

**Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Telemática**

**Geração de Programa Horário e
Regulação do Tráfego de Trens em um
Sistema de Transporte Metroviário**

Wânderson de Oliveira Assis

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Basílio Ernesto de Almeida Milani - Orientador

Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral - FEEC / UNICAMP

Prof. Dr. Paulo Morelato França - FEEC / UNICAMP

Prof. Dr. Rafael Santos Mendes - FEEC / UNICAMP

Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro Cury - DAS / CTC / UFSC

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto - DAS / CTC / UFSC

Tese apresentada à comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, como requisito para a obtenção do título de DOUTOR em Engenharia Elétrica.

Campinas, 23 de agosto de 2002
SP - Brasil

Resumo

Esta tese é dedicada à análise do sistema de transporte metroviário envolvendo os problemas de programação e regulação do tráfego de trens. O problema de programação consiste na geração do Programa Horário Nominal dos trens. São propostas novas metodologias para a geração do Programa Horário utilizando programação linear. Na primeira formulação, o modelo considera a operação com intervalos variáveis entre os trens ao longo do percurso que permite carregar os trens de maneira mais uniforme. Na segunda, o modelo considera a operação com intervalos constantes obtendo uma formulação mais simplificada e computacionalmente eficiente. Na terceira, a trajetória de cada trem é otimizada considerando uma formulação de controle preditivo com horizonte móvel. Nestas abordagens são consideradas todas as restrições operacionais do sistema e propõe-se a introdução de uma margem de controle para a regulação do tráfego de trens durante a operação comercial. A solução apresenta um compromisso entre os custos operacionais e a qualidade do serviço oferecido aos usuários além de permitir a continuidade do tráfego ao longo do período considerado. O problema de regulação robusta do tráfego de trens durante a operação comercial é também tratado utilizando programação linear, considerando de forma explícita as incertezas do modelo de tráfego, as perturbações aleatórias, as limitações sobre as variáveis de estado e controle, a lotação dos passageiros nos trens e a margem de controle do Programa Horário. Para a solução do problema de regulação, são propostas duas formulações: controle linear invariante no tempo e controle linear variante no tempo calculado em tempo real. Em ambos os casos, a formulação apresenta uma lei de controle por realimentação de estados, descentralizada, apresentando um desempenho de regulação melhor que os obtidos em abordagens anteriores.

Abstract

This thesis is dedicated to analysis of scheduling and traffic regulation in metro lines. The scheduling corresponds to generation of Train Time-tables. Three new methodologies are proposed for generation of Train Time-Tables using linear programming. In the first formulation, the model considers variable headways that permits a more homogeneous passengers load of trains. In the second one, the model considers constant headways obtaining a simple and computationally efficient formulation. In the third one, train trajectories are optimized using a predictive control formulation according to a moving horizon scheme. All the operational constraints are treated in these formulations and include a control margin for traffic regulation. The solution represents a trade-off between operational costs and service quality for passengers and permits the traffic continuity. The robust traffic regulation during the comercial operation is also treated using linear programming, considering explicitly the traffic model uncertainties, limits on its variables, random operational disturbances, passengers load of trains and the control margin from scheduling. Two approaches are proposed for solution of the regulation problem: linear time-invariant control and linear time-variant control computed in real-time. In both cases, the formulation presents a decentralized state feedback control law with better regulation performance than the obtained in previous approaches.

À minha esposa Alessandra.

A meus irmãos Wagner, Simone, William e Júnior.

Agradecimentos

A Deus que deu-me força e coragem para enfrentar mais esta batalha.

À minha esposa Alessandra pelo apoio e compreensão.

Ao professor Basílio pelo companheirismo, pela amizade, pela paciência, pelo profissionalismo e acima de tudo pelo exemplo de dedicação.

A todos os funcionários e amigos da FEEC que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

À CNPq, pelo suporte financeiro fornecido durante parte do período de estudo para a conclusão do doutorado.

Sumário

1	Introdução	1
2	Geração de Programa Horário Utilizando Formulação de Programação Matemática	5
2.1	Introdução	5
2.2	Descrição do Tráfego de Trens	6
2.3	Modelamento do Sistema	8
2.3.1	Equação do <i>headway</i>	9
2.3.2	Equação dos passageiros	10
2.3.3	Restrições	12
2.4	Determinação do Programa-Horário Otimizado	12
2.5	Nova Metodologia para Determinação do Programa Horário Otimizado	14
2.5.1	Margem de Controle para a Regulação	15
2.5.2	Critério de Otimização Linear por Partes	18
2.6	Operação em <i>Headway</i> Constante	24
2.7	Exemplo Numérico	29
2.8	Conclusão	44
3	Geração de Programa Horário Utilizando Formulação de Controle Preditivo	47
3.1	Introdução	47
3.2	Formulação de Controle Preditivo	48
3.2.1	Obtenção de um Programa Horário Completo	51
3.2.2	Transição entre períodos a <i>headway</i> constante	52

3.3	Exemplo Numérico	54
3.4	Conclusão	64
4	Regulação Robusta do Tráfego de Trens em Linhas Metroviárias	67
4.1	Introdução	67
4.2	Modelamento do Problema de Regulação	69
4.3	Regulação Robusta com Restrições (RRR)	75
4.3.1	Formulação do Problema RRR	76
4.3.2	Solução do Problema RRR	79
4.4	Uma Nova Formulação para a Regulação Ótima Robusta com Restrições (RORR)	86
4.4.1	Modelo do Tráfego e Lotação de Trens	86
4.5	Exemplo Numérico	103
4.5.1	Dados Utilizados	104
4.5.2	Regulação Robusta com Restrições (RRR)	107
4.5.3	Regulação Ótima Robusta com Restrições (RORR)	113
4.6	Conclusão	123
5	Regulação em Tempo Real do Tráfego de Trens em Linhas Metroviárias	125
5.1	Introdução	125
5.2	Análise de Estabilidade	126
5.3	Formulação do Problema de Regulação Robusta em Tempo Real	136
5.4	Exemplo Numérico	139
5.5	Conclusão	151
6	Conclusão Geral	153

Capítulo 1

Introdução

A grande concentração populacional nos centros urbanos pode ser facilmente justificada pelas inúmeras oportunidades econômicas, profissionais e sócio-culturais que estes oferecem. Contudo, como consequência direta, se desencadeia uma série de fatores que de um modo generalizado provocam o descontentamento da população. Dentre estes fatores destaca-se o caos do trânsito.

O transporte nas cidades é um assunto socialmente tão relevante quanto a educação e a saúde e torna-se um grande problema nas metrópoles devido aos congestionamentos.

Dentro deste contexto, os metrô representam um grande avanço tecnológico em transporte de massa reunindo muitas vantagens: é seguro, rápido e permite a retirada de automóveis das ruas diminuindo os congestionamentos. Além disso, os grandes avanços nas áreas da eletrônica de potência e da automação têm permitido efetuar com qualidade o transporte de milhares de passageiros diariamente, com os trens atingindo velocidades acima de 100 Km/h e com sensível redução do intervalo entre os trens nas estações.

A experiência mostra que, por mais caro e demorado que seja ampliar a rede de metrô, é certamente um investimento de retorno econômico e social garantido.

A necessidade de manter a segurança e a qualidade de serviço para os usuários tem impulsionado vários trabalhos que apresentam técnicas modernas de controle e otimização que possam ser utilizadas pelas empresas concessionárias para obter maior capacidade de transporte e melhorar o serviço prestado para a população.

A operação do transporte metroviário envolve duas etapas: programação e controle de tráfego.

A programação ou *scheduling* constitui-se na geração de um Programa Horário de despacho de trens, o qual consiste na obtenção dos tempos de parada nas estações, tempo de percurso entre elas, bem como dos tempos de despacho dos trens considerando a variação da demanda de passageiros ao longo do trajeto. A solução deve apresentar um compromisso entre os custos operacionais, tais como, número de trens, energia, tripulação, etc., e a qualidade do serviço oferecido aos usuários, além de satisfazer a todas as restrições operacionais do sistema. O problema foi tratado em trabalhos anteriores tais como (Cury et alli, 1980) e (Bergamashi et alli, 1982), porém em ambos, os aspectos operacionais não foram considerados no todo, além de exigir esforço computacional considerável. Neste trabalho são propostas novas formulações para a geração de Programa Horário utilizando programação linear.

O controle é feito durante a operação comercial da linha e constitui-se na regulação do tráfego de trens para manter os trens operando de acordo com o Programa Horário previsto e conduzir condições de tráfego perturbado a uma situação operacional aceitável. O problema foi tratado em literatura em vários trabalhos tais como (Sasama et alli, 1983), (Araya et alli, 1984), (Campion et alli, 1985), (Van Breusegem et alli, 1991), (Carvalho et alli, 1993), (Carvalho et alli, 1994), (Milani et alli, 1994), (Corrêa et alli, 1996), (Milani et alli, 1997), (Milani et alli, 1997), (Milani et alli, 1998), (Corrêa, 1999), (Faria, 2000) e (Corrêa et alli, 2001). Neste trabalho serão propostas novas formulações para a solução do problema de regulação de tráfego que considera a inclusão de restrições sobre a lotação dos passageiros nos trens e a margem de controle prevista no Programa Horário.

A matéria se distribui ao longo dos capítulos da seguinte forma:

Capítulo 2: Apresenta inicialmente uma introdução ao problema de geração de programa horário demonstrando como o problema foi tratado em (Cury et alli., 1980). Em seguida serão apresentadas novas metodologias para geração do Programa Horário de linhas metroviárias baseadas em programação linear. Na primeira formulação, o modelo considera a operação com intervalos variáveis entre os trens ao longo do percurso que permite carregar os trens de maneira mais uniforme. A formulação considera as restrições operacionais sobre o intervalo entre trens, tempo de parada nas estações,

tempo de percurso entre estações, carga máxima de passageiros, continuidade de tráfego e margem de controle para regulação do tráfego de trens durante a operação comercial. O índice de desempenho deve representar um compromisso entre o custo operacional da linha e a qualidade do serviço para os usuários, sendo modelada utilizando funções lineares por partes para obter direta ou indiretamente o tempo de espera dos passageiros nas estações, o conforto dos passageiros embarcados, o tempo de viagem dos trens e o número de trens em operação. A segunda formulação é uma extensão da formulação citada anteriormente mas considera a operação com intervalos constantes obtendo uma abordagem muito mais simplificada e computacionalmente eficiente. O desempenho destas novas metodologias serão ilustrados utilizando uma linha metroviária com estrutura e dados similares aos da linha Norte/Sul do metrô de São Paulo.

Capítulo 3: É apresentada uma nova metodologia para determinação do Programa Horário que utiliza uma formulação de controle preditivo (MPC) com horizonte móvel. No modelo a trajetória de cada trem é otimizada considerando um horizonte finito móvel a cada passo permitindo efetuar a transição entre períodos onde a demanda de passageiros varia consideravelmente ou mesmo obter o Programa Horário completo sendo conhecido apenas o comportamento do primeiro trem. A eficiência computacional e aplicabilidade prática são verificados utilizando uma linha metroviária com estrutura e dados similares aos da linha Norte/Sul do metrô de São Paulo.

Capítulo 4: Apresenta inicialmente uma introdução ao problema de regulação robusta do tráfego de trens demonstrando como o problema foi tratado em (Corrêa, 1999). Em seguida é apresentada uma nova formulação para a regulação robusta descentralizada de linhas metroviárias, fornecendo uma lei de controle por realimentação de estados, invariante no tempo. Além das incertezas do modelo de tráfego e as limitações sobre suas variáveis de estado e controle, presentes em formulações anteriores, a formulação proposta trata de forma explícita a margem de controle para regulação existente no Programa Horário e o desvio, em relação ao previsto no Programa Horário, da lotação dos trens ao longo da linha.

Capítulo 5: Apresenta uma nova formulação para a regulação robusta do tráfego de trens fornecendo uma lei de controle por realimentação de estados variante no tempo

calculada em tempo real. A formulação é baseada na análise de estabilidade da matriz de realimentação através dos autovalores do sistema. A simplicidade da formulação e a eficiência computacional viabiliza a implementação prática, apresentado um desempenho bem melhor em relação aos obtidos em abordagens anteriores.

Capítulo 6: Apresenta as conclusões gerais e sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Geração de Programa Horário Utilizando Formulação de Programação Matemática

2.1 Introdução

O sistema de transporte metroferroviário consiste num processo dinâmico em que vários trens trafegam ininterruptamente transportando passageiros entre estações distribuídas ao longo do trajeto a ser percorrido. Os tempos de parada nas estações, os tempos de percurso entre elas, bem como os tempos de despacho dos trens são pré-estabelecidos, consolidados em uma tabela denominada Programa-Horário. A determinação do Programa-Horário corresponde à obtenção de uma solução de compromisso entre os custos operacionais do sistema e a qualidade de serviço oferecido aos usuários. A grande variação dos cenários de demanda de passageiros ao longo de um dia de operação faz com que a solução não seja trivial, podendo requerer um grande esforço computacional. Além disso, as variações constantes ao longo das semanas, dos meses e do ano, leva a uma necessidade quase que permanente da solução do proble-

ma, o que torna bastante relevante os benefícios advindos da utilização de métodos computacionais eficientes.

(Cury et alli., 1980) propuseram uma metodologia para geração de Programa Horário onde o problema é formulado como controle ótimo não linear e solucionado através de um método de decomposição hierárquica. Uma formulação mais simples para o problema foi apresentada em (Bergamashi et alli.,1982), onde o problema é formulado como um sistema de equações algébricas não lineares, sendo a solução obtida através de um método de decomposição iterativa. Em ambos, os aspectos operacionais não foram considerados no todo, além de exigir esforço computacional considerável devido à dificuldade natural de resolver problemas não lineares.

Neste capítulo são apresentadas novas metodologias para geração do Programa Horário de linhas metroviárias utilizando programação linear (Bazaraa et alli, 1990), (Varaya, 1972). As formulações consideram as restrições operacionais tratadas em (Cury et alli, 1980), (Bergamashi et alli,1982), acrescidas de uma margem de controle para regulação do tráfego de trens durante a operação comercial, decisiva para a utilização prática do Programa Horário, (Van Breusegem et alli, 1991), (Milani et alli, 1998). Nas formulações também são inseridas restrições para a garantia de continuidade de tráfego e manutenção de um comportamento mais homogêneo nos trens. O índice de desempenho é formado por funções lineares por partes para modelar direta ou indiretamente o tempo de espera dos passageiros nas estações, o conforto dos passageiros embarcados, o tempo de viagem dos trens e o número de trens em operação.

2.2 Descrição do Tráfego de Trens

Em um sistema de transporte metroviário cada trem despachado e cada plataforma são caracterizados por um número sendo que, todos os trens param ordenadamente em todas as plataformas. Essas são as características das linhas sequenciais que podem ser subdivididas em duas sub-classes: linhas de regime aberto e linhas de regime fechado.

As linhas de regime aberto são definidas como uma sequência de KT plataformas com n trens operando. Os índices das plataformas variam de $k = 1, \dots, KT$ e dos trens de $i = 1, \dots, n$. Os trens são inseridos na plataforma 1 e saem da linha na plataforma

KT (figura 2.1).

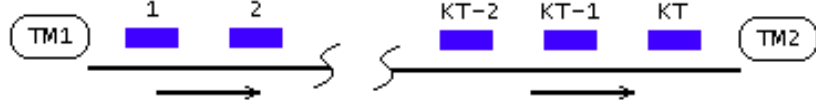


Figura 2.1: Linha de metrô aberta com KT plataformas

As linhas de regime fechado possuem KT plataformas ($k = 1, \dots, KT$) e n trens ($i = 1, \dots, n$) operando. A plataforma 1 é conectada à plataforma KT e a sequência de trens é $i = 1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots$ enquanto a sequência de plataformas é $k = 1, 2, \dots, KT, 1, 2, \dots, KT$ (figura 2.2)

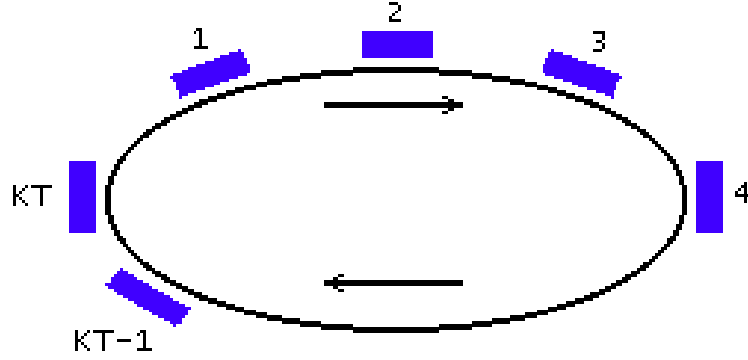


Figura 2.2: Linha de metrô fechada com KT plataformas

Neste trabalho toda a análise está relacionada ao tráfego em linhas de metrô operando em regime aberto, porque a maioria das linhas comerciais embora sejam fechadas do ponto de vista físico, operam como linha aberta.

Considere por exemplo a configuração clássica de uma linha com duas vias entre duas estações terminais TM1 e TM2, sendo uma via para cada direção (figura 2.3).

No trajeto TM1-TM2 os números das plataformas são $1, 2, \dots, KT$ e no trajeto TM2-TM1 são $KT+1, KT+2, \dots, 2KT$. Os KT pares de plataformas correspondem às KT estações físicas com duas plataformas cada. Se a sequência de n trens está operando periodicamente no circuito TM1-TM2-TM1, esta linha pode ser considerada como uma

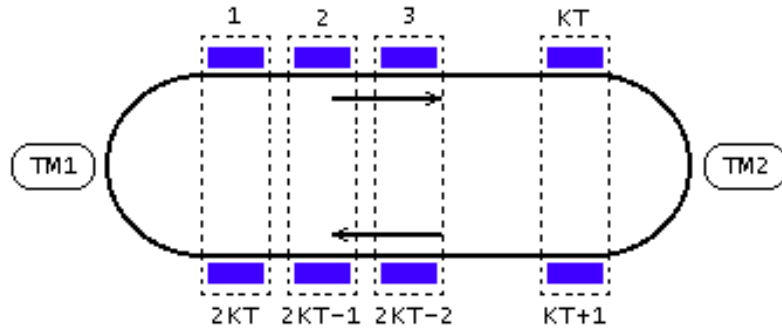


Figura 2.3: Linha de metrô comercial com $2KT$ plataformas operando em regime aberto

linha com $2KT$ plataformas. Por outro lado, se em uma das estações terminais (por exemplo a estação TM1) existir pelo menos um trem reserva, isto garante o despacho de trens no horário nominal, fazendo com que esta linha possa ser considerada como operando em regime aberto (figura 2.3).

2.3 Modelamento do Sistema

A configuração da via Norte/Sul do metrô de São Paulo ilustrada na figura 2.4 é constituída de uma linha comercial operando em regime aberto. Existem duas vias, interligando as estações extremas nas quais os trens trafegam em sentidos opostos. A operação do sistema é totalmente automatizada incluindo abertura e fechamento de portas, tempo de parada nas plataformas e controle de velocidade. Os trens que percorrem a via no sentido Norte/Sul param obrigatoriamente em todas as estações distribuídas ao longo do percurso para o embarque e desembarque de passageiros chegando com carga nula no final da linha, onde o trem retorna para trafegar no sentido oposto.

O modelamento do sistema para a obtenção do Programa-Horário é baseado nas seguintes equações dinâmicas: equação do *headway* e equação dos passageiros. Uma série de restrições são introduzidas no problema e levam em conta os seguintes aspectos do sistema:

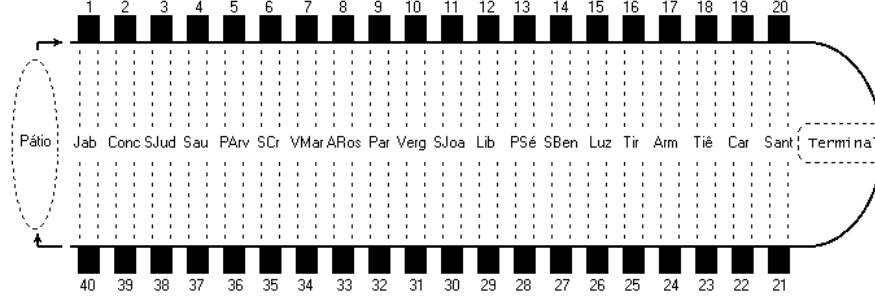


Figura 2.4: Configuração da Via Norte/Sul do Metrô de São Paulo

- limites operacionais e margem de segurança;
- manutenção do nível de conforto para os usuários;
- garantia de uma boa margem de controle para a regulação;
- garantia de que todos passageiros que esperam na plataforma embarquem no próximo trem.

2.3.1 Equação do *headway*

O tempo de saída de um trem i de duas plataformas adjacentes k e $k + 1$ é dado por:

$$t_i(k + 1) = t_i(k) + up_i(k + 1) + upl_i(k + 1) \quad (2.1)$$

onde $t_i(k)$ é o tempo de saída do trem i da plataforma k , $upl_i(k + 1)$ é o tempo de percurso do trem i da plataforma k a $k + 1$ e $up_i(k + 1)$ é o tempo de parada do trem i na plataforma $k + 1$.

Definindo o *headway* como o espaçamento entre trens consecutivos ao longo da linha temos:

$$x_i(k) \triangleq t_i(k) - t_{i-1}(k) \quad (2.2)$$

Note que $x_i(k)$ representa o tempo de espera dos passageiros pelo trem i na plataforma k . Da equação 2.1 temos:

$$x_i(k + 1) = x_i(k) + up_i(k + 1) + upl_i(k + 1) - up_{i-1}(k + 1) - upl_{i-1}(k + 1) \quad (2.3)$$

Para $i=0$, podemos definir:

$$u_0(k+1) = up_0(k+1) + upl_0(k+1) = t_0(k+1) - t_0(k) \quad (2.4)$$

onde $u_0(k+1)$ representa a diferença entre os tempos de abertura das plataformas k e $k+1$ no início de cada dia ou corresponde aos tempos de parada e percurso do último trem do conjunto anterior na respectiva plataforma, sendo portanto um parâmetro conhecido.

Para uma matriz de n trens e KT plataformas podemos escrever:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + Lup(k+1) + Lupl(k+1) \\ \forall k &= patio, 1, 2, \dots, (KT-1), terminal, (KT+1), \dots, (2KT-1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} x(k) &\triangleq [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]^T \\ up(k+1) &\triangleq [up_0(k+1) \ up_1(k+1) \ \dots \ up_n(k+1)]^T \\ upl(k+1) &\triangleq [upl_0(k+1) \ upl_1(k+1) \ \dots \ upl_n(k+1)]^T \\ L &\triangleq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pode-se observar que $x_i(0) = t_i(0) - t_{i-1}(0)$ corresponde ao *headway* entre trens no pátio sendo portanto o principal indicativo do despacho dos trens.

2.3.2 Equação dos passageiros

O número de passageiros em um trem i quando este sai da plataforma k pode ser expresso por:

$$p_i(k) = p_i(k-1) + pe_i(k) - ps_i(k) \quad (2.6)$$

onde $pe_i(k)$ é o número de passageiros que embarcam no trem i quando este se encontra na plataforma k e $ps_i(k)$ é o número de passageiros que desembarcam do trem i quando este se encontra na plataforma k . Os termos $pe_i(k)$ e $ps_i(k)$ podem ser obtidos por uma matriz origem-destino (MOD) que representa a demanda de passageiros prevista para o período de análise. Os elementos das matrizes origem-destino $\alpha_i(k)$ e $\alpha l_i(j, k)$ são valores médios estatísticos correspondentes a determinados intervalos de tempo durante o dia, durante os quais a demanda de passageiros mantêm-se relativamente constante.

$$pe_i(k) = \alpha_i(k)x_i(k) \quad (2.7)$$

$$ps_i(k) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha l_i(j, k)x_i(j) \quad (2.8)$$

onde $\alpha_i(k)$ é o número de passageiros por segundo que chegam na plataforma k e $\alpha l_i(j, k)$ é o número de passageiros por segundo que chegam na plataforma j e desembarcam na plataforma k .

Os parâmetros $\alpha_i(k)$ e $\alpha l_i(j, k)$ estão relacionados por:

$$\alpha_i(k) = \sum_{j=k+1}^{KT} \alpha l_i(k, j) \quad (2.9)$$

onde KT representa a última plataforma em cada via de circulação.

Então, para uma matriz de n trens podemos reescrever a equação (2.6):

$$p(k+1) = p(k) + \nabla(k+1)x(k+1) - \sum_{j=1}^k \nabla l(j, k+1)x(j) \quad (2.10)$$

$$\forall k = patio, 1, 2, \dots, (KT-1), terminal, (KT+1), \dots, (2KT-1)$$

onde:

$$p(k+1) \triangleq [p_1(k+1) \ p_2(k+1) \ \dots \ p_n(k+1)]^T$$

$$\nabla(k+1) \triangleq diag(\alpha_1(k+1) \ \alpha_2(k+1) \ \dots \ \alpha_n(k+1))$$

$$\nabla l(j, k+1) \triangleq diag(\alpha l_1(j, k+1) \ \alpha l_2(j, k+1) \ \dots \ \alpha l_n(j, k+1))$$

As condições de contorno são:

$$p(patio) = p(KT) = p(terminal) = p(2KT) = 0 \quad (2.11)$$

2.3.3 Restrições

Todas as variáveis $x(k)$, $p(k)$, $up(k)$ e $upl(k)$ são restritas pelos limites inferiores e superiores impostos pelo sistema. Os limites na variável $x(k)$ são impostos de forma a assegurar limites aceitáveis em termos de segurança (*headway* mínimo) e satisfação dos usuários (*headway* máximo).

$$xmin_i(k) \leq x_i(k) \leq xmax_i(k); \quad \forall i, \forall k \quad (2.12)$$

As restrições nas variáveis $up(k)$ são impostas pelos tempos máximos e mínimos operacionais de parada nas estações.

$$upmin_i(k) \leq up_i(k) \leq upmax_i(k); \quad \forall i, \forall k \quad (2.13)$$

As restrições em $upl(k)$ são impostas pelos níveis de desempenho em função da velocidade/aceleração do trem e distância entre plataformas, sendo a faixa de operação bastante limitada de forma a garantir uma maior margem de controle para a regulação.

$$uplmin_i(k) \leq upl_i(k) \leq uplmax_i(k); \quad \forall i, \forall k \quad (2.14)$$

As restrições na variável $p(k)$ são impostas pela capacidade dos trens.

$$0 \leq p_i(k) \leq pmax_i(k); \quad \forall i, \forall k \quad (2.15)$$

2.4 Determinação do Programa-Horário Otimizado

(Cury et alli, 1980) propuseram uma metodologia para geração de Programa Horário onde o problema é formulado como controle ótimo não linear. Nesta seção será descrito resumidamente o critério para otimização adotado, onde a função de custo global apresentando quatro diferentes termos é apresentada a seguir:

$$J(x, p, u) = \sum_{k=1}^{2KT} (Z_1(k) + Z_2(k) + Z_3(k) + Z_4(k)) \quad (2.16)$$

O primeiro termo está relacionado ao tempo de espera de passageiros na plataforma e considera o acúmulo de passageiros em uma plataforma específica k após a partida de um trem $i-1$, sendo obtido pela teoria das filas:

$$Z_1(k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} q_i(k) \alpha_i(k) x_i^2(k) \quad (2.17)$$

onde $q_i(k)$ é um parâmetro de ponderação. Observa-se que este termo depende do intervalo entre trens (*headway*) e do fluxo de passageiros por segundo chegando na plataforma ($\alpha_i(k)$).

O segundo termo está relacionado ao custo de manutenção de trens na linha sendo obtido por:

$$Z_2(k) = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i(k)}{x_i(k)} \quad (2.18)$$

onde $\psi_i(k)$ é um parâmetro de ponderação. Pode-se verificar que a diminuição deste termo corresponde a um aumento nos *headways* e portanto, diminuição do número de trens na linha.

O terceiro termo corresponde ao afastamento entre o carregamento real e o desejado de passageiros nos trens sendo obtido por:

$$Z_3(k) = \frac{1}{2} S(k) \|p(k) - p^r(k)\|^2 \quad (2.19)$$

onde $p^r(k)$ corresponde ao vetor de carregamento de passageiros desejado na plataforma k e $S(k)$ é uma matriz de ponderação do custo.

O quarto termo corresponde ao afastamento entre o controle real (tempo de parada + tempo de percurso) e o de referência. É também um termo quadrático.

$$Z_4(k) = \frac{1}{2} R(k) \|u(k) - u^r(k)\|^2 \quad (2.20)$$

onde $u(k) = up(k) + upl(k)$ é o vetor de controle, $u^r(k)$ corresponde ao vetor de controle adotado como referência e $R(k)$ é uma matriz de ponderação do custo.

O problema de controle do sistema pode ser formulado como:

$$\min_{x,p,u} J(x, p, u) \quad (2.21)$$

sujeito às restrições (2.5), (2.10), (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15).

Pode-se verificar que o problema apresenta alta dimensionalidade, restrições na variável de estado e controle e critério de desempenho não linear. Para a solução do problema (Cury et alli, 1980) propõem a utilização de um método de controle hierárquico, com decomposição paramétrica. O método formula o problema dual do problema original, aplicando a teoria da dualidade de Lagrange e usa uma técnica de decomposição paramétrica para obter um conjunto de pequenos problemas de minimização independentes resolvidos por um método padrão. A solução obtida por esta formulação permite obter um Programa Horário eficiente e levando em conta os custos operacionais e a qualidade do serviço oferecido aos passageiros. Contudo o método exige um esforço computacional considerável devido à dificuldade natural de resolver problemas não lineares. Além disso não foram considerados aspectos operacionais importantes:

- Continuidade do tráfego nos finais da linha;
- Comportamento homogêneo dos trens ao longo da via;
- Margem de controle para a regulação em operação comercial.

2.5 Nova Metodologia para Determinação do Programa Horário Otimizado

Nesta seção é apresentada uma nova metodologia para geração do Programa Horário de linhas metroviárias utilizando programação linear (Varaya, 1972), (Bazaraa et alli, 1990), (Assis et alli, 2000). A formulação do problema considera as restrições operacionais tratadas na seção anterior (Cury et alli, 1980) e em (Bergamashi et alli, 1982), acrescidas de uma margem de controle para a regulação do tráfego de trens durante a operação comercial e incluindo restrições para a garantia de continuidade de tráfego e manutenção de um comportamento mais homogêneo nos trens. O índice de desempenho é formado por funções lineares por partes para modelar direta ou indiretamente o tempo de espera dos passageiros nas estações, o conforto dos passageiros embarcados, o tempo de viagem dos trens e o número de trens em operação.

2.5.1 Margem de Controle para a Regulação

Uma requisito bastante importante deve garantir que todos os passageiros que estão esperando numa plataforma k vão embarcar no próximo trem i . Este aspecto é bastante relevante e extremamente necessário para evitar o acúmulo nas plataformas, principalmente nas horas de pico. Além disso, quando este aspecto não é considerado, a situação pode ser particularmente irritante sob o ponto de vista dos passageiros.

Considere o diagrama da figura 2.5 que representa o acúmulo de passageiros em uma plataforma específica k após a partida de um trem $i - 1$.

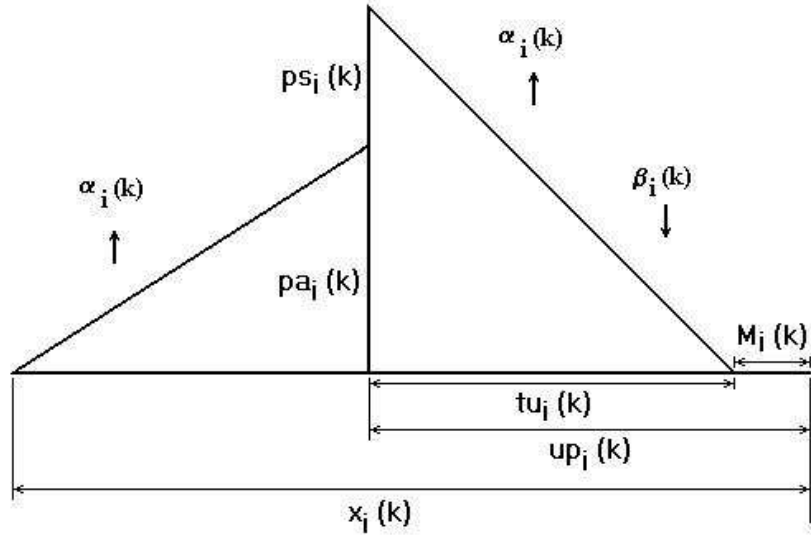


Figura 2.5: Diagrama do Fluxo de Passageiros na Plataforma k

A concentração de passageiros na plataforma quando da chegada do trem i é então dada por:

$$pa_i(k) = \alpha_i(k)(x_i(k) - up_i(k)) \quad (2.22)$$

O embarque e desembarque de passageiros dos trens pode ser analisado por:

$$pa_i(k) + ps_i(k) = (\beta_i(k) - \alpha_i(k))tu_i(k) \quad (2.23)$$

onde $\beta_i(k)$ é o número de passageiros por segundo que embarcam ou desembarcam no trem i quando da passagem pela plataforma k e $tu_i(k)$ representa o tempo necessário

para o embarque no trem i de todos os passageiros que aguardam na plataforma k além do desembarque de todos os passageiros que estão no trem com destino a esta plataforma ($ps_i(k)$) obtido pela equação (2.8).

No diagrama do fluxo de passageiros, $up_i(k)$ representa o tempo de parada de um trem em uma plataforma, que obedece a uma sequência de eventos: chegada na plataforma, parada completa, abertura de portas, desembarque dos passageiros dentro do trem para a plataforma, embarque no trem dos passageiros que estavam em espera na plataforma, fechamento de portas e partida do trem para executar seu percurso até a próxima estação. Este tempo de parada nominal está sujeito a todo o tipo de perturbações durante a operação comercial. Estas perturbações podem ocorrer no ato da troca de passageiros entre o trem e a plataforma ou mesmo devido ao acúmulo de passageiros na estação devido variação da demanda e/ou atraso nos trens. A introdução de uma folga sobre o tempo de parada nominal é então particularmente interessante porque permite uma maior margem de controle para a recuperação do sistema durante a operação comercial.

Então para garantir o embarque de todos passageiros que estão aguardando na plataforma e ao mesmo tempo permitir uma folga sobre o tempo de parada nominal, podemos então introduzir uma margem de segurança $M_i(k) \geq 0$ ao tempo necessário para o embarque e desembarque de passageiros em cada plataforma:

$$up_i(k) \geq tu_i(k) + M_i(k) \quad (2.24)$$

A margem de segurança é ajustada pelo projetista podendo ser assumida constante ou uma componente percentual sobre o tempo de parada necessário como segue:

$$M_i(k) = MP_i(k) tu_i(k) \quad (2.25)$$

onde $MP_i(k) \geq 0$ é muito menor que 1.

O tempo de parada efetivo considerando a margem de segurança percentual é então obtido por:

$$up_i(k) \geq \left(\frac{1 + MP_i(k)}{\beta_i(k) + MP_i(k)\alpha_i(k)} \right) \left[\alpha_i(k)x_i(k) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha l_i(j, k)x_i(j) \right] \quad (2.26)$$

Os valores de $\beta_i(k)$ são valores médios estatísticos e variam conforme a estrutura das plataformas, podendo por simplicidade ser assumidos constantes em cada plataforma.

No entanto, principalmente quando há grande concentração, pode ocorrer o confronto entre passageiros que embarcam e desembarcam. No modelamento, isto pode ser considerado como uma redução da taxa de embarque e desembarque $\beta_i(k)$ como função do congestionamento de passageiros na plataforma (portanto como função dos parâmetros $\alpha_i(k)$ e $\alpha l_i(j, k)$).

Se $M_i(k)$ é assumida constante em (2.24):

$$up_i(k) \geq \frac{\alpha_i(k)}{\beta_i(k)} x_i(k) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha l_i(j, k)}{\beta_i(k)} x_i(j) + \left(\frac{\beta_i(k) - \alpha_i(k)}{\beta_i(k)} \right) M_i(k) \quad (2.27)$$

Que pode ser reescrita como:

$$up_i(k) = c_i^1(k) x_i(k) + \sum_{j=1}^{k-1} c_i^2(j, k) x_i(j) + MS_i(k) \quad (2.28)$$

onde:

$$c_i^1(k) \triangleq \frac{\alpha_i(k)}{\beta_i(k)} \quad , \quad c_i^2(j, k) \triangleq \frac{\alpha l_i(j, k)}{\beta_i(k)} \quad e \quad MS_i(k) \geq \left(\frac{\beta_i(k) - \alpha_i(k)}{\beta_i(k)} \right) M_i(k)$$

Num modelamento do sistema podemos então definir o parâmetro $c_i(k)$ como constante de tráfego do trem i na plataforma k sendo estimado por regressão linear em um grande número de observações:

$$c_i(k) \triangleq (c_i^1(k) + \sum_{j=1}^{k-1} c_i^2(j, k)) \quad (2.29)$$

Num modelamento mais otimista:

$$c_i(k) \triangleq \max(c_i^1(k) + \sum_{j=1}^{k-1} c_i^2(j, k)) \quad (2.30)$$

Cabe ao engenheiro/projetista adotar o modelo que mais se adequa à realidade do problema.

Restrições de segurança para minimizar o risco de choque entre trens podem ser consideradas na geração do Programa Horário de linhas onde a distância entre as plataformas é relativamente reduzida. Uma possibilidade é a inclusão de restrições para garantir que um trem i só é liberado se o trem $i - 1$ já saiu da plataforma posterior, conforme segue:

$$x_i(k) \geq up_{i-1}(k+1) + up_{l_{i-1}}(k+1); \quad \forall i, \quad \forall k$$

Por simplicidade, restrições de segurança não serão consideradas neste trabalho.

2.5.2 Critério de Otimização Linear por Partes

A trajetória ótima de controle para os n trens pode ser definida pela determinação de um problema de otimização linear, onde a função objetivo a ser minimizada é:

$$J(\epsilon, \rho, up, upl, \sigma_1, \sigma_2, \zeta_1, \zeta_2) = \sum_{k=1}^{2KT} (T_1(k) + T_2(k) + T_3(k)) + T_4(k) + T_5(k) \quad (2.31)$$

onde os termos $T_1(k)$, $T_2(k)$, $T_3(k)$, $T_4(k)$ e $T_5(k)$ são estabelecidos de forma a garantir uma operação eficiente.

O primeiro termo é relativo ao tempo de espera dos passageiros na plataforma sendo obtido por aproximação linear por partes do tempo de espera dos passageiros nas estações. Seja o diagrama do fluxo de passageiros na plataforma k mostrado na figura 2.5. Se consideramos que $M_i(k) = 0$ e $x_i(k) \gg up_i(k)$, pela teoria das filas (Cury et alli, 1980), o tempo de espera de cada passageiro na plataforma está relacionado com o fluxo de passageiros e pode ser obtido pela seguinte equação:

$$f_i(k) = \frac{\alpha_i(k)}{2} x_i(k)^2 \quad (2.32)$$

O critério de desempenho relacionado ao *headway* pode ser ajustado pela minimização da função não-linear $f_i(k)$ (figura 2.6). Uma aproximação linear por partes pode ser utilizada para representar o critério de desempenho.

Então na região de operação ($xmin \leq x_i(k) \leq xmax$) definimos as seguintes funções lineares, onde a inclinação é uma aproximação da função original não-linear $f_i(k)$:

$$f_{i_1}(k) = \frac{\alpha_i(k)}{6} (xmax + 5xmin) x_i(k) - \frac{\alpha_i(k)}{6} xmin(2xmin + xmax) \quad (2.33)$$

$$f_{i_2}(k) = \frac{\alpha_i(k)}{2} (xmax + xmin) x_i(k) - \frac{\alpha_i(k)}{18} (2xmax^2 + 5xmax.xmin + 2xmin^2) \quad (2.34)$$

$$f_{i_3}(k) = \frac{\alpha_i(k)}{6} (5xmax + xmin) x_i(k) - \frac{\alpha_i(k)}{6} xmax(2xmax + xmin) \quad (2.35)$$

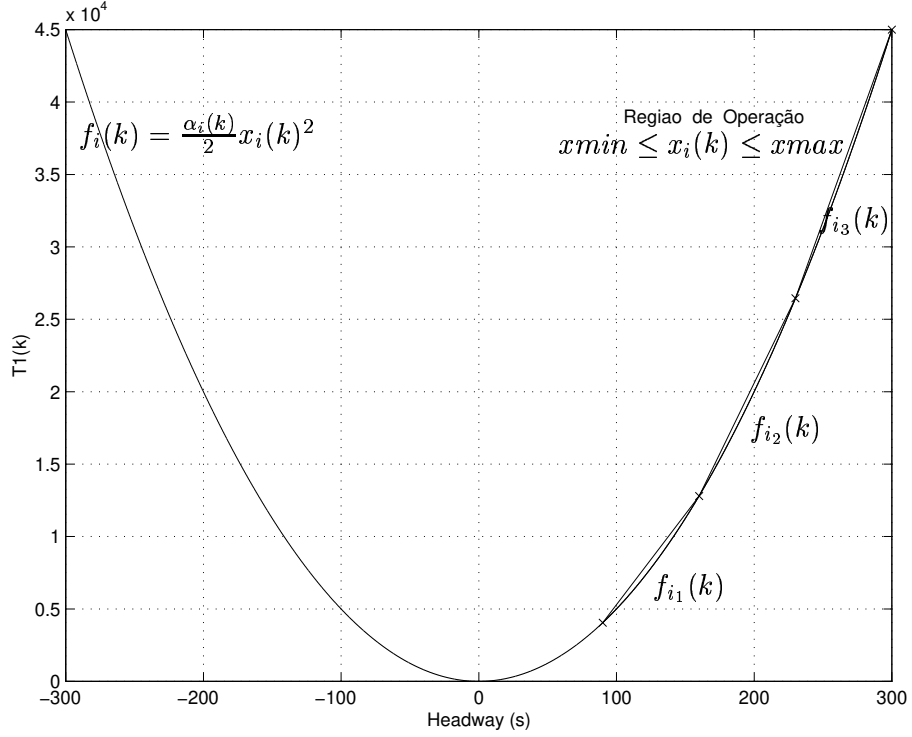


Figura 2.6: Aproximação Linear por Partes Relacionada ao *Headway*

O critério de otimização relacionado ao *headway* obtido por aproximação linear e utilizando a teoria das filas pode então ser adotado como:

$$T_1(k) = q \sum_{i=1}^n \epsilon_i(k) \quad (2.36)$$

onde $q \geq 0$ é um parâmetro de ponderação e:

$$\begin{aligned} \epsilon_i(k) &\geq \frac{\alpha_i(k)}{6}(x_{max} + 5x_{min})x_i(k) \\ \epsilon_i(k) &\geq \frac{\alpha_i(k)}{2}(x_{max} + x_{min})x_i(k) - \\ &\quad - \frac{\alpha_i(k)}{9}(x_{max}^2 + x_{max}x_{min} - 2x_{min}^2) \\ \epsilon_i(k) &\geq \frac{\alpha_i(k)}{6}(5x_{max} + x_{min})x_i(k) - \\ &\quad - \frac{\alpha_i(k)}{3}(x_{max}^2 - x_{min}^2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Uma outra alternativa para esta aproximação linear por partes consiste em considerar o ponto de vista dos passageiros que trafegam em uma linha de metrô de alta densidade, onde o tempo de espera é relativamente curto e pequenos intervalos de variação do *headway* são praticamente imperceptíveis para o usuário. Podemos então efetuar a aproximação linear proposta na figura 2.7.

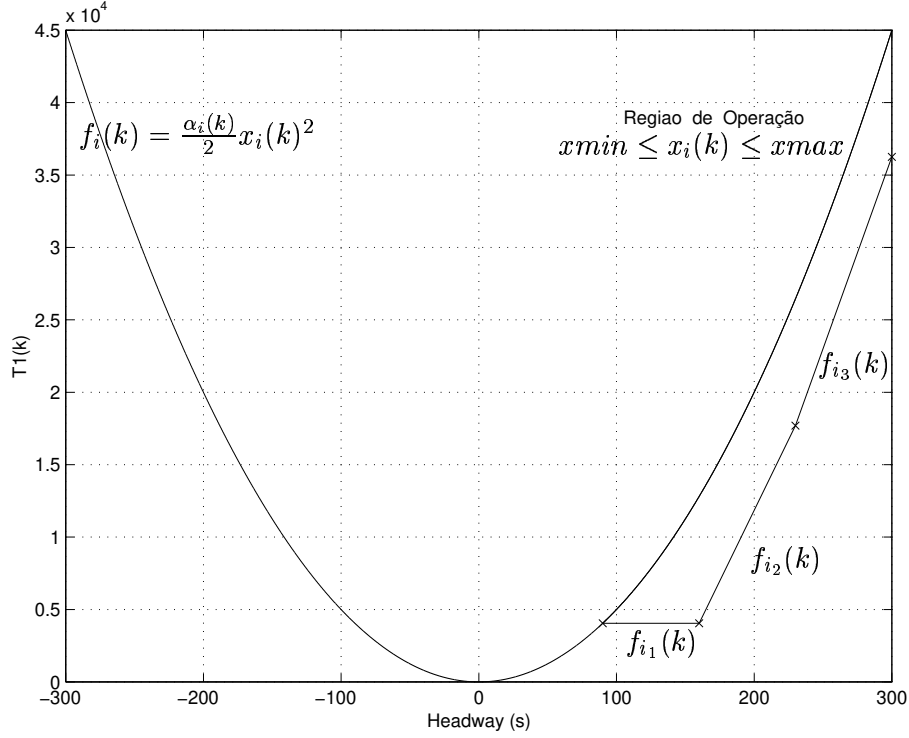


Figura 2.7: Uma Alternativa para a Aproximação Linear por Partes Relacionada ao *Headway*

Então na região de operação ($x_{min} \leq x_i(k) \leq x_{max}$) definimos as seguintes funções lineares:

$$f_1(k) = \frac{\alpha_i(k)}{2} x_{min}^2 \quad (2.38)$$

$$f_2(k) = \frac{\alpha_i(k)}{2} (x_{max} + x_{min}) x_i(k) - \frac{\alpha_i(k)}{6} (x_{max}^2 + 3.x_{max}.x_{min} - x_{min}^2) \quad (2.39)$$

$$f_3(k) = \frac{\alpha_i(k)}{6}(5x_{max} + x_{min})x_i(k) - \frac{\alpha_i(k)}{18}(7x_{max}^2 + 7x_{max}.x_{min} - 5x_{min}^2) \quad (2.40)$$

O critério de otimização relacionado ao *headway* obtido por aproximação linear e utilizando a teoria das filas pode então ser adotado como:

$$T_1(k) = q \sum_{i=1}^n \epsilon_i(k) \quad (2.41)$$

onde $q \geq 0$ é um parâmetro de ponderação, $\epsilon_i(k) \geq 0$ e:

$$\begin{aligned} \epsilon_i(k) &\geq \frac{\alpha_i(k)}{2}(x_{max} + x_{min})x_i(k) - \\ &\quad - \frac{\alpha_i(k)}{6}(x_{max}^2 + 3.x_{max}.x_{min} + 2x_{min}^2) \\ \epsilon_i(k) &\geq \frac{\alpha_i(k)}{6}(5x_{max} + x_{min})x_i(k) - \\ &\quad - \frac{\alpha_i(k)}{18}(7x_{max}^2 + 7x_{max}.x_{min} + 4x_{min}^2) \end{aligned} \quad (2.42)$$

O segundo termo $T_2(k)$ corresponde à aproximação linear por partes da função não linear $g(k)$ que representa o afastamento entre o carregamento real e o desejado de passageiros nos trens dado por:

$$g_i(k) = s \sum_{i=1}^n |p_i(k) - p^r(k)| \quad (2.43)$$

onde $p^r(k)$ corresponde ao carregamento de passageiros desejado na plataforma k e $s \geq 0$ é um parâmetro de ponderação. A constante $p^r(k)$ é ajustada pelo projetista e depende do espaço disponível, número de assentos e capacidade total dos trens.

