



Departamento de Sistemas e Controle de Energia
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Uma Nova Implementação do Efeito Skin no Modelo da Linha de Transmissão

Autor: *Omar Mohamed Omar Gatous*
Orientador: Prof. Dr. *José Pissolato Filho*

Tese de Doutorado Submetida à Faculdade
de Engenharia Elétrica e de Computação
da Universidade Estadual de Campinas para
Preenchimento dos Pré-requisitos Parciais
para Obtenção de Título de Doutor em En-
genharia Elétrica

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. José Pissolato Filho - FEEC/UNICAMP-Presidente
Prof. Dr. Edson Guedes da Costa - UFCG
Prof. Dr. Sérgio Kurokawa-UNESP/Ilha Solteira
Prof. Dr. Carlos Rodrigues de Soza-FEEC/UNICAMP
Prof^ª. Dr^ª. Maria Cristina Tavares-FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Luis Carlos Pereira da Silva-FEEC/UNICAMP

Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por *Omar Mohamed Omar Gatous*
e aprovada pela Comissão
Julgadora em *28/02/05* (Sua)



UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	TUNICAMP
	G222n
V	EX
TOMBO BCI	64056
PROC.	16-f-00086-09
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	01/06/05
Nº CPD	

BIBID - 3709 53

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G222n Gatous, Omar Mohamed Omar
Uma nova implementação do efeito skin no modelo da
linha de transmissão / Omar Mohamed Omar Gatous. –
Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador: José Pissolato Filho.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Linhas de telecomunicação. 2. Compatibilidade
eletromagnética. 3. Resistência elétrica. 4. Indutância. I.
Pissolato Filho, José. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. III. Título.

Titulo em Inglês: A new implementation of skin-effect in transmission line model
Palavras-chave em Inglês: Transmission lines, Electromagnetic Compatibility,
Electric resistance e Inductance

Área de concentração: Energia Elétrica

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Edson Guedes da Costa, Sergio Kurokawa, Maria Cristina
Tavares e Luiz Carlos Pereira da Silva

Data da defesa: 28/02/2005

À minha esposa Fatema
e aos meus filhos
Mohamed
Maram
e Muadh

Agradecimentos

- A Deus todo poderoso;
- Ao meu orientador Prof. Dr. **José Pissolato Filho** pelo seu grande apoio e a sua paciência durante a realização da tese.
- À minha esposa **Fatema** e aos meus filhos **Mohamed, Maram e Muadh** pelo apoio durante a realização da tese.
- Ao engenheiro **Eduardo Gastaldi** pela ajuda na correção do Português.
- Aos engenheiros **Francisco Brito** e **Marcos Randi** e à secretária **Eliane Campos** do laboratório de alta tensão pela convivência.
- Aos professores, alunos e funcionários da FEEC e da UNICAMP pela convivência.
- À UNICAMP pela oportunidade.
- Ao Brasil pela recepção e pela grande hospitalidade.

Resumo

Esta tese apresenta o desenvolvimento de uma nova implementação do efeito skin no modelo da linha de transmissão de energia elétrica, e de sinal, para estudo e análise das perdas devido ao efeito skin no domínio da frequência. As perdas devido ao efeito skin são levadas em conta através da formulação e solução da equação de onda de Maxwell em função do campo elétrico na direção de propagação. A solução da equação de Maxwell apresenta a formulação para o cálculo da corrente transitória na seção transversal do condutor sólido e cilíndrico como função do campo elétrico na superfície. A formulação matemática das equações da nova implementação é obtida pela consideração da formulação da corrente transitória e aplicando a teoria eletromagnética. A tese apresenta também o desenvolvimento da formulação matemática das equações dos modelos de linha de transmissão sem perdas e com perdas (conceito da resistência da corrente contínua) para efeito de comparação. A solução no domínio da frequência para estes três modelos é obtida a partir da aplicação da transformada de Fourier. A consequência do desenvolvimento da nova implementação apresenta uma possibilidade para desenvolver uma nova técnica, exata e bastante simples. Essa técnica pode ser usada para o cálculo dos parâmetros do efeito skin (resistência e indutância interna do condutor sólido e cilíndrico). Análise comparativa entre essa nova técnica e a técnica de Bessel (técnica muito usada pesquisa para o mesmo objetivo) são apresentados. Os resultados obtidos mostram que as vantagens dessa nova técnica sobre a técnica de Bessel são a simplicidade, rapidez, precisão e adequação para qualquer linguagem de computador. Finalizando é apresentada uma análise de comparação matemática e gráfica entre os parâmetros do efeito skin e da corrente contínua e seus efeitos nas características da linha de transmissão. A análise mostra que, devido as perdas do efeito skin, a resistência aumenta e indutância interna diminui com aumento da frequência e a característica da linha de transmissão mais afetada é o coeficiente de atenuação α . Além disso, alguns exemplos são apresentados como aplicações dessa nova implementação em linhas de transmissão longas e curtas e comparar os resultados com aqueles obtidos pelos modelos sem e com perdas. Nessas exemplos a análise mostra que as tensões e correntes previstas no final de uma linha de transmissão eram sub estimadas quando usados os modelos sem e com perdas.

Abstract

This thesis presents the development of a new and quite simple implementation of skin-effect in electrical and signal transmission line model for skin-effect loss analysis and study in frequency-domain. Skin-effect loss is taken into account by formulating and solving Maxwell's wave equation as a function of the electrical field in the direction of propagation. Maxwell's wave equation solution gives the transient formulation for the current calculation in the transversal section of the solid cylindrical conductor as a function of the electrical field on the conductor surface. The mathematical formulation of the model equations is obtained by considering the transient formulation of the current and applying electromagnetic theory. It also presents the development of the mathematical formulation equations of both the lossless and the lossy (DC resistance concept) transmission line models for comparisons. The frequency-domain solution for these three models is obtained by applying Fourier transform method. The consequence of the development of the new implementation gives a possibility to develop a new, exact and very simple technique. This technique can be used to calculate the skin-effect parameters (resistance and internal inductance of the solid cylindrical conductor). Comparison analysis between this new technique and the Bessel technique (the most used technique in research for the same objective) are presented. The results show that the advantages of this new technique over the Bessel technique are the simplicity, quickness, accuracy and the suitability for any computer language. Finally mathematical and graphical comparison analysis between skin-effect and DC parameters and their effects on the transmission line characteristics is presented. The analysis shows that, due to the skin-effect loss, the resistance increases and the internal inductance decreases with the increase of the frequency, and the most affected transmission line characteristic is the attenuation coefficient α . In addition, some examples are presented as an applications of the new implementation in long and short transmission lines and compare the results with those obtained by the lossless and lossy models. In these examples the analysis shows that the predicted voltages and currents at the end of the transmission lines were under-estimated when using the lossless and lossy models.

خلاصة

هذه الأطروحة تقدم تطويراً جديداً و مبسطاً بشأن تطبيق مفاهيم الظاهرة السطحية علي نموذج خطوط النقل الكهربائية والإشارات، وذلك لإجل دراسة وتحليل مفاهيم الظاهرة السطحية في المجال الترددي. مفاهيم الظاهرة السطحية تم حسابها عن طريق صياغة وحل معادلة ماكسويل للموجة كدالة في المجال الكهربائي في اتجاه الانتشار الموجي. حل معادلة ماكسويل للموجة يعطي الصيغة العابرة لحساب التيار الكهربائي المار في المقطع المستعرض للموصل الأسطواناني المصمت. الصيغة الرياضية للمعادلات التطبيقية الجديدة لنموذج خطوط النقل تم تطويرها بتطبيق النظرية الكهرمغناطيسية مع الأخذ في الاعتبار الصيغة العابرة للتيار. أيضاً الأطروحة تقدم تطويراً لصيغة المعادلات الرياضية لكل من نموذج خطوط النقل الخالية من المفاهيم ونموذج خطوط النقل التي تحتوي علي مفاهيم مفهوم مقاومة التيار المستمر وذلك لغرض المقارنة. الحل في المجال الترددي للمعادلات التطبيقية لنماذج خطوط النقل الثلاثة تم الحصول عليه بتطبيق نظرية التحويل لقرير كنتيجة منطقية لتطوير النموذج الجديد تم تطوير تقنية جديدة بسيطة ودقيقة. هذه التقنية يمكن إستخدامها في حساب العوامل المتغيرة للظاهرة السطحية (المقاومة و المحثية الداخلية للموصل الأسطواناني المصمت). عرضت مقارنة تحليلية رياضية و بيانية بين هذه التقنية الجديدة وتقنية بيسل (التقنية الأكثر إستخداماً في البحث لنفس الغرض). النتائج بينت أن فوند هذه التقنية الجديدة، مقارنة بتقنية بيسل، هي البساطة و السرعة و الدقة و ملاءمتها لأي لغة من لغات الحاسوب أخيراً عرضت مقارنة تحليلية رياضية و بيانية بين العوامل المتغيرة للظاهرة السطحية و عوامل التيار المستمر وتأثير هذه العوامل على مميزات خطوط النقل. التحليل بينت أن الظاهرة السطحية تسبب في زيادة مقاومة الموصل وتناقص محثته الداخلية بزيادة التردد وهذا بدوره يؤثر في مميزات خطوط النقل، حيث أن الميزة الأكثر تكررأ هي ميزة التوهين إضافة إلي ذلك عرضت بعض الأمثلة التطبيقية للنموذج الجديد علي خطوط النقل للمسافات الطويلة و القصيرة، حيث تمت مقارنة النتائج بالنتائج المتحصل عليها بإستخدام نموذج خطوط النقل الخالي من المفاهيم و نموذج خطوط النقل لمفاهيم مفهوم مقاومة التيار المستمر. في هذه الأمثلة التحليلات بينت أن فرق الجهود و التيارات المتنبية في نهاية خطوط النقل كانت غير تقديرية عند إستخدام نموذج خطوط النقل الخالية من المفاهيم أو نموذج خطوط النقل لمفاهيم مقاومة التيار المستمر.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Modelo da linha de transmissão Sem Perdas	5
2.1	Introdução	5
2.2	Desenvolvimento das Equações	5
2.3	Solução no Domínio da Freqüência	10
3	Modelo da linha de transmissão com perdas	19
3.1	Introdução	19
3.2	Desenvolvimento das Equações	20
3.3	Solução no Domínio da Freqüência	25
4	Modelo da Linha de Transmissão do Efeito Skin	35
4.1	Introdução	35
4.2	Formulação da Equação de Onda	36
4.3	Solução da Equação de Onda	38
4.3.1	Mudança de Variáveis	38
4.3.2	Novas Condições Iniciais e Contorno	39
4.3.3	Determinação da Solução Parcial $E_1(r, t)$	42
4.3.4	Determinação da Função $g(r, t)$	42
4.3.5	Determinação da Solução Geral $E_z(r, t)$	42
4.4	Formulação da Corrente	43
4.5	Formulação da função de Bessel ξ_k	50
4.6	Desenvolvimento das Equações	51
4.6.1	Determinação do campo elétrico $E_z^R(z, t)$	52
4.7	Solução no Domínio da Freqüência	57
5	Cálculo da Resistência e da Indutância interna	67
5.1	Introdução	67
5.2	Aplicação da Formulação da Técnica de Bessel	68
5.3	Aplicação da Formulação da Técnica Proposta	71
5.4	Resultados e Discussão	77

5.5	Análise Gráfica de Alguns Materiais	82
6	Aplicações em Linhas de Transmissão	87
6.1	Introdução	87
6.2	Parâmetros da linha	87
6.3	Características da linha	89
6.4	As aplicações	94
6.4.1	Exemplo 1	95
6.4.2	Exemplo 2	100
7	Conclusões e sugestões	103
A	Solução da Equação de Onda	105
B	Fluxograma do algoritmos	111

Lista de Figuras

2.1	Linha de transmissão formada por um condutor ideal acima de um plano de terra também ideal, com os campos elétrico e magnético associados.	6
2.2	Circuito equivalente de um trecho infinitesimal de comprimento dz da linha de transmissão sem perdas.	10
3.1	Linha de transmissão formada por condutor não ideal acima de um plano de terra ideal com os campos elétrico e magnético associados. .	20
3.2	Circuito equivalente de um trecho infinitesimal de comprimento dz da linha de transmissão com perdas da resistência da corrente contínua	26
4.1	Geometria de um condutor cilíndrico, uniforme, infinito e não ideal excitado por um campo elétrico na superfície	36
4.2	A Seção Transversal do Condutor Cilíndrico.	44
4.3	Linha de transmissão de um condutor não ideal acima de um plano de terra não ideal com os campos elétrico e magnético associados. . .	51
4.4	Circuito equivalente de um trecho, de comprimento dz , da linha de transmissão com perdas do efeito skin.	57
5.1	Módulo da admitância interna complexa da seção transversal do condutor sólido e cilíndrico	73
5.2	Comparação na resistência do efeito skin entre a técnica proposta e a técnica de Bessel para o condutor sólido e cilíndrico de cobre	78
5.3	Resistência do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre	79
5.4	Indutância interna do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre	79
5.5	Impedância do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre	80
5.6	Ângulo de fase do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre	81
5.7	Componentes normalizados da impedância do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre	82
5.8	Comparação da resistência do efeito skin.	83

5.9	Comparação da indutância interna do efeito skin.	84
5.10	Comparação da resistência do efeito skin.	85
5.11	Comparação da indutância interna do efeito skin.	85
6.1	Valores das resistências de condutores de cobre de diferentes raios. . .	88
6.2	Valores das indutâncias internas de condutores de cobre de diferentes raios.	89
6.3	Comparação de coeficiente de atenuação de condutores de cobre de diferentes raios.	90
6.4	Comparação de coeficiente de fase de condutores de cobre de diferentes raios.	91
6.5	Comparação do módulo da impedância característica de condutores de cobre de diferentes raios.	92
6.6	Comparação do ângulo de fase de condutores de cobre de diferentes raios.	93
6.7	Comparação da velocidade de fase de condutores de cobre de diferentes raios.	94
6.8	Uma linha de transmissão acima de um plano de terra considerado ideal.	95
6.9	Ondas estacionárias de tensões no início da linha para algumas frequências selecionadas.	96
6.10	Ondas estacionárias de tensões no final da linha para algumas frequências selecionadas.	97
6.11	Ilustração do pico máximo positivo de amplitudes de tensões previstas no final da linha pela frequência usando condutores de dois diferentes raios.	98
6.12	Ilustração do pico máximo positivo de amplitudes de correntes previstas no final da linha pela frequência usando condutores de dois diferentes raios.	98
6.13	Ilustração do pico máximo de amplitudes das tensões positivas previstas em função da frequência no final da linha usando os três modelos.101	
6.14	Ilustração do pico máximo de amplitudes das correntes positivas previstas em função da frequência no final da linha usando os três modelos.102	

Lista de Tabelas

5.1	Alguns materiais condutores selecionados com suas conductividades elétricas e suas permeabilidades relativas	83
6.1	A relação entre o raio do condutor e a tensão no final da linha devido as perdas do efeito skin para frequências de 10^{10} e 10^{12} Hz	99
6.2	A relação entre o raio do condutor e a corrente no final da linha devido as perdas do efeito skin para frequências de 10^{10} e 10^{12} Hz	100
6.3	A relação entre o comprimento da linha e a tensão no final da mesma linha devido as perdas do efeito skin para frequências de 10^6 e 10^8 Hz.	102

Capítulo 1

Introdução

A poluição inserida nos sistemas de potência devido aos sinais harmônicos tem aumentado com o número de aparelhos elétricos e eletrônicos, residenciais e industriais. O conteúdo harmônico, introduzido na rede devido a estes equipamentos, produzem um aumento da corrente e da tensão no final da linha de transmissão e também das perdas devido ao efeito skin. Todos estes fatores agravam o quadro de operação da rede elétrica que precisa operar dentro de limites pre-estabelecidos.

O principal responsável pela análise matemática completa de propagação de sinais em linhas de transmissão foi Oliver Heaviside [1]. Esta análise foi desenvolvida, inicialmente, para descrever uma linha sem perdas e, em seguida, foi estendida para descrever linhas com perdas. Assume-se que essas perdas são uma aproximação razoável pois o condutor e o meio dielétrico são considerados não ideais.

O efeito skin, ou efeito pelicular, acontece sempre que um condutor é excitado por uma corrente alternada. Essa excitação resulta em uma distribuição não uniforme de corrente elétrica na área da seção transversal do condutor. Essa distribuição não uniforme da corrente causa aumento na resistência efetiva do condutor e diminuição na indutância interna (ambos em função da frequência).

Há várias décadas, as perdas devido ao efeito skin tem sido analisadas e estudadas por alguns pesquisadores. A maioria dessas pesquisas tem tratado as perdas por efeito skin nas faixas de frequências altas. Historicamente, de acordo com Yen et al. [4], as linhas de transmissão com perdas por efeito skin foram analisados por Wigington e Nahman em 1957 usando o método de transformada de Laplace. Em 1964 Bertin realizou simulações, no domínio da frequência, utilizando computadores digitais. Em 1967, dois modelos de circuitos foram propostos por Miesch e Ruehli e também por Gruodis e Ho. Nessa proposta, as perdas por efeito skin de cada seção de linha de transmissão foram representadas por uma serie de combinações de circuitos onde cada circuito é formado por resistores e indutores.

Em 1982, Yen et al. [4] apresentaram no seu trabalho um modelo de circuito equivalente com M resistores e $M - 1$ indutores (derivados da equação diferencial do efeito skin). Esse modelo representa uma das seções de uma linha de transmissão que é dividida em N seções. De acordo com a opinião de Kim e Neikirk [5], essa técnica falha precisamente no modelo do efeito skin nas faixas de altas frequências e não estabelece regras claras na escolha de valores de componentes do modelo.

Em 1996, Kim e Neikirk [5] publicaram um artigo onde foi apresentado uma modificação na técnica apresentada por Yen et al. [4]. Na modificação foi usado um método que permite aplicar algumas regras simples para selecionar os valores dos resistores e indutores independentemente da frequência.

Matick [8] e Chipman [9] apresentam uma formulação exata, que é baseada na utilização das equações de Bessel, para o efeito skin. Esta formulação é a mais comumente utilizada no cálculo da impedância, devido ao efeito skin, em um sistema genérico. Com base nesta formulação, obtêm-se a impedância interna de um condutor, onde as componentes real e imaginária correspondem, respectivamente, a resistência (dominada resistência do condutor) e a reatância indutiva devido ao efeito skin. A partir da reatância calcula-se a indutância interna do condutor devido ao efeito skin. Os valores da resistência e da indutância interna fornecidos por essa técnica são exatos e são válidos de zero a altas frequências.

Este trabalho apresenta um novo modelo computacional simples com a finalidade de estudo e análise gráfica das perdas por efeito skin em linhas de transmissão no domínio da frequência. A formulação das perdas por efeito skin no desenvolvimento das equações deste modelo é obtida a partir da solução da equação de onda de Maxwell para a seção transversal de um condutor sólido e cilíndrico em função do campo elétrico na direção de propagação. A idéia é baseada no fato de que em qualquer condutor carregado por uma corrente alternada existe um campo elétrico na direção de propagação. A existência desse campo elétrico é devida a corrente que flui no condutor não ideal. Assim, a formulação da equação de onda de Maxwell para a seção transversal de um condutor sólido e cilíndrico assumindo a simetria do campo elétrico em relação ao eixo do condutor torna-se possível.

A consequência da formulação das equações deste modelo possibilita o desenvolvimento de uma técnica nova, muito simples e exata para o cálculo da resistência e da indutância interna de um condutor sólido e cilíndrico em qualquer frequência (de zero a frequência muito alta). Esta técnica, em comparação com a técnica de Bessel (a técnica mais utilizada pelos pesquisadores para a mesma finalidade), apresentou bons resultados. Além disso, este trabalho apresenta também o desenvolvimento

das equações tanto do modelo sem perdas (modelo ideal) quanto do modelo com perdas (modelo do conceito da resistência de corrente contínua) com o objetivo de comparação.

Utilizando a transformada de Fourier, o conjunto das equações de cada modelo é transformado para o domínio da frequência. Em seguida usando o método de separação de variáveis o conjunto das equações de cada modelo é resolvido. Para cada solução de cada modelo um algoritmo computacional em linguagem *C* é elaborado de um modo que possa ser utilizado nas simulações de tensões e correntes no final da linha de transmissão a partir da aplicação de uma onda senoidal no início da linha. A transformada de Fourier também é utilizada para desenvolver as equações da resistência e da indutância interna.

Para comprovar a eficiência do novo modelo da linha, onde se considera o efeito skin, são realizadas comparações entre os parâmetros calculados em duas situações e os seus efeitos nas características da linha de transmissão: na primeira situação os parâmetros são calculados em corrente contínua enquanto que na segunda situação os parâmetros são calculados levando em conta o efeito skin. Também são mostrados resultados de simulações onde se alimenta uma linha com tensão senoidal, sendo que a linha é representada através do modelo proposto (com e sem perdas), levando-se em conta o efeito da variação do raio e do comprimento da linha.

Os capítulos 2 e 3 mostram o desenvolvimento das equações diferenciais do modelo de linha de transmissão sem e com perdas, respectivamente, bem como a solução destas equações no domínio da frequência.

O capítulo 4 apresenta o desenvolvimento das equações diferenciais do novo modelo de linha de transmissão considerando o efeito skin, e a sua solução no domínio da frequência.

O capítulo 5 apresenta uma técnica de formulação simples e análise gráfica da resistência e da indutância interna do efeito skin para o condutor sólido e cilíndrico. Além disso, apresenta também um estudo e análise gráfica para alguns materiais condutores mais utilizados.

O capítulo 6 mostra comparações matemáticas e gráficas entre os parâmetros do efeito skin e os parâmetros de corrente contínua além de seus efeitos nas características da linha de transmissão. Apresenta também dois exemplos com o objetivo de verificar a influência do efeito skin em linhas de transmissão no caso de variação do raio do condutor e de variação do comprimento da linha.

O capítulo 7 apresenta as conclusões referentes aos resultados obtidos, bem como sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelo da Linha de Transmissão Sem Perdas

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta o desenvolvimento das equações diferenciais do modelo de linha de transmissão sem perdas e sua solução no domínio da frequência. Será utilizada a representação mais simples da linha, onde os condutores e o meio (dielétrico) são consideradas ideais.

Dos princípios básicos da teoria eletromagnética, pode-se dizer que a estrutura fundamental dos campos elétrico e magnético na linha de transmissão consiste do modo eletromagnético transversal "Transverse electromagnetic TEM". No modo TEM, os vetores dos campos elétrico e magnético são ortogonais à direção de propagação. Em outras palavras, em qualquer ponto do espaço estes vetores não possuem componentes na direção de propagação. Sendo assim e considerando a direção de propagação no eixo z , as considerações anteriores implicam que $E_z = H_z = 0$.

2.2 Desenvolvimento das Equações do Modelo

Considere uma linha de transmissão composta de um condutor sólido e cilíndrico de raio R , com altura h acima de um plano de terra considerado ideal. Nesta mesma linha, como mostra a figura 2.1, o condutor e o meio são considerados ideais.

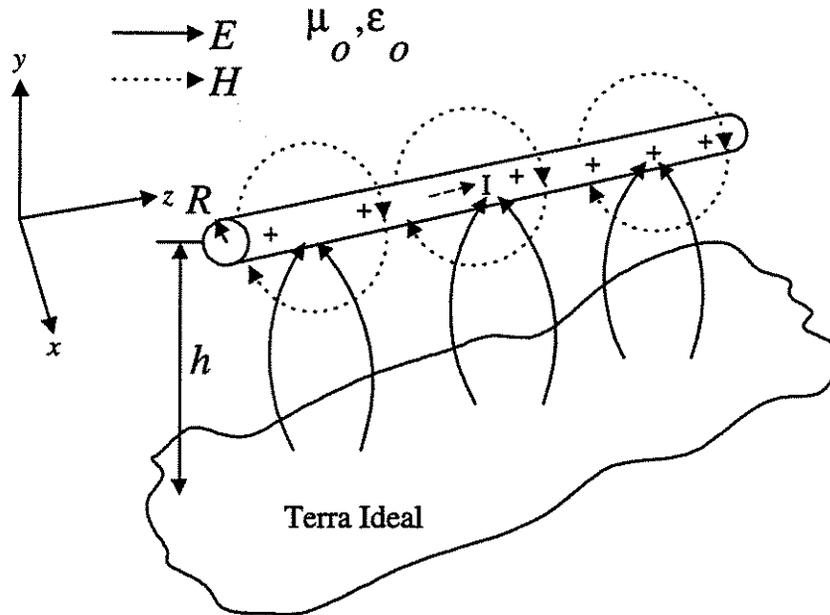


Figura 2.1: Linha de transmissão formada por um condutor ideal acima de um plano de terra também ideal, com os campos elétrico e magnético associados.

Assim, a primeira equação pode ser desenvolvida tomando a integral de linha do vetor do campo elétrico E entre o condutor e o plano de terra. Essa integral fornece a tensão $v(z, t)$ entre o condutor e o plano de terra na posição z e no instante de tempo t . Então, tem-se:

$$v(z, t) = - \int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^h (E_x dx + E_y dy). \quad (2.1)$$

Derivando a equação (2.1) em relação a z , obtém-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \int_0^h \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} dx + \frac{\partial E_y}{\partial z} dy \right). \quad (2.2)$$

Sabe-se que uma das equações de Maxwell vale, neste caso:

$$\nabla \vec{E} = - \frac{\nabla \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Expandindo a equação (2.3) em coordenadas cartesianas retangulares, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \\ & \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{a}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{a}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{a}_z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como $E_z = 0$, no modo TEM, a equação (2.4) pode ser resolvida e reduzida como abaixo:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.5) na equação (2.2), resulta em:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (-B_y dx + B_x dy). \quad (2.6)$$

Na equação (2.6), a integral, $\int_0^h (-B_y dx + B_x dy)$, do termo do lado direito possui uma interpretação física. Considere-se uma trajetória qualquer entre o plano de terra e o centro da seção transversal do condutor (ver a figura 2.1) e caminhe no plano z um comprimento Δz na direção do eixo z . Tem-se, então, gerada uma superfície arbitrária, delimitada pelo condutor e o plano de terra, que se estende por um comprimento Δz . O fluxo magnético que atravessa essa superfície dividido pelo comprimento Δz quando Δz tende à zero é equivalente ao conteúdo da integral $\int_0^h (-B_y dx + B_x dy)$.

De acordo com a definição de indutância, essa integral pode ser definida como o produto das indutâncias interna e externa pela corrente $i(z, t)$ da linha. Deste modo a equação (2.6) torna-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -L_{in} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - L_{ex} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

em que

- L_{in} H/m é a indutância interna por unidade de comprimento;
- L_{ex} H/m é a indutância externa por unidade de comprimento.

