

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS

Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica

APLICAÇÃO DE RECORRÊNCIA A UM
SISTEMA DINÂMICO DEGENERADO

Alvaro Geraldo Badan Palhares

jul/76

Orientadores: Prof. Yaro Burian Jr.

Prof. Celso Pascolli Bottura

Tese de Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia da Uni
versidade Estadual de Campinas

JULHO - 1976

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Agradeço aos meus orientadores e
ao colega Mauro Sérgio Miskulin.

R E S U M O

Nêste trabalho é proposto um método recorrente para o estudo do comportamento de um sistema dinâmico degenerado, através da exploração das propriedades da função forçante.

Mostramos que o motor de indução, pode ser descrito por um modelo degenerado, de segunda ordem com coeficientes constantes, considerando a máquina em operação normal e com velocidade constante, e a hipótese de acoplamento magnético perfeito entre estator e rotor. Este modelo nos permitiu obter correntes instantâneas de estator, bem como uma expressão para o torque instantâneo, como função destas correntes.

Í N D I C E

Capítulo 1

Método recorrente para estudo de um sistema degenerado

1.1 - Introdução	1.1
1.2 - Sistema degenerado	1.4
1.3 - Recorrência	1.5

Capítulo 2

Modêlo degenerado de um motor de indução

2.1 - Introdução	2.1
2.1.1 - Modêlo original	2.1
2.2 - Modêlo degenerado	2.4
2.3 - Equação característica	2.7
2.4 - Correntes de estator	2.8
2.4.1 - Correntes de rotor	2.9
2.5 - Torque instantâneo	2.11

Capítulo 3

Estudo da estabilidade

3.1 - Vetor das entradas	3.1
3.2 - Vetor das correntes	3.5

3.3 - Recorrência	3.10
3.4 - Outras funções de entrada	3.11
3.5 - Estabilidade local do ponto duplo	3.13
3.5.1 - Solução particular	3.14
3.5.2 - Derivada do vetor das correntes	3.17
3.5.3 - Cálculo da matriz <u>A</u>	3.19
3.5.4 - "Root Locus"	3.24

Capítulo 4

Ponto duplo e torque médio

4.1 - Introdução	4.1
4.2 - Região das descontinuidades	4.3
4.3 - Cálculo do ponto duplo	4.5
4.4 - Torque médio	4.7

Apêndice 1

Proposição A.1	A.1
----------------------	-----

CAPÍTULO 1

MÉTODO RECORRENTE PARA ESTUDO DE UM SISTEMA DEGENERADO

1.1 - INTRODUÇÃO

Um sistema linear contínuo, não autônomo, com parâmetros concentrados e invariantes no tempo, contendo n variáveis linearmente independentes, pode em geral ser descrito por um modelo matemático, da forma:

$$(1.1) \quad \underline{K} (p) \cdot \underline{X} (t) = \underline{f} (t)$$

onde

$$\underline{K} (p) = \begin{bmatrix} K_{11} (p) & K_{12} (p) & \dots & K_{1n} (p) \\ K_{21} (p) & K_{22} (p) & \dots & K_{2n} (p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} (p) & K_{n2} (p) & \dots & K_{nn} (p) \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} (t) = \begin{bmatrix} x_1 (t) \\ x_2 (t) \\ \vdots \\ x_n (t) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Sendo, para $(i = 1, 2, \dots, n)$ e $(j = 1, 2, \dots, n)$

$K_{ij}(p)$: polinômios de primeiro grau no operador p ,

$$\text{com } p = \frac{d}{dt}$$

$x_i(t)$: variáveis linearmente independentes

$f_j(t)$: funções de entrada do sistema

Este modelo tem solução bastante simples, se as componentes do vetor \underline{f} são funções pertencentes à classe C_1 , por exemplo, funções constantes, exponenciais, senoidais etc.

Podem surgir dificuldades, ao considerarmos funções não pertencentes a esta classe.

Nêste trabalho vamos utilizar uma classe de funções $\hat{f}_i \in \hat{C}$ que além de serem periódicas e não pertencentes à classe C_1 , gozam da seguinte propriedade.

Sendo T o período de $\hat{f}_i(t)$, temos

$$(1.2) \quad \underline{\hat{f}}(t + \tau) = \underline{Q} \underline{\hat{f}}(t)$$

onde

$$\tau = T/n \quad \text{com } n = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

\underline{R} : é uma matriz quadrada de ordem n da forma.

$$\underline{R}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots$$

$$\underline{R}_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que a propriedade,

$$(1.3) \quad \underline{R}^n = I_n$$

garante a periodicidade de período T , do vetor \hat{f} . Esta propriedade,

permite ainda afirmarmos que a matriz \underline{Q} é uma raiz de ordem n da matriz identidade.

A interpretação da propriedade (1.2) nos mostra que existem sub-períodos τ_k com,

$$\tau_k = (t_k, t_k + \tau) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

contidos em \hat{f} , ao fim dos quais, haverá uma rotação completa, sobre as componentes deste vetor. Portanto vamos, arbitrariamente, denominar "matriz de rotação inversa", a matriz \underline{Q} e por, "sub-período de rotação" aos sub-períodos τ_k .

Vamos ainda considerar que no interior de cada sub-período de rotação, as componentes do vetor \hat{f} são funções pertencentes à classe C_1 , de maneira que a solução de (1.1) nesta região seja facilmente encontrada.

1.2 - SISTEMA DEGENERADO

Se a matriz $\underline{K}(p)$ definida em (1.1) pode ser expressa pela soma de outras duas matrizes, quadradas e de ordem n :

$$(1.4) \quad \underline{K}(p) = \underline{K}_d(p, \mu) + \underline{K}_e$$

onde

$$\mu = \mu_0 + \epsilon$$

e

$$\rho [\underline{K} (p, \mu_0)] = m < n$$

o sistema terá, para ε nulo, a ordem reduzida para m . Dizemos que se trata, neste caso, de um sistema degenerado. A sua solução envolverá problemas de condições iniciais, uma vez que as variáveis x_i não são mais linearmente independentes.

Uma maneira de contornar este problema [1] consiste em decompor a evolução do sistema em dois tipos de transitórios: o primeiro, de curta duração, e que vamos considerar no caso limite, como descontinuidades da solução, ao fim do qual se inicia o segundo com maior duração e que vamos considerar, ser a resposta do sistema de ordem reduzida, com condições iniciais dadas pelos valores da solução ao final das descontinuidades.

Chamando de $\underline{X} (0^-)$ as condições iniciais pertencentes ao espaço de dimensão n , e $\underline{X} (0^+)$ as pertencentes ao sub-espaço de dimensão m , vem

$$(1.5) \quad \underline{X} (0^+) = \underline{X} (0^-) + \underline{\Delta X} (0)$$

onde

$\underline{\Delta X} (0)$: é o vetor das amplitudes das descontinuidades ocorridas no instante $t = 0$.

1.3 - RECORRÊNCIA

Seja $f_i (t') \in C_1$, para $t' \in \tau_K$, a solução do sub-período

é conhecida e dada por

$$(1.6) \quad \underline{x}(t') = \sum_{i=1}^n c_i \exp[\lambda_i t'] + \underline{x}_p(t')$$

onde

$$\underline{c}_i = \underline{g}_i \left[\underline{x}(t_0^+) , \dot{\underline{x}}(t_0^+) , \underline{x}_p(t_0^+) \right]$$

λ_i : satisfazendo, $\det [\underline{K}(\lambda_i)] = 0$

$\underline{x}_p(t')$: solução particular de (1.1)

com

$$\tau_0 = [t_0^+ , t_0^- + \tau]$$

Como se trata de um sistema linear, existirá uma relação linear entre \underline{x} e a sua derivada, dada por

$$(1.7) \quad \dot{\underline{x}}(t') = \underline{A} \underline{x}(t') + \underline{B} \hat{f}(t')$$

e a função \underline{g}_i será também linear. Com isso o vetor \underline{c}_i será da forma

$$(1.8) \quad \underline{c}_i = \underline{c}_{i1} \underline{x}(t_0^+) + \underline{c}_{i2} \underline{x}_p(t_0^+)$$

Calculando $\underline{x}(t')$ no instante $t' = t_0^- + \tau$, vem

$$(1.9) \quad \underline{x}(t_0^- + \tau) = \sum_{i=1}^n \{ \underline{c}_{i1} \underline{x}(t_0^+) + \underline{c}_{i2} \underline{x}_p(t_0^+) \} \cdot \exp[\lambda_i(t_0^- + \tau)] + \underline{x}_p(t_0^- + \tau)$$

Vamos procurar uma solução permanente $\underline{x}(t)$, resposta do sistema a uma entrada do tipo $\hat{f}(t)$, satisfazendo também proprieda-

de (1.2):

$$(1.10) \quad \underline{X}(t_0^\pm + \tau) = \underline{R} \underline{X}(t_0^\pm)$$

A expressão (1.5) escrita para o sub-período τ_0 , juntamente com (1.10) fornecem

$$(1.11) \quad \underline{X}(t_0^- + \tau) = \underline{R} [\underline{X}(t_0^+) - \Delta \underline{X}(t_0)]$$

então (1.9) se torna

$$(1.12) \quad \underline{X}(t_0^+) = \underline{R}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n [c_{i1} \underline{X}(t_0^+) + c_{i2} \underline{X}_p(t_0^+)] \cdot \exp[\lambda_i(t_0 + \tau)] \right\} + \underline{X}_p(t_0^- + \tau) + \Delta \underline{X}(t_0)$$

Denotando por,

$$\underline{Y}_k = \underline{X}(t_0^+)$$

e

$$\underline{Y}_{k+1} = \underline{R}^{-1} \underline{X}(t_0^+ + \tau)$$

a condição de periodicidade (1.10) exige que,

$$\underline{Y}_{k+1} = \underline{Y}_k$$

A expressão (1.12) pode ser escrita na forma:

$$(1.13) \quad \underline{Y}_{k+1} = \underline{A} \underline{Y}_k + \underline{B} u_k$$

Uma vez que os vetores \underline{X}_p e $\Delta \underline{X}$ podem ser interpretados como funções de entrada.

A recorrência fica então estabelecida por esta equação, com

$$\underline{A} = \underline{R}^{-1} \sum_{i=1}^n c_{i1}$$

$$\underline{B} u_k = \underline{R}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n c_{i2} \underline{X}_p(t_0^+) \cdot \exp[\lambda_i (t_0 + \tau)] + \right. \\ \left. + \underline{X}_p(t_0^- + \tau) \right\} + \Delta \underline{X}(t_0)$$

Se $f_i \in C_1$ são funções constantes, satisfazendo (1.2), poderemos propor uma mudança de variáveis para o vetor \underline{X} , tal que a recorrência seja então dada por

$$(1.14) \quad \underline{Y}'_{k+1} = \underline{A} \underline{Y}'_k$$

isto é, seja autônoma e linear. [2]

A determinação da matriz \underline{A} nos permite estudar a estabilidade local do ponto duplo. Determinando as amplitudes das descontinuidades, podemos calcular o ponto duplo e a solução estará determinada.