Considere agora a introdução de uma margem de carregamento ($p_{max}(k)$) a partir da qual o conforto dos passageiros começa a ficar comprometido. Então, adotando δ como um parâmetro com elevado grau relativo para garantir dentro do possível que o número de passageiros não exceda a margem de carregamento, podemos representar a função não-linear $g(k)$ na forma de funções lineares por partes (figura 2.8):

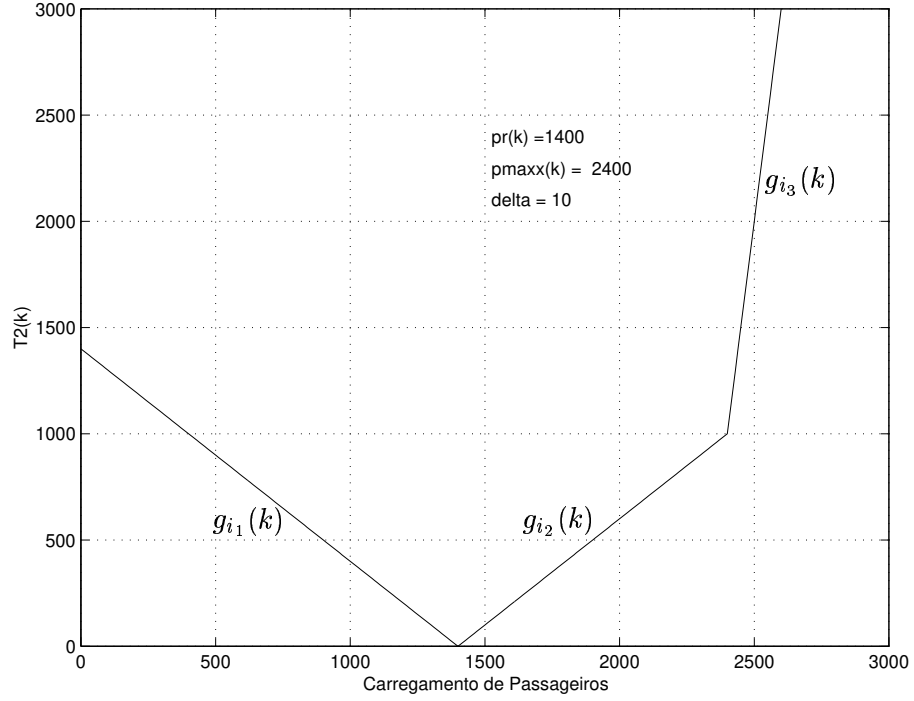


Figura 2.8: Aproximação linear por partes do carregamento de passageiros

$$g_{i_1}(k) = -p_i(k) + p^r(k) \quad \forall \quad 0 \leq p_i(k) \leq p^r(k) \quad (2.44)$$

$$g_{i_2}(k) = p_i(k) - p^r(k) \quad \forall \quad p^r(k) \leq p_i(k) \leq pmaxx(k) \quad (2.45)$$

$$g_{i_3}(k) = \delta \cdot p_i(k) + (1 - \delta)pmaxx(k) - p^r(k) \quad \forall \quad p_i(k) \geq pmaxx(k) \quad (2.46)$$

O critério de otimização relativo ao carregamento pode então ser adotado como:

$$T_2(k) = s \sum_{i=1}^n \rho_i(k) \quad (2.47)$$

onde $\rho_i(k)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \rho_i(k) &\geq -p_i(k) + p^r(k) \\ \rho_i(k) &\geq p_i(k) - p^r(k) \\ \rho_i(k) &\geq \delta p_i(k) + (1 - \delta)pmaxx(k) - p^r(k) \end{aligned} \quad (2.48)$$

O terceiro termo é relativo ao tempo de viagem que depende dos tempos de parada e percurso dos trens. É interessante para os passageiros reduzir o tempo total de viagem mas é particularmente importante reduzir o número de trens em operação e o custo econômico associado. Então admitimos:

$$T_3(k) = r \sum_{i=1}^n (up_i(k) + upl_i(k)) \quad (2.49)$$

onde $r \geq 0$ é um parâmetro de ponderação.

O termo $T_4(k)$ está relacionado com a continuidade do tráfego e leva em conta a necessidade de manter o intervalo de trens (*headway*) constante no terminal situado no final da linha onde o trem retorna para trafegar no sentido oposto. Além disso, permite ao projetista ponderar a importância de manter um fluxo de trens constante no pátio, considerando as limitações operacionais quando houver necessidade de variação do número de trens mantidos em operação.

$$T_4(k) = s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 \quad (2.50)$$

onde $s_1 \geq 0$ e $s_2 \geq 0$ são parâmetros de ponderação e:

$$\begin{aligned} -\sigma_1 &\leq x_i(patio) - x_{i-1}(2KT) \leq \sigma_1 \\ -\sigma_2 &\leq x_i(terminal) - x_i(KT) \leq \sigma_2 \\ \sigma_1 &\leq \sigma_1 max \\ \sigma_2 &\leq \sigma_2 max \end{aligned} \quad (2.51)$$

Observe que os limites $\sigma_1 max$ e $\sigma_2 max$ representam a máxima variação permissível para os *headways* respectivamente no pátio e no terminal. Na ausência de entrada de um novo trem no terminal ($\sigma_2 = 0$), o número de trens em operação no despacho de cada trem pode ser aproximado por:

$$nT_i = \sum_{k=1}^{2KT} \frac{up_i(k) + upl_i(k)}{x_i(patio)} \quad (2.52)$$

Finalmente, o termo $T_5(k)$ está relacionado ao interesse do projetista em manter um comportamento homogêneo nas plataformas e no trajeto dos trens, sem variações bruscas em $up_i(k)$ e $upl_i(k)$.

$$T_5(k) = z(\zeta_1 + \zeta_2) \quad (2.53)$$

onde $z \geq 0$ é um parâmetro de ponderação e:

$$\begin{aligned}
-\zeta_1 &\leq up_i(k) - up_{i-1}(k) \leq \zeta_1 \\
-\zeta_2 &\leq upl_i(k) - upl_{i-1}(k) \leq \zeta_2 \\
\zeta_1 &\leq \zeta_1max \\
\zeta_2 &\leq \zeta_2max
\end{aligned} \tag{2.54}$$

A determinação do Programa-Horário se resume então na solução do seguinte problema de programação linear (P.L.):

$$\min(s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + z\zeta_1 + z\zeta_2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{2KT} (q\epsilon_i(k) + r(up_i(k) + upl_i(k)) + s\rho_i(k))) \tag{2.55}$$

sujeito às restrições (2.5), (2.10), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.27), (2.42), (2.48), (2.51) e (2.54).

O ajuste dos parâmetros de ponderação q , r , s , s_1 , s_2 , z e δ , permite ao projetista obter a solução que mais se adequa às suas necessidades, mantendo um compromisso entre os custos operacionais e a qualidade de serviço para os usuários.

2.6 Operação em *Headway* Constante

A formulação completa do problema de P.L. proposto em (2.55) envolvendo n trens e $2KT$ plataformas totaliza $(42nKT - 8KT - 2n + 2)$ equações e $(12nKT + 2KT + 4)$ variáveis, o que significa um esforço computacional considerável, além de um tempo de resposta relativamente longo para sistemas tais como o metrô de São Paulo, onde $KT = 20$ e o número de trens despachados durante um período de 15 minutos, assumindo demanda constante, é de até 10 trens.

Consideremos agora a operação em *headways* constantes, onde o intervalo entre os trens ao longo da linha e consequentemente entre os tempos de despacho são mantidos constantes durante um determinado período do dia onde a demanda de passageiros prevista é mantida praticamente fixa. Nesta situação o carregamento dos trens ao longo

das plataformas pode ser diretamente calculado pelos parâmetros da matriz origem-destino.

$$p_i(k) = p_i(k-1) + \left(\alpha_i(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha l_i(j, k) \right) X \quad (2.56)$$

onde $X \triangleq x_i(k) \forall i, k$.

Observe que o máximo carregamento dos trens durante o período de análise pode ser facilmente calculada a priori como função do *headway* conforme mostrado na figura 2.9.

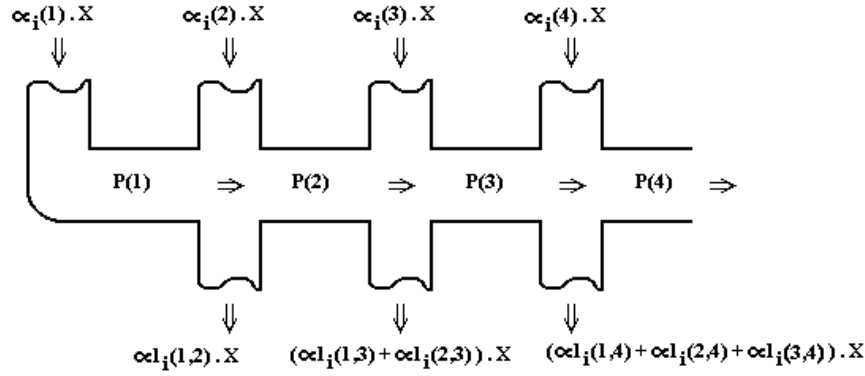


Figura 2.9: Determinação do máximo carregamento dos trens

Para analisar a operação em *headways* constantes considere a equação (2.28) onde $MS_i(k)$ representa a margem de segurança para o tempo de parada. Substituindo em (2.1) temos:

$$\begin{aligned} t_i(k+1) = t_i(k) + upl_i(k+1) + \frac{\alpha_i(k+1)}{\beta_i(k+1)} x_i(k+1) + \frac{\alpha l_i(1, k+1)}{\beta_i(k+1)} x_i(1) + \\ + \frac{\alpha l_i(2, k+1)}{\beta_i(k+1)} x_i(2) + \dots + \frac{\alpha l_i(k, k+1)}{\beta_i(k+1)} x_i(k) + MS_i(k+1) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Como a demanda é considerada constante num determinado período de análise, temos: $\alpha_i(k+1) = \alpha_{i+1}(k+1) = \alpha(k+1)$, $\alpha l_i(k, k+1) = \alpha l_{i+1}(k, k+1) = \alpha l(k, k+1)$ e $\beta_i(k+1) = \beta_{i+1}(k+1) = \beta(k+1)$.

Então, usando a definição (2.2) chegamos a:

$$\begin{aligned}
x_{i+1}(k+1) = & x_{i+1}(k) + \Delta upl_{i+1}(k+1) + \frac{\alpha(k+1)}{\beta(k+1)}(x_{i+1}(k+1) - x_i(k+1)) + \\
& + \frac{\alpha l(1, k+1)}{\beta(k+1)}(x_{i+1}(1) - x_i(1)) + \frac{\alpha l(2, k+1)}{\beta(k+1)}(x_{i+1}(2) - x_i(2)) + \\
& + \dots + \frac{\alpha l(k, k+1)}{\beta(k+1)}(x_{i+1}(k) - x_i(k)) + \Delta MS_{i+1}(k+1) \quad (2.58)
\end{aligned}$$

onde: $\Delta upl_{i+1}(k+1) = upl_{i+1}(k+1) - upl_i(k+1)$ e $\Delta MS_{i+1}(k+1) = MS_{i+1}(k+1) - MS_i(k+1)$.

Após algumas manipulações algébricas:

$$\begin{aligned}
(\beta(k+1) - \alpha(k+1))x_{i+1}(k+1) = & \beta(k+1)x_{i+1}(k) - \alpha(k+1)x_i(k+1) + \\
& + \alpha l(1, k+1)(x_{i+1}(1) - x_i(1)) + \alpha l(2, k+1)(x_{i+1}(2) - x_i(2)) + \dots + \\
& + \alpha l(k, k+1)(x_{i+1}(k) - x_i(k)) + \beta(k+1)(\Delta upl_{i+1}(k+1) + \Delta MS_{i+1}(k+1)) \quad (2.59)
\end{aligned}$$

Considerando agora a operação em *headways* constantes podemos verificar que, para isto basta manter constantes os tempos de parada e percurso dos trens consecutivos em cada plataforma o que corresponde a fazer $(\Delta upl_{i+1}(k+1) + \Delta MS_{i+1}(k+1)) = 0$. Assim, mantendo o intervalo entre trens (*headway*) constante conforme o tempo de despacho teremos um problema bastante simplificado envolvendo apenas $(10KT)$ variáveis e $(30KT - 8)$ equações, obtendo-se uma formulação computacionalmente muito fácil de se resolver cuja solução pode ser obtida “on-line”.

Para analisar a operação com *headways* variáveis entre trens vamos considerar as seguintes possibilidades:

- $x_i(k) = x_i(k+1)$ e $x_i(k) \neq x_{i+1}(k) \quad \forall i, k$
- $x_i(k) \neq x_i(k+1)$ e $x_i(k) = x_{i+1}(k) \quad \forall i, k$
- $x_i(k) \neq x_i(k+1)$ e $x_i(k) \neq x_{i+1}(k) \quad \forall i, k$

Na primeira hipótese consideramos que os trens são despachados em intervalos (*headways*) variáveis mas mantém os intervalos constantes ao longo do percurso. Neste caso, pela equação (2.59) temos após algumas manipulações algébricas e usando (2.29):

$$x_{i+1}(k+1) = x_i(k+1) - \frac{1}{c_i(k+1)}(\Delta upl_{i+1}(k+1) + \Delta MS_{i+1}(k+1)) \quad (2.60)$$

Considerando que $c_i(k)$ tem valores pequenos (na via Norte-Sul do metrô de São Paulo, $c(k) < 0.3$ nas plataformas de maior tráfego e no horário de pico) conclui-se que é possível obter $x_i(k) \neq x_{i+1}(k)$ bastando para isto adotar intervalos de despacho de trens variáveis e uma pequena alteração nos tempos de parada e percurso.

Na segunda hipótese, considera-se a variação nos *headways* de um trem no seu percurso - o chamado *sanfonamento* - vantajoso por permitir carregar os trens de maneira mais uniforme ao longo da linha. Pela equação (2.59) temos:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + (\Delta upl_{i+1}(k+1) + \Delta MS_{i+1}(k+1)) \quad (2.61)$$

É fácil verificar que o sanfonamento exige um esforço considerável de controle, limitado pelas restrições de máximo e mínimo nas velocidades e tempo de parada dos trens.

Finalmente, para a terceira hipótese, por extensão, pode-se concluir que é necessário esforço de controle considerável, além de assumir intervalos de despacho de trens variáveis, não justificáveis se a demanda de passageiros mantêm-se relativamente constante durante o período previsto.

Esta análise pode também ser verificada graficamente através do diagrama do tráfego de trens ao longo do tempo como ilustrado na figura 2.10 a qual mostra um resultado típico para um sistema simplificado com apenas 3 trens e 4 plataformas.

Consideremos inicialmente o *headway* entre os trens 1 e 2 no despacho. Para reduzir o *headway* entre estes trens na plataforma 1, devemos reduzir o tempo de percurso e/ou parada do trem, sendo que esta faixa de variação possível é geralmente muito limitada, permitindo uma pequena alteração no *headway*. Para manter o mesmo patamar na plataforma 2 devemos manter o trem operando acelerado e com reduzido tempo de parada. O efeito será sentido até mesmo nos trens consecutivos que acabam por ter que andar no limite. Através desta análise podemos perceber como é difícil obter o sanfonamento devido à exigência de esforço de controle considerável, sendo este geralmente muito limitado devido às restrições operacionais.

Outro aspecto importante a ser considerado no *scheduling* é o número de trens em operação (nT). Na operação a *headways* constantes nT mantêm-se durante todo o período, podendo ser obtido por:

$$nT = \sum_{k=1}^{2KT} \frac{up(k) + upl(k)}{X} \quad (2.62)$$

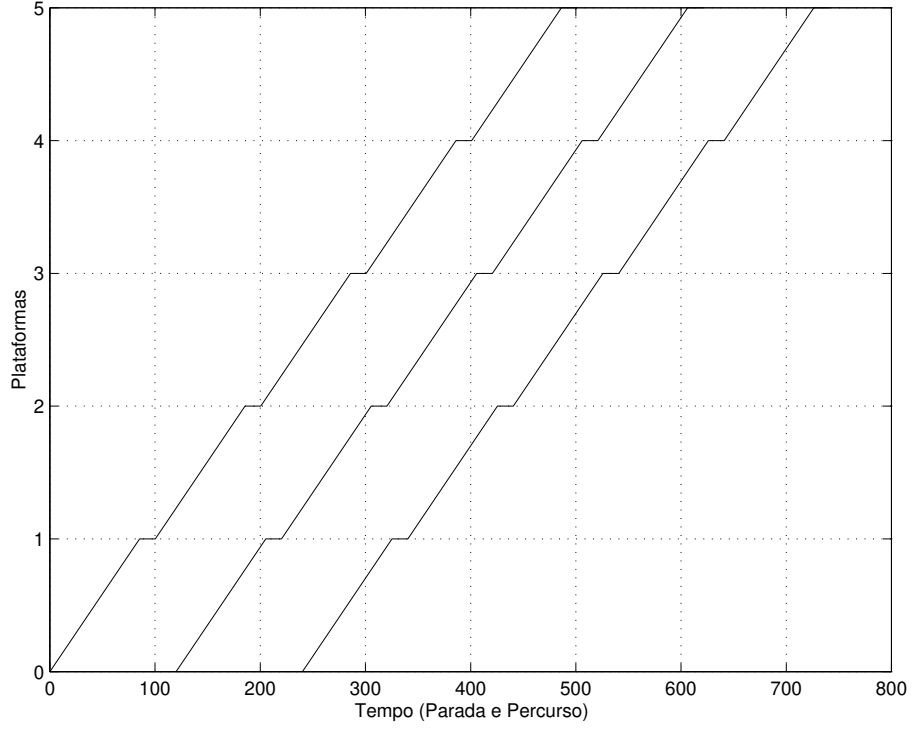


Figura 2.10: Diagrama do tráfego de trens ao longo do tempo

Na operação a *headways* variáveis o controle do número de trens em operação ao longo do tempo é dificultado. Isto se traduz em um mau aproveitamento do material rodante e maiores custos operacionais devido à necessidade de manter mais funcionários e trens em condições de operação.

A determinação do Programa-Horário considerando *headways* constantes consiste na solução do seguinte problema de programação linear:

$$\min \sum_{k=1}^{2KT} (q\epsilon(k) + r(up(k) + upl(k)) + s\rho(k)) \quad (2.63)$$

sujeito às restrições (2.5), (2.10), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), (2.27), (2.42) e (2.48) onde $X \triangleq x_i(k) \forall i, k$.

Observe que os índices de desempenho relativos aos termos $T_4(k)$ e $T_5(k)$ propostos em (2.50) e (2.53) respectivamente foram excluídos da formulação original (2.55), já

que na formulação com *headways* constantes, os tempos de parada e percurso também ficam constantes em cada plataforma, e portanto estas equações não têm efeito.

2.7 Exemplo Numérico

A implementação do método para geração das trajetórias de n trens operando em *headways* constantes e em *headways* variáveis foi efetuada considerando dados compatíveis com uma linha comercial do porte da Via Norte/Sul do metrô de São Paulo.

Consideremos inicialmente a operação em *headways* constantes, ilustrado através de dois exemplos. Os limites operacionais considerados nas simulações para o primeiro exemplo (Exemplo 1) são:

$$uplmin_i = \begin{bmatrix} 28 & 107 & 99 & 79 & 88 & 110 & 100 & 93 & 84 & 74 & 87 & 82 \\ 73 & 71 & 82 & 66 & 74 & 111 & 78 & 88 & 118 & 74 & 79 & 111 & 71 & 72 \\ 84 & 76 & 67 & 82 & 83 & 73 & 74 & 91 & 102 & 111 & 85 & 80 & 96 & 107 \end{bmatrix},$$

$$uplmax_i = \begin{bmatrix} 28 & 110 & 100 & 80 & 89 & 116 & 100 & 94 & 86 & 75 & 92 & 88 \\ 75 & 76 & 84 & 74 & 75 & 112 & 81 & 92 & 118 & 78 & 81 & 113 & 74 & 74 \\ 85 & 82 & 74 & 82 & 90 & 79 & 78 & 94 & 106 & 115 & 86 & 81 & 96 & 107 \end{bmatrix},$$

$$\beta_i = \begin{bmatrix} 80 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 80 & 80 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 80 \end{bmatrix},$$

$$upmax_i(k)=50 \text{ s} \quad , \quad upmin_i(k)=15 \text{ s},$$

$$pmax_i(k)=2600 \text{ pass.} \quad , \quad pmax(k)=2400 \text{ pass.} \quad , \quad p^r(k)=1400 \text{ pass.},$$

$$xmax_i(k)=300 \text{ s} \quad \text{e} \quad xmin_i(k)=90 \text{ s}.$$

Os termos $u_0(k)$ (2.4) foram considerados como variáveis livres no problema. A margem de segurança para o tempo de parada para garantir que todos passageiros embarquem no trem foi admitida constante: $M_i(k)=5$ segundos. A variável δ responsável por garantir que a margem de carregamento $pmaxx(k)$ não seja excedida, a não ser para satisfazer a todo o conjunto de restrições, foi ajustada em $\delta=1000$.

O tempo de viagem de cada trem ao longo de todo o percurso é relativamente longo. Por isto, a demanda prevista para cada trem varia com o tempo à medida que o trem percorre todo o trajeto. Numa aproximação, a demanda vista por um determinado conjunto de trens pode ser considerada aproximadamente constante, tornando o problema da geração de despachos bastante simplificado.

Para a obtenção de resultados consideramos a geração de despachos durante dois períodos distintos: no início do dia, onde a demanda é relativamente baixa, e no horário de pico da manhã.

Para o início do dia, podemos prever uma matriz origem-destino (MOD_1) aproximada com valores típicos de demanda de passageiros dada por:

$$MOD_1 = \frac{1}{10000} *$$

0	6	24	30	28	58	78	59	87	43	22	79	79	237	216	39	101	32	14	51
12	0	3	5	8	17	23	18	29	14	8	28	28	83	76	14	37	12	6	21
12	1	0	1	1	5	7	5	9	5	3	9	9	29	27	5	13	4	2	8
56	5	2	0	1	6	14	11	19	11	6	23	23	75	69	13	36	13	6	24
42	6	4	1	0	1	4	6	11	6	3	15	15	51	47	9	25	9	4	17
19	3	3	1	0	0	1	1	3	2	1	6	6	20	18	3	11	4	2	8
29	4	5	3	1	1	0	1	2	2	2	7	7	28	24	5	14	6	3	12
16	3	3	2	1	1	1	0	1	1	1	3	3	12	11	2	8	3	2	7
14	2	3	2	1	2	1	0	0	0	0	2	2	9	9	2	7	3	2	6
9	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	6	6	1	4	2	1	4
12	2	3	2	1	2	2	1	1	0	0	1	1	7	7	2	7	4	2	7
29	6	7	4	4	6	7	4	5	1	0	0	0	8	16	5	19	10	4	22
29	6	7	4	4	6	7	4	5	1	0	0	0	8	16	5	19	10	4	22
102	19	26	17	14	27	32	19	26	11	5	9	9	0	11	7	49	38	21	93
152	29	39	26	22	38	46	29	41	20	9	31	31	17	0	4	39	37	33	147
10	2	3	2	2	3	3	2	3	2	1	3	3	4	1	0	1	2	2	9
44	9	12	8	7	14	17	13	19	10	6	22	22	50	24	2	0	3	5	43
30	6	9	7	6	12	15	12	20	11	6	25	25	85	49	6	7	0	2	22
42	9	13	10	9	18	23	17	30	17	10	41	41	144	140	19	33	5	0	12
136	31	46	34	31	64	85	64	102	59	36	154	154	579	563	102	262	62	11	0

Para o horário de pico, adotamos a seguinte matriz origem-destino (MOD_2) aproximada:

$$MOD_2 = \frac{1}{1000} * \begin{bmatrix} 0 & 33 & 113 & 160 & 223 & 717 & 623 & 700 & 583 & 300 & 220 & 427 & 427 & 1497 & 673 & 343 & 220 & 47 & 47 & 127 \\ 11 & 0 & 17 & 37 & 87 & 187 & 203 & 297 & 260 & 167 & 140 & 277 & 277 & 940 & 360 & 130 & 97 & 27 & 27 & 73 \\ 14 & 2 & 0 & 3 & 17 & 67 & 73 & 110 & 97 & 67 & 57 & 120 & 120 & 410 & 157 & 57 & 43 & 13 & 13 & 37 \\ 49 & 9 & 4 & 0 & 10 & 60 & 113 & 173 & 157 & 113 & 103 & 220 & 220 & 790 & 307 & 113 & 87 & 27 & 27 & 77 \\ 48 & 16 & 9 & 3 & 0 & 20 & 57 & 143 & 130 & 97 & 90 & 213 & 213 & 803 & 313 & 117 & 93 & 27 & 27 & 87 \\ 23 & 8 & 8 & 3 & 1 & 0 & 10 & 37 & 57 & 40 & 40 & 93 & 93 & 393 & 143 & 57 & 50 & 13 & 17 & 47 \\ 38 & 13 & 14 & 9 & 3 & 3 & 0 & 17 & 37 & 50 & 47 & 113 & 113 & 540 & 200 & 80 & 67 & 23 & 23 & 73 \\ 20 & 7 & 8 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 7 & 13 & 23 & 53 & 53 & 260 & 100 & 43 & 37 & 13 & 13 & 43 \\ 26 & 10 & 11 & 8 & 5 & 10 & 4 & 1 & 0 & 3 & 10 & 43 & 43 & 223 & 90 & 40 & 40 & 17 & 17 & 43 \\ 10 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 13 & 13 & 123 & 57 & 27 & 23 & 10 & 10 & 33 \\ 14 & 6 & 7 & 6 & 4 & 8 & 6 & 5 & 2 & 0 & 0 & 7 & 7 & 163 & 77 & 43 & 37 & 17 & 17 & 47 \\ 23 & 9 & 12 & 10 & 7 & 15 & 12 & 10 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 120 & 97 & 63 & 53 & 27 & 27 & 80 \\ 60 & 33 & 50 & 33 & 53 & 70 & 50 & 60 & 60 & 13 & 3 & 0 & 0 & 120 & 97 & 63 & 53 & 27 & 27 & 80 \\ 123 & 67 & 100 & 70 & 123 & 173 & 140 & 177 & 180 & 77 & 47 & 70 & 70 & 0 & 33 & 47 & 73 & 53 & 60 & 180 \\ 160 & 87 & 133 & 93 & 163 & 217 & 173 & 230 & 253 & 120 & 77 & 197 & 197 & 133 & 0 & 17 & 40 & 37 & 67 & 200 \\ 23 & 13 & 20 & 13 & 23 & 33 & 27 & 37 & 43 & 20 & 17 & 47 & 47 & 70 & 7 & 0 & 3 & 10 & 43 \\ 43 & 23 & 40 & 27 & 50 & 77 & 63 & 93 & 113 & 53 & 43 & 133 & 133 & 367 & 50 & 7 & 0 & 3 & 10 & 57 \\ 50 & 27 & 47 & 33 & 63 & 100 & 87 & 143 & 190 & 100 & 77 & 243 & 243 & 1010 & 163 & 30 & 10 & 0 & 7 & 6 \\ 73 & 43 & 73 & 57 & 103 & 163 & 143 & 220 & 297 & 160 & 130 & 417 & 417 & 1800 & 487 & 110 & 60 & 13 & 0 & 23 \\ 167 & 103 & 183 & 140 & 267 & 423 & 377 & 580 & 733 & 407 & 337 & 1143 & 1143 & 5223 & 1410 & 420 & 353 & 127 & 30 & 0 \end{bmatrix}$$

Os dados são compatíveis com os praticados pela Companhia do Metropolitano de São Paulo.

Um algoritmo complementar baseado na equação (2.62) foi introduzido de forma a ajustar nT em um número inteiro. O algoritmo considera todas as restrições do problema e deve preferencialmente reduzir o número de trens, e abrange as seguintes possibilidades numa sequência de prioridade:

- Redução de nT pelo aumento do *headway*.
- Redução de nT pela redução proporcional dos tempos de percurso dos trens.
- Aumento de nT pela redução do *headway*.
- Variação de nT pela variação dos tempos de parada nas estações, mantendo *headway* constante.

O ajuste dos parâmetros de ponderação para o problema de minimização (q , r e s), é efetuado conforme o interesse do projetista. A figura 2.11 apresenta na curva superior o perfil do carregamento dos trens ao longo das plataformas para o início do dia, obtido através do P.L. (2.63) adotando os seguintes índices de desempenho:

$$q = 0.1, \quad r = 1 \quad \text{e} \quad s = 10.$$

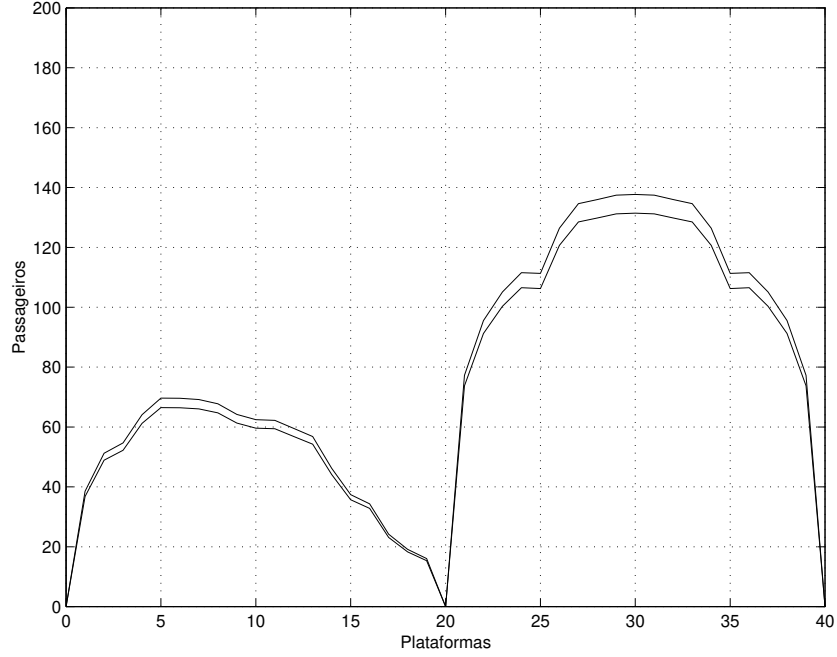


Figura 2.11: Perfil do Carregamento dos Trens ao Longo das Plataformas
Exemplo 1 - MOD_1 - $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$

Os seguintes resultados numéricos foram obtidos:

$$\begin{array}{ll}
 X = 300 \text{ segundos} & nT = 13.3667 = 14 \text{ trens} \\
 pmed = 83.6 \text{ passageiros} & p_i(30) = 137.7 \text{ passageiros} \\
 upmed = 15.0000 \text{ segundos} & uplmed = 85.2500 \text{ segundos}
 \end{array}$$

Pode-se verificar que devido à prioridade de minimização do afastamento entre o carregamento real e o desejado de passageiros (s elevado), o *headway* foi otimizado em seu limite superior.

Considerando o ajuste do número de trens para $nT = 14$ pelo algoritmo complementar, houve uma redução do *headway* para $X = 286.4286$ segundos com uma consequente redução do carregamento de passageiros, obtendo-se $pmed = 79.8$ passageiros, $p_i(30) = 131.4$ passageiros e mantendo os tempos de parada e percurso. O resultado é ilustrado na curva inferior da figura 2.11.

Agora consideremos índices de desempenho adotados:

$$q = 100, \quad r = 5 \quad \text{e} \quad s = 1.$$

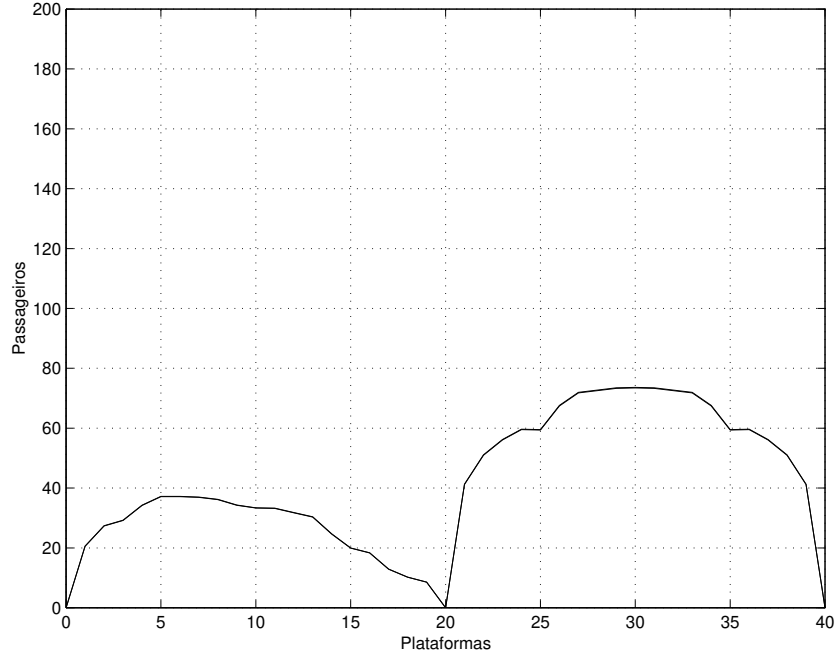


Figura 2.12: Perfil do Carregamento dos Trens ao Longo das Plataformas
Exemplo 1 - MOD_1 - $q = 100$, $r = 5$, $s = 1$

A figura 2.12 ilustra os resultados obtidos onde:

$$\begin{aligned} X &= 160 \text{ segundos} & nT &= 25.0625 = 26 \text{ trens} \\ p_{med} &= 44.6 \text{ passageiros} & p_i(30) &= 73.4 \text{ passageiros} \\ up_{med} &= 15.0000 \text{ segundos} & up_{lmed} &= 85.2500 \text{ segundos} \end{aligned}$$

Pode-se verificar que devido ao ajuste do índice q elevado, houve minimização do *headway*, que proporcionou uma redução no carregamento mas um aumento do número de trens em operação. Observa-se também que, devido à utilização da aproximação linear por partes mostrada na figura 2.7 onde sob o ponto de vista dos passageiros pequenas variações do intervalo entre trens (*headway*) são imperceptíveis para o usuário, o *headway* não atingiu o limite mínimo. Finalmente podemos verificar que os tempos de

parada e percurso mantiveram-se nos limites inferiores. Por isto, se considerarmos os índices de desempenho reajustados para $q = 0.1$, $r = 100$ e $s = 1$, os resultados obtidos serão exatamente iguais, somente se alterando quando ajustamos s em valores mais elevados, priorizando o carregamento de passageiros, como mostrado anteriormente.

Considerando o ajuste do número de trens para $nT = 25$ pelo algoritmo complementar, houve um aumento no *headway* para $X = 160.40$ segundos com um consequente aumento no carregamento de passageiros, obtendo-se $pmed = 44.7$ passageiros, $p_i(30) = 73.6$ passageiros e mantendo os tempos de parada e percurso. O aumento no carregamento de passageiros, quase imperceptível, é mostrado na figura 2.12.

Podemos perceber claramente pelos resultados que esta situação é bastante favorável para os usuários, mas em contraposição é economicamente inviável para a empresa concessionária devido à necessidade de manter um grande número de trens vazios em operação.

Para o horário de pico foi obtido o perfil do carregamento de passageiros conforme ilustrado na figura 2.13 sendo os índices de desempenho adotados como:

$$q = 100, \quad r = 5 \quad \text{e} \quad s = 1.$$

Os resultados numéricos obtidos foram:

$$\begin{aligned} X &= 90 \text{ segundos} & nT &= 44.7558 = 45 \text{ trens} \\ pmed &= 1499.8 \text{ passageiros} & p_i(30) &= 2389.8 \text{ passageiros} \\ upmed &= 15.4506 \text{ segundos} & uplmed &= 85.2500 \text{ segundos} \end{aligned}$$

Pode-se verificar que os resultados apresentaram *headway* e tempo de percurso nos limites inferiores. Os tempos de parada apresentaram resultados ligeiramente maiores para satisfazer a restrição (2.27). Observa-se também que embora os trens apresentassem carga de passageiros elevada, o limite $pmax(k)$ jamais foi atingido, o que significa garantia de conforto para os usuários.

Considerando o ajuste do número de trens para $nT = 45$ pelo algoritmo complementar, houve um aumento no tempo de parada obtendo-se $upmed = 16,0000$ segundos, onde a variação, apesar de desprezível, é vantajosa para os usuários, mas mantendo o *headway*, carregamento de passageiros e o número de trens, além de ampliar a margem de controle para a regulação.

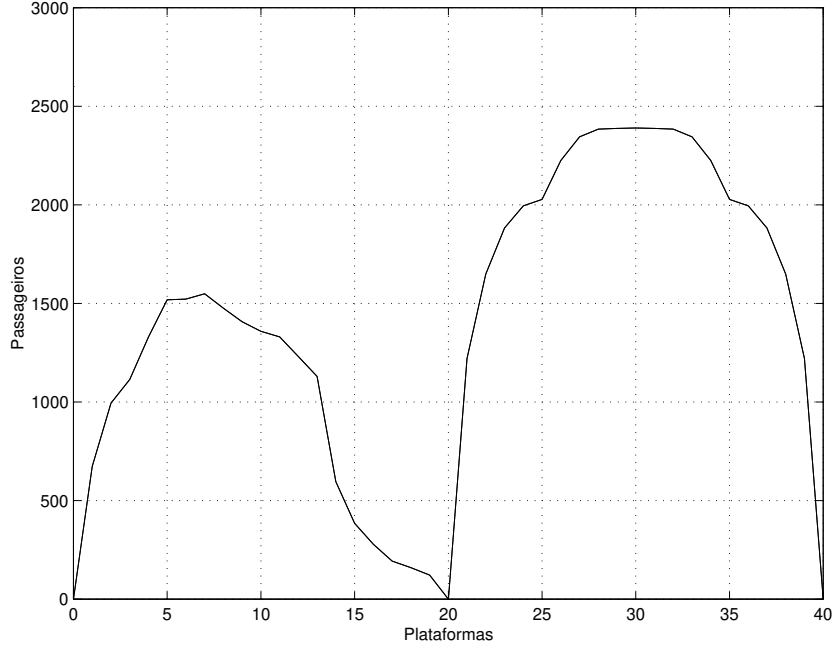


Figura 2.13: Perfil do Carregamento dos Trens ao Longo das Plataformas

Exemplo 1 - MOD_2 - $q = 100$, $r = 5$, $s = 1$

Para permitir obter resultados comparativos, ilustramos abaixo alguns resultados adicionais (Exemplo 2) que consideram as seguintes modificações nos limites operacionais:

$$\beta_i = \begin{bmatrix} 120 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 120 & 120 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 120 \end{bmatrix},$$

$$pmax_i(k)=2800 \text{ pass.} \quad , \quad pmax(k)=2600 \text{ pass.} \quad , \quad p^r(k)=2400 \text{ pass.},$$

Além disso consideramos que a minimização do *headway* é obtida assumindo a aproximação linear por partes mostrada na figura 2.6 e portanto no problema de programação linear (2.63) substituímos as restrições (2.42) pelas restrições (2.37).

Adotando índices de desempenho:

$$q = 0.1, \quad r = 1 \quad \text{e} \quad s = 10,$$

os resultados são idênticos aos ilustrados na figura 2.11 onde:

$$\begin{aligned} X &= 300 \text{ segundos} & nT &= 13.3667 = 14 \text{ trens} \\ p_{med} &= 83.6 \text{ passageiros} & p_i(30) &= 137.7 \text{ passageiros} \\ up_{med} &= 15.0000 \text{ segundos} & upl_{med} &= 85.2500 \text{ segundos} \end{aligned}$$

Após o ajuste $nT = 14$ trens, $X = 286.4286$ segundos, $p_{med} = 79.8$ passageiros e $p_i(30) = 131.4$ passageiros.

Assumindo agora os seguintes índices de desempenho:

$$q = 100, \quad r = 5 \quad \text{e} \quad s = 1.$$

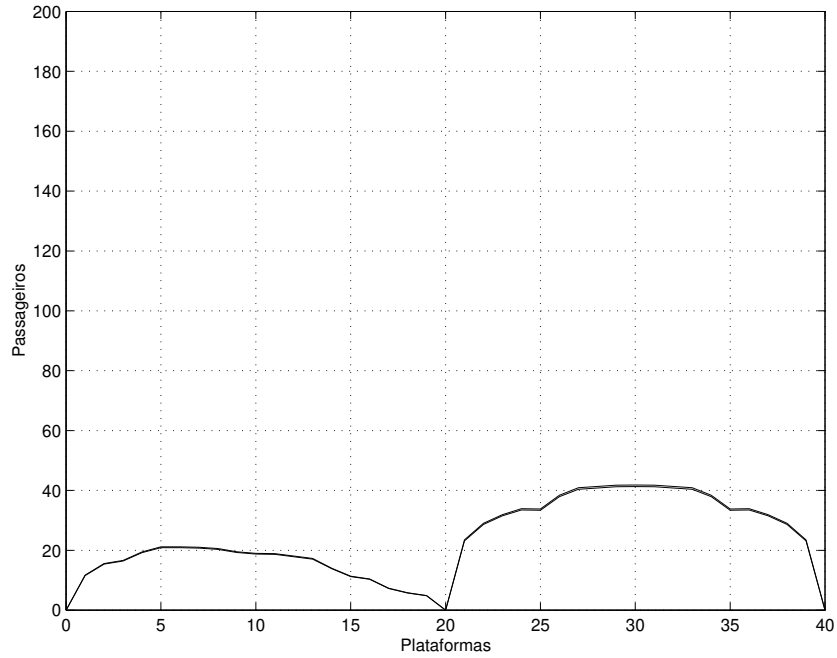


Figura 2.14: Perfil do Carregamento dos Trens ao Longo das Plataformas

Exemplo 2 - MOD_1 - $q = 100$, $r = 5$, $s = 1$

A figura 2.14 ilustra os resultados obtidos onde:

$$\begin{array}{ll} X = 90 \text{ segundos} & nT = 44.5556 = 45 \text{ trens} \\ p_{med} = 25.1 \text{ passageiros} & p_i(30) = 41.3 \text{ passageiros} \\ up_{med} = 15.0000 \text{ segundos} & upl_{med} = 85.2500 \text{ segundos} \end{array}$$

Pode-se verificar que devido à minimização do *headway* em toda a região de operação este atingiu o limite mínimo apresentando um carregamento menor e um elevado número de trens necessários para manter a operação nesta situação.

Considerando o ajuste do número de trens para $nT = 44$ pelo algoritmo complementar, houve um aumento no *headway* para $X = 91.1364$ segundos com um consequente aumento no carregamento de passageiros, obtendo-se $p_{med} = 25.4$ passageiros e $p_i(30) = 41.8$ passageiros e mantendo os tempos de parada e percurso.

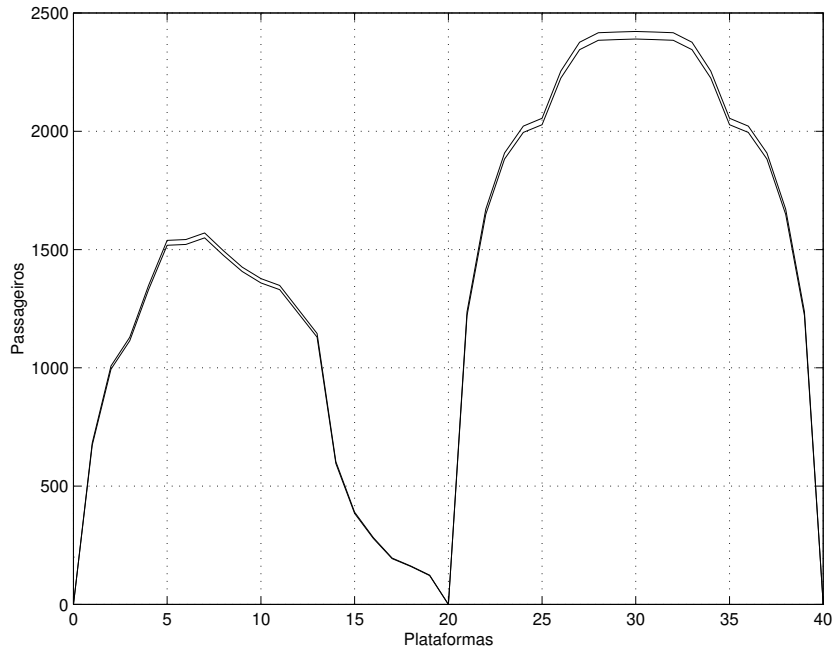


Figura 2.15: Perfil do Carregamento dos Trens ao Longo das Plataformas

Exemplo 2 - MOD_2 - $q = 100$, $r = 5$, $s = 1$

Para o horário de pico foi obtido o perfil do carregamento de passageiros conforme ilustrado na figura 2.15 (curva inferior) sendo os índices de desempenho adotados como:

$$q = 100, \quad r = 5 \quad \text{e} \quad s = 1.$$

Os resultados numéricos obtidos foram:

$$\begin{aligned} X &= 90 \text{ segundos} & nT &= 44.5865 = 45 \text{ trens} \\ p_{med} &= 1499.8 \text{ passageiros} & p_i(30) &= 2389.8 \text{ passageiros} \\ up_{med} &= 15.0697 \text{ segundos} & upl_{med} &= 85.2500 \text{ segundos} \end{aligned}$$

Pode-se observar que os resultados são similares aos obtidos para o Exemplo 1. Após o ajuste contudo, devido às modificações nos limites para o carregamento conseguimos ajustar o número de trens para $nT = 44$ trens fazendo $X = 91.2036$ segundos e $up_{med} = 15.0740$ segundos, obtendo um carregamento com $p_{med} = 1519.9$ passageiros e $p_i(30) = 2421.7$ passageiros (curva superior da figura 2.15).

