidos. Podemos considerar o seu modelo como um marco para os modelos massa-mola voltados para tecido. Seu modelo de treliça massa-mola é de acordo com a Figura 3.5(b). Ele propôs três tipos de molas: molas estruturais (Figura 3.6(a)), para modelar as tensões ou forças de compressões e trações (esticamentos); molas de flexões (Figura 3.6(b)), para modelar

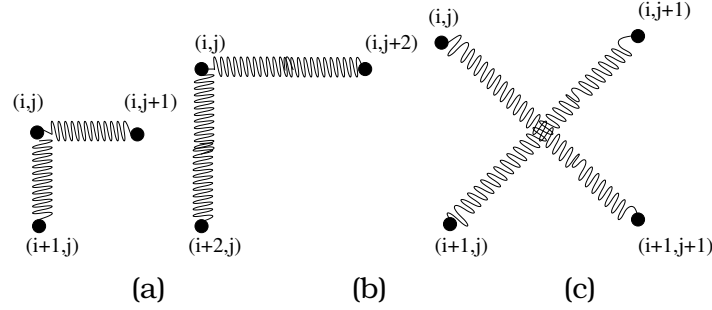


Figura 3.6: Tipos de molas.

as tensões ou forças de flexões (curvatura); e molas de cisalhamento (Figura 3.6(c)), para modelar as tensões ou forças de cisalhamento. Assim, ele tentou simular com as molas todas as elasticidades: métrica, curvatura e cisalhamento.

Provot mostrou que, quando uma concentração de alta tensão ocorre numa pequena região da superfície, as deformações de elongações locais tornam-se não realísticas, isto é, ocorrem grandes taxas de deformações de elongações. Isto é devido ao comportamento não-linear do tecido que é difícil de ser modelado com as molas. Aumentar a rigidez das molas não resolve o problema. Para resolver esse problema, chamado de superelasticidade, ele utilizou um método baseado no seguinte procedimento: fixa-se uma taxa de deformação τ_c , denominada de taxa crítica de deformação, e se a taxa de deformação da mola exceder esse limite, são realizadas modificações nas extremidades da mola (ou nas posições dos pontos extremos da mola) para manter a taxa de deformação no limite da taxa crítica.

Para cada ponto p_{ij} é aplicada a equação do movimento

$$\mathbf{F}_{ij} = \mu \mathbf{a}_{ij},$$

onde μ e a_{ij} são a densidade de massa e a aceleração do ponto e $\mathbf{F}_{ij}$ é a soma da força interna, modelada pelas molas, e força externa (gravidade, viscosidade do meio e vento).

Para o problema de superelasticidade, Vassilev et al. e Dochev et al. [31, 88, 89] propuseram as modificações das velocidades ao invés das posições.

Além da preocupação com as questões de eficiência e estabilidade, Kang et al. [52] tentaram melhorar a aparência do tecido subdividindo os triângulos e introduzindo curvas splines cúbicas enrugadas para gerarem uma superfície suave enrugada, considerando que curvas splines cúbicas geram uma superfície excessivamente suave, diferente da aparência real do tecido. Tal mecanismo visou a criação de rugas no tecido simulado. O modelo deles gera o movimento de um pequeno número de pontos-massa

e calcula a posição dos outros pontos-massa por um método de interpolação como o da curva spline cúbica. Determinadas as curvas splines cúbicas, eles adicionaram rugas a elas gerando curvas splines cúbicas enrugadas. A partir destas determinam a superfície. Porém, pelo fato da malha esparsa conter poucas partículas (ou pontos-massa), torna-se difícil a modelagem de tecido com grandes curvaturas (fenômeno normal numa deformação de tecido). Este modelo produz animações consideradas aproximadas [40].

Cordier et al. [22] apresentaram um método para animação de tecido de pano em tempo-real. Ele é voltado para a animação de figuras humanas vestidas. O método proposto é híbrido, tentando explorar os méritos de ambas as abordagens de deformações: física e geométrica. Ele combina a rapidez de métodos geométricos (curvas catenária, círculo e FFD) com o realismo dos métodos físicos (sistema massa-mola simplificado) para a animação interativa de figuras humanas vestidas, simples e complexas. Este método permite a animação em tempo-real. Para conseguir esse desempenho, as peças de roupas são divididas em três pedaços que são simulados por algoritmos distintos, dependendo de como eles estão acamados sobre a superfície do corpo e se eles grudam ou escorregam sobre ele. Os pedaços são: (1) roupa esticada, que segue a deformação da pele; (2) roupa frouxa ou solta, aplicando um método geométrico a partir das curvas catenária e círculo para mangas e pernas de calça e aplicando FFD para o tronco; (3) roupa flutuante, que é aplicado o modelo físico massa-mola simplificado. Utiliza uma abordagem geométrica (curvas catenária, círculo e FFD) para a formação de dobras e rugas, sem relação física. Este trabalho buscou evitar alguns cálculos desnecessários, de acordo com os autores, referentes a detecções de colisões complexas e deformações físicas. O modelo é restrito ao caimento da roupa sobre figura humana numa simulação dinâmica.

Fuhrmann et al. [40] desenvolveram um sistema interativo para animação de tecido. Nesse sistema, é usada uma malha triangulada, servindo como base de um sistema massa-mola. Também é descrito um algoritmo que substitui as forças internas por várias forças de coações ou pressões, podendo ser aplicados largos passos de integração no tempo. É capaz de animar um pedaço de tecido em tempo real. O tecido pode ser arrastado interativamente usando o *mouse*.

Enquanto outros modelos tentam refletir propriedades como cisalhamento, esticamento e curvatura anisotrópicos, Fuhrmann et al. propuseram o que chamam de modelo mais simples que refletirá aproximações para propriedades de esticar e curvar, negligenciando o cisalhamento e anisotropia de elongações². Esta abordagem de substi-

²O tecido é um objeto que pode ser composto de um material que tem a propriedade de anisotropia de

tuição das forças internas por pressões ou coações também visa resolver o problema de superelasticidade [40]. Segundo os autores, essas pressões podem ser parametrizadas para gerar diferentes comportamentos do tecido. As forças externas se resumem a gravidade, força de entrada do usuário e forças de colisões com outros objetos da cena. A maior preocupação deles não foi com a corretude física, mas com a simulação em tempo real. O modelo deles não pode ser aplicado para tecidos cujas elongações ultrapassem a décima parte do comprimento do estado de repouso. É um modelo fisicamente limitado. Não é um modelo próprio para a formação de dobras e rugas.

Devido os modelos massa-mola apresentados até o presente momento serem compostos por molas unidimensionais, regidas por equações constitutivas lineares³ (hookeanas), os mesmos não são capazes de reproduzir certos comportamentos não-lineares dos tecidos. Este problema motivou Jeong et al. [51] a formularem um modelo de mola chamado *mola 3D*. Este modelo de mola 3D visa refletir com mais fidelidade as forças de resistência a curvatura usando uma massa orientada com um único vetor diretor para cada mola atada a ela. Porém, a mola não cria toda força de restauração ou torque contrário à torção. Esta é uma abordagem nova, na linha de um melhor controle de curvatura em sistemas massa-mola, que ainda está em processo de formulação.

Vários trabalhos tiveram uma atenção maior nos problemas de eficiência e estabilidade em animações via sistemas massa-mola, por exemplo, [16, 30, 31, 32, 40, 45, 52, 88, 89, 91].

3.2 Modelos Físicos Baseados em Mecânica dos Contínuos

Modelos baseados em mecânica dos contínuos consideram o objeto como um contínuo parametrizado e aplicam conceitos e propriedades numa vizinhança local. Nesta linha de visão, existem diversas vertentes teóricas gerais e completas a respeito do comportamento de materiais, tanto dos corpos sólidos como das lâminas e cascas finas, perante ações externas.

Modelos deformáveis baseados em mecânica dos contínuos podem ser de duas naturezas: baseado em energia ou baseado em força. Modelos baseados em energia

elongações.

³As equações constitutivas são equações que caracterizam o comportamento interno termomecânico ou mecânico de elasticidade ou plasticidade do material. Isto é, são modelos matemáticos para as respostas termomecânica ou mecânica do material da casca, capazes de determinar as várias funções de estado derivadas dos princípios de balanço [64, 75].

calculam a energia de todo objeto de um conjunto de equações e em seguida determinam a forma movendo os pontos para encontrar um estado de energia mínima. Modelos baseados em força representam a força entre os pontos como equações diferenciais e realizam uma integração numérica para obterem as posições dos pontos em cada iteração no tempo. Em geral, modelos baseados em energia produzem simulações estáticas, considerando apenas os valores escalares das grandezas físicas, e modelos baseados em força produzem simulações dinâmicas, levando em conta as direções das grandezas físicas [66]. Portanto, os modelos baseados em força são mais apropriados para modelagem de caimentos, dobras e rugas de tecidos.

O trabalho pioneiro em modelos baseados em forças foi proposto por Terzopoulos et al. [87].

Terzopoulos et al. [87] apresentaram um modelo de superfícies deformáveis usando teoria de elasticidade não-linear com uma resposta esforço-distensão simplificada. O modelo não emprega propriedades do material como módulos de Young e raio de Poisson.

As dinâmicas do modelo são regidas pela equação do movimento na sua formulação lagrangeana:

$$\mu \dot{\mathbf{v}} + \gamma \mathbf{v} + \frac{\delta \epsilon(\mathbf{r})}{\delta \mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t),$$

onde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ é a velocidade do vetor posição $\mathbf{r}$ de um ponto da superfície S , μ é a densidade de massa e γ é a constante de amortecimento num ponto $\mathbf{r}$. O vetor $\mathbf{F}$ denota a contribuição das forças externas em $\mathbf{r}$ num instante t .

A aproximação da força interna $\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \delta \epsilon(\mathbf{r}) / \delta \mathbf{r}$ é obtida efetuando a minimização da energia e descartando alguns termos:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cong \sum_{i,j=1}^2 -\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\alpha_{ij} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} (\beta_{ij} \mathbf{n}), \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal à superfície e

$$\alpha_{ij} = \eta_{ij}(a_{ij} - A_{ij}), \quad \beta_{ij} = \xi_{ij}(b_{ij} - B_{ij}),$$

com a_{ij} e A_{ij} denotando as componentes dos tensores métrico da superfície no estado deformado e não deformado, respectivamente, b_{ij} e B_{ij} , as componentes dos tensores curvatura da superfície no estado deformado e não deformado, respectivamente, e η_{ij} e ξ_{ij} , as constantes de elasticidade.

Em seguida, Terzopoulos et al. aproximaram o vetor normal $\mathbf{n}$ pelas derivadas parciais de segunda ordem $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_i \partial u_j}$ e obtiveram a seguinte expressão para a força interna

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cong \sum_{i,j=1}^2 -\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\alpha_{ij} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \left(\beta_{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u_i \partial u_j} \right).$$

Acreditamos que a utilização destas aproximações foi devido à complexidade de usar o vetor normal como produto vetorial dos vetores de base tangentes, para resolver o sistema de equações diferenciais parciais. Porém, esta aproximação torna difícil o controle da mudança de curvatura da superfície, pois a direção, sentido e magnitude da derivada parcial de segunda ordem em geral não coincidem com a direção, sentido e magnitude do vetor normal. Um bom controle de curvatura é importante para a aparência visual de caimento, dobras e rugas do tecido. Outra simplificação no modelo deles é a desconsideração do termo de acoplamento entre as medidas métricas e as de curvatura, importante para a formação de dobras e rugas quando apenas forças tangenciais são aplicadas.

Posteriormente, em 1988, Terzopoulos et al. [86] incorporaram comportamento inelástico ao modelo (viscoelasticidade e plasticidade).

Aono [58] apresentou um modelo de propagação de vincos baseado na teoria de elasticidade e nos princípios de D'Alembert. Neste modelo o tecido de pano é visto como um meio que propaga rugas e vincos.

Para a obtenção do modelo Aono fez as seguintes suposições: (1) o tecido no estado inicial é considerado homogêneo, isotrópico e linearmente elástico; (2) pelos princípios de D'Alembert, o tecido está em estado de equilíbrio, durante todo instante de tempo, sob as forças aplicadas; (3) o tecido nunca estica ou encolhe ao longo da direção normal à superfície. Com estas três suposições ele obteve a seguinte equação

$$G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + f_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} + c_i \frac{du_i}{dt}, \quad (3.2)$$

onde $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$ são as coordenadas cartesianas, u_i é o deslocamento na direção x_i , f_i é a força aplicada na direção x_i , λ é a constante de Lamé, G é o módulo de rigidez, ρ é a densidade de massa do tecido e c_i é a constante de amortecimento na direção x_i . Aono incluiu anisotropia (local e global) e viscoelasticidade à Eq. (3.2). Comportamentos como o caimento ou interação com objetos rígidos não foram levados em consideração.

Simo et al. [78, 79, 80] usou teoria de superfície de Cosserat com o vetor diretor inextensível para formular de forma precisa as leis de equilíbrio locais, equações consti-

tutivas locais e forma fraca das equações de momentos numa maneira útil para análises e implementação por elementos finitos. Kim [54] mostrou como tratar o caimento 3D de tecido usando esta proposta de Simo et al. O método considera todas as propriedades do material tais como módulos, peso e rigidez. Deng [29] estendeu o trabalho de Kim [54] para tratar de pregueamento (ou enrugamento), curvatura não-linear⁴ e contato. Uma abordagem simples foi proposta por Collier et al. [19], que trataram a “casca” como uma montagem de “lâminas”. Nesta abordagem é usada a superposição de esticamento e curvatura das lâminas para representar o comportamento da casca. Nela, exclui-se o acoplamento de esticamento e curvatura dentro dos elementos, não sendo um bom procedimento para o tratamento do tecido [15].

Preocupado com o desempenho computacional dos modelos baseados em mecânica dos contínuos, Chen e Govindaraj [15] resolveram optar por outra abordagem para predizerem o caimento de tecidos. Sua abordagem é baseada na teoria de sólido-casca degenerado, com o normal à superfície do meio não deformada permanecendo normal à superfície do meio deformada durante a deformação e que os esforços são aproximadamente planos e paralelos ao plano tangente à superfície do meio. Segue, então, desta última suposição, que as distorções da casca são definidas adequadamente pelo tensor métrico e tensor curvatura,

1. variação da métrica

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta});$$

2. variação da curvatura

$$\kappa_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 (B_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\lambda\beta} - B_{\beta\lambda} \varepsilon_{\lambda\alpha});$$

onde $a_{\alpha\beta}$ ($A_{\alpha\beta}$) e $b_{\alpha\beta}$ ($B_{\alpha\beta}$) são as componentes dos tensores métrico e curvatura da superfície corrente (inicial), com $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ o vetor posição de um ponto da superfície.

Consideraram também as deformações de cisalhamentos transversais da casca, pela projeção do vetor normal sobre a superfície de referência da casca corrente

1. cisalhamento transversal da casca

$$\gamma_{3\alpha} = \mathbf{n} \cdot \frac{1}{a_{\alpha\alpha}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \right).$$

⁴Grande mudança da curvatura para pequeno esforço, isto é, a relação mudança da curvatura do tecido e esforço realizado é não-linear.

Para tratar o problema de não-linearidade devido a grandes deformações, propuseram a equação de equilíbrio dada por

$$K(\mathbf{u})\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{f},$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor deslocamento, $\mathbf{f}$ é a carga externa e $\Delta\mathbf{u}$ e $\Delta\mathbf{f}$ são as variações dessas grandezas. Não mostram como calculam as forças internas a partir destas medidas de deformações nem como calculam a matriz de rigidez K . Fizeram uso nas simulações das medidas do material: módulos de Young e cisalhamento e raio de Poisson.

Pela suposição sobre o vetor normal, uma grande deformação de curvatura da superfície nos levará a uma grande variação dos cisalhamentos transversais da casca, utilizados para modelar o comportamento de caimento do tecido. Isto é um problema entre a suposição sobre o vetor normal em cada instante de tempo e as medidas de cisalhamentos transversais, pois, a medida que ocorrer mudança na curvatura, ocorrerão mudanças das projeções do vetor normal a superfície inicial sobre as direções tangentes a superfície corrente. Outro problema desta suposição está no cálculo das componentes do tensor curvatura que serão apenas aproximações. O acoplamento da deformação tangencial e normal é feito de forma unilateral, isto é, apenas a deformação tangencial é considerada na deformação normal. Isso é um problema para o equilíbrio do modelo, pelas relações de compatibilidade geométrica e física. Além disso, como no cálculo de $\kappa_{\alpha\beta}$ os termos $\varepsilon_{\lambda\beta}$ e $\varepsilon_{\lambda\alpha}$ estão multiplicados por $B_{\alpha\lambda}$ e $B_{\beta\lambda}$, respectivamente, nos pontos da superfície que são planares no estado inicial, o acoplamento entre deformações tangenciais e normais não ocorrerá. Então, por exemplo, nas simulações cujas forças são tangenciais e a superfície é plana tal relação não contribui para a formação de dobras e rugas.

Eischen et al. [35] desenvolveram um sistema baseado na teoria de casca não-linear [78, 79, 80], proposto por Simo et al. Ele é destinado à resposta de material não-linear, contato de tecido com superfícies rígidas e controle adaptativo de comprimento de arco, objetivando as simulações de movimentos 3D relacionados a processos de manufaturamento de tecido real.

A casca é representada a partir da superfície do meio ou superfície de referência, e do vetor diretor unitário (Figura 3.7).

No modelo de Eischen et al. [35] são considerados três tipos de deformações:

1. variação da métrica ou distensão de membrana

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta});$$

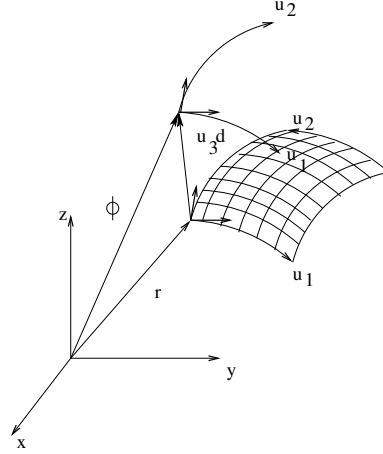


Figura 3.7: Configuração da casca.

2. variação da curvatura

$$\kappa_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial u^\beta} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial u^\beta} \right);$$

3. cisalhamento transversal da casca

$$\gamma_\alpha = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \cdot \mathbf{d} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial u^\alpha} \cdot \mathbf{D} \right);$$

onde $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}_0$ são os vetores posição da superfície corrente e inicial, respectivamente, e $\mathbf{d}$ e $\mathbf{D}$ são os vetores diretor sobre a superfície corrente e inicial, respectivamente, com $\mathbf{D}$ normal a superfície inicial. As deformações de membrana medem as elongações ou compressões e mudança de ângulos na superfície do meio da casca, as deformações de cisalhamento transversais medem os cisalhamentos das seções transversais da casca e as deformações de curvatura medem as mudanças de curvaturas da superfície do meio.

As relações entre as forças e momentos atuando na casca e as deformações são governadas pelas equações constitutivas:

1. esforço de membrana

$$n^{\alpha\beta} = h \sum_{\lambda, \delta=1}^2 C^{\alpha\beta\lambda\delta} \varepsilon_{\lambda\delta};$$

2. esforço de cisalhamento transversal

$$q^\alpha = kh \sum_{\lambda=1}^2 C^{\alpha 3 \lambda 3} \gamma_\lambda;$$

3. esforço de curvatura

$$m^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12} \sum_{\lambda,\delta=1}^2 C^{\alpha\beta\lambda\delta} \kappa_{\lambda\delta};$$

onde h é a espessura da casca e k é um fator de correção de cisalhamento. Utilizaram as medidas do material como raio de Poisson ν , módulo de elasticidade E e fator de correção de cisalhamento k , inseridas no cálculo das constantes de elasticidade pelas expressões

$$C^{\alpha\beta\lambda\delta} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\nu A^{\alpha\beta} A^{\lambda\delta} + \frac{(1-\nu)}{2} (A^{\alpha\lambda} A^{\beta\delta} + A^{\alpha\delta} A^{\lambda\beta}) \right],$$

$$C^{\alpha 3 \lambda 3} = \frac{kE}{2(1+\nu)} A^{\alpha\lambda},$$

onde a matriz $(A^{\alpha\beta})$ é a matriz inversa da matriz $(A_{\alpha\beta})$.

A imposição de momento linear e angular permite o desenvolvimento de uma forma fraca⁵ da teoria de casca não-linear. Incorporando resposta aos materiais do tecido, os procedimentos de linearização padrão dos elementos finitos conduzem à forma matricial

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{d}) \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{r} \\ \Delta \mathbf{d} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{d}),$$

onde $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{r}, \mathbf{d})$ é o vetor força interna e $\mathbf{F}_{ext}$ é o vetor força externa. A solução desta equação gera incrementos nos vetores posição e no vetor diretor, $\mathbf{r}$ e $\mathbf{d}$, usados para atualizar a posição e o vetor diretor da superfície do meio da casca. O modelo deles não acopla as deformações tangenciais com as deformações normais, importante no tratamento de dobras e rugas no tecido. Além da complexidade analítica do modelo deles, são feitas restrições no modelo 3D para a obtenção de um modelo 2D bem como ocorre o enfraquecimento do equilíbrio da quantidade de movimento pela abordagem variacional.

Au et al. [3] propuseram um modelo para simulação do caimento de tecido de pano buscando incorporar propriedades materiais do tecido aos parâmetros de controle da deformação. São utilizadas duas energias no ponto nodal $\mathbf{r}[i, j]$

$$U_G[i, j] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \delta, \lambda=1}^2 C_1^{\alpha\beta\delta\lambda} \left(a_{\alpha\beta}[i, j] - A_{\alpha\beta}[i, j] \right) \left(a_{\delta\lambda}[i, j] - A_{\delta\lambda}[i, j] \right),$$

⁵Forma fraca são aquelas obtidas a partir do enfraquecimento de algumas hipóteses. Isso enfraquece a convergência. Tanto em [78, 79, 80] como em [35] a forma fraca é uma formulação variacional das equações de equilíbrio de quantidade de movimento.

$$U_B[i, j] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \delta, \lambda=1}^2 C_2^{\alpha\beta\delta\lambda} (b_{\alpha\beta}[i, j] - B_{\alpha\beta}[i, j]) (b_{\delta\lambda}[i, j] - B_{\delta\lambda}[i, j]),$$

definidas em termo dos tensores métrico e curvatura, respectivamente.

Fazendo restrições sobre as direções *warp* e *weft*, reduz-se os parâmetros de elasticidade a cinco parâmetros para cada energia, isto é, apenas C_λ^{1111} , C_λ^{1122} , C_λ^{1212} , C_λ^{2211} e C_λ^{2222} são não-nulos. Estes parâmetros dependem dos parâmetros do material como: módulos elásticos, módulos de cisalhamento, módulos de torção, módulos de curvatura e raios de Poisson.

A partir das energias $U_G[i, j]$ e $U_B[i, j]$, são derivadas duas forças $\mathbf{f}_G[i, j]$ e $\mathbf{f}_B[i, j]$ pelo seguinte cálculo

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_G[i, j] &= \frac{\partial U_G[(i-1), j]}{\partial \mathbf{r}[i, j]} + \frac{\partial U_G[i, j]}{\partial \mathbf{r}[i, j]} + \frac{\partial U_G[i, (j-1)]}{\partial \mathbf{r}[i, j]} \\ \mathbf{f}_B[i, j] &= \frac{\partial U_B[(i-1), j]}{\partial \mathbf{r}[i, j]} + \frac{\partial U_B[(i-1), (j-1)]}{\partial \mathbf{r}[i, j]} + \frac{\partial U_B[i, (j+1)]}{\partial \mathbf{r}[i, j]} + \\ &\quad \frac{\partial U_B[i, j]}{\partial \mathbf{r}[i, j]} + \frac{\partial U_B[i, (j-1)]}{\partial \mathbf{r}[i, j]} + \frac{\partial U_B[(i+1), j]}{\partial \mathbf{r}[i, j]}. \end{aligned}$$

Au et al. utilizam o vetor normal da etapa de tempo imediatamente anterior à etapa atual, estimando a força $\mathbf{f}_B[i, j]$ totalmente na etapa de tempo anterior. O equilíbrio das forças atuando no ponto nodal $\mathbf{r}[i, j]$ é dado pela equação

$$\rho[i, j] \left(\mathbf{G} - \frac{d^2 \mathbf{r}[i, j]}{dt^2} \right) - \gamma[i, j] \frac{d\mathbf{r}[i, j]}{dt} = \mathbf{f}_G[i, j] + \mathbf{f}_B[i, j].$$

O modelo de Au et al. é um modelo semelhante ao modelo de Terzopoulos et al. [87]. Porém, eles tratam o vetor normal diferentemente e fazem a inclusão de parâmetros do material. É um modelo com uma força resposta simplificada. Não contemplam a relação entre as deformações tangenciais e normais, importante para o tratamento de dobras e rugas. Com o uso da força interna $\mathbf{f}_B[i, j]$ no instante anterior ao instante corrente surge uma dificuldade para o controle da curvatura.

O ponto comum de todos os trabalhos que seguem o paradigma da Mecânica dos Contínuos é a negligência do termo de acoplamento das deformações tangenciais e das normais na formulação da energia interna. A nosso ver, isso constitui uma barreira para simular movimento do tecido na direção perpendicular à direção da aplicação das forças.

3.3 Comentários Finais

Os sistemas de partículas em geral são modelos físicos simples, de fácil compreensão e construção. A complexidade é menor comparando com os modelos contínuos. A animação baseada nesta abordagem já pode ser feita em tempo-real. Eles sofrem, no entanto, do problema de serem modelos discretos que buscam aproximar o contínuo. Nestes modelos ocorrem dificuldades de composições das forças internas de interações e do controle dos efeitos indesejados. É uma tarefa árdua e difícil a micromodelagem das interações neste nível de estrutura (microestrutura), principalmente o controle de curvatura e o tratamento de dobras e rugas, importantes para a aparência visual realística do tecido simulado. Não existe ainda um acoplamento entre as deformações tangenciais e normais, importantes para o tratamento de dobras e rugas dos tecidos, cujo comportamento é não-linear, podendo surgir efeitos classificados como superelasticidade.

Os sistemas contínuos gozam da desvantagem do alto custo computacional, pois geralmente resultam em sistemas de equações diferenciais parciais cuja busca da solução numérica é computacionalmente cara tanto em tempo quanto em memória. Porém, os mesmos são desenvolvidos em modelos geometricamente exatos por físico-matemáticos de forma analítica e sistemática. Com isso a controlabilidade nos sistemas contínuos será melhor, em relação aos sistemas de partículas, pela maior fidelidade da modelagem das deformações, forças internas e equilíbrio de forças. Além disso, os parâmetros de controle são incorporados de forma natural via modelo físico porque as equações constitutivas relacionam diretamente as forças com as variações nas medidas geométricas. Dessa forma, consideramos que os sistemas contínuos poderão oferecer uma interface simples e intuitiva para o usuário bem como resultados mais realísticos que os sistemas de partículas.

Em ambos, sistemas de partículas e sistemas de contínuos, ainda não foram feitas abordagens adequadas para o tratamento de dobras e rugas envolvendo deslocamentos ortogonais às equações. Nesta tese, apresentamos um modelo baseado em mecânica dos contínuos que consegue tratar apropriadamente este tipo de comportamento bastante comum nos tecidos.

Capítulo 4

Superfície de Cosserat

Neste capítulo, apresentaremos um modelo de comportamento termodinâmico de superfícies de Cosserat propostas pelos irmãos Cosserat em 1909. Este modelo permite analisar as deformações de cascas finas (*thin shells*), representando as mesmas como superfícies bi-dimensionais providas de um vetor diretor não tangente a elas em cada ponto (Figura 4.1).

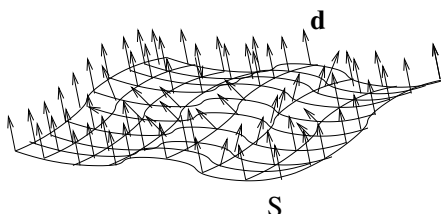


Figura 4.1: Superfície de Cosserat.

Uma casca, intuitivamente falando, é um corpo 3-dimensional caracterizado pelo fato de duas superfícies da sua fronteira, em lados opostos, serem muito maiores em relação às outras superfícies da fronteira (Figura 4.2). Define-se como a sua espessura a distância entre estas duas superfícies maiores. Quando esta espessura é suficientemente pequena, diz-se que a casca é fina. Quando as superfícies maiores forem planas, ela é chamada de lâmina (*plate*). Na década de 1950, Naghdi mostrou o potencial do modelo de superfície de Cosserat para modelar “cascas sólidas”.

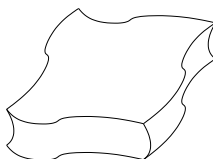


Figura 4.2: Casca.

Ericksen e Truesdell [36], em 1958, desenvolveram uma teoria geral de equilíbrio para distensões em "hastes e cascas", com base no trabalho dos irmãos Cosserat. Contudo, eles não levaram em consideração as equações constitutivas.

Em 1965, Green et al. [42] integraram os princípios dinâmicos e termodinâmicos de mecânica dos contínuos à análise de uma superfície de Cosserat: o postulado de equilíbrio de energia, equações constitutivas, desigualdade de produção de entropia e propriedades físicas invariantes sob movimentos de corpos rígidos superpostos. Com isso, as aplicações do modelo se estendem além das deformações infinitesimais e dos materiais elásticos.

Existem duas vertentes nesta abordagem de superfície de Cosserat [64, 75]: (a) teoria de superfície de Cosserat 3-dimensional, que parte de princípios físicos de equilíbrio para volumes arbitrários da casca fina¹, encontrando equações locais de equilíbrios 2-dimensionais sobre a superfície do meio da casca, porém, as variáveis de estados da superfície S são integradas com relação a coordenada u^3 , que varia na direção da espessura da casca, onde a redução para variáveis de estados dependentes apenas das coordenadas de superfície u^α ocorre mediante as hipóteses de Love-Kirchhoff; (b) teoria de Cosserat por abordagem direta (2-dimensional), que parte de princípios físicos de equilíbrio voltados para áreas arbitrárias da superfície [42], encontrando equações locais de equilíbrio 2-dimensionais sobre a superfície S , com as variáveis de estados dependentes apenas das coordenadas de superfície u^α . A segunda abordagem se enquadra melhor com o nosso objetivo de pesquisa, pois é um modelo de mecânica dos contínuos, tem semântica geométrica e é voltado para superfície, evitando o uso da hipótese de Love-Kirchhoff, que inviabiliza a introdução do termo de acoplamento na equação de energia interna da superfície deformada, ou de fazermos aproximações de um modelo 3D para um modelo 2D ou trabalharmos com um modelo 3D.

No que segue, apresentaremos a proposta de Green et al. [42], na qual o nosso trabalho se baseou para elaborar um algoritmo aplicado à deformação de tecidos.

4.1 Definição de Superfície de Cosserat

Uma superfície de Cosserat é uma superfície mergulhada no espaço euclidiano 3-dimensional a qual em cada ponto é assinalado um único vetor diretor d não tangente a superfície. O diretor não necessariamente está na direção do vetor normal à

¹O modelo para tecidos de pano proposto por Eischen et al. [35] é embasado na proposta de Simo et al. [78, 79, 80], que, por sua vez, é embasado na teoria de superfície de Cosserat 3-dimensional.

superfície S e é assumido ter a propriedade que permanece invariante em comprimento quando o movimento de S é alterado para um movimento de corpo rígido sobreposto. O mergulho corresponde à maneira como a superfície é inserida no espaço circundante a ela, de modo que o elemento de medição desse espaço circundante restrito à superfície corresponde ao elemento de medição da superfície.

Sejam os pontos de uma região $\mathcal{B}$ (casca fina) num espaço euclidiano 3-dimensional referidos a um sistema de coordenadas Cartesianas retangulares fixo x^i ($i = 1, 2, 3$) e seja u^1, u^2, u^3 um sistema de coordenadas curvilíneas convecionadas² definido pelas relações de transformação

$$x^i = x^i(u^1, u^2, u^3, t), \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) > 0. \quad (4.1)$$

A transformação (4.1) é não singular e tem uma única inversa

$$u^i = u^i(x^1, x^2, x^3, t). \quad (4.2)$$

Sejam os pontos de $\mathcal{B}$ identificados pelo sistema de coordenadas curvilíneas convecionadas geral (Eq. 4.2), cujos vetores posição, relativos a origem do sistema Cartesiano retangular fixo, é

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(u^1, u^2, u^3, t) = \sum_{i=1}^3 x^i(u^1, u^2, u^3, t) \mathbf{e}_i, \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{e}_i$ são os vetores da base canônica do sistema de coordenadas Cartesianas retangulares.

Seja S a superfície dada pela equação $u^3 = 0$ (Figura 4.3), isto é, a superfície formada pelos pontos do corpo $\mathcal{B}$ cujos vetores posição são dados por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, t) = \mathbf{R}(u^1, u^2, 0, t). \quad (4.4)$$

No capítulo anterior (Cap. 2), na Seção 2.2, cobrimos o espaço circundante a superfície ou o corpo $\mathcal{B}$ com um sistema de coordenadas normal. Isto é, $u^1 = \text{constante}$ e $u^3 = 0$ ou $u^2 = \text{constante}$ e $u^3 = 0$ geram curvas sobre a superfície S , denominadas de curvas coordenadas, enquanto a direção de u^3 coincide com a direção normal à superfície S . Em [42], Green et al. consideram tal sistema de coordenadas curvilíneas.

²Um ponto tem um mesmo terno de coordenadas u^i durante todo instante t .

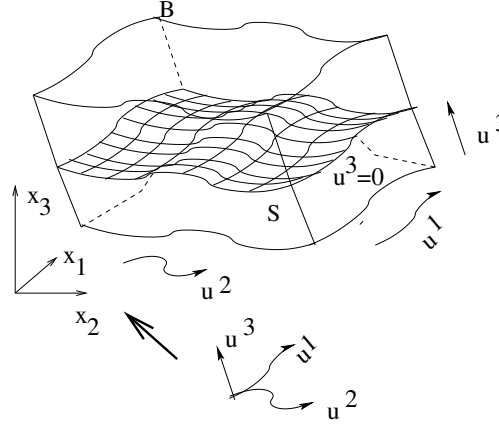


Figura 4.3: Superfície do meio da casca.

A deformação da superfície de Cosserat S ao longo do tempo t é caracterizada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^\alpha, t), \quad \mathbf{d}(u^\alpha, t), \quad [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{d}] > 0, \quad (4.5)$$

onde $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{d}] = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{d}$ representa o produto misto dos vetores. A condição $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{d}] > 0$ impõe que os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{d}$ não sejam coplanares e que o vetor diretor $\mathbf{d}$ esteja do mesmo lado do vetor normal, em relação ao plano tangente.

O vetor diretor é um vetor que nos permite avaliar o comportamento de uma superfície relativo ao meio em que ela está imersa. Veremos na próxima seção que através dele, pode-se determinar as deformações que não são intrínsecas a superfície, aquelas que não são determinadas apenas pela métrica da superfície S (Seção 2.2). Por exemplo, numa folha de papel, quando é dobrada, não ocorrem mudanças referentes às propriedades caracterizadas pela métrica: porém, as superfícies antes e depois de dobrada são distintas. Esta distinção entre as mesmas pode ser determinada pelo vetor diretor. O vetor diretor também nos permite modelar uma casca por meio da sua superfície do meio e descrever as propriedades volumétricas em relação a ela, como espessura, curvatura e cisalhamento das seções transversais da mesma.

4.2 Energia Armazenada na Superfície de Cosserat

Nesta seção, estabeleceremos as relações entre as medidas geométricas e as medidas de deformações da superfície, definiremos as forças atuantes na superfície e estabeleceremos as equações constitutivas para as componentes das forças internas atuantes nela.

4.2.1 Deformação de uma Superfície de Cosserat

Green et al mostraram que os três vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{d}$ de uma superfície de Cosserat nos dão medidas geométricas que permitem caracterizar as deformações de uma casca fina ao longo do tempo. As medidas cinemáticas são obtidas a partir destas medidas geométricas, comparando-as em relação a um estado inicial S^0 não deformado, da superfície de Cosserat. Os vetores de base e base recíprocos, o normal unitário, os tensores métricos e métricos recíprocos, o tensor curvatura e o vetor diretor da superfície inicial S^0 serão designados por $\mathbf{A}_\alpha$, $\mathbf{A}^\alpha$, $\mathbf{A}_3$, $A_{\alpha\beta}$, $A^{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ e $\mathbf{D}$, respectivamente.

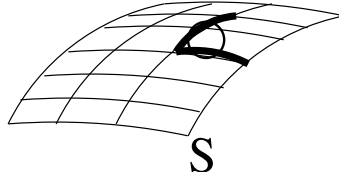


Figura 4.4: Estimativas de comprimento e ângulo.

A partir dos vetores de base $\mathbf{a}_\alpha$ obtemos estimativas do comprimento de um pequeno arco sobre as curvas coordenadas e do ângulo entre as duas curvas coordenadas da superfície de Cosserat S (Figura 4.4), através das componentes do tensor métrico

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta. \quad (4.6)$$

As medidas físicas associadas a estas medidas geométricas são as variações das mesmas em relação ao estado inicial da superfície de Cosserat S , isto é,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}). \quad (4.7)$$

Dessa forma, as medidas $\varepsilon_{\alpha\beta}$ medem as mudanças de comprimentos (elongações ou compressões) e cisalhamentos sobre a superfície de Cosserat S .

As medidas físicas associadas a uma casca fina que não dizem respeito às medidas intrínsecas da superfície do meio desta casca fina são caracterizadas por medidas geométricas associadas ao vetor diretor $\mathbf{d}$. O vetor diretor $\mathbf{d}$, em termos de seus componentes, pode ser expresso na forma

$$\mathbf{d} = \sum_i d^i \mathbf{a}_i = \sum_i d_i \mathbf{a}^i, \quad (4.8)$$

onde, pela equação (2.45)₃, têm-se $d^3 = d_3$. Considere as medidas geométricas

$$d_i = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_i, \quad \lambda_{i\alpha} = \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_i, \quad (4.9)$$

que nos dá, respectivamente, uma estimativa da projeção do vetor diretor sobre o vetor $\mathbf{a}_i$ e de curvatura. Para que fique mais claro, considere o caso em que $\mathbf{d} = \mathbf{a}_3$. Neste caso,

$$\lambda_{\beta\alpha} = \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta = -b_{\alpha\beta}. \quad (4.10)$$

As medidas físicas associadas ao vetor diretor $\mathbf{d}$ são definidas a partir das medidas geométricas (Eq. 4.9) pelas expressões

$$\kappa_{i\alpha} = \lambda_{i\alpha} - \Lambda_{i\alpha} \quad e \quad \gamma_i = d_i - D_i, \quad (4.11)$$

onde $\Lambda_{i\alpha} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}$ e $D_i = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{D}$ são os valores de $\lambda_{i\alpha}$ e d_i no instante $t = 0$.

De um ponto de vista físico, pode-se pensar que o vetor diretor $\mathbf{d}$ é um vetor que descreve as deformações das fibras ou filamentos materiais orientados ao longo da espessura da casca fina. É permitida a esta fibra esticar, isto é, a magnitude da projeção de $\mathbf{d}$ sobre a direção normal pode mudar, e é permitida cisalhar em relação aos tangentes $\mathbf{a}_\alpha$ da superfície S , isto é, a magnitude das projeções do diretor nas direções tangentes pode mudar. Além do comportamento da fibra, as variações do vetor diretor $\mathbf{d}$ ao longo das direções tangentes, projetadas nas direções $\mathbf{a}_i$, nos informam como a superfície do meio e transversais da casca fina curvaram-se ao longo do tempo. Figura 4.5 ilustra diferentes classes de deformações modeláveis pelo vetor diretor.

