

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

Este exemplar constitui a seleção final da tese
defendida por Elvio César Giraudo
Julgadora em 24 02 95 da pela Comissão
Rege

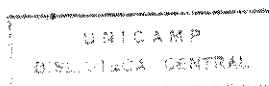
SISTEMA DE TRANSMISSÃO DIGITAL {QAM}²

Elvio César Giraudo

Orientador : Rege Romeu Scarabucci

Tese de Doutorado apresentada à
Faculdade de Engenharia Elétrica da
Universidade Estadual de Campinas,
como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de DOUTOR EM
ENGENHARIA ELÉTRICA.

Fevereiro 1994



À minha esposa,

Maria Cristina

Aos meus pais,

Maria Rosa e Elvio Osvaldo

Ao meu irmão

Osvaldo Daniel

SUMÁRIO

Este trabalho tem como finalidade mostrar uma alternativa de transmissão-recepção digital visando melhorar a eficiência e o desempenho em sistemas de modulação digital. Neste sentido, propomos o sistema chamado $\{QAM\}^2$ que basicamente, consiste na transmissão de duas constelações QAM de forma superposta. O sistema $\{QAM\}^2$ apresenta ganhos com respeito aos sistemas QAM convencionais para $\Delta f < r_s/2$, onde r_s [símbolo/s] é a taxa de símbolos de canal, e Δf [Hz] é o grau de afastamento das portadoras dos dois sinais QAM superpostos.

Realizou-se uma análise de desempenho e de eficiência espectral de tal sistema, estudando-se também aspectos relativos à sua sincronização.

O sistema $\{QAM\}^2$ apresenta a particularidade de não precisar aumentar a largura de banda do canal de transmissão, nem alterar a taxa de bits de informação quando comparado com os sistemas QAM convencionais.

SUMMARY

This work shows a new technique for digital transmission that enhances bit error performance and spectral efficiency. The new technique, called $\{\text{QAM}\}^2$, is a method of transmitting two digital QAM signals using overlapping bandwidths, namely the transmission of two QAM constellations with common spectrum.

The $\{\text{QAM}\}^2$ system shows better performance when compared with conventional QAM for $\Delta f < r_s/2$, where r_s is the symbol rate and Δf is the frequency separation between the two QAM carriers.

In this work error performance and spectral efficiency of the $\{\text{QAM}\}^2$ system are analyzed; synchronization studies show that signal to noise ratio gains of the $\{\text{QAM}\}^2$ system are maintained by means of phase follow-up in the $\{\text{QAM}\}^2$ receiver.

AGRADECIMENTOS

Ao **Prof. Dr. Rege Romeu Scarabucci**, pela sua orientação, conselhos e apoio neste trabalho, e pela sua amizade.

À **CAPES e FAPESP**, pelo apoio financeiro.

A banca de tese, formada pelos Profs.: **Prof. Dr. Paul Jean Etienne Jeszensky**, **Prof. Dr. Weiler Alvez Finamore**, **Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Jr.** e pelo **Prof. Dr. Renato Baldini Filho** e pelas correções apontadas e importantes sugestões.

Ao **Prof. Dr. Vinícius Amaral Armentano** pela viabilização do suporte computacional.

Ao **Engº Carlos Caballero Petersen**, pelas discussões e viabilização do uso do suporte computacional **MATEMÁTICA**.

Ao **Airton Ramos**, pelos serviços de desenhos.

As secretárias **Maria Lucia Costa Cardoso** e **Marcia Helena Gibim**, pelo suporte de secretaria.

E, em especial, à minha esposa **Maria Cristina Balamaceda de Giraudo**, pelo companheirismo, pela compreensão e pelo apoio neste doutorado.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. Visão Geral da Área	1
1.2. Finalidade da Tese	2
1.3. Estrutura da Tese	2

CAPÍTULO 2

REVISÕES QAM e TCM

2.1. Sinal QAM	4
2.2. Transmissor e Receptor QAM	6
2.3. Ruído AWGN de Banda Estreita	11
2.4. Canal Linear de Banda Limitada	12
2.5. Eficiência de Transmissão	15
2.6. Sinal e Ruído no Receptor QAM	19
2.7. Potência Média do Ruído no Receptor QAM	21
2.8. Desempenho dos Sistemas QAM	23
2.9. Revisão de Modulação Codificada	27
2.9.1. Modulação Codificada usando Códigos Convolucionais (TCM)	35

CAPÍTULO 3

SISTEMA DE TRANSMISSÃO DIGITAL {QAM}²

3.1. Sistema {QAM} ²	46
3.1.1. Análise do Circuito tipo γ	50
3.1.2. Análise do Circuito tipo β	52
3.1.3. Sinal e Ruído no Receptor {QAM} ²	53
3.2. Potência Média do Ruído no Receptor {QAM} ²	60

CAPÍTULO 4

GENERALIZAÇÃO DO SISTEMA DE TRANSMISSÃO {QAM}²

4.1. Sistema Geral {QAM} ²	71
4.2. Sistema {QAM-4} ²	75

4.3. Sistema (QAM-16) ²	78
4.4. Sistema {QAM-64} ²	83
4.5. Sincronização do Sistema {QAM} ²	89

CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO GERAL SOBRE OS SISTEMAS {QAM}²

5.1. Análise dos Resultados	98
5.2. Características Gerais do Sistema {QAM} ²	100
5.2.1. Simplicidade do Transmissor	100
5.2.2. Simplicidade do Receptor	100
5.2.3. Ganhos em relação ao Sistema QAM	102
5.2.4. Ganho Assintótico	102
5.2.5. Não há necessidade de Codificação	103
5.2.6. Problemas de Sincronização	103
5.2.7. Um Exemplo Prático	105
5.3. Comparação do Sistema {QAM} ² com o Sistema TCM	108
5.4. Sugestões para Futuras Pesquisas	109

APÊNDICES

APÊNDICE A

Solução Geral das Integrais	111
-----------------------------	-----

APÊNDICE B

Solução das Integrais	116
-----------------------	-----

APÊNDICE C

Transformada de Hilbert	129
-------------------------	-----

APÊNDICE D

Programas Computacionais	132
--------------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	135
-----------------------------------	------------

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Prefácio

Os sistemas básicos de transmissão-recepção digitais, tais como por exemplo os sistemas QAM, PSK, FSK etc., encontram-se operando tanto nos limites de suas capacidades de potência como em suas bandas de ocupação. Na tentativa de melhorar a eficiência destes sistemas, inevitavelmente deve-se renunciar a um parâmetro para fortalecer o outro. Como por exemplo o compromisso que existe entre taxa de bits de informação e largura de banda de ocupação, quando trata-se de sistemas codificados.

Para solucionar este problema, vão-se modificando as estruturas dos sistemas básicos de transmissão a tal ponto de se achar uma solução compatível com o grau de complexidade e a função desejada dos mesmos a fim de se obter sistemas mais eficientes.

Por exemplo, uma modificação que unifica o processo de codificação e modulação [1, 2, 3] é a chamada Modulação Codificada. Este sistema, apresenta ganhos sobre os sistemas não codificados, porém, sem alterar a banda.

Outro método que atinge desempenho perto do ideal na demodulação coerente dos sistemas PSK e QAM, utiliza decisão realimentada por recuperação de portadora e integração sobre poucos símbolos [4].

No campo das comunicações ópticas coerentes, um melhor aproveitamento do canal de banda limitada mediante polarizações independentes dentro da fibra óptica, conduz a obter-se melhoria no desempenho comparado com os sistemas convencionais. Uma forma é modular os vértices de um poliedro regular inscrito na esfera de Poincaré [5] do campo eletromagnético dentro da fibra monomodo. Uma outra forma é representar o campo eletromagnético por um vetor quadridimensional, cujas componentes são os termos em fase e em quadratura de duas polarizações do campo elétrico [6].

Usando a modulação em quadratura do campo óptico [6], Cusani, Iannone, Salonicco e Todaro [7] propõem representar os sinais nestes campos ortogonais através de um reticulado de pontos [7]. Assim obtém-se uma diminuição da largura de banda em relação aos sistemas convencionais.

Um esquema de modulação eficiente é apresentado em [8], com o nome de Q²PSK (quadrature-quadrature phase shift keying). Este esquema utiliza formas de pulsos em bandabásica de informação ortogonais para serem modulados com portadoras em quadratura. Consegue-se assim sinais nos vértices de um hipercubo 4-dimensional. Desta

forma obtêm-se um incremento da eficiência de banda em relação aos esquemas de modulação 2-dimensionais. Por outro lado a probabilidade de erro de bit depende da escolha dos pulsos.

Uma alternativa de transmissão digital, visando melhorar o desempenho dos sistemas é o apresentado neste trabalho com o nome de **Sistema {QAM}**². Este nome deriva da tentativa de transmitir dois sistemas QAM-m em forma superposta ao invés de se transmitir uma constelação de maior ordem, como a de um sistema QAM-M, onde

$$M = m^2$$

M número de símbolos de canal do sistema QAM simples

m número de símbolos de canal do sistema QAM superposto

como por exemplo, ao invés de se transmitir um sistema QAM-256, propõe-se usar o sistema {QAM-16}².

O grau de afastamento das portadoras dos dois sistemas QAM-m superpostos permite obter alguns ganhos sobre os sistemas QAM convencionais. Este sistema apresenta interesse por não alterar a largura de banda de ocupação nem modificar a taxa de bits de informação em relação aos sistemas QAM convencionais.

1.2 Finalidade do Trabalho

O objetivo deste trabalho é apresentar uma outra forma de melhorar a eficiência do sistema QAM, sem sacrifício da taxa de informação nem da largura de banda de ocupação. Neste caso o sinal é submetido unicamente a modulação, não se utilizando de codificação.

O sistema {QAM}² consiste fundamentalmente em transmitir dois sinais QAM superpostos com um certo afastamento entre suas portadoras. No receptor, separam-se os sinais de cada constelação mediante um adequado "hardware", obtendo-se ganhos sobre o sistema não superposto.

1.3 Estrutura do Trabalho

O trabalho desenvolvido está apresentado em 5 capítulos.

No **Capítulo 2** realiza-se uma revisão em profundidade do sistema de transmissão digital QAM de faixa estreita. Realiza-se também uma revisão do sistema TCM.

No **Capítulo 3** apresenta-se o estudo teórico do sistema de transmissão $\{\text{QAM}\}^2$, com ênfase na descrição do seu funcionamento e na análise da potência de ruído nos estágios de decisão.

Várias integrais são resolvidas, cujas soluções encontram-se nos Apêndices A e B.

No **Capítulo 4** mostra-se o confronto do Sistema $\{\text{QAM}\}^2$ com os sistemas convencionais QAM. Resultados de eficiência e de desempenho são mostrados. Realiza-se também uma análise da sincronização do sistema.

No **Capítulo 5** apresentam-se aplicações práticas do Sistema $\{\text{QAM}\}^2$ e problemas de implementação. Compara-se também o Sistema $\{\text{QAM}\}^2$ com o sistema TCM. Apresentam-se as conclusões deste trabalho e sugestões para sua continuação.

CAPÍTULO 2

REVISÕES QAM E TCM

Neste capítulo são feitas duas revisões. A primeira delas é sobre sistemas QAM, onde se considera a transmissão QAM por um canal de banda limitada, perturbado pelo ruído aditivo gaussiano branco (AWGN "additive white Gaussian noise"). A segunda revisão trata de modulação codificada, com um exemplo sobre QAM-8.

2.1 Sinal QAM

Um dos sistemas de transmissão utilizados no campo das comunicações digitais é o sistema QAM ("quadrature amplitude-modulation") [9].

Este sistema modula a amplitude e a fase de uma portadora contínua, de modo a construir M formas de onda distintas, onde

M é o número de símbolos da constelação QAM (2.1)

A modulação de amplitude e de fase é feita de forma discreta, cujas combinações correspondem aos M símbolos que o sistema pode transmitir.

Cada símbolo é enviado pelo canal de transmissão em intervalos de T_s segundos, onde

T_s [s] é o tempo de duração de cada símbolo (2.2)

De forma genérica a portadora modulada é dada por

$$s(t) = A_k \cos[2\pi f_p t + \theta_k] \quad (2.3)$$

onde

$s(t)$ são as M formas de onda distintas (2.4)

A_k é a função envoltória do k ésimo símbolo (2.5)

f_p é a frequência da portadora (2.6)

$$\theta_k \quad \text{denota a fase de } s(t) \text{ para o } k^{\text{ésimo}} \text{ símbolo} \quad (2.7)$$

A equação (2.3) é válida para $0 \leq t \leq T_s$.

Considera-se que as componentes de frequência ocupadas por $s(t)$ estão confinadas na banda de passagem

$$V \ll f_p \quad (2.8)$$

Também é considerado que

$$V \ll f_p \quad (2.9)$$

ou seja $s(t)$ é um sinal tipo passabanda de faixa estreita.

Pode-se expandir na equação (2.3) o coseno da soma, obtendo-se

$$\begin{aligned} s(t) &= A_k \cos \theta_k \cos 2\pi f_p t - A_k \sin \theta_k \sin 2\pi f_p t \\ &= X_k \cos 2\pi f_p t - Y_k \sin 2\pi f_p t \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde

$$X_k = A_k \cos \theta_k \quad \text{é a componente em fase de } s(t) \quad (2.11)$$

$$Y_k = A_k \sin \theta_k \quad \text{é a componente em quadratura de } s(t) \quad (2.12)$$

Estas duas últimas expressões ficam relacionadas com A_k e θ_k da seguinte forma

$$A_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2} \quad (2.13)$$

$$\theta_k = \arctg \left[\frac{Y_k}{X_k} \right] \quad (2.14)$$

$$A_k \exp[j\theta_k] = X_k + jY_k \quad (2.15)$$

onde a expressão (2.15) é chamada de envoltória complexa de $s(t)$.

Tanto X_k como Y_k possuem suas componentes de frequência nas regiões baixas do espectro. É por isso que X_k e Y_k são chamadas de sinais equivalentes passa-baixas.

O plano ocupado por X_k e Y_k pode ser chamado de diagrama de sinais. Na Fig. 2.1, mostra-se o diagrama de sinais do sistema QAM, para $M= 4, 8, 16, 32, 64$ e 128 , onde

$$d \quad \text{é o espaçamento do reticulado da constelação QAM} \quad (2.16)$$

Define-se a potência média de uma constelação QAM como o valor médio esperado sobre a distribuição estatística do quadrado dos sinais QAM, isto é,

$$S = \langle A_k^2 \rangle = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M [X_k^2 + Y_k^2] \quad (2.17)$$

No caso em que o valor de M é potência de 2, a expressão (2.17) é convertida para

$$S = \frac{M-1}{3} d^2 \quad (2.18)$$

Na Tabela 2.1, calculam-se as potências médias da constelação QAM, para

$$M = 2^n; \quad 2 \leq n \leq 12 \quad (2.19)$$

que serão utilizados posteriormente.

Os valores na Tabela 2.1, marcados com (*), foram aproximados pela equação (2.18). Para M grande, o erro cometido resulta desprezível.

2.2 Transmissor e Receptor QAM

Na Fig. 2.2, mostra-se o diagrama em blocos de um sistema de transmissão QAM, [9].

Como pode-se observar na Fig. 2.2(a), os bits de informação são apresentados em forma serial com taxa de bits

$$r_b = \frac{1}{T_b} \quad [\text{bit} / \text{s}] \quad (2.20)$$

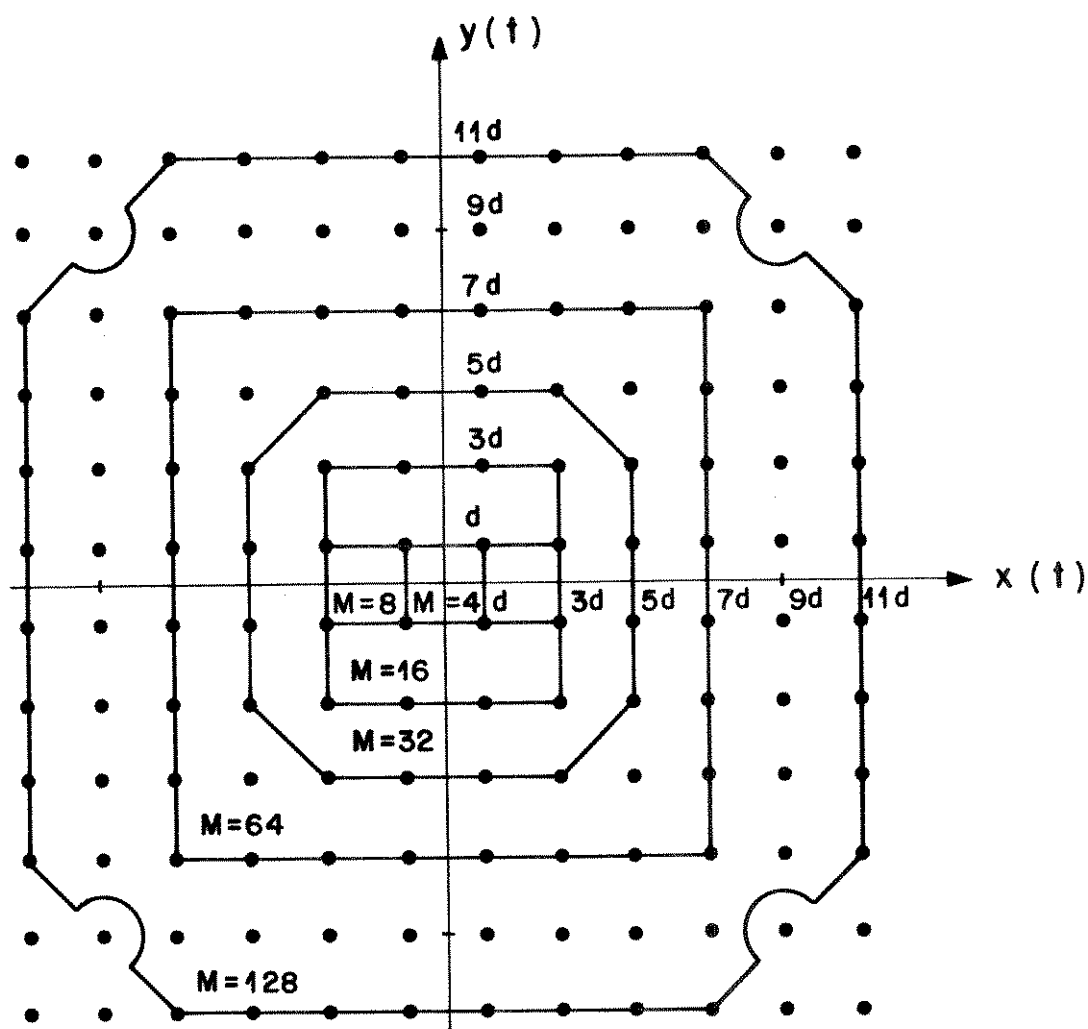


Fig. 2.1 Diagrama de sinais do sistema QAM, para diversos valores de M .

Tabela 2.1 Potências médias das constelações QAM em função do parâmetro d , para diversos valores de M .

M	S
4	d^2
8	$3 d^2$
16	$5 d^2$
32	$10 d^2$
64	$21 d^2$
128	$41 d^2$
256	$85 d^2$
512	$(511/3) d^2 *$
1024	$341 d^2$
2048	$(2047/3) d^2 *$
4096	$1365 d^2$

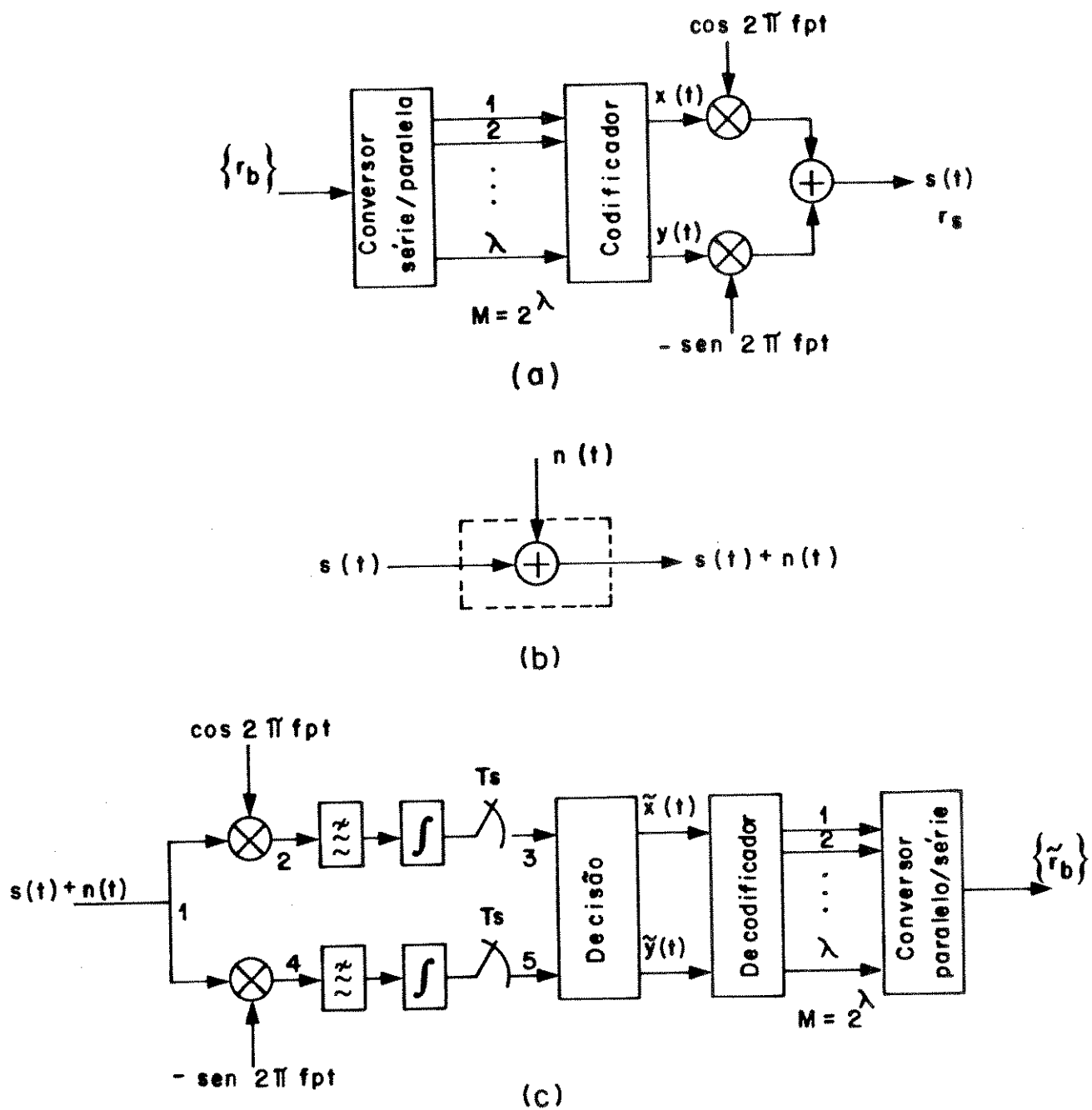


Fig. 2.2 Diagrama em blocos simplificado do sistema de transmissão QAM.

(a) Transmissor.

(b) Canal de transmissão.

(c) Receptor.

onde

$$T_b \text{ [s]} \quad \text{é o tempo de duração de cada bit} \quad (2.21)$$

Estes bits são convertidos pelo conversor série/paralelo em λ saídas paralelas.

Mediante o codificador (de canal) são codificados em forma binária M símbolos, utilizando as λ saídas, onde

$$\lambda = \log_2 M \quad (2.22)$$

Estes símbolos, mostrados no diagrama de sinais da Fig. 2.1, constituem a constelação QAM.

O codificador também separa o termo em fase X_k e o termo em quadratura Y_k de cada símbolo de canal.

Portanto os bits de informação e os símbolos de canal estão relacionados como segue

$$T_s = \lambda T_b \text{ [s]} \quad (2.23)$$

$$r_s = \frac{1}{T_s} = \frac{r_b}{\lambda} \text{ [símbolo / s]} \quad (2.24)$$

onde r_s é a taxa de símbolos.

A tarefa de modelar a fase e a amplitude da onda portadora de frequência f_p é obtida mediante o batimento de X_k e Y_k com a portadora em fase $\cos 2\pi f_p t$ e com a portadora em quadratura $\sin 2\pi f_p t$, respectivamente.

Desta forma, conforma-se o sinal $s(t)$ de constituição QAM, que será enviado pelo canal de transmissão mostrado na Fig. 2.2(b).

Considera-se o canal de transmissão como um canal linear, que mantém a amplitude constante com resposta de fase linear. Também considera-se que não existe o efeito "fading", variação da amplitude com o tempo, e que o canal é somente perturbado por ruído AWGN (a ser discutido no item seguinte).

O esquema básico do receptor é apresentado na Fig. 2.2(c). Em essência, o receptor realiza o processo inverso do transmissor. Recupera o termo em fase X_k e o termo em quadratura Y_k do sinal $s(t)$, imerso no ruído $n(t)$. Isto é conseguido mediante o batimento com as portadoras em quadratura, juntamente com uma integração realizada durante T_s segundos. Assim consegue-se uma ortogonalidade entre X_k e Y_k , podendo-se separá-los depois da integração.

Na decisão, as componentes já separadas X_k e Y_k , degradadas pelo ruído $n(t)$, são submetidas a limiares de comparação (regiões de decisão). Nestas regiões estimam-se as componentes em quadratura, isto é $\tilde{X}_k$ e $\tilde{Y}_k$.

Conjuntamente com o decodificador, o conversor paralelo/série recupera a sequência de bits de informação $\{\tilde{r}_b\}$.

2.3 Ruído AWGN de Banda Estreita

O ruído branco é um processo estocástico, que possui uma densidade espectral de potência constante sobre toda a banda de frequências.

Neste trabalho foi conveniente modelar o ruído $n(t)$ como aditivo branco Gaussiano de banda estreita confinado numa banda V e centrado na frequência f_p .

Em analogia com os sinais determinísticos de banda estreita, a densidade espectral de potência é nula fora da banda V , $V \ll f_p$. Assim, pode-se escrever $n(t)$ da seguinte forma [10]:

$$n(t) = n_I(t) \cos 2\pi f_p t - n_Q(t) \sin 2\pi f_p t \quad (2.25)$$

onde

$$n_I(t) \quad \text{é a componente em fase de ruído } n(t) \quad (2.26)$$

$$n_Q(t) \quad \text{é a componente em quadratura do ruído } n(t) \quad (2.27)$$

Além disso se o ruído $n(t)$ é uma função amostra de um processo $N(t)$, Gaussiano e estacionário em sentido amplo, com média estatística nula

$$\mu = 0 \quad (2.28)$$

e de variância

$$\sigma_N^2 = \eta V \quad [\text{W}] \quad (2.29)$$

onde

$$\eta \quad [\text{W/Hz}] \quad \text{é a densidade espectral de potência do ruído } N(t), \quad (2.30)$$

os termos $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ são funções Gaussianas estacionárias no sentido amplo, independentes, onde cada uma possui média zero e variância σ_N^2 .

Então, pode-se deduzir que [10]

$$\langle n^2(t) \rangle = \langle n_I^2(t) \rangle = \langle n_Q^2(t) \rangle = \eta V \quad (2.31)$$

$$\langle n_I(t_1)n_Q(t_2) \rangle = \langle n_I(t_2)n_Q(t_1) \rangle = 0 \quad (2.32)$$

Um conceito importante, que será utilizado nos itens subsequentes, é a função de autocorrelação dos termos em quadratura $n_I(t)$ e $n_Q(t)$.

A autocorrelação de $n_I(t)$, é por definição

$$\Re_{n_I n_I}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{n_I}(f) \exp[j2\pi f\tau] df = \eta \int_{-V/2}^{V/2} \exp[j2\pi f\tau] df = \eta V \text{sinc}(V\tau) \quad (2.33)$$

Na Fig. 2.3 mostra-se a densidade espectral de potência $G_n(f)$ e de $G_{n_I}(f)$.

Pode-se mostrar também, que

$$\Re_{n_Q n_Q}(\tau) = \Re_{n_I n_I}(\tau) \quad (2.34)$$

2.4 Canal Linear de Banda Limitada

O canal utilizado para a transmissão digital, vide Fig. 2.2(b), é modelado [9] como um filtro linear, caracterizado como segue

$$c(t) \quad \text{é a resposta ao impulso} \quad (2.35)$$

$$C(f) = |C(f)| \exp v(f) \quad \text{é a resposta em frequência} \quad (2.36)$$

onde

$$|C(f)| \quad \text{é a característica de amplitude} \quad (2.37)$$

$$v(f) \quad \text{é a característica de fase} \quad (2.38)$$

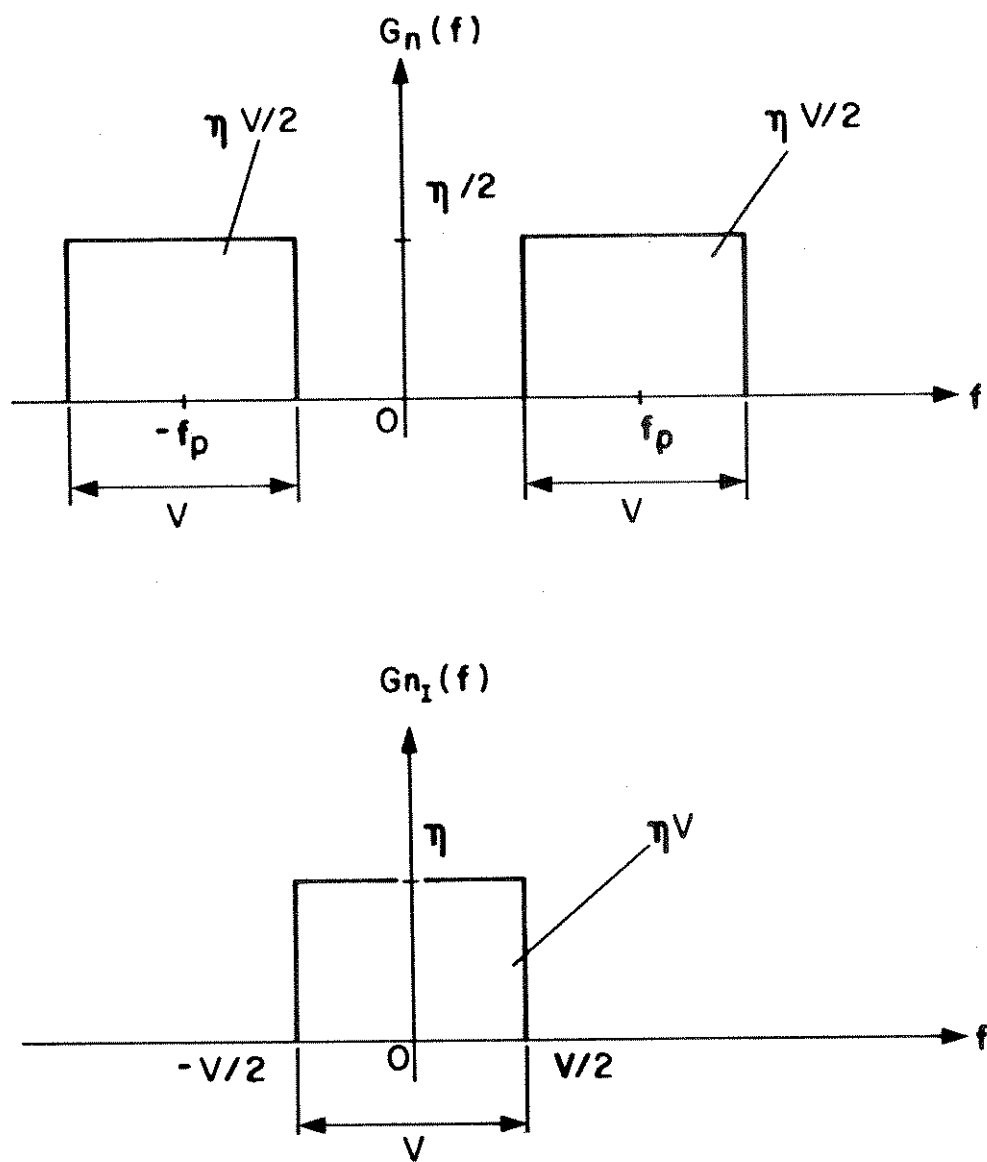


Fig. 2.3 Densidade espectral de potência de $G_n(f)$ e de $G_{n_I}(f)$.

Se o canal é limitado em banda à frequência

$$V/2 \text{ [Hz]} \quad (2.39)$$

e, além disso, é um canal ideal, então

$$|C(f)|=1, \quad \text{constante } \forall |f| \leq V/2 \quad (2.40)$$

$$v(f) \text{ é função linear da frequência} \quad (2.41)$$

$$C(f) = 0 \quad \forall |f| > V/2 \quad (2.42)$$

Portanto, é possível transmitir uma variedade de formas de pulsos, de modo a utilizar eficientemente o canal ideal de transmissão, sem ter-se interferência intersimbólica.

As formas de pulsos amplamente utilizadas nas transmissões digitais possuem uma característica espectral chamada espectro de coseno levantado, cuja expressão matemática é

$$X(f) = \begin{cases} T_s & |f| < (1-\alpha)/2T_s \\ \frac{T_s}{2} \left[1 - \text{sen} \pi T_s \left(f - \frac{1}{2T_s} \right) / \alpha \right] & (1-\alpha)/2T_s \leq |f| \leq (1+\alpha)/2T_s \\ 0 & |f| > (1+\alpha)/2T_s \end{cases} \quad (2.43)$$

onde

$$\alpha \text{ é o fator "rolloff" de canal.} \quad (2.44)$$

Para o projeto do pulso foi utilizado o critério de Nyquist para sinais sem interferência intersimbólica, isto é

$$V/2 < \frac{1}{T_s} < 2(V/2) \quad (2.45)$$

Estas formas de pulsos possuem a função do tempo

$$x(t) = \frac{\sin \pi t / T_s}{\pi t / T_s} \frac{\cos \alpha \pi t / T_s}{1 - 4\alpha^2 t^2 / T_s} \quad (2.46)$$

Na Fig. 2.4 (a), mostra-se a função $X(f)$.

Na situação em que $\alpha = 0$ ($\frac{V}{2} = \frac{r_s}{2}$), a forma do espectro do pulso a transmitir é um retângulo, como pode-se apreciar na Fig. 2.4(a). Existem portanto dois problemas. Um deles, é que $X(f)$ é fisicamente irrealizável. O outro problema, é que o pulso possui uma resposta com um decaimento de cauda $1/t$, ocasionando, no momento da amostragem, uma série de componentes de interferência intersimbólica. Isto significa que os pulsos transmitidos são deformados e na recepção existe superposição de pulsos adjacentes.

Na situação em que $\alpha > 0$ ($\frac{V}{2} > \frac{r_s}{2}$), o pulso não possui terminações abruptas como no caso de $\alpha = 0$, e o decaimento de cauda é agora de $1/t^3$, caindo mais rapidamente e facilitando a amostragem, sem interferência intersimbólica.

Por outro lado, se o canal não é ideal, isto é, existe atenuação de amplitude e retardo de fase além de ruído AWGN, apesar de transmitir-se com taxa de símbolo $r_s \geq V/2$ existe interferência intersimbólica. Como $C(f)$ não é conhecida com suficiente precisão, o que resultaria no projeto de um demodulador fixo para corrigir a interferência intersimbólica, deve-se projetar filtros ou demoduladores adaptativos.