Os resultados serão idênticos se $q = 0.1$, $r = 100$ e $s = 1$.

Assumindo agora que os índices de desempenho adotados foram:

$$q = 0.1, \quad r = 1 \quad \text{e} \quad s = 10.$$

A figura 2.16 (curva superior) ilustra o resultado onde:

$$\begin{aligned} X &= 97.9174 \text{ segundos} & nT &= 41.0020 = 42 \text{ trens} \\ p_{med} &= 1631.8 \text{ passageiros} & p_i(30) &= 2600.0 \text{ passageiros} \\ up_{med} &= 15.1201 \text{ segundos} & upl_{med} &= 85.2500 \text{ segundos} \end{aligned}$$

Após o ajuste $nT = 42$ trens, $X = 95.5703$ segundos, $up_{med} = 15.0988$ segundos, $p_{med} = 1592.7$ passageiros e $p_i(30) = 2537.7$ passageiros (curva inferior da figura 2.16). Observe que comparando com os resultados anteriores, houve um aumento no carregamento dos trens e redução do número de trens em operação, minimizando os custos operacionais para a concessionária, sem contudo comprometer o nível de conforto dos passageiros.

Consideremos agora a operação em *headways* variáveis. Os limites operacionais considerados nas simulações são equivalentes aos adotados no Exemplo 2. Contudo, considerando a inclusão das equações (2.51) e (2.54) temos que:

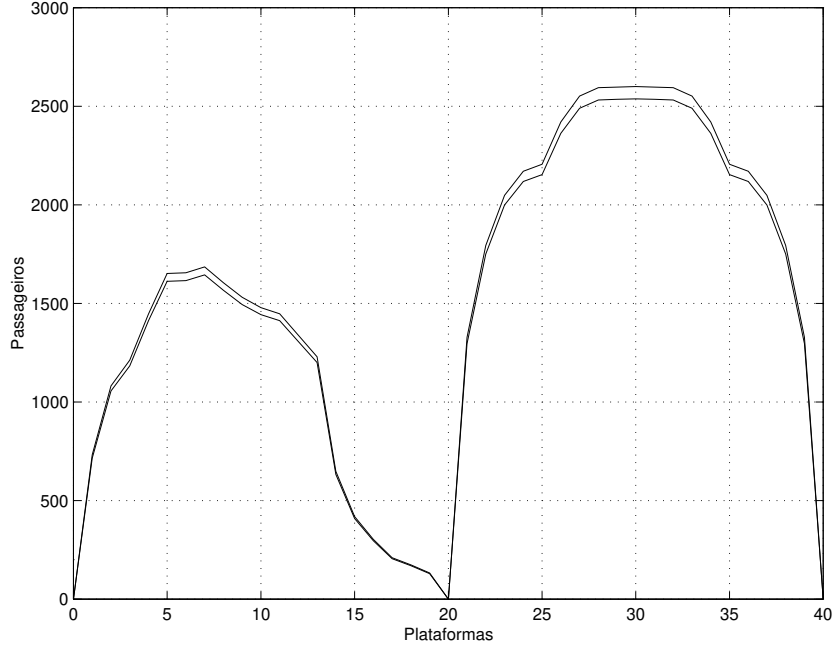


Figura 2.16: Perfil do Carregamento dos Trens ao Longo das Plataformas
Exemplo 2 - MOD_2 - $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$

$$\sigma_1 max=40 \quad , \quad \sigma_2 max=10 \quad , \quad \zeta_1 max=15 \quad \text{e} \quad \zeta_2 max=5$$

Foram obtidos resultados ilustrativos para a operação em *headways* variáveis utilizando $n = 10$ trens, despachados sequencialmente. Foram adotados os seguintes índices de desempenho:

$$q = 0.1, \quad r = 1, \quad s = 10, \quad s_1 = 1000, \quad s_2 = 10000 \quad \text{e} \quad z = 1.$$

A figura 2.17 apresenta o perfil do carregamento dos trens 1, 5 e 10 ao longo das plataformas para o início do dia. Pode-se perceber que a variação do carregamento de passageiros entre os trens é quase que imperceptível.

Os seguintes resultados numéricos para cada um dos n trens despachados foram:

$$x_i(0) = \begin{bmatrix} 300.0000 & 267.9020 & 282.8607 & 286.8771 & 288.3381 & 289.4881 \\ 290.0259 & 290.4025 & 291.1056 & 300.0000 \end{bmatrix}$$

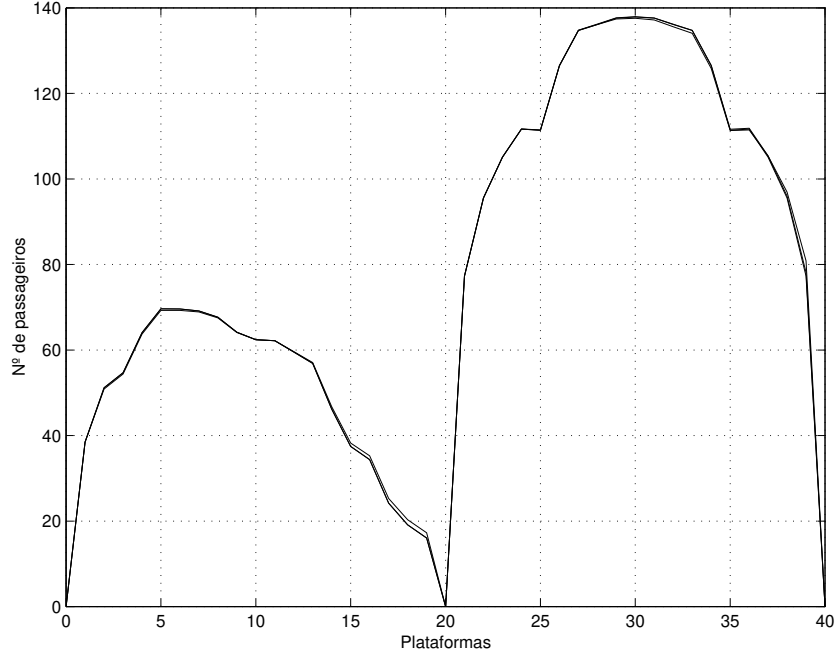


Figura 2.17: Perfil do Carregamento dos Trens ao Longo das Plataformas
Headways Variáveis - MOD_1 - $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 1000$, $s_2 = 10000$ e $z = 1$

$$\begin{aligned}
 xmed_i &= \begin{bmatrix} 287.4312 & 288.4331 & 292.8153 & 294.0828 & 295.0946 & 295.8778 \\ & 296.1612 & 296.5167 & 298.1110 & 300.0000 \end{bmatrix} \\
 upmed_i &= \begin{bmatrix} 16.7872 & 17.0437 & 17.0955 & 17.1245 & 17.1709 & 17.2205 \\ & 17.2848 & 17.3890 & 17.6250 & 17.6250 \end{bmatrix} \\
 uplmed_i &= \begin{bmatrix} 85.4853 & 85.6028 & 85.6515 & 85.6589 & 85.6413 & 85.6052 \\ & 85.5503 & 85.4637 & 85.4500 & 85.4500 \end{bmatrix} \\
 p_i(30) &= \begin{bmatrix} 137.6 & 137.9 & 137.9 & 137.9 & 137.9 & 137.9 & 137.9 & 138.0 & 138.0 & 137.9 \end{bmatrix} \\
 pmed_i &= \begin{bmatrix} 83.7 & 83.6 & 83.7 & 83.8 & 83.8 & 83.8 & 83.8 & 83.8 & 83.8 & 83.6 \end{bmatrix} \\
 nT_i &= \begin{bmatrix} 13.6363 & 15.3260 & 14.5297 & 14.3314 & 14.2627 & 14.2079 \\ & 14.1829 & 14.1669 & 14.1632 & 13.7433 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Podemos comparar estes resultados com os ilustrados na figura 2.11 obtidos na operação com *headways* constantes onde os índices de ponderação são equivalentes.

Podemos perceber que o sanfonamento proporcionou um maior carregamento nos trens quando operando com *headways* variáveis. Contudo, pode-se perceber que esta diferença é muito pequena. Em contraposição, analisando os resultados numéricos podemos perceber que, estimando o número de trens em operação pela equação (2.52), podemos perceber que nT_i varia entre 14 e 16, enquanto no exemplo utilizando *headways* constantes o número de trens é fixo e equivale a $nT = 14$ trens. Isto se traduz na necessidade de manter mais funcionários e trens em condição de operação.

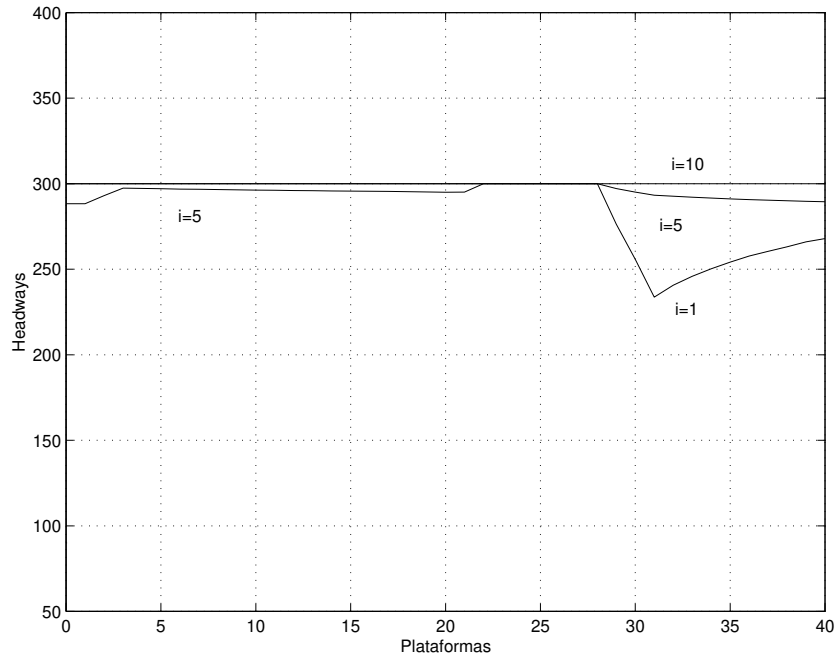


Figura 2.18: Variação dos *Headways* dos Trens ao Longo das Plataformas
Headways Variáveis - MOD_1 - $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 1000$, $s_2 = 10000$ e $z = 1$

A figura 2.18 apresenta o perfil dos *headways* variáveis dos trens 1, 5 e 10 ao longo das plataformas onde percebe-se que estes são mais reduzidos nas estações extremas.

Para o horário de pico e utilizando os mesmos índices de ponderação foram também obtidos resultados ilustrativos para a operação em *headways* variáveis utilizando $n = 10$ trens despachados sequencialmente. A figura 2.19 apresenta o perfil do carregamento dos trens 1, 5 e 10 ao longo das plataformas para o início do dia. Pode-se perceber que comparando estes resultados com os ilustrados na figura 2.16 obtidos na operação com

headways constantes houve uma variação considerável do carregamento de passageiros, particularmente na primeira via de circulação onde a demanda de passageiros prevista é menor. Para obter esta variação os *headways* foram ajustados em valores mais elevados, como pode ser visto na figura 2.20 que apresenta o perfil dos *headways* variáveis dos trens 1, 5 e 10 ao longo das plataformas.

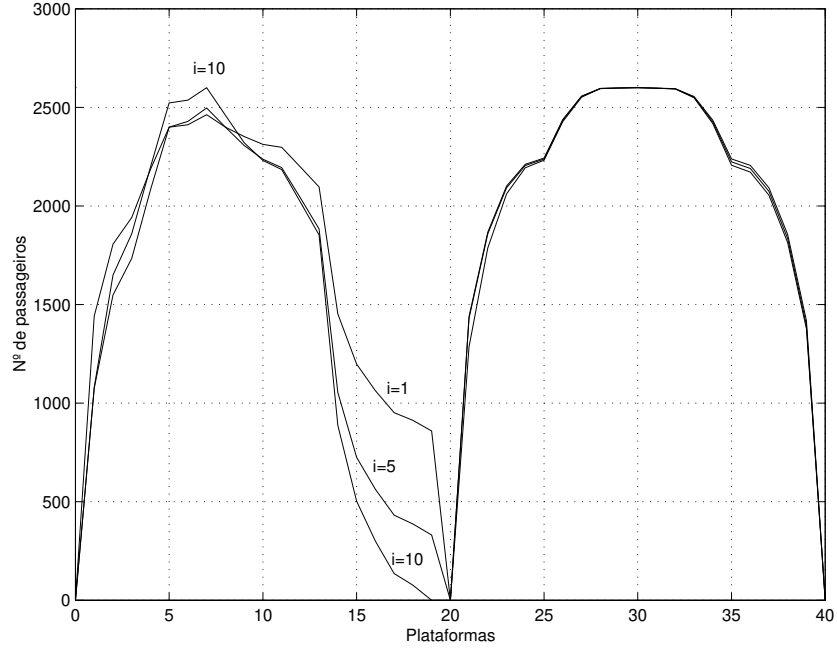


Figura 2.19: Perfil do Carregamento dos Trens ao Longo das Plataformas
Headways Variáveis - MOD_2 - $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 1000$, $s_2 = 10000$ e $z = 1$

Estas características também podem ser verificadas pelos resultados numéricos:

$$\begin{aligned}
 x_i(0) &= \begin{bmatrix} 102.0870 & 107.5846 & 115.5459 & 116.2740 & 117.7198 & 116.5923 \\ & & 114.7676 & 94.0420 & 90.4666 & 192.7465 \end{bmatrix} \\
 x_{med_i} &= \begin{bmatrix} 112.2718 & 107.0435 & 109.9274 & 110.2747 & 112.5023 & 111.2372 \\ & & 111.0829 & 104.6415 & 108.9872 & 131.1060 \end{bmatrix} \\
 up_{med_i} &= \begin{bmatrix} 28.8977 & 29.1084 & 29.1388 & 29.1847 & 29.1720 & 29.1475 \\ & & 28.6785 & 28.7346 & 30.9808 & 28.5734 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

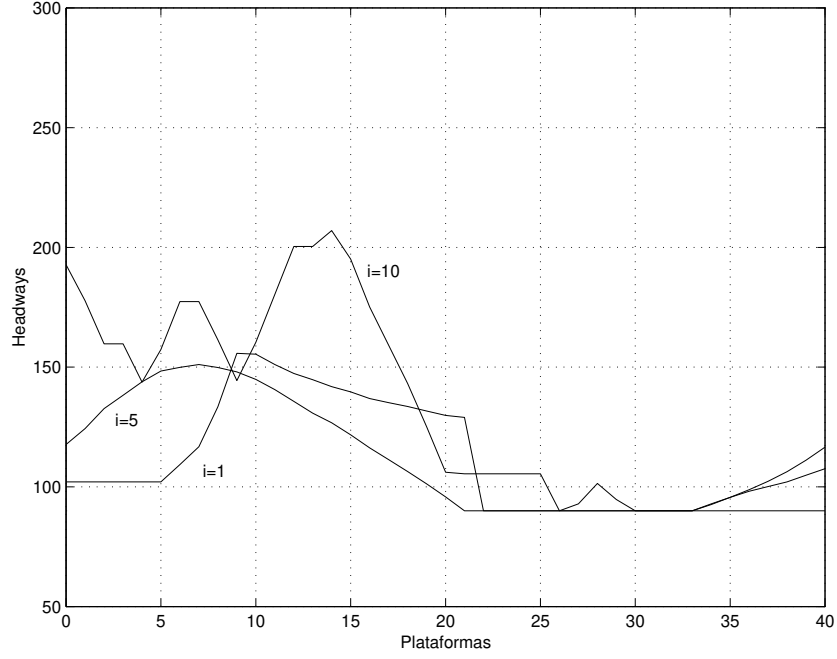


Figura 2.20: Variação dos *Headways* dos Trens ao Longo das Plataformas
Headways Variáveis - MOD_2 - $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 1000$, $s_2 = 10000$ e $z = 1$

$$\begin{aligned}
 uplmed_i &= \begin{bmatrix} 86.3335 & 86.3218 & 86.3096 & 86.2999 & 86.2844 & 86.2632 \\ & 86.2141 & 86.0686 & 86.3794 & 86.2182 \end{bmatrix} \\
 p_i(30) &= \begin{bmatrix} 2600 & 2600 & 2600 & 2600 & 2600 & 2600 & 2600 & 2600 & 2600 & 2600 \end{bmatrix} \\
 pmed_i &= \begin{bmatrix} 2033.9 & 1994.4 & 1950.9 & 1949.5 & 1919.1 & 1943.3 \\ & 1969.4 & 1995.7 & 1964.7 & 1882.5 \end{bmatrix} \\
 nT_i &= \begin{bmatrix} 45.1502 & 42.9170 & 39.9662 & 39.7284 & 39.2309 & 39.5946 \\ & 40.0436 & 48.8306 & 51.8911 & 23.8223 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Comparando estes resultados com os obtidos na operação com *headways* constantes como ilustrado na figura 2.11 pode-se perceber claramente as vantagens do sanfonamento, que proporciona uma distribuição mais homogênea dos passageiros nos trens. Contudo, para atingir este desempenho devemos operar com um número de trens estimado variando entre 24 e 52 que é operacionalmente inviável e economicamente desvantajoso para a concessionária.

É importante destacar que para a efetiva utilização das vantagens da operação com *headways* variáveis, devemos considerar o esforço computacional na obtenção da solução. Para os resultados apresentados, utilizamos a *Toolbox* de Otimização do software MATLAB. A solução dos problemas de P.L. foi obtida pelo comando *linprog* que apresenta um método iterativo baseado no ponto interior primal-dual e uma extensão do método simplex.

O esforço computacional na obtenção da solução do problema com *headways* variáveis para um número de trens mais elevado é considerável. Isto torna a solução do algoritmo utilizando o comando *linprog* computacionalmente inviável. Além disso, a utilização da formulação é aplicável na determinação da trajetória de n trens despachados num período onde a demanda é assumida constante. Se assumirmos que durante um dia de operação há uma grande variação da demanda de passageiros, torna-se necessário o desenvolvimento de uma metodologia para considerar esta variação da demanda.

2.8 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas metodologias para geração automática de programação horária otimizada para linhas metroviárias. Inicialmente foi mostrada a formulação e modelamento propostos por (Cury et alii, 1980) que utiliza controle ótimo não linear para a solução do problema. Em seguida são propostas novas metodologias onde o problema foi tratado como um problema de programação linear onde o índice de desempenho é formado por funções lineares por partes, contribuindo decisivamente para a eficiência computacional bem como para sua aplicabilidade prática. Em ambos os casos foram consideradas as restrições operacionais, margem de controle para a regulação na operação comercial, restrições de continuidade e homogeneidade de tráfego e garantia de que todos passageiros aguardando embarcam no próximo trem.

O desempenho destas novas metodologias foram testados utilizando uma linha metroviária com estrutura e dados similares aos da linha Norte/Sul do metrô de São Paulo onde verificamos que:

- A formulação utilizando *headways* variáveis apresentou melhores resultados permitindo uma distribuição mais homogênea dos passageiros nos trens. Contudo esta abordagem mostrou-se computacionalmente impraticável além de apresentar maior custo econômico associado, devido à necessidade de manter um maior número de trens e funcionários disponíveis para a operação.

- A formulação utilizando *headways* constantes apresentou uma abordagem simples e de rápida solução que apresenta um compromisso entre o carregamento de passageiros desejado nos trens e a garantia de conforto para os usuários. Um algoritmo de arredondamento complementar garante um melhor aproveitamento do material rodante e do espaço disponível nos trens. Tendo em vista a eficiência computacional da metodologia proposta, vale a pena investigar a possibilidade de utilização da mesma para adaptação em tempo real do Programa Horário às perturbações da demanda de passageiros.

- Em ambos os casos, a utilização da formulação limita-se à determinação da trajetória de n trens despachados num período onde a demanda é assumida constante. Assumindo que durante um dia de operação há uma grande variação do fluxo de passageiros, torna-se necessário o desenvolvimento de uma metodologia para considerar esta variação da demanda.

Capítulo 3

Geração de Programa Horário Utilizando Formulação de Controle Preditivo

3.1 Introdução

No capítulo anterior foi apresentada uma formulação simples para a obtenção do Programa Horário para linhas metropolitâneas que utiliza programação linear e considera a operação com *headways* constantes ao longo do percurso. A eficiência computacional da abordagem, o aproveitamento do material rodante e redução de custos operacionais advindos da utilização de um número de trens constante durante o período de análise tornam a formulação bastante atrativa. Porém a aplicabilidade prática é limitada a períodos de análise nos quais numa aproximação, a demanda de passageiros vista por um determinado conjunto de trens pode ser considerada aproximadamente constante. Além disso, para a efetiva utilização do algoritmo ao longo do dia seria necessário elaborar um programa para executar a transição entre os períodos com *headway* constante assumindo a variação da demanda de passageiros durante este período de transição.

Técnicas de controle de processos utilizando Formulação de Controle Preditivo (MPC) baseados em programação linear foram propostas por vários autores, tais como (Bemporad et alli, 2000), sendo sua eficiência computacional conhecida através de vários algoritmos industriais.

Neste capítulo é apresentada uma nova metodologia para geração de Programa Horário para linhas metroviárias utilizando uma formulação de controle preditivo com horizonte móvel (Assis et alli, 2001), (Assis et alli, 2002). No modelo a trajetória de cada trem é otimizada considerando um horizonte finito movendo-se a cada passo permitindo efetuar a transição entre períodos onde a demanda de passageiros varia consideravelmente ou mesmo obter o Programa Horário completo sendo conhecido apenas o comportamento do primeiro trem e a demanda de passageiros prevista. A eficiência computacional e aplicabilidade prática são verificados utilizando uma linha metroviária com estrutura e dados similares aos da linha Norte/Sul do metrô de São Paulo.

3.2 Formulação de Controle Preditivo

Considere o seguinte problema de programação linear proposto na equação (2.55) onde opcionalmente substituímos as equações (2.27) e (2.42) pela equações (2.26) e (2.37) respectivamente.

$$\min(s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + z\zeta_1 + z\zeta_2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{2KT} (q\epsilon_i(k) + r(up_i(k) + upl_i(k)) + s\rho_i(k))) \quad (3.1)$$

sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + Lup(k+1) + Lupl(k+1) \\ p(k+1) &= p(k) + \nabla(k+1)x(k+1) - \sum_{j=1}^k \nabla l(j, k+1)x(j) \\ xmin_i(k) &\leq x_i(k) \leq xmax_i(k); \quad \forall i, \forall k \\ upmin_i(k) &\leq up_i(k) \leq upmax_i(k); \quad \forall i, \forall k \\ uplmin_i(k) &\leq upl_i(k) \leq uplmax_i(k); \quad \forall i, \forall k \\ 0 &\leq p_i(k) \leq pmax_i(k); \quad \forall i, \forall k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
up_i(k) &\geq \left(\frac{1 + MP_i(k)}{\beta_i(k) + MP_i(k)\alpha_i(k)} \right) \left[\alpha_i(k)x_i(k) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_l(j, k)x_i(j) \right] \\
\epsilon_i(k) &\geq \frac{\alpha_i(k)}{6}(xmax + 5xmin)x_i(k) \\
\epsilon_i(k) &\geq \frac{\alpha_i(k)}{2}(xmax + xmin)x_i(k) - \frac{\alpha_i(k)}{9}(xmax^2 + xmax.xmin - 2xmin^2) \\
\epsilon_i(k) &\geq \frac{\alpha_i(k)}{6}(5xmax + xmin)x_i(k) - \frac{\alpha_i(k)}{3}(xmax^2 - xmin^2) \\
\rho_i(k) &\geq -p_i(k) + p^r(k) \\
\rho_i(k) &\geq p_i(k) - p^r(k) \\
\rho_i(k) &\geq \delta p_i(k) + (1 - \delta)pmaxx(k) - p^r(k) \\
-\sigma_1 &\leq x_i(patio) - x_{i-1}(2KT) \leq \sigma_1 \\
-\sigma_2 &\leq x_i(terminal) - x_i(KT) \leq \sigma_2 \\
\sigma_1 &\leq \sigma_1max \\
\sigma_2 &\leq \sigma_2max \\
-\zeta_1 &\leq up_i(k) - up_{i-1}(k) \leq \zeta_1 \\
-\zeta_2 &\leq upl_i(k) - upl_{i-1}(k) \leq \zeta_2 \\
\zeta_1 &\leq \zeta_1max \\
\zeta_2 &\leq \zeta_2max
\end{aligned}$$

O problema de programação linear proposto acima representa a obtenção da trajetória de n trens ao longo de $2KT$ plataformas. Podemos verificar que o comportamento de cada trem depende exclusivamente do trem imediatamente anterior. Isto pode ser verificado fazendo uma analogia a sistemas discretos no tempo onde o problema (3.1) pode ser expresso pela seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
&\min \left(\sum_{t=1}^n (P\nu(t) + Q\omega(t)) \right) \\
&\text{sujeito a :} \\
&\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2^t & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(t+1) \\ \omega(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} D_1^t & 0 \\ D_2^t & E_1 \\ 0 & E_2 \\ D_3 & E_3 \\ D_4 & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(t+1) \\ \omega(t+1) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_1 & 0 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_1^t \\ G_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{min} &\leq \nu(t) \leq \nu_{max} & \forall t = 1, \dots, n \\
\omega_{min} &\leq \omega(t) \leq \omega_{max} & \forall t = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde P e Q são matrizes de ponderação, $A_1, A_2^t, B_1, C_1, D_1^t, D_2^t, D_3, D_4, E_1, E_2, E_3, E_4, F_1, F_2, G_1^t$ e G_2 são constituídos de termos constantes, A_2^t, D_1^t, D_2^t e G_1^t são função da demanda de passageiros e:

$$\nu(t) \triangleq \begin{bmatrix} up_t(k) \\ upl_t(k) \\ x_t(k) \\ x_t(patio) \\ x_t(terminal) \end{bmatrix}; \quad \omega(t) \triangleq \begin{bmatrix} p_t(k) \\ \rho_t(k) \\ \epsilon_t(k) \\ \epsilon_t(patio) \\ \epsilon_t(terminal) \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$

$$\forall t = i = 1, \dots, n \tag{3.3}$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, KT, (KT + 1), \dots, 2KT$$

O problema de P.L. na equação (3.2) pode ser simplificado para:

$$\begin{aligned}
&\min \left(\sum_{t=1}^n (P\nu(t) + Q\omega(t)) \right) \\
&\text{sujeito a :} \\
&\quad \begin{bmatrix} A^t & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(t+1) \\ \omega(t+1) \end{bmatrix} = C\nu(t) \\
&\quad \begin{bmatrix} D^t & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu(t+1) \\ \omega(t+1) \end{bmatrix} \leq F\nu(t) + G^t \\
&\quad \nu_{min} \leq \nu(t) \leq \nu_{max} \quad \forall t = 1, \dots, n \\
&\quad \omega_{min} \leq \omega(t) \leq \omega_{max} \quad \forall t = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde A^t , B , C , D^t , E , F e G^t são constituídas de termos constantes e A^t , D^t e G^t dependem da demanda. Pode-se observar que o vetor $\nu(t)$ representa a trajetória do trem t ao longo de todo o percurso e que as variáveis $\omega(t)$ de um trem t embora incluídas na função objetivo, não exercem diretamente nenhuma influência sobre o comportamento do trem $(t + 1)$ a ser despachado posteriormente.

O problema (3.4) pode ser agora reformulado através de uma formulação de controle preditivo (MPC) conforme a seguir:

$$\begin{aligned}
\min_{V, W} J'(V, W) &= \sum_{k=1}^{Nt} (P\nu_{t+t_k|t} + Q\omega_{t+t_k|t}) \\
\text{sujeito a :} \\
\nu_{min} &\leq \nu_{t+t_k|t} \leq \nu_{max} \quad t_k = 1, \dots, Nt \\
\omega_{min} &\leq \omega_{t+t_k|t} \leq \omega_{max} \quad t_k = 1, \dots, Nt \\
v_{t|t} &= v(t) \\
A^t \nu_{t+t_k+1|t} + B\omega_{t+t_k+1|t} &= C\nu_{t+t_k|t}, \quad t_k \geq 0 \\
D^t \nu_{t+t_k+1|t} + E\omega_{t+t_k+1|t} &\leq F\nu_{t+t_k|t} + G^t, \quad t_k \geq 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $V \triangleq \{\nu_t, \dots, \nu_{t+Nt}\}$ e $W \triangleq \{\omega_t, \dots, \omega_{t+Nt}\}$. Em formulações de controle preditivo aplicados a sistemas discretos no tempo $(t + t_k|t)$ é uma notação que indica vetores preditos no tempo. Nesta formulação contudo $t_k = 1, \dots, Nt$ indica o número de trens considerados e portanto $\nu_{t+t_k|t}$ e $\omega_{t+t_k|t}$ representam os vetores de predição relativos à trajetória dos trens.

3.2.1 Obtenção de um Programa Horário Completo

A demanda de passageiros ao longo das plataformas varia consideravelmente durante um dia de operação. Se esta variação da demanda é conhecida, podemos utilizar o modelo proposto na equação (3.5) para determinar o Programa Horário ao longo de um dia inteiro, sendo conhecido apenas o comportamento do primeiro trem e a demanda prevista durante o dia.

A trajetória do primeiro trem pode ser facilmente obtida utilizando a abordagem a *headways* constantes proposta em (2.63) ou mesmo utilizando a abordagem a *headways* variáveis proposta em (3.1) assumindo n limitado.

O modelo proposto na equação (3.5) pode então ser utilizado para determinar o comportamento de cada trem a ser despachado. Na formulação do MPC, Nt indica o número de trens a serem considerados. Então, para um MPC “single-step”, o problema consiste em obter os vetores $\nu_{t+Nt|t}$ e $\omega_{t+Nt|t}$ onde ν_t é conhecido e $Nt = 1$. Se o problema de otimização é repetido em um tempo $t + 1$, baseado no comportamento conhecido de ν_{t+1} e considerando a variação da demanda de passageiros, poderíamos obter a trajetória ótima do próximo trem a ser despachado. É evidente que se assumimos Nt reduzido, o esforço computacional para a solução do problema cai drasticamente, o que viabiliza sua aplicabilidade prática.

A utilização da metodologia de controle proposta poderia também ser utilizada em duas situações:

- Executar a transição entre dois períodos onde o *headway* é mantido constante.
- Modificar o Programa Horário on-line, quando a demanda de determinado número de trens foge consideravelmente da demanda prevista anteriormente.

3.2.2 Transição entre períodos a *headway* constante

Na obtenção do programa horário de um dia inteiro, podemos considerar que a demanda vista por um determinado conjunto de trens pode ser assumida aproximadamente constante. Diante disto, podemos utilizar a formulação a *headway* constante (2.63) para obter a trajetória de todos os trens que serão despachados durante estes períodos de demanda constante. Considerando agora a variação da demanda, podemos desenvolver uma metodologia para efetuar a transição entre estes períodos, sendo portanto conhecida a trajetória do primeiro e do último trem a ser despachado durante esta transição.

Nestas situações a estratégia de controle é desenvolvida em duas etapas. Numa primeira etapa, a solução do MPC proposto em (3.5) deve ser obtida repetidamente onde a solução obtida para V_{t+1} é utilizada como condição inicial no passo seguinte, de forma a obter a trajetória de NP trens. Para cada $Passo = 1, \dots, NP$, assumimos que a matriz origem-destino que representa a demanda prevista, é obtida através da combinação linear entre as matrizes de demanda MOD_1 e MOD_2 que representam as demandas previstas para o início e fim do período de transição.

Portanto devemos executar em NP passos o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
\min_{V,W} J'(V,W) &= \sum_{k=1}^{Nt} (P\nu_{t+t_k|t} + Q\omega_{t+t_k|t}) \\
\text{sujeito a :} \\
\nu_{min} &\leq \nu_{t+t_k|t} \leq \nu_{max} \quad t_k = 1, \dots, Nt \\
\omega_{min} &\leq \omega_{t+t_k|t} \leq \omega_{max} \quad t_k = 1, \dots, Nt \\
v_{t|t} &= v(t) \\
A^t \nu_{t+t_k+1|t} + B\omega_{t+t_k+1|t} &= C\nu_{t+t_k|t}, \quad t_k \geq 0 \\
D^t \nu_{t+t_k+1|t} + E\omega_{t+t_k+1|t} &\leq F\nu_{t+t_k|t} + G^t, \quad t_k \geq 0 \\
MOD &= (1 - \lambda)MOD_1 + \lambda MOD_2 \\
\lambda &= \frac{Passo}{NP}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Para que a convergência seja rápida e sem oscilações assumimos que as variáveis estão limitadas numa faixa de operação intermediária entre os valores previstos no início e fim do período de transição, ou seja:

$$\begin{aligned}
\min\{\nu(t), \nu(t + Nt)\} &\leq \nu_{t+t_k|t} \leq \max\{\nu(t), \nu(t + Nt)\} \quad t_k = 1, \dots, Nt \\
\min\{\omega(t), \omega(t + Nt)\} &\leq \omega_{t+t_k|t} \leq \max\{\omega(t), \omega(t + Nt)\} \quad t_k = 1, \dots, Nt
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Numa segunda etapa propõe-se a aplicação de uma metodologia de controle preditivo com horizonte variável conforme a seguir:

$$\begin{aligned}
\min_{V,W} J'(V,W) &= \sum_{k=1}^{Nt-1} (P\nu_{t+t_k|t} + Q\omega_{t+t_k|t}) \\
\text{sujeito a :} \\
\min\{\nu(t), \nu(t + Nt)\} &\leq \nu_{t+t_k|t} \leq \max\{\nu(t), \nu(t + Nt)\} \quad t_k = 1, \dots, Nt \\
\min\{\omega(t), \omega(t + Nt)\} &\leq \omega_{t+t_k|t} \leq \max\{\omega(t), \omega(t + Nt)\} \quad t_k = 1, \dots, Nt \\
v_{t|t} &= v(t) \\
v_{t+Nt|t} &= v(t + Nt) \\
A^t \nu_{t+t_k+1|t} + B\omega_{t+t_k+1|t} &= C\nu_{t+t_k|t}, \quad t_k \geq 0 \\
D^t \nu_{t+t_k+1|t} + E\omega_{t+t_k+1|t} &\leq F\nu_{t+t_k|t} + G^t, \quad t_k \geq 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\nu(t)$ e $\nu(t + Nt)$ denotam a trajetória conhecida do primeiro e último trem, sendo que a demanda mantém-se constante para todos os trens. Neste caso, a trajetória dos $(NPF - 2)$ trens será obtida repetindo o problema de otimização em um tempo $(t + 1)$, baseado no comportamento conhecido de $\nu(t + 1)$ e $\nu(t + Nt)$ com $Nt = (NPF - Passo + 1)$ onde $Passo = 1, 2, \dots, (NPF - 2)$, configurando uma formulação de controle preditivo com horizonte variável.

Podemos finalmente concluir que para efetuar a transição entre períodos a *headway* constante seria necessário um número de passos dado por $(NP + NPF - 2)$ onde em cada passo obtém-se a trajetória de um trem. Para garantir a factibilidade do problema de otimização o projetista deve estar atento às limitações operacionais de forma a ajustar um número de passos conveniente. Especialmente no ajuste de NPF , deve-se lembrar que para valores mais elevados pode ser necessário um esforço computacional considerável. Em geral, o problema converge para NPF reduzido (da ordem de 4 ou 5) permitindo a utilização on-line da metodologia proposta durante a operação comercial da linha.

3.3 Exemplo Numérico

A implementação do método para geração das trajetórias de n trens foi efetuada considerando dados compatíveis com uma linha comercial do porte da Via Norte/Sul do metrô de São Paulo. Os limites operacionais considerados nas simulações são:

$$uplmin_i = \begin{bmatrix} 28 & 107 & 99 & 79 & 88 & 110 & 100 & 93 & 84 & 74 & 87 & 82 \\ 73 & 71 & 82 & 66 & 74 & 111 & 78 & 88 & 118 & 74 & 79 & 111 & 71 & 72 \\ 84 & 76 & 67 & 82 & 83 & 73 & 74 & 91 & 102 & 111 & 85 & 80 & 96 & 107 \end{bmatrix},$$

$$uplmax_i = \begin{bmatrix} 28 & 110 & 100 & 80 & 89 & 116 & 100 & 94 & 86 & 75 & 92 & 88 \\ 75 & 76 & 84 & 74 & 75 & 112 & 81 & 92 & 118 & 78 & 81 & 113 & 74 & 74 \\ 85 & 82 & 74 & 82 & 90 & 79 & 78 & 94 & 106 & 115 & 86 & 81 & 96 & 107 \end{bmatrix},$$

$$upmax_i(k)=50 \text{ s} \quad , \quad upmin_i(k)=15 \text{ s} \quad , \quad xmax_i(k)=300 \text{ s} \quad , \quad xmin_i(k)=90 \text{ s},$$

$$pmax_i(k) = 2800 \text{ pass.} \quad , \quad pmax(k)=2600 \text{ pass.} \quad , \quad p^r(k)=2400 \text{ pass.},$$

$$\sigma_1max=40 \text{ , } \sigma_2max=10 \text{ , } \zeta_1max=15 \text{ , } \zeta_2max=5 \text{ , } MP_i(k) = 0.2 \text{ e } \delta = 10.$$

Na implementação, vamos considerar a geração de despachos durante os seguintes períodos da manhã:

- Início da manhã (05:00h às 06:00h) com demanda relativamente constante.
- Período com variação considerável na demanda (06:00h às 06:40 h).
- Horário de pico da manhã (06:40h às 08:40h) com demanda relativamente constante.

Para o início da manhã, podemos prever uma matriz origem-destino (MOD_1) aproximada com valores típicos de demanda de passageiros:

$$MOD_1 = \frac{1}{10000} * \begin{bmatrix} 0 & 6 & 24 & 30 & 28 & 58 & 78 & 59 & 87 & 43 & 22 & 79 & 79 & 237 & 216 & 39 & 101 & 32 & 14 & 51 \\ 12 & 0 & 3 & 5 & 8 & 17 & 23 & 18 & 29 & 14 & 8 & 28 & 28 & 83 & 76 & 14 & 37 & 12 & 6 & 21 \\ 12 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 7 & 5 & 9 & 5 & 3 & 9 & 9 & 29 & 27 & 5 & 13 & 4 & 2 & 8 \\ 56 & 5 & 2 & 0 & 1 & 6 & 14 & 11 & 19 & 11 & 6 & 23 & 23 & 75 & 69 & 13 & 36 & 13 & 6 & 24 \\ 42 & 6 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 6 & 11 & 6 & 3 & 15 & 15 & 51 & 47 & 9 & 25 & 9 & 4 & 17 \\ 19 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 20 & 18 & 3 & 11 & 4 & 2 & 8 \\ 29 & 4 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 7 & 7 & 28 & 24 & 5 & 14 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 12 & 11 & 2 & 8 & 3 & 2 & 7 \\ 14 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 9 & 9 & 2 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 9 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 6 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 12 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 7 & 2 & 7 & 4 & 2 & 7 \\ 29 & 6 & 7 & 4 & 4 & 6 & 7 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 5 & 19 & 10 & 4 & 22 \\ 29 & 6 & 7 & 4 & 4 & 6 & 7 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 5 & 19 & 10 & 4 & 22 \\ 102 & 19 & 26 & 17 & 14 & 27 & 32 & 19 & 26 & 11 & 5 & 9 & 9 & 0 & 11 & 7 & 49 & 38 & 21 & 93 \\ 152 & 29 & 39 & 26 & 22 & 38 & 46 & 29 & 41 & 20 & 9 & 31 & 31 & 17 & 0 & 4 & 39 & 37 & 33 & 147 \\ 10 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 9 \\ 44 & 9 & 12 & 8 & 7 & 14 & 17 & 13 & 19 & 10 & 6 & 22 & 22 & 50 & 24 & 2 & 0 & 3 & 5 & 43 \\ 30 & 6 & 9 & 7 & 6 & 12 & 15 & 12 & 20 & 11 & 6 & 25 & 25 & 85 & 49 & 6 & 7 & 0 & 2 & 22 \\ 42 & 9 & 13 & 10 & 9 & 18 & 23 & 17 & 30 & 17 & 10 & 41 & 41 & 144 & 140 & 19 & 33 & 5 & 0 & 12 \\ 136 & 31 & 46 & 34 & 31 & 64 & 85 & 64 & 102 & 59 & 36 & 154 & 154 & 579 & 563 & 102 & 262 & 62 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

Para o horário de pico, adotamos a seguinte matriz origem-destino (MOD_2) aproximada:

$$MOD_2 = \frac{1}{1000} *$$

0	33	113	160	223	717	623	700	583	300	220	427	427	1497	673	343	220	47	47	127
11	0	17	37	87	187	203	297	260	167	140	277	277	940	360	130	97	27	27	73
14	2	0	3	17	67	73	110	97	67	57	120	120	410	157	57	43	13	13	37
49	9	4	0	10	60	113	173	157	113	103	220	220	790	307	113	87	27	27	77
48	16	9	3	0	20	57	143	130	97	90	213	213	803	313	117	93	27	27	87
23	8	8	3	1	0	10	37	57	40	40	93	93	393	143	57	50	13	17	47
38	13	14	9	3	3	0	17	37	50	47	113	113	540	200	80	67	23	23	73
20	7	8	5	3	4	1	0	7	13	23	53	53	260	100	43	37	13	13	43
26	10	11	8	5	10	4	1	0	3	10	43	43	223	90	40	40	17	17	43
10	4	4	3	2	4	3	2	0	0	3	13	13	123	57	27	23	10	10	33
14	6	7	6	4	8	6	5	2	0	0	7	7	163	77	43	37	17	17	47
23	9	12	10	7	15	12	10	6	2	1	0	0	120	97	63	53	27	27	80
60	33	50	33	53	70	50	60	60	13	3	0	0	120	97	63	53	27	27	80
123	67	100	70	123	173	140	177	180	77	47	70	70	0	33	47	73	53	60	180
160	87	133	93	163	217	173	230	253	120	77	197	197	133	0	17	40	37	67	200
23	13	20	13	23	33	27	37	43	20	17	47	47	70	7	0	3	3	10	43
43	23	40	27	50	77	63	93	113	53	43	133	133	367	50	7	0	3	10	57
50	27	47	33	63	100	87	143	190	100	77	243	243	1010	163	30	10	0	7	6
73	43	73	57	103	163	143	220	297	160	130	417	417	1800	487	110	60	13	0	23
167	103	183	140	267	423	377	580	733	407	337	1143	1143	5223	1410	420	353	127	30	0

Serão apresentados resultados de simulações relativos aos primeiros 40 trens despachados no início da manhã (aproximadamente entre 05:00h e 07:00h). Serão apresentados resultados comparativos aplicando a formulação de controle preditivo proposto para ilustrar os seguintes procedimentos:

- Formulação de Controle Preditivo (MPC1)

Consiste na geração de Programa Horário para os primeiros 40 trens despachados. Neste procedimento a trajetória do primeiro trem é obtida utilizando o algoritmo (3.1) para $n = 2$ trens. A trajetória de todos os outros trens despachados (2 a 40) é obtida executando repetidamente a formulação de controle preditivo com horizonte móvel proposta em (3.5) com $Nt = 1$ ("single step"), baseado no comportamento conhecido do trem anterior.

- Formulação de Controle Preditivo para transição entre períodos a *headway* constante (MPC2)

Neste procedimento a trajetória dos primeiros 10 trens despachados são obtidas utilizando a formulação proposta em (2.63) considerando que para estes despachos a demanda de passageiros corresponde à demanda do início do dia que pode ser assumida como praticamente constante. De forma equivalente, para os últimos 11 trens, utiliza-

mos a formulação proposta em (2.63) para obter os despachos para o horário de pico. A trajetória dos outros 19 trens será obtida através da transição entre estes períodos a *headway* constante. Serão efetuados $NP = 16$ passos aplicando a formulação de controle preditivo com horizonte móvel de 1 passo proposta em (3.6) e (3.7) e na sequência $NPF = 5$ passos aplicando a formulação de controle preditivo com horizonte variável de 1 passo proposto em (3.9).

Inicialmente consideraremos que em MPC1 e MPC2 serão adotados os seguintes parâmetros de ponderação: $q = 0.1$; $r = 1$; $s = 10$; $s_1 = 10$; $s_2 = 10^6$; e $z = 1$ em todos os despachos.

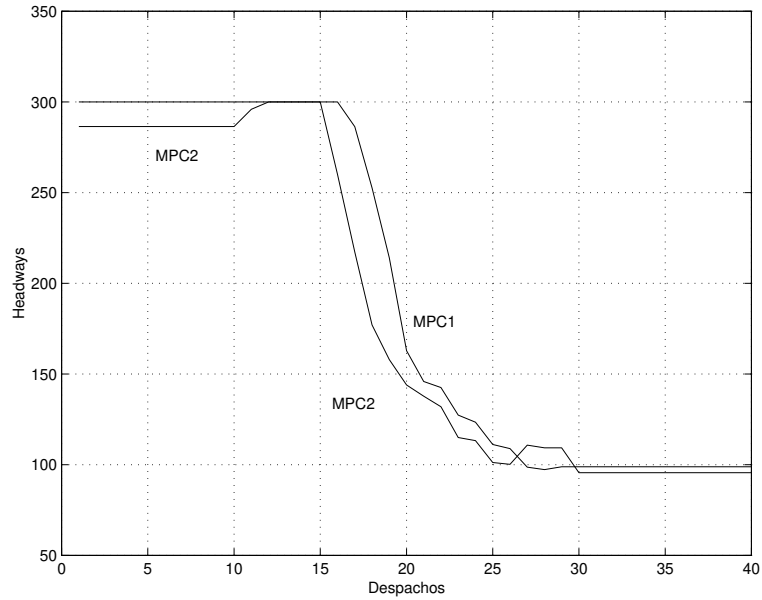


Figura 3.1: Variação do *Headway* no Pátio para os Despachos da Manhã
 $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$

A figura 3.1 apresenta o perfil dos *headways* no pátio para os primeiros 40 trens despachados no início da manhã (aproximadamente entre 05:00h e 07:00h). A figura 3.2 apresenta o máximo carregamento obtido em cada trem despachado. Na figura 3.3 temos a variação do número de trens em operação estimado através da equação (2.52). Analisando estes resultados podemos verificar que MPC1 apresenta quase sempre valores mais elevados para os *headways* em relação a MPC2, o que reduz neste caso o número de trens em operação.