CAPÍTULO 2

MODELO DEGENERADO DE UM MOTOR DE INDUÇÃO

2.1 - INTRODUÇÃO

O nosso objetivo neste capítulo é mostrar que o motor de indução trifásico, pode ser estudado por um modelo degenerado, quando consideramos a hipótese de acoplamento magnético perfeito entre os enrolamentos de estator e rotor.

2.1.1 - MODELO ORIGINAL

O modelo originalmente proposto para o motor de indução, [3] é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias, de quarta ordem a coeficientes variáveis.

Este sistema de equações é deduzido sob certas hipóteses simplificadoras apresentadas a seguir:

- entreferro uniforme
- circuito magnético linear
- parâmetros constantes
- enrolamentos idênticos no estator produzindo força magnetomotriz espacial senoidal
- enrolamentos de rotor com o mesmo número de polos do estator produzindo também força magnetomotriz senoidal
- fluxo de dispersão nulo

- relação de espiras entre fases estator/rotor, unitária,
e com o seguinte conjunto de parâmetros.

L : indutância por fase de estator

R : resistência por fase de estator

r : resistência por fase de rotor

η : coeficiente de acoplamento entre enrolamentos de esta
tor e rotor

θ : posição angular do rotor relativo ao estator

e será em forma matricial

$$(2.1) \quad \underline{V}(t) = p \cdot \underline{L}(\theta) \underline{i}(t) + \underline{R} \underline{i}(t)$$

onde:

$$p = \frac{d}{dt}$$

$$\underline{V}(t) = \begin{bmatrix} \underline{V}_s \\ \underline{V}_r \end{bmatrix} \quad \text{com } \underline{V}_s = \begin{bmatrix} V_a^l \\ V_b^l \\ V_c^l \end{bmatrix} \quad \underline{V}_r = \begin{bmatrix} V_a^r \\ V_b^r \\ V_c^r \end{bmatrix}$$

$\underline{V}(t)$: vetor de entradas

$\underline{V}_s(t)$: vetor de entradas do estator

$\underline{V}_r(t)$: vetor de entradas do rotor

$$\underline{i}(t) = \begin{bmatrix} \underline{i}_s \\ \underline{i}_r \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \underline{i}_s = \begin{bmatrix} i_a^l \\ i_b^l \\ i_c^l \end{bmatrix} \quad \underline{i}_r = \begin{bmatrix} i_a^r \\ i_b^r \\ i_c^r \end{bmatrix}$$

$\underline{i}(t)$: vetor das correntes

$\underline{i}_s(t)$: vetor das correntes de estator

$\underline{i}_r(t)$: vetor das correntes de rotor

$$\underline{L}(\theta) = \begin{bmatrix} \underline{L}_i & L_{rs}(\theta) \\ L_{rs}^T(\theta) & \underline{L}_i \end{bmatrix}$$

com

$$\underline{L}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}_{rs}(\theta) = nL \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + 2\frac{\pi}{3}) & \cos(\theta - 2\frac{\pi}{3}) \\ \cos(\theta - 2\frac{\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + 2\frac{\pi}{3}) \\ \cos(\theta + 2\frac{\pi}{3}) & \cos(\theta - 2\frac{\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R I_3 & 0_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & r I_3 \end{bmatrix}$$

A matriz $\underline{L}(\theta)$ é de sexta ordem, porém com característi-

ca quatro, donde o sistema é de quarta ordem, tendo quatro correntes linearmente independentes, as outras duas sendo combinações lineares destas quatro, obtidas pelas duas equações algébricas.

Em operação normal vamos considerar o rotor curto circuitado, então

$$\underline{V}_r = \underline{0}_{(3 \times 1)}$$

O comportamento dinâmico pode ser descrito por

$$(2.2) \quad p\omega = \frac{1}{J} (T_e - T_c - D\omega)$$

onde:

$\omega = p\theta$: velocidade angular do rotor

J : momento de inércia

T_c : torque de carga

D : coeficiente de amortecimento

T_e : torque eletromagnético

2.2 - MODELO DEGENERADO

Com a finalidade de obter expressões mais simples para as correntes de estator e conseqüentemente para o torque instantâneo, que pode ser obtido em termos destas correntes, uma modificação do modelo original foi proposta por exemplo em [4] e [5]. Esta modificação permite obter um sistema de equações diferenciais com coefici-

entes constantes, para a máquina trabalhando com velocidade constante.

Utilizando a matriz de transformação,

$$(2.3) \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{I}_3 & \underline{0}_{(3 \times 3)} \\ \underline{0}_{(3 \times 3)} & \underline{T}_r \end{bmatrix}$$

onde:

$$\underline{T}_r = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 + \cos \theta & 2 + \cos \left(\theta + 2\frac{\pi}{3} \right) & 2 + \cos \left(\theta - 2\frac{\pi}{3} \right) \\ 2 + \cos \left(\theta - 2\frac{\pi}{3} \right) & 2 + \cos \theta & 2 + \cos \left(\theta + 2\frac{\pi}{3} \right) \\ 2 + \cos \left(\theta + 2\frac{\pi}{3} \right) & 2 + \cos \left(\theta - 2\frac{\pi}{3} \right) & 2 + \cos \theta \end{bmatrix}$$

obtemos um vetor de correntes modificado, denotado por

$$\hat{\underline{i}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{i}_s \\ \hat{\underline{i}}_r \end{bmatrix}$$

e dado pela transformação

$$(2.4) \quad \hat{\underline{i}}(t) = \underline{T} \underline{i}(t)$$

Com esta transformação teremos o modelo modificado, descrito pela equação.

$$(2.5) \quad \underline{v}(t) = \underline{L} \dot{\underline{i}}(t) + \underline{R} \hat{\underline{i}}(t)$$

onde

$$\hat{\underline{L}} = \underline{T} \underline{L} (\theta) \underline{T}^{-1}$$

$$\hat{\underline{R}} = \underline{T} \underline{R} \underline{T}^{-1} + \underline{T} \underline{p} \underline{L} \underline{T}^{-1}$$

$$\hat{\underline{i}}_r = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix}$$

Sendo

$\hat{\underline{i}}_r$: vetor das "correntes fictícias" de rotor

$$\hat{\underline{L}} = \begin{bmatrix} L_i & n \underline{L}_i \\ n \underline{L}_i & L_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{R}} = \begin{bmatrix} R l_3 & \underline{0}_{3 \times 3} \\ n b \underline{J} & r l_3 + b \underline{J} \end{bmatrix}$$

com

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} L \omega$$

A equação (2.5) nos permite observar que as correntes de estator e as tensões aplicadas aos seus terminais permanecem as mes-

mas do modelo original, sendo que as correntes de rotor aparecem na forma de "correntes fictícias".

Com a hipótese de acoplamento perfeito entre os enrolamentos de estator e rotor (η unitário), a matriz \hat{L} terá sua característica reduzida de quatro para dois e o sistema será descrito por um modelo degenerado de segunda ordem.

2.3. - EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

Sendo o modelo degenerado, linear e com coeficientes constantes, para velocidade constante, a resposta à entrada nula será obtida por métodos clássicos, através da homogênea associada a (2.5), desde que seja possível determinar as condições iniciais. A resposta a uma entrada constante será idêntica a resposta a entrada nula, se considerarmos uma mudança de variáveis para o vetor das correntes.

A equação característica do modelo degenerado será

$$(2.6) \quad \det \left[\lambda \hat{L} + \hat{R} \right] \Big|_{\eta=1} = 0$$

resolvendo, vem

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j \Omega$$

onde

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{Rr}{L(R+r)}$$

$$\Omega = \frac{\omega R}{(R+r)}$$

Faremos em geral a hipótese de ser a relutância do núcleo desprezível, levando à hipótese de L muito grande. Nestas condições as raízes da equação característica se tornam

$$(2.7) \quad \lambda_{1,2} = \pm j \Omega$$

indicando que as soluções transitórias não devem se anular, com o sistema permanecendo em regime oscilatório.

2.4 - CORRENTES DE ESTATOR

A solução completa da equação (2.5) será

$$(2.8) \quad \hat{i}(t) = \hat{i}_h(t) + \hat{i}_p(t)$$

com

$\hat{i}_h(t)$: solução geral da homogênea (solução natural)

$\hat{i}_p(t)$: solução particular (solução forçada)

Para a determinação da solução transitória com L finito te

remos

$$(2.9) \quad \underline{i}_h(t) = \{ \underline{c}_1 \cos \Omega t + \underline{c}_2 \operatorname{sen} \Omega t \} \exp[-\alpha t]$$

onde

$$\underline{c}_1 = \hat{i}(0^+) - \underline{i}_p(0^+)$$

$$\underline{c}_2 = \frac{1}{\Omega} \left\{ \left. \frac{d \hat{i}}{d t} \right|_{t=0^+} + \alpha \underline{c}_1 \right\}$$

e para $L \rightarrow \infty$, vem

$$\underline{c}_2 = \frac{1}{\Omega} \left. \frac{d \hat{i}}{d t} \right|_{t=0^+}$$

Nosso problema fica resumido, em determinar as condições iniciais e as soluções particulares,

A solução completa será

$$(2.10) \quad \hat{i}(t) = \underline{i}_p(t) + \{ \underline{c}_1 \cos \Omega t + \underline{c}_2 \operatorname{sen} \Omega t \} \exp[-\alpha t]$$

2.4.1 - CORRENTES DE ROTOR

As correntes de rotor, no sistema degenerado, são fictícias. Vamos, portanto, procurar evitá-las.

Sendo \hat{L} uma matriz de característica dois, existirá pelo menos uma matriz \underline{q} (4 x 6) [4], que satisfaz a igualdade:

$$(2.11) \quad \underline{q} \hat{L} = \underline{0}$$

Escolhendo \underline{q} convenientemente, vem

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pré multiplicando \underline{q} por (2.5) obtemos,

$$(2.12) \quad \underline{q} \underline{V}(t) = \underline{q} \hat{\underline{R}} \hat{\underline{i}}(t)$$

que permite exprimir as "correntes fictícias" de rotor em termos das de estator.