A equação (2.7) é a primeira equação básica do modelo da linha de transmissão sem perdas. A segunda equação pode ser desenvolvida a partir da integral de linha circular do vetor do campo magnético H em torno do condutor no plano z (ver a figura 2.1). Essa integral fornece a corrente $i(z, t)$ na posição z e no instante de tempo t . Então, tem-se:

$$i(z, t) = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint (H_x dx + H_y dy). \quad (2.8)$$

Derivando a equação (2.8) em relação a direção z , obtém-se:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = \oint \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} dx + \frac{\partial H_y}{\partial z} dy \right). \quad (2.9)$$

Novamente, considere-se a seguinte equação de Maxwell:

$$\nabla \vec{H} = \frac{\nabla \vec{D}}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Representando a equação (2.10) nas coordenadas retangulares:

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y +$$

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z = \frac{\partial D_x}{\partial t} \vec{a}_x + \frac{\partial D_y}{\partial t} \vec{a}_y + \frac{\partial D_z}{\partial t} \vec{a}_z. \quad (2.11)$$

Como $H_z = 0$, no modo TEM, a equação (2.11) pode ser resolvida e reduzida a seguinte forma:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{\partial D_x}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial D_y}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Substituindo a equação (2.12) na equação (2.9), resulta em:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint (D_x dy - D_y dx). \quad (2.13)$$

Na equação (2.13), como no caso anterior, há uma interpretação física. Considere-se uma trajetória qualquer entre o plano de terra e o centro da seção transversal do condutor da figura 2.1 e caminhe no plano z um comprimento Δz na direção do eixo z . Tem-se, então, uma superfície cilíndrica que é delimitada por dois círculos normais ao condutor e o plano de terra (superfície fechada). Então, o fluxo elétrico que atravessa essa superfície dividido por Δz , quando Δz tende a zero, é apresentado pela integral $\oint (D_x dy - D_y dx)$ da equação (2.13).

De acordo com a definição de capacitância, essa integral pode ser reescrita como o produto da capacitância pela tensão $v(z, t)$ na linha. Deste modo a equação (2.13) torna-se:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -C_o \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (2.14)$$

sendo

- C_o F/m é a capacitância por unidade de comprimento.

A equação (2.14) é a segunda equação que completa o conjunto das relações de tensão e corrente numa linha de transmissão sem perdas.

É importante notar deste desenvolvimento que L_{in} , L_{ex} e C_o usadas nas equações (2.7) e (2.14) são definidos como parâmetros da linha de transmissão sem perdas. Estes parâmetros são obtidos nas condições estáticas, isto é, em corrente contínua.

Os mesmos parâmetros são determinados em função das dimensões da linha e das características do condutor e do meio dielétrico e são representados pelas seguintes expressões:

$$L_{in} = \frac{\mu}{8\pi} \quad H/m \quad (2.15)$$

$$L_{ex} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{2h}{R} \quad H/m \quad (2.16)$$

$$C_o = \frac{2\pi\epsilon_o}{\ln \frac{R}{2h}} \quad \text{F/m} \quad (2.17)$$

em que

- μ H/m é a permeabilidade do material do condutor;
- ϵ_o F/m é a permissividade do espaço livre.

2.3 Solução no Domínio da Frequência

Tomando as equações (2.7) e (2.14) que completam o conjunto das relações de tensão e corrente numa linha de transmissão sem perdas e que foram desenvolvidas na sessão anterior. A seguir, é apresentada a solução das mesmas no domínio da frequência. Essa solução pode ser obtida aplicando, inicialmente, a transformada de Fourier. Portanto, tem-se:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -j\omega(L_{in} + L_{ex})I(z) \quad (2.18)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -j\omega C_o V(z). \quad (2.19)$$

Essas duas equações descrevem um trecho, de comprimento infinitesimal dz , da linha de transmissão conforme mostra a figura 2.2.

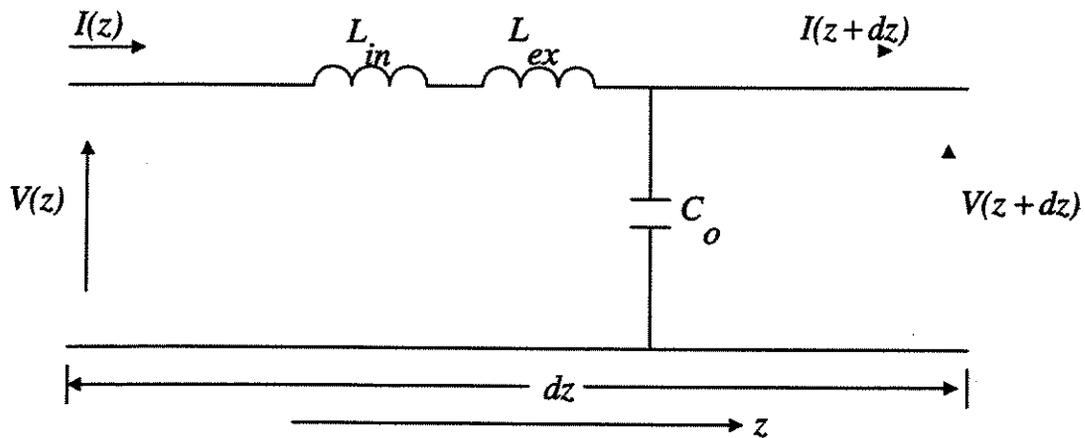


Figura 2.2: Circuito equivalente de um trecho infinitesimal de comprimento dz da linha de transmissão sem perdas.

As equações (2.18) e (2.19) constituem em sistema diferencial de duas equações e duas variáveis. Assim, derivando-se a equação (2.18) em relação a z obtém-se:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -j\omega(L_{in} + L_{ex})\frac{dI(z)}{dz}. \quad (2.20)$$

Substituindo-se a equação (2.19) na equação (2.20), obtém-se:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\omega^2(L_{in} + L_{ex})C_o \cdot V(z). \quad (2.21)$$

Ou ainda:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\beta^2V(z) \quad (2.22)$$

onde β (rad./m) é o coeficiente de fase definido por:

$$\beta = \omega\sqrt{(L_{in} + L_{ex})C_o}. \quad (2.23)$$

Usando o método de separação de variáveis a solução da equação (2.22) é dada por:

$$V(z) = V_A e^{-j\beta z} + V_B e^{j\beta z}. \quad (2.24)$$

Derivando a equação (2.24) em relação a z , obtém-se:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -j\beta V_A e^{-j\beta z} + j\beta V_B e^{j\beta z}. \quad (2.25)$$

Isolando $I(z)$ na equação (2.18), tem-se:

$$I(z) = -\frac{1}{j\omega(L_{in} + L_{ex})} \cdot \frac{dV(z)}{dz}. \quad (2.26)$$

Substituindo a equação (2.25) na equação (2.26), obtém-se:

$$I(z) = \frac{j\beta V_A}{j\omega(L_{in} + L_{ex})} \cdot e^{-j\beta z} - \frac{j\beta V_B}{j\omega(L_{in} + L_{ex})} \cdot e^{j\beta z}. \quad (2.27)$$

Agora substituindo-se a equação (2.23) na equação (2.27):

$$I(z) = \frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-j\beta z} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{j\beta z} \quad (2.28)$$

onde

- Z_o é a impedância característica da linha definida por:

$$Z_o = \sqrt{\frac{L_{in} + L_{ex}}{C_o}}. \quad (2.29)$$

Para determinar os variáveis V_A e V_B , supõe-se que existe uma linha de transmissão qualquer composta de um condutor de comprimento l e situado na direção da coordenada z . Assume-se que esta linha está ligada a uma fonte qualquer caracterizada por V_s (que possui uma impedância interna caracterizada por Z_s) de um lado e conectada a uma carga de valor Z_L na outra extremidade. Assim, as condições de contorno desta linha, usualmente, são definidas por.

Para o início da linha $z = 0$:

$$V(0) = V_s - I(0) \cdot Z_s \quad (2.30)$$

Para o final da linha $z = l$:

$$\frac{V(l)}{I(l)} = Z_L \quad (2.31)$$

Portanto, para o início da linha, ($z = 0$), a tensão e a corrente dadas pelas equações (2.24) e (2.28), respectivamente, podem ser escritas, em função das condições de contorno da seguinte forma:

$$V(0) = V_A + V_B \quad (2.32)$$

$$I(0) = \frac{V_A}{Z_o} - \frac{V_B}{Z_o}. \quad (2.33)$$

Substituindo as equações (2.32) e (2.33) na equação (2.30), tem-se:

$$V_A + V_B = V_s - \left(\frac{V_A}{Z_o} - \frac{V_B}{Z_o} \right) Z_s. \quad (2.34)$$

Isola-se V_A e V_B na equação (2.34):

$$V_A + \left(\frac{Z_s}{Z_o} \right) V_A = V_s + \left(\frac{Z_s}{Z_o} \right) V_B - V_B. \quad (2.35)$$

Multiplicando a equação (2.35) por Z_o e evidenciando-se os termos:

$$(Z_s + Z_o)V_A = V_s Z_o + (Z_s - Z_o)V_B. \quad (2.36)$$

Dividindo a equação (2.36) por $(Z_s + Z_o)$, tem-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s + \left(\frac{Z_s - Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_B. \quad (2.37)$$

Ou ainda:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s + \Gamma_t V_B \quad (2.38)$$

em que

- Γ_t é o coeficiente de reflexão no início da linha definido por:

$$\Gamma_t = \frac{Z_s - Z_o}{Z_s + Z_o}. \quad (2.39)$$

No final da linha, ($z = l$), a tensão e a corrente dadas pelas equações (2.24) e (2.28), respectivamente, podem ser escritas na seguinte forma:

$$V(l) = V_A e^{-j\beta l} + V_B e^{j\beta l} \quad (2.40)$$

$$I(l) = \frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-j\beta l} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{j\beta l}. \quad (2.41)$$

Substituindo as equações (2.40) e (2.41) na equação (2.31), tem-se:

$$\frac{V_A e^{-j\beta l} + V_B e^{j\beta l}}{\frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-j\beta l} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{j\beta l}} = Z_L. \quad (2.42)$$

A última equação pode ser escrita na seguinte forma:

$$V_A e^{-j\beta l} + V_B e^{j\beta l} = \left(\frac{Z_L}{Z_o}\right) V_A e^{-j\beta l} - \left(\frac{Z_L}{Z_o}\right) V_B e^{j\beta l}. \quad (2.43)$$

Separando as variáveis, observa-se:

$$\left(\frac{Z_L}{Z_o}\right) V_B e^{j\beta l} + V_B e^{j\beta l} = \left(\frac{Z_L}{Z_o}\right) V_A e^{-j\beta l} - V_A e^{-j\beta l}. \quad (2.44)$$

Multiplicando por Z_o e evidenciando-se os termos:

$$(Z_L + Z_o) V_B e^{j\beta l} = (Z_L - Z_o) V_A e^{-j\beta l}. \quad (2.45)$$

Dividindo-se por $(Z_L + Z_o)e^{j\beta l}$, obtém-se:

$$V_B = \left(\frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}\right) V_A e^{-2j\beta l}. \quad (2.46)$$

Ou ainda:

$$V_B = \Gamma_r V_A e^{-2j\beta l} \quad (2.47)$$

em que

- Γ_r é o coeficiente de reflexão no final de linha definido por:

$$\Gamma_r = \left(\frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}\right). \quad (2.48)$$

Substituindo a equação (2.47) na equação (2.38), tem-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o}\right) V_s + \Gamma_t \Gamma_r V_A e^{-2j\beta l}. \quad (2.49)$$

Evidenciando-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2j\beta l}}. \quad (2.50)$$

Substituindo a equação (2.50) na equação (2.47), tem-se:

$$V_B = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{\Gamma_r e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2j\beta l}}. \quad (2.51)$$

Substituindo as equações (2.50) e (2.51) nas equações (2.24) e (2.28), resulta-se em:

$$V(z) = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma_r e^{-j\beta(2l-z)}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2j\beta l}} \quad (2.52)$$

$$I(z) = \left(\frac{V_s}{Z_s + Z_o} \right) \cdot \frac{e^{-j\beta z} - \Gamma_r e^{-j\beta(2l-z)}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2j\beta l}}. \quad (2.53)$$

Essas duas equações representam as ondas positivas e negativas de tensão e de corrente em função dos coeficientes de reflexão. Estas ondas viajam ao longo da linha de transmissão.

Assumir-se que $Z_s = 0$, para evitar o efeito da impedância interna da fonte, e considerar uma linha de transmissão casada ($Z_L = Z_o$) ou uma linha infinita para evitar as reflexões no final da linha, as equações (2.39) e (2.48) podem tomar a seguinte forma:

$$\Gamma_t = -1 \quad (2.54)$$

$$\Gamma_r = 0 \quad (2.55)$$

e conseqüentemente este resultado implica que as equações (2.50) e (2.51) assumem os seguintes valores:

$$V_A = V_s \quad (2.56)$$

$$V_B = 0. \quad (2.57)$$

Com a determinação das variáveis V_A e V_B , as equações de tensão e corrente, (2.28) e (2.32), podem ser reescritas na seguinte forma:

$$V(z) = V_s e^{-j\beta z} \quad (2.58)$$

$$I(z) = \frac{V_s}{Z_o} e^{-j\beta z}. \quad (2.59)$$

Considerando que a V_s é uma fonte de tensão senoidal, tem-se:

$$V_s = V_m e^{j\omega t} \quad (2.60)$$

em que

- V_m , é o amplitude de onda.
- $\omega t = 2\pi ft$.

Substituindo a equação (2.60) nas equações (2.58) e (2.59), obtém-se:

$$v(z, t) = V_m e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (2.61)$$

$$i(z, t) = \frac{V_m}{Z_o} e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (2.62)$$

Tomando a parte real das equações (2.61) e (2.62), obtém-se:

$$v(z, \omega t - \beta z) = V_m \cos(\omega t - \beta z) \quad (2.63)$$

$$i(z, \omega t - \beta z) = \frac{V_m}{Z_o} \cos(\omega t - \beta z). \quad (2.64)$$

O termo $(\omega t - \beta z)$, que aparece nas equações (2.63) e (2.64), representa a relação de fase, tanto de tensão quanto de corrente, em qualquer ponto z ao longo da linha.

O comportamento da relação de fase, tanto da tensão como da corrente, em qualquer ponto da linha é constante, ou seja:

$$\omega t - \beta z = K = \text{constante}. \quad (2.65)$$

Tomando a derivada da equação (2.65) em relação ao tempo t , tem-se:

$$\omega - \beta \frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.66)$$

Dividindo a equação (2.66) por β e isolando, obtém-se:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (2.67)$$

O termo $\frac{dz}{dt}$ representa a velocidade de propagação de fase de um ponto constante. Assim, substituindo a equação (2.23) na equação (2.67), tem-se:

$$\nu_p = \frac{1}{\sqrt{(L_{in} + L_{ex})C_o}} \quad (2.68)$$

onde

- ν_p é a velocidade de propagação de fase.

As equações (2.63) e (2.64) representam as ondas positivas de tensões e correntes instantâneas em função do ângulo de deslocamento e em qualquer ponto z ao longo da linha de transmissão sem perdas. Essas equações podem ser utilizadas nas simulações de ondas de tensão e de corrente em qualquer posição z ao longo da linha. Um caso interessante é estudar e analisar tanto a tensão quanto a corrente previstas no final de uma linha de transmissão sem perdas, para efeitos de comparação, a partir de uma onda de tensão senoidal aplicada no início da mesma. Portanto, para o início da linha ($z = 0$) as equações (2.63) e (2.64) podem tomar a seguinte forma:

$$v(0, \omega t) = V_m \cos(\omega t) \quad (2.69)$$

$$i(0, \omega t) = \frac{V_m}{Z_o} \cos(\omega t). \quad (2.70)$$

Para o final da linha ($z = l$), as equações (2.63) e (2.64) valem:

$$v(l, \omega t - \beta l) = V_m \cos(\omega t - \beta l) \quad (2.71)$$

$$i(l, \omega t - \beta l) = \frac{V_m}{Z_o} \cos(\omega t - \beta l). \quad (2.72)$$

Os resultados obtidos pela equação (2.69), como onda de tensão senoidal aplicada no início da linha e pelas equações (2.71) e (2.72) como ondas de tensão e corrente previstas no final da linha, junto com os resultados obtidos pelas equações (2.23), (2.29) e (2.68) que são coeficiente de fase, impedância característica e velocidade de propagação de fase, respectivamente, vão ser apresentados para efeitos de comparação no capítulo 6.

Capítulo 3

Modelo da Linha de Transmissão com Perdas da resistência da corrente contínua

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta o desenvolvimento das equações do modelo da linha de transmissão com perdas mínimas (perdas da resistência da corrente contínua) e a sua solução no domínio da frequência.

Se o condutor da linha de transmissão considerado não é ideal e supondo que este condutor está situado ao longo da coordenada z , o modo TEM (Transverse Electromagnetic) não pode existir. Isto porque a corrente que flui no condutor não ideal está associada a um componente longitudinal do campo elétrico E_z . Do ponto de vista prático, apesar de o condutor da linha ser não ideal, ficará suficientemente um bom condutor onde as perdas poderiam ser incluídos no desenvolvimento das equações do modelo da linha de transmissão. Essas perdas aqui incorporadas são as perdas calculados nas conduções estáticas, isto é em corrente contínua. Assim, quando o condutor da linha é considerado não ideal (com perdas), essencialmente, a estrutura do campo, no desenvolvimento das equações do modelo, é assumida como o modo quase TEM.

Além disso, o meio dielétrico onde se encontra o condutor é assumido não ideal (meio com perdas). Essas perdas, normalmente, são relacionadas à condutividade do meio dielétrico ou consideradas como perdas de polarização do mesmo. Assim, essas perdas podem ser consideradas no desenvolvimento das equações do modelo da linha de transmissão.

No desenvolvimento das equações do modelo sem perdas (capítulo anterior), o condutor e o meio dielétrico são considerados ideais o que implica na existência do modo TEM. No desenvolvimento das equações deste modelo, ao contrário do anterior, o condutor e o meio dielétrico são considerados não ideais. Mesmo assim, o meio dielétrico não impede a existência do modo TEM. A coexistência entre o meio dielétrico não ideal e o modo TEM só é válida se o meio dielétrico for homogêneo. A última consideração implica em $H_z = 0$.

3.2 Desenvolvimento das Equações

Considere uma linha de transmissão composta de um condutor sólido e cilíndrico de raio R , com altura h , localizado acima de um plano de terra ideal. Nesta linha, de acordo com a figura 3.1, o condutor e o meio dielétrico não são ideais.

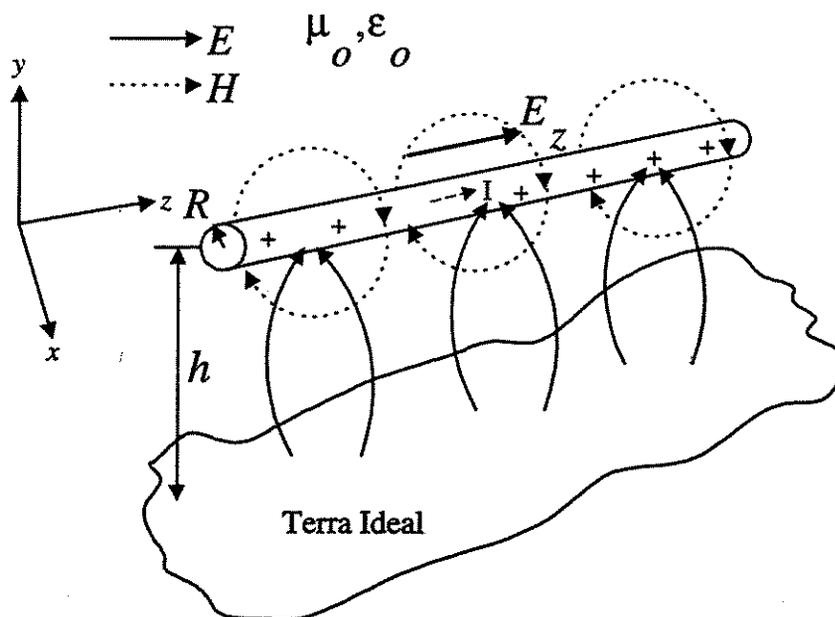


Figura 3.1: Linha de transmissão formada por condutor não ideal acima de um plano de terra ideal com os campos elétrico e magnético associados.

Assim, a primeira equação pode ser desenvolvida tomando a integral de linha do vetor do campo elétrico E entre o condutor e o plano da terra. Essa integral fornece a tensão $v(z, t)$ entre o condutor e o plano de terra na posição z e no instante do tempo t . Então:

$$v(z, t) = - \int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^h (E_x dx + E_y dy). \quad (3.1)$$

Derivando a equação (3.1) em relação a z , obtém-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \int_0^h \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} dx + \frac{\partial E_y}{\partial z} dy \right). \quad (3.2)$$

Sabe-se que uma das equações de Maxwell vale, neste caso:

$$\nabla \vec{E} = - \frac{\nabla \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Expandindo a equação (3.3) em coordenadas cartesianas retangulares, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \\ & \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{a}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{a}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{a}_z. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como $E_z \neq 0$ no modo quase TEM, a equação (3.4) pode ser resolvida e reduzida como abaixo:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.5) na equação (3.2), tem-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \int_0^h \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) dx - \int_0^h \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) dy. \quad (3.6)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h E_z dx - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z dy - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (-B_y dx + B_x dy). \quad (3.7)$$

Na equação (3.7), o primeiro termo, $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h E_z dx$, do lado esquerdo é considerado nulo. O segundo termo, $\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z dy$, é interpretado fisicamente como a diferença entre o campo elétrico $E_z(z, h, t)$, existente ao longo do condutor, e o campo elétrico $E_z(z, 0, t)$, existente ao longo da superfície do plano da terra. A integral, $\int_0^h (-B_y dx + B_x dy)$, do terceiro termo é interpretado fisicamente da seguinte maneira. Considere-se uma trajetória qualquer entre o plano da terra e o centro do condutor e caminhe no plano z da figura 3.1 de um comprimento Δz na direção z . Assim, gerada uma superfície arbitrária, apoiada no condutor e no plano da terra e que se estende por um comprimento Δz . O fluxo magnético que atravessa essa superfície dividido por Δz , quando Δz tende a zero, que é dada pela integral $\int_0^h (-B_y dx + B_x dy)$.

De acordo com a definição de indutância, essa última integral pode ser escrita como o produto das indutâncias da linha pela corrente $i(z, t)$ que flui no condutor da linha. Deste modo, a equação (3.7) torna-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -[E_z(z, h, t) - E_z(z, 0, t)] - L_{in} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - L_{ex} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Na equação (3.8), o campo elétrico $E_z(z, h, t)$ é interpretado como o produto da resistência do condutor da linha pela corrente $i(z, t)$ que flui no mesmo. O campo elétrico $E_z(z, 0, t)$ é considerado nulo pois a condutividade do plano da terra, σ_g é considerada nula (plano de terra ideal). Deste modo, a equação (3.8) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \left[R_o i(z, t) + L_{in} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + L_{ex} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \right] \quad (3.9)$$

em que

- R_o Ω/m é a resistência do condutor da linha, por unidade de comprimento;
- L_{in} H/m é a indutância interna da linha, por unidade de comprimento;
- L_{ex} H/m é a indutância externa da linha, por unidade de comprimento.

A equação (3.9) é uma das equações básicas da linha de transmissão com perdas da resistência da corrente contínua. A segunda equação pode ser desenvolvida tomando a integral da linha circular do vetor do campo magnético H . Essa integral

fornece a corrente $i(z, t)$ que flui no condutor da linha na posição z e no instante de tempo t . Então:

$$i(z, t) = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint (H_x dx + H_y dy). \quad (3.10)$$

Derivando a equação (3.10) em relação a z , obtém-se:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = \oint \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} dx + \frac{\partial H_y}{\partial z} dy \right). \quad (3.11)$$

Considerando a seguinte equação de Maxwell:

$$\nabla \vec{H} = J + \frac{\nabla \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Expandindo a equação (3.12) em coordenadas cartesianas retangulares, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z = \\ \left(J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \right) \vec{a}_x + \left(J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \right) \vec{a}_y + \left(J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \right) \vec{a}_z. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como $H_z = 0$, no modo TEM, a equação (3.13) pode ser resolvida e reduzida como abaixo:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Substituindo estes termos na equação (3.11), obtém-se:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = \oint \left(J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \right) dx - \oint \left(J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \right) dy. \quad (3.15)$$

Isola-se os termos em comum:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = - \oint (J_x dy - J_y dx) - \frac{\partial}{\partial t} \oint (D_x dy - D_y dx). \quad (3.16)$$

Na equação (3.16), como no caso anterior, existe uma interpretação física. Caminhe no plano z da figura 3.1 de um comprimento Δz na direção z . Tem-se, então, uma superfície cilíndrica que é delimitada por dois círculos normais ao condutor e o plano da terra (superfície fechada). Nas laterais do cilindro a condutividade do meio dielétrico implica na existência de uma corrente de fuga. De acordo com a definição de condutância a integral, $\oint (J_x dy - J_y dx)$, do primeiro termo pode ser escrita como o produto da condutância do meio dielétrico pela tensão $v(z, t)$ na linha. Ao longo do cilindro, o fluxo elétrico que atravessa a superfície dividido por Δz quando Δz tende a zero, é dado pela integral, $\oint (D_x dy - D_y dx)$, do segundo termo.

De acordo com a definição de capacitância, essa última integral pode ser escrito como o produto da capacitância do meio dielétrico pela tensão $v(z, t)$ na linha. Deste modo a equação (3.16) torna-se:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = - \left[G_o v(z, t) + C_o \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \right] \quad (3.17)$$

em que

- G_o S/m é a condutância do meio dielétrico, por unidade de comprimento;
- C_o F/m é a capacitância do meio dielétrico, por unidade de comprimento.

A equação (3.17) é a segunda equação que completa o conjunto das relações de tensão e corrente numa linha de transmissão com perdas da resistência da corrente contínua.

É importante notar que neste desenvolvimento, R_o , G_o , L_{in} , L_{ex} e C_o usados nas equações (3.9) e (3.17) são definidos como parâmetros da linha de transmissão com perdas da resistência da corrente contínua. Estes parâmetros são obtidos nas condições estáticas, isto é, em corrente contínua.

Os mesmos parâmetros, usualmente, são calculados em função das dimensões da linha de transmissão e das características do condutor e do meio dielétrico. Assim, os seus valores podem ser determinados utilizando as seguintes expressões:

$$R_o = \frac{1}{\pi \sigma R^2} \quad \Omega/m \quad (3.18)$$

$$G_o = \frac{2\pi\sigma_g}{\ln \frac{R}{2h}} \quad S/m \quad (3.19)$$

$$L_{in} = \frac{\mu}{8\pi} \quad H/m \quad (3.20)$$

$$L_{ex} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{2h}{R} \quad H/m \quad (3.21)$$

$$C_o = \frac{2\pi\epsilon_o}{\ln \frac{R}{2h}} \quad F/m \quad (3.22)$$

em que

- $\sigma \Omega^{-1}m^{-2}$ é a condutividade do material do condutor;
- $\sigma_g \Omega^{-1}m^{-2}$ é a condutividade do plano da terra;
- $\mu \text{ F/m}$ é a permeabilidade do material do condutor;
- $\epsilon_o \text{ F/m}$ é a permesividade do espaço livre.

3.3 Solução no Domínio da Freqüência

Para a solução no domínio da freqüência iremos utilizar as equações (3.9) e (3.17) que completam o conjunto das relações de tensão e corrente na linha de transmissão com perdas da resistência da corrente contínua e que foram desenvolvidas na sessão anterior. Essa solução pode ser obtida aplicando-se, inicialmente, o método da transformada de Fourier. Portanto, tem-se:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -[R_o + j\omega(L_{in} + L_{ex})]I(z) \quad (3.23)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -[G_o + j\omega C_o]V(z). \quad (3.24)$$

As equações (3.23) e (3.24) descrevem um trech, de comprimento infinitesimal dz , da linha de transmissão conforme mostra a figura 3.2.