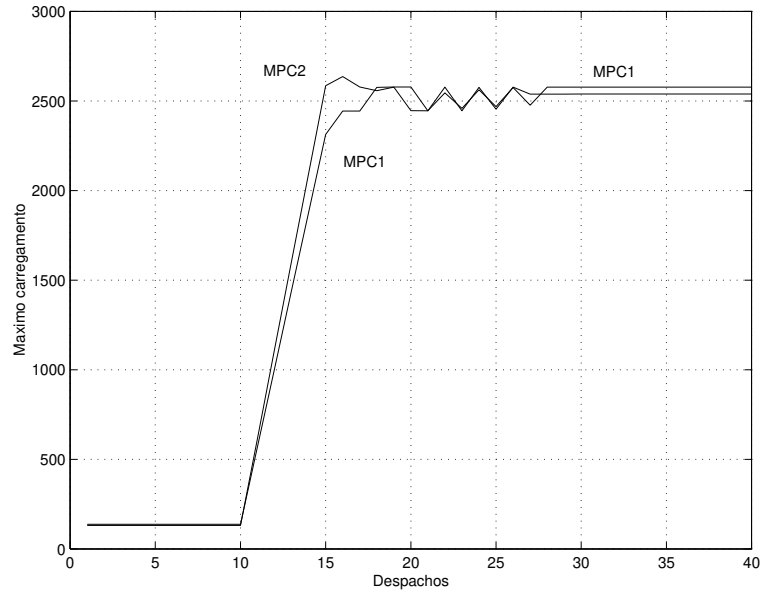


Figura 3.2: Máximo Carregamento dos Trens para os Despachos da Manhã
 $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$

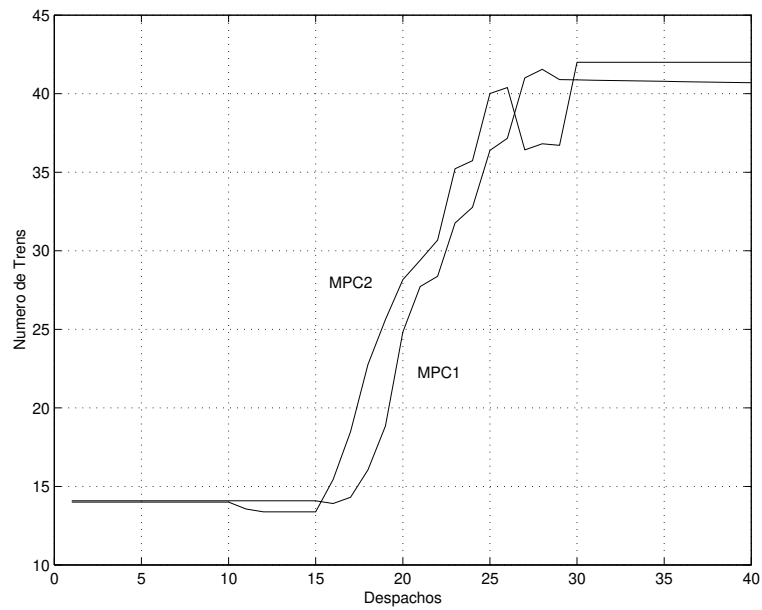


Figura 3.3: Variação do Número de Trens em Operação para os Despachos da Manhã
 $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$

Para verificar o carregamento dos trens será ilustrado o perfil de carregamento do 10°, 20° e 30° utilizando os dois procedimentos. A figura 3.4 ilustra o comportamento do 10° trem onde observa-se que em MPC1 o trem está mais carregado devido à utilização de maiores valores de *headways*.

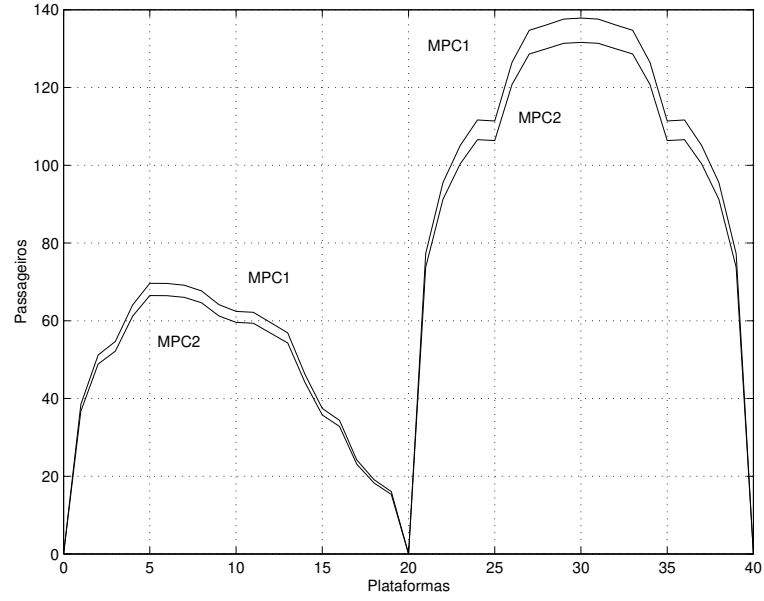


Figura 3.4: Comparação do Carregamento do 10° Trem nas Estações
 $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$

Os resultados numéricos obtidos para o 10° trem são:

Para MPC1:

$$x(patio) = 300.0 \text{ (s)} \quad x_{medio} = 300.0 \text{ (s)} \quad nT = 14.0867 = 15 \text{ trens}$$

$$p_i(30) = 137.9 \text{ pass.} \quad p_{medio} = 83.6 \text{ pass.}$$

$$up_{medio} = 20.1242 \text{ (s)} \quad upl_{medio} = 85.5258 \text{ (s)}$$

Para MPC2:

$$x(patio) = 286.4286 \text{ (s)} \quad x_{medio} = 286.4286 \text{ (s)} \quad nT = 14 \text{ trens}$$

$$p_i(30) = 131.6 \text{ pass.} \quad p_{medio} = 79.8 \text{ pass.}$$

$$up_{medio} = 15.0 \text{ (s)} \quad upl_{medio} = 85.25 \text{ (s)}$$

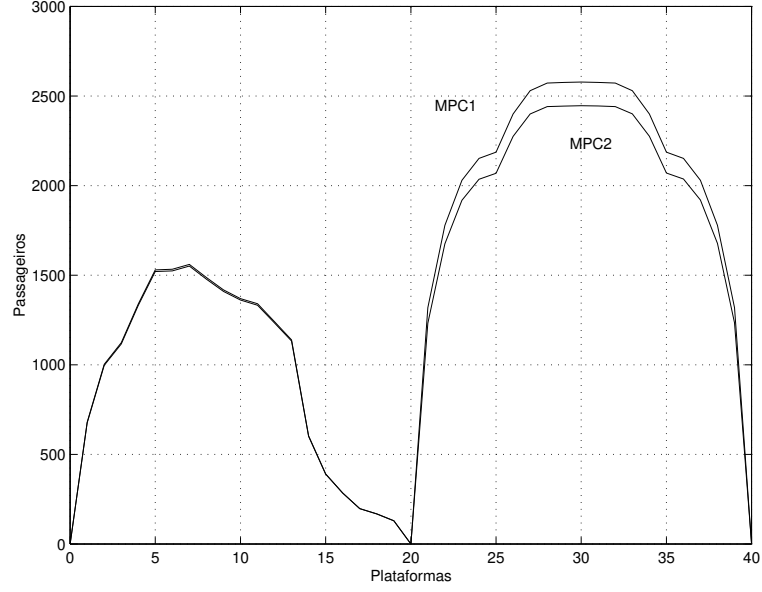


Figura 3.5: Comparação do Carregamento do 20º Trem nas Estações
 $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$

A figura 3.5 ilustra o perfil do carregamento do 20º trem onde obtivemos os seguintes resultados:

Para MPC1:

$$\begin{aligned}
 x(patio) &= 162.8518 \text{ (s)} & x_{medio} &= 166.1883 \text{ (s)} & nT &= 24.8280 = 25 \text{ trens} \\
 p_i(30) &= 2578.0 \text{ pass.} & p_{medio} &= 1581.6 \text{ pass.} \\
 up_{medio} &= 15.8321 \text{ (s)} & upl_{medio} &= 85.25 \text{ (s)}
 \end{aligned}$$

Para MPC2:

$$\begin{aligned}
 x(patio) &= 143.9342 \text{ (s)} & x_{medio} &= 145.7172 \text{ (s)} & nT &= 28.1616 = 29 \text{ trens} \\
 p_i(30) &= 2446.3 \text{ pass.} & p_{medio} &= 1380.4 \text{ pass.} \\
 up_{medio} &= 16.0509 \text{ (s)} & upl_{medio} &= 85.2845 \text{ (s)}
 \end{aligned}$$

A figura 3.6 ilustra o perfil do carregamento do 30º trem onde obtivemos os seguintes resultados:

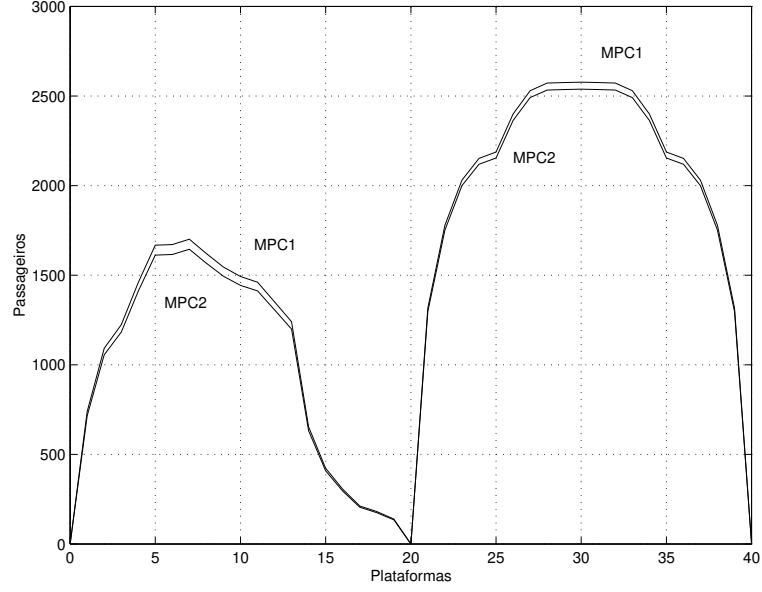


Figura 3.6: Comparação do Carregamento do 30º Trem nas Estações
 $q = 0.1$, $r = 1$, $s = 10$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$

Para MPC1:

$$\begin{aligned} x(pat) &= 98.8547 \text{ (s)} & x_{medio} &= 97.9913 \text{ (s)} & nT &= 40.8790 = 41 \text{ trens} \\ p_i(30) &= 2577.5 \text{ pass.} & p_{medio} &= 1627.5 \text{ pass.} \\ up_{medio} &= 15.7771 \text{ (s)} & upl_{medio} &= 85.25 \text{ (s)} \end{aligned}$$

Para MPC2:

$$\begin{aligned} x(pat) &= 95.5729 \text{ (s)} & x_{medio} &= 95.5729 \text{ (s)} & nT &= 42 \text{ trens} \\ p_i(30) &= 2538.5 \text{ pass.} & p_{medio} &= 1593.2 \text{ pass.} \\ up_{medio} &= 15.1016 \text{ (s)} & upl_{medio} &= 85.25 \text{ (s)} \end{aligned}$$

A estratégia de transição MPC2 pode alternativamente ser efetuada reduzindo o número de passos da formulação de controle preditivo com horizonte variável dado por $(NPF - 2)$ passos. Contudo, para garantir a factibilidade pode ser necessário modificar os parâmetros de ponderação q , r e s para minimizar a variação dos *headways* na transição, tornando a solução factível. Esta situação é ilustrada nas figuras 3.7, 3.8

e 3.9 onde $NPF = 4$ e utilizamos $q = 100$; $r = 10$; $s = 1$; $s_1 = 10$; $s_2 = 10^6$; e $z = 1$ durante a transição em MPC2. Observa-se claramente que, devido à minimização do *headway* o carregamento em MPC2 é muito reduzido durante a transição e o número de trens necessário durante este período é muito elevado, o que é economicamente desvantajoso para a concessionária.

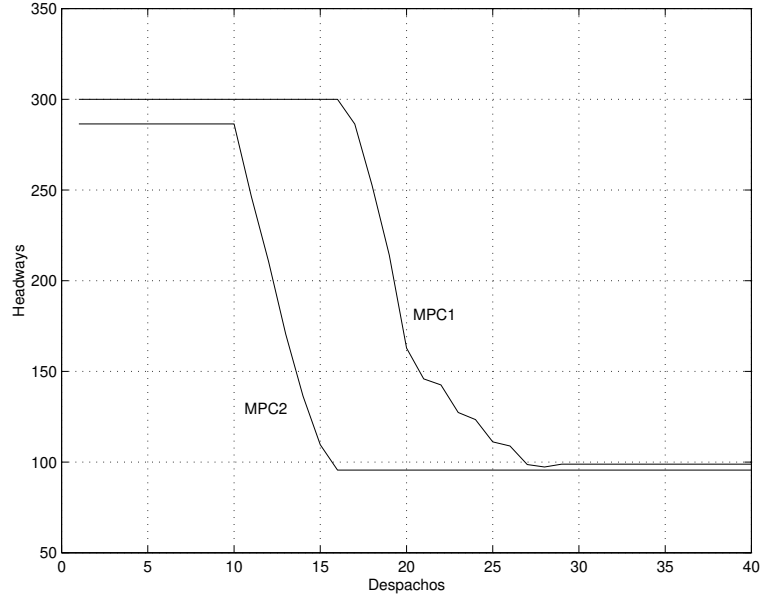


Figura 3.7: Variação do *Headway* no Pátio para os Despachos da Manhã
 $q = 100$, $r = 10$, $s = 1$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$ durante a transição

O carregamento do 20º trem é ilustrado na figura 3.10 onde em MPC2 obtivemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} x(pat) &= 95.5729 \text{ (s)} & x_{medio} &= 95.5729 \text{ (s)} & nT &= 42 \text{ trens} \\ p_i(30) &= 1603.0 \text{ pass.} & p_{medio} &= 910.0 \text{ pass.} \\ up_{medio} &= 15.1016 \text{ (s)} & upl_{medio} &= 85.25 \text{ (s)} \end{aligned}$$

Da mesma forma que nos exemplos anteriores, comparando os resultados podemos perceber que na estratégia proposta em MPC1, os *headways* tendem a manter valores mais elevados em relação ao proposto em MPC2 o que implica em maior carregamento nos trens, o suficiente para manter um menor número de trens em operação durante

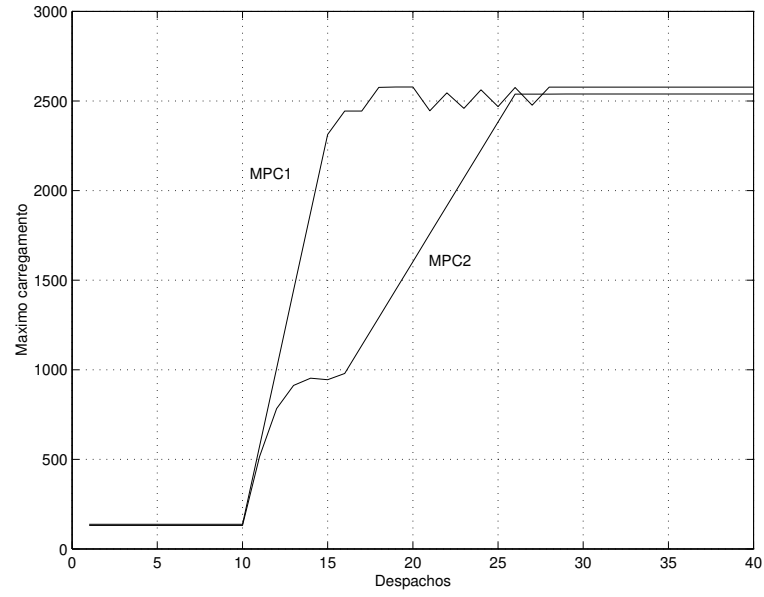


Figura 3.8: Máximo Carregamento dos Trens para os Despachos da Manhã
 $q = 100$, $r = 10$, $s = 1$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$ durante a transição

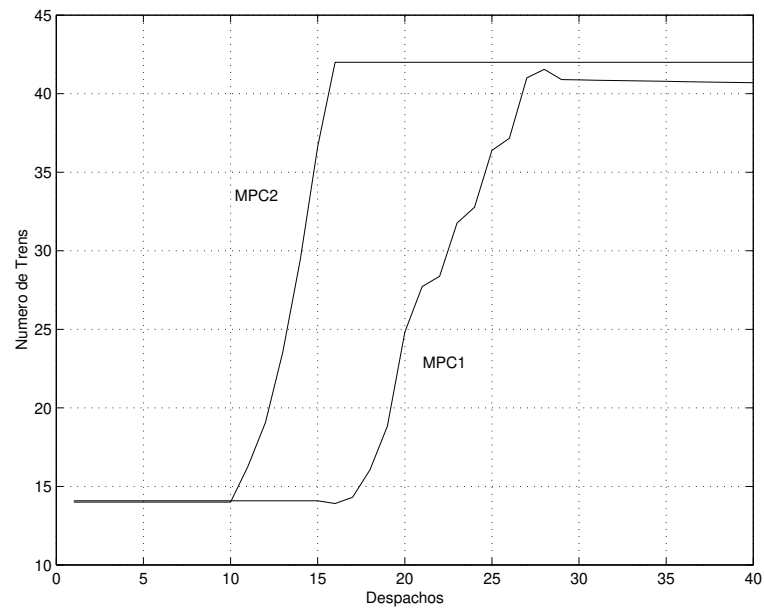


Figura 3.9: Variação do Número de Trens em Operação para os Despachos da Manhã
 $q = 100$, $r = 10$, $s = 1$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$ durante a transição

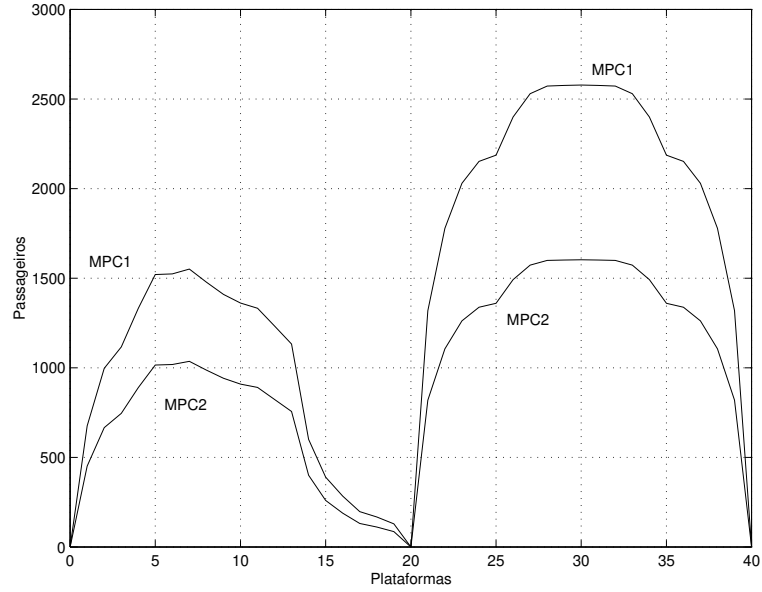


Figura 3.10: Comparação do Carregamento do 20º Trem nas Estações
 $q = 100$, $r = 10$, $s = 1$, $s_1 = 10$, $s_2 = 10^6$ e $z = 1$ durante a transição

boa parte da operação no início do dia. Além disso, a solução por MPC2 pode ser computacionalmente mais penosa por apresentar um número de variáveis e equações mais elevados nos NPF passos da transição.

3.4 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma nova metodologia para geração do Programa Horário de linhas metroviárias sendo baseada numa formulação de controle preditivo. A formulação considera os limites operacionais, margem de controle para a regulação durante a operação comercial, restrições de continuidade e homogeneidade de tráfego e garantia de que todos passageiros aguardando embarcam no próximo trem. O índice de desempenho formado por funções lineares por partes contribui decisivamente para a eficiência computacional e aplicabilidade prática. A solução obtida representa um compromisso entre o custos operacionais e a garantia de conforto para os usuários.

O desempenho da metodologia foi testado utilizando uma linha metroviária com

estrutura e dados similares aos da linha Norte/Sul do metrô de São Paulo. Os resultados ilustraram a utilização da metodologia para obter o Programa Horário durante um período específico de operação e com demanda variável de passageiros, efetuando os seguintes procedimentos:

- Determinação da trajetória de n trens despachados sequencialmente partindo da trajetória do primeiro trem e aplicando uma formulação de controle preditivo móvel de 1 passo.
- Determinar a trajetória de um número de trens necessários para efetuar a transição entre períodos com demanda e *headways* constantes utilizando uma formulação de controle preditivo com horizonte móvel de comprimento variável.

Os resultados obtidos pelo primeiro procedimento mostraram-se computacionalmente eficientes e economicamente mais viáveis para as empresas concessionárias por apresentarem maior carregamento nos trens e menor número de trens em operação, sendo portanto apropriados para a obtenção do Programa Horário de um dia inteiro. O segundo procedimento também apresentou resultados satisfatórios, podendo ser utilizado para efetuar a transição entre períodos a *headway* constante, especialmente de um período com baixa demanda para um período com alta demanda. O segundo procedimento é também apropriado para efetuar a adaptação em tempo real do Programa Horário às perturbações da demanda de passageiros.

Capítulo 4

Regulação Robusta do Tráfego de Trens em Linhas Metroviárias

4.1 Introdução

O tráfego de trens em uma linha de metrô de alta frequência é sabido ser naturalmente instável. Isto significa que qualquer desvio com respeito ao Programa Horário é amplificado com o tempo e perturba a operação dos outros trens. O fenômeno é explicado desta maneira: numa linha de alta frequência, os passageiros chegam aleatoriamente nas estações. Assim, o número de passageiros esperando numa plataforma para pegar o próximo trem cresce com o intervalo de tempo contado desde a partida do trem precedente. Se um trem está atrasado, este intervalo de tempo, e portanto, o número de passageiros cresce mais do que o esperado nominalmente. O tempo de parada de um trem na plataforma que depende do número de passageiros trocados entre o trem e a plataforma, obviamente, também cresce. Portanto o atraso deste trem cresce a cada plataforma ao longo de sua trajetória na via. Um controle de tráfego é portanto necessário a fim de prevenir esta instabilidade. Um controle de tráfego mínimo é implementado nas linhas de metrô através de dispositivos tolerantes à falhas que garantem

a segurança no sistema, impondo uma distância mínima entre trens, evitando assim possíveis colisões. Este controle, entretanto, não garante uma distribuição uniforme dos trens e torna a velocidade comercial muito baixa (Campion et alli, 1985).

Uma estratégia de controle mais adequada e de utilização generalizada nos metrô atuais, procura obter a aderência do tráfego dos trens a um programa horário nominal. Os modelos de tráfego de trens (Sasama et alli, 1983) bem como os métodos de controle propostos neste capítulo são baseados nesta estratégia.

O controle ou regulação do tráfego de trens é efetuado nos instantes de chegada e partida, nas plataformas de embarque e desembarque de passageiros nas estações, dos trens em circulação na linha durante a operação comercial. Nestes instantes é medido o desvio dos horários dos trens em relação ao Programa Horário Nominal.

As ações de controle consistem em instruções dadas pelo controlador automático de trens nas estações, aumentando ou diminuindo sua velocidade durante o percurso até a próxima estação e/ou seu tempo de parada na plataforma. O controle é naturalmente restrito pelo espectro de velocidades permitidas aos trens, tempo mínimo de espera nas plataformas e regras de segurança de tráfego. O intervalo de tempo entre trens sucessivos é também restrito pelas regras de segurança de tráfego e pela ocupação máxima dos trens (Van Breusegem et alli, 1991).

O problema de regulação do tráfego de trens foi tratado na literatura em vários trabalhos tais como (Sasama et alli, 1983), (Araya et alli, 1984), (Campion et alli, 1985), (Van Breusegem et alli, 1991), (Carvalho et alli, 1993), (Carvalho et alli, 1994), (Milani et alli, 1994), (Corrêa et alli, 1996), (Milani et alli, 1997), (Milani et alli, 1997), (Milani et alli, 1998), (Corrêa, 1999), (Faria, 2000) e (Corrêa et alli, 2001).

Neste capítulo será apresentado inicialmente um novo modelo de tráfego para linhas metroviárias considerando a inclusão da margem de controle do Programa Horário (Assis et alli, 2002). Se desprezarmos esta margem de controle os modelos serão idênticos aos propostos por (Sasama et alli, 1983), que combinam as características de um sistema movido a eventos discretos, dentro de uma formulação de variáveis de estados adequados para o tratamento de problemas de programação e controle do tráfego metroviário.

Em seguida é apresentada a formulação de programação linear para o problema de regulação robusta do tráfego de trens em linhas de metrô proposta por (Corrêa, 1999) e (Corrêa e Milani, 2001).

Finalmente, uma nova formulação para a regulação do tráfego de trens será apresentada considerando a inclusão de restrições sobre o carregamento de passageiros nos trens e a margem de controle prevista no Programa Horário (Assis et alli, 2002).

Ao longo deste capítulo, bem como no restante deste trabalho utilizaremos a seguinte convenção: para duas matrizes reais $n \times m$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, $A \leq B$ é equivalente a $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todo i, j , tal que $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. $A \geq 0$ é equivalente a $a_{ij} \geq 0$ e $|A| = (|a_{ij}|)$.

4.2 Modelamento do Problema de Regulação

Considere n trens ($i = 1, \dots, n$) e uma linha com $2KT$ plataformas ($k = 1, \dots, KT, KT+1, \dots, 2KT$) e dois terminais (TM1 e TM2).

O instante da partida do trem i em duas plataformas sucessivas $k, k+1$ é dado pela equação (2.1):

$$t_i(k+1) = t_i(k) + up_i(k+1) + upl_i(k+1) \quad (4.1)$$

O tempo de percurso pode ser modelado como:

$$upl_i(k) = R_i(k) + u_i^1(k) + v_i^1(k) \quad (4.2)$$

onde $R_i(k)$ é o tempo nominal do percurso previsto pelo Programa Horário entre as plataformas $(k-1)$ e k , $u_i^1(k)$ é a ação do controle aplicado ao i -ésimo trem entre as plataformas $(k-1)$ e k para diminuir ($u_i^1(k) < 0$) ou aumentar ($u_i^1(k) > 0$) o tempo de percurso e $v_i^1(k)$ é um termo de perturbação.

O tempo de parada $up_i(k)$ foi modelado anteriormente considerando a inclusão de uma margem para garantir o embarque de todos passageiros, sendo esta ajustada pelo projetista como constante $M_i(k)$ (2.28) ou como uma componente percentual $MP_i(k)$ (2.27).

Então, incluindo as componentes de controle ($u_i^2(k)$) e perturbação $v_i^2(k)$) temos:

$$up_i(k) = c_i^1(k)x_i(k) + \sum_{j=1}^{k-1} c_i^2(j, k)x_i(j) + MS_i(k) + u_i^2(k) + v_i^2(k) \quad (4.3)$$

onde:

$$c_i^1(k) \triangleq \frac{\alpha_i(k)}{\beta_i(k)} \quad e \quad c_i^2(j, k) \triangleq \frac{\alpha l_i(j, k)}{\beta_i(k)}$$

Para margem de segurança constante temos:

$$MS_i(k) \geq \left(\frac{\beta_i(k) - \alpha_i(k)}{\beta_i(k)} \right) M_i(k) \quad (4.4)$$

Para margem de segurança proporcional e assumindo por simplicidade que $\beta_i(k) \gg MP_i(k)\alpha_i(k)$, temos então:

$$MS_i(k) \geq \left(\frac{\alpha_i(k)}{\beta_i(k)} x_i(k) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha l_i(j, k)}{\beta_i(k)} x_i(j) \right) MP_i(k) \quad (4.5)$$

Assumindo $MS_i(k)$ incorporado ao sinal de controle, as equações (4.1) - (4.3) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} t_i(k+1) = t_i(k) + c_i^1(k+1)x_i(k+1) + \sum_{j=1}^k c_i^2(j, k+1)x_i(j) + \\ + R_i(k+1) + u_i(k+1) + v_i(k+1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} u_i(k+1) &\triangleq u_i^1(k+1) + u_i^2(k+1) \\ v_i(k+1) &\triangleq v_i^1(k+1) + v_i^2(k+1) \end{aligned}$$

Assumindo por simplicidade que as perturbações ocorrem sempre em horários de pico quando os *headways* de cada trem ao longo do percurso mantêm-se praticamente constante, e utilizando a equação (2.29), podemos finalmente reescrever a equação (4.6) como:

$$t_i(k+1) = t_i(k) + c_i(k+1)x_i(k+1) + R_i(k+1) + u_i(k+1) + v_i(k+1) \quad (4.7)$$

Pela definição do *headway* (2.2) esta equação pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} t_i(k+1) = t_i(k) + c_i(k+1)(t_i(k+1) - t_{i-1}(k+1)) + \\ + R_i(k+1) + u_i(k+1) + v_i(k+1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Definindo o Horário Nominal, que representa a operação sem nenhum controle ou perturbação ($u_i(k) = 0$ e $v_i(k) = 0$) e incluindo a margem de controle efetivamente disponível para a regulação ($MS_i(k+1)$) temos:

$$T_i(k+1) = T_i(k) + c_i(k+1)(T_i(k+1) - T_{i-1}(k+1)) + MS_i(k+1) + R_i(k+1) \quad (4.9)$$

Definindo $y_i(k)$ como o desvio entre o tempo de partida atual $t_i(k)$ em relação ao valor nominal $T_i(k)$ obtemos então:

$$y_i(k+1) = y_i(k) + c_i(k+1)(y_i(k+1) - y_{i-1}(k+1)) - MS_i(k+1) + u_i(k+1) + v_i(k+1) \quad (4.10)$$

que pode ser reescrita, obtendo a equação básica da regulação (Sasama et alli, 1983)(Van Breusegem et alli, 1991) aqui incluindo a margem de controle $MS_i(k+1)$.

$$(1 - c_i(k+1))y_i(k+1) = y_i(k) - c_i(k+1)y_{i-1}(k+1) - MS_i(k+1) + u_i(k+1) + v_i(k+1) \quad (4.11)$$

Na equação (4.11) é importante notar que:

- Os parâmetros $c_i(k)$ são naturalmente incertos, dado sua relação com a demanda de passageiros que é aleatória;
- Os termos de perturbação $v_i(k)$ são aleatórios;
- As variáveis de controle são restritas em valor e dependem das características do material rodante, traçado da linha e condições operacionais. É importante destacar que a faixa de operação para o tempo de percurso no *scheduling* (Programa Horário) é mais limitada que na regulação.

A representação na forma de variáveis de estado da equação (4.11) é conveniente para a utilização de técnicas modernas de controle.

a) Modelo Recorrente por Plataforma (MRP)

Em forma matricial temos :

$$Y_{K+1} = A_K Y_K + A_K U_{K+1} + A_K V_{K+1} - A_K M_{K+1} \quad (4.12)$$

onde:

Y_K é o vetor dos desvios de todos os trens na saída da k -ésima plataforma;

U_{K+1} é o vetor de controle aplicado no percurso entre as plataformas k e $k + 1$, e na parada dos trens na plataforma $k + 1$;

M_{K+1} é o vetor das margens de controle sobre o tempo de parada dos trens na plataforma $k + 1$;

V_{K+1} é o vetor de perturbação.

Então para $k = 1, \dots, KT, KT + 1, \dots, 2KT$:

$$Y_K \triangleq \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix}; U_K \triangleq \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_n(k) \end{bmatrix}; M_K \triangleq \begin{bmatrix} MS_1(k) \\ MS_2(k) \\ \vdots \\ MS_n(k) \end{bmatrix}; V_K \triangleq \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) \end{bmatrix}; \quad (4.13)$$

e $A_K = (C_{K+1})^{-1}$ onde C_{K+1} é a seguinte matriz bidiagonal:

$$C_{K+1} \triangleq \begin{bmatrix} 1 - c(k+1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c(k+1) & 1 - c(k+1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c(k+1) & 1 - c(k+1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - c(k+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c(k+1) & 1 - c(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

A ordem da representação de estado é o número de trens. Os termos $c(k+1)$ apresentam um grau de incerteza que podemos assumir equivalente para todos os trens. Portanto assumimos que $c_i(k+1) = c(k+1)$, $\forall i$. A matriz dinâmica A_K é triangular inferior com autovalores igual a $1/(1-c(k+1))$. Se $U_{K+1} = V_{K+1} = M_{K+1} = 0$, e considerando que $0 \leq c(k+1) < 1$ em (2.29) e (2.30), os autovalores de A_K estão fora do círculo unitário o que caracteriza um sistema instável que necessita de controle para ser operado.

Este modelo é importante para a análise da estabilidade do tráfego de trens e será utilizado na formulação de regulação robusta em tempo real proposta no Capítulo 5.

b) Modelo de Tempo Real (MTR)

A equação (4.11) é equivalente a:

$$\begin{aligned}
 y_i(k+1) = & \frac{1}{1 - c_i(k+1)} y_i(k) - \frac{c_i(k+1)}{1 - c_i(k+1)} y_{i-1}(k+1) - \\
 & - \frac{1}{1 - c_i(k+1)} MS_i(k+1) + \frac{1}{1 - c_i(k+1)} u_i(k+1) + \\
 & + \frac{1}{1 - c_i(k+1)} v_i(k+1)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim, em forma matricial, podemos ter:

$$Y_{j+1} = A_j Y_j + B_j U_j + B_j V_j - B_j M_j \tag{4.16}$$

onde:

$$\forall i = j-1, j-2, \dots, j-k$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, KT, KT+1, KT+2, \dots, 2KT,$$

Y_j é o vetor dos desvios dos trens j nas plataformas k ;

U_j é o vetor de controle aplicado aos trens j nas plataformas k ;

M_j é o vetor das margens de controle sobre o tempo de parada dos j trens nas plataformas k ;

V_j é o vetor de perturbação dos j trens nas plataformas k .

Portanto:

$$\begin{aligned}
 Y_j &\triangleq \begin{bmatrix} y_{j-1}(1) \\ y_{j-2}(2) \\ \vdots \\ y_{j-k}(k) \end{bmatrix}; & U_j &\triangleq \begin{bmatrix} u_j(1) \\ u_{j-1}(2) \\ \vdots \\ u_{j-k+1}(k) \end{bmatrix}; \\
 M_j &\triangleq \begin{bmatrix} MS_j(1) \\ MS_{j-1}(2) \\ \vdots \\ MS_{j-k+1}(k) \end{bmatrix}; & V_j &\triangleq \begin{bmatrix} v_j(1) \\ v_{j-1}(2) \\ \vdots \\ v_{j-k+1}(k) \end{bmatrix};
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$A_j \triangleq \begin{bmatrix} \frac{-c(1)}{1-c(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-c(2)} & \frac{-c(2)}{1-c(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-c(3)} & \frac{-c(3)}{1-c(3)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-c(k-1)}{1-c(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{1-c(k)} & \frac{-c(k)}{1-c(k)} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$B_j \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{1-c(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-c(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-c(3)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{1-c(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1-c(k)} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Pode ser visto que na equação (4.15) o termo $y_i(k)$ é multiplicado pelo fator $\frac{1}{1-c(k+1)}$. Isto significa que mesmo na ausência de desvio do trem $i-1$ na plataforma $k+1$, sem controle na plataforma $k+1$, o desvio do trem i na plataforma $k+1$ será maior que o seu desvio na plataforma k , caracterizando comportamento de sistema instável.

Outra propriedade interessante desta última formulação é que os componentes do vetor de estado são conhecidos quase que simultaneamente ou podem ser estimados facilmente. Por causa do requisito de segurança do tráfego (por exemplo: em trecho entre duas plataformas só pode estar no máximo um trem) os desvios $y_j(k)$ (j -ésimo trem na i -ésima plataforma) e $y_{j-1}(k+1)$ (trem anterior e próxima plataforma), são conhecidos num curto espaço de tempo. Estas propriedades tornam possível uma implementação prática, em tempo real, de uma lei de controle de realimentação de estado. Por esta razão nós chamamos este modelo de “Modelo de Tempo Real (MTR)” e que servirá de referência neste trabalho para o desenvolvimento de metodologias para a regulação do tráfego de trens.

Se observarmos em (4.16) a (4.19) veremos que a estrutura diagonal da matriz B faz com que $y_i(k+1)$ do ponto de vista de controle, dependa apenas de $u_i(k+1)$, caracterizando um sistema descentralizado de comando.

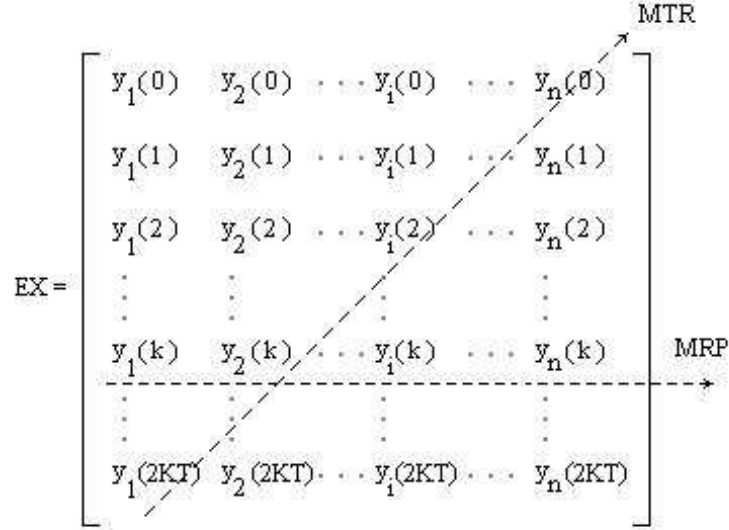


Figura 4.1: Vetor de estado dos modelos MRP e MTR

Na figura 4.1 representamos de forma esquemática uma matriz EX contendo a evolução dos instantes de partida de n trens ao longo das $2KT$ plataformas de uma linha operando em regime aberto. Pode ser verificado que:

- o vetor de estado do modelo MRP corresponde às linhas da matriz EX .
- o vetor de estado do modelo MTR é composto pelas componentes da diagonal secundária da matriz EX .

4.3 Regulação Robusta com Restrições (RRR)

O tráfego de trens em uma linha de metrô apresenta comportamento instável e é descrito por modelo contendo significativa parcela de incertezas, porque depende da demanda de passageiros e perturbações ao longo das viagens dos trens, ambos de natureza aleatória.

Do ponto de vista dos passageiros, é necessário controlar o tráfego de trens de forma a diminuir o tempo de espera nas estações e limitar o carregamento máximo nos trens. Por outro lado, se considerarmos conexão com outros sistemas de transporte, a entrada e saída de trens na linha em função da variação da demanda de passageiros ao longo do período de operação comercial, o tráfego de trens deve ser controlado de forma que os horários dos trens também sejam mantidos próximos de seus valores nominais. Considerando ainda o interesse de minimizar custos operacionais por parte dos operadores da linha, o controle de trens também não deve se afastar dos valores nominais requeridos pelo Programa Horário.

A ação de controle consiste de instruções dadas aos trens aumentando ou diminuindo os tempos de parada nas estações e/ou a velocidade nos percursos inter-estações. O controle é limitado naturalmente por restrições de velocidade máxima, tempo mínimo de parada e regras de segurança impostas pela sinalização da linha. As regras de segurança e o máximo carregamento desejado nos trens impõem restrições, respectivamente, sobre o intervalo (*headway*) mínimo e máximo entre dois trens consecutivos. Essas limitações resultam em restrições aos desvios horários dos trens em relação ao previsto no Programa Horário da linha. Assim sendo, o controle de tráfego para bem operar uma linha metروiária deve representar uma solução de compromisso entre os três objetivos cujas variações devem ser minimizadas (horário, intervalo entre trens e esforço de controle) e que seja também robusta frente às incertezas do modelo de tráfego, respeitando as restrições sobre suas variáveis.

Nesta seção será apresentada a formulação proposta por (Corrêa, 1999) e (Corrêa e Milani, 2001) que considera as incertezas do modelo de tráfego e as restrições sobre suas variáveis de estado/controle. A lei de controle consiste em realimentação de estado, linear, invariante no tempo.

4.3.1 Formulação do Problema RRR

Considere uma linha de metrô em regime aberto com N plataformas e onde a margem de controle é nula, sendo descrita pelo Modelo de Tempo Real da seguinte forma:

$$Y_{j+1} = A(C)Y_j + B(C)U_j + B(C)V_j \quad (4.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} Y_j &\triangleq \begin{bmatrix} y_{j-1}(1) & y_{j-2}(2) & \cdots & y_{j-N}(N) \end{bmatrix}^T; \\ U_j &\triangleq \begin{bmatrix} u_j(1) & u_{j-1}(2) & \cdots & u_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T; \\ V_j &\triangleq \begin{bmatrix} v_j(1) & v_{j-1}(2) & \cdots & v_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T; \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} c(1) & c(2) & \cdots & c(N) \end{bmatrix}^T; \quad (4.22)$$

$$A(C) \triangleq \begin{bmatrix} a_1 c(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 c(2) & a_2 c(2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 c(3) & a_3 c(3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} c(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_N c(N) & a_N c(N) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$B(C) \triangleq \begin{bmatrix} b_1 c(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 c(2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 c(3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} c(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_N c(N) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$a_k c(k) = -\frac{c(k)}{1 - c(k)}; \quad (k = 1 : N) \quad (4.25)$$

$$b_k c(k) = \frac{1}{1 - c(k)}; \quad (k = 1 : N) \quad (4.26)$$

onde: Y_j , U_j e V_j são vetores de dimensões $(N, 1)$ representando respectivamente o estado, o controle e as perturbações externas do sistema. Observe que $y_i(k)$ representa o desvio do instante de saída do trem i da plataforma k relativo ao programa horário

nominal, $u_i(k)$ representa a variação, relativa ao programa horário do tempo de percurso entre as plataformas $k - 1$ e k mais o tempo de parada na plataforma k , comandados ao trem na plataforma $k - 1$.

A constante de tráfego $c(k)$ de natureza aleatória torna o vetor de parâmetros C incerto, o qual será aqui considerado restrito ao poliedro:

$$C^L \leq C \leq C^U \quad (4.27)$$

onde $C^L, C^U \in \mathbb{R}^N, 0 < C^L \leq C^U < 1$.

As perturbações V_j são também limitadas e serão consideradas restritas ao poliedro:

$$-d_v \leq V_j \leq d_v \quad (4.28)$$

onde $d_v \in \mathbb{R}^N, d_v \geq 0$.

Fatores técnicos e operacionais impõem limites ao controle U_j , o qual será considerado restrito ao poliedro:

$$-d_u \leq U_j \leq d_u \quad (4.29)$$

onde $d_u \in \mathbb{R}^N, d_u \geq 0$.

Requisitos de ocupação dos trens e regras de segurança impõem limites sobre a variação admissível do intervalo entre dois trens sucessivos (variação do *headway*) dado por $(Y_{j+1} - Y_j)$, que será considerada restrita ao poliedro:

$$-d_h \leq Y_{j+1} - Y_j \leq d_h \quad (4.30)$$

onde $d_h \in \mathbb{R}^N, d_h \geq 0$.

Considere as equações do sistema (4.20)-(4.26), as restrições (4.27)-(4.30) e uma lei de controle de realimentação de estado linear invariante:

$$U_j = FY_j \quad (4.31)$$

Para garantir a estabilidade no sentido de Lyapunov do tráfego de trens na linha de metrô, o estado Y_j ao longo de toda a trajetória do sistema (4.20), considerando a lei de controle por realimentação de estados (4.31), deverá ficar restrito ao poliedro:

$$-d_y \leq Y_j \leq d_y \quad (4.32)$$

onde $d_y \in \mathbb{R}^N$, $d_y \geq 0$. Isto corresponde a assumir que (4.32) é positivamente invariante com respeito ao sistema (4.20), (Bitsoris et alli, 1988); (Milani et alli, 1996), que é equivalente a requerer que:

$$-d_y \leq Y_{j+1} \leq d_y \quad (4.33)$$

deva ser satisfeito para todo Y_j em (4.32).

Definição 4.1: Regulação robusta com restrições (RRR): Obter uma matriz $F \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que para todo C (4.27), V_j (4.28), Y_j (4.32), $j \geq 0$, as seguintes restrições são satisfeitas conjuntamente:

$$Y_{j+1} = [A(C) + B(C)F]Y_j + B(C)V_j \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} -d_y &\leq Y_{j+1} \leq d_y \\ -d_u &\leq U_j \leq d_u \\ -d_h &\leq Y_{j+1} - Y_j \leq d_h \\ -d_v &\leq V_j \leq d_v \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.3.2 Solução do Problema RRR

Considere a transformação linear,

$$y = T(\omega)z \quad (4.36)$$

$$y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^t; z \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^s \quad (4.37)$$

$$\omega \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m \quad (4.38)$$

onde ω é um vetor de incertezas, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{W}$ são conjuntos convexos fechados.

Definição 4.2: O conjunto $\mathcal{Z}$ é chamado de admissível robusto para a transformação linear (4.36) com respeito a $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, se $y \in \mathcal{Y}$ para todos $z \in \mathcal{Z}$ e $\omega \in \mathcal{W}$.

Considere $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{Y}$ definidos pelo poliedro convexo compacto não simétrico:

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^s; -\eta^L \leq Qz \leq \eta^U\} \quad (4.39)$$

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^t; -\zeta^L \leq Ry \leq \zeta^U\} \quad (4.40)$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{q \times s}$; $R \in \mathbb{R}^{r \times t}$; $\eta^U, \eta^L \in \mathbb{R}^q$; $\eta^U, \eta^L > 0$; $\zeta^U, \zeta^L \in \mathbb{R}^r$; e $\zeta^U, \zeta^L > 0$.