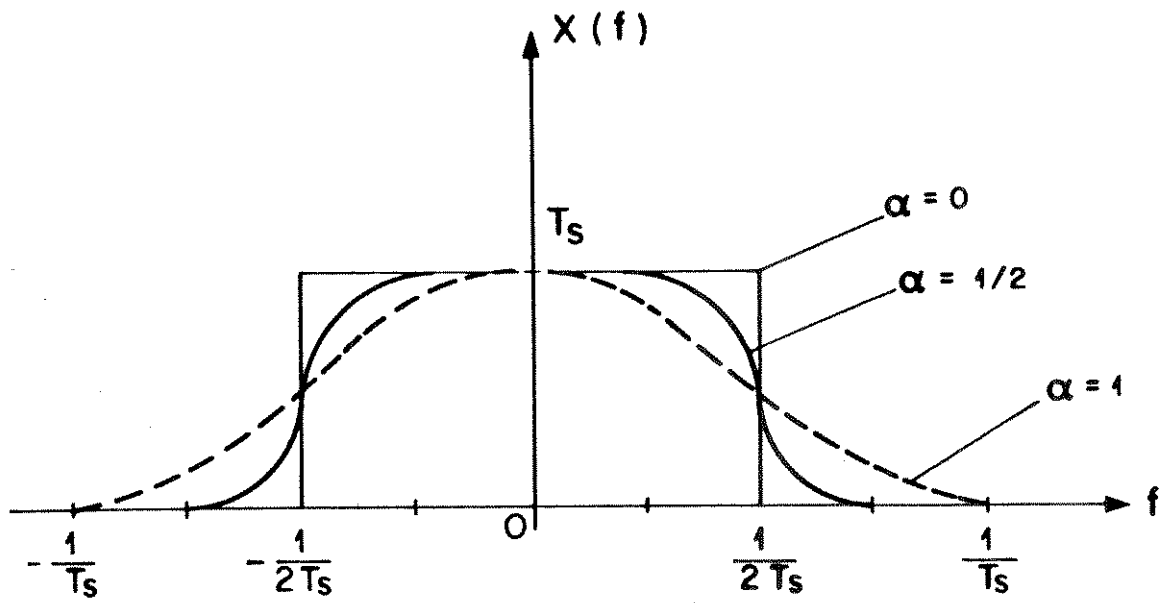
No desenvolvimento deste trabalho, considerou-se o fator "rolloff" de $\alpha = 0$. Mas, as conclusões a serem obtidas, serão válidas para o caso $0 \leq \alpha \leq 1$, já que a potência média do ruído contido na área do retângulo ($\alpha = 0$) é igual à contida em uma forma de pulso para $\alpha > 0$, como pode-se apreciar na Fig. 2.3(b).

2.5 Eficiência de Transmissão

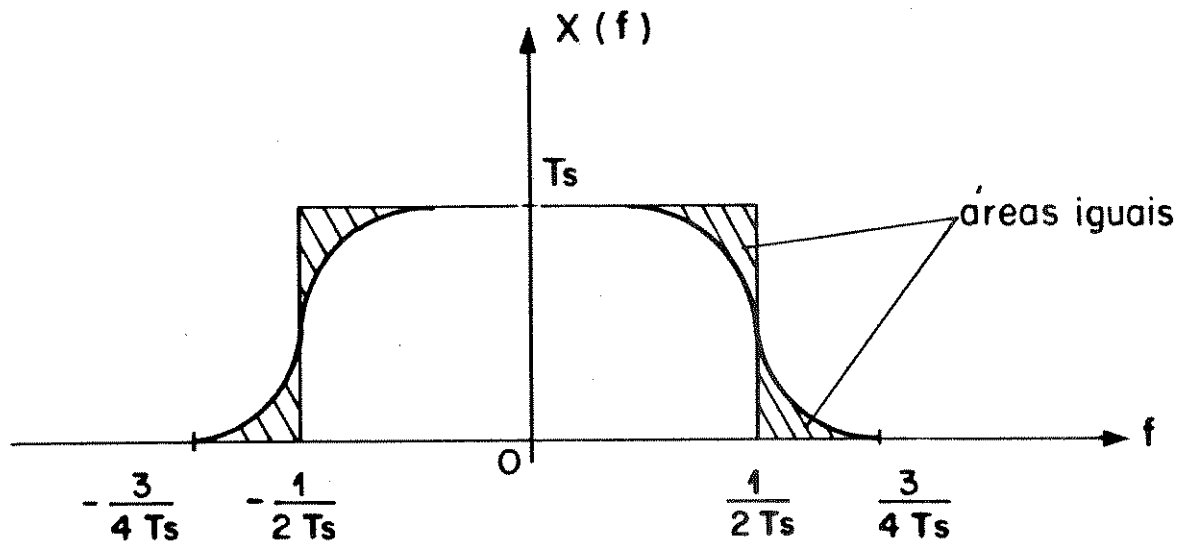
Um importante conceito para quantificar a eficiência de transmissão é o enunciado por Shannon [11] que mostra o seguinte:

Se uma fonte produz informação com taxa r_b [bit/s], e o canal de transmissão disponível possui capacidade C [bit/s] com largura de faixa V [Hz], perturbado por ruído AWGN de densidade espectral η [W/Hz] atuando na mesma faixa V , então existe um esquema de codificação e/ou modulação para o sistema de modo que a probabilidade de erro de decodificação pode ser suficientemente pequena para $r_b < C$.

A capacidade do canal é dada pela equação de Shannon-Hartley, como segue



(a)



(b)

Fig. 2.4 Espectro coseno levantado.

(a) Diferentes valores de α .

(b) Comparação das áreas.

$$C = V \log_2 \left(1 + \frac{S}{\eta V} \right) [\text{bit} / \text{s}] \quad (2.47)$$

onde

$$S \text{ [W]} \quad \text{é a potência média do sinal que ocupa a faixa } V \quad (2.48)$$

$$\eta V = N \text{ [W]} \quad \text{é a potência média do ruído na faixa de ocupação do sinal (faixa de Nyquist)} \quad (2.49)$$

Um outro conceito importante é a Eficiência Espectral ou Eficiência de Banda ([11] e [9]), definida como

$$\mathfrak{R} = \frac{\text{taxa de bits}}{\text{largura de faixa do canal}} [\text{bit} / \text{s} / \text{Hz}] \quad (2.50)$$

A fim de comparar a eficiência dos sistemas, pode-se fazer o gráfico da equação (2.47) no plano $\mathfrak{R}$ versus S/N .

Medindo a relação sinal/ruído S/N sobre uma escala em decibéis, tem-se

$$\frac{S}{N} = \text{ant} \log_{10} \left\{ \frac{1}{10} \frac{S}{N} [\text{dB}] \right\} \quad (2.51)$$

e substituindo esta última expressão na equação (2.47) resulta

$$\frac{C}{V} = \log_2 \left\{ 1 + \text{ant} \log_{10} \left[\frac{1}{10} \frac{S}{N} [\text{dB}] \right] \right\} \quad (2.52)$$

Na Fig. 2.5 mostra-se o gráfico da equação (2.52). Esta curva pode ser aproximada por uma reta para valores de $\frac{S}{N} > 5 \text{ dB}$.

Utilizou-se neste trabalho a seguinte aproximação linear para a equação (2.52)

$$\frac{C}{V} [\text{bit} / \text{s} / \text{Hz}] = a_1 \frac{S}{N} + a_2 \quad (2.53)$$

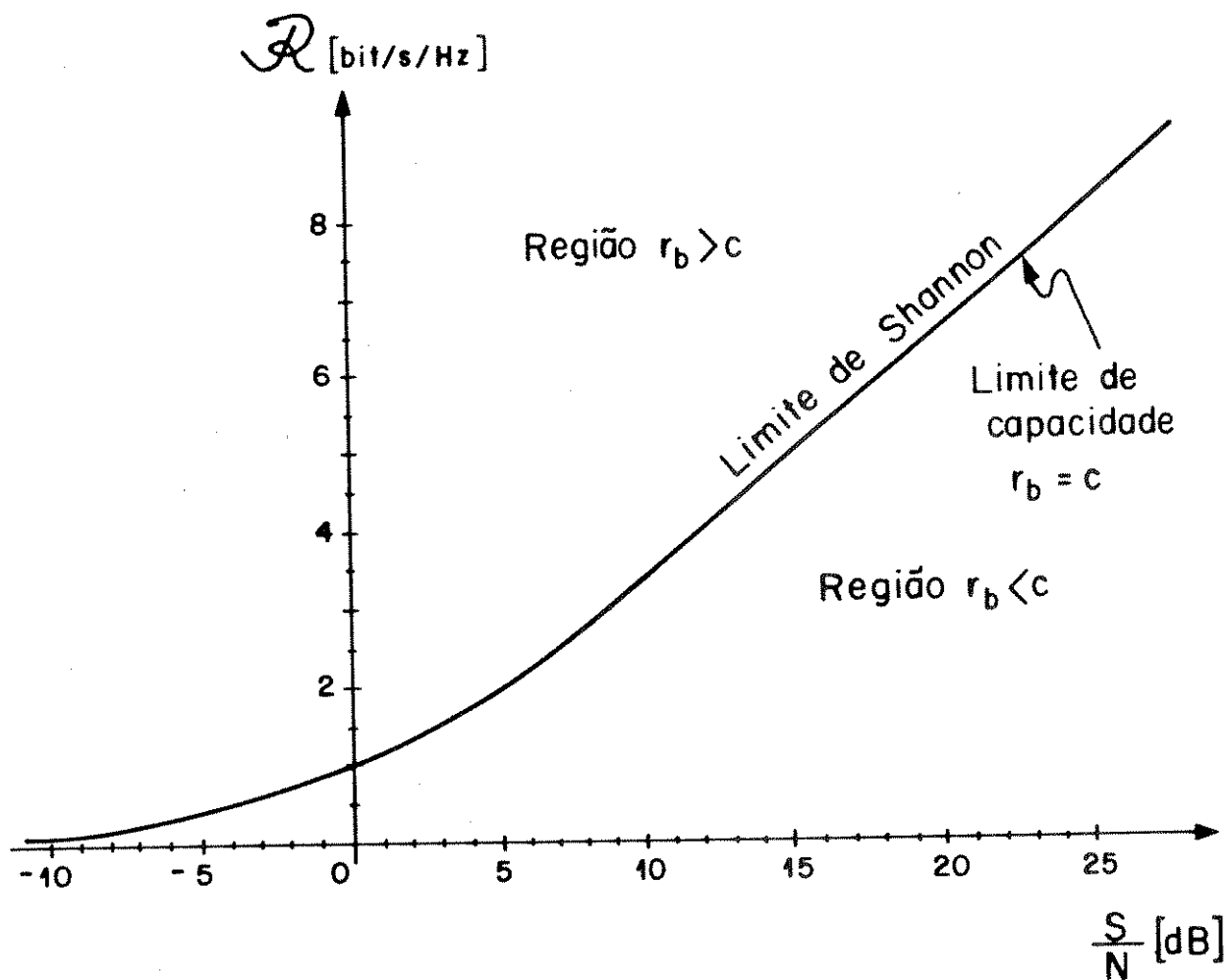


Fig. 2.5 Diagrama de eficiência de transmissão.
Curva de Shannon .

onde

$$a_1 = 0,3233 \quad \text{e} \quad a_2 = 0,2261 \quad (2.54)$$

É importante ressaltar que para $r_b > C$, não existem sistemas de transmissão que possam transmitir com taxas acima da capacidade do canal.

Para $r_b < C$, existem sistemas onde a probabilidade de erro de decodificação pode ser tão pequena como se deseje.

O Limite de Capacidade ou Limite de Shannon acontece para $r_b = C$, que é o lugar geométrico dos sistemas ideais.

2.6 Sinal e Ruído no Receptor QAM

Neste item analisam-se o sinal e o ruído presentes depois dos amostradores, no receptor mostrado na Fig. 2.2(c).

Admite-se que o sinal foi recuperado através de amplificadores e filtros transversais, de tal modo que o sinal recuperado é o próprio $s(t)$.

O receptor recebe a sua entrada o sinal QAM que foi transmitido misturado com ruído AWGN. Assim, no ponto 1 do circuito da Fig. 2.2(c), tem-se a tensão

$$v_1(t) = s(t) + n(t) \quad (2.55)$$

Substituindo na expressão (2.55) o sinal $s(t)$ da equação (2.3) e o ruído $n(t)$ da expressão (2.25), e considerando

$$\omega_p = 2\pi f_p \text{ [rad/s]} \quad (2.56)$$

tem-se

$$v_1(t) = A_k \cos[\omega_p t + \theta_k] + n_I(t) \cos \omega_p t - n_Q(t) \sin \omega_p t \quad (2.57)$$

onde

θ_k é a fase transmitida

No ponto 2 do circuito, depois do batimento com a portadora em fase, resulta

$$v_2(t) = A_k \cos[\omega_p t + \theta_k] \cos \omega_p t + n_I(t) \cos^2 \omega_p t - n_Q(t) \sin \omega_p t \cos \omega_p t \quad (2.58)$$

Mas, sabe-se que

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \quad (2.59)$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)] \quad (2.60)$$

Portanto, substituindo estas duas últimas expressões na (2.58), obtém-se

$$v_2(t) = \frac{1}{2} A_k \cos \theta_k + \frac{1}{2} n_I(t) + \frac{1}{2} A_k \cos[2\omega_p t + \theta_k] + \frac{1}{2} [n_I(t) \cos 2\omega_p t - n_Q(t) \sin 2\omega_p t] \quad (2.61)$$

Mas, como foram instalados filtros passa-baixas antes dos integradores, tanto o sinal como o ruído do dobro da frequência ω_p ficam filtrados, obtendo-se

$$v_2'(t) = \frac{1}{2} A_k \cos \theta_k + \frac{1}{2} n_I(t) \quad (2.62)$$

Depois da integração e da amostragem tem-se, para o ponto 3 do circuito, a seguinte tensão

$$v_3(T_s) = \frac{1}{2} A_k \cos \theta_k \int_0^{T_s} dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_s} n_I(t) dt \quad (2.63)$$

mas, pode-se escrever

$$v_3(T_s) = S_X(T_s) + Q_X(T_s) \quad (2.64)$$

onde

$$S_X(T_s) = \frac{1}{2} T_s A_k \cos \theta_k = \frac{1}{2} T_s X_k \quad (2.65)$$

$$Q_X(T_s) = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} n_I(t) dt \quad (2.66)$$

De forma similar, analisando os pontos 4 e 5 do circuito, chega-se aos seguintes resultados

$$v_5(T_s) = S_y(T_s) + Q_y(T_s) \quad (2.67)$$

onde:

$$S_y(T_s) = \frac{1}{2} T_s A_k \sin \theta_k = \frac{1}{2} T_s Y_k \quad (2.68)$$

$$Q_y(T_s) = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} n_Q(t) dt \quad (2.69)$$

A constante (1/2) presente nas expressões (2.65-69), não precisa ser levada em conta na análise, já que tanto os termos de sinal como os termos de ruído são afetados de forma igual.

2.7 Potência Média do Ruído no Receptor QAM

Neste item deduz-se a potência média ou potência média quadrática do ruído no receptor QAM. Esta potência será utilizada posteriormente para avaliar o desempenho destes sistemas.

O ruído na saída dos amostradores, como achados nas expressões (2.66) e (2.69), pode ser escrito da seguinte forma

$$Q(T_s) = \int_0^{T_s} n_\Delta(t) dt \quad (2.70)$$

onde $n_\Delta(t)$, é uma variável estocástica estacionária em sentido amplo, isto é, sua média estatística é constante

$$\langle n_\Delta(t) \rangle = 0 \quad (2.71)$$

e, sua autocorrelação depende somente do intervalo τ , onde

$$\tau = t_2 - t_1 \quad (2.72)$$

$$\mathfrak{R}_{n_\Delta n_\Delta}(\tau) = \langle n_\Delta(t_2) n_\Delta(t_1) \rangle \quad (2.73)$$

Então, a potência média [12] do ruído, pode ser calculada como

$$\langle Q^2(T_s) \rangle = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \mathfrak{R}_{n_\Delta n_\Delta}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (2.74)$$

Portanto, relacionando a expressão do ruído dada na equação (2.66) com a (2.70), resulta

$$n_\Delta(t) = n_I(t) \quad (2.75)$$

ficando a expressão (2.74), da seguinte forma

$$\langle Q_x^2(T_s) \rangle = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \mathfrak{R}_{n_I n_I}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (2.76)$$

Agora, substituindo nesta última expressão a (2.33), obtem-se

$$\langle Q_x^2(T_s) \rangle = \frac{\eta}{\pi} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin \pi V(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \quad (2.77)$$

Mas pelo Apêndice B sabe-se que

$$\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin a(t_2 - t_1) \cos b(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 = a T_s^2 I(a, b) \quad (2.78)$$

Associando esta última expressão com a (2.77), tem-se

$$a = \pi V \quad (2.79)$$

$$b = 0 \quad (2.80)$$

resultando para a expressão (2.77)

$$\langle Q_x^2(T_s) \rangle = \eta V T_s^2 I(\pi V, 0) \quad (2.81)$$

Para não termos interferência intersimbólica, considera-se a largura de faixa mínima utilizada

$$V = r_s \text{ [Hz]} \quad (2.82)$$

Utilizou-se o programa computacional do Apêndice D para avaliar a série de potências da equação (2.78). Assim, a potência média do ruído resulta

$$\langle Q_x^2(T_s) \rangle = 0,7737 \eta r_s T_s^2 \quad (2.83)$$

Usando a expressão do ruído (2.49), esta última equação resulta

$$\langle Q_x^2(T_s) \rangle = 0,7737 N T_s^2 \quad (2.84)$$

Uma análise similar, aplicada ao ruído $Q_y(T_s)$ dado pela expressão (2.69), fornece o mesmo resultado achado para $Q_x(T_s)$, isto é

$$\langle Q_x^2(T_s) \rangle = \langle Q_y^2(T_s) \rangle \quad (2.85)$$

Pode-se observar, que a potência média do ruído de faixa estreita foi reduzida em 22.63%, comparada com o ruído de faixa estreita que tivesse sido somente amplificado com ganho T_s^2

$$\langle Q^2(T_s) \rangle = \eta r_s T_s^2 \quad (2.86)$$

2.8 Desempenho dos Sistemas QAM

Neste item apresenta-se de forma resumida a probabilidade de erro de símbolo dos sistemas QAM.

No processo de decisão, a componente em fase X_k e a componente em quadratura Y_k dos sistemas QAM são consideradas independentes. Por isto, realiza-se duas decisões ortogonais, uma para cada componente.

Assim, para a probabilidade de detecção correta, tem-se

$$P_c = (1 - p_e)^2 \cong 1 - 2 p_e \quad \text{para } p_e \ll 1 \quad (2.87)$$

onde p_e é a probabilidade de erro, em cada uma das componentes X_k e Y_k e pode ser escrita como segue

$$p_e = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p_i \quad (2.88)$$

$$p_e = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{a^2}{\langle Q_x^2(T_s) \rangle}}\right) \quad (2.89)$$

onde

$$M \quad \text{é o número de símbolos de canal (potência de 2)} \quad (2.90)$$

$$p_i \quad \text{é a probabilidade de erro em cada um dos } M \text{ símbolos, no eixo de } X_k \text{ ou } Y_k \quad (2.91)$$

$$Q \quad \text{é a função cauda; é a probabilidade dada pela função distribuição normal de uma distância } \frac{a}{\left\{\langle Q_x^2(T_s) \rangle\right\}^{1/2}} \text{ até } \infty \quad (2.92)$$

$$a \quad \text{é a distância entre o sinal detectado sem ruído e a região de decisão} \quad (2.93)$$

$$\langle Q_x^2(T_s) \rangle = 0,7737 N T_s^2 \quad \text{é a potência média do ruído contido na faixa } V \text{ de ocupação do sinal} \quad (2.94)$$

O parâmetro “a”, definido na expressão (2.93), está vinculado com o espaçamento do reticulado “d” do sistema QAM, definido na expressão (2.16), através da equação (2.65), como segue

$$a = T_s d \quad (2.95)$$

e esta última expressão está ligada com a potência média da constelação, segundo a expressão (2.18), da seguinte forma

$$a^2 = \frac{3}{M-1} S T_s^2 \quad (2.96)$$

A probabilidade de erro de símbolo, resulta

$$P_M = 1 - P_C \quad (2.97)$$

e substituindo nesta, as expressões (2.87), (2.89), (2.94) e (2.96), obtém-se

$$P_M \cong 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{0,7737 (M-1)}} \frac{S}{N} \right) \quad (2.98)$$

Esta última equação, não é exata para valores de $M = 8, 32, 128, 512$ e 2048 . Estas constelações apresentam um reticulado não completo e portanto a equação (2.89) não é válida. Nesta situação, deve-se utilizar a expressão (2.88).

Para $M = 128, 512$ e 2048 , utilizou-se a equação (2.98), encontrando que para estes valores de M , o cálculo exato da probabilidade de erro de símbolo não difere substancialmente daquela obtida através desta equação.

Aprimorou-se a probabilidade de erro de símbolo para os seguintes casos

QAM-8

$$P_M \cong \frac{5}{2} Q \left(\sqrt{\frac{1}{0,7737 (3)}} \frac{S}{N} \right) \quad (2.99)$$

QAM-32

$$P_M \cong \frac{27}{8} Q \left(\sqrt{\frac{1}{0,7737 (10)}} \frac{S}{N} \right) \quad (2.100)$$

A Tabela 2.2 mostra o desempenho do sistema QAM para

$$M = 2^i; \quad 2 \leq i \leq 12 \quad (2.101)$$

Também na Tabela 2.2, apresenta-se também o cálculo da eficiência de banda, que segundo a equação (2.50), resulta

Tabela 2.2 Desempenho e eficiência de banda para vários sistemas QAM.

M	$\mathfrak{R}$ (bit/s/ H_z)	S/N (dB)							
		$P_M=10^{-1}$	$P_M=10^{-2}$	$P_M=10^{-3}$	$P_M=10^{-4}$	$P_M=10^{-5}$	$P_M=10^{-6}$	$P_M=10^{-7}$	$P_M=10^{-8}$
4	2	3,2090	7,1012	9,2873	10,7169	11,8080	12,6880	13,4240	14,0543
8	3	8,5232	12,1218	14,2177	15,6059	16,6723	17,5361	18,2607	18,8813
16	4	11,1425	14,5562	16,5625	17,9185	18,9655	19,8164	20,5318	21,1446
32	5	14,3998	17,6840	19,6526	20,9886	22,0234	22,8662	23,5758	24,1834
64	6	17,6927	20,9396	22,8991	24,2290	25,2603	26,1005	26,8083	27,4144
128	7	20,8170	24,0203	25,9711	27,2942	28,3213	29,1587	29,8645	30,4689
256	8	23,9010	27,0711	29,0170	30,3356	31,3598	32,1954	32,8998	33,5029
512	9	26,9580	30,1058	32,0486	33,3640	34,3863	35,2206	35,9241	36,5263
1024	10	29,9985	33,1371	35,0720	36,3852	37,4062	38,2396	38,9424	39,5441
2048	11	33,0289	36,1645	38,0906	39,4023	40,4224	41,2551	41,9575	42,5587
4096	12	36,0528	39,1864	41,1063	42,4169	43,4363	44,2687	44,9707	45,5717

$$\mathfrak{R}[\text{bit/s/Hz}] = \frac{rb}{V} = \frac{r_s \lambda}{r_s} = \log_2 M \quad (2.102)$$

No Apêndice D encontra-se o programa computacional utilizado para o levantamento da Tabela 2.2.

Na Fig. 2.6 são mostradas as curvas de desempenho que correspondem à Tabela 2.2.

Observa-se que os sistemas QAM analisados de banda estreita diferem dos analisados nas bibliografias, com respeito a seus desempenhos, em 1,11 dB. Por exemplo para uma probabilidade de erro de símbolo de $P_M = 10^{-6}$, o sistema QAM-16 aparece com 18,70 dB de relação sinal/ruído média por símbolo, em bibliografias usuais, enquanto que o valor aqui é 19,81 dB analisado como banda estreita. Para o QAM-256, segundo referências usuais, tem-se 31,08 dB, enquanto o sistema de faixa estreita apresenta 32,19 dB.

2.9 Revisão de Modulação Codificada

Um modelo simplificado de um sistema de comunicações digitais, em termos de blocos funcionais, é apresentado na Fig. 2.7(a). A fonte de informação com taxa r_b entrega uma seqüência de k bits ao codificador. Tanto o codificador como o decodificador contribuem para redução dos possíveis erros cometidos no canal de transmissão. Para isto o codificador entrega uma seqüência $\{s(t)\}$ de n bits com taxa r_b , onde $n > k$, para obter-se redundância de bit de informação e assim realizar-se uma proteção de erro [13]. Deste modo, o codificador possui a taxa de codificação

$$R = \frac{k}{n} \quad (2.103)$$

O modulador é o responsável pelo mapeamento entre os n bits de canal e o alfabeto de modulação de M símbolos de canal, onde

$$M = 2^n \quad [\text{símbolo de canal}] \quad (2.104)$$

e cuja taxa de modulação será

$$r_s = \frac{r_b}{\log_2 M} \quad [\text{símbolo/s}] \quad (2.105)$$

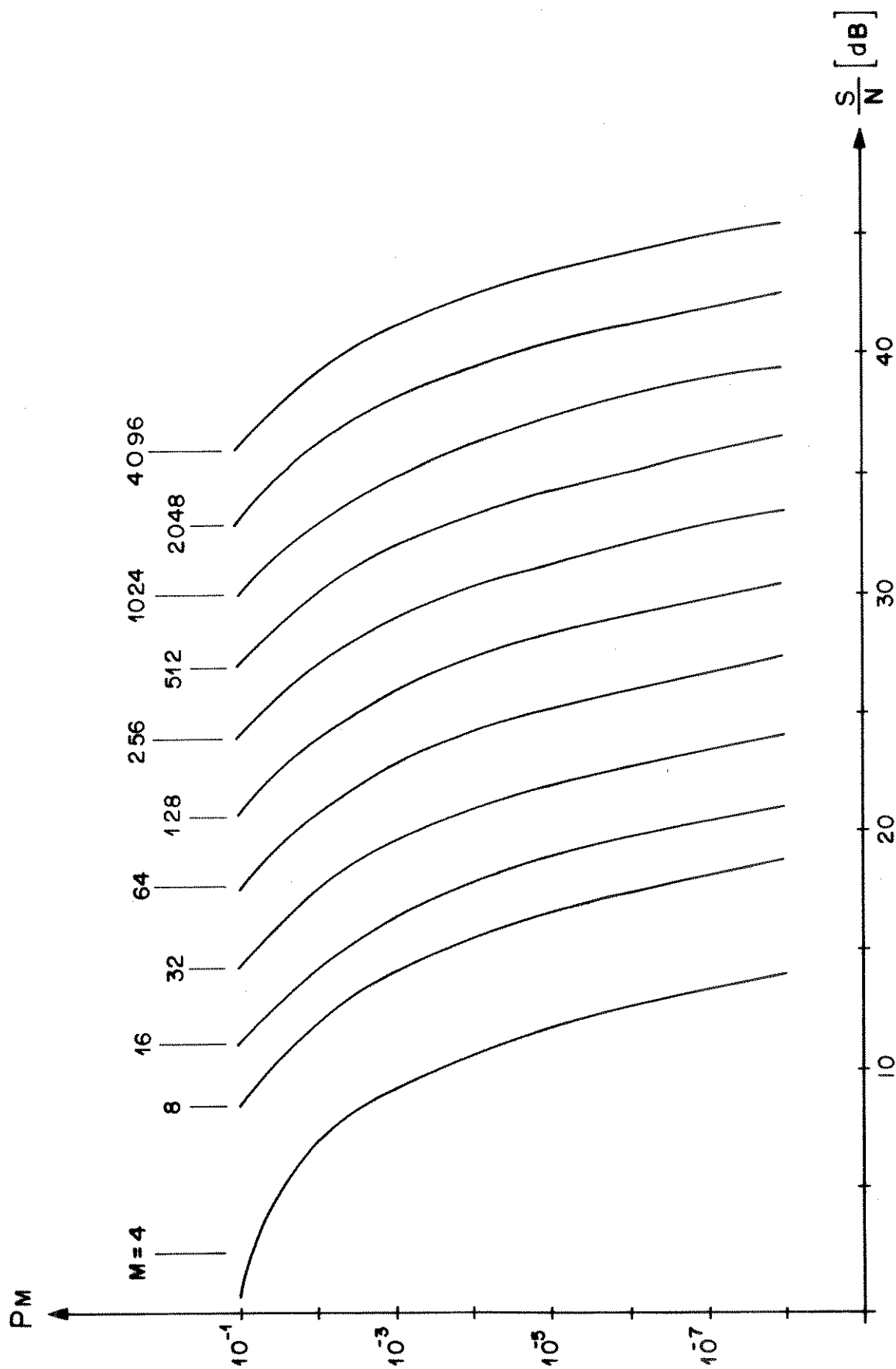
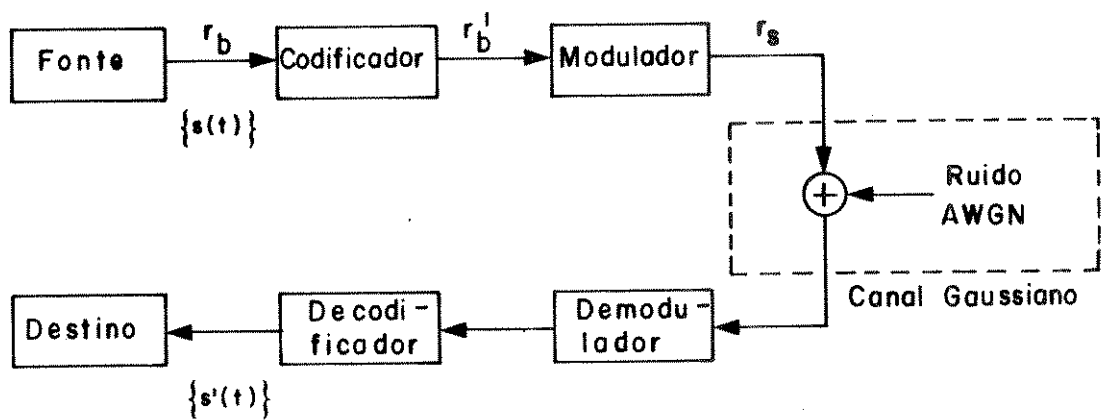
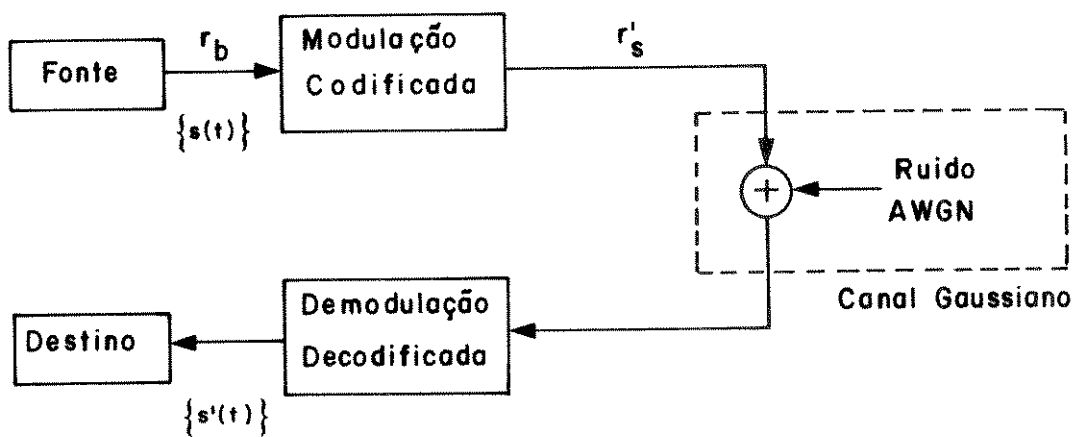


Fig. 2.6 Curvas de desempenho para vários sistemas QAM.



(a)



(b)

Fig. 2.7 Diagrama simplificado dos sistemas de transmissão digital.

(a) Sistema convencional.

(b) Sistema com modulação codificada.

Posteriormente na recepção, um processo de decodificação por verossimilhança recebe a sequência de símbolos de canal interferido por ruído AWGN [9], e estima os k bits de informação transmitidos da sequência $\{s(t)\}$.

Neste modelo de comunicação digital, considera-se tanto a modulação como a codificação, duas entidades separadas.

Na tentativa de projetar sistemas mais confiáveis, isto é, sistemas com baixa probabilidade de erro de símbolo, os sistemas são obrigados a:

- i. Aumentar a potência de seus sinais, e deste modo melhorar o desempenho do sistema, e/ou
- ii. Diminuir a taxa de informação, se o canal de transmissão não permite expansão de largura de banda. Isto é, na tentativa de codificar para obter-se redundância de informação e assim menor probabilidade de erro, a taxa de informação com codificação cairia para

$$r_{b_c} = \frac{k}{n} r_b \quad (2.106)$$

- iii. Aumentar a largura de banda de ocupação do sistema, se o mesmo pretende manter fixa a taxa de informação. Ou seja, ao codificar está-se aumentando a banda em

$$U_c = \frac{n}{k} U \text{ [Hz]} \quad (2.107)$$

onde

U é a banda ocupada pelo sistema sem codificação.

Os sistemas de transmissão da atualidade trabalham nas fronteiras de suas larguras de banda e de suas potências. Por isso mostra-se inviável projetar sistemas de maior eficiência, utilizando o critério estrutural de transmissão-recepção tradicional apresentado na Fig. 2.7(a).

O trabalho apresentado por Massey [14], no ano de 1974, mostra que é possível melhorar o comportamento dos sistemas, considerando a codificação e a modulação como uma única entidade. Mais tarde, dentro desta linha, Ungerboeck [1] no ano de 1982 apresenta uma técnica que lhe permite obter ganhos significativos sobre os sistemas de modulação convencionais. Esta técnica, que considera como base o processo de codificação

e modulação como uma única entidade - vide Fig. 2.7(b) - e daí o nome de Modulação Codificada, não sacrifica a eficiência espectral do sistema. Isto é, não modifica nem a taxa de informação nem a largura de banda de ocupação.

Na Fig. 2.8, mostra-se o gráfico [1] capacidade de canal C [bit/ T_s] versus relação sinal ruído S/N [dB] onde

$$T_s[s] \text{ é o intervalo de modulação} \quad (2.108)$$

Neste gráfico, mostra-se curvas de capacidade de canal discretos sem memória limitados em banda e interferidos por ruído AWGN, para os sistemas QAM-8/16/32/64. A potência média da constelação dos sistemas QAM é considerada unitária.

Observa-se que as curvas apresentadas para os sistemas permanecem constantes e começam a se curvar no momento em que é incorporada a codificação.

Por exemplo, no caso de se usar o sistema de modulação não codificado QAM-8, precisa-se de uma taxa de 3 bit/ T_s e uma relação sinal/ruído de 17 dB aproximadamente, para uma probabilidade de erro de símbolo de 10^{-5} . Se agora duplica-se a constelação para QAM-16, pode-se transmitir teoricamente a 3 bit/ T_s sem erro de símbolo utilizando-se ilimitado esforço de codificação e decodificação com uma relação sinal/ruído de agora 9,5 dB aproximadamente. Obtem-se assim um ganho, ao dobrar a constelação de 7,5 dB. Por outro lado, para transmitir 3 bit/ T_s , usando constelações maiores, o ganho não diferiria substancialmente do calculado, já que as curvas para estas constelações iriam se encontrar nas imediações da curva do QAM-16 para 3 bit/ T_s .

Assim, Ungerboeck [1,2,3] observa que é suficiente dobrar os símbolos de canal e, mediante alguma técnica, codificar e modular obtendo-se ganhos significativos sobre os sistemas não codificados.

Ao se duplicar o alfabeto de modulação, a técnica aproveita a redundância de símbolos de canal para realizar um controle de erro através de codificação.