Desenvolvendo (2.2), vem

$$\begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ & \underline{R}' & & & \underline{r}' & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_s \\ \hat{\underline{i}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a + V_b + V_c \\ \underline{V}_s \end{bmatrix}$$

onde

$$\underline{R}' = R\mathbf{I}_3 - b\underline{J}$$

$$\underline{r}' = -r\mathbf{I}_3 - b\underline{J}$$

As três últimas equações do sistema acima nos permite escrever.

$$(2.13) \quad \hat{\underline{i}}_r = \left[\underline{r}' \right]^{-1} \left[\underline{V}_s - \underline{R}' \underline{i}_s \right]$$

Resolvendo, vem

$$i_{\alpha}(t) = - \frac{1}{r(r^2+3b^2)} \left[U(r^2+b^2) + Wb(b-r) + Zb(b+r) \right]$$

$$i_{\beta}(t) = - \frac{1}{r(r^2+3b^2)} \left[Ub(b+r) + W(r^2+b^2) + Zb(b-r) \right]$$

$$i_{\gamma}(t) = - \frac{1}{r(r^2+3b^2)} \left[Ub(b-r) + Wb(b+r) + Z(r^2+b^2) \right]$$

onde

$$U = V_a - Ri_a + b(i_c - i_b)$$

$$W = V_b - Ri_b + b(i_a - i_c)$$

$$Z = V_c - Ri_c + b(i_b - i_a)$$

2.5 - TORQUE INSTANTÂNEO

O torque instantâneo, em regime permanente, em termos das variáveis do modelo normal, do motor de indução, pode ser dado [6] por,

$$(2.14) \quad T_{mec} = \frac{1}{2} \underline{i}^T \frac{d}{d\theta} \underline{L}(\theta) \underline{i}$$

Como vamos trabalhar com as variáveis do modelo modificado, devemos deduzir uma expressão para o torque em termos destes. Antes disso uma simplificação da expressão acima pode ser feita se considerarmos que,

$$\frac{d}{d\theta} \underline{L}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right] \\ \left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right]^T & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso a expressão (2.14) se torna

$$T_{mec} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{i}_s^T & \underline{i}_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right] \\ \left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_s^T \\ \underline{i}_r^T \end{bmatrix}$$

Efetuada o produto de matrizes, vem

$$T_{mec} = \frac{1}{2} \left\{ \underline{i}_s^T \left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right] \underline{i}_r + \underline{i}_r^T \left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right]^T \underline{i}_s \right\}$$

Por álgebra de matrizes podemos afirmar que os dois termos da expressão acima, são idênticos e podemos escrevê-la na forma

$$T_{mec} = \underline{i}_s^T \left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right] \underline{i}_r$$

Utilizando a matriz de transformação definida em (2.3),
teremos

$$\hat{\underline{i}}_s = \underline{i}_s$$

e

$$\hat{\underline{i}}_r = \underline{T}_r^{-1} \underline{i}_r$$

e a expressão, para o torque instantâneo em termos das correntes mo-

definidas, será

$$T_{mec} = \underline{i}_s^T \left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right] \underline{T}_r^{-1} \hat{\underline{i}}_r$$

Resolvendo o produto $\left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right] \cdot \underline{T}_r^{-1}$, vem

$$\left[\frac{d}{d\theta} \underline{L}_{rs}(\theta) \right] \underline{T}_r^{-1} = -\frac{\sqrt{3}L}{2} \underline{J}$$

Levando em conta a equação (2.13) que dá as correntes fictícias de rotor em termos das correntes de estator, podemos escrever

$$(2.15) \quad T_{mec} = -\frac{\sqrt{3}L}{2} \{ \underline{i}_s^T \cdot \underline{J} \cdot [\underline{r}']^{-1} [\underline{V}_s - \underline{R}' \underline{i}_s] \}$$

CAPÍTULO 3

ESTUDO DA ESTABILIDADE

3.1 - VETOR DAS ENTRADAS

O vetor das entradas de um motor de indução trifásico, com rotor curto circuitado, tem seis componentes, correspondendo cada uma delas a uma fase de estator e rotor respectivamente, sendo nulas para o rotor.

As componentes relativas ao estator, que vamos utilizar - nesta análise, serão tensões, em forma quadrada, com frequência variável e defazadas de 120° elétricos. Este tipo de entrada tem sido largamente utilizado com o objetivo de se controlar a velocidade da máquina, evitando as desvantagens apresentadas pelos outros métodos de controle. O controle da velocidade pela variação da resistência, por fase, de rotor, utilizando reostatos externos, é de realização bastante simples, porém o preço que se paga pelas perdas em calor é na maioria das vezes indesejável. Como êste existem ainda outros métodos de controle, cuja realização é também pouco econômica [6] [7], isto torna o motor de indução, um equipamento, de aplicação relativamente limitada, apesar do seu baixo custo de fabricação, e simplicidade de projeto.

Os resultados que se têm obtido pela variação da frequência, do vetor das entradas com utilização de thristores, são bastante satisfatórios, [8] [9] entretanto a literatura tem mostrado - que ainda há uma grande carência, de métodos analíticos, para o estu-

do do problema. Sendo êstes resultados, encontrados, na maioria das vezes, por métodos empíricos, fica, o engenheiro, privado de fazer previsões quanto ao comportamento do sistema, bem como, estudo da estabilidade, obtenção de pontos de operação, etc.

Nosso estudo visa obter expressões analíticas para as correntes instantâneas de estator, possibilitando uma contribuição ao estudo do controle de máquinas de indução.

Estas expressões serão obtidas, por recorrência, através da exploração de certas propriedades do vetor das entradas, ou seja, a simetria e a sub-periodicidade de seis passos, no caso específico do estator. A utilização do modelo modificado é de importância fundamental, uma vez que se trata de um modelo de segunda ordem, desde que lembremos que é este um modelo degenerado e temos que resolver o problema das condições iniciais. Porém, como é sugerido no capítulo 1, podemos supor um transitório de certa duração, traduzido por descontinuidades das correntes, nos instantes de comutação de uma das fases do vetor das entradas. O valor das correntes ao final destas descontinuidades, serão as condições iniciais do modelo degenerado.

A figura 3.1 mostra um vetor de tensões, obtido por thyrístores, com sub periodicidade de seis passos. Estas formas de ondas representam uma aproximação do que se consegue na prática. Um inversor construído com thyrístores, gera ondas quadradas, da forma das apresentadas na figura, porém, nos instantes de comutação, haverá zonas mortas com duração Δt , [10] Estamos supondo em nosso estudo que este intervalo de tempo possa ser desprezível, sem afetar a validade, do método que propomos para a recorrência.

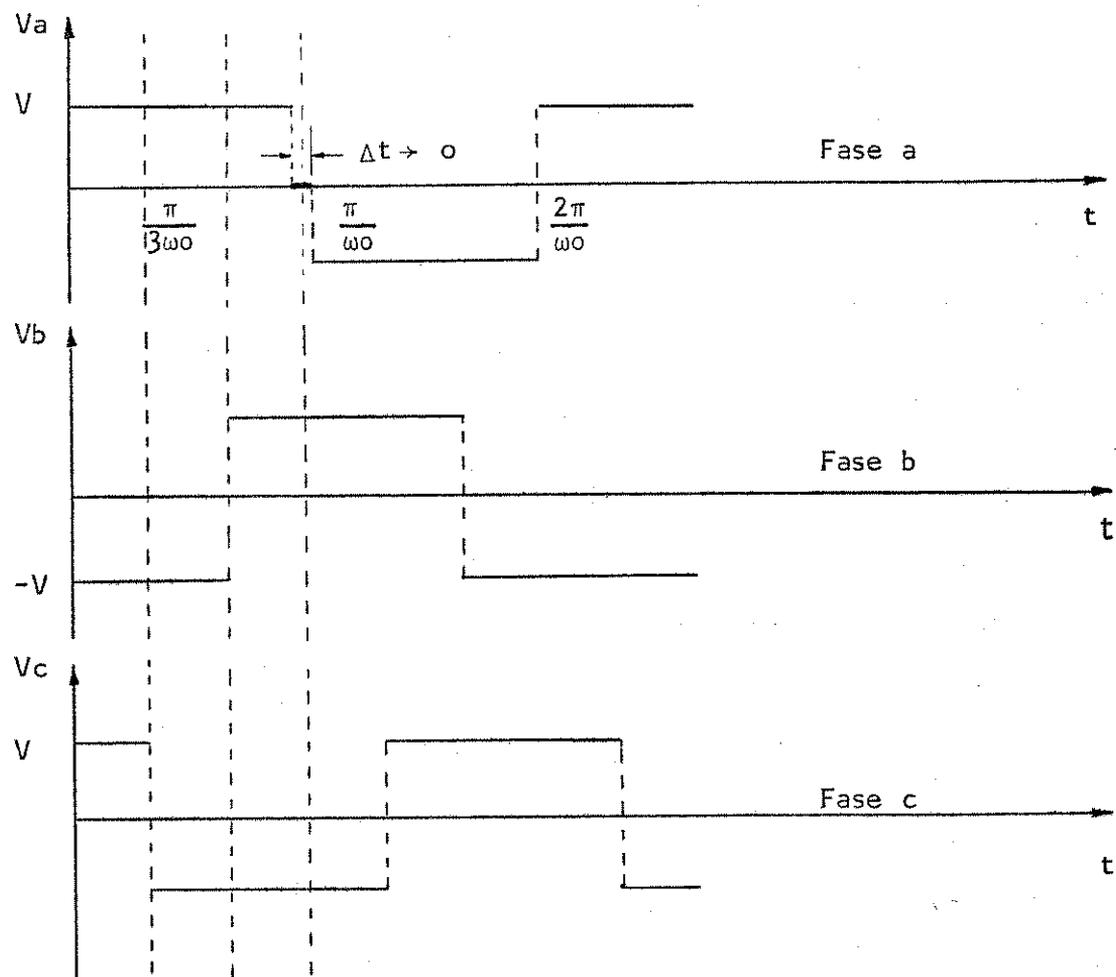


Fig. 3.1 - Vetor das entradas de estator

Por inspeção desta figura vemos que:

$$(3.1) \quad \underline{V}_s(t + \tau) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{V}_s(t)$$

onde

$$\underline{V}_s(t) = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

$$\tau = \frac{\pi}{3\omega_0}$$

e $\underline{V}_s(t)$ é periódica com período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

portanto satisfaz

$$(3.2) \quad \underline{V}_s(t + T) = \underline{V}_s(t)$$

As equações (3.1) e (3.2) mostram que as componentes de $\underline{V}_s(t)$ pertencem à classe de funções \hat{C} definida no capítulo 1, permitindo portanto, um tratamento semelhante ao mostrado naquele capítulo.