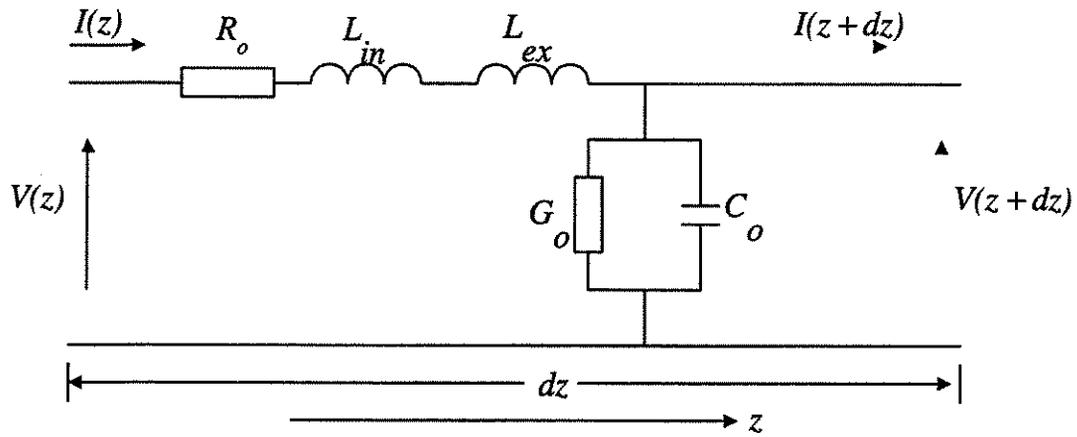


Figura 3.2: Circuito equivalente de um trecho infinitesimal de comprimento dz da linha de transmissão com perdas da resistência da corrente contínua

Este circuito equivalente é uma modificação do circuito equivalente apresentado no capítulo anterior para a linha de transmissão sem perdas (ver a figura 2.2). As modificações incluem as perdas do condutor representadas pela a resistência R_o e as perdas do meio dielétrico representadas pela condutância G_o .

As equações (3.23) e (3.24) constituem um sistema de equações diferenciais de duas equações e duas variáveis. Assim, para resolver este tipo de equações, inicialmente, deriva-se a equação (3.23) em relação a z o que resulta em:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -[R_o + j\omega(L_{in} + L_{ex})] \frac{dI(z)}{dz}. \quad (3.25)$$

Substituindo-se a equação (3.24) na equação (3.25), tem-se:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z) \quad (3.26)$$

em que

- γ é uma quantidade complexa chamada coeficiente de propagação e é definida por:

$$\gamma = \sqrt{[R_o + j\omega(L_{in} + L_{ex})][G_o + j\omega C_o]}. \quad (3.27)$$

Pelo método de separação de variáveis, a equação (3.26) apresenta a seguinte solução:

$$V(z) = V_A e^{-\gamma z} + V_B e^{\gamma z}. \quad (3.28)$$

Derivando a equação (3.28) em relação a z , obtém-se:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -\gamma V_A e^{-\gamma z} + \gamma V_B e^{\gamma z}. \quad (3.29)$$

Isolando $I(z)$ na equação (3.23) tem-se:

$$I(z) = -\frac{1}{R_o + j\omega(L_{in} + L_{ex})} \cdot \frac{dV(z)}{dz}. \quad (3.30)$$

Substituindo a equação (3.29) na equação (3.30), obtém-se:

$$I(z) = \frac{\gamma V_A}{R_o + j\omega(L_{in} + L_{ex})} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{\gamma V_B}{R_o + j\omega(L_{in} + L_{ex})} \cdot e^{\gamma z}. \quad (3.31)$$

Agora, substituindo-se a equação (3.27) na equação (3.31), obtém-se:

$$I(z) = \frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{\gamma z} \quad (3.32)$$

em que

- Z_o é uma quantidade complexa que representa a impedância característica da linha e vale:

$$Z_o = \sqrt{\frac{R_o + j\omega(L_{in} + L_{ex})}{G_o + j\omega C_o}}. \quad (3.33)$$

As equações (3.28) e (3.32) representam as ondas positivas e negativas de tensão e corrente em função das variáveis V_A e V_B e essas ondas viajam ao longo da linha de transmissão com perdas da resistência da corrente contínua.

Para determinar as variáveis V_A e V_B , supõe-se que existe uma linha de transmissão qualquer composta de um condutor de comprimento l situada na direção da coordenada z . Assume-se que esta linha está ligada a uma fonte qualquer caracterizada por V_s (que possui uma impedância interna Z_s) de um lado e conectada a

uma impedância de carga Z_L na outra extremidade. As condições de contorno desta linha, são:

Para o início da linha $z = 0$:

$$V(0) = V_s - I(0) \cdot Z_s. \quad (3.34)$$

Para o final da linha $z = l$:

$$\frac{V(l)}{I(l)} = Z_L. \quad (3.35)$$

Portanto, no início da linha ($z = 0$) a tensão e a corrente, obtidas através das equações (3.28) e (3.32) respectivamente, podem ser escritas em função das condições de contorno da seguinte forma:

$$V(0) = V_A + V_B \quad (3.36)$$

$$I(0) = \frac{V_A}{Z_o} - \frac{V_B}{Z_o}. \quad (3.37)$$

Substituindo as equações (3.36) e (3.37) na equação (3.34), tem-se:

$$V_A + V_B = V_s - \left(\frac{V_A}{Z_o} - \frac{V_B}{Z_o} \right) Z_s. \quad (3.38)$$

Separando os variáveis, obtém-se:

$$V_A + \left(\frac{Z_s}{Z_o} \right) V_A = V_s + \left(\frac{Z_s}{Z_o} \right) V_B - V_B. \quad (3.39)$$

Multiplicando a equação (3.39) por Z_o e fazendo as devidas manipulações, obtém-se:

$$(Z_s + Z_o)V_A = V_s Z_o + (Z_s - Z_o)V_B. \quad (3.40)$$

Dividindo a equação (3.39) por $(Z_s + Z_o)$, tem-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s + \left(\frac{Z_s - Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_B. \quad (3.41)$$

Ou ainda:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s + \Gamma_t V_B \quad (3.42)$$

em que

- Γ_t é uma quantidade complexa que representa o coeficiente de reflexão no início da linha e é definido por:

$$\Gamma_t = \frac{Z_s - Z_o}{Z_s + Z_o}. \quad (3.43)$$

Para o final da linha ($z = l$), a tensão e a corrente dadas pelas equações (3.28) e (3.32), respectivamente, podem ser escritas na seguinte forma:

$$V(l) = V_A e^{-\gamma l} + V_B e^{\gamma l} \quad (3.44)$$

$$I(l) = \frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-\gamma l} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{\gamma l}. \quad (3.45)$$

Substituindo as equações (3.44) e (3.45) na equação (3.35):

$$\frac{V_A e^{-\gamma l} + V_B e^{\gamma l}}{\frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-\gamma l} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{\gamma l}} = Z_L. \quad (3.46)$$

Ou ainda:

$$V_A e^{-\gamma l} + V_B e^{\gamma l} = \left(\frac{Z_L}{Z_o} \right) V_A e^{-\gamma l} - \left(\frac{Z_L}{Z_o} \right) V_B e^{\gamma l}. \quad (3.47)$$

Agrupando-se:

$$\left(\frac{Z_L}{Z_o} \right) V_B e^{\gamma l} + V_B e^{\gamma l} = \left(\frac{Z_L}{Z_o} \right) V_A e^{\gamma l} - V_A e^{\gamma l}. \quad (3.48)$$

Multiplicando a equação (3.48) por Z_o e evidenciando, obtém-se:

$$(Z_L + Z_o) V_B e^{\gamma l} = (Z_L - Z_o) V_A e^{-\gamma l}. \quad (3.49)$$

Dividindo a equação (3.49) por $(Z_L + Z_o)e^{\gamma l}$, obtém-se:

$$V_B = \left(\frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \right) V_A e^{-2\gamma l}. \quad (3.50)$$

Ou ainda:

$$V_B = \Gamma_r V_A e^{-2\gamma l} \quad (3.51)$$

em que

- Γ_r é uma quantidade complexa que representa o coeficiente de reflexão no final de linha e é definido por:

$$\Gamma_r = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}. \quad (3.52)$$

Substituindo a equação (3.51) na equação (3.42), tem-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s + \Gamma_t \Gamma_r V_A e^{-2\gamma l}. \quad (3.53)$$

Agrupando e evidenciando, obtém-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2\gamma l}}. \quad (3.54)$$

Substituindo a equação (3.54) na equação (3.51), obtém-se:

$$V_B = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{\Gamma_r e^{-2\gamma l}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2\gamma l}}. \quad (3.55)$$

Substituindo as equações (3.54) e (3.55) nas equações (3.28) e (3.32), obtém-se:

$$V(z) = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma_r e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2\gamma l}} \quad (3.56)$$

$$I(z) = \left(\frac{V_s}{Z_s + Z_o} \right) \cdot \frac{e^{-\gamma z} - \Gamma_r e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2\gamma l}}. \quad (3.57)$$

As equações (3.56) e (3.57) representam as ondas positivas e negativas de tensão e de corrente em função dos coeficientes de reflexão no início e no final da linha, e

estas ondas viajam ao longo da linha.

Assumir-se que $Z_s = 0$, para evitar o efeito da impedância interna da fonte, e considerar uma linha de transmissão casada ($Z_L = Z_o$) ou uma linha infinita para evitar as reflexões no final da linha, as equações (3.43) e (3.52) podem tomar a seguinte forma:

$$\Gamma_t = -1 \quad (3.58)$$

$$\Gamma_r = 0 \quad (3.59)$$

e conseqüentemente este resultado implica em que as equações (3.54) e (3.55) valem:

$$V_A = V_s \quad (3.60)$$

$$V_B = 0. \quad (3.61)$$

Com a determinação dos variáveis V_A e V_B , as equações da tensão e corrente (3.28) e (3.32) podem ser reescritas na seguinte forma:

$$V(z) = V_s e^{-\gamma z} \quad (3.62)$$

$$I(z) = \frac{V_s}{Z_o} e^{-\gamma z}. \quad (3.63)$$

Introduzindo-se a variação senoidal na fonte para efeito de análise, representada por:

$$V_s = V_m e^{j\omega t} \quad (3.64)$$

em que

- V_m é o amplitude de onda transmitida;
- $\omega t = 2\pi ft$.

Definindo-se as partes real e imaginária da função γ por:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (3.65)$$

em que

- α rad./m é o coeficiente de atenuação;
- β rad./m é o coeficiente de fase.

Assim, as equações (3.63) e (3.64) podem tomar a seguinte forma:

$$v(z, t) = V_m e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.66)$$

$$i(z, t) = \left(\frac{V_m}{Z_o} \right) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (3.67)$$

Introduzindo a forma polar da função Z_o definida pela função ($|Z_o| e^{j\phi}$) e tomando a parte real, tem-se:

$$v(z, \omega t - \beta z) = V_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (3.68)$$

$$i(z, \omega t - \phi - \beta z) = \frac{V_m}{|Z_o|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \phi - \beta z) \quad (3.69)$$

em que

- $|Z_o|$ e ϕ são, respectivamente, módulo e ângulo da função Z_o e são definidos por:

$$|Z_o| = \sqrt{\frac{R_o^2 + \omega^2(L_{in} + L_{ex})^2}{\omega^2 C_o^2}} \quad (3.70)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega(L_{in} + L_{ex})}{R_o} \right) - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.71)$$

Para uma solução geral, α e β são definidos por:

$$\alpha = |\gamma| \cos \psi \quad (3.72)$$

$$\beta = |\gamma| \sin \psi \quad (3.73)$$

em que

- $|\gamma|$ e ψ são, respectivamente, módulo e ângulo da função γ e são definidos por:

$$|\gamma| = \sqrt{[R_o^2 + \omega^2(L_{in} + L_{ex})^2]^{\frac{1}{2}} \omega C_o} \quad (3.74)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega(L_{in} + L_{ex})}{R_o} \right) + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.75)$$

O ângulo $\frac{\pi}{2}$ que aparece nas equações (3.71) e (3.75) significa que o parâmetro G_o é desprezado por ser muito pequeno e também para facilitar o análise.

Os termos $(\omega t - \beta z)$ ou $(\omega t - \phi - \beta z)$ que aparecem nas equações (3.68) e (3.69), respectivamente, representam a relação de fase tanto de tensão quanto de corrente em qualquer ponto z ao longo da linha e em qualquer tempo t .

Assumindo que a fase da onda tanto de tensão como de corrente é constante, obtém-se.

$$\omega t - \beta z = K = \text{constante}. \quad (3.76)$$

Tomando a derivada da equação (3.76) em relação ao tempo t , teremos:

$$\omega - \beta \frac{dz}{dt} = 0. \quad (3.77)$$

Manipulando a equação (3.77), obtém-se:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (3.78)$$

Na equação (3.78) o termo $\frac{dz}{dt}$ representa a velocidade de fase de um ponto constante de fase e será representada pelo símbolo ν_p . Portanto, tem-se:

$$\nu_p = \frac{\omega}{\beta}. \quad (3.79)$$

As equações (3.68) e (3.69), como solução final, representam as ondas instantâneas de tensão e corrente propagando ao longo da linha de transmissão com perdas da resistência da corrente contínua. Essas equações podem ser utilizadas para obter os valores da tensão e de corrente em qualquer posição z ao longo da linha. Um caso interessante é estudar e analisar tanto a tensão quanto a corrente previstas no final da linha com perdas da resistência da corrente contínua à partir de uma onda de tensão aplicada no início da mesma. Portanto, para o início da linha ($z = 0$), as equações (3.68) e (3.69) podem tomar a seguinte forma:

$$v(0, \omega t) = V_m \cos(\omega t) \quad (3.80)$$

$$i(0, \omega t - \phi) = \frac{V_m}{|Z_o|} \cos(\omega t - \phi). \quad (3.81)$$

Para o final da linha ($z = l$), as equações (3.68) e (3.69) valem:

$$v(l, \omega t - \beta l) = V_m e^{-\alpha l} \cos(\omega t - \beta l) \quad (3.82)$$

$$i(l, \omega t - \phi - \beta l) = \frac{V_m}{|Z_o|} e^{-\alpha l} \cos(\omega t - \phi - \beta l). \quad (3.83)$$

Os resultados obtidos pela equação (3.80), como onda de tensão senoidal aplicada no início da linha, e pelas equações (3.82) e (3.83), como ondas de tensão e corrente previstas no final da linha junto com os resultados obtidos das equações (3.70), (3.71), (3.72), (3.73) e (3.79) que são módulo da impedância característica, ângulo da impedância característica, coeficiente de atenuação, coeficiente de fase e velocidade de propagação de fase, respectivamente, vão ser apresentados para efeitos de comparação no capítulo 6.

Capítulo 4

Modelo da Linha de Transmissão considerando as Perdas do Efeito Skin (Uma Nova Implementação)

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta o desenvolvimento de uma formulação alternativa do efeito skin, bem como a implementação deste efeito no modelo da linha de transmissão. Este modelo em particular é apresentado como uma alternativa simples aos modelos tradicionais. Não obstante, a precisão nos resultados é equivalente ou maior no modelo aqui apresentado quando empregado em estudos e análises do efeito skin em uma linha de transmissão no domínio da frequência.

Como mencionado no capítulo anterior, uma linha de transmissão que possui um condutor não ideal situado ao longo da coordenada z terá uma componente longitudinal do campo elétrico E_z na direção de propagação. A componente do campo elétrico existe devido ao fluxo de corrente no condutor não ideal. Do ponto de vista prático o condutor da linha, apesar de não ser ideal, pode ser considerado como um bom condutor em que as perdas poderiam ser incluídas no desenvolvimento das equações do novo modelo. As perdas aqui incorporadas são consideradas como perdas devido ao efeito skin.

A existência da componente do campo elétrico E_z ao longo do condutor no sentido de propagação possibilita formular a equação de onda de Maxwell para o condutor de geometria cilíndrica em função da componente (E_z). A solução exata da equação de onda para a seção transversal do condutor cilíndrico implica na obtenção de uma

formulação também exata para o cálculo da corrente que flui no condutor não ideal. Essa formulação é obtida em função do campo elétrico na superfície do condutor e da sua admitância interna. A admitância representa as perdas do condutor não ideal que, no caso, são perdas devido ao efeito skin.

É importante notar que, essencialmente, quando o condutor da linha é considerado não ideal (com perdas), a estrutura do campo no desenvolvimento das equações do novo modelo é assumida quase TEM. Além disso, o meio dielétrico em que se encontra o condutor é considerado não ideal (com perdas). As perdas, normalmente, são relacionadas à condutividade do meio dielétrico ou são consideradas como perdas de polarização do mesmo. Assim, essas perdas podem ser consideradas no desenvolvimento das equações do novo modelo.

4.2 Formulação da Equação de Onda para a Seção Transversal de um Condutor Cilíndrico

Considere um condutor de uma linha de transmissão cilíndrico, uniforme, infinito e não ideal. Assume-se que o condutor é situado ao longo do eixo da coordenada z , e que a corrente flui no sentido positivo do eixo z . Devido a corrente o condutor terá um componente de campo elétrico na direção de corrente como mostra a figura 4.1.

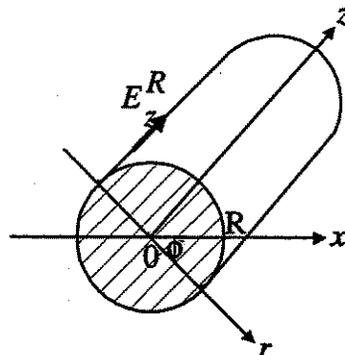


Figura 4.1: Geometria de um condutor cilíndrico, uniforme, infinito e não ideal excitado por um campo elétrico na superfície

Assim, a formulação matemática da equação de onda em função do campo elétrico torna-se possível. Lembrando-se que a equação geral de Maxwell para uma onda eletromagnética propagando no espaço livre é dada por:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Assumindo-se que a onda eletromagnética se propaga em um meio considerado bom condutor, onde a condutividade σ é muito maior do que a permissividade ϵ , a equação (4.1) toma a seguinte forma:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.2)$$

A equação (4.2) é conhecida como equação de difusão devido a sua semelhança formal com as equações que surgem em problemas de difusão de calor. A equação pode ser usada para determinar a distribuição de intensidade do campo elétrico na seção transversal de condutores de qualquer estrutura geométrica, e, conseqüentemente, determinar a densidade de corrente. Portanto, para a geometria cilíndrica, a formulação matemática da equação (4.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z(r, \phi, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r, \phi, z, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z(r, \phi, z, t)}{\partial \phi^2} \\ + \frac{\partial^2 E_z(r, \phi, z, t)}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_z(r, \phi, z, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

No caso da seção transversal o campo elétrico E_z não varia com o ângulo ϕ e a distância z . Portanto, a equação (4.3) pode ser reduzida à seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 E_z(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial E_z(r, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.4)$$

onde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mu\sigma}}. \quad (4.5)$$

Introduzindo-se as condições iniciais (para $t = 0$) como:

$$E_z(r, 0) = 0 \quad (4.6)$$

e as condições de contorno (para $r = R$) como:

$$E_z(R, t) = E_z^R(t) \quad (4.7)$$

em que:

- $E_z^R(t)$ é a componente da intensidade do campo elétrico na superfície.

A solução da equação (4.4) deve ser obtida para os seguintes intervalos:

$$r \in (0, R) \quad ; \quad t \in (0, \infty). \quad (4.8)$$

4.3 Solução da Equação de Onda para a Seção Transversal de um Condutor Sólido e Cilíndrico

Para resolver a equação de onda (4.4) é necessário introduzir a função $E_z(r, t)$ como sendo a solução geral da mesma. A função pode ser definida por:

$$E_z(r, t) = E_z^R(t) + g(r, t). \quad (4.9)$$

O objetivo da introdução da função é para fazer uma mudança de variáveis possibilitando a determinação de novas condições iniciais e de contorno para a equação (4.4). Com as novas condições iniciais e de contorno a solução parcial da equação (4.4) pode se determinar.

4.3.1 Mudança de Variáveis

Introduzindo a função expressa pela equação (4.9) na equação (4.4), obtém-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \{E_z^R(t) + g(r, t)\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{E_z^R(t) + g(r, t)\} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial t} \{E_z^R(t) + g(r, t)\} = 0. \quad (4.10)$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (4.10), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{\partial g(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t} \right\} = 0. \quad (4.11)$$

Ou ainda:

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} \right\} = -\frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t}. \quad (4.12)$$

Agora reescreve-se a equação (4.9) da seguinte forma:

$$g(r, t) = E_z(r, t) - E_z^R(t). \quad (4.13)$$

Assim, as condições iniciais da equação (4.12) podem ser determinadas através da substituição das condições iniciais da equação (4.4), que são dadas pela equação (4.6), na equação (4.13):

$$g(r, 0) = E_z(r, 0) - E_z^R(0) = 0. \quad (4.14)$$

As condições de contorno da equação (4.12) podem ser determinadas substituindo as condições de contorno da equação (4.4), que são dadas pela equação (4.7), na equação (4.13):

$$g(R, 0) = E_z(R, t) - E_z^R(t) = E_z^R(t) - E_z^R(t) = 0. \quad (4.15)$$

4.3.2 Determinação das Novas Condições Iniciais e de Contorno

Introduz-se a função $g(r, t)$ como uma solução para a equação (4.12). Essa função é definida por:

$$g(r, t) = \int_0^t E_1(r, t - \tau) \cdot \chi(\tau) d\tau \quad (4.16)$$

em que:

- $E_1(r, t)$ é uma função que representa a solução parcial da equação (4.4).
- $\chi(t)$ é definida como uma função qualquer.

40CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

Define-se a função $L(g_1)$ como:

$$L(g_1) = \frac{\partial g(r, t)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} \right\}. \quad (4.17)$$

As derivadas da equação (4.17) em relação à função $g(r, t)$ podem ser resolvidas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} = E_1(r, 0) \cdot \chi(t) + \int_0^t \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial t} \cdot \chi(\tau) d\tau \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial r} = \int_0^t \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial r} \cdot \chi(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 E_1(r, t - \tau)}{\partial r^2} \cdot \chi(\tau) d\tau. \quad (4.20)$$

Substituindo-se as equações (4.18) à (4.20) na equação (4.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} L(g_1) &= E_1(r, 0) \cdot \chi(t) + \int_0^t \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial r} \cdot \chi(\tau) d\tau - \\ &\int_0^t \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 E_1(r, t - \tau)}{\partial r^2} + \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial r} \right\} \cdot \chi(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} L(g_1) &= E_1(r, 0) \cdot \chi(t) + \int_0^t \left[\frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial t} - \right. \\ &\left. \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 E_1(r, t - \tau)}{\partial r^2} + \frac{\partial E_1(r, t - \tau)}{\partial r} \right\} \right] \cdot \chi(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Como $E_1(r, t)$ é a função que representa a solução parcial da equação (4.4) já definida anteriormente, então o valor da integral da equação (4.22) deve ser nulo para qualquer valor dos parâmetros. Assim, a equação (4.22) pode ser reduzida à seguinte forma:

$$L(g_1) = E_1(r, 0) \cdot \chi(t). \quad (4.23)$$

Substituindo a equação (4.23) na equação (4.17), obtém-se:

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} \right\} = E_1(r, 0) \cdot \chi(t). \quad (4.24)$$

Selecionando-se a seguinte função:

$$E_1(r, 0) = -1 \quad (4.25)$$

para o intervalo:

$$r \in (0, R). \quad (4.26)$$

Substituindo a função dada pela equação (4.25) na equação (4.24), obtém-se:

$$\frac{\partial g(r, t)}{\partial t} - \gamma^2 \left\{ \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} \right\} = -\chi(t). \quad (4.27)$$

Com esse resultado, a equação (4.25) deve ser considerada como as novas condições iniciais da equação (4.4). Logicamente, as novas condições de contorno que poderiam ser aceitas pela mesma equação são:

$$E_1(R, t) = 0 \quad (4.28)$$

para o intervalo:

$$t \in (0, \infty). \quad (4.29)$$

4.3.3 Determinação da Solução Parcial $E_1(r, t)$

Com a determinação das novas condições iniciais e de contorno, dadas pelas equações (4.25) e (4.28), a solução parcial da equação de onda (4.4) pode ser determinada. A solução é apresentada no apêndice [A], e tendo como resultado final o seguinte:

$$E_1(r, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\xi_k \cdot \frac{r}{R}\right)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot t\right). \quad (4.30)$$

4.3.4 Determinação da Função $g(r, t)$

Evidentemente a função $\chi(t)$ pode ser determinada comparando a equação (4.12) com a equação (4.27). A comparação resulta em:

$$\chi(t) = \frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t}. \quad (4.31)$$

Agora com a determinação da solução parcial $E_1(r, t)$ (equação (4.30)) e a determinação da função $\chi(t)$ (equação (4.31)) substituídas na equação (4.16), obtém-se:

$$g(r, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\xi_k \cdot \frac{r}{R}\right)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot (t - \tau)\right) \cdot \frac{dE_z^R(t)}{dt} d\tau. \quad (4.32)$$

4.3.5 Determinação da Solução Geral $E_z(r, t)$

Finalmente, a solução geral da equação de onda (4.4) pode ser determinada substituindo a equação (4.32), na equação (4.9). Assim, obtém-se:

$$E_z(r, t) = E_z^R(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\xi_k \cdot \frac{r}{R}\right)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot (t - \tau)\right) \cdot \frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t} d\tau \quad (4.33)$$

para os intervalos:

$$r \in (0, R) \quad ; \quad t \in (0, \infty). \quad (4.34)$$

Com o objetivo de fazer uma mudança de variáveis, introduz-se a seguinte relação:

$$x = \frac{r}{R}. \quad (4.35)$$

Assim, a equação (4.33), em função de x , toma a seguinte forma:

$$E_z(x, t) = E_z^R(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0(\xi_k \cdot x)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot (t - \tau)\right) \cdot \frac{\partial E_z^R(t)}{\partial t} d\tau \quad (4.36)$$

para os intervalos:

$$x \in (0, 1) \quad ; \quad t \in (0, \infty) \quad (4.37)$$

e ξ_k é a k -ésima raiz da função de Bessel, $J_0(x) = 0$.

A equação (4.36), como a solução geral da equação de onda (4.4), representa a distribuição de intensidade do campo elétrico na seção transversal de um condutor sólido de geometria cilíndrica. Com essa solução, é possível determinar uma formulação transitória do cálculo da corrente na seção transversal de um condutor sólido e de geometria cilíndrica.

4.4 Formulação Transitória do Cálculo da Corrente na Seção Transversal de um Condutor Sólido e Cilíndrico

A formulação transitória do cálculo da corrente na seção transversal de um condutor sólido e cilíndrico vai ser determinada considerando uma seção transversal como

mostra a figura 4.2.

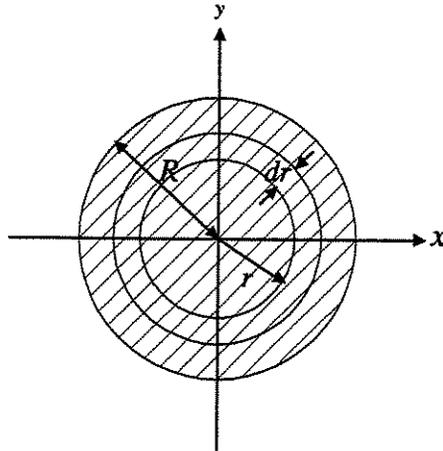


Figura 4.2: A Seção Transversal do Condutor Cilíndrico.