Em [42], além de desenvolverem um modelo teórico considerando o caso geral para o vetor diretor, Green et al também apresentaram tal modelo restringindo o vetor diretor $\mathbf{d}$ ao vetor normal unitário a superfície S , em todo instante t , isto é,

$$\mathbf{d}(u^1, u^2, t) = \mathbf{a}_3(u^1, u^2, t). \quad (4.12)$$

Consideraremos no restante desta tese o caso particular dado pela equação (4.12).

Quais são as implicações ao assumirmos isso? Com esta configuração do vetor diretor teremos as seguintes medidas geométricas, em todo instante t , associadas a ele

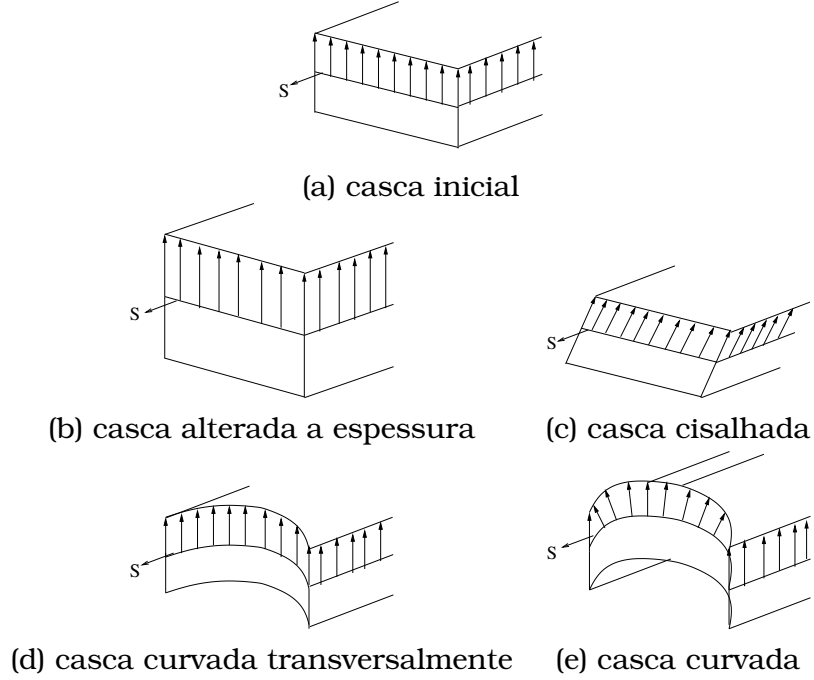


Figura 4.5: Medidas cinemáticas do vetor diretor.

$$d_1 = d_2 = 0, \quad d_3 = 1, \quad \lambda_{\beta\alpha} = -b_{\beta\alpha}, \quad \lambda_{3\alpha} = 0. \quad (4.13)$$

Dessa forma, as medidas físicas que medem as deformações ocorridas na casca fina representada pela superfície de Cosserat S reduzem-se a

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}), \quad \kappa_{\alpha\beta} = -(b_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}). \quad (4.14)$$

Esta restrição nos leva a concluir que numa casca fina que satisfaz esta restrição, durante todo instante t , ocorrem apenas as deformações da superfície do meio: elongações/compressões e cisalhamentos sobre ela e mudança da sua curvatura. Não ocorrem alterações da espessura, cisalhamentos transversais, nem mudança das curvaturas das seções transversais. Isso nos permite focalizar simplesmente na superfície do meio da casca e nas mudanças ocorridas nela. Desta forma, apenas as componentes dos tensores métrico e curvatura da superfície S , elementos da teoria de geometria diferencial, serão considerados no estudo das deformações, facilitando o projeto de uma interface mais intuitiva.

4.2.2 Definição das Forças Atuantes na Superfície de Cosserat

Sejam as velocidades $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{a}}_3$ dadas por

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{a}^i, \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 w^i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^3 w_i \mathbf{a}^i, \quad (4.15)$$

onde, por (2.45)₃, têm-se $v^3 = v_3$ e $w^3 = w_3$.

Seja $\omega \subset S$ uma região arbitrária, no tempo t , limitada por uma curva fechada c , com $\boldsymbol{\nu} = \sum_{\alpha=1}^2 \nu_{\alpha} \mathbf{a}^{\alpha}$ o vetor normal unitário exterior à curva c^3 , na superfície S (Figura 4.6).

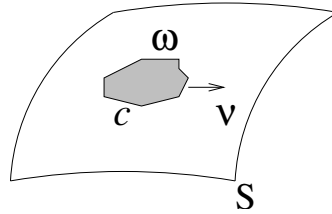


Figura 4.6: Área arbitrária.

Sejam os vetores $\mathbf{N}$ e $\mathbf{M}$ tais que $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{M} \cdot \mathbf{w}$ representam as taxas de trabalho por unidade de comprimento de c , associado ao deslocamento do ponto e do vetor diretor. Eles são ditos, respectivamente, vetores força de curva e força de curva diretora⁴, medidos por unidade de comprimento de c . As forças $\mathbf{N}$ e $\mathbf{M}$ atuam ao longo da curva fronteira c , da região ω , em oposição ao deslocamento dos pontos de c e ao deslocamento do vetor diretor, respectivamente, e dependem do vetor normal unitário exterior $\boldsymbol{\nu}$ da curva c . Elas correspondem às forças devido à ação, segundo a direção $\boldsymbol{\nu}$, da parte de S externa a região ω sobre a parte interna de ω (Figura 4.7).

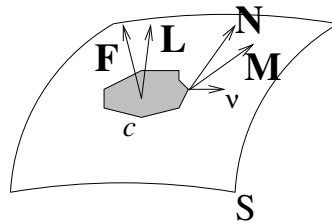


Figura 4.7: Atuação de $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{L}$.

³Vetor normal unitário exterior à curva no ponto P , na superfície, é o vetor unitário no plano tangente a superfície, em P , que é perpendicular ao vetor tangente à curva neste ponto.

⁴Ação também conhecida como forças de contato.

Sejam $\mathbf{F}$ e $\mathbf{L}$, respectivamente, vetores força e força diretora atribuídos por unidade de massa da superfície S , tais que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{L} \cdot \mathbf{w}$ representam a taxa de trabalho por unidade de área da superfície S . As forças $\mathbf{F}$ e $\mathbf{L}$ atuam na região ω (Figura 4.7).

Os vetores força de curva e força de curva diretora $\mathbf{N}$ e $\mathbf{M}$ dependem do vetor normal unitário exterior $\boldsymbol{\nu}$ à curva c (postulado de Cauchy) como seguem

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^2 \nu_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha} \quad (4.16)$$

e

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha=1}^2 \nu_{\alpha} \mathbf{M}^{\alpha}, \quad (4.17)$$

onde $\mathbf{N}^{\alpha}$ e $\mathbf{M}^{\alpha}$ são os vetores forças de curva e forças de curva diretora, contravariantes com respeito às transformações de coordenadas de superfície, que atuam sobre as curvas coordenadas u^{α} (Figura 4.8). Estas forças internas agem em contraposição às ações externas.

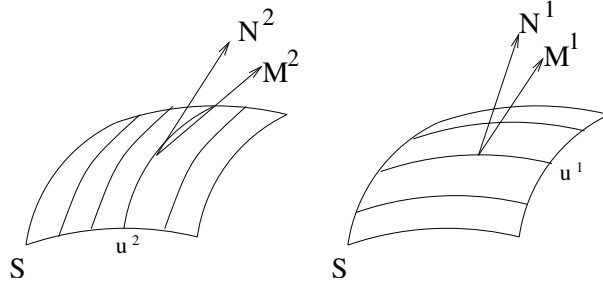


Figura 4.8: $\mathbf{N}^{\alpha}$ e $\mathbf{M}^{\alpha}$ ao longo das curvas coordenadas u^{α} .

Escrevendo

$$\mathbf{N}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 N^{\beta\alpha} \mathbf{a}_{\beta} + N^{3\alpha} \mathbf{a}_3, \quad (4.18)$$

e

$$\mathbf{M}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 M^{\beta\alpha} \mathbf{a}_{\beta} + M^{3\alpha} \mathbf{a}_3, \quad (4.19)$$

pode-se usar o fato de $\mathbf{N}^{\alpha}$, $\mathbf{M}^{\alpha}$ e $\mathbf{a}^{\beta}$ serem vetores contravariantes e $\mathbf{a}_3$ ser um vetor invariante para concluir que $N^{\beta\alpha} = \mathbf{N}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\beta}$ e $M^{\beta\alpha} = \mathbf{M}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\beta}$ são tensores de superfície contravariantes de ordem 2, enquanto $N^{3\alpha} = \mathbf{N}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}_3$ e $M^{3\alpha} = \mathbf{M}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}_3$ são tensores de superfície contravariantes de ordem 1, sob transformações de coordenadas de superfície.

4.2.3 Modelo de Energia Armazenada numa Superfície de Cosserat Elástica

Estabeleceremos, nesta subsecção, as *equações constitutivas* dos vetores forças de curva N^α , junto com as relações entre as medidas de deformações $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\kappa_{\alpha\beta}$ e a energia interna armazenada, que determinam o comportamento de uma superfície de Cosserat elástica.

Lembramos que estamos considerando $\mathbf{d} = \mathbf{a}_3$, em todo instante t , como também uma abordagem puramente mecânica, na qual é desprezada a parte térmica ou o que diz respeito ao estoque e fluxo de calor.

Em [42], as equações constitutivas que definem uma superfície de Cosserat como sendo elástica são dependentes das grandezas $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\kappa_{\alpha\beta}$ e das componentes iniciais $\Lambda_{\alpha\beta} = -B_{\alpha\beta}$ ⁵:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, -B_{\lambda\alpha}), \\ N'^{\beta\alpha} &= N'^{\beta\alpha}(\varepsilon_{\lambda\rho}, \kappa_{\lambda\rho}, -B_{\lambda\rho}), \\ M^{\beta\alpha} &= M^{\beta\alpha}(\varepsilon_{\lambda\rho}, \kappa_{\lambda\rho}, -B_{\lambda\rho}),\end{aligned}\tag{4.20}$$

onde a partir de $N'^{\beta\alpha}$ e $M^{\beta\alpha}$ obtemos $N^{\beta\alpha}$ pela expressão

$$N^{\beta\alpha} = N'^{\beta\alpha} - \sum_{\gamma=1}^2 b_\gamma^\beta M^{\alpha\gamma},\tag{4.21}$$

com $N'^{\beta\alpha}$ chamada de parte simétrica da componente $N^{\beta\alpha}$. No apêndice E mostramos como obtemos a equação (4.21).

Por outro lado, numa superfície de Cosserat elástica, as componentes $N'^{\beta\alpha}$ e $M^{\beta\alpha}$ estão relacionadas à energia interna armazenada $\mathcal{A}$ pelas expressões

$$N'^{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \varepsilon_{\beta\alpha}} \right), \quad M^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \kappa_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \kappa_{\beta\alpha}} \right),\tag{4.22}$$

onde μ é a densidade de massa por unidade de área da superfície S , no instante t . Dessa forma, é possível determinar $N'^{\beta\alpha}$ e $M^{\beta\alpha}$, em cada instante t , de posse da energia interna armazenada neste intervalo de tempo. Na Seção 4.4 apresentamos explicitamente a

⁵Embora em [42] os autores mencionem a dependência de $\Lambda_{\alpha\beta} = -B_{\alpha\beta}$, em nenhum momento estes termos aparecem explicitamente nas equações constitutivas da teoria não-linear.

energia interna armazenada $\mathcal{A}$, proposta por Green et al. para o caso da teoria linear de superfície de Cosserat elástica. No apêndice D damos uma idéia da obtenção das relações (4.22).

As componentes $N'^{\beta\alpha}$ e $M^{\beta\alpha}$ são determinantes no cálculo das componentes do vetor força de curva N^α , isto é, as componentes $N^{i\alpha}$ são calculadas diretamente delas pelas equações (4.21) e

$$N^{3\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 M^{\alpha\beta}|_{\beta} + \mu \bar{L}^\alpha, \quad (4.23)$$

onde $\bar{L}^\alpha = \bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{a}^\alpha$ é a componente tangencial do vetor $\bar{\mathbf{L}}$ referente a $\mathbf{a}_\alpha$, com $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L} - \rho \dot{\mathbf{u}}$ (a diferença entre a força diretora $\mathbf{L}$ e a força inercial devido ao deslocamento do vetor diretor $\mathbf{d} = \mathbf{a}_3$), e $M^{\alpha\beta}|_{\beta}$ corresponde à derivada covariante de um tensor superfície contravariante de ordem 2 com respeito à coordenada u^β . No apêndice E mostramos como obtemos a equação (4.23).

Dessa forma, com as equações apresentadas nesta subseção, podemos então determinar o vetor força de curva N^α , necessário para o cálculo da força elástica de resposta da superfície às ações externas.

4.3 Modelo Cinemático de Superfície de Cosserat

Delinearemos nesta seção a lei de conservação de massa local, os princípios de equilíbrio e as equações locais de equilíbrio. Aqui são traçadas as leis de conservação globais e locais fundamentais na teoria de superfície de Cosserat bidimensional (abordagem direta).

4.3.1 Densidade de Massa

A massa de uma região arbitrária ω da superfície de Cosserat S , em cada instante de tempo t , pode ser definida pela medida escalar não-negativa

$$m = \int_{\omega} \mu d\sigma = \int_{\omega_0} \mu_0 d\Sigma, \quad (4.24)$$

onde μ e μ_0 são as densidades de massa por unidade de área da superfície S e S^0 (estado deformado e inicial), respectivamente, com os elementos de área $d\Sigma$ e $d\sigma$ do estado inicial

e deformado, respectivamente, dados pelas fórmulas

$$d\Sigma = \sqrt{A} du^1 du^2 \quad e \quad d\sigma = \sqrt{a} du^1 du^2, \quad (4.25)$$

com A e a dados pela equação (2.34)₃ no tempo inicial e corrente, respectivamente. Observe que a equação (4.24) decorre do princípio de conservação de massa. Este princípio pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mu d\sigma = 0. \quad (4.26)$$

Considere $J = \sqrt{a/A}$. Os elementos de área nos estados inicial e corrente estão relacionados pela expressão

$$d\sigma = J d\Sigma \quad (4.27)$$

devido às coordenadas de superfície u^α serem convecionadas.

Se μ_0 e μ são, respectivamente, as densidades de massa por unidade de área no estado inicial e estado corrente, então, pela equação (4.27) e pelo princípio de conservação de massa (Eq. 4.24), teremos a lei de conservação de densidade de massa μ em cada instante t

$$\mu_0 = J\mu. \quad (4.28)$$

4.3.2 Princípios de Equilíbrio

Nesta subseção, apresentaremos os princípios de equilíbrio para a superfície de Cosserat, a partir dos quais são obtidas as equações de equilíbrio locais que governam o movimento da mesma.

Os princípios de equilíbrio (ou leis de conservação) estabelece a relação entre as forças atribuída e interna correspondentes, como também a relação de equilíbrio de momentos, que juntos proporcionam o equilíbrio do movimento da superfície de Cosserat. Em [64], Naghdi postula os princípios de equilíbrio como segue:

1. quantidade de movimento linear - a taxa de variação da quantidade de movimento linear é igual a soma entre força atribuída resultante e força de curva resultante;

2. quantidade de movimento diretor - a taxa de variação da quantidade de movimento diretor é igual a soma entre a força diretora resultante e força de curva diretora resultante;
3. momento de quantidade de movimento - a taxa de variação do momento de quantidade de movimento é igual a soma das resultantes do suprimento de momento de quantidade de movimento devido a $\mathbf{F}$, $\mathbf{L}$ e o fluxo de momento de quantidade de movimento devido a $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$.

O modelo matemático para os princípios de equilíbrio acima é dado como segue. Seja μ a densidade de massa, por unidade de área da superfície S , no tempo t . É assumido que todas as forças e forças diretora estão continuamente distribuídas. A força $\mathbf{F}$ e força diretora $\mathbf{L}$, por unidade de massa, atuam através de uma área arbitrária ω de S ; e a força de curva $\mathbf{N}$ e a força de curva diretora $\mathbf{M}$, por unidade de comprimento, atuam através da fronteira $\partial\omega = c$ da área ω . De acordo com os princípios de equilíbrio temos, para uma área arbitrária ω da superfície de Cosserat, as leis de conservação de quantidade de movimento linear

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mu \mathbf{v} d\omega = \int_{\omega} \mu \mathbf{F} + \int_c \mathbf{N} dc; \quad (4.29)$$

de quantidade de movimento diretor,

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \mu \mathbf{w} d\omega = \int_{\omega} (\mu \mathbf{L} - \mathbf{m}) d\omega + \int_c \mathbf{M} dc; \quad (4.30)$$

e de momento de quantidade de movimento,

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mu (\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{a}_3 \times \rho \mathbf{w}) d\omega = \int_{\omega} (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{F} + \mathbf{a}_3 \times \mu \mathbf{L}) d\omega + \int_c (\mathbf{r} \times \mathbf{N} + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{M}) dc. \quad (4.31)$$

onde ρ é o coeficiente inercial associado ao vetor diretor, $\mathbf{m}$ é o vetor diretor conjugado de superfície, por unidade de área da superfície S , que não contribui para o movimento e não depende do vetor normal unitário exterior ν , da curva fronteira c . Considerando $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^3 m^i \mathbf{a}_i$ e $\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 d_i \mathbf{a}^i$, as componentes m^i do vetor $\mathbf{m}$ estão relacionadas as componentes d_i do vetor diretor $\mathbf{d}$ pela expressão

$$m^i = \mu \frac{\partial A}{\partial \delta_i},$$

onde $\delta_i = d_i - D_i$, com D_i a componente do vetor diretor no estado inicial. Este vetor corresponde a força relacionada a variação das componentes do vetor diretor em relação

a base recíproca $\mathbf{a}^i$. De acordo com Green et al. [42], no caso de $\mathbf{d} = \mathbf{a}_3$, não existe equação constitutiva para a componente m^i , via energia armazenada, permanecendo assim indeterminada. Porém, a relação obtida para ele pela equação (4.34) auxilia na dedução da equação (4.23) da componente $N^{3\alpha}$ do vetor força de curva N^α (Vê apêndice E).

4.3.3 Equações Locais de Equilíbrio

Nesta subseção, apresentaremos as equações locais de equilíbrio que determinam os pontos da superfície S e o vetor diretor $\mathbf{d} = \mathbf{a}_3$, em cada instante t . Pela restrição feita para o vetor diretor, não é mais necessária uma equação para a determinação do mesmo, pois ele pode ser determinado a partir do vetor posição $\mathbf{r}$ dos pontos da superfície S , utilizando a definição do vetor normal unitário a S . Porém, a equação que governa o movimento do vetor diretor é utilizada não só para determinar $\mathbf{d}$, como também é utilizada na dedução da equação constitutiva da componente normal da força interna de resposta da superfície S . Também mostraremos a equação local de equilíbrio de momento de quantidade de movimento, útil para a determinação das componentes da força interna.

Os princípios de equilíbrio nos levam às equações locais que governam o movimento da superfície de Cosserat (*superfície e vetor diretor*). Nós nos limitaremos a apresentar os principais resultados. No apêndice B, damos uma idéia das deduções das equações locais de equilíbrio a partir dos princípios de equilíbrio ou leis de conservação. Deixamos ao leitor a opção de escolha de tal leitura. Recomendamos as referências [26, 42, 64] para os leitores interessados neste processo de deduções de uma forma refinada.

A equação local de equilíbrio de quantidade de movimento linear, obtida a partir da lei de conservação (4.29), estabelece o equilíbrio de forças no deslocamento de um ponto da superfície S

$$\mu \mathbf{F} + \sum_{\alpha=1}^2 N^\alpha|_\alpha = \mu \dot{\mathbf{v}}, \quad (4.32)$$

e a equação local de equilíbrio de quantidade de movimento diretor, obtida a partir da lei de conservação (4.30), estabelece o equilíbrio de forças no deslocamento do vetor diretor $\mathbf{d}$, num dado ponto da superfície S ,

$$\sum_{\alpha=1}^2 M^\alpha|_\alpha + \mu \mathbf{L} - \mathbf{m} = \mu \rho \dot{\mathbf{w}}, \quad (4.33)$$

ou

$$\sum_{\alpha=1}^2 M^\alpha|_\alpha + \mu \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{m}. \quad (4.34)$$

Nas equações (4.32) e (4.33 ou 4.34) a barra vertical $|_\alpha$ representa a derivada covariante de um vetor contravariante, com respeito a coordenada de superfície u^α , isto é,

$$N^\alpha|_\alpha = N^\alpha_{,\alpha} + \sum_{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha N^\beta \quad e \quad M^\alpha|_\alpha = M^\alpha_{,\alpha} + \sum_{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha M^\beta. \quad (4.35)$$

O termo $\sum_{\alpha=1}^2 N^\alpha|_\alpha$ corresponde à força interna de reação da superfície às ações externas. Quando a superfície tem um comportamento elástico, esta será denominada força elástica de resposta da superfície às ações externas.

A equação local do momento de quantidade de movimento, obtida a partir da lei de conservação (4.31), estabelece o equilíbrio dos momentos associados às forças internas, num dado ponto da superfície S ,

$$\sum_{\alpha=1}^2 (\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{a}_{3,\alpha} \times \mathbf{M}^\alpha) + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{m} = 0. \quad (4.36)$$

Como pode ser constatado em [42, 64, 75], as equações locais de equilíbrio (4.34) e (4.36) são de fundamental importância para o cálculo das componentes do vetor força de curva N^α , isto é, delas são obtidas as relações utilizadas na determinação das expressões para as componentes de N^α .

4.4 Modelo Linear de Superfície de Cosserat Elástica

Quando os deslocamentos são infinitesimais, a teoria linear de superfície de Cosserat elástica é considerada como um caso especial da teoria geral, apresentada até este momento. Usa-se um processo conhecido como linearização, para obtenção do modelo linear de superfície de Cosserat elástica, considerando que os deslocamentos são da ordem de um ϵ pequeno.

Considerando a linearização⁶

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \epsilon \mathbf{x}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{D} + \epsilon \delta, \quad (4.37)$$

⁶Veja [42, 64] para maiores detalhes da linearização.

onde $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{D}$ são os vetores posição e diretor no estado inicial, com ϵ um número real, e escrevendo

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{A}^i, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{A}_i \quad e \quad \boldsymbol{\delta} = \sum_{i=1}^3 \delta_i \mathbf{A}^i, \quad (4.38)$$

as medidas de deformações (Eq. 4.14) tornam-se

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(x_\alpha|_\beta + x_\beta|_\alpha) - B_{\alpha\beta}x_3 \quad e \quad \kappa_{\alpha\beta} = (\delta_\alpha|_\beta - B_{\beta\alpha}\delta_3) - \sum_{\lambda=1}^2 B_{\beta\lambda}(x^\lambda|_\alpha - B_\alpha^\lambda x_3), \quad (4.39)$$

onde foram desprezados os termos da ordem $O(\epsilon^2)$ e fixamos $\epsilon = 1$, como sugerido por Green et al. [42]. A derivada covariante em (4.39) é com respeito a métrica $A_{\alpha\beta}$ da superfície inicial, diferentemente da teoria não linear que considera a derivada covariante com respeito a métrica $a_{\alpha\beta}$ da superfície corrente.

Green et al. [42], restringiram ao caso especial quando a energia interna armazenada $\mathcal{A}$, em cada instante t , para a superfície de Cosserat elástica S , não depende explicitamente de $-B_{\lambda\rho}$, sendo uma função explícita apenas das grandezas $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\kappa_{\alpha\beta}$

$$\mu_0 \mathcal{A} = \sum_{\alpha,\beta,\rho,\lambda=1}^2 \left(A^{\alpha\beta\rho\lambda} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\rho\lambda} + B^{\alpha\beta\rho\lambda} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\rho\lambda} + C^{\alpha\beta\rho\lambda} \varepsilon_{\alpha\beta} \kappa_{\rho\lambda} \right), \quad (4.40)$$

onde μ_0 é a densidade de massa por unidade de área da superfície inicial S^0 , com os parâmetros de elasticidades (constantes) satisfazendo as relações de simetria

$$A^{\alpha\beta\rho\lambda} = A^{\beta\alpha\rho\lambda} = A^{\alpha\beta\lambda\rho} = A^{\rho\lambda\alpha\beta} \quad (4.41)$$

$$B^{\alpha\beta\rho\lambda} = B^{\beta\alpha\rho\lambda} = B^{\alpha\beta\lambda\rho} = B^{\rho\lambda\alpha\beta}$$

$$C^{\alpha\beta\rho\lambda} = C^{\beta\alpha\rho\lambda} = C^{\alpha\beta\lambda\rho} = C^{\rho\lambda\alpha\beta}.$$

Na obtenção de (4.40) eles consideraram a superfície inicial como sendo homogênea (distribuição uniforme de massa) e livre de força de curva e força de curva diretora.

Quando a superfície de Cosserat elástica é isotrópica⁷, com um centro de simetria, os parâmetros de elasticidade (4.41) dependem das componentes do tensor-métrico recíproco da superfície inicial e de coeficientes de elasticidade, como segue

⁷Um material isotrópico é aquele que apresenta a mesma propriedade de rigidez em todas as direções.

$$\begin{aligned}
A^{\alpha\beta\rho\lambda} &= \alpha_1 A^{\alpha\beta} A^{\rho\lambda} + \alpha_2 (A^{\alpha\rho} A^{\beta\lambda} + A^{\alpha\lambda} A^{\beta\rho}), \\
B^{\alpha\beta\rho\lambda} &= \alpha_3 A^{\alpha\beta} A^{\rho\lambda} + \alpha_4 (A^{\alpha\rho} A^{\beta\lambda} + A^{\alpha\lambda} A^{\beta\rho}), \\
C^{\alpha\beta\rho\lambda} &= \alpha_5 A^{\alpha\beta} A^{\rho\lambda} + \alpha_7 (A^{\alpha\rho} A^{\beta\lambda} + A^{\alpha\lambda} A^{\beta\rho}),
\end{aligned} \tag{4.42}$$

onde os coeficientes α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 e α_6 são considerados como constantes [42].

Desta seção, utilizaremos as equações (4.40), (4.41) e (4.42), no modelo deformável apresentado nesta tese, que determinam a energia interna da superfície deformada, as relações de simetria e constituição das constantes de elasticidade desta energia, respectivamente.

Capítulo 5

Um Modelo Contínuo de Superfícies Deformáveis

Nosso objetivo é propor um modelo de superfície deformável que tenha uma interface simples e apresente resultados realísticos para distintos comportamentos de curvatura em superfícies deformáveis (comparadamente ou de um ponto de vista empírico).

Conforme já apresentado no Capítulo 4, no estudo de deformações de cascas finas, existe uma abordagem denominada de superfície de Cosserat, em homenagem aos irmãos Cosserat (1909), que tenta modelar o comportamento de deformação de uma casca fina através de uma superfície com vetores diretores em cada ponto da mesma. Vimos no Capítulo 3 que os modelos propostos por Chen et al. [15], Eischen et al. [35] e Au et al. [3] são baseados em mecânica dos contínuos, voltados para tecido de pano, com semântica geométrica. O primeiro utiliza uma abordagem de sólido degenerado, considerando que o vetor normal à superfície do meio da casca não-deformada permanece normal à superfície do meio da casca deformada e, durante a deformação, os esforços (*stresses*) são aproximadamente planos e paralelos ao plano tangente à superfície do meio da casca; o segundo utiliza a abordagem de superfície de Cosserat 3-dimensional, considerando porém que a espessura seja suficientemente fina, para obter uma forma fraca ou formulação variacional para a equação de equilíbrio e faz restrições para as variáveis de estados ao longo da espessura da casca para eliminação do terceiro parâmetro via integração nesta direção; e o terceiro é um modelo de resposta material simplificado, como o modelo de Terzopoulos et al. [87], que tenta incorporar propriedades do material.

O embasamento na teoria de superfície Cosserat, por abordagem direta, descrito no Capítulo 4, que utiliza os tensores métrico e curvatura como elementos de medição de deformação, nos dará um controle mais intuitivo, devido ao seu apelo geométrico, além

de nos oferecer uma melhor sustentação físico-matemática. Almejamos alcançar com o nosso modelo um bom controle de efeitos visuais de caimento e dobras em tecidos, cujo comportamento é bastante diferenciado da maioria dos objetos processados em sistemas CAD/CAM.

Neste capítulo apresentamos um modelo alternativo, baseado no modelo de energia de superfície de Cosserat elástica bidimensional, descrito no Capítulo 4, para descrever as dobras, o caimento e enrugamentos de superfícies deformáveis. Simplificações foram necessárias para tornar a sua implementação factível. Apresentamos ainda uma abordagem para o vetor normal, a partir das fórmulas de Gauss (Eq. 2.54), que relacionam as segundas derivadas $a_{\alpha,\beta}$ com as primeiras derivadas a_α e o vetor normal a_3 , de forma a ter um melhor controle da curvatura (mudança da curvatura) das superfícies, sem inviabilizar a implementação computacional da solução.

5.1 Restrições

Nesta seção, faremos algumas restrições na superfície de Cosserat para obtermos a nossa proposta computacional de superfície deformável. As nossas premissas são:

1. Superfície Elástica

Inicialmente, restringimos o comportamento da superfície deformável S como sendo elástico, isto é, consideramos a superfície deformável S como uma superfície de Cosserat elástica. Isto possibilita a determinação dos elementos necessários para a completitude da dinâmica do modelo computacional, de acordo com o que foi apresentado no Capítulo 4.

2. Vetor Diretor

Foi visto no Capítulo 4, que os vetores de base a_α nos dão medidas de deformações capazes de determinarem mudanças de comprimentos e ângulos sobre a superfície de Cosserat S . Já o vetor diretor d é capaz de determinar mudanças de propriedades da casca não-intrínsecas¹ da superfície S , por exemplo: como a superfície se curva e as propriedades da casca que não se referem à superfície (espessura, cisalhamentos e curvaturas das seções transversais). As medidas da casca modeladas pelo vetor diretor são incorporadas na modelagem da deformação da superfície S que a representa (superfície do meio da casca ou situada no meio

¹Propriedades intrínsecas a superfície S são aquelas que dependem apenas da métrica da superfície.

da casca), pois elas contribuem para o cálculo das componentes do vetor força de curva N^α . Dessa forma, as deformações da casca que não são modeladas pelos tensores métrico e curvatura da superfície S , contribuem para as deformações da mesma. Quando restringimos o comportamento do vetor diretor

$$\mathbf{d}(u^1, u^2, 0) = \mathbf{D}(u^1, u^2) = \mathbf{A}_3(u^1, u^2), \quad \mathbf{d}(u^1, u^2, t) = \mathbf{a}_3(u^1, u^2, t), \quad (5.1)$$

em todo instante t , desde o estado inicial, a única medida de deformação, modelada pelo vetor diretor, que pode ser não-nula é a que determina o quanto a superfície S curvou-se. Neste caso, as outras medidas da casca fina, como cisalhamentos e curvaturas transversais e elongações e compressões da espessura, não contribuem para a sua mudança, pelo fato de serem nulas. Isto é, as forças de cisalhamentos e curvaturas transversais e as forças de elongações e compressões da espessura da casca são nulas (Figura 5.1). Com isso, o comportamento da superfície de Cosserat S é modelado apenas pelos tensores métrico e curvatura.

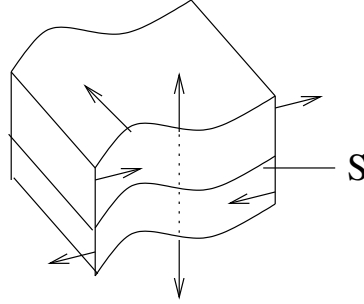


Figura 5.1: Forças de deformações das seções transversais e da espessura.

Assim, restringiremos o nosso modelo de superfície deformável ao modelo de superfície de Cosserat elástica com a propriedade do vetor diretor ser o vetor normal unitário à superfície S , durante todo instante t , desde o estado inicial. Observe que a proposta do vetor diretor ser unitário nos dá um vetor diretor inextensível como no modelo de Simo et al. [78, 79, 80], isto é, o comprimento do vetor diretor é constante.

Esta restrição do vetor diretor facilita também na sua atualização, em cada instante t , já que pode ser feita através dos pontos da superfície S , pela definição (Eq. 2.46), sem ter que fazer uso da equação local de quantidade de movimento diretor (4.33).

Com a restrição para o vetor diretor, proposta nesta tese, as medidas de deformações que medem as elongações ou compressões e os cisalhamentos das curvas

coordenadas (Eq. 4.14)₁, como também as medidas de deformações que medem quanto a superfície se curva ou torce (Eq. 4.14)₂, são calculadas no nosso modelo de superfície deformável pelas expressões

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}), \quad \kappa_{\alpha\beta} = -(b_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}). \quad (5.2)$$

3. Espessura da Casca

Veremos algumas simplificações que poderemos fazer no modelo de superfícies deformáveis considerando a casca com espessura suficientemente pequena ou, com um pequeno abuso, considerando a espessura nula. Mostraremos, sob algumas suposições, que a força diretora $\mathbf{L}$ e o coeficiente inercial diretor ρ são dependente diretamente da espessura da casca h e do quadrado da espessura h^2 , respectivamente. Dessa forma, quando $h \approx 0$ poderemos considerar $\bar{\mathbf{L}} \approx 0$. O leitor poderá perceber, no que segue, que a força $\bar{\mathbf{L}}$ varia de acordo com a carga externa e com a aceleração do vetor diretor ao longo do tempo (vetor normal unitário), porém, a espessura da casca é determinante para a sua intensidade ou magnitude.

De acordo com Naghdi e Rubin [64, 75], identificações podem ser feitas para a força atribuída e a força diretora atribuída, $\mathbf{F}(u^1, u^2, t)$ e $\mathbf{L}(u^1, u^2, t)$, respectivamente, da superfície de Cosserat (abordagem bidimensional), com as cargas resultantes na abordagem tridimensional. Assim, podemos calculá-las da seguinte forma:

Sejam $\mathbf{f} = \mathbf{f}(u^1, u^2, u^3, t)$ a força de corpo² atuando nos pontos da casca $\mathcal{B}$, em cada instante t , e $\mathbf{q} = \mathbf{q}(u^1, u^2, \pm \frac{h}{2}, t)$ a tração ou carga de superfície³ prescrita sobre as duas superfícies da fronteira da casca $\partial\mathcal{B}$ de maiores áreas, onde h é espessura da casca considerada como sendo constante. Por simplicidade, consideraremos a força de corpo $\mathbf{f}$ e a densidade de massa μ^* , da casca $\mathcal{B}$, por unidade de volume, como sendo constantes em relação à coordenada u^3 , isto é, independentes de u^3 . Dessa forma, estimamos as forças $\mathbf{F}$ e $\mathbf{L}$ pelas expressões

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{F} &= \mu^* \left(h - \frac{h^3}{12} \right) K \mathbf{f} + \sqrt{\frac{g}{a}} \mathbf{q} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e \\ \mu \mathbf{L} &= \mu^* \frac{h^3}{6} H \mathbf{f} + u^3 \sqrt{\frac{g}{a}} \mathbf{q} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

²Força por unidade de massa do corpo $\mathcal{B}$, chamada também de força de corpo externa.

³Força de contato ou carga externa sobre as superfícies da fronteira da casca.

onde K e H são as curvaturas gaussiana e média da superfície S (superfície do meio da casca $\mathcal{B}$), respectivamente, g e a são os determinantes das matrizes cujos elementos são as componentes dos tensores métricos da casca $\mathcal{B}$ e da superfície S , respectivamente, dados pelas equações (2.43) e (2.34)₃, respectivamente, e μ^* é dada por

$$\mu\sqrt{a} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu^* \sqrt{g} du^3, \quad (5.4)$$

com μ correspondendo a densidade de massa da superfície S , do meio da casca $\mathcal{B}$, por unidade de área. Em (5.3), a segunda parcela do lado direito de cada equação corresponde a

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{g}{a}} \mathbf{q} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} &= \sqrt{\frac{g}{a}} \left[\mathbf{q}(u^1, u^2, \frac{h}{2}, t) - \mathbf{q}(u^1, u^2, -\frac{h}{2}, t) \right] \quad e \\ u^3 \sqrt{\frac{g}{a}} \mathbf{q} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} &= h \sqrt{\frac{g}{a}} \left[\mathbf{q}(u^1, u^2, \frac{h}{2}, t) + \mathbf{q}(u^1, u^2, -\frac{h}{2}, t) \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considerando a casca fina $\mathcal{B}$ de espessura h suficientemente pequena, pela equação (5.5)₁, poderemos considerar, com um pequeno abuso, que $\sqrt{\frac{g}{a}} \mathbf{q} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \bar{\mathbf{q}}$ é a força de contato externa na superfície de Cosserat S . Além disso, pela equação (5.5)₂, poderemos concluir que $u^3 \sqrt{\frac{g}{a}} \mathbf{q} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$ é suficientemente pequena ou, com um pequeno abuso, é nula. Dessa forma, de acordo com a equação (5.3), a força atribuída $\mathbf{F}$ depende apenas da força de contato externa $\bar{\mathbf{q}}$

$$\mu \mathbf{F} = \sqrt{\frac{g}{a}} \mathbf{q} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \bar{\mathbf{q}} \quad (5.6)$$

e a força diretora atribuída $\mathbf{L}$ pode ser considerada suficientemente pequena ou nula

$$\mathbf{L} \approx 0, \quad (5.7)$$

De agora em diante, consideraremos $\mathbf{F}$ a força de contato externa $\bar{\mathbf{q}}$, que atua na superfície S , e $\mathbf{L}$ nula sobre S .

O coeficiente inercial ρ associado ao vetor diretor é estimado por Naghdi [64] da seguinte forma: identificando o vetor $\bar{\mathbf{L}}$ nas abordagens da teoria de superfície de Cosserat 2-dimensional e 3-dimensional, considerando a casca $\mathcal{B}$ coberta por um sistema de coordenadas normal dado pela equação (2.33) e considerando o vetor

diretor, no instante inicial, igual ao vetor normal unitário a superfície S^0 , então, segundo Naghdi, o coeficiente inercial diretor é calculado pela igualdade

$$\rho = \frac{h^2}{12}. \quad (5.8)$$

Dessa forma, ρ é diretamente proporcional ao quadrado da espessura da casca.

De acordo com a nossa restrição para a espessura da casca $\mathcal{B}$ ($h \approx 0$) e pela equação (5.8), podemos considerar

$$\rho \approx 0. \quad (5.9)$$

Assim, podemos concluir que a força $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L} - \rho \dot{\mathbf{w}}$ é nula ou suficientemente pequena, isto é,

$$\bar{\mathbf{L}} \approx 0. \quad (5.10)$$

Com isso, concluímos as restrições no modelo de superfície de Cosserat, que consideramos de grande importância para a nossa proposta de modelo de superfície deformável, fixando assim o comportamento material da superfície, o comportamento do vetor diretor e as forças atribuídas que atuam na mesma quando a casca tem espessura suficientemente pequena. Com as restrições, todos os elementos envolvidos no modelo estão relacionados apenas à superfície S .

5.2 Coeficientes de Elasticidade e Energia Interna

A energia interna $\mathcal{A}$ armazenada é responsável pela resposta, em termos de forças internas elásticas $\mathbf{N}^\alpha$ e $\mathbf{M}^\alpha$, da superfície S à ação das forças externas (Eq. 4.22).

Uma formulação explícita para a energia interna $\mathcal{A}$, em função das medidas de deformações, é obtida na teoria linear de superfície de Cosserat, Seção 4.4, cuja forma é dada pela expressão (4.40)

$$\mu_0 \mathcal{A} = \sum_{\alpha, \beta, \rho, \lambda=1}^2 \left(A^{\alpha\beta\rho\lambda} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\rho\lambda} + B^{\alpha\beta\rho\lambda} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\rho\lambda} + C^{\alpha\beta\rho\lambda} \varepsilon_{\alpha\beta} \kappa_{\rho\lambda} \right).$$

Independentemente do comportamento ser linear ou não usaremos a expressão da energia interna (4.40) para propormos a energia do nosso modelo de superfícies deformáveis.