O comportamento do motor, em regime permanente e com velocidade constante, sob estas condições, pode ser traduzido por uma sequência periódica de transitórios, com condições iniciais de um sistema de segunda ordem, após a ocorrência das discontinuidades.

A integração do modelo se resume então, em calcularmos as amplitudes das discontinuidades, para obtermos a resposta a uma entrada constante, num único sub-período de rotação.

É importante observar ainda que uma mudança de variável - no vetor das correntes, nos permite estudar o sistema como sendo autônomo.

3.2 - VETOR DAS CORRENTES

O vetor das correntes terá, também, componentes periódicas de período T , ou seja,

$$(3.3) \quad \hat{\underline{i}}(t + T) = \hat{\underline{i}}(t)$$

e como $\hat{\underline{i}}$, deve ter as mesmas propriedades de \underline{V} , esta condição de periodicidade pode ser expressa em termos da matriz de rotação inversa, e do sub-período de rotação. Para o sistema regime permanente, vem,

$$(3.4) \quad \underline{i}_s(t + \tau) = \underline{R} \underline{i}_s(t)$$

Através desta propriedade vamos estabelecer a recorrência. Inicialmente devemos procurar um método para a determinação das condições iniciais do sistema degenerado.

Denotado por:

$\hat{\underline{i}}(t_0^+)$: o valor inicial das correntes, num sub-período de rotação, após a ocorrência das descontinuidades.

$\hat{\underline{i}}(t_0^-)$: o valor final das correntes, no sub-período anterior, antes da ocorrência das descontinuidades.

$\Delta \hat{\underline{i}}(t_0)$: as amplitudes das descontinuidades, ocorridas no instante t_0 .

As condições iniciais do sistema degenerado serão dadas pela relação,

$$(3.5) \quad \underline{i}(t_0^+) = \underline{i}(t_0^-) = \underline{\Delta i}(t_0)$$

através da qual podemos distinguir duas regiões para a determinação, das soluções. A primeira sendo a região das descontinuidades, e a segunda a região das soluções do sistema degenerado, que será representada pelos intervalos fechados τ_i , da forma

$$\tau_i = [t_i^+, t_i^- + \tau]$$

onde

$$\tau = \frac{\pi}{3\omega_0}$$

A solução na região das descontinuidades pode ser encontrada como segue. Substituindo t por t_0^+ e t_0^- respectivamente, na equação (2.5) e subtraindo membro a membro as duas equações obtidas, vem

$$(3.6) \quad \underline{v}(t_0) = \underline{\hat{L}} p \underline{\Delta i}(t_0) + \underline{\hat{R}} \underline{\Delta \hat{i}}(t_0)$$

onde

$$\underline{\Delta v}(t_0) = \underline{v}(t_0^+) - \underline{v}(t_0^-)$$

Pré multiplicando esta equação pela matriz \underline{q} (4 x 6), de-

finida em (2.11), resulta

$$(3.7) \quad \underline{q} \Delta \underline{v} (t_0) = \underline{q} \hat{\underline{R}} \Delta \hat{\underline{i}} (t_0)$$

A equação acima fornece somente quatro condições, que de vem ser satisfeitas pelo vetor $\Delta \underline{i}$, que contém seis componentes, de vem portanto, procurar mais duas. Como já vimos, as componentes de $\Delta \underline{i}$ representam de scontinuidades de funções no tempo, vamos então, su por que as derivadas destas funções, calculadas nos instantes de comu tação, possam ser expressas em termos de funções impulsivas, como se gue:

$$(3.8) \quad \left. \frac{d \hat{\underline{i}} (t)}{dt} \right|_{t=t_i} = \Delta \underline{i} (t_i) \delta (t - t_i)$$

Desta forma, o balanceamento dos impulsos, na equação - (3.6) com $t_i = t_0$ exige que,

$$(3.9) \quad \hat{\underline{L}} \Delta \hat{\underline{i}} (t_0) = 0$$

As duas condições procuradas para completar o sistema - (3.7) são fornecidas por (3.9), ficando determinada a solução na re gião das de scontinuidades.

A figura (3.2) é uma representação qualitativa do compor tamento do motor, em regime permanente, onde i_f é a corrente de uma das fases de estator, e $t' = 0$ é o instante inicial da região de re gime permanente.

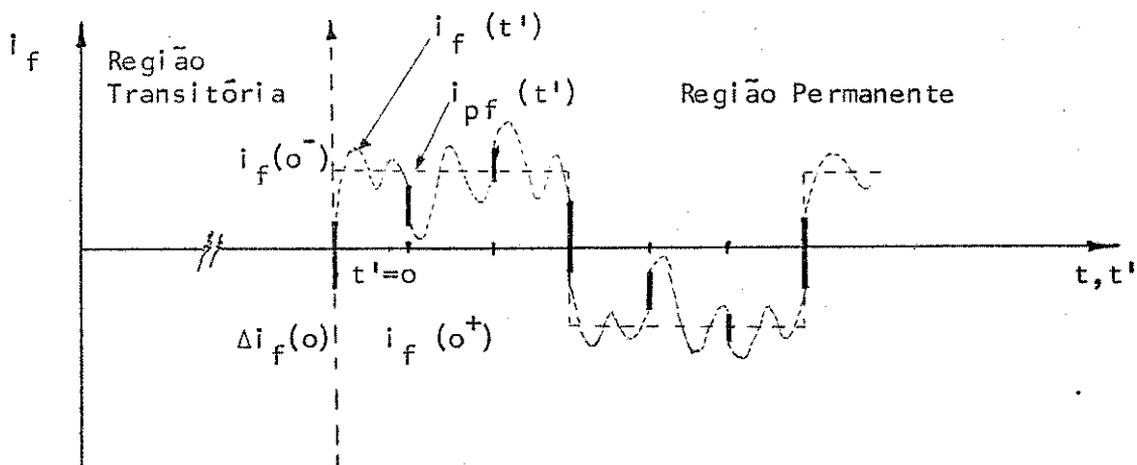
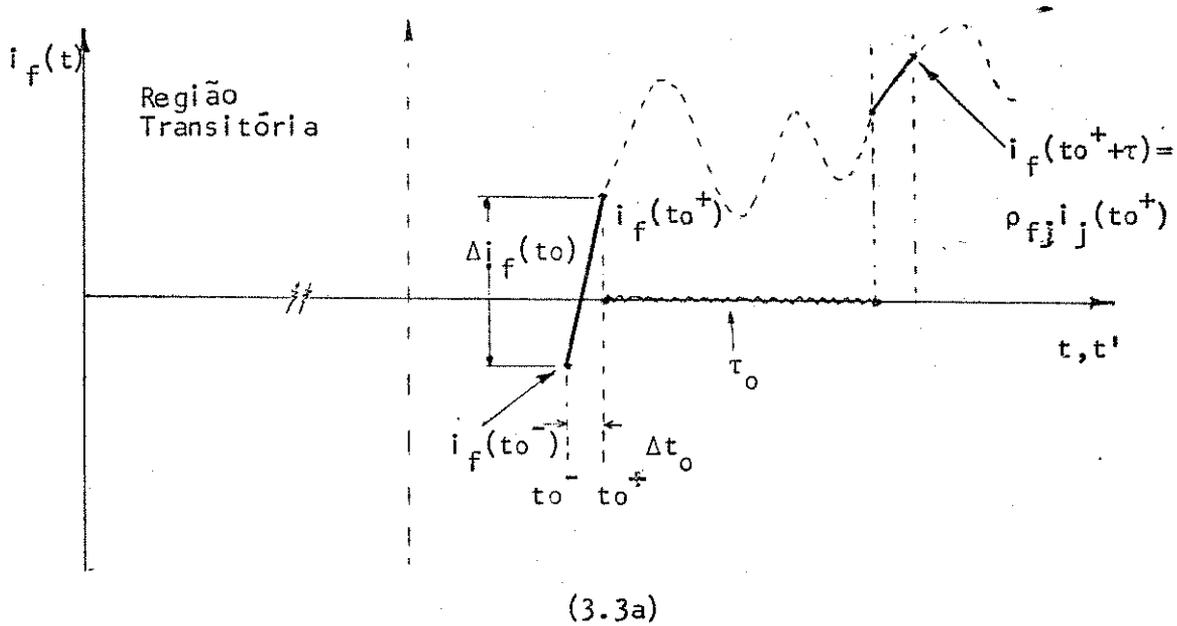
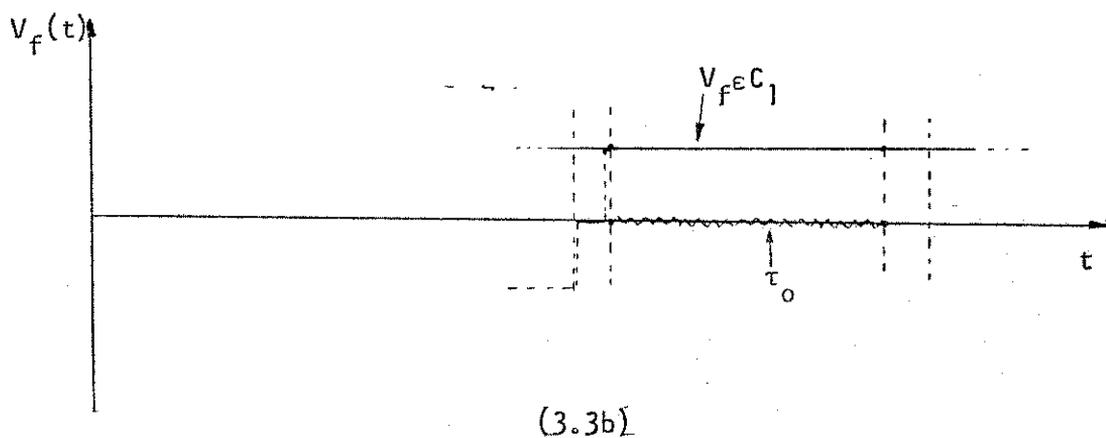


Fig. 3.2 - Representação de uma fase de estator em regime permanente.



(3.3a)



(3.3b)

Fig. 3.3 - Representação de um sub-período do vetor das correntes

Uma ampliação de um sub-período de rotação, pode ser vista através da figura (3.3), onde ρ_{fj} são os elementos da matriz \underline{R} .

A região das soluções pertencentes ao sistema degenerado, é representada nesta figura, pelo sub-período τ_0 . Através da figura (3.3b) vemos que nesta região as componentes da entrada, são funções pertencentes à classe C_1 , portanto a solução de (2.5) para t'eto pode ser dada pela equação (2.10).