Se a frequência aplicada for assumida como suficientemente baixa, a corrente se apresenta uniformemente distribuída na área da seção transversal.

Na seção, assume-se um elemento de raio r e de espessura dr . A densidade de corrente neste elemento é definida como $J_z(r, t)$. Assim, em termos de densidade, a corrente nas paredes do elemento considerado pode ser definida por:

$$i(t) = 2\pi r J_z(r, t) dr. \quad (4.38)$$

Integrando a equação (4.38) de 0 a r obtém-se a corrente no cilindro de raio r . Portanto, tem-se:

$$i(t) = 2\pi \int_0^r J_z(r, t) r dr. \quad (4.39)$$

Para o condutor inteiro (cilindro de raio R), a equação (4.39) pode tomar a seguinte forma:

$$i(t) = 2\pi \int_0^R J_z(r, t) r dr. \quad (4.40)$$

Novamente introduzindo a relação dada pela equação (4.35), a equação (4.40), em função de x , toma a seguinte forma:

$$i(t) = 2\pi R^2 \int_0^1 J_z(x, t) x dx. \quad (4.41)$$

De acordo com a lei de Ohm, se a condutividade específica é definida por σ , a relação entre a densidade da corrente $J_z(x, t)$ e o campo elétrico $E_z(x, t)$ é dada por:

$$J_z(x, t) = \sigma E_z(x, t). \quad (4.42)$$

Substituindo a equação (4.42) na equação (4.41), obtém-se:

$$i(t) = 2\pi R^2 \int_0^1 \sigma E_z(x, t) x dx. \quad (4.43)$$

Finalmente, a formulação transitória do cálculo da corrente na seção transversal de um condutor sólido e cilíndrico pode ser obtida substituindo a equação (4.36) na equação (4.43). Portanto, obtém-se:

$$i(t) = 2\pi\sigma R^2 \int_0^1 \left\{ E_z^R(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_o(\xi_k \cdot x)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot (t - \tau)\right) \cdot \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \right\} x dx. \quad (4.44)$$

Ou ainda:

$$i(t) = 2\pi\sigma R^2 \left[\int_0^1 E_z^R(t) x dx - \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_o(\xi_k \cdot x)}{J_1(\xi_k)\xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot (t - \tau)\right) \cdot \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \right\} x dx \right]. \quad (4.45)$$

Na equação (4.45), as duas partes da integral, em função da variável x , são resolvidas separadamente.

46CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

Evidentemente, a primeira parte da integral fornece o seguinte resultado:

$$\int_0^1 E_z^R(t) x dx = \frac{1}{2} E_z^R(t). \quad (4.46)$$

A segunda parte da integral pode ser expandida e escrita na seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{J_1(\xi_k) \xi_k} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot (t - \tau)\right) \cdot \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \int_0^1 x J_0(\xi_k \cdot x) dx. \quad (4.47)$$

A solução da integral em função da variável x pode ser obtida usando a seguinte propriedade da função de Bessel:

$$\int_0^x x J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} \times \{ \alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) \}. \quad (4.48)$$

Se $m = 0$, $\alpha = \xi_k$, $\beta = 0$ e integrando de 0 a 1, obtém-se:

$$\int_0^1 x J_0(\xi_k \cdot x) dx = \frac{J_1(\xi_k \cdot x)}{\xi_k}. \quad (4.49)$$

Com o resultado da equação (4.49), a equação (4.47) pode tomar a seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\xi_k^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot (t - \tau)\right) \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau. \quad (4.50)$$

Substituindo as equações (4.46) e (4.50) na equação (4.45), tem-se:

$$i(t) = \pi \sigma R^2 \left[E_z^R(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \times \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot (t - \tau)\right) \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \right]. \quad (4.51)$$

A equação (4.51) representa o resultado final da formulação transitória do cálculo da corrente na seção transversal de um condutor sólido e cilíndrico de raio R e em função do campo elétrico $E_z^R(t)$ na superfície do condutor e localizado na direção de propagação.

Para efeito de cálculo e análise mais simples, a equação (4.51) pode ser reduzida para uma forma mais conveniente como mostra o seguinte procedimento.

Inicialmente, a equação (4.51) pode ser escrita na seguinte forma:

$$i(t) = \pi\sigma R^2 \left[E_z^R(t) - \int_0^t f(t-\tau) \cdot \frac{\partial E_z^R(\tau)}{\partial t} d\tau \right] \quad (4.52)$$

onde a função $f(t)$ é definida por:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_k^2} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2}{R^2} \cdot t\right). \quad (4.53)$$

Em seguida aplicando-se a teorema de convolução, a equação (4.52) toma a seguinte forma:

$$i(t) = \pi\sigma R^2 \left[E_z^R(t) - f(t) * \frac{d}{dt} E_z^R(t) \right]. \quad (4.54)$$

A partir das propriedades da teorema de convolução, a equação (4.54) pode ser escrita na seguinte forma:

$$i(t) = \pi\sigma R^2 \left[E_z^R(t) - \frac{d}{dt} f(t) * E_z^R(t) \right]. \quad (4.55)$$

Resolvendo a derivada da função $f(t)$ em relação a t , a equação (4.55) vale:

$$i(t) = \pi\sigma R^2 \left[E_z^R(t) + h(t) * E_z^R(t) \right] \quad (4.56)$$

onde a função $h(t)$ é definida por:

$$h(t) = \frac{d}{dt}f(t) = -\frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} \cdot (t)\right). \quad (4.57)$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação (4.56), obtém-se:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \pi\sigma R^2 \left[\mathcal{L}\{E_z^R(t)\} + \mathcal{L}\{h(t)\} \cdot \mathcal{L}\{E_z^R(t)\} \right]. \quad (4.58)$$

Ou ainda:

$$I(s) = \pi\sigma R^2 \left[E_z^R(s) + H(s) \cdot E_z^R(s) \right], \quad (4.59)$$

onde a função $H(s)$ é a transformada de Laplace da função $h(t)$ e é definida por:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{4}{\mu\sigma R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} + s} \quad (4.60)$$

ou reescrevendo a equação (4.59), tem-se:

$$I(s) = \pi\sigma R^2 [1 + H(s)] \cdot E_z^R(s). \quad (4.61)$$

Como $H(s) \gg 1$, então a equação (4.61) pode ser aproximada:

$$I(s) = \pi\sigma R^2 [H(s)] \cdot E_z^R(s). \quad (4.62)$$

Simplificando a equação (4.62):

$$I(s) = Y(s) \cdot E_z^R(s), \quad (4.63)$$

onde a função $Y(s)$ é definida por:

$$Y(s) = \frac{4\pi}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} + s}. \quad (4.64)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace à equação (4.63), obtém-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{E_z^R(s)\}. \quad (4.65)$$

Ou ainda:

$$i(t) = y(t) * E_z^R(t). \quad (4.66)$$

Aplicando a convolução inversa à equação (4.66), obtém-se:

$$i(t) = \int_0^t y(t - \tau) \cdot E_z^R(\tau) d\tau \quad (4.67)$$

onde a função $y(t)$ é definida por:

$$y(t) = \frac{4\pi}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} \cdot t\right). \quad (4.68)$$

A equação (4.67) representa a forma mais conveniente da formulação transitória do cálculo da corrente na seção transversal de um condutor sólido e cilíndrico de raio R e em função do campo elétrico na superfície. A equação pode ser usada em vários tipos de análises elétricas e eletrônicas levando em conta as perdas do efeito skin. Uma das possibilidades é o desenvolvimento de um novo modelo computacional para o estudo e análise do efeito skin na linha de transmissão tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Uma outra possibilidade interessante é o desenvolvimento de um modelo computacional para o cálculo e análise gráfica da resistência e indutância interna do condutor sólido e cilíndrico em qualquer frequência. A possibilidade pode ser realizada através da aplicação de transformadas de Fourier e será tratada em detalhes no próximo capítulo.

4.5 Formulação da função de Bessel ξ_k

A formulação da função de Bessel ξ_k pode ser obtida através de uma aproximação equivalente a $J_0(x) = 0$. Portanto tem-se:

$$J_0(x) = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{x}{2}}\pi} = 0. \quad (4.69)$$

Introduzindo ξ_k no lugar de x , obtém-se:

$$J_0(\xi_k) = \frac{\cos\left(\xi_k - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{\xi_k}{2}}\pi} = 0. \quad (4.70)$$

Para que a igualdade seja satisfeita tem-se:

$$\cos\left(\xi_k - \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (4.71)$$

Introduzindo a seguinte série:

$$\cos\left(2k - 1\right)\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.72)$$

Da comparação entre a equação (4.71) e (4.72), obtém-se:

$$\xi_k - \frac{\pi}{4} = (2k - 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.73)$$

Da equação (4.73), obtém-se:

$$\xi_k = (2k - 1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.74)$$

Assim, as raízes da função de Bessel ξ_k podem ser calculadas.

4.6 Desenvolvimento das Equações do Modelo

Considere uma linha de transmissão composta de um condutor sólido e cilíndrico de raio R , com altura h acima de um plano de terra considerado ideal. Nessa linha assume-se que o condutor da linha e o meio são não ideais como mostra a figura 4.3.

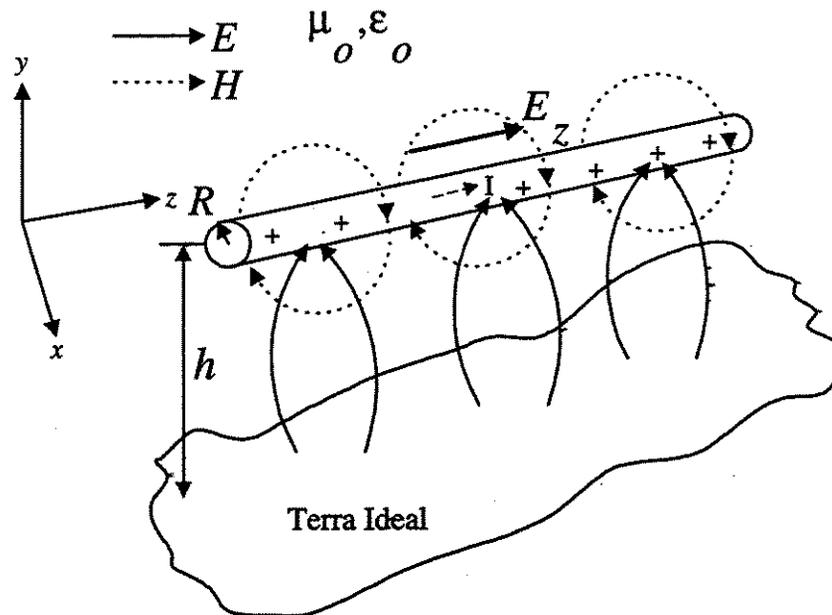


Figura 4.3: Linha de transmissão de um condutor não ideal acima de um plano de terra não ideal com os campos elétrico e magnético associados.

Assim, a primeira equação pode ser desenvolvida à partir do uso das equações (4.67) e (4.68). Portanto, com a aplicação do teorema da convolução e da transformada de Fourier e reorganizando, a equação (4.67) pode tomar a seguinte forma:

$$E_z^R(z, t) - \int_0^t z(t - \tau) \cdot i(z, \tau) d\tau = 0 \quad (4.75)$$

52CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

onde a função $z(t)$ representa a impedância interna transitória do condutor da linha e é definida por:

$$z(t) = \frac{1}{y(t)} \quad (4.76)$$

e a função $y(t)$ já foi definida pela equação (4.68).

Na equação (4.75), a função $E_z^R(z, t)$ representa o campo elétrico na superfície do condutor da linha de transmissão.

4.6.1 Determinação do Campo Elétrico $E_z^R(z, t)$

Este campo elétrico pode ser determinado tomando a integral de linha do vetor do campo elétrico E da figura (4.3). Essa integral fornece a tensão $v(z, t)$ entre o condutor e o plano da terra na posição z e no instante do tempo t . Portanto, tem-se:

$$v(z, t) = - \int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^h (E_x dx + E_y dy). \quad (4.77)$$

Derivando a equação (4.77) em relação a z , obtém-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \int_0^h \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} dx + \frac{\partial E_y}{\partial z} dy \right). \quad (4.78)$$

Introduzindo uma das equações de Maxwell, neste caso, que é:

$$\nabla \vec{E} = - \frac{\nabla \vec{B}}{\partial t} \quad (4.79)$$

e expandindo a equação (4.79) em coordenadas cartesianas retangulares, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \\ & \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{a}_x - \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{a}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{a}_z. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Como $E_z \neq 0$ no modo quase TEM, a equação (4.80) pode ser resolvida e reduzida como abaixo:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}. \quad (4.81)$$

Substituindo a equação (4.81) na equação (4.78), tem-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \int_0^h \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \right) dx - \int_0^h \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) dy. \quad (4.82)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h E_z dx - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z dy - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (-B_y dx + B_x dy). \quad (4.83)$$

Na equação (4.83), primeiro termo $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h E_z dx$ é considerado nulo. Segundo termo $\frac{\partial}{\partial y} \int_0^h E_z dy$ é interpretado fisicamente como a diferença entre o campo elétrico $E_z(z, h, t)$ existente ao longo do condutor e o campo elétrico $E_z(z, 0, t)$ existente ao longo da superfície do plano da terra. A integral $\int_0^h (-B_y dx + B_x dy)$ do terceiro termo é interpretada fisicamente da seguinte maneira: Considere uma trajetória qualquer entre a superfície do plano da terra e a superfície do condutor e caminhe no plano z (figura 4.3) de um comprimento Δz na direção z . Assim, é gerada uma superfície arbitrária, apoiada no condutor e no plano da terra e que se estende por um comprimento Δz . O fluxo magnético que atravessa essa superfície dividido por Δz , quando Δz tende a zero, é a quantidade dada pela integração $\int_0^h (-B_y dx + B_x dy)$.

De acordo com a definição de indutância, essa última integral pode ser escrita como o produto da indutância externa pela corrente $i(z, t)$ que flui no condutor da linha. Deste modo, a equação (4.83) torna-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -[E_z(z, h, t) - E_z(z, 0, t)] - L_{ex} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}. \quad (4.84)$$

54CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

Na equação (4.84), o campo elétrico $E_z(z, h, t)$ é exatamente o campo elétrico que se encontra na superfície do condutor $E_z^R(z, t)$. O campo elétrico $E_z(z, 0, t)$ é considerado nulo pois a condutividade do plano da terra, σ_g é zero (plano de terra ideal). Deste modo, a equação (4.84) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -E_z^R(z, t) - L_{ex} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (4.85)$$

em que:

- L_{ex} é a indutância externa da linha por unidade de comprimento.

Da equação (4.85) pode se obter o seguinte:

$$E_z^R(z, t) = -\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} - L_{ex} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}. \quad (4.86)$$

Substituindo a equação (4.86) na equação (4.75) e reorganizando, obtém-se:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -\left[\int_0^t z(t - \tau) \cdot i(z, \tau) d\tau + L_{ex} \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \right]. \quad (4.87)$$

A equação (4.87) é uma das equações básicas do novo modelo da linha de transmissão considerando o efeito skin. A segunda equação pode ser desenvolvida tomando a integral de linha circular do vetor do campo magnético H . Essa integral fornece a corrente $i(z, t)$ que flui no condutor da linha na posição z e no instante de tempo t . Então:

$$i(z, t) = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint (H_x dx + H_y dy). \quad (4.88)$$

Derivando a equação (4.88) em relação a z , obtém-se:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = \oint \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} dx + \frac{\partial H_y}{\partial z} dy \right). \quad (4.89)$$

Considerando a seguinte equação de Maxwell:

$$\nabla \vec{H} = J + \frac{\nabla \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.90)$$

Expandindo a equação (4.90) em coordenadas cartesianas retangulares, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z = \\ \left(J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \right) \vec{a}_x + \left(J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \right) \vec{a}_y + \left(J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \right) \vec{a}_z. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Como $H_z = 0$, no modo TEM, a equação (4.91) pode ser resolvida e reduzida como abaixo:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}. \quad (4.92)$$

Substituindo estes termos na equação (4.89), obtém-se:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = \oint \left(J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \right) dx - \oint \left(J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \right) dy. \quad (4.93)$$

Isolando os termos em comum:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = - \oint (J_x dy - J_y dx) - \frac{\partial}{\partial t} \oint (D_x dy - D_y dx). \quad (4.94)$$

Na equação (4.94), como no caso anterior, existe uma interpretação física. Caminhe no plano z , da figura 4.3 de um comprimento Δz , na direção z . Tem-se, então, uma superfície cilíndrica que é delimitada por dois círculos normais ao condutor e o plano da terra (superfície fechada). Nas laterais do cilindro, a condutividade do meio dielétrico implica na existência de uma corrente de fuga. Portanto, de acordo com a definição de condutância, no primeiro termo a integral $\oint (J_x dy - J_y dx)$ pode ser escrita como o produto de condutância pela tensão $v(z, t)$ na linha. Ao longo do cilindro o fluxo elétrico que atravessa a superfície dividido por Δz quando Δz tende a zero, é dado pela integração $\oint (D_x dy - D_y dx)$ no segundo termo.

De acordo com a definição de capacitância, essa última integração pode ser escrito como o produto de uma capacitância pela tensão $v(z, t)$ na linha. Deste modo,

56CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

a equação (4.94) torna-se:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = - \left[G_o v(z, t) + C_o \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \right] \quad (4.95)$$

em que:

- G_o S/m é a condutância do meio dielétrico, por unidade de comprimento;
- C_o F/m é a capacitância do meio dielétrico, por unidade de comprimento.

A equação (4.95) é a segunda equação que completa o conjunto das relações de tensão e corrente numa linha de transmissão com as perdas do efeito skin.

É importante notar que no desenvolvimento, G_o , L_{ex} e C_o usados nas equações (4.87) e (4.95) são definidos como parâmetros da linha de transmissão com perdas. Os parâmetros são obtidos nas condições estáticas, isto é, em corrente contínua.

Os mesmos parâmetros, usualmente, são calculados em função das dimensões da linha de transmissão e das características do condutor e do meio dielétrico. Assim, os seus valores podem ser determinados utilizando as seguintes expressões:

$$G_o = \frac{2\pi\sigma_g}{\ln \frac{2h}{R}} \quad S/m \quad (4.96)$$

$$L_{ex} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{2h}{R} \quad H/m \quad (4.97)$$

$$C_o = \frac{2\pi\epsilon_o}{\ln \frac{2h}{R}} \quad F/m \quad (4.98)$$

em que:

- σ_g $\Omega^{-1}m^{-2}$ é a condutividade do plano da terra;
- μ F/m é a permeabilidade do material do condutor;
- ϵ_o F/m é a permissividade do espaço livre.

4.7 Solução no Domínio da Frequência

Toma-se as equações (4.87) e (4.95) que completam o conjunto das relações de tensão e corrente na linha de transmissão com perdas do efeito skin e que foram desenvolvidas na sessão anterior. A seguir, é apresentada a solução das mesmas no domínio da frequência. Essa solução pode ser obtida aplicando-se, inicialmente, o teorema da convolução e o método da transformada de Fourier, obtém-se. Portanto:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -[R(\omega) + j\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})]I(z) \quad (4.99)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -[G_o + j\omega C_o]V(z) \quad (4.100)$$

onde $R(\omega)$ e $L_{in}(\omega)$ representam os parâmetros do efeito skin da linha de transmissão e vão ser determinados no capítulo 5.

Essas duas equações descrevem um trecho, de comprimento infinitesimal dz , da linha de transmissão conforme mostra figura 4.4.

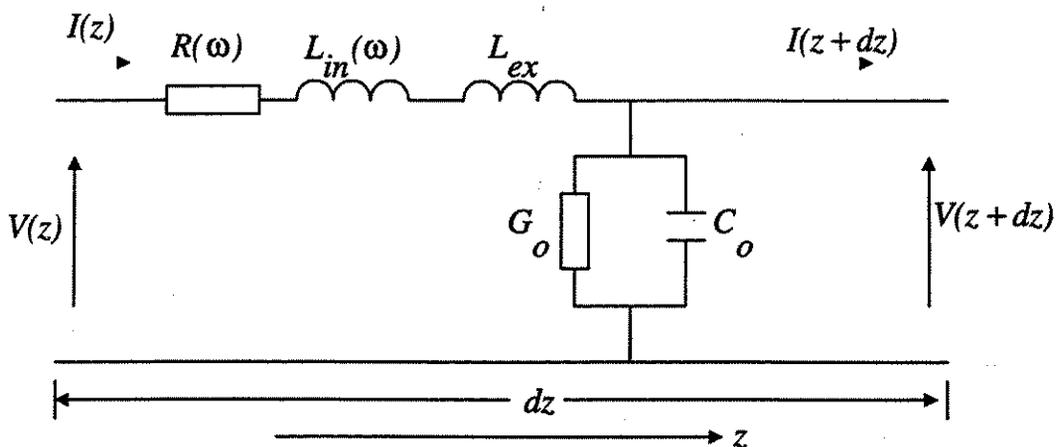


Figura 4.4: Circuito equivalente de um trecho, de comprimento dz , da linha de transmissão com perdas do efeito skin.

Este circuito equivalente é uma modificação do circuito equivalente apresentado no capítulo anterior para a linha de transmissão com perdas da resistência do conceito da corrente contínua (ver a figura 3.2). As modificações incluem as perdas do efeito skin representadas pela a resistência $R(\omega)$ e pela indutância interna $L_{in}(\omega)$.

58CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

As equações (4.99) e (4.100) constituem um sistema de equações diferenciais de duas equações e duas variáveis. Assim, para resolver este tipo de equações, inicialmente, deriva-se a equação (4.99) em relação a z o que resulta em:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -[R(\omega) + j\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})]\frac{dI(z)}{dz}. \quad (4.101)$$

Substituindo-se a equação (4.100) na equação (4.101), tem-se:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \gamma^2V(z) \quad (4.102)$$

onde:

- γ é uma quantidade complexa chamada coeficiente de propagação e é definida por:

$$\gamma = \sqrt{[R(\omega) + j\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})][G_o + j\omega C_o]}. \quad (4.103)$$

Usando o método de separação de variáveis, a equação (4.102) apresenta a seguinte solução:

$$V(z) = V_A e^{-\gamma z} + V_B e^{\gamma z}. \quad (4.104)$$

Derivando a equação (4.104) em relação a z , obtém-se:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -\gamma V_A e^{-\gamma z} + \gamma V_B e^{\gamma z}. \quad (4.105)$$

Isolando $I(z)$ na equação (4.99) tem-se:

$$I(z) = -\frac{1}{R(\omega) + j\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})} \cdot \frac{dV(z)}{dz}. \quad (4.106)$$

Substituindo a equação (4.105) na equação (4.106), obtém-se:

$$I(z) = \frac{\gamma V_A}{R(\omega) + j\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{\gamma V_B}{R(\omega) + j\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})} \cdot e^{\gamma z}. \quad (4.107)$$

Agora, substituindo-se a equação (4.103) na equação (4.107), obtém-se:

$$I(z) = \frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{\gamma z} \quad (4.108)$$

onde:

- Z_o é uma quantidade complexa que representa a impedância característica da linha e vale:

$$Z_o = \sqrt{\frac{R(\omega) + j\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})}{G_o + j\omega C_o}}. \quad (4.109)$$

As equações (4.104) e (4.108) representam as ondas positivas e negativas de tensão e corrente em função das variáveis V_A e V_B e essas ondas viajam ao longo da linha de transmissão com perdas do efeito skin.

Para determinar as variáveis V_A e V_B , supõe-se que existe uma linha de transmissão qualquer composta de um condutor de comprimento l situada na direção da coordenada z . Assume-se que esta linha está ligada a uma fonte qualquer caracterizada por V_s (que possui uma impedância interna Z_s) de um lado e conectada a uma impedância de carga Z_L na outra extremidade. A seguir, as condições de contorno desta linha são apresentadas.

Para o início da linha $z = 0$:

$$V(0) = V_s - I(0) \cdot Z_s. \quad (4.110)$$

60CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

Para o final da linha $z = l$:

$$\frac{V(l)}{I(l)} = Z_L. \quad (4.111)$$

Portanto, para o início da linha ($z = 0$) a tensão e a corrente dadas pelas equações (4.104) e (4.108), respectivamente, podem ser escritas em função das condições de contorno da seguinte forma:

$$V(0) = V_A + V_B \quad (4.112)$$

$$I(0) = \frac{V_A}{Z_o} - \frac{V_B}{Z_o}. \quad (4.113)$$

Substituindo as equações (4.112) e (4.113) na equação (4.110), tem-se:

$$V_A + V_B = V_s - \left(\frac{V_A}{Z_o} - \frac{V_B}{Z_o} \right) Z_s. \quad (4.114)$$

Separando os variáveis, obtém-se:

$$V_A + \left(\frac{Z_s}{Z_o} \right) V_A = V_s + \left(\frac{Z_s}{Z_o} \right) V_B - V_B. \quad (4.115)$$

Multiplicando a equação (4.115) por Z_o e evidenciando, tem-se:

$$(Z_s + Z_o)V_A = V_s Z_o + (Z_s - Z_o)V_B. \quad (4.116)$$

Dividindo a equação (4.116) por $(Z_s + Z_o)$, tem-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s + \left(\frac{Z_s - Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_B. \quad (4.117)$$

Ou ainda:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s + \Gamma_t V_B \quad (4.118)$$

onde:

- Γ_t é uma quantidade complexa que representa o coeficiente de reflexão no início da linha e é definido por:

$$\Gamma_t = \frac{Z_s - Z_o}{Z_s + Z_o}. \quad (4.119)$$

Para o final da linha ($z = l$), a tensão e a corrente dadas pelas equações (4.104) e (4.108), respectivamente, podem ser escritas na seguinte forma:

$$V(l) = V_A e^{-\gamma l} + V_B e^{\gamma l} \quad (4.120)$$

$$I(l) = \frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-\gamma l} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{\gamma l}. \quad (4.121)$$

Substituindo as equações (4.120) e (4.121) na equação (4.111):

$$\frac{V_A e^{-\gamma l} + V_B e^{\gamma l}}{\frac{V_A}{Z_o} \cdot e^{-\gamma l} - \frac{V_B}{Z_o} \cdot e^{\gamma l}} = Z_L. \quad (4.122)$$

Ou ainda:

$$V_A e^{-\gamma l} + V_B e^{\gamma l} = \left(\frac{Z_L}{Z_o}\right) V_A e^{-\gamma l} - \left(\frac{Z_L}{Z_o}\right) V_B e^{\gamma l}. \quad (4.123)$$

Agrupando-se:

$$\left(\frac{Z_L}{Z_o}\right) V_B e^{\gamma l} + V_B e^{\gamma l} = \left(\frac{Z_L}{Z_o}\right) V_A e^{-\gamma l} - V_A e^{-\gamma l}. \quad (4.124)$$

Multiplicando a equação (4.124) por Z_o e evidenciando, obtém-se:

$$(Z_L + Z_o) V_B e^{\gamma l} = (Z_L - Z_o) V_A e^{-\gamma l}. \quad (4.125)$$

Dividindo a equação (4.125) por $(Z_L + Z_o)e^{\gamma l}$, obtém-se:

$$V_B = \left(\frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}\right) V_A e^{-2\gamma l}. \quad (4.126)$$

62CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

Ou ainda:

$$V_B = \Gamma_r V_A e^{-2\gamma l} \quad (4.127)$$

onde:

- Γ_r é uma quantidade complexa que representa o coeficiente de reflexão no final de linha e é definido por:

$$\Gamma_r = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}. \quad (4.128)$$

Substituindo a equação (4.127) na equação (4.118), tem-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s + \Gamma_t \Gamma_r V_A e^{-2\gamma l}. \quad (4.129)$$

Agrupando e evidenciando, obtém-se:

$$V_A = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2\gamma l}}. \quad (4.130)$$

Substituindo a equação (4.130) na equação (4.127), obtém-se:

$$V_B = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{\Gamma_r e^{-2\gamma l}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2\gamma l}}. \quad (4.131)$$

Substituindo as equações (4.130) e (4.131) nas equações (4.104) e (4.108), obtém-se:

$$V(z) = \left(\frac{Z_o}{Z_s + Z_o} \right) V_s \cdot \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma_r e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2\gamma l}} \quad (4.132)$$

$$I(z) = \left(\frac{V_s}{Z_s + Z_o} \right) \cdot \frac{e^{-\gamma z} - \Gamma_r e^{-\gamma(2l-z)}}{1 - \Gamma_t \Gamma_r e^{-2\gamma l}}. \quad (4.133)$$

As equações (4.132) e (4.133) representam as ondas positivas e negativas de tensão e de corrente em função dos coeficientes de reflexão no início e no final da linha e que essas ondas viajam ao longo da linha de transmissão com perdas do efeito skin.