Lema 4.1: O poliedro $\mathcal{Z}$ (4.39) é admissível robusto para a transformação linear (4.36) com respeito a $\mathcal{Y}$ (4.40) e $\mathcal{W}$ (4.38), se e somente se para todo $\omega \in \mathcal{W}$ o seguinte conjunto de restrições lineares tiverem uma solução factível:

$$\begin{aligned} (M(\omega)^+ - M(\omega)^-)Q &= RT(\omega) \\ M(\omega)^+ \eta^U + M(\omega)^- \eta^L &\leq \zeta^U \\ M(\omega)^- \eta^U + M(\omega)^+ \eta^L &\leq \zeta^L \end{aligned} \quad (4.41)$$

Prova:

Substituindo (4.36) em (4.40) temos:

$$-\zeta^L \leq RT(\omega)z \leq \zeta^U \quad (4.42)$$

Se $\mathcal{Z}$ (4.39) é admissível robusto para (4.36) com respeito a (4.38), (4.40), o poliedro definido por (4.39) deve estar contido no poliedro definido por (4.42) para todo $\omega \in \mathcal{W}$. Usando a extensão do lemma de Farkas (Hennet, 1989), a prova pode ser facilmente efetuada após algumas manipulações algébricas. $\square$

Se $\eta^U = \eta^L = \eta$ e $\zeta^U = \zeta^L = \zeta$ a solução (4.41) pode ser simplificada para obter:

$$\begin{aligned} M(\omega)Q &= RT(\omega) \\ |M(\omega)|\eta &\leq \zeta \end{aligned} \quad (4.43)$$

Considere as seguintes matrizes diagonais:

$$\begin{aligned} \Gamma_y &= \text{diag} \begin{bmatrix} \gamma_{y1} & \gamma_{y2} & \cdots & \gamma_{yN} \end{bmatrix}; \\ \Gamma_h &= \text{diag} \begin{bmatrix} \gamma_{h1} & \gamma_{h2} & \cdots & \gamma_{hN} \end{bmatrix}; \\ \Gamma_u &= \text{diag} \begin{bmatrix} \gamma_{u1} & \gamma_{u2} & \cdots & \gamma_{uN} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.44)$$

Sem perda de generalidade as equações (4.34),(4.35) podem ser colocadas na seguinte forma:

$$-\begin{bmatrix} dy \\ dv \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} dy \\ dv \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$Y_{j+1} = \begin{bmatrix} A(C) + B(C)F & B(C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$Y_{j+1} - Y_j = \begin{bmatrix} A(C) + B(C)F - I_N & B(C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$U_j = \begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$-\Gamma_y d_y \leq Y_{j+1} \leq \Gamma_y d_y \quad (4.49)$$

$$-\Gamma_h d_h \leq Y_{j+1} - Y_j \leq \Gamma_h d_h \quad (4.50)$$

$$-\Gamma_u d_u \leq U_j \leq \Gamma_u d_u \quad (4.51)$$

$$0 \leq \Gamma_y, \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N \quad (4.52)$$

onde I_N é a matriz identidade $N \times N$.

Aplicando a Definição 4.1 no problema de RRR podemos verificar que a solução corresponde a encontrar $F \in \Re^{N \times N}$ tal que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente (Hennet, 1989), (Milani et alli, 1996):

- O poliedro definido por (4.45) seja robustamente admissível para a transformação (4.46) com relação aos poliedros definidos por (4.27) e (4.49).
- O poliedro definido por (4.45) seja robustamente admissível para a transformação (4.47) com relação aos poliedros definidos por (4.27) e (4.50).
- O poliedro definido por (4.45) seja robustamente admissível para a transformação (4.48) com relação ao poliedro definido por (4.27) e (4.51).

Utilizando o Lema 4.1 para poliedros simétricos (4.43) as condições necessárias e suficientes para a solução do RRR são expressas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
H^+ - H^- &= A(C) + B(C)F \\
G^+ - G^- &= B(C) \\
M^+ - M^- &= A(C) + B(C)F - I_N \\
O^+ - O^- &= B(C) \\
F^+ - F^- &= F \\
(H^+ + H^-)d_y + (G^+ + G^-)d_v &\leq \Gamma_y d_y \\
(H^- + H^+)d_y + (G^- + G^+)d_v &\leq \Gamma_y d_y \\
(M^+ + M^-)d_y + (O^+ + O^-)d_v &\leq \Gamma_h d_h \\
(M^- + M^+)d_y + (O^- + O^+)d_v &\leq \Gamma_h d_h \\
(F^+ + F^-)d_y &\leq \Gamma_u d_u \\
0 \leq \Gamma_y, \Gamma_h, \Gamma_u &\leq 1
\end{aligned} \tag{4.53}$$

As equações (4.53) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
H &= A(C) + B(C)F \\
G &= B(C) \\
M &= A(C) + B(C)F - I_N \\
|H|d_y + |G|d_v &\leq \Gamma_y d_y \\
|M|d_y + |G|d_v &\leq \Gamma_h d_h \\
|F|d_y &\leq \Gamma_u d_u \\
0 \leq \Gamma_y, \Gamma_h, \Gamma_u &\leq 1
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Pode ser verificado que a matriz $F \in \Re^{N \times N}$ solução do RRR possui a maioria dos elementos nulos, exceto possivelmente os componentes $f_{k,k}$, $k = 1 : N$, $f_{k,k-1}$, $k = 2 : N$, mostrando a mesma estrutura bidiagonal da matriz $A(C)$.

Então:

$$B(C) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-c(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-c(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-c(3)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{1-c(N-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{1-c(N)} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$A(C) + B(C)F = \begin{bmatrix} \frac{f_{1,1}-c(1)}{1-c(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{f_{2,1}+1}{1-c(2)} & \frac{f_{2,2}-c(2)}{1-c(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{3,2}+1}{1-c(3)} & \frac{f_{3,3}-c(3)}{1-c(3)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f_{N-1,N-1}-c(N-1)}{1-c(N-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f_{N,N-1}+1}{1-c(N)} & \frac{f_{N,N}-c(N)}{1-c(N)} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$A(C) + B(C)F - I_N = \begin{bmatrix} \frac{f_{1,1}-1}{1-c(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{f_{2,1}+1}{1-c(2)} & \frac{f_{2,2}-1}{1-c(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{3,2}+1}{1-c(3)} & \frac{f_{3,3}-1}{1-c(3)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f_{N-1,N-1}-1}{1-c(N-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f_{N,N-1}+1}{1-c(N)} & \frac{f_{N,N}-1}{1-c(N)} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Portanto o problema de regulação robusta com restrições onde $0 \leq c(k)^L \leq c(k)^U \leq 1$ tem solução somente se os seguintes N conjuntos independentes de restrições tiverem solução factível:

Conjunto de restrições 1:

$$\begin{aligned} |f_{1,1} - c(1)^U|d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{y1}\gamma_{y1} &\leq -d_{v1} \\ |f_{1,1} - c(1)^L|d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{y1}\gamma_{y1} &\leq -d_{v1} \\ |f_{1,1} - 1|d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{h1}\gamma_{h1} &\leq -d_{v1} \\ |f_{1,1} - 1|d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{h1}\gamma_{h1} &\leq -d_{v1} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} |f_{1,1}|d_{y1} - d_{u1}\gamma_{u1} &\leq 0 \\ 0 &\leq \gamma_{y1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 \end{aligned}$$

Conjunto de restrições $k = 2 : N$:

$$\begin{aligned} |f_{k,k} - c(k)^U|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{yk}\gamma_{yk} &\leq -d_{vk} \\ |f_{k,k} - c(k)^L|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{yk}\gamma_{yk} &\leq -d_{vk} \\ |f_{k,k} - 1|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{hk}\gamma_{hk} &\leq -d_{vk} \\ |f_{k,k} - 1|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{hk}\gamma_{hk} &\leq -d_{vk} \\ |f_{k,k}|d_{yk} + |f_{k,k-1}|d_{yk-1} - d_{uk}\gamma_{uk} &\leq 0 \\ 0 &\leq \gamma_y, \gamma_h, \gamma_u \leq 1 \end{aligned} \quad (4.59)$$

A solução do RRR pode ser obtida de N problemas de programação matemática independentes associando as restrições (4.58), (4.59) com uma função objetivo:

$$\min J_k = d_{yk}\gamma_{yk} + pd_{hk}\gamma_{hk} + qd_{uk}\gamma_{uk} \quad (4.60)$$

onde $p \geq 0$ e $q \geq 0$ são escalares usados para ponderação relativa de γ_{yk} , γ_{hk} e γ_{uk} .

Pode ser verificado que no ponto de ótimo, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_{k,k} \leq 1; & k = 1 : N \\ -1 &\leq f_{k,k-1} \leq 0; & k = 2 : N \end{aligned} \quad (4.61)$$

Considere também a seguinte mudança de variáveis, normalmente usada em programação linear (Gill et alli, 1981):

$$\begin{aligned} f_{k,k} - c(k)^U &= H_k^{U+} - H_k^{U-} \\ |f_{k,k} - c(k)^U| &\leq H_k^{U+} + H_k^{U-} \\ f_{k,k} - c(k)^L &= H_k^{L+} - H_k^{L-} \\ |f_{k,k} - c(k)^L| &\leq H_k^{L+} + H_k^{L-} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Usando (4.61) e (4.62) e manipulações algébricas, os problemas de programação matemática (4.58) - (4.60) podem ser facilmente transformados nos problemas equivalentes de programação linear:

P.L.1:

$$\min J_1 = d_{y1}\gamma_{y1} + pd_{h1}\gamma_{h1} + qd_{u1}\gamma_{u1}$$

$$\begin{aligned} f_{1,1} - H_1^{U+} + H_1^{U-} &= c(1)^U \\ f_{1,1} - H_1^{L+} + H_1^{L-} &= c(1)^L \\ (H_1^{U+} + H_1^{U-})d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{y1}\gamma_{y1} &\leq -d_{v1} \\ (H_1^{L+} + H_1^{L-})d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{y1}\gamma_{y1} &\leq -d_{v1} \\ (-H_1^{U+} + H_1^{U-} - c(1)^U + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{h1}\gamma_{h1} &\leq -d_{v1} \\ (-H_1^{L+} + H_1^{L-} - c(1)^L + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{h1}\gamma_{h1} &\leq -d_{v1} \\ f_{1,1}d_{y1} - d_{u1}\gamma_{u1} &\leq 0 \\ 0 &\leq \gamma_{y1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 \\ 0 &\leq f_{1,1} \leq 1 \\ H_1^{U+}, H_1^{U-}, H_1^{L+}, H_1^{L-} &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.63}$$

P.L. k ; $k = 2 : N$:

$$\min J_k = d_{yk}\gamma_{yk} + pd_{hk}\gamma_{hk} + qd_{uk}\gamma_{uk}$$

$$\begin{aligned} f_{k,k} - H_k^{U+} + H_k^{U-} &= c(k)^U \\ f_{k,k} - H_k^{L+} + H_k^{L-} &= c(k)^L \\ (H_k^{U+} + H_k^{U-})d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{yk}\gamma_{yk} &\leq -d_{vk} \\ (H_k^{L+} + H_k^{L-})d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{yk}\gamma_{yk} &\leq -d_{vk} \\ (-H_k^{U+} + H_k^{U-} - c(k)^U + 1)d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{hk}\gamma_{hk} &\leq -d_{vk} \\ (-H_k^{L+} + H_k^{L-} - c(k)^L + 1)d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{hk}\gamma_{hk} &\leq -d_{vk} \\ f_{k,k}d_{yk} - f_{k,k-1}d_{yk-1} - d_{uk}\gamma_{uk} &\leq 0 \\ 0 &\leq \gamma_{yk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 \\ 0 &\leq f_{k,k} \leq 1 \\ -1 &\leq f_{k,k-1} \leq 0 \\ H_k^{U+}, H_k^{U-}, H_k^{L+}, H_k^{L-} &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.64}$$

4.4 Uma Nova Formulação para a Regulação Ótima Robusta com Restrições (RORR)

A formulação de regulação robusta com restrições descrita anteriormente (Corrêa, 1999) e (Corrêa e Milani, 2001) apresenta uma lei de controle por realimentação de estado, linear e invariante no tempo que considera as incertezas do modelo de tráfego e as restrições sobre suas variáveis de estado/controlado. Contudo, a margem de controle do Programa Horário não é considerada nesta formulação. Além disso, o modelo não considera o desvio, em relação ao previsto no Programa Horário, da lotação dos trens ao longo da linha. Para considerar estes aspectos propomos a formulação a seguir.

4.4.1 Modelo do Tráfego e Lotação de Trens

Conforme descrito em 4.2 b), uma linha de metrô em regime aberto com N plataformas é descrita pelo Modelo de Tempo Real da seguinte forma:

$$Y_{j+1} = A(C)Y_j + B(C)U_j + B(C)V_j - B(C)M_j \quad (4.65)$$

onde:

$$\begin{aligned} Y_j &\triangleq \begin{bmatrix} y_{j-1}(1) & y_{j-2}(2) & \cdots & y_{j-N}(N) \end{bmatrix}^T; \\ U_j &\triangleq \begin{bmatrix} u_j(1) & u_{j-1}(2) & \cdots & u_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T; \\ V_j &\triangleq \begin{bmatrix} v_j(1) & v_{j-1}(2) & \cdots & v_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T; \\ M_j &\triangleq \begin{bmatrix} MS_j(1) & MS_{j-1}(2) & \cdots & MS_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T; \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde: Y_j , U_j , V_j e M_j são vetores de dimensões (N,1) representando respectivamente o estado, o controle, as perturbações externas do sistema e a margem de controle para a regulação.

Agora, para modelar a variação da lotação de passageiros nos trens, vamos considerar a equação dos passageiros proposta no Programa Horário (2.10):

$$p_i(k) = p_i(k-1) + \alpha_i(k)x_i(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_i(j,k)x_i(j) \quad (4.67)$$

Numa aproximação, considerando operação a *headways* constantes:

$$p_i(k) = p_i(k-1) + \left(\alpha_i(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha l_i(j, k) \right) x_i(k) \quad (4.68)$$

Considerando o modelamento da constante de tráfego proposto em (2.28), a equação (4.68) pode ser reescrita como:

$$p_i(k) = p_i(k-1) + \beta_i(k)(c_i^1(k) - c_i^2 k) x_i(k) \quad (4.69)$$

Ou de outra forma:

$$p_i(k) = p_i(k-1) + \beta_i(k)(c_i^1(k) - c_i^2 k)(t_i(k) - t_{i-1}(k)) \quad (4.70)$$

Para o Horário Nominal temos:

$$P_i(k) = P_i(k-1) + \beta_i(k)(c_i^1(k) - c_i^2 k)(T_i(k) - T_{i-1}(k)) \quad (4.71)$$

Definindo $\Delta p_i(k) = p_i(k) - P_i(k)$, de (4.70), (4.71), temos a seguinte variação da lotação dos trens em relação à lotação do Programa Nominal:

$$\Delta p_i(k) = \Delta p_i(k-1) + \beta_i(k)(c_i^1(k) - c_i^2 k)(y_i(k) - y_{i-1}(k)) \quad (4.72)$$

Incluindo a formulação da variação da lotação de passageiros nos trens (4.72) no modelo de tráfego proposto em (4.65), (4.66) para uma linha de metrô em regime aberto com N plataformas obtemos:

$$Y_{j+1} = A(C)Y_j + B(C)U_j + B(C)V_j - B(C)M_j \quad (4.73)$$

$$P_{j+1} = L_p P_j + \vartheta(Y_{j+1} - Y_j) \quad (4.74)$$

onde a matriz L_p tem ordem $N \times N$ e:

$$\begin{aligned} Y_j &\triangleq \begin{bmatrix} y_{j-1}(1) & y_{j-2}(2) & \cdots & y_{j-N}(N) \end{bmatrix}^T; \\ U_j &\triangleq \begin{bmatrix} u_j(1) & u_{j-1}(2) & \cdots & u_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T; \\ V_j &\triangleq \begin{bmatrix} v_j(1) & v_{j-1}(2) & \cdots & v_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T; \\ M_j &\triangleq \begin{bmatrix} MS_j(1) & MS_{j-1}(2) & \cdots & MS_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T; \\ P_j &\triangleq \begin{bmatrix} \Delta p_j(1) & \Delta p_{j-1}(2) & \cdots & \Delta p_{j-N+1}(N) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\vartheta \triangleq \begin{bmatrix} \beta(1)(c^1(1) - c^2(1)) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta(2)(c^1(2) - c^2(2)) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta(N-1)(c^1(N-1) - c^2(N-1)) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta(N)(c^1(N) - c^2(N)) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$L_p \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C \triangleq \begin{bmatrix} c(1) & c(2) & \cdots & c(N) \end{bmatrix}^T; \quad (4.76)$$

$$A(C) \triangleq \begin{bmatrix} a_1 c(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 c(2) & a_2 c(2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 c(3) & a_3 c(3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} c(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_N c(N) & a_N c(N) \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$B(C) \triangleq \begin{bmatrix} b_1 c(1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 c(2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 c(3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-1} c(N-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_N c(N) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$a_k c(k) = -\frac{c(k)}{1 - c(k)}; \quad (k = 1 : N) \quad (4.79)$$

$$b_k c(k) = \frac{1}{1 - c(k)}; \quad (k = 1 : N) \quad (4.80)$$

A aleatoriedade da demanda de passageiros torna o vetor de parâmetros C e a matriz ϑ incertos restritos aos poliedros:

$$C^L \leq C \leq C^U \quad (4.81)$$

$$\vartheta^L \leq \vartheta \leq \vartheta^U \quad (4.82)$$

onde $C^L, C^U, \vartheta^L, \vartheta^U \in \mathbb{R}^N, 0 < C^L \leq C^U < 1$.

As perturbações V_j são também limitadas e serão consideradas restritas ao poliedro:

$$-d_v^L \leq V_j \leq d_v^U \quad (4.83)$$

onde $d_v^U, d_v^L \in \mathbb{R}^N$ e $d_v^U, d_v^L \geq 0$. Sob o ponto de vista prático pode-se perceber que as perturbações na regulação do tráfego tendem na maioria dos casos a provocar o atraso dos trens. Por isto, os limites para as perturbações serão assumidos não simétricos.

Fatores técnicos e operacionais impõem limites ao controle U_j , o qual será considerado restrito ao poliedro:

$$-d_u^L \leq U_j \leq d_u^U \quad (4.84)$$

onde $d_u^U, d_u^L \in \mathbb{R}^N$ e $d_u^U, d_u^L \geq 0$. Podemos verificar que, devido à inclusão da margem de controle na equação (4.73), na ausência de perturbações os trens tendem a operar adiantados. Para considerar isto, assumiremos que os limites para o controle são não simétricos.

A natureza do algoritmo para geração de Programa Horário e as restrições operacionais impõem valores definidos constantes para a margem de controle para a regulação M_j onde $M_j \in \mathbb{R}^N, M_j \geq 0$.

Requisitos de ocupação dos trens e regras de segurança impõem limites sobre a variação admissível do *headway* entre dois trens sucessivos $Y_{j+1} - Y_j$ que será considerada restrita ao poliedro:

$$-d_h^L \leq Y_{j+1} - Y_j \leq d_h^U \quad (4.85)$$

onde $d_h^U, d_h^L \in \mathbb{R}^N$ e $d_h^U, d_h^L \geq 0$. Por simplicidade assumiremos limites simétricos, portanto $d_h^U = d_h^L = d_h$.

As variáveis P_j são limitadas para garantir um nível de conforto dos usuários, sendo restritas ao poliedro:

$$-d_p^L \leq P_j \leq d_p^U \quad (4.86)$$

onde $d_p^U, d_p^L \in \mathbb{R}^N$ e $d_p^U, d_p^L \geq 0$. Os limites para o poliedro são obtidos diretamente pelo Programa Horário levando em consideração a capacidade máxima dos trens e o carregamento previsto nos trens em cada plataforma. Por simplicidade, estes limites serão considerados simétricos, portanto $d_p^U = d_p^L = d_p$.

Para garantir a estabilidade no sentido de Lyapunov do tráfego de trens na linha de metrô o estado Y_j ao longo de toda a trajetória do sistema (4.73), (4.74) deverá ficar restrito ao poliedro:

$$-d_y^L \leq Y_j \leq d_y^U \quad (4.87)$$

onde $d_y^U, d_y^L \in \mathbb{R}^N$ e $d_y^U, d_y^L \geq 0$. Isto corresponde a assumir que (4.87) é positivamente invariante com respeito ao sistema (4.73), (4.74) (Bitsoris et alli, 1988), que é equivalente a requerer que:

$$-d_y^L \leq Y_{j+1} \leq d_y^U \quad (4.88)$$

deva ser satisfeito para todo Y_j em (4.87).

Considere as seguintes matrizes diagonais:

$$\begin{aligned} \Gamma_y &= \text{diag} \begin{bmatrix} \gamma_{y1} & \gamma_{y2} & \cdots & \gamma_{yN} \end{bmatrix}; \\ \Gamma_h &= \text{diag} \begin{bmatrix} \gamma_{h1} & \gamma_{h2} & \cdots & \gamma_{hN} \end{bmatrix}; \\ \Gamma_u &= \text{diag} \begin{bmatrix} \gamma_{u1} & \gamma_{u2} & \cdots & \gamma_{uN} \end{bmatrix}; \\ \Gamma_p &= \text{diag} \begin{bmatrix} \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \cdots & \gamma_{pN} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.89)$$

Considere as equações do sistema (4.73)-(4.80), as restrições (4.81)-(4.88) e uma lei de controle de realimentação de estado linear invariante:

$$U_j = FY_j \quad (4.90)$$

Definição 4.3: Regulação ótima robusta com restrições (RORR): Obter uma matriz $F \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que para todo C (4.81), ϑ (4.82), V_j (4.83), P_j (4.86), Y_j (4.87), $j \geq 0$, as seguintes restrições são satisfeitas conjuntamente:

$$Y_{j+1} = [A(C) + B(C)F]Y_j + B(C)V_j - B(C)M_j \quad (4.91)$$

$$P_{j+1} = \begin{bmatrix} \vartheta(A(C) + B(C)F - I_N) & \vartheta B(C) & L_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \\ P_j \end{bmatrix} - \vartheta B(C)M_j \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned}
-\Gamma_y d_y &\leq Y_{j+1} \leq \Gamma_y d_y \\
-\Gamma_u d_u^L &\leq U_j \leq \Gamma_u d_u^U \\
-\Gamma_h d_h &\leq Y_{j+1} - Y_j \leq \Gamma_h d_h \\
-\Gamma_p d_p &\leq P_j \leq \Gamma_p d_p \\
0 &\leq \Gamma_y, \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N \\
0 &\leq \gamma_p \leq \infty
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Sem perda de generalidade, as equações (4.91) a (4.93) podem ser colocadas na seguinte forma:

$$-\begin{bmatrix} dy \\ dv^L \\ dp \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} I_N & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \\ P_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} dy \\ dv^U \\ dp \end{bmatrix} \tag{4.94}$$

$$Y_{j+1} = \begin{bmatrix} A(C) + B(C)F & B(C) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \\ P_j \end{bmatrix} - B(C)M_j \tag{4.95}$$

$$Y_{j+1} - Y_j = \begin{bmatrix} A(C) + B(C)F - I_N & B(C) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \\ P_j \end{bmatrix} - B(C)M_j \tag{4.96}$$

$$U_j = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \\ P_j \end{bmatrix} \tag{4.97}$$

$$P_{j+1} = \begin{bmatrix} \vartheta(A(C) + B(C)F - I_N) & \vartheta B(C) & L_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_j \\ V_j \\ P_j \end{bmatrix} - \vartheta B(C)M_j \tag{4.98}$$

$$-\Gamma_y d_y \leq Y_{j+1} \leq \Gamma_y d_y \tag{4.99}$$

$$-\Gamma_u d_u^L \leq U_j \leq \Gamma_u d_u^U \quad (4.100)$$

$$-\Gamma_h d_h \leq Y_{j+1} - Y_j \leq \Gamma_h d_h \quad (4.101)$$

$$-\Gamma_p d_p \leq P_{j+1} \leq \Gamma_p d_p \quad (4.102)$$

$$0 \leq \Gamma_y, \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N \quad (4.103)$$

$$0 \leq \Gamma_p \leq \infty \quad (4.104)$$

Considere as relações (4.81), (4.82), (4.90), (4.94) - (4.104), a seguinte proposição dá condições necessárias e suficientes para a solução do problema de RORR.

Proposição 4.1: RORR tem solução se os seguintes N conjuntos independentes de restrições tiverem uma solução factível.

Conjunto de restrições 1:

$$G_1^{U+} - G_1^{U-} = \frac{1}{1 - c(1)^U}$$

$$G_1^{L+} - G_1^{L-} = \frac{1}{1 - c(1)^L}$$

$$O_1^{U+} - O_1^{U-} = \frac{1}{1 - c(1)^U}$$

$$O_1^{L+} - O_1^{L-} = \frac{1}{1 - c(1)^L}$$

$$Q_1^{UU+} - Q_1^{UU-} = \frac{\vartheta_1^U}{1 - c(1)^U}$$

$$Q_1^{UL+} - Q_1^{UL-} = \frac{\vartheta_1^L}{1 - c(1)^U}$$

$$Q_1^{LU+} - Q_1^{LU-} = \frac{\vartheta_1^U}{1 - c(1)^L}$$

$$Q_1^{LL+} - Q_1^{LL-} = \frac{\vartheta_1^L}{1 - c(1)^L}$$

$$|f_{1,1} - c(1)^U| d_{y1} + (1 - c(1)^U) d_{v1}^U G_1^{U+} + (1 - c(1)^U) d_{v1}^L G_1^{U-} - (1 - c(1)^U) d_{y1} \gamma_{y1} \leq m_1$$

$$|f_{1,1} - c(1)^L| d_{y1} + (1 - c(1)^L) d_{v1}^U G_1^{L+} + (1 - c(1)^L) d_{v1}^L G_1^{L-} - (1 - c(1)^L) d_{y1} \gamma_{y1} \leq m_1$$

$$|f_{1,1} - c(1)^U| d_{y1} + (1 - c(1)^U) d_{v1}^U G_1^{U-} + (1 - c(1)^U) d_{v1}^L G_1^{U+} - (1 - c(1)^U) d_{y1} \gamma_{y1} \leq -m_1$$

$$|f_{1,1} - c(1)^L| d_{y1} + (1 - c(1)^L) d_{v1}^U G_1^{L-} + (1 - c(1)^L) d_{v1}^L G_1^{L+} - (1 - c(1)^L) d_{y1} \gamma_{y1} \leq -m_1$$

$$\begin{aligned}
& |f_{1,1} - c(1)^U|d_{y1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U O_1^{U+} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L O_1^{U-} - (1 - c(1)^U)d_{h1}\gamma_{h1} \leq m_1 \\
& |f_{1,1} - c(1)^L|d_{y1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U O_1^{L+} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L O_1^{L-} - (1 - c(1)^L)d_{h1}\gamma_{h1} \leq m_1 \\
& |f_{1,1} - c(1)^U|d_{y1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U O_1^{U-} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L O_1^{U+} - (1 - c(1)^U)d_{h1}\gamma_{h1} \leq -m_1 \\
& |f_{1,1} - c(1)^L|d_{y1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U O_1^{L-} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L O_1^{L+} - (1 - c(1)^L)d_{h1}\gamma_{h1} \leq -m_1 \\
& |\vartheta_1^U(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U Q_1^{UU+} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L Q_1^{UU-} \leq +\vartheta_1^U m_1 \\
& |\vartheta_1^L(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U Q_1^{UL+} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L Q_1^{UL-} \leq +\vartheta_1^L m_1 \\
& |\vartheta_1^U(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U Q_1^{LU+} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L Q_1^{LU-} \leq +\vartheta_1^U m_1 \\
& |\vartheta_1^L(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U Q_1^{LL+} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L Q_1^{LL-} \leq +\vartheta_1^L m_1 \\
& |\vartheta_1^U(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U Q_1^{UU-} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L Q_1^{UU+} \leq -\vartheta_1^U m_1 \\
& |\vartheta_1^L(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U Q_1^{UL-} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L Q_1^{UL+} \leq -\vartheta_1^L m_1 \\
& |\vartheta_1^U(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U Q_1^{LU-} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L Q_1^{LU+} \leq -\vartheta_1^U m_1 \\
& |\vartheta_1^L(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U Q_1^{LL-} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L Q_1^{LL+} \leq -\vartheta_1^L m_1 \\
& |f_{1,1}|d_{y1} - d_{u1}^U \gamma_{u1} \leq 0 \\
& |f_{1,1}|d_{y1} - d_{u1}^L \gamma_{u1} \leq 0 \\
& 0 \leq \gamma_{y1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1
\end{aligned} \tag{4.105}$$

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \gamma_{p1} \leq \infty \\
& G_1^{U+}, G_1^{U-}, G_1^{L+}, G_1^{L-}, O_1^{U+}, O_1^{U-}, O_1^{L+}, O_1^{L-} \geq 0 \\
& Q_1^{UU+}, Q_1^{UU-}, Q_1^{UL+}, Q_1^{UL-}, Q_1^{LU+}, Q_1^{LU-}, Q_1^{LL+}, Q_1^{LL-} \geq 0
\end{aligned}$$

Conjunto de restrições $k = 2 : N$:

$$\begin{aligned}
G_k^{U+} - G_k^{U-} &= \frac{1}{1 - c(k)^U} \\
G_k^{L+} - G_k^{L-} &= \frac{1}{1 - c(k)^L} \\
O_k^{U+} - O_k^{U-} &= \frac{1}{1 - c(k)^U} \\
O_k^{L+} - O_k^{L-} &= \frac{1}{1 - c(k)^L} \\
Q_k^{UU+} - Q_k^{UU-} &= \frac{\vartheta_k^U}{1 - c(k)^U}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_k^{UL+} - Q_k^{UL-} &= \frac{\vartheta_k^L}{1 - c(k)^U} \\
Q_k^{LU+} - Q_k^{LU-} &= \frac{\vartheta_k^U}{1 - c(k)^L} \\
Q_k^{LL+} - Q_k^{LL-} &= \frac{\vartheta_k^L}{1 - c(k)^L} \\
|f_{k,k} - c(k)^U|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U G_k^{U+} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L G_k^{U-} - \\
&\quad -(1 - c(k)^U)d_{yk}\gamma_{yk} \leq m_k \\
|f_{k,k} - c(k)^L|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U G_k^{L+} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L G_k^{L-} - \\
&\quad -(1 - c(k)^L)d_{yk}\gamma_{yk} \leq m_k \\
|f_{k,k} - c(k)^U|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U G_k^{U-} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L G_k^{U+} - \\
&\quad -(1 - c(k)^U)d_{yk}\gamma_{yk} \leq -m_k \\
|f_{k,k} - c(k)^L|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U G_k^{L-} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L G_k^{L+} - \\
&\quad -(1 - c(k)^L)d_{yk}\gamma_{yk} \leq -m_k \\
|f_{k,k} - c(k)^U|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U O_k^{U+} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L O_k^{U-} - \\
&\quad -(1 - c(k)^U)d_{hk}\gamma_{hk} \leq m_k \\
|f_{k,k} - c(k)^L|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U O_k^{L+} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L O_k^{L-} - \\
&\quad -(1 - c(k)^L)d_{hk}\gamma_{hk} \leq m_k \\
f_{k,k} - c(k)^U|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U O_k^{U-} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L O_k^{U+} - \\
&\quad -(1 - c(k)^U)d_{hk}\gamma_{hk} \leq -m_k \\
|f_{k,k} - c(k)^L|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U O_k^{L-} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L O_k^{L+} - \\
&\quad -(1 - c(k)^L)d_{hk}\gamma_{hk} \leq -m_k \\
|\vartheta_k^U(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k^U(f_{k,k-1} + 1)|d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U Q_k^{UU+} + \\
&\quad + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L Q_k^{UU-} \leq +\vartheta_k^U m_k - (1 - c(k)^U)d_{pk-1} \\
|\vartheta_k^L(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k^L(f_{k,k-1} + 1)|d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U Q_k^{UL+} + \\
&\quad + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L Q_k^{UL-} \leq +\vartheta_k^L m_k - (1 - c(k)^U)d_{pk-1} \\
|\vartheta_k^U(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k^U(f_{k,k-1} + 1)|d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U Q_k^{LU+} + \\
&\quad + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L Q_k^{LU-} \leq +\vartheta_k^U m_k - (1 - c(k)^L)d_{pk-1} \\
|\vartheta_k^L(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k^L(f_{k,k-1} + 1)|d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U Q_k^{LL+} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(1 - c(k)^L)d_{vk}^L Q_k^{LL-} \leq +\vartheta_k^L m_k - (1 - c(k)^L)d_{pk-1} \\
& |\vartheta_k^U(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k^U(f_{k,k-1} + 1)|d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U Q_k^{UU-} + \\
& +(1 - c(k)^U)d_{vk}^L Q_k^{UU+} \leq -\vartheta_k^U m_k - (1 - c(k)^U)d_{pk-1} \\
& |\vartheta_k^L(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k^L(f_{k,k-1} + 1)|d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U Q_k^{UL-} + \\
& +(1 - c(k)^U)d_{vk}^L Q_k^{UL+} \leq -\vartheta_k^L m_k - (1 - c(k)^U)d_{pk-1} \\
& |\vartheta_k^U(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k^U(f_{k,k-1} + 1)|d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U Q_k^{LU-} + \\
& +(1 - c(k)^L)d_{vk}^L Q_k^{LU+} \leq -\vartheta_k^U m_k - (1 - c(k)^L)d_{pk-1} \\
& |\vartheta_k^L(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k^L(f_{k,k-1} + 1)|d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U Q_k^{LL-} + \\
& +(1 - c(k)^L)d_{vk}^L Q_k^{LL+} \leq -\vartheta_k^L m_k - (1 - c(k)^L)d_{pk-1} \\
& |f_{k,k}|d_{yk} + |f_{k,k-1}|d_{yk-1} - d_{uk}^U \gamma_{uk} \leq 0 \\
& |f_{k,k}|d_{yk} + |f_{k,k-1}|d_{yk-1} - d_{uk}^L \gamma_{uk} \leq 0 \\
& 0 \leq \gamma_{yk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 \\
& 0 \leq \gamma_{pk} \leq \infty \\
& G_k^{U+}, G_k^{U-}, G_k^{L+}, G_k^{L-}, O_k^{U+}, O_k^{U-}, O_k^{L+}, O_k^{L-} \geq 0 \\
& Q_k^{UU+}, Q_k^{UU-}, Q_k^{UL+}, Q_k^{UL-}, Q_k^{LU+}, Q_k^{LU-}, Q_k^{LL+}, Q_k^{LL-} \geq 0
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Prova:

Usando a Definição 4.2 (conjuntos robustamente admissíveis), a Definição 4.3 (RORR) pode ser equivalentemente reformulada como: Achar $F \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ tal que as seguintes condições são satisfeitas simultaneamente:

- O poliedro definido por (4.94) é robustamente admissível para a transformações (4.95) com respeito ao poliedro definido por (4.99), (4.81) e (4.82);
- O poliedro definido por (4.94) é robustamente admissível para a transformação (4.96) com relação aos poliedros definidos por (4.101), (4.81) e (4.82);
- O poliedro definido por (4.94) é robustamente admissível para a transformação

(4.98) com relação ao poliedro definido por (4.102), (4.81) e (4.82);

•O poliedro definido por (4.94) é robustamente admissível para a transformação (4.97) com relação ao poliedro definido por (4.100).

Consequentemente, usando o Lema 4.1 pode ser verificado que RORR tem solução se e somente se para todo C e ϑ satisfazendo (4.81) e (4.82) respectivamente, o seguinte conjunto de restrições tem solução factível:

$$\begin{aligned}
H &= A(C) + B(C)F \\
G^+ - G^- &= B(C) \\
O^+ - O^- &= B(C) \\
M &= A(C) + B(C)F - I_N \\
L &= \vartheta(A(C) + B(C)F - I_N) \\
Q^+ - Q^- &= \vartheta B(C) \\
|H|d_y + G^+d_v^U + G^-d_v^L &\leq \gamma_y d_y + B(C)M_j \\
|H|d_y + G^-d_v^U + G^+d_v^L &\leq \gamma_y d_y - B(C)M_j \\
|M|d_y + O^+d_v^U + O^-d_v^L &\leq \gamma_h d_h + B(C)M_j \\
|M|d_y + O^-d_v^U + O^+d_v^L &\leq \gamma_h d_h - B(C)M_j \\
|L|d_y + Q_+d_v^U + Q_-d_v^L + L_p d_p &\leq \gamma_p d_p + \vartheta B(C)M_j \\
|L|d_y + Q_-d_v^U + Q_+d_v^L + L_p d_p &\leq \gamma_p d_p - \vartheta B(C)M_j \\
|F|d_y &\leq \gamma_u d_u^U \\
|F|d_y &\leq \gamma_u d_u^L \\
0 &\leq \gamma_y, \gamma_h, \gamma_u \leq 1 \\
0 &\leq \gamma_p \leq \infty
\end{aligned} \tag{4.107}$$

Substituindo (4.77)-(4.80) em (4.107), devido à estrutura diagonal da matriz $B(C)$, $0 < C^L \leq CU < 1$ e após algumas manipulações algébricas, pode ser verificado que as restrições (4.107) são decompostas nos seguintes N conjuntos de restrições independentes.

Conjunto de restrições 1:

$$\begin{aligned}
G_1^+ - G_1^- &= \frac{1}{1 - c(1)} \\
O_1^+ - O_1^- &= \frac{1}{1 - c(1)} \\
|f_{1,1} - c(1)|d_{y1} + (1 - c(1))d_{v1}^U G_1^+ + (1 - c(1))d_{v1}^L G_1^- - (1 - c(1))d_{y1}\gamma_{y1} &\leq m_1 \\
|f_{1,1} - c(1)|d_{y1} + (1 - c(1))d_{v1}^U G_1^- + (1 - c(1))d_{v1}^L G_1^+ - (1 - c(1))d_{y1}\gamma_{y1} &\leq -m_1 \\
|f_{1,1} - c(1)|d_{y1} + (1 - c(1))d_{v1}^U O_1^+ + (1 - c(1))d_{v1}^L O_1^- - (1 - c(1))d_{h1}\gamma_{h1} &\leq m_1 \\
|f_{1,1} - c(1)|d_{y1} + (1 - c(1))d_{v1}^U O_1^- + (1 - c(1))d_{v1}^L O_1^+ - (1 - c(1))d_{h1}\gamma_{h1} &\leq -m_1 \\
|\vartheta_1(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1))d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1))d_{v1}^U Q_1^+ + (1 - c(1))d_{v1}^L Q_1^- &\leq +\vartheta_1 m_1 \\
|\vartheta_1(f_{1,1} - 1)|d_{y1} - (1 - c(1))d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1))d_{v1}^U Q_1^- + (1 - c(1))d_{v1}^L Q_1^+ &\leq -\vartheta_1 m_1 \\
|f_{1,1}|d_{y1} - d_{u1}^U \gamma_{u1} &\leq 0 \\
|f_{1,1}|d_{y1} - d_{u1}^L \gamma_{u1} &\leq 0 \\
0 &\leq \gamma_{y1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 \\
0 &\leq \gamma_{p1} \leq \infty
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Conjunto de restrições $k = 2 : N$:

$$\begin{aligned}
G_k^+ - G_k^- &= \frac{1}{1 - c(k)} \\
O_k^+ - O_k^- &= \frac{1}{1 - c(k)} \\
|f_{k,k} - c(k)|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k))d_{vk}^U G_k^+ + (1 - c(k))d_{vk}^L G_k^- - \\
&\quad -(1 - c(k))d_{yk}\gamma_{yk} \leq m_k \\
|f_{k,k} - c(k)|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k))d_{vk}^U G_k^- + (1 - c(k))d_{vk}^L G_k^+ - \\
&\quad -(1 - c(k))d_{yk}\gamma_{yk} \leq -m_k \\
|f_{k,k} - c(k)|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k))d_{vk}^U O_k^+ + (1 - c(k))d_{vk}^L O_k^- - \\
&\quad -(1 - c(k))d_{hk}\gamma_{hk} \leq m_k \\
|f_{k,k} - c(k)|d_{yk} + |f_{k,k-1} + 1|d_{yk-1} + (1 - c(k))d_{vk}^U O_k^- + (1 - c(k))d_{vk}^L O_k^+ - \\
&\quad -(1 - c(k))d_{hk}\gamma_{hk} \leq -m_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |\vartheta_k(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k))d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k))d_{vk}^U Q_k^+ + \\
& \quad + (1 - c(k))d_{vk}^L Q_k^- \leq +\vartheta_k m_k - (1 - c(k))d_{pk-1} \\
& |\vartheta_k(f_{k,k} - 1)|d_{yk} + |\vartheta_k|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k))d_{pk}\gamma_{pk} + (1 - c(k))d_{vk}^U Q_k^- + \\
& \quad + (1 - c(k))d_{vk}^L Q_k^+ \leq -\vartheta_k m_k - (1 - c(k))d_{pk-1} \\
& |f_{k,k}|d_{yk} + |f_{k,k-1}|d_{yk-1} - d_{uk}^U \gamma_{uk} \leq 0 \\
& |f_{k,k}|d_{yk} + |f_{k,k-1}|d_{yk-1} - d_{uk}^L \gamma_{uk} \leq 0 \\
& 0 \leq \gamma_{yk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 \\
& 0 \leq \gamma_{pk} \leq \infty
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Os conjuntos de restrições $k = 1 : N$ (4.108), (4.109) são factíveis para todo $c(k)$ e $\vartheta(k)$ o que conclui a prova. $\square$

Pode ser verificado em (4.108), (4.109) que a matriz $F \in \Re^{N \times N}$ solução do RORR possui a maioria dos elementos nulos, exceto possivelmente os componentes $f_{k,k}$, $k = 1 : N$, $f_{k,k-1}$, $k = 2 : N$, mostrando a mesma estrutura bidiagonal da matriz $A(C)$ (4.77). Desta forma, o controle $u_j(k)$ atuando no trem j saindo da plataforma k da linha é dado por:

$$u_j(k) = f_{k+1,k}y_j(k) + f_{k+1,k+1}y_{j-1}(k+1) \tag{4.110}$$

ou seja, o controle é descentralizado por plataforma da linha, dependendo apenas do atraso do trem na plataforma em questão e de seu antecessor na plataforma seguinte.

No ponto de ótimo, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
0 & \leq f_{k,k} \leq 1; & k &= 1 : N \\
-1 & \leq f_{k,k-1} \leq 0; & k &= 2 : N
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Das equações (4.105) e (4.106) e utilizando (4.111) e mudança de variáveis normalmente usada em programação linear (4.62) (Gill et alli, 1981), a solução do RORR pode ser obtida de N problemas de programação linear pela minimização do seguinte critério de desempenho:

$$J = \Gamma_y(d_y^L + d_y^U) + p\Gamma_h(d_h^U + d_h^L) + r\Gamma_p(d_p^L + d_p^U) + q\Gamma_u(d_u^L + d_u^U) \tag{4.112}$$

onde $p \geq 0$, $q \geq 0$ e $r \geq 0$ são escalares usados para ponderação relativa de seus componentes.

Pode ser verificado que o critério de desempenho J (4.112) é composto pela soma ponderada das normas- ∞ das previsões um passo a frente dos desvios, em relação ao programa horário da linha, dos instantes de saída das plataformas, *headways* entre sucessivos trens, lotação dos trens e esforços de controle correspondentes. Nele temos: Γ_y , Γ_h são relacionados com o cumprimento do horário dos trens, consequentemente com a qualidade da regulação de tráfego; Γ_p é relacionado com a lotação dos trens, consequentemente, com qualidade de serviço aos usuários e Γ_u é relacionado com o esforço de controle, consequentemente, com a economia operacional. Desta forma, a solução do RORR representa um compromisso entre qualidade de regulação de tráfego, qualidade de serviço aos usuários e economia operacional. Este compromisso é modulado através da escolha dos ponderadores p , q , r em (4.112).