Calculando o vetor das correntes no instante $(t_0^- + \delta)$, e considerando que $\hat{i}_{-p}(t)$ é sempre a mesma $\forall t \in \tau_0$, vem

$$(3.10) \quad \hat{i}_{-p}(t_0^- + \tau) = \hat{i}_{-p}(t_0^+) + [\underline{C}_1 \cos \Omega (t_0 + \tau) + \underline{C}_2 \operatorname{sen} \Omega (t_0 + \tau)] \cdot \exp [-\alpha (t_0 + \tau)]$$

ou simbolicamente

$$\hat{i}_{-p}(t_0^- + \tau) = \hat{i}_{-p}(t_0^+) + \underline{f} \left[\hat{i}_{-p}(t_0^+), \hat{i}_{-p}(t_0^+), \left. \frac{d \hat{i}_{-p}}{dt} \right|_{t=t_0^+} \right]$$

Se existe \underline{g} , tal que,

$$\left. \frac{d \hat{i}_{-p}}{dt} \right|_{t=t_0^+} = \underline{g} [\hat{i}_{-p}(t_0^+), \hat{i}_{-p}(t_0^+)]$$

sendo \underline{g} e \underline{f} lineares, a equação (3.10) pode ser escrita na forma:

$$(3.11) \quad \hat{i}_{-p}(t_0^- + \tau) = \underline{K}_1 \hat{i}_{-p}(t_0^+) + \underline{K} \hat{i}_{-p}(t_0^+)$$

por outro lado sabemos que

$$\hat{\underline{i}}(t_0^- + \tau) = \hat{\underline{i}}(t_0^+ + \tau) - \Delta \hat{\underline{i}}(t_0 + \tau)$$

e

$$(3.12) \quad \hat{\underline{i}}_s(t_0^+ + \tau) = \underline{\mathcal{R}} \hat{\underline{i}}_s(t_0^+)$$

As condições iniciais do sub-período τ_0 , para as correntes de estator, serão da forma:

$$(3.13) \quad \underline{i}_s(t_0^+) = [\underline{I} - \underline{\mathcal{R}}^{-1} \underline{K}]^{-1} \{ \underline{\mathcal{R}}^{-1} \underline{K}_1 \underline{i}_{s_p}(t_0^+) + \Delta \underline{i}_s(t_0) \}$$

3.3 - RECORRÊNCIA

Vamos agora estabelecer uma relação recorrente para o vetor das correntes, que permitirá o estudo da estabilidade.

A equação (3.13) pode ser escrita de outra forma,

$$(3.14) \quad \underline{i}_s(t_0^+) = \underline{\mathcal{R}}^{-1} \{ \underline{K} \underline{i}_s(t_0^+) + \underline{K}_1 \underline{i}_{s_p}(t_0^+) \} + \Delta \underline{i}_s(t_0)$$

Podemos verificar que esta equação é análoga à (3.12), - portanto, como fizemos no capítulo 1; vamos denotar por:

$$\underline{x}_n = \underline{i}_s(t_0^+)$$

e

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{\mathcal{R}}^{-1} \underline{i}_s(t_0^+ + \tau)$$

Para que (3.12) seja satisfeita devemos ter:

$$\underline{X}_{n+1} = \underline{X}_n$$

A equação (3.14) escrita na forma:

$$(3.15) \quad \underline{X}_{n+1} = \underline{A} \underline{X}_n + \underline{B} \underline{u}_n$$

com

$$\underline{A} = \underline{Q}^{-1} \underline{K}$$

$$\underline{B} \underline{u}_n = \underline{Q}^{-1} \underline{K}_1 \underline{i}_{s_p} (t_0^+) + \underline{\Delta i}_s (t_0)$$

representa a recorrência, procurada.

Observamos que, o vetor das entradas, no interior dos subperíodos τ_i , tem componentes constantes. Isto nos permitiria uma mudança de variáveis que colocasse (3.15) na forma:

$$\underline{X}'_{n+1} = \underline{A} \underline{X}'_n$$

3.4 - OUTRAS FUNÇÕES DE ENTRADA

O algoritmo desenvolvido neste capítulo, para obtenção das expressões analíticas das correntes de estator, pode servir como base para obtenção de outros algoritmos, quando considerarmos outros tipos de entradas, com propriedades semelhantes às do vetor utilizado neste trabalho.

Como exemplo vamos mostrar alguns vetores de tensão, obti-

dos com thiristores, e que podem ser empregados, para contrôle de velocidade dos motores de indução.

Uma das formas utilizadas, é a chamada, onda de 12 pulsos, como mostrada na figura 3.4, ou a chamada onda de múltiplos pulsos, como mostrada na figura 3.5. [11]

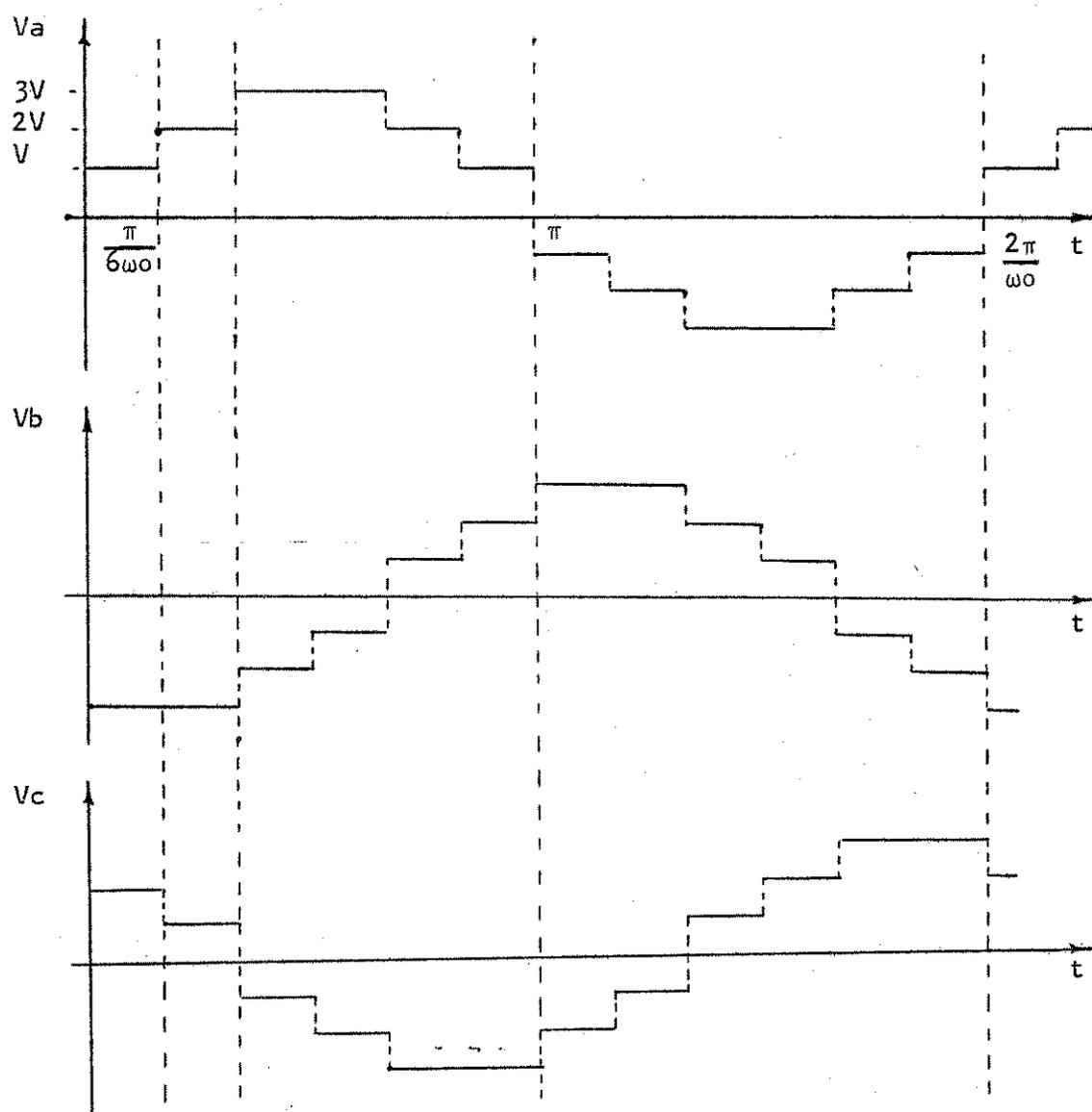


Fig. 3.4 - Onda de 12 pulsos

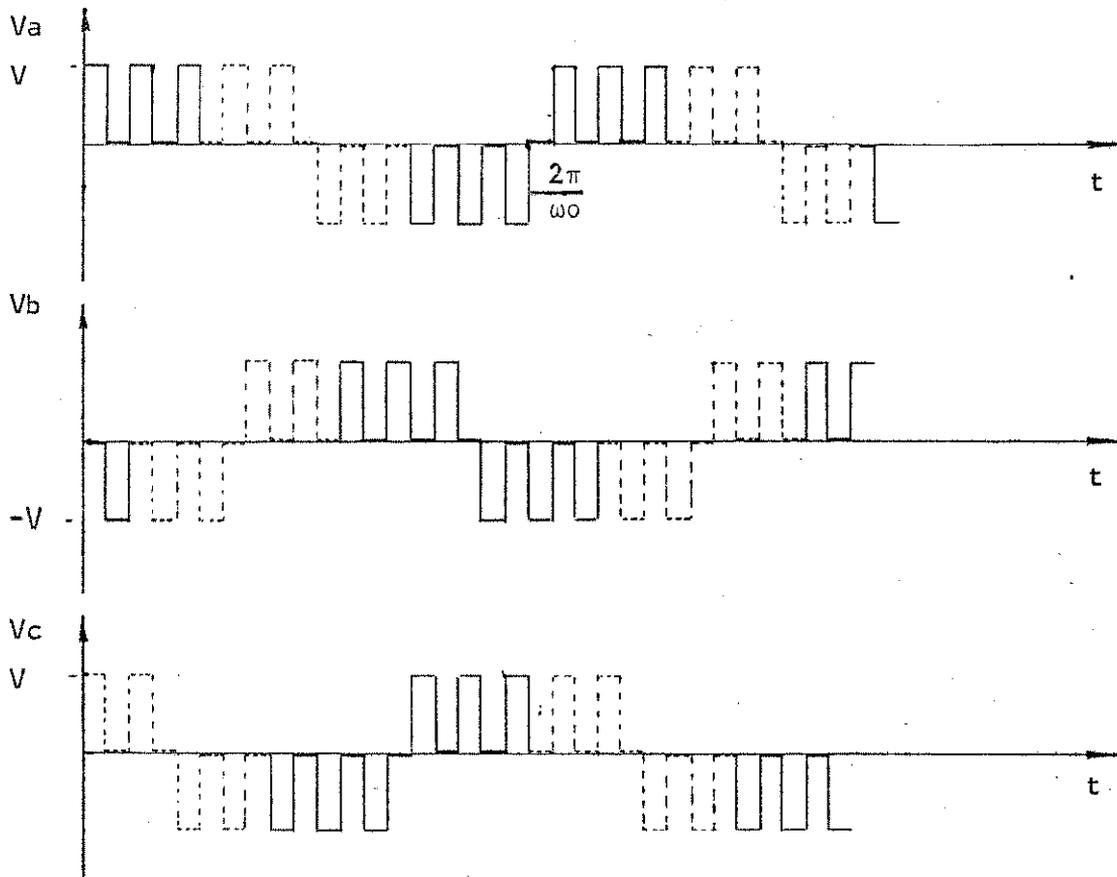


Fig. 3.5 - Ondas de múltiplos pulsos

3.5 - ESTABILIDADE LOCAL DO PONTO DUPLO

A estabilidade local do ponto duplo fica garantida, se os módulos dos auto-valores da matriz \underline{A} , definida por (3.15), forem inferiores à unidade.