Assumir-se que $Z_s = 0$, para evitar o efeito da impedância interna da fonte, e considerar uma linha de transmissão casada ($Z_L = Z_o$) ou uma linha infinita para evitar as reflexões no final da linha, as equações (4.119) e (4.128) podem tomar a seguinte forma:

$$\Gamma_t = -1 \quad (4.134)$$

$$\Gamma_r = 0 \quad (4.135)$$

e conseqüentemente, este resultado implica que as equações (4.130) e (4.131) valem:

$$V_A = V_s \quad (4.136)$$

$$V_B = 0. \quad (4.137)$$

Com a determinação das variáveis V_A e V_B , as equações de tensão e corrente (4.104) e (4.108) podem ser reescritas na seguinte forma:

$$V(z) = V_s e^{-\gamma z} \quad (4.138)$$

$$I(z) = \frac{V_s}{Z_o} e^{-\gamma z}. \quad (4.139)$$

Considerando a função V_s (a fonte) como variação senoidal, tem-se:

$$V_s = V_m e^{j\omega t} \quad (4.140)$$

em que:

- V_m é o amplitude de onda transmitida;
- $\omega t = 2\pi ft$.

e definindo as partes real e imaginária da função γ por:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (4.141)$$

em que:

- α rad./m é o coeficiente de atenuação;
- β rad./m é o coeficiente de fase.

64CAPÍTULO 4. MODELO DA LINHA DE TRANSMISSÃO DO EFEITO SKIN

Assim, as equações (4.138) e (4.139) podem tomar a seguinte forma:

$$v(z, t) = V_m e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (4.142)$$

$$i(z, t) = \left(\frac{V_m}{Z_o} \right) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}. \quad (4.143)$$

Introduzindo a forma polar da função Z_o definida pela função ($|Z_o| e^{j\phi}$) e tomando a parte real, tem-se:

$$v(z, \omega t - \beta z) = V_m e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (4.144)$$

$$i(z, \omega t - \phi - \beta z) = \frac{V_m}{|Z_o|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \phi - \beta z) \quad (4.145)$$

onde

- $|Z_o|$ e ϕ são, respectivamente, módulo e ângulo da função Z_o e são definidos por:

$$|Z_o| = \sqrt{\frac{R^2(\omega) + \omega^2(L_{in}(\omega) + L_{ex})^2}{\omega^2 C_o^2}} \quad (4.146)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})}{R(\omega)} \right) - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (4.147)$$

Para uma solução geral, α e β são definidos por:

$$\alpha = |\gamma| \cos \psi \quad (4.148)$$

$$\beta = |\gamma| \sin \psi \quad (4.149)$$

onde

- $|\gamma|$ e ψ são, respectivamente, módulo e ângulo da função γ e são definidos por:

$$|\gamma| = \sqrt{[R^2(\omega) + \omega^2(L_{in}(\omega) + L_{ex})^2]^{\frac{1}{2}} \omega C_o} \quad (4.150)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega(L_{in}(\omega) + L_{ex})}{R(\omega)} \right) + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (4.151)$$

O ângulo $\frac{\pi}{2}$ que aparece nas equações (4.147) e (4.151) significa que o parâmetro G_o é desprezado por ser muito pequeno e também para facilitar a análise.

Os termos $(\omega t - \beta z)$ ou $(\omega t - \phi - \beta z)$ que aparecem nas equações (4.144) e (4.145), respectivamente, representam a relação de fase tanto de tensão quanto de corrente senoidal em qualquer ponto z ao longo da linha e em qualquer tempo t .

O comportamento da relação de fase, tanto da tensão como da corrente, em qualquer ponto da linha é constante, ou seja:

$$\omega t - \beta z = K = \text{constante}. \quad (4.152)$$

Tomando a derivada da equação (4.152) em relação ao tempo t , tem-se:

$$\omega - \beta \frac{dz}{dt} = 0. \quad (4.153)$$

Isolando-se:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (4.154)$$

Na equação (4.154) o termo $\frac{dz}{dt}$ representa a velocidade de fase de um ponto constante de fase e será representada pelo símbolo ν_p . Portanto, tem-se:

$$\nu_p = \frac{\omega}{\beta}. \quad (4.155)$$

As equações (4.146) e (4.147), representam as ondas instantâneas de tensão e corrente propagando ao longo da linha de transmissão com perdas. Essas equações podem ser utilizadas nas simulações de ondas de tensão e de corrente em qualquer posição z ao longo da linha. Um caso interessante é estudar e analisar tanto a tensão quanto a corrente previstas no final da linha com perdas a partir de uma onda de tensão aplicada no início da mesma. Portanto, para o início da linha ($z = 0$), as equações (4.146) e (4.147) podem tomar a seguinte forma:

$$v(0, \omega t) = V_m \cos(\omega t) \quad (4.156)$$

$$i(0, \omega t - \phi) = \frac{V_m}{|Z_o|} \cos(\omega t - \phi). \quad (4.157)$$

Para o final da linha ($z = l$), as equações (4.146) e (4.147) valem:

$$v(l, \omega t - \beta l) = V_m e^{-\alpha l} \cos(\omega t - \beta l) \quad (4.158)$$

$$i(l, \omega t - \phi - \beta l) = \frac{V_m}{|Z_o|} e^{-\alpha l} \cos(\omega t - \phi - \beta l). \quad (4.159)$$

Os resultados obtidos pela equação (4.156), como onda de tensão senoidal aplicada no início da linha, e pelas equações (4.158) e (4.159), como ondas de tensão e corrente previstas no final da linha junto com os resultados obtidos das equações (4.146), (4.147), (4.148), (4.149) e (4.155) que são módulo da impedância característica, ângulo da impedância característica, coeficiente de atenuação, coeficiente de fase e a velocidade de propagação de fase, respectivamente, vão ser apresentados para efeitos de comparação no capítulo 6.

Capítulo 5

Aplicação de uma Formulação Proposta para o Cálculo da Resistência e da Indutância Interna do condutor cilíndrico

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta a aplicação da formulação de uma nova técnica proposta para o cálculo e análise gráfica da resistência e da indutância interna em um condutor sólido e cilíndrico em ampla faixa de frequência (de zero a uma frequência de 10^{12} Hz ou mais se necessário). Também é apresentado um estudo amplo com uma análise gráfica do efeito skin para alguns materiais condutores selecionados.

É necessário uma correta caracterização e simulação do efeito skin pois o mesmo está presente em diversas aplicações. Dentre elas, pode-se citar a importância em projetos de sistemas elétricos e eletrônicos, sistemas que apresentam frequências elevadas ou mesmo redes de transmissão de dados. Através de uma correta modelagem do efeito skin, o desempenho e precisão em sistemas pode ser melhorado. Afim de tornar mais precisa a simulação computacional do efeito skin, deve-se aperfeiçoar os modelos matemáticos dos componentes elétricos e eletrônicos. Na prática, os modelos devem ser os mais realísticos possíveis dentro das limitações computacionais. Finalmente, o objetivo deste capítulo é demonstrar um cálculo exato e preciso da resistência e indutância interna devido ao efeito skin.

A metodologia consiste em aplicar o teorema da convolução e o método da transformada de Fourier à formulação transitória do cálculo da corrente para a seção transversal do condutor sólido e cilíndrico desenvolvida no capítulo anterior. Assim,

68CAPÍTULO 5. CÁLCULO DA RESISTÊNCIA E DA INDUTÂNCIA INTERNA

a formulação obtida é exata e representa a admitância interna complexa do efeito skin em um condutor sólido e cilíndrico.

Como consequência a impedância interna complexa do efeito skin para o mesmo condutor pode ser obtida. A parte real dessa impedância representa a resistência do efeito skin e a parte imaginária dividido por ω representa a indutância interna para o mesmo efeito.

5.2 Aplicação da Formulação da Técnica de Bessel

Na técnica de Bessel, a impedância interna complexa do condutor sólido e cilíndrico é obtida como a razão entre a queda de tensão ao longo da superfície e a corrente total num circuito fechado (Matick [8] and Chipman [9]). Assim, o valor da impedância variando na frequência vale:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{j\omega\mu}{2\pi R} \left[\frac{\text{ber}(u) + j\text{bei}'(u)}{(\frac{\sqrt{2}}{\delta})(\text{ber}'(u) + j\text{bei}'(u))} \right] && \Omega/m \\ &= R(\omega) + j\omega L_{in}(\omega) && \Omega/m. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Na equação (5.1), a variável u é definido por:

$$u = \frac{R\sqrt{2}}{\delta} \Rightarrow \delta = \left(\frac{1}{\pi f \mu \sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

em que:

- R m é o raio do condutor;
- f Hz é a frequência;
- μ H/m é a permeabilidade do material do condutor;
- σ Ω/m^2 é a condutividade do material do condutor.

A permeabilidade é usualmente definida por:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad H/m \quad (5.3)$$

em que

- μ_0 H/m é a permeabilidade do espaço livre;
- μ_r é a permeabilidade relativa do material do condutor.

As partes real e imaginária da função $Z(\omega)$ dada pela equação (5.1) são definidas por:

$$R(\omega) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu f}{2\pi\sigma}} \left[\frac{ber(u)bei'(u) - bei(u)ber'(u)}{\{ber'(u)\}^2 + \{bei'(u)\}^2} \right] \quad \Omega/m \quad (5.4)$$

$$\omega L_{in}(\omega) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu f}{2\pi\sigma}} \left[\frac{ber(u)bei'(u) + bei(u)ber'(u)}{\{ber'(u)\}^2 + \{bei'(u)\}^2} \right] \quad \Omega/m. \quad (5.5)$$

A equação (5.4), como componente real da equação (5.1), representa a resistência do condutor devido ao efeito skin. A indutância interna do condutor devido ao efeito skin pode ser obtida dividindo a equação (5.5), como componente reativa da equação (5.1), por ω . O resultado é dado por:

$$L_{in}(\omega) = \frac{1}{\omega R} \sqrt{\frac{\mu f}{2\pi\sigma}} \left[\frac{ber(u)bei'(u) + bei(u)ber'(u)}{\{ber'(u)\}^2 + \{bei'(u)\}^2} \right] \quad H/m. \quad (5.6)$$

As funções $ber(u)$ e $bei(u)$ e as suas derivadas $ber'(u)$ e $bei'(u)$ são funções de Bessel usualmente definidas por:

$$ber(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)} \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \quad (5.7)$$

70CAPÍTULO 5. CÁLCULO DA RESISTÊNCIA E DA INDUTÂNCIA INTERNA

$$ber'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k\left(\frac{u}{2}\right)^{2k-1}}{k!\Gamma(k+1)} \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \quad (5.8)$$

$$bei(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(k+1)} \sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \quad (5.9)$$

$$bei'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k\left(\frac{u}{2}\right)^{2k-1}}{k!\Gamma(k+1)} \sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right). \quad (5.10)$$

As razões entre a resistência $R(\omega)$ e R_{dc} , entre a componente reativa $\omega L_{in}(\omega)$ e R_{dc} e entre a indutância interna $L_{in}(\omega)$ e L_{dc} são formulados da seguinte maneira:

$$\frac{R(\omega)}{R_{dc}} = \frac{R}{\delta\sqrt{2}} \left[\frac{ber(u)bei'(u) - bei(u)ber'(u)}{\{ber'(u)\}^2 + \{bei'(u)\}^2} \right] \quad (5.11)$$

$$\frac{\omega L_{in}(\omega)}{R_{dc}} = \frac{R}{\delta\sqrt{2}} \left[\frac{ber(u)bei'(u) + bei(u)ber'(u)}{\{ber'(u)\}^2 + \{bei'(u)\}^2} \right] \quad (5.12)$$

$$\frac{L_{in}(\omega)}{L_{dc}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{R} \left[\frac{ber(u)bei'(u) - bei(u)ber'(u)}{\{ber'(u)\}^2 + \{bei'(u)\}^2} \right] \quad (5.13)$$

em que:

- R_{dc} Ω/m é a resistência de corrente contínua (CC) do condutor;
- L_{dc} H/m é a indutância interna de corrente contínua (CC) do condutor.

Os valores desses parâmetros são calculados nas condições estáticas, isto é, em corrente contínua utilizando as seguintes expressões:

$$R_{dc} = \frac{1}{\pi \sigma R^2} \quad \Omega/m \quad (5.14)$$

$$L_{dc} = \frac{\mu_0 \mu_r}{8\pi} \quad H/m. \quad (5.15)$$

5.3 Aplicação da Formulação da Técnica Proposta

Na formulação da nova técnica é necessário retomar a equação (4.67) desenvolvida no capítulo anterior junto com a equação (4.68). Portanto, tem-se:

$$i(t) = \int_0^t y(t - \tau) \cdot E_z^R(\tau) d\tau \quad (5.16)$$

onde a função $y(t)$ é dada por:

$$y(t) = \frac{4\pi}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} \cdot t\right). \quad (5.17)$$

Aplicando o teorema da convolução para a equação (5.16), obtém-se:

$$i(t) = y(t) * E_z^R(t). \quad (5.18)$$

Aplicando a transformada de Fourier, obtém-se:

$$\mathcal{F}\{i(t)\} = \mathcal{F}\{y(t)\} * \mathcal{F}\{E_z^R(t)\}. \quad (5.19)$$

Ou ainda:

$$I(\omega) = Y(\omega) \cdot E_z^R(\omega). \quad (5.20)$$

Na equação (5.20), a função $Y(\omega)$ representa a transformada de Fourier da função $y(t)$, dada pela equação (5.17). Nota-se que essa função representa a admitância complexa interna do condutor sólido e cilíndrico. Assim:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \frac{4\pi}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\xi_k^2}{\mu\sigma R^2} + j\omega} \quad \frac{1}{\Omega m} \quad (5.21)$$

72CAPÍTULO 5. CÁLCULO DA RESISTÊNCIA E DA INDUTÂNCIA INTERNA

Simplificando-se:

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k + j\omega L} \quad \frac{1}{\Omega m} \quad (5.22)$$

onde os variáveis R_k e L são definidos por:

$$R_k = \frac{\xi_k^2}{4\pi\sigma R^2} \quad \Omega/m \quad (5.23)$$

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \quad H/m \quad (5.24)$$

em que:

- ξ_k é a k -ésima raiz da função de Bessel $J_0(x) = 0$;
- $\sigma \Omega/m^2$ é a condutividade do material do condutor;
- R m é o raio do condutor;
- μ H/m é a permeabilidade do material do condutor.

A permeabilidade é usualmente definida por:

$$\mu = \mu_o \mu_r \quad H/m \quad (5.25)$$

em que:

- μ_o H/m permeabilidade do espaço livre;
- μ_r permeabilidade relativa do material do condutor.

A k -ésima raiz ξ_k da função de Bessel $J_0(x) = 0$ pode ser calculada utilizando a expressão simples apresentada no capítulo anterior que vale:

$$\xi_k = \frac{(2k-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}. \quad (5.26)$$

As equações (5.22)-(5.24) indicam que o ξ_k é proporcional ao k , embora, o termo $y_k(\omega)$ da soma na equação (5.22) (k -ésimo circuito da admitância interna complexa) seja proporcional ao $\frac{1}{\xi_k}$. Isto significa que essa soma converge e pode ser considerada como uma boa maneira para determinar os valores exatos da admitância interna complexa do condutor sólido e cilíndrico em qualquer frequência. Além disso, essas equações geram uma interpretação interessante para a admitância interna complexa de uma seção transversal de um condutor sólido e cilíndrico. Portanto, o lado direito da equação (5.23) pode ser considerado como um modelo que representa a admitância interna complexa da seção transversal do condutor sólido e cilíndrico (figura 5.1).

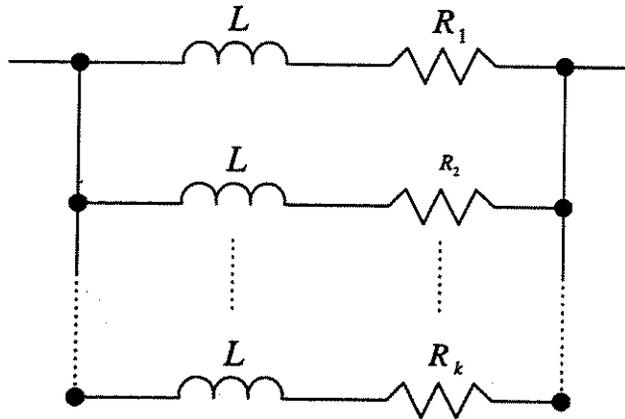


Figura 5.1: Módulo da admitância interna complexa da seção transversal do condutor sólido e cilíndrico

Este modelo, como mostra a figura 5.1, consiste em uma rede de circuitos paralelos em que cada circuito é composto de uma resistência R e uma indutância L . O k -ésimo circuito dessa admitância interna complexa é dado por:

$$y_k(\omega) = \frac{1}{R_k + j\omega L} = \frac{1}{\Omega m} \quad (5.27)$$

Logicamente, a impedância interna complexa pode ser obtida da equação (5.20) reescrita na seguinte forma:

$$E_z^R(\omega) = I(\omega) \cdot Z(\omega) \quad (5.28)$$

onde:

- $Z(\omega)$ é a impedância interna complexa e definida por:

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} \quad \Omega/m. \quad (5.29)$$

Substituindo a equação (5.22) na equação (5.29), obtém-se:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k + j\omega L}} \quad \Omega/m. \quad (5.30)$$

Multiplicando o denominador da equação (5.30) pelo conjugado, obtém-se:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2} - j\omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2}} \quad \Omega/m. \quad (5.31)$$

Multiplicando a equação (5.31) pelo conjugado, obtém-se:

$$Z(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \omega^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2}\right)^2} + \frac{j\omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \omega^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2}\right)^2} \quad \Omega/m. \quad (5.32)$$

Ou ainda:

$$Z(\omega) = R(\omega) + j\omega L_{in}(\omega) \quad \Omega/m \quad (5.33)$$

onde:

- $R(\omega)$ Ω/m é o parâmetro da resistência devido ao efeito skin, e é definida por:

$$R(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \omega^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \quad \Omega/m \quad (5.34)$$

- $L_{in}(\omega)$ H/m é o parâmetro da indutância interna do efeito skin definido por.

$$L_{in}(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \omega^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \quad H/m. \quad (5.35)$$

O módulo e o ângulo da função $Z(\omega)$ são definidos por:

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + \omega^2 L_{in}^2(\omega)} \quad \Omega/m \quad (5.36)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L_{in}(\omega)}{R(\omega)} \right) \quad rad. \quad (5.37)$$

76CAPÍTULO 5. CÁLCULO DA RESISTÊNCIA E DA INDUTÂNCIA INTERNA

As razões entre a resistência $R(\omega)$ (componente ativa) e $\omega L_{in}(\omega)$ (componente reativa) da função $Z(\omega)$, equação (5.33), e R_{dc} e entre a indutância interna $L_{in}(\omega)$ e L_{dc} são de grande interesse para análise do efeito skin e são formulados da seguinte maneira:

A razão $\frac{R(\omega)}{R_{dc}}$ é dada por:

$$\frac{R(\omega)}{R_{dc}} = \frac{\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^2}{R_k^2 + \omega^2 L^2}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \omega^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \quad (5.38)$$

A razão $\frac{\omega L_{in}(\omega)}{R_{dc}}$ é dada por:

$$\frac{\omega L_{in}(\omega)}{R_{dc}} = \frac{\frac{R^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega \mu \sigma}{R_k^2 + \omega^2 L^2}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \omega^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \quad (5.39)$$

A razão $\frac{L_{in}(\omega)}{L_{dc}}$ é dada por:

$$\frac{L_{in}(\omega)}{L_{dc}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{R_k^2 + \omega^2 L^2}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \omega^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{R_k^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \quad (5.40)$$

As equações (5.38)-(5.40) são de grande interesse na análise do efeito skin.

Onde

- R_{dc} Ω/m é a resistência da corrente contínua (CC) do condutor;
- L_{dc} H/m é a indutância interna da corrente contínua (CC) do condutor.

Os valores desses parâmetros são calculados nas condições estáticas, isto é, em corrente contínua. Assim, os mesmos parâmetros são definidas por:

$$R_{dc} = \frac{1}{\pi\sigma R^2} \quad \Omega/m \quad (5.41)$$

$$L_{dc} = \frac{\mu}{8\pi} \quad H/m. \quad (5.42)$$

Um programa simples foi elaborado na linguagem *C*, e os resultados obtidos são apresentados na próxima seção.

5.4 Resultados e Discussão

Inicialmente, um tópico importante precisa ser discutido e analisado. Esse tópico aborda o critério de convergência dos somatórios infinitos que aparecem nas equações (5.32), (5.34), (5.35) e (5.38) à (5.40). A análise mostra que, para um resultado mais preciso, o critério da convergência desses somatórios infinitos é alcançado pela seleção de um número finito de k adequado (número de termos de cada somatório). A análise também mostra que o número finito de k depende da frequência, do raio do condutor e do material do mesmo. Assim, em baixa frequência para qualquer raio do condutor e para qualquer material, os resultados podem ser obtidos com a escolha de um valor do k relativamente pequeno. A medida que a frequência aumenta, deve-se aumentar o valor de k . Para uma dada frequência, quanto maior o raio do condutor, maior deve ser o valor de k para que a convergência seja obtida.

É interessante ser discutido e analisado o caso em que a frequência é zero na equação (5.22). Usando a expressão (5.26) e com a escolha de número finito de k adequado, resulta no valor da resistência da corrente contínua. Também, as equações (5.34) e (5.35) vão ser reduzidas para aquelas já conhecidas como expressões da corrente contínua. Mas à medida que a frequência aumenta, $R(\omega)$ tende a aumentar e $L_m(\omega)$ diminui linearmente e proporcionalmente à raiz quadrada da frequência.

A resistência e a indutância interna de um condutor cilíndrico de cobre foram calculados a partir da formulação da técnica proposta desenvolvida (curvas com linhas sólidas) e também a partir da formulação da técnica de Bessel (curvas marcadas com círculos). Foram consideradas diversas valores para o raio do condutor. Os resultados desta comparação são mostrados na figura 5.2.

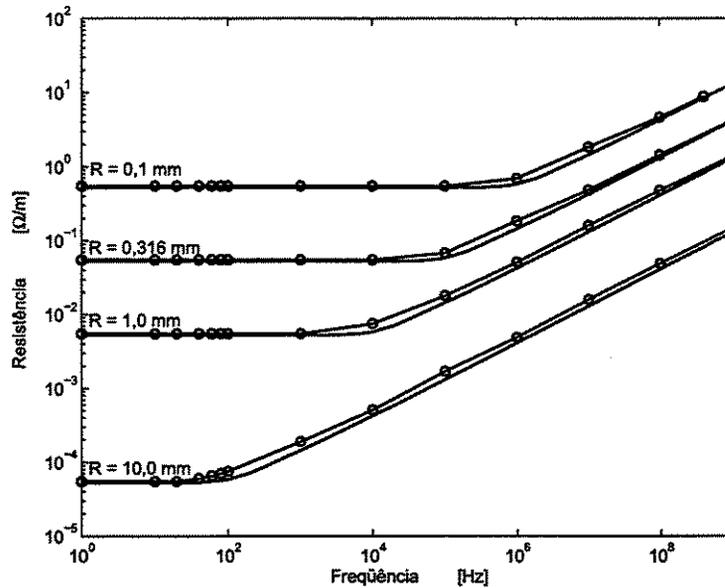


Figura 5.2: Comparação na resistência do efeito skin entre a técnica proposta e a técnica de Bessel para o condutor sólido e cilíndrico de cobre

Na figura 5.2, pode ser observado que os resultados obtidos pela nova técnica apresentam concordância com os resultados obtidos da literatura. Os resultados investigam a resistência do efeito skin, indutância interna, impedância, ângulo de fase e a impedância normalizada como função da frequência para o condutor sólido e cilíndrico de cobre.

A figura 5.3 mostra o comportamento da resistência efetiva do efeito skin. Como exemplo, para o condutor de raio $R = 1,0$ mm a resistência começa do seu valor CC ($5,413 \times 10^{-3} \Omega/m$) e permanece constante em uma faixa de frequência baixa até que a frequência atinja aproximadamente 10^4 Hz. Com aumento da frequência, a resistência aumenta linearmente. A figura mostra também que os condutores de raios pequenos são menos afetados nas frequências relativamente baixas.

O comportamento da indutância interna efetiva do efeito skin é mostrado na figura 5.4. Essa figura mostra que a indutância interna decresce à medida que a frequência cresce. Para qualquer raio do condutor a indutância interna começa do seu valor CC ($5,0 \times 10^{-8}$ H/m). Como exemplo, para o raio do condutor $R = 1,0$ mm a indutância interna começa decrescer do seu valor CC quando a frequência atinge aproximadamente 10^4 Hz. A figura mostra também que os condutores de raios pequenos são menos afetados nas frequências relativamente baixas.