A solução do RORR é então obtida dos seguintes N problemas de programação linear:

P.L.1:

$$\min J_1 = d_{y1}\gamma_{y1} + pd_{h1}\gamma_{h1} + q\left(\frac{d_{u1}^U + d_{u1}^L}{2}\right)\gamma_{u1} + rd_{p1}\gamma_{p1}$$

$$f_{1,1} - H_1^{U+} + H_1^{U-} = c(1)^U$$

$$f_{1,1} - H_1^{L+} + H_1^{L-} = c(1)^L$$

$$G_1^{U+} - G_1^{U-} = \frac{1}{1 - c(1)^U}$$

$$G_1^{L+} - G_1^{L-} = \frac{1}{1 - c(1)^L}$$

$$O_1^{U+} - O_1^{U-} = \frac{1}{1 - c(1)^U}$$

$$O_1^{L+} - O_1^{L-} = \frac{1}{1 - c(1)^L}$$

$$Q_1^{UU+} - Q_1^{UU-} = \frac{\vartheta_1^U}{1 - c(1)^U}$$

$$\begin{aligned}
Q_1^{UL+} - Q_1^{UL-} &= \frac{\vartheta_1^L}{1 - c(1)^U} \\
Q_1^{LU+} - Q_1^{LU-} &= \frac{\vartheta_1^U}{1 - c(1)^L} \\
Q_1^{LL+} - Q_1^{LL-} &= \frac{\vartheta_1^L}{1 - c(1)^L}
\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}
&(H_1^{U+} + H_1^{U-})d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{y1}\gamma_{y1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U G_1^{U+} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L G_1^{U-} \leq m_1 \\
&(H_1^{L+} + H_1^{L-})d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{y1}\gamma_{y1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U G_1^{L+} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L G_1^{L-} \leq m_1 \\
&(H_1^{U+} + H_1^{U-})d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{y1}\gamma_{y1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U G_1^{U-} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L G_1^{U+} \leq -m_1 \\
&(H_1^{L+} + H_1^{L-})d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{y1}\gamma_{y1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U G_1^{L-} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L G_1^{L+} \leq -m_1 \\
&(-H_1^{U+} + H_1^{U-} - c(1)^U + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{h1}\gamma_{h1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U O_1^{U+} + \\
&\quad + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L O_1^{U-} \leq m_1 \\
&(-H_1^{L+} + H_1^{L-} - c(1)^L + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{h1}\gamma_{h1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U O_1^{L+} + \\
&\quad + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L O_1^{L-} \leq m_1 \\
&(-H_1^{U+} + H_1^{U-} - c(1)^U + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{h1}\gamma_{h1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U O_1^{U-} + \\
&\quad + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L O_1^{U+} \leq -m_1 \\
&(-H_1^{L+} + H_1^{L-} - c(1)^L + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{h1}\gamma_{h1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U O_1^{L-} + \\
&\quad + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L O_1^{L+} \leq -m_1 \\
&|\vartheta_1^U|(-H_1^{U+} + H_1^{U-} - c(1)^U + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U Q_1^{UU+} + \\
&\quad + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L Q_1^{UU-} \leq +\vartheta_1^U m_1 \\
&|\vartheta_1^L|(-H_1^{U+} + H_1^{U-} - c(1)^U + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U Q_1^{UL+} + \\
&\quad + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L Q_1^{UL-} \leq +\vartheta_1^L m_1 \\
&|\vartheta_1^U|(-H_1^{L+} + H_1^{L-} - c(1)^L + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U Q_1^{LU+} + \\
&\quad + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L Q_1^{LU-} \leq +\vartheta_1^U m_1 \\
&|\vartheta_1^L|(-H_1^{L+} + H_1^{L-} - c(1)^L + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^U Q_1^{LL+} + \\
&\quad + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L Q_1^{LL-} \leq +\vartheta_1^L m_1 \\
&|\vartheta_1^U|(-H_1^{U+} + H_1^{U-} - c(1)^U + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^U Q_1^{UU+} + \\
&\quad + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L Q_1^{UU-} \leq -\vartheta_1^U m_1 \\
&|\vartheta_1^L|(-H_1^{U+} + H_1^{U-} - c(1)^U + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^U)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^U)d_{v1}^L Q_1^{UL+} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(1 - c(1)^U)d_{v1}^U Q_1^{UL-} \leq -\vartheta_1^L m_1 \\
|\vartheta_1^U|(-H_1^{L+} + H_1^{L-} - c(1)^L + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L Q_1^{LU+} + \\
& +(1 - c(1)^L)d_{v1}^U Q_1^{LU-} \leq -\vartheta_1^U m_1 \\
|\vartheta_1^L|(-H_1^{L+} + H_1^{L-} - c(1)^L + 1)d_{y1} - (1 - c(1)^L)d_{p1}\gamma_{p1} + (1 - c(1)^L)d_{v1}^L Q_1^{LL+} + \\
& +(1 - c(1)^L)d_{v1}^U Q_1^{LL-} \leq -\vartheta_1^L m_1 \\
f_{1,1}d_{y1} - d_{u1}^U \gamma_{u1} & \leq 0 \\
f_{1,1}d_{y1} - d_{u1}^L \gamma_{u1} & \leq 0 \\
0 \leq \gamma_{y1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} & \leq 1 \\
0 \leq \gamma_{p1} & \leq \infty \\
0 \leq f_{1,1} & \leq 1 \\
H_1^{U+}, H_1^{U-}, H_1^{L+}, H_1^{L-}, G_1^{U+}, G_1^{U-}, G_1^{L+}, G_1^{L-}, O_1^{U+}, O_1^{U-}, O_1^{L+}, O_1^{L-} & \geq 0 \\
Q_1^{UU+}, Q_1^{UU-}, Q_1^{UL+}, Q_1^{UL-}, Q_1^{LU+}, Q_1^{LU-}, Q_1^{LL+}, Q_1^{LL-} & \geq 0
\end{aligned}$$

P.L. k ; $k = 2 : N$:

$$min J_k = d_{yk}\gamma_{yk} + pd_{hk}\gamma_{hk} + q \left(\frac{d_{uk}^U + d_{uk}^L}{2} \right) \gamma_{uk} + rd_{pk}\gamma_{pk}$$

$$\begin{aligned}
f_{k,k} - H_k^{U+} + H_k^{U-} &= c(k)^U \\
f_{k,k} - H_k^{L+} + H_k^{L-} &= c(k)^L \\
G_k^{U+} - G_k^{U-} &= \frac{1}{1 - c(k)^U} \\
G_k^{L+} - G_k^{L-} &= \frac{1}{1 - c(k)^L} \\
O_k^{U+} - O_k^{U-} &= \frac{1}{1 - c(k)^U} \\
O_k^{L+} - O_k^{L-} &= \frac{1}{1 - c(k)^L} \\
Q_k^{UU+} - Q_k^{UU-} &= \frac{\vartheta_k^U}{1 - c(k)^U}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_k^{UL+} - Q_k^{UL-} &= \frac{\vartheta_k^L}{1 - c(k)^U} \\
Q_k^{LU+} - Q_k^{LU-} &= \frac{\vartheta_k^U}{1 - c(k)^L} \\
Q_k^{LL+} - Q_k^{LL-} &= \frac{\vartheta_k^L}{1 - c(k)^L}
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}
& (H_k^{U+} + H_k^{U-})d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{yk}\gamma_{yk} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U G_k^{U+} + \\
& \quad + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L G_k^{U-} \leq m_k \\
& (H_k^{L+} + H_k^{L-})d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{yk}\gamma_{yk} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U G_k^{L+} + \\
& \quad + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L G_k^{L-} \leq m_k \\
& (H_k^{U+} + H_k^{U-})d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{yk}\gamma_{yk} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U G_k^{U-} + \\
& \quad + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L G_k^{U+} \leq -m_k \\
& (H_k^{L+} + H_k^{L-})d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{yk}\gamma_{yk} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U G_k^{L-} + \\
& \quad + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L G_k^{L+} \leq -m_k \\
& (-H_k^{U+} + H_k^{U-} - c(k)^U + 1)d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{hk}\gamma_{hk} + \\
& \quad + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U O_k^{U+} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L O_k^{U-} \leq m_k \\
& (-H_k^{L+} + H_k^{L-} - c(k)^L + 1)d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{hk}\gamma_{hk} + \\
& \quad + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U O_k^{L+} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L O_k^{L-} \leq m_k \\
& (-H_k^{U+} + H_k^{U-} - c(k)^U + 1)d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{hk}\gamma_{hk} + \\
& \quad + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U O_k^{U-} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L O_k^{U+} \leq -m_k \\
& (-H_k^{L+} + H_k^{L-} - c(k)^L + 1)d_{yk} + (f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{hk}\gamma_{hk} + \\
& \quad + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U O_k^{L-} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L O_k^{L+} \leq -m_k \\
& |\vartheta_k^U|(-H_k^{U+} + H_k^{U-} - c(k)^U + 1)d_{yk} + |\vartheta_k^U|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{pk}\gamma_{pk} + \\
& \quad + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U Q_k^{UU+} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L Q_k^{UU-} \leq +\vartheta_k^U m_k - (1 - c(k)^U)dp_{k-1} \\
& |\vartheta_k^L|(-H_k^{U+} + H_k^{U-} - c(k)^U + 1)d_{yk} + |\vartheta_k^L|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{pk}\gamma_{pk} + \\
& \quad + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U Q_k^{UL+} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^L Q_k^{UL-} \leq +\vartheta_k^L m_k - (1 - c(k)^U)dp_{k-1} \\
& |\vartheta_k^U|(-H_k^{L+} + H_k^{L-} - c(k)^L + 1)d_{yk} + |\vartheta_k^U|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{pk}\gamma_{pk} + \\
& \quad + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U Q_k^{LU+} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L Q_k^{LU-} \leq +\vartheta_k^U m_k - (1 - c(k)^L)dp_{k-1} \\
& |\vartheta_k^L|(-H_k^{L+} + H_k^{L-} - c(k)^L + 1)d_{yk} + |\vartheta_k^L|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{pk}\gamma_{pk} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(1 - c(k)^L)d_{vk}^U Q_k^{LL+} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^L Q_k^{LL-} \leq +\vartheta_k^L m_k - (1 - c(k)^L)dp_{k-1} \\
& |\vartheta_k^U|(-H_k^{U+} + H_k^{U-} - c(k)^U + 1)d_{yk} + |\vartheta_k^U|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{pk}\gamma_{pk} + \\
& +(1 - c(k)^U)d_{vk}^L Q_k^{UU+} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U Q_k^{UU-} \leq -\vartheta_k^U m_k - (1 - c(k)^U)dp_{k-1} \\
& |\vartheta_k^L|(-H_k^{U+} + H_k^{U-} - c(k)^U + 1)d_{yk} + |\vartheta_k^L|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^U)d_{pk}\gamma_{pk} + \\
& +(1 - c(k)^U)d_{vk}^L Q_k^{UL+} + (1 - c(k)^U)d_{vk}^U Q_k^{UL-} \leq -\vartheta_k^L m_k - (1 - c(k)^U)dp_{k-1} \\
& |\vartheta_k^U|(-H_k^{L+} + H_k^{L-} - c(k)^L + 1)d_{yk} + |\vartheta_k^U|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{pk}\gamma_{pk} + \\
& +(1 - c(k)^L)d_{vk}^L Q_k^{LU+} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U Q_k^{LU-} \leq -\vartheta_k^U m_k - (1 - c(k)^L)dp_{k-1} \\
& |\vartheta_k^L|(-H_k^{L+} + H_k^{L-} - c(k)^L + 1)d_{yk} + |\vartheta_k^L|(f_{k,k-1} + 1)d_{yk-1} - (1 - c(k)^L)d_{pk}\gamma_{pk} + \\
& +(1 - c(k)^L)d_{vk}^L Q_k^{LL+} + (1 - c(k)^L)d_{vk}^U Q_k^{LL-} \leq -\vartheta_k^L m_k - (1 - c(k)^L)dp_{k-1} \\
& f_{k,k}d_{yk} - f_{k,k-1}d_{yk-1} - d_{uk}^U \gamma_{uk} \leq 0 \\
& f_{k,k}d_{yk} - f_{k,k-1}d_{yk-1} - d_{uk}^L \gamma_{uk} \leq 0 \\
& 0 \leq \gamma_{yk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 \\
& 0 \leq \gamma_{pk} \leq \infty \\
& 0 \leq f_{k,k} \leq 1 \\
& -1 \leq f_{k,k-1} \leq 0 \\
& H_k^{U+}, H_k^{U-}, H_k^{L+}, H_k^{L-}, G_k^{U+}, G_k^{U-}, G_k^{L+}, G_k^{L-}, O_k^{U+}, O_k^{U-}, O_k^{L+}, O_k^{L-} \geq 0 \\
& Q_k^{UU+}, Q_k^{UU-}, Q_k^{UL+}, Q_k^{UL-}, Q_k^{LU+}, Q_k^{LU-}, Q_k^{LL+}, Q_k^{LL-} \geq 0
\end{aligned}$$

4.5 Exemplo Numérico

Alguns exemplos numéricos ilustram a melhora de desempenho do controle utilizando o algoritmo proposto em relação ao obtido em trabalhos mais recentes. Podemos destacar duas políticas de controle para operação de um sistema metroviário: uma privilegia a economia operacional (econômica) e a outra privilegia o desempenho do sistema em detrimento do custo operacional (alto desempenho). A estratégia utilizada depende da política da companhia em relação aos passageiros, o horário de operação (horário de pico de demanda ou não) e a necessidade de conexão com outro sistema de transporte

que torna importante o cumprimento dos horários. Os exemplos apresentados a seguir levam em consideração essas duas políticas.

4.5.1 Dados Utilizados

Considere uma linha metroviária com N=10 plataformas e com demanda de passageiros delimitada pela seguinte matriz origem-destino:

$$MOD^U = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 0 & 178 & 280 & 271 & 280 & 109 & 281 & 231 & 113 & 177 \\ 0 & 0 & 48 & 113 & 43 & 153 & 134 & 84 & 109 & 146 \\ 0 & 0 & 0 & 155 & 41 & 36 & 268 & 42 & 83 & 247 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 42 & 82 & 111 & 89 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 16 & 39 & 12 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 185 & 86 & 46 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 & 30 & 165 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 149 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 233 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

$$MOD^L = 0.9 * MOD^U$$

A taxa de transferência de passageiros por segundo embarcando ou desembarcando nas plataformas é dada por:

$$\beta_i(k) = [120 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 120] \quad (4.116)$$

Utilizando as equações (2.28), (2.29) e (4.75), podemos determinar os limites para constante de tráfego $c(k)$ e para a constante ϑ :

$$\begin{aligned} C^U &= [.200 \quad .210 \quad .250 \quad .200 \quad .120 \quad .150 \quad .250 \quad .170 \quad .180 \quad .125] \\ C^L &= [.180 \quad .189 \quad .225 \quad .180 \quad .108 \quad .135 \quad .225 \quad .153 \quad .162 \quad .112] \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} \vartheta^U &= [24.0 \quad 8.150 \quad 6.80 \quad -1.3275 \quad -2.205 \quad -0.27 \quad -8.235 \quad -5.04 \quad -4.4775 \quad -13.5] \\ \vartheta^L &= [21.6 \quad 7.335 \quad 6.12 \quad -1.4750 \quad -2.450 \quad -0.30 \quad -9.150 \quad -5.60 \quad -4.9750 \quad -15.0] \end{aligned} \quad (4.118)$$

Considere também que os vetores de estado Y_j , variação do intervalo entre trens $(Y_{j+1} - Y_j)$ e carregamento de passageiros P_j são delimitados respectivamente por:

$$\begin{aligned} d_y^L = d_y^U &= \begin{bmatrix} 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix} \\ d_h^L = d_h^U &= \begin{bmatrix} 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 \end{bmatrix} \\ d_p^L = d_p^U &= \begin{bmatrix} 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.119)$$

Para ilustrar o desempenho de regulação obtido com as leis de controle dadas pela formulação RRR proposta em (Côrrea, 1999) e (Corrêa et alli, 2001) e a formulação RORR proposta neste capítulo, serão apresentados um conjunto de resultados de simulações de variação dos intervalos $(y_j(k) - y_{j-1}(k))$, controles $(u_j(k))$ e atrasos $(y_j(k))$ de um trem j ao longo das plataformas da linha, a partir da condição inicial:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 30 & -30 & 0 & -30 & 30 & 0 & 0 & 30 & -30 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

e considerando também que os componentes dos parâmetros C e ϑ são variáveis aleatórias, uniformemente distribuídas dentro dos poliedros delimitados respectivamente por (4.81) e (4.82). Serão também ilustrados resultados de simulação da variação da lotação de passageiros em cada plataforma para um trem $j+1$ partindo da condição inicial:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

Para analisar comparativamente o desempenho dos resultados vamos considerar as seguintes situações:

a) Regulação Robusta com Restrições (RRR)

Nesta situação vamos considerar que a formulação (4.113), (4.114) não apresenta restrições sobre a lotação de passageiros e margem de controle para a regulação. Isto equivale a dizer que adotamos $r = 0$ no índice de desempenho e que a matriz M_j é dada por:

$$M_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Aqui consideraremos também que variação aleatória das perturbações externas V_j e o controle U_j são delimitados respectivamente por:

$$d_v^L = d_v^U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d_u^L = d_u^U = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Esta situação coincide com a formulação proposta por (Côrrea, 1999) e (Corrêa et alli, 2001) e apresentada em (4.63) e (4.64).

b) Regulação Robusta com Restrições (RRR) com Controle e Perturbações Não Simétricos

Nesta situação vamos considerar que a formulação (4.113), (4.114) não apresenta restrições sobre a lotação de passageiros ($r = 0$) e que a margem de controle para a regulação é dada por (4.122). Os vetores que delimitam o controle U_j e as perturbações V_j correspondem a:

$$\begin{aligned} d_u^U &= \begin{bmatrix} 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 \end{bmatrix} \\ d_u^L &= \begin{bmatrix} 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} d_v^U &= \begin{bmatrix} 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 \end{bmatrix} \\ d_v^L &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.125)$$

Observe que os distúrbios aleatórios delimitados por (4.125) tendem sempre a fazer o trem atrasar-se. Esta suposição é interessante porque corresponde ao que verdadeiramente ocorre em operação real no sistema metroviário.

c) Regulação Ótima Robusta com Restrições (RORR)

Nesta situação vamos considerar a formulação (4.113), (4.114), incluindo as restrições sobre a lotação de passageiros e margem de controle para a regulação. Consideramos que:

$$M_j = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

A variação aleatória das perturbações externas V_j e o controle U_j são delimitados por (4.123).

d) Regulação Ótima Robusta com Restrições (RORR) com Controle e Perturbação Não Simétricos

Nesta situação vamos considerar os vetores que delimitam o controle e as perturbações correspondentes a (4.124) e (4.125).

4.5.2 Regulação Robusta com Restrições (RRR)

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

$$p = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{5} \quad ; \quad r = 0$$

Para o controle $U_j = FY_j$, a matriz de realimentação de estados obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0.1909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6163 & 0.0504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6083 & 0.0583 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6183 & 0.0484 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6361 & 0.0306 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6290 & 0.0377 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6083 & 0.0583 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6246 & 0.0420 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6225 & 0.0442 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6349 & 0.0318 \end{bmatrix}$$

É importante notar que a matriz F tem uma estrutura bi-diagonal, permitindo que o controle seja implementado de forma descentralizada nas estações da linha.

Os resultados de simulação do RRR são apresentados na figura (4.2), que são coerentes com a política de alto desempenho adotada que privilegia o desempenho em detrimento do custo de controle. O resultado constitui-se de 100 ensaios partindo da condição inicial (4.120) e considerando perturbações aleatórias, sendo apresentados os resultados de simulações dos intervalos $(y_j(k) - y_{j-1}(k))$, controles $(u_j(k))$ e atrasos $(y_j(k))$ de um trem j ao longo das plataformas da linha.

A simulação da variação da lotação de passageiros em cada plataforma para um trem $j+1$ partindo da condição inicial (4.121) é mostrada na figura 4.3. Podemos também observar que o alto carregamento é ocasionado pela grande variação do intervalo entre trens proporcionado pela condição inicial adotada para os desvios nas simulações

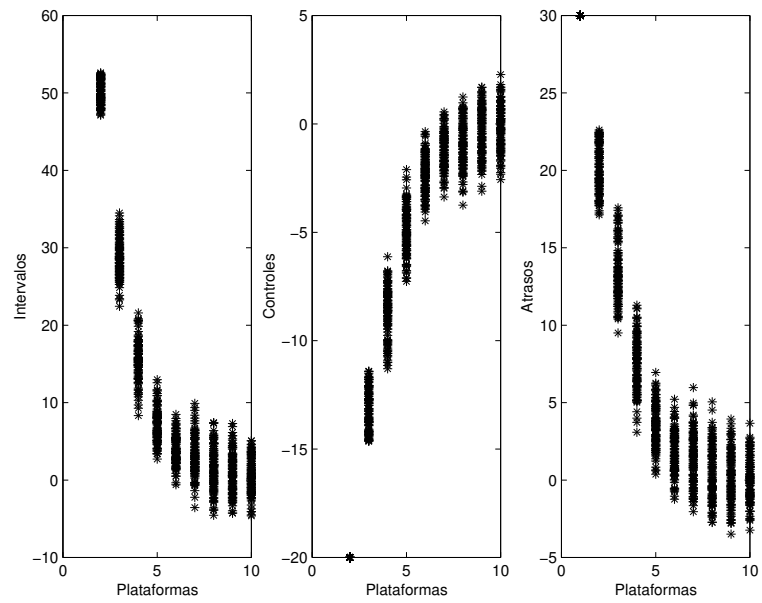


Figura 4.2: RRR de alto desempenho

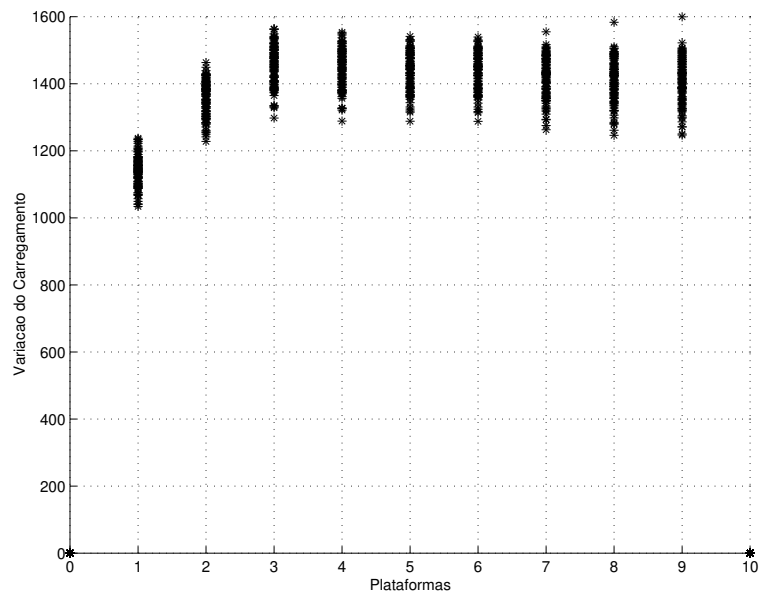


Figura 4.3: Variação da Lotação de Passageiros - RRR de alto desempenho

(4.120). Então, analisando a equação (4.74), pode-se entender porque o elevado carregamento é mantido ao longo de todo o trajeto do trem já que a variação do intervalo

tende a ser anulada.

Para uma política econômica, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

$$p = 1 \quad ; \quad q = 5 \quad ; \quad r = 0$$

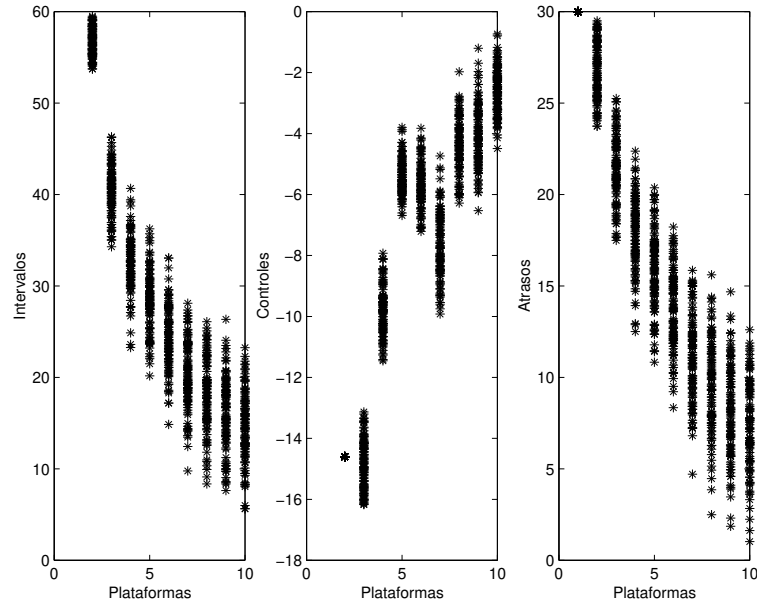


Figura 4.4: RRR econômica

A matriz de realimentação de estados obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4479 & 0.0388 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5197 & 0.0470 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4299 & 0.0367 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2835 & 0.0232 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3391 & 0.0276 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5197 & 0.0470 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3757 & 0.0309 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3939 & 0.0328 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2928 & 0.0239 \end{bmatrix}$$

Os resultados de simulação são apresentados nas figuras 4.4 e 4.5. Pode-se observar que o controle é menor que o aplicado na política de regulação de alto desempenho com

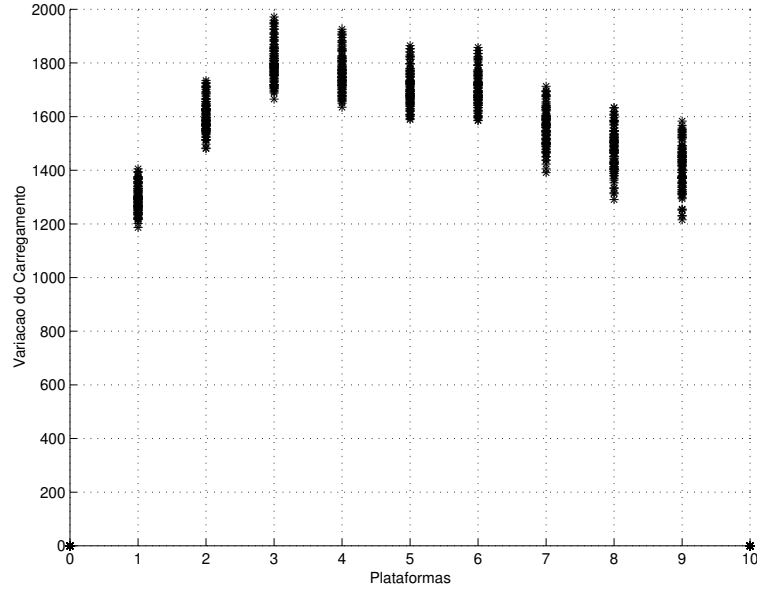


Figura 4.5: Variação da Lotação de Passageiros - RRR econômica

uma consequente diminuição do desempenho de regulação e dispersão maior do intervalo entre trens e atraso. Como consequência, há uma maior variação do carregamento de passageiros nos trens.

Se consideramos RRR de alto desempenho mas assumindo controle e perturbações não simétricos, obtemos a seguinte matriz de realimentação de estados:

$$F = \begin{bmatrix} 0.1916 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4928 & 0.0982 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4879 & 0.1167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4954 & 0.0932 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5047 & 0.0625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5108 & 0.0648 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4891 & 0.1155 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5086 & 0.0735 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5054 & 0.0791 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5143 & 0.0566 \end{bmatrix}$$

As figuras 4.6 e 4.7 ilustram os resultados obtidos, onde podemos observar que devido ao controle mais limitado e principalmente devido à perturbação não simétrica, o sistema apresenta um pior desempenho em relação ao RRR simétrico. Observa-se que os trens permanecem atrasados mesmo aplicando controle negativo (ou seja, reduzindo

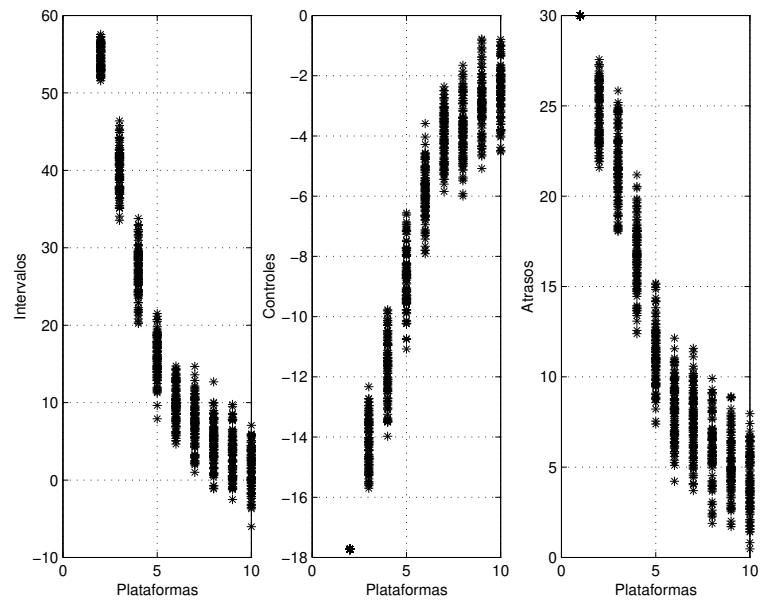


Figura 4.6: RRR não simétrico - Alto desempenho

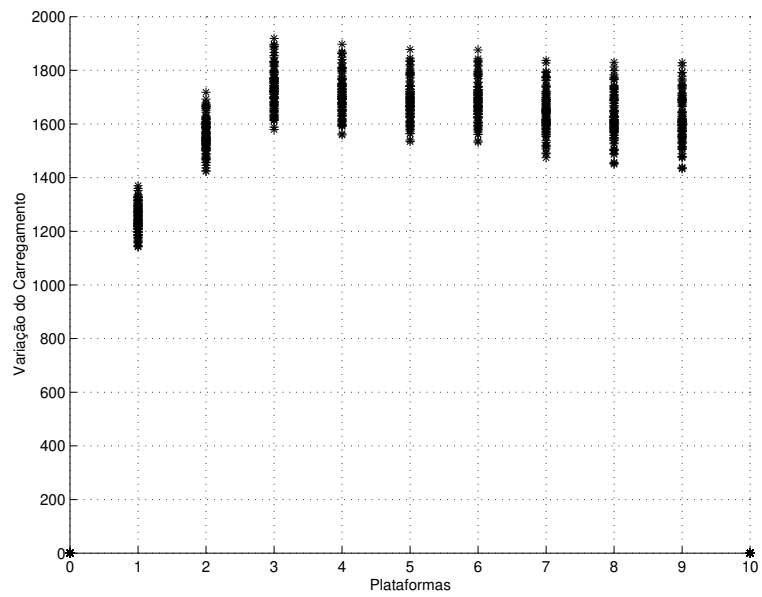


Figura 4.7: Variação da Lotação de Passageiros - RRR não simétrico - Alto desempenho

os tempos de parada nas plataformas e acelerando o trem durante o percurso entre as plataformas). Como consequência, o perfil de variação de carregamento no trem $j+1$

apresenta resultados muito mais elevados.

Para permitir verificar o impacto sobre o carregamento de passageiros previsto pelo Programa Horário, são apresentadas simulações da variação do carregamento sobre os perfis obtidos pela metodologia proposta em (2.63). Para a obtenção do Programa Horário e do perfil de carregamento consideramos a operação em *headways* constantes onde a matriz origem-destino foi obtida através de (4.115) por:

$$MOD = \frac{MOD^U + MOD^L}{2} \quad (4.127)$$

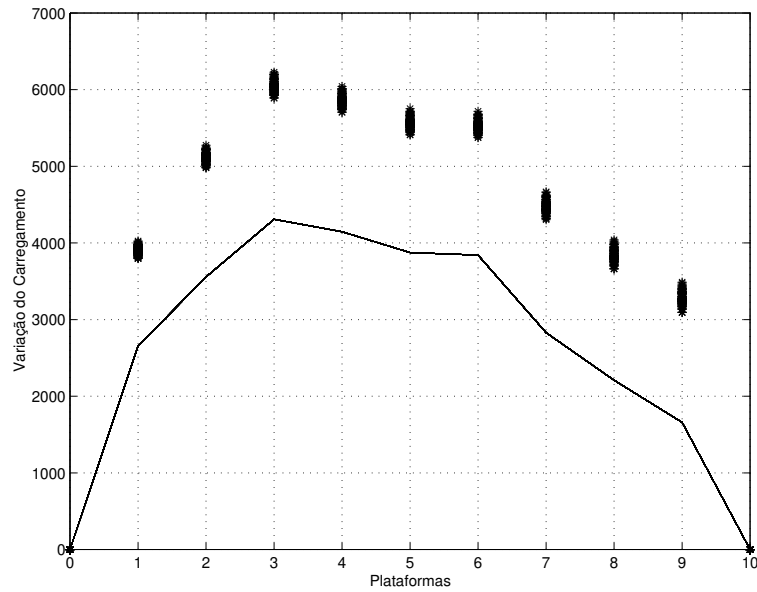


Figura 4.8: Variação da Lotação de Passageiros em Relação ao Programa Horário
RRR não simétrico - Alto desempenho

Para o Programa Horário adotamos os seguintes limites operacionais:

$$uplmin_i = \begin{bmatrix} 28 & 107 & 99 & 79 & 88 & 110 & 100 & 93 & 84 & 74 \end{bmatrix};$$

$$uplmax_i = \begin{bmatrix} 28 & 110 & 100 & 80 & 89 & 116 & 100 & 94 & 86 & 75 \end{bmatrix};$$

$$upmax_i(k)=50 \quad ; \quad upmin_i(k)=15 \quad ; \quad xmax_i(k)=300 \quad ; \quad xmin_i(k)=90,$$

$$pmax_i(k)=4000 \quad ; \quad pmax(k) = 6000 \quad ; \quad p^r(k) = 4800 \quad ; \quad M_i(k) = 5 \quad \text{e} \quad \delta = 1000.$$

A figura 4.8 ilustra a variação da lotação de passageiros no trem $j+1$ onde observa-se que, na operação comercial, o carregamento excede o limite $pmax(k)$ estipulado para a plataforma de maior tráfego.

4.5.3 Regulação Ótima Robusta com Restrições (RORR)

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

$$p = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{5} \quad ; \quad r = \frac{1}{100}$$

Para o controle $U_j = FY_j$, a matriz de realimentação de estados obtida em RORR de alto desempenho foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6157 & 0.0510 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6086 & 0.0580 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6178 & 0.0488 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6365 & 0.0301 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6269 & 0.0397 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6066 & 0.0600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6259 & 0.0407 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6239 & 0.0428 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6314 & 0.0353 \end{bmatrix}$$

Os resultados de simulação constituídos de 100 ensaios considerando perturbações aleatórias são apresentados nas figuras (4.9) e (4.10). Observa-se o bom desempenho do controle onde o sistema se estabiliza mantendo os trens adiantados devido à inclusão da margem de controle. Em contraposição observa-se que, comparando com os resultados obtidos em RRR, houve uma redução da variação da lotação de passageiros nos trens, exatamente devido a esta margem de controle disponível.

Para uma política econômica, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

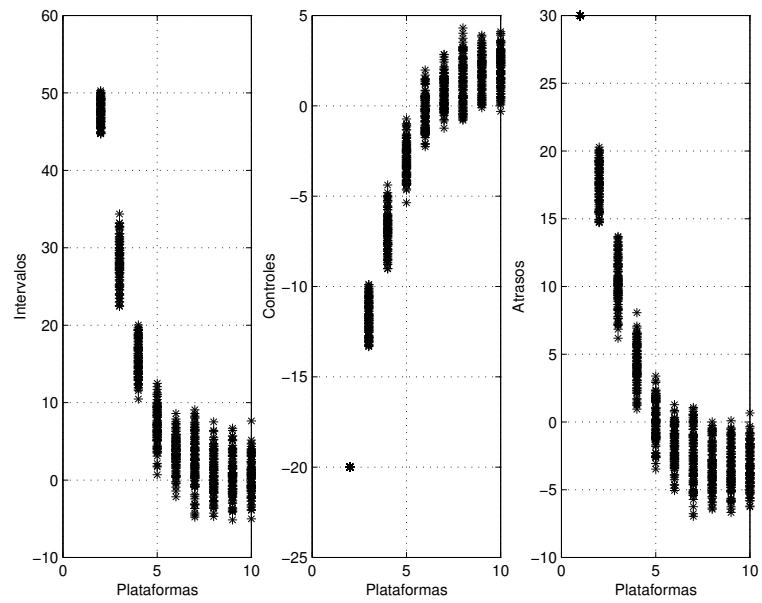


Figura 4.9: RORR - Alto desempenho

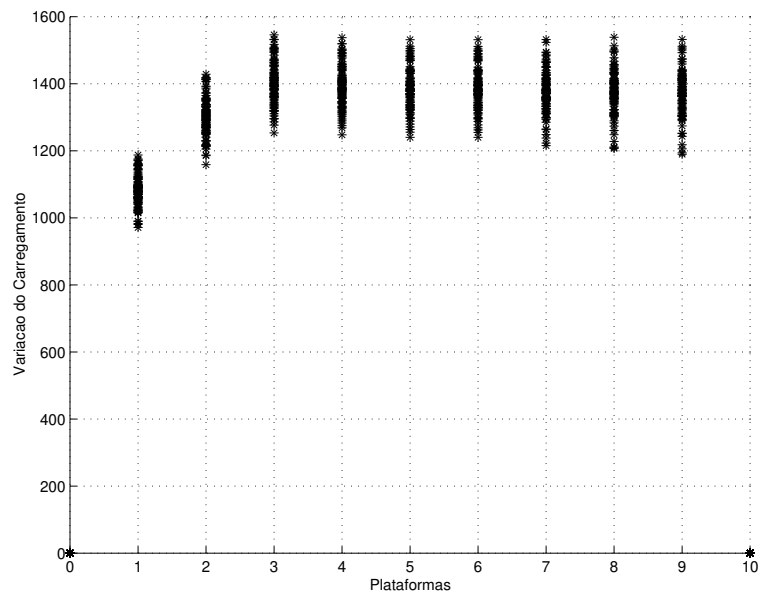


Figura 4.10: Variação da Lotação de Passageiros - RORR de Alto desempenho

$$p = 1 \quad ; \quad q = 5 \quad ; \quad r = \frac{1}{100}$$

A matriz de realimentação de estados obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5006 & 0.0528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5705 & 0.0628 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4838 & 0.0495 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3422 & 0.0311 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3945 & 0.0388 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5695 & 0.0639 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4316 & 0.0418 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4493 & 0.0440 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3497 & 0.0336 \end{bmatrix}$$

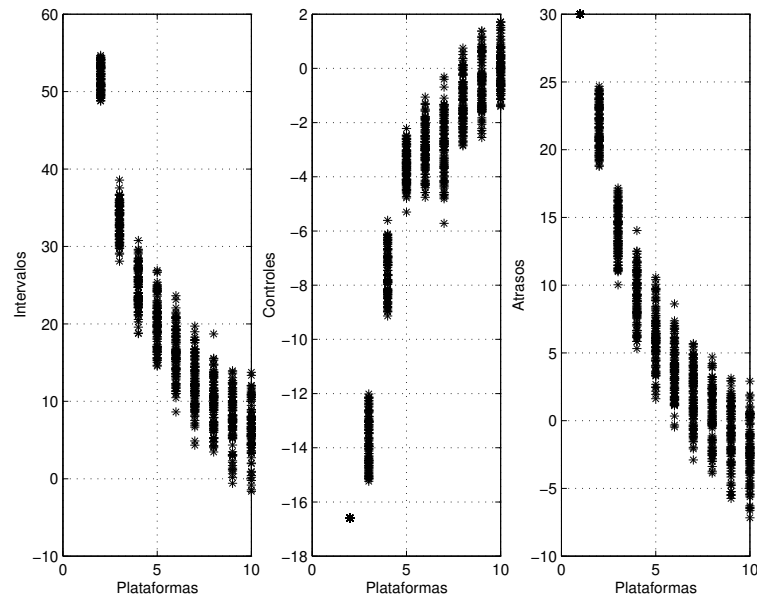


Figura 4.11: RORR - Econômica

Os resultados de simulação são apresentados nas figuras (4.11) e (4.12). Pode-se observar que o controle é menor que o aplicado na política de regulação de alto desempenho com uma consequente diminuição do desempenho de regulação e dispersão maior do intervalo entre trens e atraso. Como consequência, ocorre um aumento no carregamento de passageiros nos trens.

Para o caso não simétrico (RORR com perturbação e controle não simétricos) temos os principais resultados obtidos.

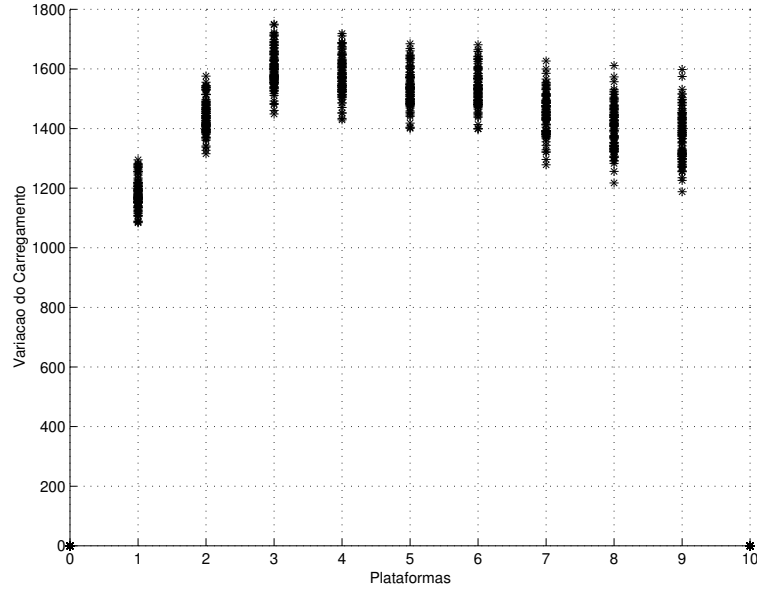


Figura 4.12: Variação da Lotação de Passageiros - RORR Econômica

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

$$p = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{5} \quad ; \quad r = \frac{1}{100}$$

Para o controle $U_j = FY_j$, a matriz de realimentação de estados obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5485 & 0.0515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5395 & 0.0605 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5510 & 0.0490 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5696 & 0.0304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5618 & 0.0382 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5388 & 0.0612 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5578 & 0.0422 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5556 & 0.0444 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5677 & 0.0323 \end{bmatrix}$$

Os resultados de simulação são apresentados nas figuras (4.13) e (4.14). Pode-se observar que o desempenho é consideravelmente superior ao apresentado em RRR não simétrico como efeito da margem de controle utilizada para anular as perturbações. Observa-se também uma redução considerável na variação do carregamento de passageiros.

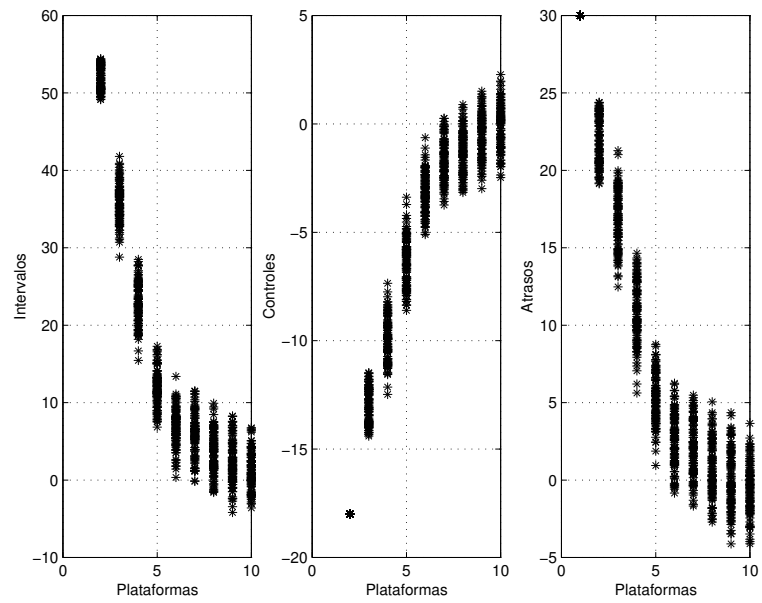


Figura 4.13: RORR não simétrico - Alto Desempenho

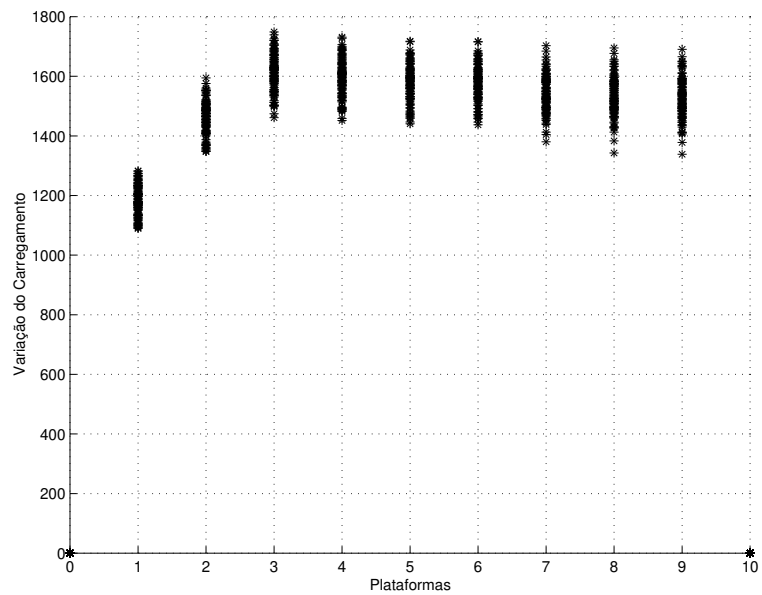


Figura 4.14: Variação da Lotação Passageiros - RORR não simétrico - Alto Desempenho

A figura 4.15 ilustra a variação da lotação de passageiros nos trens em relação ao Programa Horário, onde observa-se que, apesar da grande variação, o limite $pmax(k)$

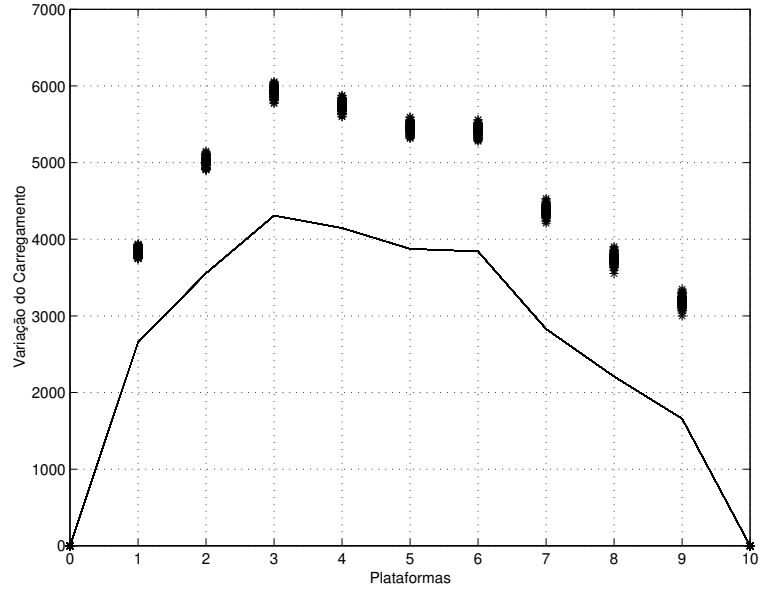


Figura 4.15: Variação da Lotação de Passageiros em Relação ao Programa Horário
RORR não simétrico - Alto Desempenho

não foi excedido.

Para a política de regulação econômica obtemos a seguinte matriz de realimentação de estados:

$$F = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4493 & 0.0541 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5179 & 0.0655 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4321 & 0.0513 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2925 & 0.0309 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3450 & 0.0384 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5176 & 0.0657 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3799 & 0.0434 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3974 & 0.0459 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3006 & 0.0327 \end{bmatrix}$$

Os resultados de simulação são apresentados nas figuras (4.16), (4.17) e (4.18). De um modo geral, o carregamento de passageiros é mais elevado na política econômica em relação à de alto desempenho, fazendo com que em alguns casos o máximo carregamento nos trens $pmax(k)$ seja excedido.