Esta codificação é feita de tal forma que realiza um adequado mapeamento entre os $n+1$ bit de canal de taxa r_b e os

$$M' = 2^{n+1} \quad [\text{símbolo}] \quad (2.109)$$

símbolos de canal de taxa

$$r_s' = \frac{r_b''}{\log_2 M'} \quad [\text{símbolo de canal} / s] \quad (2.110)$$

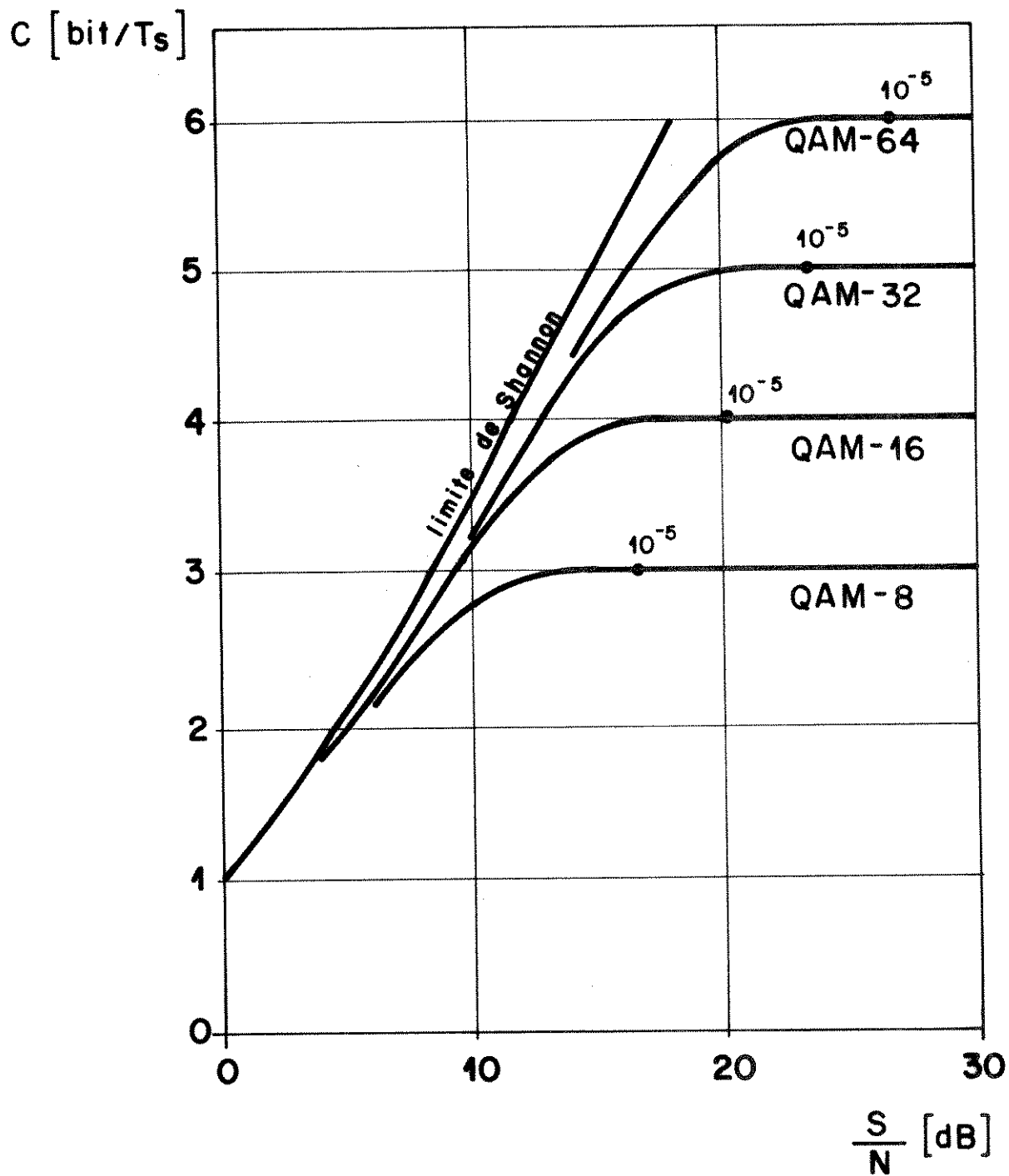


Fig. 2.8 Capacidade de canal versus relação sinal/ruído para alguns sistemas QAM.

A regra de mapeamento utilizada é a chamada “Mapeamento por Partição de Conjunto” que consiste em sucessivas partições, realizadas pela codificação, do conjunto dos M' símbolos de canal em subconjuntos onde vai-se incrementando o quadrado das Distâncias Mínimas Euclidianas $\Delta_0^2 < \Delta_1^2 < \Delta_2^2 < \Delta_3^2$ entre os símbolos que compõem cada subconjunto. O conceito de partição de conjunto aplicado ao sistema QAM-16 é mostrado na Fig. 2.9. A modulação codificada pode ser implementada mediante códigos convolucionais ou códigos de bloco. Também é possível utilizar códigos concatenados [13].

Muitos trabalhos usando códigos convolucionais (TCM) foram desenvolvidos. Citam-se alguns a seguir.

A arquitetura TCM é mais sensível às variações de fase que o sistema não codificado. Um estudo [15, 16] aborda a codificação invariante à rotação de fase.

Constelações assimétricas [17] são utilizadas, obtendo-se melhorias de desempenho em relação ao sistema TCM tradicional.

Melhores códigos convolucionais para as modificações PSK-16 e 32, usando a técnica de modulação codificada, foram desenvolvidos por Benedetto et al [18].

Utilizando-se constelações multidimensionais, Fang Wei [19] obteve melhor tolerância à ambiguidade de fase e um melhor compromisso entre ganho de codificação e complexidade.

Por outro lado, no trabalho de Wolf & Pandovani [20] para modulação codificada, combinam-se as modulações FSK e PSK, fazendo uso de codificação por treliça, conseguindo-se melhorar o desempenho deste em relação ao esquema de modulação PSK não codificado.

A técnica de modulação codificada utilizando anéis de inteiros Módulo- q para códigos convolucionais [21], permite criar códigos multiníveis baseados em anéis de resíduos de inteiros.

Mencionam-se a seguir alguns trabalhos realizados utilizando códigos de bloco.

Dentre os pioneiros desta área, um que destaca o uso da partição de conjunto, foi Cusack [22], utilizando o espaço de sinais QAM e códigos de Reed-Muller.

Outros tipos de modulação foram utilizados por Sayegh [23] como extensão do trabalho de Cusack.

Com relação ao processo de decodificação, Sayegh [23] apresenta um processo mais adequado para o caso onde o número de bits de informação é grande. Outro foi desenvolvido por Williams e Farrell [24].

Também, para códigos de blocos, pesquisou-se modulação codificada sobre anéis de inteiros Módulo- q [25].

Forney et al. [26] apresenta uma revisão, que mostra, dentre outras coisas, o trabalho estrutural para modulação codificada utilizando códigos de blocos e códigos convolucionais. Também comentam sobre algumas técnicas apresentadas até essa época.

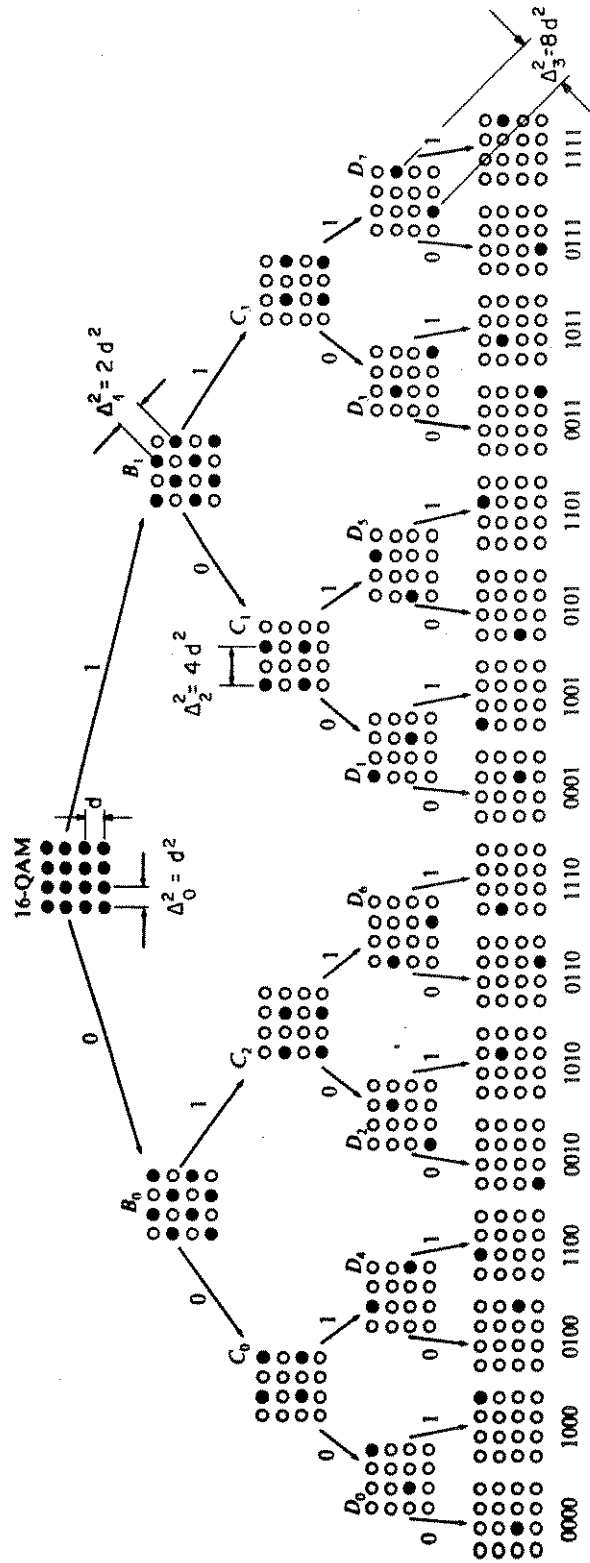


Fig. 2.9 Partição do conjunto de sinais do sistema QAM-16 incrementando o quadrado das distâncias mínimas Δ_0^2 , Δ_1^2 , Δ_2^2 e Δ_3^2 dos subconjuntos.

2.9.1 Modulação Codificada usando Códigos Convolucionais (TCM)

O codificador convolucional (n, k, m) é um dispositivo de k entradas, n saídas e m memórias.

Atua como uma máquina finita de 2^m estados com transições entre os mesmos, que pode ser representada por um Diagrama de Estados. Existem 2^k transições chegando ou partindo de cada estado.

As transições entre estados, no transcurso do tempo, são descritas mediante o Diagrama de Treliça. Depois de m tempos de símbolos, a treliça entra em estado de regime, onde cada janela de tempo da treliça possui $2^{(k+m)}$ transições.

Em seguida apresenta-se alguns conceitos que serão utilizados neste item.

- Define-se a Distância Livre d_{free} de um código convolucional, como o mínimo dos quadrados das distâncias euclidianas entre pares de seqüências de símbolos de canal distintas que o codificador pode gerar.

- $d_{free}^2 = \min \{ \Delta^2 \text{ entre pares de seqüências distintas} \}$ (2.111)

- Define-se como Ganho Assintótico a diferença entre as relações sinal/ruído do sistema codificado e o não codificado quando a relação sinal/ruído é muito grande

$$G_a [dB] = 10 \log_{10} \left\{ \left(\frac{S}{N} \right)_c - \left(\frac{S}{N} \right) \right\}; \frac{S}{N} \rightarrow \infty$$
$$= 10 \log_{10} \left\{ \frac{d_{free}^2}{S_c} / \frac{d_{free}^2}{S} \right\} \quad (2.112)$$

onde d_{free}^2 é o quadrado da Distância Livre do código do sistema expandido e d_{free} do sistema base; S_c é a potência média da constelação (vide item 2.1 do capítulo seguinte) do sistema expandido e S do sistema base.

- Codificador Sistemático Equivalente com Realimentação

As saídas do codificador convolucional podem ser representadas pelo polinômio

$$b(D) = [b_{k+1}(D), b_k(D), \dots, b_1(D)] \quad (2.113)$$

que deve satisfazer a seguinte equação

$$b(D) H^T(D) = 0 \quad (2.114)$$

onde

$$H(D) = [H^{k+1}(D), H^k(D), \dots, H^1(D)] \quad (2.115)$$

é a Matriz Verificação de Paridade do código que é constituída, para $m \geq 2$, por

$$H^i(D) = 0 \quad ; \quad p+1 < i \leq k+1 \quad (2.116)$$

$$H^i(D) = H_{m-1}^i D^{m-1} + H_{m-2}^i D^{m-2} + \dots + H_1^i D \quad ; \quad 2 \leq i \leq p+1 \quad (2.117)$$

$$H^1(D) = D^m + H_{m-1}^1 D^{m-1} + H_{m-2}^1 D^{m-2} + \dots + H_1^1 D + 1 \quad (2.118)$$

onde p é o número de bit da entrada do código que será verificado; estes bits são responsáveis pela seleção dos subconjuntos. Existem $(k-p)$ bits que passam a saída do codificador e que são responsáveis pela seleção dos símbolos de canal dentro de cada subconjunto. No Diagrama de Treliza existem $2^{(k-p)}$ transições paralelas.

Na Fig. 2.11 mostra-se o esquema geral de um Codificador-Modulador utilizando codificador sistemático equivalente com realimentação.

A seguir, descreve-se o método heurístico de Ungerboeck [1, 2] através de um exemplo.

Exemplo

Seja o sistema QAM-8, cuja constelação mostra-se na Fig. 2.10(a), de potência média S .

Pretende-se usar modulação codificada com um código convolucional (4,3,2), de matriz verificação de paridade

$$H(D) = [0, 0, D, D^2 + 1] \quad (2.119)$$

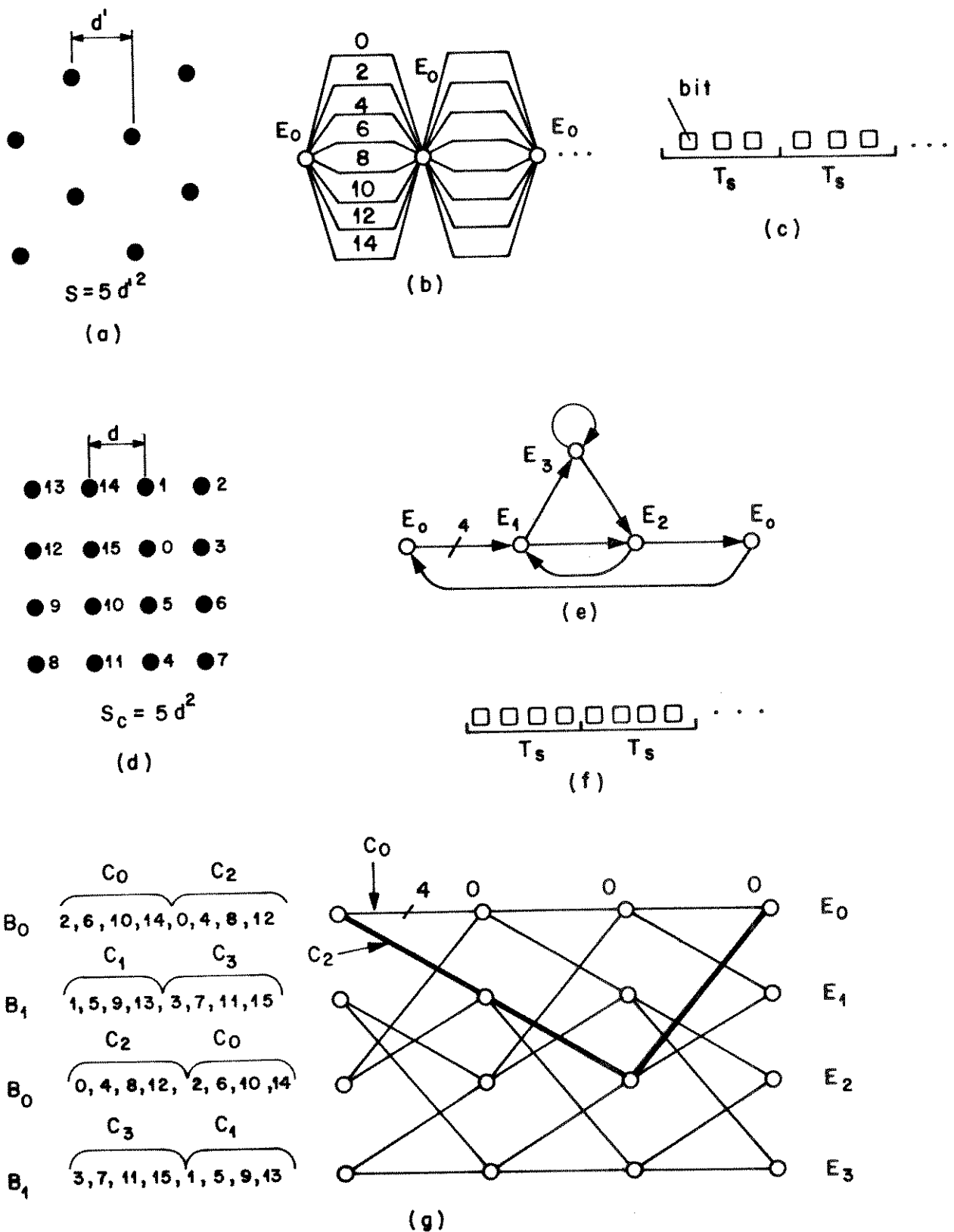
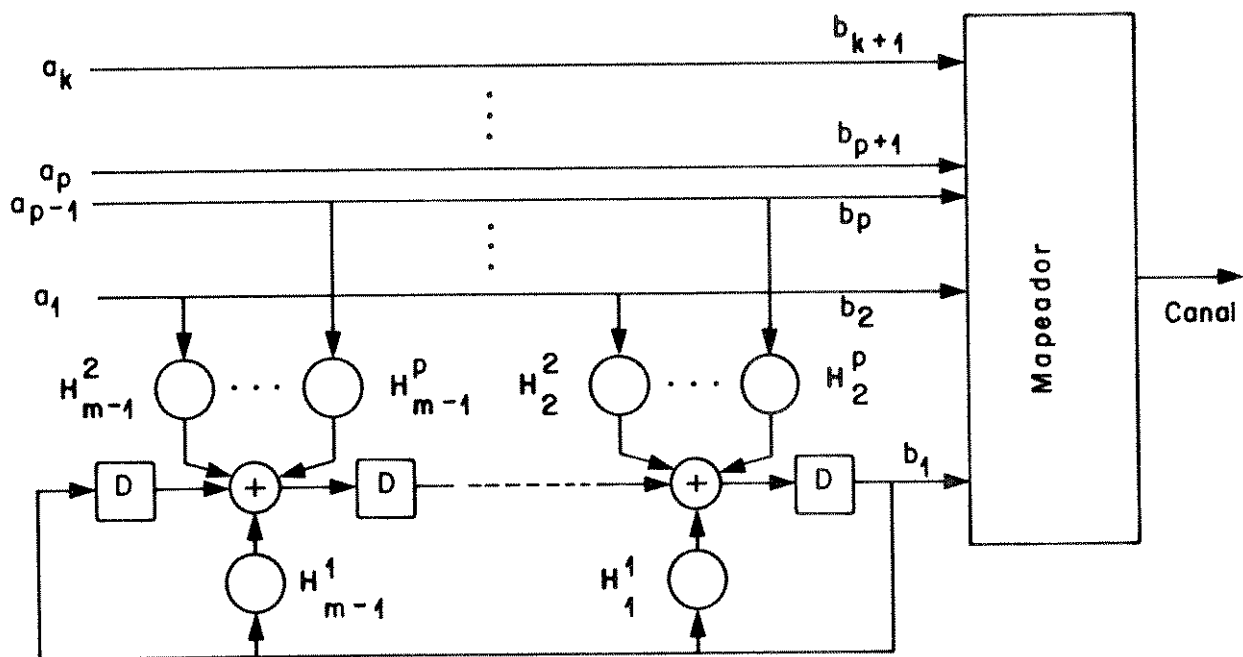
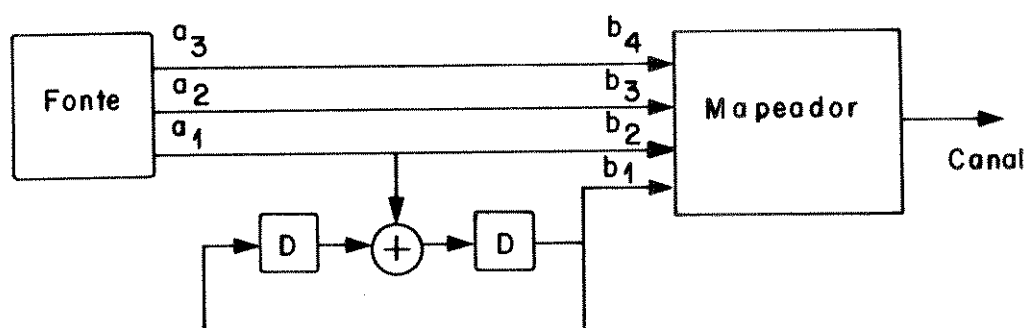


Fig. 2.10 Ilustrações relacionadas ao exemplo.



(a)



(b)

Fig. 2.11 Estrutura para modulação codificada.

(a) Estrutura geral.

(b) Caso particular.

Sistema não codificado:

O Sistema QAM-8 tomado como referência, possui um diagrama de treliça de um estado, com 8 transições paralelas partindo e chegando neste estado como ilustra-se na Fig. 2.10(b).

As transições paralelas serão atribuídas com os sinais de canal de grupo B_0 das partições mostradas na Fig. 2.9, que corresponde ao diagrama de sinais desta constelação.

Assim, a distância livre do sistema base será

$$\begin{aligned} d_{free}^2 &= \min \{ \text{quadrado da distância mínima euclidiana dos sinais do grupo } B_0 \} \\ &= \min \{ \Delta_1^2 \} \\ &= 2d'^2 \end{aligned} \tag{2.120}$$

Por outro lado, a taxa de bit de informação será

$$r_b = \frac{3}{T_s} \text{ [bit / s]} \tag{2.121}$$

considerando que a fonte de informação entrega 3 bits em T_s segundos. Mostra-se na Fig. 2.10(c), um desenho explicativo.

Sistema expandido:

Para obter-se ganho sobre o sistema QAM-8, é suficiente dobrar o espaço de sinais. Portanto deve-se codificar o sistema QAM-16, cujo diagrama de sinais numerado mostra-se na Fig. 2.10(d); esta constelação possui potência média S_C .

O diagrama de estados do sistema codificado possui 4 estados E_0, E_1, E_2 e E_3 , com 8 transições partindo e chegando em cada estado. Assim possui 4 transições paralelas entre estados, como mostrado na Fig. 2.10(e). Após 2 janelas de tempo, o diagrama de treliça apresenta 32 transições por janela ou 8 transições entre estados como ilustrado na Fig. 2.10(g), onde o número de transições paralelas é indicado como um número 4 por razões de espaço.

Considera-se por convenção, o Caminho Todo Nulo, como o caminho existente entre estados E_0 e, se por alguma interferência (ruído AWGN), sairmos deste estado, o menor caminho realizado para voltar ao estado E_0 será o caminho $E_0 - E_1 - E_2 - E_0$ que é mostrado com linha grossa no diagrama de treliça.

Uma vez escolhido o diagrama de treliça, resta atribuir às transições deste diagrama os sinais de canal do sistema expandido, de modo a se conseguir o máximo d_{free} . Para isto utiliza-se as regras dadas por Ungerboeck:

1. Todos os sinais da constelação expandida ocorrem com igual frequência, com a mesma regularidade e simetria.
2. As transições paralelas na treliça, receberão sinais dos subconjuntos de máxima distância mínima euclideana. Isto é, um dos subconjuntos C_0, C_1, C_2, C_3 para cada transição paralela com $\Delta_2^2 = 4d^2$.
3. As transições que partem ou chegam a um estado recebem sinais dos subconjuntos B_0 ou B_1 de $\Delta_1^2 = 2d^2$.

Deste modo as transições da treliça recebem sinais de canal adequados para obter-se o máximo d_{free} como é mostrada na Fig. 2.10(g).

Na Tabela 2.3, mostra-se a lógica de mapeamento entre as saídas do codificador e os símbolos de canal.

Para calcular a distância livre, tem-se

$$\begin{aligned}
 d_{free}^2 &= \min \{ \text{distância mínima entre transições paralelas, distância do caminho mínimo} \\
 &\quad \text{com respeito ao caminho todo nulo} \} \\
 &= \min \{ \text{distância no grupo } C_0, \text{ distância entre o grupo } C_0 \text{ e } C_2 + \\
 &\quad + \text{ distância entre o grupo } C_0 \text{ e } C_1 + \text{ distância entre o grupo } C_0 \text{ e } C_2 \} \\
 &= \min \left\{ \Delta_2^2, \Delta_1^2 + \Delta_0^2 + \Delta_1^2 \right\} \\
 &= \min \{ 4d^2, 5d^2 \} \\
 &= 4d^2
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

Para códigos de até 8 estados, é possível realizar a correspondência dos sinais de canal para as transições, “a mão”. Para maior número de estados, um suporte computacional é necessário a fim de achar o d_{free} .

Assim, obtém-se um ganho assintótico utilizando modulação codificada neste caso de

$$\begin{aligned}
 G_s [\text{dB}] &= 10 \log_{10} \left\{ \frac{4d^2}{5d^2} / \frac{2d^2}{5d^2} \right\} \\
 &\equiv 3\text{dB}
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

Tabela 2.3 Lógica de mapeamento de sinais de canal.

Seleção dos Subconjuntos C_0, C_1, C_2 ou C_3		Seleção dentro de cada Subconjunto		Símbolo QAM-16
b_4	b_3	b_2	b_1	
0	0	0	0	10
0	0	0	1	2
0	0	1	0	6
0	0	1	1	14
0	1	0	0	8
0	1	0	1	0
0	1	1	0	4
0	1	1	1	12
1	0	0	0	5
1	0	0	1	13
1	0	1	0	9
1	0	1	1	1
1	1	0	0	7
1	1	0	1	15
1	1	1	0	11
1	1	1	1	3

Por outro lado se a taxa de modulação é

$$R_M = n + 1 \quad [\text{bit/símbolo de canal}] \quad (2.124)$$

e a taxa da modulação codificada é

$$R_{MC} = \frac{r_b}{r_s} = R \cdot R_M \quad [\text{bit/símbolo de canal}] \quad (2.125)$$

então a taxa de símbolo será

$$r_s' = \frac{r_b}{R \cdot R_M} = \frac{3/T_s}{\frac{3}{4} \cdot 4} = \frac{1}{T_s} \quad [\text{símbolo de canal / s}] \quad (2.126)$$

isto significa que no tempo T_s o sistema de modulação codificada transmite um símbolo da constelação QAM-16, ou seja 4 bits. A Fig. 2.10(f) serve para ilustração. Portanto no sistema expandido precisa-se transmitir mais bit no tempo T_s , o que demanda um sistema mais rápido e de maior custo.

Pode-se perceber que a largura de faixa de ocupação do sistema codificado não foi alterada, sendo igual ao sistema não codificado, isto é

$$W_c = W = \frac{1}{T_s} \quad [\text{Hz}] \quad (2.127)$$

Para o codificador convolucional em questão, tem-se os seguintes parâmetros

$$k = 3$$

$$p = 1 \quad (2.128)$$

$$m = 2$$

obtendo-se, segundo a Fig. 2.11(a)

$$H^i(D) = 0 \therefore H^3(D) = H^4(D) = 0 \quad 2 < i \leq 4 \quad (2.129)$$

$$H^i(D) = H_1^i D \therefore H_1^2 = 1 \quad 2 \leq i \leq 4 \quad (2.130)$$

$$H^1(D) = D^2 + H_1^1 D + 1 \therefore H_1^1 = 0 \quad (2.131)$$

e segundo o dado da expressão (2.119), tem-se o codificador mostrado na Fig. 2.11(b).

O processo de decodificação mais adequado para evitar perdas de informação no receptor é mediante uma decodificação por decisão suave. A seqüência enviada pelo transmissor, composta por sinal interferido por ruído AWGN, chega ao receptor onde é amostrado. O decodificador de seqüência determina dentre as seqüências codificadas possíveis aquela que pode gerar a seqüência que mais perto está da seqüência recebida, isto é, a seqüência que possua a menor distância euclidiana e toma esta como uma estimativa da seqüência original.

Nos códigos convolucionais, o algoritmo de Viterbi [13] é utilizado no processo de decodificação, a decodificação por decisão suave pode-se efetuar em dois passos:

- a) Dentro de cada subconjunto C_0, C_1, C_2, C_3 associados às transições paralelas mediante os sinais b_3 e b_4 , escolhe-se o sinal mais perto ao sinal recebido. Estes sinais são armazenados juntamente com o quadrado de suas distâncias mínimas em relação ao sinal recebido.
- b) Utiliza-se o algoritmo de Viterbi para achar o caminho do sinal através da treliça. Este caminho possui a soma mínima do quadrado das distâncias euclidianas em relação ao sinal recebido.

A probabilidade do decodificador errar no passo a), isto é, tomar uma decisão errada nas transições paralelas, ou errar no passo b), isto é, decidir por um caminho incorreto por desvio de um estado, é chamado de Erro de Evento.

Para altas relações sinal/ruído, a probabilidade de erro de evento fica

$$P_R(e) \approx N(df_{free}) \cdot Q(df_{free}/2\sigma) \quad (2.132)$$

onde

$$N(df_{free}) \text{ é o grau de multiplicidade de erro de evento de distância livre } df_{free} \quad (2.133)$$

$$Q(\cdot) \text{ é a Função de Probabilidade de Erro Gaussiano, definido no Apêndice D} \quad (2.134)$$

$$\sigma^2 \text{ é a variância do ruído AWGN} \quad (2.135)$$

Na Tabela 2.4 listam-se códigos convolucionais adequados para TCM “Trellis Coded Modulation” dados por Ungerboeck para sistemas QAM. Foram obtidos computacionalmente mediante o programa desenvolvido pelo autor [1]. Nesta Tabela, os códigos são representados por seus polinômios verificação de paridade mediante a notação octal. Especifica-se o parâmetro p e o número de memórias m do código em função do número de estados. Para cada código, mostra-se o quadrado da distância livre normalizado com Δ_o^2 . Especifica-se também o parâmetro $N(d_{free})$. A taxa do código está implicitamente mostrado através do valor de k . Assim, comparações entre os sistemas QAM-8/PSK-4, QAM-16/QAM-8, QAM-32/QAM-16 e QAM-64/QAM-32 são realizadas, mostrando-se os ganhos assintóticos para cada código.

Tabela 2.4 Códigos convolucionais para modulação codificada em sistemas QAM.

Número de Estados 2^m	P	Coeficientes			$\frac{d_{\text{free}}^2}{\Delta_0^2}$	Ganho Assintótico [dB]				N(d_{free})
		H ₃ (D)	H ₂ (D)	H ₁ (D)		k=2 QAM-8 /PSK-4	k=3 QAM-16 /QAM-8	k=4 QAM-32 /QAM-16	k=5 QAM-64 /QAM-32	
4	1	-	2	5	4,0	~2,0	~3,0	~2,8	~30	4
8	2	04	02	11	5,0	3,0	4,0	3,8	4,0	16
16	2	16	04	23	6,0	3,8	4,8	4,6	4,8	56
32	2	10	06	41	6,0	3,8	4,8	4,6	4,8	16
64	2	064	016	101	7,0	4,5	5,4	5,2	5,4	56
128	2	042	014	203	8,0	5,1	6,0	5,8	6,0	344
256	2	305	056	401	8,0	5,1	6,0	5,8	6,0	44
512	2	0510	0346	1001	9,0	5,6	-	-	-	4

CAPÍTULO 3

Sistema de Transmissão Digital {QAM}²

Neste capítulo analisa-se o sistema {QAM}², abordando a concepção do sistema assim como o estudo da potência média do ruído no receptor.

3.1 Sistema {QAM}²

Pretende-se, com este sistema, transmitir dois sinais QAM superpostos e posteriormente realizar a separação no receptor.

Para isto, os sinais a serem transmitidos podem ser escritos, conforme analisado no capítulo 2, da seguinte forma

$$s_1(t) = A_1 \cos [\omega_1 t + \theta_1] \quad (3.1)$$

$$s_2(t) = A_2 \cos [\omega_2 t + \theta_2] \quad (3.2)$$

Na Fig. 3.1(a) mostra-se o transmissor capaz de superpor os sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$, definidos acima.

Para cada sistema, tem-se

$$r_{b_1} [\text{bit} / \text{s}] \quad \text{taxa de bit associada ao sistema QAM}_1 \quad (3.3)$$

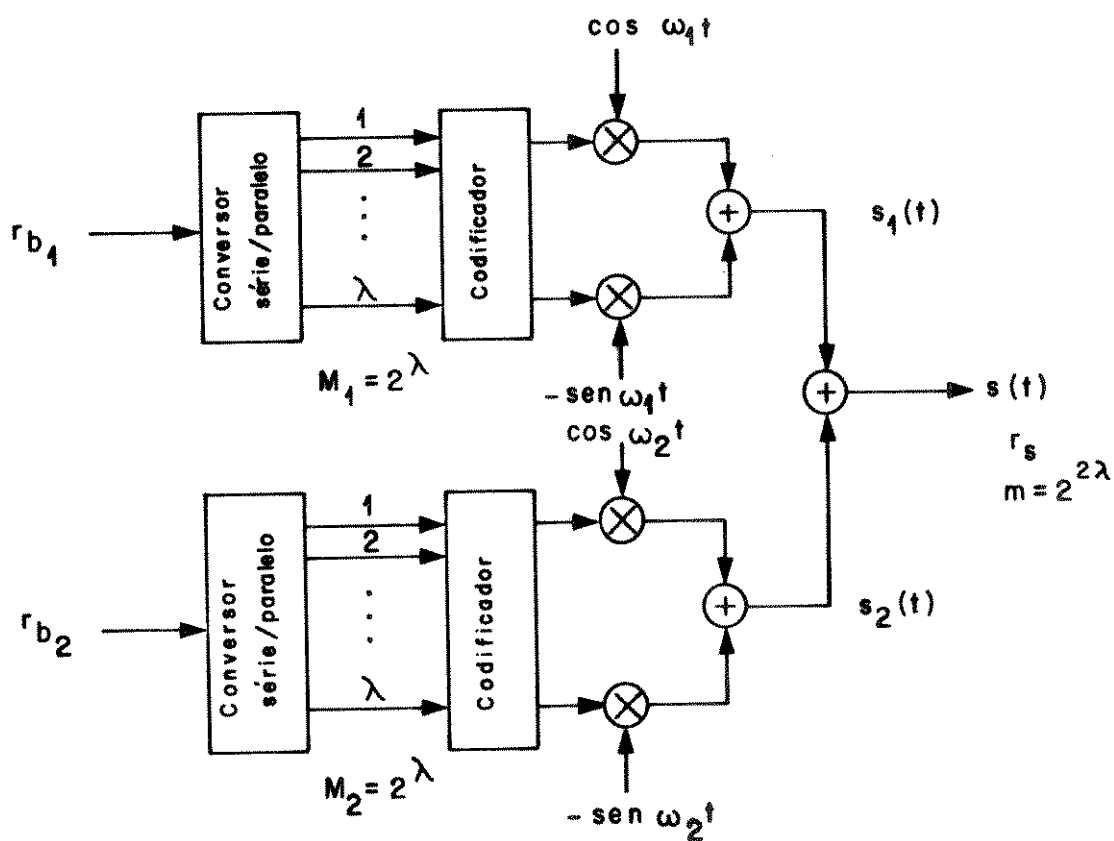
$$r_{b_2} [\text{bit} / \text{s}] \quad \text{taxa de bit associada ao sistema QAM}_2 \quad (3.4)$$

possuindo, os dois sistemas, a mesma taxa de bit de informação ($r_{b_1} = r_{b_2}$)

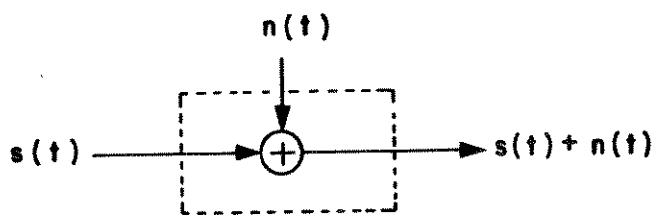
Através de conversores série/paralelo transforma-se esta informação serial em λ saídas paralelas, originando-se deste modo, 2^λ pontos no diagrama de sinais para cada constelação. Isto é

$$M_1 = 2^\lambda \quad (3.5)$$

$$M_2 = 2^\lambda \quad (3.6)$$



(a)



(b)

Fig. 3.1 Sistemas de transmissão digital $\{QAM\}^2$.