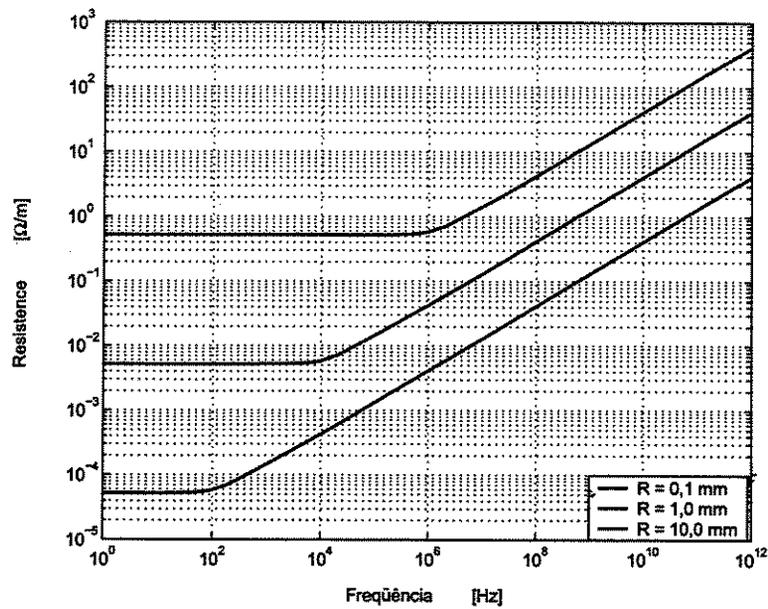


Figura 5.3: Resistência do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre

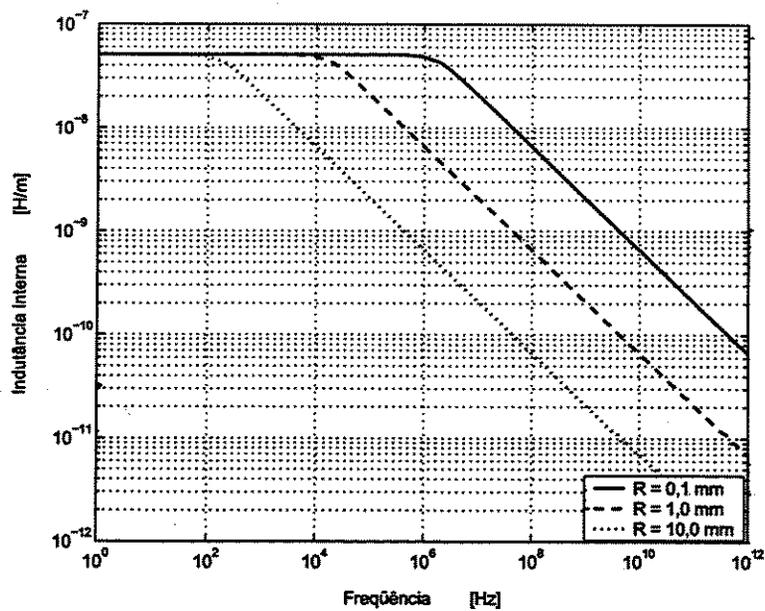


Figura 5.4: Indutância interna do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre

80CAPÍTULO 5. CÁLCULO DA RESISTÊNCIA E DA INDUTÂNCIA INTERNA

O comportamento da impedância e o ângulo de fase do efeito skin é mostrado nas figuras 5.5 e 5.6.

Na figura 5.5, a impedância em módulo aumenta com o aumento da frequência e apresenta um perfil completamente igual ao perfil da resistência. Como exemplo, para o raio do condutor $R = 1,0$ mm a impedância apresenta aproximadamente o mesmo valor da resistência de corrente contínua. Todavia, com aumento da frequência a impedância aumenta linearmente.

Por outro lado na figura 5.6 o ângulo de fase aumenta com o aumento da frequência. No caso de o raio do condutor $R = 10,0$ mm como exemplo, na faixa da frequência relativamente baixa (de zero a 10^2 Hz) sua razão de aumento é alta devido à influência da componente resistiva, enquanto para as faixas de frequência média e alta (entre 10^2 Hz e 10^8 Hz), sua razão aumenta pouco ou ainda é constante devido à influência da componente reativa. Nas frequências altas (acima de 10^8 Hz), o componente reativa é muito alta fazendo com que o ângulo de fase apresenta o valor máximo que é $0,785$ radianos ou 45 graus. A figura mostra também que os condutores de raios pequenos são menos afetados nas frequências relativamente baixas.

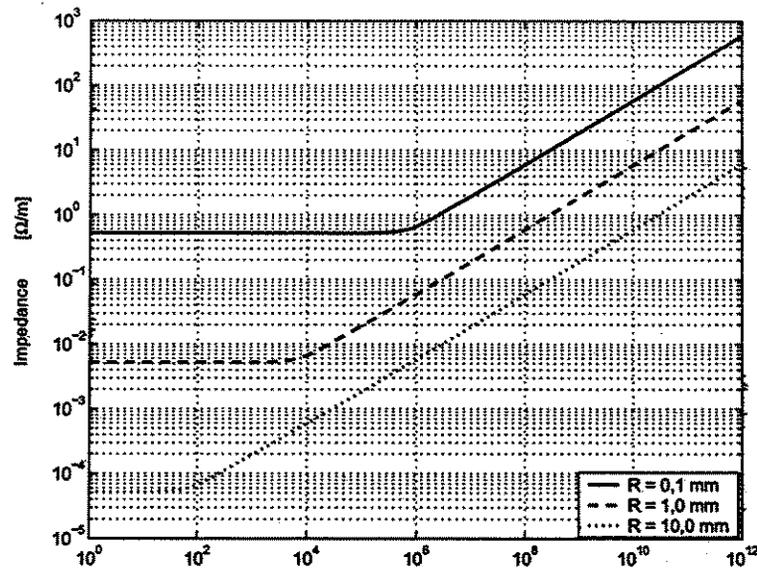


Figura 5.5: Impedância do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre

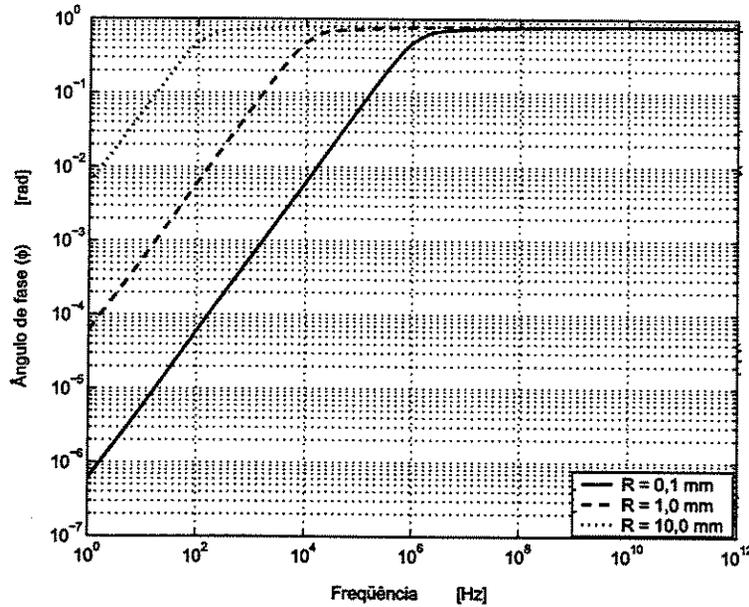


Figura 5.6: Ângulo de fase do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre

Outras relações importantes usualmente de interesse no estudo e análise do efeito skin, são as razões entre resistência $R(\omega)$ (componente ativa) e a resistência da corrente contínua R_{dc} , entre $\omega L_{in}(\omega)$ (componente reativa) e a resistência da corrente contínua R_{dc} e entre a indutância interna, $L_{in}(\omega)$ e a indutância interna da corrente contínua L_{dc} como componentes normalizadas. A figura 5.7 mostra os resultados obtidos para um raio de um condutor $R = 1,0$ mm.

A figura mostra que tanto a normalização resistiva como a normalização da razão entre a componente reativa e a resistência de corrente contínua apresentam um aumento quando se aumenta a frequência e ficam bem próximos mas não são iguais nas faixas de frequência média e alta. A figura também mostra que a componente reativa normalizada começa com um valor pequeno e aumenta linearmente com aumento da frequência, enquanto a componente resistiva normalizada começa com o valor da unidade e apresenta um perfil semelhante à da resistência e por fim, a componente normalizada da indutância interna começa com o valor da unidade e apresenta um perfil decrescente.

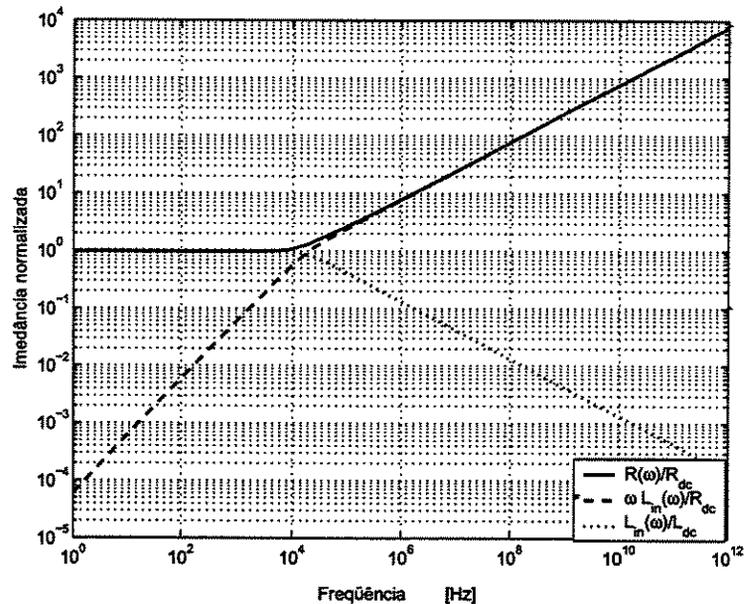


Figura 5.7: Componentes normalizados da impedância do efeito skin para um condutor sólido e cilíndrico de cobre

5.5 Uma Contribuição para Análise Gráfica de Alguns Materiais Condutores Seleccionados

Todos os materiais utilizados nos sistemas elétricos e eletrônicos são classificados como condutores ou isoladores do ponto de vista de suas condutividades elétricas σ . São chamados como diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos a partir de seus valores de permeabilidade relativa μ_r . A análise gráfica apresentada aqui trata apenas os materiais condutores. A tabela 5.1 mostra alguns materiais condutores seleccionados com suas respectivas condutividades elétricas e permeabilidades relativas.

As figuras 5.8 e 5.9 mostram algumas curvas de resistências e indutâncias internas do efeito skin para alguns materiais seleccionados. O cobre é caracterizado por sua alta condutividade elétrica e sua permeabilidade relativa próximo a unidade e alguns outros materiais que são caracterizados por suas condutividades menores que o cobre e suas permeabilidades relativas próximas a unidade, como por exemplo: o alumínio, o latão e o chumbo (veja a tabela 5.1).

Tabela 5.1: Alguns materiais condutores selecionados com suas condutividades elétricas e suas permeabilidades relativas

Materiais	Condutividade (σ) $\Omega^{-1}m^{-1}$ at 20°C	Permeabilidade Relativa (μ_r)
Prata	$6,10 \times 10^7$	0,9999
Cobre	$5,88 \times 10^7$	0,999991
Alumínio	$3,96 \times 10^7$	1,0002
Latão	$2,56 \times 10^7$	0,99991
Cobalto	$1,60 \times 10^7$	250
Níquel	$1,45 \times 10^7$	600
Ferro	$1,03 \times 10^7$	5,000
Chumbo	$5,06 \times 10^6$	0,999983

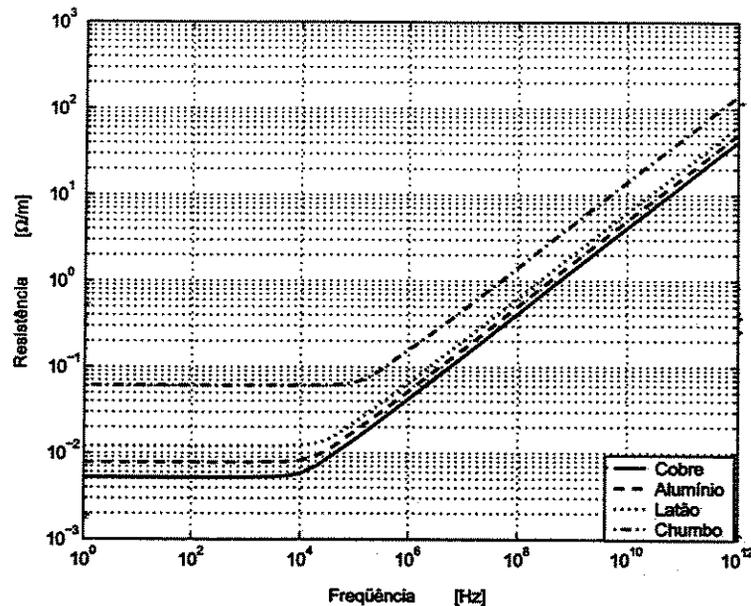


Figura 5.8: Comparação da resistência do efeito skin.

Para a comparação e como exemplo, as curvas são plotadas para um raio de condutor $R = 1,0$ mm. As figuras mostram que, para cada material condutor, a resistência aumenta e a indutância interna diminui com o aumento da frequência. Devido à diferença na condutividade elétrica e a semelhança na permeabilidade relativa, os valores iniciais das resistências são diferentes, começam com os valores da

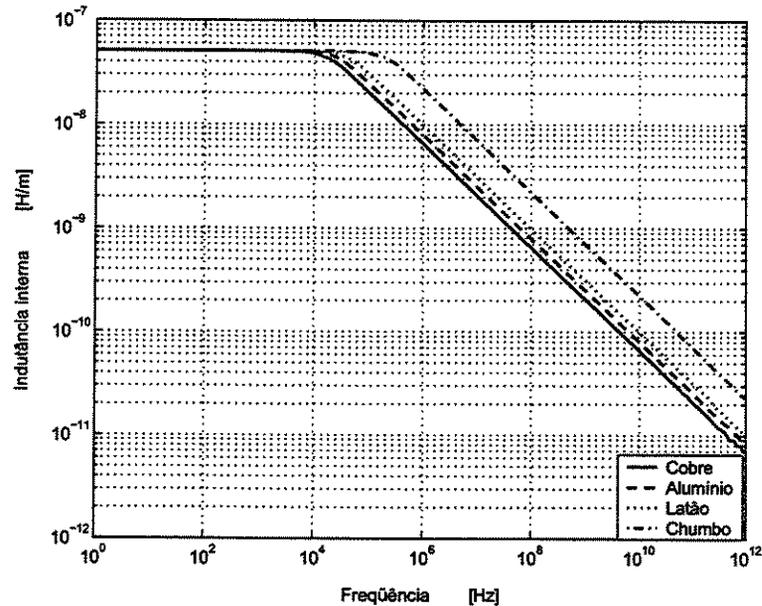


Figura 5.9: Comparação da indutância interna do efeito skin.

corrente contínua ($5,41 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$ para o Cobre e $12,43 \times 10^{-3} \Omega/\text{m}$ para o Latão), enquanto os valores das indutâncias internas são iguais e também começam com os valores da corrente contínua ($5,0 \times 10^{-8} \text{ H/m}$ para todos os materiais selecionados). Estes valores permanecem constantes iguais ao valor da corrente contínua nas faixas da frequência baixa (até 10^4 Hz para o Cobre e até 10^5 Hz para o Chumbo).

As figuras 5.8 e 5.9 também mostram que os materiais condutores com baixa condutividade elétrica são menos afetados nas faixas de baixa frequência. Entretanto, eles apresentam uma resistência muito grande nas faixas de frequência alta e muito alta. Por outro lado, as figuras mostram que a indutância interna começa do seu valor de corrente contínua. Materiais condutores com baixa condutividade elétrica são menos afetados em todas as faixas de frequência.

Os resultados gráficos da resistência e da indutância interna do efeito skin de alguns materiais condutores como: o cobalto, o níquel e o ferro são mostrados nas figuras 5.10 e 5.11. Estes materiais são caracterizados por condutividades elétricas baixas e permeabilidades relativas altas em comparação com o cobre. Esses resultados, como exemplo, são obtidos para um raio de um condutor de $R = 1,0 \text{ mm}$.

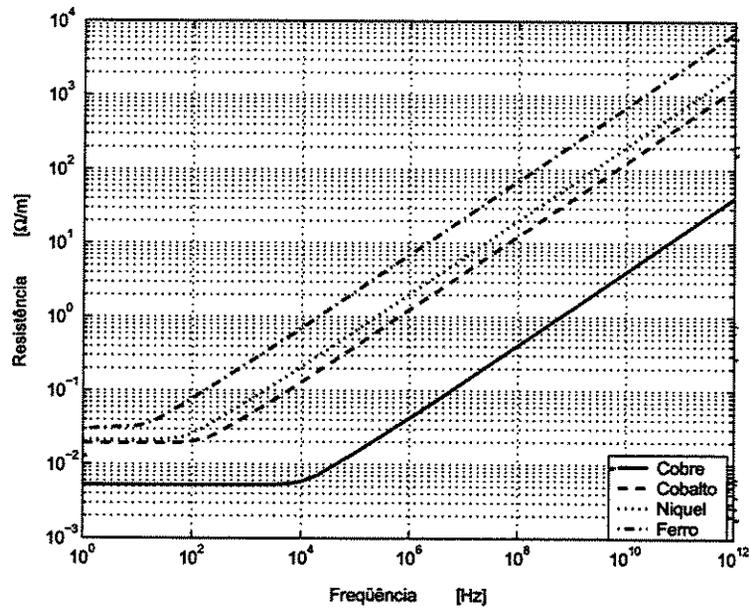


Figura 5.10: Comparação da resistência do efeito skin.

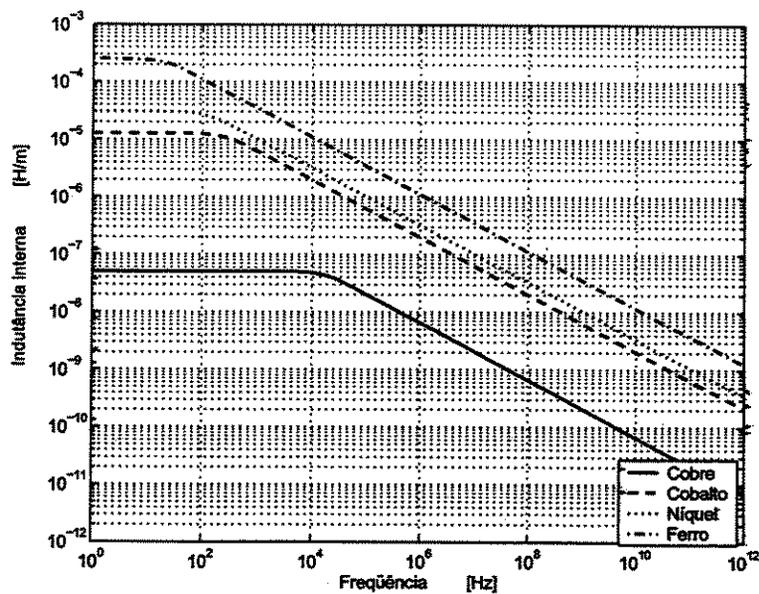


Figura 5.11: Comparação da indutância interna do efeito skin.

Os resultados obtidos nas figuras 5.10 e 5.11 mostram que, para cada material condutor, a resistência aumenta e a indutância interna diminui, a partir de seus

86CAPÍTULO 5. CÁLCULO DA RESISTÊNCIA E DA INDUTÂNCIA INTERNA

valores de corrente contínua, com aumento da frequência. Os resultados também mostram que os materiais condutores de condutividade elétrica baixa e de permeabilidade relativa alta apresentam altos valores de corrente contínua tanto para a resistência quanto para a indutância interna em comparação com os valores da resistência e da indutância interna do material condutor de cobre. O aumento da resistência e a diminuição da indutância interna se inicia na faixa de frequência baixa. Também, os resultados mostram que a medida que a condutividade elétrica decresce e a permeabilidade relativa cresce, o material condutor apresenta alto valor de resistência até mesmo nas faixas de frequência baixa e sua indutância interna começa decrescer em frequências muito baixas.

Capítulo 6

Aplicações em Linhas de Transmissão

6.1 Introdução

Este capítulo apresenta, inicialmente, análise gráfica e outra matemática dos parâmetros da linha de transmissão, levando em consideração o efeito skin, em função da frequência. Também são apresentadas comparações com os mesmos parâmetros em corrente contínua. Como consequência, as análises gráfica e matemática são estendidas para as características da linha. Por último, dois exemplos de diferentes casos de aplicações em linhas de transmissão são apresentados. Nestes exemplos, as tensões e correntes no final de uma linha de transmissão são simuladas utilizando os três modelos.

No capítulo 2, foi elaborado um algoritmo computacional capaz de modelar e resolver linhas de transmissão sem perdas. Posteriormente, no capítulo 3, um modelo para linhas de transmissão com perdas foi introduzido. Finalmente, no capítulo 4, o efeito skin foi incorporado de modo a tornar o modelo mais completo. Todos estes modelos verificam a importância do efeito skin nas linhas de transmissão e também validam todas as formulações desenvolvidas nos capítulos citados anteriormente. Os algoritmos computacionais apresentados no apêndice [B], são utilizados para simulações gráficas das tensões e correntes no final de uma linha de transmissão a partir da aplicação de uma onda de tensão senoidal no início da mesma.

6.2 Parâmetros da linha de transmissão

De acordo com o capítulo 2, para o caso de linhas sem perdas os parâmetros são calculados nas condições estáticas. Para o modelo com perdas, além dos parâmetros de linha considerados no modelo sem perdas, também são introduzidas perdas mínimas do condutor devido a sua resistência em corrente contínua e também perdas do

meio dielétrico devido à corrente de fuga. Essas perdas são aproximadas e representadas pelos parâmetros apresentados nas equações (3.18) e (3.19) (capítulo 3). Esses parâmetros também são calculado nas condições estáticas, isto é, para corrente contínua. Posteriormente, o modelo que permite considerar as perdas devido ao efeito skin é introduzido. Deste modo, os parâmetros da corrente contínua (resistência e indutância interna do condutor) são substituídos pelos correspondentes parâmetros em que se considera o efeito skin. Esses últimos são apresentados pelas equações (5.34) e (5.35) no capítulo 5 em que são calculados para qualquer valor de frequência inclusive para a corrente contínua (frequência de valor zero).

Matematicamente, todos os parâmetros da corrente contínua são funções das características do condutor e do meio dielétrico e não variam com a frequência. Por outro lado, o efeito skin faz com que os parâmetros variem com a frequência mesmo sendo funções das características do condutor e do meio dielétrico.

Nas figuras 6.1 e 6.2 são apresentados gráficos das resistências $R(\omega)$ e das indutâncias internas $L_{in}(\omega)$ variando com a frequência. Nestes gráficos as linhas traçadas representam os parâmetros em que se considera o efeito skin, já as linhas contínuas representam a variação com a frequência dos parâmetros de corrente contínua (R_o e L_{in}).

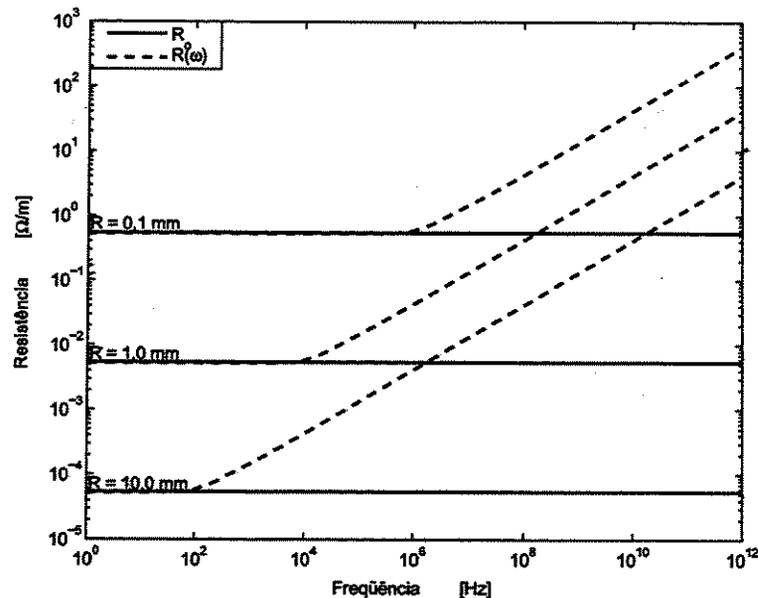


Figura 6.1: Valores das resistências de condutores de cobre de diferentes raios.

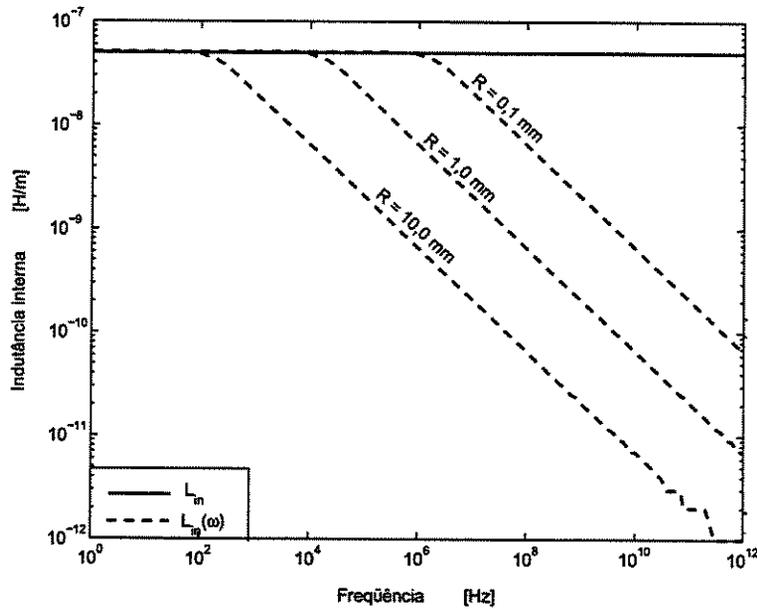


Figura 6.2: Valores das indutâncias internas de condutores de cobre de diferentes raios.

As figuras 6.1 e 6.2 mostram que para qualquer raio específico de um condutor, os valores dos parâmetros $R(\omega)$ e $L_{in}(\omega)$ são idênticos aos de corrente contínua em baixas e médias frequências, por exemplo, são idênticos até o valor de frequência de 10^6 Hz para o raio de $R = 0,1$ mm. A medida que a frequência aumenta, $R(\omega)$ aumenta linearmente e proporcionalmente à raiz quadrada da frequência enquanto $L_{in}(\omega)$ diminui linearmente e tende a um valor nulo. Já os parâmetros da corrente contínua R_o e L_{in} permanecem constantes para qualquer frequência.

As figuras também mostram que para condutores de raios relativamente pequenos os valores de $R(\omega)$ e $L_{in}(\omega)$ não sofrem grandes alterações em frequências relativamente baixas. De acordo com a comparação apresentada na figura 5.2 (capítulo 5) os resultados obtidos na figura 6.1 mostram que $R(\omega)$ apresenta uma excelente concordância com os mesmos resultados obtidos em [8].

6.3 Características da linha de transmissão

As características da linha de transmissão α , β , Z_o e ν_p variam com a frequência e, ao mesmo tempo, variam com os parâmetros da corrente contínua e do efeito skin discutidos na seção anterior. Portanto, essas características devem ser afetadas se

houver qualquer mudança nos respectivos parâmetros. Conseqüentemente, a variação nessas características vai afetar a operação da linha de transmissão.

No caso do modelo sem perdas, o coeficiente de atenuação α é nulo. No entanto, para o modelo com perdas e também para o modelo do efeito skin o valor de α varia em função da frequência. A figura 6.3 mostra o comportamento do coeficiente de atenuação de linha de transmissão com perdas, sem influência do efeito skin (linhas contínuas) e com influência do efeito skin (linhas tracejadas), considerando um condutor de cobre com diversos valores de raio.