De acordo com os nossos experimentos, na grande maioria dos casos, os efeitos associados aos termos cujos índices não satisfazem às condições ($\rho = \alpha$ e $\lambda = \beta$) ou ($\rho = \beta$ e $\lambda = \alpha$) são visualmente imperceptíveis [os termos cujos índices satisfazem às condições ($\rho = \alpha$ e $\lambda = \beta$) ou ($\rho = \beta$ e $\lambda = \alpha$) têm efeitos visuais dominantes] e, aliado a isso, como o nosso objetivo é obter uma interface simples, evitando um número excessivo de parâmetros, propomos o uso da seguinte expressão para determinar a energia interna armazenada

$$\mu_0 \mathcal{A} = \sum_{\alpha, \beta} [\Phi^{\alpha\beta} (\varepsilon_{\alpha\beta})^2 + \Psi^{\alpha\beta} (\kappa_{\alpha\beta})^2 + \Theta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}], \quad (5.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta\alpha\beta} = A^{\beta\alpha\beta\alpha} = \Phi^{\beta\alpha}, \\ \Psi^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta\alpha\beta} = B^{\beta\alpha\beta\alpha} = \Psi^{\beta\alpha}, \\ \Theta^{\alpha\beta} &= C^{\alpha\beta\alpha\beta} = C^{\beta\alpha\beta\alpha} = \Theta^{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

cujas simetrias para os coeficientes de elasticidade decorrem da equação (4.41).

O uso do terceiro termo na energia (Eq. 5.11) pode ser justificado observando a curvatura média (Eq. 2.62), que, diferentemente da curvatura gaussiana, não é intrínseca à superfície S e depende dos produtos mistos das componentes dos tensores métrico e curvatura. Assim, fica nítida a interdependência destas duas grandezas no comportamento da superfície de curvar-se (dobrar ou enrugar). Quando as deformações tangenciais ocorrem até o limite permitido pela rigidez do material, existirá uma tendência de preservação da área gerando assim forças na direção normal de acordo com a deformação tangencial ocorrida. As dobras e rugas serão formadas de acordo com a rigidez de curvatura do material, isto é, menos rigidez de curvatura mais dobras e rugas, e vice-versa, o que condiz com o comportamento dos tecidos.

Observe que para compor a energia interna armazenada $\mathcal{A}$, necessitamos determinar como atribuímos os valores para os coeficientes de elasticidade que aparecem na equação (5.11). No caso das superfícies serem isotrópicas, com um centro de simetria, teremos de acordo com as equações (4.42) e (5.12)

$$\begin{aligned}
\Phi^{\alpha\beta} &= \alpha_1 A^{\alpha\alpha} A^{\beta\beta} + 2\alpha_2 (A^{\alpha\beta})^2, \\
\Psi^{\alpha\beta} &= \alpha_3 A^{\alpha\alpha} A^{\beta\beta} + 2\alpha_4 (A^{\alpha\beta})^2 \quad e \\
\Theta^{\alpha\beta} &= \alpha_5 A^{\alpha\alpha} A^{\beta\beta} + 2\alpha_6 (A^{\alpha\beta})^2,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

onde α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 e α_6 são constantes. Observe que Φ^{11} e Φ^{22} têm as mesmas constantes de rigidez ($\alpha_1 + 2\alpha_2$), isto é,

$$\Phi^{11} = (\alpha_1 + 2\alpha_2)(A^{11})^2 \quad e \quad \Phi^{22} = (\alpha_1 + 2\alpha_2)(A^{22})^2, \tag{5.14}$$

dando às curvas coordenadas o mesmo comportamento de rigidez de elongação ou compressão. De forma análoga conclui-se o mesmo para Ψ^{11} e Ψ^{22} e Θ^{11} e Θ^{22} , e assim teremos o mesmo comportamento de rigidez para as duas curvas coordenadas. Isto caracteriza a isotropia do material que compõe a superfície. Utilizando (5.13), proporemos coeficientes que nos possibilitarão simular comportamentos de rigidez não só de materiais isotrópicos como também de materiais anisotrópicos⁴. Novamente, um comportamento esperado para os tecidos.

Considerando em (5.13) $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$ e $\alpha_5 = \alpha_6$ e que sejam dependentes dos índices $\alpha\beta$, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = \zeta_{\alpha\beta}$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \xi_{\alpha\beta}$ e $\alpha_5 = \alpha_6 = \phi_{\alpha\beta}$, encontramos as expressões

$$\begin{aligned}
\Phi^{\alpha\beta} &= \zeta_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta})^2 + A^{\alpha\alpha} A^{\beta\beta} \right), \\
\Psi^{\alpha\beta} &= \xi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta})^2 + A^{\alpha\alpha} A^{\beta\beta} \right) \quad e \\
\Theta^{\alpha\beta} &= \phi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta})^2 + A^{\alpha\alpha} A^{\beta\beta} \right),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde $\zeta_{\alpha\beta}$, $\xi_{\alpha\beta}$ e $\phi_{\alpha\beta}$ são denominadas as constantes de elasticidade, possibilitando-nos controles de comportamentos isotrópicos bem como anisotrópicos⁵. Os coeficientes $\Phi^{\alpha\beta}$, $\Psi^{\alpha\beta}$ e $\Theta^{\alpha\beta}$ representam coeficientes de elasticidade em termos do tensor métrico recíproco

⁴Material anisotrópico é aquele que tem propriedade de rigidez diferente em cada direção.

⁵Controles de comportamentos isotrópicos bem como anisotrópicos ou, simplesmente, controles isotrópicos e anisotrópicos, significa que podemos simular comportamentos de rigidez tanto de materiais isotrópicos como de materiais anisotrópicos.

$A^{\alpha\beta}$, da superfície inicial S^0 e portanto, da resolução da malha, proporcionando um controle quase-invariante, em termos da resolução da malha, no comportamento da superfície.

5.3 Densidade de Massa e Coeficiente de Amortecimento

Definidas as medidas de deformações, a energia interna, os coeficientes de elasticidade e as forças de curva, buscaremos estabelecer as condições para conservação de massa. Estabeleceremos também o cálculo do coeficiente de amortecimento⁶, ao longo do tempo, sobre a superfície, de acordo com a mudança de área da mesma.

Pelo princípio de conservação de massa (Eq. 4.24), a massa total da superfície deve ser conservada, isto é,

$$m = \int_{S^0} \mu_0 d\Sigma = \int_S \mu d\sigma, \quad (5.16)$$

onde $d\Sigma$ e $d\sigma$ são os elementos de área no estado inicial e nos estados intermediários, respectivamente (Eq. 4.25).

Pela lei de conservação de massa local (Eq. 4.28) teremos que a densidade de massa poderá variar sobre a superfície e ao longo do tempo, isto é, $\mu = \mu(u^1, u^2, t)$. Observe que o uso da equação (4.28) nos traz dificuldades de tratamento na fronteira devido ao fato dos elementos a e A não estarem bem definidos quando fazemos uso de diferenças finitas para a sua discretização⁷. Dessa forma, faremos uso da lei de conservação de massa global (Eq. 5.16), ao invés da lei de conservação de massa local (Eq. 4.28), para propormos o cálculo da densidade de massa ao longo do tempo.

Consideraremos, por simplicidade, que a densidade de massa por unidade de área seja constante sobre a superfície e variando ao longo do tempo de acordo com a sua mudança de área, isto é, se m é a massa total da superfície de Cosserat, então pela equação (5.16)

$$\mu_0 = \frac{m}{\int_{S^0} d\Sigma} \quad e \quad \mu = \frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \mu_0, \quad (5.17)$$

⁶Coeficiente associado a viscosidade do meio. A viscosidade do meio cria uma resistência contrária ao deslocamento do ponto da superfície que, em geral, é proporcional a velocidade do mesmo. Esta força contrária ao deslocamento do ponto é chamada de força de amortecimento e o coeficiente associado de coeficiente de amortecimento.

⁷Utilizamos o método de diferenças finitas para a discretização da nossa proposta de modelo.

onde $\int_{S^0} d\Sigma$ e $\int_S d\sigma$ correspondem às áreas da superfície nos estados inicial e corrente. A equação (5.17)₂ nos diz que à medida que a área aumenta em relação ao estado inicial, a sua densidade de massa diminui, e vice-versa.

Dessa forma, contornamos as dificuldades de condições de fronteira para o uso da lei de conservação de massa local (Eq. 4.28), fazendo uso da lei de conservação de massa local (Eq. 5.17), que derivamos da lei de conservação de massa global (Eq. 5.16).

Em [12], Carignan et al. propuseram a força de amortecimento variando de acordo com a variação das componentes do tensor curvatura. O objetivo deles era minimizar a velocidade de deformação. Sabemos que dependendo de como o objeto está se deslocando num meio, quanto maior for a sua área mais resistência contrária ao seu deslocamento o meio provocará. Dessa forma, para o cálculo dos coeficientes de amortecimento nos estados inicial e corrente propomos o mesmo procedimento para o cálculo das densidades de massa nos estados inicial e corrente, porém, a sua variação no tempo seria diretamente proporcional à variação da área da superfície, isto é,

$$\gamma_0 = \frac{Amortec.total}{\int_{S^0} d\Sigma} \quad e \quad \gamma = \frac{\int_S d\sigma}{\int_{S^0} d\Sigma} \gamma_0, \quad (5.18)$$

onde *Amortec.total* corresponde ao amortecimento total no deslocamento da superfície provocado pelo meio em que a mesma está imersa. Assim, à medida que a área da superfície aumenta em relação ao estado inicial, ocorrerá um maior amortecimento associado a velocidade dos pontos da superfície.

5.4 Equações Constitutivas e Equilíbrio de Movimento

Da equação (4.32), temos

$$\mu \dot{\mathbf{v}} - \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{N}^\alpha|_\alpha = \mathbf{F}, \quad (5.19)$$

onde $\mathbf{F}$ é a força externa sobre a superfície S . De fato, como supomos que a casca seja suficientemente fina, esta força é igual a força de contato externa $\bar{q}$ ou força de contato sobre a superfície S (Seção 5.1).

Na equação (5.19) não é levado em consideração a resistência que o meio envolvente pode provocar ao deslocamento da superfície devido à viscosidade do mesmo.

Então, levando em conta a viscosidade do meio, a equação de equilíbrio de movimento da superfície deformável S será dada por

$$\mu \dot{\mathbf{v}} + \gamma \mathbf{v} - \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{N}^\alpha|_\alpha = \mathbf{F}, \quad (5.20)$$

onde γ é coeficiente de amortecimento (Seção 5.3), que permite simularmos diferentes viscosidades para o meio no qual a superfície deformável S está inserida. A derivada covariante é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{N}^\alpha|_\alpha &= \sum_{\alpha=1}^2 (\mathbf{N}_{,\alpha}^\alpha + \sum_{\beta=1}^2 \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \mathbf{N}^\beta) = \sum_{\alpha=1}^2 (\mathbf{N}_{,\alpha}^\alpha + \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda \mathbf{N}^\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^3 \left[(N^{i\alpha} \mathbf{a}_i)_{,\alpha} + \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda N^{i\alpha} \mathbf{a}_i \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

devido às equações (2.77) e (4.18).

Vamos mostrar agora, como calculamos as componentes do vetor força de curva $\mathbf{N}^\alpha$ (força interna que atua sobre a curva coordenada) no modelo de superfície deformável proposto nesta tese.

Considere os vetores força de curva e força de curva diretora escritos como nas equações (4.18) e (4.19), isto é,

$$\mathbf{N}^\alpha = \sum_{\beta=1}^2 N^{\beta\alpha} \mathbf{a}_\beta + N^{3\alpha} \mathbf{a}_3$$

e

$$\mathbf{M}^\alpha = \sum_{\beta=1}^2 M^{\beta\alpha} \mathbf{a}_\beta + M^{3\alpha} \mathbf{a}_3$$

que agem sobre cada curva coordenada da superfície deformável S . $N^{\beta\alpha}$ é dada pela equação (4.21) e a equação (4.23) se reduz em

$$N^{3\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 M^{\alpha\beta}|_\beta, \quad (5.22)$$

pois consideramos $\bar{\mathbf{L}} \approx 0$ no nosso modelo. De acordo com a equação (2.72)₂, o termo $M^{\alpha\beta}|_\beta$ é dado por

$$M^{\alpha\beta}|_\beta = (M^{\alpha\beta})_{,\beta} + \sum_{\rho=1}^2 (\Gamma_{\beta\rho}^\alpha M^{\rho\beta} + \Gamma_{\beta\rho}^\beta M^{\alpha\rho}), \quad (5.23)$$

e as componentes simétricas $N'^{\beta\alpha}$ e $M^{\beta\alpha}$ pelas expressões (4.22) que são funções das medidas de deformações $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\kappa_{\alpha\beta}$. Usando o nosso modelo de energia interna armazenada, dada pela equação (5.11), nas expressões (4.22), junto com as simetrias dos coeficientes de elasticidade, escrevemos as componentes $N'^{\beta\alpha}$ e $M^{\alpha\beta}$ na forma

$$N'^{\beta\alpha} = \frac{\mu}{\mu_0} \left(\Phi'^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \Theta^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \right) \quad e \quad M^{\alpha\beta} = \frac{\mu}{\mu_0} \left(\Psi'^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + \Theta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \right), \quad (5.24)$$

com

$$\Phi'^{\alpha\beta} = 2\Phi^{\alpha\beta}, \quad \Psi'^{\alpha\beta} = 2\Psi^{\alpha\beta}, \quad (5.25)$$

onde $\Phi'^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\Psi'^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}$ são as energias de deformações da métrica e da curvatura da superfície e $\Theta^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}$ e $\Theta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$ são as energias de acoplamento das deformações da métrica e da curvatura da superfície. Mencionaremos estas energias como medidas de deformação da superfície e medidas de acoplamento das medidas de deformação, respectivamente.

Considerando ainda a conservação de massa estabelecida pela equação (5.17) reescrevemos a equação (5.24) como

$$N'^{\beta\alpha} = \frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \left(\Phi'^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \Theta^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \right) \quad e \quad M^{\alpha\beta} = \frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \left(\Psi'^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + \Theta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \right), \quad (5.26)$$

Assim, substituindo as (eqs. 5.26) nas equações (4.21) e (5.22), determinamos as componentes do vetor força de curva $\mathbf{N}^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) que atua na curva coordenada u^α , isto é,

$$\begin{aligned} N^{\beta\alpha} &= \frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \left(\Phi'^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \Theta^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \right) - \sum_{\lambda=1}^2 b_\lambda^\beta \left[\frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \left(\Psi'^{\alpha\lambda} \kappa_{\alpha\lambda} + \Theta^{\alpha\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda} \right) \right] \quad e \\ N^{3\alpha} &= \sum_{\beta=1}^2 \left[\frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \left(\Psi'^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} + \Theta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \right) \right] |_\beta. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Por conveniência para discretização, denotemos por

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta} &= M^{\alpha\beta}|_\beta, \quad \pi_N^{\alpha\beta} = \left[\left(\frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \right) \Psi'^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} \right] |_\beta, \quad \tau_N^{\alpha\beta} = \left[\left(\frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \right) \Theta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \right] |_\beta, \\ \pi_T^{\beta\alpha} &= \left(\frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \right) \Phi'^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} - \sum_{\lambda=1}^2 b_\lambda^\beta \left(\frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \right) \Psi'^{\alpha\lambda} \kappa_{\alpha\lambda}, \\ \tau_T^{\beta\alpha} &= \left(\frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \right) \Theta^{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} - \sum_{\lambda=1}^2 b_\lambda^\beta \left(\frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \right) \Theta^{\alpha\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Observe que os termos $\tau_N^{\alpha\beta}$ e $\tau_T^{\alpha\beta}$ correspondem às componentes de forças associadas ao terceiro termo da energia (Eq. 5.11), mais precisamente, forças associadas as medidas de acoplamento das medidas de deformação da superfície. Estas notações (Eq. 5.28)₂₋₅ serão utilizadas no momento oportuno da discretização, apresentada no Capítulo 6. Com o uso delas têm-se

$$N^{\beta\alpha} = \pi_T^{\beta\alpha} + \tau_T^{\beta\alpha} \quad e \quad N^{3\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 (\pi_N^{\alpha\beta} + \tau_N^{\alpha\beta}). \quad (5.29)$$

De outra forma, de acordo com a notação (5.28)₁ e fazendo uso da equação (5.22)₂, reescreve-se a componente normal do vetor força de curva como

$$N^{3\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 \sigma^{\alpha\beta}. \quad (5.30)$$

Utilizando (5.30), reescrevemos a equação (5.21)

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} N^{\alpha}|_{\alpha} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left[(N^{\beta\alpha} \mathbf{a}_{\beta})_{,\alpha} + \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} N^{\beta\alpha} \mathbf{a}_{\beta} \right] \\ &+ \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left[(\sigma^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3)_{,\alpha} + \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Observe que foi necessário a determinação das densidades de massa, do estado inicial (μ_0) e intermediário (μ), como também a relação entre elas.

5.5 Vetor Normal

No nosso modelo de superfície deformável, consideramos o vetor diretor como sendo o vetor normal unitário a superfície S , em todo instante t , desde o estado inicial. Então, a fidelidade da magnitude, direção e sentido do vetor normal⁸ é importante para o nosso modelo deformável, pois isso permitirá um bom controle sobre as deformações de curvatura ou a reação da superfície contra as forças que atuam na direção normal ao longo da mesma. Terzopoulos et al. [87] propuseram aproximar o vetor normal pelas derivadas parciais de segunda ordem da parametrização da superfície, que em geral não coincidem em magnitude, direção e sentido. Au et al. [3] propõem o uso da definição do vetor normal (Eq. 2.46), porém, fazem uso dele calculado no tempo anterior ao instante corrente. O uso desta abordagem traz grandes dificuldades para o controle da

⁸Quando falarmos vetor normal pense em vetor normal unitário

rigidez de curvar e para o equilíbrio do movimento. Desta forma, formulamos uma proposta de aproximação para o vetor normal, baseada nas fórmulas de Gauss (Eq. 2.54) que são expressões exatas, a menos de singularidades, quando $b_{\alpha\beta} \neq 0$. A nossa proposta de aproximação para o vetor normal permite não só reduzir o sistema de equações não-lineares, que governa o movimento, num sistema algébrico linear, via discretização, como também é mais fiel à magnitude, direção e sentido do vetor normal, como veremos no Capítulo 7. Consideramos a aproximação aqui apresentada como sendo semi-atual, pois utilizamos os coeficientes envolvidos (componentes do tensor curvatura e símbolos de Christoffel), calculados a partir dos pontos da superfície do instante anterior ao do corrente, $k - 1$, e as direções envolvidas com relação ao instante corrente k .

Num primeiro momento, para diminuir os efeitos das singularidades, propomos na equação (5.31) fazer o seguinte desenvolvimento

$$(\sigma^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3)_{,\alpha} = (\sigma^{\alpha\beta})_{,\alpha} \mathbf{a}_3 + \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{3,\alpha}. \quad (5.32)$$

Substituindo a equação (2.56) na equação (5.32) temos

$$(\sigma^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3)_{,\alpha} = (\sigma^{\alpha\beta})_{,\alpha} \mathbf{a}_3 - \sum_{\beta=1}^2 b_{\alpha}^{\beta} \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\beta}. \quad (5.33)$$

Dessa forma, a variação da componente normal da força de curva na equação (5.31) será expressa por

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left[(\sigma^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3)_{,\alpha} + \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta} \sigma^{\beta\alpha} \mathbf{a}_3 \right] &= \sum_{\alpha,\lambda=1}^2 \left[\left((\sigma^{\alpha\lambda})_{,\alpha} + \sum_{\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \sigma^{\alpha\beta} \right) \mathbf{a}_3 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\beta=1}^2 b_{\alpha}^{\beta} \sigma^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_{\beta} \right], \end{aligned} \quad (5.34)$$

ou seja, a equação (5.31) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 N^{\alpha}|_{\alpha} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left[(N^{\beta\alpha} \mathbf{a}_{\beta})_{,\alpha} + \sum_{\lambda=1}^2 \left(\Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta} N^{\beta\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} \sigma^{\alpha\lambda} \right) \mathbf{a}_{\beta} \right] \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \left[\sum_{\lambda=1}^2 \left((\sigma^{\alpha\lambda})_{,\alpha} + \sum_{\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \sigma^{\alpha\beta} \right) \mathbf{a}_3 \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Feito isso, utilizamos em (5.35), para cada $\sigma^{\alpha\lambda}$, a seguinte aproximação derivada a partir da equação (2.54): em cada instante de tempo k o vetor normal $\mathbf{a}_3(k)$ é aproximado, de acordo com o valor de $b_{\alpha\lambda}(k - 1)$, por uma das seguintes expressões

- Se $|b_{\alpha\lambda}(k-1)| > \delta$, então

$$\frac{1}{b_{\alpha\lambda}(k-1)} \left[\mathbf{a}_{\alpha,\lambda}(k) - \Gamma_{\alpha\lambda}^1(k-1)\mathbf{a}_1(k) - \Gamma_{\alpha\lambda}^2(k-1)\mathbf{a}_2(k) \right], \quad (5.36)$$

- Se $0.0 < b_{\alpha\lambda}(k-1) < \delta$, então

$$\left[\mathbf{a}_{\alpha,\lambda}(k) - \Gamma_{\alpha\lambda}^1(k-1)\mathbf{a}_1(k) - \Gamma_{\alpha\lambda}^2(k-1)\mathbf{a}_2(k) \right], \quad (5.37)$$

- Se $-\delta < b_{\alpha\lambda}(k-1) < 0.0$, então

$$-\left[\mathbf{a}_{\alpha,\lambda}(k) - \Gamma_{\alpha\lambda}^1(k-1)\mathbf{a}_1(k) - \Gamma_{\alpha\lambda}^2(k-1)\mathbf{a}_2(k) \right], \quad (5.38)$$

onde δ é um limiar devido às imprecisões numéricas ocorridas no quociente $\frac{1}{b_{\alpha\lambda}(k-1)}$. Este quociente deveria ser igual a magnitude do vetor $\left[\mathbf{a}_{\alpha,\lambda}(k) - \Gamma_{\alpha\lambda}^1(k-1)\mathbf{a}_1(k) - \Gamma_{\alpha\lambda}^2(k-1)\mathbf{a}_2(k) \right]$, o que não ocorre para valores de $|b_{\alpha\lambda}(k-1)|$ menores do que δ . Acreditamos que isso se deve não só ao fato da proximidade da singularidade no quociente como também está associado a discretização espacial da malha. Em (5.36), (5.37) e (5.38) temos: $b_{\alpha\lambda}(k-1)$ e $\Gamma_{\alpha\lambda}^\beta(k-1)$ a componente do tensor curvatura $b_{\alpha\lambda}$ e o símbolo de Christoffel $\Gamma_{\alpha\lambda}^\beta$ no instante $k-1$, respectivamente, $\mathbf{a}_{\alpha,\lambda}(k)$ a derivada usual do vetor de base $\mathbf{a}_\alpha$, com relação a u^λ , no instante k e $\mathbf{a}_\alpha(k)$ o vetor de base $\mathbf{a}_\alpha$ no instante k .

Observe que no caso da componente do tensor curvatura $b_{\alpha\lambda}(k-1)$ ser não-nula e menor que o limiar δ , em valor absoluto, mantemos a direção e sentido. Mantendo o produto por $\frac{1}{b_{\alpha\lambda}(k-1)}$, o vetor poderá ter uma magnitude maior do que deveria ter, tornando a reação maior do que seria. Empiricamente, percebemos que isto traz danos para o equilíbrio entre as forças internas e externas. Em tese, como a magnitude dos vetores (Eq. 5.37) e (Eq. 5.38) deveriam ser iguais ou bem próximas a $|b_{\alpha\lambda}(k-1)|$, então, quando o valor absoluto de $b_{\alpha\lambda}(k-1)$ é pequeno, menor que a unidade, concluímos que a magnitude dos vetores (Eq. 5.37) e (Eq. 5.38) será menor que a unidade, tornando a reação menor do que seria. Embora a reação seja menor que deveria ser, de forma empírica, percebemos que esta abordagem ajuda na manutenção do equilíbrio, pois não ocorre uma perda brusca de resistência, como acontece quando utilizamos apenas a equação (5.36) com o limiar, e nem nos leva aos danos ocorridos quando utilizamos a equação (5.36) sem o limiar.

Ainda deparamos com um problema na aplicação das expressões (5.36), (5.37) e (5.38) na estimativa do vetor normal da superfície em cada ponto onde $b_{\alpha\beta} = 0$. Quando a superfície no estado inicial for plana o vetor normal $\mathbf{a}_3$ na iteração $k=1$ fica indefinido.

Isto criará um problema para a formação de dobras e rugas quando tivermos apenas forças tangenciais atuando na superfície plana. Para resolver esta indefinição, propomos o uso do vetor normal da etapa de tempo anterior para o termo $\tau_N^{\alpha\beta}$. Assim, com esta abordagem, forças tangenciais numa superfície plana poderão criar dobras e rugas. Mostraremos isso no Capítulo 7. As direções tangentes, para $\tau_T^{\alpha\beta}$, seguem tal procedimento, para que tenhamos um equilíbrio das forças associadas à energia do termo misto ou medidas de acoplamento das medidas de deformação de (5.11),

$$\sum_{\alpha\beta} \Theta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta},$$

responsáveis pela formação de dobras e rugas na direção perpendicular à direção das forças aplicadas. Para o termo $\pi_N^{\alpha\beta}$ usamos (Eq. 5.36) ou (Eq. 5.37) ou (Eq. 5.38) e para $\pi_T^{\alpha\beta}$ os vetores tangentes no passo de tempo corrente. Isto nos dá um melhor controle e equilíbrio das forças associadas as medidas de deformação da superfície.

Observe que aproximar o vetor normal pelo vetor da etapa anterior só quando $b_{\alpha\beta}[k, l] = 0$ nos leva a um problema de descontinuidade em relação ao tempo, pois estaremos tratando um mesmo campo de vetores em etapas de tempo distintas. Empiricamente, verificamos que isso nos leva a problemas de desequilíbrios durante as simulações enquanto que a abordagem sugerida acima não.

5.6 Comparações com outros Modelos Contínuos

Nesta seção delineamos as relações entre o nosso modelo, proposto aqui, e os modelos de Terzopoulos et al. [87], Eischen et al. [35] e Au et al. [3]. A proposta de Eischen et al. é embasada na proposta de Simo et al. [78, 79, 80].

Iniciaremos comparando com o modelo de Terzopoulos et al. Em nosso modelo, a superfície é mergulhada num espaço Euclidiano 3-dimensional de tal maneira que o espaço envolvente a superfície é coberto por coordenadas curvilíneas das quais dois parâmetros são as coordenadas de superfície e o terceiro parâmetro varia na direção do vetor normal unitário da superfície. Desta forma, além da superfície ser inserida no espaço Euclidiano da melhor forma possível, aproveitando todos os benefícios do mergulho⁹, o nosso modelo é válido para toda superfície riemanniana (Seção 2.2), coberta por qualquer tipo de coordenadas de superfície. Existe, porém, um sistema de coorde-

⁹Um dos benefícios é que a métrica do espaço envolvente induz à métrica da superfície, permitindo uma continuidade de medidas do espaço envolvente para a superfície.

nadas cartesianas retangulares de referência para representar os vetores posição dos pontos sobre a superfície.

Se restringirmos em nosso modelo à superfície como sendo uma superfície euclidiana¹⁰ e considerarmos a mesma coberta por coordenadas cartesianas retangulares, alguns dos elementos de nosso modelo se reduzem aos respectivos elementos propostos por Terzopoulos et al. [87]. Ou seja, no modelo de Terzopoulos et al., a superfície deveria ser localmente plana e coberta por coordenadas cartesianas retangulares durante todo o processo de deformação. Estas restrições são fortes demais, pois, mesmo que inicialmente a superfície seja localmente plana, durante a deformação a mesma deixará de ser localmente plana. Em nosso modelo propomos um controle anisotrópico, sem restrição ao sistema de coordenadas, que se reduz ao controle anisotrópico proposto por Terzopoulos et al., se feitas as restrições mencionadas no início deste parágrafo. Detalharemos a seguir as implicações destas restrições.

Começaremos, inicialmente, com a aproximação do vetor normal. No modelo de Terzopoulos et al. o vetor normal é aproximado pelas derivadas parciais de segunda ordem da parametrização da superfície, isto é,

$$\mathbf{a}_3 \approx \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \quad (5.39)$$

A nossa aproximação para o vetor normal é dada pelas expressões (5.36) ou (5.37) ou (5.38). Observe que se as componentes do tensor curvatura forem iguais a 1 ($b_{\alpha\beta} = 1$) e a superfície for euclidiana, coberta por coordenadas cartesianas, as nossas expressões se reduzem à equação (5.39).

A energia dada pela equação (5.11) difere da equação de energia no modelo de Terzopoulos et al. por um termo adicional

$$\sum_{\alpha\beta} \Theta^{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta} \kappa^{\alpha\beta} \quad (5.40)$$

que relaciona os efeitos da variação métrica com a variação da curvatura, e vice-versa. Consideramos esta a proposta de suma importância no tratamento de dobras e rugas e na preservação da compatibilidade destas duas grandezas.

A restrição da superfície ser coberta por um sistema de coordenadas retangulares transforma os coeficientes de elasticidade propostos no nosso modelo

$$\Phi^{\alpha\beta} = \Phi^{\beta\alpha} = \zeta_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta})^2 + A^{\alpha\alpha} A^{\beta\beta} \right) \quad e \quad \Psi^{\alpha\beta} = \Psi^{\beta\alpha} = \xi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta})^2 + A^{\alpha\alpha} A^{\beta\beta} \right)$$

¹⁰Superfície flat (plana). Vê Seção 2.2.

nos coeficientes de elasticidade propostos no modelo de Terzopoulos et al.

$$\Phi^{\alpha\beta} = \Phi^{\beta\alpha} = \zeta_{\alpha\beta} \quad e \quad \Psi^{\alpha\beta} = \Psi^{\beta\alpha} = \xi_{\alpha\beta},$$

bem como a relação entre as densidades de massa e os coeficientes de amortecimento nos estados corrente e inicial

$$\mu = \frac{\int_{S^0} d\Sigma}{\int_S d\sigma} \mu_0 \quad e \quad \gamma = \frac{\int_S d\sigma}{\int_{S^0} d\Sigma} \gamma_0$$

reduzir-se-ão às correspondentes relações do modelo de Terzopoulos et al.

$$\mu = \mu_0 \quad e \quad \gamma = \gamma_0.$$

Com as restrições, a superfície ser euclidiana e coberta por um sistema de coordenadas cartesianas retangulares em todo instante t , a derivada covariante associada ao tensor métrico da superfície se reduz à derivada ordinária ou usual, isto é,

$$M^{\alpha\beta}|_{\beta} = (M^{\alpha\beta})_{,\beta} \quad e \quad N^{\alpha}|_{\alpha} = (N^{\alpha})_{,\alpha}. \quad (5.41)$$

Reescrevendo a equação (3.1) com as notações introduzidas no Capítulo 4,

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cong - \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left[\left(N'^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\beta} \right)_{,\alpha} + \left(M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \right)_{,\alpha\beta} \right], \quad (5.42)$$

e fazendo o desenvolvimento da derivada ordinária com relação a u^{β} no termo normal $M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3$ de $\mathbf{e}(\mathbf{r})$,

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cong - \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left[\left(N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\beta} \right) + \left(M^{\alpha\beta} \right)_{,\beta} \mathbf{a}_3 \right]_{,\alpha}, \quad (5.43)$$

chegamos a

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cong - \sum_{\alpha}^2 (N^{\alpha})_{,\alpha}. \quad (5.44)$$

Lembramos que para que tenhamos a mesma aproximação do vetor normal sugerida por Terzopoulos et al. foi necessário fazer a restrição que as componentes do tensor-curvatura são constantes e iguais a 1.

Grosseiramente falando, podemos falar que o modelo de Terzopoulos et al. é um modelo linear de lâmina fina (*thin plate*), cujas coordenadas de superfície são cartesianas retangulares, com medidas de deformações não linearizadas e vetor normal aproximado de forma grosseira.

O modelo de Au et al. [3] é semelhante ao modelo de Terzopoulos et al. [87] por ignorar o termo misto da equação (5.11). Outra diferença está na aproximação do vetor normal, pois Au et al. utiliza o normal da etapa de tempo imediatamente anterior à etapa de tempo atual. Eles incorporam parâmetros do material ao modelo deles, como coeficiente de Poisson e módulos de cisalhamento, curvatura e Young. Como o modelo de Terzopoulos et al., é um modelo de força resposta simplificada.

O modelo de Eischen et al. [35] é baseado na abordagem de casca geometricamente exata proposta por Simo et al. [78, 79, 80], que se embasaram na teoria de superfície de Cosserat, com vetor diretor inextensível (comprimento constante), via abordagem tridimensional. A redução a um modelo bidimensional é feita utilizando as hipóteses de Love-Kirchhoff. Neste processo é omitido o acoplamento entre as medidas métricas e as medidas de curvatura. Porém, Eischen et al. incorporam parâmetros do material como coeficiente de Poisson e módulos de cisalhamento, curvatura e Young ao seu modelo. Nosso modelo também é embasado na teoria de superfície de Cosserat, porém, pela abordagem direta (bidimensional). Consideramos o vetor diretor não só inextensível como também que o mesmo está na direção normal à superfície ao longo do tempo. Acreditamos que a especificação intuitiva da forma pode ser beneficiada pelo acesso explícito da segunda forma fundamental. Disso também resulta que teremos apenas as medidas de deformação da superfície e que também não necessitaremos resolver um sistema de equações para obtenção do vetor diretor ao longo do tempo, diminuindo a complexidade computacional. Em nosso modelo consideramos o acoplamento entre as medidas métricas e as medidas de curvatura, possibilitando a simulação de forças nas direções perpendiculares as forças aplicadas. Isto favorece a criação de dobras e rugas.

Capítulo 6

Discretização do Modelo Proposto

Para a grande maioria de sistemas de equações diferenciais parciais, a obtenção da solução analítica não é possível. Nestes casos, a utilização de um método numérico é recomendada para análise dos dados da solução aproximada. Em computação gráfica, para tornar disponível através do computador a solução do problema de deformação de objetos, modelado pelo sistema de equações diferenciais parciais, necessitamos da aplicação de um método numérico cuja essência está na *discretização do contínuo*. Esta discretização torna *finito* o problema, viabilizando a solução para o computador. O primeiro passo de qualquer método numérico é discretizar o domínio onde o sistema de equações diferenciais parciais está definido. Dessa forma, definimos uma malha sobre a qual é calculada a solução aproximada. Cada ponto dessa malha é chamado de nó. Existe um problema de adaptação da malha ao contorno do domínio. Dependendo da região, a malha pode não conter os elementos ou alguns elementos do contorno dessa região. Este é um problema de método numérico que não discutiremos.

Existem duas abordagens numéricas bem conhecidas: método das diferenças finitas e método dos elementos finitos. Estes dois métodos têm formas distintas de particionamento do domínio de definição da função desconhecida. Em contraste ao método das diferenças finitas, cujo domínio de interesse é substituído por um conjunto discreto de pontos, no método dos elementos finitos o domínio é subdividido em subdomínios comumente chamados de elementos finitos [56]. No método dos elementos finitos, a malha é também chamada de rede de elementos finitos. Ele surgiu como uma nova possibilidade para resolver problemas da teoria de elasticidade, superando as dificuldades e problemas inerentes aos métodos de Rayleigh-Ritz, Galerkin, diferenças finitas, resíduos ponderados e outros [2]. No método dos elementos finitos, a função desconhecida é

representada em cada elemento finito por um interpolante polinomial¹ de continuidade de ordem especificada [56]. Em geral, o método dos elementos finitos tem um grau de precisão melhor que o método das diferenças finitas, porém, o seu custo computacional é maior em relação ao método das diferenças finitas, principalmente porque o sistema de equações de equilíbrio é formulado para cada elemento finito discreto. Além disso, o método das diferenças finitas é mais simples para compreensão e implementação que o método dos elementos finitos.

Dessa forma, optamos por utilizar técnicas de diferenças finitas para solucionar a equação (5.20). Para isso, é necessário discretizar no domínio espacial (u^1, u^2) e no domínio temporal (t) . A discretização espacial torna o sistema de equações diferenciais parciais não-lineares de 2ª ordem num sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias não-lineares de 2ª ordem e a discretização no tempo reduz o sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias não-lineares num sistema linear algébrico.

6.1 Diferenças Finitas

O espaço contínuo Ω é discretizado como uma malha de $m \times n$ nós, onde cada nó (k, l) representa um ponto discreto (ou uma *variável nodal*) $r(u_k^1, u_l^2)$ no espaço 3D, e os espaçamentos entre os nós na direção u^1 e u^2 são, respectivamente, Δu^1 e Δu^2 . Chamamos r de *função malha* e a denotamos por $r[k, l]$.

Existem vários esquemas de diferenças finitas que se adequam melhor para cada problema específico. Seguiremos o esquema que descreveremos a seguir.

Seja $f[k, l]$ uma função malha real ou vetorial. Os operadores de diferença posterior de 1ª ordem são definidos

$$\begin{aligned} D_1^{(+)}(f)[k, l] &= (f[k+1, l] - f[k, l])/\Delta u^1 \quad e \\ D_2^{(+)}(f)[k, l] &= (f[k, l+1] - f[k, l])/\Delta u^2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

De forma análoga, definimos os operadores de diferença anterior de 1ª ordem

$$\begin{aligned} D_1^{(-)}(f)[k, l] &= (f[k, l] - f[k-1, l])/\Delta u^1 \quad e \\ D_2^{(-)}(f)[k, l] &= (f[k, l] - f[k, l-1])/\Delta u^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

¹Interpolante polinomial é uma função polinomial, definida no elemento finito, que deve satisfazer um certo grau de continuidade estabelecido, na passagem de um para outro elemento finito.

Esses operadores de diferença serão usados para discretizar as derivadas parciais de 1^a ordem.

Para as derivadas parciais de 2^a ordem, utilizamos os operadores definidos nas eqs. (6.1) e (6.2). Os operadores de diferença cruzada posterior e anterior são definidos por

$$\begin{aligned} D_{12}^{(+)}(f)[k, l] &= D_{21}^{(+)}(f)[k, l] = D_1^{(+)}(D_2^{(+)}(f)[k, l]) \quad e \\ D_{12}^{(-)}(f)[k, l] &= D_{21}^{(-)}(f)[k, l] = D_1^{(-)}(D_2^{(-)}(f)[k, l]), \end{aligned} \quad (6.3)$$

e os operadores de diferença central de 2^a ordem por

$$\begin{aligned} D_{11}(f)[k, l] &= D_1^{(-)}(D_1^{(+)}(f)[k, l]) \quad e \\ D_{22}(f)[k, l] &= D_2^{(-)}(D_2^{(+)}(f)[k, l]). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Esses operadores de diferença serão usados para discretizar as derivadas parciais de 2^a ordem.