(a) Transmissor.

(b) Canal de transmissão.

Mas, como os sinais serão transmitidos simultaneamente, o sistema $\{QAM\}^2$ possui a capacidade de transmitir m pontos no diagrama de sinais, onde

$$m = 2^{2\lambda} \quad (3.7)$$

Os restantes elementos no transmissor dão origem às formas de ondas para os dois sistemas QAM. Estas são somadas e transmitidas pelo canal de transmissão.

Assim, na saída do transmissor tem-se o sinal

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad (3.8)$$

capaz de carregar m símbolos, onde cada dois símbolos são transmitidos com taxa

$$r_s \quad [\text{símbolo/s}] \quad (3.9)$$

O canal de transmissão, mostrado na Fig. 3.1(b), é do tipo linear e de banda limitada como foi discutido no capítulo 2. Considera-se também que o canal é perturbado pelo ruído AWGN de banda estreita

$$n(t) = n_I(t) \cos \omega_0 t - n_Q(t) \sin \omega_0 t \quad (3.10)$$

onde

$$n_I(t) \text{ é o ruído em fase de } n(t) \quad (3.11)$$

$$n_Q(t) \text{ é o ruído em quadratura de } n(t) \quad (3.12)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad [\text{rad/s}] \quad (3.13)$$

Observa-se que o ruído, como formulado por (3.10), está centrado na frequência angular ω_0 , resultado do valor médio entre ω_1 e ω_2 . Observe que este ruído está contido na faixa de ocupação do sinal superposto $s(t)$.

O receptor do sistema $\{QAM\}^2$ é mostrado na Fig. 3.2(a). É composto principalmente de quatro correlatores, onde os sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são separados parcialmente. Em seguida é realizada uma amostragem para cada T_s segundos, onde

$$T_s = \frac{1}{r_s} [s] \quad (3.14)$$

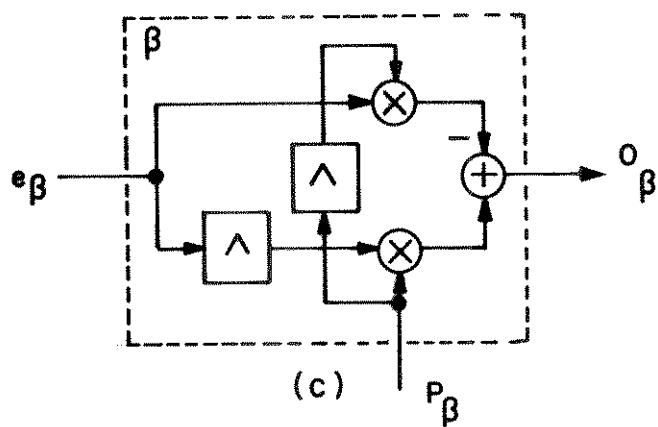
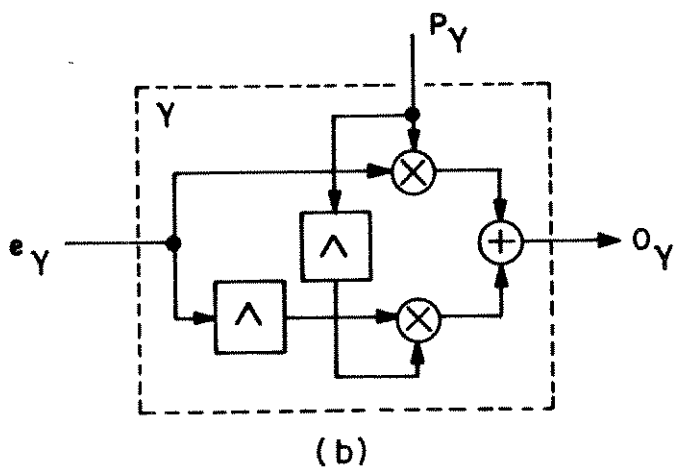
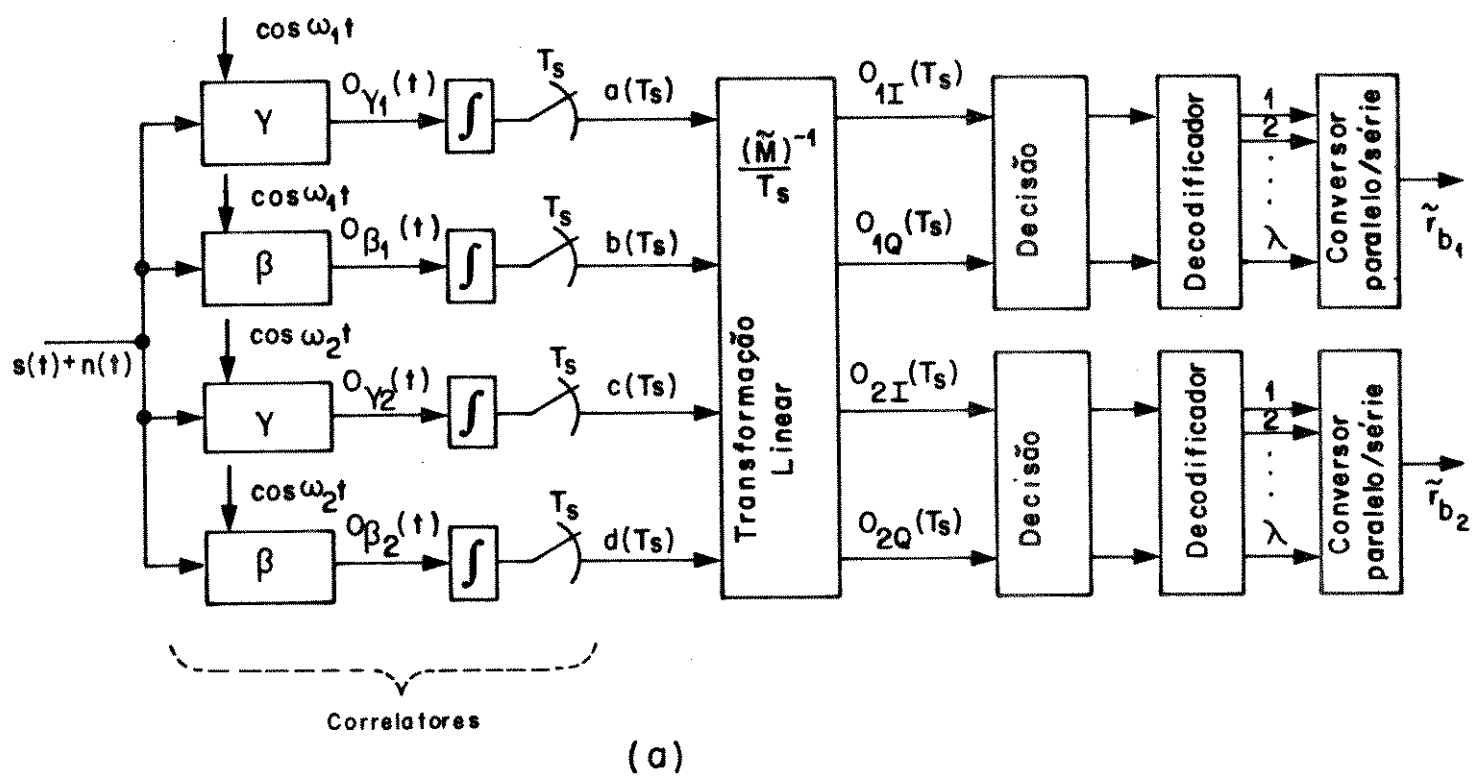


Fig. 3.2 Sistema de recepção digital {QAM}².

- a) Receptor.
- b) Circuito tipo γ .
- c) Circuito tipo β .

Neste tempo de amostragem as grandezas A_1 , A_2 , θ_1 e θ_2 , definidas nas equações (3.1) e (3.2), permanecem constantes.

Depois da amostragem, os sinais $a(T_s)$, $b(T_s)$, $c(T_s)$ e $d(T_s)$, são processados linearmente de modo a separar totalmente as duas constelações QAM, que inicialmente foram superpostas.

Os sinais resultantes da transformação linear passam por estágios de decisão, de modo a estimar-se os parâmetros de informação carregados pelos dois sistemas.

Os decodificadores, juntamente com os conversores paralelo/série, realizam o processo inverso executado no transmissor, obtendo-se assim as taxas originais dos sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$.

Cada correlator é composto de um amostrador, um integrador e um circuito, que pode ser tanto de tipo γ como de tipo β . Estes circuitos são mostrados nas Fig. 3.2(b) e (c). Em cada um destes circuitos, utilizam-se as operações designadas por “^”, que indicam uma transformação de Hilbert [27]. Esta transformação é analisada no Apêndice C e consiste basicamente em aplicar uma defasagem de -90° no sinal de entrada.

Os circuitos tipo γ e β , realizam os processos

$$O_\gamma = \hat{e}_\gamma \hat{p}_\gamma + e_\gamma p_\gamma \quad (3.15)$$

$$O_\beta = \hat{e}_\beta p_\beta - e_\beta \hat{p}_\beta \quad (3.16)$$

respectivamente.

Visando estudar o comportamento dos sinais de informação e ruído no receptor, analisaremos em seguida os circuitos tipo γ e β .

3.1.1 Análise do Circuito tipo γ

A resposta deste tipo de circuito, equacionada em (3.15), pode ser escrita na forma

$$O_\gamma = O_{\gamma a} + O_{\gamma b} \quad (3.17)$$

onde

$$O_{\gamma a} = \hat{e}_\gamma \hat{p}_\gamma \quad (3.18)$$

$$O_{\gamma b} = e_\gamma p_\gamma \quad (3.19)$$

e

$$e_\gamma = s(t) + n(t) \quad (3.20)$$

$$p_\gamma = \cos \omega_i t \quad ; \quad i=1,2 \quad (3.21)$$

Trabalhando sobre a expressão (3.18), substitui-se na mesma as expressões (3.20) e (3.21), obtendo-se

$$O_{\gamma a} = [s(t) + n(t)] \cos \omega_1 t \quad (3.22)$$

e segundo a propriedades da transformada de Hilbert, conjuntamente com as equações (3.8) e (3.10), resulta

$$O_{\gamma a} = A_1 \sin[\omega_1 t + \theta_1] \sin \omega_i t + A_2 \sin[\omega_2 t + \theta_2] \sin \omega_i t + n_I(t) \sin \omega_0 t \sin \omega_i t + n_Q(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_i t \quad (3.23)$$

Manipulando-se a equação (3.23) chega-se a

$$O_{\gamma a} = \frac{1}{2} A_1 \{ \cos[(\omega_1 - \omega_i)t + \theta_1] + \cos[(\omega_1 + \omega_i)t + \theta_1 + 180^\circ] \} + \frac{1}{2} A_2 \{ \cos[(\omega_2 - \omega_i)t + \theta_2] + \cos[(\omega_2 + \omega_i)t + \theta_2 + 180^\circ] \} + n_I(t) \sin \omega_0 t \sin \omega_i t + n_Q(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_i t \quad (3.24)$$

Analisando agora, a expressão (3.19)

$$O_{\gamma b} = [s(t) + n(t)] \cos \omega_i t \quad (3.25)$$

Substituindo nesta última expressão as equações (3.8) e (3.10), obtém-se de forma similar

$$O_{\gamma b} = \frac{1}{2} A_1 \{ \cos[(\omega_1 - \omega_i)t + \theta_1] + \cos[(\omega_1 + \omega_i)t + \theta_1] \} + \frac{1}{2} A_2 \{ \cos[(\omega_2 - \omega_i)t + \theta_2] + \cos[(\omega_2 + \omega_i)t + \theta_2] \} + n_I(t) \cos \omega_0 t \cos \omega_i t - n_Q(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_i t \quad (3.26)$$

Portanto, substituindo as expressões (3.24) e (3.26) na (3.17), e após alguma manipulação obtém-se

$$O_{\gamma} = A_1 \cos[(\omega_1 - \omega_i)t + \theta_1] + A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_i)t + \theta_2] + n_I(t) \cos(\omega_0 - \omega_i)t - n_Q(t) \sin(\omega_0 - \omega_i)t \quad (3.27)$$

Voltando para o circuito do receptor, mostrado na Fig. 3.2(a), obtém-se para $\omega_i = \omega_1$ a seguinte expressão para $O_{\gamma 1}(t)$

$$O_{\gamma 1}(t) = A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos[\Delta\omega t + \theta_2] + n_1(t) \cos\frac{\Delta\omega}{2}t - n_Q(t) \sin\frac{\Delta\omega}{2}t \quad (3.28)$$

onde

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (3.29)$$

Da mesma forma, o sinal e o ruído presentes em $O_{\gamma 2}$ será dado por

$$O_{\gamma 2}(t) = A_2 \cos\theta_2 + A_1 \cos[-\Delta\omega t + \theta_1] + n_1(t) \cos\frac{\Delta\omega}{2}t + n_Q(t) \sin\frac{\Delta\omega}{2}t \quad (3.30)$$

3.1.2 Análise do Circuito tipo β

Para a resposta deste tipo de circuito, segundo a expressão (3.16), tem-se

$$O_{\beta} = O_{\beta a} + O_{\beta b} \quad (3.31)$$

onde

$$O_{\beta a} = \hat{e}_{\beta} p_{\beta} \quad (3.32)$$

$$O_{\beta b} = -e_{\beta} \hat{p}_{\beta} \quad (3.33)$$

Também considera-se que

$$e_{\beta} = s(t) + n(t) \quad (3.34)$$

$$p_{\beta} = \cos \omega_i t \quad ; \quad \text{para } i=1,2 \quad (3.35)$$

De forma similar, como realizado no circuito tipo γ , a resposta do circuito tipo β será

$$O_{\beta}(t) = A_1 \sin[(\omega_1 - \omega_i)t + \theta_1] + A_2 \sin[(\omega_2 - \omega_i)t + \theta_2] + \\ + n_I(t) \sin(\omega_0 - \omega_i)t + n_Q(t) \cos(\omega_0 - \omega_i)t \quad (3.36)$$

Voltando novamente ao circuito do receptor mostrado na Fig. 3.2(a), o sinal e o ruído presentes em $O_{\beta 1}(t)$ são derivados da equação (3.36)

$$O_{\beta 1}(t) = A_1 \sin \theta_1 + A_2 \sin[\Delta \omega t + \theta_2] + n_I(t) \sin \frac{\Delta \omega}{2} t + n_Q(t) \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \quad (3.37)$$

De forma similar, o sinal e o ruído presentes em $O_{\beta 2}(t)$

$$O_{\beta 2}(t) = A_2 \sin \theta_2 + A_1 \sin[-\Delta \omega t + \theta_1] - n_I(t) \sin \frac{\Delta \omega}{2} t + n_Q(t) \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \quad (3.38)$$

3.1.3 Sinal e Ruído no Receptor {QAM}²

Como mostra a Fig. 3.2(a), as saídas $O_{\gamma 1}(t)$, $O_{\beta 1}(t)$, $O_{\gamma 2}(t)$ e $O_{\beta 2}(t)$ achadas nas expressões (3.28), (3.37), (3.30) e (3.38) respectivamente, serão integradas num tempo igual ao período de amostragem T_s . Deste modo tem-se as seguintes expressões

$$a(T_s) = \int_0^{T_s} O_{\gamma 1}(t) \quad (3.39)$$

$$b(T_s) = \int_0^{T_s} O_{\beta 1}(t) \quad (3.40)$$

$$c(T_s) = \int_0^{T_s} O_{\gamma 2}(t) \quad (3.41)$$

$$d(T_s) = \int_0^{T_s} O_{\beta 2}(t) \quad (3.42)$$

Também, utilizam-se as seguintes igualdades

$$X_1 = A_1 \cos \theta_1 \quad (3.43)$$

$$Y_1 = A_1 \sin \theta_1 \quad (3.44)$$

$$X_2 = A_2 \cos \theta_2 \quad (3.45)$$

$$Y_2 = A_2 \sin \theta_2 \quad (3.46)$$

Define-se

$$K_1 = \frac{\sin \Delta\omega T_s}{\Delta\omega T_s} \quad (3.47)$$

$$K_2 = \frac{\cos \Delta\omega T_s - 1}{\Delta\omega T_s} \quad (3.48)$$

Além disso tem-se os seguintes resultados

$$\int_0^{T_s} \sin[\pm \Delta\omega t + \theta] dt = T_s [K_1 \sin \theta \mp K_2 \cos \theta] \quad (3.49)$$

$$\int_0^{T_s} \cos[\pm \Delta\omega t + \theta] dt = T_s [K_1 \cos \theta \pm K_2 \sin \theta] \quad (3.50)$$

Assim, utilizando as equações (3.43-50) nas expressões (3.39-42), tem-se

$$a(T_s) = T_s [X_1 + K_1 X_2 + K_2 Y_2] + Q_a(T_s) \quad (3.51)$$

onde

$$Q_a(T_s) = \int_0^{T_s} \left[n_I(t) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t - n_Q(t) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \right] dt \quad (3.52)$$

$$b(T_s) = T_s [Y_1 + K_1 Y_2 - K_2 X_2] + Q_b(T_s) \quad (3.53)$$

onde

$$Q_b(T_s) = \int_0^{T_s} \left[n_1(t) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t + n_Q(t) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right] dt \quad (3.54)$$

$$c(T_s) = T_s[X_2 + K_1 X_1 - K_2 Y_1] + Q_c(T_s) \quad (3.55)$$

onde

$$Q_c(T_s) = \int_0^{T_s} \left[n_1(t) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t + n_Q(t) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \right] dt \quad (3.56)$$

$$d(T_s) = T_s[Y_2 + K_1 Y_1 + K_2 X_1] + Q_d(T_s) \quad (3.57)$$

onde

$$Q_d(T_s) = \int_0^{T_s} \left[-n_I(t) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t + n_Q(t) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right] dt \quad (3.58)$$

Pode-se escrever matricialmente as equações (3.51-58) da seguinte forma

$$\vec{O} = \begin{bmatrix} a(T_s) \\ b(T_s) \\ c(T_s) \\ d(T_s) \end{bmatrix} \quad \text{vetor de saídas} \quad (3.59)$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} A_1 \cos \theta_1 \\ A_1 \sin \theta_1 \\ A_2 \cos \theta_2 \\ A_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{vetor de sinais} \quad (3.60)$$

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} Q_a(T_s) \\ Q_b(T_s) \\ Q_c(T_s) \\ Q_d(T_s) \end{bmatrix} \quad \text{vetor de ruído} \quad (3.61)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & K_1 & K_2 \\ 0 & 1 & -K_2 & K_1 \\ K_1 & -K_2 & 1 & 0 \\ K_2 & K_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{matriz de acoplamento entre sistemas} \quad (3.62)$$

De forma compacta, as expressões matriciais anteriores, ficam

$$\vec{\mathbf{O}} = \mathbf{T}_s \tilde{\mathbf{M}} \vec{\mathbf{S}} + \vec{\mathbf{Q}} \quad (3.63)$$

No diagrama em blocos do receptor, mostrado na Fig. 3.2(a), observa-se um estágio de transformação linear. Esta transformação é a solução linear do sistema de equações (3.63), para o vetor de sinais $\vec{\mathbf{S}}$. Isto é

$$\vec{\mathbf{S}} + (\mathbf{T}_s)^{-1} (\tilde{\mathbf{M}})^{-1} \vec{\mathbf{Q}} = (\mathbf{T}_s)^{-1} (\tilde{\mathbf{M}})^{-1} \vec{\mathbf{Q}} \quad (3.64)$$

Portanto, pode-se escrever para a equação matricial (3.63)

$$\begin{bmatrix} O_{1I}(T_s) \\ O_{1Q}(T_s) \\ O_{2I}(T_s) \\ O_{2Q}(T_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cos \theta_1 \\ A_1 \sin \theta_1 \\ A_2 \cos \theta_2 \\ A_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{1I}(T_s) \\ Q_{1Q}(T_s) \\ Q_{2I}(T_s) \\ Q_{2Q}(T_s) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\begin{bmatrix} O_{1I}(T_s) \\ O_{1Q}(T_s) \\ O_{2I}(T_s) \\ O_{2Q}(T_s) \end{bmatrix} = (\mathbf{T}_s)^{-1} (\tilde{\mathbf{M}})^{-1} \vec{\mathbf{O}} \quad (3.66)$$

onde

$O_{1I}(T_s)$, $O_{1Q}(T_s)$, $O_{2I}(T_s)$, $O_{2Q}(T_s)$ são as saídas indicadas na figura 3.2(a);

$$\left(\tilde{\mathbf{M}}\right)^{-1} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -K_1 & -K_2 \\ 0 & 1 & K_2 & -K_1 \\ -K_1 & K_2 & 1 & 0 \\ -K_2 & -K_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$K = 1 - (K_1^2 + K_2^2) \quad (3.68)$$

e

$$\begin{bmatrix} Q_{11}(T_s) \\ Q_{1Q}(T_s) \\ Q_{21}(T_s) \\ Q_{2Q}(T_s) \end{bmatrix} = \frac{1}{KT_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -K_1 & -K_2 \\ 0 & 1 & K_2 & -K_1 \\ -K_1 & K_2 & 1 & 0 \\ -K_2 & -K_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a(T_s) \\ Q_b(T_s) \\ Q_c(T_s) \\ Q_d(T_s) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Desta forma, como mostra a equação (3.65), consegue-se separar os dois sistemas QAM que foram superpostos na transmissão.

O grau de superposição dos sistemas é medido pelo fator $\Delta\omega$ definido na expressão (3.29).

Se cada sistema é transmitido com uma largura de banda $V[\text{Hz}]$, de modo a não termos interferência intersimbólica, como foi comentado no Capítulo 2, a largura de banda mínima permitida será

$$V = r_s [\text{Hz}] \quad (3.70)$$

Então para o sistema $\{\text{QAM}\}^2$ que resulta da superposição de dois sinais simples QAM, a largura de banda será

$$W = \Delta f + r_s [\text{Hz}] \quad (3.71)$$

que pode-se escrever em função do parâmetro $\Delta f/r_s$ que será muito utilizado nos itens subsequentes.

$$W = r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s}\right) \quad (3.72)$$

onde

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (3.73)$$

Existem dois valores extremos para o parâmetro Δf . Quando os dois sistemas são transmitidos de tal modo que suas bandas de ocupação fiquem contíguas, sem superposição, isto é, $\Delta f = r_s$, os seguintes parâmetros resultam

$$K_1 = K_2 = 0 \quad (3.74)$$

$$W = 2 r_s \quad (3.75)$$

e a matriz de acoplamento entre os sistemas, definida em (3.62), é uma matriz unitária; isto significa que os dois sistemas transmitidos foram desacoplados.

O segundo ponto a ressaltar ocorre para $\Delta f = 0$. Isto significa que a superposição é total, um espectro está em cima do outro; na realidade está se transmitindo dois sinais QAM com mesma portadora e independentes entre si. Nestas condições temos os seguintes parâmetros

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 \\ K_2 &= 0 \\ W &= r_s \\ K &= 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Como $K = 0$, o sistema matricial (3.69) fica indeterminado. Em outras palavras, o sistema linear de equações dada em (3.64) não possui solução; não existem suficientes equações linearmente independentes para que a matriz M possua inversa.

Na Fig. 3.3 mostra-se uma forma mais compacta de representar os correladores do circuito do receptor. Observa-se que, neste caso, utiliza-se somente três processos “^” de transformação em quadratura.

Observação:

A solução linear apresentada em (3.64) é válida para o caso em que as duas portadoras ω_1 e ω_2 partem com fases nulas e depois de um período de tempo T_s realiza-se a amostragem. Neste ponto aquelas portadoras já não possuem as mesmas fases por serem de frequências diferentes, mas a informação desta defasagem está embutida nos parâmetros K_1 e K_2 .

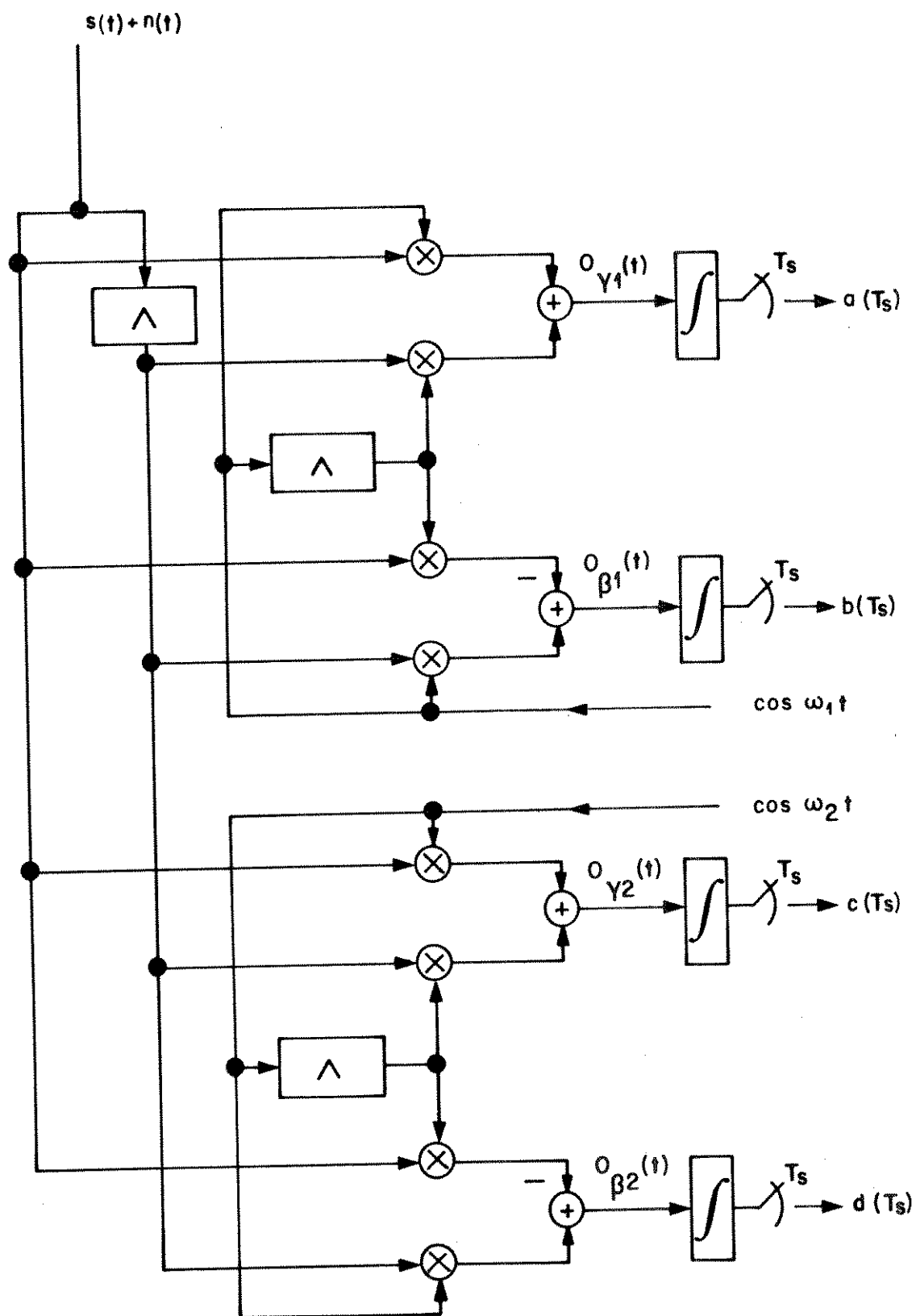


Fig. 3.3 Outra forma de representar os correladores do circuito do receptor.

Para sucessivas amostragens de períodos T_s a solução linear dada em (3.64), não é válida e será analisada em detalhe no Capítulo 4.

3.2 Potência Média do Ruído no Receptor {QAM}²

No receptor {QAM}² mostrado na Fig. 3.2(a), os sinais $O_{1I}(T_s)$, $O_{1Q}(T_s)$, $O_{2I}(T_s)$, e $O_{2Q}(T_s)$ serão submetidos ao processo de decisão a fim de estimar os parâmetros de informação. É necessário para tanto calcular a potência média do ruído neste ponto. Estas potências serão utilizadas no capítulo seguinte.

As expressões dos ruídos que são de interesse para a análise foram mostradas na equação matricial (3.69). Transcrevendo esta de uma outra forma, tem-se

$$Q_{1I}(T_s) = \frac{1}{KT_s} \{Q_a(T_s) - K_1 Q_c(T_s) - K_2 Q_d(T_s)\} \quad (3.77)$$

$$Q_{1Q}(T_s) = \frac{1}{KT_s} \{Q_b(T_s) - K_1 Q_d(T_s) + K_2 Q_c(T_s)\} \quad (3.78)$$

$$Q_{2I}(T_s) = \frac{1}{KT_s} \{Q_c(T_s) - K_1 Q_a(T_s) + K_2 Q_b(T_s)\} \quad (3.79)$$

$$Q_{2Q}(T_s) = \frac{1}{KT_s} \{Q_d(T_s) - K_1 Q_b(T_s) - K_2 Q_a(T_s)\} \quad (3.80)$$

Calculando o valor quadrático médio de cada termo

$$\begin{aligned} \langle Q_{1I}^2(T_s) \rangle = & \frac{1}{K^2 T_s^2} \left\{ \langle Q_a^2(T_s) \rangle + K_1^2 \langle Q_c^2(T_s) \rangle + K_2^2 \langle Q_d^2(T_s) \rangle \right\} + \\ & + 2 \left[-K_1 \langle Q_a(T_s) Q_c(T_s) \rangle - K_2 \langle Q_a(T_s) Q_d(T_s) \rangle + \right. \\ & \left. + K_1 K_2 \langle Q_c(T_s) Q_d(T_s) \rangle \right] \} \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{1Q}^2(T_s) \rangle = & \frac{1}{K^2 T_s^2} \left\{ \langle Q_b^2(T_s) \rangle + K_1^2 \langle Q_d^2(T_s) \rangle + K_2^2 \langle Q_c^2(T_s) \rangle \right\} + \\ & + 2 \left[-K_1 \langle Q_b(T_s) Q_d(T_s) \rangle + K_2 \langle Q_b(T_s) Q_c(T_s) \rangle - \right. \\ & \left. - K_1 K_2 \langle Q_d(T_s) Q_c(T_s) \rangle \right] \} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{2I}^2(T_s) \rangle = & \frac{1}{K^2 T_s^2} \left\{ \langle Q_c^2(T_s) \rangle + K_1^2 \langle Q_a^2(T_s) \rangle + K_2^2 \langle Q_b^2(T_s) \rangle \right\} + \\ & + 2 \left[-K_1 \langle Q_c(T_s) Q_a(T_s) \rangle + K_2 \langle Q_c(T_s) Q_b(T_s) \rangle - \right. \\ & \left. - K_1 K_2 \langle Q_a(T_s) Q_b(T_s) \rangle \right] \} \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{2Q}^2(T_s) \rangle = & \frac{1}{K^2 T_s^2} \left\{ \langle Q_d^2(T_s) \rangle + K_1^2 \langle Q_b^2(T_s) \rangle + K_2^2 \langle Q_a^2(T_s) \rangle \right\} + \\ & + 2 \left[-K_1 \langle Q_d(T_s) Q_b(T_s) \rangle - K_2 \langle Q_d(T_s) Q_a(T_s) \rangle + \right. \\ & \left. + K_1 K_2 \langle Q_b(T_s) Q_a(T_s) \rangle \right] \} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Em seguida acham-se as potências médias dos ruídos $Q_a(T_s)$, $Q_b(T_s)$, $Q_c(T_s)$ e $Q_d(T_s)$, assim como os termos cruzados dos mesmos.

Como foi comentado no Capítulo 2, se o ruído fosse levado para a forma

$$Q_i(T_s) = \int_0^{T_s} n_{\Delta}(t) dt \quad (3.85)$$

onde $n_{\Delta}(t)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo, isto é, sua média estatística

$$\langle n_{\Delta}(t) \rangle = \text{constante} \quad (3.86)$$

e a sua autocorrelação dependesse somente de

$$\tau = t_2 - t_1 \quad (3.87)$$

ou seja

$$\langle n_{\Delta}(t_2) n_{\Delta}(t_1) \rangle = \mathfrak{R}_{n_{\Delta}n_{\Delta}}(\tau) \quad (3.88)$$

então a potência média do ruído dada pela expressão (3.85), seria [12]

$$\langle Q_i^2(T_s) \rangle = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \mathfrak{R}_{n_{\Delta}n_{\Delta}}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (3.89)$$

Para a potência média do ruído da expressão (3.52) tem-se

$$n_{\Delta}(t) = n_I(t) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t - n_Q(t) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \quad (3.90)$$

Segundo o item 2.3 do Capítulo 2, resulta para o processo estocástico $n_{\Delta}(t)$

$$\langle n_{\Delta}(t) \rangle = \langle n_I(t) \rangle \cos \frac{\Delta\omega}{2} t - \langle n_Q(t) \rangle \sin \frac{\Delta\omega}{2} t = 0 \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{n_{\Delta}n_{\Delta}}(\tau) = & \left\langle \left[n_I(t_2) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t_2 - n_Q(t_2) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t_2 \right] \right. \\ & \left. \left[n_I(t_1) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t_1 - n_Q(t_1) \sin \frac{\Delta\omega}{2} t_1 \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (3.92)$$

e, depois de algumas operações, a última expressão resulta

$$\mathfrak{R}_{n_{\Delta}n_{\Delta}}(\tau) = \mathfrak{R}_{n_I n_I}(\tau) \cos \frac{\Delta\omega}{2} \tau \quad (3.93)$$

Segundo as expressões (3.93), (2.33) e considerando $W[\text{Hz}]$ a largura de banda do ruído, tem-se

$$\langle Q_a^2(T_s) \rangle = \frac{\eta}{\pi} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin \pi W(t_2 - t_1) \cos \frac{\Delta\omega}{2}(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \quad (3.94)$$

No Apêndice B, desenvolve-se a solução para este tipo de integral, resultando

$$\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin a(t_2 - t_1) \cos b(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 = a T_s^2 I(a, b) \quad (3.95)$$

onde $I(a, b)$ é a série de potência utilizada para avaliar a integral. O programa computacional desta série, acha-se no Apêndice D.