A equação característica da recorrência, será

$$(3.6) \quad \det [\mu I - \underline{A}] = 0$$

Devemos então calcular a matriz \underline{A}

De (3.15), vem

$$\underline{A} = \underline{R}^{-1} \underline{K}$$

A matriz \underline{K} pode ser obtida a partir da solução da equação homogênea associada a (2.5), por exemplo, no instante $t = o^- + \tau$.

$$(3.17) \quad \hat{i}_h(o^- + \tau) = \underline{c}_1 \cos \beta_o + \underline{c}_2 \operatorname{sen} \beta_o \exp(-\phi_o)$$

onde

$$\phi_o = \frac{\pi}{3\omega_o} \cdot \alpha$$

e

$$\beta_o = \frac{\pi}{3\omega_o} \cdot \Omega$$

como

$$\underline{c}_1 = \hat{i}(o^+) - \hat{i}_p(o^+)$$

e

$$\underline{c}_2 = \frac{1}{\Omega} \{ p \hat{i}(o^+) + \alpha [\hat{i}(o^+) - \hat{i}_p(o^+)] \}$$

devemos calcular $\hat{i}_p(o^+)$ e $p \hat{i}(o^+)$.

3.5.1 - SOLUÇÃO PARTICULAR

A solução particular de (2.5) no sub-período,

$$\tau_0 = [o^+, o^- + \tau]$$

será constante, uma vez que o vetor das entradas tem componentes constantes no interior destes intervalos. Então,

$$\hat{L}_p \hat{i}_p(t') = \underline{o}, \quad \forall t' \in \tau_0$$

o que nos leva ao sistema de equações

$$(3.18) \quad \begin{bmatrix} R & o & o & o & o & o \\ o & R & o & o & o & o \\ o & o & R & o & o & o \\ o & b & -b & r & b & -b \\ -b & o & b & -b & r & b \\ b & -b & o & b & -b & r \end{bmatrix} \hat{i}_p(t') = \begin{bmatrix} V \\ -V \\ V \\ o \\ o \\ o \end{bmatrix}$$

considerando que

$$\underline{v}_s(t') = \begin{bmatrix} V \\ -V \\ V \end{bmatrix}, \quad \forall t' \in \tau_0$$

As três primeiras equações dão imediatamente as soluções particulares para as correntes de estator.

$$\begin{aligned}
 \underline{i}_{pa} (t') &= \frac{V}{R} \\
 (3.19) \quad \underline{i}_{pb} (t') &= -\frac{V}{R} \\
 \underline{i}_{pc} (t') &= \frac{V}{R} \quad , \quad \forall t' \in \tau_0
 \end{aligned}$$

Denotando por $\hat{i}_p (0)$; $\hat{i}_p (\tau)$; $\hat{i}_p (2\tau)$;, as soluções particulares dos sub-períodos τ_0 , τ_1 , τ_2 respectivamente, podemos obter estas soluções qualquer que seja o sub-período τ_i , quando consideramos.

$$\hat{i}_{ps} [(i+1)\tau] = \mathcal{R} \hat{i}_{ps} [i\tau]$$

As soluções particulares das correntes fictícias de rotor serão obtidas pelas três últimas equações de (3.18). Fazendo os cálculos, vem

$$\begin{aligned}
 \hat{i}_{p\alpha} (0^+) &= \frac{2Vb (r-b)}{R (r^2+3b^2)} \\
 (3.20) \quad \underline{i}_{p\beta} (0^+) &= \frac{4Vb^2}{R (r^2+3b^2)} \\
 \underline{i}_{p\gamma} (0^+) &= \frac{-2Vb (r+b)}{R (r^2+3b^2)}
 \end{aligned}$$

O vetor \hat{i}_{pr} também satisfaz (3.4), portanto;

$$\underline{i}_{pr} [(i+1)\tau] = \underline{R} \underline{i}_{pr} [i\tau]$$

3.5.2 - DERIVADA DO VETOR DAS CORRENTES

A equação (2.7) mostra que o vetor \underline{C}_2 , depende da derivada do vetor das correntes no instante inicial, devemos então encontrar uma relação entre este vetor e o das correntes.

Derivando membro a membro a equação (2.12), vem

$$(3.21) \quad \begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ R & -b & b & -r & -b & b \\ b & R & -b & b & -r & -b \\ -b & b & R & -b & b & -r \end{bmatrix} p \hat{\underline{i}} = \begin{bmatrix} p(Va + Vb + Vc) \\ pVa \\ pVb \\ pVc \end{bmatrix}$$

Como são necessárias seis equações e este sistema fornece somente quatro, tomamos as três primeiras equações de (2.5) e através de operações elementares obtemos:

$$(3.22) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} p \hat{\underline{i}} = \frac{2}{3L} \begin{bmatrix} R(i_c - i_b) - 2V \\ R(i_a - i_c) \\ R(i_b - i_a) + 2V \end{bmatrix}$$

Multiplicando (3.23) por b, somando o resultado com as três últimas equações de (3.21) e finalmente juntando a esta soma duas equações quaisquer de (3.23) completamos o sistema de seis equa

cões. Como o segundo membro de (3.21) contém derivadas das entradas, devemos lembrar que estas serão nulas, uma vez que vamos calcular $\underline{p_i}$ somente no interior de τ_0 .

Temos: $\forall t' \in \tau_0$

$$(3.23) \quad \begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\hat{p_i}}(t') = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega R}{\sqrt{3}} (i_c - i_b) - \frac{2\omega V}{\sqrt{3}} \\ \frac{\omega R}{\sqrt{3}} (i_a - i_c) \\ \frac{\omega R}{\sqrt{3}} (i_b - i_a) + \frac{2\omega V}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3L} (i_c - i_b) - \frac{4V}{3L} \\ \frac{2}{3L} (i_a - i_c) \end{bmatrix}$$

Resolvendo (3.24) para $t' = 0^+$, e denotando por

$$i_{a_0} = i_a(0^+)$$

$$i_{b_0} = i_b(0^+)$$

$$i_{c_0} = i_c(0^+)$$

vem,

$$\begin{aligned}
 \text{pia } (o^+) &= \frac{\Omega}{\sqrt{3}} (ic_o - ib_o - \frac{2V}{R}) + \alpha(ib_o + ic_o) \\
 \text{pib } (o^+) &= \frac{\Omega}{\sqrt{3}} (ia_o - ic_o) + \alpha(ia_o + ic_o - \frac{2V}{R}) \\
 \text{pic } (o^+) &= \frac{\Omega}{\sqrt{3}} (ib_o - ia_o + \frac{2V}{R}) + \alpha(ia_o + ib_o) \\
 \text{pi}_\alpha (o^+) &= \frac{\Omega}{\sqrt{3}} (ib_o - ic_o + \frac{2V}{R}) + \frac{\alpha R}{r} (ib_o + ic_o) \\
 \text{pi}_\beta (o^+) &= \frac{\Omega}{\sqrt{3}} (ic_o - ia_o) + \frac{\alpha R}{r} (ia_o + ic_o - \frac{2V}{R}) \\
 \text{pi}_\gamma (o^+) &= \frac{\Omega}{\sqrt{3}} (ia_o - ib_o - \frac{2V}{R}) + \frac{\alpha R}{r} (ia_o + ib_o)
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

Este vetor poderá ser calculado em qualquer sub-período de rotação, pois também satisfaz às propriedades:

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{pis}}(t + \tau) &= \mathcal{R} \underline{\text{pis}}(t) \\
 \text{e} \\
 \hat{\underline{\text{pir}}}(t + \tau) &= \mathcal{R} \hat{\underline{\text{pir}}}(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

cujas verificações são imediatas.

3.5.3 - CÁLCULO DA MATRIZ \underline{A}

Com as derivadas iniciais do sub-período τ_o , expressa em

termos das correntes iniciais e calculadas as soluções particulares, os vetores \underline{C}_1 e \underline{C}_2 serão respectivamente:

$$(3.26) \underline{C}_1 = \begin{bmatrix} i_a (0^+) - \frac{V}{R} \\ i_b (0^+) + \frac{V}{R} \\ i_c (0^+) - \frac{V}{R} \\ \frac{1}{r^2+3b^2} \{b(R+r)(i_{c_0} - i_{b_0} - \frac{2V}{R}) - (Rr-3b^2)(i_{c_0} + i_{b_0})\} \\ \frac{1}{r^2+3b^2} \{b(R+r)(i_{a_0} - i_{c_0}) - (Rr-3b^2)(i_{a_0} + i_{c_0} - \frac{2V}{R})\} \\ \frac{1}{r^2+3b^2} \{b(R+r)(i_{b_0} - i_{a_0} + \frac{2V}{R}) - (Rr-3b^2)(i_{a_0} + i_{b_0})\} \end{bmatrix}$$

e

$$(3.27) \underline{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} i_{c_0} - i_{b_0} - \frac{2V}{R} \\ i_{a_0} - i_{c_0} \\ i_{b_0} - i_{a_0} + \frac{2V}{R} \\ \frac{1}{r^2+3b^2} \{ (Rr-3b^2)(i_{c_0} - i_{b_0} - \frac{2V}{R}) + 3b(R+r)(i_{c_0} + i_{b_0}) \} \\ \frac{1}{r^2+3b^2} \{ (Rr-3b^2)(i_{a_0} - i_{c_0}) + 3b(R+r)(i_{a_0} + i_{c_0} - \frac{2V}{R}) \} \\ \frac{1}{r^2+3b^2} \{ (Rr-3b^2)(i_{b_0} - i_{a_0} + \frac{2V}{R}) + 3b(R+r)(i_{a_0} + i_{b_0}) \} \end{bmatrix}$$