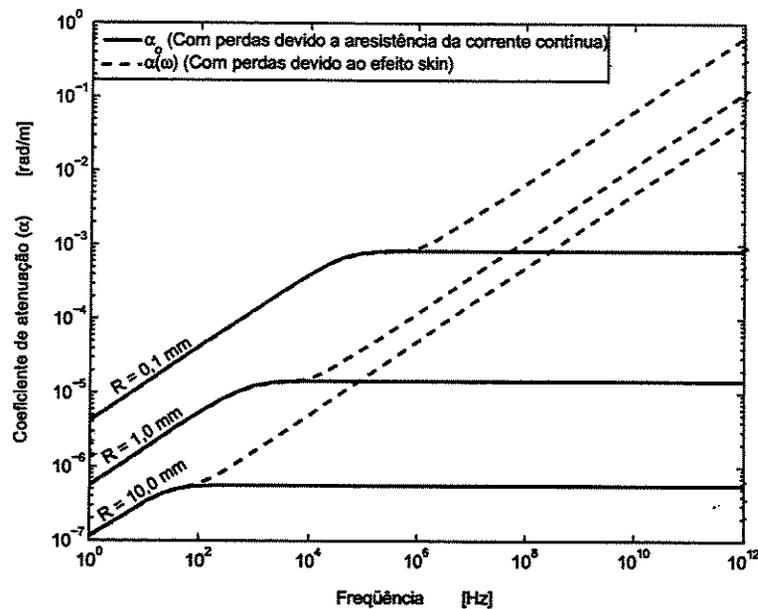


Figura 6.3: Comparação de coeficiente de atenuação de condutores de cobre de diferentes raios.

A figura 6.3 mostra que nas faixas de baixa frequência os dois coeficientes apresentam o mesmo comportamento pois nessas faixas as resistências R_0 e $R(\omega)$ são praticamente iguais. Entretanto, a medida que a frequência aumenta, α_0 permanece constante e $\alpha(\omega)$ aumenta linearmente e proporcionalmente com a raiz quadrada da frequência devido ao aumento linear em $R(\omega)$. A figura também mostra que os condutores de raios menores são menos afetados nas faixas de frequências relativamente baixas.

A figura 6.4 mostra uma análise comparativa gráfica do coeficiente de fase β em função da frequência para um condutor de cobre de diferentes raios.

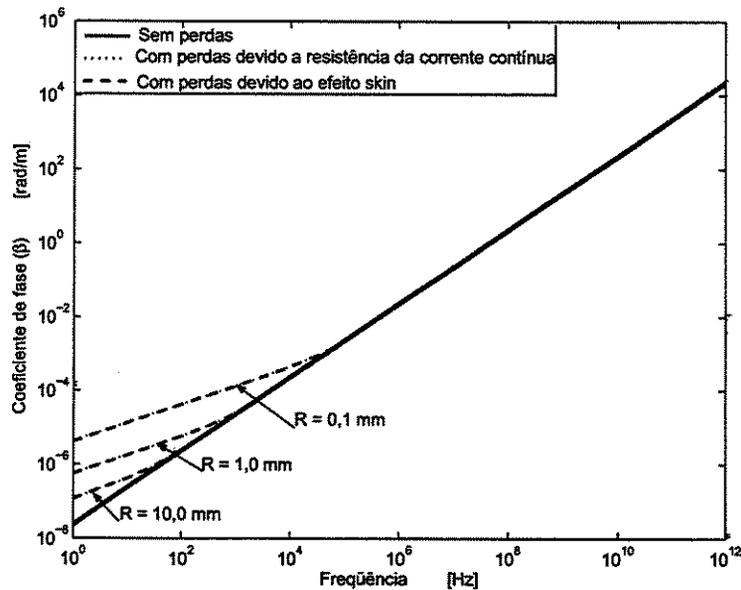


Figura 6.4: Comparação de coeficiente de fase de condutores de cobre de diferentes raios.

Na figura 6.4, β do modelo sem perdas, representada pelas linhas contínuas, apresenta um valor muito pequeno em baixas frequências que aumenta linearmente com aumento da frequência. Já β do modelo com perdas sem o efeito skin, representada pelas linhas pontilhadas, e β do modelo com perdas considerando o efeito skin, representada pelas linhas tracejadas, apresentam um perfil semelhante (para cada raio) nas faixas de frequências baixas onde a influência do efeito skin é desprezível. A medida que a frequência aumenta, β do modelo com perdas sem o efeito skin aumenta e tende a apresentar um valor igual ao valor do β do modelo sem perdas. Por outro lado, β do modelo com perdas considerando o efeito skin aumenta e tende a apresentar um valor menor.

Em altas frequências a parte real de β do modelo com perdas, considerando ou não a influência do efeito skin, são desprezadas. Assim, as equações (3.73) e (4.149) vão ser reduzidas para as expressões $\omega\sqrt{(L_{in} + L_{ex})C_o}$ e $\omega\sqrt{L_{ex}C_o}$, respectivamente. Nota-se que a diferença entre as duas expressões é devida ao comportamento do parâmetro da indutância interna $L_{in}(\omega)$ na alta frequência discutido na seção anterior.

A figura 6.5 mostra uma análise comparativa entre a impedância característica Z_o do modelo sem perdas, o módulo $|Z_o|$ da impedância característica Z_o do modelo

com perdas, e do modelo considerando o efeito skin em função da frequência. A análise foi feita para condutores de cobre de raios diferentes.

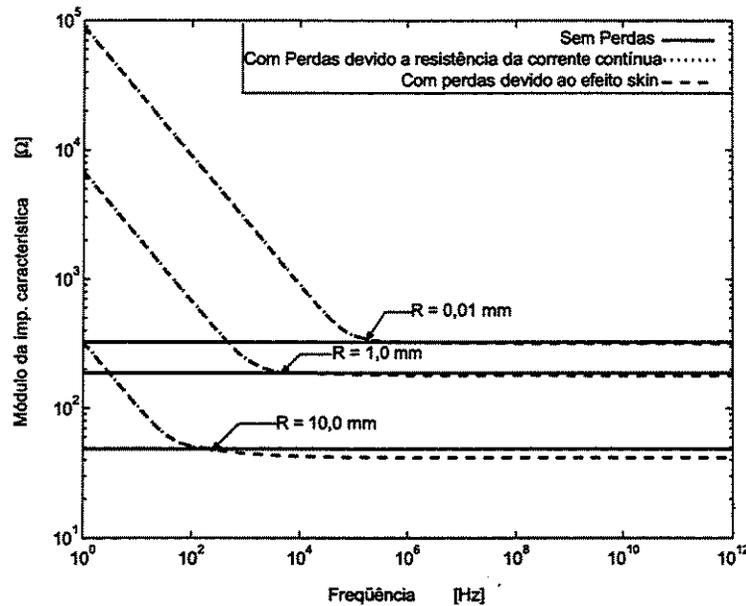


Figura 6.5: Comparação do módulo da impedância característica de condutores de cobre de diferentes raios.

Na figura 6.5, Z_0 é representado pelas linhas contínuas, não varia com a frequência apresentando um perfil constante que depende do raio do condutor. Observe-se que $|Z_0|$ do modelo com perdas sem a presença do efeito skin (linhas pontilhadas) e com a presença do efeito skin (linhas tracejadas) são semelhantes em baixas frequências. Com o aumento da frequência, $|Z_0|$ do modelo com perdas tende a um valor igual ao valor do Z_0 do modelo sem perdas e $|Z_0|$ do modelo do efeito skin tende a um valor menor.

Matematicamente, na alta frequência, $|Z_0|$ do modelo com perdas e do modelo do efeito skin tornam-se puramente resistivos e as suas respectivas equações (3.70) (capítulo 3) e (4.146) (capítulo 4) vão ser reduzidas para as expressões $\sqrt{\frac{L_{in} + L_{ex}}{C_0}}$ e $\sqrt{\frac{L_{ex}}{C_0}}$, respectivamente. Nota-se também que a diferença aqui mostrada entre as duas expressões é devido ao comportamento do parâmetro da indutância interna $L_{in}(\omega)$ na alta frequência discutido na seção anterior.

A figura 6.6 mostra uma análise gráfica do ângulo ϕ em função da frequência para o modelo com perdas e o modelo do efeito skin. Esta análise foi obtida para o condutor de cobre de diferentes raios. Nessa figura, o ângulo ϕ , para os dois modelos, apresenta um perfil praticamente igual em que o mesmo aumenta de $-\frac{\pi}{4}$ para 0 radianos. Isto significa que a corrente nos dois modelos tende a ficar em fase com a tensão a medida que a frequência aumenta.

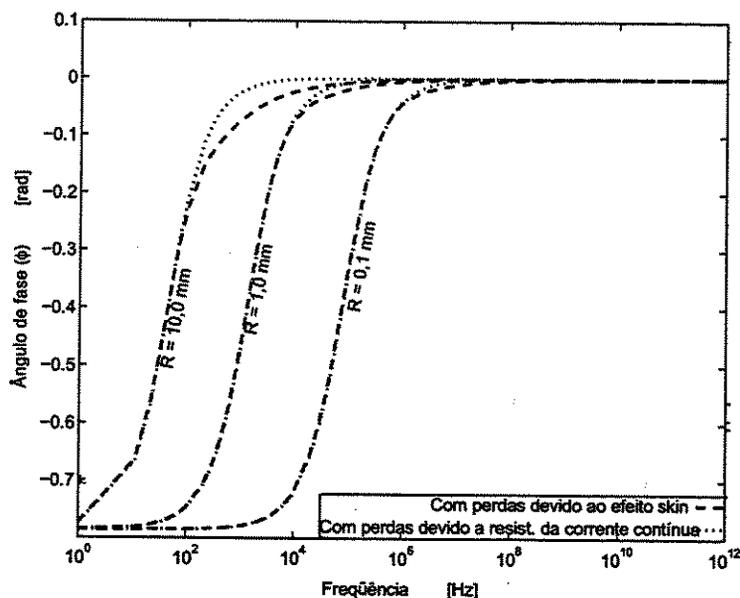


Figura 6.6: Comparação do ângulo de fase de condutores de cobre de diferentes raios.

A análise gráfica comparativa da velocidade de fase (ν_p) em função da frequência para um condutor de cobre e de raios diferentes está mostrada na figura 6.7. A figura mostra que ν_p do modelo sem perdas não varia com a frequência e apresenta um perfil de um valor constante dependendo do raio do condutor. Para o modelo com perdas e o modelo do efeito skin, a velocidade ν_p aumenta mas é praticamente igual nas faixas de frequências baixas. A medida que aumenta a frequência ν_p do modelo com perdas, também aumenta e tende a um valor igual ao valor de ν_p do modelo sem perdas (dependendo do raio do condutor). No entanto ν_p do modelo do efeito skin aumenta e tende a um valor bem próximo a velocidade da luz que é 3×10^8 m/s e sem depender do raio do condutor.

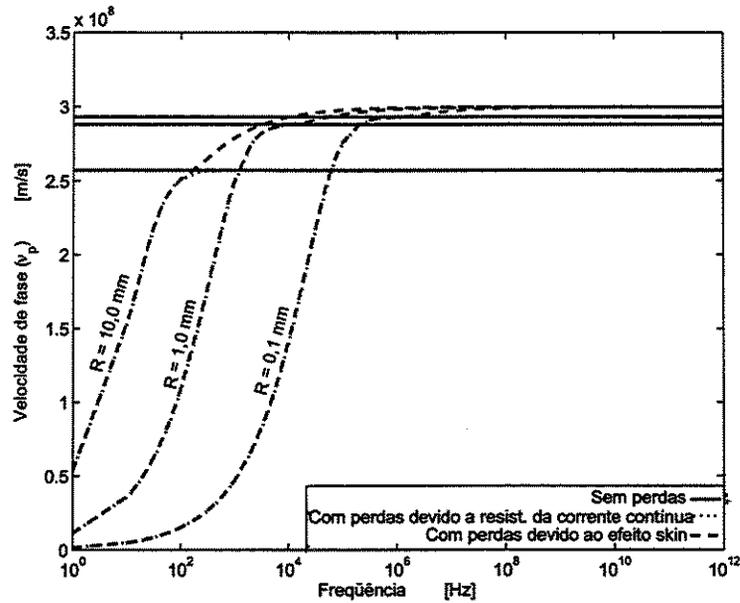


Figura 6.7: Comparação da velocidade de fase de condutores de cobre de diferentes raios.

Matematicamente, as duas equações (3.79) (capítulo 3) e (4.155) (capítulo 4) dependem do comportamento do β característico como já foi discutido anteriormente. Portanto, nas faixas de frequência alta e muito alta, as respectivas equações vão ser reduzidas as expressões $\frac{1}{\sqrt{(L_{in} + L_{ex})C_o}}$ e $\frac{1}{\sqrt{L_{ex}C_o}}$, respectivamente. Esta diferença se deve ao comportamento do parâmetro $L_{in}(\omega)$ já discutido na seção anterior.

6.4 As aplicações

A seguir, são apresentados dois exemplos para análise gráfica das amplitudes previstas de tensões e correntes no final de uma linha de transmissão para efeito de comparação usando os três modelos.

A figura 6.8 mostra uma linha de transmissão monofásica, que é constituída de um único condutor de comprimento l e raio R , que está a uma altura h acima do solo (que é considerado ideal). Assume-se que esta linha está ligada a uma fonte que representa a fonte harmônica caracterizada por $v_s(\omega t)$ e conectada a uma carga caracterizada pela impedância característica Z_o na outra extremidade para evitar

as reflexões (linha casada).

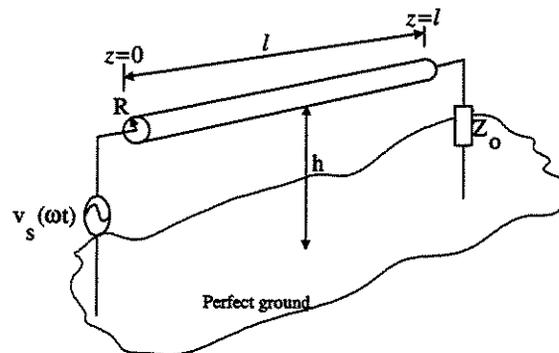


Figura 6.8: Uma linha de transmissão acima de um plano de terra considerado ideal.

6.4.1 Exemplo 1

O termo $e^{-\alpha l}$ que aparece nas equações (3.82) e (3.83) do modelo de linha com perdas e nas equações (4.158) e (4.159) do modelo de linha do efeito skin é um termo de medição da atenuação produzido por α e l . O termo βl que aparece nas mesmas equações e também nas equações, (2.71) e (2.72) do modelo de linha sem perdas não pode afetar as amplitudes da tensão e corrente como função de l , mas pode afetar o ângulo de fase. A função Z_o que aparece na equação (2.29) do modelo de linha sem perdas e a função $|Z_o|$ que aparece na equação (3.70) do modelo de linha com perdas e ainda na equação (4.146) do modelo de linha do efeito skin pode afetar o amplitude de corrente. O ângulo ϕ que aparece na equação (3.71) do modelo com perdas e na equação (4.147) do modelo do efeito skin afeta o ângulo de deslocamento entre a tensão e a corrente.

Assim, no exemplo, as análises são feitas com intuito de mostrar os efeitos das características de linha de transmissão α , β , Z_o e $|Z_o|$ sem variação do l (comprimento da linha). Para as análises, é apresentado a seguir os seguintes dados:

Dados do exemplo 1:

- $l = 1,0$ m;
- $R = 1,0$ mm;
- $h = 1,0$ cm.

onde esses dados foram tomados da referência [6].

No exemplo a fonte de tensão está definida por:

$$V_s(t) = V_m \cos(2\pi ft) \quad (6.1)$$

onde $V_m = 1,0$ V e f variando de zero a 10^{12} Hz.

Usando os três modelos para efeito de simulação e comparação, as ondas estacionárias das tensões aplicadas no início da linha para algumas frequências selecionadas estão plotadas e ilustradas na figura 6.9.

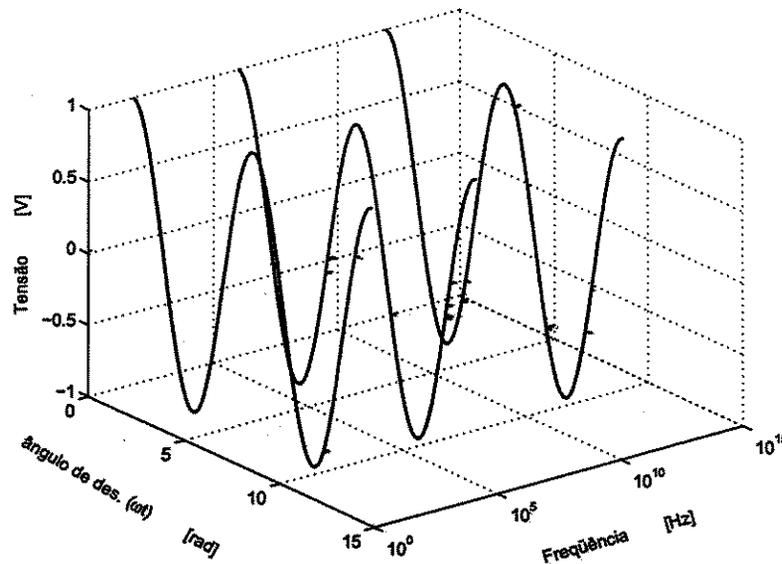


Figura 6.9: Ondas estacionárias de tensões no início da linha para algumas frequências selecionadas.

Para as mesmas frequências selecionadas, as ondas de tensões estacionárias previstas no final da mesma linha estão sendo plotadas e ilustradas na figura 6.10.

A figura 6.10 mostra que nas faixas de frequência baixa, média e alta, os resultados obtidos pelos três modelos não apresentam nenhuma atenuação. Nas faixas de frequências muito altas (10^{12} Hz), os resultados obtidos pelo modelo do efeito skin apresentam um grau considerável de atenuação na comparação com os resultados obtidos pelo modelo sem perdas (Modelo considerado como referência) que não apresentam nenhuma atenuação. Já para os resultados obtidos pelo modelo com

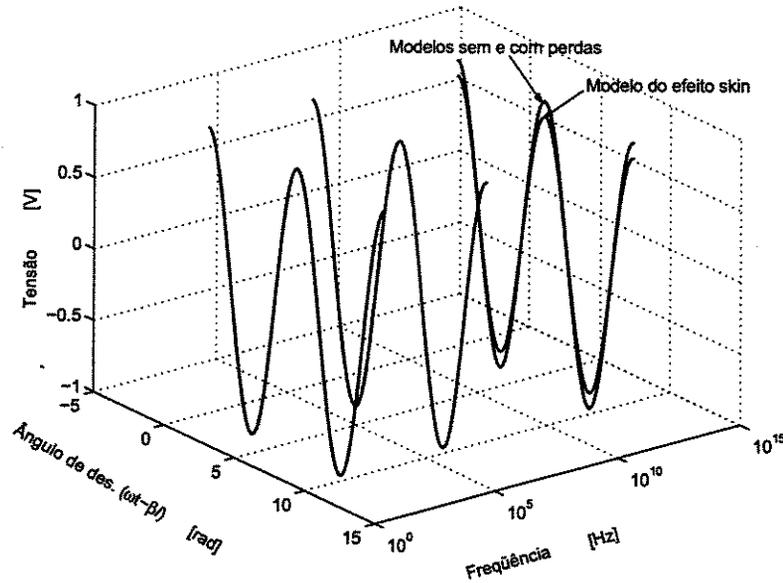


Figura 6.10: Ondas estacionárias de tensões no final da linha para algumas frequências selecionadas.

perdas, apresentam um grau de atenuação muito pequeno e constante.

O interesse nas simulações apresentadas acima são as relações entre o pico máximo positivo ou negativo de amplitudes de tensões e correntes previstas por frequência. Este pico máximo positivo ou negativo de amplitudes de tensões e correntes previstas representam os envelopes das ondas estacionárias de tensões ou de correntes por frequência. Esses envelopes fornecem a relação entre o grau de atenuação e a frequência para as simulações usando qualquer modelo. Portanto, uma análise comparativa gráfica que representa a relação entre o pico máximo positivo de amplitudes de tensões e correntes previstas por a frequência no final da linha está plotada e ilustrada nas figuras 6.11 e 6.12, respectivamente. Essa relação foi simulada pelos três modelos usando condutores de dois diferentes raios.

No caso de amplitudes previstas de tensões, a figura 6.11 mostra que com aumento da frequência os resultados obtidos pelo modelo sem perdas, representados pelas linhas contínuas, não apresentam nenhuma atenuação e os resultados obtidos pelo modelo com perdas, representados pelas linhas pontilhadas, apresentam um grau de atenuação muito pequeno e constante. Por último, os resultados obtidos pelo modelo do efeito skin, representados pelas linhas tracejadas, apresentam aumento com grau diferenciado de atenuação dependendo do raio do condutor.

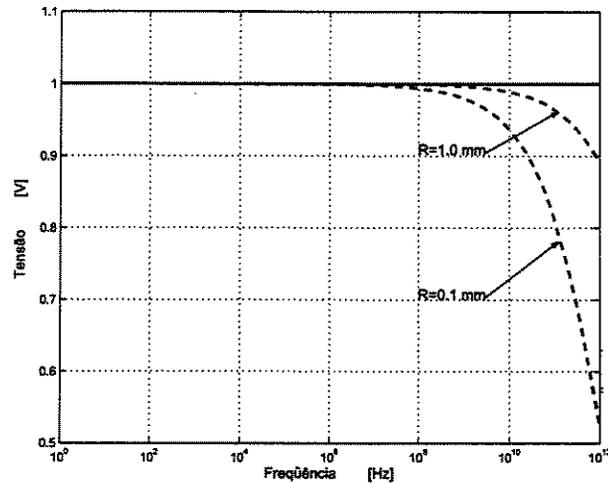


Figura 6.11: Ilustração do pico máximo positivo de amplitudes de tensões previstas no final da linha pela frequência usando condutores de dois diferentes raios.

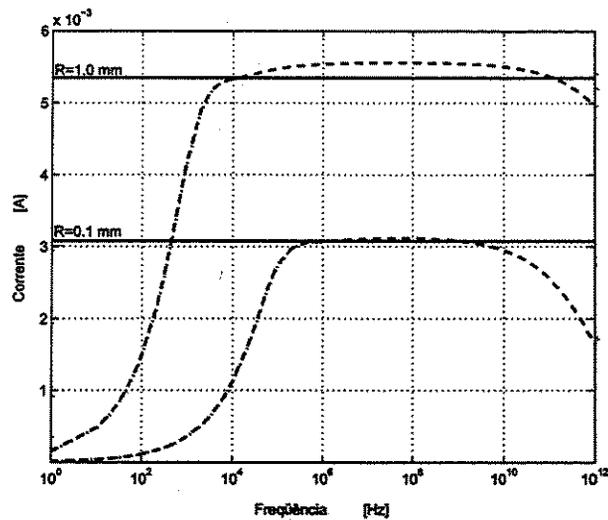


Figura 6.12: Ilustração do pico máximo positivo de amplitudes de correntes previstas no final da linha pela frequência usando condutores de dois diferentes raios.

Assim, de acordo com os resultados do exemplo e observando a figura 6.11, a tabela 6.1 mostra a relação entre o raio do condutor em milímetro e a tensão em volts no final da linha devido as perdas do efeito skin para frequências de 10^{10} e 10^{12} Hz.

Tabela 6.1: A relação entre o raio do condutor e a tensão no final da linha devido as perdas do efeito skin para frequências de 10^{10} e 10^{12} Hz

Raio do condutor em mm	Tensão para 10^{10} Hz	Tensão para 10^{12} Hz
0,1	0,94	0,53
1,0	0,98	0,89

Já no caso dos amplitudes das correntes, a figura 6.12 mostra que os resultados obtidos pelo modelo sem perdas, representado pelas linhas contínuas, apresentam amplitudes constantes para todas as faixas de frequências. Mas, os resultados obtidos pelo modelo com perdas, representados pelas linhas pontilhadas, e os obtidos pelo modelo do efeito skin, representados pelas linhas tracejadas, apresentam um aumento nas amplitudes nas faixas de frequências baixas devido à diminuição no valor do módulo da impedância característica $|Z_o|$ em função da frequência. Nas faixas de frequências altas e muito altas, os resultados obtidos pelo modelo com perdas apresentam um grau de atenuação muito pequeno e constante. Enquanto os resultados obtidos pelo modelo do efeito skin apresentam aumento com grau de atenuação diferenciado dependendo de raio do condutor.

Assim, de acordo com esses resultados do mesmo exemplo e observando a figura 6.12, a tabela 6.1 mostra a relação entre o raio do condutor em milímetro e a corrente em amperes no final da linha devido as perdas do efeito skin para frequências de 10^{10} e 10^{12} Hz.

Tabela 6.2: A relação entre o raio do condutor e a corrente no final da linha devido as perdas do efeito skin para frequências de 10^{10} e 10^{12} Hz

Raio do condutor em mm	Corrente para 10^{10} Hz	Corrente para 10^{12} Hz
0,1	$2,9 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^{-3}$
1,0	$5,6 \times 10^{-3}$	$5,0 \times 10^{-3}$

6.4.2 Exemplo 2

Nesse exemplo, as análises são feitas com o intuito de mostrar o efeito do termo $-\alpha l$ nas amplitudes da tensão e da corrente no final da linha no caso da variação de l (comprimento da linha). Portanto, é apresentando a seguir dados de três diferentes linhas de transmissão:

Dados da 1ª linha	Dados da 2ª linha	Dados da 3ª linha
• $l = 30$ km	• $l = 60$ km	• $l = 90$ km
• $R = 15$ mm	• $R = 15$ mm	• $R = 15$ mm
• $h = 18$ m	• $h = 18$ m	• $h = 18$ m

Cada uma de três linhas está excitada por uma fonte de tensão senoidal definida por:

$$V_s = V_m \cos 2\pi ft \quad (6.2)$$

onde $V_m = 66$ kV e f varia de zero a 10^{12} Hz.

As figuras 6.13 e 6.14 mostram os resultados da comparação gráfica para o pico máximo de amplitudes de tensões e correntes positivas previstas em função da frequência no final de cada linha usando os três modelos. Dessas figuras pode-se

observar que, a medida que a frequência aumenta, os resultados obtidos pelo modelo do efeito skin, representados pelas linhas tracejadas, apresentam aumento na atenuação quando comparados com os resultados obtidos pelo modelo sem perdas, representados pelas linhas contínuas, que não apresentam nenhuma atenuação. Enquanto, os resultados obtidos pelo modelo com perdas, representados pelas linhas pontilhadas, apresentam uma atenuação muito pequena e constante para cada comprimento de linha de transmissão.

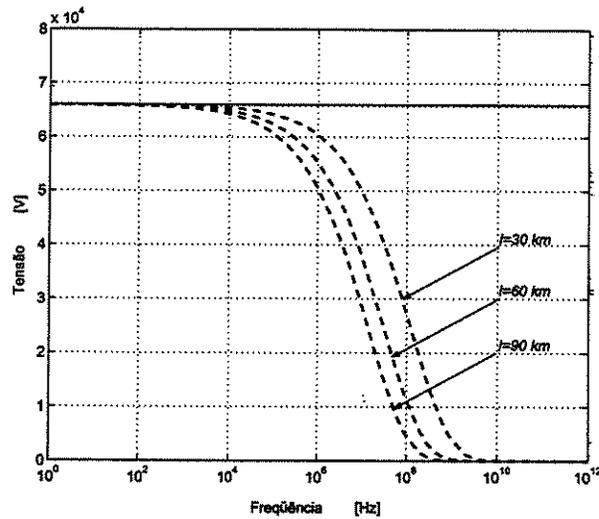


Figura 6.13: Ilustração do pico máximo de amplitudes das tensões positivas previstas em função da frequência no final da linha, usando os três modelos.