Relacionando as equações (3.94) e (3.95), tem-se

$$a = \pi W = \pi r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right) \quad (3.96)$$

$$b = \frac{\Delta \omega}{2} = \pi r_s \left(\frac{\Delta f}{r_s} \right) \quad (3.97)$$

Com base nestes resultados, a expressão da potência do ruído fica

$$\langle Q_a^2(T_s) \rangle = \eta W T_s^2 I \left\{ \pi r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right), \pi r_s \left(\frac{\Delta f}{r_s} \right) \right\} \quad (3.98)$$

Por outro lado, pode-se também provar que

$$\langle Q_a^2(T_s) \rangle = \langle Q_b^2(T_s) \rangle = \langle Q_c^2(T_s) \rangle = \langle Q_d^2(T_s) \rangle \quad (3.99)$$

Observando as expressões (3.52), (3.54), (3.56) e (3.58), pode-se escrever

$$\langle Q_a(T_s) Q_b(T_s) \rangle = \langle Q_c(T_s) Q_d(T_s) \rangle = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \mathfrak{R}_{n_{\Delta} n_{\Delta}}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (3.100)$$

onde

$$\mathfrak{R}_{n_{\Delta} n_{\Delta}}(\tau) = \pm \mathfrak{R}_{n_I n_I}(\tau) \left[\cos \frac{\Delta \omega}{2} t_2 \sin \frac{\Delta \omega}{2} t_1 - \sin \frac{\Delta \omega}{2} t_2 \cos \frac{\Delta \omega}{2} t_1 \right] \quad (3.101)$$

já que $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ são estatisticamente independentes, como comentado na seção 2.3, são nulos os termos cruzados dos mesmos. Trabalhando nesta última expressão, obtém-se

$$\Re_{n_{\Delta} n_{\Delta}}(\tau) = \mp \Re_{n_I n_I}(\tau) \sin \frac{\Delta\omega}{2} \tau \quad (3.102)$$

Substituindo na equação (3.100), as expressões (3.102), (2.33) e considerando $W[\text{Hz}]$ a largura de faixa do ruído, obtêm-se

$$\begin{aligned} \langle Q_a(T_s) Q_b(T_s) \rangle &= -\langle Q_c(T_s) Q_d(T_s) \rangle = \\ &= -\frac{\eta}{\pi} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin \pi W(t_2 - t_1) \sin \frac{\Delta\omega}{2}(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

Mas, segundo o Apêndice B, o resultado desta integral é nulo, obtendo-se deste modo

$$\langle Q_a(T_s) Q_b(T_s) \rangle = \langle Q_c(T_s) Q_d(T_s) \rangle = 0 \quad (3.104)$$

Para os termos cruzados $Q_a(T_s) Q_c(T_s)$ e $Q_b(T_s) Q_d(T_s)$ tem-se

$$\langle Q_a(T_s) Q_c(T_s) \rangle = \langle Q_b(T_s) Q_d(T_s) \rangle = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \Re_{n_{\Delta} n_{\Delta}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (3.105)$$

onde

$$\Re_{n_{\Delta} n_{\Delta}}(t_1, t_2) = \Re_{n_I n_I}(t_2 - t_1) \left[\cos \frac{\Delta\omega}{2} t_2 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t_1 - \sin \frac{\Delta\omega}{2} t_2 \sin \frac{\Delta\omega}{2} t_1 \right] \quad (3.106)$$

Ou seja

$$\Re_{n_{\Delta} n_{\Delta}}(t_1, t_2) = \Re_{n_I n_I}(t_2 - t_1) \cos \frac{\Delta\omega}{2}(t_2 + t_1) \quad (3.107)$$

Substituindo agora na expressão (3.105) as equações (3.107), (2.33) com o ruído na faixa $W[\text{Hz}]$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle Q_a(T_s) Q_c(T_s) \rangle &= \langle Q_b(T_s) Q_d(T_s) \rangle = \\ &= \frac{\eta}{\pi} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin \pi W(t_2 - t_1) \cos \frac{\Delta \omega}{2}(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.108)$$

Observa-se que a integral da equação (3.108) agora não somente depende da diferença dos tempos t_1 e t_2 como também da soma dos mesmos. Isto implica que a função $n_\Delta(t)$ que originou a função autocorrelação na expressão (3.105), não mostrada aqui, já não é um processo estacionário no sentido amplo. Isto nos leva a outro tipo de solução para as integrais, como mostrado no Apêndice A e transcrito a seguir

$$\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin a(t_2 - t_1) \cos b(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 = a K_1 T_s^2 r(a, b) I(a, b) \quad (3.109)$$

Neste caso, as expressões (3.96) e (3.97) são também válidas. Portanto, substituindo a expressão (3.109) na (3.108), a equação (3.105) fica

$$\begin{aligned} \langle Q_a(T_s) Q_c(T_s) \rangle &= \langle Q_b(T_s) Q_d(T_s) \rangle = \\ &= K_1 \eta W T_s^2 I \left\{ \pi r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right), \pi r_s \frac{\Delta f}{r_s} \right\} \cdot r \left\{ \pi r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right), \pi r_s \frac{\Delta f}{r_s} \right\} \end{aligned} \quad (3.110)$$

A última combinação possível seria

$$\begin{aligned} \langle Q_a(T_s) Q_d(T_s) \rangle &= \langle Q_c(T_s) Q_b(T_s) \rangle = \\ &= \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \Re n_\Delta n_\Delta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

onde

$$\Re_{n_{\Delta} n_{\Delta}}(t_1, t_2) = \mp \Re_{n_I n_I}(t_2 - t_1) \left[\cos \frac{\Delta \omega}{2} t_2 \sin \frac{\Delta \omega}{2} t_1 + \sin \frac{\Delta \omega}{2} t_2 \cos \frac{\Delta \omega}{2} t_1 \right] \quad (3.112)$$

ou seja

$$\Re_{n_{\Delta} n_{\Delta}}(t_1, t_2) = \mp \Re_{n_I n_I}(t_2 - t_1) \left[\sin \frac{\Delta \omega}{2} (t_2 + t_1) \right] \quad (3.113)$$

Substituindo na equação (3.111), as expressões (3.113), (2.33) e considerando o ruído na faixa $W[\text{Hz}]$, obtem-se

$$\begin{aligned} - \langle Q_a(T_s) Q_d(T_s) \rangle &= \langle Q_c(T_s) Q_b(T_s) \rangle \\ &= \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin \pi W(t_2 - t_1) \sin \frac{\Delta \omega}{2} (t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Esta integral cai no caso discutido anteriormente e a solução da mesma, mostrada no apêndice B, é

$$\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\sin a(t_2 - t_1) \sin b(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 = -a T_s^2 K_2 I(a, b) r(a, b) \quad (3.115)$$

Também neste caso, as expressões (3.96) e (3.97) são válidas. Assim, substituindo a equação (3.115) na expressão (3.114), obtem-se para a expressão (3.111)

$$\begin{aligned} \langle Q_a(T_s) Q_d(T_s) \rangle &= - \langle Q_c(T_s) Q_b(T_s) \rangle = \\ &= K_2 \eta W T_s^2 I \left\{ \pi r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right), \pi r_s \left(\frac{\Delta f}{r_s} \right) \right\} r \left\{ \pi r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right), \pi r_s \left(\frac{\Delta f}{r_s} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Finalmente, substituindo os resultados obtidos nas expressões (3.99), (3.104), (3.110) e (3.116) nas equações da potência média de ruído (3.81-84), tem-se a potência de ruído N_o em cada uma das saídas

$$N_o = \langle Q_{II}^2(T_s) \rangle = \langle Q_{IQ}^2(T_s) \rangle = \langle Q_{2I}^2(T_s) \rangle = \langle Q_{2Q}^2(T_s) \rangle =$$

$$\left(\frac{\eta W}{3 \cdot \frac{1}{K}} \right) \left\{ 1 + [1 - 2r(a, b)] (K_1^2 + K_2^2) \right\} I(a, b) \quad (3.117)$$

Substituindo a largura de banda do sistema {QAM} dada na equação (3.72), na expressão (3.117), tem-se

$$N_o = \eta r_s \frac{\left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right) \left\{ 1 + [1 - 2r(a, b)] (K_1^2 + K_2^2) \right\} I(a, b)}{\left[1 - (K_1^2 + K_2^2) \right]^2} = N \delta(a, b) \quad (3.118)$$

$$\text{com } N = \eta r_s (1 + \Delta f / r_s). \quad (3.119)$$

Como pode se observar, as potências médias de ruído nestes pontos do receptor, são iguais à potência do ruído N na faixa de passagem $(r_s + \Delta f)$ (de modo a não termos interferência intersimbólica), afetada de um termo que depende do afastamento das duas constelações QAM. Este termo tem a seguinte forma

$$\delta(a, b) = \frac{\left\{ 1 + [1 - 2r(a, b)] (K_1^2 + K_2^2) \right\} I(a, b)}{\left\{ 1 - (K_1^2 + K_2^2) \right\}^2} \quad (3.119)$$

Na Tabela 3.1 calculam-se os valores correspondentes de $\delta(a, b)$ para diversos valores do parâmetro $\Delta f / r_s$. O gráfico correspondente é mostrado na Fig. 3.4. A região onde $\delta(a, b) \lesssim 2$ é a região de maior interesse.

Por outro lado, a matriz de correlação $\tilde{\mathbf{R}}$ pode ser calculada, a partir dos resultados (3.99), (3.104), (3.110), (3.117) e (3.118):

$$\tilde{\mathbf{R}} = N_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & K_1 F & K_2 F \\ 0 & 1 & -K_2 F & K_1 F \\ K_1 F & -K_2 F & 1 & 0 \\ K_2 F & K_1 F & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.121)$$

Tabela 3.1 Funções $\delta(a,b)$, K_1F e K_2F para diversos valores do parâmetro $\Delta f/r_s$.

$\Delta f/r_s$	$\delta(a,b)$	K_1F	K_2F
1	0,4262	0	0
11/13	0,4425	-0,0103	-0,0054
7/9	0,4564	0,0449	0,0377
5/7	0,4758	0,0813	0,1019
3/5	0,5349	0,0841	0,2589
1/2	0,6301	0	0,4071
5/11	0,6963	-0,0670	0,4661
7/17	0,7795	-0,1456	0,5118
1/3	1,0190	-0,3230	0,5594
5/19	1,4258	-0,5060	0,5497
3/13	1,7417	-0,5932	0,5255
1/5	2,1868	-0,6748	0,4902
1/7	3,8531	-0,8151	0,3925
1/11	8,6745	-0,9183	0,2696
1/15	15,4806	-0,9544	0,2029
1/23	35,0488	-0,9800	0,1347
0	∞	-1	0

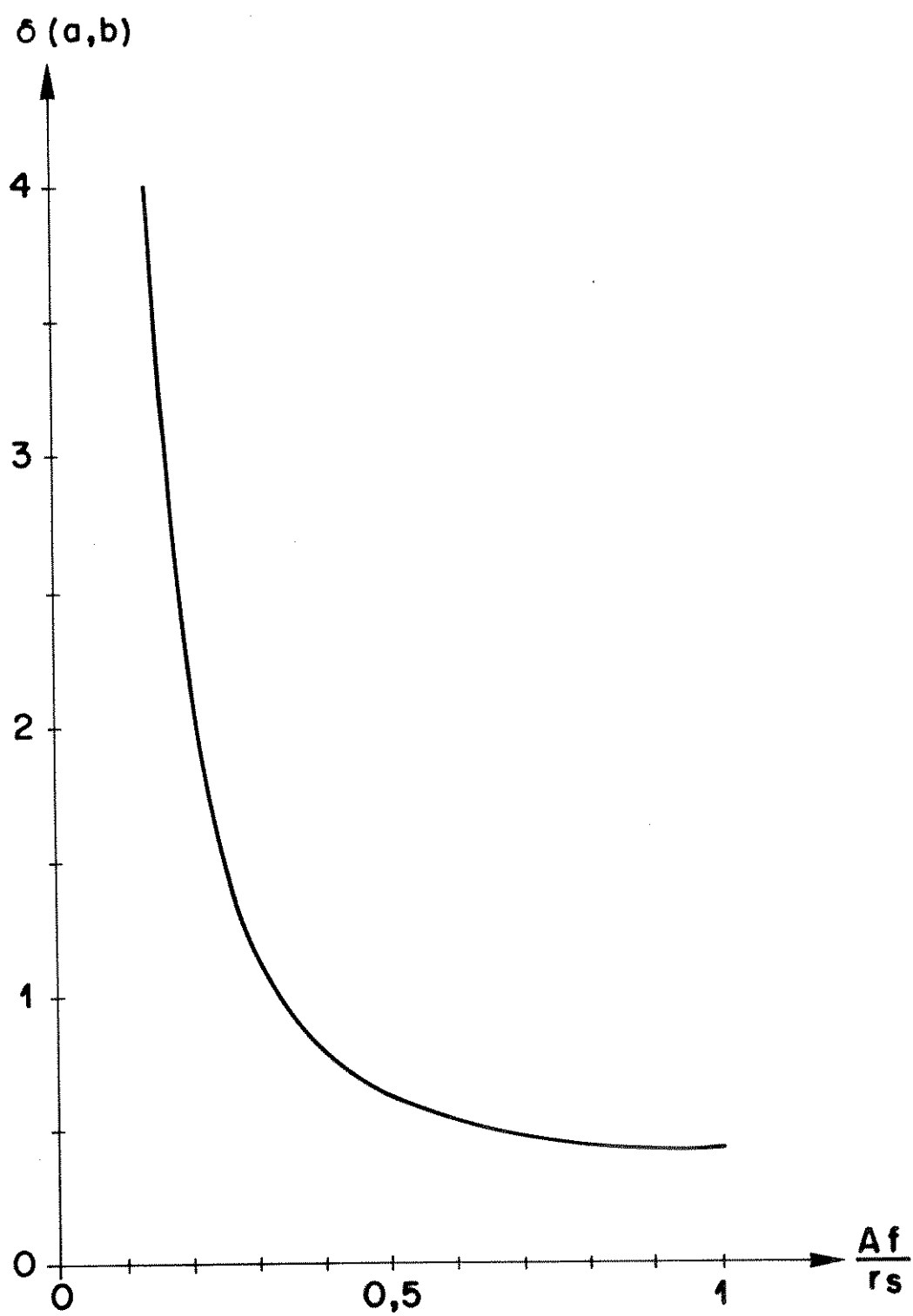


Fig . 3.4 Função $\delta(a,b)$ em relação com o parâmetro $\Delta f/r_s$.

onde

$$F = \frac{[1 + K_1^2 + K_2^2]r(a, b) - 2}{(1 + K_1^2 + K_2^2) - 2r(a, b)[K_1^2 + K_2^2]} \quad (3.122)$$

Logo, podemos tirar as seguintes conclusões:

1. Os ruídos presentes nas saídas 1I e 1Q são não correlacionados;
2. Os ruídos presentes nas saídas 2I e 2Q são não correlacionados;
3. Certas correlações cruzadas são iguais, isto é:

$$\langle Q_{1I}(T_s)Q_{2I}(T_s) \rangle = \langle Q_{1Q}(T_s)Q_{2Q}(T_s) \rangle = N_o K_1 F \quad (3.123)$$

$$\langle Q_{1I}(T_s)Q_{2Q}(T_s) \rangle = -\langle Q_{1Q}(T_s)Q_{2I}(T_s) \rangle = N_o K_2 F \quad (3.124)$$

Os coeficientes de correlação cruzada $K_1 F$ e $K_2 F$ são também mostrados na Tabela 3.1.

Estes resultados serão utilizados para se deduzir o desempenho do sistema $\{QAM\}^2$ no próximo capítulo.

Como pode-se observar na Tab. 3.1 e na Fig. 3.4, a função $\delta(a, b)$ afeta o ruído na banda de passagem do sinal $\eta(r_s + \Delta f)$ de forma variável. Para valores de $\Delta f/r_s$ acima de $1/3$ a função $\delta(a, b)$ atenua o ruído ($\Delta f/r_s = 1/3$, $\delta(a, b) \cong 1$); para valores de $0 < \Delta f/r_s < 1/3$ a função $\delta(a, b)$ amplifica o ruído de forma crescente ($\Delta f/r_s \rightarrow 0$).

Pelo observado acima, pode-se esperar um comportamento não uniforme em relação ao desempenho e à eficiência do Sistema $\{QAM\}^2$. Melhores resultados são esperados para valores do parâmetro $\Delta f/r_s$ não próximos de zero.

CAPÍTULO 4

Generalização do Sistema de Transmissão Digital {QAM}²

Neste capítulo apresentam-se algumas aplicações do sistema de transmissão {QAM}², assim como suas eficiências e desempenhos. Aborda-se também o estudo de seu funcionamento assíncrono.

4.1 Sistema Geral {QAM-m}²

Tomemos inicialmente as equações (3.65) e (3.118):

$$\begin{bmatrix} O_{1I}(T_s) \\ O_{1Q}(T_s) \\ O_{2I}(T_s) \\ O_{2Q}(T_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cos\theta_1 \\ A_1 \sin\theta_1 \\ A_2 \cos\theta_2 \\ A_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{1I}(T_s) \\ Q_{1Q}(T_s) \\ Q_{2I}(T_s) \\ Q_{2Q}(T_s) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$N_o = \langle Q_{1I}^2(T_s) \rangle = \langle Q_{1Q}^2(T_s) \rangle = \langle Q_{2I}^2(T_s) \rangle = \langle Q_{2Q}^2(T_s) \rangle = N\delta(a,b) \quad (4.2)$$

As saídas $O_{1I}(T_s)$, $O_{1Q}(T_s)$, $O_{2I}(T_s)$, e $O_{2Q}(T_s)$, serão submetidas às regiões de decisão de modo a estimar-se os parâmetros de informação, que na transmissão foram

$$A_1 \cos\theta_1 \quad (4.3)$$

$$A_1 \sin\theta_1 \quad (4.4)$$

$$A_2 \cos\theta_2 \quad (4.5)$$

$$A_2 \sin\theta_2 \quad (4.6)$$

e, em seus percursos são perturbados por ruído, de potências médias

$\langle Q_{1I}^2(T_s) \rangle$, $\langle Q_{1Q}^2(T_s) \rangle$, $\langle Q_{2I}^2(T_s) \rangle$ e $\langle Q_{2Q}^2(T_s) \rangle$ respectivamente, todas iguais a N_o .

O sistema de transmissão $\{QAM\}^2$ resulta da superposição de dois sistemas QAM-m. Portanto, as regiões de decisão para sinais em quadratura e em fase são as mesmas usadas em decisão QAM. Deste modo, a probabilidade de erro unidimensional para cada uma das quatro regiões de decisão do sistema $\{QAM\}^2$ será

$$p_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{d^2}{\langle Q^2(T_s) \rangle}} \right) \quad (4.7)$$

onde

$$m \quad \text{é o número de pontos de cada constelação do sistema } (QAM-m)^2 \quad (4.8)$$

$$d \quad \text{é a separação do reticulado QAM} \quad (4.9)$$

$$N_0 = \langle Q^2(T_s) \rangle \text{ é a potência média do ruído atuando na região de decisão dada na equação (4.2)} \quad (4.10)$$

Para as duas saídas (1I, 1Q) temos que

$$\langle Q_{1I}(T_s) Q_{1Q}(T_s) \rangle = 0 \quad (4.11)$$

isto é, os ruídos são não correlacionados (ver 3.121). Portanto, podemos escrever que a probabilidade de detecção correta na saída número 1 (ver Figura 3.2(a)) será

$$P_{c1} = (1 - p_e)^2 \quad (4.12)$$

De modo semelhante, para as duas saídas (2I, 2Q) temos que

$$\langle Q_{2I}(T_s) Q_{2Q}(T_s) \rangle = 0 \quad (4.13)$$

e, portanto, a probabilidade de detecção correta na saída número 2 (ver Figura 3.2(a)) será

$$P_{c2} = (1 - p_e)^2 \quad (4.14)$$

Levando em conta agora as correlações cruzadas da matriz de correlação (3.121) e com os

valores de K_1F e K_2F mostrados na Tabela 3.1, vamos aceitar a seguinte aproximação para o desempenho do sistema $\{QAM\}^2$:

$$P_c \cong P_{c1} P_{c2} = (1 - p_e)^4 \approx 1 - 4p_e \quad \text{para } p_e \ll 1 \quad (4.15)$$

A probabilidade de erro para cada símbolo transportado pelo sistema $\{QAM\}^2$ será então dada aproximadamente por

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - P_c \cong 4p_e \\ &\cong 8 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{d^2}{\langle Q^2(T_s) \rangle}} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Por outro lado, lembrando que a potência média do sinal QAM-m no diagrama de sinais é dada por

$$P_s = \frac{(m-1)}{3} d^2 \quad (4.17)$$

e que a potência média total do sinal na entrada do sistema $\{QAM-m\}^2$ será

$$S = 2P_s \quad (4.18)$$

por tratar-se de duas constelações QAM-m da mesma potência P_s transmitidas de forma superposta.

Substituindo as expressões (4.17), (4.18) e (4.2) na equação (4.16), resulta

$$P_M \cong 8 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{2(m-1)\delta(a,b)} \frac{S}{N}} \right) \quad (4.19)$$

Nas seções seguintes calcula-se a eficiência de transmissão do sistema $\{QAM-m\}^2$, isto é, a representação deste no plano eficiência espectral versus relação sinal/ruído média por símbolo, para uma probabilidade de erro de símbolo P_M determinada. Esta representação em geral é mostrada em gráfico conjuntamente com a curva de Shannon comentada no Capítulo 2.

Também calcula-se o desempenho do sistema $\{QAM-m\}^2$. Para isto calcula-se a probabilidade de erro de símbolo P_M versus a relação sinal/ruído média por símbolo, para diversos valores do parâmetro $\Delta f/r_s$.

Os resultados obtidos num sistema $\{QAM-m\}^2$ serão confrontados com os de um sistema comum QAM-M, de modo a ressaltar as particularidades de cada um. Para facilitar isto, pode-se agrupar as seguintes características de cada sistema para a mesma taxa de bits r_b transmitida.

Sistema QAM-M:

$$\text{- Taxa de Bits} \quad r_b \quad [\text{bit/s}] \quad (4.20)$$

$$\text{- Taxa de Símbolos} \quad r_{sM} = \frac{r_b}{\log_2 M} \quad [\text{símbolo/s}] \quad (4.21)$$

$$\text{- Faixa de Ocupação} \quad V = r_{sM} \quad [\text{Hz}] \quad (4.22)$$

$$\text{- Eficiência Espectral} \quad \mathfrak{R}_M = \frac{r_b}{V} = \log_2 M \quad [\text{bit/s/Hz}] \quad (4.23)$$

Sistema $\{QAM-m\}^2$:

$$\text{- Taxa de Bits} \quad r_b [\text{bit/s}] \quad (4.24)$$

- Taxa de Bit Transmitida em cada constelação QAM-m

$$\frac{r_b}{2} \quad [\text{bit/s}] \quad (4.25)$$

- Taxa de Símbolo em cada Constelação QAM-m

$$r_s = \frac{r_b / 2}{\log_2 m} [\text{símbolo/s}] \quad (4.26)$$

- Banda Necessária Total

$$W = r_s \left[1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right] [\text{Hz}] \quad (4.27)$$

- Eficiência Espectral

$$\mathfrak{R}_m = \frac{r_b}{W} = \frac{2 \log_2 m}{1 + \frac{\Delta f}{r_s}} \text{ [bit / s / Hz]} \quad (4.28)$$

As comparações que serão feitas nos itens subsequentes, serão para o caso em que os dois sistemas QAM-M e o $\{\text{QAM-m}\}^2$, apresentam mesma eficiência espectral e mesma faixa de ocupação. Deste modo resultam as seguintes relações entre os dois sistemas

- Taxa de símbolo

$$r_s = r_{sm} \frac{\log_2 M}{2 \log_2 m} \quad (4.29)$$

- Banda de Ocupação

$$V = W = 2r_s \frac{\log_2 m}{\log_2 M} \quad (4.30)$$

- Banda Necessária de cada Sistema QAM-m

$$W_1 = W_2 = r_s \quad (4.31)$$

- Eficiência Espectral

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_m = \mathfrak{R}_M \quad (4.32)$$

- Parâmetro $\Delta f/r_s$

$$\frac{\Delta f}{r_s} = 2 \frac{\log_2 m}{\log_2 M} - 1 \quad (4.33)$$

4.2 Sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$

Na Tabela 4.1 mostra-se a eficiência de transmissão do sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$ para uma probabilidade de erro de símbolo $P_M = 10^{-6}$ e para diversos valores do parâmetro $\Delta f/r_s$. Comparou-se também os resultados com as eficiências obtidas nos sistemas QAM-M listadas na Tabela 2.2. Registrou-se ainda possíveis ganhos (ou perdas) entre os dois sistemas.

Na Fig.4.1 mostra-se os valores obtidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 Eficiência espectral $\mathfrak{R}$ e relação sinal/ruído S/N , para $PM=10^{-6}$, num sistema $\{QAM-4\}^2$.

$\frac{\Delta f}{f_s}$	$\mathfrak{R}$ [bit/s/Hz]	$\delta\left(\frac{\Delta f}{f_s}\right)$	$\frac{S}{N}$ [dB]	Comparação QAM-M		Ganho [dB]
				M	$\frac{S}{N}$ [dB]	
1	2	0,4262	13,3434	4	12,6880	-0,6554
3/5	2,5	0,5349	14,3300	-	-	-
1/3	3	1,0190	17,1290	8	17,5361	0,4071
1/7	3,5	3,8531	22,9054	-	-	-
0	4	∞	∞	16	19,8164	-

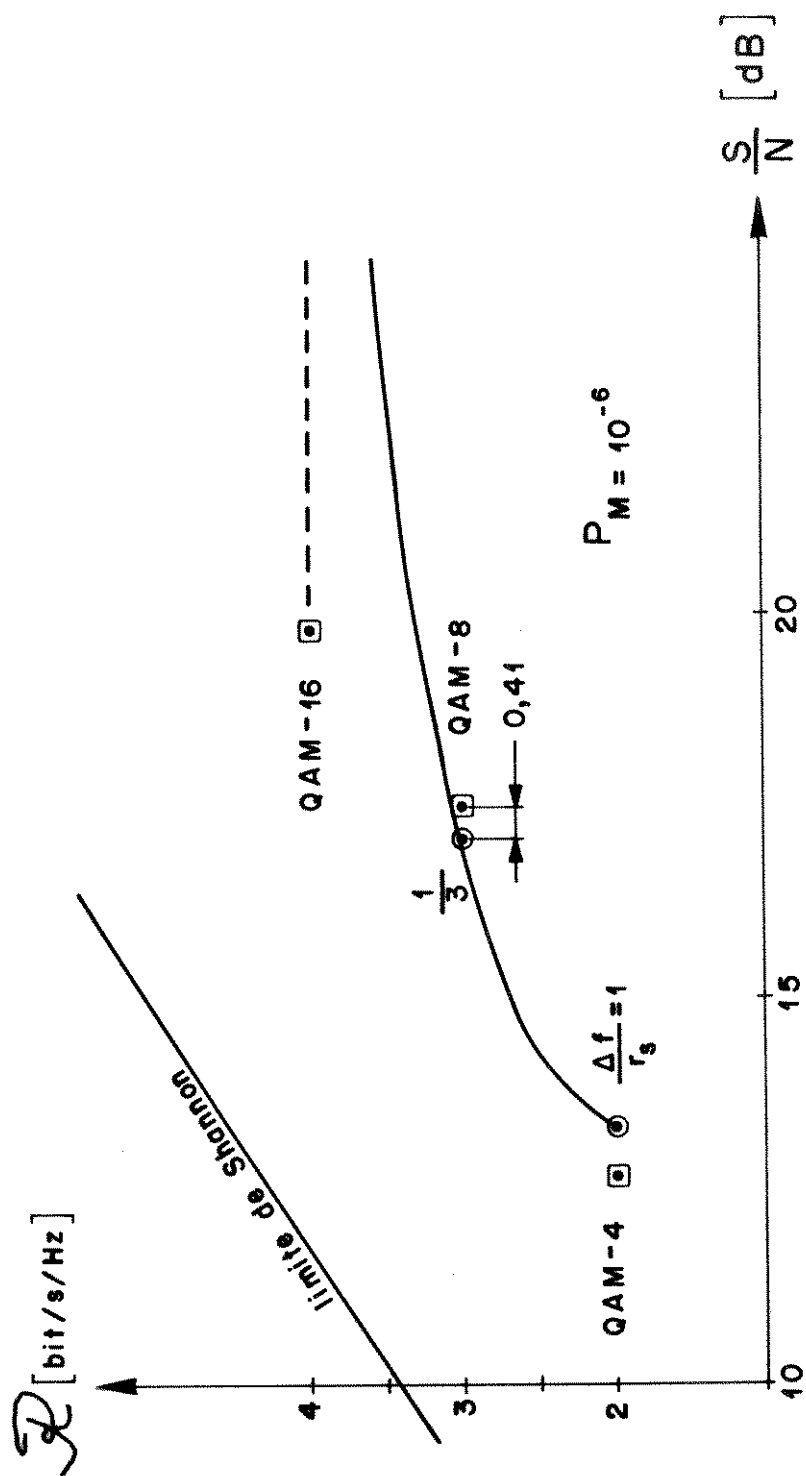


Fig. 4.1 Curva de eficiência de transmissão do sistema {QAM-4}², para $P_M = 10^{-6}$.

Observa-se que o sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$ não apresenta muita vantagem sobre o sistema QAM-M. Por exemplo, para a mesma largura de banda e a mesma eficiência espectral, o sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$ precisa 0,41dB menos de relação sinal/ruído que o sistema QAM-8 para obter-se uma probabilidade de erro de símbolo de 10^{-6} .

Observa-se também que a curva mostrada na Fig. 4.1 cresce assintoticamente para o valor de eficiência espectral $\mathfrak{R}=4$ bit/s/Hz. Neste ponto, o sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$ apresenta nível de ruído que cresce indefinidamente.

No começo da curva, isto é, para $\Delta f/r_s = 1$, o sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$ apresenta uma diferença de 0,65dB frente ao sistema QAM-4. Embora para $\Delta f/r_s=1$ o sistema fique desacoplado, ou seja, os dois sistemas QAM-4 ficam espectralmente contíguos, a potência do ruído dada na equação (4.2) é calculada para uma largura de faixa correspondente a dois sistemas QAM-4 contíguos. Assim o desempenho do sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$ no ponto $\Delta f/r_s = 1$ fica reduzido em 0,65dB.

Na Tabela 4.2 registra-se o desempenho do sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$. Utilizou-se como suporte de cálculo, o programa computacional do apêndice D e tabelas estatísticas [28].

Na Fig. 4.2, são dados os valores obtidos na Tabela 4.2. Acompanha nesta figura a curva de desempenho do sistema QAM-8.

Observa-se nesta figura que o ganho de relação sinal/ruído do sistema $\{\text{QAM-4}\}^2$ frente ao sistema QAM-8 (para $\Delta f/r_s = 1/3$) aumenta quando diminui a probabilidade de erro de símbolo P_M , apresentando um efeito contrário para $P_M > 10^{-2}$.

4.3 Sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$

Utilizando as equações (4.19) e (4.28) registram-se na Tabela 4.3 valores de eficiência espectral $\mathfrak{R}$ e de relação sinal/ruído S/N para uma probabilidade de erro de símbolo $P_M > 10^{-6}$ e diversos valores do parâmetro $\Delta f/r_s$.

Da mesma forma como feito no item anterior, mostram-se ganhos comparativos com os sistemas QAM-M.

Na Fig. 4.3 mostra-se em forma gráfica os resultados obtidos na Tabela 4.3.

Observa-se que, para $\Delta f/r_s = 1/3$, o sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$ apresenta um ganho de 1,85dB em relação ao sistema QAM-64. Isto é obtido para uma eficiência espectral $\mathfrak{R} = 6$ bit/s/Hz e para uma largura de faixa $W = 4/3 r_s$.

Um ganho menor é obtido para $\Delta f/r_s = 3/5$, que neste caso é de 1,41 dB melhor que do sistema QAM-32. Aqui $\mathfrak{R} = 5$ bit/s/Hz e $W = 8/5 r_s$.

O sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$ não apresenta vantagens para $\Delta f/r_s = 1/7$, já que perde de 0,87dB frente ao sistema QAM-128. Aqui $\mathfrak{R} = 7$ bit/s/Hz e $W = 8/7 r_s$.

Tabela 4.2 Probabilidade de erro de símbolo P_M e relação sinal/ruído média por símbolo S/N , para o sistema {QAM-4}².

$\frac{\Delta f}{f_s}$	$\frac{S}{N} [dB]$									
	P_M									
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}		
1	5,1515	8,2805	10,1860	11,4941	12,5120	13,3434	14,0452	14,6521		
1/3	8,9370	12,0660	13,9715	15,2797	16,2975	17,1289	17,8308	18,4376		

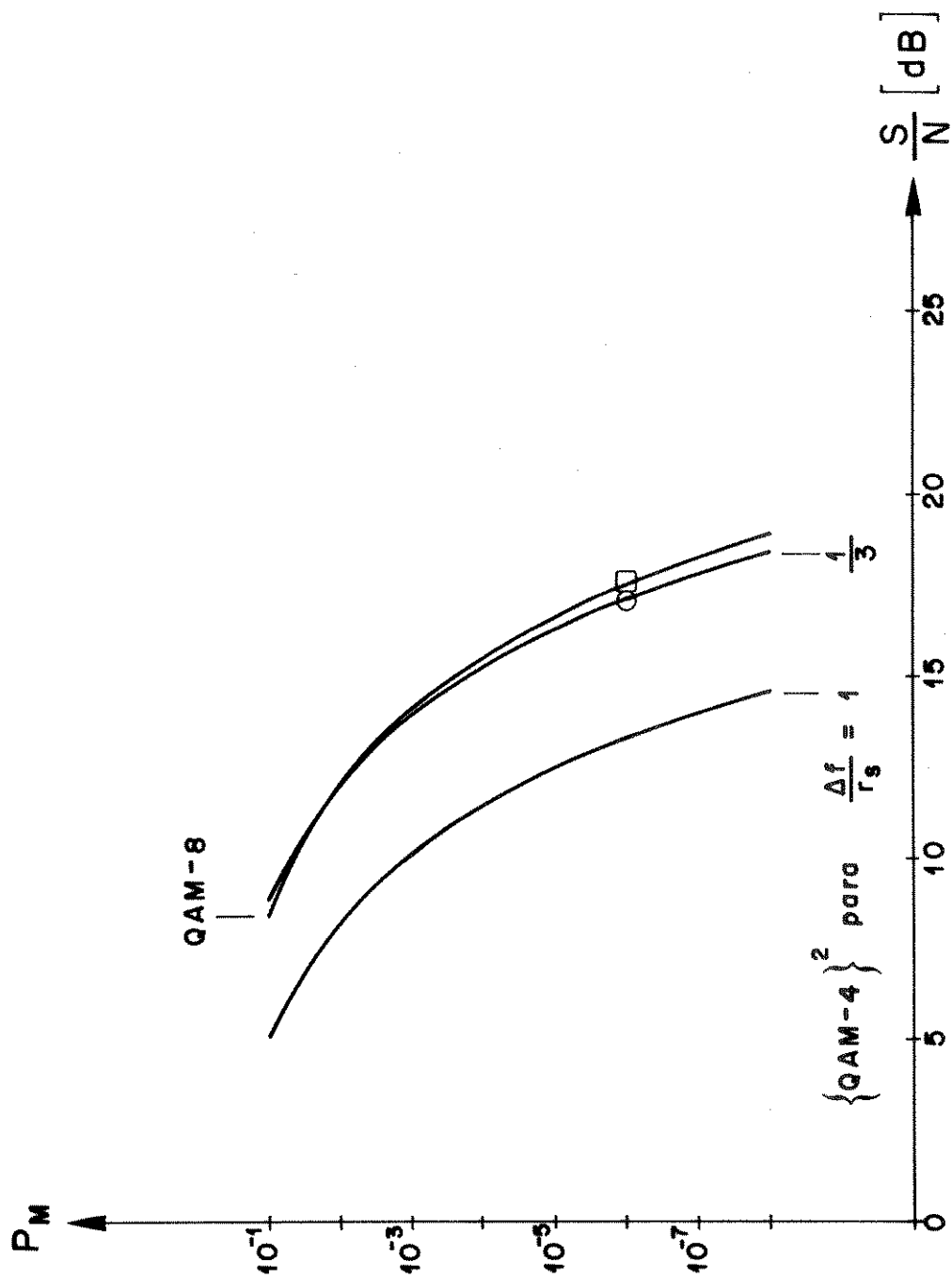


Fig. 4.2 Curvas de desempenho parametrizadas em $\Delta f/r_s$ para sistema {QAM-4}².

Tabela 4.3 Eficiência espectral $\mathcal{R}$ e relação sinal/ruído S/N , para $P_M = 10^{-6}$ num sistema {QAM-16}².