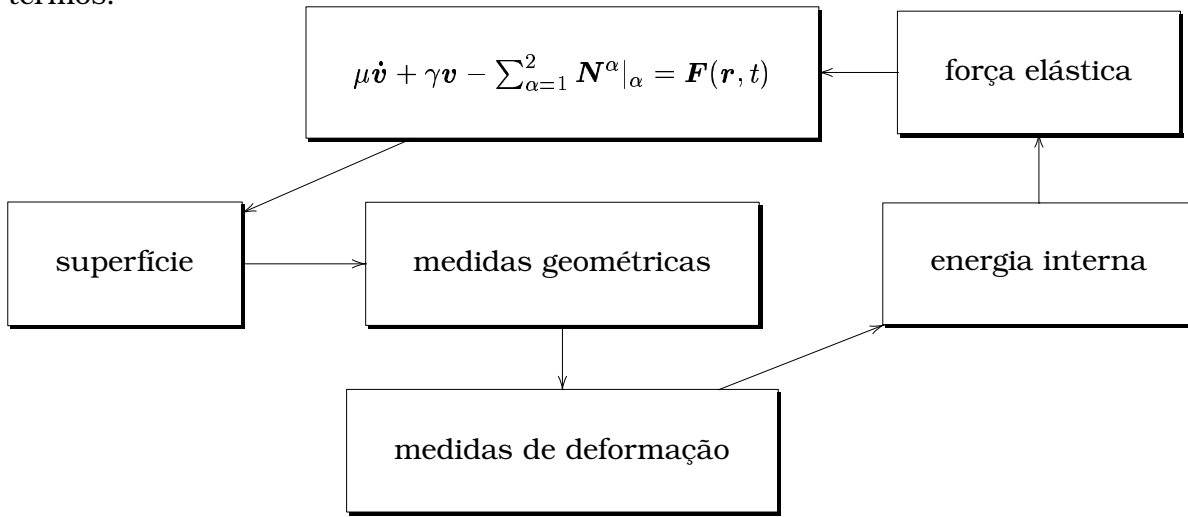
O sucesso da obtenção de uma solução numérica convergente numa aproximação de diferenças finitas baseia-se na consistência e na estabilidade do esquema de diferenças finitas [56]. A consistência do esquema assegura que, quando a malha de diferenças finitas é refinada, os erros de truncamentos da aproximação de diferenças finitas diminuem tendendo a zero quando as distâncias Δu^1 e Δu^2 dos pontos da malha no refinamento tendem a zero. Isto é, o modelo de diferenças finitas se aproxima da EDP² desejada. A estabilidade computacional do esquema estabelece que pequenas perturbações nos dados iniciais provocam pequenas perturbações nas soluções.

Duas abordagens distintas podem ser feitas para o esquema de diferenças finitas: uma abordagem explícita, quando a solução é explicitamente expressa em função apenas das soluções anteriores, e uma abordagem implícita, quando a solução não depende apenas das soluções anteriores mas também de soluções a serem determinadas. Em geral, aproximações de diferenças finitas implícitas têm melhores propriedades de estabilidade e precisão do que os esquemas explícitos. Por outro lado, os esquemas explícitos são mais simples de resolver quanto os esquemas implícitos em termos de custo computacional. Porém, com vistas à estabilidade e à precisão, vamos propor um esquema implícito. Por isso, propomos um esquema baseado no modelo de Terzopoulos et al. [87], que tem bons resultados empiricamente comprovados.

²Equação Diferencial Parcial.

Utilizaremos os operadores diferenças $D_\beta^{(+)}$, $D_\beta^{(-)}$ e $D_{\alpha\beta}^{(+)}$, com $D_{\alpha\alpha}^{(+)} = D_{\alpha\alpha}$, no decorrer desta seção, para a discretização espacial da força elástica $\sum_{\alpha=1}^2 N^\alpha|_\alpha$ (Eq. 5.35).

Como foi mencionado anteriormente, desejamos que o nosso sistema de equações se reduza a um sistema linear algébrico. De acordo com o diagrama abaixo, para estimarmos a força elástica necessitamos da energia interna, em cada ponto da superfície. Estas dependem das medidas de deformação $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\kappa_{\alpha\beta}$, obtidas a partir das medidas geométricas $a_{\alpha\beta}$ e $b_{\alpha\beta}$, respectivamente, calculadas a partir da superfície, que depende da equação do movimento, a qual por sua vez, utiliza a força elástica como um dos seus termos.



Dessa forma, para reduzirmos o sistema de equações diferenciais parciais não-lineares (Eq. 5.20) num sistema algébrico linear, estabeleceremos que a estimativa da força elástica procederá da seguinte maneira: (1) as componentes $N^{i\alpha}$ dos vetores forças de curva $\mathbf{N}^\alpha$ serão estimadas a partir dos pontos da superfície do instante imediatamente anterior ao instante corrente; (2) as direções $\mathbf{a}_i$ serão dadas a partir dos pontos da superfície que desejamos obter no instante corrente.

6.2 Discretização das Equações Constitutivas

Começaremos discretizando os elementos básicos na iteração i

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\beta[k, l, i] &= D_\beta^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i] \quad e \\ \mathbf{a}_{\alpha,\beta}[k, l, i] &= D_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

A partir da equação (6.5) calculamos as componentes dos tensores métrico (Eq. 2.34) e curvatura (Eq. 2.47)₂, isto é,

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}[k, l, i] &= D_{\alpha}^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i] \cdot D_{\beta}^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i] \quad e \\ b_{\alpha\beta}[k, l, i] &= D_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i] \cdot \mathbf{a}_3[k, l, i], \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde

$$\mathbf{a}_3[k, l, i] = \frac{1}{\|D_1^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i] \times D_2^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i]\|} D_1^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i] \times D_2^{(+)}(\mathbf{r})[k, l, i]. \quad (6.7)$$

Observe que $a_{\alpha\beta}[k, l, i]$ e $b_{\alpha\beta}[k, l, i]$ no instante inicial correspondem $A_{\alpha\beta}[k, l, i] = a_{\alpha\beta}[k, l, 0]$ e $B_{\alpha\beta}[k, l, i] = b_{\alpha\beta}[k, l, 0]$ da superfície inicial S^0 .

Com estas definições, calculamos as quantidades $a[k, l, i]$, $a^{\alpha\beta}[k, l, i]$ e $b_{\alpha}^{\beta}[k, l, i]$ utilizando as equações (2.34)₃, (2.38) e (2.58), como também os respectivos termos no instante inicial $A[k, l, i] = a[k, l, 0]$, $A^{\alpha\beta}[k, l, i] = a^{\alpha\beta}[k, l, 0]$ e $B_{\alpha}^{\beta}[k, l, i] = b_{\alpha}^{\beta}[k, l, 0]$.

Antes de calcularmos $\varepsilon_{\alpha\beta}[k, l, i]$ e $\kappa_{\alpha\beta}[k, l, i]$ pelas respectivas equações (5.2)₁ e (5.2)₂, calculamos os coeficientes de elasticidade $\Phi^{\alpha\beta}[k, l, i]$, $\Psi^{\alpha\beta}[k, l, i]$ e $\Theta^{\alpha\beta}[k, l, i]$ pelas expressões (5.15). Observe que teremos um problema de fronteira a resolver no cálculo dos coeficientes de elasticidade. Se mantivermos a expressão (5.15) sem modificação,

$$\begin{aligned} \Phi^{\alpha\beta}[k, l, i] &= \zeta_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k, l, i])^2 + A^{\alpha\alpha}[k, l, i]A^{\beta\beta}[k, l, i] \right), \\ \Psi^{\alpha\beta}[k, l, i] &= \xi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k, l, i])^2 + A^{\alpha\alpha}[k, l, i]A^{\beta\beta}[k, l, i] \right) \quad e \\ \Theta^{\alpha\beta}[k, l, i] &= \phi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k, l, i])^2 + A^{\alpha\alpha}[k, l, i]A^{\beta\beta}[k, l, i] \right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

os pontos sobre a fronteira para a qual os $A^{\alpha\beta}[k, l, i]$ são indefinidos ficarão mal-condicionados. Na Seção 6.4 apresentamos uma solução.

De posse das medidas discretas de deformações, buscamos compor as componentes discretas das forças de curva de resposta da superfície.

No cálculo de $N^{\alpha\beta}[k, l, i]$ utilizamos (4.21) para todos os pontos da malha, com $N'^{\alpha\beta}[k, l, i]$ e $M^{\alpha\beta}[k, l, i]$ dados em (5.26). Observe que, neste momento, para o cálculo da equação (5.26), necessitamos determinar as integrais correspondentes às áreas nos estados inicial e intermediário. Mostramos na Seção 6.3 como efetuamos o seu cálculo. Para o cálculo de $\Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta}[k, l, i]$, usamos as equações (2.52) e (2.39)₁, isto é,

$$\Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta}[k, l, i] = \mathbf{a}^{\beta}[k, l, i] \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\lambda}[k, l, i] = \sum_{\rho=1}^2 a^{\beta\rho}[k, l, i] \left(\mathbf{a}_{\rho}[k, l, i] \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\lambda}[k, l, i] \right),$$

considerando $\Gamma_{\alpha\lambda}^\beta[k, l, i] = 0$ sobre a fronteira na qual $a^{\beta\rho}[k, l, i] = 0$ (**condições de fronteira**). Para completar o cálculo das componentes dos vetores forças de curva (Eq. 5.35), resta-nos mostrar como procedemos o cálculo de $\sigma^{\alpha\lambda}[k, l, i]$, que determina as suas componentes normais. Utilizando a equação (5.23) para $M^{\lambda\gamma}$ na equação (5.28)

$$\sigma^{\alpha\lambda}[k, l, i] = D_\lambda^{(-)}(M^{\alpha\lambda})[k, l, i] + \sum_{\rho=1}^2 \left((\Gamma_{\lambda\rho}^\alpha M^{\rho\lambda})[k, l, i] + (\Gamma_{\lambda\rho}^\lambda M^{\alpha\rho})[k, l, i] \right) \quad (6.9)$$

De forma semelhante ao cálculo de $\sigma^{\alpha\lambda}[k, l, i]$, calculamos $\tau^{\alpha\lambda}[k, l, i]$ substituindo $M^{\alpha\beta}$ por $\left(\frac{\int_S^0 d\Sigma}{\int_S d\sigma} \right) \Theta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$.

Agora, de posse dos vetores forças de curva discretos, podemos efetuar o cálculo da força elástica correspondente à força interna discreta de resposta da superfície. Consideremos e a força elástica, isto é, $e = - \sum_{\alpha=1}^2 N^\alpha|_\alpha$. A discretização de e é dada por

$$\begin{aligned} e[k, l] &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left[-D_\alpha^-(N^{\beta\alpha} \mathbf{a}_\beta)[k, l] \right. \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^2 \left(-(\Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda N^{\beta\alpha})[k, l] + (b_\alpha^\beta \sigma^{\alpha\lambda})[k, l] \right) \mathbf{a}_\beta[k, l] \Big] \\ &\quad - \sum_{\alpha, \lambda=1}^2 \left(D_\alpha^-(\sigma^{\alpha\lambda})[k, l] + \sum_{\beta=1}^2 (\Gamma_{\alpha\beta}^\beta \sigma^{\alpha\lambda})[k, l] \right) \mathbf{a}_3[k, l], \end{aligned} \quad (6.10)$$

com o seguinte desenvolvimento para a $D_\alpha^-(N^{\beta\alpha} \mathbf{a}_\beta)[k, l]$

$$\begin{aligned} D_1^-(N^{\beta 1} \mathbf{a}_\beta)[k, l] &= \frac{N^{\beta 1}[k, l]}{\Delta u^1} \mathbf{a}_\beta[k, l] - \frac{N^{\beta 1}[k-1, l]}{\Delta u^1} \mathbf{a}_\beta[k-1, l] \quad e \\ D_2^-(N^{\beta 2} \mathbf{a}_\beta)[k, l] &= \frac{N^{\beta 2}[k, l]}{\Delta u^2} \mathbf{a}_\beta[k, l] - \frac{N^{\beta 1}[k, l-1]}{\Delta u^2} \mathbf{a}_\beta[k, l-1]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

De acordo com a aproximação do vetor normal proposta na seção 5.5, se as forças derivam das medidas de deformação da superfície ou das medidas de acoplamento das medidas de deformação, propomos ainda reescrever a força elástica (Eq. 6.10), em cada iteração de tempo i , como

$$e[k, l, i] = \hat{e}[k, l, i] + \tilde{e}[k, l, i-1], \quad (6.12)$$

onde, de acordo com (5.29) e (5.30),

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{e}}[k, l, i] &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left[-D_{\alpha}^{-} \left(\pi_T^{\beta\alpha} [k, l, i-1] \mathbf{a}_{\beta} [k, l, i] \right) \right. \\
 &+ \sum_{\lambda=1}^2 \left(-(\Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} \pi_T^{\beta\alpha}) [k, l, i-1] + (b_{\alpha}^{\beta} \pi_N^{\alpha\lambda}) [k, l, i-1] \right) \mathbf{a}_{\beta} [k, l, i] \Big] \\
 &- \sum_{\alpha, \lambda=1}^2 \left(D_{\alpha}^{-} (\pi_N^{\alpha\lambda}) [k, l, i-1] + \sum_{\beta=1}^2 (\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \pi_N^{\alpha\lambda}) [k, l, i-1] \right) \mathbf{a}_3 [k, l, i] \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{e}}[k, l, i-1] &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left[-D_{\alpha}^{-} (\tau_T^{\beta\alpha} \mathbf{a}_{\beta}) [k, l, i-1] \right. \\
 &+ \sum_{\lambda=1}^2 \left(-(\Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} \tau_T^{\beta\alpha}) [k, l, i-1] + (b_{\alpha}^{\beta} \tau_N^{\alpha\lambda}) [k, l, i-1] \right) \mathbf{a}_{\beta} [k, l, i-1] \Big] \\
 &- \sum_{\alpha, \lambda=1}^2 \left(D_{\alpha}^{-} (\tau_N^{\alpha\lambda}) [k, l, i-1] + \sum_{\beta=1}^2 (\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \tau_N^{\alpha\lambda}) [k, l, i-1] \right) \mathbf{a}_3 [k, l, i-1], \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_3[k, l, i] &= \frac{1}{b_{\alpha\beta}[k, l, i-1]} \left(\mathbf{a}_{\alpha, \beta}[k, l, i] - \Gamma_{\alpha\beta}^1[k, l, i-1] \mathbf{a}_1[k, l, i] \right. \\
 &- \left. \Gamma_{\alpha\beta}^2[k, l, i-1] \mathbf{a}_2[k, l, i] \right),
 \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{a}_3[k, l, i] = \left(\mathbf{a}_{\alpha, \beta}[k, l, i] - \Gamma_{\alpha\beta}^1[k, l, i-1] \mathbf{a}_1[k, l, i] - \Gamma_{\alpha\beta}^2[k, l, i-1] \mathbf{a}_2[k, l, i] \right),$$

ou

$$\mathbf{a}_3[k, l, i] = - \left(\mathbf{a}_{\alpha, \beta}[k, l, i] - \Gamma_{\alpha\beta}^1[k, l, i-1] \mathbf{a}_1[k, l, i] - \Gamma_{\alpha\beta}^2[k, l, i-1] \mathbf{a}_2[k, l, i] \right), \quad (6.15)$$

de acordo com a faixa de valores da componente curvatura $b_{\alpha\beta}[k, l, i-1]$ (Seção 5.5), e $\mathbf{a}_3[k, l, i-1]$ é calculado pela definição (Eq. 6.7). Estas aproximações possibilitam a transformação do sistema de equações diferenciais não-lineares num sistema algébrico linear.

6.3 Cálculos das Densidades de Massa e dos Coeficientes de Amortecimento

Na proposta de cálculo das densidades de massa e dos coeficientes de amortecimento iniciais e intermediários, nós nos deparamos com a necessidade de estimativas para as integrais correspondentes ao cômputo das áreas da superfície de Cosserat no estado inicial e corrente. Quando a primitiva do integrando é conhecida, podemos obter o valor exato da integral. Caso contrário, existem métodos numéricos que fornecem aproximações tão boas quanto se queira. A idéia básica da integração numérica consiste em se fazer aproximações do integrando por polinômios.

Embora tenhamos a vantagem de uma melhor aproximação pela fórmula de Simpson, em relação a fórmula dos trapézios (apêndice F) temos uma restrição da mesma referente ao número de pontos na subdivisão da malha, o que não acontece na fórmula dos trapézios. Dessa forma, utilizaremos a fórmula dos trapézios pela sua flexibilidade no procedimento da subdivisão do intervalo, isto é, poderemos utilizar tanto um número par como um número ímpar de pontos para a subdividi-lo.

Em nosso modelo, a integral para o cálculo da área tem integrando dependente de duas variáveis e a mesma é resolvida por integração dupla. Aplicaremos a fórmula dos trapézios para cada uma das integrais. Assim, subdividindo cada um dos intervalos de definição de cada variável u^α , uma malha $m \times n$, com $\Delta u^\alpha = u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha$, obteremos a seguinte estimativa para o cálculo da área nas eqs. (5.17) e (5.18)

$$\int_{S^0} d\Sigma \approx \frac{\Delta u^1 \Delta u^2}{4} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=0}^{m-2} \left[\sqrt{A[i, j]} + \sqrt{A[i+1, j]} + \sqrt{A[i, j+1]} + \sqrt{A[i+1, j+1]} \right],$$

$$\int_S d\sigma \approx \frac{\Delta u^1 \Delta u^2}{4} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=0}^{m-2} \left[\sqrt{a[i, j]} + \sqrt{a[i+1, j]} + \sqrt{a[i, j+1]} + \sqrt{a[i+1, j+1]} \right], \quad (6.16)$$

onde $\sqrt{A[k, l]} = \sqrt{A(u_k^1, u_l^2)}$ e $\sqrt{a[k, l]} = \sqrt{a(u_k^1, u_l^2)}$.

Poderíamos pensar num cálculo da densidade de massa mais simples que seria o seu cômputo através da massa total distribuída uniformemente pelos pontos, isto é, o quociente da massa total pelo número de pontos da malha. Mas isso nos levaria a um problema no sentido de que, para um mesmo material, a sua densidade mudaria drasticamente à medida que refinamos a malha. Isto contraria o conceito da densidade

de massa por unidade de área, pois não importa o quanto refinemos a malha a densidade do material permanece a mesma ou apenas muda de acordo com a precisão do cálculo da área. Vamos apresentar alguns testes de cálculo das densidades de massa iniciais pela proposta apresentada e por massa total distribuída igualmente pelos pontos da malha.

A tabela 6.1 apresenta a densidade de massa inicial de uma superfície plana quadrada 6.0×6.0 cuja massa total corresponde a 27.0.

<i>Modelo $\times$ grade</i>	10×10	100×100	400×400
por pontos	0.27	0.0027	0.00016875
por unidade de área	0.84083	0.75634	0.751883

Tabela 6.1: Superfície plana quadrada

A tabela 6.2 apresenta a densidade de massa inicial de uma superfície na forma de um cilindro de raio 1.0 e altura 5.0 cuja massa total corresponde a 1.0.

<i>Modelo $\times$ grade</i>	10×10	100×100	400×400
por pontos	0.01	0.0001	0.000006
por unidade de área	0.0447899	0.0328132	0.0320714

Tabela 6.2: Cilindro

A tabela 6.3 apresenta a densidade de massa inicial de uma superfície na forma de um pedaço de esfera de raio 2.0 cuja massa total corresponde a 3.0.

<i>Modelo $\times$ grade</i>	10×10	100×100	400×400
por pontos	0.03	0.000833	0.000018
por unidade de área	0.326032	0.255048	0.2506664

Tabela 6.3: Pedaço de esfera

Observemos que, quando refinamos a malha, a grande mudança da densidade de massa por pontos da malha requer um reajuste considerável nos parâmetros de controle da deformação, enquanto com a proposta da densidade de massa por unidade de área este reajuste é pequeno, ou nenhum, dependendo do nível de refinamento, bastando verificar a sua variação quando mudamos de uma malha 100×100 para uma malha 400×400 . Isto facilita o trabalho do usuário além de sermos parcialmente³ coerentes com a nossa proposta do modelo físico de *superfície de Cosserat elástica* que propõe uma densidade de massa por unidade de área.

³Dizemos parcialmente, pois utilizamos uma densidade de massa por unidade de área que é constante sobre a superfície e variando apenas no tempo, de acordo com a variação da área, enquanto no modelo físico esta densidade pode variar sobre a superfície e no tempo.

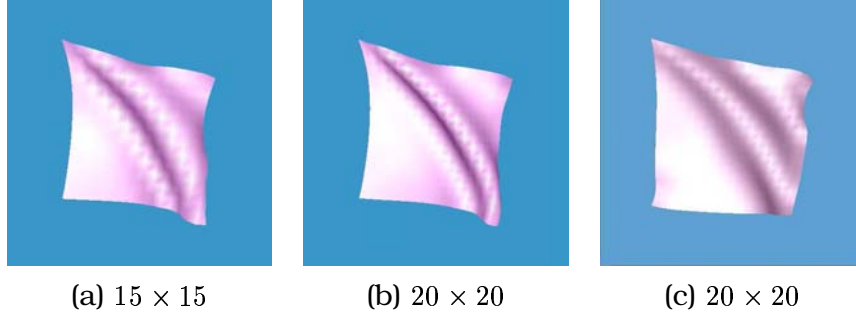


Figura 6.1: Uma bandeira tremulando.

Mostraremos a seguir, uma simulação onde os parâmetros se adequam à resolução da malha, devido ao fato da densidade de massa, proposta no nosso modelo, sofrer pequena variação com a mudança da resolução, bem como os coeficientes de elasticidade $\Phi^{\alpha\beta}$, $\Psi^{\alpha\beta}$ e $\Theta^{\alpha\beta}$ serem propostos de maneira quase-adaptativa à resolução da malha. A simulação de uma bandeira tremulando (dimensões: 6.0×6.0) cujos dois vértices esquerdo estão fixados (Figura 7.5). Os parâmetros de simulação foram: massa total 5.0, amortecimento total 2.0, $\zeta_{\alpha\beta} = 8.0 \times 10^{-1}$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-3}$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, e a força externa é a soma da resistência do meio no qual a bandeira está imersa

$$\mathbf{f}_{\text{fluido}} = 0.032 \left[\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{r}(a_1, a_2, t)}{\partial t} \right) \right] \mathbf{n}, \quad (6.17)$$

onde a velocidade de fluido constante $\mathbf{u}$ é $(0, 3.0, 0)$, e uma força gravitacional

$$\mathbf{f}_{\text{gravidade}} = \mu \mathbf{g}, \quad (6.18)$$

com $\mathbf{g} = (-0.1, 0, 0)$. A resolução de discretização foi 15×15 na Figura 6.1.a. É interessante notar que se aumentamos a resolução de discretização para 20×20 , podemos obter efeitos visuais similares com os mesmos parâmetros de simulação (Figura 6.1.b). Isso não aconteceria se mantivemos constantes a densidade de massa e o coeficiente de amortecimento em cada nó ao longo do tempo (Figura 6.1.c).

6.4 Condições Iniciais e de Fronteira

Segundo o matemático Hadamard (1902), um problema bem-posto é aquele que apresenta exatamente uma solução (a solução existe e é única) que varia continuamente com os dados. A variação contínua com os dados é a condição de estabilidade que exclui

a possibilidade de saltos bruscos entre dados e resultados. Isto é, pequenas perturbações nos dados devem provocar pequenas perturbações nos resultados. O conceito de problema bem-posto tenta adequar o modelo matemático ao sistema real [24].

As equações envolvidas no nosso modelo são equações diferenciais parciais que requerem condições iniciais e de fronteira adequadas, para que o problema seja bem-posto. Num modelo computacional, é requerido também o esquema de discretização mais adequado para a equação como também tratamentos específicos de cada método empregado com relação à fronteira.

6.4.1 Condições Iniciais

Em nosso modelo, as condições iniciais necessárias são:

1. Os pontos da superfície inicial bem como as suas velocidades iniciais, isto é,

$$\mathbf{r}(u^1, u^2, 0) = \mathbf{r}^0(u^1, u^2), \quad \mathbf{v}(u^1, u^2, 0) = \mathbf{v}^0(u^1, u^2). \quad (6.19)$$

2. A conservação de massa proposta em nosso modelo requer a especificação do valores iniciais da densidade de massa da superfície e do coeficiente de amortecimento na superfície, eqs. (5.17)₁ e (5.18)₁.

6.4.2 Condições de Fronteira

A orientação para obtenção das formas apropriadas para as condições de fronteira vem da taxa de trabalho feito pela força e pela força diretora aplicadas sobre a curva fronteira da superfície, isto é,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \quad e \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{w}, \quad (6.20)$$

respectivamente, ambos por unidade de comprimento da curva fronteira da superfície, com $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{a}}_3$. Por outro lado, as condições de fronteira da força e da força diretora são dadas pelas eqs. (4.16) e (4.17) e estas são asseguradas, ponto a ponto, sobre a curva fronteira da superfície, com normal unitário exterior $\boldsymbol{\nu}$ a esta fronteira. Segundo Rubin [75], pode-se obter condições de fronteira utilizando a equação (6.20) e estabelecendo um triedro sobre as curvas fronteiras, para especificar as componentes das velocidades $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nas fronteiras ou as componentes dos vetores forças $\mathbf{N}$ e $\mathbf{M}$ atuando nelas, em relação a esse triedro definido sobre elas, ou fazendo uso de uma especificação mista

(numa fronteira especifica-se as velocidades e em outra as forças). Em outras palavras, especificar a condição de fronteira seria estabelecer para cada ponto da fronteira, em todo instante, as velocidades v e w ou os deslocamentos do ponto e do vetor diretor ou as forças internas N e M , podendo fazer uma combinação delas, sem que haja interseção. Observe que prever o comportamento da fronteira é um tanto difícil, tornando o modelo não intuitivo e nem simples para o usuário, e limitado para a proposta de um modelo dinâmico, diminuindo as simulações que o usuário poderia realizar de acordo com o que pudesse prever em relação ao comportamento da fronteira.

Pelas dificuldades de se prever o comportamento dos pontos da fronteira, utilizaremos a equação do movimento (Eq. 6.32), estimando a força elástica $e[k, l, i]$, sobre ela, computando o que está bem definido e para alguns casos não definidos, proporemos uma abordagem para contornar o problema. Isto é também uma forma de se prever dinamicamente o comportamento da força sobre a fronteira.

Para pontos sobre a borda do domínio Ω , os operadores diferença podem não estar definidos. Uma condição bastante natural utilizada é considerar o operador diferença da equação (6.5) como sendo nulo quando em sua operação se refere a um ponto não pertencente ao conjunto de mn pontos de nossa malha. Para o cálculo da derivada dos escalares nas eqs. (6.9) e (6.10), considera-se os valores dos escalares fora da malha como sendo nulos e computa-se a derivada.

6.4.2.1 Vetor Normal

Para a estimativa da componente do tensor curvatura $b_{\alpha\beta}$ e da força normal associada a $\tau_N^{\alpha\beta}$, na iteração i , quando o operador diferença de segunda ordem associado esteja definido e o vetor normal não esteja definido, propomos: o cálculo do vetor normal $\mathbf{a}_3[k, l, i - 1]$ (Eq. 6.7) sobre a mesma utilizando o vetor de base do ponto anterior $\mathbf{a}_1[m - 2, l, i - 1]$ e $\mathbf{a}_2[k, n - 2, i - 1]$, de acordo com a fronteira onde $\mathbf{a}_1[m - 1, l, i - 1]$ ou $\mathbf{a}_2[k, n - 1, i - 1]$ não esteja definido, respectivamente. Esta proposta, junto com a abordagem de aproximação para o vetor normal, nos possibilita um controle de resistência à mudança de curvatura da curva fronteira.

A aproximação do vetor normal $\mathbf{a}_3[k, l, i]$ pela equação (6.15) na fronteira será feita para os pontos onde o operador diferença de segunda ordem esteja definido, mesmo que um dos operadores de diferença de primeira ordem não esteja definido, bastando para isso considerar o valor desta diferença como nulo.

6.4.2.2 Tensores Métrico e Curvatura

O cálculo das componentes do tensor métrico $a_{\alpha\beta}$, na fronteira, é feito pela equação (6.6)₁, quando os operadores estiverem definidos e, quando pelo menos um dos operadores não estiver definido, os valores destas componentes são considerados nulos. No cálculo das componentes do tensor curvatura $b_{\alpha\beta}$, na fronteira, utilizamos (6.6)₂ quando o operador estiver definido, com o vetor normal dado na subsubseção 6.4.2.1, e, quando o operador não estiver definido, atribuímos zero a elas. No cálculo de $a[k, l]$ na fronteira, utilizamos a mesma expressão que aquela utilizada para os pontos interiores (Eq. 2.34)₃. Dessa forma, $a[k, l]$ é nulo na fronteira para a qual um dos operadores não está definido. Consideraremos, por (2.38), que $a^{\alpha\beta}[k, l]$ serão nulos nesta fronteira. Com isso, por (2.58), $b_{\alpha}^{\beta}[k, l]$ também serão nulos.

6.4.2.3 Coeficientes de Elasticidade

Para o cálculo dos coeficientes de elasticidade $\Phi^{\alpha\beta}$, $\Psi^{\alpha\beta}$ e $\Theta^{\alpha\beta}$ necessitamos das componentes do tensor métrico recíproco, que por sua vez não estão definidas em alguns pontos sobre a fronteira. Dessa forma, sugerimos a seguinte condição de fronteira:

1. Na fronteira onde $[k + 1, l]$ está fora da malha utilizamos $A^{\alpha\beta}[k - 1, l]$

$$\begin{aligned}\Phi^{\alpha\beta}[k, l] &= \zeta_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k - 1, l])^2 + A^{\alpha\alpha}[k - 1, l]A^{\beta\beta}[k - 1, l] \right), \\ \Psi^{\alpha\beta}[k, l] &= \xi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k - 1, l])^2 + A^{\alpha\alpha}[k - 1, l]A^{\beta\beta}[k - 1, l] \right) \quad e \\ \Theta^{\alpha\beta}[k, l] &= \phi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k - 1, l])^2 + A^{\alpha\alpha}[k - 1, l]A^{\beta\beta}[k - 1, l] \right).\end{aligned}\tag{6.21}$$

2. Na fronteira onde $[k, l + 1]$ está fora da malha utilizamos $A^{\alpha\beta}[k, l - 1]$

$$\begin{aligned}\Phi^{\alpha\beta}[k, l] &= \zeta_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k, l - 1])^2 + A^{\alpha\alpha}[k, l - 1]A^{\beta\beta}[k, l - 1] \right), \\ \Psi^{\alpha\beta}[k, l] &= \xi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k, l - 1])^2 + A^{\alpha\alpha}[k, l - 1]A^{\beta\beta}[k, l - 1] \right) \quad e \\ \Theta^{\alpha\beta}[k, l] &= \phi_{\alpha\beta} \left(2(A^{\alpha\beta}[k, l - 1])^2 + A^{\alpha\alpha}[k, l - 1]A^{\beta\beta}[k, l - 1] \right).\end{aligned}\tag{6.22}$$

3. No ponto comum às duas fronteiras, $[k + 1, l]$ e $[k, l + 1]$ fora da malha, fazemos uso de $A^{\alpha\beta}[k - 1, l - 1]$. Isto é, fazemos $\Phi_{\alpha\lambda}[k, l] = \Phi_{\alpha\lambda}[k - 1, l - 1]$, $\Psi_{\alpha\lambda}[k, l] = \Psi_{\alpha\lambda}[k - 1, l - 1]$ e $\Theta_{\alpha\lambda}[k, l] = \Theta_{\alpha\lambda}[k - 1, l - 1]$ para $[k + 1, l]$ e $[k, l + 1]$ fora da malha.

6.4.2.4 Compensações de Desequilíbrios na Fronteira

Observe que quando a curva fronteira for uma das curvas coordenadas, têm-se $\nu = \frac{1}{\sqrt{a^{\beta\beta}}}a^\beta$, onde ν é o normal unitário exterior a curva fronteira. Dessa forma, pelas eqs. (4.16) e (B.43), se a curva fronteira for a curva $u^2 = cte$ teremos

$$N = \frac{1}{\sqrt{a^{22}}}N^2, \quad M = \frac{1}{\sqrt{a^{22}}}M^2, \quad (6.23)$$

e se for a curva $u^1 = cte$

$$N = \frac{1}{\sqrt{a^{11}}}N^1, \quad M = \frac{1}{\sqrt{a^{11}}}M^1. \quad (6.24)$$

Utilizaremos as equações (6.23) e (6.24), para introduzir fatores de correções de desequilíbrio inerente da técnica das diferenças finitas e das condições de fronteira. Observe que no modelo discreto os pontos da malha sobre a fronteira são pontos de uma das curvas coordenadas. Dessa forma, pelas equações (6.23) e (6.24), considerando a fronteira livre de força N e força diretora M , teremos sobre a curva fronteira $u^2 = cte$

$$N^{i2}[k, l] = 0, \quad M^{i2}[k, l] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.25)$$

e sobre a curva fronteira $u^1 = cte$

$$N^{i1}[k, l] = 0, \quad M^{i1}[k, l] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.26)$$

Para controlar os efeitos sobre as bordas, tentando controlar a intensidade das forças internas sobre as mesmas, propomos a compensação através das forças de curva e forças de curva diretora já calculadas pelas condições de fronteira precedentes,

1. Para pontos $[k, 0]$, $0 \leq k \leq m - 1$,

$$N^{\beta 2}[k, 0] = k_1 N^{\beta 2}[k, 0], \quad \sigma^{\beta 2}[k, 0] = k_2 \sigma^{\beta 2}[k, 0], \quad M^{\beta 2}[k, l] = k_3 M^{\beta 2}[k, 0], \quad (6.27)$$

onde $k_1 > 0$, pois $k_1 = 0$ causa uma elongação ilimitada, devido ao fato da componente associada a este coeficiente corresponder à força que amarra o ponto da fronteira $[k, 0]$ ao ponto $[k, 1]$,

2. Para pontos $[k, n - 1]$, $0 \leq k \leq m - 1$, isto é, $[k, n]$ está fora da malha

$$\begin{aligned} N^{\beta 2}[k, n - 1] &= k_4 N^{\beta 2}[k, n - 1], \quad \sigma^{\beta 2}[k, n - 1] = k_5 \sigma^{\beta 2}[k, n - 1], \\ M^{\beta 2}[k, n - 1] &= k_6 M^{\beta 2}[k, n - 1], \end{aligned} \quad (6.28)$$

3. Para pontos $[0, l]$, $0 \leq l \leq n - 1$,

$$N^{\beta 1}[0, l] = k_7 N^{\beta 1}[0, l], \quad \sigma^{\beta 1}[0, l] = k_8 \sigma^{\beta 1}[0, l], \quad M^{\beta 1}[0, l] = k_9 M^{\beta 1}[0, l], \quad (6.29)$$

onde $k_7 > 0$, pois $k_7 = 0$ causa uma elongação ilimitada, devido à componente associada a este coeficiente corresponder à força que amarra o ponto da fronteira $[0, l]$ ao ponto $[1, l]$.

4. Para pontos $[m - 1, l]$, $0 \leq l \leq n - 1$, isto é, $[m, l]$ está fora da malha

$$\begin{aligned} N^{\beta 1}[m - 1, l] &= k_{10} N^{\beta 1}[m - 1, l], \quad \sigma^{\beta 1}[m - 1, l] = k_{11} \sigma^{\beta 1}[m - 1, l], \\ M^{\beta 1}[m - 1, l] &= k_{12} M^{\beta 1}[m - 1, l], \end{aligned} \quad (6.30)$$

com k_i , $i = 1, \dots, 12$, sendo constantes reais e $\beta = 1, 2$.

As constantes k_i nos permitem, de forma empírica, um controle sobre a intensidade das forças que atuam na respectiva fronteira, pois, atribuindo um valor diferente de 1 para k_i alteramos a intensidade da respectiva componente da força que atua na fronteira. Observe que $k_4 = k_6 = k_{10} = k_{12} = 0$, pois, $N^{\beta 2}[k, n - 1] = M^{\beta 2}[k, n - 1] = N^{\beta 1}[m - 1, l] = M^{\beta 1}[m - 1, l] = 0$ sobre as respectivas fronteiras. Dessa forma, resta apenas o controle, em cada curva coordenada fronteira $[m - 1, l]$, $0 \leq l \leq n - 1$, e $[k, n - 1]$, $0 \leq k \leq m - 1$, sobre a força normal à superfície, associada a força de curva que atua na respectiva curva coordenada fronteira, através de k_5 e k_{11} . Nas curvas coordenadas fronteiras $[0, l]$, $0 \leq l \leq n - 1$, e $[k, 0]$, $0 \leq k \leq m - 1$, conseguimos controlar não só as forças normais à superfície através de k_2 e k_8 , como também controlamos as forças tangentes à superfície, associadas ao vetor força de curva $\mathbf{N}^\alpha$, por meio de k_1 e k_7 . Finalmente, com uso de k_3 e k_9 conseguimos ajustar o vetor força de curva diretora $\mathbf{M}^\alpha$.

Apresentaremos a seguir algumas simulações mostrando o uso dos $k_{i's}$ na correção de alguns desequilíbrios.

Na primeira simulação apresentaremos o uso dos $k_{i's}$ para corrigir o desequilíbrio de forças atuando nas bordas da malha. Aplicamos quatro forças tangenciais (forças tangentes a superfície) de mesma intensidade, cada uma atuando num canto de uma malha quadrada, nas direções diagonais. A malha é composta de um material elástico, isto é, possui uma moderada resistência à variação métrica, portanto, a expectativa é que ela seja esticada. Os parâmetros de simulação foram: massa total 5.0, amortecimento total 1.0, $\zeta_{\alpha\beta} = 3.0 \times 10^{-2}$ e a força externa $\mathbf{F}(0, 0) = (-1.0, 0.0, 0.0)$, $\mathbf{F}(0, 9) = (-1.0, 0.0, 1.0)$, $\mathbf{F}(9, 0) = (1.0, 0.0, -1.0)$ e $\mathbf{F}(9, 9) = (1.0, 0.0, 1.0)$. A malha utilizada é 10×10 e a superfície

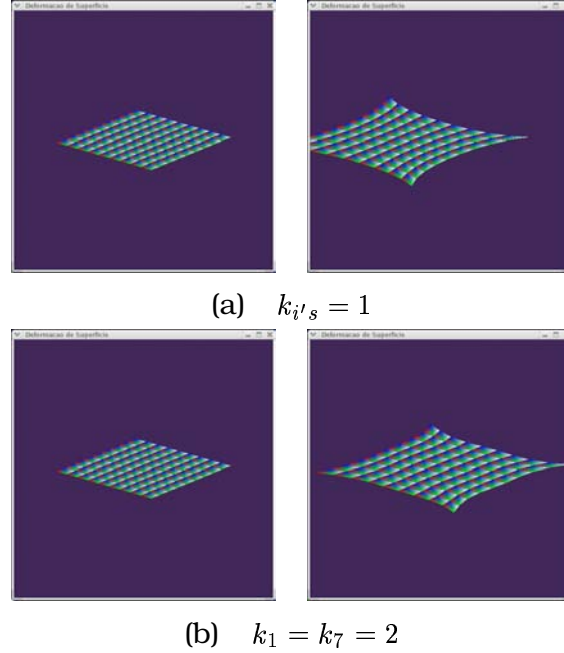


Figura 6.2: Malha elástica.

inicial é um quadrado 6.0×6.0 . Na Figura 6.2.a não alteramos as forças internas calculadas, isto é, $k_{i's} = 1$. Observe que após esticar, a malha se desloca na direção de uma das forças. Isto nos mostra a ocorrência de um desequilíbrio na reação da malha em relação às ações externas. A reação nestas bordas é menor do que deveria. Fixamos então $k_1 = k_7 = 2$, na simulação de Figura 6.2.b, aumentando a força de reação nas bordas e mantendo os outros parâmetros iguais a 1, obtendo assim o equilíbrio esperado.

Ilustramos na Figura 6.3 o uso dos $k_{i's}$ na correção de desequilíbrio numa malha quadrada rígida, ou seja, uma malha que possui uma grande resistência às variações da métrica e da curvatura, sob a ação de uma força externa perpendicular à superfície, no seu centro. Na Figura 6.3.a fixamos $k_{i's} = 1$, isto é, mantemos as forças internas calculadas. Observemos que houve uma inclinação e um deslocamento lateral não esperados. A força de resistência à mudança de curvatura nas bordas a direita do leitor foram maiores em relação às bordas a esquerda. Na simulação da Figura 6.3.b, procedemos a correção atribuindo os valores $k_5 = k_{11} = 0$ e os demais iguais a 1. Dessa forma, obtivemos o comportamento adequado para a simulação. Os parâmetros de simulação foram: massa total 7.2, amortecimento total 2.6, $\zeta_{\alpha\beta} = 5.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 3.0 \times 10^2$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$ e a força externa $\mathbf{F}(5, 5) = (0.0, -0.5, 0.0)$. A malha utilizada é 11×11 e a superfície inicial é um quadrado 6.0×6.0 .