Finalmente, para concluir, serão ilustrados resultados considerando uma política

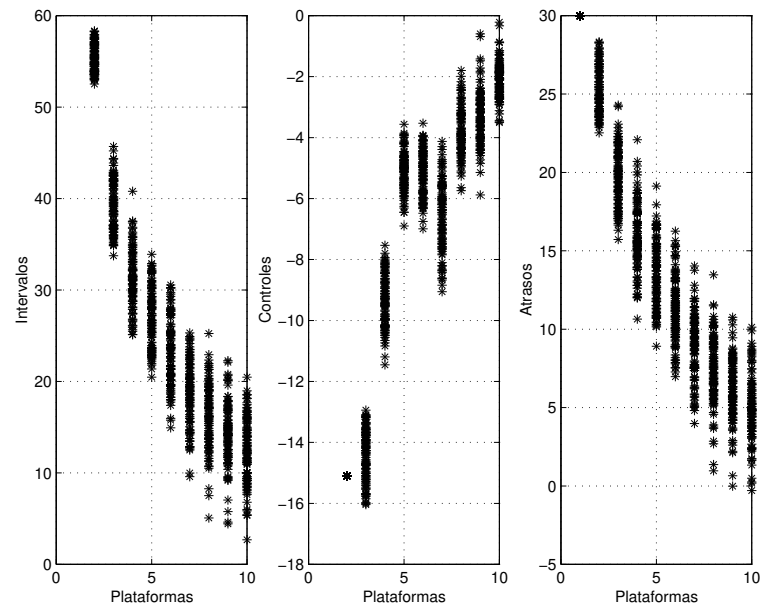


Figura 4.16: RORR não simétrico - Econômica

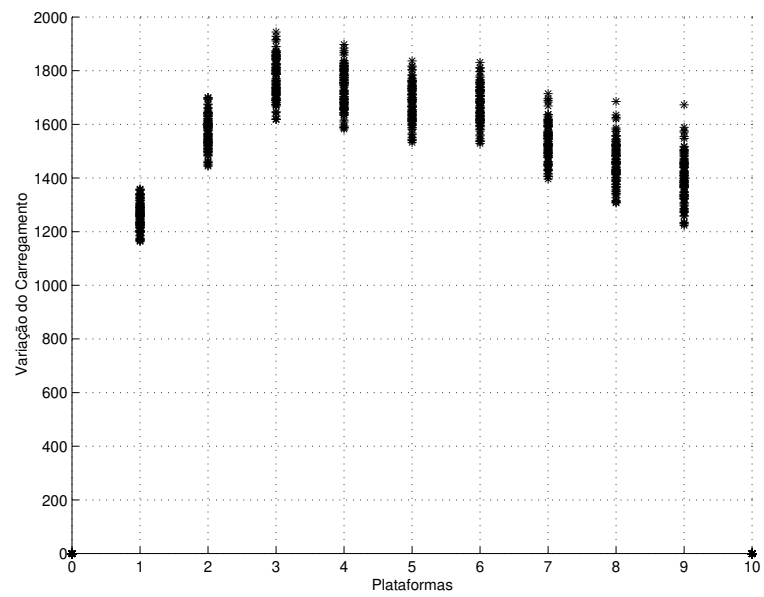


Figura 4.17: Variação da Lotação de Passageiros - RORR não simétrico - Econômica

de regulação econômica com minimização no carregamento de passageiros. Para esta

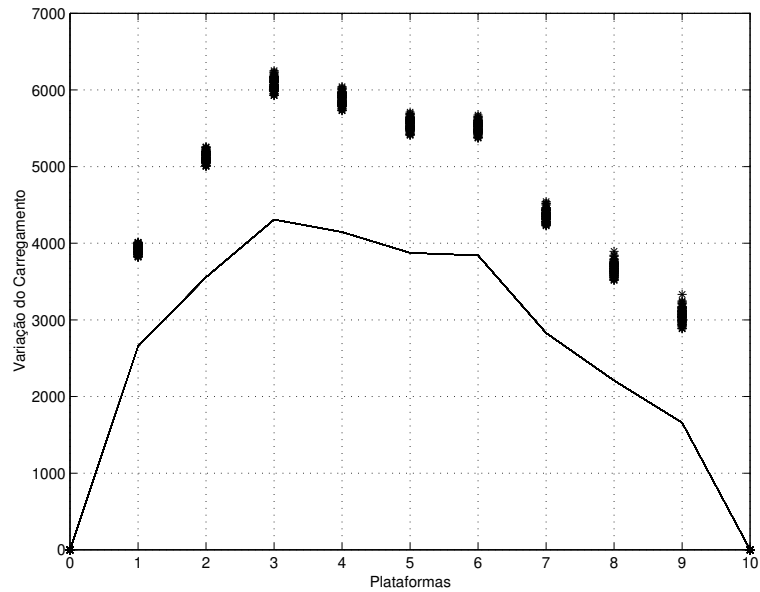


Figura 4.18: Variação da Lotação de Passageiros em Relação ao Programa Horário
RORR não simétrico - Econômica

situação foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

$$p = 1 \quad ; \quad q = 5 \quad ; \quad r = 1$$

A matriz de realimentação de estados obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5426 & 0.0574 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5325 & 0.0675 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4314 & 0.0519 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2923 & 0.0310 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3441 & 0.0392 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5326 & 0.0674 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5532 & 0.0468 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5507 & 0.0493 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5645 & 0.0355 \end{bmatrix}$$

Os resultados de simulação são apresentados nas figuras (4.19), (4.20) e (4.21). É importante salientar que o ajuste dos parâmetros de ponderação para minimização do carregamento de passageiros torna o desempenho similar ao observado no alto desempenho, contudo isto não reduz ao longo do trajeto a sobrecarga que o trem apresenta na primeira plataforma. Isto ocorre porque a formulação proposta permite-nos apenas

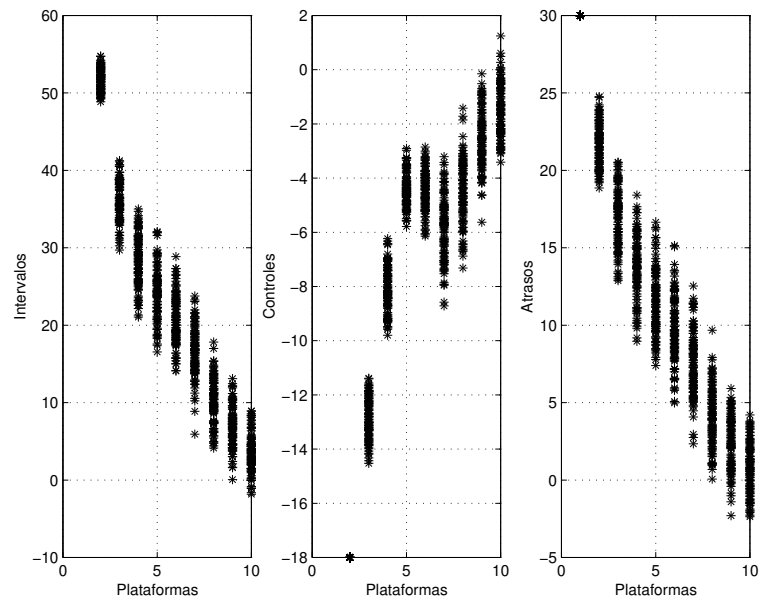


Figura 4.19: RORR não simétrico - Econômica com Minimização do Carregamento

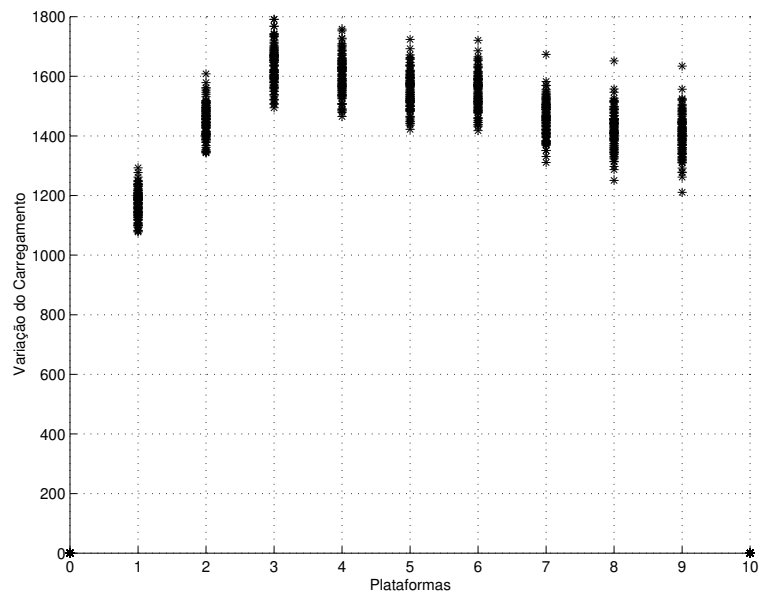


Figura 4.20: Variação da Lotação de Passageiros - RORR não simétrico
Econômica com Minimização do Carregamento de Passageiros

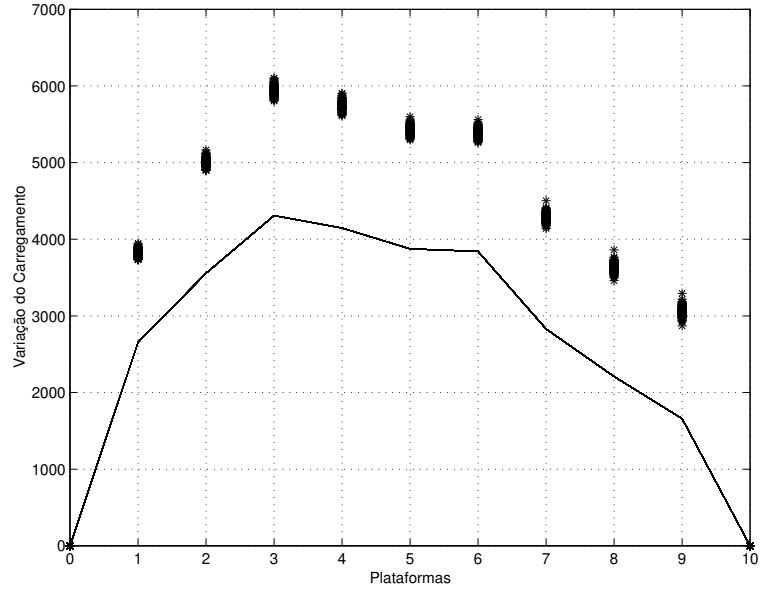


Figura 4.21: Variação da Lotação de Passageiros em Relação ao Programa Horário RORR não simétrico - Econômica com Minimização do Carregamento

minimizar a variação do carregamento entre estações consecutivas. Além disso, analisando novamente a equação (4.74) percebemos que isto somente seria possível se o intervalo atingisse valores negativos. Mas mesmo ajustando os parâmetros de ponderação, esta situação não ocorrerá porque no problema robusto assumimos o pior caso de P_j em (4.94).

Um inconveniente das abordagens RRR e RORR é a necessidade de especificar um poliedro de restrições (4.87) e (4.119) sobre o estado do sistema. Por exemplo, com os dados utilizados nesta seção, para um poliedro de estados (4.87), delimitado por:

$$d_y^L = d_y^U = \begin{bmatrix} 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

levemente superior ao (4.119), o problemas RRR e RORR não admitem solução factível. Ou seja, a escolha dos limites (4.119) afetam a solução do problema e o desempenho de regulação obtido.

Para uma dada matriz de controle F o sistema pode ainda trabalhar satisfatoriamente para atrasos maiores que os especificados pelos limites em (4.119). Neste caso,

ocorre saturação da lei de controle. Seria interessante saber qual é a região de estabilidade assintótica do sistema com controles saturáveis.

Uma metodologia para estimação da região de estabilidade assintótica local robusta de sistemas lineares discretos com controles em malha fechada saturáveis é apresentada em (Milani et alli, 1999), (Milani et alli, 2000), (Coelho, 2001), (Milani et alli, 2002) podendo ser utilizada para estimar os limites para as variáveis de estado Y_j no problema de regulação considerando saturação dos controles.

4.6 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado inicialmente um novo modelo de tráfego de trens em linhas metroviárias. Este modelo é uma extensão do modelo proposto por (Sasama et alli, 1983) considerando a inclusão da margem de controle do Programa Horário, sendo portanto mais adequado para a implementação da regulação durante a operação comercial.

Em seguida foi apresentada a formulação de regulação robusta com restrições (RRR) baseada em programação linear proposta por (Corrêa, 1999) e (Corrêa et alli, 2001).

Finalmente, uma nova formulação para a regulação do tráfego em linhas de metrô foi apresentada onde, além das incertezas do modelo de tráfego e as limitações sobre suas variáveis de estado e controle, presentes na formulação de (Corrêa, 1999) e (Corrêa et alli, 2001), também considera de forma explícita a margem de controle para regulação existente no Programa Horário da linha e o desvio, em relação ao previsto no programa horário, do carregamento de passageiros nos trens ao longo da linha. Foi assumido que os limites sobre as variáveis do modelo de tráfego, variação do carregamento de passageiros, perturbações externas e o domínio de parâmetros incertos são definidos por poliedros convexos compactos. Uma lei de controle invariante no tempo, com estrutura bi-diagonal foi obtida da minimização de um critério de desempenho composto pela soma ponderada das 1-normas das previsões um passo a frente dos desvios, em relação ao programa horário da linha, dos instantes de saída das plataformas, dos intervalos entre sucessivos trens, carregamento dos trens e esforços de controle correspondentes. Explorando propriedades estruturais do modelo de tráfego, o problema foi resolvido através da solução de pequenos problemas de programação linear, relacionados um pa-

ra um com as plataformas de passageiros da linha. Exemplos numéricos demonstram através de simulações que a formulação de regulação robusta proposta pode efetivamente fornecer resultados com desempenho superior aos fornecidos por formulações de regulação robusta em trabalhos anteriores.

Capítulo 5

Regulação em Tempo Real do Tráfego de Trens em Linhas Metroviárias

5.1 Introdução

A formulação RORR proposta no capítulo anterior fornece uma lei de controle de realimentação linear, invariante no tempo. A invariância da lei de controle certamente facilita sua realização. No entanto, tendo que satisfazer todo o poliedro no espaço de estados (4.87), nas proximidades da origem, pode vir a oferecer um desempenho de regulação inferior ao de uma lei de controle não linear, calculada em função do estado atual de cada trem e em cada plataforma de forma independente. Neste caso é necessário estabelecer um novo critério onde possamos garantir a estabilidade do problema de regulação para esta lei de controle invariante.

Nesse sentido, neste capítulo será apresentada uma nova formulação para a regulação robusta do tráfego de trens fornecendo uma lei de controle por realimentação de estados variante no tempo calculada em tempo real. A formulação é baseada na análise de estabilidade do sistema realimentado através dos autovalores do sistema, permitindo obter uma solução de controle em tempo real.

A abordagem considera as incertezas do modelo de tráfego, as limitações sobre

suas variáveis de estado e controle, a margem de controle para regulação existente no Programa Horário da linha e o desvio, em relação ao previsto no Programa Horário, do carregamento dos trens ao longo da linha. Os limites sobre as variáveis do modelo de tráfego, variação do carregamento de passageiros, perturbações externas e o domínio de parâmetros incertos são definidos por poliedros convexos compactos.

Exemplos numéricos são apresentados para demonstrar através de simulações a eficácia desta nova formulação de regulação robusta em tempo real.

5.2 Análise de Estabilidade

Considere o Modelo Recorrente por Plataforma (4.12) - (4.14) onde assumindo $MS_i(k) = 0$ e $v_i(k) = 0$ temos:

$$Y_{K+1} = A_K Y_K + A_K U_{K+1} \quad (5.1)$$

onde:

$$A_K \triangleq \begin{bmatrix} 1 - c(k+1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c(k+1) & 1 - c(k+1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c(k+1) & 1 - c(k+1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - c(k+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c(k+1) & 1 - c(k+1) \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.2)$$

Calculando a inversa, podemos chegar à seguinte forma genérica:

$$A_K \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{1-c(k+1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{-c(k+1)}{(1-c(k+1))^2} & \frac{1}{1-c(k+1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{(c(k+1))^2}{(1-c(k+1))^3} & \frac{-c(k+1)}{(1-c(k+1))^2} & \frac{1}{1-c(k+1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^n (c(k+1))^{n-2}}{(1-c(k+1))^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1} (c(k+1))^{n-3}}{(1-c(k+1))^{n-2}} & \frac{(-1)^n (c(k+1))^{n-4}}{(1-c(k+1))^{n-3}} & \cdots & \frac{1}{1-c(k+1)} & 0 \\ \frac{(-1)^{n-1} (c(k+1))^{n-1}}{(1-c(k+1))^n} & \frac{(-1)^n (c(k+1))^{n-2}}{(1-c(k+1))^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1} (c(k+1))^{n-3}}{(1-c(k+1))^{n-2}} & \cdots & \frac{-c(k+1)}{(1-c(k+1))^2} & \frac{1}{1-c(k+1)} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

onde A_K é uma matriz de ordem $n \times n$ e n indica o número de trens considerados nos vetores de desvio Y_K e controle U_{K+1} (4.13).

Pode-se verificar que os autovalores de A_K são iguais a $\frac{1}{1-c(k+1)}$ onde a constante de tráfego $c(k+1)$ apresenta valores tipicamente restritos a $0 < c(k+1) < 0,3$. Portanto os autovalores estão fora do círculo unitário, o que caracteriza instabilidade. Então a condição de estabilidade jamais será satisfeita na ausência de controle.

Além disso, mesmo se os autovalores estivessem dentro do círculo unitário, como o sistema é não estacionário (matriz A_K variante no tempo), nós não podemos concluir imediatamente com relação à sua estabilidade (Chen, 1984).

Considerando a realimentação de estados $U_{K+1} = F_K Y_K + A_K^{-1} G_K Y_{K+1}$ podemos reescrever a equação (5.1):

$$(I - G_K)Y_{K+1} = A_K(I + F_K)Y_K \quad (5.4)$$

onde I denota uma matriz identidade e:

$$F_K \triangleq \begin{bmatrix} f_{k1,1} & f_{k1,2} & \cdots & f_{k1,j} \\ f_{k2,1} & f_{k2,2} & \cdots & f_{k2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{ki,1} & f_{ki,2} & \cdots & f_{ki,j} \end{bmatrix} \quad ; \quad G_K \triangleq \begin{bmatrix} g_{k1,1} & g_{k1,2} & \cdots & g_{k1,j} \\ g_{k2,1} & g_{k2,2} & \cdots & g_{k2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{ki,1} & g_{ki,2} & \cdots & g_{ki,j} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Definindo $A_{K_f}(k) = A_K(I + F_K)$ e $G_{K_f} = I - G_K$:

$$A_{K_f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-c(k+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-c(k+1)}{(1-c(k+1))^2} & \frac{1}{1-c(k+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-1)^n (c(k+1))^{n-2}}{(1-c(k+1))^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1} (c(k+1))^{n-3}}{(1-c(k+1))^{n-2}} & \cdots & 0 \\ \frac{(-1)^{n-1} (c(k+1))^{n-1}}{(1-c(k+1))^n} & \frac{(-1)^n (c(k+1))^{n-2}}{(1-c(k+1))^{n-1}} & \cdots & \frac{1}{1-c(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k1,1} + 1 & f_{k1,2} & \cdots & f_{k1,j} \\ f_{k2,1} & f_{k2,2} + 1 & \cdots & f_{k2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{ki,1} & f_{ki,2} & \cdots & f_{ki,j} + 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$G_{K_f} = \begin{bmatrix} 1 - g_{k1,1} & -g_{k1,2} & \cdots & -g_{k1,j} \\ -g_{k2,1} & 1 - g_{k2,2} & \cdots & -g_{k2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_{ki,1} & -g_{ki,2} & \cdots & 1 - g_{ki,j} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Através de manipulações algébricas em (5.4) chegamos a:

$$Y_{K+1} = (G_{K_f}^{-1} A_{K_f}) Y_K \quad (5.8)$$

Teorema 5.1: O sistema $G_{K_f}(k)Y_{K+1} = A_{K_f}(k)Y_K$, variante no tempo onde $c(k+1)$ é conhecido, é estável se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$F_K \triangleq \begin{bmatrix} f_{k_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_{k_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{k_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{k_n} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$G_K \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_{k_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -g_{k_1} g_{k_2} & g_{k_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_{n-2}} & (-1)^n g_{k_2} g_{k_3} \cdots g_{k_{n-2}} & (-1)^{n-1} g_{k_3} g_{k_4} \cdots g_{k_{n-2}} & \cdots & 0 & 0 \\ (-1)^n g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_{n-1}} & (-1)^{n-1} g_{k_2} g_{k_3} \cdots g_{k_{n-1}} & (-1)^n g_{k_3} g_{k_4} \cdots g_{k_{n-1}} & \cdots & g_{k_{n-1}} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$-\lambda_{k_i} \leq \frac{f_{k_i} + 1}{1 - c(k+1)} \leq \lambda_{k_i} \quad (5.11)$$

$$0 \leq \lambda_{k_i} < \lambda_m \leq 1 \quad (5.12)$$

$$g_{k_i} = \frac{c(k+1)}{1 - c(k+1)} \quad (5.13)$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{plataformas})$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{trens})$$

onde λ_m é uma escalar que representa o grau de estabilidade desejado e λ_{k_i} são variáveis de ponderação a serem incluídas na função objetivo do problema de minimização.

Prova: Pode-se verificar que, se as condições (5.9) e (5.10) forem satisfeitas, em (5.6) e (5.7) teremos:

$$A_{K_f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-c(k+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-c(k+1)}{(1-c(k+1))^2} & \frac{1}{1-c(k+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-1)^n (c(k+1))^{n-2}}{(1-c(k+1))^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1} (c(k+1))^{n-3}}{(1-c(k+1))^{n-2}} & \cdots & 0 \\ \frac{(-1)^{n-1} (c(k+1))^{n-1}}{(1-c(k+1))^n} & \frac{(-1)^n (c(k+1))^{n-2}}{(1-c(k+1))^{n-1}} & \cdots & \frac{1}{1-c(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k_1} + 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{k_2} + 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{k_n} + 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$G_{K_f} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -g_{k_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_{k_1} g_{k_2} & -g_{k_2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_{n-2}} & (-1)^{n-1} g_{k_2} g_{k_3} \cdots g_{k_{n-2}} & (-1)^n g_{k_3} g_{k_4} \cdots g_{k_{n-2}} & \cdots & 1 & 0 \\ (-1)^{n-1} g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_{n-1}} & (-1)^n g_{k_2} g_{k_3} \cdots g_{k_{n-1}} & (-1)^{n-1} g_{k_3} g_{k_4} \cdots g_{k_{n-1}} & \cdots & -g_{k_{n-1}} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Após algumas manipulações algébricas temos:

$$G_{K_f}^{-1} A_{K_f} = \begin{bmatrix} \frac{f_{k_1}+1}{1-c(k+1)} - \frac{c(k+1)(f_{k_1}+1)}{(1-c(k+1))^2} \\ \vdots \\ (-1)^n \frac{g_{k_{n-1}}(c(k+1))^{n-2}(f_{k_1}+1)}{(1-c(k+1))^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{(c(k+1))^{n-1}(f_{k_1}+1)}{(1-c(k+1))^n} \\ \\ 0 & \cdots & 0 \\ \frac{f_{k_2}+1}{1-c(k+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} \frac{g_{k_{n-1}}(c(k+1))^{n-3}(f_{k_2}+1)}{(1-c(k+1))^{n-2}} + (-1)^n \frac{(c(k+1))^{n-2}(f_{k_2}+1)}{(1-c(k+1))^{n-1}} & \cdots & \frac{f_{k_n}+1}{1-c(k+1)} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Substituindo (5.13) em (5.16), temos:

$$G_{K_f}^{-1} A_{K_f} = \begin{bmatrix} \frac{f_{k_1}+1}{1-c(k+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{f_{k_2}+1}{1-c(k+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{f_{k_n}+1}{1-c(k+1)} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Podemos então facilmente verificar que $G_{K_f}^{-1} A_{K_f}$ é uma matriz diagonal com elementos $\frac{f_{k_i}+1}{1-c(k+1)}$.

Utilizando a equação (5.11) podemos verificar que:

$$\begin{aligned} \lambda_{k_i}(c(k+1)-1)-1 \leq f_{k_i} \leq \lambda_{k_i}(1-c(k+1))-1 \\ \forall i = 1, 2, \dots, n ; \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Usando o pior caso de (5.12):

$$c(k+1)-2 \leq f_{k_i} \leq -c(k+1) ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, n ; \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.19)$$

Substituindo em (5.17), pode-se concluir que todos os elementos da matriz diagonal $G_{K_f}^{-1} A_{K_f}$ apresentam amplitude menor que 1, o que conclui a prova. $\square$

Pode-se observar que na formulação proposta em (5.9) a (5.13) o controle g_{k_i} é fixo e determinado com base na constante de tráfego prevista. Contudo se considerarmos

as incertezas de $c(k)$ (4.76), (4.81) a estratégia de controle variante no tempo aqui apresentada pode ficar com a estabilidade comprometida.

Neste caso, a estabilidade pode ser garantida pelo seguinte teorema:

Teorema 5.2: O sistema $G_{Kf}(k)Y_{K+1} = A_{Kf}(k)Y_K$, variante no tempo, com incerteza nos parâmetros de demanda é estável se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$F_K \triangleq \begin{bmatrix} f_{k_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_{k_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{k_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{k_n} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$G_K \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_{k_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -g_{k_1} g_{k_2} & g_{k_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_{n-2}} & (-1)^n g_{k_2} g_{k_3} \cdots g_{k_{n-2}} & (-1)^{n-1} g_{k_3} g_{k_4} \cdots g_{k_{n-2}} & \cdots & 0 & 0 \\ (-1)^n g_{k_1} g_{k_2} \cdots g_{k_{n-1}} & (-1)^{n-1} g_{k_2} g_{k_3} \cdots g_{k_{n-1}} & (-1)^n g_{k_3} g_{k_4} \cdots g_{k_{n-1}} & \cdots & g_{k_{n-1}} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$-\lambda_{k_i} \leq \frac{f_{k_i} + 1}{1 - c(k+1)^U} \leq \lambda_{k_i} \quad (5.22)$$

$$-\lambda_{k_i} \leq \frac{f_{k_i} + 1}{1 - c(k+1)^L} \leq \lambda_{k_i} \quad (5.23)$$

$$0 \leq \lambda_{k_i} < \lambda_m \leq 1 \quad (5.24)$$

$$g_{k_i} = \frac{c(k+1)^U}{1 - c(k+1)^U} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - c(k+1)^U)(1 - c(k+1)^L)^{n-1}}{c(k+1)^U - c(k+1)^L} + (1 - c(k+1)^L)^{n-2} + \\ & + (1 - c(k+1)^L)^{n-3} c(k+1)^L + \cdots + (1 - c(k+1)^L)(c(k+1)^L)^{n-3} + \\ & + (c(k+1)^L)^{n-2} < \frac{(1 - c(k+1)^L)^n}{\lambda_m(c(k+1)^U - c(k+1)^L)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\forall k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (plataformas)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad (trens)$$

onde λ_m é uma escalar que representa o grau de estabilidade desejado e λ_{k_i} são variáveis de ponderação a serem incluídas na função objetivo do problema de minimização.

Prova: Pode-se verificar que (5.16) pode ser reescrita de forma equivalente como:

$$G_{K_f}^{-1}A_{K_f} = \begin{bmatrix} \frac{f_{k_1}+1}{1-c(k+1)} \left(\frac{1-c(k+1)^U}{1-c(k+1)^U} \right) \\ \left(\frac{g_{k_1}(f_{k_1}+1)}{1-c(k+1)} - \frac{c(k+1)(f_{k_1}+1)}{(1-c(k+1))^2} \right) \left(\frac{1-c(k+1)^U}{1-c(k+1)^U} \right) \\ \vdots \\ \left((-1)^n \frac{g_{k_{n-1}}(c(k+1))^{n-2}(f_{k_1}+1)}{(1-c(k+1))^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{(c(k+1))^{n-1}(f_{k_1}+1)}{(1-c(k+1))^n} \right) \left(\frac{1-c(k+1)^U}{1-c(k+1)^U} \right) \\ \\ \frac{f_{k_2}+1}{1-c(k+1)} \left(\frac{1-c(k+1)^U}{1-c(k+1)^U} \right) & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left((-1)^{n-1} \frac{g_{k_{n-1}}(c(k+1))^{n-3}(f_{k_2}+1)}{(1-c(k+1))^{n-2}} + (-1)^n \frac{(c(k+1))^{n-2}(f_{k_2}+1)}{(1-c(k+1))^{n-1}} \right) \left(\frac{1-c(k+1)^U}{1-c(k+1)^U} \right) & \dots & \left(\frac{f_{k_n}+1}{1-c(k+1)} \right) \left(\frac{1-c(k+1)^U}{1-c(k+1)^U} \right) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Considerando que o pior caso de λ_{k_i} em (5.26) e (5.27) ocorrerá quando $(c(k) = c(k)^U)$ temos:

$$\left| \frac{f_{k_i}+1}{1-c(k+1)^U} \right| \leq \lambda_{k_i} \quad (5.28)$$

Substituindo (5.28) e o controle (5.25), na matriz $G_{K_f}^{-1}A_{K_f}$ (5.27), temos:

$$G_{K_f}^{-1}A_{K_f} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{k_1}(1-c(k+1)^U)}{1-c(k+1)} \\ \frac{\lambda_{k_1}c(k+1)^U}{1-c(k+1)} - \frac{\lambda_{k_1}c(k+1)(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1))^2} \\ \vdots \\ (-1)^n \frac{\lambda_{k_1}(c(k+1))^{n-2}c(k+1)^U}{(1-c(k+1))^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{\lambda_{k_1}(c(k+1))^{n-1}(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1))^n} \\ \\ 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda_{k_2}(1-c(k+1)^U)}{1-c(k+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} \frac{\lambda_{k_2}(c(k+1))^{n-3}c(k+1)^U}{(1-c(k+1))^{n-2}} + (-1)^n \frac{\lambda_{k_2}(c(k+1))^{n-2}(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1))^{n-1}} & \dots & \frac{\lambda_{k_n}(1-c(k+1)^U)}{1-c(k+1)} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

onde $c(k+1)$ denota a constante de tráfego prevista para a plataforma $k+1$ no período de análise, enquanto $c(k+1)^U$ e $c(k+1)^L$ denotam os limites superiores e inferiores para a constante de tráfego.

Pode-se verificar que se $c(k+1) = c(k+1)^U$ obtêm-se (5.17). Contudo se considerarmos no pior caso $c(k+1) = c(k+1)^L$ e assumindo o pior caso $\lambda_{k_i} = \lambda_m$ em (5.24) para todo $i = 1, 2, \dots, n$, a matriz (5.29) fica:

$$G_{K_f}^{-1} A_{K_f} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_m(1-c(k+1)^U)}{1-c(k+1)^L} - \frac{\lambda_m c(k+1)^U}{1-c(k+1)^L} - \frac{\lambda_m c(k+1)^L(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1)^L)^2} \\ \vdots \\ (-1)^n \frac{\lambda_m(c(k+1)^L)^{n-2}c(k+1)^U}{(1-c(k+1)^L)^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{\lambda_m(c(k+1)^L)^{n-1}(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1)^L)^n} \\ \\ 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda_{k_2}(1-c(k+1)^U)}{1-c(k+1)^L} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} \frac{\lambda_m(c(k+1)^L)^{n-3}c(k+1)^U}{(1-c(k+1)^L)^{n-2}} + (-1)^n \frac{\lambda_m(c(k+1)^L)^{n-2}(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1)^L)^{n-1}} & \dots & \frac{\lambda_m(1-c(k+1)^U)}{1-c(k+1)^L} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Considerando agora o pior caso de atrasos Y_K no Modelo Recorrente por Plataforma (5.8) e analisando a matriz (5.30) pode-se perceber que a estabilidade é garantida se o somatório dos módulos dos termos relacionados ao cálculo do atraso do trem n for menor que 1, ou seja, se o somatório dos módulos dos termos da última linha da matriz $G_{K_f}^{-1} A_{K_f}$ for menor que 1.

Isto corresponde a dizer que:

$$\begin{aligned} & (-1)^n \frac{\lambda_m(c(k+1)^L)^{n-2}c(k+1)^U}{(1-c(k+1)^L)^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{\lambda_m(c(k+1)^L)^{n-1}(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1)^L)^n} + \\ & + (-1)^{n-1} \frac{\lambda_m(c(k+1)^L)^{n-3}c(k+1)^U}{(1-c(k+1)^L)^{n-2}} + (-1)^n \frac{\lambda_m(c(k+1)^L)^{n-2}(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1)^L)^{n-1}} + \\ & + \dots + \frac{\lambda_m c(k+1)^U}{1-c(k+1)^L} - \frac{\lambda_m c(k+1)^L(1-c(k+1)^U)}{(1-c(k+1)^L)^2} + \frac{\lambda_m(1-c(k+1)^U)}{1-c(k+1)^L} < 1 \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde após algumas manipulações algébricas chegamos a (5.26), o que conclui então a prova. $\square$

Podemos verificar que a equação (5.8) considerando as condições (5.9) a (5.13) pode ser reescrita como:

$$Y_{K+1} = \begin{bmatrix} \frac{f_{k_1}+1}{1-c(k+1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{f_{k_2}+1}{1-c(k+1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{f_{k_n}+1}{1-c(k+1)} \end{bmatrix} Y_K \quad (5.32)$$

Com base em (4.13) podemos obter facilmente:

$$y_i(k+1) = \frac{1}{1-c(k+1)}y_i(k) + \frac{f_{k_i}}{1-c(k+1)}y_i(k) \quad (5.33)$$

Note que se:

$$u_i(k+1) = f_{k_i}y_i(k) + c(k+1)y_{i-1}(k+1) \quad (5.34)$$

esta equação equivale à equação básica da regulação descrita em (4.15) assumindo $MS_i(k) = 0$ e $v_i(k) = 0$. Isto também pode ser verificado pelo desenvolvimento da equação de realimentação de estados proposta:

$$U_{K+1} = F_K Y_K + A_K^{-1} G_K Y_{K+1}$$

Assumindo F_K e G_K obtidos pelas condições (5.9) a (5.13), os vetores (4.13) e a matriz A_K (5.2) chegamos facilmente a (5.34). Podemos também facilmente verificar que, analisando as equações (4.34) e (4.56), os termos f_{k_i} para $i = 1, 2, \dots, n$ descritos no Modelo Recorrente por Plataforma acima, correspondem respectivamente aos termos $f_{N,N-1}$ apresentados no Modelo de Tempo Real. Note também que se os termos $f_{N,N}$ do Modelo de Tempo Real, sem incertezas na constante de tráfego, forem iguais a $c(k+1)$, a representação pelo Modelo Recorrente por Plataforma terá o controle $u_i(k+1)$ descrito por (5.34). Portanto podemos concluir que, a condição suficiente de estabilidade do sistema correspondente ao Modelo de Tempo Real será satisfeita se:

$$Y_{j+1} = [A(C) + B(C)F]Y_j + B(C)V_j - B(C)M_j \quad (5.35)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f_{2,1} & f_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{N-1,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{N,N-1} & f_{N,N} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$A(C) + B(C)F = \begin{bmatrix} \frac{f_{1,1}-c(1)}{1-c(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{f_{2,1}+1}{1-c(2)} & \frac{f_{2,2}-c(2)}{1-c(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_{3,2}+1}{1-c(3)} & \frac{f_{3,3}-c(3)}{1-c(3)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f_{N-1,N-1}-c(N-1)}{1-c(N-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{f_{N,N-1}+1}{1-c(N)} & \frac{f_{N,N}-c(N)}{1-c(N)} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$-\lambda_{k,k-1} \leq \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^U} \leq \lambda_{k,k-1} \quad \forall k = 2, 3, \dots, N \quad (5.38)$$

$$-\lambda_{k,k-1} \leq \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^L} \leq \lambda_{k,k-1} \quad \forall k = 2, 3, \dots, N \quad (5.39)$$

$$f_{k,k} = c(k)^U \quad \forall k = 1, 2, \dots, N \quad (5.40)$$

$$0 \leq \lambda_{k,k-1} < \lambda_m \leq 1 \quad \forall k = 2, 3, \dots, N \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - c(k+1)^U)(1 - c(k+1)^L)^{n-1}}{c(k+1)^U - c(k+1)^L} + (1 - c(k+1)^L)^{n-2} + \\ & + (1 - c(k+1)^L)^{n-3}c(k+1)^L + \cdots + 1 - c(k+1)^L(c(k+1)^L)^{n-3} + \\ & + (c(k+1)^L)^{n-2} < \frac{(1 - c(k+1)^L)^n}{\lambda_m(c(k+1)^U - c(k+1)^L)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Observe que na plataforma $k = 1$ o controle é fixo e corresponde ao limite superior da constante de tráfego prevista.

Uma alternativa adicional para o projetista consiste em ajustar o grau de estabilidade λ_m , mas respeitando as condições de estabilidade (5.41) e (5.42), para obter melhores resultados. Esta opção é viável, mas deve-se considerar que, dependendo das condições iniciais do vetor de atraso Y_K , baixos valores de λ_m podem tornar o problema infactível, por ser necessário exceder os limites previstos para o controle que são

definidos por:

$$\begin{aligned} -\gamma_{uk}d_{uk}^L &\leq f_{k,k-1}y_i(k-1) + c(k)^U y_{i-1}(k) \leq \gamma_{uk}d_{uk}^U \\ 0 &\leq \gamma_{uk} \leq 1 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Para evitar este inconveniente propomos o seguinte teorema:

Teorema 5.3: O sistema de regulação de tráfego (5.35) para o controle proposto em (5.36) a (5.42), com demanda incerta, é assintoticamente estável e apresenta controle delimitado por (5.43) se λ_m satisfazer as seguintes condições:

$$0 \leq \lambda_m < 1 \quad (5.44)$$

$$\lambda_m \geq \frac{d_{uk}^U - c(k)^U y_{i-1}(k) + y_i(k-1)}{y_i(k-1)(1 - c(k)^U)} \quad (5.45)$$

$$\lambda_m \geq \frac{-d_{uk}^L - c(k)^U y_{i-1}(k) + y_i(k-1)}{y_i(k-1)(1 - c(k)^U)} \quad (5.46)$$

Prova: A estabilidade pode ser verificada pela prova dos teoremas anteriores onde λ_m é delimitado por (5.41) e (5.42).

No que se refere aos limites para o controle consideremos as condições em (5.38) e (5.39). Assumindo o pior caso de $\lambda_{k,k-1}$ e incertezas de $c(k)$ temos:

$$-\lambda_m \leq \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^U} \leq \lambda_m \quad (5.47)$$

Que pode ser reescrita como:

$$\lambda_m \geq \left| \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^U} \right| \quad (5.48)$$

Como $f_{k,k-1}$ é tipicamente negativo e $0 \leq c(k)^U \leq 0.5$ obtemos facilmente:

$$f_{k,k-1} \leq \lambda_m(1 - c(k)^U) - 1 \quad (5.49)$$

Considerando agora as condições em (5.43), pode-se verificar que a saturação ocorrerá nas condições a seguir:

$$(\lambda_m(1 - c(k)^U) - 1)y_i(k-1) + c(k)^U y_{i-1}(k) \geq d_{uk}^U \quad (5.50)$$

ou:

$$(\lambda_m(1 - c(k)^U) - 1)y_i(k - 1) + c(k)^U y_{i-1}(k) \leq -d_{uk}^L \quad (5.51)$$

Consideremos inicialmente a saturação no limite superior de controle (5.50). Neste caso, o controle saturado deve ser:

$$f_{k,k-1_{sat}} = \frac{d_{uk}^U - c(k)^U y_{i-1}(k)}{y_i(k - 1)} \quad (5.52)$$

que corresponde a fazer em (5.49):

$$\lambda_m \geq \frac{f_{k,k-1_{sat}} + 1}{1 - c(k)^U} \quad (5.53)$$

Substituindo (5.52) em (5.53) chegamos a (5.45).

De forma similar, considerando o limite inferior de controle (5.51), podemos obter:

$$f_{k,k-1_{sat}} = \frac{-d_{uk}^L - c(k)^U y_{i-1}(k)}{y_i(k - 1)} \quad (5.54)$$

que nos permite obter (5.46) utilizando (5.49) e (5.54), o que conclui a prova. $\square$

5.3 Formulação do Problema de Regulação Robusta em Tempo Real

O problema de regulação do tráfego de trens em uma linha de metrô pode ser formulado como pequenos problemas de programação linear aplicados a cada trem e a partir da 2ª plataforma. O problema deve considerar as restrições operacionais em termos de segurança para a o desvio do atraso $y_j(k)$, controle variante no tempo $u_j(k)$, variação do intervalo (*headways*) entre trens ($y_j(k) - y_{j-1}(k)$) e desvio do carregamento nos trens $\Delta p_j(k)$.

Na primeira plataforma o controle é fixo e corresponde a $f_{1,1} = c(k)^U$ onde $c(k)^U$ é o limite superior previsto para a constante de tráfego aleatória. Portanto os atrasos e o desvio do carregamento nos trens podem ser calculados diretamente por:

$$\begin{aligned}
y_i(1) &= \frac{f_{1,1} - c(1)}{1 - c(1)} y_{i-1}(1) - \frac{1}{1 - c(1)} m_i(1) + \frac{1}{1 - c(1)} v_i(1) \\
\Delta p_i(1) &= \vartheta_i(1)(y_i(1) - y_{i-1}(1))
\end{aligned} \tag{5.55}$$

onde m_1 é a margem de controle prevista no Programa Horário, $v_i(1)$ é a perturbação externa aleatória e $y_{i-1}(1)$ é obtido pela condição inicial do vetor de atrasos.

Para as outras plataformas podemos propor então a seguinte formulação:

P.L. k ; $k = 2 : N$:

$$\min(\lambda_{k,k-1} + z(d_{yk}^U + d_{yk}^L)\gamma_{yk} + q(d_{uk}^U + d_{uk}^L)\gamma_{uk} + p(d_{hk}^U + d_{hk}^L)\gamma_{hk} + r(d_{pk}^U + d_{pk}^L)\gamma_{pk})$$

$$y_i^{UU}(k) = \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^U} y_i(k-1) + \frac{f_{k,k} - c(k)^U}{1 - c(k)^U} y_{i-1}(k) - \frac{1}{1 - c(k)^U} m_k + \frac{1}{1 - c(k)^U} dv_k^U$$

$$y_i^{UL}(k) = \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^L} y_i(k-1) + \frac{f_{k,k} - c(k)^L}{1 - c(k)^L} y_{i-1}(k) - \frac{1}{1 - c(k)^L} m_k + \frac{1}{1 - c(k)^L} dv_k^U$$

$$y_i^{LU}(k) = \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^U} y_i(k-1) + \frac{f_{k,k} - c(k)^U}{1 - c(k)^U} y_{i-1}(k) - \frac{1}{1 - c(k)^U} m_k + \frac{1}{1 - c(k)^U} dv_k^L$$

$$y_i^{LL}(k) = \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^L} y_i(k-1) + \frac{f_{k,k} - c(k)^L}{1 - c(k)^L} y_{i-1}(k) - \frac{1}{1 - c(k)^L} m_k + \frac{1}{1 - c(k)^L} dv_k^L$$

$$\Delta p_i(k)^{UUU} = \Delta p_i(k-1) + \vartheta_i(k)^U (y_i(k)^{UU} - y_{i-1}(k))$$

$$\Delta p_i(k)^{UUL} = \Delta p_i(k-1) + \vartheta_i(k)^L (y_i(k)^{UU} - y_{i-1}(k))$$

$$\Delta p_i(k)^{ULU} = \Delta p_i(k-1) + \vartheta_i(k)^U (y_i(k)^{UL} - y_{i-1}(k))$$

$$\Delta p_i(k)^{ULL} = \Delta p_i(k-1) + \vartheta_i(k)^L (y_i(k)^{UL} - y_{i-1}(k))$$

$$\Delta p_i(k)^{LUU} = \Delta p_i(k-1) + \vartheta_i(k)^U (y_i(k)^{LU} - y_{i-1}(k))$$

$$\Delta p_i(k)^{LUL} = \Delta p_i(k-1) + \vartheta_i(k)^L (y_i(k)^{LU} - y_{i-1}(k))$$

$$\Delta p_i(k)^{LLU} = \Delta p_i(k-1) + \vartheta_i(k)^U (y_i(k)^{LL} - y_{i-1}(k))$$

$$\Delta p_i(k)^{LLL} = \Delta p_i(k-1) + \vartheta_i(k)^L (y_i(k)^{LL} - y_{i-1}(k))$$

$$-\gamma_{yk} d_{yk} \leq y_i^{UU}(k) \leq \gamma_{yk} d_{yk} \tag{5.56}$$

$$-\gamma_{yk} d_{yk} \leq y_i^{UL}(k) \leq \gamma_{yk} d_{yk}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_{yk}d_{yk} \leq y_i^{LU}(k) \leq \gamma_{yk}d_{yk} \\
& -\gamma_{yk}d_{yk} \leq y_i^{LL}(k) \leq \gamma_{yk}d_{yk} \\
& -\gamma_{uk}d_{uk}^L \leq f_{k,k-1}y_i(k-1) + c(k)^U y_{i-1}(k) \leq \gamma_{uk}d_{uk}^U \\
& -\lambda_{k,k-1} \leq \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^U} \leq \lambda_{k,k-1} \\
& -\lambda_{k,k-1} \leq \frac{f_{k,k-1} + 1}{1 - c(k)^L} \leq \lambda_{k,k-1} \\
& f_{k,k} = c(k)^U \\
& 0 \leq \lambda_{k,k-1} < \lambda_m \leq 1 \\
& -\gamma_{hk}d_{hk} \leq y_i^{UU}(k) - y_{i-1}(k) \leq \gamma_{hk}d_{hk} \\
& -\gamma_{hk}d_{hk} \leq y_i^{UL}(k) - y_{i-1}(k) \leq \gamma_{hk}d_{hk} \\
& -\gamma_{hk}d_{hk} \leq y_i^{LU}(k) - y_{i-1}(k) \leq \gamma_{hk}d_{hk} \\
& -\gamma_{hk}d_{hk} \leq y_i^{LL}(k) - y_{i-1}(k) \leq \gamma_{hk}d_{hk} \\
& -\gamma_{pk}d_{pk} \leq \Delta p_i(k)^{UUU} \leq \gamma_{pk}d_{pk} \\
& -\gamma_{pk}d_{pk} \leq \Delta p_i(k)^{UUL} \leq \gamma_{pk}d_{pk} \\
& -\gamma_{pk}d_{pk} \leq \Delta p_i(k)^{ULU} \leq \gamma_{pk}d_{pk} \\
& -\gamma_{pk}d_{pk} \leq \Delta p_i(k)^{ULL} \leq \gamma_{pk}d_{pk} \\
& -\gamma_{pk}d_{pk} \leq \Delta p_i(k)^{LUU} \leq \gamma_{pk}d_{pk} \\
& -\gamma_{pk}d_{pk} \leq \Delta p_i(k)^{LUL} \leq \gamma_{pk}d_{pk} \\
& -\gamma_{pk}d_{pk} \leq \Delta p_i(k)^{LLU} \leq \gamma_{pk}d_{pk} \\
& -\gamma_{pk}d_{pk} \leq \Delta p_i(k)^{LLL} \leq \gamma_{pk}d_{pk} \\
& \frac{(1 - c(k)^U)(1 - c(k)^L)^{N-1}}{c(k)^U - c(k)^L} + (1 - c(k)^L)^{N-2} + (1 - c(k)^L)^{N-3}c(k)^L + \\
& + \dots + (1 - c(k)^L)(c(k)^L)^{N-3} + (c(k)^L)^{N-2} < \frac{(1 - c(k)^L)^N}{\lambda_m(c(k)^U - c(k)^L)} \\
& \lambda_m \geq \frac{d_{uk}^U - c(k)^U y_{i-1}(k) + y_i(k-1)}{y_i(k-1)(1 - c(k)^U)} \\
& \lambda_m \geq \frac{-d_{uk}^L - c(k)^U y_{i-1}(k) + y_i(k-1)}{y_i(k-1)(1 - c(k)^U)}
\end{aligned}$$

onde $z \geq 0$, $q \geq 0$, $p \geq 0$ e $r \geq 0$ são escalares usados para ponderação relativa de $\lambda_{k,k-1}$, γ_{yk} , γ_{uk} , γ_{hk} e γ_{pk} ; λ_m é uma escalar ajustada pelo projetista para garantir

um grau de estabilidade no sistema; $c(k)^U$ e $c(k)^L$ são os limites previstos para a constante de tráfego; m_k é a margem de controle prevista no Programa Horário para cada plataforma; d_{uk}^U e d_{uk}^L são limites operacionais ao controle $u_i(k)$; $d_{yk}=d_{yk}^U=d_{yk}^L$ define os limites superior e inferior simétricos para o estado $y_i(k)$; $d_h(k)=d_{hk}^U=d_{hk}^L$ define os limites para a variação do intervalo entre trens consecutivos; $d_p(k)=d_{pk}^U=d_{pk}^L$ define os limites para a variação do carregamento de passageiros; e d_{vk}^U e d_{vk}^L são os limites superiores e inferiores para os distúrbios aleatórios $v_i(k)$. Os atrasos $y_i(k-1)$ e $y_{i-1}(k)$ são conhecidos ou estimados on-line no evento de chegada dos trens nas plataformas.