$\frac{\Delta f}{f_s}$	$\mathcal{R}$ [bit/s/Hz]	$\delta \frac{\Delta f}{f_s}$	$\frac{S}{N}$ [dB]	Comparação QAM-M		Ganho [dB]
				M	$\frac{S}{N}$ [dB]	
1	4	0,4262	20,4649	16	19,8164	-0,6485
7/9	4,5	0,4564	20,7622	-	-	-
3/5	5	0,5349	21,4515	32	22,8662	1,4147
5/11	5,5	0,6963	22,5968	-	-	-
1/3	6	1,0190	24,2505	64	26,1005	1,8500
3/13	6,5	1,7417	26,5785	-	-	-
1/7	7	3,8531	30,0269	128	29,1587	0,8682
1/15	7,5	15,4806	36,0667	-	-	-
0	8	∞	∞	256	32,1954	-

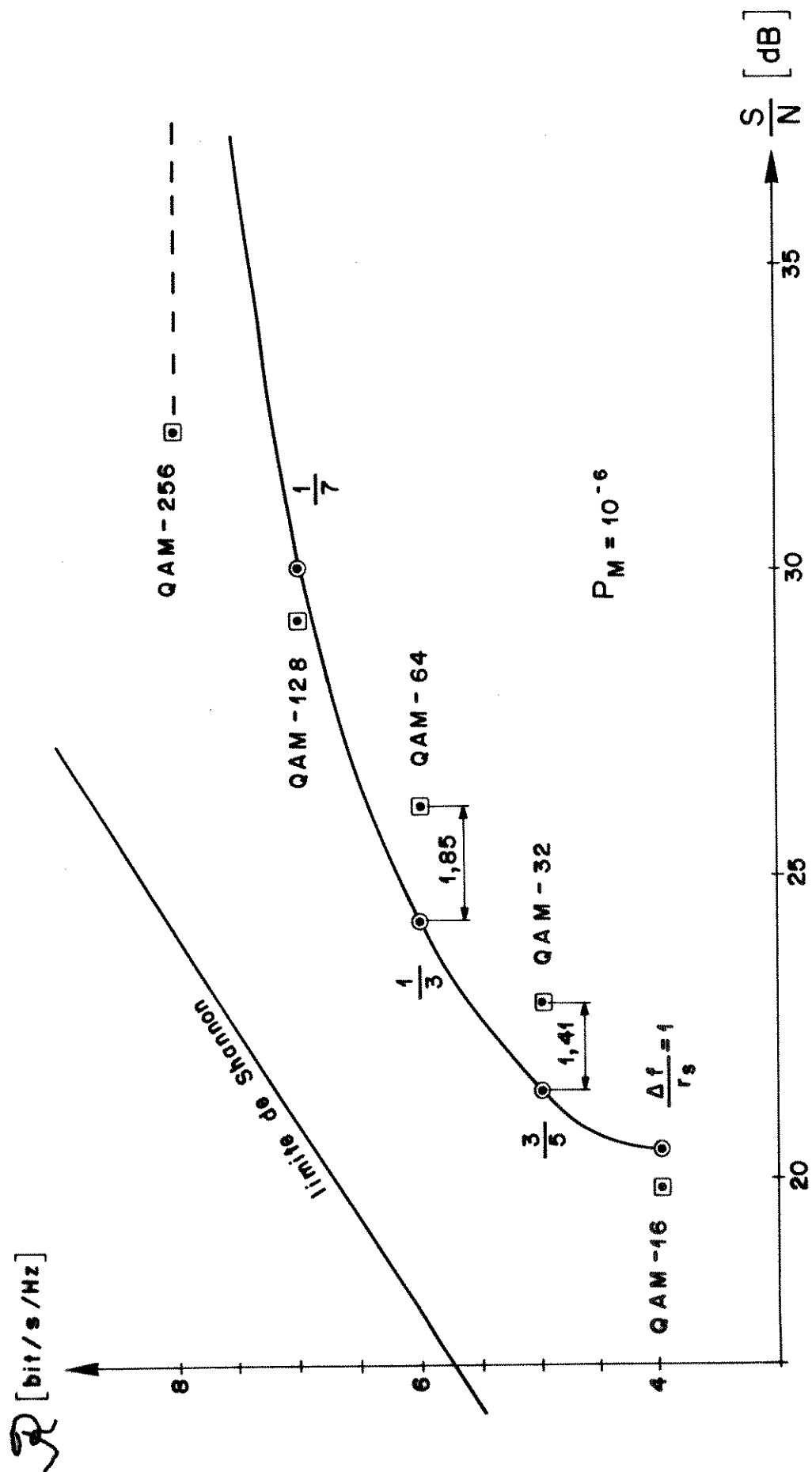


Fig. 4.3 Curva de eficiência de transmissão do sistema $\{QAM-16\}^2$, para $P_M = 10^{-6}$.

Na Fig. 4.4 mostram-se diversas situações de comparação entre o sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$ e o sistema QAM-M, com respeito à largura de faixa de ocupação e do afastamento das portadoras f_1 e f_2 . Observa-se que, para $\Delta f/r_s = 1$, os dois sistemas QAM-16 ficam com seus espectros disjuntos, ocupando toda a faixa de passagem. Conforme $\Delta f/r_s$ tende para zero, os dois sistemas vão se superpondo e, no caso limite, quando $\frac{\Delta f}{r_s} = 0$, isto é, $f_1 = f_2$, os dois espectros QAM-4 ficam superpostos. Esta figura pode auxiliar na compreensão da Fig. 4.3.

Um aspecto a destacar, que é interessante não deixar de lado, é que o sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$ apresenta uma variação contínua em sua curva de eficiência, alocando os espaços vazios que ficam entre sistemas QAM-M. Por exemplo, para $\Delta f/r_s = 5/11$, obtém-se para o sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$ uma eficiência espectral $\mathfrak{R} = 5,5$ bit/s/Hz, alocado entre o QAM-32 e o QAM-64.

Na Tabela 4.4 registra-se a relação sinal/ruído média por símbolo S/N versus a probabilidade de erro de símbolo P_M , para diversos valores do parâmetro $\Delta f/r_s$.

Na Fig. 4.5 são dadas curvas de desempenho do sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$, juntamente com curvas de desempenho para os sistemas QAM-32 e QAM-64.

4.4 Sistema $\{\text{QAM-64}\}^2$

Este sistema resulta da superposição de dois sistemas QAM-64. Na Tabela 4.5 registram-se a eficiência espectral $\mathfrak{R}$ e a relação sinal/ruído S/N do sistema $\{\text{QAM-64}\}^2$ para uma probabilidade de erro de símbolo $P_M = 10^{-6}$ e para diversos valores do parâmetro $\Delta f/r_s$.

Na Fig. 4.6 mostra-se a curva de eficiência de transmissão do sistema $\{\text{QAM-64}\}^2$ com ajuda da Tabela 4.5.

Observa-se que, para $\Delta f/r_s = 5/7$, na condição de mesma eficiência espectral igual a 7 bit/s/Hz, o sistema $\{\text{QAM-64}\}^2$ precisa de 1,93dB menos de relação sinal/ruído comparado ao sistema QAM-128, para uma probabilidade de símbolo de 10^{-6} .

Também, para $\Delta f/r_s = 1/2$, o sistema ganha 3,75 dB quando comparado com o sistema QAM-256 e, para $\Delta f/r_s = 1/5$, o sistema apresenta um ganho significativo de 4,39dB quando comparado com o sistema QAM-1024.

Para o caso $\Delta f/r_s = 1/3$, o sistema $\{\text{QAM-64}\}^2$ possui um ganho ainda mais expressivo de 4,69dB frente ao sistema QAM-512.

Observando o comportamento do sistema $\{\text{QAM-M}\}^2$ através dos itens 4.2, 4.3 e 4.4, resulta que os ganhos obtidos no sistema, comparados com os ganhos dos sistemas QAM-M, aumentam conforme aumenta a constelação. Em outras palavras, obtém-se ganhos

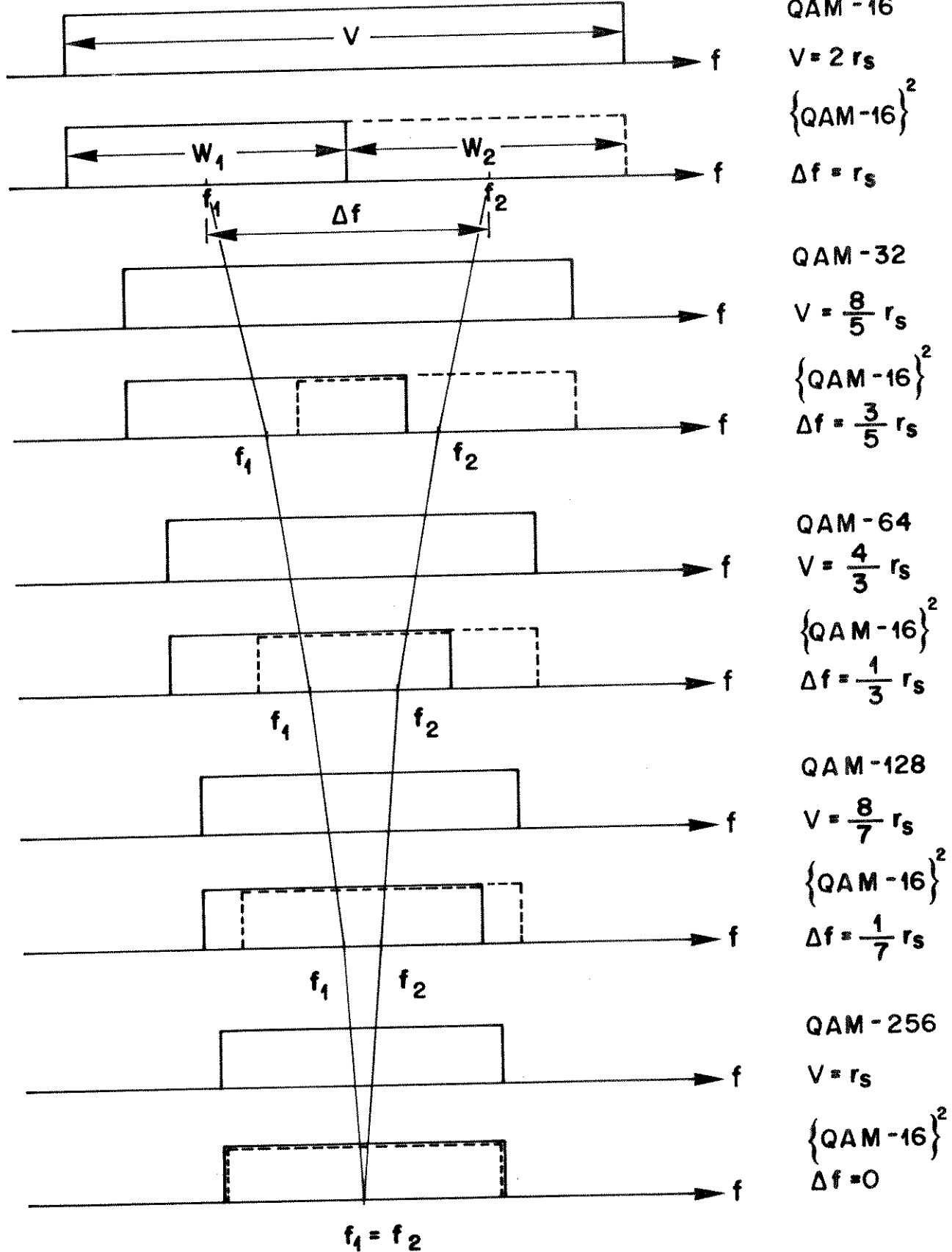


Fig. 4.4 Comportamento do sistema $\{QAM-16\}^2$ no espectro em relação ao sistema QAM, com taxa de bit fixa.

Tabela 4.4 Probabilidade de erro de símbolo P_M e relação sinal/ruído média por símbolo S/N , para o sistema {QAM-16}².

$\frac{\Delta f}{f_s}$	$\frac{S}{N}[\text{dB}]$									
	P_M									
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}		
1	12,8569	15,6433	17,4343	18,6803	19,6596	20,4649	21,1479	21,7406		
3/5	13,8433	16,6297	18,4208	19,6667	20,6460	21,4513	22,1343	22,7270		
1/3	16,6424	19,4288	21,2199	22,4658	23,4451	24,2504	24,9334	25,5261		
1/7	22,4189	25,2054	26,9964	28,2423	29,2216	30,0269	30,7100	31,3026		

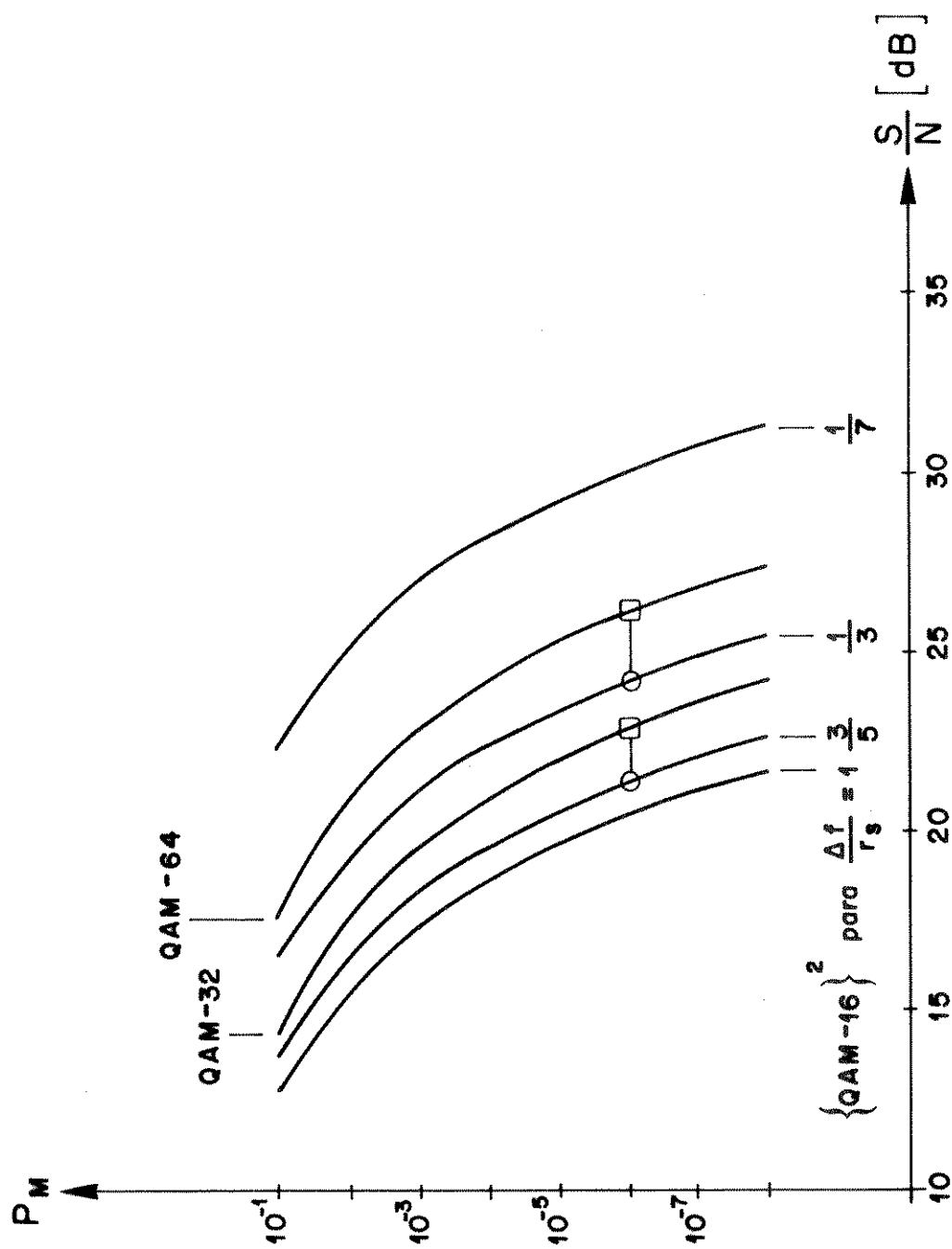


Fig. 4.5 Curvas de desempenho parametrizadas em $\Delta f/r_s$ para o sistema {QAM-16}².

Tabela 4.5 Eficiência espectral $\mathfrak{R}$ e relação sinal/ruído S/N , para $P_M = 10^{-6}$, num sistema $\{QAM-64\}^2$.

$\frac{\Delta f}{r_s}$	$\mathfrak{R}$ [bit/s/Hz]	$\delta \left(\frac{\Delta f}{r_s} \right)$	$\frac{S}{N}$ [dB]	Comparação QAM-M		Ganho [dB]
				M	$\frac{S}{N}$ [dB]	
1	6	0,4262	26,7465	64	26,1005	-0,646
11/13	6,5	0,4425	26,9095	-	-	-
5/7	7	0,4758	27,2246	128	29,1587	1,9341
3/5	7,5	0,5349	27,7331	-	-	-
1/2	8	0,6301	28,4445	256	32,1954	3,7509
7/17	8,5	0,7795	29,3686	-	-	-
1/3	9	1,0190	30,5321	512	35,2206	4,6885
5/19	9,5	1,4257	31,9907	-	-	-
1/5	10	2,1868	33,8485	1024	38,2396	4,3911
1/7	10,5	3,8531	36,3085	-	-	-
1/11	11	8,6745	39,8328	2048	41,2551	1,4223
1/23	11,5	35,0488	45,8971	-	-	-
0	12	∞	∞	4096	44,2687	-

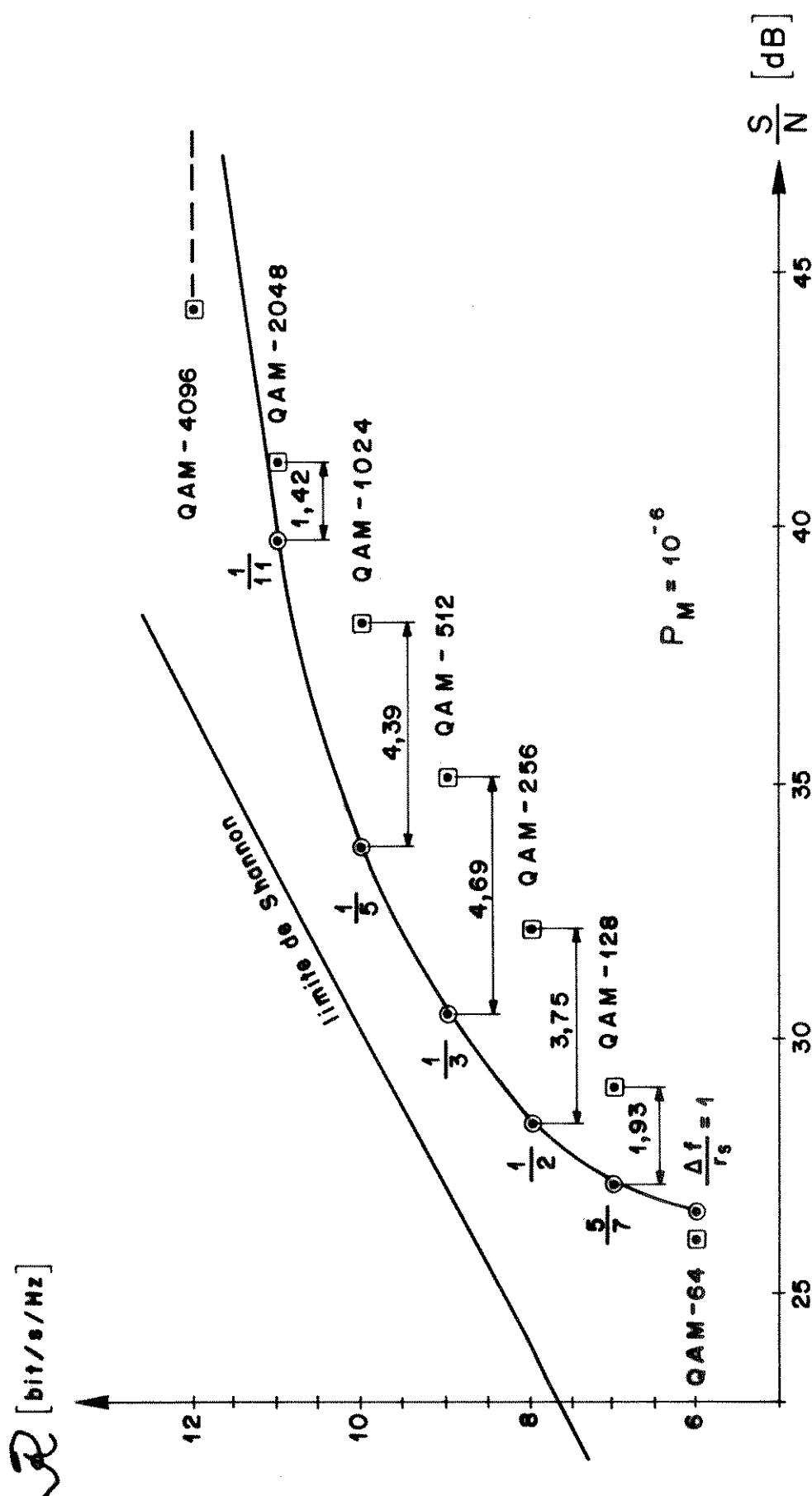


Fig. 4.6 Curva de eficiência de transmissão do sistema {QAM-64}², para $P_M = 10^{-6}$.

maiores para constelações maiores. Isto é justificado pelo fato de que quando aumenta a constelação de sinais nos sistemas QAM-M, o diagrama de sinais fica mais compacto sendo mais facilmente perturbado por ruído. Aqui o sistema $\{QAM-m\}^2$ apresenta vantagens significativas porque utiliza duas constelações de ordem menor, ou seja, menos compactas e independentes entre si.

No caso de constelações robustas, como as QAM-4 e QAM-8, que não são tão compactas, não é possível obter-se no sistema $\{QAM-m\}^2$ ganhos tão significativos.

Na Tabela 4.6 registram-se as relações sinal/ruído média por símbolo S/N e suas probabilidades de erro de símbolo P_M , para distintos valores do parâmetro $\Delta f/r_s$. Com ajuda desta tabela, constroem-se as curvas de desempenho do sistema $\{QAM-64\}^2$, parametrizadas em $\Delta f/r_s$, mostradas na Fig. 4.7. Acompanham também nesta figura, as curvas de desempenho dos sistema QAM-128/256/512/1024/2048.

4.5 Sincronização do Sistema $\{QAM\}^2$

No Capítulo 3 analisou-se o sistema $\{QAM\}^2$ considerando-se o procedimento de detecção no primeiro período T_s de amostragem. Isto é, considerou-se que as portadoras, vide Fig. 3.2(a), possuem no instante zero defasagem nula. O mesmo ocorre para os sinais de informação $s_1(t)$ e $s_2(t)$ enviados pelo transmissor.

Neste item vai-se analisar o sistema $\{QAM\}^2$ para subseqüentes períodos de amostragem.

Para o h -ésimo intervalo de amostragem o sinal recebido no receptor fica

$$s(t) = A_1 \cos[\omega_1 t + \theta_1 + (h-1) \omega_1 T_s] + A_2 \cos[\omega_2 t + \theta_2 + (h-1) \omega_2 T_s] + n_I(t) \cos[\omega_0 t + (h-1) \omega_0 T_s] - n_Q(t) \sin[\omega_0 t + (h-1) \omega_0 T_s] \quad (4.34)$$

para

$$0 \leq t \leq T_s$$

$$h \quad \text{inteiro positivo} \quad (4.35)$$

Do mesmo modo, os osciladores locais do receptor, ficam

$$\cos[\omega_1 t + (h-1) \omega_1 T_s] \quad (4.36)$$

$$\cos[\omega_2 t + (h-1) \omega_2 T_s] \quad (4.37)$$

Segundo as expressões (4.34-37), a resposta do circuito tipo γ mostrada na Fig. 3.2(b), será

Tabela 4.6 Probabilidade de erro de símbolo P_M e relação sinal/ruído média por símbolo S/N , para o sistema $\{QAM-64\}^2$.

		$\frac{S}{N} [dB]$									
		PM									
$\frac{\Delta f}{f_s}$		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}		
1		19,3389	22,0004	23,7615	24,9853	25,9507	26,7465	27,4226	28,0101		
5/7		19,8167	22,4782	24,2394	25,4631	26,4285	27,2243	27,9004	28,4879		
1/2		21,0367	23,6982	25,4593	26,6831	27,6485	28,4442	29,1204	29,7079		
1/3		23,1244	25,7859	27,5471	28,7708	29,7362	30,5320	31,2082	31,7956		
1/5		26,4408	29,1023	30,8635	32,0872	33,0526	33,8484	34,5246	35,1120		
1/11		32,4252	35,0867	36,8479	38,0716	39,0370	39,8328	40,5090	41,0964		

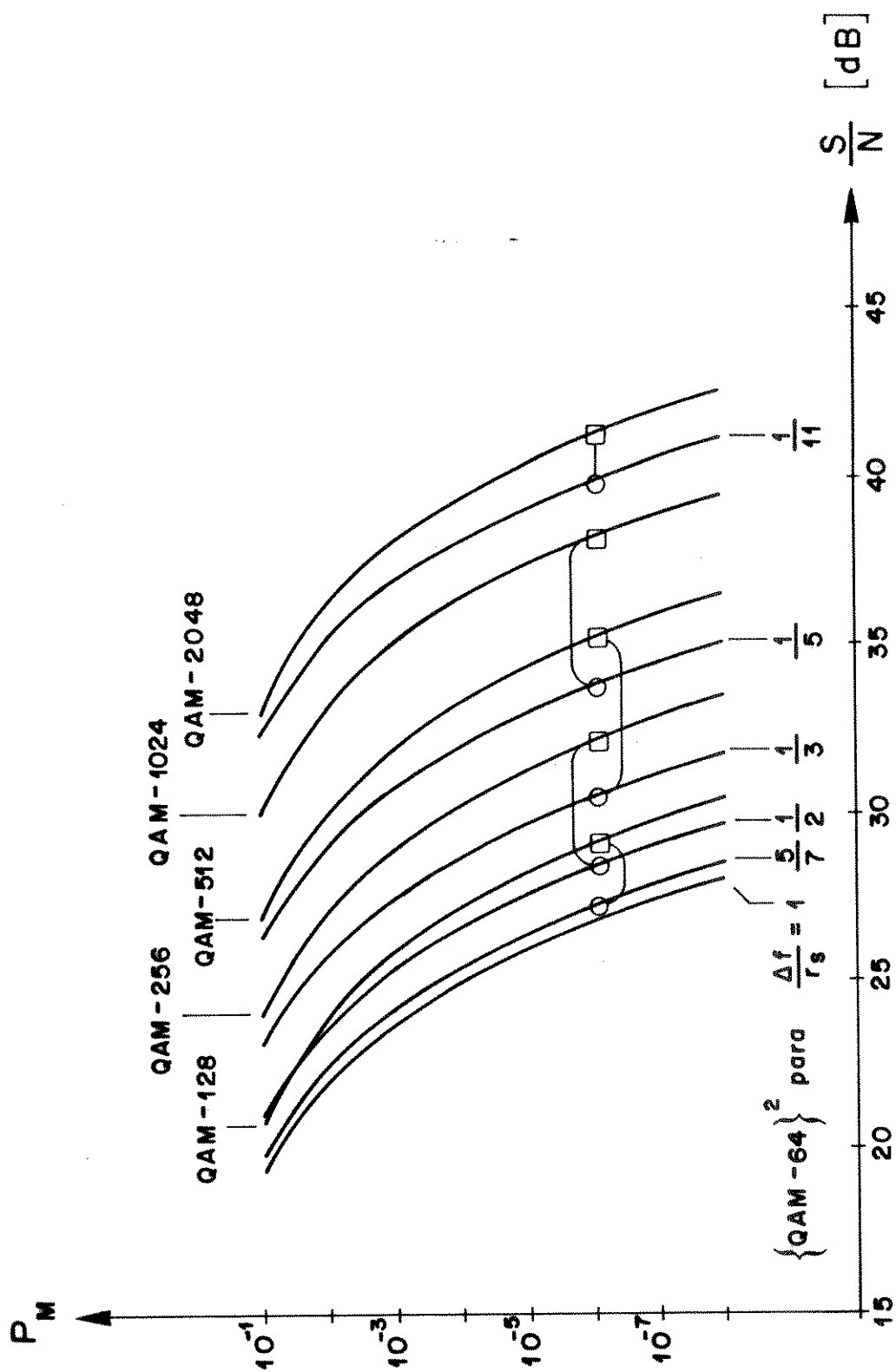


Fig. 4.7 Curvas de desempenho parametrizadas em $\Delta f/r_s$ para o sistema {QAM-64}².

$$O\delta(t) = A_1 \cos\{(\omega_1 - \omega_i)[t + (h-1)T_s] + \theta_1\} + A_2 \cos\{(\omega_2 - \omega_i)[t + (h-1)T_s] + \theta_2\} + \\ + n_I(t) \cos\{(\omega_0 - \omega_i)[t + (h-1)T_s]\} - n_Q(t) \sin\{(\omega_0 - \omega_i)[t + (h-1)T_s]\} \quad (4.38)$$

De forma similar, para a resposta do circuito tipo β , mostrada na fig. 3.2(c), tem-se

$$O\beta(t) = A_1 \sin\{(\omega_1 - \omega_i)[t + (h-1)T_s] + \theta_1\} + A_2 \sin\{(\omega_2 - \omega_i)[t + (h-1)T_s] + \theta_2\} + \\ + n_I(t) \sin\{(\omega_0 - \omega_i)[t + (h-1)T_s]\} + n_Q(t) \cos\{(\omega_0 - \omega_i)[t + (h-1)T_s]\} \quad (4.39)$$

Integrando as expressões (4.38) e (4.39), no período de amostragem T_s , obtém-se

$$O\gamma(T_s) = T_s \left\{ \left[\frac{\sin(\omega_1 - \omega_i)T_s}{(\omega_1 - \omega_i)T_s} \right] A_1 \cos[(\omega_1 - \omega_i)(h-1)T_s + \theta_1] + \right. \\ + \left[\frac{\cos(\omega_1 - \omega_i)T_s - 1}{(\omega_1 - \omega_i)T_s} \right] A_1 \sin[(\omega_1 - \omega_i)(h-1)T_s + \theta_1] + \\ + \left[\frac{\sin(\omega_2 - \omega_i)T_s}{(\omega_2 - \omega_i)T_s} \right] A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_i)(h-1)T_s + \theta_2] + \\ + \left. \left[\frac{\cos(\omega_2 - \omega_i)T_s - 1}{(\omega_2 - \omega_i)T_s} \right] A_2 \sin[(\omega_2 - \omega_i)(h-1)T_s + \theta_2] \right\} + \\ + Q\gamma(T_s) \quad (4.40)$$

onde

$$Q\gamma(T_s) = \int_0^{T_s} n_I(t) \cos\{(\omega_0 - \omega_i)[t + (h-1)T_s]\} dt - \\ - \int_0^{T_s} n_Q(t) \sin\{(\omega_0 - \omega_i)[t + (h-1)T_s]\} dt \quad (4.41)$$

e

$$O\beta(T_s) = T_s \left\{ \left[\frac{\sin(\omega_1 - \omega_i)T_s}{(\omega_1 - \omega_i)T_s} \right] A_1 \sin[(\omega_1 - \omega_i)(h-1)T_s + \theta_1] - \right. \\ - \left[\frac{\cos(\omega_1 - \omega_i)T_s - 1}{(\omega_1 - \omega_i)T_s} \right] A_1 \cos[(\omega_1 - \omega_i)(h-1)T_s + \theta_1] + \\ + \left[\frac{\sin(\omega_2 - \omega_i)T_s}{(\omega_2 - \omega_i)T_s} \right] A_2 \sin[(\omega_2 - \omega_i)(h-1)T_s + \theta_2] - \\ - \left[\frac{\cos(\omega_2 - \omega_i)T_s - 1}{(\omega_2 - \omega_i)T_s} \right] A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_i)(h-1)T_s + \theta_2] \right\} + \\ + Q\beta(T_s) \quad (4.42)$$

onde

$$Q_{\beta}(T_s) = \int_0^{T_s} n_I(t) \sin\{(\omega_o - \omega_i) [t + (h-1)T_s]\} dt + \int_0^{T_s} n_Q(t) \cos\{(\omega_o - \omega_i) [t + (h-1)T_s]\} dt \quad (4.43)$$

Assim, os sinais depois dos integradores serão

$$a'(T_s) = O_{\gamma}(T_s)|_{i=1} = T_s\{x_1 + x_2[k_1 \cos\phi + k_2 \sin\phi] + y_2[-k_1 \sin\phi + k_2 \cos\phi]\} + Q'a(T_s) \quad (4.44)$$

onde

$$Q'_a(T_s) = \int_0^{T_s} \{n_I(t) \cos\varsigma - n_Q(t) \sin\varsigma\} dt \quad (4.45)$$

$$\phi = \Delta\omega(h-1)T_s = 2\pi(h-1)\frac{\Delta f}{r_s} \quad (4.46)$$

$$\varsigma = \frac{\Delta\omega}{2}[t + (h-1)T_s] \quad (4.47)$$

Também

$$b'(T_s) = O_{\beta}(T_s)|_{i=1} = T_s\{Y_1 - X_2[-K_1 \sin\phi + K_2 \cos\phi] + Y_2[K_1 \cos\phi + K_2 \sin\phi]\} + Q'_b(T_s) \quad (4.48)$$

onde

$$Q'_b(T_s) = \int_0^{T_s} \{n_I(t) \sin\varsigma + n_Q(t) \cos\varsigma\} dt \quad (4.49)$$

e

$$c'(T_s) = O_{\gamma}(T_s)|_{i=2} = T_s\{x_1[k_1 \cos\phi + k_2 \sin\phi] - y_1[-k_1 \sin\phi + k_2 \cos\phi] + x_2\} + Q'c(T_s) \quad (4.50)$$

onde

$$\dot{Q}_c(T_s) = \int_0^{T_s} \left\{ n_I(t) \cos \zeta + n_Q(t) \sin \zeta \right\} dt \quad (4.51)$$

e

$$\begin{aligned} d'(T_s) &= O\beta(T_s)|_{i=2} \\ &= T_s \{ x_1 [-k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi] + y_1 [k_1 \cos \phi + k_2 \sin \phi] + y_2 \} + Q'd(T_s) \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde

$$\dot{Q}_d(T_s) = \int_0^{T_s} \left\{ -n_I(t) \sin \zeta + n_Q(t) \cos \zeta \right\} dt \quad (4.53)$$

Reescrevendo as equações (4.44-53) em forma matricial, tem-se

$$\vec{O}' = T_s \tilde{M}' \vec{S} + \vec{Q}' \quad (4.54)$$

onde

$$\vec{O}' = \begin{bmatrix} a'(T_s) \\ b'(T_s) \\ c'(T_s) \\ d'(T_s) \end{bmatrix} \quad \text{novo vetor de saídas} \quad (4.55)$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} A_1 \cos \theta_1 \\ A_1 \sin \theta_1 \\ A_2 \cos \theta_2 \\ A_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{novo vetor de sinais} \quad (4.56)$$

$$\vec{Q}' = \begin{bmatrix} Q_a(T_s) \\ Q_b(T_s) \\ Q_c(T_s) \\ Q_d(T_s) \end{bmatrix} \quad \text{nova matriz de ruído} \quad (4.57)$$

$$\tilde{M}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 1 & -\beta_2 & \beta_1 \\ \beta_1 & -\beta_2 & 1 & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{nova matriz de acoplamento entre sistemas} \quad (4.58)$$

e

$$\beta_1 = k_1 \cos \phi + k_2 \sin \phi \quad (4.59)$$

$$\beta_2 = -k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi \quad (4.60)$$