As correntes de estator são calculadas no final do sub-período e temos:

$$\begin{aligned}
 (3.28) \quad i_a \left(\frac{\pi}{3\omega_0}^- \right) &= \left\{ (\cos\beta_0) i_a(o^+) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 i_b(o^+) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 i_c(o^+) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{V}{R} (-1 + \cos\beta_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0) \right\} \cdot \exp(-\phi_0) \\
 i_b \left(\frac{\pi}{3\omega_0}^- \right) &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 i_a(o^+) + (\cos\beta_0) i_b(o^+) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 i_c(o^+) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{V}{R} (-1 + \cos\beta_0) \right\} \cdot \exp(-\phi_0) \\
 i_c \left(\frac{\pi}{3\omega_0}^- \right) &= \left\{ - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 i_a(o^+) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 i_b(o^+) + (\cos\beta_0) i_c(o^+) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{V}{R} (-1 + \cos\beta_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0) \right\} \cdot \exp(-\phi_0)
 \end{aligned}$$

$$(3.29) \quad \underline{A} = \exp(-\phi_0) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 & - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 & - \cos\beta_0 \\ - \cos\beta_0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 & - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 \\ - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 & - \cos\beta_0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\beta_0 \end{bmatrix}$$

e a equação característica da recorrência definida em (3.16) será expressa pelo polinômio,

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) = & \mu^3 - (\sqrt{3} \ell^{-\phi_0} \operatorname{sen} \beta_0) \mu^2 + [\ell^{-2\phi_0} \operatorname{sen}^2 \beta_0 - \\ & - \sqrt{3} \ell^{-2\phi_0} \cos \beta_0 \operatorname{sen} \beta_0] \mu + \ell^{-3\phi_0} \cos^3 \beta_0 + \\ & + \ell^{-3\phi_0} \cos \beta_0 \operatorname{sen}^2 \beta_0 \end{aligned}$$

onde, os auto valores de \underline{A} devem satisfazer

$$(3.30) \quad \varphi(\mu) = 0$$

Como se trata de um polinômio de terceiro grau a determinação das raízes não é imediata. Entretanto, podemos fatorar uma das raízes, fazendo

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) = & \mu(\mu^2 - \ell^{-2\phi_0} \cos^2 \beta_0) + \mu[\ell^{-2\phi_0} - (\sqrt{3} \ell^{-\phi_0} \operatorname{sen} \beta_0) \mu] + \\ & + \ell^{-\phi_0} \cos \beta_0 [\ell^{-2\phi_0} - (\sqrt{3} \ell^{-\phi_0} \operatorname{sen} \beta_0) \mu] \end{aligned}$$

ou de outra forma

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) = & (\mu + \ell^{-\phi_0} \cos \beta_0) [\mu^2 - \ell^{-\phi_0} (\cos \beta_0 + \sqrt{3} \operatorname{sen} \beta_0) \mu + \\ & + \ell^{-2\phi_0}] \end{aligned}$$

Os valores de μ que satisfazem (3.30), serão:

$$(3.31) \quad \mu_1 = - \exp (-\phi_0) \cos \beta_0$$

e

$$(3.32) \quad \mu_{2,3} = \frac{\exp (-\phi_0)}{2} \{ (\cos \beta_0 + \sqrt{3} \operatorname{sen} \beta_0 \pm \\ \pm j (\sqrt{3} \cos \beta_0 - \operatorname{sen} \beta_0) \}$$

A condição de estabilidade será dada por

$$|\mu_i| < 1$$

os módulos de μ_i são respectivamente:

$$|\mu_1| = \exp (-\phi_0) |\cos \beta_0|$$

$$|\mu_{2,3}| = \exp (-\phi_0)$$

a condição de estabilidade é satisfeita se

$$\phi_0 \neq 0$$

ou, levando em conta a expressão de ϕ_0 ,

$$\frac{2\pi r R}{9\omega_0 (R+r) L} \neq 0$$

a hipótese de L muito grande, levando a

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \phi_0 = 0$$

$$L \rightarrow \infty$$

não deve afetar a estabilidade pois corresponde ao limite

$$\lim_{L \rightarrow \infty} |\mu_{2,3}| = 1$$

$$L \rightarrow \infty$$

pela esquerda.

3.5.4 - "ROOT LOCUS"

O lugar das raízes μ_i , com variação de alguns parâmetros, pode ser construído sem dificuldade. Levando em conta as expressões (3.31) e (3.32), bem como

$$\phi_0 = \frac{2\pi r R}{9\omega_0 (R+r)L}$$

e

$$\beta_0 = \frac{\pi \omega R}{3\omega_0 (R+r)}$$

teremos, respectivamente, com ω e L crescentes os lugares das raí-

zes representadas nas figuras (3.6 a) e (3.6 b).

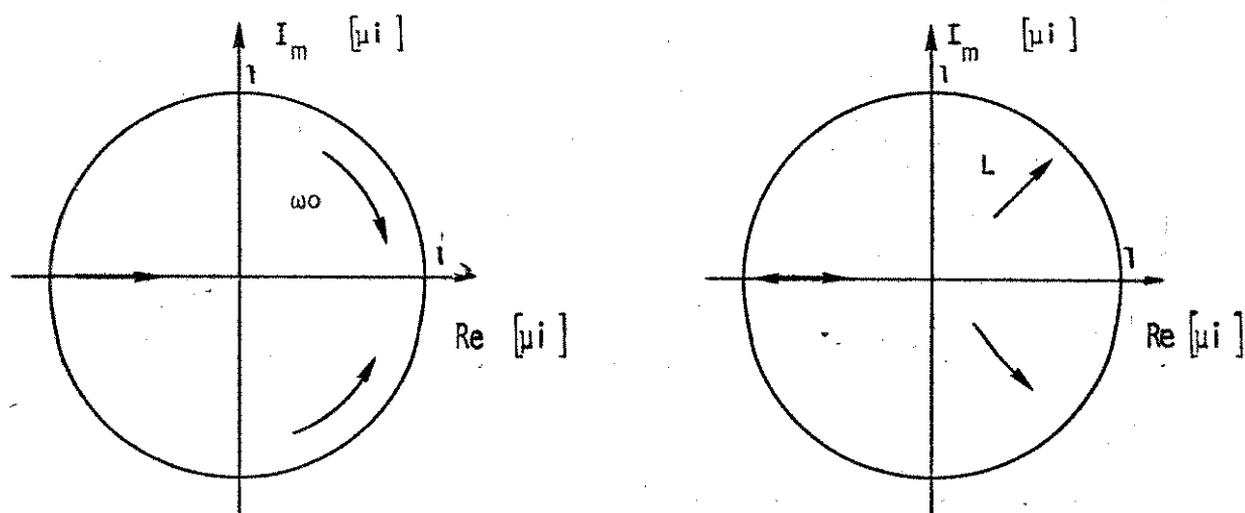


Fig. 3.6 - "Root Locus"

A estabilidade local do ponto duplo não será afetada pela variação da frequência do vetor das entradas mesmo quando consideramos a hipótese de L muito grande.

CAPÍTULO 4

PONTO DUPLO E TORQUE MÉDIO

4.1 INTRODUÇÃO

A determinação do ponto duplo da recorrência, como já vimos, fornece as condições iniciais do sistema degenerado, em regime permanente. Com isto podemos determinar as correntes instantâneas de estator, no interior de um sub-período de rotação. As correntes fictícias de rotor obtidas através de (2.13)

Uma expressão para o torque instantâneo será obtida, em termos destas correntes com a utilização da equação (2.15). Como estamos interessados no cálculo do torque médio, em função da velocidade da máquina teremos:

$$(4.1) \quad \bar{T}_{mec}(\omega) = \frac{1}{T_t} \int_0^{T_t} T_{mec}(t) dt$$

onde

T_t - é o período da função $T_{mec}(t)$

A integral à direita da equação (4.1) exige que o período do torque seja conhecido e portanto, devemos determiná-lo. Por outro lado podemos observar que esta função satisfaz a propriedade:

$$(4.2) \quad T_{mec}(t + \tau) = T_{mec}(t)$$

então o torque médio poderá ser calculado, através de um único sub - período de rotação e teremos

$$(4.3) \quad \bar{T}_{mec}(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} T_{mec}(t) dt$$

Para mostrarmos que $T_{mec}(t)$ satisfaz a propriedade (4.2) vamos primeiramente escrever (4.2) na forma

$$(4.4) \quad T_{mec}(t) = -\frac{\sqrt{3}L}{2} \underline{i}_s^T \underline{J}_r [\underline{V}_s - \underline{R}' \underline{i}_s]$$

Calculando no instante $t + \tau$, vem

$$T_{mec}(t + \tau) = -\frac{\sqrt{3}L}{2} \underline{i}_s^T(t+\tau) \underline{J}_r [\underline{V}_s(t+\tau) - \underline{R}' \underline{i}_s(t+\tau)]$$

como \underline{V}_s e \underline{i}_s satisfazem as propriedades (3.1) e (3.4) respectivamente, temos

$$(4.5) \quad T_{mec}(t+\tau) = -\frac{\sqrt{3}L}{2} \underline{i}_s^T(t) \underline{Q}^T \underline{J}_r \underline{Q} [\underline{V}_s(t) - \underline{R}' \underline{i}_s(t)]$$

Sendo, \underline{J}_r uma matriz dada por

$$(4.6) \quad \underline{J}_r = \frac{1}{r^2 + 3b^2} \begin{bmatrix} -2b & (b - r) & (b + r) \\ (b + r) & -2b & (b - r) \\ (b - r) & (b + r) & -2b \end{bmatrix}$$

terá as mesmas características da matriz \underline{B} definida no apêndice 1; en-

tão, a proposição A_1 , é satisfeita por \underline{J}_r e temos

$$\underline{R}^T \underline{J}_r \underline{R} = \underline{J}_r$$

Substituindo este resultado em (4.5), temos que (4.2) é satisfeita.

O ponto duplo será então calculado no sub-período $\tau_0 = [t_0^+, t_0^- + \tau]$ com $t_0 = 0$, pela equação (3.12) e temos

$$(4.7) \quad \underline{i}(0^+) = [\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \{ \underline{R}^{-1} \underline{K}_1 \underline{i}_{ps}(0^+) + \Delta \underline{i}_s(0) \}$$

para isso, devemos calcular as descontinuidades.