A mesma simulação anterior é agora realizada com uma pequena resistência à

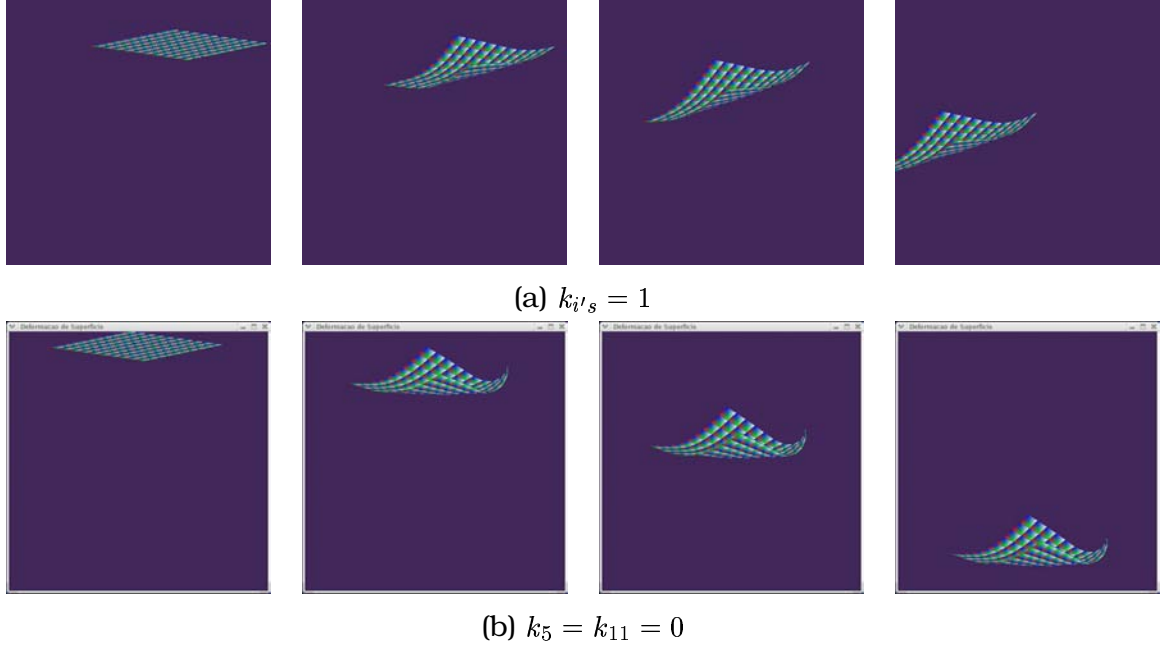


Figura 6.3: Malha rígida.

mudança de curvatura ($\xi^{ij} = 2.5 \times 10^3$), mantendo a mesma resistência à variação da métrica. Pensando na simulação anterior, poderíamos imaginar em fazer $k_5 = k_{11} = 0$. Observe na Figura 6.4.a que ocorreu uma inclinação e um deslocamento lateral. Com relação ao movimento lateral trataremos isso com a proposta apresentada na Seção 6.5. Desta vez a inclinação foi para baixo, o que nos dá um indício de que é devido a ausência da força de resistência à mudança de curvatura nestas bordas. Fazemos a correção atribuindo os valores $k_5 = k_{11} = 2.5$ como mostra a Figura 6.4.b.

Na Figura 6.5 mostramos uma bandeira fixa em dois pontos de uma borda sob a ação da gravidade e de forças senoidais aplicadas nos pontos da borda oposta à borda dos pontos fixos. Os parâmetros de simulação foram: massa total 2.0, amortecimento total 1.0, $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 1.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 2.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.5 \times 10^2$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, pontos fixos $(0,0)$ e $(14,0)$, campo gravitacional $\mathbf{G} = (-0.0981, 0.0, 0.0)$ e forças externas senoidais $\mathbf{F}(k, 14) = (0.0, 1.0, 1.0)$ de período 10, com $k = 0, \dots, 14$. A malha utilizada é 15×15 e a superfície inicial é um quadrado 6.0×6.0 . Na borda onde a força senoidal está sendo aplicada ocorre uma grande distensão (Figura 6.5.a). Podemos pensar que uma das resistências nesta borda é menor do que deveria. Empiricamente, aumentamos a resistência da mudança de curvatura por meio de k_5 e k_{11} assinalando a eles o valor 2 no lugar de 1, e obtivemos o resultado esperado (Figura 6.5.b). Pensamos de imediato nestes elementos, devido nesta borda as componentes tangenciais associadas a k_4 e k_{10} serem nulas. Outro detalhe,

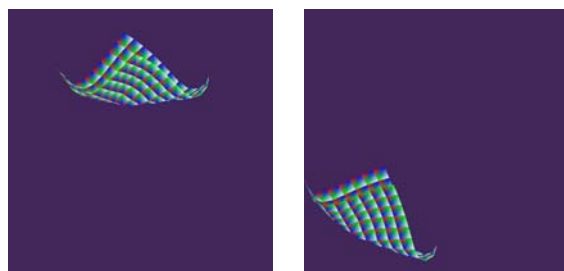
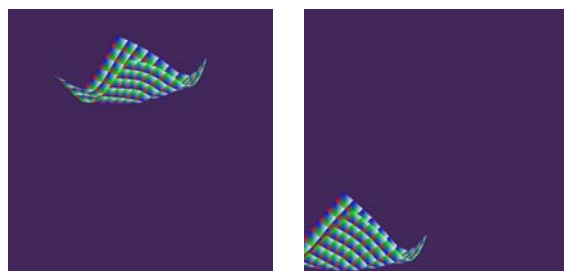
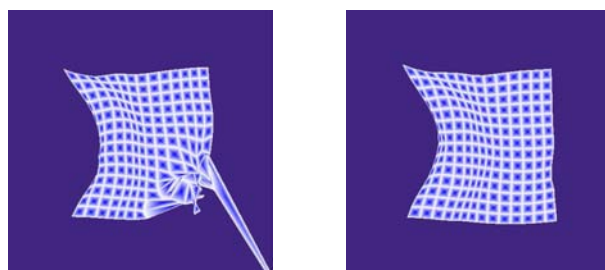
(a) $k_5 = k_{11} = 0$ (b) $k_5 = k_{11} = 2.5$

Figura 6.4: Malha dobrável.



(a) borda menos rígida (b) borda mais rígida

Figura 6.5: Bandeira com borda menos e mais rígida para curvar.

pode ocorrer do inverso ser a solução adequada. Ao invés de aumentar deveríamos diminuir, pois a força normal (força perpendicular a superfície) poderia ser maior do que deveria em relação à força tangencial aplicada (força tangente a superfície). Tem que haver um equilíbrio.

Mostramos através das simulações, como a nossa proposta dos fatores de correções $k_{i's}$ corrige eficientemente problemas de deslocamentos tangenciais provenientes de desequilíbrios das forças tangentes a superfície e problemas de inclinações provenientes de desequilíbrios das forças normais a superfície. Além disso, mostramos como podemos reforçar as bordas para controlar distensões exageradas provenientes de forças internas exageradas. Uma outra situação de uso seria no reforço das bordas para suportarem grandes pressões sobre a mesma provenientes do peso da superfície quando ela está

submetida a ação da gravidade.

6.5 Integração no Tempo

Seguindo o mesmo procedimento de Terzopoulos et al. [87], agrupamos as variáveis nodais nas funções malha $\mathbf{r}[k, l]$, $\mathbf{e}[k, l]$, $\hat{\mathbf{e}}[k, l]$ e $\tilde{\mathbf{e}}[k, l]$, respectivamente, em matrizes colunas $\mathcal{R}$, $\mathcal{E}$, $\hat{\mathcal{E}}$ e $\tilde{\mathcal{E}}$ de dimensão mn . A equação (6.10) pode ser escrita na forma matricial

$$\mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{K}(\mathbf{r})\mathcal{R} + \tilde{\mathcal{E}}, \quad (6.31)$$

onde $\mathcal{K}$ é a *matriz de rigidez*.

A forma discreta da equação do movimento (Eq. 5.20) passa a ter a seguinte forma

$$M \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial t^2} + C \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + \mathcal{K}(\mathbf{r})\mathcal{R} = \mathcal{F} - \tilde{\mathcal{E}}, \quad (6.32)$$

onde

- M é a matriz diagonal formada pela densidade de massa de cada elemento,
- C é a matriz diagonal formada pelo coeficiente de amortecimento de cada elemento,
- $\mathcal{F}$ é a matriz coluna contendo a força externa aplicada a cada elemento, calculado de $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ e
- $\tilde{\mathcal{E}}$ matriz coluna da função malha $\tilde{\mathbf{e}}[k, l]$.

Para simular a dinâmica de uma superfície em deformação, integramos a equação (6.32) com relação ao tempo. Para isso, utilizamos o processo de integração passo-a-passo, que converte o sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares numa sequência de sistemas algébricos lineares.

O processo de integração passo-a-passo consiste em subdividir o intervalo $t=0$ a $t=T$ em pequenos intervalos de tempo de mesma duração Δt e utilizar os valores das soluções aproximadas de um instante t para um instante $t + \Delta t$, a partir do instante $t=0$ até o instante T . Então, na iteração i , teremos $i \cdot \Delta t = t + \Delta t$, isto é, $t = (i - 1)\Delta t$. Propomos a força elástica $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{K}(\mathbf{r})\mathcal{R}$ integrada no tempo $t + \Delta t$:

$$\hat{\mathcal{E}}_{t+\Delta t} = \mathcal{K}(\mathbf{r}_t)\mathcal{R}_{t+\Delta t} \quad \text{ou} \quad \hat{\mathcal{E}}_i = \mathcal{K}(\mathbf{r}_{(i-1)})\mathcal{R}_i \quad (6.33)$$

Assim, fazendo uso da equação (6.33) e substituindo as aproximações discretas no tempo

$$\frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial t^2} = (\mathcal{R}_{t+\Delta t} - 2\mathcal{R}_t + \mathcal{R}_{t-\Delta t})/\Delta t^2 = (\mathcal{R}_i - 2\mathcal{R}_{(i-1)} + \mathcal{R}_{(i-2)})/\Delta t^2 \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = (\mathcal{R}_{t+\Delta t} - \mathcal{R}_{t-\Delta t})/2\Delta t = (\mathcal{R}_i - \mathcal{R}_{(i-2)})/2\Delta t \quad (6.35)$$

na equação (6.32), obtemos

$$\mathcal{A}_{(i-1)} \mathcal{R}_i = \mathcal{G}_{(i-1)}, \quad (6.36)$$

onde

$$\mathcal{A}_{(i-1)} = \mathcal{K}(\mathbf{r}_{(i-1)}) + \left(\frac{1}{\Delta t^2} M_{(i-1)} + \frac{1}{2\Delta t} C_{(i-1)} \right) \quad (6.37)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{(i-1)} &= \mathcal{F}_{(i-1)} - \tilde{\mathcal{E}}_{(i-1)} \\ &+ \left(\frac{1}{\Delta t^2} M_{(i-1)} + \frac{1}{2\Delta t} C_{(i-1)} \right) \mathcal{R}_{(i-1)} + \left(\frac{1}{\Delta t} M_{(i-1)} - \frac{1}{2} C_{(i-1)} \right) \mathcal{V}_{(i-1)}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

onde $\tilde{\mathcal{E}}_{(i-1)}$ corresponde a parcela de força elástica determinada com as direções calculadas no instante t ou da iteração $(i-1)$.

A matriz coluna de velocidade $\mathcal{V}_{(i-1)}$ é dada por:

$$\mathcal{V}_{(i-1)} = (\mathcal{R}_{(i-1)} - \mathcal{R}_{(i-2)})/\Delta t. \quad (6.39)$$

Lembramos nesse momento que as condições iniciais utilizadas são os pontos da superfície inicial e suas respectivas velocidades iniciais. Em geral, utilizamos a velocidade inicial como sendo nula.

A matriz $\mathcal{A}_{(i-1)}$ do sistema algébrico linear (Eq. 6.36) e a matriz de rigidez $\mathcal{K}$ são matrizes esparsas cujas linhas de mn elementos são tais que apenas 8 podem ser não-nulos. Esta é uma condição que, bem explorada, ajudará na diminuição do custo computacional de memória.

Existem dois grupos de métodos numéricos: os *métodos diretos*, são aqueles que conduzem à solução exata a menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina após um número finito de passos; os *métodos iterativos*, são aqueles que se baseiam na construção de sequências de aproximações, onde os valores calculados anteriormente são usados para melhorar a aproximação a cada passo. O método iterativo só será útil se a sequência das aproximações construídas convergir para a solução do sistema [24].

Segundo Cunha [24] os métodos diretos têm a vantagem de fornecer solução, exata a menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina, após um número finito de passos e não dependem de condições de convergência, porém o custo computacional cresce polinomialmente quando aumentamos a dimensão da matriz $\mathcal{A}_{(i-1)}$ do sistema algébrico. Os métodos diretos são ainda inviáveis quando o sistema é mal-condicionado. Os métodos iterativos baseiam-se na construção de sequências de aproximações. O método iterativo será útil se a sequência das aproximações construídas pelo método convergir para a solução do sistema, sendo assim, dependente de condições de convergência. Por simplicidade, faremos uso de um método numérico direto para o fornecimento da solução sem a necessidade de se fazer uma estimativa inicial para a obtenção da mesma através de sequências de aproximações.

Fazemos uso do método de decomposição $\mathcal{LU}$ da matriz $\mathcal{A}_{(i-1)}$, isto é, a matriz $\mathcal{A}_{(i-1)}$ é decomposta num produto de uma matriz triangular inferior $\mathcal{L}$ (com elementos da diagonal principal iguais a 1) e uma matriz triangular superior $\mathcal{U}$.

Nestas condições a equação (6.36) pode ser reescrita em

$$\mathcal{LU}_{(i-1)}\mathcal{R}_i = \mathcal{G}_{(i-1)}, \quad (6.40)$$

o que permite o desmembramento em dois sistemas triangulares

$$\mathcal{LY}_{(i-1)} = \mathcal{G}_{(i-1)} \quad e \quad \mathcal{U}_{(i-1)}\mathcal{R}_i = \mathcal{Y}_{(i-1)}. \quad (6.41)$$

Resolvendo o primeiro sistema, calculamos $\mathcal{Y}_{(i-1)}$ que, usado no segundo sistema, fornecerá o vetor procurado $\mathcal{R}_i$.

6.6 Compensação para Deslocamento não Esperados

Em algumas simulações, podemos nos deparar com a força interna, num dado ponto onde a força externa está sendo aplicada, atuando numa direção não esperada, ocorrendo um deslocamento não desejado na direção da resultante entre as forças interna e externa neste ponto. Isso ocorre devido aos erros introduzidos, nas direções tangentes e normal, pelo método das diferenças finitas. Na busca de corrigir esses efeitos de deslocamentos indesejados, quando sobre a superfície atua uma força pontual⁴, propomos o uso de um fator de correção p para a resultante das forças externa

⁴O termo “uma força pontual” não quer limitar a apenas uma força em apenas um ponto, mas desejamos que se caracterize que não será a mesma força em todos os pontos da superfície.

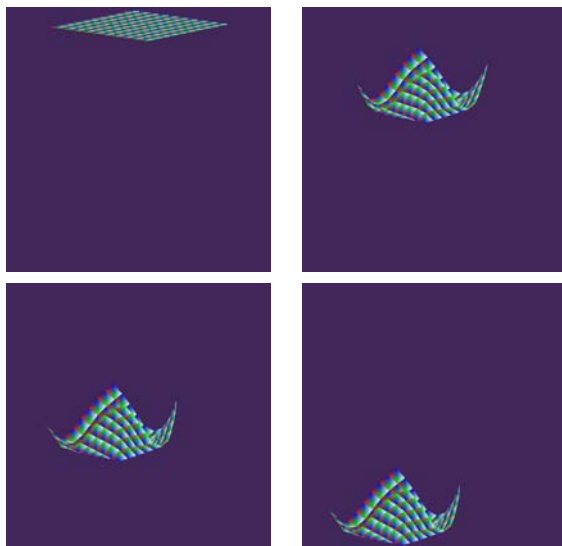


Figura 6.6: Mudando o deslocamento.

e interna, modificando a intensidade da força interna pelo seu produto por este fator p . Isto é, no ponto onde a força está sendo aplicada fazemos

$$\hat{\mathcal{E}}_i = p\mathcal{K}(\mathbf{r}_{(i-1)})\mathcal{R}_i, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{(i-1)} = p\tilde{\mathcal{E}}_{(i-1)}. \quad (6.42)$$

Este processo de mudança da resultante, num ponto onde a força pontual está sendo aplicada, afeta no deslocamento da superfície como um todo e não apenas no deslocamento daquele ponto. Mostraremos uma simulação que bem exemplifica o uso da proposta e a sua eficiência.

Na Figura 6.4.b corrigimos o problema de inclinação da superfície, porém o problema do deslocamento lateral indevido permaneceu. Corrigimos isso simplesmente com o uso do peso $p = 0.5$. Isto permite modificar a direção da resultante causando a mudança da direção do deslocamento. Veja na Figura 6.6, o resultado que obtivemos ao utilizar o peso $p = 0.5$ no ponto onde a força está sendo aplicada. O deslocamento é agora apenas vertical sem inclinação da superfície, conforme a expectativa.

É bom salientarmos que este fator altera um pouco a forma do objeto com relação àquela que ele teria sem o seu uso, pois a reação da superfície neste ponto é menor. Mesmo que ainda exista um pequeno deslocamento lateral, acreditamos que a solução proposta passa ser uma alternativa prática para obter efeitos próximos ao realismo.

Capítulo 7

Simulações

Neste capítulo, apresentaremos algumas simulações com o intuito de mostrar o potencial do nosso modelo. Como almejamos bons efeitos visuais de caimentos e dobras em superfícies deformáveis, apresentaremos algumas simulações de caimentos e dobras e as compararemos com as imagens reais. Também mostraremos outros resultados de simulações com a finalidade de mostrar que podemos ter uma boa controlabilidade de deformações através do nosso modelo.

O número de ponto da malha utilizada varia de 100 a aproximadamente 1000 pontos (grades 10×10 a 31×31). As simulações apresentadas neste capítulo, fazendo uso dessas malhas, mostram o grande potencial de modelagem e controle de nosso modelo de superfície deformável.

Testamos o comportamento sob a ação de diferentes forças como: força-pontual, força-senoidal (apresentada na Seção 6.4), força do vento simulada por uma força fluido e força uniforme (gravidade). Mostramos o comportamento dos objetos com pontos fixos e sem pontos fixos. Realizamos também teste de rigidez, pois, esse é um problema de difícil controle nos outros modelos do nosso conhecimento.

A menos que seja indicado o contrário, utilizamos $k_{i's}$ iguais a 1 e o limiar $\delta = 0.5$, para as componentes do tensor curvatura, na aproximação do vetor normal unitário.

7.1 Dobras

Um bom controle na formação de dobras na direção perpendicular à direção das forças aplicadas é de grande interesse na modelagem de objetos deformáveis, principal-

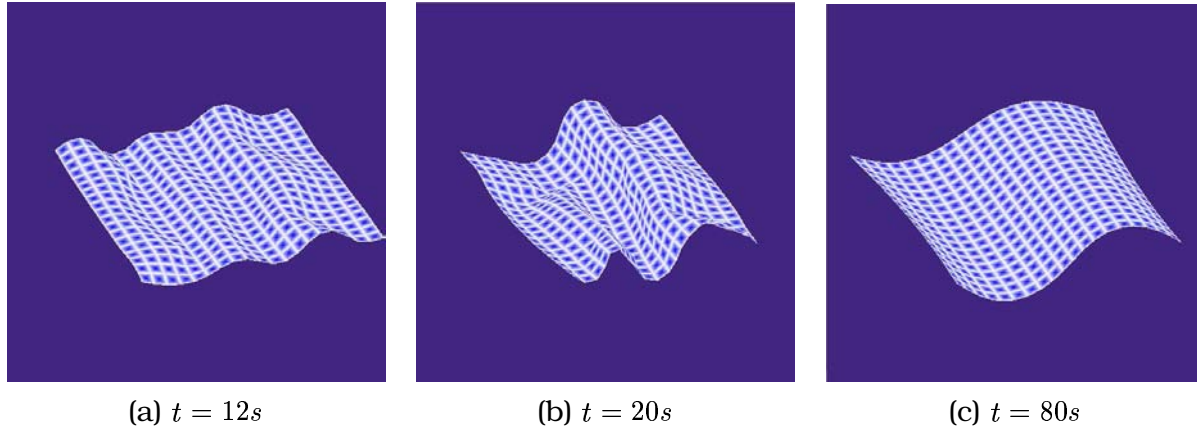


Figura 7.1: Dobras ao longo das linhas coordenadas ($\xi_{\alpha\beta} = 5.0 \times 10^{-4}$).

mente em aplicações a tecidos de pano e tecidos humanos. Como exemplos citamos a formação de dobras em roupas sobre corpos virtuais e panos suspensos e a formação de rugas em expressões faciais. Nesta seção, mostraremos o potencial do nosso modelo para modelá-las apresentando algumas simulações.

Iniciamos mostrando na Figura 7.1 a simulação de uma superfície plana quadrada (grade: 20×20) com os quatro pontos do canto fixos em relação a dois eixos do sistema de coordenadas cartesiano fixo. Aplicamos quatro forças tangenciais (tangentes a superfície) em pontos interiores da superfície $(4, 4)$, $(4, 15)$, $(15, 4)$ e $(15, 15)$, nas direções das linhas coordenadas, comprimindo-as. Para a formação das dobras nesta simulação, é necessário que pelo menos uma constante de elasticidade $\phi_{\alpha\beta}$, que estabelece a influência da variação da métrica na variação da curvatura e vice-versa, sejam diferentes de zero. Foram utilizados, nesta simulação, os seguintes parâmetros: $\Delta t = 0.04$, $\zeta_{\alpha\beta} = 1.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 5.0 \times 10^{-4}$, $\phi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-3}$, massa total igual a 5.0, amortecimento total igual a 3.0 e a superfície inicial como sendo um quadrado, no plano xz , de dimensões 6.0×6.0 . Durante um período inicial de $t = 20s$, de um tempo total de $t = 80s$, as seguintes forças foram aplicadas: $\mathbf{F}[4, 4] = (0.8, 0.0, 0.0)$, $\mathbf{F}[4, 15] = (0.8, 0.0, 0.0)$, $\mathbf{F}[15, 4] = (-1.0, 0.0, 0.0)$ e $\mathbf{F}[15, 15] = (-1.0, 0.0, 0.0)$. Como a partir de $t = 20s$ estas forças foram retiradas, a superfície tende a voltar à forma inicial (Figura 7.1.c).

Quando aumentamos a rigidez para curvar através das constantes de elasticidade $\xi_{\alpha\beta}$, diminuímos as dobras (Figura 7.2).

Formas diferentes de dobras podem ser criadas aplicando-se forças no sentido das diagonais em direção ao centro da malha quadrada, como mostrado na Figura 7.3. Durante um período inicial de $t = 20s$, de um tempo total de $t = 80s$, aplicamos as

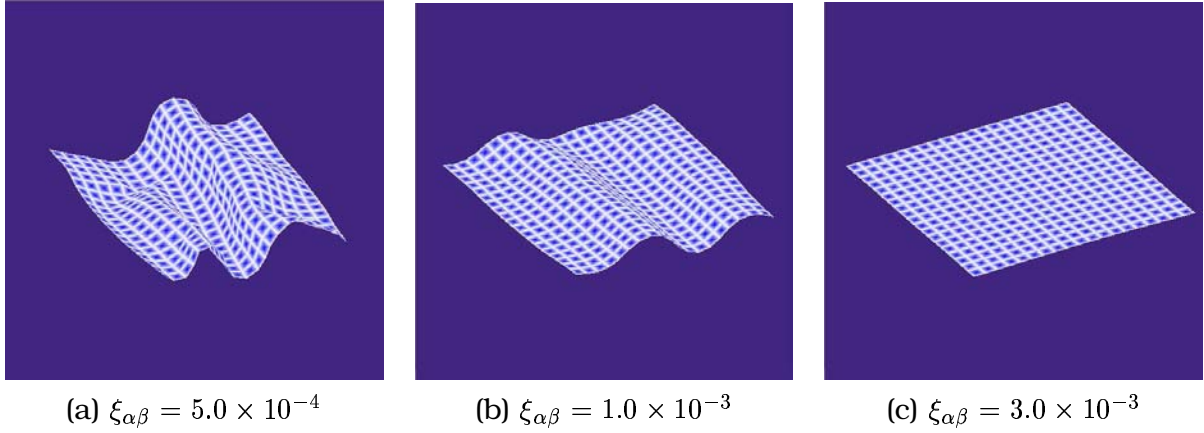


Figura 7.2: Diferentes rigidez para curvar ($t = 20s$).

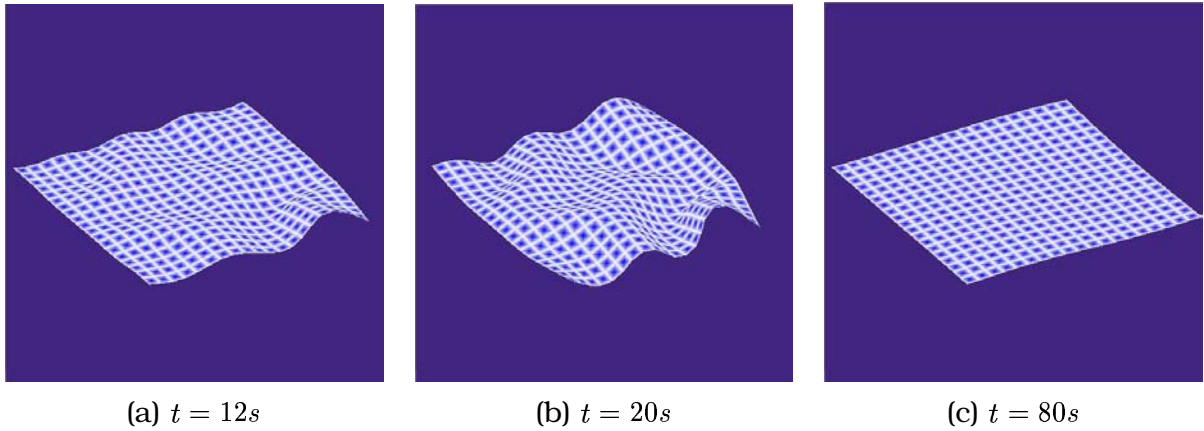


Figura 7.3: Dobras em direções diferentes.

seguintes forças $\mathbf{F}[4, 4] = (0.5, 0.0, 0.5)$, $\mathbf{F}[4, 15] = (0.5, 0.0, -0.5)$, $\mathbf{F}[15, 4] = (-0.5, 0.0, 0.5)$ e $\mathbf{F}[15, 15] = (-0.5, 0.0, -0.5)$. No instante $t = 80s$, a superfície, não sujeita a nenhuma força externa, voltou a sua configuração inicial (Figura 7.3.c). Observe que na simulação da Figura 7.1, as dobras são formadas ao longo de duas curvas coordenadas enquanto que na simulação da Figura 7.3 elas não seguem esse alinhamento. Podemos ver, pela equação (2.59), que o aumento da curvatura normal da superfície pode ser obtido quando nós comprimimos uma curva sobre ela, visto que a curvatura normal depende inversamente do tensor métrico. Desta forma, a modelagem está condizente com o comportamento esperado.

A simulação de um tecido suspenso por um ponto do canto, sob a ação da gravidade, é mostrada na Figura 7.4. Observe como a formação de dobras deram um bom caimento para o tecido de pano suspenso. Este é um bom efeito visual que pode ser comparado a uma imagem real. Estas dobras não seriam formadas sem os termos $\Theta^{\alpha\beta}$

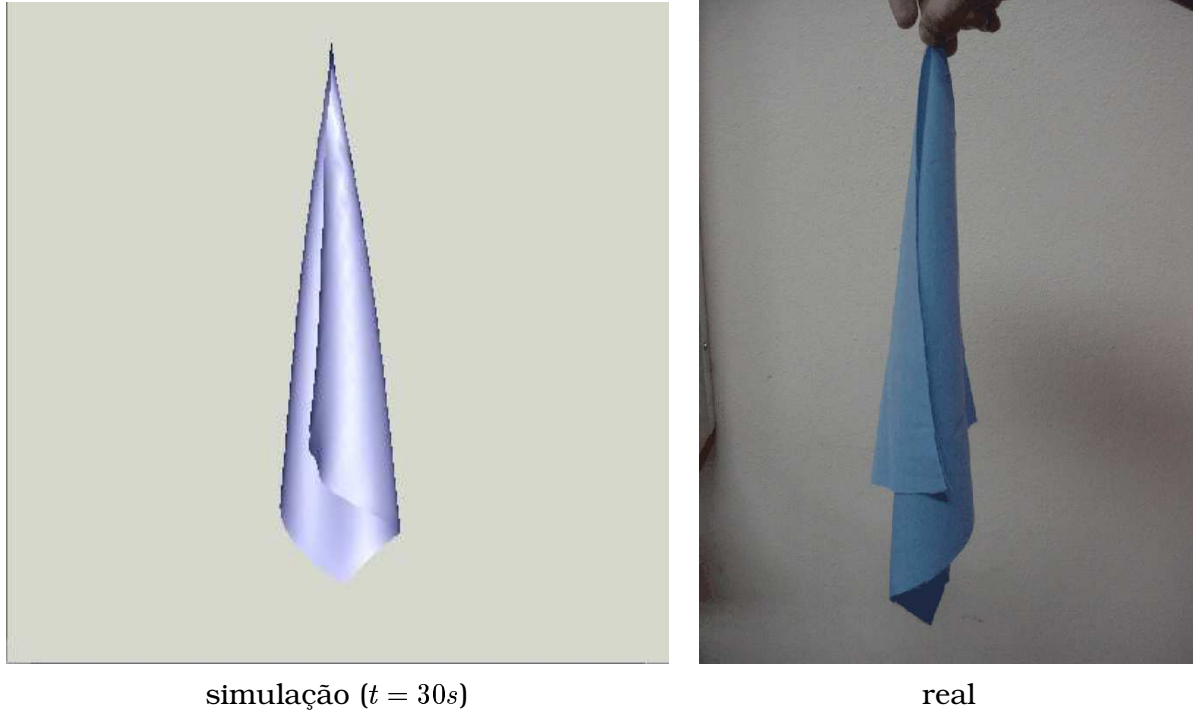


Figura 7.4: Pano suspenso por um ponto.

da equação (5.11) que relacionam as deformações tangenciais com as deformações normais, quando a superfície é inicialmente plana. Esta simulação foi realizada com uma grade 30×30 e os seguintes parâmetros: $\Delta t = 0.01$, $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 190.5$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 220.5$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-4}$, $\phi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-4}$, massa total igual a 737.4, amortecimento total a 220.0 e a superfície inicial como sendo um quadrado, no plano xz , de dimensões 60.0×60.0 . Consideramos o ponto $(0,0)$ como sendo o ponto fixo. Fizemos uso do campo gravitacional $\mathbf{g} = (6.94, 0.0, 6.94)$.

Apresentamos, na Figura 7.5, a simulação de uma bandeira sendo agitada pela ação do vento. Simulamos o vento através de uma força-fluido calculada pela expressão

$$\mathbf{f} = c \left[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \right] \mathbf{n},$$

onde $c = 0.032$ é a resistência da força-fluido e $\mathbf{u} = (0.0, 3.0, 0.0)$ é a velocidade de fluxo constante. Percebemos, com a Figura 7.5, o quanto as ondulações formadas na superfície da bandeira aumenta o realismo da simulação. Foi utilizada uma grade 20×20 numa superfície inicial quadrada, no plano xz , cujas dimensões são 6.0×6.0 . Os pontos fixos usados para simular a bandeira suspensa foram $(0,0)$ e $(19,0)$. A força da gravidade utilizada foi $\mathbf{g} = (-0.1, 0.0, 0.0)$. Utilizamos também os seguintes parâmetros: $\Delta t = 0.04$, $\zeta_{\alpha\beta} = 0.8$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-3}$, $\phi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-4}$, massa total igual a 5.0 e amortecimento total igual a 2.0.

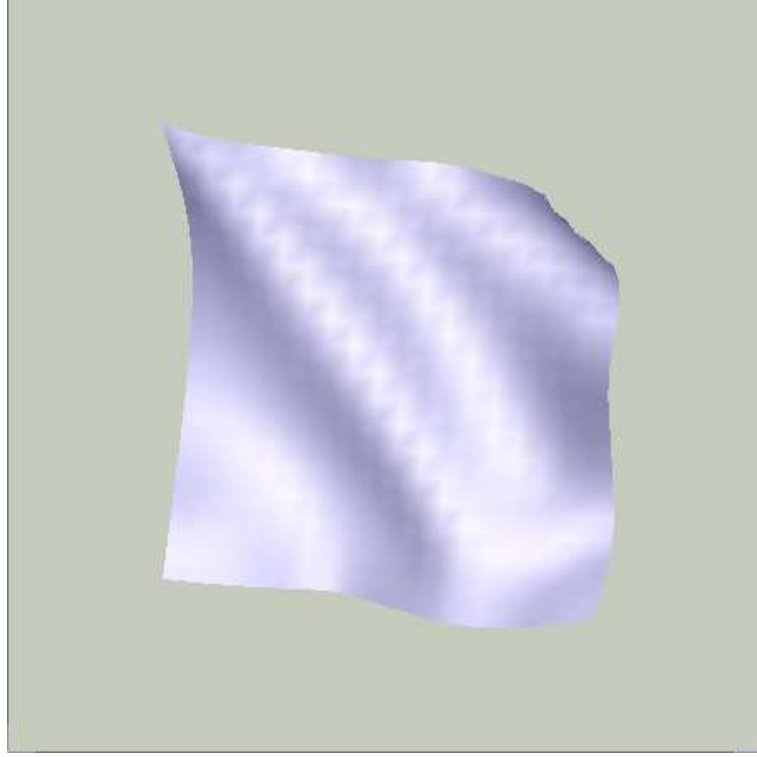


Figura 7.5: Bandeira ao vento ($t = 2min$).

Mostramos na Figura 7.6 uma sequência da simulação de um pano sendo dobrado na direção diagonal. É aplicada uma força pontual, constante em intensidade e de direção variável no tempo, seguindo uma trajetória semi-circular, num canto do tecido, para dobrá-lo na direção do outro canto fixo. Foi utilizada uma grade 20×20 numa superfície inicial quadrada, no plano xz , de dimensões 6.0×6.0 . Utilizamos o ponto $(0, 0)$ como ponto fixo e o ponto $(19, 19)$ como o ponto onde a força é aplicada. Foram utilizados os seguintes parâmetros: $\Delta t = 0.04$, $\zeta_{\alpha\beta} = 0.8$, $\xi_{\alpha\beta} = 5.0 \times 10^{-4}$, $\phi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-3}$, massa total igual a 15.0 e amortecimento total igual a 9.0. Utilizamos ainda $k_1 = k_7 = 1.5$. Observamos na Figura 7.6 a boa dobradura do tecido semelhantemente a um pano duro como um tapete.

A seguir, exibimos os resultados de uma simulação semelhante à da Figura 7.6, diferenciando nas resistências de materiais $\zeta_{\alpha\beta} = 1.5$ e $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-2}$, e nos fatores de correção $k_5 = k_{11} = 0.0$. Observe na Figura 7.7 que com o aumento da rigidez da superfície percebemos uma maior rigidez para dobrá-la em relação a simulação da Figura 7.6.

Para concluir as simulações desta seção, apresentamos o resultado de uma simulação de uma cortina suspensa por alguns pontos sob a ação da gravidade (Figura

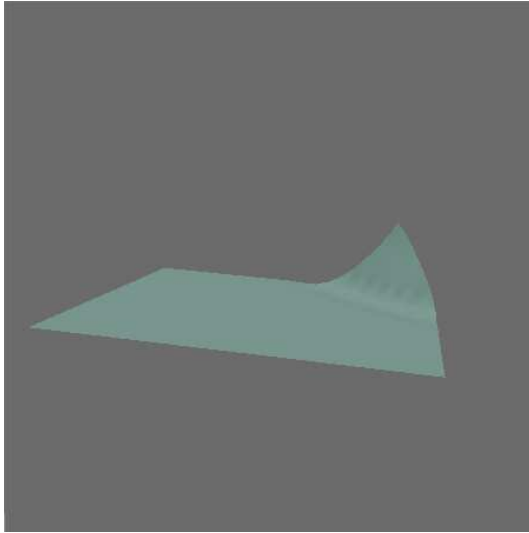
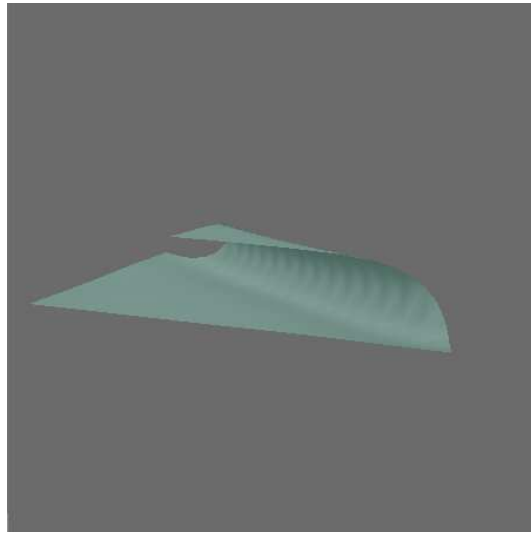
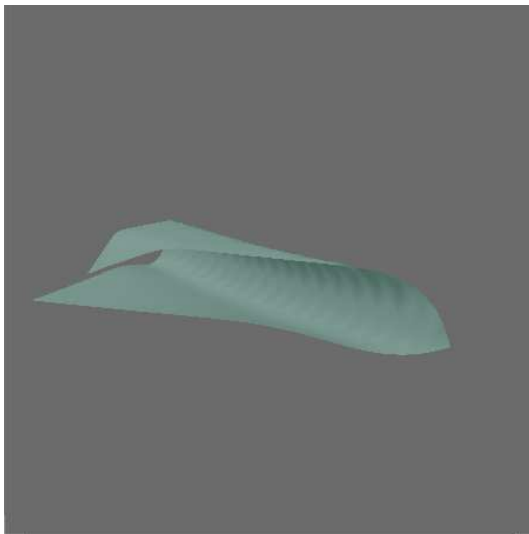
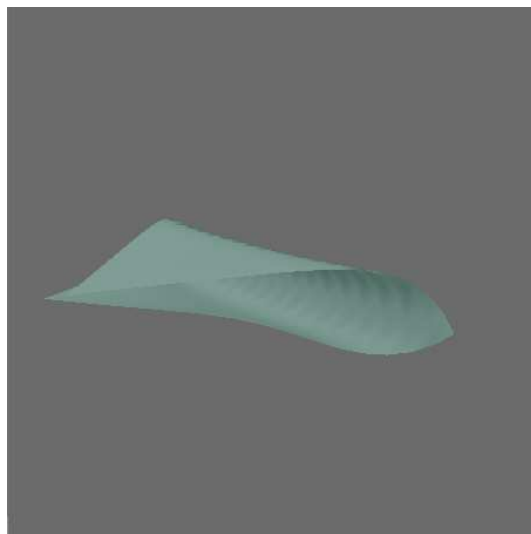
(a) $t = 6.4s$ (b) $t = 62.4s$ (c) $t = 108.8s$ (d) $t = 128s$

Figura 7.6: Pano dobrado ($\zeta_{\alpha\beta} = 0.8$, $\xi_{\alpha\beta} = 5.0 \times 10^{-4}$).