No diagrama em blocos do receptor, como mostrado na Figura 3.2(a), realiza-se a seguinte transformação linear no sistema de equações (4.54)

$$\vec{S} + (T_s)^{-1} (\tilde{M}')^{-1} \vec{Q}' = (T_s)^{-1} (\tilde{M}')^{-1} \vec{O}' \quad (4.61)$$

onde

$$(\tilde{M}')^{-1} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & 1 & \beta_2 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & \beta_2 & 1 & 0 \\ -\beta_2 & -\beta_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$K = 1 - (K_1^2 + K_2^2) \quad (4.63)$$

Pode-se observar que o ruído será

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_{1I}(T_s) \\ \dot{Q}_{1Q}(T_s) \\ \dot{Q}_{21}(T_s) \\ \dot{Q}_{2Q}(T_s) \end{bmatrix} = (T_s)^{-1} (\tilde{M}')^{-1} \vec{Q}' = \frac{1}{KT_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & 1 & \beta_2 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & \beta_2 & 1 & 0 \\ -\beta_2 & -\beta_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_a(T_s) \\ \dot{Q}_b(T_s) \\ \dot{Q}_c(T_s) \\ \dot{Q}_d(T_s) \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

A seguir, analisa-se a potência média quadrática do ruído dada na expressão (4.64). De forma similar como feito no item 3.2 do capítulo anterior, as potências médias dos ruídos nos estágios de decisão, vide Fig. 3.2(a), serão

$$\begin{aligned} \langle Q_{1I}^2(T_s) \rangle = & \frac{1}{K^2 T_s^2} \left\{ \langle Q_a^2(T_s) \rangle + \beta_1^2 \langle Q_c^2(T_s) \rangle + \beta_2^2 \langle Q_d^2(T_s) \rangle + \right. \\ & + 2[-\beta_1 \langle Q_a(T_s) Q_c(T_s) \rangle - \beta_2 \langle Q_a(T_s) Q_d(T_s) \rangle + \\ & \left. + \beta_1 \beta_2 \langle Q_c(T_s) Q_d(T_s) \rangle] \right\} \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{1Q}^2(T_s) \rangle = & \frac{1}{K^2 T_s^2} \left\{ \langle Q_b^2(T_s) \rangle + \beta_1^2 \langle Q_d^2(T_s) \rangle + \beta_2^2 \langle Q_c^2(T_s) \rangle + \right. \\ & + 2[-\beta_1 \langle Q_b(T_s) Q_d(T_s) \rangle + \beta_2 \langle Q_b(T_s) Q_c(T_s) \rangle - \\ & \left. - \beta_1 \beta_2 \langle Q_d(T_s) Q_c(T_s) \rangle] \right\} \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{2I}^2(T_s) \rangle = & \frac{1}{K^2 T_s^2} \left\{ \langle Q_c^2(T_s) \rangle + \beta_1^2 \langle Q_a^2(T_s) \rangle + \beta_2^2 \langle Q_b^2(T_s) \rangle + \right. \\ & + 2[-\beta_1 \langle Q_c(T_s) Q_a(T_s) \rangle + \beta_2 \langle Q_c(T_s) Q_b(T_s) \rangle - \\ & \left. - \beta_1 \beta_2 \langle Q_a(T_s) Q_b(T_s) \rangle] \right\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{2Q}^2(T_s) \rangle = & \frac{1}{K^2 T_s^2} \left\{ \langle Q_d^2(T_s) \rangle + \beta_1^2 \langle Q_b^2(T_s) \rangle + \beta_2^2 \langle Q_a^2(T_s) \rangle + \right. \\ & + 2[-\beta_1 \langle Q_d(T_s) Q_b(T_s) \rangle - \beta_2 \langle Q_d(T_s) Q_a(T_s) \rangle + \\ & \left. + \beta_1 \beta_2 \langle Q_b(T_s) Q_a(T_s) \rangle] \right\} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Também, de forma similar, com ajuda do apêndice B, tem-se

$$\langle Q_a^2(T_s) \rangle = \langle Q_b^2(T_s) \rangle = \langle Q_c^2(T_s) \rangle = \langle Q_d^2(T_s) \rangle = \eta W T_s^2 I(a, b) \quad (4.69)$$

$$\left\langle \dot{Q}_a(T_s) \dot{Q}_b(T_s) \right\rangle = \left\langle \dot{Q}_c(T_s) \dot{Q}_d(T_s) \right\rangle = 0 \quad (4.70)$$

$$\left\langle \dot{Q}_a(T_s) \dot{Q}_c(T_s) \right\rangle = \left\langle \dot{Q}_b(T_s) \dot{Q}_d(T_s) \right\rangle = K_1 \eta W T_s^2 I(a, b) r(a, b) \quad (4.71)$$

$$\left\langle \dot{Q}_a(T_s) \dot{Q}_d(T_s) \right\rangle = -\left\langle \dot{Q}_c(T_s) \dot{Q}_b(T_s) \right\rangle = K_2 \eta W T_s^2 I(a, b) r(a, b) \quad (4.72)$$

onde

$$a = \pi r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right) \quad (4.73)$$

$$b = \pi r_s \left(\frac{\Delta f}{r_s} \right) \quad (4.74)$$

Deste modo, substituindo as expressões (4.69-74) nas equações (4.65-68), e segundo as expressões (4.46) e (4.47), tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle \dot{Q}_{1I}^2(T_s) \right\rangle &= \left\langle \dot{Q}_{1Q}^2(T_s) \right\rangle = \left\langle \dot{Q}_{2I}^2(T_s) \right\rangle = \left\langle \dot{Q}_{2Q}^2(T_s) \right\rangle = \\ &= \eta W \frac{\left\{ 1 + [1 - 2r(a, b)] (K_1^2 + K_2^2) \right\} I(a, b)}{\left[1 - (K_1^2 + K_2^2) \right]^2} \end{aligned} \quad (4.75)$$

que é igual a potência de ruído analisada no item 3.2, como se esperava, já que realizar a detecção do sistema $\{QAM\}^2$ em diferentes intervalos de tempo T_s não deveria alterar a potência média do ruído.

Assim, para realizar a detecção no sistema $\{QAM\}^2$ no intervalo h -ésimo de amostragem, é necessário conhecer a inversa da matriz de acoplamento entre sistemas mostrada na equação (4.58). Isto nos leva a manter um controle do parâmetro h ; em outras palavras, deve-se manter uma contagem dos intervalos de amostragem T_s desde o instante em que as portadoras de frequências angulares ω_1 e ω_2 partiram com a mesma fase zero. Deste modo é possível realizar a transformação linear mostrada na Figura 3.2(a) e lograr a separação dos dois sistemas QAM transmitidos de forma superposta.

CAPÍTULO 5

Discussão Geral sobre os Sistemas $\{QAM\}^2$

Neste capítulo analisam-se os resultados obtidos para o sistema $\{QAM\}^2$. Discutem-se os prós e os contras que apresenta o sistema e compara-se o mesmo com o TCM com o propósito de ressaltar as particularidades de cada um deles. Apresentam-se também dificuldades de implementações práticas do sistema $\{QAM\}^2$ e sugestões para futuros trabalhos.

5.1 Análise dos Resultados

No Capítulo 1 realizou-se uma revisão detalhada dos sistemas QAM convencionais, considerando-os como sistemas de banda limitado. Os resultados obtidos serviram mais tarde para a comparação do sistema $\{QAM\}^2$ com o sistema QAM convencional.

Nas Fig. 4.2, 4.5 e 4.7 comparam-se os desempenhos dos sistemas $\{QAM\}^2$ com os QAM. Além de se observar ganhos ou perdas com relação aos sistemas QAM, observa-se que o desempenho do sistema $\{QAM\}^2$ aumenta conforme diminui a probabilidade de erro de símbolo P_M . De outro modo, o sistema $\{QAM\}^2$ parece ser mais robusto à interferência por ruído AWGN para valores altos de relação sinal/ruído.

As Fig. 4.1, 4.3 e 4.6 mostram curvas de eficiência dos sistemas $\{QAM\}^2$, mas agora para uma probabilidade de erro de símbolo determinada. Observa-se que os ganhos obtidos nestes sistemas, para um determinado $\Delta f/r_s$, acontecem para valores de eficiência espectral constante. Por exemplo, na Fig. 4.3, o sistema $\{QAM-16\}^2$ com $\Delta f/r_s = 1/3$, possui um ganho de 1,85 dB de relação sinal/ruído com relação ao sistema convencional QAM-64 para uma eficiência espectral de 6 bit/s/Hz.

Pode-se também observar as particularidades dos sistemas de outro ponto de vista. Como por exemplo, considerando-se fixa a relação sinal/ruído, iríamos ter casos de ganhos e de perdas de eficiência espectral.

Na Fig. 5.1, mostra-se esta situação para o sistema $\{QAM-16\}^2$. Assim para uma relação sinal/ruído de aproximadamente 22,9 dB, o sistema $\{QAM-16\}^2$ é aproximadamente 0,6 bit/s/Hz mais eficiente que o sistema QAM-32. Isto é o sistema $\{QAM-16\}^2$ ocupa menos banda de passagem.

No caso do sistema $\{QAM-16\}^2$ para $S/N = 26,1$ dB, ganha 0,4 bit/s/Hz em eficiência espectral frente ao sistema QAM-64 para uma probabilidade de erro de símbolo de $P_M = 10^{-6}$.

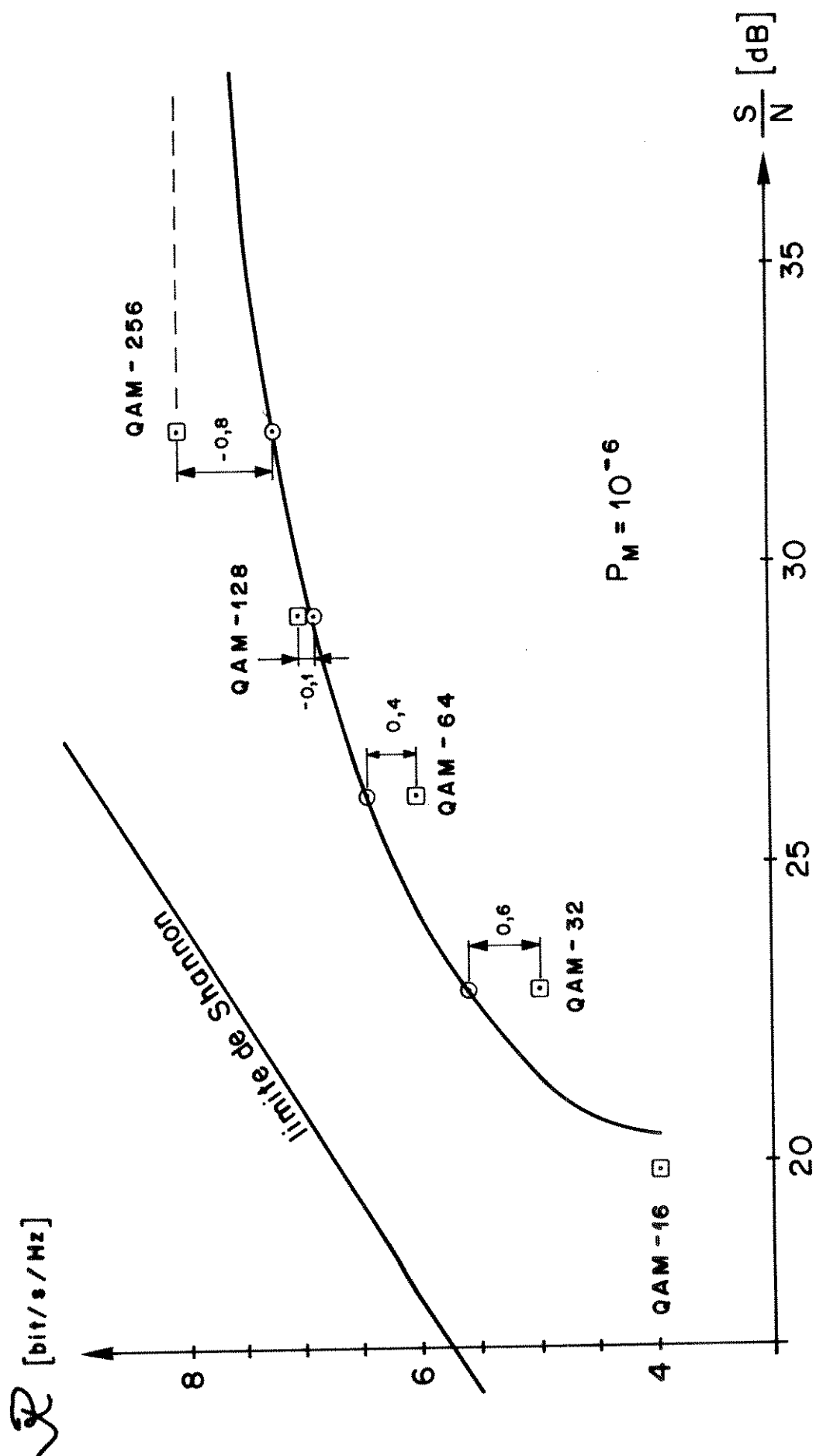


Fig. 5.1 Curva de eficiência de transmissão do sistema {QAM-16}² para $P_M=10^{-6}$, mostrando ganho ou atenuação de $\mathcal{R}$ para S/N constante.

Diferente são os resultados para o sistema QAM-128. Embora o sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$ tenha eficiência espectral pouco menor do que a do QAM-128, provavelmente será mais fácil implementar o $\{\text{QAM-16}\}^2$.

Algo similar acontece com o sistema QAM-256 para $S/N = 32,2$ dB. O sistema $\{\text{QAM-16}\}^2$ perde aproximadamente 0,8 bit/s/Hz frente a seu competidor, mas por outro lado transmitir uma constelação QAM-256 é mais difícil de implementar que duas constelações QAM-16.

Na Tabela 5.1 mostram-se os resultados aqui comentados, acrescentando-se conclusões em relação aos ganhos ou atenuação para o caso do sistema $\{\text{QAM-64}\}^2$. Os resultados fornecidos tanto para o parâmetro $\Delta f/r_s$ como para a eficiência espectral $\mathfrak{R}$, foram valores aproximados obtidos da interpolação da função $\delta(a, b)$ da Figura 3.4 devido à dificuldade encontrada em separar o parâmetro $\Delta f/r_s$ na equação (3.119).

5.2 Características Gerais do Sistema $\{\text{QAM}\}^2$

Pode-se agrupar as características gerais dos sistemas $\{\text{QAM}\}^2$ segundo os itens como segue.

5.2.1 Simplicidade do Transmissor

Como mostrado na Fig. 3.1, o transmissor usado para implementar o sistema $\{\text{QAM-m}\}^2$ é composto por dois transmissores QAM-m, trabalhando aditivamente. Porém, estruturalmente o transmissor não apresenta complexidade em relação a transmissão usada nos sistemas QAM-M convencionais.

5.2.2 Simplicidade do Receptor

Nas Figs. 3.2 e 3.3 mostram-se o receptor para o sistema $\{\text{QAM-m}\}^2$. Sem considerar os bancos de correladores e a transformação linear, o resto do sistema receptor é composto por estágios do mesmo tipo que dos sistemas QAM-M convencionais. Mais ainda, estes estágios são de menor complexidade que os do QAM-M por serem sistemas que trabalham com constelações de ordem menor.

Com respeito aos correladores e ao estágio de transformação linear, não existem problemas do ponto de vista circuital. Já a implementação dos defasadores de 90° não é tão imediata para um espectro de faixa r_s , pois pode necessitar de sintetização de circuitos com resposta de fase plana em segmentos do espectro.

Tabela 5.1 Ganho-atenuação de eficiência espectral nos sistemas {QAM-16}² e {QAM-64}², para $P_M = 10^{-6}$.

QAM-M			{QAM-16} ²		Ganho $G_{\mathfrak{R}}$ [bit/s/Hz]
M	$\frac{S}{N}$ [dB]	$\mathfrak{R}$ [bit/s/Hz]	$\frac{\Delta f}{r_s}$	$\mathfrak{R}'$ [bit/s/Hz]	
32	22,8662	5	0,43	5,6	0,6
64	26,1005	6	0,25	6,4	0,4
128	29,1587	7	0,17	6,8	-0,1
256	32,1954	8	0,12	7,1	-0,8

QAM-M			{QAM-16} ²		Ganho $G_{\mathfrak{R}}$ [bit/s/Hz]
M	$\frac{S}{N}$ [dB]	$\mathfrak{R}$ [bit/s/Hz]	$\frac{\Delta f}{r_s}$	$\mathfrak{R}'$ [bit/s/Hz]	
128	29,1587	7	0,43	8,4	1,4
256	32,1954	8	0,26	9,5	1,5
512	35,2206	9	0,17	10,2	1,2
1024	38,2396	10	0,12	10,7	0,7
2048	41,2551	11	0,08	11,1	0,1
4096	44,2687	12	0,06	11,3	-0,7

5.2.3 Ganhos em Relação ao Sistema QAM

Nas tabelas 4.1, 4.3 e 4.5 mostram-se ganhos, em alguns casos perdas, dos sistemas $\{QAM-m\}^2$, com eficiência espectral constante. Em forma gráfica mostram-se estes resultados nas Figs. 4.1, 4.3 e 4.6.

Por outro lado na Tabela 5.1 mostrou-se ganhos do sistema $\{QAM-m\}^2$ com respeito aos sistemas QAM-M convencionais, mas agora com relação sinal/ruído constante.

5.2.4 Ganho Assintótico

Define-se o ganho assintótico G_a , à relação existente entre a relação sinal/ruído do sistema QAM-M convencional e a relação sinal/ruído do sistema $\{QAM-m\}^2$, quando as relações sinal/ruído são muito altas.

Relembrando que para a probabilidade de erro de símbolo do sistema QAM-M, tem-se

$$P_{M_M} \cong 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{0,7737(M-1)}} \left(\frac{S}{N}\right)_M \right) \quad (5.1)$$

e para o sistema $\{QAM-m\}^2$ tem-se

$$P_{M_m} \cong 8 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{2(m-1)\delta(a,b)}} \left(\frac{S}{N}\right)_m \right) \quad (5.2)$$

Agora se as relações sinal/ruído das equações (5.1) e (5.2), são muito altas, as probabilidades de erro de símbolo P_{M_M} e P_{M_m} serão muito pequenas. Assim pode-se escrever

$$Q \left(\sqrt{\frac{3}{0,7737(M-1)}} \left(\frac{S}{N}\right)_M \right) \cong Q \left(\sqrt{\frac{3}{2(m-1)\delta(a,b)}} \left(\frac{S}{N}\right)_m \right) \quad (5.3)$$

segundo a definição de ganho assintótico, tem-se da expressão (5.3)

$$G_a = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_M}{\left(\frac{S}{N}\right)_m} \cong 0,3868 \frac{(M-1)}{(m-1)} \frac{1}{\delta(a,b)} \quad (5.4)$$

que resulta em termos de decibéis

$$G_a[\text{dB}] \cong 10 \log_{10} \frac{M-1}{m-1} - 10 \log_{10} \delta(a, b) - 4,1246 \quad (5.5)$$

Na Tabela 5.2 mostram-se ganhos assintóticos dos sistemas $\{\text{QAM-m}\}^2$ para $m=4, 16$ e 64 em relação os sistemas QAM-M convencionais.

5.2.5 Não há Necessidade de Codificação

Como já comentado anteriormente, os sistemas de transmissão digital, visando melhorar a proteção de erro devido à perturbação no canal de transmissão, são submetidos a processos de codificação-decodificação. Nestas circunstâncias, a eficiência dos sistemas não aumenta, devido ao fato de que a codificação expande a faixa de ocupação do sistema.

Com o sistema $\{\text{QAM-m}\}^2$ está se introduzindo uma alternativa de transmissão, agora sem codificação. Obtêm-se eficiências, na maioria dos casos, maiores que as dos correspondentes QAM, sem modificar a eficiência espectral.

5.2.6 Sincronização

No item 4.5 do Capítulo 4 desenvolveu-se uma análise da sincronização do sistema $\{\text{QAM-m}\}^2$, tendo em vista que os dois sistemas QAM-m transmitidos de forma superposta não possuem a mesma frequência.

Mostrou-se a necessidade de conhecer o número h de intervalos de amostragem durante a transmissão, facilitando assim a detecção. Esta contagem do parâmetro h é necessária para poder-se realizar a transformação linear no receptor, como mostra a Fig. 3.2.

Uma outra alternativa para sincronizar o sistema é observar em quantos períodos T_s as duas portadoras atingem a mesma fase, e assim verificar a quantidade necessária de ciclos por, portadora para "zerar" o sistema.

Em outras palavras

$$T_0 = n_1/f_1 = n_2/f_2 \quad (5.6)$$

$$T_0 \text{ é o tempo para que as duas portadoras atinjam a mesma fase} \quad (5.7)$$

$$n_1 \text{ é o número de ciclos da portadora de frequência } f_1 \quad (5.8)$$

$$n_2 \text{ é o número de ciclos da portadora de frequência } f_2 \quad (5.9)$$

Tabela 5.2 Ganhos assintóticos do sistema $\{\text{QAM-}m\}^2$, para $m = 4, 16$ e 64 .

$m = 4$			
$\frac{\Delta f}{r_s}$	$\mathfrak{R}$ [bit/s/Hz]	M	G_a [dB]
1/3	3	8	-0,5265

$m = 16$			
$\frac{\Delta f}{r_s}$	$\mathfrak{R}$ [bit/s/Hz]	M	G_a [dB]
3/5	5	32	1,7454
1/3	6	64	2,0262

$m = 64$			
$\frac{\Delta f}{r_s}$	$\mathfrak{R}$ [bit/s/Hz]	M	G_a [dB]
5/7	7	128	2,1458
1/2	8	256	3,9533
1/3	9	512	4,8845
1/5	10	1024	4,5826
1/11	11	2048	1,6108

A equação (5.6) fornece a condição para zerar a contagem do parâmetro, já que as portadoras encontram-se com a mesma fase reiteradamente a cada T_0 segundos.

O exemplo mostrado no item seguinte servirá para esclarecer mais esta questão.

5.2.7 Um Exemplo Prático

Antes de apresentar um exemplo que abrange todas as particularidades do sistema $\{QAM-m\}^2$, mostra-se uma fórmula útil para cálculos.

Combinando as equações

$$n_1 f_2 = n_2 f_1 \quad (5.10)$$

$$f_1 = f_0 - \Delta f \quad (5.11)$$

$$f_2 = f_0 + \Delta f \quad (5.12)$$

$$r_b = r_s 2^{\log_2 m} \quad (5.13)$$

Chega-se a seguinte expressão

$$\frac{r_b}{f_0} = \frac{2^{\log_2 m}}{\frac{\Delta f}{r_s}} \left(\frac{\frac{n_2}{n_1} - 1}{\frac{n_2}{n_1} + 1} \right) \quad (5.14)$$

Exemplo:

Deseja-se transmitir uma taxa de bits de informação de $r_b=100\text{kb/s}$ para uma frequência central de transmissão de $f_0=123,2\text{ kHz}$, utilizando uma constelação QAM-256 e $P_M = 10^{-6}$.

Deseja-se saber com quais parâmetros da arquitetura $\{QAM\}^2$ é possível satisfazer as condições indicadas acima, e quais seriam os ganhos obtidos (largura de banda constante e relação sinal/ruído constante) com respeito ao sistema QAM-256.

Solução:

Escolhe-se o sistema $\{\text{QAM-64}\}^2$ e assim, de acordo com a Fig. 4.6, têm-se

$$m = 64$$

$$M = 256$$

$$\Delta f/r_s = 1/2$$

$$\mathfrak{R} = 8 \text{ bit/s/Hz}$$

$$G = 3,75 \text{ dB} \quad \text{para} \quad P_M = 10^{-6}$$

Portanto a taxa de símbolo para um sistema QAM-64, será

$$r_s = \frac{r_b}{2 \log_2 m} \cong 8,333 \text{ kb/s}$$

Tem-se para o afastamento das portadoras

$$\Delta f = \frac{1}{2} r_s \cong 4,167 \text{ kHz}$$

A frequência da primeira portadora

$$f_1 = f_0 - \Delta f \cong 119,033 \text{ kHz}$$

e para a segunda portadora

$$f_2 = f_0 + \Delta f \cong 127,367 \text{ kHz}$$

Portanto para a relação do número de ciclos das portadoras, têm-se

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{f_2}{f_1} = 1,07 = \frac{107}{100}$$

Portanto cada 107 ciclos da portadora f_2 ou cada 100 ciclos da portadora f_1 , pode-se zerar a contagem do parâmetro h porque as duas portadoras possuem mesma fase. O ganho obtido com largura de banda constante é de $G = 3,75 \text{ dB}$.

Uma análise em forma similar, mas agora considerando o sistema atuando a relação sinal/ruído constante, segundo a Tabela 5.1, têm-se

$$\frac{\Delta f}{r_s} = 0,26$$

e

$$G_{\mathcal{R}} = 1,5 \text{ bit / s / Hz} \quad \text{para} \quad P_M = 10^{-6}$$

Assim, para o afastamento das portadoras tem-se

$$\Delta f = 0,26 r_s \cong 2,167 \text{ kHz}$$

As frequências das portadoras serão

$$f_1 = f_0 - \Delta f \cong 121,033 \text{ kHz}$$

$$f_2 = f_0 + \Delta f \cong 125,367 \text{ kHz}$$

A relação entre os ciclos das portadoras é

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{f_2}{f_1} = 1,036 = \frac{1036}{1000}$$

Isto indica que a cada 1036 ciclos da portadora de frequência f_2 , ou a cada 1000 ciclos da portadora de frequência f_1 , pode-se zerar o parâmetro h . Mas, esta relação entre as portadoras é um pouco crítica no aspecto de implementação prática. Uma saída para este problema é modificar ligeiramente a frequência central. Assim, se

$$f_0 = 110,5 \text{ kHz}$$

então

$$f_1 \cong 108,333 \text{ kHz}$$

$$f_2 \cong 112,667 \text{ kHz}$$

e a nova relação entre os números de ciclos das portadoras, será

$$\frac{n_2}{n_1} \cong 1,04 = \frac{104}{100}$$

que resulta uma implementação prática factível.

Nesta outra condição o ganho correspondente de eficiência espectral com relação sinal/ruído constante é de 1,5 bit/s/Hz aproximadamente.

Por outro lado, para ambos os casos examinados neste exemplo, o tempo de símbolo relacionado com o sistema QAM-M e o tempo de símbolo de uma das constelações do sistema $\{QAM-m\}^2$ ficam vinculadas pela equação (4.29) que reescreve-se em seguida

$$T_s = T_{sM} \frac{2 \log_2 m}{\log_2 M} \quad (5.15)$$

Substituindo nesta última expressão os valores correspondentes para este exemplo, têm-se

$$2T_s = 3T_{sM}$$

Isto significa que por cada 2 símbolos de um sistema QAM-64, transmite-se 3 símbolos do sistema QAM-256. Como os dois sistemas QAM-64 são transmitidos simultaneamente, no tempo $2T_s$ têm-se 24 bits. Também têm-se 24 bits num tempo $3T_{sM}$.

5.3 Comparação do Sistema $\{QAM\}^2$ com o Sistema TCM.

Escolheu-se o sistema que utiliza modulação codificada com códigos convolucionais (TCM) devido à sua utilização ampla em sistemas modernos de transmissão digital, aumentando a eficiência dos mesmos.

Pode-se comparar estes dois tipos de sistemas nos seguintes itens

1. Aspectos em comum:

Tanto o sistema $\{QAM\}^2$ como o TCM, contribuem para melhorar a eficiência sobre o sistema no qual atuam, sem modificar a largura de banda de ocupação nem alterar a taxa de informação.

2. Densidade da Constelação Transmitida:

Quando a compactação dos sinais de canal aumenta, a perturbação por ruído AWGN é maior sobre a constelação transmitida. No caso do sistema TCM, este problema é solucionado mediante a codificação, criando redundâncias para a proteção de erro.

No sistema $\{QAM\}^2$ transmite-se duas constelações, por um lado, de ordem menor e, por outro lado, independentes entre si. Isto leva o sistema $\{QAM\}^2$ a não precisar de codificação por possuir constelações menos compactas.

Expressando a situação de uma outra forma, enquanto o sistema TCM utiliza constelações de ordem maior em seu funcionamento, o sistema $\{QAM\}^2$ procura a solução nas constelações de ordem menor.

3. Variação Contínua obtida em termos de Eficiência Espectral

A eficiência espectral obtida no sistema TCM é de forma discreta e igual a potências de 2.

O sistema $\{QAM\}^2$ apresenta uma variação contínua em termos de eficiência espectral, dependendo do afastamento entre as portadoras, que é especificado pelo parâmetro $\Delta f/r_s$, isto é, pode-se preencher os lugares existentes em termos de eficiência espectral, entre os espaços deixados nos sistemas convencionais.

4. Ganho Assintótico

Nas Tabelas 2.4 e 5.2 mostram-se os ganhos assintóticos dos sistemas TCM e $\{QAM\}^2$, respectivamente, para o caso de constelações QAM.

Para sistemas TCM que utilizam até 32 estados os ganhos assintóticos são da ordem daqueles obtidos pelo sistema $\{QAM\}^2$. Mas são para diferentes constelações.

Observa-se que, para o sistema TCM, o ganho assintótico aumenta quando cresce o número de estados juntamente com o grau de complexidade do sistema. Assim obtêm-se o maior ganho para 256 estados.

5. Complexidade de Implementação

O sistema TCM é mais complexo que o sistema $\{QAM\}^2$ devido ao seu funcionamento sequencial-combinacional. Algoritmos de decodificação devem ser usados a fim de estimar a sequência transmitida.

Embora o sistema $\{QAM\}^2$ apresente a necessidade de sincronização, ele é menos complexo que o sistema com modulação codificada.

5.4 Sugestões para Futuras Pesquisas

Este trabalho certamente abre novas alternativas para a transmissão digital. Por isso, numerosas possibilidades neste tema podem ser analisadas e desenvolvidas. cremos que

com esta contribuição estamos introduzindo bases suficientes para encaminhar futuras pesquisas.

Nossas sugestões são as seguintes:

1. Que melhorias em termos de ganhos de relação sinal/ruído e/ou de eficiência espectral poderia se obter combinando o funcionamento do $\{QAM\}^2$ com o TCM num mesmo sistema?
2. O conceito de superposição pode ser estendido para um número finito de constelações, configurando o sistema $\{QAM\}^\mu$, onde μ é um inteiro positivo? Como deveria ser o sistema e que vantagens poderiam resultar?
3. Um estudo da sensibilidade do sistema $\{QAM\}^2$ em relação à rotação de fase do sinal transmitido.
4. Com respeito a dificuldades de implementações práticas, poderiam se desenvolver os desfasadores de 90° necessários ao sistema $\{QAM\}^2$, assim como o sistema de sincronização do mesmo.

APÊNDICE A

SOLUÇÃO DAS INTEGRAIS

Neste apêndice apresenta-se a solução de dois tipos de integrais que são utilizadas no transcurso deste trabalho. Elas são:

$$G_1 = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} f(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (A.1)$$

$$G_2 = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} f(t_2 - t_1) p(t_2 + t_1) dt_1 dt_2 \quad (A.2)$$

onde as funções $f(t_2 - t_1)$ e $p(t_2 + t_1)$ estão definidas nas regiões de integração de suas variáveis.

1) Solução da Integral G_1 :

A função $f(t_2 - t_1)$ depende unicamente da diferença entre as variáveis de integração t_1 e t_2 . Portanto, na reta dada por $\tau = t_2 - t_1$ a função $f(t_2 - t_1)$ é constante.

Na Fig. A.1 mostra-se a região de integração definida pela expressão (A.1).

Pretende-se substituir a integral dupla, dada pela equação (A.1), por uma integral simples [12], dada na variável τ . Assim, de acordo com a Fig. A.1, na reta dada pela equação $\tau = t_2 - t_1$ a variável τ percorre a região de integração para valores desde $\tau = -T_s$ até $\tau = T_s$.

A integração em τ será realizada sobre o eixo ξ , perpendicular à reta $\tau = t_2 - t_1$, que é o eixo onde a função $f(\tau)$ possui variação.

Define-se um diferencial de área, para a região de integração, como:

$$dA = \ell d\xi \quad (A.3)$$

$$\ell = \sqrt{2}(T_s - |\tau|) \quad (A.4)$$

$$d\xi = \frac{d\tau}{\sqrt{2}} \quad (A.5)$$

Deste modo, a integral G_1 dada pela expressão (A.1) fica, depois das substituições:

onde

$$G_1 = \int_{\tau} f(\tau) dA \quad (A.6)$$

$$G_1 = \int_{-T_s}^{T_s} (T_s - |\tau|) f(\tau) d\tau \quad (A.7)$$

2) Solução da Integral G_2 :

Define-se uma nova variável $\lambda = t_2 + t_1$ e conjuntamente com a variável $\tau = t_2 - t_1$, realiza-se uma transformação entre o plano das variáveis t_1 e t_2 e o plano das variáveis τ e λ , como mostrado na Fig. A2.

As equações desta transformação mapeiam a região de integração 1-2-3-4 do plano (t_1, t_2) , na nova região de integração 1-2-3-4 mas agora no plano (τ, λ) , como indicado na Fig. A.2(b).

Observa-se que os diferenciais de área destas duas regiões ficam vinculados da seguinte forma:

$$dA_{t_1, t_2} = \frac{1}{2} dA_{\tau, \lambda} \quad (A.8)$$

Assim, a equação (A.2), pode ser expressa:

$$G_2 = \int_{A_{t_1, t_2}} f(t_2 - t_1) p(t_2 + t_1) dA_{t_1, t_2} = \frac{1}{2} \int_{A_{\tau, \lambda}} f(\tau) p(\lambda) dA_{\tau, \lambda} \quad (A.9)$$

Identifica-se a integral (A.9) como uma integral de área (ou integral dupla [28]), cuja solução é mostrada a seguir:

Para a função $f(\tau) \cdot p(\lambda)$ definida na região $A_{\tau, \lambda}$ do plano (τ, λ) , a integral de $f(\tau) p(\lambda)$ em $A_{\tau, \lambda}$ é dada da seguinte forma:

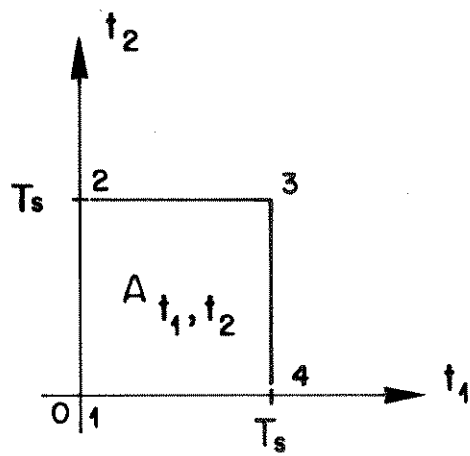
$$G_2 = \frac{1}{2} \int_{\tau=-T_s}^{\tau=T_s} f(\tau) \left\{ \int_{\lambda=f_1(\tau)}^{\lambda=f_2(\tau)} p(\lambda) d\lambda \right\} d\tau \quad (A.10)$$

onde:

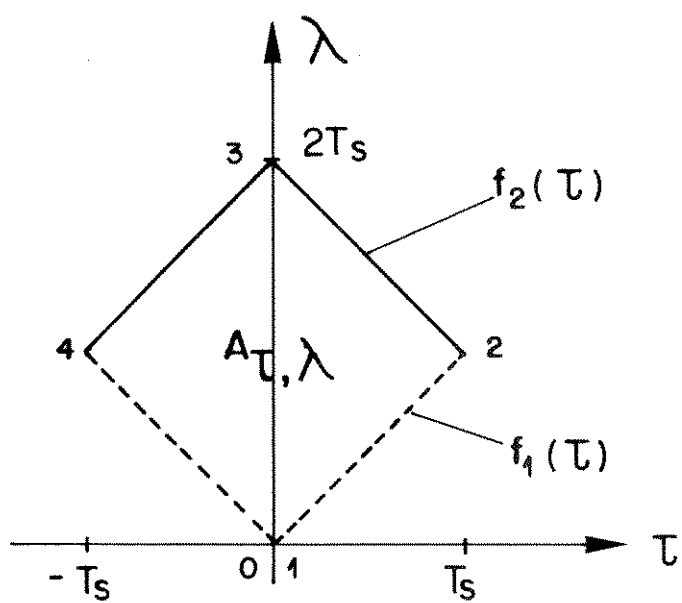
$f_1(\tau)$: é a equação da fronteira 4-1-2 da região $A_{\tau, \lambda}$ da Fig. A.2(b)

e

$f_2(\tau)$: é a equação da fronteira 4-3-2 da região $A_{\tau, \lambda}$ da Fig. A.2(b)



(a)



(b)

Fig. A.2 Região de integração.

a) No plano (t_1, t_2) .

b) No plano (τ, λ) .