5.4 Exemplo Numérico

Nesta seção, alguns exemplos numéricos ilustram a utilização da formulação para regulação em tempo real. Para os resultados apresentados utilizamos os valores de demanda equivalentes a (4.115) - (4.118).

Os vetores de estado Y_j , intervalo entre trens $(Y_{j+1} - Y_j)$ e carregamento de passageiros P_j são delimitados respectivamente por:

$$\begin{aligned} d_y^L = d_y^U &= \begin{bmatrix} 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix} \\ d_h^L = d_h^U &= \begin{bmatrix} 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 \end{bmatrix} \\ d_p^L = d_p^U &= \begin{bmatrix} 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 & 1600 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Os vetores que delimitam o controle U_j e as perturbações V_j correspondem a:

$$\begin{aligned} d_u^U &= \begin{bmatrix} 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 \end{bmatrix} \\ d_u^L &= \begin{bmatrix} 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} d_v^U &= \begin{bmatrix} 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 \end{bmatrix} \\ d_v^L &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.59)$$

A margem de controle para a regulação é dada por:

$$M_j = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Para ilustrar o desempenho da formulação de regulação em tempo real serão apresentados um conjunto de resultados de simulações dos intervalos $(y_j(k) - y_{j-1}(k))$, controles $(u_j(k))$ e atrasos $(y_j(k))$ de um trem j ao longo das plataformas da linha, a partir da condição inicial:

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 30 & -30 & 0 & -30 & 30 & 0 & 0 & 30 & -30 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

e considerando também que os componentes dos parâmetros C e ϑ são variáveis aleatórias, uniformemente distribuídas dentro dos poliedros (4.81) e (4.82) delimitados respectivamente por (4.117) e (4.118). Serão também ilustrados resultados de simulação da variação do carregamento de passageiros em um trem $j+1$ ao longo das plataformas partindo da condição inicial:

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Para permitir verificar o impacto sobre o carregamento de passageiros previsto pelo Programa Horário, são também apresentadas simulações da variação do carregamento em relação ao previsto pelo Programa Horário. Para a obtenção do Programa Horário e do perfil de carregamento consideramos a operação a *headways* constantes (2.63) onde a matriz origem-destino é obtida através de (4.115) e utilizando os mesmos limites operacionais descritos no item 4.5.2.

Para uma política de alto desempenho foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

$$z = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{5} \quad ; \quad p = 1 \quad ; \quad r = \frac{1}{100}$$

Os resultados de simulação constituem-se de 100 ensaios considerando perturbações e demanda aleatórias. Os resultados obtidos considerando $\lambda_m = 0,9$ são ilustrados nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3.

Pode-se verificar a eficácia do controle obtido, mesmo com λ_m elevado.

Os resultados obtidos considerando $\lambda_m = 0,3$ são ilustrados nas figuras 5.4, 5.5 e 5.6.

Podemos comparar os resultados da regulação robusta em tempo real, onde a matriz de controle F é variante no tempo, com os apresentados na regulação robusta com

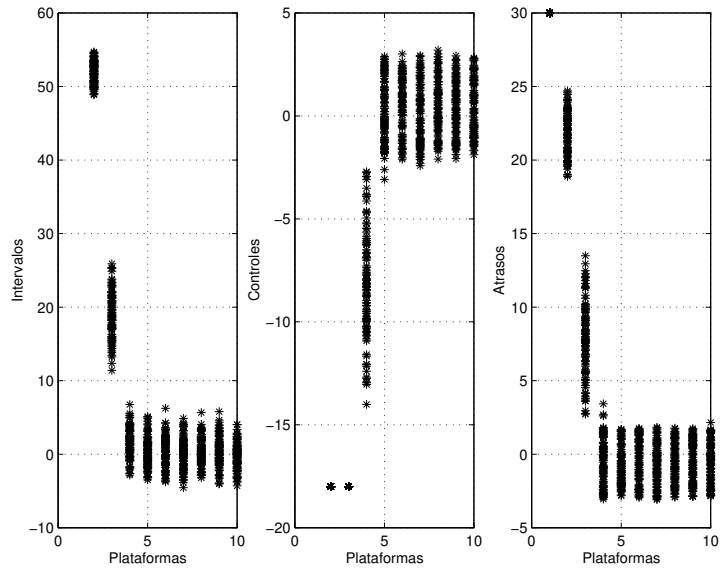


Figura 5.1: Regulação Robusta em Tempo Real - Alto Desempenho - $\lambda_m = 0,9$

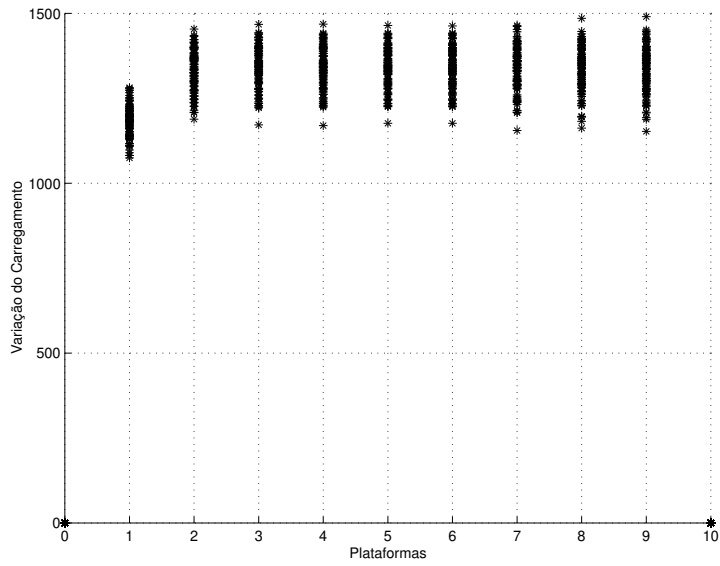


Figura 5.2: Variação do carregamento de passageiros - Regulação em Tempo Real
Alto Desempenho - $\lambda_m = 0,9$

controle invariante no tempo, proposta pela formulação RORR apresentada em (4.113) e (4.114). Fica evidente o melhor desempenho dos resultados obtidos pela formulação

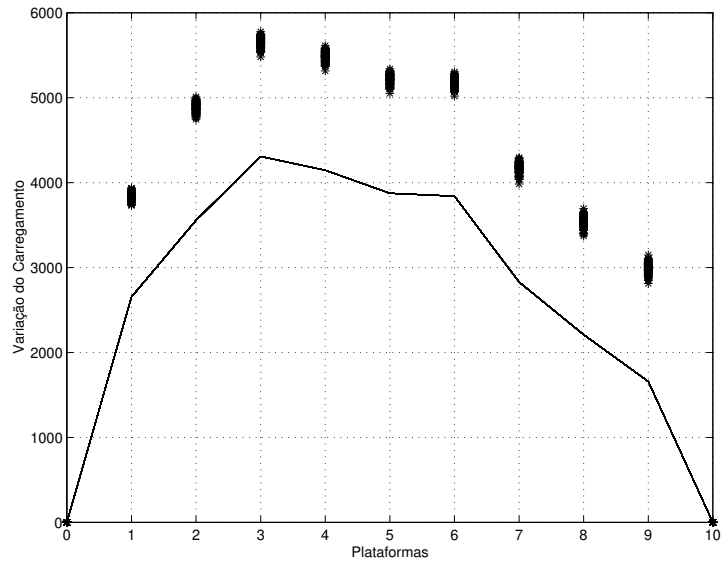


Figura 5.3: Variação do carregamento de passageiros em relação ao Programa Horário
Regulação Robusta em Tempo Real - Alto Desempenho - $\lambda_m = 0,9$

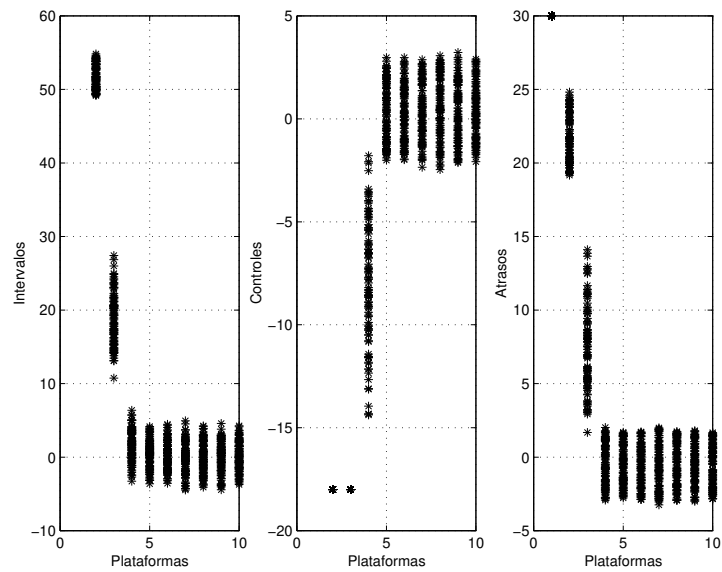


Figura 5.4: Regulação Robusta em Tempo Real - Alto Desempenho - $\lambda_m = 0,3$

de regulação robusta em tempo real (5.55) e (5.56). A melhoria de desempenho pode ser percebida comparando as figuras 5.4, 5.5 e 5.6 com as figuras 4.13, 4.14 e 4.15 onde:

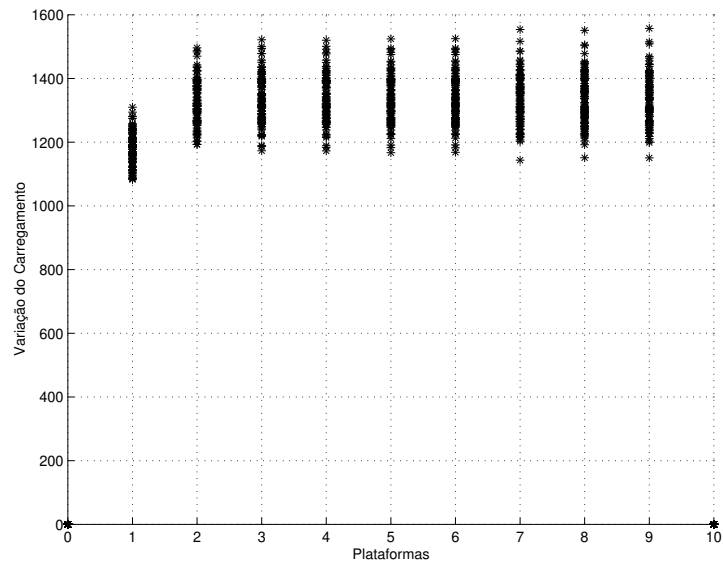


Figura 5.5: Variação do carregamento de passageiros - Regulação em Tempo Real
Alto Desempenho - $\lambda_m = 0,3$

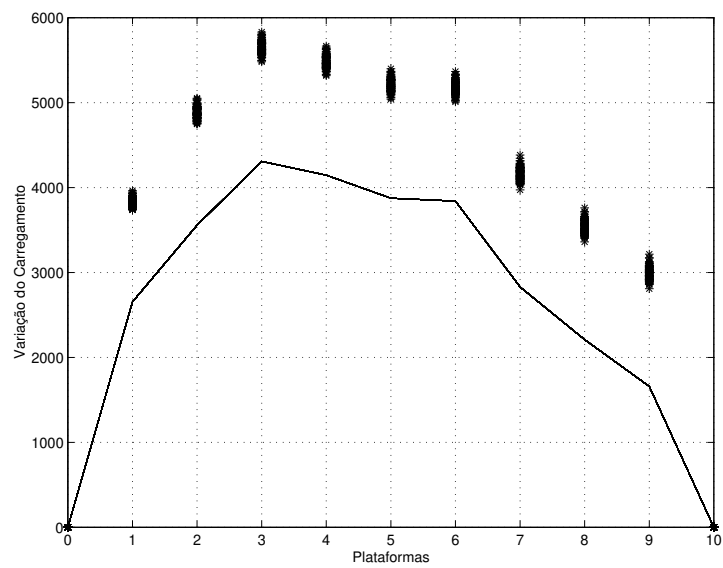


Figura 5.6: Variação do carregamento de passageiros em relação ao Programa Horário
Regulação Robusta em Tempo Real - Alto Desempenho - $\lambda_m = 0,3$

- O controle variante no tempo reduz a incerteza global do modelo, permitindo obter controles mais precisos e com maior amplitude à medida que o atraso é reduzido. Como consequência, o sistema se estabiliza muito mais rapidamente.
- Os resultados apresentam atraso, desvio do intervalo entre trens e carregamento minimizados a partir da plataforma 4 na regulação em tempo real, enquanto na formulação com controle invariante no tempo isto ocorre somente na última plataforma.
- A variação do carregamento de passageiros é muito maior no controle invariante no tempo, chegando a valores da ordem de 1800 passageiros dependendo das perturbações aleatórias, enquanto na regulação robusta em tempo real não atinge 1500 passageiros.
- O carregamento total de passageiros nos trens será claramente maior com controle invariante no tempo, podendo comprometer o nível de conforto desejável para os usuários.

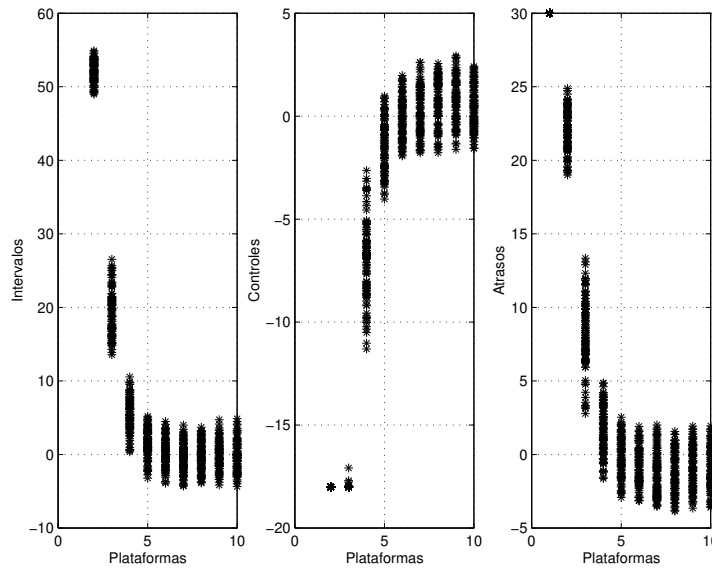


Figura 5.7: Regulação Robusta em Tempo Real - Econômica - $\lambda_m = 0,3$

Para uma política econômica foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

$$z = 1 \quad ; \quad q = 5 \quad ; \quad p = 1 \quad ; \quad r = \frac{1}{100}$$

As figuras 5.7, 5.8 e 5.9 apresentam os resultados considerando $\lambda_m = 0,3$. Pode-se

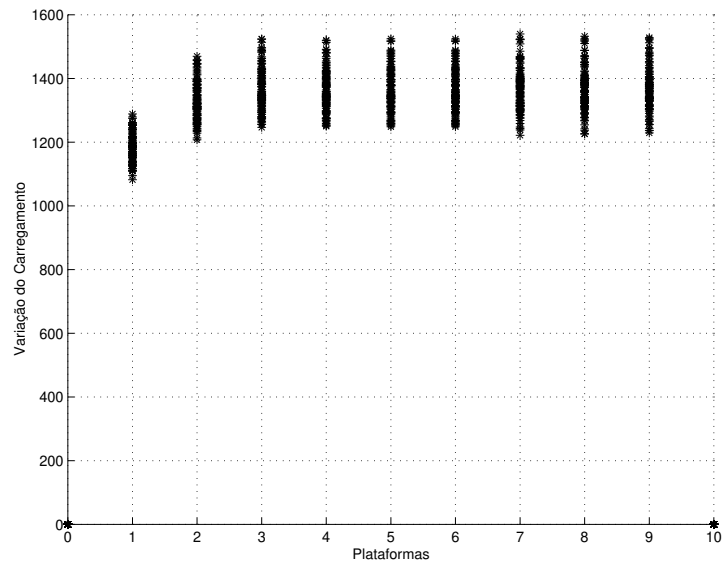


Figura 5.8: Variação do carregamento de passageiros - Regulação em Tempo Real
Econômica - $\lambda_m = 0,3$

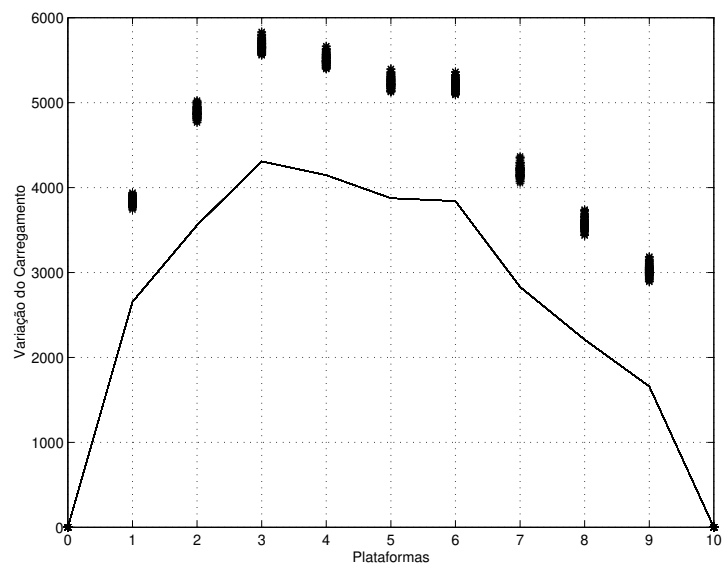


Figura 5.9: Variação do carregamento de passageiros em relação ao Programa Horário
Regulação Robusta em Tempo Real - Econômica - $\lambda_m = 0,3$

verificar a eficácia do controle proposto mesmo com economia de controle.

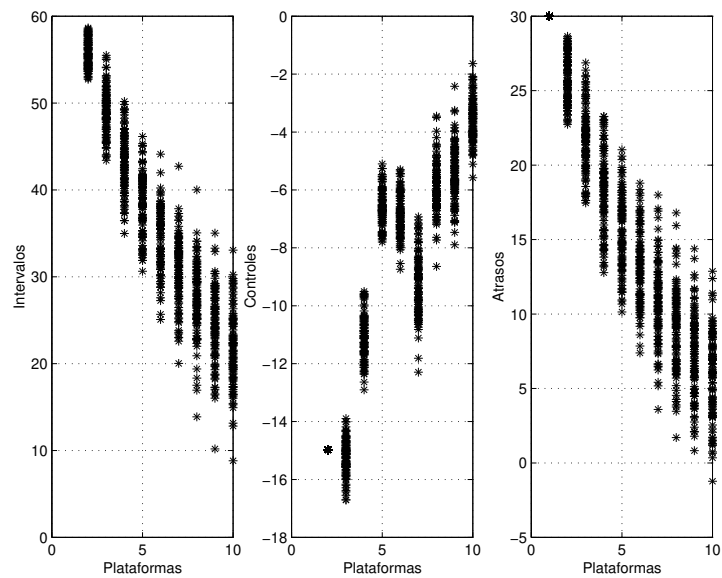


Figura 5.10: Regulação em Tempo Real - Econômica - $\lambda_m = 0,9$

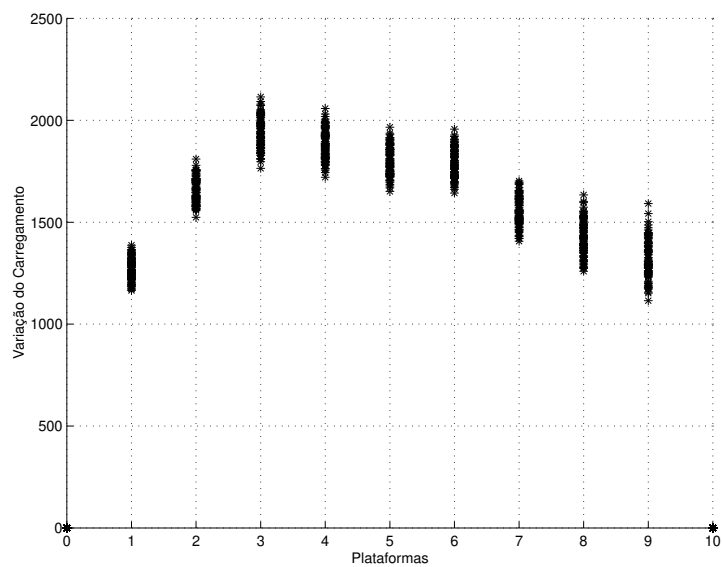


Figura 5.11: Variação do carregamento de passageiros - Regulação em Tempo Real Econômica - $\lambda_m = 0,9$

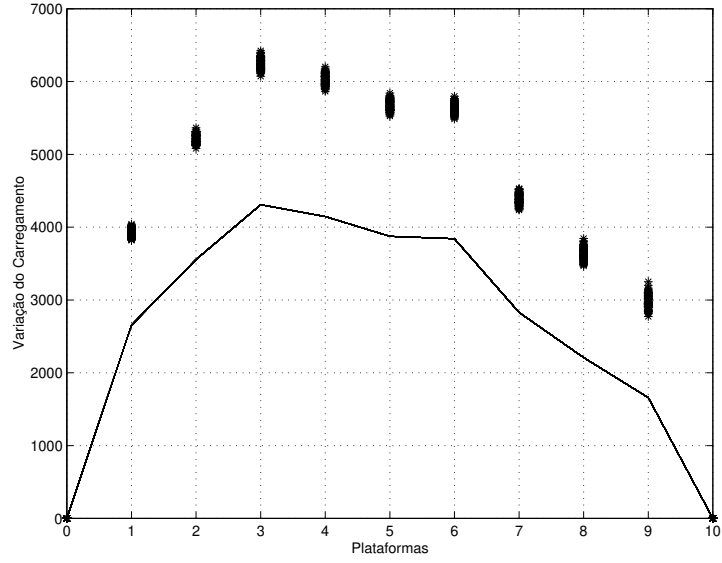


Figura 5.12: Variação do carregamento de passageiros em relação ao Programa Horário
Regulação Econômica em Tempo Real - Econômica - $\lambda_m = 0,9$

Assumindo $\lambda_m = 0,9$ a eficácia do controle fica comprometida, e como consequência, o carregamento de passageiros atinge valores muito superiores conforme pode ser percebido nas figuras 5.10, 5.11 e 5.12. Para evitar infactibilidade, os limites para o carregamento foram ajustados em:

$$d_p = [2300 \quad 2300 \quad 2300 \quad 2000 \quad 2000 \quad 2000 \quad 2000 \quad 2000 \quad 2000 \quad 2000 \quad 2000] \quad (5.63)$$

Considere agora uma política de regulação de alto desempenho com minimização da variação do carregamento de passageiros.

Para esta situação foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho:

$$z = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{5} \quad ; \quad p = 0 \quad ; \quad r = 10$$

As figuras 5.13, 5.14 e 5.15 apresentam os resultados considerando $\lambda_m = 0,9$. Pode-se verificar que o desempenho em termos de atrasos, intervalos e controle é pior em relação à política de alto desempenho nas plataformas onde $\vartheta \leq 0$ (4.74), devido ao interesse em reduzir a variação do carregamento de passageiros.

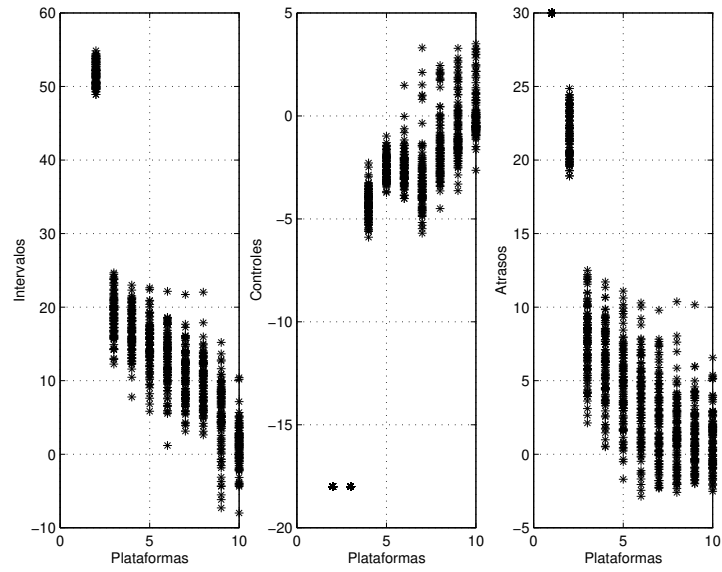


Figura 5.13: Regulação Robusta em Tempo Real
Alto Desempenho com Mínima Variação do Carregamento - $\lambda_m = 0,9$

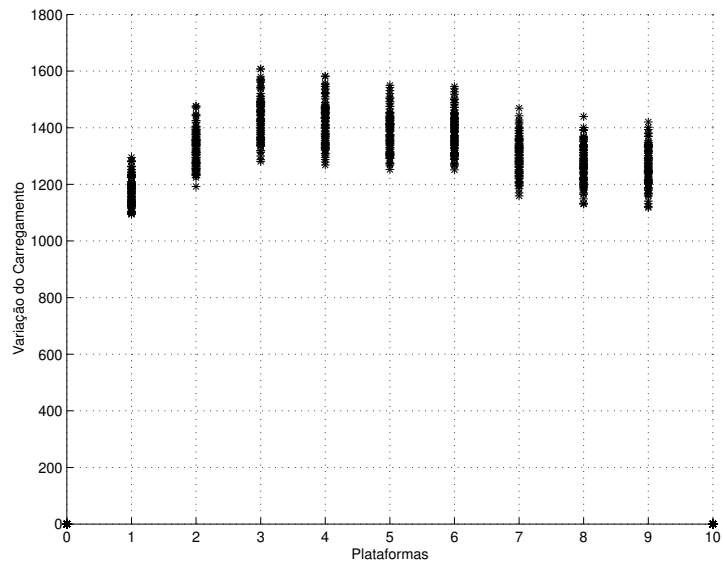


Figura 5.14: Variação do carregamento de passageiros - Regulação em Tempo Real
Alto Desempenho com Mínima Variação do Carregamento - $\lambda_m = 0,9$

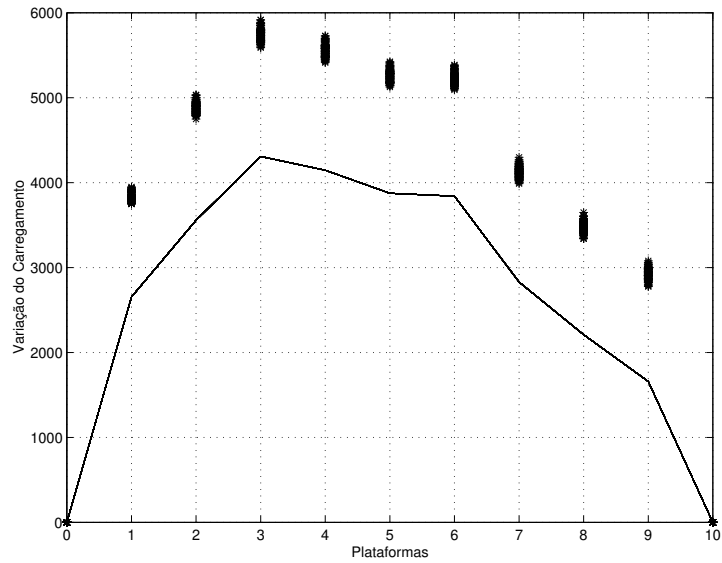


Figura 5.15: Variação do carregamento de passageiros em relação ao Programa Horário
Regulação em Tempo Real - Alto Desempenho com Mínima Variação do Carregamento - $\lambda_m = 0,9$

Opcionalmente podemos melhorar o desempenho permitindo um controle mais eficiente mas minimizando a variação do carregamento de passageiros. Isto pode ser feito ajustando os índices de desempenho da seguinte forma:

- Se $\vartheta \geq 0$, $r = 10$
- Se $\vartheta \leq 0$, $r = 0$.

Os resultados obtidos para este ajuste estão ilustrados nas figuras (5.16), (5.17) e (5.18) onde percebe-se que o desempenho é similar ao obtido na regulação de alto desempenho, mas com pequena redução na variação do carregamento de passageiros.

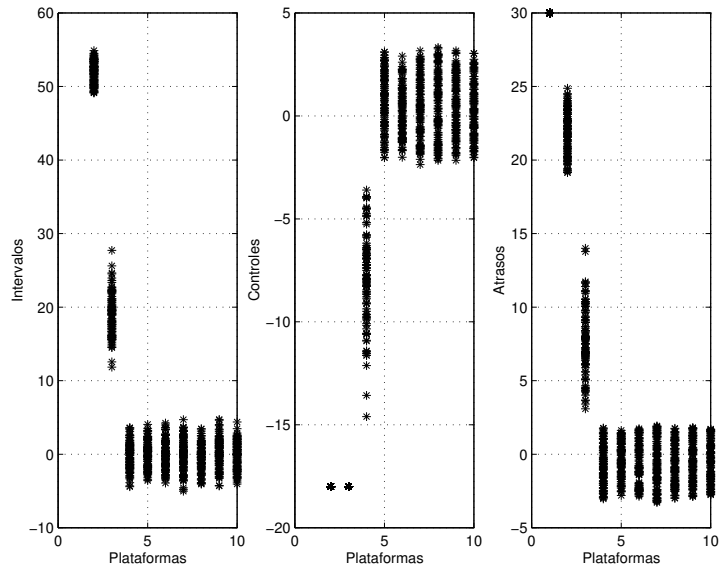


Figura 5.16: Regulação Robusta em Tempo Real
Alto Desempenho com Mínima Variação do Carregamento - $\lambda_m = 0,9$

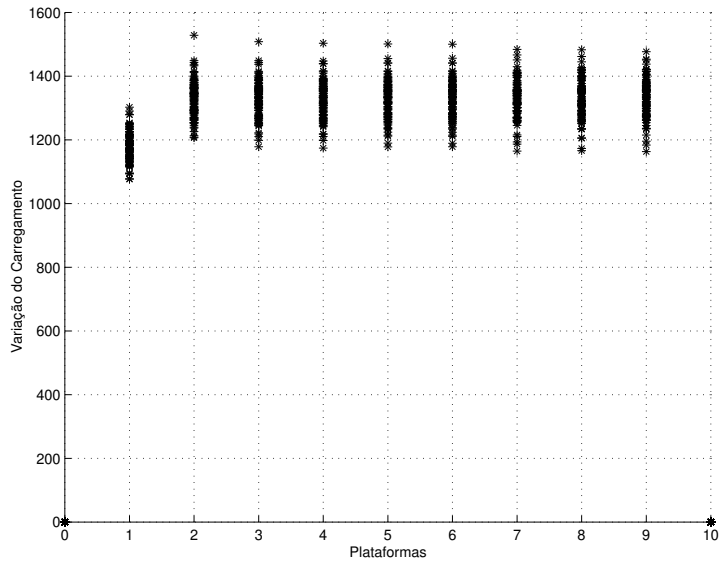


Figura 5.17: Variação do carregamento de passageiros - Regulação em Tempo Real
Alto Desempenho com Mínima Variação do Carregamento - $\lambda_m = 0,9$

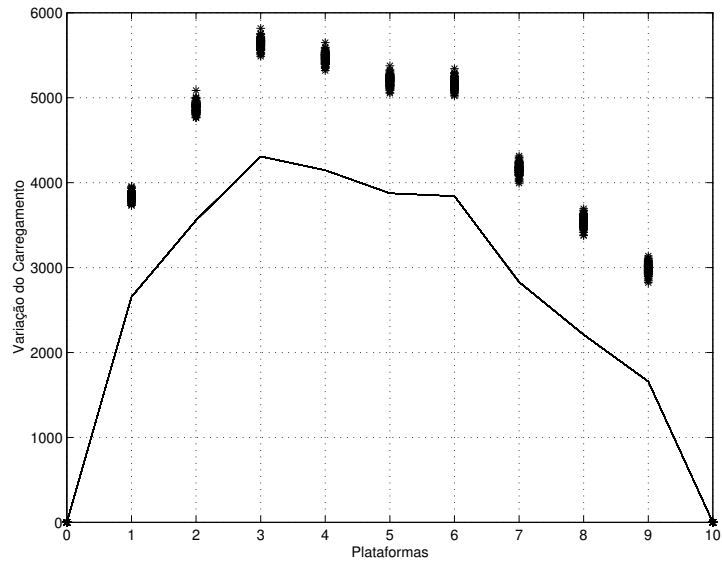


Figura 5.18: Variação do carregamento de passageiros em relação ao Programa Horário
Regulação em Tempo Real - Alto Desempenho com Mínima Variação do Carregamento - $\lambda_m = 0,9$

5.5 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma nova formulação para a regulação robusta do tráfego de trens que fornece uma lei de controle por realimentação de estados, não linear, estabilizante, variante no tempo, calculada em tempo real. A abordagem considera as incertezas do modelo de tráfego, as limitações sobre as variáveis de estado e controle, a margem de controle para regulação existente no Programa Horário da linha e o desvio, em relação ao previsto no programa horário, do carregamento dos trens ao longo da linha. Os limites sobre as variáveis do modelo de tráfego, variação do carregamento de passageiros, perturbações externas e o domínio de parâmetros incertos são definidos por poliedros convexos compactos. Exemplos numéricos ilustram a eficácia da abordagem proposta que permite obter resultados muito melhores em relação à formulação de regulação ótima robusta com restrições (RORR) proposta no capítulo anterior, a qual fornece uma lei de controle de realimentação linear, invariante no tempo. A eficiência computacional desta nova abordagem viabiliza sua implementação em tempo real para regulação do tráfego de trens em linhas de metrô da atualidade.

Capítulo 6

Conclusão Geral

Esta tese tratou dos problemas de geração de Programa Horário e de regulação do tráfego de trens em linhas metroviárias.

Para a geração do Programa Horário foram propostas três novas formulações utilizando programação linear.

Na primeira formulação, o modelo considera a operação com intervalos variáveis entre os trens ao longo do percurso que permite obter uma distribuição mais homogênea dos passageiros nos trens. Contudo esta abordagem mostrou-se computacionalmente impraticável além de apresentar maior custo econômico associado, devido à necessidade de manter um maior número de trens e funcionários disponíveis para a operação.

Na segunda, o modelo considera a operação com intervalos constantes entre os trens obtendo uma formulação mais simplificada e de rápida solução. A eficiência computacional da abordagem, o aproveitamento do material rodante e redução de custos operacionais advindos da utilização de um número de trens constante durante o período de análise tornam a formulação bastante atrativa. Porém a aplicabilidade prática é limitada a períodos de análise nos quais numa aproximação, a demanda de passageiros vista por um determinado conjunto de trens pode ser considerada aproximadamente constante.

Na terceira formulação, a trajetória de cada trem é otimizada considerando uma formulação de controle preditivo com horizonte móvel. A abordagem considera operação com intervalos variáveis entre os trens obtendo resultados bastante satisfatórios e com

mínimo esforço computacional, viabilizando a aplicabilidade prática para a geração do Programa Horário de um dia inteiro, efetuar a transição entre períodos com demanda e *headways* constantes ou mesmo a utilização em tempo real na adaptação do Programa Horário às perturbações da demanda de passageiros.

Em todas as abordagens o problema foi tratado como um problema de programação linear considerando os limites operacionais, margem de controle para a regulação durante a operação comercial, restrições de continuidade e homogeneidade de tráfego e garantia de que todos passageiros aguardando embarcam no próximo trem. O índice de desempenho formado por funções lineares por partes contribuiu decisivamente para a eficiência computacional e aplicabilidade prática dos resultados obtidos. O desempenho das metodologias propostas foi testado utilizando uma linha metroviária com estrutura e dados similares aos da linha Norte/Sul do metrô de São Paulo.

Sobre a regulação do tráfego de trens foram abordados os tópicos a seguir. Inicialmente foi apresentado um novo modelo de tráfego de trens em linhas metroviárias que considera a inclusão da margem de controle do Programa Horário. Com base neste novo modelo são então propostas duas novas formulações para a regulação do tráfego de trens.

A primeira formulação apresenta uma lei de controle por realimentação de estados, descentralizada, linear, invariante no tempo, utilizando programação linear. São consideradas de forma explícita as incertezas do modelo de tráfego, as perturbações aleatórias, as limitações sobre as variáveis de estado e controle, o carregamento de passageiros nos trens e a margem de controle do Programa Horário. Exemplos numéricos demonstram através de simulações que a formulação de regulação robusta proposta pode efetivamente fornecer resultados com desempenho superior aos fornecidos por formulações de regulação robusta em trabalhos anteriores.

A segunda formulação apresenta uma lei de controle por realimentação de estados, descentralizada, não-linear, variante no tempo, calculada em função do estado atual em cada trem e em cada plataforma de forma independente. A formulação também utiliza programação linear e considera as incertezas do modelo de tráfego, as perturbações aleatórias, as limitações sobre as variáveis de estado e controle, a lotação dos passageiros nos trens e a margem de controle do Programa Horário obtendo resultados muito melhores que na formulação de regulação robusta invariante no tempo. A eficiência

computacional desta nova abordagem viabiliza sua implementação em tempo real na regulação do tráfego de trens nas linhas de metrô da atualidade.

Os resultados aqui apresentados podem ser estendidos em muitos aspectos, dentre os quais destacamos:

- Extensão da formulação RORR e regulação em tempo real para linhas de metrô operando em regime fechado;
- Desenvolvimento de uma formulação de regulação em tempo real adaptativa;
- Estudo do problema integrado de programação e regulação do tráfego de trens.

Referências Bibliográficas

- [1] Araya, S. and Sone, S. (1984) “Traffic dynamics of automated transit systems with pre-established schedules” - IEEE Trans. Syst., Man Cybern., vol. 14, pp. 677-687, julho.
- [2] Assis, W.O. e Milani, B.E.A. (2000) “Geração de Programa Horário para Linhas Metroviárias Utilizando Programação Linear” - Anais CBA 2000 - XIII Congresso Brasileiro de Automática, Florianópolis, SC.
- [3] Assis, W.O. e Milani, B.E.A. (2001) “Geração de Programa Horário para Linhas Metroviárias Utilizando Modelo de Controle Preditivo com Horizonte Recedente” - XVI COBEM - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ISBN: 85-85769-06-6, Uberlândia, MG.
- [4] Assis, W.O. e Milani, B.E.A. (2002) “Generation of Optimal Schedules for Metro Lines Using Model Predictive Control” - International Federation of Automatic Control - 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain.
- [5] Assis, W.O. e Milani, B.E.A. (2002) “Uma Formulação de Regulação Robusta Descentralizada de Linhas Metroviárias” - CBA 2002 - XIV Congresso Brasileiro de Automática, Natal, RN.
- [6] Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J. and Sherali, H.D. (1990) “Linear Programming and Network Flows” - New York: J. Wiley.
- [7] Bemporad, A., Borrelli, F. and Morari, M. (2000) “The Explicit Solution of Constrained LP-Based Receding Horizon Control” - Proc. 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia.

- [8] Bergamashi, F.A., Milani, B.E.A. e Hsin, T.C. (1982) “Geração de Horários de Despacho de Trens em Linhas de Transporte Metroferroviário” - Anais IV CBA, Campinas, SP.
- [9] Bitsoris, G.(1988) “Positively Invariant Polyhedral Sets of Discrete-Time Linear Systems” - Int. J. Control, Vol. 47, No. 6, pp.1713-1726, June.
- [10] Campion, G., Van Breusegem, V., Pinson, P. and Bastin, G. (1985) “Traffic Regulation of an Underground Railway Transportation System By State Feedback” - Optimal Control Application & Methods, vol.6, pp. 385-402, 1985.
- [11] Carvalho, A.N. e Milani, B.E.A.(1993) “Regulação Ótima de Tráfego em Linhas de Metrô com Restrições no Estado e Controle” - Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, SOBRAPO, Campinas, SP.
- [12] Carvalho, A.N. e Milani, B.E.A.(1994) “Regulação Robusta de Linhas Metroviárias Sujeitas a Restrições no Estado e Controle” - Anais do 6^o Congresso Latino Americano de Controle Automático (e 10^o CBA), SBA, Rio de Janeiro, RJ.
- [13] Chen, Chi-Tsong (1984) - Linear System Theory and Design - Holt, Rinehart and Winston, Inc., Orlando.
- [14] Coelho, A.D.(2001) “Funções de Lyapunov por Partes para Sistemas Lineares Discretos no Tempo com Saturação ou Zona Morta nos Controles” - Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- [15] Corrêa, S.S. e Milani, B.E.A.(1996) “Regulação Robusta Descentralizada de Linhas Metroviárias” - XI Congresso Brasileiro de Automática, vol.3, pp. 1643-1648, Setembro.
- [16] Corrêa, S.S.(1999) “Regulação Robusta de Tráfego em Linhas de Metrô” - Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- [17] Corrêa, S.S. e Milani, B.E.A.(2001) “Regulação Robusta de Tráfego em Linhas de Metrô” - Revista Controle & Automação, vol. 12, n. 2.

- [18] Cury, J.E., Gomide, F.A. and Mendes, M.J. (1980) "A Methodology for Generation of Optimal Schedules for an Underground Railway System" - IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 25, n.2.
- [19] Faria, G.E.G.(2000) "Modelamento e Regulação de Tráfego de Trens em Linhas Metroviárias" - Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- [20] Gill, P.E., Murray, W. and Wright, M.W. (1981) "Practical Optimization" - Academic Press, G.B..
- [21] Hennen, J.C. (1989) "Une Extension du Lemme de Farkas et son Application au Problème de Regulation Linéaire sous Contraintes", C.R. Acad. Sci. Paris, t.308, Série I, pp. 415-419.
- [22] Milani, B.E.A. e Carvalho, A.N. (1994) "Robust Optimal Linear Regulator Design for Discrete-Time Systems Under State and Control Constraints." Proc. IFAC Symposium on Robust Control, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, pp. 273-278.
- [23] Milani, B.E.A. e Corrêa, S.S. (1997) "On-Line Minimax Optimal Regulation of Metro Lines." IASTED International Conference CONTROL 97, Cancun, México.
- [24] Milani, B.E.A. e Corrêa, S.S. (1997) "Decentralized Robust Regulation of Metro Lines." Proc. American Control Conference, pp. 218, 219, June.
- [25] Milani, B.E.A. e Corrêa, S.S. (1998) "Regulação em tempo Real de Linhas Metroviárias" - XII CBA, Uberlândia, Setembro.
- [26] Milani, B.E.A., Coelho, A.D. e Assis, W.O. (1999) "Robustly Contractive Polyhedra for Uncertain Linear Systems with Saturating Controls" - COBEM 99 - Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, ABCM, ISBN: 85-85769-03-3, Águas de Lindóia, SP.
- [27] Milani, B.E.A., Coelho, A.D. e Assis, W.O. (2000) "Polyhedral Regions of Robust Local Stability for Linear Systems with Saturating Controls" - ROCOND 2000

- Proceedings of 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design, ISBN: 0-08-043249-2, Praga, República Tcheca.
- [28] Milani, B.E.A., Coelho, A.D. e Assis, W.O. (2002) “Regiões Poliedrais de Estabilidade Assintótica Robusta de Sistemas Lineares Discretos no Tempo com Controles Saturáveis” - CBA 2002 - XIV Congresso Brasileiro de Automática, Natal, RN.
- [29] Sasama, H. and Ohkawa, Y. (1983) “Floating traffic control for public transportation systems” - Proc. 4th IFAC Conf. on Contr. and Transport. Syst., Baden-Baden, April.
- [30] Van Breusegem, V., Campion, G. and Bastin, G. (1991) “Traffic Modeling and State Feedback Control for Metro Lines” - IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, n.7.
- [31] Varaya, P.P. (1972) “Notes on Optimization” - New York: Van Nostrand Reinhold Co..