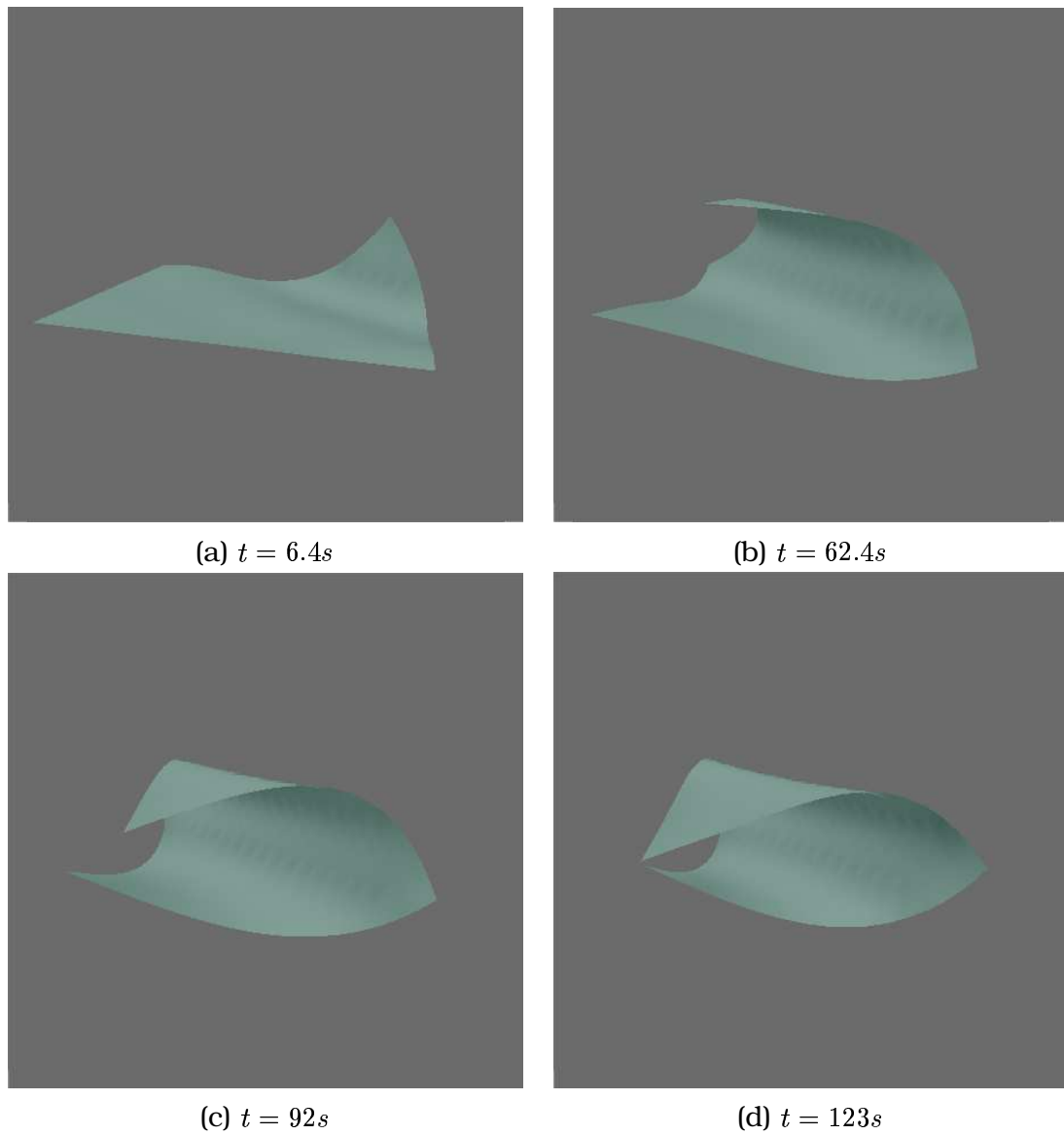


Figura 7.7: Pano dobrado ($\zeta_{\alpha\beta} = 1.5$ e $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-2}$).

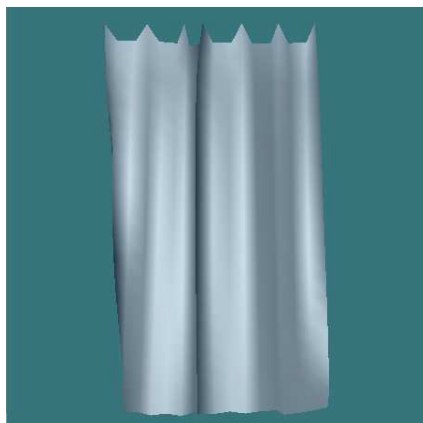
simulação ($t = 76s$)

Figura 7.8: Cortina suspensa.

7.8). Utilizamos uma malha quadrada 19×19 e os parâmetros de entrada utilizados foram: $\Delta t = 0.04$, $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 8.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 9.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 3.0 \times 10^{-3}$, $\phi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-1}$, massa total igual a 80.16, amortecimento total igual a 60.2 e a superfície inicial como sendo um quadrado, no plano xy , de dimensões 20.0×20.0 . A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (-9.81, 0.0, 0.0)$. Consideramos os seguintes pontos fixos nas coordenadas x e z : $(18, 0)$, $(18, 3)$, $(18, 6)$, $(18, 9)$, $(18, 12)$, $(18, 15)$, $(18, 18)$. Porém, os pontos $(18, 0)$ e $(18, 18)$ ficaram fixos nas coordenadas x e z por um período de tempo de $t = 3.6s$ e $t = 4.4s$, respectivamente. Após esse período fixado, tornamos os pontos fixos nas três coordenadas. As deformações tangenciais (elongações ou compressões e cisalhamentos) provocam as dobras e rugas, devido as mesmas afetarem a variação da curvatura através de $\phi_{\alpha\beta}$. Observamos uma boa aparência visual devido o bom controle de curvatura, dobras e rugas, proporcionado pelo nosso modelo.

Consideramos os resultados obtidos nesta seção como sendo bons, pois os objetos simulados apresentaram um comportamento de acordo como imaginávamos que ocorreria com uma cena real, deixando-nos convictos do cumprimento do objetivo de controle de formação de dobras e dobraduras.

7.2 Caimento de Tecido de Pano

Nesta seção, exibiremos resultados de caimento de tecidos de pano obtidos com nosso modelo e resultados reais, para efeito de comparações.

Poderíamos ter adotado outros procedimentos para validação do nosso modelo.

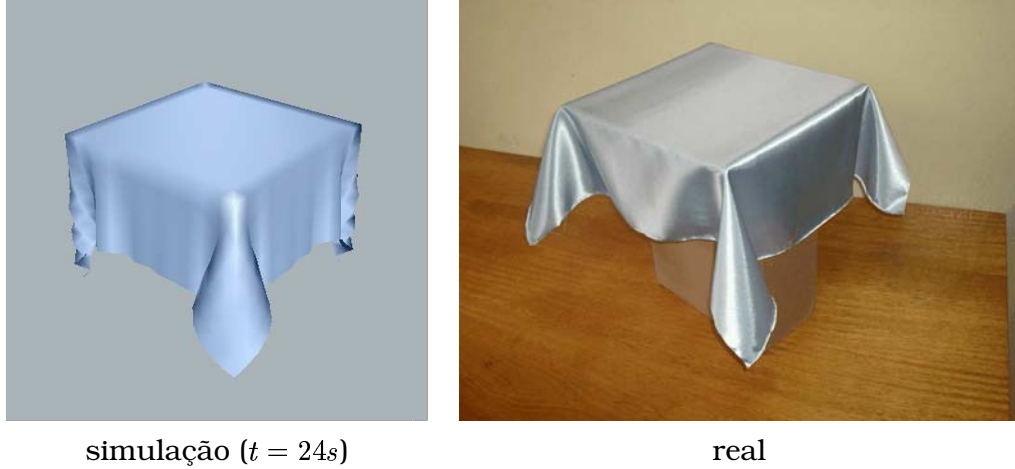


Figura 7.9: Caimento sobre uma mesa quadrada de um pano polyester.

Um procedimento seria realizar alguns testes para compará-los aos resultados de algum *benchmark* que norteiam pesquisadores na validação de seus modelos. Por exemplo, poderíamos utilizar: o sistema de avaliação de Kawabata [53] desenvolvido para fazer testes com tecido para obter dados referente a parâmetros do material, deformações e forças, para compará-los aos resultados de nosso modelo. Mas, isso seria útil para mostrar a precisão física do modelo, que é conveniente para engenharia mecânica. Um outro procedimento seria o de realizar simulações comparativas entre o nosso e outros modelos (sistemas de partículas e contínuos). Mas, isso necessitaria de muito tempo para a realização da implementação de cada um, ambientação com cada um deles e realização das simulações. Como nosso interesse maior é no realismo visual, optamos por comparar os resultados das simulações com as fotos de cenas reais.

A Figura 7.9 mostra o caimento de um tecido quadrado sobre uma mesa quadrada, com pequena resistência à curvatura. A malha utilizada é 26×26 e os valores dos parâmetros são: $\Delta t = 0.02$, $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 30.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 35.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.0$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, massa total igual a 733.0, amortecimento total igual a 500.0 e a superfície inicial como sendo um quadrado, no plano xz , de dimensões 60.0×60.0 . A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (0.0, -9.81, 0.0)$. Consideramos os seguintes pontos fixos para simular a mesa quadrada: $(6, 6)$ a $(6, 19)$, $\dots$, $(19, 6)$ a $(19, 19)$. O objetivo foi simular o caimento de um tecido tipo polyester (densidade de massa igual a 0.212 kg/m^2) medindo $60 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ sobre um objeto quadrado medindo $31 \text{ cm} \times 31 \text{ cm}$ preservando as devidas proporções da mesa com o tecido da simulação. Perceba como conseguimos, com um razoável número de pontos da malha, obter um bom resultado de caimento, dando uma aparência visual bastante próxima da real.

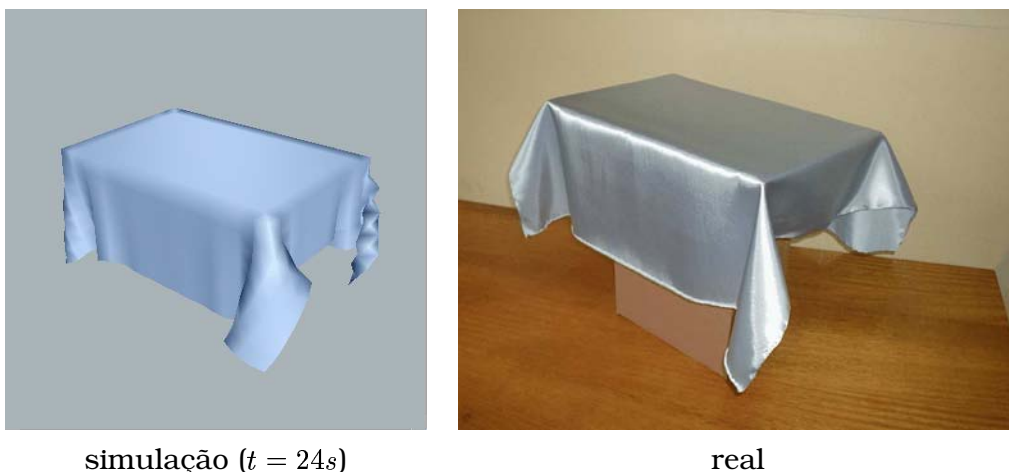


Figura 7.10: Caimento sobre uma mesa retangular de um pano polyester.

O resultado da simulação do caimento de um tecido do tipo polyester medindo $60cm \times 60cm$ sobre um objeto retangular medindo $40.8cm \times 26.4cm$ é apresentado na Figura 7.10. Utilizamos nesta simulação os seguintes parâmetros: a malha utilizada é 26×26 , $\Delta t = 0.02$, $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 70.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 75.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-1}$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, massa total igual a 733.0, amortecimento total igual a 500.2 e a superfície inicial como sendo um quadrado, no plano xz , de dimensões 60.0×60.0 . A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (0.0, -9.81, 0.0)$. Consideramos os seguintes pontos fixos para simular a mesa retangular: $(4, 7)$ a $(4, 18)$, $\dots$, $(21, 7)$ a $(21, 18)$.

É bom comentarmos que, por não termos um algoritmo eficiente para colisões, tivemos algumas dificuldades em obter bons resultados em duas quinas opostas da mesa quadrada e retangular, com a malha 26×26 , pelos vincos formados após a queda, devido ao modelo computacional ser menos tolerante à perda de regularidade da superfície à medida que aumentamos o refinamento da malha. O modelo contínuo, sobre o qual nosso modelo se embasa, tem como pré-requisito a superfície ser regular. Os vincos formados são devido as fronteiras terem comportamentos de resistências diferentes nestas quinas, inerentes ao método das diferenças finitas, diferenciando do comportamento da imagem real. As outras quinas que se assemelham ao comportamento da imagem real tem o mesmo comportamento de resistência nas fronteiras via método das diferenças finitas.

A Figura 7.11 mostra o resultado de simulação do caimento de um tecido do tipo polyester medindo $60cm \times 60cm$ sobre uma mesa redonda de raio igual a $18cm$. Utilizamos nesta simulação uma malha 31×31 e os seguintes parâmetros: $\Delta t = 0.01$, $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 30.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 35.0$, $\xi_{11} = \xi_{22} = 1.0$, $\xi_{12} = \xi_{21} = 0.0$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, massa total igual a

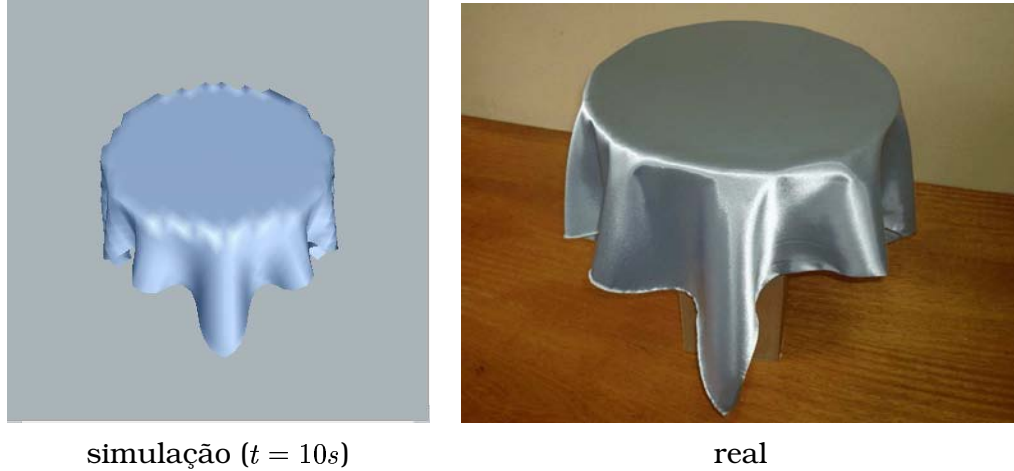


Figura 7.11: Caimento sobre uma mesa redonda de um pano polyester.

738.0, amortecimento total igual a 506.0 e a superfície inicial como sendo um quadrado, no plano xz , de dimensões 60.0×60.0 . A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (0.0, -9.81, 0.0)$. Consideramos os seguintes pontos fixos para simular a mesa redonda: (6, 13) a (6, 17), (7, 11) a (7, 19), (8, 9) a (8, 21), (9, 8) a (9, 22), (10, 8) a (10, 22), (11, 7) a (11, 23), (12, 7) a (12, 23), (13, 6) a (13, 24), (14, 6) a (14, 24), (15, 6) a (15, 24), (16, 6) a (16, 24), (17, 6) a (17, 24), (18, 7) a (18, 23), (19, 7) a (19, 23), (20, 8) a (20, 22), (21, 8) a (21, 22), (22, 9) a (22, 21), (23, 11) a (23, 19) e (24, 13) a (24, 17). Comparando as duas imagens da Figura 7.11 percebemos o bom caimento do tecido sobre a mesa redonda obtido com o nosso modelo de superfície deformável.

A Figura 7.12 mostra a simulação do caimento de um tecido mais rígido (densidade de massa $0.222kg/m^2$) que o tecido das figuras anteriores. Utilizamos nesta simulação uma malha menor (21×21) e os parâmetros de entrada foram: $\Delta t = 0.005$, $\zeta_{\alpha\alpha} = 600.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 700.0$, $\xi_{\alpha\alpha} = 70.0$, $\xi_{12} = \xi_{21} = 90.0$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, massa total igual a 800.0, amortecimento total igual a 3000.0 e a superfície inicial como sendo um quadrado, no plano xz , de dimensões 60.0×60.0 . A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (0.0, -9.81, 0.0)$. Consideramos os seguintes pontos fixos para simular a mesa redonda: (4, 9) a (4, 11), (5, 7) a (5, 13), (6, 6) a (6, 14), (7, 5) a (7, 15), (8, 5) a (8, 15), (9, 4) a (9, 16), (10, 4) a (10, 16), (11, 4) a (11, 16), (12, 5) a (12, 15), (13, 5) a (13, 15), (14, 6) a (14, 14), (15, 7) a (15, 13) e (16, 9) a (16, 11). Comparando a imagem da simulação com a imagem real, percebemos uma grande semelhança da planaridade ocorrida na parte frontal como também o arqueamento entre duas partes planares.

Para concluir as simulações desta seção, apresentamos na Figura 7.13 um pano do tipo polyester suspenso por dois pontos sob a ação da gravidade, diferentemente da

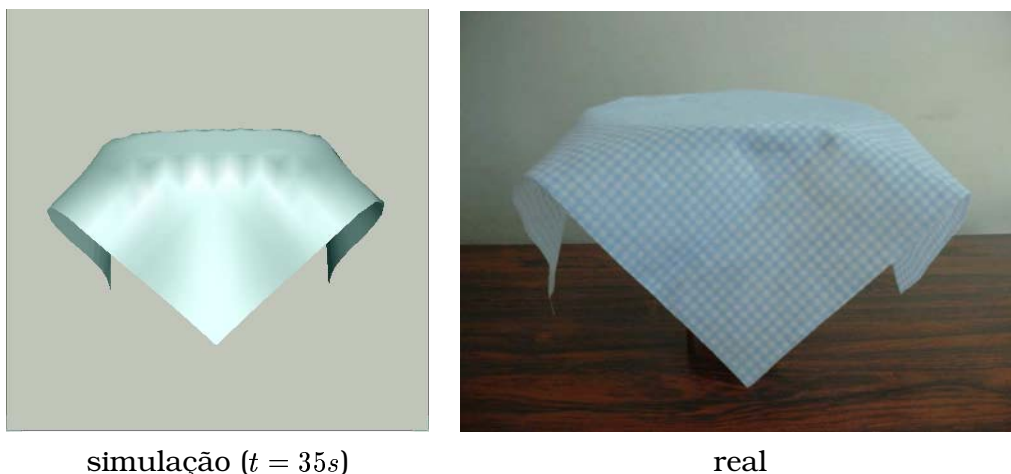


Figura 7.12: Caimento de tecido rígido sobre uma mesa redonda.

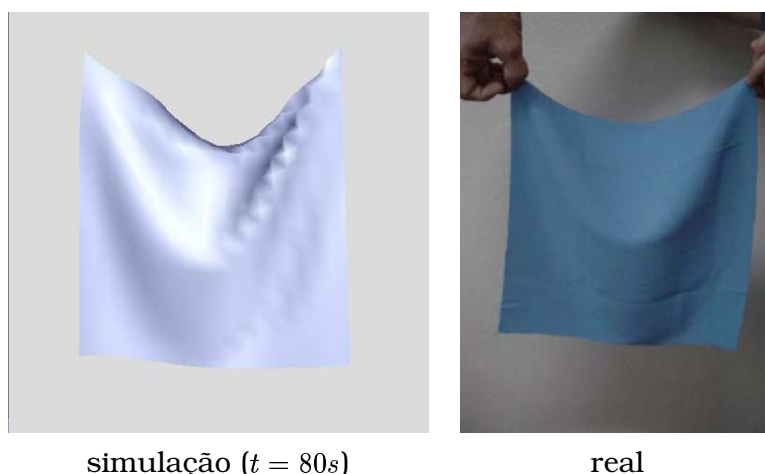


Figura 7.13: Caimento de um pano tipo polyester suspenso por dois pontos.

simulação da Figura 7.4 na qual o pano está suspenso por apenas um ponto. Utilizamos uma malha quadrada 20×20 e os parâmetros de entrada utilizados foram: $\Delta t = 0.02$, $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 300.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 500.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-4}$, $\phi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-4}$, massa total igual a 723.56, amortecimento total igual a 520.0 e a superfície inicial como sendo um quadrado, no plano xy , de dimensões 60.0×60.0 . A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (-9.81, 0.0, 0.0)$. Consideramos os seguintes pontos fixos: $(19, 0)$ e $(19, 19)$. Inicialmente, consideramos o ponto $(19, 19)$ fixo nas coordenadas x e z , por um período de tempo de $t = 2.2s$. Após esse período, tornamos o ponto fixo nas três coordenadas. Nesta simulação, também foi usado $k_1 = k_7 = 1.5$. Este artifício foi necessário para forçarmos pequenas deformações tangenciais que, por sua vez, afetam a variação da curvatura através de $\phi_{\alpha\beta}$. Com isso obtivemos na simulação um caimento comparável à imagem real.

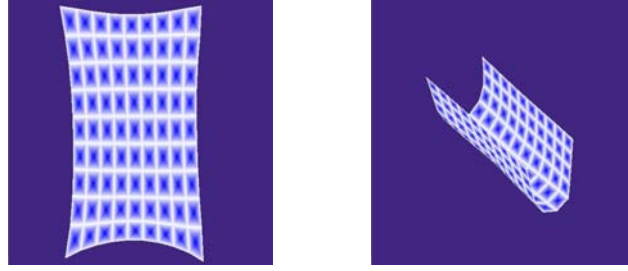
Podemos afirmar que as simulações desta seção mostram que o nosso modelo de superfície deformável oferece uma boa ferramenta para modelagem de caimentos de tecidos, comparáveis às imagens reais. Se acrescentarmos, ao modelo de superfície deformável proposto nesta tese, um algoritmo eficiente de auto-colisões e colisões com objetos da cena, podemos aprimorar ainda mais o realismo dos resultados obtidos.

7.3 Simulações de Controles Isotrópicos e Anisotrópicos

Nesta seção apresentaremos dois tipos de simulação para exemplificar o controle de comportamentos de materiais isotrópicos e anisotrópicos. Isto é, simularemos superfícies que tem a mesma rigidez nas duas linhas coordenadas (isotrópicas) e superfícies que tem linhas coordenadas com rigidez diferentes (anisotrópica). Faremos as simulações com relação a rigidez métrica e a rigidez para curvar separadamente.

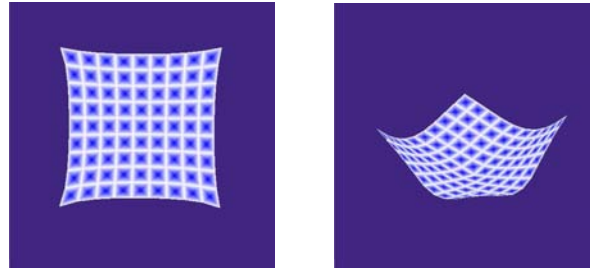
Na Figura 7.14 apresentamos resultados de duas simulações diferentes, exemplificando alguns dos controles anisotrópicos obtido com os parâmetros. A Figura 7.14.a é o resultado da simulação de uma superfície quadrada elástica com moderada resistência à variação métrica numa direção coordenada e grande resistência na outra direção sob a ação de forças diagonais de igual intensidade nos quatro cantos no sentido a esticá-la. A superfície inicial é um quadrado 6.0×6.0 , a malha utilizada é 10×10 e os parâmetros de simulação foram: massa total 5.0, amortecimento total 1.0, $\zeta_{11} = 1.0 \times 10^{-2}$, $\zeta_{22} = \zeta_{12} = \zeta_{21} = 3.0 \times 10^{-1}$ e as forças externas $\mathbf{F}(0,0) = (-1.0, 0.0, -1.0)$, $\mathbf{F}(0,9) = (-1.0, 0.0, 1.0)$, $\mathbf{F}(9,0) = (1.0, 0.0, -1.0)$ e $\mathbf{F}(9,9) = (1.0, 0.0, 1.0)$. Como as forças externas que atuam na superfície plana são forças tangentes no sentido a esticá-la, os parâmetros $\xi_{\alpha\beta}$ e $\phi_{\alpha\beta}$ não terão influência alguma pois, como esperado, as forças tangentes são predominantes neste tipo de simulação, mantendo a superfície plana. Observe como a superfície se distende numa direção enquanto que na outra, não. Na Figura 7.14.b simulamos uma força perpendicular aplicada no centro da mesma superfície quadrada com diferentes resistências à variação da curvatura e grande resistência à variação métrica. A malha utilizada é 11×11 e os parâmetros de simulação foram: massa total 27.0, amortecimento total 10.0, $\zeta_{\alpha\beta} = 1.0$, $\xi_{11} = \xi_{12} = \xi_{21} = 1.0 \times 10^{-2}$, $\xi_{22} = 1.0 \times 10^{-3}$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, e a força externa $\mathbf{F}(5,5) = (0.0, -0.5, 0.0)$. Observe, neste exemplo, como o objeto curvou-se na direção de resistência menor.

Na Figura 7.15 apresentamos resultados de duas simulações idêntica a da Figura 7.14, exemplificando alguns dos controles isotrópicos obtido com os parâmetros. Neste caso, na Figura 7.15.a $\zeta_{\alpha\beta} = 3.0 \times 10^{-1}$ e na Figura 7.15.b $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-2}$.



(a) elongações distintas (b) curvaturas distintas

Figura 7.14: Superfícies anisotrópicas.



(a) elongações iguais (b) curvaturas iguais

Figura 7.15: Superfícies isotrópicas.

Desta forma, com as simulações apresentadas nesta seção, percebemos que podemos simular não só a mesma rigidez nas duas direções coordenadas bem como podemos tornar as duas direções coordenadas com rigidez distintas.

7.4 Simulações de Rigidez

Apresentaremos nesta seção algumas resultados de simulações de controle das deformações de curvatura para superfícies planas e superfícies não-planas no estado inicial.

Inicialmente, apresentaremos algumas simulações mostrando o controle das deformações de curvatura, para superfícies planas, obtida com a nossa proposta de aproximação para o vetor normal. Utilizamos nas simulações que se seguem o limiar $\delta = 0.5$.

A Figura 7.16 apresenta uma sequência de uma simulação de forças aplicadas nos quatro cantos de uma malha inicialmente plana, com grande resistência à curvatura. Os parâmetros de simulação foram: $\delta t = 0.04$, massa total 27.0, amortecimento total 5.0, $\zeta_{\alpha\beta} = 10.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-1}$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, e a força externa $\mathbf{F}(0,0) = (0.0, -0.3, 0.0)$, $\mathbf{F}(0,10) = (0.0, -0.3, 0.0)$, $\mathbf{F}(10,0) = (0.0, -0.3, 0.0)$ e $\mathbf{F}(10,10) = (0.0, -0.3, 0.0)$. A malha

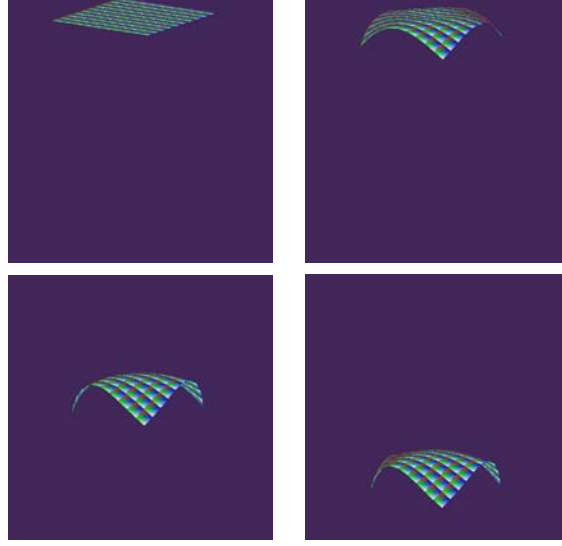


Figura 7.16: Forças nos cantos com grande resistência para curvar-se ($t = 40s$).

utilizada é 11×11 e a superfície inicial é um quadrado 6.0×6.0 .

Para comparação, a Figura 7.17 mostra uma sequência de uma simulação de uma força aplicada nos quatro cantos da malha inicialmente plana, como na Figura 7.16, com uma pequena resistência à curvatura $\xi_{\alpha\beta} = 5.0 \times 10^{-5}$.

Simulamos o caimento de um material tipo pano sobre a mesa com pequena e grande resistência a curvatura, como mostram as Figuras 7.18 e 7.19, respectivamente. Os parâmetros de simulação foram: $\delta t = 0.01$, massa total 7.0, amortecimento total 7.0, $\zeta_{\alpha\alpha} = 20.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 27.5$, $\xi_{\alpha\alpha} = 1.0 \times 10^{-4}$, $\xi_{12} = \xi_{21} = 0.0$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, e a força gravitacional $\mathbf{g} = (0.0, -1.0, 0.0)$. A malha utilizada é 10×10 e a superfície inicial é um quadrado 6.0×6.0 . A simulação com grande resistência foi simulada com os parâmetros: $\xi_{\alpha\alpha} = 7.0 \times 10^{-2}$, $\xi_{12} = \xi_{21} = 3.0 \times 10^{-2}$, $\psi_{\alpha\alpha} = 7.0 \times 10^{-2}$, $\psi_{12} = \psi_{21} = 3.0 \times 10^{-2}$.

Até o presente momento, as simulações realizadas tiveram como superfície inicial uma superfície plana. O nosso modelo não é restritivo à superfície plana no seu estado inicial. Faremos algumas simulações de rigidez de superfícies não planas no seu estado inicial.

A Figura 7.20 mostra a simulação de uma superfície rígida empurrada por uma força no seu ponto central. A superfície da simulação é parte de uma esfera parametrizada pela projeção estereográfica num domínio retangular. Fazemos uso do limiar $\delta = 0.1$ e os parâmetros: malha 11×11 , $\Delta t = 0.04$, $\zeta_{\alpha\beta} = 0.7$, $\xi_{\alpha\beta} = 5.0 \times 10^{-3}$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, massa total igual 3.0 e amortecimento total 2.0. A esfera tem raio $r = 2.0$ e o domínio é um quadrado:

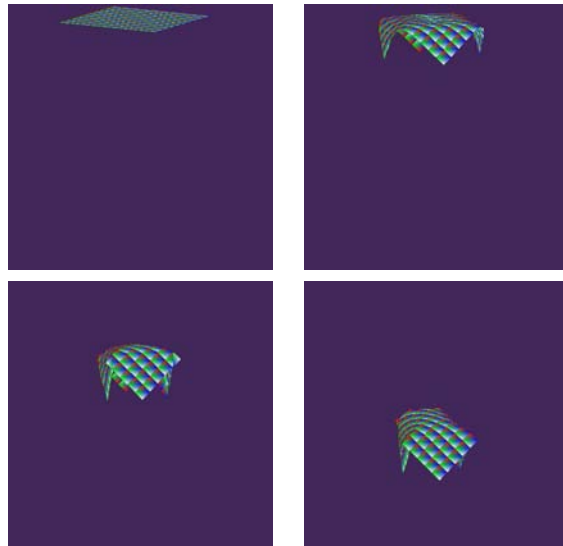


Figura 7.17: Forças nos cantos com pequena resistência para curvar-se ($t = 100s$).

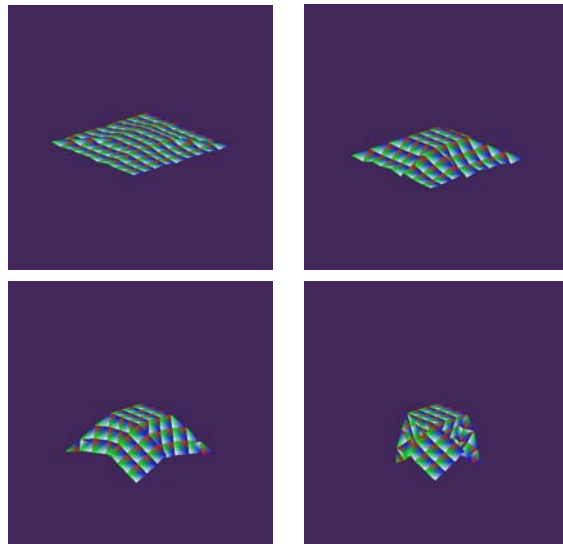


Figura 7.18: O caimento de uma toalha de tecido de pano ($t = 75s$).

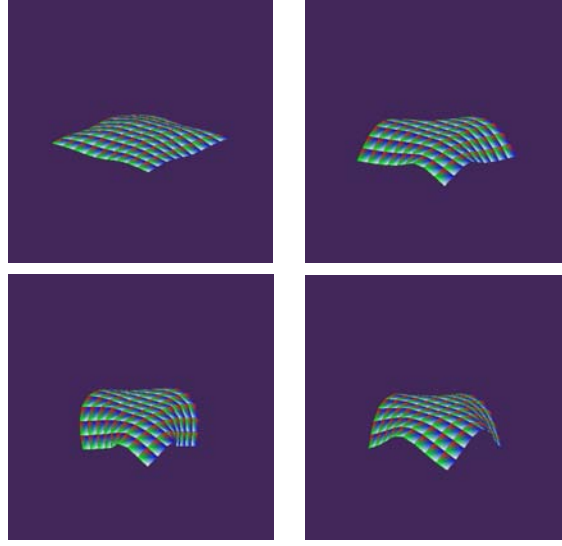


Figura 7.19: O caimento de uma toalha de um tecido de pano mais rígido ($t = 45s$).

$-2.0 \leq u \leq 2.0$ e $-2.0 \leq v \leq 2.0$. A força externa de intensidade igual a 1.0 é aplicada num ponto central da malha, isto é, $\mathbf{F}[5, 5] = (0.0, -1.0, 0.0)$. Observe como a forma do pedaço de esfera é mantida junto com o seu caimento vertical.

Para comparação, efetuamos na Figura 7.21 a mesma simulação da Figura 7.20 sem resistência à mudança de curvatura, isto é, $\xi_{\alpha\beta} = 0.0$. Veja que, após alguns quadros, não temos mais a forma esférica inicial.

Como nas simulações anteriores (figuras 7.20 e 7.21), efetuamos simulações de rigidez com um pedaço de um toro (figuras 7.22 e 7.23). A força é aplicada em três pontos consecutivos de uma curva coordenada, com um deles no centro da malha, isto é, $\mathbf{F}[5, 6] = (0.5, 0.0, 0.0)$, $\mathbf{F}[6, 6] = (0.5, 0.0, 0.0)$ e $\mathbf{F}[7, 6] = (0.5, 0.0, 0.0)$. Parâmetros de entrada: malha 13×13 , $\Delta t = 0.04$, $\zeta_{\alpha\beta} = 1.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-3}$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$, massa total igual a 20.0 e amortecimento total igual a 10.0. O toro tem raio maior $R = 1.5$ e raio menor $r = 0.5$. Na Figura 7.23 utilizamos $k_1 = k_7 = 0.5$, $\xi_{11} = \xi_{11} = 3.0 \times 10^{-4}$, $\xi_{12} = \xi_{21} = 0.0$.

Observe na Figura 7.22 a preservação da forma do toro junto com o seu caimento vertical, o que não acontece na Figura 7.23. Usamos o limiar $\delta = 0.1$.

No restante das simulações desta seção utilizamos o limiar $\delta = 0.5$.

Na simulação da figura (7.24), uma superfície cilíndrica senoidal com as bordas maiores fixadas, $(0, 0)$ à $(16, 0)$ e $(0, 10)$ à $(16, 10)$, é submetida a ação da gravidade. A mesma possui uma grande resistência à variação da métrica. Na Figura 7.24.a simulamos sem resistência à mudança da curvatura e na Figura 7.24.b com resistência à

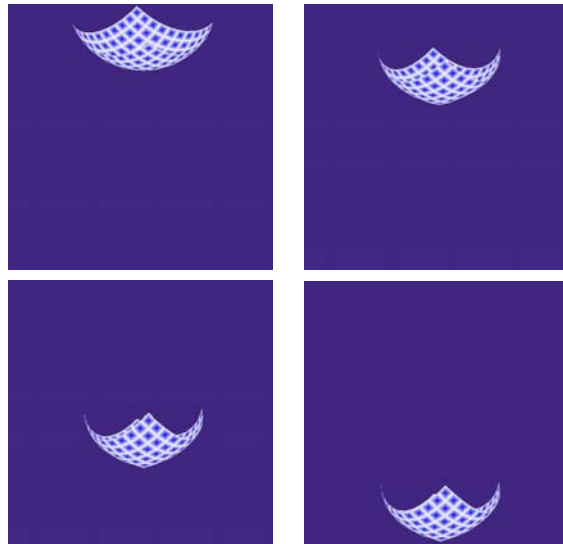


Figura 7.20: Peça de esfera resistente.

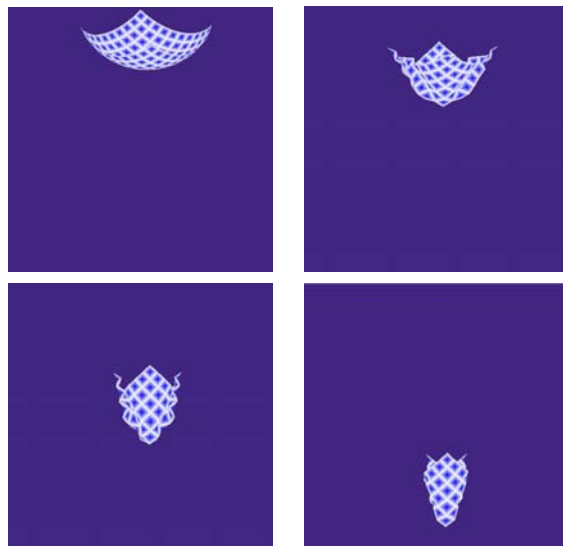


Figura 7.21: Peça de esfera dobrável.

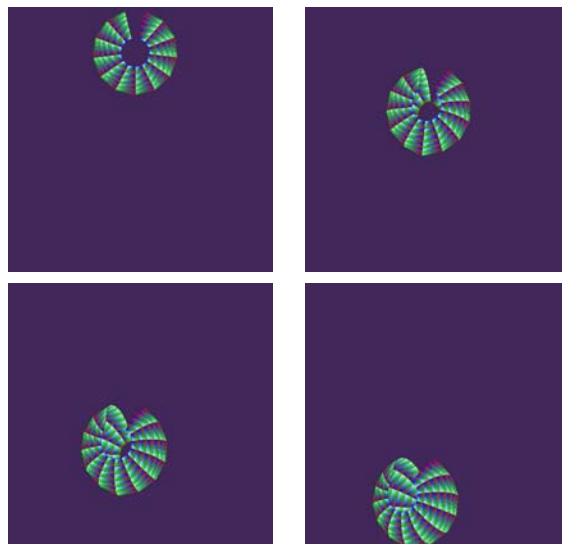


Figura 7.22: Peça de toro resistente.

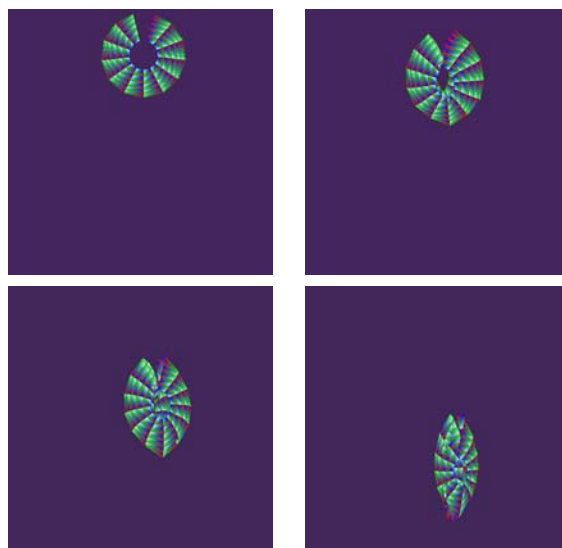


Figura 7.23: Peça de toro dobrável.