4.2 - REGIÃO DAS DESCONTINUIDADES

No capítulo três vimos que a solução na região de descontinuidade fica determinada através das equações (3.7) e (3.9). A primeira fornece:

$$(4.8) \quad \begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ R & -b & b & -r & -b & b \\ b & R & -b & b & -r & -b \\ -b & b & R & -b & b & -r \end{bmatrix} \Delta \underline{i}(0) = \begin{bmatrix} 2V \\ 2V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a segunda:

$$(4.9) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Delta \underline{i}(0) = \underline{0}$$

Multiplicando (4.9) pela constante b , e somando o produto obtido às três últimas equações de (4.8), resulta

$$\begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \Delta \underline{i}(0) = \begin{bmatrix} 2V \\ 2V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Juntando a este sistema mais duas equações quaisquer de (4.9), vem

$$(4.10) \quad \begin{bmatrix} R & R & R & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \underline{i}(0) = \begin{bmatrix} 2V \\ 2V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As descontinuidades, dadas por (4.10), serão

$$\Delta i_a(0) = \frac{2(3R + r)V}{3R(R + r)}$$

$$\Delta i_b = \Delta i_c (o) = \frac{2 r V}{3R (R+r)}$$

$$(4.11) \quad \Delta i_\alpha (o) = - \frac{4 V}{3(R+r)}$$

$$\Delta i_\beta (o) = \Delta i_\gamma (o) = \frac{2 V}{3(R+r)}$$

A solução na região das descontinuidades, fica também de terminada, em qualquer outro sub-período τ_i , pela propriedade

$$(4.12) \quad \Delta i_s(t + \tau) = \underline{R} \Delta i_s(t)$$

4.3 - CÁLCULO DO PONTO DUPLO

Podemos agora calcular o ponto duplo, utilizando (4.7) . Antes, porém, será necessário que façamos algumas considerações a respeito da inversão da matriz $[I - A]$.

Por definição temos:

$$(4.13) \quad [I - A]^{-1} = \frac{M^T}{\det [I-A]}$$

onde

M: é a matriz dos cofatores de $[I - A]$

O determinante do denominador do segundo membro desta expressão, é o mesmo polinômio que representa a equação característica da recorrência, com $\mu = 1$. Como 1 não é raiz da equação característica, este denominador não é nulo.

$$[\underline{I}-\underline{A}]^{-1} = \frac{1}{\Phi(1)} \begin{bmatrix} [(1-S_0)^2 - C_0 S_0] & [C_0^2 - (1-S_0)S_0] & [S_0^2 - (1-S_0)C_0] \\ [S_0^2 - (1-S_0)C_0] & [(1-S_0)^2 - C_0 S_0] & [C_0^2 - (1-S_0)S_0] \\ [C_0^2 - (1-S_0)S_0] & [S_0^2 - (1-S_0)C_0] & [(1-S_0)^2 - C_0 S_0] \end{bmatrix}$$

onde

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ell^{-\Phi_0} \operatorname{sen} \beta_0$$

$$C_0 = \ell^{-\Phi_0} \cos \beta_0$$

e

$$\Phi(1) = (1-C_0) [1-C_0 - 3 S_0 - \ell^{-2\Phi_0}]$$

De (3.28) obtemos a matriz \underline{K}_1 :

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 - C_0 - 2 S_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - C_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - C_0 + 2 S_0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a solução de (4.4) será

$$i_a(o^+) = \frac{V}{R} - \Delta i_c(o)$$

$$i_b(o^+) = \frac{V}{R} + \frac{\Delta i_c(o)}{\Phi(1)} [1 + (\cos\beta_0 - \sqrt{3}\sin\beta_0)\exp(-\Phi_0)]$$

$$i_c(o^+) = \frac{V}{R} + \frac{\Delta i_c(o)}{\Phi(1)} [1 - (2\cos\beta_0)\exp(-\Phi_0)]$$

As condições iniciais das correntes fictícias de rotor, são obtidas de (2.13), com

$$\underline{i}_s(t) = \underline{i}_s(o^+)$$

e

$$\underline{v}_s(t) = \underline{v}_s(o^+)$$

4.4 - TORQUE MÉDIO

O torque instantâneo calculado no sub-período τ_0 , com $t_0 = 0$, será:

$$(4.15) \quad T_{mec}(t) = - \frac{2b^2}{\omega(r^2 + 3b^2)} \left\{ V(2i_b - i_a - i_c) - \frac{Vr}{b}(i_c - i_a) \right. \\ \left. + (R+r)(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2 - i_a i_b - i_a i_c - i_b i_c) \right\}$$

Sendo o motor descrito por um modelo de 2a. ordem, sômen-

te duas correntes serão linearmente independentes, portanto vamos -
 exprimir uma delas como combinação linear das outras duas. A equa-
 ção (2.12) fornece:

$$R (i_a + i_b + i_c) = V$$

escrevendo i_b em termos de i_a e i_c , e substituindo em (4.15), vem

$$(4.16) \quad T_{mec}(t) = \frac{2b^2}{\omega(r^2+3b^2)} \left\{ \frac{3V}{R} (2R+r) (i_a + i_c) - \frac{Vr}{b} (i_c - i_a) \right. \\ \left. - 3(R+r) (i_a^2 + i_c^2 + i_a i_c) - (3R+r) \frac{V^2}{R^2} \right\}$$

No caso de $L \rightarrow \infty$, as correntes i_a e i_c são dadas na forma

$$i_a = \frac{V}{R} + C_{1a} \cos \Omega t + C_{2a} \sin \Omega t$$

$$i_c = \frac{V}{R} + C_{1c} \cos \Omega t + C_{2c} \sin \Omega t$$

com

$$C_{1a} = -\Delta i_c(0)$$

$$(4.17) \quad C_{2a} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta i_c(0) \cdot \frac{3\cos\beta_0 - \sqrt{3}\sin\beta_0}{2 - \cos\beta_0 - \sqrt{3}\sin\beta_0}$$

$$C_{1c} = \Delta i_c(0) \cdot \frac{1 - 2\cos\beta_0}{2 - \cos\beta_0 - \sqrt{3}\sin\beta_0}$$

$$C_{2c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta i c(o) \frac{3 - 2\sqrt{3} \operatorname{sen}\beta_0}{2 - \cos\beta_0 - \sqrt{3}\operatorname{sen}\beta_0}$$

e o torque instantâneo será

$$(4.18) \quad T_{mec}(t) = - \frac{8V^2 r}{3\omega R^2} - \frac{2 \Delta i c(o)}{3\omega (2 - \cos\beta_0 - \sqrt{3}\operatorname{sen}\beta_0)} \left\{ \begin{aligned} &^9(R+r) \Delta i c(o) + \frac{V(R+2r)}{R} [(-1 - \cos\beta_0 + \sqrt{3}\operatorname{sen}\beta_0)\cos\Omega t \\ &+ \frac{1}{3} (3 - 3\cos\beta_0 - \sqrt{3}\operatorname{sen}\beta_0)\operatorname{sen}\Omega t] \end{aligned} \right\}$$

A integral no sub-período τ_0 , fornece o torque médio que será a expressão acima, substituindo $\cos \Omega t$ e $\operatorname{sen} \Omega t$ por $\frac{\operatorname{sen}\beta_0}{\beta_0}$ e $\frac{(1 - \cos\beta_0)}{\beta_0}$, respectivamente.

APÊNDICE 1

PROPOSIÇÃO A.1

Seja \underline{B} uma matriz quadrada, de ordem n , cujos elementos b_{ij} , satisfazem às condições:

$$(A.1) \quad b_{ij} = b_{i+1, j+1}$$

com

$$(A.2) \quad b_{in} = b_{i+1, 1}$$

$$b_{nj} = b_{1, j+1}$$

então

$$(A.3) \quad \underline{R}^T \underline{B} \underline{R} = \underline{B}$$

onde

\underline{R} é a matriz de rotação dada por (1.2).

Prova:

Seja \underline{C} a matriz produto dada por:

$$\underline{C} = \underline{R}^T \underline{B}$$

os elementos de \underline{C} serão da forma

$$c_{ij} = \begin{cases} -b_{nj} & \text{na primeira linha de } \underline{C} \\ -b_{ij} & \text{nas demais linhas de } \underline{C} \end{cases}$$

Pré multiplicando \underline{C} por \underline{R} , vem

$$\underline{C} \underline{R} = \begin{bmatrix} b_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n\ n-1} \\ b_{1n} & b_{11} & \dots & \dots & b_{1\ n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1\ n} & b_{n-1\ 1} & \dots & \dots & b_{n-1\ n-1} \end{bmatrix}$$

Como b_{ij} satisfaz (A.1) e (A.2), podemos dizer que:

$$\underline{C} \underline{R} = \underline{B}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANDRONOV, A.A.; VITT A.A. and KHAIKIN S.E. "Theory of Oscillators", Addison-Wesley Publishing Company, INC - 1966.
- [2] MONTEL, P. "Leçons sur Les Récurssences et Leurs Applications", Gauthier - Villars, Paris - 1957.
- [3] MAJMUDAR, H. "Electromechanical Energy Converters", Allyn and Bacon - INC, Boston - 1965.
- [4] BURIAN JR., Y. e ZAMBONI I. "Contribuição ao Estudo do Contrôlo de Velocidade em Máquinas de Indução - FEC - UNICAMP - Campinas - 1975.
- [5] MISKULIN, M.S. "Modelamento de Motores de Indução: Uma Contribuição ao Estudo do Contrôlo de Torque e Velocidades" Tese de MC, FEC, UNICAMP - Campinas - 1974.
- [6] SLEMON, G.R. "Magnetolectric Devices", Willy, N.Y. - 1966.
- [7] FITZGERALD, A.E.; KINGSLEY JR., C. and KUSKO, A. "Electric Machinery", International Student Edition - 1971.
- [8] McLEAN, G.W.; NIX, G.F. and ALWASH, JR., "Performance and Design of Induction Motors with Square-Wave Excitation" - Proc. Inst. Elect. Eng. pp 1405 - 1411 - Aug. - 1969.
- [9] MAGUREANU, R. "A State Variable Analysis of Inverter - Fed. A. C. Machines" Ifac Symposium - Duesseldorf, 1974.
- [10]

- [11] HARASHIMA, F. and YANASE T. "State Space Analysis of A.C. Motors Fed. by Thyristor Inverters". Ifac Symposium - Duessel - dorf - 1974.
- [12] BOTTURA C. P. "Contribuição ao Estudo de Contrôlo de torque em Máquina Série por Modulação em Largura de Pulso, Tese Doutorado, UNICAMP - 1973.
- [13] KOSTENKO, M. and PIOTROVSKY, L. "Electrical Machines" - Foreign Languages Publishing House - Moscou.