Observando a Fig. A.2(b), as funções $f_1(\tau)$ e $f_2(\tau)$, serão:

$$f_1(\tau) = |\tau| \quad (\text{A.11})$$

e

$$f_2(\tau) = 2T_s - |\tau| \quad (\text{A.12})$$

Assim, substituindo as expressões (A.11) e (A.12) na equação (A.10), a integral em questão fica:

$$G_2 = \frac{1}{2} \int_{\tau=-T_s}^{\tau=T_s} f(\tau) \left\{ \int_{|\tau|}^{2T_s-|\tau|} p(\lambda) d\lambda \right\} d\tau \quad (\text{A.13})$$

Que é uma integral de mais fácil resolução que a integral original dada pela expressão (A.2).

APÊNDICE B

SOLUÇÃO PARTICULAR DAS INTEGRAIS

Neste apêndice apresentam-se as soluções das seguintes integrais:

$$I_1 = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a(t_2 - t_1) \cos b(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.1})$$

$$I_2 = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a(t_2 - t_1) \text{sen } b(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.2})$$

$$I_3 = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a(t_2 - t_1) \cos b(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.3})$$

$$I_4 = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a(t_2 - t_1) \text{sen } b(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.4})$$

$$I_5 = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a(t_2 - t_1) \cos [b(t_2 + t_1) + \phi]}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.5})$$

$$I_6 = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a(t_2 - t_1) \text{sen } [b(t_2 + t_1) + \phi]}{t_2 - t_1} dt_1 dt_2 \quad (\text{B.6})$$

para valores reais de a, b, T_s e ϕ .

1 - Solução da Integral I_1 :

Esta integral corresponde ao tipo G_1 dada pela expressão (A.1), cuja solução intermediária foi obtida na equação (A.7). Identifica-se neste caso que:

$$f(\tau) = \frac{\text{sen } a\tau \cos b\tau}{\tau} \quad (\text{B.7})$$

Substituindo esta última expressão na equação (A.7), tem-se:

$$I_1 = \int_{-T_s}^{T_s} (T_s - |\tau|) \frac{\text{sen} a \tau \cos b \tau}{\tau} d\tau \quad (\text{B.8})$$

Mas, como a função $f(\tau)$ é função par, para a equação (B.8), tem-se:

$$I_1 = 2 \int_0^{T_s} (T_s - \tau) \frac{\text{sen} a \tau \cos b \tau}{\tau} d\tau \quad (\text{B.9})$$

Esta última integral pode ser decomposta em duas partes, da seguinte forma:

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \quad (\text{B.10})$$

onde:

$$I_{11} = 2 T_s \int_0^{T_s} \frac{\text{sen} a \tau \cos b \tau}{\tau} d\tau \quad (\text{B.11})$$

$$I_{12} = -2 \int_0^{T_s} \text{sen} a \tau \cos b \tau d\tau \quad (\text{B.12})$$

Solução de I_{11} :

Substituindo na expressão (B.11) a seguinte função trigonométrica:

$$\text{sen} A \cos B = \frac{1}{2} \{ \text{sen}(A + B) + \text{sen}(A - B) \} \quad (\text{B.13})$$

tem-se:

$$I_{11} = T_s \left\{ \int_0^{T_s} \frac{\text{sen}(a + b) \tau}{\tau} d\tau + \int_0^{T_s} \frac{\text{sen}(a - b) \tau}{\tau} d\tau \right\} \quad (\text{B.14})$$

$$I_{11} = T_s \left\{ \int_0^{(a+b)T_s} \frac{\text{sen} v}{v} dv + \int_0^{(a-b)T_s} \frac{\text{sen} \mu}{\mu} d\mu \right\} \quad (\text{B.15})$$

Por outro lado, sabe-se que [28]:

$$S_i(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \theta^{2i+1}}{(2i+1)!(2i+1)} \quad (\text{B.16})$$

Substituindo esta última expressão na equação (B.15), resulta:

$$I_{11} = T_s \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!(2i+1)} \left\{ [(a+b)T_s]^{2i+1} + [(a-b)T_s]^{2i+1} \right\} \quad (\text{B.17})$$

Se nesta última expressão colocar-se em evidência a T_s , obtém-se:

$$I_{11} = aT_s^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!(2i+1)} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a}\right) [(a+b)T_s]^{2i} + \left(1 - \frac{b}{a}\right) [(a-b)T_s]^{2i} \right\} \quad (\text{B.18})$$

Solução de I_{12} :

Substituindo a expressão trigonométrica (B.13) na expressão (B.12), tem-se:

$$I_{12} = - \int_0^{T_s} \sin(a+b)\tau \, d\tau - \int_0^{T_s} \sin(a-b)\tau \, d\tau \quad (\text{B.19})$$

Por outro lado, sabe-se que:

$$\sin \theta = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \theta^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad (\text{B.20})$$

Substituindo esta última expressão na (B.19), resulta:

$$I_{12} = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \left\{ [(a+b)^{2i+1} + (a-b)^{2i+1}] \int_0^{T_s} \tau^{2i+1} d\tau \right\} \quad (\text{B.21})$$

Resolvendo a integral da expressão (B.21) e pondo em evidência a T_s^2 , obtém-se:

$$I_{12} = -aT_s^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!(2i+2)} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a}\right) [(a+b)T_s]^{2i} + \left(1 - \frac{b}{a}\right) [(a-b)T_s]^{2i} \right\} \quad (\text{B.22})$$

Somando as expressões (B.18) e (B.22), resulta a solução da integral I_1 , como:

$$I_1 = aT_s^2 I(a, b) \quad (\text{B.23})$$

onde:

$$I(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!(2i+1)(2i+2)} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a}\right) [(a+b)T_s]^{2i} + \left(1 - \frac{b}{a}\right) [(a-b)T_s]^{2i} \right\} \quad (\text{B.24})$$

No apêndice D lista-se o programa computacional para avaliar a série de potências $I(a, b)$ dada na expressão (B.24). Na Tabela B.1 mostram-se avaliações numéricas de $I(a, b)$ para valores de $\Delta f/r_s$ a serem utilizados, onde:

$$a = \pi r_s \left(1 + \frac{\Delta f}{r_s} \right) \quad (\text{B.25})$$

$$b = \pi r_s \left(\frac{\Delta f}{r_s} \right) \quad (\text{B.26})$$

2 - Solução da Integral I_2 :

Esta integral corresponde também ao tipo G_1 da expressão (A.1), cuja solução intermediária encontra-se na equação (A.7). Neste caso, tem-se:

$$f(\tau) = \frac{\text{sen} \tau \text{ sen} b \tau}{\tau} \quad (\text{B.27})$$

assim a integral I_2 , fica:

$$I_2 = \int_{-T_s}^{T_s} (T_s - |\tau|) \frac{\text{sen} \tau \text{ sen} b \tau}{\tau} d\tau \quad (\text{B.28})$$

Aqui é mais imediato:

A equação (B.28) mostra que temos duas funções par $\left[(T_s - |\tau|) \right]$ e $\frac{\text{sen} \tau}{\tau}$ multiplicando uma função ímpar $[\text{sen} \tau]$ numa integral que vai de $-T_s$ até $+T_s$. Logo, esta integral é nula.

Tabela B.1 Avaliação das séries de potências $I(a,b)$, $H(a,b)$, $J(a,b)$ e da relação

$r(a,b)$ para diversos valores do parâmetro $\frac{\Delta f}{r_s}$.

$\frac{\Delta f}{r_s}$	$I(a,b)$	$H(a,b)$	$J(a,b)$	$r(a,b)$
1	0,4262	0,5613	0,1849	∞
11/13	0,4578	0,5996	0,1658	1,9996
7/9	0,4739	0,6141	0,1594	1,6965
5/7	0,4903	0,6274	0,1560	1,5335
3/5	0,5241	0,6562	0,1582	1,3502
1/2	0,5588	0,6939	0,1675	1,2417
5/11	0,5763	0,7171	0,1726	1,2012
7/17	0,5936	0,7430	0,1769	1,1669
1/3	0,6273	0,8020	0,1806	1,1124
5/19	0,6590	0,8676	0,1749	1,0722
3/13	0,6739	0,9016	0,1681	1,0564
1/5	0,6880	0,9359	0,1585	1,0430
1/7	0,7141	1,0034	0,1315	1,0226
1/11	0,7371	1,0675	0,0950	1,0094
1/15	0,7474	1,0977	0,0736	1,0051
1/23	0,7569	1,1264	0,0506	1,0022
0	0,7737	1,1790	0	$-\infty$

3 - Solução da Integral I_3 :

Esta integral corresponde ao tipo G_2 apresentada na expressão (A.2). A solução parcial encontra-se na equação (A.13) que reescrita de um outro modo, resulta:

$$I_3 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-T_s}^0 f(\tau) \int_{-\tau}^{2T_s+\tau} p(\lambda) d\lambda + \int_0^{T_s} f(\tau) \int_{\tau}^{2T_s-\tau} p(\lambda) d\lambda \right\} d\tau \quad (B.29)$$

onde:

$$f(\tau) = \frac{\text{sen } a\tau}{\tau} \quad (B.30)$$

$$p(\lambda) = \cos b\lambda \quad (B.31)$$

A solução das integrais na variável λ serão:

$$\int_{-\tau}^{2T_s+\tau} \cos b\lambda d\lambda = 2T_s [K_1 \cos b\tau + K_2' \text{sen} b\tau] \quad (B.32)$$

e

$$\int_{\tau}^{2T_s-\tau} \cos b\lambda d\lambda = 2T_s [K_1 \cos b\tau - K_2' \text{sen} b\tau] \quad (B.33)$$

onde:

$$K_1 = \frac{\text{sen } 2bT_s}{2bT_s} \quad (B.34)$$

$$K_2' = \frac{\cos 2bT_s + 1}{2bT_s} \quad (B.35)$$

Substituindo as expressões (B.30-35) na equação (B.29), tem-se:

$$I_3 = 2T_s \left\{ K_1 \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a\tau \cos b\tau}{\tau} d\tau - K_2' \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a\tau \text{sen } b\tau}{\tau} d\tau \right\} \quad (B.36)$$

Mas, a solução da primeira integral da expressão (B.36) foi achada na equação (B.11) e (B.18), que agora chamaremos:

$$\int_0^{T_s} \frac{\text{sen} a\tau \cos b\tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{2T_s} a T_s^2 H(a, b) \quad (\text{B.37})$$

onde:

$$H(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!(2i+1)!} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a}\right) [(a+b)T_s]^{2i} + \left(1 - \frac{b}{a}\right) [(a-b)T_s]^{2i} \right\} \quad (\text{B.38})$$

Só resta achar a solução da segunda integral da expressão (B.36) que, usando a seguinte propriedade trigonométrica

$$\text{sen} A\tau \text{sen} B\tau = \frac{1}{2} \{ \cos(A-B)\tau - \cos(A+B)\tau \} \quad (\text{B.39})$$

resulta:

$$\int_0^{T_s} \frac{\text{sen} a\tau \text{sen} b\tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{T_s} \frac{\cos(a-b)\tau}{\tau} d\tau - \int_0^{T_s} \frac{\cos(a+b)\tau}{\tau} d\tau \right\} \quad (\text{B.40})$$

Mas, sabendo que:

$$\int \frac{\cos Ax}{x} dx = \log_n x - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+2)!(2i+2)!} (Ax)^{2i+2} \quad (\text{B.41})$$

a expressão (B.40) fica:

$$\int_0^{T_s} \frac{\text{sen} a\tau \text{sen} b\tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+2)!(2i+2)!} \left\{ [(a+b)T_s]^{2i+2} - [(a-b)T_s]^{2i+2} \right\} \quad (\text{B.42})$$

Colocando em evidência aT_s nesta última expressão, resulta:

$$\int_0^{T_s} \frac{\text{sen} a\tau \text{sen} b\tau}{\tau} d\tau = \frac{aT_s}{2} J(a, b) \quad (\text{B.43})$$

onde:

$$J(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+2)!(2i+2)} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a}\right) [(a+b)T_s]^{2i+1} - \left(1 - \frac{b}{a}\right) [(a-b)T_s]^{2i+1} \right\} \quad (B.44)$$

Substituindo as expressões (B.37), (B.38), (B.43) e (B.44) na equação (B.36) obtemos:

$$I_3 = aT_s^2 [K_1 H(a, b) - K_2' J(a, b)] \quad (B.45)$$

Nesta última expressão, colocando em evidência $K_1 I(a, b)$, resulta:

$$I_3 = aK_1 T_s^2 I(a, b) \left[\frac{H(a, b)}{I(a, b)} - \frac{K_2'}{K_1} \frac{J(a, b)}{I(a, b)} \right] \quad (B.46)$$

e chamando:

$$r(a, b) = \frac{H(a, b)}{I(a, b)} - \frac{K_2'}{K_1} \frac{J(a, b)}{I(a, b)} \quad (B.47)$$

obtem-se para a integral I_3 :

$$I_3 = aK_1 T_s^2 I(a, b) r(a, b) \quad (B.48)$$

As séries de potências $H(a, b)$, $J(a, b)$ e a relação $r(a, b)$, acham-se avaliadas na Tabela B.1 para diversos valores do parâmetro a e b , segundo as equações (B.25) e (B.26) respectivamente.

Os programas computacionais utilizados para $H(a, b)$ e $J(a, b)$ encontram-se no apêndice D.

4 - Solução da Integral I_4 :

A solução desta integral é igual à obtida na expressão (B.29) que, para este caso, pode-se escrever:

$$I_4 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-T_s}^0 f(\tau) \int_{-\tau}^{2T_s+\tau} p(\lambda) d\lambda + \int_0^{T_s} f(\tau) \int_{\tau}^{2T_s-\tau} p(\lambda) d\lambda \right\} d\tau \quad (B.49)$$

onde:

$$f(\tau) = \frac{\text{sen } a\tau}{\tau} \quad (\text{B.50})$$

$$p(\lambda) = \text{sen } b\lambda \quad (\text{B.51})$$

Trabalhando com as integrais na variável λ obtem-se:

$$\int_{-\tau}^{2T_s+\tau} \text{sen } b\lambda d\lambda = 2T_s[-K_2 \cos b\tau + K_1 \text{sen } b\tau] \quad (\text{B.52})$$

e:

$$\int_{\tau}^{2T_s-\tau} \text{sen } b\lambda d\lambda = 2T_s[-K_2 \cos b\tau - K_1 \text{sen } b\tau] \quad (\text{B.53})$$

onde:

$$K_2 = \frac{\cos 2bT_s - 1}{2bT_s} \quad (\text{B.54})$$

Substituindo as expressões (B.50-54) na equação (B.49), resulta:

$$I_4 = 2T_s \left\{ -K_2 \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a\tau \cos b\tau}{\tau} d\tau - K_1 \int_0^{T_s} \frac{\text{sen } a\tau \text{sen } b\tau}{\tau} d\tau \right\} \quad (\text{B.55})$$

Mas as soluções das integrais que fazem parte da equação (B.55) já foram calculadas no item anterior, resultando neste caso:

$$I_4 = aT_s^2 [-K_2 H(a, b) - K_1 J(a, b)] \quad (\text{B.56})$$

Pondo em evidência $-K_2 I(a, b)$ nesta última expressão:

$$I_4 = -aK_2 T_s^2 I(a, b) \left[\frac{H(a, b)}{I(a, b)} + \frac{K_1}{K_2} \frac{J(a, b)}{I(a, b)} \right] \quad (\text{B.57})$$

mas, como:

$$\frac{K_1}{K_2} = -\frac{K_2'}{K_1} = -\frac{\cos bT_s}{\sin bT_s} \quad (\text{B.58})$$

A solução da integral I_4 , fica:

$$I_4 = -aK_2T_s^2 I(a,b) r(a,b) \quad (\text{B.59})$$

5 - Solução da Integral I_5 :

Esta integral pode ser escrita, segundo o apêndice A, da seguinte forma:

$$I_5 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-T_s}^0 f(\tau) \int_{-\tau}^{2T_s+\tau} p(\lambda) d\lambda + \int_0^{T_s} f(\tau) \int_{\tau}^{2T_s-\tau} p(\lambda) d\lambda \right\} d\tau \quad (\text{B.60})$$

onde:

$$f(\tau) = \frac{\sin a\tau}{\tau} \quad (\text{B.61})$$

$$p(\lambda) = \cos[b\lambda + \phi] \quad (\text{B.62})$$

Usando a seguinte igualdade trigonométrica:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (\text{B.63})$$

a expressão (B.62), fica:

$$p(\lambda) = \cos b\lambda \cos \phi - \sin b\lambda \sin \phi \quad (\text{B.64})$$

Resolvendo as integrais na variável λ , da expressão (B.60) obtem-se:

$$\int_{-\tau}^{2T_s+\tau} \cos[b\lambda + \phi] d\lambda = 2T_s[(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos b\tau + (K_2' \cos \phi - K_1 \sin \phi) \sin b\tau] \quad (\text{B.65})$$

e:

$$\int_{\tau}^{2T_s-\tau} \cos[b\lambda + \phi] d\lambda = 2T_s[(K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \cos b\tau + (-K_2' \cos \phi + K_1 \sin \phi) \sin b\tau] \quad (\text{B.66})$$

onde as soluções dadas em (B.32), (B.33), (B.52) e (B.53) são utilizadas novamente aqui.

Substituindo as expressões (B.61-66) na equação (B.60), resulta:

$$I_5 = 2T_s \left\{ (K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) \int_0^{T_s} \frac{\sin a\tau \cos b\tau}{\tau} d\tau - (K_2' \cos \phi - K_1 \sin \phi) \int_0^{T_s} \frac{\sin a\tau \sin b\tau}{\tau} d\tau \right\} \quad (B.67)$$

As integrais na variável τ achadas nos itens anteriores, conduzem ao seguinte resultado:

$$I_5 = aT_s^2 \left\{ (K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi) H(a, b) - (K_2' \cos \phi - K_1 \sin \phi) J(a, b) \right\} \quad (B.68)$$

Depois de isolar $I(a, b)$ na última expressão, obtemos:

$$I_5 = aT_s^2 I(a, b) \left\{ K_1 \cos \phi \left[\frac{H(a, b)}{I(a, b)} - \frac{K_2'}{K_1} \frac{J(a, b)}{I(a, b)} \right] + K_2 \sin \phi \left[\frac{H(a, b)}{I(a, b)} + \frac{K_1}{K_2} \frac{J(a, b)}{I(a, b)} \right] \right\} \quad (B.69)$$

Finalmente, a solução da integral I_5 , pode ser escrita, como segue:

$$I_5 = aT_s^2 I(a, b) r(a, b) [K_1 \cos \phi + K_2 \sin \phi] \quad (B.70)$$

6 - Solução da Integral I_6 :

A integral I_6 pode ser escrita como segue:

$$I_6 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-T_s}^0 f(\tau) \int_{-\tau}^{2T_s+\tau} p(\lambda) d\lambda + \int_0^{T_s} f(\tau) \int_{\tau}^{2T_s-\tau} p(\lambda) d\lambda \right\} d\tau \quad (B.71)$$

onde:

$$f(\tau) = \frac{\sin a\tau}{\tau} \quad (B.72)$$

$$p(\lambda) = \sin[b\lambda + \phi] \quad (B.73)$$

e utilizando a seguinte propriedade trigonométrica:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (\text{B.74})$$

a expressão (B.73) fica:

$$p(\lambda) = \sin b\lambda \cos \phi + \cos b\lambda \sin \phi \quad (\text{B.75})$$

Em seguida resolvem-se as duas integrais na variável λ , da expressão (B.71):

$$\int_{-\tau}^{2T_s+\tau} \sin[b\lambda + \phi] d\lambda = 2T_s [(-K_2 \cos \phi + K_1 \sin \phi) \cos b\tau + (K_1 \cos \phi + K_2' \sin \phi) \sin b\tau] \quad (\text{B.76})$$

e:

$$\int_{-\tau}^{2T_s-\tau} \sin[b\lambda + \phi] d\lambda = 2T_s [(-K_2 \cos \phi + K_1 \sin \phi) \cos b\tau - (K_1 \cos \phi + K_2' \sin \phi) \sin b\tau] \quad (\text{B.77})$$

Substituindo agora as equações (B.72-77) na equação (B.71), resulta:

$$I_6 = 2T_s \left\{ (-K_2 \cos \phi + K_1 \sin \phi) \int_0^{T_s} \frac{\sin a\tau \cos b\tau}{\tau} d\tau - (K_1 \cos \phi + K_2' \sin \phi) \int_0^{T_s} \frac{\sin a\tau \sin b\tau}{\tau} d\tau \right\} \quad (\text{B.78})$$

Mas, as integrais na variável τ desta última expressão foram solucionadas nos item anteriores, resultando neste caso:

$$I_6 = aT_s^2 \left[(-K_2 \cos \phi + K_1 \sin \phi) H(a, b) - (K_1 \cos \phi + K_2' \sin \phi) J(a, b) \right] \quad (\text{B.79})$$

Isolando nesta última expressão a série de potências $I(a, b)$, obtém-se:

$$I_6 = aT_s^2 I(a, b) \left\{ -K_2 \cos \phi \left[\frac{H(a, b)}{I(a, b)} + \frac{K_1}{K_2} \frac{J(a, b)}{I(a, b)} \right] + K_1 \sin \phi \left[\frac{H(a, b)}{I(a, b)} - \frac{K_2'}{K_1} \frac{J(a, b)}{I(a, b)} \right] \right\} \quad (\text{B.80})$$

Assim, a solução da integral I_6 , resulta:

$$I_6 = aT_s^2 I(a, b) r(a, b) [-K_2 \cos \phi + K_1 \sin \phi] \quad (\text{B.81})$$

Os resultados numéricos das integrais I_1 , I_3 e I_4 obtidos pelo software “MATHEMATICA V2.2” via estação de trabalho “SUN”, resultaram numericamente iguais aos obtidos neste trabalho.

APÊNDICE C

TRANSFORMADA DE HILBERT

A transformada de Hilbert de uma função real $x(t)$ sobre o intervalo $-\infty < t < \infty$ é definida como [27]:

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (C.1)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t+\beta)}{\beta} d\beta \quad (C.2)$$

onde $*$ indica a operação convolução.

Também, o processo inverso é definido como:

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(t+\beta)}{\beta} d\beta \quad (C.3)$$

Em seguida mostram-se algumas propriedades:

a) Se $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$ (C.4)

então $\hat{x}(t) = \sin(\omega t + \phi)$ (C.5)

b) Se $x(t) = \sin(\omega t + \phi)$ (C.6)

então $\hat{x}(t) = -\cos(\omega t + \phi)$ (C.7)

c) A transformada de Fourier da função $x(t)$ é:

$$\mathfrak{F}\{\hat{x}(t)\} = -jX(f)\text{sign}(f) \quad (C.8)$$

onde:

$$\text{sign}(f) = \begin{cases} 1; & \text{se } f > 0 \\ 0; & \text{se } f = 0 \\ -1; & \text{se } f < 0 \end{cases} \quad (C.9)$$

d) A transformada da transformada de Hilbert da função $x(t)$ é:

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t) \quad (C.10)$$

e) Se o sinal $a(t)$ possui a transformada de Fourier $A(f)$ de faixa limitada, isto é:

$$A(f) \begin{cases} \neq 0 & \text{para } |f| \leq W \\ = 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

então:

$$\hat{x}(t) = [a(t) \cos \omega_c t] = a(t) \cos \omega_c t \quad (\text{C.12})$$

$$\hat{y}(t) = [a(t) \sin \omega_c t] = -a(t) \sin \omega_c t \quad (\text{C.13})$$

onde:

$$f_c \gg W \quad (\text{C.14})$$

Prova da expressão (C.12):

Reescrevendo a equação (C.12) têm-se:

$$x(t) = \frac{a(t)}{2} e^{j\omega_c t} + \frac{a(t)}{2} e^{-j\omega_c t} \quad (\text{C.15})$$

Aplicando a transformada de Fourier a esta última expressão:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t)}{2} e^{-j(\omega - \omega_c)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t)}{2} e^{-j(\omega + \omega_c)t} dt \quad (\text{C.16})$$

$$= \begin{cases} \frac{A(f - f_c)}{2} & \text{para } f > 0 \\ \frac{A(f + f_c)}{2} & \text{para } f < 0 \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

Usando a propriedade (c), neste caso, resulta:

$$\mathfrak{F}\{\hat{x}(t)\} = \begin{cases} -\frac{1}{2}jA(f - f_c) & \text{para } f > 0 \\ \frac{1}{2}jA(f + f_c) & \text{para } f < 0 \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Aplicando agora, a antitransformada de Fourier na expressão (C.18), obtem-se:

$$\hat{x}(t) = \int_{f_c-W}^{f_c+W} \left[-\frac{1}{2} jA(f-f_c) \right] e^{j\omega t} df + \int_{-f_c-W}^{-f_c+W} \left[\frac{1}{2} jA(f+f_c) \right] e^{j\omega t} df \quad (C.19)$$

Realizando um intercâmbio de variável para a primeira integral e ordenando, tem-se:

$$\hat{x}(t) = \left[\frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} \right] \int_{-W}^W A(u) e^{2\pi i u t} du \quad (C.20)$$

Mas, a integral desta última expressão é a transformada inversa de Fourier de $A(f)$.

Logo:

$$\hat{x}(t) = a(t) \text{sen} \omega_c t \quad \text{cqd.}$$

Da mesma forma prova-se a expressão (C.13).

Segundo a propriedade mostrada em (d), tem-se para a expressão (C.12):

$$\wedge \\ [a(t) \text{sen} \omega_c t] = -a(t) \cos \omega_c t \quad (C.21)$$

f) Seja o processo estocástico de faixa estreita:

$$u(t) = x(t) \cos \omega_c t - y(t) \text{sen} \omega_c t \quad (C.22)$$

onde as densidades espectrais de $x(t)$ e $y(t)$ existem somente dentro da banda de passagem; então a transformada de Hilbert de $u(t)$ resulta:

$$\hat{u}(t) = x(t) \text{sen} \omega_c t + y(t) \cos \omega_c t \quad (C.23)$$

que pode ser demonstrado mediante a propriedade (e).

APÊNDICE D

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

Os programas computacionais listados neste apêndice foram escritos na linguagem BASIC e executados num computador de bolso [29], SHARP EL-5500 III.

a) O programa computacional utilizado para avaliar as séries de potências $I(a,b)$, $H(a,b)$ e $J(a,b)$ dadas pela expressões (B.24), (B.38) e (B.44) respectivamente, está listado na Tabela D.1.

Neste trabalho utilizou-se 17 termos para as séries de potências, fornecendo assim uma precisão de 8 dígitos decimais.

c) A função cauda definida por:

$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-z^2/2} dz \quad (D.1)$$

é a integral à direita, desde $z=y$ até $z=\infty$, da função Distribuição Normal ou Distribuição de Gauss [11], definida como:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-z^2/2} dz \quad (D.2)$$

Se $y \gg 1$ ($y \geq 4$), a função cauda $Q(y)$, pode ser aproximada por:

$$Q(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad (D.3)$$

O programa computacional para calcular o valor de y da equação (D.3), utilizando o método iterativo de Newton-Raphson [30], é listado na Tabela D.2. Neste programa utilizou-se os seguintes parâmetros:

$$y_0 = 4 \quad (D.4)$$

$$\text{aproxim.} = 1E-10 \quad (D.5)$$

Na situação em que a variável $y < 4$, não podendo-se utilizar a aproximação dada pela expressão (D.3), utilizou-se tabelas estatísticas de Distribuição Normal [28] com o programa para interpolação linear listado na Tabela D.3.

Tabela D.1 Programa computacional para as séries de potências $I(a,b)$, $H(a,b)$ e $J(a,b)$.

```

1950: PRINT "Iterações Máximas=34"
1960: CLEAR:INPUT "Iterações=";C:D=-1:F=0
1970: INPUT "Ts=";T
1980: INPUT "a=";A
1990: INPUT "b=";B
2000: INPUT "Integral?I,H o J = ";P$
2010: IF P$<>"I" AND P$<>"H" AND P$<>"J" THEN 2000
2020: INPUT "Mostra?SoN= ";G$
2030: IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN 2020
2040: FOR I=0 TO C
2050: D=-D
2060: IF P$ = "J" THEN LET K=1 : GOTO 2080
2070: K=0
2080:E=(EXP((2*I+K)*LN(T*ABS(A+B))))*(1+B/A)
2090: IF A=B THEN LET H=0 : GOTO 2110
2100: H=(EXP((2*I+K)*LN(T*ABS(A-B))))*(1-B/A)
2110: IF P$="J" THEN LET K=-1:GOTO 2130
2120: K=1
2130: E=E+K*H
2140: IF P$="I" THEN LET U=(2*I+1) *(2*I+2)*FACT(2*I+1)
2150:IF PS="H"THEN LET U=(2*I+1)*FACT(2*I+1)
2160: IF P$="J" THEN LET U=(2*I+2)*FACT(2*I+2)
2170: E=E*D/U
2180: IF G$="N" THEN 2200
2190: PRINT P$;I; " = "; E
2200: F=F+E
2210: NEXT I
2220: PRINT P$; "(a,b)"; F:GOTO 1960

```

Tabela D.2 Programa computacional para a função $Q(y)$.

```
890: CLEAR: PRINT "Função Q(y)"
900: INPUT "Q(y)= ";A,"y0=";B,"aproxim.=";C
910: D=EXP(-B*B/2): E=SQR(2*PI)
920: F=A-(D/(E*B))
930: IF C<ABS F THEN 960
940: PRINT "y=";B
950: END
960: D=(D/E)*(1+1/B*B)
970: B=B-(F/D)
980: GOTO 910
```

Tabela D.3 Programa computacional para interpolação linear.

```
1720: CLEAR: PRINT "Interpolação Px"
1730: INPUT "Ps=";A
1740: INPUT "ys=";C
1750: INPUT "Pi=";B
1760: INPUT "yi=";D
1770: INPUT "Px=";E
1780: F=C-(C-D)*(A-E)/(A-B)
1790: PRINT "yx=";F
1800: GOTO 1720
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ungerboeck, G., "Channel Coding with Multilevel Phase Signals", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-28, nº 1, pp. 55-67, Janeiro 1982.
- [2] Ungerboeck, G., "Trellis - Coded Modulation with Redundant Signals Sets, Part I: Introduction", *IEEE Communications Magazine*, vol. 25, nº 2, pp. 5-11, Fevereiro 1987.
- [3] Ungerboeck, G., "Trellis - Coded Modulation with Redundant Signals Sets, Part II: State of the Art", *IEEE Communications Magazine*, vol. 25, nº 2, pp. 12-21, Fevereiro 1987.
- [4] Liskov, N. e Curtis, R., "Performance of Coherent Phase and Amplitude Digital Modulations with Carrier Recovery Noise", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-35, nº 9, pp. 972-976, Setembro 1987.
- [5] Benedetto, S. e Poggiolini, P., "Performance Evaluation of Multilevel Polarization Shift Keying Modulation Schemes", *Electronics Letters*, vol. 26, nº 4, pp. 244-246, Fevereiro 1990.
- [6] Betti, S., Curti, F., de Marchis, G. e Iannone E., "A Novel Multilevel Coherent Optical System: 4 - Quadrature Signaling", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 9, nº 4, pp. 514-523, Abril 1991.
- [7] Cusani, R., Iannone E., Salonic, A.M. e Todaro, M., "An Efficient Multilevel Coherent Optical System: M-4Q-QAM", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 10, nº 6, pp. 777-786, Junho 1992.
- [8] Shara, D. e Birdsall, T.G., "Quadrature - Quadrature Phase-Shift Keying", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 37, nº 5, pp. 437-448, Maio 1989.
- [9] Proakis, J.G., *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1989.
- [10] Schwartz, M., Bennett, W.R. e Stein, S., *Communication System and Techniques*, McGraw-Hill, 1966.

- [11] Feher, K., *Digital Communications Satellite/Earth Station Engineering*, Prentice-Hall, 1983.
- [12] Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1991.
- [13] Shu Lin, D. e Costello Jr., D., *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*. Prentice-Hall, 1983.
- [14] Massey, J.L., "Coding and Modulation in Digital Communications", *Proc. 1974 Int. Zurich Seminar on Digital Communication*, Zurich, Switzerland, pp. E2(1)-(4), Março 1974.
- [15] Lee-Fang Wei, "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space Part I: 180 Degrees", *IEEE Trans. Selected Areas in Communication*, vol. SAC-2, pp. 659-672, Setembro 1984.
- [16] Lee-Fang Wei, "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space Part II: Nonlinear Codes", *IEEE Trans. Selected Areas in Communication*, vol. SAC-2, pp. 672-686, Setembro 1984.
- [17] Divsalar, D. e Simon, M.K., "Combined Trellis Coding with a Symmetric Modulation", in *Proc. GLOBECOM'85*, pp. 21.2.1-21.2.7.
- [18] Benedetto, S. Marsan, M.A., Albertengo, G. e Giachin, E., "Combined Coding and Modulation: Theory and Applications", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 34, nº 2, pp. 223-236, Março 1988.
- [19] Lee-Fang Wei, "Trellis-Coded Modulation with Multidimensional Constellations", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-33, nº 4, pp. 483-501, Julho 1987.
- [20] Wolf, J.K. e Padovani, R., "A Generalization of Ungerboeck Codes", Second Joint Swedish - Soviet International Workshop on Information Theory, Gräna, Sweden, pp. 231-238, Abril 1985.
- [21] Baldini Fº, R. e Farrell, P.G., "Coded Modulation Based on Rings of Integers Modulo- q Part 2: Convolutional Codes", *IEE Proc. Communications*, vol. 141, nº 3, pp. 137-142, Junho 1994.

- [22] Cusak, E.L., "Error Control Codes for QAM Signalling", *Electron. Lett.*, vol. 20, pp. 62-63, Janeiro 1984.
- [23] Sayegh, S.I., "A Class of Optimum Block Codes in Signal Space", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-34, nº 10, pp. 1043-1045, Outubro 1986.
- [24] Williams, R.G.C., "Low Complexity Block Coded Modulation", Ph.D Thesis, University of Manchester, Agosto 1988.
- [25] Baldini Fº, R. e Farrell, P.G., "Coded Modulation Based on Rings of Integers Modulo- q Part 1: Block Codes", *IEE Proc. Communications*, vol. 141, nº 3, pp. 129-136, Junho 1994.
- [26] Forney Jr., G.D., Gallager, R.G., Lang, G.R., Longstaff, F.M. e Qureshi, S.U., "Efficient Modulation for Band-Limited Channels", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. SAC-2, nº 5, pp. 632-647, Setembro 1984.
- [27] Whalen, A.D., *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, 1971.
- [28] Spiegel, M.R., *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. McGraw-Hill, 1973.
- [29] Sharp, *Scientific Computer EL-5500 III Operational Manual*, Sharp Corporation.
- [30] Albrecht, P., *Análise Numérico. Um Curso Moderno*, Série Ciência de Computação, Rio de Janeiro - GB/Brasil, 1973.