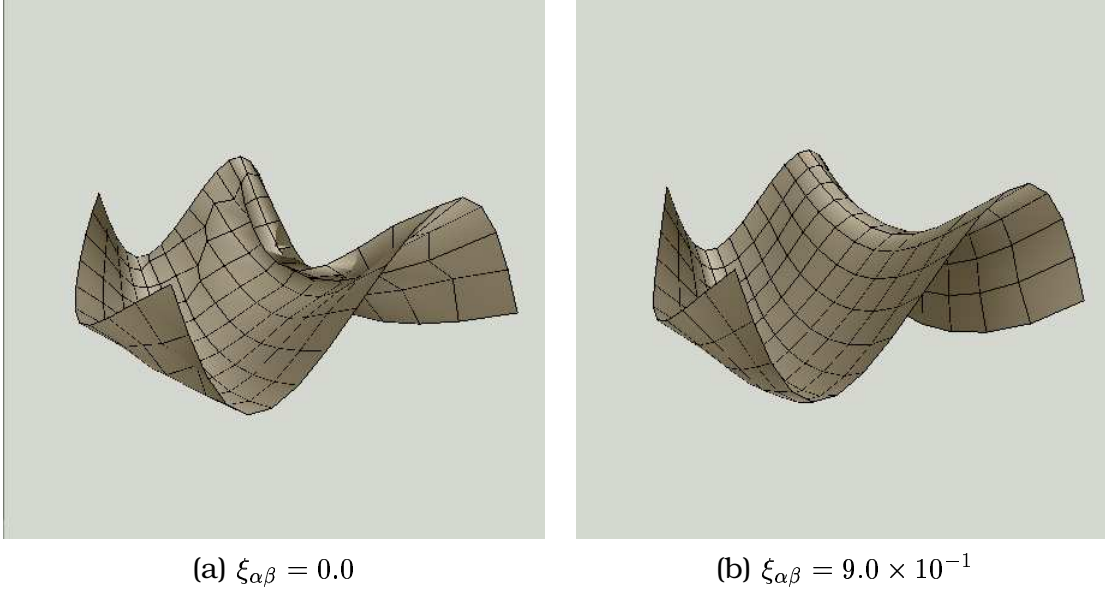


Figura 7.24: Superfície cilíndrica senoidal com curvas fronteira maiores fixas ($t = 7.5s$).

mudança da curvatura. Parâmetros de entrada foram: malha 17×11 , $\Delta t = 0.005$, $\zeta_{\alpha\beta} = 24.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 0.0$ ou $\xi_{\alpha\beta} = 9.0 \times 10^{-1}$, $\phi_{\alpha\beta} = 1.0 \times 10^{-1}$, massa total igual a 5.0 e amortecimento total igual a 20.0. A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (0.0, -9.81, 0.0)$. Utilizamos $k_5 = k_{11} = 0.0$.

Efetuamos na Figura 7.25 as simulações da Figura 7.24 mudando as bordas fixas das maiores para as menores, $(0, 0)$ à $(0, 10)$ e $(10, 0)$ à $(10, 10)$. Os parâmetros de entrada foram: malha 17×11 , $\Delta t = 0.005$, $\zeta_{\alpha\alpha} = 29.0$, $\zeta_{12} = \zeta_{21} = 30.0$, $\xi_{\alpha\beta} = 0.0$ ou $\xi_{\alpha\alpha} = 93.0 \times 10^{-2}$, $\xi_{12} = \xi_{21} = 1.0$, $\phi_{\alpha\beta} = 0.0$ ou $\phi_{\alpha\alpha} = 11.0 \times 10^{-2}$, $\phi_{12} = \phi_{21} = 2.0 \times 10^{-1}$, massa total igual a 5.0 e amortecimento total igual a 20.0. A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (0.0, -9.81, 0.0)$. Utilizamos $k_8 = 5.0$ e $k_{11} = 2.0$.

Observe nas figuras 7.24 e 7.25 como conseguimos um bom controle da rigidez da superfície cilíndrica senoidal.

Concluimos esta seção mostrando nas figuras 7.26 e 7.27 o resultado de simulações de superfícies na forma de um cilindro aberto com uma anel circular e dois pontos dos cantos fixos, sob a ação da gravidade, com material flexível e rígido, respectivamente. O raio e a altura do cilindro são 3.0 e 15.0, respectivamente. Parâmetros de entrada: malha 15×15 , $\Delta t = 0.01$, $\zeta_{\alpha\beta} = 5.5$, $\xi_{\alpha\beta} = 0.05$ ($\xi_{\alpha\beta} = 0.3$), $\phi_{\alpha\beta} = 0.1$, massa total igual a 10.0 e amortecimento total igual a 20.0. A força da gravidade foi simulada pelo campo gravitacional $\mathbf{g} = (0.981, 0.0, 0.0)$. Usamos $k_5 = k_{11} = 2.0$ e $k_1 = k_7 = 0.5$. Os pontos fixos são: $(0, 0)$, $(14, 0)$, $(0, 14)$, ..., $(14, 14)$, $(0, 13)$, ..., $(14, 13)$.

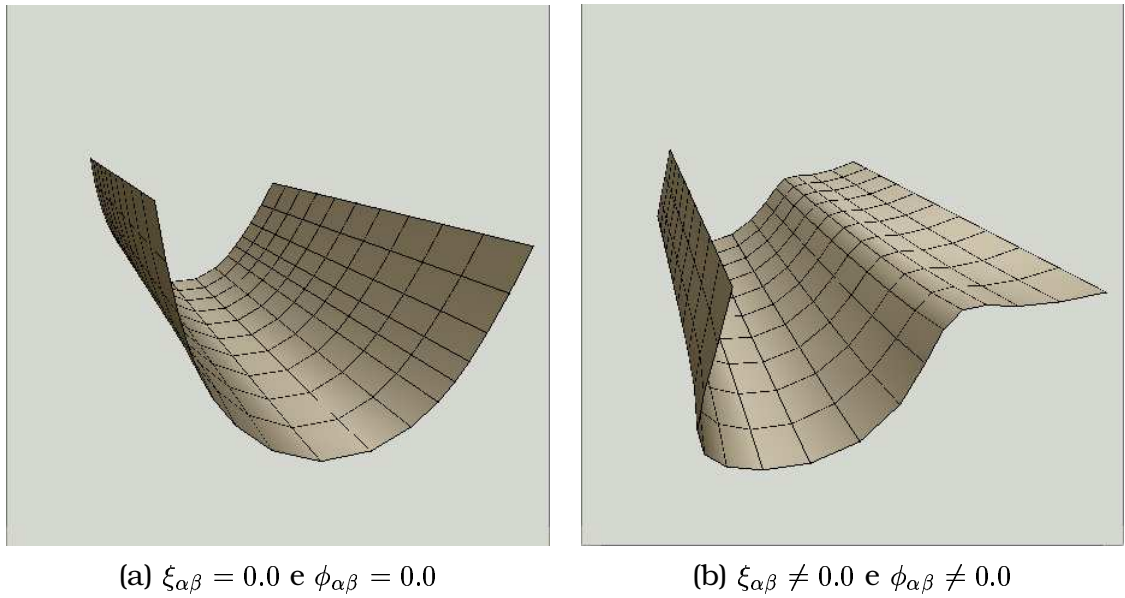


Figura 7.25: Superfície cilíndrica senoidal com curvas fronteira menores fixas ($t = 7.5s$).

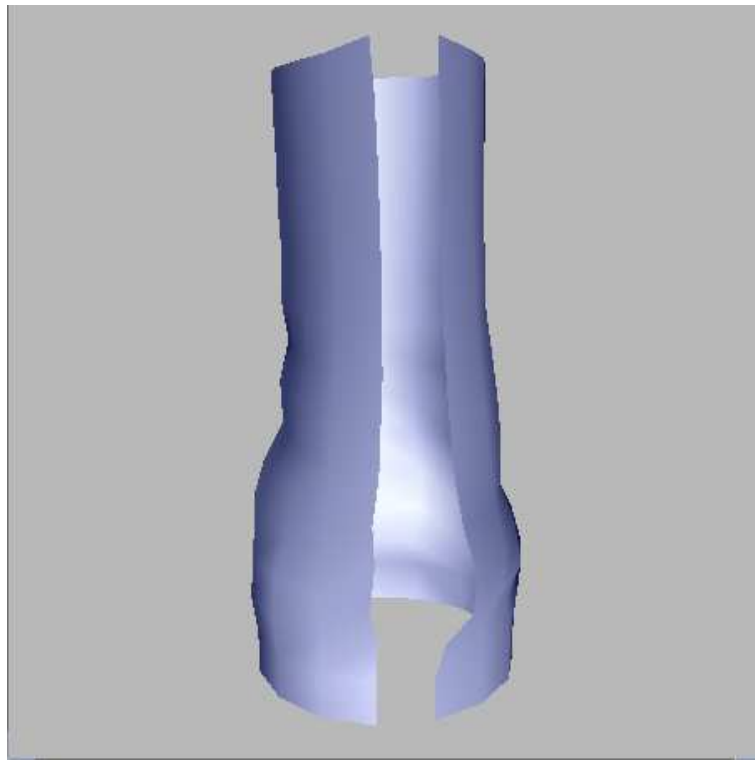


Figura 7.26: Cilindro flexível aberto sob a ação da gravidade ($t = 200s$).

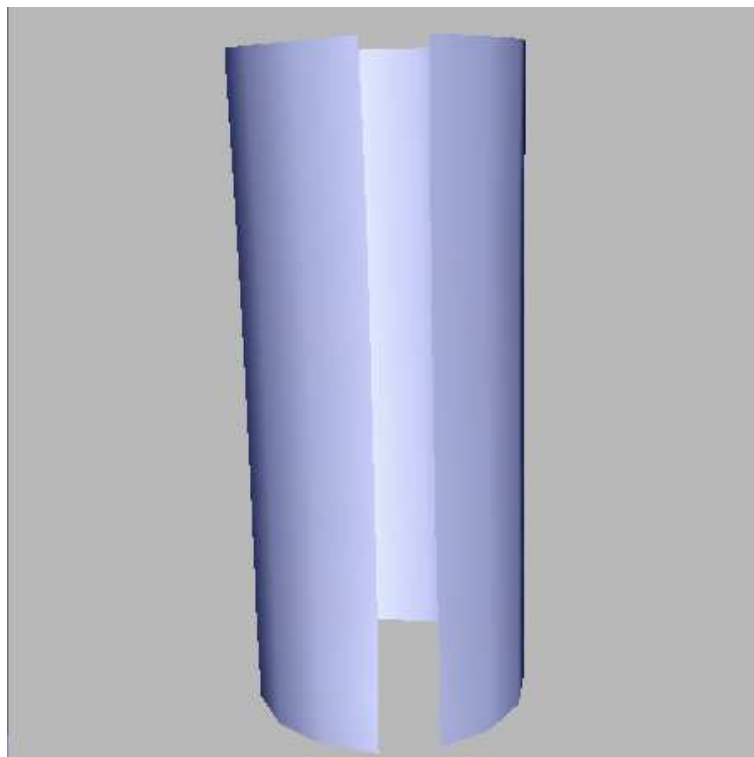


Figura 7.27: Cilindro rígido aberto sob a ação da gravidade ($t = 200s$).

Mostramos nesta seção algumas simulações com o intuito de comprovar o potencial do modelamento, através do modelo de superfície deformável proposto nesta tese, no controle de deformações de curvatura de objetos de forma geométrica plana bem como não-plana. As superfícies não-planas utilizadas foram parte de uma esfera, parte de um toro, uma superfície cilíndrica senoidal e um cilindro. Fizemos uso também de forças pontuais e da gravidade (uniforme). Consideramos bons os resultados obtidos, validando a modelagem de controle de curvatura (rigidez) com o modelo proposto nesta tese.

Sintetizamos na seguinte tabela o tempo de processamento de todas as simulações apresentadas num PC AMD Athlon XP 1700+:

Figura	Tempo de Integração	Tempo de Processamento
Figs. 7.1 e 7.3	$t = 80s$	56min e 19s
Fig. 7.4	$t = 30s$	5h, 35min e 19s
Fig. 7.5	$t = 120s$	28min e 42s
Fig. 7.6	$t = 128s$	33min e 30s
Fig. 7.7	$t = 123s$	29min e 37s
Fig. 7.8	$t = 76s$	38min e 45s
Fig. 7.9	$t = 24s$	58min e 55s
Fig. 7.10	$t = 24s$	57min e 57s
Fig. 7.11	$t = 10s$	2h, 17min e 35s
Fig. 7.12	$t = 35s$	1h, 33min e 54s
Fig. 7.13	$t = 80s$	41min e 21s
Figs. 7.14.a e 7.15.a	$t = 200s$	26s
Figs. 7.14.b e 7.15.b	$t = 400s$	1min e 2s
Figs. 7.16	$t = 40s$	7.8s
Figs. 7.17	$t = 100s$	19.5s
Figs. 7.18	$t = 75s$	47s
Figs. 7.19	$t = 45s$	28s
Figs. 7.20 e 7.21	$t = 400s$	1min e 28s
Figs. 7.22 e 7.23	$t = 400s$	1min e 28s
Figs. 7.24 e 7.25	$t = 7.5s$	36s
Fig. 7.26 e 7.27	$t = 200s$	23min e 36s

Tabela 7.1: Tempo de Processamento

Capítulo 8

Conclusões

Neste trabalho, tivemos como objetivo a proposta de um modelo de superfície deformável, embasado fisicamente num modelo físico bidimensional, com uma interface simples e intuitiva, permitindo-nos uma boa modelagem e controle de caimentos e dobras. Podemos concluir que nossos objetivos foram alcançados, de acordo com os bons resultados apresentados no Capítulo 7.

Nosso modelo de superfície deformável tem uma base física sólida e confiável, voltado diretamente para a superfície. Dessa forma, os parâmetros de controle das deformações são introduzidos naturalmente, via modelo físico, de forma confiável, que nos deixa seguros quanto ao seu uso na relação controle versus resultado esperado, o que não acontece com os modelos de sistemas de partículas, pois a incorporação dos parâmetros de controle das deformações ocorre de uma maneira não tão natural. Além disso, o fato de ser embasado num modelo físico voltado para a superfície, evita-nos fazer uma aproximação de um modelo 3D para um modelo 2D, evitando limitações e perdas, ou fazer uso de um modelo 3D, aumentando o número de parâmetros utilizados, complexidade do modelo e custo computacional.

Consideramos que os termos inseridos na expressão da energia, que relacionam as deformações medidas pelo tensor-métrico com as deformações medidas com o tensor-curvatura, são importantes para garantir a formação de dobras e rugas, um comportamento comum nos tecidos. Isto nos possibilitou um melhor efeito no resultado final. Quando aplicamos forças tangentes à superfície que tentam comprimí-la, surgem forças normais a superfície capazes de gerarem alterações das curvaturas normais, desde que a resistência para curvar permita isto. Este é um comportamento real. Assim, sem a inclusão dos termos comentados acima, uma superfície plana deformaria tangencialmente sem sair do plano que está, se apenas forças tangenciais (forças tangentes a superfície)

agissem sobre ela. Este fato é perceptível quando fazemos $\phi_{\alpha\beta} = 0$.

Observe que os parâmetros de entrada do nosso modelo de superfície deformável são de conceitos simples e intuitivos, como: massa, amortecimento, intervalo de tempo, parâmetros de controle das deformações ($\zeta_{\alpha\beta}$, $\xi_{\alpha\beta}$ e $\phi_{\alpha\beta}$), fatores de correções $k_{i's}$, fator para correção de deslocamento p , etc. Os parâmetros de controle das deformações, originados dos conceitos estabelecidos na teoria de geometria diferencial, têm um apelo geométrico maior, de tal maneira que o usuário é capaz de entender que os parâmetros $\zeta_{\alpha\beta}$ permitem esticar mais ou menos as curvas coordenadas ou controlar a variação do ângulo entre elas, bem como os parâmetros $\xi_{\alpha\beta}$ permitem controlar o quanto a superfície pode curvar-se. Os fatores de correções $k_{i's}$, mesmo definidos empiricamente, controlam as intensidades das forças que atuam na respectiva fronteira de forma bastante próxima de nossa concepção. Isto torna a interface amigável para o usuário.

Em nosso modelo, a densidade de massa e o coeficiente de amortecimento são dados por unidades de área no estado inicial. As densidades e os coeficientes são considerados constantes sobre a superfície e variáveis no tempo. Nos estados intermediários, estimamos as densidades e os coeficientes de acordo com a variação da área da superfície em relação ao estado inicial. Buscamos com isso manter o equilíbrio tentando, de alguma forma, sermos fiéis à lei de conservação de massa, pois a superfície não perde massa ao longo do tempo, isto é, a massa não é dissipada durante a deformação.

Propomos parâmetros que possibilitam simular comportamentos tanto de materiais isotrópicos bem como de materiais anisotrópicos, ampliando o leque de simulações com um bom controle das variações métrica e de curvatura. Por estarem associados ao tensor métrico recíproco, que por sua vez está associado à malha, os parâmetros de elasticidade estarão associados a resolução da malha. Isto possibilita uma melhor adequação do controle das deformações com as características da malha melhorando a estabilidade e equilíbrio do modelo.

Propusemos também uma abordagem para o controle das forças internas sobre a borda para correções de desequilíbrio provenientes da técnica das diferenças finitas e das condições de fronteira. Isto é, propomos os fatores de atenuação para as forças internas atuando sobre a borda, possibilitando correções de desequilíbrio nos resultados do modelo provenientes da técnica das diferenças finitas e das propostas de condições de fronteira. Os fatores de atenuação nos permitem variar a intensidade da força na fronteira, desde uma força nula até uma força superior àquela estimada pelo cálculo proposto no modelo. Com os exemplos da Seção 6.4, mostramos correções de forças tangencias na fronteira e inclinação indevida da superfície. Também damos uma noção

de como, empiricamente, definir estes parâmetros.

Por último, propusemos um fator de atenuação para a força elástica, num ponto onde está sendo aplicada uma força pontual ou local, o que nos possibilita, em geral, diminuir deslocamentos indevidos não esperados. Esta estratégia não corrige totalmente o deslocamento e altera um pouco a forma do objeto por alterarmos a intensidade da força resposta da superfície. Por outro lado, o mesmo aponta para a possibilidade de podermos obter comportamentos diferentes do objeto, a partir da alteração local da resposta, afetando o comportamento global, com as constantes de controle da deformação fixadas. Um trabalho futuro seria encontrar uma abordagem que corrigisse o deslocamento indesejado sem alteração da forma.

Através dos bons resultados das simulações, mostramos o grande potencial do modelo, como um primeiro passo de formulação de uma proposta alternativa de modelamento de superfície deformável. Mostramos diferentes simulações com bons resultados de controle das deformações, de diferente grau de rigidez, enfatizando o caso do controle de mudança de curvatura. O controle de mudança de curvatura é um dos problemas nos modelos de sistemas de partículas mais especificamente, variações nas direções perpendiculares às direções das forças aplicadas. Também foram mostrados resultados condizentes com o comportamento do mundo real para diferentes resistências. Em outras palavras, consideramos os resultados visuais de dobras e caimento de tecidos como similares aos resultados reais. Além disso, com base no nosso censo comum, os controles obtidos nos dão resultados esperados.

Para trabalhos futuros propomos aplicações mais aprimoradas do que as que foram apresentadas nesta tese. Propomos também a inclusão de um algoritmo eficiente para a detecção de auto-colisões e colisões entre objetos.

Devido às dificuldades de abordagem de alguns elementos não definidos sobre a fronteira no método das diferenças finitas bem como das correspondentes dificuldades e desequilíbrio, consideramos que o uso do método dos elementos finitos poderia corrigir estas dificuldades. O tempo de processamento e grande espaço de memória requisitados pelo método dos elementos finitos dificultam o seu uso. Para a questão de memória, a inclusão no algoritmo do tratamento do mesmo com matrizes esparsas poderia resolver. A questão de tempo é mais delicada. Um primeiro tratamento seria evitar os cálculos desnecessários. Uma outra saída seria a utilização de alguma técnica que possibilitasse o desacoplamento das equações, tornando a matriz do sistema diagonal. Já existem técnicas de desacoplamento, utilizadas em propostas de elementos finitos, como *análise modais e decomposição espectral de Lanczos* [7].

Poderíamos também utilizar matrizes esparsas para a questão de custo computacional de memória no método das diferenças finitas. Para o problema de custo computacional de tempo, conjecturamos que poderíamos adaptar uma das técnicas de desacoplamento utilizadas no método dos elementos finitos. A longo prazo, para a questão de custo computacional de tempo, tanto no método das diferenças finitas como no método dos elementos finitos, apostamos no avanço tecnológico que certamente amenizará este problema. Já temos máquinas de processamento velozes, e a cada ano nos surpreendemos com a velocidade de processamento e de acesso aos dados dos PC's que o mercado tecnológico põe ao dispor do consumidor.

Apêndice A

Exemplos de Tensores

1. As coordenadas u^i de um sistema de coordenadas curvilíneas do espaço euclidiano tridimensional não é nem tensor contravariante e nem covariante, sendo a posição do índice usada de acordo com a conveniência, acima ou embaixo.
2. As diferenciais du^i do sistema de coordenadas acima transformam-se de acordo com a lei de tensores contravariantes, como já foi visto anteriormente. Logo, du^i é um tensor contravariante de ordem 1.
3. As componentes v_i e v^i de um vetor $\mathbf{V}$ com relação aos vetores de base recíprocos contravariantes e vetores de base covariantes são exemplos de tensores covariantes e contravariantes de ordem 1, respectivamente.
4. Seja $\mathbf{R}(u^1, u^2, u^3)$ o vetor posição de um ponto do espaço euclidiano tridimensional. A métrica, $g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u^j}$, transforma-se de acordo com a lei de tensores covariantes de ordem 2, isto é, fazendo uso de (2.10)

$$\bar{g}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j = \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j} (\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l) = \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j} g_{kl}. \quad (\text{A.1})$$

Logo, g_{ij} é um tensor covariante de ordem 2.

5. O conjugado $g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j$ do tensor métrico do exemplo anterior é um exemplo de um tensor contravariante de ordem 2, pois, usando (2.12) obtém-se

$$\bar{g}^{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^l} g^{kl}. \quad (\text{A.2})$$

6. Os símbolos de Christoffel do segundo tipo γ_{ij}^k não são tensores, pois, quando mudamos de um sistema de coordenadas u^i para outro sistema $\bar{u}^i$ eles se transformam pela lei

$$\bar{\gamma}_{ij}^k = \sum_{m,n,l=1}^3 \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^l} \frac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^n}{\partial \bar{u}^j} \gamma_{mn}^l + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^l}, \quad (\text{A.3})$$

não obedecendo assim a regra de tensores, devido ao segundo termo do lado direito da igualdade. Observe que quando as transformações de coordenadas são afins, a regra de tensores de ordem 3 é obedecida.

7. Discutiremos neste ítem, os sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas sem entrar nos detalhes teóricos matemático sobre os domínios de validações dos sistemas nem quando as transformações são admissíveis. Sejam x , y e z as coordenadas cartesianas ortogonais, u^i as coordenadas cilíndricas e $\bar{u}^i$ as coordenadas esféricas relacionadas pelas transformações (Figura A.1)

$$T : \left\{ \begin{array}{l} x = u^1 \cos u^2 \\ y = u^1 \sin u^2 \\ z = u^3 \end{array} \right\}, \quad T^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} u^1 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ u^2 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ u^3 = z \end{array} \right\}, \quad (\text{A.4})$$

$$G : \left\{ \begin{array}{l} x = \bar{u}^1 \sin \bar{u}^2 \cos \bar{u}^3 \\ y = \bar{u}^1 \sin \bar{u}^2 \sin \bar{u}^3 \\ z = \bar{u}^1 \cos \bar{u}^2 \end{array} \right\}, \quad G^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}^1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \bar{u}^2 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \bar{u}^3 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{array} \right\}, \quad (\text{A.5})$$

e

$$H : \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}^1 = \sqrt{(u^1)^2 + (u^3)^2} \\ \bar{u}^2 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{|u^1|}{u^3}\right) \\ \bar{u}^3 = u^2 \end{array} \right\}, \quad H^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} u^1 = |\bar{u}^1 \sin \bar{u}^2| \\ u^2 = \bar{u}^3 \\ u^3 = \bar{u}^1 \cos \bar{u}^2 \end{array} \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Os vetores de base covariantes e base recíprocos contravariantes do espaço euclidiano tridimensional no sistema de coordenadas cartesianas são os vetores ortonormais canônicos, isto é,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 = (0, 1, 0) \quad e \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3 = (0, 0, 1). \quad (\text{A.7})$$

No sistema de coordenadas cilíndricas, os vetores de base covariantes são

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (\cos u^2, \sin u^2, 0), \\ \mathbf{g}_2 &= (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, 0), \\ \mathbf{g}_3 &= (0, 0, 1), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

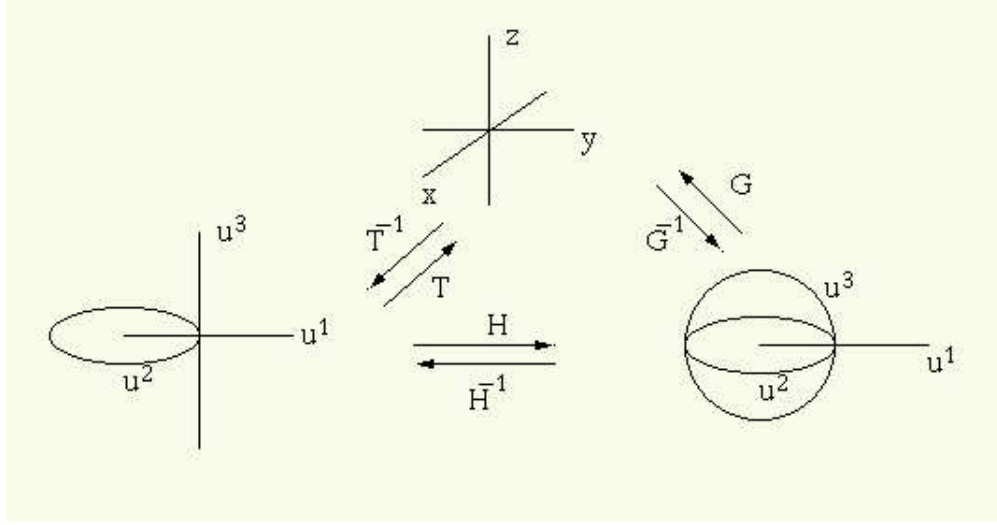


Figura A.1: Sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

enquanto no sistema de coordenadas esféricas os vetores são

$$\begin{aligned}\bar{g}_1 &= (\cos u^2 \cos u^3, \operatorname{senu}^2 \cos u^3, \operatorname{senu}^3), \\ \bar{g}_2 &= (-u^1 \operatorname{senu}^2 \cos u^3, u^1 \cos u^2 \cos u^3, 0), \\ \bar{g}_3 &= (-u^1 \cos u^2 \operatorname{senu}^3, -u^1 \operatorname{senu}^2 \operatorname{senu}^3, u^1 \cos u^3).\end{aligned}\tag{A.9}$$

Com o uso das transformações de coordenadas acima e da relação de mudança (2.10) podemos obter os vetores de base num sistema de coordenadas tendo os mesmos no outro sistema de coordenadas. A mudança do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais para o sistema de coordenadas cilíndricas ou esférica é imediata, por exemplo,

$$\begin{aligned}g_1 &= \frac{\partial x}{\partial u^1} e_1 + \frac{\partial y}{\partial u^1} e_2 + \frac{\partial z}{\partial u^1} e_3 = \cos u^2 e_1 + \operatorname{senu}^2 e_2 + 0 e_3, \\ \bar{g}_1 &= \frac{\partial x}{\partial \bar{u}^1} e_1 + \frac{\partial y}{\partial \bar{u}^1} e_2 + \frac{\partial z}{\partial \bar{u}^1} e_3 \\ &= \cos u^2 \cos u^3 e_1 + \operatorname{senu}^2 \cos u^3 e_2 + \operatorname{senu}^3 e_3.\end{aligned}\tag{A.10}$$

As componentes do tensor métrico e métrico recíproco do espaço no sistema de coordenadas cartesianas são

$$e_{ii} = e^{ii} = 1, \quad e_{ij} = e^{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j,$$

no sistema de coordenadas cilíndricas são

$$g_{11} = g^{11} = g_{33} = g^{33} = 1, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = (u^1)^2,$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j,$$

e no sistema de coordenadas esféricas são

$$\bar{g}_{11} = \bar{g}^{11} = 1, \quad \bar{g}_{22} = \frac{1}{\bar{g}^{22}} = (\bar{u}^1 \cos \bar{u}^3)^2,$$

$$\bar{g}_{33} = \frac{1}{\bar{g}^{33}} = (\bar{u}^1)^2, \quad \bar{g}_{ij} = \bar{g}^{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j,$$

Com as transformações T e T^{-1} (Eq. A.4) podemos transformar as componentes de um tensor covariante, contravariante ou misto dado no sistema cartesiano para o sistema cilíndrico, e vice-versa. Com as transformações G e G^{-1} (Eq. A.5) podemos transformar as componentes de um tensor covariante, contravariante ou misto dado no sistema cartesiano para o sistema esférico, e vice-versa. E com as transformações H e H^{-1} (Eq. A.6) podemos transformar as componentes de um tensor covariante, contravariante ou misto dado no sistema cilíndrico para o sistema esférico, e vice-versa.

Apêndice B

Taxas de Variações e Equações Locais de Equilíbrio

A velocidade de um ponto de S e a velocidade diretora neste ponto são dadas por

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{d}}, \quad (\text{B.1})$$

onde o ponto sobreposto denota a diferenciação com respeito ao tempo carregando as coordenadas convecionadas fixas. Considere

$$\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{a}_i = \sum_i v_i \mathbf{a}^i. \quad (\text{B.2})$$

Utilizando o fato das curvas coordenadas sobre S serem convecionadas¹, obtemos a taxa de variação dos vetores de base com relação ao tempo, pela relação

$$\dot{\mathbf{a}}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_{,\alpha} = (\dot{\mathbf{r}})_{,\alpha} = \mathbf{v}_{,\alpha}, \quad (\text{B.3})$$

onde, utilizando as eqs. (B.2), (2.55), (2.45)₃ e (2.75)₂, obteremos

$$\mathbf{v}_{,\alpha} = \sum_i (v_{i,\alpha} \mathbf{a}^i + v_i \mathbf{a}^i_{,\alpha}) = \sum_\beta (v_\beta|_\alpha - b_{\beta\alpha}) \mathbf{a}^\beta + (v_{3,\alpha} + \sum_\beta b_\alpha^\beta v_\beta) \mathbf{a}_3, \quad (\text{B.4})$$

com

$$v_\beta|_\alpha = v_{\beta,\alpha} - \sum_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda v_\lambda. \quad (\text{B.5})$$

Para calcular a taxa de variação do vetor normal com relação ao tempo, utilize as eqs. (2.45)_{1,2}, junto com as eqs. (B.3) e (B.4), para obter

$$\dot{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_3 \cdot \dot{\mathbf{a}}_\alpha = v_{3,\alpha} + \sum_\beta b_\alpha^\beta v_\beta, \quad (\text{B.6})$$

¹As curvas coordenadas são ditas convecionadas quando o parâmetro de superfície constante e o parâmetro de superfície variável que a define inicialmente não mudam com relação ao tempo, isto é, são fixos com relação ao tempo.

e, em seguida, utilize a eq. (2.45)₂ para ver que $\dot{\mathbf{a}}_3 \perp \mathbf{a}_3$, e concluir que

$$\dot{\mathbf{a}}_3 = (v_{3,\alpha} + \sum_{\beta} b_{\alpha}^{\beta} v_{\beta}) \mathbf{a}^{\alpha}. \quad (\text{B.7})$$

Calcularemos agora a parte simétrica e anti-simétrica das componentes de $\dot{\mathbf{a}}_i$ na base $\mathbf{a}^k$. Se

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \sum_k c_{ki} \mathbf{a}^k, \quad c_{ki} = \dot{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{a}_k, \quad (\text{B.8})$$

então, a parte simétrica será

$$\vartheta_{ki} = \frac{1}{2}(c_{ki} + c_{ik}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{a}_k + \dot{\mathbf{a}}_k \cdot \mathbf{a}_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k) = \frac{1}{2} \dot{a}_{ki}, \quad (\text{B.9})$$

e a parte anti-simétrica

$$\pi_{ki} = \frac{1}{2}(c_{ki} - c_{ik}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{a}_k - \dot{\mathbf{a}}_k \cdot \mathbf{a}_i). \quad (\text{B.10})$$

Usando as eqs. (B.3), (B.4) e (B.9), junto com as eqs. (2.45)_{1,2}, teremos

$$2\vartheta_{\alpha\beta} = v_{\alpha}|_{\beta} + v_{\beta}|_{\alpha} - 2b_{\alpha\beta}v_3, \quad \vartheta_{\alpha 3} = \vartheta_{3\alpha} = \vartheta_{33} = 0, \quad (\text{B.11})$$

e fazendo uso das eqs. (B.10), (B.7), (B.4) e (B.9), teremos

$$2\pi_{\alpha\beta} = v_{\alpha}|_{\beta} - v_{\beta}|_{\alpha}, \quad \pi_{\alpha 3} = -\pi_{3\alpha} = -(v_{3,\alpha} + \sum_{\beta} b_{\alpha}^{\beta} v_{\beta}), \quad \pi_{33} = 0. \quad (\text{B.12})$$

As componentes $\vartheta_{\alpha\beta}$ e $\pi_{\alpha\beta}$ são tensores de superfície covariantes de ordem 2 referidos como tensores de taxa de deformação e de giro (*spin*) de superfície, respectivamente.

Obteremos agora a relação entre as taxas de variações dos tensores métrico e métrico recíproco com relação ao tempo, para uso no cálculo da taxa de variação dos vetores de base recíprocos. Derivando a eq. (2.37) com relação ao tempo, teremos

$$\sum_{\lambda} \dot{a}^{\alpha\lambda} a_{\lambda\beta} = - \sum_{\lambda} a^{\alpha\lambda} \dot{a}_{\lambda\beta}.$$

Em seguida, multiplicando a equação acima por $a^{\beta\mu}$, somando em μ e usando a eq. (2.37) obteremos

$$\sum_{\lambda} \dot{a}^{\alpha\lambda} \delta_{\lambda}^{\beta} = - \sum_{\lambda, \mu} a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \dot{a}_{\lambda\beta},$$

concluindo assim

$$\dot{a}^{\alpha\beta} = - \sum_{\lambda, \mu} a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} \dot{a}_{\lambda\beta}. \quad (\text{B.13})$$

Dessa forma, com o uso de

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \sum_k (\vartheta_{ki} + \pi_{ki}) \mathbf{a}^k, \quad (\text{B.14})$$

e das eqs. (2.39), (B.11) a (B.13), obteremos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}}^\alpha &= \sum_{k,\lambda} a^{\alpha\lambda} (\pi_{k\lambda} - \vartheta_{k\lambda}) \mathbf{a}^k, \\ \dot{\mathbf{a}}^3 &= \dot{\mathbf{a}}_3 = \sum_k \pi_{k3} \mathbf{a}^k.\end{aligned}\tag{B.15}$$

A seguir, apresentaremos alguns resultados cinemáticos em termos do vetor diretor $\mathbf{d}$ e suas derivadas.

Com o uso das eqs. (4.8) e (B.15), a velocidade diretora $\mathbf{w}$ pode ser escrita na forma

$$\mathbf{w} = \sum_i (\dot{d}_i \mathbf{a}^i + d_i \dot{\mathbf{a}}^i) = \sum_i \dot{d}_i \mathbf{a}^i + \sum_{\lambda,\alpha,k} d_\lambda a^{\lambda\alpha} (\pi_{k\alpha} - \vartheta_{k\alpha}) \mathbf{a}^k + \sum_k d_3 \pi_{k3} \mathbf{a}^k.\tag{B.16}$$

Usando a regra de elevação de índices

$$d^\alpha = \sum_\lambda d_\lambda a^{\lambda\alpha},\tag{B.17}$$

e o fato que $d_3 = d^3$, em (B.16), chegaremos a relação

$$\mathbf{w} = \sum_i (\dot{d}_i \mathbf{a}^i + d_i \dot{\mathbf{a}}^i) = \sum_i \dot{d}_i \mathbf{a}^i + \sum_{i,k} d^i \pi_{ki} \mathbf{a}^k - \sum_{\alpha,k} d^\alpha \vartheta_{k\alpha} \mathbf{a}^k.\tag{B.18}$$

Denotando

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_i \dot{d}_i \mathbf{a}^i, \quad \boldsymbol{\vartheta}_\alpha = - \sum_k \vartheta_{k\alpha} \mathbf{a}^k,\tag{B.19}$$

escrevemos a eq. (B.18) na forma

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Gamma} + \sum_{i,k} d^i \pi_{ki} \mathbf{a}^k + \sum_\alpha d^\alpha \boldsymbol{\vartheta}_\alpha.\tag{B.20}$$

A derivada parcial do diretor $\mathbf{d}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{d}_{,\alpha} = \sum_i \lambda_{i\alpha} \mathbf{a}^i = \sum_i \lambda^i_{,\alpha} \mathbf{a}_i,\tag{B.21}$$

com

$$\lambda_{i\alpha} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{d}_{,\alpha}, \quad e \quad \lambda^i_{,\alpha} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{d}_{,\alpha}.\tag{B.22}$$

Como

$$\mathbf{d}_{,\alpha} = \sum_\beta (d_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta} d_3) \mathbf{a}^\beta + (d_{3,\alpha} + \sum_\beta b^\beta_\alpha d_\beta) \mathbf{a}_3,\tag{B.23}$$

teremos

$$\begin{aligned}\lambda_{\beta\alpha} &= d_{\beta}|_{\alpha} - b_{\alpha\beta}d_3, \quad \lambda_{3\alpha} = d_{3,\alpha} + \sum_{\beta} b_{\alpha}^{\beta}d_{\beta}, \\ \lambda_{,\alpha}^{\beta} &= \sum_{\gamma} a^{\beta\gamma}\lambda_{\gamma\alpha}, \quad \lambda_{,\alpha}^3 = \lambda_{3\alpha},\end{aligned}\tag{B.24}$$

onde $\lambda_{,\alpha}^{\beta} = \lambda_{\alpha}^{\beta}$ é um tensor de superfície misto de ordem 2, isto é, contravariante de ordem 1 e covariante de ordem 1, enquanto $\lambda_{,\alpha}^3$ é um tensor de superfície covariante de ordem 1. Também, utilizando (B.20), a derivada parcial da velocidade diretora será

$$\mathbf{w}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{d}}_{\alpha} = \mathbf{\Gamma}_{\alpha} + \sum_{i,k} \lambda_{,\alpha}^i \pi_{ki} \mathbf{a}^k + \sum_{\beta} \lambda_{,\alpha}^{\beta} \boldsymbol{\vartheta}_{\beta} \tag{B.25}$$

ou

$$\mathbf{w}_{,\alpha} = \sum_k \left[\dot{\lambda}_{k\alpha} + \sum_{\beta} \lambda_{,\alpha}^{\beta} (\pi_{k\beta} - \vartheta_{k\beta}) + \lambda_{,\alpha}^3 \pi_{k3} \right] \mathbf{a}^k, \tag{B.26}$$

onde

$$\dot{\lambda}_{i\alpha} = \mathbf{\Gamma}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}_i, \tag{B.27}$$

com vetor covariante $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}$, com respeito as coordenadas de superfície, correspondendo a medida de taxa de deformação que surge do gradiente da velocidade diretora.