Como exemplo, para o pico máximo de amplitudes de tensões positivas previstas devido as perdas do efeito skin, a tabela 6.3 mostra a relação entre o comprimento da linha em quilômetros e a tensão aproximada em volts no final da mesma linha para frequências selecionadas, que são 10^6 e 10^8 Hz.

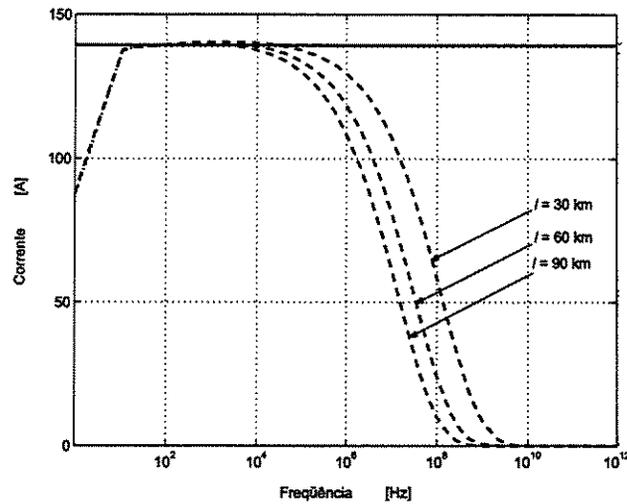


Figura 6.14: Ilustração do pico máximo de amplitudes das correntes positivas previstas em função da frequência no final da linha usando os três modelos.

Tabela 6.3: A relação entre o comprimento da linha e a tensão no final da mesma linha devido as perdas do efeito skin para frequências de 10^6 e 10^8 Hz.

Comprimento da linha em km	Tensão para 10^6 Hz	Tensão para 10^8 Hz
30	$6,0 \times 10^4$	$3,0 \times 10^4$
60	$5,5 \times 10^4$	$1,1 \times 10^4$
90	$5,0 \times 10^4$	$0,5 \times 10^4$

Capítulo 7

Conclusões e sugestões

A seguir são apresentando conclusões e sugestões a respeito do desenvolvimento do novo modelo para o efeito skin e sua comparação com os modelos sem e com perdas. É apresentada também a nova técnica desenvolvida para ser aplicada no cálculo da resistência e da indutância interna do condutor sólido e cilíndrico.

1. Foram desenvolvidas equações alternativas como uma nova implementação para o cálculo do efeito skin em linhas de transmissão.
2. A representação simples e mais precisa das perdas do efeito skin nessa implementação é obtida a partir da solução da equação de onda de Maxwell em função do campo elétrico na direção de propagação.
3. As vantagens da nova implementação são a simplicidade, a rapidez e a precisão no cálculo da resistência $R(\omega)$ e da indutância interna $L_{in}(\omega)$ do efeito skin. As vantagens foram obtidas a partir da utilização de uma expressão simples para o cálculo das raízes da função de Bessel ξ_k desenvolvida no capítulo 4 e dada pela equação (4.74).
4. Uma análise comparativa entre os parâmetros do efeito skin e seus correspondentes de corrente contínua e os efeitos desses parâmetros sobre as características da linha é apresentada. Nas faixas de frequências altas os resultados mostram uma impedância característica baixa e uma velocidade de propagação alta devido às perdas por efeito skin.
5. Os algoritmos apresentados neste trabalho foram aplicados para as linhas de transmissão variando o raio do condutor e o comprimento da linha. Os resultados mostram que as tensões e as correntes previstas no final da linha são subestimadas quando usados os modelos sem perdas (modelo ideal) e com perdas (modelo do conceito de corrente contínua).

6. Como consequência do desenvolvimento de um novo modelo, uma formulação de uma nova técnica exata e simples é apresentada com consequente circuito equivalente. Dessa nova técnica, a impedância complexa interna é obtida e como consequência uma nova formulação para o cálculo da resistência e da indutância interna do efeito skin em qualquer frequência é obtida.
7. Dentre as vantagens da nova técnica quando comparada com a técnica tradicional (Bessel) são simplicidade e a facilidade de implementação das equações. A expressão dada pela equação (4.74) capítulo 4 para o cálculo das raízes da função de Bessel ξ_k preza pela simplicidade e rapidez além do fato de que não existe necessidade de consultar as tabelas das funções de Bessel. Além disso, a nova técnica é adequada para qualquer linguagem de computador.

Sugestões e Trabalhos Futuros

1. Os estudos e análises deste trabalho podem ser estendidos para aperfeiçoar o modelo considerando um plano da terra não ideal e/ou com uma linha de transmissão multicondutora tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo.
2. A formulação da resistência e da indutância interna do efeito skin e o modelo do circuito equivalente podem ser aplicados para estudo e análise do efeito skin em outros sistemas elétricos ou eletrônicos.

Apêndice A

Solução da Equação de Onda

Tendo a seguinte equação:

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right) \quad (\text{A.1})$$

com os seguintes intervalos:

$$r \in (0, R) \quad e \quad t \in (0, \infty). \quad (\text{A.2})$$

Introduzindo as condições iniciais como:

$$u(r, 0) = \phi(r) \quad (\text{A.3})$$

e as condições de contorno como:

$$u(R, t) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Usando o método de separação de variáveis a solução da equação (A.1), para a função $u(r,t)$, é apresentada na seguinte forma:

$$u(r, t) = U(r) \cdot T(t). \quad (\text{A.5})$$

Para obter a solução completa é necessário determinar a solução das funções $U(r)$ e $T(t)$.

Assim, substituindo-se a equação (A.5) na equação (A.1) teremos:

$$U(r) \cdot T'(t) = \gamma^2 T(t) \left(U''(r) + \frac{1}{r} \cdot U'(r) \right). \quad (\text{A.6})$$

Separando as variáveis e igualando-se por uma constante, seja (λ^2) teremos:

$$\frac{T'(t)}{\gamma^2 \cdot T(t)} = \frac{U''(r) + \frac{1}{r} U'(r)}{U(r)} = -\lambda^2 \quad (\text{A.7})$$

onde o sinal negativo de (λ^2) é escolhido para obter a solução periódica no tempo.

Da equação (A.7) pode-se obter as seguintes relações que representam as funções $U(r)$ e $T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{\gamma^2 \cdot T(t)} = -\lambda^2 \quad (\text{A.8})$$

e:

$$\frac{U''(r) + \frac{1}{r} U'(r)}{U(r)} = -\lambda^2. \quad (\text{A.9})$$

Da equação (A.8) pode-se obter a solução para a função $T(t)$. Essa solução é apresentada na seguinte forma:

$$T(t) = C \cdot \exp(-\lambda^2 \gamma^2 t). \quad (\text{A.10})$$

Em seguida a solução para a função $U(r)$ pode ser obtida da equação (??). Essa solução é apresentada na seguinte forma:

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \lambda^2 \cdot U(r) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Essa equação, (A.11), é conhecida como a equação de Bessel. A sua solução é dada na seguinte forma:

$$U(r) = J_0(\lambda \cdot r). \quad (\text{A.12})$$

Lembrando-se que o $J_0(x)$ é a função de Bessel de ordem zero.

Se a equação (A.12) satisfaz as condições de contorno (A.4), então ela, também, deve satisfazer a seguinte expressão:

$$J_0(\lambda \cdot R) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Nessa equação (A.13) λ é definida pela seguinte série:

$$\lambda_k = \frac{\xi_k}{R} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.14})$$

onde (ξ_k) são as raízes da função de Bessel $J_0(x) = 0$.

Assim, a solução para a função $u(r, t)$ consiste de uma série infinita de funções $u_k(r, t)$, onde a cada função corresponde a sua raiz (ξ_k) . Então, substituindo-se as equações (A.10) and (A.12) na equação (A.5) e considerando a equação (A.14) teremos:

$$u_k(r, t) = C_k \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\frac{\xi_k}{R} \cdot r\right). \quad (\text{A.15})$$

A equação (A.15) pode ser escrita como sendo:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \gamma^2 t}{R^2}\right) J_0\left(\xi_k \frac{r}{R}\right). \quad (\text{A.16})$$

Para se determinar a constante C_k é necessário utilizar as condições iniciais. Então, substituindo a equação (A.3) na equação (A.16) tem-se:

$$u(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\xi_k \frac{r}{R}\right) = \phi(r). \quad (\text{A.17})$$

Introduzindo a relação:

$$r = x \cdot R \Rightarrow \frac{r}{R} = x \quad (\text{A.18})$$

a equação (A.17) toma a seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\xi_k \cdot x) = \phi(x \cdot R). \quad (\text{A.19})$$

Da relação dada pela equação (A.18), quando $x = 0 \rightarrow r = 0$, e quando $x = 1 \rightarrow r = R$. Então, os dois lados da equação (A.19) são multiplicados por $x J_0(\xi_n \cdot x)$ e integrados em função de x para o intervalo de 0 a 1 da seguinte maneira:

$$\int_0^1 x J_0(\xi_n \cdot x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\xi_k \cdot x) dx = \int_0^1 x J_0(\xi_n \cdot x) \phi(x \cdot R) dx. \quad (\text{A.20})$$

Das propriedades das funções de Bessel, a integral do lado esquerdo da equação (A.20) pode ser representada por:

$$\int_0^1 x J_o(\xi_k \cdot x) \cdot J_o(\xi_k \cdot x) dx = \begin{cases} 0 & ; \quad k \neq n \\ \frac{1}{2} J_o'^2(\xi_k) & ; \quad k = n \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Com o resultado dessa equação (A.21) para $k = n$, a equação (A.20) pode tomar a seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_n \frac{1}{2} \cdot J_o'^2(\xi_n) = \int_0^1 x J_o(\xi_n \cdot x) \phi(x \cdot R) dx \quad (\text{A.22})$$

Assim, obtém-se C_n parcialmente:

$$C_n = \frac{2}{J_o'^2(\xi_n)} \int_0^1 x J_o(\xi_n \cdot x) \phi(x \cdot R) dx. \quad (\text{A.23})$$

Com a introdução da seguinte propriedade da função de Bessel:

$$J_o'(x) = J_1(x) \quad (\text{A.24})$$

a equação (A.23) pode tomar a seguinte forma:

$$C_n = \frac{2}{J_1^2(\xi_n)} \int_0^1 x J_o(\xi_n \cdot x) \phi(x \cdot R) dx. \quad (\text{A.25})$$

Introduzindo-se a seguinte relação:

$$\phi(r) = \phi(x, R) = -1 \quad (\text{A.26})$$

a equação (A.25) pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_n = -\frac{2}{J_1^2(\xi_n)} \int_0^1 x J_0(\xi_n \cdot x) dx. \quad (\text{A.27})$$

Nessa equação (A.27) a integral do lado direito poderia ser resolvido com ajuda da seguinte propriedade da função de Bessel:

$$\int_0^x x J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x) dx = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha J_m(\beta x) J_{m+1}(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J_{m+1}(\beta x)). \quad (\text{A.28})$$

Assim, para $m = 0$, $\alpha = \xi_n$ e $\beta = 0$ teremos:

$$\int_0^x x J_0(\xi_n x) dx = \frac{x}{\xi_n^2} \cdot \xi_n J_1(\xi_n x). \quad (\text{A.29})$$

Para o intervalo de integração de 0 a 1, tem-se:

$$\int_0^1 J_0(\xi_n x) x dx = \frac{1}{\xi_n^2} \cdot \xi_n J_1(\xi_n) = \frac{J_1(\xi_n)}{\xi_n}. \quad (\text{A.30})$$

Com esse resultado da equação (A.30) e retomando a relação ($k = n$), a equação (A.27) toma a seguinte forma:

$$C_k = -\frac{2}{J_1^2(\xi_k)} \cdot \frac{J_1(\xi_k)}{\xi_k} = -\frac{2}{\xi_k \cdot J_1(\xi_k)}. \quad (\text{A.31})$$

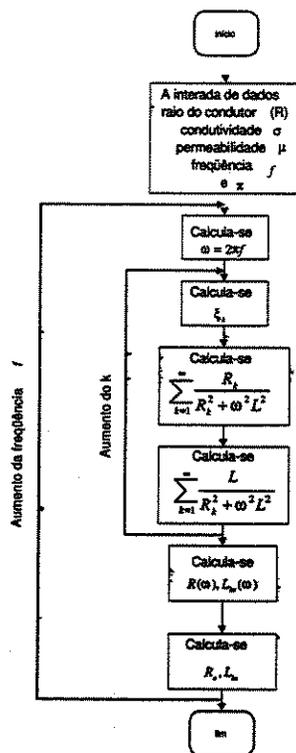
Finalmente, a solução completa da equação de onda (A.1) pode ser obtida substituindo a equação (A.31) na equação (A.16) levando em conta a relação (A.18). Portanto, tem-se:

$$u(x, t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot J_0(\xi_k \cdot x)}{\xi_k \cdot J_1(\xi_k)} \cdot \exp\left(-\frac{\xi_k^2 \cdot \gamma^2 \cdot t}{R^2}\right) \quad (\text{A.32})$$

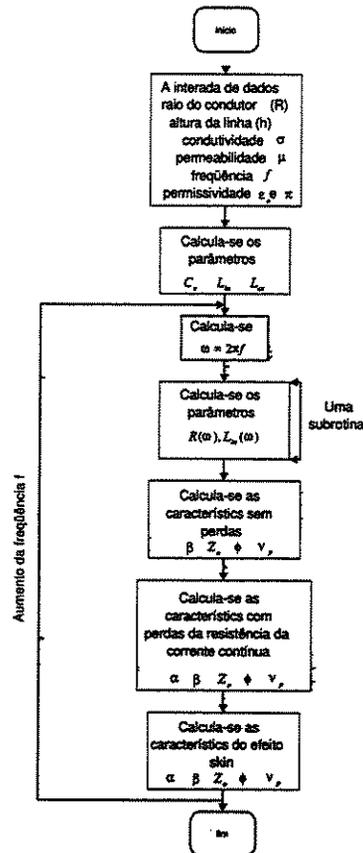
Apêndice B

Fluxograma do algoritmos

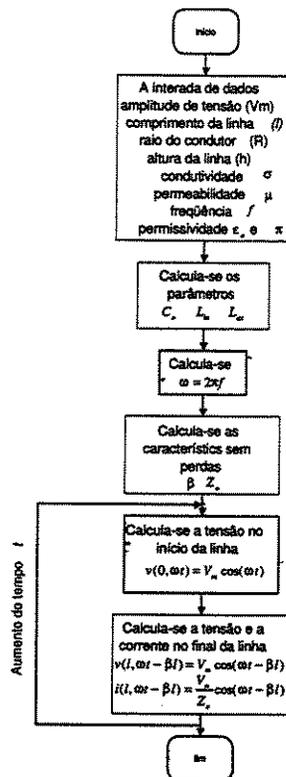
1. Fluxograma para cálculo dos parâmetros da linha de transmissão $R(\omega)$, $L_{in}(\omega)$, R_o e L_{in} em função da frequência.



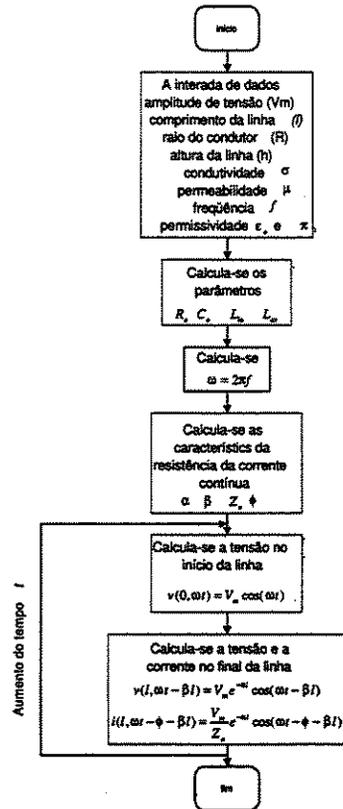
2. fluxograma para o cálculo das características da linha de transmissão α , β , Z_o , ϕ e ν_p em função da frequência para os modelos da linha de transmissão sem perdas, com perdas da resistência da corrente contínua e do efeito skin.



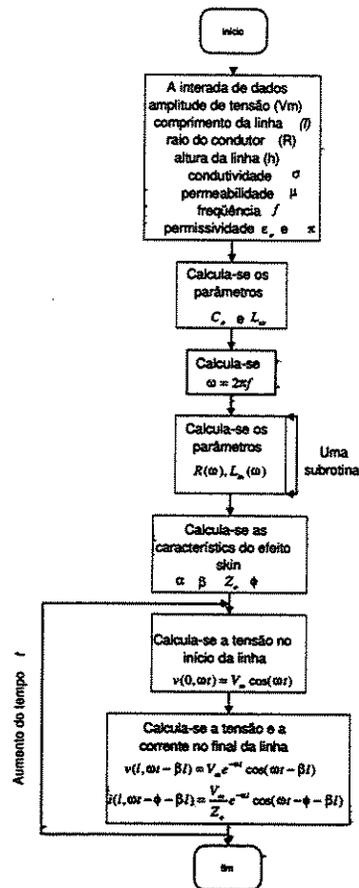
3. fluxograma para o cálculo da tensão no início da linha e da tensão e corrente no final da linha no caso do modelo sem perdas para uma determinada frequência.



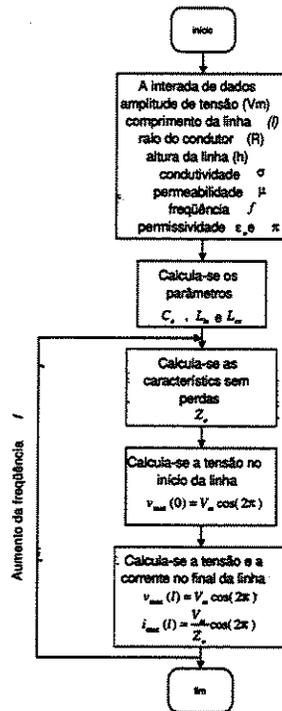
4. fluxograma para o cálculo da tensão no início da linha e da tensão e corrente no final da linha no caso do modelo com perdas da resistência da corrente contínua para uma determinada frequência.



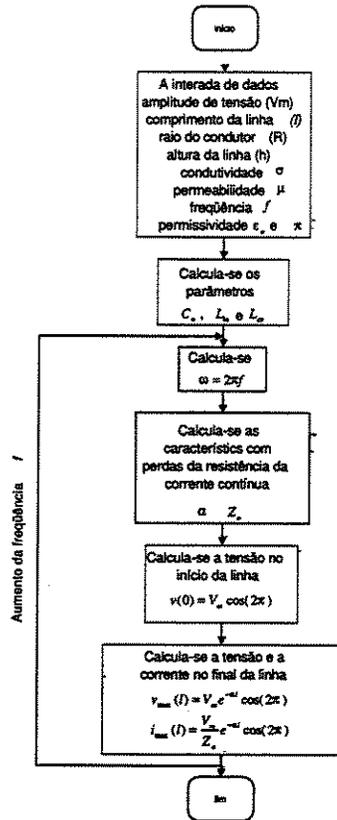
5. fluxograma para o cálculo da tensão no início da linha e da tensão e corrente no final da linha no caso do modelo do efeito skin para uma determinada frequência.



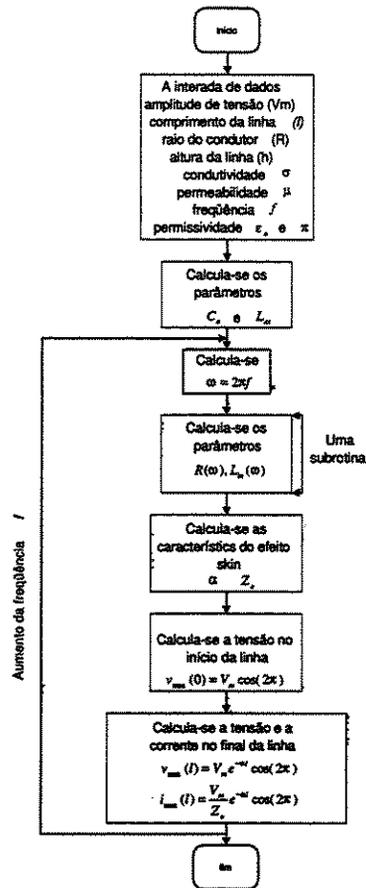
6. fluxograma para o cálculo da amplitude máxima da tensão no início da linha e da amplitude máxima da tensão e corrente no final da linha no caso do modelo sem perdas em função da frequência.



7. fluxograma para o cálculo da amplitude máxima da tensão no início da linha e da amplitude máxima da tensão e corrente no final da linha no caso do modelo com perdas da resistência da corrente contínua em função da frequência.



8. fluxograma para o cálculo da amplitude máxima da tensão no início da linha e da amplitude máxima da tensão e corrente no final da linha no caso do modelo do efeito skin em função da frequência.



Bibliografia

- [1] Heaviside, O., "Electromagnetic Theory", Dover, 1950.
- [2] Simon R., John R. Whinnery and Theodore V. Duzer, "Fields and Waves in Communication Electronics", John Wiley & Sons, Inc. New York, 1965.
- [3] Clayton R. Paul and Syed A. Nasar, "Introduction to Electromagnetic Fields", McGraw Hill, Inc. New York, 1982.
- [4] Chu-sun Yen, Zvonko Fazaring and Richard L. Wheeler, "Time-Domain Skin-Effect Model for Transient Analysis of Lossy Transmission Lines", IEEE Proceedings, vol. 70, n^o. 7, July 1982.
- [5] S. Kim and D. P. Neikirk, "Compact Equivalent Circuit Model for the Skin-Effect", IEEE 1996 IEEE-MTT-S International Microwave Symposium, editor: R. G. Ranson, vol. 3, San Francisco, California, June 17 – 21, 1996, pp. 1815 – 1818.
- [6] Edward S. M. Mok, & Goerge I. Costache, "Skin-Effectt Consideration on Transient Responce of a Transmission Line Excited by an Electrical Pulse", IEEE, Trans. on Elect. Comp. vol. 34, n^o. 3, August 1992.
- [7] I. Osmanis & L. P. Peterson, "Time-Domain Skin-Effect Model for Electromag-netical Radiating, Scattering and Transmission Problems", (USSR), Riga: Riga Polytechnical Institute, 8p2–E5, pp. 292 – 294, 1990.
- [8] Richard E. Matick, "Transmisstion Lines for Digital and Communication Network", McGraw Hill Inc. New York, 1969.
- [9] Robert A. Chipman, "Theory and Problems of Transmition Lines", McGraw Hill Inc. New York, 1968.
- [10] Harold A. Wheeler, "Formulas for the Skin-Effect", I.R.E. Proceeding, vol. 30, pp. 412 – 424, 1942.

- [11] O. M. O. Gatous and J. Pissolato, "Frequency-Dependent Skin-Effect Formulation for Resistance and Internal Inductance of a Solid Cylindrical Conductor", IEE Proc. Microwaves, Antennas and Propagation, vol. 151, pp. 112 – 216, 03 June 2004.
- [12] Coleção Schaum, "Manual de Formulas e Tabelas Matemáticas" Trad. de Roberto Chioccarello, McGraw-Hill do Brasil, Ltda. 1973.
- [13] William H. Hayt Jr., "Eletromagnetismo" Terceira Edição, Livros Tecnicos Cientificos Editora SA, 1983.
- [14] P. Silvester, "Model Network Theory of Skin-effect in Flat Conductors", Proc. IEEE, vol. 54, n.º. 9, pp. 1147 – 1151, Sept. 1966.
- [15] John D. Krauss & Keith R. Caver, "Electromagnetics", Second Edition McGraw-Hill Inc., 1973.
- [16] L. V. Bewley, "Traveling Waves on Transmission Systems", Second Edition, Dover Publications Inc. 180 Varick Street New York N. Y. 10014, 1951.
- [17] Gatous O. M. O. and Pissolato F.º J., "A New Formulation for Skin-Effect Resistance and Internal Inductance Frequency-Dependent of a Solid Cylindrical Conductor", 8 – 11 November 2004, IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition Latin America, São Paulo, Brazil.
- [18] R. Plonsey & R. E. Collin, "Principles and Applications of Electromagnetic Fields", McGraw-Hill Publishing Company Inc. Ltd, 1976.
- [19] D. W. Dearholt & W. R. McSpadden, "Electromagnetic Wave Propagation", McGraw-Hill Inc., 1973.
- [20] TynMyint-U, "Partial Differential Equations of Mathematical Physics", American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1973.
- [21] Leonard M. Magid, "Electromagnetic Fields Energy and Waves", John Wiley & Sons Inc., New York, 1972.
- [22] Constantine A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics", John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.
- [23] Edwin M. Anderson, "Electric Transmission Line Fundamentals", Reston Publishing Company, Inc. A Prentice-Hall Company Reston, Virginia 22090, 1985.
- [24] Walter C. Johanson, "Transmission Lines and Networks", McGraw-Hill Company, Inc., New York, 1950.

- [25] P. A. Mariotto, "Ondas e Linhas", Editora Guanabara Dois S.A, Rio de Janeiro, 1981.
- [26] Plonsey R. and Collin R. E., "Principales and Applications of Electromagnetic Fields", McGraw-Hill, New York, 1961.
- [27] L. Miguel Silveira, et al., "Efficient Frequency-Domain Modeling and Circuit Simulation of Transmission Lines", IEEE, Trans. on Components, Packaging and Manufacturing Technology, part B, vol. 17, n^o. 4, P. 505 – 513, November, 1994.
- [28] A. E. Kennelly and H. A. Affel, "Skin-Effect Resistance Measurement of Conductors", Proc. IRE, vol. 4, P. 523 – 580, 1916.
- [29] A. E. Kennelly, F. A. Laws and P. H. Dierce, "Experimental Resistance on Skin-Effect in Conductors", Proc. A. I. E. E., p. 1749, August, 1915.
- [30] Alexandru Timotin, "Iteration Method for the Study of the Skin-Effect in Straight Conductors", Rev. roum. sci. techn. - electrotech énerg., vol. 10, n^o. 1, p. 19 – 45, 1965.
- [31] Al. Timotin and Al. Nicolae, "Skin-Effect in Shielded Straight Flat Conductors", Rev. roum. sci. techn. - electrotech énerg., vol. 17, n^o. 1, p. 1 – 22, 1972.
- [32] T. V. Dinh, B. Cabon and J. Chilo, "New Skin-Effect Equivalent Circuit", Electronic Letters, vol. 26, pp. 1582 – 1584, 1990.
- [33] C. L. Bertin, "Transmission Line Response Using Frequency Technique", IBM J. Res. Devel., vol. 8, pp. 52 – 63, January 1964.
- [34] E. F. Miersch & A. E. Ruehli, "Time-Domain Skin-Effect Model Using Resistors and Lossless Transmission Lines", IBM Tech. Disol. Bull., vol. 21, n^o. 5, pp. 2162 – 2163, October 1968.
- [35] Mok Edward S. M. and Costache G. I., "Skin-Effect Consideration on Transmission Lines Subjected to External Time-Domain EM Fields", IEEE International Symposium on Electrical Compatibility, Aug., p. 80 – 84, 1990.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SECÃO CIRCULANTE