Se μ_0 e μ são as densidades de massa por unidade de área no estado inicial e corrente, então, a lei de conservação de massa local (4.28) estabelece

$$\mu_0 = J\mu. \tag{B.28}$$

Derivando esta equação com respeito ao tempo, obteremos

$$\dot{\mu} + \frac{\dot{J}}{J}\mu = 0. \tag{B.29}$$

Fazendo

$$\sum_{\alpha} \vartheta_{\alpha}^{\alpha} = \frac{\dot{a}}{2a} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta} \dot{a}_{\alpha\beta} \tag{B.30}$$

e observando que

$$\dot{J} = \frac{\dot{a}}{2a} \sqrt{a/A}$$

teremos

$$\dot{J} = \sum_{\alpha} \vartheta_{\alpha}^{\alpha} J. \tag{B.31}$$

Usando a eq. (B.31) na eq. (B.29) obteremos

$$\dot{\mu} + \mu \sum_{\alpha} \vartheta_{\alpha}^{\alpha} = 0. \tag{B.32}$$

Utilizando (B.30), (B.9) e (B.11), teremos

$$\sum_{\alpha} \vartheta_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha} (v^{\alpha}|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} v_3). \quad (\text{B.33})$$

Assim, por (B.33), a eq. (B.32) poderá ser reescrita como

$$\dot{\mu} + \mu \sum_{\alpha} (v^{\alpha}|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} v_3) = 0. \quad (\text{B.34})$$

A equação (B.34) é chamada, por Green et al. [42], de equação de conservação de massa e chamada por Naghdi [64], de equação de continuidade. Ela será útil para a obtenção da equação do movimento.

Segue outro resultado utilizado na seção 4.3.3. Se

$$d\omega = \sqrt{a} du^1 du^2, \quad (\text{B.35})$$

é o elemento de área, então, sua taxa de variação no tempo será

$$\dot{d\omega} = \frac{\dot{a}}{2\sqrt{a}} du^1 du^2 = \sum_{\alpha} \vartheta_{\alpha}^{\alpha} d\omega = \sum_{\alpha} (v^{\alpha}|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha} v_3) d\omega. \quad (\text{B.36})$$

As taxas de variações das medidas de deformação (4.11) são

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\beta}, \quad \dot{\kappa}_{i\alpha} = \dot{\lambda}_{i\alpha}, \quad \dot{\gamma}_i = \dot{d}_i. \quad (\text{B.37})$$

Faremos agora as deduções das equações de equilíbrio a partir dos princípios de equilíbrio ou leis de conservação.

Iniciaremos com a equação local de equilíbrio de quantidade de movimento linear. Desenvolvendo a derivada na eq. (4.29) e usando a equação de continuidade (B.34), obteremos

$$\int_{\omega} (\mu \dot{\mathbf{v}} - \mu \mathbf{F}) d\omega - \int_c \mathbf{N} dc = 0, \quad \text{onde } c = \partial\omega, \quad (\text{B.38})$$

que é a forma integral do movimento.

Se $\mathbf{n}^{\alpha}$ é o vetor força físico sobre a curva coordenada, então, aplicando a eq. (B.38) a um triângulo curvilíneo e fazendo sua área tender a zero (fazendo o ponto de interseção das curvas coordenadas se aproximar da terceira curva), teremos

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha} \sqrt{(a^{\alpha\alpha})} \nu_{\alpha} \mathbf{n}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha}, \quad (\text{B.39})$$

onde $\mathbf{N}^{\alpha} = \sqrt{(a^{\alpha\alpha})} \mathbf{n}^{\alpha}$ é o vetor força de curva contravariante com respeito às coordenadas de superfície, que atua sobre as curvas coordenadas. A relação (B.39) é conhecido como postulado de Cauchy.

Usando a relação (B.39) e aplicando o teorema de Stokes (Apêndice C) à integral de linha em (B.38) têm-se

$$\int_{\omega} \left[(\mu \dot{\mathbf{v}} - \mu \mathbf{F}) - \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a} \mathbf{N}^{\alpha} \right)_{,\alpha} \right] d\omega = 0. \quad (\text{B.40})$$

Fazendo uso das eqs. (2.53) e (C.9), (B.40) torna-se

$$\int_{\omega} \left[(\mu \dot{\mathbf{v}} - \mu \mathbf{F}) - \sum_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha}|_{\alpha} \right] d\omega = 0. \quad (\text{B.41})$$

Como ω é arbitrário em (B.41), concluímos que

$$\mu \mathbf{F} + \sum_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha}|_{\alpha} = \mu \dot{\mathbf{v}}, \quad (\text{B.42})$$

que é a equação local de equilíbrio de quantidade de movimento linear. Esta equação nos leva ao cálculo dos pontos da superfície em cada instante de tempo t .

Iremos agora deduzir as equações locais de equilíbrio de quantidade de movimento diretor e momento de quantidade de movimento (ou equilíbrio de momento angular).

O vetor força-diretora $\mathbf{M}$ tem a mesma propriedade de $\mathbf{N}$ (eq. B.39), isto é, ele depende do vetor normal unitário $\boldsymbol{\nu}$ à curva $c = \partial\omega$. Então, por argumento análogo,

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha} \sqrt{(a^{\alpha\alpha})} \nu_{\alpha} \mathbf{m}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \mathbf{M}^{\alpha}, \quad (\text{B.43})$$

onde $\mathbf{m}^{\alpha}$ é o vetor força-curva diretor físico que atua na curva coordenada e $\mathbf{M}^{\alpha} = \sqrt{(a^{\alpha\alpha})} \mathbf{m}^{\alpha}$ vetor força de curva diretor que se transformam segundo a regra contravariante para transformação de coordenadas de superfície. Em [64], é admitida a existência de um campo vetorial $\mathbf{m}$ que, em contraste com $\mathbf{N}$ e $\mathbf{M}$, não depende de $\boldsymbol{\nu}$. Este vetor $\mathbf{m}$ é chamado de vetor diretor conjugado intrínseco (ou superfície).

Agora, desenvolvendo a derivada do lado esquerdo² da eq. (4.30), utilizando as eqs. (B.43), (B.36) e (B.32), obteremos

$$\int_{\omega} \rho \mu \dot{\mathbf{w}} d\omega = \int_{\omega} (\mu \mathbf{L} - \mathbf{m}) d\omega + \int_c \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \mathbf{M}^{\alpha} dc. \quad (\text{B.44})$$

Aplicando o teorema de Stokes à integral de linha em (B.44), encontraremos

$$\int_{\omega} \rho \mu \dot{\mathbf{w}} d\omega = \int_{\omega} \left(\mu \mathbf{L} - \mathbf{m} + \sum_{\alpha} \mathbf{M}^{\alpha}|_{\alpha} \right) d\omega. \quad (\text{B.45})$$

²Lembre-se que ρ não depende do tempo

Logo, como ω é uma área arbitrária, isto é, a eq. (B.45) é válida para toda área ω , obtemos a equação do momento diretor

$$\mathbf{m} = \mu \bar{\mathbf{L}} + \sum_{\alpha} \mathbf{M}^{\alpha}|_{\alpha}, \quad (\text{B.46})$$

onde $\bar{\mathbf{L}}$ é a diferença da força diretora $\mathbf{L}$, por unidade de massa, e a força inercial devido ao deslocamento diretor $\mathbf{d}$, isto é, $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L} - \rho \dot{\mathbf{w}}$, onde ρ , chamado de coeficiente de inércia diretor, que depende apenas das coordenadas de superfície u^{α} . Esta equação possibilita a atualização do vetor diretor em cada instante de tempo t .

Para a dedução da equação local de equilíbrio do momento da quantidade de movimento, partimos do princípio de equilíbrio (ou lei de conservação) do momento de quantidade de movimento (4.31). Desenvolvendo a derivada do lado esquerdo da eq. (4.31) e utilizando as eqs. (B.36) e (B.32), obteremos

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \mu (\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{d} \times \rho \mathbf{w}) d\omega = \int_{\omega} \mu (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{d} \times \rho \dot{\mathbf{w}}) d\omega. \quad (\text{B.47})$$

Usando as eqs. (4.16) e (B.43), e aplicando o teorema de Stokes às integrais de linha, encontraremos

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{r} \times \mathbf{N} dc &= \int_{\omega} \sum_{\alpha} \left(\mathbf{r} \times \mathbf{N}^{\alpha}|_{\alpha} + \mathbf{a}_{\alpha} \times \mathbf{N}^{\alpha} \right) d\omega, \\ \int_c \mathbf{d} \times \mathbf{M} dc &= \int_{\omega} \sum_{\alpha} \left(\mathbf{d} \times \mathbf{M}^{\alpha}|_{\alpha} + \mathbf{d}_{,\alpha} \times \mathbf{M}^{\alpha} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Então, substituindo (eq. B.47) e (eq. B.48) em (eq. 4.31) e usando (eq. 4.32), (eq. B.46) e o fato de ω ser arbitrária, chegaremos à equação local de equilíbrio do momento da quantidade de movimento

$$\sum_{\alpha} \left(\mathbf{a}_{\alpha} \times \mathbf{N}^{\alpha} + \mathbf{d}_{,\alpha} \times \mathbf{M}^{\alpha} \right) + \mathbf{d} \times \mathbf{m} = 0. \quad (\text{B.49})$$

Esta equação contribui para o cálculo da componente normal do vetor força de curva $\mathbf{N}^{\alpha}$.

Apêndice C

Aplicação do Teorema de Stokes

Apresentaremos o teorema de Stokes, em coordenadas curvilíneas, que relaciona a integral de linha sobre a borda de uma superfície com a integral de superfície sobre a superfície. Em seguida, aplicaremos o mesmo a integral de linha na equação (B.38).

Considere uma superfície suave ω mergulhada no $\mathbb{R}^3$. Sejam $\mathbf{Y} = \sum_{\alpha} Y^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}$ um campo vetorial suave e $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real suave definida sobre ω . Seja $\boldsymbol{\nu} = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \mathbf{a}^{\alpha}$ o normal unitário exterior ao bordo $\partial\omega$ da superfície ω . Então,

$$\int_{\omega} \left[\left(\sum_{\alpha} f_{,\alpha} \mathbf{a}^{\alpha} \right) \cdot \mathbf{Y} \right] d\omega + \int_{\omega} f \operatorname{div}(\mathbf{Y}) d\omega = \int_{\partial\omega} f (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{Y}) ds, \quad (\text{C.1})$$

onde $d\omega$ e ds são os elementos de área e de linha de ω e de $\partial\omega$ ¹, respectivamente, com

$$\operatorname{div}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{\alpha} \left(\sqrt{a} Y^{\alpha} \right)_{,\alpha} = \sum_{\alpha} Y^{\alpha} |_{,\alpha}. \quad (\text{C.2})$$

Observe que quando a função real f é constante e igual a 1 a relação (eq. C.1) torna-se

$$\int_{\omega} \operatorname{div}(\mathbf{Y}) d\omega = \int_{\partial\omega} (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{Y}) ds \quad (\text{C.3})$$

como é mais conhecida.

Neste momento mostraremos a relação

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{N} ds = \int_{\partial\omega} \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha} ds = \int_{\omega} \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a} \mathbf{N}^{\alpha} \right)_{,\alpha} d\omega. \quad (\text{C.4})$$

Primeiro, considere o vetor posição de um ponto da superfície representado por $\mathbf{r}(u^1, u^2) = \sum_i x^i \mathbf{e}^i$, onde $\mathbf{e}^i$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Estabeleceremos a seguinte igual-

¹No capítulo 4 utilizamos $\partial\omega = c$ e $ds = dc$.

dade

$$\int_{\partial\omega} \mathbf{N} ds = \int_{\partial\omega} \sum_{i,\beta} \left(N^{i\beta} \mathbf{a}_\beta \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \mathbf{a}_i ds \quad (\text{C.5})$$

e aplicaremos o teorema de Stokes (eq. C.1) para os termos tangentes do lado direito da mesma. Isto é, aplicando o teorema de Stokes às componentes do vetor

$$\int_{\partial\omega} \sum_{\beta} \left(N^{\lambda\beta} \mathbf{a}_\beta \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \mathbf{a}_\lambda ds = \int_{\partial\omega} \sum_{i,\beta} \left(N^{\lambda\beta} \mathbf{a}_\beta \cdot \boldsymbol{\nu} \right) x_{,\lambda}^i \mathbf{e}_i ds \quad (\text{C.6})$$

obteremos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} \sum_{i,\beta} \left(N^{\lambda\beta} \mathbf{a}_\beta \cdot \boldsymbol{\nu} \right) x_{,\lambda}^i \mathbf{e}_i ds &= \int_{\omega} \sum_{i,\alpha} \left[x_{,\lambda\alpha}^i N^{\lambda\alpha} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a} N^{\lambda\alpha} \right)_{,\alpha} x_{,\alpha}^i \right] \mathbf{e}_i d\omega \\ &= \int_{\omega} \sum_{i,\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a} N^{\lambda\alpha} x_{,\lambda}^i \right)_{,\alpha} \mathbf{e}_i d\omega \\ &= \int_{\omega} \sum_{i,\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a} N^{\lambda\alpha} x_{,\lambda}^i \mathbf{e}_i \right)_{,\alpha} d\omega \\ &= \int_{\omega} \sum_{i,\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a} N^{\lambda\alpha} \mathbf{a}_\lambda \right)_{,\alpha} d\omega, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

onde $\mathbf{Y} = \sum_{\beta} N^{\lambda\beta} \mathbf{a}_\beta$ e $f = x_{,\lambda}^i$. O termo normal segue de forma análoga.

Dessa forma,

$$\int_{\partial\omega} \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha} ds = \int_{\omega} \sum_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sqrt{a} \mathbf{N}^{\alpha} \right)_{,\alpha} d\omega. \quad (\text{C.8})$$

Por outro lado, pelas eqs. (2.53) e (2.77)

$$\sum_{\alpha} \left(\sqrt{a} \mathbf{N}^{\alpha} \right)_{,\alpha} = \sqrt{a} \sum_{\alpha} \left(\mathbf{N}^{\alpha}_{,\alpha} + \sum_{\lambda} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} \mathbf{N}^{\alpha} \right) = \sqrt{a} \sum_{\alpha} \left(\mathbf{N}^{\alpha}_{,\alpha} + \sum_{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} \mathbf{N}^{\beta} \right) = \sqrt{a} \sum_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha}|_{\alpha}, \quad (\text{C.9})$$

onde $\mathbf{N}^{\alpha}|_{\alpha}$ é a derivada covariante de um vetor contravariante.

Logo,

$$\int_{\partial\omega} \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha} ds = \int_{\omega} \sum_{\alpha} \mathbf{N}^{\alpha}|_{\alpha} d\omega. \quad (\text{C.10})$$

Apêndice D

Componentes das Forças internas Versus Energia Interna Armazenada

Considerando ω uma área arbitrária da superfície S , com fronteira $\partial\omega$ correspondendo a curva c , E a entropia por unidade de massa, T ($T > 0$) a temperatura, $h_{estoque}$ o estoque de calor por unidade de massa e h_{fluxo} o fluxo de calor através de c por unidade de comprimento, é estabelecida uma desigualdade de produção de entropia na forma

$$\int_{\omega} \mu \dot{E} d\omega - \int_{\omega} \mu \frac{h_{estoque}}{T} d\omega + \int_c \frac{h_{fluxo}}{T} dc \geq 0. \quad (D.1)$$

Se h_{fluxo}^{α} é o fluxo de calor através da curva coordenada u^{α} então teremos

$$h_{fluxo} = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \sqrt{a^{\alpha\alpha}} h_{fluxo}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} q^{\alpha}, \quad (D.2)$$

onde ν_{α} é a componente covariante do vetor normal unitário exterior ν a curva c e

$$q^{\alpha} = \sum_{\alpha} \sqrt{a^{\alpha\alpha}} h_{fluxo}^{\alpha}. \quad (D.3)$$

Usando (D.2) em (D.1) e aplicando o teorema de Stokes (apêndice C) a integral de linha, obteremos

$$\mu T \dot{E} - \mu h_{estoque} + \sum_{\alpha} q^{\alpha}|_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{q^{\alpha} T_{,\alpha}}{T} \geq 0, \quad (D.4)$$

desde que a desigualdade (D.1) é válida para toda área ω de S .

Por outro lado, Green et al. [42] obtiveram a seguinte equação energia

$$\mu h_{estoque} - \sum_{\alpha} q^{\alpha}|_{\alpha} - \mu(T \dot{E} + \dot{T} E) - \mu \dot{A} + \sum_{\alpha, \beta} N'^{\beta\alpha} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha, \beta} M^{\beta\alpha} \dot{\kappa}_{\beta\alpha} = 0 \quad (D.5)$$

onde, para escrever esta equação, usamos o fato de $\mathbf{d} = \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3$ e as relações (B.37).

Dessa forma, fazendo uso da eq. (D.4) e da desigualdade (D.5), teremos

$$-\mu \dot{T} E - \mu \dot{\mathcal{A}} + \sum_{\alpha, \beta} N'^{\beta\alpha} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha, \beta} M^{\beta\alpha} \dot{\kappa}_{\beta\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{q^{\alpha} T_{,\alpha}}{T} \geq 0. \quad (\text{D.6})$$

Usando os mesmos argumentos utilizados por Coleman e Noll [18], Green et al concluíram da desigualdade (D.6) que

$$N'^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \varepsilon_{\beta\alpha}} \right), \quad M^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \kappa_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \kappa_{\beta\alpha}} \right), \quad (\text{D.7})$$

com também

$$E = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial T} \quad e \quad - \sum_{\alpha} q^{\alpha} T_{,\alpha} \geq 0, \quad (\text{D.8})$$

onde estamos considerando $\mathbf{d} = \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3$ e a simetria de $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\kappa_{\alpha\beta}$.

Apêndice E

Componentes do Vetor Força-Curva

Neste apêndice deduziremos as equações das quais calculamos as componentes $N^{i\alpha}$ do vetor força de curva N^α .

Considere o potencial mecânico

$$P = \sum_{\alpha} N^{\alpha} \cdot v_{,\alpha} + m^{\alpha} \cdot w + M^{\alpha} \cdot w, \quad (\text{E.1})$$

onde $m^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} M^{\alpha}$. O potencial P corresponde ao potencial de esforço (*stress*) na teoria tridimensional de mecânica de contínuo. Sob movimentos de corpo rígido superpostos no tempo t encontra-se P na forma invariante

$$P = \sum_{\alpha} N'^{\alpha} \cdot \vartheta_{\alpha} + m^{\alpha} \cdot \Gamma + M^{\alpha} \cdot \Gamma_{\alpha}, \quad (\text{E.2})$$

com

$$N'^{\alpha} = \sum_{\alpha} N^{\alpha} - d^{\alpha} m^{\alpha} - \sum_{\gamma} \lambda_{,\gamma}^{\alpha} M^{\gamma}. \quad (\text{E.3})$$

Veja o apêndice B para obter detalhes sobre ϑ_{α} , Γ e Γ_{α} . Em (E.2), use (B.19) e (B.27) e reescreva

$$P = \sum_{\alpha,\beta} N'^{\alpha\beta} \vartheta_{\alpha\beta} + \sum_i m^i \dot{d}_i + \sum_{i,\alpha} M^{i\alpha} \dot{\lambda}_{i,\alpha}, \quad (\text{E.4})$$

onde

$$N'^{\alpha\beta} = N'^{\beta\alpha} = N^{\beta\alpha} - m^{\alpha} d^{\beta} - \sum_{\gamma} M^{\alpha\gamma} \lambda_{,\gamma}^{\beta}. \quad (\text{E.5})$$

É possível mostrar que

$$N'^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(N'^{\alpha} \cdot a^{\beta} + N'^{\beta} \cdot a^{\alpha} \right). \quad (\text{E.6})$$

A simetria em (E.5) é equivalente a

$$\sum_{\alpha,\beta} \epsilon_{\beta\alpha} \left(N^{\beta\alpha} + m^{\beta} d^{\alpha} + \sum_{\gamma} M^{\beta\gamma} \lambda_{,\gamma}^{\alpha} \right) = 0, \quad (\text{E.7})$$

obtida a partir da eq. (4.36), onde

$$\epsilon_{\beta\beta} = 0 \quad e \quad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \sqrt{a}. \quad (\text{E.8})$$

Da eq. (4.36) obtemos ainda

$$N^{3\alpha} + (m^3 d^{\alpha} - m^{\alpha} d^3) + \sum_{\beta} (M^{3\beta} \lambda_{,\beta}^{\alpha} - M^{\alpha\beta} \lambda_{,\beta}^3) = 0. \quad (\text{E.9})$$

Como foi visto no apêndice D, equação (D.5), o potencial mecânico (E.4) satisfaz a equação energia

$$-\mu \dot{\mathcal{A}} + P = 0, \quad (\text{E.10})$$

onde desprezamos os termos relacionados ao estoque e fluxo de calor, com $\mathcal{A}$ correspondendo a energia interna da superfície.

Considerando o vetor diretor $\mathbf{d} = \mathbf{a}^3$, as componentes do mesmo serão

$$D_{\alpha} = 0, \quad D_3 = 1, \quad d_{\alpha} = 0, \quad d_3 = 1. \quad (\text{E.11})$$

Assim, por (4.11)₃, a medida cinemática γ_i será nula. Usando as eqs. (B.24)_{1,2}, têm-se

$$\lambda_{\alpha\beta} = -b_{\alpha\beta}, \quad \lambda_{3\beta} = 0. \quad (\text{E.12})$$

De forma análoga,

$$\Lambda_{\alpha\beta} = -B_{\alpha\beta}, \quad \Lambda_{3\beta} = 0. \quad (\text{E.13})$$

Logo, por (4.11)₂,

$$\kappa_{\alpha\beta} = -(b_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}), \quad \kappa_{3\beta} = 0. \quad (\text{E.14})$$

Usando as eqs. (B.24)_{3,4}, (E.12) e (2.58) na equação (E.9) obtém-se

$$N^{3\alpha} = m^{\alpha} + \sum_{\beta} M^{3\beta} b_{\beta}^{\alpha}. \quad (\text{E.15})$$

Fazendo o produto interno de $\mathbf{m} = \sum_{\alpha} m^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}$ com $\mathbf{a}^{\beta}$ e utilizando a eq. (4.34) teremos

$$m^{\beta} = \mathbf{a}^{\beta} \cdot \mathbf{m} = \mu(\mathbf{a}^{\beta} \cdot \bar{\mathbf{L}}) + \sum_{\alpha} [(\mathbf{a}^{\beta} \cdot \mathbf{M}^{\alpha})|_{\alpha} - (\mathbf{a}^{\beta}|_{\alpha} \cdot \mathbf{M}^{\alpha})],$$

que através de (4.19) e (2.75) se torna em

$$m^\beta = \sum_{\alpha} (M^{\beta\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} M^{3\alpha}) + \mu \bar{L}^{\beta}. \quad (\text{E.16})$$

Assim, reescrevemos a eq. (E.15) como

$$N^{3\alpha} = \sum_{\beta} M^{\alpha\beta}|_{\beta} + \mu \bar{L}^{\alpha}. \quad (\text{E.17})$$

Para obter $N'^{\beta\alpha}$ use as eqs. (B.24)_{3,4}, (E.12) e (2.58) na eq. (E.5). Assim,

$$N'^{\beta\alpha} = N^{\beta\alpha} + \sum_{\gamma} b_{\gamma}^{\beta} M^{\alpha\gamma}. \quad (\text{E.18})$$

A equação de energia (E.10) torna-se

$$-\mu \dot{\mathcal{A}} + \sum_{\alpha, \beta} (N'^{\beta\alpha} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + M^{\beta\alpha} \dot{\kappa}_{\alpha\beta}) = 0, \quad (\text{E.19})$$

onde $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \dot{a}_{\alpha\beta}$ e $\dot{\kappa}_{\alpha\beta} = -\dot{b}_{\alpha\beta}$.

Apêndice F

Integração Numérica

Para integração numérica da qual o integrando pode ser aproximado por polinômios de qualquer grau, as fórmulas de Newton-Cotes, caracterizadas por pontos de integração igualmente espaçados no intervalo de integração (a, b) , tem como fórmulas particulares:

1. Fórmula dos trapézios (polinômio de grau 1)

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)],$$

onde $a = x_0$, $b = x_1$ e $h = x_1 - x_0$, com erro igual a $-\frac{h^3}{12}f''(\beta)$, para algum $\beta \in (a, b)$. Subdividindo o intervalo (a, b) num número de n pontos melhoramos a estimativa da integração numérica, isto é, se $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} = b$, com $x_i = x_{i-1} + h$, a aproximação da integral será dada por

$$\int_b^a f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]. \quad (\text{F.1})$$

Esta fórmula pode ser usada tanto para um número n par de pontos quanto para um número ímpar de pontos.

2. Fórmula de Simpson (polinômio de grau 2)

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)],$$

onde $a = x_0$, $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$, $x_2 = b$ e $h = \frac{(x_2-x_0)}{2}$, com erro igual a $-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\beta)$, para algum $\beta \in (a, b)$. Observe pela expressão do erro que esta aproximação é melhor que a aproximação feita pela fórmula dos trapézios. Observe também que, para

um integrando igual a uma função polinomial de grau menor ou igual a 3, o resultado é exato pois $f^{(4)}(\beta) = 0$, enquanto pela fórmula dos trapézios isto acontecerá apenas para polinômios de grau menor ou igual a 1. Porém, pelo fato de serem necessários 3 pontos para determinar o polinômio de grau 2, a fórmula de Simpson requer um número ímpar de pontos para subdivisão do intervalo. Assim, para n ímpar teremos

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_0} f(x)dx &= \int_{x_2}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_{n-3}} f(x)dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-3} \frac{h}{3} [f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Referências Bibliográficas

- [1] T. Agui, Y. Nagao, and M. Nakajima. An expression method of cylindrical cloth objects — an expression of folds of a sleeve using computer graphics. *Trans. Soc. of Electronics, Information and Communications*, J73-D-II(7):1095–1097, 1990.
- [2] A. E. Assan. *Método dos elementos finitos: Primeiros Passos*. Editora da Unicamp, 1999.
- [3] C. K. Au, Z. Wu, and M. M. F. Yuen. Effect of fabric properties on cloth draping modeling. In *Proceedings IEEE Conf. on Geometric Modeling and Processing 2000*, pages 69–76, Hong Kong, 2000.
- [4] D. Baraff and A. Witkin. Large steps in cloth simulation. In *Proceedings of SIGGRAPH '98*, pages 43–54, 1998.
- [5] D. Baraff and A. Witkin. Physically based modeling. In *SIGGRAPH 2001, Course Notes*, 2001.
- [6] A. Barr. Global and local deformations of solid primitives. In *Proceedings of SIGGRAPH'84*, volume 18, pages 21–29, 1984.
- [7] C. Basdogan. Real-time simulation of dynamically deformable finite element models using modal analysis and spectral lanczos decomposition methods. In *Proceedings of the Medicine Meets Virtual Reality (MMVR '2001) Conference*, 2001.
- [8] D. E. Breen, D. H. House, and P. H. Getto. A physically-based particle model of woven cloth. *The Visual Computer*, 8:264–277, 1992.
- [9] D. E. Breen, D. H. House, and M. J. Wozny. A particle-based model for simulating the draping behavior of woven cloth. *Textile Research Journal*, 64(11):663–685, 1994.

- [10] D. E. Breen, D. H. House, and M. J. Wozny. Predicting the drape of woven cloth using interacting particles. *Computer Graphics (SIGGRAPH Proc.)*, pages 365–372, 1994.
- [11] R. Bridson, S. Marino, and R. Fedkiw. Simulation of clothing with folds and wrinkles. In D. Breen and M. Lin, editors, *Proceedings of ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, 2003.
- [12] M. Carignan, Y. Yang, N. M. Thalmann, and D. Thalmann. Dressing animated synthetic actors with complex deformable clothes. *Computer Graphics*, 26(2):99–104, July 1992.
- [13] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [14] J. Chadwick, D. Haumann, and R. Parent. Layered construction for deformable animated characters. In *Proceedings of SIGGRAPH '89*, pages 243–252, 1989.
- [15] B. Chen and M. Govindaraj. A physically based model of fabric drape using flexible shell theory. *Textile Research Journal*, 65(6):324–330, 1995.
- [16] K. J. Choi and H. S. Ko. Stable but responsive cloth. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH Proc.)*, 21:604–611, 2002.
- [17] J. Christensen, J. Marks, and J.T. Ngo. Automatic motion synthesis for 3d mass-spring models. *The Visual Computer*, 13:13–20, 1997.
- [18] B. D. Coleman and W. Noll. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 13:167–178, 1963.
- [19] J. R. Collier, B. J. Collier, G. O'Toole, and S. M. Sargand. Drape prediction by means of finite-element analysis. *J. of the Textile Institute*, 82(1):96–107, 1991.
- [20] S. Coquillart. Extend free-form deformation: A sculpturing tool for 3d geometric modeling. *Computer & Graphics*, 24(4):187–196, August 1990.
- [21] S. Coquillart and P. Jancine. Animated free-form-deformation: An interactive animation technique. *Computer Graphics*, 25(4):23–26, July 1991.
- [22] F. Cordier and N. M. Thalmann. Real-time animation of dressed virtual humans. In *EUROGRAPHICS 2002*, 21(3):327–335, 2002.

- [23] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*, volume Paris=Appendix, pages 953–1173. of Chwolson's *Traité de Physique*, Paris, 2nd edition, 1909.
- [24] M. C. C. Cunha. *Métodos numéricos*. Editora da Unicamp, 2000.
- [25] V. F. de Melo and S. T. Wu. Estado-da-arte de modelos deformáveis. Technical report, DCA-FEEC-UNICAMP, Dezembro 2002. <http://www.dca.fee.unicamp.br/research/docs/techrep/2002>.
- [26] V. F. de Melo and S. T. Wu. Deformações de superfícies. Technical report, DCA-FEEC-UNICAMP, Dezembro 2003. <http://www.dca.fee.unicamp.br/research/docs/techrep/2003>.
- [27] G. Debunne, M. Desbrun, A. Barr, and M.P. Cani. Interactive multiresolution animation of deformable models. In Springer-Verlag, editor, *Proceedings Workshop on Computer Animation and Simulation '99*, 1999.
- [28] G. Debunne, M. Desbrun, M. P. Cani, and A. Barr. Adaptive simulation of soft bodies in real-time. In *Computer Animation 2000*, May 2000. Annual Conference Series, IEEE Press.
- [29] S. Deng. *Nonlinear Fabric Mechanics Including Material Nonlinearity, Contact, and an Adaptive Global Solution Algorithm*. PhD thesis, Mechanical and Aerospace Engineering Dept., North Carolina State Univ., Raleigh, N.C., 1994. Doctoral thesis.
- [30] M. Desbrun, P. Schröder, and A. Barr. Interactive animation of structured deformable objects. In *Proceedings of Graphics Interface*, pages 1–8, June 1999.
- [31] V. Dochev and T. Vassilev. Efficient super-elasticity handling in mass-spring systems. In *International Conference on Computer Systems and Technologies - CompSysTech'2003*, 2003.
- [32] B. Eberhardt, O. Etzmuß, and M. Hauth. Implicit-explicit schemes for fast animation with particle systems. In M. N. Thalmann, D. Thalmann, and B. Arnaldi, editors, *Proc. of Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation*, pages 137–154. Springer, 2000.
- [33] B. Eberhardt, A. Weber, and W. Straßer. A fast, flexible, particle-system model for cloth draping. *IEEE Computer Graphics and Application*, 16(5):52–60, Sept. 1996.

-
- [34] J. W. Eischen and R. Bigliani. Continuum versus particle representations. In *Cloth Modeling and Animation*. A. K. Peter, 2000.
- [35] J. W. Eischen, S. Deng, and T.G. Clapp. Finite-element modeling and control of flexible fabric parts. *IEEE Computer Graphics and Application*, 16(5):71–80, Sept. 1996.
- [36] J. L. Ericksen and C. Truesdell. Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1:295–323, 1958.
- [37] O. Etzmuß, M. Hauth, M. Keckeisen, S. Kimmerle, J. Mezger, and M. Wacker. A cloth modelling system for animated characters. In *Proceedings Graphiktag*, 2001.
- [38] P. Faloutsos, M. van de Panne, and D. Terzopoulos. Dynamic free-form deformations for animation synthesis. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(3):201–214, 1997.
- [39] C. Feynman. Modeling the appearance of cloth. Master’s thesis, Dept. of EECS, Massachusetts Inst. of Technology, Cambridge, Mass., 1986.
- [40] A. Fuhrmann, C. Groß, and V. Luckas. Interactive animation of cloth including self collision. *Journal of WSCG*, 11(1), February 2003.
- [41] S. F. F. Gibson and B. Mirtich. A survey of deformable modeling in computer graphics. Technical report, MERL - A Mitsubishi Electric Research Laboratory, november 1997. Technical Report, <http://www.merl.com> (TR-97-19).
- [42] A. E. Green, P.M. Naghdi, and W.L. Wainwright. A general theory of a cosserat surface. *Arch. Rat. Mech. An.*, 20:287–308, 1965.
- [43] A. E. Green and W. Zerna. *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press, 2nd edition, 1968.
- [44] E. Grispun, P. Krysl, and P. Schröder. Discrete shells. In *ACM Symp. Comp. Anim.*, 2003.
- [45] M. Hauth and O. Etzmuß. A high performance solver for the animation of deformable objects using advanced numerical methods. In *Proceedings of EURO-GRAPHICS ’ 2001*, 2001.
- [46] B. Hinds, J. McCartney, and G. Woods. Pattern developments of 3d surfaces. *Computer Aided Design*, 23(8):583–592, 1991.

- [47] B. K. Hinds and J. MacCartney. Interactive garment design. *Visual Computer*, 6:53–61, 1990.
- [48] B. K. Hinds and J. MacCartney. Computer aided design garments using digitized 3d surfaces. *J. Engineering Manufacture: Part B*, 206:199–206, 1992.
- [49] D. H. House and D. E. Breen. *Cloth Modeling and Animation*. Natick, MA: A. K. Peters, 2000.
- [50] D. L. James and D. K. Pai. Artdefo - accurate real time deformable objects. In *Proceedings of SIGGRAPH '99*, pages 65–72. Addison Wesley, August 1999.
- [51] I. K. Jeong and I. H. Lee. A new 3d spring for deformable object animation. *Eurographics '03 - Interactive demos and Posters*, pages 67–70, 2003.
- [52] Y. M. Kang, J. H. Choi, H. G. Cho, and D. H. Lee. An efficient animation of wrinkled cloth with approximate implicit integration. *The Visual Computer*, 17(3):147–157, 2001.
- [53] S. Kawabata. The standardization and analysis of hand evaluation. *The Textile Machinery Society of Japan*, 1980.
- [54] J. Kim. *Fabric Mechanics Analysis Using Large Deformation Orthotropic Shell Theory*. PhD thesis, Mechanical and Aerospace Engineering Dept., North Carolina State Univ., Raleigh, N.C., 1991. Doctoral dissertation.
- [55] E. Kreyszig. *Differential Geometry*. Dover Publications, New York, 1991.
- [56] L. Lapidus and G. F. Pinder. *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. JOHN WILEY & SONS, 1982.
- [57] F. Lazarus, S. Coquillart, and P. Jancéne. Interactive axial deformations. In *IFIP Working Conference on Geometric Modeling and Computer Graphics*, pages 241–254, 1993.
- [58] M. Aono M. A wrinkle propagation model for cloth. In *Proc. 8th International Conf. of the Computer Graphics Society on CG International '90*, pages 95–115, 1990.
- [59] R. MacCracken and K. Joy. Free-form deformations with lattices of arbitrary topology. In *Proceedings of SIGGRAPH'96*, pages 181–188, 1996.
- [60] T. McInerney and D. Terzopoulos. Deformable models in medical image analysis: a survey. *Medical Image Analysis*, 1(2):91–108, 1996.

- [61] L. Moccozet and N. M. Thalmann. Dirchlet free-form deformations and their application to hand simulation. *Computer Animation*, pages 93–102, 1997.
- [62] J. Montagnat, H. Delingette, and N. Ayache. A review of deformable surfaces: Topology, geometry and deformation. *Preprint submitted to Elsevier Preprint*, 15 may 2001.
- [63] H. Møllmann. *Introduction to the Theory of Thin Shells*. John Wiley & Sons Ltda, 1981.
- [64] P. M. Naghdi. *The Theory of Shells and Plates*, volume VI a/2 - Mechanics of Solids II of *Handbuch der Physik*, pages 425–640. Springer - Verlag, Berlin, 1972.
- [65] L. P. Nedel and D. Thalmann. Real time muscle deformations using mass-spring systems. In *Proc. Computer Graphics International*, pages 156–165, 1998.
- [66] H. Ng and R. Grimsdale. Computer graphics techniques for modeling cloth. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 16(5):28–41, 1996.
- [67] H. N. Ng and R. L. Grimsdale. Geof - a geometrical editor for fold formation. In R. Chin et al., editor, *Lecture Notes in Computer Science, 1024: Image Analysis Applications and Computer Graphics*, pages 124–131. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [68] H. N. Ng, R. L. Grimsdale, and W. G. Allen. A system for modelling and visualization of cloth material. *Computer & Graphics*, 19(3):423–430, 1995.
- [69] T. Ohta. Use of multiple representations for simulating cloth shapes and motions: An overview. *Journal Res. Develop.*, 39(5):523–530, september 1995.
- [70] H. Okabe, H. Imaoka, T. Tomiha, and H. Niwaya. Three-dimensional apparel cad system. *Computer Graphic*, 26(2):105–110, 1992.
- [71] D. Parks and D. Forsyth. Improved integration for cloth simulation. In *Proc. of Eurographics*. Eurographics Assoc., 2002. Computer Graphics Forum.
- [72] J. Plath. Realistic modelling of textiles using interacting particle systems. *Computer & Graphics*, 24:897–905, 2000.
- [73] X. Provot. Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. In *Proc. of Graphics Interface*, pages 147–154, 1995.
- [74] P. S. C. Ramos and S. T. Wu. Analyzing a deformable model using differential geometry. In *Proceedings of X SIBGRAPI*. IEEE - Computer Society, 1997.

-
- [75] M. B. Rubin. *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points*. Kluwer, 2000.
- [76] Y. Sakaguchi, M. Minoh, and K. Ikeda. Party: Physical environment of artificial reality for dress simulation (i) - a dynamically deformable model of dress. *Trans. Soc. of Electronics, Information and Communications*, pages 25–32, Dec. 1991.
- [77] T. W. Sederberg and S. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. *Computer Graphics*, 20(4):151–160, July 1986.
- [78] J. C. Simo and D. D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parameterization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72:267–304, 1989.
- [79] J. C. Simo and D. D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part ii: The linear theory; computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:53–92, 1989.
- [80] J. C. Simo and D. D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Aspects of the nonlinear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1989.
- [81] K. Sing and E. Fiume. Wires: A geometric deformation technique. *Computer Graphics*, pages 405–414, 1998.
- [82] K. Sing and E. Kokkevis. Skinning characters using surface-oriented free-form deformations. In *Proceedings Graphics Interface*, pages 35–42, 2000.
- [83] I. S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 2nd edition, 1964.
- [84] D. J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley Publishing Co., London, 1961.
- [85] R. Szeliski and D. Tonnesen. Surface modeling with oriented particle system. *Computer Graphics*, 26(2):185–194, July 1992.
- [86] D. Terzopoulos and K. Fleischer. Deformable models. *Visual Computer*, 4:306–331, 1988.
- [87] D. Terzopoulos, J. C. Platt, Alan H. Barr, and Kurt Fleischer. Elastically deformable models. *Computer Graphics*, 21(4):205–214, July 1987.

- [88] T. Vassilev and B. Spanlang. Efficient cloth model for dressing animated virtual people. In *Proc. Learning to Behave Workshop*, pages 89–100, Enschede the Netherlands, 2000.
- [89] T. Vassilev, B. Spanlang, and Y. Chrysanthou. Fast cloth animation on walking avatars. In *Proceedings of Eurographics*, volume 20, 2001.
- [90] P. Volino and N. M. Thalmann. *Virtual Clothing, Theory and Practice*. Berlin: Springer, 2000.
- [91] P. Volino and N. M. Thalmann. Comparing efficiency of integration methods for cloth simulation. In *Proc. Computer Graphics International*, pages 265–274, 2001.
- [92] J. Weil. The synthesis of cloth objects. *Computer Graphics*, 20(4):49–54, 1986.
- [93] Y. Wu, D. Thalmann, and N. M. Thalmann. Deformable surface using physically-based particle systems. In *Proceedings Computer Graphics International*, pages 205–216. Academic Press., 1995.